



Sehr singuläre Lösungen eines geometrisch nichtlinearen Cosserat-Modells für mikropolare Festkörper

Von der Fakultät für Mathematik der Universität Duisburg-Essen
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

genehmigte Dissertation

von

Vanessa Hüsken, M.Sc.

Gutachter:

Prof. Dr. Andreas Gastel (Universität Duisburg-Essen, Betreuer)

Prof. Dr. Angkana Rüland (Universität Bonn)

Mitglieder des Prüfungsausschusses:

Prof. Dr. Frank Müller (Universität Duisburg-Essen, Vorsitzender)

Prof. Dr. Christoph Scheven (Universität Duisburg-Essen)

Datum der Einreichung: 22.06.2023

Datum der Disputation: 25.09.2023



Solids SPP 2256
Variational Methods

DuEPublico

Duisburg-Essen Publications online

UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN

Offen im Denken

ub | universitäts
bibliothek

Diese Dissertation wird via DuEPublico, dem Dokumenten- und Publikationsserver der Universität Duisburg-Essen, zur Verfügung gestellt und liegt auch als Print-Version vor.

DOI: 10.17185/duepublico/79195

URN: urn:nbn:de:hbz:465-20231102-123717-7

Alle Rechte vorbehalten.

Zusammenfassung

Die vorliegende Dissertation beschäftigt sich mit der Regularität kritischer Punkte $f = (\varphi, R) \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3 \times SO(3))$ einer Form der Cosserat-Energie

$$\mathcal{J}_\Omega(\varphi, R) = \int_{\Omega} |R^T D\varphi - I_3|^2 + |DR|^2 dx$$

aus der Modellierung mikropolarer elastischer Festkörper. Während für die Minimierer dieses Funktionals bereits lokale Hölder-Stetigkeit in der gesamten offenen Menge Ω bekannt ist, stellt sich die Frage, ob ohne Zusatzvoraussetzungen eine allgemeine (partielle) Regularitätsaussage für alle kritischen Punkte des Funktionals gelten kann.

Auf der Suche nach einer Antwort wird zunächst das ursprüngliche Cosserat-Modell erläutert und im Detail aufgezeigt, weshalb die Frage nach der Regularität kritischer Punkte der betrachteten Cosserat-Energie aufkam. Die zentrale Idee hinter allen späteren Ausführungen besteht darin, bekannte Methoden aus der Theorie harmonischer Abbildungen mit Werten in der Einheitskugel $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ auszunutzen. Der Zusammenhang zwischen letzteren und Cosserat-Körpern wird beleuchtet, während gleichzeitig weitere Konzepte wie der topologische Abbildungsgrad und Dipol-Paare von Punkt singularitäten für Abbildungen in eine nicht-orientierbare Mannigfaltigkeit verallgemeinert werden. Danach wird gezeigt, wie in ursprünglich glatte Abbildungen Dipole eingefügt werden können unter Aufwendung einer kontrollierten Menge von Cosserat-Energie.

Ebenso wird eine erste partielle Regularitätsaussage für diejenigen kritischen Punkte getroffen, welche gleichzeitig Minimierer eines auf eine Untermannigfaltigkeit eingeschränkten Problems zu gegebenen (C^1 -)Dirichlet-Randbedingungen sind. Dazu wird nachgewiesen, dass die singuläre Menge solcher Abbildungen diskret ist und ganz im Inneren des Definitionsbereichs liegt. Im Einklang mit bestimmten Situationen für harmonische Abbildungen erhält man bessere Regularität am Rand als im Inneren. Insgesamt sind also für diese Subklasse kritischer Punkte höchstens isolierte Punkt singularitäten zu erwarten.

Schließlich werden Regularitätsaussage und Dipol-Konstruktion kombiniert, um die Existenz kritischer Punkte der Cosserat-Energie mit einer beliebig großen (endlichen) vorgegebenen Zahl von Singularitäten zu zeigen. Der Nachweis dieser „sehr singulären Lösungen“ ist das Hauptziel der Arbeit; ein entsprechender Artikel ist zur Veröffentlichung eingereicht ([Hüs23]).

Schlüsselwörter: Nichtlineare Cosserat-Elastizität, Regularität, harmonische Abbildungen

Abstract

In this thesis, we investigate the regularity of critical points $f = (\varphi, R) \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3 \times SO(3))$ of a certain type of Cosserat energy

$$\mathcal{J}_\Omega(\varphi, R) = \int_\Omega |R^T D\varphi - I_3|^2 + |DR|^2 dx,$$

from the modeling of micropolar elastic materials. While minimizers of this type of Cosserat energy are known to be Hölder continuous in all of the open set Ω , it has been an open question, if (partial) regularity can hold for arbitrary critical points of the given functional, without any further assumptions.

In the beginning, we explain the underlying nonlinear Cosserat model and show in detail, how the regularity question for critical points of the investigated Cosserat energy became apparent. The central idea behind all considerations is to exploit well known results about harmonic maps with values in the unit sphere $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. The connection between the latter ones and Cosserat solids is being looked at next, while we also introduce necessary generalized concepts such as the degree of a map and dipole pairs of point singularities for mappings into non-orientable manifolds. After that, we demonstrate how dipoles can be inserted into formerly smooth mappings while controlling the amount of Cosserat energy needed to do so.

Furthermore, a first partial regularity result is proved for those critical points of the functional, which minimize the Cosserat energy among mappings on a certain submanifold, given (C^1 -) Dirichlet boundary conditions. We demonstrate discreteness of the singular set of these critical points and moreover that their singular set is completely contained in the interior of the domain. Therefore, in some situations boundary regularity is “better” than interior regularity, similar to the behaviour of harmonic maps. In particular, we can expect isolated point singularities at most for this subclass of critical points.

Subsequently, the developed techniques and partial regularity result are combined and used to prove the existence of corresponding critical points of the Cosserat energy, which exhibit an arbitrarily large (finite) prescribed number of singularities. This result about “very singular solutions” is the final aim of this thesis and has also been submitted for publication ([Hüs23]).

Keywords: Nonlinear Cosserat elasticity, regularity, harmonic maps

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich zunächst die Finanzierung des Forschungsprojekts durch die DFG anerkennen (Projekt-ID 441380936), ohne die meine Arbeit der letzten drei Jahre nicht möglich gewesen wäre.

Als Teil des SPP 2256 durfte ich viele motivierende und fachlich inspirierende Gespräche mit Mathematikern aus dem In- und Ausland führen, während der Kontakt zu den am SPP beteiligten Ingenieuren mir oft neue Perspektiven eröffnet hat. Durch die in verschiedenen Workshops und Seminaren (sowohl digital als auch persönlich) vorgestellte Expertise im Kreuzungsbereich von Analysis und angewandter Materialforschung konnte ich meinen naturwissenschaftlichen Horizont mehr erweitern, als ich es zu Beginn des Projekts im Oktober 2020 gedacht hätte.

Vor allem aber danke ich Prof. Andreas Gastel für die Chance, Teil dieses spannenden Projekts zu sein, für die hervorragende Betreuung sowohl digital als auch analog unter erschwerten (Pandemie-) Bedingungen und für die Möglichkeit, an SPP-, GAMM- und weiteren Tagungen teilzunehmen, dort Kontakte zu knüpfen und meine Forschung präsentieren zu dürfen. Die praktischen Tipps zur Veröffentlichung meiner Ergebnisse sind dabei genauso zu erwähnen, wie die Flexibilität der Zusammenarbeit, die als Mutter von zwei kleinen Kindern in den „Corona-Jahren“ von unschätzbarem Wert für mich war.

Diesbezüglich ist auch Prof. Ulrich Dierkes zu nennen, dessen Zuspruch und Unterstützung für Studenten mit Säugling/Kleinkind mein Masterstudium in Bahnen gelenkt hat, welche den Weg zur Promotion erst in greifbare Nähe brachten.

Nicht zuletzt schätze ich die Unterstützung während meines Studiums durch meine lieben Kollegen aus der LuDi- und Kaffee-Runde, welche dafür gesorgt haben, dass ich einerseits mit Hilfe diverser Skat-Runden ausgeglichen und andererseits mit Hilfe des bewährten Duisburger Fachschafts-Rezepts „x halbe plus eins“ auch wach blieb.

Dabei ist genauso das letzte Jahr mit meiner lieben Büro-Kollegin Hannah zu erwähnen, die ohne viele Worte weiß, wann der richtige Zeitpunkt für Schokolade gekommen ist. Der Austausch von Ideen an unserer Tafelwand hat mir oft geholfen, den Überblick zu behalten.

Zu meiner Familie (egal ob in Kamen, Mülheim, Voerde oder Dinslaken) möchte ich nur eines sagen: Seit am 15. März mein Fels in der Brandung unterging, seid ihr das Boot, das mich über Wasser hält.

DANKE!

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Ein Cosserat-Modell für mikropolare elastische Körper	1
1.2	Startpunkt des Forschungsprojekts	3
2	Verwendete Grundlagen	9
2.1	Verbindung zwischen S^2 und $\mathcal{S} \subset SO(3)$	9
2.2	Der Abbildungsgrad und Dipole	12
2.2.1	klassisch	12
2.2.2	mod-2	14
2.2.3	Dipole	15
3	Einfügen von Singularitäten	17
3.1	Ein Würfel-Lemma	17
3.2	Konstruktion von Dipolen	19
4	Partielle Regularität	35
4.1	Partielle Regularität im Inneren	36
4.1.1	Monotonie-Formel und diskrete Morrey-Bedingung	38
4.1.2	ε_0 -Regularität und Dimensionsreduktion	49
4.2	Volle Randregularität	55
4.2.1	Hilfsaussagen	58
4.2.2	$\text{Sing}(f)$ ist leer am Rand	77
5	Kritische Punkte mit N Singularitäten	83
6	Fazit und Ausblick	89
	Literatur	91

1 Einleitung

Die vorliegende Dissertation ist als Teil der Arbeit an dem gleichnamigen Forschungsprojekt (Projekt-ID 441380936) im Rahmen des Schwerpunktprogramms „Variationelle Methoden zur Vorhersage komplexer Phänomene in Strukturen und Materialien der Ingenieurwissenschaften“ (SPP 2256) der DFG entstanden.

Dieses erste Kapitel dient dazu, einen Überblick über das betrachtete geometrisch nichtlineare Cosserat-Modell für mikropolare elastische Festkörper und den weiteren Aufbau der Arbeit zu geben, sowie die grundlegenden Fragestellungen zu beschreiben, welche im Folgenden untersucht werden. Die Beschreibung des Modells an sich (Abschnitt 1.1) folgt dabei den Ausführungen in [Gas19] und [LW20].

1.1 Ein Cosserat-Modell für mikropolare elastische Körper

In der Elastizitätstheorie bezeichnet Cosserat-Elastizität eine Modell-Klasse für Festkörper, welche insbesondere auf die Beschreibung von Materialien mit einer zellulären oder mikropolaren Struktur, von körnigen Feststoffen oder von elastischen Flüssigkristallen mit Defekten abzielt. Sie hat ihren Ursprung zu Beginn des 20. Jahrhunderts in der Arbeit [CC09] der Brüder E. und F. Cosserat. Im Vergleich zur klassischen Elastizitätstheorie aus der Kontinuumsmechanik besteht die entscheidende Annahme der Cosserat-Elastizität darin, zusätzlich zur klassischen Deformation einen weiteren Freiheitsgrad für Rotation einzuführen; dies geschieht wie folgt:

Stellt eine beschränkte Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ den Festkörper in seinem Grundzustand dar, ohne dass Kräfte auf ihn wirken, so bezeichnet $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ das makroskopische Deformationsfeld der klassischen Elastizitätstheorie. Zusätzlich zu diesen Translations-Freiheitsgraden erlaubt die Cosserat-Elastizität jedem Punkt des Körpers auf mikroskopischer Ebene eine Rotation, kurz eine „Mikro-Rotation“. Deformation und Mikro-Rotation werden als unabhängig voneinander angenommen in dem Sinne, dass der Punkt des Körpers rotiert wird, ohne den Körper weiter zu deformieren.

Dabei bedeutet Rotation eines Punkte $x \in \Omega$, dass das zugehörige orthogonale Dreibein mittels einer Drehmatrix $R(x)$ rotiert. Dennoch muss es konstitutive Annahmen bezüglich der mit φ und R assoziierten Energiedichten geben, welche zu gekoppelten Gleichungen für φ und R führen.

Anders als bei den ursprünglichen Modellen, die linear in beiden Komponenten φ und R waren, arbeitet P. Neff im Kontext der Variationsrechnung systematisch mit Varianten der Cosserat-Elastizität, die nicht länger linearisierte Mikro-Rotationen benutzen, siehe unter anderem [Nef04] und [Nef06]. Dabei werden die Mikro-Rotationen im Punkt $x \in \Omega$ durch orthogonale (3×3) -Matrizen $R(x) \in SO(3)$ beschrieben, anstatt infinitesimale Rotationen in der zugehörigen Lie-Algebra der schiefsymmetrischen Matrizen zu betrachten.

Die Verwendung von Mikro-Rotationen in der Riemannschen Mannigfaltigkeit $SO(3)$ führt sofort zu geometrischen Nichtlinearitäten in den zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen, die aus der Sicht partieller Differentialgleichungen schwierig zu handhaben sind.

Sowohl Deformation als auch Mikro-Rotation verursachen Spannungen im Material, gegeben durch $R^T \cdot D\varphi - I_3$ beziehungsweise $R^T \cdot DR$. Daher besteht ein zum Cosserat-Modell (nach obigem Ansatz) gehörendes Energiefunktional aus folgenden zwei Summanden, welche die im Körper befindliche Energie beschreiben:

Die Wahl für den Beitrag der Belastung durch Deformation ist

$$\begin{aligned} \mu_1 \cdot \|\operatorname{devsym}(R^T D\varphi - I_3)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu_c \cdot \|\operatorname{skew}(R^T D\varphi - I_3)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ + \frac{\mu_2}{3} \cdot \|\operatorname{tr}(R^T D\varphi - I_3) \cdot I_3\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Dabei bezeichnet $\operatorname{devsym}(A) = \frac{1}{2}(A + A^T) - \frac{1}{3}(\operatorname{tr}(A))I_3$ den deviatorischen symmetrischen Teil einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und $\operatorname{skew}(A)$ den schiefsymmetrischen Teil $\frac{1}{2}(A - A^T)$ von A . Definiert man einen linearen Operator $\mathbb{P}: \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ durch die Setzung

$$\mathbb{P}(A) := \sqrt{\mu_1} \cdot \operatorname{devsym}(A) + \sqrt{\mu_c} \cdot \operatorname{skew}(A) + \frac{\sqrt{\mu_2}}{3} \cdot \operatorname{tr}(A) \cdot I_3,$$

so lässt sich (1.1) einfacher schreiben als

$$\|\mathbb{P}(R^T D\varphi - I_3)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Außerdem werden die (vom Material abhängigen) Konstanten μ_1 , μ_c und μ_2 als positiv angenommen. Für μ_1 und μ_2 ist das eine natürliche Annahme (sie stehen im Zusammenhang mit den klassischen Lamé-Konstanten der Kontinuumsmechanik ohne Mikro-Rotation, vgl. [Nef04, Sect. 2.2.1, S. 7]). Der sogenannten Cosserat-Konstante μ_c hingegen möchte man vorzugsweise ein Verschwinden ermöglichen, da in der Elastizitätstheorie üblicherweise nur der symmetrische Deformations-Gradient $\operatorname{sym}(D\varphi) = \frac{1}{2}(D\varphi + D\varphi^T)$ anstelle des vollen Deformations-Gradienten eine Rolle spielt.

Allerdings ist im Fall $\mu_c = 0$ bisher selbst die Existenz von Minimierern (oder anderen Lösungen) außer in wenigen Spezialfällen noch ungeklärt, da meist eine Art Kornscher Ungleichung für inkompatible Felder fehlt. Deshalb beschränken sich die vorliegenden Regularitäts-Untersuchungen auf den Fall $\mu_c > 0$.

Der Beitrag der rotationellen Belastung zur Energie ist in dieser Arbeit

$$\lambda \|R^T DR\|_{L^p(\Omega)}^p,$$

für $\lambda > 0$ (o.E. $\lambda = 1$) und für $p \geq 2$, während P. Neff analog zum Beitrag der Deformation auch hier mehr Parameter erlaubt.

Natürlich können zusätzliche externe Kräfte oder Momente auf den Körper wirken. Da diese aber für die Zielrichtung des Projekts keinen wesentlichen Einfluss haben, werden sie zunächst vernachlässigt und somit als verschwindend angenommen, vgl. auch die Diskussion dieses Aspekts in [Gas19].

Das im Zuge dieser Dissertation betrachtete Cosserat-Energiefunktional ist somit gegeben als

$$\mathcal{J}_\Omega(\varphi, R) := \int_{\Omega} |\mathbb{P}(R^T D\varphi - I_3)|^2 + |DR|^p dx.$$

1.2 Startpunkt des Forschungsprojekts

Die Existenz von Minimierern der Cosserat-Energie wurde in [Nef06] im Fall $\mu_c > 0$ (für beschränkte Lipschitz-Gebiete Ω) bewiesen. Danach beschäftigte sich mit A. Gastel ([Gas19]) erstmals jemand mit der Regularität von Cosserat-Körpern und stellte die folgende Diskrepanz fest:

Unter anderem für $p = 2$ und die spezielle Wahl $\mu_1 = \mu_2 = \mu_c = 1$ gilt, dass jeder Minimierer von $\mathcal{J}_\Omega(\cdot)$ in der Klasse $W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3 \times SO(3))$ lokal Hölder-stetig im ganzen (offenen) Definitionsbereich Ω ist, also $\text{Sing}(f) = \emptyset$ ist. ($\text{Sing}(f)$ bezeichnet das Komplement der größten Menge, auf der $f = (\varphi, R)$ stetig ist, siehe auch Definition 2.8). Gleichzeitig wird dort für $p \geq 2$ und $\mu_1 = \mu_2 = \mu_c = 1$ ein explizites Beispiel eines kritischen Punktes $f = (\varphi, R)$ in $W^{1,p}(B^3, \mathbb{R}^3 \times SO(3))$ des Cosserat-Energie-Funktional $\mathcal{J}_{B^3}(\cdot)$ (d.h. einer schwachen Lösung der Euler-Lagrange-Gleichungen) gegeben, welcher in der Rotationskomponente eine Singularität im Ursprung aufweist:

$$\varphi(x) = \frac{4}{3}x \cdot \log(|x|), \quad R(x) = \frac{1}{|x|^2} \cdot \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 & 2x_1x_2 & 2x_1x_3 \\ 2x_1x_2 & x_2^2 - x_1^2 - x_3^2 & 2x_2x_3 \\ 2x_1x_3 & 2x_2x_3 & x_3^2 - x_1^2 - x_2^2 \end{pmatrix},$$

s. [Gas19, S. 4291]. Dies legt den Gedanken nahe, dass kritische Punkte „singulärer“ sein können, als die Minimierer es vermuten lassen und eine zentrale Frage lautet:

Wie schlimm (singulär) kann es werden?

Ein Aspekt, der bei Betrachtung der Cosserat-Energie $\mathcal{J}_\Omega(\cdot)$ ins Auge fällt, ist die Tatsache, dass der zweite Summand des Funktionals die viel studierte p -Energie ist (das p -Dirichlet-Integral). Zur Regularität (bzw. Singularität) der kritischen Punkte des Dirichlet-Integrals ($p = 2$), der sogenannten harmonischen Abbildungen, gibt es viel beachtete Resultate, beispielsweise von R. Hardt und F.-H. Lin [HL86] oder T. Rivière [Riv95] für harmonische Abbildungen in die Einheitssphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Wie bereits in der Zusammenfassung angedeutet, ist diese Ähnlichkeit von Cosserat-Energie und Dirichlet-Energie im Laufe der vorliegenden Arbeit von großer Bedeutung.

Daher geht das Projekt zunächst von den folgenden **Grundannahmen** aus, um Resultate für Cosserat-Körper mithilfe von Analogien zu harmonischen Abbildungen zu entwickeln. Es sei von nun an

$$p = 2 \quad \text{und} \quad \mu_1 = \mu_2 = \mu_c = 1.$$

Mit dieser Wahl des Parameters p und der Material-Konstanten μ_i wird der lineare Operator \mathbb{P} zur Identität und das zu untersuchende Variationsproblem in seiner einfachsten Form zu

$$\mathcal{J}_\Omega(\varphi, R) = \int_{\Omega} |R^T D\varphi - I_3|^2 + |DR|^2 dx \longrightarrow \min \text{ in } W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3 \times SO(3)). \quad (\mathcal{P})$$

Die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen lauten in diesem Fall

$$\begin{cases} \Delta\varphi = \operatorname{div}(R) & (1) \\ \operatorname{div}(DR) + D\varphi - \underbrace{D\varphi D\varphi^T R}_{(*)^1} \perp T_R SO(3), & (2) \end{cases}$$

die Poisson-Gleichung für die makroskopische Deformation $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist gekoppelt mit einer geometrisch nichtlinearen Gleichung für harmonische Abbildungen $R: \Omega \rightarrow SO(3)$ in der Mikro-Rotation (s. [LW20, S. 2]).

Wie in [Gas19, S. 4289] festgehalten ist, stammt die Orthogonalitätsrelation daher, dass nur solche Variationen der Mikro-Rotation zulässig sind, die tangential zu $SO(3)$ verlaufen. Daher repräsentiert (2) eigentlich nur drei unabhängige Gleichungen, während die anderen sechs zu erwartenden Gleichungen (für die neun Komponenten von R) der Vorgabe $R \in SO(3)$ entsprechen.

Das klassische Variationsproblem für die (doppelte) Dirichlet-Energie für Abbildungen mit Werten in der Einheitssphäre S^2 (bzgl. der eigenen Randwerte) ist bekanntermaßen gegeben als

$$\mathcal{D}_\Omega(u) = \int_{\Omega} |Du|^2 dx \longrightarrow \min \text{ in } W^{1,2}(\Omega, S^2); \quad (\mathcal{Q})$$

dessen kritische Punkte sind die harmonischen Abbildungen $u: \Omega \rightarrow S^2$.

¹Der Summand $(*)$ ist immer orthogonal zum Tangentialraum von $SO(3)$ in R , kann daher in (2) auch weggelassen werden.

Da allerdings S^2 zweidimensional und $SO(3)$ dreidimensional ist, können die Methoden für Abbildungen u mit Werten in S^2 im Problem (\mathcal{Q}) von Rivière oder Hardt und Lin nicht eins zu eins auf Abbildungen R mit Werten in $SO(3)$ im Rotationsteil des Problems (\mathcal{P}) übertragen werden. Doch es gibt Hoffnung für eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit von $SO(3)$, wenn das oben erwähnte singuläre Beispiel $f = (\varphi, R) \in W^{1,2}(B^3, \mathbb{R}^3 \times SO(3))$ aus [Gas19] (für $p = 2$) als Startpunkt genutzt wird: Das Bild der dortigen Mikro-Rotation $R(x)$ liegt für jedes $x \in B^3$ in der Teilmenge

$$\mathcal{S} := \{A \in SO(3) : A \text{ ist eine } 180^\circ\text{-Drehung um eine Achse in } \mathbb{R}^3\}$$

von $SO(3)$.

Somit wird in dieser Dissertation das **eingeschränkte Problem** der Form

$$\mathcal{J}_\Omega(\varphi, R) = \int_\Omega |R^T D\varphi - I_3|^2 + |DR|^2 dx \longrightarrow \min \quad \text{in } W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}) \quad (\mathcal{P}')$$

betrachtet.

Diese Einschränkung auf die Untermannigfaltigkeit \mathcal{S} der Rotationen um exakt 180° mag auf den ersten Blick aus anwendungsorientierter Sicht merkwürdig erscheinen. In der Tat wäre es jedoch ein Leichtes \mathcal{S} in der ganzen Arbeit durch $A\mathcal{S}$ zu ersetzen, für ein fest gewähltes $A \in SO(3)$, da das Problem invariant unter den Symmetrien von $SO(3)$ ist. Wählt man $A^{-1} \in \mathcal{S}$, so sind auch gewisse Mikro-Rotationen R nahe der Identität zulässig.

Allerdings ändert natürlich eine solche Einschränkung auf eine Untermannigfaltigkeit in der Regel die Euler-Lagrange-Gleichungen und verhindert somit im Allgemeinen, dass Aussagen über das eingeschränkte Problem auf das Ausgangsproblem übertragen werden können.

Die Situation bessert sich, falls die betrachtete Untermannigfaltigkeit *total geodätisch* ist. Eine total geodätische Untermannigfaltigkeit von $SO(3)$ hat die Eigenschaft, dass alle Geodäten in der Untermannigfaltigkeit auch Geodäten in $SO(3)$ sind (vgl. [Jos11, Definition 4.7.3]). Dann und nur dann sind alle Minimierer der Cosserat-Energie unter der Einschränkung, dass das Bild ihrer Rotationskomponente in der Untermannigfaltigkeit liegt, auch kritische Punkte von $\mathcal{J}_\Omega(\cdot)$ im vollen Problem.

\mathcal{S} selbst ist eine solche total geodätische Untermannigfaltigkeit von $SO(3)$, denn äquivalent zu obiger Eigenschaft der Geodäten verschwindet die zweite Fundamentalform von \mathcal{S} identisch (vgl. [Jos11, Theorem 4.7.3]), was sich in lokalen Koordinaten nachrechnen lässt. Deswegen gilt, dass *eingeschränkte Minimierer*, so werden in dieser Arbeit die Minimierer des eingeschränkten Problems (\mathcal{P}') genannt, kritische Punkte des ursprünglichen Problems (\mathcal{P}) sind. Daher kann man zunächst ohne Bedenken mit dem eingeschränkten Problem (\mathcal{P}') arbeiten, zumal ohnehin die Regularität kritischer Punkte untersucht werden soll.

Ziel der vorliegenden Ausarbeitungen ist es daher, die Existenz „sehr singularer“ kritischer Punkte der Cosserat-Energie (in der Subklasse der eingeschränkten Minimierer) nachzuweisen und somit die Verbesserung (partieller) Regularitätsaussagen für allgemeine kritische Punkte des vollen Problems ohne weitere Zusatzvoraussetzungen auszuschließen. Der Weg zu diesem Ziel sieht dabei in seinen Grundzügen wie folgt aus:

Man beginnt mit einer glatten Abbildung, die in gewissem Sinne nicht zu weit von einer minimierenden Abbildung mit denselben Randwerten entfernt ist. Dann sollen die Randwerte so geändert werden, dass sie Punktsingularitäten für Minimierer erzwingen. Dies geschieht, indem man in die glatte Abbildung Dipol-Paare von Punktsingularitäten einfügt. Die aus der Konstruktion der Dipole resultierenden geänderten Randwerte sorgen dann dafür, dass jede minimierende Abbildung bzgl. der neuen Randwerte gewissermaßen so nah an der Abbildung mit Singularitäten ist, dass sie selbst aus topologischen Gründen ebenfalls Singularitäten haben muss.

Andererseits ist für die nötige Argumentationsweise wichtig zu wissen, dass Minimierer bzgl. der geänderten Randwerte gleichzeitig nicht „zu viele“ und vor allem keine Singularitäten am Rand haben können, was eine generelle Regularitätsanalyse für eingeschränkte Minimierer erfordert.

Daher unterteilt sich das weitere Vorgehen dieser Arbeit in die folgenden Teilschritte:

Aufbau der Arbeit

Kapitel 2 schildert in einem ersten Teil (Abschnitt 2.1) zunächst genauer die erwähnte Nähe von Abbildungen $R: \Omega \rightarrow \mathcal{S}$ zu den im Rahmen der Geometrischen Analysis viel untersuchten harmonischen Abbildungen $u: \Omega \rightarrow S^2$ mit Werten in der Einheitskugel $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ und hält Eigenschaften dieses Zusammenhangs fest, welche später in den Beweisen eines Großteils der erarbeiteten Aussagen ausgenutzt werden.

Genauso stellt ein zweiter Teil (Abschnitt 2.2) topologische Konzepte wie den Abbildungsgrad und Dipol-Paare von Punktsingularitäten in der klassischen Variante für Abbildungen mit Werten in einer orientierbaren Mannigfaltigkeit vor. Da die Mikro-Rotationskomponenten eingeschränkter Minimierer aber Werte in der nicht-orientierbaren Mannigfaltigkeit \mathcal{S} haben, ist es zweckmäßig die vorgestellten Definitionen und Eigenschaften von Abbildungsgrad und Dipol für solche zu erweitern.

Im Anschluss liefert *Kapitel 3* die benötigten Techniken zum Einfügen von Dipolen. Mit ihnen können unter kontrolliertem Aufwand von Cosserat-Energie Singularitäten in ursprünglich glatte Abbildungen eingefügt werden. Dazu sind feine Energie-Abschätzungen und die Ausnutzung wichtiger Approximationsresultate von F. Béthuel nötig.

Es sei bereits an dieser Stelle bemerkt, dass dabei eine geometrische Quader-

Würfel-Konstruktion, die ebenfalls von Béthuel zur „Entfernung“ von Dipolen entwickelt wurde (s. [Bét90, Abschnitt II.2]), so modifiziert wird, dass sie stattdessen im weiteren Verlauf der Arbeit in der Lage ist, in gegebenen glatten Abbildungen Dipole zu erzeugen.

Kapitel 4 bildet den umfangreichsten Teil der vorliegenden Arbeit. Dort wird eine vollständige Regularitätsanalyse für die betrachtete Subklasse kritischer Punkte, bestehend aus eingeschränkten Minimierern, durchgeführt. Es zeigt sich, dass mittels passend entwickelter Monotonie-Formeln sowie diskreter Morrey-Bedingungen sowohl im Inneren als auch am Rand eine (Dirichlet-) Energie-Schranke für das Auftreten von Singularitäten bewiesen werden kann. Durch gewisse Dimensions-Reduktions-Argumente für die singuläre Menge gelangt man schließlich zu partieller Regularität im folgenden Sinne:

Im Inneren des Definitionsbereiches sind eingeschränkte Minimierer außerhalb einer diskreten Menge lokal Hölder-stetig, während am Rand, bei vorgegebenen C^1 -Dirichlet-Randwerten, volle Regularität zu finden ist. Das Besondere ist dabei, dass die Beweisführung zur vollen Randregularität an keiner Stelle davon abhängt, dass die Mikro-Rotation Werte in \mathcal{S} statt $SO(3)$ hat. Man erhält somit gleichzeitig einen neuen Beitrag zum Verständnis der Randregularität von Cosserat-Energie-Minimierern, was an dieser Stelle bereits einmal formuliert werden soll, siehe Satz 4.8:

Satz. *Sei $f \in W_g^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3 \times SO(3))$ ein Minimierer der Cosserat-Energie $\mathcal{J}_\Omega(\cdot)$ bezüglich der Dirichlet-Randbedingung $g = (\vartheta, M) \in C^1(\partial\Omega, \mathbb{R}^3 \times SO(3))$. Dann gilt*

$$\text{Sing}(f) \cap \partial\Omega = \emptyset,$$

d.h. es gibt keine Singularitäten am Rand.

Dies verbessert teilweise ein Resultat aus [LW23], wo für eine andere Subklasse kritischer Punkte, zu der auch Minimierer der Cosserat-Energie gehören, lokale Hölder-Stetigkeit außerhalb einer Menge von verschwindendem eindimensionalem Hausdorff-Maß gezeigt wird. Insbesondere folgt aus obigem Satz für Minimierer des vollen Problems (\mathcal{P}) in Kombination mit der bekannten lokalen Hölder-Stetigkeit im Inneren bei gegebenen C^1 -Dirichlet-Randbedingungen insgesamt $\text{Sing}(f) = \emptyset$.

Es sei auch hier bemerkt, dass die grundlegenden Ideen zum Vorgehen in der Beweisführung aus Arbeiten zur Regularität harmonischer Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten in der Geometrischen Analysis seit den Resultaten von R. Schoen und K. Uhlenbeck (s. [SU82], [SU83]) bekannt sind und auf diesen basieren.

Schließlich kann in *Kapitel 5* durch Kombination der Regularitätstheorie aus Kapitel 4 und der Techniken aus Kapitel 3 wie angekündigt die Existenz kritischer Punkte der Cosserat-Energie mit einer beliebig großen (endlichen) vorgegebenen Zahl von Singularitäten nachgewiesen werden, siehe Satz 5.1:

Satz. *Zu jeder positiven Zahl $N \in \mathbb{N}$ gibt es glatte Randwerte $g_0 = (\varphi_0, R_0) \in C^\infty(\partial B^3, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S})$ mit $\deg(R_0) = 0$, sodass für jeden Minimierer $f = (\varphi, R)$ der Cosserat-Energie $\mathcal{J}_{B^3}(\cdot)$ in der Klasse $W_{g_0}^{1,2}(B^3, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S})$ gilt:*

Die Mikro-Rotation R besitzt mindestens N Singularitäten.

Damit existieren also kritische Punkte der Cosserat-Energie, die sich so „singulär“ verhalten, wie es ihnen überhaupt möglich ist; eine weitere Reduktion der singulären Menge für allgemeine kritische Punkte der Cosserat-Energie ohne weitere Zusatzvoraussetzungen kann demnach ausgeschlossen werden, ein Artikel zu diesem Ergebnis ist zur Veröffentlichung eingereicht ([Hüs23]).

Diesem Aufbau folgend, richtet sich nun der Fokus zunächst auf diejenigen Grundlagen, die im Laufe der Arbeit verwendet werden.

2 Verwendete Grundlagen

Die Betrachtung von Mikro-Rotationen in der Untermannigfaltigkeit \mathcal{S} hat im Vergleich zu anderen total geodätischen Untermannigfaltigkeiten $A\mathcal{S}$ technische Vorteile, welche im folgenden Abschnitt 2.1 beschrieben sind.

Im Anschluss dazu werden in Abschnitt 2.2 der topologische Grad einer Abbildung und Dipol-Paare von Singularitäten vorgestellt und auf die zu untersuchende Situation mit Mikro-Rotationen in \mathcal{S} angepasst.

2.1 Verbindung zwischen S^2 und $\mathcal{S} \subset SO(3)$

Identifiziert man jede Mikro-Rotation in der Menge \mathcal{S} mit ihrer Drehachse, so erhält man eine zweiblättrige Überlagerung von \mathcal{S} durch die Einheitskugel $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, gegeben mittels

$$F: S^2 \rightarrow \mathcal{S}, \quad n \mapsto 2n \otimes n - I_3 = \begin{pmatrix} n_1^2 - n_2^2 - n_3^2 & 2n_1n_2 & 2n_1n_3 \\ 2n_1n_2 & n_2^2 - n_1^2 - n_3^2 & 2n_2n_3 \\ 2n_1n_3 & 2n_2n_3 & n_3^2 - n_1^2 - n_2^2 \end{pmatrix}.$$

Die so definierte Überlagerung besitzt zwei äußerst nützliche Eigenschaften: Sie ist eine homothetische Abbildung, d.h. eine lokale Isometrie bis auf einen skalaren Faktor. Gleichzeitig ermöglicht sie ein Lifting auf S^2 . Diese beiden Eigenschaften bilden die Grundlage dafür, dass die im Rahmen des Forschungsprojekts erhaltenen Resultate unter anderem mit Hilfe von bekannten Aussagen über harmonische Abbildungen mit Werten in S^2 nachgewiesen werden können.

Die Homothetie-Eigenschaft lässt sich durch elementare Rechnungen in lokalen Koordinaten nachweisen:

Lemma 2.1. *Die oben gegebene Überlagerungsabbildung F ist bei Wahl einer natürlichen Riemannschen Metrik auf $SO(3)$ (und damit auch auf \mathcal{S}), (lokal) eine Isometrie bis auf den Faktor $\sqrt{8}$.*

Beweis. Betrachte zunächst o.E. die folgende lokale, durch die inverse stereographische Projektion gegebene konforme Parametrisierung der Einheitskugel S^2 :

$$S^2 \ni n = X(u, v) = \frac{1}{1 + u^2 + v^2} \cdot \begin{pmatrix} 2u \\ 2v \\ u^2 + v^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Jede andere anfängliche Parametrisierung lässt sich mittels lokal diffeomorphen Kartenwechsel-Abbildungen auf diese Situation zurückführen, da S^2 eine reguläre Fläche (im Sinne der Differentialgeometrie) ist.

Dann ist $\{X_u, X_v\} = \left\{\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v}\right\}$ eine orthogonale Basis von $T_n S^2$, dem Tangentialraum von S^2 im Punkt n , mit

$$X_u = \frac{2}{(1+u^2+v^2)^2} \cdot \begin{pmatrix} -u^2+v^2+1 \\ -2uv \\ 2u \end{pmatrix}, \quad X_v = \frac{2}{(1+u^2+v^2)^2} \cdot \begin{pmatrix} -2uv \\ u^2-v^2+1 \\ 2v \end{pmatrix},$$

sowie $|X_u|^2 = |X_v|^2 = \frac{4}{(1+u^2+v^2)^2}$ und $\langle X_u, X_v \rangle = 0$.

Zu der gegebenen Überlagerung $F: S^2 \rightarrow \mathcal{S}$ zeige, dass die in einem beliebigen Punkt $n \in S^2$ durch das Differential gegebene lineare Abbildung zwischen den Tangentialräumen $DF_n: T_n S^2 \rightarrow T_{F(n)} \mathcal{S}$ eine beliebige Orthonormalbasis (ONB) von $T_n S^2$ auf eine um den Faktor $\sqrt{8}$ gestreckte ONB von $T_{F(n)} \mathcal{S}$ abbildet.

Dazu berechnet man mit der Notation $\partial_1 = X_u$ und $\partial_2 = X_v$ zunächst einmal $(DF_n(\partial_k))_{ij} = \frac{d}{dt} [F_{ij}(n+t \cdot \partial_k)]|_{t=0}$ für $i, j = 1, 2, 3$ und $k = 1, 2$ und erhält:

$$\begin{aligned} [DF_n(\partial_k)]_{ij} &= \frac{d}{dt} \left[2 \cdot (n_i + t\partial_k^i) (n_j + t\partial_k^j) - \delta_{ij} \right] \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \left[2 \cdot (n_i n_j + t \cdot (n_i \partial_k^j + n_j \partial_k^i) + t^2 \cdot \partial_k^i \partial_k^j) - \delta_{ij} \right] \Big|_{t=0} \\ &= \left[2 \cdot (n_i \partial_k^j + n_j \partial_k^i) + 4t \cdot \partial_k^i \partial_k^j \right] \Big|_{t=0} \\ &= 2 \cdot (n_i \partial_k^j + n_j \partial_k^i). \end{aligned}$$

Somit ist insgesamt

$$\begin{aligned} &DF_n(X_u) \\ &= \frac{4}{(1+u^2+v^2)^3} \begin{pmatrix} 4(-u^3+uv^2+u) & 2(-3u^2v+v^3+v) & -u^4+6u^2+v^4-1 \\ 2(-3u^2v+v^3+v) & 8(-uv^2) & 2(-u^3v-uv^3+3uv) \\ -u^4+6u^2+v^4-1 & 2(-u^3v-uv^3+3uv) & 4(u^3+uv^2-u) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &DF_n(X_v) \\ &= \frac{4}{(1+u^2+v^2)^3} \begin{pmatrix} 8(-uv^2) & 2(u^3-3uv^2+u) & 2(-u^3v-uv^3+3uv) \\ 2(u^3-3uv^2+u) & 4(u^2v-v^3+v) & u^4-v^4+6v^2-1 \\ 2(-u^3v-uv^3+3uv) & u^4-v^4+6v^2-1 & 4(u^2+v^3-v) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \langle DF_n(X_u), DF_n(X_u) \rangle &= \sum_{i,j=1}^3 [DF_n(X_u)]_{ij}^2 \\ &= \frac{16}{(1+u^2+v^2)^6} \cdot \left[16(-u^3+uv^2+u)^2 + 2 \cdot 4(-3u^2v+v^3+v)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2(-u^4+6u^2+v^4-1)^2 + 64(-uv^2)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \cdot 4(-u^3v-uv^3+3uv)^2 + 16(u^3+uv^2-u)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{32}{(1+u^2+v^2)^6} \cdot [u^8 + 4u^6 + 4u^6v^2 + 6u^4v^4 + 12u^4v^2 + 6u^4 + 4u^2v^6 \\
&\quad + 12u^2v^4 + 12u^2v^2 + 4u^2 + v^8 + 4v^6 + 6v^4 + 4v^2 + 1] \\
&= \frac{32}{(1+u^2+v^2)^6} \cdot (1+u^2+v^2)^4 = 8 \cdot \frac{4}{(1+u^2+v^2)^2} = 8 \cdot \langle X_u, X_u \rangle
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\langle DF_n(X_u), DF_n(X_v) \rangle &= \sum_{i,j=1}^3 [DF_n(X_v)]_{ij}^2 \\
&= \frac{16}{(1+u^2+v^2)^6} \cdot [64(-u^2v)^2 + 2 \cdot 4(u^3 - 3uv^2 + u)^2 \\
&\quad + 2 \cdot 4(-u^3v - uv^3 + 3uv)^2 + 2(u^4 - v^4 + 6v^2 - 1)^2 \\
&\quad + 16(u^2v - v^3 + v)^2 + 16(u^2v + v^3 - v)^2] \\
&= \frac{32}{(1+u^2+v^2)^6} \cdot [u^8 + 4u^6 + 4u^6v^2 + 6u^4v^4 + 12u^4v^2 + 6u^4 + 4u^2v^6 \\
&\quad + 12u^2v^4 + 12u^2v^2 + 4u^2 + v^8 + 4v^6 + 6v^4 + 4v^2 + 1] \\
&= \frac{32}{(1+u^2+v^2)^6} \cdot (1+u^2+v^2)^4 = 8 \cdot \frac{4}{(1+u^2+v^2)^2} = 8 \cdot \langle X_v, X_v \rangle,
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\langle DF_n(X_u), DF_n(X_v) \rangle &= \sum_{i,j=1}^3 [DF_n(X_u)]_{ij} \cdot [DF_n(X_v)]_{ij} \\
&= \frac{16}{(1+u^2+v^2)^6} \cdot [4 \cdot 8(-u^3 + uv^2 + u)(-u^2v) \\
&\quad + 2 \cdot 2 \cdot 2(-3u^2v + v^3 + v)(u^3 - 3uv^2 + u) \\
&\quad + 2 \cdot 2(-u^4 + 6u^2 + v^4 - 1)(-u^3v - uv^3 + 3uv) \\
&\quad + 8 \cdot 4(-uv^2)(u^2v - v^3 + v) \\
&\quad + 2 \cdot 2(-u^3v - uv^3 + 3uv)(u^4 - v^4 + 6v^2 - 1) \\
&\quad + 4 \cdot 4(u^3 + uv^2 - u)(u^2v + v^3 - v)] \\
&= \frac{64}{(1+u^2+v^2)^6} \cdot [8u^5v - 8u^3v^3 - 8u^3v \\
&\quad - 6u^5v + 20u^3v^3 - 4u^3v - 6uv^5 - 4uv^3 + 2uv \\
&\quad - 6u^5v - 12u^3v^3 + 18u^3v - 6uv^5 + 18uv^3 \\
&\quad + 2u^3v + 2uv^3 - 6uv \\
&\quad - 8u^3v^3 + 8uv^5 - 8uv^3 \\
&\quad + 4u^5v + 8u^3v^3 - 8u^3v + 4uv^5 - 8uv^3 + 4uv] \\
&= \frac{32}{(1+u^2+v^2)^6} \cdot 0 = 0 = 8 \cdot \langle X_u, X_v \rangle.
\end{aligned}$$

Mit der (Bi-) Linearität von Differential und Riemannscher Metrik folgt dann sofort die Behauptung; die Überlagerung F liefert eine lokale Isometrie bis auf den skalaren Faktor $\sqrt{8}$. □

Des Weiteren ist aus der Algebraischen Topologie bekannt, dass jede stetige (glatte) Abbildung bzgl. einer Überlagerung des Bildes stetig (glatt) geliftet werden kann, falls der beschränkte Definitionsbereich einfach zusammenhängend und lokal weg-zusammenhängend ist. Genauer gesagt gilt nach Theorem 6.1 und Corollary 6.4 aus [GH81, S. 26f.] für die vorliegende Situation:

Lemma 2.2. *Sei Ω eine Teilmenge des \mathbb{R}^3 , die beschränkt, einfach zusammenhängend und lokal weg-zusammenhängend ist.*

Dann existieren zu jeder stetigen (glatten) Abbildung $\psi: \Omega \rightarrow \mathcal{S}$ bzgl. der obigen zweiblättrigen Überlagerung $F: S^2 \rightarrow \mathcal{S}$ zwei stetige (glatte) Abbildungen („Lifts“) $\eta_i: \Omega \rightarrow S^2$ ($i = 1, 2$) mit $\eta_1 = -\eta_2$, sodass $\psi = F \circ \eta_i$.

2.2 Der Abbildungsgrad und Dipole

Um später mit der Konstruktion von Dipolen arbeiten zu können, muss erst ein weiteres benötigtes Konzept aus der Algebraischen Topologie erläutert und auf die gegebene Situation des untersuchten Cosserat-Modells angepasst werden: der topologische Grad einer Abbildung. Der erste Teilabschnitt folgt dabei eng [Tar00, S. 2–4], weil dort die Grundlagen des analytischen Zugangs zum klassischen Abbildungsgrad aus der Algebraischen Topologie in der benötigten Form gegeben sind. Es sei ebenfalls darauf verwiesen, dass alle in Abschnitt 2.2.1 folgenden Definitionen und Aussagen mit den zugehörigen Beweisen sowohl in [Nir74, S. 4–9] als auch in [FG95, S. 6–39] zu finden sind.

2.2.1 Der klassische Abbildungsgrad für Abbildung zwischen orientierten C^∞ -Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension

Bis auf Weiteres betrachte zwei *orientierte* C^∞ -Mannigfaltigkeiten M' und N gleicher Dimension, N ohne Rand, sowie ein Gebiet $M \subset M'$, sodass die Menge $M \cup \partial M$ kompakt ist.

Definition 2.3. *Für eine Abbildung $f \in C^1(M \cup \partial M, N)$ und einen regulären Wert $y \in N \setminus f(\partial M)$ ist der Abbildungsgrad von f in y gegeben durch*

$$\deg(f, y) := \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sign}[\det[Df(x)]] \in \mathbb{Z}.$$

Die Summe ist wohldefiniert und endlich, da das Urbild $f^{-1}(y)$ nach dem Satz über inverse Funktionen diskret und wegen der Kompaktheit der Menge $M \cup \partial M$ endlich ist. Außerdem lässt sich an dieser Definition erkennen, dass automatisch $\deg(f, y) = 0$ gilt, wenn $y \notin f(M \cup \partial M)$, also der betrachtete Punkt nicht im Bild der Menge $M \cup \partial M$ liegt.

Satz 2.4. Seien eine Abbildung f und ein Punkt y wie in Definition 2.3 gegeben und sei ω eine C^∞ -Form vom Grad n auf N , deren Träger in der Zusammenhangskomponente von y in $N \setminus f(\partial M)$ liegt und die $\int_N \omega = 1$ erfüllt.

Dann gilt

$$\deg(f, y) = \int_M f^\# \omega,$$

wobei $f^\# \omega$ den Rücktransport (englisch: pullback) von ω auf M bezeichnet. Insbesondere ist der Abbildungsgrad auf jeder Zusammenhangskomponente von $N \setminus f(\partial M)$ konstant.

Daher ist die folgende Definition des Abbildungsgrades für kritische Werte gerechtfertigt:

Definition 2.5. Für $f \in C^1(M \cup \partial M, N)$ und einen kritischen Wert y gibt es (mit dem Satz von Sard) einen regulären Wert \tilde{y} , der in der Zusammenhangskomponente von y in $N \setminus f(\partial M)$ liegt. Damit setze

$$\deg(f, y) := \deg(f, \tilde{y}).$$

Um den Abbildungsgrad auch für lediglich stetige Funktionen definieren zu können, nutzt man wie üblich Glättung mittels Faltung, sowie Zerlegung der Eins; damit kann die stetige Abbildung $f: M \cup \partial M \rightarrow N$ auf der kompakten Menge $M \cup \partial M$ gleichmäßig durch glatte Abbildungen approximiert werden.

Das bedeutet, es existiert zu gegebenem $y \in N \setminus f(\partial M)$ eine glatte Abbildung $\tilde{f} \in C^\infty(M \cup \partial M, N)$ mit $\|f - \tilde{f}\|_\infty < \text{dist}(y, f(\partial M))$, sodass y auch bzgl. der glatten Abbildung \tilde{f} nicht im Bild des Randes liegt, $y \notin \tilde{f}(\partial M)$. Aus dieser Überlegung heraus ergibt sich

Definition 2.6. Sei $f: M \cup \partial M \rightarrow N$ stetig. Dann ist der Abbildungsgrad von f in y gegeben als

$$\deg(f, y) := \deg(\tilde{f}, y),$$

wobei \tilde{f} die glatte Abbildung „nahe“ an f im gerade beschriebenen Sinne ist.

Mit diesen Festlegungen hat der Abbildungsgrad zusätzlich zur Konstanz auf den Zusammenhangskomponenten von $N \setminus f(\partial M)$ die folgenden Eigenschaften:

Satz 2.7. Für eine stetige Abbildung $f: M \cup \partial M \rightarrow N$ gilt:

- (a) (Homotopieinvarianz) Sei $y \in N$ und f_t eine einparametrische Familie stetiger Abbildungen $(M \cup \partial M) \times [0, 1] \ni (x, t) \mapsto f_t(x) \in N$ mit $f_0 = f$, sodass $y \notin f_t(\partial M)$ für alle $t \in [0, 1]$.

Dann gilt

$$\deg(f_t, y) = \deg(f, y) \quad \forall t \in [0, 1].$$

- (b) Ist f ein C^1 -Diffeomorphismus von M auf das Bild $f(M) \subset N$, so gilt für alle $y \in f(M)$

$$\deg(f, y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } f \text{ auf } M \text{ orientierungserhaltend ist,} \\ -1, & \text{falls } f \text{ auf } M \text{ orientierungsumkehrend ist.} \end{cases}$$

(c) (*Multiplikationssatz*) Sei die Mannigfaltigkeit N kompakt, N' eine weitere orientierte, n -dimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeit und sei $g: N \rightarrow N'$ eine weitere stetige Abbildung. Mit Ω_i bezeichne die Zusammenhangskomponenten von $N \setminus f(\partial M)$, mit $x_i \in \Omega_i$ ihre jeweiligen Elemente.

Dann gilt für den Abbildungsgrad der Verkettung $g \circ f$ in einem Punkt z , der nicht im Bild des Randes von M liegt, also in $z \in N' \setminus (g \circ f)(\partial M)$:

$$\deg(g \circ f, z) = \sum_i \deg(f, x_i) \cdot \deg(g|_{\overline{\Omega_i}}, z),$$

die Summe ist endlich. Ist $M = N = S^k$ die k -dimensionale Einheitskugel im \mathbb{R}^{k+1} , so ist \deg auf ganz S^k konstant und es folgt $\deg(g \circ f) = \deg(g) \cdot \deg(f)$.

Da das Haupt-Ziel dieser Arbeit die Konstruktion von kritischen Punkten der Cosserrat-Energie mit Unstetigkeitsstellen ist, beruhen viele Überlegungen auf der folgenden

Definition 2.8. (a) Für eine Abbildung $u: M \rightarrow N$ ist die *singuläre Menge* von u , kurz $\text{Sing}(u)$, das Komplement der größten offenen Menge, auf der u stetig ist. Ihre Elemente heißen *Singularitäten* von u .

(b) Für eine *isolierte Punktsingularität* a von $u: M \rightarrow S^2$ ist

$$\deg_a(u) := \deg(u|_{S_a^2}),$$

wobei $S_a^2 \subset M \setminus \text{Sing}(u)$ der Rand einer Kugel von beliebig kleinem Radius mit Mittelpunkt a ist, in deren Innerem keine weitere Singularität von u liegt. Dabei gilt für die Wahl der Orientierungen auf S^2 und S_a^2 , dass genau dann $(\nu(x), \xi_1, \xi_2)$ in \mathbb{R}^3 positiv orientiert ist, wenn (ξ_1, ξ_2) in $T_x S^2$ bzw. $T_x S_a^2$ positiv orientiert ist. Dabei bezeichnet ν das äußere Einheitsnormalenfeld.

Bemerkung 2.9. (a) Wegen der Homotopieinvarianz hängt der Abbildungsgrad einer isolierten Singularität nicht von der gewählten Sphäre S_a^2 ab. Alternativ kann sogar eine beliebige zu S^2 homöomorphe Menge mit den entsprechenden Eigenschaften gewählt werden.

(b) Besitzt eine Abbildung $u: B^3 \rightarrow S^2$ endlich viele Singularitäten, die alle im Inneren von B^3 liegen, gilt

$$\deg(u|_{\partial B^3}) = \sum_{a \in \text{Sing}(u)} \deg_a(u).$$

2.2.2 Der mod-2-Abbildungsgrad für Abbildungen auf nicht-orientierbare Mannigfaltigkeiten

Die Bearbeitung des eingeschränkten Problems (\mathcal{P}') hat zur Folge, dass ein weiteres Konzept für den Abbildungsgrad benötigt wird, weil $S \cong \mathbb{R}P^2$ eine

nicht-orientierbare Mannigfaltigkeit ist. Da aber nach Lemma 2.2 eine Abbildung mit Werten in der nicht-orientierbaren Mannigfaltigkeit \mathcal{S} unter entsprechenden Voraussetzungen an den Definitionsbereich zu einer Abbildung mit Werten auf der orientierbaren Einheitssphäre S^2 geliftet werden kann, liegt es nahe den (klassischen) Abbildungsgrad des (nicht eindeutigen) Lifts ins Spiel zu bringen.

Die Schwierigkeit hierbei besteht in der genau entgegengesetzten Orientierungswirkung der beiden Lifts. Daher hätte eine naive Definition des Abbildungsgrades über den Lift zur Folge, dass beispielsweise die Identität auf \mathcal{S} gleichzeitig Abbildungsgrad $+1$ und -1 hätte, je nach Wahl des Lifts; vgl. auch die Diskussion in [BCL86, S. 687]. Angelehnt an eine Bemerkung in [Olu53, S. 462] und die Ausführungen in [MW97, §4] definiere stattdessen den $(\text{mod } 2)$ -Abbildungsgrad (lediglich für die in dieser Arbeit benötigte Situation).

Definition 2.10. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ beschränkt, einfach zusammenhängend und lokal weg-zusammenhängend.

- (a) Falls $R: \Omega \rightarrow \mathcal{S}$ stetig in Ω ist, so existiert der (stetige) Lift $n: \Omega \rightarrow S^2$. Daher setze

$$\deg(R) := \deg(n) \pmod{2}.$$

- (b) Für eine isolierte Singularität $a \in \text{Sing}(R)$ setze wie in Teil (b) von Definition 2.8

$$\deg_a(R) := \deg(R|_{S_a^2}) = \deg(n_{(a)}) \pmod{2},$$

wobei $n_{(a)}$ den auf der Sphäre $S_a^2 \subset \Omega$ existierenden (stetigen) Lift der stetigen Funktion $R|_{S_a^2}$ bezeichnet.

In beiden Fällen liegt der $(\text{mod } 2)$ -Abbildungsgrad in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Dieser Ansatz beseitigt die Abhängigkeit von der Auswahl des konkreten Lifts. Zusätzlich hat er den Vorteil, dass die Eigenschaften des klassischen Abbildungsgrads aus Satz 2.4, Satz 2.7 und Bemerkung 2.9 für den $(\text{mod } 2)$ -Abbildungsgrad erhalten bleiben, was in Kapitel 3 und Kapitel 5 ausgenutzt werden wird.

2.2.3 Dipole

Wie bereits angedeutet, ist ein zentrales Konzept der in Abschnitt 1.2 erwähnten Arbeiten [HL86] und [Riv95] über singuläre harmonische Abbildungen $u: B^3 \rightarrow S^2$ die Konstruktion von sogenannten Dipolen unter kontrolliertem Energieaufwand und unter Beibehaltung der Randwerte.

Ein klassischer Dipol, wie er in [BCL86] von H. Brézis, J.-M. Coron und E. H. Lieb eingeführt wurde, besteht aus einem Paar $(P, N) \in \text{Sing}(u)$ von Punktsingularitäten mit entgegengesetzter Orientierung in dem Sinne, dass die zugrunde liegende Abbildung $\deg_P(u) = d = -\deg_N(u)$ erfüllt, für ein positives $d \in \mathbb{N}$. Da in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ nicht zwischen $-d$ und $+d$ unterschieden werden

kann und außerdem für die gegebene Situation später lediglich klassische Dipole mit $d = 1$ eine Rolle spielen², wird für Abbildungen $R \in W^{1,2}(\Omega, \mathcal{S})$ mit Ω wie in Definition 2.10 festgelegt:

Definition 2.11. *Ein Paar $(P, N) \in \text{Sing}(R)$ von Punktsingularitäten mit dem (mod 2)-Abbildungsgrad $\deg_P(R) = \deg_N(R) = 1$ heißt Dipol für R , falls es einen offenen Kreiszyylinder $Z_q^2 \subset \Omega$ um P und N gibt,*

- (a) *der radialsymmetrisch um die Verbindungsstrecke $[P, N]$ ist,*
- (b) *dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt q der Verbindungsstrecke $[P, N]$ ist und*
- (c) *der keine weiteren Singularitäten von R enthält,*

sodass außerdem

- (d) *der (stetige) Lift $n_{(q)}$ von R , welcher auf $Z_q^2 \setminus \{P, N\}$ existiert, einen klassischen Dipol (P, N) besitzt, d.h. wenn gilt*

$$\pm \deg_P(n_{(q)}) = 1 = \mp \deg_N(n_{(q)}).$$

Mit dieser Definition eines Dipols für Mikro-Rotationen $R: \Omega \rightarrow \mathcal{S}$ im eingeschränkten Problem (\mathcal{P}') lässt sich nun untersuchen, unter welchen Voraussetzungen es möglich ist, Dipole in die Rotations-Komponente ursprünglich glatter Abbildungen $f = (\varphi, R) \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S})$ einzufügen.

²Schon in [BCL86] wird diese Einschränkung gemacht mit dem Hinweis, dass ein Dipol mit Grad $\pm d$ in ihren Konstruktionen durch d Dipole mit Grad ± 1 ersetzt wird; diese Dipole werden sozusagen gemäß Vielfachheit betrachtet.

3 Einfügen von Singularitäten bei kontrolliertem Energieaufwand

In Anbetracht der Resultate über das Einfügen von Punktsingularitäten in ursprünglich glatte Abbildungen im Kontext harmonischer Abbildungen kann man verschiedene Fragen stellen:

Wie viel Cosserat-Energie muss aufgewendet werden, um einen Dipol zu konstruieren? Wie stark verändert sich dadurch die ursprüngliche Abbildung? Und wie regulär ist die neue Abbildung noch im Vergleich zur alten? Eine Antwort auf all diese Fragen liefern die folgenden Aussagen. Sie sind zentral für die Methoden, mit denen später in Kapitel 5 nachgewiesen wird, dass es kritische Punkte der Cosserat-Energie mit einer beliebig großen (endlichen) Zahl diskreter Singularitäten gibt.

3.1 Ein Würfel-Lemma

Die erste der in Kapitel 3 vorgestellten Techniken basiert auf den Ausführungen für harmonische Abbildungen $u: B^3 \rightarrow S^2$ in [Tar00], welche ihrerseits das entsprechende Konzept aus [BC83] präzisieren.

Angepasst an das Cosserat-Modell in der vorliegenden Variante zeigt sie, wie man für Lipschitz-Abbildungen, welche auf dem Rand eines (kleinen) Würfels definiert sind, die topologische Eigenschaft des Abbildungsgrades unter kontrolliertem Energieaufwand verändert, wobei die Abbildung selbst lediglich in einer (noch kleineren) Kreisscheibe auf der Würfeloberseite modifiziert wird.

Mit ihrer Hilfe wird im Anschluss in Satz 3.3 für eine ursprünglich glatte Abbildung durch iteratives Vorgehen auf einer Quader-Würfel-Konstruktion ein (fixer) Dipol in zwei vorgegebenen Punkten $P, N \in \Omega$ erzeugt werden.

Lemma 3.1 (Würfel-Lemma). *Zu $\nu > 0$ sei $C_\nu = [-\nu, \nu]^2 \times [-2\nu, 0]$ und $f = (\varphi, R): \partial C_\nu \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}$ sei eine Lipschitz-Abbildung mit $\deg(R) = d_0$, wobei $d_0 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist.*

Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\alpha_0 \in (0, \nu)$, sodass für jedes $\alpha \in (0, \alpha_0)$ eine Lipschitz-Abbildung $f_\alpha = (\varphi, R_\alpha): \partial C_\nu \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}$ existiert, für welche gilt:

$$\deg(R_\alpha) = d_0 + 1 \pmod{2}, \quad (3.1)$$

$$f_\alpha = (\varphi, R_\alpha) = (\varphi, R) = f \text{ auf } \partial C_\nu \setminus (B_\alpha^2 \times \{0\}) \quad (3.2)$$

und

$$\int_{B_\alpha^2 \times \{0\}} 2 \cdot |R_\alpha^T D\varphi - I_3|^2 + |DR_\alpha|^2 d\mathcal{H}^2 < 64\pi + \varepsilon. \quad (3.3)$$

Zusätzlich ist auf $(B_\alpha^2 \setminus B_{\frac{\alpha}{2}}^2) \times \{0\}$

$$|DR_\alpha| \leq \text{const} \quad (3.4)$$

und auf $B_{\frac{\alpha}{2}}^2 \times \{0\}$ gilt

$$|DR_\alpha(x, y, 0)|^2 = \frac{64\alpha^4}{(\alpha^4 + x^2 + y^2)^2}. \quad (3.5)$$

Beweis. Da der Würfelrand ∂C_ν eine beschränkte, einfach zusammenhängende und lokal weg-zusammenhängende Menge ist, kann die gegebene Lipschitz-Abbildung $R: \partial C_\nu \rightarrow \mathcal{S}$ nach Lemma 2.2 geliftet werden. Zu der bekannten Überlagerung F von \mathcal{S} existieren daher exakt zwei stetige Abbildungen

$$n_i: \partial C_\nu \rightarrow S^2 \text{ mit } R = F \circ n_i, \quad (3.6)$$

für $i = 1, 2$, wobei $n_1 = -n_2$ gilt. Wähle eine dieser Abbildungen und fixiere o.E. $n := n_1$. Dann ist $d_0 = \deg(R) = \deg(n) \pmod{2}$. Dieser Abbildungsgrad von n sei mit c_0 bezeichnet, sodass sich $d_0 = c_0 \pmod{2}$ schreiben lässt. Wegen der in Lemma 2.1 nachgewiesenen Homothetie-Eigenschaft von F gilt für jeden beliebigen Tangentialvektor $V \in T_p(\partial C_\nu)$

$$|DR_p(V)|^2 = |DF_{n(p)}(Dn_p(V))|^2 = 8 \cdot |Dn_p(V)|^2. \quad (3.7)$$

Die gewählte fixierte Abbildung n kann nun wie in [Tar00, S. 33] für jedes $\varepsilon > 0$ wie folgt modifiziert werden: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $0 < \alpha_0 < \nu$, sodass es für jedes $0 < \alpha < \alpha_0$ eine Lipschitz-Abbildung $n_\alpha: \partial C_\nu \rightarrow S^2$ gibt, für die gilt

$$\deg(n_\alpha) = c_0 + 1, \quad (3.8)$$

$$n_\alpha = n \text{ auf } \partial C_\nu \setminus (B_\alpha^2 \times \{0\}) \quad (3.9)$$

und
$$\int_{B_\alpha^2 \times \{0\}} |Dn_\alpha|^2 d\mathcal{H}^2 = 8\pi + \mathcal{O}(\alpha^2), \text{ bei } \alpha \searrow 0, \quad (3.10)$$

sowie
$$|Dn_\alpha| \leq \text{const}, \text{ auf } (B_\alpha^2 \setminus B_{\frac{\alpha}{2}}^2) \times \{0\} \quad (3.11)$$

und
$$|Dn_\alpha(x, y, 0)|^2 = \frac{8\alpha^4}{(\alpha^4 + x^2 + y^2)^2}, \text{ auf } B_{\frac{\alpha}{2}}^2 \times \{0\}. \quad (3.12)$$

Kurz gesagt wird der Abbildungsgrad des Lifts n um $+1$ erhöht, ohne dass der Lift selbst außerhalb von $B_\alpha^2 \times \{0\}$ verändert wird. Dies geschieht unter kontrolliertem Energieaufwand.

Nun definiere $R_\alpha := F \circ n_\alpha$, damit ist

$$R_\alpha = F \circ n_\alpha = F \circ n = R \text{ auf } \partial C_\nu \setminus (B_\alpha^2 \times \{0\})$$

und

$$\deg(R_\alpha) = \deg(n_\alpha) \pmod{2} = c_0 + 1 \pmod{2} = d_0 + 1 \pmod{2}.$$

Die Eigenschaften (3.4) und (3.5) folgen wegen (3.7) direkt aus (3.11) und (3.12).

Für den von der Deformation stammenden Teil der Cosserat-Energie von f_α lässt sich

$$|R_\alpha^T D\varphi - I_3|^2 = \mathcal{O}(1), \text{ bei } \alpha \searrow 0, \quad (3.13)$$

festhalten, da R_α ein Element in $\mathcal{S} \subset SO(3)$ ist, φ Lipschitz-stetig nach Voraussetzung ist sowie I_3 konstant ist. Damit gilt ebenfalls mit (3.7)

$$\begin{aligned} & \int_{B_\alpha^2 \times \{0\}} 2 |R_\alpha^T D\varphi - I_3|^2 + |DR_\alpha|^2 \, d\mathcal{H}^2 \\ &= \int_{B_\alpha^2 \times \{0\}} 2 \cdot |R_\alpha^T D\varphi - I_3|^2 + 8 \cdot |Dn_\alpha|^2 \, d\mathcal{H}^2 \\ &= 64\pi + \mathcal{O}(\alpha^2), \text{ bei } \alpha \searrow 0. \end{aligned}$$

Daher kann α_0 so klein gewählt werden, dass für alle $\alpha < \alpha_0$ gilt:

$$\int_{B_\alpha^2 \times \{0\}} 2 \cdot |R_\alpha^T D\varphi - I_3|^2 + |DR_\alpha|^2 \, d\mathcal{H}^2 < 64\pi + \varepsilon.$$

□

Bemerkung 3.2. Der Vorfaktor 2 vor dem ersten Summanden des Integrandes aus (3.3) ist lediglich der Tatsache geschuldet, dass die Cosserat-Energieabschätzung genau in dieser Form im nächsten Abschnitt benötigt wird. Wie aus dem Beweis, s. (3.13), deutlich wird, kann das Würfel-Lemma an sich problemlos mit dem Vorfaktor 1 vor der Deformationsenergiedichte formuliert werden.

3.2 Konstruktion von Dipolen

Das Würfel-Lemma (Lemma 3.1) soll nun genutzt werden, um Dipole zu konstruieren. Ähnlich wie F. Béthuel in [Bét90] eine Technik zum „Entfernen“ von Singularitätenpaaren vorstellt, kann mit analogen Überlegungen und obigem Lemma ein Dipol in eine gegebene glatte Abbildung $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S})$ eingefügt werden, ohne dabei die Cosserat-Energie der Abbildung zu stark zu verändern. Dabei orientiert sich das Vorgehen wieder stark an den Ausführungen zu Béthuels Technik der Singularitäten-Entfernung in [Tar00] mit Anpassungen an das Cosserat-Modell und an die umgekehrte Arbeitsrichtung (Einfügen statt Entfernen).

Satz 3.3 (Fixer Dipol). *Für eine einfach zusammenhängende und lokal weg-zusammenhängende, beschränkte Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ seien $P, N \in \Omega$, zwei distinkte Punkte mit Verbindungsstrecke $[P, N] \subset \Omega$. Dann gilt:*

Zu jedem $f = (\varphi, R) \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S})$ existiert eine Folge von Abbildungen

$$f_m = (\varphi_m, R_m) \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}) \cap C^\infty(\Omega \setminus \{P, N\}, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S})$$

mit Dipol (P, N) in den Rotationskomponenten R_m , d.h. insbesondere

$$\deg_P(R_m) = 1 = \deg_N(R_m). \quad (3.14)$$

Diese Abbildungen f_m stimmen jeweils außerhalb einer Umgebung K_m der Verbindungsstrecke $[P, N]$ mit f überein und erfüllen

$$K_m \longrightarrow [P, N], \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{im Hausdorff-Abstand,} \quad (3.15)$$

sowie die Energie-Abschätzung

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{J}_\Omega(f_m) \leq \mathcal{J}_\Omega(f) + 64\pi \cdot |P - N|. \quad (3.16)$$

Beweis. Der Beweis gliedert sich in drei Abschnitte: Zuerst wird mithilfe einer Quader-Würfel-Konstruktion die Stärke des Würfel-Lemmas (Lemma 3.1) ausgenutzt, um sukzessive einzelne Singularitäten in die Mikro-Rotation einzufügen. Dadurch ergibt sich zunächst eine Folge von Lipschitz-Abbildungen mit jeweils mehr als zwei Singularitäten.

Im zweiten Schritt wird gezeigt, dass diese Folge die behauptete Kontrolle über die Cosserat-Energie liefert und schließlich wird zuletzt nachgewiesen, dass diese Folge durch eine Folge von Abbildungen ersetzt werden kann, welche bis auf den gewünschten Dipol glatt sind. Des Weiteren bleiben die vorher nachgewiesenen Eigenschaften erhalten.

1. Schritt: Konstruktion. Sei $\kappa := |P - N|$. Ohne Einschränkung wähle orthonormale Koordinaten auf Ω so, dass $P = (0, 0, 0)$ und $N = (0, 0, \kappa)$. Für natürliche Zahlen $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, definiere

$$a_m := \frac{\kappa}{2(m-1)} \quad \text{und} \quad K_m := [-a_m, a_m]^2 \times [-a_m, \kappa + a_m].$$

Dann ist $(K_m)_m$ für alle hinreichend großen $m \geq m_0 \gg 1$ eine Folge ineinander enthaltener Quader um die Verbindungsstrecke $[P, N]$, welche jeweils ganz in Ω liegen. Nach Konstruktion konvergiert diese Folge von Quadern im Hausdorff-Abstand gegen $[P, N]$.

Nun wird für jedes feste $m \geq m_0$ der Quader K_m in exakt m Würfel C_m^j der Kantenlänge $2a_m$ aufgeteilt:

$$C_m^j := [-a_m, a_m]^2 \times [(-1 + 2j)a_m, (1 + 2j)a_m], \quad j = 0, \dots, m-1.$$

Da $f = (\varphi, R)$ nach Voraussetzung auf Ω glatt ist und daher die Summanden der Cosserat-Energiedichte $|R^T \cdot D\varphi - I|^2$ und $|DR|^2$ beschränkt sind auf dem kompakten Quader K_{m_0} (und jedem weiteren Quader), halte als Erstes für jedes $j = 0, \dots, m-1$ fest, dass für die Würfelränder ∂C_m^j gilt:

$$\int_{\partial C_m^j} |R^T D\varphi - I|^2 + |DR|^2 d\mathcal{H}^2 \leq \gamma \cdot a_m^2, \quad (3.17)$$

für eine Konstante $\gamma \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Sei nun $0 < \varepsilon \ll 1$ beliebig. Aufgrund der Voraussetzungen an die Menge Ω kann $R \in C^\infty(\Omega, \mathcal{S})$ nach Lemma 2.2 glatt geliftet werden. Das bedeutet, es existiert eine von hier an fest gehaltene Abbildung $n \in C^\infty(\Omega, S^2)$ mit $R = F \circ n$.

Wende die Konstruktion aus dem Beweis des Würfel-Lemmas (vgl. auch (3.8) – (3.12)) auf den untersten Würfel C_m^0 und die Abbildung $n|_{\partial C_m^0}$ mit $\deg(n|_{\partial C_m^0}) = 0$ an.

Beachte: Bei den folgenden iterativen Nutzungen des Würfel-Lemmas (Lemma 3.1) entspricht die Oberseite $[-a_m, a_m]^2 \times \{(1+2j)a_m\}$ des Würfels C_m^j jeweils der Oberseite $[-\nu, \nu]^2 \times \{0\}$ des Würfels C_ν aus Lemma 3.1.

So erhalte zu $\alpha_0 (= \alpha_0(C_m^0)) < a_m$ für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $0 < \alpha < \alpha_0$ eine Lipschitz-Abbildung

$$n_{m,\alpha}^0: \partial C_m^0 \rightarrow S^2$$

mit

$$\deg(n_{m,\alpha}^0) = 0 + 1 = 1, \quad (3.18)$$

$$n_{m,\alpha}^0 = n \text{ auf } \partial C_m^0 \setminus (B_\alpha^2 \times \{a_m\}) \quad (3.19)$$

und mit

$$\int_{B_\alpha^2 \times \{a_m\}} |Dn_{m,\alpha}^0|^2 d\mathcal{H}^2 < 8\pi + \mathcal{O}(\alpha^2), \text{ bei } \alpha \searrow 0. \quad (3.20)$$

Des Weiteren erfüllt $n_{m,\alpha}^0$ die zu (3.4) analoge Abschätzung

$$|Dn_{m,\alpha}^0| \leq \text{const auf } (B_\alpha^2 \setminus B_{\frac{\alpha}{2}}^2) \times \{a_m\} \quad (3.21)$$

und die zu (3.5) analoge Gleichung auf $B_{\frac{\alpha}{2}}^2 \times \{a_m\}$:

$$|Dn_{m,\alpha}^0(x, y, a_m)|^2 = \frac{8\alpha^4}{(\alpha^4 + x^2 + y^2)^2}. \quad (3.22)$$

Nach dieser Konstruktion stimmt $n_{m,\alpha}^0$ auf $\partial C_m^0 \cap \partial K_m$ mit n überein.

Betrachte jetzt den nächsten Würfel

$$C_m^1 = [-a_m, a_m]^2 \times [a_m, 3a_m]$$

und für jedes $\alpha \in (0, \alpha_0)$ die Lipschitz-Abbildung

$$\begin{aligned} w_{m,\alpha}^0 &= \begin{cases} n_{m,\alpha}^0 & \text{auf } \partial C_m^0 \cap \partial C_m^1 = [-a_m, a_m]^2 \times \{a_m\} \\ n & \text{auf } \partial C_m^1 \setminus ([-a_m, a_m]^2 \times \{a_m\}) \end{cases} \\ &= \begin{cases} n_{m,\alpha}^0 & \text{auf } B_\alpha^2 \times \{a_m\} \\ n & \text{auf } \partial C_m^1 \setminus (B_\alpha^2 \times \{a_m\}). \end{cases} \end{aligned}$$

Da die Orientierung von $B_\alpha^2 \times \{a_m\}$ in ∂C_m^1 entgegengesetzt zu derjenigen in ∂C_m^0 ist, gilt für $w_{m,\alpha}^0$

$$\deg(w_{m,\alpha}^0) = -1.$$

Erneute Anwendung des Würfel-Lemmas (Lemma 3.1) auf der Ebene des geänderten Lifts $w_{m,\alpha}^0$, in exakt der gleichen Art und Weise wie zuvor, liefert zu $\alpha_1 = \min\{\alpha_0, \alpha_1(C_m^1)\}$ für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $0 < \alpha < \alpha_1$ eine neue Lipschitz-Abbildung

$$n_{m,\alpha}^1: \partial C_m^1 \rightarrow S^2,$$

welche erfüllt, dass

$$\begin{aligned} \deg(n_{m,\alpha}^1) &= -1 + 1 = 0, \\ n_{m,\alpha}^1 &= n \text{ auf } \partial C_m^1 \cap \partial K_m \end{aligned} \tag{3.23}$$

und

$$\int_{B_\alpha^2 \times \{3a_m\}} |Dn_{m,\alpha}^1|^2 d\mathcal{H}^2 < 8\pi + \mathcal{O}(\alpha^2), \text{ bei } \alpha \searrow 0 \tag{3.24}$$

gelten, sowie dass die analoge Abschätzung zu (3.21) auf $(B_\alpha^2 \setminus B_{\frac{\alpha}{2}}^2) \times \{3a_m\}$ und die analoge Gleichung zu (3.22) auf $B_{\frac{\alpha}{2}}^2 \times \{3a_m\}$ gelten.

Diese Art des Vorgehens wird solange schrittweise auf dem jeweils nächsten Würfel $C_m^2, C_m^3, \dots, C_m^{m-2}$ wiederholt, bis auf den Rändern aller „inneren“ Würfel ∂C_m^j , $j = 1, \dots, m-2$, für jedes $\alpha < \alpha_{m-2} = \min_{j=0, \dots, m-2} \{\alpha_j(C_m^j)\}$ eine Lipschitz-Abbildung $n_{m,\alpha}^j$ mit Abbildungsgrad $\deg(n_{m,\alpha}^j) = 0$ und den (3.20) – (3.22) entsprechenden Eigenschaften definiert ist.

Für den obersten Würfel C_m^{m-1} definiere schließlich für jedes $\alpha < \alpha_{m-2}$ die Lipschitz-Abbildung

$$n_{m,\alpha}^{m-1}: \partial C_m^{m-1} \rightarrow S^2$$

gemäß

$$n_{m,\alpha}^{m-1} := \begin{cases} n_{m,\alpha}^{m-2} & \text{auf } \partial C_m^{m-2} \cap \partial C_m^{m-1} \\ n & \text{auf } \partial C_m^{m-1} \setminus (\partial C_m^{m-2} \cap \partial C_m^{m-1}). \end{cases}$$

Dann ist (wieder aus Orientierungsgründen) $\deg(n_{m,\alpha}^{m-1}) = -1$.

Als Gesamtergebnis der Konstruktion erhalte somit für jedes $\alpha < \alpha_{m-2}$ eine Lipschitz-Abbildung

$$n_{m,\alpha}: \bigcup_{j=0}^{m-1} \partial C_m^j \rightarrow S^2$$

mit

$$\left. \begin{aligned} \deg(n_{m,\alpha}|_{\partial C_m^0}) &= 1 = -\deg(n_{m,\alpha}|_{\partial C_m^{m-1}}), \\ \deg(n_{m,\alpha}|_{\partial C_m^j}) &= 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, m-2, \\ n_{m,\alpha} &= n \quad \text{auf } \partial K_m. \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

Diese Abbildungen erfüllen für jedes $j = 0, \dots, m-2$:

$$(i) \quad \int_{B_\alpha^2 \times \{(1+2j)a_m\}} |Dn_{m,\alpha}|^2 d\mathcal{H}^2 < 8\pi + \mathcal{O}(\alpha^2), \text{ bei } \alpha \searrow 0,$$

$$(ii) \quad |Dn_{m,\alpha}| \leq \text{const} \quad \text{auf } \left(B_\alpha^2 \setminus B_{\frac{\alpha}{2}}^2\right) \times \{(1+2j)a_m\},$$

$$(iii) \quad |Dn_{m,\alpha}(x, y, (1+2j)a_m)|^2 = \frac{8\alpha^2}{(\alpha^4 + x^2 + y^2)^2}, \quad \text{für } (x, y) \in B_{\frac{\alpha}{2}}^2.$$

Für jedes $\alpha < \alpha_{m-2}$ wird nun die so auf den Würfelrändern $\bigcup_{j=0}^{m-1} \partial C_m^j$ definierte Abbildung $n_{m,\alpha}$ mittels radialer Retraktion auf das jeweilige Würfelinnere fortgesetzt: Bezeichnet $c_j = (0, 0, 2ja_m)$ für $j = 0, \dots, m-1$ den Mittelpunkt von C_m^j ($c_0 = P, c_{m-1} = N$), so ist die Retraktion für C_m^j gegeben durch

$$\pi_m^j(x) = \frac{x - c_j}{|x - c_j|_\infty} \cdot a_m + c_j,$$

wobei $|x - c_j|_\infty = \max_{i=1,2,3} |x_i - (c_j)_i|$.

Das bedeutet, für festes $m \geq m_0$ und $\alpha \in (0, \alpha_{m-2})$ ergibt sich die Lipschitz-Abbildung $\tilde{n}_{m,\alpha} \in W^{1,2}(K_m, S^2)$, $\tilde{n}_{m,\alpha}(x) := (n_{m,\alpha} \circ \pi_m^j)(x)$ für alle $x \in C_m^j$.

Somit erhalte schließlich insgesamt eine Abbildung $\tilde{f}_{m,\alpha} \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S})$ mit

$$\tilde{f}_{m,\alpha} = (\tilde{\varphi}_{m,\alpha}, \tilde{R}_{m,\alpha}) := \begin{cases} (\varphi, R) = f, & \text{in } \Omega \setminus K_m \\ f_{m,\alpha} \circ \pi_m^j, & \text{in } K_m \end{cases}$$

und mit der Festlegung

$$f_{m,\alpha}: \bigcup_{j=0}^{m-1} \partial C_m^j \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}, \quad f_{m,\alpha} = (\varphi, R_{m,\alpha}) := (\varphi, F \circ n_{m,\alpha}).$$

Dabei hat die erste Komponente $\tilde{\varphi}_{m,\alpha}$ im ganzen Quader K_m insgesamt m Punkt-Singularitäten c_0, \dots, c_{m-1} , jeweils vom Grad 0. Die zweite Komponente $\tilde{R}_{m,\alpha}$ besitzt $m-2$ Punkt-Singularitäten c_1, \dots, c_{m-2} vom (mod 2)-Grad 0 und es gilt

$$\deg_P(\tilde{R}_{m,\alpha}) = 1 = \deg_N(\tilde{R}_{m,\alpha}).$$

Wie zu Beginn erwähnt, bleibt in einem nächsten Schritt zu zeigen, dass $\tilde{f}_{m,\alpha}$ die gewünschten Abschätzungen an die Cosserat-Energie erfüllt. Weiterhin müssen passende Approximationsargumente die behauptete Glattheit außerhalb von $\{P, N\}$ liefern, ohne die Energieabschätzungen zu beeinflussen.

2. Schritt: Abschätzung der Cosserat-Energie. Dieser Schritt folgt eng den Berechnungen in [Tar00, S. 35–38]. Bemerke, dass in den folgenden Rechnungen verschiedene Konstanten in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ immer mit demselben Buchstaben γ bezeichnet werden.

Zur Abschätzung des Cosserat-Energieaufwands $\mathcal{J}_{K_m}(\tilde{f}_{m,\alpha})$ im Quader K_m unterteile jeden der m Würfel C_m^j von K_m jeweils in die folgenden sechs disjunkten Teilmengen:

$$\begin{aligned} & B_{a_m}^3(c_j), \\ & A_m^j = (C_m^j \setminus B_{a_m}^3(c_j)) \cap (\pi_m^j)^{-1} \left(B_{\frac{\alpha}{2}}^2 \times \{(-1+2j)a_m\} \right), \\ & D_m^j = (C_m^j \setminus B_{a_m}^3(c_j)) \cap (\pi_m^j)^{-1} \left(B_{\frac{\alpha}{2}}^2 \times \{(1+2j)a_m\} \right), \\ & E_m^j = (C_m^j \setminus B_{a_m}^3(c_j)) \cap (\pi_m^j)^{-1} \left((B_{\alpha}^2 \setminus B_{\frac{\alpha}{2}}^2) \times \{(-1+2j)a_m\} \right), \\ & F_m^j = (C_m^j \setminus B_{a_m}^3(c_j)) \cap (\pi_m^j)^{-1} \left((B_{\alpha}^2 \setminus B_{\frac{\alpha}{2}}^2) \times \{(1+2j)a_m\} \right) \end{aligned}$$

und den Rest

$$G_m^j = C_m^j \setminus (B_{a_m}^3(c_j) \cup A_m^j \cup D_m^j \cup E_m^j \cup F_m^j).$$

Für die nötigen Rechnungen in der Kugel $B_{a_m}^3(c_j)$ nutzt man, dass eine allgemeine radiale Projektion π bzgl. eines Punktes $Q = (0, 0, q) \in \mathbb{R}^3$ auf $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2 \times \{0\}$, $\pi(x) = Q + \frac{q}{q-x_3}(x-Q)$, mit den Bezeichnungen $B_{\beta}^2 = \{y \in \mathbb{R}^2 : |y| < \beta\}$ und $\Gamma_{\beta,q} = \pi^{-1}(B_{\beta}^2) \cap S_q^2$, die folgenden Eigenschaften besitzt: π bildet Breitenkreise von $\Gamma_{\beta,q}$ auf Kreise um 0 ab und Meridiane von $\Gamma_{\beta,q}$ auf Radien in B_{β}^2 . Dabei wird der Breitenkreis um einen Punkt x um den Faktor $\sqrt{1 + \frac{r^2}{q^2}}$, der Meridian um den Faktor $1 + \frac{r^2}{q^2}$ gestreckt, wobei $r = |\pi(x)|$ gesetzt ist. Damit gelten

$$|D\pi(x)|^2 = 1 + \frac{r^2}{q^2} + \left(1 + \frac{r^2}{q^2}\right)^2 \quad \text{und} \quad \text{Jac}(\pi)(x) = \left(1 + \frac{r^2}{q^2}\right)^{\frac{3}{2}} \geq 1,$$

also

$$\text{Jac}^{-1}(\pi)(x) \leq 1 \quad \text{und} \quad \text{Lip}(\pi|_{\Gamma_{\beta,q}})(x) = 1 + \frac{r^2}{q^2} \leq 3.$$

Diese Eigenschaften werden in den folgenden Abschätzungen an unterschiedlichen Stellen ausgenutzt.

Zunächst folgt damit aber für die aufgewendete Cosserat-Energie in der Kugel $B_{a_m}^3(c_j)$ mit Radius a_m um den Mittelpunkt c_j des Würfels C_m^j für $j = 0, \dots, m-1$:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{J}_{B_{a_m}^3(c_j)}(\tilde{f}_{m,\alpha}) \\
&= \int_{B_{a_m}^3(c_j)} |(R_{m,\alpha} \circ \pi_m^j)^T \cdot D(\varphi \circ \pi_m^j) - I_3|^2 + |D(R_{m,\alpha} \circ \pi_m^j)|^2 \, d\mathcal{L}^3 \\
&= \int_0^{a_m} \int_{S_\rho^2(c_j)} |(R_{m,\alpha} \circ \pi_m^j)^T \cdot D(\varphi \circ \pi_m^j) - I_3|^2 + |D(R_{m,\alpha} \circ \pi_m^j)|^2 \, d\mathcal{H}^2 \, d\rho \\
&\leq \gamma a_m^3 + \text{Lip}^2\left(\pi_m^j|_{S_\rho^2(c_j)}\right) \int_0^{a_m} \int_{\partial C_m^j} \left\{ 2 |R_{m,\alpha}^T D\varphi - I_3|^2 \right. \\
&\quad \left. + |DR_{m,\alpha}|^2 \right\} \cdot \text{Jac}^{-1}(\pi_{m,j}^j|_{S_\rho^2(c_j)}) \, d\mathcal{H}^2 \, d\rho \\
&\stackrel{(*)}{\leq} \gamma a_m^3 + 9a_m \cdot 2 \cdot \int_{\partial C_m^j \setminus (B_\alpha^2 \times \{(-1+2j)a_m, (1+2j)a_m\})} |R^T D\varphi - I_3|^2 + |DR|^2 \, d\mathcal{H}^2 \\
&\quad + a_m \cdot \int_{B_\alpha^2 \times \{(-1+2j)a_m, (1+2j)a_m\}} \underbrace{\left(1 + \frac{|y|^2}{a_m^2}\right)^2}_{\leq \left(1 + \frac{\alpha^2}{a_m^2}\right)^2} \left\{ 2 |R_{m,\alpha}^T D\varphi - I_3|^2 + |DR_{m,\alpha}|^2 \right\} \, d\mathcal{H}^2(y) \\
&\leq \gamma a_m^3 + 18a_m \int_{\partial C_m^j} |R^T D\varphi - I_3|^2 + |DR|^2 \, d\mathcal{H}^2 + 2a_m \left(1 + \frac{\alpha^2}{a_m^2}\right)^2 (64\pi + \varepsilon) \\
&\leq \gamma a_m^3 + 2a_m \left(1 + \frac{\alpha^2}{a_m^2}\right)^2 (64\pi + \varepsilon). \tag{3.26}
\end{aligned}$$

Beachte: Genau genommen gilt die Abschätzung bei (*) in dieser Form lediglich für die „inneren“ Würfel C_m^1, \dots, C_m^{m-2} . Für die Würfel C_m^0 und C_m^{m-1} müsste ∂C_m^0 in die Oberseiten-Kreisscheibe $B_\alpha^2 \times \{a_m\}$ und deren Komplement in ∂C_m^0 aufgeteilt werden, ∂C_m^{m-1} hingegen in die Unterseiten-Kreisscheibe $B_\alpha^2 \times \{(2m-3)a_m\}$ und deren Komplement in ∂C_m^{m-1} . Dadurch erhält man als Vorfaktoren im zweiten und dritten Summanden $9a_m$ und $1a_m$, die aber nach oben ebenfalls durch $18a_m$ und $2a_m$ abgeschätzt werden können.

Gegebenenfalls mit einer zusätzlichen Einschränkung an α_{m-2} wie zum Ende des Beweises von Lemma 3.1 auf Seite 19 nutzt man dabei zur Herleitung von (3.26) außerdem die Homothetie-Eigenschaft aus Lemma 2.1, vgl. (3.7), in Kombination mit (3.17) sowie den Ausführungen (i)–(iii) nach (3.25).

Für die Energieabschätzung in der Menge G_m^j sei bemerkt, dass für alle $x \in G_m^j$ $\tilde{f}_{m,\alpha}(x) = (f \circ \pi_m^j)(x)$ gilt, weswegen sofort

$$\mathcal{J}_{G_m^j}(\tilde{f}_{m,\alpha}) = \int_{G_m^j} |(R \circ \pi_m^j)^T \cdot D(\varphi \circ \pi_m^j) - I_3|^2 + |D(R \circ \pi_m^j)|^2 \, d\mathcal{L}^3 \leq \gamma a_m^3 \tag{3.27}$$

festgehalten werden kann, da $(R \circ \pi_m^j)$ in der Untermannigfaltigkeit $\mathcal{S} \subset SO(3)$ liegt, $D\varphi$, I_3 sowie DR beschränkt sind und die Retraktion π_m^j in der Menge $C_m^j \setminus B_{a_m}^3$ Lipschitz-stetig ist.

Genauso erhalte aufgrund der Art der Konstruktion wegen

$$\tilde{f}_{m,\alpha} = f \circ \pi_m^0 \text{ auf } A_m^0 \cup E_m^0 \quad \text{und} \quad \tilde{f}_{m,\alpha} = f \circ \pi_m^{m-1} \text{ auf } D_m^{m-1} \cup F_m^{m-1}$$

die Abschätzung

$$\mathcal{J}_{A_m^0 \cup E_m^0 \cup D_m^{m-1} \cup F_m^{m-1}}(\tilde{f}_{m,\alpha}) \leq \gamma a_m^3. \quad (3.28)$$

Mit ähnlicher Argumentation, in Kombination mit den zu (3.21) analogen Abschätzungen, gelten außerdem auch

$$\mathcal{J}_{E_m^j}(\tilde{f}_{m,\alpha}) \leq \gamma a_m^3, \quad j = 1, \dots, m-1 \quad (3.29)$$

und

$$\mathcal{J}_{F_m^j}(\tilde{f}_{m,\alpha}) \leq \gamma a_m^3, \quad j = 0, \dots, m-2. \quad (3.30)$$

Schließlich fehlen noch die Abschätzungen für die Mengen A_m^j ($j \neq 0$) sowie die Mengen D_m^j ($j \neq m-1$). Die Argumentation ist hier lediglich für die ersteren ausgeführt, für letztere jedoch aus Symmetriegründen vollkommen analog gültig.

Für $j = 1, \dots, m-1$ ist auf A_m^j nach Konstruktion

$$\tilde{R}_{m,\alpha} = R_{m,\alpha} \circ \pi_m^j = F \circ n_{m,\alpha} \circ \pi_m^j = F \circ \tilde{n}_{m,\alpha}.$$

Aufgrund der radialen Konstanz von $\tilde{n}_{m,\alpha}$ in $(x_1, x_2, 2ja_m - x_3)$ -Richtung gilt die Beziehung

$$\begin{aligned} 0 &\equiv x_1 \frac{\partial \tilde{n}_{m,\alpha}}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \tilde{n}_{m,\alpha}}{\partial x_2} + (2ja_m - x_3) \frac{\partial \tilde{n}_{m,\alpha}}{\partial x_3} \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial \tilde{n}_{m,\alpha}}{\partial x_3} &= \frac{x_1}{x_3 - 2ja_m} \frac{\partial \tilde{n}_{m,\alpha}}{\partial x_1} + \frac{x_2}{x_3 - 2ja_m} \frac{\partial \tilde{n}_{m,\alpha}}{\partial x_2} \\ \Rightarrow \quad |\mathrm{D}\tilde{n}_{m,\alpha}(x)|^2 &= \left(1 + \left(\frac{x_1}{x_3 - 2ja_m} \right)^2 \right) \left| \frac{\partial \tilde{n}_{m,\alpha}}{\partial x_1} \right|^2 \\ &\quad + \left(1 + \left(\frac{x_2}{x_3 - 2ja_m} \right)^2 \right) \left| \frac{\partial \tilde{n}_{m,\alpha}}{\partial x_2} \right|^2 \\ &\quad + 2 \frac{x_1 x_2}{(x_3 - 2ja_m)^2} \frac{\partial \tilde{n}_{m,\alpha}}{\partial x_1} \frac{\partial \tilde{n}_{m,\alpha}}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

Da im betrachteten Bereich $x_1^2 + x_2^2 \leq (x_3 - 2ja_m)^2$ gilt, folgt daraus unmittelbar unter Beachtung von (3.12) bzw. (3.22) die Abschätzung

$$\begin{aligned}
|\mathrm{D}(n_{m,\alpha} \circ \pi_m^j)(x)|^2 &\leq 3 \cdot \left(\left| \frac{\partial \tilde{n}_{m,\alpha}}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial \tilde{n}_{m,\alpha}}{\partial x_2} \right|^2 \right) \\
&= 3 \cdot \left(\frac{a_m}{x_3 - 2ja_m} \right)^2 \cdot \left| \mathrm{D}n_{m,\alpha|B_{\frac{\alpha}{2}} \times \{(-1+2j)a_m\}}(\pi_m^j(x)) \right|^2 \\
&\leq 6 \cdot \frac{8\alpha^4}{\left(\alpha^4 + (\pi_m^j(x))_1^2 + (\pi_m^j(x))_2^2 \right)^2}.
\end{aligned}$$

Mit der Transformation

$$\begin{aligned}
\xi &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 2ja_m)^2}, \\
y_1 &= (\pi_m^j(x))_1 = \frac{a_m}{|x_3 - 2ja_m|} \cdot x_1 = \frac{a_m}{\sqrt{\xi^2 - x_1^2 - x_2^2}} \cdot x_1, \\
y_2 &= (\pi_m^j(x))_2 = \frac{a_m}{|x_3 - 2ja_m|} \cdot x_2 = \frac{a_m}{\sqrt{\xi^2 - x_1^2 - x_2^2}} \cdot x_2, \\
\eta^2 &= y_1^2 + y_2^2
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
dx_1 dx_2 dx_3 &= \frac{\xi}{x_3 - 2ja_m} dx_1 dx_2 d\xi \\
&= \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - x_1^2 - x_2^2}} \cdot \frac{(\xi^2 - x_1^2 - x_2^2)^2}{\xi^2 a_m^2} dy_1 dy_2 d\xi \\
&= \frac{\xi^2 a_m}{(a_m^2 + y_1^2 + y_2^2)^{\frac{3}{2}}} dy_1 dy_2 d\xi \\
&= \frac{\xi^2 a_m \eta}{(a_m^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} d\eta d\vartheta d\xi
\end{aligned}$$

erhalte letztlich (für $j = 1, \dots, m-1$) mit der Beschränktheit des ersten zu integrierenden Summanden wie bei (3.27) und mit Lemma 2.1, vgl. (3.7):

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{A_m^j}(\tilde{f}_{m,\alpha}) &= \int_{A_m^j} |(R_{m,\alpha} \circ \pi_m^j)^T \cdot \mathrm{D}(\varphi \circ \pi_m^j) - I_3|^2 + |\mathrm{D}(R_{m,\alpha} \circ \pi_m^j)|^2 d\mathcal{L}^3 \\
&\leq \gamma a_m^3 + \int_{A_m^j} |\mathrm{D}(F \circ (n_{m,\alpha} \circ \pi_m^j))|^2 d\mathcal{L}^3 \\
&= \gamma a_m^3 + 8 \cdot \int_{A_m^j} |\mathrm{D}(n_{m,\alpha} \circ \pi_m^j)|^2 d\mathcal{L}^3 \\
&\leq \gamma a_m^3 + 8 \cdot 48\alpha^4 \cdot \int_0^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^{\frac{\alpha}{2}} \int_{a_m}^{\sqrt{\eta^2 + a_m^2}} \frac{1}{(\alpha^4 + \eta^2)^2} \cdot \frac{\xi^2 a_m \eta}{(a_m^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} d\xi d\eta d\vartheta \\
&= \gamma a_m^3 + 8 \cdot 32\pi\alpha^4 \cdot \int_0^{\frac{\alpha}{2}} \frac{a_m \eta}{(\alpha^4 + \eta^2)^2} \cdot \frac{(a_m^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}} - a_m^3}{(a_m^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} d\eta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \gamma a_m^3 + 8 \cdot 32\pi\alpha^4 \cdot \int_0^{\frac{\alpha}{2}} \frac{a_m\eta}{(\alpha^4 + \eta^2)^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\eta}{a_m}\right)^2\right)^{3/2}}\right) d\eta \\
&\leq \gamma a_m^3 + \gamma\alpha^4 \cdot \int_0^{\frac{\alpha}{2}} \frac{a_m\eta}{(\alpha^4 + \eta^2)^2} \cdot \frac{\eta^2}{a_m^2} d\eta, \tag{3.31}
\end{aligned}$$

wegen $\eta \leq \frac{\alpha}{2} < a_m$. Deshalb kann für $j = 1, \dots, m-1$ die Abschätzung (3.31) fortgeführt werden zu

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{A_m^j}(\tilde{f}_{m,\alpha}) &\leq \gamma a_m^3 + \gamma\alpha^4 \cdot \frac{1}{a_m} \int_0^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\eta^3}{(\alpha^4 + \eta^2)^2} d\eta \\
&= \gamma a_m^3 + \gamma \frac{\alpha^4}{a_m} \cdot \left[\ln(|\alpha^4 + \eta^2|) + \frac{\alpha^4}{\alpha^4 + \eta^2} \right] \Big|_{\eta=0}^{\eta=\frac{\alpha}{2}} \\
&\leq \gamma a_m^3 + \gamma \frac{\alpha^4}{a_m} \ln\left(1 + \frac{1}{4\alpha^2}\right) \\
&\leq \gamma a_m^3 + \gamma a_m^2. \tag{3.32}
\end{aligned}$$

Die letzte Zeile³ gilt dabei wegen $\alpha < a_m$ und der für alle positiven $x \in \mathbb{R}_{>0}$ gültigen Abschätzung

$$\ln(1+x) = 2\ln(\sqrt{1+x}) \leq 2\ln(1+\sqrt{x}) \leq 2\sqrt{x},$$

denn für positive x ist $1+x \leq 1+2\sqrt{x}+x \leq (1+\sqrt{x})^2$.

Wie bereits erwähnt, finde aus Symmetriegründen mit analogen Rechnungen denselben Aufwand an Cosserat-Energie für die Mengen D_m^j , $j = 0, \dots, m-2$:

$$\mathcal{J}_{D_m^j}(\tilde{f}_{m,\alpha}) \leq \gamma a_m^3 + \gamma a_m^2. \tag{3.33}$$

Schließlich erhalte aus (3.26) bis (3.30), (3.32), sowie (3.33) insgesamt

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{K_m}(\tilde{f}_{m,\alpha}) &= \sum_{j=0}^{m-1} \mathcal{J}_{C_m^j}(\tilde{f}_{m,\alpha}) \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} \left(\mathcal{J}_{B_{a_m}^3(c_j)}(\tilde{f}_{m,\alpha}) + \mathcal{J}_{G_m^j}(\tilde{f}_{m,\alpha}) \right) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{m-1} \left(\mathcal{J}_{A_m^j}(\tilde{f}_{m,\alpha}) + \mathcal{J}_{E_m^j}(\tilde{f}_{m,\alpha}) \right) \\
&\quad + \sum_{j=0}^{m-2} \left(\mathcal{J}_{D_m^j}(\tilde{f}_{m,\alpha}) + \mathcal{J}_{F_m^j}(\tilde{f}_{m,\alpha}) \right) \\
&\quad + \mathcal{J}_{A_m^0 \cup E_m^0 \cup D_m^{m-1} \cup F_m^{m-1}}(\tilde{f}_{m,\alpha})
\end{aligned}$$

³In [Tar00, S. 37] ist an der entsprechenden Stelle für den zweiten Summanden grober abgeschätzt, sodass man lediglich $\gamma \cdot a_m$ erhalten würde, was in der Aufsummation der Energie der $m-1$ Würfel und der folgenden Argumentation von U. Tarp jedoch zu einem Fehler führt. Dies konnte durch die bessere Abschätzung behoben werden.

$$\leq 2m \cdot a_m \cdot \left(1 + \frac{\alpha^2}{a_m^2}\right)^2 (64\pi + \varepsilon) + \gamma m \cdot a_m^3 + 2\gamma(m-1) \cdot a_m^2.$$

Zusammengefasst ist bis hierher gezeigt: Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ und beliebigem $m \geq m_0$ existiert eine Folge von Abbildungen $\tilde{f}_{m,\alpha}$ ($0 < \alpha < \alpha_{m-2} < a_m$) mit

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{K_m}(\tilde{f}_{m,\alpha}) &\leq 2m \cdot a_m \left(1 + \frac{\alpha^2}{a_m^2}\right)^2 (64\pi + \varepsilon) + \gamma m \cdot a_m^3 + 2\gamma(m-1) \cdot a_m^2 \\ &\longrightarrow 2m \cdot a_m(64\pi + \varepsilon) + \gamma m \cdot a_m^3 + 2\gamma(m-1) \cdot a_m^2, \text{ bei } \alpha \searrow 0. \end{aligned}$$

Das bedeutet, zu beliebigem $\varepsilon > 0$ und beliebigem $m \geq m_0$ gibt es eine Abbildung \tilde{f}_m mit

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{K_m}(\tilde{f}_m) &\leq 2m \cdot a_m(64\pi + \varepsilon) + \gamma m \cdot a_m^3 + 2\gamma(m-1) \cdot a_m^2 + \varepsilon \\ &\longrightarrow 64\pi\kappa + (\kappa + 1)\varepsilon, \text{ bei } m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Also existieren zu beliebigem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $m = m(\varepsilon) \geq m_0$ und eine Abbildung \tilde{f}_m mit

$$\mathcal{J}_{K_m}(\tilde{f}_m) \leq 64\pi \cdot \kappa + (\kappa + 2)\varepsilon.$$

Somit findet man insgesamt nach dieser Konstruktion zu jeder Nullfolge $(\varepsilon_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Abbildungen $\tilde{f}_m \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S})$, sodass die folgenden drei Aussagen gelten:

$$(i) \quad \tilde{f}_m = (\tilde{\varphi}_m, \tilde{R}_m) = \begin{cases} (\varphi, R) = f & \text{auf } \Omega \setminus K_m \\ (\varphi \circ \pi_m^j, R_m \circ \pi_m^j) & \text{auf } K_m, \end{cases}$$

$$(ii) \quad \text{Sing}(\tilde{f}_m) = \{P = c_0, c_1, \dots, c_{m-2}, c_{m-1} = N\} \text{ mit}$$

$$\begin{cases} \deg_{c_j}(\tilde{\varphi}_m) = 0, & j = 0, \dots, m-1, \\ \deg_{c_j}(\tilde{R}_m) = 0, & j = 1, \dots, m-2, \\ \deg_P(\tilde{R}_m) = 1 = \deg_N(\tilde{R}_m) \end{cases}$$

(iii) die Cosserat-Energie erfüllt

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \mathcal{J}_\Omega(\tilde{f}_m) \leq \mathcal{J}_\Omega(f) + 64\pi|P - N|. \quad (3.34)$$

3. Schritt: Approximation. Zum Abschluss des Beweises fehlt noch ein geeignetes Approximationsargument, um die Sobolev-Abbildung \tilde{f}_m durch eine Abbildung f_m mit der gewünschten Glattheit (außer in P, N) ersetzen zu können, ohne die Abschätzung für die Cosserat-Energie zu verändern.

Außerdem ist (P, N) noch kein Dipol für \tilde{R}_m gemäß Definition 2.11. Zum Glück helfen verschiedene Ergebnisse aus der Arbeit [Bét91] von F. Béthuel. An dieser Stelle wird erneut ausgenutzt, dass aufgrund von Lemma 2.2 immer in derjenigen Mannigfaltigkeit, wahlweise \mathcal{S} oder S^2 , gearbeitet werden kann,

in der die gewünschten Schlüsse möglich sind.

Betrachte auf dem Quader K_m zunächst die Deformations-Komponente von \tilde{f}_m , $\tilde{\varphi}_{m|K_m} \in W^{1,2}(K_m, \mathbb{R}^3)$. Da \mathbb{R}^3 zusammenziehbarer Raum ist, lässt sich Theorem 1*bis* aus [Bét91] anwenden. Es ist daher möglich, $\tilde{\varphi}_{m|K_m}$ in $W^{1,2}$ -Topologie durch Abbildungen

$$\varphi_{m,s} \in C^\infty(K_m, \mathbb{R}^3) \quad \text{mit} \quad \varphi_{m,s} = \tilde{\varphi}_m = \varphi \text{ auf } \partial K_m$$

zu approximieren. Nach Übergang zu einer Teilfolge kann somit angenommen werden, dass gilt

$$\begin{aligned} \varphi_{m,s} &\rightarrow \tilde{\varphi}_m, & s \rightarrow \infty, & \quad \text{in } W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)\text{-Topologie und} \\ \varphi_{m,s} &\rightarrow \tilde{\varphi}_m, & s \rightarrow \infty, & \quad \text{punktweise fast überall,} \end{aligned}$$

während die glatten Randwerte auf ∂K_m erhalten bleiben.

Für die zweite Komponente von \tilde{f}_m , die Mikro-Rotations-Komponente \tilde{R}_m auf dem Quader K_m , ist eine weiter gehende Überlegung nötig: Es gilt nach Konstruktion

$$\tilde{R}_{m|K_m} = (R_m \circ \pi_m^j) = (F \circ n_m \circ \pi_m^j) = (F \circ \tilde{n}_m) \in W^{1,2}(K_m, \mathcal{S}),$$

mit singulärer Menge $\text{Sing}(\tilde{R}_m) = \text{Sing}(\tilde{n}_m) = \{P, N, c_1, \dots, c_{m-2}\}$.

Dabei gilt für den Abbildungsgrad zum einen $\deg_P(\tilde{n}_m) = 1 = -\deg_N(\tilde{n}_m)$, zum anderen $\deg_{c_j}(\tilde{n}_m) = 0$ für jedes $j = 1, \dots, m-2$. Außerdem hat die Abbildung $\tilde{n}_m \in W^{1,2}(K_m, S^2)$ glatte Randwerte $\tilde{n}_{m|\partial K_m} = n_{|\partial K_m} \in C^\infty(\partial K_m, S^2)$ und ist stetig in $K_m \setminus \text{Sing}(\tilde{n}_m)$.

Da die Einheitssphäre S^2 eine kompakte Mannigfaltigkeit ohne Rand ist und der Quader K_m in Würfel zerlegt werden kann (vgl. „cubeulation“ in [Bét91]), existiert in einem ersten Schritt nach [Bét91, Theorem 2*bis*] eine Folge von nahezu glatten Abbildungen

$$n_{m,t} \in W^{1,2}(K_m, S^2) \cap C^\infty(K_m \setminus \{P, N, c_1, \dots, c_{m-2}\}, S^2)$$

mit

- (i) $n_{m,t} \rightarrow \tilde{n}_m$, $t \rightarrow \infty$, in $W^{1,2}(K_m, S^2)$ -Topologie,
- (ii) $\deg_P(n_{m,t}) = 1 = -\deg_N(n_{m,t})$ und $\deg_{c_j}(n_{m,t}) = 0$, $j = 1, \dots, m-2$, sowie
- (iii) den gewünschten Randwerten $n_{m,t|\partial K_m} = \tilde{n}_{m|\partial K_m} = n_{|\partial K_m}$;

vergleiche dazu auch die Ausführungen in [Tar00] zum dortigen Korollar 2.1(i).

In einem zweiten Schritt lassen sich, ähnlich wie eben für die Deformations-Komponente mit der Technik aus dem Beweis von [Bét91, Lemma 1bis, S. 203]⁴ noch diejenigen Singularitäten c_1, \dots, c_{m-2} „ausbügeln“, in denen die Homotopieklasse von $n_{m,t}$ trivial ist:

Man betrachtet $n_{m,t}$ auf dem Teilquader $Q_m := C_m^1 \cup \dots \cup C_m^{m-2}$, der aus den „inneren“ $m-2$ Würfeln besteht. Jede Abbildung $n_{m,t}|_{Q_m}$ kann bzgl. der eigenen Randwerte $g := n_{m,t}|_{\partial Q_m}$ in der starken $W^{1,2}$ -Topologie durch Abbildungen

$$n_{m,t,s} \in W_g^{1,2}(Q_m, S^2) \cap C^\infty(Q_m, S^2)$$

approximiert werden.

Daher existiert auf K_m mit der Setzung

$$n_{m,t,s} = \begin{cases} n_{m,t,s} & \text{auf } Q_m \\ n_{m,t} & \text{auf } C_m^0 \cup C_m^{m-1} \end{cases}$$

zu jedem $\tilde{n}_m: K_m \rightarrow S^2$ eine Folge von Abbildungen

$$n_{m,t,s} \in W^{1,2}(K_m, S^2) \cap C^\infty(K_m \setminus \{P, N\}, S^2)$$

mit $n_{m,t,s} \rightarrow \tilde{n}_m$, $s \rightarrow \infty$, in $W^{1,2}(K_m, S^2)$. Jede Abbildung $n_{m,t,s}$ dieser Folge besitzt erstens einen Dipol (P, N) , da $\deg_P(n_{m,t,s}) = 1 = -\deg_N(n_{m,t,s})$ gilt, und zweitens die richtigen Randwerte $n_{m,t,s}|_{\partial K_m} = \tilde{n}_m|_{\partial K_m} = n|_{\partial K_m}$ auf dem Rand des Quaders K_m .

Zuletzt wird alles von der Einheitssphäre S^2 zurück auf die Untermannigfaltigkeit \mathcal{S} projiziert. Damit existiert zu $\tilde{R}_m|_{K_m} = F \circ \tilde{n}_m: K_m \rightarrow \mathcal{S}$ eine Folge von Abbildungen

$$R_{m,t,s} := F \circ n_{m,t,s} \in W^{1,2}(K_m, \mathcal{S}) \cap C^\infty(K_m \setminus \{P, N\}, \mathcal{S}),$$

welche \tilde{R}_m in $W^{1,2}$ -Topologie approximiert. Denn erstens gilt (möglicherweise nach Übergang zu einer punktweise fast überall konvergenten Teilfolge $n_{m,t,s}$)

$$\begin{aligned} & \int_{K_m} |R_{m,t,s} - \tilde{R}_m|^2 dx = \int_{K_m} |F \circ n_{m,t,s} - F \circ \tilde{n}_m|^2 dx \\ &= \int_{K_m} |2[n_{m,t,s} \otimes n_{m,t,s} - \tilde{n}_m \otimes \tilde{n}_m]|^2 dx \\ &\leq \sum_{i,j=1}^3 \int_{K_m} \left[\underbrace{|n_{m,t,s}^i - \tilde{n}_m^i|}_{\rightarrow 0 \text{ f.ü.}} \cdot \underbrace{|n_{m,t,s}^j + \tilde{n}_m^j|}_{\leq 2} + \underbrace{|n_{m,t,s}^i + \tilde{n}_m^i|}_{\leq 2} \cdot \underbrace{|n_{m,t,s}^j - \tilde{n}_m^j|}_{\rightarrow 0 \text{ f.ü.}} \right]^2 dx \\ &\longrightarrow 0, s \rightarrow \infty \end{aligned}$$

⁴Der Beweis für dieses Lemma entspricht im Wesentlichen dem Beweis von Theorem 5 aus [BZ88], welches wiederum für das in der Deformations-Komponente verwendete Theorem genutzt wird. In Kombination mit der Ausarbeitung zu [Tar00, Satz 2.2] und der dort gemachten Anpassung der Menge \mathcal{M} liefert er die Gültigkeit der hier genutzten Approximationsaussage. Sie an dieser Stelle noch einmal in der exakt benötigten Form zu beweisen, würde den Fokus zu sehr von der Dipol-Konstruktion entfernen.

und zweitens gilt ähnlich dazu

$$\begin{aligned}
& \int_{K_m} |DR_{m,t,s} - D\tilde{R}_m|^2 dx = \int_{K_m} |DF \circ n_{m,t,s} \cdot Dn_{m,t,s} - DF \circ \tilde{n}_m \cdot D\tilde{n}_m|^2 dx \\
& \leq 2 \int_{K_m} \left\{ |DF \circ n_{m,t,s} \cdot Dn_{m,t,s} - DF \circ \tilde{n}_m \cdot Dn_{m,t,s}|^2 \right. \\
& \quad \left. + |DF \circ \tilde{n}_m \cdot Dn_{m,t,s} - DF \circ \tilde{n}_m \cdot D\tilde{n}_m|^2 \right\} dx \\
& \leq 2 \|Dn_{m,t,s}\|_\infty^2 \cdot \int_{K_m} |DF \circ n_{m,t,s} - DF \circ \tilde{n}_m|^2 dx \\
& \quad + 2 \|DF \circ \tilde{n}_m\|_\infty^2 \cdot \int_{K_m} |Dn_{m,t,s} - D\tilde{n}_m|^2 dx \\
& \longrightarrow 0, \quad s \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Zusammengefasst existiert also zu jeder Nullfolge $(\varepsilon_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Sobolev-Abbildungen $(\tilde{f}_m)_m$ mit

$$\mathcal{J}_\Omega(\tilde{f}_m) \leq \mathcal{J}_\Omega(f) + 64\pi \cdot |P - N| + (\kappa + 2)\varepsilon_m$$

sowie eine Folge von Abbildungen

$$f_{m,t,s} \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}) \cap C^\infty(\Omega \setminus \{P, N\}, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}),$$

mit

$$f_{m,t,s} := \begin{cases} (\varphi, R), & \text{in } \Omega \setminus K_m, \\ (\varphi_{m,t,s}, R_{m,t,s}), & \text{in } K_m, \end{cases}$$

die bei $s \rightarrow \infty$ in $W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S})$ gegen \tilde{f}_m konvergiert. Dabei besitzt die Mikro-Rotation $R_{m,t,s}$ von $f_{m,t,s}$ jeweils einen Dipol (P, N) . Möglicherweise nach Übergang zu einer Teilfolge konvergiert dann bei $s \rightarrow \infty$ punktweise fast überall

$$f_{m,t,s} \longrightarrow \tilde{f}_m, \quad Df_{m,t,s} \longrightarrow D\tilde{f}_m,$$

und damit auch

$$\left| R_{m,t,s}^T \cdot D\varphi_{m,t,s} - I_3 \right|^2 \longrightarrow \left| \tilde{R}_m^T \cdot D\tilde{\varphi}_m - I_3 \right|^2.$$

Da außerdem $\left| R_{m,t,s}^T \cdot D\varphi_{m,t,s} - I_3 \right|^2$ und $|DR_{m,t,s}|^2$ fast überall in Ω beschränkt sind, folgt mit dem Satz über dominierte Konvergenz für jedes ε_m der Nullfolge die Existenz einer Abbildung f_m mit den gewünschten Eigenschaften und

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{K_m}(f_m) & \leq \mathcal{J}_{K_m}(\tilde{f}_m) + \varepsilon_m \\
& \leq 64\pi \cdot \kappa + (\kappa + 3)\varepsilon_m,
\end{aligned}$$

d.h. die gesuchte Folge $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ von fast überall glatten Abbildungen mit den gewünschten Eigenschaften ist gefunden und erfüllt insbesondere

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{J}_\Omega(f_m) \leq \mathcal{J}_\Omega(f) + 64\pi \cdot |P - N|.$$

□

Die Möglichkeit fest vorgegebene Dipole auf diese Weise unter kontrolliertem Energieaufwand in glatte Abbildungen einzufügen, wird in Kapitel 5 dabei helfen, gewisse eingeschränkte Minimierer der Cosserat-Energie, die immer noch kritische Punkte des vollen Cosserat-Problems sind, zu konstruieren, welche eine fest vorgegebene (endliche) Anzahl an Singularitäten aufweisen.

Da diese Zielsetzung unsinnig wäre, falls eingeschränkte Minimierer eine dichte singuläre Menge erlauben, wird vorher in Kapitel 4 gezeigt, dass die singuläre Menge der entsprechenden Abbildungen höchstens diskret sein kann. Eine beliebig groß vorgegebene Zahl an Singularitäten ist daher für eingeschränkte Minimierer gewissermaßen das „singulärste“ Verhalten, das auftreten kann. Die Ausgangsfrage „Wie schlimm (singulär) kann es werden?“ (vgl. Seite 3) wird also für eingeschränkte Minimierer nach Kapitel 4 und 5 vollständig beantwortet sein.

Es bleibt die Frage, ob es möglich ist, weitere kritische Punkte der Cosserat-Energie (schwache Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichungen) zu finden, welche eine noch größere singuläre Menge erlauben. Die ausgesprochene Nähe zu harmonischen Abbildungen legt dies nahe. Für letztere sorgte T. Rivière mit [Riv95] für Aufsehen, als er die Existenz einer harmonischen Abbildung $u: B^3 \rightarrow S^2$ nachwies, welche in der vollen Einheitskugel B^3 unstetig ist. Dadurch wurde deutlich, dass allgemeine (partielle) Regularitätsaussagen für harmonische Abbildungen ohne weitere Zusatzvoraussetzungen nicht möglich sind.

Ein zentrales Werkzeug in [Riv95] ist dabei die Konstruktion freier Dipole. Ist der Dipol nicht mehr fix vorgegeben wie in Satz 3.3, sondern lediglich in einer gewissen Umgebung zu verorten, lässt sich anschaulich gesprochen durch die Freiheit „etwas am Dipol zu wackeln“ Energie einsparen, wodurch der Energieaufwand echt kleiner als bei fixen Dipolen wird. Die resultierende strikte Ungleichung ist die Grundlage für Rivières weitere Betrachtungen mit Hilfe von Minimalverbindungen und einem relaxierten Energiefunktional.

Allerdings lässt die dortige Konstruktion zum Nachweis des echt kleineren Energieaufwands nur sehr wenig Spielraum. Bei dem Versuch ein ähnliches Resultat für Cosserat-Körper zu entwickeln, stellte sich heraus, dass es zwar möglich ist, einen freien Dipol in die Rotationskomponente einzufügen und dabei Energie in der Größenordnung $\mathcal{O}(\delta^5)$ der (kleinen) Dipol-Länge δ einzusparen. Allerdings liefert gleichzeitig der Deformationsteil der Energiedichte bei größtenteils unveränderter Deformation einen konstanten Beitrag auf einer Menge mit Volumen der Größenordnung $\mathcal{O}(\delta^5)$. Daher ist es leider bisher nicht gelungen, ein Analogon zu freien Dipolen für Cosserat-Körper zu entwickeln.

Auch wenn dadurch eine Konstruktion eines freien Dipols für Cosserat-Körper natürlich längst nicht ausgeschlossen ist, zeigen sich zumindest scheinbar regularisierende Effekte durch die Kopplung in den zur Cosserat-Energie gehörenden Euler-Lagrange-Gleichungen.

4 Partielle Regularität eingeschränkter Minimierer

Bevor in diesem Kapitel die erwähnte Regularitätsanalyse durchgeführt wird, soll ein kurzer Überblick über den aktuellen Stand der Forschung in diesem Bereich gegeben werden: Nachdem A. Gastel in [Gas19] lokale Hölder-Stetigkeit im gesamten Inneren des Definitionsbereiches für Minimierer der Cosserat-Energie im hier betrachteten Setting nachwies, waren Y. Li und C. Wang kurze Zeit später die Ersten, die sich in [LW20] mit der (inneren) Regularität kritischer Punkte der Cosserat Energie beschäftigten.

Für die Subklasse stationärer kritische Punkte (d.h. kritischer Punkte bezüglich erster Variationen in Bild und Urbild) wiesen sie für $p \in (2, 3)$ lokale Hölder-Stetigkeit außerhalb einer diskreten singulären Menge nach. Im hier betrachteten Fall $p = 2$ zeigten sie, dass die singuläre Menge zumindest verschwindendes eindimensionales Hausdorff-Maß hat. Unter der zusätzlichen Voraussetzung der Stabilität (Nicht-Negativität der zweiten Variation im Bild), erreichten sie ähnlich zu A. Gastels Ergebnissen (innere) Regularität für $p \in [2, \frac{32}{15}]$. Dies waren die bekannten Ergebnisse zu Beginn des Forschungsprojekts im SPP 2256.

Als die Arbeit an den in diesem Kapitel zu findenden Regularitätsuntersuchungen für die Subklasse der eingeschränkten Minimierer grundlegend abgeschlossen war, sowohl im Inneren als auch am Rand des betrachteten Gebiets im Falle gegebener Dirichlet-Randbedingungen, veröffentlichte Y. Li mit einem weiteren Co-Autor L. Wang [LW23] einen Artikel zur Randregularität stationärer kritischer Punkte. Und K. Mazowiecka gelang es zusammen mit M. Miśkiewicz in [MM23], die von A. Gastel erreichte Schranke $p \leq \frac{32}{15}$ auf $p \leq \frac{3+\sqrt{3}}{2}$ sowie einen kleinen Bereich nahe an 3 auszuweiten.

Die folgenden Resultate für $p = 2$ und Materialparameter $\mu_1 = \mu_c = \mu_2$ liefern einen weiteren Beitrag zum Verständnis der Regularität von Cosserat-Körpern. Zur Erinnerung: Die Subklasse der eingeschränkten Minimierer umfasst diejenigen kritischen Punkte (bezüglich der ersten Variation im Bild) der Cosserat-Energie, die gleichzeitig Minimierer des auf $W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S})$ eingeschränkten Problems (\mathcal{P}') sind (vgl. Abschnitt 1.2). Wie bereits in Kapitel 3 angedeutet, wird im Folgenden für diese Subklasse partielle Regularität nachgewiesen.

Zunächst wird in Abschnitt 4.1 gezeigt, dass die singuläre Menge eines eingeschränkten Minimierers im Inneren diskret ist. Da diese Tatsache allein jedoch nicht ausreicht, um auszuschließen, dass Singularitäten am Rand auftreten

ten oder sich dort sogar häufen können, beschäftigt sich die zweite Hälfte des Kapitels mit Randregularität bei gegebenen C^1 -Dirichlet-Randbedingungen ϑ an die Deformation φ und M an die Mikro-Rotation R . Es stellt sich heraus, dass die Annahme einer Singularität am Rand für eingeschränkte Minimierer zum Widerspruch führt.

Dabei geht an keiner entscheidenden Stelle der Beweisführung ein, dass die Mikro-Rotationen der eingeschränkten Minimierer ihre Werte in \mathcal{S} haben. Zentrales Argument ist stattdessen immer wieder die Minimierung des Funktionals.

Deswegen kann mit leichten Modifikationen genauso volle Randregularität bei vorgegebenen C^1 -Dirichlet-Randbedingungen $g = (\vartheta, M)$ für die Minimierer $f \in W_g^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3 \times SO(3))$ des vollen Problems (\mathcal{P}) gezeigt werden. Dies ist der Grund, warum das zentrale Ergebnis zu Beginn von Abschnitt 4.2 zunächst für Minimierer $f \in W_g^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3 \times SO(3))$ des vollen Problems (\mathcal{P}) formuliert wird (Satz 4.8), die Beweise aber dann für eingeschränkte Minimierer $f \in W_g^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S})$ geführt werden (Satz 4.13). Später können in Kapitel 5 mit Hilfe dieser Regularitäts-Ergebnisse „sehr singuläre“ eingeschränkte Minimierer konstruiert werden.

4.1 Partielle Regularität im Inneren

Da (innere) Regularitätsfragen lokal um einen inneren Punkt $q \in \Omega$ zu betrachten sind, werden o.E. in diesem Abschnitt Abbildungen $f \in W^{1,2}(B^3, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S})$ untersucht anstelle von $f \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S})$.

Außerdem sei zur Notation bemerkt, dass stellenweise sich ändernde Konstanten in einzelnen Abschätzungen dennoch weiter mit ein und demselben $c \in \mathbb{R}_{>0}$ bezeichnet sind. Ist eine genauere Unterscheidung verschiedener Konstanten beabsichtigt, werden Konstanten durch Indizes nummeriert oder mit $c, \hat{c}, \tilde{c} \in \mathbb{R}_{>0}$ bezeichnet.

An dieser Stelle soll deutlich betont werden, dass die gesamte Argumentationsweise des Abschnitts 4.1 aus der Betrachtung von Minimierern des vollen Problems (\mathcal{P}) in [Gas19] stammt. Nach detaillierter Ausarbeitung lässt sich das dortige Vorgehen, zumindest was die Diskretheit von $\text{Sing}(f)$ angeht, fast wörtlich auf eingeschränkte Minimierer übertragen. Es wurden jedoch im Zuge der Ausarbeitung Fehler in [Gas19] gefunden, welche im hier betrachteten Setting korrigierbar waren und daher nicht weiter erwähnt werden.

Da der Nachweis der partiellen Regularität im Inneren recht umfangreich ist, sei zunächst eine kurze Zusammenfassung des Vorgehens gegeben: In der ersten Hälfte 4.1.1 von Abschnitt 4.1 werden eine Innere Monotonie-Formel und eine Innere Diskrete Morrey-Bedingung hergeleitet. Im Beweis der Inneren Diskreten Morrey-Bedingung erhält man dabei durch den Vergleich mit einer Aufblasfolge ein entkoppeltes Hilffssystem. Für letzteres lassen sich dann

klassische Regularitäts-Aussagen nutzen.

Die größte Schwierigkeit in der Herleitung des Hilfssystems liegt darin, die Norm-Konvergenz der Aufblasfolge zu beweisen. Als äußerst hilfreich für diesen Aspekt stellen sich Resultate von S. Luckhaus heraus; insbesondere das recht bekannte Fortsetzungs-Lemma [Luc88, Lemma 1] ist hierbei zu nennen, mit der in [Ste91, Thm. 10.1] verwendeten Version.

Mit Morreys Dirichlet-Wachstumsbedingung kann dann in der zweiten Hälfte 4.1.2 von Abschnitt 4.1 gezeigt werden, dass ein eingeschränkter Minimierer f außerhalb der sogenannten ε_0 -singulären Menge lokal Hölder-stetig ist. Sehr grob gesprochen kann man sich vorstellen, dass Singularitäten nur in solchen Punkten auftreten können, an denen sich ein Mindestmaß an (reskaliert) Energie konzentriert.

Ein ähnliches Argument wie zuvor mit einer unterschiedlich skalierten Aufblasfolge, welche erstens die Geometrie des Problems widerspiegelt, zweitens gegen eine radial konstante aber nicht konstante Abbildung konvergiert und deren Energie drittens durch die Innere Monotonie-Formel kontrolliert bleibt, liefert schließlich das fehlende Argument zur behaupteten Diskrettheit der singulären Menge im Inneren.

Bemerkung 4.1 (Vergleich zu [LW20]).

1. Im Vergleich zum Vorgehen von Y. Li und C. Wang für stationäre kritische Punkte bestehen Ähnlichkeiten in der Beweisführung. Auch dort findet sich einerseits die Nutzung einer Monotonie-Formel und einer Energieschranke, welche mittels eines Aufblase-Arguments bewiesen wird. Andererseits verwenden sie die Umformung der Cosserat-Euler-Lagrange-Gleichungen in eine div-curl-Form, welche zeigt, dass die enthaltene geometrische Nichtlinearität eine spezielle algebraische Struktur aufweist. Diese algebraische Struktur ist ähnlich zu denjenigen algebraischen Strukturen, die bei der Betrachtung (p -) harmonischer Abbildungen in symmetrische Mannigfaltigkeiten zu beobachten sind. Daher nutzen Y. Li und C. Wang ebenfalls, wenn auch auf andere Art und Weise, bekannte Resultate über harmonische Abbildungen aus, um Aussagen über schwache Cosserat-Lösungen zu beweisen.
2. Vergleichbar zu den folgenden Ausführungen besteht für die Dimensionsreduktion der singulären Menge in [LW20] die größte Schwierigkeit in einem Kompaktheits-Argument für eine schwach konvergente Aufblasfolge. Anstatt des oben erwähnten Fortsetzungs-Lemmas von S. Luckhaus nutzen Y. Li und C. Wang das Marstrand-Theorem über die Hausdorff-Dimension der singulären Menge, allerdings hält ihre Argumentation diesbezüglich nur für nicht-ganzes p . Dies ist einer der Gründe, warum sie für die volle innere Regularität (im Sinne lokaler Hölder-Stetigkeit) im Fall $p \in [2, \frac{32}{15}]$ mit der zusätzlichen Voraussetzung der Stabilität arbeiten. Minimierer des vollen Problems (\mathcal{P}) sind

immer auch stabile schwache Lösungen, daher passen in dieser Hinsicht die Ergebnisse aus [Gas19] und [LW20] zueinander.

4.1.1 Monotonie-Formel und diskrete Morrey-Bedingung

Nach diesem Vergleich mit den bisher bekannten Ergebnissen zur (partiellen) inneren Regularität einer anderen Subklasse kritischer Punkte der Cosserat-Energie, werden nun wie angekündigt zunächst die beiden zentral benötigten Hilfsaussagen [Innere Monotonie-Formel (Lemma 4.2) und Innere Diskrete Morrey-Bedingung (Lemma 4.4)] in der später benötigten Form für eingeschränkte Minimierer der Cosserat-Energie, definiert auf der Standard-Einheitskugel $B^3 \subset \mathbb{R}^3$, formuliert und bewiesen:

Lemma 4.2 (Innere Monotonie-Formel). *Sei $f = (\varphi, R) \in W^{1,2}(B^3, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S})$ ein Minimierer der Cosserat-Energie \mathcal{J}_{B^3} für das eingeschränkte Problem (\mathcal{P}') .*

Dann gilt für jede Kugel $B_s^3(x_0) \subset B^3$ und jeden Radius $r \in (0, s)$:

$$\begin{aligned} & (s^{-1} + 1) \int_{B_s^3(x_0)} |\mathrm{D}\varphi|^2 + |\mathrm{D}R|^2 \, dx \quad - \quad r^{-1} \int_{B_r^3(x_0)} |\mathrm{D}\varphi|^2 + |\mathrm{D}R|^2 \, dx \\ & \geq \int_{(B_s^3 \setminus B_r^3)(x_0)} |x - x_0|^{-1} \cdot [|\partial_{\mathrm{rad}}\varphi|^2 + |\partial_{\mathrm{rad}}R|^2] \, dx \quad - \quad cs^{\frac{1}{2}} \left(1 + \|\mathrm{D}\varphi\|_{L^2(B^3)}\right), \end{aligned} \quad (4.1)$$

wobei ∂_{rad} für die radiale Ableitung in Richtung $\frac{x-x_0}{|x-x_0|}$ steht.

Bemerkung 4.3. Die in der Monotonie-Formel in [Gas19] auf der rechten Seite der Ungleichung anstelle von $|\partial_{\mathrm{rad}}\varphi|^2$ im Integranden genutzte Funktion

$$Q(\varphi, R) := \left| \mathbb{P}(R^T \mathrm{D}\varphi) \right|^2 - \left| \mathbb{P}\left(R^T \cdot \left(\mathrm{D}\varphi - \frac{x-x_0}{|x-x_0|} \otimes \partial_{\mathrm{rad}}\varphi\right)\right) \right|^2$$

stimmt für die im vorliegenden Setting betrachteten Material-Parameter $\mu_1 = \mu_c = \mu_2 = 1$ mit der quadrierten Norm $|\partial_{\mathrm{rad}}\varphi|^2$ der radialen Ableitung der Deformation überein, da der lineare Operator \mathbb{P} in diesem Fall zur Identität wird. Entscheidend ist später die Nicht-Negativität des Terms $Q(\varphi, R)$, welche jedoch nicht uneingeschränkt für alle Wahlen der Material-Parameter μ_1, μ_c, μ_2 gilt.

Beweis von Lemma 4.2 (Innere Monotonie-Formel). Sei $t \in (0, s)$ ein beliebiger Radius. Zwecks Vereinfachung der Notation betrachte o.B.d.A. $x_0 = 0$. Der gegebene eingeschränkte Minimierer f soll in der in B^3 enthaltenen Kugel B_s^3 vom Radius $s < \mathrm{dist}(x_0, \partial B^3)$ mit Abbildungen f_t verglichen werden, welche auf der kleineren Kugel B_t^3 radial konstant sind. Betrachte also zu (dem festen) $t \in (0, s)$ die Abbildung $f_t = (\varphi_t, R_t): B_s^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}$, gegeben durch

$$\varphi_t(x) := \begin{cases} \varphi\left(\frac{t}{|x|}x\right), & 0 < |x| < t, \\ \varphi(x), & t \leq |x| < s, \end{cases} \quad R_t(x) := \begin{cases} R\left(\frac{t}{|x|}x\right), & 0 < |x| < t, \\ R(x), & t \leq |x| < s. \end{cases}$$

Zunächst lässt sich nachrechnen, dass gilt

$$\left|DR - \frac{x}{|x|} \otimes \partial_{rad}R\right|^2 = |DR|^2 - |\partial_{rad}R|^2.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_{B_t^3} |DR_t|^2 dx &= \frac{1}{t} \int_0^t \int_{\partial B_\tau^3} \left[|DR(\frac{t}{\tau}x)|^2 - |\partial_{rad}R(\frac{t}{\tau}x)|^2 \right] \cdot \frac{t^2}{\tau^2} d\mathcal{H}^2(x) d\tau \\ &= \frac{1}{t} \int_0^t \int_{\partial B_\tau^3} |DR|^2 - |\partial_{rad}R|^2 d\mathcal{H}^2 d\tau \\ &= \int_{\partial B_t^3} |DR|^2 - |\partial_{rad}R|^2 d\mathcal{H}^2 \\ &= \frac{d}{dt} \left[\int_{B_t^3} |DR|^2 dx \right] - \int_{\partial B_t^3} |\partial_{rad}R|^2 d\mathcal{H}^2. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Analog lässt sich zeigen, dass gilt

$$\left| R^T \cdot \left[D\varphi - \frac{x}{|x|} \otimes \partial_{rad}\varphi \right] \right|^2 = \left| D\varphi - \frac{x}{|x|} \otimes \partial_{rad}\varphi \right|^2 = |D\varphi|^2 - |\partial_{rad}\varphi|^2$$

und damit auch

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_{B_t^3} |R_t^T D\varphi_t|^2 dx &= \frac{1}{t} \int_{B_t^3} |D\varphi_t|^2 dx \\ &= \frac{d}{dt} \left[\int_{B_t^3} |D\varphi|^2 dx \right] - \int_{\partial B_t^3} |\partial_{rad}\varphi|^2 d\mathcal{H}^2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Insbesondere folgt aus (4.2) und (4.3) die Nicht-Negativität der beiden Terme $\frac{d}{dt} [\int_{B_t^3} |D\varphi|^2 dx]$ und $\frac{d}{dt} [\int_{B_t^3} |DR|^2 dx]$ sowie die später benötigte Identität

$$\begin{aligned} &-t^{-1} \int_{B_t^3} |D\varphi_t|^2 + |DR_t|^2 dx \\ &= \int_{\partial B_t^3} |\partial_{rad}\varphi|^2 + |\partial_{rad}R|^2 d\mathcal{H}^2 - \frac{d}{dt} \left[\int_{B_t^3} |D\varphi|^2 + |DR|^2 dx \right]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Da das gegebene f die Cosserat-Energie in B_s^3 minimiert, in $B_s^3 \setminus B_t^3$ mit f_t übereinstimmt und daher auch $f_t|_{\partial B_t^3} = f|_{\partial B_t^3}$ erfüllt, erhalte mit der Hölder-Ungleichung

$$\int_{B_t^3} |D\varphi|^2 + |DR|^2 dx = \int_{B_t^3} |R^T D\varphi - I_3 + I_3|^2 + |DR|^2 dx$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{B_t^3} |R^T D\varphi - I_3|^2 + |DR|^2 dx + \int_{B_t^3} |I_3|^2 dx + 2 \int_{B_t^3} |R^T D\varphi - I_3| \cdot |I_3| dx \\
&\leq \int_{B_t^3} |R^T D\varphi - I_3|^2 + |DR|^2 dx + c_1 t^3 + c_2 \cdot \left(\int_{B_t^3} |R^T D\varphi - I_3|^2 dx \cdot \int_{B_t^3} |I_3|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \int_{B_t^3} |R^T D\varphi - I_3|^2 + |DR|^2 dx + c_1 t^3 + c_3 t^{\frac{3}{2}} \cdot \|D\varphi\|_{L^2(B^3)} \\
&\leq \int_{B_t^3} |R_t^T D\varphi_t - I_3|^2 + |DR_t|^2 dx + c_4 t^{\frac{3}{2}} \left(1 + \|D\varphi\|_{L^2(B^3)} \right) \\
&\leq (1 + \varepsilon t) \int_{B_t^3} |D\varphi_t|^2 dx + \int_{B_t^3} |DR_t|^2 dx + c_5 \varepsilon^{-1} t^2 + c_4 t^{\frac{3}{2}} \left(1 + \|D\varphi\|_{L^2(B^3)} \right) \\
&\leq \int_{B_t^3} |R_t^T D\varphi_t|^2 + |DR_t|^2 dx + t^2 \cdot \frac{d}{dt} \left[\int_{B_t^3} |D\varphi|^2 dx \right] + c_6 t^{\frac{3}{2}} \cdot \left(1 + \|D\varphi\|_{L^2(B^3)} \right),
\end{aligned} \tag{4.5}$$

da mit (4.3) gilt

$$\begin{aligned}
&\varepsilon t \cdot \int_{B_t^3} |D\varphi_t|^2 dx + c_5 \varepsilon^{-1} t^2 \\
&= \varepsilon t^2 \cdot \frac{d}{dt} \left[\int_{B_t^3} |D\varphi|^2 dx \right] - \varepsilon t^2 \int_{\partial B_t^3} |\partial_{rad} \varphi|^2 d\mathcal{H}^2 + c_5 \varepsilon^{-1} t^2 \\
&\leq t^2 \cdot \frac{d}{dt} \left[\int_{B_t^3} |D\varphi|^2 dx \right] + c_7 t^2
\end{aligned}$$

für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ und da t zwischen 0 und s insbesondere kleiner als 1 ist. Die vorletzte Zeile der Abschätzung für (4.5) folgt dabei durch Anwenden der skalierten Youngschen Ungleichung für $p = q = 2$ und $\frac{1}{2}\varepsilon t > 0$ auf den jeweiligen mittleren Summanden von $|R^T D\varphi - I_3|^2$ bei komponentenweiser Berechnung.

Zusammen ergeben (4.4) und (4.5) somit die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \left[t^{-1} \int_{B_t^3} |D\varphi|^2 + |DR|^2 dx \right] \\
&= t^{-1} \left\{ \frac{d}{dt} \left[\int_{B_t^3} |D\varphi|^2 + |DR|^2 dx \right] - t^{-1} \int_{B_t^3} |D\varphi|^2 + |DR|^2 dx \right\} \\
&\geq t^{-1} \left\{ \frac{d}{dt} \left[\int_{B_t^3} |D\varphi|^2 + |DR|^2 dx \right] - t^{-1} \int_{B_t^3} |D\varphi_t|^2 + |DR_t|^2 dx \right. \\
&\quad \left. - t \cdot \frac{d}{dt} \left[\int_{B_t^3} |D\varphi|^2 dx \right] - c_6 t^{\frac{1}{2}} \left(1 + \|D\varphi\|_{L^2(B^3)} \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= t^{-1} \left\{ \frac{d}{dt} \left[\int_{B_t^3} |\mathrm{D}\varphi|^2 + |\mathrm{D}R|^2 dx \right] - t^{-1} \int_{B_t^3} |\mathrm{D}\varphi_t|^2 + |\mathrm{D}R_t|^2 dx \right\} \\
&\quad - \frac{d}{dt} \left[\int_{B_t^3} |\mathrm{D}\varphi|^2 dx \right] - c_6 t^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \|\mathrm{D}\varphi\|_{L^2(B^3)} \right) \\
&= t^{-1} \int_{\partial B_t^3} |\partial_{rad}\varphi|^2 + |\partial_{rad}R|^2 d\mathcal{H}^2 - \frac{d}{dt} \left[\int_{B_t^3} |\mathrm{D}\varphi|^2 dx \right] - c_6 t^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \|\mathrm{D}\varphi\|_{L^2(B^3)} \right).
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Integration für $r \leq t \leq s$ liefert unter Beachtung der Tatsache, dass o.B.d.A $x_0 = 0$ zur Vereinfachung der Notation angenommen war,

$$\begin{aligned}
&s^{-1} \int_{B_s^3(x_0)} |\mathrm{D}\varphi|^2 + |\mathrm{D}R|^2 dx \quad - \quad r^{-1} \int_{B_r^3(x_0)} |\mathrm{D}\varphi|^2 + |\mathrm{D}R|^2 dx \\
&\geq \int_{(B_s^3 \setminus B_r^3)(x_0)} |x - x_0|^{-1} \cdot [|\partial_{rad}\varphi|^2 + |\partial_{rad}R|^2] - |\mathrm{D}\varphi|^2 dx - cs^{\frac{1}{2}} \left(1 + \|\mathrm{D}\varphi\|_{L^2(B^3)} \right).
\end{aligned}$$

Dann folgt nach Addition von $\int_{B_s^3(x_0)} |\mathrm{D}\varphi|^2 + |\mathrm{D}R|^2 dx$ auf beiden Seiten die behauptete Innere Monotonie-Formel für jede Kugel $B_s^3(x_0)$, die ganz in B^3 enthalten ist, und für jedes $r \in (0, s)$. □

Damit ist die Innere Monotonie-Formel im hier untersuchten Setting bewiesen. Die nicht ausgeschlossene Negativität des Terms $Q(\varphi, R)$ für andere Kombinationen der Materialparameter μ_1, μ_c, μ_2 (vgl. Bemerkung 4.3) und das damit einhergehende mögliche Fehlen einer vergleichbaren Monotonie-Formel ist einer der Gründe dafür, warum die Übertragung der in dieser Arbeit vorgeführten Regularitätsuntersuchungen auf allgemeinere Formen des Cosserat-Energiefunktionals keineswegs trivial ist.

Von ebenso großer Bedeutung auf dem Weg zur partiellen Regularität ist wie angekündigt die nächste Aussage.

Lemma 4.4 (Innere Diskrete Morrey-Bedingung). *Sei $\mu \in (0, 1)$. Dann gibt es Konstanten $\varepsilon_M > 0$, $\theta \in (0, 1)$ und $\rho_0 \in (0, 1)$, sodass die folgende Aussage für jeden Minimierer $f = (\varphi, R) \in W^{1,2}(B^3, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S})$ des eingeschränkten Problems (\mathcal{P}') gilt.*

Für jede Kugel $B_{\rho_0}^3(x_0) \subset B^3$ mit $|x_0| \leq \frac{1}{2}$ und für jeden Radius $\rho \in (0, \rho_0)$ gilt die Implikation:

Erfüllen f und ρ die Kleinheitsbedingung

$$\rho^{2\mu} \leq \rho^{-1} \left(\|\mathrm{D}\varphi\|_{L^2(B_\rho^3(x_0))}^2 + \|\mathrm{D}R\|_{L^2(B_\rho^3(x_0))}^2 \right) \leq \varepsilon_M,$$

so folgt die Abschätzung

$$\begin{aligned} & (\theta\rho)^{-1} \left(\|D\varphi\|_{L^2(B_{\theta\rho}^3(x_0))}^2 + \|DR\|_{L^2(B_{\theta\rho}^3(x_0))}^2 \right) \\ & \leq \theta^{2\mu} \rho^{-1} \left(\|D\varphi\|_{L^2(B_\rho^3(x_0))}^2 + \|DR\|_{L^2(B_\rho^3(x_0))}^2 \right). \end{aligned}$$

Beweis. Nimm an, die Behauptung gilt nicht. Dann existieren für jedes $i \in \mathbb{N}$ jeweils sowohl ein Punkt x_i mit $|x_i| \leq \frac{1}{2}$ und eine Kugel $B_{\rho_i}^3(x_i) \subset B^3$ um x_i mit Radius $\rho_i \searrow 0$ bei $i \rightarrow \infty$, als auch jeweils ein Minimierer $f_i = (\varphi_i, R_i) \in W^{1,2}(B^3, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S})$ von (\mathcal{P}') , sodass einerseits

$$\begin{aligned} \gamma_i &:= \rho_i^{-\frac{1}{2}} \|D\varphi_i\|_{L^2(B_{\rho_i}^3(x_i))} \searrow 0, \text{ bei } i \rightarrow \infty, \\ \delta_i &:= \rho_i^{-\frac{1}{2}} \|DR_i\|_{L^2(B_{\rho_i}^3(x_i))} \searrow 0, \text{ bei } i \rightarrow \infty \end{aligned}$$

und $\rho_i^{2\mu} \leq \gamma_i^2 + \delta_i^2 \searrow 0$, bei $i \rightarrow \infty$ gelten, aber andererseits für jedes feste $\theta \in (0, 1)$ und jedes $i \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & (\theta\rho_i)^{-1} \left(\|D\varphi_i\|_{L^2(B_{\theta\rho_i}^3(x_i))}^2 + \|DR_i\|_{L^2(B_{\theta\rho_i}^3(x_i))}^2 \right) \\ & > \theta^{2\mu} \rho_i^{-1} \left(\|D\varphi_i\|_{L^2(B_{\rho_i}^3(x_i))}^2 + \|DR_i\|_{L^2(B_{\rho_i}^3(x_i))}^2 \right) \end{aligned}$$

zutritt.

Nun wird im Urbild um den Faktor ρ_i^{-1} , im Bild hingegen um den Faktor γ_i^{-1} bzw. δ_i^{-1} reskaliert. Betrachte also eine Aufblasfolge von Abbildungen, indem für jedes f_i die Abbildung $\hat{f}_i = (\hat{\varphi}_i, \hat{R}_i) \in W^{1,2}(B^3, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}_i)$ definiert wird gemäß

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_i(x) &:= \gamma_i^{-1} [\varphi_i(x_i + \rho_i x) - \bar{\varphi}_{i,\rho_i}], \\ \hat{R}_i(x) &:= \delta_i^{-1} [R_i(x_i + \rho_i x) - \bar{R}_{i,\rho_i}], \end{aligned}$$

wobei $\bar{\varphi}_{i,\rho_i}, \bar{R}_{i,\rho_i}$ jeweils den Mittelwert von φ_i bzw. R_i in $B_{\rho_i}^3(x_i)$ bezeichnet, also

$$\bar{\varphi}_{i,\rho_i} := \int_{B_{\rho_i}^3(x_i)} \varphi_i \, dx \quad \text{bzw.} \quad \bar{R}_{i,\rho_i} := \int_{B_{\rho_i}^3(x_i)} R_i \, dx.$$

Ferner steht der Wertebereich \mathcal{S}_i von \hat{f}_i für die jeweils entsprechend skalierte und verschobene Version der Mannigfaltigkeit \mathcal{S} , genauer gesagt ist $\mathcal{S}_i := \delta_i^{-1}(\mathcal{S} - \bar{R}_{i,\rho_i})$.

Dann minimiert $\hat{f}_i = (\hat{\varphi}_i, \hat{R}_i)$ das skalierte Funktional

$$\mathcal{J}_i(\psi, Q) := \frac{\gamma_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \int_{B^3} |(\bar{R}_{i,\rho_i} + \delta_i Q)^T D\psi - \rho_i \gamma_i^{-1} I_3|^2 \, dx + \frac{\delta_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \int_{B^3} |DQ|^2 \, dx$$

im Vergleich zu allen Funktionen $(\psi, Q) \in W^{1,2}(B^3, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}_i)$ mit den gleichen Randwerten wie \hat{f}_i . Dabei ist der Nenner $\gamma_i^2 + \delta_i^2$ so gewählt, dass nach Übergang zu einer Teilfolge bei $i \rightarrow \infty$

$$\frac{\gamma_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \rightarrow \sigma \quad \text{und} \quad \frac{\delta_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \rightarrow (1 - \sigma) \quad \text{für ein } \sigma \in [0, 1]$$

angenommen werden kann. Zusätzlich gilt auch $\frac{\gamma_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} (\rho_i \gamma_i^{-1})^2 \rightarrow 0$, da dieser Ausdruck wegen der Annahme $\rho_i^{2\mu} \leq \gamma_i^2 + \delta_i^2$ und wegen $\mu \in (0, 1)$ wie folgt beschränkt ist:

$$\frac{\gamma_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} (\rho_i \gamma_i^{-1})^2 = \frac{\rho_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} = \frac{\rho_i^{2\mu}}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \cdot \rho_i^{2-2\mu} \leq 1 \cdot \rho_i^{2-2\mu} \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty.$$

Des Weiteren ist die Folge der Mittelwerte \bar{R}_{i, ρ_i} beschränkt, da sie in der konvexen Hülle von \mathcal{S} in $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ enthalten ist; mit der Poincaré-Ungleichung gilt sogar

$$\text{dist}(\bar{R}_{i, \rho_i}, \mathcal{S}) \leq c \rho_i^{-\frac{3}{2}} \cdot \|R_i - \bar{R}_{i, \rho_i}\|_{L^2(B_{\rho_i}^3(x_i))} \leq c \rho_i^{-\frac{1}{2}} \cdot \|DR_i\|_{L^2(B_{\rho_i}^3(x_i))} = c \delta_i \searrow 0.$$

Dies ist der Grund, warum auch $\bar{R}_{i, \rho_i} \rightarrow T$ für eine Matrix $T \in \mathcal{S}$ angenommen werden kann.

Der nächste, recht ausgedehnte Schritt besteht darin zu zeigen, dass die zugehörige, wieder mit $\hat{f}_i = (\hat{\varphi}_i, \hat{R}_i)$ bezeichnete Teilfolge von Minimierern des skalierten Funktionals $\mathcal{J}_i(\cdot)$ in einem geeigneten Sinne gegen einen Minimierer $\hat{f}_\infty = (\hat{\varphi}_\infty, \hat{R}_\infty)$ des formalen Grenzfunktionals

$$\mathcal{J}_\infty(\psi, Q) := \sigma \int_{B^3} |T^T D\psi|^2 dx + (1 - \sigma) \int_{B^3} |DQ|^2 dx$$

konvergiert.

Dazu ist zunächst anzumerken, dass die Mannigfaltigkeiten \mathcal{S}_i lokal gegen einen mit \mathcal{S}_∞ bezeichneten Unterraum des $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ konvergieren (im Hausdorff-Abstand); genauer gesagt ist \mathcal{S}_∞ der Grenzwert der affinen Tangentialräume $\bar{R}_{i, \rho_i} + T_{\bar{R}_{i, \rho_i}} \mathcal{S}_i$, während der Ursprung in \mathcal{S}_∞ liegt, weil alle Abbildungen \hat{R}_i (genau wie alle Abbildungen $\hat{\varphi}_i$) aufgrund der Konstruktion Mittelwert 0 haben.

Als Erstes lässt sich die schwache Konvergenz von $\hat{f}_i = (\hat{\varphi}_i, \hat{R}_i)$ gegen eine Abbildung $\hat{f}_\infty = (\hat{\varphi}_\infty, \hat{R}_\infty)$ feststellen. Denn die Tatsache, dass ebenfalls nach Konstruktion unmittelbar $\|D\hat{\varphi}_i\|_{L^2(B^3)} = 1$ und $\|D\hat{R}_i\|_{L^2(B^3)} = 1$ für alle Indizes $i \in \mathbb{N}$ gilt, impliziert zusammen mit der Poincaré-Ungleichung unmittelbar die Beschränktheit der Folge $\hat{f}_i = (\hat{\varphi}_i, \hat{R}_i)$ im reflexiven Sobolev-Raum $W^{1,2}(B^3, \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{3 \times 3})$. Deshalb existiert eine (wieder gleich bezeichnete) schwach konvergente Teilfolge, die möglicherweise nach Übergang zu einer weiteren Teilfolge außerdem punktweise fast überall konvergiert, weshalb

$\hat{f}_\infty \in W^{1,2}(B^3, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}_\infty)$ folgt. Weiterhin gilt dann punktweise fast überall bei $i \rightarrow \infty$

$$\bar{R}_{i,\rho_i} + \delta_i R_i \rightarrow T,$$

da $\bar{R}_{i,\rho_i} + \delta_i R_i = \bar{R}_{i,\rho_i} + \delta_i R + \delta_i (R_i - R)$ mit $\delta_i \rightarrow 0$ und punktweise fast überall $\bar{R}_{i,\rho_i} \rightarrow T$, $R_i \rightarrow R_\infty$. Aus diesem Grund erklärt sich auch die Betrachtung von $\mathcal{J}_\infty(\cdot)$ als formales Grenzfunktional.

Kompaktheits-Argument. Als Nächstes ist in diesem Teil nachzuweisen, dass die schwach konvergente Aufblasfolge $\hat{f}_i = (\hat{\varphi}_i, \hat{R}_i)$ von $\mathcal{J}_i(\cdot)$ -Minimierern auch in $W^{1,2}$ -Norm auf jeder kompakten Teilmenge von B^3 konvergiert und dass der Limes $\hat{f}_\infty = (\hat{\varphi}_\infty, \hat{R}_\infty)$ das Grenzfunktional $\mathcal{J}_\infty(\cdot)$ minimiert.

Die Idee hierzu, welche die Beweisführung aus [SU82] im Kontext harmonischer Abbildungen wesentlich vereinfacht hat, stammt aus [Luc88]: Um später den Limes $(\hat{\varphi}_\infty, \hat{R}_\infty)$ mit einer (bis auf gleiche Randwerte) beliebigen Abbildung $(\psi, Q) \in W^{1,2}(B^3, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}_\infty)$ vergleichen zu können, wird Q durch (beschränkte) Abbildungen $Q_i \in W^{1,2}(B^3, \mathcal{S}_i)$ approximiert. Ziel ist es, weitere Abbildungen (ζ_i, P_i) zu finden, deren Energie nah an der Energie des Limes der Aufblasfolge liegt, deren Randwerte aber gleichzeitig mit denen der approximierenden Folgen $(\hat{\varphi}_i, \hat{R}_i)$ bzw. (ψ, Q_i) übereinstimmen. Zentrales Hilfsmittel hierzu ist das bekannte Fortsetzungs-Lemma von S. Luckhaus. Grob ausgedrückt besagt es, dass für zwei $W^{1,2}$ -Abbildungen von einer Sphäre in eine Mannigfaltigkeit N , deren Werte in L^2 nah beieinander sind, eine Fortsetzung auf einen (kleinen) Ring existiert, welche am Rand die Werte der beiden ursprünglichen Abbildungen annimmt, selbst eine Schlauchumgebung von N nicht verlässt und deren Energie auf dem Ring die Größenordnung der Ringbreite hat.

Sei also $(\psi, Q) \in W^{1,2}(B^3, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}_\infty)$ eine für \hat{f}_∞ zulässige Vergleichsabbildung, sodass $\psi = \hat{\varphi}_\infty$ und $Q = \hat{R}_\infty$ in einer Umgebung von ∂B^3 . Dann existiert r nahe an 1 mit

- (i) $(\psi, Q) = (\hat{\varphi}_\infty, \hat{R}_\infty)$ fast überall in ∂B_r^3 ,
 - (ii) $\|D\psi\|_{L^2(\partial B_r^3)}^2 + \sup_i \left\{ \|D\hat{\varphi}_i\|_{L^2(\partial B_r^3)}^2 + \|D\hat{R}_i\|_{L^2(\partial B_r^3)}^2 \right\} < \infty$ sowie
 - (iii) $\lim_{i \rightarrow \infty} \|\hat{R}_i - Q\|_{L^2(\partial B_r^3)}^2 = \lim_{i \rightarrow \infty} \|\hat{R}_i - \hat{R}_\infty\|_{L^2(\partial B_r^3)}^2 = 0$ und
- $$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\hat{\varphi}_i - \psi\|_{L^2(\partial B_r^3)}^2 = \lim_{i \rightarrow \infty} \|\hat{\varphi}_i - \hat{\varphi}_\infty\|_{L^2(\partial B_r^3)}^2 = 0$$

nach dem Satz von Rellich (Auswahlsatz), möglicherweise nach erneutem Übergang zu einer Teilfolge.

Wie auf Seite 43 begründet, ist \mathcal{S}_∞ affiner Raum. Beschränkte Abbildungen liegen also dicht in $W^{1,2}(B^3, \mathcal{S}_\infty)$. Außerdem ist jede beschränkte Abbildung \tilde{Q} in $W^{1,2}(B^3, \mathcal{S}_\infty)$ ihrerseits der Grenzwert (in $W^{1,2}$ -Norm) einer Folge $Q_i \in W^{1,2}(B^3, \mathcal{S}_i)$, vgl. auch [Ste91, S. 105]. Deswegen existiert insgesamt eine beschränkte approximierende Folge Q_i für Q mit

- (iv) $Q_i \in W^{1,2}(B^3, \mathcal{S}_i)$ und
- (v) $Q_i \rightarrow Q$ in $W^{1,2}(B^3, \mathbb{R}^{3 \times 3})$.

Insbesondere gilt daher

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\hat{R}_i - Q_i\|_{L^2(\partial B_r^3)}^2 = 0 = \lim_{i \rightarrow \infty} \|\hat{\varphi}_i - \psi\|_{L^2(\partial B_r^3)}^2$$

und

$$\|\mathrm{D}\psi\|_{L^2(\partial B_r^3)}^2 + \sup_i \left\{ \|\mathrm{D}\hat{\varphi}_i\|_{L^2(\partial B_r^3)}^2 + \|\mathrm{D}Q_i\|_{L^2(\partial B_r^3)}^2 + \|\mathrm{D}\hat{R}_i\|_{L^2(\partial B_r^3)}^2 \right\} =: C^2 < \infty.$$

Dann liefert das Fortsetzungs-Lemma von Luckhaus [Luc88, Lemma 1], angewendet in der Form aus [Ste91, S. 103 f.], die Existenz einer Folge von Abbildungen (ζ_i, P_i) in $W^{1,2}(B^3, \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{3 \times 3})$ und zweier Zahlenfolgen $\lambda_i \searrow 0$, $r_i \searrow 0$, sodass

$$\begin{aligned} (\zeta_i, P_i)(x) &= (\hat{\varphi}_i, \hat{R}_i)(x) && \text{in } B^3 \setminus B_r^3, \\ (\zeta_i, P_i)(x) &= (\psi, Q_i)\left(\frac{x}{1-\lambda_i}\right) && \text{in } B_{(1-\lambda_i)r}^3, \\ (\zeta_i, P_i)(x) &\in U_{r_i}(\hat{\varphi}_i(B^3) \cup \psi(B^3)) \times U_{r_i}(\mathcal{S}_i) && \text{in } B^3 \text{ und} \\ \|\mathrm{D}\zeta_i\|_{L^2(B_r^3 \setminus B_{(1-\lambda_i)r}^3)}^2 + \|\mathrm{D}P_i\|_{L^2(B_r^3 \setminus B_{(1-\lambda_i)r}^3)}^2 &\leq c\lambda_i C^2, \end{aligned} \quad (4.7)$$

wobei $U_{r_i}(\cdot)$ eine Schlauchumgebung der Breite r_i bezeichnet.

(4.7) impliziert zusammen mit den Eigenschaften von $(\hat{\varphi}_i, \hat{R}_i)$ und (ψ, Q_i) die Beschränktheit von (ζ_i, P_i) in $W^{1,2}(B^3, \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{3 \times 3})$. Sei nun $\mathcal{J}_{i,r}(\cdot)$ die Version von $\mathcal{J}_i(\cdot)$, bei der über B_r^3 statt B^3 integriert wird. Dann gilt mit dem Satz über dominierte Konvergenz und mit schwacher Unterhalbstetigkeit

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\infty,r}(\hat{\varphi}_\infty, \hat{R}_\infty) &= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\gamma_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \int_{B_r^3} |(\bar{R}_{i,\rho_i} + \delta_i \hat{R}_i)^T \mathrm{D}\hat{\varphi}_\infty - \rho_i \gamma_i^{-1} I_3|^2 dx \\ &\quad + \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\delta_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \int_{B_r^3} |\mathrm{D}\hat{R}_\infty|^2 dx \\ &\leq \liminf_{i,j \rightarrow \infty} \frac{\gamma_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \int_{B_r^3} |(\bar{R}_{i,\rho_i} + \delta_i \hat{R}_i)^T \mathrm{D}\hat{\varphi}_j - \rho_i \gamma_i^{-1} I_3|^2 dx \\ &\quad + \liminf_{i,j \rightarrow \infty} \frac{\delta_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \int_{B_r^3} |\mathrm{D}\hat{R}_j|^2 dx \\ &\leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \mathcal{J}_{i,r}(\hat{\varphi}_i, \hat{R}_i). \end{aligned} \quad (4.8)$$

An dieser Stelle wird ausgenutzt, dass jede Abbildung $\hat{f}_i = (\hat{\varphi}_i, \hat{R}_i)$ der Aufblasfolge das entsprechende skalierte Funktional $\mathcal{J}_i(\cdot)$ minimiert und auf ∂B_r^3

die gleichen Werte wie $(\zeta_i, \pi_i \circ P_i)$ hat, wobei hier π_i die nächste-Punkt-Retraktion auf \mathcal{S}_i bezeichnet.

Da Letztere skalierte, verschobene Versionen von \mathcal{S} sind, bleiben die Lipschitz-Konstanten von π_i (beispielsweise eingeschränkt auf Schlauchumgebungen der Breite 1 um \mathcal{S}_i herum) beschränkt, und zwar unabhängig von i .

Außerdem unterscheidet sich $\pi_i \circ P_i$ von P_i selbst nur auf derjenigen Menge $B_r^3 \setminus B_{(1-\lambda_i)r}^3$, auf der die Energie von P_i gegen 0 geht. Deswegen unterscheiden sich die Energien von $\pi_i \circ P_i$ und P_i nur durch $o(1)$; Analoges gilt für die Energien von P_i und Q_i , genauso wie für die Energien von ψ (unabhängig von i) und ζ_i . Exakt ausgeführt findet man

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{i,r}(\zeta_i, \pi_i \circ P_i) &= \underbrace{\mathcal{J}_{i,r}(\zeta_i, \pi_i \circ P_i) - \mathcal{J}_{i,r}(\zeta_i, P_i)}_{=: A_i} + \underbrace{\mathcal{J}_{i,r}(\zeta_i, P_i) - \mathcal{J}_{i,r}(\psi, Q_i)}_{=: B_i} \\ &\quad + \mathcal{J}_{i,r}(\psi, Q_i), \end{aligned}$$

wobei erstens

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{\gamma_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \int_{B_r^3} |(\bar{R}_{i,\rho_i} + \delta_i[\pi_i \circ P_i])^T D\zeta_i - \rho_i \gamma_i^{-1} I_3|^2 \\ &\quad - |(\bar{R}_{i,\rho_i} + \delta_i P_i)^T \cdot D\zeta_i - \rho_i \gamma_i^{-1} I_3|^2 dx \\ &\quad + \frac{\delta_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \int_{B_r^3} |D[\pi_i \circ P_i]|^2 - |DP_i|^2 dx \\ &\leq c_1 \cdot \frac{\gamma_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \int_{B_r^3 \setminus B_{(1-\lambda_i)r}^3} |D\zeta_i|^2 + \rho_i^2 \gamma_i^{-2} dx \\ &\quad + c_2 \cdot \frac{\delta_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \int_{B_r^3 \setminus B_{(1-\lambda_i)r}^3} |DP_i|^2 dx \\ &\leq c_3 \cdot \left(\frac{\gamma_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \cdot \|D\zeta_i\|_{L^2(B_r^3 \setminus B_{(1-\lambda_i)r}^3)}^2 + \frac{\delta_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \cdot \|DP_i\|_{L^2(B_r^3 \setminus B_{(1-\lambda_i)r}^3)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\rho_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \cdot \text{vol}(B_r^3 \setminus B_{(1-\lambda_i)r}^3) \right) \\ &\longrightarrow 0, i \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

nach (4.7) unter Ausnutzung der Beschränktheit der Lipschitz-Konstanten von π_i in der ersten Abschätzung nach oben. Zweitens gelten ebenfalls nach (4.7) für (ζ_i, P_i) die Gleichungen

$$\begin{aligned} &\int_{B_{(1-\lambda_i)r}^3} |(\bar{R}_{i,\rho_i} + \delta_i P_i)^T D\zeta_i - \rho_i \gamma_i^{-1} I_3|^2 dx \\ &= (1 - \lambda_i)^3 \int_{B_r^3} |(\bar{R}_{i,\rho_i} + \delta_i Q_i)^T D\psi \cdot (1 - \lambda_i)^{-1} - \rho_i \gamma_i^{-1} I_3|^2 dx \end{aligned}$$

und

$$\int_{B_{(1-\lambda_i)r}^3} |\mathrm{D}P_i|^2 \, dx = (1 - \lambda_i) \int_{B_r^3} |\mathrm{D}Q_i|^2 \, dx.$$

Daher folgt unmittelbar für den mit B_i bezeichneten zweiten Teilsumenten der Aufteilung von $\mathcal{J}_{i,r}(\zeta_i, \pi_i \circ P_i)$, dass

$$\begin{aligned} B_i &= \frac{\gamma_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \int_{B_r^3} |(\bar{R}_{i,\rho_i} + \delta_i P_i)^T \mathrm{D}\zeta_i - \rho_i \gamma_i^{-1} I_3|^2 \\ &\quad - |(\bar{R}_{i,\rho_i} + \delta_i Q_i)^T \mathrm{D}\psi - \rho_i \gamma_i^{-1} I_3|^2 \, dx \\ &\quad + \frac{\delta_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \int_{B_r^3} |\mathrm{D}P_i|^2 - |\mathrm{D}Q_i|^2 \, dx \\ &= \frac{\gamma_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \left\{ \int_{B_r^3 \setminus B_{(1-\lambda_i)r}^3} |(\bar{R}_{i,\rho_i} + \delta_i P_i)^T \mathrm{D}\zeta_i - \rho_i \gamma_i^{-1} I_3|^2 \, dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{B_{(1-\lambda_i)r}^3} |(\bar{R}_{i,\rho_i} + \delta_i P_i)^T \mathrm{D}\zeta_i - \rho_i \gamma_i^{-1} I_3|^2 \, dx \right. \\ &\quad \left. - \int_{B_r^3} |(\bar{R}_{i,\rho_i} + \delta_i Q_i)^T \mathrm{D}\psi - \rho_i \gamma_i^{-1} I_3|^2 \, dx \right\} \\ &\quad + \frac{\delta_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \left\{ \int_{B_r^3 \setminus B_{(1-\lambda_i)r}^3} |\mathrm{D}P_i|^2 \, dx + \int_{B_{(1-\lambda_i)r}^3} |\mathrm{D}P_i|^2 \, dx - \int_{B_r^3} |\mathrm{D}Q_i|^2 \, dx \right\} \\ &\leq c_4 \cdot \left\{ \frac{\gamma_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \cdot \|\mathrm{D}\zeta_i\|_{L^2(B_r^3 \setminus B_{(1-\lambda_i)r}^3)}^2 + \frac{\delta_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \cdot \|\mathrm{D}P_i\|_{L^2(B_r^3 \setminus B_{(1-\lambda_i)r}^3)}^2 \right\} \\ &\quad + \frac{\gamma_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \int_{B_r^3} |(\bar{R}_{i,\rho_i} + \delta_i Q_i)^T \mathrm{D}\psi (1 - \lambda_i)^{-1} - \rho_i \gamma_i^{-1} I_3|^2 \\ &\quad - |(\bar{R}_{i,\rho_i} + \delta_i Q_i)^T \mathrm{D}\psi - \rho_i \gamma_i^{-1} I_3|^2 \, dx \\ &\longrightarrow 0, \, i \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Das bedeutet, insgesamt gilt $\mathcal{J}_{i,r}(\zeta_i, \pi_i \circ P_i) = \mathcal{J}_{i,r}(\psi, Q_i) + o(1)$ bei $i \rightarrow \infty$.

Dann wird zusammen mit der Minimalität von $(\hat{\varphi}_i, \hat{R}_i)$ aus (4.8)

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\infty,r}(\hat{\varphi}_\infty, \hat{R}_\infty) &\leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \mathcal{J}_{i,r}(\hat{\varphi}_i, \hat{R}_i) \\ &\leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \mathcal{J}_{i,r}(\zeta_i, \pi_i \circ P_i) \\ &\leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \mathcal{J}_{i,r}(\psi, Q_i) = \mathcal{J}_{\infty,r}(\psi, Q). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Dabei wurde im letzten Schritt genau wie in [Gas19] ausgenutzt, dass $Q_i \rightarrow Q$ in $W^{1,2}(B^3, \mathbb{R}^{3 \times 3})$ konvergiert und dass mit der gleichen Argumentationsweise wie bei $\bar{R}_{i,\rho_i} + \delta_i R_i \rightarrow T$ auch $\bar{R}_{i,\rho_i} + \delta_i Q_i \rightarrow T$ punktweise fast überall konvergiert, vgl. S. 44.

Somit ist nachgewiesen, dass der Grenzwert der Aufblasfolge $\hat{f}_\infty = (\hat{\varphi}_\infty, \hat{R}_\infty)$ $\mathcal{J}_{\infty,r}(\cdot)$ -minimierend ist (bezüglich der eigenen Randwerte auf ∂B_r^3). Da aber $r < 1$ beliebig nah an 1 gewählt werden kann, minimiert $(\hat{\varphi}_\infty, \hat{R}_\infty)$ das Grenzfunktional $\mathcal{J}_\infty(\cdot)$ auf jeder kompakten Teilmenge von B^3 . Mit der in (4.9) zulässigen Wahl $(\psi, Q) = (\hat{\varphi}_\infty, \hat{R}_\infty)$ folgt außerdem

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{J}_{i,r}(\hat{\varphi}_i, \hat{R}_i) = \mathcal{J}_{\infty,r}(\hat{\varphi}_\infty, \hat{R}_\infty),$$

was zusammen mit strikter Konvexität auch die Konvergenz der Aufblasfolge in $W^{1,2}$ -Norm auf B_r^3 impliziert.

.....

Nach dieser ausführlichen Kompaktheits-Argumentation fehlt schließlich zur Vervollständigung des Beweises der Inneren Diskreten Morrey-Bedingung lediglich ein letzter Schritt hin zum gewünschten Widerspruch zur am Beginn des Beweises gemachten Annahme. Dieser letzte Schritt wird genau wie in [Gas19] mittels einer Fallunterscheidung bzgl. $\sigma \in [0, 1]$ geliefert.

1. Fall: $\sigma \in (0, 1)$. Der Grenzwert $\hat{f}_\infty = (\hat{\varphi}_\infty, \hat{R}_\infty)$ der Aufblasfolge kann in diesem Fall nur ein Minimierer von $\mathcal{J}_{\infty,r}(\cdot)$ sein, falls die Deformations-Komponente $\hat{\varphi}_\infty$ das Funktional $\int_{B_r^3} |T^T D\psi|^2 dx \stackrel{T \in \mathcal{S}}{=} \int_{B_r^3} |D\psi|^2 dx$ minimiert und die Rotations-Komponente \hat{R}_∞ das Funktional $\int_{B_r^3} |DQ|^2 dx$; eine Kopplung ist nicht mehr vorhanden.

Dann sind aber die Grenzabbildungen $\hat{\varphi}_\infty$ mit Werten in \mathbb{R}^3 und \hat{R}_∞ mit Werten in $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ (Dirichlet-)Energie-minimierende, beschränkte, harmonische Abbildungen und als solche Hölder-stetig. Es gelten die Standard-Regularitäts-Abschätzungen

$$\theta^{-1} \int_{B_\theta^3} |D\hat{\varphi}_\infty|^2 dx \leq c\theta^{2\nu} \int_{B^3} |D\hat{\varphi}_\infty|^2 dx$$

und

$$\theta^{-1} \int_{B_\theta^3} |D\hat{R}_\infty|^2 dx \leq c\theta^{2\nu} \int_{B^3} |D\hat{R}_\infty|^2 dx,$$

jeweils für alle $\nu \in (0, 1)$, $\theta < \frac{1}{2}$ und Konstanten c , die nur von ν abhängen.

Nun muss lediglich θ hinreichend klein gewählt werden, um den gewünschten Widerspruch zu erhalten. Zur Erinnerung: Nach Annahme gilt für alle Indizes i der betrachteten Folgen für jedes feste $\theta \in (0, 1)$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
& (\theta\rho_i)^{-1} \left(\|D\varphi_i\|_{L^2(B_{\theta\rho_i}^3(x_i))}^2 + \|DR_i\|_{L^2(B_{\theta\rho_i}^3(x_i))}^2 \right) \\
& > \theta^{2\mu} \rho_i^{-1} \left(\|D\varphi_i\|_{L^2(B_{\rho_i}^3(x_i))}^2 + \|DR_i\|_{L^2(B_{\rho_i}^3(x_i))}^2 \right) = \theta^{2\mu} (\gamma_i^2 + \delta_i^2). \quad (4.10)
\end{aligned}$$

Doch wegen der obigen Regularitäts-Abschätzungen in Kombination mit der (Norm-) Konvergenz in B_θ^3 ($\theta < \frac{1}{2}$) und der schwachen Konvergenz in B^3 gilt für $\nu = \frac{\mu+1}{2} \in (\frac{1}{2}, 1)$

$$\begin{aligned}
& \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \cdot \left[(\theta\rho_i)^{-1} \left(\|D\varphi_i\|_{L^2(B_{\theta\rho_i}^3(x_i))}^2 + \|DR_i\|_{L^2(B_{\theta\rho_i}^3(x_i))}^2 \right) \right] \\
& = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \cdot \left[\theta^{-1} \gamma_i^2 \cdot \|D\hat{\varphi}_i\|_{L^2(B_\theta^3)}^2 + \theta^{-1} \delta_i^2 \cdot \|D\hat{R}_i\|_{L^2(B_\theta^3)}^2 \right] \\
& = \sigma \theta^{-1} \cdot \|D\hat{\varphi}_\infty\|_{L^2(B_\theta^3)}^2 + (1 - \sigma) \theta^{-1} \cdot \|D\hat{R}_\infty\|_{L^2(B_\theta^3)}^2 \\
& \leq \sigma c \theta^{2\nu} \cdot \|D\hat{\varphi}_\infty\|_{L^2(B^3)}^2 + (1 - \sigma) c \theta^{2\nu} \cdot \|D\hat{R}_\infty\|_{L^2(B^3)}^2 \\
& \leq c \theta^{2\nu} \leq \theta^{2\mu}, \quad (4.11)
\end{aligned}$$

falls θ so klein gewählt ist, dass $c\theta^{1-\mu} \leq 1$. Dies stellt den gesuchten Widerspruch dar, weil nach (4.10) gilt, dass dieser Grenzwert echt größer als $\theta^{2\mu}$ sein muss, für jedes feste $\theta \in (0, 1)$.

2. Fall: $\sigma = 0$. Es bleibt der Minimierer \hat{R}_∞ von $\int_{B_r^3} |DQ|^2 dx$ erhalten, doch die Information über die Deformations-Komponente $\hat{\varphi}_\infty$ des Limes der Aufblasfolge geht im Grenzprozess verloren. Dennoch gilt weiterhin die Abschätzung (4.11), weil der $\|D\hat{\varphi}_\infty\|_{L^2(B^3)}^2$ -Term, der nicht mehr behandelt werden kann, den Vorfaktor $\sigma = 0$ hat. Somit bleibt der im ersten Fall gefundene Widerspruch zu (4.10) auch im zweiten Fall bestehen.

3. Fall: $\sigma = 1$. Hier gilt die gleiche Argumentation wie im zweiten Fall; lediglich die Rollen der Deformations-Komponente $\hat{\varphi}_\infty$ und der Mikro-Rotations-Komponente \hat{R}_∞ sind vertauscht, da nun der nicht zu fassende $\|D\hat{R}_\infty\|_{L^2(B^3)}^2$ -Term den Vorfaktor $1 - \sigma = 0$ hat. Also behält wiederum (4.11) seine Gültigkeit. Mit diesem letzten Widerspruch ist schließlich insgesamt die Innere Diskrete Morrey-Bedingung bewiesen. \square

4.1.2 ε_0 -Regularität und Dimensionsreduktion

Der nächste Schritt auf dem Weg zur Diskretheit der singulären Menge eingeschränkter Minimierer liegt in der angekündigten Energie-Schranke für das Auftreten von Singularitäten.

Es soll gezeigt werden, dass eingeschränkte Minimierer $f \in W^{1,2}(B^3, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S})$ im Inneren von B^3 lokal Hölder-stetig sind außerhalb einer Menge von Punkten, an denen sich „hinreichend viel“ (reskalierte) Energie konzentriert, ε_0 -singuläre Menge genannt. Dazu dient das folgende Lemma 4.5. Erst im Anschluss kann mittels eines Dimensionsreduktions-Arguments die behauptete Diskretheit von $\text{Sing}(f)$ nachgewiesen werden.

Lemma 4.5 (Innere ε_0 -Regularität). *Sei $\mu \in (0, 1)$ und sei $f = (\varphi, R) \in W^{1,2}(B^3, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S})$ ein Minimierer des eingeschränkten Problems (\mathcal{P}') (bzgl. der eigenen Randwerte). Dann liegt f in der Klasse $C_{loc}^{1,\mu} \times C_{loc}^{0,\mu}$ auf der Menge $B^3 \setminus S(f, \varepsilon_0)$.*

Dabei ist für eine beliebige Abbildung $h = (\psi, Q) \in W^{1,2}(B^3, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S})$ die ε_0 -singuläre Menge $S(h, \varepsilon_0)$ definiert als

$$S(h, \varepsilon_0) := \left\{ x_0 \in B^3 : |x_0| \leq \frac{1}{2}, \rho^{-1} \left(\|D\psi\|_{L^2(B_\rho^3(x_0))}^2 + \|DQ\|_{L^2(B_\rho^3(x_0))}^2 \right) \geq \varepsilon_0 \right. \\ \left. \text{für alle } \rho \in (0, 1 - |x_0|) \right\}$$

für ein hinreichend kleines $\varepsilon_0 > 0$.

Beweis. Die nach der Inneren Diskreten Morrey-Bedingung existierenden Konstanten seien mit $\varepsilon_M > 0$ und $\theta \in (0, 1)$ sowie $\rho_0 \in (0, 1)$ bezeichnet. Für jedes $x_0 \in B^3 \setminus S(f, \varepsilon_0)$ gibt es nach Definition ein $s \in (0, 1 - |x_0|)$ mit

$$\Phi(x_0, s) := s^{-1} \left(\|D\varphi\|_{L^2(B_s^3(x_0))}^2 + \|DR\|_{L^2(B_s^3(x_0))}^2 \right) < \varepsilon_0 \quad (4.12)$$

für beliebig kleines $\varepsilon_0 > 0$. Setze $s_0 := \min\{\frac{s}{2}; \theta^{1+\frac{1}{2\mu}} \varepsilon_M^{\frac{1}{2\mu}}; \rho_0\}$ und betrachte $\varepsilon_0 = \frac{s_0}{s} \varepsilon_M$.

Falls für alle Punkte $x \in B_{\frac{s}{2}}^3(x_0)$ und für alle Radien $r \in (0, \frac{s}{2})$ die Energie-Abschätzung

$$\Phi(x, r) = r^{-1} \left(\|D\varphi\|_{L^2(B_r^3(x))}^2 + \|DR\|_{L^2(B_r^3(x))}^2 \right) \leq c \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^{2\mu} \cdot \varepsilon_0 \quad (4.13)$$

gezeigt werden kann, folgt die Hölder-Stetigkeit der Deformation φ und der Mikro-Rotation R auf $B_{\frac{s}{2}}^3(x_0)$ aus Morreys Dirichlet-Wachstumsbedingung.

Wegen (4.12) gilt zunächst für ein beliebiges $x \in B_{\frac{s}{2}}^3(x_0)$

$$\Phi(x, s_0) \leq \left(\frac{s_0}{s}\right)^{-1} \cdot \Phi(x_0, s) < \left(\frac{s_0}{s}\right)^{-1} \cdot \varepsilon_0 = \varepsilon_M. \quad (4.14)$$

Per vollständiger Induktion erhalte zunächst für alle $k \in \mathbb{N}_0$ die Abschätzung

$$\Phi(x, \theta^k s_0) \leq \theta^{2\mu k} \cdot \varepsilon_M. \quad (4.15)$$

Die Abschätzung (4.14) liefert dabei den Induktionsanfang für $k = 0$. Die Induktionsannahme lautet daher: Abschätzung (4.15) gilt für eine natürliche

Zahl $(k-1)$, d.h. $\Phi(x, \theta^{k-1}s_0) \leq \theta^{2\mu(k-1)} \cdot \varepsilon_M$. Nun unterscheide für den Induktionsschritt zwei Fälle.

1. Fall: $(\theta^{k-1}s_0)^{2\mu} \leq \Phi(x, \theta^{k-1}s_0)$. Dann folgt aus der Inneren Diskreten Morrey-Bedingung (Lemma 4.4) und der Induktionsvoraussetzung sofort

$$\Phi(x, \theta^k s_0) \leq \theta^{2\mu} \cdot \Phi(x, \theta^{k-1} s_0) \leq \theta^{2\mu} \cdot \theta^{2\mu(k-1)} \cdot \varepsilon_M = \theta^{2\mu k} \cdot \varepsilon_M,$$

da die Kleinheitsbedingung der Inneren Diskreten Morrey-Bedingung aufgrund der Fallannahme und der Induktionsvoraussetzung erfüllt ist.

2. Fall: $(\theta^{k-1}s_0)^{2\mu} > \Phi(x, \theta^{k-1}s_0)$. Dann gilt nach Definition von s_0

$$\Phi(x, \theta^k s_0) \leq \theta^{-1} \cdot \Phi(x, \theta^{k-1} s_0) \leq \theta^{-1} \cdot \theta^{2\mu(k-1)} \cdot s_0^{2\mu} \leq \theta^{2\mu k} \cdot \varepsilon_M.$$

Somit ist (4.15) für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gültig und es kann weiter festgehalten werden:

Für jedes $r \in (0, s_0)$ existiert ein $k \in \mathbb{N}_0$, sodass $\theta^{k+1} \leq \frac{r}{s_0} \leq \theta^k$ und daher auch

$$r \leq \theta^k \cdot s_0, \quad \theta^{2\mu k} \leq \theta^{-2\mu} \cdot \left(\frac{r}{s_0}\right)^{2\mu} \quad \text{und} \quad r^{-1} \leq \theta^{-1} \cdot (\theta^k s_0)^{-1}.$$

Damit folgt für alle $0 < r < s_0$

$$\begin{aligned} \Phi(x, r) &\leq \theta^{-1} \cdot \Phi(x, \theta^k s_0) \leq \theta^{-1} \cdot \theta^{2\mu k} \cdot \varepsilon_M \\ &\leq \theta^{-1-2\mu} \cdot \left(\frac{r}{s_0}\right)^{2\mu} \cdot \varepsilon_M = \theta^{-1-2\mu} \cdot \left(\frac{r}{s_0}\right)^{2\mu} \cdot \varepsilon_0 \cdot \left(\frac{s_0}{s}\right)^{-1} \\ &\leq \theta^{-1-2\mu} \cdot s_0^{-1-2\mu} \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^{2\mu} \cdot \varepsilon_0. \end{aligned}$$

Für $s_0 \leq r < \frac{s}{2}$ hingegen schätze mit $B_r^3(x) \subset B_s^3(x_0)$ unter Verwendung von (4.12) ab:

$$\begin{aligned} \Phi(x, r) &\leq \left(\frac{r}{s}\right)^{-1} \cdot \Phi(x_0, s) \leq s_0^{-1} \cdot \Phi(x_0, s) \\ &\leq \theta^{-1-2\mu} \cdot s_0^{-1} \cdot \left(\frac{r}{s_0}\right)^{2\mu} \cdot \varepsilon_0 \\ &\leq \theta^{-1-2\mu} \cdot s_0^{-1-2\mu} \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^{2\mu} \cdot \varepsilon_0. \end{aligned}$$

Insgesamt gilt also die Energie-Abschätzung (4.13) mit $c = \theta^{-1-2\mu} s_0^{-1-2\mu}$.

Deshalb kann wie in [Gas19] vorerst geschlossen werden, dass nach Morreys Dirichlet-Wachstumsbedingung (vgl. z.B. [Mor66] oder [GT83, Kapitel 7.9]) der betrachtete eingeschränkte Minimierer $f = (\varphi, R)$ in der Klasse $C_{loc}^{0,\mu} \times C_{loc}^{0,\mu}$ liegt, außerhalb der ε_0 -singulären Menge $S(f, \varepsilon_0)$.

Was noch fehlt, ist der Nachweis der lokalen Hölder-Stetigkeit des Deformations-Gradienten $D\varphi$. Doch in der vorliegenden Situation ist die von φ gelöste (Euler-Lagrange-)Gleichung linear elliptisch, mit Koeffizienten und rechter Seite, die jeweils von R abhängen. Daher können dort, wo die Mikro-Rotation

R lokal Hölder-stetig ist (also außerhalb von $S(f, \varepsilon_0)$), klassische Schauder-Abschätzungen genutzt werden, was dann die lokale Hölder-Stetigkeit von $D\varphi$ liefert, beispielsweise mit [GM12, Thm. 5.19].

Somit liegt der eingeschränkte Minimierer f tatsächlich wie behauptet in der Klasse $C_{loc}^{1,\mu} \times C_{loc}^{0,\mu}(B^3 \setminus S(f, \varepsilon_0), \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S})$. □

Mit all diesen Hilfsresultaten kann nun der Beweis der Hauptaussage des Abschnitts 4.1 geführt werden.

Satz 4.6. *Sei $f = (\varphi, R) \in W^{1,2}(B^3, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S})$ ein Minimierer für das eingeschränkte Problem (\mathcal{P}') bzgl. der eigenen Randwerte. Dann ist die singuläre Menge $\text{Sing}(f)$ diskret in B^3 .*

Der folgende Beweis detailliert die Beweisführung zu [Gas19, Prop. 5.2(i)].

Beweis von Satz 4.6. Vorüberlegung. Da nach der gerade bewiesenen Inneren ε_0 -Regularität (Lemma 4.5) bekannt ist, dass $\text{Sing}(f) \subseteq S(f, \varepsilon_0)$ gilt, betrachte als Erstes $x_0 \in S(f, \varepsilon_0)$. Es werden erneut reskalierte Versionen von $f = (\varphi, R)$ um x_0 betrachtet, gegeben durch die Aufblasfolge $\hat{f}_i = (\hat{\varphi}_i, \hat{R}_i) \in W^{1,2}(B^3, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S})$ mit

$$\hat{\varphi}_i(x) := \varphi(x_0 + \rho_i x) - \bar{\varphi}_{\rho_i} \quad \text{und} \quad \hat{R}_i(x) := R(x_0 + \rho_i x),$$

wobei $(\rho_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine beliebige, streng monoton fallende Folge mit $\rho_1 \ll 1$ und $\rho_i \searrow 0$ ist und $\bar{\varphi}_{\rho_i}$ den Mittelwert von φ in $B_{\rho_i}^3(x_0)$ bezeichnet. Dann minimiert \hat{f}_i das skalierte Funktional

$$\mathcal{J}_i(\psi, Q) := \int_{B^3} |Q^T D\psi - \rho_i I_3|^2 + |DQ|^2 dx.$$

Es sei auf Folgendes hingewiesen: Im Gegensatz zum Beweis der Inneren Diskreten Morrey-Bedingung (Lemma 4.4) wird hier nur im Definitionsbereich um den Faktor ρ_i^{-1} aufgeblasen, eine Reskalierung im Wertebereich findet nicht statt.

Dies hat den Vorteil, dass die aufgeblasenen Minimierer $\hat{f}_i = (\hat{\varphi}_i, \hat{R}_i)$ von $\mathcal{J}_i(\cdot)$ weiterhin Werte in $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}$ haben und somit, anders als zuvor, die Geometrie des Problems widerspiegeln können. Die gewählte Skalierung erklärt sich zusätzlich auch dadurch, dass wegen der Inneren Monotonie-Formel (Lemma 4.2) die Beschränktheit von $\mathcal{J}_i(\hat{\varphi}_i, \hat{R}_i)$ bei $i \rightarrow \infty$ erhalten bleibt; das formale Grenzfunktional lautet wegen $Q \in \mathcal{S}$

$$\mathcal{J}_\infty(\psi, Q) := \int_{B^3} |Q^T D\psi|^2 + |DQ|^2 dx = \int_{B^3} |D\psi|^2 + |DQ|^2 dx.$$

Die Poincaré-Ungleichung (alle $\hat{\varphi}_i$ haben nach Konstruktion Mittelwert 0) impliziert zusammen mit der Inneren Monotonie-Formel ebenso die Beschränktheit von $(\hat{\varphi}_i, \hat{R}_i)$ in $W^{1,2}(B^3, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S})$, da

$$\begin{aligned} \|\hat{\varphi}_i\|_{W^{1,2}(B^3)}^2 &\leq c \cdot \|\mathbf{D}\hat{\varphi}_i\|_{L^2(B^3)}^2 = c \cdot \rho_i^{-1} \int_{B_{\rho_i}^3(x_0)} |\mathbf{D}\varphi|^2 dx \\ &\leq c \cdot \rho_i^{-1} \int_{B_{\rho_i}^3(x_0)} |\mathbf{D}\varphi|^2 + |\mathbf{D}R|^2 dx \end{aligned}$$

und

$$\|\hat{R}_i\|_{W^{1,2}(B^3)}^2 = \|\hat{R}_i\|_{L^2(B^3)}^2 + \|\mathbf{D}\hat{R}_i\|_{L^2(B^3)}^2 \leq c + \rho_i^{-1} \int_{B_{\rho_i}^3(x_0)} |\mathbf{D}\varphi|^2 + |\mathbf{D}R|^2 dx.$$

Die Reflexivität des Banachraums $W^{1,2}(B^3, \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{3 \times 3})$ ausnutzend nimmt man daher (nach Übergang zu einer Teilfolge) ähnlich wie zuvor die schwache Konvergenz $(\hat{\varphi}_i, \hat{R}_i) \rightharpoonup (\hat{\varphi}_\infty, \hat{R}_\infty)$ an. Mit völlig analoger Kompaktheits-Argumentation wie im Beweis der Inneren Diskreten Morrey-Bedingung (Lemma 4.4, vgl. S. 44 ff.) folgt insbesondere, ggf. nach mehrfachem Übergang zu einer Teilfolge, die Konvergenz in $W^{1,2}$ -Norm auf B_t^3 mit t beliebig nahe an 1, sowie die Minimierung von $\mathcal{J}_{\infty,t}(\cdot)$.

Einsetzen von $s = t\rho_i$, $r = t\rho_j$ ($j > i$, $0 < t$ fest, beliebig nahe an 1) in die Innere Monotonie-Formel (Lemma 4.2) liefert die folgende Abschätzung; auch hier sind sich ändernde Konstanten aus $\mathbb{R}_{>0}$ weiterhin mit demselben c benannt.

$$\begin{aligned} &(t^{-1} + \rho_i) \int_{B_t^3} |\mathbf{D}\hat{\varphi}_i|^2 + |\mathbf{D}\hat{R}_i|^2 dx - t^{-1} \int_{B_t^3} |\mathbf{D}\hat{\varphi}_j|^2 + |\mathbf{D}\hat{R}_j|^2 dx \\ = &(t^{-1} + \rho_i) \int_{B_t^3} |\mathbf{D}[\varphi(x_0 + \rho_i x) - \bar{\varphi}_{i,\rho_i}]|^2 + |\mathbf{D}[R(x_0 + \rho_i x)]|^2 dx \\ &- t^{-1} \int_{B_t^3} |\mathbf{D}[\varphi(x_0 + \rho_j x) - \bar{\varphi}_{j,\rho_j}]|^2 + |\mathbf{D}[R(x_0 + \rho_j x)]|^2 dx \\ = &((t\rho_i)^{-1} + 1) \int_{B_{t\rho_i}^3(x_0)} |\mathbf{D}\varphi|^2 + |\mathbf{D}R|^2 dx - (t\rho_j)^{-1} \int_{B_{t\rho_j}^3(x_0)} |\mathbf{D}\varphi|^2 + |\mathbf{D}R|^2 dx \\ \geq &\int_{(B_{t\rho_i}^3 \setminus B_{t\rho_j}^3)(x_0)} |x - x_0|^{-1} \cdot [|\partial_{rad}\varphi|^2 + |\partial_{rad}R|^2] dx - c(t\rho_i)^{\frac{1}{2}} (1 + \|\mathbf{D}\varphi\|_{L^2(B^3)}) \\ \geq &\int_{B_t^3 \setminus B_{t\rho_j/\rho_i}^3} |x|^{-1} [|\partial_{rad}\hat{\varphi}_i|^2 + |\partial_{rad}\hat{R}_i|^2] dx - c\rho_i^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Schickt man zunächst $j \rightarrow \infty$ und dann $i \rightarrow \infty$, so liefert die Norm-Konvergenz auf B_t^3 für festes t beliebig nahe an 1

$$\int_{B_t^3} |x|^{-1} \cdot [|\partial_{rad}\hat{\varphi}_\infty|^2 + |\partial_{rad}\hat{R}_\infty|^2] dx = 0.$$

Daraus folgt $\partial_{rad}\hat{\varphi}_\infty \equiv 0$ und $\partial_{rad}\hat{R}_\infty \equiv 0$ auf jedem B_t^3 und damit auch auf B^3 . Also ist der Limes der Aufblasfolge $\hat{f}_\infty = (\hat{\varphi}_\infty, \hat{R}_\infty)$ radial konstant.

Nach dieser Vorüberlegung geht die nun folgende Strategie zum Beweis der Diskretheit von $\text{Sing}(f)$ ähnlich wie in [SU82] auf eine Adaption von Federers Dimensions-Reduktions-Argument für harmonische Abbildungen zurück. Nach Lemma 4.5 genügt es zu zeigen, dass $S(f, \varepsilon_0)$ diskret ist für ein hinreichend klein gewähltes ε_0 . Dies geschieht mittels Widerspruchsbeweis.

Nimm also an, es existiere ein Punkt $a \in S(f, \varepsilon_0)$, der Grenzwert einer Folge $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Punkten $a_i \in S(f, \varepsilon_0) \setminus \{a\}$ ist. Definiere wie in der Vorüberlegung eine Aufblasfolge um $x_0 = a$, mit einer so gewählten Folge von Radien $\rho_i \searrow 0$, dass die zugehörige Aufblasfolge $\hat{f}_i = (\hat{\varphi}_i, \hat{R}_i)$ gegen eine radial konstante Grenzabbildung $\hat{f}_\infty = (\hat{\varphi}_\infty, \hat{R}_\infty)$ konvergiert, welche gleichzeitig $\mathcal{J}_{\infty,t}(\cdot)$ minimiert für $0 < t$ beliebig nahe an 1.

Des Weiteren kann angenommen werden, dass die ρ_i so gewählt waren, dass die (Punkt-)Folge $\{\rho_i^{-1}(a_i - a)\}_{i \in \mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt x_a mit $|x_a| = \frac{1}{2}$ besitzt. Dann ist einerseits $x_a \in S(\hat{f}_\infty, \varepsilon_0)$, denn es gilt

$$\begin{aligned} & r^{-1} \int_{B_r^3(x_a)} |D\hat{\varphi}_\infty|^2 + |D\hat{R}_\infty|^2 dx \\ \geq & \liminf_{i \rightarrow \infty} r^{-1} \int_{B_r^3(\rho_i^{-1}(a_i - a))} |D\hat{\varphi}_i|^2 + |D\hat{R}_i|^2 dx \\ = & \liminf_{i \rightarrow \infty} r^{-1} \int_{B_r^3(\rho_i^{-1}(a_i - a))} \rho_i^2 [|D\varphi(a + \rho_i x)|^2 + |DR(a + \rho_i x)|^2] dx \\ = & \liminf_{i \rightarrow \infty} (\rho_i r)^{-1} \int_{B_{\rho_i r}^3(a_i)} |D\varphi|^2 + |DR|^2 dx \geq \varepsilon_0, \end{aligned}$$

für alle Radien $r < \rho_i^{-1}(1 - |a_i|)$, weil nach Annahme $a_i \in S(f, \varepsilon_0) \setminus \{a\}$ gilt. Wegen der Abschätzung $\rho_i^{-1}(1 - |a_i|) \geq 1 \cdot \frac{1}{2} = 1 - |x_a|$ folgt dann die Behauptung $x_a \in S(\hat{f}_\infty, \varepsilon_0)$.

Außerdem ist $x_a \neq 0$ und der Limes der Aufblasfolge $\hat{f}_\infty = (\hat{\varphi}_\infty, \hat{R}_\infty)$ radial konstant. Das bedeutet, es muss eine Gerade $\mathbb{R}x_a$ in der ε_0 -singulären Menge $S(\hat{f}_\infty, \varepsilon_0)$ enthalten sein.

Andererseits gilt $S(\hat{f}_\infty, \varepsilon_0) \subseteq \Sigma(\hat{f}_\infty)$, wobei die letztere Menge für eine beliebige Sobolev-Abbildung $h = (\psi, Q) \in W^{1,2}(B^3, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S})$ wie folgt definiert ist:

$$\Sigma(h) := \left\{ x_0 \in B^3 : \liminf_{\rho \searrow 0} \rho^{-1} \left(\|D\psi\|_{L^2(B_\rho^3(x_0))}^2 + \|DQ\|_{L^2(B_\rho^3(x_0))}^2 \right) \geq \varepsilon_0 \right\},$$

für ein hinreichend kleines ε_0 .

Dann folgt allerdings wegen $\mathbb{R}x_a \subseteq S(\hat{f}_\infty, \varepsilon_0) \subseteq \Sigma(\hat{f}_\infty)$ sofort für das eindimensionale Hausdorff-Maß: $\mathcal{H}^1(\Sigma(\hat{f}_\infty)) = +\infty$. Doch die so definierte Menge $\Sigma(\cdot)$ einer $W^{1,2}$ -Abbildung in drei Dimensionen hat immer verschwindendes

eindimensionales Hausdorff-Maß, [vgl. z.B. GM12, Prop. 9.21 und Cor. 10.17]. Dies bildet den gesuchten Widerspruch und die ε_0 -singuläre Menge $S(f, \varepsilon_0)$ (von f) ist diskret. Nach Lemma 4.5 ist damit, wie eingangs begründet wegen $\text{Sing}(f) \subseteq S(f, \varepsilon_0)$, auch die Diskretheit von $\text{Sing}(f)$ im Inneren bewiesen. \square

Aufgrund des gerade bewiesenen Satzes 4.6 sind somit für Minimierer des eingeschränkten Problems im Inneren höchstens isolierte Punktsingularitäten zu erwarten. Dennoch besteht die Möglichkeit, dass sich die Situation am Rand anders darstellt, wenn die Cosserat-Energie unter vorgegebenen C^1 -Dirichlet-Randbedingungen minimiert wird. Ohne weitergehende Betrachtung dieses Aspekts wäre die Argumentation in Kapitel 5 hinfällig. Denn die Frage nach eingeschränkten Minimierern mit einer vorgegebenen Anzahl von Punktsingularitäten ergibt nur dann Sinn, wenn ausgeschlossen werden kann, dass sich Singularitäten am Rand potenziell häufen. Daher beschäftigt sich der nächste Abschnitt 4.2 mit Randregularität.

Dabei gelingt es nicht nur partielle Regularität am Rand nachzuweisen, wie man es nach Abschnitt 4.1 erwarten könnte, sondern wie bereits angekündigt sogar volle Randregularität. Ähnlich wie bei harmonischen Abbildungen mit vorgegebenen C^1 -Dirichlet-Randbedingungen ist die Regularität am Rand besser als im Inneren.

Bemerkung 4.7. Zur besseren (zeitlichen) Einordnung der vorliegenden Ergebnisse sei Folgendes angemerkt: Nachdem die volle Randregularität des nächsten Abschnitts im Zuge des Forschungsprojekts nachgewiesen war, veröffentlichten Y. Li und ein weiterer Co-Autor L. Wang kurz vor Fertigstellung der vorliegenden Dissertation ebenfalls einen Artikel, welcher sich mit der Randregularität kritischer Punkte der Cosserat-Energie beschäftigt ([LW23]). Sie erreichen mit ähnlichen Methoden im Fall $p \in [2, 3)$ für stationäre kritische Punkte lokale Hölder-Stetigkeit am Rand außerhalb einer Menge von verschwindendem $(3 - p)$ -dimensionalem Hausdorff-Maß. Allerdings benötigen sie dafür die weitere Annahme, dass der stationäre kritische Punkt der Cosserat-Energie eine Rand-Monotonie-Formel erfüllt, was eine starke Einschränkung darstellt. Die in der vorliegenden Arbeit untersuchte Subklasse der kritischen Punkte (für $p = 2$) erfüllt eine vergleichbare Rand-Monotonie-Formel automatisch.

4.2 Volle Randregularität

Wie zu Beginn von Kapitel 4 beschrieben, lassen sich die in diesem Abschnitt vorgeführten Beweise ohne großen Aufwand auf Minimierer des vollen Problems übertragen, sodass die Hauptaussage des Abschnitts an dieser Stelle bereits einmal für Letztere formuliert wird:

Satz 4.8. Sei $f \in W_g^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3 \times SO(3))$ ein Minimierer der Cosserat-Energie $\mathcal{J}_\Omega(\cdot)$ bzgl. der Dirichlet-Randbedingung $g = (\vartheta, M) \in C^1(\partial\Omega, \mathbb{R}^3 \times SO(3))$.

Dann ist die singuläre Menge $\text{Sing}(f)$ im Inneren von Ω enthalten. Insbesondere gilt

$$\text{Sing}(f) \cap \partial\Omega = \emptyset,$$

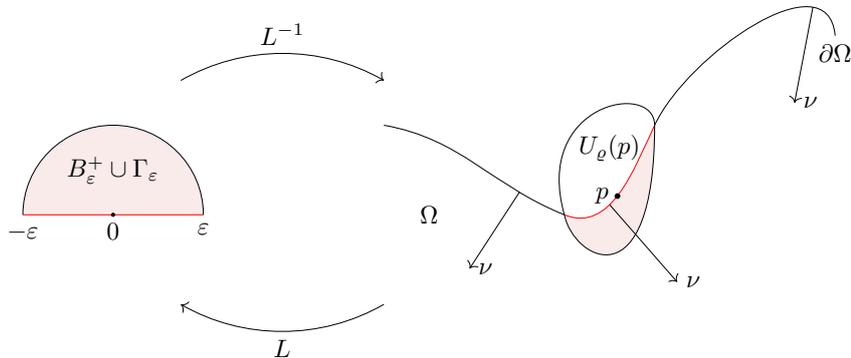
d.h. es gibt keine Singularitäten am Rand.

In Kombination mit den Ergebnissen aus [Gas19] gilt damit, dass Minimierer des vollen Problems bei den in dieser Arbeit betrachteten Materialparametern für $p = 2$ sowohl im Inneren als auch am Rand lokal Hölder-stetig sind.

Doch bevor mit der entsprechenden Formulierung für eingeschränkte Minimierer $f \in W_g^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S})$ und der zugehörigen Beweisführung begonnen wird, sei wie zu Beginn von Abschnitt 4.1 auch hier zunächst die Lokalität der Fragestellung bemerkt. Denn sind für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ mit hinreichend glattem Rand (mindestens C^3) auf einer offenen Teilmenge des Randes $O \subset \partial\Omega$ feste C^1 -Dirichlet-Randwerte vorgegeben, so lässt sich das Problem wie üblich lokal auf Halbkugeln durch „Gerade-Biegen“ des Randes untersuchen:

Da der Rand $\partial\Omega$ selbst eine zweidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit ist, existiert in einem beliebigen Randpunkt $p \in O$ der Tangentialraum $T_p\partial\Omega$ mit einem in einer Umgebung hinreichend oft differenzierbaren ONB-Feld $\{e_1, e_2\}$. Weiterhin existiert eine (kleine) Zahl $\varepsilon > 0$, sodass die Exponential-Abbildung, die einem Tangentialvektor eine entsprechende Geodäte in der Mannigfaltigkeit zuordnet, $\exp_p: B_\varepsilon^2(0) \subset T_p\partial\Omega \rightarrow \partial\Omega$ ein Diffeomorphismus von $B_\varepsilon^2(0)$ auf eine offene Teilmenge von $\partial\Omega$ (um p) ist [Car92, Prop. 2.9]. Daher kann das „Gerade-Biegen“ L des Randes bzw. dessen Inverse L^{-1} realisiert werden durch

$$\begin{aligned} L^{-1}: B_\varepsilon^+ \cup \Gamma_\varepsilon &\rightarrow U_\varrho(p) \cap \overline{\Omega}, \\ (y_1, y_2, y_3) &\mapsto \exp_p(y_1 e_1 + y_2 e_2) + y_3 \cdot \nu(\exp_p(y_1 e_1 + y_2 e_2)). \end{aligned}$$



Dabei bezeichnet

- (a) $B_\varepsilon^+ := \{y \in B_\varepsilon^3 : y_3 > 0\}$ die offene obere Halbkugel vom Radius ε um 0,
- (b) $\Gamma_\varepsilon := B_\varepsilon^2 \times \{0\}$ die an B_ε^+ angrenzende Kreisscheibe,
- (c) $U_\varrho(p)$ eine Umgebung von p mit $\text{diam}(U_\varrho(p)) = \varrho \in (0, \varepsilon)$, wobei $\frac{\varrho}{\varepsilon} \rightarrow 1$ bei $\varepsilon \rightarrow 0$ und
- (d) $\nu(\cdot)$ das innere Normalenfeld an $\partial\Omega$, welches wegen der vorausgesetzten Glattheit von $\partial\Omega$ existiert.

Insbesondere ist $L^{-1}(B_\varepsilon^+) = U_\varrho(p) \cap \Omega$ und $L^{-1}(\Gamma_\varepsilon) = U_\varrho(p) \cap \partial\Omega$.

Für eine Abbildung $f = (\varphi, R) \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S})$ mit in $O \subset \partial\Omega$ vorgegebenen Dirichlet-Randwerten $f|_O = g = (\vartheta, M) \in C^1(O, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S})$ findet man dann lokal um einen Randpunkt p :

$$\begin{aligned}
& \int_{U_\varrho(p) \cap \Omega} |R^T(x) \cdot D\varphi(x) - I_3|^2 + |DR(x)|^2 dx \\
&= \int_{B_\varepsilon^+} \left\{ |R^T(L^{-1}(y)) \cdot D\varphi(L^{-1}(y)) - I_3|^2 + |DR(L^{-1}(y))|^2 \right\} \cdot \text{Jac}(L^{-1})(y) dy \\
&= \int_{B_\varepsilon^+} \left\{ |(R \circ L^{-1})^T(y) \cdot D(\varphi \circ L^{-1})(y) \cdot DL(L^{-1}(y)) - I_3|^2 \right. \\
&\quad \left. + |D(R \circ L^{-1})(y) \cdot DL(L^{-1}(y))|^2 \right\} \cdot \text{Jac}(L^{-1})(y) dy \tag{4.16}
\end{aligned}$$

mit den entsprechend transformierten, stetig differenzierbaren Randwerten $G = (g \circ L^{-1})|_{\Gamma_\varepsilon} \in C^1(\Gamma_\varepsilon, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S})$.

Ziel des nun folgenden Abschnitts ist der Nachweis der vollen Randregularität für die betrachtete Subklasse kritischer Punkte der Cosserat-Energie. Das bedeutet, es ist zu zeigen, dass die singuläre Menge eines beliebigen eingeschränkten Minimierers $f = (\varphi, R) \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S})$ der Cosserat-Energie \mathcal{J}_Ω bzgl. der Dirichlet-Randbedingung $f|_O = g = (\vartheta, M) \in C^1(O, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S})$ ganz im Inneren von Ω liegt (und damit nach Abschnitt 4.1 diskret ist). Dazu wird die Annahme einer Punktsingularität in einem Randpunkt $p \in O \subset \partial\Omega$ zum Widerspruch geführt.

Dafür ist es zweckmäßig, das transformierte Problem nach den obigen Ausführungen zu (4.16) lokal auf oberen Halbkugeln B_ε^+ mit vorgegebenen Randwerten auf der angrenzenden Kreisscheibe Γ_ε zu untersuchen. Dabei kann man erneut die enge Beziehung zu harmonischen Abbildungen ausnutzen und das Vorgehen aus Abschnitt 4.1 nach den in [Ste91, Kapitel 10 und 11] geschilderten, aber nicht an allen Stellen vollständig ausgeführten Grundideen für harmonische Abbildungen an die Situation der Cosserat-Körper am Rand anpassen.

Es sei betont, dass K. Steffen sich in den beiden erwähnten Kapiteln auf die in [SU82] (innere partielle Regularität) und [SU83] (Randregularität) entwickelte, grundlegende Theorie stützt und dabei aufzeigt, wie die Argumente von S. Luckhaus aus [Luc88] die Beweisführung vereinfachen, wie es auch bereits in Abschnitt 4.1 ausgenutzt wurde. R. Schoen und K. Uhlenbeck hatten zum Zeitpunkt ihrer letzteren Veröffentlichung zwar Zugriff auf die preprint-Version von [JM83], in der J. Jost und M. Meier bereits Randregularität der Lösungen für eine etwas größere Klasse von Funktionalen nachweisen, allerdings unter der zusätzlichen Einschränkung eines zugrunde liegenden Koordinatensystems. Davon kann man sich nach [SU83] lösen. Die in Abschnitt 4.1 bereits verwendeten prinzipiellen Argumentationsschritte Monotonie-Formel, diskrete Morrey-Bedingung und Energie-Schranke für Singularitäten bleiben bestehen, werden aber technisch anspruchsvoller.

4.2.1 Hilfsaussagen

Um eine Monotonie-Formel am Rand beweisen zu können, muss an mehreren Stellen ausgenutzt werden, dass $DL^{-1}(y)$ (das Differential von L^{-1} im Punkt y) als lineare Abbildung zwischen den Tangentialräumen $T_y(B_\varepsilon^+ \cup \Gamma_\varepsilon)$ und $T_x(U_\rho(p) \cap \bar{\Omega})$ „nahe“ an der Identität ist in dem Sinne, dass gilt

$$|DL^{-1}(y) - I_3| \leq K \cdot |y| \quad (4.17)$$

für ein $K \in \mathbb{R}_{>0}$. Denn da $\text{Dexp}_p(0)$ die Identität ist, gilt

$$\begin{aligned} \partial_1 L^{-1}(0) &= \text{Dexp}_p(0)e_1 = e_1, \\ \partial_2 L^{-1}(0) &= \text{Dexp}_p(0)e_2 = e_2 \text{ und} \\ \partial_3 L^{-1}(0) &= \nu(\exp_p(0)) = \nu_p. \end{aligned}$$

Dies impliziert

$$DL^{-1}(0) = (e_1 \ e_2 \ \nu_p) \in O(3).$$

Mit der von nun an festen Wahl dieses in einer Umgebung (hinreichend oft) differenzierbaren ONB-Feldes $\{e_1, e_2, \nu_p\}$ ist dann das Differential des inversen „Gerade-Biegens“ im Ursprung durch die Einheitsmatrix gegeben, kurz $DL^{-1}(0) = I_3$. Der Schrankensatz liefert daher sofort

$$|DL^{-1}(y) - I_3| = |DL^{-1}(y) - DL^{-1}(0)| \leq \sup_{y \in B_\varepsilon^+ \cup \Gamma_\varepsilon} |D^2 L^{-1}(y)| \cdot |y - 0| \leq K \cdot |y|$$

für ein $K \in \mathbb{R}_{>0}$, weil die in $|D^2 L^{-1}(y)|$ auftretenden Summanden lediglich aus Produkten der Terme $|\text{Dexp}_p(\cdot)|$, $|D^2 \exp_p(\cdot)|$, $|y_3|$ sowie $|D\nu(\exp_p(\cdot))|$ und $|D^2 \nu(\exp_p(\cdot))|$ bestehen. Sie hängen also nur von Glattheit (mindestens C^3) und Krümmung des Randes $U_\rho(p) \cap \partial\Omega$ ab und sind daher beschränkt.

Somit gilt Ungleichung (4.17); sämtliche Eigenwerte des Differentials $DL^{-1}(y)$ im Punkt y liegen im Intervall $[1 - K|y|, 1 + K|y|]$. Diese Tatsache wird später

für verschiedene Abschätzungen von Bedeutung sein, sowohl im Beweis der Rand-Monotonie Formel als auch der Diskreten Morrey-Bedingung am Rand.

Außerdem sei ohne Einschränkung angenommen, dass $K \leq \frac{1}{2}$. Denn andernfalls kann $B_{2K\varepsilon}^+$ anstelle von B_ε^+ und die Transformation $\Lambda^{-1}(\xi) = L^{-1}(\frac{\xi}{2K})$ betrachtet werden. Dann gilt (ebenfalls mit dem Schrankensatz)

$$\begin{aligned} |\mathrm{D}\Lambda^{-1}(\xi) - \frac{1}{2K}I_3| &= |\mathrm{D}\Lambda^{-1}(\xi) - \mathrm{D}\Lambda^{-1}(0)| \\ &\leq \sup_{\xi \in B_{2K\varepsilon}^+ \cup \Gamma_{2K\varepsilon}} |\mathrm{D}^2\Lambda^{-1}(\xi)| \cdot |\xi - 0| \\ &\leq \frac{1}{2K} \sup_{y \in B_\varepsilon^+ \cup \Gamma_\varepsilon} |\mathrm{D}^2L^{-1}(y)| \cdot |\xi| \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot |\xi|. \end{aligned}$$

Bezüglich der (transformierten) Randwerte $G = (g \circ L^{-1}) \in C^1(\Gamma_\varepsilon, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S})$ bezeichnet im Folgenden also

$$\mathcal{C}(G) := \{H = (\psi \circ L^{-1}, Q \circ L^{-1}) = (\tilde{\psi}, \tilde{Q}) \in W^{1,2}(B_\varepsilon^+ \cup \Gamma_\varepsilon, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}) : H|_{\Gamma_\varepsilon} = G\}$$

die Klasse zulässiger Vergleichsabbildungen für die (auf die Untermannigfaltigkeit $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}$ eingeschränkte) L^{-1} -Cosserrat-Energie

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{J}}_{B_\varepsilon^+}(H) &:= \int_{B_\varepsilon^+} \left\{ |\tilde{Q}^T(y) \cdot \mathrm{D}\tilde{\psi}(y) \cdot \mathrm{D}L(L^{-1}(y)) - I_3|^2 \right. \\ &\quad \left. + |\mathrm{D}\tilde{Q}(y) \cdot \mathrm{D}L(L^{-1}(y))|^2 \right\} \cdot \mathrm{Jac}(L^{-1})(y) \, dy. \end{aligned}$$

Damit wird nun gezeigt:

Lemma 4.9 (Rand-Monotonie-Formel). *Sei $F^5 = (\tilde{\varphi}, \tilde{R})$ ein Minimierer der eingeschränkten L^{-1} -Cosserrat-Energie $\tilde{\mathcal{J}}_{B_\varepsilon^+}(\cdot)$ in der Klasse $\mathcal{C}(G)$.*

Dann existieren Konstanten c_a, c_b und $c_d \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, sodass für jede (Teil-)Kugel $B_s^+(y_0) := B_s^3(y_0) \cap B_\varepsilon^+$ um $y_0 \in \Gamma_\varepsilon$ mit Radius $s \in (0, \varepsilon)$ und für jedes $r \in (0, s)$ gilt:

$$\begin{aligned} &(s^{-1} + c_a) \int_{B_s^+(y_0)} |\mathrm{D}\tilde{\varphi}|^2 + |\mathrm{D}\tilde{R}|^2 \, dy - r^{-1} \int_{B_r^+(y_0)} |\mathrm{D}\tilde{\varphi}|^2 + |\mathrm{D}\tilde{R}|^2 \, dy \\ &\geq \int_{(B_s^3 \setminus B_r^3)^+(y_0)} |y - y_0|^{-1} \cdot \left[|\partial_{rad}\tilde{\varphi}|^2 + |\partial_{rad}\tilde{R}|^2 \right] \, dy \\ &\quad - c_b s^{\frac{1}{2}} \left(1 + \|\mathrm{D}\tilde{\varphi}\|_{L^2(B_\varepsilon^+)} \right) - c_d(s - r), \end{aligned} \tag{4.18}$$

wobei ∂_{rad} die radiale Ableitung in Richtung $\frac{y-y_0}{|y-y_0|}$ bezeichnet.

⁵Die in Abschnitt 4.2 betrachteten Abbildungen $F = (\tilde{\varphi}, \tilde{R})$ sind nicht zu verwechseln mit der Überlagerung $F : S^2 \rightarrow \mathcal{S}$ aus Kapitel 2 und Kapitel 3.

Analog zum Vorgehen in Abschnitt 4.1 wird diese Rand-Monotonie-Formel später an entsprechender Stelle unter anderem im Beweis von Satz 4.13 („keine Singularitäten am Rand“) bei der Dimensionsreduktion der ε_0 -singulären Menge helfen, indem sie dafür sorgt, dass (skalierte) L^{-1} -Cosserrat-Energien einer Aufblasfolge beschränkt bleiben. Doch zunächst zum Beweis der Rand-Monotonie-Formel:

Beweis von Lemma 4.9 (Rand-Monotonie-Formel). Wie im Beweis der Inneren Monotonie-Formel (Lemma 4.2) sei o.B.d.A. $y_0 = 0$ zur Vereinfachung der Notation. Die dort genutzten, auf einer kleineren Kugel radial konstanten Vergleichsabbildungen können jedoch nicht ohne Weiteres durch die Setzung

$$\begin{aligned} F_t(y) &= F\left(\frac{t}{|y|}y\right) && \text{in } B_t^3 \cap (B_\varepsilon^+ \cup \Gamma_\varepsilon), \\ F_t(y) &= F(y) && \text{in } (B_\varepsilon^3 \setminus B_t^3) \cap (B_\varepsilon^+ \cup \Gamma_\varepsilon) \end{aligned}$$

auf die hiesige Situation übertragen werden, da sie nicht die gegebene Randbedingung $F_t = G$ auf $B_t^3 \cap \Gamma_\varepsilon$ erfüllen.

Stattdessen sollen als Vergleichsabbildungen diejenigen Fortsetzungen der Randwerte auf ∂B_t^+ betrachtet werden, die radial konstant bzgl. des Zentrums $(0, 0, \alpha t)$ sind, mit später (in Abhängigkeit von t) passend gewähltem $\alpha \in (0, 1)$.

Definiere also $\hat{F}_t = (\hat{\varphi}_t, \hat{R}_t): B_s^+ \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}$ durch

$$\hat{F}_t(y) := \begin{cases} (F_t \circ \Upsilon_{t,\alpha}^{-1})(y), & y \in B_t^+ \setminus C_{t,\alpha}^+ \\ (G \circ P)(y), & y \in C_{t,\alpha}^+ \\ F(y), & y \in (B_s^3 \setminus B_t^3)^+ \end{cases}$$

Dabei seien

- (i) $C_{t,\alpha}^+ := \{y \in B_t^+ : 0 < y_3 < \alpha(t - |y'|)\}$ ein offener Kegel mit Spitze $(0, 0, \alpha t)$ und Grundfläche $\Gamma_t := B_t^2 \times \{0\} \subset \partial C_{t,\alpha}^+$, $y = (y', y_3)$,
- (ii) $\Upsilon_{t,\alpha}^{-1}$ die Inverse der Bi-Lipschitz-Abbildung $\Upsilon_{t,\alpha}(y) := (y', y_3 + \alpha(t - |y'|))$
- (iii) $P(y) := \frac{\alpha t}{\alpha t - y_3}(y', 0)$.

Dann gilt zunächst aufgrund von $G = (\tilde{\vartheta}, \tilde{M}) \in C^1(\overline{\Gamma_t}, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S})$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_{C_{t,\alpha}^+} |D\hat{\varphi}_t|^2 + |D\hat{R}_t| dy &\leq \int_{C_{t,\alpha}^+} |D\tilde{\vartheta}(P(y)) \cdot DP(y)|^2 + |D\tilde{M}(P(y)) \cdot DP(y)|^2 dy \\ &\leq c_0 \cdot \alpha^{-1} t^3 \cdot \max \left\{ \sup\{D\tilde{\vartheta}|_{\overline{\Gamma_t}}\}; \sup\{D\tilde{M}|_{\overline{\Gamma_t}}\} \right\} \\ &\leq c_1 \cdot \alpha^{-1} t^3. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Da $\Upsilon_{t,\alpha}$ die Bi-Lipschitz-Konstante $(1 - \alpha)^{-1}$ hat, folgt aus (4.19) in Kombination mit der Wahl $\alpha := t$ die Existenz einer positiven Konstanten c_2 , sodass

$$\begin{aligned}
& \int_{B_t^+} |\mathrm{D}\hat{\varphi}_t|^2 + |\mathrm{D}\hat{R}_t|^2 \, dy \\
& \leq \int_{B_t^+ \setminus C_{t,\alpha}^+} |\mathrm{D}\tilde{\varphi}_t(\Upsilon_{t,\alpha}^{-1}(y)) \cdot \mathrm{D}\Upsilon_{t,\alpha}^{-1}(y)|^2 \\
& \quad + |\mathrm{D}\tilde{R}_t(\Upsilon_{t,\alpha}^{-1}(y)) \cdot \mathrm{D}\Upsilon_{t,\alpha}^{-1}(y)|^2 \, dy + c_1 \alpha^{-1} t^3 \\
& \leq (1 + c_2 t) \int_{B_t^+} |\mathrm{D}\tilde{\varphi}_t|^2 + |\mathrm{D}\tilde{R}_t|^2 \, dy + c_1 t^2. \tag{4.20}
\end{aligned}$$

Aufgrund der zu Beginn dieses Abschnitts 4.2.1 erläuterten Eigenschaften des „Gerade-Biegens“ L (vgl. (4.17)) finde mit der Auffassung von $\gamma_{\alpha\beta} := \partial_\alpha L^{-1} \cdot \partial_\beta L^{-1}$ als Riemannscher Metrik, $\sqrt{\gamma} := \sqrt{\det(\gamma_{\alpha\beta})} = \mathrm{Jac}(L^{-1})$, unter Verwendung der Einsteinschen Summenkonvention und mit der Notation $\gamma^{\alpha\beta}$ für die Inverse von $\gamma_{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned}
& \int_{B_t^+} \left\{ |\tilde{R}^T(y) \cdot \mathrm{D}\tilde{\varphi}(y) \cdot \mathrm{D}L(L^{-1}(y))|^2 \right. \\
& \quad \left. + |\mathrm{D}\tilde{R}(y) \cdot \mathrm{D}L(L^{-1}(y))|^2 \right\} \cdot \mathrm{Jac}(L^{-1})(y) \, dy \\
& = \int_{B_t^+} \left\{ |\mathrm{D}\tilde{\varphi}(y) \cdot \mathrm{D}L(L^{-1}(y))|^2 + |\mathrm{D}\tilde{R}(y) \cdot \mathrm{D}L(L^{-1}(y))|^2 \right\} \cdot \mathrm{Jac}(L^{-1})(y) \, dy \\
& = \int_{B_t^+} \left\{ \gamma^{\alpha\beta} \partial_\alpha \tilde{\varphi} \partial_\beta \tilde{\varphi} + \gamma^{\alpha\beta} \partial_\alpha \tilde{R} \partial_\beta \tilde{R} \right\} \sqrt{\gamma} \, dy.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich sofort die Abschätzung

$$\begin{aligned}
& \frac{(1 - Kt)^{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}}{(1 + Kt)^{\frac{1}{2}}} \cdot \int_{B_t^+} |\mathrm{D}\tilde{\varphi}|^2 + |\mathrm{D}\tilde{R}|^2 \, dy \\
& \leq \int_{B_t^+} \left\{ |\mathrm{D}\tilde{\varphi}(y) \cdot \mathrm{D}L(L^{-1}(y))|^2 + |\mathrm{D}\tilde{R}(y) \cdot \mathrm{D}L(L^{-1}(y))|^2 \right\} \cdot \mathrm{Jac}(L^{-1})(y) \, dy \\
& \leq \frac{(1 + Kt)^{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}}{(1 - Kt)^{\frac{1}{2}}} \cdot \int_{B_t^+} |\mathrm{D}\tilde{\varphi}|^2 + |\mathrm{D}\tilde{R}|^2 \, dy
\end{aligned}$$

sowie die analoge Abschätzung für alle Abbildungen der Aufblasfolge $\hat{F}_t = (\hat{\varphi}_t, \hat{R}_t)$ anstelle von $F = (\tilde{\varphi}, \tilde{R})$, vgl. auch [Ste91, S. 117].

Zusammen mit der Bezeichnung $S_t^+ := \partial B_t^3 \cap B_\varepsilon^+$ erhalte deswegen wie in der Herleitung der Gleichungen (4.2) – (4.4) unter Beachtung von $|\tilde{R}_t^T \mathrm{D}\tilde{\varphi}_t|^2 = |\mathrm{D}\tilde{\varphi}_t|^2$ auch die Gleichungen

$$t^{-1} \int_{B_t^+} |\mathrm{D}\tilde{\varphi}_t|^2 \, dy = \frac{d}{dt} \left[\int_{B_t^+} |\mathrm{D}\tilde{\varphi}|^2 \, dy \right] - \int_{S_t^+} |\partial_{\mathrm{rad}} \tilde{\varphi}|^2 \, d\mathcal{H}^2 \tag{4.21}$$

und

$$t^{-1} \int_{B_t^+} |\mathrm{D}\tilde{\varphi}_t|^2 + |\mathrm{D}\tilde{R}_t|^2 \, dy = \frac{d}{dt} \left[\int_{B_t^+} |\mathrm{D}\tilde{\varphi}|^2 + |\mathrm{D}\tilde{R}|^2 \, dy \right] - \int_{S_t^+} |\partial_{rad}\tilde{\varphi}|^2 + |\partial_{rad}\tilde{R}|^2 \, d\mathcal{H}^2. \quad (4.22)$$

Exakt wie im Beweis der Inneren Monotonie-Formel (Lemma 4.2) wird an dieser Stelle ausgenutzt, dass F nach Voraussetzung die (eingeschränkte) L^{-1} -Cosserrat-Energie auf B_t^+ minimiert und auf S_t^+ die gleichen Werte wie \hat{F}_t hat; vollkommen analog zur Herleitung von (4.5) erhalte daher mit der Hölder- und der skalierten Youngschen Ungleichung für $p = q = 2$ und $\frac{1}{2}\lambda t > 0$:

$$\begin{aligned} & \int_{B_t^+} |\mathrm{D}\tilde{\varphi}|^2 + |\mathrm{D}\tilde{R}|^2 \, dy \\ & \leq \frac{(1+Kt)^{\frac{1}{2}}}{(1-Kt)^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}} \cdot \int_{B_t^+} \left\{ |\tilde{R}^T(y) \cdot \mathrm{D}\tilde{\varphi}(y) \cdot \mathrm{D}L(L^{-1}(y))|^2 \right. \\ & \quad \left. + |\mathrm{D}\tilde{R}(y) \cdot \mathrm{D}L(L^{-1}(y))|^2 \right\} \cdot \mathrm{Jac}(L^{-1})(y) \, dy \\ & \leq \frac{(1+Kt)^{\frac{1}{2}}}{(1-Kt)} \cdot \left[\tilde{\mathcal{J}}_{B_t^+}(F) + \int_{B_t^+} |I_3|^2 \cdot \mathrm{Jac}(L^{-1})(y) \, dy \right. \\ & \quad \left. + 2 \int_{B_t^+} |\tilde{R}^T(y) \cdot \mathrm{D}\tilde{\varphi}(y) \cdot \mathrm{D}L(L^{-1}(y)) - I_3| \cdot |I_3| \cdot \mathrm{Jac}(L^{-1})(y) \, dy \right] \\ & \leq \frac{(1+Kt)^{\frac{1}{2}}}{(1-Kt)} \cdot \tilde{\mathcal{J}}_{B_t^+}(\hat{F}_t) + \left(\frac{1+Kt}{1-Kt} \right)^{\frac{3}{2}} \left[c_3 \cdot t^3 + c_4 \cdot t^{\frac{3}{2}} \|\mathrm{D}\tilde{\varphi}\|_{L^2(B_t^+)} \right] \\ & \leq \frac{(1+Kt)^{\frac{1}{2}}}{(1-Kt)} \cdot \left[(1+\lambda t) \int_{B_t^+} |\mathrm{D}\hat{\varphi}_t(y) \cdot \mathrm{D}L(L^{-1}(y))|^2 \cdot \mathrm{Jac}(L^{-1})(y) \, dy \right. \\ & \quad \left. + \int_{B_t^+} |\mathrm{D}\hat{R}_t(y) \cdot \mathrm{D}L(L^{-1}(y))|^2 \cdot \mathrm{Jac}(L^{-1})(y) \, dy + c_5 \cdot \lambda^{-1} t^2 \right] \\ & \quad + \left(\frac{1+Kt}{1-Kt} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot c_6 \cdot t^{\frac{3}{2}} \left(1 + \|\mathrm{D}\tilde{\varphi}\|_{L^2(B_t^+)} \right) \\ & \leq \left(\frac{1+Kt}{1-Kt} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left[\int_{B_t^+} |\mathrm{D}\hat{\varphi}_t|^2 + |\mathrm{D}\hat{R}_t|^2 \, dy \right. \\ & \quad \left. + t^2 \frac{d}{dt} \left[\int_{B_t^+} |\mathrm{D}\tilde{\varphi}|^2 \, dy \right] + c_7 \cdot t^{\frac{3}{2}} \left(1 + \|\mathrm{D}\tilde{\varphi}\|_{L^2(B_t^+)} \right) \right]; \quad (4.23) \end{aligned}$$

denn wegen $(1 + Kt) \cdot (1 - Kt)^{-\frac{1}{2}} > 1$, gilt mit (4.20) und (4.21) zunächst

$$\begin{aligned}
& \lambda t \int_{B_t^+} |\mathbb{D}\hat{\varphi}_t(y) \cdot DL(L^{-1}(y))|^2 \cdot \text{Jac}(L^{-1})(y) \, dy + c_5 \lambda^{-1} t^2 \\
& \leq \frac{(1 + Kt)}{(1 - Kt)^{\frac{1}{2}}} \left(\lambda t \int_{B_t^+} |\mathbb{D}\hat{\varphi}_t|^2 \, dy + c_5 \lambda^{-1} t^2 \right) \\
& \leq \frac{(1 + Kt)}{(1 - Kt)^{\frac{1}{2}}} \left(\lambda t (1 + c_2 t) \int_{B_t^+} |\mathbb{D}\tilde{\varphi}_t|^2 \, dy + c_1 \lambda t^3 + c_5 \lambda^{-1} t^2 \right) \\
& \leq \frac{(1 + Kt)}{(1 - Kt)^{\frac{1}{2}}} \left(\lambda t^2 (1 + c_2 t) \left[\frac{d}{dt} \left[\int_{B_t^+} |\mathbb{D}\tilde{\varphi}_t|^2 \, dy \right] \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. - \int_{S_t^+} |\partial_{rad}\tilde{\varphi}_t|^2 \, d\mathcal{H}^2 \right] + c_1 \lambda t^3 + c_5 \lambda^{-1} t^2 \right) \\
& \leq \frac{(1 + Kt)}{(1 - Kt)^{\frac{1}{2}}} \left(\lambda t^2 (1 + c_2) \left[\frac{d}{dt} \left[\int_{B_t^+} |\mathbb{D}\tilde{\varphi}_t|^2 \, dy \right] \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. - \int_{S_t^+} |\partial_{rad}\tilde{\varphi}_t|^2 \, d\mathcal{H}^2 \right] + c_1 \lambda t^3 + c_5 \lambda^{-1} t^2 \right).
\end{aligned}$$

Deshalb ist (4.23) erfüllt, falls gilt, dass

$$\begin{aligned}
& \lambda t^2 (1 + c_2) \left[\frac{d}{dt} \left[\int_{B_t^+} |\mathbb{D}\tilde{\varphi}_t|^2 \, dy \right] - \int_{S_t^+} |\partial_{rad}\tilde{\varphi}_t|^2 \, d\mathcal{H}^2 \right] + c_1 \lambda t^3 + c_5 \lambda^{-1} t^2 \\
& \leq t^2 \frac{d}{dt} \left[\int_{B_t^+} |\mathbb{D}\tilde{\varphi}_t|^2 \, dy \right] + c_1 t^3 + c_8.
\end{aligned}$$

Letztere Ungleichung ist äquivalent zu

$$t^2 (\lambda (1 + c_2) - 1) \frac{d}{dt} \left[\int_{B_t^+} |\mathbb{D}\tilde{\varphi}_t|^2 \, dy \right] - t^2 \lambda (1 + c_2) \int_{S_t^+} |\partial_{rad}\tilde{\varphi}_t|^2 \, d\mathcal{H}^2 + c_5 \lambda^{-1} t^2 - c_8 \leq 0.$$

Diese Nicht-Positivität ist beispielsweise für $\lambda = \frac{1}{2(1+c_2)}$ und $c_8 > 2(1+c_2)c_5$ gewährleistet. Da für $K \leq \frac{1}{2}$ und $t < \varepsilon$ außerdem

$$\left(\frac{1 + Kt}{1 - Kt} \right)^{\frac{3}{2}} \leq \left(\frac{1}{1 - Kt} \right)^3 \leq 1 + 2^4 Kt$$

gilt, ergibt sich schließlich unter Nutzung von (4.22) und (4.23) ähnlich wie für (4.6):

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left[t^{-1} \int_{B_t^+} |\mathrm{D}\tilde{\varphi}|^2 + |\mathrm{D}\tilde{R}|^2 dy \right] \\
& \geq t^{-1} \left\{ \frac{d}{dt} \left[\int_{B_t^+} |\mathrm{D}\tilde{\varphi}|^2 + |\mathrm{D}\tilde{R}|^2 dy \right] - (1 + 2^4 Kt) \cdot t^{-1} \int_{B_t^+} |\mathrm{D}\hat{\varphi}_t|^2 + |\mathrm{D}\hat{R}_t|^2 dy \right. \\
& \quad \left. - (1 + 2^4 Kt) \cdot t \cdot \frac{d}{dt} \left[\int_{B_t^+} |\mathrm{D}\tilde{\varphi}|^2 dy \right] - (1 + 2^4 Kt) \cdot c_7 t^{\frac{1}{2}} \left(1 + \|\mathrm{D}\tilde{\varphi}\|_{L^2(B_\varepsilon^+)} \right) \right\} \\
& \geq t^{-1} \left\{ \frac{d}{dt} \left[\int_{B_t^+} |\mathrm{D}\tilde{\varphi}|^2 + |\mathrm{D}\tilde{R}|^2 dy \right] \right. \\
& \quad \left. - (1 + 2^4 Kt) \cdot \left((1 + c_2 t) \cdot t^{-1} \int_{B_t^+} |\mathrm{D}\tilde{\varphi}_t|^2 + |\mathrm{D}\tilde{R}_t|^2 dy + c_1 t \right) \right\} \\
& \quad - (1 + 2^4 Kt) \cdot \left(\frac{d}{dt} \left[\int_{B_t^+} |\mathrm{D}\tilde{\varphi}|^2 dy \right] + c_7 t^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \|\mathrm{D}\tilde{\varphi}\|_{L^2(B_\varepsilon^+)} \right) \right) \\
& \geq t^{-1} \cdot (1 - (1 + c_2 t)(1 + 2^4 Kt)) \cdot \frac{d}{dt} \left[\int_{B_t^+} |\mathrm{D}\tilde{\varphi}|^2 + |\mathrm{D}\tilde{R}|^2 dy \right] \\
& \quad + t^{-1} \int_{S_t^+} |\partial_{rad}\tilde{\varphi}|^2 + |\partial_{rad}\tilde{R}|^2 d\mathcal{H}^2 \\
& \quad - c_9 - c_{10} \cdot \frac{d}{dt} \left[\int_{B_t^+} |\mathrm{D}\tilde{\varphi}|^2 dy \right] - c_{11} t^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \|\mathrm{D}\tilde{\varphi}\|_{L^2(B_\varepsilon^+)} \right) \\
& \geq t^{-1} \cdot \int_{S_t^+} |\partial_{rad}\tilde{\varphi}|^2 + |\partial_{rad}\tilde{R}|^2 d\mathcal{H}^2 - c_{12} \cdot \frac{d}{dt} \left[\int_{B_t^+} |\mathrm{D}\tilde{\varphi}|^2 + |\mathrm{D}\tilde{R}|^2 dy \right] - c_9 \\
& \quad - c_{10} \cdot \frac{d}{dt} \left[\int_{B_t^+} |\mathrm{D}\tilde{\varphi}|^2 dy \right] - c_{11} t^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \|\mathrm{D}\tilde{\varphi}\|_{L^2(B_\varepsilon^+)} \right). \tag{4.24}
\end{aligned}$$

Wie im Beweis der Inneren Monotonie-Formel folgt durch Integration von (4.24) für $r \leq t \leq s$ unter Beachtung der Tatsache, dass zur Vereinfachung der Notation $y_0 = 0$ angenommen war,

$$\begin{aligned}
& s^{-1} \int_{B_s^+(y_0)} |\mathrm{D}\tilde{\varphi}|^2 + |\mathrm{D}\tilde{R}|^2 dy - r^{-1} \int_{B_r^+(y_0)} |\mathrm{D}\tilde{\varphi}|^2 + |\mathrm{D}\tilde{R}|^2 dy \\
& \geq \int_{(B_s^3 \setminus B_r^3)^+(y_0)} |y - y_0|^{-1} \cdot \left[|\partial_{rad}\tilde{\varphi}|^2 + |\partial_{rad}\tilde{R}|^2 \right] dy \\
& \quad - c_{13} \int_{(B_s^3 \setminus B_r^3)^+(y_0)} |\mathrm{D}\tilde{\varphi}|^2 + |\mathrm{D}\tilde{R}|^2 dy - c_{14} s^{\frac{1}{2}} \left(1 + \|\mathrm{D}\tilde{\varphi}\|_{L^2(B_\varepsilon^+)} \right) - c_{15}(s - r).
\end{aligned}$$

Nach Addition von $c_{13} \cdot \int_{B_s^+(y_0)} |\mathrm{D}\tilde{\varphi}|^2 + |\mathrm{D}\tilde{R}|^2 \, dy$ auf beiden Seiten der Ungleichung ist Lemma 4.9 schließlich bewiesen mit der Setzung $c_a := c_{13}$, $c_b := c_{14}$ und $c_d := c_{15}$. \square

Genau wie beim Vorgehen in Abschnitt 4.1 wird nach dieser Rand-Monotonie-Formel nun eine diskrete Morrey-Bedingung für Randpunkte aufgestellt und nachgewiesen. Sie wird später dabei helfen, mit der Rand-Version von Morreys Dirichlet-Wachstumsbedingung eine Energie-Schranke für das Auftreten von Randsingularitäten zu beweisen.

Die größte Schwierigkeit bei der Herleitung der diskreten Morrey-Bedingung für Randpunkte liegt dabei erneut im Kompaktheits-Argument für eine Aufblasfolge. Auch hier wird das Fortsetzungs-Lemma von S. Luckhaus eine zentrale Rolle spielen, allerdings ist dazu die Beachtung einiger technischer Feinheiten nötig.

Lemma 4.10 (Diskrete Morrey-Bedingung am Rand). *Sei $\mu \in (0, 1)$. Dann existieren Konstanten $\varepsilon_M > 0$, $\theta \in (0, 1)$ und $\rho_0 \in (0, \varepsilon)$, sodass die folgende Aussage für jeden Minimierer $F = (\tilde{\varphi}, \tilde{R})$ der (eingeschränkten) L^{-1} -Cosserat-Energie $\tilde{\mathcal{J}}_{B_\varepsilon^+}(\cdot)$ in der Klasse $\mathcal{C}(G)$ gilt.*

Für jede (Teil-) Kugel $B_{\rho_0}^+(y_0)$ mit $y_0 \in \Gamma_\varepsilon$, $|y_0| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$ und für jedes $\rho \in (0, \rho_0)$ gilt die Implikation:

Erfüllen F und ρ die Kleinheitsbedingung

$$\rho^{2\mu} \leq \rho^{-1} \left(\|\mathrm{D}\tilde{\varphi}\|_{L^2(B_\rho^+(y_0))}^2 + \|\mathrm{D}\tilde{R}\|_{L^2(B_\rho^+(y_0))}^2 \right) \leq \varepsilon_M,$$

so folgt die Abschätzung

$$\begin{aligned} (\theta\rho)^{-1} \left(\|\mathrm{D}\tilde{\varphi}\|_{L^2(B_{\theta\rho}^+(y_0))}^2 + \|\mathrm{D}\tilde{R}\|_{L^2(B_{\theta\rho}^+(y_0))}^2 \right) \\ \leq \theta^{2\mu} \rho^{-1} \left(\|\mathrm{D}\tilde{\varphi}\|_{L^2(B_\rho^+(y_0))}^2 + \|\mathrm{D}\tilde{R}\|_{L^2(B_\rho^+(y_0))}^2 \right). \end{aligned}$$

Der Beweis folgt dem Vorgehen des Widerspruch-Beweises der Inneren Diskreten Morrey-Bedingung (Lemma 4.4) in Kombination mit Modifikationen nach Ideen aus [Ste91, S. 112].

Beweis. Nimm erneut an, die Aussage gilt nicht. Dann existieren Randpunkte $y_i \in \Gamma_\varepsilon$ mit $|y_i| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$ und Kugeln $B_{\rho_i}^+(y_i)$ mit Radien $\rho_i \searrow 0$ sowie $\tilde{\mathcal{J}}_{B_\varepsilon^+}$ -Minimierer $F_i = (\tilde{\varphi}_i, \tilde{R}_i)$ in der Klasse $\mathcal{C}(G)$, sodass gelten

$$(i) \quad \gamma_i := \rho_i^{-\frac{1}{2}} \|\mathrm{D}\tilde{\varphi}_i\|_{L^2(B_{\rho_i}^+(y_i))} \searrow 0 \quad \text{und} \quad \delta_i := \rho_i^{-\frac{1}{2}} \|\mathrm{D}\tilde{R}_i\|_{L^2(B_{\rho_i}^+(y_i))} \searrow 0,$$

$$(ii) \quad \rho_i^{2\mu} \leq \gamma_i^2 + \delta_i^2, \quad \text{aber dennoch}$$

$$(iii) \quad (\theta \rho_i)^{-1} \left(\|D\tilde{\varphi}_i\|_{L^2(B_{\theta\rho_i}^+(y_i))}^2 + \|D\tilde{R}_i\|_{L^2(B_{\theta\rho_i}^+(y_i))}^2 \right) > \theta^{2\mu} \cdot (\gamma_i^2 + \delta_i^2)$$

für jedes feste $\theta \in (0, 1)$.

Definiere wieder eine im Urbild um den Faktor ρ_i^{-1} und im Bild um den Faktor γ_i^{-1} bzw. δ_i^{-1} reskalierte Aufblasfolge, also

$$\hat{F}_i = (\hat{\varphi}_i, \hat{R}_i) \in W^{1,2}(B_\varepsilon^+ \cup \Gamma_\varepsilon, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}_i),$$

durch die Setzung

$$\left. \begin{aligned} \hat{\varphi}_i(y) &:= \gamma_i^{-1} [\tilde{\varphi}_i(y_i + \rho_i y) - \bar{\varphi}_{i,\rho_i}] \\ \hat{R}_i(y) &:= \delta_i^{-1} [\tilde{R}_i(y_i + \rho_i y) - \bar{R}_{i,\rho_i}] \end{aligned} \right\} \quad \text{für } y \in B_\varepsilon^+$$

und

$$\left. \begin{aligned} \hat{\varphi}_i(y) &:= \gamma_i^{-1} [\tilde{\vartheta}(y_i + \rho_i y) - \bar{\vartheta}_{i,\Gamma_i}] = \tilde{\vartheta}_i(y) \\ \hat{R}_i(y) &:= \delta_i^{-1} [\tilde{M}(y_i + \rho_i y) - \bar{M}_{i,\Gamma_i}] = \tilde{M}_i(y) \end{aligned} \right\} \quad \text{für } y \in \Gamma_\varepsilon.$$

Dabei sind hier mit $\bar{\varphi}_{i,\rho_i}, \bar{R}_{i,\rho_i}$ die Mittelwerte in $B_{\rho_i}^+(y_i)$ gemeint, also

$$\bar{\varphi}_{i,\rho_i} := \int_{B_{\rho_i}^+(y_i)} \tilde{\varphi}_i \, dy \quad \text{bzw.} \quad \bar{R}_{i,\rho_i} := \int_{B_{\rho_i}^+(y_i)} \tilde{R}_i \, dy,$$

und mit $\bar{\vartheta}_{i,\Gamma_i}, \bar{M}_{i,\Gamma_i}$ die Mittelwerte der Randwerte in $\Gamma_i := B_{\rho_i}^2(y_i) \times \{0\}$, d.h.

$$\bar{\vartheta}_{i,\Gamma_i} := \int_{\Gamma_i} \tilde{\vartheta} \, d\mathcal{H}^2 \quad \text{bzw.} \quad \bar{M}_{i,\Gamma_i} := \int_{\Gamma_i} \tilde{M} \, d\mathcal{H}^2.$$

Gleichzeitig bezeichnet \mathcal{S}_i erneut die entsprechend skalierte und verschobene Version der Mannigfaltigkeit \mathcal{S} ($\mathcal{S}_i := \delta_i^{-1}(\mathcal{S} - \bar{R}_{i,\rho_i})$).

Zunächst erfüllt die so definierte Aufblasfolge \hat{F}_i , dass jedes $(\hat{\varphi}_i, \hat{R}_i)$ das entsprechende reskalierte Funktional

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{J}}_i(\tilde{\psi}, \tilde{Q}) &:= \frac{\gamma_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \int_{B_\varepsilon^+} |(\bar{R}_{i,\rho_i} + \delta_i \tilde{Q}(y))^T D\tilde{\psi}(y) DL(L^{-1}(y_i + \rho_i y)) - \rho_i \gamma_i^{-1} I_3|^2 \\ &\quad \cdot \text{Jac}(L^{-1})(y_i + \rho_i y) \, dy \\ &\quad + \frac{\delta_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \int_{B_\varepsilon^+} |D\tilde{Q}(y) DL(L^{-1}(y_i + \rho_i y))|^2 \cdot \text{Jac}(L^{-1})(y_i + \rho_i y) \, dy \end{aligned}$$

auf $B_\varepsilon^+ \cup \Gamma_\varepsilon$ minimiert, im Vergleich zu allen Sobolev-Abbildungen $(\tilde{\psi}, \tilde{Q})$ aus $W^{1,2}(B_\varepsilon^+, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}_i)$ mit den Randwerten $(\tilde{\psi}, \tilde{Q})|_{\Gamma_\varepsilon} = G_i = (\tilde{\vartheta}_i, \tilde{M}_i)$.

Der nächste Abschnitt aus dem Beweis der Inneren Diskreten Morrey-Bedingung (Lemma 4.4), S. 42, kann wörtlich bis zum Beginn des Kompaktheits-Arguments übernommen werden, sofern die Kugeln $B_{\rho_i}^3(x_i)$ durch $B_{\rho_i}^+(y_i)$ ersetzt werden, B^3 durch B_ε^+ und das formale Grenzfunktional durch

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{J}}_\infty(\tilde{\psi}, \tilde{Q}) &:= \sigma \int_{B_\varepsilon^+} |T^T \cdot D\tilde{\psi}(y) \cdot DL(L^{-1}(y_\infty))|^2 \text{Jac}(L^{-1})(y_\infty) dy \\ &\quad + (1 - \sigma) \int_{B_\varepsilon^+} |D\tilde{Q}(y) \cdot DL(L^{-1}(y_\infty))|^2 \text{Jac}(L^{-1})(y_\infty) dy. \end{aligned}$$

Zusammengefasst gilt dann: Nach (ggf. mehrfachem) Übergang zu einer Teilfolge konvergiert die Aufblasfolge $\hat{F}_i = (\hat{\varphi}_i, \hat{R}_i)$ von $\tilde{\mathcal{J}}_i(\cdot)$ -Minimierern bzgl. der Randwerte $G_i = (\tilde{\vartheta}_i, \tilde{M}_i)$ sowohl schwach als auch punktweise fast überall gegen eine Grenzabbildung $\hat{F}_\infty = (\hat{\varphi}_\infty, \hat{R}_\infty) \in W^{1,2}(B_\varepsilon^+ \cup \Gamma_\varepsilon, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}_\infty)$. Gleichzeitig konvergiert $\bar{R}_{i,\rho_i} + \delta_i R_i$ punktweise fast überall gegen die im Grenzfunktional auftauchende konstante Matrix $T \in \mathcal{S}$ (eine andere als in Abschnitt 4.1), welche wiederum der Grenzwert der Mittelwerte \bar{R}_{i,ρ_i} ist.

Der im Grenzfunktional ebenso auftauchende skalare Faktor $\sigma \in [0, 1]$ bezeichnet dabei wieder den Grenzwert der skalaren Faktoren $\frac{\gamma_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2}$ im skalierten Funktional $\tilde{\mathcal{J}}_i(\cdot)$. Dieser Grenzwert σ wird in der abschließenden Fallunterscheidung bezüglich seiner Lage im Intervall $[0, 1]$ betrachtet werden.

Insbesondere sei an dieser Stelle bemerkt, dass bei $i \rightarrow \infty$ die Randwerte dieser Aufblasfolge verschwinden; in dem Sinne, dass $G_i = (\tilde{\vartheta}_i, \tilde{M}_i) \rightarrow 0$ in $W^{1,2}(\Gamma_\varepsilon, \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{3 \times 3})$ gilt. Denn o.B.d.A. sind die Kugelradien ρ_i so, dass $\rho_i \leq \min\{\gamma_i^2, \delta_i^2\}$ gilt, weshalb mit der Poincaré-Ungleichung ($\tilde{\vartheta}_i$ und \tilde{M}_i haben Mittelwert 0 nach Konstruktion) in Kombination mit der stetigen Differenzierbarkeit von $(\tilde{\vartheta}, \tilde{M}) \in C^1(\Gamma_\varepsilon, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S})$ folgt:

$$\begin{aligned} \|\tilde{\vartheta}_i\|_{L^2(\Gamma_\varepsilon)}^2 &\leq c \cdot \gamma_i^{-2} \int_{\Gamma_\varepsilon} |D\tilde{\vartheta}(y_i + \rho_i y)|^2 \cdot \rho_i^2 d\mathcal{H}^2(y) \\ &= c \cdot \gamma_i^{-2} \int_{\Gamma_i} |D\tilde{\vartheta}|^2 d\mathcal{H}^2 \\ &\leq c \cdot \gamma_i^{-2} \rho_i^2 \leq c \cdot \rho_i \rightarrow 0 \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} \|\tilde{M}_i\|_{L^2(\Gamma_\varepsilon)}^2 &\leq c \cdot \delta_i^{-2} \int_{\Gamma_\varepsilon} |D\tilde{M}(y_i + \rho_i y)|^2 \cdot \rho_i^2 d\mathcal{H}^2(y) \\ &= c \cdot \delta_i^{-2} \int_{\Gamma_i} |D\tilde{M}|^2 d\mathcal{H}^2 \\ &\leq c \cdot \delta_i^{-2} \rho_i^2 \leq c \cdot \rho_i \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Die Tatsache, dass die Randwerte G_i der Aufblasfolge im Limes verschwinden, wird im Laufe der abschließenden Fallunterscheidung bzgl. $\sigma \in [0, 1]$ ausgenutzt werden, um gewisse Regularitätsabschätzungen mittels einer Spiegelung anwenden zu können, doch dazu später mehr.

Vergleichbar mit der Situation im Inneren wird für den nächsten Schritt ebenfalls ein Kompaktheits-Argument benötigt; einerseits um zu zeigen, dass der schwache Limes $\hat{F}_\infty = (\hat{\varphi}_\infty, \hat{R}_\infty)$ tatsächlich das Grenzfunktional $\tilde{\mathcal{J}}_\infty(\cdot)$ minimiert und andererseits um nachzuweisen, dass die Aufblas-(Teil-)folge $\hat{F}_i = (\hat{\varphi}_i, \hat{R}_i)$ in $B_{r_\varepsilon}^+$ für r beliebig nahe an 1 nicht nur schwach sondern auch in $W^{1,2}$ -Topologie konvergiert.

Die Grundideen sind die gleichen wie im Beweis der Inneren Diskreten Morrey-Bedingung (Lemma 4.4), vgl. S. 44 ff.: Es wird erneut umfassend das Fortsetzungs-Lemma von Luckhaus ausgenutzt, jedoch erfordert die Betrachtung von (Teil-) Kugeln mit Rand Γ_ε wie oben angedeutet einige technische Feinheiten, auf die im Folgenden eingegangen wird.

.....
Kompaktheits-Argument. Sei also $(\tilde{\psi}, \tilde{Q}) \in W^{1,2}(B_\varepsilon^+ \cup \Gamma_\varepsilon, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}_\infty)$ eine für \hat{F}_∞ zulässige Vergleichsabbildung mit $(\tilde{\psi}, \tilde{Q})|_{\Gamma_\varepsilon} \equiv 0$ so, dass $\tilde{\psi} = \hat{\varphi}_\infty$ und $\tilde{Q} = \hat{R}_\infty$ in einer Umgebung von ∂B_ε^+ . Dann existiert $0 < r$ nahe an 1, sodass gilt

- (i) $(\tilde{\psi}, \tilde{Q}) = (\hat{\varphi}_\infty, \hat{R}_\infty)$ fast überall in $S_{r_\varepsilon}^+ := \partial B_{r_\varepsilon}^3 \cap B_\varepsilon^+$,
- (ii) $\|D\tilde{\psi}\|_{L^2(S_{r_\varepsilon}^+)}^2 + \sup_i \left\{ \|D\hat{\varphi}_i\|_{L^2(S_{r_\varepsilon}^+)}^2 + \|D\hat{R}_i\|_{L^2(S_{r_\varepsilon}^+)}^2 \right\} < \infty$, sowie
- (iii) nach Übergang zu einer Teilfolge nach dem Satz von Rellich

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \|\hat{R}_i - \tilde{Q}\|_{L^2(S_{r_\varepsilon}^+)}^2 &= \lim_{i \rightarrow \infty} \|\hat{R}_i - \hat{R}_\infty\|_{L^2(S_{r_\varepsilon}^+)}^2 = 0 \\ \lim_{i \rightarrow \infty} \|\hat{\varphi}_i - \tilde{\psi}\|_{L^2(S_{r_\varepsilon}^+)}^2 &= \lim_{i \rightarrow \infty} \|\hat{\varphi}_i - \hat{\varphi}_\infty\|_{L^2(S_{r_\varepsilon}^+)}^2 = 0. \end{aligned}$$

Mit den gleichen Argumenten wie auf Seite 44 an der korrespondierenden Stelle des Kompaktheits-Arguments im Beweis der Inneren Diskreten Morrey-Bedingung existiert auch für \tilde{Q} eine beschränkte approximierende Folge \tilde{Q}_i , welche erfüllt, dass

- (iv) $\tilde{Q}_i \in W^{1,2}(B_\varepsilon^+ \cup \Gamma_\varepsilon, \mathcal{S}_i)$ und
- (v) $\tilde{Q}_i \rightarrow \tilde{Q}, i \rightarrow \infty$, in $W^{1,2}(B_\varepsilon^+, \mathbb{R}^{3 \times 3})$ sowie
 $\tilde{Q}_i|_{\Gamma_\varepsilon} \rightarrow \tilde{Q}|_{\Gamma_\varepsilon} = 0 \in \mathcal{S}_\infty, i \rightarrow \infty$, in $W^{1,2}$ -Norm auf Γ_ε .

Insbesondere folgen daraus

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\hat{R}_i - \tilde{Q}_i\|_{L^2(S_{r_\varepsilon}^+)}^2 = 0 = \lim_{i \rightarrow \infty} \|\hat{\varphi}_i - \tilde{\psi}\|_{L^2(S_{r_\varepsilon}^+)}^2 \quad \text{und}$$

$$\|\mathbf{D}\tilde{\psi}\|_{L^2(S_{r_\varepsilon}^+)}^2 + \sup_i \left\{ \|\mathbf{D}\hat{\varphi}_i\|_{L^2(S_{r_\varepsilon}^+)}^2 + \|\mathbf{D}\tilde{Q}_i\|_{L^2(S_{r_\varepsilon}^+)}^2 + \|\mathbf{D}\hat{R}_i\|_{L^2(S_{r_\varepsilon}^+)}^2 \right\} =: \tilde{C}^2 < \infty. \quad (4.25)$$

Dies ist den benötigten Voraussetzungen zur Anwendung des Fortsetzungs-Lemmas von Luckhaus wie in Abschnitt 4.1 schon sehr ähnlich, allerdings muss zunächst bi-Lipschitz von $B_{r_\varepsilon}^+$ auf B^3 abgebildet werden. Wähle also eine (invertierbare) Bi-Lipschitz-Abbildung $\Psi: B_{r_\varepsilon}^+ \rightarrow B^3$ mit Lipschitz-Konstante $c_L > 1$ und definiere damit die Abbildungen

$$\begin{aligned} (\psi, Q) &:= (\tilde{\psi}, \tilde{Q}) \circ \Psi^{-1} && \in W^{1,2}(B^3, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}_\infty), \\ (\varphi_i, R_i) &:= (\hat{\varphi}_i, \hat{R}_i) \circ \Psi^{-1} && \in W^{1,2}(B^3, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}_i), \\ (\varphi_\infty, R_\infty) &:= (\hat{\varphi}_\infty, \hat{R}_\infty) \circ \Psi^{-1} && \in W^{1,2}(B^3, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}_\infty) \text{ und} \\ Q_i &:= \tilde{Q}_i \circ \Psi^{-1} && \in W^{1,2}(B^3, \mathcal{S}_i). \end{aligned}$$

Dann folgt sofort $Q_i \rightarrow Q$ in $W^{1,2}$ -Norm, da

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|Q_i - Q\|_{W^{1,2}(B^3)}^2 \leq \lim_{i \rightarrow \infty} (c_L)^5 \cdot \|\tilde{Q}_i - \tilde{Q}\|_{W^{1,2}(B_{r_\varepsilon}^+)}^2 = 0.$$

Außerdem impliziert die schwache Konvergenz der $(\hat{\varphi}_i, \hat{R}_i)$ gegen $(\hat{\varphi}_\infty, \hat{R}_\infty)$ die schwache Konvergenz von (φ_i, R_i) gegen $(\varphi_\infty, R_\infty)$ in $W^{1,2}(B^3, \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{3 \times 3})$. Des Weiteren erhalte aus (4.25)

$$\|\mathbf{D}\psi\|_{L^2(S^2)}^2 + \sup_i \left\{ \|\mathbf{D}\varphi_i\|_{L^2(S^2)}^2 + \|\mathbf{D}Q_i\|_{L^2(S^2)}^2 + \|\mathbf{D}R_i\|_{L^2(S^2)}^2 \right\} \leq \underbrace{(c_L)^5 \tilde{C}^2}_{=: C^2 < \infty},$$

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \|Q_i - R_i\|_{L^2(S^2)}^2 &\leq \lim_{i \rightarrow \infty} (c_L)^3 \cdot \|\tilde{Q}_i - \hat{R}_i\|_{L^2(S_{r_\varepsilon}^+)}^2 = 0 \quad \text{und} \\ \lim_{i \rightarrow \infty} \|\psi - \varphi_i\|_{L^2(S^2)}^2 &\leq \lim_{i \rightarrow \infty} (c_L)^3 \cdot \|\tilde{\psi} - \hat{\varphi}_i\|_{L^2(S_{r_\varepsilon}^+)}^2 = 0. \end{aligned}$$

Damit sind alle Voraussetzungen für [Luc88, Lemma 1] erfüllt, welches erneut in der Form aus [Ste91, S. 103 f.] die Existenz zweier Zahlenfolgen $\lambda_i \searrow 0$, $r_i \searrow 0$ und einer Folge von Sobolev-Abbildungen $(\zeta_i, P_i) \in W^{1,2}(B^3, \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{3 \times 3})$ auf B^3 liefert, mit den im Beweis der Inneren Diskreten Morrey-Bedingung beschriebenen Eigenschaften (s. (4.7), Seite 45).

Nach erneuter Ausnutzung der Bi-Lipschitz-Abbildung $\Psi^{-1}: B^3 \rightarrow B_{r_\varepsilon}^+$ durch Verkettung erhalte insgesamt zusätzlich zu den zwei Zahlenfolgen λ_i und r_i die Existenz einer Folge von Sobolev-Abbildungen

$$(\tilde{\zeta}_i, \tilde{P}_i) \in W^{1,2}(B_{r_\varepsilon}^+ \cup \Gamma_{r_\varepsilon}, \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{3 \times 3}) \quad \text{mit}$$

$$\begin{aligned} (\tilde{\zeta}_i, \tilde{P}_i)(y) &= (\hat{\varphi}_i, \hat{R}_i)(y), && y \in (B_\varepsilon^+ \cup \Gamma_\varepsilon) \setminus B_{r_\varepsilon}^+, \\ (\tilde{\zeta}_i, \tilde{P}_i)(y) &= (\tilde{\psi}, \tilde{Q}_i)(\Psi^{-1}(\frac{\Psi(y)}{1-\lambda_i})), && y \in B_{(1-\lambda_i)r_\varepsilon}^{++}, \\ (\tilde{\zeta}_i, \tilde{P}_i)(y) &\in U_{r_i}(\hat{\varphi}_i(B_{r_\varepsilon}^+) \cup \tilde{\psi}(B_{r_\varepsilon}^+)) \times U_{r_i}(\mathcal{S}_i), && y \in B_{r_\varepsilon}^+ \text{ und} \\ &\|\mathbf{D}\tilde{\zeta}_i\|_{L^2(B_{r_\varepsilon}^+ \setminus B_{(1-\lambda_i)r_\varepsilon}^{++})}^2 + \|\mathbf{D}\tilde{P}_i\|_{L^2(B_{r_\varepsilon}^+ \setminus B_{(1-\lambda_i)r_\varepsilon}^{++})}^2 \leq c\lambda_i \tilde{C}^2, && (4.26) \end{aligned}$$

wobei $B_{(1-\lambda_i)r\varepsilon}^{++}$ als Kurzschreibweise für die Menge $B_{(1-\lambda_i)r\varepsilon}^3 \cap \{y_3 > \lambda_i r\varepsilon\}$ dient.

Ferner ist für jeden Index $i \in \mathbb{N}$ die Abbildung $(\tilde{\zeta}_i, \tilde{P}_i)$ mit der gleichen Begründung wie im Kompaktheits-Argument aus der Inneren Diskreten Morrey-Bedingung beschränkt in $W^{1,2}(B_{r\varepsilon}^+ \cup \Gamma_{r\varepsilon}, \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{3 \times 3})$.

Bezeichnet nun $\tilde{\mathcal{J}}_{\infty,r}(\cdot)$ den Teil von $\tilde{\mathcal{J}}(\cdot)$, bei dem über $B_{r\varepsilon}^+$ statt B_ε^+ integriert wird, besteht das nächste Zwischenziel darin nachzuweisen, dass der Grenzwert der Aufblasfolge $(\hat{\varphi}_\infty, \hat{R}_\infty)$ den Wert des Funktionals $\tilde{\mathcal{J}}_{\infty,r}(\cdot)$ minimiert. Dafür bemerke, dass man erneut mit dem Satz über dominierte Konvergenz und mit schwacher Unterhalbstetigkeit wie in (4.8) findet:

$$\begin{aligned}
& \tilde{\mathcal{J}}_{\infty,r}(\hat{\varphi}_\infty, \hat{R}_\infty) \\
&= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\gamma_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \int_{B_{r\varepsilon}^+} |(\bar{R}_{i,\rho_i} + \delta_i \hat{R}_i(y))^T D\hat{\varphi}_\infty(y) DL(L^{-1}(y_i + \rho_i y)) - \rho_i \gamma_i^{-1} I_3|^2 \\
&\quad \cdot \text{Jac}(L^{-1})(y_i + \rho_i y) \, dy \\
&+ \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\delta_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \int_{B_{r\varepsilon}^+} |D\hat{R}_\infty(y) \cdot DL(L^{-1}(y_i + \rho_i y))|^2 \cdot \text{Jac}(L^{-1})(y_i + \rho_i y) \, dy \\
&\leq \liminf_{i,j \rightarrow \infty} \frac{\gamma_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \int_{B_{r\varepsilon}^+} |(\bar{R}_{i,\rho_i} + \delta_i \hat{R}_i(y))^T D\hat{\varphi}_j(y) DL(L^{-1}(y_i + \rho_i y)) - \rho_i \gamma_i^{-1} I_3|^2 \\
&\quad \cdot \text{Jac}(L^{-1})(y_i + \rho_i y) \, dy \\
&+ \liminf_{i,j \rightarrow \infty} \frac{\delta_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \int_{B_{r\varepsilon}^+} |D\hat{R}_j(y) DL(L^{-1}(y_i + \rho_i y))|^2 \cdot \text{Jac}(L^{-1})(y_i + \rho_i y) \, dy \\
&\leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{J}}_{i,r}(\hat{\varphi}_i, \hat{R}_i). \tag{4.27}
\end{aligned}$$

Zusätzlich kann (analog zum Vorgehen auf S. 45 f.) gezeigt werden, dass bei $i \rightarrow \infty$ gilt: $\tilde{\mathcal{J}}_{i,r}(\tilde{\zeta}_i, \pi_i \circ \tilde{P}_i) = \tilde{\mathcal{J}}_{i,r}(\tilde{\psi}, \tilde{Q}_i) + o(1)$. Dabei bezeichnet π_i hier wieder die nächste-Punkt-Retraktion auf \mathcal{S}_i und $(\tilde{\zeta}_i, \pi_i \circ \tilde{P}_i)$ eine zulässige Vergleichsabbildung für den $\tilde{\mathcal{J}}_{i,r}$ -Minimierer $(\hat{\varphi}_i, \hat{R}_i)$. Dann gilt nämlich für die Aufteilung

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{J}}_{i,r}(\tilde{\zeta}_i, \pi_i \circ \tilde{P}_i) &= \underbrace{\tilde{\mathcal{J}}_{i,r}(\tilde{\zeta}_i, \pi_i \circ \tilde{P}_i) - \tilde{\mathcal{J}}_{i,r}(\tilde{\zeta}_i, \tilde{P}_i)}_{=: \tilde{A}_i} + \underbrace{\tilde{\mathcal{J}}_{i,r}(\tilde{\zeta}_i, \tilde{P}_i) - \tilde{\mathcal{J}}_{i,r}(\tilde{\psi}, \tilde{Q}_i)}_{=: \tilde{B}_i} \\
&\quad + \tilde{\mathcal{J}}_{i,r}(\tilde{\psi}, \tilde{Q}_i),
\end{aligned}$$

mit der Tatsache, dass sich $\pi_i \circ \tilde{P}_i$ und \tilde{P}_i nur auf dem Annulus der Breite $\lambda_i r\varepsilon$ unterscheiden, erstens $\tilde{A}_i \leq$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\gamma_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \int_{B_{r\varepsilon}^+ \setminus B_{(1-\lambda_i)r\varepsilon}^{++}} |(\bar{R}_{i,\rho_i} + \delta_i(\pi_i \circ \tilde{P}_i)(y))^T D\tilde{\zeta}_i(y) DL(L^{-1}(y_i + \rho_i y)) - \rho_i \gamma_i^{-1} I_3|^2 \\
&\quad \cdot \text{Jac}(L^{-1})(y_i + \rho_i y) \, dy \\
&+ \frac{\delta_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \int_{B_{r\varepsilon}^+ \setminus B_{(1-\lambda_i)r\varepsilon}^{++}} |D(\pi_i \circ \tilde{P}_i)(y) DL(L^{-1}(y_i + \rho_i y))|^2 \cdot \text{Jac}(L^{-1})(y_i + \rho_i y) \, dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq c \frac{\gamma_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \int_{B_{r_\varepsilon}^+ \setminus B_{(1-\lambda_i)r_\varepsilon}^{++}} \left\{ g_i^{\alpha\beta} \partial_\alpha \tilde{\zeta}_i \partial_\beta \tilde{\zeta}_i \right\} \sqrt{g_i} \, dy + c \frac{\gamma_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \int_{B_{r_\varepsilon}^+ \setminus B_{(1-\lambda_i)r_\varepsilon}^{++}} \rho_i^2 \gamma_i^{-2} \sqrt{g_i} \, dy \\
&\quad + c \frac{\delta_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \int_{B_r^+ \setminus B_{(1-\lambda_i)r_\varepsilon}^{++}} \left\{ g_i^{\alpha\beta} \partial_\alpha (\pi_i \circ \tilde{P}_i) \partial_\beta (\pi_i \circ \tilde{P}_i) \right\} \sqrt{g_i} \, dy \\
&\leq c \frac{\gamma_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \|D\tilde{\zeta}_i\|_{L^2(B_{r_\varepsilon}^+ \setminus B_{(1-\lambda_i)r_\varepsilon}^{++})}^2 + c \frac{\rho_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \text{vol}(B_{r_\varepsilon}^+ \setminus B_{(1-\lambda_i)r_\varepsilon}^{++}) \\
&\quad + c \frac{\delta_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \|D\tilde{P}_i\|_{L^2(B_{r_\varepsilon}^+ \setminus B_{(1-\lambda_i)r_\varepsilon}^{++})}^2 \\
&\longrightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

nach (4.26). Dabei wurde neben den Eigenschaften des „Gerade-Biegens“ L wie in den Ausführungen nach (4.20) mit der Metrik $(g_i)_{\alpha\beta}(y) = g_{\alpha\beta}(y_i + \rho_i y)$ ⁶ für den vorletzten Schritt der Abschätzung von \tilde{A}_i erneut benutzt, dass die Lipschitz-Konstanten der nächste-Punkt-Retraktionen π_i (beispielsweise eingeschränkt auf Tuben der Breite 1 um \mathcal{S}_i) unabhängig von i beschränkt sind, da die Mannigfaltigkeiten \mathcal{S}_i (wie in Abschnitt 4.1) jeweils entsprechend skalierte, verschobene Versionen der (Unter-) Mannigfaltigkeit \mathcal{S} sind.

Zweitens gilt wegen $\lambda_i \searrow 0$, $i \rightarrow \infty$, mit der Bi-Lipschitz-Stetigkeit von Ψ und dominierter Konvergenz in Vorbereitung auf die Abschätzung von \tilde{B}_i

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_i &:= \int_{B_{(1-\lambda_i)r_\varepsilon}^{++}} \left| (\bar{R}_{i,\rho_i} + \delta_i \tilde{P}_i(y))^T \cdot D\tilde{\zeta}_i(y) \cdot DL(L^{-1}(y_i + \rho_i y)) - \rho_i \gamma_i^{-1} I_3 \right|^2 \\
&\quad \cdot \text{Jac}(L^{-1})(y_i + \rho_i y) \, dy \\
&\quad - \int_{B_{r_\varepsilon}^+} \left| (\bar{R}_{i,\rho_i} + \delta_i \tilde{Q}_i(y))^T \cdot D\tilde{\psi}(y) \cdot DL(L^{-1}(y_i + \rho_i y)) - \rho_i \gamma_i^{-1} I_3 \right|^2 \\
&\quad \cdot \text{Jac}(L^{-1})(y_i + \rho_i y) \, dy \\
&= \int_{B_{(1-\lambda_i)r_\varepsilon}^{++}} \left| (\bar{R}_{i,\rho_i} + \delta_i \tilde{Q}_i(\Psi^{-1}(\frac{\Psi(y)}{1-\lambda_i})))^T D\tilde{\psi}(\Psi^{-1}(\frac{\Psi(y)}{1-\lambda_i})) DL(L^{-1}(y_i + \rho_i y)) - \rho_i \gamma_i^{-1} I_3 \right|^2 \\
&\quad \cdot \text{Jac}(L^{-1})(y_i + \rho_i y) \, dy \\
&\quad - \int_{B_{r_\varepsilon}^+} \left| (\bar{R}_{i,\rho_i} + \delta_i \tilde{Q}_i(y))^T \cdot D\tilde{\psi}(y) \cdot DL(L^{-1}(y_i + \rho_i y)) - \rho_i \gamma_i^{-1} I_3 \right|^2 \\
&\quad \cdot \text{Jac}(L^{-1})(y_i + \rho_i y) \, dy \\
&\longrightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty \quad \text{und}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{D}_i &:= \int_{B_{(1-\lambda_i)r_\varepsilon}^{++}} \left| D\tilde{P}_i(y) \cdot DL(L^{-1}(y_i + \rho_i y)) \right|^2 \cdot \text{Jac}(L^{-1})(y_i + \rho_i y) \, dy \\
&\quad - \int_{B_{r_\varepsilon}^+} \left| D\tilde{Q}_i(y) \cdot DL(L^{-1}(y_i + \rho_i y)) \right|^2 \cdot \text{Jac}(L^{-1})(y_i + \rho_i y) \, dy
\end{aligned}$$

⁶Die Metrik ist hier mit g statt γ bezeichnet, damit es nicht zu Verwechslungen mit den Skalierungsfaktoren γ_i kommt.

$$\begin{aligned}
&= \int_{B_{(1-\lambda_i)r\varepsilon}^{++}} \left| D\tilde{Q}_i(\Psi^{-1}(\frac{\Psi(y)}{1-\lambda_i})) \cdot DL(L^{-1}(y_i + \rho_i y)) \right|^2 \cdot \text{Jac}(L^{-1})(y_i + \rho_i y) dy \\
&\quad - \int_{B_{r\varepsilon}^+} \left| D\tilde{Q}_i(y) \cdot DL(L^{-1}(y_i + \rho_i y)) \right|^2 \cdot \text{Jac}(L^{-1})(y_i + \rho_i y) dy \\
&\longrightarrow 0, i \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Deshalb folgt für die Abschätzung von \tilde{B}_i sofort

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_i &= \frac{\gamma_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \int_{B_{r\varepsilon}^+ \setminus B_{(1-\lambda_i)r\varepsilon}^{++}} |(\bar{R}_{i,\rho_i} + \delta_i \tilde{P}_i(y))^T D\tilde{\zeta}_i(y) DL(L^{-1}(y_i + \rho_i y)) - \rho_i \gamma_i^{-1} I_3|^2 \\
&\quad \cdot \text{Jac}(L^{-1})(y_i + \rho_i y) dy \\
&\quad + \frac{\delta_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \int_{B_{r\varepsilon}^+ \setminus B_{(1-\lambda_i)r\varepsilon}^{++}} |D\tilde{P}_i(y) DL(L^{-1}(y_i + \rho_i y))|^2 \cdot \text{Jac}(L^{-1})(y_i + \rho_i y) dy \\
&\quad + \frac{\gamma_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \cdot \tilde{C}_i + \frac{\delta_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \cdot \tilde{D}_i \\
&\leq c \cdot \frac{\gamma_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \cdot \|D\tilde{\zeta}_i\|_{L^2(B_{r\varepsilon}^+ \setminus B_{(1-\lambda_i)r\varepsilon}^{++})}^2 + c \cdot \frac{\rho_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \cdot \text{vol}(B_{r\varepsilon}^+ \setminus B_{(1-\lambda_i)r\varepsilon}^{++}) \\
&\quad + c \cdot \frac{\delta_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \cdot \|D\tilde{P}_i\|_{L^2(B_{r\varepsilon}^+ \setminus B_{(1-\lambda_i)r\varepsilon}^{++})}^2 \\
&\quad + \frac{\gamma_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \cdot \tilde{C}_i + \frac{\delta_i^2}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \cdot \tilde{D}_i \\
&\longrightarrow 0, i \rightarrow \infty;
\end{aligned}$$

wie behauptet gilt also $\tilde{\mathcal{J}}_{i,r}(\tilde{\zeta}_i, \pi_i \circ \tilde{P}_i) = \tilde{\mathcal{J}}_{i,r}(\tilde{\psi}, \tilde{Q}_i) + o(1)$ bei $i \rightarrow \infty$.

Insgesamt wird dadurch (4.27) unter Beachtung der vorausgesetzten Minimierung des skalierten Funktional durch $(\hat{\varphi}_i, \hat{R}_i)$ zu

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{J}}_{\infty,r}(\hat{\varphi}_\infty, \hat{R}_\infty) &\leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{J}}_{i,r}(\hat{\varphi}_i, \hat{R}_i) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{J}}_{i,r}(\tilde{\zeta}_i, \pi_i \circ \tilde{P}_i) \\
&\leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{J}}_{i,r}(\tilde{\psi}, \tilde{Q}_i) \leq \tilde{\mathcal{J}}_{\infty,r}(\tilde{\psi}, \tilde{Q}).
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wird dabei erneut die Konvergenz der Abbildungen $\tilde{Q}_i \rightarrow \tilde{Q}$ in $W^{1,2}(B_\varepsilon^+ \cup \Gamma_\varepsilon, \mathbb{R}^{3 \times 3})$ sowie $\bar{R}_{i,\rho_i} + \delta_i \tilde{Q}_i \rightarrow T$ punktweise fast überall ausgenutzt. Da $(\tilde{\psi}, \tilde{Q}) \in W^{1,2}(B_\varepsilon^+ \cup \Gamma_\varepsilon, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}_\infty)$ eine beliebige zulässige Vergleichsabbildung für $\hat{F}_\infty = (\hat{\varphi}_\infty, \hat{R}_\infty)$ zu den Randwerten $G_\infty \equiv 0$ war, minimiert der Limes der Aufblasfolge \hat{F}_∞ für $0 < r$ beliebig nahe an 1 das Funktional $\tilde{\mathcal{J}}_{\infty,r}(\cdot)$, also gilt dies auch für $\tilde{\mathcal{J}}_\infty(\cdot)$ auf jeder kompakten Teilmenge von B_ε^+ . Die zulässige Wahl $(\tilde{\psi}, \tilde{Q}) = (\hat{\varphi}_\infty, \hat{R}_\infty)$ als Vergleichsabbildung impliziert außerdem $\tilde{\mathcal{J}}_{i,r}(\hat{\varphi}_i, \hat{R}_i) \rightarrow \tilde{\mathcal{J}}_{\infty,r}(\hat{\varphi}_\infty, \hat{R}_\infty)$, $i \rightarrow \infty$, und zusammen mit strikter Konvexität auch Konvergenz in $W^{1,2}$ -Topologie auf $B_{r\varepsilon}^+$ (für r beliebig nahe an 1).

.....

Damit ist das Kompaktheits-Argument abgeschlossen und der Fokus kehrt zurück zur Diskreten Morrey-Bedingung am Rand.

Zur Erinnerung: Die zum Widerspruch zu führende Annahme ist

$$(\theta\rho_i)^{-1} \left(\|D\tilde{\varphi}_i\|_{L^2(B_{\theta\rho_i}^+(y_i))}^2 + \|D\tilde{R}_i\|_{L^2(B_{\theta\rho_i}^+(y_i))}^2 \right) > \theta^{2\mu} \cdot (\gamma_i^2 + \delta_i^2) \quad (4.28)$$

für jeden Index $i \in \mathbb{N}$ und jedes feste $\theta \in (0, 1)$.

Beachte dazu zunächst: Da der Grenzwert T der Mittelwerte \bar{R}_{i,ρ_i} erfüllt, dass $T \in \mathcal{S}$ gilt, ist das Grenzfunktional für eine beliebige Vergleichsabbildung $H = (\tilde{\psi}, \tilde{Q})$ in $W^{1,2}(B_\varepsilon^+ \cup \Gamma_\varepsilon, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}_\infty)$ mit ebenfalls verschwindenden Randwerten $H|_{\Gamma_\varepsilon} = G_\infty = 0$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{J}}_{\infty,r}(\tilde{\psi}, \tilde{Q}) &= \sigma \int_{B_{r\varepsilon}^+} |D\tilde{\psi}(y) \cdot DL(L^{-1}(y_\infty))|^2 \cdot \text{Jac}(L^{-1})(y_\infty) dy \\ &\quad + (1 - \sigma) \int_{B_{r\varepsilon}^+} |D\tilde{Q}(y) \cdot DL(L^{-1}(y_\infty))|^2 \cdot \text{Jac}(L^{-1})(y_\infty) dy \\ &= \sigma \int_{B_{r\varepsilon}^+} \{g_\infty^{\alpha\beta} \partial_\alpha \tilde{\psi} \partial_\beta \tilde{\psi}\} \sqrt{g_\infty} dy + (1 - \sigma) \int_{B_{r\varepsilon}^+} \{g_\infty^{\alpha\beta} \partial_\alpha \tilde{Q} \partial_\beta \tilde{Q}\} \sqrt{g_\infty} dy, \end{aligned}$$

weshalb aufgrund der Minimalität von $\hat{F}_\infty = (\hat{\varphi}_\infty, \hat{R}_\infty)$ in $B_{r\varepsilon}^+$ auch gilt, dass

$$\begin{aligned} &\sigma \int_{B_{r\varepsilon}^+} \{g_\infty^{\alpha\beta} \partial_\alpha \hat{\varphi}_\infty \partial_\beta \hat{\varphi}_\infty\} \sqrt{g_\infty} dy + (1 - \sigma) \int_{B_{r\varepsilon}^+} \{g_\infty^{\alpha\beta} \partial_\alpha \hat{R}_\infty \partial_\beta \hat{R}_\infty\} \sqrt{g_\infty} dy \\ &\leq \sigma \int_{B_{r\varepsilon}^+} \{g_\infty^{\alpha\beta} \partial_\alpha \tilde{\psi} \partial_\beta \tilde{\psi}\} \sqrt{g_\infty} dy + (1 - \sigma) \int_{B_{r\varepsilon}^+} \{g_\infty^{\alpha\beta} \partial_\alpha \tilde{Q} \partial_\beta \tilde{Q}\} \sqrt{g_\infty} dy \end{aligned} \quad (4.29)$$

für die *konstante* Metrik $(g_\infty)_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(y_\infty)$.

Dann gibt es einen linearen Automorphismus A des \mathbb{R}^3 , sodass $\hat{F}_\infty \circ A$ die Ungleichung (4.29) für alle entsprechenden Vergleichsabbildungen $H \circ A$ mit euklidischer Metrik anstelle von g_∞ in $A^{-1}(B_{r\varepsilon}^+)$ erfüllt, vgl. dazu auch [Ste91, S. 109, 112].

1. Fall: $\sigma \in (0, 1)$. In diesem Fall muss sowohl $\hat{\varphi}_\infty \circ A$ als auch $\hat{R}_\infty \circ A$ das entsprechende Dirichlet-Integral in $A^{-1}(B_{r\varepsilon}^+)$ minimieren. Da $\hat{F}_\infty \circ A$ Nullrandwerte auf $A^{-1}(\Gamma_{r\varepsilon})$ hat, kann man die harmonische Fortsetzung $W_\infty \circ A = (u_\infty, V_\infty) \circ A$ auf $A^{-1}(B_{r\varepsilon}^3)$ durch Spiegelung in der y_3 -Komponente betrachten.

Das bedeutet, die Komponenten dieser Fortsetzung $u_\infty \circ A$, und $V_\infty \circ A$ sind als harmonische Abbildungen (mit Werten in \mathbb{R}^3 bzw. $\mathbb{R}^{3 \times 3}$) Hölder-stetig. Da die Norm von A und A^{-1} beschränkt ist (jeweils in Abhängigkeit des Supremums η vom Verhältnis des größten zum kleinsten Eigenwert der Metrik g_∞),

erhält man mit den aus Abschnitt 4.1 bekannten Regularitätsabschätzungen für harmonische Abbildungen die folgenden Ungleichungen für alle $\nu \in (0, 1)$ und $\theta \in (0, \frac{1}{2})$ mit Konstanten c , die diesmal nicht nur von ν , sondern auch von η abhängen:

$$\int_{B_{\theta\varepsilon}^3} |Du_\infty|^2 dz \leq c \cdot \theta^{2\nu+1} \int_{B_\varepsilon^3} |Du_\infty|^2 dz$$

und

$$\int_{B_{\theta\varepsilon}^3} |DV_\infty|^2 dz \leq c \cdot \theta^{2\nu+1} \int_{B_\varepsilon^3} |DV_\infty|^2 dz.$$

Dann folgen wegen der Spiegelung in der y_3 -Komponente aber sofort die Abschätzungen

$$\int_{B_{\theta\varepsilon}^+} |D\hat{\varphi}_\infty|^2 dy \leq c \cdot \theta^{2\nu+1} \int_{B_\varepsilon^+} |D\hat{\varphi}_\infty|^2 dy$$

und

$$\int_{B_{\theta\varepsilon}^+} |D\hat{R}_\infty|^2 dy \leq c\theta^{2\nu+1} \int_{B_\varepsilon^+} |D\hat{R}_\infty|^2 dy. \quad (4.30)$$

Der Rest dieses Falls und die Fälle $\sigma = 0$ und $\sigma = 1$ folgen fast wörtlich wie im Beweis der Inneren Diskreten Morrey-Bedingung: Wegen der Regularitätsabschätzungen (4.30) in Kombination mit Norm-Konvergenz in $B_{\theta\varepsilon}^+$ ($\theta < \frac{1}{2}$) und schwacher Konvergenz in B_ε^+ gilt auch hier für $\nu = \frac{\mu+1}{2} \in (\frac{1}{2}, 1)$

$$\begin{aligned} & \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \cdot \left[(\theta\rho_i)^{-1} \left(\|D\tilde{\varphi}_i\|_{L^2(B_{\theta\rho_i}^+(y_i))}^2 + \|D\tilde{R}_i\|_{L^2(B_{\theta\rho_i}^+(y_i))}^2 \right) \right] \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \cdot \left[\theta^{-1}\gamma_i^2 \|D\hat{\varphi}_i\|_{L^2(B_{\theta\varepsilon}^+)}^2 + \theta^{-1}\delta_i^2 \|D\hat{R}_i\|_{L^2(B_{\theta\varepsilon}^+)}^2 \right] \\ &= \sigma\theta^{-1} \|D\hat{\varphi}_\infty\|_{L^2(B_{\theta\varepsilon}^+)}^2 + (1-\sigma)\theta^{-1} \|D\hat{R}_\infty\|_{L^2(B_{\theta\varepsilon}^+)}^2 \\ &\leq \sigma c\theta^{2\nu} \|D\hat{\varphi}_\infty\|_{L^2(B_\varepsilon^+)}^2 + (1-\sigma)c\theta^{2\nu} \|D\hat{R}_\infty\|_{L^2(B_\varepsilon^+)}^2 \\ &\leq c\theta^{2\nu} \leq \theta^{2\mu}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

falls θ so klein gewählt ist, dass $c\theta^{1-\mu} \leq 1$ gilt.

Dies steht im Widerspruch zur Implikation von (4.28), dass dieser Grenzwert für jedes feste $\theta \in (0, 1)$ echt größer als $\theta^{2\mu}$ sein muss.

Für den zweiten Fall ($\sigma = 0$) und den dritten Fall ($\sigma = 1$) gilt exakt die gleiche Argumentation wie im Beweis der Inneren Diskreten Morrey-Bedingung, vgl. Seite 49: (4.31) behält jeweils seine Gültigkeit, da die im Grenzprozess verlorene Information zur Regularität dadurch kompensiert wird, dass der korrespondierende Vorfaktor σ oder $1 - \sigma$ in (4.31) ebenfalls verschwindet. \square

Zusätzlich zu den bis hierher bewiesenen Hilfsaussagen wird später die folgende Beobachtung zur Konstanz gewisser harmonischer Abbildungen eine entscheidende Rolle spielen. Sie geht zurück auf [JM83] und [SU83]. Der hiesige Beweis folgt dem Vorgehen in [Ste91] nach einer Idee aus [HL87], formuliert in der später benötigten Form:

Proposition 4.11. *Ist $F_0 = (\tilde{\varphi}_0, \tilde{R}_0) \in W^{1,2}(B_\varepsilon^+ \cup \Gamma_\varepsilon, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S})$ mit konstanten Randwerten $F_0|_{\Gamma_\varepsilon} = G_0 = \text{const}$ ein radial konstanter Minimierer des Funktionals*

$$\mathcal{D}_r^+(\psi, Q) := \int_{B_{r\varepsilon}^+} |\mathrm{D}\psi|^2 + |\mathrm{D}Q|^2 \, dy$$

für ein festes $r \in (0, 1)$, so ist F_0 selbst konstant in $B_{r\varepsilon}^+$.

Beweis. Betrachte eine Variation F_λ , $0 \leq \lambda < r\varepsilon$, in der das Zentrum der radialen Konstanz vom Ursprung um λ orthogonal ins Innere von $B_{r\varepsilon}^+$ verschoben wird unter Beibehaltung der Werte auf $\partial B_{r\varepsilon}^+$. Ähnlich wie im Beweis der Rand-Monotonie-Formel (Lemma 4.9) setze demnach

$$\begin{aligned} F_\lambda \circ \Upsilon_{r\varepsilon, \lambda}(y) &= F_0(y) \quad \forall y \in B_{r\varepsilon}^+, \text{ mit} \\ \Upsilon_{r\varepsilon, \lambda}(y) &= (y_1, y_2, y_3 + \lambda(r\varepsilon - |y|)). \end{aligned}$$

Dabei ist $B_{r\varepsilon}^+$ die disjunkte Vereinigung des Bildes $\Upsilon_{r\varepsilon, \lambda}(B_{r\varepsilon}^+)$ und des Kegels $C_{r\varepsilon, \lambda}^+$ mit

$$C_{r\varepsilon, \lambda}^+ = \left\{ y \in B_{r\varepsilon}^3 : 0 < y_3 < \lambda(r\varepsilon - \sqrt{y_1^2 + y_2^2}) \right\}.$$

Insbesondere gilt wegen $F_\lambda|_{C_{r\varepsilon, \lambda}^+} = F_0|_{\Gamma_{r\varepsilon}} = \text{const}$ unmittelbar $\mathrm{D}\tilde{\varphi}_\lambda \equiv 0 \equiv \mathrm{D}\tilde{R}_\lambda$ in $C_{r\varepsilon, \lambda}^+$ und daher

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_r^+(F_\lambda) &= \int_{\Upsilon_{r\varepsilon, \lambda}(B_{r\varepsilon}^+)} |\mathrm{D}\tilde{\varphi}_\lambda|^2 + |\mathrm{D}\tilde{R}_\lambda|^2 \, dy \\ &= \int_{B_{r\varepsilon}^+} |\mathrm{D}\tilde{\varphi}_\lambda(\Upsilon_{r\varepsilon, \lambda}(y))|^2 + |\mathrm{D}\tilde{R}_\lambda(\Upsilon_{r\varepsilon, \lambda}(y))|^2 \, dy \\ &= \int_{B_{r\varepsilon}^+} \left\{ |\mathrm{D}\tilde{\varphi}_0(y) \cdot \mathrm{D}\Upsilon_{r\varepsilon, \lambda}^{-1}(\Upsilon_{r\varepsilon, \lambda}(y))|^2 + |\mathrm{D}\tilde{R}_0(y) \cdot \mathrm{D}\Upsilon_{r\varepsilon, \lambda}^{-1}(\Upsilon_{r\varepsilon, \lambda}(y))|^2 \right\} \\ &\quad \cdot \mathrm{Jac}(\Upsilon_{r\varepsilon, \lambda})(y) \, dy \end{aligned}$$

Nach Konstruktion der Variation haben F_λ und F_0 die gleichen Werte auf $\partial B_{r\varepsilon}^+$ und nach Voraussetzung ist F_0 Minimierer von $\mathcal{D}_r^+(\cdot)$. Daher muss, falls die Ableitungen existieren,

$$\frac{d}{d\lambda} \left[\mathcal{D}_r^+(\tilde{\varphi}_\lambda, \tilde{R}_\lambda) \right] \Big|_{\lambda=0} \geq 0$$

gelten.

Außerdem ist mit $D\Upsilon_{r\varepsilon,\lambda}^{-1}(\Upsilon_{r\varepsilon,\lambda}(y)) = (D\Upsilon_{r\varepsilon,\lambda}(y))^{-1}$ leicht zu berechnen, dass

$$D\Upsilon_{r\varepsilon,\lambda}(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\lambda y_1}{|y|} & -\frac{\lambda y_2}{|y|} & 1 - \frac{\lambda y_3}{|y|} \end{pmatrix}, \quad \text{Jac}(\Upsilon_{r\varepsilon,\lambda})(y) = 1 - \lambda \frac{y_3}{|y|}, \text{ sowie}$$

$$D\Upsilon_{r\varepsilon,0}(y) = I_3 \quad \text{und} \quad A(y) := \frac{d}{d\lambda} [(D\Upsilon_{r\varepsilon,\lambda})^{-1}(y)] \Big|_{\lambda=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{y_1}{|y|} & \frac{y_2}{|y|} & \frac{y_3}{|y|} \end{pmatrix}$$

gelten. Wegen der vorausgesetzten radialen Konstanz von F_0 folgen daraus sofort

$$D\tilde{\varphi}_0 \cdot A^T = (0, 0, \partial_{rad}\tilde{\varphi}_0) = 0 = A \cdot D\tilde{\varphi}_0^T$$

und

$$D\tilde{R}_0 \cdot A^T = (0, 0, \partial_{rad}\tilde{R}_0) = 0 = A \cdot D\tilde{R}_0^T.$$

Des Weiteren impliziert dies in Kombination mit der Spur-Darstellung der Frobenius-Norm

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} [|D\tilde{\varphi}_0 \cdot (D\Upsilon_{r\varepsilon,\lambda})^{-1}|^2] \Big|_{\lambda=0} &= \text{tr}(A^T \cdot D\tilde{\varphi}_0^T \cdot D\tilde{\varphi}_0 \cdot I_3) + \text{tr}(I_3 \cdot D\tilde{\varphi}_0^T \cdot D\tilde{\varphi}_0 \cdot A) \\ &= \text{tr}(D\tilde{\varphi}_0 \cdot A^T \cdot D\tilde{\varphi}_0^T) + \text{tr}(D\tilde{\varphi}_0 \cdot A \cdot D\tilde{\varphi}_0^T) \\ &= 0 \end{aligned}$$

und analog

$$\frac{d}{d\lambda} [|D\tilde{R}_0 (D\Upsilon_{r\varepsilon,\lambda})^{-1}|^2] \Big|_{\lambda=0} = 0.$$

Damit ist insgesamt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{d}{d\lambda} [\mathcal{D}_r^+(\tilde{\varphi}_\lambda, \tilde{R}_\lambda)] \Big|_{\lambda=0} = \int_{B_{r\varepsilon}^+} \{ |D\tilde{\varphi}_0|^2 + |D\tilde{R}_0|^2 \} \cdot \frac{d}{d\lambda} [\text{Jac}(\Upsilon_{r\varepsilon,\lambda})] \Big|_{\lambda=0} dy \\ &= - \int_{B_{r\varepsilon}^+} \{ |D\tilde{\varphi}_0|^2 + |D\tilde{R}_0|^2 \} \cdot \frac{y_3}{|y|} dy \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt aber sofort $|D\tilde{\varphi}_0|^2 = 0$ und $|D\tilde{R}_0|^2 = 0$ in $B_{r\varepsilon}^+$, d.h. $F_0 = (\tilde{\varphi}_0, \tilde{R}_0)$ ist konstant in $B_{r\varepsilon}^+$.

□

4.2.2 $\text{Sing}(f)$ ist leer am Rand

Als nächstes soll gezeigt werden, dass auch in der Betrachtung der Situation am Rand für die betrachtete Subklasse kritischer Punkte der Cosserat-Energie nur dort Singularitäten auftreten können, wo die reskalierte (Dirichlet-) Energie eine gewisse Schranke übersteigt. Wie schon in Abschnitt 4.1.2 wird dabei mit Hilfe der Diskreten Morrey-Bedingung am Rand (Lemma 4.10) eine Energie-Abschätzung hergeleitet, welche die Anwendung einer Rand-Version von Morreys Dirichlet-Wachstumsbedingung ermöglicht.

Lemma 4.12 (Rand- ε_0 -Regularität). *Sei $\mu \in (0, 1)$ und $F = (\tilde{\varphi}, \tilde{R})$ ein Minimierer der L^{-1} -Cosserat-Energie $\tilde{\mathcal{J}}_{B_\varepsilon^+}(\cdot)$ in der Klasse $\mathcal{C}(G)$. Dann liegt F in der Klasse $C_{loc}^{1,\mu} \times C_{loc}^{0,\mu}$ auf der Menge $(B_\varepsilon^+ \cup \Gamma_\varepsilon) \setminus S^+(F, \varepsilon_0)$.*

Dabei ist für eine beliebige Abbildung $H = (\tilde{\psi}, \tilde{Q}) \in \mathcal{C}(G)$ die ε_0 -singuläre Menge $S^+(H, \varepsilon_0)$ definiert als

$$S^+(H, \varepsilon_0) := \left\{ y_0 \in B_\varepsilon^+ \cup \Gamma_\varepsilon : |y_0| \leq \frac{1}{2}\varepsilon, \right. \\ \left. \rho^{-1} \left(\|D\tilde{\psi}\|_{L^2(B_\rho^+(y_0))}^2 + \|D\tilde{Q}\|_{L^2(B_\rho^+(y_0))}^2 \right) \geq \varepsilon_0 \right. \\ \left. \text{für alle } \rho \in (0, \varepsilon - |y_0|) \right\}$$

für ein hinreichend kleines $\varepsilon_0 > 0$.

Beweis. Bezeichne mit $\varepsilon_M > 0, \theta \in (0, 1)$ und $\rho_0 \in (0, \varepsilon)$ die nach der Diskreten Morrey-Bedingung am Rand (Lemma 4.10) existierenden Konstanten. Aufgrund der bereits in Lemma 4.5 gezeigten ε_0 -Regularität im Inneren genügt es, eine Umgebung von Γ_ε zu betrachten.

Sei also $y_0 \in \Gamma_\varepsilon \setminus S^+(F, \varepsilon_0)$. Dann existiert nach Definition ein $s \in (0, \varepsilon - |y_0|)$, für welches

$$s^{-1} \left(\|D\tilde{\varphi}\|_{L^2(B_s^+(y_0))}^2 + \|D\tilde{R}\|_{L^2(B_s^+(y_0))}^2 \right) < \varepsilon_0 \quad (4.32)$$

gilt. Setze $s_0 := \min\{\frac{s}{2}; \theta^{1+\frac{1}{2\mu}} \cdot \varepsilon_M^{\frac{1}{2\mu}}; \rho_0\}$ und betrachte $\varepsilon_0 := \frac{s_0}{s} \varepsilon_M$.

Analog zu (4.13) soll die folgende Energie-Abschätzung für alle Punkte $y \in B_{\frac{s}{2}}^+(y_0)$ und alle Radien $r \in (0, \frac{s}{2})$ gezeigt werden:

$$\Phi^+(y, r) := r^{-1} \left(\|D\tilde{\varphi}\|_{L^2(B_r^+(y))}^2 + \|D\tilde{R}\|_{L^2(B_r^+(y))}^2 \right) \leq c \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^{2\mu} \cdot \varepsilon_0, \quad (4.33)$$

denn dann folgt die behauptete lokale Hölder-Stetigkeit der beiden Komponenten $\tilde{\varphi}$ und \tilde{R} in der Menge $B_{\frac{s}{2}}^+(y_0) \cap (B_\varepsilon^+ \cup \Gamma_\varepsilon)$ aus der Rand-Version von Morreys Dirichlet-Wachstumsbedingung, welche (genau wie die innere Version) beispielsweise in [Mor66] oder [GT83, Kap. 7.9] zu finden ist.

Dazu betrachte getrennt voneinander die Fälle

$$\text{a) } y_1 \in \overline{B_{\frac{s}{2}}^+(y_0)} \cap \Gamma_\varepsilon,$$

$$\text{b) } y_2 \in \overline{B_{\frac{s}{2}}^+(y_0)} \text{ mit } y_2 \notin \Gamma_\varepsilon.$$

Ad a). Für $y_1 \in \overline{B_{\frac{s}{2}}^+(y_0)} \cap \Gamma_\varepsilon$ halte analog zu (4.14) und den dort folgenden Ausführungen fest, dass zunächst gilt

$$\Phi^+(y_1, s_0) \leq \left(\frac{s_0}{s}\right)^{-1} \cdot \Phi^+(y_0, s) \leq \varepsilon_M. \quad (4.34)$$

Zeige nun erneut per vollständiger Induktion, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\Phi^+(y_1, \theta^k s_0) \leq \theta^{2\mu k} \cdot \varepsilon_M. \quad (4.35)$$

Dabei ist der Induktionsanfang $k = 0$ durch die Voraussetzung (4.34) gegeben. Als Induktionsannahme gelte (4.35) für ein $k - 1 \in \mathbb{N}_0$. Für den Induktionsschritt $k - 1 \rightsquigarrow k$ unterscheide zwei Fälle. Ist $(\theta^{k-1} s_0)^{2\mu} \leq \Phi^+(y_1, \theta^{k-1} s_0)$, so folgt mit der Diskreten Morrey-Bedingung am Rand (die Kleinheitsbedingung ist erfüllt) und der Induktionsannahme

$$\Phi^+(y_1, \theta^k s_0) \leq \theta^{2\mu} \cdot \Phi^+(y_1, \theta^{k-1} s_0) \leq \theta^{2\mu} \cdot \theta^{2\mu(k-1)} \cdot \varepsilon_M \leq \theta^{2\mu k} \cdot \varepsilon_M.$$

Ist hingegen $(\theta^{k-1} s_0)^{2\mu} > \Phi^+(y_1, \theta^{k-1} s_0)$, so folgt mit der Definition von s_0 :

$$\Phi^+(y_1, \theta^k s_0) \leq \theta^{-1} \cdot \Phi^+(y_1, \theta^{k-1} s_0) \leq \theta^{-1-2\mu} \cdot \theta^{2\mu k} \cdot s_0^{2\mu} \leq \theta^{-1-2\mu} \cdot \theta^{2\mu k} \cdot s_0^{2\mu} \leq \theta^{2\mu k} \cdot \varepsilon_M.$$

Da für jedes $r < s_0$ eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}_0$ existiert mit $\theta^{k+1} \cdot s_0 < r \leq \theta^k \cdot s_0$, also $\theta^{2\mu k} \leq \theta^{-2\mu} \cdot \left(\frac{r}{s_0}\right)^{2\mu}$ gilt, folgt aus (4.35) für alle $r \in (0, \frac{s}{2})$

$$\begin{aligned} \Phi^+(y_1, r) &\leq \theta^{-1} \cdot \Phi^+(y_1, \theta^k s_0) \leq \theta^{-1} \cdot \theta^{2\mu k} \cdot \varepsilon_M \\ &\leq \theta^{-1-2\mu} \cdot \left(\frac{r}{s_0}\right)^{2\mu} \cdot \varepsilon_M \\ &\leq \theta^{-1-2\mu} \cdot s_0^{-1-2\mu} \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^{2\mu} \cdot \varepsilon_0. \end{aligned}$$

Für $r \in [s_0, \frac{s}{2})$ hingegen gilt wegen $B_r^+(y_1) \subset B_s^+(y_0)$ in Kombination mit der ersten Abschätzung (4.32)

$$\begin{aligned} \Phi^+(y_1, r) &\leq \left(\frac{r}{s}\right)^{-1} \cdot \Phi^+(y_0, s) \leq s_0^{-1} \cdot \varepsilon_0 \\ &\leq \theta^{-1-2\mu} \cdot s_0^{-1} \cdot \left(\frac{r}{s_0}\right)^{2\mu} \cdot \varepsilon_0 \\ &\leq \theta^{-1-2\mu} \cdot s_0^{-1-2\mu} \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^{2\mu} \cdot \varepsilon_0. \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man so für einen beliebigen Randpunkt y_1 und für alle Radien $0 < r < \frac{s}{2}$ mit der Setzung $c_1 := \theta^{-1-2\mu} \cdot s_0^{-1-2\mu}$ die Energie-Abschätzung

$$\Phi^+(y_1, r) \leq c_1 \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^{2\mu} \cdot \varepsilon_0.$$

Ad b). Für einen beliebigen inneren Punkt y_2 erhält man eine entsprechende Energie-Abschätzung nach den Überlegungen zur inneren ε_0 -Regularität (Lemma 4.12), da sich die dortigen Betrachtungen mühelos durch Anpassung der Konstanten auf (skalierte) Halbkugeln $B_s^+(y_0) \subset B_\varepsilon^+$ übertragen lassen. Somit gilt für alle $0 < r < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Phi^+(y_2, r) \leq c_2 \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^{2\mu} \cdot \varepsilon_0.$$

Insgesamt ist also die Energie-Abschätzung (4.33) mit $c = \max\{c_1, c_2\}$ bewiesen für alle $r \in (0, \frac{\varepsilon}{2})$ und alle $y \in \overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}^+}(y_0)$.

Wie auf Seite 77 beschrieben folgt daher die lokale Hölder-Stetigkeit der Komponenten $\tilde{\varphi}$ und \tilde{R} außerhalb der ε_0 -singulären Menge $S^+(F, \varepsilon_0)$. Dort, wo die Mikro-Rotation \tilde{R} lokal Hölder-stetig ist, können zusätzlich mit dem gleichen Argument wie im Beweis von Lemma 4.5 auf Seite 51 entsprechende Schauder-Abschätzungen am Rand (vgl. z.B. [GM12, Theorem 5.21]) genutzt werden, um ebenso die Hölder-Stetigkeit des Deformations-Gradienten $D\tilde{\varphi}$ außerhalb von $S^+(F, \varepsilon_0)$ nachzuweisen. □

An dieser Stelle ist auch die letzte der Aussagen bewiesen, die zum Beweis der Hauptaussage dieses Abschnitts, der behaupteten vollen Randregularität eingeschränkter Minimierer, benötigt werden. Daher wird hier explizit als Satz formuliert:

Satz 4.13. Sei $F = (\tilde{\varphi}, \tilde{R})$ ein Minimierer der L^{-1} -Cosserat-Energie $\tilde{\mathcal{J}}_{B_\varepsilon^+}(\cdot)$ in der Klasse $\mathcal{C}(G)$.

Dann ist die singuläre Menge $\text{Sing}(F)$ enthalten in B_ε^+ . Insbesondere gilt

$$\text{Sing}(F) \cap \Gamma_\varepsilon = \emptyset,$$

d.h. es gibt keine Singularitäten am Rand.

Beweis. Es sei angenommen, dass eine Singularität am Rand existiere, also ein Punkt $y_0 \in \text{Sing}(F) \cap \Gamma_\varepsilon$; o.B.d.A. ist $y_0 = 0$.

Nach der Rand- ε_0 -Regularität (Lemma 4.12) gilt bereits, dass $\text{Sing}(F)$ in $S^+(F, \varepsilon_0)$ enthalten ist, also $\text{Sing}(F) \subseteq S^+(F, \varepsilon_0)$ für ein $\varepsilon_0 > 0$. Daher existiert eine Energie-Schranke $\varepsilon_0 > 0$, sodass $0 \in S^+(F, \varepsilon_0)$ ist; insbesondere gilt als Erstes für alle Radien $0 < \rho < \varepsilon - |0| = \varepsilon$

$$\rho^{-1} \int_{B_\rho^+} |D\tilde{\varphi}|^2 + |D\tilde{R}|^2 dy \geq \varepsilon_0. \quad (4.36)$$

Vergleichbar mit der Situation im Inneren wird F wieder mit einer Aufblasfolge verglichen. Dabei wird durch alleinige Reskalierung um den Faktor ρ_i^{-1}

im Urbild auch hier erreicht, dass jede der Abbildungen $\hat{F}_i = (\hat{\varphi}_i, \hat{R}_i)$ die Geometrie des Problems widerspiegelt: $\hat{F}_i = (\hat{\varphi}_i, \hat{R}_i) \in W^{1,2}(B_\varepsilon^+ \cup \Gamma_\varepsilon, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S})$ wird definiert gemäß

$$\hat{\varphi}_i(y) := \begin{cases} \bar{\varphi}(\rho_i y) - \bar{\varphi}_{\rho_i}, & y \in B_\varepsilon^+, \\ \tilde{\vartheta}(\rho_i y) - \bar{\vartheta}_{\rho_i} = \hat{\vartheta}_i(y), & y \in \Gamma_\varepsilon \end{cases}$$

und

$$\hat{R}_i(y) := \begin{cases} \tilde{R}(\rho_i y), & y \in B_\varepsilon^+, \\ \tilde{M}(\rho_i y) = \hat{M}_i(y), & y \in \Gamma_\varepsilon, \end{cases}$$

wobei die Mittelwerte $\bar{\varphi}_{\rho_i}$ und $\bar{\vartheta}_{\rho_i}$ über $B_{\rho_i}^+(y_i)$ und Γ_i zu verstehen sind wie im Beweis der Diskreten Morrey-Bedingung am Rand (vgl. Seite 66 mit $y_i = 0$ für alle Indizes $i \in \mathbb{N}$).

Dabei sind die Skalierungsfaktoren gegeben durch eine beliebige, streng monoton fallende Zahlenfolge $\rho_i \searrow 0, i \rightarrow \infty$, mit $\rho_1 \ll 1$. Auf diese Weise liegt die Mikro-Rotation \hat{R}_i für alle Indizes $i \in \mathbb{N}$ wie beabsichtigt in \mathcal{S} , anstelle von $\hat{R}_i \in \mathcal{S}_i$ mit verschobenen, skalierten Versionen \mathcal{S}_i aus dem Beweis der Diskreten Morrey-Bedingung am Rand (Lemma 4.10).

Dann minimiert jede Abbildung $\hat{F}_i = (\hat{\varphi}_i, \hat{R}_i)$ der Aufblasfolge das jeweilige entsprechend skalierte Funktional

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{J}}_i(\tilde{\psi}, \tilde{Q}) := \int_{B_\varepsilon^+} & \left\{ |\tilde{Q}^T(y) \cdot D\tilde{\psi}(y) \cdot DL(L^{-1}(\rho_i y)) - \rho_i I_3|^2 \right. \\ & \left. + |D\tilde{Q}(y) \cdot DL(L^{-1}(\rho_i y))|^2 \right\} \cdot \text{Jac}(L^{-1})(\rho_i y) \, dy \end{aligned}$$

im Vergleich zu allen Abbildungen $(\tilde{\psi}, \tilde{Q}) \in W^{1,2}(B_\varepsilon^+, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S})$ bzgl. der Randwerte $(\tilde{\psi}, \tilde{Q})|_{\Gamma_\varepsilon} = G_i = (\hat{\vartheta}_i, \hat{M}_i)$. Gleichzeitig garantiert die Rand-Monotonie-Formel (Lemma 4.9), dass die Folge $\tilde{\mathcal{J}}_i(\hat{\varphi}_i, \hat{R}_i)$ bei $i \rightarrow \infty$ beschränkt bleibt; das formale Grenzfunktional bei $\rho_i \searrow 0, i \rightarrow \infty$, lautet wegen $DL^{-1}(\rho_i y) \rightarrow DL^{-1}(0) = I_3$ und $\tilde{Q} \in \mathcal{S}$

$$\tilde{\mathcal{J}}_\infty(\tilde{\psi}, \tilde{Q}) := \int_{B_\varepsilon^+} |D\tilde{\psi}|^2 + |D\tilde{Q}|^2 \, dy.$$

Da $\tilde{\mathcal{J}}_i(\hat{\varphi}_i, \hat{R}_i)$ beschränkt bleibt und die $\hat{\varphi}_i$ nach Konstruktion Mittelwert Null haben, lässt sich ähnlich wie zuvor mit der Poincaré-Ungleichung die Beschränktheit von $(\hat{\varphi}_i, \hat{R}_i)$ im reflexiven Sobolev-Raum $W^{1,2}(B_\varepsilon^+, \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{3 \times 3})$ nachweisen:

$$\begin{aligned} \|\hat{\varphi}_i\|_{W^{1,2}(B_\varepsilon^+)}^2 & \leq c \cdot \|D\hat{\varphi}_i\|_{L^2(B_\varepsilon^+)}^2 \leq c \cdot (\tilde{\mathcal{J}}_i(\hat{\varphi}_i, \hat{R}_i) + \rho_i^2), \\ \|\hat{R}_i\|_{W^{1,2}(B_\varepsilon^+)}^2 & = \|\hat{R}_i\|_{L^2(B_\varepsilon^+)}^2 + \|D\hat{R}_i\|_{L^2(B_\varepsilon^+)}^2 \leq c + \tilde{\mathcal{J}}_i(\hat{\varphi}_i, \hat{R}_i). \end{aligned}$$

Somit existiert eine schwach konvergente (gleich bezeichnete) Teilfolge der Aufblasfolge: $(\hat{\varphi}_i, \hat{R}_i) \rightharpoonup (\hat{\varphi}_\infty, \hat{R}_\infty) \in W^{1,2}(B_\varepsilon^+ \cup \Gamma_\varepsilon, \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{3 \times 3})$. Nach erneutem

Übergang zu einer Teilfolge gilt ebenfalls die punktweise Konvergenz fast überall, damit auch $(\hat{\varphi}_\infty, \hat{R}_\infty) \in W^{1,2}(B_\varepsilon^+ \cup \Gamma_\varepsilon, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S})$ und

$$(\hat{\varphi}_\infty, \hat{R}_\infty)|_{\Gamma_\varepsilon} = \lim_{i \rightarrow \infty} (\hat{\vartheta}_i, \hat{M}_i) = (\tilde{\vartheta}(0), \tilde{M}(0)) = \text{const},$$

da $G = (\tilde{\vartheta}, \tilde{M}) \in C^1(\Gamma_\varepsilon, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S})$ nach Voraussetzung insbesondere stetig ist.

Mit einem Kompaktheits-Argument vollkommen analog zum Beweis der Diskreten Morrey-Bedingung am Rand (Lemma 4.10) (Ausnutzung des Fortsetzungs-Lemmas von Luckhaus sowie der daraus resultierenden Energie-Abschätzungen) folgt außerdem die Norm-Konvergenz auf $B_{r\varepsilon}^+$ für r beliebig nahe an 1 und die Minimierung des Grenzfunktional $\tilde{\mathcal{J}}_\infty(\cdot)$ in $B_{r\varepsilon}^+$ bzgl. der (konstanten) Randwerte $(\tilde{\vartheta}(0), \tilde{M}(0))$ auf Γ_ε durch den Grenzwert $(\hat{\varphi}_\infty, \hat{R}_\infty)$ der Aufblasfolge.

Einsetzen von $s = t\rho_i > r = t\rho_j$ für festes $0 < t < 1$ in die Monotonie-Formel aus Lemma 4.9, $\rho_j \searrow 0$ und dann $\rho_i \searrow 0$ wie im Beweis von Satz 4.6, liefert völlig analog einerseits

$$\int_{B_\varepsilon^+} |y|^{-1} \left[|\partial_{rad} \hat{\varphi}_\infty|^2 + |\partial_{rad} \hat{R}_\infty|^2 \right] dy = 0.$$

Also gilt in der Situation am Rand genau wie dort

$$|\partial_{rad} \hat{\varphi}_\infty|^2 \equiv 0 \equiv |\partial_{rad} \hat{R}_\infty|^2 \quad \text{in } B_\varepsilon^+$$

und $\hat{F}_\infty = (\hat{\varphi}_\infty, \hat{R}_\infty)$ ist demnach radial konstant in B_ε^+ .

Andererseits gilt gleichzeitig für jedes $r \in (0, 1)$ wegen der Norm-Konvergenz in $B_{r\varepsilon}^+$

$$\begin{aligned} (r\varepsilon)^{-1} \int_{B_{r\varepsilon}^+} |D\hat{\varphi}_\infty|^2 + |D\hat{R}_\infty|^2 dy &= \lim_{i \rightarrow \infty} (r\varepsilon)^{-1} \int_{B_{r\varepsilon}^+} |D\hat{\varphi}_i|^2 + |D\hat{R}_i|^2 dy \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} (r\varepsilon)^{-1} \rho_i^2 \int_{B_{r\varepsilon}^+} |D\tilde{\varphi}(\rho_i y)|^2 + |D\tilde{R}(\rho_i y)|^2 dy \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} (r\varepsilon \rho_i)^{-1} \int_{B_{r\varepsilon \rho_i}^+} |D\tilde{\varphi}|^2 + |D\tilde{R}|^2 dy \geq \varepsilon_0 > 0 \end{aligned}$$

nach (4.36), da nach Annahme $y_0 = 0 \in S^+(F, \varepsilon_0)$ war.

Dies steht im Widerspruch zu der Tatsache, dass der radial konstante Minimierer \hat{F}_∞ von $\tilde{\mathcal{J}}_{\infty, r\varepsilon}(\cdot)$ bzgl. der konstanten Randwerte $(\hat{\varphi}_\infty, \hat{R}_\infty)|_{\Gamma_\varepsilon} = (\tilde{\vartheta}(0), \tilde{M}(0))$ nach Proposition 4.11 selbst konstant ist in $B_{r\varepsilon}^+$ und damit für alle $r \in (0, 1)$ erfüllt, dass

$$(r\varepsilon)^{-1} \int_{B_{r\varepsilon}^+} |D\hat{\varphi}_\infty|^2 + |D\hat{R}_\infty|^2 dy = 0.$$

Die ursprüngliche Annahme, es gäbe eine Singularität $y_0 \in \text{Sing}(F) \cap \Gamma_\varepsilon$, muss also falsch gewesen sein. □

Zusammengefasst machen die Ausführungen in Kapitel 4 deutlich, dass die singuläre Menge von Abbildungen aus der betrachteten Subklasse kritischer Punkte der Cosserat-Energie im Inneren diskret und am Rand leer ist. Damit ergeben sich als nächster logischer Schritt die Fragen, wie groß die diskrete singuläre Menge für diese kritischen Punkte (eingeschränkte Minimierer) werden kann, oder ob eventuell eine Verbesserung dieser partiellen Regularitätsaussage möglich ist. Eine Antwort darauf wird im folgenden Kapitel 5 gegeben.

Gleichzeitig ist erneut festzuhalten, dass die verwendeten Argumente, welche zur vollen Randregularität für eingeschränkte Minimierer führen, an keiner Stelle davon abhängen, dass die Mikro-Rotationen auf die Untermannigfaltigkeit \mathcal{S} von $SO(3)$ eingeschränkt sind. Stattdessen wird an den entscheidenden Stellen die Minimierung der Cosserat-Energie durch die betrachtete Abbildung ausgenutzt.

Dies macht deutlich, dass das in Abschnitt 4.2 präsentierte Vorgehen mit geringen Modifikationen insbesondere auch für die Minimierer des vollen Problems (\mathcal{P}) mit Werten in $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$ bei vorgegebenen C^1 -Dirichlet-Randbedingungen stand hält. Satz 4.8 stellt damit eine neue Erkenntnis in der Forschung zu Cosserat-Körpern dar, insbesondere verbessert dieses Resultat teilweise die partielle Randregularität aus [LW23] für einen Teil der stationären kritische Punkte der Cosserat-Energie.

5 Kritische Punkte der Cosserat-Energie mit N Singularitäten

Aufgrund der in Kapitel 4 nachgewiesenen partiellen Regularität für eingeschränkte Minimierer der Cosserat-Energie sind für diese höchstens isolierte Punktsingularitäten zu erwarten. Allerdings muss man sich fragen, ob nicht mit anderen Methoden möglicherweise eine bessere Regularitätsaussage zu erreichen wäre. Dies kann mit den folgenden Überlegungen zweifelsfrei verneint werden.

Inspiziert durch das Resultat [HL86, Theorem A] zu harmonischen Abbildungen $u: B^3 \rightarrow S^2$ mit einer erzwungenen Anzahl von Singularitäten, können durch Ausnutzung der Dipol-Konstruktion in Satz 3.3 glatte Dirichlet-Randbedingungen $g_0: \partial B^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}$ so konstruiert werden, dass jeder eingeschränkte Minimierer in $W_{g_0}^{1,2}(B^3, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S})$ bzgl. dieser Randwerte mindestens N singuläre Punkte haben muss, wobei $N \in \mathbb{N}$ eine beliebig große vorgegebene Zahl ist. Damit wird die Existenz eingeschränkter Minimierer nachgewiesen, die grob gesprochen das „singulärste“ Verhalten aufweisen, welches in dieser Subklasse kritischer Punkte möglich ist. Ohne weitere Zusatzvoraussetzungen ist daher eine bessere partielle Regularität ausgeschlossen.

Beachte: Im gesamten Kapitel 5 betrachten wir nach den Konventionen in Kapitel 4 der einfachen Notation halber Cosserat-Körper mit Grundzustand $\Omega = B^3$, die Minimierer des eingeschränkten Problems (\mathcal{P}') sind.

Der folgende, oben zusammengefasste Satz bildet (neben den (partiellen) Regularitätsaussagen aus Kapitel 4) das Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit und ist gleichzeitig in dem Artikel „On prescribing the number of singular points in a Cosserat-elastic solid“ ([Hüs23]) zu finden, welcher im November 2022 zur Veröffentlichung eingereicht wurde.

Satz 5.1. *Zu jeder natürlichen Zahl $N \in \mathbb{N}$ existieren glatte Randwerte $g_0 = (\varphi_0, R_0) \in C^\infty(\partial B^3, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S})$ mit $\deg(R_0) = 0$, sodass für jeden Minimierer $f = (\varphi, R)$ der Cosserat-Energie $\mathcal{J}_{B^3}(\cdot)$ in der Klasse $W_{g_0}^{1,2}(B^3, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S})$ gilt:*

Die Mikro-Rotation R besitzt mindestens N Singularitäten.

Bemerkung 5.2. Die Eigenschaft $\deg(R_0) = 0$ wird in der Formulierung des Satzes betont, um zu verdeutlichen, dass die später erzwungenen Singularitäten nicht aus einfachen topologischen Gründen auftauchen. Denn wie schon in [HL86] für harmonische Abbildungen u von B^3 nach S^2 bemerkt ist, können glatte Randwerte u_0 ins Innere fortgesetzt werden, sodass die entsprechende Vergleichsklasse $W_{u_0}^{1,2}(B^3, S^2)$ für das Dirichlet-Problem nichtleer ist und ein Minimierer existiert. Haben die Randwerte jedoch einen von Null verschiedenen Abbildungsgrad, kann schon aus topologischen Gründen ein Minimierer nicht stetig in ganz B^3 sein und die zugehörige singuläre Menge ist zwingend nichtleer. Da die in Kapitel 3 entwickelten Konstruktionen mit dem Lift $n_0: B^3 \rightarrow S^2$ von R_0 arbeiten, ist es sinnvoll, auch hier die entsprechende Eigenschaft für den (mod 2)- Abbildungsgrad hervorzuheben. Denn für Randwerte mit $\deg(R_0) \neq 0$ hätte der Lift automatisch einen ungeraden (von Null verschiedenen) Abbildungsgrad und Singularitäten müssten bereits deswegen auftreten. Bei allgemeinen Randwerten mit Abbildungsgrad Null besteht zumindest die Möglichkeit, dass es glatte Vergleichsabbildungen/Minimierer geben kann; die unten konstruierten Randwerte erzwingen also Singularitäten auf andere Art und Weise.

Beweis von Satz 5.1. Dieser Beweis folgt den Ausführungen zu [Tar00, Satz 4.1], welche Ideen aus [Bré89] und [HL86] kombinieren. Dabei wird die Vorgehensweise an das eingeschränkte Cosserat-Problem angepasst.

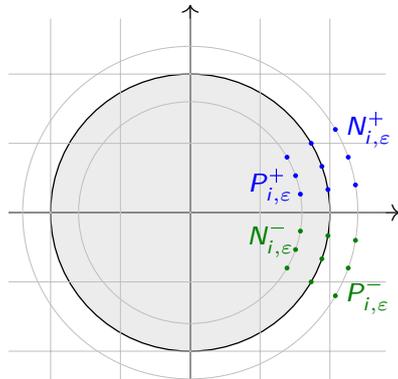
Schritt 1: Vorgabe der Randwerte. Zunächst sollen die gewünschten glatten Randwerte wie in [Tar00] nach einer Idee aus [Bré89, Abschnitt II.4] definiert werden.

Zu $N \in \mathbb{N}$ definiere N Zahlen $\lambda_i := \frac{i}{2N}$, $i = 1, \dots, N$. Betrachte die Punkte

$$\xi_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{1 - \lambda_i^2} \\ \lambda_i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \eta_i = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{1 - \lambda_i^2} \\ -\lambda_i \end{pmatrix}.$$

Außerdem definiere zu jedem festen $\varepsilon > 0$ die Punkte

$$\begin{aligned} P_{i,\varepsilon}^+ &= (1 - \varepsilon)\xi_i & \text{und} & & P_{i,\varepsilon}^- &= (1 + \varepsilon)\eta_i, \\ N_{i,\varepsilon}^+ &= (1 + \varepsilon)\xi_i & & & N_{i,\varepsilon}^- &= (1 - \varepsilon)\eta_i. \end{aligned}$$



Dazu bezeichne $Z_{i,\varepsilon}^+$ bzw. $Z_{i,\varepsilon}^-$ jeweils die ε -Tubenumgebung der Verbindungsstrecke $[P_{i,\varepsilon}^+, N_{i,\varepsilon}^+]$ bzw. $[P_{i,\varepsilon}^-, N_{i,\varepsilon}^-]$. O.B.d.A sei $\varepsilon \ll 1$ hinreichend klein, sodass die Umgebungen $Z_{i,\varepsilon}^+$, $i = 1, \dots, N$, durch Scheiben von mindestens der Dicke $\frac{1}{4N}$ getrennt sind, d.h.

$$|z - \hat{z}| \geq \frac{1}{4N} \quad \forall (x, y, z) \in Z_{i,\varepsilon}^+, \forall (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \in Z_{j,\varepsilon}^+, i \neq j. \quad (5.1)$$

Des Weiteren sei $g = (\vartheta, M) \in C^\infty(B_2^3, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S})$ gegeben durch

$$\vartheta(x, y, z) = (-x, -y, z) \quad \text{und} \quad M(x, y, z) \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $D\vartheta = M$, $M^T D\vartheta = I_3$ und $|DM|^2 = 0$, also $\mathcal{J}_{B^3}(g) = 0$ und Satz 3.3 liefert zunächst eine Abbildung

$$\tilde{g} = (\tilde{\vartheta}, \tilde{M}) \in W^{1,2}(B_2^3, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}) \cap C^\infty\left(B_2^3 \setminus \left(\bigcup_{i=1}^N \{P_{i,\varepsilon}^+, N_{i,\varepsilon}^+, P_{i,\varepsilon}^-, N_{i,\varepsilon}^-\}\right), \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}\right),$$

die erstens außerhalb von $Z := \bigcup_{i=1}^N (Z_{i,\varepsilon}^+ \cup Z_{i,\varepsilon}^-)$ mit g übereinstimmt, zweitens als einzige Singularitäten die $2N$ Dipole $(P_{i,\varepsilon}^\pm, N_{i,\varepsilon}^\pm)$ besitzt mit

$$\begin{aligned} \deg_{P_{i,\varepsilon}^+}(\tilde{M}) &= 1 = \deg_{N_{i,\varepsilon}^+}(\tilde{M}), \\ \deg_{P_{i,\varepsilon}^-}(\tilde{M}) &= 1 = \deg_{N_{i,\varepsilon}^-}(\tilde{M}) \end{aligned}$$

und für die drittens gilt

$$\mathcal{J}_{B^3}(\tilde{g}) < 64\pi \cdot 2\varepsilon \cdot 2N + \varepsilon = (64\pi \cdot 4N + 1) \cdot \varepsilon. \quad (5.2)$$

Damit können nun die gesuchten Randwerte g_0 festgelegt werden: Es sei

$$g_0 = (\varphi_0, R_0) := \tilde{g}|_{\partial B^3} \in C^\infty(\partial B^3, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}).$$

Dann ist $\deg(R_0) = 0$, da im Inneren von B^3 für jede Singularität $P_{i,\varepsilon}^+$ von \tilde{g} in der oberen Halbkugel eine Singularität $N_{i,\varepsilon}^-$ in der unteren Halbkugel liegt, sodass in Summe der (mod 2)-Abbildungsgrad gleich Null ist, vgl. Bemerkung 2.9 (b), Seite 14.

Außerdem gilt

$$\tilde{g}|_{\overline{B^3} \setminus Z} \equiv (\vartheta, M).$$

Nach (5.2) ist es weiter möglich, zusätzlich zu (5.1), ε so klein zu wählen, dass

$$\mathcal{J}_{B^3}(\tilde{g}) < \frac{\pi}{N} \quad (5.3)$$

erfüllt ist.

Schritt 2: Betrachtung von Minimierern. Im Folgenden meint \tilde{g} immer die Einschränkung $\tilde{g}|_{\overline{B^3}}$. Dann ist die Klasse zulässiger Vergleichsabbildungen bzgl. der Randwerte g_0 nichtleer, da nach Konstruktion \tilde{g} in $W_{g_0}^{1,2}(B^3, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S})$ liegt; die Existenz von Cosserat-Energie-Minimierern bzgl. dieser Randwerte ist gesichert.

Sei also $f = (\varphi, R) \in W_{g_0}^{1,2}(B^3, \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S})$ ein solcher eingeschränkter Minimierer der Cosserat-Energie. Dann gilt wegen (5.3) auch

$$\mathcal{J}_{B^3}(f) < \frac{\pi}{N}. \quad (5.4)$$

Wie in [Tar00] folgt der Rest des Beweises dem Vorgehen in [HL86] um zu zeigen, dass die Mikro-Rotation R des eingeschränkten Minimierers f mindestens N Singularitäten haben muss. Wegen (5.1) und (5.4) existieren $N + 1$ reelle Zahlen μ_0, \dots, μ_N mit

$$0 < \mu_0 < \lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N < \mu_N < 1,$$

sodass für $i = 0, \dots, N$ die horizontalen Kreisscheiben $D_i := B^2 \times \{\mu_i\}$ einerseits $D_i \cap Z = \emptyset$ erfüllen und andererseits

$$\int_{D_i} |DR|^2 d\mathcal{H}^2 < 4\pi \quad (5.5)$$

gilt. Denn angenommen (5.5) ist nicht erfüllbar. Dann folgt wegen der Dicke der Zylinderzwischenräume aus (5.1) und der Nichtnegativität des Betrags $|R^T D\varphi - I_3|^2$ mit dem Satz von Fubini sofort

$$\mathcal{J}_{B^3}(f) \geq \frac{1}{4N} \cdot 4\pi = \frac{\pi}{N}$$

im Widerspruch zu (5.4).

Nach den Ergebnissen aus Kapitel 4 ist bekannt, dass keine Singularitäten von f in ∂B^3 liegen (Satz 4.13) und dass $\text{Sing}(R) \subseteq \text{Sing}(f) \subset B^3$ diskret ist (Satz 4.6). Daher kann o.B.d.A. angenommen werden, dass alle isolierten Punktsingularitäten von R in $B^3 \setminus \left(\bigcup_{i=1}^N D_i \right)$ liegen.

Dann gilt für jede kompakte Teilmenge $C \subset \overline{B^3} \setminus \text{Sing}(f)$ und jedes $i = 0, \dots, N$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}} \mathcal{H}^0(D_i \cap C \cap R^{-1}(p)) d\mu(p) &= \int_{D_i \cap C} \text{Jac}(R|_{D_i \cap C}) d\mathcal{H}^2 \\ &\leq \int_{D_i} \text{Jac}(R|_{D_i \cap C}) d\mathcal{H}^2 \leq \frac{1}{2} \int_{D_i} |DR|^2 d\mathcal{H}^2, \end{aligned}$$

wobei μ das natürliche Riemannsche Maß auf \mathcal{S} bezeichnet. Nach dem Satz von Beppo-Levi gilt weiterhin für $C \nearrow B^3$

$$\int_{\mathcal{S}} \mathcal{H}^0(D_i \cap C \cap R^{-1}(p)) d\mu(p) \longrightarrow \int_{\mathcal{S}} \mathcal{H}^0(D_i \cap R^{-1}(p)) d\mu(p) \quad \text{und}$$

$$\int_{D_i} \text{Jac}(R|_{D_i \cap C}) d\mathcal{H}^2 \longrightarrow \int_{D_i} \text{Jac}(R|_{D_i}) d\mathcal{H}^2.$$

Somit folgt für jedes $i = 0, \dots, N$ mit (5.5)

$$\begin{aligned} \mu(R(D_i)) &\leq \int_{D_i} \mathcal{H}^0(D_i \cap R^{-1}(p)) d\mu(p) = \int_{D_i} \text{Jac}(R|_{D_i}) d\mathcal{H}^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{D_i} |DR|^2 d\mathcal{H}^2 < 2\pi = \mu(\mathcal{S}), \end{aligned}$$

weshalb jedes Bild $R(D_i)$ eine echte Teilmenge von \mathcal{S} ist.

Da R auf D_i glatt ist und $D_i \cap Z = \emptyset$ gilt, sowie $R|_{\partial B^3} = R_0 = \tilde{M}|_{\partial B^3}$ und

$$\tilde{M}|_{\overline{B^3} \setminus Z} = M \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

folgt, dass R auf D_i homotop zu M ist, also

$$R|_{D_i} \simeq \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ rel. } \partial D_i, \quad (5.6)$$

genau wie

$$\tilde{M}|_{D_i} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

folgt.

Betrachte schließlich für $i = 1, \dots, N$ die Scheiben

$$\Omega_i := \{(x, y, z) \in B^3 : \mu_{i-1} < z < \mu_i\}$$

zwischen den D_i . Dann ist der Rand $\partial\Omega_i = D_{i-1} \cup D_i \cup (\partial B^3 \cap \overline{\Omega}_i)$ einer jeden Scheibe Ω_i homöomorph zu S^2 und weil nach Konstruktion die einzige Singularität von \tilde{M} in Ω_i der Punkt $P_{i,\varepsilon}^+$ ist, gilt

$$\deg(\tilde{M}|_{\partial\Omega_i}) = 1,$$

vgl. Bemerkung 2.9 (a), Seite 14.

Des Weiteren folgt aus (5.6), (5.7) und $R|_{\partial B^3} = \tilde{M}|_{\partial B^3}$, dass $R|_{\partial \Omega_i} \simeq \tilde{M}|_{\partial \Omega_i}$, also wegen der Homotopieinvarianz (Satz 2.7 (a)) des Abbildungsgrades auch

$$\deg(R|_{\partial \Omega_i}) = \deg(\tilde{M}|_{\partial \Omega_i}) = 1.$$

Daher hat die Mikro-Rotation R (und damit auch der eingeschränkte Minimierer f) für jedes $i = 1, \dots, N$ im Inneren von Ω_i aus topologischen Gründen mindestens eine Singularität. □

Somit ist an dieser Stelle das zu Beginn formulierte Ziel, die Konstruktion sehr singulärer Lösungen eines geometrisch nichtlinearen Cosserat-Modells für mikropolare Festkörper, erreicht. Ein Fazit zu den insgesamt erarbeiteten Resultaten sowie ein knapper Ausblick auf weitere Fragestellungen finden sich direkt im Anschluss in Kapitel 6.

6 Fazit und Ausblick

Die vorliegende Dissertation mit dem Titel „Sehr singuläre Lösungen eines geometrisch nichtlinearen Cosserat-Modells für mikropolare Festkörper“ detailliert die Ergebnisse eines Teils der Forschung im gleichnamigen DFG-geförderten Projekt (ID 441380936) im Rahmen der ersten Hälfte des Schwerpunktprogramms 2256.

Für die einfachste Form der Cosserat-Energie, in der alle Materialparameter $\mu_1 = \mu_c = \mu_2 = 1$ als gleich angenommen sind, wurde eine Subklasse der kritischen Punkte des Funktionals auf ihre Regularität hin untersucht und die Existenz sehr singulärer Lösungen dieses Cosserat-Modells nachgewiesen, wie es schon der Titel vermuten lässt.

Es stellte sich heraus, dass die betrachtete Subklasse der eingeschränkten Minimierer partielle Regularität im Inneren und volle Randregularität (bei vorgegebenen C^1 -Dirichlet-Randbedingungen) aufweist. Um dies zu belegen, wurden Monotonie-Formeln und Diskrete Morrey-Bedingungen jeweils sowohl im Inneren als auch am Rand entwickelt, welche ihrerseits dabei halfen, Energie-Schranken für das Auftreten von Singularitäten herzuleiten.

All diese prinzipiellen Argumentationsschritte, welche in der Geometrischen Analysis wohlbekannt sind, konnten aufgrund der Nähe des Systems von Cosserat-Gleichungen zu den Gleichungen der harmonischen Abbildungen für Erstere formuliert und genutzt werden.

Zur Herleitung der vollen Randregularität spielte dabei insbesondere die Minimierung der Cosserat-Energie eine Rolle anstelle der Einschränkung auf die betrachtete Untermannigfaltigkeit. Daher wird es mit leicht modifizierten Argumenten ebenfalls möglich sein, ein entsprechendes Resultat zur Randregularität nicht nur für die betrachtete Subklasse kritischer Punkte, sondern auch für Minimierer der Cosserat-Energie im vollen Problem zu beweisen, welches in dieser Arbeit bereits formuliert wurde.

Gleichzeitig konnten Techniken entwickelt werden, um in vormalig glatten Abbildungen mit Werten in $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}$ unter kontrolliertem Cosserat-Energieaufwand fixe Dipol-Paare von Punktsingularitäten in der Mikro-Rotationskomponente R zu erzwingen. Dazu wurden geometrische Konstruktionen ausgenutzt, welche ebenfalls aus dem Kontext harmonischer Abbildungen bekannt sind.

Die zugehörige Technik zur Erzwingung eines fixen Dipols in zwei vorgegebenen Punkten P, N basiert auf einer Quader-Würfel-Konstruktion von F. Béthuel, welche für die gewünschte Anwendung auf Abbildungen mit Werten in der nicht-orientierbaren Mannigfaltigkeit $\mathcal{S} \subset SO(3)$ verallgemeinert werden konnte. Im Zuge dessen musste bei den nötigen Anpassungen darauf

geachtet werden, dass der resultierende Beitrag der Deformation zur Cosserat-Energie nicht zu groß wird.

Schließlich wurden die Regularitätsergebnisse mit der Konstruktion fixer Dipole kombiniert, um die Existenz kritischer Punkte der Cosserat-Energie (in der Subklasse der eingeschränkten Minimierer) mit einer beliebig groß vorgegebenen Zahl von distinkten Punktsingularitäten nachzuweisen. So ein Verhalten ist nach den Ergebnissen zur partiellen Regularität dieser Subklasse das „singulärste“ Verhalten, das auftreten kann. Daher ist insbesondere eine bessere Regularitätsaussage für allgemeine kritischen Punkte, ohne weitere Zusatzvoraussetzungen ausgeschlossen.

Es ist jedoch noch offen, ob es andere kritische Punkte der Cosserat-Energie gibt, die noch weniger reguläres Verhalten zulassen. Insbesondere ist dabei an die Arbeit [Riv95] von T. Rivière zu denken, der mit Hilfe freier Dipole die Existenz von im ganzen Definitionsbereich unstetigen harmonischen Abbildungen nachwies. Da wie in Kapitel 3 beschrieben, für die Cosserat-Energie bisher keine Technik zur Konstruktion freier Dipole entwickelt werden konnte, ist ein entsprechendes Resultat für kritische Punkte der Cosserat-Energie in der Zukunft nicht ausgeschlossen, allerdings unter der Voraussetzung, dass zunächst eine passende Konstruktion gefunden wird. Dies ist jedoch kein leichtes Unterfangen, da es nach dem aktuellen Stand durch die Kopplung von Deformation und Mikro-Rotation zu regularisierenden Effekten zu kommen scheint. Zusätzlich arbeitet T. Rivière mit relaxierten Energien und Resultaten zu kartesischen Strömen nach M. Giaquinta, G. Modica und J. Souček; entsprechende Konzepte für die Cosserat-Energie zu entwickeln stellt eine weitere Schwierigkeit dar.

Genauso wie man an kritische Punkte mit möglicherweise schlechterer Regularität denken kann, stellt sich die Frage, was passiert, wenn man sich vom einfachsten Fall des Cosserat-Modells löst und stattdessen allgemeine Kombinationen von Material-Parametern μ_1, μ_c, μ_2 betrachtet. Wenn bereits das einfachste Cosserat-Modell singuläres Verhalten zulässt, gilt dies auch für realitätsnähere Parameter-Kombinationen oder treten in solchen Fällen andere Effekte in den Vordergrund?

Dies sind spannende Fragen an der Schnittstelle von Materialforschung in den Ingenieurwissenschaften und analytischer Mathematik, die Raum für weitere Untersuchungen lassen.

Literatur

- [BC83] H. Brézis und J.-M. Coron. „Large solutions for harmonic maps in two dimensions“. In: *Communications in Mathematical Physics* 92.2 (1983), S. 203–215. DOI: 10.1007/BF01210846.
- [BCL86] H. Brézis, J.-M. Coron und E. H. Lieb. „Harmonic maps with defects“. In: *Communications in Mathematical Physics* 107.4 (1986), S. 649–705. DOI: 10.1007/BF01205490.
- [Bét90] F. Béthuel. „A characterization of maps in $H^1(B^3, S^2)$ which can be approximated by smooth maps“. In: *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire* 7.4 (1990), S. 269–286. DOI: 10.1016/S0294-1449(16)30292-X.
- [Bét91] F. Béthuel. „The approximation problem for Sobolev maps between two manifolds“. In: *Acta Mathematica* 167 (1991), S. 153–206. DOI: 10.1007/BF02392449.
- [Bré89] H. Brézis. „ S^k -valued maps with singularities“. In: *Topics in Calculus of Variations*. Hrsg. von M. Giaquinta. Lecture Notes in Mathematics 1365. Springer, 1989, S. 1–30. DOI: 10.1007/BFB0089176.
- [BZ88] F. Béthuel und X. Zheng. „Density of Smooth Functions between Two Manifolds in Sobolev Spaces“. In: *Journal of Functional Analysis* 80 (1988), S. 60–75. DOI: 10.1016/0022-1236(88)90065-1.
- [Car92] M.P. do Carmo. *Riemannian Geometry*. 1. Aufl. Mathematics: Theory & Applications. Birkhäuser Boston, MA, 1992.
- [CC09] E. Cosserat und F. Cosserat. *Théorie des Corps déformables*. Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, Paris, 1909.
- [FG95] I. Fonseca und W. Gangbo. *Degree theory in analysis and applications*. Bd. 2. Oxford University Press, 1995.
- [Gas19] A. Gastel. „Regularity issues for Cosserat continua and p -harmonic maps“. In: *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 51.6 (2019), S. 4287–4310. DOI: 10.1137/18M1201858.
- [GH81] M. J. Greenberg und J. R. Harper. *Algebraic Topology: A First Course*. The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1981. DOI: 10.1201/9780429502408.
- [GM12] M. Giaquinta und L. Martinazzi. *An Introduction to the Regularity Theory for Elliptic Systems, Harmonic Maps and Minimal Graphs*. 2. Aufl. Appunti Sc. Norm. Super. Pisa (N.S.) 11. Edizioni della Normale, 2012. DOI: 10.1007/978-88-7642-443-4.

- [GT83] D. Gilbarg und N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. 2. Aufl. Bd. 224. A Series of Comprehensive Studies in Mathematics. Springer, 1983. DOI: 10.1007/978-3-642-61798-0.
- [HL86] R. Hardt und F.-H. Lin. „A remark on H^1 -mappings“. In: *manuscripta mathematica* 56.1 (1986), S. 1–10. DOI: 10.1007/BF01171029.
- [HL87] R. Hardt und F.-H. Lin. „Mappings minimizing the L^p -norm of the gradient“. In: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 40.5 (1987), S. 555–588. DOI: 10.1002/cpa.3160400503.
- [Hüs23] V. Hüsken. „On prescribing the number of singular points in a Cosserat-elastic solid“. preprint. 2023. URL: <https://arxiv.org/abs/2211.11517>. Eingereicht.
- [JM83] J. Jost und M. Meier. „Boundary regularity for minima of certain quadratic functionals“. In: *Mathematische Annalen* 262.4 (1983), S. 549–561. DOI: 10.1007/BF01456068.
- [Jos11] J. Jost. *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. 6. Aufl. Universitext. Springer, 2011. DOI: 10.1007/978-3-642-21298-7.
- [Luc88] S. Luckhaus. „Partial hölder continuity for minima of certain energies among maps into a Riemannian manifold“. In: *Indiana University Mathematics Journal* 37 (1988), S. 349–367.
- [LW20] Y. Li und C. Wang. „Regularity of Weak Solution of Variational Problems Modeling the Cosserat Micropolar Elasticity“. In: *International Mathematics Research Notices* 2022.6 (2020), S. 4620–4658. DOI: 10.1093/imrn/rnaa202.
- [LW23] Y. Li und L.S. Wang. „Boundary regularity of stationary critical points for a Cosserat energy functional“. In: *Nonlinear Differential Equations and Applications* 30.21 (2 2023). DOI: 10.1007/s00030-022-00834-8.
- [MM23] K. Mazowiecka und M. Miśkiewicz. „Regularity of minimizing p -harmonic maps into spheres and sharp Kato inequality“. preprint. 2023. URL: <https://arxiv.org/abs/2302.06738>. Eingereicht.
- [Mor66] C. B. Morrey Jr. *Multiple integrals in the calculus of variations*. Springer, 1966. DOI: 10.1017/S0008439500029076.
- [MW97] J. Milnor und D.W. Weaver. *Topology from the differentiable viewpoint*. Princeton Landmarks in Mathematics and Physics 21. Princeton university press, 1997.
- [Nef04] P. Neff. „Geometrically exact Cosserat theory for bulk behaviour and thin structures. Modelling and mathematical analysis“. Habilitationsschrift. TU Darmstadt, 2004.

- [Nef06] P. Neff. „Existence of minimizers for a finite-strain micromorphic elastic solid“. In: *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics* 136.5 (2006), S. 997–1012. DOI: 10.1017/S0308210500004844.
- [Nir74] L. Nirenberg. „Topics in nonlinear functional analysis“. In: Bd. 6. Courant lecture notes in mathematics. AMS, 1974. DOI: 10.1090/c1n/006.
- [Olu53] P. Olum. „Mappings of manifolds and the notion of degree“. In: *Annals of Mathematics* 58.3 (1953), S. 458–480.
- [Riv95] T. Rivière. „Everywhere discontinuous harmonic maps into spheres“. In: *Acta Mathematica* 175.2 (1995), S. 197–226. DOI: 10.1007/BF02393305.
- [Ste91] K. Steffen. *An introduction to harmonic mappings*. Universität Bonn. SFB 256. Nichtlineare Partielle Differentialgleichungen, 1991.
- [SU82] R. Schoen und K. Uhlenbeck. „A regularity theory for harmonic maps“. In: *Journal of Differential Geometry* 17.2 (1982), S. 307–335. DOI: 10.4310/jdg/1214436923.
- [SU83] R. Schoen und K. Uhlenbeck. „Boundary regularity and the Dirichlet problem for harmonic maps“. In: *Journal of Differential Geometry* 18.2 (1983), S. 253–268. DOI: 10.4310/jdg/1214437663.
- [Tar00] U. Tarp. „Singuläre Harmonische Abbildungen“. Diplomarbeit. Mathematisches Institut der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf, 2000.