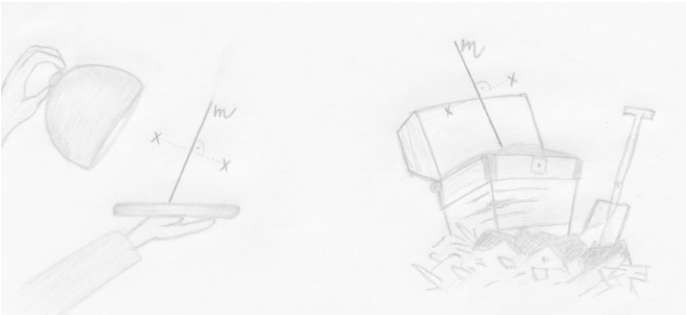


Problemorientiert zur Mittelsenkrechten

Eine empirische Vergleichsstudie zur Umsetzung im Mathematikunterricht

Anne Möller

Dissertation

zur Erlangung des Grades
Doktor der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
vorgelegt bei der Fakultät für Mathematik
der Universität Duisburg-Essen
Januar 2024

Erstgutachter: Prof. Dr. Benjamin Rott, Universität zu Köln

Zweitgutachterin: Prof. Dr. Bärbel Barzel, Universität Duisburg-Essen

Termin der mündlichen Prüfung: 03.04.2024

Geleitwort

Zu Beginn des hier beschriebenen Forschungsprojekts stand das Interesse einen Mathematikunterricht zu untersuchen, in dem problemorientiert gelernt wird. Denn insbesondere im Wandel unserer komplexen Zeit erhält die Kompetenz des Problemlösens immer größere Bedeutung. Gleichzeitig steht das Lösen von Problemen – frei nach dem Mathematik Paul Halmos – im Kern der Disziplin Mathematik. Auch in vielen Studien, u. a. aus der Lernpsychologie, wurde gezeigt, dass problemorientiert erworbene Kompetenzen und insbesondere Wissen besser vernetzt und nachhaltiger sind als traditionell erworbene. Für den Mathematikunterricht fehlt es dennoch sowohl an entsprechenden Unterrichtsmaterialien und -plänen als auch an wissenschaftlichen Studien, in denen ein problemorientierter Ansatz im realistischen Schulumfeld untersucht wird.

Dass es bislang kaum entsprechende Planungen und Studien gibt, liegt daran, dass es alles andere als trivial ist, Unterricht so zu gestalten, dass die potentiellen Vorteile des problemorientierten Lernens zur Geltung kommen. Schwierigkeiten und Bedenken, die in diesem Zusammenhang von Seiten der Lehrkräfte immer wieder geäußert werden, beziehen sich unter anderem auf den Zeitbedarf und die Einbindung schwächerer Lernender.

Anne Möller setzt genau hier an und erprobt und evaluiert eine Umsetzung des problemorientierten Unterrichts an einem konkreten Beispiel: der Einführung der Mittelsenkrechte im Geometrieunterricht. Um dieses Ziel zu erreichen, hat Anne Möller in einer Pilot- und einer Hauptstudie in insgesamt sechs Klassen darbietend und problemorientiert gestaltete Unterrichtseinheiten geplant und wissenschaftlich begleitet. Zur Evaluierung der beiden Lernumgebungen hat sie Unterrichtsbeobachtungen und Interviews mit Lehrkräften und Lernenden durchgeführt sowie flankierende Leistungstests entwickelt und ausgewertet. Neben der Erforschung der Lehrformen, wurde auf diese Weise der Lerngegenstand „Mittelsenkrechte“ umfassend erkundet und bildet die Grundlage für die eingesetzten Testitems. Neben diesen sorgfältigen Vorbereitungen ist es Anne Möller insbesondere gelungen, dem problemorientierten wie auch dem darbietenden Unterrichtsansatz sowohl theoretisch als auch in unterrichtspraktisch gerecht zu werden – eine wesentliche Voraussetzung für eine gelungene Vergleichsstudie. So können kriteriengeleitet Gemeinsamkeiten und Unterschiede der beiden Unterrichtsinterventionen ebenso erfasst werden wie die erhofften Vor- und Nachteile der beiden Lehrmethoden. Gewissenhaft werden die entwickelten Testinstrumente hinsichtlich ihrer Testgütekriterien überprüft. Die Testergebnisse werden mit der angebrachten Vorsicht unter Berücksichtigung der Stärken beider Unterrichtsansätze eingeordnet und liefern somit nötige Erkenntnisse über die Vergleichbarkeit der Lernleistungen der Schüler:innen.

Die Ergebnisse der Unterrichtsbeobachtungen zeigen das Potential problemorientierter Unterrichtsgestaltung auf, in dem die Lernenden Mathematik zum Teil selbst entdecken. Damit setzt Anne Möller mit dieser Arbeit einen wichtigen Beitrag für die konkrete Unterrichtsgestaltung, die Verknüpfung zwischen mathematischer Fachdidaktik und Unterrichtsrealität. Diese Erkenntnisse können allen Lehrer:innen Mut machen für einen problemorientierten Unterricht.

Benjamin Rott

Vorwort

Problemlösen zählt zu den zentralen Tätigkeit in der Mathematik. Im Zusammenspiel mit entdeckendem Lernen wird das Problemlösen zum Erlernen neuer Inhalte wie zum Beispiel der Mittelsenkrechten im Unterricht eingesetzt. Dieser problemorientierte Zugang ermöglicht es Lernenden eigenständig neue Lerninhalte zu entdecken. In der Unterrichtspraxis hingegen wird ein darbietender Unterricht bevorzugt eingesetzt, der eine Vorabauswahl der Lerninhalte und die Strukturierung einzelner Lernschritte ermöglicht.

Aus Studien unterschiedlicher Fachbereiche wird der Frage nachgegangen, welchen Effekt ein problemorientierter Unterricht bei Lernenden erzielen kann. Die Interpretationen und Umsetzungen des problemorientierten Unterrichts sind vielfältig und in Folge dessen die Studienergebnisse uneindeutig.

Es bleibt die Frage, wie sich ein problemorientierter Unterricht eignet, um Schülerinnen und Schülern einen gehaltvollen Umgang mit den neuen Lerninhalten zu ermöglichen. Lehrpersonen können aus ihrer Unterrichtspraxis nur vereinzelte Vergleiche ziehen und Eindrücke wiedergeben. So bedarf es einer systematischen Vergleichsstudie in einem realistischen Unterrichtsumfeld, in der ein problemorientierter Zugang einem darbietenden gegenübergestellt wird, um Lernleistungen und Unterrichtsgeschehen zu beobachtet und zu analysieren. Als Herausforderung gilt, die jeweiligen Vorteile der Unterrichtsmethoden auszunutzen, ohne zu viele Parameter hinsichtlich der Vergleichbarkeit der beiden Ansätze zu variieren. Dieser Vergleich ist gleichermaßen für Forschung und Unterrichtspraxis gewinnbringend. Ich bin sehr froh darüber, dass ich im Rahmen meiner Abordnungszeit an der Universität Duisburg-Essen an Fragestellungen genau zu diesem Themenfeld arbeiten konnte.

Mein ganz besonderer Dank geht an Prof. Dr. Benjamin Rott für seine engagierte und kontinuierliche Unterstützung und deine Betreuung und Begleitung meiner Arbeit. Danke für deinen inhaltsbezogenen Blick, deine Offenheit für verschiedene Sichtweisen und nicht ermüdende Diskussionsbereitschaft. In besonderer Erinnerungen bleiben mir unsere AG-Treffen, in denen wir mit freudiger Begeisterung uns über Lösungen zu verschiedensten Problemlöseaufgaben ausgetauscht haben.

Ebenso herzlich möchte ich mich bei Prof. Dr. Bärbel Barzel für deine Unterstützung meiner Arbeit bedanken. Durch deine örtliche Nähe und deine überspringende Begeisterung (auch für ein Entdecken im Mathematikunterricht) habe ich Motivation, Durchhaltevermögen und praxiserfahrene Anregungen gefunden.

Herrn Prof. Dr. Heinloth danke ich für die Übernahme des Vorsitz und Prof. Dr. Florian Schacht für die Schriftführung meiner Verteidigung. Vielen Dank!

Für die enge Zusammenarbeit möchte ich mich bei allen Mitgliedern der Arbeitsgruppe von Bärbel Barzel und der gesamten Arbeitsgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Duisburg-Essen und der Arbeitsgruppe von Benjamin Rott an der Universität zu Köln bedanken. Die Diskussionen mit euch haben mich inspiriert, zum Nachdenken angeregt und mir eben dadurch große Freude bereitet.

Eine besondere Unterstützung bei den Zweitbegutachtungsprozessen der schriftlichen Testauswertungen habe ich von Julia Joklitschke und Anna Schreck, sowie der Masterstudentin Beyzanur Özbek erhalten. Vielen Dank für euren kritischen Blick, eure Ausdauer und Konsequenz. Für den zahlreichen Austausch beim Proben von Vorträgen, zu Überlegungen der Studienplanung, über die Bedeutung fachdidaktischer Theorien, beim finalen Schreibprozess und die abwechslungsreiche Gestaltung von Arbeitspausen geht mein Dank an: Daniel Thurm, Maximilian Pohl und Joyce Peters-Dasdemir. Wie sehr ein gemeinsames Büro verbindet, habe ich zweimal erleben dürfen. Danke für den regelmäßigen Austausch und euer Zuhören an Oliver Wagener und Paul Tyrichter.

Für die Möglichkeit und Unterstützung der Erhebung von empirischen Daten im schulischen Umfeld geht mein Dank an die Schulleitung. Des Weiteren danke ich allen Beteiligten der Unterrichtsstudien, dazu zählen die Schülerinnen und Schüler so wie die Lehrpersonen, die durch ihre Bereitschaft, ihre Motivation und dem Spaß am Mathematikbetreiben gezeigt haben wie die Schwierigkeiten einer unterrichtspraktischen Forschung zu sinnstiftenden Erkenntnissen führen können. Ohne euch wäre diese Arbeit gar nicht möglich gewesen!

Abschließend danke ich von Herzen meiner kleinen und großen Familie für das Auffangen zwischendurch, mal das Zerstreuen und mal das Ermutigen zu meiner Arbeit. Mein lieber Jan, ich danke dir dafür, dass du mit viel Verständnis immer wieder Zeiträume geschaffen hast, in denen ich diese Arbeit fertigstellen konnte. Mein Dank geht an meinen Vater, du hast mich stets ermutigt, angertrieben und kritisiert in genau der richtigen Dosis. Ebenso danke ich meiner Mutter, für ihren pragmatischen Blick aus eigener Unterrichtserfahrung und die vielen Diskussionen mit ihr über guten Unterricht. Meiner Schwester Eva danke ich dafür, dass du mich ermutigt und beim Korrekturlesen geholfen hast.

Nicht zuletzt bin ich allen dankbar für die Erfahrungen, die ich im Laufe der Anfertigung meiner Arbeit machen konnte. Zum Abschluss erwähne ich Heinrich Winter, der das mathematische Problemlösen als Sammeln von Erfahrungen zum eigenen Denken bezeichnete – ganz in diesem Sinne freue ich mich über meinen Weg und das erreichte Ziel.

Anne Möller

Kurzzusammenfassung

Im Unterricht kann Problemlösen bei der Entdeckung neuer Inhalkte, wie zum Beispiel der Mittelsenkrechten, in Form eines problemorientierten Lernens gefordert werden. Mathematiklehrpersonen bevorzugen häufig darbietende Unterrichtsmethoden, da sie befürchten ein problemorientierter Unterricht überfordere die Lernenden, führe zu weniger Wissen und benötige mehr Unterrichtszeit. Es stellt sich die Frage, inwiefern sich ein problemorientierter Unterricht eignet, um Schülerinnen und Schülern (langfristig) einen gehaltvollen Umgang mit den neuen Lerninhalten zu ermöglichen?

Diese Fragestellung kann als Kernanliegen der vorliegenden Promotionsarbeit angesehen werden. Es wird eine quasiexperimentelle Vergleichsstudie zur Lernwirksamkeit entwickelt, in der die unabhängige Variable zweier Unterrichtsgestaltungen, problemorientiert und darbietend, am mathematischen Inhalt der Mittelsenkrechten in vier siebten Gymnasialklassen untersucht wird. Das Studiendesign ist geprägt von dem Anliegen einer möglichst realistischen Unterrichtssituation, bei der Klassenzusammensetzung, Lehrperson und örtliche Strukturen unverändert bleiben und gleichzeitiger Vergleichbarkeit durch eine gleiche Anzahl an Unterrichtsstunden, einen gleichen Aufgabeneinsatz und gleiche Unterrichtsinhalte. Zwei der Klassen erhalten einen darbietenden Unterricht zur Mittelsenkrechen und zwei einen problemorientierten. Vor der Durchführung der Unterrichtsinterventionen ist das geometrische Vorwissen aller 87 Lernenden und ihre Problemlösefähigkeit erhoben worden (Test 1). Direkt nach der Intervention (Test 2) und 16 Wochen später (Test 3) werden die Lernleistungen der Schülerinnen und Schüler erfasst. Alle Testhefte und Bewertungshorizonte sind in mehreren Phasen entwickelt erprobt und vorab pilotiert worden. Für die Bewertungsprozesse der Lernleistungen werden Zweitbegutachtungen vorgenommen. Anschließend werden die Ergebnisse der Klassen auf signifikante Unterschiede mithilfe von Rangsummentests bestimmt. Für die Planung der Unterrichtsinterventionen werden theoretische Erörterungen zum entdek-kenlassenden und darbietenden Lernen, wie auch zum Problemlösen vorgenommen. Eine stoffdidaktische Analyse der Mittelsenkrechten mündet in einer

Übersichtstabelle zu den Wissensbereichen der Mittelsenkrechten, die für die spätere Analyse herangezogen wird.

Die Ergebnisse von Test 1 zeigen, dass eine Vergleichbarkeit hinsichtlich des geometrischen Vorwissens für alle vier Klassen vorliegt. Die problemorientiert unterrichteten Klassen weisen bessere Leistungen in der Problemlöseaufgabe auf als die darbietend unterrichteten Klassen. Die Zuordnung zu den beiden Interventionen führt somit zu einer positiven Selektion.

Die Umsetzung der Unterrichtsinterventionen konnte in allen vier Klassen nach Planung und innerhalb der angesetzten sechs 45-Minuten-Stunden erfolgen. Damit kann die Umsetzung bezüglich Unterrichtszeit, Unterrichtsinhalte und -umfang als angemessen für siebte Klassen bewertet werden.

Die Ergebnisse der beiden Leistungstests zeigen, dass die vier Klassen generell vergleichbare Lernleistungen, sowohl im direkten Anschluss an die Unterrichtseinheit als auch langfristig, aufweisen. Die Analyse einzelner Testaufgaben zielt auf die Vergleichbarkeit der vier Klassen bezüglich unterschiedlicher Wissensbereiche zur Mittelsenkrechten ab.

Es kann folgendes Fazit formuliert werden: Die Durchführung einer problemorientierten Unterrichtseinheit zur Mittelsenkrechte kann in derselben Unterrichtszeit zu vergleichbaren Leistungen führen wie durch einen darbietenden Unterricht.

Summary

Problem solving can be named as one of the central activities in mathematics. In lessons, it can be used in conjunction with discovery learning to learn new terms, for example the perpendicular bisector. Nevertheless, mathematics teachers generally prefer presentational teaching methods because they fear problem based teaching overwhelms the learners, leads to less knowledge and requires more teaching time. The question therefore arises: to what extent is problem based teaching suitable for enabling students to deal meaningfully with the new learning content (in the long term)?

This question can be through this thesis. A quasi-experimental comparative study on learning effectiveness is being developed in which the independent variable of two teaching designs is examined on the mathematical content of the perpendicular bisector in four seventh high school classes. The study design is characterized by the desire for a setting that is as realistic as possible, in which class composition, teacher and local structures remain unchanged and at the same time comparability through the same length of the teaching unit, the same use of tasks and the same teaching content. Two classes received an problem-solving task to discover the perpendicular bisector and two classes received an presenting instruction. The prior geometric knowledge of all 87 learners and their problem-solving skills (test 1) were assessed weeks before the intervention started. The students' learning performance was recorded immediately after the intervention (test 2) and 16 weeks later (test 3). All tests and evaluation tools are developed, tested and piloted in several phases. The results of all classes have been interrated and are determined for significant differences using rank sum tests. Inaddition the teachings in all four classes are observed and documented.

The analyses of test 1 show, that the all four classes are comparable in the he previous geometric knowledge. The classes taught with a problem based approach show a better performance in the problem-solving task in test 1 than the classes taught by presenting instruction. The assignment to the two interventions therefore led to a positive selection.

The teaching interventions were implemented in all four classes as planned and within the scheduled six 45-minute lessons. This shows that the planned interventions are appropriate for seventh graders in terms of teaching time and lesson content.

The analyzes of test 2 and 4 revealed that all four classes generally showed comparable learning performance both immediately after the instruction and in long term. All four classes show verry similar performance at both testings in terms of their knowledge, application and transfer of the perpendicular bisector.

Carrying out a problem based teaching unit on the perpendicular bisector could therefore lead to comparable achievements in the same teaching time as through performance teaching. The fear that problem based teaching would take up more time and lead to poor knowledge was not confirmed.

Inhalt

1 Einleitung

„Probleme sind die Seele der Mathematik.“ (Grieser 2017, S. 1)

Dieses Zitat bringt zum Ausdruck, welche Bedeutung in der Mathematik dem Lösen von Problemen zu kommt. Dabei wird ein mathematischer Problemlöseprozess viel emotionaler und fesselnder erlebt, als es zunächst erscheinen mag. „Problemlösen macht Spaß und ist kreativ. […] Problemlösen kann man lernen. […] Problemlösen macht neugierig auf mathematische Theorien.“ (Grieser, 2017, S. 2). Ähnlich wie bei Grieser kann man auch bei vielen Mathematikdidaktikerinnen und Mathematikdidaktikern Euphorie erkennen, wenn es sich um das Lösen von Problemen oder eine unterrichtliche Umsetzung des Problemlösens handelt. Die zentrale Rolle des Problemlösens für die Mathematik erfasst Vollrath wie folgt: „Mathematik entsteht beim Lösen von Problemen, die sich damit als Quelle mathematischer Erkenntnis erweisen.“ (Vollrath & Roth 2012, S. 60).

In den Kernlehrplänen wird dem Problemlösen als prozessbezogenen Kompetenz eine bedeutsame Rolle im Mathematikunterricht zugeschrieben. In der Unterrichtswirklichkeit scheint dies bislang noch nicht angekommen zu sein. Ein darbietender Unterricht wird weiterhin von vielen Lehrkräften verstärkt eingesetzt (vgl. Klauer & Leutner 2012, S. 96). „Es kann folglich davon ausgegangen werden, dass der derzeitige Implementierungsstand des problemorientierten Lernens in deutschen Schulen und Universitäten die Anforderungen des neuen Bildungsplans deutlich verfehlt. Es bedarf deshalb neuen Anregungen, die weitere Umsetzungsmöglichkeiten und Erfolgsbedingungen des problemorientierten Lernens und Unterrichtens beisteuern können.“ (Hähnle 2021, S. 86)

Wahrscheinlich wünscht sich jede Lehrperson, Schülerinnen und Schüler in die Situation zu versetzen, eben diese Freude am mathematischen Problemlösen erfahren zu können und somit auch durch innermathematische Aufgaben Motivation zum Lernen und Mathematik betreiben erzeugen zu können.

Jedoch haben Lehrerinnen und Lehrer die Befürchtungen, dass Sie Ihre Schülerinnen und Schüler durch einen problemorientierten Unterricht überfordern und gleichzeitig mehr Unterrichtszeit für weniger Verstehen und weniger Inhalte veranschlagen. Die Folge bestünde zum einen in Verlusten von Faktenwissen, welches ohnehin viel zu gering sei, und zum anderen in der Unzufriedenheit der Lernenden. Die Schülerinnen und Schüler selbst fordern klare Regeln und Vorgaben, wie sie es aus einem darbietenden Unterricht kennen. Offene Aufgabenstellungen sorgen bei ihnen für Ungewissheit und führen somit zu Ablehnung (vgl. Möller & Rott 2018, S. 222f.). Was in dieser Perspektive nicht zum Ausdruck kommt, ist die Feststellung, dass Problemlösen sowohl bei Lernenden als auch bei Lehrpersonen oben beschriebene positiven Erfahrungen auslösen kann. Zusätzlich konnten verschiedene Studien zeigen, dass ein problemorientierter Unterricht zu mehr Erklärkompetenz und besserem Erinnern führen kann (vgl. Capon & Kuhn 2004; Dochy et al. 2003; Patel et al. 1993). Haben Lehrpersonen selbst wenig Erfahrungen im Unterrichten durch Problemlösen, haben sie auch diese Vorteile nie selbst erfahren können. In einer Interviewstudie wurde deutlich, dass Lehrpersonen, die selbst kaum Problemlösen im Unterrichte einsetzen, Nachteile dieser Lehrmethode kennen, jedoch nur wenige Vorteile nennen können (vgl. Möller & Rott 2018, S. 225f.).

Die Ergebnisse der PISA-Studie haben immer wieder bestätigt, dass die Lernenden in Singapore, Korea, Japan und China besonders gute Problemlöserinnen und Problemlöser sind. Die

Rate der besonders schwachen Problemlöserinnen bzw. Problemlöser liegt in diesen asiatischen Ländern unter 10 % und der besonders starken Problemlöser über 15 %, in Japan, Korea und Singapore sogar über 20 %. In Deutschland hingegen zählen über 19 % der Teilnehmerinnen und Teilnehmer zu den schwachen und knapp 13 % zu den starken Problemlösern (vgl. Kipmann 2020, S. 43). Die aktuell diskutierten Ergebnisse der PISA-Studie 2022 mit den Schwerpunkten Mathematik, Naturwissenschaften und Lesen zeigen einen negativ Trend auf. Die mittlere mathematische Kompetenz der Schülerinnen und Schüler in Deutschland ist von 2018 auf 2022 von 500 auf 475 Punkte gefallen. Dieser Trend ist in fast allen Ländern zu erkennen und fällt mit coronabedingten digitalen Unterrichtsphasen zusammen. Japan bietet hier eine Ausnahme mit einer Zunahme der mittleren mathematischen Kompetenz (vgl. Lewalter et al. 2023, S.6f.). Unterschiede können auch auf der Unterrichtsebene ausgemacht werden. In den oben genannten asiatischen Ländern werden mathematische Probleme verstärkt im Unterricht eingesetzt und ihre Lösungen diskutiert. Dabei werden häufiger mathematisch komplexe Inhalte eingesetzt. Die Umsetzung in einer teilweise stark gelenkten Unterrichtsform, bei der die Lehrperson in Unterrichtsgesprächen versucht die Lernenden zu aktivieren, wird sowohl in Japan als auch in Deutschland vermehrt angewendet (vgl. Klieme et al. 2001)

Dieses Unterrichtskonzept, bei dem die Lehrperson durch fragend-entwickelnde Unterrichtsgespräche neue Erkenntnisse erarbeitet oder mit einem strukturierten Vortrag Vorwissen und Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler aufgreift und neue Inhalte visualisiert und darstellt, wird als darbietender Unterricht bezeichnet. Eine besonders klassische Form ist die Vorlesung, wie sie noch heute an Hochschulen üblich ist. Eine Alternative dazu bietet eine eigenständige Entdeckung der Schülerinnen und Schüler im Sinne des entdeckenden Lernens. Ein neuer Lerninhalt kann beispielsweise an einer Problemstellung eigenständig von den Schülerinnen und Schülern erarbeitet und entwickelt werden. Zwischen einer reinen Darbietung und einer freien Entdeckung liegen diverse Ausgestaltungsmöglichkeiten und Mischformen von Unterricht (vgl. de Jong et al. 2023; Dietrich & Evans 2022). Sie unterscheiden sich in vielerlei Hinsicht voneinander, wie in dem Handlungsanforderungen an die Lehrperson, in der Eigenständigkeit der Lernenden oder auch der Aufgabenstellung und möglichen Hilfestellungen, um einige der Unterscheidungsaspekte zu nennen. Ein Ziel dieser Arbeit liegt darin, die bisher genannten Konzepte miteinander in Verbindung zu setzen und voneinander abzugrenzen.

Und gleichzeitig wird durch eine Reihe aktueller Veröffentlichungen deutlich (vgl. de Jong et al. 2023, Kollosche 2017, Zhang et al. 2022), welcher Diskussions- und Handlungsbedarf zum entdeckenden Lernen und zu benachbarten Konzepten gesehen wird. In der Debatte finden sich Vertreter beider Extreme in einem teilweise emotionalen, in jedem Falle anregenden Austausch über die bevorzugte Lehrmethode. Dabei ist man sich weder über die Interpretationen einzelner Studienergebnisse einig, noch über die zu ziehenden Konsequenzen für die Unterrichtspraxis.

Eine Unterricht, in dem beide Unterrichtsformen oder Mischformen eingesetzt werden, kann durch Studien als lernwirksam bestätigt werden (z. B. de Jong et al. 2023, Dietrich & Evans 2022). Ganz im Sinne der bereits in den 80er Jahren formulierten Aussage:

> „*Die* beste Lehrmethode, *den* effektiven Unterricht gibt es nicht! Wohl aber sind bestimmte Lehrmethoden für die Erreichung bestimmter Unterrichtsziele und Lernqualitäten vorteilhafter als andere.“ (Terhart 1989, S. 85, Hervorh. im Original).

Und dennoch beziehen sich nur wenige Studien auf die konkrete Umsetzung im Unterricht. Das gilt sowohl für den Bereich des darbietenden Unterrichts (vgl. Klauer & Leutner 2012, S. 157), als auch für den Bereich der Problemorientierung (vgl. Hartinger 2001, S. 134). Die wenigen, konkret auf den Unterricht bezogenen Forschungsergebnisse lassen keinen eindeutige Entscheidung für oder gegen eine der Unterrichtsformen zu. Weitere empirische Vergleichsstudien werden benötigt (vgl. Klauer & Leutner 2012, S.97ff.). Insbesondere fehlt es an Studien im Schulkontext zum Erlernen von mathematischen Begriffen.

Zu den Lernzielen im Mathematikunterricht wiederum gehört das Erlernen von Problemlösefähigkeiten als Kerntätigkeit der Mathematik. Als sehr anschauliches Teilgebiet der Mathematik bietet die Geometrie vielfältige Möglichkeiten sich dem Problemlösen zu widmen (z. B. Hattermann 2015, S. 195; Holland 2007, S. 22; Weigand 2014a, S. 23Wittmann 2014, S. 81f.)

Für den geometrischen Inhalt der Mittelsenkrechten können verschiedene Wissensfacetten und -elemente herausgearbeitet werden, die ein umfangreiches Begriffsverständnis ermöglichen. Diesen Facetten liegt die Einteilung des Wissens in die Bereiche konzeptuelles, prozedurales und metakognitives Wissen zugrunde (vgl. Prediger et al. 2011; Barzel et al. 2012). Diese Stränge werden wie folgt zusammengeführt:

Inwiefern eignet sich eine der beiden Unterrichtsformen, um Schülerinnen und Schülern (langfristig) den Begriffserwerb der Mittelsenkrechten mit seinen verschiedenen Wissenselementen zu ermöglichen?

Diese Fragestellung kann als Kernanliegen der vorliegenden Promotionsarbeit angesehen werden. Es wird eine quasiexperimentelle Vergleichsstudie der Lernwirksamkeit entwickelt, in der die unabhängige Variable zweier Unterrichtsgestaltungen am mathematischen Inhalt der Mittelsenkrechten in vier siebten Gymnasialklassen untersucht wird.

Daraus leitet sich die Struktur der vorliegenden Arbeit ab. Zu Beginn wird in Kapitel 2 eine theoretische Erörterung über Probleme und Problemlösen im Mathematikunterricht angestellt. Ein Problem wird durch das Vorhandensein einer Barriere bestimmt. Um die Eigenschaften einer Barriere näher beschreiben zu können, werden Analysen zu Wortbedeutung (Abschnitt 2.1), Vorkommen in der Mathematik (Abschnitt 2.2) und zu Kategorisierungen von Problemen (Abschnitt 2.3.1) vorgenommen. Zusätzlich werden Abgrenzungen zu vergleichbaren Konzepten im Mathematikunterricht (Abschnitt 2.3.4) und Perspektiven für den Unterrichtseinsatz (Abschnitt 2.3.5) erörtert, um mit dem auf diese Weise präzisierten Verständnis von Problemlösen die Bedeutung dieser Tätigkeit für die Geometrie (Abschnitt 2.3.6) darzulegen. Dieses dient auch dazu die Aufgabenauswahl und Planung des in der Studie eingesetzten problemorientierten Unterrichts vorzubereiten (Abschnitt 2.4).

In Kapitel 3 werden darbietende und entdeckende Unterrichtsgestaltung einander gegenübergestellt. Durch die Kontrastierung werden Unterrichtsfaktoren zur Unterscheidung und Definition herausgestellt (Abschnitt 3.4.3). Dies geschieht sowohl durch die Analyse des historischen Diskurses (Abschnitt 3.3.2) als auch durch die Betrachtung kognitionspsychologischer Merkmale (Abschnitte 3.4). Als Ausgang einer Entdeckung können im Mathematikunterricht mathematische Probleme dienen. Die Analysen zum Entdecken und Problemlösen im Mathematikunterricht münden in jeweils einem Unterrichtskonzept, das als problemorientierter Unterricht bezeichnet wird. Das vierte Kapitel widmet sich der Definition des problemorientierten Unterrichts, um ausgehend davon Studien auszuwählen, die die aktuellen Erkenntnisse zur Problemorientierung im

Unterricht verdeutlichen. Die Überzeugungen der Lehrpersonen werden dabei beachtet.

Der mathematische Lerninhalt, die Mittelsenkrechte, wird in Kapitel 5 stoffdidaktisch analysiert (Abschnitt 5.1). Es werden verschiedene Zugänge und Umsetzungen in Schulbüchern verglichen (Abschnitt 5.2) und dabei die wesentlichen Wissenselemente und -konzepte herausgearbeitet. Als Grundlage für die Unterrichtsplanung entsteht eine Tabelle der Wissenselemente und -konzepte (Abschnitt 5.3) und konkreten Gestaltungsprinzipien für den Unterricht (Abschnitt 5.5).

Die genannte Forschungsfrage wird in Kapitel 6 weiter differenziert in Aspekt I) Vergleichbarkeitsstudie des problemorientierten Unterrichts zu einem darbietenden Ansatz (Abschnitt 6.1) und Aspekt II) Detailanalyse der Lernleistungen anhand der Wissenselemente (Abschnitt 6.2). Daraus ergeben sich die Anforderungen an das Studiendesign (Abschnitt 7.1). Nachdem zu Beginn des Kapitel 7 ein Überblick über Planung und Durchführung der Studie gegeben wird (Abschnitt 7.1), werden anschließend Stichprobe (Abschnitt 7.3), Interventionszuweisung (Abschnitt 7.4) und Festlegung weiterer Forschungsparameter (Abschnitt 7.5) bestimmt.

In Kapitel 8 werden die beiden Interventionen zunächst in einem Überblick dargestellt (Abschnitt 8.2). Für beide Interventionen wird anschließend der geplante Unterrichtseinstieg beschrieben und in Bezug zu den verwendeten Wissensbereichen der Mittelsenkrechten gesetzt (Abschnitt 8.3). Die bisher aufgeführten Gestaltungsprinzipien fließen an dieser Stelle in die konkrete Unterrichtsplanungen (vgl. Abschnitte 2.4, 3.5 und 5.5) ein, die abschließend in tabellarischen Verlaufsplänen dargestellt werden (Abschnitt 8.3.3 bzw.8.3.6).

In Kapitel 9 werden die Forschungsinstrumente zunächst allgemein und dann konkreter für den Einsatz in der Studie beschrieben. Den Kern der Untersuchung machen die schriftlichen Tests aus (Abschnitt 9.1). Eine Einordnung der verwendeten Aufgaben anhand des Kategoriensystems nach Maier et al. (2020) dient zum einen der Sicherstellung der Validität des Tests (Abschnitt 9.1.2), zum anderen bilden diese Einteilungen die Grundlage für die Testauswertung (Abschnitt 9.1.5) mithilfe von Bewertungshorizonten. Die Verwendung der Bewertungshorizonte (Abschnitt 9.1.4) führt zur Auswertung der Tests. Ebenso werden das Vorgehen und die Dokumentationsweise der Unterrichtsbeobachtung (Abschnitt 9.1.6) ergründet. Die Analyse der so gewonnenen Ergebnisse erfolgt in Kapitel 10 zunächst für den Forschungsaspekt I). Es werden die Ergebnisse von Test 1 (Abschnitt 10.1), die Unterrichtsbeobachtung (Abschnitt 10.3), und die Lernleistungen aus Test 2 und 3 (Abschnitt 10.4) ausgewertet. Die Diskussion der Ergebnisse werden in der gleichen Reihenfolge direkt in Kapitel 13 angeschlossen. Mit den sich ergebenden weiterführenden Fragestellungen findet eine direkte Überleitung zum Forschungsaspekt II) statt, für den die Ergebnisse in Kapitel 14 dargestellt werden. Zunächst werden die Ergebnisse aus Test 1 (Abschnitt 12.1) und die Unterrichtsbeobachtungen (Abschnitt 12.2) detailliert dargestellt. Es folgen vergleichende Betrachtungen der erbrachten Lernleistungen in Test 2 und 3 (Abschnitt 12.3 und 12.4), um so Aufschluss darüber geben zu können, inwiefern vergleichbare Wissensbereiche in den vier Klassen erlernt wurden. Diese Ergebnisse werden in Kapitel 13 diskutiert. Im letzten Teil werden sowohl Reflexionen und Grenzen der Studie wie auch Konsequenzen für den Unterricht abgeleitet (Kapitel 14).

2 Probleme und Problemlösen

In diesem Kapitel werden die Begriffe *Problem* und der zugehörige Bearbeitungsprozess, *das Problemlösen*, zunächst hinsichtlich der Wortbedeutung erörtert (vgl. Abschnitt 2.1) und anschließend unter der Perspektive der Fachwissenschaften definiert. Die Bedeutung des Problemlösens für die Mathematik (vgl. Abschnitt 2.2), die Lernpsychologie und die Mathematikdidaktik werden zunächst herausgestellt (vgl. Abschnitt 2.3), bevor der Fokus auf den Problemlöseprozess selbst gelegt wird (vgl. Abschnitte 2.3.1 – 2.3.3). Mit diesen Erkenntnissen wird mit der Aufgabenwahl (vgl. Abschnitt 2.3.4) und der Unterrichtsgestaltung (vgl. Abschnitte 2.3.5 und 2.3.6) das Anregen und Erlernen des Problemlösens näher betrachtet. Konkretere Planungshinweise werden mit Ausrichtung auf die folgende empirische Studie bereits hier auf die Geometrie beschränkt Abschließend werden grundlegende Gestaltungsprinzipien für den Unterricht zusammenfassend festgehalten. Dies soll ganz nach Deweys Sinne erfolgen: „Ein Problem ist halb gelöst, wenn es klar formuliert ist." John Dewey (z. B. Fritz et al. 2010, S. 131).

2.1 Das Problem und seine Lösung – Wortbedeutungen und sprachliche Wendungen

Seit jeher beschäftigen sich Menschen (notgedrungen) mit Problemen. Dies erscheint nachvollziehbar, so hat wahrscheinlich jeder schon einmal selbst erlebt, dass die Tage einfacher und die Nächte ruhiger sind, wenn man ein anliegendes Problem lösen konnte. Es ist daher nicht verwunderlich, dass die Beschäftigung und der Umgang mit Problemen in verschiedenen Zitaten Anklang findet. Ein Blick auf einzelne Zitat wirft gleich zu Beginn dieses Kapitel den vielseitigen Umgang mit Problemen auf. Neben John Dewey haben weitere bekannte Charaktere sich im Laufe der Zeit rund um das Thema Problemlösen geäußert:

“Nur wer sein Ziel kennt, findet den Weg.” – Laotse (vermutlich im 6. Jahrhundert v. Chr.), chinesischer Philosoph.

„Die Menschen stolpern nicht über Berge, sondern über Maulwurfshügel.“ – Konfuzius (ca. 551 v. Chr. bis 479 v. Chr.), chinesischer Philosoph.

„Die meisten Probleme entstehen bei ihrer Lösung.“ – Leonardo da Vinci (1452 – 1519), italienischer Maler, Bildhauer, Architekt und Ingenieur.

„Ein Problem ist halb gelöst, wenn es klar formuliert ist.“ – John Dewey (1859 – 1952), US-amerikanischer Philosoph und Pädagoge.

„Man löst keine Probleme, in dem man sie auf Eis legt.“ – Winston Churchill (1874 – 1965), britischer Staatsmann und Autor.

„Probleme kann man niemals mit derselben Denkweise lösen, durch die sie entstanden sind“ – Albert Einstein (1879 – 1955), schweizerisch-US-amerikanischer Physiker.

„Talente finden Lösungen, Genies entdecken Probleme.“ – Hans Krailsheimer (1888 – 1958), deutscher Jurist und Schriftsteller.

„Die Lösung ist immer einfach, man muss sie nur finden.“ – Alexander Solschenizyn (1918 – 2008), russischer Schriftsteller.

„Null Problemo“ – ALF, „Außerirdische Lebensform“, US-amerikanischer Filmfigur von 1986 – 1990.

Eine tiefergehende, erste Annäherung an den Begriff *Problem* kann über die Wortbedeutung durch einen Blick in den Duden geschehen. Anschließend werden aus der Perspektive der kognitiven Psychologie, der Mathematik und der Mathematikdidaktik die Bedeutung des Problembegriffs und der Tätigkeit des Problemlösens dargelegt.

Ausgehend von der Wortbedeutung und der Verwendung bestimmter Verben können Bilder bzw. Situationen zum Problemlösen erzeugt werden, die an einigen Stellen erstaunlich gut zum mathematischen Problemlösen passen. Allein deshalb biete sich eine Analyse an dieser Stelle an.

Es fällt auf, dass sich die Definition für das *Problem* mit den verschiedenen Ausgaben des Dudens – Duden online und Duden Band 5 - in feinen Details unterscheiden:

“1. schwierige [ungelöste] Aufgabe, schwer zu beantwortende Frage, komplizierte Fragestellung; 2. Schwierigkeit.” (DUDEN online – Das Fremdwörterbuch. [Zugriff am 20.04.2023, 12:11 Uhr])

„Schwierige zu lösende Aufgabe; Fragestellung; unentschiedene Frage; Schwierigkeit. […])“ (Dudenredaktion, o. D.)

In der analogen Dudenversion impliziert die Worterklärung, dass es eine Lösung der Aufgabe bzw. des Problems bereits gibt, wohin gegen die online-Ausgabe des Duden eine Definition verwendet, in der die Aufgabe bzw. das Problem als ungelöste bezeichnet wird. Es gibt gelöste und ungelöste Probleme. Wird die Existenz einer Lösung (wie in der obigen der beiden Erklärungen) vorausgesetzt, so werden grundlegende Fragestellungen/Problemstellung nach der Existenz mithilfe der Definition nicht erfasst. Es gibt verschiedene Probleme: Es gibt lösbare und unlösbare Probleme.

Kann die Aufgabe als bereits gelöst angesehen werden, wird die Bedeutung des Individuums oder des Vorwissens deutlich. Für Personen, die die Lösung der Aufgabe kennen, stellt diese kein Problem mehr dar. Personen, die diese Lösung nicht kennen oder widergeben können, bietet sie eine Schwierigkeit und wird somit zum Problem. Inwiefern eine Aufgabe oder Situation ein Problem darstellt, hängt somit unmittelbar vom Individuum und dem Wissen bzw. den verfügbaren Hilfen ab.

In beiden Worterklärungen wird der Wunsch nach einer Lösung durch den Bezug zur Fragestellung, die eine Antwort einfordert, deutlich. Möchte man „ein Problem lösen“, so kann das Problem gewälzt, behoben, beseitigt, geklärt, ausgeräumt oder überwunden werden, wobei die Verben nicht in jeder Situation austauschbar sind und sich durch die Wahl des Verbs bereits bestimmte Eigenschaften des Problems erschließen lassen. Problem ist nicht gleich Problem. Probleme unterscheiden sich. Unterschiedliche Probleme erfordern unterschiedliche Umgangsweisen oder Herangehensweisen. Das zeigen auch weitere Wortbilder:

In der englischen Sprache wird der Ausdruck *to fix a problem* verwendet. Das Verb *fixieren* lässt auf folgende Vorgänge schließen: festhalten, festlegen, befestigen. Es rückt nicht unbedingt die Lösung des Problems, sondern den Prozess der Betrachtung und Erfassung der Problemsituation in den Vordergrund. Wenn ein Problem fixiert wird, wird es auf einem Untersuchungstisch festgebunden, unbeweglich gemacht, damit wird eine detaillierte und genaue Untersuchung möglich. Wörtlich kann *to fix* als *reparieren* übersetzt werden. Dadurch wird der Prozess der Problembearbeitung angeregt. Das Problem wird somit als Störfaktor oder Fehler oder Hürde erkannt, den es zu reparieren gilt. In beiden Fällen wird der Prozess der Problemlösung, also die Problemuntersuchung, fokussiert. Kann dies auf das Lösen mathematischer Probleme übertragen werden? Das Problem wird zunächst detailliert „auseinander genommen“, in Einzelteile – vielleicht sogar Teilprobleme gegliedert – und dann bearbeitet. Welche Unterteilungen bieten sich an? Was muss zunächst behoben werden? Das sind zentrale Fragestellungen eines Problemlöseprozesses, die auf die Wahl der Lösungsstrategien und Heurismen oder auch auf die Art der Hürde abzielen.

Ein anderer häufig verwendeter Ausdruck in der englischen Sprache lautet *to solve a problem*. Dies wird in der Regel mit *ein Problem lösen* übersetzt. Dies erzeugt ein anderes Bild. Ein Problem wird ähnlich wie ein Knoten gelöst und so werden die einzelnen Fäden wieder auseinandergebracht, sortiert und entfesselt. In diesem Bild kann eine erste Antwort auf die Frage der Lösbarkeit von Problemen gesehen werden: Fesselnde Probleme werden gelöst. Die Unterscheidung in lösbare und unlösbare Probleme könnte durch die Unterscheidung in fesselnde oder nicht-fesselnde Probleme erweitert werden, sobald ein fesselndes Problem als ein spannendes, anregendes Problem interpretiert wird. Damit wird der Zugang zum Problem und die Bindung oder das Interesse an dem Problem fokussiert. Dies kann auch als Frage nach den Anknüpfungsmöglichkeiten und der Motivation beispielsweise bei der Unterrichtsplanung eine Rolle spielen.

Das Lösen eines Problems kann auch als Auflösen aufgefasst werden. Die Brausetablette löst sich im Wasserglas auf und ist als diese nicht wiederzufinden. Kann dieses Bild eine Analogie zu Problemlöseprozessen bieten? Durch die Aneignung von Wissen von Lösungsstrategien werden einstige Probleme zu Routineabläufen und sind als Schwierigkeiten nicht wiederzufinden. So könnten viele Lernprozesse beschrieben werden.

Eventuell könnte der Ausdrucke *to solve a problem* auch in Anlehnung an *to salve a problem* entstanden sein und übersetzt werden als „ein Problem salben, pflegen“? Das so entstehende Bild ist geprägt durch (zeitliche) Zuwendung und Einfühlungsvermögen. Passt dieses Bild auf einige mathematische Problemlöseprozesse?

Ein weiteres Bild erhält man durch die *nordische* Behandlung von Problemen „abwarten und Tee trinken“. Die Idee des sich selbstlösenden Problems wird deutlich, bzw. die Idee der Zeit als Problemlöser oder Problemlöserin (die Zeit heilt nicht nur alle Wunden, sondern eben auch einige Probleme). So geht man davon aus, dass manche Probleme sich von selbst lösen, zufällig oder als Nebeneffekt von anderen Situationen oder Gegebenheiten, die man bewusst und aktiv löst. Kann dieses Vorgehen auch in der Mathematik hilfreich sein? Komme ich an einer Stelle nicht weiter, lasse ich das Problem liegen und fahre dort fort, wo ich bereits eine Idee sehe oder einen Weg kenne. Oder kommen mir gerade beim Pausieren und Abwarten (z. B. in der Badewanne) wie aus dem Nichts Lösungsideen in den Sinn und führen zum Heureka-Effekt, einem tiefergehenden Verständnis?

Ergänzend kann die etymologische Bedeutung Aufschluss auf Herkunft und Bedeutung des Wortes geben:

> „[…] Übernahme von lat. *problēma*, griech. *próblēma* […] 'Hindernis, Schwierigkeit, gestellte (wissenschaftliche) Aufgabe, vorgelegte Streitfrage', eigentlich 'das Vorgelegte', zu griech. *probállein* […] 'vor-, hinwerfen, (eine Aufgabe) vorlegen, zur Besprechung vortragen'; vgl. griech. *bállein* […] 'werfen'.“ („Problem“ bereitgestellt durch das digitale Wörterbuch der deutschen Sprache, abgerufen am 21.11.2023 um 12.55 Uhr).

Im letzteren Teil der Worterklärung wird in Anlehnung an die griechische Wortbedeutung von „ballein“ Bezug genommen. Ein Problem ist etwas, das einem vorgelegt oder hingeworfen wird. Dieses lässt vielleicht an einen hingeworfenen Teller erinnern, der in tausende Puzzleteile zerbricht. Um das Hingeworfene, das Problem, lösen zu können, müssen die Puzzleteile wieder passend aneinandergelegt werden. Können mathematische Probleme auch als Puzzle verstanden werden, bei dem es gilt die einzelnen Teile wieder in die richtige Reihenfolge zu bringen? Trifft dieses Bild vielleicht auf einen Teil der mathematischen Probleme zu? Probleme können anhand verschiedener Merkmale kategorisiert werden. Dies geschieht sowohl von Psychologen als auch von Mathematikdidaktikern und rundet die anschließenden Überlegungen ab.

In seiner etymologischen Bedeutung wird das Problem als *Hindernis, Schwierigkeit* beschrieben. Diese Schwierigkeit gilt es zu überwinden, trotz einer vorliegenden Hinderung. Ein Problem wird hier auf seinen Kern das Hindernis beim Lösen des Problems gebracht. Diesen oder einen ähnlichen Wortgebrauch (Hürde, Barriere) finden wir auch in Definitionen aus der Psychologie wieder.

Allein durch diese anfänglichen Wortbetrachtungen und Beschreibungen werden verschiedene Sichtweisen auf Probleme und das damit verbundene Problemlösen deutlich. Daraus ergeben sich häufig verschiedene Umgangsweisen mit Problemen, die Hinweise auf einen Problemlöseprozess geben könnten. Probleme lassen sich unterscheiden in: bereits gelöste – ungelöste Probleme; lösbare – nicht lösbare Probleme; sich selbst (auf)lösende Probleme; fesselnde – nicht-fesselnde Probleme. Daraus ergeben sich verschiedene Herangehensweisen an ein Problem: So können Probleme erfasst, fixiert, gepflegt, zerlegt, fokussiert, untersucht, beiseitegelegt, zusammengefügt oder passend aneinandergereiht werden.

Zusammenfassung

- Probleme beschäftigen seit jeher den Menschen und auch in unserem Sprachgebrauch kann auf die Auseinandersetzungsweise mit Problemen geschlossen werden.
- Es gibt verschiedene Umgangsweisen mit Problemen: Probleme können erfasst, gepflegt, zerlegt, fokussiert, untersucht, beiseitegelegt, zusammengefügt oder passend aneinandergereiht werden.
- Probleme führen zu Hindernissen, die es zu überwinden gilt.

2.2 Das Problem und seine Lösungen – die Bedeutung für die Mathematik

Wenn man im Zusammenhang mit Mathematik über Probleme nachdenkt, gelangt man, mal abgesehen von den eigenen Fähigkeiten oder Unfähigkeiten, sehr schnell zu den *Millennium-Problemen*. Im Jahr 2000 wurden vom Clay Mathematics Institute in Cambridge sieben ausgewählte Probleme und Vermutungen veröffentlicht, die zu den größten Herausforderungen in der Mathematik gehören und von deren Lösungen man sich einen großen Nutzen verspricht. Die Lösung jedes dieser Probleme wurde mit einem Preisgeld von einer Millionen-Dollar dotiert. Eines der sieben Probleme, die Poincaré-Vermutung, ist bereits im Jahre 1904 aufgeworfen worden und wurde 2002 von dem russischen Mathematiker Grigori Jakowlewitsch Perelman bewiesen. Alle anderen sechs Probleme sind bisher nicht gelöst, einige bereits seit mehreren hundert Jahren nicht. Die Riemannsche Vermutung beispielsweise war bereits 1900 auf Hilberts

Liste ungelöster mathematischer Probleme zu finden[1]. Es gibt auch deutlich jüngere Probleme, wie das P-NP-Problem aus dem Bereich der Computerwissenschaften, das Anfang 1970 aufgestellt wurde.

Lösungsideen und -gedanken stammen häufig aus verschiedenen Bereichen der Mathematik und sind teilweise noch nicht erforscht. Grundsätzliche Ideen dieser Probleme können durch allgemein verständliche Argumente und mit erklärenden Bildern erläutert werden, zumindest für kleine Dimensionen.[2] Inhaltlich geht es bei der Poincaré-Vermutung darum, dass ein Gummiband um eine Kugel stets auf einen Punkt geschrumpft werden kann, ohne dass dabei das Band oder die Kugel zerstört werden. Bei einem Donut kann das Gummiband so liegen, dass man es nicht auf die beschriebene Weise zu einem Punkt zusammenschrumpfen lassen kann. Zweidimensionale Oberflächen werden im dreidimensionalen Raum betrachtet. Für die Poincaré-Vermutung werden nun dreidimensionale Oberflächen im vierdimensionalen Raum betrachtet und es gilt zu zeigen, dass sich Gummiband und Kugel wie im Dreidimensionalen verhalten. Vorstellen können wir uns das nicht mehr. Die Lösung dieses Problems enthält vielzählige mathematische Gedanken, bisher nicht vollzogene Verknüpfungen zu anderen mathematischen Teilgebieten und hochkomplexe Begründungszusammenhänge, die nur von Mathematikexperten nachvollzogen und überprüft werden können. Es gibt ausgearbeitete Beweise

[1] David Hilberts Liste enthielt 23 bis dahin ungelöste mathematische Probleme. Von diesen ursprünglich 23 sind bisher 13 Probleme umfassend gelöst, einige weitere wurden umformuliert bzw. uminterpretiert und teilweise gelöst.
[2] Das Clay Mathematics Institute listet die offene Probleme auf ihrer homepage unter www.claymath.org/millennium, Stand 09.11.2023, 19:45.

der Poincaré-Vermutung, die 300 Seiten umfassen (vgl. O'Shea 2008).

Andere ungelöste Problemstellungen können in kurzer Zeit nachvollzogen werden, z. B. das P-NP-Problem. Dabei fallen unter P diejenigen Entscheidungsprobleme, die sich in polynomieller Laufzeit lösen lassen. Unter NP fallen diejenigen Entscheidungsprobleme, bei denen man eine gegebene Lösung in polynomieller Zeit auf ihre Richtigkeit überprüfen kann. Es ist nach wie vor unklar, ob sich diese beiden Klassen unterscheiden oder ob sie identisch sind.

Ein anschaulich besser nachzuvollziehendes, bisher ungelöstes Problem bietet die Frage nach der Existenz eines perfekten Quaders (vgl. Stewart 2011, S. 161). Bei einem perfekten Quader sind sowohl die drei Seitenlängen, wie auch die drei Flächen- und die Raumdiagonale ganzzahlig. Die Lösung kann man sich daher bereits beim Lesen vorstellen und Ideen für Berechnungen bietet die Schulmathematik. Tatsächlich ist die Existenz einer Lösung noch unklar und bewiesen werden konnte diese Aussage bislang nicht. Es konnte hingegen gezeigt werden, dass die kleinste Seitenlänge mindestens einer Länge von 2^{32} entspricht (vgl. Stewart 2011, S. 162). Die Schwierigkeit der Problemfindung überschätzen wir beim ersten Lesen leicht und die Lösungsfindung übersteigt dann unsere Vorstellungskraft.

Die Einteilung der Barrieren in der Psychologie in Bezug auf Anfangssituation, Lösungsmittel und Zielsituation (vgl. Abschnitt 2.3.1) kann auch bei mathematischen Problemen in gewisser Weise wiedergefunden werden. Bei ungelösten Problemen ist die Barriere des Mittels noch offen. Es gibt ungelöst Probleme, bei denen Anfangs- und Zielsituation sicherlich schnell erfasst werden (wie am Beispiel des perfekten Quaders); eine Einschätzung für den Lösungsweg misslingt. Und viele andere Probleme, bei denen selbst die Erfassung der Problemsituation sehr komplex ist und eine mögliche Endsituation nicht vorstellbar erscheint (wie die Poincaré-Vermutung. Auch hier ist das Wissen des Individuums Voraussetzung und Schranke der Lösungsmöglichkeiten und Verstehensprozesse.

Andere bedeutende Probleme konnten bereits gelöst werden. Einblicke in die Arbeiten der Mathematiker lassen erahnen, auf welche Art und Weise Barrieren überwunden werden konnten. Ein populäres Beispiel bildet der Beweis von Fermats letztem Satz. Der Satz des Pythagoras kann als ein Teilaspekt des Satzes von Fermat verstanden werden. In einem rechtwinkligen Dreieck mir Hypotenuse z gilt: $x^2 + y^2 = z^2$. Das Tripel (x, y, z) wird als pythagoräisches Tripel bezeichnet werden. Die Suche nach weiteren Tripeln, für die die Aussage gilt, heißt auch diophantisches Problem. Als Fermats letzter Satz wurde die Aussage bekannt, dass es für den allgemeinen Fall $x^n + y^n = z^n$ **keine** ganzzahlige Lösung mit $n > 2$ gibt. Fermat untersuchte um 1637 die Gleichung für konkrete Potenzen, wie 3 und 4 und allgemein für ganzzahlige n. Für den Fall $n = 4$ skizzierte Fermat einen Beweis der Ungleichung. An einem Beweis für $n = 3$ arbeiteten nach Fermat auch Euler und schließlich konnte Gauß die Aussage knapp 100 Jahre später beweisen. Es folgen weitere Beweise für feste n. Bis in den 19990er Jahren Andrew Wiles gemeinsam mit Richard Taylor einen vollständigen Beweis für ganzzahlige n liefert. Sieben Jahre lang hat sich Andrew Wiles in seinem Dachzimmer in Princeton mit diesem Problem befasst bis er einen Beweis herausgearbeitet hatte. An diesem Beispiel wird auch deutlich wie ausdauernd, langwierig und nervenaufreibend das Lösen von Problemen sein kann. (vgl. Ziegler 2010, S. 156 ff.). In einem späteren Bericht sagt er: „Es war so unbeschreiblich schön; so einfach und elegant. Ich konnte gar nicht begreifen, wie mir das hatte entgehen können […].“ (Ziegler 2010, S. 158). Diese Freude über das Finden der Lösung erinnert sofort an die Legende des Archimedes. Die eher zufällige Entdeckung des Prinzips des Auftriebs ermöglicht Archimedes das Material der Krone zu bestimmen, ohne diese zerstören zu müssen. Heute ist sein Ausruf „Heureka“ als Sinnbild von Erkenntnis erfüllten Situationen. Eine ähnliche Anekdote beschreibt, dass Gauß im Bett liegend zu der Einsicht gelangt, dass das regelmäßige Siebzehneck mithilfe von Zirkel und Lineal konstruiert werden kann. Voller Freude springt er aus dem Bett, um die Formel zu notieren (vgl. Ziegler 2010, S. 148).

In der Mathematik gibt es zahlreiche Bespiele, in denen der lösende Einfall durch überraschende Einfälle ganz plötzlich als greifbare Gedanken auftauchen. Heinze hat eine kleine Sammlung diverser Ausrufe zusammengestellt: „Van der Waerden (1954, 1973[3]) schildert die oft zitierten Erlebnisse von Gauß ("... wie der Blitz einschlagt, hat sich das Rätsel gelöst"), Hadamard (" ... fiel mir auf einmal eine seit langem gesuchte Losung ein, ohne Oberlegung meinerseits und in eine Richtung ganz verschieden von allen Richtungen, in denen ich früher gesucht hatte") und Poincaré (" … in dem Augenblick, in dem ich meinen Fuss auf das Trittbett setzte, kam mir die Idee, ohne dass irgendetwas in meinen früheren Gedanken diese Idee vorbereitet hatte").“ (Heinze 2007, S. 9)

Auch aktuell gibt es Interesse an diesen Aha-Momenten in der mathematikdidaktischen Forschung. Neben den kognitiven Tätigkeiten werden affektive Komponenten und Erfahrungen beim Problemlösen untersucht und es wird versucht ihre Bedeutung für den Problemlöseprozess auszumachen (vgl. Liljedahl 2013).

An anderen Stellen belegen historische Briefwechsel, die tiefergehenden Argumentationen und Überlegungen zu mathematischen Problemstellungen. Ein bekanntes Beispiel bildet die

Goldbach´sche Vermutung, die besagt, dass jede gerade Zahl als Summe von zwei Primzahlen dargestellt werden kann. In einem Brief an Euler wird Goldbach eben diese Vermutung auf. Bis heute ist sie nicht bewiesen, auch wenn Plausibilitätsargumente die Wahrheit der Vermutung bekräftigen (vgl. Ziegler 2010, S. 72).

Auch dieses Beispiel zeigt, dass die Problemstellung selbst schnell erfasst werden kann, ein Beweis hingegen äußerst schwer zu erbringen ist.

Anhand dieser historischen Beispiele für Lösungsprozesse in der Mathematik wird deutlich, dass ein Lösungsweg harte Arbeit und ausdauernde Überlegungen erfordert, und (gleichzeitig) durch zufällig passende Einsichten und das Erfassen von Zusammenhängen hervorgebracht werden kann. In jedem Fall ist die Freude, der emotionale Ausbruch über das Finden der Lösung mitreißend. Mathematische Probleme regen die Gefühle an und sind seit jeher Zentrum vieler Diskussionen. So ist bei Grieser passend zu lesen: „*Probleme sind die Seele der Mathematik*“ (Grieser 2017, S. 1).

Zusammenfassung

- Es gibt mathematische Probleme, die bisher niemand lösen konnte. Dazu zählen sechs der sieben Millennium-Probleme.
- Auch nachvollziehbare Problemstellungen können zu nicht lösbaren Problemen gehören.
- Mathematisches Problemlösen und das Finden einer Lösung kann ein mitreißender, emotionaler Prozess sein.
- Historische Beispiele aus der Mathematik haben gezeigt, Problemlöseprozesse laufen ganz unterschiedlich ab. Es gibt eher zufällige durch Geistesblitze gefundene Lösungen. Aber auch durch hochkonzentriertes und ausdauerndes

Arbeiten oder den Austausch mit Fachkollegen können Problemlöseprozesse angeregt werden.

2.3 Das Problem und seine Lösung – von der kognitiven Psychologie zur Mathematikdidaktik

In der Literatur zu pädagogisch-psychologischen Zusammenhängen herrscht weitestgehend Übereinstimmung über die Definition eines *Problems.* In Anlehnung an Dörner (1987) wird eine Erläuterung im folgenden Sinne in Abgrenzung zum Begriff Aufgabe verwendet. Diese Definition soll auch in dieser Arbeit verwendet werden:

> Ein Problem liegt dann vor, wenn es (1) einen unerwünschten *Anfangs-* und (2) einen erwünschten *Endzustand* gibt sowie (3) eine *Barriere*; die eine direkte Überführung (*Transformation)* des einen Zustands in den anderen verhindert. Man spricht hingegen von einer *Aufgabe*, wenn Lösungsmethoden bekannt sind (vgl. Dörner 1987, S. 10).

Eine Auflistung verschiedener Definitionen des Begriffs „Problem“ befindet sich in Rotts (2013) „Mathematisches Problemlösen, Ergebnisse einer empirischen Studie“. Ausgehend von dieser Definition kann der Prozess des Problemlösens definiert werden. Dies tut beispielsweise Hussy (1984) wie folgt:

> „Unter Problemlösen versteht man das Bestreben, einen gegebenen Zustand (Ausgangs- oder Ist-Zustand) in einen anderen, gewünschten Zustand (Zielzustand oder Soll-Zustand) zu überführen, wobei es gilt, eine Barriere zu überwinden, die sich zwischen Ausgangs- und Zielzustand befindet.“ (Hussy 1984, S. 114).

Mit dieser Definition wird der abstrakte Prozess des Problemlösens mithilfe zweier Zustände und einer Phase konkretisiert. Es bleibt weiterhin zu spezifizieren, welche Beschaffenheiten und Beschreibungen Anfangs- und Endzustand ausmachen. Noch vielschichtiger erscheint die nähere Betrachtung der Barriere und ihrer Überwindung. Es bleibt offen, was eine Barriere ausmacht oder ab wann eine Schwierigkeit beim Lösen eine tatsächliche Barriere darstellt. Ein klassischer Zweig der Problemlöseforschung hat sich mit der Analyse dieser drei Bestandteile befasst, in dem Probleme in Klassen oder Typen kategorisiert werden. „Mögliche Unterscheidungen von Problemtypen, eine der klassischen Forschungsfragen, die heute kaum noch verfolgt wird, […]“ (Heinrich et al. 2015, S. 280) kann dabei helfen, das Verständnis von Anfangs- und Endzustand sowie der Barriere zu konkretisieren. Bei der Unterteilung von Problemen wird u. a. die benötigte kognitive Struktur analysiert. Diese Überlegungen sind für den planvollen Einsatz im Mathematikunterricht oder die Einschätzung und Vergleichbarkeit von Problemlösetätigkeit hilfreich und teilweise notwendig.

2.3.1 Kategorisierung von Problemen

Eine sehr alte und naheliegende Art der Kategorisierung entspricht der Unterteilung in „wahr“ und „falsch“ und damit zu „guten“ und „schlechten“ Problemen. Damit gelangt man zu der Fragestellung: was macht ein gutes Problem für den Mathematikunterricht aus? Dieser Frage wird ausführlicher bei der unterrichtspraktischen Betrachtung des Problemlösens nachgegangen (vgl. Abschnitte 2.3.5 und 2.3.6).

Die Unterteilung in dynamische und statische bzw. analytische Probleme wie sie in Forschungen von beispielsweise Leutner et al. verwendet wird (z. B. Klieme et al. 2012, S. 35), bezieht sich auf die Definitionen von Anfangs- und Endzustand. Bei dynamischen Problemstellungen unterliegen auch Ausgangssituation und Endsituation ständiger Veränderung. So beeinflussen beispielsweise wirtschaftliche und ökonomische Faktoren beide Situationen. Die Problemstellung ist in ein gesamtes System verstrickt. Eine Isolierung eines festen Anfangszustandes, der in einen fest definierten Endzustand überführt werden soll, wird hingegen als statisch bezeichnet. Die Problemstellungen im Bereich der Schulmathematik gehören in der Regel zu den statischen Problemen (vgl. Klieme et al. 2012, S. 9).

Von Dörner werden verschiedene Kategorisierungsansätze für Probleme verwendet. Einer dieser Ansätze, der die Beschreibung von Ausgangszustand und Zielzustand aufgreift, beruht auf Mac Carthy (1956). Es wird der Grad der Offenheit bzw. Geschlossenheit der Problemstellung zur Einteilung genutzt. Sind Anfangszustand und Zielzustand bekannt, werden die Probleme als geschlossenen oder *well-defined* bezeichnet (z. B. Dörner 1987, S.13; Renkl 2008, S. 163). Klassischerweise zählen dazu Schach, der Turm von Hanoi oder Programmierprobleme. Alle haben gemeinsam, dass ein Anfangszustand klar benannt werden kann, z. B. die Position der Ringe beim Turm von Hanoi und auch der gewünschte Zielzustand ist bekannt (vgl. Renkl 2008, S. 163). Gleichzeitig kann ausgehend vom Anfangszustand das Problem durch eine abzählbare Folge an Handlungen und Schritten in den Zielzustand überführt werden. Das entspricht dem Umlegen der Ringe nach den gegebenen Regeln (Transformation). Damit wird auch die Form der Barriere näher beschrieben. Offene oder ill-defined Probleme hingegen enthalten weder Informationen über den Anfangszustand, noch über den Zielzustand. Dazu gehören Situationen aus dem Leben, der Medizin oder auch der Lehre (vgl. Dörner 1987, S.13f.; Renkl 2008, S. 163).

Die Offenheit bzw. Geschlossenheit von Anfangs- und Endzustand wird am Beispiel der Mittelsenkrechten erörtert. Diese Aufgabenstellung wird auch in der später dargestellten Studie eingesetzt (vgl. Abschnitt 8.3.1). Das Mittel soll dabei zunächst nicht verändert werden und unbekannt bleiben. Eine sehr offene Problemstellung könnte lauten: In einer Wüste gibt es X Brunnen. Teile das Gebiet der Wüste so ein, dass man stets weiß „welcher der Brunnen der nächste gelegene ist. Wenn für X eine genaue Anzahl, z. B. fünf, gegeben wird oder in einem nächsten Schritt diese fünf Brunnen eingezeichnet auf einem Arbeitsblatt vorliegen, wird der Ausgangszustand schrittweise geschlossen. Letztendlich kann durch eine Reduzierung auf zwei Punkte der Ausgangszustand weiter geschlossen werden. Dies ist auch möglich, wenn mit einer innermathematischen Perspektive gefragt wird, wo liegen die Punkte, die gleich weit von den zwei gegebenen Punkten entfernt sind.

Durch die konkrete Frage nach den Punkten, die gleich weit entfernt sind, wird mit der Ausganssituation die Zielsituation weiter geschlossen. In der Aufgabenvariante mit maximaler Offenheit ist auch über den Zielzustand wenig bekannt. Eine Konkretisierung besteht in der Forderung Grenzen einzuzeichnen oder noch konkreter Geraden. Damit werden gleichzeitig Informationen über das Mittel bekanntgegeben.

Diese Überlegungen zeigen, inwiefern eine Auseinandersetzung mit der Definition von Ausgangszustand, Endzustand und Mittel für Probleme in der Schulmathematik hilfreich sind. Ebenso wird die Bedeutung des Individuums deutlich. Ist die Definition der Mittelsenkrechten bekannt und/oder wurde eine Anwendung eingeübt, verändert das die Art und Schwierigkeit der Barriere und damit auch die erforderliche Denkleistung enorm.

Die nachfolgenden Kategorisierungen von Problemen fokussieren stärker auf die Eigenschaften der Barriere. Dörner unterscheidet die beiden Aspekte Bekanntheitsgrad der Mittel und Klarheit der Zielkriterien (vgl. Dörner 1987, S. 14). Das kann zum einen bedeuten, dass die Mittel der Umwandlung (z. B. Rechenregeln oder Darstellungsformen) teilweise oder vollständig nicht bekannt sind. Dies bezeichnet Dörner als Synthesebarriere. Zum anderen zählen hierzu Probleme mit einer Interpolationsbarriere, bei denen eine große Anzahl an Mitteln in bestimmter Reihenfolge verwendet werden muss und die Kombination der verwendeten Reihenfolge zunächst erarbeitet werden muss. Diese Unterteilung ist an Piagets Einteilung von *Akkomodation* und Assimilation angelehnt (vgl. Piaget 1972). Der zweite Aspekt umfasst die Frage, inwiefern der Endzustand bekannt ist. Bei diesen dialektischen Barrieren sind Zielzustand und Mittel der Lösungsfindung unbekannt (vgl. Dörner 1987, S. 13f.). Es wird weiter unterschieden: Interpolationsbarrieren, (Anfang und Mittel sind bekannt), Synthesebarrieren, (Zielzustand ist unbekannt) und dialektische Probleme (Lösung erfordert dialektischen Prozess). Damit liegt der Fokus der Betrachtung auf der Art der vorliegenden Barriere.

Diese Kategorisierung von Dörner wurde vielfältig aufgegriffen und ggf. erweitert. Greeno und Simon (1988) fokussieren auf die benötigten Prozesse beim Lösen. Dörners Interpolationsprobleme lassen sich als Transformationsprobleme und die synthetischen Probleme als Anordnung- und Design-Probleme wiederfinden. Es werden zwei weitere Problemklassen ergänzt: Induktionsprobleme werden durch das Finden einer Struktur gelöst, wie es beispielsweise beim Aufgabentyp *Fortsetzen einer Zahlenreihe* der Fall ist. Bei Deduktionsproblemen werden anhand vorgegebener Bedingungen Entscheidungen gefällt, die dann zur Lösung führen. Zusätzlich kategorisieren sie die Problemlöseaufgaben nach benötigtem Wissen und dem mathematischen Inhaltsbereich, dem das Problem zugeordnet werden kann (vgl. Greeno & Simon 1988, S. 590ff.)

Anknüpfend an Dörners Definition über Anfangszustand, Weg (d. h. Überwindungsmöglichkeit der Barriere oder Transformation) und Endzustand erstellen Wiegand und Blum sowie Bruder eine Kategorisierung von Problemen durch eine systematische Abarbeitung der auftretenden Fälle nach bekanntem bzw. unbekanntem Informationen. Eine Problemaufgabe ist dabei definiert durch einen bekannten Anfangszustand und unbekannten Weg und unbekannten Endzustand. Dies steht im Gegensatz zur Beweisaufgabe, bei der auch der Endzustand bekannt ist. Ist nur der Endzustand bekannt, wird dies als Umkehrung einer Problemaufgabe verstanden. Fehlen jegliche Angaben zu Anfangs- und Endzustand und werden lediglich Rahmenbedingungen genannt, so wird dies als Problemsituation oder auch als offene Aufgabe bezeichnet (vgl. Heinrich et al. 2015, S. 281ff.).

Rott ergänzt in Dörners Kategorisierung einen dritten Aspekt, die Durchdringung des Anfangszustands als weiteren möglichen Barrieretypen (vgl. Rott 2013, S. 23). Es werden damit Dörners vier Kategorien auf acht erweitert und dies passt auch zu dem Modell von Wiegand, Blum und Bruder. Damit eine Anfangssituation von Problemlösenden durchdrungen werden kann, werden sowohl sprachliche Fähigkeiten gefordert, als auch ein Situationsverständnis. Ersteres ist sicherlich Voraussetzung für die Erfassung der Anfangssituation und zweiteres wird benötigt, um die Anfangssituation im gegebenen Kontext zu reduzieren oder umzuwandeln (vgl. Heinze 2007, S. 8).

Bei all diesen Betrachtungen rückt die Transformation bzw. die Barriere in den Fokus und es bleibt zu klären, was eine Barriere ausmacht und welche Bedeutung dem Problemlösenden als Individuum zukommt. In dem Forschungszweig der Experten-Novizen-Vergleichsstudien wird untersucht, inwiefern sich Lösungsprozesse von Novizen, die sich bei der Bearbeitung in einem Problemlöseprozess befinden sollten, von denen eines Experten, für den die Aufgabenstellung zur Routine gehört, unterscheiden. Anderson untersucht die Gedächtnisleistungen von Novizen und Experten im Bereich der Geometrie und untergliedert in diesem Zusammenhang Wissensformen (vgl. Anderson 1982, S. 403 f.). Das Wissen, das sich auf Fakten, Sachverhalte oder Ereignisse bezieht, wird als deklaratives Wissen bezeichnet. Das Gegenstück bildet das Wissen über das Ausführen von Fertigkeiten, Bewältigen allgemeiner Aufgaben oder Lösen von Problemen. Dieses Wissen wird prozedurales Wissen genannt und es wird meist unbewusst und ohne Anstrengung abgerufen und angewandt. Es entsteht ein Automatismus. Daher kann es häufig nicht bewusst benannt oder erklärt werden. Insbesondere in vergleichenden Forschungen von Anfänger- und Experten-Verhalten bei Problemlöseprozessen werden mit der Analyse dieser beiden Wissensarten die Unterteilung in Routine- und Problemlöseprozesses erhoben. Viele ausführende Schritte zum Lösen der Aufgabe zählen für den Experten zur Routine, somit benötigt er weniger Gehirnkapazitäten für die Ausführung als es beim Novizen der Fall ist. Experten können durch ihre Erfahrungen also Arbeitsschritte routiniert ausführen, für die Novizen deutlich mehr Denkaufwand betreiben müssen. Diese Entlastung der Gehirnleistung sorgt für freie Denkkapazitäten für beispielsweise fehlerfreies Arbeiten, die Überprüfung von Zwischenergebnissen oder auch das Interpretieren der Lösung (vgl. Stern 1992, S. 113f.; Rasch 2001, S. 53).

In einer empirischen Studie stellen De Corte und Verschaffel heraus, dass teilweise einzelne Worte von Grundschulkindern unüblich verstanden werden und sich daraus eine andere Problemsituation ergibt (vgl. de Corte & Verschaffel 1985, S. 19). Das Löseverhalten von Sekundarstufe-I-Schülerinnen und –Schülern von sprachlich variierenden Textaufgaben untersuchte

Stern (1997) und stellt dabei fest, dass die Schülerlösungen stärker durch das Situationsverständnis als durch das sprachliche Verständnis der Schülerinnen und Schüler beeinflusst wurde (vgl. Stern 1997). Damit kann die Bedeutung des Individuums, sein (Vor-) Wissen und seine Erfahrungen sowie (mathematisches) Können, auch empirisch belegt werden. Inwiefern eine Schwierigkeit eine tatsächliche Barriere für den einzelnen Problemlösenden darstellt, ist individuell verschieden und daher geht die Einteilung von Problem mit dem Problemlöseprozess des Individuums einher (vgl. Heinze 2007, S. 5).

Auf die Abhängigkeit der Barriere vom Individuum gehen auch Edelmann und Wittmann in ihrem Lehrwerk der Lernpsychologie ein. Sie legen die Definition eines Problems nach Dörner fest und klassifizieren Probleme anschließend anhand von Problemmerkmalen, wie beispielsweise der Komplexität, und anhand von Personenmerkmalen, wie beispielsweise dem Wissen in dem geforderten Bereich sowie anhand verfügbarer Problemlöseverfahren und zusätzlich anhand der persönlichen Motivation (vgl. Edelmann & Wittmann 2012, S. 179). Damit kann in Abhängigkeit von den individuellen Fertigkeiten und dem konkreten Wissen und Erfahrungen eines Individuums der individuelle Grad der Barriere erfasst werden. Der Erfolg eines Problemlöseprozesses wird somit nicht ausschließlich von Wissensstrukturen bestimmt, sondern ebenso durch Persönlichkeitsstrukturen. Durch „individuelle Vorstellungen (z. B. epistemologische Überzeugungen), affektive Dispositionen oder auch die Wissensbasis des Problemlösers“ (vgl. Heinze 2007, S. 8) wird das erfolgreiche Überwinden der Barriere beeinflusst.

Eine Kategorisierung nach der Art der erforderlichen Denkleistung von Pólya (1980) führt zu der Unterteilung in Bestimmungs- und Entscheidungsaufgaben. Bestimmungsaufgaben werden durch eine bestimmte Zahl gelöst, dazu können Fallunterscheidungen oder Konstruktionen benötigt werden. Entscheidungsaufgaben beinhalten Beweise und das Überprüfen gegebener Lösungen auf ihre Korrektheit. Kratz (1988) ergänzt die Entdeckungsaufgaben (vgl. Heinrich 2015, S. 281), die das Aufstellen von Vermutungen, das Entdecken neuer Sachzusammenhänge oder neuer Interpretationen für bekannte Sachzusammenhänge beinhalten. Auch das Aufwerfen neuer Probleme kann hierzu gezählt werden.

Nach Wittmann kann Problemlösen im Geometrieunterricht in fünf verschiedene Kategorien eingeteilt werden. Dabei kann eine Aufgabe sicherlich auch mehreren Kategorien zugeschrieben werden. Diese fünf nennt er: Berechnungsprobleme, Beweisprobleme, Konstruktionsprobleme, Modellierungsprobleme, Anzahlprobleme und Optimierungsprobleme (vgl. Wittmann 2014, S. 83f.). Auch Holland unterteilt Interpolationsprobleme in der Geometrie in Berechnungsprobleme, Beweisprobleme, Konstruktionsprobleme. Er betrachtet Voraussetzungen für erfolgreiches Problemlösen, in dem er zu verwendenden Operatoren auflistet (vgl. Holland 2007, S. 170).

Einen weitgefächerten Katalog zur Kategorisierung von Problemen und darüber hinaus von ihrem Einsatz im Mathematikunterricht beinhaltet sachliche, formale Aspekte, personenbezogene Aspekte, Zielaspekte und funktionale Aspekte sowie Schwierigkeitsaspekte. Dabei werden aus den verschiedenen Bezugswissenschaften verwendete Kategorisierungen wie die der Offenheit oder Abgeschlossenheit von Dörner oder das FKBA[3]-Modell von Bruder, mit dem der Schwierigkeitsgrad von Aufgaben bestimmt werden kann (Bruder & Collet 2011, S.13), mitaufgegriffen. Ebenso werden die beteiligten Perso-

---

[3] Hier werden Aufgaben anhand von **F**ormalisierungsgrad, **K**omplexitätsgrad, **B**ekanntheitsgrad und **A**usführungsaufwand bewertet.

nengruppen, das sind Schülerinnen und Schüler sowie die Lehrperson, betrachtet (vgl. Tietze & Förster 2000, S. 94). Eine übersichtlich Zusammenfassung wurde von Heinrich vorgenommen (vgl. Heinrich 2015, S. 284). In dieser Übersicht werden unter den Zielaspekten die Art des Lernziels verstanden, die durch den Einsatz der Problemlöseaufgabe im Unterricht erreicht werden soll. Hiermit wird der Bezug zur Unterrichtspraxis explizit gemacht. Unter der Bezeichnung Schwierigkeitsaspekte werden Eigenschaften und Charakterisierungen der Barriere aufgelistet.

Für den Einsatz von Mathematikaufgaben kann vielfältig diskutiert werden, inwiefern die Schwierigkeit einer ausgewählten Aufgabe eine Barriere darstellt und ein Problemlösen angeregt wird. Durch die Kategorisierung der Probleme soll auch deutlich werden, inwiefern die Gestalt und Schwierigkeit der Barriere sich bei Problemlöseaufgaben unterscheiden kann (vgl. Zech 1998, S. 308). Blickt man auf die Gesamtheit der Schülerinnen und Schüler in einer Klasse, so kann die gleiche Aufgabenstellung für einen Teil der Lernenden zu einer tatsächlichen Barriere führen und für einen anderen Teil erscheinen die nötigen Transformation als offensichtlicher. Damit werden das Individuum und sein Vorwissen bedeutsam. Ungeklärt oder unbeachtet bleibt die Rolle des Individuums, die Bedeutung des Problemlösenden. „Diese starke individuelle Komponente wirft eine Reihe von Schwierigkeiten für die Forschungs- und nämlich auch Schulpraxis auf. Deshalb wird beim Umgang mit Lernenden häufig implizit ein bestimmter Wissenstand als vorhanden angenommen, um somit eine Aufgabenstellung als Problem ansehen zu können“ (Heinze 2007, S. 5).

Die vorgenommenen Kategorisierungen erscheinen häufig beliebig. Zwangsläufig werden nur Teilaspekte betrachtet, die der Einteilung in Kategorien dienen. Somit wird nie das gesamte Spektrum an Problemen abgedeckt werden können. Keine der obigen Klassifikationen ist erschöpfend. Hinzu kommt, dass die verschiedenen Kategorien sich überschneiden und häufig nicht unabhängig voneinander sind. Teilweise bedingt die eine Kategorie die Zuordnung zu einer bestimmten Kategorie des nächsten Merkmals.

Dennoch kann die Einteilung von Problemen in Kategorie bei der Unterrichtsplanung angewendet werden. So gibt es die Möglichkeit Klassen von Problemen zu thematisieren oder die Anwendbarkeit von bestimmten Lösungsschritten oder -strategien einzuüben. Es ist dabei von großem Interesse zu verstehen, wie Problemlöseprozesse ablaufen und inwiefern ein Transfer von Problemlösefähigkeiten beim Lösen weiterer Probleme möglich ist (vgl. Heinrich et al. 2015, S. 281).

Diesen Fragen wird im anschließenden Abschnitt 2.3.2 zu Modellen von Problemlöseprozessen weiter nachgegangen. Anschließend werden diese Ideen aufgegriffen um den Einsatz von Problemlöseaufgaben im Mathematikunterricht zu konkretisieren.

Zusammenfassung

- Problemlösen ist die Fähigkeit eine Barriere bei einem Problemlöseprozess zu überwinden.
- Die Barriere stellt den Problemlösenden vor eine Schwierigkeit, die ganz unterschiedlicher Art sein kann.
- Probleme können kategorisiert werden: lösbare und unlösbare Probleme, dynamische und statische Probleme, geschlossene und offene Probleme.
- Weitere Kategorisierungen von Problemen werden anhand der Betrachtung von Barriere am Anfang, beim Lösungsmittel, am Ende oder von Offenheit bzw. Klarheit von Anfangszustand, Endzustand und Barriere vorgenommen.

- Barriere und Mittel zur Problemlösung sind vom Individuum abhängig.
- Der individuelle Problemlöseprozess ist geprägt durch Vorwissen, Erfahrungen, Persönlichkeitsstrukturen und Überzeugen.
- Ein Experte unterscheidet sich vom Novizen nicht allein durch mehr Erfahrung oder geschickteren Strategieeinsatz, sondern auch durch größere Routine beim Lösen der Aufgaben, wodurch sie weniger Gehirnkapazität für diese Abläufe benötigen.

2.3.2 Modelle von Problemlöseprozessen

Auf der Suche nach einer Begründung dafür, dass unbekannte Situationen, die nicht gleich auf Anhieb gelöst werden können, nach einigen Überlegungen doch in einer Lösung münden, wurden unterschiedliche Erklärungsmodelle zum Problemlösen aufgestellt. Aebli und Piaget nutzen dabei ähnliche Ideen zur Erklärung dieses Phänomens. Aus lerntheoretischer Sicht wird die Problemsituation als neue, unbekannte Situation erfasst und mithilfe kognitiver Prozesse entweder durch Anpassung an bereits bekannte Denkstrukturen oder alternativ durch das Aufbauen neuer Denkstrukturen in eine behandelbare Situation umgeformt. Piaget bezeichnet den ersten Konstruktionsprozess als *Assimilation* und den zweiten als *Akkomodation* (vgl. Piaget 1972). Piagets Überlegungen bieten die Ausgangslage für Dörner, Kluwe und weitere Forscher im Gebiet Problemlösen (vgl. Dörner 1987, S. 27; Kluwe 1979, S. 10ff.).

Ein Modell für das Finden einer Problemlösung, das die Wissensbereiche konzeptuelles, prozedurales und metakognitives Wissen aufgreift, geht auf die Überlegungen von Dörner (1987) und Kluwe (1979) zurück (vgl. Abschnitt 2.3.1). Die Gesamtheit aller Voraussetzungen für das Finden einer Problemlösung wird mit der kognitiven Struktur erfasst. Die dafür grundlegenden kognitiven Fähigkeiten unterteilen sie in einen Wissenszweig, der dem konzeptuellen Wissen ähnelt und reproduktives Denken hervorbringt, und einen Problemlösezweig, der vergleichbar zum metakognitiven Wissen ist und produktives Denken anregt. Für einen erfolgreichen Problemlöseprozess werden beide Wissensarten benötigt (vgl. Edelmann & Wittmann 2012, S. 179). Das prozedurale Wissen nach Hiebert und Carpenter (1992) sollte als Wissen über handwerkliche Prozesse, für die Umsetzung der Aufgabe eventuell nötig sein und somit zum Zweig der Wissensstruktur von Dörner und Kluwe zählen. Edelmann und Wittmann (2012) berufen sich auf eben dieses Modell der kognitiven Struktur zur Beschreibung von Problemlöseprozessen (vgl. Abb. 1).

Es können fünf Arten des problemlösenden Denkens unterschieden werden: (1) Problemlösen durch Versuch und Irrtum, (2) Problemlösen durch Umstrukturierung, (3) Problemlösen durch Anwenden von Strategien, (4) Problemlösen durch Kreativität, (5) Problemlösen durch Systemdenken (vgl. Edelmann & Wittmann 2012, S. 181).

Das Lösen durch Versuch und Irrtum (1) wird häufig bei unübersichtlichen Anfangssituationen genutzt. Die gegebenen Bedingungen werden so lange variiert bis eine Lösung oder zumindest hilfreiche Zusammenhänge erkennbar werden. Dabei werden in der Re-

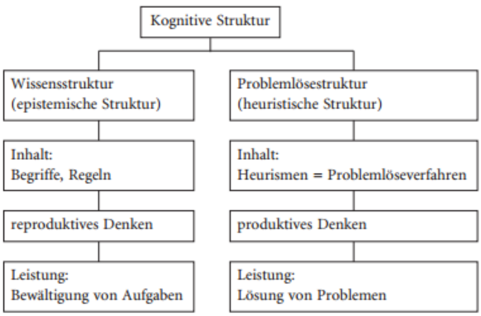


Abb. 1: Zusammenhänge zwischen kognitiver Struktur, Wissensstruktur und Problemlösestruktur (entnommen aus Edelmann & Wittmann 2012, S. 179).

gel vorab getroffene Hypothesen überprüft, so dass der Probier-Prozess nicht willkürlich erfolgt. Als Beispiel werden Probleme der folgenden Form genannt: Über einen Fluss müssen in einem Floß mit x Plätzen y Personen und z Monster transportiert werden. Sobald die Anzahl der Monster höher ist als die der Personen, werden die Personen verspeist. Bringen Sie alle sicher über den Fluss (vgl. Edelmann & Wittmann 2012, S. 181; Mietzel 2007, S. 300).

Bei der zweiten Denkweise (2) wird das Problem umstrukturiert, das heißt die gegebenen Informationen werden aussortiert oder umsortiert. Es werden verschiedene Blickwinkel eingenommen, die das Problem unter verschiedenen Aspekten betrachten, bis die Strukturzusammenhänge des Problems deutlich sichtbar werden. Als Beispiel kann die Flächenbestimmung des Parallelogramms genannt werden. Wird erkannt, dass das Parallelogramm leicht in ein flächengleiches Rechteck überführt werden kann (Umstrukturierung), so kann mit dem bereits bekannten Wissen der Flächenberechnung für Rechtecke auch der Flächeninhalt des Parallelogramms bestimmt werden (vgl. Edelmann & Wittmann 2012, S. 181ff.).

Bei einem Problemlösen durch Strategien (3) wird dem Lösungsprozess ein genauer Plan zugrunde gelegt. Um ein gewisses (Teil-)Ziel zu erreichen, werden vorab geplante Schritte durchgeführt. Dies ist beispielsweise beim Lösen des Turms von Hanoi der Fall. Die einzelnen Züge werden so vollzogen, dass am Ende der letzte Stab frei ist und die größte Platte dort abgelegt werden kann. Dieses Ziel bestimmt die Auswahl der Strategien und einzelnen Züge, bis die gewünschte Situation erreicht wurde. Es wird ein neues Zwischenziel formuliert und dieses mit der gleichen Strategie erreicht usw. (vgl. Edelmann & Wittmann 2012, S. 184f.). Insgesamt ist die Wahl einer passenden Strategie zielführend für einen Transfer, der wiederum einen erfolgreichen Problemlöseprozess initiieren kann (vgl. Kipman 2019, S. 37). In verschiedenen Studien, u. a. zum Turm von Hanoi, aber auch bei der Analyse von mathematischen Problemlöseprozessen von Dritt- und Viertklässlern (Herold-Blasisus 2021), konnten Strategiewechsel angeregt und beobachtet werden.

Um die Anwendung von Strategien durch Problemlöser und Problemlöserinnen detaillierter beobachten und den Schweregrad von Problemen beurteilen zu können, wurden in den 1980er Jahren zahlreiche Studien durchgeführt. Kotovsky, Hayes und Simon kamen 1985 in einer Studie mit verschiedenen Ansätzen und Hypothesen zu dem Schluss, dass die Problemlöser und Problemlöserinnen zunächst versuchen den Unterschied zum gewünschten Zielzustand zu minimieren. Dabei wird durch Vorwärtsarbeiten der nächste Schritt so geplant, dass das erzielte Zwischenergebnis dem gewünschten Endergebnis näher rückt. Diese Strategie wird von den Forschern als Unterschiedsreduktion bezeichnet. Im Anschluss daran wechselten viele der Problemlöser und Problemlöserinnen zu der als Mittel-Ziel-Analyse bezeichneten Strategie. Es werden, wie oben beschrieben, gezielt durch teilweises Rückwärtsarbeiten gewünschte Teilziele herausgestellt, die dann durch Vorwärtsarbeiten erreicht werden. Dies ließe auch auf einen Wechsel zwischen anfänglichem Ausprobieren und anschließender Analyse hindeuten. Die Schnelligkeit des Problemlöseprozesses sei hierbei stark abhängig von einem entwickelten Automatismus der benötigten Züge. Als Erklärung wird dargelegt, dass durch die Verwendung des Automatismus bei den Zügen Hirnkapazitäten für weitere Überlegungen frei werden und so die Schnelligkeit im Löseprozess enorm gesteigert wird (vgl. Kotovsky et al. 1985, S. 290 ff.).

Ist ein kreativer Denkprozess (4) zielführend bei einer Problemlösung, so erscheint ein spontaner oder origineller Gedankeneinfall zur Lösung geführt zu haben. Im Nachhinein kann die entstehende Lösung nicht erläutert werden; die Lösung wurde „gesehen“. Als Beispiel können bestimmte Streichholzaufgaben gesehen werden, bei denen nur ein Streichholz umgelegt werden darf, um den Zielzustand zu erreichen. Dies wäre auch ein Fall des Umstrukturierens (vgl. Edelmann & Wittmann 2012, S. 185ff.).

Bei komplexen, intransparenten Problemen, die einen hohen Grad an Vernetztheit und Eigendynamik aufweisen, wird Systemdenken (5) erforderlich. Erst so kann der häufig offene Endzustand angestrebt werden. In der Regel ist dieser Endzustand ein Kompromiss aus konkurrierenden, sich widersprechenden Teilzielen. Diese Art von Problemen tritt bei Optimierungsprozessen auf (vgl. Edelmann & Wittmann 2012 S. 188ff.). Auch aufgrund dieser fünf Denkprozesse wurde eine Problemkategorisierung vorgenommen. Es hat sich gezeigt, dass eine Zuordnung nicht eindeutig erfolgen kann und es häufig zu Überschneidungen bei einer Zuordnung kommt. Die Kategorien werden damit aus forschungstheoretischer Sicht nicht als zufriedenstellend bewertet (vgl. Edelmann & Wittmann 2012, S. 190). Als Analysemittel für die Tätigkeit, denen Schülerinnen und Schülern bei der Bearbeitung von Problemlöseaufgaben im Unterricht ausgesetzt sind, können insbesondere die ersten vier Denkarten hilfreich sein. Ihre Kenntnis kann der Lehrperson helfen Schülerlösungen einzuordnen und angemessene Reaktionen oder Anregungen zu formulieren und auch bei der Unterrichtsplanung können sie für eine reflektierte Aufgabenauswahl angewendet werden.

Zusammenfassung

- Problemlöseprozesse werden durch Wissensstrukturen und Problemlösestrukturen individuell bestimmt.
- Fünf Arten des Problemlösens mit mathematischen Bezügen: 1) durch Versuch und Irrtum (Flussüberquerungs-

Problem), (2) durch Umstrukturierung, (Flächeninhalt Parallelogramm) (3) durch Anwenden von Strategien (Turm von Hanoi), (4) durch Kreativität (Streichholzaufgaben), (5) durch Systemdenken (Optimierungsaufgaben)

- Wissen über die fünf Denkarten kann bei der Unterstützung von Lernenden im Problemlöseprozess und bei der Aufgabenauswahl helfen.

2.3.3 Transfer von Problemlösefähigkeiten

Eine naheliegende Frage bezieht sich darauf, inwiefern ein Transfer der erlernten Problemlösefähigkeit auf weitere Problemlöseaufgaben erfolgen kann. Insbesondere im Unterrichtskontext wäre es hilfreich zu wissen, inwiefern bereits erlernte Strategien und Vorgehensweisen beim Problemlösen auf welche Klasse von Problemen übertragen werden könnten. An dieser Stelle findet die Kategorisierung von Problemen (vgl. 2.3.1) praktischen Nutzen.

Die Transfermöglichkeiten von Problemlösefähigkeiten auf neue Problemstellungen wird differenziert betrachtet. Grundsätzlich gibt es zwei Positionen unter den Psychologen: Einige sprechen sich dafür aus, dass Problemlösefähigkeit speziell auf die Problemstellung oder den Problemtyp abgestimmt sind. Damit kann gemeint sein, dass mathematische Problemlösefähigkeiten nur bei mathematischen Problemen weiterhelfen und für künstlerische Probleme beispielsweise aber nicht von Nutzen sind (vgl. Woolfolk 2008, S. 350). „Allerdings darf man keine allgemeine Entwicklung solcher Denkfähigkeiten erwarten. Es findet im Regelfall nur ein Transfer auf eine ganz bestimmte Klasse von Problemen statt. Daraus folgt, dass beispielsweise Einsichtsgewinnung in relativ einfach strukturierte Probleme, strategisches Denken, kreative Einfälle und Systemdenken in spezifischer Weise geübt werden müssen.“ (Edelmann & Wittmann 2012, S. 194).

Die andere Gruppe an Psychologen ist davon überzeugt, dass grundlegende Problemlösefähigkeiten auf neue Problemstellungen anderer Fachbereiche übertragen werden können. Zu den grundlegenden Fähigkeiten lassen sich Problemlösestrategien, wie die vier Phasen von Pólya oder vergleichbare Vorgehensweisen, zählen (vgl. Pólya 1980). In der Regel beginnt ein Problemlösender mit der Anwendung allgemeiner Lösungsstrategien und wechselt dann zu spezifischen Fähigkeiten wie beispielweise der konkreten Durchführung einer Rechnung. Anschließend können weitere allgemeine Problemlösefähigkeiten angewendet werden, zum Beispiel für die Rückschau (vgl. Woolfolk et al. 2008, S. 350).

Für beide Positionen können empirische Aussagen gefunden werden. In einer Studie zum Lösen von arithmetischen Textaufgaben konnten sowohl übertragbare als auch nicht-übertragbare Problemlösefähigkeiten identifiziert werden. Zu den nicht-übertragbaren Fähigkeiten zählt das fachspezifisches Wissen, wie das Berechnen von arithmetischen Aufgaben und zu den übertragbaren Fähigkeiten werden allgemeine Fähigkeiten, wie Lesefähigkeiten oder Erinnerungsvermögen, gelistet (vgl. Kail & Hall 1999, S. 667f.).

Eine generelle Übertragbarkeit von Strategien oder Lösungsvorgehen auf neue, unbekannte Aufgabenstellungen konnte bisher nicht gezeigt werden. „Insgesamt sind die Ergebnisse der Transferforschung als enttäuschend anzusehen. Transfer konnte bisher nur dann nachgewiesen werden, wenn es sich um sehr ähnliche Probleme im gleichen Kontext handelt (naher Transfer) oder wenn es um Probleme geht, die eine gleiche Struktur auf weisen[…].“ (Heinze 2007, S. 12).

Zusammenfassung

- Forschungsergebnisse deuten darauf hin, dass ein Transfer von Problemlösefähigkeiten nicht generell möglich ist.
- Es wird zwischen allgemeinen und fachspezifischen Problemlösefähigkeiten unterschieden. Einige Studien konnten zeigen, dass allgemeine Problemlösefähigkeiten übertragbar sind, fachspezifische jedoch nicht.
- Andere Studien zeigen, dass ein Transfer nur dann gelingt, wenn die Problemstellungen sehr ähnlich gestaltet sind.

2.3.4 Problemlöseaufgaben und weitere Aufgabentypen

Bisher wurden Problemlöseprozesse und benötigte Fähigkeiten betrachtet. Dieser Abschnitt ist der Aufgabenstellung eines Problems im Mathematikunterricht gewidmet.

In der Mathematikdidaktik werden die Bedeutung von Anfangs- und Endzuständen sowie der Barriere unter mathematischer Sichtweise aufgegriffen: Es liegt demnach eine anspruchsvolle mathematische Struktur vor, die nicht ohne weitere Überlegungen zur Lösung führt. Dieser Kern soll auch für diese Arbeit als Definition verwendet werden. Beispielsweise ist er in der nachfolgenden Definition formuliert: „Eine **Problemlöseaufgabe** (auch kurz: ein Problem) ist die Aufforderung eine Lösung zu finden, ohne dass ein passendes Lösungsverfahren auf der Hand liegt.“ (Büchter & Leuders 2005, S. 28). Daraus ergibt sich für den Prozess des Lösens von Problemen, dass Problemlösen stets dann erforderlich ist, „wenn eine Lösungsstruktur nicht offensichtlich ist und dementsprechend ein strategisches Vorgehen bei der Erarbeitung notwendig ist.“ (Blum et al. 2006, S. 39). Es bleibt dabei offen, wie diese Barriere aussehen kann und wie sie überwunden werden kann. Offensichtlich ist die Hürde von den individuellen Fähigkeiten und Wissensbereichen des Aufgabenbearbeiters abhängig (vgl. Abschnitt 2.3.1). Durch das wiederholte Lösen eines bestimmten Aufgabentyps kann diese

Tätigkeit von einem anfänglichen Problemlösen zu einem routinierten Lösen übergehen.

Um dieses Bild zu konkretisieren, listet Weigand Beispiele für Problemstellungen im Mathematikunterricht auf: „Wie lang ist die Diagonale in einem Würfel?, Die Mitten benachbarter Seiten eines Vierecks werden gradlinig verbunden. Welches charakteristische Viereck entsteht?, Wie groß muss ein senkrecht aufgestellter Spiegel sein, damit man sich darin von Kopf bis Fuß sehen kann? […]“ (Weigand 2014a, S. 23). Eine umfangreiche und systematische Auflistung an weiteren mathematikdidaktischen Definitionen ist aufgeführt in Rott (2013, S. 24ff.).

Wenn das Erlernen von Problemlösefähigkeiten betrachtet wird, gelangt man leicht zu einer Auflistung von Strategien und Heurismen, die im Sinne von Werkzeugen den Problemlöseprozess strukturieren oder anregen können. Für die Strukturierung helfen Tabellen, das Zeichnen von Skizzen oder der Rückgriff auf bisheriges Wissen. Zu den Heurismen werden gezählt systematisches Probieren, Rückwärtsarbeiten, Analogien, Fallunterscheidungen, Suche nach Mustern (z. B. Bruder & Collet 2011, S. 45ff.).

Die Routineaufgabe wird häufig sogar als Gegensatz zur Problemlöseaufgabe verstanden. Unter einer **Routineaufgabe** wird ein Aufgabentyp gefasst, für den das durchzuführende Lösungsverfahren bekannt ist und dieses auch mit der Aufgabenstellung verbunden wird (vgl. Holland 2007, S. 170, Rott 2013, S. 26; Schoenfeld 1992, S. 357). Ein Beispiel könnte sein: Berechne die Nullstelle der quadratischen Funktion, wobei den Schülerinnen und Schülern das Lösungsverfahren, z. B. die pq-Formel, bekannt ist. Oder berechne den Flächeninhalt des abgebildeten Trapezes, wobei alle benötigten Angaben gegeben sind und die Flächeninhaltsformel bekannt ist. Als **Rechenaufgabe** bezeichnete Aufgabenklasse können somit zu den Routineaufgaben gezählt werden. Bei Rechenaufgaben steht das einzuübende Rechenverfahren (hier: das Lösen einer quadratischen Gleichung) im Vordergrund.

Sobald Routine- oder Rechenaufgaben in Form von Texten gestellt werden, bezeichnen wir diesen Aufgabentyp als **Textaufgabe.** In der Regel ist das Rechenverfahren anhand von Signalworten bzw. aufgrund des Kontextes schnell ersichtlich, daher bietet die Textaufgabe den Schülerinnen und Schülern ggf. ein ungewohntes Aufgabenformat dar, aber kein mathematisches Problem. Das Sprachniveau der Textaufgaben wird in der Regel an das Leistungsniveau und Ihren alltäglichen Wortschatz angepasst. Damit distanziere ich mich von einer Definition des Problemlösens im weiteren Sinne, die besagt, dass jegliches mathematische Arbeiten Problemlösefähigkeiten des Aufgabenlösers einfordere (vgl. Leuders 2003, S. 119).

Diese Abgrenzungen von Problemlöseaufgabe zu Routine-, Rechen- oder auch Textaufgabe können hilfreich sein, um das Problemlösen besser fassen zu können. Die Übergänge zwischen „benachbarten" Aufgabentypen sind als fließend zu betrachten. Es können Situationen gefunden werden, in denen auch Routineaufgaben oder Textaufgaben eine Problemlöseaufgabe darstellen. Die mathematischen und sprachlichen Kenntnisse des Individuums sowie Vorerfahrungen mit Kontexten und Aufgabentypen beeinflussen den Grad der Hürde und Schwierigkeit einer Aufgabe. Ein mangelndes sprachliches Verständnis kann die Hürde zur Lösung einer Textaufgabe deutlich erhöhen. So stellen im Extremfall russisch verfasste Textaufgaben ein unlösbares Problem für den nicht-russischsprechenden Aufgabenlöser dar. In ähnlicher Weise sorgen fehlende mathematische Kenntnisse bereits dafür, dass Routineaufgaben unlösbar werden. Bei jeglicher Betrachtung von Problemlöseaufgaben und Lösungsprozessen sind Wissensstand und

Voraussetzungen des Aufgabenlösers unbedingt mit zu beachten.

In der (Mathematik)Didaktik werden die Begriffe *Problem* oder *Problemstellung* häufig synonym zu (schwierige) Aufgabe(nstellung) verwendet. Diese Schwierigkeit wird insbesondere im englischsprachigen Raum deutlich, da hier üblicherweise Mathematikaufgaben als *problem* bezeichnet werden. Ein Austausch über die Tätigkeit des Problemlösens im Mathematikunterricht und eine Einordnung empirischer Studien wird durch diese Doppeldeutigkeit erschwert (vgl. Heinrich et al. 2015, S. 281) und es bleibt im Detail zu prüfen, inwiefern auf ein Problemlösen im oben definierten Sinne oder im anderen Extrem ein Bearbeiten einer Aufgabe abgezielt wird. In dieser Arbeit wird der Begriff Problemlöseaufgabe übernommen, um die Notwendigkeit einer vorliegenden Barriere und der damit verbundenen Problemlösetätigkeit sicher zu stellen. Es gibt zahlreiche weitere Aufgabenbezeichnungen, die teilweise eine inhaltliche Nähe zu Problemlöseaufgaben aufweisen und es erscheint daher sinnvoll diese kurz einzuordnen. Weitere Aufgabenbezeichnungen sind: Problemaufgabe, Modellierungsaufgabe, realitätsbezogene Aufgabe, Argumentations- und Begründungsaufgabe, Beweisaufgaben und Knobelaufgaben.

Der Begriff Problemaufgabe lässt durch unterschiedliche Schwerpunktsetzung in seiner Auslegung die Bedeutung der Hürde und den Bezug zur Transferaufgabe diskutieren. Eine allgemeinere Definition findet sich bei Zech (1998, S. 308), der eine Problemaufgabe dadurch charakterisiert, dass dem Problemlösenden eine Hürde zwischen Anfangs- und Endzustand gestellt ist. Für Zech kann diese Hürde sehr einfach oder auch sehr schwierig zu überwinden sein. In der nachfolgenden Definition aus dem Grundschulbereich wird gut beschrieben, worin die Hürde für die Schülerinnen und Schüler besteht: „Der Begriff „Problemaufgabe“ (problemhaltige Textaufgabe) bezeichnet eine Aufgabengruppe, der in der Regel anspruchsvolle mathematische Strukturen zugrunde liegen, die mitunter so in Sachsituationen eingebettet sind, dass die den Kindern vertrauten Grundmodelle der Rechenoperationen nicht ohne weiteres sichtbar bzw. nicht ohne Transformationsleistung anzuwenden sind.“ (Rasch 2001, S. 26). Nach dieser Definition liegt die Anforderung der Problemaufgabe darin, relevante Informationen aus dem Text zu entnehmen, in eine mathematische Situation umzuwandeln und ein passendes (bekanntes) Lösungsverfahren zuzuordnen. Diese Tätigkeit wird als Transformation bezeichnet und besteht für die Schülerinnen und Schüler im Erfassen der Sachsituation und im Erkennen des passenden mathematischen Verfahrens. Damit besteht die hauptsächliche Tätigkeit im Mathematisieren und das kann als direkte Transformation bezeichnet werden. Damit liegt nach Dörner keine Problem vor. Rasch konkretisiert später mithilfe von fünf Aspekten worin die Hürde für Schülerinnen und Schüler bestehen kann und nennt u. a. die individuellen Voraussetzungen, das Umdenken bekannter mathematischer Wissensbereiche (vgl. Rasch 2001, S. 26), damit kommt sie meinem Verständnis einer Aufgabe, die Problemlösen anregt, näher als es mit der obigen Definition einer Problemaufgabe deutlich wird. In dieser Arbeit wird der Fokus weniger auf die Tätigkeiten des Transfers und des Mathematisierens gelegt und daher wird der Begriff Problemaufgabe nicht synonym zur Problemlöseaufgabe verwendet.

Damit ist die Verbindung zwischen Modellieren und Problemlösen bereits aufgeworfen. „Modellieren bedeutet, komplexe, realistische Probleme mithilfe von Mathematik zu lösen. Der grundlegende Gedanke des Modellierens und damit des Anwendens von Mathematik auf die Realität ist die Erstellung eines Modells. Ein Modell ist eine vereinfachende Darstellung des realen Sachverhaltes, die nur gewisse, für die jeweilige Fragestellung relevante Teilaspekte der Situation berücksichtigt.” (Maaß 2011, S. 1). In dieser Definition wird der Begriff Problem direkt aufgegriffen. Es gilt dieses Problem zu lösen, indem die realitätsnahe Situationen erfasst wird, möglicherweise vereinfacht wird und ein passendes mathematisches Modell gefunden wird. Häufig werden zusätzliche Informationen und Abschätzungen von Gegebenheiten ganz zu Beginn benötigt, damit ein mathematisches Modell erstellt werden kann. Dieses Modell ist (im Idealfall) nicht durch die Aufgabestellung festgelegt und muss im Lösungsprozess entwickelt werden. Teilweise können verschiedene mathematische Modelle geeignet sein, um die Aufgabe zu lösen. Im Schulunterricht besteht häufig zunächst die Wahl aus beispielsweise Funktionen unterschiedlichen Grades, wie ganzrationale Funktionen ersten, zweiten oder dritten Grades. Im Modellierungskreislauf spricht man beim Prozess der Modellfestlegung vom *Mathematisieren* (z. B. Holzäpfel et al. 2018, S. 45; Leuders 2003, S. 157).

Es gibt unterschiedliche Sichtweisen auf den Zusammenhang zwischen Modellieren und Problemlösen. Ein Standpunkt basiert darauf, dass eine Abgrenzung beider Begriffe voneinander nicht erforderlich scheint (vgl. Heinrich et al. 2015, S. 282). In einer anderen Perspektive werden beide Begriffe und auch Prozesse gleich behandelt, da sie sich hauptsächlich in dem Bezug zur Realität unterscheiden (vgl. Holzäpfel et al. 2018, S. 45f.). Die Einordnung der Ausgangssituation als realistisch oder im Gegensatz dazu als innermathematisch wird in einer weiteren Betrachtung als Unterscheidungsmerkmale zwischen Modellieren und Problemlösen herangezogen. Diese letzte Abgrenzung ist nicht so trennscharf wie sie erscheint. Es gibt viele Aufgabenstellungen, die einen stark konstruierten Realbezug enthalten. Dies kann den Zugang bei der Bearbeitung erleichtern oder auch als erster Schritt von der Rechenaufgabe zur Textaufgabe aufgefasst werden. Die Tätigkeit des Modellierens, als Finden eines geeigneten mathematischen Modells (vgl. Maaß 2011, S. 1), scheint in diesen Fällen nicht gefordert zu werden. Leuders und Büchter verwenden eine Perspektive der beidseitigen Wechselwirkung zwischen beiden Kompetenzen. Für die gegebene Realsituation der Modellierungsaufgabe ist kein Lösungsverfahren bekannt und damit kann sie als Problemlöseaufgabe definiert werden. Modellieren ist somit Teil des Problemlösens (vgl. Büchter & Leuders 2005, S. 30f.). Aus der obigen Definition nach Maaß könnte durch die Verwendung des Begriffs Problem eine ähnliche Sichtweise unterstützt werden. Andersherum kann das Problemlösen als Teil des Modellierens betrachtet werden: Nach der Mathematisierung der Sachsituation ist für die Bearbeitung des mathematischen Modells eine Lösung zu finden, eventuell stellt dies innermathematische Hürden dar und erfordert somit Problemlösetätigkeiten (vgl. Büchter & Leuders 2005, S. 30). Bruder und Collet erweitern diese Perspektive insofern, dass sie zusätzlich zu den Phasen der Modellfindung und des Lösens innerhalb des Modells, auch in der Phase des Validierens Problemlösetätigkeiten als möglich ansehen. In Ihren Überlegungen führen sie dies zu drei Problemtypen zusammen: Mathematisierungsprobleme, Probleme der verwendeten Mathematik und Interpretationsprobleme (vgl. Bruder & Collet 2011, S. 16f.).

Aus der Perspektive der Unterrichtspraxis kann es meiner Erfahrungen nach durchaus sinnvoll sein, eine Abgrenzung zwischen den beiden Kompetenzen zu ziehen und dies kann anhand der Betrachtung der mathematischen Tätigkeit beim Bearbeiten der Aufgabe und der Analyse möglicher Barrieren gelingen. Die grundlegende Tätigkeit des Modellierens liegt in der Modellfindung, also darin die Realität in eine passende mathematische Situation zu übertragen (vgl. Maaß 2011, S. 1), wodurch auch das Validieren eingeschlossen ist. Damit sind in der Regel andere Denktätigkeiten für das Lösen von Modellierungsaufgaben nötig als es bei Problemlöseaufgaben der Fall ist. Der Kern der Problemlösetätigkeit liegt in der Überwindung einer Barriere, in dem ein Lösungsweg erarbeitet wird, der in dieser Form dem Lernenden noch nicht bekannt ist. In der Regel sind dadurch konkrete Überlegungen und Tätigkeiten am mathematischen Gegenstand erforderlich (vgl. Holzäpfel et al. 2018, S. 42f.). Diese Einschätzung kann auch durch die formulierten Kompetenzerwartungen am Ende der Sekundarstufe I in den Kernlehrplänen an Gymnasien unterstützt werden (vgl. Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen 2022, S. 19f.). Die Unterscheidung kann an einer Fermi-Frage wie zum Beispiel: welcher Anteil der Heizkosten kann an unserer Schule eingespart werden? verdeutlicht werden. Diese Aufgabe eignet sich durchaus um Teiltätigkeiten des Modellierens wie das Recherchieren von Informationen, das Abschätzen von Werten und das Festlegen von benötigten Parametern, anzuregen (vgl. Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen 2022, S. 19). Nach der Festlegung auf die zu betrachtenden Größen wie Gesamtverbrauch, benötigter Anteil, Abschätzungen und Preisrecherche, können in dem mathematischen Modell die benötigten Werte ohne weitere Hürden berechnet werden. Es liegt kein Problemlösen innerhalb des Schrittes der Mathematisierung vor. Die vorab getätigten Festlegungen und Abschätzungen sind typische Tätigkeiten für das Modellieren. Sie erinnern an das Vorgehen von Ingenieuren, die das Werkzeug Mathematik nutzen, um ihre Pläne umsetzen zu können. Damit wird Winters erste Grunderfahrung, Mathematik als Anwendung, adressiert (vgl. Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen 2022, S. 8). Die Abschätzungen und Festlegungen auf das mathematische Modell mögen ungewohnt und aufgrund der komplexen Situation auch nicht ganz leicht sein, aber dies als Barriere im Sinne des Problemlösens zu bezeichnen, erscheint im Vergleich zu klassischen Problemlöseaufgaben, wie dem Turm von Hanoi, unpassend. Es können Problemlöseprozesse wie Umstrukturierung, Anwenden von Strategien oder Kreativität den Lösungsprozess stützen (vgl. Abschnitt 2.3.2). Beim Problemlösen wird stärker auf Winters dritte Grunderfahrung, Mathematik als individuelle und kreative intellektuelle Tätigkeit, abgezielt (vgl. Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen 2022, S. 8). Diese Unterscheidung kann auch vorgenommen werden, wenn andere Teilschritte des Modellierungskreislaufes fokussiert werden. Im Unterricht sind die mathematischen Modelle in der Regel bekannt, so dass aus einer Reihe von gegebenen Modellen gewählt wird. Damit ist das mathematische Modell in der Regel bekannt und die Berechnungen stellen keine Barriere dar. Für komplexere Modellierungsaufgaben, für die kein (offensichtliches) mathematisches Modell zur Verfügung steht und die einen deutlich höheren mathematischen Anspruch als beispielsweise die obige Fermi-Aufgabe erfordern, kann diese Trennung nicht mehr gelten. Mithilfe von Dörner könnte man komplexe, realistische Modellierungsaufgaben als ill-defined und Problemlöseaufgabe im Mathematikunterricht als well-definded Probleme betrachten (vgl. Abschnitt 2.3.1). Aus Perspektive der Unterrichtsplanung und -gestaltung kann eine solche Differenzierung der Tätigkeiten im Sinne einer Fokussierung auf Kerntätigkeiten dazu führen, dass ein breites Spektrum an Tätigkeiten und Erfahrungen im Mathematikunterricht erlebt werden können und kann als zielführend eingeordnet werden.

Bei Argumentations- und Begründungsaufgaben werden durch die Aufgabenstellungen Erklärungen zum Lösungsweg oder zu einzelnen Teilschritten eingefordert (vgl. Büchter & Leuders 2005, S. 30). Der Übergang von diesem Aufgabentyp zu

Beweisaufgaben ist fließend. Der Grad an Stringenz der Argumente und der gesamten Argumentationskette macht den Unterschied. In einem Beweis sollten keine Argumentationslücken oder schwache Argumente gefunden werden, die die Gültigkeit anzweifeln lassen (vgl. Reiss & Ufer 2009, S. 156). Das Beweisen kann zu den zentralen Tätigkeiten der Mathematik gezählt werden: Das Beweisen macht den Kern der Mathematik aus (vgl. Grieser 2007, S. 1f., Reiss & Ufer 2009, S. 156). Zwischen den Tätigkeiten des mathematischen Beweisens und des mathematischen Problemlösens können viele Gemeinsamkeiten erkannt werden. Eine unterrichtsbezogene Betrachtung des Beweisens zeigt, „[…] dass zum Erlernen des Beweisens eben nicht nur die Beschäftigung mit dem fertigen Produkt, dem Beweise bzw. Beweistext gehört, sondern in mindestens ebenso großem Maße auch explorative Tätigkeiten wie das Erkunden von Bedingungen und das Aufstellen von Vermutungen.“ (Reiss & Ufer 2009, S. 162). Diese Tätigkeiten können ebenso dem Problemlösen zugeschrieben werden und sind teilweise in Strategien und Heurismen wieder zu finden: systematisches Probieren, Rückführen auf Bekanntes oder Fallunterscheidungen.

Teilweise werden auch Knobelaufgaben oder mathematische Rätsel zu den typischen Problemlöseaufgaben gezählt. Klassischer Weise sind dabei Streichholzrätsel oder Legespiele wie der Turm von Hanoi gemeint (vgl. Franke & Reinhold 2016, S. 19f.). Es sind knifflige Aufgabenstellungen, die häufig knifflige oder ungewohnte Lösungsideen beinhalten. Der Anspruch der Mathematikdidaktik an Problemlöseprozesse geht über dieses Verständnis des Knobelns und Rätselns hinaus.

Zusammenfassung

- In dieser Arbeit wird der Begriff Problemlöseaufgabe verwendet. Darunter wird die Aufforderung verstanden, eine

Lösung zu finden, ohne dass anfangs ein passendes Lösungsverfahren erkenntlich ist.

- Der Problemlöseprozess kann durch Heurismen und Strategien strukturiert bzw. angeregt werden.
- Als Gegensatz zur Problemlöseaufgaben werden Routineaufgaben, Rechenaufgaben oder Textaufgaben verstanden.
- Benachbarte Begriffe zu Problemlöseaufgabe sind Problem, Problemstellung.
- Es folgt eine Einordnung der Aufgabentypen: Problemaufgabe, Modellierungsaufgabe, realitätsbezogene Aufgabe, Argumentations- und Begründungsaufgabe, Beweisaufgaben und Knobelaufgaben.

2.3.5 Problemlösen im Mathematikunterricht

Die große Bedeutung von Problemen und deren Lösung in der Mathematik (vgl. Abschnitt 2.2) führt dazu, dass die Tätigkeit des Problemlösens als zentraler Kern der Mathematik Bestandteil des Schulunterrichts sein muss (vgl. u.a. Bruder & Collet 2011, S. 7f., Holzäpfel et al. 2018, S. 12ff., Leuders 2003, S.119, Winter 1995, S. 37).

Als rechtliche Grundlage für ein Einforderung dieser Problemlösefähigkeit und für weiteres Lehrerhandeln wird das Problemlösen als eine von sechs prozessbezogenen Kompetenzen in den Bildungsstandards aller Länder bereits 2003 aufgenommen. Damit rücken die prozessbezogenen Kompetenzen stärker in den Fokus, eine angemessene Umsetzung in der Unterrichtspraxis bleibt noch aus. „Der Erwerb von Wissen wird in den Schulen sehr sorgfältig organisiert und die Übung von Problemlöseverhalten grob vernachlässigt.“ (Edelmann & Wittmann 2012, S. 194).

Die Bildungsstandards für Mathematik setzen sich zum Ziel, dass alle Schülerinnen und Schüler die drei Winter´schen Grunderfahrungen im Mathematikunterricht erleben können. Zu diesen Erfahrungen zählen neben dem Beurteilen und Bewerten von Vorgängen und Ereignissen mithilfe der Mathematik und dem Erlernen der Symbol- und Formelsprache der Mathematik auch das Problemlösen. Es soll die Bedeutung der Mathematik für die Bearbeitung von Problemen verdeutlicht werden, aber auch eine allgemeine Problemlösefähigkeit erworben werden (Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen 2022, S. 6). Um dies erreichen zu können, wird im Unterkapitel *Probleme mathematisch lösen* verschiedene Tätigkeiten aufgezählt, die zum Erlangen einer Problemlösefähigkeit führen sollen. „Das Spektrum reicht vom Bearbeiten vorgegebener und selbst formulierter Probleme auf der einen Seite bis hin zum Überprüfen der Plausibilität von Ergebnissen, dem Finden von Lösungsideen und dem Reflektieren von Lösungswegen auf der anderen Seite." (Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen 2022, S. 11).

Der allgemeine Aufbau der Bildungsstandards kann mithilfe dreier Achsen aufgezeigt werden. Es wird unterschieden zwischen Anforderungsbereich, Leitidee und Kompetenz. Dabei bildet das mathematische Problemlösen eine von sechs zentralen mathematischen Kompetenzen. Die Leitideen enthalten inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen, wie beispielsweise Raum und Form, womit die Geometrie benannt wird.

Die Anforderungsbereiche legen das Leistungsniveau der Schülerin bzw. des Schülers fest. Die drei Leistungsniveaus zum Problemlösen werden in Tab. 1 vergleichend aus den Bildungsstandards 2003 und den aktuell geltenden Bildungsstandards von 2022 für den mittleren Schulabschluss abgebildet:

Aus den Bildungsstandards 2003	**Aus den Bildungsstandards 2022**
Die Schülerinnen und Schüler können…	Die Schülerinnen und Schüler…
Reproduzieren	
- *Routineaufgaben lösen („sich selbst zu helfen wissen“)* - *einfache Probleme mit bekannten – auch experimentellen – Verfahren lösen (aus 2003)*	- *geben Heurismen an (z. B. Skizze erstellen, systematisch probieren),* - *lösen einfache Probleme mit bekannten Heurismen (z. B. systematisches Probieren)*
Zusammenhänge herstellen	
- *Probleme bearbeiten, deren Lösung die Anwendung von heuristischen Hilfsmitteln, Strategien und Prinzipien erfordert* - *Probleme selbst formulieren* - *Die Plausibilität von Ergebnissen überprüfen*	- *formulieren Problemstellungen,* - *wählen geeignete Heurismen zur Lösung entsprechender Probleme aus,* - *überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen*
Verallgemeinern und Reflektieren	
- *Anspruchsvolle Probleme bearbeiten* - *Das Finden von Lösungsideen und die Lösungswege reflektieren*	- lösen anspruchsvolle, komplexe oder offen formulierte Probleme, - reflektieren das Finden von Lösungsideen, vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege

Tab. 1: Vergleichende Darstellung der drei Leistungsniveaus zum Problemlösen aus den Bildungsstandards 2003 und 2022.

Die Übertragung eines Leistungsniveaus wie *Reproduzieren* auf den Problemlöseprozess erscheint per Definition schwierig. Es steht in gewisser Weise im Widerspruch zur Tätigkeit des Problemlösens. Das Lösen von Routineaufgaben wird nicht Tätigkeit des Problemlösens bezeichnet. Es existiert bei erfolgreichem Lernverlauf keine Hürde, durch die jedoch das Problem definiert ist (siehe Definition von Dörner). Die Überarbeitung der Standards in 2022 hat sinngemäß versucht Routinen im Problemlöseprozess auszumachen, so dass auch das Niveau *Re-*

produzieren passender beschrieben werden kann. Die Reproduktion besteht in der Widergabe von bekannten Heurismen und einer Anwendung bei einfachen Problemen.

Der Barrierebegriff aus der kognitionspsychologischen Definition ist wiederzufinden. Formulierungen wie „einfache Probleme“ oder „anspruchsvolle Probleme“ weisen auf unterschiedlich hohe Barrieren hin. Als Hilfsmittel für die Überwindung von Barrieren wird auf Heurismen verwiesen. Konkret werden das systematische Probieren und das Erstellen einer Skizze benannt. Im Kernlehrplan Mathematik für Gymnasien in Nordrhein-Westfalen wird im Gegensatz zu den vorherigen Lehrplänen die Tätigkeit des Problemlösens konkretisiert in ein Erkunden, Lösen und Reflektieren (vgl. Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen 2022, S. 20).

Mit dieser Konkretisierung der Tätigkeiten des Problemlösens kann auch die Planung eines Unterrichts gezielter erfolgen. Es sind somit Grundlagen gelegt, was unter Problemlösen in der Mathematikdidaktik verstanden wird. „Weniger Einigkeit herrscht darüber, was alles unter den Begriff Problemlösen fällt und wie Problemlösen im Mathematikunterricht genau aussieht. Es herrscht eine durchaus produktive Meinungsvielfalt.“ (Leuders 2003, S. 119).

Damit eine Aufgabe ein Problemlösen im Unterricht im erwünschten Sinne anregt, sollte der Lösungsprozess eine weitergreifende mathematische Idee beinhalten oder typische Fragestellungen aufkommen lassen (vgl. Holzäpfel 2018, S. 41ff.). Dabei können neben mathematischen Inhalten die Verwendung von Heurismen fokussiert werden. An die eigentliche Aufgabe können Reflexions- oder Begründungsaufgaben angeschlossen werden, um dadurch die nötigen Bezüge beim Lernenden anzuregen. Ohne solche Zusätze bleiben die Bearbeitungsprozesses auf einer Ebene der unreflektierten Spielerei, die nur selten zu

Einsichten und Erkenntnissen führe (vgl. Leuders 2003, S. 120f.).

Das führt zu der Frage, welche Art von Problemlöseaufgaben im Unterricht eingesetzt werden können oder sollen und wann eine Problemlöseaufgabe als geeignet oder ungeeignet bewertet werden kann. Daran schließen sich weitere fachdidaktische Überlegungen an, welches Ziel kann mit dem Einsatz der Problemlöseaufgabe verfolgt werden? Neben der konkreten Umsetzung eines Problemlösens im Unterricht, dazu komme ich im Anschluss, rücken verschiedene Merkmale von Aufgaben in den Vordergrund. Allgemeine Aufgabenmerkmale sind: Zugänglichkeit, Herausforderung, Offenheit der Anfangssituation, des Weges und des Ergebnisses, Barriere, Variation, Bedeutsamkeit oder Authentizität (vgl. Büchter & Leuders 2005, S. 118f.). In Anlehnung daran werden „Kriterien für gute Probleme“ formuliert, mit denen ein Problemlösen im mathematischen Sinne angeregt werden kann. Die Anzahl der Kriterien unterscheidet sich, ebenso die Perspektive oder Schwerpunktsetzung. Die nachfolgenden vier Kriterien bilden den Kern aus Kriterienkatalogen, die in ähnlicher Formulierung sowohl in der deutschen wie auch in der internationalen Mathematikdidaktik Anklang finden (vgl. Cai & Lester 2010, Leuders 2003, S. 123):

1. Es wird ein Wissenszuwachs in der Mathematik durch das Aufzeigen mathematischer Grundideen, Zusammenhänge und/oder Begriffe beabsichtigt.
2. Die Problemlösetätigkeit kann auf unterschiedliche Weise erfolgen und lässt verschiedene Schwierigkeitsgrade zu, die für die Schülergruppe angemessen erscheinen.
3. Die Problemstellung ist für die Lernenden passend und sie können diese schnell und leicht erfassen.

4. Es liegt kein bekanntes Lösungsverfahren vor. Die Lernenden können durch ihre Vorkenntnisse und die Kombination dieser eine Lösung des Problems erstellen. (vgl. Leuders 2003, S. 123).

In der japanischen und amerikanischen Unterrichtskultur hat sich unter dem Begriff open-ended-approach ein sehr offenes Unterrichtskonzept entwickelt, bei dem die Offenheit der Aufgabenstellung zum Ausgangspunkt eines Entdeckens und Erfindens von Mathematik aufgegriffen wird. „Die Offenheit ist aber nicht allein Eigenschaft der Aufgabe, sondern wird vor allem durch das Unterrichtsarrangement erreicht […].“ (Leuders 2003, S. 123). Die Problemlöseaufgabe kann als Teilmenge der offenen Aufgabe verstanden werden (vgl. Leuders 2003, S. 126; Rott 2013, S. 26f.).

Daran knüpft ein Kriterienkatalog für Schwierigkeitsparameter einer Aufgabe an (vgl. Bruder & Collet 2011, S. 13ff.). Aus diesen Überlegungen folgen dann weitere Umsetzungsideen für ein gelingendes Problemlösen im Mathematikunterricht.

Um das Potential einer Aufgabe als Problemlöseaufgabe einschätzen zu können, können auch allgemeinere Aufgabenkategorisierungen hilfreich sein. Ein häufig verwendetes Kategorienmodell der Mathematikdidaktik besteht in dem Klassifikationsschema für Mathematikaufgaben von Jordan et al. (2006), das in der COACTIV-Studie Anwendung gefunden hat. Aus der Synthese bestehender Modelle der verschiedenen Fachdidaktiken wurde ein fachübergreifendes Aufgabenkategoriensystem entwickelt (vgl. Maier et al. 2010). Anhand von sieben Dimensionen kann jeder Aufgabenstellungen eine von mindestens drei Ausprägungen zugeordnet werden. Zu den für diese Arbeit besonders relevanten Dimensionen zählen die Wissensart, die in Fakten, Prozeduren, Konzepte und Metakognition unterteilt werden, sowie die Dimension kognitiver Prozess. Dies lässt sich unterteilen in Reproduktion, nahen und weiten Transfer sowie Problemlösen. Über Offenheit wurde bereits bei der Einteilung von Problem diskutiert und auch hier gibt es eine Dimension Offenheit, die sich in definiert/konvergent, definiert/divergent und ungenau/divergent unterteilt. Über die Dimension Wissenseinheit kann man eine Information über die Komplexität der Anforderungen beim Lösen, also auch die Größe der Hürde erfahren. Die zwei weiteren Dimensionen sprachliche Komplexität und Repräsentationsformen sollen der Vollständigkeit halber genannt werden. Eine detaillierte Beschreibung des Kategoriensystems erfolgt bei der Anwendung zur Analyse der Testaufgaben im Abschnitt 9.1.4.

Zusammenfassung

- Problemlösen ist als Kerntätigkeit der Mathematik im Kernlehrplan NRW, in den Bildungsstandards und in Winters Grunderfahrungen verankert und erhält somit zentrale Bedeutung für den Mathematikunterricht.
- Es werden vier Kriterien für die Auswahl guter Problemlöseaufgaben herbeigeführt: (1) mathematischer Wissenszuwachs, (2) differenzierte Lösungswege, (3) Zugang für Lernende und (4) bisher unbekannte Lösungsverfahren.
- Ein überfachliches Kategoriensystem für Aufgaben gibt Aufschluss darüber, welche Anforderungen die Aufgabe hinsichtlich Kognition, Offenheit, Lebensweltbezug, Sprache und Repräsentationsformen einfordert.

2.3.6 Problemlösen in der Geometrie

Die Geometrie bietet von jeher Anlässe zum Problemlösen. Historisch gesehen haben bereits die Griechen und Chinesen die Grundlagen der Mathematik mit geometrischen Problemstellungen begonnen bzw. algebraische Fragen auf geometrische Fragen zurückgeführt, um diese so lösen zu können. Zu Beginn eines solchen Prozesses steht häufig eine geometrische Fragestellung, die geometrisch gelöst, formalisiert und anschließend algebraisch als Ergebnis verfasst wird. Beispielhaft ist hierfür die Landvermessung (ab 1827 durch Gauss) oder die Navigation der Seefahrt zu nennen (vgl. Wittmann 2014, S. 81). Auch heute sind sich Mathematikdidaktiker und -didaktikerinnen darüber einig, dass sich die Geometrie auf vielfältige Weise zum Einüben des Problemlösens eigne (z. B. Hattermann 2015, S. 195; Holland 2007, S. 22; Wittmann 2014, S. 81f.). „Geometrie ist insbesondere deshalb ein besonders geeignetes Übungsfeld für das Problemlösen, da sich viele geometrische Probleme in Modellen, Skizzen und Zeichnungen gut veranschaulichen lassen, die Handlungsobjekte (zumindest in der Euklidischen Geometrie der Ebene mit Punkten, Geraden, Strecken, Kreisen) überschaubar und die erlaubten Handlungen (etwa Operationen mit Zirkel und Lineal) gut nachvollziehbar sind." (Weigand 2014a, S. 23).

Damit wird der Geometrie eine Schlüsselrolle beim Problemlösenlernen zugeschrieben. Diese Wirkung lässt sich auch umgekehrt betrachten. Erst durch Problemlösetätigkeit kann eine Verstehensorientierung beim Erlernen der Geometrie entstehen. Problemlösen wird dabei als einer von fünf Aspekten geometrischen Denkens ausgemacht. „Diese sind einerseits für das verstehensorientierte Lernen von Geometrie erforderlich und können andererseits […] durch das Lernen von Geometrie ausgebildet werden." (Hattermann et al. 2015, S. 195).

Problemlösenlernen ist auch mithilfe der anschaulichen Geometrie komplex. Holland stellt Überlegungen an, aus welchen Gründen ein Problemlöseversuch in der Geometrie nicht erfolgreich ablaufen kann. Dabei zählt er folgende Schwierigkeiten auf: mangelnde Operatorenkenntnisse, die Anwendbarkeit eines Operators wird nicht erkannt, ungerechtfertigte Anwendung eines Operators sowie Schwierigkeiten beim Anwenden heuristischer Strategien. Zu den Operatoren zählt er Sätze, Formeln, Konstruktionsoperatoren (vgl. Holland 2007, S. 174f.).

Gehen Problemlösen und Geometrie miteinander einher, so gelangt man in der Mathematikdidaktik zügig zu einem weiteren Konstrukt, dem Begriffslernen. „Ein wesentlicher Aspekt von Geometrie, so Herbart, liegt in der Begriffsbildung.“ (Ullmann 2015, S. 24). Aber ebenso wird das Begriffslernen durch das Problemlösen bedingt. So unterteilt Weigand das Begriffslernen in drei Bereiche: Aufbau angemessener Vorstellungen, Erwerb von Kenntnissen und Aneignung von Fähigkeiten. Zum letztgenannten zählt er neben Konstruieren und Berechnen das Problemlösen (vgl. Weigand 2014, S. 103ff.). Auch beim Problemlöseprozess kann die Bedeutung von Begriffen hervorgehoben werden. Diese dienen der Problemklärung, der Aktivierung von Vorwissen, bieten Hilfen beim Knüpfen von Beziehungen, können beim Umstrukturieren helfen oder beinhalten bereits bestimmte Lösungsideen. Vollrath bezeichnet diesen Zusammenhang zwischen Problem und Begriff passend als Wechselspiel (vgl. Vollrath 1986, S. 243ff.). Dieses Wechselspiel kann zwischen allen drei Begriffen ausgemacht werden: Problemlösen – Geometrie – Begriffsbildung. Bereits in Abschnitt 2.3.6 wurde das Begriffslernen am Beispiel der Mittelsenkrechte vertiefend betrachtet. Dabei wird aufgeführt, welche Facetten und Elemente das Begriffslernen ausmachen und wie diese für die Mittelsenkrechte formuliert werden können. Die Bedeutung für die Schülerinnen und Schüler beschreibt Vollrath wie folgt: Indem man der Schülerin bzw. dem Schüler die Rolle eines Begriffs im Problemlöseprozess bewusstmacht, kann man ihm eine Antwort auf diese Frage (die Sinnfrage) geben (vgl. Vollrath 1986, S. 281).

Zum Verständnis geometrischer Begriffe gibt es ein empirisch fundiertes Modell, in dem zwischen fünf Niveaustufen zum Begriffserwerb unterschieden werden kann. Sowohl Kinder als auch Erwachsene können bezüglich ihres Begriffsverständnisses mithilfe des van-Hiele-Modells in die Niveaustufen räumlich-anschauungsgebundenes Denken, analysierend-beschreibendes Denken, abstrahierend-relationales Denken, schlussfolgerndes Denken und strenges abstraktes-metamathematisches Denken eingeteilt werden. Die Stufen bauen aufeinander auf. Damit beinhaltet ein Denken der Stufe 2 auch die Fähigkeiten, die in Stufe 1 beschrieben werden. Die Übergänge zwischen den Stufen sind fließend und nicht altersabhängig. Van Hieles gehen davon aus, dass der Entwicklungsprozess und der Lernprozess der Menschen, die Stufe bestimmt. Damit kann auch die Lehrperson durch das Anregen bestimmter Lernprozesse Einfluss auf die Entwicklung und das Erreichen bestimmter Niveaustufen nehmen (vgl. Franke & Reinhold 2016, S. 136 ff.)

Die erste Niveaustufe beinhaltet ein reines Zuordnen von Figuren zu Begriffen. Eine Begründung fehlt. Es kann also nicht gefolgert werden, warum diese Figur als Rechteck bezeichnet werden kann. Dies geschieht mit dem Erreichen der Stufe 2. Es werden geometrische Objekte nach ihren Eigenschaften sortiert und es wird überprüft, ob Objekte bestimmte Eigenschaften besitzen. Beziehen wir dies auf das Objekt der Mittelsenkrechten, können die Eigenschaften verläuft senkrecht zur Strecke $\overline{AB}$ und durch die Mitte der Strecke $\overline{AB}$ überprüft werden. Diese Eigenschaften lassen sich aus der Definition A entnehmen. Das Ziehen erster logischer Schlüsse, wie das Formulieren von wenn-dann-Aussagen charakterisiert die Niveaustufe 3. Für die Mittelsenkrechte kann beispielsweise formuliert werden: Wenn ein Punkt gleich weit entfernt ist von den Punkten A und B, dann liegt er auf der Mittelsenkrechte zu $\overline{AB}$ oder Wenn ein Punkt nicht auf der Mittelsenkrechten zu $\overline{AB}$ *liegt, dann ist er* *auch nicht gleich weit von A und von B entfernt*. Das Nachvollziehen von Beweisen und Teilschritten daraus oder die Übertragung abstrakter Ideen auf andere Sachverhalte zeigt sich bei einem Denken der Stufe 4.

Die Anforderungen zum Erlernen der Mittelsenkrechte können grundlegend einem Denken der Stufe 3 zugeordnet werden. Die Anwendung der Mittelsenkrechten (als Werkzeug) beim Problemlösen oder das Nachvollziehen von Beweisen erfordert ein Verständnis der Beziehungen, die über diese Grundlagen hinausgehen und der Stufe 4 zugeordnet werden können. Meiner Einschätzung nach geht das über den Schulinhalt zur Mittelsenkrechten deutlich hinaus (vgl. Abschnitt 5.3).

Zusammenfassung

- Der Geometrie wird eine Schlüsselrolle beim Problemlösenlernen zugeschrieben. Und umgekehrt: Verstehensorientierung in der Geometrie erfolgt durch Problemlösetätigkeiten.
- Die Verbindung von Problemlösen und Geometrie führt zum Begriffslernen.
- Das Verstehen geometrischer Begriffe kann mit dem van-Hiele-Modell beschrieben werden.
- Das Erlernen der Mittelsenkrechten wird der Niveaustufe 3 zugeordnet. Typisch für diese Stufe sind Wenn-Dann-Aussagen.

2.3.7 Umsetzungsmöglichkeiten des Problemlösens im Mathematikunterricht

Als zentraler Kern der Mathematik und durch die Anregung von Lösungsprozessen müssen Probleme und Problemlöseprozess Bestandteil des Schulunterrichts sein. Um den Erfolg im Problemlösen zu vergrößern, muss auch im Unterricht Raum und Zeit für das Lösen von Problemen geschaffen werden. „Nur durch Üben des Problemlösens in Schulen wird die Denkfähigkeit erhöht, die zum Lösen von Problemen nötig ist. Problemlösungen müssen in den einzelnen Unterrichtsfächern regelmäßig geübt werden. Problemlösendes Denken entwickelt sich nicht als Zusatzeffekt beim Wissenserwerb.“ (Edelmann & Wittmann 2012, S. 194).

Inwiefern wiederholtes Anregen von Problemlösetätigkeiten bereits zu verbessertem Lösungsverhalten bei Schülerinnen und Schülern führen kann, muss kritisch betrachtet werden. Denn ohne einen Einsatz von Lerngelegenheiten, die Problemlöseprozesse bei den Lernenden einfordern und diese anschließend reflektieren und diskutieren, wird eine Verknüpfung der beiden Wissensbereiche, Wissensstrukturen (bestehend aus konzeptuellem und prozeduralem Wissen) und metakognitives Wissen, nicht erreicht werden können (vgl. Reimann und Rapp 2008, S. 170ff.). Ein Unterricht, der auf eine Verbesserung der Problemlösefähigkeiten abzielt, sollte ebenso auf „eine Aktivierung der Lernenden, auf deren möglichst selbstständige Arbeit und auf ihre tiefgehende, auf Verständnis zielende Auseinandersetzung mit dem Problem hin“ (Schnack 2012, S. 7) fokussieren. Bereits oben wurden darauf hingewiesen, dass die Vorstellungen von einem Unterricht, der Problemlösefähigkeiten fördert, in der Mathematikdidaktik unterschiedlich aussehen kann. In Anlehnung an Schroeder und Lester (1989) werden grundsätzlich drei Rollen des Problemlösens im Mathematikunterricht betrachtet. Diese werden bezeichnet als Lernen *für* Problemlösen, Lernen *durch* Problemlösen und Lernen *über* Problemlösen (vgl. Schroeder & Lester 1989; Holzäpfel et al. 2018, S. 17 ff.). Das Lernen *durch* Problemlösen hat das konzeptionelle Verständnis der Mathematik zum Ziel. Fokussiert werden mathematisches Denken und aktives Mathematiktreiben. Das Lernen *für* Problemlösen und das Lernen *über* Problemlösen lässt Problemlösefähigkeiten, wie das Anwenden und

Erlernen von Strategien und Heurismen bzw. das Reflektieren über den Problemlöseprozess in den Mittelpunkt rücken (vgl. Holzäpfel et al. 2018, S. 17ff.). In Anlehnung daran können die nachfolgenden **vier Einsatzmöglichkeiten** von Problemlöseanregungen im Mathematikunterricht ausgemacht werden: das Erlernen eines Problemlöseplans, das Reflektieren von Strategien, der Einsatz beim Produktiven Üben und das Erarbeiten neuer Inhalte (vgl. Holzäpfel et al. 2016, S. 2ff.). Sie unterscheiden sich in der Herangehensweise und dem Blickwinkel auf den Problemlöseprozess und werden kurz beschrieben:

Das Arbeiten mit einem Problemlöseplan geht auf Pólya zurück, der bereits 1949 einen Fragenkatalog entwarf, mit dessen Hilfe der Problemlöseprozess unterstützt werden soll (vgl. Pólya 1980, S. 18ff.). Dieser Plan besteht aus vier Phasen: Verstehen der Aufgabe, Erstellen eines Plans, Ausführen des Plans und Rückschau. Dieser Plan findet auch heute Anwendung sowohl in Werken als Auswertungsgrundlage in empirischen Studien (z. B. Baumanns 2022, Herold-Blasius 2021, Rott 2013), als auch in Problemlösebüchern (z. B. Mason et al. 2006, S. 28 ff.; Vohns 2007, S. 2ff.), und auch in Werken zur Unterrichtsgestaltung zur Anregung von Problemlöseprozessen (vgl. Bruder & Collet 2011, S. 18f.) oder weiterentwickelten Anleitungen, wie dem PADEK-Modell (vgl. Holzäpfel et al. 2018, S. 125f.). Dies ist nicht verwunderlich, denn Pólyas Phasen dienen zur Ausbildung einer Fragenkultur, mit der ein gegebenes mathematische Problem präzisiert und die Problemstruktur deutlich herausgearbeitet werden kann. Dies kann als grundlegend für den Problemlöseprozess bezeichnet werden, denn das Erfassen eines Problems lässt leichter eine Lösung finden (vgl. Bruder & Collet 2011, S. 23)

Die zweite Einsatzmöglichkeit besteht im Reflektieren von Problemlösestrategien. Dabei rückt der Prozess des Problemlösens in den Mittelpunkt. An charakteristischen Aufgaben werden verschiedene Strategien oder Heurismen kennengerlernt, wie zum Beispiel Rückwärtsarbeiten, systematisches Probieren oder Fallunterscheidungen. Anschließend werden passende Auswahl und Einsatz an einem Aufgabenpool eingeübt. Dies soll langfristig die Verfügbarkeit von Strategien erhöhen und somit auch die Problemlösefähigkeit. Welche Kriterien bei einer Unterrichtsplanung in diesem Sinne zu berücksichtigen sind, formulieren Bruder und Collet praxisnah aus (vgl. Bruder & Collet 2011, S. 123ff.).

Als weiterer Einsatz wird das Problemlösen in Übungsphasen zur Anregung sinnstiftender Lernprozesse genannt. Dies kann als Teilbereich des produktiven Übens angesehen werden. Bereits erlernte Verfahren werden mehrfach angewendet und somit eingeübt. Durch einen Vergleich von Lösungen, Lösungswegen oder ähnlichem, können tiefergreifende Zusammenhänge erkannt werden. Dies kann durch die Aufforderung nach einer bestimmten Lösung geschehen oder auch durch das Vergleichen und Reflektieren von Lösungen (vgl. Holzäpfel et al. 2016, S. 103f.).

Das Erarbeiten neuer Inhalte durch Problemlöseaufgaben ist eng verknüpft mit dem von Winter definierten entdeckenden Lernen. Die Aufgabenstellung wird durch eine Erkundung mathematischer neuer Inhalte angeregt. In dieser Arbeit wird das Unterrichten durch Problemlösen zur Erarbeitung neuer Inhalte in den Fokus genommen, daher wird zunächst auf das Entdeckende Lernen durch Winter eingegangen: Ausgehend von den drei Winter‘schen Grunderfahrungen ist das Problemlösen als eine der prozessbezogenen Kompetenzen in den Kernlehrplänen Mathematik verankert. Eine Möglichkeit, das Problemlösen im Unterricht zu verankern, ist das Unterrichten *durch* Problemlösen, das durch die Lehrmethode des entdeckenlassenden Lehrens unterstützt werden kann. Diesen Ideen gegenübergestellt ist die Realität des derzeitigen Unterrichts: So wird Unterricht in der Regel durch die Lehrperson in Form von Vorträgen und fragend-entwickelnden Unterrichtsgesprächen – einer sogenannten darbietenden Unterrichtsform – dominiert (vgl. Klauer & Leutner 2012, S. 96). Somit ist die Diskussion, die bereits am Ende der 60er Jahre durch den Befürworter des entdeckenlassenden Lehrens, Jerome Bruner, und durch David Paul Ausubel, der eine darbietende Lehrform bevorzugt, noch immer aktuell (vgl. Abschnitt 3.3.2).

Es stellt sich die Frage, in welcher Unterrichtsphase das Problemlösen angesiedelt werden kann. Betrachtet man die Planung einer Unterrichtseinheit, können Phasen wie Einstieg oder Erkundung, die letztendlich in einer Sicherung verankert werden, bis hin zur Anwendung und Übung ausgemacht werden. Sicherlich kann Problemlösen sowohl in der ersten wie auch der zuletzt genannten Phase eine Rolle spielen. Am Beispiel der Mittelsenkrechten wäre es denkbar zunächst im Unterricht verschiedene Geraden am Dreieck zu thematisieren und definieren, wie zusätzlich die Winkelhalbierende, die Höhe und die Seitenhalbierende. In einer anschließenden Übungsphase muss nun für jede Aufgabe entscheiden werden, welche der Geraden zur Lösung führt (Umsetzung 1). Alternativ können bestimmte Eigenschaften der Mittelsenkrechten mithilfe geeigneter Problemlöseaufgaben entdeckt werden und als Produkt des Problemlöseprozesses entstehen (Umsetzung 2).

Bei der Umsetzung 1, bei der das Problemlösen in der Übungsphase umgesetzt wird, bleibt kritisch zu betrachten, inwiefern die Definition des Problemlösens eingehalten wird und es sich tatsächlich um einen Problemlöseprozess handelt, denn dafür muss der Weg unbekannt sein. Mit einem Katalog aus vier möglichen „Wegen“ ist die Unbekanntheit des Weges zumindest deutlich eingeschränkt, weshalb man auch von einer Transferaufgabe sprechen könnte. Vergleicht man dieses Vorhaben mit der Definition einer Routineaufgabe, so kann man kaum davon sprechen, dass die Methode zur Aufgabenlösung dem Bearbeiter unbekannt ist. Es sind auch nicht mehrere Schritte notwendig, so dass dadurch eine Komplexität erreicht wird (vgl. Holland 2007, S. 170ff.).

Bei der Umsetzung 2 können folgende Überlegungen angestellt werden: Wird Problemlösen im Sinne des entdeckenden Lernens in den Unterricht eingebaut, so ist hier stets das Ziel bestimmte Begriffe zu entdecken und zu erlernen, Begriffslernen als Ziel des Problemlösens oder wie Ana Kuzle es formuliert hat: Problemlösen als ein Weg zur geometrischen Begriffsbildung (vgl. Ludwig et al. 2015).

Ebenso schließen sich weitere didaktische Fragestellungen an, wie die nach der Sozialform (dazu zählen Einzelarbeit, Partnerarbeit, Gruppenarbeit) und die Bedeutung der Eigenständigkeit der Schülerinnen und Schüler.

Zusammenfassung

- Das Stellen von Problemlöseaufgaben allein führt nicht unbedingt zu einer Förderung der Problemlösefähigkeiten. Anschließende Reflexionen, Einordnungen sind sinnvoll.
- Problemlösen im Unterricht kann vier Anliegen verfolgen: das Erlernen eines Problemlöseplans, das Reflektieren von Strategien, den Einsatz beim Produktiven Üben und das Erarbeiten neuer Inhalte.
- Problemlösen kann sowohl bei der Erarbeitung im Sinne eines Entdeckens wie auch in Übungsphasen im Sinne des produktiven Übens umgesetzt werden.
- Für die Mittelsenkrechte werden konkrete Unterrichtsumsetzungen als Entdeckung und auch Alternativen dazu erörtert.

2.4 Gestaltungsprinzipien für einen problemorientierten Mathematikunterricht

Aus den hier dargelegten Bedeutungen des Problemlösens für die Mathematik und den Mathematikunterricht sollen zentrale Aspekte bei der Gestaltung und Planung der Unterrichtsinterventionen in Kapitel 8 berücksichtigt werden. Diese werden hier zusammenfassend aufgelistet:

- Problemlösen bedeutet Barrieren erkennen und überwinden.
- Problemlösen kann Freude bereiten und Heureka-Momente erzeugen. Dies soll auch im Mathematikunterricht erfahren werden können.
- In der Geometrie sind Problemlösen und Begriffslernen eng miteinander verbunden.
- Eine Problemlöseaufgabe zur Mittelsenkrechten kann wie folgt charakterisiert werden:
  - Anfangs ist kein Lösungsweg bekannt.
  - Ein Zugang ist leicht möglich.
  - Ein mathematischer Begriff kann erlernt werden.
  - Es gibt verschiedene Lösungsansätze.
- Im Unterricht werden möglichst verschiedene Lösungsansätze präsentiert, reflektiert und eingeordnet.
- Die fünf Arten des Problemlösens 1) durch Versuch und Irrtum 2) durch Umstrukturierung, 3) durch Anwenden von Strategien, 4) durch Kreativität 5) durch Systemdenken können bei der Einordnung und Reflexion von Schülerlösungen helfen.

3 Lehr- und Lerntheorien

Ziel dieses Kapitels ist die Einordnung und Definition von entdeckenlassendem und darbietendem Unterrichts. Zunächst werden grundlegende Ideen der Lehr- und Lerntheorien wie Kognitivismus und Konstruktivismus aufgegriffen (vgl. Abschnitt 3.1), um anschließend unter Betrachtung von Wissensarten (vgl. Abschnitt 3.2.1) und Langzeitgedächtnis (vgl. Abschnitt 3.2.2) den Begriff des Lernens konkretisieren zu können. Ausgehend vom rezeptiven und entdeckenden Lernen werden anhand von Wortbedeutung (vgl. Abschnitt 3.3.1) und Analyse des historischen Diskurses zwischen Bruner und Ausubel (vgl. Abschnitt 3.3.2) fünf Faktoren zur Beschreibung von Unterricht herausgestellt (vgl. Abschnitt 3.4.3). Es wird die Bedeutung des entdeckenden Lernens in der Mathematikdidaktik dargelegt (vgl. Abschnitt 3.4.5). Eine begründete Entscheidung für eine Definition des entdeckenden Lernens (vgl. Abschnitt 3.4.2) führt zu konkreten Unterrichtsüberlegungen und zu Abgrenzungen von benachbarten Konzepten (vgl. Abschnitte 3.4.2 und 3.4.3).

3.1 Überblick ausgewählter Lehrtheorien

Zu den klassischen Lerntheorien zählen der Behaviorismus, der Kognitivismus und der Konstruktivismus. Der Behaviorismus ist eine der ersten Lerntheorien, die ab ca. 1920 beschrieben und betrachtet wurden. Erwünschte Verhaltensweisen werden positiv durch Belohnung bestärkt und unerwünschte durch Bestrafung reglementiert. Lernen wird im Sinne von Reiz-Reaktions-Schemata aufgefasst. Der eigentliche Lernprozess wird dabei kaum betrachtet. Bekannte Vertreter sind z. B. I. P. Pawlow, E. Thorndike und B. F. Skinner (vgl. Hasselhorn & Gold 2009, S. 225). Daraus resultieren folgende Empfehlungen für den Unterricht: kleinschrittiges und wiederholendes Üben von Faktenwissen, überschaubare Lerneinheiten und zeitnahe positive Rückmeldung (vgl. Hasselhorn & Gold, S. 225ff.). Mit der kognitiven Wende in den 50er Jahren kam es zu einem Umdenken.

Der Kognitivismus grenzt sich zum nah verwandten Konstruktivismus dadurch ab, dass in der Theorie des ersteren das Wissen einer objektiven Abbildung der Umwelt gleicht. Der Lernende ergänzt demnach sein Vorwissen durch die neuen Lerninhalte und gelangt zu neuem Wissen. Es kann somit eine einheitliche Wissensstruktur bei Individuen geben. Der Konstruktivismus geht ebenfalls von einer objektiven Umwelt aus. Es wird auf die Tätigkeiten beim Lernprozess fokussiert. Der aktive Lernende, der sich Wissen aneignet, wird als abgeschlossenes System gesehen, der durch Entdeckungen und Erkundungen individuelles Wissen konstruiert. Somit unterscheiden sich, im Gegensatz zum Kognitivismus, die Wissensstrukturen einzelner Individuen (vgl. Fritz et al. 2010, S. 231 ff.). „Konstruktivität ist die Überzeugung, dass nicht einer Recht und alle anderen Unrecht haben, dass es mehrere mögliche Deutungen gibt, dass die Viabilität einer Lösung von den individuellen Erfahrungen abhängig ist, dass auch Wissenschaftsdisziplinen nur Modelle der Welt anbieten, dass Irrtümer als Normalfall zur menschlichen Existenz gehören." (Arnold & Kaltschmid 1993, S. 53). Fast zeitgleich entstehen verschiedene Ausprägungen des Konstruktivismus.

Einer der ersten Wissenschaftler, die sich mit den kognitiven Strukturen der Lernenden befasst hat, war Piaget. Er geht davon aus, dass durch eine aktive Auseinandersetzung mit der Umwelt permanent Fragen, Probleme oder sogar kognitive Konflikte beim Lernenden auftreten. Können neue Erfahrungen in die bereits vorhandenen Strukturen eingeordnet werden, so wird dieser Prozess der Angleichung oder Anpassung auch als *Assimilation* bezeichnet. Führern die neuen Erfahrungen hingegen zu kognitiven Konflikten mit den bereits bestehenden Strukturen, ist eine *Assimilation* nicht möglich bzw. nicht zielführend. Es werden Umstrukturierung oder Anpassung der bestehenden Strukturen erforderlich. Hierdurch entstehen neue Schemata. Dieser Prozess wird als *Akkomodation* bezeichnet (vgl. Fritz et al. 2010, S. 233). Eine selbsttätige Auseinandersetzung mit der Umwelt führt demnach zu einer Weiterentwicklung der kognitiven Strukturen. Piaget sieht die Aufgabe der Umwelt (und somit auch der Lehrpersonen) darin, für Kinder anregende Problemsituationen aufzuwerfen und geeignete Materialien bereitzustellen, so dass Kinder ein eigenes Interesse an der Problemlösung entwickeln können. Diese Grundgedanken können heute einem kognitivistisch-konstruktivistischem Lernverständnis zugeordnet werden (vgl. Hasselhorn & Gold 2009, S. 225).

In einem kognitiv-konstruktivistisch-orientierten Unterricht entdeckt der Lernende möglichst eigenständig die neuen Inhalte. Eigenverantwortung und Selbststeuerung sind hierbei zentrale Begriffe. Zu den bekannten Vertretern zählt J. S. Bruner.

Neben dem kognitiv-konstruktivistischem Ansatz wird heute noch zwischen einem kognitiv-rationalistischen und einem sozio-konstruktivistischen Ansatz unterschieden. Bei einem kognitiv-rationalistische Lernprozess wird ein Verstehen des Lernenden fokussiert. Dazu wird versucht an das Vorwissen anzuknüpfen. Im Unterricht werden Lernhilfen wie z. B. der advanced organizer von Ausubel eingesetzt. Der sozio-konstruktivistische Ansatz wird von L. Vygotsky vertreten. Viel stärker werden gesellschaftliche, soziale und kommunikative Einflüsse auf das Lernen betrachtet. Heute findet man diesen Fokus in Lernformen des kooperativen Lernens (vgl. Hasselhorn & Gold 2009, S. 225ff.).

Diesen Standpunkten ist gemein, dass man davon ausgeht, dass neues Wissen aktiv an das bereits bestehende Vorwissen angeknüpft wird. Die aktive Tätigkeit des Verknüpfens von alten und neuen Informationen entspricht dem Lernprozess. „Alles Lernen erfordert letztlich Eigenaktivität des Lernenden." (Klauer & Leutner 2012, S. 97). Daher wird im Folgenden darauf eingegangen, inwiefern an das Vorwissen angeknüpft wird und was unter einer Aktivität zu verstehen ist.

Betrachten wir zunächst die Bedeutung des Vorwissens. Die für einen neuen Lerninhalt relevanten Bedingungen setzen sich zusammen aus mathematischem Faktenwissen, mathematischen Konzepten, Strategien zum Lernen und Problemlösen, Vorerfahrungen und persönlichen Eigenschaften wie Motivation und Frustrationstoleranz. Unter Vorwissen werden sowohl Faktenwissen und Konzepte, sowie Vorerfahrungen gefasst. Eine genaue Ausdifferenzierung verschiedener Wissensarten folgt im in Bezug auf die Mittelsenkrechte in Kapitel 5. Hinsichtlich der beiden Lerntheorien, Kognitivismus und Konstruktivismus kann man festhalten, dass ein erfolgreiches Lehren dadurch geprägt ist, dass an Vorwissen und Vorerfahrungen der Schülerinnen und Schüler angeknüpft wird. In der kognitivistischen Sicht wird zentral auf ein Verstehen bei den Lernenden abgezielt. Dafür sollen Vorwissen und Vorerfahrungen aktiviert und mithilfe geeigneterer Hilfsmittel der Lernprozess angeleitet werden.

Bei einem konstruktivistisch geprägten Lehren ist die Eigenaktivität des Lernenden zentraler Bestandteil. Dafür werden offene und problemorientierte Lernumgebungen so eingesetzt, dass der Lernende möglichst in einen Konflikt zu bisherigem Wissen oder Erfahrungen gerät, der die Weiterentwicklung zu Veränderungen und den Aufbau neuer Wissensstrukturen und - schemata motiviert (vgl. Hasselhorn & Gold 2009, S. 224f.).

Nicht jede Eigenaktivität unterstützt den Lernprozess. Ein Rumhüpfen im Geometrieunterricht zeigt sehr hohe körperliche Aktivität, in der keine mentale Aktivität mit Nutzen für die Geometrie erkannt werden kann. Somit wird diese Tätigkeit im Unterricht eher stören und wenig lernförderlich sein. Andernfalls kann ein willkürliches Zeichnen von Kreisen nicht als gewünschte Tätigkeit beim Konstruieren der Mittelsenkrechten verstanden werden. In beiden Fällen handelt es sich um beobachtbare, körperliche Eigentätigkeiten, denen keine mentale Aktivität in Bezug auf den Lerngegenstand zugrunde liegt. Diese Beispiele machen deutlich, dass die kognitiven oder mentalen Tätigkeiten für den Lernprozess entscheidend sind. Eine Handlung kann hierbei die kognitiven Tätigkeiten unterstützen bzw. anregen. Renkl unterscheidet deshalb beim Wissenserwerb die Perspektive des aktiven Tuns (körperliche Handlung) von der Perspektive der aktiven und fokussierten Informationsverarbeitung (kognitiver Prozess) (vgl. Renkl 1997, S. 6 ff.). Wobei auch hier unter aktivem Tun kein unüberlegtes, wahlloses Handeln gemeint ist. Es wird vorausgesetzt, dass für das Erlernen dieses Wissensbereichs bestimmte aktive Prozesse in alltäglichen Kontexten erfahren werden müssen (vgl. Renkl 1997, S. 7). Die drei Winter'schen Grunderfahrungen beschreiben Wissensbereiche und Tätigkeiten für den Mathematikunterricht, auf die man sich allgemein verständigen kann. Daher sind sie in die Lehrpläne aufgenommen worden. Es gibt viele weitere Versuche, mathematische Kernideen oder Grundsätze festzulegen (vgl. Bruner 1976, Vohns 2007, Roth 2018). Wittmann formuliert dazu:

> „Der Lehrer sollte sich im klaren darüber sein, daß seine Instruktion wirkungslos bleibt, wenn sie nicht durch eine aktive Konstruktion seitens des Schülers ergänzt wird. Daher müssen Aktivitäten organisiert wer-

> den, die den Schüler in eine intensive Auseinandersetzung direkt mit dem Gegenstand bringen.“ (Wittmann 1981, S. 77).

Dass diese Eigenaktivität in eine tatsächliche Handlung bzw. Tat umgesetzt werden muss, ist eine der häufig gemachten Fehlinterpretationen des Konstruktivismus (vgl. Renkl 2008, S. 112 f.). Aktivität kann auch ausschließlich auf kognitiver Ebene stattfinden. Zu den kognitiven Tätigkeiten im Mathematikunterricht können gezählt werden: Anwenden von Rechengesetzen, Suchen nach Begründungszusammenhängen, Erkennen von Mustern oder vergleichbaren Strukturen oder Lösen von Rechenaufgaben. Im Gegensatz zu den körperlichen Handlungen können mentale Denkprozesse nicht direkt beobachtet werden und schon gar nicht aus beobachtbaren Handlungen geschlussfolgert werden. Damit kann über die Aktivität der Denkleistung an sich keine Aussage getroffen werden. Sind andernfalls die Aktivitäten nicht Bestandteil des neuen Lerninhalts, so können diese kaum das Lernen erleichtern. „Vermeintlich aktives, von außen sichtbares Lernverhalten kann sattfinden, ohne dass dies mit produktiven mentalen Aktivitäten verbunden wäre. Im ungünstigsten Fall, der jedoch keineswegs eine exotische Ausnahme darstellt, können offene Aktivitäten mentale Wissenskonstruktionsprozesse gar behindern.“ (vgl. Renkl 2008, S. 113). Dies geschieht manchmal trotz guter Absichten. So kann es in einem Zufallsexperiment mit Würfeln oder dem Ziehen aus der Urne durchaus passieren, dass die Lernenden bei diesen Tätigkeiten so sehr in Rage geraten, dass eine kognitive Auseinandersetzung mit dem zugrundeliegenden mathematischen Gegenstand viel zu kurz kommt.

Sprechen wir also von einer Aktivität beim Lernen so sollte diese den Lernprozess unterstützen. Dies kann abhängig vom Lerninhalt eine tatsächlich beobachtbare Handlung, aber auch ein nicht zu erkennender mentaler Prozess sein.

Zusammenfassung

- Kognitivismus und Konstruktivismus fokussieren auf die Eigenaktivität der Lernenden. Neues Wissen wird vom Individuum konstruiert und mit bestehendem Wissen verknüpft. Es gibt verschiedene Ausrichtung dieser Grundidee.
- Piaget gilt als Begründer eines kognitiv-konstruktivistischem Lernverständnis. Eigenverantwortung, Selbststeuerung und das Anknüpfen an Vorerfahrungen sind hierbei zentral.
- Auch Bruner verweist auf ein kognitiv-konstruktivistisches Lernen, wenn er für möglichst eigenständige Entdeckungen der neuen Lerninhalte durch die Lernenden plädiert.
- Ein Vertreter des kognitiv-rationalistischen Lernens ist Ausubel. Ausgangspunkt des Lernens sind Vorwissen und Vorerfahrungen. Diese werden durch Lernhilfen vorab reaktiviert.
- Faktenwissen, Konzepte sowie Vorerfahrungen zählen zum Vorwissen, an das in einem lernförderlichen Unterricht angeknüpft wird.
- Die Eigenaktivität kann rein kognitiver Gestalt sein oder durch eine körperlichen Tätigkeit umgesetzt werden. Sie bezieht sich stets auf den Lerngegenstand und fördert den Lernprozess.

3.2 Grundlagen des Lernens

Das Gedächtnis spielt im Lernprozess eine wichtige Rolle. Hier wird erworbene Information aus der Umgebung gespeichert. In einem eher einfachen Modell werden zwei verschiedene Gedächtnisse unterschieden: das Langzeitgedächtnis und das Arbeitsgedächtnis. Im Langzeitgedächtnis werden verschiedene Wissensarten gespeichert, die im folgenden Abschnitt näher erläutert werden.

3.2.1 Überblick der Wissensarten

Für die Klassifizierung verschiedener Wissensarten werden zwei oder mehrere Begriffspaare einander gegenübergestellt: implizites und explizites Wissen, allgemeines und spezifisches Wissen. Bereits erwähnt wurden konzeptuelles, prozedurales und metakognitives Wissen, wobei deklarative Wissensbereiche vergleichbar sind mit Bereichen des konzeptuellen Wissens (vgl. Abschnitt 2.3.1). Teilweise können Parallelen zwischen den Begriffen gezogen werden, teilweise grenzen sie sich bewusst voneinander ab. Barzel et al. (2012, S. 94) verwenden als Leitfaden für den angestrebten Wissenserwerb im Mathematikunterricht in Anlehnung an Hiebert und Carpenter (1992) die folgenden drei Wissensarten: konzeptuelles, prozedurales und metakognitives Wissen.

Konzeptuelles Wissen kann als Wort- und Zahlensystem in jeglicher gesprochenen oder geschriebenen Form verstanden werden. Dazu zählt die Zeichensprache ebenso wie die formale Sprache der Mathematik oder weitere mathematische Rechenregeln. Es wird häufig als Faktenwissen bezeichnet mit der Abkürzung „Wissen, dass". Zu dem konzeptuellen Wissen gehören ebenso Konzepte und Zusammenhänge, wie beispielsweise die Definition der Mittelsenkrechten als Ortslinie oder auch die Definition als Senkrechte durch die Streckenmitte. Auch sehr spezielle Fakten können dazu gehören Diese werden häufig in passenden Kategorien abgespeichert.

Das prozedurale Wissen hingegen enthält „Wissen, wie", das heißt also Informationen über Prozesse und Abläufe, Wissen zu Handlungen und Können. Dieses Wissen wird häufig demonstriert und nicht mitgeteilt. Hierzu zählt die konkrete Anwendung einer Rechenregel auf eine Beispielaufgabe oder die Konstruktion der Mittelsenkrechten mit Zirkel und Lineal.

Der Unterschied zwischen prozeduralem und konzeptuellem Wissen kann auch durch ihre Verwendung im Langzeitgedächtnis verdeutlicht werden: Prozedurales Wissen wird als Handlungsablauf gespeichert und kann in einer vergleichbaren Situation automatisch wieder abgerufen werden, ähnlich einer „Wenn A auftritt, tue B“-Reaktion. Es kann damit auch als implizites Wissen bezeichnet werden (vgl. Woolfolk et al. 2008, S. 313). Auf das konzeptuelle Wissen hingegen kann auf (interne oder externe) Nachfrage aktiv zurückgegriffen werden. Es wird daher als explizites Wissen bezeichnet. Dabei wird vorausgesetzt, dass ein Abrufen der Information nicht durch Überlagerung oder Vergessen verhindert wird (vgl. Woolfolk et al. 2008, S. 309 ff.).

Das metakognitive Wissen wird als Bewusstmachen von Strategien und Abläufen beschrieben. Darunter fällt Wissen darüber, wann und warum z. B. die Mittelsenkrechte verwendet werden kann.

Diese drei Wissensarten werden von Barzel et al. ergänzt durch Wissensfacetten, die explizite Formulierungen, Konkretisierungen und Abgrenzungen wie Gegenbeispiele, aber auch Bedeutungen und Vernetzungen des Begriffes enthalten. Wissensarten und Wissensfacetten spannen zusammen eine Tabelle auf, in der Wissenselemente für den Mathematikunterricht themenspezifisch formuliert werden können (vgl. Barzel et al. 2012, S. 95). Eine solche Tabelle zu den spezifischen Lerninhalten rund um die Mittelsenkrechte wurde in Kapitel 5 entwickelt.

Zusammenfassung

- Wissen kann in drei Wissensbereiche eingeteilt werden: konzeptuelles, prozedurales und metakognitives Wissen.
- Konzeptuelles Wissen besteht aus Fakten, Definitionen, Zusammenhängen und Konzepten.

- Prozedurales Wissen umfasst Wissen über Tätigkeiten und Handlungsweisen. Es kann automatisiert abgespeichert werden und daher implizit sein.
- Metakognitives Wissen besteht aus Bewusstmachung, Strategien und Reflexionen.
- Die drei Wissensbereiche werden genutzt um mathematische Inhalte differenzierter betrachten zu können.

3.2.2 Langzeitgedächtnis und Arbeitsgedächtnis

Im Langzeitgedächtnis werden permanente Informationen gespeichert, wie zum Beispiel alle Telefonnummern, die man kennt. Neben dem Langzeitgedächtnis gibt es das Arbeitsgedächtnis. In diesem Moment benötigte Informationen werden bereitgestellt und verarbeitet. Beide Gedächtnisformen unterscheiden sich in Aufnahme, Kapazität, Inhalt, zeitlicher Dauer und Abruf. Das Arbeitsgedächtnis nimmt Informationen sehr schnell auf, bearbeitet diese in wenigen Sekunden und kann die Informationen sofort abrufen. Seine Kapazität ist limitiert. Zu den bearbeiteten Inhalten zählen Wörter, Bilder, Ideen und Sätze. Das Langzeitgedächtnis hingegen arbeitet relativ langsam. Informationen werden langsam abgespeichert. Dafür sind die zeitliche Bearbeitungsdauer sowie die Kapazität nach unserem bisherigen Wissensstand nicht limitiert. Der Wiederabruf ist vom Inhalt abhängig. Gespeichert werden Verbindungen logischer Aussagen, Schemata, Begebenheiten und vielleicht auch Bilder (vgl. Woolfolk et al. 2008, S. 306). Es gibt alternative Modelle zum Zusammenspiel beider Gedächtnisformen. Das Arbeitsgedächtnis wird von Wilson als aktuell im Prozess befindlicher Teil des Langzeitgedächtnisses verstanden (vgl. Wilson 2001).

Ziel des schulischen Lernens ist es, Informationen im Langzeitgedächtnis zu speichern. Im Langzeitgedächtnis können neue Informationen auf unterschiedliche Weise verortet werden. Eine grundlegende Idee zur Speicherung besteht darin, dass neues Wissen an bereits bestehende Wissensaspekte anknüpft (vgl. Abschnitt 3.1). Je stärker diese Verknüpfung aufgebaut wird, desto länger kann man sich an die neu erlernten Informationen erinnern (vgl. Woolfolk et al. 2008, S. 313 f.). An dieser Stelle wird deutlich, welcher hohe Stellenwert für die erfolgreiche Speicherung im Langzeitgedächtnis dem bestehenden Vorwissen und der intensiven Auseinandersetzung des Individuums mit dem neuen Lerninhalt zukommt.

Für diesen Speicherprozess gibt es verschiedene Modelle. Netzwerke oder Bilder können dazu dienen Bedeutungszusammenhänge zu festigen. In der Regel werden keine grammatikalischen Satzstrukturen gespeichert (vgl. Woolfolk 2008, S. 309). Auch wenn dies Anlass dazu geben könnte zu denken, dass der Sprache für den Speicherprozess im Langzeitgedächtnis eine geringe Bedeutung zukommt, kann dies in Bezug auf Verstehens- und Anknüpfungsprozesse nicht gefolgert werden (vgl. Prediger 2013, S. 1 ff.). Sprachliche Schwierigkeiten bei Lernenden können zu Hürden im Aufbau des konzeptuellen Wissens führen, denn es fehle den sprachlich schwachen Lernenden an tragfähigen Grundvorstellungen, auf die im Lernprozess zurückgegriffen werden könne (vgl. Prediger 2013, S. 4).

Wissensbestandteile sind nicht starr einer Wissensart oder einer Speicherform zugeordnet. Unter bestimmten Voraussetzungen, zum Beispiel durch erhöhte Anwendung beim Training oder Üben, können Wissensbestandteile in veränderter Form abgespeichert werden. Bereits in Abschnitt 2.3.1 wurde Andersons Experten-Novizen-Forschung erwähnt. In seinen Untersuchungen zum Beweisen von geometrischen Aufgaben konnte Anderson (1982) beobachten, dass deklarative Wissensbereiche durch eine Anwendung in Beweisaufgaben prozeduralisiert werden. Vorab erlernte Kongruenzsätze, die somit zum deklarativen/konzeptuellen Wissen zählen, werden systematisch für die

Beweisführung genutzt, so dass sich die Anwendung der Kongruenzsätze automatisiert und dieses Wissens nun in das prozedurale Gedächtnis übergeht. Auch vollständige und logisch komplexe Lösungsverfahren können auf diese Weise als prozedurales Wissen gespeichert werden und ermöglichen eine Entlastung der Gehirnleistung. Dies mache insbesondere den Unterschied zwischen einem Experten und einem Novizen in einem Fachgebiet aus und sorge für effizientere Lösungsbearbeitungen (vgl. Anderson 1982, S. 403 f.).

Zusammenfassung

- Wissen kann umso länger behalten werden, je mehr es mit bestehendem Wissen verknüpft wird.
- Wissen kann umso länger behalten werden, je intensiver sich das Individuum mit den Inhalten auseinandersetzt.
- Sprache hat einen Einfluss auf das Behalten, da es die Entwicklung von Grundvorstellungen beeinflusst.
- Durch Automatisierung und Routinen von Wissen können Experten fehlerfreier und schneller als Novizen handeln.

3.3 Entdeckendes und rezeptives Lernen, entdeckenlassendes und darbietendes Lehren

Ausgehend von einem kognitivistischen oder konstruktivistischen Ansatz werden verschiedene Unterrichtsformen geprägt. Die zum entdeckenden Lernen passende Lehrform wird als entdeckenlassendes Lehren bezeichnet und beruht auf einem kognitiv-konstruktivistischen Lernansatz. Eine darbietende Lehrform fordert ein rezeptives Lernen. Anhand dieser Begriffe können auch Eigenschaften der Lehr- bzw. Lernform ausgemacht werden.

3.3.1 Wortbedeutung und Wortverwendungen

Wenden wir uns zunächst dem Begriff des *Entdeckens* näher zu. Im wörtlichen Sinne wird ein Ding, das bisher bedeckt war, sichtbar gemacht. Das kann man sich bildlich vorstellen als das Wegziehen einer Decke, die den Gegenstand unseres Interesses bisher vor unseren Augen verbarg. Erst durch das Entfernen der Decke können unsere Augen den Gegenstand sehen und erkennen, also entdecken. Dabei kann es sich auch um ein bereits bekanntes oder verlorengegangenes Objekt handeln, das wiederentdeckt wird. In diesem Sinne wäre das Entdecken ein rein visueller Prozess der Sichtbarmachung. Von einer Entdeckung hingegen wird gesprochen, wenn man auf etwas stößt, das bisher noch unbekannt war (vgl. Dudenredaktion, o. D.). Das Neue wird in den Blick gefasst. Ein unbekanntes, neues Objekt oder Phänomen können wir erfassen, erkennen oder auch erklären. Damit wird auch die kognitive Handlung des Entdeckungsprozesses deutlicher. In der Literatur werden diese verschiedenen Bedeutungsfacetten durch die Vielfalt der zum Teil synonym zum Teil aber auch in Abgrenzung voneinander verwendeten Begriffe zum entdeckenden Lernen deutlich. Um insbesondere die Aktivität der Lernenden hervorzuheben, wird anstelle des entdeckenden Lernens auch vom explorativen oder erkundenden Lernen gesprochen (vgl. Fritz et al 2010, S. 240), oder einem aktiven und selbstgesteuerten Lernen (vgl. Klauer & Leutner 2012, S. 96) oder einem Lernen durch Problemlösen (vgl. Cai & Lester 2010). Inwiefern diesen Begriffen ähnliche Lehrformen zugrunde liegen und in welchen Bereichen sie sich unterscheiden, wird im Laufe dieses Kapitels erörtert.

Dem Begriff des *Darbietens* liegt eine künstlerische Bedeutung zugrunde. So spricht man auch von musikalischer Darbietung, wenn ein Künstler seine Musik in einer Aufführung vorführt. Ebenso kann ein Theaterstück oder ein Literaturwerk dargeboten werden. Es handelt sich um geplante und inszenierte Vorführungen. In diesem Sinne kann auch der Lernstoff durch die Lehrperson dargeboten oder vorgeführt werden. Häufig spricht man auch von direkter Instruktion. Im wörtlichen Sinne kann die künstlerische Komponente in dieser Bezeichnung nicht gefunden werden. Die Betonung liegt auf einer anleitenden Anweisung oder vorgegebenen Aufgabenstellung.

Stellen wir nun beide Begriffe, den des Entdeckens und den des Darbietens, in den Kontext des Lehrens und Lernens so wird deutlich, dass verschiedene Akteure fokussiert werden. Beim entdeckenden Lernen ist es die Schülerin bzw. der Schüler, die bzw. der aktiv handelnd den neuen Inhalt entdeckt. Ein entsprechender Unterricht wird als entdeckenlassendes Lehren bezeichnet. Beim darbietenden Lehren ist es die Lehrperson, die aktiv handelt. Die Schülerin bzw. der Schüler erscheint dadurch als rezeptiv Lernender.

Um aus der gleichen Perspektive die Lernsituation zu betrachten, wird in der pädagogischen Psychologie und der Instruktionspsychologie dem entdeckenden Lernen entsprechend die Lehrform des entdeckenlassenden Lehrens angeführt. Der Prozess wird nun aus der Sicht der Lehrperson beschrieben. Eine Definition des entdeckenlassenden Lehrens erfolgt häufig in Abgrenzung zum Lehren durch Darbietung bzw. direkte Instruktion (vgl. Klauer & Leutner 2012; Edelmann & Wittmann 2012; Renkl 2008; Hasselhorn & Gold 2009; Fritz et al. 2010). Auch Hasselhorn und Gold verwenden die Gegenüberstellung der beiden Lehrformen und definieren das entdeckenlassende Lehren wie folgt: „Das entdecken lassende Lehren basiert auf einer Art indirekter, sokratischer Instruktion, bei der (die angestrebten) Wissensstrukturen eben nicht instruktional vorgegeben, sondern vom Lernenden selbst aktiv generiert (hergeleitet) und konstruiert werden müssen.“ (Hasselhorn & Gold 2009, S. 262).

Die Einleitung dieses Kapitels endet mit dieser ersten Definition, die als Ausgangslage genommen wird. Im weiteren Verlauf dieses Kapitels wird zunächst auf zwei bedeutende Lernpsychologen in diesem Fachbereich eingegangen. Bruner und Ausubel haben bis heute den Diskurs um das entdeckenlassende und darbietende Lehren geprägt. Ihre Definitionen der Lehrmethoden, sowie Lerninhalte und -ziele werden nacheinander dargestellt und anschließend einander vergleichend gegenübergestellt. Erst danach werden die verschiedenen Facetten und Perspektiven des entdeckenden Lernens anhand einer Begriffssammlung und zugrundeliegender Schwerpunktsetzung erörtert. Dazu werden entgegengesetzte Begriffspaare gesammelt.

Zusammenfassung

- Entdecken kann wörtlich als Aufdecken erfasst werden. Damit ist ein visueller Prozess des Sichtbarmachens gemeint.
- Darbietungen sind aus musikalisch oder künstlerischem Bereich bekannt und werden als geplante, vorbereitete Darstellung verstanden.
- Im Lehr-/Lernkontext bedeutet entdecken, das Lernende handeln. Darbieten bedeutet, dass die Lehrperson erklärt.

3.3.2 Bruner und Ausubel – eine historische Diskussion mit Aktualitätsbezug

Die Diskussion um die geeignetere Lehrform kann exemplarisch an der Debatte zwischen Ausubel und Bruner verdeutlicht werden. Beide Psychologen lebten zeitgleich und bezogen ihre Argumente und Gegenargumente immer wieder aufeinander, so dass der thematische Diskurs besonders hervortritt. Beide hatten eine kognitivistische Sicht auf das Lernen. Teile der Debatte werden auch in aktuellen Lehrwerken dargestellt (vgl. Klauer & Leutner 2012, S. 97f.; Hasselhorn & Gold 2009, S. 265 f.). Diese Gegenüberstellung eignet sich besonders gut, um Vor- und Nachteile beider Lehrformen zu verdeutlichen. Aus diesem

Grund und durch die historische Bedeutung dieses Diskurses werden auch in dieser Arbeit als Ausgangssituation beide Positionen betrachtet. Dabei werden hauptsächlich Originaltexte der beiden Autoren verwendet, um ein Missverständnis bzw. eine Überinterpretation der Positionen möglichst zu vermeiden.

Sowohl Ausubel als auch Bruner haben sich frühzeitig (ab 1950) von einer behavioristischen Sichtweise des Lernens abgewandt und sich der kognitiven Psychologie zugewandt (vgl. Klauer & Leutner 2012, S. 97). Erst durch diese Voraussetzung eines ähnlichen Bildes des Lernens konnte sich der Diskurs zwischen den beiden Lernpsychologen so vielfältig entfalten. Warum sie trotzdem unterschiedliche Lehrmethoden bevorzugen, wird erst deutlich, wenn man ihr jeweiliges Bild des Lernens und ihre Schlussfolgerungen daraus detaillierter betrachtet. Zunächst wird dazu Bruners Darstellung des entdeckenden Lernens zusammenfassend dargestellt. Dabei wird insbesondere seine Befürwortung dieser Unterrichtsform herausgearbeitet. Im Anschluss wird das darbietende Lehren nach Ausubel erläutert und seine Argumentation, die insbesondere gegen ein Lernen durch Entdecken spricht, dargelegt.

3.3.2.1 Das entdeckenlassende Lehren nach Jerome Seymour Bruner

Mit einer kognitivistischen Sichtweise auf Lernprozesse arbeitet der Psychologe Jerome S. Bruner mit seinem Werk „Toward a Theory of Instruction“ („Der Prozeß der Erziehung“) zentrale Vorzüge des entdeckenlassenden Lehrens heraus. Für die Schulpädagogik ist sein Vorschlag von Bedeutung, Lerninhalte in wiederkehrenden und erweiternden Einheiten zu unterrichten. Er selbst bezeichnet dies als „Curriculum-Spirale“ (vgl. Bruner, 1976, S. 61ff.). Auf folgende Definition zum entdeckenden Lernen beruht Bruners Argumentation:

> „Entdeckung ist ihrem Wesen nach ein Fall des Neuordnens oder Transformierens des Gegebenen. Dies so, dass man die Möglichkeit hat, über das gegebene hinauszugehen, das so zu weiteren neuen Einsichten kombiniert wird." (Bruner 1981, S. 16).

Inwiefern sich diese Tätigkeit auf einen kognitiven, geistigen Prozess bezieht oder eine Handlung voraussetzt, wird mit dem nachfolgenden Zitat Bruners deutlich:

> „Ich beschränke Entdeckung nicht auf den Akt, durch den man etwas herausfindet, das der Menschheit vorher unbekannt war, sondern schließe fast alle Formen des Wissenserwerbs mit Hilfe des eigenen Verstandes ein." (Bruner 1981, S. 16).

Bruner schreibt der Schule weniger die Aufgabe des reinen Wissenserwerbs zu, sondern vielmehr den Erwerb von Fähigkeiten, wie das Problemlösen, das einem lebenslang helfe und auf vielerlei verschiedene Lebenssituationen vorbereite.

> „Das Lehren und Lernen von Strukturen steht mehr als das bloße Beherrschen von Fakten und Techniken im Mittelpunkt des klassischen Transferproblems." (Bruner, 1976, S. 25).

Ziel jedes Lernens sei ein Nutzen für die Zukunft. Dies sei in zwei verschiedenen Tätigkeiten denkbar: 1) durch das Üben der gewünschten Tätigkeit oder 2) durch den Transfer des Erlernten auf weitere Sonderfälle oder Spezialfälle. Dafür sei es eben notwendig das allgemeine Prinzip, den Grundbegriff, eines Lerninhaltes zu verstehen (vgl. Bruner 1976, S. 31ff.). Der Weg, mit dem dieses Ziel zu erreichen sei, folge der eigenständigen Entdeckung von „Regelhaftigkeiten", „Beziehungen" oder „Ähnlichkeiten" (vgl. Bruner 1976, S. 31). Dabei geht Bruner davon aus, dass sich ein Lernender, der zum ersten Mal auf diesen

Lerninhalt trifft, diesem auf eine ähnliche Art und Weise begegnet, wie ein Wissenschaftler, der in seinem Fachgebiet diesen Inhalt neu erforscht (vgl. Bruner 1976, S. 39).

In seinem Werk „Der Prozeß der Erziehung" geht Bruner der grundlegenden Frage nach „Was sollen wir lehren und mit welchem Ziel?" Hierzu betrachtet er die folgenden vier Thesen: 1.) Die Grundlagen eines Lehrgegenstandes müssen verstanden werden. 2.) „Strukturierte Formen" helfen bei einer späteren Abrufung des Gelernten, wie beispielsweise Formeln in der Mathematik. 3.) Ausgehend von allgemeinen Begriffen werden weitere Spezial- und Sonderfälle als solche aufgefasst. 4.) Es soll keinen Konflikt zwischen neuen und alten Lerninhalten geben. Dazu müsse der Unterrichtsstoff daraufhin überprüft werden, inwiefern fundamentale Ideen gelehrt werden. Denn diese seien von zentraler Bedeutung für das schulische Lernen.

Da es unmöglich sei einen jungen Menschen auf alle Lebenssituationen vorzubereiten, müsse die Fähigkeit Probleme lösen zu können zentrales Ziel der schulischen Bildung sein. Bruner argumentiert weiter, dass neue Inhalte besser erinnert werden, wenn sie selbstständig entdeckt wurden. Ein Hauptziel sei es verschiedene Strategien kennen zu lernen, um Probleme lösen zu können. Dafür müsse der Lernende zwangsläufig selbst aktiv werden im Unterricht; der Lehrer halte sich zurück und habe eine passivere Rolle. Er habe die Aufgabe den Schülerinnen und Schülern dabei zu helfen selbstständige, spontane Denker zu werden (vgl. Bruner 1974, S. 141). Lernen bedeute deutlich mehr als die einfache Wiedergabe von allgemeingültigen Prinzipien und Lerninhalten. Jede Schülerin bzw. jeder Schüler solle die Erfahrung machen, wie es ist Problem zu lösen und dabei die Möglichkeit erhalten, sich sein eigenes Bild vom Lernen und von der Wissenschaft zu machen.

> „Die Struktur eines Themas begreifen heißt, es so zu verstehen, daß viele andere Dinge dazu in eine sinnvolle Beziehung gesetzt werden können. Kurz: die Struktur lernen, heißt lernen, wie die Dinge aufeinander bezogen sind.“ (Bruner 1976, S. 22).

Erst selbstentdeckte Lerninhalte können bedeutungsvoll für die Lernenden sein und nur dadurch können sie in Denkprozesse einfließen, also auf andere Zusammenhänge transferiert und langfristig wiedergegeben werden. (vgl. Bruner 1976, S. 22ff.). Ein kleinschrittiges Unterrichten mit angeleiteten Fragen führe hingegen zu einem Wissensbestand, der schneller wieder vergessen werde (vgl. Bruner 1981, S. 43). Bruner spricht sich nicht für ein unkontrolliertes, willkürliches Entdecken aus, sondern einer kontrollierten und unterstützenden Form (heute: „guided discovery“).

In Nebers Werk „Entdeckendes Lernen“ formuliert Bruner die folgenden vier Vorteile, die durch ein eigenständiges Entdecken erfahren werden können: „1. Der Zuwachs an intellektueller Potenz, 2. der Übergang von extrinsischer zu intrinsischer Belohnung, 3. das Erlernen der heuristischen Methoden des Entdeckens und 4. die Hilfe für die Verarbeitung im Gedächtnis.“ (Bruner 1981, S. 17). Bruner erklärt die Bedeutung der einzelnen Faktoren wie folgt: Unter dem „Zuwachs an intellektueller Potenz“ versteht er sowohl das strategische Verknüpfen neuer Information mit bereits bestehendem Wissen, als auch das Aufstellen von Hypothesen und Fragen zur Eingrenzung des neuen Lerngegenstandes. Um auf diese Art und Weise Neues erlernen zu können, setzt Bruner voraus, dass Neues erlernt wird, in dem es in das bereits Bekannte eingeordnet und in Beziehung zu diesem gesetzt wird. Das zweite Argument besagt, dass der Entdeckungsprozess selbst Belohnung genug sei. Das Wissen werde zu einem großen Ganzen und dadurch erst entstehe Verständnis, welches allein motiviere weiter lernen zu wollen. Unter den dritten Aspekt fällt das Üben des Problemlösens und der heuristischen Methoden. Durch das wiederholte Problemlösen werde diese Fähigkeit erlernt. Für das letzte Argument nimmt Bruner an, dass die Speicherung im Gedächtnis weniger problematisch sei als der Abrufungsprozess des Gespeicherten. Es komme also darauf an, nach welcher Systematik das Wissen abgespeichert wurde, damit man es auch wiederfinde. Diese Systematik richte sich nach den individuellen geistigen Vorgängen. Informationen, die selbst entdeckt wurden, können offensichtlich auch besser wieder aus dem Gedächtnis abgerufen werden. Dies liege daran, dass man den „Speicherort" besser erinnern kann (vgl. Bruder 1981, S. 17f.)

Zusammenfassung

- Bruner befürwortet einen Wissenserwerb durch eigentätiges Entdecken.
- Entdecken heißt Neuordnen und führt im besten Fall zu Einsicht.
- Das Erlernen von Problemlösefähigkeiten ist wichtigstes Lehrziel.
- Entdeckendes Lernen führe zu intelligentem Wissen, größerer Motivation, dem Erlernen von Problemlösefähigkeiten und zu längerfristigerem Behalten.

3.3.2.2 Das darbietende Lehren nach David Paul Ausubel

Der studierte Mediziner, David Paul Ausubel, gelangt über die Psychologie zur Pädagogik und verfasst ausgehend von einem konstruktivistischen Lernbild in „Educational Psychology. A Cognitive View" („Psychologie des Unterrichts") seine Hauptthesen zu gelungenem Unterricht. Dabei befürwortet er ein Lernen, das sich durch die Berücksichtigung des Vorwissens auszeichnet. Diese Form des Lernens bezeichnet er als *sinnvolles Lernen* (*Meaning and meaningful learning*). Noch heute ist er bekannt für die deutliche Vorstrukturierung von Unterrichtsmaterial, wie zum Beispiel durch verschiedene Formen der Hilfestellungen (*advanced organizer*).

Folgender Leitgedanke wird in Ausubels Werk vorangestellt: „Wenn wir die ganze Psychologie des Unterrichts auf ein einziges Prinzip reduzieren müssten, würden wir dies sagen: Der wichtigste Faktor der das Lernen beeinflusst, ist das, was der Lernende bereits weiß. Dies ermitteln Sie und danach unterrichten Sie Ihre Schüler." (Ausubel et al. 1980, S. 201). Nach Ausubel besteht das wesentliche Ziel schulischen Lernens im Aufbau einer kognitiven Struktur: Erwerb einer klaren, stabilen und organisierten Wissensmenge (vgl. Ausubel et al 1974, S.139; Ausubel et al. 1980, S. 205). Erst differenzierte Wissensstrukturen bieten die Voraussetzung, sich in einer komplexen Welt zurecht zu finden. Ihr Aufbau ist für Ausubel nur durch *sinnvolles rezeptives* Lernen möglich. In seinen Ausführungen zu einem gelungenen Unterricht prägt Ausubel den Begriff des *sinnvollen* Lernens: „Sinnvolles rezeptives Lernen impliziert das Erwerben neuer Sinnbedeutungen." (Ausubel et al. 1980, S. 62). Im Gegensatz dazu definiert er mechanisches Lernen als Lernen ohne Wissenserwerb. Hierbei werde ohne Verständnis wörtlich auswendig gelernt. Neue Lerninhalte sollen sinnvoll erlernt werden, also inhaltlich und zufallsfrei in bestehende kognitive Strukturen eingegliedert werden. Bei dieser Interaktion verändere sich sowohl der neue Lernstoff als auch die bereits vorhandene Wissensstruktur. So würde der neue Lernstoff integraler Bestandteil eines Ideensystems. Der Lerner könne das erworbene Wissen in eigenen Worten ausdrücken und der neue Lernstoff müsse mit relevanten Aspekten der kognitiven Struktur verbunden werden.

Diese Möglichkeit der Beziehbarkeit auf und Eingliederbarkeit in kognitive Strukturen habe für Lern- und Behaltensprozesse zwei Hauptkonsequenzen:

1. Neue Inhalte können länger erinnert werden (da sie verknüpft sind) und
2. Eingliederung der neuen Inhalte in hierarchische Organisation. Erst als neue Idee mit Verknüpfungen trennbar von den Ideen selbst. (vgl. Ausubel et al., S. 180ff.).

Die notwendige angemessene Verankerung mit dem Vorwissen und die Beibehaltung der Identifizierbarkeit des neuen Lerninhaltes werde durch sinnvolle Lernprozesse unterstützt. Eine Möglichkeit sinnvolle Lernprozesse zu initiieren bestehe im rezeptiven Lernen durch darbietende Lehrformen. Der Schülerin oder dem Schüler werden neue Lerninhalt fertig präsentiert in Form von einem Lehrervortrag oder schriftlichen Informationstexten. Hierbei werde dem Lernenden der Hauptinhalt in mehr oder weniger finaler Form dargeboten. Vom Lernenden werde lediglich verlangt, das Material zu begreifen und in seine kognitive Struktur einzugliedern (Verknüpfung mit Vorwissen), so dass es in Zukunft für Reproduktion und Problemlöseprozesse bereitstehe (vgl. Ausubel et al. 1980, S. 152ff.). Häufige Kritik an der darbietenden Lehrmethode läge an einer nicht gelungenen Umsetzung dieser. Um einen gehaltvollen darbietenden Unterricht erreichen zu können, müsse die Lehrperson ihren Unterricht klar strukturieren und klare Instruktionen geben. Die Lehrerin bzw. der Lehrer habe die Planung und Durchführung von Unterricht als Aufgabe. Dabei helfen ihm zwei zentrale Ideen: *Organisationshilfen* und *progressive Differenzierung*.

Als *Organisationshilfen* (*advanced organizer*) bezeichnet Ausubel (visuelle) Hilfen, die dem Lernenden einen Überblick über die neuen Lerninhalte vermitteln und somit verschiedenen Anknüpfungspunkte zu bereits bestehenden Inhalten bieten. Die Kluft zwischen dem, was der Lerner schon weiß und dem, was er noch lernen soll, soll überwunden werden. Die verankernten Ideen sind zu reaktivieren (vgl. Ausubel et al. 1980,

S. 206f.). Typisch für *Organisationshilfen* ist eine abstrahierende Reduktion auf das Wesentliche kombiniert mit einer Konzentration auf Metaebene. Diese Hilfen sollen den Fortschritt im Überblick von Zusammenhängen ermöglichen. Heute denken wir dabei zum Beispiel an Mind-Maps zu Beginn eines Themas (vgl. Ausubel 1974, S. 159f.). Die Wirkung visueller Hilfen wurde auch mit der Hattie-Studie bestätigt.

Die *progressive Differenzierung* beruht darauf zunächst allgemeine und generelle Konzepte des neuen Lerninhaltes zu präsentieren und die Details und Spezialfälle erst in weiteren Schritten zu erarbeiten. Der Grund hierfür liegt darin, dass Details erst erfasst und behalten werden können, wenn das Wissen an das gesamte Vorwissen angeknüpft werde (vgl. Ausubel 1974, S. 164). Dies alles sei mithilfe einer darbietenden Lehrmethode besser zu erreichen.

Auch das entdeckende Lernen bezieht Ausubel in seine Unterrichtsüberlegungen mit ein. In *Psychologie des Unterrichts* widerlegt er verschiedene Argument, die für ein entdeckendes Lernen angeführt werden. Die Gefahr in der Diskussion um das entdeckende Lernen liege im Kern jedoch darin, dass häufig keine Unterscheidung gemacht werde zwischen dem Akt des Entdeckens und dem Akt des Verstehens. Auf dieses Argument geht Ausubel ebenfalls ein, wenn es um die Aktivität des Lernenden in beiden Lehrformen geht. Allein durch den Prozess des Entdeckens kann nicht auf ein Verstehen der Inhalte und Zusammenhänge geschlossen werden. Entdecken allein schaffe kein Wissen, sondern sorge für Aktivität bei den Schülerinnen und Schüler, die ggf. sinnfrei bleibt, da ein Verstehensprozess nicht unbedingt initiiert werde.

Dem entdeckenden Lernen widmet Ausubel ein gesamtes Kapitel, in welchem er versucht Vorteile der Lehrmethode herauszustellen und diese zu fehlernhaften Vorstellungen abzugrenzen. Er kommt zu dem Schluss, dass entdeckendes Lernen für bestimmte Zwecke gerechtfertigt sei (vgl. Ausubel 1974, S. 519 f.). Die Vorteile im entdeckenden Lernen sieht er in den folgenden fünf Punkten:

1. Im Grundschulalter sei diese Form des Lernens besonders geeignet. Die Kinder haben die nötigen kognitiven Strukturen, um durch Darbietung in sprachlicher oder schriftlicher Form neue Informationen aufzunehmen und zu verarbeiten noch nicht entwickelt, so dass hier ausschließlich ein Lernen durch Entdecken möglich sei.
2. Außerdem sei das entdeckende Lernen unerlässlich, wenn man Problemlösefähigkeiten und/oder wissenschaftliche Arbeitsweisen lehren möchte, da das Aufstellen und Überprüfen von Hypothesen zielführend sei. In dem die Gesetze und Regeln der Natur erforscht werden, könne eine Einstellung zur Natur und zur Wissenschaft vermittelt werden.
3. Ein weiterer sinnvoller Einsatz von entdeckenden Aufgaben biete sich bei der Überprüfung der Lernstände der Schülerinnen und Schüler an. So kann durch die Lösung einer Entdeckungsaufgabe auf das Verständnis, das die Schülerinnern und Schüler über den Lerninhalt erworben haben, geschlossen werden.
4. Weiter argumentiert er: Bei schwierigen Lerninhalten erhalten das entdeckende Lernen ohnehin eine größere Bedeutung. Es sei weniger zeitraubend, da die komplexeren kognitiven Ideen auch mithilfe von Darbietungen einen hohen Zeitaufwand bedeuten. Durch die Entdeckung könne auch die intuitive Bedeutsamkeit erhöht werde, so dass ein größerer Zeitaufwand an dieser Stelle gerechtfertigt sei. Im Gegensatz dazu sei bei einfacheren, relativ vertrauten, neuen Inhalten eine Darbietung oder eine halb-autonome Entdeckung, die durch klugen Gebrauch von Stützen und

Hinweisen beschleunigt werde, angebrachter (vgl. Ausubel 1974, S. 524f.).

5. Schlussendlich äußert Ausubel, dass auch wenn die empirischen Befunde noch nicht darauf hinweisen, so müsse ein Lernen durch Entdecken zu besserem Lernen und Behalten führen. Dies begründet er damit, dass Motivation, Begeisterung und Lebendigkeit bei den Schülerinnen und Schüler durch die unabhängigen Entdeckungen hervorgerufen werde (vgl. Ausubel 1974, S. 526).

Diese fünf Argumente lassen Ausubel zu dem Schluss kommen, dass ein gelegentlicher Gebrauch des entdeckenden Lernens durchaus sinnvoll erscheine.

Dass eine Methode im Unterricht eingesetzt werde, entscheide sich jedoch nicht danach, ob ein Unterricht durch Entdeckungen das Lernen, Behalten und die Übertragbarkeit erhöhe, sondern danach, ob die Methode zum einen effektiv sei für die Schülerinnen und Schüler, die auch ohne Entdeckungen die neuen Inhalte erlernen könnten und zum anderen angebracht sei, um Schülerinnen und Schülern, die die Grundlagen des Faches bereits kennen, zusätzlich den Aufbau und die Wissenschaft des Faches zu vermitteln (vgl. Ausubel 1974, S. 526). Und einiges spreche für den darbietenden Unterricht:

1. Die Aufgabe der Schule liegt in erster Linie darin, in möglichst kurzer Zeit, möglichst viel Wissen zu vermitteln. Wissenserwerb entspricht dem Hauptziel der Schule.
2. Rezeptives Lernen ist weniger komplex als entdeckendes Lernen (heute auch diskutiert mit der Theorie des cognitive load, vgl. Sweller 1988). Daher könnte ein entdeckendes Lernen für begabte Schülerinnen und Schüler erfolgreich sein, aber eben nicht für alle Schülerinnen und Schüler. Es gibt keinen Grund dafür das Lernen schwerer zu machen als es ohnehin schon ist.

3. Entdeckendes Lernen benötigt mehr Unterrichtszeit und ist daher unökonomisch. Rezeptives Lernen kann in kürzerer Zeit erfolgen.

Die grundlegende Idee formuliert Ausubel passend: „Das meiste von dem, was jemand wirklich weiß, besteht aus Einsichten, die von *anderen* entdeckt und ihm in sinnvoller Weise übermittelt worden sind.“ (Ausubel et al. 1981, S. 31)

Zusammenfassung

- Vorwissen und Vorerfahrungen sind wichtige Faktoren für das Lernen.
- Das schulische Lernen hat zum Ziel eine möglichst gut organisierte und breite Basis an Vorwissen zu erschaffen. Hauptlernziel ist die Vermittlung von möglichst viel Wissen.
- Ausubel plädiert für einen gut strukturierte Darbietung der neuen Inhalte von der Lehrperson, sodass der Lernende sich vollständig auf das Nachvollziehen des Neuen und der Verknüpfung mit dem Bestehenden konzentrieren kann.
- Er greift zwei zentrale Mittel dazu auf: *Organisationshilfen* und *progressive Differenzierung*.
- Gelegentlich kann auch entdeckendes Lernen hilfreich sein.

3.3.2.3 Bruner und Ausubel – Gegenüberstellung und Zusammenfassung

Zur Kontrastierung werden Ausubel und Bruner in Lehrbüchern als Kontrahenten dargestellt, die zwei entgegengesetzte Unterrichtsmethoden befürworteten (vgl. Edelmann & Wittmann 2012). Dies stimmt sicherlich nur teilweise. Vergleicht man die Argumentationen beider Psychologen können neben der konstruktivistischen Sicht auf das Lernen, die erst die Ausgangs-

Vorteile	Nachteile	
Erlerntes ist langfristig abrufbar.		Langfristiger Wissensaufbau
Es ist bereits im Kleinkindalter anwendbar.	Es fordert den Lernenden vielseitig.	Anforderungen an den Lernenden
	Es wird mehr Lernzeit benötigt.	Benötigte Lernzeit
Entdecken erzeugt Motivation und Begeisterung bei den Lernenden.	Eine Entdeckung allein führt nicht automatisch zu einem Verstehen der entdeckten Zusammenhänge	Auswirkungen auf den Lernenden / den Lernprozess
Entdecken unterstützt logisches Denken und Schlussfolgern.		Auswirkungen auf den Lernenden / den Lernprozess
Entdecken unterstützt das Erlernen von Methoden wie Problemlösen.		Auswirkungen auf den Lernenden / den Lernprozess

Tab. 2: Übersicht der Argumente, die für und gegen das entdeckenlassende Lehren genannt werden.

Vorteile	Nachteile	Bezeichnung
Erlerntes ist langfristig abrufbar. (nur Ausubel)	Erlerntes wird schneller wieder vergessen bzw. ist nicht abrufbar.	Langfristiger Wissensaufbau
Es ist weniger komplex für den Lernenden.	Es erfordert geistige Entwicklung, so dass es sich erst für ältere Kinder anbietet.	Anforderungen an den Lernenden
Es benötigt weniger Lernzeit.		Benötigte Lernzeit
Es unterstützt das Erlernen vieler neuer Wissensmengen.		Auswirkungen auf den Lernenden / den Lernprozess
Es werden Argumentationen und Sinnzusammenhänge des neuen Lerninhaltes hervorgehoben.		Unterrichtsstruktur

Tab. 3: Übersicht der Argumente, die für und gegen das darbietende Lehren genannt werden. Die Bezeichnungen wurden nachträglich ergänzt.

lage für weitere Auseinandersetzungen und den Diskurs ermöglicht, viele weitere Gemeinsamkeiten herausgestellt werden. Sie sind sich einig darin, dass der Lerninhalt verstanden werden soll, dass dies durch geeignete Strukturierung geschieht und dass das erlernte Wissen anschlussfähig für zukünftige Lerninhalte sein sollte. So sind sie sich auch über viele Vorteile und Nachteile der beiden Lehrformen einig. Sie unterscheiden sich in der Auslegung der Lernziele und somit in den Konsequenzen für den Unterricht (vgl. Tab. 2 und Tab. 3).

Diesen Vor- und Nachteilen der beiden Lehrformen wurden im Nachhinein die Kategorienbezeichnungen in der dritten Spalte zugeordnet.

Ausubel und Bruner kommen trotz vergleichbarer Einschätzungen zu den beiden Lehrformen zu unterschiedlichen Schlussfolgerungen. So bevorzugt Bruner ein entdeckendes Lernen während Ausubel die darbietende Form favorisiert. Diese unterschiedliche Präferenz ist auf die unterschiedliche Zielsetzung schulischen Lernens zurückzuführen. Während Bruner die Fähigkeit Probleme lösen zu können als Hauptlernziel für Unterricht und Schule ansieht, nennt Ausubel eine strukturierte und weitgefächerte Wissensmenge als höchstes Lernziel. In den folgenden Aussagen stimmen sie dann wieder überein: Um Problemlösen erlernen zu können, sei entdeckenlassender Unterricht besser geeignet. Um in möglichst kurzer Zeit möglichst viel neues Wissen zu erlernen, biete sich der darbietende Unterricht an.

Bei Bruner wäre dies ein Konflikt zum bestehenden Vorwissen oder anderen kognitiven Gegebenheiten. Demnach wird Bruners Sichtweise als kognitiv-konstruktivistisch betrachtet, Ausubels Standpunkt hingegen wird als kognitiv-rationalistisch bezeichnet (Hasselhorn & Gold 2009, S. 224f.). Durch die Benennung rationalistisch wird Ausubels Zentrierung auf den Verstand und verstehensorientiertes Lernen deutlich.

Zusammenfassung

- Bruner und Ausubel haben ähnliche Ansichten zu Lerntheorien, den Vor- und Nachteilen entdeckenlassenden und darbietenden Lehrformen.
- Bruner und Ausubel setzen unterschiedliche Lernziele für Schule fest. Bruner präferiert das Problemlösen als oberstes Lernziel, nach Ausubel sollte eine gut strukturierte und weitgefächerte Wissensmenge angestrebt werden. Dies lässt sie unterschiedliche Unterrichtsformen favorisieren. Bruner bevorzugt das entdeckende Lernen, Ausubel befürwortet einen darbietende Lehrform.
- Für beide Lehrformen können Vor- und Nachteile gefunden werden. Diese beziehen sich auf Aspekte der Zeit, des langfristigen Erinnerns, der Motivation der Lernenden, der Komplexität des Lernprozesses und der Lernziele.

3.4 Entdeckenlassende und darbietende Lehrformen

Für die Gegenüberstellung von entdeckenlassendem und darbietendem Lehren werden in der Literatur unterschiedliche Begriffspaare verwendet, wie es auch in den bisherigen Ausführungen dieser Arbeit deutlich wurde. So diskutieren auch Ausubel und Bruner über die Aktivitäten der Lehrerinnen und Lehrer und die der Lernenden. Mit der Wahl des Begriffspaares wird bereits eine Ebene der Betrachtung festgelegt, wie zum Beispiel die Schülersicht oder Lehrersicht auf den Lehr-Lern-Prozess. Ausgehend von den verwendeten Begriffen bei Ausubel und Bruner sollen nachfolgend weitere Begriffspaare gesammelt und sortiert werden. Durch die Betrachtung der Begriffspaare werden die verschiedenen Facetten beider Lehrmethoden deutlich.

Im aktuellen Unterrichtskatalog findet man eine ganze Fülle an Mischformen, angepassten Varianten beider Lehrformen und Erweiterungen, so dass Entdeckenlassen und Darbieten zwei Enden eines Kontinuums darstellen. Aus traditionellen Vorlesungsformaten können durch das Verwenden von aktiveren Lernbausteinen optimierte Lernumgebungen entstehen (vgl. Dietrich & Evans 2022, S. 275), so dass eine eingebundene Entdeckung ermöglicht wird. Gleichzeitig argumentieren Vertreter beider Lager weiterhin und fordern mitunter Handlungsbedarf von der Politik ein. Die Befürworter einer direkten Darbietung legen Forschungsergebnisse vor, die zeigen, dass ein darbietender Unterricht deutliche Vorteile gegenüber entdeckenden Varianten habe (vgl. Zhang et al. 2022). Die Gegenseite kommt aufgrund der Analyse mehrere Studien zu dem Schluss, dass eine Kombination aus direkter Darbietung und entdeckenden Unterrichtsformen am effektivsten sei (vgl. de Jong et al. 2023). Die historische Diskussion ist daher weiterhin aktuell. An welchen Stellen und in welchem Maße eine Anpassung, Abänderung oder Kombination beider Lehrformen stattfinden könnte, wird insbesondere durch die nachfolgenden theoretischen Überlegungen zum Entdeckenlassen und Darbieten eröffnet.

3.4.1 Verwendung von Begriffen

Bei der Diskussion um Lernformen werden viele verschiedene Begriffe verwendet. Es wird gesprochen von lehrergesteuertem Unterricht, schüleraktivierendem Unterricht, angeleitetem Unterricht, offenem Unterricht und gelenktem Unterricht. In der Zusammenfassung zu dem Kapitel „Lerntheorien und pädagogisches Handeln“ charakterisieren Tobinski und Fritz die bei

Entdeckenlassendes Lehren bzw. entdeckendes Lernen	***Darbietendes Lehren bzw. rezeptives Lernen***	***Quelle***
Schüleraktivierend *erarbeitend* *entdeckend* *selbstgesteuert* *offen* *direktiv* *selbstständig* *hypothetische Methode*	*Lehrergesteuert* *Darbietend* *Rezeptiv* *Angeleitet* *Gelenkt* *Nicht-direktiv* *Strukturiert* *Darbietende Methode*	Bruner 1981, S. 17
Deduktiv	*Induktiv*	Neber 1981, S. 51
Psychologisch-mystisch	*Psychologisch-rational*	Ausubel 1981, S. 597
Exploratives, erkundendes, entdeckendes Lernen	*Rezeptives Lernen (=aufnehmendes Lernen)* *Expositorisches (darstellendes) Lehren*	Tobinski & Fritz 2010, S. 245 Klauer & Leutner 2012, S. 97
Aktives, mehr oder minder selbstgesteuertes Lernen	*Rezeptives Lernen angeleitet*	Klauer & Leutner 2012, S. 96
exemplarisch, sokratisch	*darlegend*	Wagenschein 2010, S.31 ff.
Entdeckung, Exposition	*Kenntnisnahme*	Wagenschein 2010, S.31 ff.
Nicht-direktiv	*Direktiv (eine Anweisung gebend)*	Klauer & Leutner 2012, S. 96
Entdeckungslernen	*Expositionslernen*	Kollosche 2017, S. 221f.
Schüleraktivierend, Lehrer moderiert	*Lehrergesteuert, fremdgesteuert/ außengesteuert*	Tobinski & Fritz 2010, S. 245; Hasselhorn & Gold 2009, S. 218 und S. 229,
Kooperation von Lernenden	*Wechselspiel von Lehrerfragen und Schülerantworten sowie Übungs- und anwendungsaufgaben*	Klauer & Leutner 2012, S. 96

Lerner generiert Informationen selbstständig	*Lerner verarbeitet Informationen aktiv*	Fritz et al. 2010, S. 245
Lerner stehen vor einem Problem	*Lehrer wählt Inhalt aus*	Fritz et al. 2010, S. 245
Anwendung und Erlernen von Strategien des Problemlösens und des Lernens, wissenschaftlichen Vorgehensweisen	*Vermittlung von strukturiertem Wissen/ Faktenwissen, Zielstrebig vorgeplant und konsequent durchgeführt*	Klauer & Leutner 2012, S. 98
Gegenwärtig, modern	*Traditionell*	Renkl 2008, S. 128
Konstruktivistische Lehrform	*Darstellender Unterricht*	Hasselhorn & Gold 2009, S. 251
Fragend-entwickelnder Unterricht	*Vortrag, Vorlesung*	Gudjons 2011, Hasselhorn & Gold S. 239,
Eigenaktiv	*Rezeptiv*	Trautmann 2007, S. 237f.
Problemorientiert, problemhaft, problemlösend, entdecken lassend, genetisch, konkret, heuristisch orientiert, offen, anwendungsorientiert und projektorientiert		Zech 1998, S. 356

Tab. 4: Gegenüberstellung der Begriffsvielfalt zu entdeckenlassendem und darbietendem Lehren und zum entdeckenden und rezeptivem Lernen.

den entgegengesetzten Lehrmethoden unter Verwendung diverser Begriffspaare: „Unterrichtssituationen können zum einen rezeptives Lernen anregen, wobei sich die maßgebliche Steuerung der Situation durch eine Lehrperson vollzieht. Der Lernende hat die ankommenden Informationen nur noch aktiv zu verarbeiten, wirkt aber kaum auf deren Inhalt ein. Dieser Form ist das explorative bzw. erkundende oder entdeckende Lernen gegenüberzustellen. Hierbei hat der Lernende die wesentlichen Informationen selbstständig zu generieren. Ein Lehrer wirkt in solchen Situationen meist nur noch moderierend. Die Lernenden stehen in explorativen Situationen vor einem Problem.“ (Tobinski & Fritz 2010, S. 245).

In Tab. 4 wird eine Sammlung der verwendeten Begriffspaare katalogisiert. Es werden Begriffe zusammengestellt, die teilweise synonym verwendet werden zum entdeckenlassenden oder darbietenden Lehren bzw. den zugehörigen Lernformen.

Betrachtet man diese Sammlung an Begriffspaaren, wird der Facettenreichtum beider Lehrformen deutlich. Teilweise werden Begriffe synonym verwendet, teilweise werden verschiedene Schwerpunkte der Lehrform verdeutlicht. Sowohl entdeckendes Lernen als auch der darbietende Unterricht können sehr unterschiedliche Ausprägungen aufweisen. Entdecken ist eben nicht gleich entdecken. Dieser Zusammenhang wird auch in dem folgenden Zitat deutlich:

> „Insbesondere in der Mathematikdidaktik steht etwa das entdeckende Lernen, in dem Elemente direkter Unterrichtung kaum eine Rolle spielen, hoch im Kurs (vgl. Sonderheft von *mathematik lehren* herausgegeben von vom Hofe 2001). Dabei gibt es ganz unterschiedliche Varianten dieser Lernart, von sehr offenen Lernumgebungen ohne nennenswerte Vorstrukturierung bis hin zur substanziellen Anleitung der Schüler.“ (Renkl 2008, S. 128).

Und führt man diese Skala weiter endet man bei einer darbietenden Unterrichtsform. Auch innerhalb der darbietenden Unterrichtsformen kann man sich eine enorme Vielfalt vorstellen. Allein die Ausarbeitung eines Lehrervortrags kann in ganz unterschiedlichen Unterrichtprodukten enden.

> „Lehrpersonen unterscheiden sich auch darin, inwiefern sie Wichtiges wiederholen oder sonst wie besonders herausstellen, wie stark sie Einzelheiten ausschmücken oder sich stattdessen auf die zentralen

> Punkte beschränken, in welcher Weise sie das Verständnis der Schülerinnen und Schüler beachten und entsprechend berücksichtigen. So entstehen unüberschaubar viele Varianten von Lehrerdarbietungen.“ (Klauer & Leutner 2012, S. 99).

Die Übergänge sind sicherlich fließend und nur wenig trennscharf. In einer extremen Variante kann unter entdeckendem Lernen ein Lernen ohne jegliches Eingreifen durch Lehrpersonen verstanden werden:

> „Exploratives Lernen, auch erkundendes oder entdeckendes Lernen (Bruner 1961) genannt, bedeutet in seiner reinsten Form ein Lernen ohne Unterricht, denn die Informationen sind gänzlich vom Lernenden zu generieren.“ (Fritz et al. 2010, S. 240).

Die Lehreraktivität wäre bei fast 0 und die Aktivität der Lernenden sollte sehr hoch sein (eine gelungene Umsetzung wird dabei vorausgesetzt). Bei einer milderen Variante ist eine Lenkung der Lernprozesse möglich. Wichtig ist dabei eine hohe Eigeninitiative und Selbstständigkeit der Lernenden:

> „Der Schüler ist kein an die Schulbank gefesselter Zuhörer, sondern übernimmt einen Teil bei der Ausgestaltung und kann ab und zu die Hauptrolle dabei spielen.“ (Bruner 1981, S. 17).

Die Entgegenstellung zum darbietenden Unterricht macht deutlich, dass die Schülerin bzw. der Schüler bei diesem Unterricht weniger Handlungsmöglichkeiten besitzen. So wird der darbietende Unterricht wie folgt charakterisiert:

> „Sitzen Schüler in der Schule vor einem Text, liest ein Lehrling eine Internetseite oder besucht ein Student eine klassische Vorlesung, so werden einem Lernenden

> alle wichtigen Informationen schriftlich oder mündlich präsentiert.“ (Fritz et al. 2010, S. 239).

Durch diese strukturierte Form des Unterrichts werden auch Wissensstrukturen an die Lernenden übermittelt:

> „Genaues und integriertes Verständnis entwickelt sich vermutlich eher […], wenn eine präzise und genaue Definition betont und Nachdruck gelegt wird auf die Darstellung der Ähnlichkeiten und Unterschiede zwischen verwandten Konzepten […].“ (Ausubel 1974, S. 97).

Es wird deutlich, dass der Unterricht anhand unterschiedlicher Faktoren betrachtet und charakterisiert wird. Dazu zählen

a) Verstehensorientierung als Ziel
b) Aktivität und Selbstständigkeit der Lernenden
c) Offenheit der Lernumgebung
d) Unterrichtsstruktur
e) Handlungsanforderungen an die Lehrperson

Bereits die Begriffswahl lässt auf Schwerpunkte schließen. So wird vom entdeckenden Lernen gesprochen, aber vom darbietenden Lehren. Ersteres wird als Lernform, zweiteres als Lehrform bezeichnet. Der aktivere Handelnde wird somit fokussiert: die Schülerin bzw. der Schüler oder die Lehrerin bzw. der Lehrer. Um eine vergleichbare Perspektive einzunehmen, wird in dieser Arbeit daher die Formulierung entdeckenlassendes Lehren anstelle von entdeckendem Lernen verwendet.

Zusammenfassung

- Die historische Diskussion ist aktuell. Es gibt Befürworter beider Lehr-/Lernarten und auch vielfältige Mischformen.
- Das Vokabular für entdeckende und darbietende Lehrmethoden ist vielfältig und verdeutlicht die verschiedenen Schwerpunkte der jeweiligen Unterrichtsansätze.

- Es gibt verschiedene Ausführungen von entdeckenlassendem und darbietendem Lehren.
- Die Lehrformen werden u. a. anhand der folgenden Faktoren charakterisiert: Verstehensorientierung, Aktivität und Selbstständigkeit der Lernenden, Offenheit der Lernumgebung, Unterrichtsstruktur, Handlungsanforderungen an die Lehrperson.

3.4.2 Festlegung entdeckendes Lernen

Bisher werden die Begriffe entdecken, erkunden und erforschen wie auch teilweise in der Literatur synonym verwendet. An dieser Stelle soll überlegt werden, inwiefern sich die Tätigkeiten, die mithilfe dieser drei Verben ausgedrückt werden, ähneln oder aber auch voneinander unterscheiden.

Eine **Entdeckung** ist geschichtlich stets mit der Entdeckung Amerikas verknüpft und daher auch in vielerlei Hinsicht kritisch zumindest von zwei Seiten zu betrachten. Definiere ich eine Entdeckung als das Auffinden dessen, was schon vorhanden, aber noch nicht bekannt war, so wird mit der Entdeckung Amerikas das Auffinden eines bislang unbekannten Landes (Indien) beschrieben. Somit wird eine europäische Sichtweise auf die Geschichte gelegt. Das ist eine einseitige Betrachtung. Aus Sichtweise der Amerikaner bzw. Indianer stellt das gleiche Ereignis keine Entdeckung dar. Diese würden höchst wahrscheinlich von einem Angriff oder einer Belagerung sprechen. Dieses Beispiel zeigt, dass bei Entdeckungen die Sichtweise bzw. die Perspektive eine essentielle Rolle darstellen kann.

Gab es den Vektorraum bevor der Mensch ihn entdeckt hat? Oder gilt diese Entdeckung eher einer Erfindung, die sehr, sehr sinnvoll ist? Spätestens an dieser Stelle führen die Überlegungen zum Entdecken in der Mathematik zu höchstphilosophischen Fragestellungen.

Die Reise des Columbus war eine Erkundungsreise. Erst durch das Ergebnis der Entdeckung wurde sie zur Entdeckungsreise. Daraus kann gefolgert werden, dass bei erfolgreichen Erkundungen, Entdeckungen entstehen können. Sie sind sicher nicht Voraussetzungen für diese, da ein Gebiet oder Revier auch ohne neue Entdeckungen vollständig erkundet werden kann.

Der Begriff **erkunden** stammt aus dem militärischen Kontext. Feindliches Gebiet oder Geheimisse werden erkundet. Das legt ein systematisches Vorgehen nach festgelegten Schrittfolgen nahe. Rezeptartig werden beispielsweise in der Biologie und Geographie Gebiete kartiert und nach festgelegten Charakteristika begutachtet. Beobachtungsgenauigkeit, ggf. Fachwissen und gewissenhafte Dokumentierung sind hier zielführend.

In einer weiteren Schiffsreise zu neuen Kontinenten der Geschichte wird von Forschungsreise gesprochen (inwiefern ein gewalttätiges Vorgehen dadurch heute beschönigt werden soll, beleibt zu hinterfragen). Gemeint sind Humboldts Forschungsreisen, die gerade in diesem Jahr anlässlich Humboldts 250-jährigem Geburtstages hohes Interesse ernten. Diese Reise besteht aus mehreren Expeditionen, bei denen der südamerikanische Kontinent erforscht wird. Demnach wird also nicht von einer Erkundung oder Entdeckung gesprochen, obwohl sicher für beide Begriffe gute Begründungen gefunden werden können. Bei dieser Betrachtung soll das Erforschen im Vordergrund stehen. Ein Erforschen ist geprägt durch wissenschaftliches Interesse und wissenschaftlichen Methoden. Ziel ist es, möglichst viele geprüfte Erkenntnisse zu erlangen (vgl. Dudenredaktion, o. D.).

Erkundet werden in der Regel neue Gebiet, die aber bereits bestehen. Hierzu wird ein systematisches Vorgehen verwendet, bei dem Beobachtung, ggf. Fachwissen und Dokumentierung, vorausausgesetzt sind. Der Duden erklärt den Begriff erkunden mit den beiden Verben auskundschaften und erforschen (vgl. Dudenredaktion, o. D.). Erforschen legt ein wissenschaftsgesteuertes Vorgehen zugrunde, bei dem wissenschaftliche Methoden angewandt werden. Worin unterscheidet sich das Entdecken?

Ohne Entdeckung, gibt es kein Entdecken. Erkunden liefert stets Ergebnis, häufig nichts Neues, sondern erwartete Beobachtungen als Bestätigung und Absicherung. Erkundung beschreibt einen Prozess. Dieser ist häufig nach festlegten Regeln angeleitet. Dabei kann auch eine Entdeckung hervorgehen. Erforschen ist dem Erkunden ähnlich im Sinne des Ziels und der Fragestellung. Eine Fülle an wissenschaftlichen Methoden wird einsetzbar, die beim Erkunden nicht oder nur wenig beachtet werden, wie z. B. Extinktion oder Filtration von Stoffen. Ein Erforschen kann somit eng an ein experimentieren anschließen oder zumindest dieses anregen. Das Experiment ist den Naturwissenschaften entstammender Begriff. Es wird stets nur eine Variable verändert und eine Kontrollgruppe angesetzt.

Entdecken richtet sich viel stärker auf das Produkt, das Ziel als auf den Prozess. Eine Entdeckung ist es erst dann, wenn es nicht vorhersehbar ist. Ist es vorab vorhersehbar, dann handelt es sich um eine Extrapolation, bei der anhand von gesichertem Wissen neue Zusammenhänge oder Voraussagen getroffen werden.

In dieser Arbeit wird die folgende Definition für entdeckendes Lernen als Grundlage für einen entdeckenlassenden Unterricht verwendet: „Als entdeckendes Lernen wird ein Lernen bezeichnet, bei dem sich Schüler/Innen weitgehend selbständig mit Sachverhalten des Unterrichts beschäftigen, eigenständig Probleme lösen, damit Lösungen und Lerninhalte selbst ergründen und so neue kognitive Strukturen aufbauen“ (Hartinger 2001,

S. 330). Damit der Lernerfolg bei den Schülerinnen und Schülern unterstützt werden kann, sollte der Entdeckungsprozess sinnvoll angeleitet und durch die Lehrperson strukturiert sein.

> „Wichtig ist nicht die explorative Aktivität an sich, vielmehr sind die relevanten mentalen Aktivitäten, die der Wissenskonstruktion dienen, entscheidend; um diese zu ermöglichen, bedarf es in den meisten Fällen der Anleitung bzw. Strukturierung.“ (Renkl 2008, S. 113).

Daher erfordert ein entdeckender Unterricht eine gut strukturierte und sorgfältige Vorbereitung durch die Lehrperson im Vorfeld (vgl. Gudjons 2011, S. 182). Mit der Zeit können dann Lenkungen und Eingreifen der Lehrperson weiter reduziert werden, so dass der entdeckenlassende Unterricht als Mittel angesehen werden kann, um den Schülerinnen und Schülern langfristig eigenständiges Lernen in einem durchweg selbstgesteuerten Lernprozess zu ermöglich. Darbietende Unterrichtsphasen werden somit immer seltener eingesetzt (vgl. Gudjons 2011, S. 182).

Umgekehrt gilt: Je höher der Grad der Strukturierung und Lenkung durch die Lehrperson jedoch ist, desto größer wird die Rolle der Lehrperson in der Unterrichtsstunde und die Bedeutung der darbietenden Unterrichtsmethoden. Auch für einen gelungen darbietenden Unterricht ist eine gute Vorbereitung und Strukturierung des darbietenden Beitrags im Vorfeld von der Lehrperson zu leisten (vgl. Gudjons 2011, S. 166). Dabei kann die Darbietung verschiedene Formen annehmen: Lehrervortag, gelenktes Unterrichtsgespräch oder Text.

Der darbietende Unterricht wird durch die bestimmende Lenkung der Lehrperson charakterisiert.

> „Kennzeichnend ist also die leitende Funktion des Lehrenden, der den Lernstoff explizit vermittelt, indem er Wissensinhalte durch Auswählen, Präsentieren, Erklären und beispielhaftes Illustrieren übermittelt.“ (Hasselhorn & Gold 2009, S. 242).

Zusammenfassung

- Entdecken wird abgegrenzt vom Explorieren und Erkunden.
- Das entdeckende Lernen wird definiert als selbstständiger Lernprozess, bei dem in der Auseinandersetzung mit einem Inhalt Lösungen zur Problemstellung gefunden und neue Wissensbereiche eigenständig erarbeitet werden.
- Als entdeckendes Lernen wird ein Lernen bezeichnet, bei dem sich Schülerinnen und Schüler weitgehend selbständig mit Sachverhalten des Unterrichts beschäftigen, eigenständig Probleme lösen, damit Lösungen und Lerninhalte selbst ergründen und so neue kognitive Strukturen aufbauen“
- Entdeckendes Lernen heißt nicht unterstützungsfreies Lernen. Strukturierung und Lenkung durch die Lehrperson ist hilfreich.
- Darbietendes Lernen wird durch die lenkende Funktion der Lehrperson charakterisiert.

3.4.3 Entdeckendes Lernen im Unterricht

Grundsätzlich muss unterschieden werden zwischen dem entdeckenden Lernen als stundenübergreifendes und ganzheitlich verstandenes Lern**konzept** im Sinne einer Handlungsorientierung und der eher pragmatischen Verwendung in einzelnen Unterrichtstunden und dem entdeckenden Lernen als eine schülerorientierte und -aktivierende Lern**methode**. Das erstere geht zurück auf Pestalozzis Konzept mithilfe von „Kopf, Herz und Hand“ zu lernen. Bei dieser Form des Lernens sollen kognitive, affektive und psychomotorische Lernweisen in gleichen Ansätzen berücksichtigt werden. Diese Idee strukturiert den Schul- und Unterrichtsalltag und führt zu offeneren Lernsituationen als dies in Regelschulen der Fall ist. Es wird von einem ganzheitlichen didaktisch-methodischem Konzept gesprochen. In Abgrenzung dazu wird der Begriff des entdeckenden Lernens ebenfalls verwendet, um eine Lernmethode zu beschreiben, die gezielt in (einzelnen) Unterrichtsstunden (auch in Regelschulen), also in künstlich hervorgerufenen Lernsituationen, angeleitet wird. Durch die Bereitstellung von Materialien und Problemstellungen werden die Schülerinnen und Schüler animiert sich in einer aktiven Weise mit den Lerninhalten auseinanderzusetzen. Auf diese Wiese wird der Lerninhalt eigenständig erkundet und Regeln bzw. Zusammenhänge erarbeitet:

> „Beim Wissenserwerb durch Exploration steht der Lernende nicht vor einer Aufgabe, sondern vor einem Problem. […] In explorativen Unterrichtssituationen kann das Lernziel sowohl durch das Curriculum oder die Lehrperson vorgegeben, als auch durch die Lernenden (z. B. Projektunterricht) ausgewählt werden.“ (Tobinski & Fritz 2010, S. 242).

Im Unterschied zum ganzheitlichen Lernkonzept wird der Lernprozess im Unterricht durch Material-, Problem- und Zielvorgaben stärker angeleitet und gelenkt als dies in den offeneren Lernarrangements nach beispielsweise Pestalozzi der Fall ist (vgl. Tobinski & Fritz 2010, S. 241). Die Aktivität muss dabei nicht zwangsweise durch Kopf, Herz und Hand ausgeübt werden. Eine Zielsetzung könnte in der vielseitigen und gehaltvollen Auseinandersetzung mit neuen Lerninhalten bestehen. Die weiteren Erläuterungen in diesem Kapitel werden zeigen, dass durch den Einsatz entdeckenden Lernens im Mathematikunterricht hauptsächlich kognitive Aktivitäten fokussiert werden können. In dieser Arbeit wird stets die Verwendung des entdeckenden Lernens im Unterricht als Lehrmethode oder Lehrform, und nicht als ganzheitliches Lernkonzept betrachtet.

Zusammenfassung

- Das entdeckende Lernen kann als ganzheitliches Lernkonzept, aber auch als Lernform betrachtet werden.

3.4.4 Lehrmethode und Lernzielsetzung

Inwiefern die eine oder andere Lehrmethode, das heißt ein stärker entdeckenlassender oder darbietender Unterricht gewählt wird, hängt von verschiedenen Aspekten ab. Dazu gehören Aspekte der Unterrichtsplanung: „Bei der Auswahl der Lehrmethode wird auch eine Rolle spielen, welche Lernziele durch Lehren erreicht werden sollen.“ (Hasselhorn & Gold 2009, S. 232). Auch langfristigere Lernziele, die auf Erziehungszielen beruhen, können die Entscheidung beeinflussen:

> „Wer primär Kreativität und Problemlösefähigkeit, selbstständiges Denken und Lernen fördern will, dürfte eher geneigt sein, entdeckendes Lernen zu bevorzugen, und wem es mehr darum geht, eine umfangreiche und klar strukturierte Wissensbasis zu vermitteln, wird eher zum Pol der vom Lehrer geleiteten Verfahren neigen.“ (Klauer & Leutner 2012, S. 97).

Häufig wird auch das Erhöhen der Lernmotivation als Entscheidungsgrund für ein Entdecken angeführt (vgl. Renkl 2008, S. 130).

Ein vielfältiger Blick auf die Unterrichtsgestaltung und die Verwendung unterschiedlicher Methoden, um die unterschiedlichen Ziele langfristig erreichen zu können, erscheint dabei zielführend. Das liegt dann zum Beispiel in einer Variation aus entdeckenlassendem und darbietenden Unterrichtsphasen. „Insgesamt ist es angemessen das Problem des Unterrichts als ein Problem des Anstrebens multipler Ziele anzusehen (z. B. Automatisierung von basalen Fertigkeiten, konzeptuelles Verstehen, Wecken von Interesse, Fördern von Lernstrategien) (vgl. Helmke,2003; Petillon, 1997; Schrader, Helmke & Dotzler, 1997).“ (Renkl 2008, S. 130f.)

Daraus ergibt sich zwangsläufig, dass bei einem Vergleich von entdeckenlassenden und darbietendem Unterricht vielschichtig das Anstreben gleicher Lernziele analysiert werden muss. Es wird mit einem entdeckenlassenden, wie mit einem darbietenden Unterricht, das Verstehen des Inhaltes beabsichtigt. Lernziele wie das Erreichen von Problemlösefähigkeiten werden teilweise mit einer der beiden Unterrichtsmethoden zielführender angeregt (vgl. Hmelo-Silver 2004, S. 244f.).

Zusammenfassung

- Die Wahl der Lehrform wird auch durch die Setzung von Lernzielen ausgemacht.
- Wird ein breites konzeptuelles Wissen als oberstes Lernziel gesetzt, so geht dies häufig mit einem darbietenden Unterricht einher. Werden Problemlösefähigkeiten angestrebt, werden vermehrt entdeckenlassende Lehrmethoden verwendet.

3.4.5 Entdeckendes Lernen in der Mathematikdidaktik

Beginnend mit der Unterrichtsreform in den 60er und 70er Jahren kommt auch in der Mathematikdidaktik, später dann in Anlehnung an Bruner der Aufruf nach alternativen Lehrwegen zu der bisherigen darbietenden Lehrform auf. Das Verständnis darüber, was entdeckendes Lernen ausmacht und wie es im Unterricht umgesetzt werden soll, variiert auch in der Mathematikdidaktik über die Jahre hinweg und mit den Autoren, die neue Lernumgebungen konzipieren, mit denen eine Entdeckung in den verschiedenen Klassenstufen möglich sein soll (vgl. Kollosche 2017, S. 213ff.; Leuders 2014, S. 240f.). Die Positionierung zum entdeckenden Lernen hat auch in der Mathematikdidaktik eine weite Spannbreite. Es gibt Befürworter und Kritiker. Dabei muss zunächst geklärt werden, was unter entdeckendes Lernen gefasst wird.

Die gemeinsamen und unterschiedlichen Auslegungen des entdeckenden Lernens lassen sich anhand der bereits in Abschnitt 3.4.1 herausgestellten Kategorien übersichtlich darstellen.

a) Verstehensorientierung als Ziel

Das entdeckende Lernen wird grundsätzlich in drei Varianten unterteilt: 1) Induktive Begriffsbildung, 2) forschendes Lernen, oder 3) problembasiertes Lernen (vgl. Leuders 2014, S. 238). Durch diese Festlegung werden auch die Lernziele impliziert. Dies kann in dem Aufbau von Grundvorstellungen und tragfähigen Konzepten eines mathematischen Begriffs liegen (für 1) oder in dem Erkennen von Gemeinsamkeiten und Grenzen und dem Entwickeln einer Formel für z.B. Volumina eines Kegels (für 2) und/oder in der Anwendung heuristischer Strategien bei der Bearbeitung von Problem (für 3). In jedem Fall soll somit ein tiefergehendes Verständnis von mathematischen Begriffen, Verfahren oder dem Betreiben von Mathematik angeregt werden. Dabei geht man stets davon aus, dass die Schülerinnen und Schüler die Aufgaben eigenständig bearbeiten.

b) Aktivität und Selbstständigkeit der Lernenden

Das entdeckende Lernen ist von der aktiven Auseinandersetzung der Lernenden mit dem Lerngegenstand geprägt (vgl. Winter 2016, S. 3; Wittmann 1990, S. 165).

> „„Entdeckendes Lernen“ ist weniger die Beschreibung einer Sorte von beobachtbaren Lernvorgängen (wenn so etwas überhaupt direkt möglich ist), sondern „ein theoretisches Konstrukt, die Idee nämlich, dass Wissenserwerb, Erkenntnisfortschritt und die Ertüchtigung in Problemlösefähigkeiten nicht schon durch Information von außen geschieht, sondern durch eigenes aktives Handeln unter Rekurs auf die schon vorhandene kognitive Struktur, allerdings in der Regel angeregt und somit erst ermöglicht durch äußere Impulse.“ (Winter 2016, S. 3).

Dabei versteht Winter die Aktivität als körperliche Handlung und nicht als reine kognitive Tätigkeit. „Jedenfalls ist es für entdeckendes Lernen von enormer Bedeutung, körperliche Erfahrungen − wo immer es ohne Krampf geht – zu ermöglichen, über die allerdings auch vor- und nachgedacht werden muss.“ (Winter 2016, S. 47). Bei anderen Auslegungen des entdeckenden Lernens findet diese körperliche Komponente keine Berücksichtigung (vgl. Leuders 2014, S. 3ff.).

c) Offenheit der Lernumgebung

Damit die Lernenden sich eigenständig betätigen können, werden Lernumgebungen entwickelt, die zum Ausprobieren, Hinterfragen, Weiterdenken anregen. Die Ausgangssituation des Lernens kann gegeben sein durch ein Problem oder eine Fragestellung, die nicht zu komplex und nicht zu trivial und in jedem Fall herausfordernd sein sollte (vgl. Leuders 2014, S. 3, Wagenschein 2014, S. 17f., Winter 2016, S. 18f.).

Mit dem Ansatz des open-ended-approach wird im Mathematikunterricht eine Aufgabenkultur erprobt, die sich durch ihre Offenheit und Reichhaltigkeit an Zugängen und Lösungsmöglichkeiten auszeichnet (vgl. Becker & Shimada 1997). Diese Aufgaben zielen weniger auf das Erlernen und Erfahren eines konkreten mathematischen Begriffs oder Verfahrens ab, sondern viel mehr auf eine Anwendung von Wissen und einer Eingrenzung von Problemstellungen, um so eine Lösungsmöglichkeit erarbeiten zu können.

Es ist auch eine gestufte Aufgabenstellung möglich, in der die Lernenden zunächst ein Phänomen erfahren. In einem zweiten Schritt setzten sie sich mit dem Phänomen, der Situation und dem Material weiterauseinander, bis sie in einer weiteren Phase auf eine allgemeinere Fragestellung zu dem Phänomen angeleitet werden (vgl. Wittmann 1990, S. 159).

Im Mathematikunterricht werden methodische wie sozialstrukturelle Entscheidungen häufig von der Aufgabenstellung bestimmt (vgl. Büchter & Leuders 2005, S. 9). Das Öffnen einer Aufgabe, z. B. hinsichtlich der Lösungswege oder der angegebenen Informationen, verändert die Anforderungen an die Schülerinnen und Schüler und damit auch das Unterrichtsgeschehen (vgl. Büchter & Leuders 2005, S. 88ff.).

d) Struktur des Unterrichtsgeschehens

Mit einer gestuften Vorstellung eines Phänomens oder eines Spiels mit seinen Regeln werden die nächsten Schritte des Unterrichtsgeschehens bereits festgelegt. Der Unterricht folgt dann weniger offen, sondern stark vorstrukturiert. Ein Bespiel dafür ist das Spiel die Würfelratte (vgl. Wittmann 1990, S. 159).

Eine offenere Unterrichtsstruktur ist für Entdeckungsprozesse älterer Kinder ausformuliert. Nach der Herausarbeitung der Problemstellung erarbeiten die Lernenden eigene Lösungsentwürfe. Anschließend werden die Ergebnisse klar hervorgehoben, formuliert und mit bisherigem Wissen verknüpft. Dies soll auch als Gedächtnisstütze wirken. Zuletzt wird das Lösungsvorgehen reflektiert und die Schülerinnen und Schüler werden ermutigt, dieses Vorgehen auch auf weitere Aufgaben zu übertragen (vgl. Winter 2016, S. 18f.). Selbst mit dieser Beschreibung kann die Unterrichtsgestaltung noch stark in ihrer Offenheit variieren.

Weitere Variationen hinsichtlich der Offenheit des Unterrichtsgeschehens führen zur Frage nach dem Grad der Lenkung durch die Lehrperson.

e) Handlungsanforderungen an die Lehrperson

Die Aufgabe der Lehrperson besteht beim entdeckenden Lernen zum einen darin, eine passende herausfordernde Situation zu stellen und zum anderen darin, durch anregende Kommunikation die Lernenden bei ihrem Tun zu ermutigen, anzuregen und durch eine offene Lernatmosphäre zu unterstützen (z. B. Leuders 2014, S.237ff., Meyer 2021, S.11f., Winter 2016, S. 4f., Wagenschein 2014, S. 17). Im Grad und der Art und Weise der Unterstützung besteht durchaus eine vielfältige Auslegung. Bei der von Wagenschein geprägten sokratischen Methode werden Lernende unterstützt, in dem die Lehrperson eine sokratische Unterrichtsgesprächsführung anregt und dadurch die Reduktion auf den Kern eines Sachgegenstandes lenkt. Die sokratische Methode stützt sich auf Frage wie: Worüber sprechen wir jetzt?, Was wollten wir eigentlich herausbringen?, Sind wir weiter gekommen?, Wer ist einverstanden mit dem, was er eben gesagt hat? Diese Methode biete seinerzeit eine Kontrast zu dozierendem Lehrerverhalten. So sollen interessante Phänomene aus der Natur, die den Schülerinnen und Schülern bestenfalls bereits aus eigenen Erfahrungen bekannt sind, erfasst werden und die Möglichkeit bieten, allgemeine Gesetzmäßigkeiten zu entdecken (vgl. Wagenschein 1999, S. 118).

Dieses Vorgehen wird nicht durchweg unterstützt und teilweise auf ein Frage-Antwort-Spiel reduziert, bei dem den Lernenden die Rolle eines Rates zukommt (vgl. Winter 1889, S. 3f.). Die sokratische Methode bildet als Form eines Unterrichtsgesprächs einen Übergang zu darbietenden Lehrformen. Wagenschein kann damit als Befürworter des entdeckenden Lernens einerseits und als Anwender des darbietenden Lehrens andererseits angesehen werden.

Insgesamt wurden für die Handlungsanforderungen an die Lehrperson bei der Umsetzung des entdeckenden Lernens bislang zu wenige konkrete Hinweise von der Mathematikdidaktik formuliert. Anhand einzelner konkreter Unterrichtsbeispiele werden die verschiedenen Handlungsfacetten der Lehrpersonen ersichtlich (vgl. Kollosche 2017, S. 212f.).

f) Ergänzung weiterer Gelingensbedingungen

Das Vorwissen, die Kenntnisse und Fähigkeiten der Lernenden sind Voraussetzungen für eine gelungene Entdeckung (vgl. Leuders 2014, Stern 1992). Bereits Piaget hat auf die Bedeutung, die der Austausch unter den Lernenden beim Erlernen neuer Inhalte hat, hingewiesen. So können noch weitere Faktoren, die die unterrichtliche Gestaltung des entdeckenden Lernens in der Mathematik prägen, gefunden werden und diese Darstellung kann lediglich einen Anfang bilden.

Auch in der Mathematikdidaktik wird die Diskussion um entdeckende Lernformen enthusiastisch betrieben. Die nicht eindeutige Lage von Forschungsergebnissen stoßen auf Erfahrungen und Überzeugungen, so dass auch feurige Diskussionen aktuell entfachen (vgl. Leuders 2014 und Kollosche 2017).

Zusammenfassung

- Die Kategorien Verstehensorientierung als Ziel, Aktivität und Selbstständigkeit der Lernenden, Offenheit der Ler-

numgebung, Unterrichtsstruktur und Handlungsanforderungen an die Lehrperson können bei Wagenschein, Winter, Wittmann und weiteren im Bezug auf das entdeckende Lernen im Mathematikunterricht wiedergefunden werden.
- Zusätzlich wird in der Mathematikdidaktik dem Vorwissen und relevanten Vorerfahrungen eine Bedeutung für das Lernen zugeschrieben.

3.5 Gestaltungsprinzipien für einen entdeckenlassenden Mathematikunterricht

An dieser Stelle werden Gestaltungsprinzipien für eine Umsetzung des entdeckenden Lernens im Mathematikunterricht formuliert. Dazu werden die sechs Überlegungen aus dem vorherigen Abschnitt 3.4.5 ergänzt:

- Verstehensorientierung
- Aktivität und Selbstständigkeit der Lernenden
- Offenheit der Lernumgebung
- Struktur des Unterrichtsgeschehens
- Handlungsanforderungen an die Lehrperson
- Für ein Gelingen sind Vorwissen, Kenntnisse und Fähigkeiten der Lernenden entscheidend.

4 Problemorientiertes Lehren und Lernen

In den vorangegangenen Kapiteln wurden Eigenschaften des Entdeckens, des entdeckenlassenden Lehrens sowie des Problemlösens und des Unterrichtens von Problemlösen herausgestellt. Es wurde gezeigt, wie vielschichtig und unterschiedlich die Begriffe umgesetzt und aufgefasst werden. Erst die intensive Auseinandersetzung mit den dahinter liegenden Konzepten ermöglicht eine Zusammenführung der beiden Prinzipien unter dem Begriff des problemorientierten Lernens und Lehrens (vgl. Abschnitt 4.1).

Mit der Festlegung auf die Problemorientierung können aus der Fülle der Forschungsergebnisse eben diejenigen ausgewählt werden, die auf ein vergleichbares Verständnis in der konkreten Umsetzung der Lern-umgebung zurückgehen. Dabei können die verwendeten Begriffe durchaus voneinander abweichen. Es werden im Abschnitt 4.2 ausgewählte Forschungsergebnisse zur Umsetzung von problemorientierten Lernsituationen und Vergleichsstudien dargelegt. Abschließend werden im Abschnitt 4.3 Studien zu Lehrpersonenüberzeugungen genannt, mit denen die Wahl eines darbietenden bzw. problemorientieren Unterrichts erklärt werden können.

4.1 Festlegung problemorientiertes Lernen

Eine Problemlöseaufgabe kann dadurch definiert werden, dass dem Bearbeiter der Lösungsweg nicht offensichtlich ist und dieser erst nach weiteren Überlegungen und Erarbeitungen entdeckt wird (vgl. Schoenfeld 1992). Diese Definition ist personenbezogen und Aufgaben können individuell als Problemlöseaufgaben eingeordnet werden oder auch nicht. Dies ist Abhängig von Fertigkeiten und Wissen des Bearbeiters.

Werden bei der Bearbeitung neue Inhalte erkannt oder neue Begriffe erfahren, ist die Bearbeitung einer Problemlöseaufgabe eng verknüpft mit dem von Winter definierten Entdecken (vgl. Winter 1995). Durch die Aufgabenstellung wird eine Erkundung angeregt, die im optimalen Falle durch die Auseinandersetzung mit den zugrundeliegenden Inhalten zu neuen Erkenntnissen führt. Es können auf diese Weise neue Begriffe, Inhalte oder Verfahren erlernt werden (vgl. Vollrath & Roth 2012, S. 61). Diese Kombination von Problemlösen und Entdecken wird in der Literatur als problemorientiertes Lernen bezeichnet (vgl. Leuders 2003, S. 121, Vollrath & Roth 2012, S. 61). „Problemorientiertes Lernen vollzieht sich an Fragestellungen, die zu neuen mathematischen Einsichten führen.“ (Vollrath & Roth 2012, S. 62).

Zusammenfassung:

- Wird bei der Bearbeitung einer Problemlöseaufgabe neues Wissen entdeckt, so wird dieser Vorgang als problemorientiertes Lernen bezeichnet.

4.2 Empirische Studienergebnisse zum problemorientierten Lernen

Mit dem Hintergrund der bisherigen theoretischen Erörterungen zu Unterrichtsmethoden und -gestaltungen werden für diese Studie relevante empirische Untersuchungen und Forschungsergebnisse für die Umsetzung eines problemorientierten Mathematikunterrichts ausgewählt und zusammenfassend stets in Bezug zu einem eher darbietenden Unterricht dargestellt. Sicherlich ist Problemorientierung nicht gleich Problemorientierung und vielfältige Gestaltungsmöglichkeiten sind denkbar und sinnvoll. Auch ein darbietender Unterricht kann auf viele verschiedene Arten und Weisen umgesetzt werden (vgl. Abschnitt 3.4). Interessant ist dabei, dass Aufgaben, mit denen die Kooperation und höhere Denkprozesse angeregt werden, auch zu einer Erhöhung der intrinsischen Motivation und des Lernerfolgs führen können (vgl. Renkl & Mandl 1995, S. 295f.; Röhr & Wittmann 1995, S. 257ff.). Ebenso wie diese Studie beziehen sich auch viele weitere kaum auf die konkrete Unterrichtsumsetzung. Das gilt sowohl für Studien, die darbietende Unterrichtsanasätze untersuchen (vgl. Klauer & Leutner 2012, S. 157), wie auch für Studien aus dem Bereich der Problemorientierung (vgl. Hartinger 2001, S. 134). Die Festlegung auf den Begriff des problemorientierten Lernens ist daher Grundlage für die Auswahl der aufgeführten Forschungsergebnisse. Dass ein problemorientierter Unterricht erfolgreich zur Bildung neuer mathematischer Begriffe führen kann, konnte Hußmann mit komplexen-realitätsnahen Problemaufgaben zur eigenständigen Erarbeitung des Integralbegriffs zeigen (vgl. Hußmann 2002).

Häufig werden der Problemorientierung weitere Vorteile zugeschrieben, wie beispielsweise die Förderung von Kreativität, eine Steigerung der Motivation, ein langfristig besseres Behalten und eine Stärkung des Durchhaltvermögens (vgl. Kipman 2020, S. 100ff., Leuders 2003, S. 120). Um diese Zusammenhänge auch empirisch belegen zu können, werden verschiedene Forschungsvorhaben umgesetzt: Die gleichwertige Bedeutung von kognitiven Fähigkeiten zu Selbstregulation und Selbstwirksamkeit für die Problemlösekompetenz konnte in einer Studie mit 140 Studierenden in einem Setting aus Problemlöseaufgaben, Fragebögen und IQ-Test festgestellt werden (vgl. Kipman 2020, S.110ff.). Das Erfassen und Sichtbarmachen von Kreativität bei Problemlöseprozessen anhand geometrischer Aufgabenstellungen ist nicht nur für die Begabtenforschung von Bedeutung. In einer Studie mit Oberstufenschülern und -schülerinnen werden Lösungsprozesse und Produkte analysiert und hinsichtlich ihrer Kreativität bewertet (z.B. Joklitschke et al. 2016). Ebenfalls bei der Analyse von Problemlöseprozesse konnte der Zusammenhang zwischen sozialer Herkunft und dem Lösungsverhalten aufgezeigt werden, dazu wird die Anwendung von Strategien und auch das Durchhaltevermögen gezählt (vgl. Kara 2016).

Auch der entgegengesetzte Standpunkt wird begründet vertreten: „Problemorientiertes Lehren ist zeitaufwendig, möglicherweise sogar unökonomisch, gelegentlich überfordernd und vor allem dann vom Scheitern bedroht, wenn instruktionale Hilfestellungen ausbleiben. Zusätzlich ist die Gefahr der Unvollständigkeit und Ungeordnetheit des entdeckend und situativ erworbenen Wissens gegeben.“ (Hasselhorn & Gold 2009, S. 237).

Aus dem amerikanischen Raum sind einige Untersuchungen zum Konzept des problem-based-learning (PBL) und dem inquiry-based-learning bekannt. Die unterrichtlichen Umsetzungen beider Ansätze passen nicht grundsätzlich zu dem dieser Studie zugrunde liegenden problemorientierten Lernen (vgl. Abschnitt 4.1). Beide Ansätze werden vermehrt bei der Curriculumsüberarbeitung von Medizinstudierenden untersucht (z. B. Hmelo 1998). Unter problembasiertem Lernen wird hier ein Ansatz verstanden, bei dem komplexe, häufig praxisnahe, Situationen eigenständig gelöst werden sollen. Die Eigenständigkeit besteht dann in der Recherche zu bestimmten Krankheitsbildern. Im Fokus steht das Erarbeiten, Auswählen, Vergleichen und Begründen von recherchierten Lösungsansätzen. Beim mathematischen Problemlösen kann der Fokus in einer Recherche bestehen. Typischerweise liegt hier der Lösungsansatz in der Kombination bereits bekannter Ideen oder der eigenständigen Entdeckung neuer Herangehensweisen, die durch die Aufgabenstellung oder den Kontext angeregt werden. Damit unterscheiden sich der problemorientierte Ansatz im PBL-Curriculum von dem im Mathematikunterricht durch die fokussierte Tätigkeit und Aktivität der Lernenden.

Auch unter dem Stichwort „problem solving“ können viele Forschungsansätze für den Mathematikunterricht ausgemacht werden, wobei der Begriff des „problem solving“ auch hier unterschiedlich gefasst wird. Daher wird jede Studie hinsichtlich ihrer Passung zum problemorientierten Lernen überprüft. Anhand der nachfolgenden Studie soll beispielhaft aufgezeigt werden, inwiefern das zugrundeliegende Verständnis auch zur Definition des problemorientierten Lernens passt. Anschließend werden weitere Studienergebnisse zusammenfassend dargestellt.

Ein Vergleich von problembasiertem (PBL) und darbietendem (Lecture & discussion) Unterricht an Hochschulen wird von Capon und Kuhn betrachtet, in dem die Frage untersucht wird, inwiefern Unterschiede in Bezug auf a) besseres Erlenen von neuen Inhalten, b) besseres Erinnern von neuen Inhalten und c) bessere Anbindung an Vorwissen aufgezeigt werden können (vgl. Capon & Kuhn 2004). In dieser Studie wurden zwei Hochschulklassen in jeweils zwei Themen für eine Unterrichtsdauer von zwei Stunden und 45 Minuten von ein und demselben Lehrperson unterrichtet. Bei den Themen handelt es sich um betriebswirtschaftliche Konzepte. Dabei wurde der einen Klasse das erste Thema problembasiert und anschließend das zweite Thema durch eine Vorlesung mit anschließender Diskussion dargeboten. In der anderen Klasse wurden die Themen in umgekehrter Weise unterrichtet. Es gab zwei Testformen: In zwölf Wochen später stattfindenden Abschlussprüfungen wurden beide Themen indirekt, d. h. ohne Nennung der Konzeptnamen in Form einer offenen Aufgabe abgefragt. In diesen Klausuren konnten die Studierenden auf all Ihre Unterlagen und Lehrbücher zurückgreifen und waren aufgefordert einen Aufsatz zu der gegebenen Situation zu schreiben, dabei wäre die Verwendung von beiden Konzepten möglich gewesen. In einem zweiten Test wurden beide Konzepte direkt abgefragt und die Studierenden sollten diese jeweils definieren und erklären, ohne Zugriff auf ihre Unterlagen. Dies geschah sechs Wochen nach der Einführung. In dem direkten Test gibt es kaum Leitungsunterschiede in Bezug auf eines der beiden Konzepte. Bei dem anderen Konzept weisen die darbietend unterrichteten Studierenden höhere Lernleistungen auf. Die Auswertung hat u. a. gezeigt, dass Studierende, die einen problembasierten Unterricht erhalten haben, weniger Faktenwissen, dafür aber höhere Erklärungskompetenz aufweisen. In dem offenen Aufgabenformat aus Test 1 wurden bei den problembasierten Gruppen viel häufiger Erklärungen gefunden, die auf das Verstehen der Konzepte ausgelegt sind.

Die Vorlesungs-Gruppen haben im Gegensatz dazu viel häufiger die korrekten Definitionen aus den Lehrbüchern angegeben. Capon und Kuhn vermuten daher, dass ein problembasierter Unterricht stärker die Verknüpfung zum Vorwissen und somit zu Sinnstiftung anregt als eine Vorlesungsvariante dies tut. Ein Vorteil des PBL-Ansatzes in Bezug auf besseres Erlernen und Erinnern der Konzepte scheint nicht zu existieren (vgl. Capon & Kuhn 2004, S. 74).

Diese Aussage kann durch weitere Studien unterstützt werden. In den Studien von Fuchs und weiteren wurde deutlich, dass leistungsschwache Schülerinnen und Schüler mit einer spezifischen Intervention zu besseren Lernerfolgen gelangen als mit der inklusiven Alternative (vgl. Fuchs et al. 2015, S. 134ff.). Patel und Kaufman haben gezeigt, dass Medizinstudierende, die mithilfe eines problembasierten Curriculums unterrichtet werden, zwar ausführlich ausgearbeitete Erklärungen abgeben, dass diese aber insgesamt weniger kohärent und dafür deutlich fehlerbehafteter sind als die Erklärungen von Studierenden, die nach dem traditionellen Curriculum, also durch darbietende Methoden, unterrichtet werden (vgl. Patel & Kaufman 1993). Auch Dochy und weitere konnten in einer Metastudie mit 43 empirischen Studien im Vergleich zu der Gruppe der traditionell unterrichteten Studierenden positive Effekte für argumentativen Fähigkeiten der Studierenden, wie begründet Entscheidungen zu fällen, jedoch negative Effekte für das inhaltliche Wissen ausmachen (vgl. Dochy et al. 2003). Klauer und Leutner (2012) geben einen Überblick über verschiedene Studien, die darbietendes Lehren mit entdeckenlassendem Lehren vergleichen. Sie stellen heraus, dass stets das Hauptlernziel am besten erreicht wird: Wurde entdeckendes Lernen genutzt, waren die Schülerinnen und Schüler besser darin Entscheidungen zu treffen und Verantwortung zu zeigen. Bei einer darbietenden

Lehrform zeigten die Schülerinnen und Schüler besseres inhaltliches Verständnis (vgl. Klauer & Leutner 2012). Dazu passen auch die Ergebnisse einer quasi-experimentellen Studie, in der PBL-Studierende stärker versuchen bestehendes Wissen beim Lösen von Problemen anzuwenden. Dies wird als der Aufbau von flexiblem Wissen im Gegensatz zu eher trägem Wissen aus traditionellem Unterricht interpretiert (vgl. Hmelo-Silver 1998, S. 197). Andere Studien zeigen, dass ein entdeckenlassender Unterricht den Erwerb von konzeptuellem Wissen fördert und die Lernenden dazu entsprechende Vorkenntnisse benötigen (vgl. de Jong et al. 2023, S. 1f.).

Einige weitere Studien, die dem problemorientierten Lernen nahestehende Konzepte untersuchen, haben weitere Vorteile des problem-basierenden Lehransatzes aufgezeigt. Zu den gemessenen Vorteilen gehören ein hoher Lernerfolg, besseres Abschneiden in standardisierten Leistungstests, aber auch eine bei Lernenden erzeugte positive Sicht auf die Mathematik, das Verständnis ihrer Nützlichkeit und das Erlernen mathematischer Begriffe (vgl. Riordan & Noyce 2001, Schoenfeld 2002; Thompson & Senk 2001).

Alfieri et al. kommen in einer Reviewstudie mit über 164 Studien zum entdeckenden Lernen und gelenktem entdeckenden Lernen unter anderem zu dem Hauptergebnis, dass ungelenktes entdeckendes Lernen den Lernenden nicht hilft. Erhalten die Lernenden Unterstützung in Form von Feedback, Beispielaufgaben, Scaffolding oder explizite Erklärungen, führen diese Formen des gelenkten entdeckenden Lernens zu größerem Lernerfolg (vgl. Alfieri et al. 2011, S. 7ff.). Dabei scheint die Wirkung einer gelenkten Entdeckung sowohl in kürzeren Entdeckungsphasen in einzelnen Stunden, wie auch in längerfristig angelegten Projekten hilfreich für das Lernen zu sein (vgl. Lazonder & Harmsen 2016, S. 706). Nicht unterstützte Entdeckungen führen hingegen teilweise zu körperlichen Aktivitäten, wie Handhabungen und Bearbeitungen von Materialien in jeglicher Form, oder zu unstrukturiertem Ausprobieren, was die tatsächlich erwünschte geistige Denktätigkeit hindert (vgl. Renkl 2008, S. 113). In einer empirischen Studie zum Lernen durch Lehren wurde ersichtlich, dass die Aktivität des Lehrens bei den Lernenden zu Stress und Überforderung führt, so dass trotz aktiver Auseinandersetzung kein kognitiver Lernprozess erfolgen konnte (vgl. Renkl 1997).

Diese Ergebnisse belegen, dass durch ungelenkte Entdeckungsansätze die Lerneffektivität durch kognitive Überlastung verringert wird. Unter das Stichwort „Informationsverarbeitungskapazität“ fällt auch die folgende Studie: Es konnte gezeigt werden, dass Kinder, die noch keine effektiven Additions- und Subtraktionsprozeduren verinnerlicht haben, ihre gesamte Anstrengung und Konzentration auf diese Rechenprozesse legen. Eine Entdeckung (hier von Strategien) kann somit nicht erfolgen, da das hierfür benötigte Wissen nicht abgerufen werden kann. Dagegen können Kinder, die schnell rechnen können, mehr Kapazitäten dafür verwenden einen effizienteren Rechenweg zu entdecken (vgl. Stern 1992).

Auch Lehransätze mit minimaler Führung führen zu keinen Vorteilen für den Unterricht oder den Lernprozess. Im Vergleich ist eine direkte Lehranleitung (meist in Form von Vorlesungen) effektiver (vgl. Kirschner et al. 2006; Mayer 2004). In einer Reviewstudie über 164 Einzelstudien im Bereich der Primarstufe führen die Analysen, dass eine Kombination aus direkter Darbietung und entdeckenden Unterrichtsbestandteilen am effektivsten sei (vgl. de Jong et al. 2023).

Es folgen drei ausgewählte Studien, in denen ein problemorientierter Unterrichtsansatz mit einem darbietenden Unterrichtsansatz kombiniert wird:

In einer Vergleichsstudie von Wijnia und weiteren (2014) mit niederländischen Studierenden der Psychologie und Pädagogik werden die Erarbeitungsphasen in einem PBL-Ansatz so variiert, dass der einen Versuchsgruppe verschiedene literarische Werke für die Problemlösung zur Verfügung stehen. Die Vergleichsgruppe hingegen enthält stark zusammengefasste Lehrtexte. Hier werden ein nicht-gelenkter mit einem gelenkten PBL-Ansatz verglichen. Es konnte gezeigt werden, dass die Bearbeitung der Lehrtexte, für die weniger Zeit benötigt wurde, zu höheren Lernleistungen bei den Studierenden führt. Wijnia und weitere sehen sich darin bestärkt, dass direkte Instruktionen integriert in PBL-Ansätze zielführend sind (vgl. Wijnia et al. 2014, S.25ff.).

In einer anderen Studie wurden Grundschulkinder mit einer Kombination aus eigenständiger Erkundung und Lehreranleitung im Fach Physik unterrichtet. Dabei sollten die Schülerinnen und Schüler das Konzept erkennen, das beim Experimentieren stets nur eine Variable verändert werden sollte. In einer ersten Unterrichtsphase erkundeten die Kinder in kleinen Gruppen die Problemstellung eigenständig. Anschließend erläutert die Lehrperson das zu erlernende Konzept und in einer dritten Phase lösten die Schülerinnen und Schüler wieder in Gruppen die Problemstellung bis sie eine Lösung gefunden haben. In einem Pre-Posttest-Design konnte gezeigt werden, dass die Schülerinnen und Schüler signifikante Lernzuwächse durch diese Unterrichtsform aufweisen konnten (vgl. Erdosne Toth et al. 2000, S. 451).

Loibl und Rummel erforschen die Kombination von Problemlösen und Instruktion unter der Hypothese, dass eine Bearbeitung von Problemen vor einer Instruktionsphase Lernende auf bestehende Wissenslücken hinweist und eine anschließende Instruktion damit gewinnbringender sei. Systematisch werden in den drei Untersuchungsansätzen die Anordnung von Problemlösen zu unterschiedlichen Formen und Längen von Instruktionen verändert und in Tests anschließend das konzeptuelle Wissen erfasst. Die Ergebnisse zeigen, dass ein der Instruktion vorgeschaltetes Problemlösen in Kombination mit einem anschließenden Vergleich von Schülerlösungen, bei dem die Wissenslücken herausgearbeitet werden, die größten positiven Effekte hat (vgl. Loibl & Rummel 2014). In weiteren Studien kann diese Reihenfolge nicht unbedingt als effektivste bestätigt werden. Es zeigt sich jedoch, dass die Lernenden eine höhere Anzahl an Lösungen produzieren, wenn sie zuerst das Problem bearbeiten und im Anschluss daran eine Instruktion erhalten (vgl. Loibl et al. 2020, S. 129f.).

In den zwei nachfolgenden Studien wurden auf unterschiedliche Weise mathematische Erkundungs- und Entdeckungsprozesse durch die Vorgabe von weiterem Material gelenkt. In einer empirischen Studie untersuchten Ambrus und Rott (2017), inwiefern Studierende durch visuelle Hilfen zu einem geometrischen Problem beim Auffinden von Beweisideen unterstützt werden können. Es konnte festgestellt werden, dass die Studierenden mithilfe der bildlichen Anregungen viel mehr Lösungsansätze haben erstellen können als auf Grundlage vorangegangener Untersuchungen zu dieser Aufgabenstellung erwartet werden konnte. Die Äußerungen und Reflexionen der Probanden ließen den Schluss zu, dass die visuellen Bilder das Auffinden weiterer Lösungsansätze erst ermöglicht haben. Trotz der visuellen Unterstützung konnten Problemlöseprozesse in Form von Überlegungen, Ausprobieren und Verwerfen von Ideen in Abgrenzung zum reinen Anwenden von Algorithmen bei den Studierenden erkannt werden (vgl. Ambrus & Rott 2017, S. 11 ff.)

Lenkung im Sinne einer Unterstützung bei der Bearbeitung von Problemlöseaufgaben wurde intensiv durch Herold-Blasius erforscht. Dabei wurden Grundschülerinnen und -schüler in Einzelinterviews aufgefordert Problemlöseaufgaben zu bearbeiten und Ihre Lösungsgedanken laut zu äußern. Als Hilfestellung lagen Hilfekarten in Form eines Schlüsselbunds mit Hinweisen zu verschiedenen Lösungsstrategien und -heurismen bereit. Diese Untersuchung hat gezeigt, dass die Schülerinnen und Schüler die Schlüssel verwenden, jedoch erfolgt ein für den Lösungsprozess gewinnbringender Einsatz nicht intuitiv. Dies bedarf weitere Übung, damit die Hilfen von den Lernenden erfolgreicher eingesetzt werden können. Die Nutzung der Hilfen variiert nicht nur bei den Aufgaben, sondern auch bei den Lernenden (vgl. Herold-Blasius 2021).

Zusammenfassung

- Nur wenige empirische Studien zum problemorientierten Lernen beziehen sich auf die Unterrichtsumsetzung.
- Die Forschungsergebnisse zum problemorientierten Lernen sind nicht eindeutig und ein konkreter Unterrichtsbezug selten. Generell konnte gezeigt werden, dass Aufgaben, mit denen der Austausch unter den Lernenden und ein höheres Denken angeregt werden könne, auch Motivation und Lernerfolg erhöhen (Renkl & Mandl 1995; Röhr & Wittmann 1995)
- Problemorientiertes Lernen führt zu ausführlicheren Erklärungen, die auf das Verständnis abzielen (Capon & Kuhn 2004, Patel & Kaufman 1993)
- Darbietender Unterricht führt zu kohärenteren, fehlerfreieren Erklärungen (Patel & Kaufman 1993)
- Problemorientiertes Lernen führt zu begründeteren Entscheidungen (Dochy et al. 2003, Klauer & Leutner 2012)
- Durch problemorientierten Unterricht werden Lerninhalte nicht besser behalten. Hingegen kann eine bessere Verknüpfung zum Vorwissen und Anregung zur Sinnstiftung erkannt werden (Capon & Kuhn, 2004)

- Problemorientierter Unterricht unterstützt den Erwerb von konzeptuellem Wissen (de Jong et al. 2023)
- Darbietender Unterricht führt zu mehr Faktenwissen (Capon & Kuhn 2004; Kirschner et al. 2006; Klauer & Leutner 2012; Mayer 2004)
- Problemorientiert unterrichtete Lernende versuchen stärker bestehendes Wissen beim Problemlösen anzuwenden => Bildung von flexiblem Wissen (Hmelo-Silver 1998)
- Erfolgreiches entdeckendes Lernen braucht Lenkung (Alfieri et al. 2011)
- Am effektivsten ist eine Kombination aus Darbietung und entdeckenden Bausteinen (de Jong et al. 2023, Erdosne Toth et al 2000, Loibl & Rummel 2014, Wijnia et al. 2014)

4.3 Lehrerüberzeugungen zum problemorientierten Unterricht

Als langfristiges Ziel wurde bereits das Erreichen bestimmter Erziehungsziele genannt. Diese beruhen ggf. auf unterschiedlichen Erziehungsmodellen und diese wieder könnten auf Basis unterschiedlicher Überzeugungen entstanden sein. „Philosophisch-anthropologische Überzeugungen über die Natur des Menschen – man spricht dann oft vom Menschenbild – können die Methodenwahl beeinflussen." (Klauer & Leutner 2012, S. 96). Das muss nicht zwangsweise dazu führen, dass auch Lehrpersonen mit einem konstruktivistischen Bild von Lernen einen entdeckenden Unterricht durchführen. Für solch simple Zusammenhänge sind die Einflussfaktoren und Gewichtungen zu vielfältig. Mit der Beliefs-Forschung wurde in den letzten Jahren versucht den Zusammenhang zwischen Überzeugungen und Unterrichtsstil zu erheben.

Auch heute ist der Unterricht von darbietenden Lehrformen dominiert (vgl. Klauer & Leutner 2012). Auf der einen Seite erscheint dies nachvollziehbar, da ein darbietender Unterricht eine viel längere Tradition erreicht hat und dadurch auch allen Beteiligten, Lehrpersonen wie auch Eltern, Schülerinnen und Schülern, häufig aus eigener Erfahrung bekannt ist. Lehrpersonen bevorzugen scheinbar eine rezeptive Lehrmethode, die ihnen aus dem eigenen Unterricht bekannt ist.

Aus einer durch ihren täglichen Arbeitsalltag geprägten Perspektive könnten Lehrerinnen und Lehrer verschiedene Argumente zum Einsatz von entdeckendem Lernen anbringen. In Anlehnung an die Umsetzung im Unterricht hat Sawada (1997) Vor- und Nachteile für den Einsatz von open-ended approaches zusammengestellt (vgl. Abschnitt 2.3.4). Dabei kann man in dem Ansatz des open-ended approach sowohl eine gewisse Nähe zum entdeckenden Lernen wie auch zum Problemlösen erkennen. Diese werden in der nachfolgenden Tab. 5 dargestellt:

Um die Bedeutung dieser Argumente besser einschätzen zu können, wurde eine explorative Interviewstudie mit fünf deutschen Gymnasiallehrpersonen von verschiedenen Standorten in Nordrhein-Westfalen durchgeführt (vgl. Möller & Rott 2018). Anhand von Leitfadeninterviews wurden die Lehrpersonen zu ihren Erfahrungen und Überzeugungen zu entdeckenlassenden Unterrichtsformen befragt. Zwei der fünf befragten Lehrpersonen unterrichten nach eigener Aussage ausschließlich mit darbietenden Unterrichtsformen. Zwei Lehrpersonen nutzen teilweise entdeckendes Lernen und eine Lehrperson setzt dies häufig ein. In den Interviews nannten die Lehrpersonen unabhängig davon, ob sie entdeckendes Lernen nutzen oder nicht, die obigen Nachteile. Betrachtet man die Nennung der Vorteile, konnte die Studie Folgendes herausstellen: Die Lehrperson, die in ihrem Unterricht auch auf entdeckenlassende Elemente zurückgreift, nennt alle vier Vorteile nach Sawada. Die Lehrperson, die aktuell rein darbietend unterrichtet, nennt die ersten zwei Vorteile nach Sawada. Sie erklärt, dass sie aufgrund der leistungsschwachen Schülerinnen und Schülern und der knapp bemessenen Unterrichtszeit auf kleinschrittiges Erklären zurückgreife (vgl. Möller & Rott 2018, S. 225ff.).

Argumente der Lehrpersonen für entdeckendes Lernen	Argumente der Lehrpersonen gegen entdeckendes Lernen
Höhere Selbstverantwortung für den eigenen Lernprozess	Lernenden fehlen mathematische Grundkenntnisse
Mathematik wird umfassender angewendet	Lernern fehlen Lesefähigkeiten
Leistungsschwache Schülerinnen und Schüler können mitarbeiten	Lernende sind unmotiviert und fühlen sich unwohl
Hohe Motivation der Lernenden (für das Beweisen)	Zu wenig Zeit
Zusammenarbeit der Lernenden wird unterstützt	

Tab. 5: Argumente aus der Lehrpersonensicht für Vor- und Nachteile eines Unterrichts mit offenem Problemlöseaufgabenformat nach Sawada (1997), sinngemäße Übersetzung.

Auch wenn sich die Lehrpersonen in ihrem Einsatz des entdeckenlassenden Lehrens stark unterscheiden, müssen ihre Überzeugungen zu den Nachteilen des entdeckenden Lernens nicht sehr unterschiedlich sein. Der Unterschied zwischen ihnen zeigt sich in den Vorteilen, die sie auflisten können. Die Lehrperson mit mehr Unterrichtserfahrung im entdeckenden Lernen nannte mehr Vorteile als die andere Lehrperson. Eine mögliche Erklärung kann darin liegen, dass durch die Unterrichtserfahrung zum entdeckenden Lernen Bedenken bezüglich Zeit und Leistungsschwäche durch positive Unterrichtserfahrungen diesbezüglich abgewendet werden (vgl. Möller & Rott 2018, S. 225ff.).

Zusammenfassung

- Aktuell dominiert weiterhin ein darbietender Unterrichtsstil
- Vorteile und Nachteile eines problemorientierten Mathematikunterrichts werden einander gegenüber gestellt (Sawada 1997).
- In einer Interviewstudie konnten Vor- und Nachteile des entdeckenlassenden Lernens in den Antworten der Lehrpersonen wiedererkannt werden (Möller & Rott 2018).
- Lehrpersonen, die häufiger entdeckenlasssende Unterrichtssituationen im Mathematikunterricht einsetzen, nennen eine größere Anzahl an Vorteilen dieser Lernform als Lehrpersonen, die diese Lernform kaum verwenden (Möller & Rott 2018).

5 Die Mittelsenkrechte – stoffdidaktische Analyse [4]

Im Schulunterricht zählt die Geometrie zu den Teilbereichen der Mathematik, in denen Begriffe wie Punkte, Gerade, Strecke und Figuren definiert und konstruiert werden. Ausgehend von diesen Objekten gelangt man schnell zum Begriff der Mittelsenkrechten. Die Konstruktion dieser Punktmenge wird zu den grundlegenden Konstruktionen der euklidischen Geometrie gezählt und dient als Hilfsmittel für zahlreiche geometrische Konstruktionen, wie der Bestimmung des Streckenmittelpunktes, des Umkreises eines Dreiecks oder bei diversen Spiegelungsproblemen (vgl. u. a. Gorski & Müller-Philipp 2014, S. 244ff., Krauter & Bescherer 2007, S. 83; Ludwig & Weigand 2014,

[4] Teile dieses Kapitels wurden im WTM-Verlag (Wissenschaftliche Texte und Medien) als Buchkapitel einer Reihe mit Peer-Review-Verfahren veröffentlich (siehe Möller & Rott 2019). Der Verlag erlaubt den Autoren ihre Arbeiten wiederzuverwenden und zu veröffentlichen.

S. 69f.). Dieser Standardbegriff wird in den Kernlehrplänen Mathematik für die Sekundarstuf I und II an Gymnasien explizit benannt (vgl. Weigand 2014a, S. 30). Sowohl bei der Konstruktion symmetrischer Vierecke, als auch beim Problemlösen wird die Mittelsenkrechte benötigt. Für die Lehrperson kann durch eine stoffdidaktische Analyse unter Berücksichtigung verschiedener Definitionsvarianten, sich anschließenden Sätzen und Verallgemeinerungen oder Spezialfällen wie auch die Herleitung mathematischer Begriffe im Vorfeld bei der Unterrichtsplanung sehr lohnenswert sein (vgl. Weigand 2014b, S. 99ff.). Ziel ist dabei den mathematischen Begriff in seiner Vielfalt an Wissenselementen fachdidaktisch aufzufächern, um die verschiedenen Ebenen des Begriffs, die im Unterricht thematisiert und gesichert werden sollten, zu erkennen.

Zu Beginn eines neuen Begriffsverständnisses steht häufig eine intuitive Auffassung des Begriffs. Der Lernende kann das neue Objekt anhand von einzelnen Eigenschaften beschreiben und typische Objekte in Form von Beispielen benennen. Erst durch die Betrachtung von Gegenbeispielen entsteht eine Abgrenzung zu weiteren mathematischen Objekten und Begriffen. Schrittweise (durch Übung und Reflexion) kann der neue Begriff in das bereits bestehende Begriffsnetz eingefügt werden. Das daraus resultierende Begriffsverständnis geht über reine Intuition hinaus und kann z. B. als exemplarisches Verständnis des Begriffes bezeichnet werden (vgl. Winter 1983, Weigand 2014b, S. 99ff.). Im weiteren Lernprozess sollte dieses erste intuitive Verständnis mithilfe von passenden inhaltlichen Vorstellungen und Konzepten, die beispielsweise ein Nachvollziehen der Konstruktionsweise und Aufgabenstellungen mit Realitätsbezug beinhalten, zu einem Begriffsnetz erweitert werden (vgl. vom Hofe 1995, Prediger 2009, Weigand 2014b). Die Erfahrungen und intuitiven Auffassungen sind abhängig von der Herangehensweise an den Begriff, z. B. als Spiegelachse oder als Lösung eines Konstruktionsproblems oder allein über den Namen Mittelsenkrechte. Eben diese verschiedenen Zugänge werden ausgehend von der verwendeten Definition weiter unten betrachtet.

Zu dem Aufbau dieses Begriffsnetzes gehören die Benennung des Objektes in der Regel durch eine Definition, sowie das Kennenlernen und Erfahren weiterer Eigenschaften des Objektes auch im Zusammenspiel oder in der Abgrenzung mit bereits bekannten Objekten. Abgrenzungen wären zum Beispiel zu Geraden oder Senkrechten naheliegend und Verbindungen zum Kreis als Ortslinie sinnvoll. Das langfristige Ziel besteht schließlich in einem Anknüpfen an bereits bestehende Konzepte und ein Vernetzen mit diesen zu einem integrierten Begriffsverständnis (vgl. Holland 2007, S. 64; Vollrath & Roth 2012, S. 232ff., Weigand 2014b, S. 116ff.).

Für ein integriertes Begriffsverständnis schließt sich ein Folgern auf weitere Eigenschaften dieser gefundenen Gerade an. Hierzu können die Konstruktionsweise der Mittelsenkrechten als Begründungs- und Verstehenselement oder auch Untersuchungen in Dreiecken beitragen.

Die Erkenntnisse solcher analytischen Betrachtungen bilden die Grundlage für die Konzeption und Planung eines kognitiv aktivierenden Unterrichts. Erst durch die Aufschlüsselung der verschiedenen Wissenselemente, Anknüpfungspunkte und Zugangsweisen eines mathematischen Begriffs können relevante und zielführende Erkundungen oder Problemstellungen für den Unterrichtseinstieg durch die Lehrperson entwickelt werden und somit die kognitive Aktivierung der Schülerinnen und Schüler steigern (vgl. Rakoczy et al. 2010, S. 233). Dabei sollte auch den Lernenden ermöglicht werden den neuen Begriff aus verschiedenen Blickwinkeln betrachten und erfassen zu können

(u. a. Weigand 2014b, S. 166 ff.). Barzel mit Kolleginnen und Kollegen setzen diese Idee unter Rückbezug auf die kognitionspsychologischen Arten und Facetten von Wissen in Form einer Tabelle der Wissenselemente um (vgl. Barzel et al. 2012, Prediger et al. 2011).

Durch eine zunächst mathematisch geprägte Analyse gängiger Lehrwerke für das Studium der ebenen Geometrie, in dem verschiedene Varianten der Definition einer Mittelsenkrechten und des Umkreismittelpunktsatzes in Dreiecken dargelegt werden und einer anschließend stärker mathematikdidaktischen Betrachtung, in der Vernetzungen, Vorstellungen und die Verwendung in Schulbüchern aufgegriffen werden, entsteht letztendlich eine Tabelle der Wissensfacetten (vgl. Tab. 6) und -elemente zur Mittelsenkrechten.

Diese Tabelle ist in Anlehnung an das Konzept zum Systematisieren und Sichern von Prediger et al. (2011) bzw. Barzel et al. (2012) entstanden und enthält die Definitionsvarianten, relevante Sätze, aber auch Konzepte und Ideen zum Begriff der Mittelsenkrechten (vgl. Tab. 6). Dabei unterscheiden die Autoren drei verschiedene Wissensarten: konzeptuelles, prozedurales und metakognitives Wissen (vgl. Abschnitt 3.2.1). Unter konzeptuellen Wissen kann das Wissen von Fakten, Konzepten und Zusammenhängen und unter dem prozeduralen Wissen das Handlungswissen und Können verstanden werden. Das metakognitive Wissen umfasst Strategien und Abläufe, die für einen langfristigen Wissensaufbau grundlegend sind (vgl. Barzel et al. 2012, S. 94). An dieser Stelle werden auf die kognitiven und prozeduralen Wissensarten fokussiert. Eine systematische Betrachtung dieser Wissensarten wird in Bezug zum Lernen unter 3.3 vertieft. Neben den Formulierungen der Definitionen und Sätze werden weitere Wissensfacetten wie konkrete Beispiele und Abgrenzungen des mathematischen Begriffs zu bereits erlernten Begriffen in der Tabelle angegeben. Zusätzlich werden auch Vernetzungsmöglichkeiten zu bereits bekannten Begriffen oder Situationen benannt. Ebenso werden Bedingungen und Voraussetzungen aber auch handwerkliche Verfahren mitaufgeführt. Inhaltliche Vorstellungen und Darstellungen sollen das Begriffsverständnis der Lernenden unterstützen. Die expliziten Formulierungen der Definition richten sich an Schülerinnen und Schüler. Daher variiert der Wortlaut in der Tabelle zu vorangegangenen Definitionen.

Mithilfe dieser Tabelle lassen sich kognitiv aktivierende Aufgabenformate für die verschiedenen Phasen des Unterrichts, wie Systematisierung, Sicherung und Aneignung, konzipieren und somit Gestaltungsprinzipien für einen schülerorientierten Mathematikunterricht generieren. Es folgt nun eine stärker fachliche Betrachtung des Begriffs der Mittelsenkrechten, der anschließend durch stärker didaktische Blickweisen ergänzt wird, um so eine möglichst vollständige Übersicht der Wissensbereiche in Form von Definitionsvarianten, Sätzen und Konstruktionen in schülergerechterer Formulierung in einer Tabelle zu bündeln (vgl. erste Spalte in Tab. 6). Diese Tabelle ist grundlegend für die Entwicklung von Gestaltungsprinzipien für die in der empirischen Studie eingesetzten Unterrichtseinheiten.

5.1 Fachliche Analysen und Betrachtungen zur Mittelsenkrechten

Ein zeitgemäßer Mathematikunterricht fokussiert anstelle einer streng axiomatische Struktur auf einen verständnisorientierten Umgang mit mathematischen Begriffen und Objekten, die in einer gezielten Anwendung beim Argumentieren und Problemlösen einerseits und einem stärkeren Realitätsbezug anderseits münden soll (vgl. Weigand 2014a, S. 17ff.). Die hierarchische Sortierung von mathematischen Begriffen und Objekten bleibt gleichwohl erhalten. Im Anschluss an einen ersten intuitiven

Umgang mit Begriffen werden durch den Aufbau von Vorstellungen zu dem Begriff und seinen Eigenschaften Definitionen entwickelt. Dem Prozess des Definierens kommt dabei weiterhin eine zentrale Rolle zu, so wird das Lernen zu definieren als Lernziel für die Schülerinnen und Schüler formuliert (vgl. Weigand 2014b, S. 113). Je nach Vorwissen und Herangehensweisen können Begriffe auf unterschiedlichem Wege definiert werden. Die Auswahl des Weges liegt bei der Lehrperson, die diesen bereits im Vorfeld bei der Unterrichtsplanung festlegt. Eine umfassende Analyse des einzuführenden Begriffs aus mathematischer und mathematik-didaktischer Sicht ermöglicht der Lehrperson erst einen Über- und Weitblick für eine angemessene Aufgabenauswahl.

Zentrale Eigenschaften der Mittelsenkrechten gehen bereits aus ihrer Namensgebung im deutschen Sprachgebrauch hervor und kann in einer ersten Definition formuliert werden:

> Definition A: *Unter der Mittelsenkrechten m einer Strecke $\overline{AB}$ versteht man diejenige Gerade, die senkrecht durch den Mittelpunkt von $\overline{AB}$ geht.*[5] (Gorski & Müller-Philipp 2014, S. 111, vgl. auch Koecher & Krieg 2009, S. 116; Berchtold 2017, S. 36)

Die französische Bezeichnung *la médiatrice* ebenso wie die spanische Formulierung *la mediatriz*; lassen anhand des Namens hingegen nicht auf Orthogonalität schließen. Hier wird von der „Mittelteilenden" gesprochen. Weitere zugrundeliegende Eigenschaften werden durch die Namensgebung zum Beispiel im Englischen deutlich. Die Mittelsenkrechte wird dabei als *perpendicular bisector* bezeichnet, welches wörtlich als „senkrecht Halbierende" übersetzt werden kann und bereits auf

[5] In Schulbüchern findet man an dieser Stelle eingängigere Formulierungen wie: Die Mittelsenkrechte ist eine Gerade, die senkrecht zur Strecke $\overline{AB}$ *und durch* ihren Mittelpunkt verläuft.

die Anwendung der Mittelsenkrechten zur Streckenhalbierung bzw. zum Ausmachen des Streckenmittelpunktes hinweist. In dem ungarischen Begriff *szakaszfelező merőleges egyenes,* wörtlich übersetzt als „streckenhalbierende, senkrechte Gerade“, werden beide Eigenschaften vereint.

Eine andere Blickrichtung, die nicht allein auf die Mitte bzw. den Mittelpunkt einer Strecke gerichtet, sondern auf die Halbebenen zu beiden Seiten der Geraden abzielt, wird in der in Österreich verwendeten Bezeichnung Streckensymmetralen deutlich, wobei man unter einer Symmetralen eben die Menge der Punkte versteht, die von zwei geometrischen Objekten (hier zwei Streckenendpunkte) gleich weit entfernt sind. Dies führt zu einer Betrachtung von Punktmengen oder Flächen mit der Begrenzung durch die Mittelsenkrechte und unterscheidet sich in der beinhaltenden Vorstellung von den anderen Namen, so wird mit der Symmetralen ein Spezialfall der geometrischen Ortslinie in den Fokus genommen. Als geometrische Ortslinie oder auch geometrischer zur Eigenschaft E, wird die Menge aller Punkte bezeichnet, die eine bestimmte Eigenschaft E (hier gleicher Abstand zu den Streckenendpunkten) besitzt.[6] Bereits durch die österreichische Namensgebung wird das Ortslinien-Konzept der Mittelsenkrechten betont, welches beispielsweise aus der deutschen Benennung nicht hervorgeht. Dieses Konzept legt eine stärker mathematisch-axiomatischen Definition nahe, die in Geometrielehrwerken mit axiomatischen Aufbau entweder im Zusammenhang mit der Abbildungsgeometrie bei der Verkettung von Achsenspiegelungen und Drehungen eingeführt wird (vgl. Gorski & Müller-Philipp 2014, Krauter & Bescherer 2007) oder aber als Konstruktion bei der Betrachtung

---

6 Die Kreislinie ist ebenfalls ein Beispiel für eine Ortslinie; ein Kreis ist definiert als Menge aller Punkte, die von einem bestimmten Punkt M die feste Entfernung r haben.

von Punkten, Geraden und deren Lagebeziehungen (vgl. Scheid & Schwarz 2017). In beiden Fällen wird die Mittelsenkrechte als eine der besonderen Linien im Dreieck behandelt und dort als geometrischer Ort wie folgt definiert:

> Definition B: *Die Mittelsenkrechte einer Strecke* $\overline{AB}$ *enthält genau die Punkte P, die jeweils von A und B dieselbe Entfernung haben:* $\{ P \mid \overline{|AP|} = \overline{|BP|} \}$ *= Mittelsenkrechte von* $\overline{AB}$. (abgeändert nach Krauter & Bescherer 2007, S. 67)

Damit sind die beiden grundlegenden Zugänge zum Begriff der Mittelsenkrechten genannt. Ausgehend von der Definition A, der Mittelsenkrechten als Gerade, die senkrecht durch den Streckenmittelpunkt verläuft, müssen streng formal die Eigenschaften als Punktemenge aus der Definition B als Satz benannt und bewiesen werden oder umgekehrt. Es wird deutlich, welche grundlegende Entscheidung mit der Auswahl der Definition für einen möglichen Unterrichtsverlauf ansteht.

In Geometrielehrwerken findet sich eine dritte Definitionsvariante, die beide bisherigen Definition vereint:

> Definition C: *Die zu einer Strecke AB orthogonale Gerade durch den Mittelpunkt der Strecke nennt man das Mittellot oder die Mittelsenkrechte von AB und bezeichnet sie mit* m_{AB}. *Auf dem Mittellot liegen alle Punkte X, die von A und B gleich weit entfernt sind, für die also d(X, A) = d(X, B) gilt.* (Scheid & Schwarz 2017, S. 9, Schreibweisen im Original)

Streng genommen fehlt hier der Zusatz, dass auf der Mittelsenkrechten genau die Punkte enthalten sind, die gleich weit von *A* und *B* entfernt sind, also keine weiteren Punkte (vgl. Definition B). Mathematisch exakter formuliert, gelangen wir zu den folgenden zwei Implikationen, die Umkehrungen voneinander sind:

i) Jeder Punkt, der auf der Mittelsenkrechten liegt, ist von den Streckenendpunkten gleich weit entfernt.
ii) Jeder Punkt, der von den Streckenendpunkten gleich weit entfernt ist, liegt auf der Mittelsenkrechten.

Die Implikation ii) wird in der Definition C erfasst, die Implikation i) jedoch nicht. An dieser Stelle stellt sich der Lehrperson die Frage, inwieweit eine Thematisierung dieser mathematischen Argumentationsstrukturen in einer Klasse 7 möglich und sinnvoll erscheint und wie diese umgesetzt werden könnte. Der Zusammenhang zwischen beiden Implikationen erfordert grundlegende logische Kenntnisse und Einsichten. Eine Erfassung des Zusammenhangs zwischen Satz und Umkehrsatz kann von Schülerinnen und Schülern erst in einer weiter fortgeschrittenen Stufe des formalen Begriffsverständnisses erwartet werden (vgl. Schmidt-Thieme & Weigand 2014, S. 199). Für eine Thematisierung dieses Beweises sprechen die Anschaulichkeit durch den geometrischen Inhalt sowie die überschaubaren Argumentationsschritte und benötigten Wissenselemente. Es wird kein Vorwissen aus anderen Bereichen der Mathematik für die Argumentation benötigt. Dies ermöglicht den Schülerinnen und Schülern unabhängig von ihren bisherigen Leistungen ein Mitdenken und Nachvollziehen.

Diese Definitionen können als charakterisierende Definitionen bezeichnet werden. Im Unterschied dazu können Begriffe im Geometrieunterricht auch genetisch erklärt werden, in dem beschrieben wird, wie das Objekt entsteht, das dem Begriff zugrunde liegt (vgl. Weigand 2014b, S. 114). Eine schülergerechte Formulierung einer genetischen Definition für die Mittelsenkrechte könnte also lauten:

Definition D: *Gegeben ist eine Strecke* $\overline{AB}$. *Zeichne einen Kreis um A dessen Radius größer als die Hälfte der Streckenlänge von* $\overline{AB}$ *ist. Zeichne einen Kreis mit demselben Radius um B. Die beiden Kreise schneiden sich in zwei Punkten. Zeichne eine Gerade durch die beiden Schnittpunkte und nennen sie Mittelsenkrechte zur Strecke* $\overline{AB}$.

Im detaillierten Falle könnte eine genetische Definition einer Konstruktionsbeschreibung gleichkommen.

5.2 Umsetzungen im Mathematikunterricht

Alle vier Definitionsvarianten können in Schulbüchern[7] gefunden werden und sind somit für den Einsatz im Unterricht legitimiert.

Definition A, die Mittelsenkrechte als Senkrechte durch die Mitte, kann u. a. gefunden werden in: *Mathe live – Mathematik für die Sekundarstufe I*, 2011, S. 134 und *Mathematik*, 2000, S. 155. Die Definition der Mittelsenkrechten als Ortslinie (Definition B) findet z. B. Verwendung in: *Mathewerkstatt*, 2014, S. 174, *Mathematik – Neue Wege – Arbeitsbuch für Gymnasien*, 2007, S. 108 und *Zahlen und Größen*, 2007, S. 52. Die kombinierte Definitionsvariante C wird u. a. genutzt in: *Das Mathematikbuch – Lernumgebungen Klasse 7*, 2010 und S. 82; *Lambacher Schweizer – Mathematik für Gymnasien*, 2010, S. 160f. Als eine genetische Definition im Sinne der Variante D kann das Vorgehen in *Mathematik heute*, 2013, S. 126 angesehen

[7] Die Auswahl der Schulbücher orientiert sich an der Liste der zugelassenen Schulbücher an Gymnasien in Nordrhein-Westfalen, siehe https://www.schulministerium.nrw.de/docs/Schulsystem/Unterricht/Lernmittel/GymnasiumG8/index.html#A_84, Stand: 16.11.2018.

werden. Mit einer Faltanleitung werden die Lernenden zu der Mittelsenkrechten im Dreieck geleitet, deren Name anschließend begründet werden soll.

Mit der Entscheidung für die eine oder andere Definitionsvariante gehen unterschiedliche Wege und Anknüpfungspunkte für den weiteren Unterricht einher. Geprägt wird diese Entscheidung durch das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler sowohl mathematisch inhaltlich als auch prozessbezogen, in Bezug auf das Argumentieren und Beweisen zum Beispiel, aber auch durch die Verortung in Bezug auf weitere Unterrichtsreihen. Unter Einbezug des Vorwissens und der Anknüpfungsmöglichkeiten werden zunächst für jede der vier Definitionen Umsetzungsmöglichkeiten für den Unterricht skizziert.

5.2.1 Ausgehend von der Definition A

Die Definition der Mittelsenkrechte als senkrecht verlaufende Gerade ermöglicht ein Anknüpfen an das Thema **Achsenspiegelung.** Die Mittelsenkrechte kann als Symmetrieachse interpretiert und im Unterricht eingeführt werden. Die Achsenspiegelung ist den Schülerinnen und Schülern bereits aus der Klassenstufe 5/6 bekannt als eine Spiegelung an einer Geraden, durch die jedem Punkt P ein Spiegelpunkt P' zugeordnet wird, so dass die Strecke $\overline{PP'}$ von der Achse im rechten Winkel halbiert wird (vgl. *Mathenetz 7 2007, S. 19 ff.*). Damit kennen sie bereits einen Anwendungsbereich, aus dem sich die Definitionsvariante A der Mittelsenkrechten hergeleitet werden kann. Auch ohne die Kenntnisse über das Ortslinienkonzept sind somit Anwendungsmöglichkeiten in den folgenden Konstruktionen möglich: Halbierung einer Strecke, Fällung des Lots zu einer Geraden und durch einen gegebenen Punkt, Konstruktion einer Parallelen zu einer Geraden und durch einen gegebenen Punkt sowie Konstruktion der Mittelparallelen.

Bleibt der Unterricht auf diese Wissensfacetten und -ebenen beschränkt, wird eine Anwendung der Mittelsenkrechten zum Beispiel zur Gebietseinteilung den Lernenden nicht ohne weiteren Transfer gelingen. Ebenso kann die Vorgehensweise der Konstruktion nicht nachvollzogen werden. Hierfür wird das Ortslinienkonzept benötigt.

Angelehnt an die Achsenspiegelung sind Einstiegsaufgaben zur Faltung denkbar, durch die schließlich auch die Eigenschaften der Mittelsenkrechten als Ortslinie erkundet werden können. Es können beispielsweise auf Transparentpapier Punkte mit Stecknadeln und Faltungen erzeugt werden (u. a. Ambrus 2003, S. 120; Ludwig & Weigand 2014, S. 57, Lergenmüller 2007, S. 106; Greulich 2010, S. 162). Ausgehend von der Achsenspiegelung zeichnen die Schülerinnen und Schüler zu einer gegebenen Strecke $\overline{AB}$ die Mittelsenkrechte m_{AB} (die Senkrechte durch den Mittelpunkt der Strecke) und nutzen sie als Symmetrieachse. Auf diese Weise kann erkannt werden, dass für jeden Punkt C auf der Mittelsenkrechten, die Strecke $\overline{BC}$ auf die Strecke $\overline{AC}$ u.U. abgebildet wird und diese Strecken somit gleich lang sind. Daraus folgt dann eben auch, dass jeder Punkt P auf der Mittelsenkrechten gleich weit von A und von B entfernt ist. Dies kann (formal gesehen) als anschließender Satz zur Mittelsenkrechten formuliert werden. Noch zu begründen wäre die Umkehrung des Satzes: Für Punkte, die nicht auf der Mittelsenkrechten liegen, gilt dies auch nicht bzw. wenn ein Punkt P den gleichen Abstand zu den Streckenendpunkten A und B hat, dann liegt er auf der Mittelsenkrechten dieser Strecke. Eine mögliche Veranschaulichung dieses Zusammenhangs für Schülerinnen und Schüler kann bei der näheren Betrachtung der Mittelsenkrechtenkonstruktion angeregt werden. Die Beweisidee für Satz und Umkehrsatz beruhend auf der Definition der Achsenspiegelung und einzelne Längenmaßaxiome (alles schulrelevante Inhalte) findet man auch in formal mathematischen Beweisen (vgl. Gorski & Müller-Philipp 2014, S. 112 f.). Für eine Thematisierung dieses Beweises sprechen die Anschaulichkeit durch den geometrischen Inhalt sowie die auch für Schülerinnen und Schülern bekannten mathematischen Argumentationen. Es gilt die beiden Folgerungen zu zeigen:

i) P liegt auf der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AB}$, $P \epsilon\, m_{AB}$ => P ist gleich weit von den beiden Punkten A und B entfernt, d. h. $|\overline{AP}| = |\overline{BP}|$

ii) P ist gleich weit von den beiden Punkten A und von B entfernt, d. h. $|\overline{AP}| = |\overline{BP}|$ => P liegt auf der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AB}$, $P \epsilon\, m_{AB}$

Zunächst beweisen wir die Folgerung i): Da m_{AB} Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$ ist, folgt mit der Definition A und der Definition der Achsenspiegelung, dass m_{AB} als Spiegelachse den Punkt A auf den Punkt B abbildet und ebenso, dass der Punkt P auf sich selbst abgebildet wird. Aus der Längentreue der Achsenspiegelung folgt: $|\overline{AP}| = |\overline{BP}|$

Betrachten wir nun die Umkehrung ii): Hier beweisen wir die Kontraposition. Diese lautet: Sei P kein Punkt der Mittelsenkrechten => P ist unterschiedlich weit von A und von B entfernt. Es sind zwei Fälle zu betrachten: m_{AB} trennt die euklidische Ebene in zwei Halbebenen. P liegt in der selben Halbeebene wie auch B (*Fall 1*) bzw. P liegt in der selben Halbeebene wie A (*Fall 2*). Zu *Fall 1*: Die Stecke $\overline{BP}$ schneidet m_{AB}. Diesen Punkt nennen wir G. Mithilfe der Längentreue der Achsenspiegelung folgt: $|\overline{AG}| = |\overline{BG}|$. Mithilfe der Definition des Abstandes zwischen zwei Punkten, z. B. B und P, kann leicht erkannt werden, dass gilt $|\overline{BP}| < |\overline{BG}| + |\overline{GP}|$. Ausgehend davon beginnt die Argumentation:

$$|\overline{BP}| < |\overline{BG}| + |\overline{GP}|, \text{ mit } |\overline{AG}| = |\overline{BG}| \text{ folgt}$$
$$\Leftrightarrow |\overline{BP}| < |\overline{AG}| + |\overline{GP}|, \text{ mit } |\overline{AP}| = |\overline{AG}| + |\overline{GP}| \text{ folgt}$$
$$\Leftrightarrow |\overline{BP}| < |\overline{AP}| \text{ und somit gilt auch}$$
$$|\overline{BP}| \neq |\overline{AP}|$$

Für den *Fall 2* sind entsprechende Argumentationen anzustellen (vgl. Gorski & Müller-Philipp 2014, S. 112 f.).

Ein streng formales Vorgehen von der Aufstellung der Definition zum Satz und letztlich zum Beweis ist für den Unterricht in Klasse 7 sicher zu weitgegriffen. Denkbar wären Aufgabenstellungen, in denen Teile der Argumentation gefordert werden und die Lernenden so in ihren eigenen Formulierungen von Gedankengängen und Zusammenhängen gefördert werden.

In der Tabelle der Wissensarten wird als erster Eintrag unter konzeptuellem Wissen die Definition A in schülergerechter Sprache eingetragen. Die Formulierungen entstehen in Anlehnungen an Definitionen aus Schulbüchern. Unter *Konkretisierung & Abgrenzung* werden in einer Abbildungen Geraden, die nicht durch die Mitte bzw. nicht senkrechte zur Strecke verlaufen eingezeichnet. Unter Anwendungen ist sowohl das Einzeichnen mit dem Geodreieck zu verstehen als auch die Verwendung für Konstruktionen, bei denen die Eigenschaft „senkrecht durch die Mitte verlaufen verwendet wird. Dazu gehören Halbierung einer Strecke, Fällung des Lots zu einer Geraden durch einen Punkt, Konstruktion einer Parallelen durch einen Punkt und einer Mittelparallele.

Die beiden Implikationen i) und ii) erhalten als *Satz und Umkehrsatz über die Mittelsenkrechte* eigene Einträge, in denen die Beweisidee bildlich angedeutet wird in der Spalte *Konkretisierung und Abgrenzung* und eine Wortformulierung unter *Bedeutung und Vernetzung* gefasst wird.

5.2.2 Ausgehend von der Definition B

Für die Definition B bietet sich der Einsatz einer Problemstellung an, durch die den Lernenden eine eigenständige Entdeckung ermöglicht wird. Ausgehend von der Fragestellung, wo liegen alle Punkte, die gleich weit von A und von B entfernt sind, können zunächst einzelne Punkte eingezeichnet werden und schnell wird offensichtlich, dass diese auf einer Geraden zu liegen scheinen (Weigand 2014b, S. 116f.). Es bleibt noch zu begründen, dass auf dieser Geraden eben alle Punkte liegen mit der geforderten Eigenschaft. Anschließend kann eine Definition formuliert werden. Diesen Lernprozess kann man in die beiden Phasen Erarbeitung des Begriffs und Reflexion des Begriffs unterteilen (vgl. Vollrath & Roth 2012, S. 232ff.; Weigand 2014b, S. 116f.).

Die Fokussierung auf die Ortslinien-Definition B bietet die Möglichkeiten für folgende Anschlussfragen zu erarbeiten: Wo liegen alle Punkte, die gleich weit von … entfernt sind? Es schließen sich Anwendungen ähnlicher Fragestellungen bei Dreieck, Viereck etc. oder auch Gebietseinteilungen durch Grenzlinien an.

Aus formaler Sicht bleibt noch folgender Satz zu begründen: Die Gerade bestehend aus allen Punkten, die denselben Abstand zu beiden Streckenendpunkten besitzen, verlaufe auch senkrecht zur Strecke und durch die Mitte der Strecke. Für diese Begründung bietet sich der Rückgriff auf die Kongruenzsätze im Dreieck, sowie dem Innenwinkelsummensatz in Dreiecken an (ggf. auch Basiswinkelsatz für gleichschenklige Dreiecke). Sei die Mittelsenkrechte einer Strecke $\overline{AB}$ gegeben und sei C ein Punkt auf der Mittelsenkrechten, so hat C per definitionem den gleichen Abstand zu den Punkten A und B (vgl. Definition B). Es gilt $|\overline{AC}| = |\overline{BC}|$. Für den Punkt D mit $D \in m_{\overline{AB}}\ und\ D \in \overline{AB}$ gilt entsprechend: $|\overline{AD}| = |\overline{DB}|$. Verbindet man die Punkte C und D, entstehen die beiden Dreiecke $\Delta ADC\ und\ \Delta DBC$ mit der gemeinsamen Seite $\overline{CD}$. Nach dem Kongruenzsatz SSS für Dreiecke folgt: ΔADC *ist kongruent zu* ΔDBC. Aus der Kongruenz (oder alternativ aus dem Basiswinkelsatz für gleichschenklige Dreiecke folgt: $\sphericalangle DAC = \sphericalangle CBD$ *und* $\sphericalangle ACD = \sphericalangle DCB$. Mit dem Innenwinkelsummensatz im Dreieck folgt:

$$\sphericalangle DAC + \sphericalangle ACD + \sphericalangle CBD + \sphericalangle DCB = 180°$$
$$\Leftrightarrow 2 \cdot \sphericalangle DAC + 2 \cdot \sphericalangle ACD = 180°$$
$$\Leftrightarrow 2 \cdot \sphericalangle DAC + 2 \cdot \sphericalangle ACD = 180°$$
$$\Leftrightarrow \sphericalangle DAC + \sphericalangle ACD = 90°$$

Und somit $\sphericalangle DAC + \sphericalangle ACD + \sphericalangle CDA = 180°$

$$\Leftrightarrow \sphericalangle CDA = 90°$$

Somit verläuft die Mittelsenkrechte senkrecht zur Strecke $\overline{AB}$ und durch den Streckenmittelpunkt, hier *D*. Alle verwendeten Sätze und Argumente sind Inhalte der Klassen 7/8 und könnten auch von Schülerinnen und Schülern der siebten Klasse nachvollzogen werden. Die Konstruktion der Mittelsenkrechten (Definition D) kann eine alternative Begründung für die Orthogonalität der Mittelsenkrechten zur Strecke bilden (vgl. Abschnitt 5.2.4).

Hier stoßen wir auf eine klassische Stelle im Schulunterricht, an der die Notwendigkeit für die Formulierung des Satzes und den anschließenden Beweis für die Lernenden nur schwer nachzuvollziehen ist und sicherlich kein Beweisbedürfnis seitens der Schülerinnen und Schüler aufkommt. Diese Schwierigkeit ist auch auf die Benennung der Mittelsenkrechten im deutschen Sprachgebrauch zurückzuführen. Denn die in dem hier formulierten Satz aufgeführten Eigenschaften werden bereits mit der Namensbekanntgabe als gültig erklärt. Es wäre interessant zu sehen, ob beispielsweise in Ungarn ein erheblich höheres Beweisbedürfnis bei den Lernenden entsteht oder ob auch hier die Eigenschaften durch die bildliche Darstellung als passend angenommen werden.

In der Tabelle der Wissensarten folgt der zweite Eintrag für die Definitionsvariante B zum Ortslinienkonzept. Konkretisiert wird diese durch eine bildliche Darstellung, in der viele Kreise mit jeweils gleichem Radius sowohl um a als auch um B gezeichnet werden. Alle diese Punkte liegen auf der Mittelsenkrechten Wähle ich einen Radius größer oder kleiner als den anderen, entstehen Punkte, wie D_1, die nicht auf der Mittelsenkrechten liegen, da sie unterschiedliche Abstände zu den beiden Punkten haben. Unter *Vernetzung* werden die oben aufgeführten Begründungen zum senkrechten Verlauf durch die Mitte angeführt.

5.2.3 Ausgehend von der Definition C

Wird die Definition C verwendet, so bleibt wie oben bereits angeführt zu zeigen, dass jeder Punkt, der auf der Mittelsenkrechten liegt, von den Streckenendpunkten gleich weit entfernt ist. Dies kann wie für die Definition A erfolgen.

Beide Schulbücher, bei denen diese Definitionsvarianten erkannt werden kann, nutzen diese Formulierung als Eintrag in einem Merkkasten (vgl. Lambacher Schweizer 2010) oder im Lexikon der mathematischen Begriffe, welches gleichzeitig das Inhaltsverzeichnis darstellt (vgl. Das Mathematikbuch 2010). In beiden Büchern werden diese Aussagen nicht begründet oder bewiesen. In *Das Mathematikbuch* wird eine Lernumgebung zum Bocciaspiel als weiterangelegte Entdeckungs- und Erkundungsaufgabe genutzt. Im *Lambacher Schweizer* wird nach Aufriss einer Problemsituation, die auf den Umkreismittelpunktsatz in Dreiecken abzielen soll, eine Erklärung des Begriffs der Mittelsenkrechten genannt und die Konstruktionsweise beschrieben.

Generell sollte kritisch hinterfragt werden, inwiefern die Verwendung von Definitionen, die mehrere Eigenschaften eines

Objektes enthalten langfristig gesehen zu einem anschlussfähigen Mathematikbild führen können. Der Geometrieunterricht folgt heute sicherlich keinem axiomatischen Aufbau. Stattdessen werden Vorstellungen und Begriffsvernetzungen in den Mittelpunkt gerückt, um so ein Verständnis geometrischer Objekte bei den Lernenden zu erreichen (vgl. Weigand 2014b, S. 113). Es bleibt noch die Frage offen, wie eine Anschlussfähigkeit an mathematische Arbeitsweisen, hier das Erstellen von Definitionen und Sätzen die letztendlich ein Beweisbedürfnis hervorrufen, erreicht werden könne.

Einen Eintrag für diese Kombination erfolgt in der Tabelle der Wissensarten nicht, da mit beiden vorherigen Definitionsvarianten die Wissensfacetten bereits in der Tabelle aufgenommen wurden.

5.2.4 Ausgehend von der Definition D

Genetische Definitionen zielen auf Anschaulichkeit und Nachvollziehbarkeit für die Lernenden ab. Es können mit relativ geringen Vorkenntnissen diverse Erfahrungen und Entdeckungen zu dem neuen Begriff gemacht werden. Auch für das Erinnern könnte dieses Vorgehen vorteilhaft sein. Es bietet sich an ausgehend von der Konstruktion der Mittelsenkrechten die Raute wiederzuentdecken. Die Konstruktion der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AC}$ kann als Konstruktion einer Raute angesehen werden (vgl. Abb. 2): Die Strecke $\overline{AC}$ wird dabei als Diagonale einer Raute $ABCD$ interpretiert (vgl. Roth & Wittmann 2014, S. 138). Anhand der Symmetrieeigenschaften der Raute kann erkannt werden, dass sich die beiden Diagonalen einer Raute im rechten Winkel schneiden und halbieren.

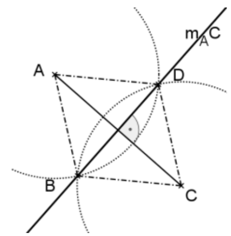


Abb. 2: Konstruktion der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AC}$ durch Rautenkonstruktion.

So kann die eine Diagonale stets als Mittelsenkrechten der anderen betrachtet werden.

Alternativ kann die Konstruktion einer Raute als Anwendung der Mittelsenkrechten gesehen werden, seien z. B. eine Seite und eine Diagonale oder aber beide Diagonalen gegeben und die Aufgabe besteht darin, die zugehörige Raute zu konstruieren, gelingt dies mithilfe der Mittelsenkrechten (vgl. Scheid & Schwarz 2017, S. 14).

Bleibt diese Definition im Sinne des prozeduralen Wissens bzw. Handelns auf der beschreibenden Ebene kann durch diese Definitionsvariante keine tiefergehende Vernetzung zur Mittelsenkrechte als Ortslinie erfolgen. Erst ein ergänzendes Verständnis, das auf dem Ortslinien-Konzept des Kreises beruht, erklärt, warum auf diese Weise genau alle Punkte gefunden werden, die gleich weit von den Streckendpunkten entfernt sind. Damit kann die nachfolgende Argumentation angegangen werden: Alle Punkte auf der Kreislinie haben die gleiche Entfernung zum Mittelpunkt M des Kreises, nämlich r. Der Schnittpunkt von dem Kreis um A mit dem Radius r und dem Kreis um B mit dem gleichen Radius r ist gleich weit von A und B entfernt. Dies gilt für beide Kreisschnittpunkte. Legt man eine Gerade durch die beiden Kreisschnittpunkte, erhält man die Mittelsenkrechte zur Stecke $\overline{AB}$ (vgl. Abb. 13 in Tab. 6).

Beginnt man mit einer genetischen Definition, die die Konstruktion der Mittelsenkrechten umfasst, können die Teilaussagen i) und ii) anschaulich und mithilfe verschiedener Bilder betrachtet werden. Es bietet sich daher an im Anschluss an die Definition D die Ortslinien-Eigenschaften der Mittelsenkrechte als Satz zu formulieren. Für jede der beiden Teilaussagen i) und ii) können Fragen aufgeworfen werden, die bei einer zeichnerischen Lösungsweise zu sehr anschaulichen Bild führen. Zunächst werden Fragen und Lösungszeichnungen für die Aussage i) dargestellt: Gehen wir davon aus, dass ein Punkt auf der Mittelsenkrechten gegeben sei. Welche Eigenschaften gelten für alle diese Punkte? Eine viel suggestivere Frage lautet: Gesucht sind alle Kreise, auf denen die beiden Punkte A und B liegen. Was haben Sie gemeinsam? (Antwort: Jeder Kreis, der durch die Punkte A und B verläuft, hat seinen Mittelpunkt auf der Mittelsenkrechten zur Strecke $\overline{AB}$). Wird diese Aufgabe zeichnerisch gelöst, wird man erkennen, dass die gesuchten Kreismittelpunkte alle auf einer Geraden liegen (vgl. Abb. 5 in Tab. 6). Beispielsweise können gleichschenklige Dreiecke mit der Basis $\overline{AB}$ das Auffinden der Kreismittelpunkte ermöglichen. Die Höhen der gleichschenkligen Dreiecke liegen dann auf der gefundenen Geraden. Dadurch kann die Orthogonalität der gefundenen Geraden begründet werden kann.

Betrachten wir nun die zweite Teilaussage ii). Es kann folgende Frage formuliert werden: Wo liegen alle Punkte, die gleich weit von A und von B entfernt sind? Eine mögliche Zeichnung kann zu folgender Antwort führen: Die Punkte liegen auf der Mittelsenkrechten zur Stecke $\overline{AB}$. Bei der zeichnerischen Lösung dieser Aufgabe werden mehrere Kreise mit gleichem Radius um A und auch um B gezeichnet. Die Kreisschnittpunkte sind genau Punkte mit der gesuchten Eigenschaft: $\{\ P \mid |\overline{AP}| = |\overline{BP}|\ \} = \textit{Mittelsenkrechte von}\ \overline{AB}$. Es kann erkannt werden, dass die so entstehenden Kreisschnittpunkte alle auf einer Geraden liegen. Die Orthogonalität dieser Gerade ergibt sich aus den gleichen Abständen der beiden Punkte zu den Geradenpunkten; bleibt an dieser Stelle aber noch zu begründen.

Durch genetische Definitionen soll der Aufbau mentaler Modelle bei den Lernenden gefördert werden, so dass der Umgang mit den neuen Objekten erleichtert wird. Andererseits wird der axiomatische Aufbau der Mathematik durch genetische Definitionen nicht deutlich (vgl. Weigand 2014b, S. 114 f.). Somit können die Schülerinnen und Schüler ein Definieren neuer Begriffe im mathematischen Sinne auf diese Weise nicht erlernen. An dieser Stelle bleibt es an der Lehrperson abzuwägen, inwieweit die Verwendung einer genetischen Definition für den zu erlernenden Begriff für die Schülerinnen und Schüler einen größeren Vorteil bietet als das Kennenlernen von Definitionsprozessen mit den zugehörigen Argumentationen, ggf. Beweisen für Folgerungen und Sätze. Langfristig ist eine ausschließliche Verwendung genetischer Definition sicher als kritisch zu betrachten.

In der Tabelle der Wissensarten wird die Konstruktion der Mittelsenkrechten als prozedurales Wissen ergänzt. Eine Konstruktionsbeschreibung stellt die *explizite Formulierung* und die Konstruktion selbst die *Konkretisierung & Abgrenzung* dar. Unter *Bedeutung & Vernetzung* wird zuletzt erklärt, warum die Mittelsenkreche auf eben diese Art konstruiert werden kann.

5.3 Weiterführende Überlegungen zur Mittelsenkrechte in Dreiecken

Für ein integriertes Begriffsverständnis schließt sich an die Definition ein Folgern auf weitere Eigenschaften des neuen Objekts an. Dazu zählt neben der Konstruktion der Mittelsenkrechten, außer- wie auch innermathematische Anwendungen. Eine klassische innermathematische Anwendung findet die Mittelsenkrechte bei der Konstruktion des Umkreismittelpunktes von Dreiecken. Dieser Inhalt biete sich für Erkundungen mit einer dynamischen Geometriesoftware (DGS), wie es beispielsweise in *Mathematik – Neue Wege – Arbeitsbuch für Gymnasien 2007*, S. 116, Aufgabe 2a) oder der *Mathewerkstatt 2014,*

S. 184, Aufgabe 23 umgesetzt wird, ebenso an wie für das Erlernen von Argumentationen, Begründungen oder sogar Beweisen, wie es mit Aufgaben aus *Mathematik – Neue Wege – Arbeitsbuch für Gymnasien 2007*, S. 116, Aufgabe 2 b, c) oder Erklärungen aus *Mathematik 2000*, S. 161 angeregt wird. Dies erscheint insofern passend, da beim Umkreismittelpunktsatz ein Verständnis des Ortslinienkonzeptes und der Konstruktionsweise erneut angewendet und in Argumentationen und Begründungen münden.

Auch in allgemeinen Geometrielehrwerken wird entweder direkt im Anschluss an die Definition (z. B. Krauter & Bescherer 2007) oder aber in einem nachfolgenden Kapitel zu „besonderen Linien im Dreieck“ (z. B. Gorski & Müller-Philipp 2014, Scheid & Schwarz 2017) der Umkreismittelpunktsatz in Dreiecken thematisiert. In dem Beweis des Satzes findet das Ortslinien-Konzept häufig eine erste Anwendung:

> Umkreismittelpunktsatz in Dreiecken: *Die Mittelsenkrechten der drei Dreiecksseiten treffen sich in einem gemeinsamen Punkt M. Dieser ist von allen drei Ecken gleich weit entfernt. Er ist der Mittelpunkt des Umkreises.* (Krauter & Bescherer 2007, S. 67)

Diese Aussage ist für Schülerinnen und Schüler nicht so trivial einzusehen, wie es uns (mittlerweile) erscheint. Es stellt sich die Frage: Warum klappt das mit den Mittelsenkrechten in jedem(!) Dreieck? Als Gegensituation nehme man drei Geraden in der Ebene. In diesem Fall ist es äußerst unwahrscheinlich, dass diese beliebigen Geraden sich in genau einem Punkt schneiden. Es ist demnach auch nicht sofort einsichtig, wieso das für Mittelsenkrechten in jedem Dreieck gelten soll. Und gleichzeitig können auch an dieser Stelle erfahrungsgemäß nur wenige Schülerinnen und Schüler die Notwendigkeit eines Beweises ausmachen.

Die für dieses Kapitel ausgewählten Beweise sollen auch für Siebtklässlerinnen und Siebtklässler verständlich aufbereitet werden können. Die verwendeten mathematischen Ideen werden in Grundschule und Sekundarstufe I thematisiert. Es wird eine gängige Beweisvariante angeführt und später auf eine weitere verwiesen. Der erste Beweis verwendet das Ortslinien-Konzept der Mittelsenkrechten: Gegeben ist das Dreieck ABC. Per Definition B oder Implikation i) ist bekannt: Alle Punkte auf der Mittelsenkrechten zu $\overline{AB}$ sind gleich weit von A und B entfernt. Und es gilt ebenso: Alle Punkte auf der Mittelsenkrechten zu $\overline{BC}$ sind gleich weit von B und von C entfernt. Die beiden Geraden schneiden sich in einem Punkt. Da zwei Seiten eines nicht-entarteten Dreiecks nicht parallel zueinander sein können, müssen sie sich schneiden. Der Schnittpunkt ist somit gleich weit entfernt von A und B, und auch von B und C und damit insbesondere gleich weit entfernt von A und C. Damit liegt er per Definition B oder Implikation ii) auf der Mittelsenkrechten zu $\overline{AC}$.

Die zweite Beweisvariante verwendet Abbildungseigenschaften von Achsenspiegelungen und den Dreispiegelungssatz: Betrachten wir den Schnittpunkt S der beiden Mittelsenkrechten $m_{\overline{AC}}$ und $m_{\overline{BC}}$ (vgl. Abb. 3). Durch S und den dritten Dreieckseckpunkt C zeichnen wir die Gerade g ein. Nun betrachten wir verschiedenen Achsenspiegelungen: Der Punkt A wird an $m_{\overline{AC}}$ auf C gespiegelt. Der Punkt C wird an der Geraden g auf C abgebildet. Der Punkt C wird an $m_{\overline{BC}}$ auf B gespiegelt. Durch die Verkettung der drei Spiegelungen wird der Punkt A auf B abgebildet. Da die drei Achsen kopunktal sind, kann (nach dem

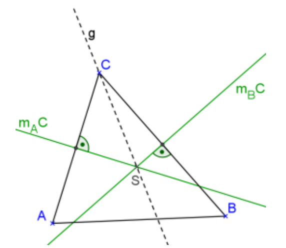


Abb. 3: Konstruktion zu den Beweisen zum Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten im Dreieck.

Dreispiegelungssatz) diese verkettete Abbildung ebenfalls durch eine Achsenspiegelung dargestellt werden, bei der die zugehörige Achse ebenfalls durch den Punkt *S* verläuft. Zusätzlich wissen wir, dass diese Achse durch den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ verlaufen muss, damit *A* auf *B* abgebildet wird. Damit entspricht die gesuchte Spiegelachse der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AB}$ (vgl. Krauter & Bescherer 2007, S. 68). Und somit verläuft $m_{\overline{AB}}$ ebenfalls durch den Punkt S.

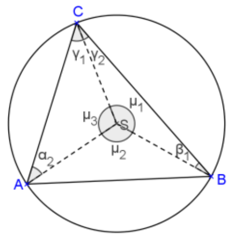


Abb. 4: In einem spitzwinkligen Dreieck liegt der Umkreismittelpunkt innerhalb des Dreiecks.

Auf die unterschiedliche Lage des Mittelsenkrechtenschnittpunktes *S* in spitzwinkligen, rechtwinkligen und stumpfen Dreiecken wird in der Regel verwiesen bzw. dies als aus Beobachtungen resultierende Erkenntnis verfasst (vgl. Gorski & Müller-Philipp 2014, S. 258; Scheid & Schwarz 2017, S. 19, Krauter & Bescherer, S. 67). Nur selten wird dies in den Lehrwerken bewiesen. In dem folgenden Beweis werden der Innenwinkelsummensatz und Sätze zum gleichschenkligen Dreieck (beides Inhalte der 7. Klasse) verwendet. Bei der Argumentation wird mit Ungleichungen gerechnet (vgl. Wellstein & Kirsche 2009, S. 26). Es wird gezeigt: Liegt der Umkreismittelpunkt innerhalb des Dreiecks, so ist es spitzwinklig (vgl. Abb. 4).

Zunächst zeigen wir, dass der Winkel $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ spitzwinklig ist.

Die beiden Dreiecke ASC und CBS sind gleichschenklig, da mit dem *Umkreismittelpunktsatz in Dreiecken* gilt $|\overline{AS}| = |\overline{CS}|$ und $|\overline{CS}| = |\overline{BS}|$.

Daraus ergibt sich, dass $\gamma_1 = \alpha_1$ und $\gamma_2 = \beta_1$ ist. Mit dem Innenwinkelsummensatz in Dreiecken folgt: $\mu_1 = 180° - 2\gamma_1$ und $\mu_2 = 180° - 2\gamma_2$.

Ebenso folgt für das Dreieck ABM: $\mu_3 < 180°$.

Aus $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 360°$ folgt

$\mu_1 + \mu_2 = 360° - \mu_3 > 180°$, und somit

$180° - 2\gamma_1 + 180° - 2\gamma_2 > 180°$, zusammengefasst also

$$-2\gamma_1 - 2\gamma_2 > -180°$$
$$2\gamma_1 + 2\gamma_2 < 180°$$
$$\gamma = 90°$$

Für α und β kann dies analog gezeigt werden. Damit ist das Dreieck spitzwinklig.

Für die beiden anderen Fälle (Umkreismittelpunkt liegt außerhalb des Dreiecks bzw. liegt auf der Seite) wird kann mithilfe einer ähnlichen Idee die jeweilige Aussage (stumpfwinkliges und rechtwinkliges Dreieck) bewiesen. Daher werden diese Beweise nur kurz skizziert.

Liegt S außerhalb des Dreiecks, schneidet eine der Strecken $|\overline{AS}|, |\overline{BS}|, |\overline{CS}|$ eine der Seiten des Dreiecks (vgl. **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.** in Tab. 6). Betrachten wir den Fall: $|\overline{CS}|$ schneide $|\overline{AB}|$. So gilt $\mu_1 = 180° - 2\gamma_1$ und $\mu_2 = 180° - 2\gamma_2$. Es gilt aber nun in diesem Fall $\mu_1 + \mu_2 < 180°$ und somit folgt $\gamma > 90°$.

Liegt S auf $|\overline{AB}|$, gilt $\mu_1 + \mu_2 = 180°$ und somit folgt $\gamma = 90°$ (vgl. Wellstein & Kirsche 2009, S. 111).

Da es keinen weiteren Fall für die Lage des Umkreismittelpunktes geben kann, kann nun auch die Umkehrung der jeweiligen Behauptung geschlossen werden: Ist das Dreieck spitzwinklig, liegt der Umkreismittelpunkt innerhalb des Dreiecks. Denn S kann weder außerhalb noch auf einer der Seiten des Dreiecks liegen, da für diese Lage stumpfwinklige bzw. rechtwinklige Dreiecke nachgewiesen wurden (vgl. Wellstein & Kirsche 2009, S. 111).

Die Lage der Umkreismittelpunkte in den Dreiecken geht über das Schulwissen insofern hinaus, dass es in keinem der betrachteten Schulbücher explizit aufgeführt wird. Als Ausgang von Erkundungsaufgaben kann dies unter Übungen gefunden werden, zum Beispiel in *Mathewerkstatt 7, 2014, S. 184, Aufgabe 25 d/e*, *Mathematik – Neue Wege 7, 2007*, S. 119, Aufgabe 7 oder *Mathematik 2000*, S. 168, Aufgabe 6. Neben einer innermathematischen Thematisierung können zahlreiche Schulbuchaufgaben mit Realitätsbezug gefunden werden. Dabei gilt es geeignete Hubschrauberlandeplätze, Autobahnzufahrt zu Orten oder zentrale Versorgungsstationen zu platzieren. Diese Kontexte werden unten näher analysiert. Es folgen zunächst zwei Einträge in der Tabelle der Wissensarten.

Der erste Eintrag beinhaltet den Umkreismittelpunktsatz in Dreiecken, eine zugehörige Abbildung und eine Begründung, die die obige Beweisidee enthält. Der weitere Eintrag gibt den Satz zur Lage der Umkreismittelpunkte mit zugehöriger Zeichnung an. Häufige Anwendungskontexte werden hinzugefügt.

Anwendungskontexten und Realitätsbezügen werden in der Mathematikdidaktik eine tragende Rolle zugeschrieben, die über das Ziel der reinen Motivation der Lernenden hinausgeht. Im Lernprozess sollen durch Anwendungskontexte mathematische Ideen und Tätigkeiten vermittelt werden oder auch der Nutzen von Mathematik erfahren werden. Der Einsatz von Anwendungskontexten kann zu tragfähigen Vorstellungen der Mathematik und damit zu einer Sinnstiftung des Lernens beitragen (vgl. Leuders et al. 2011, S.3f.).

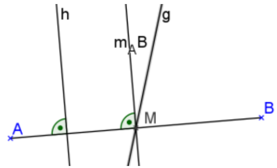
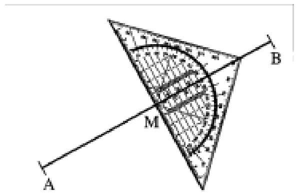
Die Betrachtung von (konstruierten) Kontexten kann das formale Verständnis des Ortslinien-Konzepts unterstützen (Beleg ergänzen). Auch in Schulbüchern werden verschiedene Sachkontexte genutzt um die Frage nach der Mitte zwischen drei oder mehr Punkten zu beantworten. Dabei wird nach einem möglichst guten Standort für einen Hubschrauber gesucht, der bestenfalls gleich weit von vier Städten entfernt sein soll (vgl. *Mathewerkstatt, 2014*, S. 168). Ähnliche Fragestellungen ergeben sich beim Bau einer Autobahnzufahrt oder eines Schwimmbades oder auch der Errichtung einer Forschungsstation in der Wüste (*Elemente der Mathematik, 2007*, S. 224 ff.). Ein anderes Schulbuch baut die Unterrichtseinheit rund um das Wurfspiel Boule auf. Bei diesem Spiel gewinnt das Team, das eine seiner Kugeln am nächsten an die kleine zentrale Spielkugel (das Schweinchen) geworfen hat. Bei der Betrachtung von Spielausgängen für ein Unentschieden wird der Einsatz der Mittelsenkrechten deutlich (*Das Mathematikbuch – Lernumgebungen Klasse 7, 2010,* S. 38 f.). Dies sind nur einzelne Beispiel. Die meisten Anwendungsbeispiele werden erst dann interessant d. h. wirken weniger konstruiert, sobald man drei oder vier oder mehr Punkte oder im Kontext dann Kugeln, Städte oder Oasen, betrachtet. Innermathematisch kann die Frage auf die Suche nach dem Umkreismittelpunkt bei Dreiecken oder Vielecken formuliert werden, das sind eben die Kreise, die durch drei oder mehr gegebenen Punkte verlaufen (vgl. Krauter & Bescherer 2007, S. 67).

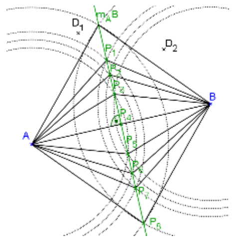
Im direkten Anschluss an das Themengebiet zur Mittelsenkrechten bieten sich zwei verschiedene inhaltliche Vertiefungen an. Zum einen die Betrachtung die Frage nach weiteren Linien im Dreiecken unter der Fragestellung *wo ist die Mitte?* und zum anderen die Erweiterung auf Vielecke.

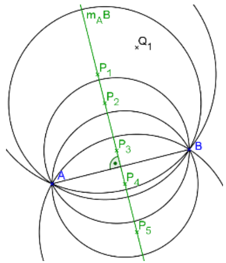
Bei der Suche nach der Mitte von Dreiecken bietet sich neben der Untersuchung des Schnittpunktes der Mittelsenkrechten die anschließende Betrachtung der Schnittpunkte von Höhen, Seitenhalbierenden (Schwerpunkt) und/oder Winkelhalbierenden an. Dies findet sich auch teilweise in den Schulbüchern. Es werden Schnittpunkte von Mittelsenkrechte, Winkelhalbierenden, Seitenhalbierenden und Höhen in Dreiecken beispielsweise innerhalb eines Kapitels in den Büchern *Mathematik – Neue Wege 7* (2007, S. 118ff.) oder *Mathe live 7* (2011, S. 130ff.) eingeführt. Daran kann sich eine Übungsphase anschließen, in der bei verschiedenen Aufgabenstellungen jeweils entschieden werden muss, welche Linien (im Dreieck) zur Lösung beitragen kann.

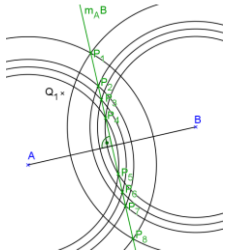
Andere Schulbücher bleiben bei der Betrachtung von Umkreis und Inkreis von Dreiecken, wie zum Beispiel *Elemente der Mathematik 7* und *Mathewerkstatt 7*. Teilweise schließen sich Übungsaufgaben an, bei denen entschieden werden muss, um welche der Linien im Dreieck es sich nun handelt. Teilweise wird auch eine Exploration zu Vierecken angeregt (wie beispielweise die Hubschrauberaufgabe aus der Mathewerkstatt 7). Es könnten sich weitere Erkundungsaufgaben mit und ohne DGS anbieten (*Mathematik – Neue Wege 7, 2007*, S. 120; *Lambacher Schweizer 7, 2010*, S. 167). Da sich die Mittelsenkrechten eines Vierecks im allgemeinen Falle nicht in einem Punkt schneiden, kann durch systematisches Überprüfen erkannt werden, für welche Viereck diese Aussage gilt, das sind: Quadrat, Rechteck, gleichschenkliges Trapez, Tangentenviereck. Für weitere Vierecke, wie Drache, Raute, nichtgleichschenkliges Trapez, allgemeines Viereck, Parallelogramm treten vier Schnittpunkte zwischen den Mittelsenkrechten auf. Eine konkrete Aufgabenstellung könnte darin liegen bei einem ein beschriebenen Viereck mithilfe des Wissens zur Mittelsenkrechten den Kreismittelpunkt zu konstruieren und/oder zu begründen, warum die Mittelsenkrechte hier zum Kreismittelpunkt führt. Dies kann zum Beispiel durch die Einteilung des Vierecks in zwei Dreiecke gelingen und als Rückführung auf den Umkreismittelpunktsatz und der dort gelernten Argumentation erfolgen.

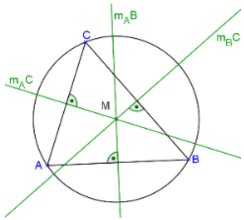
Ein weitergehendes mathematisches Aufgabenfeld, bei dem die Überlegungen und Begründungen zur Mittelsenkrechten einfließen können, bietet die Betrachtung von Voronoi-Diagrammen. Mit diesen Diagrammen wird eine Zerlegung des Raumes bezeichnet, bei der ausgehend von gegeben Punkten, die als Zentren einer Region fungieren sollen, der Raum so unterteilt wird, dass alle Punkte in dieser Region näher an dem zugehörigen Regionszentrum liegen als an anderen Zentren. Eben diese Grenzen können durch die Mittelsenkrechten bestimmt werden. Es gibt diverse auch dynamische Betrachtungen der Entstehung solcher Kartierungen, ebenso wie Bezüge zur Verteidigungsstrategie beim Fußball (Kim 2004). Dies kann im Unterricht der Sekundarstufe I als Ausblick zu Fragestellungen aus der höheren Mathematik genutzt werden.

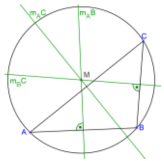
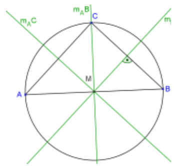
		Formulierung	Konkretisierung & Abgrenzung	Bedeutungen & Vernetzung
Abkürzung	**Konzeptuelles Wissen**			
KoWi I	**Senkrechte durch die Mitte als Konzept der Mittelsenkrechten** **(Definition A)**	Gegeben ist die Strecke $\overline{AB}$. Unter der Mittelsenkrechten m der Strecke $\overline{AB}$ versteht man die Gerade, die orthogonal zu der Strecke $\overline{AB}$ ist und durch den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ geht. *	m_{AB} ist die Mittelsenkrechte zur Strecke $\overline{AB}$. Die Geraden g und h sind keine Mittelsenkrechten zur Strecke $\overline{AB}$.  *Abb. 5: Beispiel und Gegnbeispiele zum Begriff der Mittelsenkrechten*	Anwendungen bei dern foglenden Konstruktionen: Halbierung einer Strecke, Fällung des Lots zu einer Geraden durch einen Punkt, Konstruktion einer Parallelen durch einen Punkt und einer Mittelparallelen  *Abb. 6: Senkrechte durch die Mitte einer Strecke.*

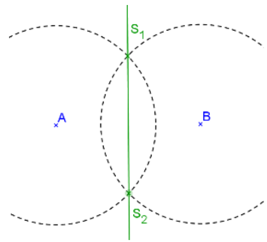
		Formulierung	Konkretisierung & Abgrenzung	Bedeutungen & Vernetzung
KoWi II	**Ortslinie als Konzept der Mittelsenkrechten** **(Definition B)**	Diejenige Gerade, die aus der Menge aller Punkte M besteht, die zu zwei gegebenen, festen Punkten A und B jeweils den gleichen Abstand besitzen, nennt man Mittelsenkrechten m_{AB}	Die Punkte P_n haben den gleichen Abstand zu A und zu B, Sie liegen auf der Mittelsenkrechten m_{AB}. Der Punkte D_1 hat einen geringeren Abstand zu A als zu B. Er liegt nicht auf m_{AB}. Der Punkte D_2 hat einen geringeren Abstand zu B als zu A. Er liegt nicht auf m_{AB}.  *Abb. 7: Mittelsenkrechte als Ortslinie* Es entstehen gleichschenklige Dreiecke zur Basis $\overline{AB}$. Es gilt $\lvert\overline{AP_n}\rvert = \lvert\overline{BP_n}\rvert$, aber $\lvert\overline{AD_n}\rvert \neq \lvert\overline{BD_n}\rvert$ für $n \in IN$	Es bleibt zu begründen, dass diese Gerade (Mittelsenkrechte) senkrecht durch die Mitte der Strecke $\overline{AB}$ verläuft. Dies kann mithilfe der Definition der Höhe, dem Basiswinkelsatz in Dreiecken und den Kongruenzsätzen erfolgen: Betrachten wir das gleichschenklige Dreieck ABP_3. Die Höhe zu $\overline{AB}$ teilt das Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke. Diese stimmen überein in zwei Seiten (Höhe h und Seite des gleichschenkligen Dreiecks $\lvert\overline{AP_3}\rvert = \lvert\overline{BP_3}\rvert$) sowie einem Winkel (Basiswinkel) und sind nach dem Kongruenzsatz SSW kongruent. Daraus folgt $\lvert\overline{AP_4}\rvert = \lvert\overline{BP_4}\rvert$ und da die Höhe in der Mittelsenkrechten zu $\overline{AB}$ enthalten ist, ist auch die Orthogonalität der Mittelsenkrechten zur Strecke $\overline{AB}$ gezeigt.

		Formulierung	Konkretisierung & Abgrenzung	Bedeutungen & Vernetzung
KoWi III	**Satz über die Mittelsenkrechte**	Wenn ein Punkt P auf der Mittelsenkrechten einer Strecke $\overline{AB}$ liegt, dann hat er die gleiche Entfernung zu den Punkten A und B.	Der Punkt P_1 liegt auf der Mittelsenkrechten. Das heißt, er hat die gleiche Entfernung zu A und zu B. Der Punkt Q_1 liegt nicht auf m_{AB}. Er ist nicht gleich weit entfernt von A und von B.  *Abb. 8: Alle Punkte P_i liegen auf der Mittelsenkrechten zu $\overline{AB}$, deshalb haben sie die gleiche Entfernung zu den Punkten A und B.*	Jeder Punkt auf der Mittelsenkrechten ist Mittelpunkt eines Kreises, auf dem die Punkte A und B liegen. Für einen punkt, der nicht auf der Mittelsenkrechte liegt, kann es solche einen Kreis nicht geben.
		Formulierung	**Konkretisierung & Abgrenzung**	**Bedeutungen & Vernetzung**

KoWi IV	**Umkehrsatz über die Mittelsenkrechte**	Wenn ein Punkt P von zwei Punkten A und B die gleiche Entfernung hat, dann liegt er auf der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AB}$.	Der Punkt P_1 hat die gleiche Entfernung zu A und zu B. Das heißt, er liegt auf m_{AB}. Der Punkt Q_1 liegt näher bei A als bei B. Er liegt nicht auf m_{AB}.  *Abb. 9: Punkte, die die gleiche Entfernung zu A und auch zu B haben, liegen auf der Mittelsenkrechten zu $\overline{AB}$.*	Um A und um B werden mehrere Kreise mit demselben Radius gezogen. Die Schnittpunkte der Kreise mit dem gleichen Radius geben die Punkte an, die von A und B jeweils den gleichen Abstand haben. Der Abstand beträgt die Länge des Radius r. Somit liegen alle Kreisschnittpunkte auf der m_{AB}.

		Formulierung	Konkretisierung & Abgrenzung	Bedeutungen & Vernetzung
KoWi V	**Umkreismittelpunktsatz in Dreiecken**	In jedem Dreieck schneiden sich die Mittelsenkrechten der drei Seiten in einem Punkt, dem Mittelpunkt des Umkreises.	 *Abb. 10: Umkreismittelpunkt im spitzen Dreieck*	Begründung: Alle Punkte auf der Mittelsenkrechten zu $\overline{AB}$ sind gleich weit von A und B entfernt. Alle Punkte auf der Mittelsenkrechten von $\overline{BC}$, sind gleich weit von B und von C entfernt. Die Geraden schneiden sich in einem Punkt [da zwei Seiten eines nicht-entarteten Dreiecks nicht parallel zueinander sein können]. Dieser Punkt ist somit auch gleich weit von A und C entfernt und liegt damit auf der Mittelsenkrechten zu $\overline{AC}$.

		Formulierung	Konkretisierung & Abgrenzung	Bedeutungen & Vernetzung
KoWi VI	**Lage des Umkreismittelpunktes im Dreieck**	In einem spitzwinkligen Dreieck liegt der Umkreismittelpunkt innerhalb des Dreiecks. In einem stumpfwinkligen Dreieck liegt der Umkreismittelpunkt außerhalb des Dreiecks. In einem rechtwinkligen Dreieck liegt der Umkreismittelpunkt auf der Hypotenuse.	 *Abb. 121: Umkreismittelpunkt im stumpfen Dreieck*  *Abb. 11: Umkreismittelpunkt im rechtwinkligen Dreieck*	Anwendungskontexte: Punkt mit dem gleichen Abstand zu drei gegeben Punkten (Hubschrauberlandeplatz, Autobahnzufahrt, zentrale Versorgungsstation etc.)

		Formulierung	Konkretisierung & Abgrenzung	Bedeutungen & Vernetzung
	Prozedurales Wissen			
ProWi	**Handwerkliche Verfahren** **(Definition D)**	Zeichne einen Kreis um A. Zeichne einen Kreis mit demselben Radius um B. Die beiden Kreise schneiden sich in zwei Punkten. Zeichne eine Gerade durch die beiden Schnittpunkte und nenne sie Mittelsenkrechte zur Strecke $\overline{AB}$.	Wähle den Kreisradius r > $0{,}5 \cdot \lvert\overline{AB}\rvert$ und behalte den gleichen Radius für beide Kreise bei.  *Abb. 13: Konstruktion der Mittelsenkrechten*	Alle Punkte auf der Kreislinie haben die gleiche Entfernung zum Mittelpunkt des Kreises, nämlich r. Die Schnittpunkte von dem Kreis um A mit dem Radius r und dem Kreis um B mit dem gleichen Radius r sind gleich weit von A und von B entfernt. Verbindet man die beiden Kreisschnittpunkte erhält man eine Gerade, Mittelsenkrechte zur Stecke $\overline{AB}$.

Tab. 6: Die Wissenselemente zum Begriff der Mittelsenkrechten erstellt nach Barzel et al. 2012. Als konventionelle Festlegung wird der Begriff der Mittelsenkrechten gesetzt, metakognitive Tätigkeiten werden hier nicht angeführt. Die Definition C kann in der Definition A und im Satz über die Mittelsenkrechte wiedergefunden werden.

5.4 Überlegungen zu den Definitionsvarianten

Unabhängig von der gewählten Definitionsvariante kann der Begriff der Mittelsenkrechten erst dann vielseitig erfasst werden, wenn möglichst viele der Wissenselemente und -facetten aus der entwickelten Tabelle in den Unterricht aufgenommen werden. Mögliche Entscheidungsgrundlagen können neben persönlichen Vorlieben u. a. auch sein: die Einführung des Begriffs im Schulbuch, der Umgang mit dem Aufbau eines Beweisbedürfnissen und das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler.

Eine pragmatische und auch häufig gewählte Entscheidung für eine Definitionsvariante richtete sich nach der im verwendeten Schulbuch notierten Variante. In vielen Schulbüchern ist man von dem streng axiomatischen Vorgehen abgewichen und so findet man den Begriff *Definition* nur selten. In Merkkästen, Merkregeln oder Informationskästen werden in schülergerechter Sprache mathematische Begriffe beschrieben und charakterisiert. Voranging ist dabei die Anknüpfungsmöglichkeit für die Schülerinnen und Schüler, die so den Begriff mit Verständnis füllen können sollen. Gleichzeitig kann an dieser Stelle keinen mathematisch strenge Trennung in Definition, Satz und Umkehrsatz erfolgen. Dies ist insofern sinnvoll, da gerade in den unteren Klassen diese logischen Strukturen kaum sinngemäß von den Lernenden erfasst werden können aufgrund der kindlichen Entwicklung. Häufig werden diese Merkregeln im Unterricht hergeleitet, in dem Beweisideen und/oder Begründungen bereits Aufgegriffen werden. Auf diese Wiese erkundete Begriffe und Zusammenhänge können kein Beweisbedürfnis bei den Lernenden auslösen, da ihre Existenz bereits belegt und ergründet ist (vgl. Vollrath & Roth 2012, S. 109). An dieser Stelle kann es bei der Unterrichtsplanung somit zu der Spannung zwischen einer stärker verständnisorientierten Herangehensweise und einem Erlernen des Beweisens, als zentrale mathematische

Tätigkeit, die insbesondere in geometrischen Sachverhalten anschaulich geübt werden kann. Eine Lösung kann darin liegen neue Begriffe, wie hier die Mittelsenkrechte, in Anlehnung an das Vorgehen in Schulbüchern für die Lernenden verständnisorientiert herzuleiten und dabei eine Merkregel zu entwickeln. Im weiteren Verlauf kann der Umkreismittelpunktsatz mithilfe dieser Merkregel begründet werden. In Abhängigkeit von der Stichhaltigkeit der Begründungen kann dies in einem Beweis münden, zumindest wird an dieser Stelle das Begründungsbedürfnis angeregt und geschult.

Ebenso können unterschiedliche Einbindungsmöglichkeiten des mathematischen Vorwissens der Schülerinnen und Schüler die Bevorzugung einer der Definitionsvarianten erzeugen. Es stellen sich Überlegungen dazu an, welches Vorwissen die Schülerinnen und Schüler mitbringen, auf das bei dem neuen Inhalt zurückgegriffen werden und einen Begriffsaufbau erleichtern kann. Zum Zeitpunkt des Erlernens der Mittelsenkrechten in Klasse 7 wurden bereits die folgenden geometrischen Bereiche der Klassenstufen 4 bis 7 unterrichtet: Achsen- und Punktsymmetrien von Figuren, insbesondere Vierecken, Spiegelung von Figuren an einer Achse, Definitionen von Kreis, Senkrechten und Strecken, Abständen von Punkt und Gerade, Kongruenzsätze im Dreieck und Dreieckskonstruktionen mit Zirkel und Lineal.

Den Begriff des Kreises lernen die Schülerinnen und Schüler bereits in der Grundschule kennen. In den Jahrgangsstufen 5 und 6 wird der Kreis wieder aufgegriffen und eventuell um die Idee der Ortslinie aller Punkte, die den gleichen Abstand r zum Mittelpunkt M haben ergänzt. Damit die Konstruktion der Mittelsenkrechten nicht reines Abarbeiten von Arbeitsschritten bleibt, sondern mit Verständnis nachvollzogen werden kann, ist das Verständnis des Kreises als Ortslinie grundlegend. Gleichzeitig ist es ebenso vorstellbar, diese Idee beim Erlernen der

Konstruktion mitzuliefern und erst eben jetzt, an der Stelle, an der sie benötigt wird aufzugreifen. Neben Kreis und Mittelsenkrechte wir in der Schulmathematik auch Parallelenpaare als Ortslinie unterrichtet.

Des Weiteren kann überlegt werden, welche Unterrichtseinheit direkt vor der Einheit zur Mittelsenkrechten unterrichtet wurde. Das wird in den Schulbüchern ganz unterschiedlich gehandhabt. Im Sinne des Spiralprinzips kann für eine Verteilung der geometrischen Inhalte über das Schuljahr hinweg plädiert werden. Eine Anknüpfung an Kongruenzsätze und weiteres Übungsfeld für die Konstruktion von Dreiecken bietet sich hingegen auch ein Anschluss an diesen geometrischen Inhalt an. Die Verwendung des Kreises als Ortslinie wird bei den Dreieckskonstruktionen zum Beispiel bei dem Kongruenzsatz Seite-Seite-Seite ausgenutzt.

5.5 Gestaltungsprinzipien für einen Unterricht zum Erlernen der Mittelsenkrechten

Aus den fachlichen und fachdidaktischen Überlegungen zur Mittelsenkrechten werden an dieser Stelle zentrale Ideen als Gestaltungsprinzipien für den Mathematikunterricht zusammengefasst:

- Mit dem Ortslinienkonzept kann die Konstruktionsweise erklärt werden und umgekehrt: Die Konstruktion erklärt die Ortslinien-Eigenschaft.
- Der Umkreismittelpunktsatz im Dreieck bietet sich als Anwendung des Ortslinienkonzeptes an und kann zu einem Verständnis der Argumentationsweisen führen.
- Für die verschiedenen Definitionsvarianten können Vor- und Nachteile gefunden werden. Wichtig ist, dass

das Ortslinien-Konzept Unterrichtsinhalt ist, ob als Definition oder später erscheint weniger entscheidend.

- Eine verständnisorientierte Einführung neuer Begriffe ist einem streng axiomatischen Vorgehen vorzuziehen.
- Ein Beweisbedürfnis bzw. Begründungsbedürfnis, das auf die Anwendung des Ortslinien-Konzepts der Mittelsenkrechten zurück geht, wird bei der Thematisierung des Umkreismittelpunktsatzes für eine Begründung des gemeinsamen Schnittpunktes angeregt.
- Eine Unterrichtseinheit zum Erlernen des Begriffs der Mittelsenkrechten sollte alle Wissenselemente des Begriffs enthalten und somit auf ein vielseitiges Erfahren und Erlernen der Mittelsenkrechten abzielen.

6 Forschungsfragen und Vermutungen

Mit dem theoretischen Hintergrund, bestehend aus den Abschnitten 2 bis 5, wurde dargelegt, dass dem Problemlösen in der Mathematik (vgl. Abschnitt 2.2), insbesondere in der Geometrie, eine bedeutende Rolle nicht nur für die Begriffsbildung, sondern als zentrale Tätigkeit des Mathematikbetreibens zukommt (vgl. Abschnitt 2.3.5). Wird eine Problemlöseaufgabe zu Beginn einer Unterrichtseinheit gestellt und werden durch die Bearbeitung der Problemstellung neue Lerninhalte entdeckt, so wird eine enge Verbindung zum entdeckenden Lernen offensichtlich (vgl. Abschnitt 2.4). Dadurch wurde das problemorientierte Lernen definiert (vgl. Abschnitt 4.1). Das entdeckende Lernen wiederum kann auf sehr vielfältige Wegen umgesetzt werden. Gleichzeitig scheint es auf eine sehr emotionale Weise für eine Spaltung in Befürworter und Kritiker zu sorgen, bei dem beide Positionen die Forschungsergebnisse teilweise unterschiedlich auslegen. „Auf der einen Seite gibt es nur sehr wenige aktuelle Studien und neue systematische Beträge zum entdeckenden Lernen. Auf der anderen Seite existieren sehr viele Unterrichtsvorschläge, die mit dem Schlagwort entdeckendes Lernen versehen werden. [...]. Diese Beiträge beziehen sich auf nahezu sämtliche Fächer der Grundschule“ (Hartinger 2001, S. 134). Ein Großteil der Forschungsergebnisse ist aufgrund einer Curriculums-Umstellung an Universitäten in den USA entstanden. Die untersuchten Inhalte stammen häufig aus dem medizinischen oder betriebswirtschaftlichen Hochschulbereich (z. B. Capon & Kuhn 2004, Dochy et al. 2003; Patel et al. 1993). Damit unterscheiden sich nicht nur äußere Lernbedingungen, sondern auch Alter, Interesse und Vorwissen der Probanden sowie die zu erlernenden Inhalte von dem Mathematikunterricht der Sekundarstufe I an deutschen Schulen. Ebenso ist davon auszugehen, dass die Tätigkeit und die Bedeutung des Problemlösens in der Medizin nicht mit eben diesen in der Mathematik übereinstimmt. Daher bleibt fraglich, inwiefern die Ergebnisse dieser Vergleichsstudien auch für Mathematikunterrichtssituationen anzunehmen sind.

Machbarkeitsstudien für die Umsetzung eines problemorientierten, mathematischen Ansatzes im schulischen Setting finden sich teilweise bei den Arbeiten von Loibl et al. (2020) wieder. Hier liegt der Fokus auf der Kombination von Problemlöseaufgaben und Instruktion. Eine Erarbeitung der neuen Lerninhalte durch Problemlösen ist hier nicht erforderlich. Die Problemlöseaufgabe erhält die Funktion einer Aktivierung von Wissen und Fragen, die dann das Verstehen der Instruktion im besten Falle positiv beeinflussen. Dazu ist eine Auseinandersetzung mit der Problemstellung ausreichend. Die Lösungsfindung muss nicht unbedingt erfolgen. Die Tätigkeit des Problemlösens mit dem Ziel der Erarbeitung neuer Lerninhalte bzw. der Lösungsfindung wird hierbei nur bedingt beabsichtigt (vgl. Abschnitt 4.2). Die Bedeutung des Problemlösens für die Mathematik steckt aber eben auch in diesen Phasen (vgl. Abschnitt 2.2 und auch Abschnitt 2.3.6).

Obwohl diese und weitere Studien eine gelungene Zusammensetzung aus darbietenden und problemorientierten Unterrichtssequenzen als zielführend annehmen und teilweise zeigen können, dominiert in der Realität weiterhin der darbietende Ansatz (vgl. Klauer & Leutner 2012). Lehrerinnen und Lehrer finden Argumente für das rezeptive und gegen ein problemorientiertes Lernen (vgl. Abschnitt 4.3). „Insofern ist es wichtig die Effekte von Lehrmethoden empirisch zu ermitteln, ehe man die eine oder andere propagiert." (Klauer & Leutner 2012, S. 97).

Das bisherige Forschungsfeld lässt keine Rückschlüsse auf eine gelungene Umsetzung eines problemorientierten Einstiegs zur Mittelsenkrechten zu (vgl. Abschnitt 4.2), bei dem eben durch die Auseinandersetzung mit dem Problem Einsichten und Erfahrungen zum mathematischen Begriff erworben werden können.

Die vorliegende Arbeit setzt eben hier an und hat das Ziel, einen praxisbezogenen Beitrag über die Umsetzbarkeit eines problemorientierten Unterrichts zur Einführung der Mittelsenkrechte in siebten Klassen anhand der Befunde zum problemorientierten Lernen im theoretischen Teil zu planen, durchzuführen und unter Rücksichtnahme auf die oben aufgelisteten Lehrerargumente auszuwerten. Im folgenden Abschnitt wird mit den konkreten Forschungsfragen und den ausformulierten Vermutungen dieses Ziel weiter ausdifferenziert.

6.1 Forschungsaspekt I

Der erste Forschungsaspekt bezieht sich auf die generelle Durchführbarkeit eines problemorientierten Unterrichts im Vergleich zu einem darbietenden Vergleichsansatz. Im Sinne einer Machbarkeitsstudie sollen schließlich die Lernleistungen der Schülerinnen und Schüler miteinander verglichen werden (vgl. F1). Methodisch muss daher die Vergleichbarkeit der Lernenden in den vier Klassen hinsichtlich des Vorwissens zur Mittelsenkrechten und hinsichtlich der Problemlösefähigkeiten sichergestellt werden. Zusätzlich wird erfasst, inwiefern die Unterrichtsumsetzung nach der Planung verlaufen ist und inwieweit die inhaltliche und zeitliche Umsetzung gelingen kann.

Erst nachdem diese Aspekte sichergestellt und dokumentiert wurden, können die eigentlichen Forschungsfragen ins Blickfeld genommen werden:

Sowohl in der historischen Argumentation zwischen Bruner und Ausubel, als auch in den Unterrichtsbetrachtungen von Sawada (vgl. Abschnitte 3.3.2 und 4.3) wurden stets vergleichbare Bedenken gegenüber einem problemorientierten Unterricht angeführt: Mit einem problemorientieren Unterrichtsansatz könne nicht in derselben Unterrichtszeit vergleichbare Lernleistungen bei den Schülerinnen und Schülern erwartet werden. Insbesondere leistungsschwächere Lernende können diesem Unterricht kaum folgen. Es gibt eine Vielzahl an Forschungsergebnissen, die teilweise zu entgegengesetzten Ergebnissen kommen. Mit einem darbietenden Unterricht könne demnach das Faktenwissen besser erzielt werden, ein problemorientierter Unterricht unterstütze hingegen stärker den Aufbau von konzeptuellem Wissen (vgl. Abschnitt 4.2). Die Ergebnisse sind fachspezifisch und beziehen sich in diesen Fällen nicht auf die Mittelsenkrechte. Es lassen sich demnach die folgenden Fragestellungen konkretisieren:

F1 Vergleichbarkeit der Lernleistungen im direkten Anschluss und langfristig

> F1.1: Inwiefern sind die Lernleistungen im direkten Anschluss an den Unterricht klassenweise vergleichbar?
>
> F1.2: Inwiefern sind die Lernleistungen langfristig klassenweise vergleichbar?

Der Ausgang der Forschungsfrage F1.1 ist offen. Es dient der Überprüfung der Voraussetzungen für den anschließenden Unterricht und als Grundlage für die Vergleichbarkeit der Lernleistungen.

Die Forschungsfrage F1.2 stellt sich die Aufgabe die generelle Durchführbarkeit eines problemorientierten und darbietenden Unterrichts zur Mittelsenkrechten in einer festgesetzte Zeit mit gleichen Lernzielen zu untersuchen. Mögliche Ergebnisse könnten beinhalten, inwiefern die Zeit ausreichend war, die Aufgabenauswahl angemessen erschien, die unterrichtliche Umsetzung nach der Planung erfolgt ist. Damit werden konkrete Lehrerbedenken gegenüber einem problemorientierten Ansatz aufgegriffen. Gleichzeitig werden wichtige Faktoren erhoben, um die Ergebnisse der Leistungstests 2 und 3 einordnen zu können.

Die Auswertung der Leistungstest soll an dieser Stelle als Parameter für die gelungen Durchführbarkeit erhoben und ausgewertet werden. Eine detaillierte Analyse weiterer Daten kann erst nach Abschluss dieser Machbarkeitsuntersuchung mit dem Forschungsaspekt 2 erfolgen.

6.2 Forschungsaspekt II

Mit dem zweiten Forschungsaspekt wird darauf abgezielt, worin die Unterschiede und Gemeinsamkeiten der Klassen liegen. Das geometrische Wissen zur Mittelsenkrechten konnte anhand der Wissenselemente und -facetten aufgeschlüsselt werden (vgl. Abschnitt 5.3). Als zentraler Bestandteil für erfolgreiche Lernprozesse kann das Vorwissen und ein Anknüpfen neuer Wissensinhalte an dieses herausgestellt werden (vgl. Abschnitt 3.2). Für den Unterrichtsinhalt der Mittelsenkrechten wird zunächst relevantes, geometrisches Vorwissen und eine Problemlösetätigkeit erfasst, um somit die späteren Testergebnisse ggf. anhand dieser beiden Aspekte einordnen zu können.

F2.1. Gemeinsamkeiten und Unterschiede des inhaltlichen Vorwissens und der Problemlösetätigkeit

> F2.1.1 Welche Wissensbereiche im geometrischen Vorwissen können bei den Lernenden in den vier Klassen aufgezeigt werden?
>
> F2.1.2 Welche Problemlösefähigkeiten können bei den Lernenden in den vier Klassen aufgezeigt werden?

In der Erörterung zum entdeckenden und damit auch zum problemorientierten Unterricht konnte herausgestellt werden, welche unterschiedlichen Anforderungen sich für den Unterrichtsablauf, die Lernenden und auch die Lehrpersonen ergeben (vgl. Abschnitt 3.4.5). Gleichzeitig erhofft man sich durch den Einsatz von Problemlöseaufgaben eine umfassendere Anwendung der Mathematik, die im besten Falle zu Verstehen und Einsicht führe. In dieser Studie werden alle Unterrichtsstunden beobachtet und dokumentiert. Eine Detailanalyse des problemorientierten Unterrichtseinstiegs, bei der im Vergleich zum darbietenden Einstieg herausgestellt werden soll, welche Herausforderungen, Risiken und welcher besondere Nutzen in und durch einen problemorientierten Unterricht ersichtlich werden, bietet die Grundlage für die Forschungsfrage 2.2.

F2.2 Vergleich der Durchführung der Unterrichtseinstiege

> F2.2.1 Welche Möglichkeiten und Herausforderungen können anhand der Unterrichtsverläufe für einen problemorientierten Unterrichtseinstieg ausgemacht werden?

Es gibt empirische Vergleichsstudien, in denen ein problemorientierter Ansatz zu einem erhöhten Erwerb von konzeptuellen Wissen und von Begründunges- und Erklärkompetenzen (vgl. Abschnitt 4.2). Mit einer tiefergehenden Analyse der Testergebnisse 2 wird untersucht, inwiefern die Lernenden der vier Klassen ähnliche oder unterschiedliche Wissensfacetten der Mittelsenkrechten erlernt haben. Zusätzliche Effekte konnten für den langfristigen Wissenserwerb bestätigt werden. Bei einem problemorientierten Unterricht sollen die Lerninhalte länger behalten werden (vgl. Abschnitt 4.2).

F2.3: Gemeinsamkeiten und Unterschiede in Lernleistungen

> F2.3.1: Welche Lernleistungen bezüglich der Mittelsenkrechten weisen die Schülerinnen und Schüler beider Unterrichtsansätze am Ende der Unterrichtseinheiten auf und inwiefern sind diese klassenweise vergleichbar?
>
> F2.3.2: Welche Lernleistungen weisen die Schülerinnen und Schüler in den beiden Unterrichtsansätzen langfristig auf und inwiefern sind diese klassenweise vergleichbar?

Während die Auswertungen der Unterrichtsbeobachtungen für die Forschungsfrage F2.3.1 einen explorativen Charakter haben, können für die Forschungsfragen F2.3.1 und F2.3.2 bereits an dieser Stelle Vermutungen angeführt werden.

Vermutungen zur Forschungsfrage F2.3.1

i. Darbietender Unterricht führt zu besseren Ergebnissen in Leistungstests.
ii. Darbietender Unterricht unterstützt das Erlenen von Faktenwissen und problemorientierter Unterricht das Erlernen von konzeptuellem Wissen.
iii. Das Hauptlernziel wird besser erlernt.
iv. Ein problemorientierter Unterricht führt nicht unbedingt zu einem Verstehen. Aufgaben, die ein Verstehen erfordern, werden von den problemorientiert unterrichteten Klassen nicht besser gelöst.

Für den langfristigen Lernzuwachs können mit Bruner und Ausubel (vgl. Abschnitt 3.3.2.3), ergänzt durch aktuelle Forschungsergebnisse (vgl. Abschnitt 4.2), die nachfolgenden Vermutungen notiert werden:

Vermutungen zur Forschungsfrage F2.3.2

i. Selbst Entdecktes bleibt länger im Gedächtnis. Die problemorientierten Klassen zeigen bessere Leistungen in Test 3.
ii. Darbietender Unterricht führt zu besserem Behalten. Die darbietend unterrichteten Klassen zeigen bessere Leistungen in Test 3.
iii. Das Hauptlernziel wird besser behalten.

Für die Formulierung konkreter auf den Lerninhalt der Mittelsenkrechten bezogener Vermutungen ist die konkrete Planung der beiden Interventionen und die Entwicklung der Testinstrumente, die den Leistungsstand zur Mittelsenkrechten erfassen sollen, notwendig. Daher folgt eine Hypothesenverfeinerung im Anschluss and die Abschnitt zum Forschungsdesign, in Abschnitt 9.1.6.

7 Überblick der Studie und Beschreibung des Forschungsdesigns

In diesem Kapitel werden zunächst die Anforderungen an das Studiendesign, die sich unmittelbar aus den Forschungsfragen in Kapitel 6 ergeben, erläutert. Die Einordnung dieser Studie als Machbarkeitsstudie, Vergleichsstudie und quasi-experimentelle Feldstudie wird begründet (Abschnitt 7.1).

Anschließend wird ein Überblick über das Forschungsdesign gegeben (vgl. Abschnitt 7.2). Die genaue Umsetzung der quasi-experimentellen Vergleichsstudie im Feld wird dargelegt. Es werden die verwendeten Forschungsmethoden beschrieben. Dabei werden forschungstheoretische Aspekte wie Stichprobengröße und -zusammensetzung (vgl. Abschnitt 7.3), Zuteilung zu den Interventionen (vgl. Abschnitt 7.4), Umgang mit Variablenkontrolle und Gemeinsamkeiten und Unterschiede zum klassischen Pre-Posttest-Design (vgl. Abschnitt 7.5) aufgegriffen.

7.1 Anforderungen an das Forschungsdesign

Einordnung als Machbarkeitsstudie

Mit der Studie wird auf die grundlegende Frage, wie ein gelungener problemorientierter Mathematikunterricht zum Erlernen des Begriffs der Mittelsenkrechten realisiert werden kann, abgezielt (vgl. Abschnitt 6.1).

In Abschnitt 4.2 hat die Darlegung des bisherigen Forschungsstandes gezeigt, dass es kaum unterrichtsnahe Studien gibt, die einen problemorientierten Ansatz im Mathematikunterricht untersuchen. Bevor große Datenmengen erhoben werden können, dient diese Studie einer Vorab-Sondierung. Mit ihr kann abgeschätzt werden, welche Parameter für die Gestaltung einer groß angelegten Studie in welcher Form zu erheben wären, damit die Ergebnisse einen möglichst großen Nutzen für die Praxis erzielen können. Es werden daher verschiedene Untersuchungsmethoden eingesetzt, um einen möglichst umfassenden Blick auf die Thematik zu erhalten. Die hier beschriebene Studie zählt damit zu den Machbarkeitsstudien (vgl. Frey 2018, S. 668).

Einordnung als Vergleichsstudie und quasiexperimentelle Feldstudie

In einer Vergleichsstudie im Untersuchungsfeld Unterricht werden häufig unterschiedliche Medien, Methoden oder Sozialformen miteinander verglichen. Dabei werden zwei bis mehrere Interventionen durchgeführt und bezüglich einer Variablen, in der Regel des Lernzuwachses oder der Motivation, getestet (vgl. Theyßen 2014, S. 71). Es gibt einen Ansatz für die Experimentalgruppe und einen für die Kontrollgruppe (vgl. Bortz & Döring 2006, S. 55f.). In dieser Studie wird ein Vergleich zwischen darbietendem und problemorientiertem Unterrichtseinstieg betrachtet. Es gibt demnach zwei Interventionen, die sich hinsichtlich der Unterrichtsmethode im Einstieg unterscheiden. Damit kann die Studie als Vergleichsstudie eingeordnet werden. Die Experimentalgruppe erhält einen problemorientierten Einstieg, die Kontrollgruppe bleibt nicht „unbehandelt“, sie erhält einen darbietenden Einstieg.

Zentrale Fragestellungen beziehen sich auf die Unterrichtspraxis (vgl. Kapitel 6). Ein Gelingen in der Praxis unter realen Bedingungen steht in diesem Forschungsvorhaben im Mittelpunkt.

Um einen möglichst großen Nutzen für Lehrpersonen, Schülerinnen und Schüler erzielen zu können, sollen die Untersuchungsbedingungen möglichst natürlich und realistisch gestaltet sein. Döring und Bortz formulieren hierzu passend: „Der natürliche Lebensablauf im Feld soll durch die Forschungstätigkeiten so wenig wie möglich beeinträchtigt werden; stattdessen ist es die Aufgabe des Untersuchungsteams, sich möglichst nahtlos in das Feld einzufügen.“ (Döring & Bortz 2016, S. 336). Das charakterisiert die Studie als Feldstudie.

Eine „möglichst nahtlose Einfügung in das Feld“ hat zur Folge, dass die Klassenzusammensetzung nicht verändert wird. Die Schülerinnen und Schüler werden auch in der Studie in ihren natürlichen Gruppen, das sind die Klassenverbände, unterrichtet. Im Gegensatz zur experimentellen, zusammengestellten Gruppeneinteilung erfolgt die Gruppenzusammensetzung hier nicht zufällig. Studien, die natürliche Gruppe untersuchen, werden als quasiexperimentell bezeichnet (vgl. Bortz & Döring 2006, S. 54 ff.).

7.2 Das Forschungsdesign im Überblick

Im Folgenden wird zunächst ein Überblick über den gesamten Ablauf der Datenerhebung und Interventionen skizziert.

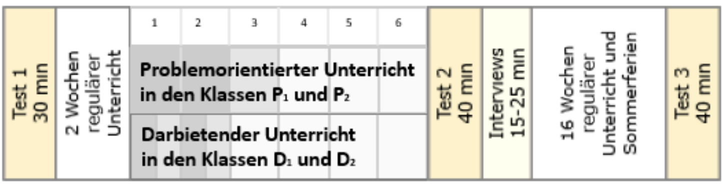


Abb. 14: Überblick des Designs der Studie. Die Unterrichtseinheiten bestehen aus einem Einstieg (dunkleres grau in Stunde 1 und 2), hier unterscheiden sich die beiden Ansätze in problemorientierten bzw. darbietenden Einstieg, Sicherungsphase (helleres grau) und einer durch Übung dominierten Phase (dunkleres grau in den Stunden 3 bis 6).

Die quasiexperimentelle Vergleichsstudie der Lernwirksamkeit zur Mittelsenkrechten ist mithilfe einer nichtäquivalenten Kontrollgruppe als Feldstudie angelegt. Es wird die unabhängige Variable der Unterrichtsgestaltung (darbietender bzw. problemorientierter Einstieg) untersucht.

Vorstudie (Pilotierung) und Hauptstudie wurden beide am Leibniz-Gymnasium in Essen in den Jahrgangsstufen 7 in den Jahren 2016 (Pilotstudie) und 2018 (Hauptstudie) durchgeführt. An der Pilotierung haben zwei Klassen teilgenommen. Nach der Pilotierung gab es keine Veränderungen am generellen Design, daher bezieht sich die nachfolgende Darstellung auf die Durchführung der Hauptstudie:

Alle Klassen werden im bestehenden Klassenverband durch Ihre jeweiligen Mathematiklehrer in den Klassenräumen unterrichtet. Es soll unter möglichst realistischen Bedingungen untersucht werden, inwiefern ein problemorientierter Unterricht (in den Klassen P_1 und P_2) im Vergleich zu einem darbietenden Unterricht (in den Klassen D_1 und D_2) in derselben Zeit zu vergleichbaren Lernleistungen bezüglich der Mittelsenkrechten erfolgen kann. Dazu umfasst das Forschungsdesign vier Zeitpunkte der Datenerhebung plus Interventionen (Unterrichtseinheiten), wie in Abb. 14 dargestellt ist. Der zeitliche Rahmen, in dem $Test_1$, die Unterrichtseinheit, Test 2 und Test 3, sowie die diagnostischen Schülerinterviews erfolgen, beträgt neun Unterrichtsstunden innerhalb von 22 Wochen.

In dem 40-minütigen Test 1 wird das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler zu geometrischen Begriffen wie dem Abstand eines Punktes zu einer Geraden und dem Abstand zweier paralleler Geraden, dem Kreis als Ortslinie und auch der Mittelsenkrechten erhoben. Zusätzlich ist mit Aufgabe 5 auch eine Problemlöseaufgabe in Test 1 enthalten. In dieser Aufgabe werden Rechtecke mit dem Flächeninhalt A gesucht, für die gilt

$31cm^2 < A < 35cm^2$. Als Werkzeuge dürfen Bleistift, Geodreieck und Zirkel verwendet werden. Ein Taschenrechner ist nicht zugelassen.

Die Intervention beginnt ca. zwei Wochen nach der Durchführung von Test 1. Im direkten Anschluss an die Unterrichtseinheit erfolgt mit Test 2 ein weiterer 40-minütiger Leistungstest. Hier werden Aufgaben zur Definition und Konstruktion der Mittelsenkrechten wie auch Anwendungs- und Begründungsaufgaben gestellt (Aufgabe 1 bis 4). Die letzte Aufgabe im Test 2 ist eine Abwandlung der Einstiegsaufgabe aus der problemorientierten Intervention („Brunnenaufgabe“). Anhand dieser Aufgabe kann die erfolgreiche Durchführung des problemorientierten Unterrichts beurteilt werden. Der Test wird in allen teilnehmenden Klassen im Vorfeld als schriftliche Lernüberprüfung angekündigt und fließt als Teil der sonstigen Mitarbeit in die Mathematiknote ein.

Test 3 dauert auch 40 Minuten und enthält vergleichbare Aufgaben zu denen in Test 2 Mit diesem Test soll überprüft werden, ob es langfristig Unterschiede bei der Wiedergabe des Wissens zur Mittelsenkrechten gibt, daher sollen die Angaben der Schülerinnen und Schüler möglichst gut mit den Angaben aus dem Nachtest vergleichbar sein. Der Test wird dieser unter den gleichen Testbedingungen durchgeführt. So dauert auch dieser Test 40 Minuten. Der Test ist für die Schülerinnen und Schüler unangekündigt, damit ein gezieltes Vorbereiten und Wiederholen der Lerninhalte von Schülerseite nicht erfolgen kann. Auf eine Bewertung der Testergebnisse für die mathematische Note wurde verzichtet, um dennoch die Motivation der Schülerinnen und Schüler vergleichsweise hoch zu halten, wird der $Test_3$ als Wettbewerb zwischen den vier Klassen deklariert.

Die Testaufgaben werden (teilweise) sowohl quantitativ mithilfe eines Bewertungsschemas und der Darstellung in Boxplots als auch qualitativ durch eine inhaltliche Analyse der Schülerlösung und der Lösungsansätze ausgewertet.

In den Interviews werden den Schülerinnen und Schüler sowohl neue Aufgabenstellungen als auch ihre Lösungen aus Test 2 vorgelegt. Es sollen Begründungsanlässe geschaffen werden, so dass die Schülerinnen und Schüler mithilfe ihres Wissens über die Mittelsenkrechten ihr Vorgehen begründen.

Die Interview-Transkripte werden unter ausgesuchten Fragestellungen, die aus den schriftlichen Testergebnissen resultieren, teilweise unter Betrachtung des Inhalts, der Sprache und der Interviewdauer analysiert.

In allen vier Klassen werden jeweils sechs Unterrichtsstunden à 45 Minuten zur Mittelsenkrechte durchgeführt. Dabei sind der Unterrichtsablauf, die verwendeten Materialien und die Aufgabenstellungen für beide Interventionsansätze, darbietend bzw. problemorientiert, vorgegeben. Eine Verschiebung ergibt sich durch die unterschiedlichen Einstiege: Für die Entdeckung der Mittelsenkrechten wird deutlich mehr Zeit und Eigenaktivität der Lernenden eingeplant als es bei der darbietenden Variante der Fall ist. Der problemorientierte Einstieg veranschlagt zwei Unterrichtsunden (vgl. dunklere Graufärbung in Abb. 14) plus Sicherung der Ergebnisse in Form der Definition der Mittelsenkrechte vgl. hellere Graufärbung in Abb. 14). Für Einführung und Sicherung der Mittelsenkrechten werden im darbietenden Unterricht zwei Stunden veranschlagt. Die Erarbeitung der Mittelsenkrechten erfolgt dabei komprimierter und mit erschlossenerem Aufgabenformat (vgl. Abschnitt 8.3.4). Beide Unterrichtseinstiege zielen auf folgende Fragestellung zur Mittelsenkrechten ab: Wo liegen alle Punkte, die gleich weit von zwei gegebenen Punkten entfernt sind? (vgl. Abschnitt 8.2). In den restlichen drei bzw. vier Stunden wird der Begriff der Mittelsenkrechten an Übungsaufgaben weiter gefestigt und in der

Anwendung bei Dreiecken erweitert. Zu den Inhalten gehören die in Kapitel 5 als Wissenselemente der Mittelsenkrechte aufgeführte Konzepte: die Definition als Ortslinie und als Senkrechte durch die Mitte, die Konstruktion, sowie Satz und Umkehrsatz über die Mittelsenkrechte, der Umkreismittelpunktsatz bei Dreiecken und die Lage der Mittelpunkte in Dreiecken.

7.3 Beschreibung der Stichprobe

Die Studie wird in vier Parallelklassen eines vierzügigen Gymnasiums in Essen-Altenessen durchgeführt. Bei der Testauswertung und Interviewstudie werden alle die Schülerinnen und Schüler betrachtet, die an allen drei Testungen und allen sechs Unterrichtsstunden teilgenommen haben. Schülerinnen und Schüler, für die das nicht zutrifft, werden nicht weiter untersucht. Das führt zu einer Gesamtanzahl von $n = 87$ Schülerinnen und Schülern. Das ergibt die nachfolgenden Schüleranzahlen in den vier Klassen ($k = 4$):

$$|p_1| = 21, |p_2| = 22, |d_1| = 23 \; und \; |d_2| = 21$$

$$mit \; p_1 und \; p_2 \; problemorientiert \; unterrichtet \; und$$

$$d_1 und \; d_2 \; darbietend \; unterrichteten \; Klassen$$

Über die Klassenzusammensetzung sind folgende Aspekte bekannt: An dieser Schule wird bei Zusammensetzung der Klassen 5 auf eine Durchmischung nach Grundschulen, befreundeten Kinder und Geschlecht geachtet, so dass eine gewisse Ausgeglichenheit in Bezug auf diese Faktoren in allen vier Klassen angenommen werden kann. In der Regel wohnen die Schülerinnen und Schüler im Einzugsgebiet der Schule, so dass auch das soziale Umfeld sich ähnelt.

7.4 Zuordnung der Unterrichtsmethode

Die Lehrerinnen und Lehrer werden in einem ausführlichen Gespräch vorab über das Anliegen der Studie informiert. Ebenso werden Ihnen die beiden Einstiegsaufgaben vorgelegt und die dazugehörigen Unterrichtsmethoden beschrieben. Anschließend können die Lehrerpersonen nach ihrem eignen Interesse und ihren Einschätzungen zu der Klasse eine der beiden Unterrichtsmethoden auswählen. Zwei Lehrer wählen den Ansatz problemorientiertes Lernen für die von nun mit P_1 und P_2 bezeichneten Klassen und zwei Lehrerinnen wählen den darbietenden Zugang. Diese Klassen werden mit D_1 und D_2 benannt. Beide problemorientiert unterrichteten Klassen (P_1 und P_2) kennen aus Ihrem bisherigem Mathematikunterricht Problemlöse-Aufgaben, wobei die häufigste Unterrichtsmethode eher als darbietend von den Lehrern beschrieben wird. Beide trauen den Klassen die Entdeckung des Mittelsenkrechtenbegriffs mithilfe der Brunnenaufgabe zu und möchten gern diesen Ansatz ausprobieren. Der Lehrer der Klasse P_1 gibt an, regelmäßig Problemlöseaufgaben einzusetzen. Die Lehrperson der Klasse P_2 hält die Schülerinnen und Schüler für leistungsstark und traut ihnen eine eigenständige Erarbeitung des Begriffs zu. Die Lehrerin der Klasse D_1 ist für beide Ansätze offen, entscheidet sich aufgrund der eher schwachen mathematischen Leistung der Klasse für den darbietenden Ansatz. Dieser ähnele dem bisherigem Unterrichtsgeschehen. Die Lehrerin der Klassen D_2 fühlt sich selbst mit der Brunnenaufgabe nicht wohl und schätzt auch Ihre Klasse so ein, dass die darbietende Lehrform besser angenommen werde.

7.5 Betrachtung forschungstheoretischer Parameter

Nach einer allgemeinen Einordnung der Parameter wird die Kontrolle dieser bei der Durchführung der Feldstudie geschildert. Das Kapitel schließt mit einer Abgrenzung des verwendeten Studiendesigns zum ähnlichen, klassischen Pre-Post-Test-Design.

7.5.1 Allgemeine Einordnung

In einer Vergleichsstudie sollte generell möglichst eine Variable verändert und die weiteren Variablen gleich behalten werden. In dieser Studie wird die Lehrmethode des darbietenden Unterrichtseinstiegs der problemorientierten Lehrmethode gegenübergestellt (**unabhängige Variable**). Eine Auswirkung wird hinsichtlich der Lernleistung in Form von schriftlichen Tests und der sprachlichen Argumentationsleistung in Form von Einzelinterviews der SchülerInnen erwartet. Diese stellen die **abhängigen Variablen** dar (vgl. Döring & Bortz 2016, S. 3; Theyßen 2014, S. 68ff.). Alle weiteren Variablen sind nach Möglichkeit für beide Interventionen gleich zu halten, so dass man von vergleichbaren Randbedingungen sprechen kann. Das besagt die Theorie. Die Praxis zeigt, dass die Umsetzung bei einer Studie im Feld Unterricht nur bedingt möglich ist: „In einer empirischen Studie kann man fast nie alle potenziellen Einflussfaktoren berücksichtigen und kontrollieren (vgl. Theyßen 2014, S. 68). Das liegt daran, dass Mathematikunterricht ein sehr komplexes Gebilde ist. Durch vielfältige Komponenten können der Verlauf und die Gelingensbedingungen beeinflusst werden (vgl. Barzel et al. 2007, S. 52f.). Dies führt dazu, „dass jede Unterrichtsstunde ein Unikat ist, die sich genauso nicht noch einmal wiederholen wird (selbst wenn man sie mit einem Drehbuch einstudieren würde, denn dann würde der künstliche Charakter dieses Szenarios alles überlagern).“

(Barzel et al. 2007, S. 53). Trotz starker Normierung des Unterrichts kann kein identischer Unterrichtsverlauf in verschiedenen Klassen erreicht werden. Gleichwohl überwiegen quasi-experimentelle Forschungsansätze zum Beispiel in der Evaluationsforschung (vgl. Bortz & Döring 2006, S. 114).

Eine Untersuchung im Umfeld Schule wird nicht an Laborbedingungen aus psychologischen Studien anknüpfen können und trotzdem können bei geeigneter Durchführungen generelle Einsichten und Erkenntnisse für die Unterrichtspraxis gezogen werden. „Will man aus einer Vergleichsstudie verlässliche Schlussfolgerungen ziehen, so muss man für einen fairen Vergleich, der im Folgenden beschrieben wird, zumindest alle diejenigen Faktoren berücksichtigen, die in der Literatur für das jeweilige Untersuchungsthema als wichtige Einflussgrößen benannt werden.“ (Theyßen 2014, S. 68). Gleichzeitig gilt es abzuwägen, welche Bedingungen gleich behalten werden können, ohne dadurch das natürliche Feld, also die Unterrichtsumgebung, zu sehr zu beeinflussen.

Zu den zu kontrollierenden Randbedingungen und Einflussgrößen bei Unterrichtsstudien zählen u. a. die fachlichen Inhalte, die eingesetzten Medien und Lernmaterialien, die Interventionsdauer und Interventionsintensität, die Lehrperson (vgl. Theyßen 2014, S. 69), ebenso wie die Lernstände und Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler und räumliche und zeitliche Rahmenbedingungen (vgl. Barzel et al. 2007, S. 52f.). Ebenfalls Einfluss auf die Studie haben die Schülerinnen und Schüler selbst. Lernvoraussetzungen, Vorwissen, mathematische Fähigkeiten, aber auch Lernverhalten, Interesse und Motivation der Lernenden beeinflussen die gemessene Lernleistungen (vgl. Theyßen 2014, S. 71). Bei der anschließenden Betrachtung der Variablenkontrolle wird daher insbesondere die Beibehaltung der Klassenverbände diskutiert.

7.5.2 Kontrolle von Randbedingungen

In dieser Studie werden viele Maßnahmen getroffen, um eine möglichst gute **Variablenkontrolle** und dadurch eine hohe Vergleichbarkeit der beiden Unterrichtsansätze zu erhalten, ohne dabei das natürliche Unterrichtsgeschehen zu stark zu verändern. Denn ein Gelingen in der Praxis, genau unter verschiedenen, aber realen Bedingungen, steht in diesem Forschungsvorhaben im Mittelpunkt.

Weitere Variablen sollen möglichst stabil gehalten werden und somit eine Vergleichbarkeit der beiden Interventionen ermöglichen. Entscheidende Variablen beziehen sich auf: a) Die Variablenkontrolle in der Intervention, b) Die Zusammensetzung der Interventionsgruppen, c) Die Vergleichbarkeit der vier Klassen bezüglich des geometrischen Vorwissens, d) Die Lehrperson als Variable, e) Die Wahl der Intervention durch die Lehrperson.

In den nächsten Schritten wird erläutert, wie mit diesen Randbedingungen in der Studie verfahren wird:

7.5.2.1 Die Variablenkontrolle in der Intervention

Die Experimentalgruppen erhalten einen problemorientierten Einstieg zur Mittelsenkrechten. Das Gelingen dieses Einstiegs und mögliche Auswirkungen auf die Lernleistung der Schülerinnen und Schüler wird in dieser Studie untersucht. Daher sollte die Kontrollgruppen nicht „unbehandelt“ bleiben, sondern ebenfalls zur Mittelsenkrechten unterrichtet werden. Die Intervention der Kontrollgruppe wird ebenfalls geplant und angefertigt, um möglichst viele Parameter des Unterrichts, die einen Einfluss auf das Lernen haben können, vergleichbar zu halten. Durch dieses Vorgehen kann eine angemessene Vergleichssituation geschaffen werden, da für beide Unterrichtseinheiten fachdidaktische und lehrtheoretische Aspekte Berücksichtigung finden (vgl. Theyßen 2014, S. 67f.). Über Vergleichsstudien, in denen der Einsatz verschiedener Medien analysiert wird, formuliert Theyßen: „Auf jeden Fall muss man vermeiden, das neu entwickelte Medium in eine explizite, gut durchdachte Unterrichtskonzeption einzubauen, während das vorhandene Medium in einem zufällig zugänglichen Unterricht eingesetzt wird (oft als „Normalunterricht“ bezeichnet).“ (Theyßen 2014, S. 68). Kurz werden die wichtigsten Parameter genannt, die bei beiden Interventionen gleich gehalten werden. Weitere Details folgen in Kapitel 8, im dem die Interventionen erläutert werden.

Beide Interventionen wurden über einen Zeitraum von sechs Unterrichtsstunden unterrichtet. Der Einstieg beruht auf der gleichen mathematischen Herangehensweise an die Mittelsenkrechte: Wo liegen alle Punkte, die gleich weit entfernt sind von gegebenen Punkten? Nach dem Einstieg wurden die gleichen Übungsaufgaben verwendet. In den Kontrollklassen gibt es fünf Übungsaufgaben, deren Inhalte in den problemorientiert unterrichteten Klassen bereits mit dem problemorientierten Einstieg aufgegriffen werden können. Die eingesetzten Sozialformen und Medien wurden in alle vier Gruppen möglichst gleich gehalten. Es werden ähnliche Abfolgen von Einzel-, Partner und Plenumsarbeit ausgenutzt. In alle vier Klassen werden Tafel und Overheadprojektor genutzt. Diese Entscheidungen wurden gemeinsam mit den unterrichtenden Lehrpersonen getroffen, so dass Sozialform und Medien für die Lernenden nicht neu sind und gleichzeitig ein vergleichbarer Einsatz in allen vier Klassen gewährleistet werden kann. Weitere äußere Randbedingungen wie der Unterrichtsraum, die Unterrichtszeiten oder die Sitzordnung wurden aus dem bisherigen Unterricht übernommen. Dies sorgt für möglichst reale Bedingungen und auch für weniger Umstellung bei den Schülerinnen und Schülern.

7.5.2.2 Die Zusammensetzung der Interventionsgruppen

Es nehmen gesamte Schulklassen an der Studie teil, daher können wir von natürlichen Gruppen sprechen. Diese sorgen gegenüber statistischen Gruppen bei Vergleichsstudien dafür, dass insbesondere bei der Auswertung vorsichtig gefolgert werden muss (vgl. Bortz & Döring 2006, S. 54). Gleichzeitig erhöhen sie die externe Validität (vgl. Bortz & Döring 2006, S. 53) und minimieren die Einflüsse der Reaktivität (vgl. Echterhoff 2013, 57ff.). Die Nachteile und Vorteile der Untersuchung von Schulklassen für diese Studie wird nun diskutiert.

Da die Zusammensetzung von D_1 und D_2 nicht zufällig geschieht, ist davon auszugehen, dass diese Kontrollgruppen nicht in der Form vergleichbar zu den Experimentalgruppen sind, wie sie es bei einer zufälligen Zuordnung z. B. durch Randomisierung wären. Beispielsweise könnten, in der einen Klasse besonders viele mathematikinteressierte Schülerinnen und Schüler sein und in der andern nur wenige. Ähnliches ist für Faktoren wie Interesse, Motivation, Selbstständigkeit etc. möglich (vgl. Bortz & Döring 2006, S. 114).

Damit können die Ergebnisse nicht eindeutig auf die Interventionen zurückgeführt werden, ggf. müssen mehrere alternative Erklärungsansätze verfolgt werden. Die interne Validität wird als geringer angesehen als in experimentellen Studien (vgl. Bortz & Döring 2006, S. 54ff.). An dieser Stelle wird in dieser Studie auf eine bessere Vergleichbarkeit zugunsten des natürlichen Charakters der Durchführung verzichtet. Trotz dieser möglichen Einschränkungen haben wir ganz bewusst eine Feldstudie unter möglichst realistischen Unterrichtsbedingungen durchführen wollen. So können in Feldstudien gewonnene Ergebnisse auch vorteilig sein.

Es können anhand der Stichproben einige Faktoren genannt werden, die trotz der nicht-zufälligen Zuordnung in die vier Klassen eine höhere Vergleichbarkeit zusichern: Alle Klassen gehören zur selben Schule. Damit sind Einzugsgebiet der Schülerinnen und Schüler, Schulstruktur und Schulalltag und -organisation für alle vier Klassen vergleichbar. Zusätzlich wurde bei der Zusammenstellung der Klassen, zu Beginn der Jahrgangsstufe 5, bereits auf eine Durchmischung hinsichtlich Geschlecht, besuchter Grundschule, Leistungsstärke und weiterer Hintergründe geachtet.

Man kann daher davon ausgehen, dass die einzelnen Schulklassen die Gesamtheit der Schülerinnen und Schüler realistischer abbilden als freiwillige Teilnehmer einer Laborstudie. Erst wenn die in Laborstudien erzeugten Ergebnisse zum Problemlösen in der Mathematik auch im Unterricht Ihren Nutzen vorbringen können, kann man von einem deutlichen Gewinn für Lerner und Lehrer und das Fach Mathematik sprechen. So haben in Feldversuchen erhaltene Ergebnisse auch durchaus größere Überzeugungskraft für die in der Praxis arbeitenden Lehrpersonen. Generell wird Feldstudien eine hohe externe Validität zugesprochen. Dies wird darin begründet, dass die realen Untersuchungsbedingungen für eine Übertragbarkeit der Ergebnisse auf andere Gruppen oder Person sprechen (vgl. Bortz & Döring 2006, S. 53).

Ein weiterer Vorteil der natürlichen Gruppen liegt in einer möglicherweise geringeren Auswirkung des **Effekts der Reaktivität**. Unter Reaktivität versteht man in psychologischen Forschungen das Phänomen, dass Teilnehmer einer Studie, ihr Verhalten ändern, allein dadurch, dass sie sich dessen bewusst sind, beobachtet bzw. bewertet zu werden (vgl. Echterhoff 2013, 57ff.). In der Interventionen werden möglichst viele Rahmenbedingungen aus dem regulären, den Schülerinnen und Schülern bekannten Unterricht beibehalten. Dazu zählen organisatorische und personelle Aspekte, wie der Unterrichtsraum und die Unterrichtszeit, die Lehrperson, die Klassenzusammensetzung, aber auch unterrichtspraktische Gewohnheiten wie die Art und Weise des Vergleichens von Aufgaben. Die Teilnahme an einer Studie gerät für die Schülerinnen und Schüler in Vergessenheit und dies führt zu einem natürlicherem (und nicht durch das Wissen der Studienteilnahme veränderten) Mitarbeit im Unterricht. Von einer Auswirkung auf die Lernleistung durch die Studienteilnahme ist daher nicht auszugehen.

Der zusätzliche „Besucher“ in der letzten Reihe sollte den Schülerinnen und Schülern von Referendaren und Praktikanten geläufig sein und keine ungewohnte Situation darstellen.

7.5.2.3 Die Vergleichbarkeit der vier Klassen bezüglich des geometrischen Vorwissens

Die Vergleichbarkeit der vier Lerngruppen wird anhand des Test 1 in Bezug auf das geometrische Vorwissen überprüft. Zusätzlich wird an einer Aufgabe die Leistungen beim Lösen einer Problemlöseaufgabe erfasst.

7.5.2.4 Die Lehrperson als Variable

Die Lehrperson hat mit ihren Persönlichkeitsmerkmalen und Einstellungen zur Mathematik und zum Mathematikunterricht einen Einfluss auf den Lernerfolg (vgl. Theyßen 2014, S. 68; Rott 2016, Rott 2020, S. 21ff.). Die Interventionen geben einen klaren Rahmen für die Durchführung. Abläufe, Aufgabenstellungen, Hausaufgaben, Definition usw. sind vorgegeben. Dadurch werden die Einflüsse der unterschiedlichen Lehrpersonen auf das Unterrichtsgeschehen verringert. Das generelle Arbeitsklima, das bisherige Lernverhältnis zwischen Lehrperson und Schülerinnen und Schülern bleibt davon unberührt und kann hier nicht berücksichtigt werden. Alle Lehrpersonen unterrichten die Klasse seit mindestens einem Schuljahr.

7.5.2.5 Wahl der Intervention durch die Lehrperson

Gerade weil die Einstellungen der Lehrperson zur Mathematik und zum Unterricht einen Einfluss auf das Unterrichtsgeschehen haben (vgl. Rott 2016), wurde die Wahl für eine der beiden Interventionen von den Lehrpersonen selbst getroffen. Persönliche Vorlieben oder Unsicherheiten bezüglich der Problemorientierung oder Darbietung konnten in diese Entscheidung einfließen und haben dadurch voraussichtlich eine geringere Wirkung auf den Unterricht.

Auch soll somit vermindert werden, dass die Klassen mit einer Unterrichtsmethode unterrichtet werden, die für sie neu oder ungewohnt ist. Werden Unterrichtsmethoden zum ersten Mal eingesetzt, kann dies die Lernleistung beeinflussen. Das Erlernen neuer Methode bedeutet für die Schülerinnen und Schüler erhöhte Aufmerksamkeit und Konzentration auf Organisationsstrukturen und weniger auf den Inhalt. Die Lehrerinnen und Lehrer entscheiden im Sinne der Klassen, ob sie den darbietenden oder den problemorientierten Ansatz wählen. In dieser Studie korrelierten die Interessen der Lehrperson und der Klassen miteinander. Sowohl für die Lehrpersonen als auch für die Klassen wurde jeweils die passendere Methode ausgewählt. Dadurch sind negative Effekte durch ein Unterrichten entgegen persönlicher Überzeugungen oder durch unbekannte Unterrichtsmethoden möglichst gering.

7.5.2.6 Alternative Überlegungen

Eine Designalternative, mit der die oben diskutierten Schwierigkeiten der Gruppeneinteilung umgangen werden können, bietet das gekreuzte Parallelklassendesign (vgl. Tepner et al. 2010). In zwei Parallelklassen werden nacheinander zwei Unterrichteinheiten durchgeführt und dabei in beiden Klassen beide Unterrichtsmethoden eingesetzt. Klasse A erhält die Intervention X mit dem problemorientierten Einstieg und Klasse B erhält die Intervention X mit dem darbietenden Einstieg. Bei der Intervention Y werden die Methoden getauscht. Mit diesem Kreuzdesign können Störfaktoren in den Klassen umgangen werden (vgl. Theyßen 2014, S. 72). In dieser Studie wurde das Kreuzdesign nicht verwendet. Dies liegt darin begründet, dass mit der Kreuzung der Methoden die Einstellung der Lehrpersonen zu den Unterrichtsmethoden einen größeren Effekt auf die Ergebnisse hat. Die Vorgespräche haben gezeigt, dass eine Lehrperson von dem problemorientierten Ansatz nicht überzeugt war. Zusätzlich wurden beide D-Klassen bisher hauptsächlich darbietend unterrichtet, so dass auch ein Effekt der neuen Lehrmethode für die Schülerinnen und Schüler zu befürchten war. Eine weitere Hürde liegt darin eine vergleichbare Unterrichtseinheit für die Klasse 7 oder 8 zu erstellen. Diese müsste für beide Unterrichtsmethoden in gleichem Maße geeignet sein, ebenfalls eine Länge von ca. 6 Stunden haben und im besten Falle auch ein geometrisches Thema beinhalten. Diese Gründe haben dazu geführt von einem Kreuzgruppendesign abzusehen.

7.5.2.7 Mehraufwand durch Feldstudie

Der dadurch entstandene Mehraufwand soll zumindest kurz benannt werden. Das Mitwirken und die enge Zusammenarbeit mit den teilnehmenden Lehrerinnen und Lehrern ist Voraussetzung für solch eine Studie. Ohne die Unterstützung, Tatkraft und Kooperation wäre eine Umsetzung nicht möglich. Dies bedeutet für die Lehrpersonen eine enge Absprache in diversen Vorbesprechungen und auch unterrichtsbegleitenden Gesprächen und dadurch ggf. einen höheren zeitlichen Aufwand bei der Unterrichtsvorbereitung. Ebenso ist eine Einhaltung dieser Planung im Unterricht wünschenswert, so dass ein Teil der natürlichen Spontanität der Unterrichtsumsetzung zugunsten der Vergleichbarkeit verloren geht. Auch die zeitliche Abfolge sollte in den Klassen vergleichbar sein, so dass es galt einen zeitgleichen Start der Studie in alle Klassen zu organisieren.

Das sorgt zum einen dafür, das durch den Austausch der Lernenden untereinander weniger vorweggenommen werden kann, denn einige Mathematikstunden liegen parallel zueinander in den vier Klassen. Zum anderen werden so äußere Faktoren wie Wetterumschläge oder Vorweihnachtsfreude oder ähnliches für alle vier Gruppen gleich gehalten.

Dies alles erfordert Motivation und Forschungsinteresse der Lehrperson. Die Suche nach möglichen teilnehmenden Kollegen, sowie die Absprachen und Treffen vor Ort haben im Vergleich zu einer Laborstudie einen erhöhten Zeit- und Organisationsaufwand für alle Beteiligten bedeutet. Dabei werden die bürokratischen Notwendigkeiten z. B. durch Datenschutz noch nicht mitbetrachtet.

7.5.3 Abgrenzung zu weiteren Forschungsdesigns

Der Aufbau ähnelt dem klassischen Pre-Posttest-Design (unterscheidet sich zugleich von diesem in einzelnen Punkten: Der Test 1 erfasst das inhaltliche Vorwissen und enthält andere Aufgaben als die späteren Tests). Die Studie enthält einen quantitativen und einen qualitativen Anteil.

Das in dieser Studie verwendete Forschungsdesign erinnert an einen klassischen Pre-Post-Vergleich, weicht jedoch in entscheidenden Punkten von dem bekannten Schema ab. Diese bewusste Entscheidung hat auch dazu geführt, nicht von Pre-, Post-, und Follow-up-Test zu schreiben, sondern die Tests nach Ihrer zeitlichen Abfolge durchzunummerieren in Test 1, Test 2 und Test 3 (vgl. Abb. 14).

In einer klassischen Pre-Prost-Test-Studie werden ein bis mehrere Gruppen unter bestimmten Aspekten miteinander verglichen. Der dabei gewählte Test 1 bezieht sich in der Regel auf bestimmte Lerninhalte, zu denen ein Leistungsstand der Gruppen eingeholt wird. Um eine Vergleichbarkeit zwischen den

Gruppen zu erhalten, wird derselbe Test unter möglichst gleichen Testbedingungen (zeitlicher und räumlicher Rahmen etc.) in allen Gruppen durchgeführt. Der spätere Nachtest besteht aus sehr ähnlichen Aufgaben, um so eine Leistungsveränderung durch die dazwischenliegende Intervention feststellen zu können (vgl. Pospeschill & Siegel 2018, S. 18 ff.). Die Persistenz von Veränderungen, also hier die langfristige Veränderung der Lernleistung der Schülerinnen und Schüler, kann mithilfe eines Follow-up-Tests erfasst werden. Dabei möchte man erfassen, inwieweit die Intervention anhaltende Wirkungen bei den Schülerinnen und Schülern hinterlassen hat (vgl. Pospeschill &Siegel 2018, S. 14).

Betrachtet man mit diesem Hintergrund das ausgewählte Studiendesign, ist Folgendes festzuhalten: Test 2 und Test 3 finden beide nach der Intervention statt und enthalten vergleichbare, zum Teil sogar identische Aufgabenstellungen. $Test_1$ findet vor der Intervention statt und erhält daher auch den Namenszusatz $Test_{1(Vortest)}$. Der Test 1 hat keine Aufgabenstellung gemeinsam mit den anderen beiden Testformaten. Dieser Test erfasst benötigtes Vorwissen zum mathematischen Inhalt der Mittelsenkrechten und dient dazu, die Vergleichbarkeit der Klassen in Hinblick auf Ihr Vorwissen in geometrischen Themen und auch im Problemlösen zu erfassen. Somit wird mit dem Test 2 nicht ein Zuwachs an Lernleistungen der Schülerinnen und Schüler im Vergleich zum $Test_1$ gemessen. Und genau darin besteht ein wesentlicher Unterschied zum oben beschriebenen klassischen Pre-Post-Test-Design. Dieser Unterschied hat auch Auswirkungen auf den Umgang mit der Interpretation von den Ergebnissen: Ein Vergleich der Testergebnisse im Test 1 zwischen den vier Klassen legt den Grundstein der gleichen Voraussetzungen in Hinblick auf einen Teil des inhaltlichen Vorwissens. Der Vergleich zwischen den Klassen von $Testergebnis_2$ und anschließend von Testergebnis$_3$ lässt Aussagen über den kurzfristigen und langfristigen Erfolg der beiden Interventionen zu (problemorientierter Unterricht und darbietender Unterricht).

Bisher wurden die Unterschiede zum klassischen Pre-Post-Test-Design dargelegt. Es folgen zwei weitere Gründe, die gegen die Wahl des Pre-Post-Test-Designs gesprochen haben. Zum einen wird in der hier betrachteten Intervention der Begriff der Mittelsenkrechten erlernt. Dieses Begriffsverständnis wird durch verschiedene Aufgabenstellungen am Ende als Leistungstest in einem Posttest abgefragt, um so den Effekt der Unterrichtseinheit, der Intervention, angeben zu können. Bestünde nun auch der Test 1 bereits aus ähnlichen Aufgaben wie der Nachtest, so würde bei der Bearbeitung bereits ein Begriffsverständnis zur Mittelsenkrechten benötigt. Dabei bestünde die Möglichkeit, dass durch die Bearbeitung der Testaufgaben das Begriffsverständnis der Schülerinnen und Schüler bereits verändert würde, im besten Falle verbessert (vgl. Renkl 2008, S. 424). Dies hätte dann zur Folge, dass die Intervention mit bereits „vorgeschulten" Schülerinnen und Schülern eine verfälschte Ausgangssituation für die Intervention darstellte, da die Schülerinnen und Schülern bereits ein verändertes Bild zur Mittelsenkrechten durch die Bearbeitung der Testaufgaben erhalten hätten. Der zweite Grund beruht ebenfalls auf dem Aspekt des Erwerbs von Fertigkeiten durch die vorherige Bearbeitung der Testaufgaben. In der Intervention durch den problemorientierten Unterrichtseinstieg wird die „Brunnenaufgabe" als Problemstellung genutzt anhand der die Schülerinnen und Schüler das Phänomen der Mittelsenkrechten entdecken können. Um den Erfolg dieser Entdeckung messen zu können, wird eine ähnliche Aufgabe im Test 2 gestellt. Ein Einsatz der Aufgabe im Test 1 würde die Mitarbeit und die Auseinandersetzung mit der Aufgabe und somit den Entdeckungsprozess im Unterricht deutlich beeinflussen. Daher bietet sich ein klassischer Pretest nicht an.

Zusammenfassung

Der Kern der Forschungsfragen liegt in einer vergleichenden Analyse zweier Unterrichtskonzepte, dem problemorientierten Lernen und dem darbietenden Lernen am mathematischen Inhalt der Mittelsenkrechten. Zusätzlich soll die Studie in der Schule unter möglichst natürlichen Unterrichtsbedingungen stattfinden, um so als Machbarkeitsstudie für mögliche folgende, größer angelegte Studie zu fungieren.

Es handelt sich um eine quasiexperimentelle Vergleichsstudie der Lernwirksamkeit, die mithilfe einer nichtäquivalenten Kontrollgruppe als Feldstudie angelegt ist und die unabhängige Variable der Unterrichtsgestaltung (darbietender bzw. problemorientierter Unterricht) untersucht. Dies geschieht durch die Dokumentation des Unterrichtsgeschehens, die Erhebung von Leistungstests zu drei Testzeitpunkten.[8]

Damit Aussagen über Verlauf und Wirkung der Unterrichtseinheit gemacht werden können, werden sowohl quantitative als auch qualitative Daten erhoben. Das begründete Vorgehen der Datenerhebung wird in Kapitel 8 dargelegt

8 Die Interventionen

Zu den Interventionen zählen zwei Unterrichtseinheiten zur Mittelsenkrechte. In beiden Unterrichtseinheiten werden in sechs 45-Minuten-Stunden die Definition und Konstruktion der

[8] Im Anschluss an Test 2 wurden diagnostische Einzelinterviews mit einzelnen Lernenden durchgeführt. Diese können im Rahmen dieser Arbeit nicht ausgewertet werden und finden daher nur teilweise Berücksichtigung bei der Interpretation von Ergebnissen.

Mittelsenkrechte, sowie der Satz zum Schnittpunkt der Mittelsenkrechten im Dreieck und der Dreiecksumkreis vermittelt. In Abschnitt 7.1 wurde bereits in ein Überblick über die sechs Unterrichtsstunden in Abb. 14 dargestellt.

Zunächst werden die grundlegenden Designprinzipien genannt (vgl. Abschnitt 8.1) und eine Übersicht des Stundenverlaufs gegeben (vgl. Abschnitt 8.2). Anschließend werden darbietender und problemorientierter Einstieg einander gegenübergestellt und erläutert (vgl. Abschnitte 8.3.4 und 8.3.10). Es folgt eine Beschreibung der weiteren Unterrichtseinheiten. Hierzu zählen die Angabe von Unterrichtszielen und Unterrichtsthemen, wie auch die Verlaufspläne (vgl. Abschnitte 8.3.2 bis 8.3.6).

8.1 Designprinzipien für die Unterrichtsgestaltung

Als Grundlage der Designprinzipien für den Unterricht werden die in den theoretischen Erörterungen ausgeführten Gestaltungsprinzipien zur Problemorientierung (vgl. Abschnitt 2.4), zu Entdeckungen und Darbietungen (vgl. Abschnitt 3.5) und zur Mittelsenkrechten (vgl. Abschnitt 5.5) berücksichtigt.

In der Übungsphase wird im Sinne des Spiralcurriculums die Konstruktion von Dreiecken mithilfe der Kongruenzsätze wiederholt. Die reine Unterrichtszeit für das Lehren der Mittelsenkrechten entspricht somit nicht den vollen sechs Unterrichtsstunden.

8.2 Übersicht der beiden Unterrichtseinheiten

Zentraler Bestandteil der Studie sind die durchgeführten Unterrichtseinheiten. In der einführenden Stunden werden die der Unterrichtsmethode entsprechenden Aufgabenstellungen ausgewählt und eingesetzt. In allen weiteren Unterrichtsentscheidungen wurde versucht beiden Ansätzen gerecht zu werden und

Stunden à 45 Minuten	Entdecken lassender Unterricht	Darbietender Unterricht
Test 1	Anknüpfung an bisheriges Wissen über Abstände	
10 -14 Tage regulärer Unterricht		
1	Brunnenaufgabe – durch entdecken lassendes Lernen zur Mittelsenkrechten	durch systematisches Weiterdenken des Abstandsbegriffs zur Mittelsenkrechten
2	Auswertung und Diskussion der Schülerlösungen zur Brunnenaufgabe	Übungsaufgaben und dadurch zur Umkehrung
3	Schriftliche Sicherung – Definition der Mittelsenkrechten	Mittelsenkrechten in einem Dreieck, Konstruktion der Mittelsenkrechten
4	Konstruktion der Mittelsenkrechten	Übungsaufgaben zur Konstruktion der Mittelsenkrechten
5	Mittelsenkrechten eines Dreiecks, Lage der Schnittpunkte	Übungsaufgabe zu den verschiedenen Abständen
6	Übungen, Fragen	Übungen, Fragen
Test 2	Schriftliche Abfrage zur Mittelsenkrechte (Test 2)	
105 - 125 Tage regulärer Unterricht (in beiden Klassen: Terme und Gleichung) und Sommerferien		
Test 3	Schriftliche Abfrage zur Mittelsenkrechte (Test 3)	

Tab. 7: Übersicht der einzelnen Stunden der beiden Unterrichtseinheiten

weder durch unpassende Unterrichtsgestaltung die Vergleichbarkeit zwischen den beiden Ansätzen zu verringern, noch zu sehr in weiteren methodischen und didaktischen Entscheidungen voneinander abzuweichen.

In jeder Klasse wird in den ersten Stunden der Begriff der Mittelsenkrechten als Ortslinie erarbeitet. Die problemorientiert unterrichtete Klasse erhält die Brunnenaufgabe, die mit der Methode Think-Pair-Share bearbeitet wird. Die darbietend unterrichtete Klasse erarbeitet die Lösung angeleitet durch die Lehrperson mit Einzelarbeitsphasen. In allen Klassen wird die Mittelsenkrechte als Lösung auf die folgende Frage entwickelt: Wo liegen alle Punkte, die von zwei gegebenen Punkten den gleichen Abstand haben?

Die unterschiedlichen Methoden sind durch die Arbeitsaufträge bedingt. Da das problemlösende Erarbeiten mehr Zeit in Anspruch nimmt, beide Unterrichtseinheiten aber über die gleiche Anzahl an Stunden verlaufen sollen, hat die darbietend unterrichtete Klasse mehr Zeit für die Übungsphase. Diese wird auf die Argumentation des gemeinsamen Schnittpunktes der Mittelsenkrechten im Dreieck verwendet.

8.3 Darbietender und problemorientierter Unterricht[9]

Sowohl der darbietende als auch der problemorientierte Unterricht haben viele Facetten. Von einer reinen Darbietung wie es beispielsweise im Frontalunterricht der Fall ist, über ein gelenktes Unterrichtsgespräch bis hin zu einem stark durch die Lehr-

---

[9] Auszüge der Darstellungen beider Unterrichtsansätze sind entnommen aus Möller (2021).

person angeleiteten kleinschrittigen Erarbeiten kann der darbietende Unterricht divers gestaltet sein. Mit einer Öffnung der Aufgabenstellung und einer Erhöhung der Selbständigkeit und Eigentätigkeit der Schülerinnen und Schüler geht ein problemorientierter Unterricht einher. Dies verändert nicht nur die Lehrer- und Schülerrollen, sondern beeinflusst auch weitere Planungsentscheidungen wie die Strukturen der Unterrichtsgestaltung und Lernatmosphäre, aber auch eingesetzte Sozialformen und Medien (vgl. Kapitel 3.4.5). Der Übergang von einem durch Darbietung dominierten Unterricht zu einem gelenkten, problemorientierten Unterricht erscheint dabei fließend. Am Beispiel der Mittelsenkrechten werden zwei Unterrichtseinstiege beschrieben, ein darbietender Einstieg und ein problemorientierter Einstieg. Anhand der Aufgabenbeispiele und der Beschreibungen zum Unterrichtseinsatz werden die der Studie zugrunde gelegten Definitionen von darbietendem und problemorientiertem Unterricht herausgestellt und voneinander abgegrenzt.

Um aus den vielen verschiedenen Gestaltungsmöglichkeiten auswählen zu können, wurden vorab Entscheidungshilfen anhand der folgenden Überlegungen festgelegt. Die grundlegenden Herangehensweisen an die Mittelsenkrechte sollen in beiden Unterrichtsansätzen gleich sein. So wird in beiden Unterrichtsvarianten die folgende Frage fokussiert: Wo liegen Punkte, die gleich weit von zwei gegebenen Punkten A und B entfernt sind? Die Antwortet leitet zu einer Definition der Mittelsenkrechten, die in Anlehnung an Schulbuchformulierungen zunächst die Ausgangssituation beschreibt und anschließend die Mittelsenkrechte als Lösung benennt:

> *Zwei Punkte A und B sind gegeben und es sind alle Punkte gesucht, die den gleichen Abstand zu A und auch zu B haben, dann befinden sich die gesuchten Punkte auf der Senkrechten durch die Mitte der Strecke*

> $\overline{AB}$. *Diese Gerade heißt Mittelsenkrechte zur Strecke* $\overline{AB}$ (Elemente der Mathematik 7, 2007, S. 224).

Hat man diese Gerade, die Mittelsenkrechte, als Antwort auf die Ausgangsfrage erhalten, so hat man zugleich auch alle Punkte mit der gesuchten Eigenschaft gefunden. Daraus resultiert der Umkehrsatz, der in der Unterrichtseinheit vereinfacht als zweiter Teil der Definition eingeführt wird:

> *Wenn ein Punkt auf der Mittelsenkrechten zur Strecke* $\overline{AB}$ *liegt, hat er den gleichen Abstand zu dem Punkt A und zu dem Punkt B* (Elemente der Mathematik 7, 2007, S. 224).

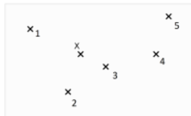
Der darbietende Einstieg führt nach zwei Unterrichtsstunden zur Definition der Mittelsenkrechten. Der problemorientierte Einstieg nimmt drei Unterrichtsstunden in Anspruch. Weitere Rahmenbedingungen wurden möglichst gleich gehalten. Dazu zählen die gesamte Unterrichtsdauer von jeweils sechs mal 45 Minuten, die eingesetzten Organisations- und Lernstrukturen, das Aufgabenmaterial sowie die weiteren Lerninhalte (Konstruktion der Mittelsenkrechte mit Zirkel und Lineal, Schnittpunkt der Mittelsenkrechten im Dreieck sowie Beweisidee dafür und der Umkreis von Dreiecken).

8.3.1 Der problemorientierte Einstieg

Der Einstieg für die problemorientierte Unterrichtsvariante erfolgt anhand der Brunnenaufgabe (vgl. Abb. 15). Diese Problemstellung ist zum einen deutlich offener und zum anderen durch das Erweitern auf fünf Punkte auch komplexer als die Suche nach Punkten mit dem gleichen Abstand zu zwei gegebenen Punkten. Und gleichzeitig ist die Problemstellung für Schülerinnen und Schüler verständlich und anhand ihres Vorwissens

Die Brunnenaufgabe

Die Karte zeigt ein Stück Land. Es gibt fünf Brunnen in diesem Gebiet. Stelle dir vor, du stehst bei X mit einer Herde von Schafen, die Durst haben. Zu welchem Brunnen gehst du?



Die Wahl war nicht schwierig, du gehst zum nächstgelegenen Brunnen. Entwickle nun eine Einteilung des Landes in fünf Gebiete, so dass zu jedem Ort in einem Gebiet der Brunnen in diesem Gebiet der nächstgelegene ist.

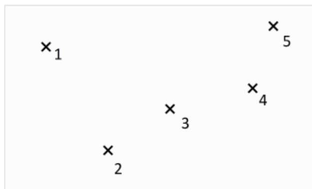


Abb. 15: Der problemorientierte Einstieg erfolgt mit der Brunnenaufgabe (Büchter & Leuders 2005, S. 79; Holzäpfel, Rott & Dreher 2016, S. 118f.).

auf unterschiedliche Weisen lösbar (z. B. Bruder & Collet 2011, S. 22f.; Holzäpfel et al. (2018), S. 47ff.; Vollrath & Roth 2012, S. 62 ff.). Da eine Lösung nicht in kurzer Zeit und ohne tiefergehende Auseinandersetzung mit der Problemstellung generiert werden kann, sind Problemlösefähigkeiten bei den Schülerinnen und Schülern erforderlich. Eine mögliche Vorgehensweise liegt darin zu erkunden, wo Punkte liegen, die gleich weit von beiden Brunnen entfernt sind. Die Brunnenaufgabe wird zunächst im Plenum erläutert. Anschließend finden eine Einzelarbeits- und Partnerarbeitsphase statt, bevor die Lösungsideen im Plenum präsentiert und diskutiert werden. Die Aufgabenstellung bietet eine Vielzahl an Vorgehensweisen beim Lösen, die auch von Schülerinnen und Schülern erkannt und genutzt werden (vgl. Holzäpfel, Rott & Dreher 2016, S. 121ff.), so dass ein erheblicher Teil des Unterrichts aus Präsentation und Nachvollziehen von Schülerlösungen besteht. Durch die aktive Auseinandersetzung mit der Problemstellung können tragfähige Konzepte und mathematische Begriffe in ihrer Tiefe erfahren und verstanden werden. Und dieses bietet neben einer Steigerung der Motivation, dem Trainieren des Durchhaltevermögens und einem veränderten Mathematikbild die Grundlage für ein langfristig besseres Behalten und eine erhöhte Argumentationsfähigkeit (u. a. Bruner 1981, S. 17; Leuders 2003, S. 122f.). Für die Unterrichtsumsetzung wird besonders darauf geachtet, dass ausreichend Bearbeitungszeit, genügend Austauschmöglichkeiten zwischen den Schülerinnen und Schülern, eine lernfreund liche Atmosphäre frei von Leistungsdruck und dafür voller Erfolgserlebnissen sowie eine Reflektion der Vorgehensweise ermöglicht werden (vgl. Holzäpfel et al. 2018, S. 95ff.; Leuders 2003, S. 130ff.).

8.3.2 Die problemorientierte Unterrichtseinheit

Das Thema der problemorientierten Unterrichtseinheit wird wie folgt festgelegt: Erweiterung des Abstandbegriffs durch die Definition der Mittelsenkrechten als Gerade, auf der alle Punkte liegen, die denselben Abstand zu zwei Punkten A und B haben, sowie Konstruktion der Mittelsenkrechten.

Es werden anhand der gültigen Kernlehrpläne inhaltliche und prozessbezogene Ziele für die Unterrichtseinheit gesetzt.

Inhaltliche Ziele:

Die inhaltlichen Ziele werden anhand der ausgewählten Unterrichtsinhalte und Aufgabenstellungen lehrplanorientiert formuliert.

Die Schülerinnen und Schüler sollen…

1. … die Mittelsenkrechte als Menge aller Punkte, die denselben Abstand von A und B haben, definieren können.

2. … an ihr Wissen über Abstände anknüpfen, den Abstandsbegriff erweitern und auf Aufgaben im Sachkontext sinngemäß anwenden. Hierbei ist es notwendig zu entscheiden, welcher Abstand gesucht ist.
3. … den Zusammenhang zwischen Konstruktionsanweisung und Definition wiedergeben können.
4. … die Mittelsenkrechte (mit Zirkel und Lineal) konstruieren können.

Prozessbezogene Ziel:

Es werden die zum Zeitpunkt der Unterrichtsintervention gültigen Kernlehrpläne Mathematik für Nordrhein-Westfalen verwendet. Die nachfolgenden Kompetenzen werden dort wörtlich formuliert und finden Anwendung bei der Umsetzung der sechs Unterrichtsstunden:

1. **Zum Problemlösen** (vgl. Ministerium für Schule und Weiterbildung, Wissenschaft und Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen 1999, S. 25)
   Die Schülerinnen und Schüler

- *... planen und beschreiben ihre Vorgehensweise zur Lösung eines Problems,*
- *... überprüfen bei einem Problem die Möglichkeit mehrerer Lösungen oder Lösungswege,*
- *... wenden die Problemlösestrategien „Zurückführen auf Bekanntes“ (Konstruktion von Hilfslinien, Zwischenrechnungen), „Spezialfälle finden“ und „Verallgemeinern“ an,*
- *... reflektieren, überprüfen und bewerten Ergebnisse durch Plausibilitätsüberlegungen [...]*
- *... überprüfen Lösungswege auf Richtigkeit und Schlüssigkeit.*

2. **Argumentieren und Kommunizieren** (vgl. Ministerium für Schule und Weiterbildung, Wissenschaft und Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen 1999, S. 24)

   Die Schülerinnen und Schüler …

- *... erläutern die Arbeitsschritte bei mathematischen Verfahren (Konstruktionen,[...]) mit eigenen Worten und geeigneten Fachbegriffen*
- *... vergleichen und bewerten Lösungswege, Argumentationen und Darstellungen*
- *... präsentieren Lösungswege und Problembearbeitungen in kurzen, vorbereiteten Beiträgen und Vorträgen*
- *... nutzen mathematisches Wissen für Begründungen, auch in mehrschrittigen Argumentationen*

Der Ablauf der sechs Stunden wird in einem Verlaufsplan, in dem die inhaltlichen Schwerpunkte wie auch die verwendeten Materialien und Dateien notiert sind, dargestellt. Diese Planung dient als Grundlage für die Gespräche mit den Lehrpersonen vorab.

8.3.3 Verlaufsplanung der problemorientierten Unterrichtseinheit

Phasen	Inhaltliche Schwerpunkte	Methode/ Soz.form	Medien	Didaktisch-methodische Erläuterungen
0. Stunde	Test 1 : Abstände	EA	Test 1	
2 Wochen später startet die Unterrichtseinheit				
1. Stunde	Brunnenaufgabe wird an die Wand projiziert. Gibt es Fragen zur Problemstellung? Hinweis: Ihr dürft zeichnen, Hilfsmittel benutzen etc. Man kann nichts verkehrt machen, ungewohnte Aufgabe, versucht eine Lösung zu finden. Ziel: Einteilung des Gebietes Zuerst in Einzelarbeit (ca.7 min), dann mit Sitznachbarn. Kurze Reflexion: Ideen nennen, Schwierigkeiten, ⇨ Es geht irgendwie um Abstände. Dazu kennt ihr schon einiges.	Think, Pair	AB *Problemstellung* GruppeA\Problemstellung.docx	Die Schüler erhalten keine Hinweise, die auf einen bestimmten Lösungsweg hindeuten. Gezielte Fragen können das Überdenken der Lösung oder das Weiterdenken anregen: Was gilt für diesen Punkt? etc.
2. Stunde	Auswertung der Schülerlösungen ⇨ Es sollte deutlich werden, dass das Gebiet in Teilgebiete unterteilt werden muss. ⇨ Aber wo verlaufen die Grenzen? (Beantwortung durch unterschiedliches Schülervorgehen.) ⇨ (Ggf. Reflexion: mathematisches Problem: alle Punkte, die denselben Abstand von A und B haben; Einzeichnen der Linien: Verbinden der Punkte und Einzeichnen der Senkrechten durch die Mitte der Strecke AB) **Lösungsvorschläge reflektieren**: Viele tolle Ideen!!! Welche Idee würdet ihr beim nächsten Mal anwenden? Mögliche Schülerantwort: Das Einzeichnen der einzelnen Strecken und dann der Senkrechten durch den Mittelpunkt, bzw. Lösungsvorschlag XY. Falls die Mittelsenkrechte nicht direkt in den Lösungsvorschlägen auftaucht: Gesucht sind die Grenzlinien. Vermutung wie die Verlaufen können. Was gilt für Punkte auf dieser Linie? Wie können wir diese Linie finden? HA: Übungsaufgabe 1-HA1, Nr. 1 und 2 (Hausaufgabenfolien verteilen)	SV (Share)	Beamer, Foto der Schüler-Lösungen 7cÜbungsaufgabe1-HA1.docx	Alle Schülerlösungen sollen Anerkennung erhalten. Auch Gedanken, die nicht unmittelbar zum Ziel führen bzw. zu Teilzielen führen. Der Prozess steht im Mittelpunkt! Nicht die richtige Lösung zum Schluss vorstellen lassen!!! Sondern ruhig eine von vielen. Kopie für Schüler AB 7cÜbungsaufgaben1-HA1 Hausaufgabenfolien verteilen

Phasen	Inhaltliche Schwerpunkte	Methode/ Soz.form	Medien	Didaktisch-methodische Erläuterungen
3. Stunde	Hausaufgaben vergleichen. Sicherung durch mathematische Reflexion (falls nicht in vorheriger Stunde geschehen): Was ist aus mathematischer Sicht gesucht? Mögliche Antwort: *Gesucht sind alle Punkte, die gleich weit von A und B entfernt sind.* Wo liegen diese Punkte? Mögliche Schülerantworten: *Verbinde die gegebene Punkte zu einer Strecke. Zeichne durch den Mittelpunkt der Strecke eine Senkrechte. Fertig.* Schriftliche Sicherung: Folienanschrieb: *<u>Mittelsenkrechte</u>. Zwei Punkte A und B sind gegeben und es sind alle Punkte gesucht, die den gleichen Abstand zu A und auch zu B haben, dann befinden sich die gesuchten Punkte auf der Senkrechten durch die Mitte der Strecke $\overline{AB}$. Diese Gerade heißt Mittelsenkrechte zur Strecke $\overline{AB}$.* Formulierung des <u>Umkehrsatzes:</u> *Wenn ein Punkt auf der Mittelsenkrechten zur Strecke AB liegt, hat er den gleichen Abstand zu dem Punkt A und zu dem Punkt B.* Reflexion des Vorgehens: *Wie sind wir auf die Mittelsenkrechte gestoßen?* *Brunnenaufgabe, Einteilung in Gebiete, gesucht ist eine Begrenzung von der aus man zu beiden Brunnen gehen kann, beide Brunnen sind gleich weit weg.* Falls noch Zeit ist: Nummer 3 und 4 auf Übungsblatt-1-HA-1 Vergleichen: Schülerlösungen auf Folie HA: Lerne Definition, Umkehrsatz, ggf. Nr. 3 und 4 auf Ü-blatt-1-HA-1	SV UG LV	 OHP OHP 7cAufgabenstellung.docx	Schülerlösungen auf Folie (OHP) Systematisierung und Sicherung per Definition. So können Schüler, die dieses Vorgehen bei der Brunnenaufgabe nicht gewählt haben, den Vorteil der Lösung mithilfe der Mittelsenkrechten für sich entdecken. Reflexion des Vorgehens als wichtiger Bestanteil des ProblemlöseprozesseS. AB Übungsaufgaben1-HA1 auf Folie kopieren
4.Stunde	Kurze Wiederholung: Mittelsenkrechte (ggf. Vergleichen der HA) Geometrische Erklärung dafür, dass alle Punkte, die auf der Mittelsenkrechten der Strecke AB liegen, gleich weit von A und von B entfernt sind.. L konstruiert für zwei beliebige Punkte die Mittelsenkrechte erklärt dabei sein Vorgehen (Zeichne einen Kreis um A mit einem Radius, der größer ist als die Hälfte der Strecke AB. Zeichne mit demselben Radius einen Kreis um B. Die Kreise schneiden sich in zwei Punkten. Zeichne eine Gerade durch die beiden Punkte. Diese Gerade ist die Mittelsenkrechte.) Schüler wiederholen Erklärung. Übung: Konstruktion der Mittelsenkrechten Nr.1 und 2	OHP Folien der SuS SB / SV	7cKonstruktion der Mittelsenkrechten.docx OHP Tafel	Es ist bei der Konstruktion herauszustellen, dass ein Kreis mit demselben Radius um die beiden Punkte gezeichnet wird. Dadurch erhält man zwei Schnittpunkte, die gleich weit von den gegebenen Punkten entfernt sind und demnach auf der Mittelsenkrechten liegen.

Phasen	Inhaltliche Schwerpunkte	Methode/ Soz.form	Medien	Didaktisch-methodische Erläuterungen
	Vergleichen ggf. kurz, dann zu Nr. 2: Alle Mittelsenkrechten schneiden sich in einem Punkt, hier P(3,3l2). ***Frage:*** *Ist das Zufall? Schneiden sich die drei Mittelsenkrechten in jedem beliebigen Dreieck in einem Punkt?* Mögliche Schülerantwort: „Der Schnittpunkt der ersten zwei Mittelsenkrechten gibt den Punkt an, der gleich weit von den drei Ausgangspunkten entfernt ist und somit muss auch die dritte Mittelsenkrechte durch diesen Punkt gehen." Mögliche Ergänzung: Der Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten ist gleich weit von den Eckpunkten des Dreiecks entfernt. Nimmt man diesen Abstand als Radius und den Schnittpunkt als Mittelpunkt kann ein Kreis gezeichnet werden, auf dem die drei Eckpunkte des Dreiecks liegen. Dieser Kreis heißt Umkreis des Dreiecks. HA: Konstruktion der Mittelsenkrechten Nummer 3.		7cKonstruktion der Mittelsenkrechten.docx	Kopie für SuS AB 7c*Konstruktion der Mittelsenkrechten* Konstruktionsvorgehen wird als Festigung bzw. Geometrische Erklärung für das Finden der Lösung verwendet. Folien für Schülerlösungen
5.Stunde	Besprechen der Hausaufgaben: Schüler stellen ihre Lösungen mit Lösungsfolien vor; ein scheinbarer Widerspruch =>Lage der Schnittpunkte der drei Mittelsenkrechten wird thematisiert: In einem spitzwinkligen Dreieck schneiden sich die Mittelsenkrechten innerhalb des Dreiecks. In einem stumpfwinkligen Dreieck schneiden sie sich außerhalb des Dreiecks. In einem rechtwinkligen Dreieck liegt der Schnittpunkt auf der Hypotenuse (der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite). Mögliche Ergänzung: Der Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten ist gleich weit von den Eckpunkten des Dreiecks entfernt. Nimmt man diesen Abstand als Radius und den Schnittpunkt als Mittelpunkt kann ein Kreis gezeichnet werden, auf dem die drei Eckpunkte des Dreiecks liegen. Dieser Kreis heißt Umkreis des Dreiecks. Übungsaufgaben – Abstände (Aufgabe 1 sollten alle bearbeiten, Aufgabe 2 ist für Schnellere SuS) HA: Löse die restlichen Aufgaben (eventuell nur Aufgabe 1?- abhängig von der Zeit) Folien verteilen.	PA/UG	OHP Tafelanschrieb Übungsaufgaben2.docx	 Kopie für SuS AB Übungsaufgaben2
6.Stunde	Besprechen der Hausaufgaben und Klären von Fragen	PA/UG	OHP	
7.Stunde	Test 2			Keine Bewertung, Übungsphase, aber EA
LV: Lehrervortrag; EA: Einzelarbeit; PA: Partnerarbeit; GA: Gruppenarbeit; SB: Schülerbeitrag; SV: Schülervortrag; UG: Unterrichtsgespräch				

8.3.4 Der darbietende Einstieg

Wie kann nun ein darbietender Unterrichtseinstieg zur Mittelsenkrechten aussehen?

Der darbietende Einstieg verwendet einen zweigeteilten Arbeitsauftrag, getrennt in die zwei Teile der Definition (vgl. Abb. 16 und Abb. 17). Diese werden jeweils im Plenum durch die Lehrperson dargeboten, anschließend in einer kurzen Einzelarbeit und einer etwas längeren Partnerarbeit bearbeitet. Im Plenum werden die Lösungsideen dargestellt und in der oben genannten Definition festgehalten. Der Unterricht bietet den Schülerinnen und Schülern eine aktive Auseinandersetzung mit dem Inhalt in durch die geschlossene Aufgabenstellung stark eingegrenztem Rahmen. Die Lehrperson lenkt und leitet das Unterrichtsgeschehen deutlich an. Die lenkende und darbietende Funktion der Lehrperson entlastet die Schülerinnen und Schüler von reflektierenden und organisatorischen Denktätigkeiten und so können sie sich vollständig auf die Bearbeitung der Aufgabenstellung fokussieren. Zusätzlich kann die Lehrperson die Unterrichtsinhalte und Schülerlösungen deutlich herausstellen, zueinander und zu bereits Bekanntem in Beziehung setzen und somit vermutlich das Erlernen der Definition erleichtern. Auf diese Weise werden in der Theorie formulierte Lernvorteile, die ein darbietender Unterricht bietet, umgesetzt (vgl. die Abschnitte 3.4 und 4.2). Dies geschieht ganz in dem Sinne:

> „Genaues und integriertes Verständnis entwickelt sich vermutlich eher, […] wenn eine präzise und genaue Definition betont und Nachdruck gelegt wird auf die Darstellung der Ähnlichkeiten und Unterschiede zwischen verwandten Konzepten […].“ (Ausubel 1974, S. 97).

Abstand zu zwei Punkten

Es sind zwei Punkte A(1|4) und B(3|6) gegeben.
Zeichne sie in ein Koordinatensystem mit der Einheit 1cm. Zeichne einen Punkt ein, der den gleichen Abstand zu A und zu B hat.
Finde weitere Punkte, die den gleichen Abstand zu A und zu B haben und zeichne sie ein.
Was fällt dir auf? Notiere.

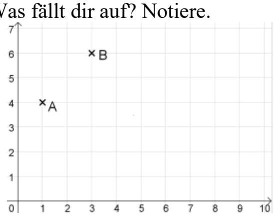


Abb. 16: Beim darbietenden Einstieg wird die Problemstellung stark reduziert, so dass die Schülerinnen und Schüler die Mittelsenkrechte als Lösung erkennen.

A-Dorf und B-Dorf

Zwischen A-Dorf und B-Dorf stehen Grenzsteine, die vor vielen Jahren alle gleich weit von den Dörfern entfernt waren. Mittlerweile stehen nur noch wenige am richtigen Platz. Finde heraus, welche Steine noch am richtigen Platz stehen und markiere sie rot.

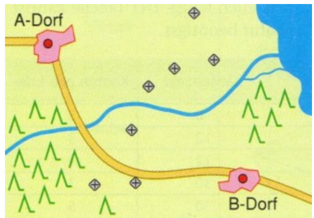


Abb. 17: Im zweiten Teil des darbietenden Einstiegs wird der Umkehrsatz zur Mittelsenkrechten thematisiert (Griesel 2007, S. 226).

8.3.5 Die darbietende Unterrichtseinheit

Für den darbietenden Unterricht wird vorab folgendes Thema formuliert: Es wird an bereits bekannte Abstandsbegriffen (Punkt-Punkt, Punkt-Gerade, parallele Geraden, Kreislinie) angeknüpft. Die Mittelsenkrechte als Gerade, auf der alle Punkte liegen, die denselben Abstand zu zwei Punkten A und B haben, wird ergänzt. Konstruktion der Mittelsenkrechten und Anwendung in Sachkontexten wird geübt.

Inhaltsbezogene Ziele:

Die **inhaltlichen Ziele** entsprechen den Zielen für die problemorientierte Unterrichtseinheit (vgl. Abschnitt 8.3.2).

Prozessbezogene Ziele:

Auch hier gilt: Es werden die zum Zeitpunkt der Unterrichtsintervention gültigen Kernlehrpläne Mathematik für Nordrhein-Westfalen verwendet. Die nachfolgenden Kompetenzen auf der Grundlage der geplanten Unterrichtseinheit und den Kernlehrplänen formuliert.

Die Schülerinnen und Schüler

- planen und beschreiben ihre Vorgehensweise zur Lösung eines Problems
- erläutern die Arbeitsschritte bei mathematischen Verfahren (Konstruktionen,[…]) mit eigenen Worten und geeigneten Fachbegriffen
- nutzen mathematisches Wissen für Begründungen, auch in mehrschrittigen Argumentationen

Für die sechs Unterrichtsstunden wird ein Verlaufsplan erstellt, der als Gesprächsgrundlage für die Absprachen mit den Lehrpersonen genutzt wird.

8.3.6 Verlaufsplanung der darbietenden Unterrichtseinheit

<table>
<tr><td>Phasen</td><td>Inhaltliche Schwerpunkte</td><td>Methode/ Soz.form</td><td>Medien/ Material</td><td>Didaktisch-methodische Erläuterungen</td></tr>
<tr><td>0. Stunde</td><td>Test 1 : Abstände</td><td>EA</td><td>Test 1</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">2 Wochen später startet die Unterrichtseinheit</td></tr>
<tr><td>1. Stunde</td><td>HA zur Stunde: Koordinatensystem mit der Einheit 1 cm anfertigen (von 0 bis 10)
Einstieg – Systematisierung des Abstandsbegriffs
Sammeln der Abstandsbegriffe an der Tafel
Abstand von Punkt- Punkt; Punkt-Gerade; Gerade-Gerade(?); gleicher Abstand von M (Kreis!); usw.
Herleitung: Weitere Abstände denkbar? => Zwei Punkte gegeben
A (1/4) und B (3/6) ins KOS.
Zeichne einen Punkt ein, der den gleichen Abstand zu A und zu B hat. Finde weitere Punkte und zeichne sie ein. Was fällt dir auf? Vermutung?
Folienanschrieb:
<u>Mittelsenkrechte</u>. Zwei Punkte A und B sind gegeben und es sind alle Punkte gesucht, die den gleichen Abstand zu A und auch zu B haben, dann befinden sich die gesuchten Punkte auf der Senkrechten durch die Mitte der Strecke AB. Diese Gerade heißt Mittelsenkrechte zur Strecke AB.</td><td>UG

EA
(kurz)
PA
UG</td><td>
Tafel

OHP

OHP</td><td>Anknüpfung an Vorwissen, Abstandsbegriffe sortieren und erklären.

Aufgabenstellung auf Folie</td></tr>
<tr><td>2. Stunde</td><td>Übungsaufgaben, Mittelsenkrechte wird mit Geodreieck eingezeichnet.
Aufgabe 1-4 besprechen:
A1 auf Folie, Schüler zeichnet Lösung ein und erklärt
A2 auf Folie, Schüler zeichnet Lösung ein und erklärt
➔ Notiere Umkehrung, s. u.
A3 auf Folie, Schüler pausen ihre Lösung ab und erklären
A4 Koordinaten des gesuchten Punktes sind (3,4l4,8). Vorgehen wird erklärt: Gesuchter Punkt ist SP der Geraden g mit Mittelsenkrechter zu A und B. (oder abpausen der Lösung)
Notieren der „Umkehrung“ nach der Besprechung der Aufgabe 2
Wenn ein Punkt auf der Mittelsenkrechten zur Strecke AB liegt, hat er den gleichen Abstand zu dem Punkt A und zu dem Punkt B.
Besprechen der Hausaufgabe. Kurze Erklärung zum Einzeichnen der Mittelsenkrechten im Dreieck. Hausaufgabenfolien verteilen
HA: Zeichne das Dreieck. Zeichne zu jeder Seite des Dreiecks die Mittelsenkrechte.</td><td>UG
PA

UG</td><td>AB – Übungsaufg1
Übungsaufgaben.docx
OHP

OHP

AB (Übungsblatt unten)</td><td>Für SuS kopieren Übungsaufgabe 1, HA abtrennen.
Auch auf Folie kopieren, damit SuS ihre Lösungen zu A1 und A2 eintragen können.
Die Definition der Mittelsenkrechten wird an geeigneten Übungsaufgaben gefestigt. Die Umkehrung wird festgehalten.
Hinweis: Das Schulbuch definiert genau andersherum. Wenn ein Punkt auf ms liegt, ist er gleich weit von AB entfernt (als Def.)
Umkehrung: Wenn ein Punkt gleich weit von zwei Punkten entfernt ist, dann liegt er auf ms.
Folien für Schülerlösungen (HA)</td></tr>
</table>

Phasen	Inhaltliche Schwerpunkte	Methode/ Soz.form	Medien/ Material	Didaktisch-methodische Erläuterungen
3. Stunde	Vergleich der HA: Besonderheit ansprechen: *Alle drei Mittelsenkrechten schneiden sich in einem Punkt (wenn man sauber gezeichnet hat).* An Tafel notieren: ***Frage: Ist das Zufall? Schneiden sich die drei Mittelsenkrechten in jedem beliebigem Dreieck in einem Punkt?*** Geometrische Erklärung dafür, dass sich alle Mittelsenkrechten in einem Punkt schneiden anhand der Konstruktion der Mittelsenkrechten. L konstruiert in einem beliebigen Dreieck die Mittelsenkrechte zu einer Seite und erklärt dabei. Schüler formulieren Konstruktionsaufträge; L konstruiert an Tafel die Mittelsenkrechte der zweiten Seite. Erläuterung: „Der Schnittpunkt der ersten zwei Mittelsenkrechten gibt den Punkt an, der gleich weit von den drei Ausgangspunkten entfernt ist und somit muss auch die dritte Mittelsenkrechte durch diesen Punkt gehen." Während L die dritte Mittelsenkrechte konstruiert, wird AB ausgeteilt.	Folien der SuS SB / SV	OHP Tafel Tafel	In allen Aufgabenteilen schneiden sich die drei Mittelsenkrechten innerhalb des Dreiecks (alle Dreiecke sind spitzwinklig), so wird jeder SuS die Schnittpunkte bei genauem Zeichnen entdecken können. Es ist bei der Konstruktion herauszustellen, dass ein Kreis mit demselben Radius um die beiden Punkte gezeichnet wird. Dadurch erhält man zwei Schnittpunkte, die gleich weit von den gegebenen Punkten entfernt sind und demnach auf der Mittelsenkrechten liegen. Kopie für SuS AB *Konstruktion der Mittelsenkrechten*
4. Stunde	Übung: Konstruktion der Mittelsenkrechten Schnellere SuS notieren Lösung auf Folie Vergleichen und Besprechen der Übungsaufgaben. Zu Aufgabe 2 – Es kommt zu einem scheinbaren Wiederspruch: Die Mittelsenkrechten schneiden sich hier außerhalb des Dreiecks; das Dreieck ist stumpfwinklig. Falls noch Zeit ist: Reflexion: Erkläre mithilfe der Konstruktion der Mittelsenkrechten, warum sich alle drei Mittelsenkrechten in jedem Dreieck in einem Punkt schneiden müssen. Mögliche Ergänzung: Der Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten ist gleich weit von den Eckpunkten des Dreiecks entfernt. Nimmt man diesen Abstand als Radius und den Schnittpunkt als Mittelpunkt kann ein Kreis gezeichnet werden, auf dem die drei Eckpunkte des Dreiecks liegen. Dieser Kreis heißt Umkreis des Dreiecks. HA: weitere Übungsaufgaben Konstruktion. Hausaufgabenfolien verteilen.	EA SV	AB *Konstruktion* Konstruktion der Mittelsenkrechten.docx AB *Hausaufgaben2* Hausaufgabe.docx	Folien für Schülerlösungen In Aufgabe 2 werden die Mittelsenkrechten von Dreiecksseiten betrachtet. Drei weitere Beispiele werden gezeigt, für die die Beobachtung (MS schneiden sich alle in einem Punkt) auch gilt. Kopie für SuS AB *Hausaufgaben* Folien für Schülerlösungen (HA)

Phasen	Inhaltliche Schwerpunkte	Methode/ Soz.form	Medien/ Material	Didaktisch-methodische Erläuterungen
5.Stunde	Besprechen der Hausaufgaben: Schüler stellen ihre Lösungen mit Lösungsfolien vor. Lage der Schnittpunkte der drei Mittelsenkrechten kann erneut thematisiert werden: In einem spitzwinkligen Dreieck schneiden sich die Mittelsenkrechten innerhalb des Dreiecks. In einem stumpfwinkligen Dreieck schneiden sie sich außerhalb des Dreiecks. In einem rechtwinkligem Dreieck liegt der Schnittpunkt auf der Hypotenuse (der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite). Übungsaufgaben – Abstände (Aufgabe 1 sollten alle bearbeiten, Aufgabe 2 ist für Schnellere SuS) HA: Löse die restlichen Aufgaben (eventuell nur Aufgabe 1?- abhängig von der Zeit) Folien verteilen.	PA/UG	OHP Übung-sauf-gaben2.docx	Kopie für SuS AB Übungsaufgaben Folien für Schülerlösungen
6.Stunde	Besprechung der Übungsaufgaben SuS stellen Lösungen mithilfe einer Lösungsfolie vor.		OHP	
7.Stunde	Test 2 als weitere Übung. „Das solltest du jetzt eigenständig lösen können."	EA		Der Nachtest soll für die Schüler als individuelle Überprüfung dienen, so wie ein check up oder bist du sicher. Keine Bewertung, Übungsphase, aber EA!
LV: Lehrervortrag; LB: Lehrerbeitrag; L-Imp.: Lehrerimpuls; EA: Einzelarbeit; PA: Partnerarbeit; GA: Gruppenarbeit; SB: Schülerbeitrag; SV: Schülervortrag; UG: Unterrichtsgespräch				

9 Die Instrumente

In dieser Studie werden drei Untersuchungsinstrumente genutzt: Die schriftlichen Tests, die Unterrichtsbeobachtung und die Schülerinterinterviews. In eben dieser Reihenfolge werden die Instrumente zunächst allgemein und anschließend konkreter beschrieben. Je nach Instrument ist die Beschreibung der Entwicklung und des Einsatzes ausführlicher nötig oder konzentriert möglich.

9.1 Die schriftlichen Tests

Zu drei Zeitpunkten im Studiendesign finden schriftliche Test statt (vgl. Abb. 14). Mit dem Vorgehen wird die Entstehung der drei Testinstrumente beschrieben. Es werden allgemeine Kriterien der Testentwicklung (vgl. Abschnitt 9.1.1) und Testgütekriterien (vgl. Abschnitt 9.1.2) erläutert, die dann bei den Phasen der Testentwicklung (vgl. Abschnitt 9.1.3) berücksichtigt werden. Anschließend wird die Entwicklung des Bewertungshorizontes für jede Aufgabenstellung (vgl. Abschnitt 9.1.4) erläutert und das konkrete Auswertungsverfahren samt Beurteilerübereinstimmung exemplarisch angegeben (vgl. Abschnitt 9.1.5).

9.1.1 Kriterien für die Aufgabenauswahl

Aus organisatorischen Gründen sollte die Testdurchführung in einer Schulstunde von 45 Minuten garantiert werden. Die Bearbeitung der Aufgaben selber sollte daher bei maximal 40 Minuten liegen, um so eine kurze Einführung geben zu können.

In allen drei Testungen werden Begründungen und Erklärungen zur Mittelsenkrechten abgefragt, daher wird für alle Aufgaben ein offenes Aufgabenformat gewählt.

In Test 1 soll das Vorwissen zu geometrischen Objekten, die beim Erlernen der Mittelsenkrechten hilfreich erscheinen und den Lernenden laut Curricula bekannt sein sollten, erfasst werden. Die Inhalte der Aufgaben ergeben sich aus der Analyse Kernlehrpläne NRW Mathematik für die Klassen 5-7 und einer stoffdidaktischen Analyse (vgl. Kapitel 5). Es werden für das Verständnis der Mittelsenkrechten naheliegende Definitionen und geometrische Begriffe, insbesondere zum Ortslinien-Konzept ausgewählt. Dazu zählen der Abstand eines Punktes zu einer Geraden (Aufgabe 1) und der Kreis als Ortslinie aller Punkte mit dem gleichen Abstand zum Mittelpunkt (Aufgabe 2). Alternativ wäre das Ortslinienkonzept bei parallelen Geraden noch denkbar. Zusätzlich soll überprüft werden, inwiefern das Konzept der Mittelsenkrechten bereits (intuitiv) bekannt ist (Aufgabe 3). Mit einer weiteren Aufgabe wird auf die Problemlösefähigkeiten der Lernenden abgezielt (Aufgabe 4). Es wird ohne Hilfsmittel wie Zirkel, Lineal, Taschenrechner gearbeitet, um keine Verwendung der Werkzeuge nahezulegen.

Die Inhalte von Test 2 und 3 orientieren sich an den Wissenselementen zur Mittelsenkrechten, die in Kapitel 1 dargestellt wurden. Mit den Aufgabenstellungen soll zum einen das zentrale Lernziel, Definition und Konstruktion der Mittelsenkrechten, in Aufgabe 1 abgefragt werden. Zum anderen soll das Ortslinienkonzept der Mittelsenkrechten angewendet und die Anwendung begründet werden (Aufgabe 2). Es soll eine weitere Begründungsaufgabe zur Mittelsenkrechten geben, konkrete Vorgaben gibt es noch nicht (Aufgabe 3). Zusätzlich ist jeweils eine Aufgabenstellung gewollt, die eine Variation der Brunnenaufgabe darstellt (Aufgabe 4).

Als Vorlage für die Aufgabe 2 und auch 3 dienen die Aufgaben der Vera-8-Vergleichsarbeiten aus den Jahren 2007 bis 2014, in denen die Mittelsenkrechten zur Lösungsfindung beitragen kann. Die Vera-8-Aufgaben eignen sich in besonderer Weise, da sie sich an den zu erreichenden Kompetenzen und dem verbindlichen Curriculum orientieren. Schülerinnen und Schüler sollten am Ende der Klasse 8 die Aufgaben lösen können. Zusätzlich sind diese Aufgaben als Bestandteil der Vergleichsarbeiten unter hohen testspezifischen Anforderungen erstellt worden. Es werden die im Unterricht verwendeten Hilfsmittel für alle Schülerinnen und Schüler zur Verfügung gestellt. Das sind Geodreieck und Zirkel.

9.1.2 Gütekriterien der Tests

Mithilfe der drei Testgütekriterien Objektivität, Reliabilität und Validität kann die Qualität eines Tests bestimmt werden (vgl. Bortz & Döring 2006, S. 195). Nachfolgend wird die durchgeführte Testreihe (Test 1, Test 2 und Test 3) hinsichtlich dieser Kriterien untersucht.

Unter **Objektivität** versteht man die Anwenderunabhängigkeit. „Die Objektivität eines Tests gibt an, in welchem Ausmaß die Testergebnisse vom Testanwender unabhängig sind.“ (Bortz & Döring 2006, S. 195). Diese kann in die drei Teilkategorien Durchführungsobjektivität, Auswertungsobjektivität und Interpretationsobjektivität unterschieden werden. Um auch bei einem selbstkonstruierten Test eine möglichst hohe Objektivität gewährleisten zu können, sollten die Durchführungs-, Auswertungs- und Interpretationsvorgänge festgelegt und standardisiert werden (vgl. Lienert & Raatz 1998, S. 8). Dies kann in Form von Testanweisungen oder Protokollen geschehen (vgl. Bortz & Döring 2006, S. 195).

Die *Durchführungsobjektivität* wird durch einheitliche Vorgehensweise und Instruktion in der Testdurchführung, durch die Vorgabe einer einheitlichen maximalen Bearbeitungszeit und durch den Einsatz gleicher Aufgaben für alle Schülerinnen und Schüler gesichert.

Die *Auswertungsobjektivität* wird berücksichtigt, in dem auf Grundlage der Aufgabenanalyse und der Instruktionen zur Testauswertung der Vera-8-Vergleichsarbeiten einheitliche Bewertungshorizonte mit zugehörigem Punkteschema für jede Testaufgabe erstellt werden. Auf Basis dieser Bewertungshorizonte werden nun alle Schülerlösungen aufgabenweise von zwei Beurteilern (Ratern) bepunktet. Anschließend wird die Unabhängigkeit von den Beurteilern durch die Rate der Übereinstimmung mit dem gewichteten Cohens-Kappa ermittelt (z. B. Bortz et. al 2008, 482ff.). In Abschnitt 9.1.5.3 wird das Vorgehen zur Überprüfung der Beurteilerübereinstimmung beschrieben und beispielhaft an einer Testaufgabe aufgezeigt.

Die *Interpretationsobjektivität* ist durch einen objektiven Vergleich der Testergebnisse zwischen den Klassen aber auch zwischen den Schülerinnen und Schülern in Hinblick auf ihr geometrisches Vorwissen (Test 1) bzw. auf ihren aktuellen Leistungsstand zur Mittelsenkrechten (für Test 2 und 3) gewährleistet. Grundlage hierfür sind die vorab formulierten Fragestellungen und Hypothesen.

Die **Reliabilität** gibt die Zuverlässigkeit eines Tests an. „Die Reliabilität eines Tests kennzeichnet den Grad der Genauigkeit, mit dem das geprüfte Merkmal gemessen wird.“ (Bortz & Döring 2006, S. 196). Im Idealfall ist der Messfehleranteil gleich null. Dies tritt jedoch in der Realität nicht ein, da Fehlereinflüsse wie „situative Störungen, Müdigkeit der Probanden, Missverständnisse oder Raten“ (Bortz & Döring 2006, S. 196) nicht auszuschließen sind. Dieses Gütekriterium ist nur teilweise durch die wiederholte Durchführung der Testaufgaben in Test 2 und Test 3 gegeben.

Mithilfe der **Validität** wird beurteilt, inwiefern der Test empirisch genau das misst, was bei der Testkonstruktion für die Messung beabsichtigt wurde (vgl. Bortz & Döring 2006, S. 200).

Sie wird in die drei Kriterien Inhaltsvalidität, Kriteriumsvalidität und Konstruktvalidität unterteilt (vgl. Klauer 2011, S. 210).

„Inhaltsvalidität ist gegeben, wenn der Inhalt der Testitems das zu messende Konstrukt in seinen wichtigsten Aspekten erschöpfend erfasst.“ (Bortz & Döring 2006, S. 200). Es ist offensichtlich, dass in Test 2 und Test 3 ohne jegliches Wissen über die Mittelsenkrechte, wie es in der Tabelle der Wissenselemente aufgeführt wird (vgl. 6 in Abschnitt 5.3), kaum eine Aufgabe sinnvoll bearbeitet werden kann. In den ersten Testerstellungsphasen (0iii bis 1) werden die Testaufgaben von einer Gruppe an fachdidaktischen Experten begutachtet und u. a. in Bezug auf den Inhalt analysiert (vgl. Abschnitt 9.1.3). Dieses Vorgehen soll die Inhaltsvalidität der Tests sichern. „Kommen Experten übereinstimmend zu dem Ergebnis, dass ein Test gut geeignet ist, um den interessierenden Bereich zu messen, gilt das Verfahren als inhaltsvalide.“ (Hasselhorn & Gold 2009, S. 358). Inwiefern das mithilfe der Tests abgefragte Wissen zur Mittelsenkrechten auch einen Anspruch auf Vollständigkeit erheben kann, wird in Abschnitt 8.1.4 Analyse der Aufgaben überprüft. Abgefragte Kompetenzen aus Test 2 und Test 3 werden mit denen in der stoffdidaktischen Analyse in Kapitel 1 herausgestellten Wissenselementen und -facetten zur Mittelsenkrechten und **anhand des Kategoriensystems nach Maier et al. (2010)** abgeglichen. Entsprechendes wird auch für den Test 1 durchgeführt. Durch diese systematische Vorgehensweise kann überprüft werden, inwiefern die Lerninhalte zur Mittelsenkrechten in den Testitems berücksichtigt werden (vgl. Klauer 2011, S. 214).

Kriteriumsvalidität liegt vor, wenn die Ergebnisse des Tests im Vergleich zu Ergebnissen anderer Variablen, die dem im Test gemessenen Merkmal entsprechen, übereinstimmen (vgl. Renkl 2008, S. 394; Bortz & Döring 2006, S. 200). Gemessen wird das Wissen zur Mittelsenkrechte. Möglich wäre ein Vergleich zur Mathematiknote der Klassenarbeit oder der Mathematikzeugnisnote. Keine dieser Noten gibt eine Auskunft über rein geometrische Kenntnisse. Daher ist fraglich, inwiefern eine Vergleichbarkeit anzunehmen ist. Man kennt das Phänomen von Geometriezugeneigten bzw. abgeneigten Schülerinnen und Schüler, die der Mathematik im Allgemeinen eher abgeneigt bzw. zugeneigt sind. Keiner dieser Werte wurde im Rahmen dieser Studie erhoben. Eine Geometrieaufgabe aus der nächsten Klassenarbeit hätte als Vergleichsvariable erhoben werden können. In diesem Falle hätten sich alle vier Lehrenden auf eine Aufgabe einigen und diese in einer vergleichbaren Klassenarbeit einsetzen müssen. Davon wurde jedoch abgesehen.

„Ein Test ist konstruktvalide, wenn aus dem zu messenden Zielkonstrukt Hypothesen ableitbar sind, die anhand der Testwerte bestätigt werden können." (Bortz & Döring 2006, S. 201). Es wird gezeigt, dass ein Test ein bestimmtes Konstrukt erfasst und eben nur dieses und nicht noch ein weiteres Konstrukt (vgl. Renkl 2008, S. 394). Testaufgaben, mit denen Inhalte abgefragt werden, die intensiv in den beiden Interventionen behandelt wurden, sollten zu besseren Ergebnissen führen als die Ergebnisse von Testaufgaben, denen nur eine geringe Rolle im Unterricht zukam. Zentraler Inhalt ist die Definition und Konstruktion der Mittelsenkrechten, die in Aufgabe 1 von Test 2 und 3 abgefragt werden. Die Aufgabe 1 sollte in allen Klassen zu besonders guten Ergebnissen führen. Die Aufgabe 3 sollte im problemorientierten Ansatz, die Aufgabe 5 im darbietenden Ansatz vergleichsweise schwächer ausfallen, da hier jeweils die Argumentationen, die in diesen Aufgaben gefordert werden, in der Intervention weniger intensiv behandelt wurden.

9.1.3 Phasen der Testentwicklung

Bei der Konstruktion **standardisierter Tests** werden klassischerweise die folgenden fünf Schritte nach Lukesch durchlaufen: (1) Vorerprobung, (2) Testdurchführung an einer kleinen Stichprobe, (3) Aufgaben- und Testanalyse, (4) Testvalidierung und (5) Testeichung (Helmut Lukesch 1998, siehe auch Hasselhorn & Gold 2009, S. 349). Auch für die Erstellung informeller Tests sei es hilfreich sich an den obigen fünf Schritten zu orientieren (vgl. Hasselhorn & Gold 2009, S. 348; Hany 2008, S. 420ff.). Die hier konstruierten Tests sind nicht-standardisiert, die in ihrer Form eher schriftlichen Abfragen wie Klassenarbeiten aus dem Schulunterricht oder den Vergleichsarbeiten ähneln und in ihrer Funktion einer explorativen Analyse des Untersuchungsumfeldes dienen sollen. Phase 4 und 5 entfallen daher aufgrund des explorativen Charakters der gesamten Studie und den bereits erläuterten Einordnungen zur Validität (vgl. Abschnitt 8.1.2). An die dritte Phase nach Lukesch schließt sich die Darstellung der finalen Testversionen für die Hauptstudie in einer ergänzten Phase 4 an. Für die Konstruktion jedes Tests werden geeignete Testaufgaben recherchiert, gesammelt und erstellt. Der entstandene Aufgabenpool wird anschließend einer kritischen Begutachtung unter Berücksichtigung der oben beschriebenen Kriterien (vgl. Abschnitte 8.1.1 und 8.1.2) ausgesetzt. Auf diese Weise entstehen in einer Phase 0 erste Testversionen. Für jeden der drei Tests werden bei der Erstellung die nachfolgenden Phasen 0 bis 5 durchlaufen, wobei sich Phase 1 bis 3 in an die Ausführungen von Lukesch 1998 anlehnen:

Phase 0 **– Erstellung einer ersten Testversion in vier Schritten:**

i) Auswahl und Analyse geeigneter Aufgabenstellungen anhand der oben aufgeführten Überlegungen zu inhaltlichen und strukturellen Kriterien.

ii) Erprobung einzelner Aufgaben, Analyse der erfassten Inhalte und Optimierung der Formulierungen unter Berücksichtigung der oben aufgeführten Gütekriterien.

iii) Stoffdidaktische Analyse in einer Expertenrunde. Diskussion und Einordnung der Aufgaben. Es entsteht eine erste Testversion.

iv) Einordnung in das **Kategoriensystem nach Maier et al. (2010)** und Entstehung eines Bewertungshorizontes für die Testversion.

***Phase 1* – Testerprobung**

Zwei Experten aus der Mathematikdidaktik der Universität Duisburg-Essen überprüfen die Testversionen.

***Phase 2* – Testdurchführung an einer kleinen Stichrobe**

In der Pilotstudie wurden die Tests und die Interventionen in zwei siebten Klassen des Leibniz Gymnasiums in Essen erprobt.

***Phase 3* – Auswertungen**

Auswertung der Testdurchführung und Analyse der Testergebnisse. Anschließend werden mögliche Änderungen in der Testdurchführung, der Aufgabenzusammensetzung und Aufgabenstellung sowie der Testauswertung diskutiert.

***Phase 4* – Testversion für die Hauptstudie**

Es werden die Auswertungsergebnisse in einer finalen Testversion für die Hauptstudie festgehalten und die Aufgaben der Test kurz charakterisiert.

Es folgen Ergänzungen zu den vier Phasen für alle drei Testungen. Alle Testhefte der Pilotierung sind im Anhang zu finden (Abschnitt 16.1).

In der **Phase 0)** werden für den Test 1 zum Vorwissen und für die Tests 2 und 3 zur Mittelsenkrechten Aufgabensammlungen erstellt. Die Inhalte der ersten Aufgaben von Test 1 ergeben sich direkt aus der Analyse des geometrischen Vorwissens (vgl. Abschitt 8.1.1). Für die Aufgabe zum Problemlösen wird eine Problemlöseaufgabe mit arithmetischem Schwerpunkt und Bezug zur Geometrie ausgewählt:

Aufgabe 1.A: Definition euklidischer Abstand eines Punktes

zu einer Geraden

Aufgabe 1.B:Definition Kreisbogen als Ortslinie

Aufgabe 1.C: Definition Parallele als Ortslinie

Aufgabe 1.D: Definition Mittelsenkrechte als Ortslinie

Aufgabe 1.E: Problemlöseausaufgabe mit arithmetischem Schwerpunkt

In Phase 0 ii) werden Änderung in Sprache und Form von der Autorin dieser Arbeit vorgenommen, so dass die Aufgaben eine ähnliche Struktur erhalten. In Phase 0 iii) wird gemeinsam mit Prof. Dr. Rott diskutiert die Aufgabe zum euklidischen Abstand oder aber die Aufgabe zu den Parallelen in den Test aufzunehmen. Für eine Aufnahme beider Aufgaben könnte die Bearbeitungszeit nicht ausreichen und das würde bedeuten, dass bei der Auswertung stets auch die zu geringe Bearbeitungszeit als Interpretation hinzugezogen werden müsste. Mit dem Kreis ein wird bereits bekanntes Ortslinienkonzept abgefragt und ein Verständnis des euklidischen Abstands für das Lösen der Brunnenaufgabe ist sicherlich vorteilhaft, daher wird zugunsten des

Abstandes entschieden. Es wird ein Erwartungshorizont für die Auswertung erstellt (Phase 0 iv). (Die Aufgabe zur Parallelen könnte ergänzt werden, wenn die Bearbeitungszeit es zulässt. Das wird die Auswertung der Pilotierung zeigen).

Für Test 2 und Test 3 sollen verschiedene Wissensfacetten zur Mittelsenkrechten erfasst werden. (vgl. Tab. 6). Es wurden in der Phase 0 i) zunächst die Aufgaben der Vera-8-Vergleichsarbeiten der Jahre 2007 bis 2014 (IQB) auf die Verwendung der Mittelsenkrechten untersucht. Folgende Aufgaben wurden für den ersten Aufgabenpool ausgewählt: Aufgabe *Spiegelachse* (Vera-8 2007, Aufgabe 28), Aufgabe *Bewege C* (Vera-8 2011, Aufgabe 18); Aufgabe *Kreise und Vierecke* und Aufgabe *Punkt gesucht* (Vera-8 2012, Aufgabe 15 und 16) und Aufgabe *Strecke im Koordinatensystem* (Vera-8 2014, Aufgabe 18). Zusätzlich wurden Aufgaben ergänzt, mit denen folgende Inhalte erfasst wurden: Definition und Konstruktion der Mittelsenkrechten, Begründungen zum Satz der Mittelsenkrechten im Dreieck, Variationen der Brunnenaufgabe. In der Phase 0 ii) wurden sprachliche Formulierungen und die Struktur der Aufgabe in Anlehnung an Test 1 angepasst. Anschließend werden die Testversionen in der Phase 0 iii) einer Expertengruppe von Mathematikdidaktikern bestehend aus Doktorandinnen und Doktoranden der Arbeitsgruppe von Prof. Dr. Benjamin Rott (Universität Duisburg-Essen) vorgelegt. Die Aufgaben werden gelöst, analysiert und in der Gruppe diskutiert. Als Ergebnis von Phase 0 iii) entsteht jeweils eine Testversion für Test 2 und eine Version für Test3 aus jeweils vier Aufgaben für die anschließend ein Erwartungshorizont erstellt werden kann:

Aufgabe 2./3.A: Definition und Konstruktion der Mittelsenkrechten (nahezu identisch für beide Testversionen)

Aufgabe 2./3.B: Innermathematische Anwendung der Mittelsenkrechten (in Anlehnung an Vera-8 2012, Aufgabe 16).

Test 2: Schnittpunkt Kreis um D mit Mittelsenkrechte zu A und B, Test 3: Schnittpunkt von g und Mittelsenkrechter durch A und B.

Aufgabe 2./3.C: Für Test 2: Begründung des gemeinsamen Schnittpunktes der Mittelsenkrechten im Dreieck (Lupenaufgabe), für Test 3: Begründen mit der Mittelsenkrechte (Rautenaufgabe; in Anlehnung an Vera-8 2012, Aufgabe 15) in der Hauptstudie soll ggf. eine der beiden Aufgaben in beiden Testversionen für eine höhere Vergleichbarkeit sorgen.

Aufgabe 2./3.D: Brunnenaufgabe mit verändertem Kontext; für Test 2: Feuerwacheneinzugsgebiet, für Test 3: Schuleinzugsgebiet

Phase 1 wird wie geplant durchlaufen. Die Testversionen werden von zwei Personen mit Expertise für die Testerstellung, - durchführung und -auswertung bzw. mit langjähriger Schulpraxiserfahrung, auf Lesbarkeit und Größe der Abbildungen, auf ausreichend Platz für die Schülerantworten und auf die zeitliche Machbarkeit überprüft. Ebenso wird eine letzte Korrektur der Rechtschreibung und Grammatik vorgenommen. Es gibt keine weiteren Anmerkungen.

Im Zeitraum Mai-Juni 2016 werden in **Phase 2** die drei Tests und die beiden Interventionen an zwei siebten Klassen des Leibniz Gymnasiums Essen erprobt. Bei der Durchführung von Test 2 kann die problemorientiert unterrichtet Klasse aus schulinternen Gründen von den geplanten 45 Minuten nur 30 Minuten für die Bearbeitung nutzen. Zum Zeitpunkt des Test 3 fehlen in der problemorientiert unterrichteten Klasse 5 von 26 Lernenden. Durch diese beiden Ereignisse werden die Testergebnisse beeinflusst. Für die Hauptstudie soll geklärt werden, durch welche Maßnahmen diese Ereignisse gebannt werden können (vgl. Kapitel 7). Für die Analyse der Testaufgaben innerhalb der

Pilotierung können die beiden Ereignisse vernachlässigt werden.

In **Phase 3** wird einerseits anhand von Beobachtungen bei der Durchführung der Ablauf evaluiert, andererseits werden die schriftlichen Lösungen ausgewertet und hinsichtlich auf die Aufgabenstellung zurückzuführender Schwierigkeiten untersucht. Zunächst werden allgemeine organisatorischen Beobachtungsaspekten bei der Testdurchführung untersucht. Bei der anschließenden **Testauswertung** der Schülerlösungen wird überprüft, inwiefern es Aufgaben gibt, die häufig zu derselben falschen Antwort führen, so dass ggf. Passagen, die auf sprachlicher Ebene zu Missverständnissen führen könnten, umformuliert werden können. Es wird dabei überprüft, ob es Aufgaben gibt, „in denen ansonsten gute Schüler versagt haben und ansonsten schwache Schüler Erfolg hatten […].“ (Hany 2008, S. 422).

Der **Durchführungsablauf** der Pilotierung zeigt sich für alle drei Tests als realistisch und gelungen. Es werden keine Änderungen für den Ablauf und die Anweisungen zur Testdurchführung für die Hauptstudie festgelegt. Demnach gelten die oben beschriebenen Rahmenbedingungen der Testdurchführung ebenso für die Hauptstudie. Zusätzlich sollen die Testtermine der Hauptstudie im Vorfeld bei Klassenlehrern und Schulleitung, in einem größeren Rahmen als in der Pilotierung, kommuniziert werden, so dass ein geplanter Ablauf und eine Bearbeitungszeit von 45 Minuten gesichert werden.

Zur **Bearbeitungszeit** kann festgehalten werden, dass die Schülerinnen und Schüler deutlich weniger als die angesetzten 40 Minuten in allen drei Tests benötigen. Nahezu alle Schülerinnen und Schüler bearbeiten die Aufgaben in ca. 30 Minuten. Auch die Bearbeitungen der problemorientierten Klasse in Test 2 zeigt weitaus weniger Lücken als durch die zeitliche Verkürzung um knapp 40 % der Bearbeitungszeit zu erwarten war. Als Folgerung daraus kann eine weitere Aufgabe in jedem Test zugefügt werden.

Die **Auswertung der Testergebnisse** in der Pilotierung zeigen, dass im Durchschnitt etwas weniger als die Hälfte der Punkte in jedem Test erreicht werden (vgl. Tab. 1). Die prozentualen Schülerleistungen zeigen dabei eine große Spanne auf. In Test1 reichen die Werte von 9,38 % bis 93,75 %. In Test 2 liegt die Spanne zwischen 6,06 % und 90,91 % und in Test 3 zwischen 0 % und 93,94 %. Es werden dabei sehr gute Schülerleistungen und auch schwächere Schülerleistungen sichtbar.

Alle Angaben in %	Test 1	Test 2	Test 3
arithmetisches Mittel	44,82	48,37	46,52
Median	43,75	45,45	43,94
Standardabweichung	2,96	3,45	4,01
Maximum	93,75	90,91	93,94
oberes Quartil	51,56	62,12	62,12
unteres Quartil	37,5	30,30	24,24
Minimum	9,38	6,06	0

Tab. 8: Anteil der Lösungen zu den Aufgaben aus Test 1, Test 2 und Test 3 zusammengefasst für beide Klassen der Pilotierung.

Die Daten aller drei Testungen weisen eine ausreichende Streuung auf, so dass differenzierte Aussagen über die Schülerinnen- und Schülerleistungen möglich werden. Diese Ergebnisse sprechen dafür, dass die drei Tests jeweils genügend differenziert gestaltet sind.

Die Mittelwerte von knapp 50 % (vgl. Tab. 8) sind als eher gering zu bewerten und lässt darauf schließen, dass die Aufgaben einen relativ hohen Anspruch an die Schülerinnen und Schüler stellt. Ein Maximum von über 90 % in jedem Test zeigt, dass die Aufgaben dennoch zu bewältigen sind. Somit können die Schülerinnen- und Schülerleistungen durch die Tests auch noch im oberen Bereich gut differenzieren.

Ebenso ist eine Abstufung zwischen den Aufgaben deutlich, so dass anspruchsvollere Aufgaben im Durchschnitt weniger gut gelöst werden. Ein Blick in die aufgabenweise Verteilung der Anteile aus Test 1 zeigt dies (vgl. Tab. 9). Die Abfrage des Vorwissens zum euklidischen Abstand und zum Kreisbogen zeigen sehr viele sehr gute Leistungen auf. Das zeigen die Werte von 100 % und 75 % für die oberen Quartil für die Aufgabe 1 und 2 aus Test 1 (d.h. 1.1 und 1.2). Es bleiben die sehr schwachen Leistungen hier fast aus. Die unteren Quartile liegen bei 25 % und 50 %. In Aufgabe 3 wird mit der Mittelsenkrechten ein aus dem Unterricht nicht direkt bekanntes Konzept erfragt und die Schülerleistungen sind geringer, was den Erwartungen entspricht. Am anspruchsvollsten ist die Problemlöseaufgabe.

	Test 1		44 SuS		
	Aufgabe 1 4 Punkte	Aufgabe 2 4 Punkte	Aufgabe 3 4 Punkte	Aufgabe 4 4 Punkte	Summe
arithmetisches Mittel	55,68	57,67	40,34	25,57	44,82
Median	50	50	25	0	43,75
Stanardabweichung	8,62	5,34	9,16	8,16	18,51
Maximum	100	100	100	100	93,75
oberes Quartil	100	75	75	50	51,56
unteres Quartil	25	50	0	0	37,5
Minimum	0	0	0	0	9,38

Tab. 9: Anteilige Verteilung der Leistungen auf die Aufgaben in Test 1.

In Test 1 werden keine Veränderungen an den Aufgabenstellungen vorgenommen. Es wird die bereits diskutierte Parallelen-Aufgabe ergänzt, in der ein weiteres aus dem Unterricht der Klassen 5 und 6 bekanntes Objekt, die Parallelen, mit Blick auf das Ortslinienkonzept thematisiert wird. Die Formulierungen und Struktur der Aufgabe orientieren sich an den Aufgaben 1.2 und 1.3 der Pilotierung, sodass eine erneute Pilotierung nicht erforderlich ist. Die Parallelen-Aufgabe wird als Aufgabe 1.3 in der finalen Testversion platziert.

	Test 2		44 SuS		
	Aufgabe 1 4,5 Punkte	Aufgabe 2 5 Punkte	Aufgabe 3 "Lupe" 3 Punkte	Aufgabe 4 "Brunnen" 4 Punkte	Summe 16,5 Punkte
arithmetisches Mittel	60,86	42,27	43,94	39,20	48,37
Median	66,67	40,00	33,33	37,50	45,45
Stanardabweichung	6,38	7,33	6,56	9,44	20,91
Maximum	88,89	100	100	100	90,91
oberes Quartil	77,78	50,00	66,67	37,5	62,12
unteres Quartil	44,44	30,00	0	0	30,30
Minimum	0	0	0	0	6,06

Tab. 10: Aufgabenweise Verteilung der Anteile in Test 2

	Test 3		44 SuS		
	Aufgabe 1 4,5 Punkt	Aufgabe 2 5 Punkte	Aufgabe 3 "Raute" 3 Punkte	Aufgabe 4 "Brunnen" 4 Punkte	Summe 16, 5 Punkte
arithmetisches Mittel	47,73	45,00	26,52	46,59	46,52
Median	44,44	24,24	33,33	25,00	43,94
Stanardabweichung	6,88	10,18	5,38	9,89	24,30
Maximum	100	100	100	100	93,94
oberes Quartil	77,78	80,00	33,33	100	62,12
unteres Quartil	38,89	20,00	0	0	24,24
Minimum	0	0	0	0	0

Tab. 11: Aufgabenweise Verteilung der Anteile in Test 3

Es wird die aufgabenweise Verteilung der Testergebnisse aus Test 2 und Test 3 in Tab. 10 und Tab. 11 betrachtet.

Sowohl die Durchschnittswerte, wie auch die Werte für das obere und untere Quartil zeigen, dass die Aufgaben 1 und 2 aus Test 2 und 3 (d.h. 2./3.1 und 2./3.2) für die Lernenden gut zu lösen sind (vgl. Tab. 10). Dies sollte genau so sein, werden Definition der Mittelsenkrechten und eine innermathematische Anwendung abgefragt. Anhand der Analyse der Schülerantworten zeigt sich, dass in Aufgabe 2./3.1 häufig eine Erklärung weggelassen wird. In Aufgabe 2./3.2 liegt ein häufig auftretendes Missverständnis in der Skalierung der Koordinatenachsen. Daraus resultieren die folgenden Änderungen in den Aufgabenstellungen:

Aufgabe 2./3.A: Erkläre wird fett hervorgehoben.

Aufgabe 2./3.B: Neben dem Koordinatensystem wird folgender Hinweis „Eine Längeneinheit entspricht einem Kästchen“ ergänzt (Dies wurde bereits in Test 3 der Pilotierung ergänzt und hat dort zu weniger Fehlern hinsichtlich der Skalierung geführt).

Die weiteren Aufgaben bedürfen einer stärkeren Überarbeitung. Zunächst wird die Aufgabe 2./3.3, in der die argumentative Wiedergabe der Beweisidee des Umkreismittelpunktsatz der Mittelsenkrechten im Dreieck erforderlich wird, betrachtet. Der Anspruch an die Lernenden liegt deutlich höher als der bei den ersten beiden Aufgaben. Dies zeigen die Schülerlösungen (vgl. Tab 3 und 4). Die Lupenaufgabe in Test 2 zeigt, dass über 25 % der Schülerinnen und Schüler keine passende Lösungsidee angeben können. Minimum und unteres Quartil liegen bei 0 %. Gleichzeitig können über 66 % die Aufgabe sehr gut lösen. Bei der Rautenaufgabe ist die Anzahl der schwachen Lösungen vergleichbar. Das obere Quartil liegt mit 33 % deutlich niedriger. Für beide Aufgaben werden die Schülerantworten analysiert, um diesen Ausgang besser einordnen zu können.

Die Analyse der Schülerantworten zur Rautenaufgabe zeigt, dass den Lernenden der Zugang zur Aufgabe schwerfällt. Ein Anteil von 45 % der Lernenden gibt keine Lösung ab. Knapp die Hälfte der Schülerinnen und Schüler erkennt, dass mit der Mittelsenkrechten begründet werden kann. Einen weiterführenden Begründungsversuch geben knapp 20 % der Lernenden an. Wenn sie dieses tun, ergeben sich teilweise interessante Lösungsansätze und Begründungen. Damit ist die Aufgabe ungeeignet, um Begründungen zur Mittelsenkrechten zu erfassen. Die Aufgabe wird als für die eigenständige, schriftliche Bearbeitung zu komplex eingestuft. Für eine Interviewsituation erscheint sie besser geeignet. Die Lupenaufgabe ermöglicht den Lernenden insgesamt einen leichteren Zugang. So geben mit 30 % deutlich weniger Schülerinnen und Schüler keine Antwort ab. Gleichzeitig zeigt die Analyse der Schülerantworten, dass die Vergrößerung durch die Lupe nur für wenige Schülerinnen und Schüler hilfreich zu sein scheint. Die Aufgabe wird daher vom Kontext der Vergrößerung für die Hauptstudie befreit. Es wird ein innermathematischer Kontext gesetzt. Zusätzlich wird der Bezug auf das spitzwinklige Dreieck gestrichen und stärker auf die Gültigkeit für alle Dreiecksformen hingewiesen. Die Erwähnung des spitzwinkligen Dreiecks ließ viele Lernenden die Unterscheidung der Dreiecke und die Lage des Mittelpunktes wiedergeben. Das ist an dieser Stelle wenig hilfreich.

Nach weiteren Überarbeitungen der Aufgabe schließt sich eine erneute Analyse und Begutachtung durch die obige Expertenrunde an. In beiden Testversionen der Hauptstudie wird die Aufgabe 2./3.3 aus der Aufgabe zum Schnittpunkt der Mittelsenkrechten im Dreieck in der überarbeiteten Form eingesetzt.

Rauten- und Lupenaufgabe werden in den Aufgabenpool für die Interviews aufgenommen.

Die Brunnenvariation aus Test 3 mit dem Kontext der Feuerwachen wird besser gelöst als die Version mit den Schuleinzugsgebieten aus Test 2. Das zeigt ein Vergleich der Mittelwerte und des oberen Quartils (vgl. Tab. 3 und 4). Möglicherweise ist dies auf die Formulierung zurückzuführen. Möglicherweise kann ein Lerneffekt von Test 2 zu Test 3 die Verbesserung erklären. Um auszuschließen, dass die Formulierung Grundlage der besseren Lösungsrate ist, wird die Schulvariante aus Test 2 sprachlich an die Feuerwehraufgabe angepasst. Es werden beispielsweise Namen für die vier Schulen ergänzt. Zusätzlich wird die Schulvariante in dieser überarbeiteten Form als Aufgabe 2./3.5 in Test 3 eingesetzt und die Variante mit der Feuerwache kommt in Test 2 zum Einsatz. An der Feuerwehraufgabe werden keine Veränderungen vorgenommen.

Es wird eine Aufgabe 2./3.4 in beiden Tests ergänzt. Diese beinhaltet die Konstruktion eines Kreismittelpunktes zu einem gegebenen Kreisbogen. Dabei soll zusätzlich zur Lösung das eigene Vorgehen beschrieben werden. Die Aufgabenstellung wird an die bestehenden Aufgabenformate angepasst. Diese Aufgabe wird erneut von den beiden Experten überprüft bevor sie in die Testversion der Hauptstudie eingeht. Somit haben alle Tests jeweils fünf Aufgaben.

Diese Überlegungen und Änderungen münden in **Phase 4** in finalen Testversionen für die Hauptstudie. Der Test 1 bleibt weitestgehend unverändert. Es wird die Parallelenaufgabe ergänzt und somit ergibt sich für die Hauptstudie die folgende Aufgabenzusammensetzung mit einer festgelegten Reihenfolge von 1 bis 5 für Test 1:

Aufgabe 1.1: Definition euklidischer Abstand eines Punktes zu einer Geraden

Aufgabe 1.2: Definition Kreisbogen als Ortslinie

Aufgabe 1.3: Definition Parallele als Ortslinie

Aufgabe 1.4: Definition Mittelsenkrechte als Ortslinie

Aufgabe 1.5: Problemlöseausaufgabe mit arithmetischem Schwerpunkt

In der Hauptstudie beinhalten Test 2 und Test 3 nach den Änderungen die folgenden fünf Aufgaben:

Aufgabe 2./3.1: Definition und Konstruktion der Mittelsenkrechten (unverändert zur Pilotierung)

Aufgabe 2./3.2: Innermathematische Anwendung der Mittelsenkrechten (in Anlehnung an Vera-8 2012, Aufgabe 16); die ergänzende Anmerkungen zu den Längeneinheiten (wie bereits in Test der Pilotierung eingefügt)

Aufgabe 2./3.3: Begründung des gemeinsamen Schnittpunktes im Dreieck (umstrukturierte und dadurch vergleichbare Aufgabe in Test 2 und Test 3)

Aufgabe 2./3.4: Neue Aufgabenstellung lautet: Mittelpunkt eines Kreises gesucht (identische Aufgabe in Test 2 und 3).

Aufgabe 2./3.5: Brunnenaufgabe mit verändertem Kontext in sprachlicher Überarbeitung: für Test 2: Feuerwacheneinzugsgebiet aus Test 3 der Pilotierung, für Test 3: Schuleinzugsgebiet, umformuliert in Anlehnung an Feuerwachenaufgabe

Bei einer genauen Betrachtung der Aufgaben kann man feststellen, dass viele Wissenselemente aus der Tabelle zur Mittelsenkrechten beim Lösen der Aufgaben Verwendung finden können.

Die Aufgabenstellungen in Test 2 und Test 3 der Hauptstudie sind ähnlicher als es in der Pilotierung der Fall war. Das ist wünschenswert, um so einen besseren Vergleich der Schülerleistungen vornehmen zu können. Die Auswertung zu Test 1 zeigt, dass es vorteilhaft ist, alle Aufgaben mit der gleichen Punktzahl zu versehen, so sind die Aufgaben in der Summe gleichgewichtet. Der Erwartungshorizont zu Test 2 und Test 3 wird für die Auswertung der Hauptstudie dementsprechend überarbeitet, so dass ebenfalls jede Aufgabe mit vier Punkten bewertet wird.

Insbesondere die Aufgaben in Tests 2 und 3 wurden als anspruchsvoll und gleichzeitig zu bewältigend für die Schülerinnen und Schüler eingestuft. Um gefestigtere Aussagen über den Schwierigkeitsgrad der Testaufgaben und die Anforderungen an die Schülerinnen und Schüler bezüglich verschiedener Wissensbereiche einschätzen zu können, schließt sich eine Analyse der Aufgaben mithilfe eines elaborierten Kategoriensystems (vgl. Maier et al. 2010) an. Erst danach wird der Erwartungshorizont erstellt, der Ausgangslage für den Zweitbegutachterprozess der Auswertung ist.

9.1.4 Entwicklung des Bewertungshorizontes

In diesem Kapitel werden die Aufgaben aus Test 2 und Test 3 analysiert. Eine Analyse der Aufgaben umfasst die folgenden vier Aspekte: **a) didaktischer Kommentar und Lösung**, **b) Vorgehensweisen beim Lösen** (aus Schülersicht), **c) Bewertungsgrundlagen für die Lösungen** und **d) Einordnung der Aufgaben** anhand des Kategoriensystems nach Maier et al. (2010). Abschließend werden alle fünf Aufgaben vergleichend betrachtet und als Teil des Messinstrumentes bewertet.

Ziel dieser Aufgabenanalyse ist es zum einen eine intensive Auseinandersetzung mit den Aufgaben sicherstellen zu können, um so anschließend einen Bewertungshorizont für die Auswertung der Tests erarbeiten zu können, mit dem die Schülerinnen- und Schülerlösungen hinsichtlich der aufgabentypischen Argumentationswege analysiert werden können. Anderseits ist eine Einordnung der Aufgaben erstrebenswert, bei der herausgestellt wird, welche inhaltlichen Aspekte der Mittelsenkrechten für das Erfassen und Bearbeiten der Aufgabe nötig ist. Dies ist nicht zuletzt für die Begutachtung der Aufgaben als Bestandteil eines wissenschaftlichen Tests bezüglich der Inhaltsvalidität wichtig. Die Zuordnung zu Wissensbereichen ist auch bei der Auswertung der Testergebnisse von Nutzen. Hierbei wird die Hypothese vorausgesetzt, dass es Unterschiede in den Schülerinnen- und Schülerleistungen beider Interventionen in Hinblick auf die verschiedenen Wissensbereiche gibt. Der Thematik, worin diese Unterschiede vermutet werden, wird abschließend nachgegangen.

9.1.4.1 Überblick der Vorgehensweise zur Erstellung des Bewertungshorizontes

Zunächst wird das Vorgehen für alle Teilaspekte a) bis d) kurz dargestellt:

a) didaktischer Kommentar und Lösung: Die Auswahl der Aufgaben erfolgt anhand des Lerninhaltes der Mittelsenkrechte. Es werden geeignete Aufgaben ausgewählt und ggf. an das Forschungsinteresse angepasst (vgl. Phasen der Testentwicklung). Unter dem didaktischen Kommentar können Anmerkungen zur Quelle und Modifikation der Aufgabe zählen, wie auch Korrektur- und Bewertungshinweise aus den Lehreranweisungen der Vergleichsarbeiten. Zusätzlich wird eine mögliche Lösung skizziert.

b) Vorgehensweisen beim Lösen: Aus theoretischen Überlegungen abgeleitet werden mögliche Vorgehen, Überlegungen und Herangehensweisen der Schülerinnen- und Schülerlösungen aufgelistet. Die Betrachtung von möglichen Hürden und typische Fehlvorstellungen kann dabei hilfreich sein, um eine Bewertung der Antworten besser vornehmen zu können.

c) Bewertungsgrundlage für die Lösungen: Vorangegangene Überlegungen aus a) und b) fließen ein. Es werden die notwendigen Lösungsschritte systematisch aufgelistet und Bezüge zu den Wissenselementen der Mittelsenkrechten gezogen (vgl. Tab. 6).

d) Einordnung der Aufgaben: Mit dem Kategoriensystem nach Maier et al. (2010) können überfachliche Aufgaben anhand ihres kognitiven Potentials kategorisiert werden. Grundlage für die Entwicklung dieses Systems sind diverse Aufgabenanalysewerkzeuge aus den verschiedenen Fachdidaktiken. Dazu zählen aus der Mathematikdidaktik insbesondere die TIMSS-Klassifikationen (vgl. Neubrand 2002) und die COACTIV Klassifikationen (vgl. Jordan et al. 2006). Baut das COACTIV-Modell auf dem Modellierungskreislauf auf und nimmt sich somit mathematische Tätigkeiten zum Ausgangspunkt, werden mit Maiers Kategoriensystem neben der überfachlichen Verwendung das kognitive Potential von Aufgaben fokussiert. Anhand von sieben Dimensionen werden die Aufgaben u. a. hinsichtlich der Wissensart, des kognitiven Potentials und der Wissenseinheit kategorisiert. Dieser allgemein didaktische Fokus auf Wissensarten und kognitiven Potenzialen geht einher mit den fachdidaktischen Darlegungen des Lerninhaltes der Mittelsenkrechte nach den Wissenselementen von Barzel et al. (2012) (vgl. Kapitel 5) sowie den Überlegungen aus der Kognitionspsychologie zum entdeckenlassenden und darbietenden Lernen (vgl. Kapitel 3). In beiden Kapiteln werden Bezüge auf verschiedene Wissensbereiche und das Erlernen dieser gezogen, dabei wird insbesondere zwischen konzeptuellen, prozeduralem und metakognitiven Wissen sowie dem langfristigen und kurzfristigen Lernen unterschieden. Es bietet sich daher an auch die Testaufgaben hinsichtlich verschiedener Wissensbereiche zu kategorisieren. Bei der Einordnung werden daher die ersten drei Dimensionen deutlich intensiver betrachtet, wobei die Dimension der Wissenseinheit häufig durch ein Abzählen der Lösungsschritte aus den Bewertungsgrundlagen bestimmt und somit deutlich kürzer abgehandelt werden kann.

Die weiteren vier Dimensionen von Maiers Kategoriensystem beinhalten Ausprägungen zu Offenheit, Lebensweltbezug, sprachlogische Komplexität und Repräsentationsformen der Aufgaben. Die Testaufgaben werden auch bezüglich dieser vier Dimensionen kategorisiert, wobei für die Beantwortung der Forschungsfragen die ersten drei Dimensionen zu den Wissensbereichen für diese Arbeit eine zentrale Rolle innehaben.

Bei der Aufgabenanalyse wird jede Aufgabe hinsichtlich der sieben Dimensionen betrachtet und eingeordnet. Die für die Aufgabe passende Ausprägung wird für jede Aufgabe in einer eigenen Tabelle hervorgehoben. Jede Dimension enthält drei bis vier Ausprägungen (vgl. *Tab. 12*). Es folgt eine kurze Beschreibung des Vorgehens für die Einordnung zu jeder Dimension; für die Dimensionen 1 bis 2 ausführlicher und für die Dimensionen 3 bis 7 deutlich knapper:

In der Dimension Wissensart sind die Ausprägungen nicht hierarchisch gestuft und somit nicht disjunkt sind. Einer Aufgabe können dadurch mehr als eine Ausprägung zugeordnet werden. Um dieses berücksichtigen zu können, wurde die Kategorie Wissenseinheiten eingeführt. Hier wird über die Anzahl der Wissenseinheiten berücksichtigt, dass die Ausprägungen der Wissensart nicht disjunkt sein müssen. Das Faktenwissen wird in Anlehnung an Jordan et al. (2010) als „Wissen, dass…“ im Unterschied zu „Wissen wie…“ (prozedurales Wissen) verstanden. Dazu zählt hier speziell, das Wissen, dass die Mittelsenk-

<table>
<tr><th></th><th>Dimension</th><th colspan="6">Ausprägungen</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Wissensart</td><td>Fakten</td><td colspan="2">Prozeduren</td><td colspan="2">Konzepte</td><td>Metakognition</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Kognitiver Prozess</td><td>Reproduk-tion</td><td colspan="2">Naher Transfer</td><td colspan="2">Weiter Transfer</td><td>Problemlösen</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Wissensein-heiten</td><td colspan="2">Eine Wissenseinheit</td><td colspan="2">Bis zu 4 Wissenseinheiten</td><td colspan="2">Mehr als 4 Wissenseinheiten</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Offenheit</td><td colspan="2">Definiert/ konvergent</td><td colspan="2">Definiert/ divergent</td><td colspan="2">Ungenau/ divergent</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Lebenswelt-bezug</td><td>Kein</td><td colspan="2">Konstruiert</td><td colspan="2">Authen-tisch</td><td>Real</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Sprachlogi-sche Kompl.</td><td colspan="2">Niedrig</td><td colspan="2">Mittel</td><td colspan="2">Hoch</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Repräsenta-tionsformen</td><td colspan="2">Eine</td><td colspan="2">Integration</td><td colspan="2">Transformation</td></tr>
</table>

Tab. 12: Kategorien und Ausprägungen der Aufgabenanalyse angepasst nach Maier et al. (2010)

rechte zu A und B senkrecht durch die Mitte der Strecke $\overline{AB}$ verläuft, in Abgrenzung zum Wissen, wie die Mittelsenkrechte konstruiert wird (prozedurales Wissen). Unter konzeptuelles Wissen fallen Erklärungen und Hintergründe für diverse Zusammenhänge, Definitionen und auch Konstruktionen, z. B: eine Erklärung dafür, warum mithilfe zweier sich schneidender Kreise eine Mittelsenkrechte gezeichnet werden kann und welche Eigenschaften die Kreise dafür haben müssen. Die Übergänge von Faktenwissen zu anderen Wissensbereichen, insbesondere zum konzeptuellen Wissen sind sicher fließend. Die Widergabe einer Definition der Mittelsenkrechten macht die Schwierigkeit der Einordung deutlich. Wird die Definition wie auch in den Ausführungen zur Mittelsenkrechte in Kapitel 1 stets mit dem dahinterliegenden Ortslinien-Konzept gefasst, sollte die Definition zum konzeptuellen Wissen gezählt werden, wie es auch in der Tabelle zu den Wissenselementen der Mittelsenkrechte gemacht wird. Im Test hingegen führt eine Widergabe der gelernten Definition zur vollen Punktzahl. Die Anwendung konzeptuellen Wissens ist wünschenswert, die Widergabe erlernter Fakten jedoch ausreichend und beides ist im Test nicht voneinander zu unterschieden, daher wird die Widergabe der Definition in die Ausprägung Fakten eingeordnet. Anders wird die Situation bewertet, wenn das Ortslinien-Konzept der Mittelsenkrechten stärker fokussiert wird. An dieser Stelle wird daher festgelegt, dass eine Aufgabe, die eine Verknüpfungen zum Ortslinien-Konzept der Mittelsenkrechte angeregt bzw. ermöglicht, wie beispielsweise die Erklärung der Eigenschaften, die die Punkte auf der Mittelsenkrechten innehaben, in die Ausprägung konzeptuelles Wissen zugeordnet wird. Mit Metakognition wird das Wissen über das eigene Wissen und den eigenen Lernprozess bezeichnet. Dieser Bereich kann durch die Tests kaum erfasst werden, denn es werden mathematische Kompetenzen zur Mittelsenkrechten fokussiert.

In der Dimension kognitiver Prozess kann schon eher eine hierarchische Abstufung erkannt werden, gleichwohl ist diese fragwürdig und sicherlich nicht trennscharf. Bei der konkreten Einordnung wird zunächst unterschieden zwischen Reproduktion, also Wiedergabe von Gelerntem, das entspricht einem Abrufen aus dem Langzeitgedächtnis, und Transfer, der Anwendung von Gelerntem. Erst im Anschluss wird ggf. die Ausdehnung des Transfers in nah, weit oder Problemlösen unterschieden. Zur Reproduktion kann die Wiedergabe einer Definition gezählt werden, zum Beispiel die der Mittelsenkrechten. Ein naher Transfer liegt vor, wenn die Definition beispielsweise auf eine Aufgabe angewendet wird, die nur geringfügig von bekannten Aufgabenstellungen abweicht. Ist hingegen eine neuartige Situation gegeben und die Anwendung der Definition nicht sofort ersichtlich, so wird ein weiter Transfer kategorisiert. Unter der Ausprägung Problemlösen wird speziell kreatives Problemlösen verstanden. Dies ist dadurch charakterisiert, dass bei der Erstellung der Lösung neues Wissen kreativ erschaffen wird. Dies kann durch die Kombination von bereits Bekanntem geschehen. Als Einteilungshilfe kann dienen, dass für den weiten Transfer und das Problemlösen die notwendigen Definitionen und Begriffe implizit erkannt werden müssen (vgl. Maier et al. 2010, S. 7).

Zur Bewertung der Wissenseinheiten (WE) können die Überlegungen aus den Bewertungsgrundlagen genutzt werden. Anhand dieser können die nötigen Lösungsschritte abgezählt werden. Diese Anzahl kann als Wert der Wissenseinheit übernommen werden (vgl. Maier et al. 2010, S. 7). Unter eine WE werden Aufgaben kategorisiert, in denen eine Definition angegeben oder ein Begriff erklärt oder eine Konstruktion angewendet werden soll. Sobald eine Kombination von zwei Wissensbereichen, wie Faktenwissen und konzeptuellen Wissen erforderlich ist, wird die Aufgabe mit bis zu 4 WE eingeordnet. Mehr als 4 WE kann auch als Wiedergabe reiner Fakten erfolgen Die kommt bei der Auswertung der Testaufgaben nicht vor, daher werden hier die Anzahlen der Lösungsschritte ausschlaggebend sein.

Die Offenheit einer Aufgabenstellung setzt sich zusammen aus den Eigenschaften definiert/ungenau und konvergent/divergent. Unter einer definierten Aufgabenstellung wird ein eindeutiger Arbeitsauftrag wie z. B. Gib eine Definition für die Mittelsenrechte an, verstanden. Im Gegensatz dazu wird bei einer ungenauen Aufgabenstellung kein klarer Arbeitsauftrag gestellt. Bei konvergenten Aufgaben ist genau eine Lösung gesucht, während bei divergenten Aufgaben mehrere Lösungen möglich bzw. gefragt sind.

Enthält die Aufgabenstellung keinen Lebensweltbezug, wird sie auch als innermathematisch bezeichnet. Am anderen Ende kann die Modellierungsaufgabe mit einem realen Kontext angeordnet werden.

Für die Dimension sprachliche Komplexität wird in Anlehnung an Jordan et al. (2006) auf strukturelle Zusammenhänge der Sprache fokussiert. Die Verwendung von Fachbegriffen wie konstruiere wird dabei nicht berücksichtigt. Eine Aufgabe, die keinen oder kaum Text enthält wird als einfach bezüglich ihrer sprachlichen Komplexität kategorisiert. Kommen überflüssige Informationen hinzu oder entspricht die Reihenfolge der Informationen nicht den Bearbeitungsschritten wird dies als mittlere sprachliche Komplexität festgelegt. Bei komplexen Satzgefügen, die logische Aussagen beinhalten, wie z. B. doppelte Verneinungen oder wenn-Dann Aussagen werden mit einer hohen sprachlichen Komplexität eingestuft.

Die Einteilung der Repräsentationsformen erfolgt mit der Beantwortung zweier Fragen: „In welcher Form wird das benötigte Wissen in der Aufgabenstellung dem Lernenden repräsentiert?“ und „In welcher Repräsentationsform wird die Lösung erstellt?“. Wenn kein Wechsel der Repräsentation nötig ist, wie beispielsweise bei reinen Rechenaufgaben, wird der Aufgabe die Ausprägung eine Repräsentationsform zugeordnet. Werden darüberhinausgehende Wissensbereiche oder Anforderungen benötigt, wird die zweite Ausprägung kategorisiert. Dies kann der Fall sein, wenn in der Aufgabenstellung zwei Repräsentationsformen, wie Text und Zeichnung, enthalten sind oder aber wenn die Lösung in einer anderen Repräsentationsform anzugeben ist als die in der Aufgabenstellung verwendete. Für geometrische Aufgaben wird mit der Beantwortung der beiden Fragen deutlich, dass diese nur dann mit eine Repräsentationsform bezeichnet werden, wenn Text und Zeichnung nicht gemeinsam in einer Aufgabenstellung verwendet werden. Dabei gilt bereits eine gedankliche Nutzung der Zeichnung als verwendet. Bei der Aufgabenstellung „Gib eine Definition der Mittelsenkrechten an“, ist davon auszugehen, dass bei der Antwort in Textform auf Wissensbereiche in zeichnerischer Form zurückgegriffen wird. Damit wird die Ausprägung eine Repräsentationsform für alle Testaufgaben ausgeschlossen. Bei der letzten Stufe der Repräsentation muss bei der Aufgabenlösung ein Transfer auf eine weitere Repräsentationsform nötig sein, wie beispielsweise bei der Aufgabe: Stelle den folgenden Term bildlich dar.

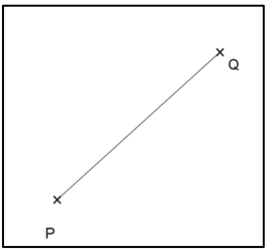
9.1.4.2 Aufgabe 2./3.1 – Gib eine Definition an.

a) didaktischer Kommentar und Lösung zu 2./3.1: In der ersten Teilaufgabe werden grundlegende Fertigkeiten rund um die Mittelsenkrechte abgefragt. Dazu zählen Definition (Teilaufgabe a) und Eigenschaften (Teilaufgabe c), sowie die Konstruktion mit Zirkel und Lineal (Teilaufgabe b). Die Aufgabenstellung in Test 2 und Test 3 ist weitestgehend identisch. Unterschiede sind lediglich in der Lage der Punkte P und Q gemacht worden (vgl. Abb. 18), so dass weitere Ausführungen sich auf beide Testdurchführungen beziehen.

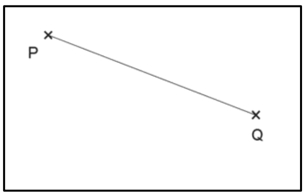
Aufgabe 1

a) Was ist die Mittelsenkrechte? Gib eine Definition an.

b) Konstruiere die Mittelsenkrechte zu der Strecke $\overline{PQ}$. Zeichne alle Hilfslinien ein.



Abbildungsvariante aus Test 2



Abbildungsvariante aus Test 3

c) Welche Eigenschaften haben alle Punkte, die auf der Mittelsenkrechten liegen? **Erkläre**.

Abb. 18: Aufgabenstellung 1 für die Tests 2 und 3. Die Wortlaute sind in beiden Testungen gleich, die Abbildungen unterscheiden sich.

Für die Mittelsenkrechte können je nach Perspektive und Schwerpunktsetzung verschiedene Definitionsvarianten gefunden werden (vgl. Tab. 6, sowie Kapitel 5). Für den Aufgabenteil a) ist eine richtige Definition anzugeben. Dies kann sich auf das Ortslinienkonzept beziehen oder aus einer Konstruktionsbeschreibung bestehen. Bei b) ist eine Konstruktion der Mittelsenkrechten mit Zirkel und Lineal durchzuführen (Definition D, vgl. Abschnitt 5.1 und Tab. 6). Es sollten alle Hilfslinien (hier zwei sich schneidende Kreisbögen) erkennbar sein. Der rechte Winkel kann als Maß der Genauigkeit für das Zeichnen dienen. In der Teilaufgabe c) wird nach einer Eigenschaft, die die Punkte auf der Mittelsenkrechten innehaben, gefragt. Hier kann genannt werden, dass alle Punkte auf einer Mittelsenkrechten den gleichen Abstand zu den beiden Streckenendpunkten besitzen. Dies kann ggf. eine Dopplung der Antwort zur Teilaufgabe a) beinhalten. Das ist von der zuvor angegebenen Definition abhängig.

b) Vorgehensweisen beim Lösen zu 2./3.1: Für die Schülerinnen und Schüler stellt diese Aufgabe eine Abfrage der im Unterricht thematisierten Lerninhalte zur Mittelsenkrechten dar.

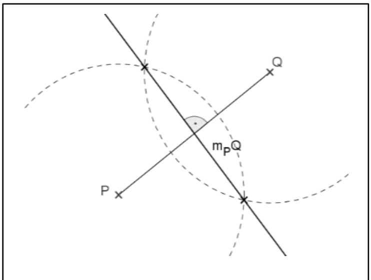


Abb. 19: Lösungsvorschlag zur Teilaufgabe 1b)

Für die Bewertung ist es hilfreich die wörtlichen Festlegungen aus dem Unterricht zu kennen. Es werden die genauen Wortlaute in beiden Interventionen als schriftliche Hefteintragung genannt. Zu Teilaufgabe a) wurde als Definition an der Tafel bzw. am Overheadprojektor notiert:

„Zwei Punkte A und B sind gegeben und es sind alle Punkte gesucht, die den gleichen Abstand zu A und auch zu B haben, dann befinden sich die gesuchten Punkte auf der Senkrechten durch die Mitte der Strecke $\overline{AB}$*.*

Diese Gerade heißt Mittelsenkrechte zur Strecke $\overline{AB}$.“ (Elemente der Mathematik 7, 2007, S. 224).

Zu Teilaufgabe b) sollte ein ähnliches Bild zu dem folgenden in jedem Lernendenheft zu finden sein:

Für die Teilaufgabe c) kann auf folgenden Satz verwiesen werden: *„Wenn ein Punkt auf der Mittelsenkrechten zur Strecke $\overline{AB}$ liegt, hat er den gleichen Abstand zu dem Punkt A und zu dem Punkt B.“* (Elemente der Mathematik 7, 2007, S. 224).

Eine mögliche Schwierigkeit beim Lösen der Aufgabe 1 kann für die Schülerinnen und Schüler in der exakten und damit mathematisch korrekten Formulierung der Definition liegen. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn eigenständige Formulierungen notiert werden. Ein exaktes Zeichnen ist bei der Konstruktion erfordert. Erfahrungsgemäß fällt dies einigen Lernenden schwer.

c) Bewertungsgrundlage der Lösungen zu 2./3.1: Die Teilaufgaben a) bis c) werden nacheinander betrachtet.

Bewertungsaspekte der Teilaufgabe a):

Bewertungsaspekte	Mögliche Antworten
Wissen zur Mittelsenkrechten	Definition der Mittelsenkrechten wird genannt, z. B.: *Die Mittelsenkrechte einer Strecke $\overline{AB}$ enthält genau die Punkte P, die jeweils von A und B dieselbe Entfernung haben.*
Sprachlich korrekte Formulierung	Grammatik und Rechtschreibung wird nicht bewertet. Die Formulierung im mathematischen Sinn muss jedoch eindeutig und richtig sein.

Bewertungsaspekte der Teilaufgabe b):

Bewertungsaspekte	Mögliche Arbeitsschritte
Konstruktionsschritte	Zwei Kreisbögen mit gleichem Radius sind eingezeichnet.
Konstruktionsschritte	Die Mittelsenkrechte ist als Gerade durch die beiden Kreisschnittpunkte eingezeichnet.

Konstruktions-schritte	Rechter Winkel und Beschriftung der Mittelsenkrechten wurden vorgenommen.

Bewertungsaspekte der Teilaufgabe c):

Bewertungsaspekte	Mögliche Antworten
Eigenschaften der Mittelsenkrechte	Alle Punkte auf der Mittelsenkrechten zur Strecke $\overline{PQ}$ sind gleich weit von P und Q entfernt.

d) Einordnung der Aufgabe 2./3.1:

In den drei Aufgabenteilen werden verschiedene Wissensarten angesprochen. Im Aufgabenteil a) wird eine Definition der Mittelsenkrechten gefordert. Eine Widergabe erlernter Fakten kann nicht von dem Verständnis des dahinterliegenden Konzeptes unterschieden werden. Die Aufgaben wird nach den obigen Festlegungen in die Ausprägung Fakten eingeordnet. In Aufgabenteil b) wird das Handwerk der Konstruktion verlangt, dies zählt zum prozeduralen Wissen (vgl. Tab. 6). Die Teilaufgabe c) fokussiert auf den Satz über die Mittelsenkrechte und regt somit ein Verständnis des Ortslinienkonzeptes an (vgl. Abb. 8 in Tab. 6). Mit den obigen Festlegungen zur Einordnung wird die Ausprägung konzeptuelles Wissen vorgenommen.

<table>
<tr><th></th><th>Dimension</th><th colspan="6">Ausprägungen</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Wissensart</td><td>Fakten[a)]</td><td colspan="2">Prozeduren[b)]</td><td colspan="2">Konzepte[c)]</td><td>Metakognition</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Kognitiver Prozess</td><td>Reproduktion</td><td colspan="2">Naher Transfer</td><td colspan="2">Weiter Transfer</td><td>Problemlösen</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Wissenseinheiten</td><td colspan="2">Eine Wissenseinheit</td><td colspan="2">Bis zu 4 Wissenseinheiten</td><td colspan="2">Mehr als 4 Wissenseinheiten</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Offenheit</td><td colspan="2">Definiert/ konvergent</td><td colspan="2">Definiert/ divergent</td><td colspan="2">Ungenau/ divergent</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Lebensweltbezug</td><td>Kein</td><td colspan="2">Konstruiert</td><td colspan="2">Authentisch</td><td>Real</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Sprachlogische Kompl.</td><td colspan="2">Niedrig</td><td colspan="2">Mittel</td><td colspan="2">Hoch</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Repräsentationsformen</td><td colspan="2">Eine</td><td colspan="2">Integration</td><td colspan="2">Transformation</td></tr>
</table>

Tab. 13: Ausprägungen der Dimensionen für die Aufgabe 1 aus Test 2 und 3. Bei den Wissensarten wird für die drei Teilaufgaben differenziert. Bei a) wird Faktenwissen, bei b) prozedurales Wissen und bei c) konzeptuelles Wissen abgefragt.

Da die Antworten der Aufgaben alle in der Unterrichtseinheit zur Mittelsenkrechte schriftlich festgehalten wurden, handelt es sich hierbei um eine Reproduktionsaufgabe. In jeder Teilaufgabe wird eine Wissenseinheit verwendet. Daraus ergeben sich für die gesamte Aufgabe ***bis zu 4 WE***.

Die Aufgabenstellung ist konkret und eindeutig formuliert (definiert und konvergent). Ein Lebensweltbezug liegt nicht vor. Die Sprache ist wenig komplex. Für die Teilaufgaben a) und b) werden sprachliche und bildliche Darstellungen verwendet, daher sind verschiedene Repräsentationsformen integriert. In Teilaufgabe c) kann auf die Abbildung aus Teilaufgabe b) zurückgegriffen werden, insofern ist auch keine Transformation verschiedener Darstellungen erforderlich.

9.1.4.3 Aufgabe 2./3.2 – Ein Punkt P ist gesucht

a) didaktischer Kommentar und Lösung zu 2./3.2: Die Aufgabenstellung ist in Anlehnung an die Aufgabe 16 „Punkt gesucht“ aus den Vergleichsarbeiten am Ende der Klasse 8 aus dem Jahr 2012 entstanden (vgl. Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen 2012, S. 13). Die Teilaufgabe a) wurde sprachlich abgeändert, sodass einfachere Hauptsatzstrukturen entstehen. Zusätzlich wurde die Lage der Punkte so verändert, dass die Mittelsenkrechte nicht wie in der ursprünglichen Aufgabe senkrecht zur x-Achse und auf einem der Kästchengitter, sondern diagonal durch die Kästchengitter verläuft. Die Teilaufgabe b) wurde ebenfalls umformuliert und bezieht sich nun nicht mehr nur auf einen weiteren Spezialfall, sondern regt das eigenständige Finden von weiteren Fällen der Lagebeziehung zwischen Gerade und Kreis bzw. zwischen Gerade und Gerade an. Für Test 2 und Test 3 sind verschiedene Abwandlungen vorgenommen worden, sodass die Aufgaben nun nacheinander betrachtet und diskutiert werden. Zunächst zur Aufgabe 2.2 aus dem Test 2: Der gesuchte Punkt P sollte sich als Schnittpunkt aus der Mittelsenkrechten zur Strecke $\overline{AB}$ und dem Kreis um D mit dem Radius von zwei Längeneinheiten ergeben. Durch die Aufgabenmodifikation entsteht kein Schnittpunkt; anders war es der Fall bei der ursprünglichen Vera-8-Aufgabe. Dazu wird eine Erklärung gefordert. In Teilaufgabe b) wird in der ursprünglichen Vera-8-Version der Spezialfall gesucht, d. h. ge-

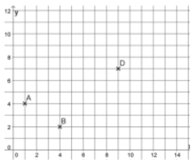
sucht ist eine Längeneinheit d so, „dass es **keinen** solchen Punkt P gibt.“ (IQB 2012, S. 52, Hervorh. im Original). Dies wurde

Aufgabe 2 – Test 2

a) Gegeben sind die Punkte A, B und D in dem obigen Koordinatensystem.
Gesucht ist ein Punkt P mit den folgenden Eigenschaften:
1. Der Punkt P hat von den Punkten A und B den gleichen Abstand.
2. Der Punkt P hat von dem Punkt D den Abstand d von 2 Längeneinheiten.

Konstruiere mit Zirkel und Lineal einen Punkt P und erkläre das Ergebnis.

b) Verändere den gegebenen Abstand d (2 Längeneinheiten). Welche unterschiedlichen Fälle gibt es?



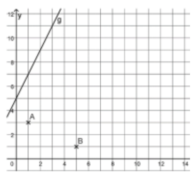
Eine Längeneinheit entspricht einem Kästchen.

Aufgabe 2 – Test 3

a) In dem obigen Koordinatensystem sind die Punkte A und B und die Gerade g gegeben.
Gesucht ist ein Punkt P mit den folgenden Eigenschaften:
1. Der Punkt P hat von den Punkten A und B den gleichen Abstand.
2. Der Punkt P liegt auf der Geraden g.

Konstruiere mit Zirkel und Lineal einen Punkt P und erkläre das Ergebnis.

b) Betrachte weiterhin den oben gesuchten Punkt P. Verschiebe die Geraden g. Welche unterschiedlichen Fälle gibt es?



Eine Längeneinheit entspricht einem Kästchen.

Abb. 20: Aufgabenvarianten der Aufgabe 2 für Test 2 und Test 3.Die Abbildungen sind hier stark verkleinert.

nun bereits in Teilaufgabe a) thematisiert, sodass in Teilaufgabe b) die weiteren beiden Fälle erfragt werden. Es bleiben die Fälle ein Schnittpunkt und zwei Schnittpunkte zu betrachten. Der fehlende Schnittpunkt in a) kann als indirekter Hinweis und Gedankenanstoß für die Teilaufgabe b) dienen und dazu anregen den Kreisradius zu verändern.

In der Aufgabenvariation aus Test$_3$ werden andere Eigenschaften des gesuchten Punktes vorgegeben. Anstelle des dritten Punktes D ist eine Gerade g vorgeben. Der gesuchte Punkt P ergibt sich aus dem Schnittpunkt der Geraden g mit der Mittelsenkrechten zur Strecke $\overline{AB}$. Beide Geraden verlaufen parallel, so dass es auch hier keinen Schnittpunkt als Lösung gibt. Das bleibt vergleichbar zu Test 2. Es muss interpretiert werden, dass zum Beispiel die Lage der Geraden g gedanklich verschoben wird. Möglich ist eine Parallelverschiebung, so dass die Gerade g auf der Mittelsenkrechten zu $\overline{AB}$ liegt und es somit unendlich viele Schnittpunkte gibt. Das ergibt den ersten Fall. Genau ein Schnittpunkt ergibt sich, wenn nicht der y-Achsenabschnitt der Geraden g verändert wird, sondern ihre Steigung. Die Gerade wird gedanklich „gekippt“, sodass ein Schnittpunkt mit der Mittelsenkrechten zur Strecke $\overline{AB}$ entsteht.

b) Vorgehensweisen beim Lösen zu 2./3.2: In Test 2 und Aufgabenteil a) können die geforderten Eigenschaften 1. und 2. für den gesuchten Punkt nacheinander abgearbeitet werden. Dies kann als Vorwärtsarbeiten oder als Zerlegung in (durch die Aufgabenstellung stark vorstrukturierte) Teilprobleme angesehen werden. Dabei müssen die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass die erste Eigenschaft mithilfe der Mittelsenkrechten zur Strecke $\overline{AB}$ umgesetzt werden kann. Die zweite Eigenschaft erfordert das Einzeichnen eines Kreises um D mit dem Radius von zwei Längeneinheiten. Als letztes müsste der Schnittpunkt von Mittelsenkrechter und Kreis als Punkt mit den gesuchten

Eigenschaften interpretiert werden. Für die Schülerinnen und Schüler ist es sicherlich verwunderlich, dass sich kein Schnittpunkt ergibt. Aufgabenstellungen, die nicht zu einer Lösung führen, kommen im Regelunterricht eher selten vor. Daher könnte ein möglicher Fehler darin liegen, doch einen Schnittpunkt erzeugen zu wollen, in dem die Lage der Mittelsenkrechten zu $\overline{AB}$ verändert wird. Dann ist diese neue Gerade jedoch nicht mehr Mittelsenkrechte zur Strecke $\overline{AB}$ und erfüllt somit nicht die geforderte Eigenschaft 1. Ein anderer Fehler könnte darin liegen, anstelle von zwei Längeneinheiten 2 cm einzuzeichnen. Damit ergibt sich ein Schnittpunkt zwischen Kreis und Gerade. Im Aufgabenteil b) müsste dann entsprechend kein Schnittpunkt und ein Schnittpunkt genannt werden und als Folgefehler als richtig bewertet werden.

In Aufgabenteil b) deutet die Formulierung bereits daraufhin, dass es mehr als einen weiteren Fall gibt. Dies soll für die Schülerinnen und Schüler als Hilfestellung dienen, da sie bisher wahrscheinlich nur selten Fallunterscheidungen kennengelernt haben. Hier muss erkannt werden, dass die Lage der Mittelsenkrechten nicht verändert werden kann und nur die Veränderung der Längeneinheit d zu Lösungen führt.

Um eine Vergleichbarkeit von Test 3 zu Test 2 zu gewährleisten, wurde darauf geachtet, dass ein ähnliches Vorgehen und ähnliche Gedankengänge zielführend sind. Auch hier gilt also: Im Aufgabenteil a) können die geforderten Eigenschaften 1. und 2. für den gesuchten Punkt nacheinander abgearbeitet werden. Dies kann als Vorwärtsarbeiten oder als Zerlegung in (durch die Aufgabenstellung stark vorstrukturierte) Teilprobleme angesehen werden. Dabei müssen die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass die erste Eigenschaft mithilfe der Mittelsenkrechten zur Strecke $\overline{AB}$ umgesetzt werden kann. Die zweite Eigenschaft ist erfüllt, sobald der Punkt P auf der Geraden g liegt. Als letztes müsste der Schnittpunkt von Mittelsenkrechter und Gerader als Punkt mit den gesuchten Eigenschaften interpretiert werden. Es ergibt sich keinen Schnittpunkt und dies gilt es zu erklären. Für die Aufgabenstellung b) sind zwei weitere Fälle zu generieren, bei denen es zu einem Schnittpunkt zwischen den beiden Geraden kommt, ohne dabei die Mittelsenkrechte zu verändern. Die Gerade g wird verändert. Eine Gerade ist durch ihren y-Achsenabschnitt und ihre Steigung festgelegt. Eine Veränderung der Steigung oder des y-Achsenabschnittes erzeigt die beiden Fälle. Anders als bei der Veränderung des Kreisradius in Test 2 werden zwei verschiedene Parameter verändert, um Schnittpunkte erhalten zu können.

c) Bewertungsgrundlagen der Lösungen zu 2./3.2: In der Tabelle 2 sind die Lösungen des Test 2 und Test 3 einander gegenübergestellt. Es können ähnliche Bewertungsaspekte genannt werden.

Bewertungsaspekte der Aufgabe 2 im Überblick:

Bewertungsaspekte	Mögliche Lösungsschritte im Test 2	Mögliche Lösungsschritte im Test3
Verwendung der Mittelsenkrechten	Die Mittelsenkrechte zur Strecke $\overline{AB}$ wird eingezeichnet.	
Verwendung des Kreises	Es wird ein Kreis um D mit dem Radius von 2 Längeneinheiten eingezeichnet.	Zeichnerisch oder sprachlich wird deutlich, dass der Punkt P auf der Geraden g liegen muss.
Kein Schnittpunkt	Es gibt keinen Schnittpunkt von Kreis und Gerade, d. h. es gibt keinen Punkt mit den gesuchten Eigenschaften.	Die Mittelsenkrechte verläuft parallel zu der Geraden g. Es gibt keinen Schnittpunkt der beiden Geraden und somit keinen Punkt P mit den gesuchten Eigenschaften.
Fallunterscheidung	Fall a) Es gibt einen Schnittpunkt, wenn der Kreis die Gerade berührt. Das ist der Fall für $d \approx 2\ cm$	Die Geraden dürfen nicht parallel verlaufen Fall a) Die Gerade g liegt auf der Mittelsenkrechten

	Fall b) Es gibt zwei Schnittpunkte, wenn der Kreis die Gerade schneidet. Das ist der Fall für $d > 2\ cm$	(Parallelverschiebung der Geraden g) Fall b) Die Gerade g schneidet die Mittelsenkrechte (Veränderung der Steigung der Geraden).

Trotz der Unterschiede in der Aufgabenstellung wird durch die Bewertungsgrundlagen deutlich, dass die Anforderungen in beiden Versionen der Aufgabe vergleichbar sind.

d) Einordnung der Aufgabe 2./3.2:

Da die Aufgabenvariationen aus **Test 2 und Test 3** in Ihren Anforderungen an die Schülerinnen und Schüler vergleichbar sind, wird nicht zwischen den beiden Aufgabenvarianten unterschieden.

<table>
<tr><th></th><th>Dimension</th><th colspan="6">Ausprägungen</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Wissensart</td><td>Fakten</td><td colspan="2">Prozeduren
a) und b)</td><td colspan="2">Konzepte [a)]
und b)</td><td>Metakognition</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Kognitiver Prozess</td><td>Reproduktion</td><td colspan="2">Naher Transfer[a)]</td><td colspan="2">Weiter Transfer</td><td>Problemlösen[b)]</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Wissenseinheiten</td><td colspan="2">Eine Wissenseinheit</td><td colspan="2">Bis zu 4 Wissenseinheiten</td><td colspan="2">Mehr als 4 Wissenseinheiten</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Offenheit</td><td colspan="2">Definiert/ Konvergent[a)]</td><td colspan="2">Definiert/ Divergent[b)]</td><td colspan="2">Ungenau/ divergent</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Lebensweltbezug</td><td>Kein</td><td colspan="2">Konstruiert</td><td colspan="2">Authentisch</td><td>Real</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Sprachlogische Kompl.</td><td colspan="2">Niedrig</td><td colspan="2">Mittel</td><td colspan="2">Hoch</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Repräsentationsformen</td><td colspan="2">Eine</td><td colspan="2">Integration</td><td colspan="2">Transformation</td></tr>
</table>

Tab. 14: Ausprägungen der Dimensionen für die Aufgabe 2 aus Test 2 und 3. Es wird für die Teilaufgaben a) und b)eingeordnet.

Um die Aufgabe 2 lösen zu können, wird konzeptuelles Wissen zur Mittelsenkrechten und zum Kreis bzw. zur Geraden sowie prozedurales Wissen zur Konstruktion der Mittelsenkrechten mit Zirkel und Lineal benötigt. Für den Aufgabeteil a) müssen bereits bekannte Definitionen, Konzepte und Prozeduren miteinander verknüpft und in einer neuen, lediglich gering veränderten Situation angewendet werden. Im Unterricht wurden ähnliche Aufgabensituationen behandelt, zum Beispiel mit der Übungsaufgabe 5.1 (vgl. Kapitel 8). In den VERA-8-Kommentaren wird die Aufgabe in den Bereich Problemlösen eingeordnet. Aufgrund des gezielten Einsatzes am Ende der Unterrichtseinheit zur Mittelsenkrechte und der vorangegangenen Aufgaben 1, die genau die Definitionen zur Mittelsenkrechte erfragt, wird eine Benutzung der Mittelsenkrechten nahegelegt. Somit wird die Hürde für die Schülerinnen und Schüler deutlich herabgesetzt und die Aufgabenstellung wird als naher Transfer eingeordnet. Für den Aufgabenteil b) ist zusätzlich ein strategisches Vorgehen notwendig, um die Fallunterscheidungen zu erlangen. Dies ist für die Schülerinnen und Schüler der siebten Klasse ungewohnt und wurde auch nicht in den Unterrichtseinheiten zur Mittelsenkrechten thematisiert, daher fällt dieser Aufgabenteil unter die Ausprägung Problemlösen.

Die Aufgabe 2 fordert insgesamt mehr als vier Wissenseinheiten. Es können für jeden Aufgabenteil in den Bewertungsgrundlagen vier Wissenseinheiten erkannt werden. Der Aufgabenteil a) ist definiert und konvergent, da es genau eine Lösung gibt. Für b) sind verschiedene Lösungen denkbar, daher wird der Aufgabenteil als definiert und divergent eingestuft. Es gibt keinen Lebensweltbezug. Der sprachlogische Aufbau des Textes ist wenig komplex. Es werden einfache Hauptsätze ohne Nebensätze verwendet. Bildliche und sprachliche Darstellungen finden in den Aufgabenstellungen und in den Lösungsanforderungen Verwendung. Bei der Anwendung des Ortslinien-Konzeptes zur Mittelsenkrechten ist auch eine Transformation von Bild zu Sprache notwendig (Aufgabenteil b).

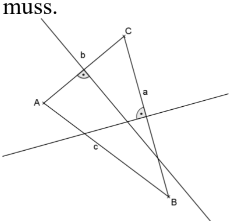
Eine Schwierigkeit der Aufgabe liegt darin, dass der gesuchte Punkt P in Aufgabenteil a) nicht existiert. Dies fließt bei der Einordnung in das Kategoriensystem kaum ein.

9.1.4.4 Aufgabe 2./3.3 – Argumentation Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten im Dreieck

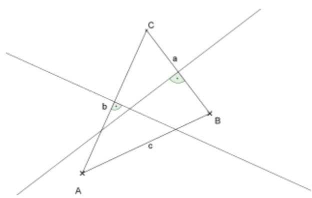
a) didaktischer Kommentar und Lösung zu 2./3.3: Diese Aufgabe hat den Umkreismittelpunktsatz in Dreiecken zum Inhalt. Ausgehend von einem Dreieck werden die Mittelsenkrechten zu zwei Dreiecksseiten eingezeichnet. Dabei entsteht die in der Aufgabe thematisierte Situation. Zwei Mittelsenkrechten schneiden sich in einem Punkt. Die Aufgabenstellung aus den Versionen von Test 2 und Test$_3$ unterscheiden sich lediglich in der Abbildung (vgl. Abb. 21). Das vorgegebene Dreieck ist verändert (es erscheint fast gespiegelt). In beiden Fällen handelt es sich um ein spitzwinkliges Dreieck und die Mittelsenkrechten zu den Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ sind bereits eingezeichnet. Die weiteren Ausführungen können aufgrund der geringen Unterschiede für beide Auswertungen herangezogen werden.

Aufgabe 3

Aus dem Mathematikunterricht weißt du, dass sich die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks in genau einem Punkt schneiden. Dies gilt für jedes Dreieck.
Es ist schnell erklärt, dass sich zwei Mittelsenkrechten in einem Punkt schneiden: Die beiden Mittelsenkrechten sind nicht parallel zueinander verlaufende Geraden. Daher müssen sie sich schneiden.
Aber warum verläuft auch die dritte Mittelsenkrechte genau durch diesen Schnittpunkt?
Erkläre möglichst ausführlich und verständlich, wieso in jedem beliebigen Dreieck auch die fehlende dritte Mittelsenkrechte durch den gemeinsamen Schnittpunkt der beiden anderen Mittelsenkrechten verlaufen muss.



Abbildungsvariante aus Test 2



Abbildungsvariante aus Test 3

Abb. 21: Aufgabenstellung 3 mit den Abbildungsvarianten für Test 2 und 3

Im Aufgabentext wird erläutert, dass dieser gemeinsame Schnittpunkt nicht verwunderlich sei, da beide Mittelsenkrechten offensichtlich nicht parallel zueinander verlaufen. Zu erklären bleibt, wieso die dritte Mittelsenkrechte eben auch durch diesen Schnittpunkt verläuft. Man könnte sich ebenso gut vorstellen, dass durch eine weitere nicht-parallele Gerade insgesamt drei Schnittpunkte zwischen den drei Mittelsenkrechten entstehen (vgl. Abschnitt 5.1). Solche theoretischen Überlegungen erfordern ein hohes Maß an Vorstellungskraft bei den Schülerinnen und Schülern. Die Abbildung des Beispieldreiecks in der Aufgabe soll dabei helfen mögliche Lagen einer dritten Geraden bzw. der Mittelsenkrechten auszuprobieren.

Ein möglicher Lösungsansatz erfolgt über die Definition der Mittelsenkrechten als geometrischer Ort (vgl. Definition B in Abschnitt 5.1): *Die Mittelsenkrechte einer Strecke $\overline{AB}$ enthält genau die Punkte P, die jeweils von A und B dieselbe Entfernung haben.*

Wendet man diese Definition zum Beispiel auf die beiden eingezeichneten Mittelsenkrechten zu den Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ an, folgt für den gemeinsamen Schnittpunkt *S*, dass dieser die gleiche Entfernung zu den Punkten *A, B* und *C* hat und somit liegt *S* laut Definition auf der dritten Mittelsenkrechten zur Strecke $\overline{AC}$ liegt.

b) Vorgehensweisen beim Lösen zu 2./3.3:

Den Schülerinnen und Schülern ist die Definition der Mittelsenkrechten als Ortslinie bekannt. Die Aufgabe legt ein Vorwärtsarbeiten nahe, d. h. ausgehend von den bisherigen eingezeichneten Objekten werden Schlussfolgerungen für weitere geometrische Objekt gezogen. Mögliche Fehler können in einer unsauberen bzw. nicht lückenlosen Argumentation liegen.

Alternativ ist es denkbar, dass die Schülerinnen und Schüler mithilfe des Dreiecksumkreises die Aufgabe lösen möchten. Der Umkreismittelpunktsatz wurde ebenfalls im Unterricht thematisiert und die Abbildung kann als Zwischenschritt zur Konstruktion des Umkreises aufgefasst werden und somit seine Verwendung nahelegen. Problematisch wird es, wenn die Lernenden die Aussage des Umkreismittelpunktsatz verwenden, denn eben diese soll hier begründet werden. Lösungen, in denen ein Kreis um den Schnittpunkt S der beiden Mittelsenkrechten m_{AB} und m_{AC} mit dem Radius $|\overline{SC}|=|\overline{SA}|$ verwendet wird, erfordern ebenfalls eine Begründung dafür, warum dieser Kreis auch durch den dritten Dreieckseckpunkt verläuft bzw. warum der Schnittpunkt Mittelpunkt des Dreiecksumkreises ist. Allein die Tatsache, dass der Kreis auch durch B verläuft, begründet den gesuchten Zusammenhang nicht. Diese logischen Schlüsse und Argumentationen sind für Schülerinnen und Schüler der siebten Klasse ungewohnt, teilweise neu. Daher liegen mögliche Fehler in einer nichtstringenten Argumentation oder in fehlerhaften logischen Schlussfolgerungen oder Zirkelschlüssen. Für diese Aufgabe werden recht hohe sprachliche Fähigkeiten gefordert. Dies gilt sowohl für das Verstehen als auch für die Formulierung der eigenen Antwort.

c) Bewertungsgrundlage der Lösungen zu 2./3.3:Das Wissen zur Mittelsenkrechten und zum Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten im Dreieck wird für die Lösung der Aufgabe im vergleichbaren Maße benötigt wie eine logisch stringente Argumentationsweise. Daher sollten die Bewertungsaspekte I) und II) gleichwertig zu den Bewertungsaspekten III) und IV) in die Bewertung einfließen.

Überblick der Bewertungsaspekte der Aufgabe 3:

	Bewertungs-aspekte	Mögliche Argumentationsschritte
I)	Wissen zur Mittelsenkrechten	Der Schnittpunkt von zwei Mittelsenkrechten ist gleich weit entfernt von allen drei Eckpunkten. Der Schnittpunkt ist Mittelpunkt des Umkreises.
II)	Wissen zur Mittelsenkrechten	Definition der Mittelsenkrechten wird genannt: *Die Mittelsenkrechte einer Strecke* $\overline{AB}$ *enthält genau die Punkte P, die jeweils von A und B dieselbe Entfernung haben.*
III)	Argumentation	Argumentationsgang: Ausgehend von den beiden eingezeichneten Mittelsenkrechten, wissen wir ….
IV)	Argumentation	Schlussfolgerung für die fehlende dritte Mittelsenkrechte: laut Definition, muss der Schnittpunkt S auch auf ihr liegen.

d) Einordnung der Aufgaben 2./3.3:

Es werden Erklärungen mithilfe der Definition der Mittelsenkrechten als Ortslinie indirekt gefordert und somit wird konzeptuelles Wissen zur Mittelsenkrechten benötigt (siehe Umkreismittelpunkt im Dreieck in Tab. 6). Prozedurales Wissen über die Konstruktion bzw. ein Verständnis davon, wieso die Konstruktion mithilfe zweier Kreise gelingt, kann für die Lösung der Aufgabe hilfreich sein (ist jedoch nicht erforderlich). Die grundsätzliche Lösungsidee wurde in beiden Interventionen im Unterricht thematisiert; in der darbietenden Intervention deutlich intensiver. Die Einordnung als Reproduktionsaufgabe von konzeptuellen Wissen wäre daher denkbar. Für eine Lösung der Aufgabe sind komplexe Argumentationen und ein Verständnis des Ortslinienkonzeptes sowie logischer Strukturen nötig. Aufgrund dieser Komplexität kann kaum durch reine Reproduktion eine gelungene Lösung hervorgebracht werden, ein Verständnis der zugrundeliegenden Konzepte wird vorausgesetzt. Die Aufgabe wird als Transferaufgabe eingeordnet. Für einen weiten

Transfer ist laut Kategoriensystem eine unbekannte, neue Situation nötig, dies ist hier insofern der Fall, da die dritte Mittelsenkrechte nicht eingezeichnet ist. Im Unterricht wurde gemeinsam mit den Lernenden die Argumentation dafür erörtert, dass sich alle drei Mittelsenkrechten im Dreieck in einem Punkt schneiden. Es kann auf diese Argumentation zurückgegriffen werden. Durch das Fehlen der dritten Mittelsenkrechte wird die Sichtweise auf eine bekannte und komplexe Argumentation gewechselt. Die Aufgabe wird in die Ausprägung weiter Transfer kategorisiert. Um die vollständige Argumentation schlüssig wiederzugeben, werden mehr als 4 WE benötigt.

<table>
<tr><th></th><th>Dimension</th><th colspan="6">Ausprägungen</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Wissensart</td><td>Fakten</td><td colspan="2">Prozeduren</td><td colspan="2">Konzepte</td><td>Metakognition</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Kognitiver Prozess</td><td>Reproduktion</td><td colspan="2">Naher Transfer</td><td colspan="2">Weiter Transfer</td><td>Problemlösen</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Wissenseinheiten</td><td colspan="2">Eine Wissenseinheit</td><td colspan="2">Bis zu 4 Wissenseinheiten</td><td colspan="2">Mehr als 4 Wissenseinheiten</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Offenheit</td><td colspan="2">Definiert/ konvergent</td><td colspan="2">Definiert/ divergent</td><td colspan="2">Ungenau/ divergent</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Lebensweltbezug</td><td>Kein</td><td colspan="2">Konstruiert</td><td colspan="2">Authentisch</td><td>Real</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Sprachlogische Kompl.</td><td colspan="2">Niedrig</td><td colspan="2">Mittel</td><td colspan="2">Hoch</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Repräsentationsformen</td><td colspan="2">Eine</td><td colspan="2">Integration</td><td colspan="2">Transformation</td></tr>
</table>

Tab. 15: Ausprägungen der Dimensionen für die Aufgabe 3 in Test 2 und 3

Die Aufgabenstellung ist wenig offen und fordert eine Argumentation mithilfe der Ortslinien-Definition der Mittelsenkrechten. Andere Zugänge führen nicht zu einer schlüssigen Argumentation. Es besteht kein Lebensweltbezug. Die Sprache hält ihre logische Reihenfolge ein. Es liegen Haupt- und Nebensatz-Konstruktionen vor. Die Argumentation mithilfe des Ortslinien-Konzeptes erfordert eine Transformation der zeichnerischen Gegebenheit in sprachliche Argumente.

9.1.4.5 Aufgabe 2./3.4 – Konstruiere den Kreismittelpunkt. Erkläre dein Vorgehen.

a) didaktischer Kommentar und Lösung zu 2./3.4: Es wird der Mittelpunkt eines gegebenen Kreises gesucht (vgl. Abb. 22). Dieser soll nicht geschätzt, sondern möglichst exakt konstruiert werden. Die Aufgabe 4 ist für beide Testvariationen (Test 2 und Test 3) identisch. Bei dieser Aufgabe kann die Strategie des Rückwärtsarbeitens bzw. Rückwärtsdenkens helfen. Wird der Kreis als Umkreis eines beliebigen Dreiecks interpretiert, so kann mithilfe des Umkreismittelpunktsatzes in Dreiecken der Mittelpunkt bestimmt werden. Dazu werden drei beliebige Punkte auf dem Kreisbogen markiert, z. B. A, B *und* C. Diese werden als Eckpunkte eines Dreiecks interpretiert. Als nächstes konstruiert man zwei Mittelsenkrechten zum Beispiel zu den Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$. Der entstehende Schnittpunkt entspricht dem Mittelpunkt des Kreises. Dieses folgt direkt mit dem Umkreismittelpunktsatz in Dreiecken.

Besondere Herausforderungen der Aufgabe: Die Aufgabenstellung bietet den Schülerinnen und Schülern eine Situation, bei der der Zielzustand, das Auffinden des Kreismittelpunktes, schnell erfasst werden kann. Die Lage des gesuchten Punktes ist den Schülerinnen und Schülern klar, so kann sicherlich jeder Lernende der 7. Klasse möglichst gut, per Augenmaß den Mittelpunkt eines Kreises einzeichnen. Das bietet einen großen Vorteil der Aufgabe, ohne viel Text und Vorüberlegungen, wird

Aufgabe 4

Gegeben ist ein Kreis. Konstruiere den Mittelpunkt M des Kreises.
Arbeite dabei so genau wie möglich und **erkläre** dein Vorgehen.

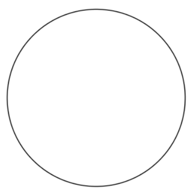


Abb. 22: Aufgabenstellung 4 ist in Test 2 und 3 identisch.

der gesuchte Endzustand für die meisten Lernenden schnell ersichtlich. Die Herausforderung liegt demnach nicht darin eine Lösung anzugeben, sondern eine möglichst exakte Lösung durch Konstruktion zu erzeugen und um dies erreichen zu können, werden Ideen und Konzepte benötigt.

Im Vergleich zu anderen Begründungsaufgaben bietet die Suche nach dem Kreismittelpunkt zunächst keine Anknüpfungsstellen. Dies ist bei Begründungsaufgaben nicht immer der Fall. So können bei der arithmetischen Aufgabe aus Brunner (2014, S. 21): „Die Summe 13 + 15+ 17 + 19 ist durch 8 teilbar. Gilt dies für jede Summe von vier aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen?“ zunächst Beispiele generiert werden und der Bearbeitende hat somit einen Zugang oder eine naheliegende Tätigkeit, die er ausführen kann. Es bleibt allein der Kreisbogen als Ausgangsgegenstand.

Zeitpunkt des Tests und Reihenfolge der Aufgabe haben sicherlich einen Einfluss, daher soll dies kurz herausgestellt werden. Im direkten Anschluss an die Unterrichtseinheit wird der Test als schriftliche Abfrage rund um das Thema der Mittelsenkrechten geschrieben. Die ersten drei Aufgabenstellungen zeigen einen deutlichen Bezug zur Mittelsenkrechten: Definition, Konstruktion Anwendung und Begründungen wurden hier bereits erfragt. Es ist daher naheliegend auch bei Aufgabe 4 das Konzept der Mittelenkrechten anzuwenden. Welche Verknüpfung des Kreisbogens zum Unterricht können die Kinder ziehen?

Der Kreis wurde ebenso bei der Konstruktion der Mittelsenkrechten verwendet, wie auch in Anwendungsaufgaben. Beide Verwendungen zielen auf die Ortslinien-Eigenschaft des Kreises ab. Auch als Umkreis von Dreiecken haben sie den Kreis kennengelernt. Dies geschah nach der Konstruktion dreier Mittelsenkrechten im Dreieck und der Begründung für einen gemeinsamen Schnittpunkt mithilfe der Ortslinien-Eigenschaften der Mittelsenkrechte. Es wurde folgender Merkhefteintrag festgehalten: „Der Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten ist gleich weit von den Eckpunkten des Dreiecks entfernt. Nimmt man diesen Abstand als Radius und den Schnittpunkt als Mittelpunkt kann ein Kreis gezeichnet werden, auf dem die drei Eckpunkte des Dreiecks liegen. Dieser Kreis heißt Umkreis des Dreiecks."

Es erscheint naheliegend, den gegebenen Kreis als Umkreis eines Dreiecks zu interpretieren. Gelingt dies nicht, wird die Aufgabenstellung zu einer Problemlöseaufgabe. Es ist davon auszugehen, dass die Schülerinnen und Schüler das Problem wie folgt weiter konkretisieren können: Der Mittelpunkt eines Kreises ergibt sich aus dem Schnittpunkt zweier Durchmesser. Wie kann ein Durchmesser möglichst exakt gefunden werden, wenn der Mittelpunkt nicht bekannt ist?

Eine andere mögliche Vorgehensweise kann in der Betrachtung der Eigenschaften des gesuchten Punktes liegen. So ist der Kreismittelpunkt gleich weit von allen Punkten auf dem Kreis entfernt. Um nun die Mittelsenkrechte als hilfreichen Begriff zu erkennen, ist es nötig, die Aussage *alle Punkte auf dem Kreisbogen sind gleich weit vom Mittelpunkt entfernt* so zu deuten, dass insbesondere zwei Punkte gleichweit vom Mittelpunkt entfernt sind. Ausgehend von zwei Punkten wissen wir dann, dass alle Punkte mit demselben Abstand zu diesen beiden Punkten auf der Mittelsenkrechten liegen. Diese Reduzierung der Aussage auf zwei Punkte erfordert Übung und Überblick im deduktiven Schlussfolgern. Das ist sicherlich sehr anspruchsvoll.

Damit wird deutlich: Wird der Kreis nicht als Umkreis identifiziert, ergibt sich daraus für den Lernenden eine deutlich größere Hürde und man könnte den Lösungsprozess als Problemlöseprozess bezeichnen (vgl. Abschnitt 2.3). Ein Gegenargument bildet der direkte Anschluss an die Unterrichtseinheit und die inhaltliche Nähe, die eine Verwendung der Mittelsenkrechten als offensichtlich erscheinen lassen. Zusätzlich kann die Anforderung bzw. Komplexität der Aufgabe durch die benötigtet Anzahl an Argumenten bis zur Lösungsfindung bewertet werden (vgl. Jahnke & Ufer 2015, S. 344). In beiden Fälle sind nur wenige Argumentationsschritte bis zum Auffinden des Mittelpunktes nötig, somit sind nur wenige plausible Zwischenschritte nötig und der Anspruch des Problems erscheint überschaubar (Wie schwer, diese Gedankengänge Schülerinnen und Schülern fallen, werden die ausgewerteten Antworten in einer späteren Analyse der Ergebnisse zeigen).

b) Vorgehensweisen beim Lösen: In dieser Aufgabe ist die Strategie des Rückwärtsarbeitens erforderlich. Der vorgegebene Kreis ist als Umkreis zu interpretieren, so dass ein innenliegendes Dreieck konstruiert wird. Den Schülern ist diese Art der rückwärtigen Betrachtung aus dem Unterricht nicht bekannt. Diesen Perspektivwechsel gilt es zu erlangen.

In einem alternativen Lösungsversuch wird der vorgegeben Kreis benutzt. Jedoch wird nicht konstruiert: Die Schüler zeichnen zwei möglichst lange Sekanten in den Kreis ein und den Schnittpunkt dieser beiden als Kreismittelpunkt festlegen. Diese Lösung ist offensichtlich von der Genauigkeit der Sekantenauswahl abhängig und kann nicht als Konstruktion des Mittelpunktes angesehen werden.

Anders sieht es aus, wenn durch zu den beiden Sekanten jeweils die Mittelsenkrechte konstruiert wird. Die Definition dient der Mittelsenkrechten als geometrischer Ort aller Punkte mit der gleichen Entfernung zu den Streckenendpunkten als abschließendes Argument. Da im Unterricht der Umkreismittelpunktsatz ausschließlich für das Dreieck thematisiert wurde, darf dieses Argument bei weiteren Vielecken bzw. Strecken nicht fehlen. Zusätzlich muss aus der Lösung erkenntlich werden, dass die gewählten Punkte auf dem Kreisbogen liegen.

c) Bewertungsgrundlage der Lösungen zu 2./3.4:

Verschiedene Gedankengänge führen zum Ergebnis. Drei mögliche Lösungswege werden bewertet. Die Lösungsargumentationen lassen sich jeweils in einander überführen. Aus Schülersicht ist dies nicht offensichtlich, daher werden hier drei separate Lösungsvorschläge für unterschiedliche Vorgehensweisen der Lernenden angegeben.

Bewertungsaspekte der Lösungsvariante I) Dreiecksumkreis:

Bewertungs-aspekte	Mögliche Argumentationsschritte
I)	Wähle drei beliebige Punkte auf dem Kreis.
II)	Verbinde de Punkte zu einem Dreieck. Der Kreis ist Umkreis des Dreiecks.
III)	Konstruiere die Mittelsenkrechte zu jeder Seite.
IV)	Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten gibt den Umkreismittelpunkt an. Dies folgt mit dem Umkreismittelpunktsatz in Dreiecken.

Bewertungsaspekte der Lösungsvariante IIa) Vieleckumkreis:

Bewertungs-aspekte	Mögliche Argumentationsschritte
I)	Wähle beliebige Punkte auf dem Kreis.
II)	Verbinde die Punkte zu einem Vieleck. Der Kreis ist Umkreis des Vielecks.
III)	Konstruiere die Mittelsenkrechte zu jeder Seite.
IV)	Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten gibt den Umkreismittelpunkt an. Begründung dieser Aussage: Da die gewählten Punkte alle auf dem Kreisbogen liegen, ist der gemeinsame Schnittpunkt der Mittelsenkrechten eben genau jener Punkt, der gleich weit von allen gewählten Punkten entfernt ist. Dies folgt mit der Mittelsenkrechten als geometrischer Ort.

Bewertungsaspekte der Lösungsvariante IIb) zwei Sekanten:

Bewertungsaspekte	Mögliche Argumentationsschritte
I)	Wähle zwei beliebige Punkte auf dem Kreis und verbinde sie miteinander.
II)	Konstruiere die Mittelsenkrechte zu der Strecke.
III)	Mach das gleiche noch einmal mit zwei weiteren beliebigen Punkten.
IV)	Der Schnittpunkt der beiden Mittelsenkrechten gibt den Punkt an, der gleich weit von allen vier Punkten auf dem Kreisbogen entfernt ist und ist somit der Mittelpunkt des Kreises.

Auch Lösungsansätze, die auf dem Inkreis eines Quadrates beruhen, können mathematisch zu tragefähigen Begründungen und Erzeugung des Kreismittelpunktes führen. Einzelne Lernende verwenden auch diesen Ansatz, z. B. P112, P217.

Diese Bewertungsgrundlage wird bei der Auswertung und bei der Kodierung durch den Zweitbegutachter durch weitere Lösungsansätze ergänzt. Das finale Kodierungshandbuch erhält insgesamt zehn Ansätze. Alle tragfähigen Ansätze sind bereits an dieser Stelle aufgeführt.

d) Einordnung der Aufgabe zu 2./3.4:

Es handelt sich um eine Konstruktionsaufgabe, daher wird prozedurales Wissen (z. B. Konstruktion der Mittelsenkrechten) benötigt. Um den richtigen Ansatz zu finden, werden mathematische Begriffskonzepte zur Mittelsenkrechten, zu Kreisen, zum Umkreismittelpunktsatz von Dreiecken benötigt (konzeptuelles Wissen). Die Aufgabenstellung ist den Schülerinnen und Schülern unbekannt. Es ist eine neue Situation, die sie zu lösen haben. Das benötigte Wissen ist den Schülerinnen und Schülern indirekt bekannt und muss durch Rückwärtsarbeiten und Kombinieren zusammengefügt werden. Es entsteht insofern neues

Wissen, dass die Lernenden einen Weg erarbeiten, wie zu einem gegebenen Kreis der Mittelpunkt konstruiert werden kann. Liegt der Fokus der Ausprägung Problemlösen auf dem Erschaffen neuen Wissens und der Kreativität, sollte die Zuordnung weiter Transfer vorgenommen werden. Dafür spricht auch, dass In Maiers Kategoriensystem festgelegt wird, dass das Wissen für einen weiten Transfer den Lernenden bekannt ist. Es muss herausgefiltert und sortiert werden.

Es werden mehr als vier Wissenseinheiten nötig (siehe Bewertungsteilaspekte). Die Aufgabenstellung ist deutlich und eindeutig. Es gibt keinen Lebensweltbezug und die sprachlichen Anforderungen sind eher gering. Doch durch die eingeforderte Erklärung sollte eine mittlere sprachliche Anforderung notiert werden. Die Erklärung fordert eine Transformation in der Repräsentationsform.

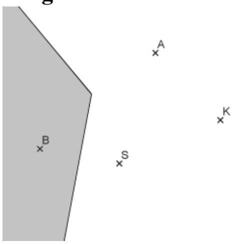
<table>
<tr><th></th><th>Dimension</th><th colspan="6">Ausprägungen</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Wissensart</td><td>Fakten</td><td colspan="2">Prozeduren</td><td colspan="2">Konzepte</td><td>Metakognition</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Kognitiver Prozess</td><td>Reproduktion</td><td colspan="2">Naher Transfer</td><td colspan="2">Weiter Transfer</td><td>Problemlösen</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Wissenseinheiten</td><td colspan="2">Eine Wissenseinheit</td><td colspan="2">Bis zu 4 Wissenseinheiten</td><td colspan="2">Mehr als 4 Wissenseinheiten</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Offenheit</td><td colspan="2">Definiert/ konvergent</td><td colspan="2">Definiert/ divergent</td><td colspan="2">Ungenau/ divergent</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Lebensweltbezug</td><td>Kein</td><td colspan="2">Konstruiert</td><td colspan="2">Authentisch</td><td>Real</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Sprachlogische Kompl.</td><td colspan="2">Niedrig</td><td colspan="2">Mittel</td><td colspan="2">Hoch</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Repräsentationsformen</td><td colspan="2">Eine</td><td colspan="2">Integration</td><td colspan="2">Transformation</td></tr>
</table>

Tab. 16: Ausprägungen der Dimensionen für die Aufgabe 4 in Test 2 und 3

9.1.4.6 Aufgabe 2./3.5 – Brunnenaufgabe mit verändertem Kontext

a) didaktischer Kommentar und Lösung zu 2./3.5: In dieser

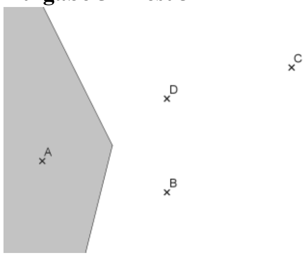
Aufgabe 5 - Test 2



Im Norden einer Großstadt gibt es vier Feuerwehrstandorte: Wache **A**ltenessen, Wache **B**orbeck, Wache **K**ray und Wache **S**tadtmitte. In einem Brandfall ist schnelle Hilfe nötig. Daher soll der Norden der Stadt nun in Gebiete eingeteilt werden, so dass stets die nächstgelegene Feuerwache alarmiert wird. Die Grenzen der Feuerwache Borbeck sind bereits eingezeichnet.

Zeichne die fehlenden Grenzen für die Feuerwachen **A**ltenessen, **K**ray und **S**tadtmitte ein.
Erkläre am Beispiel der Feuerwache **S**tadtmitte, wie du zu den Grenzen gekommen bist.

Aufgabe 5 - Test 3



In einer Stadt gibt es vier Grundschulen: Astrid-Lindgren-Schule, Barbaraschule, Cäcilienschule und Dürerschule. Die Schülerinnen und Schüler sollen einen möglichst kurzen Schulweg haben. Daher soll die Stadt in einzelne Schul-Einzugsgebiete eingeteilt werden, so dass jeder Schüler stets die nächstgelegene Schule besuchen kann. Die Grenzen für das Einzugsgebiet der Astrid-Lindgren-Schule sind bereits eingezeichnet.

Zeichne die fehlenden Grenzen für Barbaraschule, Cäcilienschule und Dürerschule ein.
Erkläre am Beispiel der Barbaraschule, wie du zu den Grenzen gekommen bist.

Abb. 23: Variationen der Brunnenaufgabe für Test 2 mit Standorten von Feuerwachen und für Test 3 mit Schuleinzugsgebieten.

Aufgabe wird die Mittelsenkrechte in einer Sachsituation verwendet. In der Aufgabenvariante aus Test 2 handelt es sich um die Gebietseinteilung von vier Feuerwehrwache in einer Großstadt. In der $Test_3$ -Variante bietet die Zuordnung zu vier Grundschulen den Rahmen der Sachsituation. In beiden Aufgabenvarianten wird eine bereits stark vereinfachte Abbildung zu der beschriebenen Problemsituation dargestellt. Es ist bereits ein Gebiet mit seinen Grenzmarkierungen eingezeichnet. Die weiteren Grenzeinteilungen sind von den Schülerinnen und Schülern vorzunehmen. Dies geschieht mithilfe der Mittelsenkrechten. Eine Schwierigkeit kann sich an den Schnittpunkten verschiedener Mittelsenkrechten ergeben. Diese müssen richtig interpretiert werden, so dass hier die Grenzen richtig fortgeführt werden. Für eine Beispielgrenzlinie sollen erklärende Worte ergänzt werden. Die Erklärung kann Hinweise darauf geben, in wie weit eine bewusste Anwendung der Mittelsenkrechten der Fall ist.

b) Vorgehensweisen beim Lösen zu 2./3.5: Anders als bei einem Einsatz dieser Aufgabe im Unterricht, ist den Schülerinnen und Schülern zu diesem Zeitpunkt (bei der Lernüberprüfung am Ende der Unterrichtseinheit) die Mittelsenkrechte bekannt. Auch aus dem Aufgabentext ergibt sich, die Verwendung des mathematischen Objekts der Mittelsenkrechte. Aus der Formulierung der „nächstgelegenen Feuerwache bzw. Schule“ kann darauf geschlossen werden, dass die Entfernung auf den Grenzlinien zu jeweils zwei der Standorte gleich ist. Für jeden Punkt auf der Grenzgeraden gilt demnach: Der Punkt hat die gleiche Entfernung zu den Standorten A und B. Und daraus kann auf die Verwendung der Mittelsenkrechten geschlossen werden.

Beim Lösen der Aufgabe ist es wichtig, den Überblick zu behalten bzw. die Mittelsenkrechten zu benennen. Arbeiten die Lernenden hier systematisch der Reihe nach und ziehen sofort Grenzlinien ein, ist dies sicher von Vorteil. Werden hingegen zunächst willkürlich Mittelsenkrechten eingezeichnet, verliert man schnell den Überblick und eine korrekte Grenzeinteilung wird kaum noch möglich.

Den Schülerinnen und Schülern, die den problemorientierten Unterrichtsansatz erhalten haben, ist eine analoge Aufgabe mit dem Sachkontext Brunnen und Schafherde bereits bekannt. Die Ähnlichkeiten sollten den Schülerinnen und Schülern auffallen. Für die Lernenden, die den klassischen Unterricht erlebt haben, ist die Aufgabenstellung in dieser Form neu.

c) Bewertungsgrundlage der Lösungen zu 2./3.5: Um zu einer Lösung zu gelangen, können die folgenden vier Lösungsschritte betrachtet werden. Hierbei wurden teilweise mehrere Teilschritte zu einem Lösungsschritt zusammengefasst.

Überblick der Bewertungsaspekte der Aufgabe 5:

Bewertungsaspekte	Mögliche Argumentationsschritte
Anwendung der Mittelsenkrechten	Es wird zeichnerisch oder auch sprachlich deutlich, dass die Mittelsenkrechten benötigt wird.
Mittelsenkrechten einzeichnen	Alle Mittelsenkrechten werden richtig eingezeichnet. Kleinere Ungenauigkeiten fallen nicht ins Gewicht.
Grenzen setzen	Die Grenzmarkierung sind richtig und deutlich eingezeichnet.
Erklärung	Mögliche Erklärung des eigenen Vorgehens: Die Mittelsenkrechte zu den Punkten S und K und die Mittelsenkrechte zu den Punkten A und S werden eingezeichnet. Auf ihnen liegen die Punkte, die gleich weit entfernt sind von S und K bzw. S und A. Die Grenze verläuft auf den Mittelsenkrechten bis zum Schnittpunkt.

d) Einordnung der Aufgaben zu 2./3.5

Die Aufgabe erfordert das Einzeichnen der Mittelsenkrechten zu drei Punktpaaren und das anschließende ziehen der Grenzmarkierung (prozedurales Wissen).

Für die Klassen, die problemorientiert unterrichtet wurden, ist die Aufgabenstellung nicht neu. Sie haben bereits eine sehr ähnliche Aufgabe mit dem Sachkontext Brunnen bearbeitet, verglichen und diskutiert. Für die Schülerinnen und Schüler, die den darbietenden Unterricht zur Mittelsenkrechten erhalten haben, ist das Aufgabenformat neu. Beide Klassen haben Aufgaben zur Mittelsenkrechten mit Sachkontext bearbeitet. Dazu zählen die folgenden Aufgaben: AB2, Übungsaufgabe 1 (Umgehungsstraße), AB 3, Übungsaufgabe 3 (Bahnstrecke), AB5, Übungsaufgabe 2 (Versorgungsstation in der Wüste). Die Mittelsenkrechte gibt jeweils eine Gerade an, auf der alle Punkte liegen, die gleich weit von zwei Wohnort (AB1 und AB2) oder drei Wüstenstationen (AB5) entfernt liegen. Der Sachverhalt ist also nicht neu. Durch die ausgiebige Diskussion der Brunnenaufgabe ist jedoch davon auszugehen, dass die problemorientiert unterrichteten Klassen bevorteilt sind. Für sie gilt es die Zusammenhänge und Argumentationen auf eine sehr ähnliche Situation zu übertragen. Ab einer geringfügigen Veränderung der Aufgabenstellung, was hier der Fall ist, wird nach Maier et al. bereits nicht mehr von einer Reproduktion, sondern von einem nahen Transfer gesprochen. Für die darbietend unterrichteten Schülerinnen und Schüler sind die Unterschiede der Aufgabenstellung zu bekannten Aufgaben deutlich größer. Das anzuwendende Wissen ist den Lernenden bekannt und wird durch den Zusammenhang des Tests nahegelegt, daher wird eine Einordnung als Problemlösen ausgeschlossen und die Aufgabe als weiter Transfer eingestuft.

Entsprechend der oben beschriebenen Anforderungsschritt im Bewertungshorizont kann hier von vier nötigen Wisseneinheiten gesprochen werden. Die Entscheidung nach den Grenzmarkierungen kann durchaus weitere Überlegungen erfordern. Es müssen Schnittpunkte erkannt und interpretiert werden und dies an mindestens einer Stelle, so dass für drei Stellen die Markierungen zu setzen sind. Daher kann auch von mehr als einer nötigen Wissenseinheit gesprochen werden.

Es gibt verschiedene Lösungsmöglichkeiten. Um die optimale Einteilung zu finden, wird man die Mittelsenkrechte verwenden. Daher wird die Aufgabe als definiert und konvergent eingestuft. Der Lebensweltbezug ist stark vereinfacht und wirkt daher fast konstruiert. Durch die jedoch durchaus denkbare und in der Realität vorkommenden Einteilung in solche Gebiete kann der Lebensweltbezug trotz starker Vereinfachung als authentisch betrachtet werden.

Die sprachlogische Komplexität ist nicht ganz gering, der Sachverhalt muss erfasst und die Anforderungen an die Grenzlinien müssen verstanden werden. Dies erfordert ein gewisses Sprachverständnis. Durch die Verwendung von Text und Abbildung beim Lösungsweg gibt es eine Transformation der Repräsentationsformen.

<table>
<tr><th></th><th>Dimension</th><th colspan="6">Ausprägungen</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Wissensart</td><td>Fakten</td><td colspan="2">Prozeduren</td><td colspan="2">Konzepte</td><td>Metakognition</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Kognitiver Prozess</td><td>Reproduktion</td><td colspan="2">Naher Transfer</td><td colspan="2">Weiter Transfer</td><td>Problemlösen</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Wissenseinheiten</td><td colspan="2">Eine Wissenseinheit</td><td colspan="2">Bis zu 4 Wissenseinheiten</td><td colspan="2">Mehr als 4 Wissenseinheiten</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Offenheit</td><td colspan="2">Definiert/ konvergent</td><td colspan="2">Definiert/ divergent</td><td colspan="2">Ungenau/ divergent</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Lebensweltbezug</td><td>Kein</td><td colspan="2">Konstruiert</td><td colspan="2">Authentisch</td><td>Real</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Sprachlogische Kompl.</td><td colspan="2">Niedrig</td><td colspan="2">Mittel</td><td colspan="2">Hoch</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Repräsentationsformen</td><td colspan="2">Eine</td><td colspan="2">Integration</td><td colspan="2">Transformation</td></tr>
</table>

Tab. 17: Ausprägungen der Dimensionen für die problemorientiert unterrichteten Klassen, Aufgabe 5 in Test 2 und Test 3

	Dimension	Ausprägungen			
1	Wissensart	Fakten	Prozeduren	Konzepte	Metakognition
2	Kognitiver Prozess	Reproduktion	Naher Transfer	Weiter Transfer	Problemlösen
3	Wissenseinheiten	Eine Wissenseinheit	Bis zu 4 Wissenseinheiten	Mehr als 4 Wissenseinheiten	
4	Offenheit	Definiert/ konvergent	Definiert/ divergent	Ungenau/ divergent	
5	Lebensweltbezug	Kein	Konstruiert	Authentisch	Real
6	Sprachlogische Kompl.	Niedrig	Mittel	Hoch	
7	Repräsentationsformen	Eine	Integration	Transformation	

Tab. 18: Ausprägungen der Dimensionen für die darbietend unterrichteten Klassen, Aufgabe 5 in Test 2 und Test 3

9.1.5 Methoden der Testauswertung

Die Aufgabenanalyse zeigt, dass jede der fünf Aufgaben aus Test 2 und 3 eine andere Facette des Wissens zu Mittelsenkrechten fokussiert. Dies geht von der Nennung einer Definition zur Anwendung der Konstruktion bis hin zur Lösung komplexerer Aufgabenstellungen, für die auch das Wissen zum Umkreismittelpunktsatz im Dreieck und der zugehörigen Beweisidee hilfreich ist. Diese Verteilung der Wissensbereiche über die fünf Aufgaben macht deutlich, dass jeder Aufgabe eine gleichgewichtete Bedeutung im Test über das Wissen zur Mittelsenkrechten zu kommt. Dies spricht auch für eine Gleichgewichtung bei der Auswertung. Dieser Wunsch wird zusätzlich durch die Erfahrungen aus der Testerprobung (Phase 1 der Testerstellung) und bei den Auswertungen der Vorstudie (Phase 3 der Testerstellung) bestärkt. Es konnte beobachtet werden, dass die Aufgaben in vergleichbarer Zeit gelöst werden können und eine unterschiedliche Punktanzahl der Aufgaben bei der Interpretation zu Uneindeutigkeiten führt. Daher wird anschließend in einem Expertenteam anhand der vorliegenden Lösungsschritte und Bewertungshorizonte die Auswertungen aus der Vorstudie diskutiert. Die Aufgaben erhalten Gesamtpunktzahlen zwischen 3 und 5. Eine Vergabe von 3 Punkten oder 5 Punkten für jede der Aufgaben erscheint bei der Prüfung nicht durchgehend für alle Aufgaben umsetzbar. Die Experten einigen sich vorerst auf eine Vergabe von 4 Punkten je Aufgabe, somit ergeben sich mit einer kleinsten Einheit von 0,5 Punkten maximal acht Teilschritte, in die die Lösungsprozesse jeder Aufgabe unterteilt werden können und gleichzeitig besteht die Möglichkeit einzelne Lösungsschritte mit einer höheren Punktzahl als 0,5 zu gewichten. Mit dieser Aufteilung werden die Bewertungshorizonte aufgabenweise überprüft. Es zeigt sich, dass jeder Aufgabe passende Punkte im Bewertungshorizont zugeordnet werden können. Die Schülerlösungen jeder Aufgabe werden also mit Punkten zwischen 0 und 4 bewertet, dabei können als kleinste Einheit 0,5 Punkte vergeben werden. Die Testhefte werden aufgabenweise von zwei Beurteilern bepunktet.

9.1.5.1 Überprüfung auf signifikante Unterschiede mit dem Kruskal-Wallis-Test

Die Punktanzahlen jedes Lernenden werden klassenweise in eine Tabelle übertragen. Die statistische Auswertung sieht neben der Ermittlung von typischen Kenngrößen wie Median, arithmetisches Mittel und Standardabweichung die Darstellung in Boxplots vor. Für den Vergleich zwischen den beiden Interventionen wird vorsichtshalber angenommen, dass die Daten nicht-normalverteilt sind. Es handelt sich zusätzlich um vier Gruppen mit je mehr als 20 Lernenden und die Daten sind ordinalskaliert. Damit sind die Voraussetzungen für den Kruskal-Wallis-Test erfüllt. Im Gegensatz zur Varianzanalyse kann der Kruskal-Wallis-Test für nicht-normalverteilte Daten angewendete werden (vgl. Cleff 2019, S. 202f.).

Der Test bewertet, ob sich die durchschnittlichen Rangzahlen von mindestens einer der zu überprüfenden Gruppen signifikant von denen der anderen Gruppen unterscheidet (vgl. Cleff 2019, S. 203). Es wird von der Nullhypothese ausgegangen, dass es keine Unterschiede zwischen den Gruppen gebe. Um eine Aussage zur Signifikanz treffen zu können, werden die Abweichungen der tatsächlichen durchschnittlichen Rangsummen zu dem Erwartungswert berechnet und durch die Varianz der Ränge dividiert. Dieser ermittelte H-Wert nähert sich asymptotisch dem Wert von χ^2_{k-1} für definierte Gruppengrößen an; für $k = 4$ Gruppen mit mehr als 20 Probanden ist dies der Fall (vgl. Cleff 2019, S. 202ff.). Nach der Berechnung des H-Wertes wird dieser mit dem kritischen Wert χ^2_{k-1}verglichen und es kann eine Entscheidung in Bezug auf die Nullhypothese getroffen werden.

Dies kann anhand von sechs Schritten erfolgen. Die Schritte orientieren sich an den Ausführungen von Cleff (2019, S. 203ff.) und Bortz, Lienert und Boehnke (2009, S. 223ff.) an.

1. **Schritt: – Formulierung der Hypothesen:**

H_0: Es gibt keine Unterschiede zwischen den untersuchten Gruppen bezüglich der durchschnittlichen Rangzahl.

H_1: Mindestens eine Gruppe unterscheidet sich von den anderen bezüglich der durchschnittlichen Rangzahl.

2. **Schritt – Festlegung des Datensatzes und des Signifikanzniveaus α:**

Als Stichprobe wird der gesamte Datensatz von $n = 87$ betrachtet. Die vier Klassen haben folgende statistische Anzahl an Lernenden p_1=21, p_2=22, d_1=23 und d_2=21.

Der α-Fehler wird mit $\alpha = 0{,}05$ festgelegt, d. h. mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % wird eine zutreffende Hypothese (fälschlicherweise) abgelehnt.

3. **Schritt – Überprüfung der Testvoraussetzungen:**

Die Daten sind ordinalskaliert. Es wird der gesamte Datensatz von n = 87 untersucht. Die Gruppen sind voneinander unabhängig. Die Testvariable sollte in allen Gruppen ähnliche Verteilungsformen aufweisen. Damit sind die Voraussetzungen für den Kruskal-Wallis-Test erfüllt.

Die Stichprobengröße von n = 87 setzt sich zusammen aus k = 4 Gruppen, bestehend aus den vier Klassen P_1, P_2, D_1 und D_2, die jeweils mindestens 21 Probandinnen und Probanden umfassen. Damit die asymptotische Signifikanz verwendet werden kann, sollten bei k = 4 Gruppen mindestens 5 Probanden in jeder Gruppe sein, das ist der Fall. Für die Auswertung wird daher die asymptotische Signifikanz dem alternativen p-Wert vorgezogen; dieser wird bei kleineren Gruppen verwendet (vgl. Bortz et al. 2008, S. 225)

4. **Schritt – Bestimmung des kritischen Testwerts:**

Der Freiheitsgrad wird berechnet und kann festgelegt werden mit df = k-1 = 3. Damit und mit der Teilgruppenanzahl von k = 4 wird das Signifikanzniveau ermittelt. Dies entspricht dem Wert von $\chi^2_{k-1} = \chi^2_3 = 7{,}815$. Mit diesem kritischen Wert wird der später bestimmte H-Wert verglichen. Alle H-Werte, die größer sind als χ^2_{k-1}, sind statistisch signifikant und die Nullhypothese wird abgelehnt. Das bedeutet ist der H-Wert größer als χ^2_{k-1}, so gibt es signifikante Unterschiede zwischen den vier Untersuchungsgruppen.

5. Schritt – Bestimmung des H-Wertes:

Für die Berechnung des H-Wertes werden die Schülerinnen und Schüler aller vier Klassen anhand der erreichten Punkte im Test aufsteigend geordnet und mit einem Rang von 1 bis 87 versehen. Gleiche Punktzahlen bedeuten gleiche Ränge. Diese Verbundränge werden gemittelt, d. h. die Rangzahlen aller Probanden mit der gleichen Punktzahl werden addiert und durch die Anzahl der Probanden geteilt. Tritt dies häufig auf, sollte der H-Wert korrigiert werden (vgl. Bortz et al. 2008, S. 223). Das Ergebnis ergibt den Rang der betrachteten Schülerinnen und Schüler an. Anschließend werden für jede Teilgruppe P_1, P_2, D_1 und D_2 alle Rangzahlen addiert und durch die Probandenanzahl der Teilgruppe geteilt, so dass eine durchschnittliche Rangzahl T_j für jede Klasse angegeben werden kann.

Nun kann die Prüfgröße H wie folgt berechnet werden:

$$H = \frac{12}{n*(n+1)} \cdot \sum_{j=1}^{k} \frac{T_j^2}{n_j} - 3(n+1),$$

$mit\ T_j\ als\ Rangsumme\ der\ Klasse\ j$ für j=1, 2, 3, 4.

Diese Prüfformel geht aus der Formel der parametrischen Varianzanalyse hervor. Es fließen die Abweichungen der durchschnittlichen Rangsummen je Klasse von dem Erwartungswert $E(R) = \frac{1+2+3+\cdots+n}{n} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{(n+1)}{2}$ ein (Bortz et al. 2008, S. 223f.).

Um eine erste Einschätzung für die Abweichung der Daten zu bekommen, können die berechneten Rang-Durchschnittswerte für die vier Gruppen mit diesem Erwartungswert verglichen werden.

Abschließend wird noch überprüft, inwiefern Verbundränge vorliegen. Die Punktevergabe sieht vor das jeder Lösung eines Schülerin bzw. eines Schülers ein Wert zwischen 0 und 4 mit

0,5-Teilschritten zugeordnet wird. Somit werden auf die 87 Lernenden acht verschiedene Punktangaben zugeordnet. Rein rechnerisch ist also von vielen Verbundrängen auszugehen. Dies ist nur dann nicht der Fall, wenn alle Lernenden die gleiche Anzahl an Punkten erhalten. Das ist sehr unwahrscheinlich für die verwendeten Aufgaben, besonders für die Begründungsaufgaben. Die Vorstudie hat gezeigt, dass diese extremen Verteilungen für keine Aufgabe aufgetreten sind. Die H-Werte werden mit nachfolgendem Term korrigiert:

$$C = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{m}(t_i^3 - t_i)}{n^3 - n} \; mit\ der\ Anzahl\ an\ verbundenen\ Rängen\ m\ und$$

$$der\ Anzahl\ an\ Rohdatenwerten\ t_i,\ \ die\ im\ i - ten\ Rangplatz\ stehen.\ \ .$$

Der korrigierte H-Wert kann nun bestimmt werden: $H_{corr} = \frac{H}{C}$

6. Schritt – Testentscheidung:

Der H_{corr}-Wert wird mit dem kritischen χ^2_{k-1}-Wert verglichen. Ist $H_{corr} > \chi^2_{k-1}$, liegen statistisch signifikant Unterschiede für mindestens eine der vier Klassen vor und die Nullhypothese wird abgelehnt. Das bedeutet, es gibt signifikante Unterschiede zwischen den vier Untersuchungsgruppen. Ist $H_{corr} \leq \chi^2_{k-1}$, so wird die Nullhypothese bestätigt und es liegen keine signifikanten Unterschiede zwischen den vier Klassen vor.

Am Beispiel der Brunnenvariation aus Test 2, Aufgabe 2.5, wird die Berechnung dargelegt. Dazu werden die Rohdaten und die zugeordneten Ränge in der Tab. 1 verwendet. Die Vergabe der Punkte ist erfolgt in prozentualen Angaben.

Die nach Rängen sortierten Rohdaten zeigen, dass in acht Fällen Verbundränge auftauchen (m=8), das sind die Punktwert 0 %, 25 %, 37,5 %, 62,5 %, 75 %, 87,5 % und 100 %. Für die Berechnung des Korrekturwertes *C* können die Anzahlen des Auftretens aus der Tabelle 1 abgezählt werden. Der Punktwert 0 %

wird beispielsweise 17 Mal vergeben. Der Rang kann berechnet werden mit

$$\frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17}{17} = 9.$$

In der nachfolgenden Tab. 19 werden die Berechnungen für den Kruskal-Wallis-Test mit Zwischenergebnissen aufgeführt.

	Problemorientierter Unterricht		Darbietender Unterricht	
	P_1	P_2	D_1	D_2
n_k	21	22	23	21
Rang-summe	1092,0	1184,5	697,5	854,0
Durch-schnittli-	52,0	53,840	30,326	40,667
Berech-nung des	$E(R) = \frac{1+2+3+\cdots+n}{n} = \frac{(n+1)}{2} = \frac{(87+1)}{2} = 44$			
Berech-nung des H-wertes	$H = \frac{12}{87 \cdot (87+1)} \cdot (52{,}00 + 53{,}840 + 30{,}326 + 40{,}667) - 3 \cdot (87+1) \approx 12{,}552$			
Berech-nung des C-Wertes	$C = 1 - \frac{\left((17^3-17)+(5^3-5)+(5^3-5)+(6^3-6)+(16^3-16)+(7^3-7)+(20^3-20)+(10^3-10)\right)}{87^3-87} \approx 0{,}972$			
Berech-nung des H_{corr}-Wertes	$H_{corr} = \frac{H}{C} \approx \frac{12{,}552}{0{,}9715} \approx 12{,}919$			
Beurtei-lungs-grundla-	α = 0,05 Signifikanz-niveau	df = k-1=3 Freiheitsgrad	p = 0,005 Irrtumswahrscheinlichkeit	
Testent-schei-dung	$H_{corr} \approx 12{,}92 > 7{,}81 \approx \chi^2_3$ Es liegt ein **signifikanter Unterschied** vor. H_0 wird verworfen: Es gibt signifikanten Unterschiede zwischen mindestens zwei der Klassen.			

Tab. 19: Rechnungen zur Bestimmung von signifikanten Unterschieden mithilfe des Kruskal-Wallis-Tests am Beispiel von Aufgabe 5 aus Test 2.

Klasse	Punkte Aufg. 5, Test 2	Rang	Klasse	Punkte Aufg. 5, Test 2	Rang	Klasse	Punkte Aufg. 5, Test 2	Rang
P1	0	9	P2	50	31,5	P1	87,5	67,5
P1	0	9	P2	50	31,5	P1	87,5	67,5
P1	0	9	D1	50	31,5	P1	87,5	67,5
P2	0	9	D2	50	31,5	P1	87,5	67,5
D1	0	9	D2	50	31,5	P1	87,5	67,5
D1	0	9	P1	62,5	42,5	P1	87,5	67,5
D1	0	9	P1	62,5	42,5	P1	87,5	67,5
D1	0	9	P1	62,5	42,5	P1	87,5	67,5
D1	0	9	P2	62,5	42,5	P2	87,5	67,5
D1	0	9	P2	62,5	42,5	P2	87,5	67,5
D1	0	9	P2	62,5	42,5	P2	87,5	67,5
D1	0	9	P2	62,5	42,5	P2	87,5	67,5
D1	0	9	P2	62,5	42,5	P2	87,5	67,5
D1	0	9	D1	62,5	42,5	D1	87,5	67,5
D2	0	9	D1	62,5	42,5	D2	87,5	67,5
D2	0	9	D2	62,5	42,5	D2	87,5	67,5
D2	0	9	D2	62,5	42,5	D2	87,5	67,5
D1	12,5	18	D2	62,5	42,5	D2	87,5	67,5
P2	25	21	D2	62,5	42,5	D2	87,5	67,5
P2	25	21	D2	62,5	42,5	P1	100	82,5
D2	25	21	D2	62,5	42,5	P2	100	82,5
D2	25	21	P1	75	54	P2	100	82,5
D2	25	21	P1	75	54	P2	100	82,5
D1	37,5	26	P1	75	54	P2	100	82,5
D1	37,5	26	P1	75	54	P2	100	82,5
D1	37,5	26	P2	75	54	D1	100	82,5
D1	37,5	26	P2	75	54	D1	100	82,5
D2	37,5	26	D1	75	54	D1	100	82,5
P1	50	31,5	P1	87,5	67,5	D2	100	82,5

Tab. 20: Nach Rängen sortierte Daten am Beispiel der Aufgabe 5 aus Test 2

Bereits die Berechnung des Erwartungswertes und die vier durchschnittlichen Rangsummen zeigen die Abweichung der vier Gruppen. Die problemorientiert unterrichteten Klassen liegen mit ihrem durchschnittlichen Rang von über 50 oberhalb des Erwartungswertes von 44. Die beiden darbietenden Klassen haben hingegen geringere Werte, die Klasse D_1 mit knapp 30 den geringsten Durchschnittsrang. Eine Aussage über die Signifikanz dieser Abweichungen kann dann erst mithilfe der weiteren Kenngrößen gemacht werden. In diesem Fall ist der korrigierte H-Wert deutlich größer als der kritische χ^2-Wert und damit weist mindestens eine der Klassen signifikante Unterschiede zu den übrigen Klassen auf. Es schließen sich weitere Tests an.

An diesem Beispiel wird deutlich, dass durch die Berechnung des H_{corr}-Wertes keine großen Abweichungen zustande kommen. Dies zeigte sich auch für weitere Stichproben, daher wurde bei den weiteren Berechnungen auf diese Korrektur verzichtet.

9.1.5.2 Bestimmung von Unterschieden zwischen den Klassen mithilfe des Mann-Whitney-Tests

Falls signifikante Unterschiede festgestellt werden, so wird mithilfe des Mann-Whitney-Tests ermittelt (vgl. Cleff 2019, S. 181) zwischen welchen Gruppen Unterschiede vorliegen und mithilfe der Effekt-Stärke nach Cohen wird die Stärke des Unterschiedes bestimmt (vgl. Cohen 1988, S. 79ff.).

Der Mann-Whitney-Test wird auch U-Test oder Wilcoxon-Rangsummen-Test genannt. Er dient dazu bei nicht-parametrischen Daten Unterschiede zweier unabhängiger Stichproben zu ermitteln. Verglichen werden die durchschnittlichen Ränge der beiden Gruppen. Die Gruppe A habe n_1, die Gruppe B habe n_2 Teilnehmer. Es gelte $n_1 > n_2$ und $n_1 + n_2 = n$. Als Nullhypothese wird angenommen, dass es keine Unterschiede zwischen den beiden Gruppen gebe. Betrachtet werden die durchschnittlichen Rangsummen der beiden Gruppen. Um beurteilen zu können, ob der Unterschied zwischen diesen beiden Durchschnittsrängen statistisch signifikant ist, wird eine weitere Kenngröße bestimmt, der U-Wert.

Bei der Anwendung des Tests ist es hilfreich sich an den Schritten von Cleff zu orientieren (vgl. Cleff 2019, S. 182ff.). Es fließen ergänzende Überlegungen von Bortz ein (vgl. Bortz et al. 2008, S. 217), so dass die unten beschriebene Schrittabfolge für die Ausführung des Mann-Whitney-Tests in dieser Studie sich als besonders praktikabel erweist. Die ersten drei Schritte ähneln den Ausführungen zum Kruskal-Wallis-Test.

1. **Schritt – Formulierung der Hypothesen:**

H_0: Es gibt keine Unterschiede zwischen den beiden Gruppen bezüglich der durchschnittlichen Rangzahl.

H_1: Eine Gruppe unterscheidet sich von der anderen bezüglich der durchschnittlichen Rangzahl.

2. **Schritt – Festlegung des Datensatzes und des Signifikanzniveaus α:**

Das Signifikanzniveau wird auf $\alpha = 0{,}05$ festgelegt, dies entspricht unverändert den Angaben beim Kruskal-Wallis-Test.

3. **Schritt – Überprüfung der Testvoraussetzungen:**

Zu den bereits getroffenen Angaben oben sollte hier genannt werden, dass der Datensatz zwischen $p_1 + d_2 = 42$ und $p_2 + d_1 = 45$ Daten enthält, je nach Kombination der untersuchten Klassen mit ihren Lernendenzahlen.

4. **Schritt – Bestimmung der Rangsumme, des U- und z-Wertes:**

Im Falle der Nullhypothese, bestehen keine Unterschiede zwischen den Gruppen A und B. Demnach würde es in beiden Gruppen ebenso viele größere wie kleinere Rangplätze geben, die U-Werte sind annähernd gleich. Und es kann ein Erwartungswert von $E(U) = \frac{(n_1 \cdot n_2)}{2}$ berechnet werden. Bei Gruppen mit jeweils mehr als 20 Teilnehmern kann die Normalverteilung als Annäherung an diesen exakten Erwartungswert genutzt werden (vgl. Cleff 2019, S. 181ff.).

Es erfolgt die Vergabe der Rangzahlen nach denselben Kriterien wie im Kruskal-Wallis-Test. Für jede Gruppe wird die Summe der Rangzahlen gebildet. Der durchschnittliche Rangplatz der Gruppe wird nun berechnet, indem die Gruppenrangsumme durch die Anzahl der Gruppenmitglieder n_1 bzw. n_2 geteilt wird. Diese beiden Werte können bereits miteinander verglichen werden. Bei Eintreffen der Nullhypothese sollten diese beiden Werte annähernd gleich sein. Weichen Sie voneinander ab, können mithilfe des U-Wertes Aussagen über die Signifikanz der Unterschiede gemacht werden (vgl. Cleff 2019, S. 183). Bei der Bestimmung des U-Wertes wird für jede Rangzahl der Gruppe A gezählt, wie viele Werte der Gruppe B kleiner sind; diese gehen mit 1 in die Summe ein; und wie viele Werte gleichgroß sind, diese werden dabei mit 0,5 Punkten gezählt. Die Summe all dieser Bewertungen für die Gruppe A ergibt den U-Wert. Diese Werte lassen sich auch wie folgt berechnen: $U(A) = n_1 \cdot n_2 + \frac{n_1 \cdot (n_1+1)}{2} - T_2,$ $mit\ T_2\ der\ durchschnittlichen\ Rangsumme\ der\ Gruppe\ B.$ Der U(A)-Wert kann in den U(B)-Wert überführt werden durch folgende Rechnung $U(B) = n_1 \cdot n_2 - U(A)$ (vgl. Cleff 2019, S. 202f.). Zählweise und Formel werden unten am Beispiel der Brunnenvariationsaufgabe bestimmt.

Für $n_1 + n_2 > 30$ wird ein z-Wert oder kleiner u-Wert berechnet mit $z = \frac{(U-E(U))}{\sigma_u}$. Dieser gibt die Streuung der U-Wert-Verteilung an. Treten häufig verbundene Rängen auf, wie es hier der Fall ist, wird empfohlen den Standardfehler σ_u anzupassen mit $\sigma_{u(corr)} = \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{(n \cdot (n-1))} \sum_{i=1}^{n} R_i^2 - \frac{n_1 \cdot n_2 \cdot (n+1)^2}{4 \cdot (n-1)}}$, dabei gibt R_i den pro Messwert vergebenen Rangplatz an (vgl. Bortz et al. 2008, S. 203ff.)

5. Schritt – Festlegung des kritischen Wertes:

Der z-Wert wird auf Signifikanz geprüft, indem er mit dem kritischen Wert der Standardnormalverteilung abgeglichen wird. Aus der zugehörigen Tabelle kann für ein zweiseitiges Signifikanzniveau mit α = 0,05 ein kritischer Wert von $\pm 1{,}96$ abgelesen werden.

6. Schritt – Testentscheidung:

Der Betrag dieses z-Wertes sollte für α = 0,05 innerhalb des folgenden Intervalls liegen $[-1{,}96; 1{,}96]$, damit die Nullhypothese beibehalten werden kann. Liegt der z-Wert nicht innerhalb dieses Intervalls, wird die Nullhypothese verworfen und es liegen signifikante Unterschiede zwischen den beiden Gruppen vor. Das Vorzeichen des z-Wertes gibt an, welche Gruppe signifikant höhere Werte erreicht hat. Ein positives Vorzeichen bedeutet, dass die erste Gruppe höhere Werte enthält (Als erste Gruppe wird stets die Gruppe mit der höheren Teilnehmerzahl gewählt). Ein negatives Vorzeichen bedeutet, dass die zweite Gruppe höhere Werte erreicht hat (vgl. Cleff 2019, S. 185).

7. Schritt – Bestimmung der Effektstärke:

Zur Einschätzung der Effektstärke dient das Berechnungsverfahren nach Cohen (UZH, Methodenberatung, 06.03.2020). Liegen signifikante Unterschiede vor, kann die Berechnung der

Effektstärke r Aussagen über die Bedeutung (Relevanz) des Effektes ermöglichen. Die Effektstärke entspricht dem Betrag aus der Standardteststatistik z geteilt durch die Wurzel aus der Gesamtgruppengröße, d. h. Wurzel aus der Summe der Schüleranzahlen beider Klassen. Für $0{,}1 \leq r < 0{,}3$ wird der Effekt als schwach, für $0{,}3 \leq r < 0{,}5$ als mittel und für $r > 0{,}5$ als stark bewertet (vgl. Cohen 1988, S. 79ff.).

Am Beispiel der Brunnenvariation aus Test 2, Aufgabe 2.5, werden Unterschiede der Klassen P_1 und D_1 untersucht. Da $n_1>n_2$ gelten sollte folgt für P_1 mit $p_1=21=n_2$ und für D_1 $d_1=23=n_1$ und n=44. Es wird zunächst der U-Wert für die Klasse P_1 exemplarisch ausgezählt, die durchschnittlichen Rangsummen finden wir in der nachfolgenden Tabelle:

Klasse	Punkte Aufg. 5 in Test 2	Rang	Klasse	Punkte Aufg. 5 in Test 2	Rang	Klasse	Punkte Aufg. 5 in Test 2	Rang
P1	0	7	D1	37,5	16,5	P1	87,5	35,5
P1	0	7	D1	37,5	16,5	P1	87,5	35,5
P1	0	7	D1	37,5	16,5	P1	87,5	35,5
D1	0	7	P1	50	19,5	P1	87,5	35,5
D1	0	7	D1	50	19,5	P1	87,5	35,5
D1	0	7	P1	62,5	23	P1	87,5	35,5
D1	0	7	P1	62,5	23	P1	87,5	35,5
D1	0	7	P1	62,5	23	P1	87,5	35,5
D1	0	7	D1	62,5	23	P1	87,5	35,5
D1	0	7	D1	62,5	23	D1	87,5	35,5
D1	0	7	P1	75	28	P1	100	42,5
D1	0	7	P1	75	28	D1	100	42,5
D1	0	7	P1	75	28	D1	100	42,5
D1	12,5	14	P1	75	28	D1	100	42,5
D1	37,5	16,5	D1	75	28			

Tab. 21: Durchschnittlichen Ränge der Klassen P_1 und D_1

	Anzahl an kleineren Werten bei D_1	Anzahl an gleich großen Werten bei D_1	Anzahl an größeren Werten bei D_1	Wert für die U-Berechnung von P_1	Mit der Häufigkeit dieses Wertes in P_1 ergibt sich
0 % bei P1	0	10	13	10*0,5=5	3*5=15
50 % bei P1	10+1+4=15	1	7	15*1+0,5=15,5	1*15,5=15,5
62,5 % bei P1	10+1+4+1=16	2	5	16*1+2*0,5=17	3*17=51
75 % bei P1	10+1+4+1+2=18	1	4	18*1+1*0,5=18,5	4*18,5=74
87,5 % bei P1	10+1+4+1+2+1=19	1	3	19*1+1*0,5=19,5	9*19,5=
100 % bei P1	10+1+4+1+2+1+1=20	3	0	20*1+3*0,5=21,5	1*21,5=21,5
	U(P1)=352,5				
	U(D1)=n1*n2-U(P1)=483-352,5=130,5				
	E(U)= (21*23)/2=241,5				
	$\sigma_{u(corr)} = \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{(n \cdot (n-1))} \sum_{i=1}^{n} R_i^2 - \frac{n_1 \cdot n_2 \cdot (n+1)^2}{4 \cdot (n-1)}} = \sqrt{\frac{23 \cdot 21}{(44 \cdot 43)} \cdot 29075 - \frac{43 \cdot 21 \cdot (45)^2}{4 \cdot 43}} \approx 41{,}66$				
	Für $\sigma_{u(corr)}$ hier $\sum_{i=1}^{n} R_i^2 = 13 \cdot 7^2 + 14^2 + 4 \cdot 16{,}5^2 + 2 \cdot 19{,}5^2 + 5 \cdot 23^2 + 5 \cdot 28^2 + 10 \cdot 35{,}5^2 + 4 \cdot 42{,}5^2 = 29075$				
	$z = \frac{(U-E(U))}{\sigma_u}$=-2,664<-1,96 Da $z \notin [-1{,}96; 1{,}96]$ wird H_0 verworfen. Es liegen signifikante Unterschiede der beiden Gruppen vor. Die Klasse P_1 hat durchschnittlich höhere Ränge erreicht als die Klasse D_1.				
	$r = \frac{\lvert z \rvert}{\sqrt{n}} \approx 0{,}402$ Die Effektstärke nach Cohen (1988) kann mit 0,3<=r<0,5 als *mittel* bezeichnet werden.				

Tab. 22: Vergleich der Klassen P_1 und D_1 der Aufgabe 5 in Test 2 mithilfe des Mann-Whitney-Tests.

Es wird mit dem niedrigsten Wert der Klasse P_1 begonnen, das sind 0 Punkte. Jetzt wird der Wert mit den 23 Werten der Klasse D_1 verglichen. Insgesamt gibt es keinen kleineren, 10 gleichgroße und 13 größere Werte. In die Rechnung gehen also

10 gleichgroße Werte ein mit $0{,}5 \cdot 10$. Es wird mit dem nächsten Wert der Klasse P_1 fortgefahren. Für die nächsten beiden Werte von 0 Punkten ergibt sich der gleiche Term. Es entsteht folgende Summe: $U(P1) = 5 + 5 + 5 + \ldots$Wir betrachten den vierten Punktwert der Klasse P_1, dieser beträgt 50 % und es wird gezählt: es sind 15 Werte der Klasse D_1 kleiner, ein Wert ist gleichgroß und 7 Werte sind größer. Es wird der Term $1 \cdot 0{,}5 + 15 \cdot 1 = 15{,}5$ in der Berechnung des U-Wertes ergänzt.

Es ergeben sich folgende U-Werte: $U(P_1)=352{,}5$ und $U(D_1)=130{,}5$.

Für die Aufgabe 5 werden paarweise alle vier Klassen miteinander auf signifikante Unterscheidung der Rangsummen untersucht. Die Ergebnisse werden in einer Tabelle festgehalten.

	P_1	P_2	D_1
P_2	0,21	--	--
D_1	-2,66 / 0,4016	-2,99 / 0,4457	--
D_2	-1,70	1,82	-1,67
Es gibt mittlere signifikante Unterschiede zwischen P_1 & D_1 und zwischen P_2 & D_1.			
Für $z \in [-1{,}96; 1{,}96]$ wird H_0 beibehalten; andernfalls verworfen. Signifikante Ergebnisse sind farbig unterlegt und erhalten zusätzlich einen Wert für die Effektstärke nach Cohen (1988): Für $0{,}1 \le r < 0{,}3$ wird der Effekt als schwach bezeichnet, für $0{,}3 \le r < 0{,}5$ als mittel und für $r > 0{,}5$ als stark.			

Tab. 23: Mann-Whitney-Test, Angabe der z-Werte und Effektstärke für Aufgabe 5 aus Test2

9.1.5.3 Vorgehen zur Beurteilerübereinstimmung

Mit der Darlegung der Testgütekriterien in Abschnitt 8.1.2 wurden bereits die Bedeutung dieser für diese Unterrichtsstudie und auch die Art und Weise der Überprüfung der einzelnen Kriterien beschrieben. Anknüpfend an die Auswertungsobjektivität wird die konkrete Umsetzung der Beurteilerübereinstimmung betrachtet. Es wird auf die Trainingsweise der Beurteiler, die Auswahl der Testhefte, die einer zweiten Beurteilung unterzogen wurden, den finalen Beurteilerprozess und die Bestimmung der zugehörigen Beurteilerübereinstimmung eingegangen. An dem konkreten Beispiel des Beurteilerprozesses der Aufgabe 2./3.4 werden diese Schritte anschließend exemplarisch dargelegt.

Insgesamt liegen aus den vier Klassen n = 87 bearbeitete Tests zu jedem der drei Testungen vor. Es werden vier Testhefte pro Klasse und Test ausgewählt, das entspricht rund 18 % der Bearbeitungen je Aufgabe und Test. Für die Auswahl der Testhefte werden diese nach den erreichten Punkten bei dieser Aufgabe aufsteigend geordnet, durchnummeriert und randomisiert für die zweite Beurteilung ausgewählt. In Klassen mit 21 Schülerinnen und Schülern werden die Testhefte mit die Rang 4, 9, 13, 18 ausgewählt. In der Klasse mit 22 Schülerinnen und Schülern werden die Ränge 4, 9 ,14, 19 für die gewählten Testhefte festgelegt. Und für die Klasse mit 23 Schülerinnen und Schülern werden die Testhefte mit den Rängen 4, 9, 15, 20 gewählt. Auf diese Weise soll eine realistische Auswahl an Lösungen den Beurteilerprozess durchlaufen. Zusätzlich werden mindestens acht Testhefte, jeweils ein Heft aus Test 2 und eines aus Test 3 für jede der vier Klassen, mit möglichst unterschiedlicher Bepunktung durch den ersten Beurteiler für das Training ausgewählt. Testhefte, deren Lösungen sich als Ankerbeispiele im Kodierhandbuch befinden, werden nicht ausgewählt. Für das Training von Aufgabe 3 werden beispielsweise Testhefte mit den folgenden Bepunktungen ausgewählt: 2×0 Punkte, 1×0,5 Punkte, 2×1 Punkt, 1×1,5 Punkte, 1×3 Punkte und 1×4 Punkte. Punktzahlen, die weniger häufig auftreten, werden auch für das Training weniger häufig gewählt.

Vor dem eigentlichen Beurteilerprozess findet das Training der Beurteiler statt. Testaufgabenweise wird das Kodierhandbuch zur Verfügung gestellt und dieses kann im Vorfeld studiert werden. An einem ersten Termin werden das Kodierhandbuch und aufkommende Fragen besprochen. Anschließend wird eine Bewertung gemeinsam an zwei bis drei Testheften durchgeführt, um einen ersten Umgang mit dem Kodierhandbuch zu erfahren und aufkommende Nachfragen direkt klären zu können. Für den zweiten Termin werden unabhängig voneinander Schülerlösungen zu der jeweiligen Aufgabe eigenständig und voneinander unabhängig bewertet. Für Test 2 und Test 3 sind das vier Bearbeitungen von Schülerinnen und Schülern aus jedem der beiden Tests. Es erfolgt ein Abgleich der Bewertungen und ein intensiver Austausch über die Nutzung des Kodierhandbuches und die Begründung der Punktevergabe. Beide Beurteiler legen nacheinander ihre Begründungen für die vergebene Punktezahl mithilfe des Kodierhandbuches dar. Dabei wird erörtert, auf welche Weise das Kodierhandbuch eingesetzt wird und wie die vergebene Punktezahl zustande gekommen ist. Bei Uneindeutigkeiten oder Lücken im Kodierhandbuch, wird dieses im Konsens ausgeschärft und überabreitet. Weichen die Beurteilungen weiterhin voneinander ab, ist davon auszugehen, dass eine erneute Trainingsrunde mit ausgeschärftem Kodierhandbuch zu passenderen Übereinstimmungen führt und der vorherige Trainingsschritt wird mit mindestens vier Testheften je Test erneut durchgeführt. Ist der zweite Beurteiler mit dem Kodierhandbuch vertraut, d. h. kommen *moderate* Übereinstimmung mit einem Kappa-Wert von mindestens 0,4 heraus, ist das Training beendet.

Der zweite Beurteiler bewertet nun 32 Testaufgaben. Diese ergeben sich aus 4 Testheften je 4 Klassen für Test 2 und Test 3. Anschließend werden die beiden Bewertungen miteinander verglichen. Bei unterschiedlicher Bewertung findet ein Austausch statt, in dem die beiden Beurteiler nacheinander ihre Bepunktung erklären. Es wird geprüft, ob ein Konsens erreicht werden kann. Dies kann der Fall sein, wenn im einfachen Fall, ein Ankerbeispiel im Kodierhandbuch übersehen wurde oder im häufigeren Fall, eine Schülererklärung verschiedene Interpretationen zu lässt. Nach dem gegenseitigen Austausch entscheidet jeder Beurteiler, inwiefern seine ursprüngliche Bepunktung passend erscheint und diese angepasst werden sollte. Bei offenen Aufgabenformaten können weniger hohe Übereinstimmungsraten erreicht werden als dies für geschlossene Aufgabenformate der Fall ist (vgl. Lienert & Raatz 1998, S. 8). Es wird schriftlich in einer Tabelle festgehalten, wie die beiden Beurteiler die Punkte verteilt haben. Anschließend wird die Beurteilerübereinstimmung berechnet. Die Daten bestehen aus Zahlenwerten zwischen 0 und 4 in 0,5er Schritten. Die Daten sind ordinal, jedoch nicht metrisch. Dies zeigt sich darin, dass zwei 2-Punkte-Lösungen weder die gleichen Argumente enthalten müssen, noch zusammengefasst zu einer 4-Punkte-Lösung führen. Eine Abweichung der Beurteiler von 0,5 Punkten ist wünschenswerter als eine Abweichung von 1,5 oder mehr Punkten. Diese Überlegungen führen zu einer Berechnung der Beurteilerübereinstimmung mit dem linear gewichteten Kappa, als Maß zweier Beurteiler mit Berücksichtigung der Ausmaße der Abweichungen (vgl. Bortz et al. 2008, S. 482ff.).

In dieser Testreihe ist $k = 9$, denn es gibt die neun Punktschritte von 0; 0,5; 1; 1,5; …; 3,5; 5 zu vergeben. Damit gibt es zwei 9×9-Matrizen, die für die Berechnung des Kappas erstellt werden. In der einen Matrix werden die Bewertungen der beiden Beurteiler eingetragen, die Einträge dieser Matrix werden mit

f_{ij}bezeichnet. Die andere Matrix enthält auf der Diagonalen 1 und gibt die lineare Gewichtung w_{ij} an. Sie hat folgende Gestalt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0{,}875 & 0{,}750 & 0{,}625 & 0{,}500 & 0{,}375 & 0{,}25 & 0{,}125 & 0 \\ 0{,}875 & 1 & 0{,}875 & 0{,}750 & 0{,}625 & 0{,}500 & 0{,}375 & 0{,}250 & 0{,}125 \\ 0{,}750 & \ddots & 1 & 0{,}875 & 0{,}750 & 0{,}625 & 0{,}500 & 0{,}375 & 0{,}250 \\ 0{,}625 & \ddots & \ddots & 1 & 0{,}875 & 0{,}750 & 0{,}625 & 0{,}500 & 0{,}375 \\ 0{,}500 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0{,}875 & 0{,}750 & 0{,}625 & 0{,}500 \\ 0{,}375 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0{,}875 & 0{,}750 & 0{,}625 \\ 0{,}250 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0{,}875 & 0{,}750 \\ 0{,}125 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0{,}875 \\ 0 & 0{,}125 & 0{,}250 & 0{,}375 & 0{,}500 & 0{,}625 & 0{,}750 & 0{,}875 & 1 \end{pmatrix}$$

Es kann nun ein Wert für Cohens Kappa berechnet werden mit $\kappa = \frac{P_0 - P_e}{1 - P_e}$, wobei gilt $P_0 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} w_{ij} \cdot \frac{f_{ij}}{N}$.

Dabei ist N die Anzahl der beurteilten Testhefte. Weiter wird das Maß für die zufällige Wahrscheinlichkeit bestimmt mit $P_e = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} w_{ij} \cdot e_{ij}/N$

mit $e_{ij} = f_i \cdot f_j/N$. Der errechnete Kappa-Wert liegt zwischen 0 und 1. Je höher er ist, desto besser ist die Übereinstimmung zwischen den beiden Beurteilern. Der Grad der Übereinstimmung wird nach Altmann (1991) wie folgt beurteilt:

Bewertung ab	
0,80	sehr gut
0,60	gut
0,4	moderat
0,2	gering
0 bis 0,2	mangelhaft

Für Test 2 und Test 3 wird ein Beurteilerprozesse in zeitlich großem Abstand von zwei Jahren von der Autorin selbst vorgenommen (Aufgabe 2./3.1). Die Aufgabe 2./3.2 wird im Zuge einer Masterarbeit zweitbegutachtet. Die weiteren Aufgaben werden von Mitarbeiterinnen aus der Arbeitsgruppe Rott vorgenommen. Alle Zweit-Begutachter können durch ihr Studium der Mathematikdidaktik ausreichend fachliche Erfahrung aufweisen und erhalten eine Einweisung in den Auswertungsweisen vor und nach dem Training.

Die Aufgaben 3 und 4 erfordern durch das offene Aufgabenformat und die nötigen Begründungen ein erhöhtes Maß an Interpretation schriftlicher Schülerantworten, im Vergleich zu den Aufgaben 1 und 2, bei diesen werden weniger Argumentationen gefordert. Bei der Aufgabe 5 erleichtert die zusätzliche Zeichnung das Verstehen der Schülererklärungen. Es können unterschiedliche Hauptargumentationen verfolgt werden, diese legen den verwendeten Lösungsansatz fest. Eine Schwierigkeit bei der Bewertung besteht in der Vielzahl an unterschiedlichen Lösungsansätzen, die nicht immer eindeutig einem dieser Hauptargumentationen zugeordnet werden können und in sehr unterschiedlich ausführlichen Darlegungen der Argumentationen. Durch die Diversität der Lösungen werden bereits für das Training 16 Aufgaben ausgewählt, um sicherzustellen, dass die Stichprobe die Spannweite der Lösungen realistisch wiedergibt. Dies ist für die Überprüfung und Überarbeitung des Bewertungshorizontes wichtig.

Für die Aufgabe 4 kann für das Training eine Übereinstimmung von *gut* nach Altmann (1991) erreicht werden. Es werden bereits im Training 32 Prozesse bewertet, um ein möglichst gutes Spektrum der Antworten zu erhalten. Das resultiert auch aus den Erfahrungen zum Beurteilungsprozess der Aufgabe 3. In dem anschließenden Diskurs wird deutlich, dass neben kleineren Abänderungen und Ausschärfungen zwei grundlegende

	Beur-teiler 1	Beur-teiler 2	Dif-fer-enz	Anmerkungen aus dem Diskurs
T2P119	0,5	0	0,5	Grenzfall. Es kann beides vertreten werden. Das kann auch durch Überarbeitung des Kodierhandbuches nicht umgangen werden. Sprachliche Interpretation.
T2P222	4	4	0	
T2D126	1,5	1	0,5	Beide Beurteiler vergeben 1 Punkt für den Bewertungsaspekt I) (erster Abschnitt der Lösung). Beurteiler 1 erkennt im zweiten Abschnitt der Lösung die Umkehrung der Argumentation an, dies findet sich in Bewertungsaspekt 3 wieder. Sprachlich unsauber und nur in Ansätzen, daher 0,5 Punkte. Beurteiler 2 erkennt große Lücken in der Argumentation und vergibt dafür 0 Punkte. Beide Beurteiler können die Argumentation des anderen nachvollziehen, entscheiden sich bei der ersten Bewertung zu bleiben.
T2D222	2 Nach Diskurs: 1,5	0,5 Nach Diskurs: 1,5	1,5	Beurteiler 1 vergibt 0,5 Punkte je Bewertungsaspekt. Beurteiler 2 vergibt 0,5 Punkte für Bewertungsaspekt I, diesen erkennt sie 2 Mal in Ansätzen. Es folgt eine ausführliche Diskussion über die angeführte Argumentation. Insbesondere die ungenaue Formulierung, erschwert die Beurteilung. Die Bedeutung des Schnittpunktes und die Bedeutung der Streckenendpunkt werden vermischt. Die Beurteiler finden folgenden Konsens: Der Bewertungsaspekt Definition der Mittelsenkrechten kann nicht bepunktete werden. Dafür ist die Sprache zu uneindeutig. Alle weiteren Bewertungsaspekt werden mit 0,5 Punkten bewertet.
T3P125	1	1	0	
T3P231	1,5 Nach Diskurs: 2	0,5 nach Diskurs 2	-1	Beide Beurteiler erkennen Bewertungsaspekt I und II in der Antwort. Es wird ein Ankerbeispiel im Kodierhandbuch zu II) ergänzt und je 1 Punkt vergeben.

	Beurteiler 1	Beurteiler 2	Differenz	Anmerkungen aus dem Diskurs
T3D120	0	0	0	
T3D218	0	0,5	-0,5	Beurteiler 2 erkennt die sprachliche Ungenauigkeit als richtig gemeint an. Unter „gleichen Abstand von den anderen“ müsste Abstand zu den Eckpunkten verstanden werden. Für Beurteiler 1 sind die Formulierungen zu vage. Sprachliche Interpretation; Grenzfall.

Tab. 24: Training der Beurteilung und Überprüfung des Kodierhandbuches

Veränderungen am Kodierhandbuch vorgenommen werden: 1. Zunächst wird die Lösung einem Lösungsansatz zugeordnet. 2. Es werden alle auftretenden Lösungsansätze aufgelistet, d. h. die tabellarische Liste wird fortgeführt, so dass jeder Ansatz dort zu finden ist. Es bietet sich an das generelle Vorgehen der zweiten Beurteilung anhand des Beurteilungsprozesses zur Aufgabe 3 beispielhaft darzulegen.

Nach der Einführung in das Kodierhandbuch und den gemeinsamen ersten Beurteilungen, geben beide Beurteiler Ihre Bepunktung zu den acht ausgewählten Testheften ab. Diese werden in einer Tabelle aufgeführt, um die Differenz ergänzt als Diskussionsgrundlage für den anschließenden Diskurs verwendet.

Nach dem Diskurs wird das linear gewichtete Cohens-Kappa berechnet mit :

$$\kappa = \frac{P_0 - P_e}{1 - P_e} \approx \frac{0{,}953 - 0{,}676}{1 - 0{,}676} \approx 0{,}855$$

Einige Wochen später wird das überarbeitete Kodierhandbuch anhand von fünf Lösungen; T2P119, T2D126, T2P222, T3P231 und T3P218 überprüft. Das sind eben diese Lösungen, bei denen eine Zuordnung zu unterschiedlichen Einordnungen geführt hat. Unabhängig voneinander werden diese Lösungen mit dem überarbeiteten Kodierhandbuch bewertet. Bei der anschließenden Diskussion liegt der Fokus auf der Überprüfung der Passung des Kodierhandbuchs. Es werden keine weiteren Änderungen am Kodierhandbuch vorgenommen, denn die erneute Kodierung hat gezeigt, dass die Ausschärfung des Handbuchs für eine gute Handhabung gesorgt hat und zu hohen Übereinstimmungen zwischen den beiden Beurteilern führt. Das Training ist abgeschlossen und der eigentliche Beurteilungsprozess beginnt. Dieser führt zu folgenden Ergebnissen:

	Beurteiler 1	Beurteiler 2		Beurteiler 1	Beurteiler 2
T2P113	0	0	T3P115	0	0
T2P123	0	0,5	T3P121	0	0
T2P129	0	0	T3P131	0	0
T2P117	1,5	1	T3P124	1	1
T2P215	0	0	T3P215	0	0
T2P226	0	0	T3P221	0	0
T2P234	0	0	T3P229	0	1
T2P232	1	1,5	T3P225	1	1

$$\kappa = \frac{P_0 - P_e}{1 - P_e} \approx \frac{0{,}910 - 0{,}775}{1 - 0{,}775} \approx 0{,}601$$

Tab. 25: Berechnung der Beurteilerübereinstimmung

Der Beurteilungsprozess führt zu einem linear gewichteten Kappa-Wert von ca. 0,6 und ist damit nach Altmann (1991) mit *gut* einzuschätzen. Rückblickend haben beide Beurteiler den Eindruck, dass die Schülerantworten dennoch sehr unterschiedlich ausfallen, dass ein Kodierhandbuch nur schwer die Vielfalt der Antworten abdecken kann. In dem die Anzahl der Testhefte im Training erhöht wird, könnte jedoch eine detaillierte Ausschärfung des Kodierhandbuches und ein besseres Training für beide Beurteiler zu einer höheren Übereinstimmung im Beurteilungsprozess führen. Dies wird bei der Beurteilung der Aufgabe 4 umgesetzt, in dem die Anzahl der Testhefte auch im Trainingsdurchlauf auf 16 hochgesetzt wird. Die Tab. 26 zeigt, dass es gelungen ist für die Aufgabe 4 *sehr gute* Übereinstimmungen im finalen Beurteilungsprozess zu erreichen. Inwieweit dieser Effekt auf das veränderte Training zurückzuführen ist, oder auf die Aufgabenstellung selbst oder die Unterschiede im Kodierhandbuch kann nicht ausgemacht werden.

Das obige Auswertungsbeispiel verdeutlicht, dass die Beurteilerprozesse ein hohes Maß an Einarbeitung für die zweiten Begutachter erfordern. Die Erfahrungen aus den Beurteilungsprozesse haben gezeigt, dass insbesondere die Bewertungen von Begründungsaufgaben detailliert abgestimmt sein müssen. Es zeigt sich ein deutlicher Mehrwert in der weiteren Ausschärfung der Kodierhandbücher. Die Aufgaben aus Test 1 erfragen das Vorwissen und weniger komplexe Begründungen. Eine eindeutige Zuordnung der Punkte sollte einfacher fallen. Aus diesen und praktikablen Gründen der Zeitersparnis werden die Aufgaben des Test 1 sowie die Aufgabe 2./3.1 zeitlich versetzt, nach über 2 Jahren, erneut von der Autorin bewertet. Das Risiko, die Handbücher nicht genug ausgeschärft zu haben für diese Aufgabe erscheint überschaubar, da es sich um die Abfrage von Definitionen und einer Konstruktion handelt. An dieser Stelle werden die finalen Übereinstimmungsraten betrachtet:

	Aufgabe	2./3.1	2./3.2	2./3.3	2./3.4	2./3.5
Training	Gewichteter Cohens-Kappa-Wert	0,944	0,889	0,855	0,765	0,822
	Begutachterübereinstimmungsmaß nach Altman	Sehr gut	Sehr gut	Sehr gut	Gut	Sehr gut
Eigentlicher Beurteilungsprozess	Gewichteter Cohens-Kappa-Wert	0,855	0,812	0,601	0,895	0,870
	Begutachterübereinstimmungsmaß nach Altman	Sehr gut	Sehr gut	gut	Sehr gut	Sehr gut

Tab. 26: Übereinstimmungswerte für das Training und den eigentlichen Beteilungsprozess aller vier Aufgaben aus Test 2 und 3.

Während des Durchlaufens der vier Phasen der Testentwicklung, der anschließenden Analyse der Testaufgaben und dem zweiten Beurteilungsprozess wurde der Bewertungshorizont in ein ausführliches Kodierhandbuch überführt. In der finalen Version wird aufgabenweise jedem Bewertungsaspekt neben einem einleitenden Text zum Umgang mit dem Kodierhandbuch ein möglicher Lösungsschritt/-argumentation und ein Kodierbeispiel zugeordnet. Für die Aufgaben 2./3.1, 2./3.3 und 2./3.5 werden in einer weiteren Spalte alternativ Lösungsangaben mit zugeordneter Bepunktung ergänzt. Die Aufgabe 4 lässt unterschiedliche Lösungszugänge zu, so dass ein anderer Aufbau des Kodierhandbuchs gewählt wurde. Zunächst wird anhand der verwendeten Lösungsansätze eine der Bewertungstabellen ausgewählt und anhand dieser dann die Bepunktung vorgenommen.

9.1.6 Hypothesenverfeinerung

Die Aufgaben sind insgesamt anspruchsvoll. Im Folgenden werden, unter Rückbezug auf die Theorieerörterungen zum darbietenden und problemorientierten Lernen (vgl. Kapitel 2 und 3), die Lehrerbeliefs und die konzipierten Interventionen (vgl. Kapitel 7) Vermutungen aufgestellt, inwiefern eine der beiden Interventionen bei dieser Aufgabe zu größerem Lösungserfolg bei den Schülerinnen und Schülern führen kann.

Mit Aufgabe 1 wird konzeptuelles Wissen zur Mittelsenkrechten abgefragt und ist somit die einzige Reproduktionsaufgabe im Test. Die Erörterungen aus der Theorie und auch die Lehrereinschätzungen legen nahe, dass hier die darbietend unterrichteten Schülerinnen und Schüler einen Vorteil haben und daher besser abschneiden sollten (vgl. Abschnitt 3.3).

Aufgabe 2a) fragt eine innermathematische Anwendung ab, die in ähnlicher Form genutzt wird, um Kompetenzen in den Vergleichsarbeiten 8 zu erfassen. Diese Aufgabe sollten somit alle

Lernenden bearbeiten können. Eine Hürde kann für die Lernenden darin liegen, dass der gesuchte Schnittpunkt nicht existiert. Dies ist für die Schülerinnen und Schüler sicherlich ungewohnt, daher wird erwartet, dass der Großteil der Lernenden nicht die richtigen Schlüsse zieht. Es kann kein Vorteil für eine der Interventionen ausgemacht werden. Aufgabenteil b) wurde als Problemlöse-Aufgabe mit Fallunterscheidung eingestuft. Generell könnte man einen Vorteil durch langfristiges Erlernen von Problemlösestrategien erwarten, dies kann durch keine der beiden Interventionen erreicht werden. Es kann überprüft werden, inwiefern unterschiedliche Lösungsverhalten bei den Lernenden der beiden Interventionen aufgezeigt werden.

In Aufgabe 3 wird ein tiefergehendes Verständnis zum Ortslinien-Konzept der Mittelsenkrechten, das die grundlegende Beweisidee für den Satz über den gemeinsamen Schnittpunkt der Mittelsenkrechten im Dreieck liefert, gefordert. Im darbietenden Unterricht wurden die Argumentationsschritte zeitlich intensiver und häufiger thematisiert. Gleichzeitig wird in der Lerntheorie geäußert, dass ein problemorientierter Ansatz das inhaltliche Verständnis stärke und somit eine Übertragung der Grundidee auf neue Situationen erleichtere. Die Anforderungen unterscheiden sich somit für die beiden Klassen. Da für die darbietend unterrichteten Klassen der Transfer geringer sein sollte, kann vermutet werden, dass diese einen Vorteil beim Lösen haben, der sich durch einen größeren Lösungserfolg zeigt.

Aufgabe 4 erfordert einen weiten Transfer mit mehr als 4 WE und kann daher als eine der komplexeren Aufgabe im Test mit vergleichbaren Anforderungen für beide Klassen eingestuft werden. Erst mit einem tiefergehenden Verständnis zur Mittelsenkrechten bzw. umfangreichen Kenntnissen oder einem mathematisch geschulten Blick kann die Aufgabe gelöst werden. Es bleibt zu vermuten, dass der erforderliche Transfer Schülerinnen und Schülern leichter fällt, die im mathematischen Problemlösen erfahren sind. Dies kann sicherlich nicht durch eine einzige Unterrichtseinheit erreicht werden. Die darbietend unterrichteten Klassen könnten auch hier von der zeitlich intensiveren Erarbeitung des Umkreismittelpunktsatzes im Dreieck profitieren. Mit dieser Aufgabe kann überprüft werden, welche der beiden Interventionen die Lernenden eher dazu befähigt komplexere Transferaufgaben zu lösen und einen Vergleich der verwendeten Argumente und Herangehensweisen ermöglichen.

In Aufgabe 5 wird die Brunnenvariation gestellt. Es ist zu erwarten, dass die problemorientiert unterrichteten Klassen einen deutlichen Vorteil beim Lösen haben und durchschnittlich zu besseren Leistungen kommen. Dies setzt voraus, dass der problemorientierte Unterricht erfolgreich verlaufen ist.

	Aufgabe 1	Aufgabe 2a)	Aufgabe 2b)
Anforderung der Aufgabe an die SuS der Interventionen	Reproduktion	Naher Transfer	Problemlösen
Wissensart	Fakten, Prozeduren, Konzepte	Prozeduren, Konzepte	Prozeduren, Konzepte
Wissenselemente	Widergabe von gelernten Definitionen und Konstruktionen der Mittelsenkrechten	Einzeichnen einer Mittelsenkrechte zu zwei Punkten und eines Kreises/ einer Geraden (Akzeptanz, dass es keinen Schnittpunkt gibt)	Verschiebung von geometrischen Objekten und die Erzeugung von einem oder mehreren Schnittpunkten. (Fallunterscheidung)
Benennung laut Tab. 7	KoWi I; II, III, IV ProWi	ProWi, KoWi III; IV	(KoWi III, IV)
Punkte	4 (20 %)	3 (15 %)	1 (5 %)
Vermutungen	**Eventuell D-Klassen bevorteilt**	**Keine Bevorteilung**	**Eventuell P-Klassen bevorteilt**

3

	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Aufgabe 5
Anforderung der Aufgabe an die SuS der Interventionen	Darbietend unterrichtete Klassen: naher Transfer. Problemorientiert unterrichtete Klassen: weiter Transfer	weiter Transfer	Darbietend unterrichtete Klassen: weiter Transfer. Problemorientiert unterrichtete Klassen: naher Transfer
Wissensart	Konzepte	Prozeduren, Konzepte	Prozeduren, Konzepte
Wissens-elemente	Beweisidee des Umkreismittelpunktsatzes im Dreieck angeben (Logische Argumentationen)	Mithilfe des Wissens rund um die Mittelsenkrechte komplexere, unbekannte Aufgabenstellungen bearbeiten und lösen. Kreis als Umkreis eines Dreiecks interpretieren und beliebiges Dreieck mit Mittelsenkrechten einzeichnen	Gebietseinteilung bei gegebenen Punkten durch das Einzeichnen der Mittelsenkrechte zu Punktpaare (Kontext Schulgebiete, Feuerwehrgebiete)
Benennung aus Tab. 6	KoWi V	ProWi KoWi V, KoWi II; III, IV	ProWi KoWi III, IV
Punkte	4 (20 %)	4 (20 %)	4 (20 %)
Vermutungen	**D-Klassen bevorteilt**	**Eventuell P-Klassen bevorteilt**	**P-Klassen bevorteilt**

Tab. 27: Überblick über die Anforderungen, die die Aufgaben 1 bis 5 an die darbietend und problemorientiert unterrichteten Klassen stellt, sowie Vermutungen über ein vergleichbares Abschneiden in Test 2 und 3.

In Tab. 27 werden die Vermutungen für den Ausgang von Test 2 aufgabenweise zusammengefasst. Es ist davon auszugehen, dass die Leistungen in Test 3 insgesamt schwächer sind als in Test 2, da mit einem späteren Testzeitpunkt auch die Inhalte stärker in Vergessenheit geraten können. Sowohl für den problemorientierten wie auch für den darbietenden Unterricht wird ein langfristig besseres Behalten beansprucht (vgl. Tab. 2 und Tab. 3).

9.2 Die Unterrichtsbeobachtung

Es wurden zwei Unterrichtseinheiten zum Erlernen der Mittelsenkrechten entwickelt, die vergleichbar sind bezüglich, der Lernziele, der eingesetzten Übungsaufgaben und auch der Unterrichtszeit. Die Erarbeitung der Mittelsenkrechten erfolgt in der einen Unterrichtseinheit darbietend und führt vergleichsweise schnell zur Definition (vgl. Abschnitt 8.3.4). In der anderen Unterrichtseinheit erfolgt eine problemorientierte Erarbeitung anhand einer Problemlöseaufgabe (vgl. Abschnitt 8.3.1). Jeweils in zwei siebten Klassen eines Gymnasiums werden die Einheit durchgeführt. Um die tatsächlichen unterrichtsgeschehen festhalten und mit der Planung abgleichen zu können, werden alle Unterrichtsstunden beobachtet und protokolliert. Die Vorgehensweise bei der Unterrichtsbeobachtung wird zunächst allgemein (vgl. Abschnitt 9.2.1) und anschließend konkret für die Umsetzung in dieser Studie (vgl. Abschnitt 9.2.2) ausgeführt.

9.2.1 Kriterien der Unterrichtsbeobachtung

Die Unterrichtsbeobachtung ist eine Methode der Datenerhebung, die insbesondere in der Aktions- und Handlungsforschung von Lehrern und Forschern gleichermaßen Anwendung findet (vgl. Berkemeyer & Mende 2018, S. 313). Anhand von Unterrichtsbeobachtungen werden eigene Handlungsweisen hinterfragt und reflektiert. Dem Beobachter kommt dabei stets eine besondere Rolle zu. Einerseits ist der Beobachter selbst Teil der Gesamtsituation und interagiert mit den weiteren Personen im Raum. Anderseits kann ein Beobachter eben nur das Wahrnehmen, was er sieht. Das sind Dinge, Situationen, Gespräche, für die er selbst im Vorfeld sensibilisiert wurde. Damit ist das Wahrgenommene von der Person des Beobachters, seiner Persönlichkeit, Beobachtungsgabe, fachliches und fachdidaktische Wissen und Sensibilisierung für das Wesentliche in gewisser Weise abhängig. Für den Beobachter bedeutet dies, dass er sich dessen bewusst ist und während des Beobachtungsprozesses seine Erwartungen und Einflüsse reflektiert (vgl. de Boer 2022, S. 19ff.). Im Vorfeld kann der Blick des Beobachters durch das Festlegen eines Beobachtungsinteresses, das in der Regel durch eine Forschungsfrage angeregt ist, auf den Beobachtungsgegenstand fokussieren (vgl. de Boer 2022, S. 18f.). Erst durch diese Systematik kann die Beobachtung als wissenschaftliche Methode verstanden werden: „Beobachten als wissenschaftliche Methode meint das systematische Erfassen, Festhalten und Deuten sinnlich wahrnehmbaren Verhaltens zum Zeitpunkt seines Geschehens. Ziel ist es, soziale Wirklichkeit vor dem Hintergrund einer leitenden Forschungsfrage zu beschreiben.“ (Atteslander 2010, S. 73). Vor einer Beobachtungsdurchführung sind vier Aspekte festzulegen: 1) Beobachtungsfeld, 2) Beobachtungseinheit, 3) Beobachtungsstatus und 4) Beobachtungsinstrument (vgl. Atteslander 2010, S. 73f.). Damit werden geregelt, wo und was und wie lange die Beobachtung durchgeführt wird. Der Beobachtungsstatus legt fest, inwiefern den Beobachteten bekannt ist, dass sie beobachtet werden und unter welcher Fragestellung dies geschieht. Zuletzt wird die Art und Weise der Dokumentation festgelegt (vgl. Atteslander 2010, S. 73ff.). Ausgewertet werden können die Beobachtungsdaten anschließend mithilfe der Methoden zur qualitativen Datenanalyse, z. B. mit einem Kategoriensystems oder einem hermeneutischen Verfahren (vgl. Lötscher 2016, S. 202f.).

9.2.2 Methoden und Auswertungen der Unterrichtbeobachtung

Die vier Aspekte der Unterrichtsbeobachtung sind für diese Studie durch die Feldforschung weitestgehend festgelegt:

Zu 1) Beobachtungsfeld und 2) Beobachtungseinheit: Im jeweiligen Klassenraum der vier Klassen finden die fünf Unterrichtsstunden zur Mittelsenkrechten statt. Dort wird für die Dauer des Unterrichts beobachtet.

Zu 3) Beobachtungsstatus: Die Beobachtung ist halboffen. Die Autorin befindet sich im Raum und kann von einem Platz in der hinteren Reihe das Unterrichtsgeschehen beobachten. Den Lernenden ist bekannt, dass die Unterrichtsabläufe beobachtet werden. Die genaue Fragestellung ist ihnen nicht bekannt.

Zu 4) Beobachtungsinstrument: Das Protokoll wird halbstrukturiert durchgeführt. Die Unterrichtsverläufe dienen als strukturgebend. Es werden Wortäußerungen von Lehrperson und Lernenden, sowie Tafelbilder und Tafelanschriften dokumentiert. Ebenso werden die Zeiten bei Wechsel der Unterrichtsphase festgehalten. Dazu zählen beispielsweise das Ende des Einstiegs und der Beginn der Einzelerarbeitung.

In allen vier Klassen wird das Unterrichtsgeschehen auf diese Weise beobachtet und dokumentiert. Die Beobachtungsprotokolle sind im Anhang beigefügt (Abschnitt 16.6). Sie dienen neben den Testergebnissen dazu, zu beurteilen, inwiefern der problemorientierte Unterricht zur Mittelsenkrechten wie geplant durchführbar ist. Eine Übersicht zu allen fünf Stunden jeder Klasse wird erstellt. Es werden Einsatz der Aufgaben, zeitliche Abläufe, Definitionen und Zusammenfassungen der Unterrichtsgespräche aufgenommen (vgl. Abschnitt 10.2). Zusätzlich wird vergleichend und gegenüberstellend herausgearbeitet, welche mathematisch relevanten Inhalte zur Mittelsenkrechte beim Einstieg in den vier Klassen diskutiert werden, um so die tatsächliche Vergleichbarkeit der Unterrichtsstunden zu dokumentieren (vgl. Abschnitt 12.3).

10 Ergebnisse zur Durchführbarkeit des problemorientierten Unterrichts (Forschungsaspekt 1)

Im Folgenden werden die Ergebnisse zur Forschungsfrage F1, in der die generelle Durchführbarkeit eines problemorientierten Unterrichtseinstieg betrachtet wird, aufgeführt.

Diese Forschungsfrage zielt darauf ab, anhand der Faktoren Unterrichtsverlauf und Lernleistung der Schülerinnen und Schüler die generelle Durchführbarkeit eines problemorientierten Unterrichtseinstiegs zur Mittelsenkrechten im Vergleich zu einem darbietenden Unterrichtsansatz zu beschreiben. Dies geschieht im Sinne einer Machbarkeitsstudie (vgl. Abschnitt 7.1) des problemorientierten Unterrichts zur Mittelsenkrechten.

Es wird in Abschnitt 10.1 zunächst der Unterrichtsverlauf für alle vier Klassen beschrieben. Dies geschieht auf Grundlage einer explorativen Auswertung des Unterrichtsgeschehens. Ziel ist es zu untersuchen, inwiefern die Unterrichtszeit für die gewählten Lerninhalte und den Lernumfang als passend eingeschätzt werden kann. In Abschnitt 10.2 werden die Lernleistungen aus den vier Klassen zu den Testzeitpunkten 1, 2 und 3 zusammenfassend dargestellt und verglichen. Es schließt sich der Rückblick der vier Lehrpersonen zu dem durchgeführten Unterricht an. Diese drei Darlegungen münden in einer Darstellung zur Durchführung des problemorientierten Unterrichts und des darbietenden Unterrichts, die als Grundlage für die Bewertung einer generellen Machbarkeit genutzt werden.

Damit die Lernleistungen vergleichbar sind, müssen die Lernvoraussetzungen vergleichbar sein. Dazu zählt u. a. das geometrische Vorwissen zu Abständen und Ortslinien. Diese werden in Test 1 erfasst. Zunächst werden die Schülerleistungen aus

Test 1 von Aufgabe 1 bis 4 ausgewertet, um die Vergleichbarkeit der Ausgangssituation zu betrachten. Anschließend wird die Aufgabe 5 separat ausgewertet. Ihr kommt eine gesonderte Stellung zu, da die Problemlösefähigkeiten der Schülerinnen und Schüler anhand einer Problemlöseaufgabe getestet wird. Die Ergebnisse des Test 1 sind die Grundlage für weitere Interpretationen hinsichtlich der Lernleistungen in Test 2 und 3.

Die Analyse von Test 2 und Test 3 zeigt, inwiefern die Lernleistungen direkt nach der Unterrichtseinheit und langfristig zwischen den vier Klassen vergleichbar sind. An dieser Stelle werden die Testergebnisse für die Aufgaben 1 bis 5 zusammenfassend betrachtet, um so eine Aussage über die erbrachten Schülergesamtleistungen ableiten und damit die generelle Durchführbarkeit der zwei Unterrichtsansätze beurteilen zu können. Es schließt sich eine Einordnung und Diskussion der Ergebnisse an. Eine detaillierte Analyse zu jeder Aufgabe unter Bezug zu den Lerninhalten und Wissenselementen erfolgt anschließend in Kapitel 11.

Eine **allgemeine Anmerkung** sei vorab genannt: Im Durchschnitt erreichen die Klassen unter 50 % der Gesamtpunktzahl in Test 2 und Test 3; in Test 1 sind es etwa 50%. Das erscheint zunächst sehr wenig. Dies zeigt, dass die Aufgaben anspruchsvolle und gleichzeitig zu bewältigende Anforderungen an die Schülerinnen und Schüler stellen. Für die Testauswertung ist dies von Vorteil. Erst durch den hohen Anspruch können die Daten eine ausreichende Streuung aufweisen, so dass differenzierte Aussagen über die Schülerleistungen möglich werden (vgl. Lienert & Raatz 1998, S.57ff.). Die Durchführung hat gezeigt, dass ein Großteil der Lernenden bereits fünf Minuten vor der Abgabe ihre Bearbeitung beendet haben. Große Zeitnot kann daher ausgeschlossen werden.

10.1 Ergebnisse von Test 1 – das geometrische Vorwissen (Testaufgabe 1 bis 4)

Frage: Sind die Lernleistungen der Schülerinnen und Schülern hinsichtlich ihres inhaltlichen Vorwissens zu Mittelsenkrechten klassenweise vergleichbar?

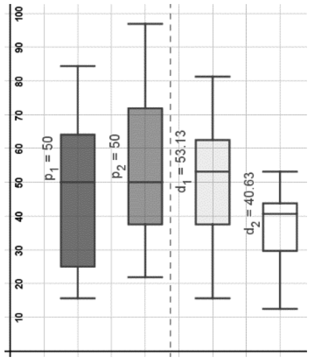


Abb. 25: Ergebnisse zum geometrischen Vorwissen aus Test 1, Aufgabe 1 bis 4. Je Aufgabe gibt es vier Punkte, d.h. 16 Punkte sind 100 %. Die Mediane sind angegeben.

Die Abb. 25 zeigt, dass die Boxplots der Klassen P_1, P_2 und D_1 eine sehr ähnliche Verteilung aufweisen. In der Klasse D_2 fehlen besonders gute Schülerleistungen: Sowohl Mediane als auch arithmetische Mittel liegen für die drei genannten Klassen um die 50 %. Die Klasse D_2 weicht mit einem Median von ca. $\tilde{d}_2 = 40$ % und einem arithmetischen Mittel von ca. $\overline{d_2} \approx 38$ % davon deutlich ab. Diese Abweichungen sind auf die fehlende Leistungsspitze zurückzuführen. So wird in der Klasse D_2 ein Maximum von ca. 53 % erreicht (das sind 8,5 von 16 Punkten). Die drei anderen Klassen haben deutlich höhere Maxima: Den höchsten Wert erzielt ein Lernender aus der Klasse P_2 mit über 96 % (das sind 15,5 von 16 Punkten). Die Werte der Minima aller vier Klassen liegen zwischen 12,50 % für D_2 und 21,88 % für P_2 deutlich näher beieinander (vgl. Tab. 28). Das entspricht 2 bzw. 3,5 von 16 Punkten. In den Klassen P_1 und P_2 weisen die Verteilungen der Schülerinnen und Schüler um den Median etwas größere Streuungen auf als es in der Klasse D_1 der Fall ist. Die Klasse D_2 hat die geringste Streuung um den Median (vgl. Abb. 25).

Test 1, Aufgabe 1 bis 4 Angaben in %	Problemorientierter Unterricht		Darbietender Unterricht	
	P_1	P_2	D_1	D_2
Arithmetisches Mittel	47,92	53,13	48,51	37,95
Standardabweichung	20,87	20,62	17,04	10,31
Maximum	84,38	96,88	68,75	53,13
Oberes Quartil	65,63	71,86	62,50	46,88
Median	50,00	50,00	53,13	40,63
Unteres Quartil	25,00	37,50	37,50	31,25
Minimum	15,63	21,88	15,63	12,50

Abgesehen von der fehlenden Leistungsspitze in der Klasse D_2

Tab. 28: Stat. Kenngrößen der Testergebnisse zum geometrischen Vorwissen

sind die Unterschiede gering. Dies bestätigt der Kruskal-Wallis-Test mit einem Wert von 7,00 < 7,81 (df = 3 und α = 0,05): Die Abweichungen zwischen den vier Klassen sind nicht signifikant (vgl. Tab. 29). Trotz der fehlenden Leistungsspitze in D_2 sind somit alle vier Klassen vergleichbar hinsichtlich ihres geometrischen Vorwissens zu Mittelsenkrechten.

Problemorientierter Unterricht		*Darbietender Unterricht*	
P_1	P_2	D_1	D_2
45,5	51,5	46,9	31,8
α = 0,05 Signifikanzniveau	df = k-1=3 Freiheitsgrad	p = 0,0719 Irrtumswahrscheinlichkeit	
H = 7,00 < 7,81= χ^2_3			
Es liegt **kein signifikanter Unterschied** vor. H_0 wird verworfen:			

Tab. 29: Ergebnisse des Kruskal-Wallis-Signifikanztests zw. den vier Klassen in Test 1, Aufgabe 1 bis 4

Zwischenfazit zum Vorwissen: In Test 1 erreichen alle vier Klassen insgesamt vergleichbare Ergebnisse in Bezug auf das geometrische Vorwissen zu Mittelsenkrechten. Der Kruskal-Wallis-Tests mit df = 3 und α = 0,05 ergibt mit einem Wert von

$7{,}00 < 7{,}81$[10]$=\chi_3^2$ keine signifikanten Unterschiede. Auffällig ist die fehlende Leistungsspitze von D_2.

10.2 Ergebnisse von Test 1 – Problemlösefertigkeiten (Testaufgabe 5)

Frage: Sind die Leistungen der Schülerinnen und Schülern hinsichtlich ihrer Problemlösefertigkeiten klassenweise vergleichbar?

In Aufgabe 5 aus Test 1 werden Problemlösefertigkeiten am Beispiel von Rechtecksflächeninhalten getestet. Bei der Aufgabe ist ein systematisches Vorgehen hilfreich. Sie ist stärker algebraisch geprägt als die anderen Aufgaben (vgl. Abschnitt 9.1.3).

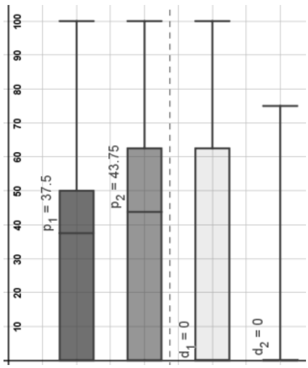


Abb. 26: Ergebnisse zum Problöseaufgabe aus Test 1, Aufgabe 5. 4 Punkte sind 100 %. Die Mediane sind angegeben.

Die Boxplots aus Abb. 26 veranschaulichen die deutlich besseren Leistungen der Klassen P_1 und P_2. Dies zeigen auch die Werte für den Median von über 35 % in beiden Klassen und für das arithmetische Mittel von $\overline{p_1} \approx 33$ % und $\overline{p_2} \approx 38$ %. Das entspricht ca. 1,5 von 4 Punkten (vgl. Tab. 30). In den beiden Klassen D_1 und D_2 werden in der Mittelwertbetrachtung schwächere Leistungen deutlich. Die Werte für den Median liegen bei 0 %. Das arithmetische Mittel liegt bei $\overline{d_1} \approx 24$ % und $\overline{d_2} \approx 5$ %. In der Klasse D_2 erhalten mindestens 75 % der Schülerinnen und Schüler 0 Punkte, in der Klasse D_1 sind es mindestens 50 % (vgl. Abb. 26 und Tab. 30).

---

[10] auf zwei Nachkommastellen gerundet.

Test 1, Aufgabe 5 Angaben in %	Problemorientierter Unterricht		Darbietender Unterricht	
	P_1	P_2	D_1	D_2
Arithmetisches Mittel	33,33	38,64	24,46	4,76
Standardabweichung	28,43	32,40	31,60	16,13
Maximum	100,00	100,00	100,00	75,00
Oberes Quartil	50,00	62,50	62,50	0
Median	37,50	43,75	0	0
Unteres Quartil	0	0	0	0
Minimum	0	0	0	0

Tab. 30: Stat. Kenngrößen der Testergebnisse zur Problemlöseaufgabe

Es ist daher nicht überraschend, dass mithilfe des Kruskal-Wallis-Test signifikante Unterschiede festgestellt werden (15,25> 7,81[11]=χ_3^2 und df = 3 und α = 0,05 ergibt). Diese Unterschiede werden durch die weiteren Tests als stark eingestuft (vgl. Tab. 31 und Tab. 32). Die problemorientiert unterrichteten Klassen sind signifikant besser als die Klasse D_2. Die Unterschiede zur Klasse D_1 sind nicht signifikant. Die Boxplots zeigen, dass die Leistungen der Klasse D_1 stärker den Leistungen der Klasse D_2 ähneln (vgl. jegliche Kenngrößen).

Problemorientierter Unterricht		Darbietender Unterricht	
P_1	P_2	D_1	D_2
51,5	54,7	42,3	27,1
α = 0,05 Signifikanzniveau	df = k-1=3 Freiheitsgrad	p = 0,0016 Irrtumswahrscheinlichkeit	
H = 15,25 > 7,81= χ_3^2 Es liegt ein **signifikanter Unterschied** vor. H_0 wird verworfen: Es gibt signifikante Unterschiede zwischen mindestens zwei der Klassen.			

Tab. 31: Ergebnisse des Kruskal-Wallis-Signifikanztests zw. den vier Klassen in Test 1, Aufgabe 5

[11] auf zwei Nachkommastellen gerundet.

	P_1	P_2	D_1
P_2	0,58	--	--
D_1	-1,09	-1,52	--
D_2	-3,37 / 0,5200	3,47 / 0,5292	1,77
Es gibt starke signifikante Unterschiede zwischen $\mathbf{P_1}$ **&** $\mathbf{D_2}$ und zwischen $\mathbf{P_2}$ **&** $\mathbf{D_2}$.			
Für $z \in [-1{,}96; 1{,}96]$ wird H_0 beibehalten; andernfalls verworfen. Signifikante Ergebnisse sind farbig unterlegt und erhalten zusätzlich einen Wert für die Effektstärke nach Cohen (1988): Für $0{,}1 \leq r < 0{,}3$ wird der Effekt als schwach bezeichnet, für $0{,}3 \leq r < 0{,}5$ als mittel und für $r>0{,}5$ als stark.			

Tab. 32:Ergebnisse der Mann-Whitney-Tests. Die *z-Werte* geben die *Effektstärke* für *Test* 1, *Aufgabe 5 an.*

Diese Ergebnisse bestätigen die Lehrereinschätzungen der Klassen: Die Lehrpersonen der Klassen P_1 und P_2 schätzen die Klassen vorab so ein, dass sie ihnen einen problemorientierten Einstieg zutrauen. Die Lehrpersonen der Klassen D_1 und D_2 sind zögerlicher und entscheiden sich schließlich gegen die problemlösende Aufgabenstellung zur Entdeckung der Mittelsenkrechten (vgl. Abschnitt 7.5.2.5). Damit haben die Lehrerinnen und Lehrer die für Ihre Klasse passende Lehrform gewählt. Hieraus resultiert eine positive Selektion für beide Unterrichtsansätze, die auch bei der späteren Interpretation berücksichtigt wird.

Zwischenfazit zur Problemlöseaufgabe: Die Problemlöseaufgabe aus Test 1 führt zu signifikant unterschiedlichen Ergebnissen bei den Schülerleistungen. Die Klassen P_1 und P_2 können die Problemlöseaufgabe zu Rechtecksflächeninhalten deutlich besser lösen. Die vorherigen Lehrereinschätzungen der Klassen, die für oder gegen einen problemorientierten Einstieg ausschlaggebend waren, werden damit bestätigt.

10.3 Ergebnisse zum Unterrichtsverlauf

Das Unterrichtsgeschehen wurde in allen vier Klassen dokumentiert. Diese Dokumente sind im Anhang dieser Arbeit zu finden und sie dienen als Grundlage für die Erstellung der nachfolgenden Tabellen zu den Unterrichtsabläufen (Abschnitt16.6). Der Fokus liegt auf den Abläufen, dem Materialeinsatz und den inhaltlichen Diskussionen. In den Tabellen wird festgehalten, in welcher Unterrichtsstunde die Einstiegsaufgaben (dunkelgrau) und die Sicherungen zur Mittelsenkrechte (hellgrau) festgehalten werden. Es werden die tatsächlichen Unterrichtsabläufe anhand der Planung und der Verwendung der Materialien (*kursiv*) skizziert. Zusätzlich werden Schüleräußerungen angegeben, um so die inhaltlichen Themen skizzieren zu können. Es entsteht ein Überblick über die Unterrichtsabläufe, anhand derer die Voraussetzungen einer angemessenen Umsetzung und passenden Unterrichtszeit ermittelt werden können.

Die problemorientiert unterrichtete Klasse P_1

Stunde	Zusammenfassung des Ablaufs in der Klasse P_1
Test 1	
2 Wochen regulärer Unterricht	
1 29.05. (5.Std.)	Problemorientierter Einstieg durch kooperative Unterrichtsmethoden: 1) Brunnenaufgabe Aufgabe im Plenum lesen und in eigenen Worten wiedergeben (4 Minuten) Sehr kurze EA und dann PA (19 Minuten) PA für 19 Minuten

	Erste Schülerlösung an OHP (2 Minuten): ringförmige Einzäunung aller vier Punkte. Lösung dient zur Klärung der Lösungsfindung.
2 29.05. (6.Std.)	Plenum: Betrachtung mehrerer Lösungen an Tafel und OHP, dabei wird Lösungsidee herausgestellt und Überprüfungsmöglichkeiten diskutiert. Tafel – P117: nach Augenmaß und durch Probieren eine passende Gerade einzeichnen. (Abb.3) Tafel – P130: Kreise um Punkte (Abb.4). Schwierigkeit Kreis: es bleiben Restgebiete über, die nicht zugeordnet werden können. Vorteil Kreis: für bestimmte Gebiete (innerhalb der Kreise) kann man sicher sagen, zu welchem Brunnen man geht. OHP – P111 – keine durchgehende Gerade als Grenzlinie. Diskussion kann Gerade als Grenzlinie funktionieren oder muss die Grenze gebogen sein? (eine Anmerkung lautet: es kommt auf den Winkel an, dann geht auch Gerade). OHP – P132 – Gerade durch Streckenmittelpunkte. Hierbei wird Korrekturmethode (suche Punkte, die passen oder eben nicht passen) vertieft. Meinungen zu den bisherigen Lösungsideen werden eingefordert. OHP – P133 – Strecken eingezeichnet und Senkrechte durch Mitte Zwischenfazit: Gerade eignet sich besser als krumme Linie (nach dem Gefühl, Meinungsbild) Konkret: Grenze zu Punkt 3 und 4 in EA, dann PA. Überprüfung durch Punktproben.

	Diskussion an Tafel für eingezeichnete, orangene Gerade zu Punkt 3 und 4. Die Gerade verläuft durch die Mitte, jedoch nicht senkrecht. Es werden Punkte eingezeichnet, die nicht passen. Aufforderung erneut die eigene Lösung zu überprüfen. Fazit: Was kennzeichnet die Grenzlinie? Linie durch die Mitte der Punkte, 90° Winkel, Punkt auf der Linie muss den gleichen Abstand zu 3 und 4 haben,
3 30.05. (5.Std.)	Wiederholung: Welche Eigenschaften haben die Grenzlinien? Es ist eine Gerade. An jeder Stelle ist man von A und B gleich weit entfernt (Die Punkte haben denselben Abstand). Die Geraden treffen sich im Winkel von 90°. Definition der Mittelsenkrechten wird notiert (siehe Abschnitt 8.3.3) An einem Tafelbild werden Hin- und Rückrichtung im UG erläutert. Übungsaufgaben vom AB *2Übungen I*: 2.3) Entfernung zu P und Q und 2.4) Gerade im KOS HA: *2Übungen I 2.1*) und 2.2) zu Ende, *3Konstruktion der Mittelsenkrechten* Aufgabe 3.3) Konstruktion dreier Dreiecke und 3.4) Was ist die Mittelsenkrechte?
4 01.06. (5.Std.)	Vergleichen der Aufgaben von *2Übungen I 2.*1)Entfernung zu P und 2.2) Gerade im KOS

<table>
<tr><td></td><td>P132: Weil auf der Mittelsenkrechten alle Punkte liegen, die gleich weit von P und Q entfernt sind.

Vergleichen der Dreieckskonstruktionen (3Konstruktion der Mittelsenkrechten Aufgabe 3) – fehlende Seiten- und Winkelangaben werden verglichen

Konstruktion der Mittelsenkrechte mit Zirkel und Lineal wird thematisiert, B28 hat dies bei der Nachhilfe gelernt und erklärt die Konstruktion (warum das ebenso geht, weiß B28 nicht). Die Lehrperson regt das Hinterfragen an => Es wird diskutiert: Wie viel größer als die Hälfte muss der Radius sein? (das ist egal) Was ändert sich mit größerem Radius? (P132: Dann treffen sich die Kreise woanders; P128: Man muss den Radius gleich langmachen.)

Warum ist die so entstandene Gerade senkrecht zur Strecke? Was passiert bei unterschiedlichem Radius? Dabei wird der Unterschied zwischen den zwei Teilen der Definition hervorgehoben.

Übung: 3Konstruktion der Mittelsenkrechten, 3.1) Konstruktion-MS im KOS; 3.2) Konstruktion-MS zu Dreieck_im_KOS</td></tr>
<tr><td>5

01.06.

(6.Std.)</td><td>Vergleichen der Übungsaufgaben 3.1) und 3.2) Was fällt auf?

P1??: Alle Mittelsenkrechten treffen sich an einem Punkt.

P113: „Die treffen sich auch auf der Strecke AB. Also nicht alle.“

P134: Man kann Kreis um Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten einzeichnen.

Der Umkreis wird eingezeichnet.</td></tr>
</table>

	Frage: Ist es Zufall, dass sich die Mittelsenkrechten eines Dreiecks in genau einem Punkt schneiden? P117: Also der Schnittpunkt ist gleich weit weg von A, B, C, dadurch, dass sich hier ja die Mittelsenkrechten schneiden. P1??: Das geht nicht immer. Wenn man C verschiebt, so nach unten, dann geht das nicht. Überprüft wird mit an einem stumpfwinkligen Dreieck (genutzt werden die Dreiecke aus 3.3c). Kann ein Umkreis gezeichnet werden? Jeder in seinem Heft ca. 7 Minuten Der Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten liegt außerhalb des Dreiecks. Ein Umkreis kann gezeichnet werden. Definition **Umkreis** (siehe Abschnitt 8.3.3) Warum ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Mittelpunkt des Umkreises? P117: weil das von allen gleich weit weg ist. Lehrperson ergänzt Tafelbild und leitet Argumentation zum Umkreismittelpunktsatz mithilfe der Definition der Mittelsenkrechten an. HA: Lernen für den Test.
6 05.06. (5.Std.)	Übungsaufgaben: *5.1) Kreuz und Quer* und vergleichen der Lösungen an OHP-Lösungsfolie.
Test 2 05.06. (6.Std.)	

In der Klasse P_1 wird die Brunnenaufgabe in Partnerarbeit bearbeitet und anschließend im Plenum die Lösungsansätze diskutiert. Es werden Fragestellungen zu den Eigenschaften der gesuchten Begrenzungen aufgeworfen. In der Detailanalyse in Kapitel 14 werden die Argumentationen detailliert dargelegt. Es gelingt die Eigenschaften verläuft senkrecht zur Strecke und durch den Mittelpunkt der Strecke ebenso herauszustellen wie die Ortslinien-Eigenschaft. Die Begrenzung verläuft durch Punkte, die gleich weit von den beiden gegebenen Punkten entfernt sind. In der dritten Unterrichtsstunde werden die Eigenschaften der Begrenzung gesammelt und münden in der Definition der Mittelsenkrechten. Zeitlich wird es etwas knapper, so dass die vorgesehenen Übungsaufgaben 2.1 und 2.2 in der Hausaufgabe fertiggestellt werden. Diese Verschiebung war bereits in der Planung vorgesehen. Die vierte Unterrichtsstunde beginnt mit dem Vergleichen dieser Aufgaben. Die Eigenschaften der Mittelsenkrechte werden dabei hervorgehoben. Eine Definition wird nicht wiederholt. Wie geplant, wird in dieser Stunde die Konstruktion der Mittelsenkrechten thematisiert. Eine Schülerin kennt das Vorgehen bereits und erklärt es der Klasse. Die in der Lehrererklärung vorgesehenen Hinweise zur Konstruktion werden in der anschließenden Diskussion nachgeliefert. Auch die Unterrichtsstunde fünf verläuft nach der Planung: An das Vergleichen der Aufgabe 3.2 schließt sich die Feststellung an, dass sich alle drei Mittelsenkrechten in einem Dreieck in einem Punkt schneiden. Es wird die Frage aufgeworfen, inwiefern es sich um Zufall handelt oder das immer so ist. Nach einigen Argumentationen werden die gegensätzlichen Vermutungen an der Aufgabe 3.3c) überprüft. Es wird die Definition des Umkreises an der Tafel notiert. Die Lage der Schnittpunkt für die verschiedenen Dreiecke werden nicht aufgegriffen, da auch die Mittelsenkrechten für die Dreiecke 3.3.a) und b) nicht mehr konstruiert werden. Dies hätte eine mögliche Hausaufgabe sein können. Anstelle dessen wird mithilfe der

Ortslinien-Eigenschaft argumentiert, warum zu jedem Dreieck ein Umkreis gezeichnet werden kann. Insgesamt wird eine sehr lebhafte Klasse beobachtet, in der die Schülerinnen und Schüler gern und viel miteinander über Mathematik und auch Anderes kommunizieren. Dies ist an der Unterrichtslautstärke auszumachen. Die Lehrperson fordert den einzelnen Unterrichtsphasen entsprechend immer wieder Aufmerksamkeit und Ruhe ein.

Die problemorientiert unterrichtete Klasse P_2

Stunde	Zusammenfassung des Ablaufs in der Klasse P_2
Test 1	
2 Wochen regulärer Unterricht	
1 29.05. (1.Std.)	Problemorientierter Einstieg durch kooperative Unterrichtsmethoden: 1) Brunnenaufgabe *Aufgabenteil 1* wird aufgelegt und im Unterrichtsgespräch gelöst. Brunnen 3 ist der nächste, dies kann durch Abmessen überprüft werden. Austeilen des Arbeitsblattes. Zunächst EA (17 Minuten), dann Austausch mit Sitznachbarn (14 Minuten) und Lösungsfolien erstellen (6 Minuten)
2 29.05. (2.Std.)	Plenum: Betrachtung mehrerer Lösungen am OHP, dabei wird Lösungsidee herausgestellt und Überprüfungsmöglichkeiten diskutiert. OHP – P233: Einteilung des gesamten Gebietes in 2x2cm-Quadrate. Einteilung nach Augenmaß. OHP – P223: Durch Messen werden einzelne Punkte gefunden, die gleich weit von zwei Brunnen entfernt sind. Dann wird durch diese Punkte möglichst passend eine Linie gezogen.

	OHP – P231: Verbinden zweier Punkte und Einzeichnen der Symmetrieachse durch die Mitte der Strecke. OHP – P217: Abstand zwischen zwei Punkten wird gemessen und dient als Anhaltspunkt für Kreisradius. Es werden Kreise um die Punkte gezogen. Hier ist die Schwierigkeit, dass unter eindeutig verstanden wird, dass an keinem Punkt zwei Brunnen gleich weit entfernt sind, dadurch entsteht eine Lücke (anstelle einer Grenze). P223 schlägt vor, Linien an die Kreise zu zeichnen. Es werden die Lösungen von P223 und P217 übereinandergelegt. Die eingezeichneten Geraden verlaufen teilweise entlang der Kreisbögen. Das sorgt für Staunen. Die Lösungsvorschläge werden diskutiert: P233 zu aufwendig, Verwendung der Mitte zwischen zwei Punkten wird als gut bewertet (bei den Lösungsvorschlägen P217, P223 und P231). OHP – P213: Halbkreis um Punkt 3 und um Punkt 4. Verbinden der Schnittpunkte und das genauso bei den anderen Punkten. Es bleiben Fragen offen (Ist die Gerade oben rechts richtig?) Die Lehrperson regt an, die Problemstellung zu Mathematisieren und auf ein einfacheres, kontextgelöstes Problem zu reduzieren: Abgrenzung bzw. Mitte zweier Punkte, Mittelpunkt zweier Punkte, die kürzeste Strecke von einem zum andern, die Symmetrieachse.
3 30.05. (3.Std.)	Wiederholung: Wie geht es heute weiter? Was haben wir gesucht? P213: Ziel ist es sagen zu können, zu welchem Brunnen man geht.

	P216: Man hat zwei Punkte gegeben und sucht die Mitte und zeichnet dann eine Gerade ein, so dass die beiden Punkte gleich weit entfernt sind. Teil 1 der Definition der Mittelsenkrechten wird an die Wand projiziert und in den Heftern notiert (siehe Abschnitt 8.3.3) Bezug zu Lösungen P231 und P213 wird durch die Lehrperson angeregt. Dabei wird thematisiert, dass die Kreisschnittpunkte Punkte markieren, die gleich weit von den Kreismittelpunkten entfernt sind (der Radius ist gleich). Der zweite Teil der Definition wird halb aufgelegt (Es gilt: Wenn ein Punkt auf der Mittelsenkrechten liegt, dann gilt….) und dann von Schülerinnen und Schülern ergänzt. Aufgaben: *2Übungen I*: *2.3) Entfernung zu P und Q und 2.4) Gerade im KOS* In EA werden die beiden Aufgaben in 5 Minuten gelöst und anschließend anhand von Schülerfolien verglichen. Es wird hervorgehoben: Der rechte Winkel ist wichtig, sonst wird es ungenau. Unterschied Strecke und Gerade.
4 30.05. (4.Std.)	Lehrperson betont: Bei der Mittelsenkrechten bitte immer den rechten Winkel markieren. Folie von P220 wird aufgelegt. Die Idee mit Kreisen zu arbeiten ist gut und wird für die Erklärung der Konstruktion aufgegriffen. Lehrperson konstruiert an Tafel die Mittelsenkrechte für zwei Punkte A und B mit Zirkel und Lineal. Schüler wiederholen die Konstruktionsvorgehensweise in eigenen Worten.

	Das Arbeitsblatt *3Konstruktion der Mittelsenkrechte* wird ausgeteilt und Aufgabe 3.*1) Konstruktion-MS im KOS und 3.2) Konstruktion-MS zu Dreieck_im_KOS* bearbeitet. Es werden Schülerfolien zum Vergleichen genutzt. Die Mittelsenkrechten treffen sich alle in einem Punkt. Die Lehrperson fragt: Ist das Zufall? Es werden verschiedenen Argumente dafür, keine dagegen genannt: es muss einen Schnittpunkt geben, weil… … der Radius größer als die Hälfte ist …der Schnittpunkt der Mittelpunkt der drei Punkte ist. …. weil es ein Dreieck ist. HA: *3Konstruktion der Mittelsenkrechte,* 3.3) Konstruktion-3Dreiecke (und Mittelsenkrechten jedes Dreiecks) und 3.4) Was ist eine Mittelsenkrechte?
5 04.06. (1.Std.)	Wiederholung: Wie wird die Mittelsenkrechte konstruiert? Schülerinnen und Schüler wiederholen mit eigenen Worten. Es wird hervorgehoben, dass der Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten im Dreieck den gleichen Abstand zu den drei Eckpunkten hat. Es wird erklärt mit der Definition der Mittelsenkrechten: Auf der Geraden liegen alle Punkte, die gleich weit von B und C entfernt sind. Auf der Geraden liegen die Punkte, die gleich weit von A und von B entfernt sind. (Lehrperson zeichnet dritte Mittelsenkrechte ein). Warum geht diese Mittelsenkrechte ebenfalls durch den Schnittpunkt?

	Es gibt keine Meldungen, daher folgt ein Lehrervortrag. Es endet in der Definition des **Umkreises** von Dreiecken (siehe 8.3.6). Vergleichen der beiden Hausaufgaben. Dabei wird die Lage der Schnittpunkte der Mittelsenkrechten in den drei Dreieckstypen herausgestellt und Wiederholung: Was ist eine Mittelsenkrechte? Es gibt kaum Meldungen. Kein Schüler nennt eine richtige Definition. Es werden Aspekte genannt: Gerade durch die Mitte einer Strecke, gleicher Abstand zu A und B. viele schweigen. HA: Wiederholen und lernen.
6 05.06. (1.Std.)	Wiederholung: Was ist eine Mittelsenkrechte? Was wisst ihr über die Mittelsenkrechten im Dreieck? Definition wird genannt (Senkrechte durch die Mitte), Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten ist gleich weit entfernt von A, B und C. **Lage des Schnittpunktes für die drei Dreieckstypen** (siehe Abschnitt 8.3.3). Übungsaufgaben*: 5.1) Kreuz und Quer* An der Tafel liegen Lösungen zum Vergleichen aus. Nur P227 nutzt das. Das Vorgehen und die Vergleichswerte werden genannt und im UG verglichen.
Test 2 05.06. (2.Std.)	

In den ersten beiden Stunden wird die Brunnenaufgabe bearbeitet. Die Schülerinnen und Schüler arbeiten in Einzelarbeit lange und ruhig an der Aufgabenstellung. Ein Austausch untereinander wird von der Lehrperson immer wieder angeregt und eingefordert. Es werden verschiedene Lösungsvorgehen von einzelnen Lernenden vorgestellt und diskutiert. Dabei wird die Konstruktion der Mittelsenkrechten mit Kreisen präsentiert: Die entstehenden Grenzen erscheinen passend zu sein. Es bleibt unklar, inwiefern diese Methode zur richtigen Einteilung führen kann. In der dritten Unterrichtsstunde werden die Erkenntnisse gesammelt und die Definition der Mittelsenkrechten notiert. Es folgen die beiden vorgesehenen Übungsaufgaben. Diese werden in Einzelarbeit gelöst und anschließend präsentiert. Die Lehrperson erklärt die Konstruktion der Mittelsenkrechte an der Tafel und wie geplant werden zwei Übungsaufgaben dazu bearbeitet und die Ergebnisse führen zur Diskussion, inwiefern der Schnittpunkt dreier Mittelsenkrechten im Dreieck in einem Punkt liegt. Die Hausaufgaben erfolgen nach Plan. In der fünften Unterrichtsstunde wird die Konstruktion der Mittelsenkrechten wiederholt. Ebenso wird argumentiert, weshalb sich die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks in genau einem Punkt schneiden und die Definition des Umkreises wird notiert. Die Hausaufgaben werden verglichen und die Definition der Mittelsenkrechte wiederholt. Die Unterrichtsstunde sechs erfolgt als Übungsstunde. Es werden die Ergebnisse verglichen. Insgesamt ist die Beteiligung an Partnerarbeit oder dem Austausch im Plenum sehr gering. Nur wenige Schülerinnen und Schüler möchten Wortmeldungen loswerden. Die Einzelarbeitsphasen erfolgen leise. Konzentriert werden die gestellten Aufgaben bearbeitet. Auch den Präsentationen von Schülerlösungen wird aufmerksam gefolgt.

Die darbietend unterrichtete Klasse D_1

Stunde	Zusammenfassung des Ablaufs in der Klassen D_1
Test 1	
2 Wochen regulärer Unterricht	
1 29.05. (3.Std.)	Organisatorisches (ca. 10 Minuten) Lehrerzentrierter Einstieg: Sammlung bisheriger Abstandsbegriffe an Tafel (ca. 17 Minuten) anschließend Aufgabenstellung 1) Abstand zu zwei Punkten zunächst in EA (5 Minuten), dann PA (5 Minuten), dann im Plenum am OHP. Die Lage der Punkte mit dem gleichen Abstand zu A und zu B wird beschrieben: D130: Die Punkte liegen auf der Hälfte von A und B, auf der Mitte. D124: Die Punkte liegen auf der Diagonalen. D118: Man kann zu jedem Punkt eine Parallele zeichnen, dann sieht man es. D134: Man kann mit dem Geodreieck eine Gerade einzeichnen. D119: Man hat einen rechten Winkel. D130: Alle Punkte liegen auf einer Geraden. Definition der Mittelsenkrechten (siehe Abschnitt 8.3.6) Wiederholung: Was haben wir bisher gemacht?

2 29.05. (4.Std.)	Übungsaufgaben: *2.1) Altstadt-Neudorf, 2.2) A-Dorf und B-Dorf, 2.3) Entfernung zu P und Q, 2.4°Gerade im KOS* (16 Minuten) Vergleich der Aufgaben 2.1 und 2.2 anhand von Lösungsfolien (10 Min) Umkehrung der Mittelsenkrechten (siehe Abschnitt 8.3.6) Vergleich von 2.3 HA: *2.4) Gerade im KOS* (denke an die Begründung), Lerne Definitionen, Zeichne MS zu Dreieck; *2.HA1) Was ist eine Mittelsenkrechte? und 2.HA2a und b Zeichen MS zu drei Dreiecken*
3 30.05. (1.Std.)	Besprechung der Hausaufgaben, zuerst 2.HA1) Was ist eine Mittelsenkrechte? Drei Schülerinnen und Schüler tragen Lösungsansätze vor. Es wird genannt, dass die Mittelsenkrechte zwischen zwei Punkten liegt und die Punkte auf der Mittelsenkrechten denselben Abstand zu Anfangs- und Endpunkt haben. Wiederholung Konstruktion von Dreiecken. Vergleich 2.HA2) mit anschließender Frage: Was fällt Euch auf? D125: Es gibt einen Punkt, in dem sich alle Mittelsenkrechten schneiden. (5 weitere Schülerinnen und Schüler bestätigen das, der Rest enthält sich). Viele Schülerinnen und Schüler haben die Mittelsenkrechten nicht eingezeichnet. Feststellung: Die Mittelsenkrechten schneiden sich in einem spitzwinkligen Dreieck in einem Punkt. Frage: Ist das immer so? (Tafelanschrieb zur Konstruktion der Mittelsenkrechten mit Zirkel und Lineal)

	Lehrperson erklärt die Konstruktion für eine Seite des Dreiecks. Sie zeichnet zwei Kreise und es wird diskutiert: D118: Alle Punkte, die auf der Kreislinie liegen, haben von b denselben Abstand.“ D119: zeichnet rechten Winkel möglichst gut ein und erhält Mittelsenkrechte durch Kreisschnittpunkte. D125: Man braucht zwei Punkte, sonst kann die Mittelsenkrechte überall liegen. D132: Der Radius ist größer als die Hälfte der Strecke, dann ist der Schnittpunkt der beiden Kreise auf derselben Länge nur höher oder tiefer. Es wird diskutiert: Wie kann man den Radius richtig abschätzen?, D131 konstruiert zweite Mittelsenkrechte an Tafel. Für die dritte Mittelsenkrechte wird der Radius verändert, um zu prüfen, ob die Schnittpunkte der beiden Kreise tatsächlich etwas höher bzw. tiefer liegen und man somit die selbe Geraden erhält.
4 30.05. (2.Std.)	Organisation zur Mathearbeit (4 Minuten) Es wird diskutiert, wieso es ausreicht zwei Mittelsenkrechten zu zeichnen. Lehrperson erklärt mithilfe der Definition der Mittelsenkrechten, dass der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten gleich weit entfernt ist von allen Dreieckseckpunkten. Am Tafelbild werden Kreisbögen und Punkte farbig markiert: „Was wissen wir über diese Punkte?“ D114 und D118 nennen ebenfalls Erklärungen mithilfe der Definition zur Mittelsenkrechten.

	Es werden die Hausaufgaben 2.HA1) Was ist eine Mittelsenkrechte? verglichen. Die Ausgangsfrage wird an der Tafel beantwortet: Es ist kein Zufall. Begründung: Der Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechter ist gleich weit entfernt von A und B sowie C und B, also muss er auch auf der dritten Mittelsenkrechten liegen (Tafelanschrieb). Übungen dazu: *3.1) Konstruktion-MS im KOS, 3.2) Konstruktion-MS zu Dreieck_im_KOS (teilweise), 3.3) Konstruktion-Bahnstrecke* Vergleichen der Aufgaben 3.1) Konstruktion-MS im KOS und kurz 3.2) Konstruktion-MS zu Dreieck_im_KOS führt zu der Definition des **Umkreises** (siehe Abschnitt 8.3.6). HA: *3.2) Konstruktion-MS zu Dreieck_im_KOS und 3.3) Konstruktion-Bahnstrecke zu Ende*
5 01.06. (2.Std.)	Kurze Wiederholung: Was wisst ihr über die Mittelsenkrechte? Es wird die Definition und die Konstruktionsweise genannt und Bezug zum Dreieck genommen. Vergleichen der Hausaufgaben: 3.3) Konstruktion-Bahnstrecke und 3.2) Konstruktion-MS zu Dreieck_im_KOS. Die Koordinaten der Schnittpunkte werden verglichen. Bei 3.2) fällt auf, dass die Mittelsenkrechten sich nicht schneiden. Die Schülerin, die die Lösungsfolie angefertigt hat, fehlt. Die Lösungsfolie wird später betrachtet. Die Konstruktion wird weiter geübt mit den Aufgaben *4.1) Konstruktion-2Punkte und 4.2) Kosntruktion-3Dreiecke.*

	Es werden die Aufgaben 4.1) und 4.2a) (dieses auf Folie) verglichen. HA: Beende 4.2) Konstruktion-3Dreicke, Was fällt dir auf? Alles wiederholen (Test).
6 05.06. (3.Std.)	Wiederholung: Was ist eine Mittelsenkrechte? Was wisst ihr über die Mittelsenkrechten im Dreieck? Definition wird genannt, Begründung für EINEN Schnittpunkt im Dreieck wird wiederholt. Die Schülerinnen und Schüler argumentieren mit **der Definition des Umkreises.** „Da sind wir anders vorgegangen. Andersherum gedacht, überlegt noch einmal!“ Lösungsfolie von 3.2) Konstruktion-MS im Dreieck wird aufgelegt und verglichen. Die Hausaufgaben werden verglichen. Für 4.2) Konstruktion-3Dreiecke werden die fehlenden Größen verglichen. Die drei Dreieckstypen werden benannt und es folgt der Tafelanschrieb zu Schnittpunkte von Mittelsenkrechten in verschiedenen Dreiecken (siehe Abschnitt 8.3.6). „Das müssten wir eigentlich beweisen oder zumindest zeigen, dass dies nicht nur für diese drei Dreiecke gilt.“ Diskussionspunkt vom Stundenanfang wird erneut aufgegriffen: Warum hat der Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten zu allen drei Eckpunkten denselben Abstand? „Wenn man einen Kreis einzeichnet, dann…“ Lehrerin unterbricht den Zirkelschluss: „Umgekehrt denken! Der Umkreis kann nur gezeichnet werden, weil dies so ist.“ D129 erklärt die Konstruktion der MS zur Strecke BC. D131 definiert: Alle Punkte auf der Mittelsenkrechten haben denselben Abstand zu B und C. Für die weiteren

	zwei Mittelsenkrechten wird ebenso verfahren. D117 kann folgern: „Der Schnittpunkt hat den gleichen Abstand zu allen drei Eckpunkten." Acht Schülerinnen und Schüler bestätigen, dass sie die Argumentation nachvollziehen können. Übungsaufgabe *5.1) Kreuz und Quer.* Bei der Bearbeitung wird wiederholt, was unter dem Abstand zwischen einem Punkt und einer Geraden verstanden wird. Die Ergebnisse werden anhand einer Lösungsfolie und dem nennen der Vergleichswerte verglichen. Hinweis der Lehrperson: „Bei dem Stichwort, Punkte, die gleich weit entfernt sind. Was sollte da in den Ohren klingeln?" Dann ist die Mittelsenkrechte gefragt.
Test 2 05.06. (4.Std.)	Erklärungen während des Testes: Kleines d, anderes Wort für Abstand. Distanz. Der Abstand heißt „d". Eine Längeneinheit sind 1 Kästchen. 11:30 – viele Schülerinnen und Schüler sind bereits fertig. Wer fertig ist, kann gehen. Ende 11.35 für alle.

Die ersten 10 Minuten werden für organisatorische Absprachen verwendet. Anschließend werden Abstandsbegriffe an der Tafel gesammelt und die Aufgabenstellung „Abstand zu zwei Punkten" wird zunächst in Einzelarbeit, dann in Partnerarbeit bearbeitet. Die Ergebnisse werden im Plenum vorgestellt und münden in der Definition der Mittelsenkrechten. Nach einem kurzen Rückblick beginnt die zweite Unterrichtsstunde wie geplant mit Übungsaufgaben. Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten die Aufgaben und präsentieren ihre Ergebnisse am OHP. Aus der Besprechung folgt die Umkehrung zur Mittelsenkrechten. In der dritten Unterrichtsstunde werden die Hausaufgaben verglichen. Die in der Hausaufgabe eingezeichneten Mittelsenkrechten in den Dreiecken schneiden sich in einem Punkt. Es wird die Frage aufgeworfen, ob das Zufall ist oder immer gilt. Mithilfe der Konstruktionsweise der Mittelsenkrechten werden Argumentationen zur Beantwortung der Frage geliefert. Für jede der drei Mittelsenkrechten wird die Ortslinien-Definition angewendet, um so zu erklären, dass es einen Punkt gibt, der gleich weit von den drei Eckpunkten entfernt ist. Diese Argumentation wird von Schülerinnen und Schülern wiederholt. Zu Beginn der vierten Stunde werden einige Minuten für organisatorische Absprachen zur Klassenarbeit verwendet. Die Konstruktion der Mittelsenkrechten wird an weiteren Aufgaben geübt. Diese werden verglichen und der Umkreis von Dreiecken wird definiert. Zu Beginn der fünften Stunde werden Definition und Konstruktionsweise der Mittelsenkrechten sowie der Umkreis von Dreiecken wiederholt. Die Hausaufgaben werden verglichen und die Konstruktion wird an weiteren Beispielen geübt. Am Ende wird die Begründung für genau einen Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten im Dreieck erneut wiedergegeben. Mit der Wiederholung dieser Argumentation beginnt die sechste Unterrichtsstunde. Die Hausaufgaben werden verglichen und die Lage der Schnittpunkt bei den drei verschiedenen Dreiecksarten wird notiert. Es folgt die Bearbeitung der Aufgabe 5.1) Kreuz und Quer und ein anschließendes Vergleichen anhand einer Lösungsfolie.

Einzelne Schülerinnen und Schüler der Klasse fehlen häufig. Es kommen häufiger Lernende zu spät zum Unterricht und Hausaufgaben scheinen nicht regelmäßig genug von allen gemacht zu werden. Die Lehrperson fordert Erklärungen und Nacharbeiten ein und legt gleichzeitig viel Wert auf einen wertschätzenden Umgang miteinander.

Die darbietend unterrichtete Klasse D_2

Stunde	Zusammenfassung des Ablaufs in der Klasse D_2
Test 1	
2 Wochen regulärer Unterricht	
1 28.05. (3.Std.)	Organisatorisches (ca. 5 Minuten) Lehrerzentrierter Einstieg: Sammlung bisheriger Abstandsbegriffe an Tafel (ca. 13 Minuten) anschließend Aufgabenstellung *1) Abstand zu zwei Punkten* zunächst in EA (5 Minuten), dann PA (5 Minuten), dann im Plenum am OHP anhand einer Schülerlösung. „Was fällt euch auf?“ D2??: „Die Koordinaten verhalten sich gleich.“ D2??: „Es gibt unendlich viele Punkte.“ D??: „A und B verbinden, dann rechtwinklige Gerade durch die Mitte zeichnen, dann hat man alle Punkte.“ Definition der Mittelsenkrechten (siehe Abschnitt 8.3.6) Beschriftung der Mittelsenkrechten wird festgelegt (kleines m oder g).
2 28.05. (4.Std.)	Wiederholung: Wiederholt mit eigenen Worten. D2??: „Wenn man zwei Parallelen hat, dann hat man die Gerade dazwischen und das ist die Mittelsenkrechte.“ D221: „Eine Gerade, zwei Punkte, ne doch nicht.“ D213: „Wir machen eine Strecke aus den Punkten A und B. Dann ziehen wir eine Gerade dadurch, so dass die beiden Punkte gleich weit weg sind. Das ist dann die Mittelsenkrechte.“

	L: Welche besondere Eigenschaft hat die Mittelsenkrechte?“ *(keine Meldungen, dann eine).* D2??: „Die Mittelsenkrechte hat den gleichen Abstand zu A und B.“ L: „JEDER Punkt hat den gleichen Abstand von A und B.“ *Übungsaufgaben 2.1 bis 2.4 zunächst in Einzelarbeit* (für 20 Minuten). Hinweis der Lehrperson beim Herumgehen (nach ca. 10 Minuten): „Die Mittelsenkrechte haben wir nicht umsonst eingeführt. Ihr werdet die schon brauchen. Tauscht euch mit eurem Nachbarn aus.“ Dann wird im Unterrichtsgespräch verglichen. *Zunächst 2.1) Altstadt-Neudorf*: E15 zeichnet drei einzelne Punkte ein, keine Mittelsenkrechte. Das Einzeichnen der Mittelsenkrechten wird im UG erarbeitet, die Definition wiederholt. Die Lehrperson stellt den Unterschied zwischen dem Abstand der beiden Punkte A und B und dem Abstand eines Punktes zur Geraden heraus. Die Schülerinnen und Schüler erhalten 3 Minuten Zeit die genannten Begründungen in ihr Heft zu schreiben. *2.2) A-Dorf und B-Dorf:* E29 erklärt: „Erst A und B verbinden. Dann muss man die Mittelsenkrechte einzeichnen. Und dann kamen die drei Steine raus.“ Es wird ergänzt: Punkte, die nicht auf der Geraden liegen sind nicht gleich weit entfernt von den beiden Punkten. Die Schülerinnen und Schüler erhalten 3 Minuten Zeit die genannten Begründungen in ihr Heft zu schreiben. Umkehrung der Mittelsenkrechten (siehe Abschnitt 8.3.6)

	2.3) Entfernung zu P und Q wird erst in Worten und dann anhand einer Musterlösung am OHP verglichen. Die Schülerinnen und Schüler erhalten 1 Minute Zeit, um Abzuzeichnen und zu korrigieren. In der Zeit verteilt die Lehrperson die Hausaufgabenzettel. *2.4)°Gerade im KOS* wird anhand einer Lösungsfolie verglichen und den Koordinaten von Punkt C verglichen. Es werden noch Begründungen eingefordert. Es wird auf Vereinbarungen hingewiesen, die für die Bearbeitung der Hausaufgaben wichtig sind. Lehrperson zeichnet am OHP Dreieck und lässt für alle wiederholen, wie man die Mittelsenkrechte einzeichnet. D232: „Man misst die Hälfte der Strecke AB ab und zeichnet eine Gerade mit rechtem Winkel ein." HA: 2.HA1) Was ist eine Mittelsenkrechte? und 2.HA2) Zeichen MS zu drei Dreiecken
3 01.06. (5.Std.)	Organisatorische Fragen. Lehrperson geht durch die Reihen und lässt sich die Hausaufgaben zeigen. L: „Wer die Mittelsenkrechten nur angedeutet hat, sollte die noch zu Ende zeichnen. Das sind Geraden, die sollten schön lang sein. Dann kommen wir zu den Hausaufgaben. Als kurze Wiederholung.: Den Begriff Mittelsenkrechte hattet ihr Kennengelernt. Was ist denn nun eine Mittelsenkrechte? (2HA1) Wer kann das noch einmal beschreiben?" (ca. 5 Minuten) D223: „Eine Mittelsenkrechte ist, wenn ein Punkt von zwei Punkten gleich weit entfernt ist. Und man nennt es

	dann Mittelsenkrechte, da es eine Senkrechte durch die Mitte der Strecke ist.“ L: „Mehrere! Es sind eigentlich unendlich viele Punkte. Es sind a-l-l-e Punkte, die von zwei Punkten den gleichen Abstand haben. Das ist die Mittelsenkrechte. Das sind a-l-l-e Punkte, die von zwei Punkten den gleichen Abstand haben.“ E21: „Eine Mittelsenkrechte ist einer Gerade, die senkrecht zu einer Strecke verläuft, die aus zwei Punkten festgelegt ist. Dabei hat die Mittelsenkrechte den gleichen Abstand sowohl zum einen als auch zum anderen Punkt.“ L: „Ja, aber nicht die Senkrechte, sondern alle Punkte! Auf der Senkrechten. Bitte, das ergänzen! Es sind die Punkte gemeint. Alle Punkte auf dieser Mittelsenkrechten haben von den beiden Punkten den gleichen Abstand.“ E20: „Wenn zwei Punkte gegeben sind und man noch einen einzeichnen muss, der den gleichen Abstand zu beiden Punkten hat, liegt dieser auf der Mittelsenkrechten.“ L: „Ja, das stimmt. Aber da hast du nicht erklärt, was eine Mittelsenkrechte ist, ist aber auch ok. Besprechung der Hausaufgaben, zuerst 2.HA2) Zeichne MS zu Dreiecken Es werden die fehlenden Werte verglichen. „Was fällt euch auf?“ D216: „Die schneiden sich in der Mitte. In einem Punkt.“ Wiederholung Einzeichnen der Mittelsenkrechten für Teilaufgabe a)

Bei Teilaufgabe b) gehen die Schülermeinungen auseinander: Gibt es einen Schnittpunkt oder nicht? Teilaufgabe b): Die Mittelsenkrechten werden von der Lehrperson auf der Folie eingezeichnet.

D231: „Kann es sein, dass dieser Punkt wie eine Art Mittelpunkt bei einem Kreis ist?“

Auch bei c) schneiden sich die drei Mittelsenkrechten in einem Punkt.

D228 vermutet, dass gilt für jedes Dreieck.

L: „Da wir in der Mathematik sind, können wir das als Vermutung haben. Beweisen müssen wir es aber selber noch.“

Tafelanschrieb: Frage: Schneiden sich die drei Mittelsenkrechten in jedem beliebigen Dreieck in einem Punkt?

D231: „Kann ich schon mal noch eine Theorie sagen?“ (nicken) „Ich glaube auch, dass die sich immer schneiden, da ja die genaue Mitte des Dreiecks, sag ich mal herausgefunden wird, weil die Mitte jeder Seite verlängert wird und dadurch ein Mittelpunkt herausgefunden wird und dort schneiden die sich also.“

Lehrperson möchte diese Vermutungen nun beweisen und konstruiert an einem Beispieldreieck (spitzes Dreieck) auf der Folie die drei Mittelsenkrechten mit Zirkel und Lineal.

Konstruktion der Mittelsenkrechten mit Zirkel und Lineal

Bei der Konstruktion wird die Definition eines Kreises und die der Mittelsenkrechte wiederholt.

Die zweite Mittelsenkrechte wird nach Beschreibung eines Schülers durch die Lehrperson konstruiert. D230

	wird darauf hingewiesen, dass er nicht messen muss, um den Radius zu erhalten (beliebig, aber größer als die Hälfte der Strecke). Es wird argumentiert mithilfe der Definition der Mittelsenkrechten, warum auch die dritte Mittelsenkrechte durch den Schnittpunkt dieser beiden verlaufen muss. D231: „Weil jeder Punkt auf der Mittelsenkrechten gleich wie von zwei Punkten entfernt ist. Und wenn die sich alle schneiden, heißt es, dass der Punkt der getroffen wird, muss von allen drei Punkten gleich weit entfernt sein.“ Ein weiterer Schüler erklärt, wie konstruiert wird und die dritte Mittelsenkrechte wird von der Lehrperson eingezeichnet. Argumentation wird wiederholt. Gemeinsam im UG wird die Formulierung für den Merksatz erarbeitet. Es wird festgehalten: JA, denn alle Punkte, die auf der Mittelsenkrechten von A und B sind, haben den gleichen Abstand zu den Punkten A und B. Alle Punkte der Mittelsenkrechten durch A und C, sind gleich weit entfernt von den Punkten A und C. Daher ist der Schnittpunkt dieser beiden Mittelsenkrechten von A, B und C gleich weit entfernt, also auch von B und C gleich weit entfernt. Und damit muss auch die Mittelsenkrechte von B und C durch diesen Punkt gehen. D216: „Jetzt verstehe ich nichts mehr.“ Lehrperson schaut noch einmal von vorne auf die Fragestellung und wiederholt die Argumentation. Einzelne Schüler wiederholen anschließend die Argumentation.

	(ca. 45 Minuten sind um, es werden ca. 5 Minuten Pause gemacht)
4 01.06. (6.Std.)	Übungen dazu: *3.1) Konstruktion-MS im KOS, 3.2) Konstruktion-MS zu Dreieck_im_KOS (teilweise), 3.3) Konstruktion-Bahnstrecke* Zunächst in Einzelarbeitsphase (fast durchgehend 30 Minuten leises arbeiten in EA). L: „Die Aufgaben 1, 2 und 3 sollten jetzt ordentlich fertig sein. Wenn sie das nicht sind, seid ihr zu langsam und müsst zuhause die Konstruktion mit Zirkel und Lineal üben.“ D222 präsentiert eine Lösung zu 3.1) auf einer Folie vorne und erklärt diese. D212 präsentiert eine Lösung zu 3.2) auf einer Folie vorne und erklärt diese. D233 präsentiert eine Lösung zu 3.3) auf einer Folie vorne und erklärt diese. Es verbleiben 5 Minuten für Organisatorisches.
5 04.06. (3.Std.)	Kurze Wiederholung: Was ist eine Mittelsenkrechte? Wie konstruiert man die Mittelsenkrechte?? Was wissen wir über die Mittelsenkrechte im Dreieck? Argumentation für den gemeinsamen Schnittpunkt im Dreieck wird wiederholt. Nach 5 Minuten beginnt die Übungsphase: *4.1) Konstruktion-2Punkte und 4.2) Konstruktion-3Dreiecke*.

	Nach ca. 30 Minuten werden die Aufgaben 4.1) und 4.2) anhand der fehlenden Kennwerte verglichen. Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten wird genannt. Rückblickend werden Vermutungen gesammelt, wann sich die Mittelsenkrechten im bzw. außerhalb des Dreiecks oder auf der längsten Dreiecksseite schneiden. Nach 10 Minuten erfolgt der zusammenfassende Tafelanschrieb: Schnittpunkt von Mittelsenkrechten im Dreieck und der **Umkreis** (siehe Abschnitt 8.3.6) Die Stunde dauert 50 Minuten. Nach 5 Minuten Pause geht es weiter.
6 04.06. (4.Std.)	Die Arbeitsblätter sind bereits ausgeteilt. Übungsaufgabe *5.1) Kreuz und Quer.* Es wird in Einzelarbeit gearbeitet. Nach 20 Minuten werden die Aufgaben verglichen. Es wird eine Lösungsfolie aufgelegt und nur einzelne Aufgaben angesprochen (Teilaufgaben a), e) und h)) HA: Lerne für den Test!
Test 2 07.06. (2.Std.)	

Nach kurzen organisatorischen Absprache beginnt die Sammlung der Abstandsbegriffe an der Tafel. Anschließend wird die Mittelsenkrechten zunächst in Einzelarbeit und dann in Partnerarbeit an der Einstiegsaufgabe thematisiert. Es folgt ein Austausch im Plenum und die Definition der Mittelsenkrechten. Nach einem kurzen Rückblick werden in der zweiten Unterrichtsstunde die weiteren Übungsaufgaben, deren Besprechung in der Umkehrung zur Mittelsenkrechten mündet, bearbeitet. Es folgen zwei weitere Übungsaufgaben und das Vergleichen anhand von Lösungsfolien. Die Lehrperson erklärt an einem Beispiel, wie die Mittelsenkrechte mit dem Geodreieck eingezeichnet werden kann und verteilt die Hausaufgabe. Zu Beginn der dritten Stunde kontrolliert die Lehrperson alle eingezeichneten Mittelsenkrechten und weist darauf hin, dass es Geraden sein und dementsprechend als Geraden in der Zeichnung erkannt werden sollen. Es wird wiederholt, was eine n Mittelsenkrechte ist.- Anschließend werden die Hausaufgaben mithilfe von Vergleichswerten verglichen und die Beobachtung festgehalten, dass sich die Mittelsenkrechten im Dreieck in einem Punkt schneiden. Die Schülerinnen und Schüler vermuten, dass dies immer so ist. Diese Vermutung wird aufgegriffen, in dem die Konstruktionsweise der Mittelsenkrechten gezeigt und begründet wird. Die Argumentation wird für jede der drei Mittelsenkrechten des Dreiecks wiederholt, so dass deutlich wird, dass der Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechten eben auch auf der dritten Mittelsenkrechte liegen muss. Es schließt sich eine Einzelarbeit als Übungsphase in der vierten Unterrichtsstunde an. Drei Schülerinnen und Schüler präsentieren ihre Lösungen am Overheadprojektor. Die letzten fünf Minuten werden für organisatorische Absprachen genutzt. Die fünfte Unterrichtsstunde beginnt mit einer Wiederholung zur Definition der Mittelsenkrechten und Ihrer Konstruktion, sowie den Mittelsenkrechten im Dreieck. Die Argumentation für den gemeinsamen Schnittpunkt im Dreieck wird wiederholt. Es werden weitere Übungsaufgaben zu diesen Inhalten bearbeitet und verglichen. Die Besprechung mündet in der Definition des Umkreises und der Lage der Schnittpunkte der Mittelsenkrechten bei den drei Dreiecksarten. In der sechsten Unterrichtsstundewird die Übungsaufgabe 5.1) Kreuz und Quer in Einzelarbeit bearbeitet. Es wird eine Lösungsfolie von der Lehrperson aufgelegt und auf Nachfrage einzelne Teilaufgaben besprochen.

Die Lehrperson strukturiert den Unterricht und die Inhalte deutliche in Ihren Aussagen. Es wird Wert daraufgelegt, was zu lernen ist und dies wird in der kommenden Stunde abgefragt. Diese Vorgehensweise hat die Lehrperson aufgrund ihrer Erfahrungen mit der Klasse verstärkt eingesetzt. Die Leistungen der Schülerinnen und Schüler dieser Klasse sind im Durchschnitt eher schwach. Es fehlen leistungsstarke Schüler bzw. Schülerinnen in Mathematik. Bei engen Kontrollen und Abfragen lernt ein Großteil gewissenhaft und fleißig die Inhalte.

Zwischenfazit zur Durchführbarkeit der Unterrichtsumsetzung: In allen vier Klassen können die geplanten Unterrichtsabläufe eingehalten werden. Es kommt zu unterrichtspraktischen Abweichungen durch Schüleräußerungen, die es dann gilt angemessen in das Unterrichtsgeschehen einzubinden. Teilweise wird Unterrichtszeit für organisatorische Absprachen verwendet. Dies entspricht einem realen Unterrichtssetting. In der Regel werden alle vorgesehenen Aufgaben bearbeitet und verglichen. Eine Ausnahme bildet P_1, denn hier werden die Mittelsenkrechten zu 3.3.a) und b) weggelassen, dafür werden 5.2 und 5.3 von einigen Schülerinnen und Schülern bearbeitet. Eine Durchführung in der vorgesehenen Zeit von sechs Unterrichtsstunden gelingt in den darbietend und auch in den problemorientiert unterrichteten Klassen. In keiner der Klassen kommt es zu Zeitmangel, so dass Inhalte nicht thematisiert werden können. Ebenso ist keine Klasse vor den sechs Unterrichtsstunden mit der Erarbeitung fertig. Die optionalen Aufgaben in der letzten Unterrichtsstunde (AB *5Übungsaufgaben*, Aufgaben 2 bis 4) wurden in keiner der vier Klassen im Unterricht thematisiert. Die Unterrichtszeit, Unterrichtsinhalte und -umfang können als angemessen eingestuft werden.

10.4 Testergebnisse im direkten Anschluss an die Unterrichtseinheit und langfristig

Die Analysen von Test 2 und Test 3 zeigen, inwiefern die Lernleistungen direkt nach der Unterrichtseinheit und langfristig zwischen den vier Klassen vergleichbar sind. An dieser Stelle werden die Testergebnisse für die Aufgaben 1 bis 5 zusammenfassend betrachtet, um so eine Aussage über die erbrachten Schülergesamtleistungen ableiten und damit die generelle Durchführbarkeit der zwei Unterrichtsansätze beurteilen zu können. Eine detaillierte Analyse zu jeder Aufgabe unter Bezug zu den Lerninhalten und Wissenselementen erfolgt anschließend in Kapitel 12.

Auch hier gilt die Anmerkung bezüglich der durchschnittlichen Leistungen von rund 50 % (vgl. Kapitel 10). Die Aufgaben wurden so ausgewählt, dass durch anspruchsvolle Anforderungen eine weitere Differenzierung möglich ist. Die Bearbeitungszeit war ausreichend eingeplant. Tatsächlich haben viele Schülerinnen und Schüler bereits vor Abgabeende Ihre Bearbeitungen abgegeben.

10.4.1 Klassenweise Auswertung von Test 2 (Testaufgabe 1 bis 5)

F1.1: Sind Lernleistungen der Schülerinnen und Schüler beider Unterrichtsansätze am Ende der Unterrichtseinheiten vergleichbar?

Der Test wurde so konzipiert, dass die Unterschiede der Unterrichtsvarianten abgebildet werden. In Aufgabe 3 wird mit der Argumentation der Mittelsenkrechten im Dreieck ein in den darbietend unterrichteten Klassen stärker fokussierter Unterrichtsinhalt erfasst. Mit einer Variation der Brunnenaufgabe wird in Aufgabe 5 ein in den problemorientierten Klassen fokussierter Unterrichtsinhalt abgefragt. Beide Aufgaben sind bei der Auswertung gleich gewichtet. Ein Gesamtbild der Lernleistung wird durch die Inhalte aller fünf Aufgaben erhoben. Eine Auswertung über alle fünf Aufgaben kann einen Überblick über die Vergleichbarkeit der erbrachten Gesamtleistung bringen. Inwiefern insbesondere bei den Aufgaben 3 und 5 unterschiedliche Leistungen erbracht werden, wird in Kapitel 11 erörtert.

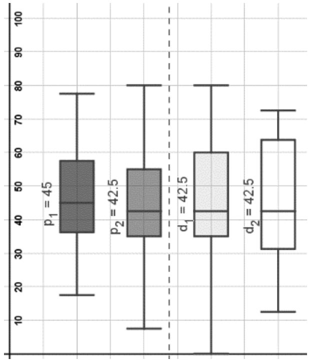


Abb. 27: Gesamtergebnis der vier Klassen in Test 2. Dargestellt werden Median und prozentuale erreichte Punkte. 20 Punkte entsprechen 100%.

In Abb. 27 werden die Testergebnisse des Test 2 für alle fünf Testaufgaben dargestellt. Die Mittelwerte liegen sehr nah beieinander. Für drei der vier Klassen beträgt der Median $p_2 = d_1 = d_2 = 42{,}50$ %. Die Klasse P_1 hat mit einem Median von $p_1 = 45{,}00$ % einen leicht höheren Durchschnittswert. Die Werte für das Minimum liegen mit eine r Spanne von 0 % (Klasse D_1) und 17,50 % (Klasse P_1) relativ nah beieinander.

Auch die Werte für das Maximum unterscheiden sich nur gering; sie liegen zwischen 72,5 % (Klasse D_2) und 80 % (Klassen D_1 und P_2) (vgl. Tab. 33). Die fehlende Leistungsspitze in

Test 2, Aufgabe 1 bis 5 Angaben in %	*Problemorientierter Unterricht*		*Darbietender Unterricht*	
	P_1	P_2	D_1	D_2
Arithmetisches Mittel	46,43	45,34	44,24	45,60
Standardabweichung	15,21	15,96	18,61	17,76
Maximum	77,50	80,00	80,00	72,50
Oberes Quartil	57,50	55,00	60,00	63,75
Median	45,00	42,50	42,50	42,50
Unteres Quartil	35,00	35,00	35,00	31,75
Minimum	17,50	7,50	0,00	12,50

Tab. 33: Stat. Kenngrößen der Testergebnisse zu Test 2

der Klasse D_1 aus dem Test 1 ist im Vergleich zu den anderen drei Klassen kaum noch auszumachen (vgl. Abb. 27). Dieser

Problemorientierter Unterricht		Darbietender Unterricht	
P_1	P_2	D_1	D_2
45,9	43,9	42,1	44,3
$\alpha = 0,05$ Signifikanzniveau	df = k-1=3 Freiheitsgrade	p = 0,9709 Irrtumswahrscheinlichkeit	
$H = 0,24 < 7,81 = \chi^2_3$ Es liegt **kein signifikanter Unterschied** vor. H_0 wird beibehalten: Es gibt keine signifikanten Unterschiede zwischen den Klassen P_1, P_2, D_1 und D_2.			

Tab. 34: Ergebnisse des Kruskal-Wallis-Signifikanztests Test 2, Aufgabe 1 bis 5

Gesamtblick auf die Leistung über alle fünf Aufgaben hinweg zeigt, dass die Klassenleistungen vergleichbar sind. Dies bestätigt auch der Kruskal-Wallis-Test mit einem Wert von $0,24 < 7,81$ ($df = 3$ und $\alpha = 0,05$). Es liegen keine signifikanten Unterschiede vor (vgl. Tab. 34). Nach der Durchführung der Unterrichtseinheit werden vergleichbare Leistungen in allen vier Klassen in Test 2 erzielt.

Zwischenfazit zu F1.1: Alle vier Klassen erreichen vergleichbare Ergebnisse in Test 2.

10.4.2 Klassenweise Auswertung von Test 3 (Testaufgabe 1 bis 5)

F1.2: Sind die Lernleistungen der Schülerinnen und Schüler in den beiden Unterrichtsansätzen langfristig vergleichbar?

Das Gesamtergebnis aller fünf Aufgaben des Test 3 ist in Abb. 28 dargestellt. Die Klassen P_1 und P_2 haben mit $p_1 = 37,5$ % und $p_2 = 36,25$ % einen geringeren Durchschnittswert als die beiden darbietend unterrichteten Klassen. Diese haben beide einen Median von $d_1 = d_2 = 45$ % (vgl. Abb. 28). Ähnliches gilt für das arithmetische Mittel (vgl. Tab. 35). Die Werte für das

Minimum liegen vergleichsweise nah beieinander. P_2 weist das geringste Minimum von 0 % auf, P_1 und D_2 das höchste von 10 %, das entspricht 2 Punkten. Die Maxima von P_2, D_2 und D_2 sind ebenfalls nah beieinander. Das kleinste Maximum liegt mit 72,50 % (das sind 14,5 Punkte) bei der Klasse P_1. Die höchsten Werte erreichen Schülerinnen und Schüler aus den Klassen P_2 und D_2 (90 %). Für P_2 erkennt man sowohl durch die große Box in Abb. 28 als auch in Tab. 35, dass sie eine nach oben abweichende Standardabweichung aufweist. Die anderen drei Klassen haben einen Wert von ca. 20 (vgl. Tab. 35). Das lässt die Spannweite und die große Box in Abbildung 13 für P_2 erkennen. Insgesamt unterscheiden sich die vier Klassen nicht signifikant. Dies bestätigt der Kruskal-Wallis-Test mit einem Wert von $2{,}67 < 7{,}81$ ($df = 3$ und $\alpha = 0{,}05$). Ihre Leistungen sind somit vergleichbar (vgl. Tab. 36). Vergleicht man diese Testergebnisse mit den Testergebnissen aus Test 2 können generelle Aussagen zur Entwicklung der vier Klassen gemacht werden.

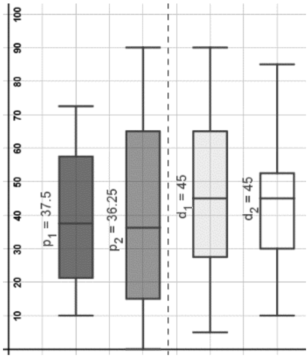


Abb. 28: Gesamttestergebnisse des Test 3. Dargestellt werden Median und prozentuale erreichte Punkte. 20 Punkte entsprechen 100%.

Test 3, Aufgabe 1 bis 5 Angaben in %	*Problemorientierter Unterricht*		*Darbietender Unterricht*	
	P_1	P_2	D_1	D_2
Arithmetisches Mittel	37,86	37,73	46,30	43,45
Standardabweichung	19,48	29,66	20,78	20,24
Maximum	72,50	90,00	90,00	85,00
Oberes Quartil	57,50	65,00	65,00	52,50
Median	37,50	36,25	45,00	45,00
Unteres Quartil	21,25	15,00	27,50	30,00
Minimum	10,00	0,00	5,00	10,00

Tab. 35: Stat. Kenngrößen der Testergebnisse zu Test 3

Problemorientierter Unterricht		*Darbietender Unterricht*	
P_1	P_2	D_1	D_2
39,6	39,4	49,8	46,9
$\alpha = 0{,}05$ Signifikanzniveau	df = k-1=3 Freiheitsgrade	p = 0,4137 Irrtumswahrscheinlichkeit	
H = 2,86 < 7,81= χ_3^2 Es liegt **kein signifikanter Unterschied** vor. H_0 wird beibehalten: Es gibt keine signifikanten Unterschiede zwischen den Klassen P_1, P_2, D_1 und D_2.			

Tab. 36: Ergebnisse des Kruskal-Wallis-Test zw. Den vier Klassen in Test 3, Aufgabe 1 bis 5

Es ist zu erkennen, dass die beiden problemorientiert unterrichteten Klassen im Schnitt in Test 3 einen geringeren Median und auch ein geringeres arithmetisches Mittel als in Test 2 aufweisen. Für die Klasse P_1 verringert sich der Median von 45 % aus Test 2 auf 37,5 % in Test 3. Ähnlich sieht es für die Klasse P_2 aus: Von 42,5 % fällt die durchschnittliche Leistung auf 36,25 %. Für die beiden darbietend unterrichteten Klassen gilt der umgekehrte Fall. Die Mediane in beiden Klassen steigen von 42,5 % in Test 2 auf 45 % in Test 3. Es ist eine minimale durchschnittliche Verbesserung für die darbietend unterrichteten Klassen zu erkennen.

Zwischenfazit zu F1.2: Alle vier Klassen erreichen vergleichbare Ergebnisse in Test 3.

Im Vergleich zu Test 2 sinkt die durchschnittliche Leistung der problemorientiert unterrichteten Klassen um knapp 7,5 Prozentpunkte. Die darbietend unterrichteten Klassen können ihre durchschnittliche Leistung um 2,5 Prozentpunkte verbessern. Das macht sich auch im Ergebnis deutlich, die darbietend unterrichteten Klassen weisen etwas höhere Durchschnittswerte auf.

11 Diskussion zur Durchführbarkeit des problemorientierten Unterrichts (Forschungsaspekt 1)

Mit dem ersten Forschungsfeld wird die generelle Durchführbarkeit des problemorientierten Unterrichts im Vergleich zu einer darbietenden Unterrichtsvariante untersucht (vgl. Abschnitt 6.1). Dabei wurden beide Unterrichtsvarianten bestmöglich geplant (vgl. Kapitel 8). Die Inhalte und Bedeutungen zur Mittelsenkrechten sowie die Lernziele sollten vergleichbar sein. Bei Methoden und Medieneinsatz wurde auf die im bisherigen Unterricht verwendeten Vorgehensweisen zurückgegriffen. Die Lehrpersonen haben eine für sich und die Klasse passende Unterrichtsvariante ausgewählt. Das inhaltliche Vorwissen in Bezug auf Mittelsenkrechten und die Problemlösefähigkeiten der Schülerinnen und Schüler wurde in Tests erhoben. Zunächst wird mit der Betrachtung des Vorwissens die Vergleichbarkeit der Ausgangslage in allen Klassen beurteilt (vgl. Abschnitt 11.1).

Anschließend werden die Ergebnisse der Unterrichtsbeobachtungen diskutiert (vgl. Abschnitt 11.2). Diese werden hinsichtlich Ablauf und Durchführbarkeit eingeordnet. Damit werden die Voraussetzungen für eine Vergleich zwischen den Lernleistungen festgelegt.

Abschließend werden die Testergebnisse aus Test 2 und 3 zusammengefasst und diskutiert (vgl. Abschnitt 11.3). Damit werden die Forschungsfrage F1.1 und F1.2 beantwortet. Weiterführende Untersuchungsanregungen, die sich aus der generellen Durchführbarkeit der Unterrichtseinheiten ergeben, werden abschnittsweise aufgeführt, um dann abschließend in der Detailanalyse wieder aufgegriffen zu werden.

11.1 Diskussion der Voraussetzungen – inhaltliches Vorwissens und Problemlösefähigkeit

Mit Test 1 wird das inhaltliche, geometrische Vorwissen bezüglich der Mittelsenkrechten erfasst. Die Aufgabe 5 ist eine Problemlöseaufgabe, mit der ein Wert für die Problemlösefähigkeit ermittelt wird. Die vier Klassen zeigen vergleichbare geometrische Leistungen. Durchschnittlich werden knapp 50 % der Punkte erreicht. Das zeigen sowohl Median als auch arithmetisches Mittel der vier Klassen

Die Klasse D_2 weist durch die fehlende Leistungsspitze die deutlichste Abweichung nach unten zu den anderen Klassen auf. Sie hat ein arithmetisches Mittel von knapp 38 %. Diese Unterschiede sind nicht signifikant, da weitere Kennwerte nah beieinander liegen. Auch der Kruskal-Wallis-Test zeigt, dass das Vorwissen in den vier Klassen vergleichbar ist. Diese Voraussetzung erleichtert die spätere Interpretation der Lernleistungen in Test 2 und 3.

Die durchschnittlichen Leistungen in Test 1 fallen mit 40-50 % gering aus. Hier hätte man höhere Werte erwarten können, da die Begriffe Abstand eines Punktes zu einer Geraden, Parallele und Kreis den Schülerinnen und Schülern der Klasse 7 bekannt sein sollten.

Als Erklärung für die niedrigen Mittelwerte können zwei Dinge angeführt werden: Einerseits sind Parallele und Kreis den Kindern sicher bereits aus der Grundschule bekannt. Andererseits muss dies für die Ortslinien-Eigenschaft, die in den Aufgaben fokussiert wird, nicht gelten. Im Kernlehrplan der Grundschule wird der Kreis als grundlegende Form genannt, die Kinder als solche identifizieren können sollen. Bei der Beschreibung von geometrischen Formen verwenden sie dann Fachbegriffe wie senkrecht und parallel (vgl. Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalens 2021, S. 90). Auch im Kernlehrplan der Sekundarstufe I wird der Kreis als Figur benannt. Auf ein Verständnis der Ortslinien-Eigenschaft wird indirekt zurückgegriffen, wenn ebene Figuren mit dem Zirkel gezeichnet werden sollen (vgl. Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen 2022, S. 29) oder Symmetrieachsen ermittelt werden sollen (vgl. Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen 2022, S. 30). Eine konkrete Definition für den Kreis oder andere Begriffe werden dort nicht angeführt. Das Wort „parallel“ gibt es genau einmal als Bestandteil des Wortes „Parallelität“ im Zusammenhang mit Lagebeziehungen und Symmetrie (vgl. Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen 2022, S. 29).

Damit stellt der Lehrplan eine beschreibende Verwendung von Kreis und Parallele in den Vordergrund. Als Hilfsmittel wird der Kreis dann bei der Konstruktion der Mittelsenkrechten indirekt mit seiner Ortslinien-Eigenschaft mitgedacht, wenn man von einem Verstehen der Konstruktionsweise als Lernziel ausgeht (vgl. Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen 2022, S. 35).

Bei einem strikten Unterricht nach Lehrplan besteht durchaus die Möglichkeit, dass der Kreis erst bei der Konstruktionsweise der Mittelsenkrechten in Klasse 7 anhand seiner Ortslinien-Eigenschaft erlernt wird.

Man kann die Anforderungen des Lehrplans mit dem van-Hiele-Modell in Verbindung bringen. Mit diesem empirisch fundierten Modell können fünf Niveaustufen zum Begriffserwerb unterschieden werden (vgl. Abschnitt 2.3.6). Die bis einschließlich Klasse 6 formulierten Verwendungen des Kreises entsprechen rein beschreibender Natur, wie es in der Niveaustufe 2 der Fall ist (vgl. Frank & Reinhold 2015, S. 136ff.). Weitere logische Verknüpfungen wären beispielsweise: Ein

Punkt hat genau dann den Abstand 2 cm zum Punkt M, wenn er auf dem Kreisbogen mit dem Radius r = 2 cm um M liegt. Diese erfolgen erst mit der Niveaustufe 3, die mit den Lehrplanvorgaben nicht initiiert werden (vgl. Abschnitt 2.3.6).

Durch das gewählte Aufgabenformat in Test 1 können die Ortslinien-Eigenschaften beim Bearbeiten der Aufgabenstellung (ggf. neu) erarbeitet werden. Überspitzt könnte man an dieser Stelle fragen, inwiefern hier tatsächlich Vorwissen abgefragt wird oder aber neues Wissen generiert wird. Einen Hinweis darauf könnte die Detailanalyse zu Test 1 ergeben.

Das leitet direkt die zweite Erklärung ein: Das Aufgabenformat kann für die Schülerinnen und Schüler ungewohnt sein. Die mathematischen Begriffe wie Kreis und Parallele werden namentlich nicht genannt. Anhand der Aufgabenstellung sollen Eigenschaften von Begriffen abgerufen werden, ohne dass die Begriffsnamen dort aufgeführt werden. Dies hat zum Ziel, dass erfasst wird, inwiefern den Schülerinnen und Schülern beispielsweise der Kreis als Ortslinie für die Konstruktion weiterer geometrischer Objekte zur Verfügung steht. Es kann ggf. Wissen generiert werden. Andernfalls besteht die Möglichkeit, dass durch das Fehlen der Fachbegriffe wie Kreis und Parallele einige Lernende ihr Vorwissen nicht vollständig aktivieren können (vgl. Heinze 2007, S. 5). Damit wird das Wechselspiel zwischen Begriffsbildung, Geometrie und Problemlösen deutlich (vgl. Abschnitt 2.3.7).

Gleichzeitig bleibt festzuhalten, dass mit den vier Aufgaben aus Test 1 das Ortslinienkonzept und damit ein sehr spezieller Teilaspekt des Vorwissens herausgegriffen und als inhaltlich für ein Verstehen der Mittelsenkrechte relevantes Wissen impliziert wird. Weitere benötigte Teilaspekte für das Erlernen der Mittelsenkrechten werden möglicherweise nicht erfasst. Dazu zählen zum Beispiel sprachliche oder aussagenlogische Kompetenzen der Lernenden. Es wäre interessant zu wissen, inwiefern dieses theoretische, erörterte Wissen zu Ortslinien auch messbar als Vorwissen für das Verstehen der Mittelsenkrechten einen Einfluss auf die Lernprozesse hat. Sowohl für einen problemorientierten wie auch für einen darbietenden Unterricht kommt dem Vorwissen und der aktiven Anknüpfung an dieses eine entscheidende Rolle beim Lernverhalten zu (vgl. Abschnitt 3.1).

Die Auswertung der Problemlöseaufgabe zu den Rechtecksflächeninhalten zeigen deutliche Unterschiede auf: Die Klassen P_1 und P_2 erhalten mit knapp 35 % deutlich höhere Durchschnittswerte als die darbietend unterrichteten Klassen (beide 0 %). Diese Unterschiede sind nach dem Kruskal-Wallis-Test zwischen den Klassen P_1 und D_2, sowie zwischen P_2 und D_2 signifikant. Diese Ergebnisse stimmen mit den vorab erhobenen Lehrereinschätzungen zu den vier Klassen überein. Dabei wurde erörtert, welche Lehrpersonen den problemorientierten Unterrichtseinstieg der Klasse zutraut (vgl. Abschnitt 7.3). Damit können die Einschätzungen der Lehrpersonen als passend eingeordnet werden.

Diese Zuordnung der bevorzugten Unterrichtsvariante für Lehrerinnen und Lehrer wie auch für Schülerinnen und Schüler sorgt für eine positive Selektion der Studie. Dies sollte für die Interpretation der weiteren Analysen stets beachtet werden. Für alle vier Klassen sind die Durchschnittswerte als gering einzuordnen. Knapp jeder dritte Lernende der problemorientiert unterrichteten Klassen kann die Aufgabe vollständig lösen bzw. im Schnitt wird die Aufgabe zu knapp 1/3 richtig gelöst.

Mit den Auswertungen und Diskussionen zu den Ergebnissen von Test 1 werden weitere Fragen aufgeworfen, die in einer anschließenden Detailanalyse erörtert werden.

1. Die Begriffe Abstand, Kreis und Parallele aus den Aufgaben 1 bis 3 sollten den Schülerinnen und Schülern bekannt sein. Der Begriff der Mittelsenkrechten ist zum Testzeitpunkt 1 noch nicht thematisiert worden. Es stellt sich die Frage, inwiefern die Durchschnittswerte zur Mittelsenkrechten-Aufgabe (Aufgabe 1.4) von den Durchschnittswerten der Aufgaben 1.1 bis 1.3 abweichen. Ein Vergleich der Mittelwerte kann Rückschlüsse auf das Vorwissen der Lernenden zu diesen Begriffen und/oder das Potential der Aufgabenstellungen ermöglichen.
2. Die Auswertung der Problemlöseaufgabe zeigt vergleichsweise geringe durchschnittliche Schülerleistungen. Es stellt sich die Frage, worin die Schwierigkeit für die Schülerinnen und Schülern lag: Fehlt es an Systematik, so dass nicht alle Lösungen gefunden werden können? Fehlt es am Zugang zur Aufgabe, so dass ein Großteil die Aufgabe nicht bearbeitet? Welche anderen Lösungsschwierigkeiten können ausgemacht werden? Die Beantwortung dieser Fragen gibt einen detaillierten Einblick in die Problemlösefähigkeiten der Lernenden.

11.2 Diskussion zur Unterrichtsumsetzung

Die sich anschließende Umsetzung im Unterricht wird durch die Mitschrift der Gespräche dokumentiert. Die Anwesenheit eines Unterrichtsbesuchers durch die Autorin dieser Arbeit wurde von den Lernenden als nicht ungewöhnlich akzeptiert, so dass hierdurch das Maß an Reaktivität weit möglichst gesenkt werden konnte (vgl. Abschnitt 7.5.2.2).

Die Auswertung der Unterrichtsprotokolle führt zu folgenden Beobachtungen: In keiner der vier Klassen kommt es zu zeitlichen Engpässen oder einem Überschuss an Unterrichtszeit.

Ebenso können kein Bruch in den Unterrichtsabläufen oder inhaltliche Lücken ausgemacht werden. Die ausgewählten Aufgabenstellungen werden von den Lernenden verstanden und regen die gewünschten Bearbeitungen und Diskussionen an. Die Unterrichtszeit, Unterrichtsinhalte und -umfang können als angemessen eingestuft werden. Die Unterrichtsinhalte sind als anspruchsvoll zu bewerten, da sowohl bei der Brunnenaufgabe wie auch bei den Begründungen zum gemeinsamen Schnittpunkt der Mittelsenkrechten im Dreieck komplexere Argumentationen, Gedankenfolgen und Begründungszusammenhänge nachvollzogen und eigenständig angewendet werden sollen.

Eine Durchführung in der vorgesehenen Zeit von sechs Unterrichtsstunden gelingt in den darbietend und auch in den problemorientiert unterrichteten Klassen. Die Auswahl der Materialien und der Einsatz können als gelungen betrachtet werden. Auch die Freiheit der Lehrpersonen die Übungsaufgaben nach der bisher üblichen Vorgehensweise zu besprechen und zu vergleichen, hat nicht zu weitreichenden Unterschieden zwischen den vier Klassen geführt. Damit kann eine generelle Durchführbarkeit bestätigt werden.

In einer sich anschließenden Detailanalyse zu den Unterrichtsabläufen in den vier Klassen sollen die inhaltlichen Themen der Unterrichtsgespräche herausgestellt und miteinander verglichen werden. Dabei werden die Herausforderungen, die ein problemorientierter Unterricht beinhaltet, fokussiert.

11.3 Diskussion der Ergebnisse aus Test 2 und Test 3 (F1.1 und F1.2)

Es schließen sich Test 2 und etwas später Test 3 an. In beiden Tests wird die Lernleistung zur Mittelsenkrechten anhand von fünf Aufgaben erfasst. Die Tests enthalten paarweise vergleichbare Aufgaben, so dass ein Entwicklung der Lernleistung von

Test 2 zu Test 3 bestimmt werden kann. Die Boxplots von Test 2 zeigen, dass die Lernleistungen sich nicht nur bezüglich der Durchschnittswerte sehr stark ähneln. Die Leistungen aller vier Klassen erhalten einen Mittelwert zwischen 42,5 % und 45 % und sind absolut vergleichbar.

Die Mittelwerte erscheinen insofern nicht zu niedrig, da für jede Klasse zwei Aufgaben durch eine weite Transferleistungen und zwei Aufgabe durch eine nahe Transferleistung erhöhte Anforderungen an die Lernenden stellt. Der Anteil der Reproduktion ist mit einer von fünf Aufgaben vergleichsweise gering. Es können hypothetische Überlegungen angestellt werden, welche Leistungen ein Lernender in Test 2 erbringen muss, um 40 % der Punkte zu erreichen. Das entspricht 8 Punkten und damit 2 vollständig gelösten Aufgaben.

Dazu zählt am ehesten die erste Aufgabe: Ein Lernender hat die Definition und die Konstruktion der Mittelsenkrechten richtig durchgeführt und auch weitere Eigenschaften der Punkte auf der Mittelsenkrechten benannt. Zusätzlich wurden weitere vier Punkte in den nachfolgenden vier Aufgaben erhalten, zum Beispiel durch das Anwenden von Mittelsenkrechte und Kreis bei der Aufgabe 2 (2 Punkte) und weitere 2 Punkte für richtige Überlegungen zur Argumentation der Mittelsenkrechten im Dreieck oder zur Brunnenaufgabe. Das wären die Unterrichtsinhalte, die in der darbietenden bzw. problemorientierten Unterrichtsvariante besonders hervorgehoben wurden. Mit dieser Leistung werden konzeptuelles Wissen zur Mittelsenkrechten durch die explizite Formulierung einer Definition (vgl. KoWi I in Tab. 6), sowie prozedurales Wissen zur Mittelsenkrechten durch ihre Konstruktion (vgl. ProWi in 6) sowie Anwendungen einzelner Aspekte des Ortslinien-Konzeptes (vgl. KoW II, III und KoWi IV in Tab. 6). Eine Einordnung in die Tabelle der Wissensfacetten zeigt, dass damit mindestens fünf der sieben

Facetten enthalten sind. Diese sind grundlegend für ein Verständnis der Mittelsenkrechten und für eine Anwendung in weiteren Problemkontexten wie es der Kernlehrplan vorsieht (vgl. Abschnitt 5.3).

Es zeigt sich, dass für den Durchschnitt von 40 % bereits verschiedene Wissenselemente zum neu erlernten Begriff der Mittelsenkrechten richtig wiedergegeben und angewendet werden müssen. Dies zeigt, dass es durch beide Unterrichtsvarianten gelungen ist, den Begriff der Mittelsenkrechten den Lernenden aus verschiedenen Blickwinkeln dazustellen. Das wird als grundlegend für einen kognitiv aktivierenden Unterricht angesehen (vgl. Rakoczy et al. 2010, S. 233; Weigand 2014b, S. 166 ff.). Die Boxplots zeigen, dass in allen vier Klassen sogar 75 % der Lernenden mindestens ein Drittel der Punkte, also ca. 6,5 Punkte erreichen. Auch damit werden rechnerisch mit Aufgabe 1 und weiteren Anwendungen der Mittelsenkrechte verschiedene Wissensfacetten abgedeckt. Die erreichten Mittelwerte lassen daher auf inhaltlich gute Leistungen rückschließen. In der Detailanalyse können diese Überlegungen für die einzelnen Aufgaben weiterfortgesetzt werden. Ebenso kann überprüft werden, inwieweit diese theoretische Abdeckung der verschiedenen Wissensfacetten gegeben ist.

Auch langfristig zeigen die vier Klassen in Test 3 vergleichbare Leistungen. Die Mittelwerte liegen zwischen 36,25 % und 45 %, wobei die beiden darbietend unterrichteten Klassen den höheren Mittelwert erreichen und damit minimal besser sind als die problemorientiert unterrichteten Klassen. Sie können ihre durchschnittlichen Leistungen von Test 2 zu Test 3 im Gegensatz zu den problemorientiert unterrichteten Klassen verbessern. Das war nicht zu erwarten, da im Allgemeinen mit einem Vergessen und einer geringeren Leistung zu rechnen ist. An dieser Stelle kann die Detailanalyse greifen und herausstellen worauf die leichte Verbesserung der darbietend unterrichteten

Klassen und die leichte Verschlechterung der problemorientierten Klassen zurückzuführen ist.

Zusammenfassung der Durchführbarkeit (Forschungsaspekt 1): Insgesamt zeigen die Ergebnisse, dass sowohl ein problemorientierter Unterricht als auch ein darbietender Unterricht zur Mittelsenkrechten in einer Unterrichtszeit von sechs 45-Minuten-Stunden umgesetzt werden kann und dabei zu vergleichbaren Lernleistungen im direkten Anschluss wie auch langfristig führt.

In allen vier Klassen konnte der Unterricht wie geplant durchgeführt werden. Die gesetzten Lerninhalte, die Aufgabenauswahl, das Aufgreifen der Konstruktion von Dreiecken für die Übungen kann als passend bewertet werden. Die Lehrpersonen und die Schüleräußerungen im Unterricht bestätigen, den vergleichsweise hohen inhaltlichen Anspruch. Dieser besteht in beiden Ansätzen im Umgang mit dem Ortslinien-Konzept der Mittelsenkrechten.

Gleichzeitig konnten weiterführende Untersuchungsanregungen für eine Detailanalyse der Testergebnisse ausgemacht werden. Mit dieser Analyse soll besser aufgeschlüsselt werden, worin die Unterschiede der Klassen liegen. Damit kann der Forschungsaspekt 1 zur generellen Durchführbarkeit eines problemorientierten Unterrichtsansatzes zur Mittelsenkrechte als sinnvoll machbar beantwortet werden.

12 Ergebnisse der Detailanalyse (Forschungsaspekt 2)

Die Testergebnisse und Analysen des Unterrichts wurden bisher in einem Gesamtüberblick ausgewertet (vgl. Kapitel 10). An dieser Stelle werden die Schülerleistungen und Unterrichtsgeschehen aller vier Klassen tiefergehender betrachtet. Es wird dargelegt, welche Lernleistungen in den Klassen in Bezug auf welchen Aspekt von Wissenselementen gezeigt werden (vgl. Tab. 6) und worin die Unterschiede zwischen den Klassen bestehen. Die Interpretationen erfolgen dann unter Berücksichtigung des Unterrichtsgeschehens. Zunächst wird das inhaltliche Vorwissen in Bezug auf die vier mathematischen Begriffe Abstand, Kreis, Parallele und Mittelsenkrechte zusammenfassend dargestellt (vgl. Abschnitt 12.1.1). Weiter werden die Problemlösefertigkeiten detaillierter analysiert (vgl. Abschnitt 12.1.2). Die Unterrichtseinstiege werden hinsichtlich des mathematischen Gegenstands der Mittelsenkrechten und der Anregung zu Verstehensanlässen analysiert (vgl. Abschnitt 12.2). Es folgt die Detailanalyse der Lernleistungen im direkten Anschluss an die Unterrichtseinheit mit den Betrachtungen in Test 2 (vgl. Abschnitt 12.3). Anschließend werden Details der längerfristigen Schülerleistungen aufgeführt und zu den Ergebnissen aus Test 2 in Beziehung gesetzt (vgl. Abschnitt 12.4). Im Anschluss werden die Erkenntnisse und Befunde in Bezug zueinander gesetzt und diskutiert (vgl. Kapitel 13).

12.1 Ergebnisse der Detailanalyse zu Test 1 (F2.1)

Die Ergebnisse aus Test 1 wurden bereits in Abschnitt 10.1 dargelegt. Alle vier Klassen erreichen über die Aufgaben 1 bis 4 hinweg vergleichbare Ergebnisse (vgl. Tab. 28 und Abb. 9), damit ist das geometrische Vorwissen vergleichbar. Hierbei lag der Fokus auf der Auswertung der gesamten Testergebnisse. Es ergeben sich folgende Anschlussfragen: Inwiefern sind die Lernleistungen im geometrischen Vorwissen in den vier Klassen auch inhaltlich vergleichbar bzw. worin unterscheiden sich die Leistungen zur Problemlöseaufgabe? Für Test 1 werden die Ergebnisse der Detailanalyse gebündelt dargestellt und diskutiert. Dazu wurden die Schülerleistungen einzeln für jede der vier Aufgaben analysiert. Das Vorgehen dieser Detailanalyse ist vergleichbar zum Vorgehen in der Detailanalyse zu Test 2 und 3. Eine detaillierte Beschreibung des Vorgehens wird bei den Ergebnissen zu Test 2 in Abschnitt 12.3 erläutert. Die Schritte I) bis IV) werden hier aus Platzgründen weggelassen. Die Tabellen mit statistischen Kenngrößen, Boxplots und Kruskal-Wallis-Tests waren Grundlage, um zu den folgenden hier zusammenfassend dargestellten Ergebnissen zu gelangen. Die ausführlichen Datendarstellungen sind aus Platzgründen nicht aufgeführt, dafür im Anhang ergänzt (Abschnitt **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.**).

12.1.1 Ergebnisse der Detailanalyse zu inhaltlichem Vorwissen aus Test 1 (F2.1.1)

Die bisherigen Auswertungen haben gezeigt: In Test 1 sind die Leistungen in den vier Klassen zum geometrischen Vorwissen vergleichbar (vgl. Abschnitt 10.1) Die Werte für das arithmetische Mittel liegen zwischen $\bar{d}_2 \approx 38\,\%$ und $\bar{p}_2 \approx 53\,\%$. In der Klasse D_2 fehlt die Leistungsspitze. Insgesamt können keine signifikanten Unterschiede mit dem Kruskal-Wallis-Test bestimmt werden. An dieser Stelle werden die einzelnen Testaufgaben untersucht, um zu überprüfen, inwiefern sich die Leistungen der Lernenden bezüglich der vier mathematischen Begriffe 1) *Abstand eines Punktes zu einer Geraden*, 2) *Kreis*, 3) *Parallele* und 4) *Mittelsenkrechte* unterscheiden. Auswertungsgrundlage sind die Bewertungshorizonte (vgl. Abschnitt 9.1.4).

Zusammenfassung zu Test 1 – Aufgabe 1 bis 4

1) Durchschnittlich erreichen die Klassen im arithmetischen Mittel Werte zwischen 27 % und 68 % in allen vier Aufgaben. Den höchsten Durchschnittswert erreicht die Klasse P_1 mit $\bar{p}_1 \approx 68\,\%$ bei der Aufgabe 2 zum Kreis. Bei der Klasse D_2 liegen die arithmetischen Mittel für die vier Aufgaben deutlich näher beieinander. Ihr Maximum liegt bei

37% in Aufgabe 1, das Minimum bei 27% (vgl. Tab. 37). Damit gibt es kaum Unterschiede zwischen den Mittelwerten in den vier geometrischen Aufgaben. Bei jeder der vier Aufgaben erreicht die Klasse D_2 den niedrigsten arithmetischen Mittelwert. Maximal werden 75 % der Punkte erreicht. In allen anderen Klassen wird ein Maximum von 100 % erreicht.

Aufgaben aus Test 1	P_1	P_2	D_1	D_2
1) Abstand	45,83 %	59,66 %	58,70 %	36,98 %
2) Kreis	67,86 %	61,36 %	51,09 %	35,42 %
3) Parallele	42,26 %	52,27 %	45,11 %	33,33 %
4) Mittelsenrechte	35,71 %	39,20 %	39,13 %	27,08 %

Tab. 37: Arithmetische Mittelwerte der vier Aufgaben aus Test 1 in %

2) Für die Aufgabe 1) *Definition euklidischer Abstand eines Punktes zu einer Geraden*, Aufgabe 3) *Definition Parallele als Ortslinie* und Aufgabe 4) *Definition Mittelsenkrechte als Ortslinie* sind die Unterschiede zwischen den Klassen nicht signifikant. Die durchschnittlichen Leistungen der Klassen P_1, P_2 und D_1 liegen relativ nah beieinander (vgl. Tab. 37)).
3) In Aufgabe 2 liegen signifikante Unterschiede zwischen den Klassen hinsichtlich des geometrischen Wissens zum Kreis als Ortslinie vor. Der Kruskal-Wallis-Test gibt mit einem Wert von $17{,}87 > 7{,}81$ ($df = 3$ und $\alpha = 0{,}05$) signifikante Unterschiede an. Die anschließenden Mann-Whitney-Tests weisen Unterschiede zwischen den Klassen D_2 und P_1 mit starker Effektstärke nach Cohen und D_2 und P_2 mit mittlerer Effektstärke nach Cohen auf (vgl. Tab. 38 und Tab. 39).

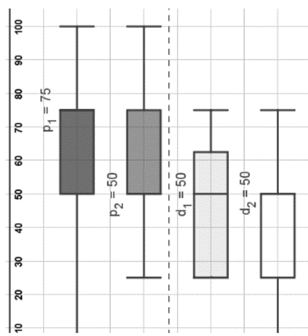


Abb. 29: Ergebnisse zu Test 1, Aufgabe 2

Ein Blick in die Punkteverteilung zeigt, was auch die Boxplots erkennen lassen. In den Klassen P_1 und P_2 erreichen über 90 % der Lernenden mindestens die Hälfte der Punkte (vgl. jeweils unteres Quartil in Abb. 29). Das obere Quartil liegt mit 75 % so hoch wie das Maximum der darbietend unterrichteten Klassen. Die Klasse P_1 zeigt bei dieser Aufgabe besonders gute Leistungen.

Problemorientierter Unterricht		Darbietender Unterricht	
P_1	P_2	D_1	D_2
59,9	48,5	39,7	28,2
$\alpha = 0{,}05$ Signifikanzniveau	df = k-1=3 Freiheitsgrad	p = 0,0719 Irrtumswahrscheinlichkeit	
H = 17,87 > 7,81= χ^2_3 Es liegt ein **signifikanter Unterschied** vor. H_0 wird verworfen: Es gibt signifikante Unterschiede zwischen mindestens zwei der Klassen.			

Tab. 38: Ergebnisse der Kruskal-Wallis-Tests in Test 1, Aufgabe 2

	P_1	P_2	D_1
P_2	1,41	--	--
D_1	-1,63	-1	--
D_2	-3,47/0,5354	-2,62/0,4000	
Es gibt starke signifikante Unterschiede zwischen **P_1 & D_2** und mittlere signifikante Unterschiede zwischen **P_2 & D_2**.			
Für $z \in [-1{,}96; 1{,}96]$ wird H_0 beibehalten; andernfalls verworfen. Signifikante Ergebnisse sind farbig unterlegt und erhalten zusätzlich einen Wert für die Effektstärke nach Cohen (1988): Für $0{,}1 \leq r < 0{,}3$ wird der Effekt als schwach bezeichnet, für $0{,}3 \leq r < 0{,}5$ als mittel und für $r \geq 0{,}5$ als stark.			

Tab. 39: Ergebnisse der Mann-Whitney-Tests. Die *z-Werte* geben die *Effektstärke* für *Test* 1, *Aufgabe 2 an.*

4) In Aufgabe 4 zur Mittelsenkrechten sind in allen vier Klassen die durchschnittlichen Leistungen am niedrigsten. Die Werte liegen zwischen $\bar{p}_2 = \bar{d}_1 \approx$ 39 % und $\bar{d}_2 \approx$ 27 %. Vergleicht man diese Mittelwerte nun mit den Mittelwerten aus den anderen drei Aufgaben, kann für die Klasse P_2 ein Abweichen von 13%-Punkten zum nächsten Mittelwert von 52% für Aufgabe 3 festgestellt werden. Bei den anderen drei Klassen ist die Abweichung mit knapp 6%-Punkten geringer (vgl. Tab. 37).

12.1.2 Ergebnisse der Detailanalyse zur Problemlösefähigkeit aus Test 1 (F2.1.2)

In der Aufgabe 5 sollen möglichst viele Rechtecke gefunden werden, für deren Flächeninhalt gilt $31\ cm^2 < A < 35\ cm^2$. Mit dieser Aufgabe wird die Problemlösefähigkeit getestet. Die Testergebnisse sind für alle vier Klassen bereits bei der Auswertung der Durchführbarkeit in Abschnitt 10.1 dargestellt worden. Die beiden problemorientiert unterrichteten Klassen sind durchschnittlich signifikant besser als die Klasse D_2. Auch im Vergleich zur Klasse D_1 zeigen sie bessere Leistungen. Der Median von P_1 und P_2 ist mit 37,5 % bzw. 43,75 % vergleichsweise niedrig.

Es folgt ein detaillierter Blick auf die Verteilung der Punkte, um so die signifikanten Unterschiede zwischen den problemorientierten Klassen und D_2 auch inhaltlich beschreiben zu können. Dazu wird der Bewertungshorizont und die Punkteverteilung der vier Klassen genutzt. In Tab. 40 werden die Ergebnisse gebündelt dargestellt.

Ein Bewertungsaspekt liegt darin, die Problemstellung richtig erfasst zu haben. Darunter fallen drei Aspekte: (1) Es wird gezeigt, dass der Flächeninhalt bzw. die gesuchte Zahl zwischen 31 und 35 liegt und (2) ganzzahlig ist, also 32, 33 oder 34 be-

Anzahl der Lernenden / Anteil der Lernenden (%)	P_1 (21 SuS)	P_2 (22 SuS)	D_1 (23 SuS)	D_2 (20 SuS[12])
Keine Bearbeitung	5/24 %	3/14 %	7/30 %	15/75 %
0 Punkte, trotz Bearbeitung	1/5 %	2/9 %	6/26 %	3/15 %
0,5 bis 2,5 Punkte	12/57 %	12/55 %	8/35 %	2/10 %
3 bis 4 Punkte	3/14 %	4/18 %	2/9 %	0/0 %
Problemstellung wurde erfasst	3/14 %	10/45 %	5/22 %	1/5 %

Tab. 40: Punkteverteilung der Problemlöseaufgabe in Test 1.

trägt; (3) es werden zugehörige Rechtecke mit diesem Flächeninhalt gesucht, bzw. es werden Faktoren gesucht, die multipliziert einen dieser Werte ergeben. Dafür gibt es insgesamt 1,5 von 4 Punkten. Die anderen 2,5 Punkte werden für das Auffinden der einzelnen Fälle gestaffelt vergeben. Häufige Fehler liegen darin, dass auch nicht ganzzahlige Seitenlängen gewählt werden und / oder ausschließlich Quadrate oder Umfänge von Rechtecken betrachtet werden. Ein Beispiel für eine Antwort, die mit 0 Punkten bewertet wurde, ist folgende „Es gibt Vierecke, Trapeze, Dreiecke und Drachenvierecke." (D112).

Das schwache Abschneiden der Klasse D_2 lässt sich darauf zurückführen, dass nur 25 % der Schülerinnen und Schüler die Aufgabe bearbeiten. Alle anderen Lernenden geben keine Antwort an. Gleichzeitig kann nur ein Lernender aus der Klasse die Problemsituation richtig erfassen (vgl. Tab. 40).

In der Klasse P_2 haben im Vergleich 45% der Schülerinnen und Schüler die Problemstellung richtig erfasst und es kommt nur bei drei Lernenden zu keiner Bearbeitung. Erstaunlich ist, dass

[12] Einer Schülerin fehlte die Aufgabe 5 im Testheft. Das wurde erst bei der Korrektur bemerkt.

in der Klasse P_1 die Problemstellung in 86 % der Fälle nicht vollständig erfasst werden konnte und dennoch vergleichsweise viele Teilpunkte erreicht wurden.

In der Klasse D_1 ist der Anteil der Lernenden, die die Aufgabe nicht bearbeiten mit 30% deutlich geringer als in der Klasse D_2. Mit 26% ist hier der Anteil derjenigen auffällig hoch, die trotz Bearbeitung keine Punkte erhalten.

Zusammenfassung zu Test 1 – Aufgabe 5: Die Unterschiede zwischen den problemorientiert und den darbietend unterrichteten Klassen liegen in einer sehr hohen Bearbeitungsrate durch die Lernenden in den P-Klassen. Zusätzlich gelingt es vielen Schülerinnen und Schülern der Klasse P_1 Teilpunkte durch richtige Beispielrechnungen oder Beispielrechtecke zu erhalten (auch ohne vollständiges Erfassen der Problemstellung). In der Klasse P_2 hingegen zeigt ein hoher Anteil der Lernenden, dass sie die Problemstellung richtig erfasst haben. Der Anteil der Lösungen, die mit drei oder mehr Punkten als gut bewertet werden können, ist auch bei den problemorientiert unterrichteten Klassen nicht deutlich höher als bei den D-Klassen. Aus der Klasse D_2 bearbeitet nur ein Viertel der Lernenden die Aufgabenstellungen. Davon erhalten nur zwei Lernende Teilpunkte.

12.2 Ergebnisse der Detailanalyse der Unterrichtseinstiege (F2.2)[13]

Um die Unterschiede und Gemeinsamkeiten in den Unterrichtsverläufen bei einem darbietenden und einem problemorientierten Unterricht erfassen zu können, wurde das Unterrichtsgeschehen in allen Klassen von der Autorin dieser Arbeit doku-

[13] Teile der Datendarstellung aus den Unterrichtsbeobachtungen sind bereits veröffentlicht (siehe Möller 2021).

mentiert (vgl. Abschnitt 9.1.6) mit dem Ziel, die Unterrichtsgespräche wörtlich festzuhalten. Zusammenfassend werden die Unterrichtsabläufe mit dem Fokus auf die in den Unterrichtsgesprächen thematisierten Inhalte aller vier Klassen dargestellt. Für die Klassen D_1 und D_2 ergibt sich ein Zeitraum von ca. 75 Minuten für den Unterrichtseinstieg zur Mittelsenkrechten. Für die Klassen P_1 und P_2 wird die Definition nach ca. 120 Unterrichtsminuten festgehalten.

12.2.1 Vom Abstand-zu-zwei-Punkten zur Definition der Mittelsenkrechten in D_1

Zu Beginn werden die Schülerinnen und Schüler aufgefordert zu sammeln, welche Abstände sie bereits kennen. Die verschiedenen Abstandsbegriffe werden an der Tafel gesammelt (17 Minuten). Im Anschluss daran wird die Aufgabenstellung Abstand-zu-zwei-Punkten an die Wand projiziert. Die Schülerinnen und Schüler arbeiten zunächst in Einzelarbeit (5 Minuten) und anschließend in Partnerarbeit (5 Minuten). Den Lernenden stehen Folien für die Ergebnisdarstellung zur Verfügung. Im Plenum werden die Ergebnisse am Overheadprojektor verglichen. Die Schülerinnen und Schüler beschreiben die Lage der gefundenen Punkte: „Die Punkte liegen auf der Hälfte von A und B, auf der Mitte.“, „Alle Punkte liegen auf einer Geraden.“, „Man hat einen rechten Winkel.“ Es folgt der erste Teil der Definition der Mittelsenkrechten. Zuletzt wird einem zu spät kommenden Schüler erklärt, was in dieser Stunde gemacht wurde. Ein Schüler fasst zusammen: „Alle Punkte, die auf der Orthogonalen zu der Geraden AB liegen, zum Beispiel (zählt verschiedene Punkte auf, die auf der Folie zu sehen sind und auf der Mittelsenkrechten liegen). Das ist die Mittelsenkrechte.“ Es wird ergänzt, dass diese Punkte alle den gleichen Abstand zu A und zu B haben. Damit endet die erste Unterrichtsstunde. In der anschließenden zweiten Stunde werden die ersten drei Übungsaufgaben bearbeitet und verglichen. Die Lehrperson weist im

Vorfeld darauf hin, dass die Mittelsenkrechte mit dem Geodreieck eingezeichnet werden kann. Die Lösungen der Aufgabe A-Dorf und B-Dorf führen zum zweiten Teil der Definition, der Umkehrung. Ein Schüler erklärt seine Ergebnisse wie folgt: „Dann habe ich die Mitte ausgemessen. Dann habe ich eine Mittelsenkrechte eingezeichnet und rot markiert [habe ich] die [Steine], die noch am richtigen Platz stehen. Und die sind richtig, denn sie haben die gleiche Entfernung zu A und zu B." Die Lehrperson regt die Klassen an, die Aufgabenstellung mit der Aufgabe Abstand-zu-zwei-Punkten zu vergleichen. Ein Schüler meldet sich und ergänzt: „Das ist hier im Prinzip genau dasselbe. Wir haben A und B und hier auch. Und die Mittelsenkrechte ist ja die Orthogonale und dann" Die Lehrperson stellt heraus, dass die Betrachtungsweise genau umgekehrt ist: „Wir haben das hier also umgekehrt. Wenn die Punkte nicht darauf liegen, dann haben sie auch nicht den gleichen Abstand zu den Punkten." Es wird die Folie mit dem zweiten Teil der Definition aufgelegt.

12.2.2 Vom Abstand-zu-zwei-Punkten zur Definition der Mittelsenkrechten in D_2

Es wird begonnen die Schülermeldungen zu den bisherigen Abstandsbegriffen an der Tafel zu sammeln (13 Minuten). Anschließend wird die Einstiegsaufgabe Abstand-zu-zwei-Punkten zunächst in Einzelarbeit und dann in Partnerarbeit bearbeitet. Dafür werden jeweils 5 Minuten veranschlagt. Die Lehrperson leitet die Phase des Vergleichens ein: „Ganz viele von Euch haben den Punkt C (2 | 5) gefunden." Sie erklärt, dass dies der Mittelpunkt der Strecke AB sei und fragt weiter: „Welche weiteren Punkte gibt es?" Die Schülerinnen und Schüler äußern, was ihnen an den gefundenen Punkten auffällt: „Die Koordinaten verhalten sich gleich.", „Es gibt unendlich viele Punkte.",

„Man kann A und B verbinden und dann eine rechtwinklige Gerade durch die Mitte der Strecke zeichnen. Dann hat man alle Punkte.“

An diese Schüleräußerung schließt sich die Definition der Mittelsenkrechten (Teil 1) direkt an. Es folgt eine 5-Minuten-Pause. Zu Beginn der nächsten Unterrichtsstunde werden die Schülerinnen und Schüler aufgefordert die Definition in eigenen Worten wiederzugeben. Es schließt sich eine Übungsphase an. Die Lehrperson weist darauf hin, dass die Mittelsenkrechte verwendet werden soll. Zunächst wird in Einzelarbeit gearbeitet (10 Minuten) anschließend erfolgt ein Austausch mit dem Sitznachbarn bzw. der Sitznachbarin (10 Minuten). Eine Schülerin erklärt im Plenum an der von ihr vorbereiteten Folie ihr Vorgehen zum Lösen der Aufgabe A-Dorf und B-Dorf: „Erst A und B verbinden. Dann muss man die Mittelsenkrechte einzeichnen. Und dann kamen die drei Steine raus.“ Sie deutet auf die drei Punkte, die nicht auf der Mittelsenkrechten liegen. Es wird von einem anderen Schüler ergänzt, dass diese drei Steine nicht gleich weit entfernt seien zu A und zu B. Die Lehrperson fragt nach: „Was gilt also für Punkte, die nicht auf der Mittelsenkrechten liegen?“ und erhält die Schülerantwort: „Die liegen näher an A oder an B.“ Der zweite Teil der Definition schließt sich an. Die Schülerinnen und Schüler werden aufgefordert eine Begründung in eigenen Worten zu ihren Lösungen zu ergänzen. Anschließend werden noch weitere Übungsaufgaben bearbeitet und verglichen.

12.2.3 Von der Brunnenaufgabe zur Definition der Mittelsenkrechten in P_1

Die erste Unterrichtsstunde in der Klasse P_1 beginnt mit der Klärung der Aufgabenstellung. Die Brunnenaufgabe ist mit dem Overheadprojektor an die Wand projiziert und die Schülerinnen und Schüler werden aufgefordert in eigenen Worten zu erklären, was gemacht werden soll. Nach fünf Minuten beginnt eine sehr kurze Einzelarbeitsphase von wenigen Minuten. Es folgt ein insgesamt 20 minütiger Austausch mit dem Sitznachbarn bzw. der Sitznachbarin. Es wird eine erste Schülerlösung auf einer Folie am Overheadprojektor gezeigt. In dieser sind ringförmige Einzäunungen um alle vier Punkte zu sehen. Die Lösung setzt die Lehrperson zur Klärung der Lösungsfindung ein. An der Lösung wird erläutert, dass Schafe innerhalb der Ringe zu dem zugehörigen Brunnen gehen sollten. Für diese Gebiete kann also eine eindeutige Zuordnung erfolgen. Nachteilig an diesem Vorgehen ist, dass ein Großteil des Gebietes noch nicht zu einem Brunnen zugeordnet werden kann. Damit konnte die Problemstellung besser verstanden werden. Eine zufriedenstellende Einteilung des Gebietes fehlt weiterhin. Die Partnerarbeit wird für 20 Minuten bis zur 5-Minuten-Pause fortgesetzt. In der zweiten Stunde werden unterschiedliche Herangehensweisen durch die Lernenden vorgestellt und diskutiert. Dabei werden die Lösungsansätze nach Nutzen und Arbeitsaufwand beurteilt. Es werden vier Vorgehensweisen genannt: 1) Das Einzeichnen von Kreisen um die Brunnen, 2) das Einzeichnen von Geraden nach Augenmaß, 3) das Einzeichnen einzelner Punkte, die anschließend eindeutig einem der Brunnen zugeordnet werden können und dadurch eine Gebietseinteilung erkennen lassen, 4a) alle Brunnen werden miteinander verbunden, die Mitten der Strecken werden markiert und durch die Streckenmittelpunkte werden Geraden gezeichnet, 4b) es werden senkrechte Geraden durch die Streckenmittelpunkte gezeichnet.

Bei der Betrachtung der Schülervorgehensweisen wird zum einen diskutiert, wie man die gefundene Einteilung überprüfen kann. Dazu werden kritische Punkte eingezeichnet und die Abstände zu den umgebenen Brunnen werden gemessen (Punktprobe). Zum anderen wird über die Gestalt der Grenzen diskutiert. Einige Schülerinnen und Schüler schlagen Geraden als

Gebietseinteilung vor, andere haben kurvige Linien in ihren Lösungsideen verwendet. Zunächst wird abgestimmt, welche der beiden Varianten für die bessere Anpassung eingeschätzt wird. Die Mehrheit der Schülerinnen und Schüler hält die Gerade für die bessere Lösungsoption. Auch das Markieren der Streckenmittelpunkte überzeugt fast alle Schülerinnen und Schüler als sinnvolles Vorgehen. Mit diesen Einigungen sollen die Schülerinnen und Schüler erneut die Grenze jetzt vorerst zwischen Brunnen 3 und 4 einzeichnen. Jeder Schüler wird aufgefordert eigenständig die Grenze zu zeichnen. Der Sitznachbar kann anschließend kontrollieren (Punktprobe).

An der Tafel zeichnet die Lehrperson eine Gerade durch die Mitte zwischen Brunnen 3 und 4 ein, diese verläuft offensichtlich nicht senkrecht zur Strecke zwischen den Brunnen. Eine erneute Abstimmung zeigt: Alle Schülerinnen und Schüler sind der Meinung, dass diese Gerade nicht die gesuchte Grenze angibt. Sie zeigen anhand einzelner Punkte, dass diese dem jeweils anderen Brunnen zugeordnet werden müssten. Die eingezeichnete Gerade wird als falsch deklariert. Die gesuchte Linie muss anders verlaufen, doch wie genau? Die Lehrperson fragt: „WIE könnte man diese Linie beschreiben? Was kennzeichnet diese Linie?“ Die Schülerinnen und Schüler erläutern: „Eine Linie durch die Mitte vom Abstand durch 3 und 4.“, „Irgendein Punkt auf der Linie muss immer den gleichen Abstand zu 3 und 4 haben.“, „Man braucht einen rechten Winkel.“, „Jeder Punkt auf der Geraden muss den gleichen Abstand zu Brunnen 3 und Brunnen 4 haben.“, „Eine Linie durch die Mitte und die muss von beiden Punkten gleich weit entfernt sein und einen 90°-Winkel.“, „Wenn man aus 3 und 4 zwei Parallele macht, dann ist durchgehend die Linie der Mittelpunkt.“ Die Lehrperson hebt hervor, dass alle Punkte auf der gesuchten Geraden den gleichen Abstand zu den beiden Brunnen haben. Die zwei Unterrichtsstunden sind beendet.

Am darauffolgenden Tag findet die nächste Mathematikstunde statt. Es wird wiederholt, was gemacht wurde: „Es ist eine Gerade gesucht, welche Eigenschaften hat die Gerade?“

Die Schülerantworten beinhalten die folgenden Ideen „Die Punkte müssen denselben Abstand haben zu den beiden Brunnen haben.“ „Es muss eine Grenze gebildet werden.“ „An jeder Stelle müssen A und B gleich weit entfernt sein.“ „Die Gerade verläuft senkrecht zur Strecke durch die beiden Brunnen.“

Die Definition wird aufgelegt und die Schülerinnen und Schüler sollen die genannten Argumente den beiden Teilen der Definition zuordnen. Der Lehrperson ist dabei besonders wichtig, dass die gesuchte Eigenschaft darin besteht, dass die Punkte den gleichen Abstand zu den beiden Brunnen haben. Daraus entsteht die Gerade als Grenze. Diese Gerade hat die zusätzliche Eigenschaft, dass sie senkrecht zur Strecke durch die beiden Brunnen verläuft.

Anschließend wird mit der Bearbeitung von Übungsaufgaben begonnen.

12.2.4 Von der Brunnenaufgabe zur Definition der Mittelsenkrechten in P_2

Die Brunnenaufgabe wird mit dem Overheadprojektor an die Wand projiziert. Zunächst ist nur der erste Teil mit einem bereits eingezeichneten Punkt X zu sehen. Die Schüler lösen auf: Brunnen 3 ist der nächst gelegene und dies kann durch Abmessen überprüft werden. Die Einzelarbeit beginnt. Nach 17 Minuten erfolgt ein Austausch mit dem Sitznachbarn für 14 Minuten. In den letzten 6 Minuten werden die Lösungsideen auf Folien festgehalten.

In der zweiten Unterrichtsstunde werden die erstellten Folien von den Schülern präsentiert und diskutiert. Es gibt folgende Lösungsvorschläge: 1) Das gesamte Gebiet wird in 2×2 cm-

Quadrate eingeteilt und für jedes Quadrat wird entschieden, welcher Brunnen der nächst gelegene ist, 2) Es werden Punkte ausgemessen, die gleich weit von zwei Brunnen entfernt sind und anschließend werden nach Augenmaß Geraden durch diese Punkte gezeichnet, 3) Es werden zwei Brunnen miteinander verbunden und anschließend die Symmetrieachse eingezeichnet, 4) Es werden Kreise mit dem Radius der Hälfte des Abstandes zum nächsten Brunnen gezogen, 5) Die Lösungsidee 4) wird weiterentwickelt: Es werden möglichst genau Tangenten zu den Kreisbögen eingezeichnet.

Es wird zum einen diskutiert, inwiefern die Verwendung von Kreisen generell hilfreich ist und zum anderen, was genau auf der Grenzlinie passiert, zu welchem Brunnen diese Orte zählen. Eine Schülerin wirft die Frage auf: „Kann man eine Grenze einzeichnen? Oder sollte dort etwas ausgespart bleiben, weil man es nicht sicher zu einem der Brunnen zuordnen kann?“ Die Lehrperson klärt auf: „Denke an eine Landkarte. Dort sind auch Grenzen eingezeichnet. Die Grenze ist die Mitte. Auf der Grenze kann man es sich dann aussuchen, wohin man geht.“

Zur Klärung der Frage, ob Kreise zielführend sind, werden die Lösungsfolien zu Ansatz 2) und 5) übereinandergelegt. Die Schülerinnen und Schüler sind sehr erstaunt, dass die eingezeichneten Geraden an den meisten Stellen übereinstimmen. Es geht ein aufgeregtes Murmeln durch die Reihen.

Alle Lösungsideen werden nun verglichen und eingeordnet. Dabei wird ein weiteres Vorgehen deutlich: 6) Es werden Kreise um die Brunnen gezeichnet, so dass Kreisschnittpunkte entstehen und die Schnittpunkte werden zu einer Geraden verbunden. Auch diese Lösung wird noch auf einer Folie dargestellt und über die beiden anderen Folien gelegt. In allen drei Fällen zeigt sich eine sehr ähnliche Gebietseinteilung.

Nun wird diskutiert, welches Vorgehen sinnvoll erscheint. Einige Schülerinnen bzw. Schüler bevorzugen das Einzeichnen der Mittelpunkte, andere finden die Verwendung von Kreisen genauer. Zum Schluss wird die Aufgabenstellung reflektiert. Die Schülerantworten sind so vielfältig wie die genannten Lösungsansätze.

Am nächsten Tag beginnt die Stunde mit einer Wiederholung. Es wird gesammelt, was in der letzten Stunde gesucht wurde: „Wir haben zwischen zwei Punkten die Mitte gesucht und dann eine Gerade gezeichnet, dass egal wo man steht, der Punkt gleich weit entfernt ist."

Die Definition der Mittelsenkrechten wird aufgelegt. Es wird überlegt, in welcher der Schülerideen diese Definition wiederzufinden ist. Anschließend wird die Schülerfolie 5) aufgelegt. Die Lehrperson regt an zu überlegen, warum man zur selben Lösung kommt: „Was bedeuten die Kreisschnittpunkte?" verschiedene Schüler erklären in eigenen Worten mithilfe der Kreisdefinition, dass diese Punkte gleich weit von beiden Brunnen entfernt sind. Dies führt zum zweiten Teil der Definition. Es werden anschließend die ersten beiden Übungsaufgaben bearbeitet und besprochen.

12.2.5 Vergleich der Unterrichtsinhalte in den vier Klassen D_1, D_2 und P_1, P_2

Die vier Unterrichtsbeobachtungen unterscheiden sich. Ein Vergleich zwischen dem darbietenden und problemorientierten Unterricht erscheint schwierig. Daher wird nun versucht die Gemeinsamkeiten und Unterschiede hinsichtlich des Begriffs der Mittelsenkrechten zusammenfassend darzustellen.

Zusammenfassende Beobachtungen aus dem darbietenden Unterricht

In den darbietenden Klassen werden bei der Suche nach Punkten, die gleich weit von A und von B entfernt sind, im Unterrichtsgespräch die folgenden Eigenschaften der Mittelsenkrechten herausgestellt:

(DI) Einer der gesuchten Punkte entspricht dem Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$.

(DII) Es gibt unendlich viele Punkte.

(DIII) Die gesuchten Punkte liegen auf einer Geraden.

(DIV) Die Gerade verläuft senkrecht zur Strecke $\overline{AB}$.

(DV) Punkte, die nicht auf der Geraden liegen, haben auch nicht den gleichen Abstand zu A und zu B, oder diese Punkte liegen näher an A oder an B.

Eine Anwendung oder einen Bezug zu einer komplexeren Problemstellung erfahren die Schülerinnen und Schüler in den nachfolgenden Stunden anhand von vielfältigen Übungsaufgaben mit inner- und auch außermathematischen Kontexten.

Zusammenfassende Beobachtungen aus dem problemorientierten Unterricht

Die Unterrichtsverläufe und diskutierten Aspekte unterscheiden sich in beiden problemorientierten Klassen. Abhängig von den Schülerinnen und Schülern werden unterschiedliche Lösungsansätze aufgegriffen und Frage gestellt. Dennoch können auch Gemeinsamkeiten erkannt werden. Zunächst werden anhand des Kataloges die Punkte a) bis e) für beide problemorientierten Klassen betrachtet.

Zusammenfassende Ergebnisse aus allen vier Unterrichtsbeobachtungen

Die Kerndiskussionspunkte zur Mittelsenkrechte aus dem darbietenden Unterricht (DI bis DV) und die aus dem problemorientierten Unterricht (PI bis PIII) werden in der Tab. 41 sortiert aufgelistet und kommentiert (kursive Bemerkungen).

In allen Klassen wird die Mittelsenkrechte als orthogonale Gerade (DII & PI und DIV & PII) thematisiert. Werden diese wesentlichen Eigenschaften dem neuen mathematischen Objekt in der darbietenden Klasse durch offensichtliche Beobachtungen zugeschrieben, so werden sie in den problemorientierten Klassen hinterfragt. Es entstehen grundlegende Diskussionen darüber, welche geometrischen Objekte bei der Gebietseinteilung weiterhelfen können. Verlaufen die Grenzlinien entlang von Geraden oder Kurven? Können Kreise bei der Findung der Grenzen hilfreich sein? Auch grundlegend ist die Frage, zu welchem Gebiet die Grenzlinie selbst gezählt wird. Ähnliches gilt für die Orthogonalität der Mittelsenkrechten.

Einige Schülerinnen und Schülern in der Klasse P_1 folgern bei der Betrachtung der Lösungsansätze, dass die gesuchte Gerade senkrecht zur Strecke der beiden Brunnenpunkte verlaufen muss.

Die Verwendung von Kreisen kommt in den darbietend unterrichteten Klassen nicht vor (vgl. Holzäpfel et al. 2016), in der Klasse P_1 wird dies nur am Rande thematisiert. Es wird anfangs anhand von kreisförmigen Gebietseinteilungen das Ziel der Aufgabenstellung verdeutlicht. Im Anschluss daran ist in keiner der vorgestellten Schülerlösungen die Verwendung von Kreisen zu finden. Im Unterschied dazu verwenden mehrere Schülerinnen und Schüler der Klasse P_2 Kreise als Hilfsmittel zur Gebietseinteilung. Es wird diskutiert, inwiefern diese Lösungsansätze zielführend erscheinen. Die Tatsache, dass durch das Verwenden von Kreisen Gebietseinteilungen entstehen, die an vielen Stellen mit dem Einzeichnen von Geraden übereinstimmen, sorgt für großes Staunen in der Klasse.

In den darbietend unterrichteten Klassen werden die folgenden Eigenschaften der Mittelsenkrechten herausgestellt:	**Die Diskussionen in den problemorientiert unterrichteten Klassen werden durch drei Themen geprägt:**
(DI) Einer der gesuchten Punkte entspricht dem Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$.	*In einigen Schülerlösungen wird die Verwendung der Mittelpunkte deutlich. Auch hier scheint der Mittelpunkt schnell gefunden.*
(DII) Die gesuchten Punkte liegen auf einer Geraden.	(PI) Diskussion um die Gestalt der Grenzen
(DIII) Es gibt unendlich viele Punkte.	*wird indirekt thematisiert (folgt aus (PI))*
(DIV) Die Gerade verläuft senkrecht zur Strecke $\overline{AB}$.	(PII) Orthogonalität der Geraden (nur in P_1)
(DV) Umkehrung: Punkte, die nicht auf der Geraden liegen, haben auch nicht den gleichen Abstand zu A und zu B, oder diese Punkte liegen näher an A oder an B.	*Dies entspricht der Vorgehensweise einzelner SuS: einzelne Punkte werden dem nächst gelegenen Brunnen zugeordnet (z. B. Lösungsansatz 3 in Klasse P_1).* *Es findet Verwendung bei der Überprüfung von Gebietsgrenzen durch die Punktprobe*
wird im Einstieg nicht thematisiert	(PIII) Verwendung von Kreisen

Tab. 41: Die Kernthemen, die im darbietenden und im problemorientiertem Unterricht zur Mittelsenkrechte thematisiert wurden, werden hier einander gegenübergestellt.

12.2.6 Vergleich der verwendeten Unterrichtszeit

Die Unterrichtsplanung sieht vor, dass die problemorientiert unterrichten Klassen mehr Zeit für den Einstieg bis zur Erarbeitung der Definition haben als die darbietend unterrichteten Klassen. Diese erhalten dadurch mehr Zeit für das Nachvollziehen der Argumentation zum gemeinsamen Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten im Dreieck. An beiden Inhalten wird das Ortslinienkonzept der Mittelsenkrechten angewendet. Die verwendeten Zeiten konnten anhand der Unterrichtsdokumentationen bestimmt werden (vgl. Tab. 42). Beginn und Ende der Zeitmessung sind wie folgt festgelegt worden: Beginn ist der Anfang der ersten Unterrichtsstunde und das Ende wird durch den Anfang der Übungsphase nach der Sicherung der Mittelsenkrechten (Teil 2) gesetzt. Es zeigt sich, dass die problemorientiert unterrichteten Klassen wie geplant 2-3 Unterrichtsstunden für den Einstieg verwenden. Die darbietend unterrichteten Klassen benötigen ca. 80 Minuten. Für die Erhebung der verwendeten Zeit zur Diskussion über den Satz der Mittelsenkrechten im Dreieck sind Beginn und Ende der Zeitmessung schwieriger auszumachen. Die Kerndiskussion beginnt in allen Klassen mit der Feststellung, dass sich die drei Mittelsenkrechten dieses

Klasse	Unterrichtszeit vom Einstieg bis zum Ende der Definition	Unterrichtszeit für die Argumentation zum Satz der Mittelsenkrechten im Dreieck	In Summe
P_1	115 Minuten	25 Minuten	140 Minuten
P_2	130 Minuten	20 Minuten	150 Minuten
D_1	80 Minuten	70 Minuten	150 Minuten
D_2	80 Minuten	30 Minuten + 5 Minuten (in zwei Stunden)	115 Minuten

Tab. 42: Tatsächlich verwendete Unterrichtszeit für Einstieg und Satz der Mittelsenkrechten im Dreieck

spitzwinkligen Dreiecks in genau einem Punkt schneiden und endet mit der anschließenden Übungsphase. Bei der Besprechung dieser Aufgabe wird die Diskussion dann teilweise wieder aufgenommen. Das kann nicht erfasst werden. Die verwendete Dauer unterscheidet sich von der Planung. In der Klasse D_2 werden nur 30 Minuten für die Erklärung verwendet.

Für die Interpretation der Testergebnisse ist neben den bereits betrachteten Aspekten ebenfalls interessant, wie intensiv der **Dreiecksumkreis** in den vier Klassen thematisiert wurde. An dieser Stelle wird daher auch die Rolle des Dreiecksumkreises zusammengefasst. Im Unterrichtsgeschehen entwickelt sich die Definition des Dreiecksumkreises als Ergebnis der Argumentation zum Satz der Mittelsenkrechten im Dreieck und fällt damit auch in diese Zeitspanne.

Der Umkreis im Unterricht von P_1: In der Klasse P_1 wird der Begriff Umkreis bei der Besprechung der Lösungen zu 3.1) und 3.2) von P134 genannt. Daraufhin wird der Umkreis zu einem Beispieldreieck an der Tafel eingezeichnet. Dies geschieht direkt zu Beginn der 5. Unterrichtsstunde. Immer wieder wird in dieser Unterrichtsstunde argumentiert, warum die drei Mittelsenkrechten sich genau in einem Punkt schneiden müssen und dabei wird auch der Umkreis mit aufgegriffen. Die Lehrperson formuliert gemeinsam mit den Lernenden einen Merksatz zum Umkreis. Vier Tage später wird in der sechsten Unterrichtsstunde der Umkreis einmal beiläufig genannt, aber nicht weiter in die Diskussion miteinbezogen.

Fazit zum Umkreis im Unterricht von P_1: Der Umkreis wird von Lernenden aktiv eingebracht und in weiteren Argumentationen miteinbezogen. Eine Definition wird gemeinsam im Unterrichtsgespräch erarbeitet. Dabei ist auffällig, dass sich viele Lernenden am Unterricht und den Argumentationen beteiligen.

Der Umkreis wird in einer von sechs Unterrichtsstunden aufgegriffen.

Der Umkreis im Unterricht von P_2: In der Klasse P_2 wird der Umkreis ebenfalls in der fünften Unterrichtssunde definiert. Ausgehend von dem Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechten im Dreieck leitet die Lehrperson die Argumentation an, dass eben auch die dritte Mittelsenkrechte durch diesen Punkt verlaufen müsse. Es gibt wenige Wortmeldungen, viel Schweigen. Die Lehrperson versucht die Lernenden anzuregen, in dem sie zu Wortmeldungen und Erklärungsideen auffordert. Die Schülerinnen und Schüler argumentieren mit Mitten von Dreiecken und Verläufen von Geraden. Es fehlt die Argumentation über Punkte mit den gleichen Abständen zu Streckenendpunkten. Die Lehrperson erläutert die Argumentation und endet mit der Definition des Umkreises. Die Lernenden arbeiten nun an den weiteren Aufgaben und zeichnen Dreiecksumkreise zu den drei verschiedenen Dreieckstypen ein. In dem anschließenden vergleichenden Unterrichtsgespräch liegt der Fokus auf der Lage des Umkreismittelpunktes bei den drei Dreieckstypen. Erst am Ende wird in der Argumentation die gleiche Entfernung von Dreieckseckpunkten zu Punkten auf der Mittelsenkrechten kurz genannt. Hierbei wird auch auf einen gemeinsamen Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten im Dreieck hingewiesen. Das Unterrichtsgespräch wirkt in dieser Klasse eher mühsam. Die Lernenden melden sich kaum zu Wort und die Lehrperson ist auf die Verwendung von Anregungen zur Diskussion angewiesen. Bei dem wiederholenden Einstieg in die Unterrichtsstunde sechs wird die Lage des Schnittpunktes der Mittelsenkrechten in verschiedenen Dreieckestypen wiedergegeben. Der Begriff Kreis oder Umkreis fällt dabei nicht.

Fazit zum Umkreis im Unterricht von P_2: Es kommt kaum ein Unterrichtsgespräch auf. Nur wenige Lernende nehmen am Unterrichtsgespräch mit Wortbeiträgen teil. Die Lehrperson nennt die Argumentation des gemeinsamen Schnittpunktes der drei Mittelsenkrechten und gibt die Definition des Umkreises an. In einer von den sechs Unterrichtsstunden wird der Umkreis thematisiert.

Der Umkreis im Unterricht von D_1: In der Klasse D_1 wird in der vierten Unterrichtsstunde an einem Beispieldreieck der Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten argumentativ diskutiert. Beim Vergleichen der anschließenden Übungsaufgaben wird abermals von den Lernenden erkannt, dass sich die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks in einem Punkt schneiden. Die Lehrperson ergänzt an dieser Stelle, dass man dann einen Kreis zeichnen kann. Die Definition des Umkreises wird notiert. Die nachfolgende Stunde fünf beginnt mit einer Wiederholung der Definition der Mittelsenkrechten. Dabei wird auch der Umkreis von den Lernenden genannt. Dies wiederholt sich zu Beginn der sechsten Stunde. Beim anschließenden Vergleichen wird die unterschiedliche Lage des Umkreismittelpunktes für die drei Dreieckstypen schriftlich festgehalten.

Fazit zum Umkreis im Unterricht von D_1: Die Lehrperson knüpft an die Erkenntnis der Lernenden an, dass sich die drei Mittelsenkrechten im Dreieck in einem Punkt schneiden und ergänzt den Umkreis. Zu Beginn der nächsten beiden Unterrichtsstunden wird neben der Definition der Mittelsenkrechten auch die des Umkreises wiederholt. Der Umkreis wird im Vergleich zu den anderen Klassen über einen deutlich längeren Zeitraum thematisiert und dabei mit dem Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten im Dreieck eng verknüpft.

Der Umkreis im Unterricht von D_2: In der Klasse D_2 werden in der fünften Unterrichtsstunde nach einer Wiederholung der Definition der Mittelsenkrechten Übungsaufgaben bearbeitet: Verschiedene Dreiecke werden konstruiert und anschließend wird die Mittelsenkrechte konstruiert. Beim Vergleichen der

Lösungen wird verstärkt auf die Konstruktionsweise der Dreiecke mithilfe der Kongruenzsätze eingegangen. Ebenfalls wird die Lage des Schnittpunktes der drei Mittelsenkrechten genannt. Anschließend notiert die Lehrperson den Tafelanschrieb zu der Lage von Schnittpunkten im Dreieck und den Anschrieb zum Umkreis. Es folgt eine fünfminütige Pause und in der sechsten Übungsstunde wird das Übungsblatt zu den verschiedenen Abstandsbegriffen bearbeitet und verglichen. Der Umkreis wird nicht wieder aufgegriffen.

Fazit zum Umkreis im Unterricht von D_2: Der Fokus im Unterricht liegt auf dem gemeinsamen Schnittpunkt der Mittelsenkrechten im Dreieck. Der Umkreis wird dabei genannt und definiert.

12.3 Ergebnisse der Detailanalyse zu den Lernleistungen in Test 2 (F2.3.1)

Die Ergebnisse der Tests wurden bisher zusammenfassend ausgewertet und hinsichtlich einer generellen Machbarkeit diskutiert (vgl. Abschnitte 10 und 13). An dieser Stelle folgt eine Detailanalyse, bei der die Ergebnisse jeder Testaufgabe analysiert werden, um somit die Forschungsfrage 2.3 nach der Vergleichbarkeit der Lernleistungen in den verschiedenen Wissensbereichen im direkten Anschluss an den Unterricht zu erfassen. Dies erfolgt in fünf Schritten:

I) ***Einordnung:*** Die der Aufgabe zugrunde liegenden Wissensfacetten zur Mittelsenkrechte, sowie die Einordnung in die Wissensbereiche erfolgen knapp. Wenn vorab Erwartungen an die Schülerleistungen formuliert wurden, können sie bereits hier wiederaufgegriffen werden.

II) **Ergebnisdarstellung:** Es werden die Ergebnisse für jede Testaufgabe beschrieben und benannt. Dazu veranschaulichen Boxplots die Verteilung der Schülerleistungen und werden durch weitere Kennwerte in Tabellen ergänzt. Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen den Klassen werden herausgearbeitet.

III) **Ergebniseinordnung:** Die Ergebnisse werden mithilfe statistischer Tests bewertet.

IV) **Ergebnisdetails:** Bei Auffälligkeiten werden die Punktverteilungen aus den Bewertungshorizonten herangezogen. Diese sind klassenweise in Tabellen im Anhang beigefügt (Abschnitt 16.5) und zeigen eine detaillierte Verteilung der Punkte für jeden Lernenden anhand der einzelnen Bewertungsaspekte im Bewertungshorizont. Aus diesen Bewertungstabellen kann abgelesen werden, wie viele Lernende Teilpunkte zum Beispiel für die Verwendung der Mittelsenkrechten erhalten haben oder auch wie viele Lernende gar keine Erklärung beim Lösen der Aufgabe abgegeben haben. Wenn es hilfreich erscheint, werden anhand dieser Details einzelne Schülerlösungen ausgewählt und exemplarisch analysiert werden.

V) **Zusammenfassung:** Die Kernaussagen der Detailanalyse jeder Aufgabe werden zusammenfassend dargestellt.

Ziel der Detailanalyse ist es mit Blick auf die verschiedenen Aufgabenstellungen und die angeforderten Wissensarten und - elemente die erbrachten Leistungen der Lernenden in den vier Klassen näher zu untersuchen. Es geht um die Frage, was genau von den Lernenden der vier Klassen gelernt wurde. Unterschiede sind für die Aufgabe 3, Argumentation zum gemeinsamen Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten im Dreieck, zu erwarten. Diese wurden in den darbietend unterrichteten Klassen intensiver unterrichtet und sollten hier zu besseren Lernleistungen führen. Entsprechend sollten die problemorientiert unterrichteten Klassen die Aufgabe 5, eine Variation der Brunnenaufgabe, besser lösen können.

12.3.1 Ergebnisse zu Test 2 – Aufgabe 1 Definition und Konstruktion der Mittelsenkrechten

I) Einordnung

Die Aufgabe 1 besteht aus drei Teilaufgaben, mit denen verschiedene Wissensarten erfasst werden: In a) wird die Definition der Mittelsenkrechten erfasst, also Faktenwissen. In b) wird mit der Konstruktion der Mittelsenkrechten prozedurales Wissen erhoben. Bei c) werden weitere Eigenschaften der Mittelsenkrechten erfragt und der Satz über die Mittelsenkrechten kann als Lösung dienen (vgl. Tab. 6, KOWI III). Das gehört zum konzeptuellen Wissen. Bei allen Teilaufgaben handelt es sich um Reproduktionswissen aus dem Unterricht (vgl. 9.1.4.2 d). Die Aufgabe wird mit vier der 20 Testpunkte bewertet.

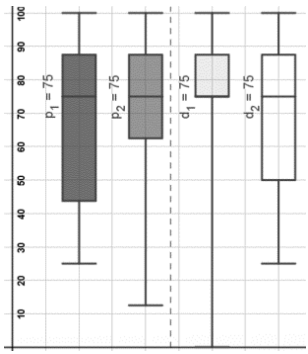


Abb. 30: Klassenweise Verteilung der Ergebnisse zur Aufgaben 1 in Test 2. Hier sind 4 Punkte 100 %.

II) Ergebnisdarstellung

Alle vier Klassen weisen einen Median von $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2 = \tilde{d}_1 = \tilde{d}_2 = 75{,}00\ \%$ auf (vgl. Abb. 30). Die Klassen P_1 und P_2 weichen auch im arithmetischen Mittel $\bar{p}_1 = 64{,}29\ \%$ und $\bar{p}_2 = 69{,}89\ \%$ und der Standardabweichung kaum voneinander ab (vgl. Tab. 43). Die Standardabweichungen liegen insgesamt für alle vier Gruppen zwischen 20 und 24 und damit nah beieinander. In allen Klassen wird ein Maximum von 100 % erreicht. Der höchste Wert für das arithemetische Mittel wird vond er Klasse D_1 mit $\bar{d}_1 = 75{,}54\,\%$ erreicht. Hier sind besonders viele starke Schülerleistungen: 75 % der Lernenden erreichen mindestens 75 % der Punkte (vgl. Abb. 30). Gleichzeitig liegt bei D_1 das geringste Minimum aller vier Klassen vor. Das arithmetische Mittel von D_2 liegt mit $\bar{d}_2 \approx 61{,}46\,\%$ etwas unterhalb der Durchschnittswerte für die anderen drei Klassen (vgl. Tab. 43). Diese insgesamt ähnliche Verteilung zeigt sich auch in den Boxplots (vgl. Abb. 30). Die Klasse D_1 scheint im Vergleich die besten Leistungen zu erbringen, es folgt P_2. Die Klassen P_1 und D_2 sind kaum zu unterscheiden.

Test 2, Aufgabe 1 Angaben in %	Problemorientierter Unterricht		Darbietender Unterricht	
	P_1	P_2	D_1	D_2
Arithmetisches Mittel	64,29	69,89	75,54	61,46
Standardabweichung	23,87	22,82	20,68	21,33
Maximum	100	100	100	87,50
Oberes Quartil	87,50	87,50	87,50	87,50
Median	75	75	75	75
Unteres Quartil	43,75	62,50	75	50
Minimum	25	12,50	0	25

Tab. 43: Stat. Kenngrößen der Ergebnisse aus Test 2, Aufgabe 1

Problemorientierter Unterricht		*Darbietender Unterricht*	
P_1	P_2	D_1	D_2
38,10	43,50	50,30	43,80
α = 0,05 Signifikanzniveau	df = k-1=3 Freiheitsgrad	p = 0,4735 Irrtumswahrscheinlichkeit	
H = 2,51 < 7,81= χ^2_3 Es liegt **kein signifikanter Unterschied** vor. H_0 wird beibehalten: Es gibt keine signifikanten Unterschiede zwischen P_1, P_2, D_1 und D_2.			

Tab. 44: Ergebnisse der Kruskal-Wallis-Signifikanztests zw. den vier Klassen in Test 2, Aufgabe 1

III) Ergebniseinordnung

Alle Abweichungen können als verträglich eingestuft werden. Dies zeigen auch die Berechnungen mit dem Kruskal-Wallis-Test mit einem H-Wert von 2,51 < 7,81 mit df = 3 und $\alpha = 0{,}05$ (vgl. Tab. 44). Die vier Klassen zeigen sehr ähnliche Leistungen in Bezug auf Definition, Konstruktion und das Nennen weiterer Eigenschaften der Mittelsenkrechten.

Wie auch erwartet werden bei dieser Reproduktionsaufgabe durchschnittlich in alle Klassen die meisten Punkte in Test 2 erreicht. Das höchste arithmetisches Mittel von 75 % aus der Klasse D_1 kann wie folgt interpretiert werden: Im Schnitt können drei von vier Lernenden die Aufgabe fehlerfrei lösen und ein Lernender löst die Aufgabe nicht, oder jeder Lernende erhält drei von vier Punkten. Aus dieser Sicht hätte ein durchschnittlich höheres Abschneiden für diese grundlegenden Wissensinhalte zur Mittelsenkrechte erwartet werden können.

IV) Ergebnisdetails

Es werden die Punkteverteilungen aus den Bewertungstabellen für die drei Teilaufgaben a), b) und c) klassenweise betrachtet, um zu überprüfen, ob die vergleichbaren durchschnittlichen Leistungen sich auch in gleicherweise in der Abbfrage der drei Wissensbereiche widerspiegelt.

a) Zur Teilaufgabe a) Wiedergabe der Definition der Mittelsenkrechten: Die Klassen P_2, D_1 und D_2 liegen im Durchschnitt nah bei einander. Die arithmetischen Mittel liegen zwischen 75 % und 86 %. Die Klasse P_1 weicht davon deutlicher ab mit einem Durchschnittswert von 58,73 %. Es fällt auf, dass in der Klasse P_1 eine hohe Anzahl an Schülerinnen und Schülern (5 von 21) keine Punkte für die angegebene Defintion erhält und gleichzeitig erhalten nur 8 von 21 Lernenden 100 % der Punkte. In den anderen drei Klassen sind es jeweils nur ein Lernender der trotz Definitionsangabe 0 Punkte erhält und 16 Schülerinnen und Schüler in jeder der drei anderen Klassen. Dies erklärt die Abweichungen der Klasse P_1 nach unten.

Es werden die fünf Schülerlösungen betrachtet, bei denen eine Definition angegeben wurde, die jedoch nicht zu Punkten geführt hat. In allen Fällen sind die sprachlichen Formulierung sehr ungenau, so dass diese mit 0 Punkten bewertet werden mussten. Es folgt ein Beispiel: „Eine Mittelsenkrechte ist eine Gerade, die durch zwei Punkte verläuft. Sie ist immer gleich weit zu den zwei Punkten." Auch hier können richtige Ideen enthalten sein, diese werden mit dem festgelegten Bewertungsschema aber nicht erfasst.

b) Zur Teilaufgaben b) Konstruktion der Mittelsenkrechten: Die Schülerinnen und Schüler aller vier Klassen können mit einer ähnlichen Leistung um die 75 % die Konstruktion der Mittelsenkrechten anfertigen.

c) Zur Teilaufgabe c) weitere Punkteigenschaften: Von den vier Punkten der Aufgabe 1 entfallen 1,5 Punkte auf die Teilaufgabe c). Einen Punkt gibt es für die Nennung einer Eigenschaft, die die Punkte haben, die auf der Mittelsenkrechten liegen und 0,5 Punkte für eine Erklärung der Eigenschaft. Die Punkteigenschaft können rund 90 % der Lernenden aus P_1, rund 80 % der Lernenden aus P_2 und rund 95 % der Lernenden aus D_1 angeben. Die Klasse D_2 fällt mit knapp 71 % etwas weiter ab.

   Für die Worterklärung werden in allen vier Klassen kaum Punkte vergeben. Die folgenden Beispiele für eine Worterklärung haben zur Bepunktung geführt: „Sie haben den selben Abstand zu den Eckpunkten wegen dem Radius der beiden Halbkreise." (D118)

oder „Sie sind gleich weit weg von z.B: Punkt A und B, weil sie genau senkrecht auf AB liegt.“ (D132)
Es geben auffällig wenige Schülerinnen und Schüler eine Begründung ab. Am häufigsten wurde in der Klasse D_1 eine Erklärung abgegeben (4/23), am seltensten in der Klasse D_2 (1/21). In P_1 sind es zwei Lernende und in P_2 geben drei Lernende eine Erklärung ab, wobei eine dieser Erklärungen mit 0 Punkten bewertet wird. Somit werden 12,5 % der Punkte von Aufgabe 1 von fast keinem Lernenden erreicht. Das erklärt, warum die Mittelwerte geringer als erwartet sind.

V) Zusammenfassung zu Test 2 – Aufgabe 1

Es liegen keine signifikanten Unterschiede zwischen den vier Klassen vor. Die Leistungen sind sogar überraschend ähnlich (vgl. Abb. 30). Im Durchschnitt können 75 % der Lernenden eine Definition der Mittelsenkrechten angeben, diese konstruieren und die Punkte auf der Mittelsenkrechten charakterisieren.

Es werden kaum Punkte für die Erklärung der Punkteigenschaften auf der Mittelsenkrechte erreicht. Damit fehlen den meisten Lernenden bereits 12,5 % der Punkte. Das erklärt die für diese Reproduktionsaufgabe geringen Mittelwerte.

12.3.2 Ergebnisse zu Test 2 – Aufgabe 2a Innermathematische Anwendung der Mittelsenkrechten

I) Einordnung

Mit dieser Anwendungsaufgabe wird ein naher Transfer der Ortslinien-Eigenschaften von Mittelsenkrechten und von Kreisen gefordert. Für die drei Punkte der Teilaufgabe 2a) müssen mehrere Schritte nacheinander ausgeführt werden: Es muss die Mittelsenkrechte zu A und B und ein Kreis um D mit r = 2 LE eingezeichnet werden. Der fehlende Schnittpunkt von Kreis und Mittelsenkrechte führt zu der Antwort, dass es keinen solchen

Punkt gibt. Diese Schritte bilden auch die Grundlage der Bewertung.

II) Ergebnisdarstellung

Im arithmetischen Mittel erreichen die Klassen P_1, P_2 und D_2 vergleichbare Werte zwischen $\bar{p}_2 = 60{,}61\ \%$ und $\bar{d}_1 = 65\ \%$; D_2 fällt etwas nach unten ab mit $\bar{d}_2 = 56{,}35\ \%$ (vgl. Tab. 45). Die Klassen P_1 und D_1 erreichen mit $\tilde{p}_1 = \tilde{d}_1 = 66{,}\overline{66}\ \%$ den höchsten Wert für den Median. P_2 und D_2 folgen mit einem Median von $\tilde{p}_2 = \tilde{d}_2 = 50\ \%$. Die Klassen P_1 und D_2 haben einen sehr hohen Minimalwert von 33,33 %, d. h. hier gibt es keine sehr schwachen Leistungen. Alle Gruppen erreichen einen Maximalwert von 100 %, wobei in der Klasse D_2 nur wenige Schülerinnen und Schüler sehr gute Leistungen erbringen (vgl. Abb. 31). Das Fehlen der Leistungsspitze ist für

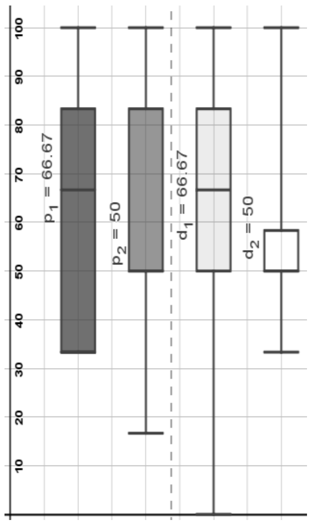


Abb. 31: Klassenweise Verteilung der Ergebnisse zur Aufgaben 2a in Test 2. Hier sind 3 Punkte 100 %.

Test 2, Aufgabe 2a9 Angaben in %	*Problemorientierter Unterricht*		*Darbietender Unterricht*	
	P_1	P_2	D_1	D_2
Arithmetisches Mittel	61,90	60,61	65,22	56,35
Standardabweichung	23,65	26,37	24,53	19,57
Maximum	100,00	100,00	100,00	100,00
Oberes Quartil	83,33	83,33	83,33	58,33
Median	66,67	50,00	66,67	50,00
Unteres Quartil	33,33	50,00	50,00	20,00
Minimum	33,33	16,67	0,00	33,33

Tab. 45: Stat. Kenngrößen der Testergebnisse zu Test 2, Aufgabe 2a)

D_2 aus Test 1 bekannt. Das geht einher mit einer geringen Standardabweichung der Klasse D_2: Die Hälfte der Schülerinnen und Schüler erreicht zwischen 50 % und 58,33 % der Punkte. Insgesamt kann man sagen, dass die Klassen P_1 und D_1 etwas besser abschneiden als die anderen beiden Klassen (vgl. Tab. 45).

III) Ergebniseinordnung

Insgesamt liegen die Leistungen der vier Klassen nah beieinander. Die Schülerinnen und Schüler zeigen vergleichbare, gute Leistungen beim Verwenden von Mittelsenkrechte und Kreis in einer Konstruktion auf. Der Kruskal-Wallis-Test bestätigt mit einem H-Wert von 1,94 < 7,81 (df = 3 und α = 0,05): Es gibt keine signifikanten Unterschiede (vgl. Tab. 46).

Problemorientierter Unterricht		*Darbietender Unterricht*	
P_1	P_2	D_1	D_2
44,00	43,2	49,40	38,90
α = 0,05 Signifikanzniveau	df = k-1=3 Freiheitsgrad	p = 0,585 Irrtumswahrscheinlichkeit	
H = 1,94 < 7,81= χ^2_3 Es liegt **kein signifikanter Unterschied** vor. H_0 wird beibehalten: Es gibt keine signifikanten Unterschiede zwischen P_1, P_2, D_1 und D_2.			

Tab. 46: Ergebnisse der Kruskal-Wallis-Tests zw. Den vier Klassen in Test 2, Aufgabe 2a)

VI) Ergebnisdetails

Es werden die Punkteverteilung anhand des Bewertungshorizontes analysiert. Es gibt drei Bewertungskategorien, die jeweils mit einem Punkt versehen werden:

1) Verwendung der Mittelsenkrechten: Über 86 % der Schülerinnen und Schüler aus den vier Klassen können die Mittelsenkrechte fehlerfrei einzeichnen.

2) Verwendung des Kreises: Der Kreis wird im Schnitt in etwas mehr als der Hälfte der Fälle richtig eingezeichnet. Es können keine Unterschiede zwischen den Klassen festgestellt werden. Häufigster Fehler beim Einzeichnen des Kreises ist die Verwendung eines falschen Radius. Es werden 2 Kästchendiagonalen oder 2 cm oder ähnliches verwendet, anstelle der 2 Kästchen. Das wird mit 0,5 von 1 Punkt bewertet.
3) Interpretation der Lage von Kreis und Mittelsenkrechte zueinander: Da es keinen Schnittpunkt gibt, kann es auch keinen solchen gesuchten Punkt geben. Voraussetzung sind dabei das richtige Einzeichnen der beiden Elemente. Alternative Interpretationen im Sinne eines Folgefehlers wurden bei der Testauswertung nicht berücksichtigt. Damit nimmt der Anspruch an diese Bewertungskategorie zu. Das macht sich in der Punkteverteilung bemerkbar. Volle Punktzahl für ihre Interpretation erhalten in der Klasse D_2 drei Lernende, das sind etwa 15 %. In den Klasse P_1 und P_2 sind es mit fünf bzw. sechs Schülerinnen und Schüler etwa 25 %. In der Klasse D_1 gelingt dies neun Schülerinnen und Schülern; das sind etwa 40 %. Die Lernenden der Klasse D_2 bearbeiten die Aufgabe deutlich seltener und erhalten durchschnittlich weniger Punkte. Das kann die fehlende Leistungsspitze erklären (vgl. Abb. 31).

V) Zusammenfassung zu Test 2-Aufgabe 2a

Es liegen keine signifikanten Unterschiede zwischen den vier Klassen vor. Die Leistungen sind vergleichbar (vgl. Abb. 31). Das arithmetische Mittel beträgt bei allen vier Klassen knapp 60 % (vgl. Tab. 45). Vergleichbar sind auch die inhaltlichen Lösungsschritte anhand des Bewertungsschemas. Die Mittelsenkrechten können über 86 % der Lernenden richtig einzeichnen. Das Einzeichnen des Kreises gelingt knapp 50 %

der Lernenden. Deutlichere Unterschiede gibt es bei der richtigen Interpretation der Situation. Hier zeigen Schülerinnen und Schüler der Klasse D_1 mit etwa 40 % auffällig gute Leistungen. Die Lernenden der Klassen P_1 und P_2 erreichen etwa 25 % der Punkte und die der Klasse D_1 etwa 15 %. Damit kann auch die kleinere Box von D_2 erklärt werden.

12.3.3 Ergebnisse zu Test 2 – Aufgabe 2b Fallunterscheidung

I) Einordnung

Die Teilaufgabe 2b) erfordert eine Fallunterscheidung und ist dadurch anspruchsvoll. Sie kann als Problemlöseaufgabe eingestuft werden. Das Lösen von 2a) ist hilfreich bzw. notwendig, um argumentieren zu können. Es werden weitere mögliche Lagebeziehungen zwischen Kreis und Gerade erfragt. Dafür werden 0 oder 0,5 oder 1 Punkt vergeben.

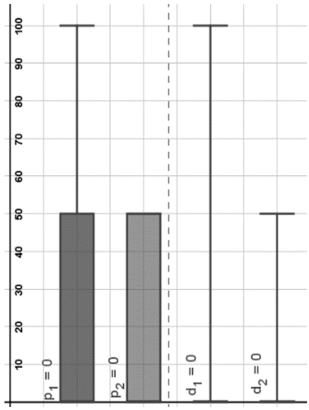


Abb. 32: Klassenweise Ergebnisse der Lösungen zur Aufgaben 2b) in Test 2. Ein Punkt entspricht 100 %.

II) Ergebnisdarstellung

Die Aufgabe 2b) wird im Schnitt von weniger als 25 % der Schülerinnen und Schülern bearbeitet. Das erklärt den Median aller Klassen von $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2 = \tilde{d}_1 = \tilde{d}_2 = 0{,}00$ %. In den Klassen P_1 und D_1 können einzelne Schülerinnen und Schüler die Aufgabe vollständig lösen: Das sind drei Lernende in der Klasse P_1 und ein Schüler in der Klasse D_1. Die Standardabweichungen spiegeln diese Auszählung wider (vgl. Tab. 48).

III) Ergebniseinordnung

Die Unterschiede sind gering und nicht statistisch signifikant (Kruskal-Wallis-Test mit einem H-Wert von 1,25 < 7,81; df = 3 und α = 0,05(vgl. Tab. 47).

Test 2, Aufgabe 2b) *Angaben in %*	Problemorientierter Unterricht		Darbietender Unterricht	
	P_1	P_2	D_1	D_2
Arithmetisches Mittel	21,43	15,91	13,04	7,14
Standardabweichung	36,42	23,29	26,45	17,50
Maximum	100,00	50,00	100,00	50,00
Oberes Quartil	50,00	50,00	0,00	0,00
Median	0,00	0,00	0,00	0,00
Unteres Quartil	0,00	0,00	0,00	0,00
Minimum	0,00	0,00	0,00	0,00

Tab. 48: Stat. Kenngröße der Testergebnisse zu Test 2, Aufgabe2b)

Problemorientierter Unterricht		*Darbietender Unterricht*	
P_1	P_2	D_1	D_2
46,90	46,70	43,00	39,40
α = 0,05 Signifikanzniveau	df = k-1=3 Freiheitsgrad	p = 0,741 Irrtumswahrscheinlichkeit	
H = 1,25 < 7,81= χ^2_3 Es liegt **kein signifikanter Unterschied** vor. H_0 wird beibehalten: Es gibt keine signifikanten Unterschiede zwischen P_1, P_2, D_1 und D_2.			

Tab. 47: Ergebnisse der Kruskal-Wallis-Tests zw. Den vier Klassen in Test 2, Aufgabe 2b)

IV) Ergebnisdetails

Eine Analyse der Punkteverteilung in allen vier Klassen zeigt folgende Auffälligkeit: Während in den Klassen P_1, P_2 und D_1 die Anzahl der richtigen Lösungen mit einem Anteil von ca. 30 % kaum von der Anzahl der Lösungsversuche (6 bis 7 Lernende pro Klasse) abweicht, geben in der Klasse D_2 fast alle

Schülerinnen und Schüler (18 von 21, das sind 86 %) einen Erklärungsversuch ab. Gleichzeitig kann kein Erklärungsversuch als vollständig richtig bewertet und nur drei davon als teilweise richtig bewertet werden.

V) Zusammenfassung zu Test 2 – Aufgabe 2b

Es liegen keine signifikanten Unterschiede zwischen den vier Klassen vor. Der Median von 0 % zeigt, dass kaum eine Bearbeitung als richtig bewertet werden kann. Auffällig ist die hohe Bearbeitungsquote der Klasse D_2 von ca. 86 %. In den anderen drei Klassen wurde die Aufgabe nur von knapp 30 % der Lernenden bearbeitet.

12.3.4 Ergebnisse zu Test 2 – Aufgabe 3 Begründung des gemeinsamen Schnittpunkts im Dreieck

I) Einordnung

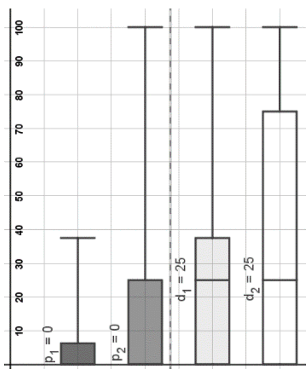


Abb. 33: Klassenweise Ergebnisse zur Begründungsaufgabe 3 in Test 2. Hier sind 4 Punkte 100 %.

Mit der Aufgabe 3 wird eine Erklärung dazu eingefordert, warum sich die drei Mittelsenkrechten im Dreieck genau in einem Punkt schneiden. Die Aufgabe erfordert konzeptuelles Wissen und Wissen über logische Argumentationsstrukturen. Im darbietenden Unterricht wurde für diese Argumentation mehr Unterrichtszeit eingeplant und diese wurde mindestens einmal wiederholt. Für die problemorientierten Klasse ist weniger Zeit eingeplant. Daher ist von einer weiten Transferleistung auszugehen, während es für die darbietend unterrichteten Lernenden einen nahen Transfer darstellt. Ein besseres Abschneiden der darbietend unterrichteten Klassen ist zu erwarten.

Durch den hohen Argumentationsanspruch werden deutlich geringere Mittelwerte als bei den Ergebnissen zur Aufgabe 1 erwartet.

II) Ergebnisdarstellung

Die beiden darbietend unterrichteten Klassen erreichen einen Median von $\tilde{d}_1 = \tilde{d}_2 = 25\ \%$ (vgl. Abb. 33). Mit einem arithmetischen Mittel von $\bar{d}_2 \approx 39\ \%$ sind die Leistungen der Klasse D_2 die besten. Es folgt die Klasse D_1 mit einem arithmetischen Mittel von $\bar{d}_1 \approx 22\ \%$. Ein nur etwas geringeres arithmetisches Mittel weist die Klasse P_2 auf mit $\bar{p}_2 \approx 18\ \%$. Deutlich geringer fällt das arithmetische Mittel der Klasse P_1 aus mit $\bar{p}_1 \approx 8\ \%$. Die beiden problemorientiert unterrichteten Klassen erreichen einen Median von $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2 = 0\ \%$. Die Klasse P_1 erreicht als Maximum lediglich 37,50 % der Punkte. Alle anderen Klassen erreichen 100 % (vgl. Tab. 49). In der Klasse D_2 gibt es einen vergleichsweise hohen Anteil an erfolgreichen Lösungen. Das obere Quartil beginnt bei 75 % (vgl. Abb. 33).

Test 2, Aufgabe 3 Angaben in %	*Problemorientierter Unterricht*		*Darbietender Unterricht*	
	P_1	P_2	D_1	D_2
Arithmetisches Mittel	7,74	18,18	22,28	39,29
Standardabweichung	14,68	31,24	24,99	35,83
Maximum	37,50	100,00	100,00	100,00
Oberes Quartil	6,25	25,00	37,5	75,00
Median	0,00	0,00	25,00	25,00
Unteres Quartil	0,00	0,00	0,00	0,00
Minimum	0,00	0,00	0,00	0,00

Tab. 49: Stat. Kenngrößen der Testergebnisse zu Test 2, Aufgabe 3

III) Ergebniseinordnung

Der Kruskal-Wallis-Test zeigt, dass es sich um signifikante Unterschiede zwischen mindestens zwei der vier Gruppen handelt (H-Wert von $10{,}27 > 7{,}81$, $df = 3$ und $\alpha = 0{,}05$). Es gibt mittlere signifikante Unterschiede zwischen P_1 & D_2 und zwischen P_2 &

D_2 (vgl. Tab. 51 und Tab. 50). Die Klasse D_2 zeigt damit signifikant bessere Leistungen als die Klassen P_1 und P_2.

Problemorientierter Unterricht		*Darbietender Unterricht*	
P_1	P_2	D_1	D_2
33,1	38,9	47,7	56,3
$\alpha = 0{,}05$ Signifikanzniveau	df = k-1=3 Freiheitsgrad	p = 0,0164 Irrtumswahrscheinlichkeit	
H = 10,27 > 7,81= χ^2_3 Es liegt ein **signifikanter Unterschied** vor. H_0 wird verworfen: Es gibt signifikanten Unterschiede zwischen mindestens zwei der Klassen.			

Tab. 51: Ergebnisse der Kruskal-Wallis-Tests zw. Den vier Klassen in Test 2, Aufgabe 3

	P_1	P_2	D_1
P_2	0,69	--	--
D_1	1,96	1,26	--
D_2	2,91 / 0,4490	-2,08 / 0,3172	-1,3
Es gibt schwache signifikante Unterschiede zwischen **P_1 & D_2** und mittlere signifikante Unterschiede zwischen **P_2 & D_2**.			
Für $z \in [-1{,}96; 1{,}96]$ wird H_0 beibehalten; andernfalls verworfen. Signifikante Ergebnisse sind farbig unterlegt und erhalten zusätzlich einen Wert für die Effektstärke nach Cohen (1988): Für $0{,}1 \leq r < 0{,}3$ wird der Effekt als schwach bezeichnet, für $0{,}3 \leq r < 0{,}5$ als mittel und für $r \geq 0{,}5$ als stark.			

Tab. 50: Ergebnisse der Mann-Whitney-Tests. Die *z-Werte* geben die *Effektstärke* für Test 2, Aufgabe 3 an.

IV) Ergebnisdetails

Bei dieser Argumentationsaufgabe werden die folgenden vier Aspekt mit jeweils 1 Punkt bewertet: (I) Feststellung, dass der

Schnittpunkt gleich weit von den Eckpunkten entfernt ist; (II) Ortslinien-Definition der Mittelsenkrechten, (III) Argumentation für die beiden eingezeichneten Mittelsenkrechten, (IV) Argumentation für die fehlende Mittelsenkrechte.
Eine Betrachtung des Bewertungshorizontes und der Punkteverteilung zeigt, dass die Klassen P_1 und P_2 sehr ähnliche Verteilungen über die fünf Punktespannen haben (vgl. Tab. 52) und auch die Unterschiede zwischen den Klassen P_2 und D_1, die sich bisher weder aus dem Boxplot noch den weiteren Kenngrößen gesehen werden konnten. Nicht-Bearbeitungen gibt es in alle vier Klassen, am häufigsten in Klasse D_1. Auffällig ist, dass die Schülerinnen und Schüler der problemorientiert unterrichteten Klassen Erklärungsversuche abgeben. Diese werden zu 50 % als nicht tragfähig bewertet und erhalten somit 0 % der Punkte. In der Klasse D_1 werden knapp 50 % der abgegebenen Argumentationen mit 0,5-1,5 Punkten bewertet. Sowohl in P_2 als

Anzahl der Lernenden mit…	P_1 (21 SuS)	P_2 (22 SuS)	D_1 (23 SuS)	D_2 (21 SuS)
keiner Bearbeitung	5/24 %	3/14 %	6/26 %	2/10 %
0 Punkten trotz Bearbeitung	11/52 %	11/50 %	3/13 %	4/19 %
0,5-2,5 Punkten	5/24 %	5/23 %	12/52 %	8/38 %
3-4 Punkten	0	2/9 %	2/9 %	7/33 %

Tab. 52: Anzahl der Schülerinnen und Schülern der vier Klassen und erreichte Punkte bei der Aufgabe 3 in Test 2

auch in D_1 können zwei Lernende mindestens 3 von 4 Punkten erreichen. Diese Leistungsspitze ist in der Klasse D_2 mit sieben Lernenden am größten und fehlt in der Klasse P_1.

V) Zusammenfassung zu Test 2 – Aufgabe 3

Die Klassen P_1 und P_2 haben einen Median von 0 %. Die Klassen D_1 und D_2 haben beide einen Median von 25 %. Betrachtet man das arithmetische Mittel werden die schwachen Leistungen der Klasse P_1 ersichtlich, die Klasse P_2 ist im arithmetischen Mittel vergleichbar zur Klasse D_1. Die starken Leistungen in der Klasse D_2 zeigen mittlere signifikante Unterschiede zu den Leistungen der Klasse P_1 und zu den Leistungen der Klasse P_2 auf.
Die Detailanalyse stellt die Unterschiede zwischen den D- und den P-Klassen heraus: Für die Hälfte der Schülerinnen und Schüler gilt, sie bearbeiten die Aufgabe und erhalten 0 % der Punkte. In den darbietend unterrichteten Klassen liegt dieser Anteil der Bearbeitungen, die mit 0 Punkten bewertet werden, unter 20 %. In der Klasse D_2 lösen mit über 20 % der Lernenden die Aufgabe besonders gut. Damit zeigt die Klasse D_2 die besten Leistungen, gefolgt von den Klasse D_1. Die Klassen P_1 und P_2 sind deutlich schwächer.

12.3.5 Ergebnisse zu Test 2 – Aufgabe 4 Mittelpunkt eines Kreises gesucht

I) Einordnung

In der Aufgabe 4 ist ein Kreisbogen gegeben und gesucht ist die Konstruktion des Kreismittelpunkts. Die naheliegendste Lösung, den Kreis als Umkreis zu interpretieren, sorgt auf Grund der Thematisierung des Umkreismittelpunktsatzes im Unterricht für den geringsten Argumentationsaufwand für die Schülerinnen und Schüler. Zu tragfähigen Argumentationen können auch die Ansätze über den Vieleckumkreis oder die Wahl zweier Sekanten führen. Für die Konstruktion wird prozedurales und für die Erklärung bzw. die Entscheidung für einen der

Ansätze wird konzeptuelles Wissen benötigt. Damit wird deutlich, dass bei der Verwendung eines anderen Lösungsansatzes erheblich mehr zusätzliche Erklärungen nötig werden, um die Gesamtpunktzahl von 4 Punkten erreichen zu können. Die Aufgabe erfordert mehr als vier Wisseneinheiten und ist als anspruchsvoll zu bewerten (vgl. Abschnitt 9.1.4.5).

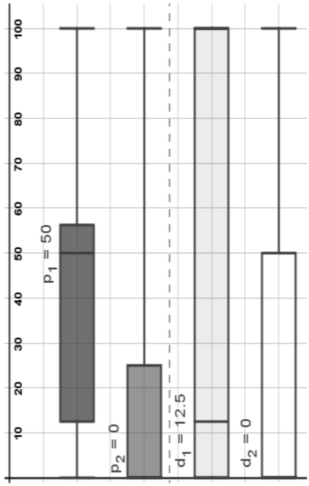


Abb. 34: Klassenweise Ergebnisse zur Aufgabe „Kreismittelpunkt“ in Test 2. Hier entsprechen 4 Punkte 100 %.

Die Unterrichtsplanung sieht für alle vier Klassen vor, dass die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks konstruiert werden und der gemeinsame Schnittpunkt als gleich weit entfernt von den Eckpunkten des Dreiecks unmittelbar zum Umkreismittelpunktsatz führt. Die Definition des Umkreises ist in den problemorientiert und auch in den darbietend unterrichteten Klassen für das Ende der vierten Unterrichtsstunde eingeplant, so dass in den Übungsstunden 5 und 6 darauf zurückgegriffen werden kann. Demnach sollten alle vier Klassen im den Umkreismittelpunktsatz thematisiert haben. Das dies im unterschiedlichen Maße geschieht, haben die Analysen der Unterrichtsbeobachtungen gezeigt (vgl. Abschnitt 10.3). Es stellt sich die Frage, inwiefern sich diese Unterschiede auf die Leistungen auswirken. Es ist davon auszugehen, dass die Leistungen ähnlich oder sogar vergleichbar sind. Aufgrund der höheren Anforderungen der Aufgabenstellungen, die durch das mathematische Begründen zustande kommen, liegen die Mittelwerte wahrscheinlich deutlich niedriger als es für die Aufgabe 1 der Fall war.

Die Mediane weichen vergleichsweise stark voneinander ab: $\tilde{p}_1 = 50\,\% > \tilde{d}_1 = 12{,}50\,\% > \tilde{p}_2 = \tilde{d}_2 = 0\,\%$ (vgl. Abb. 34). Die größer erscheinenden Unterschiede zwischen den Klassen P_1 und D_1 werden durch das arithmetische Mittel widerlegt: Die durchschnittlichen Leistungen der Klasse P_1 und D_1 liegen mit $\bar{p}_1 \approx 40\,\%$ und $\bar{d}_1 \approx 37\,\%$ vergleichsweise nah beieinander und sind als relativ hoch zu bewerten. Die Leistungen in den anderen beiden Klassen sind mit $\bar{d}_2 \approx 21\,\%$ und $\bar{p}_2 \approx 19\,\%$ deutlich geringer (vgl. Tab. 53) und entsprechen vielleicht sogar eher den Erwartungen bei dieser anspruchsvollen Aufgabe. Die Standardabweichungen der Klassen P_1, P_2 und D_2 liegen bei $s \approx 32$. D_1 weist eine größere Streuung um den Mittelwert auf mit $s \approx 42$.

Test 2, Aufgabe 4 Angaben in %	*Problemorientierter Unterricht*		*Darbietender Unterricht*	
	P_1	P_2	D_1	D_2
Arithmetisches Mittel	40,48	18,75	36,96	20,83
Standardabweichung	32,02	32,15	42,10	32,12
Maximum	100,00	100,00	100,00	100,00
Oberes Quartil	56,25	25,00	100,00	50,00
Median	50,00	0,00	12,50	0,00
Unteres Quartil	12,50	0,00	0,00	0,00
Minimum	0,00	0,00	0,00	0,00

Tab. 53: Stat. Kenngrößen der Testergebnisse zu Test 2, Aufgabe 4

Diese Kenngrößen machen deutlich, dass die Leistungen der Klasse D_1 sehr stark streuen. Auch die Boxplots zeigen dies: Mindestens ein Viertel der Lernenden erreicht sehr gute Leistungen (100 %) und gleichzeitig erreichen mindestens 25 % der Schülerinnen und Schüler keine Punkte (vgl. Abb. 34).
In allen vier Klassen wird ein Minimum von 0 % und ein Maximum von 100 % erreicht, das entspricht 0 bzw. 4 Punkten. In den Klassen P_2 und D_2 ist der Anteil der Lernenden, die keine Punkte erreichen, mit mindestens 50 % sehr hoch (vgl. Tab.

53). In der Klasse P_2 kommt hinzu, dass nur 25 % der Lernenden mehr als 25 % der Punkte erzielen. Das obere Viertel der Leistungsspanne ist damit vergleichsweise schwach (vgl. Tab. 53).
Die Klassen P_1 und D_1 zeigen somit deutlich bessere Leistungen als die Klassen P_2 und D_2. In der Klasse D_1 gibt es viele sehr gute Leistungen und noch mehr sehr schwache Leistungen, weshalb der Median mit 12,5 % deutlich geringer ausfällt als der von P_1 trotz vergleichbarer arithmetischer Mittel. Die Klassen D_2 und P_2 zeigen mit einem Median von 0 und einem arithmetischen Mittel von $\bar{d}_2 \approx 21$ % und $\bar{p}_2 \approx 19$ % schwächere Leistungen (vgl. Tab. 53).

III) Ergebniseinordnung

Teilweise sind die Unterschiede signifikant. Das zeigt der Kruskal-Wallis-Test mit einem H-Wert von 7,86 > 7,81 mit df = 3 und α = 0,05 (vgl. Tab. 54). Der anschließende Mann-Whitney-Test und die Effektstärke nach Cohen führen dazu, dass signifikante Unterschiede mittlerer Effektstärke zwischen den Klassen P_1 & P_2 (z = -2,53) und P_1 & D_2 (z = -2,25) vorliegen (vgl. Tab. 55). In beiden Fällen weist die Klasse P_1 höhere Leistungen auf.

Problemorientierter Unterricht		*Darbietender Unterricht*	
P_1	P_2	D_1	D_2
54,90	36,30	47,50	37,60
α = 0,05 Signifikanzniveau	df = k-1=3 Freiheitsgrad	p = 0,049 Irrtumswahrscheinlichkeit	
H = 7,86 > 7,81= χ^2_3 Es liegt ein **signifikanter Unterschied** vor. H_0 wird verworfen: Es gibt signifikante Unterschiede zwischen mindestens zwei der Klassen.			

Tab. 54: Ergebnisse der Kruskal-Wallis-Tests zw. den vier Klassen in Test 2, Aufgabe 4

	P_1	P_2	D_1
P_2	-2,53 / 0,3858	--	--
D_1	-0,78	1,41	--
D_2	-2,25 / 0,3472	-0,17	1,22
Es gibt mittlere signifikante Unterschiede zwischen P_1 & P_2 und P_1 & D_2.			
Für $z \in [-1{,}96; 1{,}96]$ wird H_0 beibehalten; andernfalls verworfen. Signifikante Ergebnisse sind farbig unterlegt und erhalten zusätzlich einen Wert für die Effektstärke nach Cohen (1988): Für $0{,}1 \le r < 0{,}3$ wird der Effekt als schwach bezeichnet, für $0{,}3 \le r < 0{,}5$ als mittel und für $r \ge 0{,}5$ als stark.			

Tab. 55:Ergebnisse der Mann-Whitney-Tests. Die z-Werte geben die Effektstärke für Test 2, Aufgabe 4 an.

IV) Ergebnisdetails

Diese Konstruktionsaufgabe führt in Test 2 zu einer Leistungsverteilung zwischen den vier Klassen, die nicht mit der Einteilung in problemorientierten und darbietenden Unterrichtseinstieg übereinstimmt. In einer späteren Interpretation sollen mögliche Erklärungen auch in Bezug auf das Unterrichtsgeschehen herangezogen werden. Dazu sind weitere Detailanalysen interessant.
Die Abweichungen der Schülerleistungen zwischen den vier Klassen werfen z. B. die Fragen auf, worin sich die Schülerlösungen unterscheiden und wie sich die Leistungen in den jeweiligen Klassen auf die Schülerschaft verteilen. Damit diese Ergebnisse besser interpretiert werden können, werden die Schülerdaten stärker qualitativ ausgewertet. Als Grundlage dazu dient der Bewertungshorizont, bei dem jeder Schülerlösung zunächst der hauptsächlich verwendete Lösungsansatz zugeordnet wird. Es gibt vier tragfähige Lösungsansätze A) Dreiecksumkreis, B1) Vieleckumkreis, B2) Zwei Sekanten und C) Quadratinkreis (vgl. 9.1.4.5). Diese konnten bei der Datenanalyse in-

duktiv durch weitere, weniger tragfähige Ansätze ergänzt werden[14]. Beim Ansatz E1) wird ein Durchmesser möglichst gut eingezeichnet, die Mitte M wird ausgemessen und mit dem Geodreieck eine Senkrechte durch M gezeichnet. Der Ansatz E2) zeichnet sich dadurch aus, dass hauptsächlich durch das Zeichnen einer Senkrechten ein Kreismittelpunkt ermittelt wird. Es ist nicht zu erkennen, dass eine Mitte bestimmt wird. Die Ansätze E1) und E2) können mit bis zu einem Punkt bewertet werden. Beim Ansatz E3) führt Ausmessen zur Bestimmung des Kreismittelpunktes. Die Ansätze E3), F1) und F2), in denen hauptsächlich ein Ausmessen von möglichen Durchmessern, ein reines Probieren (vgl. D112[15]) oder gar kein Vorgehen erkennbar ist, werden mit 0 Punkten bewertet.
Die Tab. 56 zeigt, welcher Anteil der Schülerinnen und Schüler aus den vier Klassen, welchen der Lösungsansätze A) bis F2) verwendet. Die Lösungsansätze D) bis F2) sind zum Zwecke der Ergebnisauswertung in dieser Darstellung stark gebündelt. Es können unterschiedliche Vorgehensweisen im Detail ausgemacht werden, die zum einen nicht ausreichen, um die erforderliche Argumentation zu ergründen und zum anderen auf vergleichbare Herangehensweisen zurückgeführt werden können.

Durch diese Bündelung ist anhand der Tabelle nicht ersichtlich, wie hoch die tatsächliche Bearbeitungsrate ist. In allen drei der vier Klassen liegt die Rate bei 100 %. In der Klasse D_1 bearbeitet der Lernende D132 als einziger die Aufgabe nicht. Damit hat fast jede Schülerin bzw. jeder Schüler die Aufgabe bearbeitet.

[14] Eine Auflistung aller Lösungsansätze mit Beschreibung befindet sich im Kodierhandbuch zu Aufgabe 4 im Anhang.
[15] D112 markiert einen Kreismittelpunkt. Es gibt keine weitere Worterklärungen.

Zusätzlich zu der anteiligen Auswertung der verwendeten Lösungsansätze in Tab. 56 werden die Schülerleistungen jeder Klasse nach Punkten geordnet und mit dem verwendeten Lösungsansatz A) bis F2) in einem Säulendiagramm dargestellt (vgl. Abb. 35 bis Abb. 38). Diese Säulendiagramme und Tab. 56 bieten die Grundlage der nun folgenden Detailanalyse, mit der die Leistungen in den vier Klassen aufgeschlüsselt werden, um so die durchschnittlichen Klassenleistungen besser verstehen zu können.

Test 2, Aufgabe 4 (Abs. Schülerzahl/Anteil in %)	P_1	P_2	D_1	D_2
A) Dreiecksumkreis	3/14,29	2/9,09	6/26,09	2/9,52
B1) Vielecksumkreis/ B2) Zwei Sekanten	7/33,33	1/4,55	3/13,04	5/23,81
C) Quadratinkreis	1/4,76	2/9,09	0/0,00	0/0,00
D) Durchmesser einzeichnen und Mittelsenkrechte konstruieren	4/19,05	1/4,55	2/8,70	0/0,00
E1, E2) Senkrechte zu Durchmesser mit Geodreieck	1/4,76	6/27,27	2/8,70	2/9,52
E3) reines Ausmessen	1/4,76	4/18,18	6/26,09	4/19,05
F1, F2) Hauptsächlich Probieren /kein Ansatz erkennbar	4/19,05	6/27,27	4/17,39	8/38,10
	21/100	22/100	23/100	21/100

Tab. 56: Absolute und anteilig Verteilung auf die Lösungsansätze A bis F in den vier Klassen. Dunkelgrau unterlegt sind die Ansätze, die mit bis zu 4 von 4 Punkten bewertet werden können. Eine hellgraue Unterlegung bedeutet, dass 0,5 zu 1 Punkt vergeben werden kann. Die weiß unterlegten Ansätze führen zu 0 Punkten.

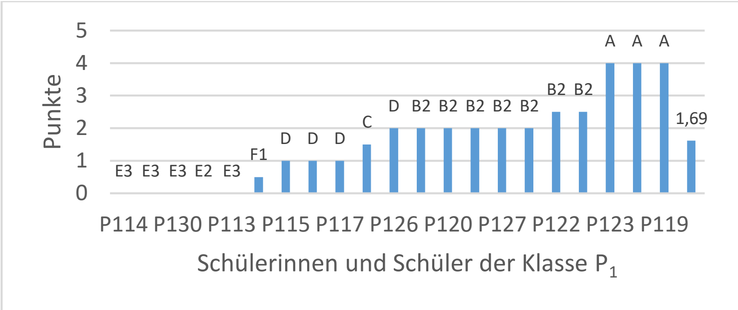


Abb. 35: Ergebnisse der Klasse P_1 in Test 2, Aufgabe 4 mit dem arithmetischen Mittel (MW).

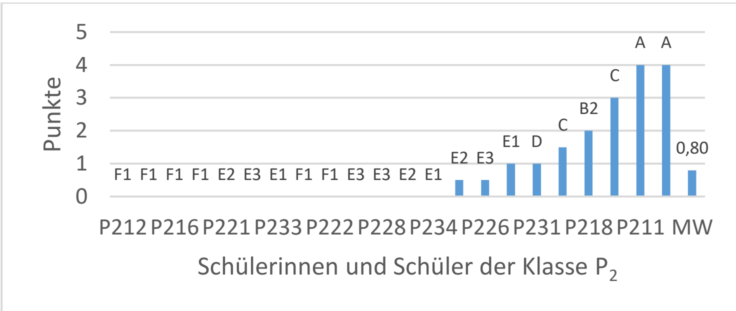


Abb. 36: Ergebnisse der Klasse P_2 in Test 2, Aufgabe 4 mit dem arithmetischen Mittel (MW).

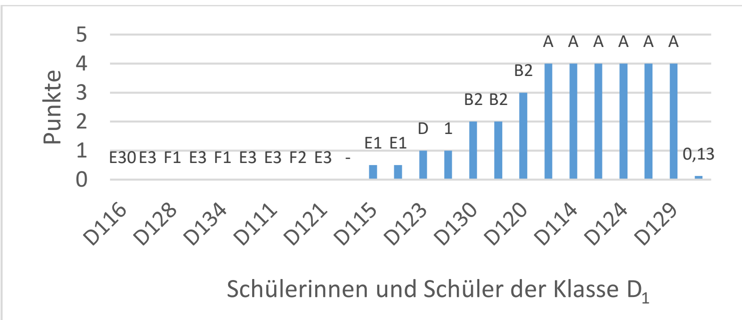


Abb. 37: : Ergebnisse der KLasse D_1 in Test 2, Aufgabe 4 mit dem arithmetischen Mittel (MW).

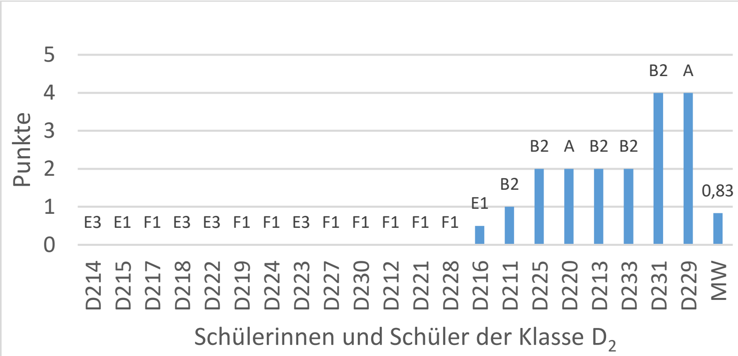


Abb. 38: Ergebnisse der Klasse D_2 in Test 2, Aufgabe 4 mit dem arithmetischen Mittel (MW).

Zunächst wird eine klassenweise Auswertung vorgenommen, anschließend wird betrachtet, welche Lösungsansätze verwendet wurden und dann ein ganzheitliches Bild erstellt. Die Klasse P_1 hat besonders gute durchschnittliche Leistungen erbringen können. Es folgt eine Analyse, wie dies zustande kommen: In der Klasse P_1 erhalten 75 % der Lernenden Teilpunkte für ihre Bearbeitungen, das ist ein hoher Anteil (vgl. Abb. 35). Im Vergleich zu den anderen drei Klassen gibt es hier das breiteste Mittelfeld. Die Lernenden der Klasse P_1 verwenden auffällig häufig den Lösungsansatz B2) *Konstruktion zweier Sekanten* bzw. D) *Einzeichnen eines Durchmessers und Konstruktion einer Mittelsenkrechten* (vgl. Abb. 35 und Tab. 56). Damit verwenden zwei Drittel der Lernenden die Konstruktion der Mittelsenkrechten bei der Lösungsfindung. Das erklärt das starke Mittelfeld und den vergleichsweise hohen Mittelwert der Klasse P_1.

Die Abb. 36 und die Tab. 56 lassen die große Streuung der Daten in der Klasse D_1 auf die besonders vielen sehr guten Leistungen (knapp 26 %) und den hohen Anteil an mit 0 bewerteten Leistungen (knapp 43 %) zurückführen. Ein Viertel der Lernenden interpretiert den Kreis erfolgreich als Dreiecksumkreis, ein weiteres Viertel verwendet ebenfalls die Konstruktion der Mittelsenkrechten an einer Stelle im Lösungsansatz B2) oder D) und knapp die Hälfte der Lernenden wählt einen Ansatz, der auf Messen oder Probieren beruht (vgl. Tab. 56 und Abb. 37). Diese Verteilung war aufgrund des arithmetischen Mittels von ca. 37 % und dem deutlich geringeren Median von 12,5 % zu erwarten.

Die Klassen P_2 und D_2 zeigen ähnliche Verteilungen in Bezug auf die erreichten Punkte (vgl. Abb. 36 und Abb. 38) und werdend daher gemeinsam dargestellt. Jeweils zwei Lernende erreichen 100 % der Punkte. Damit unterscheiden sich die Anzahlen der Spitzenleistungen dieser zwei Klassen deutlich von denen der starken Spitze in D_1 und nur gering von der Anzahl der Lernenden an der Leistungsspitze in P_1. In den Klassen P_2 und D_2 können 9 bzw. 8 der Schülerlösungen mit Teilpunkten bewertet werden (vgl. Abb. 36 und Abb. 38). Das entspricht knapp 40 %. In der Klasse D_1 liegt der mit Punkten versehene Anteil bei knapp 60 % und in P_1 sind es sogar knapp 76 %. Die signifikanten Unterschiede zur Klasse P_1 können durch diesen geringen Anteile an Lösungen, die zu Punkten führen, begründet werden.

Es wird betrachtet, welche Lösungsansätze in den Klassen bevorzugt verwendet werden: In der Klasse D_2 führt der Lösungsansatz *B2) Zwei Sekanten* am häufigsten zu der Vergabe von Teilpunkten und wird mit knapp 23 % am häufigsten gewählt (vgl. Abb. 38). In der Klasse P_2 hingegen variiert die Wahl des Lösungsansatzes stärker. Der Ansatz B2) wird nur von einem Lernenden genutzt. Es verwenden zwei Lernende die Idee C), den Kreis als Inkreis eines Quadrates zu verwenden (vgl. Abb. 36 und Tab. 56). Die Lösungsansätze A) bis D) haben gemeinsam, dass eine Verwendung der Konstruktion der Mittelsenkrechten deutlich wird. Dies trifft man für 71,43 % der gewählten Ansätze in der Klasse P_1 zu. In der Klasse D_1 beträgt der Anteil

47,82 %. Es folgen D_2 mit 33,33 % und P_2 mit 27,27 %. Damit können auch die geringen Bearbeitungen in den Klassen P_2 und D_2 begründet werden; die Konstruktion der Mittelsenkrechten wird zur Lösung der Aufgabe von vielen Lernenden nicht angewendet.

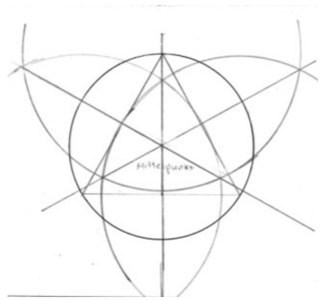


Abb. 39: Die Lösung von D125 in Test 2 zu Aufgabe 4 wird dem Ansatz A) zugeordnet und auch ohne weitere Worterklärungen mit 4 von 4 Punkten bewertet.

Klassenübergreifend können folgende Beobachtungen genannt werden: Die Abb. 35 bis Abb. 38 zeigen, dass der verwendete Lösungsansatz *A) Dreiecksumkreis* fast immer zum Erreichen der vollständigen Punkte führt (Ausnahme ist D220[16]). Erkennt eine Schülerin oder ein Schüler den gegebenen Kreis als Umkreis eines Dreiecks, gelingt es in der Regel den Mittelpunkt zu konstruieren und das Vorgehen ausreichend zu erklären. Ein Beispiel für eine vollständig richtig gelöste Abgabe ist in der Abb. 39 zusehen.

Der Lösungsansatz *B2) Zwei Sekanten* ist in allen Klassen verwendet worden (besonders häufig in den Klassen D_2 und P_1). Auffällig ist, dass nur ein Lernender (D231) die vollen Punkte für seine Lösung erhält. Dem Schüler D231 gelingt es sein Vorgehen passend zu begründen (vgl. Abb. 41). Bei diesem Ansatz werden zwei Mittelsenkrechten zu je zwei Strecken konstruiert und der Schnittpunkt wird als Kreismittelpunkt notiert. Häufig wird jedoch nicht erklärt, dass die gewählten Punkte, zu denen die Mittelsenkrechten konstruiert werden, auf dem Kreisbogen liegen müssen bzw. die Punkte liegen dort nicht. Häufig fehlt

[16] D220 fasst den Kreis als Inkreis eines Dreiecks auf und zeigt dann Ansätze der Mittelsenkrechtenkonstruktion. Diese Vorgehensweise wurde am ehesten dem Ansatz A) zugeordnet.

eine Begründung, warum dieses Vorgehen den Mittelpunkt liefert. Das führt dazu, dass nur Teilpunkte vergeben werden können. Der Ansatz B2) erfordert ein höheres Maß an Begründungen und Argumentationen als es beispielsweise beim Ansatz *A) Dreiecksumkreis* der Fall ist. Dies erklärt, warum bei dem gewählten Ansatz B2) in den meisten Fällen nicht 4 von 4 Punkten erreicht werden können. Eine Beispiellösung, bei der notwendige Begründungen fehlen und die daher mit 2 von 4 Punkten bewertet wird, ist in Abb. 40 zu sehen.
Mithilfe dieser Analyse können die Testergebnisse nun inhaltsbezogen ausgewertet und interpretiert werden. Das starke Mittelfeld der Klasse P_1 kann auf das Anwenden der Konstruktion der Mittelsenkrechten zurückgeführt werden. Dies geschieht mit ca. 71 % bei einem hohen Anteil der Lernenden dieser Klasse. Das Fehlen von Erklärungen beim häufig gewählten und tragfähigen Ansatz B2) führt zu der geringeren Leistungsspitze.
In der Klasse D_1 wählen den Ansatz B2) knapp halb so viele Schülerinnen und Schüler wie in P_1. Die Leistungsspitze wird

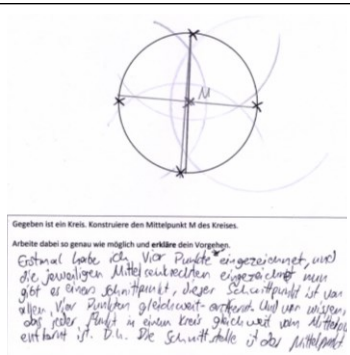


Abb. 41: Die Lösung von D231 in Test 2 zu Aufgabe 4 wird dem Ansatz B2) zugeordnet und mit 4 von 4 Punkten bewertet.

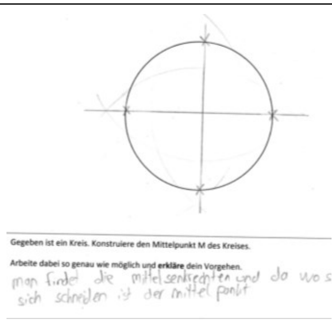


Abb. 40: Die Lösung von P127 in Test 2 zu Aufgabe 4 wird dem Ansatz B2) zugeordnet und mit 2 von 4 Punkten aufgrund fehlender Erklärungen bewertet.

durch ein Viertel der Lernenden dominiert, die das einbeschriebene Dreieck als Lösungsidee nutzen. In keiner anderen Klasse wird dieser Lösungsweg so häufig gewählt. Gleichzeitig erkennen viele Schülerinnen und Schüler den Zusammenhang zur Mittelsenkrechten nicht und versuchen stattdessen durch Abmessen oder Probieren zu einer Lösung zu kommen (43,82 %). Das führt zu einer großen Spannweite der Datenwerte mit vielen sehr guten und sehr vielen sehr schwachen Leistungen.

Die geringen Punktzahlen der Klassen D_2 und P_2 sind in beiden Fällen darauf zurückzuführen, dass sehr viele Schülerinnen und Schüler die Verwendungsmöglichkeit der Mittelsenkrechten bei dieser Aufgabe nicht erkennen. Nur bei knapp 30 % der Lernenden wird die Konstruktion der Mittelsenkrechten im Lösungsweg erkannt. Ein entsprechend großer Anteil an Lernenden greift auf ungenauere Lösungsansätze zurück. Diese Anteile sind in den leistungsstärkeren Klassen P_1 und D_1 fast umgekehrt.

Der Ansatz *C) Quadratinkreis* kann ebenfalls zu einer vollständigen Argumentation führen. Einzelne Schülerinnen bzw. Schüler verwenden den Ansatz. Das Lösungsbeispiel in Abb. 42 zeigt, welche Überlegungen der Lernende hier angestellt hat. Die Worterklärungen beschreiben sei Vorgehen. Eine Begründung fehlt.

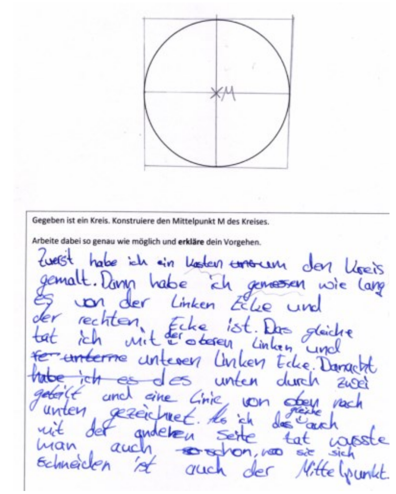


Abb. 42: Die Lösung von P112 in Test 2 zu Aufgabe 4 wird dem Ansatz C) zugeordnet und aufgrund fehlender Begründungen und Erklärungen mit 1,5 von 4 Punkten bewertet.

V) Zusammenfassung zu Test 2-Aufgabe 4

Die Aufgabe hat eine besonders hohe Bearbeitungsquote und wird von 86 der 87 Lernenden bearbeitet. Die Klasse P_1 weist mit signifikant besseren Leistungen als die Klassen P_2 und D_2 die besten durchschnittlichen Leistungen auf. Sie sind vergleichbar mit den Leistungen aus der Anwendungsaufgabe 2a). Die hohen durchschnittlichen Leistungen beruhen auf einer großen Anzahl an Lernenden, die mit dem Ansatz *B2) Zwei Sekanten* einen sinnvollen Einsatz der Konstruktion der Mittelsenkrechten herstellen können. Die Begründungen sind häufig zu schwach, so dass dieses breite Mittelfeld die mittleren signifikanten Unterschiede zu den Klassen P_2 und D_2 erklärt.
Die Klasse D_1 weist ein vergleichbares arithmetisches Mittel wie die Klasse P_1 auf. Im Gegensatz zu P_1 gibt es in der Klasse D_1 kaum ein Leistungsmittelfeld. Die Daten streuen extrem. Es gibt sehr viele sehr gut und sehr viele sehr schwach Leistungen gibt. In der Klasse D_1 kann mit einem Viertel ein sehr hoher Anteil der Lernenden den Ansatz A) gelungen verwenden. Gleichzeitig erzielen knapp 40 % der Lernenden gar keine Punkte. Diese hohen Ansammlungen an Minima und Maxima sorgen für die große Streuung innerhalb der Klasse D_1.
Die Leistungen der Klassen P_2 und D_2 sind sowohl im Durchschnitt als auch in ihrer Verteilung vergleichbar. Der Einsatz der Mittelsenkrechten gelingt sehr wenigen Schülerinnen und Schülern. In der Klasse D_2 ist der Lösungsansatz B2) unter den Bearbeitungen, die zu Punkten führen, der häufigste. In der Klasse P_1 variieren die verwendeten Lösungsansätze stärker.
In allen Klassen wird der Lösungsansatz A) verwendet und führt zu einer 4-von-4-Punkte-Bewertung.

12.3.6 Ergebnisse zu Test 2 – Aufgabe 5 Brunnenaufgabe mit verändertem Kontext

I) Einordnung

Aufgabe 5 ist eine Variation der Brunnenaufgabe. Es wird prozedurales und konzeptuelles Wissen benötigt. Für die darbietend unterrichteten Klassen ist die Aufgabe unbekannt und stellt damit einen weiten Transfer dar. Für die problemorientiert unterrichteten Klassen ist es ein naher Transfer, da ihnen die Aufgabenstellung bekannt ist. Es ist mit besser Leitungen der Klassen P_1 und P_2 zu rechnen.

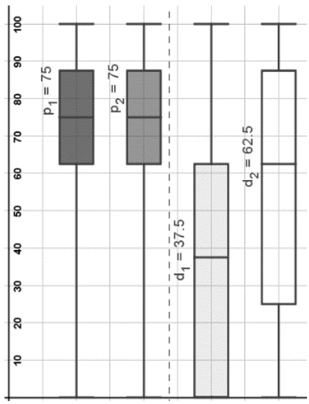


Abb. 43: Klassenweise Ergebnisse der Aufgabe 5 (Brunnenvariation) in Test 2.

II) Ergebnisdarstellung

Die Boxplots der problemorientierten Klassen sind identisch (vgl. Abb. 43). In den Klassen P_1 und P_2 werden sehr ähnliche Leistungen erbracht. Der Median liegt mit 75 % ebenso hoch wie in der Reproduktionsaufgabe 1. Auch das untere Quartil von 62,5 % zeigt die starken Leistungen der beiden Klassen. P_2 hat das höchste arithmetische Mittel von $\bar{p}_2 \approx 70\ \%$, es folgt $\bar{p}_1 \approx 68$ % und $\bar{d}_2 \approx 54$ %. Die Klasse D_1 erreicht im arithmetischen Mittel mit $\bar{d}_1 \approx 35$ % durchschnittlich die Hälfte der Punkte der problemorientierten Klassen. Die Standardabweichung ist für die Klasse D_1 am größten, damit ist die Verteilung der Werte um den Mittelwert besonders groß (vgl. Tab. 58).

Test 2, Aufgabe 5 Angaben in %	Problemorientierter Unterricht		Darbietender Unterricht	
	P_1	P_2	D_1	D_2
Arithmetisches Mittel	67,86	70,45	34,78	53,57
Standardabweichung	30,02	27,06	37,04	30,65
Maximum	100,00	100,00	100,00	100,00
Oberes Quartil	87,50	87,50	62,50	87,50
Median	75,00	75,00	37,50	62,50
Unteres Quartil	62,50	62,50	0,00	25,00
Minimum	0,00	0,00	0,00	0,00

Tab. 58: Stat. Kenngrößen der Ergebnisse zur Brunnenaufgabe in Test 2

III) Ergebniseinordnung

Der Kruskal-Wallis-Test bestätigt: es liegen signifikante Unterschiede vor. Der H-Wert beträgt 12,55 > 7,81 für df = 3 und α = 0,05 (vgl. Tab. 57).

Problemorientierter Unterricht		Darbietender Unterricht	
P_1	P_2	D_1	D_2
52,00	53,80	30,30	40,70
α = 0,05 Signifikanzniveau	df = k-1=3 Freiheitsgrad	p = 0,0057 Irrtumswahrscheinlichkeit	
H = 12,55 > 7,81= χ^2_3 Es liegt ein **signifikanter Unterschied** vor. H_0 wird verworfen: Es gibt signifikanten Unterschiede zwischen mindestens zwei der Klassen.			

Tab. 57: Ergebnisse der Kruskal-Wallis-Tests zur Brunnenaufgabe in Test 2.

Der anschließende Mann-Whitney-Test konkretisiert: Die signifikanten Unterschiede treten zwischen den Klassen P_1 & D_1 und P_2 & D_1 auf. Beide Effektstärken werden als mittel eingeordnet (vgl. Tab. 59).

Um diese Unterschiede besser beschreiben zu können, werden die Schülerlösungen anhand des Bewertungshorizontes und der Punkteverteilung betrachtet. Die Bewertung der Aufgabe glie-

	P_1	P_2	D_1
P_2	0,21	--	--
D_1	-2,60 / 0,3920	-2,99 / 0,4457	--
D_2	0,01	1,82	-1,67
Es gibt mittlere signifikante Unterschiede zwischen P_1 & D_1 und zwischen P_2 & D_1.			
Für $z \in [-1{,}96; 1{,}96]$ wird H_0 beibehalten; andernfalls verworfen. Signifikante Ergebnisse sind farbig unterlegt und erhalten zusätzlich einen Wert für die Effektstärke nach Cohen (1988): Für $0{,}1 \leq r < 0{,}3$ wird der Effekt als schwach bezeichnet, für $0{,}3 \leq r < 0{,}5$ als mittel und für $r \geq 0{,}5$ als stark.			

Tab. 59: Ergebnisse der Mann-Whitney-Tests. Die z-Werte geben die Effektstärke für Test 2, Aufgabe 5 an.

dert sich in die folgenden vier Bewertungsaspekte: 1) Die Mittelsenkrechte wird bei der Lösung verwendet, 2) Die Mittelsenkrechten zu den Punkten werden eingezeichnet, 3) Die Grenzen zu den Gebieten werden markiert, 4) Das Vorgehen wird erklärt.

IV) Ergebnisdetails

Für den ersten Bewertungsaspekt zeigt sich, dass mit ca. 81 % der Schülerinnen und Schüler der Klasse D_2 ein hoher Anteil der Klasse die Mittelsenkrechte im Lösungsansatz verwendet, das sind 17 von 21 Lernenden. Dieser Anteil nähert sich den Anteilen aus den problemorientierten Klassen. In der Klasse P_1 verwenden 18 von 21 der Schülerinnen und Schüler die Mittelsenkrechte bei ihren Lösungsansätzen (das sind ca. 86 %). In der Klasse P_2 sind es mit 20 von 22 Lernenden ca. 90 %. In der Klasse D_1 hingegen wird die Mittelsenkrechte in 57 % der Lösungen verwendet. Das entspricht 13 von 23 Lernenden. Dies kann bereits das gute Abschneiden der Klasse D_2 erklären.

Ein ähnliches Bild zeigt sich beim Bewertungsaspekt 2): So zeichnen in der Klasse P_1 15 von 21, also 71 %, der Schülerinnen und Schüler alle Mittelsenkrechten korrekt ein. Dieser Anteil beträgt für P_2 mit 11 von 22 genau 50 % und ist in der Klasse D_2 (10 von 21) vergleichbar hoch. In der Klasse D_1 gelingt dies mit 4 Lernenden etwa 17 %.

Bei den ersten beiden Bewertungsaspekten gelingt es den Lernenden aus der Klasse D_2 vergleichbare Leistungen zu den problemorientiert unterrichteten Lernenden aufzuzeigen. Den Lernenden der Klasse D_1 gelingt dies nicht.

Mit dem dritten Bewertungsaspekt wird das richtige Einzeichnen der Grenzen bewertet. In der Klasse P_1 gelingt dies 13 von 21 Lernenden (62 %) fehlerfrei. In der Klasse P_2 sind dies etwas mehr als die Hälfte (12 von 22 Lernenden). In den beiden darbietend unterrichteten Klassen liegt dieser Anteil bei ca. 25 %. Es lösen 6 von 23 Lernenden in der Klasse D_1 und 5 von 21 Lernenden in der Klasse D_2 die Aufgabe vollständig richtig.

Test 2, Aufgabe 5	P_1	P_2	D_1	D_2
Keine Erklärung	5	1	10	3
unpassende Erklärung (0 von 1 Punkt)	2	4	4	3
Teilweise richtige Erklärung (0,5 von 1 Punkt)	12	12	5	13
Vollständige Erklärung (1 von 1 Punkt)	2	5	4	2
Anteil an Erklärungsansätzen	16 von 21 (76 %)	21 von 22 (95 %)	13 von 23 (57 %)	18 von 21 (86 %)

Tab. 60: Angaben einer Erklärung zur Brunnenaufgabe in Test 2. Es wird anhand der vergebene Punkte in keine, unpassende, teilweise richtige und vollständig richtige Erklärung unterschieden.

Bei der Bewertung der Erklärungen kann die Klasse D_2 mit den problemorientiert unterrichteten Klassen mithalten: Relativ viele Schülerinnen und Schüler der Klasse D_2 geben einen Erklärungsversuch ab (86 %). Damit liegt der Anteil zwischen den beiden problemorientiert unterrichteten Klassen und deutlich höher als in der Klasse D_1. Auch der Anteil der richtigen und teilweise richtigen Erklärungen (0,5 bis 1 Punkt) ist mit denen der problemorientierten Klassen vergleichbar. 4 Schülerinnen und Schüler der Klasse D_1 geben vollständig richtige Erklärungen abgeben. In der Klasse P_2 sind es fünf und in den Klassen P_1 und D_2 sind es 2 Lernende (vgl. Tab. 60).

V) Zusammenfassung zu Test 2 – Aufgabe 5

Die problemorientierten Klassen können ihr Wissen zur Brunnenvariation erfolgreich wiedergeben und erreichen durchschnittlich ebenso hohe Leistungen wie in Aufgabe 1, die als Reproduktionsaufgabe von Faktenwissen eingestuft werden kann. Es gibt signifikant bessere Leistungen der Klassen P_1 und P_2 zu der Klasse D_1. Diese werden als mittel stark eingestuft. Als unerwartet hoch werden die starken Leistungen der Klasse D_2 erfasst. Beim Verwenden und richtigen Einzeichnen der Mittelsenkrechten sowie bei den Erklärungen ihres Tuns sind die Leistungen sehr ähnlich zu denen in den problemorientierten Klassen. Unterschiede zeigen sich beim Einzeichnen der Grenzen. Dies gelingt etwa ein Drittel der Lernenden aus D_2 und im Vergleich dazu knapp 2/3 der Lernenden aus P_1 und P_2. In der Klasse D_1 geben mit 4 von 23 Lernenden vergleichsweise viele Kinder eine vollständig richtige Erklärung ab. Zum Vergleich: In den Klassen P_1 und D_1 sind es zwei Lernende und in P_2 sind es 5 Lernende.

12.4 Ergebnisse der Detailanalyse zu den langfristigen Lernleistungen in Test 3 (F2.3.2)

Die Ergebnisse der Tests wurden bisher zusammenfassend ausgewertet und hinsichtlich einer generellen Machbarkeit diskutiert (vgl. Abschnitte 10 und 13). An dieser Stelle folgt eine Detailanalyse, bei der die Ergebnisse jeder Testaufgabe analysiert werden, um somit die Forschungsfrage 2.3 nach der Vergleichbarkeit der Lernleistungen in den verschiedenen Wissensbereichen im direkten Anschluss an den Unterricht zu erfassen. Dies erfolgt in fünf Schritten:

Wie bereits für die Ergebnisse zu Test 2 geschehen, sollen die Testergebnisse aus Test 3 detaillierter analysiert werden. Es werden auch hier die fünf Schritte aus Abschnitt 12.3 angewendet, dabei sind zwei folgende Überlegungen zu ergänzen:

I) ***Einordnung**:* Bei den Auswertungen zu Test 3 werden die Kernergebnisse aus Test 2 als Ausgangslage der Analyse zusammengefasst, umso auch die Leistungsentwicklung einbeziehen zu können.

II) ***Ergebnisdarstellung***: Die Ergebnisse aus Test 3 werden beschrieben und die Klassen untereinander verglichen. Zusätzlich werden im Vergleiche zu den Ergebnissen aus Test 2 vorgenommen.

Die Schritte III) bis V) aus Abschnitt 12.3 werden entsprechend übernommen.

Interessant sind die Vergleiche zwischen den Lernleistungen der problemorientiert und der darbietend unterrichteten Klassen. Ein vermuteter Vorteil des entdeckenlassenden Lehrens soll darin liegen, dass die Lerninhalte besser behalten werden können (vgl. 3.3). Die Ergebnisse von Test 2 zeigen, in welchem Maße Lernleistungen zur Mittelsenkrechte erbracht werden könne. Jetzt liegt der Fokus auf dem längerfristigen Aufbau von Wissenselementen.

12.4.1 Ergebnisse zu Test 3 – Aufgabe 1 Definition und Konstruktion der Mittelsenkrechten

I) Einordnung

Bei der Reproduktionsaufgabe zur Mittelsenkrechten in Test 2 zeigten die vier Klassen sehr vergleichbare Leistungen mit einem arithmetischen Mittel von 75 % in allen Klassen.

II) Ergebnisdarstellung

In Test 3 zeigen die Boxplots der Klassen P_1, D_1 und D_2 einige Gemeinsamkeiten auf: Der Maximalwert liegt bei 87,50 %, der Minimalwert bei 0 % (vgl. Abb. 44). Die höchsten Mittelwerte erreicht die Klasse D_1 mit einem arithmetischen Mittel von $\bar{d}_1 \approx 60\ \%$ und einem Median von $\tilde{d}_1 = 75\%$. Dieser entspricht dem Median aus Test 2. Die Klassen P_1 und D_2 folgen mit sich ähnlichen Durchschnittswerten - Median: $\tilde{p}_1 = \tilde{d}_2 = 62{,}50\ \%$ und arithmetisches Mittel: $\bar{p}_1 \approx \bar{d}_2 \approx 54\ \%$ (vgl. Tab. 61). Die Leistungstendenzen in Test 3 sind für die drei Klassen P_1, D_1 und D_2 sehr ähnlich.

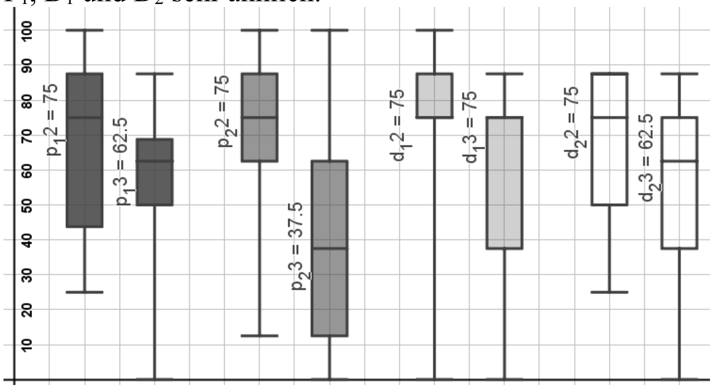


Abb. 44: Klassenweise Ergebnisse zur Aufgabe 1 in Test 2 und 3.

In allen vier Klassen ist die durchschnittliche Leistung vom Testzeitpunkt 2 zum Testzeitpunkt 3 gesunken. Die Klasse P_2 hat einen etwas stärkeren Leistungsabfall als die anderen drei. Der Median hat mit p_2=37,5 % einen knapp halb so hohen Wert wie der entsprechende Wert in den anderen drei Klassen. Gleichzeitig kann nur hier der Maximalwert von 100 % erneut erreicht werden (vgl. Abb. 44).

Test 3, Aufgabe 1 Angaben in %	*Problemorientierter Unterricht*		*Darbietender Unterricht*	
	P_1	P_2	D_1	D_2
Arithmetisches Mittel	53,57	39,77	60,33	54,17
Standardabweichung	21,53	29,59	25,44	29,17
Maximum	87,50	100,00	87,50	87,50
Oberes Quartil	68,75	62,50	75,00	75,00
Median	62,50	37,50	75,00	62,50
Unteres Quartil	50,00	12,50	37,50	37,50
Minimum	0,00	0,00	0,00	0,00

Tab. 61: Stat. Kenngrößen zu Test 3, Aufgabe 1.

III) Ergebniseinordnung

Insgesamt werden die Unterschiede als nicht signifikant bewertet. Der Kruskal-Wallis-Test zeigt dies mit H=6,69 < 7,81 ; df = 3 und α = 0,05 (vgl. Tab. 62).

Problemorientierter Unterricht		*Darbietender Unterricht*	
P_1	P_2	D_1	D_2
43,90	33,10	52,10	46,70
α = 0,05 Signifikanzniveau	df = k-1=3 Freiheitsgrad	p = 0,0825 Irrtumswahrscheinlichkeit	
H = 6,69 < 7,81= χ^2_3 Es liegt **kein signifikanter Unterschied** vor. H_0 wird beibehalten: Es gibt keine signifikanten Unterschiede zwischen den Klassen P_1, P_2, D_1 und D_2.			

Tab. 62: Ergebnisse der Kruskal-Wallis-Tests in Test 3, Aufgabe 1.

VI) Ergebnisdetails

Es werden die Bepunktungen für die einzelnen Bewertungskategorien betrachtet. Zunächst im Vergleich zu den Analysen aus Test 2 für die drei Teilaufgaben a), b) und c):

a) Zur Teilaufgabe a) Definition der Mittelsenkrechten: Die Klasse P_1 hat in Test 2 deutlich geringere Mittelwerte für das Nennen der Definition erhalten. In Test 3 fallen die Leistungen für die Definition in allen vier Klassen leicht ab. Am geringsten fallen sie für die Schülerinnen und Schüler der Klasse P_1, so dass die Unterschiede aus Test 2 zu den anderen Klassen nicht mehr zu erkennen sind. Die Klasse D_1 erreicht die höchsten durchschnittlichen Leistungen mit knapp 59 %. Es folgen P_1 (49 %) und D_2 (46 %). Die Klasse P_2 schließt sich mit 39 % an.

   Betrachtet man nun die anteilige Veränderung von Test 2 zu Test 3, in dem man den Quotienten der Prozentwerte aus Test 2 uns Test 3 bildet zeigen sich folgendes Bild:

	T3/T2
P_1	49,21/58,73 = 83,79
P_2	39,39/75,75 = 52,00
D_1	59,42/82,61 = 71,93
D_2	46,03/85,71 = 53,70

   Tab. 63: Anteilige Wiedergabe des Wissens aus Test 2 in Test 3 zur Aufgabe 1

   Die Klassen P_1 und D_1 können über 80 % bzw. 70 % des Wissens über die Mittelsenkrechtendefinition aus Test 2 auch in Test 3 wieder abrufen. Die Klassen P_2 und D_2 erreichen über 50 % des gezeigten Wissens (vgl. Tab. 63).

b) Zur Teilaufgabe b) Konstruktion der Mittelsenkrechten: Die darbietend unterrichteten Klassen erreichen bei der Konstruktion der Mittelsenkrechten durchschnittlich fast genauso viele Punkte wie in Test 2, das sind etwa 75 %. Auch die Klasse P_1 liegt mit ca. 70 % ganz knapp unter ihrem Durchschnittswert aus Test 2. Die Leistungen der Klasse P_2 fallen etwas stärker ab: Von knapp 80 % aus Test 2 auf 60 % in Test 3.

c) Zur Teilaufgabe c) weitere Punkteigenschaften: Zunächst zur Nennung der Punkteigenschaft
Die Klasse P_2 ist die einzige Klasse, in der die durchschnittliche Leistung deutlich schwächer wird. Von über 80 % der Punkte in Test 2 können in Test 3 durchschnittlich nur 36 % der Punkte erreicht werden. Damit gelingt es nur wenigen Schülerinnen und Schülern Eigenschaften für die Punkte auf der Mittelsenkrechten zu benennen. In den drei anderen Klassen fallen die Werte nur leicht für P_1 und D_1 bzw. bleiben konstant für D_2 und es werden arithmetische Mittel über 70 % erreicht. Dies erklärt den deutlichen Leistungsabfall der Klasse P_2 in der Gesamtauswertung der Aufgabe 1.
Bei der Erklärung der Punkteigenschaft wird der Trend aus Test 2 fortgesetzt. Es werden kaum Erklärungen abgegeben. Die Abgaben liegen zwischen zwei und vier in den vier Klassen. Lediglich eine Schülerin oder ein Schüler der Klasse P_1 und eine bzw. einer der Klasse D_2 erhält Teilpunkte für die Erklärung. Alle anderen Lernenden erhalten keine Punkte.

Betrachtet man die Ergebnisse personenweise, kann man feststellen, dass der allgemeine Trend eines Leistungsabfalls in der Regel auch bei den einzelnen Leistungen wiederzufinden ist. Es gibt in allen vier Klassen nur sehr wenige Lernende, die in Test 3 in der Aufgabe 1 eine bessere Leistung zeigen als in

Test 2. Diese Ergebnisse entsprechen den Erwartungen und Erfahrungen zu Lernprozessen (vgl. Abschnitt 3.2).

V) Zusammenfassung zu Test 3 – Aufgabe 1

In allen vier Klassen kann ein Leistungsabfall von Test 2 zu Test 3 beobachtet werden. Dieser Leistungsabfall kann in der Regel auch bei den einzelnen Schülerleistungen wiedergefunden werden. Der Leistungsabfall ist in der Klasse P_2 mit einem arithmetischen Mittel von 39,77 % in Test 3 am größten. Die anderen drei Klassen erreichen Durchschnittswerte zwischen 53 % und 61 %. Die Leistungsunterschiede sind nicht signifikant. Der deutliche Leistungsabfall der Klasse P_2 kommt durch besonders schwache Leistungen bei der Teilaufgabe c) zustande. Nur 36 % der Lernenden können Punkten auf Mittelsenkrechten weitere Eigenschaften zuschreiben. In den anderen drei Klassen können dies durchschnittlich doppelt so viele Lernenden.

12.4.2 Ergebnisse zu Test 3 – Aufgabe 2a Innermathematische Anwendung der Mittelsenkrechten

I) Einordnung

Diese Aufgabe erfordert einen nahen Transfer der Mittelsenkrechten in eine innermathematische Anwendung. In Test 2 wurden vergleichbare Leistungen von durchschnittlich 55 % bis 65 % in allen vier Klassen erreicht. In der Klasse D_2 fielen der geringe Anteil an sehr guten Leistungen auf. Dies lag an einer schwächeren Leistung der Schülerinnen und Schüler aus der Klasse D_2 im Bereich der Interpretation des nicht zustande kommenden Schnittpunktes zwischen Kreis und Mittelsenkrechter. In Test 3 ist die Aufgabenstellung leicht abgewandelt, so dass eine alternative Interpretation vorgenommen werden muss. Es werden Mittelsenkrechte und Parallele betrachtet und auch dabei gibt es keinen gesuchten Schnittpunkt (vgl. *Aufgabe 2./3.2 – Ein Punkt P ist gesucht* in Abschnitt 9.1.4.3).

II) Ergebnisdarstellung

Die Boxplots zeigen einen ähnlichen Trend in allen vier Klassen von Test 2 zu Test 3: Die Daten streuen stärker als in Test 2. Es gibt in allen vier Klassen sowohl mehr sehr gute als auch mehr sehr schwache Leistungen(vgl. Abb. 45).

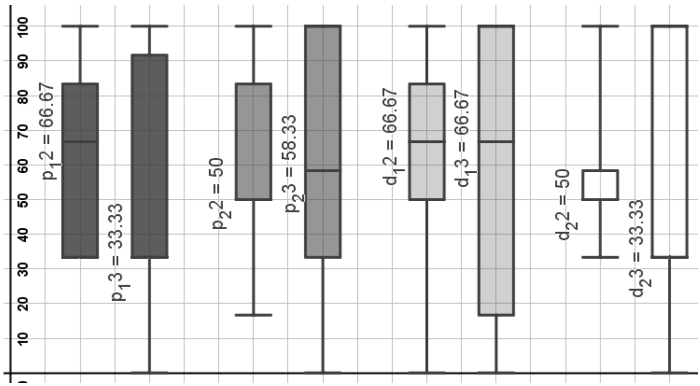


Abb. 45:Klassenweise Ergebnisse zur Aufgabe 2a) in Test 2 und 3.

In den Klassen P_2, D_1 und D_2 erreichen mindestens 25 % der Lernenden 100 % der Punkte (vgl. Abb. 45). Das bedeutet insbesondere für die Klasse D_2 einen enormen Zuwachs in der Leistungssteigerung im Vergleich zu Test 2. Die Verbesserung des oberen Viertels fällt in der Klasse P_1 etwas geringer aus. Das untere Quartil verschiebt sich in allen vier Klassen deutlich nach unten. Die Klasse D_1 hat trotz des höheren Medians von $\tilde{d}_1 = 66,\overline{66}$ % $(= \tilde{p}_2)$ einen Anteil von 25 % der Lernenden, die keine 20 % der Punkte erhalten. Die Minima von P_1 und D_2 fallen von 33 % aus Test 2 auf 0 % in Test 3. Beide Klassen erreichen mit $\tilde{p}_1 = \tilde{d}_2 = 33,\overline{33}$ % einen deutlich geringeren Median als in Test 2 und auch als die Klassen P_2 und D_1 in Test 3 (vgl. Abb. 45). Die arithmetischen Mittel der vier

Klassen liegen hingegen relativ nah beieinander: zwischen $\bar{p}_1 \approx$ 51 % und $\bar{d}_1 \approx$ 59 % und auch nur leicht unter den Mittelwerten aus Test 2 (vgl. Tab. 45 und Tab. 64). Das zeigt wie linkssteil die Daten der Klassen P_1 und D_2 verteilt sind. Die Standardabweichungen reichen von s = 31,27 bei P_2 bis zu s = 38,95 bei D_2 und bestätigen die stärkere Streuung der Daten um den Mittelwert (vgl. Tab. 64). Ein reiner Vergleich der Mediane scheint hier daher besonders trügerisch.

Test 3, Aufgabe 2a Angaben in %	*Problemorientierter Unterricht*		*Darbietender Unterricht*	
	P_1	P_2	D_1	D_2
Arithmetisches Mittel	50,79	57,58	59,42	55,56
Standardabweichung	33,91	31,27	37,70	38,95
Maximum	100,00	100,00	100,00	100,00
Oberes Quartil	91,67	100,00	100,00	100,00
Median	33,33	58,33	66,67	33,33
Unteres Quartil	33,33	33,33	16,67	33,33
Minimum	0,00	0,00	0,00	0,00

Tab. 64: Stat. Kenngrößen zu Test 3, Aufgabe 2a)

III) Ergebniseinordnung

Mit dem Kruskal-Wallis-Test kann gezeigt werden, dass keine signifikanten Unterschiede zwischen den vier Klassen in Test 3 vorliegen (vgl. Tab. 65).

Problemorientierter Unterricht		*Darbietender Unterricht*	
P_1	P_2	D_1	D_2
40,50	45,50	45,80	44,00
$\alpha = 0{,}05$ Signifikanzniveau	df = k-1=3 Freiheitsgrad	p = 0,8964 Irrtumswahrscheinlichkeit	
$H = 0{,}6 < 7{,}81 = \chi^2_3$			
Es liegt **kein signifikanter Unterschied** vor. H_0 wird beibehalten: Es gibt keine signifikanten Unterschiede zwischen den Klassen P_1, P_2, D_1 und D_2.			

Tab. 65: Ergebnisse der Mann-Whitney-Tests. Die z-Werte geben die Effektstärke für Test 3, Aufgabe 2a an.

VI) *Ergebnisdetails*

Es werden die drei Bewertungskategorien betrachtet:

1) Verwendung der Mittelsenkrechten: In allen Klassen wird die Mittelsenkrechte in vergleichbaren Anteilen richtig eingezeichnet. Am häufigsten können Lernende der Klassen D_2 und P_2 die Mittelsenkrechte einzeichnen (knapp 75 %). In der Klasse D_1 und P_1 gelingt dies knapp 70 %. Damit verringert sich die Leistung in allen vier Klassen im Vergleich zu Test 2, in diesem lag der durchschnittliche Wert aller vier Klassen bei 86 %.
2) Die Verwendung des zweiten Argumentes, der Punkt P liegt auf der Geraden g: Dieses Argument wird in den Klassen P_1 und D_2 deutlich weniger häufig genannt (knapp 48 %) als in den anderen beiden Klassen, in D_1 mit 61 % und in P_2 mit 66 %. Damit verbessern sich diese beiden Klassen im Vergleich zu Test 2. In allen Klassen waren durchschnittlich 50 % aller Abgaben korrekt.
3) Interpretation der Lage von Gerade und Mittelsenkrechte zueinander: Die Interpretation des nicht existierenden Schnittpunkts gelingt in den problemorientiert unterrichteten Klassen etwa 33 % der Lernenden und in den darbietend unterrichteten Klassen sind es etwas mehr mit über 43 %. Vergleicht man die Werte zu den Ergebnissen aus Test 2 stellt man fest, dass die Klassen P_1, P_2 und D_2 ihre Leistungen etwa halten können und die Klasse D_2 ihre Leistungen mehr als verdoppelt.

Werden die Leistungen zusätzlich schülerweise betrachtet, kann man feststellen, dass die Entwicklungen von Test 2 zu Test 3 weniger einheitlich verlaufen als bei Aufgabe 1. Es gibt in jeder der vier Klassen etwa zehn Lernende, die Ihre Leistung im Vergleich zu Test 2 verschlechtern. In den Klassen P_2, D_1 und D_2 gibt es knapp ebenso viele, die ihre Leistung verbessern. In der Klasse P_1 können nur vier Lernende bessere Ergebnisse erzielen. Die einzelnen Lernenden zeigen in Test 2 und in Test 3 häufiger unterschiedliche Leistungen. Damit unterscheiden sich die Entwicklungen von Test 2 zu Test 3 von den Entwicklungen in der Aufgabe 1. Es war stärker ein allgemeiner Trend zu etwas schwächeren Leistungen auszumachen.

V) Zusammenfassung zu Test 3 – Aufgabe 2a

Das arithmetische Mittel gibt für jede Klasse einen Wert zwischen 50 % und 60 % an. Es können keine signifikanten Unterschiede erkannt werden. Die Klassen zeigen vergleichbare Leistungen bei einer innermathematischen Anwendungsaufgabe, die u. a. die Verwendung der Mittelsenkrechten erfordert. Der Leistungsabfall von Test 2 zu Test 3 ist hier klassenweise relativ gering. Die Mittelwerte in Test 2 lagen zwischen 55 % und 65 %.
Die Detailanalyse zeigt: Die Streuung der Daten ist deutlich größer als in Test 2. Für die Klassen P_1 und D_2 liegen sehr linkssteile Verteilungen vor. Die Entwicklungen von Test 2 zu Test 3 sind bei den Schülerinnen und Schülern sehr unterschiedlich. Es können etwa 40 % der Lernenden ihre Leistungen verbessern und ebenso viele verschlechtern ihre Leistungen.

12.4.3 Ergebnisse zu Test 3 – Aufgabe 2b Fallunterscheidung

I) Einordnung

Diese Aufgabe wird mit einem Punkt bewertet, daher sind stärkere Schwankungen zu erwarten. Um ein Bild der Leistung zu bekommen, erfolgt eine kurze Auswertung anhand der Punkte.

II) Ergebnisdarstellung

Im Median erhalten alle vier Klassen 0 Punkte. Das arithmetische Mittel ist für die Klasse D_1 am höchsten mit $\bar{d}_1 \approx 21{,}74\,\%$, es folgen D_2 mit $\bar{d}_2 \approx 19{,}05\,\%$ und P_2 mit

$\bar{p}_2 \approx$ 15,91 %. Das geringste arithmetische Mittel weist P_1 auf mit $\bar{p}_1 = 11{,}90\ \%$ (vgl. Tab. 66). Die Boxplots für P_2, D_1 und D_2 sehen gleich aus (vgl. Abb. 46).

In der Klasse P_1 erreicht ein Schüler 100 % der Punkte. In den Klassen P_2, D_1 und D_2 kann fast die Hälfte der Schüler die Aufgabe zu 50 % lösen. Das sind in der Klasse P_2 7 Schülerinnen und Schüler (32 %), in der Klasse D_1 sind es 10 Schülerinnen und Schüler (43 %) und in D_2 sind es 8 Schülerinnen und Schüler (38 %). In der Klasse P_1 geben im Vergleich nur sehr wenige Lernende einen Lösungsversuch ab. Es sind 3 Lernende, die 0,5 Punkte erreichen (vgl. Tab. 67).

Es wird nun die Entwicklung von Test 2 zu Test 3 betrachtet: Die Klasse P_1 wird schwächer. Das Maximum von 100 % kann gehalten werden, jedoch erreichen mindestens 75 % der Schülerinnen und Schüler 0 %. Die Klasse P_2 zeigt kaum Veränderungen von Test 2 zu Test 3. Die Klasse D_1 kann das Maximum von 100 % aus Test 2 nicht erneut aufzeigen. Es können aber deutlich mehr Schülerinnen und Schüler die Aufgabe zu 50 % lösen. Die Klasse D_2 zeigt in Test 3 durchschnittlich etwas bessere Leistungen. Es erzielen mindestens 25 % der Lernenden 0,5 Punkte. Das Maximum von 1 Punkt kann nicht erreicht werden (vgl. Tab. 66). Auffällig ist das veränderte Lösungsverhalten: Haben in Test 2 86 % der Lernenden einen Lösungsversuch abgegeben, so sind es in Test 3 nur noch 52 %. In Test 3 geben dreimal so viel Schülerinnen und Schüler keinen Lösungsversuch im Vergleich zu Test 2. Für die Klassen P_2 und D_1 ist eine entgegengesetzte Entwicklung zu sehen: die Anteile der Lösungsversuche von Test 2 zu Test 3erhöhen sich auf etwas über 50 % (vgl. Tab. 66).

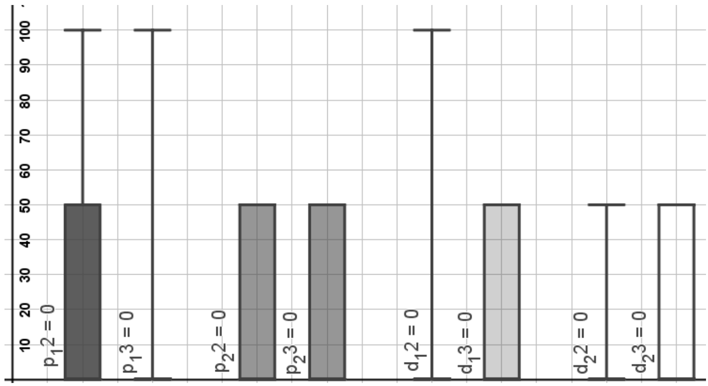


Abb. 46: Ergebnisse zur Aufgabe 2b) in Test 2 und 3 mit Medianen.

Test 3, Aufgabe 2b Angabe in	*Problemorientierter Unterricht*		*Darbietender Unterricht*	
	P_1	P_2	D_1	D_2
Arithmetisches Mittel	11,90	15,91	21,74	19,05
Standardabweichung	26,30	23,29	24,79	24,28
Maximum	100,00	50,00	50,00	50,00
Oberes Quartil	0,00	50,00	50,00	50,00
Median	0,00	0,00	0,00	0,00
Unteres Quartil	0,00	0,00	0,00	0,00
Minimum	0,00	0,00	0,00	0,00

Tab. 66: Stat. Kenngrößen der Ergebnisse zu Test 3, Aufgabe 2b.

	P_1 (T2/T3)	P_2 (T2/T3)	D_1 (T2/T3)	D_2 (T2/T3)
kein Argumenationsansatz	13/14	15/10	16/10	3/10
Unpassende Argumentation (0 von 1 Punkt)	2/3	0/5	1/3	15/3
Teilweise richtige Argumentation (0,5 von 1 Punkt)	3/3	7/7	5/10	3/8
Vollständige Argumentation (1 von 1 Punkt)	3/1	0/0	1/0	0/0
Anteile der Bearbeitungen	38 % / 33 %	32 % / 55 %	30 % / 57 %	86 % / 52 %

Tab. 67: Anzahl der Schülerinnen und Schülern, die in Test 2 bzw. Test 3 keinen, einen unpassenden, einen teilweise richtigen oder einen vollständig richtigen Argumentationsansatz angeben.

III) Ergebniseinordnung

Der Kruskal-Wallis-Test bestätigt, dass es gibt keine signifikanten Unterschiede (H=1,81 < 7,81, df = 3 und α = 0,05) zwischen den vier Klassen gibt (vgl. Tab. 68).

Problemorientierter Unterricht		*Darbietender Unterricht*	
P_1	P_2	D_1	D_2
38,40	43,20	48,20	45,90
α = 0,05 Signifikanzniveau	df = k-1=3 Freiheitsgrad	p = 0,6128 Irrtumswahrscheinlichkeit	
H = 1,81 < 7,81= χ^2_3 Es liegt **kein signifikanter Unterschied** vor. H_0 wird beibehalten: Es gibt keine signifikanten Unterschiede zwischen den Klassen P_1, P_2, D_1 und D_2.			

Tab. 68: Ergebnisse der Kruskal-Wallis-Tests für Test 1, Aufgabe 2b

IV) Ergebnisdetails

Ein detaillierter Blick in die Punkteverteilung zeigt, dass nur wenige Lernende konstante Leistungen aufweisen. Von den Lernenden, die einen Lösungsversuch in Test 2 abgeben, geben nur 25 % auch einen Lösungsversuch in Test 3 ab. Nur in der Klasse D_2 sind es etwa 50 %.

V) Zusammenfassung zu Test 3 – Aufgabe 2b

Diese Aufgabe wird in Test 2 und Test 3 kaum gelöst. Die Leistungen der Klassen sind sowohl untereinander als auch zwischen den Testzeitpunkten vergleichbar. Der Median beträgt stets in allen vier Klassen 0 %. Das arithmetische Mittel ist bei den Klassen D_1 mit 21,74 % und D_2 mit 19,05 % am höchsten. In der Klasse P_1 ist das arithmetische Mittel mit 11,90 % am niedrigsten.

12.4.4 Ergebnisse zu Test 3 – Aufgabe 3 Begründung des gemeinsamen Schnittpunkts im Dreieck

I) Einordnung

In Test 2 konnten bei dieser Begründungsaufgabe zum Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten von den darbietend unterrichteten Klassen bessere Leistungen erbracht werden als von den problemorientierten Klassen. Die Leistungen der Klasse D_2 waren signifikant besser als die der Klassen P_1 und P_2.

II) Ergebnisdarstellung

Bei der Auswertung der Ergebnisse zu Test 3 fällt die geringe Lösungswahrscheinlichkeit aller vier Klassen auf.

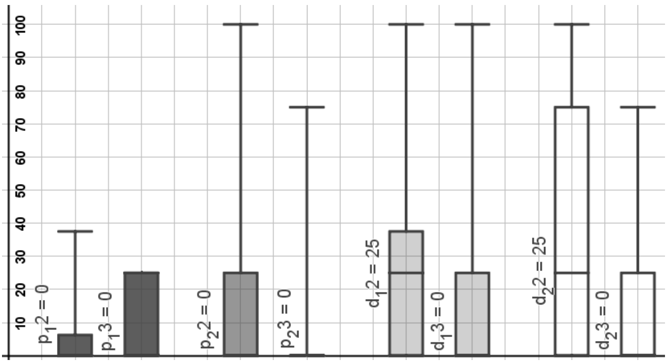


Abb. 47: Klassenweise Ergebnisse der Aufgabe 3 in Test 2 und 3 mit Median

	Problemorientierter Unterricht		*Darbietender Unterricht*	
	P_1	P_2	D_1	D_2
Arithmetisches Mittel	7,74	7,95	15,22	16,07
Standardabweichung	11,23	19,05	26,31	20,46
Maximum	25,00	75,00	100,00	75,00
Oberes Quartil	25,00	0,00	25,00	25,00
Median	0,00	0,00	0,00	0,00
Unteres Quartil	0,00	0,00	0,00	0,00
Minimum	0,00	0,00	0,00	0,00

Tab. 69: Stat. Kenngrößen der Aufgabe 3 in Test 3

Alle Mediane liegen bei $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2 = \tilde{d}_1 = \tilde{d}_2 = 0$ % (vgl. Abb. 47). Die Klassen D_1 und D_2 haben ein arithmetisches Mittel von knapp über 15 %. Die arithmetischen Mittel der Klassen P_1 und P_2 sind mit knapp 8 % fast halb so hoch (vgl. Tab. 69).

Die Klasse D_1 erreicht als einzige einen Maximalwert von 100 %. Die detaillierten Daten zeigen, dass genau ein Lernender die Aufgabe vollständig richtig gelöst hat. In den Klassen P_2 und D_2 liegt der Maximalwert bei 75 %.

III) Ergebniseinordnung

Die Unterschiede sind nicht signifikant. Der Kruskal-Wallis-Test ergibt einen H-Wert von 2,71 < 7,81 mit df=3 und α = 0,05 (vgl. Tab. 70). Die darbietend unterrichteten Klassen können ihre besseren Leistungen aus Test 2 nicht erneut zeigen. Das gilt insbesondere für die leistungsstarken Lernenden aus der Klasse D_2. Nur in der Klasse D_1 kann ein Lernender 100 % erreichen (D125). Die problemorientiert unterrichteten Klassen zeigen ebenfalls schwächere Leistungen als in Test 2. So werden über 75 % der Lösungen aus der Klasse P_2 mit 0 Punkten bewertet.

Problemorientierter Unterricht		*Darbietender Unterricht*	
P_1	P_2	D_1	D_2
42,40	38,00	45,40	50,40
α = 0,05 Signifikanzniveau	df = k-1=3 Freiheitsgrad	p = 0,4385 Irrtumswahrscheinlichkeit	
H = 2,71 < 7,81= χ_3^2			
Es liegt **kein signifikanter Unterschied** vor. H_0 wird beibehalten:			
Es gibt keine signifikanten Unterschiede zwischen den Klassen P_1, P_2, D_1 und D_2.			

Tab. 70: Ergebnisse der Kruskal-Wallis-Tests für Test 3, Aufgabe 3

In der Klasse P_1 liegt die Maximalpunktzahl mit 1 von 4 Punkten am niedrigsten.

IV) Ergebnisdetails

Ein Blick in den Bewertungshorizont und die Punkteverteilung zeigt: Zum Testzeitpunkt 3 ist der Anteil der Lernenden, die Punkte für Ihre Lösungsansätze erhalten in allen vier Klassen gesunken: In der Klasse P_1 erhalten sieben Lernende maximal 1,5 Punkte, in der Klasse P_2 erhalten nur vier Lernende Punkte. In der Klasse D_1 sind es acht Lernende und in der Klasse D_2 sogar zehn Lernende, die Punkte erzielen (vgl. Tab. 71).

	P_1	P_2	D_1	D_2
Keine Bearbeitung	5/10	3/5	6/4	2/4
Trotz Bearbeitung 0 Punkte	11/4	11/13	3/11	4/7
0,5-1,5 Punkte	5/7	5/2	12/5	7/8
2- 2,5	0/0	0/1	0/1	1/1
3-4 Punkte	0/0	2/1	2/2	7/1

Tab. 71: Klassenweise Auswertung der Bearbeitungsanzahlen.

Der deutlich geringere Anteil aus der Klasse P_2 erklärt auch das Fehlen der Box im Boxplot oben (vgl. Abb. 47). Die Lösungen, für die Punkte vergeben werden können, reduzieren sich noch weiter (vgl. Abb. 49). In der Klasse P_1 zeigt sich ein etwas anderes Bild (vgl. Abb. 48). Es gibt einige Lernende, die in Test 3 bis zu 1 Punkt erzielen, die in Test 2 keine Punkte erreicht haben. Insgesamt zeigen sich hier auch in Test 3 die schwächsten Leistungen im Vergleich zu den anderen drei Klassen. Auffällig ist ebenfalls die Verdopplung der Lernenden aus der Klasse P_1, die gar keinen Lösungsversuch angeben (vgl. Tab. 71).

In Test 2 waren es in den darbietend unterrichteten Klassen deutlich mehr Schülerinnen und Schüler, die Punkte für Ihre Leistungen erzielen konnten. Der hohe Anteil an Lernenden in Test 2 aus der Klasse D_1, die 0,5 bis 1,5 Punkten erhalten haben (das waren über 50 %), halbiert sich in Test 3. Diese Entwicklung wird in der Darstellung aus Abb. 50 ganz deutlich. Gleichzeitig steigen die als nicht tragfähig bewerteten Ansätze auf knapp 50 % an. Es gibt demnach weiterhin viele Bearbeitungen in der Klasse D_1, aber deutlich weniger tragfähige Antworten. Auch in der Klasse D_2 verdoppelt sich fast der Anteil derer, die trotz Bearbeitung 0 Punkte erreichen (von 4 auf 7 Lernende; vgl. Tab. 71). Gleichzeitig fällt der hohe Anteil von ein Drittel der Lernenden der Klasse D_2, die in Test 2 mehr als 3 Punkte erreichen konnten, deutlich ab. In Test 3 erreicht nur noch ein Lernender aus D_2 mehr als 3 Punkte (vgl. Abb. 51). Wie auch in der Klasse P_1 können in der Klasse D_1 einige Lernende ihre Leistungen verbessern. Die besonders guten Leistungen des Schülers D129 stechen hervor. Für alle anderen Lernenden gilt in diesen drei Klassen, dass nur, wer bereits Punkte in Test 2 erhalten hat, auch Punkte in Test 3 erzielen kann.

Die Lernenden D125 und auch D129 haben in Anschluss an Test 2 an der Interviewbefragung zu weiteren Aufgabenstellungen zur Mittelsenkrechte teilgenommen. Aus den anderen Klassen haben ebenfalls Lernende an den Interviewbefragungen teilgenommen. Aus P_1 waren es u.a. P124 und P133 (vgl. Tab. 72).

Klasse	Interviewte Schülerinnen und Schüler
P1	P113, P121, P122, P124, P133
P2	P214, P217, P219, P221, P224, P225, P231, P233
D1	D115, D120, D123, D124, D125, D129, D131, D134
D2	D211, D212, D222, D223, D224, D227, D228, D230

Tab. 72: Schülerinnen und Schüler der vier Klassen, die im Anschluss an Test 2 interviewt werden

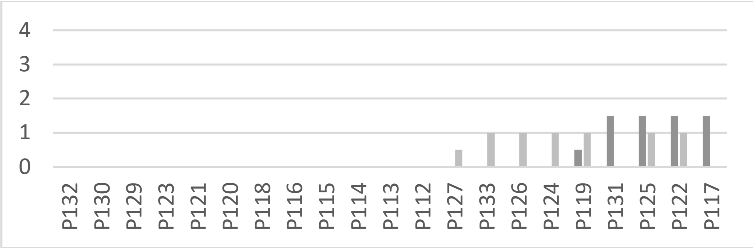


Abb. 48: Testergebnisse zu Test 2 (dunkelgrau) und Test 3 (hellgrau) der Klasse P_1 zur Aufgabe 3 in Punkten.

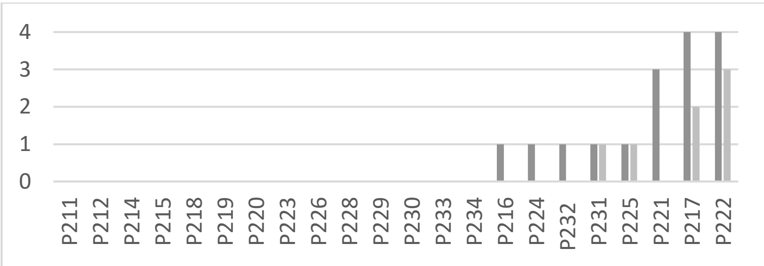


Abb. 49: Testergebnisse zu Test 2 (dunkelgrau) und Test 3 (hellgrau) der Klasse P_2 zur Aufgabe 3 in Punkten.

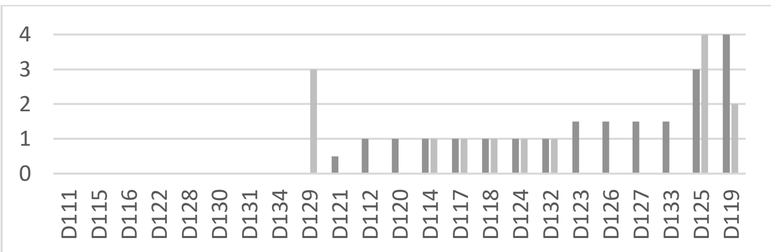


Abb. 50: Testergebnisse zu Test 2 (dunkelgrau) und Test 3 (hellgrau) der Klasse D_1 zur Aufgabe 3 in Punkten

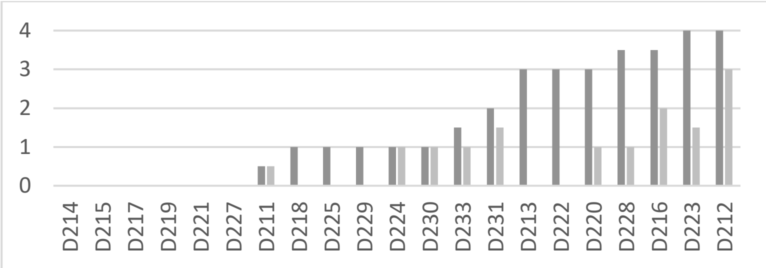


Abb. 51: Testergebnisse zu Test 2 (dunkelgrau) und Test 3 (hellgrau) der Klasse D_2 zur Aufgabe 3 in Punkten.

V) Zusammenfassung zu Test 3 – Aufgabe 3

In Test 3 werden in allen vier Klassen schwache Leistungen erbracht. Die darbietend unterrichteten Klassen sind stärker mit arithmetischen Mittelwerten von 15 %. Die problemorientiert unterrichteten Klassen liegen mit Werten um 7 % noch weiter darunter. In diesen Klassen erhalten nur vier bzw. acht Lernende Teilpunkte für ihre Abgaben. In der Klasse D_2 fallen die durchschnittlichen Leistungen ab. Kein Lernender kann die Leistungen aus Test 2 wiederabrufen. In der Klasse D_1 gibt es zwei Lernende, die ihre Leistung verbessern. Einige schwache Leistungen können wiederabgerufen werden. Insgesamt sinkt die durchschnittliche Punktzahl auch hier.

12.4.5 Ergebnisse zu Test 3 – Aufgabe 4 Mittelpunkt eines Kreises gesucht

I) Einordnung

Diese Aufgabe zum Finden des Kreismittelpunktes sorgte in Test 2 für interessante Ergebnisse, bei denen eine detaillierte Analyse nötig war, um die Interpretationsansätze ausmachen zu können. Die Klasse P_1 erreichte in Test 2 eine durchschnittliche Leistung vergleichbar zu Aufgabe 2a und lag damit an der Spitze. Die Klasse D_1 folgte mit einer starken Leistungsspitze, bei der hauptsächlich der Ansatz Dreiecksumkreis verwendet wurde und noch viel mehr sehr schwachen Leistungen. Die Klassen D_2 und P_2 zeigen deutlich schwächere Leistungen. Nur ein geringer Anteil an Lernenden konnte sinnvolle Lösungen finden, obwohl die Bearbeitungsrate in allen Klassen bei nahezu 100 % lag.

II) Ergebnisdarstellung

In Test 3 werden die folgenden Verteilungen anhand der Boxplots (vgl. Abb. 51) und der Verteilungen auf die verwendeten Lösungsansätze (vgl. Tab. 74) ausgemacht: Alle vier Klassen erreichen einen Maximalwert von 100 %. In den Klassen P_2, D_1 und D_2 erreichen diesen sogar über 25 % der Schülerinnen und Schüler (vgl. Tab. 73).

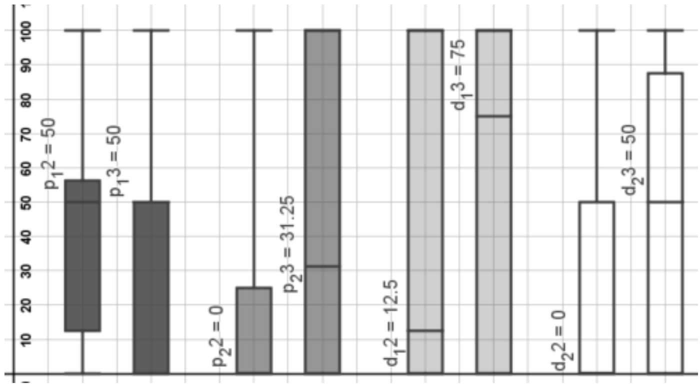


Abb. 52 Verteilung der Testergebnisse aus Test 2 und Test 3 für die Kreismittelpunktsaufgabe 4.

Die Klasse D_1 hat mit $\tilde{d}_1 = 75$ % den höchsten Median. Die Klassen P_1 und D_2 folgen mit $\tilde{p}_1 = \tilde{d}_2 = 50$ %. Die Klasse P_2 ist etwas weiter abgefallen mit $\tilde{p}_2 = 31{,}25$ % Auch beim arithmetischen Mittel liegt die Klasse D_1 mit $\bar{d}_1 \approx$ 58 % weit vorn. Es folgen P_2 und D_2 mit einem Mittelwert über 40 %. Die Klasse P_1 hat ein geringeres arithmetisches Mittel von $p_1 \approx$ 38 % (vgl. Tab. 73). Der Boxplot zeigt, dass in der Klasse P_1 die Leistungsspitze fehlt. Bei allen vier Klassen sind die Standardabweichungen relativ hoch (vgl. Abb. 51). In der Klasse P_1 ist die Streuung am geringsten. Die anderen drei Klassen haben höhere Standardabweichungen zwischen $s = 40{,}36$ für D_2 und $s = 45{,}19$ für P_2.Die Durchschnittswerte sind damit mit den Werten aus

Aufgab 2a) in Test 3, also einer Aufgabe, bei der die Anwendung und Begründungen zur Mittelsenkrechten erforderlich sind und die im Gegensatz zu der Aufgabe 4 mit einem nahen Transfer verortet wird (vgl. Abschnitt 9.14) vergleichbar.

	Problemorientierter Unterricht		*Darbietender Unterricht*	
	P_1	P_2	D_1	D_2
Arithmetisches Mittel	37,50	43,75	58,15	49,40
Standardabweichung	33,18	45,19	44,17	40,36
Maximum	100,00	100,00	100,00	100,00
Oberes Quartil	50,00	100,00	100,0	100,00
Median	50,00	31,25	75,00	50,00
Unteres Quartil	0,00	0,00	0,00	0,00
Minimum	0,00	0,00	0,00	0,00

Tab. 73: Stat. Kenngrößen der Testergebnisse zur Aufgabe 4 in Test 3

Test 3, Aufgabe 4	P1	P2	D1	D2
A) Dreiecksumkreis	4/19,05	8/36,36	11/47,83	7/33,33
B1,B2) Vielecksumkreis/ Zwei Sekanten	6/28,57	1/4,55	3/13,04	4/19,05
C) Quadratinkreis	4/19,05	1/4,55	0/0,00	0/0,00
D) Durchmesser einzeichnen und Mittelsenkrechte konstruieren	0/0,00	2/9,09	2/8,70	2/9,52
E1, E2) Senkrechte zu Durchmesser mit Geodreieck	0/0,00	4/18,18	1/4,35	0/0,00
E3) reines Ausmessen	2/9,52	1/4,55	5/21,74	5/23,81
F1, F2) Hauptsächlich Probieren /kein Ansatz erkennbar	5/23,81	5/22,73	1/4,35	3/14,29
	21/100	22/100	23/100	21/100

Tab. 74: Absolute und Anteilige Verteilung auf die Lösungsansätze A bis F2 der Aufgabe 4 in Test 3.

Die Klassen P_2, D_1 und D_2 zeigen deutlich bessere Leistungen als in Test 2. Die Klasse P_1 kann ihr hohes Niveau aus Test 2 halten. Die Klassen D_1 und D_2 schneiden in Test 3 noch besser ab als P_1. Auch in der Klasse P_2 gibt es eine stärkere Leistungsspitze als in P_1. Gleichzeitig ist der Median hier am geringsten (vgl. Tab. 73).

III) Ergebniseinordnung

Die Unterschiede sind laut Kruskal-Wallis-Test nicht signifikant ($H=2{,}10 < 7{,}81$; $df = 3$; $\alpha = 0{,}05$, vgl. Tab. 75).

Problemorientierter Unterricht		*Darbietender Unterricht*	
P_1	P_2	D_1	D_2
39,20	41,70	49,50	45,20
$\alpha = 0{,}05$ Signifikanzniveau	df = k-1=3 Freiheitsgrad	p = 0,5519 Irrtumswahrscheinlichkeit	
$H = 2{,}10 < 7{,}81 = \chi_3^2$			
Es liegt **kein signifikanter Unterschied** vor. H_0 wird beibehalten: Es gibt keine signifikanten Unterschiede zwischen den Klassen P_1, P_2, D_1 und D_2.			

Tab. 75: Ergebnisse der Kruskal-Wallis-Tests für Test 3, Aufgabe 4.

IV) Ergebnisdetails

Das Zustandekommen der deutlich besseren Testergebnisse kann anhand der Abb. 53 bis Abb. 56 und der Verteilung auf die verwendeten Lösungsansätze in Tab. 74 erklärt werden. In den Klassen P_1, D_1 und D_2 gibt es sehr viele Lernende, die in Test 2 keine oder nur wenige Punkte erreicht haben und in Test 3 Punkte erzielen. Dieser Anteil entspricht ca. einem Drittel der Lernenden je Klasse. Dadurch werden die Durchschnittswerte und Leistungsspitzen sichtlich angehoben (vgl. Abb. 53 bis Abb. 56). Diese höhere Punktzahlen sind auf den Wechsel des Lösungsansatzes zurückzuführen. Viele der Lernenden, die 0 Punkte in Test 2 erhalten haben wenden in Test 3 erstmals den

Ansatz A) Dreiecksumkreis an. Im Vergleich zu Test 2 verdoppelt sich die Anzahl für den Lösungsansatz A) in der Klasse D_1 und vervierfacht sich sogar in der Klasse P_2.
Lernende, die bereits in Test 2 Punkte für ihre Leistungen erzielen konnten, können dies häufig in Test 3 wiederholen. In der Klasse P_1 ist der Anteil der Lernenden, die in Test 2 Punkte erzielen konnten bereits sehr hoch. Nur einzelne Lernende können diese Leistung in Test 3 nicht erneut zeigen. Der Anteil der Lernenden, die eine Leistungssteigerung von 0 auf mehrere Punkte in Test 3 erreichen können, ist demnach deutlich geringer als in den anderen drei Klassen.
Eine veränderte Nutzung der Lösungsansätze ist in der Klasse P_2 nicht erkennbar (vgl. Abb. 54). Auch für die anderen tragfähigen Lösungsansätze B1,2) und C) können keine Veränderungen der Anteile in Test 2 zu Test 3 erkannt werden (vgl. Tab. 74).

V) Zusammenfassung zu Test 3 – Aufgabe 4

Es gibt keine signifikanten Unterschiede zwischen den vier Klassen. Das arithmetische Mittel liegt für jede der vier Klassen zwischen 35 % und 60 % und damit ebenso hoch wie in Aufgabe 2a in Test 3. Die Klasse P_1 kann ihr hohes Niveau aus Test 2 halten und zeigt damit gleichzeitig im Vergleich die schwächsten durchschnittlichen Leistungen der vier Klassen in Test 3 auf. Die anderen drei Klassen weisen deutliche Leistungssteigerungen von Test 2 zu Test 3 auf. Der Ansatz A) Dreiecksumkreis wird besonders häufig verwendet. Jedoch ist er in der Klasse P_1 nur knapp halb so häufig vorzufinden wie in den anderen drei Klassen. Damit zeigen die darbietend unterrichteten Klassen in dieser Aufgabe mit weitem Transfer in Test 3 etwas bessere Gesamtleistungen auf als die problemorientiert unterrichteten Klassen.

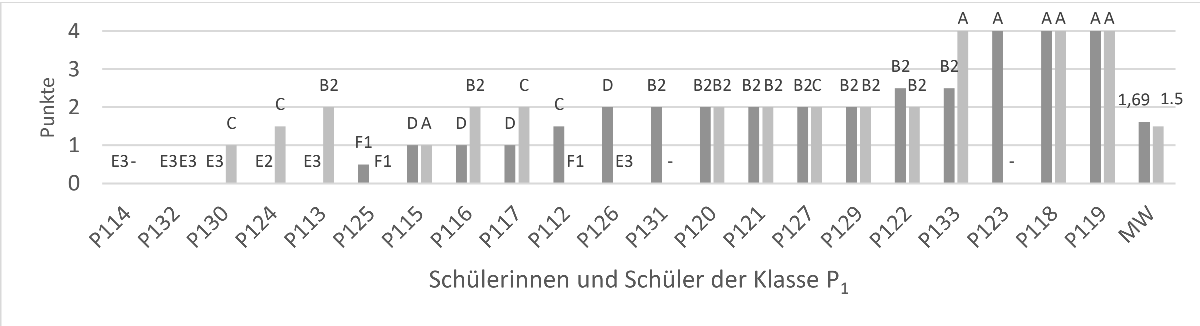


Abb. 53: Testergebnisse zu Test 2 (dunkelgrau) und Test 3 (hellgrau) der Klasse P_1 zur Aufgabe 4 mit arithmetischen Mittel (MW).

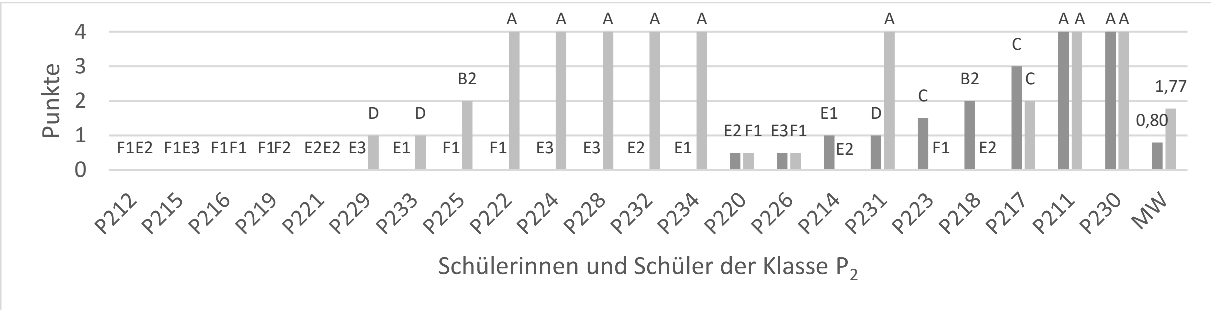


Abb. 54: Testergebnisse zu Test 2 (dunkelgrau) und Test 3 (hellgrau) der Klasse P_2 zur Aufgabe 4 mit arithmetischen Mittel (MW).

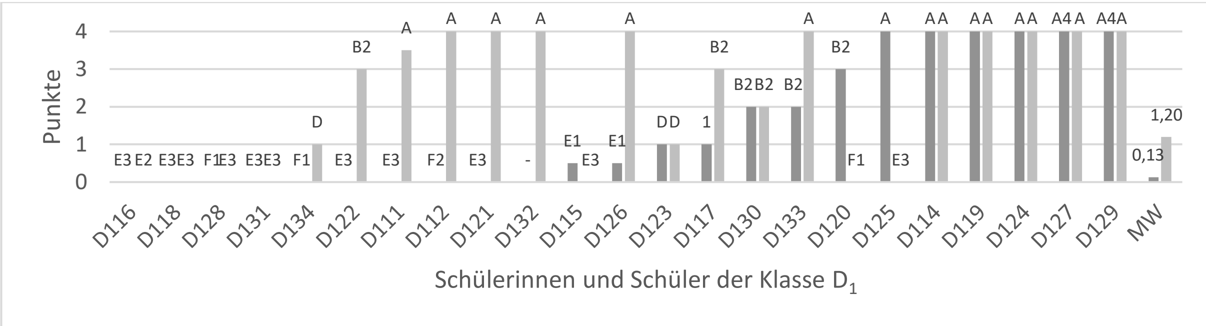


Abb. 55: Testergebnisse zu Test 2 (dunkelgrau) und Test 3 (hellgrau) der Klasse D_1 zur Aufgabe 4 mit arithmetischen Mittel (MW).

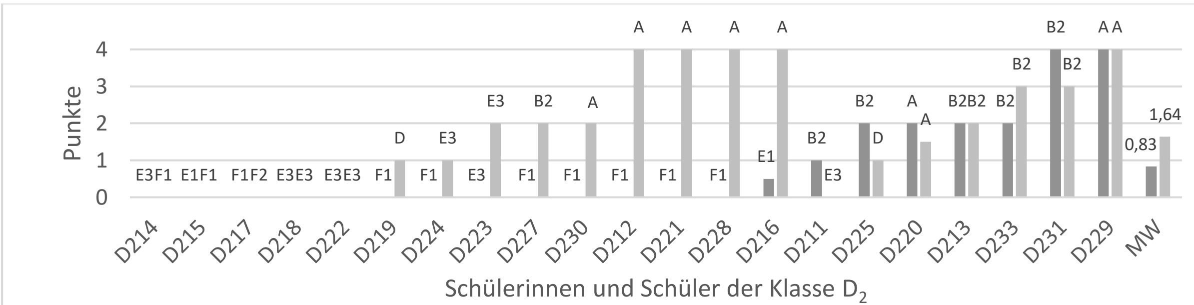


Abb. 56: Testergebnisse zu Test 2 (dunkelgrau) und Test 3 (hellgrau) der Klasse D_2 zur Aufgabe 4 mit arithmetischen Mittel (MW).

12.4.6 Ergebnisse zu Test 3 – Aufgabe 5 Brunnenaufgabe mit verändertem Kontext

I) Einordnung

Die Aufgabe 5 stellt in Test 2 unterschiedliche Anforderungen an die darbietend und problemorientiert unterrichteten Klassen, da eine sehr ähnliche Aufgabe den problemorientiert unterrichteten Lernenden bereits aus dem Unterricht bekannt ist, den darbietend unterrichteten Klassen hingegen nicht. In Test 2 gibt es signifikante Unterschiede zwischen den Klassen P_1 und D_1 und zwischen P_2 und D_1. Die Leistungen der problemorientiert unterrichteten Klassen haben hohe und vergleichbare Durchschnittswerte. Die Klasse D_2 folgt mit ebenfalls guten durchschnittlichen Leistungen. In Test 3 haben nun alle Lernenden die Aufgabe mindestens einmal in Test 2 zur Bearbeitung vorgelegt bekommen.

II) Ergebnisdarstellung

Auffällig ist, dass auch hier (wie bereits in Test 2) die Boxplots der Klassen P_1 und P_2 identisch sind. Beide Klassen zeigen damit ein sehr ähnliches Verhalten in Bezug auf das langfristige Lösen der Variation der Brunnenaufgabe. Die Mediane liegen bei $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2 = 50\,\%$.

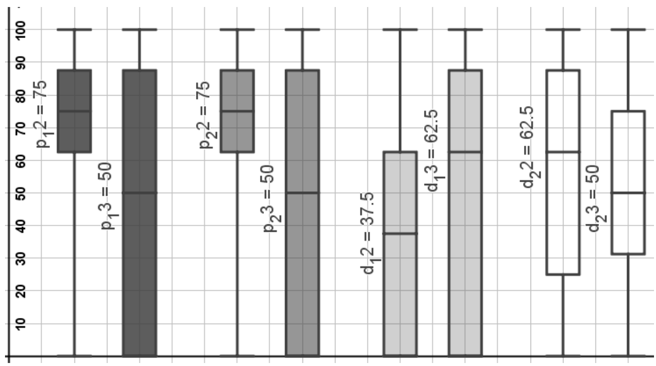


Abb. 57: Klassenweise Ergebnisse zur Aufgabe 5 in Test 2 und 3.

Auch die arithmetischen Mittel liegen sehr nah beieinander: $\bar{p}_1 \approx 49\,\%$ und $\bar{p}_2 \approx 51\,\%$ (vgl. Abb. 57 und Tab. 76). Die durchschnittlichen Leistungen liegen damit niedriger als in Test 2 und die Standardabweichung ist größer. Dabei hat sich die Anzahl der starken Leistungen kaum verändert. Es gibt allerdings deutlich mehr schwache Leistungen. Das untere Quartil fällt drastisch ab auf 0 % (vgl. Abb. 57).

Test 3, Aufgabe 5 Angaben in %	*Problemorientierter Unterricht*		*Darbietender Unterricht*	
	P_1	P_2	D_1	D_2
Arithmetisches Mittel	49,40	50,57	47,83	51,19
Standardabweichung	40,36	39,97	40,15	29,35
Maximum	100,00	100,00	100,00	100,00
Oberes Quartil	87,50	87,50	87,50	75,00
Median	50,00	50,00	62,50	50,00
Unteres Quartil	0,00	0,00	0,00	31,25
Minimum	0,00	0,00	0,00	0,00

Tab. 76: Stat. Kenngrößen der Ergebnisse der Brunnenaufgabe in Test 3

Eine ähnliche Tendenz ist bei der Klasse D_2 zu sehen: Auch hier ist eine Abnahme des Leistungsniveaus zu erkennen. Der Median beträgt in Test 3 genau 50 %. Mit $\bar{d}_2 \approx 51\,\%$ weist die Klasse D_2 den höchsten Wert für das arithmetische Mittel auf, der sehr nah bei denen der problemorientiert unterrichtet Klassen liegt. Auch zeigt sich ein deutlicher Abfall des unteren Quartils. Im Gegensatz zu den problemorientiert unterrichteten Klassen hat sich hier auch die Leistungsspitze nach unten verlagert (vgl. obere Quartile). Dafür werden weniger sehr schwache Leistungen erreicht, so endet das untere Quartil als einziges nicht bei 0 %, sondern bei über 30 %. Die Streuung der Daten um den Mittelwert ist geringer als in den anderen drei Klassen und auch geringer als in Test 2. Das zeigt auch die Größe der Box (vgl. Abb. 57).

Die Klasse D_1 hingegen verbessert ihre durchschnittliche Leistung in Test 3 im Vergleich zu Test 2 (als einzige Klasse). Die

Zunahme ist sogar so groß, dass die Klasse mit $\tilde{d}_1 = 62{,}50\,\%$ den höchsten Median von allen vier Klassen in Test 3 erreicht und der Boxplot sehr ähnlich zu dem der problemorientiert unterrichteten Klassen ist: Oberes und unteres Quartil sind vergleichbar mit denen der problemorientiert unterrichteten Klassen. Das obere Quartil endet bei 87,50 %., das untere bei 0 %. Das arithmetische Mittel ist mit $\bar{d}_1 \approx 48\,\%$ vergleichbar zu dem der anderen drei Klassen (vgl. Tab. 76).

Das ergibt folgendes Bild: In den drei Klassen, in denen in Test 2 gute Leistungen gezeigt werden konnten, ist in Test 3 ein Leistungsabfall zu sehen. Im Schnitt ist der Leistungsabfall vergleichbar. In den problemorientiert unterrichteten Klassen bleibt ein starkes oberes Quartil zu erkennen, das untere Quartil fällt auf 0 % herab. In der Klasse D_2 werden beide Quartile größer. Die Leistungen liegen enger um den Mittelwert. D_1 bildet die Ausnahme. In Test 2 waren die Leistungen eher schwach. In Test 3 ist die Klasse D_1 durchschnittlich die leistungsstärkste Klasse (vgl. Abb. 57 und Tab. 76).

III) Ergebniseinordnung

In Test 3 liegen keine signifikanten Unterschiede vor. Der Kruskal-Wallis-Test liefert folgende Werte: H-Wert 0,14 < 7,81, df = 3 und α = 0,05 (vgl. Tab. 77). Langfristig kann kaum ein Unterschied zwischen den vier Klassen bei der Lösungsrichtigkeit festgestellt werden.

Problemorientierter Unterricht		*Darbietender Unterricht*	
P_1	P_2	D_1	D_2
44,30	45,50	42,70	43,50
α = 0,05 Signifikanzniveau	df = k-1=3 Freiheitsgrad	p = 0,9866 Irrtumswahrscheinlichkeit	
H= 0,14 < 7,81= χ^2_3 Es liegt k**ein signifikanter Unterschied** vor. H_0 wird beibehalten: Es gibt keine signifikanten Unterschiede zwischen P_1, P_2, D_1 und D_2.			

Tab. 77: Ergebnisse der Kruskal-Wallis-Tests für die Brunnenaufgabe in Test 3

IV) Ergebnisdetails

Es werden die gleichen Bewertungsaspekte wie in Test 2 herangezogen: 1) Die Mittelsenkrechte wird bei der Lösung verwendet, 2) Die Mittelsenkrechten zu den Punkten werden eingezeichnet, 3) Die Grenzen zu den Gebieten werden markiert, 4) Das Vorgehen wird erklärt.

Die Bewertungsübersicht zeigt im Detail, dass die Klasse D_1 im Schnitt über alle vier Bewertungskategorien hinweg die Leistungen aus Test 2 wieder abrufen oder sogar deutlich verbessern kann (in Kategorie 2 und 3). Dies gilt weitestgehend auch für die Klasse D_2. In der Bewertungskategorie 1) erreicht sie mit ca. 86 % den höchsten Anteil von allen vier Klassen. In der Bewertungskategorie 4) halbiert sich hingegen die durchschnittliche Leistung. Das erklärt die schwächere Leistungsspitze.

Die problemorientiert unterrichteten Klassen zeigen beide deutlich schwächere Leistungen bei der Verwendung der Mittelsenkrechten (Kategorie 1) und dem fehlerfreien Einzeichnen (Kategorie 2). Dafür erreichen sie auch in Test 3 durchschnittlich mehr Punkte für ihre Erklärungen. Durchschnittlich erreicht die Klasse P_1 36 % und die Klasse P_2 41 % der Erklärungspunkte.

Der drastische Abfall des unteren Quartils in den problemorientiert unterrichteten Klassen ergibt sich aus einer vergleichsweise hohen Anzahl an Lernenden, die in Test 3 keine Punkte für Ihre Bearbeitung erhalten. In jeder Klasse erhalten sieben Schülerinnen und Schüler 0 Punkte für die ihr Bearbeitung. Jeweils ein weiterer Lernender erhält nur 1 Punkt. In Test 2 haben die acht Lernenden der Klasse P_1 durchschnittlich 2,69 Punkte erreicht. Für die acht Lernenden der Klasse P_2 ergeben sich in Test 2 durchschnittlich 2,38 Punkte. Damit kann ein Drittel der Lernenden der problemorientiert unterrichteten Klassen nicht an ihre guten Leistungen aus Test 2 anknüpfen. In der Kasse P_1

gibt es zwei Lernende, die eine deutliche Verbesserung in Test 3 zu Test 2 aufzeigen. Beide haben 0 Punkte in Test 2 und in Test 3 1,5 bzw. 2 Punkte (P126 und P127). Alle weiteren Lernenden beider Klasse weisen keine großen Schwankungen in ihren Leistungen auf. Sie können die Leistung aus Test 2 wieder zeigen.

In den darbietend unterrichteten Klassen gibt es solche Fälle in der Anzahl nicht. Es gibt umgekehrt acht Lernende in der Klasse D_1 und vier Lernende in der Klasse D_2, die ihre Leistungen aus Test 2 deutlich verbessern.

Es gibt unterschiedliche und zum Teil unerwartete Entwicklungen in den vier Klassen in Test 3 und es kommt somit zu ähnlichen durchschnittlichen Leistungen von ca. 50 % der Punkten in allen vier Klassen.

VI) Zusammenfassung zu Test 3 – Aufgabe 5

Die problemorientiert unterrichteten Klassen können die hohen durchschnittlichen Leistungen aus Test 2 nicht in dieser Gänze wiederholen. Fast ein Drittel der problemorientiert unterrichtenden Lernenden, die in Test 2 gute Leistungen zeigen konnten, erhalten 0 Punkte für Ihre Lösungsangaben. Das erklärt den deutlichen Abfall der Mittelwerte. Die darbietend unterrichteten Klassen zeigen deutliche Verbesserungen in ihren durchschnittlichen Leistungen. Es gibt nur wenige Lernende, die einen so deutlichen Leistungsabfall zeigen und deutlich mehr Lernende, die ihre Leistungen besonders verbessern. Alle vier Klassen erreichen durchschnittlich 50 % der Punkte und zeigen damit sehr ähnliche Leistungen auf. In der Klasse D_2 gelingen mit 86 % einem sehr hohen Anteil der Lernenden die Anwendung der Mittelsenkrechten zur Lösung der Aufgabe. In der Bewertungskategorie 4) Erklärungen zeigen die problemorientiert unterrichteten Klasen weiterhin stärke Leistungen auf.

13 Diskussion der Detailanalysen (Forschungsaspekt 2)

Nachdem die generelle Durchführbarkeit mit Forschungsaspekt 1 in Kapitel 10 und 13 betrachtet wurden, werden nun die Ergebnisse der Detailanalyse aus Kapitel 12, die sich zur Beantwortung des zweiten Forschungsaspekts eignen, diskutiert.

Aufgabenweise betrachtet können Unterschiede zwischen den Klassen ausgemacht werden (vgl. Abschnitte 12.1, 12.3 und 12.4). Zunächst werden die Ergebnisse der Detailanalyse zu Test 1 eingeordnet (vgl. Abschnitt 13.1) und in Bezug zur Forschungsfrage F2.1.1 diskutiert. Es folgt eine Detailanalyse des problemorientierten Unterrichtsablaufs (vgl. Abschnitt 13.2) unter der Fragestellung, welche Möglichkeiten und Herausforderungen durch einen problemorientierten Unterrichtseinstieg beobachtet werden können (F2.2.1). Beides dient neben den Wissenselementen der Mittelsenkrechte (vgl. Kapitel 6) anschließend als Erklärungsgrundlage für die Diskussion der detaillierten Analysen zu Test 2 (vgl. Abschnitt 13.3) und Test 3 (vgl. Abschnitt 13.4). Diese Auswertungen beziehen sich auf die Forschungsfragen F2.3.1 und F2.3.2.

13.1 Diskussion der Detailanalyse zu Test 1 (F2.1)

In Test 1 wird zunächst das inhaltliche Vorwissen zu geometrischen Begriffen mit den Aufgaben 1 bis 4 erfasst. Die Ergebnisse der Detailanalyse zeigen Unterschiede zwischen dem Lösungsverhalten der vier Klassen bei den vier Aufgaben (vgl. Abschnitt 12.1.1). Alle Klassen erreichen niedrige Mittelwerte in Test 1. Dies wurde bereits in Abschnitt 11.1 diskutiert.

Für die Aufgabe 2 zum Kreis als Ortslinie sind die Unterschiede zwischen den vier Klassen sogar teilweise signifikant. Es fehlt an leistungsstarken Schülerinnen und Schülern. Die Klasse D_2 weist somit insgesamt schwächeres Vorwissen zu bereits behandelten geometrischen Begriffen mit Bezug zu einem Ortslinienkonzept auf. Dies gilt es für die weiteren Interpretationen der Testergebnisse zu beachten. Dem Vorwissen wird für das Erlernen neuer Begriffe nicht nur in der Geometrie (vgl. Abschnitt 2.3.6), sondern auch in der Psychologie für das langfristige Behalten (vgl. Abschnitt 3.2.2) eine bedeutende Rolle zugeschrieben.

Für die Aufgabe 4 waren niedrigere Mittelwerte als für die Aufgaben 1 bis 3 zu erwarten, da die Mittelsenkrechten im Gegensatz zu den anderen drei Begriffen bisher nicht Unterrichtsinhalt war. Die Ergebnisse zeigen, dass alle vier Klassen hier ihr durchschnittliches Minimum aufweisen. Den Lernenden ist in allen vier Klassen durchschnittlich das Einzeichnen dieser gesuchten Punkte am schwersten gefallen. Eine deutliche Abweichung der Ergebnisse im klassenweisen Vergleich zu den Ergebnissen der anderen drei Aufgaben wird nicht ersichtlich. Daraus kann geschlussfolgert werden, dass die verwendete Aufgabenstellung verständlich ist und die Lernenden dazu anregt, Punkte mit den gesuchten Eigenschaften (gleicher Abstand zu zwei gegebenen Punkten) einzutragen. Eine Verallgemeinerung, wo nun alle diese gesuchten Punkte liegen, wird von kaum einem Lernenden angegeben. Dies fällt den Lernenden auch für die Begriffe Parallele und Kreis nicht leicht. Gelichzeitig kann also durch die Aufgabenstellung neues Wissen bzw. neue Erkenntnisse zu den geometrischen Begriffen angeregt werden.

Mit der Erhebung des Vorwissens in Test 1 wird demnach auch Anlass gegeben Vorwissen zu reaktivieren ggf. sich wieder anzueignen oder sogar zu erweitern. Dies kann Effekte für das Erlernen der Mittelsenkrechte haben, die hier nicht ausgemacht oder weiter berücksichtigt werden können.

Zusätzlich wird mit einer Problemstellung zu Rechtecken mit bestimmten Flächeninhalten eine Problemlöseaufgabe gestellt. Die Ergebnisse dieser Problemlöseaufgaben bestätigen die Lehrereinschätzungen, die Grundlage für die Zuteilung zur Problemorientierung bzw. Darbietung waren. Die deutlich höheren Bearbeitungsraten und erfolgreichen Zugänge in den problemorientiert unterrichteten Klassen sprechen dafür, dass diese Lernenden bereits Erfahrungen mit mathematischen Problemen haben. Auch das haben die beiden Lehrpersonen im Vorfeld bestätigt. Ein systematisches Vorgehen, das Anfertigen von Skizzen oder die Verwendung weitere Heurismen ist nicht zu erkennen. Dies kann erklären, warum nur ein sehr geringer Anteil der Lernenden gute Leistungen zeigen kann. Ein fehlendes Verständnis der Aufgabenstellung erschwerte zusätzlich das Auffinden richtiger Lösungsrechtecke. Fachbegriffe wie *ganzzahlig* und *Flächeninhalt* wurden nicht richtig verwendet. Dies kann auf fehlende Grundkenntnisse zurückgeführt werden (vgl. Argument 1 in Tab. 5). Aufgrund des geringen Textumfangs und der kurzen Sätze kann das Fehlen von Lesefähigkeiten als Begründung in diesem Fall eher als gering angesehen werden (vgl. Argument 2 in Tab. 5).

Mit der Auswertung von Test 1 können die angeführten Lehrerbedenken aus Abschnitt 4.3 bei der Analyse von Probelöseaufgaben als mögliche Erklärung für die schwachen Schülerleistungen identifiziert werden. Es kann diskutiert werden, inwiefern eine Änderung der Aufgabenstellung, indem der Begriff „ganzzahlig" ersetzt wird durch Formulierungen wie „verwende keine Dezimalzahlen oder Brüche, nutze nur ganze Zahlen" die Anforderungen deutlich verändert.

13.2 Diskussion der Unterrichtsumsetzung (F2.2)

Die bisherigen Auswertungen der Studie zeigen, dass ein problemorientierter Unterricht zum Themenkomplex der Mittelsenkrechten in derselben Unterrichtszeit erfolgen kann wie ein darbietender Unterricht. Die Praxis hat gezeigt, dass alle vier Unterrichtsvorhaben in sechs Unterrichtsstunden sinnvoll umgesetzt werden können (vgl. Kapitel 10). In beiden Leistungstests weisen die Schülerinnen und Schüler in allen vier Klassen vergleichbare Ergebnisse auf (vgl. Kapitel 13).

Exemplarisch konnte anhand einer Analyse des Unterrichtsgeschehens am Beispiel der Mittelsenkrechten gezeigt werden, an welchen Stellen ein problemorientierter Einstieg zu tiefergehenden Diskussionen und grundlegenden Vorgehensweisen führen kann (vgl. Abschnitt 12.2). Dies kann an drei Aspekten festgemacht werden:

1) Der problemorientierte Unterricht bietet zum einen die Möglichkeit über die Gestalt des geometrischen Ortes der Mittelsenkrechte zu diskutieren. Verläuft diese Linie entlang einer Geraden oder einer gezackten Linie? Diese grundlegende Frage bietet Anlass verschiedene Vorstellungen und Überlegungen miteinander zu verknüpfen.
2) Zum anderen wird die Orthogonalität der Mittelsenkrechten nicht als offensichtlich erlebt, sondern als Besonderheit in Frage gestellt oder aus anderen Eigenschaften gefolgert. Zentrale mathematische Begründungsweisen können sich anschließen.
3) Als letzter Punkt ist der Einsatz von Kreisen zum Erlangen der Mittelsenkrechte zu nennen. Diese nicht nur für die Konstruktion der Mittelsenkrechten, sondern für die gesamte euklidische Geometrie grundlegende Idee

kann von Schülerinnen und Schülern eigenständig erkannt und angewendet werden und sorgt für Staunen.

Diese Aspekte bieten fruchtbare Diskussionsanlässe, die in den Unterrichtsstunden nicht alle ausführlich aufgegriffen werden können, aber in ihrer Summe den Gehalt der Stunden insgesamt deutlich anreichern.

Es bleibt offen, inwiefern die Schülerinnen und Schüler einen messbaren Mehrwert aus den beobachtbaren tiefergreifenden Diskussionsanlässen im problemorientierten Unterrichtsverlauf ziehen können.

Keine Unterrichtsstunde gleicht der anderen, auch nicht bei gleicher Planung und Durchführung durch die gleiche Lehrperson. Wer selbst die Erfahrung zum Beispiel im Unterrichten von Parallelklassen gemacht hat, kann dies sicher bestätigen. Und gleichzeitig können durch den Einsatz geeigneter Aufgabenstellungen und angeleiteter Eigenständigkeit der Schülerinnen und Schüler Unterrichtsverläufe grundlegend festgelegt werden. Gut ausgewählte und eingesetzte problemorientierte Aufgaben können Schülerinnen und Schülern zum Aufwerfen zentraler Fragestellungen der Mathematik und auch zum Staunen bringen. Auch für die Lehrperson bedeutet ein problemorientierter Unterricht eine Veränderung in den Anforderungen. Diskussionen müssen gelenkt und geleitet werden. Argumente festgehalten und nachvollziehbar dargestellt werden. Der Unterricht ist insgesamt weniger planbar und neben einer erhöhten Konzentration werden Flexibilität sowie fachliche Sicherheit für eine gelungene Umsetzung benötigt.

13.3 Diskussion der Detailanalyse zu Test 2 (F2.3)

Die Detailanalyse von Test 2 gibt Ausschluss darüber, inwiefern die Lernleistungen direkt nach der Unterrichtseinheit zwischen den vier Klassen unter Berücksichtigung der verschiedenen Wissensfacetten vergleichbar sind. Die Aufgaben erfassen verschiedene Wissensbereiche von Faktenwissen zu konzeptuellen und prozeduralem Wissen und erheben unterschiedliche Anforderungen wie Reproduktions- bzw. Transferleistungen an die Lernenden. Mit der Detailanalyse wird aufgabenweise verglichen, inwiefern die Lernleistungen vergleichbar sind oder Unterschiede zwischen den vier Klassen ausgemacht werden. Damit wird auf die Beantwortung der Forschungsfrage 2.3.1 abgezielt: Welche Lernleistungen bezüglich der Mittelsenkrechten weisen die Schülerinnen und Schüler beider Unterrichtsansätze am Ende der Unterrichtseinheiten auf und inwiefern sind diese klassenweise vergleichbar?

13.3.1 Diskussion zu Test 2 – Aufgabe 1 Definition und Konstruktion der Mittelsenkrechten

Mit der Aufgabe 1 wird Reproduktionswissen zur Mittelsenkrechten erhoben. Die drei Teilaufgaben beinhalten Faktenwissen in a), das aus der Definition der Mittelsenkrechten besteht. In Aufgabenteil b) wird mit der Konstruktion prozedurales Wissen erfasst und in Aufgabenteil c) konzeptuelles Wissen, wenn nach weiteren Eigenschaften der Punkte auf der Mittelsenkrechten gefragt wird.

Die Boxplots der vier Klassen in Test 2 sind sich sehr ähnlich. Optisch und auch rechnerisch sind mit dem Kruskal-Wallis-Test keine signifikanten Unterschiede auszumachen. Alle vier Klassen erreichen im Median 75 % der Punkte. Die Klasse D_1 erreicht dies auch im arithmetischen Mittel. Die drei anderen Klassen liegen darunter.

Zu Teilaufgabe c) werden kaum Erklärungen angegeben, weshalb diese 12,5 % der Punkte von fast keinem Lernenden erreicht werden. Das gilt im gleichen Maße für alle vier Klassen. Die eingeforderten Erklärungen gehen über die Reproduktion des Faktenwissens hinaus. Soll der Mittelwert der Lernleistung für die Aufgabe 1 die Reproduktionsleistung widerspiegeln, sollten diese 12,5 % keine Berücksichtigung finden. Damit kann rechnerisch ein Mittelwert von ca. 86 % bestimmt werden. Die Reproduktionsleistungen sind damit gemessen an Schulbewertungsskalen als gut einzuordnen, wobei die Klasse D_1 die stärksten Leistungen aufgezeigt. Es folgt P_2 und schließlich sind P_1 und D_2 in ihren Leistungen kaum zu unterscheiden.

Im Gegensatz zu Ergebnissen aus amerikanischen Studien, in denen darbietend unterrichtete Lernende deutlich mehr Faktenwissen und problemorientiert unterrichtete Lernende eine höhere Erklärkompetenz aufweisen (vgl. Abschnitt 4.2), kann diese Unterscheidung beim grundlegenden Wissen zur Mittelsenkrechte nicht aufgezeigt werden. Im Gegenteil: für beide Kompetenzen zeigen drei der vier Klassen vergleichbare Leistungen. Das kann zu zwei Vermutungen führen 1) Die geringen Unterschiede zur Wiedergabe der Definition sind stärker durch die Rolle der Definition im Unterricht und eventuell durch die Lehrpersonenüberzeugungen geprägt als durch die Wahl der Unterrichtsvariante selbst. 2) Die Testaufgaben eignen sich nicht, um Unterschiede zwischen Faktenwissen und Erklärkompetenz aufzuzeigen. Auf beide Vermutungen wird wieder eingegangen, nachdem weitere Überlegungen zur Detailanalyse dargestellt werden.

Feine Unterschiede zwischen den Klassen können bei der Detailanalyse der Teilaufgaben näher erfasst werden. Bei der Wiedergabe der Definition in Teilaufgabe a) fallen die deutlich geringeren Leistungen der Klasse P_1 auf. Fast ein Viertel der Lernenden erhält 0 Punkte und auch der Anteil der sehr guten Bearbeitungen ist mit knapp 40 % fast halb so groß wie in den anderen drei Klassen. Die Betrachtung der Schülerlösungen hat gezeigt, dass sprachliche Ungenauigkeiten bzw. eigene Wortformulierungen angegeben werden. Diese können mit dem Bewertungshorizont nicht gleichwertig zur Ortslinien-Definition der Mittelsenkrechten bewertet werden. In den Schülerprodukten lassen sich richtige Ideen erkennen, durch die unpräzisen Formulierungen der Lernenden bleibt die Richtigkeit jedoch vage und es werden deutlich häufiger 0 Punkte vergeben. Die Klasse P_1 scheint die Definition nicht in der Gänze auswendig gelernt oder so tiefgreifend verstanden zu haben, dass eine eigenständige Formulierung gelingt, wie es in den anderen drei Klassen passiert ist. Eine weitere Erklärung könnt in den schwächeren sprachlichen Leistungen der Klasse P_1 liegen. Es wurden keine sprachlichen Fähigkeiten der Klassen erfasst.

Diese Schwächen der Klasse P_1 bei Teilaufgabe a) werden durch besonders starke Leistungen bei der Beschreibung der Punkteigenschaften in c) wieder ausgeglichen. Die Klasse D_1 zeigt sehr ähnliche Leistungen bei der Teilaufgabe c) auf wie die Klasse P_1. In der Klasse D_2 zeigt sich eine umgekehrte Leistungsstärke bezogen auf dieselben zwei Kategorien.

Diese Unterschiede scheinen weniger mit der Unterrichtsvariante einherzugehen, da sich die Unterscheidungen insbesondere auf das Faktenwissen zur Definitionswiedergabe beziehen und nicht auf sämtliches Faktenwissen und zusätzlich nur in einer der beiden problemorientiert unterrichteten Klassen auftreten.

Um die Unterschiede erklären zu können, können weitere den Unterricht beeinflussende Faktoren betrachtet werden. In dieser Studie wurde mit den Unterrichtsprotokollen festgehalten, wann und in welcher Form die Mittelsenkrechtendefinition im

Unterrichtsgespräch aufgekommen wurde (vgl. Abschnitt 10.3).

Die Unterrichtsabläufe zeigen auf, dass die Definition unterschiedlich häufig von der Lehrperson abgefragt wird. In der Klasse D_1 wird die Definition besonders häufig von den Lernenden als eigenständige Formulierung eingefordert. Dies geschieht zu drei Zeitpunkten: am Ende der 4. Unterrichtsstunde, sowie zu Beginn der 5. und 6. Unterrichtsstunde. Auch in der Klasse P_2 wird die Definition an drei Stellen im Unterricht in Form eines Rückblicks („was haben wir gemacht?“) eingefordert. Dies geschieht in den Stunden 3, 5 und 6. Auch bei der Untersuchung der Lage des Schnittpunkts der Mittelsenkrechten im Dreieck (vgl. Unterrichtsstunde 5) wird die Definition hervorgehoben. In den Klassen P_1 und D_2 wird die Definition am Ende der 5. Unterrichtsstunde wiederholt und anschließend wird die Definition für Begründungen verwendet, aber nicht erneut in ihrem Wortlaut abgefragt.

Die Unterrichtsabläufe können die Unterschiede nur bedingt erklären. Nicht erfasst werden konnte, welche Bedeutung und welcher Umgang im bisherigen Mathematikunterricht Definitionen zugekommen ist. Die Lehrperson der Klasse D_2 zeigt einen sehr systematischen und strukturierten Unterricht, die sich in generellen Vereinbarungen wie zum Beispiel „Definitionen werden auswendig gelernt“ wiederspiegeln.

Eine im Unterricht beobachtete Auffälligkeit der Klasse P_2 liegt in der ruhigen Arbeitsweise der Lernenden. Es finden kaum Austausch und Gespräche zwischen den Kindern statt. Damit wurden die Definitionen im Wortgebrauch eventuell weniger häufig verwendet und die Notwendigkeit einer verständlichen, präzisen Formulierung wird nicht deutlich. Diese Überlegungen bieten plausible Erklärungsansätze.

Damit lässt sich die oben aufgebrachte Vermutung 1 einordnen. Die zweite Vermutung bezieht sich auf die Aufgabenstellung. Hier wird durch den Zusatz „erkläre“ eine weiterführende Angabe zu den Eigenschaften der Punkte auf der Mittelsenkrechten eingefordert. Erklärungen zur Mittelsenkrechten selbst oder zur Konstruktion werden nicht eingefordert. Allgemein fassen sich Lernende bei schriftlichen Erklärungen eher kurz, weshalb die Datenerhebung durch schriftliche Tests zur Erfassung von Erklärkompetenzen sich weniger gut eignet. Das bestätigen die geringen Lösungsansätze für die Teilaufgabe c). Damit kann ein nachteiliger Einfluss der Erhebungsmethode auf die Ergebnisse der Erklärkompetenz nicht ausgeschlossen werden.

13.3.2 Diskussion zu Test 2 – Aufgabe 2a Innermathematische Anwendung der Mittelsenkrechten

Mit der Aufgabe 2 wird eine erste Anwendung der Mittelsenkrechten in einem innermathematischen Kontext angeregt. Die Leistungen der vier Klassen sind vergleichbar. Damit kann die Vermutung aus Tab. 27 bestätigt werden. Die Durchschnittswerte sind mit knapp 60 % etwas geringer als bei der Reproduktionsaufgabe 1, was auch zu erwarten war. Die Detailanalyse hat gezeigt, dass die Anwendung der Mittelsenkrechten bei über 86 % der Lernenden gelingt. Damit ist der Anteil an Lernenden, die die Mittelsenkrechte richtig anwenden können, erfreulich hoch. Er liegt sogar über dem Durchschnittswert der Reproduktionsaufgabe 1a).

Die Anwendung des Kreises erfolgt in 50 % der Fälle richtig. Dieser geringere Anteil beim Kreis ist auf die Aufgabenstellung zurückzuführen. Es zeigt sich, dass die Verwendung des Radius von 2 Längeneinheiten für die Schülerinnen und Schüler eine Hürde darstellt. An dieser Stelle passieren viele Fehler, es werden 2 cm oder die Diagonale zweier Kästchen als Radius gewählt. Dies ist in allen vier Klassen im gleichen Maße festzustellen. Die Abweichung nach unten für die Verwendung des

Kreises ist auf die ungewohnte Aufgabenstellung zurückzuführen. Bei einer erneuten Durchführung sollte entweder die Aufgabenformulierung in Kästchen anstatt Längeneinheiten oder aber mit maßstabsgetreuen Kästchen direkt auf Zentimeter abgeändert werden.

Die Interpretation der nichtvorhandenen Schnittpunkte gelingt in allen vier Klassen deutlich weniger häufig. Das war aufgrund der höheren Anforderungen auch zu erwarten. In der Klasse D_1 gibt es die meisten Lernenden, die diese Situation richtig interpretieren. Es folgen die Klassen P_1 und P_2 mit vergleichbaren Anteilen. In der Klasse D_2 können nur drei Lernende Punkte für ihre Argumentation erhalten. Inhaltlich muss der Kreis hier als Ortslinie der Punkte verstanden werden, die 2 Längeneinheiten vom Mittelpunkt entfernt sind. Die Klasse D_2 weist in Test 1 zum Vorwissen über den Kreis als Ortslinie signifikante Unterschiede zu P_1 und P_2 auf (vgl. Abschnitt 12.1.1) und liegt deutlich unter diesen, so dass die auffällig schwächere Interpretationsleistung mit dem fehlenden Wissen zum Kreis als Ortslinie erklärt werden kann. Vorhandenes Vorwissen kann helfen neue Lerninhalte zu verorten (vgl. Abschnitt 3.2.2).

Gleichzeitig erzielen nicht die beiden Klassen P_1 und P_2, die signifikant bessere Leistungen zum Kreis als Ortslinie in Test 1 aufweisen, auch in dieser Anwendungsaufgabe die besten Leistungen. Die Lernenden der Klasse D_2 erzielen durchschnittlich höhere Leistungen bei der Anwendung des Kreises. Dies könnte auf den Unterricht, in dem bei der Konstruktion der Mittelsenkrechten auch die Ortslinieneigenschaft des Kreises verdeutlicht wird, zurückgeführt werden (vgl. Abschnitt 12.2). Eine mögliche Erklärung bietet, die folgende Interpretation: Das zu Beginn der Unterrichtseinheit vorliegende Vorwissen kann bei einzelnen Lernenden im Unterricht vertieft bzw. vervollständigt werden, so dass in der Klasse D_1 durch die Unterrichtseinheit zur Mittelsenkrechte ein tiefergehendes Verständnis zum Kreis als

Ortslinie erfahren werden konnte. Dies macht sich letztlich in den durchschnittlichen Lernleistungen bemerkbar. Diese Vermutung kann durch die besonders guten Leistungen der Klasse D_1 zur Konstruktion der Mittelsenkrechten und ihrer Definition in Aufgabe 1 sowohl kurzfristig (Test 2) als auch langfristig (Test 3) gestärkt werden (vgl. Abb. 44).

Einige Anmerkungen zum Bewertungshorizont und -vorgehen scheinen hier sinnvoll. Im Gegensatz zu Klassenarbeiten wurden keine Folgefehler, d. h. richtige Interpretation anhand falsch eingezeichneter Kreise oder Mittelsenkrechten, vorgenommen. Kommt es durch die Verwendung eines falschen Radius zu einem Schnittpunkt zwischen Kreis und Mittelsenkrechter, führt die inhaltlich richtige Interpretation des Schnittpunktes trotzdem zu 0 Punkten. Die Durchschnittswerte können daher nicht mit Leistungen aus Klassenarbeiten verglichen werden und geben auch nicht die tatsächliche Interpretationsleistung der Lernenden wieder. Das Bewertungsschema ist weniger für eine Interpretation der Leistung hilfreich, sondern fokussiert auf das richtige Lösen der Aufgabe. Schließlich soll gezeigt werden, dass die Interpretation von einem nicht existierenden Schnittpunkt auch auf die Nicht-Existenz des gesuchten Punktes übertragen wird.

13.3.3 Diskussion zu Test 2 – Aufgabe 2b Fallunterscheidung

Das Durchführen einer Fallunterscheidung stellt Siebtklässler vor eine Herausforderung. Nur wenigen Lernenden gelingt eine erfolgreiche Lösung. Zwischen den Klassen gibt es keine signifikanten Unterschiede. Die möglichen Vorteile für die problemorientierten Klassen aus Tab. 27 werden verworfen.

In allen Klassen liegt der Median bei 0 %. Die Klasse P_1 erreicht ein arithmetisches Mittel von 21,43 %. Es folgen P_2, D_1 und am Ende D_2 mit 7,14 %. Die Leistungen sind in allen vier Klassen sehr gering und es sind kaum Unterschiede in den Leistungen auszumachen. Die Anzahl der Bearbeitungen ist zu gering für generellere Aussagen.

Ein Analyseergebnis ist dennoch zu nennen: Die Klassen unterscheiden sich in ihren Bearbeitungsweisen. Während in den Klassen P_1, P_2 und D_1 die Bearbeitungsquote bei knapp 27 % liegt und diese Lösungen fast alle mit Punkten versehen werden, geben in der Klasse D_2 mit knapp 86 % dreimal so viele Schülerinnen und Schüler eine Antwort ab. Von diesen Lösungsversuchen können nur wenige als teilweise richtig bewertet werden.

Diese Ergebnisse können zunächst überraschen, konnte in der Theorie meist von besserem Durchhaltevermögen bei problemorientiert unterrichteten Lernenden gelesen werden (vgl. Abschnitt 4.2) und damit auch auf eine höhere Bearbeitungsquote geschlossen werden. Im Nachgang stellt sich heraus, dass die Mathematiklehrerin der Klasse D_2 im besonderen Maße ihre Schülerinnen und Schüler auffordert jede Aufgabe zu bearbeiten. Auch in Klassenarbeiten und im Unterricht werden die Lernenden aufgefordert Ideen zu formulieren, unabhängig von der Richtigkeit oder der Gewissheit dieser. Diese Aufforderung durch die Lehrperson wurde bei der Durchführung von Test 2 beobachtet und in einem anschließenden Gespräch mit der Lehrperson von ihr als regelmäßige Aufforderung bestätigt.

13.3.4 Diskussion zu Test 2 – Aufgabe 3 Begründung des gemeinsamen Schnittpunkts im Dreieck

Die Aufgabe 3 erfordert Erklärungen zum Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten im Dreieck. In den darbietend unterrichteten Klassen war deutlich mehr Zeit für Argumentationen zu dieser Thematik eingeplant. Tatsächlich hat die Klasse D_1 70 Minuten und die Klasse D_2 35 Minuten dafür im Unterricht verwendet. Die problemorientiert unterrichteten Klassen haben 25 bzw.

20 Minuten darauf verwendet (vgl. Abschnitt 12.2.6). Es waren demnach Unterschiede zu erwarten (vgl. Tab. 27). Die Klasse D_2 kann die besten durchschnittlichen Leistungen erzielen. Es liegen signifikante Unterschiede zwischen D_2 und P_1 sowie zwischen D_2 und P_2 vor.

In den problemorientiert unterrichteten Klassen liegt der Median bei 0 % der Punkte. Die Unterschiede zwischen P_2 und D_1 mögen anhand der Boxplots und den vergleichbaren arithmetischen Mittelwerten noch nicht deutlich sein, die Detailanalyse zeigt, dass in der Klasse P_2 mit 50% ein hoher Anteil der Bearbeitungen mit 0 Punkten bewertet wird. Das gilt auch für P_1.

In der Klasse D_1 führt die viele Unterrichtszeit nicht zu besseren Leistungen. Mit einem Viertel der Lernenden gibt ein hoher Anteil der Lernenden keinen Lösungsversuch ab und auch die Anzahl der guten Lösungen (mit 3-4 Punkten) ist mit 2 Lernenden gering.

Für die beiden problemorientiert unterrichteten Klassen wäre ein sehr hoher Transfer des Wissens, das sie beim Lösen der Brunnenaufgabe und den weiteren Übungen zur Mittelsenkrechten im Unterricht erworben haben, nötig. Einer der Vorteile des eigenständig entdeckten Wissens soll in einer besseren Übertragbarkeit des Wissens auf weitere Problemstellungen liegen (vgl. Abschnitt 3.3.2.1). Dies scheint nur wenigen Lernenden im Ansatz zu gelingen. In der Klasse P_1 ist das Maximum 37,50 %. Die Ergebnisse lassen den Schluss zu, dass diese Begründungsaufgabe in den problemorientiert unterrichteten Klassen nicht gelöst werden kann. In beiden darbietend unterrichteten Klassen wird ein Median von 25 % erreicht. Das zeigt, wie komplex diese Begründungszusammenhänge sind. Auch kann kein Zusammenhang zur verwendeten Unterrichtszeit und den Leistungen festgesellt werden. Zwei Aspekte sind überraschend: Die Klasse D_2 kann trotz fehlender Leistungsspitze im

Vorwissentest und deutlich geringerer Unterrichtszeit die Argumentationen besser wiedergeben als die Klasse D_1. Ein Anteil von 21 % der Lernenden erhält 3 und mehr Punkte. Das zeigt eine Leistungsspitze, die für die Klasse D_2 bisher bei keiner Aufgabe zu sehen war. Diese Ergebnisse können Lehrpersonen darin bestärken, auch in leistungsschwächeren Klassen mit fehlender Leistungsspitze komplexere Begründungsaufgaben zu thematisieren. Betrachtet man den Unterrichtsverlauf, in dem diese Argumentation vorgenommen wird (3. und 4. Unterrichtsstunde), können folgende Elemente beobachtet werden: Die Lehrperson hebt hervor, dass es sich um einen Beweis handelt und man möglichst exakt abreiten möchte. Die Argumentationen werden an einer Zeichnung veranschaulicht und Schritt für Schritt von der Lehrperson teils vorgetragen und teils werden Definitionen und Kenntnisse von den Lernenden abverlangt und einbezogen. Zunächst wird die Konstruktion der drei Mittelsenkrechten vorgenommen und begründet. Verständnisfragen können gestellt werden und werden auch beantwortet. Anschließend wird nun wiederum für den Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten argumentiert, warum es genau einen gibt. Das geschieht im Unterrichtsgespräch. Der Merksatz wird gemeinsam formuliert. Abschließend wird das Vorgehen erneut erläutert. Bei der anschließenden Übungsaufgabe betont die Lehrperson, dass die Begründungen länger als ein Satz sein sollten. Beim Vergleichen der Schülerlösungen werden die Lernenden aufgefordert die Argumentation mit eigenen Worten wiederzugeben.

Es können mehrere Wiederholungen der Argumentation erkannt werden. Ebenso wird von den Lernenden mehrfach die eigenständige Begründungsformulierung eingefordert. Gleichzeitig bliebt Raum und Zeit für Nachfragen. Auch Äußerungen wie die von D216: „Sie haben das jetzt so lange erklärt und dann …. Ich bin raus." machen zum einen deutlich, dass es Lernende gibt, die versuchen die Argumentationen nachzuvollziehen und zum anderen, dass ein Eingeständnis und Nachfragen zur Unterrichtskultur gehört.

In der Klasse D_1 hingegen fällt die inhaltliche Diskussion und Argumentation deutlich geringer aus. Absprachen und technische Klärungen zum Radius kommen stärker zur Ansprache.

Die Unterschiede zwischen den darbietend und problemorientiert unterrichteten Klassen passen grundlegend zu den Erwartungen, die sich auf die Unterrichtsplanung stützen. Im darbietend unterrichteten Ansatz wurde ein Unterrichtsschwerpunkt eben auf die mit der Aufgabe 3 erfragten Argumentationszusammenhänge gelegt. Diesen Schwer4punkt gab es beim problemorientierten Ansatz nicht. Für die problemorientierten Klassen erforderte die Aufgabe daher einen hohen Transfer.

Eventuell hätte man höhere Durchschnittswerte für alle vier Klassen erwartet. Insbesondere für die problemorientiert unterrichteten Klassen war die Frage interessant, inwiefern diese hohe Transferleistung gelingen kann und sich der problemorientierte Ansatz auszeichnet. Es zeigt sich, dass eine Übertragbarkeit auf diese Argumentationsaufgabe in keiner problemorientierten Klasse gelungen ist. Dies liegt wahrscheinlich auch an den inhaltlichen Erwartungen beim Lösen dieser Begründungsaufgabe, so dass zusätzlich hohe Anforderungen an logische Bezüge und sprachliche Formulierungen gestellt werden. Diese können sicherlich nicht nebenbei erworben und übertragen werden.

13.3.5 Diskussion zu Test 2 – Aufgabe 4 Mittelpunkt eines Kreises gesucht

Die Aufgabe 4 bietet eine Situation, die schnell erfasst werden kann. Ebenso ist der Endzustand schnell ersichtlich, es soll der Kreismittelpunkt markiert werden (vgl. 9.1.4.5). Das wird durch die sehr hohe Bearbeitungsrate bestätigt. Die Schwierigkeit liegt darin, einen tragfähigen Ansatz auszuwählen und darin zu erkennen, welche Erklärungen und Begründungen für diesen Ansatz notwendig sind. Der Ansatz A) Dreiecksumkreis, lässt den gegeben Kreis als Umkreis eines beliebigen Dreiecks verstehen. Wird dieser Ansatz erkannt, kann nach dem Einzeichnen eines Dreiecks Wissen aus dem Unterricht direkt angewendet werden und es werden somit kaum Begründungen erforderlich, da dies mit dem Umkreismittelpunktsatz folgt. Bei den anderen Ansätzen gelingt dies weniger, zumindest müssen hier einzelne Schritte begründet werden. Das gilt beispielsweise für den Ansatz B2) zwei Sekanten. Wird der Ansatz A) Dreiecksumkreis nicht gewählt, kann die Aufgabe als Problemlöseaufgabe eingestuft werden. Es könnte demnach vermutet werden, dass die problemorientiert unterrichteten Klassen die Aufgabe besser lösen können sollten, da diese bereits Problemlöseprozesse zur Mittelsenkrechte erfahren haben (vgl. Tab. 27).

Andererseits kann davon ausgegangen werden, dass eben jene Lernenden den Ansatz A) wählen, die verstärkt den Umkreis im Unterricht thematisiert haben. Nicht nur die Häufigkeit des Vorkommens im Unterricht könnte eine Rolle spielen, sondern auch, inwiefern mithilfe des Dreiecksumkreis und dem gemeinsamen Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten argumentiert wurde. Die darbietend unterrichteten Klassen könnten einen Vorteil haben, da in dieser Unterrichtsplanung eben diese Argumentation einen Schwerpunkt bildet. Die Analyse des Unterrichtsgeschehens in den Abschnitten 12.2.5 und 12.2.6 hat gezeigt, dass der Umkreis in allen vier Klassen definiert wird. In der Klasse P_1 ist ein Unterrichtsgespräch entstanden, in dem Lernenden und Lehrpersonen gemeinsam die Argumentationen zum gemeinsamen Schnittpunkt der Mittelsenkrechten entwickeln und dabei den Umkreis entdecken. Vergleichbar dazu ist der Verlauf in der Klassen D_1. Auch hier wird ausgiebig im Unterrichtsgespräch unter Einbezug der Lernenden und Anleitung der Lehrperson diskutiert. Die Argumentationen werden hier im Vergleich am häufigsten wiederholt. Die generell ruhigere Klasse P_2 kommt nur schwer in den Austausch. Die Lehrperson nennt sowohl die Argumentation wie auch die Umkreisdefinition. Auch im Unterricht der Klasse D_2 gelingt es nicht, den Fokus auf die inhaltliche Argumentation zu richten. Die Nachfragen beziehen sich auf Festlegungen zum Radius. Das Entstehen eines fokussierten Unterrichtsgesprächs, bei dem es gelingt die Lernenden die Argumentation mitgestalten zu lassen und ihr Vorwissen einzubeziehen, scheint sich beim Ergebnis der schriftlichen Tests positiv bemerkbar zu machen. Das deute auf einen positiven Zusammenhang zwischen anregender, inhaltlichen Kommunikation im Unterricht und dem späteren Übertragen und Anwenden der Argumente in einer Testsituation.

Die Unterschiede zwischen den Klassen P_1 und D_1 werden deutlich, betrachtet man den gewählten Ansatz. In der Klasse P_1 variieren die verwendeten Lösungsansätze stärker. Die signifikant besseren Leistungen der Klasse P_1 bei dieser Aufgabe sind darauf zurückzuführen, dass insgesamt knapp die Hälfte der Lernenden die Mittelsenkrechte zur Lösung anwenden. Die meisten Lernenden verwenden einen Ansatz, der auf das Einzeichnen zweier Sekanten beruht. Die passenden Begründungen fehlen, um volle Punktzahl vergeben zu können.
In der Klasse D_1 wird der Lösungsansatz A) Dreiecksumkreis am häufigsten gewählt und führt bei korrekter Ausführung zu 4 Punkten. Es kommt zu einer extremeren Verteilung als in der Klasse P_1, in dem es viele sehr gute und viele sehr schwache Lösungen gibt.
Gründe für die Auswahl des Lösungsansatzes kann es viele geben. Im Austausch mit einzelnen Lernenden oder Kleingruppen

können die Lehrpersonen unterschiedliche Hinweise geben haben. Auch Erklärungen von Eltern, Geschwistern oder Nachhilfelehrern können reinspielen, ebenso wie Vorerfahrungen aus dem Unterricht. Die Lösung zu einem Problem kann durch vielerlei Vorgehensweisen und Überlegungen entstehen. Manchmal geschieht dies wie durch eine Eingebung, einen Aha-Effekt. Die Untersuchung von Problemlöseprozessen wird in anderen Studien fokussiert (vgl. Kapitel 2).

13.3.6 Diskussion zu Test 2 – Aufgabe 5 Brunnenaufgabe mit verändertem Kontext

Die Aufgabe 5 ist eine Variation der Brunnenaufgabe. Nach der Unterrichtsplanung und den Unterrichtsbeobachtungen ist davon auszugehen, dass die problemorientiert unterrichteten Klassen diese Aufgabe deutlich besser lösen, da diese im Gegensatz zu den darbietend unterrichteten Klassen eine sehr ähnliche Aufgabe im Unterricht erarbeitet haben. Die vorab formulierte Vermutung wird damit bestätigt (vgl. Tab. 27).

Die Boxplots der Klassen P_1 und P_2 sind identisch. Beide haben einen Median von 75 % der Punkte, das sind 3 von 4 Punkten. Gleichzeitig können 75 % der Lernenden mindestens 62,5 % der Punkte erreichen. Damit sind die gezeigten durchschnittlichen Leistungen für die Klasse P_2 vergleichbar zu den Leistungen aus der Reproduktionsaufgabe 1, für die Klasse P_1 sogar deutlich. Diese hohen durchschnittlichen Leistungen bei dem Lösen der Problemlöseaufgabe lassen darauf schließen, dass die Lernenden im Unterricht dem Lösungsvorgehen folgen konnten. Die Umsetzung des problemorientierten Unterrichts kann damit als erfolgreich bewertet werden, denn die Planung, die diesem Unterrichtsvorgehen zugrunde liegt, führt dazu, dass 75 % der Lernenden die Brunnenaufgabe in einem anschließenden Test richtig lösen können.

Die Klassen P_1 und P_2 weisen signifikant besser Leistungen auf als die Klasse D_1. Die Klasse D_2 hat einen Median von 62,5 % der Punkte und weist insgesamt überraschend hohe Leistungen auf. Zum Vergleich drei Viertel der Lernenden in den problemorientiert unterrichteten Klassen erreichen mindestens 62,5 % der Punkte. In der Klasse D_1 liegt dieser Anteil bei einem Viertel und in der Klasse D_2 bei einer Hälfte. Damit wird deutlich, dass die Klassen P_1 und P_2 besonders viele gute Leistungen produzieren.

Es gibt vier Bewertungsaspekte, die jeweils mit einem Punkt bewertet werden: Die Verwendung der Mittelsenkrechten, das richtige Einzeichnen aller Mittelsenkrechten, die Markierung der Grenzen und eine Erklärung des Vorgehens. Die Analyse zeigt, dass es den Schülerinnen und Schülern der Klasse D_2 ähnlich gut wie den problemorientiert unterrichteten Schülerinnen und Schülern gelingt die Mittelsenkrechten richtig einzuzeichnen (Bewertungsaspekt 1 und 2) und ihr Vorgehen angemessen zu erklären (Bewertungsaspekt 4). Ein erfolgreicher Transfer von erlerntem Wissen scheint stattzufinden. Deutliche Unterschiede werden beim Einzeichnen der Grenzen sichtbar (Bewertungsaspekt 3). Dies gelingt nur wenigen Lernenden aus den darbietend unterrichteten Klassen auf Anhieb. Der Anteil der problemorientierten Klassen liegt mit über 50 % doppelt so hoch wie der in den darbietend unterrichteten Klassen. Beim Einzeichnen der Grenzen muss der Überblick über die eingezeichneten Mittelsenkrechten behalten werden. An den Schnittpunkten der Mittelsenkrechten muss entschieden werden, entlang welcher der Geraden die Grenze verläuft. Die Übungsaufgaben zur Anwendung der Mittelsenkrechten zeigen eine Wirkung und gleichzeitig kann durch einfachen Transfer des Wissens zur Mittelsenkrechten nicht zwangsläufig die richtige Begrenzung eingezeichnet werden.

Die besonders guten Leistungen der problemorientiert unterrichteten Schülerinnen und Schüler können bei allen vier Bewertungsaspekten ausgemacht werden. Die Leistungen der Klasse D_1 können in keinem der vier Bewertungsaspekte an die Leistungen der anderen drei Klassen anknüpfen. Dieses Ergebnis war zu erwarten, da für die Lernenden die Aufgabe 5 eine neue anspruchsvolle Aufgabe darstellt. Den Lernenden der Klasse D_2 gelingt die richtige Anwendung der Mittelsenkrechten und die Formulierung von passenden Erklärungsansätzen vergleichbar gut. Damit weist die Klasse D_2 besonders gute Leistungen bei dieser mit einem hohen Transfer eingestuften Aufgabe auf. Die Klasse D_2 hat bei der Begründungsaufgabe 3 zu den Mittelsenkrechten im Dreieck im Vergleich die beste Klassenleistung erzielt. Inhaltlich können Parallelen zwischen den beiden Aufgaben gezogen werden. Auch die Brunnenaufgabe kann auf das Problem der Aufgabe 3, Schnittpunkt der Mittelsenkrechten im Dreieck, zurückgeführt werden, in dem die Brunnenpunkte A, K und S zu einem Dreieck ergänzt werden. Das besonders gute Abschneiden der Klasse D_2 könnte an den vergleichsweise starken Leistungen zur Begründung des gemeinsamen Schnittpunktes der drei Mittelsenkrechten im Dreieck ausgemacht werden.

Beim Einzeichnen der Grenzen zeigen sich Unterschiede zwischen den problemorientiert und den darbietend unterrichteten Klassen. Es scheinen die problemorientiert unterrichteten Lernenden einen deutlichen Vorteil davon zu haben, dass sie das Vorgehen bereits einmal ausgeführt haben. Generell kann hinterfragt werden, inwiefern die Brunnenaufgabe bereits als Routineaufgabe für die problemorientiert unterrichteten Klassen einzuordnen ist.

13.4 Diskussion der Detailanalyse Test 3 (F2.4)

Die theoretischen Erörterungen zum entdeckenlassenden und problemorientierten Lernen lassen die Vermutung entstehen, dass Lernende, die eigenständig Lerninhalte erarbeitet haben, diese auch langfristig besser behalten (vgl. Abschnitt 3.3.2). Demnach müssten die problemorientiert unterrichteten Klassen in Test 3 besser abschneiden. Gleichzeitig wird für darbietend erlerntes Wissen bei einer geeigneten Verknüpfung zum bestehenden Wissen davon ausgegangen, dass dieses besonders gut erinnert werde (vgl. Abschnitt 3.3.2). Demnach müssten die darbietend unterrichteten Klassen bessere Leistungen in Test 3 aufweisen. An dieser Stelle wird die Forschungsfrage 2.3 aufgegriffen: Inwiefern können Unterschiede im Hinblick auf die langfristigen Lernleistungen zur Mittelsenkrechten aufgezeigt werden?

Die Diskussion der Ergebnisse von Test 3 ist insofern schwieriger als es für Test 2 der Fall war, da nach dieser Zeit noch mehr Einflüsse auf die Lernenden und ihr Wissen und Lerninhalte eingeflossen sind. Der Unterricht selbst liegt vergleichsweise lange zurück und hat womöglich aufgrund der vielen anderen Eindrücke nur noch eine geringe Auswirkung auf den Lernprozess selbst. Zusammenhänge können ohnehin nur als Vermutungen geäußert werden.

13.4.1 Diskussion zu Test 3 – Aufgabe 1 Definition und Konstruktion der Mittelsenkrechten

Die Aufgabe 1 erfasst das Reproduktionswissen zur Definition, Konstruktion und weiteren Begriffseigenschaften der Mittelsenkrechten. Die Ergebnisse aus Test 2 zeigen, dass die Leistungen der vier Klassen sehr ähnlich sind. Die Klasse P_1 zeigt deutlich schwächere Leistungen bei der Formulierung der Mittelsenkrechtendefinition als in Test 2, die im Gesamtergebnis nicht ins Gewicht fallen.

Die Lernleistungen zum Zeitpunkt des Test 3 zeigen keine signifikanten Unterschiede zwischen den Klassen auf. Die Klassen P_1, D_1 und D_2 haben sehr ähnliche Durchschnittswerte von ca. 55 %. Für die Klasse P_2 ist ein größerer Leistungsabfall auf einen Durchschnittswert von 40 % festzuhalten.

Damit kann zusammenfassend formuliert werden, dass die Klasse D_1 mit sehr geringem Abstand zu P_1 und D_2 die beste Lernleistung zu Definition und Konstruktion der Mittelsenkrechten langfristig aufzeigt. Diese drei Klassen zeigen auch langfristig gute durchschnittliche Leistungen. Die Klasse P_2 zeigt einen deutlicheren Leistungsabfall.

Zu diskutieren bleibt zum einen die Entwicklung der Klasse P_1 bezüglich der Definition der Mittelsenkrechten von Test 2 zu Test 3 und zum anderen der Leistungsabfall der Klasse P_2 in Test 3.

Zur Entwicklung der Klasse P_1: Die Klasse P_1 erreicht mit knapp 50 % durchschnittlich mehr Punkte für die Definition in Test 3 als die Klassen P_2 und D_2. Das entspricht 85% der erbrachten Leistung aus Test 2. Dieser Anteil ist in der Klasse D_1 mit etwa 75 % ebenfalls hoch. Die anderen beiden Klassen erreichen etwas mehr als die Hälfte der erbrachten Punkte in Test 2. Die Klasse P_1 kann damit ihre Leistungen langfristig halten und liegt im Mittelfeld. Ein Vergessen scheint damit weniger deutlich auszuschlagen, wodurch sich die deutlich schwächeren Leistungen in Test 3 relativieren.

Zum Leistungsabfall der Klasse P_2: Die Klasse P_2 erreicht bei der Wiedergabe der Definition die wenigsten Punkte der vier Klassen. Während die Klassen P_2, D_1 und D_2 ihre Leistungen zur Konstruktion der Mittelsenkrechten aus Test 2 auch in Test 3 wiederholen können, fällt die Klasse P_2 deutlicher ab. Ein noch stärkerer Leistungsabfall als in Teilaufgabe a) erfolgt bei der Teilaufgabe c). Die Klasse P_1 kann weniger als die Hälfte der Punkte aus Test 2 erreichen.

Diese Unterschiede können kaum mit den beiden Unterrichtsansätzen in Verbindung gebracht werden. Die Unterrichtsbeobachtungen zeigen, dass die Definition mehrfach aufgegriffen wurde und auch in Test 2 zu guten Leistungen in der Klasse P_2 geführt hat (vgl. Abschnitte 12.2 und 12.3.1). Gleichzeitig konnte festgestellt werden, dass die Schülerinnen und Schüler der Klasse P_2 kaum in den Austausch in Partner- oder Gruppenarbeit gehen. Die Kommunikation zwischen den Kindern war sehr zurückhaltend. Hierin kann eine mögliche Erklärung liegen. Durch das weniger starke Versprachlichen und Argumentieren in eigenen Worten, wird das Erlernte langfristig weniger gut abgerufen. Viele weitere nicht erhobene Faktoren können das Lernen und Behalten beeinflussen. Eine weitere plausible Erklärungen für den Leistungsabfall könnte in einem ungünstigen Zeitpunkt von Test 3 für diese Klasse liegen. Diese Daten wurden nicht erhoben und daher kann kein Zusammenhang als Vermutung formuliert werden.

13.4.2 Diskussion zu Test 3 – Aufgabe 2a Innermathematische Anwendung der Mittelsenkrechten

Die Aufgabe 2a erfordert eine Anwendung der Mittelsenkrechten und einer Parallelen. Es ist eine innermathematische Anwendung, die eine ungewohnte Interpretation erfordert.
Zwischen den vier Klassen können keine signifikanten Unterschiede ausgemacht werden. Die arithmetischen Mittel zwischen $\bar{p}_1 \approx 51\,\%$ und $\bar{d}_1 \approx 59\,\%$ und liegen vergleichsweise nah beieinander.
Im Vergleich zu Aufgabe 1, bei der langfristig alle Leistungsniveaus etwas abfallen, ist hier in allen Klassen ein anderer Trend zu erkennen. Die Leistungen streuen in Test 3 deutlich stärker als in Test 2. Gleichzeitig ist der durchschnittliche Leistungsabfall von Test 2 zu Test 3 geringer. Es gibt deutlich mehr sehr

gute und auch sehr schwache Leistungen in allen Klassen. Ein hoher Anteil von 40 % der Lernenden kann die Leistungen in Test 3 verbessern. Ebenso viele verschlechtern ihre Leistungen. Da es sich um eine Anwendungsaufgabe handelt, führen nicht ausschließlich Erinnerung und Reproduktion zu einer erfolgreichen Bearbeitung. Im Vergleich zu Test 2 gibt es auch inhaltliche Änderungen der Aufgabenstellung. In Test 3 findet nicht der Kreisbegriff Anwendung, sondern der der Parallelen. In Test 1 zum Vorwissen konnten keine signifikanten Unterschiede zwischen den Klassen im Vorwissen zu Parallelen festgestellt werden (vgl. Abschnitt 12.1.1). Die Klasse D_2 zeigt die geringsten durchschnittlichen Leistungen in Test 1 in Aufgabe 2, weicht aber nur gering von der Klasse P_1 ab.
Der Rückbezug auf einen im Unterricht nicht direkt thematisierten mathematischen Begriff kann auch die Streuungen der Schülerleistungen erklären. Die Parallele wurde in der Unterrichtseinheit zur Mittelsenkrechten nicht thematisiert und daher wird langfristig angelegtes Wissen erforderlich. Das heißt Wissen, das nicht unbedingt in der zurückliegenden Unterrichtseinheit thematisiert wurde. Einige Lernende können auf das Wissen zurückgreifen und erreichen dafür einen Punkt, andere können das Wissen nicht abrufen und erreichen damit 0 Punkte. Teilpunkte wurden nicht vergeben. Das Bewertungsschema sieht vor, dass nur Punkte für die Interpretationen vergeben werden, wenn für das Verständnis ein Punkt vergeben wird. Die große Anzahl an sehr guten Leistungen kann ein Hinweis dafür sein, dass die erforderte Interpretation in Test 3 den Lernenden leichter gefallen ist als die entsprechende Interpretation in Test 2. Zusätzlich fällt die Unklarheit beim Einzeichnen weg: Die Gerade ist eingezeichnet. Das Einzeichnen des Kreises in Test 2 war aufgrund der Angabe des Radius missverständlich für die Lernenden.

Diese Überlegungen erklären die breitere Leistungsspitze und auch die stärkere Streuung im Vergleich zu Test 2. Weitere inhaltliche Interpretationen können aufgrund der verschiedenen mathematischen Begriffe nicht vorgenommen werden. Es bleibt bei vergleichbaren Lernleistungen der vier Klassen mit ähnlichen arithmetischen Mitteln und starker Streuung für eine innermathematische Anwendungsaufgabe zur Mittelsenkrechten. Die geringen Unterschiede können anhand der erhobenen Daten nicht mit der Unterrichtsvariante in Verbindung gebracht werden.

13.4.3 Diskussion zu Test 3 – Aufgabe 2b Fallunterscheidung

Es liegen keine signifikanten Unterschiede zwischen den Klassen vor. Der Median liegt bei 0 %. Nur ein Schüler aus den vier Klassen erhält 1 Punkt (aus P_1). Die arithmetischen Mittel liegen zwischen $\tilde{d}_1 \approx 22$ % und $\tilde{p}_1 \approx 12$ %.

Bereits in Test 2 wurde festgestellt, dass nur sehr wenige Schülerinnen und Schüler die Aufgabe erfolgreich bearbeiten, so dass zumindest Teilpunkte vergeben werden. Daher sind Interpretationen und Vergleiche aufgrund der geringen Datenmenge eher unsicher. Dies wird durch die geringe Differenzierung bei der Bewertung in 0, 0,5 und 1 Punkte bestärkt. Weitere Analysen oder Interpretationen erscheinen daher müßig.

13.4.4 Diskussion zu Test 3 – Aufgabe 3 Begründung des gemeinsamen Schnittpunkts im Dreieck

Diese Argumentationsaufgabe stellt hohe Anforderungen an die Schülerinnen und Schüler, auf die der darbietende Unterricht expliziter vorbereitet hat. Daher unterschieden sich die Anforderungen an die Klassen in einem hohen Transfer für die problemorientierten Klassen und einem nahen Transfer für die darbietenden Klassen. In Test 2 konnten beide darbietend unterrichteten Klassen mit einem Median von 25 % bessere Ergebnisse erzielen als die problemorientiert unterrichteten Klassen.

Diese wiesen mit einem Median von 0 % keine Transferleistungen auf.
Die Begründungsstrukturen, die beim Lösen der Aufgabe erforderlich sind, sind für die Schülerinnen und Schüler relativ komplex und daher ist von einem Leistungsabfall in Test 3 auszugehen. Die Ergebnisse von Test 3 zeigen keine Unterschiede mehr zwischen den Schülerleistungen aus den vier Klassen. Der größere Leistungszuwachs aus Test 2 kann von den darbietend unterrichteten Klassen nicht langfristig abgerufen werden. Dies kann auf zwei Arten interpretiert werden: 1) Die Lernenden konnten die komplexen Begründungen langfristig nicht erinnern und haben einen hohen Anteil an Wissen wieder vergessen oder 2) Die Lernenden haben die Begründungen nicht durchdrungen und für Test 2 auswendig gelernte Passagen angegeben. Dieses Wissen können sie offensichtlich nicht erinnern.
Einige Schülerinnen und Schüler, die durch besonders gute Leistungen in Test 3 auffallen, haben an der Interviewbefragung teilgenommen. Es stellt sich daher die Frage, inwiefern die Teilnahem die Leistungen der Lernenden beeinflusst haben könnte (vgl. Tab. 72).
Auch langfristig ist kein Transfer der Lernleistung bei den problemorientiert unterrichteten Klassen erfolgt. Es kann vermutet werden, dass die Anforderungen an den Transfer bzw. die verschiedenen Anforderungsebenen zu anspruchsvoll sind, als dass hier eine eigenständige Transferleistung zu guten Ergebnissen führt.

13.4.5 Diskussion zu Test 3 – Aufgabe 4 Mittelpunkt eines Kreises gesucht

Die Aufgabenstellung 4 hat in allen Klassen für viele Schülernachfragen gesorgt. Die Lernenden wollten im Anschluss an Test 2 eine Lösung zu der Aufgabe erfahren. Diese unbekannt Aufgabenstellung hat eine Neugierde und Wissbegierde bei einigen Lernenden geweckt. Es war den Lehrern überlassen, inwiefern die Aufgabenstellung in den nächsten Stunden aufgegriffen wird. Wir einigten uns darauf, dass bei Nachfrage der Lernenden kein Wissen vorenthalten werden sollte. In allen vier Klassen wurde die Aufgabe in der nachfolgenden Mathematikstunde angesprochen. In den Klassen P_2, D_1 und D_2 wurde der Lösungsweg A) des einbeschriebenen Dreiecks an der Tafel erläutert. Die Lehrperson der Klasse P_1 hat die Problematik mündlich aufgegriffen, Anregungen für die weitere Lösungsfindung und Hilfestellungen geben. Er entschied sich gegen das Vorzeigen eines passenden Lösungsweges an der Tafel und wollte lieber Problemlöseanreize setzen.

Diese Entscheidungen liefern eine mögliche Erklärung für die Ergebnisse in Test 3. Die deutliche Zunahme des Lösungswegs A) in den Klassen P_2, D_1 und D_2 lassen sich durch diese Unterrichtsabläufe erklären. Auch den Unterschied zur Klasse P_1 kann man damit begründet werden. Aussagen über das langzeitige Erlenen der Mittelsenkrechten können damit kaum noch vergleichend angestellt werden.

Es bleibt zu betrachten, was in der Klasse P_1 passiert: Es gibt kaum einen Wechsel an Lösungsstrategien. Die Lernenden verwenden in der Regel den Ansatz, den sie auch in Test 2 gewählt haben. Einige wenige Lernende können ihre Leistungen nicht wieder abrufen. Mit Ausnahme von P123 sind es Ansätze, die in Test 2 maximal 2 Punkte erhalten haben. Fast ebenso viele Lernende erhalten bis zu 2 Punkte, obwohl sie in Test 2 keine Leistung abgegeben haben. Dieses relativ konstante Bild und die Tatsache, dass die Bearbeitungsquote sehr hoch ist, sprechen ebenso wie die Erklärungsquote von 36 % für gute Leistungen bei dieser Problemlöseaufgabe.

13.4.6 Diskussion zu Test 3 – Aufgabe 5 Brunnenaufgabe mit verändertem Kontext

Langfristig wird die Brunnenvariationsaufgabe von allen vier Klassen durchschnittlich gleich gut gelöst. Sie erreichen etwa 50 % der Punkte. Damit kommen die Leistungen zumindest für die Klassen P_1, D_1 und D_2 an die bei der Wiedergabe der Definition heran. Das ist beachtlich, betrachtet man den deutlich höheren Anspruch der Brunnenaufgabe für die darbietend unterrichteten Schülerinnen und Schüler. Die Klasse P_2 hat bei der Definitionswidergabe deutlich geringe Leistungen erreicht als in Test 2.

Viele Lernende können ihre guten Leistungen aus Test 2 bei dieser Aufgabe wieder abrufen. Damit könnte man spekulieren, inwiefern das konzeptuelle Wissen an dieser Stelle in prozedurales übergegangen ist, so wie dies bei Experten der Fall ist (vgl. Abschnitt 3.2.2). Der höhere Lösungsanteil der Erklärungen könnte diese Vermutung stützen.

Die Leistungen der Klasse D_1 sind besonders erstaunlich, schneiden sie in Test 2 signifikant schwächer ab als die problemorientiert unterrichteten Klassen. Es konnte beobachtet werden, dass die Lernenden nach der Durchführung von Test 2 ein besonderes Interesse an den Lösungen zu den Aufgabe 4 und 5 hatten. Die Aufgabe 5 wurde jedoch in keinem Unterricht anschließend thematisiert, zumindest waren das die Absprachen mit den unterrichteten Lehrpersonen. Inwiefern die Mittelsenkrechte oder sogar eine ähnliche Aufgabe zur Brunnenaufgabe in der Klassenarbeit oder im Unterricht vor der Durchführung von Test 3 erfolgt ist, kann nicht sicher gesagt werden. Zum anderen scheint es sehr zu motivieren, wenn in Testsituationen Aufgaben gestellt werden, die weniger trivial lösbar sind.

Geht man davon aus, dass die Inhalte der Brunnenaufgabe doch im Unterrichtsgeschehen aufgegriffen wurden (wie es auch bei der Kreisaufgabe geschehen ist), stellt sich die Frage inwiefern das mit Test 3 kurzfristig abgefragte Wissen auch langfristig zu solch guten Leistungen führt. In den problemorientiert unterrichteten Klassen bestand durch die Lernenden kein Bedarf, die Brunnenaufgabe zu diskutieren, so dass diese nicht erneut thematisiert wurde.

Geht man andersherum davon aus, dass die Inhalte nicht im Unterricht thematisiert wurden, so kann das Auffinden der richtigen Lösungsidee auch aus einer eigenständigen Entdeckung (oder im Austausch mit Mitschülerinnen und Mitschülern) im Anschluss an Test 2 entstanden sein. Einen Austausch unter den Lernenden verschiedener Klassen über die Aufgabenstellungen bestätigt eine der Lehrpersonen in einer Pausensituation. Dann wiederum würde es langfristig zumindest nach Bruner besser behalten werden und in Test 3 wieder abgerufen werden können (vgl. Abschnitt 3.3.2.3). Auch könnte dies die vergleichbaren Mittelwerte aller vier Klasen erklären. Die Motivation der Lernenden aus der Klasse D_1, sich die Lösung der Aufgabe anzueignen ist dann als bewundernswert anzusehen.

Der Leistungsabfall von Lernenden in den problemorientierten Klassen erscheint im Vergleich zum Zuwachs der Klasse D_1 erstaunlich hoch. Vergleicht man diese Ergebnisse nun mit den Auswertungen anderer Aufgaben, zum Beispiel der Aufgabe 1, in der Leistungen zu Definition und Konstruktion erhoben werden, können die durchschnittlichen Leistungen bei der Brunnenaufgabe von 50% als positiv bewertet werden (vgl. Abb. 44).

Dennoch muss man die Frage stellen, inwiefern der ausführliche Einsatz der Problemlöseaufgabe im Unterricht und die damit verbundene Unterrichtsgestaltung sich langfristig rentieren, erreichen die darbietend unterrichteten Klasen doch in Test 3 vergleichbare und sogar bessere Leistungen. Man kann sich fragen, warum die Lernenden die bereits erbrachten sehr hohen Leistungen aus Test 2 nicht wieder abrufen können. Ist die Prozeduralisierung des Wissens nicht (vollständig) erfolgt? Entspricht dies dem (natürlichen) Vergessensprozess, dafür würde der Verglich zu Aufgabe 1 sprechen. Man könnte auch überlegen, inwiefern hier der Abstand zum Erlernen der Aufgabe für beide Unterrichtsansätze tatsächlich vergleichbar ist oder ob das spätere Erlernen in den darbietende unterrichteten Klassen hier einfließt. Auch hat die Aufgabe selbst eine andere Stellung in den beiden Ansätzen. Bei den problemorientiert unterrichteten Klassen ist sie Unterrichtsinhalt. Für die darbietend unterrichteten Schülerinnen und Schüler ist Test 2 der erste Auseinandersetzungszeitpunkt mit der Aufgabe. Dies könnte sich auf Motivation, Interesse und Durchhaltevermögen auswirken (vgl. Kipman 2020, S. 110ff.).

14 Fazit

Die hier anschließenden Interpretationen bilden den Schluss dieser Forschungsarbeit. Es werden zunächst die Forschungsfragen beantwortet (Abschnitt 14.1). In Abschnitt 14.2 wird das Forschungsvorhaben ausgehend vom Forschungsdesign (Abschnitt 14.2.1) und in Bezug auf Einschränkungen und Aussagekraft (Abschnitt 14.2.2) reflektiert. In Abschnitt 14.3 folgen mögliche Konsequenzen für den Mathematikunterricht. In dem letzten Abschnitt 14.4 wird ein abschließendes Resümee und einen Ausblick vorgenommen.

14.1 Beantwortung der Forschungsfragen

Die in Kapitel 6 aufgestellten Forschungsfragen sollen hier zusammenfassend, kurz beantwortet werden. Für den Forschungsaspekt I zur Durchführbarkeit mit Blick auf eine generelle Vergleichbarkeit der vier Klassen hinsichtlich der drei Tests und den Unterrichtsbeobachtungen folgen die Antworten aus den Diskussionen in Kapitel 11. Diese werden in Abschnitt 14.1.1 gebündelt dargestellt.

Die Detailanalysen eben dieser erhobenen Daten werden in Kapitel 13 diskutiert und zur Beantwortung des Forschungsaspekts II herangezogen. Die Ausführungen schließen sich in Abschnitt 14.1.2 an.

14.1.1 Forschungsaspekt I – Durchführbarkeit

Vier siebte Klasse und ihre Mathematiklehrpersonen haben an der Interventionsstudie teilgenommen. Zwei der Klassen erhielten einen darbietenden Unterricht zur Mittelsenkrechen und zwei einen problemorientierten. Vor der Durchführung wurde das geometrische Vorwissen aller 87 Lernenden und ihre Problemlösefähigkeit erhoben. Direkt nach der Intervention und 16

Wochen später wurden die Lernleistungen der Schülerinnen und Schüler erfasst. Alle Testhefte und Bewertungshorizonte wurden in mehreren Phasen entwickelt erprobt und vorab pilotiert. Für die Bewertungsprozesse der Lernleistungen werden Zweitbegutachtungen vorgenommen. Anschließend wurden die Ergebnisse der Klassen auf signifikante Unterschiede mithilfe von Rangsummentests bestimmt. Die Ergebnisse dieser Berechnungen sind in den Kapiteln 10 und 12 dargestellt und in den Kapiteln 11und 13 ausführlich diskutiert worden. Die Unterrichtsverläufe wurden protokolliert und ausgewertet (Abschnitte 12.2 und 13.2). Hier werden die zentralen Erkenntnisse gebündelt, um so die Forschungsfragen zu beantworten.

Zunächst wurden die Voraussetzungen für einen Vergleich zwischen den vier Klassen mithilfe der Analysen des Vorwissens und der Unterrichtsabläufe getätigt.

Das geometrische Vorwissen zeigte sich als vergleichbar zwischen allen vier Klassen, obwohl in einer der darbietend unterrichteten Klasse die Leistungsspitze fehlte (vgl. Abschnitt 10.1). Die Ergebnisse der Problemlöseaufgabe in Test 1 bestätigten die Lehrereinschätzungen: Die problemorientiert unterrichteten Klassen wiesen bessere Leistungen auf als die darbietend unterrichteten Klassen. Diese Unterschiede waren teilweise signifikant (vgl. Abschnitt 10.2). Die Zuordnung zu den beiden Interventionen führte somit zu einer positiven Selektion.

Die Umsetzung der Unterrichtsinterventionen konnte in allen vier Klassen nach Planung und innerhalb der angesetzten sechs 45-Minuten-Stunden erfolgen. Damit konnte die Umsetzung bezüglich Unterrichtszeit, Unterrichtsinhalte und -umfang als angemessen für siebte Klassen bewertet werden (vgl. Abschnitt 10.3).

Des Weiteren bezieht sich der Forschungsaspekt I) auf die generelle Vergleichbarkeit der beiden Unterrichtsansätze in Bezug auf Zeit und Lernleistung:

F1.1/1.2: Inwiefern sind die Lernleistungen im direkten Anschluss an den Unterricht / langfristig klassenweise vergleichbar?

Die Analysen zeigten, dass die vier Klassen generell vergleichbare Leistungen aufweisen konnten. Alle vier Klassen zeigen zu beiden Testzeitpunkten erstaunlich ähnliche Leistungen bezüglich ihres Wissens, der Anwendung und dem Transfer der Mittelsenkrechten (vgl. Abschnitt 10.4). Auch konnten die Schülerinnen und Schüler zu beiden Testzeitpunkten ähnliche Mittelwerte erreichen, wodurch ein Vergessen von Inhalten nicht sichtbar wird.

Die Durchführung einer problemorientierten Unterrichtseinheit zur Mittelsenkrechte konnte demnach in derselben Unterrichtszeit zu vergleichbaren Leistungen führen wie durch einen darbietenden Unterricht. Die Befürchtung, dass ein problemorientierter Unterricht mehr Zeit beansprucht und zu geringem Wissen führe, wurde nicht bestätigt. Diese Ergebnisse können alle Lehrerinnen und Lehrern dazu ermutigen, häufiger problemorientiert Begriffe erarbeiten zu lassen (vgl. Abschnitt 11.3).

14.1.2 Forschungsaspekt II – Detailanalysen und Unterrichtsbeobachtungen

Der Forschungsaspekt II) fokussiert auf Detailanalysen der Unterrichtsbeobachtungen und Leistungstests. Zur Beantwortung dieser Fragen wurden die Daten aufgabenweise analysiert (vgl. Kapitel 12).

Die Auswertung von Test 1 erfolgt unter folgendem Aspekt:

F2.1. Gemeinsamkeiten und Unterschiede des inhaltlichen Vorwissens und der Problemlösetätigkeit

Drei der Klassen zeigten sehr ähnliches Vorwissen zu Abstand von Punkt und Geraden, Kreisen und Parallelen. Durchschnittlich wurden 50 % der Punkte erreicht (vgl. Abschnitt 12.1.1). Die Vorkenntnisse zur Mittelsenkrechten waren in allen vier Klassen ähnlich gering. Das war zu erwarten, da die Mittelsenkrechte bisher nicht im Unterricht behandelt worden ist (vgl. Abschnitt 13.1). Einer darbietend unterrichteten Klasse fehlten besonders leistungsstarke Schülerinnen und Schüler (vgl. Abschnitt 12.1.1).

Die Bearbeitung der Problemlöseaufgabe zeigte Unterschiede zwischen den Klassen. Die problemorientiert unterrichteten Klassen zeigten deutlich bessere Leistungen. Die Unterschiede waren zu einer der darbietend unterrichteten Klasse signifikant (vgl. Abschnitt 12.1.2). Diese Ergebnisse bestätigten die Zuordnung der Klassen zu den beiden Interventionen, so dass jeweils der geeignetere Unterrichtseinstieg für die Klasse ausgewählt wird (vgl. Abschnitt 13.1).

Die Unterrichtsabläufe wurden anhand der folgenden Fragestellungen detaillierter analysiert:

F2.2.1 Welche Möglichkeiten und Herausforderungen können anhand der Unterrichtsverläufe für einen problemorientierten Unterrichtseinstieg ausgemacht werden?

Die Unterrichtsbeobachtungen in den problemorientiert unterrichteten Klassen haben gezeigt, dass die Brunnenaufgabe Schülerinnen und Schüler dazu anregt, Fragen zu drei mathematisch tiefergreifenden Konzepten zu stellen:

1. Die Art der Gestaltung der Ortslinie, die alle Punkte enthält, die gleich weit von zwei Punkten entfernt sind.
2. Die Eigenschaft des senkrechten Verlaufs der Mittelsenkrechte zweier Punkte A und B zu der Strecke $\overline{AB}$ musste nun begründet werden.
3. Der Keis als Ortslinie und Hilfe für die Konstruktion geometrischer Objekte konnte erfahren werden (vgl. Abschnitt 12.2).

Es konnte beobachtet werden, dass die Schülerinnen und Schüler der beiden problemorientiert unterrichteten Klassen sich stark hinsichtlich ihrer Aktivitäten und Kommunikationsverhalten, insbesondere untereinander, unterschieden.

Die Lehrpersonen wurden durch das Aufkommen dieser Fragestellungen und Diskussionen vor neue Herausforderungen gestellt. Es wurden Kompetenzen in der Unterrichtsgesprächsführung ebenso erforderlich wie das Festhalten und Erläutern von Argumenten. Insgesamt wurde das Unterrichtsgeschehen weniger planbar und erforderte Flexibilität, Konzentration sowie fachliche Sicherheit von den Lehrpersonen (vgl. Abschnitt 13.2).

Es schlossen sich die Detailanalyse der Lernleistungen unter folgender Frage an:

> **F2.3.1/2.3.2: Welche Lernleistungen bezüglich der Mittelsenkrechten weisen die Schülerinnen und Schüler beider Unterrichtsansätze am Ende der Unterrichtseinheiten bzw. langfristig auf und inwiefern sind diese klassenweise vergleichbar?**

Die aufgabenbezogene Analyse ließ mehr Unterschiede zwischen den Klassen erkennen, als die Analysen der gesamten Testergebnisse vermuten ließen.

Die problemorientiert und darbietend unterrichteten Klassen wiesen vergleichbare Leistungen in Bezug auf die Wiedergabe der Definition der Mittelsenkrechten und der Konstruktion mit Zirkel und Lineal auf (vgl. Abschnitt 12.3.1). Damit wurden Wissensbereiche aus dem konzeptuellen und dem prozeduralen Wissen in den vier Klassen nach beiden Interventionsdurchführungen in vergleichbarem Maße reproduziert.

Auch langfristig konnten vergleichbare Reproduktionsleistungen für die Definition von Konstruktion der Mittelsenkrechten für drei der vier Klassen gesehen werden. Eine der problemorientiert unterrichteten Klassen zeigte einen deutlicheren (nicht signifikant deutlicheren) Leistungsabfall (vgl. Abschnitt 12.4.1).

Damit konnten die Ergebnisse amerikanischer Studien, in denen darbietend unterrichtete Lernende erhöhtes Faktenwissen aufzeigen, nicht bestätigt werden (vgl. Abschnitt 4.2).

Auch erste Anwendungen der Mittelsenkrechten führten zu ähnlichen durchschnittlichen Leistungen der Lernenden in allen vier Klassen, die im Durchschnitt die Leistungen der Reproduktionsaufgabe teilweise überstiegen. Vergleichbar waren auch die vorgenommen Lösungsschritte. Das galt sowohl kurz- wie auch langfristig. Der Leistungsabfall zwischen den beiden Testzeitpunkten war hier gering (vgl. Abschnitte 12.3.2 und 12.4.2).

Vorab wurde ein eventueller Vorteil für die problemorientiert unterrichteten Klassen für einen weiten Transfer vermutet (vgl. Abschnitt 9.1.6). Diese Vermutung wurden mit der Ergebnisanalyse verworfen. Die Ergebnisse der Klassen für die Transferaufgabe unterschieden sich deutlich voneinander und auch in ihrer Entwicklung von Test 2 zu Test 3 traten hier starke Veränderungen auf (vgl. Abschnitt 12.3.5). Die signifikanten

Unterschiede aus Test 2 konnten langfristig nicht aufrecht erhalten werden (vgl. Abschnitt 12.4.5). Eine Erklärung aufgrund der Zuordnung zu den beiden Unterrichtsansätzen erschien wenig zufriedenstellend, daher wurden die verwendeten Lösungsansätze der Schülerinnen und Schüler analysiert. Diese Analysen zeigten: Wurde der Kreis als Dreiecksumkreis erkannt, konnte die Aufgabe sehr wahrscheinlich mit maximaler Punktzahl gelöst werden. Die gesteigerte Verwendung dieses Lösungsansatzes in drei der vier Klassen konnte den positiven Trend von Test 2 zu Test 3 erklären. Langfristig konnte demnach diese Interpretation von vielen Lernenden vollzogen werden. Vermutlich konnte dies auf zusätzliche Erklärungen durch die Lehrpersonen dieser Klassen und einen Austausch der Lernenden untereinander erklärt werden (vgl. Abschnitt 12.4.5).

In der darbietenden Unterrichtsintervention wurde der Fokus auf den Begründungszusammenhang zum Satz der Mittelsenkrechten im Dreieck gesetzt. Die Ergebnisse zeigten anhand der geringen durchschnittlichen Leistungen, wie komplex dieser Inhalt ist. Die Leistungen waren in Test 2 allgemein schwach.

Die darbietend unterrichteten Klassen zeigten in Test 2 durchschnittlich bessere, teilweise signifikant bessere Leistungen als die problemorientiert unterrichteten Klassen bezüglich dieses Lerninhaltes (vgl. Abschnitt 12.3.4). Langfristig sanken die durchschnittlichen Leistungen in allen Klassen auf 0 und es waren kaum noch Unterschiede zwischen den vier Klassen auszumachen (vgl. Abschnitt 12.4.4). Das ließ den Schluss zu, dass der Aufbau von Begründungswissen und die Widergabe von mathematischen Argumentationen nach dieser Unterrichtszeit mit diesen Inhalten nicht vorgenommen werden konnte. Es braucht wahrscheinlich eine intensivere Auseinandersetzung, die Anwendung auf unterschiedliche Inhaltsbereiche und vielleicht auch stärkere Hilfestellungen zur eigenständigen Anwendung von Argumentationen.

Beide problemorientiert unterrichteten Klassen bearbeiteten die Brunnenvariationsaufgabe in Test 2 signifikant besser als eine der beiden darbietend unterrichteten Klassen. Die Mittelwerte waren mit denen zur Abfrage des Faktenwissens vergleichbar (vgl. Abschnitt 12.3.6). Das konnte als Bestätigung einer gelungenen Umsetzung der problemorientierten Unterrichtsintervention interpretiert werden. Beide Klassen konnten trotz beobachtetem unterschiedlichen Arbeitsverhalten diese Aufgabe sehr gut lösen.

Langfristig zeigten alle vier Klassen vergleichbar gute Leistungen (vgl. Abschnitt 12.4.6), so dass es für diesen Zeitpunkt keine signifikanten Unterschiede zwischen den Klassen gab. Viele Lernende konnten ihre Leistung aus Test 2 wiederholen. Eine der beiden darbietend unterrichteten Klassen kann die durchschnittlichen Leistungen aus Test 2 sogar verbessern. Es konnte beobachtet werden, dass für diese Aufgabe ein Austausch an Lösungsideen zwischen den Lernenden unterschiedlicher Klassen im Anschluss an Test 2 stattgefunden hat. Das erklärt den Leistungsanstieg in den darbietend unterrichteten Klassen.

Zusätzlich haben die Detailanalysen gezeigt, dass in der problemorientiert unterrichteten Klasse, in der ein starker Austausch unter den Schülerinnen und Schülern im Unterricht beobachtet werden konnte, wurden besonders gute Leistungen bei der Transferaufgabe erbracht (vgl. Abschnitt 12.2.3).

In mehreren Aufgaben wurden Erklärungen eingefordert. Es konnte zu keinem Testzeitpunkt deutliche Unterschiede zwischen den Klassen der beiden Unterrichtsinterventionen hinsichtlich der Anzahl der Erklärungen oder der Qualität der Erklärungen ausgemacht werden (vgl. Abschnitte 13.3.1 und 13.3.3).

In Bezug auf die in Abschnitt 6.2 aufgestellten Vermutungen zu den Forschungsfragen 2.3.1 und 2.3.2 kann im direkten Anschluss an die Unterrichtseinheit bestätigt werden, dass das Hauptlernziel besser behalten wird. Für den langfristigen Lernprozess kann dies wie auch die Aussagen aller weiteren Vermutungen nicht bestätigt werden.

14.2 Reflexionen

14.2.1 Durch das Forschungsdesign gegebene Reflexionsanlässe

Die Tests wurden so konzipiert, dass die Testaufgaben in der Zeit angemessen lösbar sind. Dies wurde durch eine Pilotstudie erprobt und konnte bei der Umsetzung der Hauptstudie beobachtet werden (vgl. *Bearbeitungszeit* in Abschnitt 9.1.3). Die Ergebnisse zeigen Durchschnittswerte im mittleren Bereich, so wie es in der Pilotierung geplant war (vgl. Abschnitt 9.1.3, Tab. 10 und Tab. 11). Die Überlegungen zum relativen leichten Zugang auch bei den Aufgaben mit Problemlösecharakter wie bei Aufgabe 4 konnten durch hohe Bearbeitungsraten bestätigt werden.

Bei einer erneuten Durchführung kann überlegt werden, den Begriff „ganzzahlig“ aus der Aufgabe 5 zu umgehen, um somit die fachsprachliche Hürde zu senken und stärker das systematische Vorgehen der Lernenden analysieren zu können. Gleichzeitig wird durch diese Wortabänderung die systematische Vorgehensweise näher gelegt (vgl. Abschnitt 13.1).

Die Festlegung der Punkte erfolgt mithilfe eines Bewertungshorizontes (vgl. Abschnitt 9.1.4). Sprachliche Ungenauigkeiten der Schülerinnen und Schüler führen zu mathematisch nicht korrekten Aussagen und damit zu weniger Punkten. Daher könnte es interessant sein, entweder auch die sprachliche Leistungen der Lernenden zu erfassen und / oder sprachliche Verwendungen mit in den Bewertungshorizont aufzunehmen.

Die Tests sind als Leistungstest konstruiert worden. Sie erfassen fachliches Wissen zur Mittelsenkrechten (vgl. Abschnitte 9.19.1.2 und 9.1.3). Es stellt sich die Frage, inwiefern durch die problemorientierte Herangehensweise weitere Bereiche von den Schülerinnen und Schülern erlernt wurden, die nicht erfasst werden. Dazu könnte zählen: Problemlösefähigkeiten, Motivation, Einstellungen zur Mathematik, metakognitive Eigenschaften. Für die Erfassung und Veränderung wäre die Anlage als Langzeitstudie interessant.

Es bleibt festzuhalten, dass mit den vier Aufgaben aus Test 1 das Ortslinienkonzept und damit ein sehr spezieller Teilaspekt des Vorwissens herausgegriffen und als inhaltlich für ein Verstehen der Mittelsenkrechte relevantes Wissen impliziert wird (vgl. Abschnitt 9.1.3). Weitere benötigte Teilaspekte für das Erlernen der Mittelsenkrechten bleiben unerfasst, wie zum Beispiel sprachliche oder aussagenlogische Kompetenzen. Gleichzeitig wäre es interessant zu wissen, inwiefern dieses theoretische, erörterte Wissen zu Ortslinien auch messbar als Vorwissen für das Verstehen der Mittelsenkrechten einen Einfluss hat. Sowohl für einen problemorientierten wie auch für einen darbietenden Unterricht kommt dem Vorwissen und der aktiven Anknüpfung an dieses eine entscheidende Rolle beim Lernverhalten zu (vgl. Abschnitt 3.1).

Die Umsetzung als Feldstudie birgt gewisse Nachteile, die vor allem in der Verallgemeinerung der Ergebnisse liegen (vgl. Abschnitt 7.5). Durch den experimentellen Ansatz in vier Schulklassen konnte ein weitreichender Einblick in das Unterrichtsgeschehen und die Lernleistungen erhalten werden. Ein Nebeneffekt durch die enge Zusammenarbeit mit den Lehrpersonen liegt auch in dem Austausch miteinander. Eine Lehrperson war sehr interessiert daran, ob die Durchführung der Brunnenaufgabe gelingen kann und inwiefern die Lernenden zielführende Lösungsideen haben oder die ersten Stunden reiner Zeitvertreib bleibe, ohne inhaltlichen Mehrwert. Die Feldstudie hat die Diskussionen unter den Lehrpersonen sowie ein Hinterfragen der eigenen Vorgehensweise angeregt. Die Fülle an Ideen, die auch von leistungsschwächeren Schülerinnen und Schülern zur Lösung der Brunnenaufgabe genannt wurde, hat die unterrichtenden Lehrpersonen überrascht. Diese Erfahrungen können mithilfe von Feldstudien erreicht werden.

Die Herausforderung des problemorientierten Unterrichts liegt sicher darin, nach der Präsentation der Schülerlösungen, die Ideen aufzugreifen, zu sortieren und zur gemeinsamen Definition zu führen, wurde deutlich (vgl. Abschnitte 12.2.3 und 12.2.4). Die Lehrerinnen und Lehrer wurden durch diverse Schülerlösungen zu der Aufgabe im Vorfeld vorbereitet. An dieser Stelle können noch weitere methodische und strukturierende Hilfen für den Unterricht vorgesehen werden. Es könnten die einzelnen Unterrichtsphasen stärker hervorgehoben werden sowie Fragestellung und Ziel. Für die Vergleichbarkeit der Lernergebnisse war es notwendig, einen gemeinsamen Wortlaut der Mittelsenkrechtendefinition festzulegen. In weiteren Durchführungen wäre eine Öffnung möglich, so dass Lernenden eigenständig formulieren.

Bei der Analyse zu Aufgabe 3 in Test 2 und 3 konnten Zusammenhänge zwischen der Teilnahme an der Interviewbefragung den Testleistungen für einzelne Lernende ausgemacht werden (vgl. Abschnitt13.4.4). Es ist davon auszugehen, dass durch die Interviews und die zusätzliche Auseinandersetzung der Schülerinnen und Schüler mit weiteren Aufgabenstellungen zur Mittelsenkrechten sich auch das Begriffsverständnis der Mittelsenkrechten bei den Lernenden verändert hat. Eine Überprüfung steht noch aus.

14.2.2 Aussagekraft und Eingrenzung

Die Studie ist als quasiexperimentelle Feldstudie hinsichtlich der generellen Aussagekraft limitiert. Es wurden vorab einige Anstrengungen unternommen, um möglichst viele Variablen konstant zu halten (vgl. Abschnitt 7.5.2.1), dennoch werden Feldstudien durch schwer zu kontrollierende Variablen bestimmt. Die Unterrichtseinheit wurde durch vier verschiedene Lehrpersonen in vier verschiedenen Klassen durchgeführt. Die unterschiedlichen Fähigkeiten der Lehrpersonen hinsichtlich Hilfestellungen, Gesprächsführung, Klassenführung, Umgang mit Definition und weiteren unterrichtsbezogenen und sozialen Eigenschaften könnte das Gelingen der Unterrichtsumsetzung beeinflusst haben. Trotz vergleichbarer Unterrichtsabläufe in den jeweils zwei Klassen der beiden Ansätze wurden durch die Vorgaben von Doppel- und Einzelstunden sowie durch unterschiedliche Arbeitsgeschwindigkeiten keine identischen Abläufe erzwungen. Die Zuteilung in Experimental- und Vergleichsgruppe konnte aufgrund der Umsetzung als Feldstudie nicht randomisiert werden (vgl. Abschnitt 7.5.2.2). Durch die Einschätzungen und damit vermutlich indirekt auch durch die bisherige Unterrichtspraxis fand eine positive Selektion statt. Da dies für alle vier Klassen gilt, kann von einem ausgleichenden Effekt ausgegangen werden.

Für die Beantwortung der Forschungsfragen wurden im Zuge dieser Forschungsarbeit drei Testhefte unter Einbezug allgemeiner Kriterien der Testentwicklung und gültiger Gütekriterien entwickelt (vgl. Abschnitt 9.1). Alle Testhefte sind mit dieser Arbeit vollständig abgebildet (Abschnitt 16.4), um so Transparenz und Zugänglichkeit dieser und weiterer Forschungsarbeiten zu ermöglichen. Tatsächlich haben sich bei den in den Kapiteln 12 und 13 durchgeführten Analysen Verbesserungs- bzw. Änderungsmöglichkeiten aufgetan. Für einen möglichen erneuten Einsatz werden an dieser Stelle zentrale Überlegungen zu den Testinstrumenten angeführt.

Für den Faktor des Vorwissens wurde mit Test 1 die Vergleichbarkeit zwischen den vier Klassen erhoben. Damit wurde ein Einflussfaktor zusätzlich erfasst. Weitere den Unterrichtsverlauf und den Lernerfolge beeinflussende Faktoren wurden nicht aufgenommen: Eine Vollständigkeit kann ohnehin nicht erreicht werden (vgl. Abschnitt 7.5.2.5). Dennoch könnte es beispielsweise interessant sein, die sprachlichen Kenntnisse der Schülerinnen und Schüler in Bezug zu ihren Leistungen bei mathematischen Begründungsaufgaben setzen zu können.

In den verwendeten Bewertungshorizonten werden sprachliche Ungenauigkeiten nicht berücksichtigt. Es besteh die Möglichkeit hier tiefergreifender unter einem stärker sprachlich-orientierten Fokus zu differenzieren (vgl. Abschnitt 13.3.1 oder 13.3.3).

Die Interpretation der Lernleistungen haben die Frage aufgeworfen, inwiefern die Testaufgaben sich eignen um eine Aussage über das erlernte Faktenwissen und die erlernte Erklärkompetenz treffen zu können (vgl. Abschnitt 13.3.1).

Ein grundlegender Hinweis bezieht sich auf die Einordung der Studie und mögliche Konsequenzen. Die Unterrichtseinheit bezieht sich mit dem Begriffslernen der Mittelsenkrechten auf einen spezifischen Bereich des Wissenserwerbs. Eine Übertragung auf andere Lerninhalte kann nur eingeschränkt erfolgen. An dieser Stelle können die Ergebnisse verschiedener Masterarbeiten genannt werden, in denen ähnliche Forschungsansätze zu weiteren mathematischen Inhalten wie Bruchdarstellungen, lineare Funktionen, geometrisches Begriffsbildung und das Volumen von Zylindern durchgeführt wurden. Nachfolgend werden diese vier Masterarbeiten zusammenfassend angeführt.

In einer quasiexperimentellen Vergleichsstudie hat Lisa Tüsfeld einen entdeckenden Einstieg mit einem lehrerzentrierten Einstieg zum Erweitern und Kürzen von Brüchen anhand der Lernleistung der Schülerinnen und Schüler zweier sechster Klassen einer Gesamtschule durchgeführt. Die beiden Klassen zeigen vergleichbare Leistungen nach der Intervention. Die entdeckend unterrichtete Klasse kann etwas höhere Durchschnittswerte erreichen (Masterarbeit Tüsfeld, 2019).

Zum Thema Einführung der linearen Funktionen wurde von Regina Matt eine quasiexperimentelle Vergleichsstudie in zwei achten Klassen einer Realschule mit den Ansätzen entdeckendes Lernen und Lehrervortrag untersucht. Im Anschluss zeigten beide Klassen vergleichbare Lernleistungen (Masterarbeit Matt 2018).

In zwei vierten Klassen einer Grundschule hat Tizian Smeets einen Ansatz mit einen fragend-entwickelnden und einen entdeckenlassenden Unterrichtsansatz zur Begriffsbildung von Würfel und Quader in zwei vierten Klassen erprobt. Im Anschluss zeigte die fragend-entwickelnd unterrichtete Klasse etwas höhere durchschnittliche Lernleistungen. Angemerkt wurde, dass beide Klassen bisher kaum entdeckenden Unterricht erfahren haben (Masterarbeit Smeets, 2019).

In einer Vergleichsstudie zwischen Schülerexperiment und Lehrerexperiment zum Inhalt des Zylindervolumens konnte von Maxime Berenike Beenen in beiden neunten Klassen im direkten Anschluss an die Unterrichtseinheit und vier Wochen später vergleichbare Lernleistungen messen (Masterarbeit Beenen 2018).

14.3 Mögliche Konsequenzen für den Mathematikunterricht

An die Darstellung und Diskussion der Ergebnisse schließt sich im nachfolgenden Abschnitt die Formulierung von Empfehlungen für den Mathematikunterricht an.

Bewusstes Festlegen des Hauptlernziels

Die Studienergebnisse bestätigen für das Beispiel der Mittelsenkrechten, dass Lernen nicht beliebig ist. Es können durchaus Sinnzusammenhänge zwischen der Lernzielsetzung, der Unterrichtsumsetzung und den Lernleistungen ausgemacht werden (vgl. Kapitel 10). Im direkten Anschluss an den Unterricht zeigen die Klassen durchschnittlich bessere Leitungen in den Aufgabenteilen, die auch im Unterricht verstärkt bearbeitet worden sind (vgl. Abschnitt 12.3). Das passt zu bestehenden Erkenntnissen, dass das Hauptlernziel am besten erlernt wird (vgl. Klauer & Leutner 2012). Dies kann jede Lehrperson darin bestätigen, sowohl inhaltliche wie auch prozedurale Lernziele bewusst festzulegen und konsequent zu verfolgen.

Mut zur Problemorientierung im Mathematikunterricht

Es hat sich gezeigt, dass einige der Argumente, die gegen einen problemorientierten Unterricht sprechen, in dieser Studie nicht wirksam wurden (vgl. Abschnitt 4.3). Eine problemorientierte Umsetzung zum Inhalt der Mittelsenkrechten in der gleichen Lernzeit ist grundsätzlich möglich (vgl. Kapitel 11). Die Analysen der erhobenen Daten konnten in Bezug auf einige Lehrerbedenken Hinweise geben: Geringeres Vorwissen kann ausgeglichen werden (vgl. Abschnitte 10.1 und 12.3). Problemlöseaufgaben haben für Interesse bei Lernenden gesorgt. Ein „Wissen-wollen“-Effekt gab es auch zu Testaufgaben, bei denen ein Lösungsweg nicht offensichtlich war (vgl. Abschnitt 13.3.5).

Auch die Lehrpersonen haben sich gefragt, welche Ansätze, Ideen und Begründungen von ihren Lernenden eingesetzt wurden. Es scheint, das Hauptlernziel der jeweiligen Intervention von der teilnehmenden Klasse besser erfasst zu werden (vgl. Abschnitte 12.3.4 und 12.3.6). Mathematisch grundlegende Fragestellungen und Erörterungen sind von problemorientiert unterrichteten Lernenden thematisiert worden (vgl. Abschnitt 12.2.3 und 12.2.4). Diese Auflistung macht Mut, häufiger problemorientierte Aufgabenstellungen einzusetzen, um so eben die Tätigkeit des mathematischen Problemlösens, dass sowohl Lehrpersonen wie auch Lernende den Spaß am Unterricht erwecken lässt, zu wagen. Der eventuelle Mehraufwand an Vorbereitung, das Erstellen und Konzipieren passender Lernumgebungen sowie das Risiko nicht auf alle Möglichkeiten im Unterricht vorbereitet zu sein, werden teils durch Überzeugung, teils durch Übung und hoffentlich auch durch weitere Forschungsbeiträge minimiert. Und daher soll an dieser Stelle auf ein Zitat, das bereits in der Einleitung dieser Arbeit zu finden ist: „Problemlösen macht Spaß und ist kreativ. […] Problemlösen kann man lernen. […] Problemlösen macht neugierig auf mathematische Theorien." (Grieser 2017, S. 2).

Mit Problemorientierung eigenes Denken und Problemlösen anregen

In der Detailanalyse der Unterrichtseinstiege zur Mittelsenkrechten wurde deutlich, wie unterschiedlich die beiden problemorientierten Stunden verliefen. Gleichzeitig wurde Mathematik umfassender angewendet als es durch den darbietenden Einstieg angeregt werden konnte. Die Lernenden hatten durch die problemorientierte Aufgabenstellung einen Zugang zur Mathematik, der eigenes Denken und Hinterfragen ermöglicht hat. Bekanntes wurde mit der Problemstellung verknüpft, kreative und viele unterschiedliche Lösungen wurden erzeugt, präsentiert und diskutiert. Ein Anregen zum eigenen Denken ist gelungen (vgl. Abschnitt 12.2).

Kommunikation unter den Lernenden zu mathematischen Inhalten anregen

Die Arbeitsweisen und Sozialstrukturen in den beiden Klassen, die problemorientiert unterrichtet wurden, haben sich vor allem in der Zusammenarbeit unter den Lernenden unterschieden (vgl. Abschnitt 12.2.5).

Der kommunikative Austausch über Mathematik konnte als positiver Verstärker beobachtet werden. In den Übungsphasen konnte die Kommunikation zwischen den Lernenden durch die Wahl von kommunikationsunterstützenden Unterrichtsmethoden und den Einsatz von Begründungsaufgaben weiter angeregt werden.

Die Vermutung liegt nahe, dass die lebhaftere und untereinander im regen Austausch getretenen Lernenden der Klasse P_1 gleichzeitig diejenige Klasse ist, die sich langfristig stärker an die Lerninhalte erinnert.

Stärkeres Einfordern eigenständiger Begründungen

Allein die Bearbeitung einer Aufgabenstellung, die sich zur Problemorientierung eignet, führt nicht dazu, dass ein Verstehen der Inhalte in der intendierten Weise geschieht. Es konnte beobachtet werden, dass eine Entdeckung allein nicht unbedingt ein Verstehen erzeugt (vgl. Tab. 2). Auch das erfolgreiche Lösen der Brunnenaufgabe sorgte nicht dafür, dass die gemeinsame Lösungsidee der Mittelsenkrechte als Ortslinie auf weitere Aufgabenstellungen angewendet werden kann oder in den Tests richtig wiedergegeben wird. Bei leistungsstarken Lernenden konnte beobachtet werden, dass das Ortslinien-Konzept nicht angewendet wurde, obwohl die Lösung der Brunnenaufgabe ein Verstehen dieses Konzeptes vermuten ließ.

Auch die geringen Lösungsansätze zu Erklärungen einfordernden Aufgabenteilen stützen diese Beobachtungen. Bei einer erneuten Durchführung dieser Unterrichtseinheiten könnte zum Beispiel durch stärkeres Einfordern von eigenständigen, schriftlichen Begründungen das Ortslinienkonzept der Mittelsenkrechten weiter fokussiert und die eigenen Worterklärungen reflektiert werden.

14.4 Resümee und Ausblick

„Nicht weil die Dinge schwierig sind, wagen wir sie nicht, sondern weil wir sie nicht wagen, sind sie schwierig.“ – Seneca

Die Bedeutung des Problemlösens für die Mathematik (vgl. Abschnitt 2.2) ist nicht erst mit der Verortung in den Kernlehrplänen Mathematik bekannt, sondern kann auf eine lange Zeit als Fokus der Unterrichtsforschung zurückgeführt werden. Mit der einen oder anderen Wende in der didaktischen Perspektive ist das Problemlösen mal stärker mal weniger stark in den Mittelpunkt gerückt. Im Zusammenhang mit der eigenständigen Entdeckung von Begriffen, Verfahren oder weiteren mathematischen Sätzen geriet es teilweise in hitzige Diskussion rund um die Bedeutung des entdeckenden Lernens. Befürworter und Gegner dieses Unterrichtskonzeptes führen aktuell Streitgespräche über den Einsatz, die Bedeutung der Lenkung durch die Lehrperson und mindestens indirekt über die Lernzielsetzung des Unterrichts. Auf der einen Seite gibt es Verfechter, die ein Verstehen der Inhalte ohne eigenständige Entdeckung als nicht möglich ansehen. Ihnen wird vorgeworfen mit ungelenkten Entdeckungen Unmögliches in den Kindern hervorrufen zu wollen und wertvolle Unterrichtszeit zu vergeuden. Im Mittelfeld finden sich diejenigen, die eine Kombination aus beiden im Sinne einer Vorlesung mit kognitivaktivierenden Aspekten oder aber einem Wechsel der Ansätze bei unterschiedlichen Themeneinheiten für gewinnbringend halten.

Die Schwierigkeit der Kombination liegt insbesondere in dem Verständnis, was unter Problemlösen bzw. entdeckendem Lernen zu verstehen ist. Für beide Konzepte kann eine Fülle an Interpretationen und Unterrichtsumsetzungen gefunden werden, die teilweise nur noch wenig gemeinsam haben. Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit wurde daher versucht Facetten des mathematischen Problemlösens (Kapitel 2) und des entdeckenden Lernens (Abschnitte 3.3 und 3.4) näher zu fassen, von benachbarten Ideen abzugrenzen und vermutete wie bestätigte Vor- und Nachteile einander gegenüberzustellen. Diese mündet in einer Definition des problemorientierten Lernens. Diese ist gekennzeichnet durch den Einsatz einer Problemlöseaufgabe, die die Lernenden vor eine Barriere stellt und bei deren Bearbeitung neue Lerninhalte entdeckt werden können (Abschnitt 4.1).

In einer quasiexperimentellen Fallstudie mit Erhebung der Lernleistungen zu zwei Testzeitpunkten wurde ein problemorientierter Unterrichtseinstieg mit einem stärker darbietendem Unterrichtseinstieg verglichen. Bei der Umsetzung dieses Forschungsprojektes wurden zwei Interventionen zur Einführung und zum Erlernen der Mittelsenkrechten entwickelt, die vergleichbar hinsichtlich der benötigen Unterrichtsstunden, der angestrebten Lernziele und einem Großteil der verwendeten Aufgaben sein sollten. Nach einer Pilotierung in zwei siebten Klassen, wurde die Studie in vier siebten Klassen eines Gymnasiums in Essen durchgeführt. Alle 21 bis 23 Schülerinnen und Schüler in den Klassen wurden vorab schriftlich auf ihr geometrisches Vorwissen und ihre Problemlösefähigkeit getestet. Anschließend fand eine der beiden Interventionen statt und im direkten

Anschluss, sowie 16 Wochen später wurden die Lernleistungen erhoben.

Zunächst wurde die generelle Umsetzbarkeit des problemorientierten Unterrichts im Vergleich zu einer darbietenden Unterrichtsvariante untersucht. Dabei wurde die Vergleichbarkeit der Klassen hinsichtlich ihres geometrischen Vorwissens erfasst und beurteilt. Mit der Erhebung fachlich relevantem Vorwissens unterschiedet sich diese Studie von weiteren Studien mit Pre-Post-Follow Up-Test-Design. Dem Vorwissen wird damit als Voraussetzung für erfolgreiches Lernen eine messbare Bedeutung zugeführt. Durch diese Erhebungen wurde sichergestellt, dass die Interventionen und Testungen nach Planung umgesetzt werden konnten, um somit die Bedingungen der Vergleichbarkeit zwischen den Klassen möglichst hoch halten zu können.

Der erste Forschungsaspekt zielte darauf ab, die Lernleistungen zwischen den Klassen im direkten Anschluss (F1.1) und langfristig (F.1.2) zu erfassen und zu vergleichen. Dabei sollte die Umsetzung der problemorientierten Unterrichtsintervention im Vergleich zur darbietenden Variante auf ihre generelle Durchführbarkeit überprüft werden.

Der zweite Forschungsaspekt beinhaltete eine Detailanalyse zu den erbrachten Lernleistungen zu eben diesen beiden Testzeitpunkten 2 und 3. Es wurde untersucht, inwiefern sich die Lernleistungen der Schülerinnen und Schüler unterschieden. Dazu wurden die Testergebnisse aufgaben- und klassenweise unter Berücksichtigung der in der Theorie herausgearbeiteten Wissensbereiche zur Mittelsenkrechten (vgl. Abschnitt 5.3) analysiert und mit den Erkenntnissen aus der Unterrichtsbeobachtung und den Ergebnissen des Vorwissenstests in Beziehung gesetzt.

Für die Detailanalyse der Unterrichtsvorgänge bei der Einführung der Mittelsenkrechten wurden Unterrichtsbeobachtungsprotokolle genutzt.

Im Rahmen dieser Arbeit wurden drei Tests und zwei Unterrichtsinterventionen entwickelt.

Die Leistungstests und Bewertungshorizonte konnten entsprechend der Gütekriterien in vier Phasen der Testentwicklung geprüft und optimiert werden (Abschnitt 9.1). Dabei wurde der mathematische Inhalt mit Blick auf die späteren Interpretationen kategoriengeleitet bestimmt.

Als Grundlage für die Entwicklung der beiden Unterrichtsinterventionen wurden die in der Theorie heraus gearbeiteten Gestaltungsprinzipien verwendet (Abschnitte 2.4, 3.5 und 5.5). Die Herausforderung lag dabei darin, dass die darbietende und die problemorientierte Unterrichtsvariante übereinstimmen sollten in Zielsetzung, Lerninhalten und Lernzeit. Gleichzeitig sollten für die Schülerinnen und Schüler nicht durch die Verwendung für sie unbekannter Medien und Unterrichtsmethoden zusätzliche Hürden ergeben. Die Unterrichtsinterventionen sollte sich möglichst gut in ihr bereits bekanntes Umfeld eingliedern, was auch zu der Entscheidung geführt hat, die Interventionen von den Lehrpersonen der einzelnen Klassen selbst durchführen zu lassen. Eine enge und vertrauliche Zusammenarbeit mit den vier Lehrpersonen war ebenso Voraussetzung für eine gelungene Umsetzung der Studie, wie die generelle Offenheit der Lehrpersonen für Unterrichtsstudien und dem überzeugten Unterrichten nach der vorgegeben Unterrichtsplanung.

Mit der Durchführung einer Feldstudie und der umfangreichen Auswertung werden viele offene Fragen angestoßen. An dieser

Stelle werden vier Fragenfelder hervorgehoben, die der Durchführung der Analysen besonders ins Interessensfeld gerückt sind:

- Offenbar wurde das Interesse von Schülerinnen und Schülern geweckt, wenn in einer Testsituation Problemlöseaufgaben gestellt wurden. Inwiefern kann es gelingen dieses Interesse an der Lösung eines Problems auch gezielt im weiteren Unterrichtsverlauf aufzugreifen? Oder inwiefern reicht die Beschäftigung mit Problemlöseaufgaben aus, auch wenn dabei keine eigenen Lösungen generiert werden? Diese Fragen können auch auf Forschungsvorhaben zur Selbstregulation bei Lösungsprozessen abzielen.
- Bei einem problemorientierten Unterrichtseinstieg konnten tiefergehende mathematische Interessen der Lernenden aufgegriffen werden. Welchen Einfluss können diese Erfahrungen auf das Interesse an der Mathematik, das Lernen im Allgemeinen oder auch die Einstellung zur Mathematik bei regelmäßigem Einsatz im Mathematikunterricht haben?
- Der Zusammenhang zwischen sprachlicher Verwendung und mathematisch richtiger Lösung konnte insbesondere an Begründungsaufgabenteilen erkannt werden. Gleichzeitig konnte mit den verwendeten schriftlichen Aufgabenformaten nur im Ansatz Erklärungen erfasst werden. Es bleibt offen, inwiefern sich die argumentativen Leistungen der Lernenden bei mündlichen Begründungen zwischen den beiden Unterrichtsvarianten unterscheiden.
- Allgemein stellt sich die Frage: Für welche schulmathematischen Inhalten lassen sich geeignete Problemlöseaufgaben formulieren, die zu einem Entdecken neuer mathematischer Begriffe führen?

15 Literaturverzeichnis

Alfieri, O., & Denti, P. (2011). Alfieri stitch and its impact on mitral clip. *European Journal of Cardio-Thoracic Surgery*, *39*(6), 807–808. https://doi.org/10.1016/j.ejcts.2011.01.017

Altmann, D. G. (1991). *Practical Statistics for Medical Research*. London: Chapman and Hall.

Ambrus, G. (2003). *Üben in der Planung des Mathematikunterrichts*. Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades an der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Salzburg.

Ambrus, G. & Rott, B. (2017). Hilfestellungen beim Problemlösen in Form von „Lösungsbildern". *Mathematica Didactica 40*.

Anderson, J. (1982). Acquisition of Cognitive Skills. *Psychological Review* (89), S. 369–406.

Arnold, R. & Kaltschmid, J. (Hrsg.). (1993). *Natur als Vorbild. Selbstorganisation als Modell der Pädagogik: für Jochen Kaltschmid zu seinem 60. Geburtstag* (Reihe, Bd. 26). Frankfurt, Main: VAS.

Atteslander, P. (2010). *Methoden der empirischen Sozialforschung* (13., neu bearbeitete und erweiterte Auflage). Berlin: Erich Schmidt Verlag.

Ausubel, D. P. (Hrsg.). (1974). *Psychologie des Unterrichts*. Weiheim, Basel: Beltz.

Ausubel, D. P., Novak, J. D. & Hanesain, H. (1980). *Psychologie des Unterrichts* (2., völlig überarb. Aufl.). Weiheim, Basel: Beltz.

Ausubel, D. P., Novak, J. D. & Hanesain, H. (1981). Psychologische und pädagogische Grenzen des entdeckenden Lernens. In H. Neber (Hrsg.), *Entdeckendes Lernen* (3., völlig überarb. Aufl.). Weinheim: Beltz.

Barzel, B., Büchter, A., Leuders, T. (Hrsg.). (2007). *Mathematik Methodik. Handbuch für die Sekundarstufe I und II*. Berlin: Cornelsen.

Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (2012). Nachhaltig lernen durch aktives Systematisieren und Sichern - Konzept und Umsetzung in der mathewerkstatt. In M. Kleine & M. Ludwig (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012* (S. 93-96). Münster: WTM.

Baumanns, L. (2022). *Mathematical problem posing* (Research). Dissertation. Wiesbaden: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-39917-7

Becker, J. P. & Shimada, S. (1997). *The open ended approach : a new proposal for teaching mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Berchtold, F. (2017). *Geometrie. Von Euklid bis zur hyperbolischen Geometrie mit Ausblick auf angrenzende Gebiete.* Berlin: Springer.

Berkemeyer, N. & Mende, L. (2018). *Bildungswissenschaftliche Handlungsfelder des Lehrkräfteberufs*. *Eine Einführung* (Schulpädagogik, Bd. 5053). Münster, New York: Waxmann.

Blum, W., Drüke-Noe, C., Hartung, R. & Köller, O. (Hrsg.). (2006). *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen* (1. Aufl.). Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Bogner, A. (Hrsg.). (2005). *Das Experteninterview. Theorie, Methode, Anwend*ung (2. Aufl.). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Bogner, A., Littig, B. & Menz, W. (2014). *Interviews mit Experten. Eine praxisorientierte Einführung* (Lehrbuch). Wiesbaden: Springer VS. https://doi.org/10.1007/978-3-531-19416-5

Bortz, J., & Döring, N. (2006). *Forschungsmethoden und Evaluation für Human- und Sozialwissenschaftler: Mit 156 Abbildungen und 87 Tabellen.* 4., (überarb. Aufl.) Berlin: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-540-33306-7

Bortz, J., Lienert, G. A., & Boehnke, K. (2008). *Verteilungsfreie Methoden in der Biostatistik* (3. korr. Aufl.). Berlin, Heidelberg: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-540-74707-9

Bruder, R. & Collet, C. (2011). *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht*. [mit Kopiervorlagen] (1. Aufl.). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Bruder, R. Hefendehl-Hebeker, L., Schmidt-Thieme, B. & Weigand, H.-G. (Hrsg.). (2015). Handbuch der Mathematikdidaktik. Berlin: Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-642-35119-8

Bruner, J. S. (1974). *Toward a Theory of Instruction.* Berlin: Berlin-Verlag.

Bruner, J. S. (1976). *Der Prozeß der Erziehung* (Sprache und Lernen, Bd. 4, 4. Aufl.). Berlin: Berlin-Verlag

Bruner, J. S. (1981). Der Akt der Entdeckung, In H. Neber (Hrsg.), *Entdeckendes Lernen* (3., völlig überarb. Aufl.). S.15-29. Weinheim: Beltz.

Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen. Grundlagen, Befunde und Konzepte (Mathematik im Fokus*). Berlin: Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-642-41864-8

Büchter, A. & Leuders, T. (2005). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern - Leistung überprüfen* (6. Aufl.). Berlin: Cornelsen.

Cai, J. (2003). What research tells us about teaching mathematics through problem solving. In F. K. Lester, Jr. (Hrsg.), *Research and issues in teaching mathematics through problem* *solving* (S. 241–254). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Cai, J., & Lester, F. (2010). Why is teaching with problem solving important to student learning. Reston, VA: *National council of teachers of mathematics*, *13*(12), 1-6.

Capon, N. & Kuhn, D. (2004). What´s So Good About Problem-Based Learning? In *Cognition and Construction 22 (1),* 61-79. Abingdon: Tylor & Francis Group. https://doi.org/10.1207/s1532690Xci2201_3

Cleff, T. (2019). *Angewandte Induktive Statistik und Statistische Testverfahren : Eine computergestützte Einführung mit Excel, SPSS und Stata*. Wiesbaden: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-8349-6973-6

Cohen, J. (1988). *Statistical power analysis for the behavioral sciences* (2. Aufl.). Hillsdale, NY: Erlbaum.

Das Mathematikbuch. Arbeitsheft plus Lösungen Klasse 7 (2010). I. Behnke & W. Affolter (Hrsg.). [Ausg.] N, [Nordrhein-Westfalen], (1. Aufl.). Stuttgart: Klett.

De Boer, H. (2022). Beobachten im fachdidaktischen Kontext – aufgabenbezogene Beobachtung. In H. de Boer, D. Merklinger & S. Last (Hrsg.), *Beobachten im fachdidaktischen Kontext. Schülerinnen- und Schülerperspektiven auf die Bearbeitung von Aufgaben* (Lehrbuch). Wiesbaden: Springer VS.

De Corte, E., & Verschaffel, L. (1985). Beginning first graders' initial representation of arithmetic word problems**.** *The Journal of Mathematical Behavior, 4(*1), 3–21.

De Jong, T., Lazonder, A. W., Chinn, C. A., Fischer, F., Gobert, J., Hmelo-Silver, C. E., Koedinger, K. R., Krajcik, J. S., Kyza, E. A., Linn, M. C., Pedaste, M., Scheiter, K., & Zacharia, Z. C. (2023). Let's talk evidence – The case for combining inquiry-based and direct instruction. *Educational*

Research Review, 39. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2023.100536.

Dietrich, H. & Evans, T. (2022). Traditional lectures versus active learning – A false dichotomy?. *STEM Education*, 2022, 2(4). 275-292. https://doi.org/10.3934/steme.2022017

Dochy, F., Segers, M., Van den Bossche, P., & Gijbels, D. (2003). Effects of problem-based learning: A meta-analysis. **Learning and Instruction, 13**(5), 533–568. https://doi.org/10.1016/S0959-4752(02)00025-7

Döring, N. & Bortz, J. (Hrsg.). (2016). *Forschungsmethoden und Evaluation in den Sozial- und Humanwissenschaften* (Springer-Lehrbuch, 5. vollständig überarbeitete, aktualisierte und erweiterte Auflage). Berlin: Springer

Dörner, D. (1987). *Problemlösen als Informationsverarbeitung* (Kohlhammer-Standards Psychologie Studientext, 3. Aufl.). Stuttgart: Kohlhammer.

Dudenredaktion. (o. D.) Problem. In Duden online abgerufen am 24.24.2023 von https://www.duden.de/node/90389/revision/90425.

Dudenredaktion. (o. D.) Entdeckung. In Duden online abgerufen am 24.24.2023 von https://www.duden.de/node/90389/revision/90425.

Dudenredaktion (2018). *Duden - das Bedeutungswörterbuch. Bedeutung und Gebrauch von rund 20 000 Wörtern der deutschen Gegenwartssprache* (5. neu bearbeitete und erweiterte Auflage). Dudenverlag.

Echterhoff, G. (2013). Quantitative Erhebungsmethoden. In W. Hussy, M. Schreier & G. Echterhoff (Hrsg.), *Forschungsmethoden in Psychologie und Sozialwissenschaften für Bachelor* (Springer-Lehrbuch, 2., überarbeitete Auflage), S. 55-114. Berlin: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-34362-9

Edelmann, W. & Wittmann, S. (2012). *Lernpsychologie. Mit Online-Materialien* (Psychologie 2012, 7., vollst. überarb. Aufl.). Weinheim: Beltz.

Elemente der Mathematik 7 (2007). H. Griesel (Hrsg.). [Nordrhein-Westfalen, Schleswig-Holstein, Gesamtschule, Gymnasium], Dr. A 1. Braunschweig: Schroedel.

Erdosne Toth, E., Klahr, D., & Chen, Z. (2000). Bridging Research and Practice: A Cognitively Based Classroom Intervention for Teaching Experimentation Skills to Elementary School Children. *Cognition and Instruction*, *18*(4), 423–459. https://doi.org/10.1207/S1532690XCI1804_1

Franke, M. & Reinhold, S. (Hrsg.). (2016). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule* (Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II, 3. Auflage). Berlin: Springer Spektrum.

Frey, B. B. (Hrsg.). (2018). *The SAGE Encyclopedia of Educational Research, Measurement, and Evaluation* (1st ed.). Thousand Oaks: SAGE Publications.

Fritz, A., Hussy, W. & Tobinski, D. (2010). *Pädagogische Psychologie*: Mit 11 Tabellen und 91 Kontrollfragen. utb-studi-e-book: Vol. 3373. Münchenart: Reinhardt; UTB.

Fuchs, L. S., Fuchs, D., Compton, D. L., Wehby, J., Schumacher, R. F., Gersten, R., & Jordan, N. C. (2015). Inclusion Versus Specialized Intervention for Very-Low-Performing Students: What Does Access Mean in an Era of Academic Challenge? *Exceptional Children*, *81*(2), 134-157. https://doi.org/10.1177/0014402914551743

Grieser, D. (2017). *Mathematisches Problemlösen und Beweisen: Eine Entdeckungsreise in die Mathematik* (2., überarbeitete und erweiterte Auflage). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Gorski, H.-J. & Müller-Philipp, S. (Hrsg.). (2014). *Leitfaden Geometrie: Für Studierende der Lehrämter* (Lehrbuch, 6., überarbeitete und erweiterte Auflage). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Greeno, J. G., & Simon, H. A. (1988). Problem solving and reasoning. In R. C. Atkinson, R. J. Herrnstein, G. Lindzey, & R. D. Luce (Hrsg.), *Stevens' handbook of experimental psychology: Perception and motivation; Learning and cognition* . 589–672. John Wiley & Sons.

Gudjons, H. (2011). *Frontalunterricht - neu entdeckt. Integration in offene Unterrichtsformen* (UTB Schulpädagogik, Erziehungswissenschaft, Bd. 2948, 3., aktualisierte Aufl.). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Hähnle, J. (2021). *Problemlösendes Lernen bei Kurt Lewin*. In D. P. Bogner (Hrsg.), *Innovative feldtheoretische Perspektiven für die Schulpädagogik - Kurt Lewin reloaded* (Band 1). Wiesbaden: Springer VS. https://doi.org/10.1007/978-3-658-33159-7

Hany, E. (2008) Pädagogisch-psychologische Diagnostik. In A. Renkl (Hrsg.), *Lehrbuch Pädagogische Psychologie,* (S. 389-468). 1. Aufl. Bern: Huber.

Hartinger, A. (2001). Entdeckendes Lernen. In W. Einsiedler, M. Götz, A. Hartinger, F. Heinzel, J. Kahlert & U. Sandfuchs (Hrsg.), *Handbuch Grundschulpädagogik und Grundschuldidaktik*, S.330-335. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Hasselhorn, M. & Gold, A. (2009). *Pädagogische Psychologie: Erfolgreiches Lernen und Lehren* (Pädagogische Psychologie, 2., durchges. Aufl.). Stuttgart: Kohlhammer.

Hattermann, M., Kadunz, G., Rezat, S. & Sträßer, R. (2015). Geometrie: Leitidee Raum und Form. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik*, S. 185-219. Berlin: Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-642-35119-8

Heinrich, F., Bruder, R., Bauer (geb. Collet), C. (2015). Problemlösen lernen. In R Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der*

Mathematikdidaktik. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Heinze, A. (2007). Problemlösen in mathematischen und außermathematischen Kontexten. Modelle und Unterrichtskonzepte aus kognitionstheoretischer Perspektive. *Journal für Mathematik-Didaktik, 2007* (1), 3 – 30.

Herold-Blasius, R. (2021). *Problemlösen mit Strategieschlüsseln. Eine explorative Studie zur Unterstützung von Problembearbeitungsprozessen bei Dritt- und Viertklässlern***.** Dissertation. Universität Duisburg-Essen. Wiesbaden: Springer.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Hrsg.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics*. 65 – 97. Macmillan Publishing Co, Inc.

Hmelo, C. E. (1998). Problem-based learning: Effects on the early acquisition of cognitive skill in medicine. *Journal of Learning Science.* 7, 173 – 208.

Hmelo-Silver, C. E. (2004). Problem-Based Learning: What and How Do Students Learn? *Educational Psychology Review*, 16(3), 235-266. https://doi.org/10.1023/B:EDPR.0000034022.16470.f3

Holland, G. (2007). *Geometrie in der Sekundarstufe: Entdecken – Konstruieren – Deduzieren; didaktische und methodische Fragen*. Hildesheim: Franzbecker.

Holzäpfel, L., Leuders, T., Rott, B. & Schelldorfer, R. (2016). Schritte zum Problemlösen. *Praxis der Mathematik in der Schule Sekundarstufen I und II, 58* (68), 2 – 8.

Holzäpfel, L., Rott, B. & Dreher, U. (2016). Exploring perpendicular bisectors: The water well problem. In A. Kuzle, B. Rott & T. Hodnik Čadež (2016) (Hrsg.), Problem Solving in the Mathematics Classroom – Per-spectives and Practices from Different Countries, Münster. WTM-Verlag. 117 – 130.

Holzäpfel, L., Lacher, M., Leuders, T. & Rott, B. (Hrsg.). (2018). *Problemlösen lehren lernen: Wege zum mathematischen Denken* (1. Auflage). Seelze: Klett Kallmeyer.

Hußmann, S. (2002). *Konstruktivistisches Lernen an intentionalen Problemen.* Mathematik unterrichten in einer offenen Lernumgebung. Hildesheim: Franzbecker.

Hussy, W. (Hrsg.). (1984). *Denkpsychologie: Ein Lehrbuch* (Urban-Taschenbücher). Stuttgart: Kohlhammer.

Hussy, W., Schreier, M. & Echterhoff, G. (Hrsg.). (2013). *Forschungsmethoden in Psychologie und Sozialwissenschaften für Bachelor* (Springer-Lehrbuch, 2., überarbeitete Auflage). Berlin: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-34362-9

IQB: Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (Hrsg.). (2012). *Vergleichsarbeiten 2012 8. Jahrgangsstufe (VERA-8) Mathematik – didaktische Handreichung.*

Jahnke, H. & Ufer, S. (2015). Argumentieren und Beweisen. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-642-35119-8_12

Joklitschke, J., Rott, B., Schindler, M. (2016). Measuring mathematical creativity. Towards a confirmation and refinement of a test instrument. In T. Fritzlar, D. Assmus, A. Kuzle und B. Rott (Hrsg.): *Problem Solving in Mathematics Education. Proceedings of the 2015 Joint Conference of ProMath and the DGM Working Group on Problem Solving. Problem Solving in Mathematics Education*. Halle, Germany, 3rd-5th September. 1. Auflage. Münster: WTM-Verlag. 149-157.

Jordan, A. (2006). *Mathematische Bildung von Schülern am Ende der Sekundarstufe I – Analysen und empirische Untersuchungen*. Hildesheim, Berlin: Franz Becker.

Kail, R., & Hall, L. K. (1999). *Sources of developmental change in children's word problem performance.* Journal of Educational Psychology, 91, 660 – 668.

Kara, B. & Barzel, B. (2018). Soziale Disparitäten in Mathematik sozialisationstheoretisch betrachtet – Eine Analyse von Problemlöseprozessen von Schülerinnen und Schülern unter besonderer Berücksichtigung der sozialen Herkunft. In Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018: Vorträge zur Mathematikdidaktik und zur Schnittstelle Mathematik/Mathematikdidaktik auf der gemeinsamen Jahrestagung GDM und DMV 2018* (S. 923-926). Münster: WTM.

Kipmann, U. (2020). *Komplexes Problemlösen*. Wiesbaden: Springer.

Kim, S. (2004). Voronoi Analysis of a Soccer Game. In: *Nonlinear Analysis: Modelling and Control, 2004*, 9(3), 233–240. https://doi.org/10.15388/NA.2004.9.3.15154

Kirschner, P. A., Sweller, J., & Clark, R. E. (2006). Why Minimal Guidance During Instruction Does Not Work: An Analysis of the Failure of Constructivist, Discovery, Problem-Based, Experiential, and Inquiry-Based Teaching. *Educational Psychologist*, *41*(2), 75 – 86. https://doi.org/10.1207/s15326985ep4102_1

Klauer, K. J. (2011). *Transfer des Lernens: Warum wir oft mehr lernen als gelehrt wird*. Stuttgart: Kohlhammer.

Klauer, K. J. & Leutner, D. (Hrsg.). (2012). *Lehren und Lernen. Einführung in die Instruktionspsychologie.* Weinheim: Beltz.

Klieme, E., Schümer, G. & Knoll, S. (2001). Mathematikunterricht in der Sekundarstufe 1: "Aufgabenkultur" und Unterrichtsgestaltung. In Bundesministerium für Bildung und Forschung (Hrsg.), *TIMSS - Impulse für Schule und Unterricht. Forschungsbefunde, Reforminitiativen, Praxisberichte und Video-Dokumente*, S. 43-59. Bonn: BMBF Publik.

Klieme, E., Leutner, D. & Wirth, J. (Hrsg.). (2012). *Problemlösekompetenz von Schülerinnen und Schülern: Diagnostische Ansätze, theoretische Grundlagen und empirische Befunde* *der deutschen PISA-2000-Studie* (1. Aufl.). VS Verlag für Sozialwissenschaften (GWV).

Kluwe, R. H. (1979). *Wissen und Denken. Modelle, empirische Befunde und Perspektiven für den Unterricht.* Stuttgart, Berlin, Köln, Mainz: Kohlhammer.

Koecher, M. & Krieg, A. (2009). *Ebene Geometrie* (Springer-Lehrbuch, korrigierter Nachdr). Berlin: Springer.

Kollosche, D. (2017). Entdeckendes Lernen: Eine Problematisierung. *Journal für Mathematik-Didaktik,* 38, 209-237.

Kotovsky, K., Hayes, J. R., Simon, H.A. (1985). Why Are Some Problmes Hard? Evidence from Tower of Hanoi. *Cognitive Psychologie, 1985* (17), 248–294.

Krauter, S.& Bescherer, C.(Hrsg.). (2007). *Erlebnis Elementargeometrie. Ein Arbeitsbuch zum selbstständigen und aktiven.* 1. Aufl.. Heidelberg: Springer Spektrum Akad. Verl.

Lambacher Schweizer 7 – Mathematik für Gymnasien (2010). D. Greulich, T. Jörgens, T. Jürgensen-Engl, W. Riemer, R. Schmitt-Hartmann (Hrsg.). Für Gymnasien, Nordrhein-Westfalen, [Neubearb.], 1. Aufl., Dr. 2). Stuttgart: Klett.

Lazonder, A. W., & Harmsen, R. (2016). Meta-Analysis of Inquiry-Based Learning: Effects of Guidance. *Review of Educational Research*, *86*(3), 681–718. https://doi.org/10.3102/0034654315627366

Leuders, T. (Hrsg.). (2003). *Mathematik Didaktik – Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II.* Berlin. Cornelsen-Scriptor.

Leuders, T., Hußmann, S., Barzel, B., Prediger, S. (2011). Das macht Sinn! Sinnstiftung mit Kontexten und Kernideen. In *Praxis Mathematik*. 53. Heft 37. S.2-9.

Leuders, T. (2014). Entdeckendes Lernen – Produktives Üben. In H. Linneweber-Lammerskitten (Hrsg.), *Fachdidaktik Mathematik. Grundbildung und Kompetenzaufbau im Unterricht der Sek. I und II* (Lehren lernen, 1. Auflage), S. 236-

263. Seelze: Kallmeyer in Verbindung mit Klett Friedrich Verlag.

Lewalter, D., Diedrich, J., Goldhammer, F., Köller, O. & Reiss, K (Hrsg.). (2023). *PISA 2022. Analyse der Bildungsergebnisse in Deutschland*. Waxmann. https://doi.org/10.31244/9783830998488

Lienert, G. A. & Raatz, U. (1998). Testaufbau und Testanalyse (Grundlagen Psychologie, 6. Auflage). Weinheim: Beltz.

Liljedahl, P. Illumination: an affective experience?. *ZDM Mathematics Education* 45, 253–265 (2013). https://doi.org/10.1007/s11858-012-0473-3

Loibl, K., Tillema, M., Rummel, N., & van Gog, T. (2020). The effect of contrasting cases during problem solving prior to and after instruction. *Instructional Science*, *48*(2), 115–136. https://doi.org/10.1007/s11251-020-09504-7

Lorenz, J. H. (1991). Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht: Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik. *Educational Studies in Mathematics,* 22(1), 87–93.Kluwer Academic Publishers.

Lötscher, H. (2016). Beobachtung. In J. Aeppli, L. Gasser, E. Gutzwiller & A. Tettenborn (Hrsg.), *Empirisches wissenschaftliches Arbeiten: Ein Studienbuch für die Bildungswissenschaften.* 4.Aufl. Bad Heilbronn: Verlag Julius Klinkhardt

Lukesch, H. (1998). *Einführung in die pädagogisch-psychologische Diagnostik* (2., vollst. neu bearb. Aufl.). Roderer.

Ludwig, M. & Weigand, H.-G. (2014). Konstruieren. (S.55-80), In H. -G. Weigand, A. Filler, R. Hölzl, S. Kuntze, M. Ludwig, J. Roth, B. Schmidt-Thieme & G. Wittmann (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (Mathematik Primar- und Sekundarstufe Didaktik der Mathematik

Schwerpunkt Sekundarstufe), (S.81-97). 2. Aufl. Heidelberg: Spektrum Akad. Verl.

Ludwig, M., Filler, A. & Lambert, A. (Hrsg.). (2015). *Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen. Jubiläumsband des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*. Wiesbaden: Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-06835-6

Maaß, K. (2011). Mathematisches Modellieren in der Grundschule. In: *Handreichung des Programms SINUS an Grundschulen. Mathematik*. Kiel: IPN Leibniz-Institut f. d. Pädagogik d. Naturwissenschaften an d. Universität Kiel.

Maier, U., Kleinknecht, M., Metz, K. & Bohl, T. (2010). Ein allgemeindidaktisches Kategoriensystem zur Analyse des kognitiven Potenzials von Aufgaben. In: *Beiträge zur Lehrerinnen- und Lehrerbildung*. 28(1), 84-96. https://doi.org/10.25656/01:13734.

Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (Hrsg.). (2006). *Mathematisch denken: Mathematik ist keine Hexerei* (4., überarb. Aufl.). München: Oldenbourg.

Mathe live. Mathematik für Sekundarstufe I (2011). H. Böer, (Hrsg.). 1. Aufl., [Nachdr.]. Stuttgart: Klett.

Mathe Netz 7 (2007). H. Becker & J. Cukrowicz (Hrsg.). Gymnasium,[Nordrhein-Westfalen, Rheinland-Pfalz], Dr. A 1). Braunschweig: Westermann.

Mathematik (2000). J. Cukrowicz, J. Dzewas, J. & O. Hahn (Hrsg.). (2. Aufl., 1. Dr). Braunschweig: Westermann.

Mathematik - Neue Wege 7. *Arbeitsbuch für Gymnasien* (2007). A. Lergenmüller (Hrsg.). Für Gymnasien, [Nordrhein-Westfalen, Schleswig-Holstein]. Braunschweig: Schroedel.

Mathewerkstatt 7 (2014). Prediger, S., Barzel, B., Hußmann, S. & Leuders, T. (Hrsg.). (2014). [Mittlerer Schulabschluss, allgemeine Ausg.], 1. Aufl. Berlin: Cornelsen.

Mayer, R. (2004). Should there be a three-strikes rule against pure discovery learning? The case for guided methods of instruction. *American Psychologist*, 59, 14–19.

Mayring, P. (2015). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken* (12. Aufl.). Weinheim & Basel: Beltz.

Meyer, M. (2021). *Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht*. Dissertation. https://doi.org/10.1007/978-3-658-32391-2

Mietzel, G. (Hrsg.). (2007). *Pädagogische Psychologie des Lernens und Lehrens* (Lehrbuch, 8., überarb. und erw. Aufl.). Göttingen: Hogrefe.

Ministerium für Schule und Weiterbildung, Wissenschaft und Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen (1999). *Richtlinien und Lehrpläne für die Sekundarstufe I – Gymnasium/Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen – Mathematik*. Ritterbach Verlag. Frechen.

Ministerium für Schule und Weiterbildung, Wissenschaft und Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen (2021), *Lehrplan für die Primarstufe in Nordrhein-Westfalen: Fach Mathematik*. Ritterbach Verlag. Frechen.

Ministerium für Schule und Weiterbildung, Wissenschaft und Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen (2022), *Kernlehrplan Mathematik für die Sekundarstufe I– Gymnasium/Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen – Mathematik*. Ritterbach Verlag. Frechen.

Möller, A. & Rott, B. (2017). Können durch problemorientierten Unterricht in derselben Unterrichtszeit vergleichbare Schülerleistungen erzielt werden? In Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2017. Vorträge auf der 50. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 27.02.2017 bis 03.03.2017 in Potsdam*. S. 673-676. Münster: WTM.

Möller, A. & Rott, B. (2018). Teaching via problem solving or teacher-centric access – Teachers' views and beliefs. In B. Rott, G. Törner, J. Peters-Dasdemir, A. Möller & Safrudianur (Hrsg.), *Views and Beliefs in Mathematics Education. Proceedings of the 23rd MAVI Conference* (S. 215–226). Berlin: Springer.

Möller, A. & Rott, B. (2019). Die Mittelsenkrechte – stoffdidaktische Analyse und Bezüge zum Unterricht. In É. Vásárhelyi & J. Sjuts (Hrsg.), *Auch wenn A falsch ist, kann B wahr sein. Was wir aus Fehlern lernen können. Ervin Deák zu Ehren* (Mathematiklehren und -lernen in Ungarn). S.191-206. Münster: WTM. https://doi.org/10.37626/GA9783959871143.0.11

Möller, A. (2021). Problemlösend zur Mittelsenkrechten – Auswertung von Unterrichtseinstiegen. In Rott (Hrsg.), *Der Mathematikunterricht. Beiträge zu seiner fachlichen und fachdidaktischen Gestaltung.* 67/1, 4 – 14.

Neber, H. (1981). *Neuere Entwicklung zum entdeckenden Lernen*. In H. Neber (Hrsg.), *Entdeckendes Lernen* (3., völlig überarb. Aufl.). (S.45-92).Weinheim: Beltz.

Neubrand, J. (2002). *Eine Klassifikation mathematischer Aufgaben zur Analyse von Unterrichtssituationen* (Texte zur mathematischen Forschung und Lehre, Bd. 19). Dissertation. Hildesheim: Franzbecker.

O'Shea, D. (2008). *Poincarés Vermutung. Die Geschichte eines mathematischen Abenteuers*. Frankfurt am Main: Fischer.

Patel, V. L. & Kaufman, D. R. (1993). Development of knowledge-based reasoning strategies with medical training (Tech. Rep. No. CME93-CS3). Montreal, Canada: Cognitive Studies in Medicine, Centre for Medical Education.

Piaget, J. (1972). Intellectual evolution from adolescence to adulthood. Human Development, 15(1), 1–12. https://doi.org/10.1159/000271225

Prediger, S. (2009). Verstehen durch Vorstellen. Inhaltliches Denken. In T. Leuders, L. Hefendehl-Hebeker & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Mathemagische Momente* (S. 166-175). Berlin: Cornelsen,

Prediger, S. (2013). Sprachmittel für mathematische Verstehensprozesse: Einblicke in Probleme, Vorgehensweisen und Ergebnisse von Entwicklungsforschungsstudien. In A. Pallack (Hrsg.), *Impulse für eine zeitgemäße Mathematiklehrer-Ausbildung*. MNU-Dokumentation der 16. Fachleitertagung Mathematik. Neuss: Seeberger, 26-36.

Prediger, S., Barzel, B., Leuders, T. & Hußmann, S. (2011). Systematisieren und Sichern. Nachhaltiges Lernen durch aktives Ordnen. *Mathematik lehren*, 164, 2-9.

Pehkonen, E. (1994). On Teachers' Beliefs and Changing Mathematics Teaching. *Journal für Mathematik-Didaktik, 15* (3/4), 177–209.

Philipp, K. (2013). *Experimentelles Denken: Theoretische und Empirische Konkretisierung Einer Mathematischen Kompetenz.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Pólya, G. (1980). *Schule des Denkens: Vom Lösen mathematischer Probleme.* Tübingen: Francke.

Pospeschill, M. & Siegel, R. (2018). *Methoden für die klinische Forschung und diagnostische Praxis: Ein Praxishandbuch für die Datenauswertung kleiner Stichproben*, Berlin: Springer.

Rakoczy, K., Klieme, E., Lipowsky, F. & Drollinger-Vetter, B. (2010). Strukturierung, kognitive Aktivität und Leistungsentwicklung im Mathematikunterricht. In *Unterrichtswissenschaft: Zeitschrift für Lernforschung*. 38.3. 229-246. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Rasch, R. (2001). *Zur Arbeit mit problemhaltigen Textaufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule. Eine Studie zu*

Herangehensweisen von Grundschulkindern an anspruchsvolle Textaufgaben und Schlussfolgerungen für eine Unterrichtsgestaltung, die entsprechende Lösungsfähigkeiten fördert (Texte zur mathematischen Forschung und Lehre, Bd. 13). Zugl.: Erfurt, Univ., Habil.-Schr., 2001. Hildesheim: Franzbecker.

Reimann, P. & Rasch, A. (2008). Expertiseerwerb. In A. Renkl (Hrsg.), *Lehrbuch Pädagogische Psychologie,* (S. 155-204). 1. Aufl. Bern: Huber.

Reiss, K. & Ufer, S. (2009). Was macht mathematisches Arbeiten aus? Empirische Ergebnisse zum Argumentieren. *Begründen und Beweisen. Jahresbericht JB DMV*, *111*(4), 155–177.

Renkl, A. (1997). *Lernen durch Lehren. Zentrale Wirkmechanismen beim kooperativen Lernen* (DUV). Wiesbaden: Deutscher Universitätsverlag. https://doi.org/10.1007/978-3-663-08696-3

Renkl, A. (2008). Lernen und Lehren im Kontext Schule. In A. Renkl (Hrsg.), *Lehrbuch Pädagogische Psychologie,* (S. 109-154). 1. Aufl. Bern: Huber.

Renkl, A. & Mandl, H.(1995). Kooperatives Lernen: Die Frage nach dem Notwendigen und dem Ersetzbaren. In *Unterrichtswissenschaft 23* (1995) 4, 292-300. https://doi.org/10.25656/01:8134

Riordan, J. E., & Noyce, P. E. (2001). The Impact of Two Standards-Based Mathematics Curricula on Student Achievement in Massachusetts. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(4), 368–398. https://doi.org/10.2307/749700

Röhr, M. & Wittmann, E. C. (1995). *Kooperatives Lernen im Mathematikunterricht der Primarstufe: Entwicklung und Evaluation eines fachdidaktischen Konzepts zur Förderung* *der Kooperationsfähigkeit von Schülern.* Wiesbaden: Deutscher Universitätsverlag. https://doi.org/10.1007/978-3-322-90019-7

Roth, J. & Wittmann, G. (2014). Ebene Figuren und Körper. In H.-G. Weigand, A. Filler, R. Hölzl, S. Kuntze, M. Ludwig, J. Roth, B. Schmidt-Thieme & G. Wittmann (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (Mathematik Primar- und Sekundarstufe Didaktik der Mathematik Schwerpunkt Sekundarstufe), (S. 123-156) 2. Aufl. Heidelberg: Spektrum Akad. Verl.

Roth, J. (2018). Wirksamer Mathematikunterricht – Ausrichtung an Kernideen der mathematischen Inhalte und den Lernenden. In M. Vogel (Hrsg.), *Wirksamer Mathematikunterricht* (S. 182-188). Hohengehren: Schneider Verlag.

Rott, B. (2013). *Mathematisches Problemlösen: Ergebnisse einer empirischen Studie*. Dissertation. Münster: WTM-Verlag.

Rott, B. (2016). Problem solving in the classroom: The role of beliefs in the organization of lessons with the subject problem solving. In T. Fritzlar, D. Assmus, K. Bräuning, A. Kuzle, & B. Rott (Hrsg.), *Problem solving in mathematics education. Proceedings of the 2015 joint conference of ProMath and the GDM working group on problem solving* (S. 201–213). Münster: WTM.

Rott, B. (2020). "Is Mathematical Knowledge Vertain? – Are you sure?" Epistemological Beliefs of Pre-Service Teachers. Habilitationsschrift, Pädagogische Hochschule Freiburg.

Sawada, T. (1997). Developing lesson plan. In J. P. Becker & S. Shimada (Hrsg.), *The Open-Ended Approach: A New Proposal for Teaching Mathematics* (S. 23–35). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Scheid, H. & Schwarz, W. (2017). *Elemente der Geometrie* (Lehrbuch, 5. Auflage). Berlin: Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-50323-2

Schnack, J. (2012). Alles Leben ist Problemlösen. Problemlösendes Lernen in der Schule. *Pädagogik (Weinheim), 64* (7/8), 6–9.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. Grouws (Hrsg.), *Handbook for Research on Mathematics teaching and Learning* (S. 334–370). New York: Macmillan.

Schoenfeld, A. H. (2002). Making Mathematics Work for All Children: Issues of Standards, Testing, and Equity. *Educational Researcher*, *31*(1), 13–25. https://doi.org/10.3102/0013189X031001013

Schmidt-Thieme, B. & Weigand, H.-G. (2014). Symmetrie und Kongruenz. In H. -G. Weigand, A. Filler, R. Hölzl, S. Kuntze, M. Ludwig, J. Roth, B. Schmidt-Thieme & G. Wittmann (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (Mathematik Primar- und Sekundarstufe Didaktik der Mathematik Schwerpunkt Sekundarstufe), (S. 99-122) 2. Aufl. Heidelberg: Spektrum Akad. Verl.

Schroeder, T. L., & Lester, F. K. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. In P. R. Trafton & A. P. Shulte (Eds.), *New directions for elementary school mathematics* (1989 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, pp. 31– 42). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Stern, E. (1992): Die spontane Strategieentdeckung in der Arithmetik. In H. Mandl & H. F. Friedrich (Hrsg.*), Lern- und Denkstrategien. Analyse und Intervention* (S. 101-123). Göttingen: Hogrefe.

Stern, E. (1997): Das Lösen mathematischer Textaufgaben: Wie Kinder lernen, was sie nicht üben. In F.E. Weinert & A.

Helmke (Hrsg.), *Entwicklung im Grundschulalter,* (S. 157-170). Weinheim: Psychologie Verlags Union.

Stewart, I. (2011). *Mathematisches Sammelsurium*. Rowohlt. Reinbek bei Hamburg.

Sweller, J. (1988). Cognitive load during problem solving: Effects on learning. *Cognitive science*, 12(2), 257-285. https://doi.org/10.1207/s15516709cog1202_4

Tepner, O., Roeder, B., Melle, I. (2010). Effektivität von Aufgaben im Chemieunterricht der Sekundarstufe. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften* 16. 209–234.

Terhart, E. (1989). *Lehr-Lern-Methoden. Eine Einführung in Probleme der methodischen Organisation von Lehren und Lernen* (Grundlagentexte Pädagogik). Weinheim: Juventa-Verl.

Theyßen, H. (2014). Methodik von Vergleichsstudien zur Wirkung von Unterrichtsmedien. In D. Krüger, I. Parchmann & H. Schecker (Hrsg.), *Methoden in der naturwissenschaftsdidaktischen Forschung*, (S. 67-79). Berlin: Springer Spektrum.

Tietze, U.-P., Klika, M. & Wolpers, H. (Hrsg.). (2000). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II,* Band 1. (2. durchgesehene Auflage). Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg.

Tobinski, D. & Fritz, A, (2010). Lerntheorien und pädagogisches Handeln. In A. Fritz, W. Hussy & D. Tobinski. *Pädagogische Psychologie*: Mit 11 Tabellen und 91 Kontrollfragen. utb-studi-e-book: Vol. 3373, S.222-246. Münchenart: Reinhardt; UTB.

Thompson, D. R., & Senk, S. L. (2001). The Effects of Curriculum on Achievement in Second-Year Algebra: The Example of the University of Chicago School Mathematics Project. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(1), 58–84. https://doi.org/10.2307/749621

Ullmann, P. (2015). Grundvorstellungen zur Schulgeometrie. In M. Ludwig, A. Filler & A. Lambert (Hrsg.), *Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen. Jubiläumsband des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, (S.13-24). Wiesbaden: Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-06835-6

UZH, Methodenberatung, 06.03.2020

Vohns, A. (2007). *Achtung, Mathematik! Ein Probleml(o)esebuch für mathematisch Interessierte und Begabte ab 12*. Norderstedt: Books on Demand GmbH.

Vollrath, H.-J. (1986). Zur Beziehung zwischen Begriff und Problem in der Mathematik. *Journal für Mathematik-Didaktik, 7,* 243–268

Vollrath, H.-J. & Roth, J. (2012). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe* (Mathematik Primar- und Sekundarstufe, Bd. 0, (2. Aufl.). Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Spektrum Akad. Verl.

Wagenschein, M. (1999). *Verstehen lehren. Genetisch, sokratisch, exemplarisch* (5. Aufl.). Weinheim, Basel: Beltz.

Wagenschein, M. (2014). *Natur physikalisch gesehen. Zum Prinzip des "Exemplarischen Lehrens" im physikalischen Unterricht aller Schularten* (7. überarb. und erw. Neuaufl.). Aachen: Hahner Verl. und SchulbuchversandWellstein, H. & Kirsche, P. (2009). *Elementargeometrie. Eine aufgabenorientierte Einführung* (Mathematik-ABC für das Lehramt, 1. Auflage). Wiesbaden: Vieweg + Teubner.

Weigand, H.-G. (2014a). Ziele im Geometrieunterricht. In H. -G. Weigand, A. Filler, R. Hölzl, S. Kuntze, M. Ludwig, J. Roth, B. Schmidt-Thieme & G. Wittmann (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (Mathematik Primar- und Sekundarstufe Didaktik der Mathematik Schwerpunkt

Sekundarstufe), (S. 13-34). 2. Aufl. Heidelberg: Spektrum Akad. Verl.

Weigand, H.-G. (2014b). Begriffslernen und Begriffslehre. In H. -G. Weigand, A. Filler, R. Hölzl, S. Kuntze, M. Ludwig, J. Roth, B. Schmidt-Thieme & G. Wittmann (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (Mathematik Primar- und Sekundarstufe Didaktik der Mathematik Schwerpunkt Sekundarstufe), (S. 99-122). 2. Aufl. Heidelberg: Spektrum Akad. Verl.

Wellstein, H. & Kirsche, P. (Hrsg.). (2009). *Elementargeometrie. Eine aufgabenorientierte Einführung* (Mathematik-ABC für das Lehramt, 1. Auflage). Wiesbaden: Vieweg + Teubner.

Wijnia, L., Loyens, S.M., Gog, T.V., Derous, E., & Schmidt, H.G. (2014). Is there a role for direct instruction in problem-based learning? Comparing student-constructed versus integrated model answers**.** *Learning and Instruction, 34*, 22-31.

Wilson, M. (2001). The case for sensorimotor coding in working memory. *Psychonomic Bulletin and Review*, 8, 44-57.

Winter, H. (1983). Entfaltung begrifflichen Denkens. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 4, 175-204.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Nr. 61,* S. 37–46

Winter, H. (2016). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik* (3., aktualisierte Auflage). Wiesbaden: Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-10605-8.

Wittmann, E. Ch. (1981). *Grundfragen des Mathematikunterrichts* (6., neu bearb. Aufl.). Vieweg.

Wittmann, E. C. (1990). Wider die Flut der „bunten Hunde“ und der „grauen Päckchen“: Die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und des produktiven Übens. In E. C. Wittmann & G. N. Müller (Hrsg.), *Handbuch produktiver Rechenübungen. Bd.1: Vom Einspluseins zum Einmaleins, S.* 152-166. Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. C. (2014). Problemlösen. In H. -G. Weigand, A. Filler, R. Hölzl, S. Kuntze, M. Ludwig, J. Roth, B. Schmidt-Thieme & G. Wittmann (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (Mathematik Primar- und Sekundarstufe Didaktik der Mathematik Schwerpunkt Sekundarstufe), (S.81-97). 2. Aufl. Heidelberg: Spektrum Akad. Verl.

Woolfolk, A., Hughes, M. & Walkup, V. (Hrsg.). (2008). *Psychology in Education*. Harlow: Pearson Longman.

Zahlen und Größen 7 (2007). I. Gabriel & R. Koullen (Hrsg.). Gesamtschule, Nordrhein-Westfalen, [Neubearb.], 1. Aufl. Berlin: Cornelsen.

Zech, F. (1998). *Grundkurs Mathematikdidaktik. Theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen von Mathematik* (Beltz Pädagogik, 10. Auflage). Weinheim, Basel: Beltz Verlag.

Zhang, L., Kirschner, P.A., Cobern, W.W. & Sweller, J. (2022). There is an evidence in science educational policy. *Educational Psychology Review 34* (2), 1157-1176.

Ziegler, G. M. (2010). *Darf ich Zahlen? Geschichten aus der Mathematik* (2. Aufl.). München: Piper.

Unveröffentlichte Abschlussarbeiten

Beenen, M. B. (2018). *Vergleich von Schülerexperiment und Lehrerexperiment zur Herleitung der Volumenformel des Zylinders – empirische Untersuchung und Analyse von Schülerleistungen*. Unveröffentlichte Masterarbeit, Universität Duisburg-Essen.

Matt, R. (2018). *Vergleichsstudie von entdeckendem Einstieg und Lehrervortrag bei der Einführung von „linearen Funktionen" in zwei Klassen der Jahrgangsstufe 8 – Empirische Untersuchungen und Analysen von Schülerleistungen.* Unveröffentlichte Masterarbeit, Universität Duisburg-Essen.

Özbek, B. (2021). *Überprüfung der Auswertungsobjektivität eines Kodiermanuals schriftlicher Schülerbearbeitungen einer Konstruktions- und Argumentationsaufgabe zur Mittelsenkrechten mit anschließender qualitativer Analyse*. Unveröffentlichte Bachelorarbeit, Universität Duisburg-Essen.

Smeets, T. (2019). *Vergleich zweier Unterrichtseinstiege durch entdeckendes Lernen und fragend-entwickelndem Unterrichtsgespräch zur Einführung von geometrischen Körpern in der 4. Klasse – empirische Untersuchung und Analyse von Schülerleistungen*. Unveröffentlichte Masterarbeit, Universität Duisburg-Essen.

Tüsfeld, L. (2019). *Vergleichsstudie von entdeckendem Einstieg und lehrerzentriertem Einstieg zum Thema „Brüche kürzen und erweitern" im 6.Jahrgang einer Gesamtschule – Empirische Untersuchungen und Analyse von Schülerleistungen*. Unveröffentlichte Masterarbeit, Universität Duisburg-Essen.

16 Anhang

16.1 Testhefte

16.1.1 Test 1 der Pilotierung

☺ Zeig, was du kannst! ☺

Vorname: ______________________________

Nachname: ______________________________

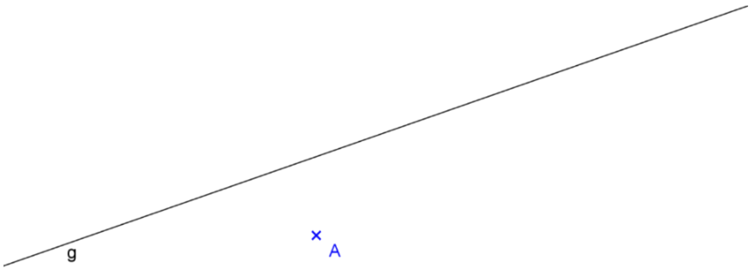
Klasse: ______________________________

Bitte beachte bei der Bearbeitung

- Bitte bearbeite jede Aufgabe direkt auf der Seite, auf der sie gestellt wurde. Falls Du mehr Platz brauchst, schreibe auf die Rückseite. Benutze aber **keine anderen Blätter**.
- Du musst die Aufgaben nicht in der Reihenfolge beantworten, wie sie in diesem Bogen angeordnet sind.
- Zeichne mit **Bleistift und Geodreieck**. Weitere Hilfsmittel, wie zum Beispiel Taschenrechner, Zirkel und Lineal sind nicht erlaubt**.**
- Du hast für die **vier Aufgaben** insgesamt **30 Minuten Zeit**. Versuche, Dir die Zeit einzuteilen und jede Aufgabe zu bearbeiten.
- Bitte lies jede Aufgabe zuerst genau durch. Versuche dann, die Aufgabe zu beantworten.

Viel Spaß und Erfolg!!! 

Aufgabe 1



a) Zeichne den Abstand von dem Punkt A zur Geraden g ein und notiere ihn in mathematischer Schreibweise.

b) Erkläre Dein Vorgehen.

c) Wie viele Abstände von dem Punkt A zur Geraden g gibt es? Begründe.

Aufgabe 2

× B

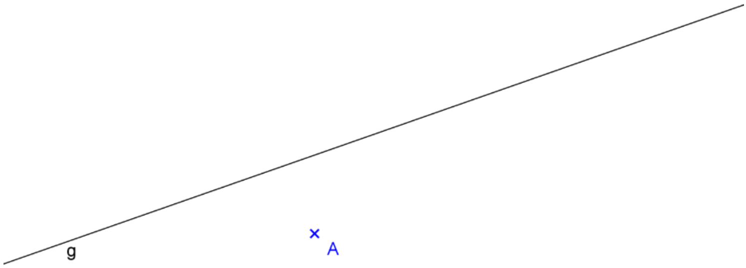
a) Zeichne einen Punkt ein, der 3 cm von B entfernt ist und nenne ihn P.

b) Gibt es noch weitere Punkte, die 3 cm von B entfernt sind?

(1) Falls ja, zeichne sie ein. Begründe.

(2) Falls nein, begründe.

Aufgabe 3



a) Zeichne einen Punkt ein, der 2 cm von g entfernt ist und nenne ihn P.

b) Gibt es noch weitere Punkte, die 2 cm von g entfernt sind?

(1) Falls ja, zeichne sie ein. Begründe.

(2) Falls nein, begründe.

Aufgabe 4

Für den Flächeninhalt A eines Rechtecks mit ganzzahligen Seitenlängen gilt 31 cm^2 < A < 35 cm^2.

a) Wie viele solcher Rechtecke gibt es? Gib ihre Seitenlängen an. Erkläre Dein Vorgehen.

b) Hast du alle Möglichkeiten gefunden? Begründe.

16.1.2 Test 1 der Hauptstudie

☺ Zeig, was du kannst! ☺

Vorname: ____________________________________

Nachname: ___________________________________

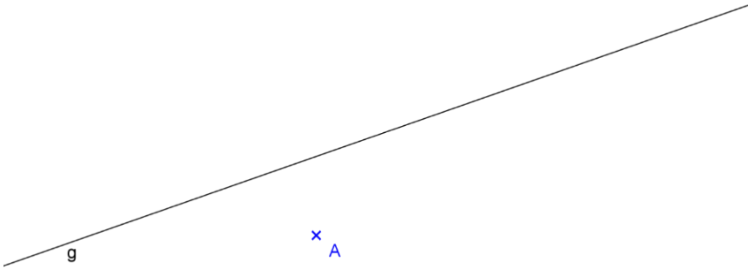
Klasse: _____________________________________

Bitte beachte bei der Bearbeitung

- Bitte bearbeite jede Aufgabe direkt auf der Seite, auf der sie gestellt wurde. Falls Du mehr Platz brauchst, schreibe auf die Rückseite. Benutze aber **keine anderen Blätter**.
- Du musst die Aufgaben nicht in der Reihenfolge beantworten, wie sie in diesem Bogen angeordnet sind.
- Zeichne mit **Bleistift und Geodreieck**. Weitere Hilfsmittel, wie zum Beispiel Taschenrechner, Zirkel und Lineal sind nicht erlaubt**.**
- Du hast für die **fünf Aufgaben** insgesamt **30 Minuten Zeit**. Versuche, Dir die Zeit einzuteilen und jede Aufgabe zu bearbeiten.
- Bitte lies jede Aufgabe zuerst genau durch. Versuche dann, die Aufgabe zu beantworten.

Viel Spaß und Erfolg!!! 

Aufgabe 1



a) Zeichne den Abstand von dem Punkt A zur Geraden g ein und notiere ihn in mathematischer Schreibweise.

b) Erkläre Dein Vorgehen.

c) Wie viele Abstände von dem Punkt A zur Geraden g gibt es? Begründe.

Aufgabe 2

× B

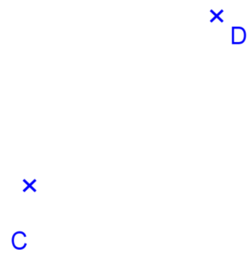
a) Zeichne einen Punkt ein, der 3 cm von B entfernt ist und nenne ihn P.

b) Gibt es noch weitere Punkte, die 3 cm von B entfernt sind?

(1) Falls ja, zeichne sie ein. Begründe.

(2) Falls nein, begründe.

Aufgabe 3



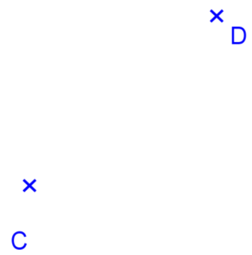
a) Zeichne einen Punkt ein, der denselben Abstand zu C und zu D hat und nenne ihn E

b) Gibt es noch weitere Punkte, die denselben Abstand zu C und zu D haben?

Falls ja, zeichne sie ein. Begründe.

Falls nein, begründe.

Aufgabe 4



a) Zeichne einen Punkt ein, der denselben Abstand zu C und zu D hat und nenne ihn E.

b) Gibt es noch weitere Punkte, die denselben Abstand zu C und zu D haben?

(1) Falls ja, zeichne sie ein. Begründe.

(2) Falls nein, begründe.

Aufgabe 5

Für den Flächeninhalt A eines Rechtecks mit ganzzahligen Seitenlängen gilt 31 cm^2 < A < 35 cm^2.

a) Wie viele solcher Rechtecke gibt es? Gib ihre Seitenlängen an. Erkläre Dein Vorgehen.

b) Hast du alle Möglichkeiten gefunden? Begründe.

16.1.3 Test 2 der Pilotierung

☺ Zeig, was du gelernt hast! ☺

Vorname: ____

Nachname: ____

Klasse: ____

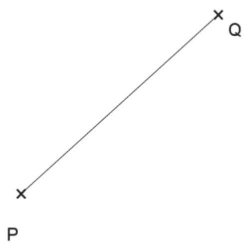
Bitte beachte bei der Bearbeitung

- Bitte bearbeite jede Aufgabe direkt auf der Seite, auf der sie gestellt wurde. Falls Du mehr Platz brauchst, schreibe auf die Rückseite. Benutze aber **keine anderen Blätter**.
- Du musst die Aufgaben nicht in der Reihenfolge beantworten, wie sie in diesem Bogen angeordnet sind.
- Zeichne mit **Bleistift, Geodreieck und Zirkel**. Weitere Hilfsmittel sind nicht erlaubt**.**
- Du hast für die **vier Aufgaben** insgesamt 4**0 Minuten Zeit**. Versuche, Dir die Zeit einzuteilen und jede Aufgabe zu bearbeiten.
- Bitte lies jede Aufgabe zuerst genau durch. Versuche dann, die Aufgabe zu beantworten.

Viel Spaß und Erfolg!!! 

Aufgabe 1

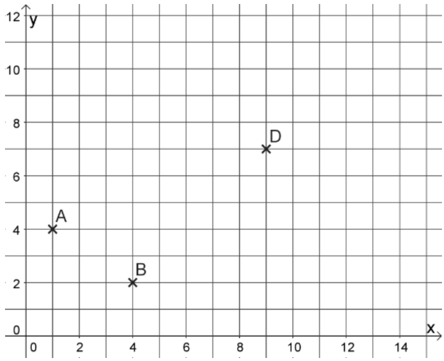
a) Was ist eine Mittelsenkrechte? Gib eine Definition an.



b) Konstruiere die Mittelsenkrechte zu der Strecke $\overline{PQ}$. Zeichne alle Hilfslinien ein.

c) Welche Eigenschaften haben alle Punkte, die auf der Mittelsenkrechten liegen? Erkläre.

Aufgabe 2



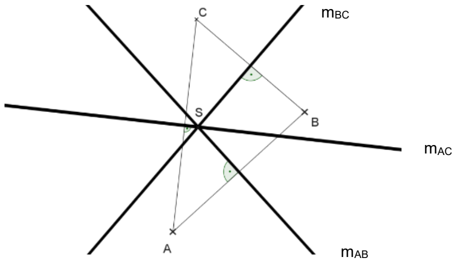
a) Gegeben sind die Punkte A, B und D in dem obigen Koordinatensystem. Gesucht ist ein Punkt P mit den folgenden Eigenschaften:

1. Der Punkt P hat von den Punkten A und B den gleichen Abstand.
2. Der Punkt P hat von dem Punkt D den Abstand d von 2 Längeneinheiten.

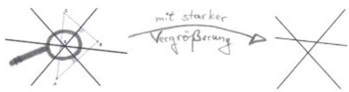
Konstruiere einen Punkt P und erkläre das Ergebnis.

c) Verändere den gegebenen Abstand d (2 Längeneinheiten). Welche unterschiedlichen Fälle gibt es?

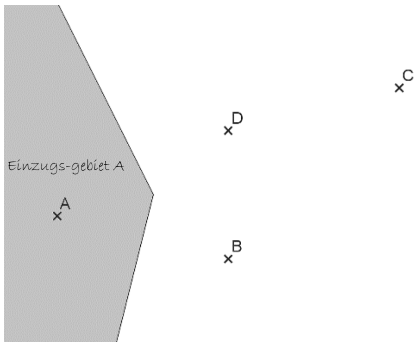
Aufgabe 3



Jan hat in dem spitzwinkligen Dreieck ABC zu jeder der drei Seiten die Mittelsenkrechte mit Zirkel und Lineal konstruiert. Seine Sitznachbarin Selma ärgert sich, dass Jan schon wieder den Bleistift nicht angespitzt hat. Jetzt sieht es so aus, als ob sich alle drei Mittelsenkrechten genau in einem Punkt S schneiden. Selma ist sich sicher, dass man bei genauerem Zeichnen mit angespitztem Bleistift oder unter einer Lupe, also mit starker Vergrößerung, eigentlich folgendes Bild sehen sollte:



Hat Selma Recht? Welches Bild ist unter der Lupe zu sehen? Begründe.



In einer Stadt gibt es vier Schulen A, B, C, D. Damit die Schüler einen möglichst kurzen Schulweg haben, ist die Stadt in einzelne Schuleinzugsgebiete eingeteilt. Die Grenzen für das Einzugsgebiet der Schule A sind bereits eingezeichnet.

Zeichne mit dem Geodreieck die fehlenden Grenzen für die Schulen B, C und D ein.
Erkläre an einem Beispiel, wie du vorgehst.

16.1.4 Test 2 der Hauptstudie

☺ Zeig, was du gelernt hast! ☺

Vorname: ______________________________________

Nachname: _____________________________________

Klasse: _______________________________________

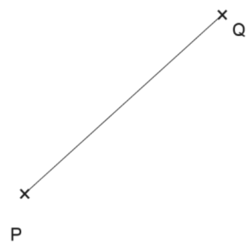
Bitte beachte bei der Bearbeitung

- Bitte bearbeite jede Aufgabe direkt auf der Seite, auf der sie gestellt wurde. Falls Du mehr Platz brauchst, schreibe auf die Rückseite. Benutze aber **keine anderen Blätter**.
- Du musst die Aufgaben nicht in der Reihenfolge beantworten, wie sie in diesem Bogen angeordnet sind.
- Zeichne mit **Bleistift, Geodreieck und Zirkel**. Weitere Hilfsmittel sind nicht erlaubt**.**
- Du hast für die **fünf Aufgaben** insgesamt 4**0 Minuten Zeit**. Versuche, Dir die Zeit einzuteilen und jede Aufgabe zu bearbeiten.
- Bitte lies jede Aufgabe zuerst genau durch. Versuche dann, die Aufgabe zu beantworten.
- Lies Die Deine Erklärung zum Schluss noch einmal durch und prüfe, ob du nichts vergessen hast.

Viel Spaß und Erfolg!!! 

Aufgabe 1

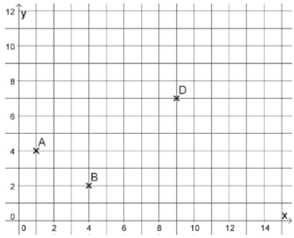
a) Was ist eine Mittelsenkrechte? Gib eine Definition an.



b) Konstruiere die Mittelsenkrechte zu der Strecke $\overline{PQ}$. Zeichne alle Hilfslinien ein.

c) Welche Eigenschaften haben alle Punkte, die auf der Mittelsenkrechten liegen? **Erkläre.**

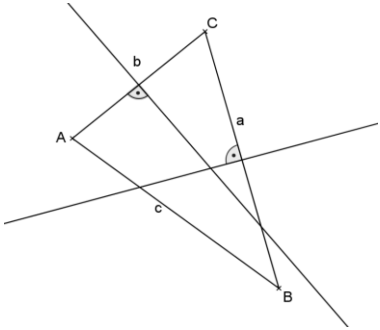
Aufgabe 2



Eine Längeneinheit entspricht einem Kästchen.

a)	Gegeben sind die Punkte A, B und D in dem obigen Koordinatensystem. Gesucht ist ein Punkt P mit den folgenden Eigenschaften: 1. Der Punkt P hat von den Punkten A und B den gleichen Abstand. 2. Der Punkt P hat von dem Punkt D den Abstand d von 2 Längeneinheiten. **Konstruiere mit Zirkel und Linal** einen Punkt P und erkläre das Ergebnis.
b)	Verändere den gegebenen Abstand d (2 Längeneinheiten). Welche unterschiedlichen Fälle gibt es?

Aufgabe 3



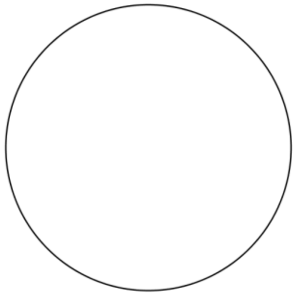
Aus dem Mathematikunterricht weißt du, dass sich die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks in genau einem Punkt schneiden. Dies gilt für jedes Dreieck.

Es ist schnell erklärt, dass sich zwei Mittelsenkrechten in einem Punkt schneiden: Die beiden Mittelsenkrechten sind nicht parallel zueinander verlaufende Geraden. Daher müssen sie sich schneiden.

Aber warum verläuft auch die dritte Mittelsenkrechte genau durch diesen Schnittpunkt?

Erkläre möglichst ausführlich und verständlich, wieso in jedem beliebigen Dreieck auch die fehlende dritte Mittelsenkrechte durch den gemeinsamen Schnittpunkt der beiden anderen Mittelsenkrechten verlaufen muss.

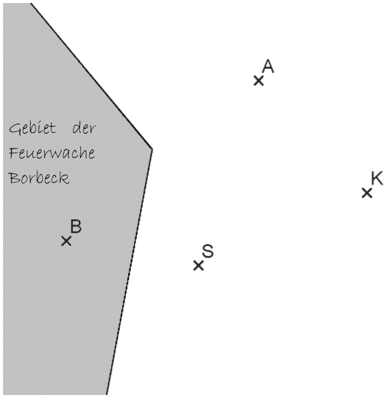
Aufgabe 4



Gegeben ist ein Kreis. Konstruiere den Mittelpunkt M des Kreises.

Arbeite dabei so genau wie möglich und **erkläre** dein Vorgehen.

Aufgabe 5



Im Norden einer Großstadt gibt es vier Feuerwehrstandorte: Wache **A**ltenessen, Wache **B**orbeck, Wache **K**ray und Wache **S**tadtmitte. In einem Brandfall ist schnelle Hilfe nötig. Daher soll der Norden der Stadt nun in Gebiete eingeteilt werden, so dass stets die nächstgelegene Feuerwache alarmiert wird. Die Grenzen der Feuerwache Borbeck sind bereits eingezeichnet.

Zeichne die fehlenden Grenzen für die Feuerwachen **A**ltenessen, **K**ray und **S**tadtmitte ein.
Erkläre am Beispiel der Feuerwache **S**tadtmitte, wie du zu den Grenzen gekommen bist.

16.1.6 Test 3 der Pilotierung

☺ Zeig, was du noch weißt! ☺

Vorname: ____

Nachname: ____

Klasse: ____

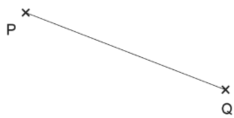
Bitte beachte bei der Bearbeitung

- Bitte bearbeite jede Aufgabe direkt auf der Seite, auf der sie gestellt wurde. Falls Du mehr Platz brauchst, schreibe auf die Rückseite. Benutze aber **keine anderen Blätter**.
- Du musst die Aufgaben nicht in der Reihenfolge beantworten, wie sie in diesem Bogen angeordnet sind.
- Zeichne mit **Bleistift, Geodreieck und Zirkel**. Weitere Hilfsmittel sind nicht erlaubt**.**
- Du hast für die **vier Aufgaben** insgesamt 4**0 Minuten Zeit**. Versuche, Dir die Zeit einzuteilen und jede Aufgabe zu bearbeiten.
- Bitte lies jede Aufgabe zuerst genau durch. Versuche dann, die Aufgabe zu beantworten.

Viel Spaß und Erfolg!!! 

Aufgabe 1

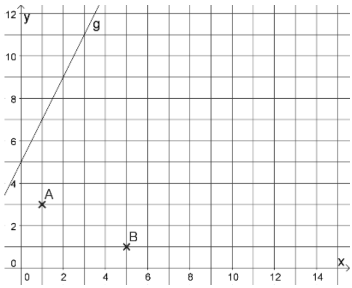
a) Was ist eine Mittelsenkrechte? Gib eine Definition an.



b) Konstruiere die Mittelsenkrechte zu der Strecke $\overline{PQ}$. Zeichne alle Hilfslinien ein.

c) Welche Eigenschaften haben alle Punkte, die auf der Mittelsenkrechten liegen? Erkläre.

Aufgabe 2



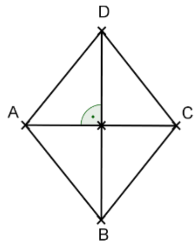
Eine Längeneinheit entspricht einem Kästchen.

a) In dem obigen Koordinatensystem sind die Punkte A und B und die Gerade g gegeben.
Gesucht ist ein Punkt P mit den folgenden Eigenschaften:
1. Der Punkt P hat von den Punkten A und B den gleichen Abstand.
2. Der Punkt P liegt auf der Geraden g.

Konstruiere einen Punkt P und erkläre das Ergebnis.

b) Betrachte weiterhin den oben gesuchten Punkt P. Verschiebe die Geraden g. Welche unterschiedlichen Fälle gibt es?

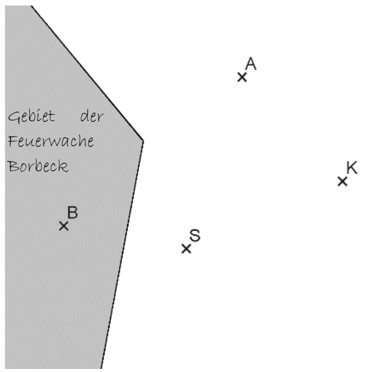
Aufgabe 3



Katja und Emir erhalten im Matheunterricht folgende Aufgabe:
Bei dem abgebildetem Viereck ABCD schneiden sich die Diagonalen im rechten Winkel. Begründe (ohne zu messen), dass alle vier Seiten des Vierecks gleich lang sind.

Emir sagt: „Das ist einfach. Das liegt daran, dass die Diagonalen hier beide auch Mittelsenkrechten sind. Und dann sieht man´s sofort!"
Katja überlegt, aber sie sieht das nicht. Dann fordert sie Emir auf: „Emir, ich versteh das so nicht. Erklär mir das bitte Schritt für Schritt."

Formuliere Emirs Antwort so ausführlich, dass Katja sie sicher versteht:



Im Norden einer Großstadt gibt es vier Feuerwehrstandorte: Wache **A**ltenessen, Wache **B**orbeck, Wache **K**ray und Wache **S**tadtmitte. In einem Brandfall ist schnelle Hilfe nötig. Daher soll der Norden der Stadt nun in Gebiete eingeteilt werden, so dass stets die nächstgelegene Feuerwache alarmiert wird. Die Grenzen der Feuerwache Borbeck sind bereits eingezeichnet.

Zeichne die fehlenden Grenzen für die Feuerwachen **A**ltenessen, **K**ray und **S**tadtmitte ein.
Erkläre am Beispiel der Feuerwache **S**tadtmitte, wie du zu den Grenzen gekommen bist.

16.1.7 Test 3 der Hauptstudie

☺ Zeig, was du noch weißt! ☺

Vorname: ______________________________

Nachname: ______________________________

Klasse: ______________________________

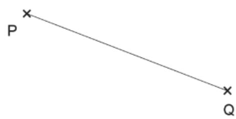
Bitte beachte bei der Bearbeitung

- Bitte bearbeite jede Aufgabe direkt auf der Seite, auf der sie gestellt wurde. Falls Du mehr Platz brauchst, schreibe auf die Rückseite. Benutze aber **keine anderen Blätter**.
- Du musst die Aufgaben nicht in der Reihenfolge beantworten, wie sie in diesem Bogen angeordnet sind.
- Zeichne mit **Bleistift, Geodreieck und Zirkel**. Weitere Hilfsmittel sind nicht erlaubt**.**
- Du hast für die **fünf Aufgaben** insgesamt 4**0 Minuten Zeit**. Versuche, Dir die Zeit einzuteilen und jede Aufgabe zu bearbeiten.
- Bitte lies jede Aufgabe zuerst genau durch. Versuche dann, die Aufgabe zu beantworten.
- Lies Dir Deine Erklärungen zum Schluss noch einmal durch und prüfe, ob du nichts vergessen hast.

Viel Spaß und Erfolg!!! 

Aufgabe 1

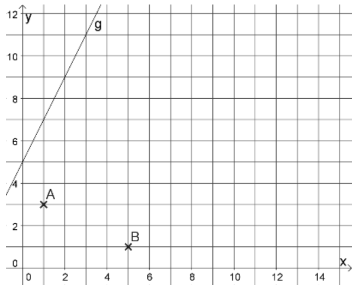
a) Was ist eine Mittelsenkrechte? Gib eine Definition an.



b) Konstruiere die Mittelsenkrechte zu der Strecke $\overline{PQ}$. Zeichne alle Hilfslinien ein.

c) Welche Eigenschaften haben alle Punkte, die auf der Mittelsenkrechten liegen? **Erkläre**.

Aufgabe 2



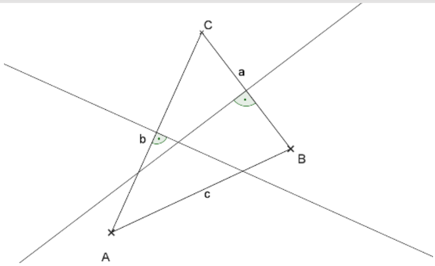
Eine Längeneinheit entspricht einem Kästchen.

a) In dem obigen Koordinatensystem sind die Punkte A und B und die Gerade g gegeben.
Gesucht ist ein Punkt P mit den folgenden Eigenschaften:
1. Der Punkt P hat von den Punkten A und B den gleichen Abstand.
2. Der Punkt P liegt auf der Geraden g.

Konstruiere einen Punkt P und erkläre das Ergebnis.

b) Betrachte weiterhin den oben gesuchten Punkt P. Verschiebe die Geraden g. Welche unterschiedlichen Fälle gibt es?

Aufgabe 3



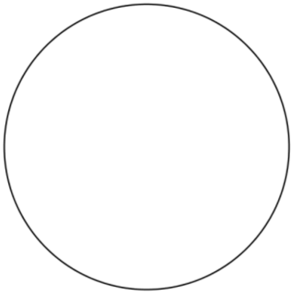
Aus dem Mathematikunterricht weißt du, dass sich die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks in genau einem Punkt schneiden. Dies gilt für jedes Dreieck.

Es ist schnell erklärt, dass sich zwei Mittelsenkrechten in einem Punkt schneiden: Die beiden Mittelsenkrechten sind nicht parallel zueinander verlaufende Geraden. Daher müssen sie sich schneiden.

Aber warum verläuft auch die dritte Mittelsenkrechte genau durch diesen Schnittpunkt?

Erkläre möglichst ausführlich und verständlich, wieso in jedem beliebigen Dreieck auch die fehlende dritte Mittelsenkrechte durch den gemeinsamen Schnittpunkt der beiden anderen Mittelsenkrechten verlaufen muss.

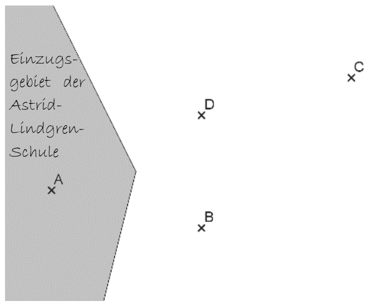
Aufgabe 4



Gegeben ist ein Kreis. Konstruiere den Mittelpunkt M des Kreises.

Arbeite dabei so genau wie möglich und **erkläre** dein Vorgehen.

Aufgabe 5



In einer Stadt gibt es vier Grundschulen: Astrid-Lindgren-Schule, Barbaraschule, Cäcilienschule und Dürerschule. Die Schülerinnen und Schüler sollen einen möglichst kurzen Schulweg haben. Daher soll die Stadt in einzelne Schul-Einzugsgebiete eingeteilt werden, so dass jeder Schüler stets die nächstgelegene Schule besuchen kann. Die Grenzen für das Einzugsgebiet der Astrid-Lindgren-Schule sind bereits eingezeichnet.

Zeichne die fehlenden Grenzen für Barbaraschule, Cäcilienschule und Dürerschule ein.
Erkläre am Beispiel der Barbaraschule, wie du zu den Grenzen gekommen bist.

16.1.8 Durchführungsprotokoll zu den Tests

Rahmenbedingungen der Testdurchführung: An die Testdurchführung vor Ort in den Schulklassen werden einige Bedingungen gestellt, um die Vergleichbarkeit der Durchführung zu sichern. An allen drei Tests, Test 1, Test 2 und auch Test 3, nehmen (möglichst) alle Schülerinnen und Schüler der Klassen teil und es gelten Klassenarbeitsbedingungen, d. h. Einzelarbeit und Verwendung des eigenen Materials. Jeder Test sollte innerhalb einer Schulstunde durchgeführt werden. Das entspricht einer reinen Bearbeitungszeit von 30 Minuten für Test 1 und von 40 Minuten für Test 3 und 4. Dies wird sichergestellt, indem die Autorin selbst als Durchführungsleiterin bei allen Test anwesend ist und so für die Einhaltung dieser Vorgehensweisen sorgen kann.

Nachdem alle Schülerinnen und Schüler sich auf Ihren Plätzen eingefunden haben, wird außer dem Schreibmaterial und Verpflegung alles Weitere vom Tisch geräumt. Die Testhefte werden verteilt und auf ein gemeinsames Zeichen hin umgedreht. Nun trägt jeder Lernende seinen Vornamen, Nachnamen und die Klasse im Kopf des Testhefts ein. Anschließend werden die Bearbeitungshinweise vorgelesen und erst danach beginnt die Arbeitszeit. Sind Schülerinnen oder Schüler bereits vor Ablauf der Zeit mit der Bearbeitung fertig, werden sie von der Durchführungsleitung aufgefordert, Ihre Lösungen noch einmal durchzugehen und zu kontrollieren. Nach Ablauf der Arbeitszeit werden alle Hefte eingesammelt.

Es werden Materialien wie Geodreieck und Zirkel im Klassensatz mitgebracht, so dass sichergestellt ist, dass jeder Schülerin und jedem Schüler eigenes Werkzeug zur Verfügung steht.

16.2 Bewertungshorizonte und Kodierhandbücher

16.2.1 Test 1 – Aufgabe 1

1 Punkt Je 0,5 (a)	Abstand wird richtig eingezeichnet und mit 1,6 angegeben. (Einheit ist nicht notwendig, rechter Winkel auch nicht) (wird die richtige Angabe 1,6 erst in Teilaufgabe c) genannt, so wird sie für a) als richtig gewertet. Wird nicht deutlich, dass 1,6 der Abstand ist (B11), gibt es Null Punkte; Messungenauigkeit von 1 mm werden als richtig anerkannt) Offensichtlich falsch eingezeichnet und gemessen und trotzdem 1,7 abgemessen ergibt 0 Punkte (C18)
1 Punkt (b)	Vorgehen wird richtig erklärt: rechter Winkel gezeichnet bzw. Beschreibung de Lage des Geodreiecks, s.d. 90° entstehen.

	„man legt den Nullpunkt des Geodreiecks auf die Gerade und schiebt ...“ 0 Punkte, da kein Unterschied zum Messen der Streckenlänge deutlich wird. (C20) Bei Beschreibungen der Lage des Geodreiecks muss deutlich werden, dass eine Senkrechte gezeichnet wird, also die Mittellinie im Geodreieck verwendet wird. „Ich habe den kürzesten Weg genommen.“ 0,5 Punkte- welcher ist das? Wie? (auch E17, E31
1Punkt ©	Es gibt einen Abstand. Unter Abstand versteht ‚man die kürzeste Verbindung, also gibt es nur einen
1 Punkt ©	Begründung: Abstand wird richtig eingezeichnet und mit 1,6 angegeben. (Einheit ist nicht notwendig, rechter Winkel auch nicht) („es gibt nur einen, weil es sonst nicht genau gemessen und falsch ist“) wird als noch richtig anerkannt (B15) („es gibt nur einen Punkt da daher“ wird nicht anerkannt. (B23) „Es gibt viele, doch man soll immer nur den kürzesten nehmen:“ (C32) insgesamt 2 Punkte „Es gibt nur einen, weil man den Abstand nur auf eine Weise bestimmen kann“ (C30) insg. 2 Punkte, da bei b) die eine Weise richtig erklärt wird. „Wenn es mehrere geben würde, wäre der Abstand länger) 1 Punkt. (C24, D34) ? „ 3. Der nächste Weg und die beiden Spitzen.“ Null Punkte, trotz richtiger Teilantwort. (C19) „Weil der Punkt A und die Gerade parallel sind.“ (D14) 1 Punkt. Argument indirekt über „rechten Winkel des Abstands. „Weil nur einer richtig ist“ (E12, E22) 0 Punkte (?)

16.2.2 Test 1 – Aufgabe 2

1 Punkt (a)	Ein Punkt wurde richtig eingezeichnet „Ja, es gibt noch eine und es gibt nur noch eine. „Begrenzung auf zwei Punkte, daher hier insgesamt nur 1 Punkt. Spiegelachse eingezeichnet durch B und einen weiteren Punkt. Insgesamt 1 Punkt (C26, D14, D25) „Ja, man könnte sie überall setzten.“ (E16, E11)Nur ein Punkt eingezeichnet. Ergibt 1 Punt.
1 Punkt (b)	Ja, einige Beispiele werden angegeben „Es gibt vier.“ Eingezeichnet sind N, S, O und W. (B16)

	Acht Punkte kreisförmig eingezeichnet, kein Wort als Begründung gibt insgesamt 2 Punkte. „Punkte in jede Richtung.“ Kann auch N, S, W, O bedeuten, daher nur 2 Punkte. „Ja, weil man die noch an anderen Stellen einzeichnen kann.“ In Abbildungen sind mehrere Punkte eingezeichnet. Kreis erkennbar. dann: 2,5 Punkte Verschiedene Punkte eingezeichnet, ohne Systematik, Viertelkreis erkennbar, keine Erklärung - 2 Punkte
1 Punkt (b)	Ja, Kreis, rundherum. Kreis als Begriff genannt oder in Abbildung eindeutig zu erkennen, sonst keinen Punkt. „Ja, denn alle Punkte sind in einem Radius von 3cm angeordnet.“ (C11) 1 Punkt 0,5 falls Kreis in Abbildung ersichtlich, aber nicht in Text genannt. (D16,D17) Ab wann ist Kreis erkennbar? Ab 6 Punkten? 8? Siehe 34 (hier keine Kreispunkte vergeben) ggf. 0,5 noch einmal überprüfen.
1 Punkt (b)	Ja, unendlich viele Punkte auf dem Kreis „So viele wie mir nach Lust und Laune ist.“ 0 Punkte , da das eben sehr viele sind, aber nicht unendlich viele. (?) (B21) „unzählig viele Punkte.“ (C17) 1 Punkt (?)

16.2.3 Test 1 – Aufgabe 3

1 Punkt (a)	Punkt richtig eingezeichnet, Verbindungslinie erkenntlich und rechter Winkel. Sonst 0 Punkte (keine Doppelt Bewertung von Punkt – Abstand – Gerade. Zeichne ich zwei Punkte ein, kann man erkennen, ob die Gerade durch diese Punkte rechtwinklig ist (D11), daher hier strenge 0 Punkte) „wenn man die ganzen Punkte einzeichnet, ergibt das einen Kreis. Ein Kreis hat viele Punkte." Insgesamt 0 Punkt, da Abstand nicht eingezeichnet und Idee überhaupt nicht verstanden (B28, B20, B11) „Ja, es gibt noch eine, die 2 cm Abstand hat, weil es oben und unten eine gibt." Zwei Punkte eingezeichnet, rechter Abstandswinkel wird nicht deutlich(C12) 1 Punkt bei (b) (C15) für oben und unten ohne Erwähnung der Gerade, der Parallelität 0,5 Punkte für einen eingezeichnet, keinen für mehrere 2 Punkte offensichtlich nicht rechtwinklig eingezeichnet 0 Punkte, oben einer unten einer (C15) 0,5 Punkte
1 Punkt (b)	Ja, einige. Wenn nicht deutlich wird, wie der Abstand gemessen wird und nur 1 Punkt eingezeichnet ist, ohne Begründung. 0 Punkte 2 eingezeichnete Punkte sind noch nicht einige, daher hierfür keinen Punkt. Ein Punkt eingezeichnet, ohne b stand (0 Punkte) „Es gibt sehr viele." 0,5 Punkte bei (b) (E20)
1,5 Punkt (b)	Ja, Parallelen (0,5). Oberhalb und unterhalb Gerade eingezeichnet/ beschrieben Je 0,5. Es muss deutlich werden, dass mit Gerade nicht die Gerade g gemeint ist und dass eine neue, parallele Gerade entsteht. (B29) hierfür 0 Punkte Punkte werden nach oben und unten eingezeichnet. Parallel nicht erwähnt, gerade nicht erwähnt. 0,5 Punkte dafür (B23) Geraden werden oben und unten eingezeichnet und als parallel beschrieben, sind aber eindeutige nicht parallel gezeichnet (C18). 1 Punkt. Punkte sind ohne rechten Winkel eingetragen, einer oben, einer unten. „Ja gibt es, weil man noch Geraden zeichnen kann, die parallel zu der geraden g sind." (C24) da parallele erwähnt, ergibt sich der rechte Winkel, daher 2,5 Punkte „Weil g wieder Punktsymmetrisch ist und g als auch P gespiegelt werden." (C26) Punkte falsch eingezeichnet. 0,5 Punkte für oben/unten durch Spiegelachsenargument. Parallele gerade nicht genannt, aber Spiegelung nach unten und so viele Punkte, dass gerade eine Abb. erscheint. (D13) 1 Punkt hierfür.

	Viele Punkte, Geraden zu sehen oben und unten. Parallel wird nicht erwähnt sind sie aber, dann 1 Punkt (D20, D19) Ein Punkt mit Abstand nach oben, ein Punkt mit Abstand nach unten. Ergibt insgesamt 1 für a) und 0,5 für oben/unten. (E19)
0,5 Punkt (b)	Ja, unendlich viele.

16.2.4 Test 1 – Aufgabe 4

1 Punkt (a)	Ein Punkt wurde eingezeichnet.
1 Punkt (b)	Viele weitere Punkte eingezeichnet (nur ein/zwei weitere Punkt, d.h. Spiegelpunkt oder/und Mitte – 0,5)
1,5 Punkt (b)	Gerade durch die Mitte senkrecht eingezeichnet, in Worten beschrieben. (je 0,5) „Weil man den Punkt auch einfach weiter wegzeichnen kann.“ (E28) - Idee der Geraden 0,5 Punkte Es wird gespiegelt = rechter Winkel – hier 0,5 Punkte
0,5Punkte (b)	Unendlich viele

16.2.5 Test 1 – Aufgabe 5

1,5 Punkte	Flächeninhalte gesucht (a*b) berechnet, kleiner gleich verstanden, ganzzahlig (je 0,5) addiert statt subtrahiert, hier: 0,5 Punkte ist kleiner gleich nicht zu erkennen, da nur ein passendes Bsp. Dann hier nur 1 Punkt
0,5 Punkte	Findet eine richtige Lösung (auch für 31 oder 35, gib es hier 0,5 Punkte, oder Dezimalzahlen, allerdings nicht, wenn man nicht erkennen kann, was gerechnet wird
0,5 Punkte	Findet 2/3 Lösungen a= 2 ergibt zwei Lösungen mit b=16 oder b=17. Dafür nur 1 Punkt. a wird variiert zu 2, 3 ,4 jeweils eine Lösung, hier 1 Punkt
0,5	Findet mehr als 3 Lösungen
1 Punkt	Findet ausschließlich alle Lösungen (7 Stück), nicht mehr, systematisches Vorgehen, nur einer wurde übersehen – 0,5 Punkte (C23)

16.2.6 Test2/3 – Aufgabe 1

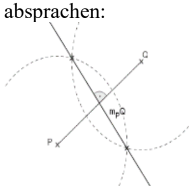
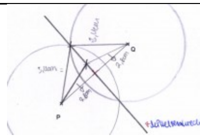
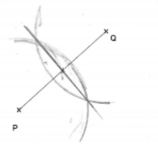
Die Schülerlösungen werden mit Punkten zwischen 0 und 4 bewertet, dabei können als kleinste Einheit 0,5 Punkte vergeben werden (z.B. wenn ein Bewertungsaspekt angeführt wird, der aber nicht ganz korrekt wiedergegeben wird).

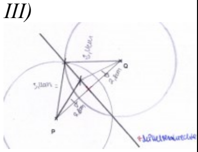
In dieser Aufgabe werden grundlegende Fertigkeiten zur Mittelsenkrechte abgefragt. In den drei Teilaufgaben werden die Definition (a), die Konstruktion (b) und weitere Eigenschaften (c) abgefragt. Die Aufgabenvarianten in $Test_2$ und $Test_3$ sind fast identisch, lediglich die Stellung der Punkte in b) wird variiert. Für die Teilaufgaben a) und c) gibt es jeweils 1,5 Punkte. Die Teilaufgabe b) wird mit 1 Punkt bewertet.

Für die Mittelsenkrechte können je nach Perspektive und Schwerpunktsetzung verschiedene Definitionsvarianten gefunden werden. Für den Aufgabenteil a) ist eine richtige Definitionsvariante anzugeben. Grammatik und Rechtschreibung werden nicht bewertet. Bei sprachlichen Ungenauigkeiten oder falschen Bezügen wird versucht, zu hinterfragen, inwieweit eine tragbare Idee hinter der falschen Formulierung steckt. Die Formulierung muss jedoch im mathematischen Sinn eindeutig und richtig sein. Bei b) ist eine Konstruktion der Mittelsenkrechten mit Zirkel und Lineal durchzuführen. Es sollten alle Hilfslinien (hier zwei sich schneidende Kreisbögen) erkennbar sein. Der rechte Winkel kann als Maß der Genauigkeit für das Zeichnen dienen. In der Teilaufgabe c) sollte genannt werden, dass alle Punkte auf einer Mittelsenkrechten den gleichen Abstand zu den beiden Streckenendpunkten besitzen. Dies kann ggf. eine Dopplung der Antwort zur Teilaufgabe a) beinhalten. Das ist von der gewählten Definition abhängig.

Tab. 1: Darstellung der Bewertungsaspekte mit Ankerbeispielen zur Verdeutlichung des Aspektes und alternativen Beispielen zur Verdeutlichung der Reichweite der Interpretation..

Bewertungsaspekte	Mögliche Argumentationsschritte	Ankerbeispiel	Alternativen
I) Definition der Mittelsenkrechte (1,5 Punkte)	Aus dem Unterricht: Zwei Punkte *A* und *B* sind gegeben und es sind alle Punkte gesucht, die den gleichen Abstand zu *A* und auch zu *B* haben, dann befinden sich die gesuchten Punkte auf der Mittelsenkrechten.	*Eine Mittelsenkrechte ist eine Gerade, die senkrecht z.B. durch die Strecke AB verläuft. Diese Mittelsenkrechte ist genau in der Mitte und auf der Mittelsenkrechten befinden sich alle Punkte, die den gleichen Abstand zu den*	Die Mittelsenkrechte ist eine Gerade durch die Mitte => 0,5 Punkte (Durch die Mitte wovon?) Die Mittelsenkrechte ist orthogonal => 0 Punkte (Das sagt der Name, orthogonal wozu?)

	ODER Eine Senkrechten durch die Mitte der Strecke $\overline{AB}$ heißt Mittelsenkrechte zur Strecke $\overline{AB}$.	*Punkten A & B haben. (ND26).* => 1,5 Punkte	Hingegen: Eine Mittelsenkrechte verläuft senkrecht durch eine Strecke => 0,5 Punkte Die Mittelsenkrechte verläuft durch die Mitte => 0 Punkte (Das sagt der Name, durch welche Mitte?)
II) Konstruktion der Mittelsenkrechte (1 Punkt)	Nach Unterrichtsabsprachen:  Zwei Kreisbögen mit gleichem Radius sind eingezeichnet. Die Mittelsenkrechte ist als Gerade durch die Kreisschnittpunkte eingezeichnet (Der rechte Winkel muss nicht markiert sein.).	 *(ND26).* =>1 Punkt	Genauigkeit der Zeichnung wird bei richtiger Konstruktionsweis vernachlässigt:  *(NB12)* => 1 Punkt Zwei sich berührende Kreise mit gleichem Radius; Gerade wird durch diesen einen Schnittpunkt gezeichnet (*NB11*) => 0,5 Punkte Schnittpunkte zweier Kreise mit gleichem Radius werden zur Strecke verbunden (*NC12*) => 0,5 Punkte Mittelsenkrechte wird nicht als Gerade, sondern als Strecke eingezeichnet => 0,5 Punkte Einzeichnen der Mittelsenkrechte mit dem Geodreieck,

			keine Kreisbögen zu erkennen. => 0 Punkte Kreisbögen haben zu kleinen Radius und schneiden sich nicht. => 0 Punkte
III) Punkteigenschaften (1 Punkt)	Aus dem Unterricht: Wenn ein Punkt auf der Mittelsenkrechten zur Strecke $\overline{AB}$ liegt, hat er den gleichen Abstand zu dem Punkt A und zu dem Punkt B.	*Sie haben den gleichen Abstand zu den Punkten P & Q (ND26).* =>1 Punkt	*Sie haben den gleichen Abstand zu den anderen Punkten […] (NE25).* => 0,5 Punkte *Alle Punkte habe den exakten Abstand zu den beiden angegebenen Punkten […] (NE27).* => 0,5 Punkte *Die Mittelsenkrechte ist in der Mitte von zwei Punkten (FB21).* => 0 Punkte
IV) Erklärung der Punkteigenschaften (0,5 Punkte)	Für beliebige Punkte auf der Mittelsenkrechten kann der Abstand zu P und Q gemessen werden. ODER Die Punkte auf der Mittelsenkrechten sind gleich weit von P und Q entfernt, weil die Gerade senkrecht (durch die Mitte) verläuft.	*Ohne Worte erklärt diese Zeichnung den Bewertungsaspekt III)*  (ND26) => 0,5 Punkte	*Da die Punkte in der Mitte liegen.* *=> 0 Punkte*

16.2.7 Test 2/3 – Aufgabe 2

Die Schülerlösungen werden mit Punkten zwischen 0 und 4 bewertet, dabei können als kleinste Einheit 0,5 Punkt vergeben werden. Die Bewertung der Schülerlösung erfolgt anhand der Skizze und der schriftlichen Erklärungen. In den Tabellen 1 und 2 sind die Bewertungsaspekte für $Test_2$ und $Test_3$ aufgeführt. Für jeden der IV Aspekte wird ein Punkt vergeben, wenn eine richtige Verwendung in der Zeichnung oder auch der schriftlichen Erklärung erkannt werden kann. Der Aufgabenteil a) wird mit den Bewertungsaspekten I) bis III) und der Aufgabenteil b) mit dem Bewertungsaspekt VI) erfasst.

Unter Konstruktion wird die zeichnerische Konstruktion mit Zirkel und Lineal verstanden. Im Gegensatz dazu kann die Mittelsenkrechte auch mit dem Geodreieck **eingezeichnet** werden. Bei der Bewertung der Aufgabe 2 wird diese Unterscheidung nicht berücksichtigt: ist die Mittelsenkrechte richtig (ziemlich genau) eingezeichnet, wird dafür ein Punkt vergeben (siehe Tab. 1 und 2 jeweils Bewertungsaspekt I)).

Tab.1: Bewertungsaspekte der Aufgabe 2 für Test 2

	Bewertungs-aspekte	Mögliche Lösungs-schritte in Test 2	Kodierbeispiele
Teilaufgabe a)	I)Eigenschaft 1 des gesuchten Punktes	Die Mittelsenkrechte zur Strecke $\overline{AB}$ wird eingezeichnet.	• Die Mittelsenkrechte wird konstruiert oder mit dem Geodreieck eingezeichnet => 1 Punkt • Die Mittelsenkrechte wird fehlerhaft eingezeichnet (NC21) => 0,5 Punkte. • Die Mittelsenkrechte ist noch zu erkennen, wurde aber wegradiert => 0,5 Punkte
	II)Eigenschaft 2 des gesuchten Punktes	Es wird ein Kreis um D mit dem Radius von 2 Längeneinheiten eingezeichnet.	• Es reicht aus, wenn man erkennen kann, dass der Abstand von zwei Längeneinheiten verwendet wird, z.B. durch Markierung eines Punktes => 1 Punkt • Der Abstand d wird als Diagonale durch zwei Kästchen verwendet => 0,5 Punkte (ND21)

			• Der Abstand d wird in Zentimetern gemessen => 0,5 Punkte (NC12) • Es wird ein Punkt P markiert ohne weitere Erklärung und nachvollziehbares Vorgehen => 0 Punkte
	III)Interpretation: Kein Schnittpunkt	Es gibt keinen Schnittpunkt von Kreis und Gerade, d. h. es gibt keinen Punkt mit den gesuchten Eigenschaften.	• Es gibt keinen Schnittpunkt von Kreis und Gerade als Erklärung dient die Zeichnung/Konstruktion => 1 Punkt
Teilaufgabe b)	IV)Fallunterscheidung	Fall A) Es gibt genau einen Schnittpunkt, wenn der Kreis die Gerade berührt. Das ist der Fall, wenn d der Länge der Diagonalen durch zwei Kästchen entspricht ($d = 2\sqrt{2}$). Fall B) Es gibt zwei Schnittpunkte, wenn der Kreis die Gerade schneidet. Das ist der Fall für sobald d Länger ist als die Diagonale durch zwei Kästchen ($d > 2\sqrt{2}$).	• Es gibt einen Schnittpunkt, es gibt zwei Schnittpunkte => 1 Punkt • Es wird deutlich, dass der Abstand variiert wird und dies Einfluss auf den Punkt P hat, auch wenn dann keine Fallunterscheidung vorgenommen wird. => 0,5 Punkte (ND21) • Es gibt keinen Punkt P, wenn der Kreis zu klein ist => 0,5 Punkte • Die Gerade ist dann keine Mittelsenkrechte mehr und hat somit zu A und B nicht denselben Abstand = > 0 Punkte

Tab.2: Bewertungsaspekte der Aufgabe 2 für Test 3.

	Bewertungsaspekte	Mögliche Lösungsschritte in Test 3	Kodierbeispiele
Teilaufgabe a)	I)Eigenschaft 1 des gesuchten Punktes	Die Mittelsenkrechte zur Strecke $\overline{AB}$ wird eingezeichnet.	• Die Mittelsenkrechte wird konstruiert oder mit dem Geodreieck eingezeichnet => 1 Punkt • Die Mittelsenkrechte ist noch zu erkennen, wurde aber wegradiert => 0,5 Punkte

	II)Eigenschaft 2 des gesuchten Punktes	Zeichnerisch oder sprachlich wird deutlich, dass der Punkt *P* auf der Geraden *g* liegen muss.	• Der Punkt *P* ist auf der Geraden *g* markiert => 1 Punkte • Als Folgerung: Der Punkt *P* kann nicht auf der Geraden *g* liegen (FE18) => 1 Punkt • In der Erklärung wird deutlich, dass der Schnittpunkt der beiden Geraden dem Punkt P entspricht => 1 Punkt
	III)Interpretation: Kein Schnittpunkt	Die Mittelsenkrechte verläuft parallel zu der Geraden *g*. Es gibt keinen Schnittpunkt der beiden Geraden und somit keinen Punkt *P* mit den gesuchten Eigenschaften.	• Die Mittelsenkrechte verläuft parallel zu der Geraden *g*. Es ist kein Schnittpunkt mit der Geraden zu erkennen und es gibt keinen Punkt P => 1 Punkt • Die Feststellung, dass es keine Lösung gibt => 0,5 Punkte
Teilaufgabe b)	IV)Fallunterscheidung	Die Geraden dürfen nicht parallel verlaufen Fall A) Die Gerade *g* liegt auf der Mittelsenkrechten (Parallelverschiebung der Geraden *g*) Fall B) Die Gerade *g* schneidet die Mittelsenkrechte (Veränderung der Steigung der Geraden/Drehung um einen Punkt auf der Geraden).	• Die Geraden dürfen nicht parallel verlaufen => Die Gerade g schneidet die Mittelsenkrechte (Kippen von g) => 0,5 Punkten • „Es könnte einen Punkt P geben. Der Punkt könnte sich außerhalb des Koordinatensystems befinden.“ (FE19) => 0,5 Punkte • Die Gerade g liegt auf der Mittelsenkrechten => dann hat jeder Punkt der Mittelsenkrechten die gesuchten Eigenschaften. => 0,5 Punkten

16.2.8 Test 2/3 – Aufgabe 3

Die Schülerlösungen werden mit Punkten zwischen 0 und 4 bewertet, dabei können als kleinste Einheit 0,5 Punkt vergeben werden (z.B. wenn ein Bewertungsaspekt angeführt wird, aber nicht ganz korrekt ist. Die Aufgabe ist eine Begründungsaufgabe. Die Argumentationen der Schülerinnen und Schüler

werden betrachtet; Zeichnungen werden bei der Auswertung nicht bewertet und dienen lediglich dazu Erklärungen besser nachvollziehen zu können. Eine vergleichbare Aufgabenstellung wurde im Unterricht thematisiert. Daher folgt eine kurze Einordnung der Aufgabenstellung in die Unterrichtseinheit. Insgesamt erstreckt sich dieser Verlauf über ca. 4 Unterrichtsstunden:
Zunächst wird die Mittelsenkrechte wird als Ortslinie wie folgt definiert: Zwei Punkte A und B sind gegeben und es sind alle Punkte gesucht, die den gleichen Abstand zu A und auch zu B haben, dann befinden sich die gesuchten Punkte auf der Senkrechten durch die Mitte der Strecke $\overline{AB}$. Diese Gerade heißt Mittelsenkrechte zur Strecke $\overline{AB}$.
Auch eine Umkehrung wird schriftliche festgehalten: Wenn ein Punkt auf der Mittelsenkrechten zur Strecke $\overline{AB}$ liegt, hat er den gleichen Abstand zu dem Punkt A und zu dem Punkt B.
Die Konstruktion von Mittelsenkrechten wird eingeübt. Dies geschieht u.a. an den Seiten von Dreiecken. Dabei stellen die Schülerinnen und Schüler folgendes fest: Alle Mittelsenkrechten schneiden sich in einem Punkt und es werden die nachfolgenden Fragen aufgeworfen: Ist das Zufall? Schneiden sich die drei Mittelsenkrechten in jedem beliebigen Dreieck in einem Punkt?

An dieser Stelle wird diskutiert und argumentiert unter Anwendung der Ortslinien-Definition. Eben diese Argumentationen können die Schülerinnen und Schüler beim Lösen der Aufgabe im Test rekonstruieren. Eine mögliche Schülerantwort lautet: „Der Schnittpunkt der ersten zwei Mittelsenkrechten gibt den Punkt an, der gleich weit von den drei Ausgangspunkten entfernt ist und somit muss auch die dritte Mittelsenkrechte durch diesen Punkt gehen.“

Abschließend wird der Umkreis-Mittelpunktsatz bei Dreiecken wie folgt festgehalten: Der Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten ist gleich weit von den Eckpunkten des Dreiecks entfernt. Nimmt man diesen Abstand als Radius und den Schnittpunkt als Mittelpunkt kann ein Kreis gezeichnet werden, auf dem die drei Eckpunkte des Dreiecks liegen. Dieser Kreis heißt Umkreis des Dreiecks.

In weiteren Stunden wird die Argumentation wiederholt: Erkläre mithilfe der Konstruktion der Mittelsenkrechten, warum sich alle drei Mittelsenkrechten in jedem Dreieck in einem Punkt schneiden müssen.

Eine vollständige und sehr kleinschrittige Argumentationslösung der Aufgabe (vgl. Abb. X) wäre die folgende:
„Wir wissen, dass alle Punkte, die auf der Mittelsenkrechten zur Strecke $\overline{AC}$ liegen, gleich weit entfernt sind zu A und auch zu C *(Bewertungsaspekt II)*. Ebenso wissen wir über die Mittelsenkrechte zu $\overline{BC}$, dass alle Punkte auf ihr die gleiche Entfernung zu B und zu C haben (Bewertungsaspekt III). Der

Schnittpunkt M dieser beiden Mittelsenkrechten gibt somit einen Punkt an, der gleich weit ist von A und C und auch von B und C und damit von allen drei Eckpunkten des Dreiecks (Bewertungsaspekt I). Somit muss auch die dritte Mittelsenkrechte durch diesen Punkt gehen. Da auf der fehlenden Mittelsenkrechte zur Strecke $\overline{AB}$ genau alle Punkte liegen, die gleich weit von A und B entfernt sind. Dies gilt für den Schnittpunkt M, wie gerade begründet wurde (Bewertungsaspekt IV).

In dieser Argumentation wurden die vier Bewertungsaspekte bereits zugeordnet. Die Reihenfolge der Bewertungsaspekte spielt dabei keine Rolle und kann auch in korrekten Argumentationen variieren. Diese werden systematische in Tab.1 beschrieben und anhand von Ankerbeispielen gefestigt. Die alternativen Bespiele zeigen auf, welche weiteren Argumente auch noch zu dem Bewertungsaspekt gezählt werden können und sollen den Interpretationsspielraum verdeutlichen. Insbesondere die sprachlichen Ausführungen der Siebtklässler variieren sehr stark. Daher wird versucht Ungenauigkeiten in Wortwahl und Fachsprache nicht direkt als fehlerhaft zu berücksichtigt und wohlwollend die Worte der Schülerinnen und Schüler zu interpretieren. Das nachfolgende Beispiel zeigt, dass auch für nicht-korrekte Formulierungen 4 von 4 Punkte vergeben wurden. Schülerbeispiel von NE28: *Alle Punkte auf der Senkrechten A und B sind gleich weit von den Punkten A und B entfernt. Dasselbe gilt auch für B und C. Also ist der Punkt gleich weit von A, B und C entfernt also auch gleich weit von A und C. Deswegen schneiden sie sich alle an einem Punkt.*

Hier wird die richtige Verwendung des Konzeptes der Mittelsenkrechte stärker gewichtet als die sprachliche Korrektheit (Deutlich wird auch, dass es hier keine scharfen Grenzen geben kann). Die Schülerantwort wird wie folgt bewertet: Es kann für jede Anwendung der Ortslinien-Definition auf eine konkrete Mittelsenkrechte ein Punkt vergeben werden. Der vierte Punkt wird für die Schlussfolgerung vergeben (Dazu zählt, dass der Schnittpunkt von den beiden eingezeichneten Mittelsenkrechten eben auch gleich weit entfernt ist zu A und zu B und somit auf der fehlenden Mittelsenkrechten liegt.).

Zum Vorgehen der Bewertung: Die Schülerlösung wird unter Beachtung der vier Bewertungsaspekte gelesen und für jeden Aspekt wird überprüft, inwiefern richtige Aspekte in der Lösung gefunden werden können. Das kann dazu führen, dass ein Satz oder Satzteil zu mehr als einem Bewertungsaspekt zugeordnet werden kann. In diesem Fall gibt es auch für die Bewertung jeden Aspektes Punkte.

Tab. 2: Darstellung der Bewertungsaspekte mit Ankerbeispielen zur Verdeutlichung des Aspektes und alternativen Beispielen zur Verdeutlichung der Reichweite der Interpretation..

Bewertungsaspekte	Mögliche Argumentationsschritte	Ankerbeispiel	Alternativen
I) Feststellung Schnittpunkt ist gleich weit entfernt von den Eckpunkten	Es wird festgehalten, dass der Schnittpunkt der (beiden) Mittelsenkrechten gleich weit von den drei Eckpunkten des Dreiecks entfernt liegt. Der Schnittpunkt ist Mittelpunkt des Umkreises.	*Daher sind die Punkte A, B, C [...] von dem Schnittpunkt der Mittelsenkrechten gleich entfernt, [..] (NE23)* =>1 Punkt	*[...] und weil alle Mittelsenrechten den gleichen Abstand zu ihren Punkten haben schneiden die sich an einem Punkt dann [...] (NC21).* =>0,5 Punkte *Wenn man bei dem Punkt, wo sich die Mittelsenkrechten schneiden, einen Umkreis um die ganzen Punkte macht, wird man feststellen, dass der Umkreis um alle Punkte verläuft. (NB22)* => 1 Punkt
II) Definition der Mittelsenkrechten (als Ortslinie)	Die Definition der Mittelsenkrechten (als Ortslinie) wird verwendet allgemein oder konkret bezogen auf eine Mittelsenkrechte, z.B. auf der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AB}$ liegen alle Punkte, die gleich weit von A und B entfernt sind.	*Die Punkte der Mittelsenkrechte A und B ist auch von den Punkten A und B gleich weit entfernt (NE23).* =>1 Punkt	*Ich glaube es ist so, weil die 3. Mittelsenkrechte auch den gleichen Abstand zu den beiden Punkten hat, [...] (NC21).* => 1 Punkt (sprachliche Ungenauigkeiten werden großzügig behandelt) *Dies geschieht am selben Punkt, weil sie alle jeweils eine der Seiten genau in der Mitte trennen und ebenso jeweils in einem 90° Winkel verlaufen* (NC31) =>1Punkt
III) Argumentation für die	Die Ortslinien-Definition der Mittelsenkrechten wird	*Die Punkte der Mittelsenkrechten A und C sind auch*	*[...] und weil alle Mittelsenrechten den gleichen Abstand zu*

beiden eingezeichneten Mittelsenkrechten (Begründung zu I)	auf die zweite Mittelsenkrechte angewendet, um Aspekt I) zu erklären: Für die zweite Mittelsenkrechte gilt: Alle Punkte auf ihr sind gleich weit entfernt von *B* und *C* (und damit folgt I) Oder: Da das für beide eingezeichneten Mittelsenkrechten gilt, heißt das, dass I) gilt.	*von den Punkten A und C gleich entfernt (NE23).* =>1 Punkt	*ihren Punkten haben [...] (NC21).* => 0,5 Punkte
IV) Argumentation für fehlende Mittelsenkrechte (Folgerung)	Es wird gefolgert, dass der Schnittpunkt insbesondere gleich weit von *A* und *B* entfernt liegt und somit auch die Mittelsenkrechte zur Strecke $\overline{AB}$ durch diesen Punkt verläuft (Anwendung und diesem Sinne Umkehrung der Ortslinien-Definition auf die fehlende Mittelsenkrechte).	*Daher sind die Punkte A, B, C bzw. B und C von dem Schnittpunkt der Mittelsenkrechten gleich entfernt, so dass die dritte Mittelsenkrechte durch diesen Schnittpunkt verlaufen muss (NE23).* =>1 Punkt	*Ich glaube es ist so, weil die 3. Mittelsenkrechte auch den gleichen Abstand zu den beiden Punkten hat, [...] (NC21).* =>1 Punkt *Wenn man bei dem Punkt, wo sich die Mittelsenkrechten schneiden, einen Umkreis um die ganzen Punkte macht, wird man feststellen, dass der Umkreis um alle Punkte verläuft. Darum schneidet sich die dritte Gerade auch da, wo sich die anderen schneiden (NB22).* => 0,5 Punkt *(Zusammenhang bleibt unklar)*

NB22: *Wenn man bei dem Punkt, wo sich die Mittelsenkrechten schneiden, einen Umkreis um die ganzen Punkte macht, wird man feststellen, dass der Umkreis um alle Punkte verläuft. Darum schneidet sich die dritte Gerade auch da, wo sich die anderen schneiden.*

⇨ *1 Punkt für Aspekt I) und 0,5 Punkte für Aspekt IV) (Es wird genannt, dass die fehlende Mittelsenkrechte auch durch den Punkt verläuft. Die Begründung wird jedoch nicht ausgeführt).*

16.2.9 Test 2/3 – Aufgabe 4

Die Schülerlösungen werden mit Punkten zwischen 0 und 4 bewertet, dabei können als kleinste Einheit 0,5 Punkt vergeben werden. Unter Konstruktion wird die zeichnerische Konstruktion mit Zirkel und Lineal verstanden. Im Gegensatz dazu kann die Mittelsenkrechte auch mit dem Geodreieck **eingezeichnet** werden.

Verschiedene Gedankengänge führen zum Ergebnis. Die unterschiedlichen Lösungsansätze werden nachfolgend beschrieben und mit Punkten versehen. Bei der Kodierung der Schülerlösung ist dabei in zwei Schritten vorzugehen:

1. Betrachten der Schülerlösung und Einordnen in einen der Lösungsansätze.

2. Punkte mithilfe der Tabelle zur Lösungsvariante vergeben. Für jeden erfüllten Bewertungsaspekt I) bis IV) wird jeweils ein Punkt vergeben. Insgesamt gibt es maximal 4 Punkte für eine vollständige Lösung der Aufgabe.

Die Einordnung der Schülerlösung erfolgt anhand Skizze und Begründung. Werden zwei oder mehr Lösungsansätze benannt, erfolgt die Einordnung in den stärker ausgeführten Lösungsansatz und nach diesem werden zunächst die Punkte vergeben. Anschließend werden auch für den alternativen Ansatz Punkte verteilt, dabei bleibt zu berücksichtigen, dass dieser Ansatz als Alternative genannt wird. Es folgt ein Beispiel: „Ich messe an meinem Zirkel den Radius ab. Das sind 6,4 cm. Das halbiere ich und mache dort einen Punkt (Eingezeichnet wird ein geschätzter Durchmesser und der Punkt M). Oder halt ein Dreieck einzeichnen und von dem aus alle Mittelsenkrechen zeichnen und am Ende beim Schnittpunkt den Mittelpunkt festlegen.“ Die Lösung wir als hauptsächlichen Ansatz dem Messen zugeordnet und erhält hier 0 Punkte. Für die Alternative mit dem einbeschriebenen Dreieck werden 2 Punkte vergeben. Hierbei wurde berücksichtigt, dass die als Alternative, also gleichwertig zum Ansatz Messen, bewertet wird.

Tab. 1: : Lösungsansatz I) Umkreis eines Dreiecks

Bewertungs-aspekte	Mögliche Argumentationsschritte
I)	Zeichne Dreieck ein. Der Kreis ist Umkreis des Dreiecks.
II)	Konstruiere Mittelsenkrechte zu einer Seite des Dreiecks
III)	Konstruiere Mittelsenkrechte zu einer weiteren Seite des Dreiecks.
IV)	Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten gibt den Umkreismittelpunkt an.
Anmerkung	Begründung muss nicht explizit genannt werden (Dies folgt mit dem Umkreismittelpunktsatz in Dreiecken).

Beispiele	1) Ein Dreieck wird eingezeichnet. Es sind auch drei Mittelsenkrechten konstruiert und der Mittelpunkt markiert worden. Keine Erklärungen => 4 Punkte. 2) Ein Dreieck wird eingezeichnet, zwei Kreise sind zu erkennen, diese gehören zu keiner der Mittelsenkrechten des Dreiecks. =>1 Punkt.

Tab. 2: Lösungsansatz IIa) Umkreis eines Vielecks

Bewertungsaspekte	Mögliche Argumentationsschritte
I)	Wähle beliebige Punkte auf dem Kreis.
II)	Zeichne Vieleck ein. Der Kreis ist Umkreis des Vielecks.
III)	Konstruiere Mittelsenkrechte zu jeder Seite.
IV)	Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten gibt den Umkreismittelpunkt an. **Begründung** dieser Aussage: Da die gewählten Punkte alle auf dem Kreisbogen liegen, ist der gemeinsame Schnittpunkt der Mittelsenkrechten eben genau jener Punkt, der gleich weit von allen gewählten Punkten entfernt ist. Dies gilt für den Kreismittelpunkt.
Beispiele	1) „Man muss am Rand des Kreises vier Strecken zeichnen und dann vier Mittelsenkrechten zeichnen. Da wo sich alle Mittelsenkrechten schneiden ist der Mittelpunkt.“ =>3 Punkte, IV) Begründung fehlt. 2) Weil das ganze wie beim Umkreis vom Dreieck ist.“ => Für die folgende Erklärung erhält man 0,5 Punkte

Tab. 3: Lösungsansatz IIb) Konstruktion zweier Mittelsenkrechten (zu zwei Sehnen)

Bewertungsaspekte	Mögliche Argumentationsschritte
I)	Zeichne Sehnen ein. verbinde Punkte auf der Kreislinie zu einer Strecke.
II)	Wähle zwei Punkte auf dem Kreis und konstruiere die zugehörige Mittelsenkrechte.
III)	Wähle zwei weitere Punkte auf dem Kreis und konstruiere die zugehörige Mittelsenkrechte.
IV)	**Begründung**: Der Schnittpunkt der beiden Mittelsenkrechten gibt den Punkt an, der gleich weit von allen vier Punkten auf dem Kreisbogen entfernt ist und ist somit der Mittelpunkt des Kreises.
Beispiele	1) Es werden offensichtlich Punkte auf dem Kreis gewählt, ohne dies explizit zu erwähnen. Zum Beispiel: „Zuerst habe ich zwei Kreise mit dem gleichen Durchmesser eingezeichnet…“ Es werden so zwei Mittelsenkrechten konstruiert. Begründungen fehlen. => 2 Punkte

	2) Es werden keine Punkte auf dem Kreis gewählt, sondern beliebige Punkte. Die Konstruktion zweier Mittelsenkrechten wird beschrieben. Es fehlen weitere Begründungen. => 2 Punkte

Die nachfolgenden Ansätze können in 6 wird, Tab. 4 Inkreis eines Quadrates. Dies tritt jedoch nicht ein).

Hier gilt, wird die Mittelsenkrechte als Lösungsmöglichkeit in der Begründung erwähnt, gibt dies 0,5 Punkte zusätzlich. Sind Kriese für eine Konstruktion der Mittelsenkrechten erkennbar, wird dafür 1 Punkt vergeben, falls dies nicht bereits unter den Bewertungsaspekten aufgeführt ist.

Tab. 4: Lösungsansatz IIc) Inkreis eines Quadrates

Bewertungs-aspekte	Mögliche Argumentationsschritte
I)	Konstruiere ein Quadrat um den Kreis.
II)	Konstruiere eine Mittelsenkrechte zu einer Quadratseite.
III)	Konstruiere eine Mittelsenkrechte zu einer der anliegenden Quadratseiten.
IV)	**Begründung** dieser Aussage: Der Schnittpunkt der beiden Mittelsenkrechten gibt den Punkt an, der gleich weit von allen vier Eckpunkten des Quadrates entfernt ist und ist somit der Mittelpunkt des Quadrates und des Kreises
Beispiel	Es wurde ein Quadrat um den Kreis gezeichnet. Zu zwei der Seiten werden die Mittelsenkrechten konstruiert. Diese schneiden sich in einem Punkt. => 2 Punkte

Tab. 5: Lösungsansatz - Durchmesser einzeichnen und Mittelsenkrechte konstruieren

Bewertungs-aspekte	Mögliche Argumentationsschritte
Vorgehen-sweise	Ein Durchmesser wird möglichst genau nach Abschätzung eingezeichnet.
I)	Die Mittelsenkrechte zu dem Durchmesser wird konstruiert.
Deutung	Der Schnittpunkt ergibt den Kreismittelpunkt.
Beispiel	So genau wie möglich wird ein Durchmesser eingezeichnet. Zu dem Durchmesser wird eine Mittelsenkrechte konstruiert und ergibt so den Mittelpunkt des Kreises. => 1 Punkt

Tab. 6: Lösungsansatz - Messen & Senkrechte

Bewertungs-aspekte	Mögliche Argumentationsschritte
Vorgehen-sweise (0 Punkte)	Ein Durchmesser wird möglichst gut eingezeichnet (Abschätzung als Sekante mit der größten Länge). Die Mitte wird **ausgemessen**, markiert und eine Mittelsenkrechte durch diese Mitte wird mit dem geodreieck eingezeichnet. Der Schnittpunt ist der gesuchte Mittelpunkt.

Tab. 7: Lösungsansatz - Senkrechte

Bewertungs-aspekte	Mögliche Argumentationsschritte
Vorgehen-sweise (0 Punkte)	Es wird eine Strecke als Durchmesser festgelegt und eine Senkrechte dazu eingezeichnet. Der Schnittpunkt ergibt den gesuchten Mittelpunkt

Tab. 8: Lösungsansatz - Messen

Bewertungs-aspekte	Mögliche Argumentationsschritte
Vorgehen-sweise (0 Punkte)	a) Der Durchmesser wird möglichst genau abgemessen. Der gemessene Wert wird halbiert und dient als Radius. Daraus ergibt sich der Mittelpunkt (Messen). b) Der Durchmesser wird möglichst genau abgemessen und halbiert. Anschließend wird der Mittelpunkt mithilfe des Zirkels rekonstruiert.

Tab. 9: Lösungsansatz- Probieren

Bewertungs-aspekte	Mögliche Argumentationsschritte
Vorgehen-sweise (0 Punkte)	a) Es werden zwei Durchmesser eingezeichnet. Der Schnittpunkt gibt den Mittelpunkt an. b) Mit dem Zirkel wird ausgehend von dem Kreisbogen ein passender Mittelpunkt gesucht (rückwärts). c) Ein Mittelpunkt wird markiert/kein Vorgehen erkennbar

Tab. 10: Lösungsansatz- keine Bearbeitung

Bewertungs-aspekte	Mögliche Argumentationsschritte
(0 Punkte)	Keine Bearbeitung/ bzw. offensichtlich falsche Lösung.

16.2.10 Test 2/3 – Aufgabe 5

Die Schülerlösungen werden mit Punkten zwischen 0 und 4 bewertet, dabei können als kleinste Einheit 0,5 Punkte vergeben werden (z.B. wenn ein Bewertungsaspekt angeführt wird, aber nicht ganz korrekt ist). Jeder Bewertungsaspekt wird mit 1 Punkt bewertet. Für die Lösung der Aufgabe sind sowohl Zeichnungen als auch Begründungen erforderlich.
In dieser Aufgabe wird die Mittelsenkrechte in einer Sachsituation verwendet. In der Variante im Test$_2$ handelt es sich um die Gebietseinteilung von vier Feuerwehrwache in einer Großstadt. In der Test$_3$ -Variante bietet die Zuordnung zu vier Grundschulen den Rahmen der Sachsituation. In beiden Aufgabenvarianten wird eine bereits stark vereinfachte Abbildung zu der beschriebenen Problemsituation dargestellt. Es ist bereits ein Gebiet mit seinen Grenzmarkierungen eingezeichnet. Die weiteren Grenzeinteilungen sind von den Schülerinnen und Schülern vorzunehmen. Dies geschieht mithilfe der Mittelsenkrechten. Eine Schwierigkeit kann sich an den Schnittpunkten verschiedener Mittelsenkrechten ergeben. Diese müssen richtig interpretiert werden, so dass hier die Grenzen richtig fortgeführt werden. Dieser Zusammenhang soll dann anschließend für eine Beispielgrenzlinie in Worte gefasst werden.
Die Worterklärungen können auch als Entscheidungsgrundlage für die Bewertungsaspekte I bis III herangezogen werden.
Aus dem Aufgabentext ergibt sich, die Verwendung des mathematischen Objekts der Mittelsenkrechte indirekt. Aus der Formulierung der „nächstgelegenen Feuerwache bzw. Schule“ kann darauf geschlossen werden, dass die Entfernun0g auf den Grenzlinien zu jeweils zwei der Standorte gleich weit sein muss. Für jeden Punkt auf der Grenzgeraden gilt demnach: Der Punkt hat die gleiche Entfernung zu den Standorten A und B. Und daraus kann auf die Verwendung der Mittelsenkrechten geschlossen werden.
Beim Lösen der Aufgabe ist es wichtig, den Überblick zu behalten. Dies kann durch eine Benennung der Mittelsenkrechten oder ein systematisches Vorgehen mit sofortigem Einzeichnen der Grenzlinien geschehen. Werden hingegen zunächst willkürlich Mittelsenkrechten eingezeichnet, kann es passieren, dass man den Überblick verliert und eine korrekte Grenzeinteilung wird erschwert.
Die Worterklärungen können auch als Entscheidungsgrundlage für die Bewertungsaspekte I bis III herangezogen werden.

Tab. 3: Darstellung der Bewertungsaspekte mit Ankerbeispielen zur Verdeutlichung des Aspektes und alternativen Beispielen zur Verdeutlichung der Reichweite der Interpretation..

Bewertungs-aspekte	Mögliche Argumentations-schritte	Ankerbeispiel	Alternativen

I) Anwendung der Mittelsenkrechten	Es wird sprachlich oder zeichnerisch deutlich, dass die Mittelsenkrechte verwendet wird. Dies kann als Satz erfolgen: „Die Grenzen können durch die Mittelsenkrechten bestimmt werden.“ Dies kann durch das Einzeichnen einer korrekten Mittelsenkrechte deutlich werden.	*Ich bin zu den Grenzen gekommen, in dem ich alle Punkte verbunden habe und ihre Mittelsenkrechten eingezeichnet habe. Ihre Mittelsenkrechten bilden die Grenzen (NE17). => 1 Punkt* Die Mittelsenkrechte zu A und K ist richtig eingezeichnet worden *(ND18).* => 1 Punkt	Es werden Mittelpunkte zwischen den gegebenen Punkten markiert. Eine Mittelsenkrechte zu A uns S kann anhand von Kreisen erahnt werden. Die anderen Grenzen verlaufen nicht senkrecht *(NC16).* =>0,5 Punkte (hier wurde der erklärende Text mitberücksichtigt).
II) Mittelsenkrechten einzeichnen	**Alle** benötigten Mittelsenkrechten werden richtig eigezeichnet. Das sind die Mittelsenkrechten zu den Punkten A und K, sowie zu K und S, sowie A und S in Test 2 (Für Test 3 werden die Mittelsenkrechten von D und C, von C und B, und von D und B benötigt). Also zwei weitere Mittelsenkrechten zum Bewertungsaspekt I (für jede weitere richtige Mittelsenkrechte gibt es 0,5 Punkte) Kleinere Ungenauigkeiten in	Erkennbar sind gleichgroße Kreise, die um die Punkte A, K und S gezogen werden. Die Kreisschnittpunkt werden zu drei Mittelsenkrechten verbunden *(ND25).* =>1 Punkt	Es werden drei Grenzlinien eingezeichnet, die teilweise richtige Ansätze erkennen lassen: Sie verlaufen durch den Mittelpunkt der Strecken *(NC16).* => 0,5 Punkte (hier wurde der erklärende Text mitberücksichtigt). Die Mittelsenkrechte zu A und K und die zu S und K wurde richtig eingezeichnet. Die Mittelsenkrechte zu A und S fehlt (*NE17*). => 0,5 Punkte Alle drei Mittelsenkrechten werden eingezeichnet. Es zeigen sich größere Ungenauigkeiten, z.B.: Die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich nicht in genau einem Punkt und dies

	den Zeichnungen werden dabei nicht berücksichtigt.		bleibt unkommentiert *(ND31)*. => 0,5 Punkt
III) Grenzlinien werden markiert	Die Grenzlinien bzw. die Gebiete werden deutlich und **richtig** markiert. Insbesondere an den Schnittpunkten wird deutlich, welche Mittelsenkrechte als Grenzlinie verwendet wird.	Die Abschnitte der Mittelsenkrechten, die die Grenzlinien darstellen, werden rot markiert *(ND25)*. =>1 Punkt	Die Grenzlinien sind deutlich zu erkennen, aber nicht korrekt *(NC16)*. => 0 Punkte Die Grenzlinien und -gebiete sind deutlich zu erkennen und weitestgehend korrekt *(NE17)*. => 0,5 Punkte
IV) Erklärung an einer der Grenzlinien	Mögliche Erklärung des eigenen Vorgehens: Die Mittelsenkrechte zu den Punkten S und K und die Mittelsenkrechte zu den Punkten A und S sind eingezeichnet. „Auf ihnen liegen alle Punkte, die gleich weit entfernt sind von S und K bzw. von S und A. Daher werden die Mittelsenkrechten als Grenzlinien verwendet. Die Grenze des Standorts Stadtmitte wird nördlich von der Mittelsenkrechte zu den Punkten A und S begrenzt und östlich durch die Mittelsenkrechte zu den Punkten S und K.	*Um die Grenzen bei der Barbaraschule einzuzeichnen, habe ich die Mittelsenkrechte von den Punkten D + B und C+ B eingezeichnet. Wenn diese sich kreuzen, habe ich den überflüssigen Teil der Senkrechten wegradiert. Dadurch haben alle Punkte egal wo immer den kürzesten Weg zur Schule (außer man ist auf der Grenze) (FB17).* =>1 Punkt	*Ich habe zuerst die Mitte der zwei Punkte gezeichnet wie zum Beispiel von den Punkten S und A und habe dort wo die Mitte ist einen Punkt gezeichnet. So habe ich es bei allen restlichen Punkten gemacht. Danach habe ich die Gebiete so eingeteilt, dass ich auf die eingezeichneten Punkte geachtet habe (NC16).* => 0 Punkte *Ich bin zu den Grenzen gekommen, in dem ich alle Punkte verbunden habe und ihre Mittelsenkrechten eingezeichnet habe. Ihre Mittelsenkrechten bilden die Grenzen (NE17)*. => 0,5 Punkte *Ich habe die Mittelsenkrechten eingezeichnet und da die Grenzen gezogen (NB17; FB18).* => 0,5 Punkte

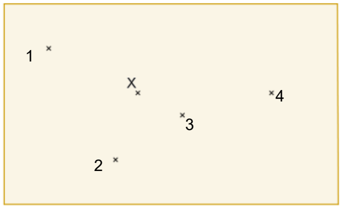
			Anhand der Mittelsenkrechten bin ich darauf gekommen. Der Mittelpunkt M ist gleich weit von allen Stationen entfernt. Von dort aus gehen die Grenzen auf den Ms weiter (ND25) => 1 Punkt

16.3 Unterrichtsmaterialien

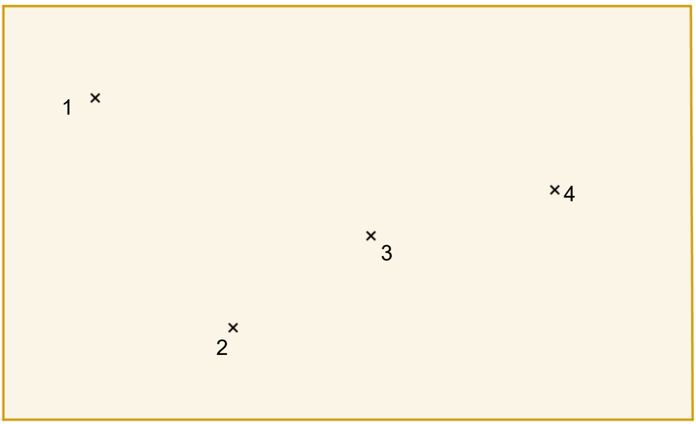
16.3.1 Problemorientierter Ansatz

Problemstellung

Die Karte zeigt ein Stück Land. Es gibt vier Brunnen in diesem Gebiet. Stelle dir vor, du stehst bei X mit einer Herde von Schafen, die Durst haben. Zu welchem Brunnen gehst du?



Die Wahl war natürlich nicht schwierig, du gehst zum nächstgelegenen Brunnen. Entwickle nun eine Einteilung des Landes in vier Gebiete, so dass zu jedem Ort in einem Gebiet der Brunnen in diesem Gebiet der nächstgelegene ist.



1 Aufgabenstellung

<u>Mittelsenkrechte</u>

Es sind zwei Punkte A und B gegeben.

Wenn ein Punkt den gleichen Abstand zu A und zu B hat, dann liegt er auf der Senkrechten durch die Mitte der Strecke $\overline{AB}$. Diese Gerade heißt Mittelsenkrechte zur Strecke $\overline{AB}$.

Es gilt:

Wenn ein Punkt auf der Mittelsenkrechten zur Strecke $\overline{AB}$ liegt, hat er den gleichen Abstand zu dem Punkt A und zu dem Punkt B.

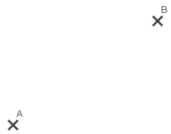
2 Übung I

1. In einem Koordinatensystem mit der Einheit 1 cm sind die beiden Punkte P(1,5l4,5) und Q(5,5l6) geben.
   a) Zeichne Punkte ein, die weiter von P entfernt sind als von Q. Markiere sie gelb.
   b) Zeichne Punkte ein, die von P höchstens so weit entfernt sind wie von Q. Markiere sie grün.

2. In einem Koordinatensystem mit der Einheit 1 cm sind die Punkte P(3l1) und Q(6l2), sowie die Gerade g_{AB} durch die Punkte A(2,5l4) und B(6l7) gegeben. Gesucht ist ein Punkt C auf der Geraden g_{AB}, der von P und Q gleich weit entfernt ist.

3 Konstruktion der Mittelsenkrechten

Gegeben sind die Punkte A und B. Konstruiere die Mittelsenkrechte zu der Strecke $\overline{AB}$.



Konstruktionsbeschreibung der Mittelsenkrechten zur Strecke $\overline{AB}$.

I. Zeichne die Strecke$\overline{AB}$ ein.
II. Zeichen einen Kreis A um mit einem beliebigem Radius r, der jedoch größer ist als die Hälfte der Strecke $\overline{AB}$.
III. Zeichne einen Kreis um B mit demselben Radius r.
IV. Die Kreise schneiden sich in zwei Punkten. Verbinde Sie zu einer Geraden. Diese Gerade ist die Mittelsenkrechte zu der Strecke $\overline{AB}$.

4 Übung II

Übungsaufgaben

1. In einem Koordinatensystem sind die Punkte A(2I3) und B(9I1) gegeben. Konstruiere die Mittelsenkrechten mit Zirkel und Lineal. Liegt der Punkt C(7I9) auf der Mittelsenkrechten?

2. Zeichne das Dreieck A(7I1), B(1I5) und C(0I0) und konstruiere mit Zirkel und Lineal die Mittelsenkrechte zu jeder Seite des Dreiecks. Was fällt Dir auf? Erkläre.

Hausaufgaben

3. Konstruiere mit Zirkel und Lineal das Dreieck.
   Konstruiere anschließend die Mittelsenkrecht zu jeder Seite des Dreiecks.
   a) a = 5,7 cm; b = 4,9 cm; β = 49°
   b) b = 4 cm; c = 7 cm; α = 55°
   c) a = 4 cm; b = 5 cm; c = 7,5 cm

4. Was ist eine Mittelsenkrechte? Erkläre mit eigenen Worten.

5 Übungsaufgaben – Abstände

1. Übungen zum Abstandsbegriff
   Zeichne die Punkte A(7l3), B(2l5), C(4l9) und D(11l6) in ein Koordinatensystem der Einheit 1 cm ein.
   Zeichne beim Bearbeiten der Aufgaben alle Hilfslinien ein, die du benötigst.
   a) Bestimme den Abstand von A zur Geraden g_{CD}.
   b) Bestimme den Abstand von dem Punkt A zum Punkt C.
   c) Zeichne alle Punkte ein, die 1,5 cm von C entfernt sind.
   d) Zeichne alle Punkte ein, die gleich weit von A und B entfernt sind.
   e) Zeichne den Punkt ein, der gleich weit von A und von B und von C entfernt ist.
   f) Gib einen Punkt an, der gleich weit von A und von C entfernt ist. **Begründe**, wie du ihn gefunden hast.
   g) Zeichne den Punkt ein, der den gleichen Abstand zu B und zu C hat und möglichst nah bei D liegt. **Begründe**, wie du ihn gefunden hast.
   h) Zeichne alle Punkt ein, die 4 cm von A und gleichzeitig 4 cm von B entfernt sind. **Beschreibe**, wie du vorgehst.
   i) Zeichne Punkte ein, die weiter von B entfernt sind als von C und zusätzlich nicht weiter als
   4 cm von A entfernt sind.

2. In einer Wüste befinden sich drei Forschungsstationen A, B und C. Für ihre Entfernungen gilt:
   Von A zu B sind es 8 km, von B zu C sind es 6,1 km und von C zu A sind es 9,9 km.
   Es soll eine Versorgungsstation angelegt werden, die von allen drei Stationen gleich weit entfernt ist. Bestimme diese Entfernung. Erkläre Dein Vorgehen.

3. Auf einem Blatt Papier sind die folgenden Punkte markiert: D(2l7), E(5l2), F(8l4), G(12l5) und H(13l8). Das Papier soll bunt bemalt werden. Es sollen alle Punkte, für die der Punkt D der nächst gelegene der fünf Punkte ist, grün gefärbt werden. Alle Punkte, für die der Punkt E der nächst gelegene der fünf Punkte ist, sollen gelb gefärbt werden. Dementsprechend werden die zu F nächst gelegenen Punkte rot, die zum Punkt G nächst gelegenen Punkte gelb und die zu H nächst gelegenen Punkte werden hellblau gefärbt.
   Finde eine Einteilung, so dass die Papierfläche eingefärbt werden kann.

4. Mittelsenkrechten in Vierecken
   Du weißt bereits, dass sich die Mittelsenkrechten in einem Dreieck in einem Punkt schneiden.
   Gilt das auch für Vierecke?
   Stelle zunächst Vermutungen auf und notiere diese schriftlich. Überprüfe deine Vermutungen anschließend mithilfe von konstruierten Zeichnungen.

16.3.2 Darbietender Ansatz

1 Ausfgabenstellunge

Gesucht: Punkte, die den gleichen Abstand zu A und zu B haben

a) Zeichne die Punkte A(1l4) und B(3l6) in ein Koordinatensystem mit der Einheit 1 cm.

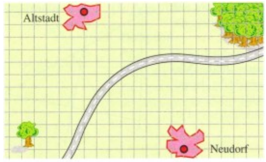
b) Zeichne einen Punkt ein, der den gleichen Abstand zu A und zu B hat.

c) Finde weitere Punkte, die den gleichen Abstand zu A und zu B haben und zeichne sie ein.

d) Was fällt dir auf? Notiere:

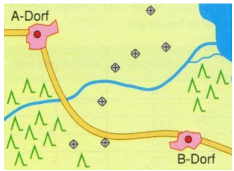
2 Übungsaufgaben

1. Zwischen den Ortschaften Altstadt und Neudorf wird eine neue Umgehungsstraße gebaut.
   Beide Orte sollen eine gemeinsame Anschlussstelle erhalten, die von den jeweiligen Ortszentren gleich weit entfernt ist. Wo kann sie liegen? Begründe Dein Vorgehen.



Elemente der Mathematik 7 (2007), S. 226

2. Zwischen A-Dorf und B-Dorf stehen Grenzsteine, die vor vielen Jahren alle gleich weit von den Dörfern entfernt waren. Mittlerweile stehen nur noch wenige am richtigen Platz. Finde heraus, welche Steine noch am richtigen Platz stehen und markiere sie rot. Begründe Dein Vorgehen.



Elemente der Mathematik 7 (2007), S. 226

3. In einem Koordinatensystem mit der Einheit 1 cm sind die beiden Punkte P(1,5 | 4,5) und Q(5,5 | 6) gegeben.
   a. Zeichne Punkte ein, die weiter von P entfernt sind als von Q. Markiere sie gelb.
   b. Zeichne Punkte ein, die von P höchstens so weit entfernt sind wie von Q. Markiere sie grün.

4. In einem Koordinatensystem mit der Einheit 1 cm sind die Punkte P(3 | 1) und Q(6 | 2), sowie die Gerade g_{AB} durch die Punkte A(2,5 | 4) und B(6 ,5 | 7) gegeben.
   Gesucht ist ein Punkt C auf der Geraden g_{AB}, der von P und Q gleich weit entfernt ist.

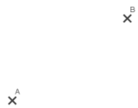
Hausaufgaben – Dreiecke

1. Was ist eine Mittelsenkrechte? Erkläre mit eigenen Worten.
2. Konstruiere das Dreieck mit Zirkel und Lineal und beschrifte es (ohne Konstruktionsanleitung).
   Zeichne zu jeder Seite des Dreiecks die Mittelenkrechte ein.
   a) c = 5 cm; α = 70°; β = 50°
   b) a = 4,3 cm; b = 5 cm; γ = 77°
   c) a = 5,6 cm; b = 4 cm; c = 6 cm

Zur nächsten Stunde mitbringen: angespitzten Bleistift, Geodreieck, Zirkel und Lineal.

3 Konstruktion der Mittelsenkrechten

Gegeben sind die Punkte A und B.
Konstruiere mit Zirkel und Lineal die Mittelsenkrechte zu der Strecke $\overline{AB}$.



Konstruktionsbeschreibung der Mittelsenkrechten zur Strecke $\overline{AB}$.

V. Zeichne die Strecke $\overline{AB}$ ein.
VI. Zeichen einen Kreis um A mit einem beliebigem Radius r, der jedoch größer ist als die Hälfte der Strecke $\overline{AB}$.
VII. Zeichne einen Kreis um B mit demselben Radius r.
VIII. Die Kreise schneiden sich in zwei Punkten. Verbinde Sie zu einer Geraden. Diese Gerade ist die Mittelsenkrechte zu der Strecke $\overline{AB}$.

Übungsaufgaben

5. In einem Koordinatensystem sind die Punkte A(2|3) und B(9|1) gegeben. Konstruiere die Mittelsenkrechten mit Zirkel und Lineal. Liegt der Punkt C(7|9) auf der Mittelsenkrechten?

6. Zeichne das Dreieck A(7|1), B(1|5) und C(0|0) und konstruiere mit Zirkel und Lineal die Mittelsenkrechte zu jeder Seite des Dreiecks. Was fällt Dir auf? Erkläre.

7. An der Bahnstrecke $\overline{AB}$ wird eine neue Haltestelle H eingerichtet. Sie soll gleich weit von den Orten C und D entfernt sein. Zeichne eine Planskizze und bestimme dann durch Konstruktion mit Zirkel und Lineal die Koordinaten für den Punkt H.

A(2|6), B(7|1) C(4|7), D(1|1)

Zusatz: Erkläre mit eigenen Worten, warum sich die drei Mittelsenkrechten in einem Dreieck immer in einem Punkte schneiden.

4 Übungen Konstruktion

1. Konstruiere mit Zirkel und Lineal die Mittelsenkrechte zu P(5I8) und Q(1I2).
2. Konstruiere mit Zirkel und Lineal das Dreieck.
   Konstruiere anschließend die Mittelsenkrechte zu jeder Seite des Dreiecks.
   a) a = 5,7 cm; b = 4,9 cm; β = 49°
   b) b = 4 cm; c = 7 cm; α = 55°
   c) a = 4 cm; b = 5 cm; c = 7,5 cm

5 Übungsaufgaben – Abstände

siehe problemorientierter Ansatz

16.4 Details der Testauswertung

16.4.1 Test 1 – Aufgabe 1

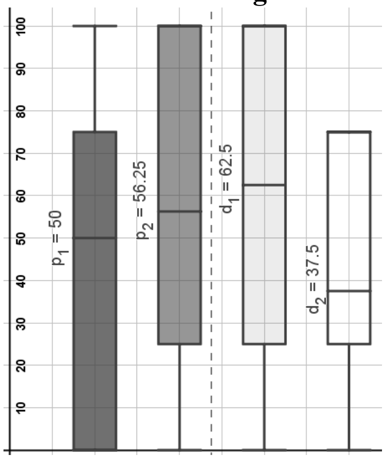
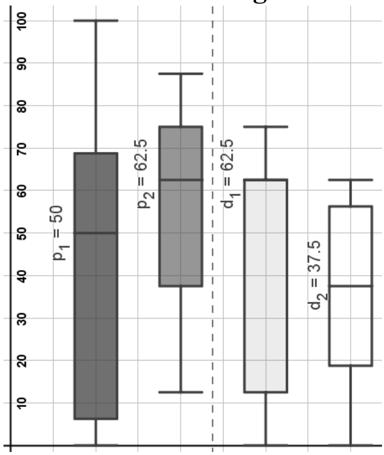


Abb. 58: Ergebnisse zu Test 1, Aufgabe 1

Kruskal-Wallis-Test für $Test_1$ – Aufgabe 1

Problemorientierter Unterricht		Darbietender Unterricht	
P_1	P_2	D_1	D_2
39,8	49,5	49	36,9
α = 0,05 Signifikanzniveau	df = k-1=3 Freiheitsgrad	p = 0,0719 Irrtumswahrscheinlichkeit	
H = 4,18 < 7,81= χ_3^2 Es liegt **kein signifikanter Unterschied** vor. H_0 wird beibehalten: Es gibt keine signifikanten Unterschiede zwischen den Klassen P_1, P_2, D_1 und D_2.			

16.4.2 Test 1 – Aufgabe 3

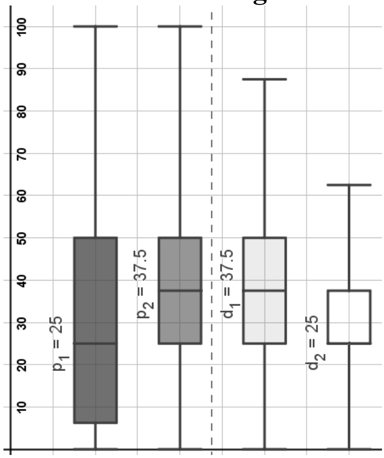


Kruskal-Wallis-Test für Test₁ – Aufgabe 3

Problemorientierter Unterricht		Darbietender Unterricht	
P_1	P_2	D_1	D_2
41,6	51	46,6	36,3
$\alpha = 0{,}05$ Signifikanzniveau	df = k-1=3 Freiheitsgrad	p = 0,0719 Irrtumswahrscheinlichkeit	
H = 4,03 < 7,81= χ^2_3 Es liegt **kein signifikanter Unterschied** vor. H_0 wird beibehalten: Es gibt keine signifikanten Unterschiede zwischen den Klassen P_1, P_2, D_1 und D_2.			

Abb. 59: Ergebnisse zu Test 1, Aufgabe 3

16.4.3 Test 1 – Aufgabe 4



Kruskal-Wallis-Test für Test₁ – Aufgabe 4

Problemorientierter Unterricht		Darbietender Unterricht	
P_1	P_2	D_1	D_2
41,2	48	47,8	38,5
$\alpha = 0{,}05$ Signifikanzniveau	df = k-1=3 Freiheitsgrad	p = 0,0719 Irrtumswahrscheinlichkeit	
H = 2,32 < 7,81= χ^2_3 Es liegt **kein signifikanter Unterschied** vor. H_0 wird beibehalten: Es gibt keine signifikanten Unterschiede zwischen den Klassen P_1, P_2, D_1 und D_2.			

Abb. 60: Ergebnisse zu Test 1, Aufgabe 4

16.5 Punktverteilungen der Klassen

Klasse P_1 – Test 1

	Aufgabe 1 - Abstand P				Aufgabe 2 - Kreis als (				Aufgabe 3 - Parallele				Aufgabe 4 - Mittelsen				Aufgabe 5 - Probleml				Gesamterg	
	A1 a	A1 b	A1 c		A2	A2b		uner	A3a	A3b			A4a	A4b			A5				Sumr	%
P112	0				1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x	x	x	x	3	15
P113	0				1	1	1	0	0	0	1	0	x	x	x	x	x	x	x	x	4	20
P114	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1.5	0.5	0	0	0	0	1	1	0	0	13	65
P115	1		1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	20
P116	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0.5	0	x	x	x	x	2.5	12.5
P117	1	1			1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1.5	0	1	1	0.5	0	15	75
P118	0.5	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0.5	1	1	1	0.5	1	1	0	0	15.5	77.5
P119	1	1	1		1	1	1	0	1	1	0	0	1	0.5	0.5	0	0.5	0.5	0	0	11	55
P120	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0.5	1	0.5	0.5	0	0.5	1	0	0	7	35
P121	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0.5	0	0	0.5	0	0	0	11	55
P122	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0.5	0.5	0	1.5	1	0.5	0	12	60
P123	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0.5	0	0	0	0	0	0.5	0.5	0	0	8.5	42.5
P124	1				1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0.5	0.5	0	0	11	55
P125	1				1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0.5	0	0	8.5	42.5
P126	0		0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	x	x	x	x	3	15
P127	0.5	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0.5	0	0	x	x	x	x	8	40
P129	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0.5	1	0	0	0	1	0.5	0	0	10	50
P130	1	1	1		1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0.5	0	0	8.5	42.5
P131	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0.5	0	0	1	1	0	0	5.5	27.5
P132	0.5	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1.5	1	0.5	0	11.5	57.5
P133	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0.5	1	1	1.5	0.5	1.5	1	0.5	1	16.5	82.5
	13.5	11	9	5	21	20	13	3	13	13	7	2.5	15	7	7	1	14	11	2	1	189	

Klasse P_1 – Test 2

	Aufgabe 1 - 4 Punkte				Aufgabe 2 - 4 Punkte				Aufgabe 3 - 4 Punkte				Aufgabe 4 - 4 Punkte				Aufgabe 5 - 4 Punkte				Gesamterg	
	A1 a	A1 b	A1 c		A2a			A2b	A3a	A3b			A4a	A4b			A5				Sumr	%
P112	0	1	1	x	1				x	x	x	x	0.5	x	0.5	0.5	1	1	1	x	7.5	37.5
P113	1.5	0.5	1	x	1	0.5			x	x	x	x	0	0	0	0	1	1	0	x	6.5	32.5
P114	0.5	0	1	x	1	1	0.5	0.5	x	x	0	x	0	0	x	x	1	1	0.5	0.5	7.5	37.5
P115	0.5	1		x	1	0.5			x	x	0	0	0	0.5	0	0	x	x	x	x	3.5	17.5
P116	0.5	1	0	x	1				x	x	x	x	0	1	0	0	1	1	0	0.5	6	30
P117	1	1	1	x	1	0.5	1	1	1	x	x	0.5	0	1	0	0	1	1	1	0.5	12.5	62.5
P118	1.5	1	1	0.5	1	1	1	1	x	x	0	x	1	1	1	1	1	1	1	0.5	15.5	77.5
P119	1.5	1	1	0	1			0.5	x	0.5	x	x	1	1	1	1	1	1	1	0.5	13	65
P120	1.5	1	1	x	1	0.5			x	x	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0.5	10.5	52.5
P121	0	1	1	x	1	1	1		x	x	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0.5	10.5	52.5
P122	1	1	1	x	0.5	1	1	0	1	x	x	0.5	0	1	1	0.5	1	0.5	0.5	1	12.5	62.5
P123	0	0	1	x	0.5	0.5			x	0	x	x	1	1	1	1	1	1	1	0.5	9.5	47.5
P124	1.5	1	1	x	1	1			x	x	x	x	0	0.5	x	x	1	1	1	0.5	9.5	47.5
P125	0	1	1	x	1				1	x	x	0.5	0	0.5	x	x	1	1	1	0.5	8.5	42.5
P126	0	0	1	x	1	0.5			0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	4.5	22.5
P127	1	1	1	x	1	1			x	0	x	x	0	1	1	0	0	0	0	x	7	35
P129	1	0	1	x	1	1		0.5	x	0	0	x	0	1	1	0	1	0.5	1	0	9	45
P130	1.5	1	1	x	1	1			x	0	x	0	0	x	x	0	1	1	1	x	8.5	42.5
P131	1	0	1	x	1	1	0.5		x	0.5	0.5	0.5	0	1	1	0	1	1	0	0.5	10.5	52.5
P132	1.5	1	1	x	1	0	0	0	0	x	x	x	0	x	x	x	1	1	1	0.5	8	40
P133	1.5	1	1	0.5	1	1	1	1	x	x	x	x	1	1	0.5	x	1	1	1	1	14.5	72.5
	18.5	15.5	19	1	20	13	6	4.5	3	1	0.5	2	4.5	14.5	11	4	18	17	14	8	195	

Klasse P_1 – Test 3

	Aufgabe 1 - 4 Punkte				Aufgabe 2 - 4 Punkte				Aufgabe 3 - 4 Punkte				Aufgabe 4 - 4 Punkte				Aufgabe 5 - 4 Punkte				Gesamterg	
	A1 a	A1 b	A1 c		A2a			A2b	A3a	A3b			A4a	A4b			A5				Sumr	%
P112	x	1	x	x	0	1			x	x	x	x	0	0	x	x	x	x	x	x	2	10
P113	1.5	0	1	x	1	1	0.5	0	x	x	x	x	x	0	1	1	1	0.5	0	x	8.5	42.5
P114	0.5	0	0	x	1	0	0		x	x	x	x	x	x	x	x	1	1	1	0.5	5	25
P115	1	1	x	x	1	0			x	x	x	x	1	0	0	x	0	0	0	x	4	20
P116	1	1	0	0					x	x	x	x	1	0	1	x	x	x	x	x	4	20
P117	1	1	1	x	1	1	1	1	0	x	x	x	1	1	0	0	1	1	1	1	13	65
P118	1	1	1	x	1	1	1	0.5	x	x	x	x	1	1	1	1	1	1	1	0.5	14	70
P119	0.5	1	1	x	1	1	1	0.5	1	x	x	x	1	1	1	1	1	1	1	0.5	14.5	72.5
P120	0.5	1	1	x					x	x	x	x	1	1	0	0	x	x	x	x	4.5	22.5
P121	1	1	0	x	0	1	0	0	x	x	x	x	1	1	0	0	1	1	0.5	0.5	8	40
P122	1	1	1	x	1	0			x	1	x	x	1	1	0	0	1	1	1	1	11	55
P123	0	0	0	x	0.5	0	0.5		x	x	0	x	x	x	x	x	1	x	x	x	2	10
P124	0.5	1	1	x	1	1	1	0.5	1	x	x	x	1	0.5	0	0	1	1	1	0.5	12	60
P125	1.5	1	1	x	1	1	1		1	x	x	x	0	x	0	x	0	0	0	0	7.5	37.5
P126	1	0	1	x	1	0	0	0	x	1	x	x	0	0	0	0	1	0	0	0.5	5.5	27.5
P127	0.5	1	1	x	0.5				x	0.5	x	x	1	1	0	0	1	0.5	0	0.5	7.5	37.5
P129	0	0	1	x	0.5	1	0		x	0	x	x	1	1	0	0	1	0.5	1	0.5	7.5	37.5
P130	0	1	1	x	0.5		0		x	x	x	x	1	0	0	0	0	0	0	0	3.5	17.5
P131	1	0.5	1	x	1	1	0.5		x	x	0	x	x	x	x	x	0	0	0	0	5	25
P132	1	0	1	x	1				x	x	x	x	0	0	0	0	1	1	1	0.5	6.5	32.5
P133	1	1	1	x	1		0.5		1	x	x	x	1	1	1	1	1	1	1	1	13.5	67.5
	15.5	14.5	15	0	15	10	7	2.5	4	2.5	0	0	13	9.5	5	4	14	10.5	9.5	7.5	159	

Klasse P_2 – Test 1

	Aufgabe 1 - Abstand P				Aufgabe 2 - Kreis als (				Aufgabe 3 - Parallele				Aufgabe 4 - Mittelsen				Aufgabe 5 - Probleml				Gesamterg	
	A1 a	A1 b	A1 c		A2	A2b		uner	A3a	A3b			A4a	A4b			A4				Sumr	%
P211	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1.5	0	1	0	0	0	1.5	0.5	0	0	13.5	67.5
P212	0.5	1			1	0	0	0	1	0	0.5	0	0	0	0	0	1.5	1	0	0	6.5	32.5
P214	0	0			1	1	0	0	1	0	0.5	0	0	0	0	0	1.5	0.5	0	0	5.5	27.5
P215	1	0	0		1	1	0	0	0	0	0.5	0	1	0	0	0					4.5	22.5
P216	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0.5	0	1	0.5	0	0	0.5	0	0	0	7.5	37.5
P217	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1.5	0	1	0.5	0.5	0	1.5	1	0.5	0.5	17	85
P218	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0.5	0	0					7.5	37.5
P219	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0.5	0.5	1	0	0	0	1	0.5	0	0	7.5	37.5
P220	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0.5	0	1	0.5	0.5	0	1.5	1	0	0	11	55
P221	1	0			1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0					5	25
P222	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1.5	0	1	1	1.5	0.5	1	0.5	0.5	0	17.5	87.5
P223	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0.5	0	1	1	1	0	1.5	1	0.5	0.5	14	70
P224	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1.5	0	1	1	0	0	0	0	0	0	11.5	57.5
P225	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	8	40
P226	1	0			1	0	0	0	0	0	0.5	0	1	0	0.5	0	1	0.5	0	0	5.5	27.5
P228	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0.5	0	0	0	0	0	1.5	1	0.5	1	12.5	62.5
P229	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0.5	0	0	1	0	0.5	0	1.5	1	0.5	0	11	55
P230	1	0	1	1	1	1	0.5	0	1	1	0.5	0	1	1	0.5	0	0.5	0	0	0	11	55
P231	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.5	0	1	1	0.5	0	1	1	0.5	0	15.5	77.5
P232	1	0.5	1	1	1	1	0.5	0	0	0	0.5	0	1	0	0	0	1.5	0.5	0	0	9.5	47.5
P233	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0.5	0	1	1	0	0.5	0.5	0	0	0	12.5	62.5
P234	0	0.5	1	1	1	1	0	0	0	0	0.5	0	1	0.5	0.5	0	1.5	1	0	0	9.5	47.5
	16.5	10	14	12	22	20	7	5	17	14.5	14	0.5	18	9.5	6	1	20.5	11	3	2	224	

Klasse P_2 – Test 2

	Aufgabe 1 - 4 Punkte				Aufgabe 2 - 4 Punkte				Aufgabe 3 - 4 Punkte				Aufgabe 4 - 4 Punkte				Aufgabe 5 - 4 Punkte				Gesamterg	
	A1 a	A1 b	A1 c		A2	A2b		uner	A3a	A3b			A4a	A4b			A4				Sumr	%
P211	0.5	1	1		1	0.5	1		0	0	x	x	1	1	1	1	1	1	1	0.5	12.5	62.5
P212	0	0.5	0		1	0.5			x	x	x	x	0	0	0	0	1	1	1	0.5	5.5	27.5
P214	1.5	1	1	0.5	0.5	0.5		0.5	x	x	x	x	0	0	0	0	1	1	1	0	8.5	42.5
P215	0.5	0.5			1	1	1	0.5	x	x	x	x	0	x	x	x	1	0.5	0.5	0.5	7	35
P216	1.5	1	1		1	0.5			1	x	x	x	0	0	0	0	0.5	0.5	0	0	7	35
P217	1.5	1	1		1	1	1	0.5	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	x	16	80
P218	0.5	1	1		1	0.5			0	0	x	x	0	1	1	0	1	0.5	0.5	0.5	8.5	42.5
P219	1	1	1		1	0.5			x	x	0	0	0	0	0	0	1	0.5	0.5	0.5	7	35
P220	1.5	0.5	1		1	1	1	0.5	x	x	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0.5	10	50
P221	0.5	1	1		0.5	1			0.5	1	0.5	1	0	0.5	0	0	1	1	1	0.5	11	55
P222	1.5	1	1	0.5	1	1	0.5		1	1	1	1	0	x	x	x	1	1	1	0.5	14	70
P223	1.5	1	1		1	1		0.5	x	x	0	0	0.5	0.5	0.5	x	1	1	0	0.5	10	50
P224	1.5	1	0			0.5			1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	7	35
P225	1.5	1	1		1	0.5			1	x	0	0	0	0	0	0	1	0.5	0.5	0.5	8.5	42.5
P226	0.5	0.5	0			0.5			x	x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.5	7.5
P228	1	1	1		1				x	x	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	8	40
P229	1.5	0	1		1	1	1	0.5	0	0	x	x	0	0	0	0	1	1	1	1	10	50
P230	1.5	0.5	1		1	0.5			0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	12.5	62.5
P231	1.5	1	1		1	1	1	0.5	x	0.5	0.5	0	0	1	0	0	1	1	1	1	13	65
P232	1	0.5	1		1	0.5			1	x	0	x	0	0.5	0	0	1	1	1	1	9.5	47.5
P233	1.5	0.5	1		1	0.5			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.5	0.5	5.5	27.5
P234	1.5	1	1		1	0.5			x	0	0	0	0	0	0	0	1	0.5	0	0.5	7	35
	25	17.5	18	1	19	14.5	6.5	3.5	6.5	3.5	3	3	3.5	6.5	4.5	2	19.5	17	14.5	11	200	

Klasse P_2 – Test 3

	Aufgabe 1 - 4 Punkte				Aufgabe 2 - 4 Punkte				Aufgabe 3 - 4 Punkte				Aufgabe 4 - 4 Punkte				Aufgabe 5 - 4 Punkte				Gesamterg	
	A1 a	A1 b	A1 c		A2	A2b		uner	A3a	A3b			A4a	A4b			A4				Sumr	%
P211	0.5	0	1	x	1	1	1	0.5	x	x	0	x	1	1	1	1	1	1	1	1	13	65
P212	0	1	0	x	1	1	0		0	x	x	x	0	0	x	x	0	0	0	x	3	15
P214	1.5	1	0	x	1	1			x	x	x	x	0	0	x	x	1	1	0	x	6.5	32.5
P215	0	0	x	x		0.5	0		x	x	x	x	0	0	x	x	0	0	0	x	0.5	2.5
P216	0	0	0	x		1	0	0	0	x	x	x	0	0	x	x	0	0	0	0	1	5
P217	1.5	1	1	x	1	1	1	0.5	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0.5	14.5	72.5
P218	0.5	1	x	x	1	1	0		x	0	x	x	0	0	x	x	0	x	x	x	3.5	17.5
P219	0	0	x	x	1	0			x	x	x	x	0	x	x	x	0	0	x	x	1	5
P220	1.5	0	0	x	0	1	0.5		x	x	0	x	0	0	x	x	0	0	0	0	3	15
P221	0.5	0	0	x	0.5	1	0		x	x	x	x	0	0	x	x	0.5	0	0	0.5	3	15
P222	1.5	1	1	0.5	1	1	1	0.5	1	1	1	x	1	1	1	1	1	1	1	0.5	18	90
P223	0.5	0	1	x	1	1	1	0	x	x	0	x	0	0	x	x	1	0	0.5	0.5	6.5	32.5
P224	0	1	0	x	1	0	0	0	x	x	0	x	1	1	1	1	1	1	1	1	10	50
P225	0.5	0	1	0	1	0	0	0	1	x	x	x	0	1	1	0	1	0.5	0	0.5	7.5	37.5
P226	0	0	0	x	0	0			x	x	0	x	0	0	0	0	0	0	0	x	0	0
P228	0.5	1	0	x	1	1	1	0.5	x	x	0	x	1	1	1	1	1	1	1	1	13	65
P229	0.5	1	1	x	0.5	0	0.5	0.5	x	x	0	x	1	0.5	0	0	1	1	1	0.5	9	45
P230	0.5	1	1	0	1	1	0	0.5	x	x	0	x	1	1	1	1	1	1	1	1	13	65
P231	1.5	1	1	0	1	1	1	0.5	1	1	x	x	1	1	1	1	1	1	1	1	17	85
P232	0	0.5	x	x	1	0			x	x	x	x	1	1	1	1	1	0.5	0.5	0.5	8	40
P233	0.5	1	0	x	0.5				x	x	0	x	1	0	0	0	1	0.5	0.5	0.5	5.5	27.5
P234	0.5	1	0	x	1	1	0	0	x	x	0	x	1	1	1	1	1	1	0	0	9.5	47.5
	12.5	12.5	8	0.5	16.5	14.5	7	3.5	4	3	1	0	11	10.5	9	8	14.5	11.5	9.5	9	166	

Klasse D_1 – Test 1

	Aufgabe 1 - Abstand P				Aufgabe 2 - Kreis als (				Aufgabe 3 - Parallele				Aufgabe 4 - Mittelsen				Aufgabe 5 - Probleml				Gesamterg	
	A1 a	A1 b	A1 c		A2	A2b		uner	A3a	A3b			A4a	A4b			A4				Sumr	%
D111	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0.5	0	1	0.5	0.5	0	0	0	0	0	6.5	32.5
D112	1	0	1		1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	4	20
D114	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0.5	0	1	0.5	0.5	0	1	0.5	0	0	11	55
D115	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0.5	0	0					10.5	52.5
D116	1	0	0	0	1	1	0.5	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0.5	0	0	0	7	35
D117	1	1	1	0	1	1	0.5	0	1	1	0.5	0	1	0.5	0	0	1.5	1	0	0	12	60
D118	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0.5	0	1	1	0.5	0	0	0	0	0	8	40
D119	0.5	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0.5	1	1	0	0	13	65
D120	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1.5	1	0	0	15.5	77.5
D121	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0.5	0	1	0	0	0	1.5	1	0	0	11	55
D122	1	1			1	1	1	0	1	1	0.5	0	1	0.5	0	0					9	45
D123	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0.5	0.5	0	0	0	0	0	4	20
D124	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0.5	0.5	0	0	0	0.5	0	1.5	1	0.5	0	11.5	57.5
D125	1	0	0	0	1	1	0.5	0	1	1	0.5	0	0	0	0	0					6	30
D126	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0.5	0	1	0	0	0	1	1	0.5	0	11	55
D127	0.5	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0.5	0.5	1	1	0	0.5	0	0	0	0	11	55
D128	0				1	1	0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0					2.5	12.5
D129	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1.5	1	0.5	1	10	50
D130	1	0	1		1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	6	30
D131	0	0	0		1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0					5	25
D132			0		1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0					4	20
D133	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0.5	0	0	12.5	62.5
D134	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0.5	0	1	0.5	0	0					10	50
	17	14	14	9	23	17	6	1	17	14.5	9.5	0.5	20	10.5	4.5	1	12	8	1.5	1	201	

Klasse D_1 – Test 2

	Aufgabe 1 - 4 Punkte				Aufgabe 2 - 4 Punkte				Aufgabe 3 - 4 Punkte				Aufgabe 4 - 4 Punkte				Aufgabe 5 - 4 Punkte				Gesamterg	
	A1 a	A1 b	A1 c		A2a			A2b	A3a	A3b			A4a	A4b			A4				Sumr	%
D111	1	1	1		1	0.5		0.5	x	x	x	x	0	0	0	0	1	0	0	0.5	6.5	32.5
D112	1	1	1	0.5	1	1	1		1	x	x	x	x	x	x	x	0	0	0	0	7.5	37.5
D114	1.5	0.5	1		1	1	1	0.5	1	x	x	x	1	1	1	1	1	0.5	0	0.5	13.5	67.5
D115	1.5	0	1		1	0.5			x	x	x	x	0	0.5	0	0	0	0	0	x	4.5	22.5
D116	1.5	1	1		1	0.5	1		0	x	0	x	0	0	0	0	1	0.5	0.5	0.5	8.5	42.5
D117	1.5	0.5	1		1	0.5			1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	9.5	47.5
D118	1	1	1	0.5	1	0.5		1	1	x	x	x	0	0	0	0	1	0	0	0.5	8.5	42.5
D119	1.5	0.5	1		1				1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	x	12	60
D120	1.5	1	1		1	0.5	1	0.5	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0.5	0	0	12	60
D121	1.5	1	1		1	0.5	x	0.5	0.5	x	0	0	0	0	0	0	0.5	0	0	0	6.5	32.5
D122	1.5	1	1		1	1	1	0.5	x	x	x	x	0	0	0	0	x	x	x	x	7	35
D123	0.5	0.5	1		1	1	1		1	x	x	0.5	0	1	0	0	0	x	x	x	7.5	37.5
D124	1	0.5	1		1	1			1	x	x	x	1	1	1	1	1	0.5	0.5	0.5	12	60
D125	1.5	1	1		1	0.5			1	1	x	1	1	1	1	1	1	1	1	1	16	80
D126	1.5	1	1	0.5	1	0.5	1		1	x	x	0.5	0	0.5	0	0	x	x	x	x	8.5	42.5
D127	1.5	1	1		1	1			1	0.5	x	x	1	1	1	1	1	1	1	1	15	75
D128	0	0	0		0	0	0	0	x	x	x	x	0	x	x	x	x	x	x	x	0	0
D129	1.5	1	1		1		1		0	0	x	x	1	1	1	1	1	1	1	1	13.5	67.5
D130	1	1	1		1	0.5			0	x	x	x	0	1	1	0	1	0.5	1	1	10	50
D131	1.5	0.5	1		1	0.5			x	x	x	x	0	0	0	0	1	0.5	0	x	6	30
D132	1.5	1	1	0.5	1	1	0.5		1	x	x	0	x	x	x	x	0	0	0	x	7.5	37.5
D133	1.5	0.5	1		1	0.5			1	x	x	0.5	0	1	1	0	0	x	x	x	8	40
D134	0.5	0.5	1		1	0.5			x	x	x	x	0	0	0	0	0	0	0	x	3.5	17.5
	28.5	17	22	2	22	13.5	8.5	3.5	13.5	2.5	1	3.5	7	12	9	6	12.5	7	6	6.5	204	

Klasse D_1 – Test 3

	Aufgabe 1 - 4 Punkte				Aufgabe 2 - 4 Punkte				Aufgabe 3 - 4 Punkte				Aufgabe 4 - 4 Punkte				Aufgabe 5 - 4 Punkte				Gesamterg	
	A1 a	A1 b	A1 c		A2a			A2b	A3a	A3b			A4a	A4b			A4				Sumr	%
	Def. I	richti	pkt m	Erklä	MS k	Kreis	kein	ein S	Sp gl	Def M	Argu	rgu für fehlende MS					MS v	alle M	Gren	Erklä	20	
D111	0	1	1	x	1	1		0.5	x	x	0	x	1	1	0.5	1	1	1	0.5	0.5	11	55
D112	1	0	1	x	1	1	1	0	x	0	x	x	1	1	1	1	0	0	0	0	9	45
D114	1.5	0.5	1	x	1	1	0.5	0.5	1	x	x	x	1	1	1	1	1	1	1	0.5	14.5	72.5
D115	1.5	1	1	x	1	1	1	0.5	x	x	x	x	0	0	0	0	0	0	0	x	7	35
D116	1	1	1	x			0		0	x	x	x	0	0	0	0	1	0.5	0.5	x	5	25
D117	0	0.5	1	x	1	1	1	0.5	1	x	x	x	1	1	1	0	x	x	x	x	9	45
D118	0	1	0	x	1	1	0.5	0.5	1	x	0	x	0	0	0	0	1	1	1	0.5	8.5	42.5
D119	1	0.5	1	x	1	1	1	0.5	1	0	x	1	1	1	1	1	1	1	1	0.5	15.5	77.5
D120	1	1	1	x	0	0	0.5	0.5	0	x	0	x	0	0	0	0	1	0.5	0	0.5	6	30
D121	0	0	0	0	0	0	0.5		0	x	0	x	1	1	1	1	0	0	0	0	4.5	22.5
D122	1.5	0.5	1	x					x	x	x	x	1	1	1	0	1	1	1	x	9	45
D123	1.5	1	1	x	0	1	0	0	x	x	0	x	1	0	0	0	0	0	0	x	5.5	27.5
D124	1	1	1	x	1	0	0.5	0.5	1	0	x	x	1	1	1	1	1	1	0.5	0.5	13	65
D125	1	1	1	x	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0.5	0.5	13	65
D126	1.5	1	1	x	1	0			x	x	x	x	1	1	1	1	1	1	0.5	0	11	55
D127	1.5	1	0.5	x	1	1	0		x	x	0	x	1	1	1	1	1	1	1	0.5	12	60
D128	0	1	x	x					x	x	x	x	0	0	0	0	x	x	x	x	1	5
D129	1.5	1	1	x	1	1	1	0.5	1	1	0.5	0.5	1	1	1	1	1	1	1	1	18	90
D130	0	0	0.5	x	1	1	1		0	x	x	x	1	1	0	0	0	0	0	x	5.5	27.5
D131	1.5	0.5	1	x	1	1			0	x	x	x	0	0	0	0	0	0	0	x	5	25
D132	0	1	0.5	x	1	1	1	0.5	1	x	x	x	1	1	1	1	1	1	1	0.5	13.5	67.5
D133	1	0.5	1	0	1	0			x	x	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	11.5	57.5
D134	1.5	1	1	x	0	0	0.5		x	0	x	x	1	0	0	0	x	x	x	x	5	25
	20.5	17	18	0	16	14	11	5	8	2	1.5	2.5	16	14	12.5	11	14	13	10.5	6.5	213	

Klasse D_2 – Test 1

	Aufgabe 1 - Abstand P				Aufgabe 2 - Kreis als O				Aufgabe 3 - Parallele				Aufgabe 4 - Mittelsen				Aufgabe 5 - Probleml				Gesamterg	
	A1 a	A1 b	A1 c		A2	A2b		unen	A3a	A3b			A4a	A4b			A4				Sumr	%
D211	0.5	0	0		1	0	0	0	1	0.5	1	0	0.5	0.5	0	0	0	0	0	0	5	25
D212	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0.5	0	1	0	0	0	1.5	1	0.5	0	11.5	57.5
D213	1	0	0	0	1	1	0.5	0	1	1	0.5	0	1	0.5	0	0	0	0	0	0	7.5	37.5
D214	0.5				1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0					3.5	17.5
D215	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0.5	0	1	0	0	0					8.5	42.5
D216	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0.5	0					6.5	32.5
D217	1	0.5	0	0	1	1	0	0	0	1	0.5	0	1	0.5	0	0					6.5	32.5
D218	1		0	0	1	1	0	0	1	0	0.5	0	1	0.5	0.5	0	0.5				7	35
D219	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0.5	0	1	0	0	0					6.5	32.5
D220	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0.5	0	0	1	0	0	0					6.5	32.5
D221	1	1			0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1.5	0					4.5	22.5
D222	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0.5	0	1	0	0	0					8.5	42.5
D223	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0.5	0	1	0.5	0.5	0	0.5				5	25
D224	0				1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0					2	10
D225	1	1	1		0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0					4	20
D227	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0.5	0	0	0	0	0					5.5	27.5
D228	0.5	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0.5	0.5	0					6.5	32.5
D229	0.5	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0.5	0									6	30
D230	1	1	1	0	1	0.5	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0					7.5	37.5
D231	0.5	0.5	0	0	1	1	0	0	1	0.5	0.5	0	1	0.5	0	0					6.5	32.5
D233	1	0	0		1	1	0	0	1	0.5	0.5	0	1	0	0	0.5	0				6.5	32.5
	16.5	11	7	1	19	12.5	1.5	1	14	11	7	0	18.5	3.5	3.5	0.5	2.5	1	0.5	0	132	

Klasse D_2 – Test 2

	Aufgabe 2 - 4 Punkte				Aufgabe 3 - 4 Punkte				Aufgabe 4 - 4 Punkte				Aufgabe 5 - 4 Punkte				Gesamterg	
	A2	A2b		uner	A3a	A3b			A4a	A4b			A4				Sumr	%
D211	1	0.5	0	0	0.5	x	x	x	0	1	0	0	0	0.5	0.5	0	5.5	27.5
D212	1	0.5	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0.5	12.5	62.5
D213	1	0.5	0	0	1	0.5	1	0.5	0	1	1	0	1	1	1	0.5	13.5	67.5
D214	1	0	0		x	x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x	3	15
D215	1	0.5	0	0	x	x	x	x	0	0	0	0	0	0	0	x	2.5	12.5
D216	1	0.5	0	0	1	0.5	1	1	0	0.5	0	0	1	1	1	1	13	65
D217	1	1	0	0	x	x	0	0	0	x	x	x	1	0.5	0.5	0.5	8	40
D218	1	0.5	0	0	1	x	x	x	0	0	0	0	1	1	0	0.5	8	40
D219	1	1	1	0.5	x	x	x	x	0	0	0	0	x	x	x	x	7.5	37.5
D220	1	0.5	0		0.5	1	1	0.5	1	0	0	1	1	0	0	0.5	10	50
D221	1	0.5	0	0	x	x	0	0	0	x	x	x	1	1	0	0.5	7.5	37.5
D222	1				0.5	0.5	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0.5	10	50
D223	0.5	0.5	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	8.5	42.5
D224	1	0.5	0	0	1	x	0	0	0	0	0	0	1	0.5	0	0.5	6.5	32.5
D225	1	0.5	0	0.5	1	x	0	0	0	1	1	0	1	0.5	0	0.5	9.5	47.5
D227	1	0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	5.5	27.5
D228	1	1	1	0.5	1	1	1	0.5	0	0	0	0	1	1	1	0.5	14	70
D229	1	1	1	0	1	x	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0.5	14.5	72.5
D230	1	0.5	0	0	1	x	x	x	0	0	0	0	1	1	0	0.5	6	30
D231	1	0.5		0	1	0	0.5	0.5	1	1	1	1	1	0.5	0	1	13.5	67.5
D233	1	1	0	0	1	0	0	0.5	0	1	1	0	1	1	1	0.5	12.5	62.5
	20.5	12	3	1.5	13.5	5.5	7.5	6.5	3	6.5	5	3	17	12.5	7	8.5	192	

Klasse D_2 – Test 3

	Aufgabe 1 - 4 Punkte				Aufgabe 2 - 4 Punkte				Aufgabe 3 - 4 Punkte				Aufgabe 4 - 4 Punkte				Aufgabe 5 - 4 Punkte				Gesamterg	
	A1 a	A1 b	A1 c		A2	A2b		uner	A3a	A3b			A4a	A4b			A4				Sumr	%
D211	0	0.5	0	x	0	0	0		x	0.5	0	x	0	0	0	0	1	0	0	x	2	10
D212	1.5	1	1	x	1	1	1	0.5	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	17	85
D213	1	1	1	x	1	0			x	x	x	x	1	1	0	0	1	1	0	0	8	40
D214	1.5	1	1	x	1	1	1	0.5	x	x	x	x	0	0	x	x	1	0.5	0	x	8.5	42.5
D215	1	1	x	x	1	0			x	x	0	x	0	0	0	0	0	0	0	0	3	15
D216	0.5	1	0.5	x	1	1	1	0.5	x	x	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.5	15	75
D217	0	0.5	0.5	x	1	0	0	0	x	x	x	x	0	0	x	x	1	0.5	0.5	x	4	20
D218	1	1	1	x	1	1	1	0.5	x	0	0	x	0	0	0	0	1	0.5	0	x	8	40
D219	0	1	1	x	1	1	1	0.5	x	x	x	x	0.5	0	x	x	1	1	1	x	9	45
D220	1.5	1	1	x	1	1	0		1	0	0	x	1	0	0.5	x	1	1	0	0	10	50
D221	1.5	1	1	0	1	1	1	0.5	x	x	0	x	1	1	1	1	1	0	0	x	12	60
D222	0	0	0	x					0	x	0	x	0	0	0	0	1	1	0	0.5	2.5	12.5
D223	1	0.5	1	x	1	1	0	0	x	1	0.5	x	0	1	1	1	1	0.5	0	0	10.5	52.5
D224	0.5	1	1	x					1	x	x	x	1	0	0	0	1	1	1	0.5	8	40
D225	0	0	x	x	1	0			x	x	0	x	1	0	0.5	0	x	x	x	x	2.5	12.5
D227	0	1	1	0.5	0.5	0	0.5	0	x	x	0	x	1	0	1	0	1	1	1	1	9.5	47.5
D228	0.5	1	1	x	1	1	1	0.5	x	1	0	x	1	1	1	1	1	1	1	0.5	14.5	72.5
D229	0.5	0.5	1	x	1	0			x	x	0	x	1	1	1	1	1	1	0	0.5	9.5	47.5
D230	0	0	0	x	0	0			1	x	x	x	1	1	1	1	1	1	1	0	8	40
D231	1.5	0.5	1	0	1	1	1		x	1	0.5	0	1	1	1	0	0	0	0	x	10.5	52.5
D233	1	1	1	x	0.5	0	0.5	0.5	x	0.5	0.5	x	1	1	1	0	1	0.5	0	0.5	10.5	52.5
	14.5	15.5	15	0.5	16	10	9	4	4	5	3.5	1	13.5	10	11	7	18	13.5	7.5	4	183	

16.6 Unterrichtbeobachtungsprotokolle

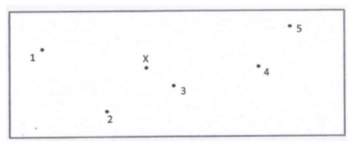
16.6.1 Dokumentation der Klasse P₁

1. und 2. Stunde, 29.05.2018

Beginn 11:50. Es ist sehr, sehr warm an diesem Tag im Ramadan. Lehrperson erläutert Organisatorisches: Es wird alles in den Hefter geschrieben. Hefter wird am Ende eingesammelt und bewertet.

Lehrperson legt die Folien mit der Brunnenaufgabe auf den OHP (Ab 05. Minute).

L: „Wer versteht die Aufgabe?“


Die Karte zeigt ein Stück Land. Es gibt fünf Brunnen in diesem Gebiet. Stelle dir vor, du stehst bei X mit einer Herde von Schafen, die Durst haben. Zu welchem Brunnen gehst du?

Die Wahl war natürlich nicht schwierig, du gehst zum nächst gelegenen Brunnen. Entwickle nun eine Einteilung des Landes in fünf Gebiete, so dass zu jedem Ort in einem Gebiet der Brunnen in diesem Gebiet der nächstgelegene ist.

Abb. 1: Erster Teil der Brunnenaufgabe

Schüler: „In vier Gebiete soll das eingeteilt werden. Die sollen kennzeichnen, ab wann man wo zu welchem Brunnen gehen soll.“

L: „Jetzt kann man natürlich sagen, dass die Schafe wo anders stehen und die Frage ist, wo gehen wir dann hin. Zunächst 10 Minuten alleine. Es geht um Ideenentwicklung, wie man zur Lösung kommt. Dann in Gruppen austauschen.“ (09. Minute)

Die Schülerinnen und Schüler arbeiten kurz allein. Beginnen dann frühzeitig sich mit dem Nachbarn auszutauschen. Die Lehrperson erklärt: „Mir ist die Kommunikation unter den SchülerInnen immer wichtig, daher rege ich häufig Gespräche An. Einzelarbeit kommt fast gar nicht vor, daher beginnt auch der Austausch jetzt so frühzeitig.“ Die Aufgabenstellung wird untereinander noch einmal erklärt. Bis 19. Minute:

Die erste Schülerlösung wird aufgele

L: „Was ist der Nachteil dieser Lösu

Schüler: „Da ist noch ein Gebiet offe

L: „Das Schaf, was also hier drin ist, den werden. Arbeitet paarweise noch einmal an euren Lösungen. Ihr könnt dafür ein neues AB nutzen.“

Abb. 2: Erster Vorschlag zur Gebietseinteilung. An diesem Beispiel wird deutlich gemacht, was mit Einteilung und Grenzen gemeint ist.

L: „Versucht mal, was ihr Euch denkt auf Folie zu bringen.“

Ab Minute 21 in Partnerarbeit. Bis 40. Minute, dann 5 Minuten Pause.

Ab 45. Minute weiter:

L: Ziel ist eine Ideensammlung, viele sinnvolle Ansätze guter Ideen. Ihr habt das Problem gehabt, dass ihr ein Problem hattet. Wie gehe ich mit einem Problem um? Hat jemand von euch eine Idee und sagt, meine Idee ist richtig und gut, oder vielleicht: ich habe vielleicht keine Lösung, aber DAS war gut.“

(1 Meldung, P117).

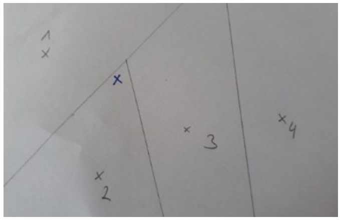


Abb. 3: Nachstellung des Tafelbildes. Es sind vier Punkte von der Lehrperson eingezeichnet. P117 zeichnet Begrenzungen durch möglichst gutes Probieren ein. P111 markiert den blauen Punkt.

L: „Du kannst auch an der Tafel erklären.“

P117: „Ab und zu probiert und so. Funktioniert das hier?“

P111: „Bei Punkt 2 ist das näher bei 1. Das kann nicht sein.“ (P111 markiert * an Tafel).

Schüler: „P117, wie hast du das noch einmal gemacht?“

P117 erklärt noch einmal.

L: „P130, deine Lösung wollen wir auch an

P130: „Ich habe vier Kreise gezogen, um je

L: „Ich habe das bei P111 gesehen und bei damit gearbeitet. Was ist denn das Problem


Abb. 4: Einteilung der Gebiete von P111.

P127: „Der Rest bleibt übrig.“

Schüler: „Man weiß den Radius nicht.“

P117: „Wenn die aneinandergrenzen, dann sind da ganz kleine Stellen, die man nicht zuordnen kann.“

Schüler: „Vorteile von Kreis um 2: Alles, was innerhalb liegt, kann zu 2 zugeordnet werden.“

P113: „An jedem Ort kann man sehen, wohin man geht.“

L: „Verstehe ich nicht.“

P113: „Man kann eindeutig sagen, was man machen muss."

P111 kommt mit Folie nach vorne und erklärt.

P111: „Wir haben hier so Linien gemacht und hier so (zeigt auf 1) und durch ausprobieren haben wir gesehen, dass das am besten ist."

Schüler: „Bei der Spitze ganz links von 3, ist es näher bei 2."

P130: „Was ist, wenn man am 2.Punkt an der Grenze rechts ist? Dann ist doch 2 näher als 3.

P133: „Warum habt ihr solche Kurven zwischen 3 und 4?"

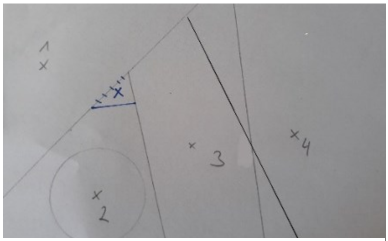


Abb. 5: Die Lehrperson ergänzt die Schwarz eingezeichnete Gerade.

P111: „Wenn man gerade Striche macht, dann ist das nicht richtig."

L: „Es ist nicht ganz klar, was die zwei gemacht haben. Haben sie einzelne Punkte gewählt und geschaut, was ist näher? Ich finde das ein ganz sinnvolles Vorgehen. Gibt es Meinungen dazu?"

P117: „Das ist mühsam. Und ich glaub schon, dass das in geraden Linien geht, wenn man die richtigen Winkel nimmt."

Lehrperson ergänzt an der Tafel (schwarze Linie): „Dann so?"

P132: „Aber gerade Linien sind schon möglich. Aber wir haben nur eine Skizze."

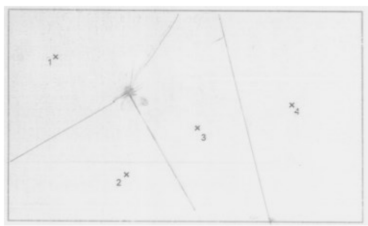


Abb. 6: Vorschlag der Einteilung von P132 und P125.

P122: „Ich finde es gut, dass sie viele Kurven haben, weil man sieht, dass sie sich viel überlegt haben. Und nicht nur eine gerade Linie gezogen haben."

L: „Ich finde die Idee gut. Und wie das mit der wirklichen Linie ist, müssen wir noch einmal sehen."

P132 legt Folie auf und erklärt.

P132: „Wir haben gerade Linien. Wir haben alle Punkte verbunden und dann den Abstand gemessen. Dann haben wir die Hälfte genommen und eine Linie dadurch gezogen. Diese Linie ist jetzt hier das Gebiet."

L: „Fragen? Hinweise? An die letzte Gruppe.“ (Es sind 60 Minuten um).“

P124: „Wenn ein Schaf da ist, wo q und 3 ist, dann ist der Brunnen 3 näher als 1.“

L: „Na, wenn das eine Skizze ist. Müssten wir noch gucken. Wie kann man argumentieren, dass das keine perfekte Lösung ist?“

P124: „Genauer Messen.“

P126: „Einzelne Punkte nehmen und gucken, ob es passt.“

L: „Dann mit ganz, ganz vielen Punkten. Dann klappt das auch.“

P117: „Oder eine Stelle finden, an der es nicht passt.“

L: „Klar, welche wäre das. P124, das hast du auch gerade gesagt.“

P124: „Ja, messen.“

L: „Andere Stellen, wo man sagen kann, dass das so nicht stimmt.“

P111: „Schnittpunkte von 1,2,3.“

L: „Das müssten wir genau überprüfen.“

P117: „Der Schnittpunkt zwischen 3 und 4 am Rand. Das gehört eher zu 3 als zu 4.“

L: Ja, denke ich auch. Aber das ist eine Skizze, dass wissen wir. Ein paar Meinungen. P126.“

P126: „Die Mittelpunkte zwischen den Punkten messen und dann Geraden durchziehen.“

P131: „Die Lösung von P125 und P112 ist am besten. Sie haben auch den Mittelpunkt gesucht und verbunden.“

L: „Was meinst du mit verbinden?“

P130: „Messen. Den Mittelpunkt markieren, dann eine Gerade einzeichnen, damit ich dann weiß, wo derselbe Abstand ist.“

P114: „Vielleicht auch mit Kreisen.“

P122: „Ich fand die Lösung von P132 und P125 auch sehr gut.“

L: „Hat jemand bei der Lösung ein Problem gesehen? Wenn jetzt alle Fan davon sind.“

P113: „Man weiß eigentlich nicht, ob alle Punkte gleich weit weg sind.“

L: „P133 stell mal vor.“

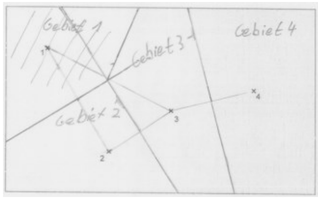


Abb. 7: Gebietseinteilung von P133.

P133 kommt mit seiner Folie nach vorne und erklärt.

P133: „eigentlich das gleiche wie P132 und P125.“

L: „Ich sehe da Unterschiede. Erklär mal.“

P130: „Warum habt ihr da ein Dreieck 123?“

P133: „Das hat sich ergeben. Wir haben die Strecken verbunden, um den Mittelpunkt heraus zu finden.“

P117: „Sind die Linien zwischen 3 und 4 schräger?“

P133: „Nein. Bei der Hälfte im 90°-Winkel runter zeichnen und dann haben wir genau die Hälfte. Beim ersten Mal haben wir auch hier die Linien gesetzt und dann haben wir gesehen, dass dann 3 viel näher ist.“

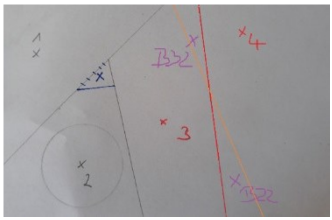
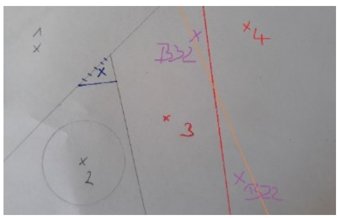


Abb. 8: Tafelbild zur Lösungsfindung durch die Lehrperson.

L: „Wir machen eine kleine Aufgabe dazu. Es geht darum, dass man eine Grenze zeichnet. Die Gerade ist gefühlsmäßig besser als die krumme Linie. Ansatz, mit dem viele einverstanden sind. Es geht um den Mittelpunkt. Spaßeshalber die Grenze zwischen den Brunnen 3 und 4, damit wirklich zu Gebiet 3 Brunnen 3 und zu Gebiet 4 Brunnen 4 der nächste ist. (Lehrperson zeichnet mit rot an Tafel). Anschließend korrigiert der Sitznachbar. Es soll jetzt möglichst genau sein. Zeichnet erst mit Bleistift.

Die Lehrperson geht umher und betrachtet das Vorgehen der Schüler (70. Minute). Folgende Anmerkungen sind zuhören: Sicher, dass das stimmt? Überprüft euch gegenseitig. Hefte tauschen und begründen.



L: „Wer meint, dass die Lösung stimmt? (keine Meldungen) Wer meint, dass die

Lösung falsch ist? (alle melden sich). Wer beweist mir, dass es falsch ist?“

Schüler: „Das ist nicht die Mitte zwischen 3 und 4.“

L: „Doch, das habe ich gemessen. Da wette ich mein Taschengeld, dass das stimmt.“

Abb. 9: Ergänzung des Tafelbilds

P115: „Das kann nicht sen. So kurz.“

P122 kommt nach vorne an die Tafel und zeichnet den Punkt 122 wie P122 ein.“

L: „Weitere Punkte?“

P132 zeichnet Punkt 32 ein: Der Punkt 32 ist näher an 3 als an 4.“

L: „Okay, die Linie ist falsch. Was könnt ihr machen?“ (Lehrperson verbessert zu gestrichelter Linie).

L: „Wer ist für richtig? (keine Meldung) Wer ist für falsch? (viele Meldungen)“

P117: „Also, wenn man 3 und 4 verbindet, dann sieht man, dass da ein 90°-Winkel sind.“

L: „Aber warum ist das falsch? Das ist eine neue Lösung, warum soll die falsch sein?“

P117: „Es gibt einen Punkt, der ist näher an 4 als an 3.“

L: „Überprüft noch einmal., ob die Linie bei euch richtig oder falsch ist. (86. Minute)

Lehrperson zeichnet bei einzelnen SchülerInnen Punkte ein: Was gilt für den Punkt? Oder den? Zufrieden? Fragt jeden Schüler und geht durch die Reihen.

L: „WIE könnte man diese Linie beschreiben? Was kennzeichnet diese Linie?

P111: „Es sind verschiedene Linien, mehrere Winkel, die zusammengebunden sind und manchmal nach rechts/links.“

P122: „Irgendein Punkt auf der Linie muss immer den gleichen Abstand zu 3 und 4 haben.“

P132: „Eine Linie durch die Mitte vom Abstand durch 3 und 4.“

P117: „Eine Linie durch die Mitte und von beiden Punkten gleich weit sein soll und einen 90°-Winkel.“

L: „Unterschied zwischen P117´s und P132´s Antwort?“

P132: „90° der Linie zur Strecke 34.

L: „Unterschied zwischen P132 und P122 Antwort?“

P133: „Wenn man aus 3 und 4 zwei parallele macht, dann ist durchgehend die Linie der Mittelpunkt.“

L: „Das ist auch eine Konstruktionsidee, ähnlich wie bei P117. Was hat P122 mehr gesagt?“

P131: „Alle Abstandspunkte müssen… Weiter habe ich vergessen.“

P121: „Alle Abstandspunkte sind. Alle Punkte müssen gleich weit weg sein von 3 und 4.“

P117: „Alle Punkte einer Geraden haben den gleichen Abstand zu 3 und 4.“

L: „So. Gut! Packen wir ein und machen da morgen weiter.“

3. Stunde, 30.05.2018, Beginn um 11:50

L: „Wir werden sortieren, auf den Punkt bringen. Was haben wir gemacht?“

Schüler: „Es ging um Schafe und Brunnen.“

Schüler: „zuerst haben wir zwischen zwei Brunnen den Abstand gemessen und die Mitte markiert. Dann zeichnet man eine gerade ein, so dass der Brunnen jeweils immer gleich weit entfernt ist.“

Mittelsenkrechte

Zwei Punkte A und B sind gegeben und es sind alle Punkte gesucht, die den gleichen Abstand zu A und auch zu B haben, dann befinden sich die gesuchten Punkte auf der Senkrechten durch die Mitte der Strecke $\overline{AB}$. Diese Gerade heißt Mittelsenkrechte zur Strecke $\overline{AB}$.

Es gilt:

Wenn ein Punkt auf der Mittelsenkrechten zur Strecke $\overline{AB}$ liegt, hat er den gleichen Abstand zu dem Punkt A und zu dem Punkt B.

Abb. 10: Folie mit den Definitionen.

L: Es ist eine Gerade gesucht. Welche Eigenschaften hat die Gerade?“

P132 wird aufgerufen und schweigt.

L: „Welche Eigenschaften haben die? Wie finde ich die Gerade? Wie kann ich sie bekommen?“

P121 wird drangenommen: „Die haben wir.“ (hört auf zu sprechen)

P115: So, dass die Punkte denselben Abstand haben."

L: „So, dass die Grenze gebildet wird."

P122: „An jeder Stelle von A und B gleich weit entfernt."

L: „Gab es eine andere Eigenschaft?"

P130: „Die Geraden treffen sich im Winkel von 90°."

L: „Mhm. Nö. Wir notieren die Definition und dann schauen wir mal, ob das, was ihr gesagt habt, da drinsteckt. Schreibt mal ab."

(ab der 7. Minute werden beide Teile der Definition aufgelegt). Ab 14. Minute geht es weiter:

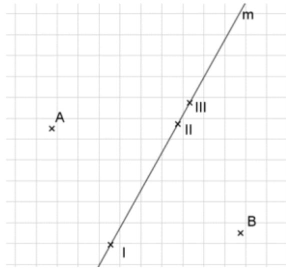


Abb. 11: Tafelbild zur Erläuterung der Definition, Teil 1.

L: „Dann versuchen wir zwei wichtige Dinge zu klären. Zwei Punkte A und B. Ich behaupte diese gerade ist die Mittelsenkrechte. Was weiß ich dann über die Punkte 1,2,3?"

P1122: „Dass er den gleichen Abstand zu A und B hat."

P117: „Dass er den gleichen Abstand zu A und B hat."

L: „In welchem Teil der Definition steht dieser Gedanke? Wer ist für Teil 1 der Definition? Wer ist für Teil 2 der Definition? (Alle melden sich für den zweiten Teil) Sehr gut. Super. Was müsste ich machen, um den ersten Teil der Definition zu erklären?"

P119: „Die Mittelsenkrechte einzeichnen."

L: „Nein. (keine weiteren Meldungen mehr; kurzes Abwarten). Ich suche Punkte aus. Und dieser Punkt hat zu A und B den gleichen Abstand. Das messe ich. Wie viele Punkte mit der Eigenschaft gibt es?"

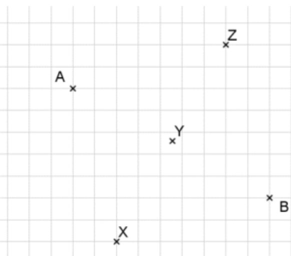


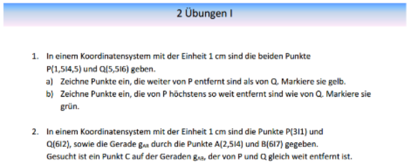
Abb. 12: Erläuterung der Definition, Teil 2.

P131: „Wie viele? Unendlich viele.“

L: „Was weiß ich über diese Punkte?“

P119: „Die sind eine Gerade.“

L: „Genau. Diese Punkte bilden eine Gerade. In welchem Teil der Definition steht das?“



2 Übungen I

1. In einem Koordinatensystem mit der Einheit 1 cm sind die beiden Punkte P(1,5I4,5) und Q(5,5I6) geben.
   a) Zeichne Punkte ein, die weiter von P entfernt sind als von Q. Markiere sie gelb.
   b) Zeichne Punkte ein, die von P höchstens so weit entfernt sind wie von Q. Markiere sie grün.

2. In einem Koordinatensystem mit der Einheit 1 cm sind die Punkte P(3I1) und Q(6I2), sowie die Gerade g_{AB} durch die Punkte A(2,5I4) und B(6I7) gegeben. Gesucht ist ein Punkt C auf der Geraden g_{AB}, der von P und Q gleich weit entfernt ist.

Abb. 13: Übungsaufgaben 1 und 2

P123: „Im ersten Teil.“

P112: „Im ersten Teil.“

L: „Das ist genau das. Warum nennen wir diese gerade Mittelsenkrechte?“

P111: „Weil das genau senkrecht ist. Wenn man zwei Kreise hat, dann ist die senkrecht zu dem Durchmesser.“

P119: „Wir können A und B zeichnen und die Gerade dann senkrecht auf die Strecke zeichnen.“

P132: „So einzeichnen, dass sie in der Mitte genau 90° zur Strecke hat.“

L: Genau. Die Eigenschaft (1) und daher nennen wir sie Mittelsenkrechte. Und wenn wir wissen, ein Punkt liegt auf der Mittelsenkrechten zu A und B, dann!“

P112: „Hat er den gleichen Abstand zu A und B.“

L: „Dann Übungsaufgaben, Nummer 1 und 2.“

Ab der Minute 24 arbeiten die SchülerInnen an den Aufgaben. Nach der 40. Minute ist die Aufgabe 1 gelöst, Aufgabe 2 noch nicht. Daher erfolgt die Besprechung erst am Freitag

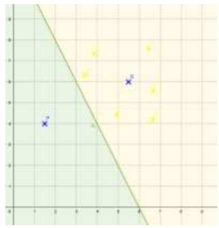
L: „Zusätzliche kleine Hausaufgabe. Das AB Hausaufgaben.“

Anmerkung der Lehrperson: „Es war einzelnen Schülern nicht klar, warum durch die Verbindung zweier Kreisschnittpunkte eine Senkrechte Gerade durch die Mitte entsteht. Das Einzeichnen einer Senkrechten durch die Mitte ist demnach von den Eigenschaften der gesuchten Punkte unabhängige Beschreibung. Darum soll es ja gerade nicht gehen.“

4. und 5. Stunde, 01.06.2018, Beginn 11:50

Zunächst Organisatorisches Elternbriefe verteilen und auf den Test hinweisen. Beginn des Unterrichts ist Minute 5. Es werden die Hausaufgaben an einer Folie am OHP verglichen. L: „Wir kommen zu den Hausaufgaben. Aufgabe 1. Worum ging es?“

1. In einem Koordinatensystem mit der Einheit 1 cm sind die beiden Punkte P(1,5 I 4,5) und Q(5,5 I 6) gegeben.
   a) Zeichne Punkte ein, die weiter von P entfernt sind als von Q. Markiere sie gelb.
   Lösung: Alle Punkte „rechts“ der Mittelsenkrechten $\overline{PQ}$ sind weiter von P entfernt als von Q.
   b) Zeichne Punkte ein, die von P höchstens so weit entfernt sind wie von Q. Markiere sie grün.
   Lösung: Alle Punkte „links“ der Mittelsenkrechten von $\overline{PQ}$ und die Punkte auf der Mittelsenkrechten von $\overline{PQ}$ liegen von P höchstens soweit entfernt wie von Q.



2. In einem Koordinatensystem mit der Einheit 1 cm sind die Punkte P(3 I 1) und Q(6 I 2), sowie die Gerade g_{AB} durch die Punkte A(2,5 I 4) und B(6,5 I 6) gegeben.
   Gesucht ist ein Punkt C auf der Geraden g_{AB}, der von P und Q gleich weit entfernt ist.
   Lösung C(3,5 I 4,5) Schnittpunkt der Mittelsenkrechten zu PQ mit der Geraden g_AB

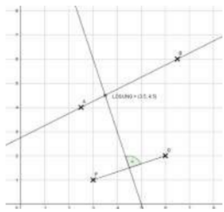


Abb. 14: Lösungen zu den Übungsaufgaben 1 und 2

P120: „Gegeben sind zwei Punkte P und Q. Welche Punkte sind weiter von P entfernt als von Q?“

Lehrperson zeichnet einen Beispielpunkt ein.

L: „Wenn ich jetzt mehrere Punkte haben möchte, was dann?“

P119: „Dann zeichnen wir die Senkrechte.“

L: „Welche Senkrechte?“

Schüler: „Die Mittelsenkrechte?“

L: „Alle Punkte sind gesucht, was mache ich?“

P132: „Die ganze Seite markieren.“
L: „Bei b) ging es um „höchstens“. Da habe ich bei einigen nur eine Gerade gesehen.“

P117: „Man muss die Gerade grün einzeichnen und die andere Hälfte auch.“

L: „Aufgabe 2, worum ging es?“

P128 wird aufgerufen: „Wir sollten ein Koordinatensystem zeichnen und dieses mal (schweigt).“

L: „P124.“

P124: „Also, wir sollten ein Koordinatensystem zeichnen und danach in (schweigt).“

P113: „Punkte P und Q sind gegeben und man soll irgendeinen Punkt auf der Geraden finden, der von P und Q die gleiche Entfernung hat.“

L: „P111 hat probiert. Was sagt ihr dazu?“

P1: „Das ist meistens nicht genau.“

L: „Häufig als Annäherung gut, dann aber in der Kontrolle ungenau. Wie kann ich den Punkt genau bestimmen?“

Schüler: „Man zeichnet die Mittelsenkrechte zu P und Q ein.“

P132: „Weil auf der Mittelsenkrechten alle Punkte liegen, die gleich weit von P und Q entfernt sind.“

L: „Genau. Wo liegt der gesuchte Punkt C?“

Schüler: „Das ist der Schnittpunkt.“

L: „Wir gucken auf die Hausaufgaben und vergleichen.“

P111: „Ich habe mein Heft nicht dabei.“

L: „Wie oft war das zuletzt? P132 hast du die Hausaufgaben dabei (P132 schüttelt den Kopf).

Kurze Pause.

L: „Wir beginnen mit dem ersten Dreieck. Seite c?“

P115: „Ich war nicht da am Mittwoch.“

L: „Bin ich ein bisschen traurig, dass das so ist.“

Hausaufgaben

3. Konstruiere mit Zirkel und Lineal das Dreieck.
   a) a = 5,7 cm; b = 4,9 cm; $\beta = 49°$
   b) b = 4 cm; c = 7 cm; $\alpha = 55°$
   c) a = 4 cm; b = 5 cm; c = 7,5 cm

Abb. 15: Hausaufgabe Konstruktion von Dreiecken mit Zirkel und Lineal

Die Zahlenwerte der konstruierten Dreiecksseiten und Winkel werden verglichen.

L: „Angenommen wir haben zwei Punkte und wollen die Mittelsenkrechte zeichnen."

P120: „Wir zeichnen eine Gerade durch A und B, messen die Mitte aus und dann eine Senkrechte durch die Mitte."

L: „Trotzdem ist es eigentlich ungenau. An welchen Stellen wird es ungenau?"

P132: „Wenn man die genaue Hälfte messen muss."

L: „Genau. Häufig hat man nicht exakte, gerade Zahlen, dann erhalte ich auch nicht exakte Zahlen. Wie kann man ohne zu messen die Mittelsenkrechte zeichnen?"

P128: „Ich nehme einen Zirkel und gehe auf A und stell den Zirkel so ein, dass es etwas mehr als die Hälfte ist und das machen wir auch bei B. Und dann sehen wir, dass sich die zwei Punkte schneiden und die muss man dann verbinden."

L: „Meinungen? (kurze Pause – keine Meldungen). Woher soll ich wissen wie viel über die Hälfte?"

P128: „Ich habe das ganze bei der Nachhilfe gelernt. Das weiß ich nicht."

L: „Ist es denn egal, ob der Kreis so groß oder so groß ist?" (zeigt an der Tafel zwei verschieden große Kreise). „Was muss nur gelten?"

P132: „Ja, dann treffen die sich nur woanders. Oben oder so."

L: „Was muss nur gelten?"

P128: „Man muss den Radius gleich lang machen."

L: „Was müssten wir jetzt eigentlich noch machen?"

Schüler: „Die Strecke zur Geraden verbinden." (gemeint ist die Mittelsenkrechte, bisher Strecke zwischen den beiden Kreisschnittpunkten).

L: „Richtig. Was ist eine Gerade?"

Schüler: „Die hat keinen Anfangs- und Endpunkt."

L: „Vielleicht hat deine Nachhilfe dich veräppelt. Warum ist das die Mittelsenkrechte? Killerargumente?"

P117: „Man kann weitere Kreise nehmen und sich schneiden lassen."

L: „Ja, aber WARUM ist das die Mittelsenkrechte? Ich kann auch“ (zeichnet zwei unterschiedlich große Kreise an, verbindet die Schnittpunkte und man sieht, dass dort kein rechter Winkel vorliegt.)

P128: „Ausprobieren, ob jeder Punkt den gleichen Abstand zu A und B hat.“

P124: „Das muss ja eigentlich immer die Mitte sein, weil ja der Radius gleich ist, dann muss das ja die Mitte sein.“

L: „Vielleicht habe ich mich vermessen.“

P128: „Wir können gucken, ob die Gerade senkrecht zur Strecke AB ist.“

P117: „Weil alle Punkte auf der Mittelsenkrechten gleich weit entfernt sind.“

L: „Naja…. Was wissen wir über diesen Punkt?“ (markiert den Schnittpunkt zweier Kreise an der Tafel).

P132: „Das ist der Schnittpunkt von zwei Kreisen.“

L: „Was noch?“

P128: „Der ist auf der Geraden m.“

L: „Ja, weil wir die einzeichnen als Gerade durch beide Schnittpunkte. (wartet noch kurz ab). Der Punkt hat von A und B den gleichen Abstand. Ja, warum ist das so?“

P128: „Wir haben den Zirkel nicht verstellt.“

L: „Weil wir gleich große Kreise gewählt haben! Deshalb hat er den gleichen Abstand. Wir wissen auch etwas über diesen Punkt.“ (deutet auf den anderen Schnittpunkt der beiden Kreise).

P122: „Der hat den gleichen Abstand zu A und B.“

P114: „Weil er auf der Mittelsenkrechten verläuft.“

L: „Nein, die Logik ist anders herum, weil wir wissen, dass die Punkte gleich weit entfernt sind, ist das die Mittelsenkrechte.“

P114: „Weil die Kreise gleich groß sind.“

L: „Warum wissen wir deshalb, dass dies die Mittelsenkrechte ist?“

Schüler: „Weil sie zu A und B den gleichen Abstand haben.“

Schüler: „Geht senkrecht durch die Mitte.“

L: „Ja, was noch.“

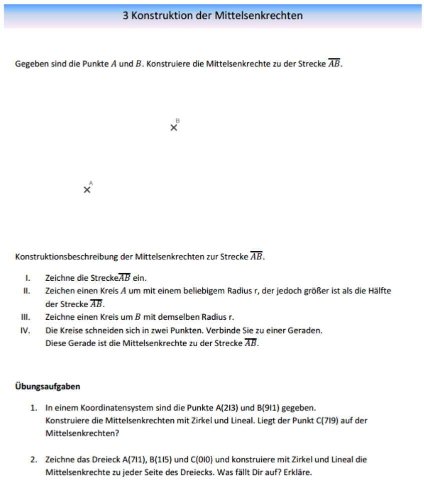
P130: „Das ist die Gerade, die durch die Mitte von zwei Punkten geht.“

P132: „Eine Mittelsenkrechte gibt eine Gerade an, auf der alle Punkte sind, die gleich den gleichen Abstand zu A und B haben.“

L: „Gut. Jeder konstruiert für sich eine Mittelsenkrechte.“

Das AB „3_ Konstruktion der Mittelsenkrechten“ wird ausgeteilt. Es ist 12:21. Die Arbeitsphase wird um 12.40 unterbrochen.

L: „Wer ist fertig mit dem Dreieck? Dann der 2.Teil: Was fällt dir auf.“


3 Konstruktion der Mittelsenkrechten

Gegeben sind die Punkte A und B. Konstruiere die Mittelsenkrechte zu der Strecke $\overline{AB}$.

Konstruktionsbeschreibung der Mittelsenkrechten zur Strecke $\overline{AB}$.

I. Zeichne die Strecke$\overline{AB}$ ein.
II. Zeichen einen Kreis A um mit einem beliebigem Radius r, der jedoch größer ist als die Hälfte der Strecke $\overline{AB}$.
III. Zeichne einen Kreis um B mit demselben Radius r.
IV. Die Kreise schneiden sich in zwei Punkten. Verbinde Sie zu einer Geraden. Diese Gerade ist die Mittelsenkrechte zu der Strecke $\overline{AB}$.

Übungsaufgaben

1. In einem Koordinatensystem sind die Punkte A(2I3) und B(9I1) gegeben. Konstruiere die Mittelsenkrechten mit Zirkel und Lineal. Liegt der Punkt C(7I9) auf der Mittelsenkrechten?

2. Zeichne das Dreieck A(7I1), B(1I5) und C(0I0) und konstruiere mit Zirkel und Lineal die Mittelsenkrechte zu jeder Seite des Dreiecks. Was fällt Dir auf? Erkläre.

Abb. 16: Konstruktionsbeschreibung und erste Übungsaufgaben.

Die Arbeitsphase verläuft ab jetzt ruhiger, bis 12.45, dann erfolgt 5-Minuten Pause.

Um 12:51 beginnt der Unterricht:

L: „Aufgabe 1 – was hast du raus, P112?“. P112 schweigt

P131: „C liegt nicht auf der Mittelsenkrechten.“

L: „Im Idealfall habt ihr das notiert. Aufgabe 2- was fällt auf?“

Schüler: „Alle Mittelsenkrechten treffen sich an einem Punkt.“

P113: „Die treffen sich auch auf der Strecke AB. Also nicht alle.“

L: „Ist das so? Eine! Treffen sich die Mittelsenkrechten in einem Punkt, dann habt ihr genau gezeichnet. Die müssen sich treffen.“

P134: „Wenn man einen Kreis um den Schnittpunkt einzeichnet, dann verläuft der durch alle drei Punkte.“

L: „Wenn ich drei Punkte habe, kann ich IMMER einen Kreis zeichnen, der durch alle drei Punkte verläuft. Zeichnet den Kreis ein. Wer zugehört hat, hat es leicht. Sonst hat man es schwer.

Lehrperson ergänzt den Kreis am Tafelbild. Es ist 12:55.

L (geht durch die Reihen): „Wer hat es geschafft? P126, super: P125 spitze. P111 Genauigkeitsparameter beachten. Dreiecke fehlen. Warum seid ihr so langsam? P128 hat es geklappt? Ja. Frage: Ist das denn Zufall? Wer meint, dass es Zufall war? (keine Meldungen) Wer meint, dass es kein Zufall war?“ (einige Meldungen).

P114: „Man kann das ausrechnen.“

L: „Naja, aber warum?“

P117: „Das ist immer die Mitte des Dreiecks.“

L: „Ist das so? Das lassen wir mal so stehen.“

P132: „Die Mittelsenkrechten treffen sich ja immer so und wenn man dann rein sticht geht das auch.“

L: „Dass die Mittelsenkrechten sich treffen, ist das Zufall?“

P117: „Die treffen sich. Es ist ja ein Dreieck und der Schnittpunkt ist ja genau gleich weit weg von den Punkten. Also der Schnittpunkt ist gleich weit weg von A, B, C, dadurch, dass sich hier ja die Mittelsenkrechten schneiden.“

B: „Das geht nicht immer. Wenn man C verschiebt; so nach unten, dann geht das nicht.“

L: zeichnet an die Tafel ein anderes Dreieck, bei C einen stumpfen Winkel. „Dann wird das spannender. Die Frage ist: Wo ist der Mittelpunkt dieses Umkreises? Und dann sehen wir gleich, dass es doch Zufall war.“

Es ist 13:03. Schüler überprüfen am stumpfwinkligen Dreieck bis 13:10:

L: „So. Stifte weg, guckt nach vorne. Wer hat einen Umkreis? Gibt es Dreiecke, bei denen klappt es, oder nicht? (*5 Meldungen*) Bei denen es nicht klappt, die haben nicht sauber gezeichnet. Wer meint, dass es immer klappt?“ *(1 Meldung von P132).*

P128: „Bei mir hat es nicht geklappt.“

L: „Schaut an die Tafel. Was ist denn hier anders? Vergleicht mal mit dem Bild vorher.“

P111: „Ein stumpfer Winkel.“

L: „Das habe ich vorgegeben. Was noch?“

P1: „Der Schnittpunkt liegt nicht im Dreieck.“

L: „Was heißt das? Gibt es einen Umkreis?“

P1: „Nein. Nur zwei Punkte liegen drauf.“

L: „Ich probiere mal zu zeichnen:“ (Es geht offensichtlich). Kurze Pause.

L: „Wir notieren drei Sätze. Diktat: Zu jedem Dreieck findet man einen Kreis, der durch alle Eckpunkte verläuft. Dieser Kreis wird Umkreis genannt. Der Schnittpunkt. Wie geht es weiter?“

P114: „Der Schnittpunkt muss im Dreieck sein.“

L: „Was ist das spannende gewesen?“

P1: „Der Schnittpunkt ist da, wo sich die Mittelsenkrechten schneiden.“

P111: „Der Schnittpunkt aller Mittelsenkrechten ist der Mittelpunkt des Umkreises.“

L: „So wollte ich das sagen, genau.“

L: „Diktat: Der Schnittpunkt aller Mittelsenkrechten ist der Mittelpunkt des Umkreises. – warum muss der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Mittelpunkt des Umkreises sein? Warum geben genau die Mittelsenkrechten den Mittelpunkt an? P133.“

P133: schweigt. Lehrer fordert weitere Schüler auf:

P122: schweigt.

P114: schweigt.

P117: „Weil das von allen gleich weit weg ist.“

L: „Jetzt erklärst du es mit den Mittelpunkten. Warum muss das so sein? Diese Mittelsenkrechte markiere ich gelb. Was wissen wir über die gelben Punkte?“

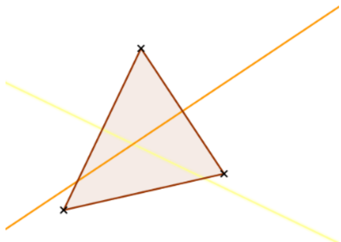


Abb. 17: Tafelanschrieb zur Erläuterung.

P112: „Die haben den gleichen Abstand von B und C.“

L: „Was wissen wir über die orangenen Punkte?“

P113: „Sind alle gleich weit weg von A und B entfernt.“

L: „Finde einen Punkt, der von A und B und C gleich weit entfernt ist!“

P117: „Da, wo sich gelb und orange trifft.“

L: „Genau, denn dieser Punkt ist gelb und ist gleich weit von B und C entfernt und er ist orange und ist gleich weit von A und B entfernt. Deshalb ist ein Schnittpunkt der Mittelsenkrechten immer der Mittelpunkt des Umkreises.“

Es ist 13:23; Ende der Stunde.

6. Stunde und Test 2, 05.06.2018, Beginn (5 Minuten später) also 11:55 Uhr.

L: „Heute sind die letzten beiden Stunden zur Mittelsenkrechten. In der ersten Stunde bearbeiten wird die Aufgaben1 und 2. In der zweiten Stunde ist dann der Test, der fließt in die SOMI-Note ein. Da wollen wir wissen, was ist von der Mittelsenkrechten hängen geblieben. Die Einverständniserklärung könnt ihr an die Seite legen, wird gleich eingesammelt. Bitte korrigiert den Punkt D auf dem Arbeitsblatt zu D(12/4).

Arbeitsblätter werden ausgeteilt. 11:54

Schülerinnen und Schüler beginnen langsam zu arbeiten Es wird direkt mit den Übungsaufgaben begonnen. Die Schüler abreiten mit dem Sitznachbarn oder allein.

Stille, konzentriertes Arbeiten, total leise, nur Geflüster.

Es wird kurz lauter und ebbt wieder ab. 12:19

L: „In 2-3 Minuten vergleichen wir.“ 12:21

Um 12: 22 werden die Ergebnisse kurz und knapp auf der Folie vergleichen. (siehe Folie)

L: „Zur Orientierung dient die Folie. So. Wir möchten pünktlich in die Pause. Vorab ohne Folie, a)?“ (OHP wird ausgestellt).

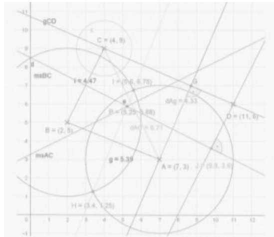


Abb. 18: Lösungsfolie zur Aufgabe "Kreuz und Quer".

P1: „4,6cm."

P131: „3,5cm"

L: „Der Abstand muss senkrecht zur Geraden stehen. B)? die schwierigste Aufgabe überhaupt."

P112: „6,6cm."

L: „c), was muss man machen?"

P121: „Zirkel auf 1,5 cm stellen und Kreis zeichnen."

L: „d). Jetzt wird es spannender."

P111: „Die Senkrechte durch die Mitte."

L: „Die Mittelsenkrechte genau. e)?"

P117: „Man zeichnet alle Mittelsenkrechten an alle drei Punkten, da wo die sich kreuzen, sind die dann gleich weit weg. Man kann auch einen Kreis einzeichnen."

L: „Muss ich alle Mittelsenkrechten einzeichnen?"

P130: „Nein, eine habe ich schon aus der vorherigen Aufgabe gehabt."

P111: „Wenn A und B sich treffen, dann trifft sich der dritte auch da."

L: „Warum sind drei trotzdem günstig?"

P1: „Für die Genauigkeit und als Kontrolle:"

L: „Koordinaten?" keine Meldungen.

P113: „Das ist doch da, auch dann an D dran. Bei g."

L: „Ne, wir sind jetzt bei f).

P130: „Man zeichnet die Mittelsenkrechte von C nach A und noch mal ein Strich und dann habe ich den Punkt."

P113: „Man kann das so machen:"

L: „Gib einen Punkt an, der von A und C gleich weit entfernt ist. Was P130 sagt, ist nicht falsch. Zeichne einen Punkt ein."

P113: „Die Mittelsenkrechte von B und C.“

L: „Nein, die Mittelsenkrechte von B, C, ja (zeigt auf Folie) aber dann nach D! Die Mittelsenkrechte von B und D.“. Nein der Punkt liegt doch gleich weit weg von D.“

Pause – keine Meldung.

Zu Teilaufgabe: Mittelsenkrechte zu B und C einzeichnen und dann den Kreis und dann oberhalb schraffieren.

L: „Der Abstand zu D ist gesucht. Der Punkt, der am nächsten zu D ist auf der Mittelsenkrechten, das war ja klar und dann die Senkrechte. Die Mittelsenkrechte von B und D wäre hier viel weiter weg. Schnittpunkt vom Umkreis auch. Wir machen weiter mit h). 4cm von A und 4 cm von B. Es gibt zwei Möglichkeiten. Standard und für Faule.“ (2 Meldungen.)

P120: „Die Mittelsenkrechte.“

L: „Die sieht man hier ganz schwer (zeigt auf Folie), eigentlich gar nicht. Wie viele Punkte sind von A und B 4 cm entfernt?

P122:„Zwei.“
L: „Und wie finde ich die?“

P122: „Den Zirkel auf einen Radius r=4cm einzeichnen und dann die Mittelsenkrechte einzeichnen.“

L: „Das ist für Faule. Andere ziehen zwei Kreise um A und um B. (L liest vor): Kreis um A und Schnittpunkt mit Mittelsenkrechter zu AB ergibt gesuchten Punkte (Es gibt zwei) H(3,4/1,25) und I(5,6/6,75). Wer soweit gekommen ist, ist richtig gut. Wir machen 5 Minuten Pause.“

Pause von 12:33 bis 12:38.

L: „Ich bin Fan von schwierigen Aufgaben, daher wundert euch nicht. Ihr habt ab jetzt 40 Minuten Zeit für den Test.“

Abgabe nach 26 Minuten von P113. Nach 30 Minuten sind viele zufrieden und gehen noch einmal durch: P126, P132, P124.

Nach 40 Minuten werden alle Tests eingesammelt.

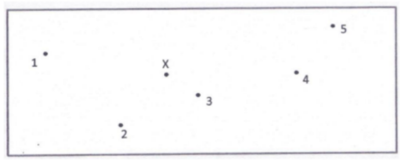
16.6.2 Dokumentation der Klasse P_2

1. und 2. Stunde, 29.05.2018

Beginn pünktlich um 8:00 Uhr

Lehrperson informiert über organisatorisches: Bewertung der Mappen: Vollständigkeit, Qualität, Ordnung/Sauberkeit. (Info: Schüler führen Regelheft, dort werden Definitionen, Sätze und Regeln notiert.)

Die Karte zeigt ein Stück Land. Es gibt fünf Brunnen in diesem Gebiet. Stelle dir vor, du stehst bei X mit einer Herde von Schafen, die Durst haben. Zu welchem Brunnen gehst du?



Die Wahl war natürlich nicht schwierig, du gehst zum nächst gelegenen Brunnen. Entwickle nun eine Einteilung des Landes in fünf Gebiete, so dass zu jedem Ort in einem Gebiet der Brunnen in diesem Gebiet der nächstgelegene ist.

Ab 08.Minute: Folie mit der Problemstellung wird aufgelegt.

Lehrperson: „Lasst es auf euch wirken.“ – abwarten – eine Meldung (P233).

P233: „Zu Brunnen 3, weil der am nächsten ist.“

L: „Wie kann man das überprüfen?“

P233: „Durch Messen mit dem Geodreieck.“

L: „Genau. Darunter steht ein schwierigeres Problem.“

Das Arbeitsblatt „0_Problemstellung“ wird an die SchülerInnen verteilt. Die Aufgabenstellung wird gemeinsam gelesen.

L: „Gibt es Fragen zur Problemstellung?“ *-keine Meldungen-*

L: „Zunächst soll jeder die Aufgabe für sich lösen. Ihr habt 10 Minuten Zeit für diese Einzelarbeit. Danach könnt ihr euch austauschen.“

P234: „Sollen wir das beim ersten auch eintragen?“

L: „Da kannst du das auch eintragen und dann unten ergänzen.“

P233: „Sollen wir das beim zweiten in Kästchen aufteilen?“

L: „Da gebe ich euch keine Hinweise. Ihr seid kreativ genug.“

Ab 13. Minute beginnt die Einzelarbeit. Die Schülerinnen und Schüler arbeiten sehr still. Die Lehrperson entscheidet die Einzelarbeitsphase zu verlängern, da die Schülerinnen und Schüler konzentriert arbeiten. Ab 30. Minute: Gemurmel hier und da. Lehrperson eröffnet den Austausch mit dem Sitznachbarn. Ab 44. Minute verteilt die Lehrperson die Folien an die Schülerinnen und Schüler, damit diese ihre Lösungen aufzeichnen können. Ab 50 Minute *hier wird die 5-Minuten-Pause begonnen. Ab der 57. Minute beginnt das Unterrichtsgespräch:*

L: „Ich muss euch ein großes Lob aussprechen. Es ist sehr schön zu sehen, wie viele Lösungen ihr gefunden habt. Gerade kam die Frage auf, ob die Lösung richtig oder falsch ist. Das kann man noch gar nicht sagen. Wichtig ist, wie ihr die Grenzen findet, die gesucht sind."

P233: „In schwarz habe ich 2-cm-Quadrate gezeichnet, danach habe ich von jedem Quadrat geguckt, welches am nächsten dran ist.

Abb. 20: Folie von P233

L: „Wie hast du verfeinert?"

P233: „Ich habe in jedem Kästchen geguckt, wie ich das gemacht habe."

Zweiter Schüler P223 stellt seine Lösung vor:

L: „Erklär das doch mal mithilfe des Geodreiecks."

P223: „Ich habe so ähnliche erste Schritte. Ich habe einfach eine Strecke da und da ausgetestet *(zeigt auf die Strecke zwischen Punkt 1 und 2)*. Dann den Abstand zu Punkt 1, das sind 3,2cm und zu Punkt 2, das sind 3,3cm."

Abb. 21: Folie von P223

L: „Dann hast du ausgebessert. Und unten rechts?"

P223: „Wenn man hier anlegt, dann ist das hier wieder 5cm und 6cm und dann muss man das noch weiter ausbessern *(zeigt auf eine Stelle, an der die Gerade noch nicht den gleichen Abstand zu zwei Punkten hat).*"

L: „Wie bist du darauf gekommen auszubessern?"

P223: „Erst habe ich gerade Linien gezogen und dann nachgebessert, weil durch Messen das gar nicht richtig sein kann."

Dritte Schülerin stellt vor (P231):

P231: „Ich habe zunächst die Punkte verbunden. Punkt 3 und 4 zum Beispiel. Dann habe ich genau die Mitte bestimmt. Die Gerade habe ich mir vorgestellt wie eine Symmetrieachse im Rechteck. Wenn die Punkte den gleichen Abstand zur Achse haben, dann ist es auch egal, wie die liegen.“

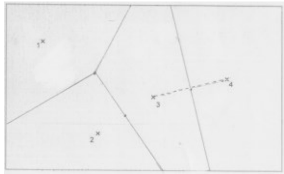


Abb. 22: Folie von P231

L: „Da erkennt man eine Ähnlichkeit zu der Lösung von P223. Leg doch die Folien einmal übereinander.“

P223 fragt erneut nach einer Musterlösung.

Vierte Schülerlösung wird vorgestellt (P217):

P217: „Als erstes habe ich den Abstand von Punkt 3 zu Punkt 4 gemessen. Das ist 4,3 cm. Damit erhalte ich eine grobe Zone, wo es safe ist. Dazwischen ist eine Lücke, weil ich glaube es ist falsch, wenn die beiden Kreise sich treffen, dann wäre der Abstand gleich und man könnte zu beiden Punkten gehen und das kann ja nicht sein. Es soll ja eindeutig sein. 1mm Abstand zu dem Kreis um 2 und 3. Es gibt keine Grenze, die beide trennt.“

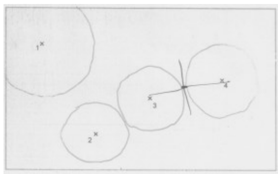


Abb. 23: Folie von P217

L: „Die Kreise dürfen sich nicht berühren. Erklärt das noch mal.“

P213: „Dann hat man einen Punkt, wo man zu den beiden Punkten gehen kann.“

P223: „Wir haben Grenzen eingezeichnet und bei Kreisen kann das gar nicht sein.“

P217: Ich wusste schon, dass das so nicht richtig sein konnte, weil so viele freie Stellen da sind. Das kann ja nicht sein.“

L: „Wie können wir hier verfeinern?“

P223: „Er hat das sehr gut gemacht. Linien an die Grenzen der Kreise, dann sieht das so aus wie bei uns.“

L: „Leg doch einmal die Folie darauf, P217.“ *– die Grenzen scheinen zu den Kreiszeichnungen zu passen-*

P2: „Oha!“ *Allgemeines erstaunen.*

L: „Hängt diese Grenzeinteilung mit den Kreisen vielleicht zusammen?“

P223: „P217 hat sich gedacht, wie weit sich die Kreise ausdehnen können, bevor sie in die anderen Gebiete hereinragen.“

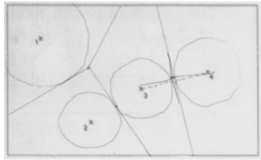


Abb. 24: Folien von P217 und P231 übereinander

L: „Es gibt viele unterschiedliche Lösungen! Es gab mehrere Schüler, die mit Kreisen gearbeitet haben. Wenn ihr das Problem noch einmal lösen solltet, wie würdet ihr vorgehen? „ *–wenige Meldungen-* „Los“! Mehr Meldungen bitte! Jetzt sind es schon zwei, das ist eine Verdopplung, drei. Jeder wird etwas dazu sagen können.“ *–es bleibt bei drei Meldungen-*

P213: „Ich würde es so machen wie P231. Aber jetzt habe ich das anders gemacht. Ich habe die Schnittpunkte der Kreise zu einer Geraden verbunden. So würde ich das auch wieder machen.“

L: „Sehr interessant. Du hast zwei Lösungsvorschläge genannt. Zeichne das doch noch einmal auf einer Folie auf.“

P216: „Die Lösung von P223 und P231. Da bin ich selber nicht draufgekommen, aber das ist gut.“ Mittelpunkte zwischen den Punkten 1 und 2 und dann versuchen die Linie so zu zeichnen, dass das dann passt.“

P223: „Ich würde den von P217 nehmen. Das ist genauer. Nicht nur eine Skizze.“

P231: „Die Lösung von P233 ist zeitaufwendig, auch wenn man damit eine Einteilung erhält.“

P234: „Ich habe auch erst den Mittelpunkt genommen und dann versucht zu verfeinern.“

P217: „Ist das, was ich gesagt habe richtig? Der Abstand ist gleich, wenn die Kreise sich berühren. Ist das richtig, dass das nicht geht?“

L: „Denk mal an eine Landkarte. Dort sind auch Grenzen eingezeichnet. Die Grenze ist die Mitte. Auf der Grenze kann man es sich dann aussuchen, wohin man geht.“

P223: „Aber da steht ja, dass man die Brunnen in den Gebieten nehmen soll [überlegt] und dafür braucht man Grenzen.“

P213 hat die Folie fertiggestellt.

P213: „Ich habe einen Halbkreis um den Punkt 3 gezeichnet und einen um den Punkt 4. Und die Schnittpunkte habe ich dann verbunden. Genauso habe ich es bei den anderen Punkten gemacht.“

Lehrperson legt die Folie mit den Kreisen von P217 auf die Folie von P213.

P217: „Wie bist du oben links, auf diese schiefe Gerade gekommen?“

P213: „Das weiß ich nicht mehr.“

L: „Könnt ihr das anhand der Kreise erkennen? Was meint ihr?“

P223: „Wenn man die einfach so durchgezogen hätte, dann wäre der Brunnen in Gebiet 3 näher dran, deshalb muss man da so verschieben.“

L: „Wie geht das mit den Kreisen und den Schnittpunkten? Kreise um welche Punkte?“

P234: „Sie hat das weitergezogen. Da, wo sich das schneidet, da links, hat sie den Kreis 1 und 2 und dann ist der Kreis außerhalb dieses Bildes hier.“

P213: „Ich habe gemessen: Oben an dem Rand und dann habe die Schnittpunkte verbunden.“

P223: „Ich habe eine Frage: Oben rechts, der kleine Strich, ist der richtig oder falsch?“

L: „Wir legen noch einmal die Lösungen von P231 und P223 oben drauf. Dann haben wir drei Lösungen übereinander. [wartet ab]. So ganz können wir das noch nicht sagen.“

Wir haben viele verschiedene Lösungen. Wir gehen das ganze mal mathematisch an. Hier waren es Brunnen und Gebiete. Was wäre Brunnen 1 und 2 mathematisch gesehen? Die Grenze ist gesucht. Was ist das mathematisch gesehen?“ – *1 Meldung*- „Leute, was ist los?“ *(wartet weiter ab).*

P230: „Ein Punkt. Wir wollten die Mitte zwischen den Punkten finden und abgrenzen. Also, dass keiner länger ist als der andere. Dass die schon abgegrenzt waren und keiner den auch übertrifft, in dem der näher an der Abgrenzung ist.“

L: “Welche Eigenschaften habe die Punkte?“

P230: „Das sind die Mittelpunkte zwischen zwei Punkten.“

L: „Nicht nur das!“

P213: „Die kürzeste Strecke von einem zum anderen.“

P222: „Wir haben Symmetrieachsen gesucht.“

P223: „Dass die Punkte, wenn man sie misst, nicht den Abstand von den anderen übertreffen.“

L: „Ja, oder noch einfacher: Punkte, die gleich weit von den beiden gegebenen Punkten entfernt sind.“

P223: „Der Mittelpunkt ist eigentlich nicht falsch. Wenn man den Mittelpunkt nimmt, dann ist das auch richtig.

L (mit Blick auf die Uhr): „Was habt ihr heute gelernt?“

P230: „Abgrenzungen zwischen zwei gegebenen Punkten zu finden, in dem man den Abstand bestimmt. In dem man misst, wo die beiden gegebenen Punkte, sich schneiden würden.“

L: „Morgen führen wir die mathematische Betrachtung weiter fort. Es gibt einen Abschlusstest nach dieser kurzen Reihe am Dienstag, dem 05. Juni.“

Ende der Stunde um 09:33.

Gar keine Wortmeldungen von: P211, P212, P214, P215, P218, P219, P220, P221, P224, P225, P226, P227, P228, P229, (P232 hat gefehlt).

Anmerkung des Lehrers nach dem Unterricht: „Die Schüler sind sehr ruhig. Es gibt nur wenige Meldungen. Eigentlich habe ich schon das Gefühl, dass die das verstanden haben.

Notizen zu den Schülerlösungen der Brunnenaufgabe:

P218 verwendet Kreise, weil die helfen.

P217 zeichnet MS

P211 zeichnet MS.

3. und 4. Stunde, 30.05.2018

Beginn pünktlich um 09:55

L: „Wie geht es heute weiter?“ (Es wird gewürfelt, welcher Schüler an die Reihe kommt).

P213: „Wir wollten herausfinden, in welchem Gebiet wir zu welchem Brunnen gehen sollten.“

L: „Genau. Das ganze aus mathematischer Sicht. Was haben wir gesucht? Im Anwendungskontext waren das Grenzlinien."

P216: „Wir haben zwischen zwei Punkten die Mitte gesucht und dann eine Gerade gezeichnet, dass egal wo man steht, der Punkt gleich weit entfernt ist."

L: „Mathematisch haben wir Punkte gesucht, die gleich weit von zwei Punkten entfernt sind. Dafür lernen wir jetzt einen Fachbegriff kennen."

Lehrperson legt Folie mit Merksatz auf.

P231 liest vor. Anschließend notieren die Schüler die Erklärung in ihrem Regelheft.

L: „Dann unterstreicht ihr „Mittelsenkrechte" farbig. Dann hat man die optimale Lösung. Einige Lösungen sind genauso vorgegangen."

Folie von P231 und P213 werden aufgelegt.

P220: „Ich habe mit einem Zirkel Kreise gezeichnet und so habe ich die Schnittpunkte erhalten. Die habe ich verbunden."

L: „Warum kommt man zur selben Lösung? Was bedeuten die Schnittpunkte?"

P222: „Weil die dann gleich weit weg sind."

L: „Wie viele Punkte benötigt man, um gleich weit entfernte Punkte zu finden?"

Schüler: „Zwei Punkte."

L: *(legt weiteren Folienanschrieb auf und liest vor)* Es gilt: Wenn ein Punkt auf der Mittelsenkrechten liegt, dann gilt….."

P217: „Dann sind die Punkte gleich weit von A und B entfernt."

L: „Ist jedem klar, wie man die Mittelsenkrechte einzeichnet? Fragen? Was ist beim Koordinatensystem zeichnen zu beachten?

P216: „X- und y-Koordinaten beschriften."

P2: „Pfeilspitzen, dass Koordinatensystem geht immer weiter."

P234: „Angespitzter Bleistift."

L: „Wenn ihr fertig seid, vergleicht mit eurem Sitznachbarn. Achtet auf den Unterschied Gerade und Strecke."

Das Arbeitsblatt „2-Übung“ wird verteilt. 38 Minuten sind bis hierhin vergangenen. Ab der 43. Minuten werde die Lösungen verglichen:

P231: „Ich habe die Mittelsenkrechte gezogen. Auf der einen Seite konnten die grünen Punkte gesetzt werden, auf der der anderen dir gelben. Höchstens so weit entfernt können auch auf der Mittelsenkrechten sein.“

L: „Das ist eine ungewöhnliche Darstellung der Punkte.“

P229: „Eigentlich sind das Kreuze.“

L: „Habt ihr noch Fragen? Haben das alle mithilfe der Mittelsenkrechten gelöst?“

P233: „Am Anfang habe ich erst um Q viele Punkt herum gezeichnet.“

L: „Was haben die Schüler nicht ganz richtiggemacht?“

P227: „Ich habe den 90°-Winkel vergessen.“

L: „Das ist richtig. Wichtig, sonst wird es ungenau.“

Es wird eine neue Folie zur Aufgabe 2 aufgelegt. Die Lehrperson beschriftet die Achsen.

P213 erklärt ihr Vorgehen kurz.

L: „Welche Koordinaten hat C?“

P213: „(3,5/4,5).

L: „Klitze Kleinigkeit ist nicht richtig. Tausch dich mal mit P227 aus, bei ihr war es richtig.“

P228: „Es ist eine Gerade, keine Strecke. Also muss das länger gezeichnet werden.“

Nach 48 Minuten wird 5Minuten Pause gemacht.

L: „Einen Aspekt habe ich gerade zu wenig gewürdigt. Zeichnet den rechten Winkel ein. In Zukunft zeichnet ihr den immer ein. *(Lehrperson verlängert die Strecke, damit der rechte Winkel eingezeichnet werden kann).* Wer das noch nicht hat, ergänzt das jetzt.“

L: „Wir kommen zu einer geometrischen Erklärung. (Die Folie von P220 wird aufgelegt.) Die Idee mit den Kreisen ist super. Wir betrachten mal zwei Punkte; keine Brunnen mehr. Wie würde man die Mittelsenkrechte konstruieren? Verbinde A und B. Nimm einen Zirkel zur Hilfe. Setze am Punkt A an mit einem Radius, der länger sein muss als die Hälfte der Strecke AB. So zum

Beispiel (Lehrperson konstruiert an Tafel.). Ich ziehe einen Halbkreis. Den selben Radius behalte ich bei, ändere daran nichts. Setzte am Punkt B als Mittelpunkt an und bestimme zwei Kreisschnittpunkte. Was gilt für die Kreisschnittpunkte?“

P230: „Auf der Mitte. Wenn ich die beiden Punkte verbinde, dann liegt das in der Mitte. Die Punkte liegen dann auf der Mittelsenkrechten.“

L: „So kann man exakt die Mittelsenkrechten konstruieren. Formuliert in eigenen Worten. (2 Meldungen). Traut Euch“ (5 Meldungen).“

P234: „Den Zirkel auf A legen, den Radius länger als die Hälfte. Einen Kreis ziehen, dann genau die gleiche Länge als Radius beibehalten. Die Spitze des Zirkels auf den Punkt B. Die Kreise kreuzen sich. Dann die Gerade durch die Kreuze ziehen.“

L: „Man spricht nicht von Kreuzen.“

P226: „Punkten.“

L: „Ja, genau. hier sogar Schnittpunkt. „

Ab der 61. Minute bearbeiten die Schülerinnen und Schüler die Aufgaben A1 und A2 vom AB „3_Konstruktion der Mittelsenkrechten“. Ab der 85.Minute sind schon viele Schüler fertig. Ab der 90. Minute wird am OHP anhand von Schülerfolien verglichen:

L: „Wer noch nicht fertig ist, ergänzt das bei Aufgabe 1. C liegt also nicht auf der Mittelsenkrechten. Und dann die Aufgabe 2. Was fällt euch auf?“

(9 Meldungen)

P224: „Die Mittelsenkrechten treffen sich in der Mitte bei (3,5/2).“

L: „Alle einverstanden? (wartet ab) Ist das jetzt Zufall? Ist das immer so? Was meint ihr?“

P223: „Ich glaube, dass das immer so ist. Weil jedes Mal, wenn das größer ist als die Hälfte müssen die sich schneiden.“

L: „Aber immer auch in einem Punkt?“

P223: „Wenn man mehr als die Hälfte nimmt, schneiden die sich immer, somit geht es nicht.“

P222: „Weil der Schnittpunkt der Mittelpunkt von allen drei Punkten ist.“

P217: „Die schneiden sich immer irgendwann, die sind ja unendlich lang.“

P233: „Weil die in einem Dreieck sind, vielleicht? Weil es zwei sind.

L: „Überlegt doch mal zuhause weiter, was ihr sagen könnt über die Konstruktion der Mittelsenkrechten."

Hausaufgaben werden ausgeteilt. 95 Minuten sind um.

5. Stunde, 04.06.2018

L: „Was wisst ihr über die Mittelsenkrechte? Wie wird die Mittelsenkrechte konstruiert?"

Kurze Murmelphase.

P231: „Wenn man eine Gerade hat, dann setzt man auf einem Punkt den Zirkel an und nimmt etwas mehr als die Hälfte der Strecke als Radius. Ebenso auf der anderen Seite. Die Schnittpunkte werden verbunden und man hat die Mittelsenkrechte."

Lehrperson zeichnet an spitzwinkligem Dreieck an Tafel Mittelsenkrechten ein.

L: „Ja. Das war sprachlich ungenau."

P230: „Dass man den GLEICHEN Radius braucht."

L. „Ganz am Anfang."

P231: „Geraden"

L: „Genau, wie müsste das lauten?"

P213: „Strecken."

L: „Was gilt für die Lage dieses Schnittpunkts?

P217: „Der liegt in der Mitte zwischen den Punkten A und B."

L: „Ja, wie alle Punkte, die auf der Mittelsenkrechte liegen."

P217: „rechtwinklig."

L (Zeigt auf den Schnittpunkt dreier Mittelsenkrechten im Dreieck): „Dieser Punkt, der Schnittpunkt."

P223: „Der ist gleich weit von allen Eckpunkten entfernt."

L: „Ist das jedem klar?"

P223: „Nein, mir nicht.“

P233: „Die Mittelsenkrechten sind in der Mitte und dann geht das so zusammen (zeigt eine Bewegung mit den Händen).“

P217: „Diese Lienen (Lehrer: Mittelsenkrechten) zeigen an, wo die Grenze ist in dem Bereich. Da, wo der der Punkt abgetrennt ist. Auf jeden Fall treffen alle Grenzen in diesem Punkt zusammen. Auf der Geraden durch B und C, dann wären die Punkte von B und C von beiden entfernt.“

L: „Verwende den Begriff Mittelsenkrechte, dann können wir dir besser folgen. Auf der Geraden liegen alle Punkte, die gleich weit von B und C entfernt sind. Auf der Geraden liegen die Punkte, die gleich weit von A und von B entfernt sind. (Lehrperson zeichnet dritte Mittelsenkrechte ein). Warum geht diese Mittelsenkrechte ebenfalls durch den Schnittpunkt?“

P231: „Die ist genauso wie die Strecke AC und dann verläuft die auch durch den Schnittpunkt.“

L: „Warum verläuft die auch durch den Schnittpunkt? Welche Bedingungen erfüllt der Schnittpunkt?“

Stille, Schweigen, keine Meldungen.

L: „Der Schnittpunkt enthält rote und grüne Punkten, die gleich weit entfernt von A, B, C sind und dadurch muss auch die dritte Mittelsenkrechte durch diesen Punkt gehen. (Pause)

Gut. Wenn der Schnittpunkt gleich weit entfernt ist von allen drei Eckpunkten, dann kann ich einen Kreis zeichnen mit genau diesem Abstand. Das ist der Umkreis. (Lehrperson zeichnet den Umkreis ein). Wenn ihr genau gezeichnet habt, dann müsste der Kreis durch alle Eckpunkte verlaufen.“

Es folgt der OHP-Anschrieb: Umkreis von Dreiecken (bis 8:20)

L: „Wenn ihr fertig seid, dann geht es weiter mit den Hausaufgaben zu heute. Bei der Hausaufgabe könnt ihr ähnlich vergleichen.“

P233: „Bei c) habe ich keinen Schnittpunkt.“

L: „Musst du einfach weiterzeichnen.“

Schüler vergleichen die Hausaufgabe mit ihren Sitznachbarn und ergänzen die Kreise (bis 8:26).

Hausaufgaben

3. Konstruiere mit Zirkel und Lineal das Dreieck.
   Konstruiere anschließend die Mittelsenkrecht zu jeder Seite des Dreiecks.
   a) $a = 5{,}7$ cm; $b = 4{,}9$ cm; $\beta = 49°$
   b) $b = 4$ cm; $c = 7$ cm; $\alpha = 55°$
   c) $a = 4$ cm; $b = 5$ cm; $c = 7{,}5$ cm

4. Was ist eine Mittelsenkrechte? Erkläre mit eigenen Worten.

L: „Jetzt vergleichen wie die Maße. Aufgabe 1. Wie lautet der Schnittpunkt mit den Achsen?“

P215: „Bei 20.“

L: „X- und y-Koordinate. Ich war bei der falschen Aufgabe. Wir vergleichen die Seitenlänge c.“

P233: „6cm.“

L: „Seitenlänge von a? (6 Meldungen)

P218: „8cm.“

L: „Nein.“

P216: „5,2 cm.“

L: „Etwas wenig.“

P228: „5,7cm.“

L: „Bei der Aufgabe c) die Winkel. Alpha.“

P224: „38°“.

L: „30°?, bei mir sind es 33°. Gamma?“

P222: „114°.“

L: „112°, sagt der Computer. Haben alle die Umkreis für diese drei Dreiecke einzeichnen können?“

P223: „Bei c) habe ich das nicht hinbekommen.“

L: „Bei a) Wie verläuft der Umkreis?“

P230: „Der geht durch alle Eckpunkte.“

L: „Wo liegt der Mittelpunkt des Kreises?“

P230: „Auf allen Mittelsenkrechten.“

L: „Genau und der ist innerhalb des Dreiecks.“

P222: „Der Kreis verläuft wieder durch die Eckpunkte. Der Mittelpunkt ist außerhalb des Dreiecks.“

P220: „Am Rand. Auf der Geraden c. Auf der Strecke c.“

L: „Genau. Bei c) haben einige gesagt, Die Mittelsenkrechten schneiden sich nicht.“

P233: „Man muss die verlängern, dann schneiden die sich auch. „

L: „Macht das mal. Was lässt sich hier über den Umkreis sagen?“

P234: „Der Schnittpunkt ist außerhalb des Dreiecks.“

L: „Was gilt trotzdem für die Kreislinie? Wie verläuft der Kreis? Wir sehen der Mittelpunkt des Kreises liegt innerhalb, auf der Seite, außerhalb woran könnte das liegen?“

Schweigen.

L: „Aufgabe b) – was für ein Dreieck ist das?“ P230: „Ein rechtwinkliges Dreieck.“

L: „Bei a)?“

P230: „Ein spitzwinkliges.“

L: „Bei c)?“

Schüler: „Stumpfwinklig.“

L: „Wer kann es jetzt zusammenbringen?“

P234: „Bei einem rechtwinkligen Dreieck sind die Schnittpunkte immer innerhalb des Dreiecks.“

P220: „auf der Strecke. Hier Strecke c.“

P213: „Auf der gegenüberliegenden Seite von der Ecke mit alpha 90°.“

L: „Ja. Und beim spitzwinkligen Dreieck?“

Schüler: „Im Dreieck.“

L: „Und beim stumpfwinkligen Dreieck?“

P232: „Außerhalb des Dreiecks.“ (Es ist 08:36)

L: „Zum Ende: Was genau ist eine Mittelsenkrechte?“

P233: „Das kann man nicht erklären.“

P213: „ Ähm, doch nicht.“

P220: „Die Mittelsenkrechte ist eine Senkrechte, die durch den Mittelpunkt zweier Punkte eines n-Ecks senkrecht gezeichnet wird.“

L: Zusatz n-Eck,

P216: „Die Mittelsenkrechte ist eine Gerade, die durch die Mitte einer Strecke verläuft.“

L: „Was gilt für alle Punkte auf der Mittelsenkrechten?“

P214: „Das weiß ich nicht.“

L: Wozu haben wir die Mittelsenkrechte denn gezeichnet? Hier die Mittelsenkrechte zu A und B?“

P214: *schweigt*.

P211: „Der gleiche Abstand zu A und B.“

L: „Jetzt verstehst du gerade etwas. Alle Punkte auf der Mittelsenkrechten sind gleich weit entfernt von A und B.“

6. und 7. Stunde, 05.06.2018

L: „Wir wiederholen. Was ist die Mittelsenkrechte?“

P225: „Eine Mittelsenkrechte ist eine Strecke, die zwischen zwei Punkten durchgeht.“

L: „Zu ungenau. Formulier mal genauer.“

P216: „Eine Mittelsenkrechte ist eine senkrechte Gerade, die durch die Mitte zweier Punkte verläuft.“

P233: „Eine Mittelsenkrechte ist eine Senkrechte, die durch eine Strecke AB orthogonal durch die Mitte verläuft.“

L: „Und was wisst ihr zur Mittelsenkrechten im Dreieck?“

P225: „Die Mittelsenkrechten schneiden sich in der Mitte und der Punkt ist gleich weit entfernt von A, B und C.“

L: „Welches Dreiecke meinst du?“

P225: „Das rechtwinklige."

P2 „Spitzwinklig, rechtwinklig, stumpfwinklig."

P211: „spitzwinklige Dreiecke."

P213: „Bei rechtwinkligen Dreiecken auf der Seite gegenüber des rechten Winkels und bei stumpfwinkligen ist der Schnittpunkt außerhalb."

Es ist 08:06. Die Lehrperson verteilt das AB „5_Übungsaufgabe Abstände".

L: „Bei der Aufgabe 1 erstellt ihr EIN großes Koordinatensystem. X-Achse bis 18 und y-Achse bis 12. Aufgabe 1 in einem Koordinatensystem lösen. Ihr konstruiert hier. Die Mittelsenkrechte wird nicht mit dem Geodreieck gezeichnet, sondern mit Zirkel und Lineal."

P223: „In das Geometrieheft?"

L: nickt. „Vorne an der Tafel könnt ihr einzelne aufgaben vergleichen. In den letzten 10 Minuten besprechen wir die Lösungen, falls ihr nicht weiterkommt oder Fehler auftreten, könnt ihr mich fragen, überprüft zuerst mit der Lösung."

Beginn der Einzelarbeit 08:10. Stille.

L: „Ihr dürft ruhig miteinander sprechen, das hilft auch manchmal." (08:16)

Wenig Gemurmel- 2-3 Schülerinnen bzw. Schüler, dann wieder Stille.

L: „Vorne an der Tafel könnt ihr die Ergebnisse überprüfen. (08:22).

P227 geht zur Tafel. Stille.

Teilweise Gemurmel- 2-3 Schülerpaare sprechen über die Aufgaben (08:35).

L: „Die Aufgaben zu Ende stellen. Wir vergleichen. So. Stifte hinlegen." (08:40)

L: „Aufgabe 1. Vorgehensweise und Messwert."

P214: „Ich habe mein Geodreieck bei A angelegt und die Gerade DC und den kürzesten Weg von A zur Geraden gemessen mit 3,8cm."

L: „Kürzester Abstand. Achtet auf den rechten Winkel. 1b?"

P227: „Lineal auf A und dann abmessen. Das sind 6,7cm."

L: Bei c? Da habe ich kreative Lösungen gesehen."

P211: „Zirkel auf 1,5 und dann hat man einen Kreis. Also die Punkte auf dem Kreis.

L: „Warum ist es nicht sinnvoll ganz viele Punkte einzuzeichnen?“

P211: „Man kann nur den Kreis machen, das geht schneller.“

L: „Man kann ja nicht alle Punkte zeichnen. d?“

P225: „Die Mittelsenkrechte von A und B und dann alle Punkte, die auf ihr liegen.“

L: „Sehr schön. E?“ (9 Meldungen)

P216: „Erst einmal B und C zur Strecke verbinden, danach die Mittelsenkrechet von B und C und auch von B und A und A und C einzeichnen.“

L: „Eingezeichnet. Konstruiert!“

P216: „Die haben sich geschnitten in einem Punkt.“

L: „Welche Koordinaten hat der Schnittpunkt?“

P217: „(5,5/6).“

L: „Laut Computer (5,25/5,9). Also schon sehr genau. f? Alle Finger hoch!“ (08:44; 6 Meldungen)

P227: „Die Mittelsenkrechte hatte ich schon aus der Aufgabe vorher.“

L: „Und die Koordinaten des Punktes lauten?“

P227: „(5,6/5,9).“

L: „Man kann auch irgendeinen anderen Punkt nehmen.“

P217: „Ich habe die Mittelsenkrechte von B und C möglichst nah zu D gezogen und dann den Abstand davon gemessen.“

L: „Wie hast du den Punkt eingezeichnet?“

P217: „Wie soll man das denn machen, wenn man das Dreieck, also den Abstand im rechten Winkel gemessen hat.“

L: „Bin mir nicht sicher, ob das so richtig ist.“

P217: „(11,5/3,4).“

P233: „Die Mittelsenkrechte weiter bis D zeichnen und den kürzesten Abstand von der Mittelsenkrechte zu D bestimmen. Das ist (11/2,8).“

L: „11 naja. 2,8 ist okay. (11,4/2,8). Die kürzeste Entfernung.“

L: „h?“

P231: „Die Mittelsenkrechte von A und B und dann 4cm, also so, dass A zu einem Punkt auf der Geraden 4 cm Abstand hat und dann hab ich da zwei Punkte. Man kann einen Kreis mit r=4cm zeichnen.“

L: „Wie verlaufen dann die Schnittpunkte des Kreises mit der Mittelsenkrechte?“

P231: „(3,3/1,4) und (5,6/6,0).

L: „Das ist ziemlich genau. (3,4/1,3) und (5,4/6,8). Wer hat die nächste Aufgabe noch bearbeitet?“

(6 Meldungen)

P223: „Ich habe zu D und C die Mittelsenkrechte und die Mitte genommen und geguckt, ein Punkt, der von beiden 4 cm entfernt sein.“

L: „Wie hast du das festgestellt? 4cm entfernt sein.“

P223: „Mit dem Geodreieck.“

L: „Wie geht es noch?“

P233: „Mit dem Zirkel mit 4cm Spannweite.“

L: „Ein Radius wird von 4cm gewählt.“

P233: „Radius um A. Bei C, D und A ein Dreieck. Hier nur die Punkte von der Strecke B nehmen, aber von der rechten Seite habe ich das eingezeichnet.

08:50. 5 Minuten Pause.

08:56 Test verteilen und P228 liest vor.

L: „Der Test wird bewertet. Es gibt zum Teil knifflige Aufgaben, anders als ihr das sonst aus einem Test gewohnt seid. Lasst euch nicht erschrecken, sondern dadurch motivieren. Konstruieren heißt mit Zirkel und Lineal zeichnen. Wir überziehen, dann gibt es einmal weniger Hausaufgaben.“

Es werden exakt 40 Minuten am Test gearbeitet.

16.6.3 Dokumentation der Klasse D_1

1. und 2. Stunde, 28.05.2018

Beginn 09:55. Die Lehrperson erläutert Organisatorisches: Es wird alles in den Hefter geschrieben. Alle AB abheften. Hefter wird am Ende eingesammelt und bewertet. Die Ordnung und Sauberkeit wird auch bewertet. Die Hefter werden verteilt. Nach 6 Unterrichtsstunden findet eine schriftliche Überprüfung statt.

Die Lehrperson notiert außen an der Tafel den Begriff Abstände (10:05)

L: „Welche Abstände kennt ihr?“

Anhand der Schülermeldungen entsteht folgendes Tafelbild:

Abstand – Distanz • Abstand zwischen zwei Punkten • Abstand von Kreispunkten zum Mittelpunkt (Radius) • Abstand von parallelen Geraden • Abstand von Punkt zu Geraden

L: „Heute soll es darum gehen, dass ein Abstand zu zwei gegebenen Punkten existiert. „

Der Tafelanschrieb wird erweitert:

Heute: gleicher Abstand zu zwei gegebenen Punkten AB: a) – c)

Das Arbeitsblatt wird ausgeteilt (ab 17.Minute, dann EA).

L: „Ihr habt 5 Minuten Zeit.“

Ab 24. Minute Aufgabenteil a) in PA. Ab 29. Minute anhand einer Folie am OHP: Folie Nr. 3 wird aufgelegt (wo ist die Folie?).

L: „Was sagt ihr dazu? Alles richtig? Habt ihr die Punkte auch so eingezeichnet?“

D130: „Die Punkte liegen immer von der Hälfte von A und B. Die Punkte liegen immer zwischen den Punkten A und B.“

L: „Zeig mal vorne.“

D130: „Der Abstand von AB und F liegt auf der Mitte.“

L: “Und was ist mit G und H?“

D130: „Sind auch in der Mitte nur weiter entfernt.“

D124: „Einfach in der Diagonalen können Punkte eingetragen werden.“

D118: „Zu jedem Punkt kann man eine Parallele einzeichnen und dann sieht man, dass die immer so weiter gehen.“

D134: „Man kann einfach mit dem Geodreieck einzeichnen.“ (Sie zeichnet am OHP eine Gerade ein und verbindet die Punkte).

L: „Wie heißt das dann?“

D119: Man hat einfach im 90°-Winkel eine Gerade eingezeichnet.“

D:“ Diagonal. Orthogonal.“

L: „Was habt ihr erkannt? D129.“

D129: (schweigt)

D130: „Alle Punkte liegen auf der einen Gerade zwischen A und B.

L: „Ja! Alle Punkte, die wir gesucht haben und welche sind da?“

D123: „Alle Punkte, die gleich weit von A und B entfernt sind.“

L: „ Genau! Und wenn wir das jetzt zusammennehmen, dann haben wir etwas neues entdeckt. Die brauchen wir. Bis zum Abitur nicht aus dem Kopf verlieren.“ (Roter Pfeil auf Folie mit der Beschriftung „Mittelsenkrechte zu AB“. Das ist Regel 133 in Euerm Heft. „

Eine Definition der Mittelsenkrechten wird aufgelegt.

Die Schülerinnen und Schüler notieren die Definition in Ihrem Heft.

D117 kommt in den Unterricht (zu spät).

L: „Erklärt D117, was wir gemacht haben. Die Folie und die Regel.“

D118: „Alle Punkte, die auf der orthogonalen zu der geraden AB liegen, z.B. (zählt verschiedene Punkte auf). Das ist die Mittelsenkrechte.“

D134: „Die Punkte haben den gleichen Abstand zu A und B.“

D: Wir haben alle Abstände gemacht und dann haben gesagt, dass es noch eine Abstandsart gibt und dann haben wir die gemacht."

PAUSE (45. Minute)

Weiter ab 51. Minute:

L: „Ihr erinnert Euch, dass D134 gerade die Mittelsenkrechte mit dem Geodreieck eingezeichnet hat. Wir lernen nie eine Regel, damit sie im Heft steht. Manchmal kann man die in den Übungsaufgaben gebrauchen."

Das Arbeitsblatt wird ausgeteilt.

L: „Gebt auch eine Begründung an. Nicht vergessen!"

Folie Nr. 4 wird aufgelegt (67. Minute).

D119: „Man braucht einen Punkt, der denselben Abstand zu den beiden Orten auf der Straße hat. Dann hab ich erst einmal die Linie gezeichnet, die die beiden Orte verbindet und geguckt, wo genau die Mitte ist. Dann die Linie vom Dreieck auf die Linie drauf gelegt (legt das Geodreieck als Senkrechte durch den Mittelpunkte der Strecke). Ich gucke, wo der Punkt ist, der zur Straße führt (zeigt auf rechten oberen Punkt)."

L: „Alles klar? Hätte es eine andere Möglichkeit gegeben?"

D119 zeigt auf die andere Seite.

L: „Für welchen werden sich die Bauarbeiter entscheiden?"

D: „Den kürzeren, oder den, den man besser bauen kann."

L: „Klar. Wenn ein Berg oder irgendetwas den Weg versperrt und unter der Bedingung, dass beide Orte gleichweit entfernt sein sollen. Wer erklärt noch einmal, inwiefern das etwas mit Geometrie zu tun hat. Trotz Straße."

D131: „Die Mittelsenkrechte haben wir gelernt und hier angewendet."

L: „Und hier steht zwei gegebene Punkte haben den gleichen Abstand. Wer keine Mittelsenkrechte benutzt hat, keine Hilfslinie, der hat es noch nicht verstanden: benutzt die Regel."

Ab 73.Minute:

D124 (verbindet A-Dorf und B-Dorf): „Dann habe ich die Mitte ausgemessen. Dann habe ich eine Mittelsenkrechte eingezeichnet und rot markiert. Die, die noch am richtigen Platz stehen. Und die sind richtig, denn sie haben die gleiche Entfernung zu A und zu B."

L: „Konntet ihr das nachvollziehen? Wer hatte das selbst von Euch? Ist euch etwas aufgefallen, was wir hier ausgenutzt haben?“

D134: „Die Mittelsenkrechte.“

L: „Vergleicht mit der Aufgabe am Anfang (legt die Folie auf). Gesucht sind zwei Punkte,… die liegen dann auf der Geraden. Wie war das denn bei Aufgabe 2?“

D118: „Das ist hier im Prinzip genau dasselbe. Wir haben A und B und hier auch. Und die Mittelsenkrechte ist ja die Orthogonale und dann…“

L: „Wir haben das hier also umgekehrt. Wenn die Punkte nicht darauf liegen, dann haben sie auch nicht den gleichen Abstand.“

Die Umkehrung des Satzes wird aufgelegt. Schülerinnen und Schüler notieren dies im Regelheft (77. Minute). Aufgabe 3 wird besprochen:

D118: „Zunächst P und Q eingezeichnet, dann habe ich eine Strecke gezeichnet. PQ: Die ist 4,2 cm groß. Das ist eine 2,1. Dann habe ich die grüne Linie gezogen. Diese Linie (zeigt auf die Mittelsenkrechte).“

L: „Die hat einen Namen!“

D118: „Die Mittelsenkrechte. Und die hat denselben Abstand von P und Q und alle Punkte hier in grün sind näher an Q als an P.“

L: „Wer hat das selbst erkannt? (4 Meldungen). Wer hat es nicht verstanden und hätte gern noch eine Erklärung? D133, du hast dich nicht gemeldet. Dann erklär du doch mal.“

D133: „Zuerst zeichnet man die Strecke PQ. Dann nimmt man die Hälfte: 2,1. Und bei 2,1 macht man die Strecke. Das ist dann b) und alles auf dieser Seite sind dann a).

D125: „Aber das stimmt doch gar nicht.“

L: Bedingung ist: gleich weit entfernt.“

D112: Diese Punkte sind weiter von Q entfernt als von P.

L: „Überprüfe, ob du eine Begründung angegeben hast. Hausaufgabe ist die Aufgabe 4. Aufgabe1 und 2 a) und b): Miss die fehlenden Seiten und Winkel.

An der Tafel wird notiert: AB beenden (überprüfe, ob Begründung notiert!) kleines AB: Nr. 1und 2a, b fehlende Seiten und Winkel messen).

3. und 4. Stunde, 30.05.2018

Die Hausaufgaben werden besprochen. Die Lehrperson nimmt dran:

D134: „Die Mittelsenkrechte ist eine Mittelgerade zweier Punkte."

D122: „Die Mittelsenkrechte verläuft zu…"

D121: „"Die Mittelsenkrechte liegt exakt zwischen zwei Punkten und auf der Mittelsenkrechten liegen Punkte, die denselben Abstand von Anfangs- und Endpunkt haben. „

L: Wer kann wiederholen, wie wir Dreiecke konstruieren. WsW. Wie konstruieren wir bei WsW. Angebote der fehlenden Größen."

Unterrichtsgespräch über die Konstruktion von Dreiecken. Lehrperson legt Wert auf Formulierungen und korrigiert ggf. (19 Minuten)

L: „Ist Euch etwas aufgefallen?"

D125: „Es gibt einen Punkt, in dem sich alle Mittelsenkrechten schneiden."

L: „Bei wem ist das noch so?" (5 Schülerinnen und Schüler melden sich). Lehrperson geht durch die Reihen und schaut in die Schülerhefte.

(Viele Schülerinnen und Schüler zeichnen die Mittelsenkrechte nicht ein, das haben sie nicht gelesen. D118 zeichnet Seitenhalbierende stattdessen, einige Schülerinnen und Schüler zeichnen nur eine Mittelsenkrechte und nicht drei.)

L: „Ihr lest die Aufgabenstellung nicht genau. Ihr habt die Sachen nicht dabei. Einige zeichnen nur eine Mittelsenkrechte oder zu kurz. Bitte verlängert Eure Mittelsenkrechten. Wurden hier günstige Dreiecke ausgesucht? Oder ist das denn immer so? Was für Dreiecke sind das hier?"

D127: „Das sind spitzwinklige Dreiecke."

L: „Festgestellt haben wir: Die Mittelsenkrechten schneiden sich in spitzwinkligen Dreiecken in einem Punkt. Frage: Ist das immer so?"

Tafelanschrieb:

Beobachtung: in den spitzwinkligen Dreiecken in der HA schneiden sich die drei Mittelsenkrechten in genau einem Punkt.

Frage: Ist das Zufall? Schneiden sich die drei Mittelsenkrechten in jedem Dreieck in einem Punkt?

L: „Wie haben wir das bisher gemacht?"

D118: „Wir haben mit dem Geodreieck gemessen und einen rechten Winkel gezeichnet.“

L: „Jetzt machen wir eine Konstruktion mit dem Zirkel. Hört gut zu. Gleich erklärt ihr mir, wie es geht. Lehrperson zeichnet ein Dreieck an die Tafel]. Ich steche in einem Eckpunkt A ein, Radius größer als die Hälfte per Augenmaß, ich brauche nicht messen, dann zeichne ich mit demselben Radius um B. Was fällt auf?“

D: „Die Halbkreise schneiden sich in zwei Punkten.“

L: „Warum? (keine Meldung). Gestern: Haben wir über Abstände gesprochen, D118 hatte eine Idee. Erklär doch noch mal.“

D118: „Radius. Alle Punkte, die auf der Kreislinie liegen, haben von B denselben Abstand.“

L: „Alle Punkte, die auf der Kreislinie liegen, haben denselben Abstand von B. Die Punkte, die hier liegen, haben denselben Abstand zu A (zeigt auf Kreislinie um den Punkt A). Die Punkte, die hier liegen, haben denselben Abstand von B (zeigt auf Kreislinie um B).“

D119: „Da, wo sich die zwei Kreise schneiden, ist von der Seite c die senkrechte.“

L: „Die Mittelsenkrechte. Da, wo dieser Punkt ist?“ (zeigt auf oberen Schnittpunkt der zwei Kreissegmente)

D119: „Nein, wenn man…“

L: „Zeig doch mal vorne, was du meinst.“

D119 zeichnet Senkrechte durch oberen Schnittpunkt der beiden Kreissegmente, in dem er möglichst gut einen rechten Winkel abschätzt.

D125: „Man braucht zwei Punkte, sonst kann man die Mittelsenkrechte überall einzeichnen.“

L: „Genau. Warum ist das so?“

D132: „Ich vermute: Der Radius ist größer als die Hälfte der Strecke, dann ist der Schnittpunkt der beiden Kreise auf derselben Länge nur höher oder tiefer.“

D118 geht zur Tafel: Da treffen sich die Kreise (zeigt auf Schnittpunkte) Dort ist es orthogonal. Der Schnittpunkt hat den gleichen Abstand zu A und zu B.“

L: „Das haben wir gesagt, genau.“

D125: „Wie lang war der Radius?"

L: „Etwas mehr als die Hälfte."

D123: „Was passiert, wenn man falsch abschätzt?"

L: „Das kann man schon schaffen, was meinst du? Wer konstruiert die nächste Mittelsenkrechte? Mit dem tollen Zirkel hier. Super Chance! Los!

D131 geht zur Tafel: „Ich nehme die Seite b. Ich stell den Zirkel ein, über die Hälfte. So. Und dann um C. Und jetzt um A. (D131 hat zwei Kriese eingezeichnet und beginnt nun die Mitte zwischen den A und C auszumessen).

Zwischenruf: „Du hast doch schon die Punkte. Verbinde!"

D131 verbindet die beiden Kreisschnittpunkte und erhält somit die Mittelsenkrechte zur Seite b.

D118: „Wir wissen ja schon, dass die dritte sich auch in diesem Punkt schneidet. Also brauchen wir die dritte Mittelsenkrechte nicht zu zeichnen."

L: „Wenn es kein Zufall war. Aber das wissen wir noch nicht. Überlegt mal, warum jetzt eigentlich keine dritte Mittelsenkrechte mehr nötig ist"!"

D133: „Es wird der gleiche Kries sein, wenn wir den nicht umstellen und dann bleibt das so."

D125: „Wie D132 gesagt hat, wenn wir den Radius größer oder kleiner stellen, dann ist der Schnittpunkt höher oder tiefer."

L: „Sollen wir das mal machen?"

Zwischenrufe: „Ja!"

Lehrperson verändert den Radius und zeichnet erneut Kreise um die Dreieckseckpunkte.

L: „Ihr seht jetzt, wir haben einen anderen Halbkreis. Zeichnet die dritte Mittelsenkrechte ein."

D125 geht an die Tafel und verbindet die zwei Kreisschnittpunkte zur dritten Mittelsenkrechten.

L: „Kleine kreative Pause." (47. Minute)

PAUSE

Weiter (57.Minute)

L: „Ich möchte, dass ihr euch am Ende der Stunde hier vier Seiten wegnehmt. Am 12. Juni ist die Mathearbeit: dazu sind hier Übungen zu rationalen Zahlen, vier Seiten Übungsaufgaben mit Lösungen. Ein Taschenrechner ist in der Mathearbeit nicht erlaubt. (61. Minute). So. Aufmerksamkeit auf die Tafel. D118 hat gesagt, wir brauchen die dritte Mittelsenkrechte gar nicht einzeichnen, die schneiden sich eh in einem Punkt. Warum ist das so?"

D125: „Wenn wir wissen: die drei schneiden sich in einem Punkt, dann brauchen wir nur zwei zu zeichnen."

D131: „Ich glaube, das Dreieck ist gleichseitig, deshalb ist das so."

Keine weiteren Meldungen.

L: „Was gilt für die Punkte auf diesem Kreis? (markiert den Kreis um A grün). Alle Punkte auf diesem Kreis haben denselben Abstand zu A. Jetzt der Kreis um B (markiert diesen gelb). Was wissen wir über diese Punkte?

D114: „Alle Punkte haben den selben Abstand zu B."

Lehrperson zeichnet blauen Halbkreis ein und markiert den Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten rot.

L: „Erst noch einmal über den roten Punkt. Was gilt?"

D118: „Der hat denselben Abstand zu C und A, weil er auf der Mittelsenkrechten zu CA liegt.

L: „Und er hat denselben Abstand zu B und A, weil er auf der Mittelsenkrechten zu BA liegt, denn….?"

D118: „Weil er auf der Mittelsenkrechte zu A und B liegt. Also muss es auf der Strecke BC auch gleich sein."

L: Gestern haben wir das gelernt, was eine Mittelsenkrechte ist. D113, lies deine Hausaufgaben vor. Die Definition einer Mittelsenkrechten."

D113: „Die Mittelsenkrechte ist die Mitte."

L. Das ist nicht ausführlich. Also der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten hat denselben Abstand zu allen drei Eckpunkten im Dreieck."

D117: „Wenn die Seiten verschiedene Seitenlängen haben, welchen Radius soll ich dann wählen?"

L: „So. Wir schreiben das jetzt auf und dann gucken wir, dass ihr das mit den Übungen auch besser versteht."

Tafelanschrieb wird um Antwort ergänzt (70.Minute):

Lehrperson teilt das AB „Konstruktion“ aus. Zuerst wird er Tafelanschrieb im Heft notiert.

Beobachtung: in den spitzwinkligen Dreiecken in der HA schneiden sich die drei Mittelsenkrechten in genau einem Punkt.

Frage: Ist das Zufall? Schneiden sich die drei Mittelsenkrechten in jedem Dreieck in einem Punkt?

Antwort: Das ist kein Zufall! Die Mittelsenkrechten im Dreieck schneiden sich in genau einem Punkt.

Begründung: Der Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechter ist gleich weit entfernt von A und B sowie C und B, also muss er auch auf der dritten Mittelsenkrechten liegen.

L: „Roten Kasten um die Konstruktionsbeschreibung, das ist Regel Nr. 130. Jetzt startet ihr mit den Übungen.“ (ab 75. Minute)

87. Minute

L: „Aufgabe 1, habe ich gesehen. Ich bin rumgegangen. Das hat jeder raus, nämlich?“

D126: „Nein, der Punkt C liegt nicht auf der Mittelsenkrechten.“

L: „Ist euch etwas aufgefallen?“

D130: „Alle Mittelsenkrechten schneiden sich in demselben Punkt.“

L: „Auf diesen Punkt möchte ich noch einmal zu sprechen kommen. Wenn ein Punkt gleich weit von allen drei Eckpunkten entfernt ist, so wie es an der Tafel steht, dann kann man einen Kreis zeichnen. Und dieser Kreis hat einen Namen und das schreiben wir uns als letztes hier drunter.“

Tafelanschrieb: Der Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten ist gleich weit von den Eckpunkten des Dreiecks entfernt….

L: Hausaufgabe zur nächsten Stunde: AB Nr.3 zu Ende (auf Folie von D122).

5. Stunde, Freitag, 01.06.2018 (08:50-09.35)

Beginn der Unterrichtsstunde nach Begrüßung etc. 08.55.

L: „kurze Wiederholung. Die Mittelsenkrechte, was wisst ihr über sie?“

D112: „Eine Mittelsenkrechte ist die Mitte einer Strecke und alle Punkte, die auf der Mitte liegen, haben die gleiche Entfernung, also zu den Schnittpunkten.

D: „Es waren keine Schnittpunkte da."

D120: „Gemeint sind die Endpunkte der Strecke."

L: „Wie kommt D112 auf Schnittpunkte?"

D131: „Wenn man A und B verbindet zur Strecke und dann den Zirkel auf mehr als die Hälfte einstellt und dann um die Punkte zeichnet, dann sind da zwei Schnittpunkte, dann hat man die Mittelsenkrechte."

D125: „Ein Dreieck hat drei Mittelsenkrechten. Alle Mittelsenkrechten in einem Dreieck treffen sich in genau einem Punkt."

D134: „Dieser Punkt ist gleich weit entfernt von A, B und C."

D112: „Das ist der Mittelpunkt. Die Entfernung von A, B und C ist gleich weit. Das ist der Radius."

L: „Der Mittelpunkt wovon?"

D112: „Der Mittelpunkt vom Umkreis."

L: Wir wollen die Hausaufgaben vergleichen."

D127: „Ich habe das nicht ganz verstanden. Was ist eine Planskizze?"

D133: „Man macht eine Skizze und zeichnet da ein, was man kennt."

L: „Manchmal sagt man: kein Plan. Hier ist nichts Anderes gemeint als eine Skizze. Zu der seid ihr von mir verpflichtet worden. Nichts Anderes."

D130: „Wie soll man eine Skizze machen?"

L: „Jetzt im Koordinatensystem einzeichnen und dann"

Zwischenruf: „Haben wir schon, nur die Planskizze nicht."

L: „Wir vergleichen also. Meldet euch. Nicht immer die gleichen!"

D112: „(0,2/4)."

L: Andere Angebote?

D: „(5,5/2,5)."

L: „D112 erklärt ihr Vorgehen."

D112: „(5,5/2,5) Ich wollte die Mittelsenkrechte der Strecke AB konstruieren (D112 spricht zu leise, daher nur ein Teil der Antwort hier)

L: „Okay, dann machen wir jetzt weiter. Wir üben die Konstruktion. Leider ist D122 nicht da. Sie hat die Folie vorbereitet. Dann machen wir das so. Ist euch bei der Aufgabe 2 etwas aufgefallen?"

D: „Ja, es gibt keinen Schnittpunkt."

L: „Gibt es eine Unklarheit?" keine Meldungen. „Ihr arbeitet an euren Aufgaben weiter." 09.05

L: „Bitte messt die fehlenden Winkel."

09:28: Vergleichen der Aufgabe A1. Der Schnittpunkt lautet S(3/5). Weiter um 09:30

L: „Dann zeig ich euch jetzt auch die 2a). So sollte die Gerade aussehen (Folie wird aufgelegt). Motivation fürs Tempo, was ihr nicht schafft, ist Hausaufgabe."

Stunde endet um 09:35

6. Stunde 05.06.(09.55-10.40) und 7.Stunde (Test 2)

L: „Was ist eine Mittelsenkrechte? Da sollten sich alle melden!"

D114: „Eine Gerade zu A und B, die zum Beispiel durch die Strecke AB geht. Alle Punkte auf der Mittelsenkrechten haben den gleichen Abstand zu A und B."

L: Was wisst ihr über die Mittelsenkrechten im Dreieck?"

D123: „Alle drei Mittelsenkrechten in einem Dreieck schneiden sich in einem Punkt."

D119: „Der Schnittpunkt hat denselben Abstand zu allen drei Eckpunkten."

L: „Warum ist das so? – D131, legst du bitte den Zirkel aus deinem Gesicht."

Keine Meldung. Dann D134.

D134: „Der ist der Mittelpunkt des Umkreises."

L: Das ist richtig. Wir nutzen das hier aus. Wenn…?"

D118: „Wenn man den Umkreis zu einem Dreieck zeichnet, fällt auf, dass alle Eckpunkte den Kreis schneiden und dann ja der der denselben Abstand zu allen Eckpunkten. „

L: Das haben wir anders herumgemacht. Keine Idee? Macht euch da nochmal Gedanken. Ich frag nachher noch mal. "

D123: „Sie wollten die Zettel noch einsammeln" (Organisation unabhängig von der Stunde)

L: „Wer den Zettel nicht mithat: morgen bitte mitbringen!" 10:04

L: „Zurück zur Mathematik. Kleines Arbeitsblatt, Aufgabe 2." (Folie wird aufgelegt von D122)

L. „Wir vergleichen die Winkelgrößen. 1 Grad und 1 mm Abweichung sind ok. In Teilaufgabe a) lauten die fehlenden Größen: $\beta = 49°, \gamma = 70°\ und\ \alpha = 61°$. Für b) sind es dann $\alpha = 55°, \beta = 35°\ und\ \gamma = 90°$. Und für c) $\alpha = 30°, \gamma = 112°$ und $\beta = 38°$. Wer hat die Gradzahlen alle richtig?

6 Meldungen

L: „Welche Art von Dreieck liegt uns vor?"

D122: „a) ist spitzwinklig."

D133: „b) ist auch spitzwinklig."

D120: „Das ist ein rechtwinkliges Dreieck."

D121: „c) ist ein stumpfwinkliges Dreieck."

L: „Richtig. Schreibt euch das dazu, dass wir das als Ergänzung auch dastehen haben. Was fällt euch auf?"

D127: „Der Schnittpunkt ist bei a) im Dreieck, bei b) auf der Linie und bei c) außerhalb des Dreiecks.

L: „Das muss nicht immer so sein, eigentlich müssten wir das jetzt beweisen und zeigen, dass das auch bei anderen Beispielen so ist. Hier wurden die Aufgaben beispielhaft ausgewählt, dann kann das so als Regel festgehalten werden."

Tafelanschrieb:

<u>Regel Nr. 137: Schnittpunkte von Mittelsenkrechten in verschiedenen Dreiecken</u>

In einem spitzwinkligen Dreieck schneiden sich die Mittelsenkrechten <u>innerhalb</u> des Dreiecks.

In einem stumpfwinkligen Dreieck schneiden sie sich <u>außerhalb</u> des Dreiecks.

In einem rechtwinkligen Dreieck liegt der Schnittpunkt <u>auf der Hypotenuse</u> (die Seite, die dem Rechtenwinkel gegenüberliegt).

L: „Für jeden Satz verwendet ihr eine andere Farbe, welche ist mir egal. Es müssen nicht meine Farben sein. Die Farben haben keinen Sinn. Bitte abschreiben.“ 10.20

L: Schaut euch noch einmal c) an oder a). da sind die drei Mittelsenkrechten eingezeichnet. Warum hat dieser Schnittpunkt zu allen drei Eckpunkten den gleichen Abstand?“

D132: „Wenn man einen Kreis einzeichnet, dann …“ Lehrperson unterbricht.

D118: „Wenn man den Radius hat, dann…“ Lehrperson unterbricht.

L: „Nicht umgekehrt denken! Wir können den Umkreis nur zeichnen, weil das so ist. Wie haben wir die Mittelsenkrechte konstruiert?

D129: erklärt die Konstruktion der Mittelsenkrechten zur Strecke BC

D131: „Die Punkte haben den gleichen Abstand zu den Eckpunkten zu B und C.“

L: „Wie sieht das für diese Mittelsenkrechte aus?“ (zeigt auf die Mittelsenkrechte zu AB)

D112: „Zu A und B.“

L: „Zu welchen Punkten haben hier alle Punkte den gleichen abstand? (zeigt auf die Mittelsenkrechte zu AC)

D: „Zu A und C.“

L: Was gilt also für den Schnittpunkt hier, der auf allen drei Geraden liegt?“

D132: Das ist die Mitte.“

D117: „Der Schnittpunkt hat den gleichen Abstand zu allen drei Eckpunkten.“

L: „Der Punkt liegt auf allen drei Mittelsenkrechten, deshalb ist er gleich weit entfernt von A, B und C. Wer hat das nachvollziehen können?“

8 Meldungen. 10:24

L: „Wir üben weiter. Zur Aufgabe 1. Bitte korrigiert die Koordinaten zum Punkt D. D soll sein D(12/4). D wie dusseliger Druckfehler. Überlegt Euch, wie ihr das Koordinatensystem einzeichnen müsst. X-Koordinate bis 12 und y-Koordinate bis 9. Koordinatenachsen bis 4 und 4 reicht hier nicht aus.“

10:35

L: „Ich werde von mehreren Schülerinnen und Schülern gefragt, was denn der Abstand zwischen Punkt und Gerade ist. Hier wird eine Gerade senkrecht durch den Punkt gezeichnet und dann gemessen. Das habt ihr nicht bei mir gemacht. Egal, wie weit ihr seid, wir vergleichen jetzt (Folie wird aufgelegt).

L: „a) g_{CD} ist eine Gerade durch D und C und damit eindeutig festgelegt.”

D134 geht zur Tafel und zeichnet die Gerade durch D und C ein.

L: Der Abstand ist eine Strecke. Die Gerade kommt aus dem Unendlichen und geht ins Unendliche.

D134 bleibt stumm.

D123 markiert Anfangs- und Endpunkt des gesuchten Abstandes.

L. „Hier werden 3,5cm gemessen. Bestimme den Abstand von A zu C.“

6 Meldungen

D127: „6,86cm.“

L: „Alle Punkte, die 1,5 cm von C entfernt sind. Zeig mal vorne auf der Folie.“

D112: „Das ist dieser Kreis“ (markiert ihn rot).

L: „Warum ist es ein Kreis?“

D112: „Alle Punkte, die 1,5cm von C entfernt sind. Das nimmt man als Radius.“

L: Klar, wenn man schlau ist, macht man das!“

D130: „Die Aufgabe ist voll unverständlich.“

L: „Weiter geht es. Gleich weit entfernt von A und B. Wie habt ihr das gemacht?“

D115: „Zeichne ein Dreieck ABC. Man kann das Dreieck zeichnen. Wir brauchen die Mittelsenkrechte."

D114: „Die Strecke AB."

L: „Und dann? Die Strecke haben wir hier." (zeigt auf der Folie auf die Strecke)

D115: „So hab ich das nicht gemacht."

L: „Bei dem Stichwort, Punkte, die gleich weit entfernt sind. Was sollte da in den Ohren klingeln?"

D131: „Man zeichnet einfach die Mittelsenkrechte."

L: „Gleich weit entfernt von A, B und C. D115, warst du schon bei der Aufgabe e)?"

D115: „Ja. Ich habe das Dreieck gezeichnet und dann alle Mittelsenkrechten. Die schneiden sich in einem Punkt und dieser Punkt ist der Punkt, der den gleichen Abstand zu den drei Punkten hat."

L: „Brauche ich alle drei Mittelsenkrechten?"

D133: „Zwei reichen, die schneiden sich eh."

D132: „Reicht nicht eine?"

L: „Eine reicht insofern, dass du weißt, darauf liegt der Punkt, aber du hast ihn noch nicht. Dazu brauchst du einen Schnittpunkt. Wir kommen zu f) – gleich weit entfernt von A und C."

D111: „Mehr als die Hälfte abmessen, bei A und bei C einen Kreis zeichnen. Der Schnittpunkt der beiden Halbkreise."

L: „Du hast wiederholt, wie wir eine Mittelsenkrechte konstruieren, aber der Punkt fehlt. Der Punkt mit gleichem Abstand zu A und C."

D111: „Alle Punkte auf der Mittelsenkrechten."

L: „Dann g). Komm nach vorne und zeig."

D119: „Man muss die Mittelsenkrechte von B und C solange erweitern bis man hier bei D ist. Dann einen rechten Winkel und man erhält den Punkt. Man muss die Mittelsenkrechte solange erweitern bis man im rechten Winkel zu D zeichnen kann."

L: „Das ist immer der kürzeste Abstand."

L: „Zu den Heftern: Ihr behaltet die Hefter bis zur Klassenarbeit. Bis dahin könnt ihr die Hefter fertigstellen. Mit dem Hefter könnt ihr mir dann zeigen, dass ihr lieber die 2 haben wollt, wenn ihr zwischen 2 und 3 steht. Es wird bewertet die Vollständigkeit, Ordnung und das bearbeiten der Zusatzaufgabe. Abgabe ist am 12,06. Wir machen Pause."

10.46

PAUSE

Beginn 10:55 Test 2

Erklärungen während des Testes:

Kleines d, anderes Wort für Abstand. Distanz. Der Abstand heißt „d".

Eine Längeneinheit sind 1 Kästchen.

11:30 – viele SuS sind bereits fertig. Wer fertig ist, kann gehen. Ende 11.35. für alle.

16.6.4 Dokumentation der Klasse D_2

1. und 2. Stunde, 28.05.2018

Beginn 09:55. Die Lehrperson erläutert Organisatorisches: Es wird alles in den Hefter geschrieben. Alle AB abheften. Hefter wird am Ende eingesammelt und bewertet. Die Ordnung und Sauberkeit wird auch bewertet. Die Hefter werden verteilt. Nach 6 Unterrichtsstunden findet eine schriftliche Überprüfung statt. Die Klassenarbeit folgt dann am 11.06. Beginn um 10 Uhr:

L: „Heute geht es um den Abstandsbegriff. Welche Abstände kennt ihr?"

Die Schülernennungen werden nach und nach an der Tafel festgehalten. Am Ende ist folgendes Tafelbild entstanden:

Abstand – Distanz

- Abstand zwischen zwei Punkten
- Abstand von Kreispunkten zum Mittelpunkt (Radius)
- Abstand von parallelen Geraden
- Abstand von Punkt zu Geraden

Schülermeldungen für das Tafelbild:

D2: „Abstand heißt Distanz."

D2: „Es gibt den Abstand zwischen zwei Punkten."

D2: „Die Gerade beim Kreis."

D2: „Gemeint ist der Radius vom Kreis."

D2: „Es gibt auch Geraden, die den gleichen Abstand zueinander haben. Parallele."

Lehrperson ergänzt: „Genau. Und wir kennen noch einen Abstand. Den Abstand von einem Punkt zu einer Geraden." Was muss man hier besonders beachten?"

D2: „Die Mittellinie vom Geodreieck muss auf der Geraden liegen."

Um10:13 wird die Aufgabenfolie aufgelegt und die AB an die SchülerInnen verteilt.

L: „Ich habe zwei Punkte, was ist gemeint?"

D2: „In der Mitte muss man einen Strich machen, dass da ein Punkt ist, der gleich weit entfernt ist."

L: „Jeder arbeitet für sich ca. 5 Minuten. Dann könnt ihr euch mit dem Sitznachbarn austauschen."

Nach 5 Minuten beginnt die Partnerarbeit. Äußerungen einzelner SchülerInnen in der Partnerarbeit:

D2: „Die Gerade durch A und B. Das ist ein Spiegeldingsda."

D2: „Es entsteht ein Quadrat mit einem Punkt in der Mitte."

Nach 5-minütiger Partnerarbeit beginnt die Besprechung im Plenum.

L: „Ganz viele von Euch haben den Punkt C(2/5) gefunden." *Die Mitte zwischen A und B.*

Es wird eine Folie mit der Lösung einer Schülergruppe aufgelegt. Eingetragen sind die Punkte A und B und weitere Punkte E, F, L, D, H, I, J.

L: „Wie kann ich überprüfen, ob das für diese Punkte auch gilt?"

D2: „Messen."

L: „Was fällt euch auf?"

D2: „Die Koordinaten verhalten sich gleich."

D2: „Es gibt unendlich viele Punkte.“

L: „Wie finde ich die?“

D2: „A und B verbinden, dann rechtwinklige Gerade durch die Mitte zeichnen, dann hat man alle Punkte.“

L: Sehr richtig. Diese Gerade ist die Mittelsenkrechte. Notiert euch die Definition.“

Die Definition wird auf Folie aufgedeckt.

D2: „Wie kann man die Mittelsenkrechte beschriften?“

L: „Was haben wir bei einer Mittelsenkrechten für ein Objekt?“

D2: „Vielleicht ein großes T. Wir haben Punkte auf der Mittelsenkrechten und dann haben wir eine Gerade.“

L: „Wir nehmen einen Kleinbuchstaben, da es eine Gerade ist. Kleines m oder kleines g.“

Nach 35 Minuten Unterricht beginnt die 5-Minuten-Pause. Im Anschluss beginnt die 2. Stunde pünktlich nach 40 Minuten:

L: „Widerholt mit eigenen Worten.“

D2: „Wenn man zwei Parallelen hat, dann hat man die Gerade dazwischen und das ist die Mittelsenkrechte.“

D221: „Eine Gerade, zwei Punkte, ne doch nicht.“

D213: „Wir machen eine Strecke aus den Punkten A und B. Dann ziehen wir eine Gerade dadurch, so dass die beiden Punkte gleich weit weg sind. Das ist dann die Mittelsenkrechte.“

L: Welche besondere Eigenschaft hat die Mittelsenkrechte?“

(keine Meldungen, dann eine).

D2: „Die hat Mittelsenkrechte hat den gleichen Abstand zu A und B.“

L: „JEDER Punkt hat den gleichen Abstand von A und B.“ Das AB 2_Übung wird ausgeteilt.

L: „Mit Bleistift zeichnen. Arbeitet zunächst allein“ (nach 45 Minuten)

In der Einzelarbeitsphase geht die Lehrperson umher, in der 53. Minute- L: „Die Mittelsenkrechte haben wir nicht umsonst eingeführt. Ihr werdet die schon brauchen. Tauscht euch mit eurem Nachbarn aus."

Ab der 64.Minute werden die Lösungen im Unterrichtsgespräch verglichen.

D215 überträgt seine Lösung auf die Folie. Hier zeichnet er nicht die Mittelsenkrechte ein, sondern drei Punkte: einen Punkt in der Mitte der Strecke AB, einen Punkt, der zu A und auch zu B einen Abstand von 3,5cm hat und einen Punkt, der zu A und B den Abstand 3 cm hat.

D215 erklärt: „Der Punkt *(deutet auf Punkt rechts vom Mittelpunkt der Strecke AB)* ist 3,5cm entfernt von Altstadt und auch Neudorf. Der andere Punkt ist 3cm entfernt. Dann brauchen wir die Strecke dazwischen."

L: „Was ist das besondere an der Strecke dazwischen?"
S: „Die Strecke ist auf der einen Seite länger als auf der anderen."

S: „Das ist eine Gerade, die kreuzt. *(bricht ab)*."

D221: „Das M muss klein sein."

L: „Das M gibt hier den Mittelpunkt an. Daher groß-M. Warum weiß D215, wo der Schnitt ist? Entspricht das dem Punkt, wo die Auffahrt liegen kann? Was ist das für eine Gerade?"

D212: „Das ist die Mittelsenkrechte?" Die Lehrperson zeichnet die Mittelsenkrechte ein.

L: „Ja. Was wissen wir über die Mittelsenkrechte? Eigenschaften?"

D220: „Der Abstand vom Mittelpunkt."

D222: Der Abstand zwischen den beiden Punkten."

L: „Der Abstand von Altstadt und Neudorf ist die gesamte Strecke. Der Abstand zu der Geraden ist nur die Hälfte der Strecke. Was gilt für diesen Punkt?" *(Lehrperson zeigt auf einen Punkt auf der Mittelsenkrechten).*

D216: „Das ist ein Punkt auf der Mittelsenkrechten. Der ist gleich weit entfernt zu A und B."

L: „Alle Punkte, die auf der geraden liegen, haben den gleichen Abstand zu A, C. Das ist nicht der Abstand zur Geraden, sondern zu zwei Punkten. Warum hilft die Mittelsenkrechte hier?"

D231: „Aufgabe war ja eine Umgehungsstraße, die von beiden Dörfern gleich weit entfernt ist zu finden. Dazu kann man die Strecke einzeichnen, dann dadurch im rechten Winkel eine Gerade einzeichnen, dann hat man Punkte, wo Gerade und Straße sich kreuzen.“

L: „Mit eigenen Worten solltet ihr hier eine Begründung ergänzen. Hier stand: Begründe dein Vorgehen! Warum hilft die Mittelsenkrechte?“

In der 67.Minute: Die Schüler notieren in ihren Heften. Ab der 70. Minute geht es weiter.

L: „Weiter mit Aufgabe 2, D229.“

D229 erklärt an ihrer vorbereiteten Folie: „Erst A und B verbinden. Dann muss man die Mittelsenkrechte einzeichnen. Und dann kamen die drei Steine raus.“

D232: „Weil die anderen Steine nicht gleich weit weg sind zu A und B.“

L: „Was heißt das für alle Punkte, die nicht auf der Geraden sind?“

S: „Die sind nichtgleich weit entfernt.“

L: „Richtig. Notiert euch das auch. Was gilt für die Punkte, die nicht auf der Mittelsenkrechten liegen?“

D221: „Die liegen näher an A oder an B.“

Folie mit dem Zusatz zur Definition wird aufgedeckt und Schüler notieren.

Ab der 80. Minute werden die aufgaben 3 und 4 besprochen:

L: „Beschreibe mit eigenen Worten. Wo liegen die gelben Punkte? Alle Punkte, die weiter entfernt sind von P?“

D229: „Im Feld rechts von der Mittelsenkrechten.“

Erst jetzt wird die Lösungsfolie gezeigt.

L: „Was gilt für die Punkte auf der Mittelsenkrechten?“

D218: „Die nicht.“

D231: „Die Punkte auf der Mittelsenkrechten werden grün, da noch dazu gehören.“

L: „Ihr habt 1 Minute zu abzeichnen und korrigieren.“

In der Zwischenzeit werden die Hausaufgabenzettel ausgeteilt.

L legt die Folie zur Aufgabe 4 auf: So, jetzt die Nummer 4. Weil nicht mehr soviel Zeit ist, sag ich etwas. Zeichnet die Mittelsenkrechte durch die Punkte, sonst ist es eine Strecke. D216 hat diesen Punkt eingezeichnet. Ist der richtig, ja oder nein?“ Lehrperson zeigt auf den Punkt C.

D230: „Das ist richtig, weil der Abstand von P und Q gleich ist. Zuerst hat er die Mittelsenkrechte eingezeichnet, dann hoch bis man die Gerade durch A und B schneidet.“

L: „Die Koordinaten von C bitte, zum Vergleichen.“

D232: „(3,5/4,5).“

L: „Sehr schön. Hausaufgabenzettel einkleben und lösen. Konstruiere – worauf ist zu achten?“

D234: „Ne.“

D232: „Die Skizze farbig markieren, Kongruenzsatz angeben.“

Lehrperson zeichnet Dreieck auf Folie: „Wie zeichnet ihr die Mittelsenkrechte ein?“

D218: „Gerade durch C.“

D232: „Man misst die Hälfte der Strecke AB ab und zeichnet eine Gerade mit rechtem Winkel ein.“

3. und 4. Stunde, 11:35

Beginn 11:35

E: „Können wir Plätze tauschen?“

L: Nein, du sitzt schon bewusst nicht so, dass du mit den Mädels diskutieren kannst.“

E: „Brauchen wir auch unsere anderen Mathesachen?“

L: „Nein, das habe ich in der letzten Stunde schon gesagt, ihr braucht nur diesen Hefter jetzt mitbringen. Am Montag noch mal und am Donnerstag und dann fangen wie nächste Woche Freitag an, da braucht ihr das Buch wieder.“

D211: „Ich habe einen Arzttermin und muss heute eher gehen.“

L: „Ok. Du achtest selber drauf, D211, wann du losgehen musst? Ja, das nächste Mal bitte mit Datum drauf. Noch eine Frage noch ein Problem?“ keine Meldungen „Dann holen bitte alle ihre „

Hausaufgaben hervor. Die drei Dreiecke, die ihr zeichnen musstet. So. In dieser Zeit, in der ihr das rausholt und ich gucke, dass ihr das gemacht habt, teile ich zwei Elternbriefe aus.“

L: „Und in der Zeit schlagen alle ihre Hausaufgaben auf, wie gesagt, die möchte ich gerne sehen. “

Lehrperson geht durch die Reihen und sieht sich die Hausaufgaben an.

L: „Mittelsenkrechten sind Geraden, die sollten schon etwas länger sein.“

Es werden Hinweise und Hilfestellungen gegeben. Es fehlen Mittelsenkrechten oder es wurden nur eine oder zwei Mittelsenkrechten eingezeichnet.

L: „Wer die Mittelsenkrechten nur angedeutet hat, sollte die noch zu ende zeichnen. Das sind geraden, die sollten schön lang sein. Dann kommen wir zu den Hausaufgaben. Als kurze Wiederholung.: Den Begriff Mittelsenkrechte hattet ihr Kennengelernt. Was ist denn nun eine Mittelsenkrechte? Wer kann das noch einmal beschreiben?“ (11: 40)

D223: „Eine Mittelsenkrechte ist, wenn ein Punkt von zwei Punkten gleich weit entfernt ist. Und man nennt es dann Mittelsenkrechte, da es eine Senkrechte durch die Mitte der Strecke ist.“

L: „Also es ist nicht nur ein Punkt auf so einer Geraden, der von zwei Punkten den gleichen Abstand hat, sondern wie viele?“

D223: „Mehrere.“

L: „Mehrere! Es sind eigentlich unendlich viele Punkte. Es sind a-l-l-e Punkte, die von zwei Punkten den gleichen Abstand haben. Das ist die Mittelsenkrechte. Das sind a-l-l-e Punkte, die von zwei Punkten den gleichen Abstand haben.“

D221: „Eine Mittelsenkrechte ist einer Gerade, die senkrecht zu einer Strecke verläuft, die aus zwei Punkten festgelegt ist. Dabei hat die Mittelsenkrechte den gleichen Abstand sowohl zum einen als auch zum anderen Punkt.“

L: „Ja, aber nicht die Senkrechte, sondern alle Punkte! Auf der Senkrechten. Bitte, das ergänzen! Es sind die Punkte gemeint. Alle Punkte auf dieser Mittelsenkrechten haben von den beiden Punkten den gleichen Abstand.“

D220: „Wenn zwei Punkte gegeben sind und man noch einen einzeichnen muss, der den gleichen Abstand zu beiden Punkten hat, liegt dieser auf der Mittelsenkrechten.“

L: „Ja, das stimmt. Aber da hast du nicht erklärt, was eine Mittelsenkrechte ist, ist aber auch ok. Dann kommen wir zu den Hausaufgaben Teil 2. Wir vergleichen einmal, ob ihr die Dreeicke richtig gezeichnet habt, in dem wir die fehlenden Stücke vergliechen. Die Seite c, alpha und beta waren gegeben. Wie groß muss denn gamma sein?"

D219: „60°."

L: „Ja, und die Seiten a und b konntet ihr messen."

D224: „5,5"

L: „Das ist ok. Exakt wäre 5,4 cm. Aber da bist du mit 5,5 gut dabei und bei b?."

D224: „4,5."

L: Wer es exakt gezeichnet hat, hat 4,4cm. Aufgabe b. Da waren Seite a und b gegeben. Wie lang ist die Seite c?"

D212: „5,8?"

L: Richtig, das ist der exakte Wert, dann hast du sehr sauber gezeichnet. Alpha?"

D220: „60°.

L: „Alpha ist nicht 60°."

D211: „56°"

L: „Da meinst du beta. Der ist 57° groß. Und alpha?

D226: „46°."

L: „Das Dreieck c). Da waren a und b und c gegeben. Wie groß sind da die Winkel?"

D221: „64°."

L: Beta?"

D222: „39°."

L: „Gamma?"

D219: „73°."

D230: „76°."

L: „Beides im Messbereich. Es sind 75°. Ich habe die Dreiecke hier auch einmal mitgebracht (Folie am OHP). So ungefähr sollten die aussehen, da könnt ihr noch einmal überprüfen. Dann solltet ihr die Mittelsenkrechten einzeichnen. Was ist euch aufgefallen, als ihr die drei Mittelsenkrechten eingezeichnet habt? “

D216: „Die schneiden sich in der Mitte. In einem Punkt.“

L: „Ja, wer richtig gezeichnet hat, sieht, dass sich alle Mittelsenkrechte in einem Punkt schneiden. Deswegen habe ich gesagt, zeichnet die mal ein bisschen länger. Ich mache das mal für dieses Beispiel. Wiederholen wir noch einmal. Wie würde ich die Mittelsenkrechte von der Strecke AB zeichnen?“

D231: Man misst die Länge von der Seite ab, dann ab der genauen Hälfte zeichnet man eine Senkrechte ein, die einen rechten Winkel bildet und das macht man dann bei jeder Seite genauso.

Lehrperson zeichnet vorne an der Tafel drei Mittelsenkrechten ein. L: Das geht nicht durch die Punkte gegenüber, als das muss nicht durch die Spitze gehen. Wer sauber gezeichnet hat, sieht alle Mittelsenkrechten scheiden sich in einem Punkt. Also jeder kann überprüfen, ob er richtig gezeichnet hat, dann müssten sich die drei Mittelsenkrechten bei Dreieck a) in einem Punkt schneiden. Ist das denn bei Dreieck b) auch so gewesen? “

D228: „Nein.“

D212: „Doch.“

Zwischenrufe: „Nicht ganz.“, „Es ist knapp.“

L: „Gucken wir mal.“ Lehrperson zeichnet die Mittelsenkrechten auf dem Dreieck b) auf der Folie ein. „Was fällt auf?“

D233: Das ist auf der Linie. Ja, ja, die schneiden sich.“

D231: „Kann es sein, dass dieser Punkt wie eine Art Mittelpunkt bei einem Kreis ist?“

L: „Das ist eine gute Überlegung. Das müssten wir rauskriegen. Die Frage ist, ist das nur bei den Dreiecken, die wir gezeichnet haben so, oder habe ich nur zufällig drei gute Dreiecke ausgesucht? Könnte ja auch sein. Bei dem Dreieck c) sollte da auch so sein, dass sich die Mittelsenkrechten in einem Punkt schneiden.“

D228: „Bei jedem gilt das.“

L: „Da wir in der Mathematik sind können wir das als Vermutung haben. Beweisen müssen wir es aber selber noch.“

Lehrperson notiert an Tafel (relativ viel Gemurmel in der Klasse) (11:50)

Frage: Schneiden sich die drei Mittelsenkrechten in jedem beliebigen Dreieck in einem Punkt?

L: „In der Mathematik kann man die Vermutung haben, ja, in jedem Dreieck schneiden die sich. Aber wie ihr wisst, müssen wir das immer beweisen. Dafür habe ich ein anderes Dreieck mitgebracht."

(Folie wird auf OHP aufgelegt)

L: „Um unsere Vermutung zu beweisen, ob sich bei Dreiecken die Mittelsenkrechten tatsächlich immer in einem Punkt schneiden, muss… „

D231: „Kann ich schon mal noch eine Theorie sagen?" (nicken) „Ich glaube auch, dass die sich immer schneiden, da ja die genaue Mitte des Dreiecks, sag ich mal herausgefunden wird, weil die Mitte jeder Seite verlängert wird und dadurch ein Mittelpunkt herausgefunden wird und dort schneiden die sich also."

L: „Das ist eine sehr gute Vermutung. Die werden wir jetzt überprüfen. In einem Dreieck gibt es viele besondere Punkte. Vieles, was wir irgendwie als Mittelpunkt bezeichnen würden. Und jetzt geht es darum, dass wir uns noch einmal die hier angucken. Und den Beweis, ob sich wirklich alle Mittelsenkrechten, wie D231, das begründet hat, schneiden, kann man damit machen, wenn man eine Mittelsenkrechte konstruiert. Da werdet ihr sagen, das haben wir doch schon gemacht. Wir haben doch unser Geodreieck genommen und die Mittelsenkrechten eingezeichnet. Das ist nicht die Konstruktionsart wie das Mathematiker machen. Das geodreieck ist ein tolles Hilfsmittel, aber jeder weiß, wenn ich mit dem Geodreieck hin und her rutsche, dann… Oder die Mitte von 13,33 das wird schwierig. Es gibt natürlich ein exaktes Verfahren die Mitte zu bestimmen. Und die zeig ich euch jetzt. Bitte nicht mitzeichnen, sondern aufpassen. Gegeben ist ein Dreieck."

Lehrperson konstruiert an einem Beispieldreieck (spitzes Dreieck) auf der Folie.

L: „Ich nehme meinen Zirkel, einen Radius, der größer ist als die Hälfte der Strecke, denn ich weiß ja, die Mittelsenkrechte liegt in der Mitte, also brauche ich ein bisschen mehr als die Mitte. Soweit klar? Und dann zeichne ich einen Kreis um den einen Punkt und einen Kreis um den anderen Punkt."

Zwischenfrage (D220): „Mit welchem Abstand haben sie da jetzt gezeichnet?"
L: „Wer kann die Frage beantworten? Einen Abstand von?"
D221: „Etwas größer als die Hälfte der Seite."

L: „Beliebig, aber größer als die Hälfte der Seite. So und er zweite Kreis. Was gilt denn für so einen Kreis noch mal?“ keine Meldungen. L: „Was ist ein Kreis? Ihr habt das in der letzten Stunde, super gesagt!“

D216: „Man kommt von vier Ecken oder Kanten zu einem Mittelpunkt.“

L: „Ja, ja was war das mit dem Mittelpunkt? Was war der Kreisbogen zum Mittelpunkt?“

D223: „Der Radius.“

L: „Ja und was sagt uns der Radius. Leute, letzte Stunde habt ihr das so schön gesagt. Es ist toll, dass ihr das wieder nicht gelernt habt, was wir letzte Stunde gemacht haben.“

D222: „Dass jeder Punkt auf der Linie den gleichen Abstand zum Mittelpunkt hat.“

L: „Ja! Jeder Punkt auf diesem Kreisbogen hat den gleichen Abstand zu A (zeigt vorne an der Folie). Jeder Punkt auf diesem Kreisbogen hat den gleichen Abstand zu B. Was gilt dann an diesem Schnittpunkt?“

D233: unverständlich

L: „Was gilt an diesen beiden Schnittpunkten meiner Kreise?“ D229: „Wenn sie die Punkte verbinden, dann hat man die Mittelsenkrechte.“

L:“Warum?“

D229: „Weil das einfach genau die Mitte ist.“

L: „Warum? Warum ist das genau die Mitte?“

D231: „Sie haben ja gezeigt, dass von der einen Linie jeder Punkt den gleichen Abstand von der Seite a hat und auf der anderen Linie zur Seite b und wenn an einer Stelle, die genau gleich viel Abstand zu beiden Seiten haben, dann ist das ein Schnittpunkt.“

L: „Ja, ich habe doch den gleichen Kreisbogen gehabt. Der Punkt hat zu A den gleichen Abstand wie zu B (zeigt auf einen der beiden Schnittpunkte). Und dann kann ich natürlich dann die beiden Punkte miteinander verbinden und dann habe ich eine Mittelsenkrechte. Klar, warum ich mit dem Zirkel die Mittelsenkrechte konstruieren kann? Weil der Kreis die besondere Eigenschaft hat. Von diesem Punkt haben alle diese Punkte den gleichen Abstand (zeigt auf die Kreisbögen an der Wand). Von diesem Punkt haben alle diese Punkte den gleichen Abstand. Das heißt, wo sich die Kreise schneiden, haben die Punkte den gleichen Abstand zum Punkt A als auch zu B.“

D221: unverständlich, organisatorisches

L: „Was gilt für die Punkte auf meiner Mittelsenkrechten? Was gilt zum Beispiel für diesen Punkt?“

D216: „Die haben auch den gleichen Abstand vom Punkt A und B.“

L: „Was gilt für diesen Punkt?“ (zeigt auf einen weiteren Punkt auf der Mittelsenkrechten)

D219: Der hat auch den gleichen Abstand.“

L: „Richtig, die haben beide den gleichen Abstand von Punkt A und B. So. Mal gucken, ob ihr verstanden habt, wie man eine Mittelsenkrechte konstruiert. Für die Strecke AC. Wer sagt mir, wie ich die Mittelsenkrechte konstruiere für die Strecke AC?“

D230: „Erst einmal misst man die Seite.

L: „Ich messe 12,5cm.“

D230: „Okay, auf dem Zirkel ungefähr 6,3 einstellen.“

L. „das würde ich nicht so machen. Was habe ich gesagt, welchen Radius sollte ich nehmen?“

D230: schweigt.

E: „Also etwas länger als die Mitte.

L: „Genau. Du brauchst hier gar nicht die Länge messen. Du siehst ungefähr. Ach, so lang ist die Seite, das ist auf jeden Fall mehr als die Hälfte. Und jetzt?“

D230: „Einen Halbkreis um A und das gleiche bei C.“ Lehrperson zeichnet auf der Folie nach Anweisung ein. Jetzt muss man die Schneidepunkte markieren.“

L: „Wovon die Schnittpunkte?“

D230: „Von den beiden Halbkreisen.“

L: „Ja, mache ich.“

D230: „Dann verbindet man die.“

L. Jetzt schneiden sich meine beiden Mittelsenkrechten. So. Und was muss für diesen Punkt, den Schnittpunkt der beiden Mittelsenkrechten gelten?“

D230: „Dass der dritte, ja die Mittelsenkrechte von A und C auch dadurch gehen muss?“

L: „Warum? Da muss es doch eine Begründung geben.“

D230: „Weil dass immer so ist. Damit die Vermutung stimmt.“

L: Damit die Vermutung stimmt, müsste das so sein. Aber wir wollen ja erst noch wissen, ob unsre Vermutung stimmt. Das müssen wir irgendwie begründen können. Aber wir wissen schon etwas, das für diesen Punt gilt. Mitdenken, dann wüsstet ihr das?! Was gilt für alle Punkt, die auf dieser Mittelsenkrechte liegen?“ (zeigt auf die Mittelsenkrechte zur Strecke AB)

D219: „Die sind gleich weit entfernt von A und B.“

L: „Was gilt für alle Punkte, die auf dieser Mittelsenkrechte liegen?“

D221: „Die sind gleich weit entfernt von A und C“

L: „Was gilt für den Schnittpunkt der beiden Mittelsenkrechten?“

D225: „Der ist gleich weit entfernt von A und B als auch von A und C.“

L: Was kann ich damit sagen? Dieser Punkt ist gleich weit entfernt von A und B und a und c. Das können wir doch kürzer sagen.“

D219: „Dieser Punkt ist der Mittelpunkt.“

L: „Nein. Das ist kein Mittelpunkt.“

D220: „Der hat den gleichen Abstand von A und B und von A und c.“

L: „Das haben wir schon gehört.“

D216: „Der Punkt ist von allen drei Punkten gleich weit entfernt.“

L: Der ist von allen drei Punkten A, B und C gleich weit entfernt! Das heißt, wenn ich von diesem Punkt eine Verbindung zu a und zu B und zu c einzeichnen würde, müsst alle Strecken gleich lang sein. Klar?“ (Lehrperson geht vom Schnittpunkt der Mittelsenkrechten aus).

L: „tragen wir die dritte Mittelsenkrechte ein. Wer beschreibt mir noch einmal die Konstruktion der dritten Mittelsenkrechte?“

D218: „Man nimmt den Zirkel und man kann abschätzen, dass man mehr als die Hälfte hat. Dann zeichnet man einen Halbkreis um B. Jetzt nimmt am Punkt C das geodreieck. Äh, ich mein den Zirkel. Und dann einen Halbkreis. Dann entsteht ein Schnittpunkt.“

Lehrperson konstruiert an Folie die dritte Mittelsenkrechte.

L: „Wo entsteht ein Schnittpunkt? Was schneidet sich?“

D218: „Die beiden Kreise. Beiden Halbkreise. Dann verbindet man die.“

L: „Warum muss auch die dritte Mittelsenkrechte durch diesen Punkt verlaufen?“

E: „Weil es sonst nicht geht.“

D231: „Weil jeder Punkt auf der Mittelsenkrechten gleich wie von zwei Punkten entfernt ist. Und wenn die sich alle schneiden, heißt es, dass der Punkt der getroffen wird, muss von allen drei Punkten gleich weit entfernt sein.“

L: „Damit haben wir unseren Beweis. Alle Punkte, die auf dieser geraden liegen, haben von B und C den gleichen Abstand. Wir wussten, aber schon dieser Punkt hat von A, B und C den gleichen Abstand. Also muss auch die dritte Mittelsenkrechte durch diesen Punkt verlaufen. Es war also kein Zufall. Ich habe euch nicht besonders gut Dreiecke gegeben, sondern es funktioniert bei jedem Dreieck. Gut das notieren wir, ganz dick: Ja!!!“ (12:06)

L: Wer hilft mir bei der Formulierung? Ja, denn….“

D231: „Denn alle Punkte, die auf einer Mittelsenkrechten liegen, sind gleich weit von den Punkten entfernt?“

L: Also fangen wir: Denn alle Punkte, die auf der Mittelsenkrechten von A und B sind, sind wovon gleich weit entfernt?“

D220: „Sind gleich weit entfernt von … ich kann es nicht.“

D216: „Sind gleich weit von Punkt A und B entfernt.“

L: Alle Punkte auf der Mittelsenkrechten von A und C, wovon sind die gleich weit entfernt?“

D227: „Von b?“

L: „Noch mal!“

D220: „Von A und C.“

L: Was galt für diesen Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von A und B und A und C?

D223: „Dass er von allen drei Punkten gleich weit entfernt ist.“

L: „Das heißt, dieser Punkt ist auch gleich weit entfernt von b und C. Und damit gilt für die Mittelsenkrechte von BC?"

D231: „Dass der Schnittpunkt auch gleich weit von allen Punkten entfernt ist."

L: „Ne. Also dieser Schnittpunkt ist von A, B und C gleich weit entfernt. Das heißt, er ist auch von B und C gleich weit entfernt. Und was gilt damit für die Mittelsenkrechte von B und c?"

D231: „Ich habe gestern nicht gut aufgepasst und das scheinbar nicht so mitgekriegt."

L: „Okay. Wir wissen der Schnittpunkt der beiden Mittelsenkrechten ist von A, B und C gleich weit entfernt. Sow weit waren wir. D.h. dieser Punkt ist von B und C gleich weit entfernt. Was gilt damit für die Mittelsenkrechte? Wenn ein Punkt von zwei Punkten gleich weit entfernt ist, dann?"

D212: „dann liegt er auf der Mittelsenkrechten."

L: „Dann liegt er auf der Mittelsenkrechten. Das heißt, die dritte Mittelsenkrechte muss auch durch diesen Punkt gehen. Damit haben wir einen Beweis geführt."

Es entsteht folgender Anschrieb:

Frage: Schneiden sich die drei Mittelsenkrechten in jedem beliebigen Dreieck in einem Punkt?

JA, denn alle Punkte, die auf der Mittelsenkrechten von A und B sind, haben den gleichen Abstand zu den Punkten A und B. Alle Punkte der Mittelsenkrechten durch A und C, sind gleich weit entfernt von den Punkten A und C. Daher ist der Schnittpunkt dieser beiden Mittelsenkrechten von A, B und C gleich weit entfernt, also auch von B und C gleich weit entfernt. Und damit muss auch die Mittelsenkrechte von B und C durch diesen Punkt gehen.

12: 13 Uhr

L: „D216, was verstehst du nicht?"

D216: „Sie haben das irgendwie so sehr lang erklärt und dann bin ich raus und …"

L: „Für alle. Wir schauen noch einmal auf die Skizze an der Tafel. Was habe ich gemacht? Jetzt zuhören. Ich habe die Mittelsenkrechte von A und B konstruiert. Ich weiß, alle Punkte von der Mittelsenkrechten, sind von A und B gleich weit entfernt. Dann habe ich die Mittelsenkrechte von a und C konstruiert. Alle Punkte, die darauf sind, sind gleich weit von A und C entfernt. Das heißt der Schnittpunkt dieser beiden Mittelsenkrechten ist von A, B und c gleich weit entfernt. Damit ist dieser Punkt von b und c gleich weit entfernt. Damit muss der Punkt auf der Mittelsenkrechten von B und C liegen. Das heißt, die Mittelenkrechte von B und c muss auch diesen Schnittpunkt gehen. Jetzt du, D225"

D225: „Man guckt, wie groß A und B ist und dann macht man mit dem Zirkel."

L: „Nein, ich will keine Mittelsenkrechte konstruieren, sondern wissen, warum die sich immer alle in einem Punkt schneiden!"

D225: „Mhm."

E§1: Man kann jetzt auch quasi von einem Mittelpunkt sprechen, da es quasi eine Mitte von allen drei Punkten ist."

L: „Das kann man. Man könnte da jetzt von einer Mitte sprechen. Man nennt ihn nämlich tatsächlich Mittelpunkt."

D216: „Der Abstand bleibt gleich."

E: „Das heißt, man muss ihn mit einem Großbuchstaben benennen?"

L: „Ja, in der Regel großes M wie Mittelpunkt. So weit klar?"

Pause 12: 17

Weiter um 12:25

L: „Alle wissen nun warum sich die drei Mittelsenkrechten im Kreis schneiden. Jetzt geht es darum, dass ihr nun selber ein wenig konstruieren übt. Ihr braucht Zirkel. Aufgaben, auf diesem AB. Hier oben ist die Konstruktionsbeschreibung als Hilfe. Genau lesen. Arbeitsaufträge befolgen und los geht es."

Zuerst noch unruhiges Arbeiten, dann nach wenigen Minuten EA, kein Getuschel.

Nach 15 Minuten wird es etwas lauter für wenige Minuten, danach wird es wieder ruhig.

Nach 30 Minuten tauschen sich die Schülerinnen und Schüler mit ihren Sitznachbarn aus.

L: „Die Begründung sollte länger als ein Satz sein." (12:58)

13:00 Uhr

L: „Dann stellen bitte alle die Arbeit ein. An dieser Stelle sollten die aufgaben 1, 2 und 3 ordentlich fertig sein. Wenn sie das nicht sind, seid ihr zu langsam und müsst zuhause die Konstruktion mit Zirkel und Lineal üben. Jetzt aufpassen. Aufgabe 1 hat D222 für uns aufgeschrieben. Er hat den Punkt A und den Punkt B eingezeichnet. Erzähl noch mal mit eigenen Worten, wie bist du auf diese gerade gekommen?“

D222: „Ich habe etwas mehr als die Mitte genommen. Mit dem Zirkel und dann habe ich bei Punkt A angesetzt und habe einen Halbkreis gezeichnet und dann das gleiche auch bei B. Und da, wo die Punkte sich geschnitten haben, habe ich eine Geraden gezeichnet.“

L: Und liegt der Punkt da drauf? Nein, wer richtig gezeichnet hat, sieht, dass der Punkt C nicht darauf liegt. Gut. Weiter geht es mit aufgab D22 von D212. Erzähl mal, was hast du gemacht.“

D212: „Ich habe als erstes das Dreieck gezeichnet und von der Strecke A und C etwas mehr als die Hälfte im Zirkel genommen, hab dann jeweils bei A und C einen Halbkreis gezeichnet und dann die Schnittpunkte mit geraden verbunden Und das genauso bei den anderen auch, also C und B und B und A.“

L: „Genau, Und wer sauber gezeichnet hat, sieht, dass sich die drei Mittelenkrechten schneiden. Was ist denn hier die Überraschung?“

D219: „Der Schnittpunkt ist außerhalb des Dreiecks.“

L: „Es kann auch mal außerhalb des Dreiecks sein. Und Aufgabe 3 von D233.“

D233: „Ich habe erstmal die Koordinaten eingetragen, dann die Strecke AB gezeichnet, und dann von D zu C eingezeichnet und dann etwas mehr als die Hälfte im Zirkel eingestellt und Halbkreis gezeichnet und bei C das gleiche. Schnittpunkte markiert und dann habe ich die Mittelsenkrechte eingezeichnet und gesehen, dass die Mittelsenkrechte die Strecke AB schneidet und da habe ich dann den Punkt für die Haltestelle markiert.

L: „Richtig, denn was sollte für die Haltestelle gelten?“

D218: „Der Abstand von dem Punkt A ist genauso weit wie von den Punkten B und C. „

L: „Ja, gleich von C und B entfernt. Warum konnte ich nicht alle Punkte als Haltestelle nehmen, sondern nur diesen einen?“

D223: unverständlich

L:„Warum?“
D219: Gleich weit entfernt.“

L: „Das haben wir schon. Wir wissen der Punkt ist gleich weit entfernt von c und D. warum nehme ich nicht diesen Punkt? Der ist auch gleich weit entfernt von C und D.“

E: „Es muss an der Bahnstrecke liegen“

L: Ja, klar, deshalb brauche ich den Schnittpunkt. Welche Koordinaten?“

D233: „(5,5,/2,5).“

D230: „Ist es schlimm, wenn man 5,4 hat?

L: „5,4 ist ok. 5,0 wäre zu ungenau.“

D231: „Ich habe 6 und 2 und es sieht genauso aus wie vorne.“

L: „Es ist ungenau gezeichnet. Dann haben wir noch fünf Minuten Zeit und ich schau mir die Elternunterschriften an. Hausaufgabe zur nächsten Stunde: heutige Stunde wiederholen und Argumente lernen.“

Ende um 13:05

5. und 6. Stunde, 04.06.2018

Beginn ist 10.00Uhr.

L: „Was ist die Mittelsenkrechte?“

E: „Zwei Punkte sind angegeben, alle Punkte, die den gleichen Abstand haben liegen auf der Mittelsenkrechten.“

L: „Wie konstruiert man die Mittelsenkrechte?“

D225: „Ich gucke, wie lang eine Gerade, eine Strecke ist und zeichne einen Kreis um den Eckpunkt mit einem Radius, der mehr als die Hälfte der Länge der Strecke hat. Die zwei Schnittpunkte verbinde ich.“

L: „Was wissen wir über die Mittelsenkrechte im Dreieck?“

E: „Schneiden sich alle in einem Punkt.“

D213: „Weil die ersten beiden Mittelsenkrechten gleich weit weg von A und B sind und die zweite von B und gleich weit weg ist und die dritte von allen dann.“

L: „ja, wir sortieren noch mal. Was wissen wir über den Schnittpunkt der ersten beiden Mittelsenkrechten?“

D211: „Der Punkt ist gleich weit entfernt von A und B. Die zweite ist gleich weit entfernt von B und C und die dritte gleich weit entfernt von allen: a, B und C.

Die Übungsphase beginnt 10:05.

L: „Noch 5 Minuten. Dann die Mittelsenkrechte nicht mit den Kreisen konstruieren, sondern mit dem Geodreieck. Damit ihr fertig werdet, dürft ihr die Mittelsenkrechten jetzt mit dem Geodreieck einzeichnen.“ (10.30)

L: „Stopp. Wir vergleichen. Aufgabe 1. Nenne mir zwei markante Punkte, durch die die Mittelsenkrechte geht.“ (10.33)

D226: „(1,5;6) und (4,5;3,9) fast 4.“

L: „weitere Punkte?“

D225: „(3;5)“

D215: „(6;3)“

L: „Aufgabe 2. Nach welchem Satz. Problem hier: Seite, Seite, Winkel.“

D222: „Seite Winkel Seite.“

L: „Was muss gelten, um es eindeutig zu machen? Der Winkel muss der größeren Seite gegenüberliegen. Wie lang ist die Seite c?“

D225: „6 cm“

L: „5,9 bis 6,1 wird als richtig erkannt. Aplha?“

D234: „49°.“

L: „Das war Beta.D215: 63°“

L: „61,5° wäre super. Wie groß ist Gamma?“

D228: „70°“

L: „Wo schneiden sich die Mittelsenkrechten in diesem Dreieck?“

D216: „Auf der Mitte des Dreiecks.“

L: „Innen genau. zweites Dreieck. Welcher Kongruenzsatz?“

D215: „5,8 cm.“

L: „5,7cm ist der exakte Wert. Aplpha ist 55° und beta?“

D226: „33°.“

L: „Eigentlich 35°. Plus minus 2° ist okay. Gamma?“

D211: „90°.“

L: „Richtig. Wo schneiden sich hier die Mittelsenkrechten?“

D225: „Auf der Seite C.“

L: „Bei sauberer Konstruktion. Das dritte Dreieck? Alpha?“

D215: „30°.“

L „beta?“

Hassan: „41°“

L: „etwas zu viel.“

D222: „38°.“

L: „Das ist richtig.“

D211: „115° und D226: 112°“

L: „Wo schneiden sich hier die Mittelsenkrechten?“

D216: „Außerhalb des Dreiecks?“

L: „Kann jemand eine Vermutung äußern, wann sich die Mittelsenkrechten im Dreieck außerhalb schneiden?“

E: „Anhand der Sätze (SSW)“

L: „Nein, das hätte ich ändern können bei A1 z.B.

D214: „Bei stumpfwinkligen Dreiecken liegt der Schnittpunkt außerhalb.

L: „und weiter.“

D229: „Es gibt noch spitzwinklige und rechtwinklige Dreiecke. In spitzwinkligen Dreiecken liegt er innen. In rechtwinkligen Dreiecken liegt er auf der Seite.“

L: „Auf welcher Seite? Was meint ihr?“

E: „Auf der Seite c."

L: „Nein, das muss nicht sein."

D218: „Auf der längsten Seite."

L: „Genau. Das schreiben wir noch auf." (10.43)

Tafelanschrieb: Schnittpunkt von Mittelsenkrechten im Dreieck, Umkreis.

Pause (10.50)

Weiter um 10:56

L: „Alle auf den Platz zurück. Ihr habt AB vor Euch liegen. *Abstände - Was hat das mit der Mittelsenkrechten zu tun?* Aufgabe 1 bearbeiten. Jeder löst für sich alleine.

Auch nach der Bearbeitung von Aufgabe 1 ist es komplett leise.

L: „Noch 3 Minuten, dann will ich Aufgabe 1 vergleichen." (11.14)

L: „Anhalten, wir schauen nun gemeinsam drauf a)?" (11.17)

D233: „4,3cm."

D228: „4,2cm"

L: „e)" (8Meldungen)

D221: „Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten."

L: „Alle Punkte, die den Abstand 4cm haben?"

D231: „Einfach einen Kreis mit dem Radius 4cm."

L: „Wo liegen die Punkte?"

D222: „Da wo die Kreise sich schneiden."

L: „Punkte, die weiter von B entfernt sind als von C."

D216: „Nördlich der Mittelsenkrechten."

L: „Wo trifft jetzt noch zu, dass sie nicht weiter als 4cm von A entfernt sind."

E: Schnittpunkt von Kreis."

D231: „Von der Mittelsenkrechten bis zum Punkt und alles was im Kreis ist."

L: „Hausaufgaben: Lerne, denn wir schreiben einen Test. Thema: Heft“

Montag in einer Woche ist die Klassenarbeit.

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis