Erschienen in: Frederking, Volker; Romeike, Ralf (Hrsg.). *Fachliche Bildung in der digitalen Welt. Digitalisierung, Big Data und KI im Forschungsfokus von 15 Fachdidaktiken*. - Münster: Waxmann, 2022, S. 234-259

Guido Pinkernell, Frank Reinhold, Florian Schacht & Daniel Walter

Mathematische Bildung in der digitalen Welt

Die digitale Transformation im Fokus der Mathematikdidaktik

1 Mathematik, Mathematikunterricht und Mathematikdidaktik im Zeichen digitaler Transformation

Computer sind elektronische Rechengeräte. Es dürfte damit wenig überraschen, dass Computer von Anfang an nicht nur für die Mathematik selbst, sondern auch bald für das Lehren und Lernen von Mathematik entdeckt und genutzt wurden. Die Geschichte des schon seit 1978 in der Gesellschaft für Mathematikdidaktik existierenden Arbeitskreises Mathematikunterricht und Informatik, jetzt Arbeitskreis Mathematikunterricht und digitale Werkzeuge[1], ist dafür beredtes Zeugnis. Dort ging es nicht nur um die Verankerung informatischer Ideen im Mathematikunterricht, sondern immer auch um die Nutzung des Computers für die Thematisierung genuin mathematischer Inhalte.

Zum Einsatz kam Software für Büro und Wissenschaft im Mathematikunterricht, etwa Tabellenkalkulation, statistische Software, Funktionenplotter oder Computeralgebra-Systeme (CAS). Bald stand auch speziell für didaktische Zwecke entwickelte mathematische Software zur Verfügung, etwa Dynamische Geometriesoftware (DGS) wie Euklid oder Cinderella, oder CAS wie Derive. Später kamen mathematische Kleinstcomputer in Taschenrechnergröße für den Schulgebrauch auf den Markt, die verschiedene Softwareelemente in einem Gerät integrierten, darunter Tabellenkalkulation, Plotter, DGS und CAS. Mittlerweile ist plattformunabhängige Software im Gebrauch, die gleichermaßen auf Computern, Tablets und auf Smartphones nutzbar sind. Bei Software, die verschiedene Elemente wie CAS, DGS, Tabellenkalkulation etc. integriert, spricht man auch von digitalen Mathematikwerkzeugen, da sie im Sinne heuristischer Werkzeuge für die Bearbeitung unterschiedlichster Probleme genutzt werden können (Abb. 1a). Daneben gibt es eine andere Klasse an Software, die speziell für die Darstellung einzelner Inhalte oder Nutzung in bestimmten Lernsituationen entwickelt wird. In diesem Fall ist auch von digitalen Arbeitsmitteln die Rede, zum Beispiel von der digitalen Stellenwerttafel (Abb. 1b). Solche digitalen Arbeitsmittel sind häufig in ein Lernkonzept eingebettet und werden in digitalen Lernumgebungen online zur Verfügung gestellt (Roth, 2019). Mit der Verfügbarkeit didaktischer Software ist

1 https://madipedia.de/wiki/Arbeitskreis_Mathematikunterricht_und_Digitale_Werkzeuge (Letzter Zugriff: 20.01.2022).

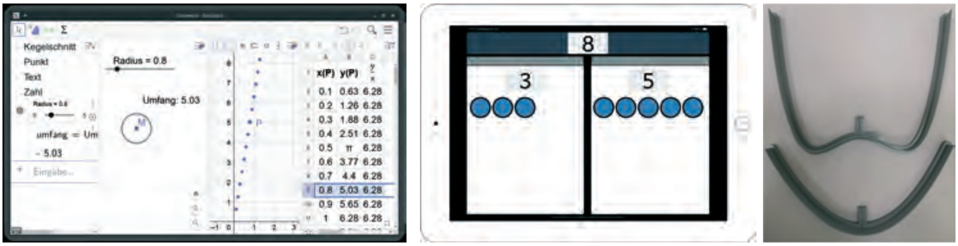


Abbildung 1. (a) GeoGebra mit den vernetzten Softwareelementen CAS, DGS, Funktionenplotter und Wertetabelle als digitales mathematischen Werkzeug (www.geogebra.org). (b) Das Rechentablett als digitales Arbeitsmittel (Urff, 2020). (c) 3D-Ausdrucke eines Funktionsgraphen für den taktilen Zugang zu Stetigkeit und Steigung (Dilling & Witzke, 2020)

aber die Adaption mathematikunspezifischer aktueller Hard- und Software für den Mathematikunterricht nicht zu Ende. Neuentwicklungen bei Hard- und Software werden wahrgenommen und explorativ genutzt, zum Beispiel, digitale Karten oder 3D-Drucker. Auch werden ganze Lernplattformen für mathematikdidaktische Zwecke entwickelt oder adaptiert, etwa für das selbstständige Aneignen und Vertiefen mathematischer Inhalte, wobei automatisierte Assessment- und Feedbackelemente häufig integriert sind (Fahlgren et al., 2020).

Die mathematikdidaktische Forschung hat den Einsatz digitaler Medien aus verschiedenen Perspektiven begleitet, etwa durch Untersuchungen bzgl. der Wirkung digitaler Lernangebote auf die Leistungsentwicklung (Ingelmann, 2009; Weigand & Bichler, 2010), das Denken und Sprechen über Mathematik (Sinclair & Yurita, 2008; Schacht, 2017) oder Vergleiche zwischen traditionellen und digitalen Lernangeboten (Hillmayr et al., 2020; Lichti, 2019; Reinhold et al., 2020). Überdies wurden „digitale“ Kompetenzmodelle für Lehrende und Lernende entwickelt (Mishra & Koehler, 2006) und Rahmentheorien für die Beforschung des Einsatzes digitaler Medien (Bikner-Asbahs, 2020) formuliert.

2 Fachliche Kompetenzen im Mathematikunterricht digital fördern

Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen ist eine zentrale Aufgabe in der Schule, die in Deutschland durch schulstufenspezifische Bildungsstandards festgelegt und beschrieben wird (KMK, 2003; 2004). Forschungs- und Entwicklungsbemühungen der vergangenen drei Jahrzehnte lieferten zahlreiche Erkenntnisse und unterrichtspraktische Impulse für die Entwicklung der in den Bildungsstandards festgeschriebenen Kompetenzen mittels digitaler Medien. In diesem Abschnitt soll am Beispiel der beiden prozessbezogenen Kompetenzen *Mathematische Darstellungen verwenden* und *Mathematisch argumentieren* erläutert werden, welches Potenzial digitale Werkzeuge bieten, um Schülerinnen und Schüler beim Erwerb dieser ausgewählten Kompetenzerwartungen im Mathematikunterricht unterstützen zu können.

2.1 Darstellen im Mathematikunterricht

Das Darstellen von Mathematik wird in den Bildungsstandards als prozessbezogene bzw. allgemeine Kompetenz beschrieben, also als eine solche, die nicht an einen einzelnen Inhaltsbereich gekoppelt ist, sondern die sich durch den gesamten Inhaltskanon zieht. Erste Berührungspunkte mit dem Darstellen von Mathematik haben Schülerinnen und Schüler somit bereits in der Grundschule, wo beispielsweise zum Aufbau eines tragfähigen Zahlbegriffs Zahlen auf unterschiedliche Weise repräsentiert werden. Neben den bekannten symbolischen Zahlzeichen wie 37 werden Zahlen auch schriftlich oder mündlich als Zahlwort („siebenunddreißig“) oder in Mengendarstellung (z. B. siebenunddreißig Plättchen im Hunderterfeld oder drei Zehnerstangen und sieben Einerwürfel mittels Zehnersystemmaterial) repräsentiert.

Die Fähigkeit, mit einem mathematischen Objekt *verschiedene* Darstellungsarten zu verbinden und eine gegebene Darstellung in eine beliebige andere überführen zu können, gilt als eine der zentralen Indikatoren für das Verstehen – insbesondere von Mathematik: „Changing representation register is the threshold of mathematical comprehension for learners at each stage of the curriculum. It depends on coordination of several representation registers and it is only in mathematics that such a register coordination is strongly needed“ (Duval, 2006, S. 122).

Laut KMK-Bildungsstandards bestehen die subsumierten Kompetenzerwartungen zum Kompetenzbereich *Darstellen* unter anderem darin, dass Lernende „für das Bearbeiten mathematischer Probleme geeignete Darstellungen entwickeln, auswählen und nutzen“ (KMK, 2004, S. 8). Darüber hinaus soll im Mathematikunterricht aber auch das Erkennen von Beziehungen zwischen Darstellungen und die Auswahl unterschiedlicher „Darstellungsformen je nach Situation und Zweck“ (KMK, 2003, S. 8) geschult werden.

Um die besonderen Lernchancen digitaler Werkzeuge zur Förderung obiger Kompetenzen zu illustrieren, wird nachfolgend ein gängiges Unterrichtsszenario aus dem arithmetischen Anfangsunterricht beschrieben. Hier geht es darum, aufbauend auf der Darstellung einer Zahl die Repräsentation einer anderen Zahl zu entwickeln. Abbildung 2 zeigt beispielhaft, welche Wege es bei der Tablet-App *Zahlen bis 100* (Urff, 2020) gibt, um ausgehend von der Zahl 27 die Zahl 37 darzustellen. Zum einen kann durch eine Touchbedienung auf eine Schaltfläche oberhalb der Zehnerstelle der Zahl 27 veranlasst werden, die Zahl um ‚+10‘ zu verändern. Daraufhin erfolgt aber nicht nur eine Anpassung der nonverbal-symbolischen Darstellung. Auch die ikonische Darstellung wird entsprechend automatisch durch die Software geändert, indem zehn weitere Plättchen erscheinen. Zum anderen kann aber auch die ikonische Darstellung verändert werden, indem zehn Plättchen über die Anwahl des ‚Zehnerstapels‘ am oberen Bildschirmrand hinzugefügt werden. Analog verändert sich nicht nur die ikonische Darstellung, sondern *auch* die nonverbal-symbolische Darstellung.

Das Beispiel illustriert ein vielversprechendes Potenzial digitaler Werkzeuge: die Vernetzung von Darstellungen. Natürlich kann auch im Mathematikunterricht

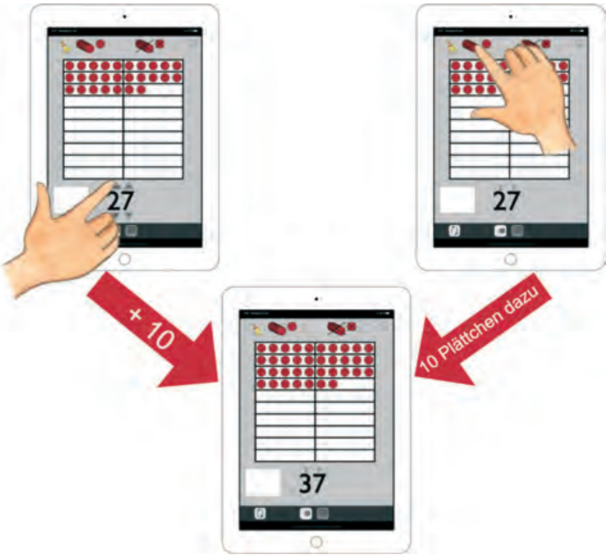


Abbildung 2. Vernetzung von Darstellungen in der App
Zahlen bis 100 (Urff, 2020)

ohne digitale Werkzeuge mit vernetzten Darstellungen gearbeitet werden, indem etwa Zahlen notiert und gleichzeitig verbalisiert werden. Allerdings kann unter Verwendung digitaler Werkzeuge auf die Änderung einer Darstellung eine *automatisierte* Anpassung der jeweils anderen abgebildeten Darstellungen erfolgen (Rauh, 2012; Schulz & Walter, 2019). Aus fachdidaktischer Perspektive eröffnet sich dadurch die Chance, Verwobenheiten von Darstellungen zu erkennen und zu verstehen (Ainsworth, 2006; Barzel & Schreiber, 2017; Moyer-Packenham et al., 2018). Insbesondere Schülerinnen und Schüler mit Schwierigkeiten beim Rechnenlernen fassen verschiedene Darstellungsregister häufig isoliert auf (Ladel, 2009; Radatz, 1990). Gerade auch für diese Schülerinnen und Schüler kann das Nachvollziehen der Wirkungen einer Handlung auf verschiedene Darstellungen (Abb. 1) dazu beitragen, dass Zusammenhänge zwischen den Darstellungen erkannt werden. Dabei muss zunächst noch nicht in der Tiefe durchdrungen sein, *wie* die verschiedenen Auswirkungen genau miteinander zusammenhängen. Die Erkenntnis, *dass* Verwobenheiten bestehen, kann schon als erster wertvoller Lernanlass dienen, dem im Unterricht nachgegangen werden kann.

Wie empirische mathematikdidaktische Studien zeigen, gelingt es Schülerinnen und Schülern jedoch auch unter Nutzung digitaler Werkzeuge nicht automatisch, die Zusammenhänge zu erkennen und gewinnbringend zu nutzen:

1. Laakmann (2013) konnte in einer qualitativen Studie bei 27 Siebtklässlerinnen und Siebtklässlern nachweisen, dass Lernende die Verbindung zwischen Darstellungen, die in einem Multirepräsentationsprogramm abgebildet werden, bei den Themen ‚Funktion' und ‚Lineare Funktion' nicht immer von sich aus erkennen. Externe Impulse und Reflexionsaufgaben konnten jedoch zur Nutzung der verschiedenen Darstellungen beitragen. Zudem konnte gezeigt

werden, dass digitale Werkzeuge insbesondere durch die Möglichkeiten der Dynamisierung der Darstellungen Einsichten in qualitative Zusammenhänge mathematischer Begriffe ermöglichen.

2. Pinkernell (2015) beobachtete in einer Interviewstudie mit einem Multirepräsentationsprogramm, dass Studierende den visuellen Eindruck des sich im Softwarefenster bewegenden Funktionsgraphen im Widerspruch zur algebraischen Darstellung der parametrisierten Funktion sahen. Die dynamische Darstellung mathematischer Sachverhalte führt offenbar zu sachlich falschen Wahrnehmungsbildern (Pinkernell & Vogel, 2017), deren Diskussion im Unterricht eine vertiefte Einsicht in die Zusammenhänge zwischen den Repräsentationen einer Funktion verspricht.
3. Ladel (2009) konnte in einer Untersuchung beobachten, dass Schülerinnen und Schüler aus ersten und zweiten Klassenstufen teilweise bewusst fehlerhafte Antworten ohne dezidierte Überlegungen in die genutzte Übungssoftware eingaben. Damit war das Ziel verbunden, die ihnen wenig geläufigen symbolischen Darstellungen zu umgehen und Zugang zu den ihnen vertrauten ikonische Darstellungen zu bekommen, um die gestellten Aufgaben lösen zu können.
4. Walter (2018) untersuchte in einer qualitativen Interviewstudie bei 33 Lernenden mit Rechenschwierigkeiten zu Beginn des zweiten Schuljahres, ob die Tablet-Apps innewohnenden Potenziale genutzt werden. Bezüglich der Vernetzung von Darstellungen konnte nachgewiesen werden, dass Lernende dazu neigen, lediglich eine der vernetzt dargebotenen Darstellungen konsequent zu fokussieren. Eine solche isolierte Sichtweise auf einzelne Darstellungen ist dabei jedoch nicht per se als lernhinderlich einzustufen. Gleichwohl wird das Potenzial digitaler Werkzeuge nicht vollends ausgeschöpft.
5. Reinhold et al. (2020) konnten in einer quantitativen Studie zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs mit $N = 1005$ Sechstklässlerinnen und Sechstklässlern zeigen, dass interaktive und adaptive Scaffolds, die die Verwobenheit unterschiedlicher Darstellungen von Bruchzahlen besonders herausstellen können, Potenzial insbesondere für leistungsschwache Schülerinnen und Schüler bergen.

Die Vernetzung von Darstellungen in digitalen Lernangeboten birgt großes Potenzial für das fachliche Lernen im Mathematikunterricht. Gleichzeitig ist dieses Potenzial offenbar nicht ohne eine sorgfältige unterrichtliche Rahmung auszuschöpfen. Es bleibt eine zentrale Aufgabe mathematikdidaktischer Forschung, die Zusammenhänge der digitalen Repräsentation mathematischer Konstrukte auf die Begriffsbildung zu untersuchen, passende Unterrichtskonzepte zu entwickeln und auf ihre Wirksamkeit für das Erreichen der Kompetenzziele zu prüfen.

2.2 Argumentieren im Mathematikunterricht

Wissenssicherung erfolgt in der Mathematik durch Beweisen. Wenngleich im Schulunterricht nur ein Einblick in das Beweisen gegeben werden kann, ist dort das Begründenkönnen und -wollen zumindest als ein „habit of mind" (Reiss, 2009) durch mathematisches Argumentieren zu etablieren. Darüber hinaus spricht für das Argumentieren als Kompetenzziel im Mathematikunterricht noch ein weiterer Aspekt: Im Sinne genetischer Zugänge zu mathematischen Sachverhalten wären mathematische Phänomene nicht nur zu erkunden und Zusammenhänge zu beschreiben, sondern auch plausibel zu begründen. Nur auf diese Weise ist ein verständiger Einblick in den Sachverhalt zu bekommen (Bezold, 2009; Hanna & Barbeau, 2008).

In den KMK-Bildungsstandards sind zum Kompetenzbereich *Argumentieren* unter anderem als Kompetenzerwartungen genannt; „mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen" sowie „mathematische Zusammenhänge erkennen und Vermutungen entwickeln" (KMK, 2004, S. 8). Darüber hinaus sollen aber auch mathematische Argumentationen entwickelt und Lösungswege beschrieben und begründet werden (KMK, 2003, S. 8).

Mathematische Software kann im Sinne des genetischen Prinzips zur Exploration mathematischer Sachverhalte genutzt werden. Die dort beobachteten Muster und Regelmäßigkeiten geben Anlass zu mathematischem Argumentieren im Sinne der Bildungsstandards. Zwei Beispiele sollen das illustrieren:

1. In der App *Rechentablett* (Urff, 2020) sollen Kinder verschiedene Zerlegungen einer Zahl (hier: 8) durch Verschieben von Plättchen ermitteln. Hierzu können Plättchen per Toucheingabe in zwei voneinander getrennten Feldern dargestellt werden. Begleitend zur ikonischen Darstellung wird auch die entsprechende nonverbal-symbolische Darstellung angezeigt, die die Anzahl der Plättchen je Feld bzw. auf dem gesamten Bildschirm anzeigt. Für das in diesem Abschnitt fokussierte Lernziel, also das Verständnis über Zahlzerlegungen, ist insbesondere die Möglichkeit interessant, Plättchen von einem in das jeweils andere Feld verschieben zu können.

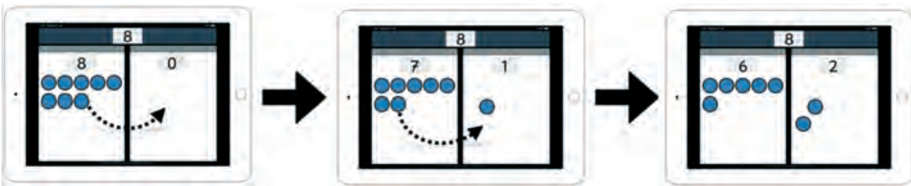


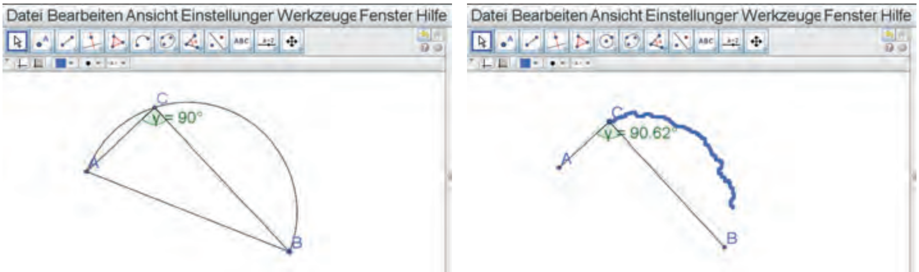
Abbildung 3. Zahlzerlegungen in der App *Rechentablett* erkunden (Urff, 2020).

Wie Abbildung 3 illustriert, hat das (systematische) Verschieben der einzelnen Plättchen Auswirkungen auf die nonverbal-symbolische Darstellung der beiden Felder. Zur Förderung von Argumentations- und Begründungsprozessen können die folgenden Leitfragen anregen: „Was passiert, wenn du ein (zwei, …) Plättchen von einem in das andere Feld schiebst? Warum ist das so?" „Warum ändern sich einige Zahlen, wenn du Plättchen verschiebst? Warum ändert sich die obere Zahl nicht?" „Wie viele verschiedene Plusaufgaben mit dem Ergebnis 8 kannst du finden? Begründe deine Vermutung."

Der Fokus der Leitfragen liegt *nicht* auf einer kleinschrittigen Berechnung einzelner Aufgaben, sondern auf den weitaus reichhaltigeren Tätigkeiten des

Erkundens und Begründens mathematischer Zusammenhänge und der damit verbundenen Entwicklung heuristischer Strategien. Die bloße Anwendung von Rechenfertigkeiten wird als reine Routinearbeit im Sinne des *computational offloading* (Rogers, 2012) an die Software delegiert, so dass Lernende sich gezielt mit dem Erkunden und Begründen befassen können.

1. Für die Sekundarstufe bieten das Konstruieren und Explorieren geometrischer Sachverhalte in einem DGS vielfältige Anlässe für das mathematische Argumentieren. Mit einfachen Illustrationen gegebener geometrischer Sätze lässt sich aber kaum ein Beweisbedürfnis induzieren. Allein die Demonstration, dass der Winkel γ beim Bewegen des Punktes C entlang eines Halbkreises durch A und B immer 90° beträgt, wirkt als Begründung des Satzes von Thales schon überzeugend genug (Abb. 4a). Werth (2014) argumentiert entsprechend, dass die dynamisierte und interaktive Modellierung des mathematischen Sachverhalts in der Software ihm eine reale, gar materiale Anmutung gibt und daher Zweifel an den dort beobachteten Eigenschaften kaum zulässt.



a) b)

Abbildung 4. (a) Punkt C ist auf dem Halbkreis durch A und B fixiert. Beim Bewegen wird für γ konstant 90° angezeigt. (b) Punkt C soll freihändig so geführt werden, dass γ immer 90° beträgt. Der Halbkreis als ideale Bahn von C kann allenfalls vermutet werden. Gewissheit schafft der Beweis.

Statt der bloßen Illustration eines geometrischen Satzes erscheinen daher solche Aufgabenstellungen sinnvoller, in denen der zu zeigende Zusammenhang erst noch zu entdecken ist und als Hypothese formuliert werden muss. Zur Einführung des Satzes von Thales bietet sich unter Ausnutzung der dynamischen und interaktiven Möglichkeiten eines DGS der folgende „Wettbewerb" an: „Wer schafft es, einen Punkt C von A nach B so zu bewegen, dass der Winkel ACB immer 90° beträgt?" Dass die Bahn des Punktes C idealerweise ein Halbkreis durch A und B sein muss, ist angesichts der unvermeidlich zittrigen, aber aussagekräftigen Spur des Punktes C eine naheliegende Hypothese (Abb. 4b). Dass sie auch stimmt, ist mit ihrer Entdeckung aber noch nicht belegt.

Beide Beispiele zeigen: Mit der Auslagerung rechnerischer oder zeichnerischer Anforderungen an den Computer können die Lernenden sich auf die wesentlichen Fragestellungen des Erkundens und Begründens konzentrieren. Dieses als *Auslagerungsprinzip* formulierte Potenzial (Weigand & Weth, 2002) wurde in verschiedenen Studien beforscht und ist grundlegend für die Konzeption von Lernumgebungen. Diesbezügliche Erkenntnisse findet man etwa in den folgenden Studien formuliert:

2. Bezold und Ladel (2014) sowie Ladel (2012) setzten in Unterrichtsversuchen verschiedene computerbasierte Aufgabenformate – etwa virtuelle Varianten von Zahlenmauern und Zahlenwinkeln – ein. Dabei wurden Berechnungen von Einzelfällen durch die jeweilige Software durchgeführt. In den Erhebungen wurde der Frage nach Möglichkeiten der Förderung prozessbezogener Kompetenzen nachgegangen. Dabei zeigte sich das große Potenzial digitaler Aufgabenformate, operatives Denken bei Schülerinnen und Schülern zu fördern.
3. Bauer (2015) untersuchte in seiner Studie unter anderem, ob Lernende multiple und/oder dynamische Repräsentationen in ihren Argumentationen bei der Verwendung der dynamischen Geometriesoftware GeoGebra nutzen. Er analysierte Dokumente von 89 Schülerinnen und Schülern der 11. Jahrgangsstufe und konnte zeigen, dass Lernende multiple und/oder dynamische Repräsentationen durchaus gewinnbringend in ihren Argumentationen nutzten. Gleichzeitig wurde aber auch deutlich, dass eine zu große Menge an Informationen kontraproduktive Effekte nach sich ziehen kann und sich als herausfordernd für die gezielte Verarbeitung von Informationen für mathematische Argumentationen sein kann.

Es scheint, dass das Auslagerungsprinzip und die Vernetzung von Darstellungen Lernchancen zur Förderung der skizzierten prozessbezogenen Kompetenzen *Mathematische Darstellungen verwenden* und *Mathematisch argumentieren* bieten. Die Förderung dieser fachlichen Kompetenzen mit digitalen Werkzeugen ist jedoch mit spezifischen Herausforderungen verbunden, die bei der Planung, Durchführung und Reflexion des Unterrichts berücksichtigt werden müssen.

3 Digitale Kompetenzen im Sinne der KMK-Standards im Mathematikunterricht fachlich fördern

Ziel dieses Abschnitts ist es, die Möglichkeiten der fachlichen Verortung digitaler Kompetenzen des KMK-Kompetenzrahmen (KMK, 2017) zu beleuchten. Viele der im KMK-Kompetenzrahmen formulierten Kompetenzziele sind allerdings überfachlicher Art, etwa im Kompetenzbereich 1 das „sicher Speichern, Wiederfinden und von verschiedenen Orten Abrufen“ oder im Kompetenzbereich 2 das „Dateien, Informationen und Links Teilen“. Die Frage, ob solche Fertigkeiten überfachlich standardisiert und im fachlichen Unterricht befolgt und vermittelt werden können, muss an anderer Stelle diskutiert und konkretisiert werden. Hingegen führt der Kompetenzrahmen auch Kompetenzen auf, deren Erwerb im Mathematikunterricht eine spezifische Konkretisierung erfahren können. Wir wollen dies anhand zweier Bereiche des KMK-Kompetenzrahmens konkretisieren, dem „Produzieren und Präsentieren“ und dem „Problemlösen und Handeln“.

3.1 Produzieren und Präsentieren

Der KMK-Kompetenzrahmen fasst in dem Bereich *Produzieren und Präsentieren* solche Kompetenzen zusammen, die die konzeptuelle und technische Umsetzung des Informierens mit digitalen Medien betreffen. Kompetenzen des Vermittelns mathematischer Sachverhalte werden auch für den Mathematikunterricht eingefordert. Sie sind in den Bildungsstandards im Bereich „Kommunizieren" zu finden, in dem die adressatengerechte Darstellung und Präsentation der Inhalte im Vordergrund steht. Zwar gibt es im KMK-Kompetenzrahmen einen Bereich, der mit „Kommunizieren und Kooperieren" betitelt ist. Dieser meint aber die angemessene Verwendung elektronischer Kommunikationsmittel für eine effektive Zusammenarbeit mit anderen Nutzer*innen, betrifft also eine multilaterale Kooperation anstelle der unidirektionalen Kommunikation, die für das Präsentieren charakteristisch ist.

Neben bekannter Präsentationssoftware wie Powerpoint, Keynote, Impress, Prezi und Mindmap-Programme bieten sich für die Darstellung mathematischer Sachverhalte spezifische mathematische Software an wie die genannten CAS, DGS etc. Insbesondere die dynamische Repräsentation in dieser Software lässt Muster, Regelmäßigkeiten und Zusammenhänge deutlich werden, die mit der statischen Darstellung in klassischen Medien wie Papier und Poster undenkbar sind. Mit dem großen Erfolg von Lern- und Erklärvideos (Jebe et al., 2019) gerät seit Kurzem ein ganz anderes digitales Präsentationsmedium in das Blickfeld mathematikdidaktischer Forschung (Schacht et al., 2019). Videos sind mittlerweile zentraler Bestandteil informeller – und bisweilen auch formeller – Lernszenarien. Es finden sich Forschungsbefunde, die die Nutzung von Lernvideos genauer untersuchen und die auf durchaus positive Effekte auf die Lernleistung im Fach Mathematik verweisen (Flößl, 2015; Kay & Edwards, 2012). Auch in der Lehrerausbildung werden Lernvideos in unterschiedlichen Kontexten eingesetzt (Helmerich & Hoffart, 2014).

3.2 Problemlösen und Handeln

Der Bereich „Problemlösen und Handeln" des KMK-Kompetenzrahmens enthält einige Zielformulierungen, die deutliche Anknüpfungspunkte für eine fachliche Umsetzung bieten. Darunter fällt „Werkzeuge bedarfsgerecht einsetzen" oder „Algorithmen erkennen und formulieren". Die fachliche Konkretisierung des zweitgenannten Bereichs geht weit über das derzeit im Mathematikunterricht curricular verankerte hinaus und findet daher im Abschnitt 3 dieses Kapitels ausführlichere Betrachtung. Die Werkzeugnutzung ist hingegen eine seit Langem für den Mathematikunterricht etablierte Form des Umgangs mit Hard- und Software, die durch die Implementation des KMK-Kompetenzrahmens neue Impulse erfahren kann.

Die Beforschung des mathematischen Problemlösens kann sich auf eine lange Tradition berufen (Polya, 1945; Schoenfeld, 1979), die sich u. a. in der Formulierung von Prozessmodellen und der Beschreibung eines ausdifferenzierten Instrumentariums mathematischer Heuristiken (Heinrich et al., 2015) manifestiert hat. Eine dieser Heuristiken ist das Identifizieren von Invarianzen etwa zur Beweisfindung in geometrischen Kontexten. Mit DGS steht ein digitaler Werkzeugtyp zur Verfügung, der das Auffinden solcher Invarianzen erleichtert. Interessant für die Forschung sind dabei nicht nur mögliche Effekte auf die Beweiskompetenzen der Lernenden, sondern insbesondere, dass sich in der Interaktion mit dem digitalen Medium selbst schon epistemologisch bedeutsame Handlungen manifestieren (Arzarello et al., 2002).

Als Werkzeug erfüllt mathematische Software also eine heuristische Funktion. Sie hilft bei der Exploration mathematischer Sachverhalte und lässt Vermutungen über Zusammenhänge darin enthaltener Größen zu, indem – wie im Beispiel dargestellt – der Sachverhalt dynamisiert repräsentiert und der Interaktion zugänglich gemacht wird. Dies wird als entscheidender Vorteil gegenüber statischen Repräsentationen, etwa Zeichnungen auf dem Papier, angesehen. Arzarello et al. (2002) sprechen von der Software als Mediator zwischen dem gegebenen mathematischen Sachverhalt und dem Entdecken der darin gesuchten Eigenschaften.

Die spezifische fachliche Deutung der KMK-Kompetenzformulierung „Werkzeuge bedarfsgerecht einsetzen“ zeigt sich insbesondere darin, dass Schülerinnen und Schüler zur Lösung eines Problems passende Werkzeuge aus der Vielzahl verfügbarer mathematischer Software auswählen und diese den Anforderungen der Aufgabe entsprechend anpassen. Denn anders als bei vorprogrammierten Lernumgebungen mit beschränkten Interaktionsmöglichkeiten haben die Nutzer*innen digitaler Werkzeuge alle Möglichkeiten der Selektion und Modifikation. Santos-Trigo et al. (2016) dokumentieren in einer Fallstudie, wie Schüler und Schülerinnen zur Lösung eines Extremalproblems digitale und nicht digitale Werkzeuge einsetzen, darunter das klassische „Papier und Bleistift“-Material, zwei lokal installierte Softwaresysteme und ein Online-Computer-Algebrasystem.

4 Fachspezifische digitale Kompetenzen über die KMK-Standards hinaus im Mathematikunterricht fördern

Der KMK-Kompetenzrahmen legt fest, was aus KMK-Perspektive unter digitaler Kompetenz verstanden werden soll. Dabei zeigt sich, dass die Etablierung mancher Kompetenzen des Kompetenzrahmens Impulse für die Erweiterung der derzeit für die Mathematik geltenden Bildungsstandards geben können. In Abschnitt 2 wurde an zwei Beispielen deutlich, dass die fachliche Konkretisierung nominell ähnlicher Kompetenzbereiche der KMK-Kompetenzrahmen und der Bildungsstandards die ursprünglichen „digitalen Kompetenzen“ nicht unberührt lässt, sondern zu einer Anreicherung um spezifisch fachliche Zielsetzungen führen kann. Umgekehrt werden diesem Abschnitt zwei genuin fachliche Kompetenzbereiche in den Blick genommen, die durch die Verfügbarkeit digitaler Medien und Werkzeuge um genuin fachlich *digitale* Kompetenzen erweitert werden.

4.1 Statistisches Denken als Kernkompetenz des 21. Jahrhunderts

Der kompetente Umgang mit Daten und statistischen Konzepten kann als Kernkompetenz für ein Leben in einer digitalisierten Welt (OECD, 2018b, 2018a) und als eine typische fachspezifische digitale Kompetenz im Fach Mathematik bezeichnet werden, der im Laufe der Zeit zunehmend Bedeutung zugesprochen wurde (Gigerenzer, 2004). Sie findet sich in der Leitidee „Daten und Zufall" der Bildungsstandards für das Fach Mathematik wieder (KMK, 2003) und wird in PISA 2021 einen zentralen Themenbereich der Hauptdomäne Mathematik darstellen (OECD, 2018a). Auch in DigComp 2.0 (European Digital Competence Framework for Citizens) wird als erstes Kompetenzfeld die „Information and Data Literacy" angegeben. Im Vergleich zum Modell DigComp 1.0, das noch als Referenz dem KMK-Kompetenzrahmen zugrunde lag, ist hier der Terminus „Data" explizit mit aufgenommen, was die Bedeutung unterstreicht.

Statistisches Denken kann als die Art und Weise verstanden werden, wie Menschen datenbasierte Informationen verstehen und verarbeiten und mit statistischen Konzepten argumentieren. Dies beinhaltet die Interpretation von Situationen auf der Grundlage von Datensätzen sowie unterschiedlichen Datenrepräsentationen, aber auch die Beschreibung von Daten mittels Lage- und Streumaßen und die Berücksichtigung des Zufalls als Ursache für die Variabilität von Daten (Ben-Zvi & Garfield, 2004). Unter diesen Gesichtspunkten stellt der Mathematikunterricht im Bildungssystem in Deutschland die Rahmenbedingungen für den Erwerb statistischen Denkens als fachspezifische digitale Kompetenz.

Trotz der hohen Relevanz des Themas zeichnet die aktuelle empirische Forschungslage zur Entwicklung statistischen Denkens ein tendenziell negatives Bild (Ben-Zvi & Garfield, 2004; Garfield & Ben-Zvi, 2008; Leavy et al., 2018), denn diese Kompetenz zu erwerben ist für Schülerinnen und Schüler häufig mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden. Dies kann auf unterschiedliche Bedingungen zurückgeführt werden, die dem Fachgebiet der Statistik inhärent sind: Zahlreiche statistische Konzepte sind komplex, schwierig und kontraintuitiv (Fischbein & Gazit, 1984; Fischbein & Schnarch, 1997). Lernende haben Schwierigkeiten mit der zugrundeliegenden Mathematik (Ben-Zvi & Garfield, 2004). Die Kontextualisierung vieler statistischer Konzepte in der Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler können irreführend wirken, da sie mit Alltagserfahrungen und Fehlkonzepten konkurrieren (Fischbein, 1975). Dabei gibt die Forschung zahlreiche Empfehlungen für die Verbesserung der Situation (Ben-Zvi & Makar, 2016; Garfield & Ben-Zvi, 2008; Leavy et al., 2018): eine Fokussierung auf die Vermittlung konzeptuellen gegenüber prozeduralem Wissen, die Integration realer und nicht nur realistisch anmutender Daten, die Verwendung auch affektiver Personenmerkmale in statistischen Untersuchungen, und nicht zuletzt die Nutzung von digitalen Medien zur automatisierten Berechnung und Erstellung von Grafiken. Die Umsetzung dieser Handlungsempfehlungen erscheint international wie national bisher jedoch nur rudimentär gelungen (Ben-Zvi & Garfield, 2004).

Die Digitalisierung im Mathematikunterricht birgt große Potenziale, diese Handlungsempfehlungen adäquat in die Unterrichtspraxis zu integrieren. Ein Ver-

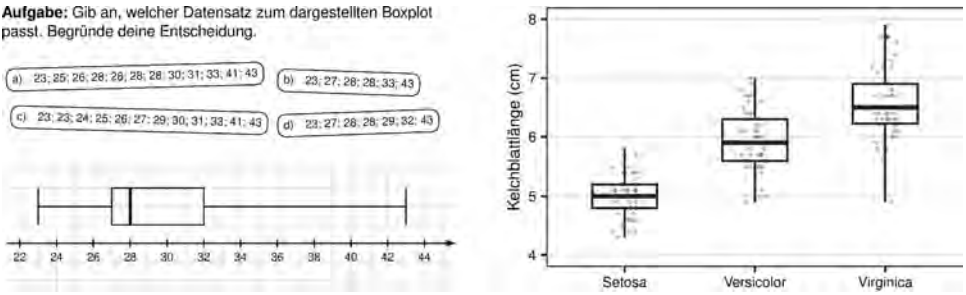


Abbildung 5. Typische Aufgabe aus einem Schulbuch der Jahrgangsstufe 7, in dem der Boxplot mit wenigen Datenpunkten ohne Rückgriff auf digitale Medien behandelt wird (links), Boxplot als Übersichtsdarstellung eines realen Datensatzes mit vielen Datenpunkten (rechts).

weis auf das in Abschnitt 2.2 erwähnte *Auslagerungsprinzip* (Weigand & Weth, 2002) macht deutlich, worin das Potenzial begründet ist: Reale Datensätze ermöglichen einen unmittelbaren Bezug zur Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler. Sie sind in der Regel aber zu umfangreich, differenziert und komplex für eine händische Evaluation. Man verliert den Fokus auf die eigentliche Fragestellung, wenn ohne digitale Hilfsmittel gerechnet und visualisiert werden soll. Digitale Werkzeuge übernehmen das Berechnen statistischer Kenngrößen und das Visualisieren großer Datenmengen, und sie stellen die Beschäftigung mit Konzepten im Vordergrund, nicht prozedurales Arbeiten.

Wir wollen dies am Beispiel des Boxplots illustrieren. Der Boxplot ist in den meisten Bundesländern Unterrichtsgegenstand in der Unter- und Mittelstufe. Krüger et al. (2015, S. 122) geben eine knappe, aber präzise Beschreibung: „Ein Boxplot kann für metrische (und sogar ordinale) Daten erstellt werden. Er besteht aus einer Skala (parallel zur Hauptachse des Boxplots), einem Rechteck (Box) vom unteren bis zum oberen Viertelwert, einem Querstrich auf Höhe des Zentralwerts und schließlich zwei Verbindungsstrecken (Antennen) von dem unteren und oberen Viertelwert zu den Extremwerten der Daten.“ Abbildung 5 (links) zeigt eine Aufgabenstellung, die ohne digitale Werkzeuge gut zu bewältigen ist. Die Datensätze sind klein, ganzzahlig und ohne Realkontext. Das didaktische Ziel ist klar: Die Aufgabe fokussiert auf einen Repräsentationswechsel zwischen geordneter Datenliste und Boxplotdarstellung. Das ist zur Einübung von prozeduralen Grundfertigkeiten sinnvoll, vermittelt allein aber kaum einen Einblick in Sinn und Zweck der Datenvisualisierung durch Boxplots. Reale Datensätze erscheinen dagegen gewinnbringender (Abb. 5, rechts). Hier strukturieren die Boxplots die unübersichtlichen Einzeldaten, indem sie Bereiche gleicher Anzahl umreißen und so einen Eindruck von Mitte und Streuung geben.

Mit händischen Mitteln ist das nicht zu bewältigen, digitale Werkzeuge hingegen übernehmen Rechnung und Visualisierung und können so den Fokus auf Interpretation und Evaluation der Daten lenken. Das Beispiel zeigt: Der Einsatz digitaler Medien erweitert den bestehenden Mathematikunterricht um die Möglichkeit, für das 21. Jahrhundert authentische und relevante Lernziele zu verfolgen, die ohne Rückgriff auf digitale Medien nicht oder nur sehr eingeschränkt realisierbar sind.

Dabei entstehen neue, genuin mathematische digitale Kompetenzbereiche, die im KMK-Modell nicht enthalten sind. Digitale Werkzeuge erlauben die Nutzung authentischer Datensätze und können so einen Bezug zur Lebenswelt der Lernenden herstellen. Auf ein weiteres Ziel macht Engel (2018) aufmerksam. Im Internet verfügbare Datensätze sind in der Regel nicht klein, numerisch und maximal bivariat. Daten des Big Data sind komplex strukturiert, multivariat und können sehr verschiedene Formen annehmen: Zahlen, Texte, Bilder, Ortskoordinaten und andere. Spezielle, für didaktische Zwecke entwickelte Software (z. B. gapminder.org) erlaubt den produktiven Umgang mit Big Data auch für Lernende und fordert so „Kompetenzen im algorithmischen Denken, im Verstehen von Datenstrukturen und im computergestützten Visualisieren von Zusammenhängen“ (Engel, 2018, S. 30 f.).

4.2 Algorithmisches Denken als Grunderfahrung

Algorithmen sind im Mathematikunterricht omnipräsent und bestimmen in Form von Formeln und Verfahren das äußere Bild des mathematischen Handelns als „Rechnen“: Zum Beispiel werden Flächeninhalte von Dreiecken nach der bekannten Formel $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$ berechnet.

Als Beispiel können die zahlreichen kulturhistorisch relevanten Algorithmen dienen, (z. B. Ziegenbalg, 2015) z. B. der Euklidische Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers, die Algorithmen von Heron zur Bestimmung von Quadratwurzeln, von Archimedes zur Approximation der Kreiszahl π oder der von Newton zur Bestimmung von Nullstellen einer Funktion. All diesen Unterrichtsinhalten ist gemein, dass sie durchaus ohne Rückgriff auf digitale Medien vollumfänglich unterrichtet werden können. Der Einsatz digitaler Werkzeuge allerdings birgt wieder einen Vorteil, den wir oben schon im Sinne des Auslagerungsprinzips für den Umgang mit Daten verdeutlicht haben: Indem man den Aufwand für Berechnungen und Visualisierungen an eine Software abgibt, gelingt es, den Fokus auf das Wesentliche zu lenken. Bei den genannten Algorithmen zur Approximation von Zahlwerten könnten dies Quantifizierungen von Aufwand, Genauigkeit und Geschwindigkeit sein. Auch curricular zentral gewichtete Inhalte des Mathematikunterrichts können bei Einsatz digitaler Werkzeuge als Algorithmen behandelt werden. Pinkernell (2005) berichtet über ein Kurskonzept, in dem das Integral als ein in verschiedenen Kontexten applizierbares Approximationsverfahren interpretiert wird. Die Programmierung der Approximation erfolgt hier in einem Listeneditor, der einer Tabellenkalkulation ähnlich ist. Es wird zur Lösung verschiedener inner- und außermathematische Probleme adaptiert. Die Programmstruktur aber bleibt unberührt und steht für das Integral als Ausdruck eines erfolgreich applizierten Approximationsverfahrens durch das Aufsummieren einer wachsenden Anzahl von kleiner werdenden Summanden.

Nun legt der KMK-Kompetenzrahmen mit der Formulierung „Algorithmen erkennen und formulieren“ den Fokus klar auf die Entwicklung von Algorithmen. Ein Blick in den ICILS (2018), eines der Referenzmodelle des KMK-Kompetenzrahmens, bestätigt: Der kompetente Umgang mit Algorithmen wird als Teil des

Computational Thinking (CT) begriffen, wonach CT als „an individual's ability to recognize aspects of real-world problems which are appropriate for computational formulation and to evaluate and develop algorithmic solutions to those problems so that the solutions could be operationalized with a computer“ beschrieben wird (Fraillon et al., 2019, S. 6; vgl. auch Eickelmann et al., 2019). Deutlich wird also: Algorithmen sollen nicht nur innermathematisch verortet werden, sondern müssen auch einen sichtbaren Bezug zu Phänomenen der Realität haben. Aus Perspektive der Bildungsstandards für das Fach Mathematik handelt es sich hier im Wesentlichen um die Fähigkeit des Modellierens. Es geht bei der Verankerung des CT im Mathematikunterricht um das Identifizieren von Problemen, für die algorithmische Lösungen möglich sind, sowie die Entwicklung passender Algorithmen und deren Validierung. Ein interdisziplinärer und fächerübergreifender Mathematik- und Informatikunterricht erscheint angebracht (Kortenkamp & Lambert, 2015). In der Tat wird der Bildungsgehalt von Algorithmen im Mathematikunterricht bisweilen sogar höher eingeschätzt als im Informatikunterricht (Meier, 1990; Hubwieser, 2007). Überhaupt wird dem informatischen Denken im Allgemeinen ein enger Zusammenhang zum Problemlösen zugesprochen (Hoppe & Löthe, 1984), und bei Schwank et al. (2003) findet sich die Fähigkeit zur Konstruktion von Algorithmen als Merkmal einer Typologie des mathematischen Denkens (Schwank, 2003; Schwank et al., 2003).

5 Digitale personale Bildung im Mathematikunterricht fachlich fördern

Die Idee der digitalen personalen Bildung in diesem Band geht zurück auf das humboldtsche Bildungsideal, das vor allem mit einem umfassenden Anspruch auf Allgemeinbildung und einem damit verbundenen ganzheitlichen Bildungsansatz verbunden ist, sowie auf das Konzept personaler fachlicher Bildung, in dem die fachlichen Grundlagen personaler Lehr- und Lernprozesse zentral gewichtet sind und für die Konturierung fachdidaktischen Wissens fruchtbar gemacht werden (vgl. Frederking & Bayrhuber 2020). Mit dem für Menschen in Deutschland nahezu uneingeschränkten Zugang zu Internet und multimedialen Inhalten eröffnen sich unter anderem eine Vielzahl von Bildungsangeboten, die kostenlos und jederzeit verfügbar sind. Dräger und Müller-Eiselt (2015) diskutieren in diesem Zusammenhang die Frage, inwiefern durch die allgemeine bzw. dauernde Verfügbarkeit digitaler Ressourcen im Internet das humboldtsche Bildungsideal zu verwirklichen hilft:

> „Wer motiviert ist und Einsatz zeigt, wer bereit ist zum lebenslangen Lernen, wer die Hilfe von Fachcommunities zu nutzen weiß, dem steht die Welt offen. Das war schon Wilhelm von Humboldts großes Ziel, er wollte ‚Bildung für alle' als Grundlage für ein selbstbestimmtes Leben. (…) Den großen Chancen stehen auch große Risiken gegenüber. Digitale Bildung birgt nicht nur Humboldts Ideal, sondern auch den Schrecken George Orwells: Es werden Unmengen an Daten erfasst und ausgewertet, Menschen

> zu Objekten von Algorithmen und Wahrscheinlichkeiten gemacht. Der Lerner wird gläsern und hinterlässt im Netz unauslöschliche Spuren. Im schlimmsten Fall fördert die Digitalisierung nicht mehr Gerechtigkeit, sondern schafft mehr Ungerechtigkeit." (S. 8–9)

Diese etwas pointiert gegenübergestellten Positionen markieren gleichsam die Pole, zwischen denen sich der Anspruch auf digitale personale Bildung im Fachunterricht positionieren und umsetzen lassen kann. Gerade für allgemeinere Fragen der Bildungsgerechtigkeit ergeben sich Herausforderungen, die z. B. mit dem Ziel einer *Digital Citizenship Education* verbunden sind (Couldry et al., 2014). Dazu gehört etwa *Digital Literacy* verstanden als Kompetenz, sich mit und durch digitale Medien zu informieren und mit ihnen zu kommunizieren, das Bewusstsein über den eigenen digitalen Fußabdruck oder Wissen zu Fragen des Copyrights. Auch Aspekte des Zugangs zu Bildung spielen in diesem Zusammenhang eine wichtige Rolle, was Ansätze wie *Bring your own device* (BYOD; Hammer & Schmidt, 2015) oder *Open Education* (Bonk et al., 2015) verdeutlichen.

In der mathematikdidaktischen Forschung gibt es eine lange und intensiv geführte Diskussion über den Beitrag des Faches Mathematik zur (Allgemein-)Bildung (Heymann, 1996; Lengnink & Peschek, 2001; Peschek, 1999; Skovsmose, 1998; Wille, 2000, 2001). So hebt etwa Lengnink (2005) hervor, dass gerade das Reflektieren und Beurteilen zentrale Charakteristika des mathematisch Mündigseins sind. Im Mathematikunterricht sollten dabei „Kraft und Grenzen von Mathematik gleichermaßen offenbar werden. Die Frage nach Sinn und Bedeutung von Mathematik für Menschen steht dabei im Vordergrund, Mathematik wird hinterfragbar" (S. 35). Schwerpunktmäßig stehen aus mathematikdidaktischer Forschungs- und Entwicklungsperspektive insofern eher Aspekte der Reflexion im Sinne der allgemeinen Mathematik und der Hinterfragbarkeit von an digitale Werkzeuge abgegebene (Arbeits-)Prozesse im Mittelpunkt, die im Folgenden näher beschrieben werden.

In Zeiten rasanter gesellschaftlicher Transformationsprozesse, die mit der Verfügbarkeit digitaler Medien verbunden sind, ist die Diskussion um das Verhältnis von Mathematik und Mensch gerade im Kontext digitaler personaler Bildung sehr aktuell. Auch wenn sich hierzu in der mathematikdidaktischen Community bislang keine einheitliche Position nachzeichnen lässt, so können doch zahlreiche mathematikdidaktische Beiträge diesem Themenkomplex zugeordnet werden (Hischer, 2016, S. 20; Krauthausen & Lorenz, 2011; Schmidt-Thieme & Weigand, 2015). Hischer (2016) beschreibt etwa den für die Mathematikdidaktik bedeutsamen Ansatz der Integrativen Medienpädagogik und hebt in diesem Zusammenhang insbesondere die Medienreflexion hervor, bei der es um eine kritische Haltung gegenüber (allgemeinbildungsrelevanten) Medien geht – gerade aus einer fachbezogenen Perspektive. Dies meint insbesondere, dass „Neue Medien nun in der Integrativen Medienpädagogik sowohl unter medien*kundlichen* als auch unter medien*reflektierenden* Aspekten *zusätzlich* zum *Unterrichtsgegenstand [werden]*, und sie dienen dabei der *Aufklärung* und der Vermittlung von *Haltungen* und *Einstellungen*." (S. 75) In diesem Zusammenhang hat demnach auch die Reflexion des Mediums eine wichtige Bedeutung für das begriffliche Lernen: Zum Beispiel können Funktionen mit Unstetigkeitsstellen softwareabhängig mal mit sichtbarer Sprungstelle und einmal ohne sichtbare Sprungstelle visualisiert werden. Die augenscheinliche Unzulänglichkeit der Technik ist Anlass, dem mathematischen Lerngegenstand auf diskursiver Ebene näherzukommen: „Man kann also *Unstetigkeit* mit Hilfe von Funktionenplottern *nicht darstellen*. Vertiefende Reflexion führt schließlich zu der Einsicht, dass man *Unstetigkeit* auch *nicht zeichnen* kann, und schließlich ergibt sich die Erkenntnis, dass man eigentlich *Unstetigkeit nicht darstellen*, sondern sich *nur vorstellen* kann“ (Hischer, 2016, S. 159).

Digitale personale Bildung im Mathematikunterricht ist für Lernende insofern zentral mit der Herausforderung verbunden, frei verfügbare Lernangebote beurteilen zu können – und das sowohl hinsichtlich des eigenen Ertrags für den weiteren Lernfortschritt als auch hinsichtlich der Qualität der Lernangebote an sich. So lassen sich im Internet etwa vielfältige Lernangebote finden, die aus fachdidaktischer und inhaltlicher Sicht kritisch beurteilt werden müssen (Jones & Cuthrell, 2011). Es erscheint plausibel, dass Lernenden eine solche Einschätzung Probleme bereiten kann, woraus sich Konsequenzen für die Inhalte des Mathematikunterrichts ableiten lassen. Dieser Problemkontext soll beispielhaft anhand des Themas *Lernvideos im Mathematikunterricht* verdeutlicht werden. Wir unterscheiden dabei zwei Aspekte: zum einen die Arbeit mit im Internet gefundenen Lernvideos und zum anderen die Erstellung eigener Lernvideos im Fachunterricht.

Beispiele für mathematikhaltige Videos finden sich zahlreich im Netz. Kritisch betrachtet werden müssen gerade solche (vermeintlichen) Lernvideos, die den Nutzerinnen und Nutzern Techniken und (Rechen-)Schemata vermitteln, ohne dabei die genauere inhaltliche Bedeutung hinter den begrifflichen Zusammenhängen zu thematisieren, z. B. zu Ableitungsregeln oder zu schriftlichen Subtraktionsverfahren. Allerdings belegen die Nutzungszahlen und die entsprechenden Kommentare der Nutzerinnen und Nutzer auch, dass sich aus didaktischer Sicht bedenkliche (vermeintliche) *Lern*videos sehr großer Beliebtheit erfreuen können. Problematisch ist z. B. die Nutzung falscher Terminologie, die Vermittlung von Eselsbrücken anstelle nachhaltiger Erklärungen oder das Evozieren von Vorstellungsbildern, die im Widerspruch zum mathematischen Sachverhalt stehen. Gerade in solchen Zusammenhängen ist es von zentraler Bedeutung, dass Lernende über geeignete Kategorien wie die oben genannten verfügen, die ihnen helfen, frei zugängliche „Lern-“Angebote selbst und in mündiger Weise auszuwählen. So beschreibt etwa Götze (2019) ein Entwicklungsprojekt, das u. a. auch dazu anregen soll, vorhandene YouTube Videos, die von Studierenden im Selbststudium genutzt werden, gemeinsam zu reflektieren: Es „ist offensichtlich, dass solche Videos von sehr unterschiedlicher Qualität sind und möglicherweise die Einstellung von Mathematik als Regelwerk noch weiter unterstützen. Somit entstand die Idee, eigene Erklärfilme zu erstellen, die die Prozesshaftigkeit mathematischen Lernens repräsentieren und möglicherweise zur Entwicklung konzeptueller Vorstellungen beitragen.“ (S. 120) Medienreflexion schließt an dieser Stelle demnach mit ein, dass die Videos von den Lernenden und den Lehrenden vor allem daraufhin kritisch geprüft werden müssen, ob sie nicht nur Verfahren und Techniken vermitteln, sondern auch die inhaltliche Bedeutung der zugrundeliegenden mathematischen Zusammenhänge.

Daneben können Videos als Lerngegenstand im Unterricht auch selbst produziert werden. Erklärvideos werden nach Wolf (2015) definiert als „eigenproduzierte Filme, in denen erläutert wird, wie man etwas macht oder wie etwas funktioniert bzw. in denen abstrakte Konzepte erklärt werden“ (S. 123). Leinigen (2019) etwa untersucht in diesem Zusammenhang für den Mathematikunterricht die Möglichkeit, mit Hilfe solcher selbst erstellter Videos nicht nur zu transportieren, *was und wie* etwas gemacht wird, sondern auch *warum*. Schacht et al. (2019) beschreiben hierbei die Produktion von Erklärvideos in einem schulformübergreifenden Design unter dem besonderen Aspekt der Bildungsgerechtigkeit. Hierbei „produzieren die Lernenden der weiterführenden Schule [...] Erklärvideos für fachliche Gegenstände, die von den Grundschüler*innen im Rahmen einer Videokonferenz als besonders herausfordernd identifiziert werden und für die diese sich eine Lernhilfe in Form eines solchen Erklärvideos wünschen.“ (S. 440) Dieses Setting ist durchaus für beide Seiten – Produzierende und Rezipierende – produktiv (Wolf, 2018; Wolf & Kulgemeyer, 2016).

Die Erfahrungen gerade bei der Produktion solcher Lehrfilme zeigen, dass Lernende durchaus sehr fundierte – fachliche und fachdidaktische – Reflexionen vornehmen. Die Auswertung solcher Erstellungsprozesse zeigt, dass die produzierenden Schülerinnen und Schüler auf Möglichkeiten der Dynamisierung mathematischer Konzepte achten, auf die Nutzung unterschiedlicher Repräsentationsmittel eingehen (wie z. B. Graphen, Tabellen oder Terme) und auf sprachliche Stützen oder auf die Explizierung metakognitiver Aktivitäten hinweisen (Schacht et al., 2019).

Solche Reflexionsprozesse im Rahmen der Erstellung von Erklärvideos durch Schülerinnen und Schüler sollten im Unterricht bewusst genutzt werden, um so einen Beitrag zu digitaler personaler Bildung im Mathematikunterricht zu leisten, in dem Kriterien für die Beurteilung und Reflexion von lernförderlich gestalteten Lernvideos vermittelt werden. Die Beispiele der Arbeit mit – sowohl im Internet zu findenden als auch selbst produzierten – Videos zeigen demnach, dass die mathematische und mathematikdidaktische Reflexion eine zentrale Aktivität für die digitale personale Bildung im Mathematikunterricht darstellt.

Vergleichbare Beiträge im Kontext mathematikhaltiger Apps finden sich etwa bei Klinger (2019), der die Rolle sowie die Einsatzmöglichkeiten mathematikhaltiger Apps sowohl in schulischen als auch in außerschulischen Lernkontexten diskutiert. Digitale personale Bildung im Mathematikunterricht zielt in diesem Zusammenhang sogar nicht nur auf die Lernenden selbst (in dem Sinne, dass ein Beitrag zur Mündigkeit bei der Auswahl und Nutzung mathematikhaltiger Apps geleistet wird), sondern auch auf die Lehrkräfte. Ihnen kommt in diesem Zusammenhang eine besonders wichtige Rolle zu, denn der Mathematikunterricht kann und sollte ein wesentlicher Ort sein, in dem Kriterien und Kategorien für die Auswahl und die Nutzung digitaler Angebote diskutiert und beurteilt werden. Darüber hinaus spielt auch die Frage eine wichtige Rolle, wie sich Apps oder Lernfilme im Mathematikunterricht in produktiver Weise einsetzen lassen, um einen Beitrag zum inhaltlichen Verständnis der mathematischen Konzepte leisten zu können. Auch hier bedarf es nicht nur digitaler personaler fachlicher Bildungsanstrengungen für Schülerinnen und Schüler, sondern auch für die Lehrkräfte, die diese Inhalte fachdidaktisch fundiert aufbereiten und vermitteln sollten.

6 Zukünftige Aufgaben der Mathematikdidaktik in Forschung, Lehre und Weiterbildung

Spätestens seit den 2016 vom BMBF und von der KMK angestoßenen Initiativen zum Lernen mit und über digitale Medien ist die Digitalisierung eines der Schwerpunktthemen der bildungspolitischen Diskussion. In diesem Beitrag wurden Entwicklungen und Konzepte der Digitalisierung aus mathematikdidaktischer Perspektive beleuchtet. Wie in den vorhergehenden Abschnitten skizziert, kann die Mathematikdidaktik auf eine lange Forschungstradition zum Einsatz digitaler Werkzeuge und Medien im Mathematikunterricht zurückblicken, die in Konzepte zur Förderung fachlicher Kompetenzen (Abschnitt 1), in digitale Kompetenzen der KMK-Standards (Abschnitt 2) und digitale fachliche Kompetenzen über die KMK-Standards hinaus (Abschnitt 3) sowie in Ansätze zu personaler fachlicher Bildung (Abschnitt 4) münden. Gleichwohl sehen wir einige Aufgaben, denen sich die Mathematikdidaktik in den kommenden Jahren verstärkt widmen sollte, um Potenziale digitaler Werkzeuge und Medien im Mathematikunterricht noch besser ausschöpfen zu können.

6.1 Zukünftige Aufgaben für mathematikdidaktische Forschung

In bisherigen Forschungsarbeiten wurden vielversprechende Potenziale digitaler Medien herausgestellt. Ferner liegen mittlerweile zahlreiche Erkenntnisse vor, ob und wie Lernende diese Potenziale in ihre Nutzungsweisen einfließen lassen (Walter, 2018). Die Frage, wie bestimmte Gestaltungsmerkmale digitaler Werkzeuge und Medien von Schülerinnen und Schülern genutzt werden, ist bisweilen aber nicht erschöpfend untersucht worden. Darüber hinaus sollte es nicht Ziel sein, eine Ersetzung nicht-digitaler durch digitale Medien vorzunehmen (Hillmayr et al., 2020). Vielmehr erscheint eine aufeinander abgestimmte Kombination digitaler und nicht-digitaler Medien fruchtbarer, in der die jeweiligen Vorteile genutzt werden können. Dies kann unter anderem durch (weitere) Interventionsstudien mit verschiedenen Settings (nur digital, nur nicht-digital, Kombination aus digital und nicht-digital) in den Blick genommen werden, um Konzepte für die sinnvolle Kombination digitaler und nicht-digitaler Medien zu entwickeln. Ganz neu ins Blickfeld der didaktischen Forschung geraten Augmented und Virtual Reality, die es beispielweise erlauben, mathematische Sachverhalte in scheinbar materialer Form zu erfahren und zu erkunden. Beim Einsatz von 3D-Druckern geht die Materialisierung des Lerngegenstands noch einen Schritt weiter. Welche Wirkungen virtuelle oder echte haptische Erfahrungen mit eigentlich abstrakten mathematischen Konzepten auf die Begriffsbildung haben ist eine spannende Frage. Ihre Beantwortung könnte Ansätze und Ergebnisse vergleichbarer Untersuchungen der mathematischen Begriffsbildung mit digitalen Multirepräsentationssystemen aufgreifen und fortsetzen. Eine dritte Aufgabe besteht darin, Lehrkräfte bei der inneren Differenzierung in leistungsheterogenen Schulklassen zu unterstützen. Hierfür wird vielfach adaptiven digitalen Lernumgebungen mit Feedback Potenzial beigemessen. Sie sind ein Ansatz, um Lernende unterschiedlicher Leistungsniveaus auch in Gruppen individuell fördern zu können. Adaptivität und Feedback können dabei in interaktive Lernumgebungen so eingebunden werden, dass die Schülerinnen und Schüler im Unterricht ein individuell ausgewähltes Lernangebot vorfinden, das für sie eine adäquate Förderung verspricht. Im Bereich der Bruchrechnung konnten davon insbesondere leistungsschwache Schülerinnen und Schüler profitieren (Reinhold et al., 2020). Gleichwohl sind solche adaptiven digitalen Lernangebote auf gängigen Applikationsplattformen keineswegs die Regel. Insbesondere für den Primarbereich liegen zahlreiche digitale Lernangebote vor, die suggerieren, individuelle Leistungsstände einzelner Kinder aufgreifen und heben zu können. Fachdidaktische Analysen zeigen hierbei jedoch sehr schnell, dass diese Erfolgsversprechungen nicht standhalten, da sie eher auf behavioristischen Lehr-Lernvorstellungen beruhen. Die sog. Künstliche Intelligenz (KI) könnte in diesem Bereich zur Entwicklung Software beitragen, die aus mathematikdidaktischer Sicht qualitativ hochwertig ist, wenngleich es bis dahin noch ein langer Weg zu sein scheint.

6.2 Zukünftige Aufgaben für mathematikdidaktische Lehre mit digitalen Medien

Um angehende Mathematiklehrkräfte davon zu überzeugen, digitale Werkzeuge und Medien sinnvoll in ihrem Mathematikunterricht einzusetzen, ist unserer Meinung nach ein erster zentraler Schritt, angehenden Lehrkräften bereits in ihrer Ausbildung an der Universität die Potenziale digitaler Werkzeuge und Medien zu vergegenwärtigen – auch durch ihren Einsatz in der Lehre. Dies ist insbesondere deswegen zentral, da nicht nur Lehrkräfte, sondern auch Schülerinnen und Schüler von einer gezielten Ausbildung von Lehrkräften im Einsatz digitaler Medien profitieren können (Hillmayr et al., 2020). Dabei sollten digitale Werkzeuge und Medien in der universitären Lehre nicht nur vereinzelt und separat in Seminaren oder Vorlesungen aufgegriffen werden, die sich genuin der Digitalisierung widmen. Fruchtbarer erscheint es, digitale Medien in etablierten fachdidaktischen Veranstaltungen zu integrieren.

6.3 Zukünftige Aufgaben für mathematikdidaktische Weiterbildung

Um nicht nur zukünftige, sondern auch derzeit praktizierende Lehrkräfte hinsichtlich eines sinnvollen Einsatzes digitaler Medien zu unterstützen, ist auch die Frage der Fort- und Weiterbildung zu berücksichtigen. In diesem Bereich besteht die zentrale Aufgabe darin, entsprechende Fortbildungsstrukturen zu schaffen und diese auch entsprechend zu beforschen.

Zum einen sollte in diesem Zusammenhang untersucht werden, über welches Professionswissen eine Mathematiklehrkraft verfügen sollte, um Mathematikunterricht mit digitalen Medien ansprechend gestalten zu können. In diesem Zusammenhang sind auch die Einstellungen von Lehrpersonen nicht zu unterschätzen, die sich hinsichtlich des Einsatzes digitaler Medien im Mathematikunterricht zum Teil grundlegend unterscheiden (Klinger et al., 2018; Thurm, 2018) und durchaus beeinflussen können, ob Lehrkräfte digitale Medien in ihrem Unterricht überhaupt verwenden (Kim et al., 2013) oder zu welchem Zweck sie genutzt werden (Drijvers et al., 2010). Mittlerweile liegen mathematikdidaktische Angebote zur Weiterbildung vor, die auch die oben formulierten Fragen in den Blick nehmen. Das Deutsche Zentrum für Lehrerbildung Mathematik (DZLM; dzlm.de) leistet viele lohnenswerte Beiträge – etwa durch die Entwicklung der Webseite PIKAS digi, auf der zahlreiche Anregungen für einen fachbezogenen Einsatz digitaler Medien in Unterricht und Fortbildung verfügbar sind (Baldus & Walter, 2019) oder durch entsprechende Fortbildungsbausteine (vgl. z. B. das Angebot ‚DIGMA – Digitale Medien zur kognitiven Aktivierung' des DZLM).

Um die genannten Aufgaben zielführend bewältigen zu können, bedarf es Anstrengungen der gesamten mathematikdidaktischen Community. Wir betrachten sie daher nicht als Aufgaben eines überschaubaren Kreises von interessierten Lehrkräften sowie von Forscherinnen und Forscher, sondern als schulstufen- und phasenübergreifende Gemeinschaftsaufgaben der Mathematikdidaktik. Deren Bewältigung kann einen Beitrag zur Ausschöpfung von Potenzialen digitaler Werkzeuge und Medien im Mathematikunterricht leisten, sie wird allerdings noch andauern und ein Forschungsprogramm der anstehenden Dekade darstellen.

Literatur

Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction*, *16*(3), 183–198.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, *34*(3), 66–72.

Baldus, A. C. & Walter, D. (2019). Konzeption eines Aus- und Fortbildungsmoduls für das Projekt „PIKAS digi" sowie Erfahrungen aus der Erprobung bei Lehramtsanwärterinnen und Lehramtsanwärtern. In D. Walter & R. Rink (Hrsg.), *Digitale Medien in der Lehrerbildung Mathematik – Konzeptionelles und Beispiele* (S. 183–200). Münster: WTM-Verlag.

Barzel, B. & Schreiber, C. (2017). Digitale Medien im Unterricht. In M. Abshagen (Hrsg.), *Basiswissen Lehrerbildung: Mathematik unterrichten* (S. 200–215). Seelze: Klett/Kallmeyer.

Bauer, A. (2015). *Argumentieren mit multiplen und dynamischen Repräsentationen.* Würzburg: University Press.

Ben-Zvi, D. & Garfield, J. (2004). Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking: Goals, Definitions, and Challenges. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Hrsg.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (S. 3–15). Springer Netherlands.

Ben-Zvi, D. & Makar, K. (Hrsg.) (2016). *The Teaching and Learning of Statistics.* Springer International Publishing.

Bezold, A. (2009). *Förderung von Argumentationskompetenzen durch selbstdifferenzierende Lernangebote – eine Studie im Mathematikunterricht der Grundschule.* Dr. Kovač.

Bezold, A. & Ladel, S. (2014). Reasoning in primary mathematics – An ICT-supported environment. *Bildung und Erziehung*, *67*, 409–418.

Bikner-Ahsbahs, A. (2020). Networking of Theories reconsidered. In B. Barzel, R. Bebernik, L. Göbel, M. Pohl, H. Ruchniewicz, F. Schacht & D. Thurm (Hrsg.), *Proceedings of the 14th International Conference on Technology in Mathematics Teaching - ICTMT 14.* DuEPublico, Duisburg-Essen Publications Online. https://doi.org/10.17185/duepublico/48820.

Bonk, C. J., Lee, M. M., Reeves, T. C. & Reynolds, T. H. (Hrsg.). (2015). *MOOCs and Open Education Around the World.* Routledge.

Couldry, N., Stephansen, H., Fotopoulou, A., MacDonald, R., Clark, W. & Dickens, L. (2014). Digital citizenship? Narrative exchange and the changing terms of civic culture. *Citizenship Studies*, *18*(6–7), 615–629.

Dilling, F. & Witzke, I. (2020). The Use of 3D-Printing Technology in Calculus Education: Concept Formation Processes of the Concept of Derivative with Printed Graphs of Functions. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 6, 320–339. https://doi.org/10.1007/s40751-020-00062-8

Dräger, J. & Müller-Eiselt, R. (2015). *Die digitale Bildungsrevolution. Der radikale Wandel des Lernens und wie wir ihn gestalten können.* Deutsche Verlags-Anstalt.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H. & Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: Instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *75*(2), 213–234. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9254-5

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1), 103–131.

Eickelmann, B., Vahrenhold, J. & Labusch, A. (2019). Der Kompetenzbereich „Computational Thinking“: Erste Ergebnisse des Zusatzmoduls für Deutschland im internationalen Vergleich. In B. Eickelmann, W. Bos, J. Gerick, F. Goldhammer, H. Schaumburg, K. Schwippert, M. Senkbeil & J. Vahrenhold (Hrsg.), *ICILS 2018 Deutschland. Computer- und informationsbezogene Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern im zweiten internationalen Vergleich und Kompetenzen im Bereich Computational Thinking* (S. 367–398). Münster: Waxmann.

Engel, J. (2018). Data Science als Perspektive im Mathematik- und Informatikunterricht. In G. Pinkernell & F. Schacht (Hrsg.), *Digitales Lernen im Mathematikunterricht.* (S. 27–38). Hildesheim: Franzbecker.

Fahlgren, M., Brunström, M., Dilling, F., Kristinsdóttir, B., Pinkernell, G. & Weigand, H.-G. (2021). Technology-rich assessment in mathematics. In A. Clark-Wilson, J. Trgalova & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Mathematics Education in the Digital Age: Learning, Practice and Theory* (S. 69–83). Abingdon Oxon & New York: Routledge.

Fischbein, E. (1975). *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children.* Springer Netherlands.

Fischbein, E. & Gazit, E. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? An exploratory research study. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(1), 1–24.

Fischbein, E. & Schnarch, D. (1997). The Evolution with Age of Probabilistic, Intuitively Based Misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(1), 96.

Flößl, T. (2015). *Seamless Learning*. Books on Demand.

Fraillon, J., Ainley, J., Schulz, W., Friedman, T. & Duckworth, D. (2019). *Preparing for life in a digital world: The IEA international computer and information literacy study 2018 international report.* Australian Council for Educational Research (ACER).

Frederking, V. & Bayrhuber, H. (2020). Fachdidaktisches Wissen und fachliche Bildung. Ein Klärungsversuch im Horizont der Allgemeinen Fachdidaktik. In D. Scholl, S. Wernke & D. Behrens (Hrsg.), *Allgemeine Didaktik und Fachdidaktik.* Jahrbuch für Allgemeine Didaktik 2019 (S. 10–29). Baltmannsweiler: Schneider.

Garfield, J. & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing Students' Statistical Reasoning*. Springer Netherlands.

Gigerenzer, G. (2004). Die Evolution des statistischen Denkens. *Unterrichtswissenschaft*, *32*(1), 4–22.

Götze, D. (2019). Arithmetisches Verständnis bei Grundschulstudierenden fördern – Konzeptionelles und Beispiele aus dem Projekt „Arithmetik digital.“ In D. Walter & R. Rink (Hrsg.), *Digitale Medien in der Lehrerbildung Mathematik – Konzeptionelles und Beispiele für die Primarstufe* (S. 115–132). Münster: WTM-Verlag.

Hammer, T. & Schmidt, R. (2015). Bring your own device (BYOD). Suche nach Extremwerten auf schülereigenen Geräten. *mathematik lehren*, *32*(189), 30–35.

Hanna, G. & Barbeau, E. (2008). Proofs as bearers of mathematical knowledge. *ZDM*, *40*(3), 345–353.

Heinrich, F., Bruder, R. & Bauer, C. (2015). Problemlösen lernen. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 279–301). Springer.

Helmerich, M. A. & Hoffart, E. S. (2014). Der Einsatz von Videos zur Aktivierung der Reflexion in der Lehrerbildung. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 515–518). Münster: WTM-Verlag.

Heymann, H. W. (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik*. Beltz.

Hillmayr, D., Ziernwald, L., Reinhold, F., Hofer, S. I. & Reiss, K. M. (2020). The potential of digital tools to enhance mathematics and science learning in secondary schools: A context-specific meta-analysis. *Computers & Education*, 103897.

Hischer, H. (2016). *Mathematik – Medien – Bildung*. Wiesbaden: Springer Fachmedien. https://doi.org/10.1007/978-3-658-14167-7

Hoppe, H. U. & Löthe, H. (1984). *Problemlösen und Programmieren mit LOGO.* Wiesbaden: Vieweg+Teubner. https://doi.org/10.1007/978-3-322-92745-3

Hubwieser, P. (2007). *Didaktik der Informatik.* Springer.

ICILS 2018 (Eickelmann, B., Bos, W., Gerick, J., Goldhammer, F., Schaumburg, H., Schwippert, K., Senkbeil, M. & Varenhold, J.) (Hrsg.) (2019). *ICILS 2018. Computer- und informationsbezogene Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in der 8. Jahrgangsstufe im internationalen Vergleich.* Münster, New York: Waxmann.

Ingelmann, M. (2009). *Evaluation eines Unterrichtskonzeptes für einen CAS-gestützten Mathematikunterricht in der Sekundarstufe.* Berlin: Logos.

Jebe, F., Konietzko, S., Lichtschlag, M. & Liebau, E. (2019). *Studie: „Jugend/YouTube/Kulturelle Bildung. Horizont 2019“.* Essen: Rat für Kulturelle Bildung e. V.

Jones, T. & Cuthrell, K. (2011). YouTube: Educational Potentials and Pitfalls. *Computers in the Schools*, *28*(1), 75–85.

Kay, R. H. & Edwards, J. (2012). Examining the Use of Worked Example Video Podcasts in Middle School Mathematics Classrooms: A Formative Analysis. *Canadian Journal of Learning and Technology*, *38*(3).

Kim, C., Kim, M. K., Lee, C., Spector, J. M. & DeMeester, K. (2013). Teacher beliefs and technology integration. *Teaching and Teacher Education*, *29*, 76–85.

Klinger, M. (2019). „Besser als der Lehrer!“ – Potenziale CAS-basierter Smartphone-Apps aus didaktischer und Lernenden-Perspektive. In G. Pinkernell & F. Schacht (Hrsg.), *Digitalisierung fachbezogen gestalten* (S. 69–85). Franzbecker. Online: https://duepublico.uni-duisburg-essen.de/servlets/DocumentServlet?id=49230 (Letzter Zugriff: 02. 07. 2021).

Klinger, M., Thurm, D., Itsios, C. & Peters-Dasdemir, J. (2018). Technology-Related Beliefs and the Mathematics Classroom: Development of a Measurement Instrument for Pre-Service and In-Service Teachers. In B. Rott, G. Törner, J. Peters-Dasdemir, A. Möller & Safrudiannur (Hrsg.), *Views and Beliefs in Mathematics Education* (S. 233–244). Springer International Publishing.

KMK (Kultusministerkonferenz) (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. Luchterhand. Online: https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf (Letzter Zugriff: 02. 07. 2021).

KMK (Kultusministerkonferenz) (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich*. Luchterhand. Online: http://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Primar.pdf (Letzter Zugriff: 02. 07. 2021).

KMK (Kultusministerkonferenz) (2017). Bildung in der digitalen Welt. Strategie der Kultusministerkonferenz. Online: www.kmk.org/themen/bildung-in-der-digitalen-welt/strategie-bildung-in-der-digitalen-welt.html (Letzter Zugriff: 02. 07. 2021).

Kortenkamp, U. & Lambert, A. (2015). Wenn …, dann … bis … Algorithmisches Denken (nicht nur) im Mathematikunterricht. *mathematik lehren*, *188*, 2–9.

Krauthausen, G. & Lorenz, J. H. (2011). Computereinsatz im Mathematikunterricht. In G. Walther, M. van den Heuvel-Panhuizen, D. Granzer & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret* (S. 162–183). Cornelsen.

Krüger, K., Sill, H.-D. & Sikora, C. (2015). *Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I*. Springer.

Laakmann, H. (2013). *Darstellungen und Darstellungswechsel als Mittel zur Begriffsbildung*. Springer Fachmedien.

Ladel, S. (2009). *Multiple externe Repräsentationen (MERs) und deren Verknüpfung durch Computereinsatz*. Dr. Kovač.

Ladel, S. (2012). Förderung allgemeiner mathematischer Kompetenzen durch den Einsatz digitaler Medien in der Primarstufe. In M. Ludwig & M. Kleine (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012* (S. 529–532). WTM-Verlag.

Leavy, A., Meletiou-Mavrotheris, M. & Paparistodemou, E. (Hrsg.) (2018). *Statistics in Early Childhood and Primary Education: Supporting Early Statistical and Probabilistic Thinking*. Springer Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-13-1044-7

Leinigen, A. (2019). Kinder erklären für Kinder mathematische Sachverhalte mit Lehrfilmen. In A. Frank, S. Krauss & K. Binder (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2019* (S. 977–980). Münster: WTM-Verlag.

Lengnink, K. (2005). Mathematik reflektieren und beurteilen: Ein diskursiver Prozess zur mathematischen Mündigkeit. In K. Lengnink & F. Siebel (Hrsg.), *Mathematik präsentieren, reflektieren, beurteilen* (S. 21–36). Verlag Allg. Wissenschaft.

Lengnink, K. & Peschek, W. (2001). Das Verhältnis von Alltagsdenken und mathematischem Denken als Inhalt mathematischer Bildung. In K. Lengnink, S. Prediger & F. Siebel (Hrsg.), *Mathematik und Mensch: Sichtweisen der Allgemeinen Mathematik* (S. 65–81). Verlag Allgemeine Wissenschaft.

Lichti, M. (2019). *Funktionales Denken fördern: Experimentieren mit gegenständlichen Materialien oder Computer-Simulationen.* Springer Fachmedien.

Meier, M. W. (1990). *Anforderungen an die Informatikausbildung in den neunziger Jahren aus der Sicht der Wirtschaft.* In G. Cyranek, H.J. Forneck & H. Goorhuis (Hrsg.), *Beiträge zur Didaktik der Informatik* (S. 55–73). Diesterweg/Sauerländer.

Mishra, P. & Koehler, M. J. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge. *Teachers College Record*, *108*(6), 1017–1054.

Moyer-Packenham, P. S., Litster, K., Bullock, E. P. & Shumway, J. F. (2018). Using Video Analysis to Explain How Virtual Manipulative App Alignment Affects Children's Mathematics Learning. In L. Ball, P. Drijvers, S. Ladel, H.-S. Siller, M. Tabach & C. Vale (Hrsg.), *Uses of Technology in Primary and Secondary Mathematics Education* (S. 9–34). Springer International Publishing.

OECD. (2018a). *PISA 2021 Mathematics Framework (Second Draft).* OECD Publishing.

OECD. (2018b). *The Future of Education and Skills: Education 2030. The Future We Want.* OECD Publishing.

Peschek, W. (1999). Mathematische Bildung meint auch Verzicht auf Wissen. In G. Kadunz, G. Ossimitz, W. Peschek, E. Schneider & B. Winkelmann (Hrsg.), *Mathematische Bildung und Neue Technologien* (S. 263–270). Vieweg+Teubner.

Pinkernell, G. (2005). Bestand, Volumen, Mittelwert – Aspekte des Integralbegriffs vernetzen. In B. Barzel, S. Hußmann & T. Leuders (Hrsg.), *Computer, Internet & Co im Mathematikunterricht* (S. 234–242). Cornelsen.

Pinkernell, G. (2015). Reasoning with dynamically linked multiple representations of functions. In K. Krainer & N. Vondrová (Hrsg.), *Proceedings of the CERME 9 – Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2531–2537.

Pinkernell, G. & Vogel, M. (2017). „Das sieht aber anders aus" – zu Wahrnehmungsfallen beim Unterricht mit computergestützten Funktionsdarstellungen. *Der Mathematikunterricht*, *63*(6), 38–46.

Polya, G. (1945). *How to solve it; a new aspect of mathematical method.* Princeton: Princeton University Press.

Radatz, H. (1990). Was können sich Schüler unter Rechenoperationen vorstellen? *Mathemathische Unterrichtspraxis*, *I. Quartal*(11), 3–8.

Rauh, B. (2012). Höheres Lernen mit digitalen Medien – Auch im Bereich der Arithmetik? In S. Ladel & C. Schreiber (Hrsg.), *Lernen, Lehren und Forschen in der Primarstufe* (S. 37–58). Franzbecker.

Reinhold, F., Hoch, S., Werner, B., Richter-Gebert, J. & Reiss, K. (2020). Learning fractions with and without educational technology: What matters for high-achieving and low-achieving students? *Learning and Instruction*, *65*, 101264.

Reiss, K. (2009). Wege zum Beweisen. Einen „Habit of Mind" im Mathematikunterricht etablieren. *mathematik lehren*, *155*, 4–9.

Rogers, Y. (2012). *HCI Theory: Classical, Modern, and Contemporary.* Morgan & Claypool.

Roth, J. (2019). Digitale Werkzeuge im Mathematikunterricht – Konzepte, empirische Ergebnisse und Desiderate. In A. Büchter, M. Glade, R. Herold-Blasius, M. Klinger, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.), *Vielfältige Zugänge zum Mathematikunterricht* (S. 233–248). Springer Fachmedien.

Santos-Trigo, M., Moreno-Armella, L. & Camacho-Machín, M. (2016). Problem solving and the use of digital technologies within the Mathematical Working Space framework. *ZDM*, *48*(6), 827–842.

Schacht, F. (2017). Between the Conceptual and the Signified: How Language Changes when Using Dynamic Geometry Software for Construction Tasks. *Digital Experiences in Mathematics Education, 4*(1), 20–47.

Schacht, F., Barzel, B., Daum, S., Klinger, A., Klinger, M., Schröder, P., Schüler, A. & Wardemann, S. (2019). Das fachliche Lernen stärken. Zur Nutzung von Erklärvideos an Schulen in sozial herausfordernder Lage. *Die Deutsche Schule*, *111*(4), 435–455.

Schmidt-Thieme, B. & Weigand, H.-G. (2015). Medien. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 461–490). Springer Spektrum.

Schoenfeld, A. H. (1979). Explicit Heuristic Training as a Variable in Problem-Solving Performance. *Journal for Research in Mathematics Education*, *10*(3), 173.

Schulz, A. & Walter, D. (2019). Darstellungen im Mathematikunterricht – real, mental, digital. In A. S. Steinweg (Hrsg.), *Darstellen und Kommunizieren – Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2019* (S. 39–54). Bamberg University Press.

Schwank, I. (2003). Einführung in prädikatives und funktionales Denken. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *35*(3), 70–78.

Schwank, I., Armbrust, S. & Libertus, M. (2003). Prädikative versus funktionale Denkvorgänge beim Konstruieren von Algorithmen. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *35*(3), 79–85.

Sinclair, N. & Yurita, V. (2008). To be or to become: How dynamic geometry changes discourse. *Research in Mathematics Education, 10*(2), 135–150.

Skovsmose, O. (1998). Linking mathematics education and democracy: Citizenship, mathematical archaeology, mathemacy and deliberative interaction. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *30*(6), 195–203.

Thurm, D. (2018). Teacher Beliefs and Practice When Teaching with Technology: A Latent Profile Analysis. In L. Ball, P. Drijvers, S. Ladel, H.-S. Siller, M. Tabach & C. Vale (Hrsg.), *Uses of Technology in Primary and Secondary Mathematics Education* (S. 409–419). Springer.

Urff, C. (2020). *Digitale Lernmedien.* https://www.lernsoftware-mathematik.de (Letzter Zugriff: 28.02.2022).

Walter, D. (2018). *Nutzungsweisen bei der Verwendung von Tablet-Apps.* Springer Fachmedien.

Weigand, H.-G. & Bichler, E. (2010). The long-term Project „Integration of Symbolic Calculator in Mathematics Lessons“ – The case of Calculus. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Hrsg.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 1191–1200). Lyon: Institut National de Recherche Pédagogique.

Weigand, H.-G. & Weth, T. (2002). *Computer im Mathematikunterricht. Neue Wege zu alten Zielen.* Springer Spektrum.

Werth, G. (2014). *Ziehen und Beweisen mit DGS. Welche Beweiskraft haben für Studierende die Erkenntnisse, die sie im Zugmodus gewinnen?* [Universität Paderborn]. Online: http://digital.ub.uni-paderborn.de/ubpb/urn/urn:nbn:de:hbz:466:2-14966 (Letzter Zugriff: 02. 07. 2021).

Wille, R. (2000). Bildung und Mathematik. *Mathematische Semesterberichte*, *47*(1), 11–25.

Wille, R. (2001). Mensch und Mathematik: Logisches und mathematisches Denken. In K. Lengnink, S. Prediger & F. Siebel (Hrsg.), *Mathematik und Mensch: Sichtweisen der Allgemeinen Mathematik* (S. 139–158). Verlag Allgemeine Wissenschaft.

Wolf, K. D. (2015). Video-Tutorials und Erklärvideos als Gegenstand, Methode und Ziel der Medien- und Filmbildung. In A. Hartung, T. Ballhausen, C. Trültzsch-Wijnen, A. Barberi & K. Kaiser-Müller (Hrsg.), *Filmbildung im Wandel* (S. 121–131). New Academic Press.

Wolf, K. D. (2018). Video statt Lehrkraft? Erklärvideos als didaktisches Element im Unterricht. *Computer + Internet*, *109*, 4–6.

Wolf, K. D. & Kulgemeyer, C. (2016). Lernen mit Videos? Erklärvideos im Physikunterricht. *Naturwissenschaften im Unterricht: Physik*, *152*, 36–41.

Ziegenbalg, J. (2015). *Elementare Zahlentheorie. Beispiele, Geschichte, Algorithmen.* Wiesbaden: Springer.

DuEPublico

Duisburg-Essen Publications online

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Offen im Denken

ub universitäts bibliothek

Dieser Text wird via DuEPublico, dem Dokumenten- und Publikationsserver der Universität Duisburg-Essen, zur Verfügung gestellt. Die hier veröffentlichte Version der E-Publikation kann von einer eventuell ebenfalls veröffentlichten Verlagsversion abweichen.

DOI: 10.17185/duepublico/82319
URN: urn:nbn:de:hbz:465-20241230-085841-6

Pinkernell, Guido; Reinhold, Frank; Schacht, Florian; Walter, Daniel: Mathematische Bildung in der digitalen Welt. in: Frederking, Volker; Romeike, Ralf (Hrsg.). *Fachliche Bildung in der digitalen Welt. Digitalisierung, Big Data und KI im Forschungsfokus von 15 Fachdidaktiken.* - Münster: Waxmann, 2022, S. 234 - 259

© Waxmann Verlag GmbH, 2022. Alle Rechte vorbehalten.