ZUM VERHÄLTNIS VON WISSENS-ENTWICKLUNG UND BEGRÜNDUNG IN DER MATHEMATIK – BEWEISEN ALS DIDAKTISCHES PROBLEM

Hans Niels Jahnke

Materialien und Studien Band 10

Institut für Didaktik der Mathematik
der Universität Bielefeld

Fotovorlage: Maria Otte
Gesamtherstellung: Kramer-Druck KG, Bielefeld

INHALT

VORWORT

ZUR FRAGE DER ENTWICKLUNG THEORETISCHER BEGRIFFE

M. Otte, Bielefeld

In der vorliegenden Arbeit "Zum Verhältnis von Wissensentwicklung und Begründung in der Mathematik" von Niels Jahnke werden bestimmte konzeptionelle Grundlagen der Arbeitsgruppe "Mathematiklehrerbildung" am IDM in einem spezifischen Problemzusammenhang und gleichzeitig in grundsätzlicher Weise konkretisiert. Auf den folgenden Seiten soll versucht werden, den Gesamtkontext, in dem die Arbeit steht, näher zu beschreiben. Diese Beschreibung erfolgt in Form einer Diskussion wichtiger Fragestellungen, die um das Verhältnis von Wissen und wissenschaftlicher Tätigkeit zentriert sind.

I. Komplementarität des Begriffs und Wissenschaftsgeschichte.

In der Wissenschaftsgeschichtsschreibung wie auch in der Wissenschaftstheorie ist das Problem der Genesis von neuem Wissen bzw. die Frage der Theoriendynamik von zentraler Bedeutung. Das Gewicht dieser Frage rührt insbesondere daher, daß eine Reihe anderer Probleme, etwa die Frage nach dem Verhältnis von Theorie und Empirie, das Problem der Beziehung zwischen Kommunikation und Tätigkeit oder die Frage nach der Beziehung zwischen Zeichen und Bedeutung (Text und Tätigkeit) nicht unabhängig von der Bearbeitung dieses erstgenannten Problems der Theorieentwicklung bearbeitet werden können. Der Grund dieses Sachverhaltes wird im Verlauf der Weiterentwicklung des Themas noch deutlich werden, insbesondere im Zusammenhang mit der Problematik des Modellbegriffs. Letztendlich liegt es daran, daß bei der Bearbeitung all' der genannten Fragen Begründungs- oder Rechtfertigungsprobleme auftreten. Wenn man diese Probleme in einer zeitunabhängigen, statischen Weise zu behandeln versucht, ergeben sich unlösbareWidersprüche und Paradoxien, die erst in einer dynamischen Perspektive behandelbar sind. Begründungs- und Entwicklungsfragen sind nicht unabhängig voneinander beantwortbar. Diese Grundthese wird in der folgenden Arbeit von N. Jahnke genauer beschrieben.

Das Problem der Theorieentwicklung ist nun - so lautet unsere nächste These - abhängig von einer Charakterisierung des Verhältnisses von Wissen und wissenschaftlicher Tätigkeit, von Produkt und Prozeß. Dies klingt zunächst hinreichend harmlos und allgemein. Es hat jedoch weitreichende Konsequenzen. Zunächst ergibt sich daraus die Notwendigkeit, eine Auffassung von Theorie zu entwickeln, die diese sowohl als subjektiv wie objektiv charakterisiert.
Wenn man nun insbesondere versucht, den Prozeßcharakter von Wissen und Theorie herauszuarbeiten, so liegt es nahe, sich dabei auf den wissenschaftlichen Begriff zu konzentrieren, auf den Begriff als Gegenstand und Methode der Erkenntnis gleichzeitig. In dieser Komplementarität von Gegenstand und Methode, von repräsentationalen und instrumentellen Aspekten erscheint etwas wie die Einheit von Produkt und Prozeß.
Komplementaritätsvorstellungen treten in der epistemologischen Diskussion häufiger auf und sie bezeichnen im allgemeinen einen Dualismus im theoretischen Wissen selbst: Korpuskel-Welle-Dualität bei Niels Bohr; die Dualität von Diskretem und Kontinuierlichem im Bereich des mathematischen Wissens, wie sie insbesondere von Willem Kuyk in jüngster Zeit wieder hervorgehoben wurde usf. Bleibt man jedoch bei dieser Bedeutung von Komplementarität stehen, so drückt das Konzept einen relativ paradoxen oder jedenfalls antinomischen Charakter unserer Erkenntnis aus, der sich erst verliert, wenn man den Zusammenhang von Wissen und wissenschaftlicher Tätigkeit zum Ausgangspunkt nimmt. In diesem Zusammenhang erscheinen mir die folgenden Sätze

ungeachtet ihres relativ kursorischen Charakters bemerkenswert: "If we look at the history of science, we see that, in physics at least, two major explanatory models have been dominant: the atom model and the field model, the discontinuous and the continuous, the pluralistic and the monistic, notwithstanding the fact that neither atoms nor fields are familiar or simple entities. ... If to explain is to make anthropomorphically understandable, the world of the discontinuous is the world of the tool, and the world of the field is the world of the environment" (vgl. L.Apostel, 1961, S.14/15).

Das Entscheidende ist nun - und dies wird gerade bei der Analyse der Modellfunktionen für die Erkenntnis besonders deutlich - daß es hier nicht einfach auf die abbildenden, inhaltlichen Aspekte einerseits und die instrumentellen, operativen Momente andererseits als solche ankommt, sondern auf die Relation zwischen beiden. Gerade dieses Verhältnis ist im Begriff der Komplementarität angesprochen. Beide Aspekte erscheinen auch nur in ihrer Einheit im Begriff und sind nicht etwa empiristisch in einzelnen Bestandteilen der Methode oder des Inhaltes wiederzufinden, bzw. sind höchstens in der Begrenzung auf besondere Situationen auf diese Weise beschreibbar.

Das im Konzept der Komplementarität angesprochene Verhältnis des Gegenständlichen und des Operationalen im Begriff hängt wesentlich von der Gesamtheit der theoretischen Zusammenhänge ab, in die der Begriff einbezogen ist. (Die Entscheidung dafür, den wissenschaftlichen Begriff und seine Komplementarität zum Kernpunkt der Analyse zu machen, bedeutet damit so etwas wie die Einnahme eines holistischen, ganzheitlichen Standpunktes. Diese Entscheidung impliziert eine Systemperspektive). Wie läßt sich diese Inhaltsabhängigkeit der Komplementarität skizzieren?
Die auf der operativen Wende beruhende Wissensdynamik neuzeitlicher Wissenschaft impliziert für den Gegenstandsbezug eine zunehmende Verdeutlichung der Tatsache, daß der

Inhalt des theoretischen Begriffs nicht in Dingen zu sehen ist, sondern in Beziehungen zwischen solchen - (wenn diese Beziehungen auch im Denken auf mannigfaltige Weise zeichenmäßig modelliert und vergegenständlicht werden).
Die Geschichte der Wissenschaft kann also als eine Überwindung der Vorstellungen vom Begriff als einem Ding, das unmittelbar gegeben sei, bzw. der Vorstellung vom Begriff als einem Namen für einen empirischen Sachverhalt, aufgefaßt werden. In dem Maße, in dem diese Entwicklung sich vollzieht, wird es klar, daß der Begriff nur durch Beziehungen zu anderen Begriffen seinen festen Inhalt, seine klare Form erhält. Damit wird die Stellung des Begriffs im Rahmen der Gesamttheorie zu einem wesentlichen inhaltlichen Kontext für das im Konzept der Komplementarität angesprochene Verhältnis von repräsentationalen und operativen Aspekten.

Dieses Verhältnis ist aber auch von den sozialen Kontexten, in denen der Begriff benutzt wird, abhängig. Betrachten wir dazu als Beispiel das unterschiedliche Begriffsverständnis im Kontext der professionellen Wissenschaft gegenüber dem Kontext der allgemeinbildenden Schule.
In der Wissenschaft bedeutet, einen Begriff verstehen, eine Theorie entwickeln und umgekehrt ist die Theorie insgesamt logisch begründet, wenn sie als ein - ursprünglicher - Begriff verstanden werden kann, der entwickelt, konkretisiert und entfaltet wurde. Die weitestgehende Entfaltung des Begriffs als Theorie begründet selbst den Ausgangsbegriff, obwohl sie umgekehrt auf dieser Grundlage fußt. Der Begriff wird also durch seine Entwicklung begründet und nicht durch seine Entstehung. In der Schule ist es genau umgekehrt. In der Schule dominieren Evidenz und Begründungsprobleme, Versuche, den Begriff durch definitorische Festlegungen unbedingt zu erklären, zu relativieren, ihn auf bereits Vertrautes zurückzuführen. In der Wissenschaft wird das Beispiel durch die Theorie erklärt, in der Schule ist es umgekehrt.

In der Wissenschaft dominieren operativ-funktionale Bedeutungsvorstellungen des Begriffs, in der Schule dominieren rein interpretierende.
Wenn es nun wahr ist, daß die hier deskriptiv festgestellte unterschiedliche Ausprägung des Verhältnisses von begründenden und operativen Aspekten im Begriffsverständnis auf den Zusammenhang von Wissensentwicklung und sozialem Kontext hinweist - und wir gehen von dieser Hypothese aus - dann müßten wissenschaftshistorische bzw. bildungsgeschichtliche Fallstudien zu Epochen, die für das Wissenschafts- und Bildungssystem größere Umbrüche markieren, aufschlußreich sein. Aus diesem Grunde werden wir in einem im Herbst beginnenden Projekt die Beziehungen von wissenschaftlicher Mathematik und Schulmathematik in Deutschland in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts - also in der Umbruchsituation der industriellen Revolution - untersuchen. (Vgl. zu den beiden vorstehenden Abschnitten die Kapitel I.1. und I.2. in der Jahnke'schen Arbeit).

Aus unserem Versuch, die unterschiedlichen Begriffsauffassungen von Wissenschaft und Unterricht zu charakterisieren, wurde in Ansätzen deutlich, daß die im Konzept der Komplementarität gegebene strukturelle Kennzeichnung des wissenschaftlichen Begriffs sich auch im Bereich der ontogenetischen Entwicklung ausprägt. Auch im subjektiven Aneignungsprozeß wissenschaftlicher Begriffe werden einerseits Begründungsfragen, Versuche des Zurückführens auf Vertrautes, definitorische Festlegungen, verschiedenartige Einbindungen in bereits vorhandene Kenntnisse, Analogien usf. in eine dauernd sich verändernde Beziehung zu operativ-funktionalen Interpretationen treten, d. h. zu Auffassungen, die den zu entwickelnden Begriff in gewissem Sinne als Werkzeug betrachten, das man durch Gebrauch kennenlernt. Allerdings dominiert in den Selbstzeugnissen hervorragender Wissenschaftler im allgemeinen die operative Seite. Charles Darwin beispielsweise berichtet in seiner Autobiographie, daß die eigentliche Konstituente seines wissenschaftlichen Erfolges in der Gewohnheit bestanden habe, jedes neue Faktum, jede neue Information sofort mit dem System seiner vorhandenen Kenntnisse in Beziehung zu setzen, in angespannter Aktivität möglichst viele Beziehungen herzustellen, möglichst zahlreiche Konsequenzen abzuleiten. Er bezeichnet also die Aktivität und Operativität des Denkens als Grundlage seines Erfolges.

Übrigens möchte ich hier explizit darauf hinweisen, daß die Herausbildung der genetischen Epistemologie Piagets in Zusammenhang mit dessen kognitionspsychologischen Untersuchungen kein Zufall ist. Piaget selbst hat dazu die Hypothese geäußert, "daß zwischen dem Fortschritt in der logischen und rationalen Organisation der Erkenntnis und den entsprechenden psychologischen Formationsprozessen ein Parallelismus besteht" (Piaget 1973). Auf dieselbe Weise ist die Herausbildung unseres Konzeptes von Komplementarität des wissenschaftlichen Begriffs nicht zufällig an die Untersuchung der sozialen und inhaltlichen Problematik des allgemeinbildenden Schulwesens gebunden. In beiden Fällen liefert ein einzelwissenschaftlicher Anwendungskontext - bei Piaget der kognitionspsychologische, bei uns der bildungstheoretische - die wesentliche Grundlage für die Weiterentwicklung epistemologischer und wissenschaftstheoretischer Vorstellungen. Es zeigt sich hier deutlich, daß Anwendung und Entwicklung von Theorie untrennbar zusammenhängen.

Wir wollen uns nun der phylogenetischen Entwicklung des wissenschaftlichen Wissens zuwenden bzw. der in der Überschrift dieses Abschnittes angesprochenen Beziehung. Wir wollen dies tun anhand einer kritischen Auseinandersetzung mit der in den letzten Jahren am meisten diskutierten Vorstellung wissenschaftshistorischer Entwicklung, nämlich mit Kuhns "Struktur wissenschaftlicher Revolutionen". Die Notwendigkeit, wissenschaftliche Revolutionen als wesentliche Momente in der historischen Entwicklung der Wissenschaft zu sehen, wird von Kuhn damit begründet, daß die traditionellen Grundlagen des Wissens - Logik und Experiment - unzureichend sind. Weder ist Theorie ein bloßes Verfahren zur Beschreibung empirisch oder logisch begründeter Regelmäßigkeiten, noch ist die historische Wissenschaftsentwicklung durch den extremen Kumulativismus, der aus einer derartigen Theorieauffassung resultiert, angemessen zu beschreiben. Kuhn und Feyerabend betonen dagegen, daß das Wesen der wissenschaftlichen Revolutionen in der Bedeutungstransformation der grundlegenden theoretischen Begriffe zu sehen ist, in einer Verschiebung des begrifflichen Netzwerkes "durch welches die Wissenschaftler die Welt betrachten" (Kuhn 1967, S.141). Im Vergleich der Newton'schen und der Einstein'schen Physik betont Kuhn beispielsweise, daß die physikalischen Beziehungen der Einstein'schen Begriffe "auf keinen Fall mit denen der Newton'schen Begriffe gleichen Namens identisch (sind). (Die Newton'sche Masse bleibt erhalten; die Einstein'sche ist austauschbar mit Energie. Nur bei niedrigen relativen Geschwindigkeiten können diese beiden in der gleichen Weise gemessen werden, und sogar dann dürfen sie nicht als gleich angesehen werden). (vgl.S.140). Und Feyerabend schreibt zu dem Begriff der Masse: "That the relativistic concept and the classical concept of mass are very different becomes clear if we ... consider that the former is a relation, involving relative velocities between an object and a coordinate system, whereas the latter is a property of the object itself and independent of its behaviour in co-ordinate systems" (Feyerabend zitiert nach Gary Gutting 1973/74, S.223).

Gutting glaubt, daß ein dualistisches Bedeutungskonzept, welches Bedeutung durch die komplementären Aspekte von Referenz und Intention - diese bezogen auf die Funktion eines Terms im linguistischen Gesamtsystem - es ermöglichen würde, ein angemessenes Gleichgewicht von Kontinuierlichem

und Diskontinuierlichem im historischen Wissenschaftsverständnis wiederherzustellen. Wir halten den Aufsatz von Gutting für sehr interessant und einen Schritt in die richtige Richtung. Wir glauben insbesondere, daß sein Bedeutungsdualismus direkt aus der Komplementarität des wissenschaftlichen Begriffs resultiert, glauben aber nicht, daß hiermit das Problem erschöpft ist.
Zunächst scheint die Diagnose Guttings der Position Kuhns und Feyerabends nicht korrekt zu sein. (Allerdings liegt sie nahe, denn es gibt auf der syntaktischen Ebene natürlich eine relativ unmittelbare Korrespondenz der Gleichungen der Newton'schen Physik mit entsprechenden Gleichungen in der Physik Einsteins. Eine Korrespondenz, die ich erhalte, indem ich die Lichtgeschwindigkeit gegen unendlich gehen lasse. Nun ist es gerade die Ontologie der Einstein'schen Physik, die ja wesentlich die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit impliziert und die deshalb einen derartigen kontinuierlichen Übergang nicht erlaubt).

Wir glauben umgekehrt, daß die einseitige Betonung der Diskontinuitäten durch Kuhn und Feyerabend mit deren rein instrumenteller Auffassung vom Begriff zusammenhängen. Für Kuhn ist die wissenschaftliche Erkenntnis nichts anderes als "ein Satz von Werkzeugen". In dem Bemühen, die Einseitigkeiten des senualistischen Empirismus zu überwinden, der die wissenschaftliche Erkenntnis als Organisationsform einer unmittelbar gegebenen empirischen Erfahrung ansieht, sind Kuhn u.a. in ein anderes Extrem verfallen, indem sie diese Erkenntnisse als Verfahren zur Organisation der Erkenntnistätigkeit ansehen. Die empirischen Daten erscheinen nur noch als elementare Knotenpunkte im System der theoretischen Beziehungen, aber ohne irgendwelche eigenständige Eigenschaften. Der permanente und nicht ein für allemal ablösbare Bezug der Theorie zur Realität wird nicht thematisiert. Die Wissenschaft reduziert sich auf die Beschreibung dessen, was sich im Wahrnehmungsakt offenbart. Der Wahrnehmungsakt selbst ist paradigmatisch gesteuert, so daß "zwei Gruppen, deren Mitglieder

ganz verschiedene Empfindungen beim Empfang derselben Reize haben können" und dann in gewissem Sinn "in verschiedenen Welten leben".
Wie entsteht aber nun die Gemeinsamkeit innerhalb einer bestimmten Gruppe? "Eine der grundlegenden Techniken, durch die die Gruppenmitglieder - eine ganze Kultur oder eine kleinere Gemeinschaft von Spezialisten innerhalb dieser - lernen dieselben Dinge zu sehen, wenn sie auf dieselben Reize stoßen, ist das Zeigen von Situationsbeispielen, die die Gruppenvorgänger schon als einander ähnlich und als von anderen Situationen verschieden zu sehen gelernt haben. ... In diesem Sinne muß das Erkennen von Ähnlichkeit, wenn wir diese Tätigkeit erst einmal erlernt haben, ebenso systematisch sein wie unser Herzschlag. Aber gerade diese Parallele deutet an, daß Erkennen auch unwillkürlich vor sich gehen kann, ein Prozeß, über den wir keine Kontrolle haben. Wenn das der Fall ist, dürfen wir ihn nicht als etwas auffassen, das wir durch Anwenden von Regeln und Kriterien zustandebringen. Spricht man so davon, dann impliziert man Alternativen; daß wir beispielsweise eine Regel mißachtet, ein Kriterium falsch angewendet oder mit einer anderen Sehweise experimentiert haben könnten. Gerade das glaube ich, kann man nicht tun. Genauer, dies sind Dinge, die man nicht tun kann, bevor man nicht eine Empfindung hatte, etwas wahrgenommen hat. Dann suchen wir oft nach Kriterien und wenden sie an. Wir können dann eine Interpretation anlegen, ein willentlicher Vorgang, in dem wir zwischen Alternativen wählen, wie wir es bei der Wahrnehmung selbst nicht tun" (Kuhn in Weingart Bd.1, S.303/304).
Dies bedeutet aber gerade, daß der Wissenschaftler nicht das Symbol von der Realität unterscheidet, die dieses Symbol ausdrückt. Die Wirklichkeit verschwindet vollkommen in der symbolischen Repräsentation und letztere ist in diesem Sinn eine Art Verdoppelung der Wirklichkeit. Diesen grundlegenden Fehler begeht aber meines Erachtens auch Gutting, wenn er so ohne weiteres Begriff und Bedeutung identifiziert. Nur wenn der Begriff durch seine Definition

vollständig erschöpft wird, gewissermaßen ein linguistisches Gebilde darstellt, ist er inhaltlich mit seiner Bedeutung zu identifizieren.
In diesem Sinne ist auch Guttings ursprüngliches Anliegen, eine vollständige Synthese zwischen Wissen und menschlicher Aktivität zu gewinnen, nicht erreichbar. Zwischen beidem besteht nicht nur ein untrennbarer Zusammenhang, sondern gleichzeitig ein relativer Gegensatz. An diesem Punkt setzt die Behandlung des Problems der Theoriendynamik im Bereich des mathematischen Wissens bei Jahnke an.
Ein anderer Punkt, wo diese Unterscheidung zwischen Begriff und Bedeutung im Rahmen der Entwicklung der Mathematik und der Naturwissenschaften besonders virulent wird, ergibt sich im Zusammenhang der Probleme von Gesetzmäßigkeit und Zufälligkeit. Heinz Steinbring versucht, dies in einer Arbeit zur Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes herauszuarbeiten.
Schließlich ist auch die Aufgabe des "statement view" wissenschaftlicher Theorien, wie sie in der Arbeit von Sneed zum Ausdruck kommt, ein sehr wesentlicher Schritt, der im Zusammenhang der hier gegebenen Problematik zu sehen ist. Im Kapitel II der Jahnke'schen Arbeit werden die Grundzüge des Theorienkonzepts von Sneed dargestellt und in Kapitel III für den Bereich der mathematischen Theorien nutzbar gemacht.
Wesentlich ist an Sneeds Konzeption das Abrücken von der Vorstellung, "daß der Geltungsbereich einer physikalischen Theorie gleichsam die ganze Welt sei, oder anders gesagt, eine Theorie einen einzigen universellen Anwendungsbereich hat. ... Er führt gleichsam 'Grenzen' in den Anwendungsbereich ein" (Jahnke S.80 f). Die bei Kuhn gegebene Nichtunterscheidung von Symbol und Realität bedeutet dagegen gerade eine Verabsolutierung des holistischen Standpunktes.
Insofern ist es auch nicht korrekt, in der Arbeit von Sneed eine bloße Explizierung der Kuhn'schen Vorstellungen mit formal-logischen Mitteln zu sehen.

Indem wir nun sowohl Werkzeuge als auch Zeichensymbole und Texte als Modelle auffassen, können wir daran gehen, die weitere Analyse auf die Analyse der Funktionen des Modells

abzustellen. Auch Modelle sind gerade deshalb nützlich, weil sie nicht die gesamte Wirklichkeit enthalten, weil sie eben Grenzen in den Gegenstands- bzw. Anwendungsbereich einführen. Eine ganz kurze Erläuterung dieses Sachverhalts: Die abbildende Funktion des Modells muß durch seine explorative Funktion ergänzt werden. Die Konstruktion von Modellen muß auch eine Analyse der Wirklichkeit darstellen. Dies geht aber nur, wenn die Differenz zwischen Modell und Objekt, zwischen Theorie und Realität permanent mitbeachtet und einbezogen wird. Und dies setzt wiederum eine Relativierung des holistischen Standpunktes voraus. Die Konstruktion eines Modells der ganzen Welt ist unmöglich, obwohl andererseits Vorstellungen der Welt stets wirksam sind. In der Operations Research hat Churchman (vgl. Churchman 1973, Abschnitt II) das Problem folgendermaßen beschrieben: "Nun sehen wir allmählich, was an der Behauptung nicht stimmt, große Modelle könnten die ganze Wirklichkeit erfassen. Die Modelle bedeuten nichts, solange sie nicht korrekte Information verwenden. Aber wie können wir bestimmen, welche Information korrekt ist, solange wir nicht verstehen, wie Subsysteme untereinander in Beziehung gebracht werden sollten oder wie das Gesamtsystem beschaffen ist? Doch gerade dies ist es, was uns unsere realistischen Modelle sagen sollen. Mit anderen Worten, wir benötigen realistische Information, um mit dem Bau unserer Modelle beginnen zu können, aber wir benötigen die Modelle, um die Information zu erhalten. ... Auf diese Weise sieht es so aus, als ob wir in einen Teufelskreis geraten seien. Wir müssen Information beschaffen, um unsere Modelle realistisch zu gestalten, aber wir müssen allgemeine Modelle haben, um unsere Information zu erhalten" (Churchman 1973, S.186/187).
Diesem schlechten Zirkel können wir eben nur entgehen, wenn wir erstens sehen, daß der Gegenstandsbezug unserer Erkenntnistätigkeit nicht unterbrochen werden kann. Das heißt, daß seine zwei Aspekte, nämlich der repräsentationale und der anwendende nicht getrennt werden dürfen. Und dies bedeutet

zweitens, daß Grenzen in den Anwendungsbereich eingeführt werden, daß man auf die Konstruktion eines Modells der gesamten Welt verzichtet, oder anders ausgedrückt, daß es keine zeitunabhängigen Beschreibungen des Problems gibt, sondern der genetische Standpunkt wesentlich ist. Um noch ein einfaches Beispiel zu geben. Wenn in der Medizin oder anderen empirischen Wissenschaften oft über die Unbrauchbarkeit und angebliche Abstraktheit der mathematischen Modelle geklagt wird, beruht dies im allgemeinen auf dem illusionären Versuch, die Ganzheit von Erscheinungen unmittelbar im Modell zu erfassen bzw. die eigene Praxis zugunsten einer bloßen Deduktion innerhalb des mathematischen Modells aufzugeben. Letzteres entspricht aber genau der Charakterisierung der wissenschaftlichen Tätigkeit durch Kuhn. Der extreme Instrumentalismus Kuhns und Feyerabends überwindet die konservativen statischen Auffassungen von Wissen nicht, weil es ihm nicht gelingt, die wirkliche Notwendigkeit wissenschaftlicher Revolutionen nachzuweisen. "In der Tat, wenn man den instrumentalistischen Standpunkt konsequent verteidigt, worin ist dann der revolutionäre Umschwung in der Wissenschaft dem reformistischen Entwicklungsweg überlegen? ... Grundsätzlich kann man sich solange auf dem Weg der Rettung des Paradigmas mittels instrumentaler Neuerungen fortbewegen, bis die Bedingungen des Konkurrenzkampfes, in dem der Stärkere überlebt, den entscheidenden Druck auf die Psychologie der Teilnehmer wissenschaftlicher Gemeinschaften und auf die Wahl des entsprechenden Paradigmas ausüben" (Porus 1978, S.39).

II. Wissensdynamik und das Textproblem

Will man den Instrumentalismus überwinden, so muß man die gegenständlichen Inhalte der Tätigkeit als einerseits objektiv und andererseits eben als Gegenstände der Tätigkeit erfassen. Der Begriff als Werkzeug muß durch die gegenständlichen Bezüge des Begriffes reguliert werden, das Modell als Abbild durch die explorativen Funktionen desselben Modells bestimmt werden usf.

Dieses in der Komplementarität des Begriffs ausgedrückte wissenschaftstheoretische Grundproblem taucht natürlicherweise in den verschiedensten Zusammenhängen wieder auf, so in

- der genetischen Epistemologie Piagets als Verhältnis von reflektiver und einfacher Abstraktion (vgl. Otte/Bromme 1978, S.169/170).
- der artifical-intelligence-Forschung als dual control-Problem (vgl.Gaines). Dies Problem entsteht bei lernenden Systemen, weil sie gleichzeitig zwei Regulationsaufgaben erfüllen müssen, nämlich erstens den zu regulierenden Aspekt des Gegenstandsbereiches mit einer bestimmten Strategie in vorgegebenen Grenzen halten, d.h. eine bestimmte Kontrollstrategie muß implementiert werden und zweitens muß die für die erste Aufgabe optimale Strategie durch eine hierarchisch höhere Regulationseinheit einreguliert werden, d.h. die obere Ebene wählt die Strategie aus.
- In der Psychologie tritt das Problem auf als Zusammenhang und Gegensatz von Bewußtsein und Tätigkeit. Der Position Kuhns entspricht jedoch die Auffassung, daß die Vorstellung, welche die Tätigkeit steuert, sich sozusagen im Objekt verkörpert, das Subjekt damit seine eigenen Vorstellungen in der äußeren Welt vorfindet. Auf diese Weise wird es sich seiner eigenen Vorstellungen bewußt. Es besteht zwar ein Fortschritt, da die Tätigkeit überhaupt einbezogen wird, aber eben nur in ihren "subjektiven" Aspekten.
- In der Wissenschaftstheorie schließlich gibt es bestimmte Paradoxa: Paradoxon des Beweises, Paradoxon des Gedankenexperiments, Dilemma des Theoretikers, die alle im Kern dieselbe Problematik beinhalten (vgl.N.Jahnke, Kapitel II.1.).
- Aus der Systemtheorie hatten wir bereits Churchmans Prinzip des 'maximum loop' zitiert. Weiter wäre hier die Arbeit von

Sadovsky (vgl. Sadovsky 1974, S.29-45) zu nennen, der eine Reihe von Paradoxa des Systemdenkens beschrieben hat, die alle im Kern auf die gleiche problematische Zirkelhaftigkeit zurückführen. Das Paradox I, bei Jahnke zitiert, findet sich auf Seite 104. Diese Paradoxe sind wiederum unlösbar in einem absoluten Sinne und nur unter Einbeziehung der Entwicklungsperspektive, d.h. der Zeit konstruktiv zu behandeln. Dies deutet wiederum auf die Bedeutsamkeit des Konzepts der Grenze, der Relativität des Wissens, der constraints (Sneed) usf. hin. Dazu noch einmal Sadovsky: "Angesichts der Systemparadoxe, die eine gegenseitige Abhängigkeit einer umfassenden Klasse von Systemproblemen behaupten, die sich nur im Verlauf einer sukzessiven Annäherung und mit Hilfe der Verwendung absichtlich begrenzter Fragmente der Systemerkenntnis lösen lassen, müssen wir von einer grundlegenden Relativität jeglicher Beschreibung eines Systems sprechen" (S.35). Diese Relativität zu betonen, bedeutet aber insbesondere die Entwicklungsperspektive als zentral herauszuheben.

Wir wollen nach diesen Vorbemerkungen auf ein Beispiel näher eingehen. Es handelt sich um das Problem des Lernens aus Texten. Texte sind ja gewissermaßen Modelle, Zeichenmodelle und die Orientierung an diesem Begriff wird uns helfen, die zentralen Fragen der Komplementarität und der darin ausgedrückten Art und Weise des Gegenstandsbezuges festzuhalten. Auch hier tritt eine Paradoxie auf: Texte müssen, um verstanden zu werden, immer strikt wörtlich, nicht metaphorisch genommen werden und sie müssen gleichzeitig, um operativ handhabbar zu sein - oft sagt man dafür, ihre Aussagen müssen im eigenen Verständniszusammenhang wiedergebbar, anwendbar paraphrasierbar usf. sein - nicht wörtlich genommen werden, sondern ihre Aussagen müssen innerhalb eines angemessenen Kontextes interpretiert und aufgefaßt werden. Die Kommunikation ist nicht möglich ohne Metakommunikation. Natürlich müßte man, um dieses Problem zu behandeln, näher herausarbeiten, was der Begriff Kontext hier bedeutet und wie das Verhältnis von Text und Kontext aufzufassen ist. Generell kann man aber sagen, daß die Herausbildung autonomer Texte, d.h. Texte, die gewissermaßen sagen, was sie meinen, gleichzeitig eine Trennung zwischen Autor und Text, zwischen schöpferischer Tätigkeit und ihrem Produkt bedeuten, die wesentlich ist, auch wenn sie als nur relativ aufgefaßt werden muß. In der Wissenschaftsgeschichtsschreibung hat der Kumulativismus diese Trennung zu einer vollständigen Spaltung verabsolutiert, während Kuhns und Feyerabends instrumentalistische Position sie gänzlich und absolut aufgehoben wissen will. Es ist also nur konsequent, wenn Kuhn meint, daß ein wachsendes Vertrauen in die Lehrbücher "eine unveränderliche Begleiterscheinung des Auftauchens eines ersten Paradigmas" ist, und wenn er die Herrschaft "die solche Lehrtexte über eine reife Wissenschaft ausüben", verantwortlich macht für die Art und Weise ihres Entwicklungsschema. Kuhn schreibt den Lehrbuchtexten die "Verschleierung der wissenschaftlichen Revolutionen" zu. Sie verursachen, daß "die Wissenschaft weitgehend kumulativ erscheint". Dies ist sicher folgerichtig, wenn man Lehrbuchtexte nicht als objektive und abhängige Momente der subjektiven Leseaktivität gleichzeitig sieht, sondern sie als unmittelbar wahrgenommene Wirklichkeit, als Paradigma schlechthin betrachtet. Kuhn versucht, in seinem Essay am Beispiel der Definition des chemischen Elements durch Boyle "die Bedeutung der Lehrbuchdarstellung für unser Bild der wissenschaftlichen Entwicklung klar" zu machen. "Was war nun die geschichtliche Funktion jenes Teils von Boyles Arbeit, der die berühmte 'Definition' enthält? Boyle war der Führer einer wissenschaftlichen Revolution, die dadurch, daß sie die Beziehung von Element zur chemischen Manipulation und zur chemischen Theorie herstellte, den Begriff in ein Werkzeug (meine Unterstreichung) umwandelte, das sich von dem, was er vorher war, stark unterschied und im weiteren Verlauf die Chemie und die Welt des Chemikers verwandelte" (Kuhn 1967, S. 189/190). In dem hier nicht zitierten Teil der Erläuterung zu diesem Beispiel zeigt sich auch sehr deutlich, wie die

einseitig instrumentalistische Auffassung vom wissenschaftlichen Begriff bei Kuhn zusammenhängt mit der Verabsolutierung eines holistischen Standpunktes, dem dadurch der Gegenstandsbezug verdeckt wird. Der Begriff ist nicht nur ein Werkzeug, sondern besitzt eine Komplementarität, und der Text hat nicht nur sozialisierende und normenstiftende Funktionen.
Natürlich werden diese kursorischen Bemerkungen der Differenziertheit des Kuhn'schen Standpunktes nicht gerecht. Daß sie aber wesentliche Punkte treffen, soll eine historische Skizze zum Textproblem verdeutlichen. Wir wollen insbesondere relativ skizzenhaft die historische Entwicklung der Beziehungen zwischen Autor, Text und Textinhalt betrachten. Wir wollen uns dabei speziell auf die wissenschaftliche Revolution im 17. Jahrhundert, die die Wissenschaft unseres neuzeitlichen Typs hervorgebracht hat, konzentrieren.

Texte gab es auch vor dieser Revolution. Was bedeutet die Existenz "automer Texte"? Dazu meint Olson: "My primary hypothesis is that the invention of writing, and particulary the attempt to create autonomous text, resulted in the realignment and specialization of the rhetorical and logical functions. Consequently, the language was specialized to better serve the truth functions at the expense of the social or authority-maintaining functions. More precisely, if the statement was true, that was a sufficient condition for its being 'in order'" (S.74). Und in zahlreichen Arbeiten (vgl. beispielsweise Goody/Watt) wird aufgezeigt, wie die Leistungen des antiken Griechenlands im Bereich der Logik mit der Tatsache zusammenhängen, daß die Griechen die erste "alphabetisierte Kultur" der Geschichte dargestellt haben.

Gleichzeitig trugen Texte vor dem 17. Jahrhundert alle Merkmale eines Kuhn'schen Paradigmas. Zwischen den drei genannten Aspekten-Autor, Text und Textinhalt bestanden relativ starre unauflösliche Verbindungen, die bewirkten, daß Texte die Weltsicht bestimmten. Sarton hat in seinen Studien zur Geschichte der Wissenschaft zwischen 1450 und 1600 gezeigt, daß vor der wissenschaftlichen Revolution des 17. Jahrhunderts nahezu alle Forschung und Wissenschaft in der Arbeit mit Texten der Alten bestand. "To study geometry was to study Euclid; a geographical atlas was an edition of Ptolemy; the physician did not study medicine, he studied Hippocrates and Galen, and so on" (Sarton 1955, S. 171).

In der kontemplativen Weltsicht, die im wesentlichen bis zum 17. Jahrhundert vorherrschte, bestand eine starre, absolute unauflösliche Verbindung zwischen Wissen und Text, wie zwischen den Dingen und den Zeichen, zwischen der Welt und der Sprache. "Die Welt ist von Zeichen bedeckt, die man entziffern muß. ... Erkennen heißt also, interpretieren ..." (Foucault). Und weiter schreibt Foucault: "Im Mittelalter war die Zuschreibung an einen Autor im Bereich des wissenschaftlichen Diskurses unerläßlich, denn sie war ein Index der Wahrheit. Man war sogar der Auffassung, daß ein Satz seinen wissenschaftlichen Wert von seinem Autor beziehe. Seit dem 17. Jahrhundert hat sich diese Funktion im wissenschaftlichen Diskurs immer mehr abgeschwächt: die Rolle des Autors besteht nurmehr darin, einem Lehrsatz ... den Namen zu geben. Hingegen hat sich im Bereich des literarischen Diskurses seit eben jener Zeit die Funktion des Autors verstärkt: alle die Erzählungen, Gedichte, Dramen oder Komödien, die man im Mittelalter mehr oder weniger anonym zirkulieren ließ, werden nun danach befragt ... woher sie kommen, wer sie geschrieben hat". (Im übrigen ist diese historische Gegenläufigkeit ein hinreichender Anlaß, um heute genauer Struktur und Funktion literarischer und wissenschaftlicher Texte miteinander zu vergleichen).

Diese relativ feste Verbindung von Botschaft, Text und Autor beruht auf der historischen Konstanz und Unveränderlichkeit des Wissens und der Welt und sieht schon darin ihre Voraus-

setzungen. Dies wird auch am Beispiel "primitiver" Gesellschaften deutlich (vgl. die Untersuchungen von F.Dart in Nepal). In dem historischen Zeitpunkt, wo eine Dynamisierung des Wissens und der Erkenntnis eintreten, werden auch Wissen und Text, Welt und Sprache getrennt. Es geht nun nicht mehr um die Wiederentdeckung und reproduktive Wiederholung eines vorgegebenen Sinnes, sondern es geht um die Gewinnung neuer Erkenntnisse. Das 17. Jahrhundert bildet in Europa die Schwelle für diesen Umschlag.
Zu diesem Zeitpunkt hat das Zeichen aufgehört, "eine Gestalt der Welt zu sein und es ist nicht länger mit Dingen verbunden, was es durch die festen und geheimnisvollen Bänder der Ähnlichkeit oder der Affinität markiert" (Foucault).
Damit wird das Zeichen aber andererseits in einer neuen Art und Weise verfügbar und neuen Erkenntniszielen bzw. neuen Gebrauchsweisen offen. Indem es sich bis zu bloßen Konzentrations- oder Merkhilfen vom Inhaltlichen entfernen kann, wird es andererseits funktional und problembezogen verfügbar. Ein hervorragendes Beispiel ist die Schaffung des auf dem Variablenbegriff beruhenden algebraischen Zeichensystems durch Vieta und Descartes. Eine Variable (x) markiert nicht nur irgendeine gedachte, bekannte oder unbekannte Zahl, sondern fixiert Beziehungen zum noch Unbekannten generell und macht damit diese Beziehungen einer produktiven, wissenserweiternden Tätigkeit verfügbar. (Vgl. die Analyse des Variablenkonzeptes im Kapitel III der Arbeit von Jahnke). Kuhns Beschreibung der Einführung in die Wissenschaft durch die Wiederholung von Experimenten, (vgl. Kuhn in Weingart I) die das Erkennen von Ähnlichkeiten schließlich automatisieren sollen, scheint aufs Haar jener Situation vor dem 17. Jahrhundert zu gleichen. Die in seinem Instrumentalismus angestrebte extreme und verselbständigte Prozeßorientierung führt damit auf der Ebene der Wissensauffassungen und Wissenskonzeptionen zu einer ebenso extrem konservativen und statischen Konzeption. - Damit soll im übrigen nicht der Wert der Arbeiten Kuhns für die Wissenschaftsgeschichtsschreibung geschmälert werden und es ist im Gegenteil unser

Bestreben, die wertvollen Anstöße, Korrekturen und sonstigen Entwicklungen in den Arbeiten Kuhns auszuwerten.

Das hier bisher Vorgetragene wird von uns im wesentlichen in zwei größeren Projekten im Augenblick weiter bearbeitet. Das erste Projekt befaßt sich mit der Wissenschaftsentwicklung, und speziell der Mathematikentwicklung in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts. Insbesondere stellt sich das Projekt das Ziel, das Zusammenspiel von inhaltlichen und sozialen Entwicklungsfaktoren näher zu untersuchen und konzentriert sich daher auf die Beziehungen zwischen Wissenschaftsentwicklung und Entwicklung des mathematischen Schulunterrichts. Es geht eben davon aus, daß die Funktion, als Bildungsinhalt zu dienen, eine wesentlich gesellschaftliche Funktion von Mathematik in jener Epoche gewesen ist und daß derartige gesellschaftliche Funktionen Rückwirkungen auf die Wissenschaft selbst haben müssen.

Das zweite Projekt, das grundlegende Bedeutung hat, befaßt sich mit dem Problem des Lernens aus schriftlichen Texten. Im Augenblick konzentrieren wir uns dabei auf die Funktion von Lehrbüchern im Unterricht und versuchen, einen Ausbildungstext für Lehrer zu diesem Lehrbuchproblem zu verfassen.

Ich darf an dieser Stelle noch einmal betonen, daß der didaktische Anwendungskontext von uns auch als wesentlich für unsere wissenschaftstheoretische und wissenschaftshistorische Arbeit angesehen wird. Eine analoge Situation liegt, wie gesagt, wohl bei Piaget vor: Er gewinnt in seiner genetischen Epistemologie aus der Untersuchung der Bedeutungswandlungen kindlicher Begriffe Anhaltspunkte für die Untersuchung wissenschaftlicher Begriffe und umgekehrt aus der Analyse der Entwicklung wissenschaftlicher Begriffe Hypothesen zur Untersuchung des kindlichen Denkens. Allerdings, und daraus resultiert insbesondere die zentrale Bedeutung des Textproblems, wird bei uns versucht, die soziale Dimension in ihrem wesentlichen Stellenwert mit einzubeziehen.

LITERATUR

Apostel, L.	Towards the Formal Study of Models in the Non-Formal Sciences, in: Model in Mathematics Hrsg.: Kazemir, B.H./Vuysje, D., Reidel, Dordrecht-Holland 1961
Bromme, R./Otte, M.	Der Begriff und die Probleme seiner Aneignung, in: Grundlagenkonzepte der Wissenschaftskritik als unterrichtsstrukturierende Momente Hrsg.: Block, Künzli, Lang, IPN-Arbeitsbericht 29, Kiel 1978
Churchman, C.W.	Philosophie des Managements, Freiburg 1973
Dart, F.	
Foucault, M.	Archäologie des Wissens, Frankfurt
Foucault, M.	Die Ordnung des Diskurses, Berlin 1977
Gaines, B.R.	The Learning of Perceptual-Motor Skills By Men And Machines And Its Relationship To Training, in: Instructional Science, Vol.1 (1972/73), S. 263-312
Gutting, G.	Conceptual Structures and Scientific Change, in: Studies in History of Science, Vol.4 (1973/74), S. 209-230
Goody/Watt	in: Literacy in traditional Societies, Hrsg. Goody, J. Hrsg. Cambridge University Press 1968
Jahnke, N./Otte, M./ Schubring, G.	Mathematikunterricht und Philosophie in: ZDM 1977, Heft 2, S. 60-69
Jahnke, N.	Zum Verhältnis von Wissensentwicklung und Begründung in der Mathematik - Beweisen als didaktisches Problem, Dissertation, Bielefeld 1978
Kuhn, Th.S.	Die Struktur wissenschaftlicher Revolutionen, Suhrkamp, Frankfurt 1967
Kuhn, Th.S.	Postskript - 1969 zur Analyse der Struktur wissenschaftlicher Revolutionen, in: Weingart, P. (Hrsg.) Wissenschaftssoziologie 1, Frankfurt 1972
Kuyk, W.	Complementarity in Mathematics, Reidel Publ. Comp. 1977

Olson, D.	The Language of Instruction, in: Anderson, R.C./Spiro, R.J. (Hrsg.) Schooling and the Acquisition of Knowledge, Hillsdale 1977
Piaget, J.	Einführung in die genetische Erkenntnistheorie, Frankfurt 1973
Porus, W.N.	Die Struktur wissenschaftlicher Revolutionen und die Dialektik der Wissenschaftsentwicklung, Gesellschaftswissenschaftliche Beiträge, Heft 1 (1978), S. 29-40
Sadovsky, V.N.	Probleme einer allgemeinen Systemtheorie als einer Metatheorie, in: Ratio 16/1974, S. 29-45
Sarton, G.	Appreciation of ancient and medieval Science during the Renaissance (1450-1600), New York 1961
Sneed, J.D.	The logical structure of mathematical Physics, Dordrecht 1971
Tuomela, R.	Theoretical concepts, Wien, New York 1973

EINLEITUNG

In der vorliegenden Arbeit werden einige grundlegende Vorstellungen über die Rolle und Funktion des mathematischen Beweises, die innerhalb des Mathematikunterrichts wirksam sind, diskutiert.

Eine solche Auffassung wird sehr klar von Polya ausgedrückt. "Wir sichern die Gültigkeit unseres mathematischen Wissens durch *demonstratives Schließen*, aber wir stützen unsere Vermutungen durch *plausibles Schließen*. ... Der Unterschied zwischen beiden Schlußweisen ist groß und mannigfaltig. Demonstratives Schließen ist sicher, unbestreitbar und endgültig. Plausibles Schließen ist gewagt, strittig und provisorisch. Demonstratives Schließen durchdringt die Wissenschaften in demselben Maße, wie die Mathematik selbst sie durchdringt, aber es ist als solches (ebenso wie die Mathematik als solche) unfähig, uns wesentlich neue Erkenntnis von der Umwelt zu vermitteln. Was immer wir Neues über die Welt erfahren, involviert plausibles Schließen, die einzige Art des Schließens, die uns im Alltag interessiert." (Polya 1969, S. 9/10) In einem merkwürdigen Gegensatz zu dieser scharfen Trennung von demonstrativem und plausiblen Schließen steht die Feststellung, die Polya unmittelbar anschließend trifft: "Jeder weiß, daß die Mathematik eine ausgezeichnete Gelegenheit bietet, um demonstratives Schließen zu lernen, aber ich behaupte, daß es in den üblichen Schullehrplänen keinen Gegenstand gibt, der eine auch nur annähernd so gute Gelegenheit gewährt, um plausibles Schließen zu lernen." (Polya 1969, S. 10) Betrachtet man also die Mathematik unter dem Gesichtspunkt der Wissensentwicklung - so ließe sich diese Bemerkung von Polya verallgemeinern -, dann wird aus dem *Gegensatz* von demonstrativem und plausiblem Schließen eine besonders enge *Beziehung*.

Eine andere Differenzierung in der Auffassung des mathematischen Beweises, von der die Schulmathematik lange Zeit beherrscht war und die auch heute noch wirksam ist, trennt die Geometrie auf der einen Seite von der Arithmetik und der Algebra auf der anderen. Danach wird in der Schulgeometrie ein Verständnis vom Beweis vermittelt, bei dem man sozusagen "jeden Schritt" auch in inhaltlich-anschaulichem Sinne rechtfertigen muß. Demgegenüber wurde und wird in der Arithmetik und Algebra eher die Vorstellung des bedeutungsneutralen Operierens mit Symbolen in den Vordergrund gestellt. Die erste Auffassung kann als "Euklidische" oder "Platonisch" bezeichnet werden und ist tief in der Tradition der gymnasialen Mathematikauffassung verwurzelt. Die zweite Auffassung beruft sich auf das mit dem Namen Hilberts verbundene grundlagentheoretische Verständnis. Während in der "Euklidischen" Tradition die Grundlagen des Wissens als selbst-evident, unveränderlich und letztlich in einer "Ontologie" des Gegenstandsbereichs verankert aufgefaßt werden, markiert die Hilbertsche Position eine Relativierung des Anspruchs auf Endgültigkeit und eine Abkehr von dem Versuch einer "ontologischen" Fundierung der Mathematik. Die mit den Worten Polyas wiedergegebene Unterscheidung von demonstrativem und plausiblem Schließen hängt zwar mit diesem Gegensatz von Euklidischem und Hilbertschem Verständnis der Bedeutung mathematischer Begriffe und Operationen zusammen, setzt aber selbst die Hilbertsche Position voraus.

Die vorliegende Arbeit geht davon aus, daß die "Euklidische" Sicht der Grundlagen der Mathematik und des mathematischen Beweises wesentlich dem statisch-kontemplativen Wissenschaftstypus von Antike und Mittelalter zugehört, während die Hilbertsche Auffassung als Ausdruck des neuzeitlichen dynamisch-operativen Wissenschaftsverständnisses gesehen wird. Dies wird im I. Kapitel näher dargestellt; es wird eine These entwickelt, die erklärt, warum die Euklidische Sicht auch in der Neuzeit eine so hohe Wirksamkeit entwickelt hat.

Das operative Wissenschaftsverständnis der Neuzeit beinhaltet eine Trennung von "Ontologie" und "Methode" und einen Vorrang der "Methode" gegenüber der "Ontologie", der zu jener *Entgegensetzung von Wissensentwicklung und Wissensbegründung* führt, wie sie in dem obigen Zitat von Polya zum Ausdruck kommt. Dieser Gegensatz ist der eigentliche Untersuchungsgegenstand dieser Arbeit. Im II. Kapitel wird die von J.D. Sneed entwickelte Konzeption der logischen Struktur von Theorien der mathematischen Physik herangezogen, um den Gegensatz von Wissensentwicklung und -begründung zu analysieren. Das III. Kapitel enthält eine Diskussion bestimmter Grundlagenprobleme der Mathematik, die von den Vorstellungen Sneeds Gebrauch macht. Im IV. Kapitel werden Schlußfolgerungen für einige didaktische Probleme des "Beweisens" gezogen.

Die vorliegende Dissertation entstand im Rahmen der Arbeit der Arbeitsgruppe F2 "Mathematiklehrerausbildung und -weiterbildung" am IDM. Sie ist im Diskussionskontext dieser Gruppe angesiedelt und ohne diesen Kontext nicht denkbar. Für Kritik, Ratschlag und Unterstützung habe ich meinen Kollegen am IDM Rolf Biehler, Rainer Bromme, Thomas Mies, Gert Schubring, Falk Seeger, Heinz Steinbring und Dankwart Vogel sowie Herbert Mehrtens in Berlin zu danken. Besonders aber möchte ich Herrn Prof. Michael Otte meinen Dank sagen, dessen Förderung und Unterstützung ich nicht nur in der Betreuung dieser Dissertation erfahren habe.

KAPITEL I: BEMERKUNGEN ZUM BEGRÜNDUNGSPROBLEM IN DER MATHEMATIK DER NEUZEIT

Wenn es richtig ist, daß die Widersprüchlichkeit zwischen dem "Euklidischen" und dem "Hilbertschen" Verständnis der Bedeutung mathematischer Begriffe und Operationen nicht durch einen "Kompromiß" zwischen "Euklid" und "Hilbert" zu lösen ist, dann folgt daraus, daß es zunächst einmal notwendig ist, sich die Differenz zwischen den beiden Auffassungen im Hinblick auf ihre Tragweite und ihre historischen Voraussetzungen und Bedingtheiten hin zu vergegenwärtigen. Dies soll im vorliegenden I. Kapitel geschehen. Die These, die hier belegt werden soll, ist, daß die Entstehung der neuzeitlichen Wissenschaft einen tiefgreifenden Bruch mit der Wissenschaft in der Antike impliziert, der sich auf das Gegenstandsverständnis, das Methodenverständnis und das Wissenschaftsverständnis im allgemeinen bezieht. Verallgemeinert kann dieser Bruch als der Widerspruch von antikem, kontemplativem Wissenschaftsverständnis auf der einen Seite und neuzeitlichem, tätigkeitsorientiertem, operativem Wissenschaftsverständnis auf der anderen charakterisiert werden. Die Mathematik hat bei der Herausbildung dieser operativen Wissenschaftsauffassung eine wichtige und wegweisende Rolle gespielt. Diese wegweisende Rolle ist mit der Herausbildung der Algebra und der Auffassung der Algebra als einer allgemeinen wissenschaftlichen Methode verbunden. Im Rahmen der Thematik der vorliegenden Arbeit interessiert natürlich besonders, welche Konsequenzen diese neuzeitliche Wissenschaftsauffassung für das Problem der Begründung des Wissens hat. Von diesem Problem her erklärt es sich auch, warum Euklid in der neuzeitlichen Mathematik eine so überragende Rolle gespielt hat, obwohl deren methodologische Auffassungen mit denen Euklids nur schwer in Einklang zu bringen sind. Es ergibt sich ein Widerspruch zwischen den Erfordernissen der Wissensentwicklung und denen seiner Begründung, der sich als prägend und bestimmend für die gesamte neuzeitliche Mathematik erweist. Das in diesem Zusammenhang am meisten diskutierte Beispiel stellt die Infinitesimalrechnung dar. Allerdings verstellt diese Fixierung der Sicht auf die Infinitesimalrechnung meistens den Blick dafür, daß das Begründungsproblem in voller Allgemeinheit eigentlich in der Algebra aufgeworfen wird und daß die Mathematik auch am längsten gebraucht hat, im Hinblick auf das Begründungsproblem in der Algebra einen Standpunkt zu formulieren.

Da die vorliegende Arbeit das Problem des widersprüchlichen Verhältnisses von Wissensentwicklung und Begründung vor allem unter wissenschaftstheoretischen Gesichtspunkten behandelt, kann die historische Darstellung im I. Kapitel nur illustrativen Charakter haben. Dabei kann man sich, was die Herausbildung des neuzeitlichen Wissenschaftsverständnisses angeht, in der allgemeinen Wissenschaftsgeschichte auf eine breite Literatur stützen. Schwieriger wird die Situation, wenn man das gewandelte Wissenschaftsverständnis speziell im Hinblick auf die Mathematik analysieren will. Denn die mathematikgeschichtliche Forschung ist bisher überwiegend von der Vorstellung ausgegangen, daß die Mathematik sich in einer Kontinuität entwickelt habe, die von der griechischen Antike bis zur Gegenwart reicht.
Eine der wenigen mir bekannten Ausnahmen stellt eine Arbeit von Jacob Klein aus dem Jahre 1936 dar, die den Titel "Die griechische Logistik und die Entstehung der Algebra" trägt. In dieser außerordentlich detaillierten und scharfsinnigen Untersuchung wird speziell die Art und Weise analysiert, in der Vieta die Arithmetik des Diophant aufgenommen und uminterpretiert hat, um sie in das sich bildende Wissenschaftsverständnis der Neuzeit zu integrieren. Die Arbeit beschäftigt sich also explizit mit dem Problem, wie die antike Mathematik von den neuzeitlichen Autoren rezipiert wurde, in welchem Sinne sie also diese fortführten und in welchem Sinne sie mit ihr brachen. Was die Mathematik angeht, werde ich mich daher in I.1. auf die Darstellung einiger Ergebnisse dieser Arbeit beschränken.

1.1. *Dynamisierung des Wissens: zur Herausbildung der operativen Wissenschaftsauffassung in der Neuzeit*

Um jenen geistigen Umbruch, der sich mit dem Ende des Mittelalters in der Renaissance vollzog, zu charakterisieren und in seinen Grundzügen zu beschreiben, ist das Werk des Kardinals Nikolaus von Kues (1401 - 1464) besonders geeignet. (Nikolaus von Kues wurde 1424 Doktor der Universität von Padua und nahm 1431 am Konzil von Basel teil. Er wurde Kardinal, Bischof von Brixen und Legat für die deutschen Länder, lebte jedoch in Rom, dessen Gouverneur er zeitweilig war. Sein Hauptwerk ist die Schrift "De docta ignorantia" ("Die belehrte Unwissenheit")(1440).)

Das Werk des Nikolaus von Kues ist deshalb so instruktiv, weil es sich noch ganz im Rahmen der traditionellen mittelalterlichen theologischen Fragestellungen bewegt, diese Fragestellungen aber in einem Sinne aufnimmt, der die Grundstruktur des Denkens der neuen Zeit verdeutlicht. Beim Nachdenken über das Problem der Beziehung zwischen Unendlichem und Endlichem, zwischen Gott und der Welt, in seinen "paradoxen" Begriffsbildungen der "docta ignorantia" und der "coincidentia oppositorum" reflektiert er eigentlich immer dieselbe Frage, nämlich das Problem der "Grenze". (Bei meinen Bemerkungen hierzu stütze ich mich auf die Darstellungen in (Cassirer 1974),(Dijksterhuis 1956), (Fichtner 1977), (Koyré 1969).)

Wenn Nikolaus von Kues in seiner Gotteslehre zunächst durchaus im Sinne mittelalterlicher Mystik die Grenze zwischen Gott und der Welt, dem Unendlichen und dem Endlichen betont, wenn er feststellt, daß das Absolute jenseits der Kraft menschlicher Erkenntnis liege, dann gibt er diesem von ihm hervorgehobenen Moment der Grenze später eine Umdeutung, durch die die Schranke der Erkenntnis zu einem Mittel der Erkenntnis wird. Die "docta ignorantia", die ursprünglich nur die Einsicht in die Begrenztheit der menschlichen Erkenntnis bezeichnet, wird eben durch diese Erkenntnis der Grenze dazu geführt, diese zu überschreiten. "Das Bewußtsein des Nichtwissens birgt daher einen tieferen und fruchtbareren Gehalt der Erkenntnis, als jede scheinbar noch so positive Einzelbehauptung: Denn wenn in dieser der weitere Fortschritt gleichsam gehemmt und zum Stehen gebracht ist, so ist in ihm der Ausblick ins Unbegrenzte erhalten und Ziel und Richtung des Weges erleuchtet. Jetzt ist die Unendlichkeit nicht mehr die Schranke, sondern die Selbstbejahung der Vernunft." (Cassirer 1974, S.27) Die Grenze wird somit von Nikolaus von Kues als Entwicklungsmoment des Wissens aufgefaßt, der Gegensatz von Endlichem und Unendlichem, von Relativem und Absolutem ist nur zu überwinden, wenn die Erkenntnis als unendlicher, prinzipiell nicht abschließbarer Prozeß aufgefaßt wird. "Der Charakter der Unendlichkeit ist von dem *Gegenstand* der Erkenntnis auf die *Funktion* der Erkenntnis übergegangen." (Cassirer 1974, S.28) Dadurch, daß die Schranke zwischen Endlichem und Unendlichem von Nikolaus von Kues in eine Beziehung transformiert wird, ändert sich auch das Verhältnis des Erkennenden zum empirischen, auf das Diesseits bezogene Wissen. "So beleuchtet der Begriff der 'docta ignorantia' einen Zusammenhang, der uns bis zu Descartes und Galilei hin in immer neuen Wendungen entgegentreten wird. Nikolaus Cusanus hat diesen Begriff nicht erfunden, sondern ihn, in fertiger terminologischer Bestimmtheit, von Augustin und den christlichen Mystikern übernommen. Das Charakteristische und Neue aber besteht in der Umprägung seiner Bedeutung und seines inneren Gehalts, die hier vollzogen wird. Das Prinzip bezog sich bisher auf das Gebiet des *übersinnlichen* Seins und blieb - in der Negation, wie in seinen positiven, fruchtbaren Konsequenzen - völlig innerhalb dieser Sphäre beschlossen. Der 'niedere' Bezirk der *empirischen* Forschung war von Anfang an dem Blick und dem Interesse der metaphysischen Erkenntnislehre entrückt. Jetzt ist es eben dieser *polemische* Begriff des Nichtwissens, der jenes verachtete Gebiet dem Erkennen neu erobern soll." (Cassirer 1974, S.28/29)

Nikolaus von Kues konzeptualisiert sich also das Verhältnis von Endlichem (Welt) und Unendlichem (Gott), modern gesprochen, als Verhältnis von Subsystem und System; dementsprechend stellt sich Erkenntnis dar als Übergang von einem speziellen System zu einem es umfassenden allgemeineren System. Das damit implizierte Grundproblem der Wissensentwicklung, wie nämlich Neues in die Erkenntnis einbezogen werden kann, wie man überhaupt etwas suchen kann, wenn man nicht weiß, daß dieses Etwas überhaupt existiert, wird von Nikolaus von Kues mit außerordentlicher Deutlichkeit gesehen. Er hat diese Einsicht, daß Erkennen nun (in der Neuzeit) bedeutet, mit dem Unbekannten umzugehen, wohl als einer der ersten klar ausgesprochen. Nikolaus von Kues meint, daß derjenige, der die Quadratur des Zirkels suche, notwendig, noch ehe er sie durch die Tat und das Ergebnis der Forschung belegen könne, eine Gleichheit zwischen gradlinigen und krummlinigen Figuren als möglich voraussetze. Er müsse somit einen reinen allgemeinen Begriff der Größe und der Gleichheit in sich tragen. "Und hier eröffnet sich uns die Lösung des Geheimnisses, daß nämlich der Forschende das, was er sucht, voraussetzt und zugleich, sofern er es sucht, nicht voraussetzt. Denn, wer immer zu wissen begehrt, setzt voraus, daß es eine Wissenschaft gibt, vermöge derer der Wissende zum Wissenden wird. Wer zweifelt, der wird dazu bestimmt und angestachelt von dem Gedanken einer unendlichen Erkenntnis, die alle mögliche Wahrheit enthält und in sich faßt." (Nikolaus von Kues, Complementum teologicum, Kap. IV, zitiert nach Cassirer 1974, S.59) "Was in jeder Frage *vorausgesetzt* wird, das ist zugleich das Licht, das uns zu dem Gefragten hinleitet." (a.a.O.) Im Vorgriff sei darauf hingewiesen, daß Nikolaus von Kues mit diesen Formulierungen insbesondere auch das Prinzip der Algebra, so wie sie als Methode des Findens neuer Wahrheiten von den Mathematikern der Neuzeit aufgefaßt wurde, benennt. Dieses Prinzip besteht darin, das Unbekannte als bekannt anzunehmen und damit zu operieren. Vor allem aber hat die Tatsache, daß der Erkenntnisprozeß durch das Neue, Unbekannte strukturiert wird, einschneidende Konsequenzen für das Verständnis dessen, was Begründung heißt, wie sich noch zeigen wird.

Wenn man sich einen Kreis denkt, dessen Radius unbegrenzt wächst, dann nimmt seine Krümmung ab und er wird sich immer mehr einer geraden Linie angleichen. Man ist also berechtigt, die unendliche Gerade als Kreis mit unendlich großem Radius zu betrachten. Während also von einem bestimmten Standpunkt aus, Kreis und Gerade Gegensätze sind, erweisen sie sich unter einem allgemeineren Gesichtspunkt als identisch, als bloße Spezifizierungen eines allgemeineren Konzeptes. Die unendliche Gerade ist ein Kreis, sie ist zugleich ein Dreieck, dessen Scheitelwinkel sich zu 180° gestreckt hat, dieses Dreieck ist selbst ein Kreis, ebenso ist es Viereck, Fünfeck usw. (vgl. Dijksterhuis 1956, S.252). Diese Beispiele des Nikolaus von Kues verdeutlichen hinreichend, was unter seiner Konzeption der "coincidentia oppositorum" gemeint ist. Alle Gegensätze und Widersprüche sind nur relativ: Das Größte ist identisch mit dem Kleinsten, der Mittelpunkt des Kreises ist identisch mit seinem Umfang etc. Auch die "coincidentia oppositorum" erweist sich so nur als eine andere Art, das Problem der (System-)Grenze zu reflektieren: Zwei widersprüchliche, unverbundene Systeme erweisen sich als identisch, zusammenhängend, sofern sie Teilsysteme desselben Obersystems sind. Damit aber wird für die neuzeitliche Wissenschaft eine wichtige und folgenreiche Einsicht dargestellt; diese Einsicht besteht in einem veränderten Verhältnis zum Widerspruch. Dieser wird aus einer Schranke der Erkenntnis zu einem Entwicklungsmoment. Und die Mathematik ist diejenige Wissenschaft, die von diesem Prinzip in nachhaltiger und vorbildlicher Weise Gebrauch macht. Auch Cassirer weist auf die Wichtigkeit dieser Überlegung des Nikolaus von Kues hin. Er beschreibt sie so, daß er sagt, für Nikolaus von Kues gehe die Mathematik allmählich von der Seite des "Verstandes" auf die Seite der "Vernunft" über (Cassirer 1974, S.49ff). "Der Abschluß des Wissens ist erst vollzogen, wenn es ihm gelingt, ein Prinzip zu finden, aus welchem in lückenloser Folge der *Inbegriff* der möglichen Einzelsetzungen sich vollständig entwickeln und in der Notwendigkeit seiner *Verknüpfung* durchschauen läßt. Dieses Prinzip geht allen besonderen Gegensätzen voran, da diese sich, durch bestimmte hinzutretende Bestimmungen, erst *aus* ihm entfalten sollen. Hier treten uns die Abgrenzungen des einzelnen nicht als ursprünglich gegebene Schranken starr und unveränderlich gegenüber, sondern wir versuchen, sie vor uns entstehen zu sehen. Wir verfolgen die allgemeine Regel, nach welcher jede neue Gestaltung aus einer früheren hervorgeht, und erst in diesem Überblick über die *Allheit* der Glieder und ihre wechselseitige Abhängigkeit begreifen wir nunmehr, von einer anderen Seite her, die Individualität des einzelnen." (Cassirer 1974, S.50/51)

Die Relativität aller Gegensätze, wie sie von Nikolaus von Kues konstatiert wird, bedingt auch die Relativität aller Ortsbestimmungen; damit kommen wir zu den kosmologischen Überlegungen des Cusaners, die ihn zum Vorläufer des kopernikanischen Weltsystems machen. Wenn die endliche Welt nicht mehr absolut, also abgeschlossen genommen wird, dann kann diese Welt auch keinen Mittelpunkt und keine umhüllende Begrenzung haben. Gott sei zugleich das Zentrum und die Peripherie der Welt. Im Weltall gebe es keine Rangunterschiede, vom Absoluten sei alles unendlich weit entfernt. "Es ist also, um es konkret auszudrücken, nicht wahr, daß die Erde unbeweglich inmitten des Weltalls ruht, daß diese selbst durch eine alles umfassende äußerste Sphäre begrenzt wird, daß jedes Element seinen eigenen natürlichen Platz hat, daß zwischen ihnen Rangunterschiede bestehen, daß namentlich die Himmelskörper sich wesentlich vom Irdischen unterscheiden und daß die Erde der schlechteste und verächtlichste Teil des Weltalls ist. Sie ist ein Stern, genauso edel wie alle anderen und beweglich wie diese. Man lasse sich nicht durch ihre Dunkelheit irreführen; wenn wir die Sonne aus der Nähe sehen könnten, würden wir auch in ihr einen dunklen Erdenkern erblicken, und von außen würde unsere Erde wegen ihrer umhüllenden Feuersphäre ebenfalls als ein leuchtender Stern erscheinen." (Dijksterhuis 1956, S.253/54) Allerdings sagt Nikolaus von Kues nicht, daß das Weltall unendlich sei. Dies wird erst später von Giordano Bruno behauptet, der sich bei dieser Behauptung allerdings fälschlicherweise auf Nikolaus von Kues beruft. Nikolaus von Kues sagt nur, das Universum sei unbegrenzt. "..., und das bedeutet nicht nur, daß es grenzenlos und nicht durch eine äußere Hülle begrenzt ist, sondern auch, daß es in seinen Bestandteilen nicht 'begrenzt' ist; das wiederum bedeutet, daß ihm Präzision und exakte Bestimmung fehlen. Es erreicht niemals die 'Grenze'; es ist im vollen Wortsinn *nicht determiniert* . Es kann deshalb nicht Gegenstand eines umfassenden und präzisen, sondern nur eines partiellen und auf Vermutungen gegründeten Wissens sein." (Koyré 1969, S.18) Aus der Relativität aller Gegensätze schlußfolgert Nikolaus von Kues, daß es keine absolute Ruhe und keine absolute Bewegung gibt. Da eine umfassende Welt bestehe und eine wechselseitige Beeinflussung aller einzelnen Sterne, gebe es keinen Grund zur Annahme, daß nur hier auf der Erde und nicht überall im Universum Veränderlichkeit und Zerfall bestünden. "Nein, wir haben allen Grund anzunehmen - obgleich wir es natürlich nicht *wissen* können -, daß überall der nämliche Zustand herrscht, umso mehr, als dieser Zerfall, der uns als besonderes Merkmal des irdischen Seins dargestellt wird, durchaus keine reale Zerstörung ist, d.h. kein vollkommener und absoluter Verlust der Existenz. Es ist freilich der Verlust dieser oder jener besonderen Existenzform. Doch im Grunde ist es nicht so sehr ein völliges Verschwinden, als vielmehr Auflösung oder Zerlegung eines Existierenden in seine Bestandteile und deren Wiedervereinigung zu etwas anderem; ein Prozeß, der im ganzen Universum stattfinden kann und wahrscheinlich auch stattfindet, eben weil die ontologische Struktur der Welt grundsätzlich überall gleich ist. Sie drückt in der Tat überall auf die gleiche zeitliche, d.h. veränderliche und vergängliche Weise die unveränderliche und ewige Vollkommenheit des Schöpfers aus." (Koyré 1969, S.31)

Aus diesen ausführlichen Zitaten wird, gerade weil die Überlegungen des Nikolaus von Kues einen so spekulativen Charakter tragen, sehr deutlich, in wie engem Maße erkenntnistheoretische Auffassungen mit einem bestimmten Objektverständnis zusammenhängen. In den dargestellten Überlegungen formuliert Nikolaus von Kues einige der Grundvoraussetzungen für die Entwicklung der neuzeitlichen Naturwissenschaft und insbesondere für die Möglichkeit, Mathematik zur Beschreibung von Naturprozessen anzuwenden: die Homogenität des Raumes, Gleichartigkeit von Kosmos und Erde, "Unbegrenztheit" der Natur auch im kleinen, Relativität des Bewegungsbegriffs etc. Man erhält aus den Ausführungen des Nikolaus von Kues eine Ahnung davon, was an dem neuentstehenden Naturbild Weltanschauung ist, weil die Gedanken des Nikolaus von Kues nicht Ergebnis "positiver wissenschaftlicher" Arbeit sind.

Aus der Verwandlung der *Schranke* zwischen Endlichem und Unendlichem, zwischen Welt und Gott in eine *Beziehung* folgt, wie dargestellt, daß dem auf das Diesseits gerichteten empirischen Wissen von Nikolaus von Kues ein hoher Rang zugeordnet wird. Demgemäß empfiehlt er in der Schrift "De staticis experimentis" das Wägen als wahre Methode der Naturforschung. Die Weisheit sei auf der Straße zu finden, man begegne ihr auf dem Markt, wo Geld gezählt, Waren gewogen, Öl und andere Stoffe abgemessen würden. Nikolaus von Kues beschreibt eine Fülle von möglichen Experimenten und ihren Nutzen für den Menschen. "Die große Mehrzahl der Versuche ist rein fiktiv und wird denn auch in der Konditionalform beschrieben: Man könnte so und so vorgehen, dieses und das messen. Dementsprechend wird auch kein einziges numerisches Resultat mitgeteilt. Auch wird - ein bekanntes Jugendsymptom der experimentellen Physik - die technische Schwierigkeit der vorgeschlagenen Versuche stark unterschätzt und ihre Tragweite enorm übertrieben. Cusanus will sogar die Qualität der Ernte vorhersagen, indem er im März Wägungen von Wasser und Getreidekörnern ausführt." (Dijksterhuis 1956, S.258)

Nikolaus von Kues ist ein historisch sehr früher Repräsentant jener Entwicklung, in deren Verlauf sich das Naturbild und das Wissenschaftsverständnis der neuzeitlichen Naturwissenschaft herausbildet. Dennoch sind in seiner Konzeption im Keim alle wesentlichen Elemente dieses sich neu herausbildenden Weltbildes enthalten: Angefangen bei den grundlegenden ontologischen Vorstellungen dieses Weltverständnisses über die große Wichtigkeit, die experimentellen Untersuchungen beigemessen wird, bis zur Idee der Erkenntnis als Prozeß, also ersten Vorstellungen vom wissenschaftlichen Fortschritt. Der Kern der Spekulationen des Nikolaus von Kues war in seinem Nachdenken über das Problem der Grenze bzw. des Widerspruches erkannt worden. Darin drückt sich die entscheidende Differenz seines Denkens gegenüber den mittelalterlich-scholastischen Vorstellungen aus. Diese Differenz besteht in der *Dynamisierung* , die das Denken bei Nikolaus von Kues erfährt und die grundlegend ist für die gesamte neuzeitliche Wissenschaft.

Das Weltbild des Mittelalters ist in seinem Kern statisch. Der Kosmos, die menschliche und göttliche Ordnung bildeten eine geschlossene, unveränderliche Einheit. Wahres Wissen ("scientia") konnte sich nur auf das beziehen, was statisch und unveränderlich war. Und Wissen war für den Menschen auch nur nützlich, insofern es sich auf diese statischen Gegebenheiten bezog, dem Menschen seinen Platz in der allgemeinen großen Ordnung zuwies und ihm diese Ordnung durchschaubar machte. "Ganz allgemein bestand eine kosmische Ordnung, eine gesellschaftliche Ordnung, eine Ordnung im menschlichen Körper, alles Zustände, zu denen die Natur zurückstrebt, wenn diese Ordnung gestört worden war. Alles hatte seinen Platz, und jedes kannte ihn. Auch die Elemente befanden sich in einer bestimmten Anordnung - zu unterst die Erde, darüber das Wasser, darüber wieder die Luft, und das Feuer als edelstes Element ganz oben. Die edlen Organe des Körpers - Herz und Lunge - waren durch das Zwerchfell sorgfältig von den niederen Organen der Bauchhöhle getrennt. Tiere und Pflanzen hatten ihre Rolle in dieser allgemeinen Ordnung zu spielen; sie dienten nicht nur zur Befriedigung der Lebensbedürfnisse des Menschen, sondern mehr noch als moralisches Beispiel - der Fleiß der Ameise, der Mut des Löwen, die Selbstaufopferung des Pelikans. Dieser ungeheure, komplexe und dennoch geordnete Kosmos war auch in idealer Weise rational. Er verknüpfte die äußerst logisch begründeten Schlußfolgerungen der Alten mit den unbezweifelbaren Wahrheiten der biblischen und kirchlichen Tradition. Die Schulen mochten in Einzelheiten voneinander abweichen, doch zweifelte niemand daran, daß es im wesentlichen ein korrektes Bild war. Das entscheidende Problem war scheinbar ein für allemal gelöst worden. Man glaubte sich eines Universums zu erfreuen, das gleichzeitig praktisch, theologisch wohl begründet und äußerst vernünftig war." (Bernal 1967, S.204/205) Die wissenschaftliche Kultur des Mittelalters bestand wesentlich in der Rezeption von Texten und ihrer Interpretation. Wissenschaftliche Wahrheit wurde durch Autorität begründet. Das Ziel der Wissenschaft war es, die Ordnung der Welt (der Erfahrung und des Glaubens) festzustellen und zu interpretieren. Mittelalterlicher Wissenschaft ging es also um die Feststellung der Konsistenz der Welt.

Man muß sich die Selbstgenügsamkeit und das hohe Beharrungsvermögen sowohl des mittelalterlichen geschlossenen Weltbildes als auch des mit diesem Weltbild korrespondierenden Typs wissenschaftlicher Tätigkeit als literarischer Textexegese klarmachen, um die Tiefe des Umbruchs zu verstehen, der schließlich zu einem offenen Weltbild (reflektiert in der Unendlichkeit des Universums sowohl im Hinblick auf seine Ausdehnung im Großen als auch im Hinblick auf seine interne Struktur) und einem Typ wissenschaftlicher Arbeit führt, der wesentlich auf die bewußte Gewinnung neuen Wissens auf der Grundlage planmäßigen Experimentierens gerichtet ist. Dabei geht es hier nicht darum, zu behaupten, das Mittelalter sei im wissenschaftlichen Sinne gänzlich unproduktiv gewesen, sondern es geht um die Feststellung der Differenz eines statisch-geschlossenen zu einem dynamisch-offenen Weltbild. Insbesondere ist klar, daß das statisch-geschlossene Weltbild auf seiner eigenen Grundlage, also rein intellektuell, nicht erschüttert werden kann. Widersprüchliche Erfahrung etwa kann niemals zu einer In-Frage-Stellung des Weltbildes führen. Speziell für die Beziehung des ptolemäischen Systems zum kopernikanischen ist dies in der wissenschaftsgeschichtlichen Literatur vielfach diskutiert worden. In ähnlicher Weise wird von R. Horton in einem Aufsatz über die Beziehung von traditionellem Denken in Afrika und "westlicher Wissenschaft" (der Autor sieht die Differenz beider Denkformen eben in der hier diskutierten Unterscheidung von geschlossenem und offenem Weltbild) das Problem behandelt, wieso bestimmte religiöse Überzeugungen, etwa über die Heilungskraft bestimmter ritueller Handlungen im Krankheitsfalle, nicht durch Erfahrungen des Mißerfolges erschüttert werden können. Er gibt eine Reihe von Beispielen dafür, daß gerade die Kohärenz und Konsistenz des Weltbildes es unmöglich macht, dieses auf der Grundlage von Erfahrungen zu destruieren (vgl. Young 1975, S.242ff).

In der wissenschaftshistorischen Literatur ist es weithin unbestritten, daß der angedeutete Umbruch im theoretischen Denken mit den tiefgreifenden Wandlungen in der Produktion und in der sozialen Struktur zusammenhängt, der abgekürzt als Übergang vom Feudalismus zum bürgerlich-kapitalistischen Zeitalter bezeichnet werden kann, wenn auch in der Gewichtung und Bewertung der einzelnen Faktoren und ihres Zusammenwirkens eine Vielzahl unterschiedlicher Meinungen existiert. Da es im Kontext der vorliegenden Arbeit nur um die Herausarbeitung einiger wissenschaftstheoretisch interessanter Differenzierungen geht, braucht auf dieses allgemeine Problem hier nicht näher eingegangen zu werden. Allerdings ist es wichtig und aufschlußreich, sich im Hinblick auf die spezielle Problematik der engen Verbindung von Naturerkenntnis und Mathematik in der neuzeitlichen Wissenschaft die dazu entwickelte These von E. Zilsel zu vergegenwärtigen.

In einer Arbeit aus dem Jahre 1942 ("Die sozialen Ursprünge der neuzeitlichen Wissenschaft", abgedruckt in: Zilsel 1976) entwickelt E. Zilsel die These, daß die Entstehung der neuzeitlichen Wissenschaft zu verstehen ist als Prozeß der Verschmelzung dreier verschiedener Typen intellektueller Tätigkeit. In der Periode von 1300 bis 1600 müssen drei Ebenen intellektueller Tätigkeit unterschieden werden: Universitätsgelehrte, Humanisten und Künstler. "Universitätsgelehrte und Humanisten waren zwar rational geschult; ihre Berufsbedingungen allerdings bestimmten Methoden, die sich substantiell von den Methoden der Wissenschaft unterschieden. Beide, Professoren wie humanistische Literaten, unterschieden liberale von mechanischen Künsten und verschmähten Handarbeit, Experiment und Sektion. Die Handwerker waren die Pioniere des kausalen Denkens dieser Epoche. Gewisse Gruppen der höheren Handarbeiter (Künstler, Ingenieure, Wundärzte, die Hersteller nautischer und musischer Instrumente, Feldmesser, Navigatoren, Schützen) experimentierten, sezierten und benutzten quantitative Methoden. Die Meßinstrumente des Navigators, Feldmessers und Schützen waren die Vorläufer der späteren physikalischen Instrumente. Den Handwerkern fehlte jedoch die methodische intellektuelle Schulung. So waren die beiden Komponenten der wissenschaftlichen Methode durch eine soziale Barriere getrennt: Logische Schulung war den Gelehrten der höheren Klasse vorbehalten; Experimentieren, Kausalinteresse und quantitative Methoden waren mehr oder weniger den plebejischen Künstlern überlassen. Die Wissenschaft wurde geboren, als mit dem Fortschritt der Technologie die experimentelle Methode schließlich die sozialen Vorurteile gegen die Handarbeit besiegte und von rational geschulten Gelehrten übernommen wurde. Dies wurde um ca. 1600 erreicht (Gilbert, Galilei, Bacon). Zur selben Zeit wurden die scholastischen Methoden der Disputation und das humanistische Ideal individuellen Ruhms durch die Ideale der Kontrolle der Natur und der Fortschritte des Wissens durch wissenschaftliche Zusammenarbeit überwunden. Auf eine soziologisch etwas abweichende Art entwickelte sich die moderne Astronomie. Der gesamte Prozeß war eingebettet in den Fortschritt der frühkapitalistischen Gesellschaft, die das Kollektivbewußtsein, magisches Denken und den Glauben an Autorität schwächte und die weltliches, kausales, rationales und quantitatives Denken vorantrieb." (Zilsel 1976, S.49)

Auf der Grundlage dieser These läßt sich der spezifische Typ neuzeitlicher Wissenschaft vorstellen: Er besteht in der Verbindung von praktischem Experiment mit systematischer, logischer Klassifikation und Deduktion unter dem Gesichtspunkt des planmäßigen Erwerbs neuen Wissens. Dies wird auch in dem Buch von Böhme/van den Daele/Krohn (1977) hervorgehoben. W. Krohn schreibt dort:"Der Experimentbegriff prägt das neuzeitliche

Methodenbewußtsein. Während Methoden im griechischen Sinne des Wortes rückwärts gewandte Reflexionen über den Weg sind, der zu einer Erkenntnis geführt hat, ist die experimentelle Methode inventiv; sie bahnt einen Weg zu einem Ziel, das in der Zukunft liegt. In diesem Bezug aufs Neue hat der Experimentbegriff eine enge Beziehung zum Fortschrittsbegriff. Das Bewußtsein der Innovationsfähigkeit des Menschen und der Akkumulierbarkeit dieser Innovationen gewinnt im Experiment seine Technik und Methode." (a.a.O.,S.61) Insofern ist es auch richtig, den Unterschied mittelalterlicher zu neuzeitlicher Wissenschaft nicht in der Alternative von dogmatischem Rationalismus gegen modernen Empirismus zu sehen, wie Krohn in einer Fußnote feststellt. Vielmehr scheint die mittelalterliche und auch die antike Wissenschaft eher durch einen übermäßigen Empirismus gekennzeichnet zu sein. Demgemäß möchte Krohn diese Alternative mit den Begriffen "Phänomenologismus versus Konstruktivismus" beschreiben. In dieser Arbeit wird im folgenden statt vom 'Konstruktivismus' eher vom 'operativen Charakter' der neuzeitlichen Wissenschaft gesprochen.[1]
Der nicht-empiristische, theoretische Charakter des neuen Wissenschaftstypus wird von Galilei, der wohl am bewußtesten die Idee der Vereinigung von Naturerkenntnis und Mathematik verfolgt und entwickelt hat, in Auseinandersetzung mit Aristoteles klar herausgestellt; Galilei wirft Aristoteles gerade seinen Empirismus vor und betont die Notwendigkeit von Abstraktion und Idealisierung. Der Unterschied zwischen dem "aristotelischen Empirismus" und der operativen Auffassung der neuen Wissenschaft, die die Erkenntnis als Prozeß der aktiven Konstruktion des Objekts versteht, wird in dem folgenden fingierten Dialog illustriert (vgl. auch Galilei 1973, S.57ff):

---

1 Wie sich im II. und III. Kapitel noch im einzelnen zeigen wird, ergibt auch der in dem genannten Aufsatz von Krohn enthaltene Gedanke, die Entstehung der neuzeitlichen Wissenschaft unter die Leitidee der "reflektiven Abstraktion" von Piaget zu stellen, gewisse Berührungspunkte mit der vorliegenden Arbeit. Allerdings wird in der Frage des Gegenstandsbezugs mathematischer Theorien hier eine von Piaget abweichende Auffassung vertreten.

"GALILEO'S MENTAL TOWER OF PISA
(Free paraphrase of the Dialogues)

Galileo : Dr. Aristotle, do you say that a 2lb ball of lead will reach the ground sooner than a 1lb ball of lead?

Aristotle : Any child can tell you it will. Heavy objects fall faster!

Galileo : What about two separate 1lb balls of lead? Will they fall faster than a single 1lb ball?

Aristotle : Obvious not. They fall at the same speed.

Galileo : Now connect the two 1lb balls together. That makes a 2lb ball.

Aristotle : So what? The whole is not the sum of its parts.

Galileo : But the two balls were falling at the same speed, so if I link them, there will be no tension in the link, so no influence will pass from one to the other; no interaction ... .

Aristotle has to agree." (Papert 1973, S.6)

Die Dynamisierung des Wissens in der Neuzeit kommt wohl am prägnantesten und nachdrücklichsten in dem Vorrang zum Ausdruck, der im Selbstverständnis der Wissenschaft dem Methodischen gegenüber dem Ontologischen eingeräumt wird. Dies ist im Selbstverständnis von antiker und mittelalterlicher Wissenschaft umgekehrt: Dort hat die Ontologie absoluten Vorrang. Auch das mittelalterliche Verständnis von Wissenschaft als Textexegese ist nur möglich auf der Grundlage einer festen, gegebenen Ontologie. Hingegen ist in der Neuzeit die Betonung der Methode so ausgeprägt, daß die Mehrzahl der Wissenschaftler davon ausgeht, die wissenschaftliche Methode sei unabhängig vom Gegenstand der Erkenntnis. Bei der Beschreibung der Herausbildung des neuzeitlichen Methodenbegriffs sagt Blumenberg, es werde "geradezu zum Kennzeichen des neuzeitlichen Denkens, daß die Klärung der Methodenprobleme einen zunehmend großen, oft die sachlichen Fragen in den Hintergrund drängenden Raum einnimmt. Auf weiten Strecken der neuzeitlichen Geistesarbeit

scheint über der Sicherung und Vermessung der Wege, Wegmarken und Richtweiser die Landschaft der realen Gegebenheit zu einem bloßen Schemen verblaßt zu sein." (Blumenberg 1952, S.135)
Es sei, so fährt er fort, für den mittelalterlichen Wissenschaftler fraglos klar gewesen, daß ein einzelner Mensch in der Lage sei, den Ordo der Wahrheit wenigstens in seinen wesentlichen Zügen umfassen und entfalten zu können. Hingegen setze der Methodenbegriff der Neuzeit ein kollektives Erkenntnissubjekt voraus. "Sie (die Methode) erfordert sozusagen ein *umfassenderes Subjekt* als das individuelle, ein Subjekt, dem die Individuen nur als sich ablösende Funktionäre, als Exemplare eines gattungshaften Tuns untergeordnet sind. Es ist nur konsequent und bezeichnend, daß in der Sprache der Neuzeit erstmals 'die Menschheit' als Subjekt von Erfahrungen und Handlungen auftreten konnte. ... Die Methode wird entworfen als eine *Form* des Erkenntnisprozesses, die von der konkreten Wirklichkeit des einzelnen Denkers und Forschers ablösbar ist, die von einem auf den anderen beliebig *übertragen* , von Generation zu Generation *übernommen* werden kann." (a.a.O., S.135) Descartes ist der Philosoph gewesen, der dieses Problem zum ersten Mal umfassend reflektiert hat. In seinem Begriff der "res cogitans" hat er versucht, dem verallgemeinerten Subjekt der Methode einen philosophischen Ausdruck zu verleihen, während sein Konzept der "res extensa" das dem allgemeinen Methodenverständnis korrespondierende verallgemeinerte Erkenntnisobjekt darstellt. Gleichzeitig beinhaltet die Identifizierung der Materie als "res extensa" die Konzeption der universellen Anwendbarkeit der Mathematik für die Darstellung und Beschreibung von Naturprozessen.

Die Tatsache, daß die Wissenschaft des Mittelalters vorrangig literarisch geprägt war, daß Erkenntnis mit Textexegese gleichgesetzt wurde, impliziert im Grunde genommen eine Identifikation des Textes mit dem Gegenstand der Erkenntnis, eine Identität von Zeichen und Bezeichnetem. Von dieser grundlegenden Identifizierung ist auch die Wissenschaft der Renaissance noch weitgehend geprägt. Die Opposition gegen die scholastische

Wissenschaft ist ihrerseits zunächst vorrangig eine literarische Bewegung, die durch die umfassende Wiederaufnahme der antiken Texte die scholastischen Dogmen durchbrechen will. G. Sarton hat umfassend dargestellt, wie fast die gesamte Forschung und Wissenschaft der Renaissance im Umgang mit Texten bestand. "To study geometry was to study Euclid; a geographical atlas was an edition of Ptolemy; the physician did not study medicine, he studied Hippocrates and Galen, and so on." (Sarton 1961, S.171) Und auch diejenigen, die einen empirischen Bezug zur Natur in den Vordergrund stellen, verstehen Natur weitgehend symbolisch. Ihnen bedeutet, die Natur zu erkennen, im Buch der Natur zu lesen bzw. ihre Zeichen zu entschlüsseln. Die damit verbundenen magischen Vorstellungen sind bei fast allen Wissenschaftlern der Renaissance festzustellen (noch bis zu Kepler hin), die Alchemisten, die ja in der Renaissance durchaus als seriös akzeptiert wurden, leben in einer völlig symbolistischen Welt. Für sie haben Experimente und magische Formeln die gleiche Bedeutsamkeit.

Die Auflösung dieser ursprünglichen Identität von Text und Gegenstand, von Zeichen und Bezeichnetem ist eine Folge der Dynamisierung des Wissens in der neuzeitlichen Wissenschaft und gleichzeitig eine der größten Errungenschaften dieser Wissenschaft, die eine dynamische Erkenntnisentwicklung überhaupt erst ermöglicht. Erst die Trennung von Zeichen und Bezeichnetem schafft die Grundlage dafür, Zeichen als Repräsentanten des Unbekannten, des neuen Wissens aufzufassen und damit zum Gegenstand wissenschaftlicher Arbeit zu machen. Das bedeutet insbesondere, dies sei vorwegnehmend gesagt, daß erst mit dieser radikalen Trennung von Zeichen und Bezeichnetem die Algebra als eigenständige Wissenschaft möglich wird.

Damit scheint der Kontext hinreichend beleuchtet zu sein, in dessen Rahmen die neuzeitliche Mathematik den entscheidenden Schritt über die antike Mathematik hinaus durch die Entwicklung der Algebra tat. Dabei liegt es nahe, diesen Prozeß exemplarisch am Werk von Vieta zu studieren, da dieser den entscheidenden Schritt, nämlich die Formulierung der der Algebra zugrundeliegenden Methode, in enger Anknüpfung an die antike Mathematik, vor allem an Diophant, vornahm. Dies ist der Grund, warum die Frage nach der Kontinuität bzw. Diskontinuität zwischen antiker und neuzeitlicher Mathematik sich am Beispiel des Werks von Vieta besonders gut behandeln läßt. Man muß allerdings bei den folgenden Ausführungen im Auge behalten, daß Vieta sich nicht nur auf Diophant, sondern auch auf eine über 100 Jahre alte westeuropäische und eine weit zurückreichende arabische Tradition in der Algebra stützte. Selbst für das, was gemeinhin als das entscheidende Verdienst von Vieta angegeben wird, nämlich die Einführung von Buchstaben für die Zahlenkoeffizienten in Gleichungen, gibt es Vorläufer. Diese Tatsache legt nun ihrerseits nahe, Vieta in einem breiteren geistesgeschichtlichen Kontext zu betrachten, weil sich sonst nicht sehen ließe, worin sein entscheidendes Verdienst eigentlich besteht.

In der oben genannten Arbeit von J. Klein, die Grundlage der folgenden Darstellung ist, wird zunächst versucht, einige Grundzüge des Transformationsprozesses zu beschreiben, denen die antike mathematische Begrifflichkeit bei ihrer Rezeption in der frühen Neuzeit unterworfen wird. Speziell für Vieta ist es charakteristisch, daß er sich selbst als jemand versteht, der bemüht ist, die antike Begrifflichkeit wiederherzustellen,bei dieser Wiederherstellung aber eine Uminterpretation der Begriffe vornimmt. Was den allgemeinen Rahmen dieser Uminterpretation angeht, so ist zunächst einmal festzuhalten, daß die antike Wissenschaft den Unterschied zwischen "natürlicher" und "wissenschaftlicher" Erkenntnis herausgearbeitet hat und sich dabei bemühte, zu der "natürlichen" Bedeutung von Begriffen, die durch Vagheit und Mehrdeutigkeit gekennzeichnet ist, die jeweilige reine "wissenschaftliche", von allen Ungenauigkeiten der Umgangssprache befreite Bedeutung der Begriffe festzustellen. Die neuzeitliche Wissenschaft übernimmt nun einerseits diese Unterscheidung von "natürlichem" und "wissenschaftlichem" Denken, verändert aber ihr Verhalten zur wissenschaftlichen Begrifflichkeit, indem sie sich zu den Begriffen nicht mehr als einzelnen, sondern als System verhält. "Die 'neue' Wissenschaft dagegen gewinnt im allgemeinen ihre Begriffe in der Auseinandersetzung mit den ihr überlieferten *Begriffen* der Schulwissenschaft (gemeint ist die mittelalterliche universitäre Scholastik,H.N.J.). Nicht mehr besteht hier für jeden dieser Begriffe eine - mit der menschlichen Rede gegebene - natürliche Mehrdeutigkeit, wonach sich stets ihr präziser Sinn von einer Reihe weniger präziser Bedeutungen unterscheiden ließe. Nicht mehr ist das in diesen Begriffen Vermeinte *unmittelbar* einsichtig. Erst der innere Zusammenhang der Begriffe, ihr Aufeinanderbezogensein, ihr Eingeordnetsein in das gesamte Gebäude der Wissenschaft gibt einem jeden von ihnen einen *eindeutigen* Sinn und erschließt das Verständnis für ihren allein infrage kommenden, spezifisch wissenschaftlichen Gehalt. Indem die 'neue' Wissenschaft sich ihre eigenen Begriffe im Kampf mit der Wissenschaft der Schule erarbeitet, interpretiert sie auch die an der Schule überlieferten Begriffe der griechischen Wissenschaft nicht mehr von deren 'natürlicher' Basis aus, sondern vor allem im Hinblick auf die Funktion, die jeder dieser Begriffe im ganzen der Wissenschaft ausübt. So ist jeder der neu gewonnenen Begriffe durch *die Reflexion auf die Totalität des Begriffszusammenhangs* bestimmt. Jeder Begriff der 'neuen' Wissenschaft gehört nun einer neuen begrifflichen Dimension an. Die besondere Begrifflichkeit des jeweiligen Begriffs stellt kein Problem mehr dar: sie ist für alle Begriffe unterschiedslos dieselbe, sie ist das allgemeine, von der Reflexion nicht mehr erreichte Medium,in dem sich der Aufbau der wissenschaftlichen Welt vollzieht." (Klein 1936, S.125)

Die neuzeitliche Mathematik, insbesondere die Algebra, ist nun insofern vorbildlich für die Gesamtheit der Wissenschaften, als in ihr der spezifische Zusammenhang zwischen der Art ihrer Generalisierung und ihrem "Kunst"-Charakter, also zwischen gegenständlichen und operativen Momenten, in besonders prägnanter Weise zum Ausdruck kommt. Realisiert wird dieser spezifische Zusammenhang von Gegenstand und Verfahren in der symbolischen

Formelsprache und der Rechentechnik der modernen Mathematik. Die mathematische Historiographie hat nun deswegen die Entwicklung von der antiken zur neuzeitlichen Mathematik als einen im wesentlichen kontinuierlichen Prozeß dargestellt, weil sie die *Spannung*, die zwischen Verfahren und Gegenstand, bzw. präziser: zwischen der Allgemeinheit des Verfahrens und der Allgemeinheit des Gegenstandes, besteht, übersehen hat bzw. nicht verstand, daß diese Spannung in Antike und Neuzeit verschieden gelöst wurde. Während die antike Mathematik den Zusammenhang von Verfahren und Gegenstand von der Ontologie her bestimmte und reflektierte, stellt die neuzeitliche Mathematik das Verfahren in den Vordergrund und bestimmt ihre Gegenstände nur noch danach, wie sie im allgemeinen Verfahren der Erkenntnis zugänglich werden. Es ist mithin ein Irrtum, aus der Tatsache, daß bei Euklid alle Zahlen mit Hilfe von Strecken dargestellt werden, zu schließen, die Griechen hätten über den Begriff der "allgemeinen Größe" verfügt. "Indem sie (die Darstellung bei Euklid) die jeweils bestimmte Anzahl von Maßeinheiten durch eine Maßstrecke *veranschaulicht*, tut sie zweierlei *nicht*, was den Lebensnerv des symbolischen Verfahrens ausmacht: Sie identifiziert *nicht* den dargestellten Gegenstand mit dem Mittel seiner Darstellung und sie ersetzt *nicht* die Bestimmtheit des Gegenstandes durch seine *mögliche* Bestimmtheit, die in einem diese mögliche Bestimmtheit *anzeigenden*, nicht etwa veranschaulichenden *Zeichen* ihren Ausdruck findet." (a.a.O., S.127) Auch die Benutzung von Buchstaben zur Bezeichnung von Linien und Punkten bei Euklid ließe sich nicht als Symbolgebrauch im modernen Sinne verstehen. Immer werde unterstellt, daß die Buchstaben für bestimmte Zahlen oder Linien stehen und nicht Repräsentanten eines allgemeinen, unbestimmten Objekts seien.

Der Übergang vom antiken (An-)Zahlbegriff zum Begriff der Zahlen als "allgemeiner Größe" in der Neuzeit vollzieht sich nun in einem Prozeß, in dessen Rahmen zum Ausgang des Mittelalters die praktischen Disziplinen Logistik und Meßkunde (arithmetica et geometria practica) gegenüber den theoretischen Disziplinen

Arithmetik und Geometrie (arithmetica et geometria speculativa) bevorzugt werden. In dem Augenblick nun, in dem die praktischen Disziplinen selber in der "offiziellen" Wissenschaft anerkannt werden, wird ihr Charakter als "Kunst" (ars) als Grundlage ihrer eigentlichen "theoretischen Würde" betrachtet.

Geht man nun detaillierter zur Analyse der Beziehung zwischen der Begrifflichkeit in der "Arithmetik" des Diophant (ungefähr 250 v.Ch.) und der im Werk des Vieta enthaltenen über, so ist zunächst die Frage zu stellen, ob die Tatsache, daß bei Diophant einerseits ein bestimmtes besonderes Zeichen für die Unbekannte in Gleichungen benutzt wird und andererseits in seiner Arithmetik auch so etwas wie allgemeine Lösungen vorkommen, so interpretiert werden kann, daß hier ein, wenn auch unentwickelter, Ausdruck algebraischer Begrifflichkeit vorliegt. Klein macht nun gegen eine solche These eine Reihe von Argumenten geltend. Zum einen zeigt er, daß der bei Diophant benutzte Zahlbegriff völlig dem klassischen griechischen Verständnis von Zahl als Anzahl (von Monaden) entspricht. Auch Brüche werden von ihm in derselben Weise gehandhabt, wie das in der klassischen griechischen Tradition der Fall war, d.h. im besonderen, daß bei ihm ebensowenig wie bei den Griechen von einem einheitlichen Zahlbereich der rationalen Zahlen, von dem die ganzen Zahlen nur einen Teilbereich darstellen würden, die Rede sein kann. Darüber hinaus vermeidet Diophant das Auftreten von negativen oder irrationalen Lösungen, indem er immer entsprechende Nebenbedingungen fordert, die solche Lösungen ausschließen.

Vor die Zeichen für konkrete Zahlen setzt Diophant immer das Symbol $\overset{\circ}{M}$ als Abkürzung für Monade, darüber hinaus verfügt er, wie gesagt, über besondere Zeichen für die Unbekannte bzw. für die niederen Potenzen der Unbekannten. Diese (d.h. die "gewöhnlichen" Zahlen, die Unbekannten bzw. die jeweiligen Potenzen der Unbekannten) werden als verschiedene Arten von Zahlen, als verschiedene "εἴδη" verstanden. Die gemeinsame Grundlage dieser "εἴδη" aber bleibt der Zahlbegriff als "Anzahl".
"... So wie der einzelne Gegenstand eben das *ist*, was wir in

seinem"εἶδος" ansprechen und daher der 'wissenschaftlichen' Behandlung nur in diesem seinen "εἶδος" zugänglich ist - so sind die "Anzahlen", deren Auffindung sich die Diophantischen Aufgaben zum Ziele setzen, dem 'wissenschaftlichen' Zugriff nur in ihrer 'eidetischen' Beschaffenheit faßbar und dies eben darum, weil mit dem jeweiligen "εἶδος" eine ganz bestimmte Anzahl von Monaden *gemeint* ist. So andersartig auch die Diophantische 'Arithmetik' der neuplatonischen 'arithmetischen' Wissenschaft gegenüber erscheint - in diesem Punkte ist sie mit ihr durchaus vergleichbar; ..." (a.a.O., S.149) Darüber hinaus ist zu beachten, daß alle bei Diophant auftretenden Zeichen lediglich als Wortabkürzung zu verstehen sind. Was nun das Auftreten "allgemeiner Lösungen" in der Diophantischen"Arithmetik" angeht, so ist festzustellen, daß diese an ganz untergeordneter Stelle auftreten und lediglich einen vorläufigen oder Hilfscharakter haben. Bestimmendes Ziel der Rechnung bleibt letztlich immer die konkrete Zahl. Das Werk von Diophant ist auch nicht nach den Gleichungsarten und Lösungsmethoden gegliedert, "unter welchen Gesichtspunkten sie von den modernen Interpretatoren betrachtet zu werden pflegt, sondern eben nach den möglichen Verhältnissen, in denen 'Anzahlen', insbesondere quadratische (τετράγωνοι) und kubische (κύβοι) samt ihren 'Wurzeln' (πλευραί) zueinander stehen können." (a.a.O., S.14o)

Demnach bewegt sich also die "Arithmetik" des Diophant völlig im Rahmen des klassisch-griechischen Verständnisses, obwohl, wie Klein feststellt, eine gewisse innere Spannung zwischen dem behandelten "Stoff" und dem Charakter der Begriffe, mit denen dieser Stoff behandelt wird, nicht zu verkennen ist. Von einer Herausarbeitung analoger begrifflicher Grundlagen der Algebra, wie sie in der frühen Neuzeit konzipiert wurde, kann allerdings keine Rede sein. Klein fragt daher:"Wie war es überhaupt möglich, daß man angesichts eines *begrifflich in sich geschlossenen* Rechenverfahrens, wie es in der Diophantischen 'Arithmetik' vorbildlich zum Ausdruck gelangt, die 'Idee' einer symbolischen Algebra konzipierte? Die Frage lautet genauer:

Welche Umwandlung mußte das Verständnis von so etwas wie 'Anzahl' erleiden, damit ein neues 'symbolisches' Rechenverfahren aus der Diophantischen Tradition erwachsen konnte?" (a.a.O., S.150)

François Viète (1540 - 1603) Rechtsanwalt und Berater der französischen Könige Heinrich III. und Heinrich IV., gilt als Begründer der neuzeitlichen Algebra. Er macht von einer einheitlichen Symbolik Gebrauch; er bezeichnet die Unbekannten durch die Vokale A, E, I, O, U, Y und bekannte Größen durch die Konsonanten B, C, D, ..., Addition schreibt er durch +, Subtraktion durch -. Für die Multiplikation setzt er das Wörtchen 'in' und Division wird durch einen Bruchstrich bezeichnet. Gleichheit drückt er durch die Worte 'aequabitur' oder 'aequale' aus. Vieta erkennt als erster, daß das Rechnen mit Buchstaben grundsätzlich vom Rechnen mit Zahlen zu unterscheiden ist und deshalb einer eigenen Begründung bedarf (Vgl. Einleitung zu (F.Viète 1973)).

Um sich den Bezugsrahmen des Vietaschen Denkens klarzumachen, ist es wichtig, zu sehen, daß alle mathematischen Forschungen Vietas in engem Zusammenhang mit kosmologisch-astronomischen Arbeiten stehen. Die Idee eines allgemeinen Anwendungsbezugs der Mathematik ist Vieta daher gegenwärtig. Leider ist sein astronomisches Hauptwerk "Harmonicum coeleste" niemals im Druck erschienen, das Manuskript ging im 19. Jahrhundert verloren. Erst auf der Grundlage dieser astronomischen Arbeiten, insbesondere von trigonometrischen Berechnungen, entwickelt Vieta relativ spät in Auseinandersetzung mit dem Werk von Diophant seine Konzeption der symbolischen Algebra. Diese Konzeption ist dargestellt in seiner Schrift "In analyticem isagoge", Tours 1591. Ausgangspunkt der Überlegungen Vietas ist dabei die Idee, die von Pappos dargestellte Methode der "Analyse" mit der Methode der "Arithmetik" von Diophant in Zusammenhang zu bringen. Die "Analyse", die darin besteht, das Gesuchte als gegeben zu betrachten und von ihm ausgehend zu etwas Bekanntem fortzuschreiten, war von Pappos als Methode zur Lösung geometrischer Aufgaben dargestellt worden. Diese

Methode parallelisiert Vieta nun mit dem bei Diophant geübten Verfahren, Zeichen an die Stelle von Zahlen zu setzen, die als noch nicht bekannt und zu bestimmen angenommen werden. Dem Sprachgebrauch bei Pappos folgend, nennt Vieta dieses allgemeine Verfahren, dem seiner Meinung nach sowohl die Geometrie als auch die Arithmetik unterliegen, "Analysis" oder "analytice". Dabei schwebt ihm, wie sich aus verschiedenen Zitaten, in denen er sich mit zeitgenössischen Mathematikern auseinandersetzt, hervorgeht, tatsächlich eine neue Wissenschaft vor, eine "neue" oder "gereinigte" Algebra, die gleichermaßen "geometrisch" als auch "arithmetisch" ist. Damit ergibt sich aber im Hinblick auf Diophant eine charakteristische Umbewertung: Während bei Diophant die Angabe "allgemeiner Lösungen" eine, wie oben erwähnt, untergeordnete Bedeutung hat, rückt diese Aufgabe, nämlich die Zurückführung von Gleichungen auf gewisse Normalformen, nun in den Mittelpunkt der Aufmerksamkeit, da es (zusammen mit dem Aufstellen einer Gleichung) das Analogon zur Analyse in der Geometrie darstellt. Durch den Vergleich mit der geometrischen Analyse geht Vieta also über Diophant hinaus.

Der nächste Schritt, und damit deutet Vieta die antike Tradition offen um, besteht nun darin, einen dieser allgemeinen "Analytik" korrespondierenden allgemeinen Gegenstandsbegriff zu bilden. Er knüpft dazu an den Diophantischen Begriff des εἶδος an; so wie Diophant die vorläufig Unbekannte, an sich aber bestimmte "Anzahl" durch ihren εἶδος darstellt, so wird nun bei Vieta jede "Zahl" durch ihren εἶδος, oder wie es bei Vieta lateinisch heißt, durch ihre "species" repräsentiert.

"Von der dargelegten Parallelisierung der geometrischen ('problematischen') Analysis und des Diophantischen Verfahrens aus gelangt also Vieta zur Konzeption einer Rechnungsweise, die nur noch an den Anzahlen - 'species' - durchzuführen ist und die er dementsprechend 'logistice speciosa' nennt (im Gegensatz zur Rechnung mit bestimmten Anzahlen, der 'logistice numerosa'). Die 'logistice speciosa' steht folglich zunächst in engstem Zusammenhang mit dem Diophantischen Verfahren, das seinerseits das 'arithmetische' Analogon zur geometrischen Analysis bildet. *Zugleich* aber - und dies ist für die Begriffsbildung in der modernen Mathematik von symptomatischer Bedeutung - stellt Vieta die 'logistice speciosa' in den Dienst der '*reinen*' Algebra als der umfassenden, sowohl auf Anzahlen als auf geometrische Größen unterschiedlos anwendbaren *allgemeinen* 'Analytik'. Dadurch erfährt der εἶδος - Begriff, *der Begriff der 'species', unbeschadet seiner Bindung an den Anzahlbereich, eine universale Erweiterung*. Die 'species', die 'formae rerum', wie Vieta auch sagt, stellen von diesem *allgemeinen Verfahren* aus gesehen schlechthin '*allgemeine*' Größen dar." (Klein 1936, S.169)

Es läßt sich nun weiter zeigen, daß bestimmte begriffliche Differenzierungen in der Charakterisierung der "Analysis", wie sie bei Pappos vorgenommen werden, und die sich lediglich aus bestimmten ontologischen Problemen herleiten, bei Vieta, unter dem Vorrang der Methodenorientierung, fallen gelassen werden. Generell ist festzustellen, daß bei Vieta die Synthesis, die in der Geometrie den eigentlichen Beweis darstellt und in der Arithmetik darin besteht, die gefundenen Zahlen zur Probe einzusetzen, die also unter dem Gesichtspunkt der Begründung den wichtigsten Bestandteil des gesamten Verfahrens ausmacht, stark in den Hintergrund gedrängt wird. Allerdings hält Vieta an der Auffassung der "allgemeinen Analytik" als einer "Technik" fest: Sie stellt für ihn die Kunst des Findens oder das Finden des Findens dar. Erst Descartes sollte den Versuch unternehmen, die "allgemeine Analytik" in die Rolle der antiken ontologischen Grunddisziplin zu stellen.

Vieta sieht selbst, daß er eine Umdeutung der Auffassungen von Diophant vorgenommen hat, stellt dies aber so dar, als habe Diophant seine wahre Auffassung nur verbergen wollen. "Die zetetische Kunst aber hat am scharfsinnigsten von allen Diophant ausgeführt in jenen Büchern, die von der Arithmetik handeln. Er hat sie jedoch in der Weise dargestellt, als wäre sie in den Zahlen gegründet und nicht auch in den Species, deren er sich sehr wohl bedient hat, damit seinem Scharfsinn und seiner Geschicklichkeit umso mehr Bewunderung gezollt würde: Weil ja das, was dem Zahlenrechner schwierig und undurchsichtig vorkommt, dem Speciesrechner ganz vertraut und sofort zugänglich ist." (Viète 1973, S.55/56, in artem analyticem isagoge, Kap.V)

Mit großem Nachdruck hebt Vieta das Homogenitätsgesetz hervor, d.h. die Forderung, daß alle Terme, die in einer Gleichung vorkommen, homogen sein müssen. Nur Größen gleicher Dimension können addiert werden. Dies wird üblicherweise als ein Verhaftetsein der Vietaschen Begrifflichkeit in ontologischen Vorstellungen verstanden. Demgegenüber muß man aber sehen, daß das Homogenitätsgesetz gegenüber der Antike in der Abstraktion einen Schritt nach vorn darstellt. Während für die antiken Analytiker eine solche Forderung gänzlich überflüssig erschienen wäre, da es für sie selbstverständliche Voraussetzung war, daß die in einer Gleichung vereinigten bekannten und unbekannten "Größen" immer "Anzahlen von Monaden" darstellen, formuliert das Homogenitätsgesetz von Vieta eine allgemeine Bedingung dafür, daß die "logistice speciosa" auf die Wirklichkeit angewandt werden kann; das Homogenitätsgesetz besagt, daß jede Anwendung ein Feld gleichartiger Monaden voraussetzt.
Es ermöglicht es Vieta also gerade, zu einer wirklich allgemeinen Auffassung von "Zahlen" im Sinne von "species" überzugehen. "Das bedeutet aber, daß das '*Sein*' der species bei Vieta, also das 'Sein' der Gegenstände der allgemeinen Analytik, weder als ein eigenständiges - im pythagoreisch - platonischen Sinne -, noch als ein ἐξ ἀφαιρέσεως gewonnenes 'reduziertes' - im aristotelischen Sinne -, sondern als ein 'symbolisches' zu verstehen ist. *Die species sind in sich selbst symbolische Gebilde*: Gebilde nämlich, deren nur *mögliche Gegenständlichkeit als faktische Gegenständlichkeit verstanden wird*. Sie sind als solche nur innerhalb der *symbolischen Formelsprache* faßbar, wie sie erstmalig bei Vieta in voller Ausprä-

gung zutage tritt und die allein das *'Finden des Findens'*, das ist die 'Zetetik', darzustellen erlaubt. Damit erst wird das wichtigste Werkzeug der mathematischen Naturwissenschaft: die mathematische *'Formel'* möglich." (Klein 1936, S.182/83) Das 'Sein' der Species wird also symbolisch verwirklicht.

Im Kapitel IV seiner "Isagoge" (vgl. Viète 1973, S.44ff) gibt Vieta die allgemeinen Regeln seiner Species-Rechnung an; damit etabliert er den Bereich der "species" als einen einheitlichen Größenbereich, der durch die Gültigkeit gewisser Rechengesetze charakterisiert ist. Diese allgemeine Auffassung der Species und der daran angeknüpfte allgemeine Zahlbegriff ermöglichen es nun auch, daß Vieta "Brüche" und "irrationale Zahlen" als "Zahlen" auffaßt. Während er in einer frühen Schrift Brüche noch als "monades non purae" bezeichnet, spricht er später einfach von "numeri fracti".

Vieta versteht die Ausführungen bei Pappos über die Methode der Analyse im Sinne einer "mathesis universalis". Der Gedanke an eine solche allgemeine Methode, um neues Wissen zu finden, bestimmt die gesamte Wissenschaft seiner Zeit.Daher ist sich Vieta der Bedeutsamkeit seiner Konzeption wohl bewußt. Im Widmungsbrief zu seiner Schrift "in artem analyticem isagoge" schreibt er:"Zwar stimmten alle Mathematiker darin überein, daß in ihrer Algebra oder almucabala, die sie priesen und eine große Kunst nannten, unvergleichliches Gold verborgen sei, aber gefunden haben sie es nicht. So gelobten sie Hekatomben und rüsteten zu Opfern für Apollo und die Musen, für den Fall, daß einer auch nur das eine oder das andere der Probleme lösen würde, von deren Art ich 10 oder 20 ohne weiteres darlege, da es meine Kunst erlaubt, die Lösungen aller mathematischen Probleme mit größter Sicherheit zu finden. Da dies nun aber erreicht ist, werden jene auch ihre Versprechungen erfüllen?" (Viète 1973, S.34/35) Und am Schluß derselben Schrift ruft er pathetisch aus:"Schließlich nimmt die analytische Kunst, wenn sie endlich mit der dreifachen Form der Zetetike, Poristike und Exegetike ausgerüstet ist, mit Recht das berühmte Problem der Probleme für sich in Anspruch, das ist: kein Problem ungelöst zu lassen. N u l l u m   n o n   p r o b l e m a   s o l v e r e." (Viète

1973, S.61)[1]

Ganz im Unterschied zu Vieta, der sich der klassischen antiken Tradition verpflichtet fühlt, schlägt Simon Stevin (1548 - 1620) die griechische Antike umstandslos einem "barbarischen Zeitalter" zu. Vor den Griechen habe es ein "weises Zeitalter" gegeben. Die Algebra, wie sie aus arabischen Büchern bekannt geworden sei, stelle einen der merkwürdigsten Überreste des "weisen Zeitalters" dar. Die Griechen rechnet er gerade wegen ihrer Unkenntnis der Algebra zum "barbarischen Zeitalter". Vor allem kritisiert Stevin den Zahlbegriff der Griechen, und spielt in dieser Frage immer wieder die Araber gegen die Griechen aus, weil ihm das Stellenwertsystem der Araber unendlich überlegen zu sein scheint gegenüber der griechischen Zahlenschreibweise. Die Auseinandersetzung mit dem griechischen Zahlverständnis entzündet sich an der damals vielfach diskutierten Frage, ob die Eins eine Zahl sei und ob die Eins oder die Null als das principium des Zahlsystems aufzufassen sei. Für die Griechen war die Eins, als die ontologische Substanz aller Zahlen, die aus Einsen zusammengesetzt vorgestellt wurden, selber keine Zahl. Statt dessen stellte die Eins das Prinzip der Zahlen dar, aus denen diese erzeugt wurden. Dagegen polemisiert nun Stevin, und später auch Wallis, indem er sagt, daß auch die Eins eine Zahl sei und aus demselben "Stoff" bestehe wie alle Zahlen. Das wahre principium der Zahlen sei die Null, aus ihr würden alle Zahlen erzeugt. Dieses Argument bezieht sich natürlich auf das Stellenwertsystem zur Darstellung der Zahlen, Stevin versteht die Zahlen rein symbolisch und daher auch rein operativ. In diesem Zahlverständnis ist er radikaler, aber auch einseitiger als Vieta. Stevin führte als erster in Europa systematisch die Dezimalbrüche ein. Er sieht im Zahlbegriff den Gegensatz von Kontinuierlichem und Diskontinuierlichem aufgehoben. Er wendet sich gegen die Redeweise von 'absurden' Zahlen. Stevin ist auch der erste Mathematiker, der das Sub-

---

1 Über 300 Jahre später verleiht David Hilbert, gegen wissenschaftspessimistische Stimmungen seiner Zeit gewandt, demselben Erkenntnisoptimismus in ähnlicher Form Ausdruck: "Statt des törichten 'ignorabimus' heißt im Gegenteil unsere Losung: Wir müssen wissen, wir werden wissen." (Hilbert, Gesammelte Abhandlungen, Bd. III, S.387)

trahieren einer Zahl als Addition einer negativen Zahl auffaßt. All dies belegt die bei ihm ausgeprägte operative Sichtweise.

Das mit diesen Ausführungen über Vieta (und Stevin) skizzierte, sich herausbildende operative und symbolische Begriffs- und Wissenschaftsverständnis wird von Descartes in zweierlei Weise gefördert. Zum einen leistet er mit seiner "Geometrie" einen wichtigen Beitrag dazu, dieses Begriffs- und Wissenschaftsverständnis zu bestärken; die Geometrie, die die ontologische Bastion der klassich-griechischen Auffassung gewesen war, wird nun selbst diesem operativ-symbolischen Verständnis unterworfen. Zum anderen aber sieht Descartes klar, daß das neue Wissenschaftsverständnis, wenn es sich nicht auf eine Ontologie im Stile der Griechen stützen kann, dennoch einer Begründung bedarf, weil sonst die "allgemeine Methode" völlig im Leeren hängt. Diese Begründung leistet Descartes, wie oben angedeutet, in einer, die Algebra als Methode etablierenden Weise, durch seine Konzeption der Materie als "res extensa". /

Mit derartigen begründenden Konzeptionen weist die Wissenschaft ihre allgemeine Existenzberechtigung nach außen gegenüber der Gesellschaft nach. Die Wissenschaftler selber allerdings kümmern sich wenig um solche Begründungsprobleme. Ihre Arbeit ist vom Vorrang des Methodischen beherrscht, und sie sind nur an der Entwicklung neuen Wissens interessiert. So kommt es, daß der Widerspruch zwischen Wissensentwicklung und Begründung des Wissens, der sich hier auftut, lange Zeit nicht ausgetragen wird. Trotz aller Kritik an ihren ungesicherten Grundlagen entwickelt sich die Infinitesimalrechnung, die durch ihre praktische Nützlichkeit ihre Existenzberechtigung unter Beweis stellt. Man übersieht dabei meistens, daß nicht nur die Infinitesimalrechnung in Begründungsschwierigkeiten steckte, sondern daß in der gesamten Algebra Unklarheit über ihre Grundlagen herrschte. Die Situation, daß der angesprochene Widerspruch von Begründung und Entwicklung innerhalb der Wissenschaft nicht ausgetragen werden mußte, änderte sich in dem

Moment, als wissenschaftliche Ergebnisse als einzelne von der Gesellschaft in breitem Maße aufgenommen und genutzt wurden, sei es, daß wissenschaftliche Resultate zum Bildungsgegenstand eines sich etablierenden Ausbildungssystems wurden, sei es, daß von ihnen für die Produktion bzw. für Aufgaben der Verwaltung Gebrauch gemacht wurde. Zu diesem Zeitpunkt nämlich mußte die Wissenschaft ihre Existenzberechtigung nicht mehr allgemein gegenüber der Gesellschaft rechtfertigen (diese Aufgabe konnte von einer pholosophischen Theorie wahrgenommen werden), sondern die wissenschaftlichen Ergebnisse selbst wurden im sozialen Kontext dem Zwang zur Rechtfertigung ausgesetzt. Damit aber wird das Problem der Begründung des Wissens von einer philosophischen Aufgabe zu einem Problem, das die Einzelwissenschaften unmittelbar betrifft und eine Lösung bzw. eine Reaktion von ihnen verlangt. Diese Situation tritt, grob gesprochen, um die Wende vom 18. zum 19. Jahrhundert ein. Wir wenden uns diesem Zeitraum jetzt zu.

1.2. *Das Problem der Begründung des Wissens in der Mathematik des 19. Jahrhunderts*

In der Einleitung zu einer Ausgabe von B. Bolzanos Werk "Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik" gibt H. Wussing eine bemerkenswerte Beurteilung der historischen Bedeutung von Bolzanos Versuchen zur Grundlegung der Mathematik. Einerseits habe sich Bolzano insofern auf der Höhe seiner Zeit befunden, als er über eine zutreffende Diagnose der in der Mathematik aufgetretenen Grundlagenschwierigkeiten verfügt und zur Behebung dieser Mängel Hervorragendes geleistet habe. Andererseits aber sei die Frage zu stellen, warum Bolzano von seinen Zeitgenossen unbeachtet und sein Werk praktisch wirkungslos geblieben sei. Zwar liegt eine Erklärung für diese Wirkungslosigkeit Bolzanos sicherlich in speziellen Umständen seiner Biographie: So verfügte er seit 1819 aufgrund der durch die österreichischen Behörden verfügten Entlassung aus seiner Stellung über keine Position im akademischen Bereich mehr und war daher von Fachkollegen fast völlig isoliert. Dennoch ist, so meint Wussing, Bolzanos Erfolglosigkeit auch durch sein Werk selbst begründet. Bolzano habe nämlich seine mathematischen Studien immer seinem philosophischen Interesse untergeordnet, Mathematik war ihm Mittel zum Zweck seiner Philosophie, Prüfstein seiner philosophischen Methode. Damit habe Bolzano aber das eigentliche Problem, um das es bei den grundlagentheoretischen Anstrengungen zu Beginn des 19. Jahrhunderts gegangen sei, völlig verfehlt. Das Problem, das sich zu Beginn des 19. Jahrhunderts stellte, bestand eben nicht mehr darin, Ergebnisse und Arbeitsweise der Wissenschaften, bzw. spezieller: der Mathematik, im allgemeinen gegenüber der Gesellschaft zu rechtfertigen, sondern es ging um die Darstellung und Nutzung einzelner wissenschaftlicher Ergebnisse im gesamtgesellschaftlichen Maßstab. "Aufs ganze gesehen, gewann die Mathematik zu Anfang des 19. Jahrhunderts eine neue gesellschaftliche Stellung. Waren vor Beginn der industriellen Revolution große Teile der Mathematik überhaupt noch nicht oder nur ganz gelegentlich in die Sphäre der Produktion einbezogen worden, so wurden mit der fortschreitenden industriellen Revolution die Potenzen der Mathematik zunehmend, als Fundament der sich entwickelnden technischen Wissenschaften, für die Gestaltung der Produktionsprozesse herangezogen. Wie das Beispiel der Pariser École Polytechnique besonders deutlich zeigt, die noch im Feuer der großen französischen Revolution gegründet worden war und unstreitig zum führenden mathematisch-naturwissenschaftlichen Zentrum Europas im ersten Drittel des 19. Jahrhunderts emporstieg, schuf sich die Bourgeoisie in mathematisch-orientierten Ausbildungsstätten - polytechnische Schulen, Fach- und Gewerbeschulen - Instrumente zur Ausbildung ihrer Ingenieure, zur Inganghaltung ihrer Produktion, zur Vervielfältigung ihrer Profite. Die Diskrepanz zwischen den von den jungen Ingenieuren geforderten relativen Höchstleistungen und einer bei dem bis dahin üblichen Lernstil an den abolutistischen Akademien nur durch lange Erfahrung zu erwerbenden Könnerschaft setzte die Forderung auf Lehrbarkeit der verschiedenen mathematischen Disziplinen, der

Mechanik und anderer Teile der Physik in ihre historischen Rechte ein. (Hervorhebung von mir.) Es kam darauf an, Kunstgriffe bei der Lösung zu vermeiden und statt dessen prinzipiell gleichliegende Probleme auch mit gleichen Methoden anzugreifen. So erklärt sich der durch G. Monge (1746 - 1818), den geistigen Vater der École Polytechnique, in Paris eingeleitete Siegeszug der darstellenden Geometrie, der 'Sprache des Ingenieuers' (Monge); so ist der Umstand zu erklären, daß im Hinblick auf erwiesene gesellschaftliche Wirksamkeit das mathematische Interesse des 19. Jahrhunderts weitgehend geometrisch orientiert war und daß auf dieser breiten Unterlage auch die Bewältigung der Grundlagenprobleme der Geometrie erfolgen konnte. Charakteristischerweise ist die Grundlegung der Analysis wesentlich Mathematikern zu danken, die stark in der Lehre standen, von J.L. Lagrange (1736 - 1812) und Cauchy an der Pariser École Polytechnique bis zu Dirichlet, der außer an der Berliner Universität noch an der Berliner Gewerbeschule und an der Kriegsschule tätig war.

Die Forderungen der Lehrbarkeit und der Anwendungsbereitschaft der Mathematik bedeuteten eine von der gesellschaftlichen Entwicklung inaugurierte Unterstützung der auch aus innermathematischen Gründen wirkenden Tendenzen: Ausmerzung von unklaren, schwankenden Begriffen, Hinwendung zum analytischen Kalkül, zum Verfahren, das stets zum Ziel führt." (Wussing 1974, S. XVII - XIX)
Bolzano habe diese Dimension bei den Bemühungen zur Grundlegung und Präzisierung der Mathematik verfehlt, insbesondere habe er der Tendenz zur Kalkülisierung nicht Rechnung getragen, seine Beispiele wirkten hausbacken, die damals von den Anwendungen aufgeworfenen Probleme aus der Theorie der transzendenten Funktionen blieben unberücksichtigt, und er benutzte nicht die zu seiner Zeit übliche Terminologie.

Es kann hier offenbleiben, ob die Erklärung, die Wussing für die Wirkungslosigkeit des Bolzanoschen Werkes gibt, zutreffend ist. Dennoch ist die Tatsache einer mit der industriellen Revolution verbundenen neuen gesellschaftlichen Stellung der Mathematik im 19. Jahrhundert unbestreitbar. Zu Ende des 18. Jahrhunderts war noch bei den führenden Mathematikern der Zeit ein Bewußtsein der Stagnation und des Niedergangs der Mathematik vorhanden. "Im Jahre 1772 schrieb Joseph Louis Lagrange (1736 bis 1813), Mathematikprofessor an der Artillerie-Schule in Turin und später an der École Polytechnique in Paris, an D'Alembert (1717 - 1783):'Scheint es Ihnen nicht, daß die hohe Geometrie etwas der Dekadenz entgegengeht? Sie hat keine anderen Stützen als Sie und Herrn Euler.' (Das Wort Geometrie ist im französischen Sprachgebrauch des 18. Jahrhunderts als Mathematik im allgemeinen zu verstehen.) In der Tat hatte Lagrange eine Zeitlang (etwa 1786 - 1795) seine mathematische Arbeit eingestellt und betrachtete die Mathematik sozusagen als beendet oder zumindest in die Dekadenz übergehend:'Es scheint mir, daß die Fundgrube schon viel zu tief liegt und bald verlassen werden wird, falls man nicht neue Adern entdeckt', so schrieb er an D'Alembert 1781. Ja, Lagrange sagte sogar über die Zukunft, daß 'die Lehrstühle für Mathematik an den Akademien und Universitäten bald zu dem bedeutungslosen Niveau derjenigen für arabisch herabsinken würden'." (Stuloff 1968, S.71)

Wenige Jahrzehnte später aber hat die Mathematik, von Paris ausgehend, einen ungeahnten Aufschwung genommen. Zentren mathematischer Aktivität sind dabei zunächst Frankreich und Deutschland. Die institutionellen Existenzbedingungen der mathematischen Wissenschaft haben sich in der Zwischenzeit tiefgreifend gewandelt. Für Frankreich kann als markantestes Ereignis dieses Wandlungsprozesses die Gründung der École Polytechnique angeführt werden, in Preußen wird ab 1810 eine völlige Reorganisation des gesamten Bildungssystems in Angriff genommen, die insbesondere dazu führt, daß die Universitäten mit den Aufgaben der (Gymnasial-)Lehrerausbildung beauftragt werden. Dabei wird der Zusammenhang mit den gewandelten gesellschaftlichen Anforderungen von den Trägern dieses Prozesses klar reflektiert. So schreibt G. Monge, zeitweilig Direktor der École Polytechnique, im Vorwort seiner 'géométrie descriptive':"Um die französische Nation aus ihrer bisherigen Abhängigkeit von der ausländischen Industrie zu befreien, müßte das Bildungswesen an der Kenntnis solcher Gegenstände orientiert werden, die Genauigkeit verlangen - eine bis heute vollends vernachlässigte Qualität -, und es müßte die Hände unserer Handwerker mit der Bedienung aller Instrumente vertraut machen, welche der Präzision in der Arbeit förderlich sind, und deren verschiedene Grade messen. Die mit einer erhöhten Sensibilität für diese Präzision ausgestatteten Verbraucher werden sie dann verlangen können, und sie werden ihren Preis zahlen. Unsere seit ihrer frühesten Kindheit an diese Exaktheit gewöhnten Handwerker werden in der Lage sein, sie zu erreichen. Ferner ist es notwendig, eine große Anzahl von natürlichen Erscheinungen, deren Kenntnis für den Fortschritt der Industrie unerläßlich ist, einem großen Publikum zu erschließen und im Sinne der Bildungsförderung im Lande den glücklichen Umstand auszumünzen, daß letztere über die wichtigsten der ihr notwendigen Ressourcen verfügt. Schließlich sollte die Kenntnis jener Herstellungsverfahren und Maschinen unter den Handwerkern verbreitet werden, deren Einsatz entweder auf eine Reduzierung der notwendigen Arbeitskraft oder auf mehr Einheitlichkeit und Genauigkeit in den Arbeitsergebnissen abzielen. Und gegebenermaßen können wir in dieser Hinsicht von dem Ausland viel lernen.

Nur eine Neuorientierung des Bildungswesens kann diesen Perspektiven gerecht werden." (zitiert nach Blankertz 1969, S.66, Übersetzung von G. Ledanff)

Dabei ist es nur scheinbar paradox, daß die enger werdenden Verbindungen zwischen Wissenschaft und Gesellschaft auf der Seite der Mathematik zur Trennung von reiner und angewandter Mathematik führen. Umgekehrt kann eine solche Veränderung der internen arbeitsteiligen Struktur der Wissenschaft regelmäßig als Indiz für ein neues Niveau ihrer Außenbeziehungen gewertet werden.

Wie Wussing es ausdrückt, wird durch den angedeuteten Prozeß insbesondere die Forderung nach Lehrbarkeit der Mathematik in ihr historisches Recht eingesetzt. (Vgl. zum folgenden den Aufsatz von Jahnke/Otte/Schubring 1977) Die neuen Dimensionen des Bildungsproblems machen es nun unmöglich, daß unter Lehre die persönliche, individuelle Kommunikation zwischen dem Meister und seinem Schüler mit ihren vielfältigen Möglichkeiten der impliziten, unbewußten Wissensübermittlung verstanden wird. Statt dessen werden nun neue Formen der Explikation, Normierung und Systematisierung des mathematischen Wissens notwendig; Es mußte in Formen transformiert werden, die es von der Zufälligkeit der individuellen Standpunkte und Sichtweisen einzelner Mathematiker befreiten. Der notwendig implizite und variable Charakter des Wissens, das Forschung und schöpferisches Handeln reguliert und steuert, kollidiert mit dem Erfordernis der Kommunikation: diese ist auf Fixierung des Wissens und seine Explikation angewiesen.

Es ließe sich eine Fülle an Selbstzeugnissen führender mathematischer Wissenschaftler des 19. Jahrhundert anführen, die belegen, daß die Bemühungen um eine verbesserte Begründung der Mathematik aufs engste mit der Problematik des wissenschaftlichen Unterrichts zusammenhängen. Es entsteht die "Mathematik der Lehrbücher" (Grattan-Guinness 1975), die auf das gesamte Selbstverständnis der Mathematik des 19. Jahrhunderts einen hohen Einfluß hat.

Speziell in Preußen führt die militärische Niederlage gegen Frankreich im Jahre 1806 bei Jena und Auerstedt zu umfassenden Bemühungen einer Reorganisation des Bildungswesens, da man die Niederlage zu einem nicht geringen Teil auf die überlegene mathematisch-naturwissenschaftliche Ausbildung des französischen Offizierskorps zurückführte. So wurde seit 1810 durch eine Reihe gesetzlicher und organisatorischer Maßnahmen die gymnasiale Ausbildung vereinheitlicht und damit überhaupt erst in einem dem heutigen vergleichbaren Sinne begründet. Die Mathematik spielte in den neuen Lehrplänen eine bedeutende Rolle. Als Folge des Aufbaus eines einheitlichen gymnasialen Bildungssystems wurde den Universitäten die Aufgabe der Ausbildung von Gymnasiallehrern übertragen; erst diese neue Aufgabenstellung führte dazu, daß sich die Mathematik und die Naturwissenschaften vom beherrschenden Einfluß der philosophisch-philologischen Disziplinen einigermaßen befreien konnten. Wegweisend für diese Entwicklung war der Aufbau des mathematischen Seminars in Königsberg durch C.G.J. Jacobi, das später in dieser oder einer ähnlichen Form an allen deutschen Universitäten nachgeahmt wurde. Eine einfache Auszählung der erstklassigen Mathematiker, über die Deutschland zwischen 1750 und 1850 verfügte, belegt, welchen außerordentlichen Aufschwung die mathematische Forschung durch diese neue institutionelle Grundlage genommen hat (vgl. Gerstell 1975).

Bei der Reorganisation des preußischen Bildungswesens haben die Vorstellungen W. von Humboldts eine große Rolle gespielt. Dabei ist es bemerkenswert, daß die von Humboldt entwickelte Vorstellung der "Einheit von Forschung und Lehre" im Grunde genommen darauf hinausläuft, den Wissenschaftsbegriff dem Zweck der Bildung unterzuordnen. "... die Begriffe Wissenschaft und Bildung (waren) für Humboldt in der Tat nicht nur unlöslich miteinander verbunden, sondern geradezu durcheinander definiert und daher eigentlich identisch." (Kramp 1963, S.157) Der bei Humboldt bestimmende Bildungsbegriff ist der einer "formalen" oder "zweckfreien" Bildung; Wissenschaft dient der Bildung von Führungskräften. Deswegen sind bei Humboldt die sogenannten Erfahrungswissenschaften,"welche lediglich dem praktischen Nutzen zu dienen vermochten, entschieden nach- und untergeordnet." (Kramp 1963) Das Wort von der Einheit von Forschung und Lehre drückt also einen starken aktiven Einfluß der Lehre auf die Forschung aus.

Die mit der Problematik des Unterrichts gegebene Tendenz zur Systematisierung, Klassifizierung und Normierung des Wissens steht in einem durchaus widersprüchlichen Verhältnis zu den Interessen der Forschung und der Wissensentwicklung. So führt Lakatos die Tatsache, daß der 1821 von Cauchy angegebene Satz, daß jede Grenzfunktion einer konvergenten Folge stetiger

Funktionen selbst wieder stetig ist, erst 1847 von Seidel durch die Einführung des Begriffs der "gleichmäßigen Konvergenz" korrigiert wurde, auf das Eindringen der "Euklidischen Methodologie" in die Infinitesimalrechnung zurück (vgl. dazu auch Jahnke/Otte/Schubring 1977, S.66). Lakatos fragt sich, warum diese Korrektur einen so langen Zeitraum benötigt habe und antwortet:"Der Hauptgrund ... war das Vorherrschen der Euklidischen Methodologie. Die durch Cauchy hervorgerufene 'Revolution der Strenge' in der Mathematik wurde von dem bewußten Versuch geleitet, die Euklidische Methodologie auf die Infinitesimalrechnung anzuwenden. Er und seine Nachfolger glaubten, daß sie auf diese Weise Licht bringen könnten, um die gewaltige Obskurität und Verwirrung der Analysis zu zerstreuen. Cauchy ging entsprechend den Regeln Pascals vor ... er versuchte, die am Anfang noch unklaren Begriffe der Analysis - wie Grenzwert, Konvergenz, Stetigkeit usw. - in den vollkommen klar vertrauten Begriffen der Arithmetik zu definieren, und er fuhr dann fort, alles zu beweisen, was bisher nicht bewiesen worden war und was nicht vollkommen offensichtlich war." (Lakatos 1976, S.136/37) Da es unter dem Blickwinkel der Euklidischen Methode nur absolute Evidenzen gibt und Beweisen in der Rückführung von Sachverhalten auf absolute Wahrheiten besteht, entsteht eine Trennung zwischen Vermuten und Beweisen. In der Euklidischen Tradition ist es unvorstellbar, "daß ein Beweisversuch für ein falsches Theorem ein nützlicher Zwischenschritt der wissenschaftlichen Forschung sein kann. Seidel hat aber gerade auf der Basis einer sorgfältigen Analyse des Beweises von Cauchy - ihn als Versuch mit offenem Ausgang betrachtend - die Sache korrigieren können, während alle seine Vorgänger sich lediglich mit der Behauptung selbst auseinandergesetzt hatten, indem sie Beweise oder Gegenbeispiele für die gesamte unveränderte Aussage suchten. Auf diese Weise wird 'Euklid zum bösen Genius' - wie sich Lakatos ausdrückt - für die Forschung und sogar, wie er meint, für die Geschichte der Mathematik und für den mathematischen Unterricht." (Jahnke/Otte/Schubring 1977, S.66) Allerdings ist diese negative

Bewertung, die Lakatos der Tendenz zur Systematisierung des Wissens gegenüber vornimmt, selbst einseitig. Sie übersieht z.B., welch außerordentlich fruchtbare Auswirkungen etwa die neue Definition des Funktionsbegriffs durch Cauchy, die dieser zur Lösung bestimmter Grundlagenschwierigkeiten vorgenommen hat, für die weitere Entwicklung der Mathematik gehabt hat.

Die allgemeine Problematik, der sich die Mathematik in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts gegenübersah, wird besonders deutlich in der bahnbrechenden Arbeit von Hermann Grassmann (1809 - 1877) "Die lineale Ausdehnungslehre" (1844) zum Ausdruck gebracht. Dabei ist sowohl bemerkenswert, mit welcher Klarheit Grassmann die Vorstellung einer "reinen Wissenschaft" mit dem Anwendungsproblem verknüpft, als auch seine Darstellung der didaktischen Probleme, die sich daraus ergeben, daß Wissen einerseits in Texten so fixiert wird, daß es gegen mißverständliche Interpretationen gefeit ist, andererseits aber auch so offen präsentiert werden muß, daß der Leser zu selbständigem Denken angeregt wird. Grassmann ist stets ein Außenseiter der mathematischen Wissenschaft geblieben, auch die "lineale Ausdehnungslehre" fand jahrzentelang nicht die Anerkennung, die ihr aufgrund der Bedeutsamkeit der darin enthaltenen mathematischen Ideen eigentlich hätte zukommen müssen. Grassmann hat es nie zu einer akademischen Position gebracht, sondern ist zeit seines Lebens Gymnasiallehrer geblieben. Er ist in starkem Maße geprägt worden durch Vorstellungen seines Vaters Justus Grassmann, der sich ebenfalls als Lehrer mit pädagogisch-didaktischen Fragestellungen beschäftigt hat; an der Berliner Universität ist er mit der Philosophie von F. Schleiermacher in Berührung gekommen, die ihn sehr beeinflußte. Der Zusammenhang von Schleiermachers"Dialektik" und Grassmanns "Ausdehnungslehre" ist kürzlich in einer mathematik-historischen Arbeit (Lewis 1977) ausführlicher dargestellt worden.

Bei seinen Bemerkungen zum Problem der Darstellung mathematischen Wissens in der Einleitung seiner "Ausdehnungslehre" von 1844 knüpft Grassmann an die Überlegungen Schleiermachers über den Unterschied und den Zusammenhang von "heuristischem" und "architektonischem Verfahren" an. In der Konzeption Schleiermachers bezeichnet das heuristische Verfahren den Prozeß, in dem auf der Grundlage von gegebenem Wissen neues Wissen erzeugt wird, während das architektonische Verfahren darin besteht, das zerstreute und isoliert gegebene Material zu verbinden und zu systematisieren. Schleiermacher reflektiert mit dieser Unterscheidung die doppelte Bestimmtheit des Wissens durch seine Gegenstände einerseits und durch den sozialen Kontext andererseits, er will mit dieser Unterscheidung das Problem verstehen, daß Wissen einerseits subjektiv produziert, und insofern abhängig ist von individuellen Differenzen der einzelnen erkennenden Subjekte, andererseits aber auch objektiv und unabhängig von subjektiven Unterschieden ist. Schleiermacher beschreibt den Prozeß der Objektivierung und der Herstellung von Einhelligkeit zwischen den Menschen als das Ineinanderwirken von architektonischem und heuristischem Verfahren. "Wozu führt uns der hier gefundene Gegensatz? Es ist offenbar, daß die Vollendung der Erkenntnis nur dadurch zustande kommen kann, daß die Gedankenreihen der einzelnen Menschen, die erkennen wollen, in eins zusammengeleitet sind. Dies kann aber nur in dem Maße geschehen, als jede einzelne dieser Reihen eine bestimmte Ordnung in sich hat, wodurch die Elemente aufhören, chaotisch zu sein, sondern verglichen und ineinander gearbeitet werden können. Das heißt aber soviel: Durch das architektonische Verfahren müßte, indem es das heuristische Verfahren durchdringt, unsere Aufgabe überflüssig gemacht werden. Jedes einzelne Denken wäre dann nämlich so vollkommen durchsichtig, daß kein Streit der Vorstellungen mehr stattfinden könnte, sondern sich alles sogleich richtig anordnete. Der Zustand streitiger Vorstellungen ist aber immer gegeben, d.h. die Durchdringung des architektonischen und heuristischen Verfahrens ist immer nur im Werden; und unsere ganze Aufgabe und ihre Lösung das Komplement der unvollständigen Durchdringung beider Verfahrungsarten." (Schleiermacher 1976, S.458)

In seinen Bemerkungen zur richtigen Methode der Darstellung mathematischen Wissens reflektiert Grassmann dasselbe Problem, allerdings unter dem spezielleren Aspekt wissenschaftlicher Kommunikation bzw. wissenschaftlichen Mitteilens. Er sieht dabei klar, daß die Intention, Einhelligkeit in der Auffassung eines Textes herzustellen, also die Intention der Systematisierung, das architektonische Verfahren, in einem gewissen Gegensatz steht zu der Intention, dem Leser bzw. dem Lernenden ein aktives Verhältnis zum mitgeteilten Inhalt zu vermitteln. Grassmann stellt zunächst fest, daß es das Eigentümliche der philosophischen Methode sei, in Gegensätzen fortzuschreiten, um so vom Allgemeinen zum Besonderen zu gelangen; hingegen schreite die mathematische Methode von den einfachen Begriffen zu den zusammengesetzten fort und gewinne so durch Verknüpfung des Besonderen neue und allgemeinere Begriffe. Da nun sowohl die Mathematik als die Philosophie Wissenschaften im strengsten Sinne seien, so müsse die Methode in beiden etwas Gemeinschaftliches haben, was sie zur wissenschaftlichen mache. Die entscheidende Aufgabe der Darstellung formuliert nun Grassmann so: "Nun legen wir einer Behandlungsweise Wissenschaftlichkeit bei, wenn der Leser durch sie einesteils mit Notwendigkeit zur Anerkennung jeder einzelnen Wahrheit geführt wird, andererseits in den Stand gesetzt wird, auf jedem Punkte der Entwicklung die Richtung des weiteren Fortschreitens zu übersehen.

Die Unerläßlichkeit der ersten Forderung, nämlich der wissenschaftlichen Strenge, wird jeder zugeben. Was das zweite betrifft, so ist dies noch immer ein Punkt, der von den meisten Mathematikern noch nicht gehörig beachtet wird. Es kommen oft Beweise vor, bei denen man zuerst, wenn nicht der Satz obenan stände, gar nicht wissen könnte, wohin sie führen sollen, und durch die man dann, nachdem man eine ganze zeitlang blind und aufs geradewohl hin jeden Schritt nachgemacht hat, endlich, ehe man es sich versieht, plötzlich zu der zu erweisenden Wahrheit gelangt. Ein solcher Beweis kann vielleicht an Strenge nichts zu wünschen übrig lassen, aber wissenschaftlich ist er nicht; es fehlt ihm das zweite Erfordernis, die Übersichtlichkeit. Wer daher einem solchen Beweise nachgeht, gelangt nicht zu einer freien Erkenntnis der Wahrheit, sondern bleibt, wenn er sich nicht nachher jenen Überblick selbst schafft, in gänzlicher Abhängigkeit von der besonderen Weise, in der die Wahrheit gefunden war; und dies Gefühl der Unfreiheit, was in solchem Falle wenigstens während des Recipirens entsteht, ist für den, der gewohnt ist, frei und selbständig zu denken, und alles, was er aufnimmt, selbstthätig und lebendig sich anzueignen, ein höchst drückendes. Ist hingegen der Leser in jedem Punkt der Entwicklung in den Stand gesetzt, zu sehen, wohin er geht, so bleibt er Herrscher über den Stoff, er ist an die besondere Form der Darstellung nicht mehr gebunden, und die Aneignung wird eine wahre Reproduktion." (Grassmann 1969, S.30/31) Am jedesmaligen Punkte der Entwicklung sei die Art der Weiterentwicklung wesentlich durch eine leitende Idee bestimmt, die entweder eine vermutete Analogie mit bekannten Zweigen des Wissens oder aber eine direkte Ahnung der zunächst zu suchenden Wahrheit sei. "Die Ahnung scheint dem Gebiet der reinen Wissenschaft fremd zu sein und am allermeisten dem mathematischen. Allein ohne sie ist es unmöglich, irgendeine neue Wahrheit aufzufinden; durch blinde Kombination der gewonnenen Resultate gelangt man nicht dazu; sondern, was man zu kombinieren hat und auf welche Weise, muß durch die leitende Idee bestimmt sein, und diese Idee wiederum kann, ehe sie sich durch die Wissenschaft selbst verwirklicht hat, nur in der Form der Ahnung erscheinen. Es ist daher diese Ahnung auf dem wissenschaftlichen Gebiet etwas Unentbehrliches. Sie ist nämlich, wenn sie von rechter Art ist, das In-eins-zusammenschauen der ganzen Entwicklungsreihe, die zu der neuen Wahrheit führt, aber mit noch nicht auseinandergelegten Momenten der Entwicklung und daher auch im Anfang nur erst als dunkles Vorgefühl; die Auseinanderlegung jener Momente enthält zugleich die Auffindung der Wahrheit und Kritik jenes Vorgefühls." (Grassmann 1969, S.31)

Die wissenschaftliche Darstellung sei daher ihrem Wesen nach ein Ineinandergreifen zweier Entwicklungsreihen, von denen die eine mit Konsequenz von einer Wahrheit zur anderen führe und den eigentlichen Inhalt bilde, die andere aber das Verfahren selbst beherrsche und die Form bestimme. In der Mathematik träten diese beiden Entwicklungsreihen am schärfsten auseinander. Dort sei es üblich, nur die eine Entwicklungsreihe, also die logische Abfolge der Sätze zu geben, und in bezug auf die andere, es dem Leser zu überlassen, diese zwischen den Zeilen herauszulesen. Auch Euklid verfahre so. Dadurch aber sei es unmöglich, demjenigen, der die Wissenschaft erst kennenlernen solle, auf jedem Punkt der Entwicklung die Übersicht zu erhalten und ihn in den Stand zu setzen, selbsttätig weiter fortzuschreiten. "Dazu ist es vielmehr nötig, daß der Leser möglichst in denjenigen Zustand versetzt wird, in welchem der Entdecker der Wahrheit im günstigsten Falle sich befinden müßte. In demjenigen aber, der die Wahrheit auffindet, findet ein stetes Sichbesinnen über den Gang der Entwicklung statt; es bildet sich in ihm eine eigentümliche Gedankenreihe über den Weg, den er einzuschlagen hat, und über die Idee, welche dem Ganzen zugrunde liegt; und diese Gedankenreihe bildet den eigentlichen Kern und Geist seiner Tätigkeit, während die konsequente Auseinanderlegung der Wahrheiten nur die Verkörperung jener Idee ist. Dem Leser nun zumuten wollen, daß er, ohne zu solchen Gedankenreihen angeleitet zu sein, dennoch auf dem Wege der Entdeckung selbständig fortschreiten solle, heißt ihn über den Entdecker der Wahrheit selbst stellen, und somit das Verhältnis zwischen ihm und dem Verfasser umkehren, wobei dann die ganze Abfassung des Werks als überflüssig erscheint." (Grassmann 1969, S.32)

Die Tatsache, daß in der Mathematik beide Entwicklungsreihen am schärfsten auseinandertreten, liege in der Eigentümlichkeit ihrer Methode begründet, wie Grassmann sie zu Beginn in der Kontrastierung von Mathematik und Philosophie charakterisiert hat; da die Mathematik nämlich vom Besonderen aus durch Verkettung fortschreite, so sei die Einheit der Idee bei ihr das letzte. Die zweite Entwicklungsreihe habe daher einen ganz entgegengesetzten Charakter und die Durchdringung beider erscheine schwieriger als in irgendeiner anderen Wissenschaft. Dennoch dürfe man nicht, wie es bei deutschen Mathematikern häufig geschehe, deshalb das ganze Verfahren aufgeben und verwerfen.

Die Ausführungen Grassmanns wurden hier deshalb so ausführlich zitiert, weil sie eine der besten Darstellungen des im weiteren Verlauf dieser Arbeit behandelten Widerspruchs von Begründung und Entwicklung ist. Unter begründendem Gesichtspunkt steht natürlich die logische Abfolge der Sätze und Definitionen im Vordergrund, inhaltliche Bedeutung kommt daher nur einer Theorie als ganzer zu. Andererseits aber ist es unter dem Gesichtspunkt der Wissensentwicklung notwendig, in jedem Punkt der Entwicklung einen Überblick über das anzustrebende Ganze zu haben, d.h. das, was Grassmann "Ahnung" oder "leitende Idee" nennt und was üblicherweise als "Intuition" bezeichnet wird, tritt in den Vordergrund. Die beiden Entwicklungsreihen, von denen Grassmann spricht, werden also durch die widersprüchlichen Erfordernisse der Wissensbegründung und der Wissensentwicklung strukturiert. Grassmann hat darüber hinaus ein klares Bewußtsein davon, daß dieser Widerspruch nicht nur die Tätigkeit des Forschers, dessen, der neues Wissen entwickelt, bestimmt, sondern auch den Prozeß der Kommunikation und der wissenschaftlichen Mitteilung. Er arbeitet klar heraus, daß eigentlich nicht verstanden werden kann, wie beim Empfänger einer wissenschaftlichen Mitteilung neues Wissen entstehen kann, wie dieser also die Information überhaupt aufnehmen kann, wenn dieser Prozeß nur durch die eine Entwicklungsreihe (die der logischen Abfolge) bestimmt gedacht wird.

In der oben genannten Arbeit von Lewis werden die Ausführungen von Grassmann zum Problem der Darstellung ganz analog interpretiert. Lewis konstatiert:"The complementarity of rigor and overview provides the final contrast which makes the A_1 a consistent whole in its methodology." (Lewis 1977, S.133) Darüber hinaus aber wird bei Lewis, meines Erachtens zu Recht, darauf hingewiesen, daß den Grassmannschen Überlegungen Bedeutung nicht nur unter didaktischen Gesichtspunkten, sondern auch unter wissenschaftstheoretischen Aspekten zukommt. Grassmann realisiert nämlich seine Konzeption dadurch, daß er jedes Kapitel in zwei Teile teilt, einen Teil "A. Theoretische Entwickelung" und einen zweiten Teil "B. Anwendungen". Die Rolle der "leitenden Idee", der "Ahnung", wird also jeweils durch die vor allem geometrischen Anwendungen übernommen. Programmatisch heißt es schon im Untertitel der "Ausdehnungslehre" "ein neuer Zweig der Mathematik dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Kristallonomie erläutert".
Die hier im Titel des Werkes bereits vorgenommene Gegenüberstellung der Ausdehnungslehre mit ihren Anwendungen suggeriert

einerseits eine Trennung der "reinen Wissenschaft" von ihren Anwendungen und andererseits eine Beziehung zwischen beiden. Befassen wir uns zunächst mit dem Moment der Trennung.

Grassmann bestimmt in der Einleitung seiner "Ausdehnungslehre" von 1844 die Mathematik zunächst als eine *formale Wissenschaft*. Dies erläutert er so:"Denken ist nur in bezug auf ein Sein, was ihm gegenübertritt und durch das Denken abgebildet wird; aber dies Sein ist bei den realen Wissenschaften ein selbständiges, außerhalb des Denkens für sich bestehendes, bei den formalen hingegen ein durch das Denken selbst gesetztes, was nun wieder einem zweiten Denkakt als Sein sich gegenüberstellt. Wenn nun die Wahrheit überhaupt in der Übereinstimmung des Denkens mit dem Sein beruht, so beruht sie insbesondere bei den formalen Wissenschaften in der Übereinstimmung des zweiten Denkaktes mit dem durch den ersten gesetzten, also in der Übereinstimmung beider Denkakte. Der Beweis in den formalen Wissenschaften geht daher nicht über das Denken selbst hinaus in eine andere Sphäre über, sondern verharrt rein in der Kombination der verschiedenen Denkakte. Daher dürfen auch die formalen Wissenschaften nicht von Grundsätzen ausgehen, wie die realen; sondern ihre Grundlage bilden die Definitionen." (Grassmann 1969, S.22) Später erklärt er (S.64ff), daß die Geometrie aus diesem Grunde keine formale Wissenschaft sei und deshalb auch nicht zur reinen Mathematik gerechnet werden könne. Für ihn gehört die Geometrie zu den Anwendungen der reinen Mathematik. Unter "Grundsätzen" versteht Grassmann immer "Axiome" im euklidischen Sinne, d.h. aufgefaßt als intuitiv evidente Wahrheiten. Daher sagt er:"In der Tat kennen die abstrakten Disziplinen der Mathematik gar keine Grundsätze; sondern der erste Beweis geschieht in ihnen durch Aneinanderketten von Erklärungen, indem von keinem anderen Fortschreitungsgesetz Gebrauch gemacht wird, als von dem allgemein logischen, daß nämlich, was von einer Reihe von Dingen in dem Sinne ausgesagt ist, daß es von jedem einzelnen derselben gelten soll, auch wirklich von jedem einzelnen, was jener Reihe angehört, ausgesagt werden kann." (a.a.O., S.65) Grassmann gibt also das klassisch-euklidische Verständnis der Grundlagen der reinen

Mathematik auf und versucht eine Konzeption zu entwickeln, die der "axiomatischen Methode", wie sie von Hilbert formuliert wurde, nahekommt. Daher kritisiert er Bemühungen, in die Arithmetik "Grundsätze einzuführen", da er Grundsätze in einem realistischen Sinne auffaßt. Allerdings trägt sein Verständnis von reiner Mathematik durchaus "realistische" Züge, es kann nicht als formalistisch bezeichnet werden.

Dies wird deutlich, wenn man sich seine allgemeine Herleitung und Einordnung des "Begriffs der Ausdehnungslehre" in die Gesamtmathematik ansieht. Zunächst sagt er:"Jedes durch das Denken Gewordene kann auf zwiefache Weise geworden sein, entweder durch einen einfachen Akt des *Erzeugens*, oder durch einen zwiefachen Akt des *Setzens und Verknüpfens*. Das auf die erste Weise Gewordene ist die *stetige Form* oder die *Größe* im engeren Sinn, das auf die letztere Weise Gewordene die *diskrete oder Verknüpfungsform.*" (a.a.O., S.24) Nach dieser Unterscheidung des Diskreten und Kontinuierlichen, nach der Art seiner Erzeugung bestimmt, lokalisiert er in einem zweiten Schritt den Ort der Ausdehnungslehre. "Ebenso sondert sich die stetige Form oder die Größe danach in die algebraisch-stetige Form oder die *intensive Größe*, und in die kombinatorisch-stetige Form oder die *extensive Größe*. Die intensive Größe ist also das durch Erzeugung des Gleichen Gewordene, die extensive Größe oder die *Ausdehnung* ist das durch Erzeugung des Verschiedenen Gewordene. Jene bildet als veränderliche Größe die Grundlage der Funktionenlehre, der Differential- und Integralrechnung, diese die Grundlage der Ausdehnungslehre." (a.a.O., S.26) Gegenstand der Ausdehnungslehre ist also die Kombination von "Strecken". Durch die in den beiden Zitaten angedeutete, doppelte Unterscheidung von diskret vs. kontinuierlich und Erzeugung des Gleichen vs. Erzeugung des Verschiedenen wird die gesamte Mathematik in vier große Gebiete eingeteilt. Die Begrifflichkeit von Grassmann soll hier nicht im einzelnen erläutert und dargelegt werden; der Begriff der "Erzeugung des Verschiedenen" ist so vorzustellen, daß auf ein Ausgangselement verschiedene "Gesetze der Änderung" angewandt werden und auf diesem Wege eine extensive Größe entsteht. "Als Beispiel möge hier wieder die Raumlehre dienen. In derselben werden bei zwei verschiedenen Richtungen aus einem Element die sämtlichen Elemente einer Ebene erzeugt, indem nämlich das erzeugende Element beliebig viel nach beiden Richtungen nacheinander fortschreitet, und die Gesamtheit der so erzeugbaren Punkte (Elemente) in eins zusammengefaßt wird. Die Ebene ist also das System zweiter Stufe; in ihr ist eine unendliche Menge von Richtungen enthalten, welche von jenen beiden ersten abhängen. Nimmt man eine dritte unabhängige Richtung hinzu, so wird vermittelst ihrer der ganze unendliche Raum (als System dritter Stufe) erzeugt; und weiter als bis zu drei unabhängigen Richtungen (Änderungsgesetzen) kann man hier nicht kommen, während sich in der reinen Ausdehnungslehre die Anzahl derselben bis ins Unendliche steigern kann." (a.a.O., S.29)

Die Theorie wird dann im Verlaufe der Schrift so entwickelt, daß jeweils, wie bereits erwähnt, in einem Kapitel zunächst bestimmte Begriffe rein formell eingeführt werden, also z.B. die Addition extensiver Größen durch die Eigenschaften der Assoziativität, der Kommutativität und der Existenz eines inversen Elements definiert wird, während jeweils im zweiten Teil des Kapitels die so formell entwickelte Begrifflichkeit auf Geometrie und Mechanik angewandt werden. Angesichts einer solchen formalen Auffassung der "reinen Mathematik" fragt nun Lewis in dem genannten Aufsatz, welche wissenschaftliche Basis für solch ein Vorgehen Grassmann eigentlich im Auge hatte. Welche Sicherheit gibt es, daß Mathematik, nach Art der Ausdehnungslehre entwickelt, nicht reine Phantasie bleibt? Lewis antwortet: "The answer which is suggested here is that the basis of the A_1 (der Ausdehnungslehre) lies for Grassmann in the dialectical method of the work as a whole and not just in the purely abstract aspects. In this way Grassmann's concrete intuitional examples, operating through analogy or presentiment in the creative and learning aspects of the theory, enter into the foundations of the subject." (Lewis 1977, S.136)

In der Tat führt die Trennung von reiner Mathematik und ihren Anwendungen gerade zu einer verallgemeinerten Beziehung zwischen beiden, und dies erklärt ein weiteres Mal die obige Feststellung, daß es nur scheinbar paradox ist, daß die Vervielfältigung des Anwendungsbezugs der Mathematik im Zuge der industriellen Revolution zur Herausbildung der "reinen Mathematik" als einer eigenständigen Disziplin führt. Grassmann selber hebt den Zusammenhang von reiner Mathematik und ihren Anwendungen in einer für die damalige Zeit und das damalige Selbstverständnis der mathematischen Wissenschaft ungewöhnlichen und nachdrücklichen Weise hervor. In der Vorrede zur ersten Auflage der "Ausdehnungslehre" von 1844 schildert er, wie er auf die Idee zu seiner Ausdehnungslehre gekommen ist. Dabei spielte offenbar die Beschäftigung mit den mechanischen Arbeiten von Lagrange und Laplace eine ganz bedeutende Rolle. Als Ergebnis dieser Auseinandersetzung konstatiert Grassmann:"Durch diesen Erfolg nun hielt ich mich zu der Hoffnung berechtigt, in dieser neuen Analyse die einzig naturgemäße Methode gefunden zu haben, nach welcher jede Anwendung der Mathematik auf die Natur fortschreiten müsse, und nach welcher gleichfalls die Geometrie zu behandeln sei, wenn sie zu allgemeinen und fruchtreichen Ergebnissen führen solle. Es reifte daher in mir der Entschluß, die Darstellung, Erweiterung und Anwendung dieser Analyse zu einer Aufgabe meines Lebens zu machen." (a.a.O., S.9) Und in einer "Übersicht über das Wesen der Ausdehnungslehre" aus dem Jahre 1845 schreibt er : "1. *Meine Ausdehnungslehre bildet die abstrakte Grundlage der Raumlehre* (Geometrie), d.h., *sie ist die von allen räumlichen Anschauungen gelöste, rein mathematische Wissenschaft, deren spezielle Anwendung auf den Raum die Raumlehre ist.*

Die Raumlehre, da sie auf etwas in der Natur Gegebenes, nämlich den Raum, zurückgeht, ist kein Zweig der reinen Mathematik, sondern eine Anwendung derselben auf die Natur; aber nicht eine bloße Anwendung der Algebra, auch dann nicht, wenn die algebraische Größe, wie in der Funktionenlehre als stetig veränderlich betrachtet wird; denn es fehlt der Algebra der der Raumlehre eigentümliche Begriff der verschiedenen Dimensionen.

Daher ist ein Zweig der Mathematik notwendig, welcher in den Begriff der stetig veränderlichen Größe zugleich den Begriff von Verschiedenheiten aufnimmt, welche den Dimensionen des Raumes entsprechen, und dieser Zweig ist meine Ausdehnungslehre.

2. Doch sind die Sätze der Ausdehnungslehre nicht etwa bloße Übertragungen geometrischer Sätze in die abstrakte Sprache, sondern haben eine viel allgemeinere Bedeutung; denn während die Raumlehre gebunden bleibt an die drei Dimensionen des Raumes, so bleibt die abstrakte Wissenschaft von diesen Schranken frei." (a.a.O., S.297)

Mit Recht resümiert daher Lewis:"This analysis of the A_1 (der Ausdehnungslehre) has shown that while Grassmann makes an explicit separation of pure mathematics, as pure theory of thought-forms, from its applications, recognizes that such a separation itself implies a relationship of dependency between the two things being separated. This general dialectical principle is reflected in every facet of the A_1." (Lewis 1977, S.160) Es wird sich im weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit noch herausstellen, daß Grassmanns Meinung "die einzig naturgemäße Methode gefunden zu haben, nach welcher jede Anwendung der Mathematik auf die Natur fortschreiten müsse", und seine Verwendung der Anwendungen als "didaktisches Hilfsmittel" in dem Sinne, daß durch die Anwendungen die jeweils "leitende Idee" repräsentiert wird, in einem inneren Zusammenhang stehen. Es wird nämlich versucht werden, den Zusammenhang von "Begründung" und "Anwendung" im folgenden näher zu thematisieren.

Die mathematische Bedeutung des Werks von Grassmann ist heute bekannt und unbestritten. Sie liegt nicht nur im Übergang zur n-dimensionalen Geometrie, den er als einer der ersten vollzieht, sondern auch in der Bildung zahlreicher, für die lineare Algebra und insbesondere für die Herausarbeitung der Bedeutung des

Begriffs des linearen Raumes wichtiger Begriffe. Dennoch hat das Werk von Grassmann jahrzehntelang nicht die ihm gebührende Anerkennung gefunden. Von allen Mathematikern, die sich zu diesem Phänomen geäußert haben, wird übereinstimmend festgestellt, daß dies an der Schwierigkeit seiner Darstellung liege. Bourbaki etwa spricht von einer "nebelhaften Philosophie, in die es sich von Anfang an einhüllt und die z.B. Möbius zunächst davon abhält." (Bourbaki 1971, S.81) Auch Grassmann selbst gesteht dies implizit dadurch ein, daß er im Jahre 1862 die "Ausdehnungslehre" in einer Neubearbeitung herausbringt, die dem Stil der damaligen mathematischen Literatur angepaßt war. Erst danach beginnt man allmählich in Fachkreisen, sein Werk umfassender zu würdigen. Wie ist dies zu verstehen bei einem Mann, der doch, wie hier behauptet wird, die Zeichen seiner Zeit durchaus verstanden hat? Ich möchte zu dieser Frage die Hypothese formulieren, daß die Wirkungslosigkeit der Grassmannschen Ausdehnungslehre ein Indiz dafür ist, welche Bedeutung dem Kommunikationsproblem in der Wissenschaft beigemessen werden muß. Umgekehrt gesagt, obwohl Grassmann das Problem wissenschaftlicher Kommunikation, insofern in dieser Kommunikation wirklich neues Wissen vermittelt wird, durchaus zutreffend beschrieben hat, hat er es in seiner sozialen Bedeutsamkeit doch offenbar unterschätzt. Der jeweils herrschende Stil der Wissensdarstellung, und dieser Stil war weitgehend von der "Euklidischen Methode" bestimmt, ist deshalb von so hoher Bedeutung für das Problem der Kommunikation, weil in einem solchen Stil in impliziter Weise Wissen über Wissen enthalten ist, d.h. Wissen darüber, wie eine Aussage oder ein Begriff "gemeint ist". Insofern war es ein Irrtum von Grassmann, anzunehmen, die "Euklidische Methode" enthalte nur die eine Entwicklungsreihe (nämlich die der logischen Abfolge). Tatsächlich ist in der Euklidischen Methode natürlich auch ein bestimmtes erkenntnistheoretisches Grundverständnis enthalten. Wenn auch dieses Verständnis im Grunde genommen den wissenschaftlichen Anforderungen der Zeit nicht mehr entsprach, hatte es doch den großen Vorzug, *gesellschaftlich verbreitet zu sein.* Daher stellte die Euklidische Methode die einzig mögliche Grundlage der

Kommunikation dar, die nicht ohne Folgen verlassen werden konnte.

Die große Bedeutung, die das Problem der Begründung des Wissens im 19. Jahrhundert auf dem Hintergrund der veränderten sozialen Stellung der Mathematik hatte, insbesondere als Folge der Tatsache, daß Mathematik zum Lehrgegenstand eines öffentlich organisierten Bildungssystems wurde, läßt sich vor allem auch an der Entwicklung der Algebra im 19. Jahrhundert ablesen. Während des gesamten 18. Jahrhunderts gab es unter den Mathematikern keine Übereinstimmung darüber, was Algebra ist, was ihr Gegenstand ist und was in der Algebra überhaupt ein "Beweis" sein könnte. Im 18. Jahrhundert gab es zwei komplementäre Auffassungen der Algebra. In der einen wurde die Algebra als Wissenschaft von den Gleichungen und ihren Lösungsmethoden verstanden, während in der anderen die Algebra als eine "universelle Arithmetik" bzw. allgemeiner als die Theorie "allgemeiner Größen", seien es arithmetische oder geometrische, betrachtet wurde. Algebraische Formeln wurden dadurch verifiziert, daß man ihre Gültigkeit an (Zahlen-)Beispielen demonstrierte; denn die algebraischen Operationen wurden ja als aus den arithmetischen Operationen abstrahiert aufgefaßt, und daher schien es plausibel, ähnlich wie in der Geometrie, in der Beweise unter Bezug auf ein vorgelegtes "allgemeines Dreieck" vorgenommen wurden, auch in der Algebra Beweise unter Benutzung gegebener "allgemeiner Zahlen" zu führen. Umgekehrt wurde eine Herleitung mit Hilfe von Buchstaben eben deshalb als allgemeingültig akzeptiert, ohne die Frage nach dem Gültigkeitsbereich explizit zu klären. Zwar wurde gesehen, daß diese Verfahrensweisen unbefriedigend waren, trotzdem unternahm man keine großen Anstrengungen, die Mängel zu beheben. So schrieb G.A. Kästner in seinem sehr einflußreichen Lehrbuch "Anfangsgründe der Mathematik" im Jahre 1758:"Ich erfuhr aber wirklich, daß nicht alles in der Algebra wenigstens völlig allgemein und mit allen Umständen demonstrirt wird, was man dafür ausgiebt. Verschiedene dergleichen Erinnerungen fand ich bey dem gewöhnlichen Vortrage der Lehre von den Gleichungen zu machen. Wenn man ihren Ursprung aus der Multiplication erklärt, so giebt man meines Erachtens den Grund nicht allemahl deutlich genug an, weßwegen man die Wurzelgleichungen auf O bringen muß; und wie einerley Buchstabe zugleich verschiedene Grössen bedeuten kann, welches ich ... zu erläutern gesucht habe." (Kästner 1792, III/I, S.V) Und weiter schreibt er:"Man begnügt sich in der Algebra sehr oft allgemeine Gesetze anzunehmen, wenn man sich von der Richtigkeit derselben bey einigen besondern Fällen versichert hat. Eines der bekanntesten Exempel ist wohl der binomische Lehrsatz. Ich hatte eben soviel Eifer die Regeln der Algebra zu demonstriren, als Reyneau kann gehabt haben, und in der That wäre es eine Schande für einen Deutschen, wenn er da nicht demonstriren wollte, wo selbst ein Franzose dieses unternimmt." (a.a.O., S.VII)

Kästner bemüht sich zwar in der Tat, im Hinblick auf Beweise algebraischer Sachverhalte durch Eingehen auf ihren Gültigkeitsbereich genauer zu sein als die Mehrzahl seiner Zeitgenossen, er erhält allerdings dadurch Ergebnisse von geringerem Allgemeinheitsgrad. Kästner faßt die Algebra als eine universelle Arithmetik auf, daher ist für ihn der Grundbegriff der der "natürlichen Zahlen". "Alle Begriffe der Arithmetik gründen sich meines Erachtens auf die von ganzen Zahlen: Brüche sind ganze Zahlen, deren Einheit ein Stück des anfangs für die Einheit genommenen Ganzen ist, und irrationale Größen muß man sich als Brüche vorstellen, da diese Einheit veränderlich, immer ein kleineres und kleineres Stück des Ganzen ist." (Kästner 1792, I, S.3) Damit geht er im Unterschied zur universalistischen Tendenz seiner Zeit auf ein Grundlagenverständnis zurück, das gewisse Anklänge an antikes Denken nicht leugnen kann. Damit ist er ein wichtiger Vorläufer derjenigen Strömung, die vor allem in Deutschland versucht, die gesamte Mathematik auf dem Begriff der natürlichen Zahl zu begründen.[1]

1 Im 19. Jahrhundert war einer der ersten wichtigeren Repräsentanten dieser Strömung der Berliner Mathematik-Professor M. Ohm, der sich im besonderen Maße auf die (Gymnasial-)Lehrerausbildung konzentrierte. Von hierher läßt sich sehen, in wie enger Weise dieses Grundlagenverständnis mit der sich damals herausbildenden "gymnasialen Mathematikauffassung", die auf lange Zeit den Mathematikunterricht in den Gymnasien prägen sollte, verknüpft ist.

In seinen Vorlesungen in der École Polytechnique vertritt Lagrange die Auffassung, daß Algebra als die Wissenschaft allgemeiner Größen zu verstehen sei, von denen arithmetische und geometrische Größen nur Spezialfälle darstellen. Diese Allgemeinheit des Gegenstandsverständnisses führt Lagrange dann dazu, vor allem den operativen und formalen Charakter der Algebra und allgemeiner der Mathematik in den Vordergrund zu stellen. Lagrange betont den Charakter der Algebra als"Sprache"; und diese Auffassung erfährt um die Zeit der Wende vom 18. zum 19. Jahrhundert eine weite Verbreitung. Lagranges eigener Versuch, mit Hilfe des Begriffs der Taylor-Entwicklung die Infinitesimalrechnung formalistisch zu begründen, ist bekannt; in Frankreich gab es eine ganze Reihe von Mathematikern, die ähnliche Versuche unternahmen. In Deutschland war um die Jahrhundertwende die "kombinatorische Schule", um ihren bekanntesten Vertreter C.F. Hindenburg, sehr einflußreich (vgl. hierzu und zum folgenden Novy 1973 und Koppelmann 1971).

Es scheint nicht unplausibel, daß die Herausbildung und weite Verbreitung einer Auffassung der Algebra und allgemeiner der Mathematik als einer "Sprache", also das In-den-Vordergrund-Stellen des "Textcharakters" der Mathematik, im Zusammenhang damit steht, daß die Mathematik in breiterem Maße zum Gegenstand von Bildungs- und Ausbildungsbemühungen wird. Besonders deutlich wird dies an der Entwicklung in England zu Beginn des 19. Jahrhunderts, wo eine ganze Gruppe junger Mathematiker (genannt seien hier R. Woodhouse, G. Peacock, C. Babbage und J. Herschel) sich darum bemühte, die Newtonsche Auffassung der Infinitesimalrechnung, die in England zu einer Stagnation der Mathematik geführt hatte, zu durchbrechen und die Mathematik, die auf dem Kontinent betrieben wurde, in das englische Hochschulwesen einzuführen. Im Zusammenhang mit diesen Bemühungen wurden viele Überlegungen zum Problem der Grundlagen der Mathematik angestellt, um eine einigermaßen einheitliche und hinreichend tragfähige Auffassung der Mathematik zu erzielen. In der Newtonschen Tradition war es vor allem das Beharren auf dem Vorrang der Geometrie gewesen, der in den Augen der Reformer die Entwicklung behindert hatte. Als Ergebnis dieser Reformbewegung bildet sich in England ein neues Konzept der Algebra heraus, vor allem in den Werken von Peacock, D. Gregory, A. DeMorgan und G. Boole, und es entsteht eine hervorragende Schule der mathematischen Physik (G.Green, G. Stokes, Lord Kelvin und J.C. Maxwell) (vgl. dazu Koppelman 1971).

Unter dem Gesichtspunkt einer einheitlichen Grundlegung der Mathematik favorisieren die englischen Algebraiker auch den Vorschlag Lagranges zur Grundlegung der Infinitesimalrechnung. Sie kritisieren die Theorie der Grenzwerte, weil sie zu einer Tendenz führe, die Prinzipien der Differentialrechnung von denen der gewöhnlichen Algebra zu separieren (Peacock). Die jüngeren britischen Mathematiker fassen alle die symbolische Algebra als die allgemeinste, fundierende Disziplin der Mathematik auf. So schreibt z.B. D.F. Gregory zu Beginn seiner Schrift "On the Real Nature of the Symbolical Algebra":"The following attempt to investigate the real nature of Symbolical Algebra, as distinguished from the various branches of analysis which come under its dominion, took its rise from certain general considerations, to which I was led in following out the principle of the separation of symbols from those of quantity." (Gregory 1840, S.208) Während Peacock noch den Zusammenhang von Arithmetik und Algebra thematisiert und die Algebra als mit Hilfe eines "Permanenzprinzips" aus der Arithmetik entstanden denkt, geht Gregory unmittelbar von der Algebra aus und betrachtet die einzelnen Disziplinen der Mathematik nur noch als Anwendungen dieser symbolischen Algebra. Während von allen diesen Mathematikern der Kalkül und die symbolische Operation in den Vordergrund gestellt werden, unterscheiden sie sich in dem Ausmaß,in dem sie die Notwendigkeit und Wichtigkeit einer Interpretation dieser Kalküle hervorheben. Morgan unterscheidet zwischen "technischer" und "logischer Algebra", wobei Gegenstand der technischen Algebra die Operationsregeln, Gegenstand der logischen Algebra das Finden von Interpretationen für die aufgestellten Kalküle ist. Einer derjenigen englischen Mathematiker, der sich am nachdrücklichsten mit dem Problem einer gegenständlich-inhaltlichen Interpretation der Algebra beschäftigt hat, war W.R. Hamilton. Hamilton bestimmt die Algebra als die Wissenschaft der "reinen Zeit" oder, was für ihn gleichbedeutend ist, als die Wissenschaft der "stetigen Progression". Auf der Grundlage der Intuition der Zahlengeraden bzw. der Zeitachse gibt Hamilton eine Definition des Begriffs der irrationalen Zahlen, die sehr eng verwandt ist zu derjenigen, die später von Dedekind entwickelt wird. Er kritisiert übrigens die Grundlagenüberlegungen des oben in einer Fußnote erwähnten M. Ohm, weil dieser den Begriff der Kardinalzahl zum Ausgangspunkt nehme, während seiner Meinung nach der ordinale Aspekt der Zahl wesentlich grundlegender sei. Hamiltons Vorstellungen sind durch Kant geprägt und stehen damit im Widerspruch zu denen seiner, die Idee einer symbolischen Algebra favorisierenden, Kollegen. Im Laufe seiner Entwicklung läßt er sich allerdings zunehmend von ihnen beeinflussen und gibt zu:"I better understand that *philological school* ...".

Natürlich wird diese kursorische Skizze der englischen algebraischen Schule weder in ihrer Bedeutung noch in ihrer Begrenztheit gerecht. Einerseits müßte, wenn die Entwicklung der Begründungsproblematik der Algebra im 19. Jahrhundert näher verfolgt würde, die fundamentale Bedeutung, die der Begriff der Gruppe auch für das Verständnis dessen hat, was Begründung in der Algebra heißt, herausgearbeitet werden. Auf der anderen Seite wäre auch näher zu untersuchen, welche Folgen die zeitweilig in England vertretene Auffassung, die Algebra als die für die ganze Mathematik grundlegende Disziplin anzusehen, tatsächlich für die Grundlagendiskussion zu Ende des 19. Jahrhunderts gehabt hat.

In diesem geistigen Umfeld der englischen algebraischen Schule entwickelt George Boole, der übrigens selber in starkem Maße mit Problemen des Unterrichts beschäftigt war (vgl. Laita 1977), seinen logischen Kalkül und leitet damit eine Entwicklung ein, durch die auch in der Logik der entscheidende Schritt über Aristoteles hinaus getan wird. Die Logik wird algebraisiert und damit ontologisch relativiert. Der seit Boole einsetzende Aufschwung der Logik einerseits und die sich herausbildende relative Eigenständigkeit der Logik andererseits sind ihrerseits Ausdruck dafür, in welchem Maße der Mathematik nicht nur ihre Inhalte im klassischen Sinne, sondern auch ihre *Darstellungsmittel* zum Gegenstand und zum Problem geworden sind. Gerade an der Diskussion zwischen den englischen Algebraikern aber ließe sich zeigen, daß diejenigen Positionen am fruchtbarsten und weittragendsten gewesen sind, die nicht versucht haben, die Mathematik auf einen der beiden Aspekte - sei es den Darstellungsaspekt, die symbolische, kalkülmäßige Seite der Mathematik, sei es ihr gegenständlich-inhaltlicher Aspekt - zu reduzieren. Der veränderte Gesichtswinkel, unter dem die Mathematik und die Logik des 19. Jahrhunderts die begriffichen und kalkülmäßigen Darstellungsmittel betrachten, die erhöhte Bedeutsamkeit, die dieser Seite des Wissens beigemessen wird, spiegelt sich insbesondere in einem gewandelten Verhältnis zu Widersprüchen und Paradoxien wider. Das "Paradox", daß unendliche Mengen gleichmächtig zu echten Teilmengen ihrer selbst sein können, war bereits Galilei und Leibniz bekannt. Erst im 19. Jahrhundert wird diesem "Paradox" Bedeutung beigemessen, und man macht es zur Definition des Begriffs des Unendlichen. In der Analysis werden Paradoxien geradezu gesucht: Man konstruiert stetige, aber nirgendwo differenzierbare Funktionen, stetige Kurven, die eine ganze Fläche ausfüllen, etc. W.C. Salmon stellt in der Einleitung zu einem Reader über die Zenonschen Paradoxien fest:" Zeno's paradoxes have interested philosophers of all periods, but until the middle of the nineteenth century the paradoxes were almost always regarded as mere sophisms which could be removed with little trouble. In the last hundred years, however, they have been taken very seriously, and in the twentieth century have become the subject of vigorous philosophical discussion." (Salmon 1970, S.8) Im 19. Jahrhundert ist es eben deswegen nicht mehr möglich, Paradoxien oder Widersprüche als bloße Sophismen abzutun, die lediglich gewisse Unvollkommenheiten des zur Verfügung stehenden Darstellungsapparates (z.B. der Sprache) ans Licht bringen, weil die Zuverlässigkeit bzw. Unzuverlässigkeit der Darstellungsmittel selbst für die Wissenschaft ein großes und nicht mehr vernachlässigbares Problem geworden ist. Die Wissenschaft und insbesondere die Mathematik müssen der Tatsache Rechnung tragen, daß die Bedeutung des Kommunikationsproblems nun über den Bereich des Gedankenaustausches zwischen einzelnen Wissenschaftlern hinausgeht. Die Mathematik ist mit der Aufgabe konfrontiert, ihre Begrifflichkeit in neuer Weise gegenüber mißverständlichen Interpretationen abzusichern und zu fixieren und damit in einem noch weitgehenderen Maße als es in den Jahrhunderten der Entwicklung vorher geschehen ist, ihre Ergebnisse kontextunabhängig zu machen.

KAPITEL II: THEORIENDYNAMIK UND PROBLEM DER THEORETISCHEN TERME

II. 1. *"Paradoxon des Beweises"* und *"Dilemma des Theoretikers"*

Wie das I. Kapitel deutlich gemacht hat, sind im 19. Jahrhundert innerhalb der einzelnen Wissenschaften, insbesondere innerhalb der Mathematik, zwei widersprüchliche Tendenzen, denen zwei widersprüchlichen Funktionen oder Aufgaben entsprechen, wirksam geworden. Die Aufgaben der *Begründung des Wissens* und der *Entwicklung des Wissens* treten auseinander und werden relativ eigenständige Funktionen wissenschaftlicher Tätigkeit. Unter dem Gesichtspunkt der Wissensbegründung steht die Aufgabe im Vordergrund, das Wissen zu fixieren, es gegenüber widersprüchlichen Interpretationen zu immunisieren und es vom Kontext seiner Entstehung unabhängig zu machen. Das Wissen muß sich im sozialen Verkehr selbst rechtfertigen. Wissensbegründung bedeutet immer auch, einen fixierten Standpunkt zum Problem der Grundlagen des Wissens zu formulieren und in der einen oder anderen Form eine bestimmte Position zum Problem der "Ontologie" der wissenschaftlichen Gegenstände einzunehmen. (Es handelt sich natürlich auch dann noch um eine "ontologisch" begründete Position, wenn die Objektivität der Wissenschaft vollständig auf die wissenschaftliche Methode zurückgeführt wird). Auf der anderen Seite ist unter dem Gesichtspunkt der Entwicklung des Wissens eine solche Fixierung gerade nicht wünschbar. Die Hinderlichkeit fixierter ontologischer Positionen für die Entwicklung neuen Wissen, die immer unter dem Gesichtspunkt eines Vorgriffs auf die Zukunft und nie durch Festhalten an vergangenem Wissen gekennzeichnet ist, ist jedem forschenden Wissenschaftler wohl bewußt. Dies drückt A.N. Whitehead aus, wenn er sagt, daß eine Wissenschaft, die nicht bereit sei, ihre Vorfahren zu vergessen, verloren sei. Aber auch diejenige "ontologische Position", die die Objektivität der Wissenschaft völlig in ihrer Methode verankern will, kann für die Entwicklung des Wissens hinderlich werden, dadurch, daß sie die Herausbildung neuer wissenschaftlicher Methoden und Verfahren vom Ansatz her negiert. Mit Schwierigkeiten dieser Art haben z.B. alle Sozialwissenschaften, die auf ein zu eindeutig empiristisches Forschungsparadigma festgelegt sind, zu kämpfen.

Es wurde bereits gezeigt, in welcher Weise sich die widersprüchlichen Aspekte der Wissensbegründung und Wissensentwicklung in bestimmten Vorstellungen des 19. Jahrhunderts über Gegenstand und Methode der Mathematik niederschlugen. Darüber hinaus aber könnte dargestellt werden, wie die "Einheit von Forschung und Lehre", die in ihrem Kern auch ein "Widerspruch von Forschung und Lehre" war, in der Mathematik des 19. Jahrhunderts real wirksam geworden ist. Als Beispiel sei hier nur auf den oben bereits erwähnten Berliner Mathematik-Professor Martin Ohm verwiesen, der unter den beiden Gesichtspunkten der Wissensbegründung und der Wissensentwicklung völlig unterschiedlich, ja gegensätzlich, bewertet wird. Während Ohm auf der einen Seite offenbar einen erheblichen Einfluß auf das sich herausbildende Grundlagenverständnis der Mathematik im 19. Jahrhundert hatte - unter diesem Gesichtspunkt wird seine Bedeutung z.B. auch bei Bourbaki in seien "Elementen der Mathematikgeschichte" herausgestrichen - , wurde Ohm auf der anderen Seite von seinen in der Forschung führenden Kollegen mit ziemlicher Mißachtung betrachtet.

In der wissenschaftstheoretischen und philosophischen Reflexion ist dieser Widerspruch von Wissensbegründung und -entwicklung nun in verschäfter Weise aufgenommen und sogar noch zugespitzt worden. Im gegenwärtigen Selbstverständnis der Wissenschaft sowie in der wissenschaftstheoretischen Widerspiegelung dieses Selbstverständnisses werden "Logik" und"Intuition" vollständig getrennt. Nach dieser Vorstellung wird neues Wissen intuitiv gewonnen und anschließend mit Hilfe der Regeln der Logik kodifiziert und abgesichert.

Während der Prozeß der Gewinnung neuen Wissens kein Fünkchen Logik enthalten soll, hat nach dieser Vorstellung die Sicherung und Begründung des Wissens nichts mehr mit Intuition zu tun. Der Prozeß der Wissensgewinnung ist danach im wesentlichen irrationaler Natur oder bestenfalls als psychologisches Phänomen erklärbar, während umgekehrt der mathematische Beweis lediglich als tautologische Zeichenkette aufgefaßt wird. Es wäre sicher keiner großen Anstrengungen wert, wenn diese Trennung von Logik und Intuition nur ein Problem der philosophischen Reflexion wäre. Tatsächlich aber beeinflußt diese Trennung in ganz erheblichem Maße die pädagogisch-didaktischen Vorstellungen und Konzeptionen, die gegenwärtig entwickelt werden, und bestimmt nachhaltig die Forschungs- und Entwicklungsprioritäten, die in diesem Bereich gesetzt werden. Es ist nun interessant zu sehen, daß auch in der Wissenschaftstheorie selber gegenwärtig der Widerspruch von Wissensbegründung und seiner Entwicklung als zentral für das Verständnis wissenschaftlicher Arbeit betrachtet wird. So führt z.B. J. Mittelstraß die gegenwärtige "Konjunktur" der Wissenschaftsgeschichte darauf zurück, daß im Rahmen einer allgemeinen wissenschaftstheoretischen Architektonik von Theoriengenese und Theorienbewährung wissenschaftshistorische Reflexionen gewisse *Begründungsfunktionen* übernehmen sollen. "Das muß im ersten Augenblick überraschend klingen, sofern mit dem Begriff der Begründung in der Regel eine *methodisch*, nicht *historisch* ins Werk gesetzte Sicherung von Aussagen oder Theorieteilen gemeint ist. Und doch ist dies die 'offizielle' Auskunft einflußreicher wissenschaftstheoretischer Richtungen: An die Stelle methodisch orientierter Begründungsbemühungen gegenüber den Grundlagenproblemen der Wissenschaften tritt ein Rekurs auf *faktische Entwicklungen*. D.h.: Überall dort, wo man in klassischen Erkenntnis- oder Wissenschaftstheorien, rationalistischer oder empiristischer Provenienz, auf ein wahres Wissen zurückzugreifen suchte, das der Behauptung nach einen sicheren 'Anfang' der Wissenschaften zuließ, wird jetzt ein solcher Rückgriff als methodisch unzulässig angesehen und statt dessen auf den faktischen Gang der Theorienbildung verwiesen. Damit steht hinter der Konjunktur des wissenschaftshistorischen Interesses im Rahmen wissenschaftstheoretischer Fragestellung eine *Krise des Begründungsbegriffs*. Die Philosophie ist gegenüber den Wissenschaften gerade dort ins Stolpern geraten, wo sie bislang mit beiden Beinen fest auf dem Boden positiven Wissens und fundamentalen Könnens zu stehen glaubte: eben in Begründungsfragen." (Mittelstraß 1977, S. 44)

Es wurde bereits darauf hingewiesen, daß eine Stellungnahme zum Begründungsproblem immer auch eine Stellungnahme zur "Ontologie" der Gegenstände wissenschaftlicher Arbeit impliziert. Nun ist andererseits das Problem des Gegenstandsbezugs, oder präziser gesagt das Verhältnis von Theorie und Empirie in der Wissenschaft, nicht nur historisch veränderlich (wie im I. Kapitel angedeutet), sondern verändert sich auch längs der "sozialen Dimension". (vgl. Otte 1977, S. 31ff) Die jeweilige Unterscheidung von theoretischer und empirischer Ebene ist nicht nur Produkt des historischen Entwicklungsstandes der Wissenschaft, sondern hängt auch vom Niveau der Arbeitsteilung und der sozialen Organisation der Wissenschaft ab. Die Durchsetzung der Auffassung, daß als Beweisgründe im mathematischen Beweisen nur "Aussagen" und keine "Tatsachen" dienen dürften, ist Ausdruck eines solchen Prozesses der Spezialisierung und arbeitsteiligen Absonderung der Mathematik von den anderen Wissenschaften; andererseits mußte dieses Prinzip in konkreten Fällen immer wieder in langwierigen Auseinandersetzungen verwirklicht werden. Ein Beispiel dafür aus dem 19. Jahrhundert ist die Diskussion um das "Dirichletsche Prinzip", bei dem lange Zeit die physikalisch gesicherte Existenz einer Potentialfläche als mathematischer Beweisgrund akzeptiert wurde. Es ist sehr aufschlußreich, daß B. Riemann dieses Argument völlig akzeptierte, während Weierstraß das Dirichletsche Prinzip als nicht vollständig bewiesen betrachtete. Wie Felix Klein berichtet hat (vgl. Monna 1975, S. 34), zeigte sich Riemann durch die Weierstraßsche Kritik nicht sehr beeindruckt. Bezeichnenderweise bezog sich das Argument von Weierstraße auch nicht unmittelbar auf das vorliegende Problem, sondern er argumentierte im Zusammenhang mit seinen allgemeinen Bemühungen um eine exakte Grundlegung der Analysis, daß nicht jede nach unten beschränkte Funktion auch notwendig ihr Minimum annahmen müsse. Das Beispiel zeigt, daß man nicht etwa ernsthaft an der Gültigkeit des Dirichletschen Prinzips gezweifelt hatte, sondern daß unter dem Gesichtspunkt eines einheitlichen Niveaus mathematischer Strenge, das vor allem von Problemen der mathematischen Lehre bestimmt wurde, das Dirichletsche Prinzip als nicht vollständig bewiesen gelten konnte. Begründungsprobleme sind also außerordentlich komplex und werden von vielfältigen Faktoren historischer und sozialer Art beeinflußt.

Die eigentliche Schwierigkeit, in die sich eine Konzeption des Begründens begibt, die einer vollständigen Trennung von Logik und Empirie bzw. von Logik und Intuition das Wort redet, wird nun präzise durch das sogenannte "*Paradoxon des Beweises*" bezeichnet. Dieses Paradoxon besagt, daß eigentlich nicht verstanden werden kann, wie neues Wissen in der Mathematik überhaupt entsteht, wenn der mathematische Beweis als Rückführung des neuen Wissens auf das alte Wissen mit Hilfe einer Kette logischtautologischer Umformungen verstanden wird. Wenn man die Auffassung des Beweises als einer rein logischen Deduktion nur als eine mehr oder weniger vage Beschreibung der Tätigkeit des Beweisens auffaßt, dann kann man sich natürlich auf den Standpunkt stellen, daß es sich bei dem angesprochenen Paradoxon des Beweises um einen bloßen Sophismus handelt. Nimmt man die genannte Kennzeichnung des Beweises allerdings in einem strikten Sinne ernst, dann muß man sich der mit dem genannten Paradoxon aufgeworfenen Problematik stellen. Es ist nun merkwürdig, daß das Paradoxon des Beweises auch dazu führt, daß nicht einmal mehr die Mitteilungsfunktion von Beweisen verstanden werden kann, obwohl doch, wie gezeigt, die Konzeption der Trennung von Logik und Empirie bzw. der Gegensatz von Wissensbegründung und Wissensentwicklung gerade eine Folge der erhöhten Bedeutung des

Begründungsproblems im 19. Jahrhundert war. Gerade aus der kommunikativen Funktion des Wissens war doch die Notwendigkeit zur Fixierung des Wissens abgeleitet worden. Andererseits aber führt diese Fixierung dazu, daß der Prozeß der Kommunikation selbst nicht mehr begriffen werden kann. "Einerseits kann der Beweis nur etwas beweisen (bzw. mitteilen), insofern das Wissen eine feste tautologische Struktur besitzt und der Beweis letztlich aus dem Aneinanderreihen unmittelbarer Identitäten besteht. Dabei reduziert der Beweis das mitzuteilende Wissen auf das beim Empfänger (Lernenden) bereits vorhandene Wissen, und es ist nicht ersichtlich, wie bei diesem Prozeß neues Wissen beim Lernenden entstehen kann." (Otte/Bromme 1978, S. 20/21)

Das "Paradoxon des Beweises" findet nun seine Analogie und Entsprechung im Rahmen von Konzeptionen, die sich mit dem Problem der Begründung empirischer Wissenschaften beschäftigen. Ansätze zur Begründung empirischer Wissenschaften, in denen man versucht, diese Wissenschaften vollständig auf empirisches Wissen zurückzuführen, führen meist dazu, daß man plötzlich nicht mehr versteht, welche Funktion eigentlich allgemeine Begriffe bzw. theoretische Begriffe in der Wissenschaft haben, da diese als vollständig rückführbar auf empirisches Wissen aufgefaßt werden. Damit wird aber der Sinn der Wissenschaften selbst in Frage gestellt, weil nicht mehr einzusehen ist, warum man sich in der Wissenschaft nicht einfach auf das Sammeln empirisch richtiger Aussagen beschränkt. Diese Schwierigkeit findet nun ihren präzisierten Ausdruck in dem sogenannten *"Dilemma des Theoretikers"*. Dieses Dilemma fragt also nach der Funktion, die theoretische Begriffe überhaupt haben hönnen, wenn Wissen im Prinzip vollständig in empirische Aussagen auflösbar sein sollen. Toumela gibt dieses Dilemma in seinem Buch "Theoretical concepts" so wieder:

(1) Theoretische Terme erfüllen entweder ihren Zweck, oder sie erfüllen ihn nicht.

(2) Wenn sie ihren Zweck nicht erfüllen, dann sind sie verzichtbar.

(3) Wenn sie ihren Zweck erfüllen, dann stellen sie Beziehungen zwischen beobachtbaren Phänomenen her.

(4) Wenn sie solche Beziehungen herstellen, dann können diese selben Beziehungen auch ohne theoretische Terme dargestellt werden.

(5) Wenn diese Beziehungen auf diese Weise dargestellt sind, dann sind theoretische Terme überflüssig.

Also:

(6) Theoretische Terme sind verzichtbar."Toumela 1973, S.3)

Die Strukturgleichheit der beiden angeführten Paradoxien liegt darin, daß sie zum einen beide die Trennung von Theorie und Empirie, von Logik und Intuition verabsolutieren, zum anderen wird in beiden Paradoxien das Verhältnis von neuem Wissen zu altem Wissen als problematisch angesehen. Beim "Dilemma des Theoretikers"ergibt sich diese Problematik daraus, daß theoretische Begriffe ihre Funktion eigentlich in ihrer prognostischen und orientierenden Leistung haben, daß diese aber durch das empiristische Verständnis gerade wegerklärt wird. Beide Paradoxien bringen also die Schwierigkeit zum Ausdruck, wie das Problem der Theorieentwicklung angemessen verstanden werden kann.

Es ist nun der grundlegende Ansatz dieser Arbeit, die genannten Probleme gleichsam parallel und aufeinander bezogen zu verfolgen; es sind dies die folgenden Probleme: erstens das *Problem der Theorieentwicklung*; zweitens das *Verhältnis von Theorie und Empirie*; drittens das *Problem der Kommunikation*. Diese Probleme lassen sich auch durch die Gegensatzpaare: "altes Wissen - neues Wissen", "theoretisch - empirisch", "erklärend - beschreibend" bezeichnen. Dabei stellt sich heraus, daß das Problem der Theorieentwicklung den beiden anderen Problemen übergeordnet ist, oder anders ausgedrückt: Es wird im folgenden gezeigt werden, daß weder das Kommunikationsproblem noch das Problem des Verhältnisses von Theorie und Empirie gelöst werden können, wenn nicht eine angemessene Konzeption der Theorieentwicklung vorausgesetzt werden kann.

Es ist natürlich klar, daß hier nur die mehr abstrakten Strukturmerkmale der drei genannten Problemkomplexe zur Debatte stehen können. Die reale Bedeutsamkeit etwa des Theorie-Empirie-Problems oder des Kommunikationsproblems ist für die einzelnen Wissenschaften und historisch gesehen höchst unterschiedlich; so hat z.B. das Kommunikationsproblem für eine Wissenschaft, die zum Gegenstand der Lehre im öffentlichen Bildungssystem geworden ist, einen ganz anderen Stellenwert als für eine Wissenschaft, die kein Bildungsgegenstand ist. Andererseits ist etwa die Behandlung des Theorie-Empirie-Problems in sehr komplizierter Weise mit dem Praxisbezug der jeweiligen Wissenschaft verknüpft.
Um nun dem Problem der Herausarbeitung von Strukturmerkmalen des Wissens näherzukommen, die es gestatten, den Zusammenhang der drei genannten Problemkomplexe besser verstehen zu können, wird im vorliegenden II. Kapitel in einem ersten Schritt eine Analyse der von J.D. Sneed in seinem Buch "The Logical Structure of Mathematical Physics" entwickelten strukturellen Auffassung (natur-)wissenschaftlicher Theorien gegeben, und zwar auf die Frage nach der Rolle und Funktion theoretischer Terme in ihrer Beziehung zum Theorie-Empirie-Verhältnis und zur Theoriendynamik beschränkt. Es wird sich im weiteren zeigen, daß daraus auch für das Verständnis des Kommunikationsproblems gelernt werden kann. In einigen Punkten wird die Position von Sneed mit einer charakteristischen Gegenposition konfrontiert werden, nämlich mit der von H.A. Simon im 6. Kapitel seines Buches "Models of Discovery" zusammengefaßten.

Meiner Meinung nach ist es möglich, aus der Diskussion der Sneedschen Konzeption, die zunächst von Sneed nur für Theorien der mathematischen Physik entwickelt wurde, wichtige Schlußfolgerungen für die Mathematik zu ziehen. Allerdings steht diese Auffassung im Gegensatz zu der von W. Stegmüller, der in seinen "Theorienstrukturen und Theoriendynamik" sagt: "Der rational rekonstruierbare dynamische Aspekt der empirischen Wissenschaft hat überhaupt keine Ähnlichkeit mit dem rational rekonstruierbaren dynamischen Aspekt mathematischer Disziplinen." (Stegmüller 1973, S. 265/66) Der Position von Stegmüller entspricht übrigens genau die Auffassung, die z.B. von S.B. Rosenthal geäußert wird (Rosenthal 1968, S. 3), daß die Problematik der Rolle und Funktion theoretischer Terme in empirischen Theorien nicht auf der Ebene der formalen Logik diskutiert werden könne, da in der formalen Logik Bedeutungen auf die syntaktische Ebene reduziert würden. Nach der Meinung von Rosenthal ist die Behandlung der Problematik theoretischer Terme daher vollständig Sache der Erkenntnistheorie. Beide Positionen unterstellen, allerdings unter gegensätzlichen Zielsetzungen, eine absolute Trennung formaler Theorien von empirischen bzw. gegenständlich-inhaltlichen Bezügen. Demgegenüber wird hier davon ausgegangen, daß eine zu strikte Trennung in der Auffassung empirischer Theorien und der Mathematik den Blick auf wesentliche Probleme (vor allem auf seiten der Mathematik) verstellt. Die Voraussetzung, die hier gemacht wird, sei mit den Worten von Quine formuliert: "Der Unterschied zwischen der Wahrheit in der Mathematik und der Wahrheit in der Naturwissenschaft ist vielleicht weniger schroff, als wir annahmen." (Quine 1964, S. 199)

Die Gegenständlichkeit der Inhalte mathematischer Theorien wird also im folgenden im gewissen Sinne unterstellt und vorausgesetzt. Andererseits wird durch Anwendung von Schlußfolgerungen aus der Sneedschen Konzeption auf die Mathematik gezeigt, daß eine ganze Reihe von Grundlagenproblemen der Mathematik unter Einbeziehung des Gegenstandsbezugs besser verstanden werden kann. Um nun die Sneedsche Konzeption im Hinblick auf die Problematik theoretischer Terme in empirischen Theorien in ihrer Spezifik besser beurteilen zu können, ist es nützlich, sich den Kern der Problemstellung näher zu vergegenwärtigen. Das klassische Verständnis axiomatisierter empirischer Theorien besagt im Prinzip, daß jede Axiomatisierung einer empirischen Theorie über die Anforderungen der Widerspruchsfreiheit, Vollständigkeit und Unabhängigkeit hinaus noch die folgenden Bedingungen erfüllen müsse: Das ganze Axiomensystem müsse sich einteilen lassen in ein Teilsystem, das äquivalent ist zu einem Axiomensystem für einen Teil der Logik und der Mathematik und in ein Restsystem. Im Restsystem müßten die Axiome Beobachtungssätzen und primitive Terme beobachtbaren Größen korrespondieren. Nach dieser Vorstellung besteht also eine empirische Theorie aus "theoretischen Sätzen" und "Beobachtungssätzen", "theoretische Begriffe" wie "Atome" oder "Elektron" oder "elektrisches Feld" etc. müssen sich durch Regeln und Definitionen, die genau die Bedingungen ihter Beobachtung bzw. Messung spezifizieren, auf Beobachtungssätze zurückführen lassen.

Die in diesem Konzept implizierte Unterscheidung zwischen theoretischer und Beobachtungssprache führt nun bei Anwendung auf die reale wissenschaftliche Praxis zu erheblichen Schwierigkeiten. (vgl. Stegmüller 1973, S. 27ff) Zum einen sieht man, daß das, was von den Wissenschaftlern selbst für beobachtbar gehalten wird, sich historisch verändert. Zu jedem Zeitpunkt und für jede wissenschaftliche Theorie gibt es ein Teilsystem der Begrifflichkeit, mit der die Wissenschaftler arbeiten, das von ihnen für unproblematisch und im Prinzip für beobachtbar und meßbar gehalten wird, während ein anderer Teil der Begrifflichkeit sich gerade auf den problematischen und nichtbeobachtbaren Inhalt der betreffenden Theorie bezieht. In der wissenschafts theoretischen Diskussion sind daher Vorschläge gemacht worden, die Unterscheidung zwischen theoretischer Sprache und

Beobachtungssprache *historisch* aufzufassen, und das Konzept einer Beobachtungssprache durch einen "historisch-pragmatisch relativierten Begriff des vorgängig verfügbaren Vokabulars" (Stegmüller 1973, S. 29) zu ersetzen. Andererseits ist insbesondere durch die Arbeiten von Kuhn und Popper die in der sozialwissenschaftlichen Methodendiskussion schon lange reflektierte *"Theorienbeladenheit aller Beobachtungsaussagen"* auch für die Naturwissenschaften stärker ins Blickfeld gerückt.

Das Phänomen der Theorienbeladenheit aller Beobachtungsaussagen kann man sich leicht vergegenwärtigen, wenn man sich in einem beliebigen Lehrbuch der Physik z.B. die Definition des Temperaturbegriffs ansieht. So setzt etwa die für das Gas-Thermometer wichtige Grundgleichung

$$pV = rT$$

(p = Druck, V = Volumen, r - Proportionalitätsfaktor, T = Temperatur) den Begriff des "idealen Gases" voraus. Umgekehrt ist das ideale Gas gerade dadurch definiert, daß es die angegebene Gleichung (jedenfalls für ein bestimmtes Temperaturintervall) exakt erfüllt. Auch der Versuch, den Temperaturbegriff durch die Eigenschaft der Ausdehnung fester Stäbe bei Temperaturerhöhung zu definieren, würde zunächst einmal umgekehrt die Gültigkeit eines bestimmten gesetzmäßigen Zusammenhangs zwischen der Länge eines festen Stabes und der Temperatur voraussetzen. Darüber hinaus kann natürlich auch kein Konzept der Längenmessung entwickelt werden, wenn nicht zuvor bereits geklärt ist, in welcher Weise die Länge eines Maßstabes in Abhängigkeit von der Temperatur variiert. Es ist ersichtlich, daß die Begriffe der Länge und der Temperatur in hohem Grade theorienabhängig definiert werden, und insbesondere nicht als präzise, operational definiert verstanden werden können, bevor ein "Naturgesetz " mit ihrer Hilfe durch Messung festgestellt wird. Bei Gillies (1973) wird das Beispiel der gegenseitigen Definition von Temperatur und Länge detaillierter behandelt. Er resümiert sein Vorgehen mit den folgenden Sätzen, in denen er sich mit operationalistischen Vorstellungen der Begriffsdefinition auseinandersetzt: " My main disagreement here is that we regard concepts as acquiring meaning not through operational definitions, but through their position in a nexus of theories. An account of the logical relations of these theories and of the way we handle them in practice would give us the significance of the concept. Thus a concept can indeed be extended, not by acquiring new operational definitions, but rather by becoming involved in a series of new and more general theories. If we accepted the operationalist view, we could not suddenly postulate a new theory with new concepts. The new concepts would only have meaning after they had been operationally defined. An operationalist must therefore check the laws in which his definitions are to be based before introducing the concept." (Gillies 1973, S. 64)

Sehr eindrucksvoll hat auch Churchman (vgl. Churchman 1973) durch Beispiele aus dem Bereich von "Operations research" die Abhängigkeit der "Fakten" vom zu analysierenden Gesamtsystem gezeigt. Dem entspricht es, daß sich im Bereich der formalen Logik "holistische" Positionen entwickelt haben, die davon ausgehen, daß nicht mehr einem einzelnen Term, sondern nur noch einem ganzen System Bedeutung zukommt. "The idea of defining a symbol in use was, as remarked, an advance over the impossible term-by-term empiricism of Locke and Hume. The statement, rather than the term, came with Bentham to be recognized as the unit accountable to an empiricist critique. But what I am now urging is that even in taking the statement as unit we have drawn our grid too finely. The unit of empirical significance is the whole science." (Quine 1953, S. 42)

"Operationalistische" bzw. "empiristische"Auffassungen haben also große Schwierigkeiten, das Problem der Bedeutung theoretischer Terme in wissenschaftliche Theorien zufriedenstellend zu klären. So sind z.B. in den vorliegenden Axiomatisierungen der Newtonschen Mechanik die Begriffe der "Masse" und der "Kraft" primitive Terme, d.h. sie sind nicht definierbar (im Tarskischen Sinne) in Abhängigkeit von der (beobachtbaren) Ortsfunktion. Dennoch spielen theoretische Terme, wie z.B. der Massen- bzw, Kraftbegriff, eine große Rolle in wissenschaftlichen Theorien. Angesichts dieser Situation sind verschiedene Vorschläge zur Klärung gemacht worden. Einer der wichtigsten dieser Vorschläge stammt von F.P. Ramsey (1929, abgedruckt in Ramsey 1965), der den Begriff der "Eliminierbarkeit" anstelle des Begriffs der "Definierbarkeit" theoretischer Terme vorgeschlagen hat. Grob gesprochen, soll ein theoretischer Term dann eliminierbar sein, wenn alle empirischen Konsequenzen einer Theorie, die dieser Term beinhaltet, auch formulierbar sind, ohne diesen Term zu benutzen, Das Ramseysche Verfahren besteht darin, an die Stelle auftretender theoretischer Konstanten Variable zu setzen und diese Variable anschließend durch einen Existenzquantor zu binden. (vgl. auch Stegmüller 1970) Die Terme werden bei Ramsey also dadurch eliminiert, indem sie in Variable verwandelt werden. Damit habe sich Ramsey, wie Stegmüller meint, von der Notwendigkeit befreit, Fragen wie "Was ist die genaue Bedeutung des Ausdrucks 'Positron'?" etc. zu beantworten, da diese Frage jetzt überhaupt nicht mehr gestellt werden könne. Im Ramsey-Satz einer Theorie komme der Term 'Positron' nicht mehr vor. Ramsey nutzt also die spezifische, im Variablen-Konzept allgemein enthaltene Methode der neuzeitlichen Wissenschaft, mit dem Problem der Ontologie umzugehen. Dies wird im weiteren Verlauf der Arbeit noch näher präzisiert werden.

Im Anschluß an Ramsey hat Braithwaite den Gedanken entwickelt, theoretische Terme als nur partiell mit (empirischer) Bedeutung belegt aufzufassen. Er betrachtet diese Vorstellung als notwendige Konsequenz der Tatsache, daß die Wissenschft sich entwickelt. "With this extension of the meaning of definition the thesis of this chapter can be expressed by saying that, while the theoretical terms of a scientific theory are *implicitly defined* by their occurrence in initial formulae in a calculus in which there are derived formulae interpreted as empirical generalization, the theoretical terms cannot be explicitly defined by means of the interpretations of the terms in these derived formulae without the theory thereby becoming incapable of growth." (Braithwaite 1965, S. 77)

Wenn man diese, hier nur äußerst kursorisch wiedergegebene Diskussion, zusammenfaßt, dann läßt sich sagen, daß das eigentliche Problem darin besteht, zu verstehen, wie die theoretischen Terme einerseits und die gesamte Theorie andererseits sich gegenseitig bestimmen und definieren. Eine geeignete Konzeptualisierung dessen, was eine wissenschaftliche Theorie ist, muß also erstens dem Systemcharakter des Wissens Rechnung tragen: Nur die wissenschaftliche Theorie als *ganze* hat (empirische) Bedeutung ("Holismus"). Zum zweiten sollte die Unterscheidung von "theoretischen" und "beobachtbaren" Termen der Einsicht Rechnung tragen, daß bestimmte Terme "theoretisch" nur relativ zu einer bestimmten vorgegebenen Theorie T_1 sind, während sie relativ zu einer anderen Theorie T_2 nicht theoretisch zu sein brauchen. Dies scheint eine angemessene Verschärfung des oben formulierten Vorschlags zu sein, die Unterscheidung von Beobachtungssprache und theoretischer Sprache historisch zu relativieren. Die Relativierung geschieht nach diesem Vorschlag eben nicht nur im Hinblick auf den historischen Zeitpunkt, sondern auch im Hinblick auf die konkrete vorgelegte Theorie. Dieser Vorschlag wurde zum ersten Mal von Putnam (Putnam 1962) gemacht.

Die im folgenden dazustellende Konzeption von Sneed versucht nun genau, diesen Anforderungen gerecht zu werden. Auf den ersten Blick sieht das gestellte Problem unlösbar aus, da die Anforderung, daß die theoretischen Terme und die Theorie sich gegenseitig bestimmen sollen, auf einen schlechten Zirkel hinauszulaufen scheint. Sneed schlägt eine Lösung vor, die diesen Zirkel vermeidet, was ihm gerade dadurch gelingt, daß er die Theorie als sich entwickelnde auffaßt, also mit der Idee der Theoriendynamik ernst macht.

II. 2. *Die Grundzüge des Theorienkonzepts von Sneed*

Im folgenden wird die Sneedsche Konzeption einer Theorie der mathematischen Physik dargestellt, so wie sie in den

Kapiteln II. bis V. seines Buches "The Logical Structure of Mathematical Physics" entwickelt ist. Da in der vorliegenden Arbeit der Zusammenhang zwischen Wissensbegründung und Theoriendynamik interessiert, wird sich die Darstellung vor allem darauf konzentrieren, wie Sneed die Problematik der Bedeutung und Funktion theoretischer Terme behandelt. Meine Wiedergabe beschränkt sich auf die Einführung der grundlegenden Definitionen und ihre Erläuterung. Zugrundegelegt werden neben den Büchern von Sneed (1971) und Stegmüller (1973) die Rezensionen von Diederich (1975), Moulines (1975) und die Zusammenfassung in Diederich/Fulda (1977).Es wird sich zeigen, daß die Sneedsche Darstellung in hohem Grade "genetisch" ist. Sein durchgängig leitender Gesichtspunkt ist die Frage, was es bedeutet, daß eine Theorie eine empirische Aussage macht. Diese Fragestellung impliziert, daß Theorien nicht mit den empirischen Aussagen identifiziert werden, die mit ihrer Hilfe getroffen werden können, sondern daß umgekehrt zwischen einer Theorie und ihrem empirischen Gehalt unterschieden wird.

Sneed geht davon aus, daß die zu analysierenden Theorien der mathematischen Physik in Form eines mengentheoretischen Prädikats axiomatisiert vorliegen. Sie sollen also beschrieben werden durch die Angabe einer Menge D von Individuen bzw. Objekten, auf die sich die Theorie bezieht, und durch eine Reihe von Funktionen oder Relationen, die auf D definiert sind. Ein Prädikat S hat dann die Gestalt eines (n+1)-tupels $\langle D, f_1. \ldots, f_n \rangle$, wobei die f_i entweder mehrstellige Relationen oder Funktionen von D nach $\mathbb{R}$ sind. Im folgenden werden nur Funktionen von D nach $\mathbb{R}$ vorkommen. Der empirische Gehalt einer Theorie wird dann durch ein Prädikat von der Form

(1) Q ist ein S

ausgesagt werden, wobei Q irgendeine physikalische "Entität" (das Sonnensystem z.B.) ist, von der behauptet wird, daß sie die durch S gegebene formale Struktur besitzt (also z.B.

den Gesetzen der Himmelsmechanik genügt).

Als Beispiel sei die folgende Definition angegeben. Sie liefert ein ganz einfaches Beispiel einer physikalischen "Theorie", mit dessen Hilfe sich viele der folgenden Entwicklungen vereinfacht darstellen lassen. (vgl. *Sneed 1971, S. 11)*

(D1) x ist ein S genau dann, wenn D, t und n existieren, so daß gilt:

(1) $x = \langle D, t, n \rangle$;

(2) D ist eine endliche, nicht-leere Menge;

(3) n und t sind Funktionen von D in die reellen Zahlen

(4) $t(y) > 0$ für alle $y \in D$

(5) $\sum_{y \in D} n(y)t(y)=0$

Diese Definition kann interpretiert werden als Beschreibung der Gleichgewichtsstellung einer Balkenwaage: D ist die Menge der an der Waage aufgehängten Körper, n gibt jeweils den Abstand des Aufhängungspunktes vom Drehpunkt an und t das Gewicht des jeweiligen Körpers. (5) sagt aus, daß die Summe aller Drehmomente 0 ist, die Balkenwaage also im Gleichgewicht ist. (Die Buchstaben n und t als Bezeichnungen der Abstands- und der Gewichtsfunktion wurden im Hinblick auf die spätere Unterscheidung von nicht-theoretischen und theoretischen Funktionen gewählt.)

Grundlegend für alles folgende ist die definitorische Unterscheidung, die Sneed zwischen *theoretischen* und *nicht-theoretischen* Termen trifft, Damit wird die oben formulierte Anforderung realisiert, daß die Theoretizität eines Terms relativ zu der infragestehenden Theorie T bestimmt werden muß. Da es bei der Frage nach der Bedeutung theoretischer bzw. nicht-theoretischer Terme vor allem um den empirischen Gehalt geht, der mit diesen Termen ausgedrückt werden soll, wird das unterscheidende Kriterium auf verschiedenste Art und Weise der Messung theoretischer und nicht-theoretischer Funktionen zurückgespielt. (Die Tatsache, daß hier die Untersuchung von Begriffen auf die Untersuchung von Funktionen zurückgeführt wird, bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit. Die Möglichkeit, Begriffe als Funktionen aufzufassen, wurde bereits von Frege in "Funktion und Begriff" (1891) (vgl. Frege 1975) diskutiert.) In den folgenden Definitionen bezeichnet T die infragestehenden Theorie, Q_i eine beliebige "Anwendung" oder ein "Modell" der Theorie

T, n_i bzw. t_i bezeichnen die konkreten, in Q_i vorkommenden nicht-theoretischen bzw. theoretischen Funktionen, die den abstrakten Funktionen n bzw. t entsprechen, die in der Theorie T vorkommen. Es wird dann definiert (vgl. Sneed 1971, S.31):

(D2) Die Funktion n_i wird in einer *T-abhängigen Weise gemessen* genau dann, wenn es ein Individuum $x \in D_i$ (der Menge der Induviduen in der i-ten Anwendung Q_i) gibt, so daß die existierende Darstellung der Anwendung Q_i der Theorie T keine Beschreibung einer Methode zur Messung von $n_i(x)$ enthält, die nicht voraussetzt, daß eine gewisse Anwendung von T erfolgreich ist; n_i wird in *einer T-unabhängigen* Weise gemessen genau dann, wenn es nicht in einer T-abhängigen Weise gemessen wird.

(D3) Die Funktion n ist *theoretisch in Bezug auf T (T-theoretisch)* genau dann, wenn es keine Anwendung Q_i von T gibt, in der n_i T-unabhängig gemessen wird. n ist *nicht-theoretisch in Bezug auf T (T-nicht-theoretisch)* genau dann, wenn es mindestens eine Anwendung Q_i gibt, in der n_i in T-unabhängiger Weise gemessen wird.

Ein Term t ist also dann T-theoretisch, wenn jedes Verfahren zu seiner Messung auf der Voraussetzung beruht, daß die Theorie T erfolgreich angewendet werden kann. Im Hinblick auf die drei Grundfunktionen Kraft (K), Masse (m) und Ortsfunktion (s) ergibt sich nach Sneed, daß K und m theoretisch relativ zur Newtonschen Mechanik sind, während die Ortsfunktion nicht-theoretisch ist. Die Eigenschaft eines Terms, theoretisch zu sein, ist sowohl historisch relativ als auch relativ zur existierenden Unterscheidung und Einteilung der Einzeldisziplinen. Im Hinblick auf die Newtonsche Mechanik kann man sagen, daß historisch gesehen zur Zeit Newtons es unproblematisch war, die Längenfunktion zu messen. Das konnte man auch unabhängig von der Newtonschen Mechanik. Hingegen wurden die Verfahren zur Messung der Massen- und Kraftfunktion erst durch die Newtonsche Mechanik festgestellt. (Dem widerspricht auch nicht, daß man vor Newton natürlich Körper wiegen konnte. Der Begriff der Masse, der ganz wesentlich auf der Identifizierung von träger und schwerer Masse beruht, wird erst durch die Newtonsche Theorie etabliert.)

Betrachtet man die Theoretizität bzw. Nicht-Theoretizität eines Terms relativ zur existierenden Unterscheidung der Einzeldisziplinen der Physik, dann kann man etwa sagen, daß die Ortsfunktion s relativ zur Newtonschen Mechanik nicht-theoretisch ist, da es auch optische Verfahren der Längenmessung gibt, während es kein Verfahren zur Messung von M und K gibt, das nicht in irgendeiner Form die Gültigkeit der Newtonschen Mechanik voraussetzt. Aus der Relativität des Kriteriums folgt, daß eine T_1-nicht-theoretische Funktion T_2-theoretisch sein kann und umgekehrt.

Aus der Definition für die Theoretizität einer Funktion t ergibt sich unmittelbar das *"Problem der theoretischen Terme"* (vgl. Sneed 1971, S. 36ff), Stegmüller 1973, S. 63ff). Dieses Problem ist eine Präzisierung der Zirkularität, die oben bereits als zentrale Schwierigkeit erwähnt worden ist.

Wenn die Messung einer T-theoretischen Funktion t in einer Anwendung Q_i die erfolgreiche Anwendung von T bereits voraussetzt, dann muß man, um die Wahrheit einer Aussage der Gestalt "Q_i ist ein S" zu testen, unterstellen, daß eine Aussage der Form "Q_k ist ein S" bereits wahr ist. Wenn es nur endlich viele Anwendungen der Theorie T gibt, führt das zu einem schlechten Zirkel; wenn es unendlich viele Anwendungen gibt, erhält man einen unendlichen Regreß. Ein bekanntes Beispiel für das Problem der theoretischen Terme ist die Frage, ob die Newtonsche Grundgleichung

$$K = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

als Definition für die Funktionen m und K aufzufassen ist oder als ein Naturgesetz . Wenn es eine empirische Behauptung ist, dann müßte es Methoden zur Bestimmung von m und K geben, die von diesem Gesetz unabhängig sind. Das ist aber nicht der Fall. Andererseits scheint auch die Auffassung, daß es sich bei der Gleichung um eine Definition von m und K handelt, der wirklichen Bedeutung dieser Gleichung nicht gerecht zu werden. Man kann darüber hinaus sogar mit Hilfe der Methode von Padoa zeigen, daß diese Gleichung keine Definition für m und K darstellt. Weiter unten wird zu zeigen sein, wie Sneed diese Zirkularität auflöst.

Wenn in einer Theorie T-theoretische Terme auftreten, dann ist eine Aussage der Form "Q ist ein S" ungeeignet, um den empirischen Gehalt der Theorie wiederzugeben. Denn um eine solche Aussage machen zu können, müßte man Q unabhängig von der Theorie T (also auch unabhängig von ihrer mathematischen Struktur S) kennen. Um aber Q zu identifizieren, müssen zu den in $Q = \langle D, n, T \rangle$ vorhandenen Objekten $x \in D$ die zugehörigen Funktionswerte bestimmt werden. Für die Werte der nicht-theoretischen Funktion n ist das per definitionem kein Problem, da davon ausgegangen wird, daß die n-Werte unmittelbar (d.h. mit Mitteln, die die Theorie T nicht voraussetzen) bestimmt werden können. Für die T-theoretische Funktion t aber hängt die Messung von der Anwendbarkeit von T ab. Dieser Unterschiedlichkeit der Bestimmungsweisen von n- und t-Funktionen muß in der Form der Aussage, die den empirischen Gehalt der Theorie wiedergibt, Rechnung getragen werden. Sneed greift dazu, in einer von ihm entwickelten Präzisierung, auf die von F.P. Ramsey gegebene Methode zur Elimination theoretischer Terme zurück und modifiziert sie. Das Verfahren von Sneed besteht im wesentlichen darin, daß man alle Modelle für dasjenige theoretische Prädikat betrachtet, das aus S durch Streichung aller theoretischen Funktionen und der mit Hilfe von theoretischen Funktionen formulierten Gesetze entsteht. Von jedem dieser sogenannten "partiellen potentiellen Modelle" kann man anschließend fragen, ob es eine T-theoretische t-Funktion gibt, so daß das um die theoretische Funktion t ergänzte partielle potentielle Modell ein Modell des vollen Prädikats S ist. Es handelt sich bei dem Versuch einer solchen Ergänzung also darum, zu prüfen, ob die Möglichkeit einer geeigneten *Konstruktion* von t besteht. Formeller definiert man für das Beispiel der in (D1) definierten Theorie (Sneed 1971, S. 41ff):

(D4) x ist ein M_{pp} (*partielles potentielles Modell*) genau dann, wenn es ein D und ein n gibt, so daß:

1. $x = \langle D, n \rangle$;
2. D ist eine endliche, nicht-leere Menge;
3. n ist eine Funktion von D in die reellen Zahlen.

(D5) Wenn D,n ein M_{pp} ist, dann *ist* x *ein* $E_{\langle D,\, n \rangle}$ ("x *ist eine Ergänzung von* $\langle D,n \rangle$ ", " $\langle D, n \rangle$ *wird zu* x *ergänzt*") genau dann, wenn es ein t gibt, so daß gilt:

1. n, t sind Funktionen von D in die reellen Zahlen;
2. $x = \langle D, n, t \rangle$;

Nach diesen Definitionen lautet dann die neue Form der empirischen Aussage einer Theorie T (wenn y ein partielles potentielles Modell von T ist):

$$(2) \quad \exists x \ (x \text{ ist ein } E_y \wedge x \text{ ist ein } S).$$

Wie gesagt, läuft die in (2) enthaltene Existenzaussage auf eine Konstruktionsaufgabe für eine Funktion t (bzw. im allgemeinen Fall für eine Menge von Funktionen) hinaus, wobei die einzige Konstruktionsanforderung ist, daß t mit den gemessenen n-Werten verträglich sein muß.

Eine Betrachtung des in (D1) gegebenen Theorienbeispiels zeigt nun, daß dieser Satztyp (2) in gewissem Sinne geeignet ist, um eine empirische Aussage zu treffen. Die Forderung, daß das partielle potentielle Modell theoretisch ergänzbar sein muß.reduziert sich *nämlich bei diesem Beispiel auf die Anforderung an die gemessenen* n-Werte, daß sie nicht alle dasselbe Vorzeichen haben dürfen. Wenn umgekehrt diese Bedingung erfüllt ist, dann läßt sich immer eine t-Funktion finden, die das partielle potentielle Modell zu einem Modell der vollen Theorie ergänzt.

(2) stellt also ein wirkliches empirisches Kriterium dar. Das Beispiel zeigt darüber hinaus, wie in einfachen Fällen Vorhersagen mit Hilfe der Theorie getroffen werden können: zum einen kann man, wenn man zu den Objekten der Theorie nur positive n-Werte gemessen hat, schließen, daß offenbar noch ein weiteres Objekt der Theorie (mit einem negativen n-Wert) vorhanden sein muß.
Ein historisches Beispiel für diesen Typ der Prognose ist die Vorhersage der Existenz von bisher unbekannten Planeten, die man aus Abweichungen der Datenkonfigurationen anderer Planeten von den "theoretisch richtigen" Werten erschlossen hat. Zum anderen lassen sich, wenn man n-Werte für eine bestimmte Teilmenge von Objekten gemessen hat, bestimmte Aussagen über die noch nicht gemessenen n-Werte machen.

Wenn es möglich ist, anstelle eines Satzes vom Typ (2) einen Satz vom Typ (2') zu formulieren:

(2') $(\exists x)$ (x ist ein E_Y $\wedge$ x ist ein S_O),

wobei S_O ein Prädikat ist, das allein mit Hilfe nicht-theoretischer Terme ausgedrückt ist und das gleichzeitig diesselbe Klasse von Modellen x wie das Prädikat S auswählt, dann heißt die theoretische Funktion t (oder im allgemeinen Fall die Menge der theoretischen Funktionen) *Ramsey-eliminierbar*. Ramsey-eliminierbar ist ein theoretischer Term dann, wenn alle empirischen Aussagen, die mit seiner Hilfe getroffen werden, auch gemacht werden können unter ausschließlichem Rückgriff auf nicht-theoretische Terme.

In dem angegebenen Theorienbeispiel ist t offenbar Ramsey-eliminierbar.

Es wird zwischen Ramsey-Eliminierbarkeit im *schwachen und im starken Sinne* unterschieden, und diese Unterscheidung wird für die vorliegenden Zwecke besonders wichtig werden. Wenn sich ein theoretischer Term t aus mindestens einer, aber nicht notwendig allen Anwendungen eliminieren läßt, dann heißt t *Ramsey-eliminierbar im schwachen Sinne;* wenn der theoretische Term t aus allen Anwendungen eliminiert werden kann, dann heißt er *Ramsey-eliminierbar im starken Sinne.*

Was ist mit der Ramsey-Darstellung im Hinblick auf das oben angegebene "Problem der theoretischen Terme" gewonnen?

Zunächst ist damit in der Tat eine Möglichkeit gegeben, sich die Funktionsweise von "uninterpretierten" Termen in einer Theorie vorzustellen, obwohl diese Terme nicht in Abhängigkeit von nicht-theoretischen Termen (d.h. den Observablen der Theorie) definiert werden können. Die Wirkungsweise dieser uninterpretierten Terme besteht darin, daß mit ihrer Hilfe aus der Menge der partiellen potentiellen Modelle M_{pp} diejenigen ausgewählt werden können, die den Gesetzen der Theorie genügen, d.h. zu denen sich in Übereinstimmung mit den Gesetzen der Theorie und den gemessenen n-Werten eine geeignete t-Funktion konstruieren läßt. Die theoretischen Terme definieren also den Anwendbarkeitsbereich der Theorie. Die Berechnung von Werten der theoretischen t-Funktionen muß natürlich nicht eindeutig möglich sein, im allgemeinen werden sich aus den empirischen Daten nur gewisse Restriktionen für die t-Funktionen ergeben.

Wenn Ramsey-Eliminierbarkeit vorliegt, dann figurieren die Terme nur aus Gründen der "Ökonomie" bzw. "Einfachheit" in der Theorie; sie lassen sich im Prinzip durch das nur mit nicht-theoretischen Termen gebildete Prädikat ersetzen. Die Theorie wird dadurch in gewissem Sinne trivial.
Auf der anderen Seite scheint mit der Ramsey-Darstellung im Hinblick auf das Verständnis der Funktion theoretischer Terme noch nicht viel gewonnen zu sein. Bis jetzt sieht es so aus, als ob die theoretischen Terme "nur" eine technische Funktion in der Darstellung empirischer Sachverhalte haben. Man kann nicht sehen, ob ihnen eine über die Beschreibung hinausgehende Funktion, z.B. zur Prognose von Sachverhalten, zukommt.

Dem widerspricht nicht die oben geschilderte Beschreibung einer Prognose in dem einfachen Theorienbeispiel, da die dort angegebene Prognosenmöglichkeit bereits die Anwendbarkeit der Theorie voraussetzt.

Da die nicht-theoretischen Terme sowieso nur zu deskriptiven Zwecken in der Theorie figurieren, kann nicht verstanden werden, wie eine Theorie etwas erklärt bzw. prognostiziert. Beim jetzigen Stand der Erörterung bleiben also Theorie und Empirie im Grunde ununterschieden, sie stellen keine eigenständigen Ebenen dar, deren Zusammenwirken erst das Leben der Theorie ausmachen würde. "However, the Ramsey solution fails to account for the fact that statements made with theoretical terms (values of theoretical functions) are relevant to prediction and hypothesis testing. It fails to account for the fact that we are frequently concerned with determining, by 'empirical' means, the truth-value of statements containing only theoretical terms, and that we employ such statements in non-trivial ways. We are not merely interested in whether it is possible to 'fill in' theoretical relations or functions behind the observed facts. The Ramsey solution offers us no account of why we should have this sort of interest in theoretical relations or functions, nor of the use we make of this information." (Sneed 1971, S.64).

Es bleibt also das Problem, zu verstehen, wie ein Term, der nicht auf andere Terme zurückführbar ist, gleichsam "Etwas über sich selbst aussagen" kann. Dazu müßte er, steng genommen, aussagen, was er ist und was er nicht ist: eine paradoxe Aufgabe, die in spezifischer Weise mit dem in Kapitel I angesprochenen Problem der "Grenze" zu tun hat! Um hier zu verstehen, daß es nicht um die Erörterung von Spitzfindigkeiten geht, sondern um ein sehr reales Problem, muß man sich klarmachen, daß die Schwierigkeit, die hier behandelt wird, *im Kern mit der Trennung von Zeichen und Bezeichnetem in der Wissenschaft der Neuzeit zu tun hat.* Dies wird deutlich, wenn man sich überlegt, was die Alternative zu Termen ist, die sich selbst definieren. Dies wären offenbar Terme, die durch andere Terme definiert sind.

Geht man diese Kette zurück, so ist klar, daß eine Menge von Ausgangstermen unterstellt werden muß, bei denen *Zeichen und Bezeichnetes* identisch sind. Diese Identität müßte sogar, unter den komplizierten kommunikativen Bedingungen der heutigen Wissenschaft, von höchster Stabilität und Invarianz sein; sie müßte darüber hinaus im Bewußtsein aller Gesellschaftsmitglieder verankert sein und dürfte nicht in Frage gestellt werden. Diese Konsequenz ist ja gerade die Ursache dafür gewesen, warum in der wissenschaftstheoretischen Diskussion die Konzeption einer festen, unveränderlichen Beobachtungssprache eingeführt wurde. Die Annahme einer Beobachtungssprache hatte nur den Zweck, eine aller Wissenschaft vorangehende Identität von Zeichen und Bezeichnetem zu behaupten. Man konnte nicht verstehen, wie auf andere Weise die Objektivität bzw. Intersubjektivität der Wissenschaften gesichert werden könnte. Nun war bereits dargelegt worden, daß die neuzeitliche Wissenschaft gerade die *Unterscheidung* von Zeichen und Bezeichnetem sowie den höchst flexiblen und variablen Bezug beider aufeinander zur Grundlage hat. Das Konzept einer vorgängigen Beobachtungssprache läßt sich nicht aufrechterhalten. Daraus aber ergibt sich, daß das Problem der theoretischen Terme, so wie es z.B. bei Sneed erörtert wird, ein Grundproblem jeder Wissenschaft darstellt und darüber hinaus für die Probleme der Semantik im allgemeinen von großer Bedeutung ist. Dies ist der Grund dafür, warum das Problem der theoretischen Terme nicht nur das Verhältnis von Theorie und Empirie betrifft (bei Sneed ist es ja zunächst nur als Problem der Messung von Funktionswerten definiert), sondern auch entscheidend mit dem Problem der (wissenschaftlichen) Kommunikation zusammenhängt.

Die Lösung, die Sneed für das Problem der Kennzeichnung der kognitiven Bedeutung theoretischer Terme gibt, ist einfach und wirkungsvoll. Sie besteht im ersten Schritt darin, mit dem Gedanken ernst zu machen, daß eine nichttriviale Theorie immer *mehrere verschiedene Anwendungen* hat. Bisher ist zwar auch in dieser Darstellung informell immer von mehreren Anwendungen einer Theorie gesprochen worden, etwas ganz anderes aber ist es, diesen Gedanken systematisch auszuwerten und auf seine Konsequenzen hin zu entwickeln. Sneed geht also von der Vorstellung ab, daß der Geltungsbereich einer physikalischen Theorie gleichsam die ganze Welt sei, oder daß anders gesagt, eine Theorie einen einzigen universellen Anwendungsbereich hat, und unterscheidet zwischen den verschiedenen Anwendungen einer Theorie. Er führt gleichsam "Grenzen" in den Anwendungsbereich ein.

Ich sehe in dieser Überlegung Sneeds eine Anwendung der Idee, das "Prinzip der minimalen Runde", das paradox und zirkelhaft ist, *durch ein "Prinzip der maximalen Runde" zu ersetzen.* Zur Erläuterung zitiere ich die Darstellung bei Churchman: "Das Problem der Logik ist ein sehr direktes: Wie kann eine Behauptung etwas über sich selbst aussagen?... Es entsteht, da eine Behauptung scheinbar sich selbst und doch ihr Gegenteil enthält. Sie muß daher falsch sein. Aber ihre Negation tut dasselbe: Sie enthält sich selbst und ihren Gegensatz. Die ursprüngliche Behauptung muß daher wahr sein. Ohne im Moment zu versuchen, präziser zu sein, wollen wir feststellen, daß das logische Paradox eine *minimale Runde* (*minimal loop*) ins Spiel bringt.

Mit dem gleichen Argument können wir dann sagen, daß ein erfolgreiches Resultat des Problems der Selbstreflexion im Finden einer minimalen Runde liegt, die von X nach X führt. Dies scheint der Geist gewesen zu sein, der die intellektuellen Bemühungen Descartes' und Spinozas im 17. Jahrhundert beseelt hat. ...

Das Urteil der Geschichte lautet, daß diese großen Geister des 17. Jahrhunderts fehlgegangen sind. Die philosophischen Skeptiker haben darauf hingewiesen, daß Descartes' Klasse unleugbarer Behauptungen leer ist und daß Spinozas Fähigkeit der Intuition - wenn es sie überhaupt gibt - nicht operativ ist.

Das Gegenteil der minimalen Runde ist die maximale Runde. Das Prinzip ist phantastisch. Es besagt, daß Selbstreflexion nur möglich ist, wenn man nach der längst möglichen Reise zu sich selbst zurückkehrt." (Churchman 1973, S. 131/132)

Für das "Prinzip der maximalen Runde" führt Churchman mehrere Beispiele an: "Das zweite Vorkommnis betrifft jenen Punkt in der Geschichte, an dem Euklid versuchte, ein sehr wichtiges Theorem seiner Elemente zu beweisen und, nicht imstande einen solchen Beweis zu finden, anstelle dessen einfach ein Postulat aufstellte. An jedem Punkt in der Zeit würde ein Minimalrunden-Logiker festgestellt haben, daß Euklids Parallelaxiom 'sich selbst einschließt'. Nachher kamen zwei Jahrtausende intellektuellen Bemühens, das Axiom zu beweisen.

Erst zur Zeit von Gauss, vor 1 1/2 Jahrhunderten, konnte man sagen, daß die Implikationen des Parallelenaxioms klarer wurden.Hieße es, der Sprache Gewalt anzutun, wenn wir sagen, daß wir erst dann wirklich in der Lage waren, festzustellen, daß die Menschen verstanden, was 'sich selbst einschließen' wirklich bedeutet - erst, als alle grundlegenden Implikationen und Implikatoren durch die historischen Bemühungen vor uns ausgebreitet waren? Von einer Behauptung kann nur dann gesagt werden, sie schließe sich selbst ein, wenn man alle fundamentalen Beziehungen des formalen Systems zeigen kann, die zum System und von ihm wegführen." (Churchman 1973, S.133)

Die Beschreibung des "Prinzips der maximalen Runde" bei Churchman bringt sehr deutlich den operativen Charakter der Erkenntnis und ihren Systemaspekt zum Ausdruck. Übertragen auf das Problem der theoretischen Terme bei Sneed heißt das, daß theoretische Terme durch Anwendung und durch Berücksichtigung des Gesamtzusammenhangs der Theorie Bedeutung erlangen.

Die Idee, die Sneed entwickelt, um mit der Tatsache, daß eine Theorie verschiedene Anwendungen hat, umzugehen, ist daß er den Begriff der Nebenbedingungen ("constraints") einführt, die den (theoretischen und nicht-theoretischen) Termen auferlegt werden. Die Einführung von "constraints" bringt zum Ausdruck, daß die verschiedenen Anwendungen einer Theorie nicht unabhängig voneinander erfolgen, daß also der empirische Gehalt einer Theorie nicht angemessen durch eine Klasse von Sätzen der Gestalt (2), die voneinander unabhängig sind, ausgedrückt werden kann. Der empirische Gehalt einer Theorie muß vielmehr in einer einzigen kohärenten Aussage zum Ausdruck gebracht werden. So muß z.B. im Falle der Mechanik von der Tatsache Gebrauch gemacht werden, daß Partikel, die in verschiedenen Anwendungen auftauchen, immer dieselbe Masse haben. Ebenso wird man von einer Kraftfunktion, die in mehreren Anwendungen auftritt, erwarten, daß sie, jedenfalls zu ein und demselben Zeitpunkt, in allen diesen Anwendungen identisch bleibt. Die "constraints" sorgen also dafür, daß Werte einer (theoretischen) Funktion, die in einer Anwendung bestimmt wurden, in andere Anwendungen der Theorie übertragen werden können und dort als Mittel der Prognose dienen. Formal wird definiert (vgl. Sneed 1971, S. 71/72)

(D6) Wenn $\bar{D} = \{ D_1, D_2, \ldots, D_i, \ldots \}$ eine geordnete Menge nicht-leerer Mengen ist,

$$D = \bigcup D_i \ , \ D_i \in \bar{D} \quad \text{und } \bar{t} = \{t_1, t_2, \ldots, t_i \ldots$$

eine geordnete Menge von Funktionen ist, so daß $t_i \in \bar{t}$ $D_i \in \bar{D}$ in die reellen Zahlen abbildet, dann heißt $\bar{t}$ *durch Nebenbedingungen* (R,r) *eingeschränkt* genau dann, wenn gilt:

(1) R ist eine n-stellige Relation auf D;

(2) r ist eine n-stellige Relation auf den reellen Zahlen;

(3) aus $R\,(x_1, x_2, \ldots x_n)$ $(x_j \in D_{i_j};\ D_{i_j} \in \bar{D}$

$1 \leq j \leq n)$ folgt $r\,(t_{i_1}(x_1),\ t_{i_2}(x_2), \ldots$

$\ldots\ t_{i_n}\ (x_n)\ )$

Damit wird gefordert, daß eine bestimmte Beziehung zwischen Objekten aus verschiedenen Anwendungen der Theorie eine entsprechende Beziehung zwischen den auf den Objekten definierten Funktionswerten zur Folge hat.
Außer den oben erwähnten Nebenbedingungen vom Typ $<=, =>$ (z.B. impliziert die Gleichheit der Partikel die Gleichheit der Massenfunktion auf den Partikeln) wird bei Sneed noch eine Nebenbedingung vom Typ $<\circ +>$ diskutiert: $t\ (x \circ y) = t\ (x) + t\ (y)$.

Diese Nebenbedingung drückt die Eigenschaft einer Funktion, ein *extensives Skalensystem* zu sein, aus. Die Massenfunktion m genügt dieser Nebenbedingung: die Kombination von Partikeln ($\circ$) impliziert, daß sich die Massen addieren. Identitätsbedingungen für verschiedene Kraftfunktionen drücken sich darin aus, daß diese Funktionen durch gewisse Konstanten charakterisiert sind: die Gravitationskonstante g, Elastizitätsmodule etc. werden bei Sneed als der Kraftfunktion auferlegte Nebenbedingungen vom Typ $<=, =>$ interpretiert.

Der mit Hilfe dieses Ausbaus der Ramsey-Methode formulierte empirische Satz bezieht sich jetzt natürlich auf Klassen von Modellen; die Definition einer Ergänzung eines partiellen potentiellen Modells ist jetzt für Klassen solcher Modelle modifiziert zu denken. Der Satz lautet dann:

(3) $(\exists \bar{x}) \left[\bar{x} \text{ ist ein } E_{\bar{y}} \wedge \bar{x} \text{ ist ein } \bar{S} \wedge C(\bar{x}, R, r) \right]$,

wobei $\bar{y}$ die Menge aller partiellen potentiellen Modelle ist und $C\ (\bar{x}, R, r)$ zum Ausdruck bringt, daß die Menge von Modellen $\bar{x}$ durch die Nebenbedingungen $<R,r>$ eingeschränkt wird.

Die mit dieser Aussage erreichte Lösung für das "Problem der theoretischen Terme" beschreibt Kuhn in einer Besprechung des Sneedschen Formalismus so: "With such a set-theoretic structure, individual applications play a double role, one previously familiar at a pre-theoretic level from discussions of reduction sentences. Taken singly, individual applications, like individual reduction sentences, are vacuous, either because their theoretical terms are uninterpretable or because the interpretation they permit is circular. But when applications are tied together by constraints, as reduction sentences are tied together by the recurrence of a theoretical term, they prove capable simultaneously of specifying, on the one hand, the manner in which theoretical concepts or terms must be applied and, in the other, some empirical content of the theory itself. Introduced, like reduction sentences, to solve the problem of theoretical terms, constraints probe also, again like reduction sentences, to be a vehicle for empirical content.

Numerous interesting consequences follow, of which I shall here mention three. Since the discovery that theoretical terms could not be readily eleminated by strict definition, one has been puzzled how to distinguish the conventional from the empirical elements within the process by which they are introduced. The Sneed formalism clarifies the puzzle by giving it additional structure. If a theory, like Newtonian mechanics, had only a single application (for example, the determination of mass ratios for two bodies connected by a spring), then the specification of the theoretical functions it supplies would be literally circular and the application correspondingly vacuous. But, from Sneed's viewpoint, no single application yet constitutes a theory, and, when several applications are conjoined, the potential circularity ceases to be vacuous because distributed by constraints over the whole set of applications." (Kühn 1976, S. 183)

Es wird deutlich, auf welche Weise Sneed die Zirkularität im Problem der theoretischen Terme auflöst. So ist die Newtonsche Grundgleichung

$$K = m \frac{d^2s}{dt^2}$$

weder als Definition aufzufassen noch als Naturgesetz, das empirisch (durch eine Anwendung) falsifiziert werden könnte. Trotzdem ist diese Gleichung auch nicht tautologisch. Vielmehr dient sie im Sinne einer Erkenntnistheorie der maximalen Runde als Grundlage, um eine empirische Aussage der Gestalt (3) bzw. der Gestalt (4) (siehe weiter unten) zu konstruieren. Das 2. Newtonsche Gesetz bewährt sich durch Anwendung.

Mit der Einführung der "constraints", die die verschiedenen Anwendungen verknüpfen und aufeinander beziehen, wird eine "holistische" Sichtweise auf die Struktur physikalischer Theorien zum Ausdruck gebracht; der empirische Gehalt einer Theorie wird in einem einzigen unzerlegbaren Satz formuliert und zerfällt nicht in verschiedene Einzelbehauptungen. Sneed faßt diese Sicht in den drei Feststellungen zusammen, daß Theorien als ganze akzeptiert oder zurückgewiesen werden, daß Theorien nicht durch das Ergebnis eines "experimentum crucis" falsifiziert werden können und daß sich keine klare Unterscheidung treffen lasse zwischen dem, was eine Theorie behauptet, und dem, was die Evidenz für diese Behauptung ist. (vgl. Sneed, 1971, S.90ff)

Eine weitere Konsequenz der Einführung der "constraints" ist die Tatsache, daß die ersten Anwendungen, die mit einer Theorie gemacht werden, in gewissem Sinne die weitere Entwicklung festlegen, da weitere Anwendungen der Theorie nicht hinzugefügt werden können, ohne die Ergebnisse der bereits vorgenommenen Anwendungen zu berücksichtigen. Insofern kann man auch verstehen, warum es richtig ist, daß die Bedeutung theoretischer Terme nicht fest bleibt, sondern sich entwickelt und wandelt in dem Maße, in dem sich der

Inhalt der Theorie (die Anwendungen) ausweitet. Jede Anwendung der Theorie ist gleichzeitig ein Test der Theorie. Wenn die Berücksichtigung der "constraints" zu Widersprüchen führt, dann kann dies negative Konsequenzen entweder für die neue Anwendung haben, oder für einige der bereits vorher gemachten, je nach den Umständen, in denen solche Widersprüchlichkeiten auftreten.

Eine Theorie wird mithin sowohl durch ihren formalen Apparat bestimmt, als auch durch die Angabe einer Kernmenge von intendierten Anwendungen. Es ist also falsch, die Theorie mit ihren empirischen Gehalt zu identifizieren, da dieser sich mit der Zeit verändert. Invariant aber bleibt (in einem gewissen noch näher zu präzisierenden Sinne) der formale Apparat und der Kernbereich der für die Theorie charakteristischen Anwendungen. "This suggests that being clear about the formalism and the constraints on its application is more central to understanding what it is like to practice a certain branch of mathematical physics than being clear about any particular empirical claims that might be made. It would be misleading to *identify* the theory with some particular claims (say a particular claim of form (3) and its consequences) because these claims might change and yet what is characteristic of this branch of scientific activity remain the same".(Sneed 1971, s.94)

Ein konkreter Versuch der Anwendung der bisher dargestellten Begrifflichkeit auf die Newtonsche Mechanik zeigt, daß die Aussage, daß ein System von Partikeln zusammen mit einer zweimal differenzierbaren Ortsfunktion s so ergänzbar sein soll um die theoretischen Funktionen Masse m und Kraft K, daß das 2. Newtonsche Gesetz $K = m \cdot b$ erfüllt ist, empirisch leer ist. In der Tat kann jedes beliebige System dieser Art in entsprechender Weise mit Kraft- und Massenfunktionen "aufgefüllt" werden. Faktisch wird in der Mechanik auch nicht so vorgegangen, sondern man nimmt zusätzlich an, daß die Kraftfunktion in verschiedenen Anwendungen verschiedene Gestalt annimmt, etwa in Form des

Gravitationsgesetzes oder des Hookeschen Gesetzes. Der Vorschlag von Sneed, diesen Sachverhalt anzuführen, besteht darin, Verschärfungen des Grundprädikats S, gekennzeichnet durch einen Indexbuchstaben, also z.B. S^i, einzuführen, die auch die speziellen Gesetze beinhalten, die nur für einige, aber nicht alle Anwendungen gelten. "These predicates are used to construct a sentence which says that there are theoretical functions which make all intended applications models for the basic predicate, make some designated sub-sets of intended applications models for the 'restrictions' of this basic predicate, *and* satisfy certain constraints. The 'restrictions' of the basic predicate are to characterize various special forms that the theoretical function is hypothesized to have." (Sneed 1971, S.96)

Mit dieser Modifikation nimmt dann der zentrale empirische Satz einer Thoerie die Gestalt an (Sneed 1971, S.106):

$$
\begin{aligned}
(4)\quad (\exists \bar{x}) \Big[\; & \bar{x} \text{ ist ein } E_{\bar{y}} \wedge \bar{x} \text{ ist ein } S \wedge \\
& \bar{x}^{i_1} \text{ ist ein } S^{i_1} \wedge \bar{x}^{i_1 j_1} \text{ ist ein } S^{i_1 j_1} \wedge \ldots \wedge \\
& \bar{x}^{i_2} \text{ ist ein } S^{i_2} \wedge \bar{x}^{i_2 j_2} \text{ ist ein } S^{i_2 j_2} \wedge \ldots \wedge \\
& \qquad\vdots \\
& \bar{x}^{i_n} \text{ ist ein } S^{i_n} \wedge \bar{x}^{i_n j_n} \text{ ist ein } S^{i_n j_n} \wedge \ldots \wedge \\
& C(\bar{x}, R, r) \Big].
\end{aligned}
$$

$C(\bar{x}, R, r)$ bezeichnet dabei zusammenfassend alle "constraints", die angenommen werden, auch diejenigen, die sich auf die Prädikatverschärfungen beziehen. Die komplexe Struktur dieses Satzes macht klar, daß die Annahme über die Gültigkeit eines Spezialgesetzes und der Test einer solchen Annahme hochgradig von der Struktur der gesamten Theorie abhängig ist und von dieser Theorie her determiniert wird. Denn jede solche Annahme ist über die "constraints" weitgehenden Verträglichkeitsbedingungen im Hinblick auf die schon gemachten Anwendungen und die zuvor erfolgten Prädikatsverschärfungen unterworfen. Gleichzeitig ergibt die Einführung von Prädikatsverschärfungen natürlich einen weiteren Handlungs- und Variabilitätsspielraum für die Theorienentwicklung.

Es hat sich bereits gezeigt, daß in der Sneedschen Konzeption eine Theorie dualistisch aufgefaßt wird, nämlich als ein Paar $\langle K, I \rangle$, bestehend aus einer theoretischen (formalen) Struktur K und einer Menge I von intendierten "Anwendungen". Dies impliziert insbesondere, daß wissenschaftliche Theorien nicht mehr als Systeme von Sätzen betrachtet werden. Im Sinne der Ausführungen in Kapitel I drückt diese dualistische Struktur die Eigenständigkeit der Symbolebene und der gegenständlichen Ebene gegeneinander aus und reflektiert gleichzeitig, daß beide Ebenen notwendig aufeinander bezogen sind. Im Sinne einer an anderer Stelle entwickelten Terminologie ist das Paar $\langle K, I \rangle$ auch als Verhältnis von Text 1 und Text 2 anzusprechen (vgl. Keitel/Otte 1977).

Versteht man, so wird in (Keitel/Otte 1977) zur didaktischen Problematik mathematischer Schulbücher ausgeführt, unter Text 1 den "eigentlichen zeichenmäßig fixierten, vorgelegten Text und unter Text 2 den gemeinten Inhalt, dann läßt sich als eine charakteristische Besonderheit eines dichterischen Textes gegenüber einem mathematischen Text feststellen, daß bei ersterem eine wesentliche Identität und starre Verbindung von Text 1 und Text 2 gegeben ist. Der Inhalt einer Dichtung und ihre sprachliche Form bilden eine unauflösbare Einheit. An der anderen Seite ist ein mathematischer oder ein naturwissenschaftlicher Text gerade durch die Variabilität der beiden Textebenen gegeneinander ausgezeichnet. Die relative Eigenständigkeit von

Text 1 gegenüber Text 2 bildet dabei die Voraussetzung dafür, daß tätigkeitsbezogen (durch Anwendung) neue Inhalte auf der Ebene von Text 2 mit Hilfe von Text 1 angeeignet werden können.

Wenn K (der sogenannte "Strukturkern") die theoretische Struktur bezeichnet, soweit sie bisher skizziert wurde, wenn K_i $(i = 1,2,...)$ (sogenannte "erweiterte Strukturkerne") eine Erweiterung eines solchen Strukturkerns um gewisse Spezialgesetze (Prädikatsverschärfungen) bezeichnet, dann besteht Theorienentwicklung auf der Ebene der begrifflichen Struktur in immer fortgesetzten Erweiterungen des Strukturkerns und auf der Ebene der Anwendungen in der Einbeziehung immer neuer Anwendungen, d.h. man erhält zwei Entwicklungsreihen:

$$K \leq K_1 \leq K_2 \leq \ldots$$

und

$$I \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots$$

Gleichzeitig bedeutet natürlich jede Kernerweiterung hinsichtlich der *möglichen* intendierten Anwendungsmengen eine Einschränkung.
Wenn mit $\mathbb{A}(K_i)$ die zu K_i gehörige Menge von Anwendungsmengen (eine solche Einführung von Mengen von Anwendungsmengen ist notwendig, weil zu jeder Menge von Anwendungen, mit der man beginnt, eine andere Menge möglicher Anwendungen gehört) bezeichnet wird, dann hat man:

$$\mathbb{A}(K) \supseteq \mathbb{A}(K_1) \supseteq \mathbb{A}(K_2) \supseteq \ldots$$

Eine Theorie, die von einer Wissenschaftlergemeinschaft zu einem gewissen Zeitpunkt akzeptiert wird, ist also durch die Angabe eines gewissen erweiterten Strukturkerns K_t und einer Menge von akzeptierten Anwendungen I_t charakterisiert. Beide, K_t und I_t, bestimmen, wie oben gezeigt, den weiteren Verlauf der Theorieentwicklung, legen ihn aber nicht eindeutig fest.

Die Konsequenzen, die diese Charakterisierung der Wissenschaftsentwicklung für die Klärung und das Verständnis vieler Teilfragen der Theoriendynamik (etwa für das Phänomen der Aufrechterhaltung einer Theorie trotz widerstreitender Erfahrung, für den Paradigmenwechsel und für die Beschreibung der Praxis "normaler" Wissenschaft hat, sind in aller Breite im Kap. VIII des Sneedschen Buches bzw. im Kap. IX des Buches von Stegmüller (Stegmüller 1973) dargestellt.

II. 3. *Zum Problem der "Eliminierbarkeit" theoretischer Terme*

Wir haben bisher gezeigt, wie die Dichotomie "theoretisch/nicht-theoretisch (bzw. empirisch)", d.h. der bewußte Versuch, eine Wissenschaftskonzeption zu entwickeln, die weder die empirische Ebene auf die logische, noch die logische Ebene auf die empirische reduziert, in gewissem Sinne zwangsläufig zu einer dualistischen strukturellen Beschreibung wissenschaftlicher Theorien geführt hat. Dabei hatten sich die theoretischen Terme (Begriffe) als diejenigen erwiesen, die gewissermaßen den spezifischen Gegenstandsbezug der Theorie, ihren spezifisch problematischen Aspekt repräsentieren, während die nicht-theoretischen (empirischen) Terme nach Voraussetzung gerade diejenigen sind, für deren Messung man im Rahmen einer jeweils vorliegenden Theorie keine Probleme sieht. Auf der anderen Seite hatte sich als Folge der bewußten Handhabe der Tatsache, daß Theorien immer mehrere verschiedene Anwendungen haben, das Konzept der "constraints" als besonders bedeutungsvoll erwiesen. Anschaulich gesprochen, repräsentieren die "constraints" gerade die Vorstellungen darüber, wie eine Theorie angewendet werden muß, sie beinhalten die Anschauungen, "wie die Welt zusammenhängt", welche spezifische Natur die Objekte haben, mit denen man in der Theorie umgeht. (vgl. die Diskussion bei Sneed 1971, S.297ff), insbesondere S. 302)

Daß die Masse eines Objekts (z.B. der Sonne), das in verschiedenen Anwendungen vorkommt, als identisch betrachtet wird oder daß die Schwerkraft in jeder Anwendung durch dieselbe Konstante g charakterisiert ist, das sind in der Tat fundamentale, nicht-aufgebbare Grundvorstellungen der Mechanik.

Wir wollen nun, um den Zusammenhang zwischen der Theoriendynamik und der Dichotomie "theoretisch/nicht-theoretisch" schärfer herauszuarbeiten, die Sneedsche Auffassung zur Rolle und Bedeutung theoretischer Terme mit der Position von H.A. Simon konfrontieren, der im Sinne eines verallgemeinerten Operationalismus davon ausgeht, daß theoretische Terme aus "vernünftigen" wissenschaftlichen Theorien immer eliminierbar seien, d.h. theoretische Terme im Prinzip also nur aus Gründen der Darstellungs-"Ökonomie" und Vereinfachung in Theorien vorhanden sind. Zwar ist der Gesichtspunkt der Vereinfachung der Darstellung einer Theorie außerordentlich wichtig, und in dieser Hinsicht gibt es keine Differenz zwischen Sneed und Simon -, es soll jedoch verständlich gemacht werden, daß die Funktion theoretischer Terme nicht auf die abgekürzte Darstellung reduziert werden kann. Sneed diskutiert die Frage der Ramsey-Eliminierbarkeit theoretischer Terme aus empirischen Theorien zunächst anhand einiger Ergebnisse der mathematischen Logik zu diesem Problem. Diese Sätze haben allerdings in zweifacher Hinsicht nur einen heuristischen Wert: zum einen sind sie nur auf Theorien bewiesen, die im Prädikatenkalkül erster Stufe mit Identität formalisiert sind; diese Bedingung wird bei relevanten Theorien der mathematischen Physik natürlich nicht erfüllt sein. Zum anderen benutzen diese Sätze nicht das spezielle Sneedsche Theoretizitätskriterium, sondern es geht in ihnen überhaupt um die Reduzierbarkeit des benutzen Vokabulars, d.h. also darum, unter welchen Bedingungen auf einen Term t verzichtet werden kann. (Für das folgende vergleiche Sneed 1971, S.52ff.)

Sei im Prädikatenkalkül erster Stufe mit Identität ein außerlogisches Axion F ($\bar{T}$,$\bar{O}$) gegeben, $\bar{T}$, $\bar{O}$ seien zweistellige Prädikate, d.h. O, T $\subset$ DxD (Großbuchstaben mit Querstrich bezeichneen ein Prädikat, derselbe Buchstabe ohne Querstrich eine dem Prädikat zugeordnete Relation in einem Modell.)
D sei eine Menge. Es werde definiert:

> m = <D,O> heißt *D-ergänzbar zu einem Modell für F ($\bar{T}$, $\bar{O}$)* genau dann, wenn es ein T $\subseteq$ DxD gibt, so daß F ($\bar{T}$,$\bar{O}$) in m* = <D, T. O> wahr ist.
>
> '$\bar{T}$' heiße D-Ramsey-eliminierbar aus F ($\bar{T}$,$\bar{O}$) genau dann, wenn es einen Satz H($\bar{O}$) gibt, so daß für alle m (= <D,O>) H($\bar{O}$) in m wahr ist genau dann, wenn m D-ergänzbar zu einem Modell für F ($\bar{T}$,$\bar{O}$) ist.

Anders gesagt, $\bar{T}$ ist Ramsey-eliminierbar aus einer Aussage über die Elemente von D genau dann, wenn die Menge aller Modelle <D,O> , die D-ergänzbar zu Modellen für F ($\bar{T}$,$\bar{O}$) sind, umfangsgleich ist mit einer Menge von Modellen <D,O> , die Modelle für einen Satz H($\bar{O}$) sind, der $\bar{T}$ nicht enthält.
Craig und Vaught haben nun den Satz bewiesen.

> Sei D endlich ; dann ist für alle F ($\bar{T}$,$\bar{O}$) $\bar{T}$ D-Ramsey-eliminierbar aus F ($\bar{T}$,$\bar{O}$).

Durch Beispiele kann gezeigt werden, *daß dieser Satz für unendliche D nicht gilt.*

Sneed argumentiert nun, daß der angegebene Satz von Craig und Vaught "nicht sehr interessant" sei. Zum einen beinhalte er nämlich, daß für jede Menge D ein anderer Satz H($\bar{O}$) erforderlich sein könne, um $\bar{T}$ zu eliminieren. Zum anderen könne man bei vielen Theorien keine Angaben über die Kardinalzahl von D machen, da D intensional gegeben sei. Der Satz sei in diesen Fällen nicht anwendbar. Das bedeutet aber (wenn man dieses Argument weiterdenkt), daß in allen Fällen, in denen die Theorie in Entwicklung begriffen ist, in denen also der Umfang bzw. die Kardinalzahl von D nicht abschließend festgestellt werden kann, das Resultat von Craig und Vaught nicht anwendbar ist (der theoretische Term $\bar{T}$ also im allgemeinen nicht eliminiert werden kann, wie Beispiele zeigen.) Dieselbe Schlußfolgerung ergibt sich auch daraus, daß nach diesem Ergebnis $\bar{T}$ immer nur relativ zur Menge D eliminiert werden kann. Denn auch dies bedeutet, daß eine Elimination im allgemeinen nur post festum möglich ist, nicht aber, solange sich eine Theorie entwickelt und neue Anwendungen hinzutreten.

Wenn man aufgrund dieser Überlegungen, entsprechend der obigen Definition von Ramsey-eliminierbar im starken Sinne, definiert:

> $\bar{T}$ ist Ramsey-eliminierbar aus
> $F(\bar{T},\bar{O})$ genau dann, wenn es ein $H(\bar{O})$ gibt, so daß für
> alle D und alle m = $\langle D,O \rangle$ $H(\bar{O})$ wahr ist genau dann,
> wenn m D-ergänzbar zu einem Modell für $F(\bar{T},\bar{O})$ ist;

dann läßt sich anhand von Beispielen, die Sneed gibt, zeigen, daß $\bar{T}$ in diesem stärkeren Sinne im allgemeinen nicht eliminierbar ist. Dieselben Beispiele zeigen auch, daß der obige Satz von Craig und Vaught zur D-Ramsey-Eliminierbarkeit theoretischer Terme für unendliches D nicht gilt.

Ein weiteres Resultat von Craig zur Eliminierbarkeit theoretischer Terme besagt:

> Wenn eine Theorie durch eine rekursiv aufzählbare Menge von Axiomen axiomatisiert werden kann, dann kann sie auch durch eine rekursive Menge von Axiomen axiomatisiert werden (vgl. Tuomela 1973, S. 28)

Wenn eine Menge rekursiv aufzählbar ist, dann lassen sich alle Elemente dieser Menge nach und nach aufzählen, während man bei einer rekursiven Menge zu einem vorgegebenen Element sogar über ein endliches Entscheidungsverfahren verfügt, mit dessen Hilfe sich die Zugehörigkeit bzw. Nichtzugehörigkeit dieses Elementes zu der fraglichen Menge feststellen läßt.

Die Reduktionsleistung, die in dem Satz behauptet wird, liegt also darin, daß man ein endliches Entscheidungsverfahren erhalten kann, um zu entscheiden, ob ein vorgelegter Satz ein Axiom ist oder nicht.

Das bedeutet, anschaulich gesprochen, daß man immer einen Satz $H(\bar{O})$ finden kann, der dieselbe Klasse von Modellen bestimmt, wie sie durch die Menge aller beobachtbaren Konsequenzen der Theorie bestimmt wird. Dieses Ergebnis ist nur dann interessant, wenn $H(\bar{O})$ nicht einfach die unendliche Konjunktion über alle beobachtbaren Konsequenzen ist, und der zitierte Satz besagt gerade, daß man $H(\bar{O})$ endlich spezifizieren kann, obwohl er tatsächlich eher eine endliche Menge von Sätzen als ein einzelner Satz ist. (vgl. Sneed 1971, S. 56)

Sneed vergleicht dann diese Aussage des Satzes $H(\bar{O})$ (bzw. die Menge der durch $H(\bar{O})$ bestimmten Modelle) mit der Aussage des Ramsey-Satzes: $(\exists t)\ (F(t,\bar{O}))$.

Er kommt dabei zu dem bemerkenswerten Ergebnis, daß die Menge der Modelle für den Ramsey-Satz $(\exists t)\ (F(t,\bar{O}))$ nicht notwendig umfangsgleich ist mit der Menge der Modelle, die verträglich mit allen empirischen Konsequenzen des Satzes $F(\bar{T},\bar{O})$ ist:
"The Ramsey sentence is, in general, stronger than the conjunction of all the observational consequences of the theory. It is not merely stronger in a trivial sense of entailing some sentences not in the set of observational consequences. It is stronger in the sense that one could discover (empirically) some situations (members of M_D [d.h. m = $\langle D,O \rangle$, H.N.J.] that were consistent with all the observable consequences of the theory, and yet the Ramsey sentence would not be true of them. ... The theoretical terms may be doing real work - ruling out observable states of affairs that could not be ruled out by any conditions formulable in the observation vocabulary." (Sneed 1971, S. 57/58)

Wenn umgekehrt $\bar{T}$ Ramsey-eliminierbar ist, dann ist der eliminierende Satz $H(\bar{O})$ äquivalent zur Menge aller empirischen Konsequenzen, $\bar{T}$ ist im Prinzip verzichtbar.

Sneed resümiert: "We can see that our feeling that there is something like a minimal amount of conceptual apparatus needed to characterize a certain class of set-theoretic structures is borne out in those cases where we have strict syntactical criteria for determining what conceptual apparatus is in fact being used." (Sneed 1971, S.58)

Im allgemeinen sind die Werte der t-Funktion, die man konstruiert, um < D, n > zu einem Modell des vollen Prädikats S zu machen, nicht eindeutig durch die empirischen Werte der n-Funktion bestimmt. (So etwa im Beispiel der Theorie (D1) oben.) Es ist nun aufschlußreich, sich den Zusammenhang klarzumachen, der zwischen der Definierbarkeit der t-Werte durch die n-Werte einerseits und der eindeutigen Festlegung der t-Werte durch die n-Werte besteht. Und zwar gilt hier für axiomatisierte deduktive Theorien im Prädikatenkalkül erster Stufe der Definierbarkeitssatz von Beth, daß die t-Funktion durch die n-Funktion definiert werden kann, wenn in *allen* Modellen die t-Werte durch die n-Werte eindeutig festgelegt sind. Wenn die t-Werte nicht in allen Modellen durch die n-Werte eindeutig festgelegt sind, dann zeigt die Anwendung der Methode von Padoa (vgl. Padoa 1900), daß t nicht in Abhängigkeit von n definiert werden kann (vgl. Sneed 1971, S.59)

Zusammenfassend läßt sich Sneeds Position zur Frage der Eliminierbarkeit theoretischer Terme, die sich sowohl aus seiner Diskussion der Ergebnisse für den Prädikatenkalkül erster Stufe mit Identität als auch seiner Behandlung des Beispiels der klassischen Partikelmechanik im Kap. VI seines Buches ergibt, so darstellen:
Im "Normalfall", nämlich dann, wenn eine Theorie nicht trivial ist und wenn sie sich noch entwickelt, sind ihre theoretischen Terme nicht Ramsey-eliminierbar (im starken Sinne). Sie erbringen eine unverzichtbare Leistung bei der Bestimmung der Menge der Modelle, die der Theorie genügen und bei der Prognose.

Dem widerspricht es durchaus nicht, wenn die theoretischen Terme aus einer *einzelnen Anwendung* eliminierbar sind. Mit der Unterscheidung von schwacher und starker Eiliminierbarkeit bringt Sneed also die wichtige Differenzierung zum Ausdruck, die darin liegt, daß ein Term für eine Theorie als ganzer nicht verzichtbar ist, obwohl es vielleicht möglich ist, eine spezielle experimentelle Situation, die im Rahmen der Theorie auftaucht, ohne Benutzung des infragestehenden theoretischen Terms hinreichend zu beschreiben und zu charakterisieren. Dadurch, daß Sneed systematisch von der Vorstellung einer einzigen universellen Anwendung der Theorie abgeht und Klassen von Anwendungen betrachtet, kann er das Problem der Eliminierbarkeit theoretischer Terme hierarchisieren und zwischen der globalen Funktion solcher Terme und ihrer möglichen lokalen Elimination unterscheiden. Es mag also sein, daß etwa der Begriff der Masse m aus einzelnen Anwendungen eliminiert werden kann (z.B. an einer Balkenwaage), dadurch verliert er trotzdem nicht seine globale Funktion für die Theorie. Es gibt verschiedene Möglichkeiten dafür, daß in einer Anwendung t-Werte (wenn auch nicht notwendig eindeutig) bestimmt werden, so daß überhaupt so etwas wie ein "Widerspruch" bzw. ein "Test" der Theorie ermöglicht wird. Eine solche Bestimmung von t-Werten kann entweder im Rahmen einer Anwendung durch die Konstruktion einer geeigneten t-Funktion auf der Grundlage vorliegender Messungen der n-Funktion innerhalb dieser Anwendung erreicht werden oder durch Übernahme von t-Werten aus anderen Anwendungen mit Hilfe der "constraints" oder durch eine Mischform, die beide Möglichkeiten kombiniert.

Die Diskussion der Ergebnisse von Craig und Vaught, die dem ersten Augenschein nach für eine prinzipielle Eliminierbarkeit zu sprechen scheinen, erbringt gerade eine Vermutung in die entgegengesetzte Richtung: daß nämlich die Tatsache, daß eine Theorie sich entwickelt, in einer formalen Darstellung dadurch konzeptualisiert wird, daß die Kardinalzahl der in den Anwendungen vorkommenden Individuen als unendlich bzw. unbestimmt angenommen wird, und daher das Ergebnis von Craig und Vaught nicht anwendbar ist.

Auch für R. Tuomela (vgl. Tuomela 1973, S.63/64) scheint die Unterscheidung von endlichen und unendlichen Modellen sehr bedeutsam zu sein. Er sagt, daß die Objekte für eine Theorie normalerweise intensional beschrieben und deshalb von unbestimmter Kardinalzahl seien. Von daher könnten unendliche Modelle als wichtiger angesehen werden als die einzelnen An-

wendungen und Experimente, durch die die Theorie getestet werde, "but which are only finite restrictions of its intended interpretations." (Tuomela 1973, S. 64) Oder umgekehrt ausgedrückt: Das Wissen über ein einzelnes Experiment (eine endliche Restriktion) nützt nichts, wenn das unendliche Modell nicht bekannt ist, dessen Restriktion es ist. Am Beispiel der Mechanik gefragt: Jede Anwendungssituation der Mechanik kann sicher ohne die explizite Angabe der Gleichung $K = m \cdot b$ beschreiben werden . Hat deshalb die Information, daß es sich bei einer Anwendung um die Anwendung der Gleichung $K = m \cdot b$ handelt, keinen Erkenntniswert?
Gegen die Position von Sneed hat nun H.A. Simon (zusammen mit G.J. Groen) in einem Aufsatz "Ramsey Eliminability and the Testability of Scientific Theories", der als Kapitel 6.6. seines Buches "Models of Discovery" (Simon 1977) wiederabgedruckt ist, Stellung bezogen. Simon argumentiert, daß in jeder "vernünftigen" Theorie die theoretischen Terme Ramsey-eliminierbar seien, wobei er eine Theorie dann als "vernünftig" bezeichnet, wenn sie einem von ihm entwickelten Kriterium, FIT (finitely and irrevocably testable) zu sein, genügt.

Zur Darstellung dieses Kriteriums seien wieder dieselben Abkürzungen benutzt, wie oben bei der Wiedergabe von Sneeds Auffassung. Im Unterschied zu Sneed interpretiert Simon die "Objekte" $x \in D$ eines Modells $m = \langle D, O, T \rangle$ für den Satz $F(\bar{O}, \bar{T})$ eher als "Beobachtungen" (was für die formale Diskussion keinen Unterschied macht). Wenn ein Modell m k Elemente hat, werde es auch als m_k bezeichnet, mit m_{k+} bezeichne man die "Erweiterung" (extension) eines Modells m_k , wenn ein oder mehrere Beobachtungen hinzugenommen werden, die Beziehung der Erweiterung werden durch $m_k \leq m_{k+}$ beschrieben. M sei die Menge aller Modelle für einen Satz der Form $F(\bar{T}, \bar{O})$.

Simon fragt dann, erstens ob es immer möglich ist, eine Theorie, wenn sie falsch ist, durch eine endliche Menge von Beobachtungen zu falsifizieren, und zweitens, ob die Falsifikation einer Theorie durch eine endliche Menge von Beobachtungen dadurch wieder rückgängig gemacht werden kann, daß man zusätzliche Beobachtungen anstellt. (Simon 1977, S.408)

Simon möchte für "vernünftige" Theorien die erste Möglichkeit immer gewährleistet wissen und die zweite möchte er auf jeden Fall ausschließen. Daher definiert er:

Eine Theorie, $F(\bar{T},\bar{O})$ heißt *endlich testbar* (finitely testable) genau dann, wenn

(1) $\exists m : m \notin M$

(2) $\forall m \left[(m \notin M) \longrightarrow \exists . m_k \left((m_k \leq m) \wedge (m_k \notin M) \right) \right]$ für endliches k

Eine Theorie, $F(\bar{T},\bar{O})$, heißt *endgültig testbar* (irrevocably testable) genau dann, wenn

$$\forall m \left[\exists m_k \left((m_k \leq m) \wedge (m_k \notin M) \right) \longrightarrow (m \notin M) \right]$$

Eine Theorie, $F(\bar{T},\bar{O})$, heißt FIT, wenn sie endlich und endgültig testbar ist.
(vgl. Simon 1977, S.408)

Als Beispiele zur Erläuterung der Bedeutung dieser Definitionen gibt Simon die folgenden Sätze an "Es gibt Einhörner" (ist nicht endgültig testbar); "es gibt keine Einhörner" (ist FIT); "es gibt eine endliche Zahl von Sonnenaufgängen" (ist nicht endlich testbar); "die Anzahl der Primzahlen ist endlich" (ist nicht endlich testbar); "die Anzahl der Sterne ist eine Primzahl" (ist nicht endgültig testbar).

Simon meint, daß es nicht unvernünftig sei, die letzten drei Aussagen nicht zur Klasse der "vernünftigen" Theorien zu zählen, während die ersten beiden nur die von Popper bereits gesehene Asymmetrie zwischen Verifikation und Falsifikation widerspiegeln. Er zeigt dann, daß auch das von Sneed konstruierte Gegenbeispiel gegen die Eliminierbarkeit eines theoretischen Terms seinem Kriterium FIT nicht genügt und daher auszuschließen ist.

Er beweist dann den Satz, daß die theoretischen Terme $\bar{T}$ aus einer Theorie $F(\bar{T},\bar{O})$ Ramsey-eliminierbar sind, wenn die Theorie der Bedingung FIT genügt.

Um nun genauer die Bedeutsamkeit des Arguments von Simon beurteilen zu können, betrachte man die folgende Situation, die einen historisch charakteristischen Fall von Theorieentwicklung darstellt. (Simon 1977, S.418/419) Wird in der Himmelsmechanik ein Element $x \in D$ als Beobachtung der Bahnen einer festen Menge von Planeten interpretiert, dann müßte bei Beobachtung von Abweichungen der Bahnen von den Werten, die die Theorie liefert, die Himmelsmechanik als falsifiziert gelten, wenn man die Himmelsmechanik als eine Theorie auffaßt, die dem FIT-Kriterium genügt. Nun hat man historisch auf solche Abweichungen der Daten mehrfach so reagiert, daß man aus ihnen auf die Existenz eines bis dahin unbekannten Planeten geschlossen hat, der dann später auch unmittelbar beobachtet werden konnte. Im Rahmen der Konzeption von Simon kann diese Entwicklung nur als die *Ersetzung einer Theorie durch eine neue Theorie* interpretiert werden, wenn er an seinem FIT-Kriterium festhalten will, während es im Sneedschen Verständnis um die Anwendung ein und derselben Theorie geht. Die Diskussion dieses Falles wird zwar bei Simon etwas zweideutig. Er bezeichnet die Zahl der Planeten plötzlich als Hilfshypothese der Theorie, so daß es sich bei dem Theorienwechsel nur um den Austausch einer Hilfshypothese durch eine andere handelt. Trotzdem bleibt bestehen: Wenn die "Hilfshypothese" zur Theorie gehört, dann ist der Prozeß nur als Ersetzung einer Theorie durch eine andere zu verstehen; gehört die "Hilfshypothese" nicht zur Theorie, dann ist die Theorie auch nicht FIT, und die Himmelsmechanik wäre nach Simon keine "vernünftige" wissenschaftliche Theorie.

Die Beseitigung der Dichotomie "theoretisch/nicht-theoretisch" aus der Theorienkonzeption durch die Einführung von operationalistischen Anforderungen an das, was eine Theorie ist, mit der Konsequenz der Ramsey-Eliminierbarkeit aller theoretischen Terme, führt also in diesem Fall zu einer *Verabsolutierung der Diskontinuität* in der Theorienentwicklung. Die tatsächliche Kontinuität kann dann nur noch verstanden werden als pragmatisches, der Theorie äußerliches Verhalten desjenigen, der mit der Theorie umgeht. Die Verabsolutierung des Widerspruchs (der in der Erfahrung auftritt) läßt keine Möglichkeit, Entwicklung zu verstehen. Umgekehrt wird es gerade durch das Sneedsche Prinzip, den Widerspruch in seiner Wirkung zu begrenzen (der Widerspruch bezieht sich nur auf eine einzelne Anwendung und nicht auf den Strukturkern K) ermöglicht, auch die Kontinuität in diesem Übergang aufzufassen.

Wir wollen noch ergänzend zu diesem Argument darauf hinweisen, daß das Simonsche FIT-Kriterium im Grunde eine sehr scharfe Endlichkeitsbedingung enthält und deswegen die Argumente, die von Sneed im Zusammenhang mit dem Satz von Craig und Vaught gegeben wueden, auch hier anwendbar sind.

Spiegelbildlich zu der hier geschilderten Problematik der Verabsolutierung der Diskontinuität in der Theorieentwicklung verhält sich ein anderes Moment in der Simonschen Konzeption, nämlich die Überbetonung der Kontinuität soweit es um die Begründung der Theorie geht.

In einem Aufsatz aus dem Jahre 1947 "The Axioms of Newtonian Mechanics" (wiederabgedruckt als Kapitel 6.1. seines "Models of Discovery") entwickelt Simon die Axiomatisierung der Newtonschen Mechanik (genauer der Himmelsmechanik) mit der Absicht, eine eindeutige, exakte *Definition* des Begriffs der Masse zu geben. Zur Axiomatisierung benutzt er die Tatsache, daß die Summe der Impulse und die Summe der Drehimpulse in einem System, das frei von äußeren Kräften ist, Null beträgt.

Simon geht also von einer endlichen Menge von Punkten $\bar{P} = \{ P_i : i = 1, \ldots, n \}$ und von zu diesen Punkten definierten "Ortsfunktionen" für $a \leq t \leq b$: $\bar{r}_i(t) = (x_i(t), y_i(t), z_i(t))$ $(i = 1, \ldots, n)$ aus. Er definiert dann:

Wenn es eine Menge von Skalaren $\{m_i : m_i \neq 0; i = 1, \ldots, n\}$ (m_i nicht abhängig von t) gibt, so daß

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{r}_i(t) \equiv 0 ;$$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{r}_i(t) \times \bar{r}_i(t) \equiv 0;$$

identisch in t gilt, dann heiße die Menge $\{ P_i \}$ zusammen mit der Menge der zugehörigen Vektoren $\{ \bar{r}_i (t) \}$ und Skalaren $\{ m_i \}$ eine *isolierte* Bewegung.

Er kann dann zeigen, daß eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die m_i einer isolierten Bewegung bis auf einen Proportionalitätsfaktor eindeutig bestimmt sind, darin besteht, daß es kein echtes Teilsystem gibt, das seinerseits eine isolierte Bewegung ist. Hierbei wird allerdings die Möglichkeit offen gelassen, daß die Massen m_i auch negative Werte annehmen.

Die Massen sind also, so folgert Simon, definierbar in Abhängigkeit von den Observablen, nämlich den beobachtbaren Ortsvektoren $\bar{r}_i (t)$.

Nun ergibt andererseits eine einfache Anwendung der Methode von Padoa auf die von Simon gegebene Axiomatisierung, daß die Massen als primitive (theoretische), nicht-definierbare Terme aufzufassen sind. Simon ist also mit der für ihn "paradoxen" Situation konfrontiert, daß es möglich sei, die Massen eindeutig bis auf einen Skalar zu berechnen, obwohl sie weder Observablen, noch in Abhängigkeit von Observablen definierbar sind.

Die Schwierigkeit ergibt sich im konkreten vorliegenden Fall daraus, daß sich Spezialfälle angeben lassen, in denen die Massen nicht berechnet werden können. Ein triviales Beispiel ist der Fall einer einzigen Masse, die für sich ein isoliertes System bildet.

Die Tatsache, daß es in Theorien Terme gibt, die weder Oberservablen sind, noch in Abhängigkeit von Observablen definiert werden können, war für Sneed (und Braithwaite) der Grund dafür, daß ein prozessuales Verständnis von Theorien notwendig wird. Und Simon zitiert auch Braithwaite mit seiner Schlußfolgerung, daß eine Theorie, wenn sie sich noch entwickelt, über nur "partiell interpretierte" Terme verfügen muß. Er selbst allerdings schlägt ein anderes Vorgehen vor, nämlich den Tarskischen Definierbarkeitsbegriff zugunsten eines schwächeren Definierbarkeitskonzepts zu ersetzen. Dazu macht er zwei Definitionsvorschläge, von denen einer lautet: Sei B ein Punkt in einem Raum, der ein Maß besitzt, und es sei a im Tarskischen Sinne definiert für fast alle B. Dann heißt a *definiert fast überall.*

Offenbar erfordert es diese Definition, daß der Theoretiker ad hoc in die Theorie interveniert und jeweils kontextabhängig die Menge vom Maß Null ausschließt, auf der a nicht definiert ist.

Simon entscheidet sich also mit diesem Versuch der Abschwächung des Definierbarkeitskonzeptes für die Ausschliessung theoretischer Begriffe aus wissenschaftlichen Theorien, ohne allerdings die Schwierigkeit, die ihn dazu geführt hat, ausräumen zu können. Er muß quasi auf eine außertheoretische "Vernünftigkeit" des Theoretikers bauen. Mit der Ausschliessung theoretischer Begriffe erhält er eine absolute Kontinuität bzw. Identität zwischen empirischem und theoretischem, zwischen altem und neuem Wissen.

Insgesamt ergibt die Diskussion der Position, die theoretische Terme nur als Hilfsbegriffe auffaßt, daß im Hinblick auf die Theorieentwicklung *gerade das Verhältnis von kontinuierlichen und diskontinuierlichen Momenten besonders problematisch wird.*

Es ist außerordentlich wichtig, sich den genauen Charakter des bei Sneed entwickelten Zusammenhangs der Dichotomie "theoretisch/nicht-theoretisch" mit dem Problem der Theorieentwicklung klarzumachen. Die Bedeutsamkeit der Sneedschen Konzeption liegt darin, daß eine Spannung aufrechterhalten wird zwischen der prinzipiellen Nicht-Eliminierbarkeit theoretischer Terme aus (nicht-trivialen) Theorien einerseits und der Möglichkeit anderersetis, diese Terme in jedem Einzelfall bzw. jeder einzelnen Anwendung entweder zu eliminieren oder eindeutig (wenn auch nicht notwendig) zu bestimmen.

Es wird eine Spannung aufrechterhalten zwischen der prinzipiellen Offenheit und Mehrdeutigkeit einer Theorie im Hinblick auf ihre Entwicklungsperspektiven einerseits und der

Abschließbarkeit und Bestimmtheit in jedem Einzelfall einer Anwendung. Eine sich entwickelnde Theorie braucht sowohl Spielraum für ihre Entwicklung in ihren theoretischen Grundbegriffen als auch Bestimmtheit und Eindeutigkeit, damit Widersprüche und Korrektur durch Erfahrung überhaupt möglich sind.

Die Dichotomie von theoretischen und nicht-theoretischen Termen ist unauflösbar, wenn man sie statisch interpretiert. Statisch gesehen, wird die Unterscheidung von Theorie und Empirie sinnlos; es gibt dann keinen solchen Unterschied. Erst in einer dynamischen Sichtweise lassen sich beide Momente sinnvoll voneinander unterscheiden und aufeinander beziehen. Erst unter dynamischem Gesichtspunkt läßt sich die Dichotomie von Theorie und Empirie "auflösen".

Zur Verdeutlichung dessen, was mit dieser Behauptung gemeint ist, möchte ich eine analoge Interpretation der "Paradoxien der Systemtheorie und des Systemdenkens" anführen. In einem Aufsatz "Probleme einer allgemeinen Systemtheorie als einer Metatheorie" (Sadovsky 1974) diskutiert V.N. Sadovsky sechs Paradoxien der Systemtheorie, die alle von ähnlicher logischer Struktur sind, Eine Paradoxie lautet z.B.:

"*Paradox I (Paradox der hierarchischen Beschaffenheit)*:
Eine theoretische Beschreibung eines bestimmten Systems läßt sich nur dann geben, wenn man es als Komponente eines größeren Systems beschreiben kann. Umgekehrt läßt sich nur dann eine theoretische Beschreibung eines bestimmten Systems als Komponenten eines größeren Systems geben, wenn man es als System beschreiben kann." (Sadovsky 1974, S.31)

Sadovsky interpretiert diese Paradoxien, indem er sagt, "daß wir von dem paradoxen Charakter des Systemdenkens als von dem widersprüchlichen Wesen des sich in der Zeit entwickelnden Prozesses sprechen. Ein Versuch, die hier erörterten Paradoxe als *statisch* zu deuten, d.h. so, daß sie auf eine Systemerkenntnis anwendbar sind, die nicht in Bezug auf ihre Entwicklung betrachtet wird, führt unausweichlich zu dem Schluß, daß das *Systemdenken unmöglich* ist. ... Die Systemparadoxe sind unlösbar in einem absoluten Sinne (und ähneln hierin den logischen Paradoxen); jedoch liefert der *Entwicklungsverlauf des Systemdenkens* eine partielle Lösung." (Sadovsky 1974, S.34)

Weil jedes Problem, das sich z.B. auf die hierarchische Beschaffenheit von Systemen bezieht, nur dadurch gelöst werden kann, daß man sich auf eine *hypothetische bzw. vorläufige* Beschreibung des Systems als Teilsystem eines größeren stützt und umgekehrt jede solche Beschreibung davon ausgeht, daß das betreffende System auf der Grundlage *vorläufiger und unvollständiger* Daten als System gekennzeichnet wurde, ergibt sich, daß das *Prinzip von der Relativität der Erkenntnis* im Falle der Systemtheorie nicht nur ein allgemein-philosophisches Prinzip der Interpretation wissenschaftlicher Ergebnisse im allgemeinen ist, sondern ein konkret einzelwissenschaftliches Forschungsprinzip wird. Im Rahmen der Systemtheorie müsse man von einer "*grundlegenden Relativität jeglicher Beschreibung eines Systems* sprechen." (Sadovsky 1974, S.35)

Die Struktur dieses ganzen Arguments faßt sich in dem Satz zusammen: "Jedes lösbare Problem ist Teilproblem eines unlösbaren Problems" bzw. bezogen auf unsere Frage nach der Eliminierbarkeit theoretischer Terme: theoretische Terme (in nicht-trivialen Theorien) sind eliminierbar im schwachen Sinne, aber nicht eliminierbar im starken Sinne.
Es scheint, daß eine Überlegung von derselben Struktur auch den methodologischen Überlegungen Sneeds über das Verhältnis einer empirischen Wissenschaftswissenschaft zur allgemeinen Wissenschaftstheorie zugrunde liegt. In gewissem Sinne sind bestimmte Probleme der Erkenntnistheorie (z.B. das Verhältnicht Theorie-Empirie) "unlösbar" und "ewig". "Lösungen" dieser Probleme, die ein für allemal gelten, gibt es nicht. Dementsprechend kritisiert Sneed den "normativen" Charakter der klassischen Wissenschaftstheorie und hebt die Notwendigkeit einer empirischen Wissenschaftswissenschaft hervor (Sneed 1977, S. 360) Andererseits betont er: "Mere empiricism ist not enough." (Sneed 1976,S.118)

Was Sneed im Auge hat, ist eine *bestimmte Beziehung* zwischen allgemeiner Wissenschafttheorie und empirischer Wissenschaftswissenschaft in der Erforschung bestimmter Einzelwissenschaften, die einerseits zur Klärung jener "unlösbaren" Probleme der Erkenntnistheorie beiträgt und andererseits sieht, daß die "Lösung" für jede Wissenschaft und jeden historischen Zeitpunkt anders aussieht. "Indeed much of my own work, including that at hand, deals with these traditional problems. My only intention is to place these traditional problems in what I believe to be their proper perspective and perhaps to suggest some other fruitful avenues for philosophical analyses." (Sneed 1976, S.117) Und allgemeiner sagt er: "I propose that the customary distinction between problems in philosophy of science having to do with particular sciences and problems having to do which science-in-general is misleading. I suggest that we *may* conceive philosophical problems about the nature of science-in-general to be fundamentally similar to philosophical problems that arise in connection with the practice of individual empirical sciences. In particular, there is no need to regard the philosophy of science-in-general as a normative enterprise in some *special* sense in which the philosophy of particular sciences is not. I maintain that there is an empirical 'science of science'." (Sneed 1977, S.360)

II. 4. *Schlußfolgerungen für das Begründungsproblem*

Die gegensätzlichen Standpunkte, die Sneed und Simon im Hinblick auf die Frage der Eliminierbarkeit bzw. Nicht-Eliminierbarkeit theoretischer Terme beziehen, gehen im Kern auf ihre unterschiedliche Auffassung des *Verhältnisses von Entwicklung und Begründung* zurück.

Simon erläutert im Vorwort zum Kapitel 6. seines "Models of Discovery", warum er sich mit der Axiomatisierung der Newtonschen Mechanik beschäftigt habe. Er sagt, daß er beim Besuch einer Vorlesung, und beim Studium von Lehrbüchern über theoretische Mechanik immer unzufriedener geworden sei mit den Definitionen des Begriffs der Masse, die er dort gefunden habe. Er meint, die ungenaue und vage axiomatische Grundlage dieser Texte habe in einem krassen Gegensatz zur mathematischen Strenge und ihrer darauf aufbauenden Ableitungen gestanden. Die Himmelsmechanik habe er deswegen für seinen Definitionsversuch des Begriffs der Masse gewählt, weil es ihm notwendig schien, ein System zu betrachten, in dem man *alle* Interaktionen zwischen den Systemkomponenten in Rechnung stellen könne und das nach außen fast vollkommen isoliert sei.

Simon bezieht also aus dem Kontext der akademischen Lehre ein Paradigma der Begründung wissenschaftlicher Theorien, das Begründen als schrittweisen Aufbau eines Gebäudes von Satzaussagen auf unveränderlichen, ein für alle Mal festen (empirischen) Fundamenten auffaßt. Nach dieser Vorstellung ist das alte Wissen die Grundlage für die Begründung des neuen Wissens, bzw. die theoretische Ebene ist völlig rückführbar auf die empirische.

Im weiteren Verlauf des Kapitels (und auch der wissenschaftlichen Entwicklung des Autors) bekommt der Vorrang des Problems der eindeutigen Identifizierbarkeit theoretischer Terme eine andere Grundlage: für die Probleme der Computersimulation und der statistischen Analyse hat die Möglichkeit, bestimmte Parameter eindeutig identifizieren und bestimmen zu können, eine besondere Bedeutung. Da wir uns aber hier für eine angemessene allgemeine Auffassung wissenschaftlicher Theorien interessieren, wollen wir diese Problemverschiebung bei Simon nicht weiter verfolgen.

Es wurde bereits oben gezeigt, daß dieses Verständnis der Begründungsproblematik und der damit verbundene Vorrang von Vorstellungen der Kontinuität in der Theorieentwicklung auf der anderen Seite dazu führt, daß für bestimmte Momente der Theorieentwicklung die Diskontinuität verabsolutiert wird bzw. daß die Entwicklung einer Theorie als etwas angesehen wird, das der Theorie selbst äußerlich ist. Die Begründung der Theorie und ihre Entwicklung werden als voneinander unabhängig vorgestellt.

Im Unterschied zu dieser klassischen Konzeption des Begründungsproblems, die, wie gezeigt, untrennbar ist von einer statischen Wissensauffassung, vertritt Sneed in dieser Frage eine Position, die auf den dynamischen Charakter des Wissens abgestellt ist. Sie läßt sich in den folgenden Punkten zusammenfassen:

(1) Es gibt keine festen Fundamente des Wissens, weder in dem Sinne, daß die empirische Grundlage einer Theorie invariant ist, noch in dem Sinne, daß das Verständnis darüber, was ein Test bzw. eine Begründung einer Theorie ist, unverändert bleibt. Jede neue gelungene Anwendung der Theorie stellt sowohl einen empirischen Test als auch eine neue Methode eines Tests dar. Einer Theorie steht es also nicht a priori auf der Stirn geschrieben, was es bedeutet, sie zu testen.

(2) Die Konsequenz ist, daß die Frage der Begründung einer Theorie untrennbar von ihrer Entwicklung ist. Eine Lösung des Begründungsproblems in irgendeinem absoluten Sinne gibt es nicht. Es gibt nur eine relative Lösung. Jeder Versuch der "absoluten" Lösung des Begründungsproblems würde sofort wieder das eingangs erörterte "Problem der theoretischen Terme" mit seiner Alternative eines schlechten Zirkels oder eines unendlichen Regresses wirksam werden lassen. Die Verwobenheit des Entwicklungs- und des Begründungsproblems wird in der Ramsey-Darstellung des empirischen Gehalts einer Theorie, in der komplexen Weise, in der theoretische und nicht-theoretische Terme, altes Wissen und neues Wissen dort aufeinander bezogen sind, sehr anschaulich zum Ausdruck gebracht.

(3) Die theoretischen Terme einer Theorie stellen so etwas wie "selbst-evidente" Grundlagen dar, da sie weder Observable sind, noch in Abhängigkeit von Observablen definierbar. Dies stellt zunächst gegenüber der klassischen Auffassung keinen Unterschied dar, da auch in der Aristotelischen oder der Euklidischen Sicht angenommen wurde, daß Axiome evidente Grundlagen einer Theorie sind.

Der Unterschied ergibt sich daraus, *daß aufgrund des untrennbaren Zusammenhangs von Begründung und Anwendung die Begründung (die Evidenz) gleichsam in die Zukunft verlegt wird. Die allgemeinere, umfassendere, entwickeltere Theorie begründet* *die weniger allgemeine Theorie.* Bei Sneed bedeutet das, daß die Theorie begründet wird durch die Gesamtheit aller Anwendungen als einer neuen Qualität.

Dieses Verständnis von Begründung, das für die Wissenschaft der Neuzeit im Unterschied zur antiken Wissenschaft charakteristisch ist (obwohl es im neuzeitlichen wissenschaftlichen Selbstverständnis nicht immer so reflektiert wurde), wird sehr deutlich in den folgenden Bemerkungen von Krajewski zum Ausdruck gebracht. Krajewski befaßt sich mit dem Problem der Theorienreduktion und sagt in diesem Zusammenhang: "We have designated the reduced theory by T_1 although it is logically secondary and therefore is designated by many authors as T_2. We have done so for chronological reasons. In the development of science the reducendum usually appears earlier than the reducens. We explain an old theory by a new one because the latter is usually more general (explanans must be, of course, not less general than explanandum). True, in the past, when people tried to explain phenomena animistically they did not use general laws but 'explained' unknown phenomena by known (or seemingly known) ones. The situation was similar with the mechanistic explanation, e.g. the consideration of an organism as a machine. However, in genuine scientific explanation we have an inverse relationship we explain the better known by the worse known (e.g. the rainbow by the laws of optics) because we usually know particular phenomena better than general laws (cf. Feigl, 1964). The positivistic attempts to explain abstractions by sense-data, i.e. the worse known by the known, are as naive as the animistic 'explanations' (and are themselves animistic in essence since the psychological phenomena are considered as the final explanans)." (Krajewski 1977, S.30/31)

Begründung innerhalb des Sneedschen Formalismus ist in einem doppelten Sinne aufzufassen; auf der Ebene des Strukturkerns K, also auf der syntaktischen Ebene, heißt Begründung Zurückführung auf theoretische Terme. Auf dieser Ebene gibt es also eine formale Parallele zum klassischen Begründungsverständnis als Rückführung des neuen Wissens auf das alte. Insofern aber theoretische Terme in ihrer Bedeutung offen sind, bedeutet

"Begründen" auf der inhaltlichen, gegenständlichen, semantischen Ebene gerade einen Vorgriff auf die Zukunft, auf die Menge I der intendierten Anwendungen. Das neue Wissen begründet das alte Wissen, das weniger Bekannte begründet das Bekannte.

Das dualistische Theorienkonzept von Sneed und der enge Zusammenhang von "Begründung" und "Anwendung", der in dieser Konzeption zum Ausdruck gebracht wird, macht im Nachhinein die große Bedeutung verständlich, die im I. Kapitel den Vorstellungen von Graßmann beigemessen wurde. In der Tat stellt die "Lineale Ausdehnungslehre" von Graßmann mit seiner durchgängigen Einteilung von "Theorie" und "Anwendungen" und der Benutzung der Anwendungen als didaktisches Mittel, um die leitende Idee der formalen Entwicklung herauszustellen, also ihr Einsatz als Mittel der Begründung, die Entwicklung eines Theorienbegriffs dar, der sich ganz auf der Linie der Sneedschen Konzeptualisierung von Theorien der mathematischen Physik bewegt.

Der Zusammenhang von Entwicklung und Begründung bzw. von Theorienentwicklung und Gegenstandsbezug der Theorie deutet die oben geschilderten Sachverhalte, die besagen, daß theoretische Terme eliminierbar im Fall endlicher Modelle und i.a. nicht-eliminierbar bei unendlichen Modellen sind. Dieser Zusammenhang legt es nahe, das Vorkommen unendlicher Modelle als Ausdruck der prinzipiellen Nichtabschließbarkeit *und* des Gegenstandsbezugs des Erkenntnisprozesses zu interpretieren. Einerseits bringen Unendlichkeitsbegriffe zum Ausdruck, daß eine bestimmte Operation bzw. ein bestimmter Entwicklungsprozeß ohne eine prinzipielle Schranke fortgesetzt werden kann. Insofern stehen sie für die "Unerschöpflichkeit" des Objektes; in der Verfeinerung meiner Erkenntnis über das Objekt gibt es im Prinzip keine Grenze. Dies ist das Verständnis, das im wesentlichen dem Potentiell-Unendlichen zugrunde liegt. Andererseits unterwerfen Unendlichkeitsbegriffe die infrage stehenden Operationen auch gewissen Regularitäten. (z.B. ist es ein wohlbekanntes Phänomen, daß in der Mathematik häufig Probleme, die nur endliche Prozesse und endliche Mengen beinhalten, wesentlich komplizierter und schwieriger zu lösen sind, als solche, die unendliche Prozesse umfassen.) Insofern bringen die Unendlichkeitsbegriffe die Determinierheit der Operationen und Handlungen durch die Gegenstände zum Ausdruck bzw. sie stehen dafür, daß das System, in dem man sich bewegt, Teilsystem eines größeren Systems ist. Das aber heißt, daß das Unendliche auch auf Begrenzungen führt. Beide Momente, sowohl das der "Unerschöpflichkeit" als auch das der "Begrenzung" scheinen nun für ein Verständnis der Beziehung von Entwicklung und Begründung wesentlich zu sein. Zum einen geht es darum, als konstitutiv für eine Theorie zu verstehen, daß sie mit offenen Datenmengen, wie Sneed an einer Stelle sagt, umgeht, daß die Theorie Entwicklungsspielraum hat. Zum anderen muß im Blick behalten werden, daß eine Theorie nicht Beliebiges aussagt, daß sie durch die Empirie kontrolliert wird und sich in einer bestimmten Richtung entwickelt. In diesem Sinne scheinen die oben relativ ausführlich zitierten Ergebnisse der logischen Forschung zur Elimination theoretischer Terme eine Projektion dieser Zusammenhänge auf die Ebene der formalen Logik zu sein.

Fassen wir zusammen! In der Simonschen Konzeptualisierung ist das Problem der Theoriendynamik ein dem Theorienverständnis äußeres Problem, während es bei Sneed ein immanentes Problem wird, für Simon sind auftretende Widersprüche absolut, für Sneed nur partiell; für Simon zählt die einzelne Anwendungssituation, während für Sneed die Synthese der Anwendungen zählt; für Simon sind Theorien endliche Gebilde, für Sneed unendliche; für Simon sind Theorien nicht hierarchisch (für ihn ist das 2. Newtonsche Gesetz $K = m\cdot\frac{d^2s}{dt^2}$ verzichtbar), während sie für Sneed hierarchisch sind (für ihn ist $K = m\cdot\frac{d^2s}{dt^2}$ nicht verzichtbar).

Beide Konzeptionen beinhalten einen bestimmten Typ des Umgehens mit der Erfahrung und einen bestimmten Typ der Kommunikation. Wärens Simon sowohl in der Verarbeitung von Erfahrung als auch in der Kommunikation ein bestimmtes Repertoire an gesellschaftlich vorhandenen Operationen und Handlungschemata voraussetzt (z.B. ist der Computer Repräsentant eines solchen Repertoires) und nicht über den durch dieses Repertoire gesetzten Rahmen hinausgeht, befaßt sich die Sneedsche Konzeption gerade mit dem Problem, wie Neues in die Theorie und in die Kommunikation einbezogen werden kann, und es erweist sich, daß man zur Lösung dieses Problems neben den operativen auch die reflektiven Momente als legitime Bestandteile einer Theorie anerkennen muß.

Der Unterschiedlichkeit des Theorienverständnisses, wie es in den beiden dargestellten Positionen zum Problem der Elimination theoretischer Terme zum Ausdruck kommt, läuft im Kern darauf hinaus, daß in der Auffassung, die von der Elimination theoretischer Terme ausgeht, einseitig der Aspekt der Simulation der Wirklichkeit durch die Theorie im Vordergrund steht. Andererseits bringt die Hierarchisierung, die bei Sneed mit dem Problem der Elimination theoretischer Terme vorgenommen wird, daß nämlich theoretische Terme global als unverzichtbar angesehen werden, während sie lokal eventuell durchaus eliminiert werden können, den Doppelcharakter der Theorien mit sowohl simulativem als auch explorativem Charakter sehr deutlich zum Ausdruck. Das explorative Moment von Theorien wird im Kapitel IV. weiter entwickelt werden. Wenn es richtig ist, daß die Frage der Eliminierbarkeit bzw. Nicht-Eliminierbarkeit eines theoretischen Terms in so starkem Maße mit den zentralen Problemen der Theorienbegründung und Theorienentwicklung zusammenhängt, wie es hier dargestellt wurde, dann muß auch umgekehrt die Schlußfolgerung gezogen werden, daß in konkreten wissenschaftshistorischen bzw. begriffsgeschichtlichen Untersuchungen die Frage nach der Eliminierbarkeit eines Begriffes ein heuristisches Forschungsmittel von großer Bedeutung ist, anhand dessen sich die zentralen Probleme der Theorienentwicklung und -begründung aufrollen lassen.

Der Sneedsche Formalismus gestattet es, auf einer modelltheoretischen Ebene nachzuvollziehen, was "normalwissenschaftliche" Forschung im Kuhnschen Sinne heißt, mit all den Eigenarten, die viele Wissenschaftstheoretiker solange an der Kuhnschen Konzeption irritiert hat, die man aber im Grunde als Umschreibungen des operativen Prinzips in der Wissenschaft, des aktiven Charakters der Erkenntnis und als eine systemtheoretische Betrachtung des Begründungsproblems auffassen kann. Insbesondere ist der Kuhnsche Begriff des Paradigma aufs engste verknüpft mit den theoretischen Termen und den auf diese Terme bezogenen "constraints" innerhalb der begrifflichen Struktur K und der paradigmatischen Menge I_o von Anwendungen der Theorie. An dem Kuhnschen Paradigmenbegriff schien es besonders rätselhaft, daß das Paradigma auf der einen Seite ein bestimmtes Gegenstandsverständnis konstituierte und auf der anderen Seite hinreichend problemhaltig sein mußte, um orientierend für eine Theorie wirken zu können. Wir haben uns anhand der Diskussion über die Eliminierbarkeit der theoretischen Terme vor allem bemüht zu zeigen, wie beide Anforderungen innerhalb des Sneedschen Formalismus realisiert werden. Sneed begründet ausführlich (Sneed 1971, S. 302), daß die "constraints" besonders eng mit dem vortheoretischen Objektverständnis zusammenhängen. In der Tat bilden die "constraints" besonders starke Annahmen über *Invarianten* auf der Ebene der Gegenstände, darüber, "wie die Welt beschaffen ist", die eine unabdingbare Voraussetzung sind, um die theoretischen Begriffe überhaupt anwenden zu können. Demgegenüber scheint der mathematische Formalismus weit eher offen für Modifikationen und Veränderungen zu sein, die durch Versuche der Anwendung bzw. durch die Empirie möglicherweise erzwungen werden. Auf der anderen Seite sind die theoretischen Terme eher zu verstehen als Repräsentation des Problemgehalts einer Theorie. Sie werden von Sneed als Größen beschrieben, die am Beginn der Theorieentwicklung von hohem Unbestimmheitsgrad sind und im Laufe der Entwicklung der Theorie durch die aufeinanderfolgenden Anwendungen zunehmend präzisiert und bestimmt werden. Zusammen mit der paradigmatischen Menge von Anwendungen I_o stellen die theoretischen Terme die Keimzelle einer Theorie dar, aus der heraus sich die gesamte Theorie entfaltet. Kybernetisch gesprochen stellen sie Mechanismen der Selbstregulation der Theorie dar. Sie sind daher Projektionen des operativen Prinzips auf die Ebene der Theorie.

Theoretische und nicht-theoretische Terme, Theorie und Empirie, begrenzen sich gegenseitig. Die Theorie begrenzt die Empirie dadurch, daß sie die Empirie plant, die Empirie begrenzt die Theorie, indem sie überprüft, ob die in der Theorie entwickelten Schemata zur Aneignung der Wirklichkeit realitätstauglich sind.

Eine Theorie entwickelt sich nach doppelten Kriterien. Sie ist auf der Ebene des symbolischen Kalküls durch Kriterien der inneren Vollkommenheit bestimmt, auf der Ebene der Empirie durch Kriterien äußerer Bewährung (vgl. Baslenow/Samorodnizki 1977).

Daher ist auch die Formulierung, daß theoretische Terme aus Gründen der "Darstellungsökonomie" in Theorien fungieren, nur einseitig, aber nicht völlig falsch; sie bezieht sich auf die Kriterien auf der Ebene des Kalküls und berücksichtigt nicht die Kriterien der äußeren Bewährung.

Die hier gegebene Skizze kann man schematisch so zusammenfassen. Am Anfang der Theorienentwicklung steht ein *Paradox*, eine Erfahrung oder ein Sachverhalt, der vom Standpunkt des alten Wissens nicht erklärbar ist. Der nächste Schritt besteht darin, dieses Paradox bzw. das noch Unbekannte in Form einer *Definition* zur Grundlage der neuen Theorie zu machen. Es werden theoretische Terme eingeführt und die Nebenbedingungen ("constraints") expliziert, die das invariante Objektverständnis zum Ausdruck bringen. Dann wird die Theorie *angewandt*. Die ursprünglich nur durch gewisse funktionelle Eigenschaften charakterisierten theoretischen Terme erhalten strukturelle Bestimmtheit. Die innere Struktur der theoretischen Begriffe wird zunehmend aufgeklärt. Der ganze Prozeß ist nur verstehbar, wenn man den hierbei wirksamen *Prozeß der Selbstregulation* des Begriffs im Auge behält, nicht im Sinne einer "Selbstbewegung der

Idee", aber doch als Projektion des Verhältnisses von Regulation zu Selbstregulation in der gegenständlichen Tätigkeit auf die Ebene der Theorie. Man kann dies Moment der Selbstregulation der theoretischen Terme auch dadurch ausdrücken, daß man sagt, daß der Prozeß der Bestimmung theoretischer Terme eine Subjekt-Subjekt-Bestimmung und keine Subjekt-Prädikat-Bestimmung ist.

Wir möchten an dieser Stelle daran erinnern, daß Voraussetzung und Ergebnis der von Sneed entwickelten Konzeption der Abschied von einer Vorstellung ist, die Theorien als Klassen von Sätzen auffaßt, und der Übergang zur Auffassung einer Theorie als Paar $\langle K, I \rangle$ aus begrifflicher Struktur und Menge der intendierten Anwendungen. Jede monistische (sei es eine empiristische, sei es eine rationalistische) Auffassung verfällt entweder dem "Problem der theoretischen Terme" oder "dem Dilemma des Theoretikers". (Vgl. auch Stegmüller 1973, der die"Preisgabe des statement view" ebenfalls besonders heruasstreicht.)

Mit Hilfe des allgemeinen Schemas

S	-	T	-	O
(Subjekt)		(Tätigkeit)		(Objekt)

kann man auch sagen, daß die Beziehungen S - T und T - O (Selbstregulation und Regulation, symbolische Ebene und Gegenstandsebene) einerseits eine relative Eigenständigkeit erhalten, andererseits aber (im wissenschaftlichen Begriff) miteinander vermittelt bleiben. Eben dieser gegenseitige Vermittlungszusammenhang ist impliziert, wenn gesagt wird, daß Theorie und Empirie sich gegenseitig begrenzen.

Sucht man nun nach verallgemeinerten Beschreibungsmöglichkeiten der bei Sneed diskutierten Problematik, die es uns gestatten würden, diese Probleme auch in die Mathematik hinein zu verfolgen, dann ergibt sich als erste Feststellung, daß bei Sneed das Problem des Verhältnisses von impliziter und explititer Definition bzw. die "Methode der idealen Elemente" betrachtet wird.

Den umfassendsten Ausgangspunkt aber bezieht man wohl, wenn man sieht, daß die zur Problematik der theoretischen Terme in der Sneedschen Auffassung analoge Problematik in der Mathematik diejenige des angemessenen Verständnisses des *Variablenbegriffs* ist. Dabei ist es ein erster Zugang zu diesem Problem, die Variable aufzufassen als ein Funktionsmodell (die Variable ist determiniert durch gewisse funktionelle Beziehungen), das im Zuge der Entwicklung bzw. im Prozeß ihrer Elimination in ein Strukturmodell transformiert wird (zunehmend werden die "inneren" strukturellen Beziehungen aufgedeckt). Eine "black box" wird in ihre Bestandteile, d.h. in "elementarere" black boxes zerlegt. Der Zweck eines solchen Übergangs vom Funktions- zum Strukturmodell ist offenbar der der theoretischen Beherrschung bzw. der Vorhersage. Umgekehrt kann der Prozeß des Übergangs vom Struktur- zum Funktionsmodell (die reellen Zahlen werden z.B. nicht mehr konstruktiv erzeugt, sondern axiomatisch charakterisiert), vom Expliziten zum Impliziten dadurch gekennzeichnet werden, daß Variablen eingeführt werden. Der Zweck dieses Prozesses liegt darin, die Möglichkeiten des operativen Umgangs mit der Theorie zu erhöhen. Das folgende Schema ist ein Versuch, diese Beziehungen darzustellen.

Methode		Implizites		Funktionsmodell
	Objekte werden transformiert in Beziehungen ↓	Variablen-elimination (Vorhersage)	Beziehungen werden transformiert in Objekte ↑	Variablen-einführung (operativer Umfang)
Theorie		Explizites		Strukturmodell

Nach dem Obengesagten ist klar, daß die Einführung von Variablen hier im weitesten Sinne verstanden wird als Bildung eines Paradigma. Es folgt aus diesem Schema, daß Paradigmen (Variablen) in zweierlei Weisen in die Theorie gelangen. Nämlich zum einen als mehr oder weniger unmittelbare Modellierung praktischer bzw. innertheoretischer Probleme. Auf der anderen Seite können Variablen auch eingeführt werden (wenn man den Pfeil vom Expliziten zum Impliziten ernstnimmt) als Folge innerwissenschaftlicher *Kommunikationsprobleme*. Diese Bewegung vom Expliziten zum Impliziten stellt sich auf der subjektiven Ebene als "Ökonomisierung" der Theorie dar. In der Mathematik geht diese Bewegung vom Problem der "Unsurveyability" mathematischer Beweise (das z.B. kürzlich in zugespitzter Form mit dem Hakenschen Beweis des Vierfarbensatzes aufgeworfen wurde) aus. Wygotski reflektiert es in seiner Formel der "Einheit von Kommunikation und Generalisierung". Es ist wichtig, auf diesen Prozeß hinzuweisen, weil er zeigt, daß die Identifizierung, die im 19. Jahrhundert zwischen synthetischer(euklidischer) Methode (also der Explikation) und Kommunikation hergestellt wurde, einseitig und letztlich nicht haltbar ist. Diese Identifizierung beruht, wie oben ausgeführt, auf der Identifizierung von Zeichen und Bezeichnetem. Die Herausbildung der axiomatischen Methode am Ende des 19. Jahrhunderts ist auch eine Folge der Zuspitzung des Kommunikationsproblems.

Die "Erkenntnistheorie der maximalen Runde" bzw. die Sneedsche Behandlung des Problems der theoretischen Terme, läßt sich also sowohl auf das Kommunikationsproblem als auch auf das Verhältnis von Theorie und Empirie anwenden. Die "Lösung" dieser Probleme ist jeweils auf die Theoriendynamik bezogen. Die "Keimzelle" aller dieser Probleme, durch die sie miteinander zusammenhängen, ist das komplizierte Verhältnis von Zeichen und Bezeichnetem.

KAPITEL III: ZUM VERHÄTLNIS VON ENTWICKLUNG UND BEGRÜNDUNG IN DER MATHEMATIK

Im folgenden soll versucht werden, die allgemeinen Ergebnisse, die im Kapitel II im Hinblick auf die Entwicklungsdynamik wissenschaftlicher Theorien aus der Sneedschen Konzeption abgeleitet wurden, für ein Verständnis des Verhältnisses von Entwicklung und Begründung im speziellen Fall der Mathematik auszuwerten. Eine der grundlegenden Einsichten im II. Kapitel bestand darin, daß die mit dem Auftreten theoretischer Terme in empirischen Theorien verbundene Paradoxie bzw. Zirkularität, daß nämlich die theoretischen Terme die Theorie bestimmen und umgekehrt die Theorie die Bedeutung der theoretischen Terme festlegt, nur dann auflösbar wird, wenn man Theorien als sich entwickelnde versteht. Dies machte es wiederum notwendig, die Aussagenkonzeption wissenschaftlicher Theorien aufzugeben und sie statt dessen als Paare $\langle K, I \rangle$ aus theoretischer Struktur einerseits und der Menge der intendierten Anwendungen andererseits aufzufassen.

Von einem anderen Gesichtswinkel her gesehen läßt sich dieselbe Problemstruktur auch so beschreiben: Auf den ersten Augenschein hin scheint es schlechterdings undenkbar, wie der "Holismus", also die Einsicht, daß (empirische) Bedeutung einer Theorie nur als ganzer und nicht einzelnen Aussagen zukommt, vereinbar sein soll mit der Tatsache, daß Theorien sich entwickeln, daß man also in jedem Moment der Theorieentwicklung gleichsam nur über einen Teil der Theorie verfügt. Geht man von diesem Problem aus, dann zeigt sich, daß nun die theoretischen Terme einer Theorie die "Lösung" der Schwierigkeit darstellen. Insbesondere hat die Diskussion zur Frage ihrer Eliminierbarkeit gezeigt, daß in der Beziehung von globaler Nicht-Eliminierbarkeit und lokaler Eliminierbarkeit der theoretischen Terme sich das notwendige Verhältnis von Offenheit einer Theorie (Entwicklungsaspekt) und Abgeschlossenheit (holistische Bedeutungsfestlegung) widerspiegelt, das für ein Verständnis der Vereinbarkeit von Holismus und Entwicklungsdynamik unabdingbar zu sein scheint. Wie gesagt, handelt es sich bei diesen Überlegungen nur um zwei verschiedene Sichtweisen auf ein und denselben Tatbestand, daß nämlich Theoriendynamik und theoretische Terme notwendig und untrennbar aufeinander bezogen sind.

Im weiteren sollen nun für die Mathematik einerseits das Moment der Zirkularität am Beispiel der in der Grundlagendiskussion über die Paradoxien der Mengenlehre wichtigen Problematik der "imprädikativen Definitionen" diskutiert werden; dies führt (wie im Fall der Sneedschen Konzeption) auf die Variabilität des Verhältnisses von Entwicklung und Begründung sowie auf die Notwendigkeit eines dualen (sowohl intensionalen als auch extensionalen) Bedeutungsbegriffs (ebenfalls wie bei Sneed). Auf der anderen Seite wird vom Variablenbegriff in der Mathematik bzw. allgemeiner von der "Methode der idealen Elemente" gezeigt, daß sie eine ganz analoge Funktion wie die theoretischen Terme in der Sneedschen Konzeption spielen und von daher als Ausdruck des sowohl operativen als auch ganzheitlichen Charakters des Wissens aufgefaßt werden können.
Es versteht sich, daß eine solche Interpretation nur bei einem nicht zu wörtlichen Bezug auf den Formalismus Sneeds möglich ist. Während in dieser Diskussion (wie auch schon im Kapitel II) das Moment der Wissensdynamik stark im Vordergrund steht und das Begründungsproblem nur als abgeleitete, gleichsam zweitrangige Fragestellung erscheint, gilt es nun, die relative *Eigenständigkeit* des Begründungsproblems und der formalen Logik, die im sozialen bzw. kommunikativen Charakter des Wissens verankert ist, herauszuarbeiten und zu verstehen.

III.1. *Imprädikative Definitionen*

Im Verlauf der Versuche, die Mathematik auf der formalen Logik bzw. der Mengenlehre zu begründen, wurden um die Jahrhundertwende eine ganze Reihe von Paradoxien entdeckt, die

Bertrand Russell im Jahre 1908 in seinem Aufsatz "Mathematical logic as based on the theory of types" zusammenfassend analysierte. Russell behandelt insgesamt sieben solcher Paradoxien, von denen hier drei genannt seien:

1. "Der Kreter Epimenides sagte, daß alle Kreter lügen, wobei alle anderen Aussagen der Kreter Lügen waren. Ist diese Aussage eine Lüge?" (Russell 1976, S.23)

2. "w sei die Klasse aller Klassen, die nicht Elemente ihrer selbst sind. Danach ist, welche Klasse x auch sein mag, 'x ist ein w' mit 'x ist kein w' äquivalent, so daß 'w ist ein w' mit 'w ist kein w' äquivalent ist, wenn man x den Wert w gibt." (Russell 1976, S.23)
   Dies ist die "Russellsche Paradoxie".

3. "Burali-Fortis Widerspruch kann in folgender Form dargestellt werden. Man kann zeigen, daß jede wohlgeordnete Folge eine Ordinalzahl besitzt, daß die Folge der Ordinalzahlen bis einschließlich einer gegebenen Ordinalzahl die gegebene Ordinalzahl um 1 übersteigt und daß (bei gewissen sehr naheliegenden Annahmen) die Folge aller Ordinalzahlen (wegen ihrer Mächtigkeit) wohlgeordnet ist. Daraus folgt, daß die Folge aller Ordinalzahlen eine Ordinalzahl, etwa Ω , besitzt. In diesem Falle aber hat die Folge aller Ordinalzahlen einschließlich Ω die Ordinalzahl $\Omega + 1$, die größer sein muß als Ω . Daher ist Ω nicht die Ordinalzahl aller Ordinalzahlen." (Russell 1976, S.24)

In seiner Analyse dieser Paradoxien arbeitet Russell nun heraus, daß sie alle ein gemeinsames Merkmal haben, das man als *Selbstbezug* oder *Reflexivität* beschreiben könne. Alle Widersprüche hätten die "Annahme einer Gesamtheit gemeinsam, die, wenn sie legitim wäre, sogleich durch neue Elemente erweitert würde, die mit ihrer Hilfe definiert wären. Dies Ergebnis führt uns zu der Regel: Was immer alle Elemente einer Menge involviert, kann kein Element dieser Menge sein. Oder umgekehrt: Wenn eine Menge, die eine Gesamtheit darstellt, Elemente besitzt, die nur mit Hilfe dieser Gesamtheit definierbar sind, dann stellt die besagte Menge keine Gesamtheit dar." (Russell 1976, S.26) Diese Rückführung des Paradoxienproblems auf das Vorkommen von Definitionen, in denen Objekte unter Rückgriff auf eine Gesamtheit definiert werden, zu denen das zu definierende Objekt selbst gehört, verdankt Russell H. Poincaré, der diese Auffassung in einer Reihe von Artikeln unter dem Titel "Les Mathêmatiques et la Logique" bereits in den Jahren 1905/6 geäußert hatte (vgl. zum historischen Verlauf dieser Diskussion das lesenswerte Kapitel "Imprädikative Verfahren" in C. Thiel 1972, dem auch einige der hier benutzen Literaturangaben entnommen sind). Russell macht nun das Verbot dieser sogenannten *"imprädikativen" Begriffsbildungen* zum Konstruktionsprinzip seiner (verzweigten) Typentheorie: "Die Gliederung der Objekte in Typen ist wegen der sonst entstehenden reflexiven Trugschlüsse notwendig. Diese sind, wie wir gesehen haben, nach dem Prinzip zu vermeiden, das man als *Zirkelschlußprinzip* [im Englischen "vicious-circle principle", H.N.J.] bezeichnen kann, nämlich:'Keine Gesamtheit kann Elemente enthalten, die durch diese selbst definiert sind'. Dieses Prinzip wird in unserer technischen Sprache zu:'Was immer eine gebundene Variable enthält, kann kein möglicher Wert dieser Variablen sein'. Daher muß, was immer eine gebundene Variable enthält, anderen Typs als die möglichen Werte dieser Variablen sein. Wir sagen, daß es *höheren* Typs ist. Folglich bestimmen die gebundenen Variablen, die in einem Ausdruck enthalten sind, dessen Typ. Das ist das leitende Prinzip der folgenden Überlegungen." (Russell 1976, S.38). Man erhält so eine Hierarchie von Ausdrücken, angefangen bei den Termen der elementaren Aussagen, den Individuen, über Aussagen erster Ordnung, die nur elementare Aussagen und Individuen als gebundene Variable enthalten, bis zu Aussagen beliebig hoher (aber endlicher) Ordnung. Dabei ist die Ordnung einer Aussagenfunktion (propositional function) um 1 höher als die höchste in der Aussagenfunktion vorkommende Ordnung einer gebundenen Variablen. Mit dieser Konzeption (die in ihren Einzelheiten und unterschiedlichen Versionen als verzweigte bzw. einfache Typentheorie hier nicht weiter dargestellt werden soll) werden in der Tat die bekannten Paradoxien vermieden. So kann in dem Paradox des Lügners die Falschheit von Aussagen nur noch für Aussagen einer bestimmten Ordnung behauptet werden, und diese Behauptung selbst wiederum ist dann von höherer Ordnung. Die Aussage, daß eine Menge sich selbst als Element enthält bzw. nicht enthält, ist aufgrund der Stufenhierarchie nicht bildbar, und ebenso kann immer nur von Ordinalzahlen einer bestimmten Ordnung, nicht aber von der Menge aller Ordinalzahlen gesprochen werden.

Wie man sieht, ist die Russellsche Typentheorie stark von empiristischen Abstraktionsvorstellungen geprägt, und, wie W. Langhammer (Langhammer 1974) bemerkt, muß man bei der Interpretation der Russellschen Beiträge zur Grundlegung der Mathematik in starkem Maße ihre Einbindung in die Traditionen des englischen Empirismus berücksichtigen. Dem Empirismus ist die Russellsche Typentheorie insofern verhaftet, als, ausgehend von der Existenz (empirischer) Individuen, Klassen und Begriffe höherer Ordnung lediglich als "façon de parler", wie Gödel (Gödel 1944) bemerkt, betrachtet werden, dies ganz entsprechend der Abstraktionstheorie des Empirismus (bzw. des Nominalismus).

Der Herausbildung des "vicious-circle principle" im Werk von Russell, also des Verbots imprädikativer Definitionen, ist bei Russell zunächst die Überlegung (in "The principles of mathematics", 1903) vorangegangen, daß der Kern der Paradoxien in der Annahme begründet liege, daß sich Klassen einerseits und Prädikate andererseits eindeutig entsprechen würden. Der Punkt, den Russell also zunächst herausarbeitet, ist der, daß extensionale und intensionale Auffassung der Logik nicht austauschbar und aufeinander reduzierbar sind. Vielmehr sagt Russell, daß, wenn eine Kollektion von Objekten durch eine Aussagenfunktion definiert werde, man nicht berechtigt sei, diese Kollektion selbst wieder als einheitliches Objekt aufzufassen. "Perhaps the best way to state the suggested solution is to say that, if a collection of terms can only be defined by a variable propositional function, then, though a class as many may be admitted, a class as one must be denied." (Russell, The principles of mathematics, II. Aufl., S.104)

In einem späteren Vortrag (1906) führt Russell aus (vgl. Thiel 1972, 137ff), daß es angesichts der Möglichkeit, durch bestimmte Prädikate, "inkonsistente Vielheiten" zu definieren, drei grundsätzliche Antworten gebe, nämlich die sogenannte "Zig-Zag Theory", die "Theory of Limitation of Size" und die "No Classes Theory". "Nach dem ersten Vorschlag definieren 'einfache' Bedingungen Klassen, 'komplizierte' Bedingungen dagegen nicht; nach dem zweiten ist die Größe der vorkommenden Klassen an den Antinomien schuld: Die größte Kardinalzahl ist 'zu groß', die größte Ordinalzahl ist 'zu groß', usw." (Thiel 1972, S.139).

Russell selbst konzentriert im folgenden seine Bemühungen auf die Entwicklung der "No Classes Theory", also auf einen Versuch, seine Theorie vollständig auf den Begriff der "propositional function" (also intensional) aufzubauen.

Man sollte als Ergebnis dieser ersten Diskussion über die Paradoxien der Mengenlehre festhalten, daß mit dem Auftauchen der Paradoxien die bis dahin relativ unproblematische Beziehung von Intension und Extension in der Logik problematisiert wird und jeder Lösungsversuch darauf hinausläuft, die Rückführbarkeit beider Momente aufeinander zu beschränken. Dies sollte im Hinblick auf das, was folgt, aber auch im Hinblick auf den dualen Theorienbegriff bei Sneed im Auge behalten werden.

In den "Principia Mathematica" geben Russell und Whitehead Formulierungen des "vicious-circle principle", die speziell auf die"propositional functions" zugeschnitten sind:"That is to say, a function is not a well-defined function unless all its values are already well-defined. It follows from this that no function can have among its values anything which presupposes the function, for if it had, we could not regard the objects ambigously denoted by the function as definite until the function was definite, while conversely, as we have just seen, the function cannot be definite until its values are definite. This is a particular case, but perhaps the most fundamental case, of the vicious-circle principle." (Russell/Whitehead 1968, S.39) Als Konsequenz folgt daraus insbesondere, daß für eine Aussagenfunktion ϕ Bildungen von der Art $\phi(\phi\,\hat{x})$ als bedeutungslos ausgeschlossen sind. (Mit ϕx wird bei Russell/Whitehead ein einzelner, aber unbestimmter Wert der Funktion ϕ, mit $\phi\,\hat{x}$ die Funktion als ganze bezeichnet.)

Der kritische Punkt liegt nun darin, daß eine zu radikale Anwendung des "vicious-circle principle" das logizistische Programm der Grundlegung der Mathematik selbst potentiell gefährdet. Denn imprädikative Definitionen lassen sich aus der Mathematik, vor allem aus der Analysis, nicht ausschließen (wie weiter unten noch an einigen Beispielen gezeigt wird).

Für Russell tritt das Problem, auf imprädikative Definitionen nicht verzichten zu können, z.B. bei dem Versuch auf, den Begriff der Identität zu definieren. Er möchte dabei die Tatsache, daß x = y impliziert $\phi x = \phi y$ für jedes Prädikat ϕ umkehren und als definierende Bedingung der Identität nehmen. Aufgrund der Typentheorie darf er aber immer nur von Eigenschaften einer bestimmten Ordnung n sprechen und würde so eine unendliche Hierarchie von Identitätsbegriffen erhalten. (Russell/Whitehead 1976, S.7)
Ein zweites Beispiel ist die Definition der natürlichen Zahlen in der Frege-Russellschen Tradition (vgl. z.B. M. Steiner 1975, S.34 bzw. Beth 1968, S.499). Diese Definition lautet üblicherweise:

$$Nx \underset{df}{\equiv} (F)\left[(F0 \wedge (y)\ [\,Fy \rightarrow Fy'\,]) \rightarrow Fx\right]$$

Hier ergibt sich nun, wie Russell sieht, das Problem, daß man gezwungen ist, als Wert für die gebundene Variable F insbesondere auch das Prädikat N zuzulassen. Das heißt aber nichts anderes, als daß N imprädikativ definiert ist. (Diese Tatsache war vorher bereits von Poincaré herausgearbeitet worden, der in seiner Kritik am Logizismus auf die Zirkelhaftigkeit der Definition der natürlichen Zahlen hingewiesen hatte.)

Russell/Whitehead führen als Ausweg aus diesen Schwierigkeiten in den "Principia Mathematica" das Axiom der Reduzibilität ("axiom of reducibility") ein, das Russell bereits 1908 in "mathematical logic as based on the theory of types" vorgeschlagen hatte. Es besagt,"daß ein jedes durch eine imprädikative Definition eingeführte Prädikat *umfangsgleich* ist mit einem prädikativ definierten Prädikat." (Bernays 1976, S.49) "The axiom of reducibility is the assumption that, given any function $\phi\hat{x}$, there is a formally equivalent predicative function, i.e. there is a predicative function which is true when ϕx is true and false when ϕx is false." (Russell/Whitehead 1976, S.56) Russell/Whitehead argumentieren, daß dieses Axiom zwar nicht selbst-evident sei, daß aber viele richtige Sätze aus ihm abgeleitet werden könnten und man es daher akzeptieren müsse. (S.59) Sie betrachten dieses Axiom als eine abgeschwächte Version des Komprehensionsaxioms (das besagt, daß jede Menge durch ein Prädikat und jedes Prädikat durch eine Menge bestimmt ist). Dieses Axiom erlaubt es nun Russell/Whitehead in der Tat, mit auftretenden imprädikativen Definitionen innerhalb ihrer Typentheorie zu operieren, da sie immer davon ausgehen können, daß es ein prädikatives Äquivalent zu ihnen gibt. Die oben genannten Probleme lassen sich so "auflösen".

In seinem Aufsatz "Die Philosophie der Mathematik und die Hilbertsche Beweistheorie" (1930) (wieder abgedruckt in: Bernays 1976) diskutiert P. Bernays dieses Axiom so:"Wie aber haben wir dieses Axiom der Reduzibilität aufzufassen? Aus seiner Formulierung geht nicht hervor, ob damit ein logisches Gesetz oder eine außerlogische Annahme ausgesprochen sein soll." (Bernays 1976 S.49) Wenn es sich um ein logisches Gesetz handele, müßte seine Geltung unabhängig davon sein, was für ein Bereich von vorlogischen Ausgangsprädikaten zugrunde gelegt werde. "Das würde aber besagen, daß eine axiomatische Theorie, in welcher die Formen des allgemeinen und des existentialen Urteils (das existentiale Schließen) nur auf die Gegenstände, nicht aber auf die Prädikate angewendet werden, keiner Erweiterung ihres

Prädikatenbereiches durch Einführung von imprädikativen Definitionen fähig ist, sofern nur das Axiomensystem so beschaffen ist, daß es zu seiner Erfüllung ein unendliches System von Gegenständen erfordert." (Bernays 1976, S.49) Zu einer solchen Behauptung gebe es aber definitive Gegenbeispiele. Das zwinge zur Annahme der zweiten Deutung, daß es sich bei dem Reduzibilitätsaxiom um eine Anforderung an den Ausgangsbereich der vorlogischen Prädikate handele. Damit verzichte man aber auf die Auffassung, daß der Bereich der Prädikate durch die logischen Prozesse erzeugt wird (also auch auf einen rein intensionalen, "konstruktivistischen" Standpunkt). Man sei gezwungen, die Gesamtheit der logischen Funktionen als eine unabhängi von den Erzeugungsprozessen existierende "kombinatorische" Mannigfaltigkeit vorauszusetzen. Damit verschwinde aber das Zirkelhafte an den imprädikativen Definitionen. Man kann sich dann eine imprädikative Definition als Prozeß einer Auswahl, nicht als schrittweisen Aufbau von Bedeutung vorstellen. Damit werde aber auch das Reduzibilitätsaxiom überflüssig. Diesen Schritt hätte die logistische Schule auf Anregung von Wittgenstein und Ramsey vollzogen und sei damit zu den einfacheren, aber höchst voraussetzungsvollen Positionen von Cantor und Schröder zurückgekehrt.

Wir wollen uns nun darauf konzentrieren, welche Bedeutung das Problem der imprädikativen Definitionen im Hinblick auf unsere vorliegende Fragestellung hat. Ist das Vorkommen von imprädikativen Definitionen innerhalb der Mathematik wirklich als so schwerwiegend und prinzipiell zu betrachten, daß das Moment der in ihnen steckenden Zirkularität als unvermeidlich anzusehen ist? Ist diese Zirkularität analog zu der zu sehen, die innerhalb der Sneedschen Konzeption im Hinblick auf die theoretischen Terme auftritt?

Um die erste Frage nach der Bedeutsamkeit der imprädikativen Definitionen innerhalb der Mathematik und bei ihrer Grundlegung zu klären, seien zunächst zur Illustration einige Beispiele imprädikativer Definitionen aufgeführt.

1. Der Satz z.B., daß eine in einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion, die an den Endpunkten des Intervalls verschiedene Vorzeichen hat, in diesem Intervall eine Nullstelle besitzt, kann nicht bewiesen werden, ohne daß von einer imprädikativen Definition dieser Nullstelle Gebrauch gemacht wird. Z.B. kann man die Nullstelle als das Supremum der Menge von Intervallpunkten definieren, auf denen die Funktion kleiner als Null ist (wenn die Funktion am linken "Intervallende" als negativ vorausgesetzt ist). Diese Definition ist imprädikativ wie Beispiel 2. zeigt.
2. Die *kleinste obere Schranke einer Menge* $X \subseteq \mathbb{R}$ ist eine Zahl $x \in \mathbb{R}$, so daß für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt: Es gibt ein $z \in X$ mit $z > y$ genau dann, wenn $y < x$ ist; in Formeln geschrieben

$$x = \sup X \longleftrightarrow (y) \ [(\exists z) \ \{z \in X \wedge z > y\} \longleftrightarrow y < x].$$

Diese Definition ist imprädikativ, da die Quantifikation über y sich auch auf das Element x erstreckt.

In seinem Versuch, die Analysis konstruktiv (auf einer intuitionistischen Grundlage) aufzubauen, dargestellt in seiner Schrift "Das Kontinuum" (1917), versucht Hermann Weyl vergeblich, den Satz von der Existenz einer kleinsten oberen Schranke für jede beschränkte, nichtleere Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ ohne Benutzung imprädikativer Definitionen zu beweisen. Weyl sieht sich daher gezwungen, von seinem Standpunkt aus die Gültigkeit dieses Satzes zu verneinen.

3. Der Cantorsche Beweis, daß das Kontinuum der reellen Zahlen nicht abzählbar ist, beruht wesentlich auf einer imprädikativen Schlußweise. Cantor nimmt in seinem Beweis ja an, daß die Menge aller reellen Zahlen in ihrer Gesamtheit in einer Abzählung vorliegt und definiert unter Voraussetzung dieser Gesamtheit eine weitere reelle Zahl, die nicht zu dieser Gesamtheit gehören kann. Diese reelle Zahl ist daher imprädikativ definiert. Das bedeutet, daß jeder Beweis, der von dem Diagonalverfahren Gebrauch macht, imprädikative Schlußweisen benutzt. Das bedeutet weiter, daß die Definition der *Zahl "Aleph Eins" imprädikativ* ist. (Dies wurde bereits von Poincaré herausgestellt.)

4. Oben wurde bereits darauf hingewiesen, daß die Definition der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen in der logizistischen Tradition von Frege und Russell imprädikativ ist. Darüber hinaus zeigt z.B. M. Steiner in seinem Buch "Mathematical Knowledge", daß etwa Quine bei seiner Begründung der Arithmetik in "Set Theory and its Logic" ebenfalls von imprädikativen Definitionen wesentlichen Gebrauch macht.

Es ist sicher ausgeschlossen (zumindest beim gegenwärtigen Stand der Grundlagenforschung), eine irgendwie abschließende Beurteilung der jeweiligen "Reichweite" prädikativer bzw. imprädikativer Verfahren zu geben. Es kann aber als sicher festgestellt werden, daß der Bestand der klassischen Mathematik nicht ohne die Benutzung imprädikativer Definitionen und Verfahren aufgebaut werden kann. Darüber hinaus gilt, daß die *Praxis mathematischer Forschung* unter Verzicht auf imprädikative Definitionen gar nicht denkbar ist. Das ist mit den einfachsten Beispielen zu belegen. So ist etwa die Definition eines Einselements einer Gruppe (Beth 1968, S.499) imprädikativ. Selbst wenn dies von einem prädikativen, begründenden Standpunkt aus als "harmlos" (wie Beth schreibt) betrachtet wird, weil Definitionen in der Algebra natürlich unter Voraussetzung der Mengenlehre und ihrer Widerspruchsfreiheit erfolgen, und daher wieder (siehe oben) als Auswahlprozesse verstanden werden können, beleuchtet dies doch den Punkt, den wir belegen wollten. Wir gehen daher im folgenden davon aus, daß das Auftreten und die Verwendung imprädikativer Definitionen in der Mathematik *nicht nur unverzichtbar ist, sondern auch für die Mathematik ein wesentliches Phänomen darstellt*, das in der Erörterung erkenntnistheoretischer Fragen zu Recht einen zentralen Stellenwert einnimmt. Dies ist übrigens auch die Position von Gödel (Gödel 1944). Dabei geht es natürlich nicht so sehr um die Zuspitzung mehr technischer Art, die das Problem der Zirkularität in der speziellen Gestalt der imprädikativen Definitionen findet, sondern darum, dieses Moment der Zirkularität selber allgemein (auch in anderen Formen) herauszuarbeiten und auf seine Konsequenzen hin zu analysieren.

Um Mißverständnisse zu vermeiden, sei angemerkt, daß damit nicht gesagt ist, daß die "imprädikativen Definitionen allein für die Paradoxien verantwortlich" seien. Beispielsweise werden in der einfachen Typentheorie imprädikative Definitionen zugelassen, die bekannten Paradoxien aber sind sämtlich ausgeschlossen.

Wenden wir uns nun der Aufgabe zu, ein mehr inhaltliches Verständnis des im Problem der imprädikativen Definitionen steckenden Gehaltes zu entwickeln. Dazu sei zunächst an die Beschreibung angeknüpft, die Henri Poincaré von den imprädikativen Definitionen gegeben hat. In seinem Aufsatz "La Logique de l'Infini" (1909, hier zitiert nach Poincaré 1913) sagt er, daß die formale Logik nichts anderes sei als das Studium der allen Klassifikationen gemeinsamen Eigenschaften. Sie lehre uns, daß zwei Soldaten, die im selben Regiment stünden, deshalb auch zur selben Brigade und folglich zur selben Division gehörten; und darauf reduziere sich die ganze Theorie des Schlußverfahrens. "Was ist nun die Bedingung dafür, daß die Regeln dieser Logik Geltung haben? Die verwendete Klassifikation muß *unveränderlich* sein. Wir erfahren, daß zwei Soldaten im selben Regiment stehen, und wir wollen daraus den Schluß ziehen, daß sie derselben Brigade angehören; wir sind dazu berechtigt, vorausgesetzt, daß während der Zeit, in der wir die Folgerung ausführen, keiner der beiden Soldaten von seinem Regiment zu einem anderen versetzt worden ist." (Poincaré 1913, S.100)

Die Paradoxien der Mengenlehre stammten nun alle daher, daß diese Bedingung der Unveränderlichkeit der Klassifikation verletzt würde. Poincaré diskutiert dann ein Beispiel einer bekannten Paradoxie: "Welches ist die kleinste ganze Zahl, die sich nicht durch einen Satz von weniger als hundert französischen Worten definieren läßt? Und vor allem, gibt es eine solche Zahl?

Ja, denn aus hundert französischen Worten kann man nur eine endliche Zahl von Sätzen bilden, da die Zahl der Worte des französischen Wörterbuches begrenzt ist. Unter diesen Sätzen wird es solche geben, die überhaupt keinen Sinn haben, oder die keine ganze Zahl festlegen; aber jeder dieser Sätze kann höchstens eine einzige ganze Zahl festlegen. Die Anzahl der ganzen Zahlen, die auf diese Weise definiert werden können, ist mithin begrenzt; folglich gibt es sicherlich ganze Zahlen, welche so nicht definiert werden können; und unter diesen wieder gibt es gewiß eine, welche kleiner ist als alle anderen.

Nein, denn gäbe es eine solche Zahl, so würde schon ihre bloße Existenz einen Widerspruch in sich schließen, weil sie durch einen Satz definiert wäre, der weniger als hundert Worte enthält, nämlich gerade durch den Satz, der aussagt, daß sie auf die oben angegebene Weise nicht definiert werden kann.

Die dargelegte Betrachtung beruht auf einer Einteilung der ganzen Zahlen in zwei Klassen, in die, die durch einen Satz von weniger als huntert Worten festgelegt werden können, und in die, die es nicht können. Wenn wir die Frage stellen, so erklären wir damit implizit, daß diese Klassifikation unveränderlich ist, und daß wir die Betrachtung nicht beginnen, bevor wir sie nicht endgültig festgelegt haben. Aber das ist gar nicht möglich. Die Klassifikation ist nicht früher abgeschlossen, bevor wir nicht alle Sätze von weniger als hundert Worten daraufhin untersucht und diejenigen ausgeschieden haben, die keinen Sinn ergeben, sowie auch, bevor wir nicht den Sinn derer festgestellt haben, die einen Sinn ergeben. Aber unter diesen Sätzen gibt es auch solche, welche erst nach Abschluß der Klassifikation einen Sinn gewinnen können, nämlich jene, in denen von dieser Klassifikation selbst die Rede ist. Wir fassen zusammen: Die Klassifikation der ganzen Zahlen kann nicht abgeschlossen werden, bevor die Sortierung der Sätze beendet ist, und diese Sortierung kann nicht beendet werden, bevor die Klassifikation nicht festgestellt ist; es wird daher weder die Klassifikation, noch die Sortierung jemals endgültig abgeschlossen werden können." (Poincaré 1913, S.101 ff)
Poincaré zeigt nun, daß sich diese, hier in aller Breite zitierte, Argumentation auch auf die anderen bekannten Paradoxien anwenden läßt. Insbesondere funktioniert auch das Cantorsche Diagonalverfahren so, daß zuerst eine Klassifikation der reellen

Zahlen gegeben wird, die anschließend durch eine weitere imprädikativ definierte wieder zerstört wird (siehe oben). Poincaré meint daher, daß zwei Arten von Einteilungen unterschieden werden müßten:"wohlbestimmte Einteilungen (classifications prédicatives), die durch Einführung neuer Elemente nicht umgestoßen werden können, und nicht wohlbestimmte Einteilungen (classifications non prédicatives), die bei Einführung neuer Elemente eine Umarbeitung des Ganzen notwendig machen." (Poincaré 1913, S.104) Dieses dynamische Moment der imprädikativen Definitionen, die Notwendigkeit der Umgestaltung eines Systems, in das ein imprädikativ definiertes Element eingeführt wird, und die Unmöglichkeit seiner additiven Hinzufügung wird auch von Hao Wang herausgestellt:"The complication with impredicative definitions is that we lose track of how new sets are introduced. To justify them we have to assume that sets are more or less already there so that the definition merely serves to describe certain properties of preexisting things rather than to bring the set defined into being. Or, in more technical terms, it is often hard to see whether or how an impredicative definition is satisfied. When we have already defined a domain of sets, the introduction of a new set by an impredicative definition would disturb the size and arrangement of the original domain, while a predicative definition would not." (Hao Wang 1974, S. 78)

Für die Veränderung einer bestehenden Klassifikation durch eine imprädikative Definition führt er ein Beispiel an. Sei z.B. K eine Menge von natürlichen Zahlen, so daß $m \in K$ genau dann gilt, wenn es eine Menge gibt, zu der m nicht gehört.

Ist nun z.B. $1 \in K$? Wenn $1 \notin K$, dann gehört 1 zu jeder Menge und mithin auch zu K ein Widerspruch. Wenn $1 \in K$, dann muß es eine andere Menge geben, zu der 1 nicht gehört. Das heißt also, obwohl man zunächst nur die Existenz einer einzigen Menge gefordert hat, kann dies nur dann gelten, wenn es zusätzlich noch andere Mengen gibt "to fill the gaps". (Hao Wang 1974, S.78)

Die Poincarésche Interpretation und die genannten Beispiele illustrieren sowohl den *Aspekt der Wissensentwicklung (in Form der Selbstanwendung)* und den der *Systemganzheit* sowie die gegenseitige *Interdependenz* beider Aspekte.

In dem Aufsatz "Russell's Mathematical Logic" (1944) diskutiert K. Gödel das "vicious-circle principle". Er geht davon aus: "It is demonstrable that the formalism of classical mathematics does not satisfy the vicious-circle principle in its first form, since the axioms imply the existence of real numbers definable in this formalism only by reference to all real numbers." (Gödel 1944, S. 219) Seiner Meinung nach sind imprädikative Definitionen aus dem Formalismus der klassischen Mathematik nicht ausschließbar. "I would consider this rather as a proof that the vicious-circle principle is false than that classical mathematics is false and this is indeed plausible also on its own account." (Gödel 1944, S. 219) Zunächst müsse nämlich der Bezug auf eine Totalität nicht unbedingt bedeuten, daß dieser im Sinne einer unendlichen Konjunktion über alle Elemente dieser Totalität gemeint sei, sondern dieser Bezug könne in vielen Fällen nach einem Vorschlag von Langford und Carnap auch im Sinne von "Analytizität" oder "Notwendigkeit" oder "Beweisbarkeit" interpretiert werden.

Zweitens aber sei das "vicious-circle principle" auch in dem Fall, in dem der Bezug auf die Totalität im Sinne einer unendlichen Konjunktion über alle Elemente gemeint sei, auch nur dann nicht zwingend, wenn die Objekte, auf die es sich bezieht, als von uns selbst konstruiert vorgestellt werden. Wenn man aber umgekehrt die Totalität als vorher existierend und gegeben auffasse, dann sei in der Benutzung imprädikativer Definitionen kein unerlaubter Zirkel zu sehen, da diese Definitionen als *Beschreibungen* von Objekten der gegebenen Totalität aufgefaßt werden könnten. "So it seems that the vicious-circle principle in its first form applies only if one takes the constructivistic (or nominalistic) standpoint toward the objects of logic and mathematics, in particular toward propositions, classes and notions, e.g., if one understands by a notion a symbol together with a rule for translating sentences containing the symbol into such sentences as do not contain it, so that a separate object denoted by the symbol appears as a mere fiction." (Gödel 1944, S. 219/220) Gödel hält daher die Position, "Klassen" und "Begriffe" als reale Objekte aufzufassen, für zwingend. "It seems to me that the assumption of such objects is quite as legitimate as the assumption of physical bodies and there is quite as much reason to believe in their existence. They are in the same sense necessary to obtain a satisfactory system of mathematics as physical bodies are necessary for a satisfactory theory of our sense perceptions and in both cases it is impossible to interpret the propositions one wants to assert about these entities as propositions about the 'data', i.e. in the latter case the actually occurring sense perceptions." (a.a.O., S.220) In der zitierten Passage sagt Gödel zweierlei, nämlich

1. daß das Auftreten imprädikativer Definitionen in der Mathematik dazu zwingt, den *Gegenstandsbezug in die Mathematik einzuführen*, und

2. *daß dieser Gegenstandsbezug in Gestalt einer empiristischen Konzeption* (Abstraktionen als bloße "façon de parler" von Sinneswahrnehmungen) *nicht angemessen realisiert wird.*

Im weiteren versucht Gödel dann anhand einer Diskussion der Russellschen "No Classes Theory" im einzelnen zu zeigen, daß ein rein intensionaler Aufbau der Logik nicht möglich ist, d.h. daß man ohne extensionale Vorstellungen nicht auskommt. Insbesondere zitiert er ein Ergebnis von Chwistek, daß das System der einfachen Typen widersprüchlich werde, wenn man zu ihm das "Axiom der Intensionalität" (das ungefähr besage, daß zwei verschiedene Definitionen auch zwei verschiedene Begriffe definieren) hinzufüge. Gödel lobt an Russell dessen "realistische Einstellung", die er vor allem darin sieht, daß Russell eine gegenüber klassischen Vorstellungen gewandelte Position zur Axiomatik einnehme. Russell vergleiche die Axiome der Logik und Mathematik mit den Naturgesetzen und die logische Evidenz mit der Sinneswahrnehmung, so daß die Axiome nicht mehr notwendig in sich evident sein müßten, sondern ihre Rechtfertigung eher in der Tatsache liege, daß sie es gestatten, empirisch einsichtige Konsequenzen abzuleiten. Diese Haltung sieht er auch durch die Entwicklung der mathematischen Logik gerechtfertigt. "It has turned out that (under the assumption that modern mathematics is consistent) the solution of certain arithmetical problems requires the use of assumptions essentially transcending arithmetic, i.e. the domain of the kind of elementary indisputable evidence that may be most fittingly compared with sense perception. ... Of course, under these circumstances mathematics may lose a good deal of its 'abolute certainty'; but, under the influence of the modern criticism of the foundations, this has already happened to a large extent." (Gödel 1944, S. 213) Gödel sieht in dieser Einstellung Parallelen zu der Hilberts im Hinblick auf die Grundlagen der Mathematik. Insgesamt zieht Gödel aus dieser Sachlage "platonistische" Konsequenzen. Unter erkenntnistheoretischen Gesichtspunkten ist das natürlich außerordentlich unbefriedigend, aber angesichts der großen Schwierigkeiten, den Gegenstandsbezug mathematischer Theorien klar zu identifizieren und in seinem Mechanismus zu verstehen, auch verständlich. Insofern halten wir an dem "Platonismus" Gödels die beiden unserer Auffassung nach positiven Momente, nämlich seine Einsicht, daß die Mathematik rein syntaktisch (also ohne Berücksichtigung der Referenz, des Gegenstandsbezugs) nicht aufgefaßt werden kann, und seine Stellungnahme gegen ein empiristisches Verständnis dieses Gegenstandsbezuges fest, ohne uns um die weiteren Konsequenzen seines "Platonismus" zu kümmern.

Es wurde bereits erwähnt, daß Hermann Weyl in seiner Schrift "Das Kontinuum" vergeblich versucht, den Satz von der Existenz einer kleinsten oberen Schranke für jede nicht-leere, beschränkte Teilmenge M von $\mathbb{R}$ zu beweisen, ohne imprädikative Definitionen zu benutzen. Er sieht, daß der einzige Ausweg darin besteht, reelle Zahlen verschiedener Stufen zu unterscheiden, so daß jeweils die Gesamtheit der Zahlen einer Stufe als Totalität genommen werden kann, nicht aber die Gesamtheit aller reellen Zahlen. Er resümiert:"Der durch die nebelhafte Natur des üblichen Mengen- und Funktionsbegriffs verhüllte circulus vitiosus, auf den wir hier hinweisen, ist nicht etwa ein leicht zu beseitigender formaler Fehler im Aufbau der Analysis. Die Erkenntnis seiner fundamentalen Bedeutung ist etwas, was sich nun eben nicht durch viele Worte an den Leser heranbringen läßt. Je deutlicher man sich aber das logische Gewebe der Analysis zur Gegebenheit bringt, je tiefer und vollständiger der Bewußtseinsblick es durchschaut, umso klarer wird es, daß bei der heutigen Begründungsweise sozusagen jede Zelle des gewaltigen Organismus von diesem Gift des Widerspruchs durchsetzt ist; und daß eine durchgreifende Kontrolle nötig ist, um hier Abhilfe zu schaffen.

Eine Analysis 'mit Stufenbildung' ist künstlich und unbrauchbar. Sie verliert ihr eigentliches Erkenntnisobjekt, die Zahl, aus dem Auge." (Weyl 1917, S.23) Und in einer Fußnote erläutert er die letzte Bemerkung:"Nur bei Befolgung des engeren Verfahrens [d.h. der intuitionistischen Vorgehensweise Weyls, H.N.J.] bleiben die Gegenstände der Grundkategorien unverrückt das eigentliche Objekt unserer Untersuchung: andernfalls wird die Fülle der abgeleiteten Eigenschaften und Relationen ebensosehr zum Erkenntnisobjekt wie das Reich jener ursprünglichen Gegenstände. Finite Urteile, d.h. solche, die unter den Einschränkungen des engeren Verfahrens gebildet sind, setzen zu ihrer Entscheidung nur die Überblickung dieser Grundgegenstände voraus, 'transfinite' außerdem die volle Überblickung aller abgeleiteten Eigenschaften und Relationen." (Weyl 1917, S.21)

Was Weyl mit diesen Bemerkungen, vor allem mit seiner Feststellung, eine Analysis mit Stufenbildungen sei "künstlich und unbrauchbar", eigentlich reflektiert, ist die *relative Widersprüchlichkeit von Begründung und Entwicklung* des Wissens; die Begrifflichkeit der Mathematik, die sich nach den Bedürfnissen und unter dem Gesichtspunkt der Produktion neuen Wissens entwickelt hat, scheint ihm nicht mehr mit dem

Gesichtspunkt der Begründung des Wissens in Einklang zu bringen zu sein. Weyl, wie die Intuitionisten allgemein, zieht daraus die Konsequenz, daß die Mathematik in ihrer Begrifflichkeit auf den Bereich, der ihm begründbar zu sein scheint, reduziert werden müsse, um den von ihm als notwendig erkannten Zusammenhang von Begründung und Entwicklung, wenn auch auf verkleinerter Basis, zu sichern. Zu einer Revision dessen, was "Begründung" überhaupt heißt, stößt er (zu diesem Zeitpunkt jedenfalls) nicht vor; in dieser Frage bleibt er dem euklidischen Paradigma verhaftet.

Zwei neuere Arbeiten, die sich unter philosophischen Gesichtspunkten mit der Grundlagenproblematik befassen, arbeiten ebenfalls als einen wesentlichen Gesichtspunkt der Diskussion die relative Entgegensetzung von Begründung und Entwicklung des Wissens heraus. So stellt J. Glöckl in seinem Buch "Wahrheit und Beweisbarkeit. Eine Untersuchung über das Verhältnis von Denken und Anschauung in der Mathematik" (1976) den Standpunkt des Mathematikers, der derjenige des Umgangs mit Kalkülen sei, dem Standpunkt des Philosophen, der auf Begründung aus sei und deshalb auf das Ganze "als dem Ort der Wahrheit" reflektiere, gegenüber. Der Kalkül schließe Imprädikativität aus, der Einzelwissenschaftler reflektiere nicht auf die Erkenntnisbedingungen, vielmehr stelle er sich auf den Standpunkt der *Entwicklung des Wissens*. "Die Einzelwissenschaften gehen in einer Systemoffenheit zu immer reicheren Systemen über, formale Objektsprachen, über die in formalisierbar gedachten Metasprachen 'geredet' wird, sind durch das Moment der Erweiterungsfähigkeit charakterisiert." (Glöckl 1976, S.20) Umgekehrt sei der *begründende Standpunkt* des Philosophen notwendig durch die Einbeziehung der Imprädikativität (als des Moments des Ganzen) und durch die Voraussetzung der Systemabgeschlossenheit in Form der Vollständigkeit der Erkenntnisbedingungen gekennzeichnet. (Glöckl 1976, S.20) (Diese Formulierungen bei Glöckl bringen auch sehr prägnant zum Ausdruck, daß im klassischen Verständnis "Begründen" immer mit einer statischen Wissenskonzeption verbunden ist.) Den

Widerspruch von Begründung und Entwicklung stellt Glöckl nun folgendermaßen dar. "Wir wollen uns einmal an das Ergebnis erinnern, das Schütte in seinen Untersuchungen herausstellt: Die transfinite Induktion bis zur ersten stark kritischen Ordinalzahl k ist nicht mehr auf prädikativem Wege nachweisbar. Bekanntlich ist die Gültigkeit der transfiniten Induktion äquivalent der Wohlordnungseigenschaft einer Menge. Sogar der strengste Konstruktivist hat keinen triftigen Grund, an der Existenz solcher Ordinalzahlen zu zweifeln, deren Existenz-nachweis sich nur imprädikativ gestalten läßt. Mit anderen Worten: Man kann in relativ einfacher Weise gewisse Ordinalzahlen konstruieren, kann sie aber nur imprädikativ als Ordinalzahlen ausweisen. ... Wenn nun die Existenz bestimmter Entitäten durchaus evident ist, jedoch die Begründung, der Nachweis dieser Entitäten als solch bestimmter Entitäten (als Ordinalzahlen) notwendig die von den Mathematikern so gefürchtete Imprädikativität nach sich zieht, so drängt sich der Gedanke auf, ob denn nicht das Begründungsproblem als solches Schuld daran trägt, daß man stets an die Dimension des Imprädikativen gedrängt wird, d.h. daß man sich dieser Gefahr dann nicht mehr auszusetzen braucht, wenn man auf Begründung der Geltung dessen verzichtet, was konstruktiv evident ist. Nur dann, wenn das Anschaulich-Evidente außerdem noch bewiesen, d.h. logisch begründet werden soll, verwickelt man sich in Imprädikativität. Ist es nicht, so könnte von dieser Seite mit äußerster Konsequenz gefragt werden, nur ein bezüglich konstruktiv-operativer Methodik ungemein retardierendes Moment, ja geradezu heterogenes Element, stets Begründungsabsichten anzusetzen?" (Glöckl 1976, S.26/27) Glöckl versucht dann anschließend den Punkt zu fixieren, an dem auch der einzelwissenschaftlich arbeitende Mathematiker zur Reflexion auf die Erkenntnisbedingungen gezwungen ist. Nach Glöckl ist dies bei jedem Widerspruchsbeweis der Fall. Dies soll hier nicht weiter verfolgt werden, vor allem, da nicht zu sehen ist, wie Glöckl sich die Auflösung der Widersprüchlichkeit von Wissensdynamik und der Statik des Begründungsproblems vorstellt.

Im 1. Kapitel seines "Mathematical Knowledge" setzt sich M.Steiner mit dem Argument von H. Poincaré gegen die Logizisten auseinander, daß deren Begründung der Arithmetik auf der Logik zirkelhaft sei, da diese "Begründung" ihrerseits die Gültigkeit des Prinzips der vollständigen Induktion voraussetze.
Er tut dies auf der Grundlage der von Wittgenstein herrührenden Unterscheidung zwischen "knowing how" und "knowing that".
Im Sinne eines kalkülmäßigen Operierens ("knowing how") sei eine solche Zurückführung durchaus möglich. Prinzipiell brauche der Mathematiker, der die Sätze der Arithmetik aus der Mengenlehre ableite, nicht zu wissen, daß beispielsweise die Menge definiert durch $Nx \underset{df}{\equiv} (F)\ [\{FO \wedge (y)\ [Fy \rightarrow Fy']\} \rightarrow Fx]$

identisch sei mit der Menge $\{O, O', O'', \ldots\}$

Es reiche, wenn *wir* einen Metabeweis dieser Tatsache hätten und daher wüßten, daß der die Arithmetik aus der Mengenlehre ableitende Mathematiker wirklich die Arithmetik in unserem Sinne erzeuge. Der Mathematiker benötige also kein Wissen im Sinne von "knowing that".
M. Steiner faßt zusammen:"The epistemological objections to logicism thus fall away. There is no circularity in the reduction to set theory, if set theory is solidly based, a mathematician can in principle use it, to the exclusion of any other mathematical theory, in coming to know the rest of mathematics, including arithmetic. Any such mathematician will indeed require certain mathematical *skills* even arithmetic skills, before he can learn arithmetic from set theory. But skills are not knowledge in the cognitive sense at issue here, and many of the epistemological critiques of logicism seem to confuse 'knowing how' with 'knowing that'." (M. Steiner 1975, S.69) Auch in dieser Untersuchung also werden die operativen, entwickelnden Momente in einen scharfen Kontrast zu den begründenden gesetzt und das Moment der Begründung als Ursache einer evtl. auftretenden Zirkularität identifiziert, und zwar weil die Begründung wieder Probleme der Selbstreferenz aufwirft.

Fassen wir die bisherige Diskussion zusammen: Imprädikative Definitionen, deren problematischer Charakter im Zuge der Diskussion über die Paradoxien der Mengenlehre aufgedeckt wurde, beinhalten strukturell dieselbe Zirkularität, wie sie sich im Kapitel II für die "theoretischen Terme" einer empirischen Theorie ergeben hatte. Imprädikative Definitionen definieren ein Objekt unter Rückgriff auf eine Gesamtheit, deren Element das in Frage stehende Objekt ist. Damit scheint eine in schlechtem Sinne zirkelhafte gegenseitige Bestimmung des Objekts durch die Gesamtheit und der Gesamtheit durch das Objekt gegeben zu sein. Andererseits bestimmt ein theoretischer Term den Inhalt einer empirischen Theorie und umgekehrt wird die Bedeutung eines theoretischen Terms durch die Theorie definiert, bzw. in der Konzeption Sneeds: jede Anwendung einer Theorie, die einen theoretischen Term involviert, setzt eine anderweitige erfolgreiche Anwendung der Theorie voraus.
Kurz gesagt: Ein theoretischer Term in der Sneedschen Konzeption ist imprädikativ definiert.

In beiden Fällen gibt es auf dieses Problem eine strukturell gleiche Antwort, die sich allerdings in beiden Fällen im gleichen Sinne als kurzschlüssig herausstellt: Im Falle der theoretischen Terme ist es die Behauptung ihrer Eliminierbarkeit, im Falle der imprädikativen Definitionen das Russellsche Reduzibilitätsaxiom. Beide sagen etwa dasselbe aus: Die Eliminierbarkeit theoretischer Terme nach Ramsey besagt, daß es zu dem mit Hilfe theoretischer Terme formulierten Prädikat S ein Prädikat P gibt, das nur mit Hilfe nicht-theoretischer Terme formuliert ist, aber dieselbe Menge an Modellen hat, wie das Prädikat S. Während das Reduzibilitätsaxiom aussagt, daß es zu jedem imprädikativ definierten Begriff einen prädikativ definierten gibt, der denselben Begriffsumfang hat. Beide "Lösungen" versuchen, denselben widersprüchlichen Anforderungen gerecht zu werden, nämlich unter dem Gesichtspunkt der *Theorienentwicklung* die imprädikativen Definitionen zu "retten" und sie unter dem Gesichtspunkt der *Theorienbegründung* auszuschließen.

Gödel knüpft an das Phänomen der imprädikativen Definitionen zwei, auch unserer Meinung nach unabweisbare Schlußfolgerungen: Zum einen zeigen sie nämlich, daß eine rein intensionale, syntaktische Auffassung der Logik nicht möglich ist; die Logik beinhaltet auch Extensionalität (allgemeiner den Gegenstandsbezug). Im Rahmen der Sneedschen Konzeption ist die analoge Entwicklung das Aufgeben des "Statement view" wissenschaftlicher Theorien und die Einführung eines Theorienbegriffs als Paar <K, I> aus theoretischer Struktur K und Menge der intendierten Anwendungen I. Mit dem Problem der imprädikativen Definitionen ist also nur fertig zu werden, wenn man die Differenz von Zeichen und Bezeichnetem bewußt handhabt. Zum anderen hat Gödel gesehen, daß das Problem des Gegenstandsbezugs nicht im empiristischen Sinne lösbar ist, also nicht so, daß Abstraktionen nur als gedachte Zusammenfassungen von Sinnesdaten aufgefaßt werden. Dies ist ebenfalls aufgrund der imprädikativen Definitionen nicht möglich, und insofern bringen diese nur strukturell zum Ausdruck, was in der wissenschaftstheoretischen Diskussion als "Theorienbeladenheit der Beobachtungssprache" bezeichnet wird. In diesem Sinne sind die imprädikativen Definitionen der extremste Ausdruck des deskriptiven, nicht-konstruktiven Aspektes der Mathematik.

Poincaré hatte das Problem der imprädikativen Definitionen, kurz gefaßt, so beschrieben, daß deren Unzulässigkeit darin bestehe, daß ein indefiniter Bereich als definit behandelt wird (vgl. Thiel 1972, S.140). Dies verweist auf das Verhältnis von Offenheit (indefiniter Bereich) und Abgeschlossenheit (definiter Bereich), das im II. Kapitel in Form der Beziehung zwischen (globaler) Nicht-Eliminierbarkeit theoretischer Terme und ihrer (lokalen) Eliminierbarkeit behandelt wurde und die eine notwendige Voraussetzung ist, um die Theoriendynamik verstehen zu können. Die imprädikativen Definitionen bringen genauso wie das "Problem der theoretischen Terme" zum Ausdruck, daß es bei der Entwicklung des Wissens darum geht, einerseits an dem Kontext des alten Wissens anzuknüpfen, andererseits aber im Hinblick auf das neue Wissen sich von diesem Kontext zu lösen. Dies legt die Überlegung nahe, daß auch im Hinblick auf das Phänomen der imprädikativen Definitionen ein Verständnis der *Beziehung* von Offenheit und Abgeschlossenheit, von Indefinitheit und Definitheit wesentlich ist und daß es nicht angehen kann, beide Momente aufeinander zu reduzieren. Dies wiederum aber ist nur möglich (auch dies wird durch die Überlegungen des II. Kapitels nahegelegt) bei Aufrechterhaltung der Differenz von theoretischer Struktur und Anwendungen sowie von Intension und Extension, deren Zusammenspiel erst eine Beschreibung des Prozesses der Wissensentwicklung liefert.

Zwei Schlußfolgerungen ergeben sich also: Zum einen liegt der verallgemeinerbare Charakter des Problems der imprädikativen Definitionen darin, daß diese nur unter Voraussetzung einer dualen Bedeutungsstruktur nicht paradox werden und Wissensentwicklung demgemäß als Zusammenspiel von syntaktischer und referentieller Bedeutung zu beschreiben ist. Zum anderen muß offensichtlich im Lichte dessen, was im II. Kapitel entwickelt wurde, auch das *Problem der Begründung* neu gesehen werden.

Die bisher angestellten Überlegungen zum Problem der imprädikativen Definitionen in der Mathematik machen die Schlußfolgerung unabweisbar, daß auch in der Mathematik eine Vorstellung von "Selbstbegründung des Begriffs" notwendig ist, um das Verhältnis von Entwicklung des Wissens und seiner Begründung verstehen zu können. Insbesondere ist es offenbar ausgeschlossen, weiterhin Begründung als Rückführung des neuen Wissens auf altes Wissen bzw. des Unbekannten auf Bekanntes zu verstehen. In diesem Sinne ist die klassische Mathematik nicht begründbar. Das aber impliziert, daß auch für die Mathematik die Vorstellung aufgegeben werden muß, sie verfüge über ein für allemal feste Grundlagen, auf denen sich ihr Gebäude errichten lasse.

Al Folge der Diskussion über die Grundlagen der Mathematik hat sich diese Position im Hinblick auf das Begründungsproblem auch in der formalen Logik zunehmend herausgebildet. So geht etwa Hao Wang in einem zusammenfassenden Artikel "Eighty Years of Foundational Studies" (1958) (wiederabgedruckt als Kap. II in "Logic, Computers and Sets") zunächst auch von der Widersprüchlichkeit von Begründung und Entwicklung des Wissens aus. "Philosophers tend to contrast analysis with new discovery, clarification with the increase of knowledge." (Hao Wang 197o, S.35). In dem Unternehmen der logischen Grundlegung der Mathematik sei etwas Zirkuläres enthalten, denn:"... syntax is but a branch of number theory and semantics one of set theory." (Hao Wang 197o, S.37) Er meint daher:"The basic circularity suggests that formalization rather than reduction is the more appropriate method, since we are, in foundational studies, primarily interested in irreducible concepts." (a.a.O., S.37) Es seien gerade die bei den Begründungsversuchen abfallenden Nebenprodukte, die sich als interessant erwiesen hätten. Daher sollte man Grundlegungsprobleme eher als Übersetzungsprobleme verstehen, wobei natürlich völlig strukturtreue Übersetzungen nicht sehr interessant seien, da sie nichts Neues beitrügen. Er unterscheidet im Hinblick auf die Grundlegung der Mathematik ein Spektrum von fünf Standpunkten, an dessen einem Ende die rein konstruktiven Verfahren und an dessen anderem Ende die imprädikative (platonistische) klassische Mengenlehre stehe. Dabei gehe es eben heutzutage nicht mehr so sehr darum, einen dieser Standpunkte als den letztgültigen für die Grundlegung der Mathematik einzunehmen, sondern darum, die gegenseitige Beziehung dieser unterschiedlichen Verfahren und ihre unterschiedliche Reichweite aufzuklären. Im Gegensatz zu gängigen Vorstellungen sei es auch nicht so, daß die konstruktiven Verfahren besser verstanden würden als die nicht-konstruktiven. "Curiously enough, the characterizations we have today are such that the less constructive a domain is, the more satisfactory is our characterization of it. The prevalent mood nowadays is not to choose a life mate from among the five 'schools' but to treat them as useful reports about the same grand structure which can help us to construct a whole picture that would be more adequate than each taken alone. While philosophers may find this armistice less exciting than schools fighting to kill one another, it is undoubtedly conducive to a more successful approach to the original aim of understanding mathematics." (a.a.O., S.38). Insbesondere sei es vor allem lohnend, den konstruktiven Inhalt nicht-konstruktiver Methoden aufzudecken und umgekehrt, konstruktive Begriffe durch nicht-konstruktive zu erklären.Insgesamt sieht Hao Wang "a shift in emphasis from justification to clarification." (a.a.O., S.39)

Wir haben weiter oben bereits Gödel zitiert mit seiner Auffassung, die Vorstellung "absoluter Gewißheit" müsse in der Mathematik aufgegeben werden. Auch E.W. Beth äußert sich in einem ähnlichen Sinne wie Hao Wang:"If I may express a personal opinion, I should say, that neither the semantical nor any other exact procedure can provide us with an absolute or irrevocable justification of mathematical theories. Such a justification can only be given by personal and therefore subjective conviction. Exact procedures, as embodied in Tarski's semantics, are, however, capable of providing us with a clearer insight into the structure of deductive theories. And in science, after all, it is insight, not conviction, that matters." (Beth 1947, S.344)

Wenn Begründung nicht mehr "Rückführung von neuem Wissen auf altes" heißen kann, dann, so war im II. Kapitel gefolgert worden, müßte das Moment der Selbstevidenz theoretischer Terme (bzw. mathematischer Theorien) aufgrund des untrennbaren Zusammenhangs von Begründung und Anwendung gleichsam als Projektion in die Zukunft (der Theorie) verstanden werden. Begründung und Erklärung würden dann voraussetzen, einen (vielleicht häufig hypothetischen, wenn man sich nämlich in der Situation des Forschers befindet) allgemeineren, entwickelteren Standpunkt einzunehmen und die zu begründende Theorie von diesem Standpunkt aus zu erklären und einzuordnen.

Nun liegt es nahe, die bekannten Unvollständigkeitssätze von Gödel und Tarski im Sinne dieser Überlegungen zu interpretieren (vgl. die sehr klare Darstellung bei W. Kuyk 1977, S. 49-59)

Gödel hat 1931 die beiden folgenden Sätze bewiesen:

1. Wenn Z (das System der elementaren Arithmetik) widerspruchsfrei ist, dann gibt es in Z einen Satz G, so daß weder G noch seine Negation non-G beweisbar ist.

2. Die Widerspruchsfreiheit von Z kann nicht in Z bewiesen werden.

Der Beweis dieser Sätze beruht auf dem Verfahren der "Gödelisierung" Der Metatheorie: allen Termen und Formeln des Systems Z werden natürliche Zahlen zugeordnet. Die metamathematischen Begriffe (Sätze) werden dadurch zu Begriffen (Sätzen) über natürliche Zahlen bzw. Folgen von solchen und daher mit den Mitteln des Systems Z selbst ausdrückbar. Insbesondere die Begriffe "Formel", "Beweisfigur" und "beweisbare Formel" sind dann innerhalb des Systems Z definierbar. (Vgl. Gödel 1931, S. 174ff) Mit diesem Verfahren läßt sich dann ein Satz konstruieren, der seine eigene Unbeweisbarkeit behauptet.

Der zweite Satz ist eine nicht-triviale Konsequenz des ersten. Der erste Satz besagt also, jedes formalisierte widerspruchsfreie System, das mindestens so reichhaltig wie die elementare Zahlentheorie ist, kann nicht in dem Sinne vollständig formalisiert werden, daß bei jeder Axiomatisierung des Systems immer wahre Sätze vorhanden sind, die nicht formal abgeleitet werden können. Auch die Hinzufügung des nicht beweisbaren Satzes G zu dem formalen System macht dieses nicht vollständig, da sich dann ein weiterer, nicht beweisbarer Satz G' konstruieren läßt. Der zweite Satz besagt, verallgemeinert, daß absolute Widerspruchsfreiheitsbeweise in hinreichend reichen Systemen ausgeschlossen sind. Ein Widerspruchsfreiheitsbeweis einer formalisierten Theorie kann nur in einer reicheren Theorie erfolgen, d.h. es gibt in diesem Sinne nur relative Widerspruchsfreiheitsbeweise.

Tarksi hat nun als Analogon zu diesen, auf die Syntax bezogenen Sätzen für die Semantik bewiesen, daß der Begriff der "Gödelzahl einer wahren Aussage" nicht in Z definiert werden kann. Es ist nicht möglich für ein System, das mindestens so reichhaltig ist wie Z, den Begriff der Wahrheit in einer Sprache zu definieren, die Z an Ausdrucksmitteln nicht übersteigt, die sich also in Z abbilden läßt. Umgekehrt gesprochen: Wenn eine Sprache semantisch abgeschlossen ist, d.h. wenn die Sprache ihre eigene Syntax enthält, dann ist sie widersprüchlich.

Auf der anderen Seite läßt sich der Begriff der "Beweisbarkeit", wie Gödel gezeigt hat, "gödelisieren". Daraus folgt, daß sich die Begriffe der "Wahrheit" und der "Beweisbarkeit" nicht aufeinander zurückführen lassen.

Faßt man die Ergebnisse von Gödel und Tarski zusammen, dann kann man sagen: "If Sem (A) and Syn (A) are collectively referred to as the *metasystem* Met (A) of A, then both results taken together show that Met (A) must surpass A both in its means of expression and in its methods of proof." (Beth 1968, S.340)

Offenbar stellen die angeführten Ergebnisse, positiv gewendet, die Notwendigkeit zur Hierarchisierung von Theorien dar in dem Sinne, daß die entwickeltere, reichere, allgemeinere Theorie die weniger entwickelte erklärt und begründet. Über die Geltungsgründe von Beweisen innerhalb eines formalen Systems kann nur in der entwickelteren Metasprache geurteilt werden, sei es, daß man die Widerspruchsfreiheit des Systems nachweist, sei es, daß man im Metasystem eine Wahrheitsdefinition entwickelt.

Mit diesen Ergebnissen aber hat die formale Logik selbst ein Verständnis vom Begründen als Rückführen des Neuen auf Altes unmöglich gemacht und das notwendige, antizipatorische Moment an jeder Art von Begründung klar herausgestellt. Insbesondere sind natürlich durch die Ergebnisse von Gödel und Tarski auch alle Vorstellungen von festen, ein für allemal gegebenen Grundlagen der Mathematik in Frage gestellt.

Obwohl die Gödelschen Sätze gewöhnlich als Ausdruck des Scheiterns des Hilbertschen Programms hingestellt werden, soll hier die These vertreten werden, daß sie nur die logische Fortsetzung des von Hilbert eingeleiteten methodologischen Umbruchs im Selbstverständnis der Mathematik darstellen. Denn Hilbert selbst war es, der die entscheidenden Schritte im Neuverständnis der Begründungsproblematik getan hat.

Diese Schritte sind vielleicht am besten durch drei mathematische Arbeiten Hilberts gekennzeichnet: den abstrakten Existenzbeweis für die Existenz einer endlichen Basis für jedes System algebraischer Invarianten (1890), das Buch "Grundlagen der Geometrie" (1899) und seine Arbeiten zur Beweistheorie (von 192o bis 193o).

Daß sich in den Arbeiten Hilberts ein wirklicher Umschwung im Selbstverständnis der Mathematik niederschlägt, wird durch die Worte des Invariantentheoretikers P. Gordan beleuchtet, der angesichts des Hilbertschen Beweises von 1890 gesagt haben soll:"Das ist nicht Mathematik. Das ist Theologie." (Reid 1970, S.34) Zu Recht schreibt die Hilbert-Biographin C. Reid, daß Hilbert nicht der erste gewesen sei, der indirekte , nichtkonstruktive Beweise benutzt habe, daß er aber der erste gewesen sei, der ihre tiefe Bedeutsamkeit erkannt habe. (Reid 1970, S.36) Hilbert selber schreibt über die Existenzbeweise:"Das Wertvolle der reinen Existenzbeweise besteht gerade darin, daß durch sie die einzelne Konstruktion eliminiert wird und viele verschiedene Konstruktionen durch einen Grundgedanken zusammengefaßt werden, so daß allein das für den Beweis Wesentliche deutlich hervortritt: Abkürzung und Denkökonomie sind der Sinn der Existenzbeweise. Die reinen Existenzbeweise sind denn auch tatsächlich die wichtigsten Marksteine in der geschichtlichen Entwicklung unserer Wissenschaft gewesen." (Hilbert 1928, S.79)

In der Hilbertschen Haltung zum abstrakten Existenzbeweis wie auch zur axiomatischen Methode schlägt sich dieselbe Einstellung zum Begründungsproblem nieder, daß es nämlich "keineswegs vernünftig" sei zu fordern, daß "jede einzelne Formel deutbar sein soll." (Hilbert 1928, S.79) Vielmehr müsse man sich am Beispiel der Physik orientieren, in der auch nur gewisse Kombinationen und Folgerungen der physikalischen Gesetze durch das Experiment kontrolliert werden. Das bedeutet aber gerade, daß Hilbert Evidenz nicht mehr im Anschaulich-Gegebenen sieht, sondern in der Anwendung, die Begründung also in die Anwendung verlegt.

Natürlich war eine zu empiristische Auffassung der Mathematik historisch bereits früher zunehmend unmöglich geworden, aber Hilbert ist der erste, der dies konsequent bis zu Ende denkt. Unter "empiristisch" soll hier ganz allgemein (und im Unterschied zur gängigen philosophischen Terminologie) die Auffassung verstanden werden, daß jeder mathematischen Operation und jedem Begriff für sich ein anschaulicher Bedeutungsgehalt zukommen müsse. Damit werden z.B. auch intuitionistische Positionen als empiristisch gekennzeichnet.

Diese Abkehr von einem empiristischen Verständnis der Mathematik und der Übergang zu einem Systemdenken, der sich in der Einsicht niederschlägt, daß einer Theorie nur als ganzer Bedeutung zukommt, und damit das Verhältnis zum Begründungsproblem, wird sehr deutlich beleuchtet durch eine Kontroverse zwischen Frege und Hilbert, die nach dem Erscheinen von Hilberts "Grundlagen der Geometrie" aufbrach, in der sich Hilbert allerdings nur einmal geäußert hat und die im wesentlichen von Frege in einer Reihe von kritischen Artikeln geführt wurde. (Diese Kontroverse ist beschrieben in: H.G. Steiner 1964 und 1965). In dieser Kontroverse zeigt sich, daß Frege noch ganz auf dem Boden des alten, euklidischen Paradigmas der Begründung steht und von daher die Hilbertsche axiomatische Methode angreift. Das Festhalten am "Euklidischen" Verständnis von Begründung ist übrigens charakteristisch für den gesamten Logizismus, der sich von dieser Vorstellung nur langsam und schrittweise löst. Das wird auch von H.G. Steiner herausgestellt, wenn er sagt, daß Frege und mit ihm der ganze Logizismus zur Geometrie eine andere Einstellung als zur Arithmetik gehabt hätten, da sie für die Geometrie die Kantsche Position, geometrische Wahrheiten seien synthetisch und a priori, akzeptiert hätten. (Steiner 1964, S. 181/2) Die Arithmetik unterscheidet sich insofern von der Geometrie, als ihr A-priori nach Auffassung der Logizisten eben die Logik sein soll. Diese Unterscheidung ist bis heute für die Schulmathematik in starkem Maße prägend geblieben. In der Frage der Auffassung darüber, was überhaupt unter der Begründung einer mathematischen Theorie zu verstehen ist, verläuft die eigentliche Scheidelinie in der Auseinandersetzung über die Grundlagen der Mathematik um die Jahrhundertwende zwischen dem Logizismus und Intuitionismus auf der einen Seite, die beide in gewissem Sinne der euklidischen Tradition verhaftet sind und Begründung und Entwicklung des Wissens als unmittelbare Identität auffassen, und dem Hilbertschen Formalismus auf der anderen Seite, der Begründung und Entwicklung des Wissens voneinander trennt und sie deshalb variabel aufeinander beziehen kann. (vgl. dazu auch W. Langhammer 1974) Dies soll uns im folgenden näher beschäftigen.

Frege beginnt seine Polemik gegen Hilbert mit dem Vorwurf, daß dieser Axiome und Definitionen vermenge. Axiome seien als Gedanken aufzufassen, deren Wahrheit feststehe, ohne durch eine logische Schlußkette bewiesen werden zu können, während eine Definition die Festsetzung der Bedeutung eines Wortes oder Zeichens beinhalte. Eine Definition sei die einzige Aussage in einer Theorie, die ein Zeichen oder einen Begriff enthalte, der bis dahin keine Bedeutung hatte und diese Bedeutung erst durch die Definition erhält. Alle anderen Aussagen einer Theorie (Axiome oder Sätze) dürften nur Zeichen und Begriffe enthalten, deren Bedeutung bereits vorher feststehe. Durch eine Definition komme keine Erkenntnis zustande, sie sei nur ein Mittel, "einen mannigfachen Inhalt in einem knappen Wort oder Zeichen zusammenzufassen und ihn uns dadurch handlicher zu machen." (Frege 1903, I, S.320) Der Vorwurf gegen die Hilbertsche Axiomatik, die von Hilbert ja so aufgefaßt wird, daß durch sie die Bedeutung der Begriffe "Punkt", "Gerade", "Ebene", "zwischen" etc. erst definiert wird, lautet also:"Nie darf etwas als Definition hingestellt werden, was eines Beweises oder der Anschauung zur Begründung seiner Wahrheit bedarf. Andererseits können Grundsätze und Lehrsätze nie die Bedeutung eines Wortes oder Zeichens erst feststellen wollen. Für die Strenge der mathematischen Untersuchung ist es durchaus wesentlich, den Unterschied zwischen Definitionen und allen anderen Sätzen nicht zu verwischen." (Frege 1903, I, S.321) Später zitiert Frege die Axiome bei Hilbert, die sich auf den Begriff "zwischen" beziehen, und fragt dann:"Erfahren wir nun hierdurch, wann die

Beziehung des Zwischenliegens stattfindet? Nein; sondern umgekehrt, wenn wir diese Beziehung erfaßt haben, erkennen wir die Wahrheit der Axiome." (Frege 1903, II, S.369) In der Frage, ob die Bedeutung der Termini den Axiomen vorangeht oder ob sie ihnen folgt, illustriert sich also bereits deutlich der Unterschied zwischen Begründung als dem Rückgriff auf das Anschaulich-Gegebene einerseits und Begründung als Anwendung andererseits.

Am zugespitztesten allerdings stellt sich die Unterschiedlichkeit dieser Positionen am Verhältnis zu den Hilbertschen Anforderungen an ein Axiomensystem nach Widerspruchsfreiheit, Unabhängigkeit und Vollständigkeit dar. Zur Widerspruchsfreiheit stellt Frege lapidar fest: "*Die Axiome widersprechen einander nicht, da sie wahr sind, das bedarf keines Beweises.*". (Frege 1903, I, S. 321; Unterstreichung von mir.) Dies ist der entscheidende Punkt, der jenes methodische Grundverständnis Hilberts, im Gegensatz zur Euklidischen Tradition, markiert, das sich einheitlich in der Auffassung der abstrakten Existenzbeweise, der axiomatischen Methode und der Beweistheorie äußert. Hier wird der Punkt markiert, wo Abschied genommen wird von der Vorstellung mathematischer Objekte als Repräsentanten eines unmittelbar (geistig oder materiell) Gegebenen. Natürlich ist die Forderung, daß mathematische Sätze einander nicht widersprechen dürfen, seit der Antike für die Mathematiker selbstverständlich. Diese Forderung war aber immer als sekundäre Folge der Eigenschaft des von der Mathematik abzubildenden Bereichs aufgefaßt worden. Nun wird diese Forderung verabsolutiert und zum eigenständigen Konstruktionsprinzip mathematischer Theorien gemacht. Dies drückt die Wendung von einem kontemplativen, passiven zu einem operativen, aktiven Wissenschaftsverständnis aus. Dabei bedeutet die darin liegende Relativierung der Grundlagen keine Abkehr von der zu analysierenden Wirklichkeit, sondern umgekehrt eine bewußtere aktive Hinwendung zu ihr. Die Einheit von Begründung und Anwendung von Theorien kommt nun auch in den Blick der wissenschaftlichen Reflexion selbst.

Mit großem Scharfsinn hat Frege die revolutionären Konsequenzen der Hilbertschen Auffassung gesehen, die im Bruch mit den Vorstellungen von ein für allemal gegebenen festen Grundlagen der Mathematik liegen. Eine dieser Konsequenzen liegt eben darin, daß nun auch im Selbstverständnis der Wissenschaft mit der Veränderlichkeit der wissenschaftlichen Begriffe ernst gemacht wird. Frege stellt dies heraus bei seiner Untersuchung der Hilbertschen Forderung nach Unabhängigkeit der Axiome. "Wie ist nun diese Unabhängigkeit zu verstehen? Bedarf doch in unserem Beispiel jedes der beiden Axiome des anderen, um überhaupt das zu sein, was es ist. Und so auch sonst. Erst durch sämtliche Axiome, die nach Herrn *Hilbert*, z.B. zu der Definition des Punktes gehören, bekommt das Wort 'Punkt' seinen Sinn, und also erhält auch erst durch diese sämtlichen Axiome jedes einzelne, in dem das Wort 'Punkt' vorkommt, seinen vollen Sinn. Eine Trennung der Axiome in der Weise, daß man einige als gültig, andere als ungültig betrachtete, ist undenkbar, *weil damit auch die als gültig angenommenen einen anderen Sinn bekämen.*" (Frege 1903, I, S. 323, Unterstreichung von mir) Im Hilbertschen Verständnis gibt es also keine *feste* Bedeutung z.B. des Begriffes Punkt, das ist die Schlußfolgerung von Frege.

Richtigerweise vergleicht Frege die Hilbertsche Axiomatik mit einem System von Gleichungen mit mehreren Unbekannten. "..., denn in einem Axiom kommen in der Regel mehrere der unbekannten Ausdrücke 'Punkt', 'Gerade', 'Ebene', 'liegen', 'zwischen' usw. vor, so daß erst das Ganze, nicht einzelne Axiome oder Gruppen von solchen zur Bestimmung der Unbekannten genügen. ... Wer sagt, daß dies System für die Unbekannten auflösbar sei, und daß diese eindeutig bestimmt seien?" (Frege 1903, II, S.370) Er sieht nicht, daß eben die Forderungen nach Widerspruchsfreiheit und Unabhängigkeit als Kriterien der Lösbarkeit des Systems aufzufassen sind. Wir führen hier diesen Vergleich Freges an, weil in der Tat die Hilbertsche axiomatische Methode aufs engste mit der Algebra als einem charakteristischen Ausdruck der neuzeitlichen Wissenschaft zusammenhängt und daher der Vergleich der Axiomatik mit einem Gleichungssystem mehr bedeutet, als nur gewisse formale Ähnlichkeiten aufzuzeigen.

An einigen Stellen seiner gegen Hilbert gerichteten Artikel spricht Frege selber (in polemischer Absicht) die Tatsache an, daß er sich als Repräsentant einer althergebrachten Auffassung gegen die "Modernen" fühlt, so z.B. "Ich glaube, mit meinen Ausführungen über den Gebrauch der Wörter 'Axiom' und 'Definition' mich im Gleise des Althergebrachten zu bewegen und mit Recht verlangen zu können, daß man nicht durch einen ganz neuen Gebrauch Verwirrung stifte." (Frege 1906, I, S.295) Oder an anderer Stelle:"..., bringt er die Axiome der modernen Mathematik in Gegensatz zu denen der Euklidischen, und man kann wohl annehmen, daß er sich selbst zu den modernen Mathematikern rechnet." (Frege 1906, I, S.297)

Mit der Überwindung des Euklidischen Standpunkts im Hinblick auf das Begründungsproblem hat Hilbert einen entscheidenden Schritt in der Entwicklung des Selbstverständnisses der Mathematik getan, mit dessen voller Bedeutsamkeit wir uns im nächsten Abschnitt III.2 beschäftigen wollen [1]. Allerdings werden dort auch bestimmte Begrenzungen des Hilbertschen Standpunktes aufgezeigt, die wieder auf Überlegungen zurückgehen, die Frege in einigen Punkten im nachhinein Recht geben, allerdings in einer anderen Form, als Frege sich dies vorgestellt haben mag.

---

1) Es ist selbstverständlich, daß Hilbert in dieser Frage nur Exponent einer Richtung ist. J. v. Heijenoort (1964) unterscheidet in der Grundlagendiskussion um die Jahrhundertwende zwei Strömungen. Die eine, repräsentiert durch Frege und Russell, betrachtet die Logik als in dem Sinne universell, daß sie die Grundgesetze unseres Denkens über die Welt enthält; die Logik ist danach nicht nur als "calculus ratiocinator" aufzufassen, sondern auch als "lingua characterica". Die andere Richtung, vertreten durch Boole, Schröder und Löwenheim, geht von der Relativität des "universe of discourse" aus, für sie ist die Logik vor allem Kalkül. Dieser Denkrichtung ist im weitesten Sinne auch Hilbert zuzuordnen. Heijenoort beschreibt die Konsequenzen der Fregeschen Auffassung mit den Worten: "Another important consequence of the universality of logic is that nothing can be, or has to be, said outside of the system. And, in fact, Frege never raises any metasystematic question (consistency, independence of axioms, completeness). Frege is indeed fully aware that any formal system requires rules that are not expressed in the system; but these rules are void of any intuitive logic; they are 'rules for the use of our signs'" (Heijenoort 1964, S. 442).

III.2. *Begründung und Kommunikation*

"Für den Intuitionisten geht das tatsächliche Denken seiner Formulierung im Text voran; die letztere ist nur ein unzureichendes Protokoll. Bevor das Protokoll entstand, entsprach also dessen Sätzen eine Erkenntnis, für welche der Denkende einzustehen bereit war. - Für eine Wissenschaft als soziale Gegebenheit ist indessen der *Text* entscheidend und seine Widerspruchsfreiheit eine vorrangige Sicherheit für die Ungestörtheit des logischen Vorgehens. Ontologische Fragen und Probleme des Bewußtseins treten zurück." (Beisswanger 1966, S.23)

Mit dieser Formulierung von P. Beisswanger aus seinem Aufsatz "Hermann Weyl und die Texte der Mathematik" ist sehr präzise die Problematik des folgenden Abschnitts umschrieben. Während bisher die Beziehung von Begründung und Entwicklung im Mittelpunkt unserer Überlegungen stand, und wir uns vor allem bemüht haben, die Konsequenzen für das Begründungsproblem zu verstehen, die sich aus dem sowohl holistischen als auch operativen Charakter der neuzeitlichen Wissenschaft ergeben, während also bisher das Begründungsproblem nur als quasi abgeleitete und zweitrangige Fragestellung betrachtet wurde (das primäre bestimmende Moment lag in der Wissensdynamik), soll nun die *relative Eigenständigkeit des Problems der Begründung* herausgearbeitet werden. Diese Eigenständigkeit ergibt sich daraus, daß Wissenschaft, wie Beisswanger sagt, "eine soziale Gegebenheit" ist, d.h. Begründung ist vorrangig als ein Problem der und im Kontext von Kommunikation aufzufassen. Damit Wissen kommunizierbar wird, muß es vom Kontext seiner Entdeckung unabhängig sein; im sozialen Verkehr muß es gleichsam als der Garant seiner eigenen Richtigkeit auftreten können. Damit ist impliziert, daß alle Probleme der Begründung von Wissenschaft in starkem Maße abhängen von den Beziehungen zwischen Wissenschaft und Gesellschaft bzw. von der Entwicklung der innerwissenschaftlichen Arbeitsteilung. Grundlegende Änderungen in den Beziehungen von Wissenschaft und Gesellschaft bzw. in der wissenschaftlichen Arbeitsteilung haben grundlegende Veränderungen der Begründungsproblematik zur Folge.

Im I. Kapitel ist bereits dargestellt worden, daß die verstärkten Bemühungen zur Grundlegung der Analysis seit Beginn des 19. Jahrhunderts in starkem Maße damit zusammenhängen und von daher zu verstehen sind, daß zum ersten Male die Analysis zum Gegenstand der Ausbildung in einem öffentlichen, auf breiter Basis organisierten Bildungssystem wurde. In Frankreich ist diese Entwicklung mit der Gründung der École Polytechnique verbunden, während in Preußen die Universitäten durch die Zuweisung der Aufgabe der Lehrerbildung für die Gymnasien ab 1812 eine festere organisatorische Struktur erhielten und eine bedeutende Förderung mathematischer Aktivitäten stattfand. Natürlich hatte es auch bereits vorher Auseinandersetzungen und Diskussionen über die Grundlegung der Infinitesimalrechnung gegeben, und diese Auseinandersetzungen zeigen auch, daß es in ihnen eigentlich um das Verhältnis von Wissenschaft und Gesellschaft, um die richtige Auffassung davon geht, was überhaupt Wissenschaft sei. Man vergleiche etwa dazu die Polemik des Bischofs Berkeley gegen die neue Infinitesimalrechnung. (Vgl. Berkeley 1969) Dennoch werden ernsthafte Bemühungen zur Grundlegung der Analysis erst unternommen, als mit den gewachsenen Bildungserfordernissen zu Beginn des 19. Jahrhunderts das soziale Bedürfnis nach festen Grundlagen unabweisbar war.

Die Mathematik antwortet auf die Herausforderung, ihre höchst intuitiven Verfahren breiteren Kreisen zugänglich zu machen, mit der Explikation des Wissens. Wissen als Gegenstand von Prüfungen und Bewertungen unterliegt einem unabweisbaren Zwang zur Normierung und Kodifizierung. Das Muster des Meister-Lehrlings-Verhältnisses, bei dem dem Lernenden vor allem implizit durch Nachahmung die wesentlichen Grundzüge wissenschaftlicher Arbeitsweisen übermittelt werden, bei dem also die nicht-explizierte Weitergabe von "tacit knowledge" das Grundmuster der Ausbildung darstellt, ist in einem öffentlichen, auf breiter Basis organisierten Bildungswesen nicht mehr möglich. Das ist auch der Grund, warum das Problem der Begründung des Wissens für die *Didaktik* einen so außerordentlich großen Stellenwert besitzt. Die Didaktik kann die Abneigung vieler Wissenschaftler gegen Begründungsfragen nicht mitmachen, weil eben definitiv fest-steht, daß Lehren und Lernen in einem öffentlichen, allgemeinen Schulsystem nicht nach dem Modell des Lernens in der "scientific community" verstanden werden kann. Deshalb greifen auch viele Ansätze eines "forschenden Lernens" zu kurz und führen zu einer reinen Prozeßorientierung, die den Schüler in einer Vielzahl von Einzelheiten eher ertrinken läßt, als seine Selbständigkeit gegenüber dem Stoff zu erhöhen. Ganz allgemein kann man sagen, daß die (erweiterte) Reproduktion des Wissens über die Generationen hinweg gar nicht vorstellbar wäre ohne die angesprochene Eigenständigkeit des Wissens.

Grundsätzlich antwortet also die Wissenschaft auf die Herausforderung, ihr Wissen mitzuteilen, durch Explikation. Um kommunizierbar zu sein, muß Wissen unabhängig von speziellen Kontexten sein. Insofern ist das Streben nach "Wertfreiheit des Wissens" eine progressive Antwort auf ein soziales Erfordernis, wenn auch die Behauptung der Wertfreiheit der Wissenschaft global illusionär ist. Auch der Versuch des "Logizismus", die Mathematik vollständig aus der Logik bzw. der Mengenlehre abzuleiten, steht im Rahmen dieser Bemühungen der möglichst weitgehenden Explizierung des mathematischen Wissens.

Nun ist gegen die Bemühungen des Logizismus ein Einwand geltend gemacht worden, der von grundsätzlich anderem Charakter ist als die oben referierte Kritik von Poincaré, obwohl dieser Einwand wie die Kritik von Poincaré in der Behauptung münden, die Begründungsversuche des Logizismus seien zirkelhaft. Es handelt sich hierbei um das Argument von Wittgenstein, Beweise, die im Rahmen des Logizismus geführt würden, seien unüberschaubar ("unsurveyable"); sie könnten nur deshalb nachvollzogen werden, weil man bereits über arithmetisches Wissen verfüge, das doch erst mit Hilfe des Logizismus begründet werden solle. Dieses Argument soll uns im gegenwärtigen Zusammenhang nicht mehr als Argument gegen den Logizismus dienen, sondern wir wollen es eher unter dem Gesichtspunkt betrachten, daß es ein prinzipielles Argument gegen ein Verständnis von Kommunikation als Explikation darstellt.

Man betrachte etwa die folgende Additionsaufgabe:

$$1.000.000 \quad + \quad 1.000.000 \quad = \quad 2.000.000.$$

Gemäß der Auffassung der Logizisten ist diese Gleichung aufzufassen als eine Transskription eines Schemas erster Ordnung, dessen einzelne Beispiele sämtlich logische Wahrheiten sind. In abgekürzter Form lautet das Schema so:

$$(\exists_{1.000.000}\ x_{1.000.000})\ Fx_{1.000.000} \wedge (\exists_{1.000.000}\ x_{1.000.000}\ Gx_{1.000.000} \wedge \vdash (\exists x)\ [Fx \wedge Gx]\ .\!\longrightarrow\!.\ (\exists_{2.000.000}\ x_{2.000.000}\ \left[Fx_{2.000.000} \vee Gx_{2.000.000}\right]$$

M. Steiner, der dieses Beispiel diskutiert, sagt dazu: "To write this out in primitive notation would take at least one thousand pages, to say nothing of the paper that would be wasted on a proof of it from the axioms of quantification theory! Obviously, one could not possibly recognize as such either the theorem or a proof of it. True, it can be proved to anyone's satisfaction, even without writing them out, that there must be a theorem and a proof in quantification theory corresponding to 1,000,000 + 1,000,000 = 2,000,000.
But hte metaproof of this fact assumes as a premise that one million plus one million equals two million - a fact we were supposed to learn from logic!" (Steiner 1975, S. 16/17)

Zwar weist Steiner im weiteren Verlauf seines Buches das Argument Wittgensteins als Argument gegen den Logizismus zurück, indem er zeigt, daß bei Einführung geeigneter Variablen die Überschaubarkeit dieses Beweises wiederhergestellt werden kann (wir werden auf diesen sehr wichtigen Punkt an anderer Stelle noch zurückkommen), trotzdem behält das Problem der "unsurveybility" mathematischer Beweise seinen prinzipiellen Stellenwert als Argument, das die Vorstellung von Kommunikation durch Explikation begrenzt. Gegenwärtig ist durch den Beweis des Vierfarben-Theorems, bei dem an entscheidender Stelle ein

Computer benutzt wurde, um die ungefähr 2ooo Fälle durchzuchecken, auf die der Satz reduziert wurde, die Problematik der "unsurveybility" aus dem Bereich philosophischer Reflexion in den der unmittelbaren mathematischen Praxis gerückt worden. (vgl. Otte/Bromme 1978)

In der Diskussion und Bewertung dieses Beweises reicht plötzlich das bloße Kriterium der "Richtigkeit" nicht mehr hin, Relevanzfragen und Zielvorstellungen beginnen, eine Rolle zu spielen. Daran zeigt sich zweierlei: Zum einen wird in schärferer Weise die duale Struktur von Beweisen enthüllt, die "platonische" unmittelbare Durchsichtigkeit des Beweises fehlt, zum anderen zeigt sich, daß eben jenes Moment der Evidenz keinesfalls eine primitive Intuition ist, sondern ein höchst kompliziertes, offenbar auch sozial bestimmtes Produkt des Denkens.

Jede Kommunikation setzt also einen gemeinsamen Bedeutungskontext derjenigen voraus, die an der Kommunikation beteiligt sind. Bei Kuhn z.B. wird dieser Bedeutungskontext mit dem Paradigmenbegriff umschrieben. Das Problem, das es zu verstehen gilt, besteht also darin, wie Verschiebungen und Veränderungen solcher Bedeutungskontexte aufgefaßt werden müssen, oder in der Kuhnschen Terminologie, wie der Übergang von einem Paradigma zum anderen so beschrieben werden kann, daß er nicht als absolute Diskontinuität erscheint. Also auch vom Standpunkt des Kommunikationsproblems her interessiert wieder vor allem das Verhältnis von Begründung und Entwicklung des Wissens. Im folgenden soll der wesentliche Beitrag, den Hilbert mit seinem formalistischen Programm zu dieser Fragestellung geleistet hat, näher betrachtet werden.

In seinem Aufsatz "Über das Unendliche" (1925, hier zitiert nach Hilbert 1964), der für das Verständnis der Grundlagenkonzeption Hilberts eine zentrale Rolle spielt, befaßt sich der Autor mit einem Begriff, nämlich mit dem "Unendlichen", der einerseits keiner realistischen Interpretation fähig ist, andererseits aber sich als unerläßlich für die mathematische Wissenschaft erwiesen habe. Einerseits zeigt Hilbert mit Hilfe physikalischer

Betrachtungen, daß weder die Idee des unendlich Kleinen, noch die des unendlich Großen sich uneingeschränkt auf die physikalische Wirklichkeit beziehen lassen. Dennoch sagt er, "könnte es sehr wohl zutreffen, daß das Unendliche *in unserem Denken* einen wohl berechtigten Platz hat und die Rolle eines unentbehrlichen Begriffes einnimmt." (Hilbert 1964, S. 83) Er diskutiert dies vor allem am Beispiel der Cantorschen Theorie der transfiniten Zahlen, die er als "die bewundernswerteste Blüte mathematischen Geistes und überhaupt eine der höchsten Leistungen rein verstandesmäßiger menschlicher Tätigkeit" (S. 85) bezeichnet. Dennoch hätten sich im Zusammenhang mit der Cantorschen Mengenlehre Paradoxien ergeben, ohne daß man genau die Quelle der Paradoxien hätte feststellen können. Es gelte, "den Paradoxien zu entgehen, ohne Verrat an unserer Wissenschaft zu üben". (Hilbert 1964, S. 88)

Zwei Gesichtspunkte wiesen die Richtung des einzuschlagenden Weges:

"1. Fruchtbaren Begriffsbildungen und Schlußweisen wollen wir, wo immer nur die geringste Aussicht sich bietet, sorgfältig nachspüren und sie pflegen, stützen und gebrauchsfähig machen. Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können.

2. Es ist nötig, durchweg dieselbe Sicherheit des Schließens herzustellen, wie sie in der gewöhnlichen niederen Zahlentheorie vorhanden ist, an der niemand zweifelt und wo Widersprüche und Paradoxien nur durch unsere Unaufmerksamkeit bestehen." (Hilbert 1964, S.88)

Hilbert bzw. die Mathematik seiner Zeit sieht sich also mit der Situation konfrontiert, daß als Folge der Unmöglichkeit, die wesentlichen Grundbegriffe der Mathematik realistisch aufzufassen, Widersprüche auftreten und die Sicherheit des Schließens nicht mehr gegeben ist. Den Weg, den Weyl (zeitweise) und die Intuitionisten gehen, nämlich den Weg der Wiederherstellung einer "ursprünglichen Identität" von Zeichen und Bezeichnetem, der verbunden ist mit einer Aufgabe des Fortschritts der Mathematik, kommentiert Hilbert:"Dieses Tertium non datur dem Mathematiker zu nehmen, wäre etwa, wie wenn man den Astronomen das Fernrohr oder dem Boxer den Gebrauch der Fäuste untersagen wollte. Das Verbot der Existenzsätze und des Tertium non datur kommen ungefähr dem Verzicht auf die mathematische Wissenschaft überhaupt gleich. ... Ich staune unter diesen Umständen darüber, daß ein Mathematiker an der strengen Gültigkeit der Schlußweise des Tertium non datur zweifelt. Ich staune noch mehr darüber, daß, wie es scheint, eine ganze Gemeinde von Mathematikern sich heute zusammengefunden hat, die das gleiche tut. Ich staune am meisten über die Tatsache, daß überhaupt auch im Kreise der Mathematiker die Suggestivkraft eines einzelnen temperamentvollen und geistreichen Mannes die unwahrscheinlichsten und exzentrischsten Wirkungen auszuüben vermag." (Hilbert 1928, S.80/81) Und es ist eine sehr scharfsinnige Beobachtung von Hilbert, daß der Subjektivismus "in dem Intuitionismus seinen Gipfelpunkt erreicht" hat (Hilbert 1928, S.80). Diese Beobachtung ist insofern zutreffend, als eben jene ursprüngliche Identität von Zeichen und Bezeichnetem nur im Kopf des einzelnen vorhanden sein kann.

Hilberts Lösung des Widerspruchs, einerseits alle fruchtbaren mathematischen Begriffsbildungen zu pflegen und andererseits Einhelligkeit des Schließens wiederherzustellen, besteht nun darin, radikal *Begründung und Entwicklung des Wissens zu trennen.* Er macht die *Trennung* von Zeichen und Bezeichnetem nicht etwa (wie die Intuitionisten) wieder rückgängig, sondern treibt sie auf die Spitze. "Die realistische aristotelische Auffassung, daß ein Beweis gleichsam Relationen *an einem Gegenstand abliest* und verkettet, wurde zurückgedrängt. Die Theorien sind viel zu kompliziert geworden, als daß sie noch an diesem Schema orientiert sein könnten. ... Die Auffassung, Gedankengänge im Bewußtsein seien der Maßstab für die Richtigkeit in der Mathematik, wird als viel zu 'innerlich' empfunden, also zu unverläßlich, wenn einstimmige Ergebnisse erzielt werden sollen. Verläßlicher scheint es, sich auf ein syntaktisch definiertes *Theorienschema* (TS) zu einigen, das die Exaktheit der Formulierung und die Kontrolle der Ergebnisse verbürgt. Semantisches Verständnis wird dann zur Privatsache." (Beisswanger 1966, S. 26) Oder, um es mit den Wortes des Zitats zu Beginn dieses Abschnitts zu sagen: Die Wissenschaft als soziale Gegebenheit erfordert es, vom Text als dem primären auszugehen. Worum es also geht, ist, den Bedeutungskontext, der für die Kommunikation vorausgesetzt werden muß, zu minimieren, ihn auf einen Bereich einzuschränken, der allen an der wissenschaftlichen Kommunikation Beteiligten gegeben ist. In diesem Sinne sind wohl Hilberts Worte zu verstehen:"Schon jetzt möchte ich als Schlußergebnis die Behauptung aussprechen: die Mathematik ist eine voraussetzungslose Wissenschaft. Zu ihrer Begründung brauche ich weder den lieben Gott, wie K r o n e c k e r, noch die Annahme einer besonderen, auf das Prinzip der vollständigen Induktion abgestimmten Fähigkeit unseres Verstandes, wie P o i n - c a r é, noch die B r o u w e r sche Urintuition und endlich auch nicht, wie R u s s e l l und W h i t e h e a d, Axiome der Unendlichkeit, Reduzierbarkeit oder der Vollständigkeit, die ja wirkliche inhaltliche und durch Beweis der Widerspruchsfreiheit nicht kompensierbare Voraussetzungen sind." (Hilbert 1928, S.85)

Worin besteht also jene minimale Bestand an Voraussetzungen, der allen an der wissenschaftlichen Kommunikation Beteiligten gegeben ist? Es ist der Text, es sind die Zeichen selbst.
"Die Mathematik, wie jede andere Wissenschaft, kann nie durch Logik allein begründet werden; vielmehr ist als Vorbedingung für die Anwendung logischer Schlüsse und für die Betätigung logischer Operationen uns schon etwas in der Vorstellung gegeben: gewisse außerlogische konkrete Objekte, die anschaulich als unmittelbares Erlebnis vor allem Denken da sind. Soll das logische Schließen sicher sein, so müssen sich diese Objekte vollkommen in allen Teilen überblicken lassen und ihre Aufweisung, ihre Unterscheidung, ihr Aufeinanderfolgen oder Nebeneinandergereiht-sein ist mit den Objekten zugleich unmittelbar anschaulich gegeben als etwas, das sich nicht noch auf etwas anderes redu-

zieren läßt oder einer Reduktion bedarf. Dies ist die philosophische Grundeinstellung, die ich für die Mathematik, wie überhaupt zu allem wissenschaftlichen Denken, Verstehen und Mitteilen als erforderlich erachte. Und insbesondere in der Mathematik sind Gegenstand unserer Betrachtung die konkreten Zeichen selbst, deren Gestalt, unserer Einstellung zufolge, unmittelbar deutlich und wiedererkennbar ist. Dies ist das geringste Maß von Voraussetzung, das kein wissenschaftlicher Denker entbehren kann und daher jedermann, sei es bewußt oder unbewußt, innehalten muß." (Hilbert 1928, S.65/66) Man sollte an diesen Hilbertschen Ausführungen beachten, wie bewußt er das Problem der Begründung mit dem Problem der Kommunikation verbindet. Das Begründungsproblem wird also völlig auf den mechanisierten Umgang mit Zeichen und Zeichenkombinationen zurückgeführt, auf den Auf- und Abbau von Zeichenkombinationen nach bestimmten Regeln und dem Prüfen ihrer Gleichheit und Ungleichheit. Für die elementare Arithmetik ist klar, daß deren Aussagen, wie etwa 2 + 3 = 5, geprüft werden können durch das Notieren der beiden entsprechenden Strichkombinationen und der anschließenden Feststellung, daß sie beide gleiche Länge haben. Diesen mechanisierten Umgang mit Zeichen nennt Hilbert das "inhaltliche logische Schließen", es könne uns nicht täuschen. Täuschungen könnten erst dann eintreten, wenn wir beliebige abstrakte Begriffsbildungen hinnehmen, auch solche, unter die unendlich viele Gegenstände fallen. Wie werden nun diese abstrakten Begriffsbildungen, um die es Hilbert ja gerade geht, in die Theorie eingeführt, wie insbesondere die logischen Regeln, wie etwa das Tertium non datur, die das logische Schließen erst so einfach und übersichtlich gestalten? Hilbert gibt darauf seine berühmte Antwort, die die Kernidee seiner Theorie ausmacht und die uns unmittelbar auf die Sneedsche Konzeption der Beziehung von nicht-theoretischen und theoretischen Termen zurückführt. "Erinnern wir uns, *daß wir Mathematiker sind* und als solche uns schon oftmals in einer ähnlichen mißlichen Lage befunden haben und wie uns dann die geniale Methode der idealen Elemente daraus befreit hat. Einige leuchtende Vorbilder für die Anwendung dieser Methode habe ich Ihnen zu Anfang meines Vortrages angeführt. Gerade wie $i = \sqrt{-1}$ eingeführt wurde, um die Gesetze der Algebra z.B. die über Existenz und Anzahl der Wurzeln einer Gleichung in der einfachsten Gestalt aufrecht zu erhalten; gerade wie die Einführung der idealen Faktoren geschah, um auch unter den ganzen algebraischen Zahlen die einfachen Teilbarkeitsgesetze beizubehalten, wie wir z.B. für die Zahlen 2 und $1 + \sqrt{-5}$ einen gemeinsamen idealen Teiler einführen, während ein wirklicher nicht vorhanden ist, so haben wir hier *zu den finiten Aussagen die idealen Aussagen zu adjungieren*, um die formal einfachen Regeln der üblichen aristotelischen Logik zu erhalten." (Hilbert 1964, S.92) Als Ergebnis folgt dann:"Wenn wir diese Auffassung generalisieren, so wird die Mathematik zu einem Bestand von Formeln, und zwar erstens solchen, deren inhaltliche Mitteilungen finiten Aussagen entsprechen, und zweitens von weiteren Formeln, die nichts bedeuten und die *die idealen Gebilde unserer Theorie* sind." (Hilbert 1964, S. 93/94) Da nun die idealen Aussagen, nämlich die Formeln, soweit sie nicht finite Behauptungen ausdrücken, nichts bedeuten, so können an ihnen die logischen Operationen nicht inhaltlich wie an den finiten Aussagen vorgenommen werden. "Es ist also nötig, die logischen Operationen und auch die mathematischen Beweise selbst zu formalisieren; dies erfordert eine Umsetzung der logischen Beziehungen in Formeln, so daß wir zu den mathematischen Zeichen noch logische Zeichen, etwa und (&), oder ($\vee$), folgt ($\rightarrow$), nicht ($-$) hinzufügen und außer den mathematischen Variablen a, b, c, ... auch logische Variablen, nämlich variable Aussagen A, B, C, ..., benutzen müssen." (Hilbert 1964, S.94) Reguliert wird die Einführung der idealen Elemente durch ein einziges Kriterium, nämlich durch den *"Nachweis der Widerspruchsfreiheit"*: "Die Erweiterung durch Zufügung von Idealen ist nämlich nur dann statthaft, wenn dadurch im alten engeren Bereiche keine Widersprüche entstehen, wenn also die Beziehungen, die sich bei Elimination der idealen Gebilde für die alten Gebilde herausstellen, stets im alten Bereiche gültig sind." (Hilbert 1964, S.97)

Wir möchten an die hier dargelegte Hilbertsche Methode der idealen Elemente einige Bemerkungen anfügen. Zunächst einmal ist die Methode der idealen Elemente Ausdruck des nicht-empiristischen Charakters der neuzeitlichen Wissenschaft. Kein einziger wesentlicher Begriff der neuzeitlichen Mathematik, angefangen vom Differential- und Integralbegriff, kann in einem empiristischen Sinne verstanden werden. Alle diese Begriffe sind als ideale Elemente in die Mathematik eingeführt worden, wenn auch, wie im Falle der Differential- und Integralrechnung, das methodische Bewußtsein über den Status solcher Begriffe noch nicht so weit entwickelt war. Insofern ist die Hilbertsche Position eine Kritik am Intuitionismus (und auch am Logizismus) nicht nur insofern, als er ihnen vorwirft, daß sie die gegenwärtigen Probleme der Mathematik nicht lösen können, sondern auch insofern, als ihre Vorgehensweise mit dem Geist der neuzeitlichen Mathematik überhaupt unverträglich ist. (Allerdings nicht mit ihrem philosophischen Selbstverständnis, das stark von euklidischen Vorstellungen geprägt wurde.) Zum anderen beschreibt die Methode der idealen Elemente, genauso wie die Sneedschen theoretischen Terme, den Übergang vom alten Wissen zum neuen Wissen. Sie spiegeln den sowohl operativen (in Form des Vorgriffs auf das Zukünftige) als auch ganzheitlichen Charakter der Wissenschaft wider. "Die Methode der Adjunktion von Idealen (seien es nun ideale Elemente oder ideale Aussagen) ist im Grunde genommen, wie aus dem Dargelegten ersichtlich, eine Methode zur Erforschung solcher Probleme, deren Lösung sich produktiver in einer Form erweist, die weit allgemeiner ist als die, in der die Probleme ursprünglich gestellt wurden. In diesem Sinne ist die Methode der Ideale als eine integrale Methode anzusehen, die alle anderen logischen Prinzipien der Genese wissenschaftlicher Theorien voraussetzt." (Kopnin/Popowitsch 1969, S. 352) Die Methode der idealen Elemente enthält also in sich beide Bewegungen, sowohl den Übergang vom alten Wissen zum neuen Wissen, als auch die dabei vorausgesetzte Bewegung von der Zukunft auf die Gegenwart, von der allgemeineren entwickelteren Theorie auf die weniger allgemeine, weniger entwickelte hin.

Das Hilbertsche Vorgehen führt zu einer Verselbständigung der formalen Logik und des Begründungsproblems. Die formale Logik wird als inhaltliche Logik aufgefaßt, insofern sie interpretiert wird als eine Menge von Aussagen komplizierter Struktur über letztlich finite Zeichenkombinationen. Andererseits wird die formale Logik verstanden als eine Struktur aus Zeichen, die nichts bedeuten. Nach Hilbert liegt die Bedeutung der Zeichen in den Anwendungen der Theorie. So sagt er in "Über das Unendliche" sehr deutlich:"Auch alte Einwendungen, die man längst abgetan glaubte, treten in neuem Gewande wieder auf. So wird neuerdings etwa dies ausgeführt: Wenn auch die Einführung eines Begriffes ohne Gefahr, d.h. ohne Widersprüche zu erhalten, möglich sei und dies erwiesen werden könne, so stehe damit noch nicht ihre Berechtigung fest. Ist dies nicht genau der gleiche Einwand, den man seinerzeit gegen die komplex-imaginären Zahlen geltend machte, indem man sagte: Freilich könne man zwar durch sie keine Widersprüche erhalten; aber ihre Einführung sei dennoch nicht berechtigt; denn die imaginären Größen existierten doch nicht? Nein, wenn über den Nachweis der Widerspruchsfreiheit hinaus noch die Frage der Berechtigung zu einer Maßnahme einen Sinn haben soll, so ist es doch nur die, ob die Maßnahme von einem entsprechenden Erfolge begleitet ist. In der Tat, der Erfolg ist notwendig; er ist auch hier die höchste Instanz, der sich jedermann beugt." (Hilbert 1964, S.80/81) Oder man vergleiche auch das oben bei der Diskussion der Bedeutung der Hilbertschen reinen Existenzbeweise angeführte Zitat aus "Die Grundlagen der Mathematik".

Wenn nun die Bedeutung der Theorie nach dem neuen, um die Jahrhundertwende sich herausbildenden Verständnis in den Anwendungen, also in der Zukunft der Theorie, liegt, wenn aber andererseits Kommunikation als Bewegung von der Gegenwart in die Zukunft aufgefaßt wird, dann können die Zeichen keine Bedeutung haben. Dies wäre mit dem Verständnis von Bedeutung gleich Anwendung unvereinbar. Die "Bedeutungslosigkeit" der Zeichen bei Hilbert ist also nur die Kehrseite der Medaille des radikalen Anwendungs- und Praxisbezuges der Mathematik.

Die Zuspitzung in der Trennung von Zeichen und Bezeichnetem, von Begründung und Entwicklung der Theorie macht es erst voll verständlich, wie durch Kommunikation die Kategorie der Tätigkeit von einer individual-psychologischen zu einer sozialhistorischen Kategorie wird. Denn erst durch das Kommunikationsproblem werden der Systemcharakter des Wissens und seine Operativität, die oben zur Beschreibung der Theoriendynamik und des Verhältnisses von Theorie und Empirie benutzt wurden, in einem zugespitzten und radikalen Sinne ausgeprägt. Individualpsychologisch besitzt eine symbolische Darstellung immer eine gewisse feste Verbindung mit einer bedeutungshaften Vorstellung. Die Trennung von Bedeutung und Symbol wird erst perfekt unter dem Zwang der sozialen Dynamik. In einer statischen, sich nicht wandelnden Gesellschaft, bzw. in einer relativ stabilen Gemeinschaft von Wissenschaftlern erfolgt die Herstellung der Verbindung von Zeichen und Bezeichnetem durch Gewöhnung, indem derjenige, der in eine solche Gemeinschaft hineinwächst, die Bedeutung durch Nachahmung im Gebrauch erwirbt. Erst wenn aufgrund der Dynamik der sozialen und der Wissensentwicklung diese Art des Erwerbs von Bedeutung nicht mehr möglich ist, tritt das hier erörterte Problem der Kommunikation in aller Schärfe auf. Es ist das große Verdienst Hilberts, die Zeichen der Zeit erkannt zu haben und durch die von ihm vorgenommene Trennung von Entwicklung und Begründung des Wissens, von Zeichen und Bezeichnetem für eine Begriffsauffassung Platz gemacht zu haben, die es erlaubt, die beiden getrennten Momente, Begründung und Entwicklung, Zeichen und Bezeichnetes, variabel aufeinander zu beziehen. Insofern hat Hilbert nicht einfach einen weiteren Vorschlag zur "Begründung der Mathematik" gemacht, sondern hat sich im Hinblick auf dieses Problem im besonderen Maße als für die wissenschaftlichen Anforderungen und Bedürfnisse seiner Epoche sensibel erwiesen.

Auch Hermann Weyl hat sich, wie bei Beisswanger beschrieben, zunehmend von seiner intuitionistischen Ausgangsposition gelöst und der Hilbertschen Position genähert. "Diese Position der Hilbertschen Mathematik gegenüber legt Weyl so dar, daß diese Mathematik und ihre einzelnen Aussagen vom Standpunkt einer reinen Mathematik keine absolute Verbindlichkeit hat - hier stimmt Weyl Brouwer zu -, daß die Hilbertsche Mathematik aber trotzdem, indem sie 'teilnimmt', 'an der theoretischen Konstruktion der wirklichen Welt', ein gewisses Recht beanspruchen kann. Denn da die Theorien der Physik *sowieso* um des theoretischen Zusammenhangs willen nicht-verifizierbare und nicht-evidente Annahmen einführen, so schadet es nichts, wenn *auch* die Mathematik, soweit sie 'durch die Physik in den Prozeß der theoretischen Weltkonstruktion mit hineingenommen ' ist, nicht-evidente Prinzipien zuläßt. Die Hilbertsche Mathematik soll nach Weyl nicht mehr unbedingt autonom sein, bezogen auf die Anwendungen der Mathematik, insbesondere auf den Prozeß der Hypothesenbildung in der Physik. Erhält so nach Weyl die formalistische Mathematik wieder einen Sinn, indem sie verwoben ist mit physikalischen Annahmen, dann ist es auch '*nicht mehr nötig*, daß das Mathematische sich daraus als ein besonderer Bezirk des anschaulich Gewissen isolieren lasse'." (Beisswanger 1966, S.25) Und in seinen Diskussionsbemerkungen zu dem oben häufiger zitierten Hilbertschen Vortrag über die Grundlagen der Mathematik sagt Weyl:"Setzt sich die Hilbertsche Auffassung, wie das allem Anschein nach der Fall ist, gegenüber dem Intuitionismus durch, *so erblicke ich darin eine entscheidende Niederlage der philosophischen Einstellung reiner Phänomenologie*, die damit schon auf dem primitivsten und der Evidenz noch am ehesten geöffneten Erkenntnisgebiet, in der Mathematik, sich als unzureichend für das Verständnis schöpferischer Wissenschaft erweist." (Anhang zu Hilbert 1929, S. 88)

Es ist klar, daß die methodische Einstellung Hilberts zur Mathematik ihren höchsten und entwickeltsten Ausdruck in der axiomatischen Methode findet. Als Moment des Kommunikationsprozesses gesehen, stellt ein Axiomensystem die Verallgemeinerung der Methode der idealen Aussagen dar. Auf der anderen Seite macht die Hilbertsche Axiomatik radikal ernst mit der Trennung von Zeichen und Bezeichnetem, von mathematischer Struktur und ihrer Anwendung. Die Entwicklung der Mathematik im 20. Jahrhundert belegt, als wie fruchtbar sich diese Auffassung für die Vervielfältigung der Anwendungsbezüge der Mathematik erwiesen hat. Es ist ein krasses Mißverständnis, das nur aus einer Verwechslung der euklidischen Methodologie mit der axiomatischen Methode entstehen konnte, wenn sich im Anschluß an Hilbert die Meinung herausbilden konnte, daß es sich bei den Anwendungen in der Mathematik um ein für die Mathematik selbst vernachlässigbares Beiwerk handelt. Hilbert selber hat dies anders gesehen; er sagt: "Ich glaube: Alles, was Gegenstand des wissenschaftlichen Denkens überhaupt sein kann, verfällt, sobald es zur Bildung einer Theorie reif ist, der axiomatischen Methode und damit mittelbar der Mathematik. Durch Vordringen zu immer tieferliegenden Schichten von Axiomen im vorhin dargelegten Sinne gewinnen wir auch in das Wesen des wissenschaftlichen Denkens selbst immer tiefere Einblicke und werden uns der Einheit unseres Wissens immer mehr bewußt. In dem Zeichen der axiomatischen Methode erscheint die Mathematik berufen zu einer führenden Rolle in der Wissenschaft überhaupt." (Hilbert: Axiomatisches Denken, abgedruckt in Hilbert 1964, S.11)

Allerdings findet die angesprochene Auffassung, Mathematik sei nur ein Spiel mit Symbolen, die nichts bedeuten, insofern in der Konzeption Hilberts eine Stütze, als Hilbert mit seinem Programm einer "finitistischen Metamathematik" selber zeitweise den Anspruch verbunden hat, die Mathematik damit ein für allemal begründen zu können. Die finitistischen Verfahren sollten die Grundlage für einen absoluten Widerspruchsfreiheitsbeweis der Mathematik darstellen. Damit wären aber in einem ganz prinzipiellen Sinne Begründung des Wissens und seine Entwicklung voneinander getrennt worden, der Gegenstandsbezug der Theorie, ihre "empirische" Komponente, hätte prinzipiell keine konstitutive Funktion für die mathematische Theorieentwicklung mehr gehabt. Daß dies wohl Hilberts philosophische Position gewesen ist, geht aus dem folgenden Zitat aus "Grundlagen der Mathematik" hervor. "Das Formelspiel, über das B r o u w e r so wegwerfend urteilt, hat außer dem mathematischen Wert noch eine wichtige allgemeine philosophische Bedeutung. Dieses Formelspiel vollzieht sich nämlich nach gewissen bestimmten Regeln, in denen die *Technik unseres Denkens* zum Ausdruck kommt. Diese Regeln gelten als abgeschlossenes System, das sich auffinden und endgültig angeben läßt." (Hilbert 1928, S.79)

Nun ist das Programm einer finitistischen Metamathematik seit den Gödelschen Sätzen von 1931 endgültig gescheitert. Die Gödelschen Sätze haben gezeigt, daß man zum Nachweis der Widerspruchsfreiheit eines Systems Mittel benötigt, die stärker sind als dieses System. Das bedeutet, daß die Vorstellung eines absoluten Widerspruchsfreiheitsbeweises aufgegeben werden muß. Die Gödelschen Ergebnisse werden geradezu als Mittel zur Hierarchisierung von Theorien, zum Vergleich der relativen Stärke von Systemen benutzt. Wenn System A es gestattet, die Widerspruchsfreiheit des Systems B nachzuweisen, dann ist A stärker als B. Gödel hatte außerdem gezeigt, daß jede Formalisierung einer Theorie, die mindestens so reichhaltig ist wie die elementare Zahlentheorie, unvollständig ist. Das aber heißt, daß es nicht möglich ist, eine Theorie durch ihre Formalisierung zu ersetzen, und dies nicht nur aus "psychologischen" Gründen.

Wir interpretieren die Gödelschen Ergebnisse hier so, daß sie auf die wesentliche Bedeutung des Gegenstandsbezugs mathematischer Theorien verweisen. Hierbei sei der Gegenstandsbezug zunächst in einem ganz allgemeinen und unspezifischen Sinne verstanden, z.B. auch im Sinne des Gödelschen "Platonismus". Damit ist aber auch impliziert, daß die Begründung einer Theorie und ihre Entwicklung letztlich aufeinander bezogen bleiben, sie lassen sich nicht absolut voneinander trennen. Was von Hilbert offenbar nicht gesehen wird, ist die Tatsache, daß der Bereich des völlig gewissen "inhaltlichen logischen Schließens" selbst einer historischen Veränderung unterliegt. Jener minimale Bedeutungskontext, der vorausgesetzt werden muß, um Kommunikation überhaupt zu ermöglichen, verändert sich in Abhängigkeit von sozialen Gegebenheiten und dem jeweiligen Erkenntnis- und Entwicklungsniveau. Hilberts Verdienst liegt, wie gesagt, in der Herausarbeitung der Selbständigkeit der symbolischen Ebene, eine *Selbständigkeit, die allerdings relativiert werden muß.* Die große Schwierigkeit, die letztlich in der Hilbertschen Trennung von Entwicklung und Begründung des Wissens impliziert ist, war bereits von Weyl in den erwähnten Diskussionsbemerkungen zu Hilberts Vortrag herausgestellt worden.

"Es ist eine tiefe philosophische Frage, welches die 'Wahrheit' oder Objektivität ist, die dieser über das Gegebene weit hinausdrängenden theoretischen Weltgestaltung zukommt. Sie hängt eng mit der anderen Frage zusammen, was uns dazu treibt, gerade dies bestimmte von H i l b e r t entwickelte Axiomensystem zugrunde zu legen; die Widerspruchsfreiheit ist dafür wohl ein notwendiges, aber kein hinreichendes Argument. Vorläufig kann man darauf kaum anders antworten als mit dem Glauben an die Vernünftigkeit der Geschichte, die diese Bildung in einem lebendigen geistigen Entwicklungsprozeß hervortrieb - ohne daß freilich die Träger der Entwicklung, durch vermeintliche Evidenz geblendet, der Willkür und Kühnheit ihrer Konstruktion sich bewußt waren. Auch H i l b e r t s Berufung auf den praktischen Erfolg der Methode scheint mir von einem solchen Glauben getragen." Und er fährt fort:"Oder ist seine Meinung die, daß, je mehr der Axiomenbau seiner Vollendung sich nähert, in umso höheren Maße die Willkür wieder ausgeschieden wird und das eindeutig Zwingende hervortritt?" (Anhang zu Hilbert 1928, S. 88) Es geht also darum, sich klar zu machen, daß auch im Rahmen des Hilbertschen Formalismus ein rein syntaktisches Theorienverständnis nicht möglich ist. Der Satz von Beisswanger "Semantisches Verständnis wird dann zur Privatsache." (Beisswanger 1966, S.26) stimmt eben nur in der Tendenz, wie Beisswanger natürlich auch selber sieht. Damit wird hier derselbe Punkt geltend gemacht, wie oben beim Problem der imprädikativen Definitionen. Auch dort war ja gezeigt worden, daß ohne Einbeziehung des Gesichtspunktes der Referenz imprädikative Definitionen nicht angemessen interpretiert werden können: Und das Problem der Referenz ist es auch, bei dem Frege in der oben geschilderten Auseinandersetzung mit Hilbert und seiner axiomatischen Methode Recht behält. Frege besteht nämlich deshalb gegen Hilbert so auf dem alten euklidischen Verständnis von Definition, Axiom und Satz, weil er keine andere Möglichkeit sieht, das Problem der Referenz zu lösen.

Wenn es also richtig ist - und die Gödelschen Ergebnisse legen dies mit Bestimmtheit nahe -, daß eine axiomatische Theorie in einem prinzipiellen Sinne auf ihren Anwendungs- und Gegenstandsbezug verwiesen bleibt, dann ergibt sich daraus auch eine veränderte Sichtweise auf die Einführung intuitiv anschaulicher Bezeichnungen in axiomatisierte Theorien. Wenn etwa - dieses Beispiel wird bei Beisswanger diskutiert - der Hilbert-Raum axiomatisch definiert wird und wenn daran anschließend Begriffe wie "senkrecht stehen", "Konvexität" und "Kugel" eingeführt werden, dann handelt es sich dabei vom syntaktischen Standpunkt her natürlich nur um psychologisch günstige Bezeichnungen, und man mißt diesen Termini keinerlei objektive Bedeutung bei. Ganz anders sieht die Sache natürlich vom Standpunkt des Gegenstandsbezuges der Theorie, vom Standpunkt der Wissensentwicklung aus: Von daher nämlich hat die Einführung solcher Bezeichnungen die objektive Funktion, eine Klasse möglicher Anwendungen der Theorie vorwegnehmend zu umschreiben und damit zur Aktivierung des Bedeutungsgehalts im Sinne der Theorieentwicklung beizutragen. Unter diesem Gesichtspunkt hat die Einführung solcher anschaulicher Bezeichnungen nichts Subjektives an sich, sondern es handelt sich um einen notwendigen Theoriebestandteil. Insofern realisiert sich in der Einführung solcher Bezeichnungen die Komplementarität von syntaktischer und referentieller Bedeutung, von theoretischer Struktur und möglichem Anwendungsbereich. Es ist deswegen so wichtig, in diesem Vorgehen die Realisierung eines dualen Bedeutungskonzeptes zu sehen, weil sonst eine der wichtigsten methodischen Errungenschaften in der Mathematik, nämlich die richtigen Begriffe zu bilden (Beisswanger referiert Weyl, der von "schöpferischen Definitionen" spricht), als eine rein subjektive Beliebigkeit erscheinen würde.

Die Einheit von Begründung und Entwicklung, von sozial-kommunikativer und gegenständlicher Seite des Wissens findet auch ihren Niederschlag in einer merkwürdigen Symbiose, in der die beiden hauptsächlichen philosophischen Grundströmungen, die auf das Selbstverständnis der mathematischen Wissenschaft Einfluß haben, sich befinden. Während nämlich einerseits der Platonismus, d.h. eine referentielle Auffassung mathematischer Bedeutung, immer dann in den Vordergrund tritt, wenn vom schöpferischen Prozeß in der Mathematik die Rede ist, ganz einfach deswegen, weil Tätigkeit ihre Gegenstände braucht, erhält der Nominalismus, d.h. die Auffassung, die mathematische Begriffe als Konventionen versteht und deshalb einer syntaktischen Bedeutungskonzeption verpflichtet ist, immer dann größeres Gewicht, wenn es um Fragen der Begründung und der sozial-kommunikativen Seite des Wissens geht. Nun hat Castonguay beobachtet (Castonguay 1972, S.75), daß eigentlich beide philosophischen Auffassungen als einzige positive Anforderung an eine mathematische Theorie die ihrer Widerspruchsfreiheit aufstellen, sei es, daß der Nominalismus dieses als regulatives Prinzip der Sprache versteht, sei es, daß der Platonismus Widerspruchsfreiheit als Folge der Existenz mathematischer Objekte fordert. Castonguay sagt daher: "Thus, whatever its epistemological shortcomings, Platonism at the level of mathematical research is not incompatible with conventionalism at the level of the finished product. Both the correspondence and the coherence views of truth are in their different ways applicable to mathematics. Their spheres of application are not entirely disjoint, in that the partition between end-product and process of fabrication is not perfectly delimitable. It is in these very areas of overlap that the mutation from correspondence to coherence views of truth takes place, or where, in the terminology of Section 2.3, meanings suggested by correspondence views (insights) in the heuristic component of a natural theory crystallize into linguistic definitions and relations of entailment for that theory, that is, into meanings expressible in a coherence framework." (Castonguay 1972, S.66)

Unter diesem Gesichtspunkt gesehen, erscheinen also Platonismus und Nominalismus eher als zwei Seiten ein und derselben Medaille als als Gegensätze.

Als Beispiel für die notwendige Einheit von Entwicklung und Begründung, von syntaktischer und referentieller Bedeutung, möchten wir hier, ohne das näher auszuführen, auf den Begriff der Wahrscheinlichkeit verweisen. Dieser Begriff ist deshalb so instruktiv, weil er seine volle Ausprägung erst im 19. bzw. im 20. Jahrhundert gefunden hat und weil man bei ihm nicht die Illusion haben konnte, er sei nur die Präzisierung einer vorab vorhandenen, intuitiven Vorstellung. Der Wahrscheinlichkeitsbegriff gestattete keine "euklidischen Illusionen".

Die klassische Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffs ist nun das ganze 19. Jahrhundert hindurch als zutiefst zirkelhaft empfunden worden. Die Definition der Wahrscheinlichkeit als das Verhältnis aus der Zahl der günstigen Fälle zu der Zahl aller gleichmöglichen Fälle setzt den Begriff der Gleichmöglichkeit voraus. Was aber ist gleichmöglich anders als gleichwahrscheinlich, und wie kann man gleichwahrscheinlich definieren, ohne auf den Begriff der Wahrscheinlichkeit zurückzugreifen? Wird also nicht hier der Wahrscheinlichkeitsbegriff durch den Wahrscheinlichkeitsbegriff definiert? So hat noch 1909 Émile Borel diese Definition verteidigt, indem er sagte, daß es ein Irrtum der Logiker sei, zu versuchen, eine nicht-zirkuläre Definition von Wahrscheinlichkeit zu geben. (Zitiert in Hacking 1976, S.122) Ebenso ist dem Versuch zur Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, der von von Mises gegeben wurde und der in bestimmter Weise das Gesetz der großen Zahlen zur Grundlage der Definition machte, Zirkelhaftigkeit vorgeworden worden. Erst die axiomatische Definition von Kolmogoroff führte zu einer befriedigenden Grundlage der Wahrscheinlichkeitstheorie, und im Lichte dessen, was wir bisher ausgeführt haben, ist es kein Wunder, daß auf der Grundlage der axiomatischen Einführung von Wahrscheinlichkeit es zu einer relativ scharfen Trennung und Gegenüberstellung von "Wahrscheinlichkeitstheorie" auf der einen Seite und "Statistik" auf der anderen Seite, also von Theorie und Anwendung, gekommen ist. Das Beispiel der Wahrscheinlichkeitstheorie zeigt besonders instruktiv, wie die relative gegenseitige Eigenständigkeit von Kommunikation und Erkenntnistätigkeit sich in einer Aufspaltung von Theorie und Anwendung niederschlägt, wie aber andererseits auch beide Momente untrennbar aufeinander bezogen sind. (Dieses Beispiel verdanke ich einer Diskussion mit H.Steinbring.)

Wir haben in den Entwicklungen dieses Abschnittes gesehen, daß es die sozial-kommunikative Seite der Erkenntnis ist, die für die Zuspitzung in der Gegenüberstellung von symbolischer Ebene und Ebene der Gegenstände verantwortlich ist, die erst letztlich dazu führt, daß der Systemcharakter des Wissens und seine Operativität ihre volle Ausprägung erfahren. Da aber dennoch vermittelt beide Ebenen (die der Symbole und die der Gegenstände) aufeinander bezogen bleiben, gilt es, Vorstellungen und Konzeptionen zu entwickeln, in denen Wissen beschrieben wird durch den komplementären Bezug beider Momente aufeinander. In der Sneedschen Konzeption war eine solche Beschreibung in dem dualen Paar von theoretischer Struktur K und Menge der intendierten Anwendungen I gegeben, während im Rahmen der mehr grundlagentheoretisch orientierten Überlegungen dieses Kapitels sich das Aufeinander-bezogen-sein von intensionaler (syntaktischer) und referentieller (semantischer) Bedeutung als wichtig erwiesen hatte. Castonguay, der sich in seinem Buch "Meaning and Existence in Mathematics" ausführlich mit dieser Unterscheidung befaßt, hat darauf hingewiesen, daß in der Mathematik die intensionale Auffassung von Bedeutung in den Vordergrund rückt, wenn es um Probleme der Begründung geht, während das extensionale Verständnis eher dem Bedürfnis, Mathematik als schöpferischen Prozeß aufzufassen, entspricht. Castonguay selber befürwortet für die Mathematik eher ein intensionales Bedeutungskonzept, weil er meint, daß sich der Gegenstandsbezug der Mathematik nicht in Form von Objekten darstellt, vielmehr möchte er ihn nur ganz unbestimmt und mehr prozeßorientiert mit dem Terminus "Objektivität" charakterisieren.

Im vorliegenden Kapitel haben wir nun versucht, einige ganz allgemeine und prinzipielle Argumente für die Auffassung zu entwickeln, daß mit der Komplementarität von Theorie und Anwendung auch für die Mathematik wirklich ernst gemacht werden muß. Im folgenden Abschnitt wollen wir uns anhand des Variablenbegriffs noch näher mit dem Problem des Zusammenspiels von intensionaler und referentieller Bedeutung beschäftigen.

Es ist eine Folge des dynamischen Charakters der neuzeitlichen Wissenschaft sowie ihrer sozial-kommunikativen Problematik, daß zur Analyse des Erkenntnisprozesses ein Dreier-Schema von

S - T - O

genommen werden muß. Dabei soll das Schema aussagen, daß der Gegenstandsbezug des Wissens (die Relation O - T) und die subjektive Seite des Wissens (die Relation T - S) sich relativ gegeneinander verselbständigen, aber über die gegenständliche Tätigkeit miteinander vermittelt werden. Auf der Ebene des Wissens spiegelt sich diese gegenseitige Vermittlung der widersprüchlichen objektiven und subjektiven Momente wider in der Komplementarität des Begriffs, im Zusammenspiel von referentieller (Relation O - T) und syntaktischer (Relation T - S) Bedeutung. In der Arbeit "Das Lehrbuchproblem als Gegenstand der Lehrerausbildung"(Keitel/Otte 1977) ist dieselbe Beziehung als die Beziehung von Text 1 (Symbolebene) und Text 2 (Gegenstandsebene) beschrieben worden. Dort findet man auch einige Hinweise auf analoge Differenzierungen im psychologischen Begriff der Tätigkeit. Zum Beispiel entspricht die psychologische Charakterisierung der Tätigkeit als "Einheit von Regulation und Selbstregulation" exakt der Komplementarität objektiver und subjektiver Momente im Begriff.

Es ist nun entscheidend zu sehen, daß die Dynamik des Wissensprozesses eine permanente *Variabilität in der Beziehung der Symbolebene und der Gegenstandsebene aufeinander*, von Text 1 und Text 2,zur Folge hat, die sich in auftretenden Antinomien, Widersprüchen etc. äußert. Der Prozeß der Wissensentwicklung besteht in der Einheit zweier gegenläufiger Prozesse, der eine von der Gegenwart in die Zukunft nach vorne gerichtet, der andere quasi von der Zukunft in die Gegenwart. Die Einheit beider Prozesse aber muß immer wieder erneut hergestellt werden. Das aber heißt, daß die Art und Weise, in der die Variabilität der Beziehung von Text 1 und Text 2, von theoretischer Struktur und ihren Anwendungen, von syntaktischer und referentieller Bedeutung reguliert wird, zu einem entscheidenden Problem jedes Lernprozesses und jedes Prozesses der Aneignung von Wissen wird. Ein öffentliches Bildungswesen kann sich nun nicht damit zufriedengeben, daß diese Beziehungen sich zufällig regulieren, sondern es muß sich zur Hauptaufgabe machen, die Bewußtheit des Lernenden im Umgang mit dem Wissen zu erhöhen. Damit aber wird es zu einer Aufgabe jedes Bildungsprozesses, nicht nur Wissen, sondern auch Wissen über Wissen, "Metawissen", zu vermitteln. Der Schüler muß nicht nur Begriffe lernen, sondern auch Wissen über Begriffe. Dabei gilt auch in diesem Zusammenhang, daß die sozial-kommunikative Problematik die Notwendigkeit der Vermittlung von geeignetem Metawissen noch erhöht: Das Zusammenwirken der komplementären Aspekte des Begriffs verändert sich nämlich nicht nur mit der Zeit, sondern es ist auch variabel längs der sozialen Dimension. Physiker gehen anders mit bestimmten Begriffen um als Mathematiker, und Anwender in bestimmten praktischen Bereichen haben wiederum ein anderes Verhältnis zum Begriff. Dennoch ist es von eminenter Wichtigkeit zu realisieren, daß es sich jeweils immer um ein und denselben Begriff handelt, nur mit unterschiedlicher Akzentuierung seiner komplementären Aspekte.

Es kann nicht Aufgabe der vorliegenden Arbeit sein, detailliertere Vorstellungen zum Problem des Metawissens zu entwickeln. Daher sollen zu diesem Konzept nur zwei Erläuterungen gegeben werden: die eine versucht, die Verbindung zum Paradoxienproblem herzustellen, die andere ermöglicht einen ersten Vorgriff auf das Problem der Variablen, das Gegenstand unseres nächsten Abschnitts ist. Zunächst gilt ganz allgemein, daß es gerade das Auftreten von Paradoxien ist, das die Erweiterung logischer Systeme zu umfassenderen, reicheren, allgemeineren Systemen erzwingt. Umgekehrt setzt es den Standpunkt des umfassenderen, des Metasystems voraus, um einen Widerspruchsfreiheitsbeweis für ein gegebenes System zu führen. Nun scheint die Wirksamkeit eines Metasystems im Hinblick auf ein vorgegebenes System darin zu bestehen, daß sich mit seiner Hilfe in dieses System *Grenzen* einführen lassen, die in diesem System vorher nicht vorhanden waren, sei es, daß man in einer Metasprache die wahren von den falschen Sätzen des

Systems unterscheiden kann, sei es, daß man in einer Metasprache bestimmte Verbotsregeln im Hinblick auf die Ausführbarkeit bestimmter Operationen in dem vorgegebenen System formuliert. Eine bekannte Verbotsregel dieser Art ist etwa das von uns diskutierte "vicious-circle principle" von Russell. Später wird dann eine solche Verbotsregel in ein positives Konstruktionsprinzip für die Konstruktion eines Systems höherer Ordnung verwandelt, in dem die infrage stehenden Paradoxien nicht mehr gelten. So diente ja auch das "vicious-circle principle" von Russell als positives Konstruktionsprinzip für die verzweigte Typentheorie. Auch in der Physik ist die Rolle von Verboten wohl bekannt (vgl. Kopnin/Popowitsch 1969, S.328). Nun steht das Problem der Einführung von Grenzen bzw. das dadurch implizierte Verhältnis von System und Subsystem in einem engen Zusammenhang sowohl zur Theoriendynamik, als auch zum Kommunikationsproblem. Wissen entwickelt sich dadurch, daß die Grenzen der Anwendbarkeit einer bestimmten Operation, eines Gesetzes, einer Erkenntnis erkannt werden. Eine solche Grenze zu erkennen, heißt aber auch bereits, sie zu überschreiten, d.h. zu einem umfassenderen System überzugehen. Man vergleiche dazu auch die Diskussion, die in der frühen Neuzeit über das Verhältnis endlicher Kosmos/unendliches Universum geführt wurde (vgl. Kapitel I). Eine ganz analoge Rolle spielt die Metaebene nun für das Kommunikationsproblem. Auch in der Kommunikation kann Neues nur verstanden werden, wenn derjenige, der die Information aufnimmt, einen Begriff sowohl wörtlich nimmt (das neu in die Kommunikation eingeführte Objekt ist solange als identisch mit seinem symbolischen Repräsentanten aufzufassen), als auch den Begriff *nicht* wörtlich *nimmt*, ihn sinnvoll auf einen geeigneten Kontext bezieht. Das heißt, der Rezipient muß die syntaktische Ebene sowohl ernst nehmen, als auch die Bewegung auf der syntaktischen Ebene begrenzen. Begrenzen heißt aber, das syntaktische System in ein größeres System, in den Kontext der Information einzubetten. Das aber heißt wiederum, Informationsübermittlung ist nur verstehbar auf der Grundlage des Verhältnisses von Wissen und Metawissen.

Ein anschauliches Beispiel dafür, wie eine metasprachlich eingeführte Differenzierung in der Objektsprache vergegenständlicht wird, findet sich in dem bereits mehrfach erwähnten Buch von M. Steiner auf den Seiten 46 und 47. Steiner diskutiert dort ein Argument von Wittgenstein, der sich mit dem Problem einer rein konventionalistischen Auffassung von Definitionen auseinandersetzt. Wittgenstein fragt, ob etwa die Exponentenschreibweise, also z.B. a^5 wirklich nur eine andere Schreibweise für den Ausdruck $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$ sei. Durch eine solche Definition werde doch eine völlig andere Sichtweise auf das Problem der Multiplikation gegeben. Steiner stimmt dem zu, doch er sagt, daß es sich hier nicht nur um eine metasprachliche Unterscheidung, quasi um einen rein psychologischen Unterschied handle, sondern daß diese Differenzierung auch objektsprachlich formuliert werden könne, indem man nämlich Variablen einführe, in diesem Fall also den Exponenten als Variable auffasse und entsprechend die sein Verhalten regulierenden Gesetzmäßigkeiten feststelle. "We want to look at 'n' in '$a^n = b$' not as a metalinguistic sign telling us how many times the symbol 'a' is to be repeated when the equation is written in primitive notation, but as a variable ranging over natural numbers. This is the 'new aspect' that truly introduces a new concept into mathematics, and not something psychological ('seeing the product in a new light,', etc.)." (M. Steiner 1975, S. 47)

Es ist klar, daß mit dieser Einführung einer neuen Variablen auf der Grundlage einer zunächst rein konventionalistischen Definition ein neues Objekt in die Theorie eingeführt, das ganze System also reicher geworden ist.

III.3. *Der Variablenbegriff in der Mathematik: Zur Einheit der sozialen und gegenständlichen Aspekte des Wissens.*

Wir haben im voraufgegangenen Abschnitt einige grundsätzliche Argumente dafür dargestellt, daß sich die Begründung des Wissens und seine Entwicklung letztlich nicht trennen lassen. Der damit grundsätzliche festgestellte Zusammenhang von sozialen und gegenständlichen Momenten des Wissens soll nun im weiteren näher untersucht werden.

Um zu veranschaulichen, wie eng die im vergangenen Abschnitt dargestellte Problematik mit bestimmten sozialen Wertungen über die Rolle der Wissenschaft zusammenhängt, sei daran erinnert, daß die Beurteilung der Formalisierung der Mathematik und ihre Beziehung zur Intuition, zum Gegenstandsbezug, gemeinhin gerade im umgekehrten Sinne wie hier vorgenommen wird. Während im vorangegangenen Abschnitt die Bedeutsamkeit der symbolischen Erkenntnis für die Lösung des Kommunikationsproblems herausgearbeitet wurde und "Intuition" als etwas äußerst Privates bzw. als Besitzstand kleiner Gruppen oder Schulen, als ein im höchsten Grade künstliches Produkt dargestellt wurde, wird normalerweise die "Intuition" als "natürlich" und als Gemeingut aller Menschen betrachtet, während man die Formalisierung nur als Besitz einer kleinen Elite ansieht. Daran erinnert Piaget (Beth/Piaget 1966, S.226). Und in der Tat ist auch in Pädagogenkreisen die Meinung nicht selten, daß das größte Hindernis der Verbreitung mathematischer Kenntnisse in der symbolischen Sprache der Mathematik liege. Der Zusammenhang von gegenständlichen und sozialen Momenten des Wissens, wie er sich in dieser Auffassung niederschlägt, sieht also so aus, daß der Inhalt mathematischer Theorien als Produkt des gesunden Menschenverstandes erscheint, während ihre Form im höchsten Grade elitär sei. Es ist klar, daß eine solche Auffassung in starkem Maße mit der Vorstellung zusammenhängt, daß Mathematik im Grunde genommen eine statische Wissenschaft sei, die sich nicht mehr wesentlich weiterentwickle.

Der enge Zusammenhang von sozialen und gegenständlichen Momenten des Wissens wird besonders deutlich, wenn man sich vergegenwärtigt, daß insbesondere das empirische Wissen selbst eine sozial bestimmte Kategorie darstellt. Das empirische Wissen umfaßt sowohl den Bestand an gesamtgesellschaftlich (bzw. einzelwissenschaftlich) verfügbaren Erfahrungen und empirischen Kenntnissen als auch Maßstäbe und Bewertungskriterien dafür, was überhaupt als Erfahrung zählt und wieviel Erfahrung zählt. Daraus folgt u.a., daß das Vorherrschen empiristischer Konzeptionen in bestimmten Erkenntnistheorien nicht nur ein "erkenntnistheoretisches Problem" ist, sondern auch als Ausdruck einer bestimmten sozial-kommunikativen Situation zu verstehen ist. Gleichzeitig markiert der Standpunkt, den man gegenüber empirischem Wissen bezieht, immer auch eine Stellungnahme zum Problem der Theoriendynamik, d.h. dazu, ob man Wissenschaft in einem expansiven oder restriktiven Sinne auffaßt.

Ein für den Zusammenhang von sozialen und gegenständlichen Momenten charakteristisches Argument findet sich bei Piaget. In dem Buch "Mathematical Epistemology and Psychology" (Beth/Piaget 1966) beschäftigt er sich mit der Bedeutung der konkreten Operationen für die Herausbildung der logisch-mathematischen Abstraktionen. Da Piaget davon ausgeht, daß Mathematik und Logik nicht-empirische Wissenschaften sind, daß vielmehr ihr Gegenstand die Charakteristiken der allgemeinsten Koordinationen menschlicher Handlungen als solche sind (Piaget verankert damit die Objektivität der mathematischen und logischen Erkenntnis in der biologischen Grundausstattung des Menschen), fragt es sich also, welche Bedeutung dem gegenständlichen Operieren für die Bildung mathematischer Abstraktionen dann noch zukommen kann. Er sagt dazu:"All that matters about action is its objective result (in so far as separated from the individual and common to every subject carrying out the same action); and this objectification is so essential that a subject verifies through the objects the results of the actions performed upon them , that is, the result he was looking for." (Beth/Piaget 1966, S.234) Dem Gegenstandsbezug wird hier also eine rein sozial-kommunikative, Intersubjektivität herstellende Funktion zugewiesen.

Die Tatsache, daß der empirische Bezug einer Theorie sowohl längs der historischen Dimension als auch längs der sozialen verschmiert, ist in der Wissenschaftstheorie in der unterschiedlichsten Weise reflektiert worden. Eine Konsequenz besteht darin, daß man gleichsam als "Grundbaustein" des Wissens ein Konstrukt postulierte, das sowohl sozial als auch gegenständlich bestimmt ist. So stellt der Kuhnsche Paradigmenbegriff sowohl die Grundlage zur Entwicklung empirischen Wissens als auch eine Grenze der Kommunikation dar. Im Sinne solcher Konzeptionen ist unsere Feststellung in Kapitel II, daß die Sneedsche Differenzierung zwischen theoretischen und nichttheoretischen Termen sowohl beiträgt zum Verständnis der Theoriendynamik bzw. des Verhältnisses von Theorie und Empirie, als auch zum Verständnis des Kommunikationsprozesses eine notwendige Konsequenz der doppelten Bestimmtheit des Wissens durch die Gegenstände und die soziale Organisation. Die Frage, die die Wissensentwicklung und den Kommunikationsprozeß bestimmt, ist: Wie wird Neues in die Wissenschaft (bzw. in die Kommunikation) eingeführt? Auf welche Weise kann das bisher Unbekannte zum Gegenstand der Theorie (bzw. der Kommunikation) werden? Wie bewerstelligt man in der Wissenschaft (bzw. in der Kommunikation) den Übergang von einer Theorie zu einer entwickelteren, reicheren, allgemeineren Theorie? Wie läßt sich der Übergang von einem bekannten System zu einem umfassenderen, größeren, noch unbekannten System vorstellen?

Die neuzeitliche Wissenschaft hat auf diese Frage eine "genetische" Antwort gegeben, die sich am klarsten im Selbstverständnis der Mathematik ausgedrückt hat. Wir können die Antwort der Neuzeitlichen Wissenschaft inzwischen mit den verschiedensten Begriffen umschreiben: "Theoretische Terme" (Sneed), "Methode der idealen Elemente" (Hankel hat diese Form der Begriffsbildung auch als "Permanenzgesetz" bezeichnet) "Variable", "reflektive Abstraktion" (Piaget).

Das Wesen der mit diesen Begriffen angedeuteten Methode ist in der neuzeitlichen Wissenschaft relativ früh erkannt worden. So formuliert etwa Descartes am Beginn seiner "Geometrie": "Soll nun irgendein Problem gelöst werden, so betrachtet man es zuvörderst als bereits vollendet und führt für alle Linien, die für die Konstruktion nötig erscheinen, sowohl für die unbekannten als auch für die anderen, Bezeichnungen ein. Dann hat man, ohne zwischen bekannten und unbekannten Linien irgendeinen Unterschied zu machen, in der Reihenfolge, die die Art der gegenseitigen Abhängigkeit dieser Linien am natürlichsten hervortreten läßt, die Schwierigkeiten der Aufgabe zu durchforschen, bis man ein Mittel gefunden hat, um ein und dieselbe Größe auf zwei verschiedene Arten darzustellen; dies gibt dann eine Gleichung, weil die den beiden Darstellungsarten entsprechenden Ausdrücke einander gleich sind." (Descartes 1969, S.4) Im Kapitel wurde beschrieben, daß diese Art des der Algebra zugrundeliegenden Gebrauchs von Variablen den wesentlichen Unterschied ausmacht zur Art und Weise, in der in der Antike Mathematik betrieben wurde.

Der Typ, der mit diesem operativen Prinzip verbundenen Begriffsbildung und Abstraktion wird wohl am eindrucksvollsten bei Piaget in seiner Kennzeichnung der reflektiven Abstraktion beschrieben. "a) Um eine abstraktere und allgemeinere Struktur aus einer konkreten aufzubauen, ist es zunächst notwendig, gewisse operationale Beziehungen aus letzterer zu abstrahieren, um sie später in der abstrakten Struktur zu verallgemeinern; b) aber beides, diese Abstraktion und Generalisierung setzen die 'Widerspiegelung' (im wörtlichen Sinne) der abstrahierten Beziehungen auf einer neuen Ebene des Denkens voraus, um so eine verallgemeinerte Antwort darzustellen; c) nun besteht diese 'Widerspiegelung' in neuen Operationen, die zu den vorherigen Operationen in Beziehung stehen, während sie sie gleichzeitig fortsetzen. So machen also die neuen Operationen, welche zur Abstraktion der vorherigen Beziehungen notwendig waren, die Neuheit des abgeleiteten Systems aus, während ihre Abstraktion von den vorherigen Operationen die Kontinuität zwischen den beiden System gewährleistet. Schließlich d) ermöglichen diese neuen Operationen die Kombination bisher getrennter Systeme zu neuen Einheiten. ... Die historische Entwicklung der Mathematik hin zu einer reinen Theorie scheint so dieser zweifachen Bewegung zuzuschreiben zu sein, diesem Prozeß der Differenzierung oder inneren Diversifikation von Systemen und ihrer externen Vereinigung. Aber was vom psychologischen Standpunkt als wesentlich zu betonen ist, was verständlich macht, warum die reine Mathematik als eine neue Form des Denkens erscheint, die gegenüber den intuitiven Ausgangsformen eine ganz neue Richtung nimmt, ist die Tatsache, daß weder die Diversifikation noch die Vereinigung sich auf derselben Konstruktionsebene wie die Ausgangssysteme entwickeln können, die jeweils in Beziehung aufeinander differenziert und vereinigt werden müssen. Würden sich Abstraktion und Verallgemeinerung in der Art und Weise vollziehen, wie man sich das oft vorstellt, dann würde sich das Problem natürlich nicht stellen. Man faßt Abstraktionen häufig als bloßes Separieren und Verallgemeinern, als die simple Feststellung, daß gewisse Objekte einen gemeinsamen Zug besitzen." (Beth/Piaget 1966, S.242ff, zitiert nach Jahnke/Mies/Otte/Schubring 1974, S.44ff) In dieser Darstellung beschreibt Piaget sehr deutlich einerseits den operativen, aktiven Charakter dieses Vorgangs, andererseits hebt er zu Recht den Gesichtspunkt hervor, daß diese Abstraktion sich nur auf einer höheren Systemebene, in einer reicheren, entwickelteren Theorieebene vollziehen kann, d.h. er arbeitet zu Recht den ganzheitlichen Charakter dieses Vorgangs heraus.

Piaget sieht auch sehr klar den Zusammenhang zwischen der "Methode der idealen Elemente" bzw. seiner "reflektiven Abstraktion" und der axiomatischen Methode. In dem Buch, aus dem wir zitierten, wird die Beschreibung der reflektiven Abstraktion geradezu dazu benutzt, um die Tendenzen zur Formalisierung und Axiomatisierung in der modernen Mathematik quasi als Verlängerungen des "natürlichen Denkens" in die Wissenschaft hinein darzustellen. Man darf dabei nicht vergessen, daß die reflektive Abstraktion, wie Piaget sie versteht, letztlich in der biologischen Grundausstattung des Menschen fundiert ist. Die Übereinstimmung zwischen Hilbert und Piaget ist bemerkenswert und groß. Beide stimmen darin überein, daß sie die hohe Bedeutsamkeit des genetischen Grundprinzips der neuzeitlichen Wissenschaft und dessen Zusammenhang mit der axiomatischen Methode herausstellen.

Das in der "reflektiven Abstraktion" Piagets zum Ausdruck gebrachte Verständnis von Verallgemeinerung ist nichts anderes als ein Ausdruck des operativen Prinzips, wie es in der neuzeitlichen Mathematik vor allem in der Schaffung des Variablenbegriff herausgearbeitet wurde. Durch den Variablenbegriff hat die Mathematik eine Konzeption für das Verhältnis von altem und neuem Wissen, von "Ontologie" und "Methode" entwickelt, die für alle Wissenschaften zum Vorbild wurde. Der Unterschied von aristotelischer Logik und moderner formaler Logik kann geradezu dadurch beschrieben werden, daß die moderne Logik vom Variablenbegriff ausgeht (vgl. Weyl 1966, S. 18). Daher ist es sehr erstaunlich, daß in den meisten Lehrbüchern der formalen Logik der Variablenbegriff eigentlich nur beiläufig erwähnt wird, während ihm andererseits als Mittel der Darstellung die größte Bedeutung zukommt.

In den allermeisten Lehrbüchern der formalen Logik wird eine Definition des Variablenbegriffs gegeben, die ihn als reine Leerstelle bestimmt, in die andere Ausdrücke eingesetzt werden können. Vom Standpunkt dieser Lehrbücher her ist das zunächst auch konsequent, da sie vor allem davon ausgehen, die Gesetze des Operierens auf der Zeichenebene zu vermitteln. Allerdings wird damit die Möglichkeit ausgeschlossen, Variablen im oben geschilderten Sinne als Repräsentanten des Neuen, noch Unbekannten innerhalb der Theorie aufzufassen. Eine solche Auffassung würde ja gerade implizieren, daß Variablen sowohl als Zeichen im Kontext der Zeichenebene verstanden werden als auch als Repräsentanten realer Objekte bzw. Problemzusammenhänge. Wenn man also Variablen in diesem Sinne auffaßt, dann wird die Frage nach einer dualen Bedeutungsstrktur für den Variablenbegriff (so wie sie sich im Zusammenhang mit den theoretischen Termen ergeben hatte) naheliegen.

Nun findet sich im Teil III des Buches von W.V.O. Quine "Die Wurzeln der Referenz" eine Darstellung, die genau diese doppelte Bestimmtheit des Variablenbegriffs zu entwickeln versucht. Für Quine steht diese Diskussion im Rahmen von Spekulationen, mit deren Hilfe er sich klarmachen will, wie eine

Genese des sprachlichen referentiellen Apparates beim Menschen aussehen könnte. Unter referentiellem Apparat wird dabei das System derjenigen sprachlichen Ausdrucksmittel verstanden, mit Hilfe deren der Mensch auf Gegenstände referiert. Dieser Apparat umfaßt also Pronomina, Mehrzahlendungen, Kopula, die Unterscheidung von generellen und singulären Termini usw.

Quine betrachtet das Pronomen als Urbild der Variablen in der Logik und der Mathematik, und er beschäftigt sich demgemäß mit den Möglichkeiten, wie beim Spracherwerb durch Kinder Relativsätze gelernt werden könnten. Der erste Schritt in dieser abstrakten und spekulativen genetischen Rekonstruktion des Erwerbs von Relativsätzen besteht nun darin, daß diese zunächst in einem *Einsetzungssinn* gelernt werden. Das soll heißen, daß der Relativsatz in dem Ausdruck "der Hund Fido, den ich von einem Bekannten kaufte" grundsätzlich eliminierbar ist durch den Satz "ich kaufte den Hund Fido von einem Bekannten". Das Relativpronomen funktioniert hier also eher als Einsetzungsoperator: "a ist ein Ding x derart, daß "(oder "a ist ein Ding, so daß Fx gilt". Dieser Satz ist natürlich prinzipiell ersetzbar durch den Ausdruck "Fa". Das Relativpronomen gestattet es also, neue generelle Termini als Prädikate zu bilden; solange diese neuen generellen Termini allerdings in Prädikatstellung stehen, sind sie prinzipiell eliminierbar. Der zweite Schritt in der genetischen Rekonstruktion besteht nun darin, daß die zunächst im Einsetzungssinn gelernten Relativsätze als Subjekte in universelle Aussagesätze wandern. So z.B. in den Satz:"Alles, was wir von dem Wrack gerettet haben, ist im Schuppen" bzw. "jedes Ding x , derart daß wir x von dem Wrack gerettet haben, ist im Schuppen". In dieser Stellung ist nun der Relativsatz nicht mehr eliminierbar, er übernimmt die Funktion eines abstrakten singulären Terminus. (Zur Erläuterung sei gesagt, in dem Satz "Was ist ein Quadrat" fungiert "Quadrat" als genereller Terminus, während in dem Satz "Das Quadrat ist eine Form" "Quadrat" als ein abstrakter singulärer Terminus fungiert.) Man hat also mit dieser Positionsänderung des Relativsatzes von der Prädikatstellung in eine Subjektstellung die Relativkonstruktion nicht-eliminierbar gemacht und gleichzeitig ist das Prinzip der Quantifikation in die Sprache eingeführt, da es sich um einen universellen kategorischen Satz vom Typ "Jedes a ist b" handelt. Quine sagt nun:"Es gibt zwei Einstellungen gegenüber der Quantifikation und gegenüber Variablen, die man sorgfältig unterscheiden muß; denn ihre Unterschiede sind subtil, aber weitreichend. Nach der einen Auffassung ist die Variable nichts als eine Leerstelle für die Konstanten, die für sie eingesetzt werden können. Solche Variablen behaupten nicht, auf Gegenstände als ihre Werte zu referieren. Die Konstanten, die für sie eingesetzt werden können, brauchen überhaupt keine *Namen* zu sein; sie können jeder beliebigen grammatischen Kategorie angehören. ... Wenn die Variable einer Allquantifikation auf diese Weise als E i n s e t z u n g s - Variable aufgefaßt wird, so gilt die Quantifikation als wahr genau dann, wenn der offene Satz hinter dem Quantor bei jeder Einsetzung für die Variable wahr ist; und eine Existenzquantifikation gilt als wahr genau dann, wenn der offene Satz bei irgendeiner Einsetzung wahr ist.

In der G e g e n s t a n d s - Auffassung dagegen referiert die Variable auf irgendwelche Gegenstände als ihre *Werte*; und diese brauchen nicht einmal jede einzeln durch einen Namen oder eine Beschreibung angebbar zu sein. So werden Variablen verstanden, wenn die Quantoren '(x)'und '(∃x)' auf die klassische Weise verstanden werden als jedes Ding x ist derart, daß' und 'manches Ding x ist derart, daß'.

Die Einsetzungsquantifikation unterscheidet sich von der Gegenstandsquantifikation nicht nur dadurch, daß sie auch für andere grammatische Kategorien als die der singulären Termini zur Verfügung steht; sie unterscheidet sich auch bezüglich ihrer Wahrheitsbedingungen bei der Anwendung auf singuläre Termini. Eine Allquantifikation im Gegenstandssinne kann durch einen nicht einzeln angebbaren Wert ihrer Variablen falsifiziert werden, während die gleiche Allquantifikation im Einsetzungssinne wahr bleibt; und eine Existenzquantifikation im Gegenstandssinne kann wegen eines nicht-angebbaren Wertes wahr sein, während die gleiche Existenzquantifikation im Einsetzungssinne mangels eines angebbaren Beispiels nicht gilt." (Quine 1976, S.139/40) Es muß hier der Deutlichkeit halber hinzugefügt werden, daß das Problem, daß es nicht für jedes Objekt einen Namen gibt und umgekehrt auch nicht zu jedem Namen ein Objekt, in dem Fall keine scholastische Wortklauberei darstellt, in dem man von der prinzipiellen Veränderbarkeit und Variabilität des Wissens ausgeht. In diesem Fall hat es nämlich einen guten Sinn, nicht nur nicht zu versuchen, jedem Elektron einen Namen zu geben, sondern es auch prinzipiell offen zu lassen, auf welche Objekte genau sich eine Theorie, ein Begriff, eine Aussage beziehen soll. Jede Überbestimmtheit in dieser Hinsicht stellt ein Hemmnis für die Theorieentwicklung dar.

Quine sagt nun, daß mit der Eliminierbarkeit gleichzeitig auch der Einsetzungscharakter der Variablen verlorengehe. "Wenn die Einsetzungsvariable einmal zu einer Gegenstandsvariablen wird, dann tut sie es ganz und gar. Sie wird zur Essenz der ontologischen Diskussion. ... Ist einmal eine Theorie mit Quantoren formuliert, so kann man einfach sagen, die Gegenstände, auf die sie referiert, seien die Werte ihrer quantifizierten Variablen. ... Und die Bequemlichkeit dieser Fassung wird deutlich, wenn man versucht, auf andere Weise anzugeben, was die Gegenstände einer Theorie sind. Wenn man sagt, es seien die von den singulären Termini benannten Gegenstände, so läßt man Gegenstände aus, die man dabei haben möchte, die aber als einzelne nicht angebbar sind: Vielleicht ist das eine oder andere Elektron oder die eine oder andere transzendente Zahl, vielleicht gar auch ein paar entfernte Sandkörner oder Stäubchen interstellarer Materien. Auch lädt man sich die Frage auf den Hals, welche Termini als singuläre gelten sollen und welche davon als Namen." (Quine 1976, S.142)

Quine hat also als Ergebnis seiner abstrakten Konstruktion erhalten, daß Variablen zunächst im Einsetzungssinne (also im syntaktischen Sinne) angeeignet werden und dann, wenn sie in eine nicht-eliminierbare Stellung wandern, zu Gegenstands-Variablen werden. Letzteres deshalb, weil es prinzipiell nicht wünschbar ist, zu unterstellen, die Objekte einer Theorie oder einer Aussage besäßen sämtlich einen Namen bzw. eine Bezeichnung.

Nebenbei sei angemerkt, daß Quine zeigen kann, daß sich bei Zugrundelegung einer reinen Einsetzungsauffassung eine Paradoxie erzeugen läßt, die der Russellschen analog ist.

Als nächster Schritt wird nun untersucht, wie man sich die Aneignung von Variablen höherer Ordnung, in die also Klassen von Dingen als Werte eingesetzt werden müssen, vorstellen kann. Zunächst werden auch diese Variablen in einem Einsetzungssinne angeeignet. Quine zeigt nun, daß der Einsetzungsstandpunkt in der Mengenlehre unakzeptabel ist. "Es gibt elementare Wahrheiten der Mengenlehre, die in der Einsetzungsdeutung nicht gelten. Das einfachste, mir bekannte Beispiel ist das, was wir das Gesetz der *Einer-Teilklassen* nennen wollen: Jede nichtleere Klasse hat irgendeine Einer-Teilklasse. In der Einsetzungsdeutung ist das unannehmbar, denn dann besagt es: Immer, wenn man einen abstrakten Klassenterminus oder Relativsatz hinschreiben kann, der auf viele Individuen zutrifft, kann man einen anderen hinschreiben, der auf genau eines dieser Individuen zutrifft.

Das ist aus dem gleichen Grunde unannehmbar, aus dem es die Einsetzungsquantifikation über physikalische Gegenstände war. Denn es besagt: Immer, wenn man irgendwie eine Vielheit physikalischer Gegenstände abgrenzen kann, läßt sich auch ein bestimmtes Einzelbeispiel angeben; und diese Annahme ist ungefähr so unwillkommen wie die Annahme, jeder physikalische Gegenstand habe eine eigene Bezeichnung. Wären wir zu diesen Annahmen bereit, so könnten wir ebenso gut die Einsetzungsquantifikation auf der ganzen Linie übernehmen." (Quine 1976, S.151/52) Quine entwickelt im weiteren ein formales Argument dafür, daß die Kombination der Einsetzungsauffassung (für die Klassenvariablen) und der Gegenstandsauffassung (für die Variablen erster Ordnung) dazu führt, daß Existenz- und Allquantoren nicht mehr vertauschbar sind.

"In der klassischen Mengenlehre, die ganz Gegenstandscharakter hat, ist das Gesetz von den Einer-Teilklassen etwas Selbstverständliches, und es gibt auch keinerlei Schwierigkeit bei der Vertauschung aufeinanderfolgender Existenz- oder Allquantoren. Doch die Verbindung von Gegenstandsqunatifikation für Individuen und Einsetzungsquantifikation für Klassen ist wie Öl und Wasser. Die Einsetzungsquantifikation ist für Klassen unbrauchbar, wenn man nicht zu einer Annahme bereit ist, die auf die Einsetzungsquantifikation auch für Individuen hinausläuft. Doch bei Individuen, bei physikalischen Gegenständen, war die Gegenstandsquantifikation eindeutig das richtige. Die Quantifikation über physikalische Gegenstände war gegenständlich wegen ihrer kategorischen Wurzel in Sätzen wie 'Kaninchen sind Tiere', die von den einzelnen namenlosen Gegenständen handeln. Natürlich läßt sich grundsätzlich jedes Kaninchen oder jedes Sandkorn systematisch angeben und mit einem beschreibenden Namen versehen, z.B. mit Hilfe raumzeitlicher Koordinaten. Doch ein solcher Kunstgriff hat mit genetischen Betrachtungen überhaupt nichts zu tun, er gehört erst zu einer bewußten Aufarbeitung der eigentlich wissenschaftlichen Theorie. Ich erblicke in diesem Zusammenprall keine Widerlegung meiner genetischen Spekulationen, sondern einen Konflikt innerhalb der tatsächlichen genetischen Kräfte. Ein anderes solches Debakel mußten wir schon in § 25 zur Kenntnis nehmen, als so etwas wie die Russellsche Antinomie durch bloße Überbeanspruchung der Einsetzungsredeweise, die uns Relativsätze liefert, erzeugt werden konnte. Es ist ein geschichtlicher Zufall, daß diese Antinomie nicht vor der Entstehung der Mengenlehre bemerkt wurde, und ebenso, daß der jetzige Konflikt nicht ausdrücklicher festgestellt wurde, als es der Fall zu sein scheint." (Quine 1976, S.154)

Quine argumentiert, daß aus diesen Gründen folge, daß auch die Quantifikation über Klassen im Gegenstandssinne aufgefaßt werden müsse. Darüber hinaus führt er für die Gegenstandsauffassung dasselbe Argument an, das wir bereits bei Gödel kennengelernt haben. Die reine Einsetzungsauffassung sei mit dem

Vorkommen imprädikativer Definitionen unvereinbar. "Doch die klassische Mengenlehre liegt auf imprädikativen Kurs." (Quine 1976, S.157)

Zusammenfassend kann man also sagen, daß Quine in seiner genetischen Spekulation für die Entwicklung des Variablenkonzepts einen analogen Entwicklungsgang rekonstruiert, wie er etwa bei Sneed dargestellt ist. Neue Objekte werden zunächst auf der syntaktischen Ebene in die Theorien eingeführt, um dann zunehmend an referentiellem Gehalt zu gewinnen. Der Sprung von der Einsetzungsauffassung zur Gegenstandsauffassung bei Quine entspricht der Umwandlung eines theoretischen Terms in einen nicht-theoretischen beim Übergang von einer alten Theorie zu einer neuen bei Sneed. Im Hinblick auf fertige Theorien hat Quine schon beinahe 30 Jahre vorher seine Konzeption des "ontological committment" formuliert. Danach macht jede Theorie bestimmte ontologische Annahmen über die Objekte, die sie zum Gegenstand hat. "To be assumed as an entity is, surely, and simply, to be reckoned as the value of a variable. " (Quine 1963, S.13, Erstausgabe 1953) Der in dieser Aussage zum Ausdruck kommende "ontologische Relativismus", der darin besteht, daß der Gegenstandsbegriff theorieabhängig ist, soll nun in seiner inneren Logik näher betrachtet werden. Zu diesem Zweck gehen wir etwas ausführlicher auf einen Aufsatz von L. Stevenson ein, der sich mit dem Problem beschäftigt, auf welche Weise der Variablenbegriff bzw. die Quantifikation im Werk von Frege verstanden wird.

Der Aufsatz (Stevenson 1973) untersucht Freges Verständnis der Quantifikation unter derselben Alternative von "referentieller" versus "substitutioneller" Interpretation, wie die, die bei Quine als Gegensatz von "Gegenstandsauffassung" versus "Einsetzungsauffassung" behandelt wird. Frege ist der "Erfinder" der Quantifikation, er ist der erste Logiker, der diesen Begriff einführt und versucht, ihn zu präzisieren. Grundlage für die Einführung des Begriffs der Quantifikation ist die Aufgabe der klassischen syllogistischen Unterscheidung von Subjekt und Prädikat und die Einführung der Unterscheidung zwischen Funktion und Argument. In seiner "Begriffsschrift" von 1879 hat Frege die beiden Begriffe "Funktion" und "Argument" als rein sprachliche Entitäten eingeführt. Wenn in einem Satz bzw. einer Zeichenkombination ein einfaches oder zusammengesetztes Zeichen als ersetzbar durch ein anderes einfaches oder zusammengesetztes Zeichen vorgestellt werde, dann werde der unverändert bleibende Teil Funktion genannt, der ersetzbare heiße hier Argument. Natürlich ist diese Bestimmung außerordentlich vage, und es ergeben sich die bekannten Schwierigkeiten, die Bereiche der zulässigen Argumentwerte so abzugrenzen, daß bei einer Einsetzung mit einem Wert aus einem solchen Bereich sich immer eine sinnvolle Aussage ergibt, ganz unabhängig davon, ob die sich ergebende Aussage nun wahr oder falsch ist. Freges Versuche, solche Abgrenzungen anzugeben, laufen auf eine Hierarchisierung der Begriffe nach ihrem Allgemeinheitsgrad hinaus, also auf eine Art von Typentheorie. In der Begriffsschrift bleibt Frege völlig im Bereich einer substitutionellen Auffassung der Begriffe "Argument", "Funktion" und "Quantifikation". Seine Definition der Quantifikation, wie sie von Stevenson in moderner Ausdrucksweise wiedergegeben wird, lautet: '$(x)\ \Phi(x)$', ist genau dann wahr, wenn für jeden Ausdruck 'A', für welchen der Ausdruck '$\Phi(A)$' ein Satz ist, '$\Phi(A)$' wahr ist.

Die Schwierigkeiten, die Wertebereiche von Variablen so abzugrenzen, daß sich immer sinnvolle Einsetzungen ergeben, veranlassen Frege, seine substitutionelle Auffassung aufzugeben und zu einer objektuellen überzugehen. Ein Jahrzehnt nach Veröffentlichung seiner Begriffsschrift arbeitet er in verschiedenen Schriften heraus, daß es notwendig ist, zwischen Zeichen und dem durch es Bezeichneten zu unterscheiden. Funktion und Argument sind nun nicht mehr selber sprachliche Entitäten, sondern sie sind etwas, das durch sprachliche Ausdrücke nur bezeichnet wird. Frege unterstellt nun eine semantische Beziehung, die "vollständige Ausdrücke" als Namen für Gegenstände, "unvollständige Ausdrücke" als Bezeichnungen für

Funktionen und Sätze als Bezeichnungen von Wahrheitswerten auffaßt. "Es ist der Übergang von einer substitutionellen zu einer objektuellen Definition, der Frege die Erklärung ermöglicht, weshalb 'jeder' keine zulässige Einsetzungsinstanz für die in '(x)(x ist kahlköpfig)' auftretende gebundene Variable ist, wenngleich 'jeder ist kahlköpfig' ein Satz ist, der entweder wahr oder falsch ist; denn der Unterschied zwischen 'jeder' und 'Thomas' erklärt sich durch den Unterschied zwischen den bezeichneten Entitätstypen." (Stevenson 1973, S.111) Entsprechend der objektuellen Auffassung ergibt sich nun eine Definition der Quantifikation, die nicht mehr unmittelbar auf die sprachlichen Ausdrücke bezogen ist.

L. Stevenson legt sich nun die Frage vor, ob die beiden Definitionen bei Frege koextensional sind. Offenbar sind sie koextensional für den Fall der Quantifikation erster Stufe, wenn die Bedingungen erfüllt sind, daß erstens jeder singuläre Ausdruck einen Gegenstand bezeichnet und zweitens, daß jeder Gegenstand durch zumindest einen singulären Ausdruck bezeichnet wird. Frege sei nun mit Sicherheit davon ausgegangen, daß die erste Bedingung erfüllt sei; bedeutungslose singuläre Ausdrücke habe er ausgeschlossen. Im Hinblick auf die zweite Bedingung geht die Autorin davon aus, daß Frege auch diese Bedingung als erfüllt angesehen habe, und zwar in dem Sinne, daß eine eindeutige, einen Gegenstand bezeichnende Beschreibung zumindest prinzipiell konstruierbar ist, wenn sie auch nicht tatsächlich schon gebildet und gebraucht worden ist. Die Autorin schließt daraus, daß für die Quantifikation erster Stufe die objektuelle und die substitutionelle Auffassung der Quantifikation koextensional seien. Wir haben oben gesehen, daß für Quine die Tatsache, daß nicht jeder Gegenstand durch einen singulären Terminus bezeichnet wird, keine Nebensache ist, sondern als prinzipiell wichtiges Faktum, zumindest wenn man eine Sprache unter dem Entwicklungsgesichtspunkt betrachtet, aufgenommen wird. Implizit steckt in dem Argument der Autorin, daß eindeutige Bezeichnungen mindestens konstruierbar sein sollen, das Zugeständnis, daß der Gegenstandsbezug primären Charakter hat. Der Punkt, um den es hier geht, wird noch deutlicher, wenn man sich dem Problem zuwendet, ob denn auch objektuelle und substitutionelle Auffassungen koextensional sind für den Fall einer Quantifikation beliebiger n-ter Stufe. L. Stevenson konstatiert, daß Frege offenbar von dieser Koextensionalität ausgegangen ist, stellt diese Auffassung aber selber in Frage. Sie kann sich unter einem abstrakten Begriff der unabhängig von seiner sprachlichen Darstellung existieren soll, nichts vorstellen. "Vermutlich können wir zwar manchmal sagen, daß es einen Begriff gibt, der in der einen Sprache ausdrückbar ist, während er es in einer anderen nicht ist; läßt sich aber mit der Vorstellung der Existenz von Begriffen oder Funktionen, die in keiner Sprache ausdrückbar sind, irgendein Sinn verbinden? Kann man sinnvoll fragen, ob jeder Begriff einer gegebenen Stufe in einer gegebenen Sprache ausdrückbar ist? Es scheint - abgesehen von der Konstruierbarkeit bestimmter Arten von Ausdrücken in der Sprache - kein Kriterium für die Existenz von Begriffen und Funktionen im allgemeinen zu geben." (Stevenson 1973, S.116) Die Autorin wird von dieser Schwierigkeit her dazu geführt, im Werk Freges letztlich doch die substitutionelle, syntaktische Auffassung der Quantifikation als die entscheidende und ausschlaggebende zu betrachten, wenn auch Frege in seinem Selbstverständnis sicherlich die objektuelle Auffassung vertreten habe. Dies begründet sie vor allem damit, daß die Fregeschen Unterscheidungskriterien zwischen Argument und Funktion und damit auch seine Kriterien zur Identifizierung dessen, was als Gegenstand zählt, in starkem Maße an syntaktische Eigenschaften gebunden sind.

Man kann nun die Argumentation von L. Stevenson noch dahingehend verschärfen, daß auch dann, wenn ein Begriff in mehreren Sprachen vorkommt, seine Stufe in einer typentheoretischen Hierarchisierung nicht unabhängig von der jeweiligen Sprache ist, d.h. die Stufe eines Begriffs ist nicht unabhängig von dem jeweiligen theoretischen System, in dem er auftritt. Und dies gilt bereits für die Unterscheidung zwischen Objekten und Begriffen. "Geld" mag für die Ontologie der Alltagssprache ein Objekt sein, als Gegenstand wirtschaftswissenschaftlicher Analyse kann es in bestimmten theoretischen Kontexten zu einem hoch allgemeinen, nicht-empirischen Begriff werden. Genau diese Schlußfolgerung ist von Quine in seinem ontologischen Relativismus gezogen worden. Quine sieht klar, daß das, was als Gegenstand zählt, abhängig ist von dem jeweiligen theoretischen System, in dem man sich bewegt. Stevenson weist auch auf diese Auffassung von Quine hin, aber sie versteht ihn einseitig persona listisch. "Wenn Quine jedoch . . . die Variablen als ein Kriterium zu ontologischen Voraussetzungen gebraucht, so führt er die neuartige Vorstellung ein, daß verschiedene Personen hinsichtlich dessen, was als Gegenstand zugelassen und in einer Ontologie erlaubt sein sollte, verschiedener Ansicht sein können." (Stevenson 1973, S.122/23) Es geht aber gar nicht darum, daß der Relativismus so weit getrieben werden müßte, daß verschiedene Personen verschiedener Ansicht hinsichtlich der Ontologie sind, *sondern die Untrennbarkeit von objektueller und substitutioneller, von referentieller und syntaktischer Auffassung der Variablen spiegelt im Kern nichts anderes wider als das, was zu Beginn von Kapitel II als "Theorienbeladenheit der Beobachtungssprache" bezeichnet wurde.*

Die Stärke des Aufsatzes von L. Stevenson besteht darin, daß sie sehr konsequent die Frage verfolgt, ob denn nun die syntaktische oder die referentielle, die Einsetzungs- oder die Gegenstandsauffassung der Variablen die letztlich grundlegende ist. Und gerade die Konsequenz, mit der sie nach einer solchen letzten, bestimmenden Auffassung sucht, enthüllt, daß sie sich in einem schlechten Zirkel bei dieser Suche verlieren muß. Denn nachdem sie die Einsetzungsauffassung als die bei Frege letztlich bestimmende festgemacht hat, ergibt sich sofort wieder die Schwierigkeit, daß man, um innerhalb der Einsetzungsauffassung so etwas wie "singuläre Termini" definieren zu können, in irgendeiner Weise auf den Begriff des Gegenstands zurückgehen muß. Und für den Begriff des Gegenstands hatte man bereits gezeigt, daß er sich nur beschreiben läßt, wenn auch syntaktische Kriterien angewandt werden. Wenn man sich also nicht der unlösbaren Frage nach dem Primat von Ei oder Henne aussetzen will, dann bleibt nur eine Schlußfolgerung: Die Variable (der Begriff) ist von Anfang an als ein *zweifach bestimmtes* Konstrukt aufzufassen, sie ist sowohl syntaktisch als auch referentiell determiniert. *Das aber heißt, sie fungiert als Element zweier Kontexte: des sozial-kommunikativen und des gegenständlichen.*

Fassen wir zusammen: Seit Beginn der Neuzeit macht die Mathematik von der Methode Gebrauch, unbekannte bzw. gesuchte Größen als reine Funktionsmodelle, bzw. reine Leerstellen, in ihre Gleichungen einzubeziehen und mit ihnen zu operieren, als wären sie bekannte Größen, um dann über das Studium von strukturellen Beziehungen zwischen diesen Variablen bzw. unbekannten Größen zu Möglichkeiten ihrer (relativen) Bestimmung zu kommen. Es ist klar, daß damit die Variable selbst einen widersprüchlichen Charakter erhält, da sie einerseits als bloßes Zeichen dem Kontext der Zeichenebene angehört und nur nach den Regeln, die auf dieser Ebene gültig sind, behandelt werden darf. Andererseits aber figuriert die Variable als Stellvertreter des objektiven Problemzusammenhangs und muß gemäß den Gesetzen dieses Problemzusammenhangs behandelt werden. Die Widersprüchlichkeit dieser beiden Kontexte ergibt sich in dem Augenblick, in dem das Wissen dynamischen Charakter erhält, dann nämlich, wenn die Zeichenebene, die Ebene der Begriffe und die Ebene der Gegenstände keine statischen Gegebenheiten mehr sind, die isomorph aufeinander abgebildet werden könnten. Die relative Eigenständigkeit beider Ebenen ist eine Konsequenz des dynamischen Charakters der Wissenschaft. Es ergibt sich dann die Frage, wie auf der Grundlage dieser Eigenständigkeit der Zeichenebene und der Gegenstandsebene die Entwicklung neuen Wissens, die Einbeziehung neuer Gegenstände in die Kommunikation verstanden werden kann. Die Antwort, die in den vorangegangenen beiden Kapitel skizziert wurde, besteht darin, daß angesichts eines in die Theorie nicht integrierbaren Bereichs intendierter Anwendungen theoretische Terme bzw. Variablen in die Theorie eingeführt werden, die sowohl Elemente des Zeichenkontextes sind, als auch Repräsentanten des intendierten Anwendungsbezugs. Im Laufe der Theorieentwicklung erfahren die theoretischen Terme bzw. Variablen eine Ausweitung ihres syntaktischen Beziehungsreichtum und eine Präzisierung und Begrenzung des referentiellen Bezugs. In der philosophischen Diskussion dieser Bewegung besteht eine gewisse Tendenz, die ausschlaggebende Rolle des Anwendungsbezuges in diesem Prozeß zu unterschätzen. Diese Tendenz ist auch bei Quine festzustellen. Dabei läßt sich bereits bei seiner genetischen Spekulation über die Herausbildung der Quantifikation im Einsetzungssinne zeigen, daß eine solche Quantifikation erst veranlaßt wird unter dem Druck eines vielfältigen Anwendungsbezugs, der dazu zwingt, nicht für jedes neu auftauchende Phänomen einen neuen Namen zu bilden.

Verallgemeinert kann man sagen, daß bei jedem Kommunikationsprozeß, bei jedem Prozeß der Theorienentwicklung sowohl die Identität von Zeichen und Bezeichnetem als auch die Verschiedenheit von Zeichen und Bezeichnetem bewußt ausgenutzt werden muß. Hilbert hatte in seinem Grundlegungsversuch der Mathematik die Identität von Zeichen und Bezeichnetem zum Ausgangspunkt gewählt, er hatte die formale Logik als inhaltliche Logik verstanden und war damit in besonderem Maße der Zuspitzung der sozial-kommunikativen Problematik zu Beginn unseres Jahrhunderts gerecht geworden. Andererseits hatte Frege in seiner Polemik gegen Hilbert im nachhinein insofern Recht behalten, als er auf das Moment der Referenz, d.h. die Wichtigkeit des Unterschieds von Zeichen und Bezeichnetem, hingewiesen hat.

Das Paradoxe an der in III.2. vorgenommenen Bewertung der Leistung Hilberts besteht darin, daß derselbe Punkt, nämlich seine Trennung von Entwicklung und Begründung des Wissens, auf der einen Seite als das große Verdienst seines Konzepts herausgestellt und auf der anderen Seite als die entscheidende Schwäche diagnostiziert wurde. Diese scheinbare Widersprüchlichkeit in der Bewertung Hilberts löst sich auf, wenn man sieht, daß sich die beiden Aussagen auf verschiedene Ebenen beziehen. Im Hinblick auf die Aufgabe nämlich, für die Mathematik ein Selbstverständnis zu formulieren, das in angemessener Weise ihr Verhältnis zu den anderen Wissenschaften zum Ausdruck bringt, war die Hilbertsche Trennung von Entwicklung und Begründung und seine Auffassung der axiomatischen Methode ein Fortschritt, der es der Mathematik ermöglicht hat, drohende Hemmnisse ihrer Entwicklung beiseitezuräumen. Dies ist ganz analog zu sehen zu der Auffassung (Kap. I), daß die Trennung von reiner und angewandter Mathematik im 19. Jahrhundert im Hinblick auf den Praxisbezug der Mathematik einen Fortschritt darstellte. Als eine erkenntnistheoretische Position im Hinblick auf den Gesamtprozeß der Erkenntnis ist die Hilbertsche Trennung von Entwicklung und Begründung des Wissens allerdings nicht haltbar. Bei dieser Beurteilung muß aber differenziert werden. Hilbert selbst hat sicher keine formalistische Position in dem Sinne besessen, daß er die Mathematik als sinnloses Spiel mit sinnlosen Zeichen verstanden hätte. Das wird durch eine ganze Reihe von Zitaten, die oben angeführt wurden, widerlegt, und es wird natürlich auch durch seine Arbeit als Forscher widerlegt. Vielmehr hat Hilbert klar herausgestellt, daß die Mathematik nur im Gesamtkontext aller empirischen Wissenschaften verstanden werden kann. Der wunde Punkt der Hilbertschen Auffassung liegt also einzig und allein darin, daß er glaubte, den Gegenstandsbezug mathematischer Theorien, den er dadurch anerkannte, daß er die Mathematik im Zusammenhang mit den empirischen Wissenschaften sah, mit der Auffassung vereinbaren zu können, daß sich der Zeichenkontext der Mathematik ein für allemal etablieren lasse. Dies ist durch die Gödelschen Ergebnisse widerlegt worden.

Durch die Überlegungen des III. Kapitels wurde der Ausgangspunkt bestätigt, daß das Problem der Begründung der Mathematik nur angemessen verstanden werden kann, wenn es als Teilproblem der Begründungsproblematik der empirischen Wissenschaften im allgemeinen behandelt wird. Die Mathematik selbst ist daher als eine im weitesten Sinne empirische Wissenschaft aufzufassen. Am schärfsten von den hier behandelten Autoren hat dies Hermann Weyl ausgesprochen, wenn er sagt, daß die Mathematik durch die Physik in den Prozeß der theoretischen Weltkonstruktion mit hineingenommen sei; daher sei es nicht mehr nötig, daß das Mathematische sich als ein besonderer Bezirk des anschaulich Gewissen isolieren lasse.

Durch diese Aussagen ist das Problem, eine für die Mathematik angemessene Konzeption ihres Gegenstandsbereichs zu entwickeln, nicht gelöst. Eine solche Konzeption müßte insbesondere die Grenzen zwischen den Wissenschaftsdisziplinen (also z.B. zwischen Physik und Mathematik) auch in ihrem positiven Aspekt reflektieren. Methodologisch aber ist es meiner Meinung nach klar, daß die Entwicklung einer solchen Konzeption voraussetzt, daß zunächst die Mathematik im Zusammenhang mit den empirischen Wissenschaften gesehen wird. Eine mögliche Vorstellung, die Differenz z.B. zwischen Mathematik und Physik zu charakterisieren, könnte dann darin bestehen, das Paar $\langle K, I \rangle$ in Analogie zur Bohrschen Komplementarität in dem Sinne als komplementär aufzufassen, daß eine Verschärfung der Sicht auf den Strukturkern K eine Unschärfe im Hinblick auf die Bestimmung von I zur Folge hat, und umgekehrt.

Im folgenden Kapitel wird nun anhand der Diskussion didaktischer Probleme des Beweisens die Problematik des Gegenstandsbezugs mathematischer Theorien weiter verfolgt und präzisiert. Es wird sich zeigen, daß die bisher angestellten wissenschaftstheoretischen Überlegungen sich relativ unproblematisch auf bestimmte didaktische Probleme beziehen lassen. Dies hat einen Grund darin, daß die Didaktik noch viel weniger als die Wissenschaftstheorie die Grenzen zwischen den einzelnen Wissenschaftsdisziplinen als unveränderlich akzeptieren kann. Umgekehrt ergibt sich daraus auch, wie fruchtbar die Untersuchung didaktischer und pädagogischer Probleme für die Wissenschaftstheorie sein kann. Die Problematik der Erziehung und der Allgemeinbildung rückt Dimensionen des Wissens ins Blickfeld, die der professionellen wissenschaftstheoretischen Diskussion, die meist an den akademischen Disziplinen fixiert ist, verborgen bleiben.

KAPITEL IV: DIDAKTISCHE PROBLEME DES BEWEISENS: VERALLGEMEINERUNG UND GEGENSTANDSBEZUG

Mit den folgenden Ausführungen wird eine Anwendung der im II. und III. Kapitel erarbeiteten Ergebnisse auf einige didaktische Probleme des Beweisens versucht. Es wird sich bestätigen, daß die wesentlichen, mit dem Beweisen zusammenhängenden didaktischen Schwierigkeiten aufs engste mit der *Problematik der Wissensentwicklung* verbunden sind. Das Verhältnis von Begründung und Entwicklung erweist sich als die bestimmende Fragestellung.

Das II. Kapitel hatte gezeigt, daß die Paradoxien der Wissensdynamik nur dann auflösbar sind, wenn sie auf der Grundlage der Beziehung von Theorie und Empirie im sozial-kommunikativen Kontext gesehen werden. Dementsprechend wird sich auch im vorliegenden Kapitel ergeben, daß der Prozeß der *Verallgemeinerung* in der Mathematik als Funktion sowohl des kommunikativen als auch des gegenständlichen Kontextes aufgefaßt werden sollte. Dabei kommt dem Variablenbegriff meines Erachtens eine Schlüsselstellung zu. Diese Fragen werden vor allem anhand einer Diskussion von Lakatos' "Proofs and Refutations" im Abschnitt IV.2. behandelt.

Im II. und III. Kapitel waren auch die Konsequenzen aufgewiesen worden, die sich aus der Dynamisierung des Wissens für den Begründungsbegriff ergeben. Danach sollte Begründung vor allem auch als "Begründung von der Zukunft her" verstanden werden. Im Zusammenhang des Sneedschen Formalismus hieß das vor allem, daß die Zukunft der Theorie in der Menge I der intendierten Anwendungen liegt. Diese Vorstellung soll hier für didaktische Zwecke fruchtbar gemacht werden. Das aber bedeutet, daß der *Gegenstandsbezug mathematischer Theorien* eine unverzichtbare Rolle bei der Lösung des Begründungsproblems spielt. Diese Überlegungen sind Gegenstand des Abschnitts IV.3.

IV.1. Beweisen als Problem des mathematischen Curriculums

Historisch galt für die Schulmathematik das Beweisen schlechthin als Ausdruck der Wissenschaftlichkeit des Schulunterrichts. Beweisen, logisches Deduzieren war und ist der wissenschaftlichen Bildung am Gymnasium vorbehalten, in der "praktisch orientierten" Mathematikausbildung an Haupt- und Realschulen spielt der Beweis keine Rolle. Eine wesentliche curriculare Unterscheidung zwischen mathematischen Grund- und Leistungskursen in der reformierten Oberstufe wird darin gesehen, daß in Leistungskursen "bewiesen wird", in Grundkursen aber bestenfalls Plausibilitätsbetrachtungen angestellt werden.

Im traditionellen Verständnis der Schulmathematik war das Beweisen ganz der Geometrie vorbehalten, während in der Arithmetik und Algebra "gerechnet", d.h. nach vorgegebenen Regeln operiert wurde. So findet sich noch in der "Methodik des mathematischen Unterrichts" von W. Lietzmann (Lietzmann 1953, 2. Auflage) ein Abschnitt "Beweis" nur im Kapitel "Ebene Geometrie", und Freudenthal bezeichnet im Hinblick auf diese Situation die Geometrie als den "Exerzierplatz der Logik" (Freudenthal 1974, S.570). Die Tatsache, daß für die Schulmathematik Beweise nur in der Geometrie vorkamen, war Folge der Vorherrschaft des "Euklidischen Paradigmas". Sie hatte zur Folge, daß die Schulmathematik auch nach der Grundlagendiskussion um die Jahrhundertwende und nach den Kleinschen Bemühungen um eine Reform des mathematischen Curriculums sich trotz vielfältiger Bemühungen nie recht vom "Euklidischen" Grundlagenverständnis befreien konnte. Dieses beruhte einerseits auf einem in starkem Maße kontemplativen, nicht-operativ ausgerichteten Wissenschaftsverständnis. Objekte der Mathematik waren danach "platonische Ideen", von denen in der Wirklichkeit nur mehr oder weniger unvollkommene Abbilder existieren und deren durch die Intuition absolut und unveränderlich gegebene Eigenschaften es zu studieren galt. Das Euklidische Verständnis beinhaltete also die Vorstellung, daß die Mathematik die Wissenschaft sei, die absolute und unveränderliche Wahrheiten feststelle. Gleichzeitig implizierte das Euklidische (Platonische) Grundlagenverständnis eine Auffassung von Abstraktionen, die darauf hinausläuft, daß Abstraktionen aus realen Objekten durch Absehen von Eigenschaften gewonnen werden. Dieses empiristische Abstraktionsverständnis ist der "harte Kern" des Platonismus in der Schulmathematik. Es ist dafür verantwortlich, daß die platonistischen Auffassungen nie in einen ernsthaften Konflikt mit konventionalistischen Konzeptionen gerieten, obwohl doch die letzteren auf einen extremen Relativismus im Hinblick auf die Wahrheit mathematischer Theorien hinauslaufen. Das empiristische Abstraktionsverständnis machte auch das "Euklidische Paradigma" mit den vorherrschenden pädagogischen Konzeptionen verträglich. Obwohl nach dem "Euklidischen Paradigma" eine Disziplin erst dann als wissenschaftlich gelten kann, wenn sie in axiomatisierter Gestalt vorliegt, machte es der in der Geometrie vorherrschende Empirismus doch möglich, daß als Ergebnis der pädagogisch-didaktischen Diskussion zu Ende des 19. Jahrhunderts abweichend von der euklidischen Norm für die Unterstufe der Gymnasien unter dem Titel einer "Propädeutik" ein rein anschaulich-empiristisches Umgehen mit geometrischen Objekten befürwortet wurde: dies in Übereinstimmung mit pädagogisch-psychologischen Auffassungen, daß jüngere Schüler zu einem streng logischen Argumentieren nicht imstande seien.

Im Hinblick auf das Beweisproblem war die Schulmathematik klassischerweise von einer tiefen Dichotomie geprägt: Während in der Geometrie die grundlegende Vorstellung vom Beweisen "empiristisch" war, wonach jeder Operation, jedem Beweisschritt eine intuitive Bedeutung zukam, herrschte in der Algebra (wenn man hier überhaupt von Beweisen redete) die Auffassung, daß Beweise als rein formales Operieren mit Symbolen, dem keinerlei inhaltliche Bedeutung zukommt, zu verstehen seien.

Diese Dichotomie im methodischen Verständnis der Mathematik zwischen Geometrie und Algebra war eine der inhaltlichen Ursachen für die Reform des Mathematikunterrichts in den sechziger Jahren. Dort versuchte man, die angesprochene Dichotomie zwischen Geometrie und Algebra zu überwinden und das Beweisen auch innerhalb der Algebra in der Schule zu etablieren. Das hatte zur Folge, daß Probleme der Wissensb egründung aufgeworfen wurden, die nicht mehr auf dieselbe Weise lösbar waren wie in der Geometrie.

Diese Begründungsprobleme führten dazu, daß man in umfangreicherem Maße Konzepte der modernen formalen Logik explizit in den Schulunterricht einführte. Dabei hat es natürlich viele Schwankungen und Übertreibungen gegeben. Es hat sich aber durchgesetzt, daß als Vorbereitung der Gleichungslehre Begriffe wie Term, Aussage und Aussageform behandelt werden, also diejenigen Begriffe der modernen formalen Logik, die sich unmittelbar auf den mathematischen Variablenbegriff beziehen.

Trotz der Reformbemühungen kann man auch heute feststellen (wie im weiteren noch zu zeigen sein wird), daß die größte Problematik für Beweise in der Geometrie im zugrundeliegenden Empirismus liegt, während die Algebra vor allem mit "formalistischen Schwierigkeiten zu kämpfen hat. Die klassische Dichotomie der Schulmathematik kann also noch nicht als überwunden gelten.

Eine aufschlußreiche Überlegung zu dieser Problematik gibt Freudenthal, wenn er den scheinbar unterschiedlichen Gebrauch von Buchstaben in der Geometrie und der Algebra diskutiert. "...; die Punktbezeichnungen in der Geometrie sind nur scheinbar von anderem Charakter als die Größenbezeichnungen in der Algebra. Das hat sich erst langsam im Laufe der Geschichte herausgestellt. 'A' bedeutet in der Geometrie einen beliebigen Punkt, ganz wie 'a' in der Algebra eine beliebige Zahl. Wenn ein Punkt A erwähnt wird, so soll ich meinen Blick auf einen bestimmten Punkt der Ebene richten und tun, als ob 'A' der Name dieses Punktes sei. Bei Zahlen geht es anders zu. Es ist zwar richtig, wenn jemand verlangt 'denke dir eine Zahl, addiere 3, multipliziere mit 4 usw.', so soll ich an eine wohlbestimmte Zahl, etwa 17, denken und sie nach den Vorschriften bearbeiten. Das sieht wie in der Geometrie aus, aber es ist es nicht, was ich in der Algebra meine, wenn ich von einer beliebigen Zahl spreche. Wenn ich in der Algebra in $(a+b)^2$ die a und b als *bestimmte* Zahlen betrachte, so wie in der Geometrie A und B *bestimmte* Punkte sein sollen, so verderbe ich die Algebra. Darum scheinen Geometrie und Algebra sich in dem, was sie mit den Buchstaben machen, zu unterscheiden. In Wirklichkeit unterscheiden sie sich nicht, aber um das zu verstehen, muß man tiefer blicken. In der Geometrie kann man es sich erlauben, sich zum Beweis eines allgemeinen Satzes ein bestimmtes Dreieck ABC anzusehen, wenn es nur 'allgemein' gewählt ist; was beim 'allgemeinen' Dreieck wahr ist, gilt, wie die algebraische Geometrie lehrt, auch beim speziellen; aber eine allgemeine natürliche Zahl in dem Sinne gibt es nicht." (Freudenthal 1974, S.262) Damit werden die empiristischen Probleme der Geometrie sehr deutlich: Einerseits fehlt in ihrem gängigen Selbstverständnis das operative Moment des Begriffs, was bereits der erste Hinderungsgrund ist, Buchstaben in der Geometrie analog zu Buchstaben in der Algebra aufzufassen, andererseits hat man als Konsequenz dieses Tatbestands große Probleme, zu verstehen, was eigentlich ein "allgemeines Dreieck" ist. Gemäß der empiristischen Abstraktionsauffassung ist es das, was nach Weglassen aller speziellen Eigenschaften aller speziellen Dreiecke übrig bleibt. Im Unterschied dazu wird in der Algebra das Allgemeine als Laufbereich von Variablen verstanden.

Die formalistischen Probleme der Algebra liegen in der völligen Trennung von formalem Beweis einerseits und Heuristik andererseits. Stellvertretend für viele ähnliche Auffassungen seien die Ausführungen bei Freund/Sorger zitiert:"Dem Bestreben, mit Schülern in formalen Systemen formale Beweise zu führen, steht ein anderes Lernziel diametral gegenüber: Die Schüler sollen lernen, wie man lernt, wie man mit Problemen der verschiedensten Art fertig wird. Neben dem eigenen Nachdenken steht dabei das Sich-Auseinandersetzen mit eigenen oder auch fremden Einfällen im Rahmen eines problemoffenen und explorierenden heuristischen Verfahrens im Vordergrund. Während beim formalen Aufbau dem Denken strenge Fesseln angelegt werden, ist bei diesem Verfahren praktisch alles erlaubt, was einen an das Problem und seine Lösungen näher heranbringt. Jede Vermutung - und sei sie auch noch so ausgefallen - wird so gründlich wie möglich geprüft, jeder Rückgang auf Sonderfälle, Ausnahmen, Teilprobleme kann zu neuen Ideen führen, jeder Versuch einer graphischen Darstellung oder einer Uminterpretation schließt das Verständnis weiter auf. Ziel ist die Schulung eines kreativen Problemlöseverhaltens." (Freund-Sorger 1976, S.131)

Das ganze Spektrum der Probleme, das dieser Widersprüchlichkeit von Geometrie und Algebra im Hinblick auf das Beweisproblem immer noch zugrunde liegt, wird sehr deutlich an zwei gegensätzlichen Stellungnahmen zur Reform des Mathematikcurriculums von den beiden Mathematikern R. Thom und J. Dieudonné. Dieudonné führt in seinem Aufsatz "Sollen wir 'moderne Mathematik' lehren?" (American Scientist 1973, hier zitiert nach: Otte 1974) zunächst aus, daß die Ursachen der Formalisierung in der Mathematik, wie sie sich z.B. in den Bestrebungen der Bourbaki-Gruppe niederschlagen, in starkem Maße in Problemen der Lehre bzw. allgemeiner der Kommunikation begründet sind. "Die Kommunikation unter den Mathematikern mit Hilfe einer gemeinsamen Sprache muß aufrecht erhalten bleiben, wie Thom selbst zugibt, und die Übermittlung von Erkenntnissen kann nicht nur den Genies überlassen werden. In den meisten Fällen wird man sich Professoren anvertrauen, die nach Thoms Worten 'entsprechend ausgebildet und vorbereitet sind, um (die Beweisführung) zu verstehen'. Da der größte Teil von ihnen wohl kaum die außerordentliche Gabe der 'Intuition' der Schöpfer besitzt, kann ein hinreichend gutes Verständnis der Mathematik und die Fähigkeit, dieses an ihre Studenten weiterzugeben, nur dadurch erreicht werden, daß der Lehrstoff sorgfältig dargeboten wird: Definitionen, Hypothesen und Argumente müssen so präzise sein, daß Mißverständnisse vermieden werden, und auf mögliche Trugschlüsse und Irrtümer ist erforderlichenfalls hinzuweisen." (Dieudonné 1973, S.4o4)
Dann führt er aus, daß diese Arbeit der Systematisierung der

Mathematik zwar nicht aufregend sei, aber dennoch lohnende Ergebnisse auch für die Weiterentwicklung der Mathematik erbringe.

Eine zweite wichtige Überlegung in dem Aufsatz von Dieudonné liegt in seiner Stellungnahme zum Problem der Intuition. Er sagt:"Letztes Ziel eines jeden Mathematikunterrichts, gleichgültig auf welchem Niveau, ist es sicherlich, dem Studenten eine zuverlässige 'intuitive Vorstellung' von den mathematischen Objekten, mit denen er es zu tun hat, zu vermitteln. Erfahrungsgemäß kann dies jedoch nur durch eingehende Vertrautheit mit dem Material und wiederholte Versuche, dieses von jedem möglichen Blickwinkel aus zu verstehen, erreicht werden. Ein Professor, der diese Vertrautheit schon vor langer Zeit erworben hat und glaubt, er könne auf präzise Feststellungen verzichten, wenn er seine 'intuitive Vorstellung' seinen Studenten mitzuteilen versucht, läuft Gefahr, daß die Verständigung völlig zusammenbricht, mit anderen Worten: Ich meine, der Weg zur 'intuitiven Vorstellung' führt notwendigerweise zunächst durch eine Periode rein formalen und oberflächlichen Verstehens, das erst allmählich durch ein besseres und tieferes Verständnis ersetzt werden wird." (Dieudonné 1973, S.409)

Eine dritte Überlegung betrifft die euklidische Axiomatik. Diese kritisiert Dieudonné auf der Grundlage, daß sie nicht vollständig sei, so daß man immerzu gezwungen werde, Beweise mit Appellen an die Intuition zu vermischen. Diese Diskrepanz aber erschwere dem Schüler die Einsicht in den Sinn eines Beweises. Man sieht also, daß Dieudonné unter dem Gesichtswinkel des Kommunikationsproblems argumentiert, für ihn ist der Text als soziale Gegebenheit das Primäre, Intuition und Bedeutung hingegen sekundär. Gleichzeitig sieht er relativ klar das Phänomen, das oben als Holismus bezeichnet wurde, nämlich, daß einer Theorie nur als ganzer Bedeutung zukommt. Das führt ihn dazu, die Wichtigkeit algebraischer Axiomatik herauszustellen.

In seiner Kritik an den Bestrebungen zur Modernisierung des Mathematikcurriculums geht R. Thom in seinem Aufsatz "'Moderne' Mathematik: ein erzieherischer und philosophischer Irrtum?"

(Thom 1971, hier zitiert nach Otte 1974) von der bei diesen Bestrebungen zutage tretenden Tendenz zur Eliminierung geometrischer Unterrichtsstoffe aus dem Curriculum aus. Thom hält den Trend, nach dem Geometrie durch Algebra ersetzt werden solle, für erzieherisch schädlich und begründet das so:"Es gibt zwar geometrische Probleme, aber keine algebraischen." (Thom 1971, S.375) Diese Aussage ist wohl im Sinne des zu Beginn des II. Kapitels genannten Paradoxon des Beweises gemeint, denn Thom spitzt sie noch zu, indem er sagt:"Es dürfte wohl nur leicht übertrieben sein, wenn man sagt, daß jede Fragestellung in der Algebra entweder trivial oder ihre Beantwortung unentscheidbar ist." (Thom 1971, S.375) Thom sieht also in der Tendenz zur Algebraisierung einen drohenden Verlust an inhaltlich-gegenständlicher Bedeutung. Er fragt, ob denn ein solcher Verlust, d.h. ein rein formalistisches Mathematikverständnis, das er für die Schule bereits aus pädagogischen Gründen für untragbar hält, für die wissenschaftlich betriebene Mathematik akzeptabel sei. "Leider läßt sich die rein formale Sicht nur schwer aufrecht erhalten, nahezu paradoxerweise aus rein formalen Gründen. ... Was mich betrifft, so gebe ich mich mit folgender Erläuterung zufrieden: Nehmen wir an, es sei uns gelungen, für eine formale Theorie S eine elektronische Maschine M zu konstruieren, die mit unheimlicher Geschwindigkeit alle elementaren Operationen in S vollzieht. Nun möchten wir nachprüfen, ob eine Formel F der Theorie richtig ist. Nach 10^{30} elementaren Operationen, die in ein paar Sekunden vollzogen werden, gibt uns die Maschine eine positive Antwort. Welcher Mathematiker würde ohne Zögern die Gültigkeit einer 'Beweisführung' akzeptieren, bei der die einzelnen Schritte von ihm unmöglich nachgeprüft werden können?" (Thom 1971, S.377) Daher sieht sich Thom zu einer ontologischen Sichtweise der Mathematik berechtigt, die er an einigen Beispielen erläutert. Allerdings zieht er für das Problem des Beweises bzw. der mathematischen Kommunikation Schlußfolgerungen, die entsprechend dem euklidischen Verständnis das Beweisen als Schritt für Schritt bedeutungsvolles Operieren auffaßt, er negiert die mit der Tatsache des Holismus im Zusammenhang stehende Problematik. Er sagt:

"Die Evidenz, die zur Überzeugung führt, resultiert aus einem genügend klaren Verständnis jedes einzelnen vorkommenden Symbols, so daß ihre Kombination den Leser überzeugt. Von diesem Standpunkt aus gesehen, ist Strenge (oder ihr Gegenteil: Ungenauigkeit) im wesentlichen eine *lokale* Eigenschaft des mathematischen Denkens. Um die Gültigkeit logischer Gedankenführung zu beurteilen, ist weder eine sorgfältig ausgearbeitete axiomatische Struktur noch ein kompliziertes Begriffssystem erforderlich. Es genügt, wenn man die Bedeutung jedes einzelnen vorkommenden Symbols versteht und eine genügend vollständige Übersicht von dessen operativen Eigenschaften hat."(Thom 1971, S.38o) Trotz ihrer Überspitzung hat diese Aussage als Kritik an Auffassungen, die einseitig die formale Struktur bzw. das entwickelte Gesamtsystem in den Vordergrund stellen, ihre Berechtigung. Das Problem, um das es bei dieser Auseinandersetzung zwischen Dieudonné einerseits und Thom andererseits geht, ist eben das der angemessenen Gestaltung des Verhältnisses der Entwicklungsdynamik von Theorien zur holistischen Bedeutungsauffassung. Hierzu entwickelt Thom im folgenden einen Gedanken, den wir später wieder aufnehmen werden. Er sagt, daß die eigentliche Bedeutung der Geometrie darin liege, daß die Kontinuität der Diskontinuität vorausgehe. "Es gibt kaum einen Zweifel daran, daß vom psychologischen Standpunkt her (und m.E. auch aus ontologischer Sicht) das geometrische Kontinuum die primäre Gegebenheit ist. Wenn jemand überhaupt über irgendein Bewußtsein verfügt, dann über das von Raum und Zeit. Die geometrische Kontinuität ist sozusagen untrennbar mit dem bewußten Denken verbunden." (Thom 1971, S. 384)

Wenn man diesen von Thom behaupteten "Primat des Kontinuierlichen" allgemeiner als Anwendungsbezug mathematischer Theorien versteht, dann läßt sich in der Tat die Paradoxie, die in der Beziehung von Theoriendynamik und holistischem Bedeutungsbegriff steckt, auflösen, wie im II. Kapitel gezeigt wurde. Dabei ergibt sich die Berechtigung, den Thomschen "Primat des Kontinuums" im Sinne eines allgemeinen Anwendungsbezuges zu interpretieren, daraus, daß der Größenbegriff für die Anwendung mathematischer Theorien eine fundamentale Rolle spielt.

Diese notwendig sehr kurzen Bemerkungen zeigen, in welch nachhaltiger Weise das Problem des Beweisens im Grunde genommen alle zentralen curriculum-theoretischen Fragestellungen beeinflußt.

Im folgenden wird nun eine Reihe von Problemen aufgelistet und diskutiert, die in der didaktischen Literatur unmittelbar im Zusammenhang mit dem Beweisen behandelt werden. Dabei werde ich mich vorrangig auf das Buch von Walsch "Zum Beweisen im Mathematikunterricht" stützen, das insgesamt als repräsentativ für den gesamten Diskussionsstand angesehen werden kann.

Problem 1 : In der gesamten didaktischen Literatur wird es als eine besondere Schwierigkeit empfunden, das Beweisen im Unterricht zu motivieren, den Schülern klarzumachen, daß mathematische Sätze bewiesen werden müssen. So schreibt z.B. Vollrath:"Die Schüler müssen die *Beweisdürftigkeit* mathematischer Aussagen erkannt haben. Häufig sind die mathematischen Sätze so evident, daß die Notwendigkeit eines Beweises gar nicht eingesehen wird. Für den Geometrieunterricht wird deshalb empfohlen, durch optische Täuschungen das Vertrauen in die Anschauung bei den Schülern zu erschüttern. Es ist ein bekanntes psychologisches Phänomen, daß Denkprozesse von solchen verwunderlichen Situationen, Verlegenheiten und Widersprüchen eingeleitet werden können. Ein weiteres Problem besteht darin, daß man sich im Unterricht bei weniger evidenten Sätzen darum bemüht, diese zunächst durch Überlegungen, Handlungen und Beispiele als Vermutungen zu gewinnen. Die Notwendigkeit eines anschließenden Beweises wird dann nicht mehr gesehen." (Vollrath 1974, S.25) Besonders schwierig sei dieses Problem bei "Schülern, die noch sehr an induktive Formen der Erkenntnisgewinnung gewöhnt sind und die wenig zwischen Plausibilitätsbetrachtungen einerseits und exaktem mathematischem Schließen andererseits unterscheiden können." (Walsch 1972, S.6o) Walsch empfiehlt daher:"Gerade bei der *Einführung* der Schüler in das Beweisen mathematischer Aussagen ist deshalb darauf zu achten, daß den Schülern die Unzulänglichkeit induktiver Methoden oder die von Plausibilitätsbetrachtungen für die Erkenntnissicherung in der Mathematik bewußt wird und daß sie lernen, zwischen Vermutungen und gesicherten Aussagen zu unterscheiden." (Walsch 1972, S.6o)

Die Notwendigkeit eines Beweises wird also nach den bei Vollrath und Walsch zitierten Vorstellungen negativ bestimmt: Erkenntnismittel, die in der Alltagserfahrung bzw. bei jeder wissenschaftlichen Arbeit eine große Rolle spielen (Anschauung, Messung, Plausibilitätsbetrachtungen) werden dem Schüler als unzuverlässig bzw. als nicht exakt dargestellt. Dies wird durch einige praktische Darbietungen demonstriert, indem man den Schülern optische Täuschungen präsentiert oder die Möglichkeit von Meßfehlern aufzeigt.

Daß dies im Grunde genommen ein ziemlich problematisches Vorgehen ist und den Schüler dazu bringt, die Mathematik in einem unangemessenen Gegensatz zu anderen Wissenschaften zu sehen, wird bei Walsch relativ klar ausgeführt. "In diesem Zusammenhang muß auch darauf aufmerksam gemacht werden, daß in Klasse 6 - also zur gleichen Zeit, in der wir die Schüler an das Beweisen mathematischer Sätze heranführen - der Unterricht im Fach Physik beginnt. In diesem Fach spielt das Messen eine große Rolle, und zwar nicht nur zur Erkenntnisfindung, sondern auch als Mittel der Erkenntnissicherung. Es wäre somit ganz falsch, den Schülern gerade in dieser Zeit im Fach Mathematik das Vertrauen in ihre Beobachtungsfähigkeit und in den Wert von Meßergebnissen zu nehmen. Wenn wir also im Mathematikunterricht gegen das Messen als Methode der Erkenntnissicherung argumentieren, dann dürfen wir nicht die Unzuverlässigkeit des Messens in den Vordergrund stellen, sondern - neben dem Hinweis auf die Unvollständigkeit, falls es sich um Allaussagen handelt - vor allem die Tatsache, daß wir durch das Messen die mathematischen Objekte gar nicht erfassen können." (Walsch 1972, S.131)

Die Einsicht, daß das "Wecken des Beweisbedürfnisses" davon abhängt, dem Schüler ein angemessenes (erkenntnistheoretisches) Verständnis mathematischer Verallgemeinerungen zu vermitteln, sollte festgehalten werden. Allerdings deutet sich am Schluß dieses Zitates eine charakteristische Schwierigkeit an, die mit der oben dargestellten Dichotomie zwischen Algebra und Geometrie zusammenhängt. Walsch sagt an anderer Stelle:"Zweitens zielt jene Motivierung (nämlich den Schüler auf Ungenauigkeiten der Zeichnungen hinzuweisen,H.N.J.) viel zu wenig auf den Hauptgrund der mathematischen Beweisnotwendigkeit, nämlich auf die Tatsache, daß Aussagen über alle Elemente einer gewissen (gewöhnlich unendlichen) Menge prinzipiell nicht durch das Überprüfen einiger Einzelbeispiele - und Zeichnen bzw. Messen ist ja stets ein Arbeiten an einem einzelnen speziellen Fall - bewiesen werden können. Dieser Mangel an der Motivierung ist nicht allzu gravierend, solange es in den zu beweisenden Sätzen um anschaulich leicht darstellbare, geometrische Sachverhalte geht. Es ist klar: Da man durch Zeichnen oder Messen nicht einmal für einen speziellen Fall die Gültigkeit einer solchen Aussage sicher nachprüfen kann, ist mit diesen Mitteln erst recht kein allgemeiner Beweis möglich. Sobald jedoch beispielsweise arithmetische Sätze betrachtet werden, liegen die Dinge anders: Man kann deren Gültigkeit für Einzelfälle gewöhnlich exakt nachweisen." (Walsch 1972, S.13o) Danach, und dies ist weitgehend charakteristisch für die Schulmathematik, gibt es zweierlei verschiedene Konzeptionen des Verallgemeinerns, eine für die Geometrie, eine für die Arithmetik bzw. die Algebra. Während Verallgemeinern in der Arithmetik und der Algebra einfach heißt: die Aussage ist gültig für alle behaupteten Fälle, bedeutet Verallgemeinern in der Geometrie: die Aussage gilt für ein "ideales Objekt". Ein ideales Objekt aber erhält man nach dieser Auffassung, indem man von der räumlichen und flächenhaften Ausdehnung einer konkret gezeichneten Figur absieht, ihre spezielle Lagerung im Raum bzw. in der Zeichenebene vernachlässigt und die speziellen Eigenschaften, soweit sie nicht in der Voraussetzung des Satzes genannt sind (wie z.B. stumpfe bzw. spitze Winkel etc.), nicht in Betracht zieht. Dieses dichotome Verständnis dessen, was eine Verallgemeinerung ist, bereitet erhebliche Schwierigkeiten im Hinblick auf die angestrebte Vereinheitlichung im methodischen Grundverständnis von Geometrie und Algebra. Vorläufig sei daher auf das oben angeführte Zitat von Freudenthal verwiesen, in dem ausgesagt wird, daß es wichtig sei, auch die Objekte der Geometrie als Variablen aufzufassen. Damit wird insbesondere der Tatsache Rechnung getragen, daß Verallgemeinerungen Beziehungen und keine Objekte abbilden. Dieser Punkt wird in Abschnitt IV.2. noch ausführlich behandelt.

J. van Dormolen beschäftigt sich in seinem Aufsatz "Learning to understand what giving a proof really means" (van Dormolen 1977) mit derselben Problematik, wie man Schüler dazu bringen könne, die Notwendigkeit für ein deduktives Argument einzusehen. Der Autor gibt einige Beispiele von Aufgaben und jeweils dazu drei mögliche Schülerreaktionen. Eines dieser Beispiele sei hier zitiert:

"A. *Aufgabe:*

Zeichne ein gleichschenkliges Trapez und beweise, daß die Diagonalen gleich lang sind.

Verschiedene Lösungen:

Ao

Ein Schüler mißt die Diagonale mit dem Lineal 'Ich erhalte beide Male dasselbe Ergebnis, also sind die Diagonalen gleich lang'

A1

Ein anderer Schüler schneidet das Trapez in Gedanken aus, dreht es und setzt es wieder ein. 'Man sieht leicht, daß das geht, also sind die Diagonalen gleich lang.'

A2

'Ein gleichschenkliges Trapez ist nach Definition ein Viereck mit einer Symmetrieachse, die nicht durch eine Ecke geht. Also gibt es eine Spiegelung S, so daß S(ABCD) = BADC. Also ist S (AC) = BD. Bei Spiegelungen sind eine Strecke und ihr Bild kongruent. Also haben die Diagonalen dieselbe Länge.'" (van Dormolen 1977, S.28)

Van Dormolen diskutiert dieses und noch weitere Beispiele folgendermaßen:"In Ao konnte der Schüler nicht über das vorgelegte, spezielle Trapez hinaussehen. Wäre ihm ein anderes Trapez gegeben worden, hätte er wieder von vorn angefangen. ... In A1, B1, C1 waren auf der anderen Seite die zu betrachtenden Objekte nicht länger in sich selbst wichtig. Sie waren Repräsentanten einer Familie ähnlicher Objekte. Der Schüler studierte nicht länger die Eigenschaften des Objekts, sondern der Art. Er war gut in der Lage, sich andere Objekte vorzustellen als die, die er tatsächlich vor sich sah.

Die Schüler, die die Lösungen A2, B2, C2 gegeben hatten, hatten einen weiteren Schritt getan. Sie waren weder auf spezielle Objekte beschränkt noch auf Familien von ähnlichen Objekten. In *ihrer Argumentation waren* sie in der Lage, Regeln in Betracht zu ziehen, die man bei jedem logischen Argument beachten sollte, unabhängig von der Sache, mit der man sich beschäftigt."
(van Dormolen 1977, S.330/32)

Auch van Dormolen versteht also "Verallgemeinern" so, daß diejenige Klasse von Objekten, die bestimmte gemeinsame Merkmale besitzt, auszusondern ist. Auf der anderen Seite legen die Beispiele, die er anführt, ein dazu unterschiedliches Verständnis von Verallgemeinerungen nahe. Danach kommt es nicht so sehr darauf an, Klassen von Objekten mit gemeinsamen Merkmalen zu bilden, sondern entscheidend scheint doch zu sein, daß der Schüler die Möglichkeit des operativen Umgangs mit den Verallgemeinerungen sieht. Insofern gibt es auch keinen prinzipiellen Unterschied zwischen den Antworten A_1 und A_2 in dem Sinne, daß erst A_2 ein eigentlich logisches Argument wäre. In beiden Antworten gibt es vielmehr eine Korrespondenz zwischen einem intendierten Gegenstandsbereich und einer Methode des Umgangs damit. Der Unterschied zwischen beiden Antworten besteht lediglich darin, daß man bei A_2 gar nicht mehr die Illusion haben kann, ein Begriff spiegele Objekte wider. Das Symmetrieargument repräsentiert eine Form des Gegenstandsbezugs, die dazu zwingt, Verallgemeinerungen als Widerspiegelung von Beziehungen aufzufassen.

Nimmt man dies ernst, so folgt daraus, daß den Schülern die Notwendigkeit eines deduktiven Arguments nicht klargemacht werden kann, indem ihnen bestimmte Methoden als illegitim dargestellt werden, sondern daß es darum geht, den

Zusammenhang von Gegenstandsbezug und Verfahren zu verdeutlichen. Ein Beweisbedürfnis kann nur derjenige entwickeln, der prinzipiell auch weiß, wie er es befriedigen kann. Das bedeutet, daß er im Hinblick auf diesen Zusammenhang von Gegenstandsbezug und Verfahren sich auf dem durch den Beweis erforderten Allgemeinheitsniveau befinden muß. Dieses Allgemeinheitsniveau ist aber keine abstrakte Fähigkeit, "logisch denken" zu können, sondern ein bestimmter Zusammenhang von Verfahren und Objekt.

Van Dormolen ordnet dann die verschiedenen Schülerantworten den Niveaustufen bei van Hiele zu und zieht die Schlußfolgerung, daß der Schüler zuerst die niedrigere Stufe erreicht haben müsse, bevor er zu einer höheren übergehen könne. Das bedeutet, daß dem Lehrer im Hinblick auf die Entwicklung eines verallgemeinerten, abstrakteren Denkens bei den Schülern eine passiv-abwartende Rolle zugewiesen wird. Wenn es aber richtig ist, daß Verallgemeinern immer darauf hinausläuft, einen bestimmten verallgemeinerten Zusammenhang von Verfahren und Objekt anzustreben, dann kann der Lehrer in diesem Prozeß eine durchaus aktiv-fordernde Rolle spielen. Verallgemeinern wird dann nicht als Prozeß verstanden, bei dem man sich von der Empirie wegbewegt, sondern umgekehrt als ein Prozeß, der sich der Empirie verstärkt zuwendet. (vgl. Abschnitt IV.3.)

Problem 2 :

Nach ihrer eigenen Norm gilt der Schulmathematik die Deduktion von Sätzen aus einem Axiomensystem als Garant des eigentlich wissenschaftlichen Charakters der Mathematik. "Für den Unterricht auf der Mittelstufe ist selbstverständlich eine strenge Deduktion der Sätze aus den grundlegenden Definitionen und Axiomen unmöglich. Dagegen wird auf der Oberstufe in rückblickender Betrachtung das Satzsystem der Geometrie mit dem Eingehen auf die axiomatischen Grundlagen unbedingt notwendig sein, weil sich hier das vertraute Satzgefüge im logischen Zusammenhang deutlich zeigt und die mathematische Denkmethode am glänzendsten klar wird." (P.Knabe, in: Wolff, 1967, Bd. III, S.35) Die Schulmathematik ist daher mit dem

Problem konfrontiert, daß Beweise geführt werden, *ohne eine strenge Axiomatik voraussetzen zu können.* "Im Gegensatz zum axiomatischen Aufbau mathematischer Theorien ist es im Unterricht in der Regel so, daß zunächst (in den unteren Klassen) viele Sätze anschaulich und auf induktivem Wege gewonnen werden. Darunter sind viele Sätze, die man zur Grundlegung eines axiomatisch-deduktiven Aufbaus der betreffenden Theorie gar nicht als Axiom benötigen würde. Umgekehrt werden im Unterricht manche 'selbstverständlichen' Sätze, die bei streng deduktivem Vorgehen unentbehrlich sind, gar nicht explizit formuliert. Auf dieser vom axiomatischen Standpunkt aus gesehen sehr unvollkommenen Grundlage beginnt man dann, im Unterricht einzelne Beweise zu führen. Nebenher werden aber auch weiterhin in anschaulicher oder induktiver Form neue Sätze gewonnen, die selbst nicht bewiesen, wohl aber bei späteren Beweisen benutzt werden." (Walsch 1972, S.75) Walsch sagt dann, daß dieses Vorgehen mathematisch dennoch seinen Sinn habe, weil es den Schülern den logischen Zusammenhang zwischen einzelnen mathematischen Sätzen klar mache.

Damit ist aber das Problem, um das es eigentlich geht, nicht erledigt. Das Fehlen der Axiomatik macht den Rückgriff auf empirische bzw. intuitive Argumentationen notwendig, und es bleibt doch die Frage, nach welchen Kriterien der Lehrer entscheiden soll, was *logisch expliziert* werden muß und was *implizit* bleiben kann. Das Problem der fehlenden Axiomatik hängt genuin mit dem Problem der Entwicklungsdynamik des Wissens zusammen, denn die Tatsache, daß das Wissen beim Schüler sich entwickelt, macht es unmöglich, sich auf den Standpunkt eines abgeschlossenen Systems zu stellen. Bei dem Problem der fehlenden Axiomatik geht es also darum, wie man eine bewußte Entwicklungsperspektive auf das Beweisproblem gewinnen kann. Nun wird durch das eingangs wiedergegebene Zitat aus dem "Handbuch der Schulmathematik" sowie durch die Ausführungen von Walsch nahegelegt, es handele sich bei dem durch das Entwicklungsproblem aufgezwungenen empirischen Bezug um so etwas wie einen Mangel, der lediglich durch pädagogisch-psychologische Gegebenheiten unvermeidlich sei. Auch hier steht also implizit wieder die Vorstellung im Vordergrund, es gehe beim Übergang zu größerer mathematischer Strenge und Wissenschaftlichkeit um eine Bewegung weg vom Empirischen bzw. vom Anwendungsbezug. In IV.3. wird das Problem wieder aufgenommen und der Versuch gemacht, eine alternative Vorstellung dazu zu entwickeln.

Vorläufig soll hier nur auf einige Ausführungen in dem Buch von Freudenthal verwiesen werden, der diese ganze Problematik unter dem Stichwort des "lokalen Ordnens" diskutiert.
Im Grunde genommen wird aus den Freudenthalschen Beispielen klar, daß die Technik des lokalen Ordnens strukturiert und gesteuert wird durch Probleme der Begriffsentwicklung bzw. in der Terminologie von Sneed, durch das Problem der Bestimmung theoretischer Terme. (Hier liegt auch der rationale Kern der oben zitierten Auffassungen von Thom, daß Bedeutung bzw. Strenge eine lokale Eigenschaft des mathematischen Denkens seien.) Freudenthal diskutiert z.B. auf Seite 423f. seines Buches den Beweis des Satzes, daß sich die Mittelsenkrechten eines Dreiecks in einem Punkt schneiden. Dabei wird die Überlegung, was am Beweis implizit bleiben kann und was expliziert werden sollte, gerade durch den "Anwendungsbezug" strukturiert: Im Falle des genannten Satzes soll vor allem die Konstruktion des Umkreises verstanden werden. (Vgl. die Diskussion bei Freudenthal 1974, S.425, 2. Absatz)

Freudenthal behandelt das Problem der fehlenden Axiomatik allgemein unter Hinweis auf die Tätigkeit des Schülers als dem obersten regulierenden Prinzip. Und in der Tat kann man sagen, daß es beim Problem der fehlenden Axiomatik um die Herstellung einer angemessenen Balance von Begründung und Anwendung in der Schülertätigkeit geht. Wie gesagt, wird in IV.3. zu zeigen versucht, daß der Gegenstandsbezug die Grundlage dieser Regulation abgibt.

Es sei angemerkt, daß das bei Walsch auf Seite 72 angesprochene Problem der "Komplexheit von Beweisschritten" eng mit dem hier diskutierten Problem zusammenhängt. Auch bei der Bestimmung der Komplexität von Beweisschritten geht es ja um die Beziehung von Implizitem und Explizitem; man hat allerdings bei diesem Problem wesentlich stärker den subjektiven Entwicklungsstand des Schülers im Auge als bei dem allgemeineren Problem der fehlenden Axiomatik.

Problem 3 :

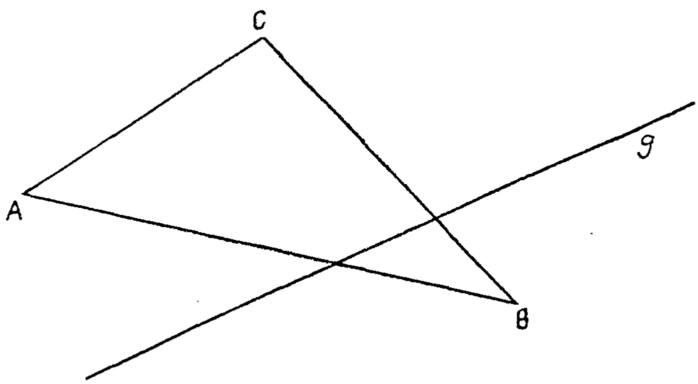
Speziell im Hinblick auf das Beweisen in der Geometrie gibt es eine ausgedehnte Diskussion über die Rolle und Funktion von Planskizzen. Dieses Problem wird dann meistens in den allgemeineren Kontext der Bedeutung der *Anschauung* bzw. noch allgemeiner in den Kontext der *Heuristik* gestellt. Im Grunde genommen geht es dabei um zwei verschiedene Probleme, die meiner Meinung nach beide mit dem beim Beweisen in der Geometrie sich aufdrängenden Empirismus zusammenhängen. Das eine Problem wird z.B. in einem amerikanischen Logiklehrbuch "Logic in Elementary Mathematics" (Exner/Rosskopf 1959) so dargestellt: "Der Gebrauch einer Zeichnung ist zweischneidig. Beziehungen zwischen Bestandteilen der Zeichnung müssen nicht notwendig Beziehungen zwischen Bestandteilen des (dargestellten) Parallelogramms korrespondieren. Alle Tatsachen über ein Parallelogramm, die durch eine Zeichnung suggeriert werden, müssen verifiziert werden. Aber die Bildernamen, oder Zeichnungen, die man in der Geometrie benutzt, sind sehr klug gewählte Namen und ihre Suggestivkraft ist häufig so eindringlich, daß man manchmal Dinge ohne Beweis akzeptiert. ... Wahrscheinlich werden aus diesem Grunde sowohl Buchstaben als auch Bildernamen benutzt. Die Bildersymbole sind nützlich, weil sie hochgradig suggestiv sind, aber auch aus diesem Grunde gefährlich. Um die suggerierten Beziehungen zu verifizieren, schreibt man Beweise, die Buchstabensymbole benutzen, um die Gefahr zu vermeiden." (Exner/Rosskopf 1959, Seite 96) Die Autoren fahren dann fort, daß der Geometrie-lehrer eine sehr schwierige Aufgabe habe, z.B. werde dasselbe Wort "Gerade" benutzt, um sowohl den damit bezeichneten undefinierten Grundbegriff der Geometrie zu benennen als auch den Kreidestrich in einer Figur. Die Anweisung "zeichne die Gerade AC" könnte dem Schüler suggerieren, daß man von ihm erwartet, eine Gerade zu zeichnen, die A und C, zwei Punkte, die momentan unverbunden sind, verbindet. Dies sei natürlich absurd, man könne lediglich das "Bild der Geraden AC" zeichnen.

Hierbei handelt es sich im Grunde genommen um dieselbe Frage, die oben unter "Problem 1" abgehandelt wurde. Die in der Geometrie dominante Vorstellung, sich Verallgemeinern als den Übergang zu einem idealisierten Objekt vorzustellen, das man aus den konkreten Objekten durch Weglassen von allen spezifischen Merkmalen erhält, produziert mit Notwendigkeit die Schwierigkeit, daß die Weisung, wie sie in dem angeführten Zitat von Exner/Rosskopf gegeben wird, zwischen der Geraden und dem Bild der Geraden auf dem Papier zu unterscheiden, dem Lernenden als leere Scholastik erscheint. Es war bereits unter Problem 1 angedeutet worden, daß eine Behebung dieser Schwierigkeit in der Richtung zu suchen ist, daß systematisch Techniken entwickelt werden, geometrische Objekte als Variablen aufzufassen. Anders gesagt: Die Menge der intendierten Anwendungen mag für das hier angesprochene Problem eine auch unmittelbar psychologisch-pädagogisch nützlichere Vorstellung sein als die eines idealisierten Objektes.

Das zweite Problem, das im Zusammenhang mit geometrischen Planskizzen diskutiert wird und das allgemeiner unter dem Titel "Heuristik" abgehandelt wird, betrifft die vielfach beobachtete blockierende Funktion von Zeichnungen. Diese besteht darin, daß die anschaulichen Gegebenheiten einer bestimmten Skizze das Denken derart fixieren, daß das Finden der entscheidenden Beweisidee durch die Anschauung geradezu verhindert wird. In Untersuchungen der gestaltpsychologischen

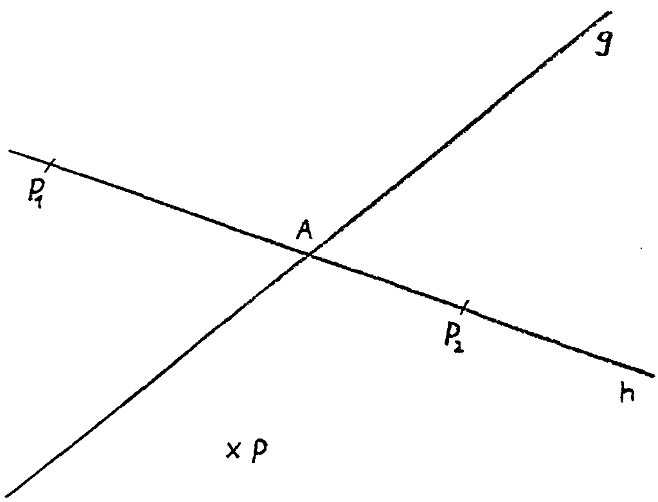
Schule ist dieses Problem vielfach behandelt worden. Walsch führt in seinem Buch auf Seite 60f ein Beispiel des Psychologen K. Duncker an. Es handele sich dabei um das Beispiel des Axioms von Pasch, das zeige, wie eine zu stark anschauungsgebundene Vorstellung vom Inhalt dieses Axioms zu einem Hindernis werden könne, wenn die Benutzbarkeit des Axioms für eine bestimmte Beweisführung erkannt werden solle. Das Axiom lautet:

> In einer Ebene seien gegeben ein Dreieck ABC und eine Gerade g, die durch keinen der Punkte A,B und C geht. Dann gilt: Wenn g eine Seite des Dreiecks ABC schneidet, dann schneidet sie auch noch genau eine weitere Seite des Dreiecks.

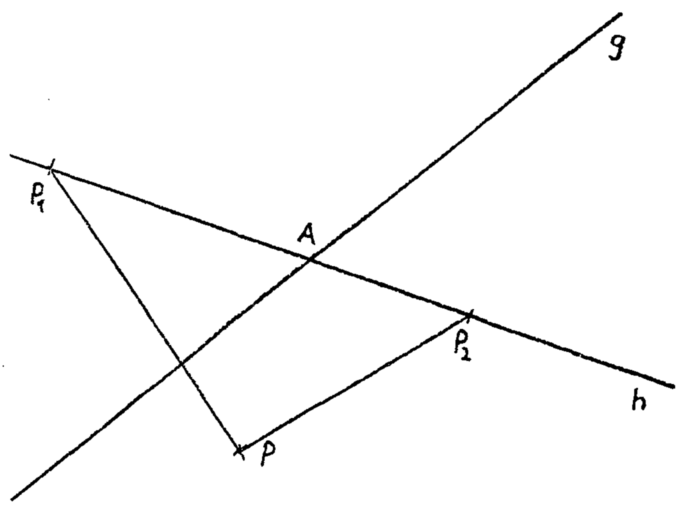


Duncker betrachtet nun die folgende Aufgabe:

> Gegeben seien in einer Ebene zwei verschiedene, nicht parallele Geraden g und h, deren Schnittpunkt A sein möge, und auf h zwei weitere Punkte P_1 und P_2, wobei A zwischen P_1 und P_2 liegen soll. Es ist zu beweisen, daß jeder Punkt P, der weder auf g noch auf h liegt, entweder mit P_1 oder mit P_2 durch eine Strecke verbunden werden kann, die die Gerade g nicht schneidet.



Es ist klar, daß der geforderte Beweis mit Hilfe des Axioms von Pasch leicht geführt werden kann. Allerdings müsse man dazu bereits wissen, daß das Axiom von Pasch herangezogen werden muß. "Ist das aber zunächst *nicht* bekannt, dann stellt die Aufgabe doch einige Anforderungen an das Denken. Das liegt daran, daß die anschauliche Repräsentation und Auffassungsweise des Axioms von Pasch einerseits und der Beweisaufgabe andererseits sich in einigen Punkten deutlich unterscheiden, so daß es keineswegs einfach ist, in den anschaulichen Gegebenheiten der Beweisaufgabe die des Axioms von Pasch wiederzuentdecken bzw. die eine Auffassungsweise in die andere überzuführen. Während nämlich durch die Formulierung des Axioms von Pasch primär ein Dreieck, das von einer Geraden durchquert wird, als anschauliche Gegebenheit hervortritt, werden die Bedingungen der Aufgabe vor allem durch *zwei einander schneidende* Geraden anschaulich repräsentiert, zu denen noch ein Punkt außerhalb der beiden Geraden hinzukommt. Erst wenn man die beiden Verbindungsstrecken $\overline{PP}_1$ und $\overline{PP}_2$ einzeichnet, nähert man sich den anschaulichen Gegebenheiten des Axioms von Pasch.



Aber auch jetzt kann es aufgrund der Entstehung der Figur noch psychologische Barrieren für die Anwendung des Axioms von Pasch geben: die Strecke $\overline{P_1P_2}$ hat mehr den Charakter eines *primär* existierenden Elements (als Teil der Geraden h), während $\overline{PP_1}$ und $\overline{PP_2}$ als nachträglich eingezeichnete Verbindungsstrecken mehr *sekundärer* Natur sind. Um auf das Axiom von Pasch zurückgreifen zu können, müssen alle drei Strecken *gleichrangig* als Seiten des Dreiecks PP_1P_2 sehen werden." (Walsch 1972, Seite 61/62) Duncker spreche hier davon, daß zur Lösung der Aufgabe ein Umstrukturieren der anschaulichen Gegebenheiten notwendig sei. Walsch selber merkt dazu an, daß die Schwierigkeiten der Beweisaufgaben umso geringer würden, je weniger ein Schüler an eine bestimmte Formulierung bzw. eine daran geknüpfte feste anschauliche Deutung des Axioms von Pasch gebunden sei, und je mehr er in der Lage sei, die Bedingungen der Aufgabe in unterschiedlicher Weise auszudrücken und zu interpretieren./

Walsch bemerkt dann (und dies möchte ich besonders hervorheben), daß die Lösung der Aufgabe schnell klar werde, wenn man sich vergegenwärtige, daß es sich in beiden Fällen um *Anordnungsbeziehungen* handelt. Habe man dies erst einmal realisiert, dann liege der Gedanke nahe, das Axiom von Pasch, das etwas über Anordnungsbeziehungen aussagt, zu benutzen.

Die heuristische Wirkung dieser Bemerkung von Walsch ergibt sich daraus, daß durch den Rückgang auf den Begriff der 'Anordnungsbeziehung' das Problem möglichst weitgehend *verallgemeinert* und dadurch lösbar wird. Ich möchte darauf hinweisen, daß auch hier 'verallgemeinern' nicht bedeutet, von Eigenschaften abzusehen, sondern den zur Debatte stehenden Gegenstandsbereich zu erweitern. Im Vorgriff auf IV.3. sei festgestellt, daß durch den Begriff der "Anordnungsbeziehung" die Menge I der intendierten Anwendungen umschrieben wird. Der Beweis des Satzes besteht im Grunde genommen in nichts anderem, als den Satz auf diesen Bereich intendierter Anwendungen zu beziehen. (vgl. IV.3.)

Ein anderer Aspekt derselben Problematik liegt in der Schwierigkeit, die regelmäßig immer dann entsteht, wenn zum Beweis eines bestimmten Sachverhaltes die Benutzung von "Hilfslinien" notwendig wird. Deren Gebrauch erscheint im Normalfall als "Trick", der in keiner Weise durch die sachlichen Gegebenheiten der Aufgabe nahegelegt wird. Es leuchtet ein, daß auch diese Schwierigkeit aufs Engste mit einem zu starken "Empirismus" in der Auffassung geometrischer Objekte zusammenhängt. Es ist nicht möglich, mit Hilfe einer Zeichnung oder Planskizze den vollen theoretischen Beziehungsreichtum eines Begriffs zum Ausdruck zu bringen. Identifiziert man etwa den Begriff des Dreiecks mit der vorgelegten Zeichnung oder versucht man, in der vorgelegten Zeichnung das "allgemeine Dreieck" im Sinne eines "Dreieckes ohne spezielle Eigenschaften" zu sehen, dann ist klar, daß damit die gesamte operativ-strukturelle Seite eines Begriffs nicht zum Ausdruck gebracht bzw. nicht vorgestellt wird. Damit ist aber gerade diejenige Seite des verallgemeinerten theoretischen Begriffs abgeschnitten, die das Zeichnen einer Hilfslinie überhaupt erst nahelegen könnte.

Die hinderliche Rolle einer zu empiristischen Auffassung von Verallgemeinerung ist also zweifach: zum einen verfehlt eine solche Auffassung (in Gestalt der Vorstellung vom "allgemeinen Dreieck" als eines "Dreiecks ohne spezielle Eigenschaften") die volle Ausschöpfung des Potentials, das in der Menge I der intendierten Anwendungen enthalten ist, zum anderen negiert die empiristische Auffassung den operativ-strukturellen Charakter jeder theoretischen Verallgemeinerung.

Zusammenfassend sei vorläufig aus dieser Diskussion festgehalten, daß es notwendig ist, wesentlich klarer die Rolle von Planskizzen als methodischer Hilfsmittel, die von den Gesamtbedingungen der Aufgabe (den Gegebenheiten, den Zielen, den Mitteln) abhängen, zu vermitteln. Dazu sind Techniken der systematischen und zielbewußten Variation von Planskizzen erforderlich. Auch bei Walsch wird dies gesehen:

"Es bedarf vermutlich einer jahrelangen, den gesamten Geometrieunterricht durchziehenden Kleinarbeit, um dieses Ziel zu erreichen. Dazu wird es u.a. sicher notwendig sein, bei geometrischen Beweisaufgaben eine entsprechende Figur öfter von Schülern anfertigen zu lassen, anstatt sie ihnen zu geben. Bei der Entwicklung einer solchen Figur kann dann Schritt für Schritt überprüft werden, was durch die Voraussetzungen gesichert ist und was nicht. Aber dieses Verfahren ist natürlich nicht immer anwendbar, ... " (Walsch 1972, S.173).

Zur Veranschaulichung dessen, was hier gemeint ist, sei auf den Aufsatz von M. Wagenschein "Entdeckung der Axiomatik" (Wagenschein 1974) verwiesen. Sieht man einmal von einigen problematischen Aspekten der Wagenscheinschen Konzeption ab, (diese sind ausführlich erörtert in: Schubring 1978, C 33ff) dann ist es doch sehr interessant, auf welche Weise die angefertigten Planskizzen systematisch variiert werden, bis die Aufgabe gelöst ist. Konkret geht es darum, zu begründen, warum sich der Radius eines Kreises genau 6mal auf dem Kreisumfang abtragen läßt, also um die Konstruktion des regelmäßigen Sechsecks. Zur Lösung des Problems formuliert Wagenschein einige allgemeine Regeln, die der Lehrer zur Strukturierung des Problemlösungsprozesses der Schüler einbringt. Diese Regeln lauten:

Regel 1: Benutze nur das, was wir in die Figur eingebracht haben (das 'Gegebene'), das aber vollständig. Sonst benutze nichts außer dem Selbstverständlichen.

Regel 2: Alles Eingebrachte sollte sichtbar sein.

Regel 3: Können wir die Figur vereinfachen, indem wir Überflüssiges wegwischen?

Regel 3a: Nach jeder Vereinfachung der Figur ist das ursprüngliche Problem neu zu formulieren, und es ist zu prüfen, ob es unverkürzt dasselbe geblieben ist.
(vgl. Wagenschein 1974, S. 61)

Die Einzelheiten der Lösung, die mit Hilfe dieser Regeln bei Wagenschein entwickelt wird, sollen hier nicht weiter verfolgt werden; mit den Regeln wird aber sehr schön der Charakter der Planfigur als abhängiger Variabler des Beweisprozesses beschrieben, indem dieser Prozeß als Kette von Problemtransformationen entwickelt wird. Grundlage der Problemtransformationen aber ist ein verallgemeinertes *Gegenstandsverständnis* Dies wird bei Wagenschein nicht gesehen; er faßt die Regel 3a, die nur auf der Grundlage eines bestimmten Gegenstandsverständnisses überhaupt angewandt werden kann, rein formal auf.

Problem 4 :

Ein großer Problemkomplex, zu dem die Schulmathematik sich außerordentlich uneinheitlich verhält, sind die erkenntnistheoretischen Erläuterungen, die den Schülern zum Status und zur Deutung mathematischer Aussagen und Methoden gegeben werden. Z.B. sei an das Problem erinnert, inwieweit eigentlich die Schulmathematik, die aus der grundlagentheoretischen Diskussion zu Beginn unseres Jahrhunderts zu ziehenden erkenntnistheoretischen Konsequenzen, die doch in Richtung einer Relativierung mathematischer Erkenntnisse deuten, realisiert hat. An dieser Stelle soll stellvertretend für viele andere auf das Problem des mathematischen Wahrheitsbegriffs näher eingegangen werden. Walsch sagt z.B. in seinem Buch, daß zu dem Zeitpunkt, an dem man in der Schule mit dem Führen wirklicher Beweise anfängt, man auch den Schülern gewisse begriffliche Unterscheidungen klarmachen muß. So müßten Schüler lernen zu unterscheiden, welche Aussagen in der Mathematik bewiesen werden müssen und welche nicht, sie müßten also den Unterschied von "Definition" und "Aussage" lernen. "Aus all dem wird deutlich, daß es ohne besondere Schwierigkeiten möglich ist, den Schülern in Klasse 6 erste Kenntnisse und Einsichten über Definitionen und Aussagen zu vermitteln und damit die entsprechenden Forderungen unseres Lehrplans zu erfüllen. Selbstverständlich müssen diese Kenntnisse durch den weiteren Mathematikunterricht angereichert, vertieft und gefestigt werden, damit sie nicht wieder verlorengehen. Dabei kommt es darauf an, den Schülern schrittweise klarzumachen:

- Durch eine Definition wird etwas erklärt oder festgelegt. Definitionen kann man nicht beweisen, sie sind weder wahr noch falsch. Es ist allerdings oft angebracht, Definitionen zu rechtfertigen: als zweckmäßig, sinnvoll, möglich u.ä.
- Aussagen sind entweder wahr oder falsch. Sie müssen in der Mathematik stets bewiesen werden, sofern man sie nicht als Axiom benutzt."

(Walsch 1972, Seite 124)

Nun ließe sich gegen diese Begriffsbestimmung sicherlich vielerlei einwenden, z.B., daß nicht jede Erklärung oder Festlegung eine Definition ist, sondern nach den Standards der formalen Logik erst dann zur Definition wird, wenn das Definiendum an jeder Stelle, an der es auftritt, durch das Definiens ersetzt werden kann. In diesem strengen Sinne sind aber diese Formulierungen von Walsch sicher auch nicht gemeint, und es soll zugegeben werden, daß es generell sehr schwierig ist, eine für die Schulmathematik hinreichend vernünftige und praktikable Unterscheidung von Definition und Aussage zu geben. Es sei nur an die oben im Kapitel III.1. dargestellte Kontroverse zwischen Frege und Hilbert erinnert, die sich in einem wesentlichen Teil gerade auf dieses Problem bezog. In der Formulierung von Walsch wird gerade die Position Freges wiedergegeben, die sich aber auf die Axiomatik Hilberts nur noch mit Schwierigkeiten anwenden läßt. (Frege konnte seine Unterscheidung von Definition und Aussage nur dadurch mit den Hilbertschen impliziten Definitionen in Einklang bringen, daß er letztere als Definitionen eines Begriffs zweiter Stufe betrachtete. (Vgl. Beth 1942)). Hier soll nur auf einen Punkt eingegangen werden, nämlich auf die aus den zitierten Sätzen von Walsch sich implizit ergebende Identifizierung von Wahrheit und Ableitbarkeit.

Nun hat aber Tarski zu Beginn der 30er Jahre bewiesen (vgl. auch Kap. III.1. oben), daß sich die Begriffe der Wahrheit und Beweisbarkeit prinzipiell nicht zur Deckung bringen lassen. Er zeigte, daß der Begriff der "Gödelzahlen einer wahren Aussage" sich für das System Z der ganzen Zahlen nicht in Z definieren läßt. Wenn eine Sprache mindestens so reichhaltig ist wie das System Z, dann erzwingt die Einführung des Wahrheitsbegriffs die Unterscheidung von Objektsprache und Metasprache. Andererseits läßt sich der Beweisbegriff für Z in Z 'gödelisieren'. Zusammengefaßt: In jeder formalen Sprache gibt es, wenn sie nur reichhaltig genug ist, "mehr" wahre Sätze als beweisbare Sätze. Diese Zusammenhänge sind von Tarski in einer populären Darstellung im "Scientific American" (Tarski 1969) entwickelt worden. Tarski schließt seine dortigen Ausführungen mit der Bemerkung "The notion of a true sentence functions above as an ideal limit which can never be reached but which we try to approximate by gradually widening the set of provable sentences." (Tarski 1969, S.77) Anders ausgedrückt:"Der grundlegende Aspekt des Schließens ist der semantische." (Serebrjannikov 1974, S.15)

Nun kann man mit Schülern sicher nicht über die Sätze von Tarski reden, es besteht aber andererseits auch kein Anlaß, das Problem der Semantik bzw. des Gegenstandsbezugs so aus seinen Darlegungen auszuklammern, wie es in den obigen Sätzen von Walsch, die als charakteristisch gelten können, geschieht. Es ist sehr wichtig, auch in den erkenntnistheoretischen Fragen ein solches Verständnis des Beweises zu vermitteln, das den semantischen Bezug, d.h. den Bezug auf die Menge der intendierten Anwendungen nicht ausklammert. Dies scheint umso gebotener, als der Anwendungsbezug sich auch bereits bei der Behandlung der anderen mit dem Beweisen zusammenhängenden didaktischen Probleme als ein Schlüsselproblem gezeigt hat. Wenn die Schulmathematik von ihrem unterschwellig immer vorhandenen schlechten wissenschaftlichen Gewissen angesichts der Notwendigkeit empirischer bzw. intuitiver Argumentationen wegkommen will, dann ist es notwendig, daß sie sich ein erkenntnistheoretisch einigermaßen angemessenes Bild der Sachlage macht.

Faßt man die dargestellten didaktischen Probleme des Beweisens zusammen, dann hat sich gezeigt, daß das zentrale Problem immer wieder die Frage nach dem Verhältnis von Theorie und Empirie bzw. nach einem angemessenen Verständnis mathematischer Verallgemeinerung gewesen ist. Es hat sich als unvermeidlich erwiesen, den Beweisbegriff im komplizierten Beziehungsgefüge syntaktischer und semantischer Beziehungen zu diskutieren.

Anders gesagt: Die duale Struktur des Beweisbegriffs hat sich als das zentrale Problem herausgestellt. Einen indirekten Beleg dafür findet man in einer empirischen Untersuchung zum Beweisen in der Schule, die bei Walsch dargestellt wird. Dort werden die Schülereinstellungen zu verschiedenen im Mathematikunterricht vorkommenden Tätigkeiten erfragt. Es wird gefragt: "Was machst du im Mathematikunterricht besonders gern?" Mögliche Antworten sind: a. Kopfrechnen, b. schriftliches Rechnen (Aufgaben ohne Text), c. Lösen von Textaufgaben (aus der Prozentrechnung?, aus der Gleichungslehre? oder aus anderen Gebieten?), d. Lösen von Gleichungen (ohne Text), e. geometrische Konstruktionen, f. Beweisen von Lehrsätzen, g. geometrische Berechnungen (Flächeninhalt, Volumen usw.), h. andere, hier nicht aufgezählte Arbeiten (welche?). Befragt wurden Schüler der Klassenstufe 7. Es ergab sich folgende Tabelle:

	a	b	c	d	e	f	g
n^+ %	46	64	24	63	35	4	36
n^- %	13	6	26	8	29	63	35

Walsch bewertet diese Tabelle nun so, daß er aus ihr nur die weitgehende Ablehnung des Beweisens durch die Schüler herausliest. Die Fragen nach den anderen Tätigkeitsarten seien nur aus methodischen Gründen gestellt worden. Es scheint aber dennoch interessant, mit der weitgehenden Ablehnung des Beweisens die Tatsache zu konfrontieren, daß die Tätigkeiten b und d, also schriftliches Rechnen (Aufgaben ohne Text) und Lösen von Gleichungen (ohne Text), d.h. rein mechanische Tätigkeiten, sich bei den Schülern hoher Beliebtheit erfreuen. Ohne eine solche einzelne und einfache Befragung überbewerten zu wollen, verweist das Ergebnis dennoch darauf, daß es die mit dem Beweisen verbundenen komplexen Bedeutungsprobleme sind, die die eigentliche Schwierigkeit ausmachen, und nicht so sehr ein Begriff von Strenge, der unter Strenge die Durchführung formaler Operationen nach Regeln versteht, wie es in der elementaren Arithmetik verlangt wird.

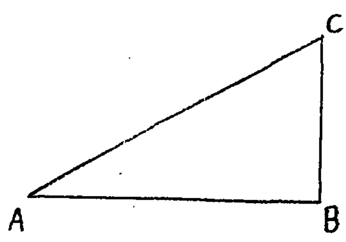
IV.2. *Was heißt "Verallgemeinern"? Zum Verhältnis von Theorie und Anwendungen in der Mathematik*

Die Darstellung didaktischer Probleme des Beweisens im letzten Absatz hat ergeben, daß ihre Lösung in großem Maße abhängt von einem angemessenen Verständnis des Verhältnisses von mathematischer Theorie und ihren Anwendungen bzw. von einer geeigneten Konzeption mathematischer Verallgemeinerungen. Nun ist bereits im III. Kapitel die Frage des Gegenstandsbezuges mathematischer Theorien behandelt worden. An dieser Stelle soll nun dieses Problem auf der Grundlage von Materialien weiter verfolgt werden, die der didaktischen Diskussion in gewissem Sinne näher stehen. Dabei soll die vor allem von Lakatos detaillierter ausgearbeitete Vorstellung vom "Beweis als Gedankenexperiment" näher untersucht werden.

Zunächst fällt folgende *Widersprüchlichkeit* ins Auge: Auf der einen Seite sind die Schwierigkeiten, Funktion und Bedeutung des Beweises und des Gedankenexperiments zu verstehen, strukturell dieselben; sie laufen auf die Frage hinaus, wie es möglich sein soll, durch reines Denken (Deduktion) neues Wissen über die Welt zu gewinnen. Andererseits sind aber die verbreiteten Auffassungen über den Beweis und das Gedankenexperiment ganz widersprüchlich Während im Hinblick auf das Beweisen der extremste Standpunkt derjenige ist, daß Beweisen nie zu neuem Wissen führen könne, sondern lediglich eine im nachhinein kodifizierende Rolle spiele, wird im Hinblick auf das Gedankenexperiment generell die Meinung vertreten, daß es der hervorragendste Prototyp des schöpferischen, neues Wissen produzierenden Denkens sei.

T.S. Kuhn hat sich in einem kleinen Aufsatz "Eine Funktion für das Gedankenexperiment" (Kuhn 1976) mit der Problematik von Gedankenexperimenten auseinandergesetzt. Er stellt dabei die folgenden Fragen: "1.: Die in einem Gedankenexperiment vorgestellte Situation darf offenbar nicht völlig willkürlich sein; welche Bedingungen der Wirklichkeitsnähe gelten für sie? In welchem Sinne und in welchem Maße muß die Situation in der Natur vorkommen können oder vorgekommen sein? Diese schwierige Frage verweist ihrerseits auf eine zweite. Wenn jedes erfolgreiche Gedankenexperiment in seinem Aufbau gewisse Kenntnisse über die Welt verwendet, so geht es ja nicht um diese, sondern bei einem wirklichen Gedankenexperiment müssen die zugrundegelegten empirischen Daten schon von allem Anfang an bekannt und allgemein anerkannt sein; wie kann dann aber neue Naturerkenntnis entstehen? Schließlich die dritte und kürzeste Frage: Was für neue Erkenntnisse lassen sich so gewinnen? Können die Wissenschaftler überhaupt etwas aus Gedankenexperimenten zu lernen hoffen?" (Kuhn 1976, S. 327-28) Die gängigen Antworten auf diese Fragen besagten nun, so fährt Kuhn fort, daß sich die durch Gedankenexperimente erzeugte neue Erkenntnis nicht auf die Natur, sondern auf den theoretischen Apparat des Wissenschaftlers beziehe. Danach habe das Gedankenexperiment die Funktion, Verwirrungen aufzuklären und dem Wissenschaftler Widersprüchlichkeiten seiner theoretischen Konzepte ins Bewußtsein zu rufen. Kuhn möchte nun eine Auffassung vom Gedankenexperiment entwickeln, nach der ein Gedankenexperiment dem wirklichen Experiment viel näher komme, als man sich gewöhnlich vorstelle.

Er erörtert ein von Galilei entwickeltes Gedankenexperiment, mit dessen Hilfe bestimmte Schwächen im Geschwindigkeitsbegriff, der zu Galileis Zeit gängig war und in seinen wesentlichen Grundzügen von Aristoteles herstammte, aufgedeckt und korrigiert werden sollten.Aristoteles hatte Bewegung oder Veränderung vor allem als Zustandsänderung verstanden, d.h. als eine Bewegung von einem Anfangszustand zu einem bestimmten Endzustand hin. Demgemäß mißt er die Geschwindigkeit anhand von Parametern, die sich auf die Anfangs- und Endpunkte der Bewegung beziehen, d.h. er setzt den gesamten zurückgelegten Weg zur gesamten dafür benötigten Zeit ins Verhältnis. Damit aber kommt Aristoteles zu einem Geschwindigkeitsbegriff, der unserem heutigen Begriff der Durchschnittsgeschwindigkeit entspricht. Zwar gebe es bei Aristoteles gelegentlich auch Andeutungen auf einen Begriff der Momentangeschwindigkeit; so unterscheide er gelegentlich zwischen der Geschwindigkeit eines Gegenstandes zu Anfang und zu Ende seiner Bewegung, dennoch haben diese Andeutungen keine Konsequenzen für den Aristotelischen Geschwindigkeitsbegriff. Galilei habe nun ein Gedankenexperiment entwickelt, mit dem die Unhaltbarkeit des Aristotelischen Geschwindigkeitsbegriffs gezeigt wird. Er stellt sich zwei Körper vor, die von einem gegebenen Punkt auf ein und dasselbe Niveau reibungslos hinabfallen. Dabei soll sich der eine Körper längs einer schiefen Ebene bewegen, der andere Körper soll direkt senkrecht hinabfallen.



Zunächst wird festgestellt, daß die beiden Körper, wenn sie in A bzw. B ankommen, die gleiche Geschwindigkeit erreicht haben werden, nämlich die, die notwendig ist, um sie wieder auf die ursprüngliche Höhe zurückzubringen. Dann wird die Frage gestellt, welcher Körper schneller sei. Die naheliegende Antwort ist die, daß dies der Körper, der senkrecht herabfalle, sei. Das ist aber mit der anfänglichen Einsicht, daß beide Körper dieselbe Endgeschwindigkeit haben, unvereinbar, denn da sie beide auch anfänglich ruhen, müssen sie auch dieselbe Durchschnittsgeschwindigkeit haben. Die Überlegung, daß die durchlaufenen Strecken ja verschieden lang sind, verschärft das Problem dann nur noch. Galilei kommt mit Hilfe des Aristotelischen Geschwindigkeitsbegriffs schließlich zu dem Ergebnis, daß der senkrecht fallende Körper sowohl schneller als auch gleich schnell als auch langsamer ist als der Körper, der längs der schiefen Ebene fällt. Dieses Paradox macht es dann notwendig, zu seiner Auflösung den Begriff der Momentan-Geschwindigkeit zu entwickeln.

Wie interpretiert nun Kuhn das, was sich in diesem Gedankenexperiment abgespielt hat? Zunächst sagt er, der Aristotelische Geschwindigkeitsbegriff sei nicht in demselben Sinne widersprüchlich gewesen, wie etwa der Begriff eines quadratischen Kreises widersprüchlich sei. Der quadratische Kreis sei in dem Sinne widersprüchlich, daß er in keiner möglichen Welt vorkommt. "Der Geschwindigkeitsbegriff des Aristoteles, der so etwas wie die heutigen Begriffe der Durchschnittsgeschwindigkeit und der Momentan-Geschwindigkeit vereinigte, war ein wesentlicher Bestandteil seiner ganzen Bewegungstheorie und hatte Konsequenzen für die gesamte Physik. Diese Rolle konnte er spielen, weil er nicht einfach eine Definition war, sei sie verworren oder nicht. Vielmehr hatte er physikalische Konsequenzen und fungierte teilweise als Naturgesetz. Diese Konsequenzen konnten niemals durch die Beobachtung oder die Logik in einer Welt in Frage gestellt werden, in der alle Bewegungen gleichförmig oder quasi-gleichförmig waren und Aristoteles ging so vor, als lebte er in einer derartigen Welt.

In Wirklichkeit war das natürlich nicht der Fall, doch sein Begriff funktionierte trotzdem so gut, daß mögliche Abweichungen von der Beobachtung überhaupt nicht bemerkt wurden. Und so lange das nicht der Fall war - d.h., so lange die möglichen Schwierigkeiten bei der Anwendung des Begriffs nicht wirklich wurden -, hat man kein Recht, den Aristotelischen Geschwindigkeitsbegriff verworren zu nennen. ... Seine Fehler lagen nicht in seiner logischen Widersprüchlichkeit, sondern darin, daß er nicht der gesamten Feinstruktur der Welt entsprach, auf die er passen sollte. Daher bedeutete die Erkenntnis seiner Schwächen notwendigerweise nicht nur eine Erkenntnis über den Begriff, sondern auch über die Welt." (Kuhn, 1976, S. 344-45) Die Paradoxie, die Galilei in seinem Gedankenexperiment erzeugte, stammte also nicht allein aus dem Aristotelischen Begriffsapparat, "sondern aus den Schwierigkeiten bei dem Versuch, diesen auf eine bisher unverarbeitete Erfahrung anzuwenden. Die Natur und nicht bloß die Logik war für die scheinbare Verwirrung verantwortlich." (Kuhn 1976, S. 348)

Kuhn benötigt also, um den Mechanismus des Gedankenexperiments zu interpretieren, die Unterscheidung des , wie man mit Sneed sagen kann, Strukturkerns K und der Menge der intendierten Anwendungen I. Darüber hinaus aber ist es wesentlich, daß der Begriff, um den es sich handelt, wirklich ein theoretischer Begriff ist, d.h. durch bestimmte (operative) Beziehungen in den Strukturkern eingebettet ist. Kuhn drückt dies so aus, daß er sagt, der Aristotelische Geschwindigkeitsbegriff sei nicht einfach eine Definition gewesen, sondern habe physikalische Konsequenzen gehabt und teilweise als Naturgesetz fungiert. Die Widersprüche in dem Galileischen Gedankenexperiment kommen also dadurch zustande, daß die Menge der intendierten Anwendungen der Theorie erweitert bzw. verändert wird. Dadurch werden auf der Ebene des Strukturkerns bestimmte Umstrukturierungen erforderlich. Es ist klar, daß eine solche Ausweitung der Menge der intendierten Anwendungen in vielen Fällen höchst voraussetzungsvoll sein kann, also z.B. erst zustande kommt durch eine Veränderung des Wissenschaftsbegriffs bzw. der gesamten Weltanschauung oder durch Veränderungen im technologischen bzw. sozialen Bereich. Man bedenke z.B., wie folgenreich für die Entwicklung der neuzeitlichen Wissenschaft die Entstehung der Vorstellung gewesen ist, in der Himmelsmechanik könnten dieselben Gesetzmäßigkeiten gelten wie für die mechanischen Phänomene auf der Erde.

Es sei noch auf einen zweiten Punkt hingewiesen: Kuhn meint, ein Gedankenexperiment könne nur dann funktionieren, wenn es dem Wissenschaftler Informationen verschaffe, "... die gleichzeitig verfügbar und doch irgendwie unzugänglich sind." (Kuhn 1976, S. 348)
Und in der Tat muß der Begriff der Erfahrung bzw. des Empirischen wesentlich breiter aufgefaßt werden, als dies geschieht, wenn man Anwendung, Erfahrung, Empirie auf die systematischen Methoden empirischer Messung reduziert. Dieses Problem kann und soll hier nicht weiter expliziert werden, es soll nur als heuristische Bestätigung dafür dienen, daß in den bisherigen Ausführungen der Begriff der Anwendungen mathematischer Theorien in einem sehr breiten Sinne verstanden und kein Unterschied zwischen innermathematischen und außermathematischen Anwendungen gemacht wurde. Allerdings soll damit keiner Verkürzung in der Auffassung des Gegenstandsbezugs das Wort geredet werden, bei der der Gegenstandsbezug überhaupt nur noch in einem ideellen Sinne verstanden würde.

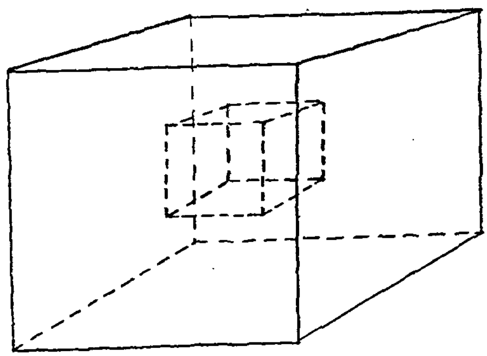
In einer inzwischen berühmt gewordenen Fallstudie "Proofs and Refutations", ursprünglich abgedruckt in "The British Journal for the Philosophy of Science, 14, 1963-64", hier zitiert nach (Lakatos 1976), hat I. Lakatos den Versuch gemacht, Beweisen darzustellen als eine Einheit von "Beweis und Beweisanalyse". Die folgende Wiedergabe konzentriert sich nur auf einige für den gegenwärtigen Zusammenhang wichtige Punkte und kann in keinem Sinne für sich in Anspruch nehmen, dem ganzen Aspektreichtum der Fallstudie, sowohl in wissenschaftstheoretischer als auch in mathematikgeschichtlicher Hinsicht, gerecht zu werden.

Die Fallstudie enthält in Form eines fingierten Dialogs zwischen einem Lehrer und seinen Schülern eine Darstellung der Geschichte der Versuche, die "Eulersche Formel" $V - E + F = 2$ (V = Anzahl der Ecken, E = Anzahl der Kanten, F = Anzahl der Flächen), die Euler ursprünglich ganz global als gültig für Polyeder behauptet hatte, zu beweisen. Der Dialog wird eröffnet mit einem Beweis dieser Vermutung, den der Lehrer gibt und der historisch von Cauchy stammt. Dabei wird in einem ersten Schritt das Polyeder als hohl angenommen und nach Entfernen einer Fläche das verbleibende Netzwerk von Ecken und Kanten auf die Ebene abgebildet. Man kann sich das Polyeder z.B. aus Gummi bestehend vorstellen und es nach Entfernen einer Seitenfläche durch Dehnen und Strecken flach in eine Ebene legen. Die Flächen und Kanten werden dadurch zwar deformiert, dennoch ändert sich an ihrer Anzahl nichts, d.h. man hat $V-E+F=1$ für das Bild des Polyeders in der Ebene, da man lediglich eine Fläche, die positiv zählt, entfernt hat. Im zweiten Schritt wird das erhaltene Netzwerk trianguliert, indem man, wo immer es möglich ist, Punkte durch Diagonalen verbindet. Auch durch diese Operation ändert sich die Gesamtsumme nicht, da mit jeder hinzukommenden Diagonalen (Kante) auch eine Fläche hinzukommt. Wenn das Netzwerk vollständig trianguliert ist, dann werden im dritten Schritt alle Dreiecke eines nach dem anderen entfernt. Ein Dreieck zu entfernen bedeutet entweder eine Kante wegzunehmen, dann verschwinden eine Fläche und eine Kante, oder aber zwei Kanten und eine Ecke wegzunehmen, wodurch eine Fläche, zwei Kanten und eine Ecke verlorengehen. Bei beiden Möglichkeiten ändert sich die Gesamtsumme ebenfalls nicht. Man kommt so zu einem letzten verbleibenden Dreieck, für das $V-E+F=1$ gilt. Damit ist die Vermutung bewiesen.

Der Lehrer nennt diesen Beweis ein "Gedankenexperiment" bzw. ein "Quasi-Experiment", das die Funktion habe, die ursprüngliche Vermutung in Teilvermutungen oder Lemmata zu zerlegen und sie auf diese Weise in einen möglicherweise ganz entfernt liegenden Wissensbestand einzubetten.

Die Schüler kritisieren nun den vom Lehrer vorgelegten Beweis, indem sie bezweifeln, daß die durch den Beweis implizierten Operationen ausführbar sind. Z.B. führen sie die Möglichkeit an, daß bei dem Prozeß des Entfernens von Dreiecken man am Schluß nicht bei einem einzelnen Dreieck, sondern bei zwei unverbundenen Dreiecken ankommen könne, für die dann $V - E + F = 2$ wäre. Als Reaktion darauf ist der Lehrer gezwungen, seine Teilbehauptungen bzw. Lemmata so zu verschärfen, daß die ursprünglich sehr plausibel aussehenden Teilbehauptungen einen sehr problematischen Charakter erhalten. So muß er z.B. zur Rechtfertigung des dritten Schrittes die Behauptung aussprechen, daß es immer möglich ist, die Dreiecke in dem triangulierten Netzwerk so zu numerieren, daß $V - E + F$ sich nicht ändert, wenn man die Dreiecke in der durch die Numerierung angegebenen Ordnung entfernt.

Als nächstes wird von den Schülern ein Gegenbeispiel (siehe Abbildung) präsentiert, das die Aussage des Satzes selbst falsifiziert, für das also $V - E + F \neq 2$ ist.



Da der Satz also offenbar falsch ist, ist es am nächstliegenden und natürlichsten, die Versuche, ihn zu beweisen, aufzugeben (*method of surrender*). Ein Schüler allerdings wendet ein, daß es nicht notwendig sei aufzugeben, da das angegebene "Gegenbeispiel" gar keines sei; es handele sich dabei nämlich um gar kein Polyeder. Der Schüler entwickelt eine Definition des Begriffs "Polyeder", die das angegebene Beispiel ausschließt. In einer längeren Diskussion werden nun immer neue Gegenbeispiele präsentiert und immer neue, den ursprünglichen Polyederbegriff "präzisierende" Definitionen gegeben, die den Zweck haben, die jeweils präsentierten Gegenbeispiele, die den Satz falsifizieren würden, auszuschließen. Lakatos bezeichnet dies als die Methode des "monster-barring". Es ist klar, daß mit zunehmender Zeit diese Methode als immer unbefriedigender von den Diskutierenden empfunden wird, da der ursprünglich so einfach erscheinende Polyederbegriff immer komplizierter wird und der Sinn der jeweiligen Definitionen sich immer mehr davon entfernt, auszudrücken, was man anschaulich unter Polyedern versteht, und immer mehr von dem Gesichtspunkt geleitet wird, die Gegenbeispiele des Satzes auszuschließen.

Um der Fülle der Gegenbeispiele Herr zu werden, entwickelt man jetzt andere Methoden. Der erste Vorschlag geht von der Überlegung aus, daß, wie sich an den Gegenbeispielen gezeigt habe, jeder Satz nicht universell gültig sei, sondern nur einen gewissen beschränkten Gültigkeitsbereich habe. Insofern sei das Rationelle an der Methode des "monster-barring" darin gelegen, daß man versucht habe, durch die jeweiligen Definitionen den Gültigkeitsbereich des Satzes abzustecken. Man solle daher nicht, wie bei der Methode des "monster-barring", den Begriff des Polyeders immer restriktiver fassen, sondern stattdessen einen Satz formulieren, der die Ausnahmen für die Gültigkeit des Satzes explizit formuliert. (Methode des "exception barring"). Demgemäß wird der Satz vorgeschlagen: Für alle Polyeder, die keine "Höhlen" und keine "Tunnel" haben, gilt $V - E + F = 2$. (Ein Polyeder mit einer "Höhle" entspricht dem eben abgebildeten Polyeder, das von zwei ineinandergeschachtelten Sphären begrenzt wird, ein Polyeder mit einem "Tunnel" ist ein Torus.)

Ein anderer Vorschlag (Methode des "monster-adjustment") besagt, man müsse die "Gegenbeispiele" nur "richtig auffassen", damit aus den "Gegenbeispielen" "Beispiele" des Satzes würden. Dieser Vorschlag läuft darauf hinaus, in die jeweiligen Gegenbeispiele in geeigneter Weise noch Kanten und Ecken einzufügen, bis der Satz stimmt.

Die Methode des Ausnahme-Ausschließens wird nun kritisiert, da sie immer nur ad hoc auf Gegenbeispiele reagieren könne.

Bei jedem auftauchenden Gegenbeispiel müsse durch die Angabe einer weiteren Ausnahme ein "strategischer Rückzug" angetreten werden. Auch die umgekehrte Methode, einen vermuteten absolut sicheren Bereich anzugeben (im vorliegenden Falle könnte man da z.B. an die Klasse der konvexen Polyeder denken) und diesen Bereich schrittweise auszudehnen, findet aufgrund ihres ad hoc-Charakters wenig Gegenliebe. Vor allem aber wird kritisiert, daß diese Methoden, den Satz zu retten, nichts mehr mit dem Beweis zu tun hätten. Der Beweis sei völlig funktionslos geworden. Stattdessen schlägt der Lehrer ein methodisch geleitetes Vorgehen im Hinblick auf auftretende Gegenbeispiele vor, das systematisch von dem gegebenen Beweis Gebrauch macht. Diese Methode besteht darin, bei einem auftretenden Gegenbeispiel zu fragen, welches Lemma des Beweises durch das Gegenbeispiel verletzt werde. Hat man dies herausgefunden, so läßt sich das Lemma selber zu einer Bedingung des Satzes formulieren. Z.B. ist ein "Polyeder mit einem Tunnel", also ein Polyeder vom Geschlecht 1, nicht nur ein Gegenbeispiel zur Eulerschen Vermutung, sondern es verletzt auch das erste Lemma des oben angegebenen Beweises; nach Entfernen einer Fläche läßt es sich nicht in der angegebenen Weise auf die Ebene abbilden. Der Lehrer verwandelt nun dieses Lemma in eine Voraussetzung des Satzes, er behauptet also jetzt den Satz: Die Euler-Charakteristik eines einfachen Polyeders ist 2. Dabei soll ein einfaches Polyeder per definitionem ein Polyeder sein, das sich in der angegebenen Weise auf die Ebene abbilden läßt.

Lakatos nennt nun diese Methode, den Beweis als Hilfsmittel zu benutzen, um die ursprüngliche Vermutung zu verbessern und in ihrem Geltungsbereich genauer zu bestimmen, "*Beweisanalyse*" (*proof-analysis*). Durch diese Methode gelangt man von einer naiven Vermutung zu einem "beweiserzeugten Theorem". Da der gesamte dargestellte Prozeß durch ein Zusammenspiel von Beweis und Gegenbeispielen zustandegekommen ist, möchte Lakatos ganz allgemein von der *Methode des "Beweises und der Widerlegungen"* (*method of proofs and refutations*) sprechen. "Our method improves by proving. This intrinsic unity between the 'logic of discovery' and the 'logic of justification' is the most important aspect of the method of lemma-incorporation." (Lakatos 1976, Seite 37)

Nun kann es vorkommen, daß Gegenbeispiele auftreten, die zwar den Satz falsifizieren, für die sich aber im Beweis selbst kein Lemma finden läßt, das für das Beispiel nicht gültig wäre. Dahinter steht allgemein das Problem der Explizitheit eines Beweises. Wenn man auf ein solches Beispiel stößt, ist man zu einer größeren Explizierung des Beweises gezwungen bzw. man muß nach entsprechenden "stillschweigenden Voraussetzungen", wie es im 19. Jahrhundert ausgedrückt wurde, suchen. Lakatos sagt, daß dies das Problem der Strenge eines Beweises sei.

Bevor nun einige interpretierende Überlegungen zu der Lakatosschen Fallstudie angeschlossen werden, sei vorweg darauf verwiesen, daß die hier gegebene Interpretation sich nicht völlig mit der Auffassung von Lakatos deckt. Die wesentliche Abweichung von seinem Selbstverständnis wird weiter unten explizit behandelt werden.

Zunächst ist festzustellen, daß die Dynamik des Dialogs zu Beginn der Lakatosschen Fallstudie getragen wird vom Auftreten immer neuer Widersprüche. Genau wie bei Kuhns Analyse des Galileischen Gedankenexperiments sind diese Widersprüche aber nicht die Folge davon, daß mit der Eulerschen Vermutung über die Beziehung zwischen Flächen, Kanten und Ecken bei Polyedern in einem logischen Sinne etwas nicht stimmt, sondern diese Widersprüche treten auf als Folge des Versuchs, die Eulersche Polyeder-Formel auf konkrete Fälle anzuwenden. Auch in diesem Falle kann man also sagen, daß die Schwierigkeiten mit der Eulerschen Polyeder-Formel durchaus nicht daraus resultierten, daß diese in keiner möglichen Welt gilt; in der Welt Cauchys z.B. war die Formel in vollem Umfang gültig, er hat im Traum nicht an die Gegenbeispiele gedacht, die sich im Laufe des 19. Jahrhunderts ergeben sollten. Als erste zusammenfassende Charakterisierung der Gedankenentwicklung in der ersten Hälfte der Lakatosschen Fallstudie (dies ist der Teil, der oben zusammenfassend dargestellt wurde), kann man daher sagen, daß im Laufe des Dialogs zunehmend Möglichkeiten erarbeitet und erschlossen werden, mit Widersprüchen und Begrenzungen der Eulerschen Polyeder-Formel umzugehen. Das daraus resultierende Begriffs- und Beziehungsgefüge wird immer flexibler und anwendungsfähiger. Die Bewegung verläuft von einem Extrem, nämlich von der Einstellung, angesichts eines Widerspruchs die Waffen zu strecken und aufzugeben (method of surrender), bis zum anderen Extrem, der Ausarbeitung einer Methode, mit beliebigen Gegenbeispielen und Widersprüchen umzugehen.

Fragt man sich, wodurch denn dieses Potential des zunehmenden Anwendungsbezugs, der zunehmenden Flexibilität gegenüber Widersprüchen und Begrenzungen erreicht wird, so beobachtet man als zweites, daß die bei Lakatos dargestellte Gedankenentwicklung auf der methodologischen Ebene charakterisiert werden kann als zunehmende Überwindung und Zurückdrängung eines "empiristischen Begriffsverständnisses". Die Vorstellung, daß ein Begriff Objekte abbildet, wird aufgegeben zugunsten der Vorstellung, daß ein Begriff Beziehungen zwischen Objekten wiedergibt. Zu Beginn der Diskussion versucht man, der Schwierigkeiten dadurch Herr zu werden, daß man nach der eigentlichen, wahren Begriffsbedeutung des Begriffs Polyeder fragt (method of monster-barring), um von daher zu entscheiden, ob der Eulersche Polyeder-Satz richtig oder falsch ist. Im zweiten Schritt (method of exception-barring) versteht man bereits, daß man sich so "nihilistisch" zu dem Eulerschen Satz nicht verhalten kann, man versucht den Gültigkeitsbereich des Satzes festzustellen, also die Teilklasse der Polyeder zu finden, für die der Satz richtig ist. Hier hat also bereits die operative Struktur, die der Satz darstellt, ein gewisses Gewicht gegenüber dem empiristischen Moment erlangt. Die letzte und entscheidende Stufe ist erreicht, als man mit der Methode der "proof -

analysis" eine allgemeine Methode entwickelt, mit jedem möglichen noch auftauchendem Gegenbeispiel zu verfahren. Dieser letzte Schritt wird nun dadurch möglich, daß man die Tatsache, *daß der Polyeder-Begriff durch den Beweis zum Element des Zeichenkontextes geworden ist, selbst wieder ausnutzt bei der Herstellung des Anwendungsbezugs.* Auch dies ist analog zur Kuhnschen Diskussion des Gedankenexperiments zu sehen, nämlich zu seiner Betonung der Tatsache, daß Begriffe auch so etwas wie Gesetzeswissens implizieren.

Während also einerseits bei einem empiristischen Verständnis nur gefragt wird, wofür ist "Polyeder" der Name, während man also nur auf die Bezeichnungsfunktion blickt, wird auf der anderen Seite beim Zusammenspiel von "proof" und "proof-analysis" der gesamte operative Kontext zu einem differenzierten Umgehen mit Widersprüchen und Begrenzungen genutzt. Will man dies zusammenfassen, so läßt sich sagen (und das ist unsere 3. Feststellung), daß der entscheidende Fortschritt im Laufe des Dialogs darin besteht, *daß der Polyeder-Begriff als Variable aufgefaßt wird.* Dabei ist der Begriff der Variablen eben als jene Einheit syntaktischer und semantischer Aspekte zu verstehen, als der er in Kapitel III.3. charakterisiert wurde. Lakatos selbst spricht in Abschnitt 8 "concept-formation" von Begriffen als "theoretical terms" (Lakatos 1976, S.84 u.99), was unsere Interpretation nur bestätigt. Er sagt, es finde ein Übergang von einer naiven zu einer theoretischen Klassifikation statt, von einer naiven Vermutung zu einer beweis-erzeugten. Daß mit diesem Übergang zum Verständnis des Begriffs als Variable eine Verstärkung des Anwendungsbezugs stattfindet und keine Minderung, geht aus folgendem Zitat hervor:

"As far as naive classification is concerned, nominalists are close to the truth when claiming that the only thing that polyhedra have in common is their name. But after a few centuries of proofs and refutations, as the theory of polyhedra develops, and theoretical classification replaces naive classification, the balance changes in favour of the realist. The problem of universals ought to be reconsidered in view of the fact that, as knowledge grows, languages change." (Lakatos 1976, S.92)

Versucht man, die Begriffe "proof" und "proof analysis" in der Sneedschen Terminologie zu beschreiben, dann läßt sich sagen, daß der Beweis eine Bewegung darstellt, die ausgehend von einer Menge intendierter Anwendungen eine symbolische Repräsentation dieser Anwendungen herstellt mit dem Ziel bzw. der Folge der Ausweitung des Anwendungsbezugs, sei es durch Anschluß an bereits analysierte Anwendungssituationen (Zurückführung auf altes Wissen), sei es durch Schaffung einer Verallgemeinerung, die die Einbeziehung neuer Anwendungen ermöglicht. Hiernach liegt also das Ziel eines Beweises in der Ausweitung des Anwendungsbezugs einer Theorie. Umgekehrt geht die Beweisanalyse von einer bestimmten gegebenen Symbolisierung aus und versucht, diese Symbolisierung auf neue Anwendungssituationen anzuwenden; das Ergebnis eines solchen Anwendungsversuchs liegt in der Erzeugung weiterer Differenzierungen und Spezifizierungen auf der Ebene der symbolischen Darstellung. Insgesamt erhält man also, wenn man versucht, dies schematisch abzubilden, einen Kreisprozeß:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, bend right] & I \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}$$

Anders formuliert, kann man auch für "proof" den Prozeß

$$I \longrightarrow K \dashrightarrow I'$$

notieren, wobei der gestrichelte Pfeil die Bewegung bezeichnet, die eher implizit bleibt und die regulierend auf die Bewegung $I \longrightarrow K$ wirkt. Für "proof-analysis" erhält man entsprechend

$$K \longrightarrow I \dashrightarrow K' .$$

Die Einheit von "proof" und "proof-analysis" bringt also die

Einheit von Begründung und Anwendung, von Theorie und Empirie zum Ausdruck. Daher scheint es legitim, das, *was bei Lakatos als "method of proofs and refutations" bezeichnet wird, zu übersetzen als Einheit von Theorie und Empirie.* Die "refutations" in der Lakatosschen Fallstudie sind zu sehen als Ausdruck des Gegenstandsbezugs mathematischer Theorien.

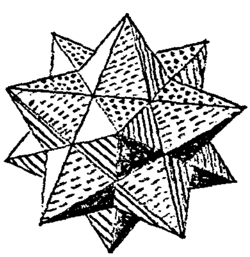
Um nun auf die eingangs dieses Abschnitts formulierte Frage nach den unterschiedlichen Bewertungen von "Beweis" einerseits und "Gedankenexperiment" andererseits zurückzukommen, so ist diese unterschiedliche Beurteilung darauf zurückzuführen, daß bei der Bewegung $I \longrightarrow K$ nicht gesehen wird, daß es sich dabei um einen Prozeß der Verallgemeinerung, also der Einbeziehung neuer Anwendungen handelt ($I \longrightarrow K$ wird gefolgt von $K \dashrightarrow I'$), d.h. man sieht nicht, daß die Reduktionsleistung, die im Beweis stattfindet, eine Reduktion auf *Variable*, also auf theoretische Objekte mit offenem Anwendungsbezug, darstellt.

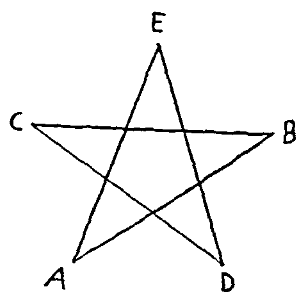
Allerdings ist fraglich, ob die obige Feststellung der Einheit von Theorie und Empirie in der Mathematik tatsächlich im Sinne von Lakatos ist. Mit dieser Frage kommen wir zur Herausarbeitung einiger unserer Meinung nach problematischer Punkte in seiner Auffassung. Um dies darzustellen, sei zunächst auf einen posthum veröffentlichten Aufsatz von Lakatos "A Renaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics?" (Lakatos 1976b) eingegangen. In diesem Aufsatz stellt Lakatos seine Auffassung dar, daß die Mathematik als eine "quasi-empirische" Theorie verstanden werden müsse. Zunächst zitiert er Aussagen einer ganzen Reihe prominenter Mathematiker, Logiker und Grundlagenforscher des 20. Jahrhunderts, die zeigen, daß die modernen grundlagentheoretischen Arbeiten immer deutlicher zu der Schlußfolgerung drängen, daß die Mathematik keine Wissenschaft ewiger, absoluter, selbst-evidenter Wahrheiten sei, sondern daß die Wahrheitsproblematik in der Mathematik analog zu der in der Physik zu sehen sei. Bei diesen Zitaten handelt es sich um eine durchaus eindrucksvolle Zusammenstellung; zitiert werden die folgenden Autoren: Russell, Fraenkel, Carnap (für den eine gewisse Änderung seiner Ansichten von 1930 bis 1958 festgestellt wird), Curry, Quine, Rosser, Church, Gödel, Weyl, von Neumann, Bernays, Mostowski und Kalmar. Bei seiner Interpretation dieser Aussagen unterscheidet Lakatos zwei grundlegende Paradigmen wissenschaftlicher Theorien: das euklidische Paradigma und das quasi-empirische. Bei euklidischen Theorien fände eine"Wahrheitsinjektion" an der Spitze der Theorie statt durch die Annahme feststehender selbst-evidenter Wahrheiten, deren Wahrheitscharakter sich aufgrund der deduktiven Struktur der Theorie auf alle Aussagen weiter vererbe. Auf der anderen Seite stehen die empirischen bzw. quasi-empirischen Theorien, bei denen eine "Wahrheitsinjektion" nur auf dem Grund der Theorie stattfinde. Ein Wahrheitsfluß könne aber in einer deduktiven Theorie nicht von unten nach oben erfolgen, deshalb müsse man eher von einer "Retransmission of falsity" sprechen. Nach Meinung von Lakatos muß man aus der grundlagentheoretischen Diskussion dieses Jahrhunderts die Schlußfolgerung ziehen, daß die Mathematik keine Wissenschaft vom euklidischen Typ sei. "However, foundational studies unexpectedly led to the conclusion that an euclidian reorganization of mathematics as a whole may be impossible; that at least the richest mathematical theories were, like scientific theories, quasi-empirical. Euclidianism suffered defeat in it's very stronghold." (Lakatos 1976b, S.2o7) Die Schlußfolgerung, daß dann, wenn es keine festen ein für allemal gegebenen Grundlagen der Mathematik mehr gibt, es unabweisbar geworden ist, auch der Mathematik empirischen Charakter zuzusprechen, scheint auch mir unabweisbar zu sein. Diese Schlußfolgerung wurde in Kapitel III gezogen. Lakatos allerdings benutzt vorsichtiger den Begriff "quasi-empirisch". Er möchte sich im Hinblick auf das damit gestellte erkenntnistheoretische Problem nicht festlegen, da er die großen damit verbundenen Schwierigkeiten deutlich sieht. Allerdings muß er, wenn er den "quasi-empirischen" Charakter der Mathematik deutlich machen will, die Frage stellen, was denn eigentlich die möglichen Falsifikatoren mathematischer Theorien seien. Er gibt darauf die Antwort, daß es für die Mathematik so etwas wie "heuristische Falsifikatoren" gebe, deren falsifizierende Potenz aus einer Differenz zwischen formalisierter und informeller Theorie resultiere. "But if we insist that a formal theory should be the formalization of some informal theory, then a formal theory may be said to be 'refuted' if one of its theorems is negated by the corresponding theorem of the informal theory. One could call such an informal theorem a heuristic falsifier of the formal theory." (Lakatos 1976b, S.214)

Die Differenz zwischen der vorsichtigen Ausdrucksweise von Lakatos, wenn er vom quasi-empirischen Charakter der Mathematik spricht, und der hier verwendeten Terminologie, die der Mathematik direkt empirischen Charakter zuspricht, sollte nicht als zu groß bewertet werden. Denn auch die Charakterisierung der Mathematik als einer Wissenschaft mit empirischem Charakter, wie sie hier vorgenommen wird, bedeutet natürlich noch nicht den Anspruch, die komplizierten Probleme der Entwicklung einer Konzeption mathematischer Bedeutung bzw. der genauen Rekonstruktion des empirischen Charakters der Mathematik gelöst zu haben. Viel bedeutsamer erscheint eine andere Differenz. Der vorliegende Aufsatz vermittelt noch viel deutlicher als die Lakatossche Fallstudie "Proofs and Refutations" den Eindruck, daß Lakatos das Problem der Begründung mathematischer Theorien in seiner Bedeutsamkeit unterschätzt. Dies scheint aus seiner sehr absoluten Entgegensetzung von Theorien euklidischen Typs im Unterschied zu quasi-empirischen Theorien hervorzugehen. Lakatos scheint in der widersprüchlichen Beziehung von Wissensentwicklung und Begründung einseitig auf das Entwicklungsmoment zu setzen und die Relevanz des Begründungsproblems als nicht sehr hoch einzuschätzen. Ihm scheint die Bedeutung des Begründungsproblems in starkem Maße mit einem veralteten Wissenschaftsbegriff zusammenzuhängen. Das aber führt dazu, daß die Triebkraft der Wissenschaftsentwicklung gleichsam in einer bestimmten methodologischen, progressiven, kritischen Einstellung der Wissenschaftler gesehen wird, die er einer unkritischen, konservativen, zu Stagnation führenden Haltung gegenüberstellt. "The development of a quasi-empirical theory is very different. It starts with problems followed by daring solutions, than by severe tests, refutations. The vehicle of progress is bold speculations, criticism, controversy between rival theories, problem-shifts. Attention is always focused on the obscure borders. The slogans are growth and permanent revolution, not foundations and accumulation of eternal truth." (Lakatos 1976b, S.2o7)

Ähnliche Äußerungen finden sich auch in "Proofs and Refutations" (vgl. Lakatos 1976, S.5 und 99). Wir kommen damit zur Betrachtung von "Proofs and Refutations" zurück. Will man die Schwierigkeiten, die man mit diesem Text hat, zusammenfassen, dann läßt sich vielleicht sagen, daß das größte Problem darin liegt, ihn wirklich als *historischen* Text zu verstehen. Weil die letzte Triebkraft der Entwicklung des Dialogs auf unterschiedliche methodische Haltungen der beteiligten Personen zurückgeführt wird (Dogmatiker vs. Skeptiker), kann man gar nicht verstehen, wie historisch voraussetzungsvoll die einzelnen methodologischen Schritte und Entscheidungen sind, die im Laufe des Dialogs vorgeführt werden. Dieser Einwand aber, wenn er richtig ist, schmälert erheblich die Nutzbarkeit des Lakatosschen Textes für didaktische Zwecke. Denn abzuleitende didaktische Überlegungen würden dann wieder nur auf die alte Empfehlung hinauslaufen, die Schüler müßten zu "kritischem Denken" erzogen werden. Der vorgebrachte Einwand sei an einigen Beispielen belegt.

Die Verkürzung bzw. Nichtberücksichtigung der begründenden, sozial-kommunikativen Momente wird etwa klar, wenn man sich die Diskussion bei Lakatos zum Problem des Monster-barring ansieht. Dort wird nicht bzw. ungenügend herausgearbeitet, wie außerordentlich voraussetzungsvoll die Tatsache ist, daß ein Beispiel überhaupt zu einem Gegenbeispiel der Theorie wird, d.h. daß ein Beispiel überhaupt als möglicher Anwendungsfall der Theorie akzeptiert wird. Umgekehrt kann man auch sagen, daß nicht herausgearbeitet wird, daß die Strategie des Monster-barring selber durchaus rational ist und nicht nur Folge einer unkritischen Geisteshaltung. Wenn etwa auf Seite 16/17 das kleine regelmäßige Sterndodekaeder als Gegenbeispiel zur Eulerschen Vermutung präsentiert wird, dann ist es durchaus nicht selbstverständlich, ein solches Gebilde als Anwendungsfall eines Satzes, der sich auf Polyeder bezieht, zu akzeptieren. Das kleine regelmäßige Sternpolyeder setzt sich zusammen aus 12 regelmäßigen Sternfünfecken. Dabei enthalten die Sternfünfecke "Selbstüberschneidungen", d.h. Schnittpunkte von Kanten, die nicht als Ecken des Polygons gezählt werden. Diese regelmäßigen Sternfünfecke sind dann so zusammengesetzt (siehe Abbildung), daß sich ihre Flächen gegenseitig durch-





dringen. Lakatos selber zitiert ein Argument von Poinsot, der sich dafür einsetzt, die Sternpolygone als Polygone zulassen. "... all these distinctions (between "ordinary" and "star"-polygons) are more apparent than real, and they completely disappear in the analytical treatment, in which the various species of polygons are quite inseparable. To the edge of a regular polygon there corresponds an equation with real roots, which simultaneously yields the edges of all the regular polygons of the same order. Thus it is not possible to obtain the edges of a regular inscribed heptagon, without at the same time finding edges of heptagons of the second and third species. Conversely, given the edge of a regular heptagon, one may determine the radius of a circle in which it can be inscribed, but in so doing, one will find three different circles corresponding to the three species of heptagon which may be constructed on the given edge; similarly for other polygons. Thus we are justified in giving the name 'polygon' to these new starred figures." (Poinsot, Mémoire sur les Polygones et les Polyèdres, zitiert nach Lakatos 1976, S.18). Poinsot argumentiert also für die Zulassung von Sternpolygonen aufgrund von Überlegungen, die mit dem Problem der Kreisteilung zusammenhängen. Er will, daß jeder primitiven Einheitswurzel ein Polygon entspricht, dessen Seite die Einheitswurzel ist. Dies ist aber in starkem Maße ein Argument, daß mit Begründungsproblemen, Problemen der Systematisierung und einem allgemeinen Wissenschaftsverständnis zusammenhängt. Das, was als Bereich der intendierten Anwendungen der Theorie angesehen wird, wird weitgehend auch durch den begründenden, sozial-kommunikativen Kontext bestimmt. Ganz allgemein kann man diesen Einwand bereits geltend machen, wenn man sich fragt, woher denn die vielen Gegenbeispiele, die im Laufe des Dialogs präsentiert werden, stammen, wenn nicht auch aus Versuchen der Systematisierung und Vereinheitlichung heraus.

Auch die Tatsache, daß man die Methode des "monster-barring" schließlich als unbefriedigend zurückweist, ist nur auf dem Hintergrund eines bestimmten allgemeinen Wissenschaftsverständnisses und im Zusammenhang mit der vorliegenden konkreten Situation zu verstehen. Wenn es z.B. nur "wenige" Gegenbeispiele gibt, kann die Methode des "monster-barring" durchaus eine sinnvolle Strategie sein und braucht nicht als Folge einer unkritischen Geisteshaltung verstanden zu werden.

Interessant ist auch die bei Lakatos erwähnte Tatsache, daß derselbe Poinsot, der 1810 sich noch für die Einbeziehung von Sternpolyedern und Sternpolygonen in die Theorie ausgesprochen hatte, im Jahre 1858 im Hinblick auf die Sternpolyeder Anhänger der Strategie des "monster-adjustment" wird. 1858 argumentiere Poinsot, daß die Euler-Formel auch für die regelmäßigen Sternpolyeder gültig sei, denn man könne die ganze Theorie der Polyeder auf die Theorie der Polyeder mit triangulierten Flächen zurückführen. Lakatos meint, man könne dies eigentlich nur als Ergebnis einer "Gehirnwäsche" verstehen; Poinsot ist für Lakatos vom Lager der Kritisch-Denkenden in dasjenige der Dogmatiker übergegangen. Dabei ist tatsächlich die Struktur des Arguments, mit dem Poinsot 1858 das Sternpolyeder als Beispiel der Euler-Formel begründet, genau dieselbe, wie die, mit der er 1810 begründet hatte, daß es sich um ein Gegenbeispiel handelt. In beiden Fällen entwickelt er ein Argument, das zur Systematisierung und Vereinheitlichung eines Theorienbereiches führen soll. Und daß man aus Gründen der Vereinheitlichung und Systematisierung auch dort Hilfslinien einführt, wo sie vom ursprünglichen Verständnis her gar nicht vorhanden sind, ist ja für die Mathematik kein unbekanntes Phänomen.

Die Verkürzung des sozial-kommunikativen, begründenden Moments, die Nicht-Berücksichtigung der relativen Eigenständigkeit der Beziehung S - T (vgl. Kapitel III.2.) ist, dies sei noch einmal betont, meiner Meinung nach die größte Schwierigkeit bei der Benutzung der Lakatosschen Konzeption für die Ausarbeitung didaktischer Konsequenzen.

Faktisch ist der sozial-kommunikative Bereich im Text von Lakatos natürlich von der größten Bedeutung, Lakatos hat seinen Text ja in Dialogform geschrieben. Das führt aber gerade dazu, daß die reale Bedeutsamkeit dieses Moments für die gesamte Entwicklung nicht in das Blickfeld des Lesers gerät. So bleibt dieser letztlich auf die Auskunft verwiesen, daß die Entwicklung vorangetrieben wird durch "Spekulation" und "Kritik".

Die dargestellten Überlegungen zum Verhältnis von Theorie und Empirie in der Mathematik, die sich aus der Fallstudie von Lakatos ergeben haben, möchte ich in der *These* zusammenfassen, *daß "Verallgemeinern" in der Mathematik aufgefaßt werden sollte als "Einführen von Variablen"*. Damit wird zum Ausdruck gebracht, daß mathematische Verallgemeinerungen sowohl in Abhängigkeit von der Entwicklung der symbolischen Ebene, des Strukturkerns K, als auch abhängig von der Menge I der intendierten Anwendungen, also dem semantischen Bezug, erfolgen. Verallgemeinerungen sind eine Funktion sowohl des kommunikativen als auch des gegenständlichen Kontextes. Gleichzeitig kommt im Variablenbegriff das dynamische Moment der Wissenschaft deutlich zum Ausdruck. Syntaktische und semantische Seite der Variablen sind gleichsam nie im Gleichgewicht: Sei es, daß die zu einer symbolischen Darstellung möglichen Anwendungen viel umfassender sind, als es bei Schaffung der symbolischen Darstellung gesehen wurde, sei es, daß die Menge der intendierten Anwendungen zu Veränderungen auf der symbolischen Ebene zwingt. Bei der Darstellung didaktischer Probleme des Beweisens wurde bereits herausgearbeitet, daß es die Variablenvorstellung ist, die dazu verhilft, mit dem Empirismus in der Geometrie fertig zu werden. Auf der anderen Seite muß hier festgehalten werden, daß die formalistischen Tendenzen, die sich insbesondere in der Algebra einstellen und die dazu führen, daß Beweisen einerseits und Heuristik andererseits als völlig verschiedene Tätigkeiten aufgefaßt werden, daher rühren, daß ein einseitig syntaktisches Verständnis des Variablenbegriffs in den Vordergrund gestellt wird. Im Unterschied zu dieser Entgegensetzung von Beweis und Heuristik wurde in der Entstehungsphase der neuzeitlichen Mathematik die Algebra als die Methode zur Schaffung neuen Wissens, als eine universelle Methode der Entdeckung verstanden. Der damit angedeutete explorative Charakter des Variablenbegriffs kommt allerdings nur zum Tragen, wenn man Variablen in der Einheit von Syntax und Semantik, von Strukturkern K und Menge I der intendierten Anwendungen sieht.

In diesem Zusammenhang sei auf einen aufschlußreichen Aufsatz von W. Hartkopf verwiesen, in dem dieser versucht, einen allgemeinen und systematischen Aufbau der Heuristik zu skizzieren. (Vgl. Hartkopf 1964) Als Ausgangspunkt für seine Systematik wählt er dabei die Analogie des allgemeinen Problembegriffs mit dem Begriff der Variablen in der Mathematik. "Es kann nun gezeigt werden, daß alle solche Fragen im weiteren Sinne einen gleich-

artigen *allgemeinen logischen Gehalt* aufweisen, der es erlaubt, jede Frage, wenn sie überhaupt scharf und bestimmt formulierbar ist, als ein System von Sätzen mit Leerstellen zu formulieren, die zu wahren Urteilen (bzw. zu Sätzen, die im Rahmen der betreffenden Theorie, aus der die Frage erwachsen ist, gelten) ausgeführt werden sollen. Derartige Sätze mit wohlbestimmten Leerstellen sind in ihrem logischen Gehalt den mathematischen Gleichungen vergleichbar. ... Wie hier die *Nullstellen einer mathematischen Funktion* gesucht sind, so bei der Frage, die *Wahrheitsstellen der entsprechenden Satzfunktion.* Diese Übereinstimmung des allgemein logischen Gehaltes von Fragen und Bestimmungsgleichungen, die nichts anderes bedeutet, als daß die mathematischen Gleichungen letztlich nichts anderes als Fragen im weiteren Sinne sind, bei denen nur der Fragegegenstand x eine Zahl und der Fragesachverhalt ein algebraischer Zusammenhang von Zahlen ist, ist aus dem mathematischen Anfangsunterricht her bekannt und wird dort bei den sogenannten 'eingekleideten Gleichungen', die in mathematische Bestimmungsgleichungen zu übersetzen sind, ausgenutzt. Hat man sich dies einmal klargemacht, so ist es einleuchtend, *daß jede scharf und bestimmt formulierbare Frage im weiteren Sinne in der Form eines mehr oder weniger umfangreichen Systems von Satzgleichungen mit einer oder mehr Leerstellen aufgeschrieben werden kann."* (Hartkopf 1964, Seite 18/19)
Der Autor führt dann im weiteren aus, daß jedes Problem auf der einen Seite eine, wie er sich ausdrückt, "methodologische Begleitproblematik" beinhalte, also die Frage nach den Methoden der Auflösung des Problems, und andererseits beinhalte eine Frage auch immer eine "gnoseologische" (oder erkenntnistheoretische) Begleitproblematik, da jedes Problem und jede Frage einen gewissen Setzungs- oder Behauptungscharakter habe. Dies bedeutet aber gerade die Verallgemeinerung der beiden korrespondierenden Momente der syntaktischen und der Gegenstandsebene.

In der Reformdiskussion der Schulmathematik der 60-iger Jahre ist durchaus die Wichtigkeit des Variablenbegriffs gesehen worden. Dies hat sich z.B. in der oben erwähnten Einführung der

Begriffe Term, Aussage und Aussageform in die Lehrbücher als Vorbereitung der Gleichungslehre niedergeschlagen. Grundsätzlich ist damit ein Fortschritt erzielt worden, der in seiner Bedeutsamkeit für die Schulmathematik hoch einzuschätzen ist. Allerdings wird dieser Fortschritt durch eine zu enge und zu formalistische Interpretation des Variablenkonzepts vielfach geschmälert. So hat sich in der Diskussion der 60er Jahre die Auffassung von "Variable" als "Leerstelle ", also die Einsetzungsauffassung, weitgehend durchgesetzt. (vgl. die MU-Hefte 1/61 und 5/64) Das Paradoxe daran ist, daß die Diskussion eigentlich eher um semantische Probleme ging: Für die Gleichungslehre wurde der Begriff der Lösungsmenge eingeführt, und es wurde durchgesetzt, daß für die Variablen generell ihr jeweiliger Laufbereich im Unterricht explizit gemacht wurde. Ein in der Einsetzungsauffassung besonders weitgehender Beitrag ist der von Lauter "Aufbau der elementaren Gleichungslehre nach logischen und mengentheoretischen Gesichtspunkten" (Lauter 1964). Er schreibt:"Der in der formalen Logik allgemein verwendete Terminus 'Variable' ist insofern problematisch, als es sicherlich kein im eigentlichen Sinne 'veränderliches' mathematisches Objekt gibt.

[Anmerkung: In den Gehirnen vieler Schüler wird durch leichtfertigen Umgang mit Wendungen wie 'veränderliche Größe'; 'wenn x sich so ändert, ändert y sich so' ; 'wenn der Punkt P die Kurve durchläuft' (wie soll *ein* Punkt laufen?!) viel unnötige Verwirrung gestiftet; ähnliches gilt auch von dem vielgepriesenen sog. 'funktionalen Denken', in dem sich sehr verschiedenartige Elemente mathematischer und nicht-mathematischer Art (u.a. eine sehr unklare und auch antiquierte Vorstellung vom Funktionsbegriff) in vielfach recht unkontrollierter Weise mischen, so daß die Frage berechtigt erscheint, ob nicht vielleicht mit der Propagierung dieses sog. 'funktionalen Denkens' und den daraus resultierenden Mißverständnissen in den letzten Jahrzehnten mehr Unklarheit als Klarheit in den Mathematikunterricht an unseren höheren Schulen hineingetragen worden ist.] " (Lauter 1964, S.116) Charakteristisch für die formalistische Zuspitzung, die hier zum Ausdruck kommt, ist die Bemerkung Lauters, strenggenommen seien in den Grundmengen, die die Einsetzungsinstanzen für Zahlenvariable darstellen, nur *Zahlzeichen* und keine Zahlen enthalten. Es sei aber im Unterricht schwierig, diese Unterscheidung konsequent durchzuhalten; deshalb müsse man auch eine nachlässigere Sprechweise zulassen. (Lauter 1964, S.65) Allerdings muß man dann fragen, wodurch sich die Mengen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ dann noch unterscheiden, außer durch ein paar Symbole wie e, π, $\sqrt{2}$, ... Selbst wenn man die Aussage Lauters dahingehend abschwächt, daß es prinzipiell möglich sein soll, für jede reelle Zahl ein Zeichen zu finden, ist doch immer noch zu fragen, ob denn die Bedingungen zur Wahrheitsprüfung einer Aussage, im Hinblick auf die Zahlzeichen oder die Zahlen formuliert sind (vgl. III.3. oben).

Dennoch sollen die Verdienste dieser Diskussion insgesamt nicht geschmälert werden; sie bestehen, wie gesagt, in dem Versuch, bestimmte semantische Probleme zu klären und von einem einseitig operativ-kalkülmäßigen Verständnis der Algebra wegzukommen. Diese Bemühungen sollten fortgesetzt werden.

IV.3. Zum Begründungsbegriff

"Beweisen heißt, nach logischen Gesetzen aus früheren Sätzen folgern." (Lietzmann 1953, S.1o1) Dieses klassische Verständnis vom Begründen als Zurückführen des neuen Wissens auf das alte Wissen führt, wie im Laufe dieser Arbeit ausführlich dargelegt, immer dann zu Problemen und Schwierigkeiten, wenn das Wissen gleichzeitig unter der Entwicklungsperspektive gesehen wird. Bei der Diskussion der Konzeption von Sneed war dieses widersprüchliche Verhältnis von Entwicklung und Begründung im Zusammenhang mit dem "Problem der theoretischen Terme", also der gegenseitigen zirkelhaften Bestimmung von Theorie und Begriff, behandelt worden. Im III. Kapitel,insbesondere im

Zusammenhang mit der Problematik der imprädikativen Definitionen, und bei der Betrachtung der didaktischen Probleme des Beweisens hatte sich herausgestellt, daß dieses Verständnis von Begründung unter pädagogisch-didaktischen Gesichtspunkten deshalb nicht aufrecht erhalten werden kann, weil es gerade Aufgabe der Didaktik ist, sich mit dem Problem der bewußten Gestaltung von Wissensentwicklungsprozessen zu befassen. Sowohl die Schwierigkeit, daß eine fehlende Axiomatik für die Schule immer die Notwendigkeit aufwirft, beim Beweisen auf empirische bzw. intuitive Argumente zurückzugreifen, als auch das Problem, wie denn den Schülern überhaupt die Notwendigkeit für einen Beweis einsichtig gemacht werden könne, hatten zu der Folgerung geführt, daß man sich eigentlich immer auf einen allgemeineren Standpunkt stellen müsse als derjenige, der von den Schülern gerade erreicht sei, um diese Probleme zu lösen. Gerade das letztere Problem, den Schülern die Beweisbedürftigkeit eines Satzes zu vermitteln, verweist darauf, daß dies nur geschehen kann unter Vorgriff auf allgemeinere Gesichtspunkte, von denen her die Möglichkeit eines operativen Umgangs mit den in Frage stehenden mathematischen Sachverhalten bzw. idealisierten Objekten einsichtig wird.

Es geht also darum, auch für die Didaktik eine Konzeption von "Begründen" auszuarbeiten, die mit einer Entwicklungsperspektive verträglich ist bzw. von Entwicklungsgesichtspunkten strukturiert wird. Im II. Kapitel war bereits herausgestellt worden, daß dann, wenn man die Entwicklungsperspektive des Wissens ernst nimmt, "Begründen" immer auch verstanden werden muß als "Begründen von der Zukunft", vom entwickelteren, reicheren System her. Ebenso war im III. Kapitel herausgearbeitet worden, daß auch in der mathematischen Grundlagenforschung diese Sichtweise sich aufdrängt: Widerspruchsfreiheitsbeweise im Hilbertschen, finitistischen Sinne können z.B. nur innerhalb eines reicheren, entwickelteren, aussagekräftigeren Systems geführt werden als dasjenige, dessen Widerspruchsfreiheit gezeigt werden soll. Der Wahrheitsbegriff für ein System kann nur in einem entwickelteren Metasystem widerspruchsfrei definiert werden.

Diese Überlegungen legen es nahe, auch für die Didaktik vorläufig die folgende These zu formulieren (diese These wird im weiteren noch präzisiert werden): Um die mit dem Beweisen verbundenen didaktischen Probleme zu lösen, um "Begründen" unter die Perspektive der Wissensentwicklung zu stellen, ist es notwendig, systematisch Techniken zu entwickeln, *wie im Unterricht der Standpunkt des allgemeineren, entwickelteren, zukünftigen Systems zur Geltung gebracht werden kann.* Diese These ist in dieser Allgemeinheit auch für die Didaktik bzw. die Pädagogik nicht neu, obwohl in diesen Disziplinen die gegenteilige These sicher dominiert. Normalerweise geht man in der Didaktik den Weg vom Einfachen zum Komplizierten, vom empirisch-anschaulich Gegebenen zum Abstrakten; auch die meisten Stufentheorien der Denkentwicklung sind von diesem Paradigma des Begründens als Zurückführen des neuen Wissens auf das alte Wissen durchdrungen. Dennoch gibt es, wie gesagt, auch die gegenteilige Strömung, die besonders in der Curriculumreform der 60er Jahre wirksam geworden ist.

Bei Z.P. Dienes wird diese These z.B. als Theorie vom "tiefen Ende" bezeichnet. Er schreibt:"Man hat entdeckt, daß es wenigstens in einigen Fällen weit besser ist, die neue Struktur auf einem schwierigeren Niveau einzuführen; dabei verläßt man sich darauf, daß das Kind die weniger komplexen Teile innerhalb der Gesamtstruktur selbst entdeckt. In Ermangelung eines besseren Namens wurde dieser Gedanke die Theorie vom 'tiefen Ende' genannt. 'Man stößt das Kind am tiefen Ende in den Teich' dieser Redeweise entstammt die Metapher. ... Diese Art des Vorgehens steht im Widerspruch zu den herkömmlichen Methoden, welche forderten, daß neue Strukturen auf einfache Weise eingeführt werden sollten und daß ihre komplexeren Gestalten schrittweise aufgebaut werden sollten. Wir fordern nicht, hiervon in allen Fällen abzuweichen; doch es gibt einige Fälle, in denen sich die Theorie vom 'tiefen Ende' als passend erwiesen hat." (Dienes/Golding 1970, S.47)

Der wohl bekannteste und einflußreichste Vertreter der Position, Wissen von allgemeinsten Begriffen her zu vermitteln, ist J.S. Bruner gewesen, der mit seiner Konzeption der "Struktur der Disziplin" maßgeblichen Einfluß auf die Curriculumreform genommen hat (vgl. vor allem Bruner 1960). Bruners Überlegungen stellten eine maßgebliche theoretische Fundierung für den Einfluß, den der "Bourbakismus" zeitweilig auf die Curriculumreform genommen hat, dar. Die eingangs dieses Kapitels referierte Position von Dieudonnê steht in diesem Zusammenhang.

Auch der Piagetsche "Strukturalismus" betont das Allgemeine gegenüber dem Besonderen, das Komplexe gegenüber dem Einfachen als primär. In einem Aufsatz über den Strukturbegriff sieht Piaget gerade in dieser Umkehrung der Denkbewegung, die klassisch immer vom Einfachen zum Komplizierten ging, das Kennzeichen der modernen Mathematik gegenüber der Euklidischen Tradition. Die Herausbildung des Gruppenbegriffs sei das erste Modell für das strukturalistische Denken im Sinne einer Bewegung vom Komplizierten zum Einfachen gewesen. (Piaget 1972, S.36)

Im allgemeineren Kontext der Philosophie der Mathematik wird die Tatsache, daß die allgemeinere Systemebene jeweils auch ein die Wissensentwicklung vorantreibendes Moment darstellt, in der Form reflektiert, daß man etwa von der "antizipatorischen Funktion der Sprache" (vgl. z.B. Kuyk 1977, S.142) bzw. des Symbolismus spricht. Ernst Cassirer definiert sogar den Menschen als "animal symbolicum" und macht damit das Symbol zur Grundlage einer Philosophie der menschlichen Kultur. "Der Mensch lebt in einem symbolischen und nicht mehr in einem bloß natürlichen Universum. Sprache, Mythos, Kunst und Religion sind Teile dieses Universums. Sie sind die bunten Fäden, die das Symbolnetz weben, das verknotete Gewebe menschlicher Erfahrung. Jeder menschliche Fortschritt im Denken und in der Erfahrung verfeinert und verstärkt dieses Netz. Der Mensch hat nicht wie das Tier einen unmittelbaren Bezug zur Wirklichkeit; er kann ihr gleichsam nicht ins Angesicht blicken. Die unberührte Wirklichkeit scheint in dem Maße, in dem das Symbol-Denken und -Handeln des Menschen reifer wird, sich ihm zu entziehen. Statt mit den Dingen selbst umzugehen, unterhält sich der Mensch in gewissem Sinne dauernd mit sich selbst." (Cassirer 1960 , S.39)

Die hier angesprochenen Konzeptionen, deren Gemeinsamkeit darin liegt, daß sie alle die Bedeutsamkeit allgemeiner Orientierungen für die Probleme der Wissensentwicklung bzw. der Wirklichkeitsangeignung herausarbeiten, sind nun in der einen oder anderen Hinsicht als "reduktionistisch" anzusprechen. Allerdings kann diese Kritik hier nicht detailliert erörtert werden. Die Auffassungen Bruners sind in einem Aufsatz von M. Otte "Zum Verhältnis von Wissenschaft und Unterricht" (Otte 1974) untersucht worden; dort wird gezeigt, daß die Brunersche Konzeption der "Struktur der Disziplin" letztlich auf die Annahme fester, ein für allemal gegebener Grundlagen des Wissens hinausläuft. Damit aber sei die Problematik der Diskontinuität in der Wissensentwicklung, wie Bruner übrigens selber sieht, letztlich nicht mehr rational analysierbar; darüber hinaus mache es die Invarianz der Grundlagen in der Brunerschen Konzeption unmöglich, die Differenzen zwischen einer akademisch betriebenen Wissenschaftsdisziplin und derselben Disziplin als Schulfach in hinreichendem Maße zu berücksichtigen, weil eine solche Vorstellung die subjektive Seite der Erkenntnis ausblende. Auf der anderen Seite reduziert die Auffassung Cassirers vom Menschen als "animal symbolicum" das Allgemeine auf den sozial-kommunikativen Kontext und negiert den Gegenstandsbezug von Verallgemeinerungen.
Auch mit dieser Vorstellung werden letztlich Diskontinuitäten in der Wissensentwicklung aus der Betrachtung ausgeschlossen. Zusammenfassend kann man sagen, daß die hier erwähnten Vorstellungen von der Rolle des Allgemeinen darauf hinauslaufen, das Problem des Verhältnisses von Text und Kontext in der Begründung

zu eliminieren anstatt Möglichkeiten zu eröffnen, mit diesem Problem umzugehen.

Wenn man nun die Überlegungen des Kapitels II im Hinblick auf das Begründungsproblem ernst nimmt, dann ergibt sich als erste Präzisierung zu der obigen Aussage, daß Begründen immer auch heißt, Begründen von der Zukunft her, *daß die Zukunft der Theorie in der Menge der intendierten Anwendungen liegt.* Anders gesagt: Man kann Begründen auffassen als die Zurückführung des Wissens auf theoretische Terme bzw. auf Variablen. Der entscheidende Punkt liegt dann darin, daß die Variable bzw. der theoretische Term nicht als reine Leerstelle gesehen werden kann, wenn man die Begründung verstehen will, sondern die Variable muß zusammen mit einem gewissen intendierten Laufbereich aufgefaßt und verstanden werden. *Damit ist zunächst einmal die zentrale Bedeutung des Gegenstandsbezugs für das Begründungsproblem behauptet.* Andererseits aber muß strikt berücksichtigt werden, daß der Laufbereich des theoretischen Terms bzw. der Variablen prinzipiell offen und indefinit ist. *Das aber hat zur Konsequenz, daß der Gegenstandsbezug nicht gleichsam ein für allemal in die Theorie eingeführt werden kann, sondern selber erst virulent und merkbar wird in der Theorieentwicklung.* Die Menge der intendierten Anwendungen einer Theorie variiert mit der Entwicklung dieser Theorie. Gegenstandsbezug einer Theorie und Theorieentwicklung lassen sich nicht trennen. Der Gegenstandsbezug wird erst sichtbar und enthüllt sich erst im Laufe der Theorieentwicklung, genauso wie umgekehrt (das zeigt Kapitel II) Theorieentwicklung selber nicht begriffen werden kann, ohne den Gegenstandsbezug zu berücksichtigen.

Erinnern wir uns an die obige Interpretation der Fallstudie von Lakatos. Dort war "proof" beschrieben worden als eine Bewegung, die ausgeht von einer Menge I intendierter Anwendungen, welche realisiert bzw. dargestellt wird in einem Strukturkern K (einer symbolischen Repräsentation) mit dem Ziel bzw. der Folge der Verallgemeinerung, d.h. der Ausweitung der Menge der intendierten Anwendungen. Dies genau ist gemeint, wenn hier Begründen aufgefaßt wird als "Zurückführen auf Variablen bzw. auf theoretische Terme". Aufgrund des offenen Laufbereichs der theoretischen Terme bzw. Variablen läuft dies gerade auf eine Verallgemeinerung, d.h. auf eine "Begründung von der Zukunft her" hinaus.

Kommen wir noch einmal auf die oben erwähnte Konzeption von der "antizipatorischen Funktion der Symbole" zurück. Diese Vorstellung hat durchaus ihren rationalen Kern; es ist ja bereits mehrfach im Laufe der Arbeit darauf hingewiesen worden, in wie starkem Maße die Mathematik der frühen Neuzeit die Algebra als eine Methode der Entdeckung gewürdigt hat. Nach der hier vorgeschlagenen Konzeption allerdings wird dieser explorative Charakter des Symbolismus erst verständlich, wenn man den Variablenbegriff sich tatsächlich als Einheit von syntaktischer Struktur und Menge der intendierten Anwendungen vorstellt. Es ist ein empiristisches Mißverständnis, wenn aus der Tatsache der Variabilität der Menge der intendierten Anwendungen geschlußfolgert wird, daß es zulässig sei, den Variablenbegriff auf seine syntaktische Dimension, die als das einzig Invariante und objektiv (bzw. intersubjektiv) Gegebene erscheint, zu reduzieren.

Im folgenden soll nun versucht werden, anhand einiger Beispiele aus dem Bereich der Schulmathematik, die Relevanz und Aussagekraft der hier dargestellten Überlegungen zu demonstrieren. Als erstes Beispiel sei dabei auf den Zahlbegriff und auf bestimmte Vorschläge seiner Behandlung in der Schulmathematik eingegangen.

In seinem Buch "Arten der Verallgemeinerung im Unterricht" beschreibt W. Dawydow (vgl. dazu auch Freudenthal 1974 sowie Otte 1976) die Konzeption eines Kurses zur Einführung des Zahlbegriffs, der in einigen Experimentierschulen in der Sowjet-Union ausprobiert wurde. Ausgangspunkt bei der Erarbeitung dieses Kurses ist die folgende Überlegung gewesen:"Bei der Erarbeitung eines Unterrichtsabschnitts der Mathematik gehen wir davon aus, daß das Ziel dieses gesamten Schulfaches von der ersten bis zur zehnten Klasse heute darin besteht, bei den Schülern eine ausführliche und vollwertige Konzeption der *realen* Zahl zu schaffen, der der Begriff der *Größe* zugrunde liegt. Die (natürlichen und realen) Zahlen sind eine Sonderform dieses allgemeineren mathematischen Objekts. Kann man das Kind nicht *zuerst* mit diesem *allgemeinen* Objekt vertraut machen und erst dann seine besonderen Erscheinungsformen ableiten?" (Dawydow 1977, S.388) Diese Überlegung habe sich in einigen Experimenten als realisierbar erwiesen. Dabei würden die Kinder im ersten halben Jahr der ersten Klasse überhaupt nicht auf Zahlen stoßen. "In dieser ganzen Zeit eignen sie sich Informationen über die Größe an: Sie bestimmen sie in physikalischen Objekten und lernen ihre Grundeigenschaften kennen.

Konkret sieht das folgendermaßen aus: Bei der Beschäftigung mit realen Dingen und der Bestimmung ihrer Größenparameter (Gewicht und Volumen, Fläche und Länge usw.) lernen die Kinder, diese Dinge mit der einen oder anderen Größe zu vergleichen, indem sie deren Gleichheit oder Ungleichheit (größer - kleiner) bestimmen. Diese Beziehungen werden mit Zeichen beschrieben. Dann gehen die Kinder dazu über, die Ergebnisse des Vergleichs mit einer *Buchstaben-Formel* aufzuschreiben, d.h., sie gehen zur *allgemeinen* Form der Darstellung einer Beziehung beliebiger Größen über. Hier gibt es zwei Stadien. Zuerst lernen die Kinder, die Größenbeziehung (Gewicht, Lautstärke, Volumen usw.) durch die Korrelation von Linien auf dem Papier darzustellen. Wenn der Lehrer dazu auffordert, das Verhältnis von Lasten auf einer Waage darzustellen, wird links eine kurze Linie gezeichnet und rechts eine lange, da links die Last geringer war als rechts. Von dieser Form des Fixierens erfolgt der Übergang zum Buchstaben, da das Kind jetzt bereits deutlich verstanden hat, daß bei einem Vergleich von *beliebigen* Größen nur ihre *Beziehungen* herausgelöst und berücksichtigt werden. Die Objekte selbst kann man mit Buchstaben bezeichnen, und das Ergebnis des Vergleichs kann, indem man die Buchstaben mit einem Zeichen verbindet, als Formel geschrieben werden ($a = b$, $a > b$, $a < b$)." (a.a.O., S.388/89) Der Größenbegriff wird in dem Experiment also von Anfang an gemäß einer dualen Bedeutungsvorstellung eingeführt: Er wird als Element eines syntaktischen, symbolischen Kontextes aufgefaßt und bezogen auf eine Menge intendierter Anwendungen.

Wenn man die Beziehungen der Gleichheit bzw. der Ungleichheit in reiner Form, nämlich als Formel, erarbeitet und hingeschrieben habe, dann könne man zur Betrachtung ihrer eigentlichen Eigenschaften, wie ihrer Umkehrbarkeit bzw. Nicht-Umkehrbarkeit, ihrer Transitivität usw. übergehen. In der folgenden Etappe werden die Kinder dann im Schreiben der Veränderung der Größen mit Hilfe der Zeichen + und - unterrichtet. Zunächst zeigt man den Kindern: Wenn $a = b$ ist, dann ist $a+c > b$, und zweitens zeigt man ihnen, daß man Gleichheit erst wieder erhält, wenn auf beiden Seiten dieselbe Größe dazu gefügt wird, also wenn $a = b$ ist, dann ist auch $a + c = b + c$. Auf die Erarbeitung der Eigenschaft der Monotonie wird ein besonderes Gewicht gelegt. In der nächsten Phase geht man von der Analyse der Größenänderung zur Einführung einfacher Gleichungen über. Wenn $a < b$ ist, dann kann man von dieser Ungleichung zur Gleichung $a + x = b$ übergehen. (Wenn $a > b$ ist, dann wird geschrieben $a - x = b$.) "Nach unserem Lehrplan erlernen die Schüler im Laufe des November (des 3. Monats des ersten Schuljahres) Methoden zum Übergang von der Ungleichung zur Gleichung, d.h., sie lernen Gleichungen aufzustellen und zu schreiben (wenn $a < b$ ist, so ist $a + x = b$ oder $a = b - x$) und dann x als Funktion anderer Elemente der Formel zu bestimmen. Allmählich eignen sich die Kinder verschiedenartige Methoden zum Aufstellen von Gleichungen mit einer Unbekannten und deren Bestimmung nach vorgegebenen Bedingungen an." (a.a.O. S.390)

In einem weiteren Schritt werden die Kommutativität und die Assoziativität der Addition behandelt.

"In unserem Unterricht führt der Lehrer, gestützt auf die vorliegenden Kenntnisse der Kinder, die Zahl als einen besonderen

Fall der Darstellung des *allgemeinen Größenverhältnisses* ein, wobei eine von ihnen als Maß zur Berechnung der anderen genommen wird. Die Zahl wird nach der allgemeinen Formel

$$\frac{A}{C} = N$$

erhalten, wobei N - eine beliebige Zahl, A - ein beliebiges, als Größe dargestelltes Objekt und C - ein beliebiges Maß ist. Ändert man das Maß, kann man somit die Zahl ändern, die sich auf dasselbe Objekt bezieht. Die Zahl hängt von der Beziehung ab, die im *Ausgangsverfahren* ihrer Bildung enthalten ist. Dieses Verfahren muß man kennen und diese Beziehung bei der Arbeit mit dem Zahlbegriff (sowohl der natürlichen als auch der realen Zahl) einschätzen können.Dies eigneten sich die nach dem Versuchsprogramm unterrichteten Kinder gut an." (a.a.O. S.391/392)

Das an diesem Experiment vielleicht verblüffendste (jedenfalls in den Augen einer Didaktik, die tiefgehend von empiristischen Vorstellungen geprägt ist) ist die Tatsache, daß hier die Kinder im ersten Schuljahr mit Buchstaben umzugehen und zu operieren lernen. Hier soll allerdings ein anderer Gesichtspunkt hervorgehoben werden. Zu Beginn seiner Darstellung spricht Dawydow davon, daß der Zahlbegriff durch die Voranstellung des Allgemeinen angeeignet werden solle. Worin besteht dieses Allgemeine? Es ist der Größenbegriff, den sich die Kinder durch konkrete Operationen mit physikalischen Objekten und ihren Grundeigenschaften aneignen. Bei der Beschäftigung mit realen Dingen lernen die Kinder die Größenparameter wie Gewicht, Volumen, Fläche, Länge zu bestimmen und diese Parameter mit anderen Größen zu vergleichen. Das bedeutet aber, daß die Dawydowsche Konzeption,das Allgemeine geltend zu machen, darauf hinausläuft, eine Vorstellung von der Menge der intendierten Anwendungen durch konkrete Tätigkeit bei den Kindern zu erzeugen. Von allem Anfang an wird dies aber nicht in einem empiristischen Sinne getan, sondern durch geeignete Symbolisierungen (gerade Linien bzw. Buchstaben) wird die Menge der intendierten Anwendungen auf einen operativen, symbolischen Kontext bezogen. Greift man auf die in dieser Arbeit entwickelte und benutzte Terminologie zurück, dann bedeutet dies gerade, daß in der von Dawydow beschriebenen Konzeption der Zahlbegriff als Variable aufgefaßt wird. Wie gesagt, bedeutet einen Begriff als Variable auffassen, ihn sowohl als Element eines syntaktischen Kontextes als auch bezogen auf eine Menge intendierter Anwendungen darzustellen. Den Standpunkt des allgemeineren, entwickelteren, zukünftigen Systems zur Geltung zu bringen, realisiert sich gerade in der Aktualisierung des Anwendungsbezugs. Gleichzeitig muß betont werden, daß die von den Kindern in dem beschriebenen Experiment vorgetragenen Operationen mit Größengleichungen und -ungleichungen als regelrechte Beweise anzusehen sind. Für den Bereich der intendierten Anwendungen werden Aussagen in voller Allgemeingültigkeit aufgestellt und begründet.

Probleme der Zahlbegriffsentwicklung (insbesondere der Bruchrechnung) werden auch in dem für die zweite Phase der Lehrerausbildung bestimmten Ausbildungsmaterial"Das Lehrbuchproblem als Gegenstand der Lehrerausbildung" (Keitel/Otte 1977) behandelt. Als Ausgangspunkt der Diskussion dient dort die Meinung Freudenthals, der sagt, daß alle didaktischen Versuche, das Bruchrechnen im Rahmen des elementaren Rechnens zu verbessern, alle Bemühungen der "Veranschaulichung" der Bruchrechnung umso gefährlicher seien, je besser sie seien; denn diese Bemühungen würden die wirkliche Lösung hinausschieben, und diese Lösung heiße für ihn, Freudenthal, sie müsse von der Algebra her erfolgen. Ein Bruch wie $\frac{7}{3}$ entspringe dem Wunsch nach Lösbarkeit der Gleichung $3x = 7$.

Zu dieser einseitig auf den operativen, symbolischen Kontext orientierten Auffassung Freudenthals merken die Autoren der Materialeinheit an, daß es auch notwendig sei, um sich auf dieser operativ-mathematischen Ebene bewegen zu können, daß man die in den Gleichungen fixierten Begriffe und Begriffsinhalte von den entsprechenden Zeichenmodellen unterscheiden können müsse. "Beispielsweise sind 1+2+3+4+5+6 = ?, 1+2+...+6=? und $\sum_{i=1}^{6} i = ?$ Zeichenmodelle von Aufgaben, die unter mathematischem Gesichtspunkt bedeutungsgleich, aber unter psychologischen Gesichtspunkten nicht bedeutungsgleich sind, da sie vom Subjekt in einer unterschiedlichen Weise wahrgenommen werden und damit auch den Prozeß des Aufgabenlösens in unterschiedlicher Weise bestimmen." (Keitel/Otte 1977, S.III-12) Daraus aber folge die Notwendigkeit, daß man für den Umgang mit derartigen Gleichungen von auch subjektiv bedeutungsvollen inhaltlichen Grundlagen und Zielen ausgehen müsse. Aufgrund dieser Überlegungen machen die Autoren zur Arbeit mit dem Zahlbegriff in der Schulmathematik den folgenden Vorschlag.

Sie gehen auch, wie Freudenthal, von der Gleichung der Form

$$a = x \cdot b$$

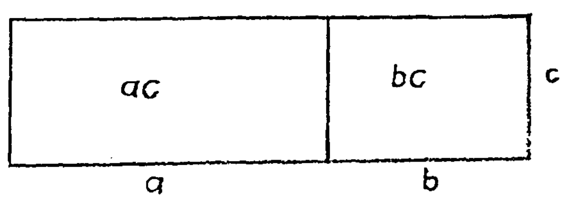
aus, wobei hier aber a und b empirische Größen darstellen sollen und b als Maß für a aufzufassen sei; x sei dann die zugehörige Maßzahl. Das Zeichenmodell, die Gleichung, werde also nicht algebraisch-operativ, sondern als Bezeichnung eines Größenverhältnisses aufgefaßt; man erhalte so eine *Begründung* des Zahlbegriffs.

"Beides sind nun zunächst grundverschiedene Dinge. Im Rahmen des 'algebraischen Prinzips' erhalten wir nur die rationalen Zahlen, und sogar, wenn wir algebraische Gleichungen beliebigen Grades zulassen, gewinnen wir auf diese Art und Weise immer nur die algebraischen Zahlen und niemals eine transzendente reelle Zahl. In der anderen Auffassung unseres Gleichungsmodells läßt sich jedoch jede beliebige reelle Zahl charakterisieren (nach Dedekind). Die transzendente Zahl π erhalten wir beispielsweise, wenn in der obigen Gleichung für a und b die Länge des Umfanges bzw. des Durchmessers eines beliebigen Kreises eingesetzt wird. Selbst für die algebraischen reellen Zahlen erhält man im allgemeinen je nach Auffassung unterschiedliche Gleichungsmodelle. Die Quadratwurzel aus 2 erhalten wir einmal aus der Gleichung a = x·b, indem für a, b die Länge der Diagonale eines Quadrats bzw. die Seitenlänge desselben Quadrats eingesetzt wird. Nach dem algebraischen Prinzip muß jedoch die Bestimmungsgleichung x·x = 2 zugrunde gelegt werden. Der Satz des Pythagoras ergibt dabei, daß es sich in beiden Fällen um die gleiche Zahl handelt." (a.a.O. S. III-13)

Die Autoren legen dann dar, wie das vorliegende Gleichungsmodell auch den mathematisch-operativen Umgang mit Größen bzw. Zahlen begründe. "Gleichzeitig legt das Modell aber auch den Übergang vom Operieren mit 'benannten Zahlen' zum reinen algebraischen Operieren nahe, weil man in bestimmten Zusammenhängen - man denke etwa an die Darstellung einer ökonomischen Wertgleichung - verdeutlichen kann, daß dieses Zeichenmodell eigentlich tatsächlich das abstrakte Größenverhältnis x darstellt. Bedeuten a ein Paar Schuhe und b einen Anzug, so ist a = x·b nur noch beim Absehen von den empirischen Bezügen verständlich. Dieses Abstrahieren begründet gleichzeitig die Entfaltung des operativen Umgangs. ... Das Ausnützen der Möglichkeiten unseres Gleichungsmodells bedarf daher des Übergangs zu den abstrakten Größenverhältnissen, den Zahlen und Buchstaben. Die konkreten Größen legen also die Operationen nahe, die erst im Rahmen der Algebra und zusammen mit der Herausbildung des abstrakten Zahlbegriffs (als Größenverhältnis) wirklich zu entwickeln sind. Die zeichenmäßige Fixierung in dem Gleichungsmodell a = x·b ermöglicht beide Übergänge durch ihr gegenseitiges Zusammenwirken." (a.a.O., S.III-14)

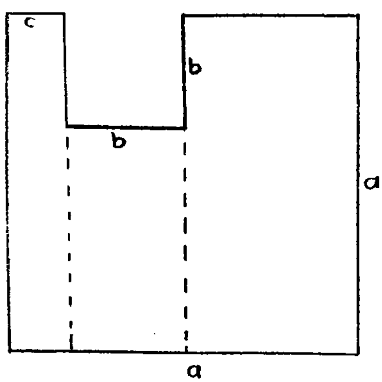
Diese Ausführungen sind wohl auf dem Hintergrund der in dieser Arbeit entwickelten Konzeption von selbst verständlich. Sie zeigen ein weiteres Mal, was gemeint ist, wenn man von der Auffassung des Zahlbegriffs als Variable spricht. Das letzte Zitat beleuchtet außerdem aber einen Punkt, der über die obige Darstellung der Zahlbegriffskonzeption bei Dawydow hinausgeht. Gemeint ist das Problem der Variabilität und Veränderlichkeit des Bereichs der intendierten Anwendungen bzw. die Tatsache, daß die symbolische Fixierung von Zusammenhängen, die auf einen bestimmten Bereich intendierter Anwendungen bezogen sind, vorgenommen werden mit dem Ziel bzw. der Folge der Ausweitung dieses Anwendungsbereichs. Es geht also um die oben in IV.2. bei der Analyse der Lakatos'schen Fallstudie darsgestellte Bewegung I ⟶ K ⟶ I'. Gleichzeitig wird in den zitierten Ausführungen auch gezeigt, daß man sich trotz der Variabilität des Bereichs I der intendierten Anwendungen nicht beliebig zu diesen Anwendungen verhalten darf; d.h. insbesondere, daß Verallgemeinerung eben nicht heißt, zunehmend vom Anwendungsbezug abzusehen, sondern umgekehrt bedeutet, den Bereich der intendierten Anwendungen tatsächlich zu erweitern.

Betrachten wir ein weiteres Beispiel zur Beziehung von Zahlbegriff, Algebra und Größenbegriff. In beinahe jedem Schulbuch werden algebraische Formeln des Typs a(b+c) = ab + ac durch Bilder der Gestalt



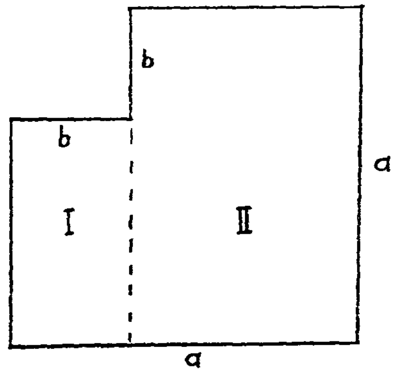
veranschaulicht. (Vgl. z.B. Vollrath 1974, Seite 23)

Aufgrund der hier entwickelten Überlegungen ist es aber wesentlich festzuhalten, daß es sich bei dieser sogenannten "Veranschaulichung" um einen vollgültigen *Beweis* der in Frage stehenden Formel für einen wichtigen Bereich intendierter Anwendungen, mit dem man es im Rahmen des Schulunterrichts zu tun hat, nämlich dem Bereich $\mathbb{R}^+$ der positiven reellen Zahlen, handelt. Auf diese Tatsache wird ganz richtig in einem Vortragsmanuskript von R. Stowasser hingewiesen. Er schreibt unter der Überschrift "Gleichwertigkeit von Termen - ohne Kalkül":"Hier sollte es zunächst einmal darum gehen, einen *Begriff* von der Gleichwertigkeit zweier Terme zu erhalten. Wie man diese Äquivalenz in 'undurchsichtigen' Fällen mit Hilfe eines Kalküls erhält, davon soll in VI die Rede sein. Die folgenden Stücke sollen daher die Einsicht in die Gleichwertigkeit ohne syntaktische Prozesse ermöglichen. Im Gegensatz zu mancher Vorgehensweise im Unterricht, wo formal gewonnene Formeln hinterher anschaulich gedeutet werden, soll hier die Bildung des *Begriffs* (der erst Anwendung und Transfer ermöglicht) 'gleichwertig' optimal gefördert werden. Ein durchaus begrüßenswerter Effekt wäre es natürlich, wenn die Schüler auch später unter Umständen sich auf unmittelbare Einsicht verließen und nicht in jedem Fall auf den Kalkül zurückgriffen." (Stowasser 1977, Seite 7/8) In dem Manuskript werden eine Fülle von Beispielen zu dieser Überlegung behandelt; hier sei nur das folgende angeführt. Aus der Abbildung

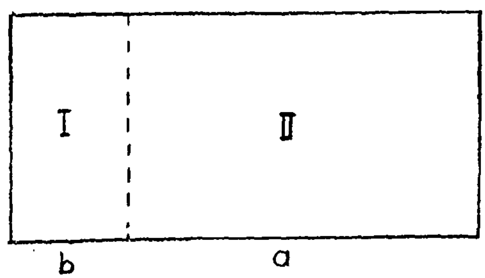


wird der folgende Ausdruck für den Flächeninhalt abgelesen: $ac + (a-b)b + (a-(b+c))a$. Andererseits sieht man, daß man denselben Flächeninhalt auch durch den Term $a^2 - b^2$ ausdrücken kann. c sei damit als Scheinvariable entlarvt.

Verschiebt man das "Loch", wie in der Abbildung gezeigt, so erhält man: $(a-b)b + (a-b)a$



Wenn man nun die Teile noch anders zusammenheftet, so erhält man: $(a-b)(a+b)$



(Vgl. Stowasser 1977, Seite 8)

Die Frage, ob man diesen Beweis der binomischen Formel im Unterricht tatsächlich führt, hängt natürlich von der Konzeption des gesamten Curriculums ab. Im vorliegenden Fall muß insbesondere gefragt werden, welchen Stellenwert negative Größen haben, wie man mit ihnen umgeht, wann man sie einführt etc. Auch der Gesichtspunkt der Möglichkeit, die Formel auf Exponenten > 2 zu verallgemeinern, spielt hier eine Rolle. Es soll hier nur festgehalten werden, daß der Unterschied zu einem "rein algebraischen" Beweis nicht der ist, daß letzterer im Unterschied zum vorliegenden Beweis "streng" bzw. "logisch" sei. "Strenge" ist nichts anderes als eine *Beziehung* zwischen syntaktischer und semantischer Ebene, zwischen Strukturkern K und Menge I der intendierten Anwendungen.

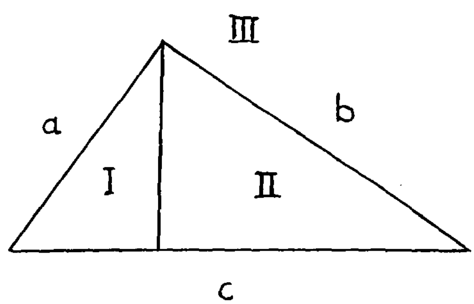
Um sich das hier diskutierte Prinzip des Anwendungs- bzw. Gegenstandsbezugs zu verdeutlichen, kann man an die diskutierte Formel: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ auch von der Frage her herangehen, unter welcher Sichtweise dieser Formel überhaupt eine Bedeutung zukommt und sie nicht zu einer leeren Tautologie entartet. Die Antwort, die nur unter Berücksichtigung des Gegenstandsbezugs bzw. semantischer Überlegungen gegeben werden kann (in der formalen Logik wird diese Frage als das Paradox der Identität diskutiert), ist im Keim in der folgenden Feststellung von A. Engel enthalten: "Fast allen mathematischen Formeln liegt eine einfache Idee zugrunde: Wenn die Elemente einer Menge auf zwei Arten gezählt werden, dann müssen die Ergebnisse übereinstimmen." (Engel 1973, Seite 37) Dies ist sowohl das Prinzip, derartige Formeln zu verstehen, als auch sie zu beweisen.

Aus den bisherigen Ausführungen dürfte hinreichend deutlich geworden sein, welche herausragende Bedeutung dem Größenbegriff für die Entwicklung des Zahlbegriffs zukommt, der Größenbegriff fungiert als Repräsentant der Menge der intendierten Anwendungen. Deshalb ist auch solchen Autoren, die die Zahlengerade als wichtigstes Veranschaulichungsmittel des Zahlbegriffs für den Schulunterricht festhalten, zuzu-

stimmen (vgl. z.B. Freudenthal 1973, Seite 194/95). Man sollte schärfer hinzufügen, daß man sich zu der gesellschaftlichen Errungenschaft, die in der Herausbildung des Größenbegriffs enthalten ist, nicht beliebig verhalten kann.
Die Physik z.B. kommt ohne diesen Begriff überhaupt nicht aus. Es ist eben nicht wahr, daß es, weil es sowieso nur auf die formale Struktur ankommt, gleichgültig ist, ob im Unterricht mit Bauklötzchen gespielt wird oder ob vom Größenbegriff ausgegangen wird. Es ist ein Mißverständnis, wenn in einer empiristischen Verkürzung beide Vorgehensweisen nur als zwei quasi gleichrangige "Methoden der Veranschaulichung" betrachtet werden. (Zu den großen Schwierigkeiten, die in dem Problem der Koordination der verschiedenen "Veranschaulichungen" liegen und die es verbieten, die verschiedenen "Veranschaulichungen" als gleichrangig zu betrachten, vgl.: Jahnke/ Steinbring/Vogel 1975)

Die führende Rolle des Gegenstandsbezugs, die hier an Beispielen aufgezeigt werden sollen, ist tief in die informelle Praxis mathematischen Arbeitens und Denkens integriert; man kann sie z.B. beobachten, wenn Mathematiker bei der Betrachtung komplizierter Ausdrücke etwa sagen: "Dieser Ausdruck hier ist doch eigentlich nichts anderes als eine Fläche, deswegen gilt dann doch auch ...". Ein Beispiel für dieses Phänomen ist ein berühmter Beweis des Satzes von Pythagoras, der beispielsweise bei Polya "Mathematik und plausibles Schließen I", Seite 38/39 dargestellt ist.

Unter Benutzung der aus der Abbildung ersichtlichen Bezeichnungen



setzt sich das rechtwinklige Dreieck III aus den beiden Teildreiecken I und II zusammen. Man hat also: F(III) = F(I) + F(II). Da es um die Bestimmung von Flächeninhalten geht, (und das ist die hier entscheidende Überlegung) kann ich einen Ansatz machen, der davon ausgeht, daß die jeweilige Hypotenuse quadratisch in den Ausdruck für den jeweiligen Flächeninhalt des jeweiligen Dreiecks eingeht, also $F(III) = \lambda \cdot c^2$ bzw. $F(I) = \lambda \cdot a^2$ bzw. $F(II) = \lambda \cdot b^2$. Also erhält man die Gleichung

$$\lambda c^2 = \lambda a^2 + \lambda b^2.$$

Die Tatsache, daß für alle Flächen derselbe Faktor λ genommen werden kann, folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke I,II und III; dieses ist leicht zu verifizieren. Der Satz des Pythagoras

$$c^2 = a^2 + b^2$$

folgt mittels Division durch λ .

Dieser sehr beeindruckende Beweis ergibt sich aus einem Ansatz, dem eine sehr allgemeine und gegenstandsbezogene Identifizierung der zugrundeliegenden Problemklasse (Flächeninhalte, die es nahelegen, daß die Dreiecksseiten quadratisch eingehen) zugrundeliegt. Bei Polya übrigens wird dieser Beweis im Kapitel "Verallgemeinerung, Spezialisierung, Analogie" als zentrales Beispiel für den heuristischen Charakter dieser Operationen angeführt. In der Tat lassen sich die drei Operationen Verallgemeinerung, Spezialisierung, Analogiebildung als Operationen auf der Menge der intendierten Anwendungen, also als Ausdruck der Gegenstandsspezifität der Heuristik, auffassen. Gleichzeitig ist die Tatsache, daß die Operationen des Verallgemeinerns, Spezialisierens und Analogisierens von Polya selber als gegenstandsunspezifisch aufgefaßt werden, wohl eine Folge der Variabilität des Gegenstandsbezugs.

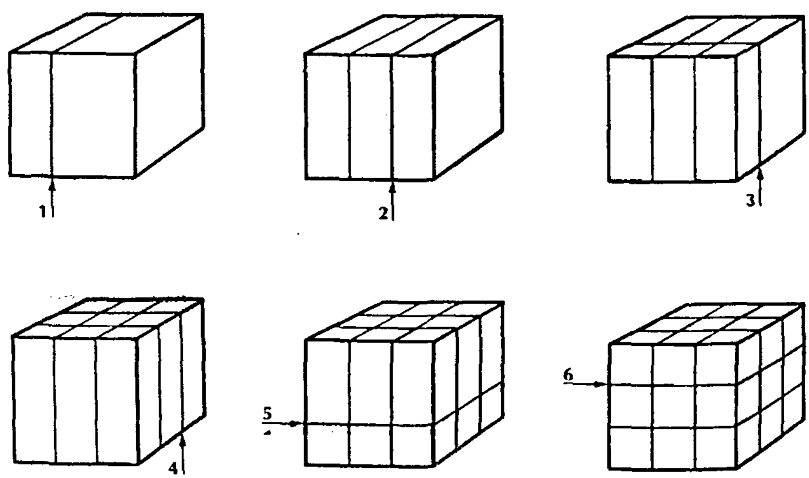
Die Tatsache der Untrennbarkeit von Gegenstandsbezug und Entwicklungsdynamik von Theorien, die Tatsache, daß der Gegenstandsbezug nur in der Entwicklungsdynamik virulent wird und umgekehrt Entwicklung nur auf der Grundlage des Gegenstandsbezuges stattfindet, wird in der Didaktik sehr deutlich in der Technik der Problemketten, die in dem Buch von Engel (Engel 1973) so brillant gehandhabt wird, zum Ausdruck gebracht. Umgekehrt trägt diese Technik dem Zusammenhang von Gegenstandsbezug und Wissensdynamik in besonderem Maße Rechnung. Zur Illustration seien hier zwei verschiedenen Büchern entnommene Aufgaben dargestellt, die in ihrem Zusammenhang die Verwobenheit von Gegenstandsbezug und dynamischen Aspekten hervortreten lassen.

Die erste Aufgabe (vgl. Bauersfeld u.a. 1973) fordert, aus 27 bunt-gefärbten gleichgroßen Quadern einen großen Quader, der außen einfarbig gelb ist, zusammenzusetzen. Maria Otte hat diese Aufgabe experimentell mit Kindern behandelt.

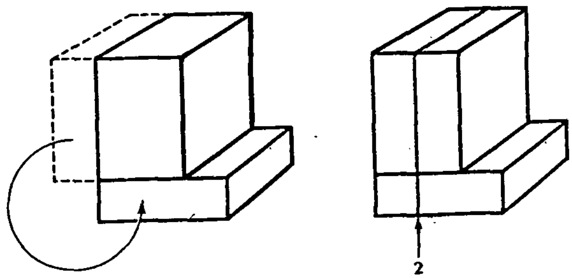
"Beim ersten Versuch gab man den Kindern keinerlei Anweisungen, sondern ließ sie spontan mit den Würfeln hantieren. Die Kinder suchten sich zunächst die Klötze heraus, die vorherrschend die geforderte Farbe *gelb* besaßen, und begannen, damit die unterste Schicht zu bauen. Sie gingen dabei so vor, daß in jedem Stadium die gerade entstandene geometrische Figur ringsherum einfarbig gelb war. Sie hatten dabei allerdings sehr schnell sämtliche Würfel mit auch nur einer gelben Fläche aufgebraucht. Dann setzte eine große Verwirrung ein. Beim Versuch, untere Quader auszutauschen, stürzte das Bauwerk ein. Obwohl man ihnen half, die *einzelnen Fehler* zu korrigieren, muß man sagen, daß sie sich mit ziemlichen Mißmut dieser Aufgabe widmeten. Die Situation war zu komplex und zu wenig strukturiert; es tauchten zu viele Fehler auf.

Bei einer zweiten Durchführung stellte man vor die Kinder den fertigen gelben Würfel hin und arbeitete mit ihnen zusammen die Begriffe *Kantenwürfel*, *Eckwürfel* und *Flächenwürfel* heraus, d.h. man zeigte, daß die Anzahl und die Anordnung der notwendigen gelben Flächen abhängig ist von den Beziehungen der Würfel untereinander, so wie sie sich in dem großen Würfel darstellen. Man gewann auf dieser Grundlage eine Fülle von orientierenden Beziehungen: Innenflächen, die beliebig gefärbt sein können; Außenflächen, die gelb sein müssen; kleine Quader mit drei und mehr gelben Flächen, die dennoch aufgrund der zufälligen Färbung der 27 Würfel u.U. nur als Flächenwürfel zu fungieren hatten; Eckwürfel, die mindestens 3 gelbe Flächen haben müssen, aber auch mehr besitzen können usw. Die Aufgabe ließ sich nun, hatte man in der Tätigkeit erst einmal die 'Zelle' des Ganzen erschlossen, ziemlich mühelos bewältigen." (Jahnke/Mies/Otte/Schubring 1974, S.31)

Konfrontieren wir mit dieser Aufgabe eine zweite, die wir dem Buch von H.A. Jacobs "Mathematics, a human endeavor" (Jacobs 1970, S.23f) entnehmen. Ein Bildhauer möchte einen großen Mamor-Würfel von 3 Fuß Kantenlänge in 27 gleichgroße kleine Würfel von jeweils 1 Fuß Kantenlänge zerschneiden. Eine Möglichkeit, dies zu tun, besteht darin, den Würfel durch 6 Schnitte zu zerteilen, wie in den Zeichnungen angegeben.



Die Frage ist nun, ob man die Aufgabe auch mit weniger als 6 Schnitten erledigen kann, wenn man durch eine unterschiedliche Anordnung der entstehenden Quader nach jedem Schnitt sich um ein besonders ökonomisches Verfahren bemüht? Was damit gemeint ist, verdeutlicht die Zeichnung.



Auf den ersten Blick scheint es sich bei diesem Problem um eine ziemlich komplizierte Aufgabe zu handeln. Diese Aufgabe wird allerdings trivial, wenn man den Begriff des *Innenwürfels* bildet. Alle entstehenden kleinen Würfel, mit Ausnahme eines einzigen, haben nämlich mindestens eine Fläche, die Teil der ursprünglichen Fläche des großen Würfels gewesen ist. Nur bei dem Würfelzentrum, dem Innenwürfel, geht jede Fläche aus einem Schnitt hervor. Da ein Würfel 6 Flächen hat, ist damit gezeigt, daß mindestens 6 Schnitte erforderlich sind.

Die Beispiele zeigen in ihrem Zusammenhang, wie durch die Begriffe der Gegenstandsbezug organisiert und flexibel gestaltet wird. Sie verdeutlichen aber noch eine wichtige, darüber hinausgehende Einsicht. Sie zeigen nämlich, daß das, was in der gängigen Auffassung als "Intuition" bezeichnet wird, erworben und angeeignet werden muß. Diese Einsicht selber ist nur eine andere Formulierung des allgemein konstatierten Sachverhalts der Untrennbarkeit von Gegenstandsbezug und Wissensdynamik. Deshalb scheint es ein für weitere didaktische Ausarbeitungen heuristisch sinnvoller Vorschlag zu sein, den Begriff der "Intuition" durch den der "Menge der intendierten Anwendungen" zu ersetzen. Hierdurch wird es nicht nur möglich, zu beschreiben und zu verstehen, wie sich die Intuition auf der Grundlage von Erfahrungen entwickelt, sondern der Begriff der Intuition wird auch objektiviert. In diesem Sinne war oben bereits darauf hingewiesen worden, daß es nicht möglich sei, den Größenbegriff als eine beliebige Veranschaulichung des Zahlbegriffs neben vielen anderen möglichen Veranschaulichungen zu betrachten. Es ist genau dieses Moment des Objektiven an der Intuition, daß viele Mathematiker, unter ihnen auch Thom, wie aus der eingangs dargestellten Kontroverse mit Dieudonné hervorgeht, veranlaßt, dem Unterricht in der Geometrie eine herausragende Bedeutung für die Entwicklung mathematischen Denkens bei Lernenden zuzumessen. Thom spricht in diesem Zusammenhang pointiert vom "Vorrang des Kontinuierlichen gegenüber dem Diskontinuierlichen". Auf der anderen Seite hatte Dieudonné, auch dies ist eingangs dieses Kapitels dargestellt worden, zurecht darauf hingewiesen, welch kompliziertes Produkt eines Lernprozesses die Intuition ist und daß demgemäß das Kommunikationsproblem ernst genommen werden muß. Die intuitive Vorstellung läßt sich nicht weitergeben wie eine Sache. Dieudonné hat mit diesem Argument auch insofern recht, als es unzulässig ist, den Begriff der Intuition auf den der geometrischen Intuition zu reduzieren. Es scheint sicher, daß viele Mathematiker auf der Grundlage einer Anschauung denken, die nur schwer in geometrischen Begriffen beschrieben werden könnte. Insofern erweist sich auch hier die Sprechweise vom

"Bereich der intendierten Anwendungen" als hilfreich. Es kann *nicht genug* betont werden, daß der Anwendungsbezug einer Theorie *variabel* ist und daher auch *variabel gehandhabt* werden muß. Er kann nicht ein für allemal eingeführt werden. Der oben ausführlich erörterte Begriff der Größe ist ein Beispiel dafür. Es bedeutet einen tiefgreifenden Bruch, wenn von der ursprünglichen Vorstellung der Größe als "positive Größe" zu "negativen Größen" übergegangen wird. Dennoch darf die Furcht vor den mit diesem Bruch implizierten Schwierigkeiten nicht dazu führen, sich auf ein rein formalistisches Verständnis der Mathematik zurückzuziehen. Ein Verständnis von "Strenge" als *einer* "*Beziehung* von Strukturkern K und Menge I der intendierten Anwendungen" sollte die Grundlage der didaktischen Überlegungen zum Beweisen bilden.

ZUM VERHÄLTNIS VON WISSENSENTWICKLUNG UND BEGRÜNDUNG IN DER MATHEMATIK - "BEWEISEN" ALS DIDAKTISCHES PROBLEM

ZUSAMMENFASSUNG

Das Problem des Beweisens hat in den Diskussionen über das mathematische Curriculum, insbesondere im Hinblick auf die Wissenschaftsorientierung des Mathematikunterrichts, immer eine große Rolle gespielt. So wurde lange Zeit die Geometrie als die mathematische Teildisziplin, in der bewiesen wird, der Arithmetik als dem Bereich, in dem man rechnet, gegenübergestellt. Eine der wesentlichen Intentionen der Reform des Mathematikunterrichts in den 60er Jahren war es gerade, diesen Widerspruch im methodischen Verständnis der Schulmathematik aufzulösen. Dabei korrespondiert der unterschiedlichen Sichtweise auf die Geometrie einerseits und die Arithmetik/Algebra andererseits eine unterschiedliche Auffassung der Bedeutung mathematischer Begriffe und Operationen. In der Schulgeometrie hat sich ein Verständnis von Beweisen erhalten, bei dem man sozusagen "jeden Schritt" auch in inhaltlich-anschaulichem Sinne rechtfertigen muß. In der Algebra wurde demgegenüber eher die Vorstellung des bedeutungsneutralen Operierens mit Symbolen in den Vordergrund gestellt.

Obwohl das Beweisen schlechthin als Ausdruck des wissenschaftlichen Charakters der Mathematik gilt, wird ihm im allgemeinen keine produktive, inhaltlich-entwickelnde Rolle beigemessen. Daher geht die Arbeit davon aus, daß der Kern der didaktischen Problematik des Beweisens das widersprüchliche Verhältnis von Entwicklung und Begründung des Wissens ist.

Der Widerspruch von Wissensbegründung und Wissensentwicklung ist charakteristisch für die gesamte Wissenschaft der Neuzeit. Während nämlich im antiken und mittelalterlichen kontemplativen Wissenschaftsverständnis die "Ontologie" der Gegenstände

wissenschaftlichen Erkennens als bestimmend für die Methode der Wissenschaft aufgefaßt wurde (soweit die "Methode" dort überhaupt als Problem gesehen wurde), ist die neuzeitliche Wissenschaft von einer spezifischen Umkehrung der Beziehung von "Ontologie" und "Methode" geprägt. Die neuzeitliche Wissenschaft stellt die Methode in den Vordergrund und bestimmt ihre Gegenstände nur noch danach, wie sie dem allgemeinen Verfahren der Erkenntnis zugänglich werden. Damit aber entsteht ein Spannungsverhältnis zwischen Verfahren und Gegenstand der Erkenntnis. Während der Versuch, wissenschaftliche Methoden zu begründen, immer auch eine bestimmte Stellungnahme zum Problem der "Ontologie" der Gegenstände der Wissenschaft erforderlich macht, erweist sich eine solche "Ontologie" unter dem Gesichtspunkt der Weiterentwicklung des Wissens häufig als außerordentlich hinderlich. Dies ist den forschenden Wissenschaftlern wohl bewußt, und sie entwickeln daher eine ausgesprochene *Abneigung* gegenüber "ontologischen" Fragen. In der Mathematik ist der letzte große Konflikt dieser Art die Auseinandersetzung zwischen "Intuitionisten" und "Formalisten" um die Jahrhundertwende gewesen. Auf der einen Seite steht dabei der einer bestimmten "Ontologie" verpflichtete Brouwer, der bereit ist, aus Gründen der Wissensbegründung große Teile der faktisch vorhandenen und betriebenen Mathematik aufzugeben, und auf der anderen Seite Hilbert, der dieses Verhalten als "Verrat an der Wissenschaft" empfindet und bekämpft.

Im *Kapitel I* wird zunächst die Entstehung der spezifischen Begründungsproblematik der neuzeitlichen Wissenschaft, die eine Folge der Umkehrung des Verhältnisses von Gegenstand und Methode ist, dargestellt und in den allgemeinen Kontext des sich herausbildenden operativen Wissenschaftsverständnisses, das in scharfem Kontrast zur antiken und mittelalterlichen kontemplativen Sichtweise steht, eingeordnet. Die neuzeitliche Mathematik geht mit der Entwicklung der Algebra den entscheidenden Schritt über die antike Mathematik hinaus. Dabei wurde die Algebra von den Wissenschaftlern der frühen Neuzeit nicht einfach als eine weitere mathematische Teildisziplin gesehen, sondern als Paradigma der allgemeinen wissenschaftlichen Methode, als erster Schritt zu einer "mathesis universalis" als "Kunst des Findens". Die Art und Weise, in der Vieta an die "Arithmetik" des Diophant anknüpfte und diese uminterpretierte, läßt die ganze Tragweite des Bruchs zwischen antiker und neuzeitlicher Mathematik deutlich werden, obwohl Vieta sich selbst als treuen Bewahrer antiker Traditionen sah.

Die Aufgabe, die Legitimität der Wissenschaft zu rechtfertigen und zu begründen, wurde von der Philosophie wahrgenommen. Sie weist die allgemeine Existenzberechtigung der Wissenschaft insbesondere nach außen gegenüber der Gesellschaft nach. Der Widerspruch, der sich in der neuzeitlichen Wissenschaft zwischen Wissensentwicklung und Begründung des Wissens auftut, wird lange Zeit nicht ausgetragen. Die Infinitesimalrechnung ist nur das bekannteste Beispiel für diesen Sachverhalt. Erst mit Beginn des 19. Jahrhunderts geht die Aufgabe, Wissenschaft und Wissen im einzelnen zu begründen, von der Philosophie auf die einzelnen Wissenschaften über. Dies hängt mit der veränderten Stellung der Wissenschaft in der Gesellschaft zusammen. Insbesondere die Mathematik wird zum Gegenstand des Unterrichts in einem öffentlich organisierten Bildungssystem; das mathematische Wissen wird damit einem starken Zwang zur Explikation ausgesetzt, der die Bemühungen zur Begründung der Mathematik von Cauchy bis Weierstraß bestimmt. Zahlreiche Selbstzeugnisse führender Mathematiker des 19. Jahrhunderts belegen diesen Zusammenhang zwischen den verstärkten Bemühungen um die Begründung der Mathematik und der Problematik des wissenschaftlichen Unterrichts. Es entsteht die "Mathematik der Lehrbücher". Hermann Graßmann war einer derjenigen Mathematiker, die am schärfsten die damit verbundenen Probleme wissenschaftstheoretischer und didaktischer Art gesehen und reflektiert haben. Die große Bedeutung, die das Kommunikationsproblem für die Wissenschaft, vor allem die Mathematik, im 19. Jahrhundert erlangt, führt dazu, daß die Zuverlässigkeit bzw. Unzuverlässigkeit der Darstellungsmittel, unterschieden vom Inhalt dessen, was dargestellt wird, zu einem großen und nicht mehr vernachlässigbaren Problem wird. Es entsteht die mathematische Logik.

Das im I. Kapitel in seiner historischen Tragweite dargestellte Problem des Verhältnisses von Wissensentwicklung und -begründung wird im *II. Kapitel* unter wissenschaftstheoretischen Gesichtspunkten analysiert. Dabei wird die von J.D. Sneed entwickelte Konzeption der logischen Struktur von Theorien der mathematischen Physik herangezogen. Es wird unterstellt und durch die weitere Darstellung bestätigt, daß es sinnvoll und notwendig ist, das Problem der Begründung der Mathematik als Teilproblem des Begründungsproblems empirischer Wissenschaften im allgemeinen aufzufassen. Dies bedeutet, daß die Mathematik selbst als im weitesten Sinne zu den empirischen Wissenschaften gehörig gesehen wird.

Das Grundproblem, von dem die Sneedsche Analyse der logischen Struktur der mathematischen Physik ausgeht, ist das "Problem der theoretischen Terme". Theoretische Terme sind solche Begriffe einer Theorie, die sich nicht in Abhängigkeit von Observablen definieren lassen und dennoch innerhalb der Theorie eine wichtige erklärende Funktion erfüllen. In der Newtonschen Mechanik z.B. sind die Begriffe der Kraft und der Masse theoretische Terme: Sie sind nicht definierbar mit Hilfe der "beobachtbaren" Ortsfunktion, wie logische Analysen zeigen. In der Begründung einer Theorie droht hier also ein Zirkel: Einerseits wird die Bedeutung der theoretischen Terme offenbar erst durch die gesamte Theorie festgelegt, andererseits ist der Inhalt der Theorie durch die theoretischen Terme bestimmt.
Ein Beispiel dieses drohenden Zirkels ist die häufig diskutierte Frage, ob die zweite Newtonsche Grundgleichung Kraft = Masse · Beschleunigung eine Definition für die Begriffe der Kraft und der Masse darstellt oder ein Naturgesetz. Sneed kann in seinem logischen Formalismus eine befriedigende Auflösung dieses Zirkels geben: Diese Auflösung läßt sich ganz allgemein als "Erkenntnistheorie der maximalen Runde" (Churchman) kennzeichnen. Es zeigt sich, daß das Verhältnis von Theorie und Empirie, von theoretischen Termen zu nicht-theoretischen nur auf der Grundlage einer dynamischen Theorienkonzeption angemessen verstanden werden kann. Auch das Problem der Kommunikation, die Frage nämlich, wie neues Wissen in die Kom-

munikation einbezogen wird, wird durch das Problem der theoretischen Terme charakterisiert. Das Sneedsche Konzept einer Theorie beinhaltet zwei wichtige Konsequenzen: Zum einen faßt Sneed eine Theorie nicht mehr als eine Menge von Sätzen, die die Realität beschreiben, auf (Aufgabe des "Statement view" von Theorien): Bei Sneed ist eine Theorie ein Gebilde von dualer Struktur, nämlich ein Paar $\langle K, I \rangle$, bestehend aus der theoretischen Struktur (dem "Strukturkern") K und der Menge I der intendierten Anwendungen. Klassisch ausgedrückt, bedeutet das, daß eine Theorie sowohl durch ihre syntaktischen, als auch durch ihre semantischen Aspekte beschrieben werden muß. Zweitens macht die Sneedsche Konzeption in besonderem Maße deutlich, daß in der neuzeitlichen Wissenschaft "Begründen" nicht mehr heißen kann, neues Wissen auf altes Wissen zurückzuführen, sondern umgekehrt erklärt die neue Theorie die alte. Die allgemeinere Theorie erklärt die weniger allgemeine, das weniger Bekannte erklärt das Bekannte. Dieser hypothetische Vorgriff auf den möglichen, intendierten Anwendungsbezug einer Theorie, der so charakteristisch für das operative Wissenschaftsverständnis ist, läßt sich im Rahmen des Sneedschen Formalismus besonders prägnant durch den Begriff der "Menge I der intendierten Anwendungen" zum Ausdruck bringen.

In der grundlagentheoretischen Diskussion der Mathematik um die Jahrhundertwende - so wird im *III. Kapitel* gezeigt - findet sich eine bemerkenswerte Analogie zum "Problem der theoretischen Terme". Dabei handelt es sich um die Problematik der "imprädikativen Definitionen", die von Poincaré und Russell für das Auftreten der Paradoxien in der Mengenlehre verantwortlich gemacht wurden. Ein Objekt heißt imprädikativ definiert, wenn es unter Rückgriff auf eine Gesamtheit, der dieses Objekt selbst angehört, definiert wird. In einer ausführlichen Analyse zeigte Russell, daß bei allen damals bekannten Paradoxien imprädikative Definitionen im Spiel waren. Andererseits aber sind imprädikative Definitionen in der Mathematik unvermeidlich: So läßt sich beispielsweise der Satz, daß jede nach oben beschränkte Teilmenge der Menge der reellen Zahlen ein Supremum besitzt, nicht beweisen, ohne von einer imprädikativen Definition dieses Supremums Gebrauch zu machen. Der Bezug zum

Problem der theoretischen Terme liegt auf der Hand: Theoretische Terme sind imprädikativ definiert. Die Diskussion zum Problem der imprädikativen Definitionen zeigt nun, daß die Unvermeidlichkeit, von diesen Definitionen Gebrauch zu machen, dazu zwingt, eine rein syntaktische Sichtweise der Mathematik aufzugeben. Imprädikative Definitionen sind ohne die Einbeziehung semantischer Gesichtspunkte zirkelhaft. Gödel begründet seine "platonistische" Auffassung der Mathematik aus diesem Zusammenhang. Der zweite Problemkreis, der im III. Kapitel diskutiert wird, betrifft den Hilbertschen Formalismus. Auf der einen Seite signalisiert das Scheitern des Hilbertschen Programms, wie es durch die Sätze von Gödel definitiv erwiesen ist, wieder denselben Sachverhalt, daß die Mathematik sich nicht auf syntaktische Strukturen reduzieren läßt. Prägnant wird dies auch in den wenig später erschienenen Ergebnissen von Tarski zum Ausdruck gebracht, der zeigte, daß in einem System, das mindestens so reich an Ausdrucksmitteln wie die Arithmetik ist, die Begriffe der "Wahrheit" und "Beweisbarkeit" nicht zur Deckung gebracht werden können. Darüber hinaus lassen sich Gödels Ergebnisse als Mittel der Hierarchisierung von Theorien verstehen, sie bringen daher die im II. Kapitel formulierte Vorstellung des "Begründens von der Zukunft her" zum Ausdruck: Die allgemeinere, entwickeltere, reichere Theorie begründet die weniger allgemeine, weniger entwickelte, weniger reiche Theorie und nicht umgekehrt. Auf der anderen Seite aber muß neben dem Scheitern des Hilbertschen Programms im engeren Sinne das große Verdienst und die große Tragweite der Hilbertschen Bemühungen zur Grundlegung der Mathematik herausgehoben werden. Diese Verdienste liegen insbesondere in der Erkenntnis Hilberts, daß die Bedeutung des Kommunikationsproblems eine relative Eigenständigkeit der Ebene der Zeichen bzw. des Textes zur Folge hat. Durch seine radikale Trennung von Entwicklungs- und Begründungsproblem hat er der Mathematik einen notwendigen Bewegungsspielraum verschafft, der eine flexiblere Beziehung von Theorie und Anwendung aufeinander ermöglichte. Das Hilbertsche Programm und insbesondere die axiomatische Methode im Hilbertschen Verständnis wird also als eine angemessene Antwort auf die Anforderungen durch die Anwendungen und die

Probleme der Kommunikation interpretiert.

Ein dritter Diskussionspunkt betrifft das Verständnis des Variablenbegriffs in Mathematik und Logik. Auch hier zeigt sich, daß eine rein syntaktische Auffassung von Variablen nicht möglich ist, daß zu einer "Einsetzungsauffassung" notwendig eine "Gegenstandsauffassung" hinzutreten muß. Der Variablenbegriff ist, wie Russell sagt, der mathematischste Begriff der Mathematik. Er verkörpert in sich das operative Grundprinzip der neuzeitlichen Wissenschaft, das Unbekannte als bekannt vorauszusetzen und so operativ in die Erkenntnis einzubeziehen (in Spezialfällen wird dies auch als "Methode der idealen Elemente" bezeichnet). Der Variablenbegriff verkörpert darüber hinaus am ausgeprägtesten die duale Bedeutungsstruktur mathematischer Begriffe. Die Einheit von syntaktischen und semantischen Momenten im Variablenbegriff signalisiert den untrennbaren Zusammenhang von sozial-kommunikativen und gegenständlichen Aspekten. Die Tatsache, daß in der Diskussion einiger Grundlagenprobleme der Mathematik alle Strukturmerkmale der Sneedschen Rekonstruktion der logischen Struktur der mathematischen Physik wiedergefunden wurden, wird als Bestätigung des eingangs formulierten Ansatzes genommen, das Begründungsproblem der Mathematik als Teilproblem des Begründungsproblems der empirischen Wissenschaft im allgemeinen aufzufassen.

Das *IV. Kapitel* enthält Schlußfolgerungen für die didaktische Diskussion des "Beweisens". Anhand von Beispielen wird hier die zentrale Rolle des Gegenstandsbezugs für die mit dem Beweisen verbundenen Probleme gezeigt. Allerdings ist es dabei wesentlich, den Gegenstandsbezug nicht statisch zu verstehen, er wird erst virulent und zeigt sich, wie bereits das Kapitel über Sneed ergeben hatte, in der *Wissensentwicklung*. Gerade die Tatsache der Veränderlichkeit und Variabilität des Gegenstandsbezugs ist dafür verantwortlich, daß normalerweise die "Intuition" als regellos aufgefaßt wird. Die Vorstellung der "Intuition" als "Menge der intendierten Anwendungen" macht es nun umgekehrt möglich, sich die Aneignung von Intuition als Ergebnis eines Lernprozesses vorzustellen.

Eine große Schwierigkeit für die schulmathematische Behandlung des "Beweisens" stellt die Vorstellung von dem, was eine mathematische Verallgemeinerung ist, dar. Dazu wird anhand von elementaren Beispielen und einer Diskussion von Lakatos' "Proofs and Refutations" gezeigt, daß Verallgemeinern in der Mathematik als "Einführen von Variablen" verstanden werden sollte. Dies hätte insbesondere im Hinblick auf die Geometrie in der Schule Konsequenzen.

LITERATUR

Bashenow, L.B./ Samorodnizki, P.Ch. — Die Rolle der Erfahrung und des logischen Denkens bei der wissenschaftlichen Erkenntnis, in: Sowjetwissenschaft, Gesellschaftswissenschaftliche Beiträge, 4/1977

Bauersfeld/Radatz/ Rickmeyer/Schumacher — Begleitschrift zum 'Körperspiel', Hannover 1973

Becker, R. — Theorie der Wärme, Heidelberger Taschenbücher, 1966

Beisswanger, P. — Hermann Weyl und die Texte der Mathematik, Ratio 8 (1966), 23-29

Berkeley, G. — Schriften über die Grundlagen der Mathematik und Physik, Einleitung und Übersetzung: W. Breidert, Frankfurt 1969

Bernal, J.D. — Die Wissenschaft in der Geschichte, Berlin (DDR) 1967

Bernays, P. — Review von: M. Steck: Ein unbekannter Brief von Gottlob Frege über Hilberts erste Vorlesung über die Grundlagen der Geometrie, in: The Journal of Symbolic Logic 7(1942), 92/93

Bernays, P. — Abhandlungen zur Philosophie der Mathematik, Darmstadt 1976

Beth, E.W. — The Foundations of Mathematics, Amsterdam 1968

Beth, E.W. — Hundred Years of Symbolic Logic, Dialectica 1 (1947), 331-346

Beth, E.W./ Piaget, J. — Mathematical Epistemology and Psychology, Dordrecht 1966

Blankertz, H. — Bildung im Zeitalter der großen Industrie, Hannover 1969

Blumenberg, H. — Philosophischer Ursprung und philosophische Kritik des Begriffs der wissenschaftlichen Methode, in: Studium Generale 5(1952), H. 3, 133-142

Böhme, G./ van den Daele, W./ Krohn, W. — Experimentelle Philosophie, Frankfurt 1977

Bourbaki, N. — Elemente der Mathematikgeschichte, Göttingen 1971

Braithwaite, R.B. — Scientific explanation, Cambridge 1965

Bruner, J. — Der Prozeß der Erziehung, Berlin - Düsseldorf 1970

Cassirer, E. — Was ist der Mensch? Stuttgart 1960

Cassirer, E. — Das Erkenntnisproblem in der Philosophie und Wissenschaft der neueren Zeit, 1. Band, Darmstadt 1974

Castonguay, C. — Meaning and Existence in Mathematics, Wien, New York 1972

Chihara, C.S. — Ontology and the Vicious-Circle Principle, Cornell University Press 1973

Churchman, C.W. — Philosophie des Managements, Freiburg 1973

Dawydow, W. — Arten der Verallgemeinerung im Unterricht. Berlin (DDR) 1977

Descartes, R. — Regeln zur Leitung des Geistes. Die Erforschung der Wahrheit durch das natürliche Licht, Felix Meiner Hamburg 1962

Descartes, R. — Geometrie 1637. Dt. Ausgabe: Darmstadt 1969

Diederich, W. — Rezension von: Sneed 1971 und Stegmüller 1973, in: Philosophische Rundschau 21/1975, 209-228

Diederich, W./ Fulda, H.F. — Sneedsche Strukturen in Marx' "Kapital". Mskr., Bielefeld 1977

Dienes, Z.P./ Golding, E.W. — Methodik der modernen Mathematik, Freiburg - Basel - Wien 1970

Dieudonné, J. — Sollen wir "Moderne Mathematik" lehren? 1973. Wiederabgedruckt in: M. Otte (Hrsg.): Mathematiker über die Mathematik, Springer 1974, S. 403-416

Dijksterhuis, E.J. — Die Mechanisierung des Weltbildes, Berlin - Göttingen - Heidelberg 1956

Engel, A. — Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Bd. 1, Stuttgart 1973

Exner, R.M./ Rosskopf, M.F. — Logic in Elementary Mathematics, New York - Toronto - London 1959

Fichtner, B. — Der Zusammenhang von Wissensstruktur und Lernstruktur als ein Grundproblem der Didaktik, A. Henn Verlag 1977

Frege, G.	Über die Grundlagen der Geometrie: 1903/I : IDMV 12(1903) S. 319 - 324 1903/II : IDMV 12(1903) S. 368 - 375 1906/I : IDMV 15(1906) S. 293 - 309 1906/II : IDMV 15(1906) S. 377 - 403 1906/III : IDMV 15(1906) S. 423 - 430
Frege, G.	Begriffsschrift und andere Aufsätze, Darmstadt 1964
Frege, G.	Funktion, Begriff, Bedeutung. Fünf logische Studien. Hrsg. und eingel. von G. Patzig, Göttingen 1975
Freudenthal, H.	Mathematik als pädagogische Aufgabe, 2 Bde., Stuttgart 1973
Freudenthal, H.	Soviet research on teaching algebra at the lower grades of the elementary school. In: Educational Studies in Mathematics 5 (1974), 391 - 412
Freund, H./ Sorger, P.	Logik, Mengen, Relationen. Mathematik für die Lehrerausbildung, Stuttgart 1976
Galilei, G.	Unterredungen und mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige, die Mechanik und die Fallgesetze betreffend. Hrsg.: A. v. Oettingen. Darmstadt 1973
Gentzen, G.	Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie, Nachdruck: Darmstadt 1967
Gerstell, M.	Prussion Education and Mathematics. In: Amer. Math. Monthly 82(1975), 240-245
Gillies, D.A.	An Objective Theory of Probability, London 1973
Glöckl, J.	Wahrheit und Beweisbarkeit, Bonn 1976
Gödel, K.	Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, in: Monatshefte für Mathematik und Physik 38(1931), 173 - 198
Gödel, K.	Russell's Mathematical Logic, in: Benacerraf/ Putnam (ed.): Philosophy of Mathematics, Englewood Cliffs 1964
Graßmann, H.	Die lineale Ausdehnungslehre, Leipzig 1844 und 1878, Nachdruck: Chelsea Publ. Comany 1969
Grattan-Guinness	Preliminary Notes on the Historical Significance of Quantification and of the Axioms of Choice in the Development of Mathematical Analysis, Historica mathematica 2(1975), 475 - 488

Gregory, D.F. — On the Nature of Symbolical Algebra, Trans. Roy. Soc. Edin., Vol. 14 (1840), 208 - 216

Gutting, G. — Conceptual Structures and Scientific Change, Studies in History and Philosophy of Science, Vol. 4 (1973/4), 209-230

Hacking, I. — The Emergence of Probability, Cambridge Universit Press 1975

Hartkopf, W. — Umriß eines systematischen Aufbaus der heuristischen Methodentheorie, in: Der Mathematikunterricht 10(1964), H. 1, 16-79

Heijenoort, J.v. — Logic as Calculus and Logic as Language, in: Boston Studies in the Philosophy of Science, Vol. III, Dordrecht 1967, 440-446

Hilbert, D. — Die Grundlagen der Mathematik, in: Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität VI (1928), 65-92

Hilbert, D. — Über das Unendliche, 1925. Nachdruck: D. Hilbert: Hilbertiana, Darmstadt 1964

Jahnke, H.N./ Mies, Th./Otte, M./ Schubring, G. — Zu einigen Hauptaspekten der Mathematikdidaktik, in: Schriftenreihe des IDM 1/1974, Bielefeld

Jahnke, H.N./ Steinbring, H./ Vogel, D. — Zahlbegriff und Rechenfertigkeit. Zur Problematik der Entwicklung wissenschaftlicher Begriffe, in: Educ. Studies in Math. 6(1975), 213 - 252

Jahnke, H.N./ Otte, M./ Schubring, G. — Mathematikunterricht und Philosophie, in: ZDM 197 H. 2, 60 - 69

Jacobs, H.R. — Mathematics, A Human Endeavor, San Francisco 1970

Kearns, J.T. — Two Views of Variables, in: Notre Dame Journal of Formal Logic 10 (1969), 163 - 180

Keitel, Ch./ Otte, M. — Das Lehrbuchproblem als Gegenstand der Lehrerausbildung, Bielefeld 1977 (Drucksache Nr. 1 von EPAS I).

Klein, J. — Die griechische Logistik und die Entstehung der Algebra, Teil I und II, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Abteilung B: Studien, 1936, 18 - 105 und 122 - 235

Kneale, W. und M. — The development of logic, Oxford 1971

Kopnin, P.W./ Popowitsch, M.W. — Logik der wissenschaftlichen Forschung. Berlin (DDR) 1969

Koppelman, E. — The Calculus of Operations and the Rise of Abstract Algebra, in: Arch. Hist. Ex. Sciences 8(1971/72), 155 - 242

Koyrê, A. — Von der geschlossenen Welt zum unendlichen Universum, Frankfurt 1969

Krajewski, W. — Correspondence principle and growth of science, Dordrecht 1977

Kramp, W. — Fachwissenschaft und Menschenbildung, in: Zeitschrift für Pädagogik 9/1963, 148 - 167

Kuhn, T.S. — Die Strukturen wissenschaftlicher Revolutionen, Frankfurt 1967

Kuhn, T.S. — Theory-Change as Structure-Change: Comments on the Sneed Formalism, in: Erkenntnis 10/1976, 179 - 199

Kuhn, T.S. — Eine Funktion für das Gedankenexperiment, in: T.S. Kuhn: Die Entstehung des Neuen: Studien zur Struktur der Wissenschaftsgeschichte. Hrsg. Lorenz Krüger, Frankfurt 1977

Kuyk, W. — Complementarity in Mathematics, Reidel Publ. Comp. 1977

Laita, L.M. — The Influence of Boole's Search for a Universal Method in Analysis on the Creation of his Logic, in: Annals of Science 34(1977), 163 - 176

Lakatos, I. — Proofs and Refutations, Cambridge University Press 1976

Lakatos, I. — A Renaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics, in: Brit. J. Phil. Sci. 27(1976), 201 - 223 (1976b)

Langhammer, W. — Beweistheoretische Probleme der Grundlagen der Mathematik und die Konzeption der "Principia Mathematica", in: Rostocker Philosophische Manuskripte, Heft 13, Rostock 1974

Lauter, J. — Aufbau der elementaren Gleichungslehre nach logischen und mengentheoretischen Gesichtspunkten, in: Der Mathematikunterricht 10(1964), H. 5, 59 - 119

Lewis, A.C. — H. Grassmann's 1844 Ausdehnungslehre and Schleiermacher's Dialektik, in: Annals of Science 34(1977), 103 - 162

Lietzmann, W. — Methodik des mathematischen Unterrichts, Bd. II: Der Lehrstoff, Heidelberg 1953

Mehrtens, H. — Die Entstehung der Verbandstheorie, Dissertation, Hamburg 1977

Mittelstraß, J. — Historismus in der neueren Wissenschaftstheorie, in: Die Bedeutung der Wissenschaftsgeschichte für die Wissenschaftstheorie, Symposium der Leibniz-Gesellschaft 1974, Studia Leibnitiona, Sonderheft 6 (1977)

Monna, A.F. — Dirischlet's principle. A mathematical comedy of errors and its influence on the development of analysis, Utrecht 1975

Moulines, P.U. — Besprechung von: Sneed 1971, in: Erkenntnis 9/1975, 423 - 436

Nagel, E./ Newman, J.R. — Der Gödelsche Beweis, Wien - München 1964

Nikolaus von Kues — Philosophisch-Theologische Schriften, Bd. I - III. Hrsg.: L. Gabriel, Wien 1964

Novy, L. — Origins of modern algebra, Leyden, The Netherlands 1973

Otte, M. — Zum Verhältnis von Wissenschaft und Unterricht, ir Schriftenreihe des IDM 2(1974), 156 - 195

Otte, M. — Die didaktischen Systeme von V.V. Davidov/ D.B. Elkonin einerseits und L.B. Zankov andererseits, in: Educ. Studies in Math. 6(1976), 475-49

Otte, M. — Zum Verhältnis von Wissenschafts- und Bildungsprozeß - dargestellt am Beispiel der Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert (Beschreibung eines Projekts), in: ZDM 1977, H. 4, 205 - 209

Otte, M./ Bromme, R. — Der Begriff und die Probleme seiner Anwendung, in: Block, Künzli, Lang (Hrsg.): Grundlagenkonzepte der Wissenschaftskritik als unterrichtsstrukturierende Momente, IPN-Arbeitsberichte 29, Kiel 1978.

Padoa, A. — Essai d' une théorie algêbrique des nombres entiers, précédé d' une introduction logique á une théorie deductive quelconque, Bibliothèque du Congrês International de Philosophie 3(1900)

Papert, S. — Process Models for Psychology, Rotterdam Universit Press 1973

Piaget, J. — The concept of structure, in: Mouton/Unesco (Hrsg.): Scientific thought, Paris - The Hague 1972

Poincaré, H. — Die Logik des Unendlichen, in: Poincaré: Letzte Gedanken, Leipzig 1913

Polya, G. Mathematik und plausibles Schließen. Bd. 1, Basel, 2. Aufl., 1969

Putnam, H. What theories are not, in: Logic, Methodology and Philosophy of Science: Proceeding of the 1960 International Congress, Stanford University Press 1962, 240 - 251

Quine, W.V.O. From a logical point of view, New York 1963

Quine, W.V.O. The foundations of mathematics, 1964, wiederabgedruckt in: Mathematics in the Modern World. Readings from Scientific American. San Francisco 1968

Quine, W.V.O. Philosophy of Logic, Englewood Cliffs, N.J. 1970

Quine, W.V.O. Die Wurzeln der Referenz, Frankfurt a.M. 1976

Quine, W.V.O. Word and Object, MTI Press 1976

Ramsey, F.P. The foundations of mathematics and other logical essays, hrsg. von R.B. Braithwaite, Totowa, New Jersey 1965

Reid, C. Hilbert, New York - Heidelberg 1970

Rosenthal, S.B. The cognitive status of theoretical terms, in: Dialectica 22/1968, 3 - 17

Russell, B. The Principles of Mathematics. Second edition. Nachdruck: London 1972

Russell, B. Die Philosophie des Logischen Atomismus, Russell Studienausgabe, München 1976

Sadovsky, V.N. Probleme einer allgemeinen Systemtheorie als einer Metatheorie, in: Ratio 16/1974, 29 - 45

Salmon, W.C. Zeno's Paradoxes, Bobbs-Merrill Company, Indianapolis - New York 1970

Sarton, G. Appreciation of ancient and medieval science during the Renaissance (1450 - 1600), New York 1961

Schleichermacher, F. Dialektik. Hrsg. v. R. Odebrecht, Darmstadt 1976

Schubring, G. Das genetische Prinzip in der Mathematikdidaktik, Dissertation, Bielefeld 1977. University Microfilms International 1978

Serebrjannikov, O.F. Heuristische Prinzipien und logische Kalküle, München - Salzburg 1974

Simon, H.A. Models of discovery, in: Boston Studies in the Philosophy of Science, Vol. LIV, Kap. 6, Dordrecht 1977

Sneed, J.D. The logical structur of mathematical physics, Dordrecht 1971

Sneed, J.D. Philosophical problems in the empirical science of science: a formal approach, in: Erkenntnis 10/1976, 115 - 146

Sneed, J.D. The structural approach to descriptive philosophy of science, in: Mey, Pinxter, Poriau, Vandamme (Hrsg.): International Workshop on the Cognitive Viewpoint, 24. - 26. März 1977

Steck, M. Unbekannte Briefe Freges über die Grundlagen der Geometrie und ein Antwortbrief Hilberts an Frege, in: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften. Math.-naturwiss. Kl. Jg. 1941. 2. Abhandlung

Stegmüller, W. Theorie und Erfahrung. Probleme und Resultate der Wissenschaftstheorie und Analytischen Philosophie, Bd. II, 1. Halbband 1970

Stegmüller, W. Theorienstrukturen und Theoriendynamik, Probleme und Resultate der Wissenschaftstheorie und analytischen Philosophie. Bd. II, 2. Halbband, Springer 1973.

Stegmüller, W. Theoriendynamik und logisches Verständnis, in: Diederich, W. (Hrsg.): Beiträge zur diachronischen Wissenschaftstheorie, Frankfurt/M. 1974

Stegmüller, W. Accidental ('non-substantial') theory change and theory dislodgement: To what extent logic can contribute to a better understanding of certain phenomena in the dynamics of theories, in: Erkenntnis 10/1976, 147 - 178

Steiner, H.G. Frege und die Grundlagen der Geometrie I, in: Math-phys. Semesterberichte 10(1964), 175 - 186

Steiner, H.G. Frege und die Grundlagen der Geometrie II, in: Math-phys. Semesterberichte 11(1965), 35 - 47

Steiner, M. Mathematical Knowledge, Cornell University Press 1975

Stevenson, L. Freges zwei Definitionen der Quantifikation, in: M. Schirn (Hrsg.): Studien zu Frege II, Stuttgart - Bad Cannstatt 1976

Stowasser, R. Materialien zu problemorientierter Schulalgebra, Mskrpt. 1977

Stuloff, N.N. Über den Wissenschaftsbegriff der Mathematik in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts, in: A. Diemer (Hrsg.): Beiträge zur Entwicklung der Wissenschaftstheorie im 19. Jahrhundert, Meisenheim 1968

Styazhkin, N.J. History of Mathematical Logic from Leibniz to Peano, MIT - Press 1969

Tarski, A. Truth and proof. In: Scientific American 220(1969), Juni 1969, S. 63 - 77

Thiel, C. Grundlagenkrise und Grundlagenstreit, Meisenheim 1972

Thom, R. "Moderne" Mathematik: Ein erzieherischer und philosophischer Irrtum? 1971. Wiederabgedruckt in: M. Otte (Hrsg.): Mathematiker über die Mathematik, Springer 1974, 371 - 401

Tuomela, R. Theoretical concepts, Wien, New York 1973

Van Dormolen, J. Learning to understand what giving a proof really means. In: Educ. Stud. in Math. 8(1977), 27 - 34

Vieta, F. Einführung in die neue Algebra, übers. und erläutert von K. Reich und H. Gericke, München 1973

Vollrath, H.J. Didaktik der Algebra, Stuttgart 1974

Wagenschein, M. Entdeckung der Axiomatik, in: Der Mathematikunterricht 1/1974, 52 - 70

Walsch, W. Zum Beweisen im Mathematikunterricht, Berlin (DDR) 1972

Wang, Hao Logic, Computers and Sets. A Survey of Mathematical Logic, Chelsea Publishing Comp. 1970

Wang, Hao From Mathematics to Philosophy, London 1974

Wessel, H. (Hrsg.) Quantoren - Modalitäten - Paradoxien, Berlin (DDR) 1972

Weyl, H. Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft, München - Wien 1966

Weyl, H. Das Kontinuum, Berlin 1917; Nachdruck: Das Kontinuum und andere Monographien, Chelsea Publ. Comp., New York 1973

Whitehead, A.N./ Russell, B. Principia Mathematica, Vol. I, second edition. Nachdruck: Cambridge University Press 1968

Wolff, G. (Hrsg.) — Handbuch der Schulmathematik, Bd. 3: Geometrie der Unter- und Mittelstufe, 2. Aufl., Hannover - Paderborn 1967

Wussing, H. — Die historische Stellung von Bernard Bolzano in der Entwicklungsgeschichte der Grundlagen der Mathematik während des 19. Jahrhunderts. Einleitung zu: B. Bolzano: Beyträge zu einer begründeten Darstellung der Mathematik. Darmstadt 1974

Young, M.F.D. — Knowledge and Control, Collier - Mac Millan Publishers, 3. Aufl., 1975

Zilsel, E. — Die sozialen Ursprünge der neuzeitlichen Wissenschaft, Frankfurt 1976

DOI: 10.17185/duepublico/81429
URN: urn:nbn:de:hbz:465-20240115-134117-4

Online-Veröffentlichung der ***digitalisierten Print-Ausgabe****:*
Jahnke, Hans Niels: *Z*um Verhältnis von Wissensentwicklung und Begründung in der Mathematik - Beweisen als didaktisches Problem. Bielefeld : Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld, 1978.