



Herausgegeben von
Professor Dr.-Ing. Eugen Perau
Universität Duisburg-Essen

**Berechnung der Stabilität tiefer
Geothermiebohrungen bei echten triaxialen
Spannungszuständen mit einer modifizierten
Grenzbedingung nach Mogi-Coulomb**

Benedikt Kosmann

DuEPublico

Duisburg-Essen Publications online

UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN

Offen im Denken

ub | universitäts
bibliothek

Diese Dissertation wird via DuEPublico, dem Dokumenten- und Publikationsserver der Universität Duisburg-Essen, zur Verfügung gestellt und liegt auch als Print-Version vor.

DOI: 10.17185/duepublico/78839

URN: urn:nbn:de:hbz:465-20230807-072118-7

Alle Rechte vorbehalten.

Berechnung der Stabilität tiefer Geothermiebohrungen bei echten triaxialen Spannungszuständen mit einer modifizierten Grenzbedingung nach Mogi-Coulomb

Von
der Fakultät für Ingenieurwissenschaften
Abteilung Bauwissenschaften
der Universität Duisburg-Essen
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)
genehmigte Dissertation

Vorgelegt von: Benedikt Kosmann, M.Sc.
 aus Ahlen in Westfalen

Gutachter: Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Eugen Perau
 Universität Duisburg-Essen

 Univ.-Prof. Dr.-Ing. Joachim Stahlmann
 Technische Universität Braunschweig

Tag der Einreichung: 28. September 2022

Tag der mündlichen Prüfung: 17. April 2023

Benedikt Kosmann, Essen, 2023

Impressum

Report Geotechnik Universität Duisburg-Essen

ISSN: 2511-8544

ISSN (online): 2700-4848

Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Ingenieurwissenschaften
Abteilung Bauwissenschaften,
Fachgebiet Geotechnik
Univ. Prof. Dr.-Ing. Eugen Perau
45117 Essen

www.uni-due.de/geotechnik

Tel.: +49 (0)201-18-32858

E-Mail: eugen.perau@uni-due.de

DOI: 10.17185/duepublico/78839

URN: urn:nbn:de:hbz:465-20230807-072118-7

Alle Rechte liegen beim Autor.

Vorwort des Herausgebers der Schriftenreihe

Der Nutzung der Geothermie als grundlastfähiger regenerativer Energie kommt im Zuge des Klimawandels eine stetig wachsende Bedeutung zu. Eines der größten technischen und wirtschaftlichen Risiken bei der Nutzung dieser Form der Energie ist mit der Erstellung der erforderlichen Bohrungen verbunden. Hier spielen die Stabilität der Bohrlochwandung und deren Berechnung sowie die daraus abgeleiteten notwendigen Hilfsmaßnahmen eine wichtige Rolle.

In der vorliegenden Dissertation hat sich Herr Kosmann mit dem bodenmechanisch anspruchsvollen Thema der Berechnung der Standsicherheit von tiefen Bohrungen beschäftigt. Dabei hat er auf die in der Literatur bekannte, aber bisher wenig genutzte Grenzbedingung von Mogi-Coulomb zurückgegriffen und diese weiterentwickelt. Die von ihm entwickelte Grenzbedingung umfasst als Spezialfälle sowohl die Grenzbedingung von Mogi-Coulomb als auch die nach Drucker-Prager sowie die nach von Mises. Den Abschluss bildet seine programmtechnische Umsetzung zur Implementierung im Programmsystem PLAXIS.

Mein Dank gilt Herrn Benedikt Kosmann, der sich sowohl in seiner Zeit als Externer als auch als Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Geotechnik der Universität Duisburg-Essen kontinuierlich und mit viel Engagement intensiv mit dem weitgefächerten Thema befasst hat und sich dabei auch mit Fragestellungen aus diversen Disziplinen wie der Ingenieurgeologie, der Bohrtechnik, sowie der Mathematik und Mechanik vertraut gemacht hat. Über die gesamte Zeit hat er sich in vorbildlicher Art und Weise für das Thema engagiert und dabei Expertise gewonnen, die wir in der vorliegenden Dissertation gerne online sowie in klassischer Form der Fachwelt sowie der Öffentlichkeit zur Verfügung stellen.

Essen, im Juni 2023

Eugen Perau

Vorwort des Verfassers

Die vorliegende Dissertation entstand in den Jahren 2013 bis 2022 am Fachgebiet Geotechnik der Universität Duisburg-Essen. In dieser Zeit wurde mir neben der Arbeit in einem Ingenieurbüro die Gelegenheit gegeben extern zu promovieren sowie drei Jahre als Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Geotechnik tätig zu sein und mich intensiv mit meiner Forschung zu befassen.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Eugen Peraus, der mir das Vertrauen entgegengebracht hat, mit einem eigenen Thema unter seiner Leitung zu promovieren. Ich bedanke mich für die konstruktive Zusammenarbeit während meiner Zeit als Wissenschaftlicher Mitarbeiter und das entgegengebrachte Verständnis für meine familiäre Situation. Ebenso möchte ich mich für die äußerst hilfreichen Diskussionen und seine Anregungen bei der Bearbeitung von schwierigen Problemstellungen bedanken.

Ganz herzlich möchte ich mich bei Prof. Dr.-Ing. J. Stahlmann für die Übernahme des Korreferats meiner Arbeit bedanken. Ich danke Frau Prof. Dr.-Ing. M. Schnellenbach-Held, Herrn Prof. Dr. W. Heinrichs für ihr Mitwirken in der Prüfungskommission und Herrn Prof. Dr.-Ing. M. Denecke für die Übernahme des Vorsitzes.

Außerdem möchte ich den Mitarbeitern des Fachgebiets Geotechnik meinen Dank für den regen fachlichen Austausch sowie einem überaus angenehmen und freundschaftlichen Arbeitsklima danken. Insbesondere möchte ich mich für die äußerst interessante Zeit bei Antonia Dahmen, Achim Slotta, Claudia Johanning, Gerald Abea-Núñez, Jörg Nolzen, Lisa Klein, Luisa Kagermeier, Matthias Uchtmann, Nils Meteling, Solveig Buscher und Tobias Askamp bedanken.

Herrn Carsten Feller gilt mein voller Dank für sein Engagement bei der Entwicklung einer programmtechnischen Umsetzung in seinem von mir initiierten und betreuten Masterprojekt.

Zu guter Letzt möchte ich mich bei meiner Frau Sarah bedanken, die mir stets ein offenes Ohr, viel Verständnis und darüber hinaus über den gesamten Zeitraum der Bearbeitung Interesse an meiner Forschung entgegengebracht hat. Auch möchte ich meinen Kindern Ella, Mira und Justus danken, die mir liebevoll Rückhalt gegeben haben, sodass ich immer wieder Kraft schöpfen konnte. Ohne die Unterstützung und Motivation meiner Familie wäre die Umsetzung dieser Arbeit nicht möglich gewesen.

Zusammenfassung

Die Nutzung von tiefer Geothermie kann einen großen Beitrag zu einer regenerativen Energieversorgung leisten. Um entsprechende geothermische Ressourcen nutzen zu können, sind tiefe geothermische Bohrungen erforderlich, welche einen Großteil der Kosten einer geothermischen Erschließung ausmachen und ein hohes Risiko bezüglich der Stabilität aufweisen. Eine Beurteilung der Stabilität kann nur durch numerische Berechnungen erfolgen, die geeignete Stoffmodelle zur Beschreibung der Gesteinsfestigkeit erfordern.

In dieser Arbeit werden daher auf Basis von Stoffmodellen, die in der Geotechnik erfolgreich angewendet werden, numerische Werkzeuge zur Beschreibung von dreidimensionalen Spannungszuständen entwickelt, und der Einfluss der Gesteinsfestigkeit auf die Stabilität einer Geothermiebohrung untersucht. Um den Einfluss dreidimensionaler Spannungszustände – die drei unterschiedlich große Hauptspannungen aufweisen – auf die Gesteinsfestigkeit zu untersuchen, wird die Grenzbedingung nach Mogi-Coulomb, in welcher auch der Einfluss der mittleren Hauptspannung Berücksichtigung findet, verwendet. Diese ist in den Sonderfällen von Kompression und Extension mit der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb identisch und enthält für den Spezialfall von reibungslosem Materialverhalten die Grenzbedingung nach von Mises. Durch eine in dieser Arbeit vorgenommene Modifizierung ist die Grenzbedingung nach Drucker-Prager ebenfalls als Spezialfall enthalten und die Grenzbedingung kann noch besser an die Versuchsergebnisse aus echten Triaxialversuchen angepasst werden. Insbesondere werden der Einfluss der eingehenden Materialparameter sowie deren Gewinnung aus Laborversuchen und die Konvexität der Grenzbedingung behandelt. Weiter wird ein Verfahren zur Identifizierung konkaver Bereiche einer Grenzbedingung zwischen zwei Unstetigkeitsstellen sowie die Methode der kleinsten Abstandsbeträge zur Identifizierung der Materialparameter vorgestellt. Um numerische Berechnungen durchführen zu können, wird die modifizierte Grenzbedingung nach Mogi-Coulomb in ein elastoplastisches Stoffmodell implementiert, welches als User-Defined-Soil-Model in der FEM-Software PLAXIS 3D verwendet werden kann.

Schlussendlich zeigen numerische Untersuchungen an zwei gestützten Bohrungen mit unterschiedlichen Durchmessern den Einfluss der mittleren Hauptspannung auf die Bohrlochstabilität. Dieser Einfluss wird durch einen Vergleich von Berechnungsergebnissen, die mit der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb – welche die mittlere Hauptspannung nicht berücksichtigt – erzielt wurden, mit Ergebnissen, erzielt mit der modifizierten Grenzbedingung nach Mogi-Coulomb, gezeigt. Wonach eine Vernachlässigung der mittleren Hauptspannung unter tatsächlich vorherrschenden echten triaxialen Bedingungen unvermittelt zu einer Überschätzung der Gesteinsfestigkeit führen kann.

Abstract

The use of deep geothermal energy can make a major contribution to a regenerative energy supply. In order to be able to use corresponding geothermal resources, deep geothermal drilling is required, which accounts for a large part of the costs of geothermal development and has a high risk in terms of stability. The stability can be assessed by numerical calculations, which require suitable constitutive models to describe the rock strength.

In this work, numerical tools for the description of three-dimensional stress states are developed on the basis of constitutive models that are successfully applied in geotechnical engineering and the influence of rock strength on the stability of a geothermal wellbore is investigated. In order to investigate the influence of three-dimensional stress states, which have three different principal stresses, on the rock strength, the Mogi-Coulomb limit condition which also takes into account the influence of the mean principal stress is used. In the special cases of compression and extension, this is identical to the Mohr-Coulomb limit condition and contains the von Mises limit condition for the special case of frictionless material. Due to a modification made in this work, the limit condition according to Drucker-Prager is also included as a special case and the limit condition can be even better adapted to the test results from true triaxial tests. In particular, the influence of the incoming material parameters and their extraction from laboratory tests, and the convexity of the limit condition are treated. Furthermore, a method for identifying concave areas of a limit condition between two points of discontinuity and the least magnitudes method for identifying material parameters are presented. In order to be able to carry out numerical calculations, the modified limit condition according to Mogi-Coulomb is implemented in an elastoplastic constitutive model, which can be used as UDSM in the FEM software PLAXIS 3D.

Finally, numerical investigations on two overbalanced wellbores with different diameters show the influence of the mean principal stress on the borehole stability by comparing the results obtained with the Mohr-Coulomb limit condition, which does not take it into account, with the modified limit condition according to Mogi-Coulomb. According to this, neglecting the mean principal stress under actually prevailing true triaxial conditions can unintentionally lead to an overestimation of the rock strength.

Schlagwörter

Felsmechanik, Geotechnik, Bohrlochstabilität, echte Triaxialversuche, mittlere Hauptspannung, Plastizität, Grenzbedingungen, Mogi-Coulomb, Konvexität, Parametergewinnung, Finite-Elemente-Methode, Stoffmodell, numerische Berechnung

Keywords

Rock mechanics, geotechnics, borehole stability, real triaxial tests, mean principal stress, plasticity, boundary conditions, Mogi-Coulomb, convexity, parameter extraction, finite element method, constitutive model, numerical calculation

Inhaltsverzeichnis

1.	Einführung	13
1.1.	Probleme mit der Bohrlochstabilität	13
1.2.	Motivation und Ansatz	14
1.3.	Aufbau der Arbeit.....	15
2.	Mechanische Grundlagen	17
2.1.	Beschreibung von Spannungszuständen.....	17
2.2.	Stoffmodelle für Fels.....	25
2.3.	Geotechnische Versuche.....	32
2.4.	Einfluss des Trennflächengefüges von Fels	34
3.	Tiefe Geothermiebohrungen	35
3.1.	Geothermie.....	35
3.2.	Initialspannungszustände	37
3.3.	Grundlagen der Bohrtechnik.....	41
3.4.	Bohrlochmessungen / Versuche.....	43
3.5.	Abschätzung der mittleren Hauptspannung.....	46
3.6.	Spannungen um ein Bohrloch.....	48
3.7.	Bestimmung der Stabilität von unausgekleideten Bohrlöchern.....	52
3.8.	Zwischenfazit zu konventionellen Stabilitätsbetrachtungen	55
4.	Einfluss der Gesteinsfestigkeit auf die Bohrlochstabilität	55
4.1.	Untersuchungen der Gesteinsfestigkeit nach Mogi.....	56
4.2.	Geeignete Grenzbedingungen	60
4.3.	Grenzbedingungen nach Mogi.....	60
4.4.	Modifizierte Grenzbedingung nach Mogi-Coulomb.....	62
4.5.	Darstellung der Fließfläche.....	63
4.6.	Einfluss der Parameter.....	65
4.7.	Funktionsverlauf	72
4.8.	Konvexität.....	73
5.	Parameteridentifikation bei Fels.....	75

5.1.	Eignung von Elementversuchen und ableitbare Parameter	75
5.2.	Anzahl und Art der Versuche	76
5.3.	Konventionelle Bestimmung der Materialparameter	76
5.4.	Einfluss des Spannungsniveaus	78
5.5.	Einfluss der mittleren Hauptspannung	82
5.6.	Streuungen in den Versuchsergebnissen	87
5.7.	Parametergewinnung mit der Methode der kleinsten Abstandsbeträge	87
6.	Programmtechnische Umsetzung	95
6.1.	User defined soil model MMGC64	97
6.2.	Umgang mit den konkaven Stellen der Fließfläche der MMGC	101
6.3.	Konsequenzen aus dem gewählten Konzept.....	105
7.	Numerische Berechnungen mit MMGC64	106
7.1.	Verifizierung von MMGC64	109
7.2.	Untersuchung der Bohrlochstabilität.....	111
7.3.	Vergleich der Ergebnisse.....	115
7.4.	Interpretation der Simulationsergebnisse	118
8.	Zusammenfassung und Ausblick	126
9.	Literaturverzeichnis	132
Anhang A	Versuche von Mogi und Simulationsergebnisse	137
A.1.	Bestimmung des Bohrungsverlaufs.....	137
A.2.	Spannungen um ein Bohrloch.....	138
A.3.	Versuchsergebnisse aus echten triaxialen Versuchen	141
A.4.	Ergebnistabellen der Simulationsergebnisse	152
Anhang B	Programmcodes.....	155
B.1.	Unterprogramm Eingabefenster	156
B.2.	Hauptprogramm USRMOD, Hauptroutine zur Interaktion mit Plaxis.....	159
B.3.	Unterprogramm MMGC, eigentliches Stoffmodell	163
B.4.	Unterprogramm OKMSGIVE zur Ausgabe von Messageboxen.....	197
B.5.	Unterprogramm USRLIB als Programmbibliothek	198

1. Einführung

Die vermehrte Nutzung von regenerativen Energien zur Verminderung des CO₂-Ausstoßes aus fossilen Energieträgern und somit die Schonung des Klimas ist eine der wichtigsten Aufgaben unserer Zeit. Durch die Nutzung von geothermischer Energie können sowohl Wärme als auch Strom klimaschonend bereitgestellt werden. Dabei stellt sie eine nahezu unerschöpfliche, grundlastfähige, vom Wetter sowie der Tageszeit unabhängige Energieform dar. Besonders die tiefe Geothermie hat ein hohes energetisches Potential, welches durch hydro- oder petrothermale Systeme, insbesondere Enhanced-Geothermal-Systems, genutzt werden kann. Bei diesen Verfahren werden Bohrungen von ca. 2 500 m bis ca. 5 000 m Tiefe mit relativ großem Durchmesser im Vergleich mit herkömmlichen Bohrungen aus der Erdöl- und Erdgasindustrie in den Boden vorgetrieben. Die Bohrungen müssen nachweislich eine Nutzungsdauer von mindestens 30 Jahren erreichen und verursachen 70 % der Gesamtkosten einer geothermischen Erschließung (Stober & Bucher, 2012), was Bohrkosten in einer Größenordnung von 15 bis 20 Millionen Euro für eine Bohrung entspricht (Reich, 2015). Die Erstellung der Bohrungen ist für eine solche Erschließung ein wichtiger Baustein, der allerdings auch mit Risiken verbunden ist. Eines dieser Risiken bei der Erschließung von tiefer Geothermie betrifft die Bohrlochstabilität. Treten Stabilitätsprobleme auf, kann dies von einer Steigerung des Aufwandes und der Bohrkosten bis hin zum völligen Verlust der Bohrung und einem bohrtechnischen sowie wirtschaftlichen Totalschaden führen. In der Regel verursachen Bohrlochinstabilitäten bei Bohrungen der Erdöl- und Erdgasindustrie ungeplante Arbeiten, dessen Kosten etwa 10 % der Gesamtbohrkosten entsprechen. Weltweit entspricht dies bei Bohrungen der Erdölindustrie in etwa einer jährlichen Kostenhöhe von einer Milliarde US-Dollar (Sheng u.a., 2006). Da es sich bei potenziellen Investoren in die Nutzungsmöglichkeiten der tiefen Geothermie um Städte und Gemeinden handelt, die sich im Gegensatz zur Erdölindustrie von einem solchen finanziellen Schaden nur sehr langsam erholen können, müssen mögliche Risiken noch kritischer eingestuft werden (Reich, 2015).

1.1. Probleme mit der Bohrlochstabilität

Regionen, die ein hohes geothermisches Potential mit relativ niedrigen Fündigkeitsrisiko aufweisen, sind in Deutschland bereits bekannt. Die Reservoirs liegen in diesen Regionen in großen Tiefen (ca. 2 500 m – 5 000 m), sodass dementsprechend tiefe Bohrungen für die Erschließung benötigt werden (Stober u.a., 2011). Diese haben im Vergleich mit der Erdöl- und Erdgasindustrie einen deutlich größeren Durchmesser, da für eine wirtschaftliche Nutzung Schüttungen von 80 bis 100 Liter pro Sekunde notwendig sind. Damit Entnahmemengen in dieser Größenordnung nicht zu einer Absenkung des Grundwasserspiegels führen, ist für eine geothermische Erschließung immer eine zweite Injektionsbohrung notwendig, über die Wasser

wieder eingespeist wird (Reich, 2015). Aufgrund der großen Durchmesser ist jede dieser Bohrungen bereits beim vertikalen Bohrvortrieb gefährdet. Zusätzlich werden Geothermiebohrungen in den Reservoirtiefen geneigt ausgeführt, um geothermisch nutzbare Störungszonen im kompakten Gestein zu erreichen und so das Fündigkeitsrisiko zu minimieren. Diese Umstände wirken sich allesamt negativ auf die Bohrlochstabilität aus. So kann es durch Instabilitäten zu einer erheblichen Aufwandssteigerung beim Bohren und dadurch zu zeitlichem und wirtschaftlichem Mehraufwand bis zu einem Totalschaden der geothermischen Erschließung führen (Kreuter u.a., 2010). Der Schadensfall des kompletten Verlustes einer Bohrung durch Instabilitäten wird als „Lost in hole“ bezeichnet. Projektentwickler versuchen diesen Schadensfall für Investoren durch eine Versicherung abzudecken. Die weiteren großen Risiken wie Fündigkeit und Kraftwerkstechnik dagegen werden immer öfter als weniger relevant angenommen. Eine solche Versicherung soll dabei das Bohrloch als Bauwerk und das Erreichen sowie die Stabilität des Ausbaudurchmessers umfassen (Brian, 2019).

Bisher versucht man Schadensfälle aus Bohrlochinstabilitäten durch eine Anpassung von Einflussparametern nach dem „Trial-And-Error-Prinzip“ oder auf der Basis von gegebenenfalls bereits gemachten Erfahrungen am jeweiligen Bohrstandort zu verhindern. Solche Einflussparameter sind zum Beispiel die Dichte der Bohrspülung, die wie eine konventionelle Stützflüssigkeit durch ihre hohe Dichte das Bohrloch stützt und es vor einem Eindringen von Gebirgswasser schützt. Des Weiteren hat sich gezeigt, dass die Bohrlochrichtung und -neigung einen Einfluss auf die Bohrlochstabilität haben können. Dies hat sich besonders bei stark richtungsabhängigen Hauptnormalspannungen im Gebirge gezeigt (Kreuter u.a., 2010). Beim Abteufen von Bohrungen in Sedimentgesteinen treten häufig Bohrlochwandausbrüche und Verengungen des Bohrquerschnitts auf. Bei Untersuchungen auf Zusammenhänge zwischen regionalem Spannungsfeld, der festigkeitsmechanischen Eigenschaften des Gebirges und dem Bohrprozess konnte festgestellt werden, dass das Spannungsfeld die Belastbarkeit des Gebirges in der Bohrlochumgebung unmittelbar beeinflusst (Lempp, 2010).

1.2. Motivation und Ansatz

Um die Erschließung von geothermischer Energie für eine grundlastfähige, regenerative Energieversorgung wirtschaftlich mit einem möglichst geringen Aufwand und Risiko zu ermöglichen, ist es notwendig, das Auftreten von Bohrlochinstabilitäten besser vorherzusagen. Deshalb ist es Ziel dieser Arbeit, eine Methode bzw. numerische Werkzeuge zur Beschreibung der Beeinflussung des Spannungszustandes durch den Bohrprozess sowie die möglichen Folgen für die Bohrlochstabilität zu entwickeln, damit Bohrspülungsdichten besser bemessen werden können und so die Bohrlochstabilität tiefer Geothermiebohrungen sichergestellt werden kann. Dazu bieten die bekannten geotechnischen Methoden der Fels- und Bodenmechanik zur Sicherstel-

lung von Standsicherheit und Gebrauchstauglichkeit von Erdbauwerken, Gründungen und Tunneln zusammen mit numerischen Verfahren eine gute Grundlage, um die Probleme der Bohrlochinstabilität zu bearbeiten und Lösungsansätze zu entwickeln. Auf der Basis von Stoffmodellen, die in der Geotechnik, insbesondere im Tunnelbau, erfolgreich angewendet werden, sollen mit der Finite-Elemente-Methode numerische Werkzeuge zur Beschreibung des Einflusses der Spannungszustände im tiefen Gebirge auf eine Bohrung entwickelt werden. Die Beschreibung soll dabei ausgehend von einem in situ Spannungszustand im Gebirge die Beeinflussung von diesem durch den Bohrprozess umfassen, was im Einzelnen die Erstellung eines Hohlraumes und die Füllung mit einer Stützflüssigkeit beinhaltet. Die Eignung verschiedener Stoffmodelle für die Beschreibung von Bohrlochstabilitätsproblemen soll an einem einfachen Modell untersucht werden. Auf die Gewinnung der für die numerischen Berechnungen benötigten Kennwerte soll je nach Stoffmodell detailliert eingegangen werden. Einhergehend sollen Randeffekte, die bei der Bearbeitung mit der Finite-Elemente-Methode auftreten können, genau beschrieben und negative Einflüsse je nach Möglichkeit ausgeschlossen werden.

1.3. Aufbau der Arbeit

Der Inhalt dieser Arbeit umfasst *neun* Kapitel, die vorab kurz vorgestellt werden sollen:

Das *erste* Kapitel beinhaltet eine kurze Einführung in die bearbeitete Problemstellung bezüglich der Bohrlochinstabilität von tiefen Geothermiebohrungen sowie die Motivation.

In Kapitel *zwei* werden kurz die mechanischen Grundlagen vorgestellt, die numerischen Berechnungen zugrunde liegen. Diese umfassen unter anderem die Beschreibung von Spannungszuständen, die klassische Plastizitätstheorie sowie damit einhergehende Laborversuche für die Kennwertbestimmung. Dieses Kapitel beinhaltet wesentliche Grundlagen, auf die im Laufe der Arbeit zurückgegriffen wird.

Die derzeitigen Möglichkeiten, um geothermische Energie nutzbar zu machen, die grundlegenden Erfahrungen und Methoden der Geotechnik, Spannungszustände und deren Orientierung mit zunehmender Tiefe zu beschreiben, die Grundlagen der Bohrtechnik, die Bestimmung von in situ Spannungszuständen aus Feldversuchen und damit einhergehend Methoden zur Abschätzung derzeit nicht messbarer Größen sowie konventionelle Methoden zur Berechnung und Sicherstellung der Bohrlochstabilität werden in Kapitel *drei* kurz erläutert.

In Kapitel *vier* werden die Ergebnisse echter triaxialer Versuche an Fels und die Interpretation verschiedener Autoren zur Beschreibung der Gesteinsfestigkeit vorgestellt. Es wird die Notwendigkeit gezeigt, den Einfluss der mittleren Hauptspannung auf die Gesteinsfestigkeit zu berücksichtigen. Aus einer eigenen Modifikation, die zwei mathematische Beschreibungen des Grenzzustands der Gesteinsfestigkeit zusammenführt, resultiert die modifizierte Grenzbedingung nach Mogi-Coulomb, welche die mittlere Hauptspannung berücksichtigt. Diese neue

Grenzbedingung und der Einfluss der eingehenden Parameter werden hier vorgestellt und erläutert. Des Weiteren wird ein Verfahren zur Kontrolle auf Konvexität vorgestellt, welches konkave Stellen einer Grenzbedingung bestimmen kann.

Kapitel *fünf* enthält Empfehlungen zur Identifizierung optimaler Materialparameter. Ausgehend von Überlegungen zum allgemeinen Vorgehen sind konkrete Empfehlungen für die Bestimmung der Materialparameter der modifizierten Grenzbedingung nach Mogi-Coulomb enthalten. Dabei werden sowohl der Einfluss des Spannungsniveaus als auch der Einfluss der mittleren Hauptspannung betrachtet und außerdem die Fähigkeit einer Grenzbedingung, diese Einflüsse unter optimalen Parametern wiederzugeben. Um diese Fähigkeit verschiedener Grenzbedingungen zu quantifizieren, wird die eigens entwickelte Methode der kleinsten Abstandsbeiträge vorgestellt und angewandt. Es erfolgt ein Vergleich zwischen der Methode der kleinsten Quadrate und der Methode der kleinsten Abstandsbeiträge.

In Kapitel *sechs* wird das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Stoffmodell MMGC64, welches die modifizierte Grenzbedingung nach Mogi-Coulomb verwendet, vorgestellt und ausführlich beschrieben. Die Ausführungen umfassen die Beschreibung von elastischem und elastoplastischem Materialverhalten sowie die Auswirkungen aus den konkaven Stellen der Grenzbedingung und wie damit umgegangen wird.

Schlussendlich werden in Kapitel *sieben* numerische Simulationen von geothermischen Bohrungen mit zwei unterschiedlichen Durchmessern durchgeführt. Die eingehenden Randbedingungen entsprechen der Literatur entnommenen Untersuchungen an einer bereits bestehenden Geothermiebohrung. Die eigenen Berechnungen zeigen den Einfluss der mittleren Hauptspannung sowie die Folgen einer fälschlichen Interpretation von Spannungszuständen, die drei unterschiedlich große Hauptspannungen enthalten. Des Weiteren zeigen die Simulationsergebnisse, dass die Bohrlochstabilität unabhängig von dem Durchmesser der Bohrung ist.

In Kapitel *acht* werden die gewonnenen Erkenntnisse zusammengefasst, weiterer Forschungsbedarf aufgezeigt und abschließend Empfehlungen für numerische Berechnungen der Bohrlochstabilität mit der FEM genannt.

Kapitel *neun* beinhaltet das Literaturverzeichnis.

Im *Anhang A* sind die Koordinatentransformationen von Spannungen um ein Bohrloch hergeleitet, die Erfassung des Bohrlochverlaufs erläutert, die verwendeten Versuchsergebnisse echter triaxialer Versuche aus einschlägiger Fachliteratur sowie zur Darstellung der Ergebnisse benötigte Transformationen und schlussendlich die Ergebnisse der vorgenommenen numerischen Berechnungen aufgeführt.

Anhang B enthält den Programmcode des Stoffmodells MMGC64.

2. Mechanische Grundlagen

Die mechanischen Grundlagen, die numerischen Berechnungen zugrunde liegen, sollen vorab kurz dargelegt werden. Sie umfassen die Definitionen von Spannungen und Spannungs-Dehnungs-Beziehungen sowie von Grenzbedingungen und den zugehörigen Fließregeln. Außerdem wird auf die Auswirkungen der Konvexität einer Grenzbedingung und schlussendlich auf geotechnische Laborversuche zur Untersuchung des mechanischen Verhaltens von Gestein unter Spannungseinwirkungen eingegangen.

2.1. Beschreibung von Spannungszuständen

In dieser Arbeit wird die bodenmechanische Vorzeichenkonvention für die Beschreibung von Spannungen verwendet. Definitionsgemäß sind danach Druckspannungen positiv und Zugspannungen negativ. Bei allen verwendeten Spannungen sind wirksame Spannungen und bei allen Materialparametern sind effektive Parameter gemeint. Womit bei wirksamen Spannungen die Differenz von totalen Spannungen und Porenwasserdruck gemeint ist, auf deren Basis effektive Materialparameter bestimmt werden können.

Mit dem Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ nach Cauchy kann in jedem Punkt eines Kontinuums der Spannungszustand beschrieben werden (Gudehus, 1995):

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Die Komponenten auf der Diagonale σ_{kk} sind Normalspannungen und die übrigen Komponenten σ_{ij} , für die $i \neq j$ gilt, sind Schubspannungen (Gudehus, 1995). Die Spannungskomponenten des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$, ausgehend von der x_1 -Richtung, sind in Abbildung 2.1 räumlich, am differentiell kleinen Bodenelement, dargestellt. Damit die sich daraus ergebenden Momente im Gleichgewicht sind, müssen die Schubspannungen in ihrem Betrag gleich groß sein. Woraus folgt, dass der Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ nach Cauchy symmetrisch ist und $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ gilt. Anhand von Abbildung 2.1 kann das Kräftegleichgewicht der Spannungskomponenten ausgehend von der x_1 -Richtung vgl. Doege (2010) nach Gl. (2.2) formuliert werden:

$$\begin{aligned}
& -\sigma_{11} dx_2 dx_3 + \left(\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 \\
& -\sigma_{12} dx_1 dx_3 + \left(\sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 dx_3 \\
& -\sigma_{13} dx_2 dx_1 + \left(\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} dx_3 \right) dx_2 dx_1 = 0
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Aus Gl. (2.2) ergibt sich die Gleichgewichtsbedingung für die x_1 -Richtung und analog dazu die Gleichgewichtsbedingungen für die x_2 -Richtung und die x_3 -Richtung, dargelegt in den Gleichungen (2.3) bis (2.5). Die Gravitation wirkt in negative x_3 -Richtung.

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0 \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0 \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = \gamma \tag{2.5}$$

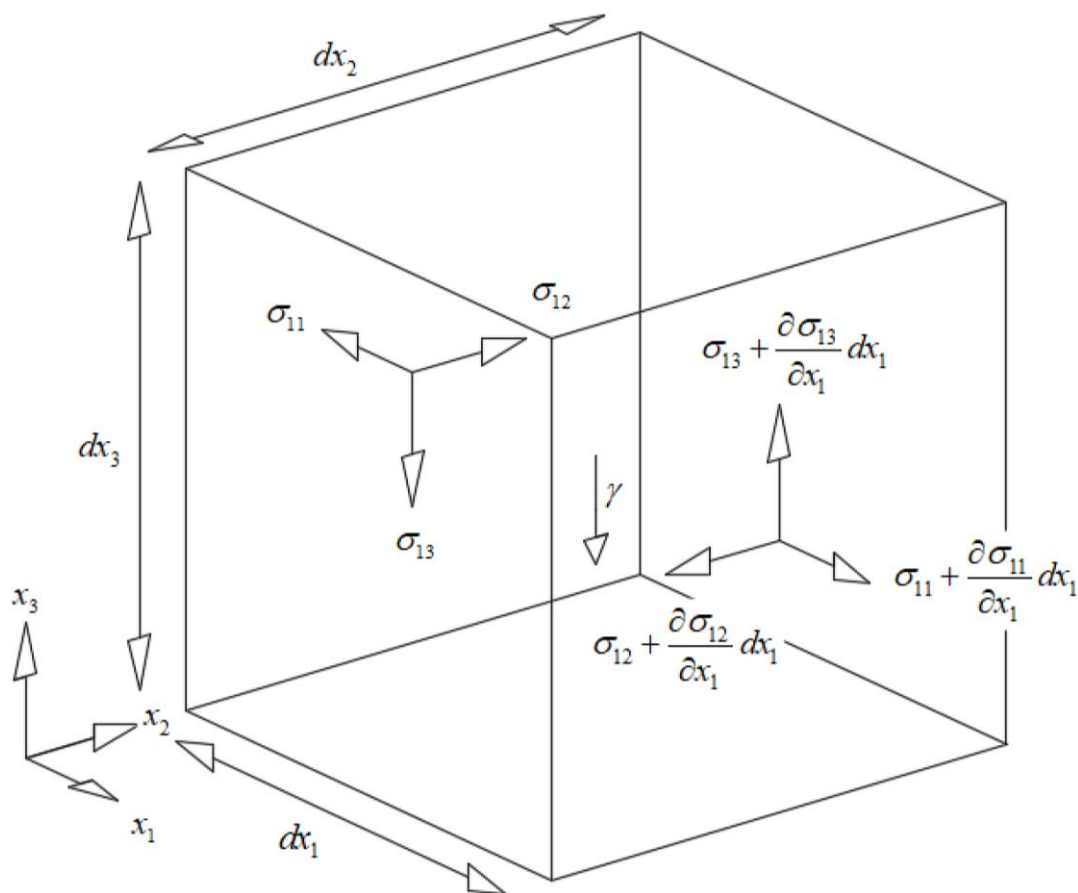


Abbildung 2.1: Räumlicher Spannungszustand am infinitesimalen Bodenelement, dargestellt sind die Spannungskomponenten ausgehend von der x_1 -Richtung nach Döge (2010)

Theorem nach Cauchy

Die Größe des Spannungsvektors \mathbf{t} in einer Schnittfläche kann nach dem Theorem von Cauchy, dargelegt in Gl. (2.6), mit dem Normaleneinheitsvektor \mathbf{n} der betrachteten Fläche und dem Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ beschrieben werden (Niemunis, 2018). Es gilt:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad (2.6)$$

Eigenwerte und Invarianten des Spannungstensors

Da $\boldsymbol{\sigma}$ ein symmetrischer Tensor ist, können die Schubspannungskomponenten je nach Orientierung der betrachteten Schnittflächen verschwinden. Dies ist genau dann der Fall, wenn \mathbf{t} und \mathbf{n} die gleiche Orientierung haben. Es verbleiben die Hauptkomponenten auf der Diagonalen von $\boldsymbol{\sigma}$, die auch als Hauptspannungen σ_i bezeichnet werden. Die Spannung \mathbf{t} in einer Fläche kann dann als Produkt aus σ_i und n_j bestimmt werden. Zur Bestimmung der Hauptspannungen setzt

man das Produkt aus σ_i und n_j für \mathbf{t} in Gl. (2.6) ein und erhält das folgende Eigenwertproblem (Niemunis, 2018):

$$\left(\sigma_{ij} - \sigma_i \delta_{ij}\right) n_j = 0_i \quad (2.7)$$

Darin ist δ_{ij} das Kronecker-Symbol. Gl. (2.7) stellt ein homogenes lineares Gleichungssystem dar. Da \mathbf{n} in Gl. (2.7) ein Einheitsvektor ist, entfällt die Lösung $\mathbf{n}=\mathbf{0}$. Eine Lösung hat das Gleichungssystem dann bekanntlich nur, wenn die Determinante des Tensors null ergibt:

$$\det\left(\sigma_{ij} - \sigma_i \delta_{ij}\right) = 0 \quad (2.8)$$

Mit der Regel von Sarrus erhält man als Lösung eine kubische Gleichung die auch als charakteristisches Polynom bezeichnet wird und in Gl. (2.9) dargelegt ist (Niemunis, 2018).

$$\sigma_i^3 - I_1 \sigma_i^2 - I_2 \sigma_i - I_3 = 0 \quad (2.9)$$

Die darin enthaltenen Koeffizienten I_1 , I_2 und I_3 nach Gl (2.10) bis Gl (2.12) fassen die Komponenten des Tensors zusammen und stellen seine Grundinvarianten dar. Diese werden als Invarianten bezeichnet, da sie unabhängig von der Lage des örtlichen Koordinatensystems des Tensors sind (Kolymbas, 1978).

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad (2.10)$$

$$I_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2 \quad (2.11)$$

$$I_3 = \det(\boldsymbol{\sigma}) \quad (2.12)$$

Auch die Eigenwerte $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ als Ergebnis für die Nullstellen des charakteristischen Polynoms stellen in nach Größe sortierter Form Invarianten dar (Niemunis, 2018).

Dies gilt auch für Vielfache der einzelnen Invarianten wie $m \cdot \sigma_2$ und ebenfalls für Summen der Invarianten. Daher ist für alle Konstanten m auch die Summe $\sigma_1 + m \cdot \sigma_2 + \sigma_3$ invariant bezüglich der Lage des Koordinatensystems (Kosmann & Perau, 2021).

Invarianten des Spannungsdeviators

Analog zum beschriebenen Vorgehen für die Bestimmung der Invarianten des Spannungstensors erfolgt die Bestimmung der deviatorischen Invarianten. Durch Subtrahieren seiner Spur erhält man aus dem Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ den spurlosen, deviatorischen Tensor \mathbf{S} . Aus der Berechnung der Determinante nach Gl. (2.13) folgt die kubische Gl. (2.14), dessen Koeffizienten J_1 , J_2 und J_3 die Komponenten von \mathbf{S} zusammenfassen (Niemunis, 2018):

$$\det(S_{ij} - s_i \delta_{ij}) = 0 \quad (2.13)$$

$$J_3 + J_2 s_i + J_1 s_i^2 - s_i^3 = 0 \quad (2.14)$$

Die Invarianten J_1 , J_2 und J_3 sind in den Gleichungen (2.15) bis (2.17) dargelegt:

$$J_1 = 0 \quad (2.15)$$

$$J_2 = \frac{1}{6} \left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 \right] + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 \quad (2.16)$$

$$J_3 = \det(\mathbf{S}) \quad (2.17)$$

Raum der Hauptspannungen

Mit den Hauptspannungen, aufgetragen auf den Achsen eines kartesischen Koordinatensystems, können Spannungszustände mit den Koordinaten $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ im dreidimensionalen Raum dargestellt werden. Dieser wird als Hauptspannungsraum bezeichnet und ist in Abbildung 2.2 dargestellt (Gudehus, 1995).

Für Spannungszustände, die auf der Raumdiagonalen liegen, nehmen die drei Hauptspannungen den gleichen Wert ein ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$). Da es sich hierbei um hydrostatische Spannungszustände handelt, wird diese auch als hydrostatische Achse bezeichnet. Der Abstand eines beliebigen Punkts im Hauptspannungsraum entlang der hydrostatischen Achse zum Koordinatenursprung (D0) kann nach Gl. (2.18) bestimmt werden (Kolymbas, 1978).

$$D0 = \tilde{l} = \frac{I_1}{\sqrt{3}} \quad (2.18)$$

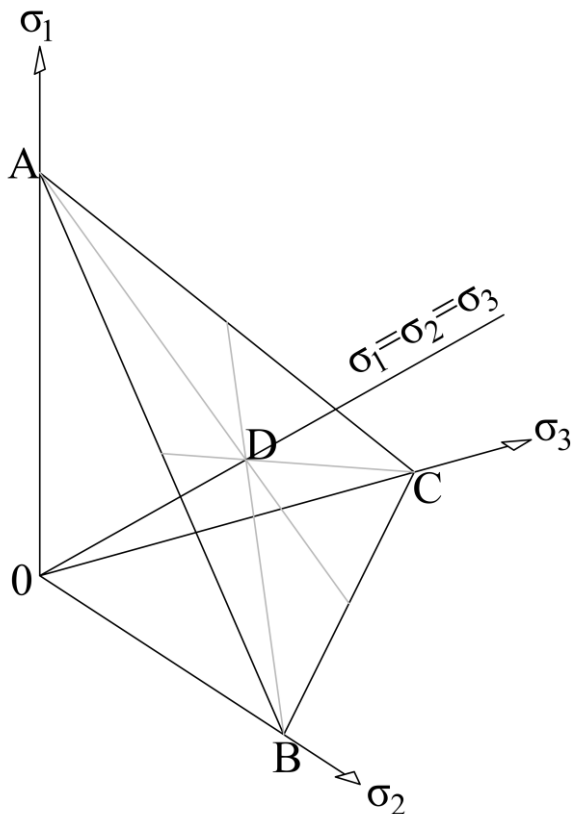


Abbildung 2.2: Hauptspannungsraum mit einer Deviatorebene und hydrostatischer Achse nach Kolymbas (1978)

Die Komponenten des Punktes D entsprechen dem hydrostatischen Anteil des Spannungstensors und werden als sogenannter mittlerer Druck σ_m bezeichnet. Dieser ergibt sich aus dem Mittelwert der drei Hauptspannungen nach Gl. (2.19) (Gudehus, 1995).

$$\sigma_m = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{3} = \frac{I_1}{3} \quad (2.19)$$

Ebenen im Hauptspannungsraum, deren Normalenvektoren parallel zur hydrostatischen Achse verlaufen, werden als Deviatorebenen bezeichnet. Der Abstand eines beliebigen Punktes P in einer Deviatorebene zum Durchstoßpunkt der hydrostatischen Achse D kann nach Gl. (2.20) bestimmt werden (Kolymbas, 1978).

$$PD = \tilde{r} = \sqrt{2J_2} \quad (2.20)$$

In einer Deviatorebene gibt es sechs Sektoren, die sich durch die Sortierung der Hauptspannungen unterscheiden. Alle sechs Sektoren sind, wie in Abbildung 2.3 ersichtlich, gleich groß, und jeder Sektor weist einen Öffnungswinkel von 60° auf (Kolymbas, 1978).

Der Öffnungswinkel eines Sektors wird auch als Lode Winkel Θ bezeichnet. Seine Definition ist abhängig von der gewählten Winkelfunktion. Wird der Lode Winkel mit dem Kosinus beschrieben, wird entsprechend ein Winkel von 0° bis 60° angesetzt. Beschrieben mit dem Sinus entspricht der Lode Winkel -30° bis $+30^\circ$ (Borja, 2013). In dieser Arbeit wird der Lode Winkel mit dem Sinus beschreiben.

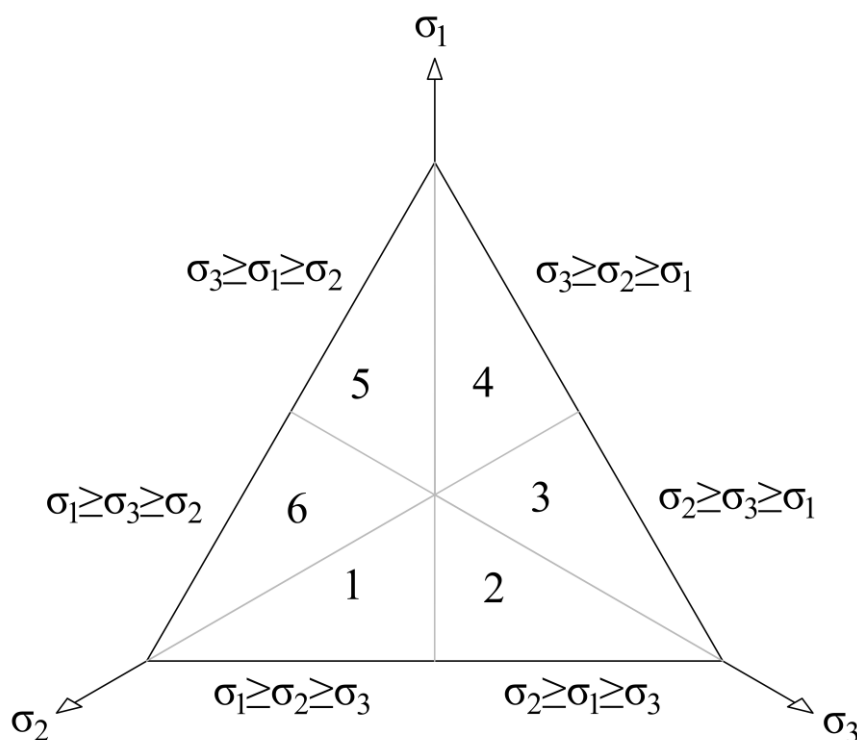


Abbildung 2.3: Sortierung der Hauptspannungen der sechs Sektoren in einer Deviatorebene nach Niemunis (2018)

Mit den Transformationsgleichungen nach Kolymbas (1978), dargelegt in Gl. (2.21), können kartesische Spannungszustände im Hauptspannungsraum in ein kartesisches Koordinatensystem mit einem Basisvektor in Richtung der hydrostatischen Achse und zwei Basisvektoren, die in einer Deviatorebene liegen, transformiert werden. Die Basisvektoren des Koordinatensystems in dieser Deviatorebene sollen mit d_1 und d_2 bezeichnet werden. Der Basisvektor d_2 ist in die negative Richtung von Punkt D zu A nach Abbildung 2.2 orientiert. Werden Spannungszustände mit unterschiedlichem Spannungsniveau im Hauptspannungsraum durch diese Basisvektoren ausgedrückt und durch σ_m normiert, können diese in einer normierten Deviatorebene dargestellt werden. Diese Art der Darstellung ist für einen Vergleich von mehreren Hauptspannungskombinationen mit unterschiedlichem Spannungsniveau innerhalb des Druckspannungsoktanten sehr hilfreich.

$$\begin{aligned}
 d_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_2 - \sigma_1) \\
 d_2 &= -\frac{1}{\sqrt{6}}(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2)
 \end{aligned}
 \tag{2.21}$$

Hauptspannungen in Zylinderkoordinaten

Durch Einführen eines Zylinderkoordinatensystems kann analog zum kartesischen Koordinatensystem jeder beliebige Punkt im Hauptspannungsraum beschrieben werden. Dazu werden die dem beliebigen Punkt zugehörige Deviatorenebene, der Winkel Θ und der Abstand des Punktes zur hydrostatischen Achse r herangezogen. Für die Bestimmung von Θ und r wird in Gl. (2.14) $s_i = r \sin(\Theta)$ eingesetzt. Daraus ergibt sich nach Äquivalenzumformung die Kubische Gl. (2.22) (Borja, 2013).

$$\sin^3 \Theta - \frac{J_2 \sin \Theta}{r^2} - \frac{J_3}{r^3} = 0
 \tag{2.22}$$

Mit der trigonometrischen Identität nach Gl. (2.23) für Potenzen der Winkelfunktionen können in Abhängigkeit der deviatorischen Invarianten und Gl. (2.22) für r und Θ die Zusammenhänge nach Gl. (2.24) und Gl. (2.25) hergeleitet werden (Borja, 2013).

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}(3 \sin x - \sin(3x))
 \tag{2.23}$$

$$\frac{J_2}{r^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow r = 2\sqrt{\frac{J_2}{3}}
 \tag{2.24}$$

$$-\frac{J_3}{r^3} = \frac{1}{4} \sin 3\Theta \Rightarrow \sin 3\Theta = -\frac{3\sqrt{3}J_3}{2J_2^{3/2}}
 \tag{2.25}$$

Die Bestimmung der Nullstellen von Gl. (2.22) liefert die Eigenwerte für Gl. (2.13) in Abhängigkeit von r und Θ , dargelegt in Gl. (2.26) (Borja, 2013).

$$\begin{aligned}
 s_1 &= r \sin\left(\Theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\
 s_2 &= r \sin(\Theta) \\
 s_3 &= r \sin\left(\Theta + \frac{4\pi}{3}\right)
 \end{aligned}
 \tag{2.26}$$

Wird der hydrostatische Anteil des Spannungstensors σ_m den deviatorischen Anteilen wieder hinzuaddiert, können die Hauptspannungen nach Gl. (2.27) in Abhängigkeit von Θ , I_1 und J_2 ausgedrückt werden.

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \frac{I_1}{3} + \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \sin\left(\Theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\
\sigma_2 &= \frac{I_1}{3} + \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \sin(\Theta) \\
\sigma_3 &= \frac{I_1}{3} + \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \sin\left(\Theta + \frac{4\pi}{3}\right)
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Oktaedrische Invarianten

Wählt man die Basisvektoren eines Koordinatensystems für die Beschreibung des physikalischen Raums parallel zu den Eigenvektoren des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$, kann darin eine Ebene, die wie eine Deviatorebene senkrecht auf der Raumdiagonale steht, definiert werden. Diese Ebene wird als oktaedrische Scherebene bezeichnet. Darin wirkende Spannungsvektoren können mit dem Theorem nach Cauchy Gl. (2.6) beschrieben werden. Da hier nur Hauptspannungen in den Cauchyschen Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ eingehen, reduziert sich dieser zu einem Vektor. Durch Zerlegung eines auf die Ebene wirkenden Spannungsvektors erhält man die oktaedrischen Normalspannungen σ_{oct} und die oktaedrischen Schubspannungen τ_{oct} , bei denen es sich um invariante Größen handelt. Wobei σ_{oct} dem mittleren Druck des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ nach Gl. (2.28) entspricht (Niemunis, 2018).

$$\sigma_{oct} = \sigma_m \tag{2.28}$$

Die oktaedrischen Schubspannungen τ_{oct} sind in Gl. (2.29) dargelegt.

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \tag{2.29}$$

Zwischen den oktaedrischen Schubspannungen und dem Betrag der deviatorischen Spannungen \mathbf{S} des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ besteht folgender Zusammenhang (Niemunis, 2018):

$$\tau_{oct} = \frac{1}{\sqrt{3}} \|\mathbf{s}\| = \sqrt{\frac{2}{3}} J_2 \tag{2.30}$$

2.2. Stoffmodelle für Fels

Stoffmodelle sollen das Verhalten eines Materials unter einer Beanspruchung beschreiben. In dieser Arbeit stehen mechanische Beanspruchungen, insbesondere die Beschreibung des Spannungsdehnungsverhaltens von Fels im Fokus. Da Stoffmodelle induktiver Natur sind, handelt es sich bei keinem um das Stoffmodell par excellence. Die Aussagen eines Stoffmodells sind demnach nur so zutreffend wie die zugrundeliegende Empire, auch wenn es darüber hinaus Aussagen zulässt (Kolymbas, 1978).

Lineare Elastizität

Die lineare Elastizität ist ein Stoffmodell zur Beschreibung des Spannungsdehnungsverhaltens. Eine Belastung und damit eine Zunahme der Spannungen hat hier eine lineare Zunahme der Dehnungen zur Folge. Gleiches gilt für Entlastungen, die einen reversiblen Rückgang der Dehnungen zur Folge haben. Die Beschreibung von linear-elastischem-Materialverhalten im dreidimensionalen Raum erfolgt mit den elastischen Konstanten E [MPa] und ν [°]. Der Elastizitätsmodul E beschreibt den proportionalen Zusammenhang von Spannungen zu Dehnungen und die Querdehnzahl ν das Verhältnis von Dehnungen unterschiedlicher Richtungen zueinander. Anhand der elastischen Konstanten kann der Schubmodul G [MPa] nach Gl. (2.31) berechnet werden (Wittke, 1984):

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.31)$$

Nach dem Hookeschen Gesetz kann mit dem Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$, dem Elastizitätstensor \mathbf{D} und dem Dehnungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ nach Gl. (2.32) das Spannungsdehnungsverhalten beschrieben werden (Wittke, 1984).

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.32)$$

Der Elastizitätstensor \mathbf{D} ist in Gl. (2.33) dargelegt:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{2G}{(1-2\nu)}(1-\nu) & \frac{2G}{(1-2\nu)}\nu & \frac{2G}{(1-2\nu)}\nu & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2G}{(1-2\nu)}\nu & \frac{2G}{(1-2\nu)}(1-\nu) & \frac{2G}{(1-2\nu)}\nu & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2G}{(1-2\nu)}\nu & \frac{2G}{(1-2\nu)}\nu & \frac{2G}{(1-2\nu)}(1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Der Elastizitätsmodul ist darin durch den Schubmodul G und die Querdehnzahl ν ausgedrückt. Mit diesem Stoffmodell kann ein Spannungszustand anhand von elastischen Dehnungen unabhängig von der Verformungsrichtung und unter mehrachsiger Verformung bestimmt werden. Die elastischen Konstanten sind dabei unabhängig vom Koordinatensystem und demnach in alle Richtungen gleich. Liegt ein anisotropes Materialverhalten vor, sind diese richtungsabhängig anzusetzen (Wittke, 1984).

Grenzbedingungen der Plastizitätstheorie

Nach der Plastizitätstheorie ist die Beschreibung der Spannungsdehnungsbeziehung mit elastischem Materialverhalten durch die Festigkeit eines Materials begrenzt. Erreicht ein Material unter zunehmender Belastung den Grenzzustand, sind Verformungen ohne eine Änderung des Spannungszustands möglich. Das Material erfährt irreversible Verformungen, die auch nach einer Entlastung erhalten bleiben (Gudehus, 1995). Bezogen auf die ursprüngliche Gestalt des Materials spricht man von plastischen Dehnungen und allgemein von elastoplastischem Materialverhalten. Mit einer Grenzbedingung kann der Grenzzustand in Abhängigkeit vom Spannungstensor σ nach Gl. (2.34) bestimmt werden (Pimentel, 2017).

$$F(\sigma_{ij}) = 0 \quad (2.34)$$

Funktionswerten von $F < 0$ liegt elastisches, von $F = 0$ plastisches Materialverhalten zu Grunde. Spannungszustände mit Funktionswerten von $F > 0$ sind nicht möglich. Um elastisches von plastischem Materialverhalten für mehrachsige Spannungszustände unterscheiden zu können, wird eine sogenannte Fließfläche im Hauptspannungsraum angenommen, von welcher elastische Spannungszustände σ_{ij} eingeschlossen werden (Abbildung 2.4). Spannungszustände außerhalb der Fließfläche sind physikalisch nicht möglich (Kolymbas, 1978).

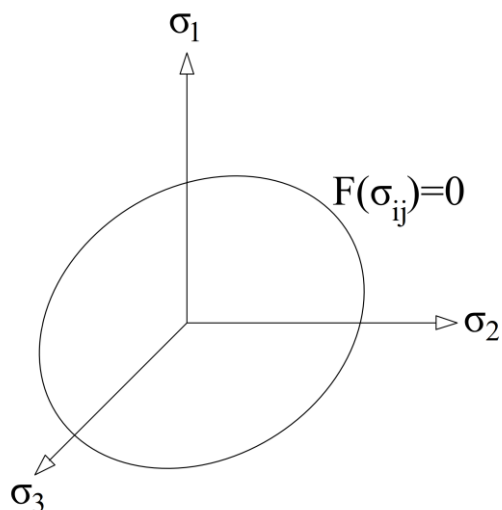


Abbildung 2.4: Schnitt der Fließfläche einer Grenzbedingung mit einer Deviatorebene im Hauptspannungsraum

Grenzbedingungen müssen unabhängig von der Lage und Richtung des Koordinatensystems formuliert werden. Daher ist es zweckmäßig, diese durch Invarianten zu beschreiben. Wie be-

reits erläutert, sind auch die sortierten Hauptspannungen ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$) invariant (Niemunis, 2018). Lässt sich der deviatorische Anteil einer Grenzbedingung in Abhängigkeit von J_2 beschreiben, wird dies als J_2 – *Plastizität* bezeichnet (Borja, 2013).

Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb

Die Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb ist in Standsicherheitsberechnungen der Baupraxis eine sehr oft verwendete und etablierte Grenzbedingung. Sie liegt in der Geotechnik einer Vielzahl von bodenmechanischen und felsmechanischen Annahmen und Grenzwerttheoremen sowie einigen ingenieurgeologischen Theorien zugrunde (Niemunis, 2018). Ihr Ursprung liegt in der Annahme, dass ein Gleitbruch in einem Winkel von $\vartheta_{Bruch} = 45 + \frac{\varphi}{2}$ gegen einen horizontalen Bezugshorizont in Abhängigkeit der größten und kleinsten Hauptspannung erfolgt (Wittke, 1984). Die mittlere Hauptspannung hat bei der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb keinen Einfluss und geht nicht mit ein (Gudehus, 1995).

Für felsmechanische Problemstellungen hat sich die Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb, dargelegt in Gl. (2.35), unter der Verwendung sortierter Hauptspannungen etabliert. Alternativ kann die Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb durch J_2 , I_1 und Θ nach Gl. (2.36) ausgedrückt werden. Die eingehenden Materialparameter sind die Kohäsion c in MPa und der innere Reibungswinkel φ in Grad. Dargestellt im Hauptspannungsraum hat die Grenzbedingung die Form einer ungleichmäßigen, sechseckigen Pyramide (Pimentel, 2017).

$$F_{MC} = \sigma_1(1 - \sin \varphi) - \sigma_3(1 + \sin \varphi) - 2c \cos \varphi \quad (2.35)$$

$$F_{MC} = -I_1 \frac{\sin \varphi}{3} + \sqrt{J_2} \left(\cos \Theta - \frac{\sin \Theta \sin \varphi}{\sqrt{3}} \right) - c \cos \varphi \quad (2.36)$$

Für $\varphi = 0^\circ$ ist auch die Grenzbedingung nach Tresca in der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb enthalten.

Grenzbedingung nach Hoek-Brown

Für intaktes Gestein kann die Grenzbedingung von Hoek-Brown nach Gl. (2.37) verwendet werden. Diese weist eine bezüglich der Richtung der hydrostatischen Achse gekrümmte Fließfläche auf, welche mit zunehmendem Spannungsniveau einen abnehmenden Gradienten aufweist. Als Materialparameter gehen die einaxiale Druckfestigkeit σ_{ci} und die Konstante m_i in die Grenzbedingung ein (Pimentel, 2021).

$$F_{HB} = \sigma_1 - \sigma_3 + \sigma_{ci} \left(m_i \frac{\sigma_3}{\sigma_{ci}} + 1 \right)^{0.5} \quad (2.37)$$

Für weitere Betrachtungen wird in dieser Arbeit die Grenzbedingung nach Hoek-Brown durch J_2 , I_1 und Θ in Gl. (2.38) ausgedrückt. Daraus geht hervor, dass sich die nichtlineare Funktion nicht in einen hydrostatischen und deviatorischen Anteil zerlegen lässt, da die deviatorische Invariante nicht zusammengefasst werden kann.

$$F_{HB} = 2\sqrt{J_2} \cos \Theta + \sigma_{ci} + \left(\sigma_{ci} m_i \left(\frac{I_1}{3} + \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \sin \left(\Theta + \frac{4\pi}{3} \right) \right) \right)^{0,5} \quad (2.38)$$

Grenzbedingung nach Drucker-Prager

Die Grenzbedingung nach Drucker-Prager berücksichtigt sowohl Reibung als auch Kohäsion, und die sechs Teilstücke im Hauptspannungsraum gehen glatt ineinander über. Die Fließfläche im Hauptspannungsraum hat die Form eines Kegels. Bei Betrachtung einer Schnittkurve der Fließfläche mit einer Deviatorebene fällt auf, dass Spannungszustände, bei denen zwei Hauptspannungen gleich groß sind, mit dem gleichen Radius beschrieben werden. Dies findet jedoch keine Übereinstimmung mit den Ergebnissen aus fels- und bodenmechanischen Versuchen, sodass lediglich ein Bereich, in dem zwei Hauptspannungen gleich sind, richtig wiedergegeben werden kann. Hierin liegt der Nachteil dieser Grenzbedingung (Pimentel, 2107). In Gl. (2.39) ist die Grenzbedingung nach Drucker-Prager, ausgedrückt durch J_2 , I_1 , dargelegt. Der Parameter α_{DP} beschreibt die innere Reibung und der Parameter K die Haftfestigkeit als einen stützenden hydrostatischen Druckspannungszustand (Drucker & Prager, 1952).

$$F_{DP} = \sqrt{J_2} - \alpha_{DP} \frac{I_1}{3} - K \quad (2.39)$$

Die Grenzbedingung nach von Mises ist für den Fall von $\alpha_{DP} = 0$ in der Grenzbedingung nach Drucker-Prager enthalten und hat eine Fließfläche in Form eines Zylinders mit dem Radius K , der die hydrostatische Achse umschließt (Niemunis, 2018).

Grenzbedingung nach Matsuoka-Nakai

Eine weitere Grenzbedingung, die an dieser Stelle erwähnt sein soll, ist die Grenzbedingung nach Matsuoka-Nakai, dargelegt in Gl. (2.41). Ursprünglich wurde diese entwickelt, um eine Grenzbedingung zu haben, die eine Einhüllende von Mohr-Coulomb ist und darüber hinaus glatte Übergänge zwischen den sechs Sektoren aufweist. Als Materialparameter geht der Reibungswinkel φ der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb ein. Ein stützender hydrostatischer Druckspannungszustand zur Berücksichtigung von Kohäsion ist in ihrer ursprünglichen Form nicht formuliert. Um den Effekt der Kohäsion nicht explizit berücksichtigen zu müssen, wird daher standardmäßig das Theorem der korrespondierenden Spannungszustände nach Caquot & Kerisel (1967) angewandt und ein neuer Spannungstensor $\bar{\sigma}$ nach Gl. (2.40) eingeführt. Aus

diesem können die in die Grenzbedingung eingehenden Invarianten berechnet werden (Borja, 2013).

$$\bar{\sigma} = \sigma - c \cot \varphi \mathbf{1} \quad (2.40)$$

$$F_{MN} = \bar{I}_1 \bar{I}_2 - \bar{I}_3 \frac{9 - \sin^2 \varphi}{1 - \sin^2 \varphi} \quad (2.41)$$

Sind alle eingehenden Invarianten größer null, liegen die Nullstellen der Grenzbedingung nach Matsuoka-Nakai in demjenigen Bereich im Hauptspannungsraum, in dem ausschließlich Druckspannungen vorherrschen (Druckspannungsoktant). Haben die Invarianten unterschiedliche Vorzeichen, weist die Grenzbedingung nach Matsuoka-Nakai weitere Nullstellen als die zulässige Fließfläche um die hydrostatische Achse auf (Borja, 2013). Auch große Werte für den Reibungswinkel φ können zu unzulässigen Teilen der Fließfläche im Druckspannungsoktanten führen. Der Verlauf der Funktion enthält demnach Wendepunkte und ist nicht monoton steigend, was zu numerischen Problemen bei der Anwendung der allgemeinen Fließregel in einem Stoffmodell führen kann (Niemunis, 2018).

Allgemeine Fließregel

Die aus einer Belastung resultierenden Dehnungen $d\varepsilon_{ij}$ entsprechen der Summe aus dem elastischen Dehnungssinkrement $d\varepsilon_{ij}^{el}$ und dem plastischen Dehnungssinkrement $d\varepsilon_{ij}^{pl}$ nach Gl. (2.42) (Trapp & Öchsner, 2018).

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{pl} + d\varepsilon_{ij}^{el} \quad (2.42)$$

Neben der Unterscheidung, ob ein Material elastische Dehnungen $d\varepsilon_{ij}^{el}$ oder plastische Dehnungen $d\varepsilon_{ij}^{pl}$ unter einer Be- oder Entlastung erfährt, muss definiert werden, ob beim Erreichen des Grenzzustands, also im Fließen, eine Ver- oder Entfestigung auftritt. Für elastoplastische Stoffmodelle werden zur Formulierung von Verfestigungsgesetzen (Dehnungsverfestigung) Grenzbedingungen in Abhängigkeit von $d\varepsilon_{ij}^{pl}$ zuzüglich weiterer Verfestigungsparameter gesetzt. Die Fließfläche hängt dann von dem Verformungsweg ab. Unter einer Belastung wird bei einer Verfestigung die Fließfläche größer und bei einer Entfestigung kleiner, wobei sich in beiden Fällen der Spannungszustand auf der Fließfläche entlang bewegt. Wird keine Veränderung der Grenzbedingung und der Fließfläche während des Fließens definiert, liegt ideal-plastisches Materialverhalten vor (Kolymbas, 1978).

Geht man innerhalb der Plastizitätstheorie von einer Koaxialität des Hauptspannungsraums und den Hauptrichtungen der plastischen Verformungssinkremente aus, steht nach der sogenannten

Normalitätsbedingung der Vektor eines plastischen Verformungsinkrements $d\varepsilon_{ij}^{pl}$ normal zur Fließfläche. Um diesen Vektor zu beschreiben, wird die Gradienten einer Grenzbedingung als ein sogenanntes plastisches Potential herangezogen, woraus die allgemeine Fließregel nach Gl. (2.43) folgt. Darin nimmt der plastische Multiplikator λ einen positiven Wert zur Bestimmung des Betrags von $d\varepsilon_{ij}^{pl}$ ein. Die Funktion, aus der das plastische Potential folgt, wird als Potentialfunktion Q bezeichnet (Kolymbas & Herle, 2017):

$$d\varepsilon_{ij}^{pl} = \lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.43)$$

Für den Fall der Normalität entspricht die Potentialfunktion Q der Grenzbedingung F , was auch als assoziierte Fließregel bezeichnet wird. Da die so gewählte Richtung des plastischen Verformungsinkrements $d\varepsilon_{ij}^{pl}$ den Grenzzustand von Boden und Fels nicht zutreffend wiedergibt, wird auf eine nicht assoziierte Fließregel – und damit einhergehend auf den Dilatanzwinkel ψ anstatt auf den Reibungswinkel φ – in der Potentialfunktion zurückgegriffen. Der Dilatanzwinkel beschreibt eine Volumenzunahme durch Aufgleiten während eines Schervorgangs zwischen 0° und φ (Pimentel, 2017). Wird der Dilatanzwinkel mit 0° angesetzt, verläuft der Vektor $d\varepsilon_{ij}^{pl}$ in einer Deviatorebene und nicht normal zur Fließfläche. Weist eine Grenzbedingung Wendepunkte auf, eignet sich diese nicht als Potentialfunktion. Eine Rückführung unzulässiger Spannungszustände auf die Fließfläche ist in einem solchen Fall nicht immer gewährleistet, sodass bei der Anwendung einer solchen Grenzbedingung in einem Stoffmodell üblicherweise auf die Grenzbedingung nach Drucker-Prager als Potentialfunktion zurückgegriffen wird (Benz, 2008).

Arbeitshypothese und Forderung nach Konvexität

Aus der Normalitätsbedingung leiten sich einige Axiome ab, die unter anderem auch die Konvexität einer Grenzbedingung fordern. So fordert das Druckersche Stabilitätspostulat für eine stabile Arbeitsverfestigung, dass in einem Lastschritt von einem Spannungszustand σ_{ij}^0 zum nächsten σ_{ij}^{res} eine nichtnegative Arbeit für irreversible plastische Verformungen geleistet werden muss, woraus folgt, dass das Skalarprodukt aus $d\varepsilon_{ij}^{pl}$ und dem zwischen zwei aufeinanderfolgenden Spannungszuständen liegenden Spannungsinkrement $d\sigma_{ij}$ nicht negativ werden darf. Das Druckersche Stabilitätspostulat ist in Gl. (2.44) dargelegt (Kolymbas, 1978):

$$d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^{pl} \geq 0 \quad (2.44)$$

Nach Betten (2001) liegt der Grenzfall der Konvexität dann vor, wenn in einem Schnitt durch die Fließfläche in einer beliebigen Deviatorenebene an einer Stelle die Krümmung der Grenzbedingung verschwindet. Entspricht die zweite Ableitung der Grenzbedingung nach den Spannungskomponenten null, ist die Krümmung (Steigung) verschwunden und der Grenzfall erreicht (Betten, 2001). Demnach liegt bei der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb bereits der Grenzfall vor (Kosmann & Perau, 2021).

Eine nicht konvexe Grenzbedingung kann nach Hughes (1983) allerdings für eine zutreffende Korrelation mit Versuchsergebnissen erforderlich sein. Eine Implementierung in ein Stoffmodell ist nach Hughes (1983) mit einer radialen Fließregel (Radial-Return), wie sie nach Benz (2008) ebenfalls für die Grenzbedingung nach Matsuoka-Nakai verwendet wurde, problemlos möglich. Dabei zeigt der Vektor $d\varepsilon_{ij}^{pl}$ auf die hydrostatische Achse. Allerdings kann es während eines elastischen Lastschritts von einem elastischen Spannungszustand zum nächsten zu einem „elastischen Jump-Over“ (EJO) kommen, bei dem ein konkaver Bereich der Fließfläche übersprungen wird. In Abbildung 2.5 ist ein elastischer Jump-Over zwischen den Sektoren 1 und 2 exemplarisch dargestellt. Dieser Effekt führt nicht zu numerischen Problemen, kann aber eine Verletzung der Grenzbedingung darstellen. Hughes (1983) empfiehlt dies weiter zu untersuchen.

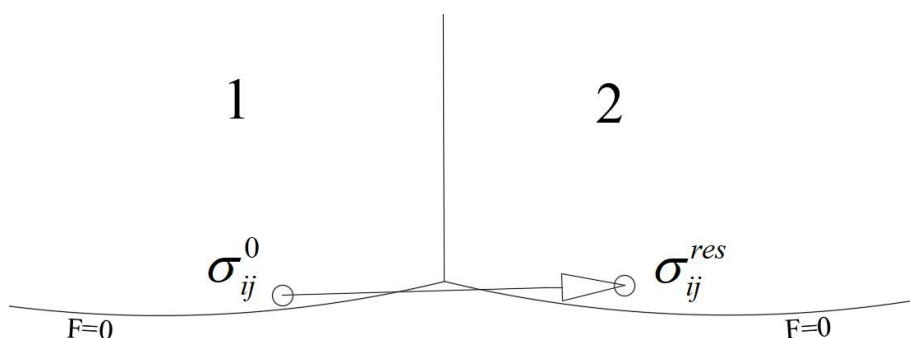


Abbildung 2.5: Exemplarischer elastischer Jump-Over

2.3. Geotechnische Versuche

Um das mechanische Verhalten eines Materials zu beschreiben, werden repräsentative Proben des Baugrunds in Elementversuchen untersucht. In Elementversuchen wird die Reaktion des Materials bezüglich homogener Spannungen und Verformungen untersucht und aus den Ergebnissen entsprechende Materialparameter abgeleitet. Die resultierenden Materialparameter werden auf den gesamten Baugrund bezogen (Kolymbas & Herle, 2017). Gängige Elementversuche für die Ermittlung der Gesteinsfestigkeit sollen ohne Anspruch auf Vollständigkeit kurz vorgestellt werden.

Einaxialer Druckversuch

Die Gesteinsfestigkeit unter rein axialer Belastung wird im einaxialen Druckversuch untersucht. Eine axiale Spannung σ_1 ohne Seitendruck $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ wird bis zum Erreichen des Grenzzustands gesteigert. Das Ergebnis liefert die einaxiale Druckfestigkeit q_u in MPa. Ebenso können über das Spannungsdehnungsverhalten in axialer Richtung der E-Modul und über das Verhältnis von Axialdehnungen zu Seitendehnungen die Querdehnzahl vor dem Erreichen des Grenzzustands bestimmt werden (Wittke, 1984).

Konventioneller Triaxialversuch

Das Materialverhalten von Fels unter mehrdimensionalen Belastungen wird in Triaxialversuchen untersucht. Im konventionellen Triaxialversuch werden zwei Hauptspannungen in gleicher Größe aufgegeben. Werden die kleinste und mittlere Hauptspannung gleich groß gewählt $\sigma_2 = \sigma_3$, und die größte Hauptspannung σ_1 bis zum Erreichen des Grenzzustands gesteigert, spricht man von triaxialer Kompression. Werden die größte und mittlere Hauptspannung gleich groß gewählt $\sigma_2 = \sigma_1$ und bei konstanter kleinster Hauptspannung σ_3 bis zum Erreichen des Grenzzustands gesteigert, spricht man von triaxialer Extension. Diese beiden speziellen triaxialen Belastungen sind exemplarisch in Abbildung 2.6 dargestellt. Die Länge der Pfeile soll darin qualitativ das Größenverhältnis der Spannungen beschreiben (Lesny & Perau, 2015).

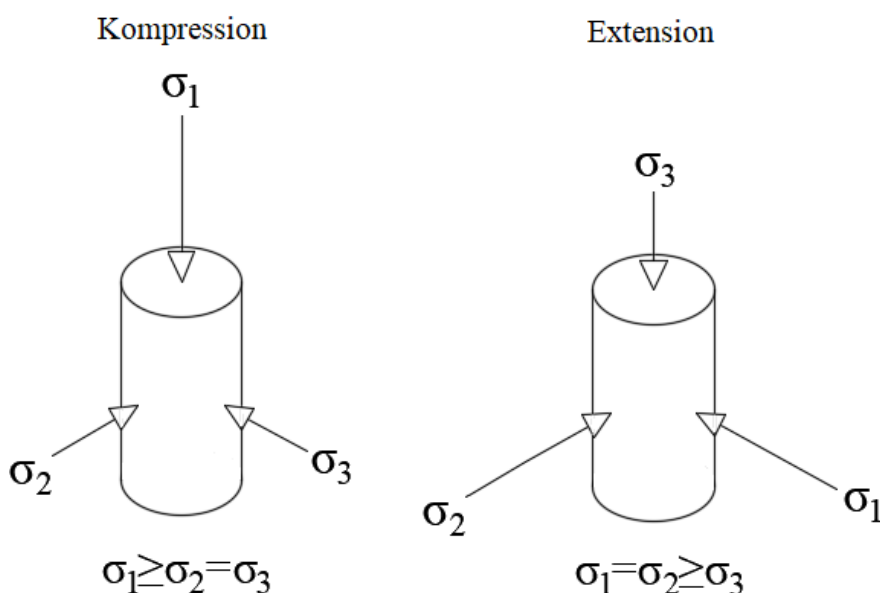


Abbildung 2.6: Triaxiale Kompression und Extension nach Lesny & Perau (2015)

Die Ergebnisse beider Triaxialversuche liefern ein Spannungstriplett, bei dem das Material versagt. Aus einer ausreichenden Anzahl derartiger Versuchsergebnisse können die Scherparameter einer Grenzbedingung identifiziert werden (Lesny & Perau, 2015).

2.4. Einfluss des Trennflächengefüges von Fels

Naturgemäß ist das mechanische Verhalten von Fels nicht nur von der Festigkeit des Gesteins selbst, sondern auch vom Trennflächengefüge abhängig. Der Einfluss von Trennflächen muss daher sowohl bei der Modellbildung in numerischen Berechnungen als auch in Elementversuchen zur Bestimmung der Materialparameter berücksichtigt werden (Wittke, 1984). Elementversuche sollen als idealisierter Punkt das mechanische Verhalten eines Kontinuums beschreiben. Dafür muss das zu untersuchende Material zwingend homogen sein. Bei Lockergesteinen sind die Abmessungen eines Probekörpers daher von untergeordneter Bedeutung, da der Korn Durchmesser im Verhältnis zu den Probekörperabmessungen in der Regel sehr klein ist (Kolymbas & Herle, 2017). Bei der Betrachtung von Fels mit Trennflächengefüge ist die Größe eines Probekörpers zur Beschreibung der mechanischen Eigenschaften dagegen oft von Relevanz (Hoek, 2007). Ein Probekörper, der zwischen zwei Trennflächen liegt, würde die Gesteinsfestigkeit wiedergeben. Ein Probekörper, der doppelt so groß ist wie der Trennflächenabstand, könnte nicht in einem Elementversuch untersucht werden, da er nicht zu einem Kontinuum idealisiert werden kann. Die mechanischen Eigenschaften solcher Probekörper müssen über ein Diskontinuum und somit über ein diskretes Modell beschrieben werden. Ein Probekörper mit etwa der 20-fachen Größe des Trennflächenabstands hingegen kann analog zu Untersuchungen von Wittke (1984) über ein homogenes Ersatzmaterial und somit über ein Kontinuum beschrieben werden. Eine Idealisierung von Fels zu einem homogenen Ersatzmaterial ist demnach nur bei bestimmten Verhältnissen des Trennflächenabstands (s) zum Probekörperdurchmesser (d) möglich. Dieser Zusammenhang soll durch Abbildung 2.7 verdeutlicht werden:

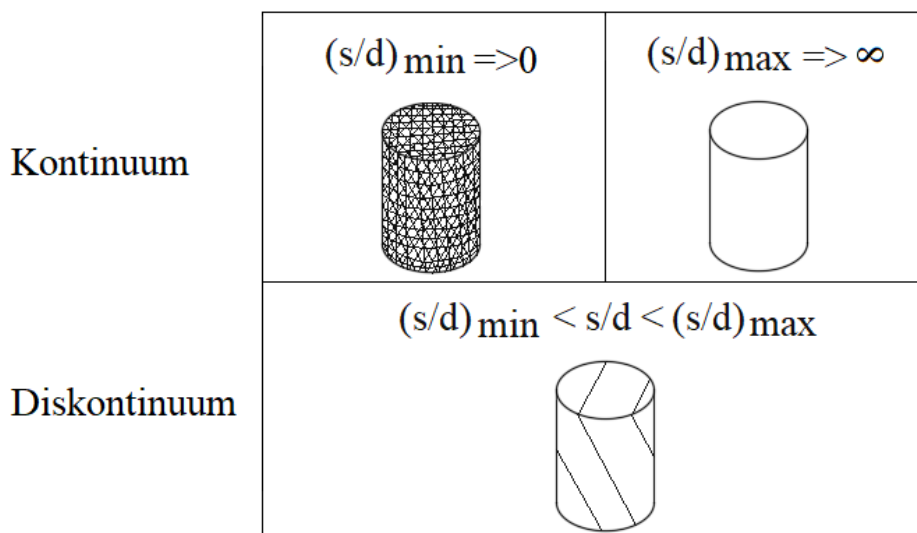


Abbildung 2.7: Einfluss des Verhältnisses von Trennflächenabstand und Probekörperdurchmesser auf die Beschreibung des mechanischen Verhaltens von Fels

Geht dieses Verhältnis gegen Null $(s/d)_{\min}$ oder unendlich $(s/d)_{\max}$ ist eine Beschreibung des Materials über ein Kontinuum möglich. Zwischen diesen beiden Bereichen ist eine diskrete Betrachtung des Diskontinuums erforderlich.

3. Tiefe Geothermiebohrungen

In diesem Kapitel soll auf die Nutzungsmöglichkeiten der tiefen Geothermie, ihre Erschließung, die Gewinnung von Informationen über den Baugrund und auf konventionelle Berechnungsgrundlagen eingegangen werden.

3.1. Geothermie

Die Nutzung von Erdwärme wird allgemein als Geothermie bezeichnet. Erdwärme gilt als regenerative Energie, da sie praktisch unerschöpflich ist. Erdwärme entsteht zum Großteil (~70 %) durch den radioaktiven Zerfall der Elemente in der Erdkruste und des Weiteren (~30 %) aus der Gravitationswärme der Erdentstehung. Von der Oberfläche aus steigt die Temperatur mit zunehmender Tiefe an, sodass man von einem konstant zunehmenden Temperaturgradienten ausgehen kann. In Deutschland steigt die Temperatur um 3°C pro 100 m Tiefe an. Die Nutzung von tiefer Geothermie wird in zwei unterschiedliche Nutzungsformen unterteilt, die oberflächennahe Geothermie und die tiefe Geothermie. Diese werden in erster Linie durch die Tiefenlage ihres Nutzungshorizonts unterschieden (Stober u.a., 2011).

Oberflächennahe Geothermie

Alle Systeme, die Erdwärme üblicherweise bis in eine Tiefe von 150 m, maximal bis in eine Tiefe von 400 m nutzen, bezeichnet man als oberflächennahe Geothermie. Dazu gehören Erdwärmesonden, -kollektoren oder Energiepfähle sowie Flächenkollektoren in Keller- oder Tunnelauskleidungen. Die mit diesen Systemen gewonnene Energie wird in der Regel als Heizenergie mittels Wärmepumpentechnik genutzt. Dabei wird die gewonnene Erdwärme als Grundlage genutzt und von Wärmepumpen durch Verdichten und eventuelles Zuheizen (größtenteils durch die Nutzung von Strom) auf die benötigte Endverbrauchertemperatur angehoben. Eine direkte Nutzung der Erdwärme kann in dem oberflächennahen Temperaturbereich mittels CO₂-Sonden in der Eisfreihaltung von Weichen oder wichtigen Verkehrswegen erfolgen (Bußmann u.a., 2012).

Tiefe Geothermie

Von tiefer Geothermie spricht man, wenn die Gewinnung von Erdwärme in mehr als 400 m Tiefe erfolgt. Ab dieser Tiefe können Temperaturen, angefangen von 20°C bis zu ca. 60°C in mehr als 1 000 m Tiefe, gewonnen werden, die für eine direkte Nutzung als Heizenergie geeignet sind. Ab einer Temperatur von ca. 100°C, die in noch größeren Tiefen gewonnen werden

kann, ist eine Verstromung mittels Niederenthalpiesystemen möglich. Hierbei wird mit der gewonnenen Erdwärme ein Gas wie beispielsweise Propan erwärmt, was eine starke Volumenausdehnung zur Folge hat und so eine Turbine mit Stromgenerator antreiben kann (Stober & Bucher, 2012).

Für eine direkte Verstromung ist es erforderlich, Wasser mit mehr als 140°C zu fördern, was theoretisch ab einer Tiefe von 4 500 m möglich ist. Dafür werden Schüttungen von ca. 80 l bis 100 l pro Sekunde benötigt und dementsprechend große Bohrlochdurchmesser (Reich, 2015).

Der Oberrheingraben in Baden-Württemberg, der Malm im bayrischen Molassebecken und die norddeutsche Bucht sind Gebiete, die ein hohes Potenzial in Punkto Fündigkeit und Nutzbarkeit für tiefe geothermische Anwendungen bieten. Für die Nutzung der tiefen Geothermie gibt es unterschiedliche Systeme, die danach definiert werden, wieviel freie Enthalpie sie liefern können (Stober & Bucher, 2012).

Hydrothermale Systeme

Hydrothermale Systeme nutzen heißes Wasser oder Wasserdampf aus dem Untergrund. Die Nutzung von Wasserdampf erreicht die höchste Enthalpie-Einstufung. Beispielhaft kann hier die Nutzung von Wasserdampf an der amerikanischen Westküste „The Geysers“ genannt werden. Hier tritt Wasserdampf durch Bohrungen an die Oberfläche und kann direkt genutzt werden (Gunasekera u.a., 2003). Wasserdampf ist innerhalb Deutschlands nicht anzutreffen, hierzulande ist die Nutzung von heißem Wasser aus tiefliegenden Grundwasserleitern oder Störungszonen in wasserführenden Bodenschichten möglich. Bei diesen handelt es sich um Nutzungssysteme mit niedriger Enthalpie. Bisher erschlossene hydrothermale Systeme bieten nutzbare Temperaturen von >20°C (thermale Nutzung) bis >100°C (Heizwärme / Möglichkeit der Verstromung) (Stober u.a., 2011).

Petrothermale Systeme

Petrothermale Systeme sind entwickelt worden, um heiße Gesteinshorizonte im Untergrund zu nutzen, die selbst kein Wasser enthalten. Das Potential dieser Gesteinshorizonte kann über geschlossene Systeme – wie beispielsweise tiefe Erdwärmesonden oder offene Systeme – über sogenannte Enhanced-Geothermal-Systems (EGS) genutzt werden. Tiefe Erdwärmesonden werden zur Gewinnung von Heizenergie verwendet und EGS-Systeme in erster Linie zur Stromerzeugung. Das Funktionsprinzip einer tiefen Erdwärmesonde als geschlossenes System ist gleich dem einer Erdwärmesonde aus der oberflächennahen Energiegewinnung. Ein Wärmeträgermedium wird kreisläufig in den Untergrund hinab- und wieder heraufgepumpt. Dabei nimmt es im Untergrund Erdwärme auf und an der Oberfläche wird diese über Wärmetauscher wieder entzogen. Enhanced-Geothermal-Systems basieren auf dem Hot-Dry-Rock-System (HDR). Bei diesem System wird das heiße Gestein selbst als Wärmetauscher genutzt, dazu wird

Wasser über eine Bohrung in den Untergrund injiziert, durch das heiße Gestein erhitzt und in ausreichender Entfernung durch eine zweite oder sogar dritte Bohrung wieder gefördert. Der Vorteil bei diesem System ist die Unabhängigkeit von Wasser im Untergrund – so können heiße Störungszonen direkt angebohrt und genutzt werden (Stober & Bucher, 2012).

Tiefengeothermische Reservoirire

Lukrative geothermale Reservoirire sind in Deutschland wie oben erwähnt bereits bekannt. Diese befinden sich in Tiefen von mehr als 3 000 m bei normalen Temperaturgradienten ($3^\circ/100$ m). In einigen Bereichen Deutschlands ist dieser Temperaturgradient etwas erhöht, sodass schon in geringeren Tiefen eine größere Temperatur als 100°C erreicht werden kann. Als Beispiele sind hier der Oberrheingraben, das norddeutsche Becken und das bayrische Molassebecken zu nennen. Potenzielle geothermische Reservoirire des Oberrheingrabens liegen im Oberen Muschelkalk (Oberer Muschelkalk-Aquifer) oder im Buntsandstein. Im norddeutschen Becken liegen geothermisch nutzbare Aquifere in den Sandsteinen des Lias, im Mittleren Buntsandstein sowie im Rotliegend. Die ergiebigsten geothermischen Aquifere des bayrischen Molassebeckens bilden teilweise verkarstete Malmkalke und -dolomite. Grundsätzlich sollte ein Reservoir als Voraussetzung eine mittlere bis hohe natürliche Klüftdichte mit stabilem Korngefüge aufweisen. Metamorphe Gesteine wie Tonschiefer weisen in der Regel durch einwirkende tektonische Spannungen eine intensivere Klüftung als magmatische Gesteine, wie zum Beispiel Granit, auf und sind daher oft durchlässiger. Die Klüfte sollten über eine Fläche von mindestens 2 km^2 relativ gleichmäßig verteilt sein, um eine optimale Wärmetauscherfläche zu bilden. Das Reservoirvolumen sollte nicht kleiner sein als $0,2\text{ km}^3$. Üblicherweise bilden sich Reservoirire entlang der mittleren Hauptspannung des in situ Spannungszustandes in Form eines steil stehenden Ellipsoids aus (Stober u.a., 2011).

3.2. Initialspannungszustände

Mit einem in situ Spannungszustand ist in dieser Arbeit ein Initialspannungszustand im ungestörten Gestein gemeint. Dieser hat einen großen Einfluss auf die Stabilität einer Bohrung. Daher soll zunächst der Einfluss der Tektonik im äußeren Erdmantel auf den in situ Spannungszustand betrachtet werden. Die Hauptspannungen im Gebirge werden bei derartigen Betrachtungen entsprechend ihrer Wirkungsrichtung benannt. In vertikaler Richtung wirken die Überlagerungsspannungen des hangenden Gebirges, die als Vertikalspannungen σ_v bezeichnet werden. In horizontaler Richtung wirken zwei normal aufeinander stehende Hauptspannungen, die entsprechend ihrer Größe nach als die größere Horizontalspannung σ_H und die kleinere Horizontalspannung σ_h bezeichnet werden. Bis auf das Verhältnis $\sigma_H \geq \sigma_h$ stehen diese in keinem festen Zusammenhang.

Einfluss der Tektonik

Neben den vertikalen Spannungen aus dem Eigengewicht des Gesteins wirken mit zunehmender Tiefe auch horizontale Spannungen aus tektonischen Prozessen in der Erdkruste. Unterliegt eine Gesteinsschicht einem Spannungszustand mit unterschiedlich großen Hauptspannungen, so kann es, wenn der Grenzzustand des Gesteins erreicht wird, zu einer Durchtrennung kommen, die in der Geologie als Verwerfung oder Störung bezeichnet wird. Durch die mit den Verwerfungen auftretenden Verschiebungen von Gesteinsschichten ist, wenn der Verschiebungsprozess noch andauert, ein Rückschluss auf die Orientierung des Spannungszustands möglich. Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 3.1 dargestellt. Es werden Abschiebungen, Seitenverschiebungen und Aufschiebungen unterschieden. Bei allen Verwerfungsarten verlaufen die Verschiebungen ausgehend von der größten Hauptspannung (rot dargestellt) entgegen des geringsten Widerstands in die Richtung der kleinsten Hauptspannung (grün dargestellt). Die mittlere Hauptspannung (blau dargestellt) hat bei dieser vereinfachten Betrachtung, die auf der Mohr-Coulombschen Grenzbedingung beruht, keine Verschiebungen zur Folge (Reuther, 2012). Der Einfluss der mittleren Hauptspannung auf die Durchtrennung und somit auch auf das Versagen von Gestein wird hier als neutral vorausgesetzt.

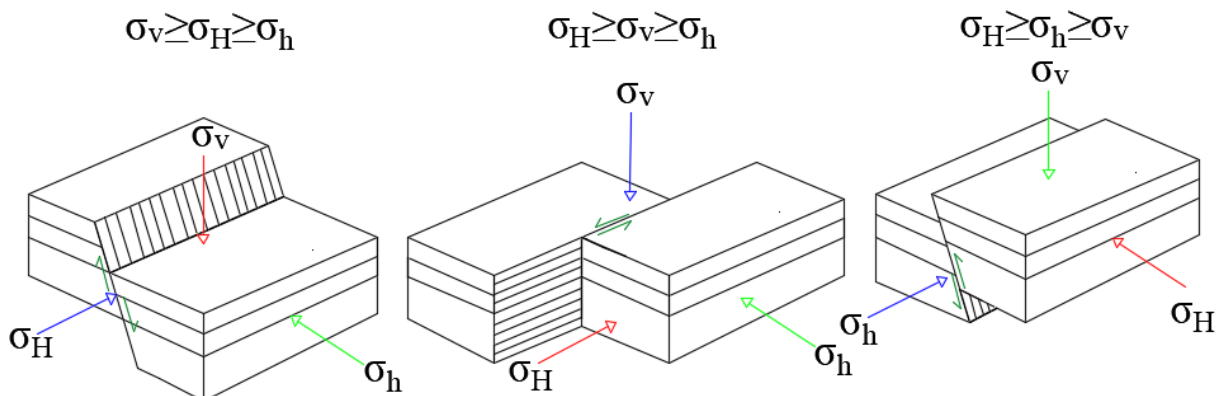


Abbildung 3.1: Zusammenhang zwischen Verwerfungen und Spannungszuständen; links: Abschiebung, Mitte: Seitenverschiebung und rechts: Aufschiebung nach Reuther (2012);

Erfahrungen aus der Felsmechanik und dem Tunnelbau

In der Geotechnik werden Vertikalspannungen anhand der Wichte des Gesteins und der betrachteten Tiefe unter der Geländeoberkante (GOK) berechnet. Die Wichte γ des Gesteins kann mittels der Dichte insbesondere mit dem Eigengewicht des Gesteins pro m^3 und der Erdbeschleunigung bestimmt werden. Es wird eine lineare Zunahme der Vertikalspannungen mit der Tiefe angenommen. Anhand einer Regressionsanalyse ist von Hoek (2007) eine mittlere Wichte von $0,027 \text{ MN/m}^3$ als mittlere Dichte des Gesteins γ_G vorgeschlagen worden, mit der

wirksame Vertikalspannungen überschlägig nach Gl.(3.1) über die Tiefe unter GOK bestimmt werden können:

$$\sigma_v = (\gamma_G - \gamma_w) \cdot z \quad (3.1)$$

Um wirksame Spannungen zu erhalten, wird in Gl. (3.1) die Wichte des Wassers γ_w subtrahiert. In Abbildung 3.2 ist die nach Gl.(3.1) berechnete lineare Zunahme der Vertikalspannungen über die Tiefe unter GOK nach Hoek (2007) exemplarisch aufgetragen.

Die Horizontalspannungen können je nach Tiefe und Standort auf der Erde kleiner oder größer sein als die zugehörigen Vertikalspannungen. Das Verhältnis zwischen den Vertikalspannungen und den Horizontalspannungen wird nach Gl.(3.2) mit dem Erddruckbeiwert K ausgedrückt (Wittke, 1984).

$$K = \frac{\sigma_h}{\sigma_v} \quad (3.2)$$

Sind die Horizontal- und Vertikalspannungen gleich, entspricht $K = 1$, sind die Vertikalspannungen größer als die Horizontalspannungen, so ist $K < 1$, und sind die Horizontalspannungen größer als die Vertikalspannungen, so ist $K > 1$ (Wittke, 1984).

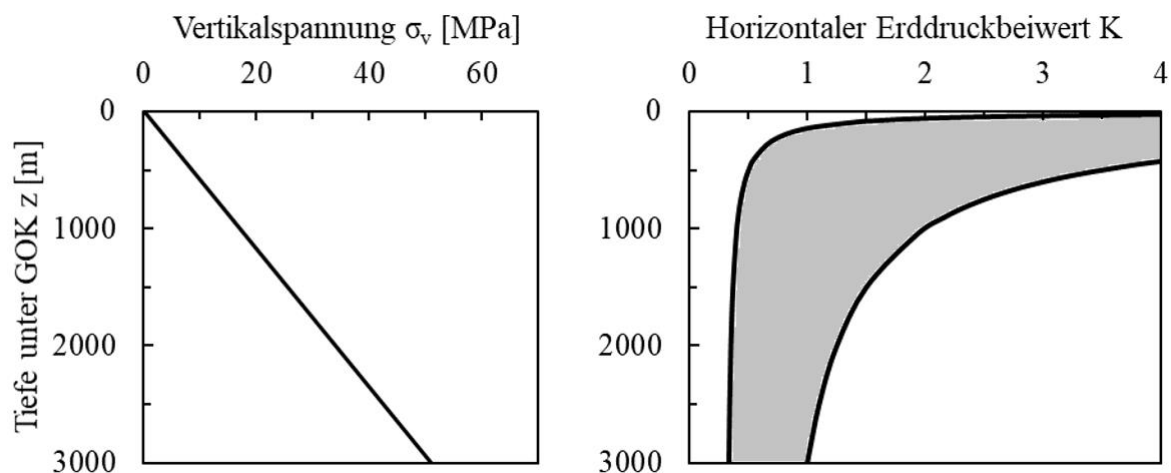


Abbildung 3.2: In situ Spannungen in der oberen Erdkruste; links: Vertikalspannungen σ_v über die Tiefe z und rechts: erkundeter Bereich von Erddruckbeiwerten K (grauer Bereich) über die Tiefe z nach Hoek (2007)

In Abbildung 3.2 ist ein nach Hoek (2007) angegebener Wertebereich, in dem der Erddruckbeiwert K in Abhängigkeit von der Tiefe unter GOK liegen kann, als graue Fläche dargestellt. Danach können die Horizontalspannungen bis in eine Tiefe von 500 m um das Vierfache und bis in eine Tiefe von 1 000 m um das Zweifache größer sein als die Vertikalspannungen. Mit zunehmender Tiefe nähert sich der horizontale Erddruckbeiwert einem Wertebereich von $K \leq 1$

an, sodass ab ca. 3 000 m die Horizontalspannungen eher kleiner sind als die Vertikalspannungen (Hoek, 2007).

Über geologische Karten und Auszüge aus der sogenannten World-Stress-Map können erste Informationen über das Spannungsverhältnis und häufig auftretende Spannungsorientierungen gewonnen werden (Braun & Reinhold, 2017).

Grenzzustände der Horizontalspannungen

Um den Bereich von möglichen Horizontalspannungen eingrenzen zu können, wird in der Geotechnik auf die Plastizitätstheorie, insbesondere auf die Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb, zurückgegriffen. Mit der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb können in Abhängigkeit der Vertikalspannungen σ_v und der eingehenden Materialparameter φ und c Grenzzustände formuliert werden, zwischen denen zulässige Horizontalspannungen liegen müssen. Zur Formulierung der horizontalen Grenzzustände über die Tiefe z werden zwei Verhältnisse der Vertikalspannungen zu den Horizontalspannungen und damit einhergehend zwei unterschiedliche Erddruckbeiwerte unterschieden. Sind die Horizontalspannungen kleiner als die Vertikalspannungen, ist der aktive Erddruckbeiwert K_a nach Gl. (3.3) maßgebend. Sind die Horizontalspannungen größer als die Vertikalspannungen, ist der passive Erddruckbeiwert K_p nach Gl. (3.4) maßgebend (Gudehus, 1995a).

$$K_a = \tan^2\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{K_p} \quad (3.3)$$

$$K_p = \tan^2\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right) \quad (3.4)$$

Unter der Berücksichtigung der Kohäsion c und der beiden Erddruckbeiwerte kann der mögliche Wertebereich der Horizontalspannungen wie in Gl. (3.5) dargelegt rechnerisch bestimmt werden (Gudehus, 1995a):

$$K_a \sigma_v - 2c\sqrt{K_a} \leq \sigma_{horizontal} \leq K_p \sigma_v + 2c\sqrt{K_p} \quad (3.5)$$

Aus der Anwendung von Gl. (3.5) ergeben sich die in Gl. (3.6) und Gl. (3.7) dargelegten Grenzwerte für die beiden Horizontalspannungen σ_h und σ_H :

$$\sigma_h \geq K_a \sigma_v - 2c\sqrt{K_a} \quad (3.6)$$

$$\sigma_H \leq K_p \sigma_v + 2c\sqrt{K_p} \quad (3.7)$$

3.3. Grundlagen der Bohrtechnik

Um Probleme mit der Bohrlochstabilität von tiefen Geothermiebohrungen besser verstehen zu können, wird im Folgenden kurz auf die Grundlagen der Bohrtechnik eingegangen. Umfassende Ausführungen zum Thema Bohrungen können unter anderem in: Aadnoy & Looyeh (2010), Reich (2015), Fjar u.a. (2008), Lions u.a. (2012), Bußmann u.a. (2012) und Stober & Bucher (2012) gefunden werden. Detaillierte Ausführungen werden in diesem Kapitel zu den folgenden Komponenten, wie z. B. der Bohrspülung, die eine der wichtigsten darstellt, gemacht:

Die Bohrspülung

Eines der wichtigsten Bestandteile, ohne die Tiefenbohrungen nicht möglich wären, ist die Bohrspülung bzw. die Stützflüssigkeit. Diese hat in erster Linie die Aufgabe, das Bohrloch durch ihr Eigengewicht zu stabilisieren und Porenwasser und -gas aus den Gebirgsformationen am Eindringen zu hindern. Des Weiteren muss die Stützflüssigkeit den Bohrmeißel kühlen, den Bohrstrang schmieren und das Bohrklein an die Oberfläche transportieren. Zusätzlich muss sie bei einem Bohrstopp dazu in der Lage sein, das Bohrklein am Absinken zu hindern. Die Dichte und das thixotrope Verhalten der Stützflüssigkeit müssen daher an die zu erwartenden Gebirgseigenschaften angepasst sein. Bei Richtbohrvorgängen kommen der Stützflüssigkeit noch weitere Aufgaben hinzu, nämlich der Antrieb des Bohrmeißels über eine Bohrturbine sowie die Übertragung von Messdaten. Zum Antrieb der Bohrturbine wird die Stützflüssigkeit zwischen einem Rotor und einem Stator durchgepresst, was den Rotor in Bewegung versetzt und den Bohrmeißel antreibt. Messergebnisse, die am vorderen Bohrstrang gewonnen werden, wie der Azimut η und die Inklination der Bohrung ξ , müssen aus Tiefen von 4 500 m und mehr zur Bohrüberwachung und weitergehenden Richtungssteuerung an die Oberfläche gelangen. Für diesen Datentransfer hat sich die Übertragung mittels Druckschwankungen in der Stützflüssigkeit etabliert. Hierbei funktionieren Druckstöße, die durch Ventile am oberen oder unteren Ende der Bohrung gesendet werden, als Binärcode zur Übertragung von Informationen. Dabei kann allerdings nur in eine Richtung übertragen werden, entweder Messergebnisse an die Oberfläche oder Steuerbefehle in die Tiefe. Um eine Übertragung möglichst störungsfrei vornehmen zu können, findet diese während der Bohrpausen statt, wenn ein neuer Zug aus Bohrstangen eingebaut wird und die Pumpen der Stützflüssigkeit abgestellt sind. Eine solche Messung wird als Survey bezeichnet und beinhaltet alle an einem Bohrpunkt aufgezeichneten Messergebnisse (Reich, 2015).

Richtbohrer

Um gerichtete Bohrungen herzustellen, benötigt man Richtbohrgeräte, die dazu in der Lage sind, den Bohrer an der richtigen Stelle so auszulenken, dass der gewünschte Bohrfad eingeschlagen wird. Dazu wird zwischen dem Bohrmeißel und der Bohrturbine ein Knickelement eingebaut, welches den Bohrer auslenkt. Wird mit eingebautem Knickelement der Bohrstrang festgehalten und der Bohrvorgang fortgesetzt, zeigt der Bohrer durch den Knick immer in dieselbe Richtung und schlägt so den Weg einer Kurve ein. Der Knickwinkel ist so gering, dass bei einem Mitrotieren des Bohrstranges der Bohrer wieder in gerader Richtung bohrt. Zusammengefasst bedeutet das, dass bei festgestelltem Bohrstrang eine Kurve und bei rotierendem Bohrstrang in gerader Richtung gebohrt wird. Auf diese Weise können gerichtete Bohrpfade genau nach Vorgabe erstellt werden (Reich, 2015).

Aufbau einer geothermischen Bohrung

Nach dem erfolgreichen Abteufen einer Bohrphase wird in das Bohrloch eine Verrohrung einzementiert. Eine Bohrung besteht daher aus mehreren, mit jeder Bohrphase abnehmenden Rohrdurchmessern. Betrachtet man den gesamten Verlauf einer Bohrung, ist diese teleskopisch aufgebaut. Der Durchmesser kann exemplarisch an der Oberfläche mit ca. 26“ (~66 cm) für die Bohrung und 22“ (~55 cm) für die zementierte Verrohrung starten und in 3 000 m Tiefe mit 10 5/8“ (~27 cm) für die Bohrung und 8 5/8“ (~22 cm) für die zementierte Verrohrung enden (Daldrup & Klapperich, 2009). Das Verrohrungsschema einer Geothermiebohrung ist exemplarisch in Abbildung 3.3 dargestellt. Im Anschluss an die verrohrte Bohrung wird, wenn standfeste Gebirgsverhältnisse vorliegen, eine Bohrphase ohne Verrohrung – der sogenannte Open-Hole-Bereich – mit einem Durchmesser der vorangegangenen Verrohrung angesetzt. Bei nicht standfestem Gebirge werden in der letzten Bohrphase perforierte Liner oder Filterrohre installiert. Im Open-Hole-Bereich werden die Bohrungen, zur Minimierung des Fündigkeitsrisikos, geneigt ausgeführt. Beispielsweise wurden im bayrischen Molassebecken und im Oberrheingraben Bohrungen mit ca. 40° Neigung im Reservoirbereich ausgeführt. Um den Wasserhaushalt im Erdinneren nicht zu verändern, oder um bei Anwendung des Hot-Dry-Rock-Verfahrens überhaupt heißes Wasser in den Untergrund zu bekommen, ist es notwendig, dem Untergrund nicht nur Wasser über eine Förderbohrung zu entnehmen, sondern auch über eine zweite Injektionsbohrung wieder Wasser zuzuführen. Aufgrund dieser Vorgehensweisen bestehen tiefe geothermische Nutzungssysteme aus mindestens zwei Bohrungen, die als Dublette, oder als Triplette bei drei Bohrungen, bezeichnet werden (Stober & Bucher, 2012).

Teufe m u. GOK	Bohrloch- durchmesser	Verrohrung	Tiefe der Verrohrung	Längsschnitt der Bohrung
500	28"	24 1/2"	23 m	
1000	23"	18 5/8"	600 m	
1500	16"	13 3/8"	1300 m	
2000				
2500	12 1/4"	9 5/8"	2400 m	
	8 1/2" Open hole		2800 m MD / 2750 m TVD	

Abbildung 3.3: Exemplarisches Verrohrungsschema einer Geothermiebohrung nach Bußmann u.a. (2012)

3.4. Bohrlochmessungen / Versuche

Man unterscheidet drei unterschiedliche Verfahren, nach denen Bohrlochmessungen vorgenommen werden: erstens durch vortriebsbegleitende Messungen, die als Measure-While-Drilling (MWD) bezeichnet werden, zweitens kabelgeführte Messinstrumente, die nach dem Entfernen des Bohrstrangs in das Bohrloch eingeführt werden, die sogenannten Wireline-Logging-Methods und drittens Bohrlochversuche, die man allgemein als Well-Tests bezeichnet (Reich, 2015).

Measure-While-Drilling

Bei MWD-Messungen werden hauptsächlich die Inklination und der Azimut der aktuellen Bohrposition gemessen. Werden Informationen über Gesteinseigenschaften gesammelt, so spricht man von Logging-While-Drilling. Dabei können über akustische Messgeräte die Schallausbreitung im Gestein und über Röntgen- oder radioaktive Messverfahren die Dichte des Gesteins und mit beiden Informationen zusammen die dynamischen Elastizitätskonstanten (E_{dyn} und ν_{dyn}) bestimmt werden (Fjar u.a., 2008). Aufgrund der hohen Kosten beschränken sich

Landbohrungen während des Bohrens oft nur auf das Messen von Azimut und Inklination (Reich, 2015).

Wireline-Logging-Methods

Wireline-Logging-Methods umfassen neben den Messverfahren, wie sie auch bei MWD-Messungen zum Einsatz kommen, noch weitere Methoden, um ein Bohrloch zu vermessen oder die mechanischen Eigenschaften des anstehenden Gesteins zu erkunden. Für die Anwendung dieser Methoden muss der Bohrstrang aus dem Bohrloch entfernt werden. Wie der Name schon sagt, werden die Mess- oder Versuchsgeräte an einem Seil oder Gestänge hängend ins Bohrloch herabgelassen. Über akustische Messverfahren, sogenannte Sonic-Logs, ist es möglich, Informationen über die Lithologie oder die Porosität des Gesteins, sowie das Vorhandensein von Rissen oder Gas in den Gesteinsformationen zu gewinnen. Dazu werden durch einen Transmitter Druckimpulse auf die Bohrspülung aufgegeben und die Geschwindigkeit von Druckwellen an einem oberhalb liegenden Empfänger gemessen (Fjar u.a., 2008). Der Durchmesser eines Bohrlochs – bzw. bei Verformungen oder Ausbrüchen im Bohrloch die Durchmesser – können mit sogenannten Caliper-Logs bestimmt werden. Durch Abtasten der Bohrlochwand von vier- oder sechsarmigen Sonden werden diese über den Querschnitt der Bohrung erfasst. Die Dichte des Gesteins kann mit sogenannten Density-Logs bestimmt werden. Um die Dichte zu bestimmen, werden Neutronen auf die Gesteinsformation gestrahlt und gleichzeitig mit einem Detektor gemessen, wieviel Energie die Neutronen in der Formation verloren haben. Die ausgestrahlten Neutronen müssen, damit das Verfahren gelingt, die gleiche Masse haben wie Wasserstoff, damit sie beim „Aufprall“ auf Wasser möglichst viel Energie verbrauchen. Befindet sich viel Wasserstoff (z. B. in Form von Porenwasser) in den Poren des Gesteins, ist die Energie der Neutronen, die am Detektor ankommt, gering und die Dichte des Gesteins dementsprechend auch. Treffen die Neutronen nur auf Gesteinsmoleküle und werden reflektiert, ist die gemessene Energie am Detektor groß und die Dichte des Gesteins dementsprechend auch (Reich, 2015).

Direkte Aufschlüsse, insbesondere die Gewinnung von Bohrkernen, sind mit Seilkernsystemen bis in eine Tiefe von ca. 3 000 m möglich. Dazu wird eine doppelte Verrohrung in die Bohrung eingestellt. Die äußere Verrohrung entspricht einer rotierenden Bohrkronen, die den Bohrkern so weit freischneidet, dass die nicht rotierende, innenliegende Verrohrung den Bohrkern umschließen kann. Mit einem im Innenrohr enthaltenen Kernfänger wird der Bohrkern gelöst und beim Ziehen gehalten. Das 3 m bis 5 m lange Innenrohr samt Kern wird nach der Gewinnung zutage gefördert, wo der Bohrkern entnommen werden kann (Berli & Pingel, 1994).

Well-Tests

Das Ziel von Bohrlochversuchen, sogenannten Well-Tests, ist die Bestimmung mechanischer Gesteinseigenschaften sowie die Beschreibung des in situ Spannungszustands. Die Gesteinsfestigkeit kann nach Fjar u.a. (2008) in großen Tiefen bisher nicht direkt bestimmt werden. Es

können aber indirekte Rückschlüsse über empirische Korrelationen anhand von Sonic-Logs oder dem zutage gefördertem Bohrklein (Drill-Cuttings) gezogen werden. Dabei kommen geologische Erfahrungswerte aus der Lithologie oder standortspezifische Erfahrungswerte zum Einsatz (Fjar u.a., 2008).

Die Bestimmung des in situ Spannungszustands, dessen Hauptspannungskomponenten und deren Orientierung setzen sich aus mehreren Untersuchungen zusammen:

Die Vertikalspannungen σ_v werden aus dem Produkt der Dichte des Gesteins, bestimmt über Density-Logs, und der vertikalen Tiefe in ihrer Größe berechnet und in einer vertikalen Orientierung angenommen (Fjar u.a., 2008).

Die Orientierung der Horizontalspannungen σ_H und σ_h werden aus dem Ergebnis eines Caliper-Logs interpretiert. Sind die gemessenen Durchmesser des Caliper-Logs in alle Richtungen gleich groß, liegt ein axialsymmetrischer Spannungszustand vor, bei dem beide Horizontalspannungen gleich groß ($\sigma_H = \sigma_h$) sind. Wurden unterschiedlich große Durchmesser gemessen, liegt ein ovaler Bohrlochquerschnitt vor, was mit zwei unterschiedlich großen Horizontalspannungen ($\sigma_H > \sigma_h$) interpretiert wird. Die Entstehung eines ovalen Bohrlochquerschnitts wird wie folgt durch zwei Fehlermechanismen erklärt (Fjar u.a., 2008):

Ist der Druck aus der Bohrspülung im Verhältnis zu σ_H zu gering, kommt es durch die unzureichende Stützung im Bohrloch zu Ausbrüchen infolge von zu großen Umlagerungsspannungen an der Bohrlochwand. Die maximalen Umlagerungsspannungen stellen sich dabei an der Bohrlochwand in Richtung der kleineren Horizontalspannung σ_h ein, da hier die Spannungen um das Bohrloch infolge von σ_H maximal sind und zu einer Überschreitung der Gesteinsfestigkeit führen. Der größere Durchmesser zeigt also in die Richtung der kleineren Horizontalspannung (Fjar u.a., 2008).

Ist der Druck aus der Bohrspülung größer als σ_h , kann das Bohrloch aufreißen und ein Riss entsteht. Dieser entsteht in der Richtung von σ_H und öffnet sich in die dazu orthogonale Richtung von σ_h , da der Widerstand in dieser Richtung am geringsten ist. Dementsprechend weitet sich das Bohrloch in die Richtung der kleineren Horizontalspannung auf und der größere Durchmesser zeigt auch hier in die Richtung von σ_h (Fjar u.a., 2008).

Die Größe der kleineren Horizontalspannung σ_h kann mittels Leak-Off-Tests (LOT), Mini-Frac-Tests oder Wireline-Fracture-Tests durch die Rissentstehung unter Überdruck im Bohrloch bestimmt werden. Bei einem LOT wird in dem gesamten Bohrloch ein Überdruck erzeugt, sodass unterhalb des bereits ausgekleideten und verrohrten Bohrlochs an der Bohrlochwand ein

Riss erzeugt werden kann. Ein LOT kann auch in den Bohrpausen, während ein neuer Zug aufgesetzt wird, durchgeführt werden und wurde ursprünglich zur Bemessung der Bohrspülung für den nächsten Bohrabchnitt eingesetzt. Ein Leak-Off-Test, bei dem gezielt die kleinere Horizontalspannung bestimmt werden soll, wird auch als Extended Leak-Off-Test (XLOT) bezeichnet. Bei einem XLOT wird durch konstantes Einpumpen von Bohrspülung der Druck im Bohrloch so lange erhöht, bis ein Riss erzeugt ist. Im Anschluss wird das Einpumpen gestoppt und der Druck aufgezeichnet, bei dem der Riss sich schließt. Dieser ist nach dem Abfallen des Drucks durch das Abstellen der Pumpen, durch die zurückströmende Bohrspülung aus dem Riss noch einige Zeit konstant und dadurch erkennbar, bis der Druck danach endgültig wieder abfällt. Der Druck aus der zurückströmenden Bohrspülung wird als Flowback bezeichnet und als die kleinere Horizontalspannung interpretiert. Der zur Risserzeugung aufzubringende Überdruck muss also mindestens die Summe aus der kleinsten Hauptspannung und der Zugfestigkeit des Gesteins überschreiten. Bei Mini-Frac-Tests oder Wireline-Fracture-Tests ist das Vorgehen zur Bestimmung der kleinen Horizontalspannung ähnlich, nur dass hier lediglich punktuell untersucht wird. Das Bohrloch wird z. B. durch den Einsatz von Doppelpackern begrenzt und damit geht weniger Bohrspülung in der Gebirgsformation verloren, allerdings muss der Bohrstrang vor der Untersuchung geräumt werden (Fjar u.a., 2008).

Bisher gibt es keine einfache Methode, die größere Horizontalspannung σ_H durch Bohrlochmessungen oder -versuche zu bestimmen. Diese kann bestenfalls durch Anwendung der Plastizitätstheorie und geeigneter Grenzbedingungen invers bestimmt werden (Fjar u.a., 2008).

3.5. Abschätzung der mittleren Hauptspannung

Ein Ansatz, nach dem die Größe der größeren Horizontalspannung σ_H abgeschätzt werden kann, liefert die Annahme, dass die Horizontalspannungen nicht größer sein können, als die Gleitreibung in der Erdkruste es zulässt. Bei der Bemessung von σ_H wird die Reibung über den Reibungskoeffizienten μ beschrieben, der empirisch, aufbauend auf einer großen Anzahl von Scherversuchsergebnissen unter Spannungsrandbedingungen, die einer Tiefe von 5 km bis 6 km entsprechen, angesetzt wird (Moeck u.a., 2009). Die vorgeschlagene Bemessung, die ausschließlich auf der Berücksichtigung von Reibung beruht, entspricht der in der Geotechnik standardmäßig verwendeten Bemessung des passiven Erddrucks. Das Verhältnis zwischen einer maximalen und einer minimalen Hauptspannung kann, unter Verwendung der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb, durch den passiven Erddruckbeiwert K_p beschrieben werden. In der Geotechnik wird die Reibung konventionell über den Ansatz des Reibungswinkels φ , der nach Gl.(3.8) in den Reibungskoeffizienten μ überführt werden kann, berücksichtigt (Gudehus, 1981).

$$\tan \varphi = \mu \quad (3.8)$$

Der Zusammenhang zwischen der von Moeck u.a. (2009) verwendeten Annahme und dem passiven Erddruck der Coulombschen Hypothese nach Gudehus (1981) ist in Gl.(3.9) dargelegt. σ_v, σ_H und σ_h werden je nach vorliegender tektonischer Struktur ihrer Größe nach sortiert, über den hydrostatischen Wasserdruck in wirksame Spannungen umgerechnet und für die größte Hauptspannung σ_1 und die kleinste Hauptspannung σ_3 in Gl.(3.9) eingesetzt. Die mittlere Hauptspannung σ_2 wird bei dieser Betrachtung als neutral und die Haftfestigkeit der Kohäsion auf der Scherebene der Verwerfung als „überwunden“ vorausgesetzt.

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \left(\sqrt{\mu^2 + 1} + \mu \right)^2 = \tan^2 \left(45 + \frac{\varphi}{2} \right) = K_p \quad (3.9)$$

Anhand von Gl. (3.9) können unter Vorgabe der Vertikalspannung zwei mögliche, ausschließlich auf Reibung basierende Grenzwerte für die in situ Horizontalspannungen σ_h und σ_H nach Gl. (3.10) und Gl. (3.11) berechnet werden:

$$\sigma_h \geq \frac{\sigma_v}{K_p} \quad (3.10)$$

$$\sigma_H \leq \sigma_v K_p \quad (3.11)$$

In einem Diagramm, auf dessen Achsen die Horizontalspannungen σ_H und σ_h angetragen sind, kann mit den beiden Grenzwerten, aufgetragen als Punkte auf der Fließfläche, nach Mohr-Coulomb ein Spannungspolygon gebildet werden. Als Skala auf den Achsen des Diagramms wird die Vertikalspannung verwendet. Diese 2D-Darstellung entspricht einer Betrachtung der Mohr-Coulombschen Fließfläche im Hauptspannungsraum, aus Sicht der Vertikalspannungen σ_v . Bereiche innerhalb der Fließfläche, in denen $\sigma_H \leq \sigma_h$ gilt, werden nicht dargestellt. Das anhand der Grenzwerte aufgetragene Spannungspolygon beinhaltet Bereiche von unterschiedlichen Hauptspannungskombinationen, die den in Abbildung 3.1 aufgetragenen Verwerfungen zugeordnet sind. In Abbildung 3.4 ist ein exemplarisches Spannungspolygon nach Moos und Zoback (1990) dargestellt. Die Darstellung erfolgt mit wirksamen Spannungen.

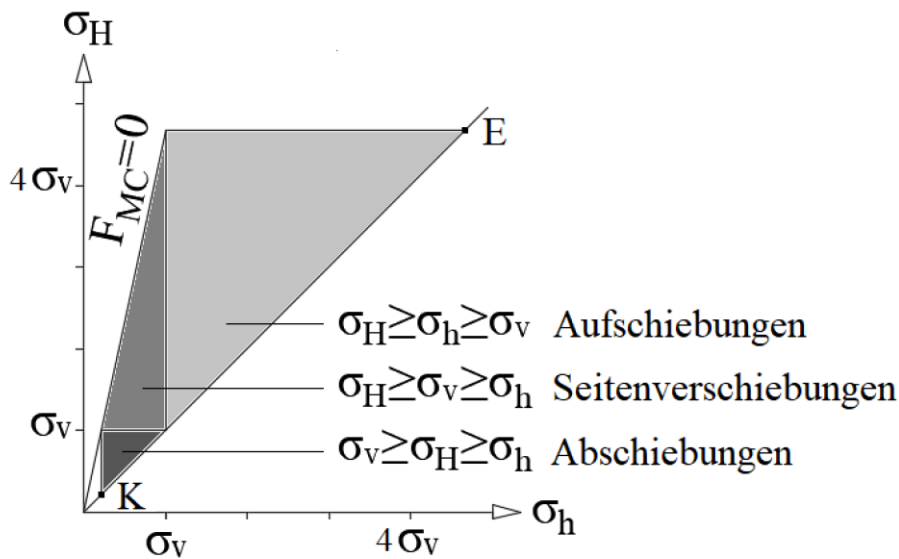


Abbildung 3.4: Polygon zulässiger Spannungen für unterschiedlich orientierte Verwerfungen, σ_v , σ_h und σ_H sind darin wirksame Spannungen nach Moos & Zoback (1990)

Anhand von Abbildung 3.5 kann für eine Abschiebung ($\sigma_v \geq \sigma_H \geq \sigma_h$), in Abhängigkeit von der Vertikalspannung σ_v die kleinste zulässige Horizontalspannung σ_h bestimmt werden. Die größere Horizontalspannung σ_H wird innerhalb des zulässigen Bereichs von Abschiebungen so gewählt, dass sie dem Mittelwert aus σ_v und σ_h entspricht (Moeck u.a., 2009).

Eine solche Abschätzung des in situ Spannungszustands ist empfehlenswert, solange die Verwerfung sich im Grenzzustand befindet. Derartige Verformungen können auch nach dem Abklingen von tektonischen Spannungen oder oberflächlich vielleicht bereits abgetragenen Vertikallasten noch vorhanden sein. In einem solchen Fall, wäre es zusätzlich erforderlich, bei einer auf der Plastizitätstheorie beruhenden Abschätzung auch Kohäsion nach Gl. (3.5) zu berücksichtigen.

3.6. Spannungen um ein Bohrloch

Um die Bohrlochstabilität untersuchen zu können, muss zunächst der um ein Bohrloch wirkende Spannungszustand bekannt sein. Die Bestimmung der Koordinaten einer geothermischen Bohrung ist im Anhang A.1 beschrieben. Der in situ Spannungszustand wird für Stabilitätsbetrachtungen durch Koordinatentransformation auf ein lokales Koordinatensystem in Bohrrichtung umgerechnet. Wie in Abbildung 3.5 ersichtlich, müssen dafür die in situ Spannungen ($\sigma_v, \sigma_H, \sigma_h$) durch den Azimut η um die Vertikalachse σ_v und durch die Inklinationswinkel ξ um die Horizontalachse σ_h gedreht werden. Der Azimut in Nordrichtung entspricht 0° oder 360°

und nimmt im Uhrzeigersinn zu. Die Inklination entspricht in vertikaler Richtung 0° und in horizontaler Richtung 90° .

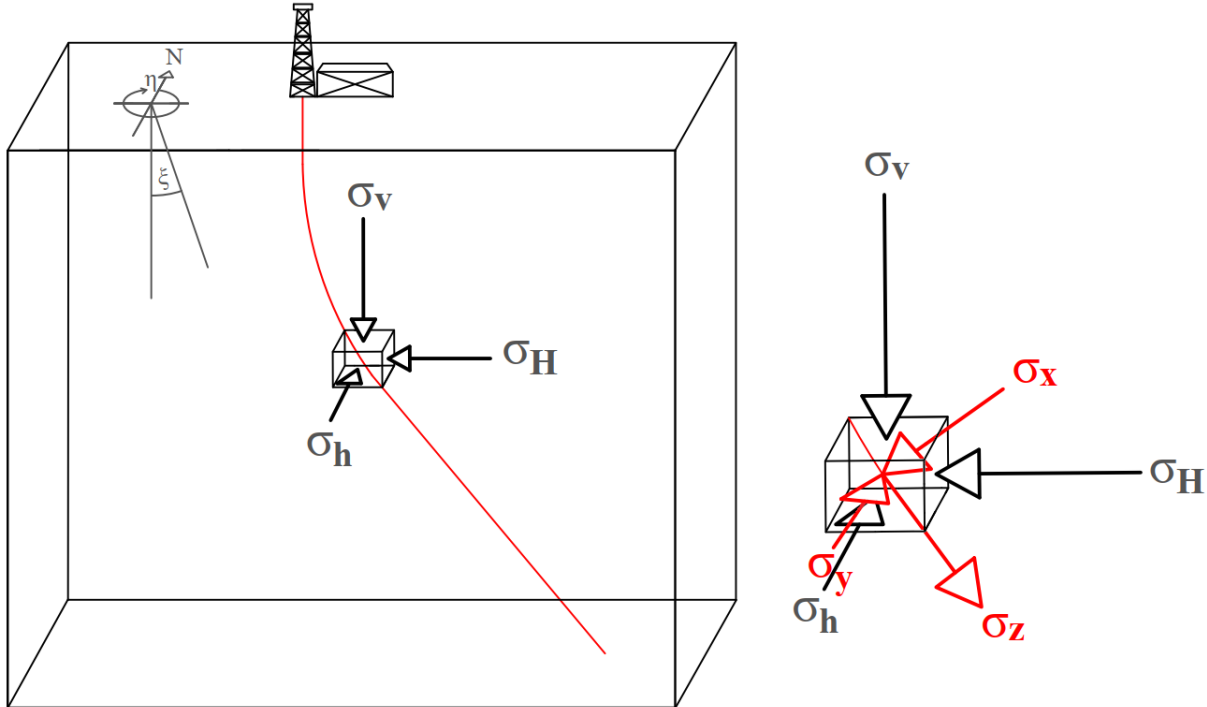


Abbildung 3.5: Transformation der in situ Spannungen auf die lokalen Koordinaten des Bohrlochs

In Gl.(3.12) sind die Transformationsgleichungen der Hauptspannungen $(\sigma_v, \sigma_H, \sigma_h)$ in das lokale Koordinatensystem in Bohrrichtung $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ nach Aadnoy & Looyeh (2010) dargestellt. Die Herleitung und die komplette Transformation mit Schubspannungen ist im Anhang in Gl. (A.8) aufgeführt.

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_h \cos^2 \eta \cdot \cos^2 \xi + \sigma_H \sin^2 \eta \cdot \cos^2 \xi + \sigma_v \sin^2 \xi \\ \sigma_y &= \sigma_h \sin^2 \eta + \sigma_H \cos^2 \eta \\ \sigma_z &= \sigma_h \cos^2 \eta \cdot \sin^2 \xi + \sigma_H \sin^2 \eta \cdot \sin^2 \xi + \sigma_v \cos^2 \xi\end{aligned}\tag{3.12}$$

Über eine weitere Koordinatentransformation kann der lokale Spannungszustand in Bohrrichtung in Zylinderkoordinaten ausgedrückt werden. Dazu wird das lokale kartesische Koordinatensystem $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ um die Längsachse der Bohrung, was der Orientierung von σ_z entspricht, um den Winkel ω gedreht. Die Spannungen des kartesischen Koordinatensystems werden in die Radialspannung σ_r und die Tangentialspannung σ_ω sowie die dazugehörigen

Schubspannungen transformiert, wobei σ_z unverändert bleibt. Abbildung 3.6 zeigt die Transformation aus der Sicht von σ_z ohne die dazugehörigen Schubspannungen (Aadnoy & Looyeh, 2010).

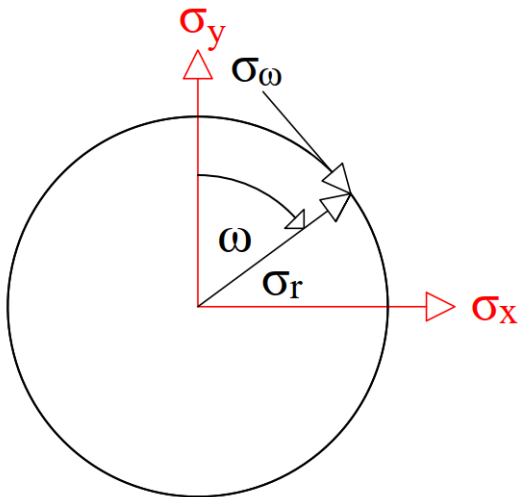


Abbildung 3.6: Schematische Darstellung der Transformation von kartesischen Koordinaten in Zylinderkoordinaten (Schubspannungen sind hier nicht mit dargestellt)

In Gl.(3.13) ist die Transformation des lokalen Spannungszustands von kartesischen Koordinaten in Zylinderkoordinaten dargelegt. Die Herleitung und die vollständige Transformation mit den dazugehörigen Schubspannungen ist im Anhang in Gl. (A.11) dargelegt (Aadnoy & Looyeh, 2010).

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \sigma_x \sin^2 \omega + \sigma_y \cos^2 \omega - \tau_{xy} \sin 2\omega \\ \sigma_\omega &= \sigma_x \cos^2 \omega + \sigma_y \sin^2 \omega + \tau_{xy} \sin 2\omega \\ \sigma_z &= \sigma_z\end{aligned}\quad (3.13)$$

Anhand dieser Transformationen kann der in situ Spannungszustand in Zylinderkoordinaten entlang der Bohrung beschrieben werden. Die Herstellung der Bohrung hat jedoch eine Änderung des Spannungszustands zur Folge. Für einen ebenen Verformungszustand sowie den Randbedingungen, dass Radial- und Schubspannung bei einer ungestützten Bohrung am Bohrlochrand verschwinden und in einem ausreichend großen Abstand zur Bohrung wieder der in situ Spannungszustand herrscht, kann die Änderung der Spannungen um ein Bohrloch mit der Gleichung nach Kirsch beschrieben werden. Diese gilt jedoch nur für ungestützte Bohrlöcher und muss daher mit der Theorie nach Lamé für ein elastisches, dickwandiges Rohr um den inneren und äußeren Druck erweitert werden. Als Randbedingung wird für den inneren Druck der gleichmäßig verteilte Innendruck σ_n am Bohrlochrand mit dem Radius r_b vorgegeben, für den äußeren Druck bei einem Radius r in einem ausreichend großen Abstand von der Bohrung

der entsprechende in situ Spannungszustand (Kolymbas, 1998). Die modifizierte Gleichung nach Kirsch, wie sie auch in Fjar u.a. (2008) und Aadnoy & Looyeh (2010) verwendet wird, ist in Gl. (3.14) dargelegt.

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \left(1 - \frac{r_B^2}{r^2}\right) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \left(1 + 3\frac{r_B^4}{r^4} - 4\frac{r_B^2}{r^2}\right) \cos 2\omega \\ &\quad + \tau_{xy} \left(1 + 3\frac{r_B^4}{r^4} - 4\frac{r_B^2}{r^2}\right) \sin 2\omega + \frac{r_B^2}{r^2} \sigma_n \\ \sigma_\omega &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \left(1 + \frac{r_B^2}{r^2}\right) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \left(1 + 3\frac{r_B^4}{r^4}\right) \cos 2\omega \\ &\quad - \tau_{xy} \left(1 + 3\frac{r_B^4}{r^4}\right) \sin 2\omega - \frac{r_B^2}{r^2} \sigma_n \\ \sigma_z &= \sigma_z - 2\nu(\sigma_x - \sigma_y) \frac{r_B^2}{r^2} \cos 2\omega - 4\nu\tau_{xy} \frac{r_B^2}{r^2} \sin 2\omega\end{aligned}\tag{3.14}$$

Die dazugehörigen Schubspannungen sind im Anhang in Gl. (A.12) aufgeführt. In Abbildung 3.7 ist exemplarisch die Änderung des Spannungszustands um eine Bohrung nach Gl. (3.14) dargestellt. Auf der Ordinate ist die Größe der Normalspannungen und auf der Abszisse der Abstand vom Bohrloch über den Radius r aufgetragen.

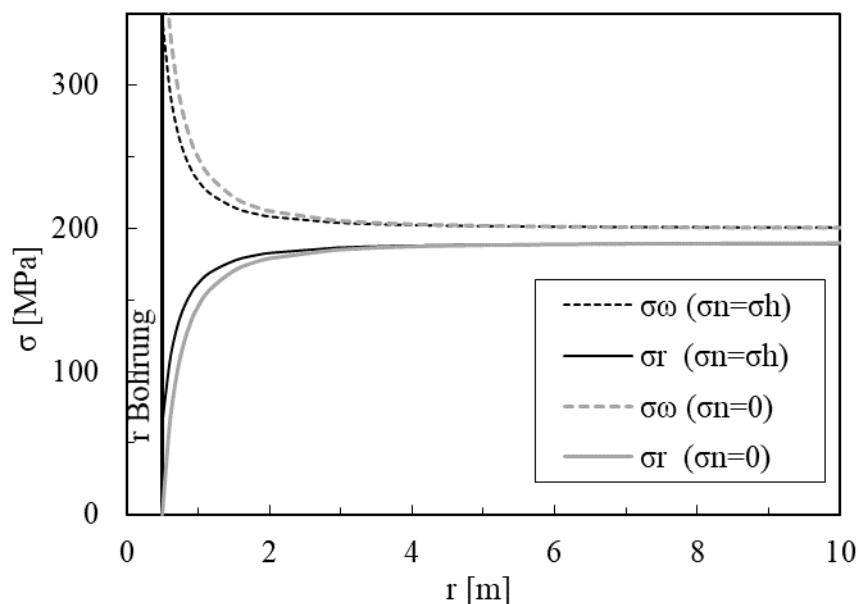


Abbildung 3.7: Spannungen um ein ungestütztes ($\sigma_n = 0$) und gestütztes ($\sigma_n = \sigma_h$) Bohrloch

Hier wird ersichtlich, dass die Tangentialspannungen σ_ω um eine Bohrung deutlich größer werden können als die in situ Spannungen. Die Radialspannungen σ_r hingegen nehmen am

Rand der Bohrung im Vergleich dazu geringere Werte an und liegen bei ungestützten Bohrlöchern bei null. Ein Vergleich der gestützten Tangentialspannungen mit den ungestützten zeigt, dass diese durch die stützende Wirkung von σ_n ebenfalls reduziert werden. In einem ausreichenden Abstand zur Bohrung nehmen die Radial- und Tangentialspannungen wieder die Werte der in situ Spannungen an.

3.7. Bestimmung der Stabilität von unausgekleideten Bohrlöchern

Um die Stabilität der Bohrung an jeder Stelle des Bohrverlaufs sicherzustellen und Instabilitäten zu vermeiden, ist die Stützung des Bohrlochs durch die Bohrspülung von entscheidender Bedeutung. Die Sicherstellung der Bohrlochstabilität von unverrohrten Bohrabschnitten erfolgt konventionell über die Bemessung des stützenden hydrostatischen Drucks der Bohrspülung, der über das Eigengewicht der Bohrspülung bestimmt wird. Das Eigengewicht wird, um der Ausbildung von Rissen um das Bohrloch entgegenzuwirken, maximal auf die Größe der kleinen Horizontalspannung σ_h eingestellt. Die untere Grenze des Eigengewichts stellt der in situ Porenwasserdruck P_w dar, damit kein Porenwasser in die Bohrung eindringen kann. Dieser wird aus dem Produkt von der Wichte des Wassers mit der Tiefe unter GOK bestimmt. Der Bereich zwischen diesen Grenzwerten wird als Spülungsfenster bezeichnet und ist in Abbildung 3.8 grau hinterlegt dargestellt (Backers u.a., 2013).

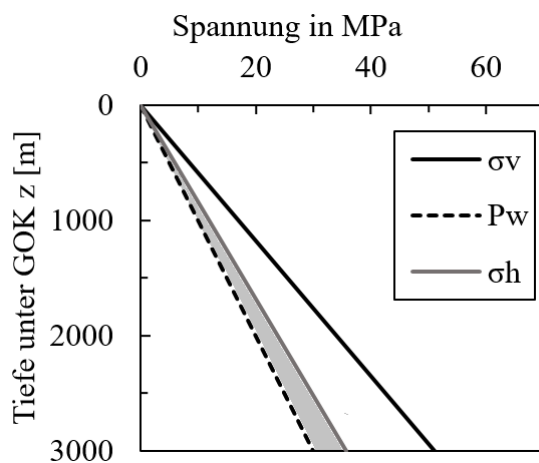


Abbildung 3.8: Exemplarische Grenzwerte des grau hinterlegten Spülungsfensters

Sind die in situ Horizontalspannungen größer als die Vertikalspannungen, ist dieses Vorgehen zur Bemessung des Eigengewichts der Bohrspülung jedoch problematisch, da der hydrostatische Druck der Bohrspülung derart groß angesetzt werden muss, dass es zu einer Überschreitung der Zugfestigkeit des Gesteins kommen kann (Fjar u.a., 2008). Dieses Problem wird allgemein als „Fracturing“ oder „Fracking“ bezeichnet (Aadnoy & Looyeh, 2010) und steht nicht im Fokus dieser Arbeit.

Der konventionellen Bemessungsweise liegt die Annahme zugrunde, dass die Vertikalspannungen einer Hauptspannungsrichtung entsprechen und dass sich die Horizontalspannungen aus diesen mittels K_p ableiten lassen. Erreicht ein Spannungszustand am Rand der Bohrung den Grenzzustand der Gesteinsfestigkeit, kann dies von Ausbrüchen am Bohrlochrand bis zu einem Kollaps der Bohrung führen. Derartige Spannungszustände können durch den hydrostatischen Druck der Bohrspülung, also durch eine Erhöhung der Radialspannungen, gestützt werden. In Abbildung 3.9 ist exemplarisch die stützende Wirkung des hydrostatischen Drucks der Bohrspülung σ_n dargestellt. Es wird der Vergleich eines nicht ausreichend gestützten Spannungszustands σ_r, σ_ω (schwarzer Spannungskreis) mit einem durch die Bohrspülung ausreichend gestützten Spannungszustand $\sigma_r(\sigma_n), \sigma_\omega(\sigma_n)$ (grauer Spannungskreis) gezeigt. Die Radialspannungen entsprechen jeweils der kleinsten und die Tangentialspannungen jeweils der größten Hauptspannung. Der Grenzzustand der Gesteinsfestigkeit wird hier mit der Schergeade nach Mohr-Coulomb festgelegt. Durch die Anhebung der Radialspannungen im Bohrloch um die Größe von σ_n berührt der Spannungskreis nicht die Bruchgerade und die Grenzbedingung wird nicht verletzt (Aadnoy & Looyeh, 2010).

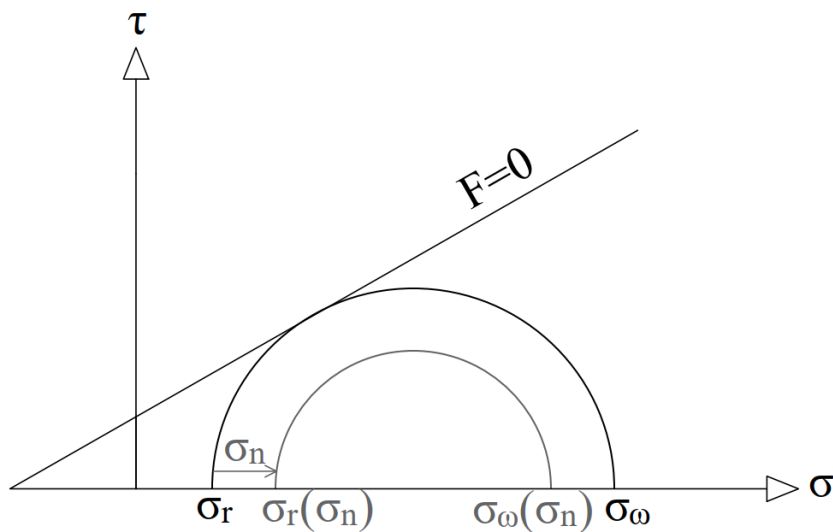


Abbildung 3.9: Stützende Wirkung der Bohrspülung (σ_n)

Um den Grenzzustand des Gesteins zu berücksichtigen, ist wie in Abbildung 3.9 exemplarisch gezeigt, die Verwendung einer Grenzbedingung erforderlich. Da der Berechnungsansatz nach Gl. (3.14) auf elastischem Materialverhalten beruht, werden unter dessen Verwendung auch Spannungszustände zugelassen, welche bereits den Grenzzustand erreicht haben und somit nicht zulässig sind. Für den ebenen Verformungszustand ist es möglich eine analytische Lösung zu formulieren, welche plastisches Materialverhalten berücksichtigt. Dazu werden die Spannungszustände um ein Bohrloch in einen elastischen und einen plastischen Bereich unterteilt. Spannungszustände im elastischen Bereich erfüllen die Grenzbedingung und entsprechen der

Lösung nach Gl. (3.14). Innerhalb des plastischen Bereichs werden für alle Radien r Spannungen nach Gl. (3.15) berechnet, welche die Grenzbedingung erfüllen (Kolymbas, 1998).

$$\sigma_r = (\sigma_n + c \cot \varphi) \left(\frac{r}{r_B} \right)^{K_p - 1} - c \cot \varphi$$

$$\sigma_\omega = K_p (\sigma_n + c \cot \varphi) \left(\frac{r}{r_B} \right)^{K_p - 1} - c \cot \varphi$$
(3.15)

Der Übergang zwischen den beiden Bereichen ist bei dem Radius erreicht, an dem die Radialspannungen des plastischen Bereichs mit denen des elastischen Bereichs übereinstimmen. Der Unterschied zwischen rein elastischen Spannungen zu einer Unterteilung der Spannungen in einen plastischen und elastischen Bereich um eine Bohrung ist in Abbildung 3.10 dargestellt. Danach ist die zulässige Differenz zwischen Tangential- und Radialspannungen unter Berücksichtigung der Plastizität deutlich kleiner als unter elastischem Materialverhalten angenommen wird.

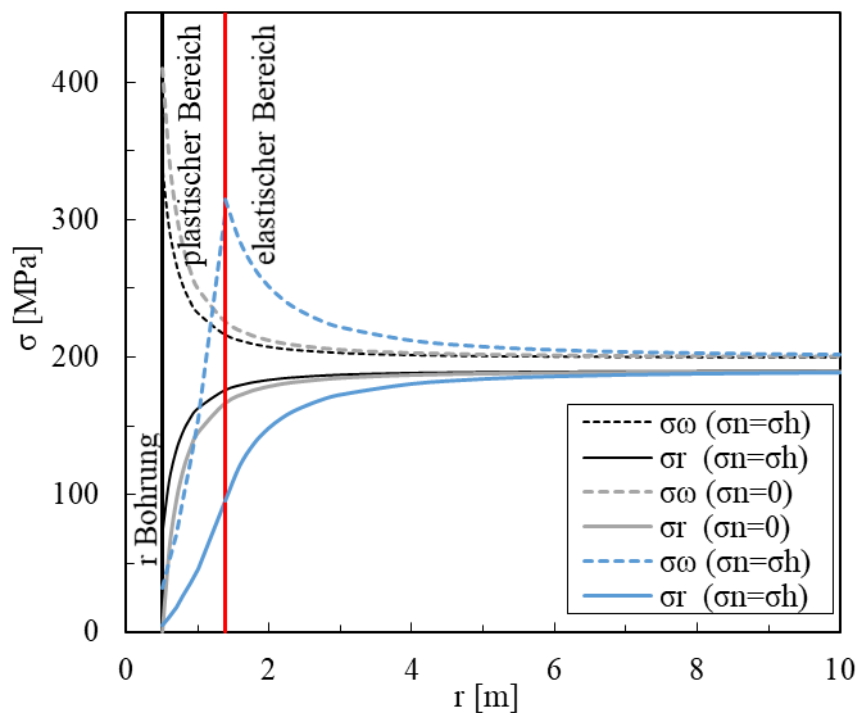


Abbildung 3.10: Spannungen um ein Bohrloch unter Berücksichtigung der Plastizität

Kolymbas (1998) kommt zu dem Schluss, dass: „die analytische Lösung dieses Problems extrem kompliziert ist und somit keine Vorteile gegenüber numerischen Lösungen (z. B. nach der Methode der Finiten Elemente) bietet“. Zusätzlich sind derartige Lösungen auf einen ebenen Verformungszustand begrenzt und darauf, dass die Normalspannungen in Bohrrichtung einer Hauptspannungsrichtung entsprechen (Kolymbas, 1998).

3.8. Zwischenfazit zu konventionellen Stabilitätsbetrachtungen

Eigene Untersuchungen mittels der FEM-Software PLAXIS 2D an einer elastisch gelochten Scheibe und eine im Rahmen dieser Untersuchungen initiierte und betreute Masterarbeit von Sekulla (2017) haben gezeigt, dass unter der Annahme eines ebenen Verformungszustands eine Bohrung modelliert und die Spannungen um die Bohrung numerisch entsprechend der oben aufgeführten Theorien berechnet werden können. Bei den Berechnungen wurde die Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb verwendet. Die Untersuchungen umfassen unter anderem die Festlegung einer geeigneten Modellgröße für eine Bohrung mit einem Durchmesser von einem Meter sowie die Auswirkungen unterschiedlicher in situ Spannungen auf die Spannungszustände am Bohrlochrand. Aufgrund des ebenen Verformungszustands konnte lediglich der Einfluss von Horizontalspannungen um eine Bohrung untersucht werden, da unter dieser Annahme die Spannungen normal zur Scheibenebene keiner realen Größenordnung entsprachen. Da sowohl in situ Spannungszustände als auch durch eine Bohrung gestörte Spannungszustände drei unterschiedlich große Hauptspannungen aufweisen können, werden weitere Untersuchungen an einem 3D-Modell angestrebt, mit welchem der Einfluss realer in situ Spannungszustände auf die Bohrlochstabilität untersucht werden kann. Dabei kam gleichzeitig die Frage auf, welchen Einfluss die mittlere Hauptspannung auf die Gesteinsfestigkeit hat, da diese in der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb keine Berücksichtigung findet. Um weitere numerische Untersuchungen an einem 3D-Modell mit realen in situ Spannungen durchzuführen, wird zunächst der Einfluss von Spannungszuständen mit drei unterschiedlichen Hauptspannungen auf die Gesteinsfestigkeit betrachtet.

4. Einfluss der Gesteinsfestigkeit auf die Bohrlochstabilität

Um den Einfluss eines Spannungszustands mit drei unterschiedlich großen Hauptspannungen auf die Gesteinsfestigkeit und damit auf die Bohrlochstabilität untersuchen zu können, sind dreidimensionale numerische Berechnungen erforderlich (Fjar u.a., 2008). Durch Einsetzen der Hauptspannungen in eine Grenzbedingung und dem Ansatz von Materialparametern kann unterschieden werden, ob diese in der numerischen Berechnung in einem Punkt eines Kontinuums zum Versagen des Materials führen (Gudehus, 1995). Die Materialparameter müssen für die Beschreibung des Materialverhaltens von Fels (wie auch die Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb) mindestens Reibung als auch Kohäsion berücksichtigen (Kosmann & Perau, 2021). Wie bereits unter 3.2 bei der Beschreibung des Zusammenhangs von Spannungszuständen und Verwerfungen sowie unter 3.3 bei der Berechnung der großen Horizontalspannung σ_H beschrieben, liegt diesen geophysikalischen Betrachtungen die Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb zugrunde (Moeck u.a., 2009). Konventionellen numerischen Stabilitätsbetrachtungen von gestützten Bohrlöchern liegt diese Grenzbedingung ebenfalls zugrunde (Fjar u.a., 2008).

In die Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb gehen lediglich die größte und die kleinste Hauptspannung ein, und der Einfluss der mittleren Hauptspannung wird nicht berücksichtigt. Da in situ Spannungszustände durchaus drei unterschiedlich große Hauptspannungen aufweisen, muss zunächst untersucht werden, ob die Gesteinsfestigkeit mit einer Grenzbedingung, in welche die mittlere Hauptspannung nicht eingeht, zutreffend beschrieben werden kann.

4.1. Untersuchungen der Gesteinsfestigkeit nach Mogi

Um den Einfluss von in situ Spannungszuständen, denen drei unterschiedlich große Hauptspannungen zugrunde liegen, auf die Gesteinsfestigkeit zu zeigen, haben Mogi (2007), Ma u.a. (2017) sowie Couture & Besuelle (2019) echte Triaxialversuche an unterschiedlichen Gesteinsarten durchgeführt.

Abbildung 4.1 zeigt schematisch einen echten Triaxialversuch, bei dem die drei Hauptspannungen unterschiedliche Werte annehmen. Bei konventionellen Triaxialversuchen, wie in Abbildung 2.6 dargestellt, werden zwei Spezialfälle echter Triaxialversuche, triaxiale Kompression ($\sigma_1 \geq \sigma_2 = \sigma_3$) und triaxiale Extension ($\sigma_1 = \sigma_2 \geq \sigma_3$) untersucht. In echten Triaxialversuchen können zusätzlich alle dazwischen liegenden Hauptspannungskombinationen $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ untersucht werden. Bei der Durchführung echter Triaxialversuche werden die kleinste Hauptspannung σ_3 und die mittlere Hauptspannung σ_2 voreingestellt und dann die größte Hauptspannung σ_1 so lange gesteigert, bis der Bruch des Probekörpers eintritt. Das Versuchsergebnis liefert ein Hauptspannungstripel, bei dem sich das Gestein im Grenzzustand befindet und versagt (Mogi, 2007).

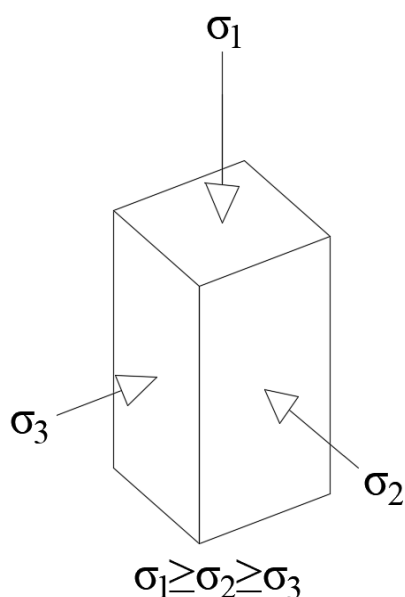


Abbildung 4.1: Versuch unter echten triaxialen Bedingungen

In dieser Arbeit werden für die gemachten Untersuchungen maßgeblich die Versuche von Mogi (2007) herangezogen. Wie bereits in Kosmann & Perau (2021) beschrieben, hat Mogi ein Versuchsgerät entwickelt, um die Gesteinsfestigkeit und insbesondere den Einfluss der mittleren Hauptspannung darauf zu untersuchen. Dazu wurden von Mogi (2007) Überlegungen angestellt, wie der konventionelle Triaxialversuch nach Kármán erweitert werden kann, um die mittlere Hauptspannung, unabhängig von den beiden anderen, aufbringen zu können. Das Versuchsgerät von Mogi wurde so konzipiert, dass bei einem quaderförmigen Probekörper innerhalb einer Druckzelle die größte und mittlere Hauptspannung über Druckstempel, aufgebracht werden. Die kleinste Hauptspannung wird über ein Fluid auf den quaderförmigen Probekörper aufgegeben (Abbildung 4.1). Der Probekörper hat eine quadratische Grundfläche und eine ausreichende Schlankheit, die einem Verhältnis der Länge zur Breite von etwa 2 entspricht, wie sie auch bei normierten Triaxialversuchen gefordert wird. Dadurch wird vermieden, dass sich Spannungen, die von dem angestrebten homogenen Zustand abweichen, in dem Versagensbereich das Versuchsergebnis beeinflussen. Die Druckstempel in Längsrichtung, welche die größte Hauptspannung aufgeben, werden an den Außenkanten kehlförmig mit dem Probekörper verklebt. So wird der Probekörper an der Außenkante gestützt und Spannungskonzentrationen an dieser unterbunden (Mogi, 2007). Eine inhomogene Spannungsverteilung infolge von Reibung in Längsrichtung durch die Druckstempel in Querrichtung, welche die mittlere Hauptspannung aufgeben, wird durch eine Schmierschicht aus Teflon unterbunden. Damit kein Teflon in die Probe eindringt, wird diese durch ein dünnes Kupferblech geschützt. Der Probekörper ist, um eine Verformung in Längsrichtung zu ermöglichen, etwas größer als die Druckstempel in Querrichtung. Das Fluid, welches die kleinste Hauptspannung aufgibt, wird durch ein Silikon-Gummi vom Probekörper getrennt (Mogi 2007). Mogis Fotodokumentation (Mogi 2007) der von ihm untersuchten Probekörper, zeigt keine Auspressungen oder Schäden durch Spannungskonzentrationen an den Außenrändern. Somit kann davon ausgegangen werden, dass drei unterschiedlich große Hauptspannungen ohne störende Randeinflüsse aufgegeben und bis zum Bruchzustand gesteigert werden können.

Um die Versuchsergebnisse auszuwerten, haben verschiedene Autoren die aus ihren Versuchen resultierenden Hauptspannungstripel als Punkte in einem Diagramm dargestellt. Um den Einfluss der mittleren Hauptspannung interpretieren zu können, wird die größte Hauptspannung σ_1 auf der Ordinate und die mittlere Hauptspannung σ_2 auf der Abszisse des Diagramms aufgetragen. Spannungstripel mit identischer kleinster Hauptspannung σ_3 werden bei dieser Darstellungsart in einer einheitlichen Farbe aufgetragen, um diese einander zuzuordnen zu können. Werte aus einem einaxialen Druckversuch können hinzugezogen und auf der Ordinate angetragen werden. Diese Darstellung der Spannungstripel entspricht der $\sigma_1 - \sigma_2 - Ebene$ im

Hauptspannungsraum aus Sicht von σ_3 . Für die Auswertung werden die von Mogi (2007) untersuchten Gesteinsarten Dolomit und Kalkstein, wie sie auch im Malm des bayrischen Molassebeckens vorkommen, herangezogen. Die Versuchsergebnisse nach Mogi (2007) sind in Abbildung 4.2 dargestellt und die zugrunde liegenden Hauptspannungstriplet tabellarisch im Anhang A.3 aufgeführt. Für eine bessere Übersicht sind in Abbildung 4.2 zwei gestrichelte Geraden dargestellt, auf denen Spannungstriplet konventioneller Triaxialversuche liegen, die triaxialer Extension oder Kompression entsprechen. Es wird ersichtlich, dass die von Mogi (2007) durchgeführten Versuche überwiegend im Kompressionsbereich liegen und der Extensionsbereich nicht untersucht wurde.

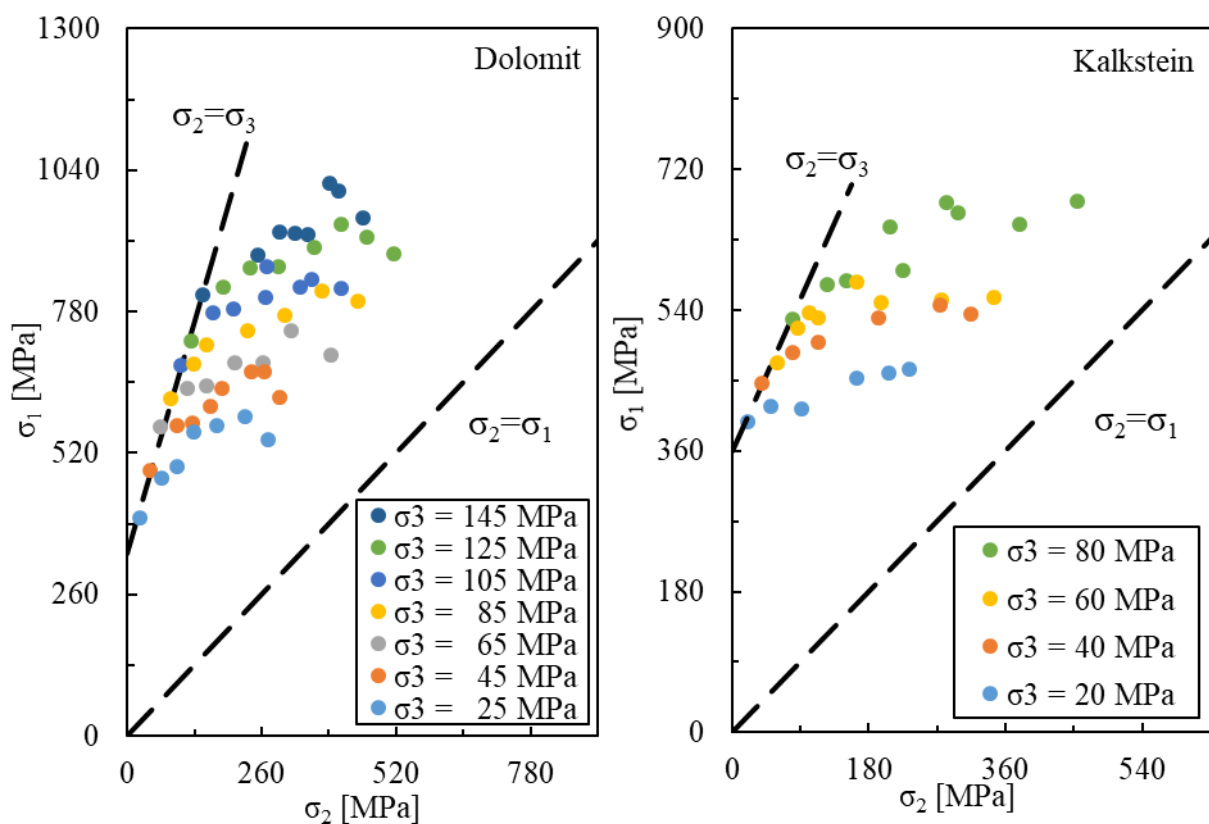


Abbildung 4.2: Ergebnisse echter triaxialer Versuche für Dolomit und Kalkstein nach Mogi (2007): Jeder Punkt stellt eine Hauptspannungskombination dar, die zum Bruch führt.

Die in Abbildung 4.2 aufgetragenen Versuchsergebnisse zeigen den Einfluss der mittleren Hauptspannung auf die Gesteinsfestigkeit. Zusammengehörende Spannungstriplet mit konstanter kleinster Hauptspannung σ_3 weisen mit zunehmender mittlerer Hauptspannung σ_2 zunächst eine Steigerung der Gesteinsfestigkeit auf. Im Übergangsbereich zwischen Kompression und Extension fällt mit zunehmender mittlerer Hauptspannung σ_2 die Gesteinsfestigkeit wieder ab.

Die Gesteinsfestigkeit innerhalb von Versuchsergebnissen mit konstanter kleinster Hauptspannung σ_3 , kann unter zunehmender mittlerer Hauptspannung σ_2 , demnach mit der Form einer Kurve und damit einhergehend mit einer nicht linearen Funktion beschrieben werden (Kosmann & Perau, 2021).

Dass die mittlere Hauptspannung einen Einfluss auf die Gesteinsfestigkeit haben kann, lässt sich auch durch unterschiedliche Orientierungen der sich im Grenzzustand in den Probekörpern einstellenden Scherebenen belegen. Die Orientierung der Scherebenen kann dabei durch die Normale der Ebene beschrieben werden. Bei echten Triaxialversuchen ergab sich je nach Gesteinsart eine unterschiedlich orientierte Scherebene. Bei dem untersuchten Kalkstein waren die Scherebenen überwiegend orthogonal zur mittleren Hauptspannung orientiert, sodass die Normalspannungen auf den Scherebenen nur wenig durch die mittlere Hauptspannung beeinflusst wurden. Die Normalen der Scherebenen des untersuchten Dolomits waren nicht orthogonal zur mittleren Hauptspannung orientiert, sodass die Normalspannungen auf den Scherebenen deutlich von der mittleren Hauptspannung beeinflusst wurden (Mogi, 2007). Zur Verdeutlichung dieser Zusammenhänge ist in Abbildung 4.3 links eine Scherebene dargestellt, deren Normale \mathbf{n} orthogonal zur mittleren Hauptspannung orientiert ist (z.B. Kalkstein) und rechts eine Scherebene, dessen Normale \mathbf{n} deutlich von einer orthogonalen Orientierung abweicht (z.B. Dolomit).

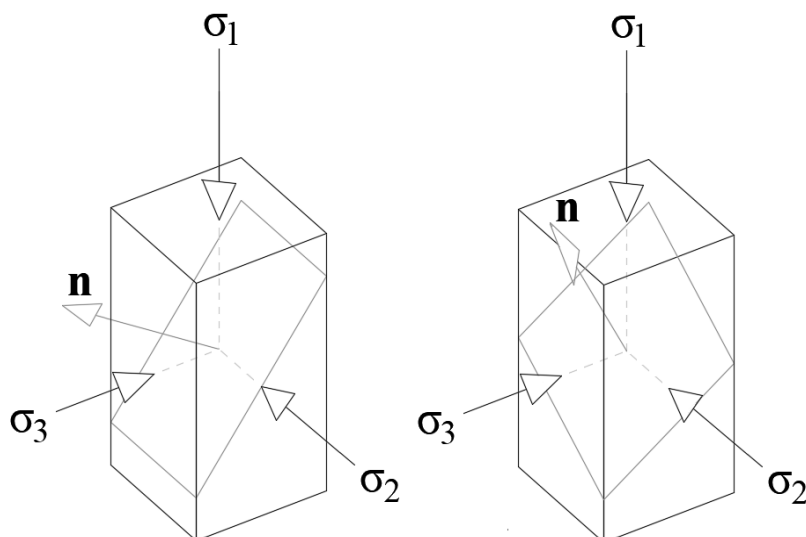


Abbildung 4.3: Ausbildung von Scherebenen im Grenzzustand der Gesteinsfestigkeit, deren Normalen \mathbf{n} orthogonal (links) oder nicht orthogonal (rechts) zur mittleren Hauptspannung orientiert sind.

Ein Einfluss der mittleren Hauptspannung σ_2 auf die Gesteinsfestigkeit ist demnach vorhanden und somit ist es vorteilhaft, diesen bei der Beschreibung der Gesteinsfestigkeit mit einer Grenzbedingung zu berücksichtigen!

4.2. Geeignete Grenzbedingungen

Nach den bereits vorgestellten Untersuchungsergebnissen nach Mogi (2007) sind für die Berechnung der Standsicherheit von geothermischen Bohrungen, an denen in situ Spannungszustände mit drei unterschiedlich großen Hauptspannungen anstehen, Grenzbedingungen vorteilhaft, welche auch die mittlere der drei Hauptspannungen berücksichtigen. Wie unter 4.1 beschrieben ist der Einfluss der mittleren Hauptspannung nichtlinear, sodass die Grenzbedingungen nach Tresca und Mohr-Coulomb das physikalische Bruchverhalten nicht exakt wiedergeben können, da sie die mittlere Hauptspannung nicht berücksichtigen und sowohl entlang der hydrostatischen Achse als auch in der Deviatorebene linear sind. Die Grenzbedingung nach Drucker-Prager berücksichtigt zwar die mittlere Hauptspannung und ist in der Deviatorebene nichtlinear, bildet aber triaxiale Kompression und Extension nicht zutreffend ab. Auch die Grenzbedingung nach von Mises berücksichtigt die mittlere Hauptspannung und ist in der Deviatorebene nichtlinear, beinhaltet als Materialparameter allerdings nur die Kohäsion des Materials, was für die Beschreibung der Gesteinsfestigkeit von Fels allein nicht ausreicht. Die Grenzbedingung nach Hoek-Brown in ursprünglicher Form berücksichtigt die mittlere Hauptspannung ebenfalls nicht. Daher können, ohne Anspruch auf Vollständigkeit, die Grenzbedingungen

- Matsuoka-Nakai in ursprünglicher Form, kombiniert mit Hoek-Brown (Benz & Schwab, 2008) oder mit Lade-Duncan (Ma u.a., 2017),
- Mogi (2007), Mogi-Coulomb (Al-Ajmi & Zimmerman, 2006) oder die modifizierte Grenzbedingung nach Mogi-Coulomb (Kosmann & Perau, 2021)

für die Beschreibung der Gesteinsfestigkeit von Fels herangezogen werden (Kosmann & Perau, 2021).

Für Fels wurden, wie oben beschreiben, bereits die Grenzbedingungen nach Lade-Duncan und Hoek-Brown, beide kombiniert mit Matsuoka-Nakai, für numerische Berechnungen vorgeschlagen. In dieser Arbeit sollen daher die Grenzbedingungen nach Mogi betrachtet werden.

4.3. Grenzbedingungen nach Mogi

Auf der Grundlage echter triaxialer Versuche an unterschiedlichen Felsarten hat Mogi (2007) unterschiedliche Ansätze für Grenzbedingungen formuliert. Da die Versuchsergebnisse einen Einfluss der mittleren Hauptspannung auf den Grenzzustand gezeigt haben, muss auch eine

dementsprechende Grenzbedingung diesen berücksichtigen. Mogi (2007) hat einen allgemeinen Ansatz für Grenzbedingungen nach Gl. (4.1) herangezogen, in den die mittlere Hauptspannung eingeht und dem exemplarisch auch die Grenzbedingungen nach Drucker-Prager und Wiebols-Cook zugrunde liegen, und diesen an seine Versuchsergebnisse angepasst. Die Druckspannungen gehen in die folgenden Grenzbedingungen positiv ein, die Vorzeichenregelung entspricht dementsprechend der geotechnischen Vorzeichenkonvention (Mogi, 2007).

$$\tau_{oct} = f(\sigma_{oct}) \quad (4.1)$$

Anhand seiner Versuche machte Mogi (2007) die Beobachtung, dass im Grenzzustand die Normalen der Scherebenen orthogonal zur Richtung der mittleren Hauptspannung stehen (siehe Abbildung 4.3). Daraus folgerte Mogi (2007), dass der Grenzzustand $\tau_{oct,grenz}$, welcher die mittlere Hauptspannung beinhaltet, durch eine monoton steigende Funktion aus dem Mittelwert der größten und kleinsten Hauptspannung nach Gl. (4.2) ausgedrückt werden kann.

$$\tau_{oct,grenz} = f\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right) \quad (4.2)$$

Da die Normalen der Scherebenen nicht bei allen Felsarten orthogonal zur mittleren Hauptspannungsrichtung orientiert waren, hat Mogi (2007) seinen Ansatz nach Gl. (4.3) wie folgt modifiziert:

$$\tau_{oct,grenz} = f(\sigma_1 + \sigma_2 \cdot \alpha + \sigma_3) \quad (4.3)$$

Die darin enthaltene Konstante α kann nach Mogi (2007) Werte zwischen 0 und 1 annehmen und liegt für Dolomit in einer Größenordnung von 0,1 und für Kalkstein etwa bei 0.

Die von Mogi (2007) vorgeschlagene monoton steigende Funktion nach Gl. (4.2) haben Al-Ajmi und Zimmerman (2006) als eine lineare Funktion mit den Parametern a und b, wie in Gl. (4.4) dargelegt, spezifiziert:

$$\tau_{oct,grenz} = a + b \cdot \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right) \quad (4.4)$$

Die Parameter a und b aus Gl. (4.4) haben Al-Ajmi und Zimmerman (2006) in Bezug zu den bekannten und in der Grenzbedingungen nach Mohr-Coulomb enthaltenen Scherparametern φ und c, über die Roscoe Invarianten für triaxiale Zustände in Verbindung gebracht. Dabei konnten folgende Zusammenhänge festgestellt werden (Al-Ajmi und Zimmerman, 2006):

$$a = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3} c \cos \varphi \quad b = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3} c \sin \varphi \quad (4.5)$$

Durch Einsetzen der Parameter a und b nach Gl. (4.5) in Gl. (4.4) sowie anschließender Äquivalenzumformung ergibt sich folgende Gleichung für die Grenzbedingung nach Mogi (Al-Ajmi und Zimmerman, 2006):

$$F_{MGC} = \sqrt{I_1^2 - 3I_2} - \sin \varphi (\sigma_1 + \sigma_3) - 2c \cos \varphi = 0 \quad (4.6)$$

Da die Grenzbedingung nach Gl. (4.6) in den Spezialfällen von triaxialer Kompression und triaxialer Extension, bei gleichen Werten der Parameter, mit der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb zusammenfällt, wird diese auch als Mogi-Coulomb (MGC) Kriterium bezeichnet. Obwohl sich dieser Zusammenhang zwischen den beiden Grenzbedingungen auf diese beiden Bereiche beschränkt, haben Al-Ajmi und Zimmerman (2006) die eingehenden Materialparameter analog zu Mohr-Coulomb mit φ und c bezeichnet. Gleiche Werte für φ und c führen allerdings nicht zu gleichen Fließflächen.

4.4. Modifizierte Grenzbedingung nach Mogi-Coulomb

Wie bereits in Kosmann & Perau (2021) vorgestellt, soll der Ansatz nach Mogi aus Gl. (4.3) bei der Beschreibung der Gesteinsfestigkeit von Fels in einer Grenzbedingung ebenfalls Berücksichtigung finden. Danach geht die mittlere Hauptspannung nicht nur in die oktaedrischen Schubspannungen, sondern zusammen mit der größten und kleinsten Hauptspannung sowie dem vor Faktor α auch in den Normalspannungsanteil ein. Die modifizierte Grenzbedingung nach Mogi-Coulomb (MMGC) ist in Gl. (4.7) dargelegt. Die Grenzbedingung nach Mogi-Coulomb bleibt in Gl.(4.7) für $\alpha = 0$ als Spezialfall enthalten (Kosmann & Perau, 2021).

$$F_{MMGC} = \sqrt{I_1^2 - 3I_2} - \sin \varphi (\sigma_1 + \sigma_3 + \alpha \sigma_2) - 2c \cos \varphi \quad (4.7)$$

In dieser modifizierten Form gilt zu beachten, dass für $\alpha \neq 0$ die Grenzbedingungen nach Mohr-Coulomb und Mogi-Coulomb auch bei identischen Werten für φ und c unter Kompressions- und Extensionsbedingungen nicht mehr zusammenfallen (Kosmann & Perau, 2021).

Werden in Gl. (4.7) die Hauptspannungen in Zylinderkoordinaten nach Borja (2013) ausgedrückt, kann die MMGC, wie in Gl. (4.8) dargelegt, in Abhängigkeit von I_1 , I_2 , $\sqrt{J_2}$ und dem Lode-Winkel Θ sowie der Materialparameter α , φ und c ausgedrückt werden. Um die MMGC in Zylinderkoordinaten auszudrücken, ist hier die Sinusfunktion gewählt worden. Der Lode-Winkel in Gl. (4.8) beträgt demnach $\Theta = -30^\circ$ für triaxiale Kompression und $\Theta = +30^\circ$ für triaxiale Extension. Vorteilhaft bei dieser Ausdrucksweise ist, dass auf eine Sortierung der eingehenden Hauptspannungen verzichtet werden kann, da diese für die Berechnung der eingehenden Invarianten nicht notwendig ist und der Lode-Winkel ebenfalls anhand von Invarianten

berechnet werden kann. Es muss – wie bei den Grenzbedingungen nach Mogi- und Mohr-Coulomb – lediglich die Vorzeichenkonvention beachtet werden.

$$F_{MMGC} = \sqrt{I_1^2 - 3I_2} - I_1 \left(\frac{2 + \alpha}{3} \right) \sin \varphi - \sqrt{J_2} \sin \varphi \left(\frac{2 \sin \Theta (\alpha - 1)}{\sqrt{3}} \right) - 2c \cos \varphi \quad (4.8)$$

4.5. Darstellung der Fließfläche

Eine Grenzbedingung kann in Form einer Schar von Schnittkurven mit einer Deviatorebene im Hauptspannungsraum visualisiert werden. Eine Ebene kann durch ihre Punkt-Normalen-Form nach Gl. (4.9) im dreidimensionalen Raum beschrieben werden. Für die Beschreibung einer Deviatorebene im Hauptspannungsraum kann ein Vektor in Richtung der hydrostatischen Achse als Normalenvektor \mathbf{n} und ein Vektor \mathbf{a} zu einem beliebigen Punkt A auf der Deviatorebene herangezogen werden. Der Vektor $\boldsymbol{\sigma}$ stellt in Gl.(4.9) einen laufenden Punkt in der Ebene dar (Köhler u.a., 1975).

$$\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{a}) = 0 \quad (4.9)$$

Wird für den Vektor \mathbf{a} , der Durchstoßpunkt der hydrostatischen Achse durch die Deviatorebene gewählt (a,a,a) , ergibt sich aus Gl.(4.9) mit \mathbf{n} als Normaleneinheitsvektor der Deviatorebene Gl.(4.10). Mit der erzeugten Gl.(4.10) kann durch Umformung σ_2 ausgedrückt werden (Kosmann & Perau, 2021).

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3a \quad (4.10)$$

Die Beziehung zwischen σ_1 und σ_3 kann für den Bereich im Hauptspannungsraum, für den $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ gilt, nach Gl. (4.11) durch den Kurvenparameter β ausgedrückt werden, der zwischen ~ 0 und 1 liegt (Kosmann & Perau, 2021).

$$\sigma_3 = \sigma_1 \beta \quad (4.11)$$

Durch Einsetzen von Gl. (4.11) in die nach σ_2 umgeformte Gl. (4.10) erhält man Gl.(4.12).

$$\sigma_2 = 3a - \sigma_1 - \sigma_1 \beta \quad (4.12)$$

Die Hauptspannungen σ_2 und σ_3 können mit Gl. (4.11) und Gl. (4.12) durch σ_1 , $3a$ und β in der MMGC (Gl. (4.7)) substituiert und diese nach σ_1 umgeformt werden. Die Schnittlinie der MMGC mit einer Deviatorebene kann so unter Vorgabe der Materialparameter α , φ und c sowie β und $3a$ durch die Berechnung von σ_1 und durch Einsetzen in Gl. (4.11) und Gl. (4.12) von σ_2 und σ_3 bestimmt werden. Da die Schnittkurve in dem Bereich des Hauptspannungsraums liegt, in dem $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ gilt, muss diese durch Permutation auf den

gesamten Hauptspannungsraum erweitert werden. In Abbildung 4.4 ist die MMGC mit $\alpha = 0$ und damit auch die Grenzbedingung nach Mogi-Coulomb für $\varphi = 30^\circ$ und $c = 0 \text{ MPa}$ in äquidistanten Deviatorebenen exemplarisch dargestellt (Kosmann & Perau, 2021).

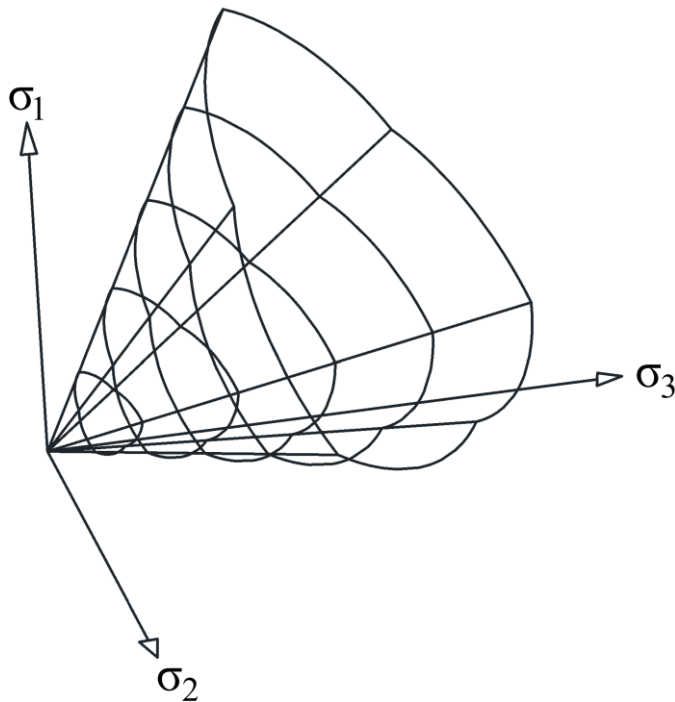


Abbildung 4.4: Fließfläche der modifizierten Grenzbedingung nach Mogi-Coulomb im Hauptspannungsraum nach Kosmann & Perau (2021) ($\alpha = 0$, $\varphi = 30^\circ$, $c = 0 \text{ MPa}$)

Der Schnittpunkt der Fließfläche der modifizierten Grenzbedingung nach Mogi-Coulomb mit der hydrostatischen Achse kann nach Gl.(4.13) bestimmt werden. Da auf der hydrostatischen Achse die Hauptspannungen den gleichen Wert beschreiben, kann durch Einsetzen drei gleicher Hauptspannungen in die Grenzbedingung nach Gl.(4.7) der Schnittpunkt berechnet werden.

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -\frac{2c}{(2 + \alpha) \tan \varphi} \quad (4.13)$$

Durch Anschauung von Abbildung 4.4 wird ersichtlich, dass die MMGC innerhalb einer Deviatorebene eine nichtlineare und entlang der hydrostatischen Achse eine lineare Grenzbedingung ist. Zur Verdeutlichung, dass die MMGC gleichermaßen linear entlang der hydrostatischen Achse verläuft wie die Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb und anders als die exponentiell verlaufende Grenzbedingung nach Hoek-Brown, ist in Abbildung 4.5 die Sicht in Richtung der hydrostatischen Achse auf die Fließfläche der in Abbildung 4.4 dargestellten Deviatorebenen dargestellt. Diese haben wie in Abbildung 4.4 und Abbildung 4.5 ersichtlich denselben Abstand zueinander und können aufgrund ihrer Linearität in jedem Punkt der Grenzbedingung durch

eine Gerade beschrieben werden. Die in Abbildung 4.5 eingetragenen Werte in MPa beschreiben die Schnittpunkte der jeweiligen Deviatorebene mit den Hauptspannungsachsen (Kosmann & Perau, 2021).

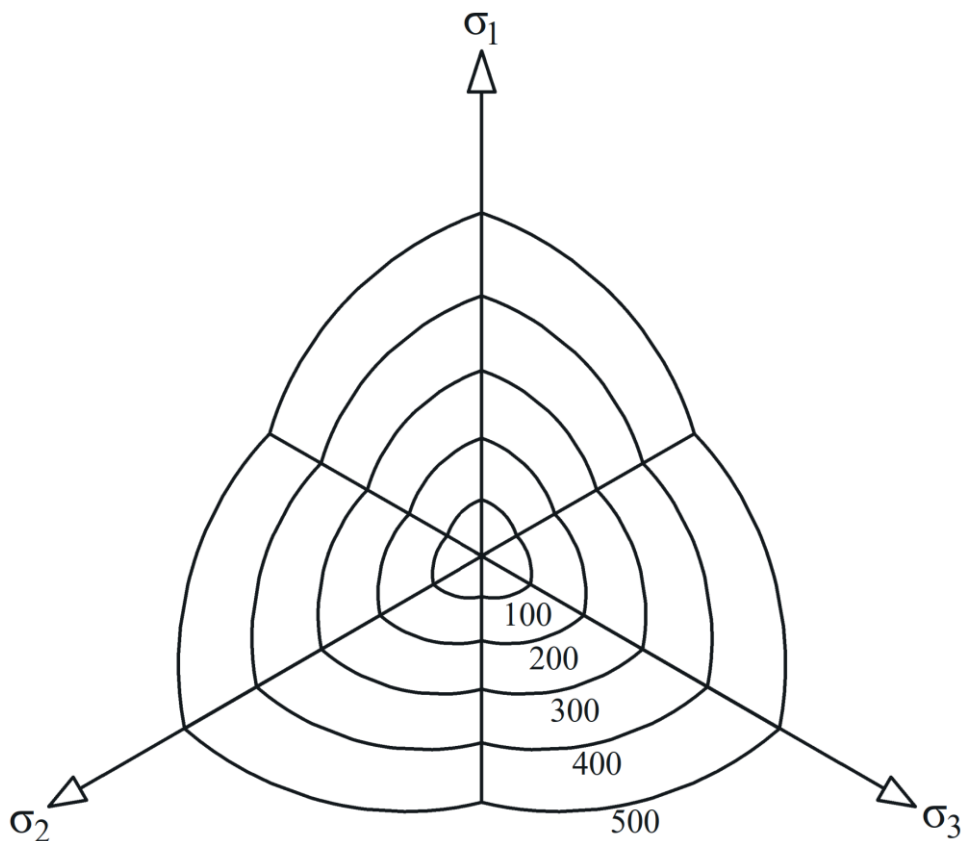


Abbildung 4.5: Äquidistante Deviatorebenen der MMGC ($\alpha = 0$, $\varphi = 30^\circ$, $c = 0$ MPa), Die Werte geben die Achsabschnitte der Deviatorebenen [MPa] an, nach Kosmann & Perau (2021)

4.6. Einfluss der Parameter

Welchen Einfluss die eingehenden Materialparameter auf die MMGC haben, soll hier erläutert und Parallelen zu anderen Grenzbedingungen aufgezeigt werden. Wie bereits beschrieben, werden die Parameter φ und c mit den Materialparametern der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb gleich bezeichnet, da die MMGC für $\alpha = 0$ in den Fällen von triaxialer Kompression und Extension diese als Spezialfall enthält. Der Einfluss der Materialparameter soll ausgehend von den bekannten Parametern φ und c sowie dem neu hinzugefügten Parameter α bis hin zu dessen Zusammenwirken mit φ beschrieben werden.

Einfluss von Kohäsion und Reibung

Durch den Einfluss der Kohäsion erfährt die MMGC eine Verschiebung entlang der hydrostatischen Achse in Richtung des Oktanten im Hauptspannungsraum, in dem ausschließlich Zugspannungen wirken. Es wird dementsprechend ein stützender hydrostatischer Druckspannungszustand, nach dem Caquot'schen Theorem der korrespondierenden Spannungszustände, mit den Komponenten nach Gl.(4.13) zu der MMGC hinzuaddiert. Infolge dieser Verschiebung können auch Spannungszustände, die sowohl Hauptspannungen im Druck- als auch Zugbereich enthalten, die Grenzbedingung erfüllen. Für den Spezialfall, dass der Reibungswinkel $\varphi = 0^\circ$ ist, entspricht die MMGC der Grenzbedingung nach von Mises in einer alternativen Formulierung. Ist der Wert des Reibungswinkels $\varphi = 0^\circ$, geht auch der Parameter α nicht mehr in die Grenzbedingung ein, da dieser mit $\sin \varphi$ und σ_2 ein Produkt bildet. Die Fließfläche im Hauptspannungsraum der MMGC für $\varphi = 0^\circ$ und $c \neq 0$ MPa entspricht dann der Form eines Zylinders und ist in Abbildung 4.6 dargestellt.

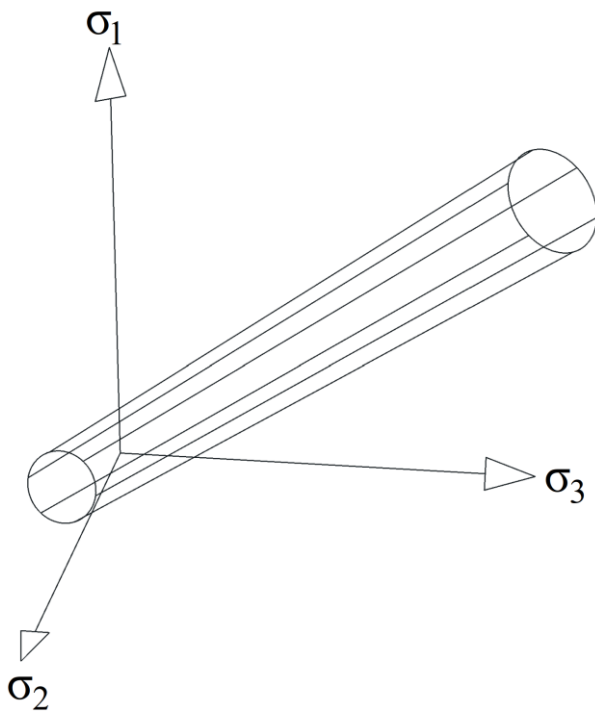


Abbildung 4.6: Fließfläche nach Mogi-Coulomb für $\varphi = 0^\circ$ und $c \neq 0$ MPa nach Kosmann & Perau (2021)

Der Einfluss der Reibung soll durch die Darstellung von Schnittkurven der MMGC mit einer Deviatorobene unter sukzessiver Zunahme des Reibungswinkels φ in Abbildung 4.7 gezeigt werden. Bei kleinen Werten für φ strebt der Querschnitt der Fließfläche gegen einen Kreis, da die Fließfläche für $\varphi = 0^\circ$ und $c \neq 0$ MPa die Form eines Zylinders annimmt (Abbildung 4.6).

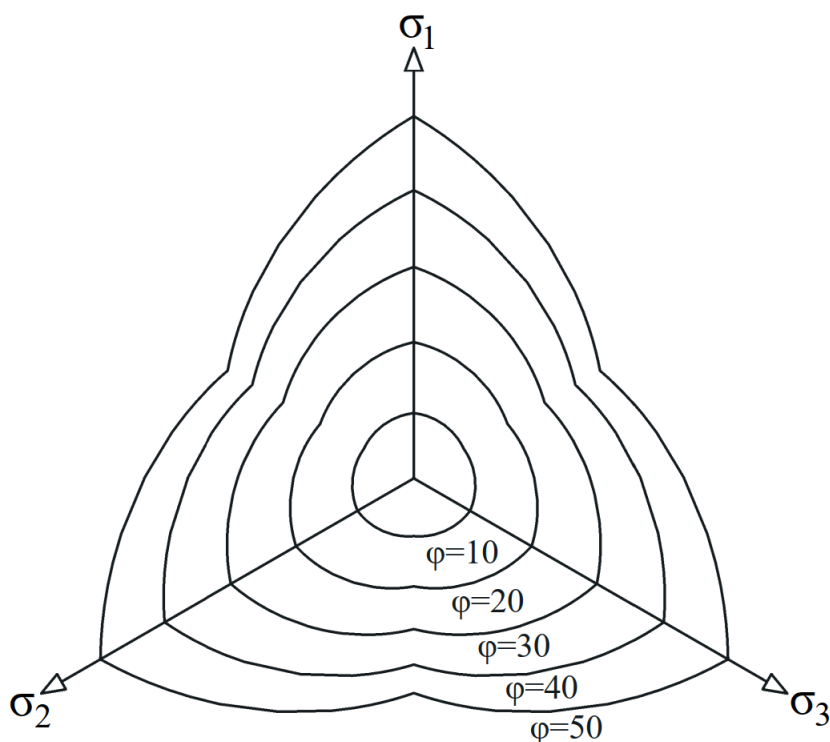


Abbildung 4.7: Einfluss des Reibungsparameter φ [°] auf die modifizierte Grenzbedingung nach Mogi-Coulomb (MMGC) für $c = 0$ MPa, $\alpha = 0$, dargestellt in einer Deviatorebene nach Kosmann & Perau (2021)

Die Auswölbungen der MMGC bei triaxialer Kompression haben für die in Abbildung 4.7 dargestellten Querschnitte den gleichen Abstand zueinander und nehmen linear zu. Bei triaxialer Extension sind diese Abstände mit zunehmendem Reibungswinkel weniger stark ausgeprägt. Entspricht $\varphi = 90^\circ$, liegen die Kompressionsrate der MMGC auf den Achsen des Hauptspannungsraums und die Extensionsrate jeweils auf den Halbierenden der Ebenen, in denen zwei Hauptspannungen gleich groß sind. Für $\varphi = 90^\circ$ erfüllen daher alle Spannungszustände im positiven Oktanten und in den Auswölbungen darüber hinaus die Grenzbedingung. Für Reibungswinkel ab einer Größenordnung von $\varphi \geq 60^\circ$ können demnach auch Zugspannungen zulässig sein.

Einfluss des Aufweitungsparameters α

Der Parameter α ist von Mogi für eine genauere Anpassung der vorgeschlagenen Grenzbedingung nach Gl. (4.2) an die Versuchsergebnisse unter echten triaxialen Bedingungen in Form von Gl. (4.3) vorgeschlagen worden. Der Ansatz nach Gl. (4.3) findet durch die Einführung des Parameters α sowie der mittleren Hauptspannung σ_2 von Kosmann & Perau (2021) in Gl. (4.6), woraus Gl. (4.7) folgt, Berücksichtigung. Der von Mogi (1971) vorgeschlagene Wertebereich für α von $[0;1]$ ist in Abbildung 4.8 innerhalb einer Deviatorebene dargestellt. Da

der Parameter α eine Aufweitung verbunden mit einer Ausrundung der Fließfläche zur Folge hat, wird dieser nachstehend als Aufweitungparameter bezeichnet. Eine Materialverfestigung infolge einer Spannungserhöhung wird mit dem Parameter α ausdrücklich nicht beschrieben (Kosmann & Perau, 2021).

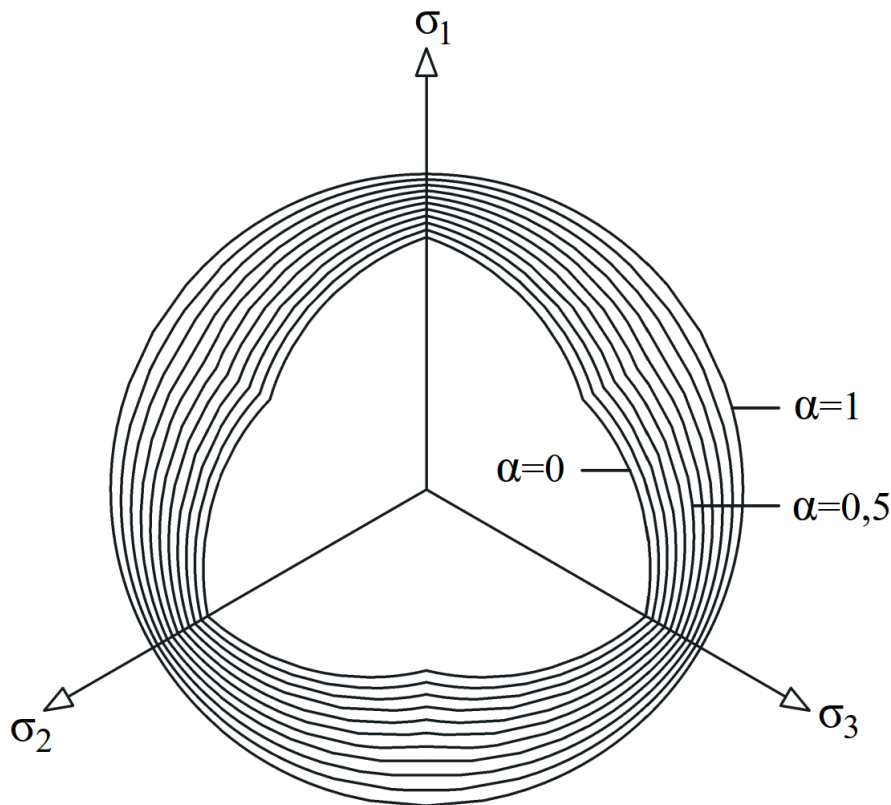


Abbildung 4.8: Einfluss des Parameters α auf die MMGC ($\varphi = 30^\circ$, $c = 0$ MPa) nach Kosmann & Perau (2021)

Infolge der Ausrundung fallen die MMGC und Mohr-Coulomb in den Bereichen triaxialer Kompression und Extension nicht mehr zusammen. Nimmt α den Wert 1 an, entspricht die Fließfläche im Hauptspannungsraum einem Kegel, welcher der Grenzbedingung nach Drucker-Prager in einer alternativen Formulierung entspricht (Kosmann & Perau, 2021).

Wird der für α zulässige Wertebereich im Vergleich zu der von Mogi vorgeschlagenen Größenordnung auf $[-1;1]$ erweitert, hat dies eine weitere Formänderung der Fließfläche zur Folge. In Abbildung 4.9 ist die MMGC, um den negativen Wertebereich erweitert in einer Deviatorrebene mit zu Abbildung 4.8 identischen Parametern, dargestellt.

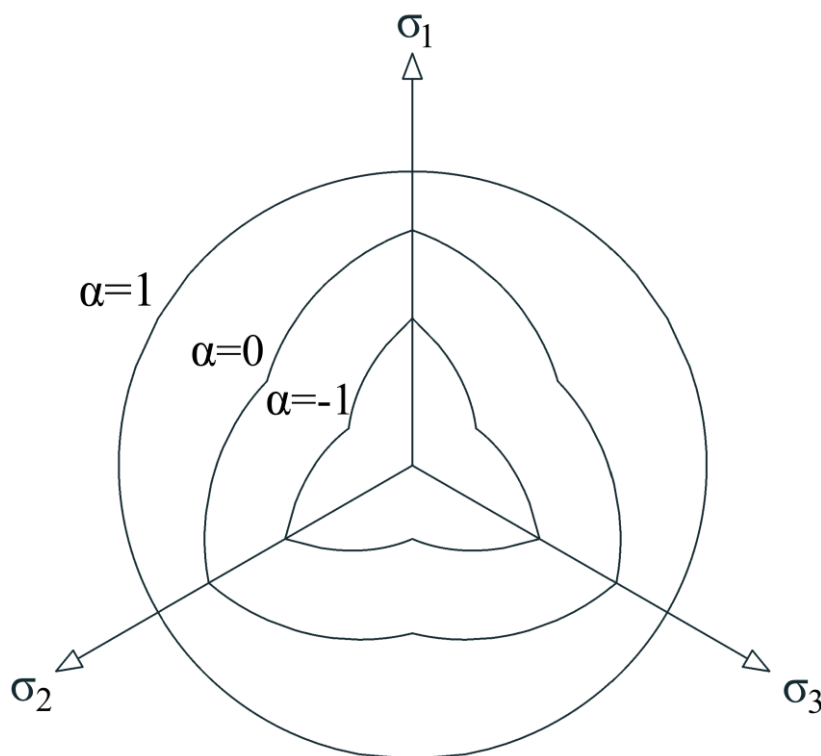


Abbildung 4.9: Einfluss des Parameters α mit erweitertem Wertebereich auf die MMGC ($\varphi = 30^\circ$, $c = 0$ MPa)

Im Vergleich mit den Auswölbungen für $\alpha = 0$, bei dem die Fließfläche der MMGC die Sechseckpyramide der Fließfläche nach Mohr-Coulomb umschließt, liegt innerhalb der Auswölbungen für $\alpha = -1$ eine Dreieckpyramide. Auch für negative Werte des Parameters α sind die Bereiche triaxialer Kompression und Extension nicht mehr identisch mit Mohr-Coulomb. Im Gegensatz zu der Aufweitung bei $\alpha = 1$, bei der in den Bereichen von triaxialer Kompression und Extension Scherspannungen in gleicher Größe aufgenommen werden können, werden bei $\alpha = -1$ deutlich größere Scherspannungen in dem Bereich der triaxialen Kompression zugelassen als in dem der triaxialen Extension. Der Ansatz eines negativen Wertes für α bedeutet demnach bei gleichem φ und c , für das Material, dass es unter Kompressionsbeanspruchungen deutlich größere Scherspannungen aufnehmen kann als unter Extensionsbeanspruchungen.

Einfluss von Aufweitung und Reibung

Werden in der MMGC der Aufweitungparameter $\alpha \geq 0$ zusammen mit dem Parameter $\varphi > 30^\circ$ angesetzt, sind Kombinationen möglich, die eine Vergrößerung der Fließfläche über die Grenzen des Druckspannungsoktanten zur Folge haben. Um zu unterscheiden, ob Kombinationen von α und φ Spannungszustände, die Zugspannungen enthalten, zulassen, wird die Grenze zwischen Zug und Druck durch die Nullstellen der kleinsten Hauptspannung σ_3 in dem Bereich im Hauptspannungsraum, für den $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ gilt, bestimmt. Die in

Abbildung 4.10 aufgetragene Grenzlinie zeigt Kombinationen von α und φ , bei denen die Fließfläche die Koordinatenebenen des Druckspannungsoktanten berührt. Kombinationen von α und φ , die oberhalb der Grenzlinie liegen, lassen innerhalb der Fließfläche auch negative Werte zu, da diese teilweise über die Koordinatenebenen des Druckspannungsoktanten hinaus geht.

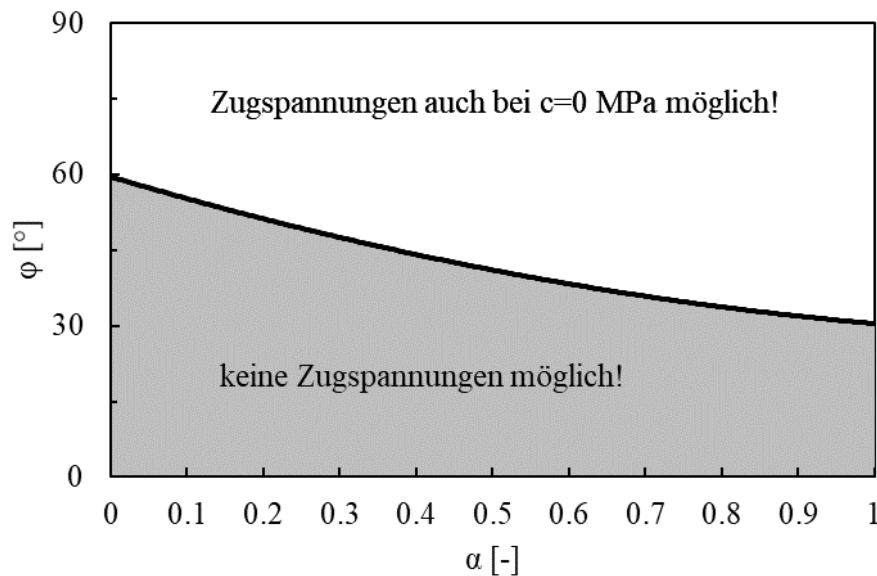


Abbildung 4.10: Grenzlinie für Parameterkombinationen von α und φ , über die hinaus für $c = 0$ MPa auch negative Spannungen die MMGC erfüllen

Das Zulassen von negativen Spannungen innerhalb der Fließfläche bedeutet in diesem Zusammenhang, dass das Material nicht nur Druck, sondern beschränkt auch Zug aufnehmen kann. Bezieht man ein solches Materialverhalten auf Fels, ist die beschränkte Aufnahme von Zugspannungen durchaus vorstellbar. Entsprechende Zug-Druckversuche, um dieses mit der MMGC prognostizierte Materialverhalten zu verifizieren, sind in nicht genormter Form zur Untersuchung des Materialverhaltens von Metall bekannt (Bochmann, 2014). Eine Literaturrecherche zur Untersuchung von Fels unter derartigen Bedingungen blieb jedoch ergebnislos.

Durch Ansetzen von Kohäsion in der MMGC können Zugspannungen bereits bei kleineren Kombinationen von α und φ entstehen. Um Zugspannungen aus Kohäsion oder Aufweitung und Reibung auszuschließen, empfiehlt sich die Verwendung eines Tension-Cut-Off-Kriteriums.

Standardmäßig wird für die Gesteinsfestigkeit unter Zugbeanspruchung angenommen, dass ein Versagen senkrecht zur Hauptspannung σ_i erfolgt, welche die Zugfestigkeit σ_t überschreitet. Ein Tension-Cut-Off-Kriterium kann mit σ_t als positiven Wert für die maximal zulässigen

Zugspannungen – wie in Gl.(4.14) dargelegt und in Abbildung 4.11 links dargestellt – verwendet werden. Die maximal zulässigen Zugspannungen σ_t können durch einaxiale Zugversuche in die entsprechenden Hauptspannungsrichtungen bestimmt werden (Wittke, 1984).

$$F_t = -\sigma_i - \sigma_t \quad (4.14)$$

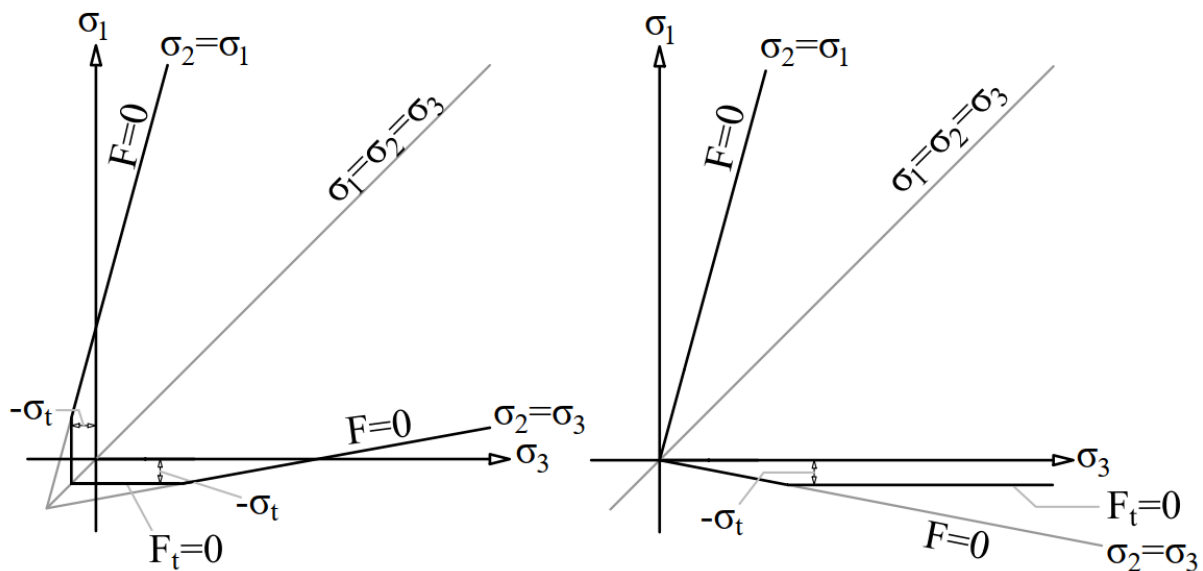


Abbildung 4.11: Tension-Cut-Off-Kriterien, links: für $c > 0$ nach Wittke (1984), rechts: für Kombinationen von φ und α , die negative Spannungen zulassen

Für nicht oder nur unzureichend gestützte geothermische Bohrungen entspricht σ_t den Radialspannungen σ_r oder, umgerechnet in kartesische Koordinaten, der kleinsten Hauptspannung σ_3 . Das Tension-Cut-Off-Kriterium nach Gl. (4.14) kann, wie in Abbildung 4.11 rechts dargestellt, ebenfalls zur Zugspannungsbegrenzung für die MMGC verwendet werden. Da Bereiche der Fließfläche, die unzulässige Zugspannungen enthalten, ebenfalls „abgeschnitten“ und durch zum Druckspannungsoktanten parallele und in einem Abstand der maximal zulässigen Zugspannungen σ_t liegenden Ebenen ersetzt werden (Abbildung 4.11 rechts). Das Standard Tension-Cut-Off-Kriterium nach Gl (4.14) sowie dessen Fließregel können demnach auch zur Begrenzung der MMGC angewendet werden.

Weiter soll hier darauf hingewiesen werden, dass die MMGC über diesen Zusammenhang von Aufweitung und Reibung die Möglichkeit eröffnet, Spannungszustände, die Zug- und Druckspannungen enthalten, zuzulassen, ohne dabei reine Zugspannungszustände miteinschließen zu müssen. Genauer gesagt können Druck-Zug-Spannungen durch den Aufweitungparameter und die Reibung getrennt von der Berücksichtigung reiner Zugspannungen durch die Kohäsion beschrieben werden. Gleichzeitig können aber alle Zugspannungen über das Tension-

Cut-Off-Kriterium nach Gl (4.14) ausgeschlossen oder bis zu einer gewählten Größe zugelassen werden. Die beiden Darstellungen in Abbildung 4.11 würden sich in diesem Fall überlagern.

4.7. Funktionsverlauf

Der Funktionsverlauf der MMGC ist für Funktionswerte $F_{MMGC} \neq 0$ sowohl entlang der hydrostatischen Achse als auch in einer Deviatorebene linear. In Abbildung 4.12 sind Schnittkurven, für exemplarische Wertebereiche der MMGC von $F_{MMGC} = [-160; 160]$ für $\alpha = 0$, $\varphi = 30^\circ$ und $c = 0$ MPa mit einer Deviatorebene dargestellt. Schnittkurven für Funktionswerte von $F_{MMGC} \leq 0$ sind durch graue und von $F_{MMGC} > 0$ durch schwarze Linien unterschieden. Die Funktionswerte haben einen Abstand von 20 MPa zueinander. Wie in Abbildung 4.12 ersichtlich, ist die MMGC eine linear zunehmende Funktion, da sowohl die Funktionswerte als auch die zugehörigen Schnittkurven den gleichen Abstand zueinander haben. Auch die über den Radius \tilde{r} aufgetragenen Funktionswerte von Schnitt I (rechts) zeigen deutlich die Linearität der Grenzbedingung. Schnittkurven entlang der hydrostatischen Achse (hier nicht dargestellt), zeichnen sich ebenfalls durch einen linearen Verlauf für einen Funktionswert aus.

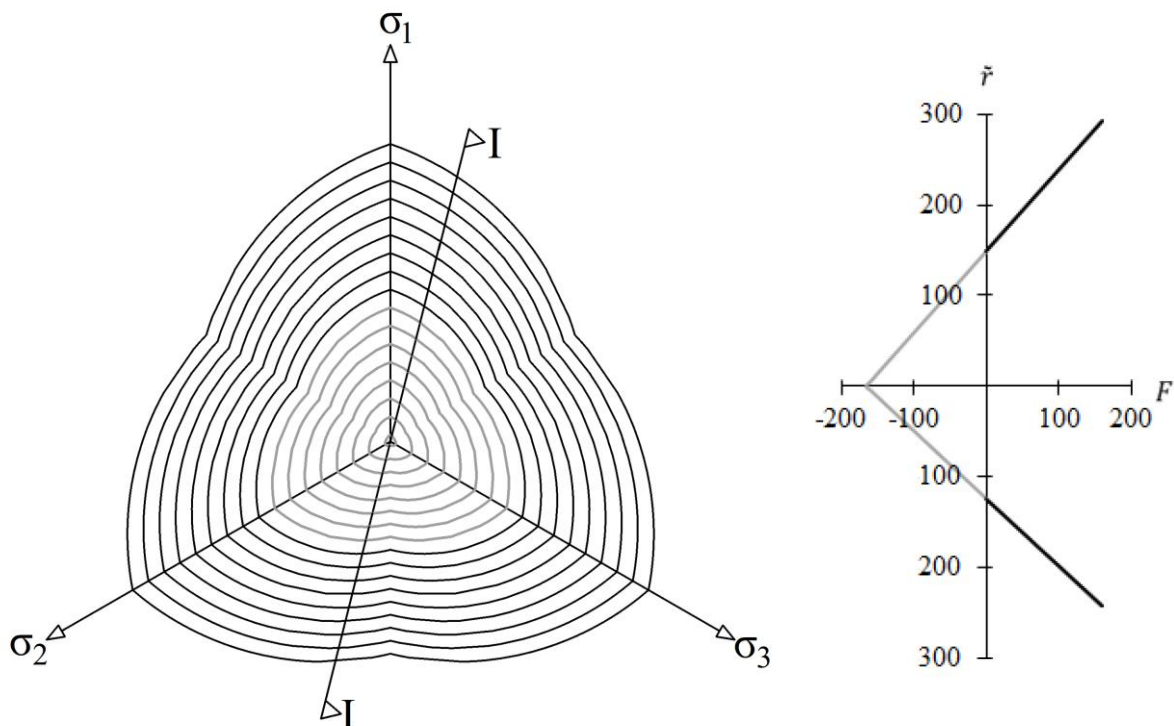


Abbildung 4.12: Funktionswerte der MMGC, links: $F_{MMGC} = [-160; -20]$ (grau) und $F_{MMGC} = [0; 160]$ (schwarz) in einer Deviatorebene, rechts: Schnitt I durch die Deviatorebene ($\alpha = 0$, $\varphi = 30^\circ$, $c = 0$ MPa)

Ein linearer Verlauf mit zunehmenden Funktionswerten beziehungsweise ein linearer Verlauf einer Grenzbedingung ist zwar nicht zwingend erforderlich, erleichtert aber die Anwendung einer Grenzbedingung in einem Stoffmodell. Insbesondere die Rückführung unzulässiger Spannungszustände auf die Fließfläche wird durch einen linearen Verlauf einer Grenzbedingung erheblich erleichtert, da dieser keine Wendepunkte enthält und somit die Richtung der Gradienten nicht von der Fließfläche weg oder an dieser vorbeiführen kann.

4.8. Konvexität

Um die MMGC auf Konvexität zu untersuchen, soll der bereits in Kosmann und Perau (2021) vorgestellte Ansatz nach Gl. (4.15) verwendet werden. Dieser basiert für die Untersuchung der MMGC auf der Betrachtung von zwei Tangentialebenen in den Punkten triaxialer Kompression und triaxialer Extension in einer Deviatorebene. Die Tangentialebenen werden durch die Punktnormalenform der Ebene beschrieben, die bei der Betrachtung in einer Deviatorebene die Form von Tangenten annehmen. Die Punktnormalenform der Tangentialebene wird hier mit der Gradienten der Fließfläche ∇F als Normale, einem Vektor \mathbf{f} als fester Punkt auf der Fließfläche (hier in den Punkten triaxialer Kompression oder Extension) und einen laufenden Punkt auf der Tangentialebene $\boldsymbol{\sigma}$ gebildet. Ist mehr als ein Punkt der Tangente nach Gl. (4.15) erfüllt, so ist die betrachtete Grenzbedingung nicht konvex (Kosmann & Perau, 2021).

$$\nabla F_{MMGC}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \cdot (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{f}) = 0 \quad (4.15)$$

In ausgeschriebener Form lautet Gl. (4.15):

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_{MMGC}}{\partial \sigma_1} \\ \frac{\partial F_{MMGC}}{\partial \sigma_2} \\ \frac{\partial F_{MMGC}}{\partial \sigma_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 - f_1 \\ \sigma_2 - f_2 \\ \sigma_3 - f_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.16)$$

Das Ergebnis für die MMGC ist schematisch in Abbildung 4.13 dargestellt. Hier wird ersichtlich, dass die Tangente nach Gl. (4.15) angesetzt in dem Bereich triaxialer Extension (B) in zwei Punkten erfüllt ist und die MMGC daher zu Uneindeutigkeiten führen kann und nicht durchweg konvex ist.

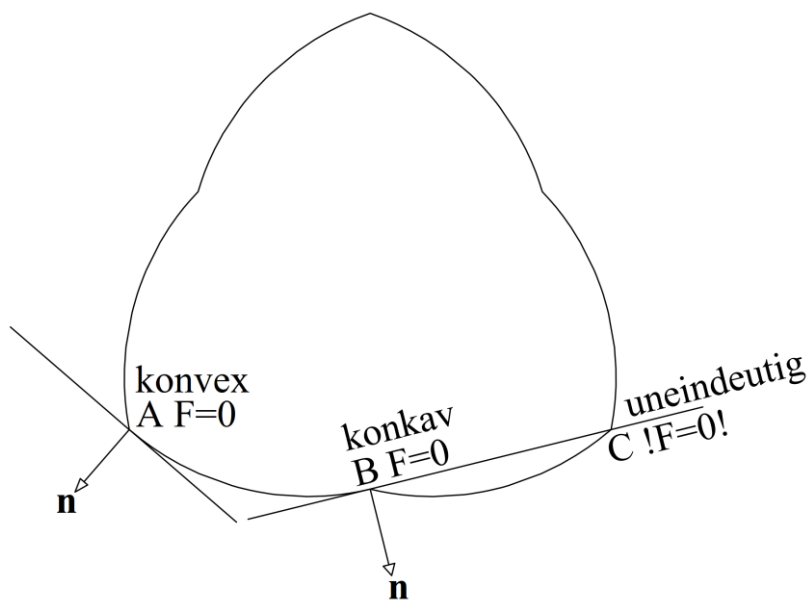


Abbildung 4.13: Konvexität und Eindeutigkeit der Fließfläche der MMGC nach Kosmann & Perau (2021)

In punkto Konvexität ist die MMGC aber trotz dessen ein Spezialfall! Die Fließfläche nach Abbildung 4.4 enthält mit Gl. (4.15) bewiesenermaßen konkave Bereiche. Bei der Betrachtung von einem Sektor der Fließfläche in einer Deviatorebene, exemplarisch den Bereich des Hauptspannungsraums, für den $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ gilt, wird ersichtlich, dass in diesem Sektor keine konkaven Bereiche existieren. Für numerische Berechnungen, bei denen plastisches Materialverhalten berücksichtigt werden soll, wird für die Anwendung von konvexen Grenzbedingungen – wie exemplarisch für die Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb – standardmäßig nur dieser Bereich für die Unterscheidung von elastischem und plastischem Materialverhalten betrachtet. Spannungszustände, ausgedrückt in kartesischen Koordinaten, werden dafür in einen Hauptspannungszustand umgerechnet und der Größe nach sortiert. Die sortierten Hauptspannungen, für die $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ gilt, werden nachfolgend in die ausgewählte Grenzbedingung eingesetzt. Erfüllt der Spannungszustand die Grenzbedingung nicht, wird durch die Anwendung einer Fließregel der Spannungszustand zurück auf die Fließfläche geführt und die Größe der plastischen Dehnungen bestimmt. Diese Vorgehensweise kann auch für die MMGC verwendet werden, ohne dass Uneindeutigkeiten oder numerischen Probleme auftreten, da diese in dem betrachteten Bereich konvex ist.

Allerdings besteht im Zuge eines Lastschritts, in dem sich die Sortierung der Hauptspannungen ändert, im Extensionsbereich die Gefahr, dass die Fließfläche unbemerkt zweifach übersprungen wird, der Spannungszustand wieder innerhalb der Fließfläche liegt und somit ein elastischer Jump-Over auftritt. Ein elastischer Jump-Over kann bei diesem Vorgehen im Extensionsbereich zwar theoretisch auftreten und die Grenzbedingung verletzen, ebenso kann dieser aber auch

durch das Aufteilen von großen Be- oder Entlastungen in mehrere kleine Lastschritte vermieden werden. In ausreichend kleine Lastschritte aufgeteilte Be- oder Entlastungen können konventionell über eine Fließregel auf die Fließfläche zurückgeführt werden, bevor sie zu einem elastischen Jump-Over führen. Auch um die Anwendung einer Fließregel möglichst genau und ohne unnötigen Iterationsaufwand zu ermöglichen, ist eine Aufteilung von großen Be- und Entlastungen in kleinere Lastschritte empfehlenswert.

5. Parameteridentifikation bei Fels

Um Grenzbedingungen in numerischen Berechnungen verwenden zu können, müssen die eingehenden Materialparameter anhand von Elementversuchen bestimmt werden. Exemplarisch können die Materialparameter für die Grenzbedingungen nach von Mises oder nach Tresca aus den Ergebnissen von einaxialen Druckversuchen, für die Grenzbedingungen nach Mohr-Coulomb und Hoek-Brown aus den Ergebnissen konventioneller triaxialer Versuche und für die MMGC aus den Ergebnissen echter triaxialer Versuche bestimmt werden. In diesem Kapitel soll auf die Gewinnung von Materialparametern aus Elementversuchen und insbesondere auf die Eigenschaft einer Grenzbedingung, Versuchsergebnisse und damit die Gesteinsfestigkeit zutreffend wiedergeben zu können, eingegangen werden.

5.1. Eignung von Elementversuchen und ableitbare Parameter

Anhand von einaxialen Druckversuchen wird aus Kostengründen im Felsbau häufig die Gesteinsfestigkeit als einaxiale Druckfestigkeit beschrieben. Wie in Kapitel 2.3 erläutert, werden bei diesem Versuch lediglich in axialer Richtung Spannungen bis zum Bruch aufgegeben. Aus dem Ergebnis kann dann ein Parameter, die einaxiale Druckfestigkeit, bestimmt werden. Diese ist aber für die Beschreibung der Gesteinsfestigkeit alleine nicht ausreichend, da der Einfluss der Reibung vernachlässigt wird. Mit konventionellen Triaxialversuchen, bei denen zwei von drei Hauptspannungen gleich groß sind, kann die Gesteinsfestigkeit durch die Scherparameter φ und c beschrieben werden. Der Einfluss der mittleren Hauptspannung findet dabei keine Berücksichtigung. Soll die Gesteinsfestigkeit bei Spannungszuständen mit drei unterschiedlich großen Hauptspannungen beschrieben werden, sind echte Triaxialversuche erforderlich. Die Gesteinsfestigkeit kann dann durch die Scherparameter φ und c – oder besser durch φ , c und einen zusätzlichen Parameter, der die Form der Fließfläche dem Einfluss der mittleren Hauptspannung anpassen kann – beschrieben werden.

Wie bereits in Kosmann & Perau (2021) beschrieben, kann bei Feldversuchen eine Interpretation von Spannungszuständen, die drei unterschiedlich große Hauptspannungen enthalten – unter der Annahme von konventionellen triaxialen Bedingungen – zu einer Überschätzung der Materialparameter und somit zu einer deutlichen Überschätzung der Gesteinsfestigkeit führen.

Dieser Effekt soll im Folgenden unter **Einfluss der mittleren Hauptspannung** noch mal ausführlich behandelt werden.

5.2. Anzahl und Art der Versuche

In der Praxis werden Versuche zur Bestimmung der Materialparameter von Boden und Fels oft nur in geringer Anzahl (1 bis 5 Versuche) durchgeführt, sodass die Anwendung genauerer statistischer Verfahren zur Quantifizierung von Unsicherheiten nicht sinnvoll ist. Nach Kilian (2013) ist eine ausreichende Güte von statistischen Vorhersageergebnissen erst ab mindestens 20 Versuchsergebnissen gegeben. Eine Vorhersage auf der Grundlage von weniger als 20 Versuchsergebnissen erfordert eine fallweise Betrachtung sowie die Bewertung und die Diskussion unter der Beteiligung von Fachleuten, um die Güte des Vorhersageergebnisses sicherzustellen (Kilian, 2013). Die rechnerische Mindestanzahl an Versuchen, die für die Bestimmung der Materialparameter einer Grenzbedingung benötigt wird, ist äquivalent zur Anzahl der eingehenden Materialparameter. Die Identifizierung der einaxialen Druckfestigkeit als Materialparameter der Grenzbedingung nach von Mises kann mit genau einem Versuch erfolgen. Für die Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb, die jeweils einen Materialparameter für die Reibung und einen für die Kohäsion beinhaltet, werden genau zwei Versuche für die Parameter-Identifikation benötigt. Gleiches gilt für die Grenzbedingung nach Mogi-Coulomb Gl.(4.6) sowie für die MMGC, wenn der Aufweitungsparameter $\alpha = 0$ vorgegeben wird. Nimmt der Aufweitungsparameter in der MMGC Werte von $\alpha \neq 0$ an, können mit nur zwei Versuchen mehrere Lösungen für die eingehenden Parameter gefunden werden. Um eine exakte Lösung für die Parameterkombination α , φ und c zu identifizieren, werden dann genau drei Versuchsergebnisse benötigt. Damit aus einer ausreichenden Anzahl von Versuchen Parameter identifiziert werden können, dürfen die Versuchsergebnisse nicht in derselben Deviatorebene liegen, sondern müssen entlang der hydrostatischen Achse unterschiedliche Werte annehmen. Da es sich bei Mohr-Coulomb sowie der MMGC um lineare Funktionen entlang der hydrostatischen Achse handelt, darf die Koeffizientendeterminante nicht gleich null sein, damit die eingehenden Materialparameter bestimmt werden können.

5.3. Konventionelle Bestimmung der Materialparameter

Konventionell können die Parameter, wie bereits in Kosmann & Perau (2021) angewandt und beschrieben, mit der Methode der kleinsten Quadrate nach Gl. (5.1) bestimmt werden. Darin ist F das Quadrat der Werte der Funktion zur Formulierung der Grenzbedingung, wenn die Wertetripel der Hauptspannungen der Versuchsergebnisse eingesetzt werden. R ist das Residuum also die Summe aller Fehlerquadrate über alle n Versuche einer Versuchsreihe $(1, \dots, n)$, welches über die Wahl geeigneter Parameter minimiert werden muss. Das Ergebnis dieses Verfahrens ist ein Satz an Parametern, der optimal zu den Versuchsergebnissen passt.

$$R = \sum_{i=1}^n F_i^2 \Rightarrow \min \quad (5.1)$$

Eine analytische Lösung durch Ableiten und Gleich-Null-Setzen der quadrierten Grenzbedingungen nach Mohr-Coulomb oder der MMGC für die Identifizierung der Parameter ist jedoch nicht möglich. Bei beiden Grenzbedingungen bleibt in der Ableitung nach φ auch c und in der Ableitung der MMGC nach φ zusätzlich auch α erhalten. Da die Ableitung nach c ebenfalls von φ abhängt, gibt es keine einfache Lösung, da es sich hierbei nicht um ein lineares Gleichungssystem handelt.

Die Parameteridentifikation muss daher über die Regressionsanalyse mittels einer Regressionsgerade erfolgen. Für die Identifizierung der Parameter der MMGC geht die Summe der sortierten Hauptspannungen $(\sigma_1 + \alpha\sigma_2 + \sigma_3)$ als Regressor x_i und die Wurzel aus der ersten und zweiten Invariante $\sqrt{I_1^2 - 3I_2}$ als Regressand y_i in die Regressionsgeradengleichung ein. Über die Summe aller Regressanden und Regressoren für die eingehenden Versuchsergebnisse können die optimalen Parameter in Form von $\sin \varphi$ für die Reibung und $2c \cos \varphi$ für die Kohäsion bestimmt werden. Der Aufweitungsparameter α ist zu Anfang der Parameterbestimmung durch eine Abschätzung vorzugeben. Maßgebend ist der Aufweitungsparameter, der in Kombination mit φ und c zum minimalen Residuum nach Gl. (5.1) führt. Es empfiehlt sich, zunächst nacheinander die Werte $\alpha = -0,1; 0; 0,1$ anzusetzen und anschließend in dem Wertebereich, der das kleinste Residuum liefert, weiter abzuschätzen. In Abbildung 5.1 ist exemplarisch eine Regressionsgerade für die MMGC zur Bestimmung der optimalen Parameter für Versuchsergebnisse unter echten triaxialen Bedingungen nach Mogi (2007) für Granit dargestellt. Abbildung 5.1 ist mit einer Tabellenkalkulation die aus der vom Autor initiierten und betreuten Bachelor-Thesis von Macherey (2020) resultiert, erstellt worden.

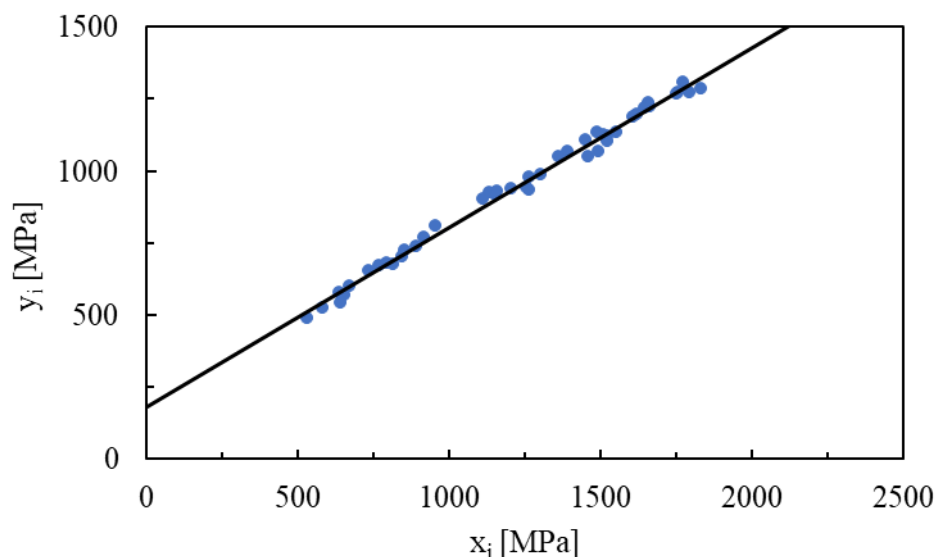


Abbildung 5.1: Regressionsgerade der MMGC; für Versuchsergebnisse unter echten triaxialen Bedingungen von Granit nach Mogi (2007) zur Identifizierung der optimalen Parameter ($\alpha = 0,1$, $\varphi = 38,6^\circ$, $c = 115,6 \text{ MPa}$)

Für die Anwendung der linearen Regression müssen die zugrundeliegenden Modellannahmen erfüllt sein. Grundlegend muss daher ein linearer Zusammenhang zwischen Regressand und Regressor vorliegen, die Residuen müssen entlang der Regressionsgerade möglichst normalverteilt und die Varianz der Residuen konstant sein (Engelhard, 2020).

5.4. Einfluss des Spannungsniveaus

Ist die Mindestanzahl an Versuchen vorhanden kann, eine Grenzbedingung diese bei optimalen Parametern genau wiedergeben. Das mechanische Verhalten kann mit der Mindestanzahl an Versuchen nicht ausreichend repräsentiert werden, weil Versuchsergebnisse immer Streuungen unterliegen und daher zusätzliche Versuche erforderlich sind. Sind deshalb mehr Versuche als die Mindestzahl vorhanden, müssen Grenzbedingungen den Versuchsergebnissen durch eine Variation der Parameter möglichst zutreffend angepasst werden. Für die Beurteilung des Einflusses des Spannungsniveaus müssen die Versuchsrandbedingungen so eingestellt werden, dass die Ergebnisse über den betrachteten Bereich entlang der hydrostatischen Achse gleichmäßig verteilt sind. Die Verteilung der Versuchsergebnisse im Hauptspannungsraum spielt dabei eine wichtige Rolle. Ist die Verteilung der Versuchsergebnisse entlang der hydrostatischen Achse eher nicht linear, sind nicht lineare Grenzbedingungen entlang der hydrostatischen Achse wie die nach Hoek-Brown (HB) vorteilhaft. Exemplarisch zeigen die Untersuchungen unter echten triaxialen Bedingungen von Ma u.a. (2017) an Coconino und Bentheimer Sandstein eine ausgeprägte Nichtlinearität der Gesteinsfestigkeit mit zunehmendem Spannungsniveau.

Um den Einfluss aus der Nichtlinearität der Gesteinsfestigkeit mit zunehmendem Spannungsniveau zu zeigen, ist hier ein Längsschnitt entlang der hydrostatischen Achse gewählt worden. Dabei wird der Abstand eines Spannungszustands von der hydrostatischen Achse \tilde{r} nach Gl. (2.20) auf der Ordinate und der Achsenabschnitt auf der hydrostatischen Achse \tilde{l} nach Gl. (2.18) auf der Abszisse aufgetragen.

Da es sich um Versuchsergebnisse, bestimmt unter echten triaxialen Bedingungen, handelt, weisen die einzelnen Spannungszustände, die zum Bruch führen, unterschiedliche Lode-Winkel auf. Um den Einfluss des Spannungsniveaus besser bewerten zu können, wird es vom Autor als vorteilhaft angesehen, die Versuchsergebnisse normiert über den Lode-Winkel aufzutragen. Dafür soll der Sinus des Lode-Winkels Verwendung finden. Nach bodenmechanischer Vorzeichenkonvention entspricht der Lode-Winkel $\Theta = -30^\circ$ für triaxiale Kompression und $\Theta = 30^\circ$ für triaxiale Extension. Durch Multiplizieren von \tilde{r} mit $(1 - \sin \Theta)$ werden Spannungszustände im Kompressions- und im Extensionsbereich normiert und können anschaulich in einem Längsschnitt entlang der hydrostatischen Achse dargestellt werden. Nach Gl.(5.2) kann der auf diese Weise angepasste Abstand $\tilde{r}_{ang.}$ berechnet werden. Durch diese Art der Darstellung durchdringen sich die Versuchsergebnisse unterschiedlicher Lode-Winkel nicht mehr und der Einfluss des Spannungsniveaus kann für unterschiedliche Lode-Winkel anschaulich gezeigt werden.

$$\tilde{r}_{ang.} = \tilde{r}(1 - \sin \Theta) \quad (5.2)$$

Die Versuchsergebnisse für triaxiale Kompression aus den Untersuchungen nach Ma u.a. (2017) sowie die Grenzbedingungen nach Hoek-Brown und die MMGC sind in Abbildung 5.2 in dem angepassten Längsschnitt dargestellt. Betrachtet man die Versuchsergebnisse, wird ersichtlich, dass für Kompressionszustände mit zunehmendem Spannungsniveau die Versuchsergebnisse zutreffend durch eine Kurve beschrieben werden können. Für die Darstellung der Grenzbedingungen sind anhand von optimalen Parametern sowie der mittleren und kleinsten Hauptspannung aus den Versuchsergebnissen die Werte für die zugehörige größte Hauptspannung berechnet und als Graph aufgetragen worden. Die nichtlineare Grenzbedingung nach Hoek-Brown Gl. (2.37) wurde für die Bestimmung der optimalen Parameter – wie von Hoek (2007) vorgeschlagen – in eine lineare Funktion nach Gl. (5.3) umgeformt.

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 = m_i \sigma_{ci} \sigma_3 + \sigma_{ci}^2 \quad (5.3)$$

Darin ist $(\sigma_1 - \sigma_3)^2$ der Wert der Ordinate (y), $m_i \sigma_{ci}$ die Steigung Funktion (m) und σ_{ci}^2 der Ordinatenabschnitt (b) der linearen Funktion: $y = mx + b$.

Wie in Abbildung 5.2 ersichtlich, kann eine entlang der hydrostatischen Achse nichtlineare Grenzbedingung wie die nach Hoek-Brown die Verteilung der konventionellen triaxialen Versuchsergebnisse für Sandstein zutreffend abbilden. Ein Vergleich der Grenzbedingung nach Hoek-Brown mit einer entlang der hydrostatischen Achse linearen Grenzbedingung wie der MMGC zeigt, dass im Fall von Kompressionszuständen die Gesteinsfestigkeit mit der MMGC sowohl überschätzt als auch unterschätzt werden kann, die Versuchsergebnisse aber näherungsweise abgebildet werden können.

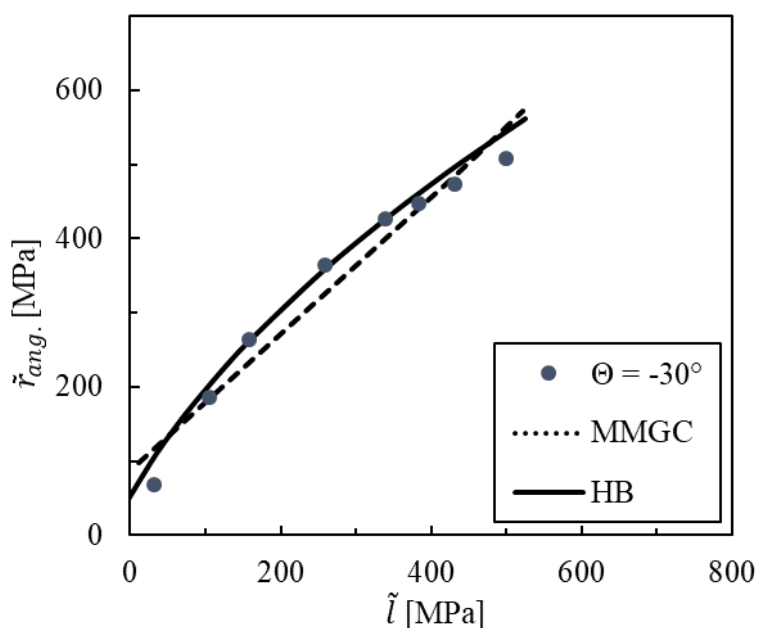


Abbildung 5.2: Versuchsergebnisse von Sandstein unter triaxialer Kompression nach Ma u.a. (2017), dargestellt in einem angepassten Längsschnitt entlang der hydrostatischen Achse; die Kurven entsprechen der MMGC ($\alpha=0$, $\varphi=32,4^\circ$, $c=34,6$ MPa) und der Grenzbedingung nach HB ($\sigma_{ci}=141,9$ MPa, $m_i=8,9$ [-]) bei optimalen Parametern.

Betrachtet man alle Versuchsergebnisse für den Sandstein nach Ma u.a. (2017), dargestellt in Abbildung 5.3, unter echten triaxialen Bedingungen und damit einhergehend Ergebnisse für unterschiedliche Lode-Winkel, wird ersichtlich, dass diese für Spannungszustände von $\Theta=0$ bis $\Theta=-30$ mit zunehmendem Spannungsniveau zutreffend durch eine Kurve und im Extensionsbereich ($\Theta=30$) durch eine Gerade beschrieben werden können. Die Grenzbedingungen nach Hoek-Brown und die MMGC sind in Abbildung 5.3 den Versuchsergebnissen nach Ma u.a. (2017) gegenübergestellt. Auch hier wurden für die Darstellung der Grenzbedingungen anhand von optimalen Parametern – der mittleren und kleinsten Hauptspannung aus den Versuchsergebnissen – die Werte für die zugehörige größte Hauptspannung bestimmt und als Kurve aufgetragen. Für eine bessere Übersichtlichkeit sind die Graphen der Grenzbedingungen

nur für triaxiale Kompression und triaxiale Extension dargestellt. Im Fall von Extensionszuständen beschreibt die MMGC die Versuchsergebnisse zutreffend und die Grenzbedingung nach Hoek-Brown näherungsweise und eher konservativ. Im Fall von triaxialer Kompression liegt die Kurve der Grenzbedingung nach Hoek-Brown deutlich oberhalb der Versuchsergebnisse und die Gesteinsfestigkeit wird hier deutlich überschätzt. Mit der MMGC wird die Gesteinsfestigkeit ebenso wie in Abbildung 5.2 sowohl überschätzt als auch unterschätzt, schlussendlich aber näherungsweise zutreffend abgebildet.

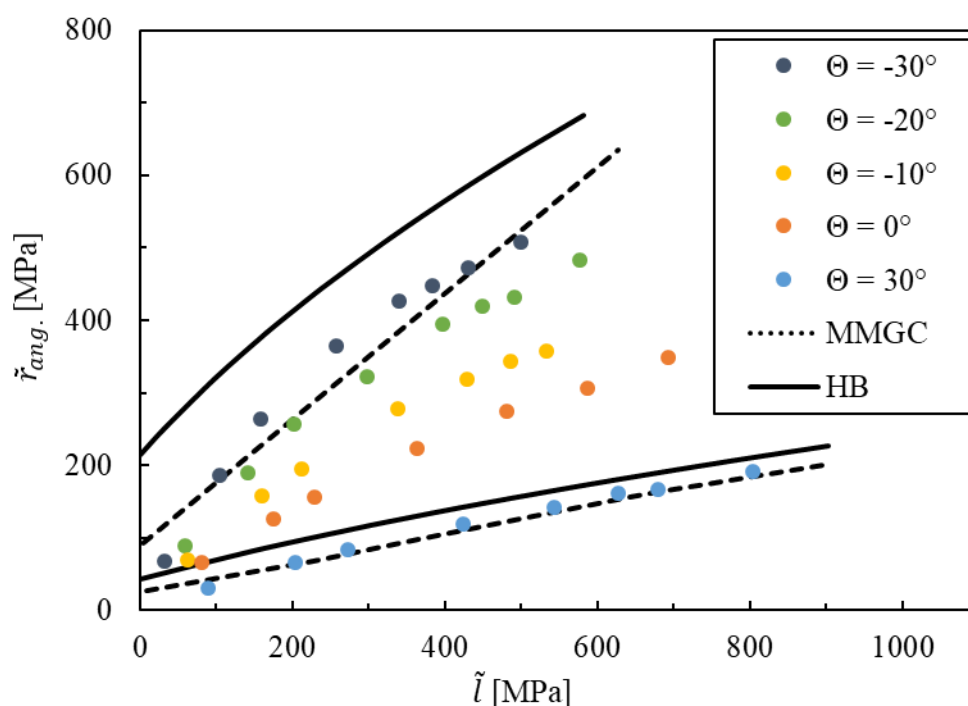


Abbildung 5.3: Versuchsergebnisse unter echten triaxialen Bedingungen von Sandstein nach Ma u.a. (2017), dargestellt in einem angepassten Längsschnitt entlang der hydrostatischen Achse; die Kurven entsprechen der MMGC ($\alpha = 0$, $\varphi = 30,7^\circ$, $c = 35,2$ MPa) und der Grenzbedingung nach HB ($\sigma_{ci} = 329,3$ MPa, $m_i = 4,1$ [-]) bei optimalen Parametern.

Kann die Verteilung von Versuchsergebnissen entlang der hydrostatischen Achse mit einer Geraden beschrieben werden, eignen sich Grenzbedingungen, die entlang der hydrostatischen Achse linear sind, gleichermaßen wie nichtlineare Grenzbedingungen, da der Unterschied zwischen diesen sehr klein wird. Die in Abbildung 5.4 dargestellten Versuchsergebnisse unter echten triaxialen Bedingungen für Kalkstein nach Mogi (2007), können für die dargestellten Lode-Winkel mit einer Geraden entlang der hydrostatischen Achse zutreffend abgebildet werden und daher ebenfalls mit linearen Grenzbedingungen wie Mohr-Coulomb oder der MMGC. Zur Darstellung der Grenzbedingungen sind die Werte für die größte Hauptspannung anhand der optimalen Parameter (für die Grenzbedingung nach Hoek-Brown wurden diese von

Benz & Schwab (2008) übernommen) sowie der kleinsten und mittleren Hauptspannung aus den Versuchsergebnissen nach Mogi (2007) berechnet. Ein Vergleich der beiden Grenzbedingungen zeigt, dass die Versuchsergebnisse über den Abschnitt auf der hydrostatischen Achse, in dem die Versuche durchgeführt wurden, von der MMGC zutreffend und mit der Grenzbedingung nach Hoek-Brown nur näherungsweise abgebildet werden können.

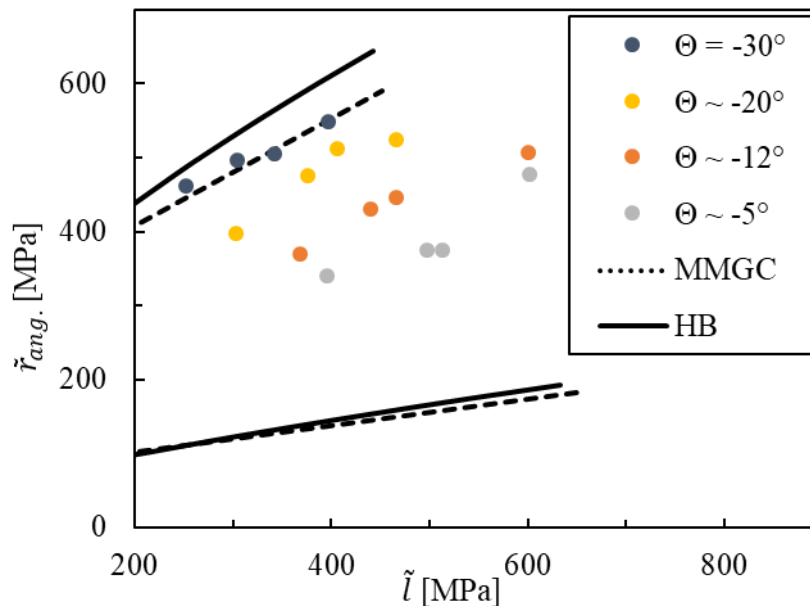


Abbildung 5.4: Versuchsergebnisse unter echten triaxialen Bedingungen von Kalkstein nach Mogi (2007), dargestellt in einem angepassten Längsschnitt entlang der hydrostatischen Achse; die Kurven entsprechen der MMGC ($\alpha = 0$, $\varphi = 26,0^\circ$, $c = 101,8 \text{ MPa}$) und der Grenzbedingung nach HB ($\sigma_{ci} = 368 \text{ MPa}$, $m_i = 4,8 [-]$ nach Benz & Schwab (2008)) bei optimalen Parametern.

5.5. Einfluss der mittleren Hauptspannung

Wie unter 4.1 anhand der Versuchsergebnisse von Mogi (2007) gezeigt, hat die mittlere Hauptspannung einen Einfluss auf die Gesteinsfestigkeit. Besonders deutlich wird dieser bei der Betrachtung von Versuchsergebnissen in einer Deviatorebene. Unter Verwendung des von Kolymbas (1978) in Richtung der hydrostatischen Achse transformierten Koordinatensystems können Versuchsergebnisse mit unterschiedlichem Spannungsniveau in eine normierte Deviatorebene projiziert werden. Die übliche Normierung durch $I_1/3$ gilt nur für Spannungszustände innerhalb des Druckspannungsoktanten. Da für die Beschreibung der Gesteinsfestigkeit kohäsives Materialverhalten und daher auch Zugspannungen berücksichtigt werden müssen, wird diese Projektion bezogen auf die Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb in Gl. (5.4) und

Gl. (5.5) sowie auf die MMGC in Gl. (5.6) und Gl. (5.7) modifiziert. Dafür werden die Basisvektoren d_1 und d_2 durch die Summe von $I_1/3$ eines Versuchsergebnisses und nach einem Vorschlag von Medicus (2019) gemäß einer Komponente des Schnittpunktes der betrachteten Grenzbedingung mit der hydrostatischen Achse normiert.

$$d_{1MC} = -\frac{1}{I_1/3 + c/\tan \varphi} (\sigma_2 - \sigma_1) / \sqrt{2} \quad (5.4)$$

$$d_{2MC} = -\frac{1}{I_1/3 + c/\tan \varphi} (2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2) / \sqrt{6} \quad (5.5)$$

$$d_{1MMGC} = -\frac{1}{I_1/3 + 2c/(\alpha + 2)\tan \varphi} (\sigma_2 - \sigma_1) / \sqrt{2} \quad (5.6)$$

$$d_{2MMGC} = -\frac{1}{I_1/3 + 2c/(\alpha + 2)\tan \varphi} (2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2) / \sqrt{6} \quad (5.7)$$

Betrachtet man die Verteilung der Versuchsergebnisse, erzielt unter echten triaxialen Bedingungen – wie exemplarisch in Abbildung 5.5 aufgetragen – in einer normierten Deviatorebene oder wie nach Kosmann & Perau (2021) aus Sicht der kleinsten Hauptspannung σ_3 auf die $\sigma_1 - \sigma_2$ -Ebene – dargestellt in Abbildung 5.6 –, wird der Einfluss der mittleren Hauptspannung auf die Gesteinsfestigkeit ersichtlich. Bei derartigen Verteilungen der Versuchsergebnisse sind Grenzbedingungen vorteilhaft, die diesen Einfluss auch berücksichtigen können. Mit den unter 4.2 genannten Grenzbedingungen, wie die MMGC oder Matsuoka-Nakai (kombiniert mit Hoek-Brown (Benz & Schwab, 2008) oder mit Lade-Duncan (Ma u.a., 2017), können derartige Verteilungen von Versuchsergebnissen zutreffend abgebildet werden, da diese die mittlere Hauptspannung berücksichtigen.

Die eingehenden Materialparameter der genannten Grenzbedingungen werden gerne gleich den anhand von konventionellen Triaxialversuchen aufgestellten Grenzbedingungen nach Mohr-Coulomb oder Hoek-Brown gewählt bzw. können anhand der in diesen Grenzbedingungen enthaltenen Parametern berechnet werden. Verwendet man Parameter, identifiziert über die Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb in der MMGC, wird die Fließfläche von Mohr-Coulomb um den nichtlinearen „Bereich“ der MMGC erweitert, wie dies in Abbildung 5.5 gezeigt wird. Dies erweckt den Eindruck, man läge bei der Verwendung der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb auf der sicheren Seite und würde schlimmstenfalls nicht wirtschaftlich rechnen. Das ist allerdings nicht der Fall, da die hohe Festigkeit unter echten triaxialen Bedingungen bei der in Abbildung 5.5 gezeigten Interpretation der Versuchsergebnisse im Kompressionsbereich zu einer

Überschätzung der Gesteinsfestigkeit und gleichzeitig zu einer Überschätzung der Scherparameter führt (Kosmann & Perau, 2021).

Betrachtet man unter diesen Gesichtspunkten die Arbeit von Benz & Schwab (2008), so fällt auf, dass die Materialparameter nach Hoek-Brown ebenfalls größer identifiziert wurden als die der darin vorgestellten Grenzbedingung von Matsuoka-Nakai, kombiniert mit Hoek-Brown. Demnach liegt auch bei dieser Auswertung eine Überschätzung der Materialparameter durch die fehlende Berücksichtigung des Einflusses der mittleren Hauptspannung für die Grenzbedingung nach Hoek-Brown vor. Der Vergleich der Grenzbedingung nach Hoek-Brown mit den Versuchsergebnissen nach Ma u.a. (2017) in Abbildung 5.4 zeigt ebenfalls, dass durch die Vernachlässigung des Einflusses der mittleren Hauptspannung die Gesteinsfestigkeit insbesondere bei triaxialer Kompression überschätzt wird.

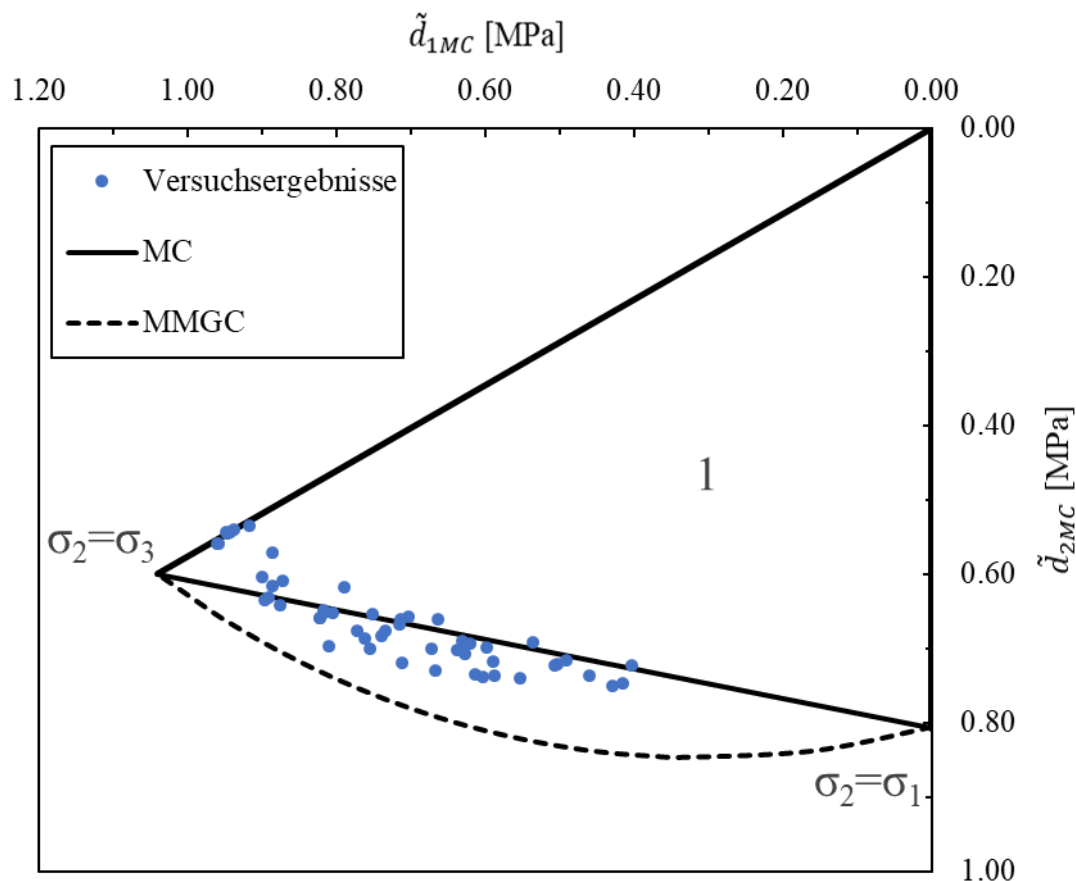


Abbildung 5.5: Versuchsergebnisse unter echten triaxialen Bedingungen für Dolomit nach Mogi (2007); die Kurven entsprechen der MMGC ($\alpha = 0$) und der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb mit gleichen Parametern, identifiziert mit Mohr-Coulomb ($\varphi = 36,2^\circ$, $c = 100,8$ MPa)

Um diesen Effekt aus dem Einfluss der mittleren Hauptspannung zu verdeutlichen, werden anhand der Versuchsergebnisse nach Mogi (2007) für Kalkstein und Dolomit die optimalen Parameter jeweils für die Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb und die MMGC bestimmt. Unter Verwendung der kleinsten und mittleren Hauptspannungen der Versuchsergebnisse wird mit den jeweils identifizierten optimalen Parametern der beiden Grenzbedingungen die zugehörige größte Hauptspannung errechnet und für die gesamte Versuchsreihe als Kurve in Abbildung 5.6 aufgetragen (Kosmann & Perau, 2021).

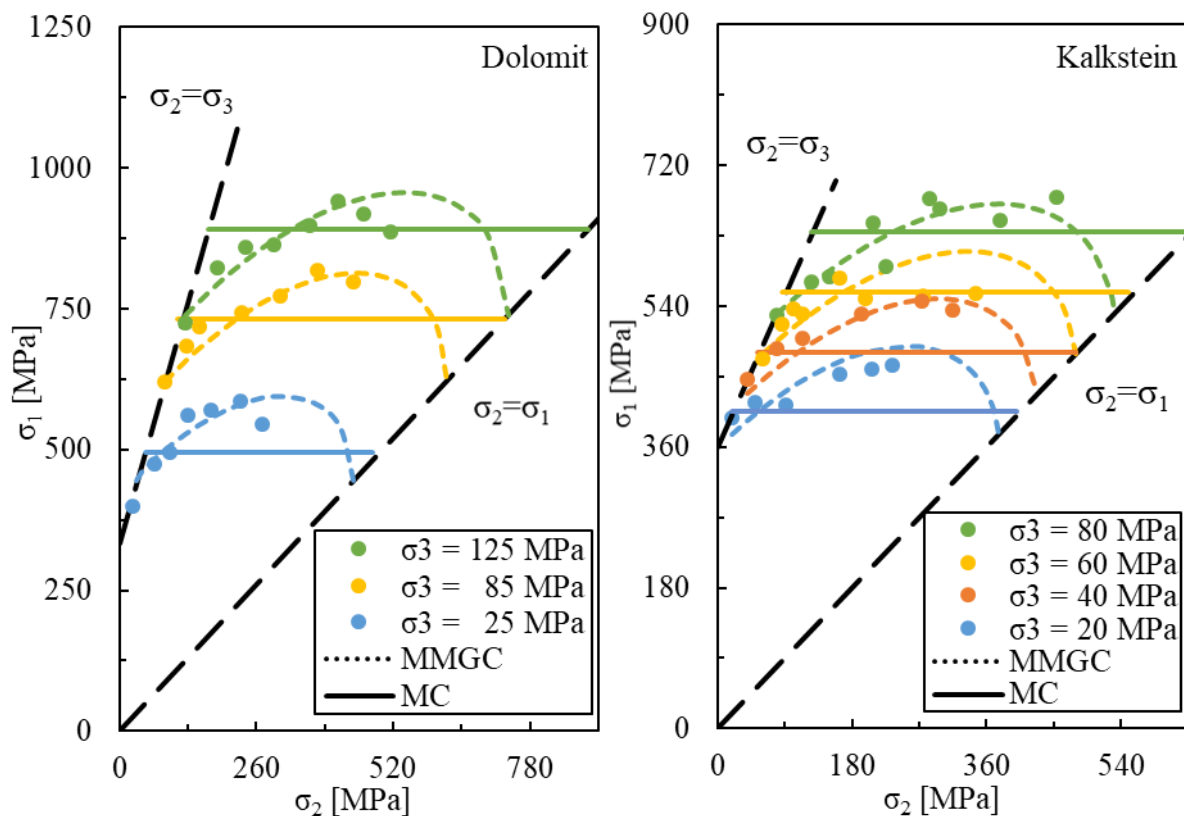


Abbildung 5.6: Vergleich der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb mit der MMGC unter Verwendung der jeweils identifizierten Scherparameter für die Versuchsergebnisse nach Mogi (2007) für Kalkstein und Dolomit nach Kosmann & Perau (2021)

Durch einen Vergleich der Kurven für die beiden Grenzbedingungen in Abbildung 5.6 wird deutlich, dass die prognostizierte Gesteinsfestigkeit in den Bereichen von triaxialer Kompression mit Mohr-Coulomb oberhalb der zugrunde liegenden Versuchswerte liegt und hier die Gesteinsfestigkeit überschätzt wird. Gleichzeitig wird die Gesteinsfestigkeit von der MMGC nicht nur im Kompressionsbereich, sondern über den gesamten Bereich zwischen Kompression und Extension zutreffend beschrieben. Da in den Untersuchungen nach Mogi (2007) keine Versuche im Extensionsbereich enthalten sind, werden die Untersuchungen unter echten triaxialen

Bedingungen von Ma u.a. (2017) an Sandstein herangezogen. Ein Vergleich der berechneten Werte für die größte Hauptspannung mit den Versuchsergebnissen im Extensionsbereich zeigt, wie in Abbildung 5.7, dargestellt, dass auch diese von der MMGC zutreffend beschrieben werden können und mit der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb die Gesteinsfestigkeit im Extensionsbereich überschätzt wird. Die in Abbildung 5.7 dargestellten Kurven sind allerdings mit jeweils eigenen Parameterkombinationen pro Versuchsreihe mit konstanter kleinster Hauptspannung bestimmt worden, da, wie bereits beschrieben, der Sandstein eine Abhängigkeit vom Spannungsniveau aufweist. Daher kann die Gesteinsfestigkeit mit der MMGC sowie mit der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb nur für begrenzte Bereiche entlang der hydrostatischen Achse zutreffend mit einer Parameterkombination wiedergegeben werden.

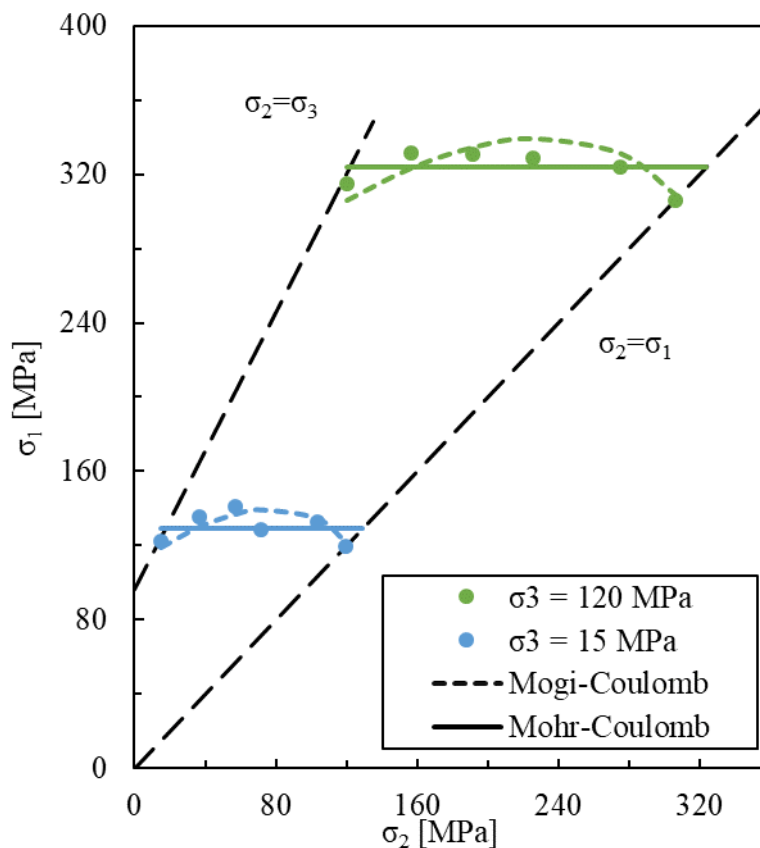


Abbildung 5.7: Versuchsergebnisse unter echten triaxialen Bedingungen für Sandstein nach Ma u.a. (2017) und Interpretation mit der MMGC und der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb. Den dargestellten Kurven liegen je σ_3 unterschiedliche Parameterkombinationen zugrunde.

5.6. Streuungen in den Versuchsergebnissen

Bei Versuchsreihen, die mehr Versuche als die rechnerische Mindestanzahl enthalten, können Streuungen bei der Parameteridentifikation zu Problemen führen. Werden einzelne Versuchsergebnisse, die stark von den übrigen einer Versuchsreihe abweichen, bei der Identifikation der Parameter mit einbezogen, kann die gewonnene Parameterkombination zu einer Über- oder Unterschätzung der Gesteinsfestigkeit führen. Hier sind eine genaue Inaugenscheinnahme und Diskussion der einzelnen Versuchsergebnisse durch Fachleute, wie sie Kilian (2013) fordert, zwingend notwendig. Die Versuchsreihe mit einer konstanten kleinsten Hauptspannung von 15 MPa in Abbildung 5.7 enthält ein Versuchsergebnis bei $\sigma_2 = 71,5$ MPa, das von den übrigen Ergebnissen abweicht. Prinzipiell ist es sinnvoll, den Einfluss einzelner Versuchsergebnisse durch einen Vergleich der Parameter zu untersuchen, die durch die Berücksichtigung oder die Vernachlässigung des einzelnen Versuchsergebnisses gewonnen werden. Bei der vorgenommenen Auswertung für die Bestimmung der optimalen Parameter zeigt ein Vergleich der Scherparameter, dass der Einfluss aus der Berücksichtigung oder Vernachlässigung des einzelnen Versuchs auf den Reibungswinkel der MMGC ca. einen Grad Unterschied und auf die Kohäsion Auswirkungen im dritten Nachkommabereich ausmacht. Für die Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb ergibt sich kein nennenswerter Unterschied zwischen der Berücksichtigung oder der Vernachlässigung des einzelnen Versuchs. Bei der hier vorgenommenen Parameteridentifikation ist die Versuchsreihe für jede betrachtete Grenzbedingung vollständig eingegangen.

Ein Anhalt für eine zutreffende Parameterkombination können empirische Erfahrungswerte liefern; insbesondere ein Vergleich, ob die bestimmten Parameter in einem für das Material üblichen Bereich liegen oder stark davon abweichen, kann bei der Einschätzung hilfreich sein.

5.7. Parametergewinnung mit der Methode der kleinsten Abstandsbeiträge

Der Parameteridentifikation unter Verwendung der Methode der kleinsten Quadrate – bzw. bei der Anwendung der linearen Regression – liegen Abstände in Richtung der Ordinate zwischen den Versuchsergebnissen und der Regressionsgeraden zugrunde. Diese „vertikale“ Abweichung stellt jedoch nicht den kürzesten Weg dar und ist daher nicht optimal. Nach eigenen Überlegungen kann der kürzeste Weg über den Betrag eines normal zur Fließfläche verlaufenden Vektors zwischen dem Spannungszustand eines Versuchsergebnisses und der Fließfläche einer Grenzbedingung bestimmt werden. Unter der Betrachtung aller Versuchsergebnisse können somit die Materialparameter so optimiert werden, dass die Summe aller Beiträge minimal wird. Eine so optimierte Fließfläche weist dann im Gesamten betrachtet den kleinsten Abstand zu den Versuchsergebnissen auf und kann somit die Gesteinsfestigkeit zutreffend beschreiben.

Bei diesem Vorgehen erhält man im Vergleich mit den Residuen konventioneller Approximationen eine aussagekräftige Spannung als Maß für die Übereinstimmung der Versuchsergebnisse mit der Grenzbedingung. Dies ermöglicht über die Parameteridentifizierung hinaus einen direkten Vergleich der Abweichungen unterschiedlicher Grenzbedingungen zu den Versuchsergebnissen und damit einen Vergleich der Grenzbedingungen untereinander. Ein direkter Vergleich anhand von Residuen ist dagegen nicht sinnvoll, da, wie bereits in Kosmann & Perau (2021) beschrieben, bereits die Einheit der Spannungen einen Einfluss auf die Größe der Residuen hat und der Funktionswert einer Grenzbedingung lediglich zur Unterscheidung von $F < 0$ oder $F \geq 0$ als Kriterium zur Trennung von elastischem oder plastischem Materialverhalten konzipiert ist. Alternativ kann für einen Vergleich von Grenzbedingungen untereinander die „Least-Mean-Standard-Deviation-Misfit-Method“, wie sie auch von Benz & Schwab (2008) verwendet wurde, herangezogen werden.

Es soll hier eine alternative Methode vorgestellt werden, die den kürzesten Abstand zwischen einem Versuchsergebnis und einer Fließfläche im Hauptspannungsraum verwendet. Der kürzeste Weg von einem Versuchsergebnis bzw. einem Spannungszustand – dargestellt als Punkt im Hauptspannungsraum, welcher durch die drei Hauptspannungen σ_1 , σ_2 und σ_3 definiert wird – zurück auf die Fließfläche, liegt in Richtung einer Normalen der Fließfläche, die durch den betrachteten Punkt läuft. Da die Richtung der Gradienten einer Grenzbedingung, ausgehend von Funktionswerten $F > 0$ auf die Fließfläche zu, bei schrittweisem Vorgehen nicht bei allen Grenzbedingungen konstant ist, wird hier bewusst auf den Ansatz einer Gradientenlinie verzichtet, um nicht unvermittelt einem gekrümmten Verlauf zu folgen. Außerdem sollen mit der alternativen Vorgehensweise sinnvolle Parameter bestimmt werden, wenn die Anordnung der Punkte im Hauptspannungsraum das für konventionelle Verfahren nicht zulässt. Das nachfolgende Verfahren ist zur Bestimmung und Bewertung von Parametern für Grenzbedingungen der J_2 -Plastizität gedacht, die entlang der hydrostatischen Achse einen linearen Verlauf haben.

Um den kürzesten Abstand zwischen einem beliebigen Spannungszustand P (Versuchsergebnis) und einer Fließfläche zu bestimmen, werden die in Abbildung 5.8 dargestellten Vektoren und Winkel sowie die Abstände \tilde{r} nach Gl. (2.20) und \tilde{l} nach Gl. (2.18) verwendet. Diese können anhand der Invarianten des Spannungstensors für den Punkt P in Abbildung 5.8 bestimmt werden. Mit dem Koordinatenursprung des Hauptspannungsraums bei kohäsionslosem Material oder dem Schnittpunkt der Fließfläche mit der hydrostatischen Achse als Bezugspunkt für kohäsives Material ist durch den Punkt P auch \mathbf{z} definiert.

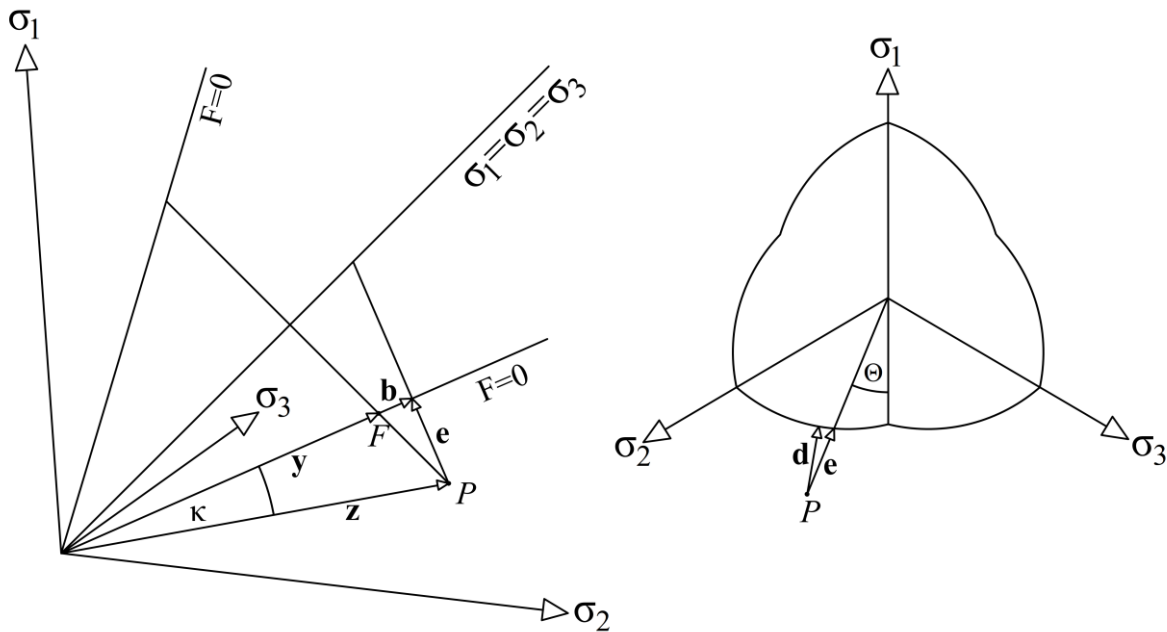


Abbildung 5.8: Methode der kleinsten Abstandsbeträge, eingehende Vektoren und Winkel, links: dargestellt entlang der hydrostatischen Achse und rechts: in einer Deviatorebene im Hauptspannungsraum

Zusätzlich muss eine Grenzbedingung, auf welche die Methode der kleinsten Abstandsbeträge angewandt werden soll, nach $\sqrt{J_2}$ umgeformt werden, um die Koordinaten für den Punkt F in Abbildung 5.8, für den $F_{\text{Grenzbedingung}} = 0$ gilt, bestimmen zu können. Der Punkt F liegt in der gleichen Deviatorebene und weist den gleichen Lode-Winkel auf wie der Punkt P . Exemplarisch sind die Grenzbedingungen nach Mohr-Coulomb in Gl. (5.8) und die MMGC in Gl. (5.9) nach $\sqrt{J_2}$ umgeformten aufgeführt.

$$\sqrt{J_2} = \frac{\frac{I_1}{3} \sin \varphi + c \cos \varphi}{\left(\cos \Theta + \frac{\sin \Theta \sin \varphi}{\sqrt{3}} \right)} \quad (5.8)$$

$$\sqrt{J_2} = \frac{I_1 \left(\frac{2+\alpha}{3\sqrt{3}} \right) \sin \varphi + \frac{2c \cos \varphi}{\sqrt{3}}}{\left(1 - \sin \varphi \left(\frac{2 \sin \Theta (\alpha - 1)}{3} \right) \right)} \quad (5.9)$$

Nach Wittke (1984) können die Koordinaten von Punkt F , unter Verwendung von $\sqrt{J_2}$ der betrachteten Grenzbedingung sowie I_1 und Θ von dem Punkt P , nach Gl. (5.10) bestimmt werden. Mit dem Punkt F und dem Koordinatenursprung des Hauptspannungsraums oder dem

Schnittpunkt der Fließfläche mit der hydrostatischen Achse als Bezugspunkt kann anschließend der Vektor \mathbf{y} , entlang dem $F_{\text{Grenzbedingung}} = 0$ gilt, berechnet werden.

$$F = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{I_1}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \begin{pmatrix} \sin\left(\Theta + \frac{2}{3}\pi\right) \\ \sin(\Theta) \\ \sin\left(\Theta + \frac{4}{3}\pi\right) \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

Aus dem Skalarprodukt $\mathbf{z} \cdot \mathbf{y}$ kann der Winkel κ , mit $|\mathbf{z}| \sin \kappa$ der Betrag von \mathbf{e} und mit $|\mathbf{z}| \cos \kappa$ der Betrag des Vektors \mathbf{b} berechnet werden. Um die Komponenten von \mathbf{b} zu bestimmen, wird der Einheitsvektor von \mathbf{y} gebildet und wie in Gl. (5.11) ersichtlich mit $|\mathbf{b}|$ multipliziert.

$$\mathbf{b}_i = \frac{\mathbf{y}_i}{|\mathbf{y}|} |\mathbf{b}| \quad (5.11)$$

Die Differenz von \mathbf{z} und \mathbf{b} liefert die Komponenten von \mathbf{e} . Die Rückführung eines Spannungszustands vom Punkt P normal auf die Fließfläche ist somit durch \mathbf{e} in Betrag und Richtung bestimmt. Bei der Betrachtung einer Deviatorebene, wie in Abbildung 5.8 rechts dargestellt, wird ersichtlich, dass diese Rückführung in radialer Richtung zur hydrostatischen Achse erfolgt. Um den kürzesten Abstandsbetrag auch innerhalb einer Deviatorebene zu ermitteln, muss der Lode-Winkel und damit einhergehend $\sqrt{J_2}$ bei konstantem I_1 so weit variiert werden, bis der kleinste Betrag von \mathbf{e} und somit der normal auf der Fließfläche stehende Vektor \mathbf{d} gefunden ist. Für diesen Schritt gibt es keine geschlossene Lösung, sodass hier ein Näherungsverfahren zur Bestimmung des kleinsten Betrages verwendet werden muss. Der hier vorgenommenen Identifizierung der optimalen Parameter liegt eine Tabellenkalkulation zugrunde, in welcher der Lode-Winkel von -30° bis 30° variiert und anschließend der kleinste Betrag ausgewählt wird. Es sei angemerkt, dass durch die Variierung des Lode-Winkels innerhalb einer durch I_1 festgelegten Deviatorebene ein kleiner Fehler entstehen kann, durch den der Vektor \mathbf{d} , entlang der hydrostatischen Achse betrachtet, leicht von einer Normalen abweicht. Die Ergebnisse weichen aber nur in so geringem Maße ab, dass dieser ignoriert werden kann.

Dieses Vorgehen wird für jeden Spannungszustand P aus einem Versuchsergebnis durchgeführt und es wird die Summe der Abstandsbeträge gebildet, die gemäß ihrer mathematischen Definition immer positiv sind. Der Quotient aus der Summe der Abstandsbeträge und der Anzahl an betrachteten Spannungszuständen liefert die durchschnittliche Abweichung der Versuchsergebnisse zu der Grenzbedingung in MPa für die gewählten Parameter.

Für das beschriebene Vorgehen müssen zur Bestimmung des kleinsten Abstandsbetrags Parameter vorgegeben und variiert werden, bis dieser gefunden ist. Da, wie im Folgenden noch gezeigt wird, die mit der Methode der kleinsten Abstandsbeträge bestimmten Parameter in einer ähnlichen Größenordnung liegen wie die über eine Regressionsgerade bestimmten Parameter, empfiehlt es sich in erster Näherung auf diese zurückzugreifen.

Das Ergebnis der vom Autor initiierten und betreuten Bachelorthesis von Dreier (2021) sind zwei Tabellenkalkulationen, in die Spannungszustände als Ergebnis konventioneller oder echter triaxialer Versuche eingefügt, Materialparameter aus der Regressionsanalyse vorgeschlagen und durch Vorgabe von Materialparametern der kleinste Abstandsbetrag bestimmt werden kann. Eine Tabellenkalkulation beinhaltet Mohr-Coulomb und die andere die MMGC als Grenzbedingung zur Identifizierung optimaler Parameter und Abstandsbeträge.

Nachfolgend sind die Grenzbedingungen nach Mohr-Coulomb in Abbildung 5.9, Mogi-Coulomb (MMGC mit $\alpha = 0$) in Abbildung 5.10 und die MMGC in Abbildung 5.11 jeweils in einer normierten Deviatorebene mit optimalen Parametern dargestellt. In den normierten Deviatorebenen beschreiben die blauen Punkte die Versuchsergebnisse für Dolomit nach Mogi (2007) und die weißen Punkte die Rückführung, bestimmt mit der Methode der kleinsten Abstandsbeträge auf die Fließfläche. Die Versuchsergebnisse sind dem Sektor 1 der Fließfläche einer Grenzbedingung, für den $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ gilt, gegenübergestellt.

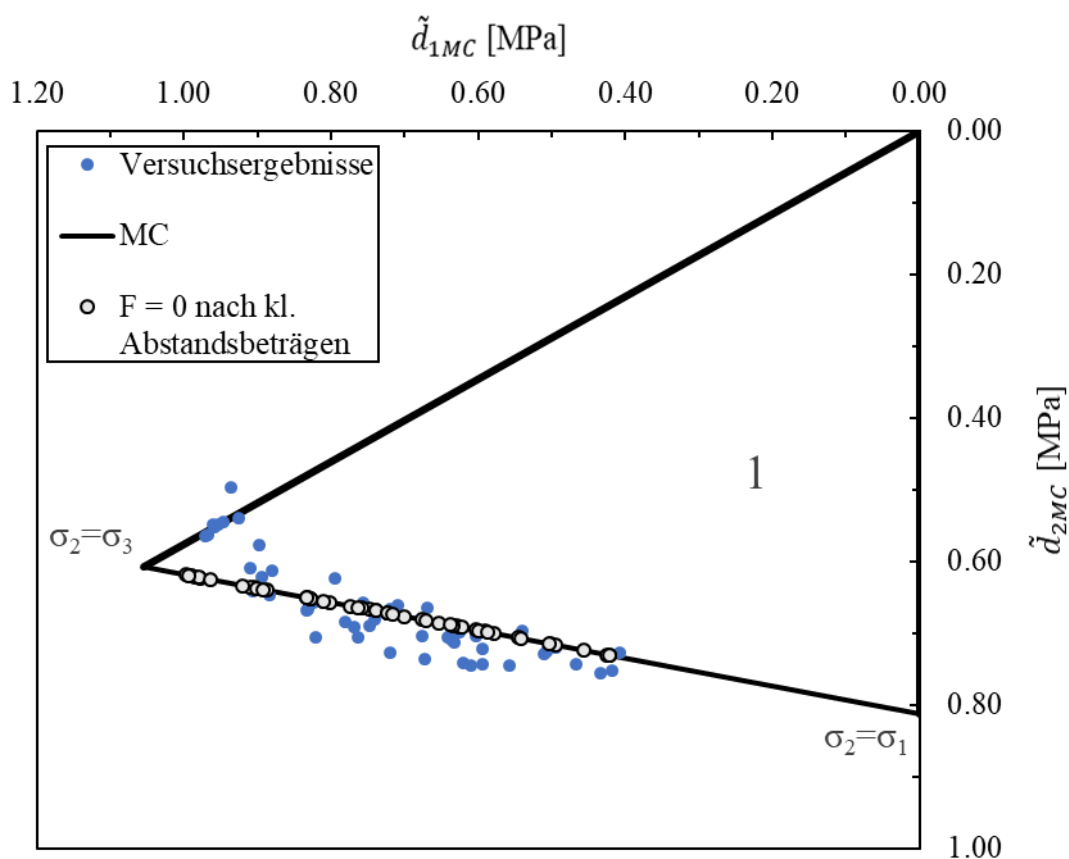


Abbildung 5.9: Versuchsergebnisse unter echten triaxialen Bedingungen für Dolomit nach Mogi (2007); gegenübergestellt der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb bei optimalen Parametern, identifiziert mit der Methode der kleinsten Abstandsbeiträge mit einem mittleren Abstand von 13,25 MPa ($\varphi = 36,6^\circ$, $c = 99,3$ MPa)

Für die Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb konnte der kleinste mittlere Abstandsbeitrag von 13,25 MPa für eine Parameterkombination von $\varphi = 36,6^\circ$ und $c = 99,3$ MPa im Vergleich zu einem Residuum von 670 MPa² für eine Parameterkombination von $\varphi = 36,2^\circ$ und $c = 100,8$ MPa, identifiziert mit der Methode der kleinsten Quadrate, bestimmt werden.

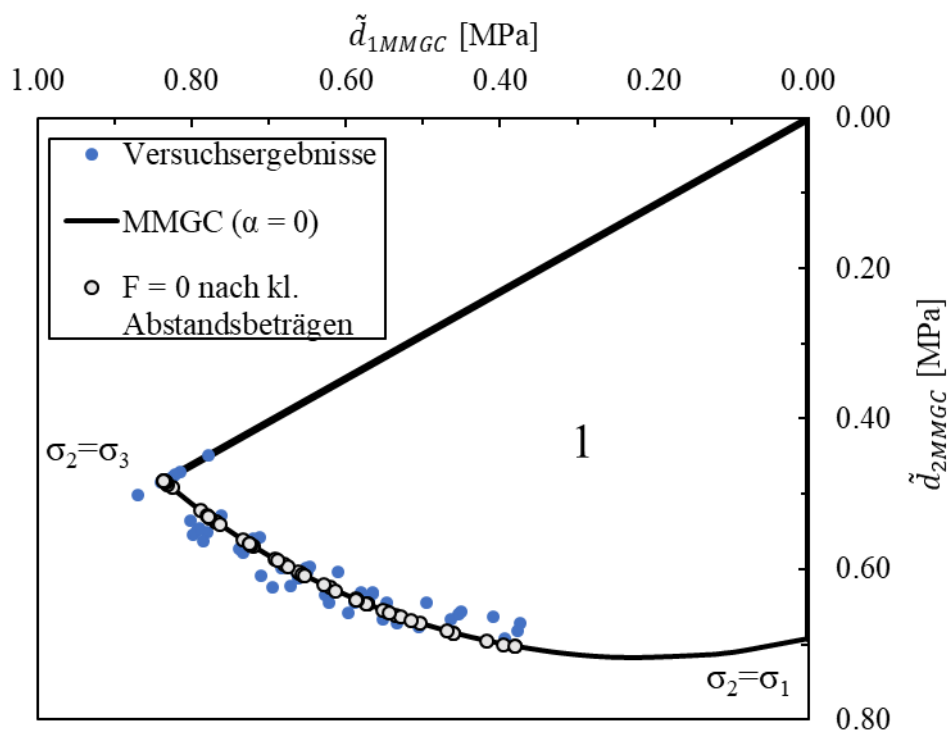


Abbildung 5.10: Versuchsergebnisse unter echten triaxialen Bedingungen für Dolomit nach Mogi (2007); gegenübergestellt der Grenzbedingung nach Mogi-Coulomb bei optimalen Parametern, identifiziert mit der Methode der kleinsten Abstandsbeträge mit einem mittleren Abstand von 7,86 MPa ($\varphi = 29,5^\circ$, $c = 108,4$ MPa)

Für die Grenzbedingung nach Mogi-Coulomb konnte der kleinste mittlere Abstandsbetrag von 7,86 MPa für eine Parameterkombination von $\varphi = 29,5^\circ$ und $c = 108,4$ MPa im Vergleich zu einem Residuum von $0,02$ MPa² für eine Parameterkombination von $\varphi = 29,4^\circ$ und $c = 108,7$ MPa, identifiziert mit der Methode der kleinsten Quadrate, bestimmt werden.

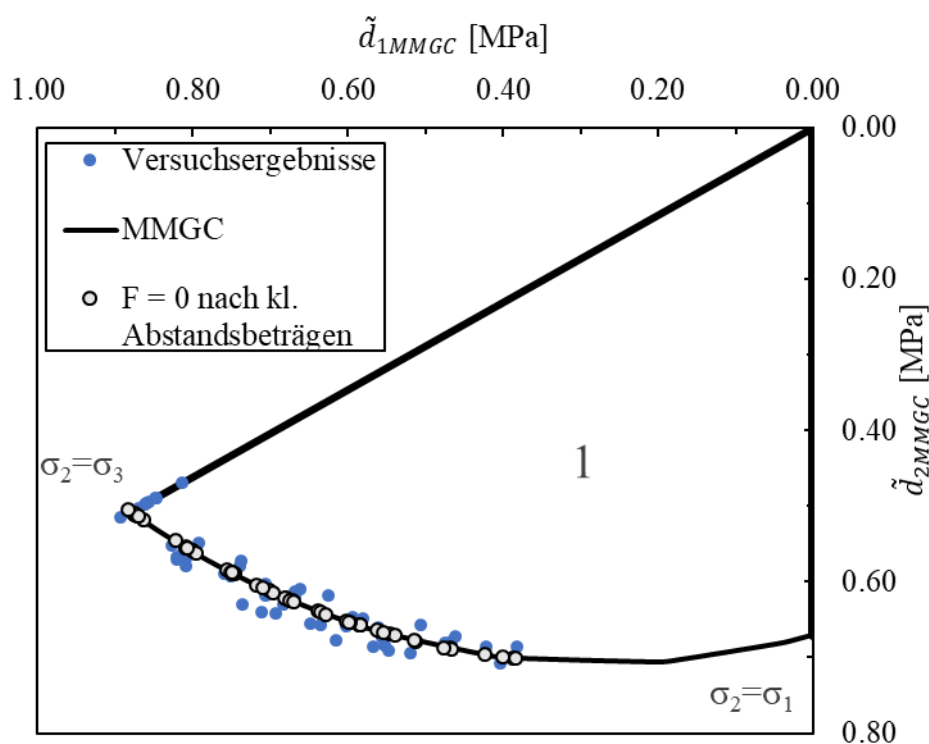


Abbildung 5.11: Versuchsergebnisse unter echten triaxialen Bedingungen für Dolomit nach Mogi (2007); die Kurve entspricht der MMGC bei optimalen Parametern, identifiziert mit der Methode der kleinsten Abstandsbeträge mit einem mittleren Abstand von 6,91 MPa ($\alpha = -0,15$, $\varphi = 32,3^\circ$, $c = 103$ MPa)

Für die MMGC konnte der kleinste mittlere Abstandsbetrag von 6,91 MPa für eine Parameterkombination von $\alpha = -0,15$, $\varphi = 32,3^\circ$ und $c = 103$ MPa im Vergleich zu einem Residuum von 0,00003 MPa² für eine Parameterkombination von $\alpha = -0,15$, $\varphi = 32,3^\circ$ und $c = 102,8$ MPa, identifiziert mit der Methode der kleinsten Quadrate, bestimmt werden.

Für eine bessere Übersicht sind die mit den beiden Methoden identifizierten Parameter und deren Funktionswert bzw. Abstandsbetrag in Tabelle 5.1 gegenübergestellt. Dieser kann entnommen werden, dass die identifizierten Parameter sehr nah beieinanderliegen und zum Teil nur um wenige Nachkommastellen verschieden sind. Die Richtung des Abstands von der Regressionsgerade oder der Fließfläche scheint demnach nicht von Bedeutung für die Gewinnung repräsentativer Parameter einer Grenzbedingung für die Beschreibung der Gesteinsfestigkeit zu sein.

Wie bereits in Kosmann & Perau (2021) gezeigt, ist für einen Vergleich von Grenzbedingungen untereinander ein Residuum als Funktionswert im Allgemeinen kein Qualitätsmerkmal. Die bestimmten Abstandsbeträge beschreiben dagegen den Abstand der Versuchsergebnisse von der Fließfläche und erlauben daher auch einen Vergleich von Grenzbedingungen untereinander.

Ein Vergleich der Abweichungen der Methode der kleinsten Quadrate mit denen der Methode der kleinsten Abstandsbeträge zeigt, dass die Abweichungen letzterer für die betrachteten Grenzbedingungen in einer ähnlichen Größenordnung liegen. So kann gezeigt werden, dass der Abstandsbetrag der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb eine Differenz von 6,34 MPa zu dem Abstandsbetrag der MMGC von 6,91 MPa aufweist und damit doppelt so groß ist. Die Abweichung der MMGC von den Versuchsergebnissen ist unter den betrachteten Grenzbedingungen am geringsten, sodass diese mit der MMGC am nächsten wiedergegeben werden können.

Tabelle 5.1: Ergebnisse der Parameteridentifikation nach verwendeter Methode

Grenzbedingung	Methode	α -	φ °	c MPa	Abweichung	
					MPa ²	MPa
Mohr-Coulomb	kl. Quadrate	-	36,2	100,8	670	
	kl. Abstandsbeträge	-	36,6	99,3		13,25
Mogi-Coulomb	kl. Quadrate	-	29,4	108,7	0,02	
	kl. Abstandsbeträge	-	29,5	108,4		7,86
MMGC	kl. Quadrate	-0,15	32,3	103,0	0,00003	
	kl. Abstandsbeträge	-0,15	32,3	102,8		6,91

6. Programmtechnische Umsetzung

Um die Stabilität von tiefen geothermischen Bohrungen für Bohrabschnitte, in denen bereits durch den in situ Spannungszustand drei unterschiedlich große Hauptspannungen ($\sigma_v \neq \sigma_H \neq \sigma_h$) anstehen, berechnen zu können, ist ein Stoffmodell für Fels, welches auch drei unterschiedlich große Hauptspannungen zutreffend berücksichtigt, vorteilhaft. Daher ist im Rahmen dieser Arbeit für die 3D-FEM Software PLAXIS 3D 2017 ein „User-Defined-Soil-Model“ (UDSM) entwickelt worden, welches die MMGC als Grenzbedingung enthält. Ein UDSM übernimmt innerhalb der Berechnungssoftware PLAXIS 3D die Funktion eines Stoffmodells und beschreibt den Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen infolge eines Lastschrittes. Aufbauend auf den von Plaxis B.V. (2016) als Download zur Verfügung gestellten `udsm_examples_2016`, in welchen exemplarisch die Struktur für eine Implementierung eines UDSM in PLAXIS 3D vorgeben wird, ist im vom Autor initiierten und betreuten Masterprojekt von Feller (2019) die erste UDSM-Version mit der MMGC als Grenzbedingung programmiert worden. Als Programmiersprache wird analog zu den `udsm_examples_2016` Fortran90 verwendet. Auf der Grundlage weiterer Untersuchungen bezüglich der Konvexität und dem Einfluss der Materialparameter, die in den vorangegangenen Kapiteln ausführlich beschrieben wurden, erfolgte eine stetige Weiterentwicklung des UDSM. Die aktuelle Version wird in Anlehnung an frühere Kompilierungsvorschriften für 64-Bit-Systeme als MMGC64 bezeichnet. Eingepflegt in den UDSM-Ordner, einem Unterverzeichnis der 3D-FEM Software

PLAXIS 3D, kann das Stoffmodell MMGC64 anschließend innerhalb der Software für Berechnungen ausgewählt und verwendet werden. In diesem Kapitel soll das entwickelte UDSM MMGC64 vorgestellt und erläutert werden.

Ablauf des UDSM und Interaktion mit PLAXIS

Das UDSM MMGC64 besteht aus fünf Dateien, die in einer Dynamic-Link-Library (.dll) zusammengefasst sind: Eingabefenster.f90, USRMOD.f90, MMGC.f90, USRLIB.f90 und OKMSGIVF.f90. In Abbildung 6.1 ist ein Flussdiagramm des UDSM MMGC64 dargestellt.

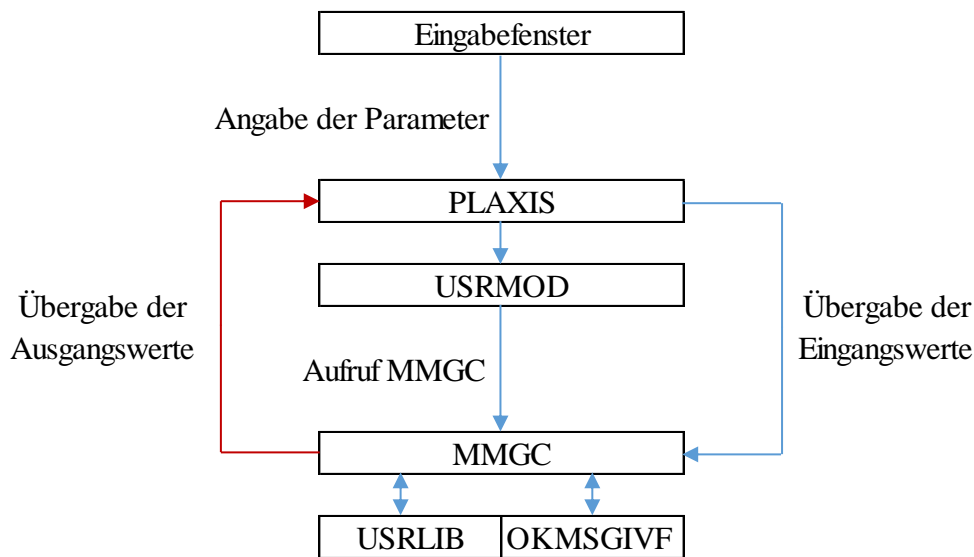


Abbildung 6.1: Flussdiagramm des UDSM MMGC64 nach Feller (2019)

Im Hauptprogramm PLAXIS 2D oder 3D können nach Auswahl des MMGC64 als Materialmodell die benötigten Parameter konventionell über ein Eingabefenster eingegeben werden. Welche Parameter im Eingabefenster abgefragt werden, wird über die Datei Eingabefenster.f90 vorgegeben. In dieser Datei werden der Modellname, die Parameteranzahl sowie die Namen und Einheiten der Parameter festgelegt. Zur Übergabe der Parameter interagiert das Hauptprogramm mit der Hauptsubroutine USRMOD, welche über Subroutinen die im Eingabefenster eingegebenen Werte abfragt. Über die Hauptsubroutine USRMOD greift das Hauptprogramm nach der Übergabe der Parameter auf die Datei MMGC.f90 zu, in der die eigentlichen Berechnungen durchgeführt werden. In dieser werden die Eingangswerte des FE-Modells (Spannungen und Dehnungen) aus dem Hauptprogramm abgefragt und anschließend die resultierenden Spannungen des aktuellen Lastschritts berechnet und zurückgegeben. Für einige Rechenoperationen greifen die in MMGC.f90 enthaltenen Routinen auf die Datei USRLIB.f90, eine in den uds_m_examles_2016 enthaltene und im Zuge dieser Arbeit erweiterte Bibliothek, zurück. Diese

enthält u. a. Subroutinen für Matrizenoperationen, Koordinatentransformationen, die Eigenwertbestimmung, die Bestimmung des Lode-Winkels, die Sektor-Identifizierung sowie für die Ausgabe von Messageboxen. Für die Ausgabe von „OK“-Messageboxen kann MMGC.f90 auf die Datei OKMSGIVF.f90 zurückgreifen. Die genannten Dateien sind in ausführlicher Form im Anhang B enthalten.

6.1. User defined soil model MMGC64

MMGC64 ist ein linear-elastisch-ideal-plastisches Stoffmodell, entwickelt für die numerische Untersuchung der Standsicherheit von Felsbauwerken. Als Materialparameter gehen der Schubmodul G , die Querdehnzahl ν , die Scherparameter φ , c und der Aufweitungsparameter α sowie der Dilatanzwinkel ψ in das Stoffmodell ein.

Eine Be- oder Entlastung in einem Lastschritt erfolgt weggesteuert. Demnach wird die in einem Lastschritt vorgegebene Dehnung $d\varepsilon_{ij}$ verwendet, um die zugehörige Prädiktorspannung σ_{ij}^{trail} über das Hookschesgesetz nach Gl. (6.1) zu berechnen.

$$\sigma_{ij}^{trail} = D_{ijkl} d\varepsilon_{kl} \quad (6.1)$$

Zur Unterscheidung zwischen elastischen und plastischen Dehnungen wird die MMGC verwendet, sodass alle drei Hauptspannungen in der Grenzbedingung Berücksichtigung finden. Da es sich um ein ideal-plastisches Stoffmodell handelt, sind nur elastische Spannungen innerhalb der durch die Scherparameter festgelegten Fließfläche möglich. Daher erfolgt eine Kontrolle, ob der Prädiktorspannungszustand σ_{ij}^{trail} die MMGC erfüllt und somit innerhalb der Fließfläche liegt. Ist die Grenzbedingung erfüllt, liegt elastisches Materialverhalten vor und σ_{ij}^{trail} entspricht dem resultierendem Spannungszustand σ_{ij}^{res} nach Gl. (6.2). In diesem Fall entspricht die Gesamtdehnung $d\varepsilon_{ij}$ dem elastischen Dehnungsinkrement $d\varepsilon_{ij}^{el}$.

$$\sigma_{ij}^{res} = \sigma_{ij}^{trail} = D_{ijkl} d\varepsilon_{kl}^{el} \quad (6.2)$$

Liegt ein Spannungszustand σ_{ij}^{trail} außerhalb der Fließfläche ($F \geq 0$), wird dieser mit der Potentialfunktion nach Gl. (6.3) in Richtung des plastischen Verformungsincrements $d\varepsilon_{ij}^{pl}$ nach Gl. (6.4) zurück auf die Fließfläche geführt.

$$Q_{MMGC} = \sqrt{I_1^2 - 3I_2} - (\sigma_1 + \alpha\sigma_2 + \sigma_3) \sin \psi \quad (6.3)$$

Um die Potentialfunktion einfacher differenzieren zu können, sind von Feller (2019), analog zu dem Stoffmodell Drucker-Prager aus den udsm_examles_2016, der Teil der Potentialfunktion

unter der Wurzel als J und die, die sortierten Hauptnormalspannungen enthaltene Klammer mit \tilde{I} , substituiert und in die erste Version des UDSM implementiert worden.

$$d\varepsilon_{ij}^{pl} = \lambda \left(\frac{\partial Q}{\partial J} \left(\frac{\partial I_1^2}{\partial \sigma_{ij}} - 3 \frac{\partial I_2}{\partial \sigma_{ij}} \right) - \frac{\partial Q}{\partial \tilde{I}} \frac{\partial \tilde{I}}{\partial \sigma_{ij}} \right) \quad (6.4)$$

In Gl. (6.5) ist das plastische Verformungssinkrement in ausgeschriebener Form dargelegt:

$$d\varepsilon_{ij}^{pl} = \lambda \left(\frac{1}{2\sqrt{I_1^2 - 3I_2}} \left(2I_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} \sigma_2 + \sigma_3 \\ \sigma_1 + \sigma_3 \\ \sigma_2 + \sigma_1 \end{bmatrix} \right) - \sin \psi \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix} \right) \quad (6.5)$$

Davon ausgehend, dass der resultierende Spannungszustand σ_{ij}^{res} aufgrund der hier angesetzten idealen Plastizität ein elastischer Spannungszustand sein muss und somit aus dem Produkt des Elastizitätstensors \mathbf{D} und dem elastischen Dehnungssinkrement $d\sigma_{ij}^{el}$ nach Gl. (6.2) resultiert und die Gesamtdehnung des Lastschrittes $d\varepsilon_{ij}$ die Summe aus dem plastischen Dehnungssinkrement $d\varepsilon_{ij}^{pl}$ und dem elastischen Dehnungssinkrement $d\varepsilon_{ij}^{el}$ nach Gl. (2.42) ist, kann durch Einsetzen der nach $d\sigma_{ij}^{el}$ umgeformten Gl. (2.42) in Gl. (6.2) der resultierende Spannungszustand σ_{ij}^{res} nach Gl. (6.6) berechnet werden.

$$\sigma_{ij}^{res} = D_{ijkl} d\varepsilon_{kl} - D_{ijkl} d\varepsilon_{kl}^{pl} \quad (6.6)$$

Durch Einsetzen der Prädiktorspannung σ_{ij}^{trail} nach Gl. (6.1) und Ausschreiben der allgemeinen Fließregel nach Gl. (2.43) kann Gl. (6.6) zu Gl. (6.7) vereinfacht werden:

$$\sigma_{ij}^{res} = \sigma_{ij}^{trail} - \lambda D_{ijkl} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (6.7)$$

Um einen zulässigen Spannungszustand σ_{ij}^{res} zu erhalten, muss der in Gl. (6.7) enthaltene plastische Multiplikator λ variiert werden bis Gl. (6.8) erfüllt ist. Dabei bleibt die Richtung der Spannungsrückführung unverändert und die Länge des plastischen Dehnungssinkrements $d\varepsilon_{ij}^{pl}$ wird skaliert.

$$F_{MMGC}(\sigma_{ij}^{trail} - \lambda D_{ijkl} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}}) = 0 \quad (6.8)$$

Die Lösung von Gl. (6.8) wird iterativ mit dem Newton-Raphson-Verfahren nach Trapp & Öchsner (2018), wie in Gl. (6.9) dargelegt, berechnet.

$$\lambda_n = \lambda_{n-1} - \frac{F_{MMGC} \left(\sigma_{ij}^{trail} - \lambda_{n-1} D_{ijkl} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{kl}} \right)}{\left(\frac{\partial F_{MMGC} \left(\sigma_{ij}^{trail} - \lambda_{n-1} D_{ijkl} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{kl}} \right)}{\partial \lambda} \right)} \quad (6.9)$$

Dieses Vorgehen der Spannungsrückführung auf die Fließfläche wird als Return Mapping (RM) bezeichnet (Trapp & Öchsner, 2018). In Abbildung 6.2 ist das RM für einen plastischen Lastschritt exemplarisch dargestellt. σ_{ij}^0 soll ein zulässiger Spannungszustand innerhalb oder auf der Fließfläche des vorherigen Lastschritts sein.

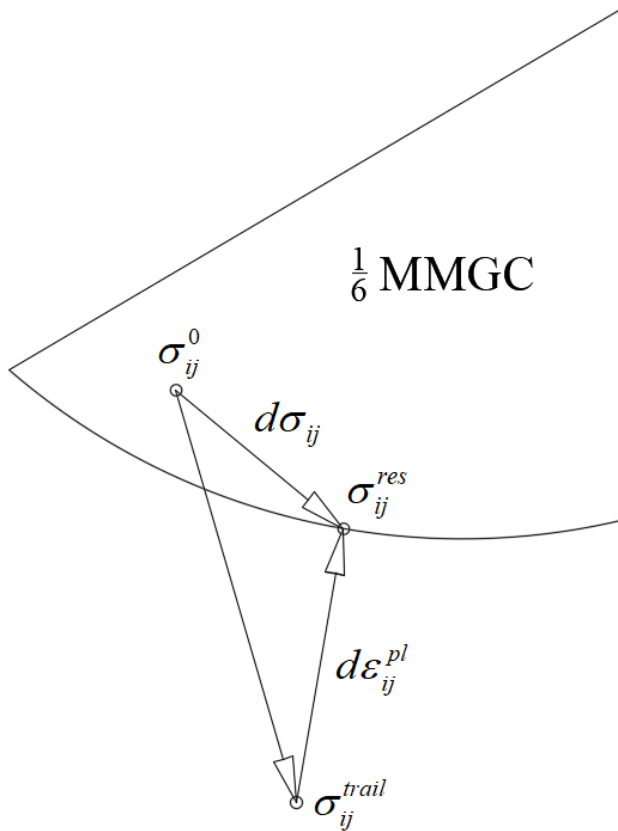


Abbildung 6.2: Exemplarisches Return-Mapping-Prozedere des MMGC64 für $\psi = \varphi$

Die Fließregel kann sowohl assoziiert ($\psi = \varphi$) als auch nicht assoziiert ($0 < \psi \leq \varphi$) in MMGC64 angesetzt werden. Wird $\psi = \varphi$ angesetzt, erfolgt die Spannungsrückführung normal auf die Fließfläche. Setzt man $\psi = 0$ an, verläuft die Spannungsrückführung in der zu σ_{ij}^{trail} gehörenden Deviatorebene in Richtung der hydrostatischen Achse. Für $\psi = 0$ entspricht die Spannungsrückführung einem Radial-Return.

Nach einer Rückführung von σ_{ij}^{trail} zu σ_{ij}^{res} auf die Fließfläche muss (wie für die Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb auch), da die sechs Teilflächen der MMGC nicht glatt ineinander übergehen, überprüft werden, ob beide Tensoren gleich sortiert sind. Hat sich die Sortierung durch die Rückführung geändert, ist zwar eine Hauptspannungskombination σ_{ij}^{res} gefunden, für die $F=0$ gilt, allerdings liegt diese in einem anders sortiertem Sektor und stellt eine unzulässige Rückprojektion dar. In Abbildung 6.3 ist ein solcher Fall exemplarisch dargestellt.

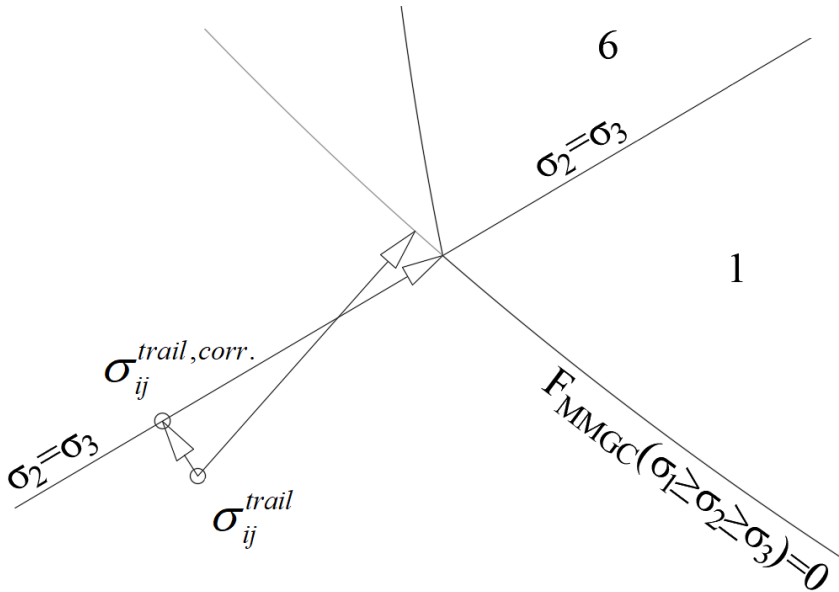


Abbildung 6.3: Korrektur der Prädiktorspannungen bei unzulässiger Rückführung

Damit eine zulässige Rückführung von σ_{ij}^{trail} auf die Fließfläche erfolgen kann, wird nach Gl. (6.10) eine korrigierte Prädiktorspannung $\sigma_{ij}^{trail,corr.}$ berechnet (hier dargestellt in Voigt Notation).

$$\sigma_{ij}^{trail,corr.} = \begin{bmatrix} \sigma_1^{trail} \\ \frac{\sigma_2^{trail} + \sigma_3^{trail}}{2} \\ \frac{\sigma_2^{trail} + \sigma_3^{trail}}{2} \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

Bei dem in Abbildung 6.3 gezeigten Exempel befindet sich die unzulässige Rückführung im Bereich der triaxialen Kompression. Ergibt die Überprüfung der Hauptspannungssortierung, dass σ_{ij}^{trail} im Sektor 1 und σ_{ij}^{res} im Sektor 2 liegt, wird $\sigma_{ij}^{trail,corr.}$ nach Gl. (6.11) berechnet. Eine unzulässige Rückführung läge hier im Bereich von triaxialer Extension.

$$\sigma_{ij}^{trail,corr.} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_2^{trail} + \sigma_1^{trail}}{2} \\ \frac{\sigma_2^{trail} + \sigma_1^{trail}}{2} \\ \sigma_3^{trail} \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

Wird $\sigma_{ij}^{trail,corr.}$ in die Potentialfunktion nach Gl. (6.3) eingesetzt und diese nach den Komponenten differenziert, erfolgt die Spannungsrückführung nach Rust (2011) in Richtung der Unstetigkeitsstelle zwischen den jeweiligen Sektoren. Für unzulässige Rückführungen, wie eine in Abbildung 6.3 exemplarisch dargestellt ist, muss das plastische Dehnungssinkrement nach Gl. (6.12) berechnet werden. Die darin enthaltenen Invarianten sind anhand der Komponenten von $\sigma_{ij}^{trail,corr.}$ zu berechnen. Die Überprüfung und Korrektur der anderen Sektoren können in analoger Weise erfolgen.

$$d\varepsilon_{ij}^{pl} = \lambda \left(\frac{1}{2\sqrt{I_1^2 - 3I_2}} \left(2I_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} \sigma_2 + \sigma_3 \\ \sigma_1 + 0,5\sigma_2 + 0,5\sigma_3 \\ \sigma_1 + 0,5\sigma_2 + 0,5\sigma_3 \end{bmatrix} \right) - \sin\psi \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 + 0,5\alpha \\ 0,5 + 0,5\alpha \end{bmatrix} \right) \quad (6.12)$$

Im Bereich von triaxialer Extension sind aufgrund der konkaven Form der Fließfläche unzulässige Rückführungen nicht möglich, da die Gradienten auf der Fließfläche in die Richtung des betrachteten Sektors ($\varphi = \psi$) oder in radialer Richtung ($\psi = 0$) orientiert sind. Dennoch ist für die Bereiche triaxialer Extension eine Rückführungskontrolle und eine Routine zur Berechnung des plastischen Dehnungssinkrements implementiert.

In MMGC64 wird davon ausgegangen, dass Dehnungssinkremente sehr klein sind und daher die inkrementelle Zeit dt eine untergeordnete Rolle spielt. Trotzdem werden diese über die inkrementelle Zeit dt betrachtet, um sie in der für Stoffmodelle gebräuchlichen Ratenformulierung beschreiben zu können. Exemplarisch sei in Gl. (6.13) die Umformung des plastischen Dehnungssinkrements $d\varepsilon_{ij}^{pl}$ in die plastische Dehnungsrate $\dot{\varepsilon}_{ij}^{pl}$ dargelegt:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{pl} = \frac{d\varepsilon_{ij}^{pl}}{dt} \quad (6.13)$$

6.2. Umgang mit den konkaven Stellen der Fließfläche der MMGC

Wie bereits bei der Beschreibung der MMGC unter Kapitel 4.8 beschrieben, enthält die Fließfläche auch konkave Bereiche, die zwischen zwei Sektoren in den Extensionsbereichen liegen. In Sektor 1, für den $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ gilt, ist die MMGC dagegen konvex. Darüber hinaus ist das

plastische Dehnungsinkrement $d\varepsilon_{ij}^{pl}$ unabhängig von der Sortierung der Hauptspannungskomponenten von σ_{ij}^{trail} immer gleich groß. Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 6.4 exemplarisch dargestellt. Dies hat zur Folge, dass σ_{ij}^{res} und $\sigma_{ij}^{res,sort.}$ sich, wie die sechs Sektoren selbst, lediglich durch die Sortierung der Hauptspannungskomponenten unterscheiden. Bei plastischen Berechnungen unter Verwendung der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb werden die Hauptspannungen standardmäßig sortiert und nur der Sektor 1 betrachtet. Durch eine Sortierung der Hauptspannungskomponenten kann jeder beliebige Spannungszustand σ_{ij}^{trail} in Sektor 1 auf Zulässigkeit überprüft und bei Bedarf ohne numerische Uneindeutigkeiten auf die Fließfläche zurückgeführt werden.

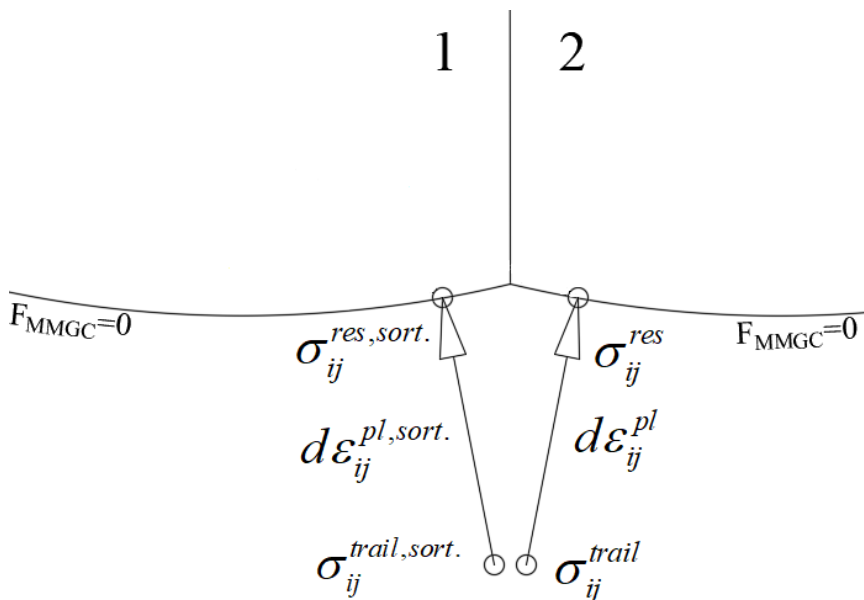


Abbildung 6.4: Sortierung der Hauptspannungen für die Rückführung auf die Fließfläche

Die Konvexität einer Grenzbedingung wird insbesondere vom Druckerschen Postulat gefordert. Für $\psi = \varphi$ ist das Druckersche Postulat in Sektor 1 immer erfüllt, d. h. das Skalarprodukt nach Gl. (2.44) aus $d\sigma_{ij}$ und $d\varepsilon_{ij}^{pl}$ ergibt immer positive Werte. Darauf aufbauend wäre es vorstellbar, eine numerisch stabile Verfestigung für die MMGC in Abhängigkeit von $d\varepsilon_{ij}^{pl}$ nach den Regeln von Koiter für mehrflächige Fließflächen, wie sie in Niemunis (2018) dargelegt sind, zu formulieren. Wird dilatantes Materialverhalten angesetzt ($0 < \psi \leq \varphi$), kann das Druckersche Postulat auch in Sektor 1 nicht immer erfüllt werden, da $d\sigma_{ij}$ und $d\varepsilon_{ij}^{pl}$ hier leicht einen stumpfen Winkel bilden können. Schlussendlich wird in MMGC64 ideal-plastisches Materialverhalten angesetzt, weshalb es nicht notwendig ist, das Druckersche Postulat zu erfüllen, da hier keine stabile Verfestigung postuliert werden muss.

Durch die konkaven Stellen in der Fließfläche besteht jedoch die Gefahr, dass unbemerkt ein elastischer Jump-Over auftritt und die Grenzbedingung verletzt. Daher ist in jedem Berechnungsschritt eine Kontrolle erforderlich, ob ein EJO aufgetreten ist. Die Kontrolle der konkaven Stellen in den Extensionsbereichen erfolgt durch eine Reihe von Abfragen, die hier kurz erläutert werden sollen: Zuerst wird überprüft, ob σ_{ij}^{trail} die MMGC erfüllt. Ist die MMGC erfüllt, muss überprüft werden, ob sich die Sortierung ausgehend von σ_{ij}^0 zu σ_{ij}^{trail} geändert hat. Hat sich diese geändert, wird der Durchstoßpunkt des Vektors $(\sigma_{ij}^0 - \sigma_{ij}^{trail}) = d\sigma_{ij}$ mit einer Ebene, in der Spannungszustände von triaxialer Extension mit zwei gleich großen Hauptspannungskomponenten liegen, berechnet. Exemplarisch wird hier der Durchstoßpunkt der Ebene, für die $\sigma_1 = \sigma_2$ gilt, betrachtet. Dazu wird der Vektor $d\sigma_{ij}$ als Geradengleichung nach Gl. (6.14), auf welcher der Durchstoßpunkt $X_{ij}^{D.P.}$ liegt, formuliert:

$$\sigma_{ij}^0 + \chi d\sigma_{ij} = X_{ij}^{D.P.} \quad (6.14)$$

Anhand von Gl (6.14) und der Ebene, für die $\sigma_1 = \sigma_2$ gilt, kann das lineare Gleichungssystem nach Gl. (6.15) aufgestellt werden.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -d\sigma_1 \\ 0 & 1 & 0 & -d\sigma_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d\sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \chi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ X_1^{D.P.} \\ X_2^{D.P.} \\ X_3^{D.P.} \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

Mit der Cramerschen Regel können die Lösungen für die gesuchten Komponenten des Durchstoßpunktes mit den entsprechenden Determinanten und der Determinante der Koeffizientenmatrix berechnet werden. Liegt der Vektor $d\sigma_{ij}$ in der Ebene, ist die Determinante der Koeffizientenmatrix gleich Null. In diesem Fall kann kein EJO auftreten. Ist der Durchstoßpunkt bestimmt, wird dieser in die MMGC eingesetzt. Ist die MMGC erfüllt, liegt der Durchstoßpunkt innerhalb der Fließfläche und ein EJO kann ausgeschlossen werden. Erfüllt σ_{ij}^{trail} die MMGC und $X_{ij}^{D.P.}$ nicht, liegt dieser außerhalb der Fließfläche und es liegt ein EJO vor. Zur Verdeutlichung ist in Abbildung 6.5 eine positive Kontrolle auf einen EJO dargestellt.

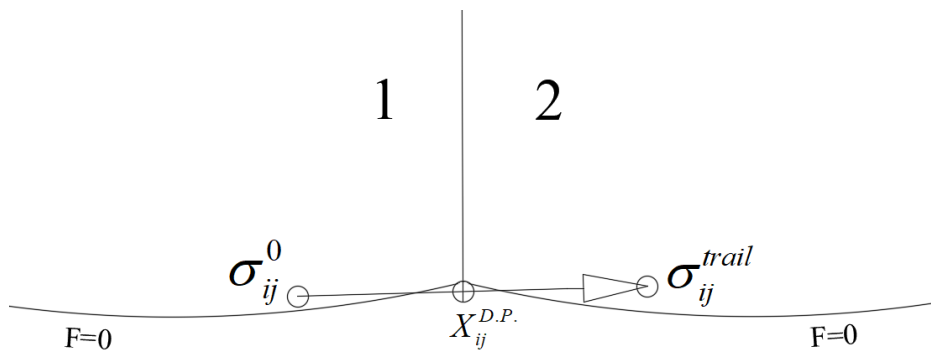


Abbildung 6.5: Kontrolle auf EJO durch den Vergleich von $F_{MMGC}(\sigma_{ij}^{trail})$ mit $F_{MMGC}(X_{ij}^{D.P.})$ des Durchstoßpunktes.

Anhand von Abbildung 6.5 wird auch ersichtlich, wie sich ein EJO effektiv vermeiden und beurteilen lässt. Werden in einer Berechnung möglichst kleine Lastschritte gewählt, wird der Betrag von $d\sigma_{ij}$ tendenziell kleiner und σ_{ij}^{trail} liegt außerhalb der Fließfläche, was die Anwendung der regulären Fließregel zur Folge hat. Andernfalls kann mit ingenieurmäßigem Sachverstand beurteilt werden, ob ein Zulassen des EJO das Berechnungsergebnis stark negativ beeinflusst. Eine Beurteilung kann anhand von $F_{MMGC}(X_{ij}^{D.P.})$ erfolgen. Ist der Funktionswert der MMGC groß, liegt die Annahme von plastischem Materialverhalten auf der sicheren Seite. Eine erneute Berechnung mit kleineren Lastschritten ist hier sinnvoll. Ist der Funktionswert der MMGC klein, also mindestens im Nachkommabereich, kann ein EJO zugelassen werden, ohne große negative Folgen auf das Berechnungsergebnis zu haben, da die Verletzung der Grenzbedingung vernachlässigbar klein ist. Zusätzlich muss ein zu Beginn einer Berechnung auftretender EJO keinen Fehler bedeuten, da dieser nicht das Ergebnis des Iterationsverfahrens repräsentiert, sondern nur einem anfänglich zu groß gewählten Schritt entspricht, der die Gleichgewichtsbedingungen nach Gl. (2.3) bis Gl. (2.5) letztendlich nicht erfüllen kann. Ein EJO am Ende einer Berechnung muss dagegen genauer und kritischer betrachtet werden.

In dem Parameterinterface des MMGC64 kann ein Parameter mit der Bezeichnung EJO angegeben werden. Bei diesem handelt es sich nicht um einen Materialparameter, sondern um eine Auswahlmöglichkeit zwischen den folgenden Berechnungsoptionen:

- | | |
|---------|--|
| EJO = 1 | Sofortiger Abbruch der Berechnung beim Auftreten eines EJO |
| EJO = 2 | Ausgabe der zur Beurteilung notwendigen Funktionswerte und Auswahlmöglichkeit, ob die Berechnung weiter fortgeführt oder abgebrochen werden soll |
| EJO = 3 | Berechnung ohne Kontrolle auf EJO |

Weiter gilt es hier zu beachten, dass in Abhängigkeit der Größe des Aufweitungsparameters $\alpha \geq 0,5$ eine Kontrolle nicht erforderlich ist, da die Form der Fließfläche der MMGC bereits konvex ist. Besonders empfehlenswert ist eine Kontrolle für Parameterkombinationen von $-1 \leq \alpha \leq 0,5$ und $\varphi \geq 38^\circ$, da die konkave Form der Fließfläche dann sehr ausgeprägt ist.

6.3. Konsequenzen aus dem gewählten Konzept

Für die Beschreibung des Fließens von Fels ist eine Berücksichtigung der Dilatanz erforderlich, welche in MMGC64 über die Richtung des plastischen Dehnungsinkrements innerhalb der Fließregel berücksichtigt wird. Wertet man die Ergebnisse nach Mogi (2007) für einen Trachyt aus, können ein Reibungswinkel von $\varphi = 27,77^\circ$ und über den Einflussbereich der mittleren Hauptspannung ein mittlerer Dilatanzwinkel von $\psi = 20,23^\circ$ bestimmt werden. Dieses Ergebnis steht im Einklang mit der Beschreibung der Dilatanz für Fels nach Pimentel (2017), wonach beim Ansatz einer assoziierten Fließregel die Gesteinsfestigkeit überschätzt wird. Es wird daher die Verwendung einer nicht assoziierten Fließregel bzw. eines im Triaxialversuch bestimmten Dilatanzwinkels empfohlen (Pimentel, 2017).

Verformungen werden in dem MMGC64 sowohl bei Be- als auch bei Entlastungen linearelastisch unter Verwendung der gleichen elastischen Konstanten berechnet. Dieses Vorgehen kann bei Entlastungen zu einer Überschätzung der Verformungen in numerischen Berechnungen führen (Benz, 2008).

Eine für Verformungsberechnungen notwendige Berücksichtigung von Verfestigungsvorgängen ist nicht in MMGC64 enthalten. Plastische Dehnungen vor dem Erreichen des Grenzzustands werden hier nicht berücksichtigt, was nach Stahlmann u.a. (2006) zu unrealistischen Verformungen führen kann. Nach den Untersuchungen von Mogi (2007) wie auch nach der Beschreibung des Materialverhaltens von Fels nach Pimentel (2017) treten in Abhängigkeit von der Felsart und des Spannungszustands bei sehr kleinen Werten für die mittlere und kleinste Hauptspannung Entfestigungsvorgänge, und bei sehr großen Werten überwiegend Verfestigungsvorgänge auf. Im mittleren Wertebereich der mittleren Hauptspannung tritt dagegen keine Verfestigung auf, sodass der Ansatz der idealen Plastizität zutreffende Verformungsprognosen liefern kann. Da die MMGC in erster Linie die Gesteinsfestigkeit für Spannungszustände beschreiben soll, die drei unterschiedlich große Hauptspannungen aufweisen, ist der Ansatz der idealen Plastizität hier angemessen.

7. Numerische Berechnungen mit MMGC64

Der Einfluss eines Spannungszustands mit drei unterschiedlich großen Hauptspannungen auf die Gesteinsfestigkeit und damit einhergehend auch auf die Bohrlochstabilität von tiefen Geothermiebohrungen soll mit dem Stoffmodell MMGC64 untersucht werden. Gleichzeitig sollen die Ergebnisse von Berechnungen mit dem MMGC64 mit denen eines Stoffmodells, welches die Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb enthält, verglichen werden. Diesbezüglich wird ein dreidimensionales Modell eines Bohrabschnitts einer Geothermiebohrung sowie ein echter Triaxialversuch in PLAXIS 3D berechnet. Wie in Abbildung 7.1 dargestellt, wird die Symmetrie eines Bohrabschnitts ausgenutzt, um den zu modellierenden Berechnungsausschnitt einer dreidimensionalen Bohrung auf ein Achtel zu reduzieren. An den außenliegenden Schnittflächen des Berechnungsausschnitts wirken die in situ Spannungen des Gebirges, welche durch Flächenlasten in die entsprechenden Richtungen modelliert werden. Für die innenseitigen Symmetrieflächen dagegen, werden die Verschiebungen in Normalenrichtung zu null gesetzt.

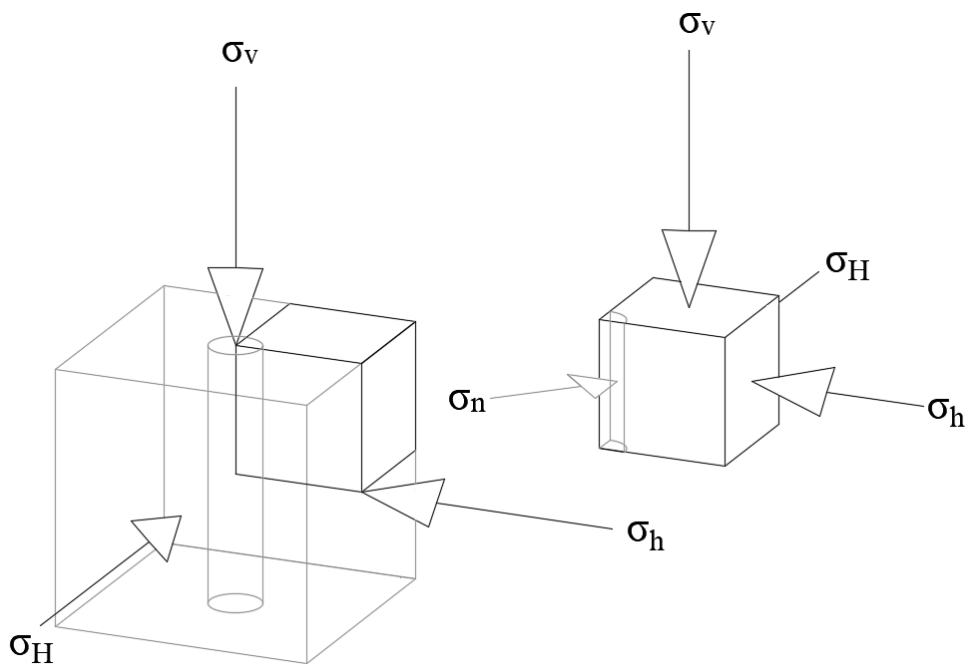


Abbildung 7.1: Berechnungsausschnitt für einen Bohrabschnitt (links); am Berechnungsausschnitt wirkende in situ Spannungen und im Bohrloch wirkender Stützdruck σ_n (rechts)

Das Material innerhalb des Bohrlochteilstücks kann deaktiviert und so ein Bohrloch modelliert werden. Ist das Material innerhalb des Bohrlochteilstücks deaktiviert, kann mit dem Modell ein ungestütztes Bohrloch und durch zusätzliches Aktivieren von σ_n ein gestütztes Bohrloch modelliert werden. Die stützende Wirkung der Bohrspülung wird durch eine normal auf die Bohr-

lochinnenfläche wirkende Spannung σ_n modelliert. Ebenso kann das Modell einem kraftgesteuerten Elementversuch entsprechen. Ist das Material innerhalb des Bohrlochteilstücks aktiviert und σ_n deaktiviert, kann das Material im gesamten Berechnungsausschnitt unter echten triaxialen Bedingungen in einem echten Triaxialversuch untersucht werden.

Der Einfluss der Wichte des Materials, bezogen auf die Modellhöhe, ist im Verhältnis zu den in situ Spannungen um ein Bohrloch oder zu den Spannungen in einem echten Triaxialversuch sehr klein. Daher wird gewichtsloses Material angesetzt und der Einfluss der Wichte des überlagernden Bodens geht über die am Modellrand aufgebrachten Spannungen mit ein. Bei den Stabilitätsbetrachtungen im Berechnungsmodell wird kein Porenwasserdruck modelliert. Der Einfluss des Porenwasserdrucks wird bei der Berechnung von wirksamen in situ Spannungen berücksichtigt, welche über die Modellränder aufgebracht werden. Innerhalb des Modells liegen ausschließlich wirksame Spannungszustände vor.

Der E-modul des Gesteins wird für die Berechnungen mit 62 GPa und die Querdehnung mit einer Querdehnzahl von 0,3 angesetzt. Daraus resultiert nach Gl. (2.31) ein Schubmodul von 23,85 GPa. Der Dilatanzwinkel wird für die Berechnungen zu Null gewählt.

Die in situ Spannungen werden über Flächenlasten am Modellrand aufgegeben und erzeugen den im Berechnungsausschnitt wirkenden Spannungszustand. Eine Modellierung der Spannungen durch vorgegebene Verschiebungen ist ebenfalls in Betracht gezogen worden, hier konnte innerhalb der Berechnungssoftware allerdings auch nach einer Locherzeugung kein Versagen festgestellt werden. Die Anzahl an Knoten, die auf der Fließfläche lagen, deutete dagegen auf eine vollständige Plastifizierung des Modells hin. Daher ist von einer Spannungserzeugung durch eine vorgegebene Verschiebung abgesehen worden, auch wenn diese insbesondere am Modellrand genauere und homogenere Spannungszustände erzeugt. Eine indirekte Modellierung von in situ Spannungszuständen mittels vorgegebener Verschiebungen erscheint für derartige Stabilitätsbetrachtungen mit der vorgefertigten Berechnungssoftware daher nicht geeignet.

Der in situ Spannungszustand des Gesteins wird, wie der nach Moeck u.a. (2009) in einer Tiefe von 4100 m für ein geothermisches Reservoir unter „realen“ Bedingungen (R) abgeschätzt wurde, wie in Tabelle 7.1 dargelegt, angesetzt. Die Vertikalspannungen entspringen einer Berechnung der Überlagerungsspannungen und die Horizontalspannungen dem Spannungspolygonverfahren, wobei der Wert für die kleinere Horizontalspannung anhand eines Extended-Leak-Off-Test (XLOT) in einer Größe von $\sigma_h = 10 \pm 3$ MPa bestätigt werden konnte. Anhand dieses Spannungszustands werden nach Gl. (6.10) und Gl. (6.11) Spannungszustände mit glei-

chem Spannungsniveau in den Punkten triaxialer Kompression (K) und Extension (E) berechnet, die ebenfalls in Tabelle 7.1 dargelegt sind. Mit diesen können auch konventionelle triaxiale Spannungszustände im echten Triaxialversuch untersucht werden.

Tabelle 7.1: In den Berechnungen angesetzte in situ Spannungen [MPa]

In situ Spannungs- zustände	R "Real" $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$	K "Kompression" $\sigma_1 \geq \sigma_2 = \sigma_3$	E "Extension" $\sigma_1 = \sigma_2 \geq \sigma_3$
$\sigma_v = \sigma_1$	57	57	46
$\sigma_H = \sigma_2$	35	23.5	46
$\sigma_h = \sigma_3$	12	23.5	12

Da Geothermiebohrungen im Vergleich zu konventionellen Bohrungen der Erdölindustrie größere Bohrlochdurchmesser haben, soll dessen Einfluss auf die Stabilität der Bohrung untersucht werden. Um diesen zu untersuchen, werden zwei unterschiedlich große Bohrlochdurchmesser betrachtet. Zunächst soll ein Durchmesser von 0,2 m am unteren Ende der Bohrung in einem Modell mit einer Kantenlänge des Berechnungsausschnitts von 1 m betrachtet werden. Des Weiteren wird ein Durchmesser von 1 m und eine Kantenlänge von 5 m des Berechnungsausschnitts modelliert.

Die Berechnung des Modells erfolgt unter konstantem Ansatz von einem der drei Spannungszustände nach Tabelle 7.1 und gliedert sich in die folgenden Berechnungsphasen:

Initial Phase 0: Hier passiert nichts, da durch die fehlende Wichte kein Initialspannungszustand und durch die Vernachlässigung von Wasser kein Porenwasserdruck berechnet werden muss.

Phase 1: In dieser Phase werden Spannungen auf die außenliegenden Flächen aufgegeben, um einen homogenen Spannungszustand (in situ Spannungszustand) im gesamten Modell zu erzeugen. Diese Berechnungsphase entspricht gleichzeitig einem echten Triaxialversuch.

Phase 2: Ausgehend von Phase 1 wird in dieser Berechnungsphase das Material des Bohrlochteilstücks deaktiviert und somit ein ungestütztes Bohrloch simuliert.

Phase 3: Ausgehend von Phase 1 wird in dieser Berechnungsphase das Material des Bohrlochteilstücks deaktiviert, der stützende Druck aus der Bohrspülung σ_n aktiviert und somit ein gestütztes Bohrloch simuliert.

Um den Grenzzustand des Gesteins oder einer Geothermiebohrung zu bestimmen, werden innerhalb einer Berechnung die oben genannten vier Phasen nacheinander durchlaufen. In der ersten Berechnung werden für beide Stoffmodelle die gleichen Parameterkombinationen von

α , φ und c angesetzt. Die Parameter φ und c werden dann für jede weitere Berechnung reduziert, bis der Grenzzustand im Modell erreicht ist und das Gestein oder das Bohrloch plastifiziert. Der Grenzzustand kann bei unterschiedlichen Werten für die Parameter in unterschiedlichen Kombinationen erreicht sein. Das Ergebnis sind daher mehrere Parameterkombinationen von α , φ und c , die zum Grenzzustand führen.

Für die Umsetzung wird dementsprechend die Kohäsion c konstant vorgegeben und der Reibungswinkel φ in jeder weiteren Berechnung bis zum Erreichen des Grenzzustands reduziert. Alpha wird in der MMGC für eine Vergleichbarkeit, zwischen Mohr-Coulomb und der MMGC, zu null gewählt ($\alpha = 0$), damit kontrolliert werden kann, ob die Ergebnisse der beiden Grenzbedingungen im echten Triaxialversuch für Kompression und Extension Zusammenhänge aufweisen. Für die Berechnung von Phase 2 muss Phase 1 erneut mit einer für Phase 2 vorgesehenen Parameterkombination von φ und c berechnet werden. Als Ergebnis der Berechnung von Phase 2 erhält man Parameterkombinationen von φ und c für ein ungestütztes Bohrloch ($\sigma_n = 0$). Für die Berechnung von Phase 4 ist ebenfalls die erneute Berechnung von Phase 1 notwendig. Die Werte für σ_n werden jeweils konstant angesetzt und die Parameter wie in den vorangegangenen Phasen variiert.

7.1. Verifizierung von MMGC64

Die Ergebnisse für Parameterkombinationen von ($\alpha = 0$), φ und c , bei denen das Gestein plastifiziert und im Modell der Grenzzustand erreicht ist, werden für die Auswertung und Interpretation als Punkte in einem Diagramm aufgetragen. An der Abszisse wird der Reibungswinkel φ in Grad und an der Ordinate die Kohäsion c in MPa angetragen. Punkte, die den gleichen Bedingungen (zugehörig zu einem echten Triaxialversuch oder dem gleichen σ_n) unterliegen, werden durch Geraden miteinander verbunden. In Bereichen einer solchen „Kurve“, in denen Abweichungen – wie etwa Sprünge – enthalten sind, wird das Untersuchungsrastrer verfeinert, um diese näher zu untersuchen. Die Werte für die Parameter sind zusätzlich zu der folgenden graphischen Auswertung in tabellarischer Form im Anhang A.4 aufgeführt.

Zunächst werden die Ergebniswerte für die im echten Triaxialversuch berechneten Parameter unter Verwendung der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb und der MMGC vorgestellt. Diese sind in Abbildung 7.2 dargestellt. Unter Ansatz der Spannungszustände K und E liefern beide Grenzbedingungen im Grenzzustand die gleichen Werte für die Parameter ($\alpha = 0$), φ und c , sodass die Kurven übereinanderliegen. Es ist ersichtlich, dass unter dem Spannungszustand K bei kleinen Reibungswinkeln auch kleinere Werte für die Kohäsion und insgesamt eher kleinere Werte für die Parameter benötigt werden als unter den Spannungszuständen R

oder E. Die größten Werte für die Parameter werden mit beiden Grenzbedingungen unter dem Spannungszustand R benötigt, wobei die Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb nochmals deutlich größere Werte für die Parameter benötigt als die für MMGC.

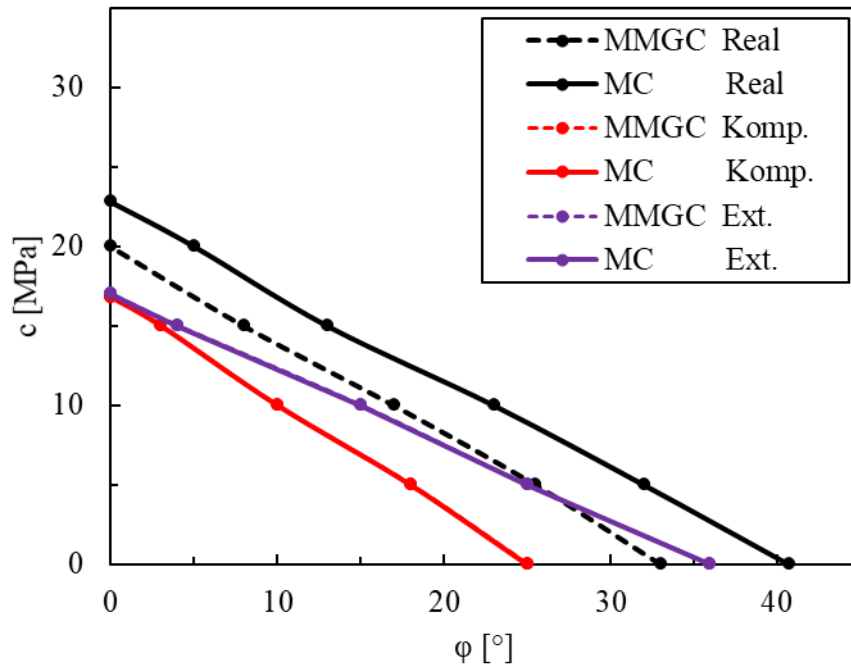


Abbildung 7.2: Parameterkombinationen von ϕ [°] und c [MPa] für die Spannungszustände Real, Komp. und Ext. im Grenzzustand, aus der Simulation eines echten Triaxialversuchs unter Verwendung der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb und der MMGC mit $\alpha = 0$ [-]

Die Größenordnung der Werte der Parameter soll durch einfache Berechnungen auf Plausibilität überprüft werden. Dafür werden die Werte $c = 0$ MPa und $\phi = 40,7^\circ$ sowie $\phi = 0^\circ$ und $c = 22,8$ MPa der Kurve (MC R) für die Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb, unter Ansatz des Spannungszustands R ($\sigma_v = 57$ MPa, $\sigma_H = 35$ MPa und $\sigma_h = 12$ MPa), herangezogen. Das Verhältnis der Vertikalspannung σ_v zu der kleineren Horizontalspannung σ_h kann nach Gl. (3.4) für passive horizontale Spannungszustände anhand der gewählten Parameterkombinationen bestimmt werden. Daraus folgt für $c = 0$ MPa und $\phi = 40,7^\circ$:

$$K_p = \tan^2 \left(45 + \frac{40,7}{2} \right) = 4,75$$

Was mit dem nachfolgenden Quotienten übereinstimmt:

$$K_p = \frac{\sigma_v}{\sigma_h} = \frac{57}{12} = 4,75$$

Aus der Parameterkombination $\varphi = 0^\circ$ und $c = 22,8$ MPa folgt durch Einsetzen in Gl. (3.6) die Grenze des möglichen Wertebereichs des passiven Initialspannungszustands:

$$\sigma_{h,init} = 2 \cdot 22,8 \left(\tan^2 \left(45 + \frac{0}{2} \right) \right)^{0,5} = 45,6 \text{ MPa}$$

Um ein Überschreiten des Grenzzustands der Gesteinsfestigkeit zu vermeiden, darf der Durchmesser des Mohrschen Spannungskreises für den Spannungszustand R die Größe von $\sigma_{h,init}$ nicht überschreiten. Daraus folgt:

$$\sigma_v - \sigma_h = 57 - 12 = 45 \text{ MPa} \leq \sigma_{h,init} = 45,6 \text{ MPa}$$

Der Spannungszustand R ist unter der berechneten Kohäsion von $c = 22,8$ MPa zulässig und der Grenzzustand der Gesteinsfestigkeit wird nicht überschritten. Die Ergebnisse für die Werte der Parameter aus den numerischen Berechnungen für echte triaxiale Versuche liegen demnach in einer zulässigen Größenordnung.

Aus diesen Plausibilitätsbetrachtungen geht zum einen hervor, dass die Berechnungen mit dem UDSM MMGC64 nachvollziehbar und somit plausibel sind, da die Spezialfälle von Kompression und Extension die gleichen Ergebnisse liefern wie das Stoffmodell Mohr-Coulomb und zum anderen, dass die Untersuchung von echten triaxialen Spannungszuständen in einem dreidimensionalen Modell Ergebnisse liefert, die der Plastizitätstheorie nach in einer zulässigen Größenordnung liegen.

7.2. Untersuchung der Bohrlochstabilität

Durch die Herstellung einer Bohrung nehmen die Spannungszustände rund um die Bohrung drei unterschiedliche Hauptspannungen ein. Daher wird für die Berechnung der Bohrlochstabilität lediglich der in situ Spannungszustand R betrachtet. Es wird zuerst das Modell mit einer Kantenlänge von 1 m und einer Bohrung mit einem Durchmesser von 0,2 m betrachtet.

Die Ergebnisse für die berechneten Werte der Parameter im Grenzzustand unter Ansatz des Spannungszustands R und der Verwendung der MMGC sind in Abbildung 7.3 dargestellt.

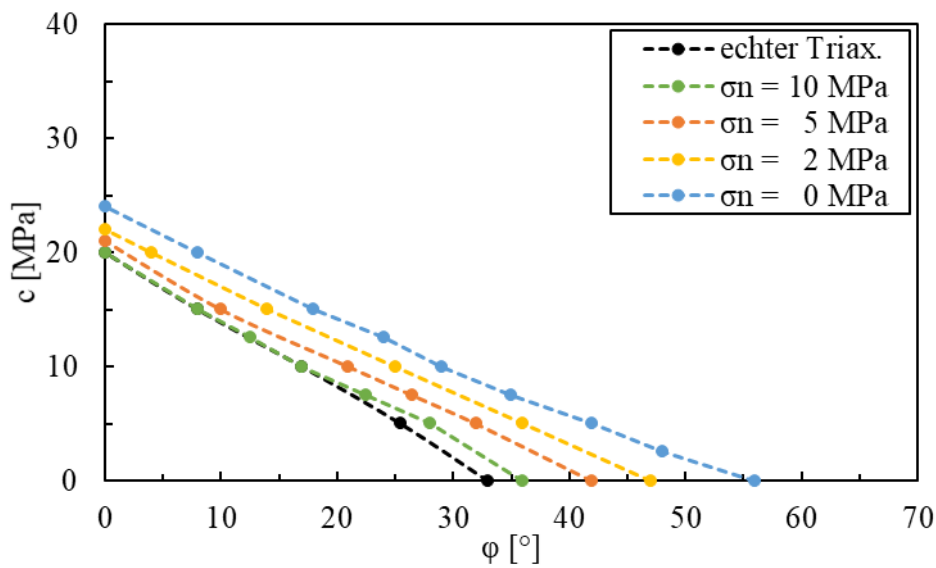


Abbildung 7.3: Parameterkombinationen von φ [°] und c [MPa] für den Spannungszustand R im Grenzzustand, unter Verwendung der MMGC mit $\alpha = 0$ [-] für ein Bohrloch mit einem Durchmesser von 0,2 m

Die Ergebnisse der echten Triaxialversuche (schwarze, gestrichelte Linie) liefern die kleinsten Werte für die Parameter vor dem Erreichen des Grenzzustands des Gesteins. Kleinere Kombinationen können nicht angesetzt werden, da das Gestein unter Belastung durch den Spannungszustand R bereits ohne Bohrloch und Stützdruck versagt.

Alle Kurven verlaufen annähernd linear und haben in Abhängigkeit von σ_n einen ähnlichen Abstand zueinander. Bei großen Werten für die Kohäsion liegen die Kurven näher zusammen als bei kleinen. Sind die Kohäsion und σ_n klein, ist ein deutlich größerer Reibungswinkel notwendig als es bei größeren Werten für diese der Fall ist. Die Kurve der echten Triaxialversuche und die mit $\sigma_n = 10$ MPa (grüne, gestrichelte Linie) liegen ab einer Kohäsion von ca. 10 MPa sehr nah beieinander, sodass davon ausgegangen werden kann, dass die „Störung“ des in situ Spannungszustands durch die Bohrung hier nahezu ausgeglichen ist und zu Werten für die Parameter in ähnlicher Größenordnung wie zuvor führen.

In Abbildung 7.4 sind die Ergebnisse für die berechneten Werte der Parameter für den Spannungszustand R vor dem Erreichen des Grenzzustands unter Verwendung der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb dargestellt.

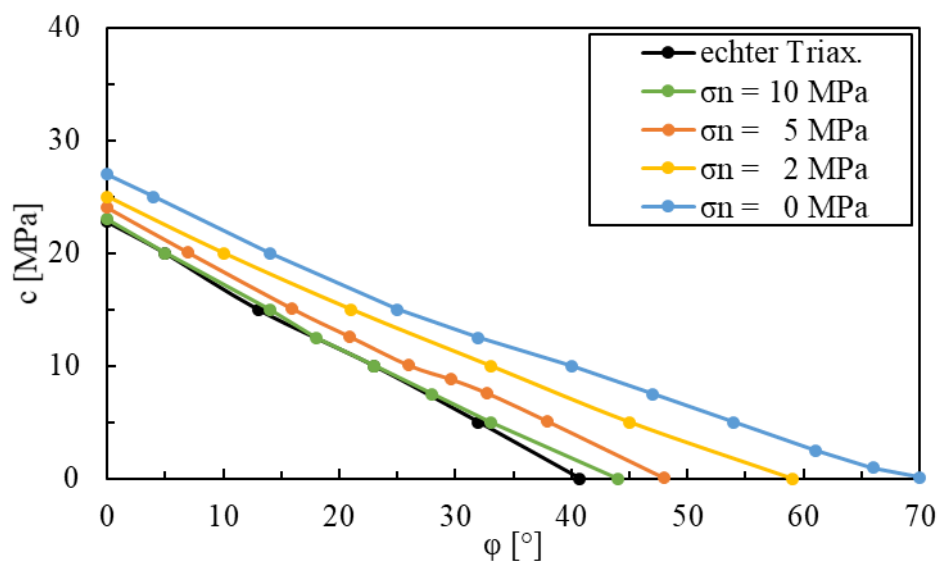


Abbildung 7.4: Parameterkombinationen von φ [°] und c [MPa] für den Spannungszustand R im Grenzzustand, unter Verwendung der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb, für ein Bohrloch mit einem Durchmesser von 0,2 m

Die Ergebnisse der echten Triaxialversuche (schwarze Linie) liefern auch hier die kleinsten Werte für die Parameter, die im Grenzzustand der Gesteinsfestigkeit möglich sind. Auch unter der Verwendung der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb zeigt sich hier ein annähernd linearer Verlauf und in Abhängigkeit von σ_n haben die Kurven ein ähnliches Verhältnis zueinander. Bei großen Werten für die Kohäsion liegen die Kurven auch hier näher zusammen als bei kleinen. Auch liegen die Kurven der echten Triaxialversuche und die mit $\sigma_n = 10$ MPa (grüne Linie) sehr nah beieinander. Betrachtet man die Kurve für $\sigma_n = 5$ MPa (orange Linie) fällt auf, dass ab einem Reibungswinkel von $\varphi \approx 30^\circ$ ein „Knick“ in dem sonst linearen Verlauf ist und die Kurve für $\sigma_n = 0$ MPa (hellblaue Linie) ab einem Reibungswinkel von $\varphi \approx 25^\circ$ ebenfalls einen leichten „Knick“ aufweist. In diesen Bereichen ist mit abnehmender Kohäsion mehr Reibung notwendig als in den übrigen linear verlaufenden Bereichen der Kurven. Die rechnerisch erforderlichen Reibungswinkel von Kurven mit kleinem Stützdruck und geringer Kohäsion sind mit Werten wie $\varphi = 70^\circ$ sehr groß.

Nachstehend werden die Berechnungsergebnisse für eine Bohrung mit einem Durchmesser von 1 m in einem Modell mit einer Kantenlänge von 10 m und vorgestellt. Die Ergebniswerte für die Parameter, unter Ansatz des Spannungszustands R , unter Verwendung der MMGC für ein Bohrloch mit einem Durchmesser von 1 m, sind in Abbildung 7.5 dargestellt. Die Ergebnisse der echten Triaxialversuche (schwarze, gestrichelte Linie) liefern auch hier die kleinsten möglichen Werte für die Parameter im Grenzzustand des ungestörten Gesteins. Auch hier fällt diese

größtenteils mit der Kurve für einen Stützdruck von $\sigma_n = 10$ MPa (grüne, gestrichelte Linie) zusammen, sodass der Einfluss aus der Bohrung sehr klein ist.

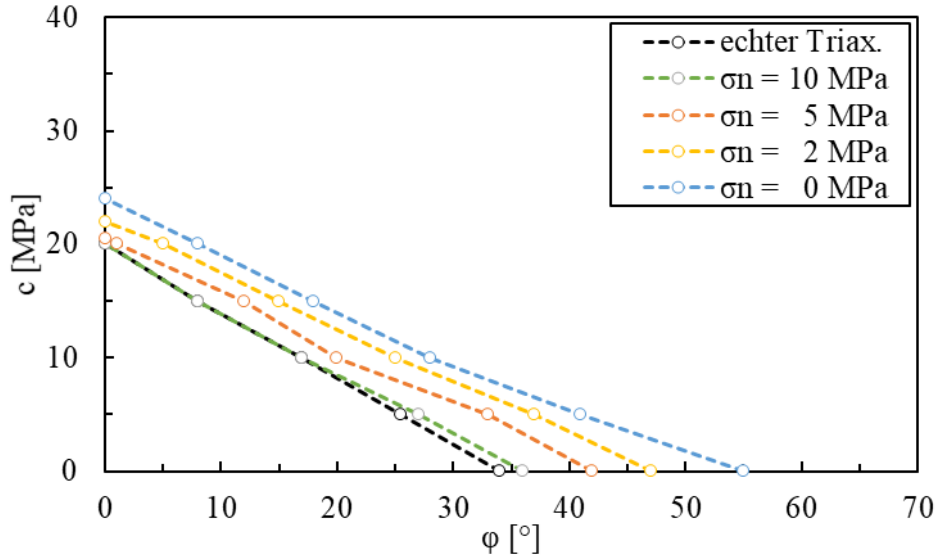


Abbildung 7.5: Parameterkombinationen von φ [°] und c [MPa] für den Spannungszustand R im Grenzzustand, unter Verwendung der MMGC mit $\alpha = 0$ [-] für ein Bohrloch mit einem Durchmesser von 1 m

Die Kurven verlaufen annähernd linear. Kleinere Stützdrücke erfordern auch hier zunehmend größere Werte für die Parameter. Der Abstand der Kurven bei kleinen Reibungswinkeln ist nahezu konstant, wohingegen er bei kleinen Werten für die Kohäsion in Abhängigkeit von der Größe des Stützdrucks unterschiedlich groß ist. Je größer der Stützdruck, desto kleiner ist der Abstand zwischen den Kurven.

Die Kurve mit $\sigma_n = 5$ MPa (orange, gestrichelte Linie) benötigt bei einem Reibungswinkel von $\varphi \approx 20^\circ$ lokal begrenzt kleinere Werte für beide Parameter und weicht in diesem Bereich von dem linearen Verlauf der übrigen Kurven ab.

Die Werte für die Parameter als Ergebnis der Berechnung der Bohrung mit einem Durchmesser von 1 m unter Verwendung der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb sind in Abbildung 7.6 dargestellt. Die kleinsten Werte für die Parameter liefern auch hier die Ergebnisse der echten

Triaxialversuche (schwarze Linie). Unter einem Stützdruck von $\sigma_n = 10$ MPa (grüne Linie) werden auch hier ähnliche Werte für die Parameter benötigt wie im ungestörten Gestein.

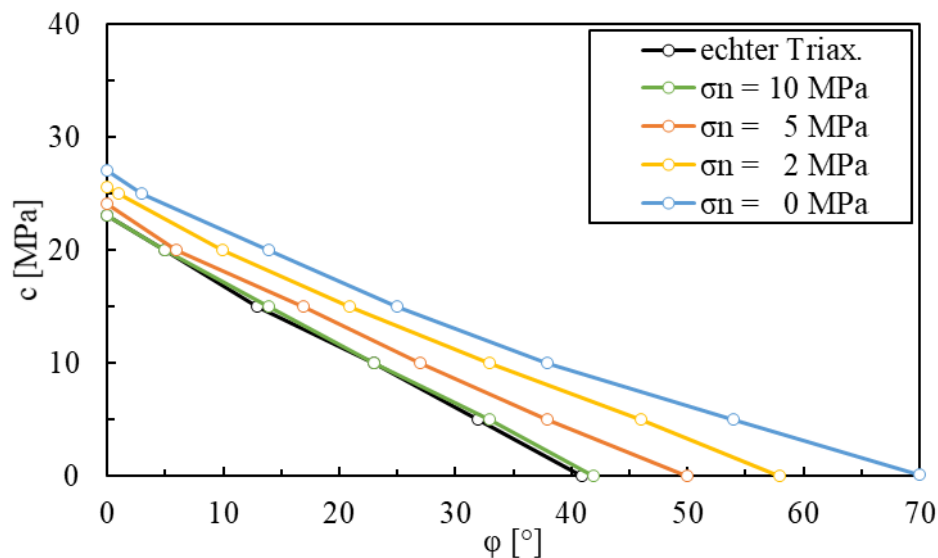


Abbildung 7.6: Parameterkombinationen von φ [°] und c [MPa] für den Spannungszustand R im Grenzzustand, unter Verwendung der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb, für ein Bohrloch mit einem Durchmesser von 1 m

Die Kurven verlaufen auch hier annähernd linear und die Abstände der Kurven zueinander sind bei kleinen Werten für den Reibungswinkel kleiner als bei großen.

7.3. Vergleich der Ergebnisse

Um den Einfluss der herangezogenen Grenzbedingungen auf die zur Sicherstellung der Bohrlochstabilität notwendigen Werte für die Parameter in Abhängigkeit vom Stützdruck zeigen zu können, sollen die jeweiligen Ergebnisse verglichen werden. In den folgenden Diagrammen wird für die Auswertung auf die Darstellung der einzelnen Punkte der Ergebniswerte für die Parameter für eine bessere Übersicht verzichtet.

Vergleich der Ergebnisse nach Mohr-Coulomb mit denen der MMGC

Für den Vergleich der beiden Stoffmodelle untereinander sind die resultierenden Kurven der für die Standsicherheit notwendigen Werte der Parameter wie in Abbildung 7.7 gegenübergestellt. Der Vergleich zeigt, dass die Grenzbedingung nach Mohr Coulomb deutlich größere Werte für die Parameter für alle angesetzten Stützdrücke benötigt als die MMGC. Die Kurven beider Grenzbedingungen bei gleichem Stützdruck σ_n verlaufen annähernd parallel. Die Ergebnisse der echten Triaxialversuche entsprechen ebenfalls dieser Beschreibung.

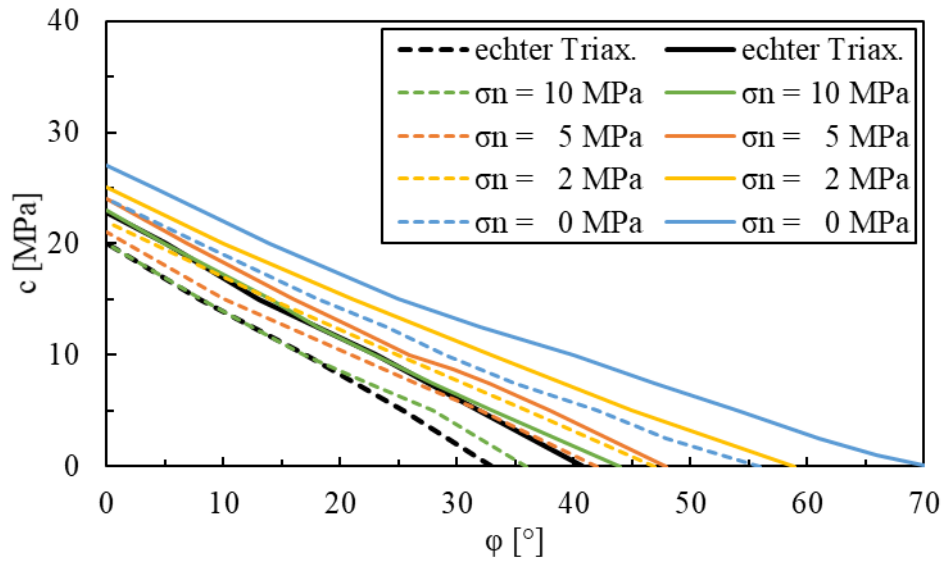


Abbildung 7.7: Vergleich der mit der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb (durchgehender Linientyp) und der MMGC (gestrichelter Linientyp) berechneten Ergebnisse, unter Ansatz des Spannungszustands R , für ein Bohrloch mit 0,2 m Durchmesser

Für den Vergleich der Ergebnisse unter Ansatz der beiden Grenzbedingungen für ein Bohrloch mit einem Durchmesser von 1 m sind die Kurven für die berechneten Werte der Parameter in Abbildung 7.8 dargestellt.

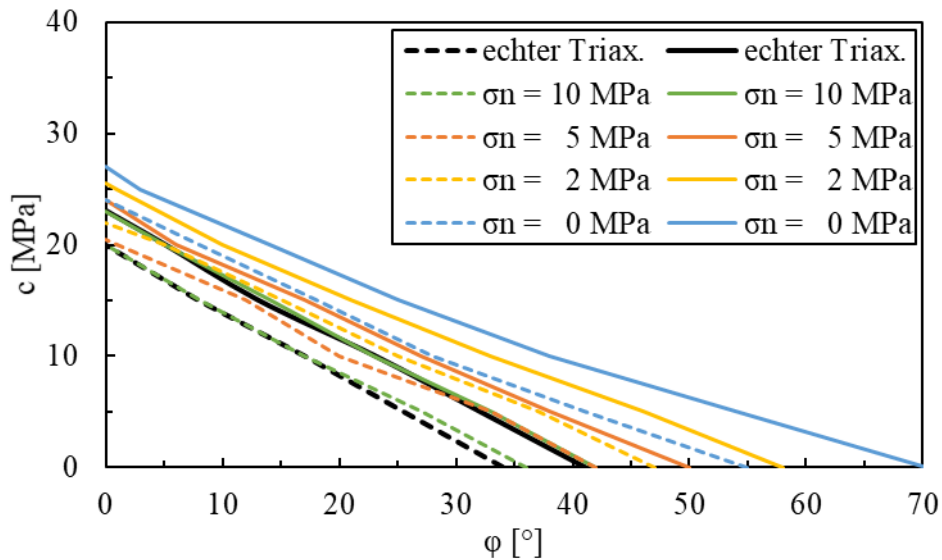


Abbildung 7.8: Vergleich der mit der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb (durchgehender Linientyp) und der MMGC (gestrichelter Linientyp) berechneten Ergebnisse, unter Ansatz des Spannungszustands R , für ein Bohrloch mit 1 m Durchmesser

Wie ersichtlich, nehmen die Abstände der Kurven beider Grenzbedingungen mit zunehmendem Reibungswinkel zu, wobei die Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb immer größere Werte für die Parameter fordert.

Vergleich der Ergebnisse für unterschiedliche Bohrlochdurchmesser

Werden die berechneten Werte für die Parameter der beiden Bohrungen mit unterschiedlichen Durchmessern gegenübergestellt, wird ersichtlich, dass diese annähernd gleich sind. Dies gilt sowohl für die Ergebnisse unter Verwendung der MMGC, dargestellt in Abbildung 7.9, sowie für die unter Verwendung der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb erzielten Ergebnisse, dargestellt in Abbildung 7.10.

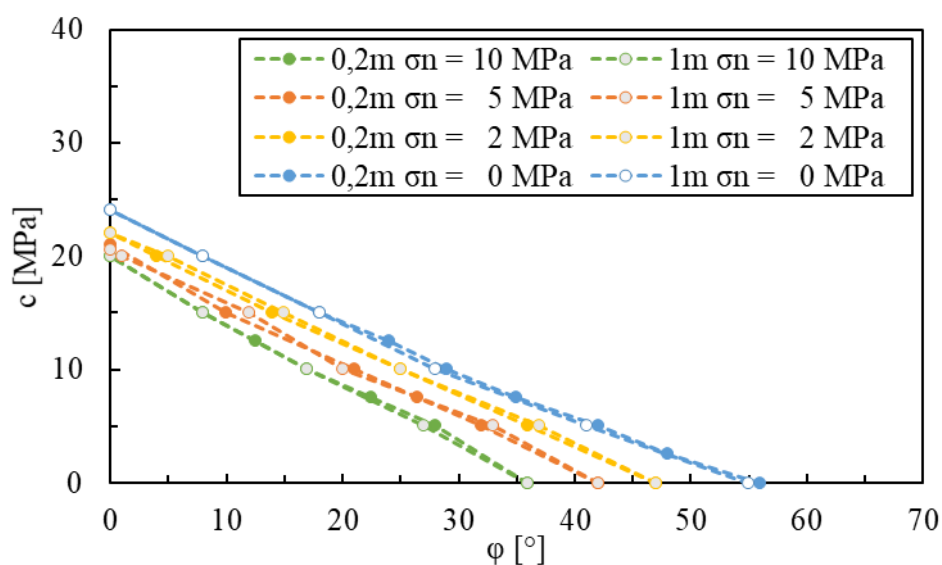


Abbildung 7.9: Vergleich der berechneten Parameterkombinationen von φ [°] und c [MPa] für ein Bohrloch mit einem Durchmesser von 0,2 m mit einem Durchmesser von 1 m, unter Verwendung der MMGC

Wie man in Abbildung 7.9 deutlich erkennen kann, ist der Unterschied zwischen den Kurven mit unterschiedlichen Bohrlochdurchmessern sehr klein. Die Kurven liegen größtenteils übereinander und weichen bezogen auf den Reibungswinkel nur um $\pm 1^\circ$ voneinander ab.

Die unter der Verwendung der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb erzielten Ergebnisse in Abbildung 7.10 für die beiden Bohrlochdurchmesser zeigen ein ähnliches Ergebnis. Die Kurven liegen sehr nah beieinander und unterscheiden sich, bezogen auf den Reibungswinkel, nur um $\pm 1,1^\circ$.

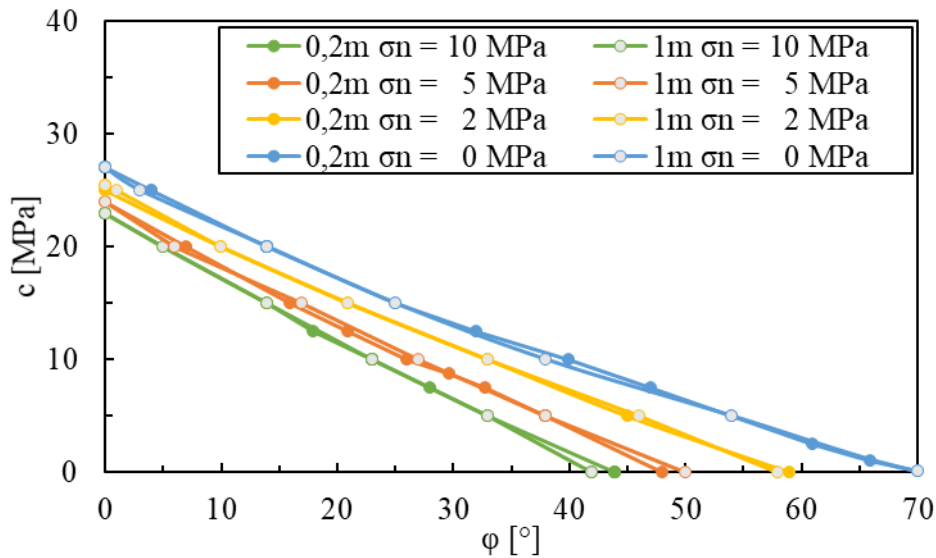


Abbildung 7.10: Vergleich der berechneten Parameterkombinationen von φ [°] und c [MPa] für ein Bohrloch mit einem Durchmesser von 0,2 m mit einem Durchmesser von 1 m, unter Verwendung der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb

7.4. Interpretation der Simulationsergebnisse

Interpretation der echten Triaxialversuche

Der Vergleich der Ergebnisse aus den echten Triaxialversuchen (Abbildung 7.2) zeigt, dass die MMGC und die Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb unter Ansatz der Spannungszustände Extension (E) und Kompression (K) die gleichen Werte für die Parameter im Grenzzustand erfordern. Die Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb und die MMGC fallen in den numerischen Berechnungen für die Spezialfälle triaxiale Kompression und triaxiale Extension zusammen und führen so bei einer Bestimmung der Parameter durch eine inverse Problemstellung zu einem identischen Ergebnis. Unter Ansatz des „realen“ Spannungszustands (R) sind größere Werte für die Parameter unter Ansatz der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb erforderlich als unter Ansatz der MMGC. Die Grenzbedingungen führen demnach zu unterschiedlichen Ergebnissen bei der Identifizierung der Parameter im Grenzzustand der Gesteinsfestigkeit.

Die Größenordnung der Werte der Parameter liegt, entsprechend der durchgeführten Kontrollrechnungen anhand der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb, in einem zulässigen Wertebereich.

Vergleicht man den für die Abschätzung des in situ Spannungszustands verwendeten Ansatz nach Moeck u.a. (2009), mit den Ausführungen zu in situ Spannungszuständen nach Gudehus (1995), wird deutlich, dass nach Moeck u.a. (2009) lediglich der Reibungswinkel, nicht

aber die Kohäsion berücksichtigt wird. Für die betrachtete Abschätzung sind die Scherparameter von Moeck u.a. (2009) mit einem Reibungswinkel von $\varphi \approx 40^\circ$ und einer Kohäsion von $c = 0$ MPa angesetzt worden. Nach den Ergebnissen der numerischen Berechnungen unter Verwendung der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb ist für $c = 0$ MPa der Grenzzustand bei einem Reibungswinkel von $\varphi = 40,7^\circ$ erreicht. Die Ergebnisse beider Ansätze stimmen hier überein. Um invers auf den in situ Spannungszustand Rückschlüsse ziehen zu können, ist die Berücksichtigung der Kohäsion erforderlich und der Ansatz von $c = 0$ MPa nicht gerechtfertigt. Abbildung 7.11 zeigt ein Spannungspolygon unter der Berücksichtigung von Kohäsion. Der Bereich des Spannungspolygons für Abschiebungen ($\sigma_v \geq \sigma_H \geq \sigma_h$) unterliegt durch den Ansatz anderer Parameter keiner Änderung, da die Vertikalspannung σ_v aus der Überlagerung und die kleinste Horizontalspannung σ_h aus dem Extended-Leak-Off-Test (XLOT) bei dieser Betrachtung genau diesen Bereich festlegen. Die Bereiche der übrigen Verwerfungen werden dagegen deutlich reduziert. Die Berücksichtigung der Kohäsion hat demnach für Seitenverschiebungen und Aufschiebungen einen Einfluss auf die Abschätzung der mittleren Hauptspannung σ_H .

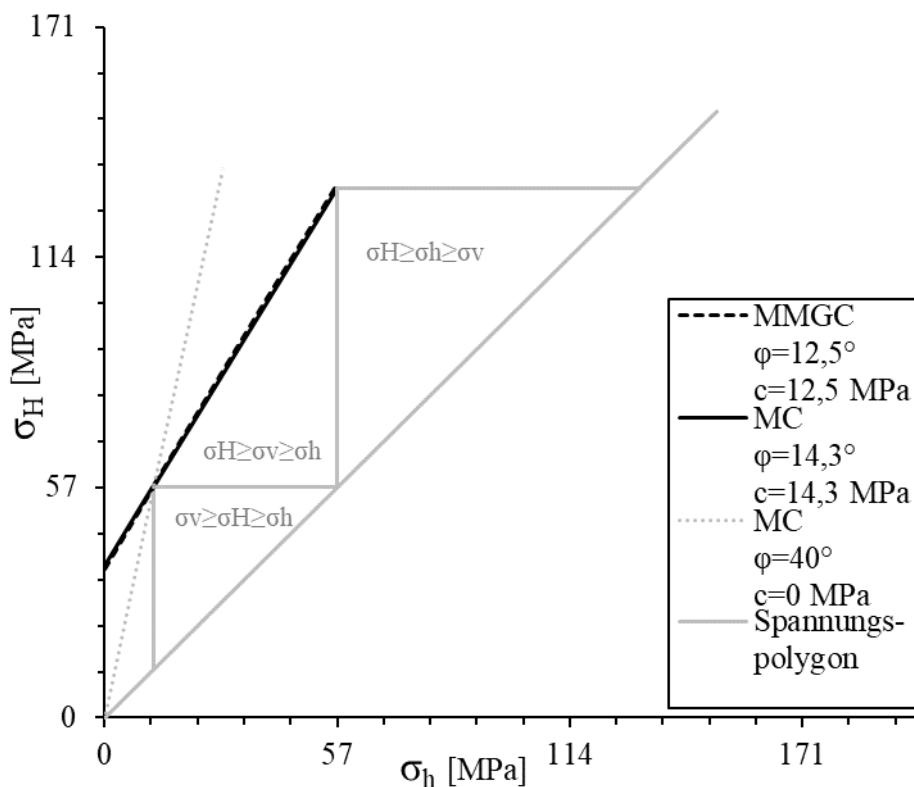


Abbildung 7.11: Spannungspolygon unter der Berücksichtigung von Kohäsion

Des Weiteren hat die mittlere Hauptspannung einen Einfluss auf die Gesteinsfestigkeit und damit auch auf die inverse Bestimmung der in situ Spannungen. Bei dem hier gezeigten Beispiel

zur Bestimmung der mittleren Hauptspannung ist dieser Einfluss aufgrund der vereinfachten, ebenen Darstellung nicht ersichtlich. Bei jeweils optimalen Parametern liefern die Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb und die MMGC in dieser Art der Darstellung die gleiche Gerade. Für die Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb bleibt diese, da unabhängig von der mittleren Hauptspannung, über den gesamten Einflussbereich gleich. Da die MMGC innerhalb einer Deviatorebene eine nichtlineare Grenzbedingung ist, welche die mittlere Hauptspannung berücksichtigt, verändert sich die Gerade mit dem Lode-Winkel und somit auch die Größe der Bereiche, in denen zulässige Spannungszustände für die einzelnen Verwerfungen liegen. Die Bestimmung der mittleren Hauptspannung durch eine inverse Problemstellung mit dem Spannungspolygonverfahren ist daher nur mit Grenzbedingungen sinnvoll, die wie die Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb die mittlere Hauptspannung nicht berücksichtigen und daher zusätzliche Behelfe zu dessen Ermittlung benötigen. Die MMGC bietet dagegen die Möglichkeit, die mittlere Hauptspannung direkt zu berechnen. Zur Ermittlung der mittleren Hauptspannung wird die MMGC, dargelegt in Gl. (4.7), umgestellt, woraus sich die quadratische Gl. (7.1) ergibt:

$$\sigma_2^2 + \sigma_2 \frac{(-\sigma_1 - \sigma_3)}{(1 - (\alpha \sin \varphi)^2)} + \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_3^2)(1 - (\sin \varphi)^2) - \sigma_1 \sigma_3 - (2c \cos \varphi)^2}{(1 - (\alpha \sin \varphi)^2)} = 0 \quad (7.1)$$

Bei der Anwendung von Gl. (7.1) gilt zu beachten, dass nur Lösungen, für die $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ gilt, zulässig sind. Die Hauptspannungen des in situ Spannungszustands $(\sigma_v, \sigma_H, \sigma_h)$ der jeweils betrachteten Verwerfung sind entsprechend sortiert in Gl. (7.1) einzusetzen. Werden optimale Parameter, identifiziert mit der MMGC, zusammen mit der Überlagerungsspannung σ_v und der kleinsten Horizontalspannung σ_h (z.B. aus einem XLOT) in Gl. (7.1) eingesetzt, beschreiben die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung $(\sigma_{2,1}, \sigma_{2,2})$ den gleichen Wert. Die Lösung ist in diesem Fall eindeutig und berücksichtigt den Einfluss der mittleren Hauptspannung. Werden die optimalen Parameter identifiziert mit der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb verwendet, entspricht ein Spannungszustand $\sigma_1, \sigma_{2,1}, \sigma_3$ exakt der triaxialen Extension und $\sigma_1, \sigma_{2,2}, \sigma_3$ der triaxialen Kompression. Die beiden Lösungen befinden sich auf den Graten der MMGC, welche äquivalent mit der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb sind. Der Wert der mittleren Hauptspannung kann dann aus dem Mittelwert der Summe aus $\sigma_{2,1}$ und $\sigma_{2,2}$ bestimmt werden und stimmt mit Ergebnissen des Spannungspolygonverfahrens überein.

Eine Übereinstimmung des Mittelwerts mit dem Ergebnis des Spannungspolygonverfahrens (unter Verwendung von Parametern, identifiziert mit der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb) gilt zusätzlich für alle Parameterkombinationen, die zu Lösungen von $\sigma_{2,1}$ und $\sigma_{2,2}$ führen, welche die Bedingung $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ nicht verletzen. Der Einfluss der mittleren Hauptspannung auf die Gesteinsfestigkeit, wie er in der MMGC Beachtung findet, wird bei der

Verwendung des Mittelwerts nicht berücksichtigt. Soll der Einfluss der mittleren Hauptspannung berücksichtigt werden, ist für diese $\sigma_{2,1}$ oder $\sigma_{2,2}$ zu wählen. Um herauszufinden, welche der beiden Lösungen zutrifft, muss unterschieden werden, ob an einer Verwerfung eher Kompressionsbedingungen oder eher Extensionsbedingungen vorliegen, welchen die ausgewählte Lösung, zusammen mit der größten und kleinsten Hauptspannung, genügen soll. So ist für Abschiebungen, die in Bereichen von tektonischen Spannungen liegen – und für die eine Horizontalspannung in einer ähnlichen Größenordnung vorliegen kann wie die Vertikalspannung – eher die Annahme von Extensionsbedingungen zutreffend. Ist die Vertikalspannung deutlich größer als die beiden Horizontalspannungen, wären eher Kompressionsbedingungen zutreffend.

Interpretation der Stabilitätsberechnungen am Bohrloch

Weist das Gestein rechnerisch ausreichend große Werte für die Parameter auf, kann ein Bohrloch auch ohne die stützende Wirkung der Bohrspülung stabil hergestellt werden. Dabei sind unter der Verwendung der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb jedoch Kurvenscharen mit größeren Werten für die Parameter notwendig als unter der Verwendung der MMGC. Daraus könnte fälschlicherweise der Schluss gezogen werden, durch die Verwendung der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb bei Bohrlochstabilitätsproblemen auf der „sicheren Seite“ zu liegen – was durch einen Vergleich der Fließflächen in Bezug auf die gleiche inverse Problemstellung widerlegt werden kann. Werden die Parameter invers aus dem gestützten Bohrloch identifiziert, enthält die Fließfläche der modifizierten Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb Bereiche, in denen die Gesteinsfestigkeit deutlich überschätzt wird. Um den Unterschied der Ergebnisse für die Bohrung mit einem Durchmesser von 1 m korrekt zu interpretieren, sollen exemplarische Fließflächen der beiden Grenzbedingungen im Längsschnitt durch diese und in einem Schnitt in einer Deviatorebene gegenübergestellt werden. Dieser Vergleich soll für Ergebnisse bei einem mittleren Stützdruck von $\sigma_n = 5$ MPa und bei einer Kohäsion von $c = 10$ MPa erfolgen. Den bereits berechneten Ergebnissen kann ein Reibungswinkel von $\varphi = 27^\circ$ für die Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb und von $\varphi = 20^\circ$ für die MMGC entnommen werden. Die Schnitte durch die unter der Verwendung der genannten Parameter aufgespannten Fließflächen sind in Abbildung 7.12 dargestellt.

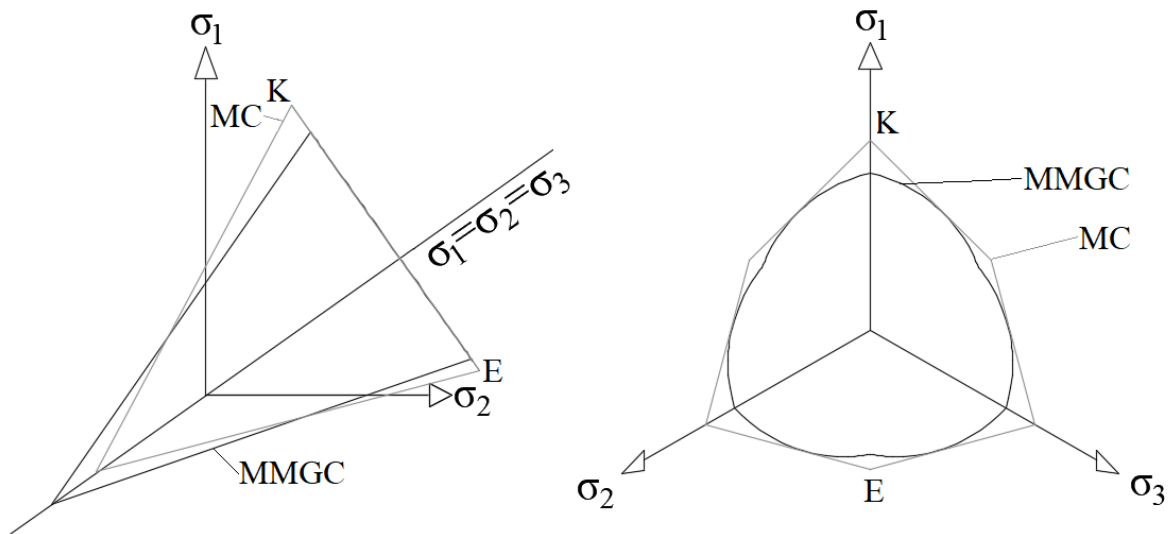


Abbildung 7.12: Vergleich der Fließflächen der Grenzbedingungen nach MC ($c = 10 \text{ MPa}$ und $\varphi = 27^\circ$) mit der MMGC ($\alpha = 0$, $c = 10 \text{ MPa}$ und $\varphi = 20^\circ$); Parameter bestimmt in einer inversen Problemstellung an einem Bohrloch mit einem Stützdruck von $\sigma_n = 5 \text{ MPa}$

Dieser Vergleich zeigt, dass die Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb in den Bereichen triaxialer Extension und Kompression eine deutlich höhere Gesteinsfestigkeit suggeriert als die MMGC. Spannungszustände, die bei numerischen Berechnungen in diesen Bereichen liegen, werden mit der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb fälschlicherweise als elastisch interpretiert, obwohl sie nach der MMGC bereits plastisch sind. Dies kann zu einer unbeabsichtigten Überschätzung der Gesteinsfestigkeit unter Verwendung der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb, bei Parametern bestimmt mit einer inversen Problemstellung, führen. Unter Betrachtung von Abbildung 7.7 und Abbildung 7.8 liegt zunächst der irreführende Schluss nahe, die Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb, welche immer größere Werte für die Parameter erfordert als die MMGC, als auf der „sicheren Seite“ liegend zu interpretieren. Betrachtet man dagegen Abbildung 7.12 wird schnell erkennbar, dass nach dieser fälschlicherweise für konservativ gehaltenen und auf der „sicheren Seite“ liegenden Interpretation der Ergebnisse nach Mohr-Coulomb, die Gesteinsfestigkeit in den Bereichen von triaxialer Kompression und Extension deutlich überschätzt wird. Daher ist es vorteilhaft, wenn ein Baugrund drei unterschiedlich große Hauptspannungen aufweist, bei Standsicherheitsuntersuchungen eine Grenzbedingung zu verwenden, die auch den Einfluss der mittleren Hauptspannung berücksichtigt.

Unter wirtschaftlichen Gesichtspunkten ist die Bemessung des Stützdrucks mit der MMGC effektiver, da dieser im Umkehrschluss nicht so groß angesetzt werden muss wie nach einer Bemessung mit der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb.

Interpretation der Ergebnisse unterschiedlicher Bohrlochdurchmesser

Die Vergleiche der Ergebnisse für die unterschiedlichen Bohrlochdurchmesser in Abbildung 7.9 und in Abbildung 7.10 zeigen, dass die berechneten Werte der Parameter nahezu gleich sind. Dieser Umstand lässt vermuten, dass der Bohrlochdurchmesser keinen Einfluss auf die Bohrlochstabilität hat. Auf den ersten Blick scheint dies im Widerspruch mit der Erwartung zu stehen, dass ein größerer Bohrlochdurchmesser empfindlicher gegenüber Instabilitäten ist. Bei näherer Betrachtung des gewählten Berechnungsmodells mit dem Ansatz von gewichtslosem Material sind Parallelen zur Grundbruchberechnung von Flachgründungen erkennbar:

So beruhen die Tragfähigkeitsbeiwerte N_{c0} und N_{d0} bei Grundbruchuntersuchungen nach DIN 4017 auf der Annahme von gewichtslosem Boden unterhalb der Gründungsohle. Sie stellen das Ergebnis von Berechnungen zu plastischen Bruchlasten unter Verwendung der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb dar. Die Bruchlast (σ_0) kann unter diesen Annahmen nach Gl. (7.2) bestimmt werden. Neben den beiden dimensionslosen Tragfähigkeitsbeiwerten gehen die Spannung aus dem Eigengewicht des Bodens oberhalb der Gründungsohle q in MPa, die Kohäsion c in MPa und die Bruchlast σ_0 in MPa ein (Perau, 1995):

$$\sigma_0 = qN_{d0} + cN_{c0} \quad (7.2)$$

Auf beiden Seiten der Gleichung entspricht die Dimension der einer Spannung (K^1L^{-2}), also Kraft (K) pro Fläche (L^2). Der Einfluss der Breite einer Flachgründung wird unter der Annahme von gewichtslosem Material nicht bei der Grundbruchberechnung berücksichtigt und hat daher auch keinen Einfluss auf die Größe der zulässigen Last. Die Dimension der Länge (L^1) hat also keinen Einfluss. Eine Vergrößerung der Spannungen auf beiden Seiten der Gl. (7.2) um einen beliebigen Faktor führt daher – bei gleicher Fundamentsbreite – nicht zu einem Grundbruch. Unter dem Ansatz von gewichtslosem Material ist die Bruchlast demnach unabhängig von den Fundamentsabmessungen (Perau, 1995).

Um zu überprüfen, ob der Bohrlochdurchmesser unter dem Ansatz von gewichtslosem Material ebenfalls keinen Einfluss auf die Stabilität der Bohrung hat, soll zunächst eine Dimensionsanalyse erfolgen. Die eingehenden Dimensionen sind in Tabelle 5.1 aufgeführt:

Tabelle 7.2: Parameter zur Beschreibung der Bohrlochstabilität

		Physikalische Bedeutung	Bezeichnung	Einheit	Dimension
In situ Spannungs- zustand	1	Vertikalspannung	σ_v	kN/m ²	K ¹ L ⁻²
	2	Gr. Horizontalspannung	σ_H	kN/m ²	K ¹ L ⁻²
	3	Kl. Horizontalspannung	σ_h	kN/m ²	K ¹ L ⁻²
Material- parameter	4	Kohäsion	c	kN/m ²	K ¹ L ⁻²
	5	Reibungswinkel	φ	°	-
	6	Trennflächenabstand	s	m	L ¹
Bohrloch	7	Stützdruck	σ_n	kN/m ²	K ¹ L ⁻²
	8	Durchmesser	d	m	L ¹

Eine dimensionsmäßig homogene Gleichung als Grenzbedingung für die Bohrlochstabilität liegt nur dann vor, wenn der Durchmesser d nicht berücksichtigt oder neben dem Durchmesser d der Bohrung eine weitere Länge – wie der Trennflächenabstand s – berücksichtigt wird und somit eine einheitslose Größe entstehen kann. Wird lediglich der Durchmesser d berücksichtigt, müssten die in Gl. (7.3) aufgeführten mechanischen Größen eine dimensionsmäßig homogene Gleichung bilden:

$$c = f(\sigma_v, \sigma_H, \sigma_h, \sigma_n, \varphi, d) \quad (7.3)$$

Wie von Kobus (1974) beschrieben, lassen sich die Dimensionen mechanischer Größen, wie in Gl. (7.4) dargelegt, als Produkt ganzzahliger Potenzen der Grundgrößen darstellen. Darin entspricht K der Einheit einer Kraft und L der Einheit einer Länge.

$$K^1 L^{-2} = (K^1 L^{-2})^u (K^1 L^{-2})^v (K^1 L^{-2})^w (K^1 L^{-2})^x (L^1)^y \quad (7.4)$$

Die Gleichheit der Grunddimensionen erfordert, dass die Summen ihrer Potenzen auf beiden Seiten der Gleichung den gleichen Wert annehmen. Die beiden Summen der Potenzen der eingehenden Grundgrößen werden in Gl. (7.5) aufgetragen und durch Gleichsetzung nach der Potenz des Durchmesser y aufgelöst:

$$\begin{aligned} (K): 1 &= u + v + w + x \rightarrow x = 1 - u - v - w \\ (L): -2 &= -2u - 2v - 2w - 2x + y \\ &\rightarrow y = 0 \end{aligned} \quad (7.5)$$

Wird der Trennflächenabstand s vernachlässigt, ergibt sich nach Gl. (7.5), dass die potenzierte Grundgröße einer Länge des Durchmessers L⁰ entspricht und dieser nicht in eine dimensionsmäßig homogene Gleichung eingeht und damit keinen Einfluss in Gl. (7.3) hat.

Daher muss gelten, dass unter dem Ansatz von gewichtslosem Material für Bohrabschnitte, in denen das Verhältnis s/d , wie in Kapitel 2.4 beschrieben, kontinuumsmechanische Betrachtungen zulässt, der Durchmesser der Bohrung keinen Einfluss auf die Bohrlochstabilität hat. Dies soll durch eine weitere Berechnung mit modifizierten Randbedingungen überprüft werden. Hängt die Bohrlochstabilität unter dem Ansatz von gewichtslosem Material nicht von dem Bohrl Lochdurchmesser ab, darf eine Vergrößerung aller Werte einer Spannung (K^1L^{-2}) – also auch der Kohäsion – um einen beliebigen Faktor keinen Einfluss auf die Bohrlochstabilität haben. Dazu werden die in situ Spannungen, die Kohäsion und der Stützdruck des bereits berechneten Modells mit einem Bohrloch von 1 m Durchmesser um den Faktor 10 vergrößert. Das Ergebnis der ursprünglichen Berechnung mit $\sigma_v = 57$ MPa, $\sigma_H = 35$ MPa, $\sigma_h = 12$ MPa und $\sigma_n = 5$ MPa ist in Abbildung 7.13 dem Ergebnis der Berechnung mit 10-fach vergrößerten Spannungen von $\sigma_v = 570$ MPa, $\sigma_H = 350$ MPa, $\sigma_h = 120$ MPa und $\sigma_n = 50$ MPa gegenübergestellt. Die Ergebnisse des gestrichelten Linientyps entsprechen der MMGC und die der durchgehenden Linien der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb. Für eine übersichtliche Darstellung der Ergebnisse wird auf der Ordinate eine logarithmische Skalierung gewählt. Alternativ könnte die Kohäsion durch den zugehörigen Stützdruck normiert werden und die Kurven lägen je Grenzbedingung übereinander. Um ein Erreichen des Grenzzustands zu vermeiden, werden für beide Spannungsniveaus jeweils die gleichen Reibungswinkel erforderlich. Alle Parameter mit der Dimension einer Spannung können, ohne den Grenzzustand zu erreichen, beliebig vergrößert werden, woraus folgt, dass der Bohrl Lochdurchmesser keinen Einfluss auf das Berechnungsergebnis nimmt.

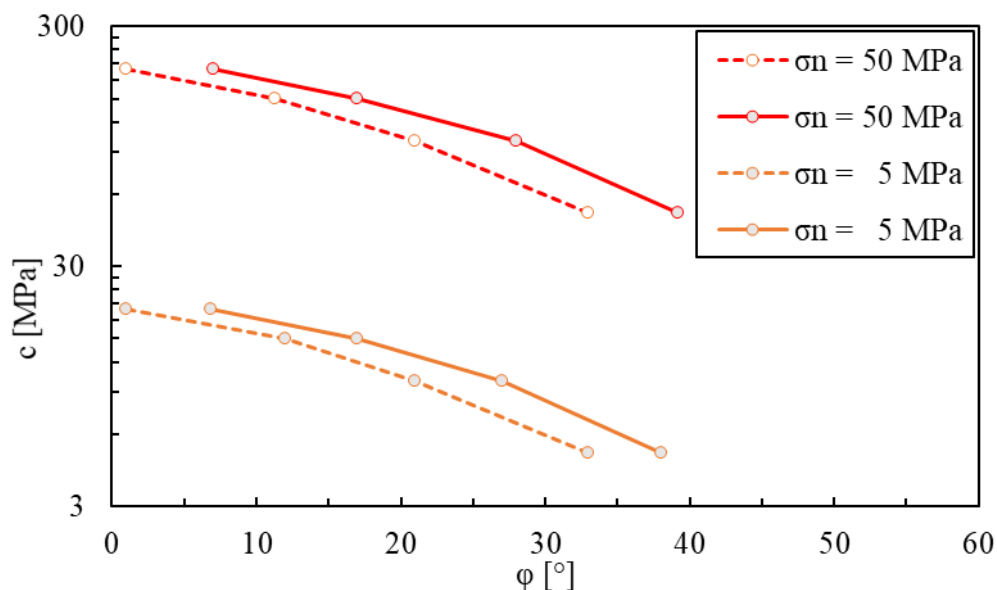


Abbildung 7.13: Vergleich von Ergebnissen mit ursprünglichen und um den Faktor 10 vergrößerten Spannungen

Unter den gewählten Bedingungen des Modells:

- der Annahme, dass der Einfluss der Wichte über den betrachteten Bohrabschnitt im Vergleich zu dem der in situ Spannungen einen sehr kleinen Einfluss auf die Bohrlochstabilität ausübt und dieser daher nicht berücksichtigt werden muss
- und der Annahme, dass das Verhältnis von Trennflächenabstand s zum Bohrl Lochdurchmesser d in einem für kontinuumsmechanische Betrachtungen zulässigen Bereich liegt,

konnte gezeigt werden, dass die Bohrlochstabilität unabhängig vom Durchmesser der Bohrung ist! Für Bohrabschnitte, welche diesen Randbedingungen genügen, stellt der größere Durchmesser einer Geothermiebohrung nicht unbedingt ein erhöhtes Stabilitätsrisiko dar. Weist das Gestein dennoch eine zu geringe Festigkeit auf, kann Bohrlochinstabilitäten – nach den vorliegenden Berechnungsergebnissen – mit der stützenden Wirkung der Bohrspülung entgegengewirkt werden. Auch Geothermiebohrungen mit größerem Durchmesser können so standsicher bemessen werden.

8. Zusammenfassung und Ausblick

Für numerische Untersuchungen der Bohrlochstabilität tiefer Geothermiebohrungen sind zu Beginn dieser Arbeit – anhand von einschlägiger Fachliteratur – die Grundlagen der Bohrtechnik mit den Möglichkeiten, Information über das anstehende Gebirge zu gewinnen, zusammengefasst. Danach haben der in situ Spannungszustand und die Gesteinsfestigkeit einen großen Einfluss auf die Bohrlochstabilität. Zwei Hauptspannungen können aus den Ergebnissen von Feldversuchen bestimmt werden. Die Hauptspannung in vertikaler Richtung σ_v über die Tiefe unter GOK und die mittlere Wichte des Gesteins und die kleine Horizontalspannung σ_h aus dem Ergebnis eines Leak-Off-Tests (LOT) oder eines Extended-Leak-Off-Tests (XLOT). Die mittlere Hauptspannung, die in diesem Fall der größeren Horizontalspannung σ_H entspricht, wird konventionell mit dem Spannungspolygonverfahren abgeschätzt. Diesem Verfahren liegt die Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb zugrunde, in dem die mittlere Hauptspannung nicht berücksichtigt wird. Die Materialparameter zur Beschreibung der Gesteinsfestigkeit werden aus den Ergebnissen konventioneller Triaxialversuche an Material, das aus einem Bohrloch gewonnener Bohrkerne stammt, bestimmt. Unter Verwendung dieser Scherparameter und den damit teilweise abgeschätzten in situ Spannungen werden konventionell Untersuchungen bezüglich der Bohrlochstabilität an einer gelochten Scheibe mit elastoplastischem Materialverhalten unter der Annahme eines ebenen Verformungszustands durchgeführt. Da sowohl in gängigen Berechnungsmodellen, als auch in zugehörigen Grenzbedingungen der Einfluss eines in situ Spannungszustands mit drei unterschiedlichen Hauptspannungen nicht berücksichtigt wird, sind

Kenntnisse über diesen auf die Gesteinsfestigkeit sowie Untersuchungen zur Bohrlochstabilität unter einem solchen Spannungszustand in einem 3D-Modell von Bedeutung.

Untersuchungen an Fels unter echten triaxialen Bedingungen von Mogi (2007) und anderen Autoren haben gezeigt, dass die mittlere Hauptspannung einen Einfluss auf die Gesteinsfestigkeit hat. Es ist daher vorteilhaft, eine Grenzbedingung zu verwenden, welche diese auch berücksichtigen kann. Aus einer Zusammenführung der linearen Interpretation der von Mogi (2007) vorgeschlagenen Grenzbedingung durch Al-Ajmi und Zimmermann (2006) mit weiteren Erkenntnissen Mogi's (2007), ist im Rahmen dieser Arbeit die bereits in Kosmann & Perau (2021) veröffentlichte, modifizierte Grenzbedingung nach Mogi-Coulomb nach Gl. (4.7) abgeleitet worden. Diese berücksichtigt nicht nur innerhalb der oktaedrischen Scherspannungen die mittlere Hauptspannung, sondern, gesteuert durch den Aufweitungsparameter α , auch im Normalspannungsanteil. Durch diese Modifizierung enthält die MMGC zusätzlich für $\alpha = 1$ die Grenzbedingung nach Drucker-Prager, jedoch in einer anderen Formulierung. Wird $\varphi = 0$ angesetzt, entspricht die MMGC der Grenzbedingung nach von Mises, jedoch ebenfalls in einer anderen Formulierung. Werden die Parameter φ und c bei $\alpha = 0$ aus der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb verwendet, stimmt die MMGC auf den Graten von triaxialer Kompression und Extension mit der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb überein. In dem Bereich triaxialer Extension weist die Fließfläche der MMGC einen konkaven Bereich auf. Innerhalb eines Sektors, d. h. zwischen zwei Unstetigkeitsstellen, ist die MMGC jedoch konvex. Die Anwendung einer assoziierten oder nicht assoziierten Fließregel auf Basis der MMGC verursacht demnach keine Probleme. Es besteht jedoch die Gefahr eines elastischen „Jump-Overs“. Mit dem vorgeschlagenen Vorgehen, dargelegt in Gl. (4.15), können die konkaven Bereiche der MMGC bereits bei der Untersuchung der Unstetigkeitsstellen gefunden werden. Mit der MMGC können bei großen Werten für α und φ auch Druck-Druck-Zug-Spannungszustände zulässig sein. Soll ein derartiges Materialverhalten ausgeschlossen werden, kann dies, wie gezeigt, durch ein konventionelles Tension-Cut-Off Kriterium gewährleistet werden. In MMGC64 ist ein Tension-Cut-Off bisher nicht enthalten, da hier die Auffassung vertritt wird, dass ein derartiges Materialverhalten für Fels durchaus vorstellbar ist.

Für eine erfolgreiche Anwendung der MMGC ist die Identifizierung der Parameter erforderlich. Die Identifizierung von Materialparametern kann durch eine Auswertung von Elementversuchen erfolgen. Welche Art von Elementversuch geeignet ist, hängt von dem in situ Spannungszustand und der betrachteten Bauwerksgeometrie ab. Anhand dieser Punkte kann eine geeignete Grenzbedingung ausgewählt werden, dessen Materialparameter bestimmt werden müssen. Bei geothermischen Bohrungen können drei unterschiedlich große Hauptspannungen anstehen, die alle einen Einfluss auf die Gesteinsfestigkeit haben. Daher sind Grenzbedingungen vorteilhaft, welche diesen Einfluss auch berücksichtigen. Es kommen die unter 4.2 exemplarisch genannten

Grenzbedingungen in Frage. Da die Gesteinsfestigkeit von Fels ebenfalls vom Spannungsniveau abhängig ist, sollten in echten Triaxialversuchen sowohl unterschiedliche Spannungszustände entlang der hydrostatischen Achse, als auch Spannungszustände mit unterschiedlichem Lode-Winkel untersucht werden. Bilden die resultierenden Spannungszustände des Grenzzustands entlang der hydrostatischen Achse einen annähernd linearen Verlauf, kann die MMGC ohne Einschränkung Anwendung finden. Ist der Verlauf nicht linear, ist die MMGC in begrenzten Bereichen zutreffend. Mittels der vorgeschlagenen Normierung der Versuchsergebnisse durch den Lode-Winkel kann der Einfluss des Spannungsniveaus visualisiert werden, was eine gute Einschätzung des Einflusses auf die Gesteinsfestigkeit erlaubt. Eine Grenzbedingung, die den Einfluss der mittleren Hauptspannung berücksichtigt, ist vorteilhaft gegenüber einer Grenzbedingung, die zwar den Einfluss des Spannungsniveaus berücksichtigt, aber nicht den Einfluss der mittleren Hauptspannung. Gerade im Kompressionsbereich kann eine Vernachlässigung dieses Einflusses zu einer deutlichen Überschätzung der Scherfestigkeit führen, wohingegen eine Überschätzung des zulässigen Spannungsniveaus vergleichsweise gering ausfällt. Für die Beschreibung der Gesteinsfestigkeit sind mindestens zwei Materialparameter erforderlich, welche die innere Reibung und Kohäsion beschreiben müssen. In Anlehnung an die weitverbreitete und anerkannte Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb werden diese mit φ und c benannt. Für eine genauere Anpassung der Grenzbedingung nach Mogi-Coulomb an die Versuchsergebnisse aus echten triaxialen Versuchen ist in dieser Arbeit der Aufweitungsparameter α implementiert und diese zur MMGC weiterentwickelt worden. Mit diesem Materialparameter kann der Einfluss der mittleren Hauptspannung noch besser berücksichtigt und die Fließfläche der MMGC noch besser an die Versuchsergebnisse angepasst werden. Zusätzlich verringert sich mit zunehmendem α die Gefahr eines elastischen „Jump-Overs“, da gleichzeitig die konkaven Bereiche der Fließfläche kleiner werden. Zur Bestimmung der drei Materialparameter sind mindestens drei Versuchsergebnisse erforderlich. Stehen Versuchsergebnisse in einer größeren Anzahl zur Verfügung, können die Parameter konventionell mit der Methode der kleinsten Quadrate oder der Regressionsanalyse erfolgen. Soll die Qualität unterschiedlicher Grenzbedingungen, Versuchsergebnisse abzubilden, verglichen werden, kann die in dieser Arbeit entwickelte Methode der kleinsten Abstandsbeträge herangezogen werden. Mit dieser kann der mittlere Abstand einer Fließfläche im Hauptspannungsraum zu den Versuchsergebnissen bestimmt werden. Denn dieser hängt nicht von einem Funktionswert einer Grenzbedingung ab, welche als Hauptaufgabe die Unterscheidung zwischen elastischem und plastischem Materialverhalten hat, und damit lediglich zwischen größer oder kleiner null unterscheiden muss. Der mittlere Abstandsbetrag dagegen entspricht der aussagekräftigen Einheit einer Spannung, welche auch unter verschiedenen Grenzbedingungen einen Vergleich ermöglicht. Bezüglich der optimalen Parameter liefert diese Methode das gleiche Ergebnis wie konventionelle Identifikationsverfahren.

Die Anwendung der Methode ist bisher auf die J_2 -Plastizität beschränkt und sollte zukünftig auf andere Grenzbedingungen erweitert werden.

Um numerische Berechnungen an Geothermiebohrungen vornehmen zu können, ist im Rahmen dieser Arbeit das ideal-plastische Stoffmodell MMGC64 entwickelt worden. MMGC64 ist ein User-Defined-Soil-Model (UDSM), welches in der FEM-Software PLAXIS 3D selbstverständlich auch zur Lösung anderer geotechnischer Randwertprobleme verwendet werden kann. Zur Unterscheidung zwischen elastischem und plastischem Materialverhalten wird darin die MMGC verwendet. Ist die MMGC für einen Spannungszustand erfüllt, wird linear-elastisches Materialverhalten nach dem Hookschen Gesetz angewandt. Für Be- und Entlastungen werden die gleichen elastischen Konstanten verwendet. Wird die MMGC verletzt, kommt es zur Anwendung einer aus der MMGC abgeleiteten Fließregel, mit welcher unzulässige Spannungszustände wieder zurück auf die Fließfläche geführt werden können. Da dies sowohl assoziiert als auch nicht assoziiert erfolgen kann, kann auch dilatantes Materialverhalten berücksichtigt werden. Eine Verfestigung oder Entfestigung des Materials wird nicht berücksichtigt, sodass die Fließfläche konstant ist. Tritt ein elastischer „Jump-Over“ auf, kann dieses auf Wunsch über den Parameter EJO angezeigt, die Berechnung gestoppt oder komplett ignoriert werden. Über die Größe der Funktionswerte der MMGC an der Unstetigkeitsstelle des Extensionsbereichs und des Durchstoßpunktes mit dieser Ebene kann die Bedeutung des elastischen „Jump-Overs“ auf das Berechnungsergebnis beurteilt werden. Generell wird empfohlen, kleine Lastschritte zu wählen, um elastische „Jump-Over“ mit einer negativen Auswirkung auf das Berechnungsergebnis oder am besten vollständig auszuschließen.

Zur Untersuchung der Bohrlochstabilität von tiefen Geothermiebohrungen wurde unter mehrfacher Ausnutzung von Symmetrie ein dreidimensionales Modell einer achteil Bohrung betrachtet. Die in situ Spannungen wurden aus einer Abschätzung für eine bestehende Geothermiebohrung aus der Literatur übernommen. Innerhalb der Bohrung kann ein Stützdruck aufgebracht werden. Da der Einfluss der Wichte über den betrachteten Bohrabschnitt im Vergleich zu den in situ Spannungen als sehr gering eingeschätzt wird, ist diese zu null gesetzt worden. Es wurden zwei unterschiedliche Bohrlochdurchmesser betrachtet. In den Berechnungen wurden die Scherparameter unter konstantem Stützdruck bis zum Erreichen des Grenzzustands reduziert. Ein Vergleich der berechneten Werte für die Parameter zeigt, dass unter Verwendung der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb durchweg größere Werte für die Parameter nötig sind, um den Grenzzustand zu vermeiden, als dies unter Verwendung der MMGC der Fall ist. Fälschlicherweise könnten die größeren mit der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb invers bestimmten Werten für die Parameter für konservativ und auf der „sicheren Seite“ liegend interpretiert werden. Da die mittlere Hauptspannung einen maßgebenden Einfluss auf die

Ergebnisse nimmt, unterliegen numerische Berechnungen unter Verwendung solcher invers bestimmten Parameter einer deutlichen Überschätzung der Gesteinsfestigkeit. Um eine derartige Überschätzung der Gesteinsfestigkeit zu vermeiden, empfiehlt sich die Verwendung der MMGC, da diese den Einfluss der mittleren Hauptspannung berücksichtigt und die Gesteinsfestigkeit zutreffend wiedergeben kann.

Einen weiteren Vorteil, den die MMGC gegenüber den Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb bietet, ist die Möglichkeit, die mittlere Hauptspannung zur Bestimmung von in situ Spannungszuständen direkt berechnen zu können, da diese miteingeht. Dafür müssen die Materialparameter des Gesteins sowie zwei in situ Hauptspannungen bekannt sein. Wobei die Materialparameter anhand von echten Triaxialversuchen an Bohrkernen und eine der beiden in situ Hauptspannungen anhand von LOT oder XLOT bestimmt werden können. Die zweite in situ Hauptspannung kann anhand der Überlagerung bestimmt werden. Da es sich bei der MMGC um eine quadratische Gleichung handelt, liefert die Umstellung der Gleichung zur mittleren Hauptspannung naturgemäß zwei Lösungen. Werden die Parameter aus einer inversen Problemstellung für einen vorgegebenen Spannungszustand bestimmt, gelten folgende Zusammenhänge, die gleichzeitig zwei Grenzfälle für die Berechnung der mittleren Hauptspannung darstellen:

- Für Parameter, identifiziert mit der MMGC, beschreiben beide Lösungen den gleichen Wert und es gibt genau ein Ergebnis für die mittlere Hauptspannung.
- Für Parameter, identifiziert mit der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb, liegen die beiden Lösungen genau auf den Graten der Fließfläche der MMGC.

Davon ausgehend, dass die Materialparameter anhand von Ergebnissen aus echten Triaxialversuchen identifiziert worden sind und ein Spannungszustand im Feld zu zwei Lösungen führt, die zwischen den genannten Grenzfällen liegen können, muss eine Lösung ausgewählt werden. Dafür ist die Unterscheidung, ob eine Verwerfungsart eher unter Kompressionsbedingungen oder Extensionsbedingungen entsteht, notwendig. Für Abschiebungen sind die folgenden Betrachtungen für die Unterscheidung sinnvoll: Stehen tektonische Spannungen an, die zu Horizontalspannungen in einer ähnlichen Größenordnung wie die Vertikalspannungen führen können, kann von Extensionsbedingungen ausgegangen werden. Sind die Vertikalspannungen deutlich größer als die beiden Horizontalspannungen, kann von Kompressionsbedingungen ausgegangen werden. Bei dieser Vorgehensweise zur Bestimmung der mittleren Hauptspannung nehmen diese Einfluss auf das Ergebnis. Alternativ kann auch der Mittelwert aus den beiden Lösungen gebildet werden. Dieser entspricht, für Lösungen, welche die Bedingung $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ nicht verletzen, immer der Lösung des Spannungspolygonverfahrens. Der Einfluss der mittleren Hauptspannung wird unter Verwendung des Mittelwerts nicht berücksichtigt.

Die Ergebniswerte für die Parameter φ und c aus den numerischen Berechnungen von zwei Modellen mit unterschiedlich großen Bohrlochdurchmessern waren nahezu identisch. Darauf aufbauend konnte gezeigt werden, dass der Durchmesser einer Bohrung unter der Betrachtung von gewichtslosem Material keinen Einfluss auf die Bohrlochstabilität hat. Mittels einer Dimensionsanalyse wurde dargelegt, dass eine dimensionsmäßig homogene Gleichung als Grenzbedingung für die Bohrlochstabilität nur dann vorliegt, wenn neben dem Bohrlochdurchmesser d eine weitere Größe mit der Einheit einer Länge – wie der Trennflächenabstand s – miteingeht. Ist dies nicht der Fall, fällt der Bohrlochdurchmesser aus der Gleichung und hat keinen Einfluss auf die Bohrlochstabilität. Geht der Trennflächenabstand s mit in die Gleichung ein, schließt das wiederum kontinuumsmechanische Betrachtungen aus, da in einem solchen Fall diskontinuumsmechanische Betrachtungen erforderlich werden. Durch erneute numerische Berechnungen des Modells mit einem Bohrloch von einem Meter Durchmesser, bei der alle eingehenden Werte mit der Dimension einer Spannung (auch die Kohäsion!) vervielfacht wurden, lagen als Berechnungsergebnisse der inversen Problemstellung identische Reibungswinkel und weiterhin Bohrlöcher die sich im Grenzzustand befinden vor. Somit hat sich bestätigt, dass der Durchmesser der Bohrung keinen Einfluss auf die Bohrlochstabilität hat. Unter den genannten Bedingungen von gewichtslosem Material und einem für kontinuumsmechanische Betrachtungen zulässigen Trennflächenabstand hat ein größerer Bohrlochdurchmesser einer Geothermiebohrung – im Vergleich mit konventionellen Bohrungen der Erdölindustrie – keinen Einfluss auf die Stabilität einer Bohrung.

Mit der MMGC kann die Bohrlochstabilität von tiefen Geothermiebohrungen untersucht und numerisch berechnet werden, auch wenn die zugehörige Fließfläche nicht durchweg konvex ist! Sie berücksichtigt die mittlere Hauptspannung und ist trotzdem eine einfache und gut anwendbare Grenzbedingung, deren Parameter aus den Ergebnissen echter triaxialer Versuche auf konventionellem Wege oder mit der in dieser Arbeit vorgestellten Methode der kleinsten Abstandsbeiträge identifiziert werden können. Eine sinnvolle Ergänzung kann ein Tension-Cut-Off-Kriterium sein, um zusätzlich die Elastizitätsgrenze von Zugbrüchen beschreiben zu können. Ebenfalls erscheint es sinnvoll, die Methode der kleinsten Abstandsbeiträge auf – entlang der hydrostatischen Achse – nichtlineare Funktionen zu erweitern, um auch diese mit anderen Grenzbedingungen vergleichen zu können. Zudem empfiehlt es sich, eine Bohrung mit realem Schadensfall zu untersuchen, um das Berechnungsmodell sowie die gewonnenen Erkenntnisse zu validieren.

9. Literaturverzeichnis

- Aadnoy, B., Looyeh, R. (2010): Petroleum Rock Mechanics - Drilling Operations and Well design, Elsevier 2010
- Al-Ajmi, A. M., Zimmermann, R.W. (2006): Stability analysis of vertical boreholes using the Mogi-Coulomb failure criterion in: International Journal of Rock Mechanics and Mining sciences 39
- Anger, H. (2013): Geothermie Tiefbohrungen, Informationsbroschüre, Hrsg. H. Angers Söhne Bohr und Brunnenbaugesellschaft mbH
- Backers, T., Moeck, I. (2013): Iterative Bohrlochstabilitätsanalyse für geothermale Tiefbohrungen im bayrischen Molassebecken; Tagungsband 19. Tagung für Ingenieurgeologie mit Forum für junge Ingenieurgeologen, München 2013
- Benz, T., Schwab, R. (2008) A quantitative comparison of six rock failure criteria in: International Journal of Rock Mechanics Science 45
- Benz, T. (2008): Zur Implementierung, Anwendung und Bedeutung von Materialmodellen in der FEM In: BAW-Kolloquium 21.02.2008 Karlsruhe: Anwendung der Finiten-Elemente-Methode im Grundbau
- Berli, S., Pingel, R. (1994): Anwendung der modernen Tiefbohrtechnik in der Schweiz, Bulletin der Vereinigung Schweiz. Petroleum-Geologen und –Ingenieure, Heft 61
- Betten, J. (2001): Kontinuumsmechanik, Elastisches und inelastisches Verhalten isotroper und anisotroper Stoffe, 2 Auflage, Springer Verlag Berlin Heidelberg 2001
- Bochmann, U. (2014): Einflussfaktoren auf die Bestimmung von Messwerten im Zug-Druckversuch an Blechwerkstoffen; Fakultät Maschinenbau; Hochschule Mittweida; Mittweida, 2014
- Borja, R. I. (2013): Plasticity – Modeling and Computation, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2013
- Braun, R., Reinhold, C. (2017): Ermittlung von 3D-Gebirgsspannungszuständen für den Brenner Basistunnel in Geotechnik 40, Heft 4
- Brian, M. (2019): Risiken für Projektentwickler und Investoren minimieren, <http://www.tiefengeothermie.de/top-themen/risiken-fuer-projektentwickler-und-investoren-minimieren>, (Aufgerufen am 27.11.2019)
- Bußmann, W., Frick, S., Fritschen, R., Huenges, E., Jung, R., Kabus, F., Klatschmitt, M., Kohlsch, O., Kranz, S., Moeck, I., Rüter, H., Saadat, A., Spalek, A., Tenzer, H., Zimmermann, G. (2012): Geothermie, Energie aus dem Innern der Erde, BINE-Fachbuch, Fraunhofer IRB Verlag
- Caquot, A., Kerisel, J. (1967): Grundlagen der Bodenmechanik, deutsche Übersetzung von Scheuch, G., dritte Auflage, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York

- Coture, C., Besuelle, P., (2019): Diffuse and localized deformation of a porous Vosges sandstone in true triaxial conditions in: E3S Web of Conferences 92:06007.
- Daldrup, J., Klapperich, H. (2009): Tiefe Geothermie – Internationale Projekte und Forschungsansätze In: 4. Symposium Umweltgeotechnik & 5 Freiburger Geotechnik-Kolloquium, Juni 2009, CiF e.V. publication 7-2009
- Doege, E., Behrens, B.-A. (2010): Handbuch Umformtechnik, Grundlagen, Technologien, Maschinen, 2 Auflage, Springer Verlag Berlin Heidelberg 2007, 2010
- Drucker, D. C., Prager, W. (1952): Soil mechanics and plastic analysis or limit design, Quarterly of applied mathematics, Vol.10 No. 2, Brown University
- Dreier, M. (2022): Parameteridentifikation mit der Methode der kleinsten Abstandsbeiträge, Bachelorthesis, unveröffentlicht, Hrsg.: Perau, E., Betr.: Kosmann, B., Fachgebiet Geotechnik, Universität Duisburg-Essen, Essen
- Engelhardt, A. (2020): Crashkurs-Statistik, E-Book, www.crashkurs-statistik.de
- Feller, C. (2019): Fließregeln für lineare und nichtlineare Stoffgesetze, Masterprojekt, unveröffentlicht, Hrsg.: Perau, E., Betr.: Kosmann, B., Fachgebiet Geotechnik, Universität Duisburg-Essen, Essen
- Fjar, E., Holt, R.M., Raaen, A.M., Risnes, R., Horsrud, P. (2008): Petroleum Related Rock Mechanics; Band 53 von Developments in Petroleum Science; Ausgabe 2; Elsevier 2008
- Gudehus, G. (1981): Bodenmechanik, 1981 Ferdinand Enke Verlag, Stuttgart
- Gudehus, G. (1995): Stoffgesetze in: Grundbautaschenbuch Teil 1, 5 Auflage; Hrsg.: Ulrich Smolczyk; Ernst und Sohn Verlag 1995
- Gudehus, G. (1995a): Erddruckermittlung in: Grundbautaschenbuch Teil 1, 5 Auflage; Hrsg.: Ulrich Smolczyk; Ernst und Sohn Verlag 1995
- Gunasekera, R. C., Foulger, G., Julian, G.R. (2003): Reservoir depletion at The Geysers geothermal area, California, shown by four-dimensional seismic tomography, Journal of geophysical research, Vol. 108, No. B3, 2134
- Hoek, E., (2007): Rock Engineering: Rock Science. (Available from the publisher at <http://www.roscience.com/hoek/PracticalRockEngineering.asp>)
- Hughes, T. J. R. (1983): Numerical Implementation of Constitutive Models: Rate-Independent Deviatoric Plasticity In: Theoretical foundation for large-scale computations of nonlinear material behaviour, Hrsg.: Memat-Nasser, S., Asaro, R.J., Hegemier, G.A., Martinus Nijhoff Publishers Dordrecht Boston Lancaster
- Kilian, R. (2013): Klimastabilität historischer Gebäude, Bewertung hygrothermischer Simulationen im Kontext der Präventiven Konservierung, Forschungsergebnisse aus der Bauphysik, Band 15, Fraunhofer-Institut für Bauphysik IBP. 2013

- Kobus, H. (1974): Anwendung der Dimensionsanalyse in der experimentellen Forschung des Bauingenieurwesens, Die Bautechnik 51, Heft 3
- Köhler, J., Höwermann, R., Krämer, H (1975): Analytische Geometrie und Abbildungsgeometrie in Vektorieller Darstellung, 6 Auflage, Verlag Moritz Diesterweg
- Kolymbas, D. (1978): Ein nichtlineares viskoplastisches Stoffgesetz für Böden, Veröffentlichungen des Institutes für Bodenmechanik und Felsmechanik der Universität Fridericiana in Karlsruhe, Heft 77 Hrsg.: A., Blinde, G., Gudehus, O., Natau
- Kolymbas, D. (1998): Geotechnik-Tunnelbau und Tunnelmechanik, Eine systematische Einführung mit besonderer Berücksichtigung mechanischer Probleme, Springer Verlag, S. 183
- Kolymbas, D., Herle, I. (2017): Stoffgesetze für Böden in: Grundbautaschenbuch Teil 1: Geotechnische Grundlagen, 8 Auflage, Hrsg: Witt, K. J., Ernst & Sohn Verlag, Berlin 2017
- Kreuter, H., Mutschler, T., Schoenball, M., Tembe, S., Rübel, S., Osan, C., Balthasar, K., Wenke, A., Sperber, A. (2010): Reduzierung der geologisch bedingten bohrtechnischen Risiken, Bohrlochstabilität in tertiären Tonsteinsfolgen im Oberrheingraben als Hindernis für die Erschließung geothermischer Reservoirs, Hrsg: Triantafyllidis, T., Institut für Bodenmechanik und Felsmechanik, Karlsruher Institut für Technologie. http://www.geo-t.de/downloads/endbericht_bohrlochstabilitaet_fv0327599_web.pdf (Aufgerufen am 28.06.2013)
- Laugwitz, D. (1967): Ingenieurmathematik. Band 4. Bibliographisches Institut Mannheim, Wien, Zürich. B.I.-Wissenschaftsverlag
- Lempp, C., Witthaus, M., Röckel, T., Hecht, C., Herold, M., (2010): Geomechanisches Verhalten diagenetischer unterschiedlich stark verfestigter pelitischer Gesteine in tiefen Geothermiebohrungen In: Bundesministerium für Umwelt, Naturschutz und Reaktorsicherheit Hrsg.: Bohrlochstabilität als Schlüsselfaktor bei der Nutzung von tiefen geothermischen Ressourcen
- Lesny, K., Perau, E. (2015): Bodenmechanisches Praktikum, Auswahl und Anwendung von bodenmechanischen Laborversuchen, 13. Auflage, Shaker Verlag
- Lyons, W., Carter, T., Lapeyrouse, N. (2012): Formulas and Calculations for Drilling Production, and Workover, All the Formulas you need to solve drilling and production problems, 3 Auflage, Elsevier Inc. 2012
- Ma, X., Rudnicki, J. W., Hamison, B. C. (2017): The application of a Matsuoka-Nakai-Lade-Duncan limit condition to two porous sandstones in: International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences 92
- Macherey, D. (2019): Parametergewinnung aus echten triaxialen Versuchen, Bachelorthesis, unveröffentlicht, Hrsg.: Perau, E., Betr.: Kosmann, B., Fachgebiet Geotechnik, Universität Duisburg-Essen, Essen

- Medicus, G. (2019): Normierung von Versuchsergebnissen kohäsionsbehaftetem Materials in einer Deviatorebene. Persönliche Korrespondenz, unveröffentlicht
- Moeck, I., Schandelmeier, H., Holl, H.G. (2009): The stress regime in Rotliegend Reservoir of the Northeast German Basin. *Int. J. Earth. Sciences*, 98/7, 1643-1654
- Mogi, K. (1971): Effect of the triaxial stress system on the failure of dolomite and limestone
In: *Tectonophysics* 11
- Mogi, K. (2007): *Experimental Rock Mechanics*. London: Routledge Taylor & Francis Group.
- Moos, D. & Zoback, M. (1990): Utilization of observations of well bore failure to constrain the orientation and magnitude of crustal stresses: Application to Continental, Deep Sea Drilling Project, and Ocean Drilling Program Boreholes. *Journal of Geophysical Research*, 95/B6, 9305-9325.
- Perau, E. (1995): Ein systematischer Ansatz zur Berechnung des Grundbruchwiderstands von Fundamenten, Dissertationsschrift, Mitteilungen aus dem Fachgebiet Grundbau und Bodenmechanik, Hrsg.: W. Richwien, Universität-Gesamthochschule Essen, Essen 1995
- Pimentel, E. (2017): Stoffgesetze und Bemessungsansätze für Festgestein in: *Grundbauaschenbuch Teil 1: Geotechnische Grundlagen*, 8 Auflage, Hrsg: Witt, K. J., Ernst & Sohn Verlag, Berlin 2017
- Plaxis B.V. (2014): *PLAXIS Material Models Manual 2014, User defined soil models*, URL: <https://plaxis.com/support/manuals/material-models-manual> (Aufgerufen am 23.03.2015);
inzwischen erreichbar über: Bentley (2020): *Explanation of UDSM – 2014 Version*, URL: <https://communities.bentley.com/products/geotech-analysis/w/wiki/45468/creating-user-defined-soil-models> (Aufgerufen am 11.07.2023)
- Plaxis B.V. (2016): *udsm_examples_2016*, URL: https://www.plaxis.com/content/uploads/2017/03/udsm_examples_2016.zip (Aufgerufen am 27.03.2018);
inzwischen erreichbar über: Bentley (2019): *udsm_examples_2016*, URL: <https://communities.bentley.com/products/geotech-analysis/w/wiki/45468/creating-user-defined-soil-models> (Aufgerufen am 11.07.2023)
- Reich, M. (2011): Auf krummen Touren durch den Untergrund, *Grundlagen der Richtbohrtechnik; Erdöl Erdgas Kohle* 127. Jg. 2011, Heft 1
- Reich, M. (2015): *Auf Jagd im Untergrund, mit Hightech auf der Suche nach Öl, Gas und Erdwärme*; 2 Auflage; Institut für Bohrtechnik und Fluidbergbau, TU-Bergakademie Freiberg; Springer Spektrum, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2015
- Sekulla, M. (2017): Validierung von Berechnungsmodellen zur Untersuchung der Bohrlochstabilität von tiefen Geothermiebohrungen, Masterthesis, unveröffentlicht,
Hrsg.: Perau, E., Betr.: Kosmann, B., Fachgebiet Geotechnik, Universität Duisburg-Essen, Essen

- Sheng, Y., Reddish, D., Lu, Z. (2006): Assessment of Uncertainty of Wellbore Stability Analysis, In: Modern Trends in Geomechanics, Hrsg.: Wu, W., Yu, H.S. Springer proceedings in Physics, Springerverlag
- Stahlmann, J., Schmitt, J., Oberdorf, M. (2006): Einfluss des Stoffgesetzes zur numerischen Modellierung des Untergrundes auf die Setzungen bei oberflächennahen maschinell aufgefahrenen Tunnelbauwerken, Workshop Tunnel und untertägiger Hohlraumbau, Deutsche Gesellschaft für Geotechnik, Arbeitskreis 1.6 Numerik in der Geotechnik, 20.-21. Juni 2006, Weimar, 2006
- Stober, I., Fritzer, T., Obst, K., Schulz, R. (2011): Tiefe Geothermie, Nutzungsmöglichkeiten für Deutschland, Hrsg: Bundesministerium für Umwelt, Naturschutz und Reaktorsicherheit (BMU), Referat KI III 5
- Stober, I., Bucher, K. (2012): Geothermie, Institut für Geowissenschaften, Universität Freiburg, Springer Geologie, Springer Verlag Berlin-Heidelberg 2012
- Trapp, M., Öchsner, A. (2018): Computational Plasticity for Finite Elements, A Fortran-Based Introduction, Springer briefs in applied sciences and technology, Computational Mechanics, Springerverlag
- Wittke, W. (1984): Felsmechanik, Grundlagen für wirtschaftliches Bauen im Fels, Springer Verlag Berlin

Anhang A Versuche von Mogi und Simulationsergebnisse

A.1. Bestimmung des Bohrungsverlaufs

Eine Bohrung wird entlang ihres Verlaufs in unterschiedliche Bohrabschnitte eingeteilt. Bohrabschnitte, aus denen eine geothermische Bohrung zusammengesetzt ist, sollen im Folgenden vorgestellt werden:

Der erste Bohrabschnitt verläuft in der Regel senkrecht nach unten und wird als Vertical Section bezeichnet. Wird eine Bohrung von vertikaler Richtung in eine horizontale Richtung überführt, spricht man von einer Aufbausektion. Der Beginn einer Aufbausektion, also der Punkt, ab dem der Bohrfad die vertikale Richtung verlässt, wird als Kick-Off Point (KOP) und das Ende der Aufbausektion mit End-of-Build (EOB) bezeichnet. Den Verlauf des Bohrfades im dreidimensionalen Raum beschreibt man über die sogenannte Dogleg Severity (DLS), die in Grad/30 m angegeben wird. Die gemessene Teufe entlang des Bohrfades wird als Measured-Depth (MD) und die vertikale Teufe des Bohrlochs als True-Vertical-Depth (TVD) bezeichnet. Die genannten Begriffe sind in Abbildung A.1 an eine geneigte Bohrung angetragen (Reich, 2011).

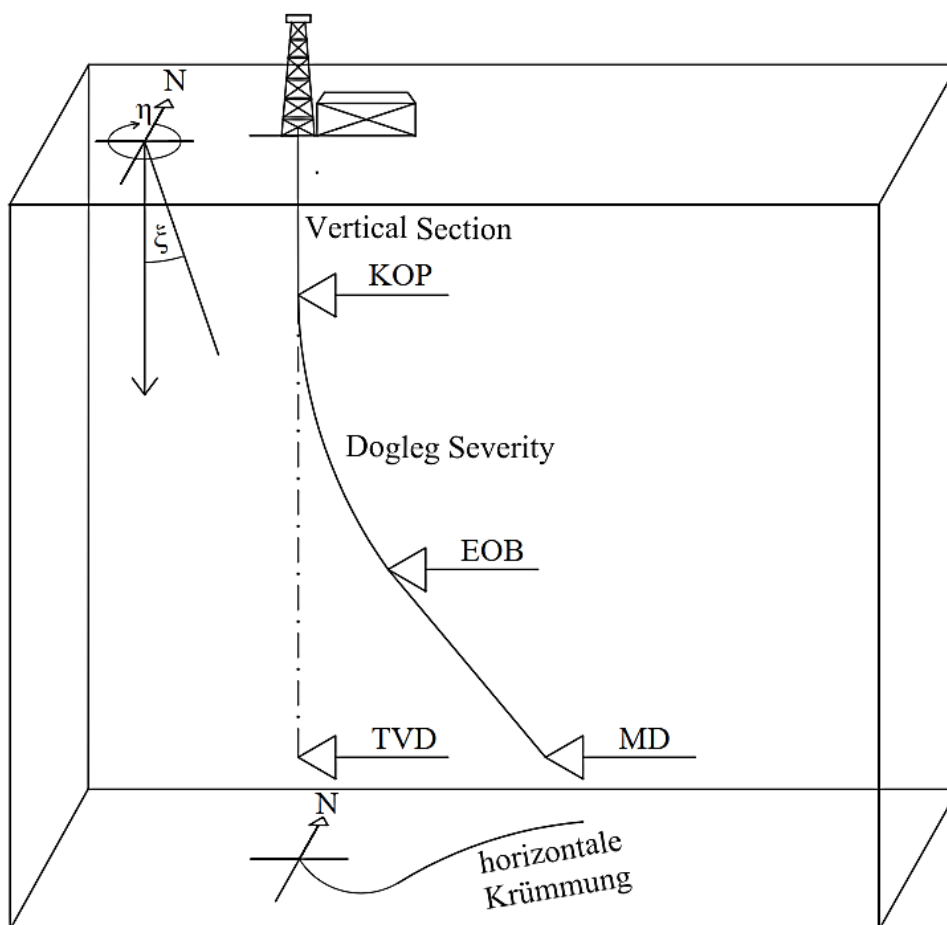


Abbildung A.1: Verlauf einer geneigten Bohrung nach Lion (2012)

Um den Verlauf der Bohrung zu bestimmen, wird immer, wenn ein weiterer Zug des Bohrgestänges aufgeschraubt wird, ein sogenannter Survey erstellt. Ein Survey beinhaltet alle an einem Bohrpunkt aufgezeichneten Messergebnisse. Dabei werden mindestens die Inklination ξ_i und der Azimut η_j der Bohrung gemessen. Der Azimut in Nordrichtung entspricht 0° oder 360° und nimmt im Uhrzeigersinn zu. Die Inklination entspricht in vertikaler Richtung 0° und in horizontaler Richtung 90° . Die gemessene Teufe (MD) entspricht der Länge des Bohrpfad und kann über die Länge des zugefügten Bohrgestänges bestimmt werden. (Reich, 2011).

Die Position des Bohrers kann in Kartesischen Koordinaten über die Nord- und die Ostrichtung sowie über die gemessene Teufe bestimmt werden. Die Süd- und die Westrichtung entsprechen dabei negativen Zahlenwerten. Die Position kann wie folgt zwischen zwei benachbarten Surveys berechnet werden. So kann schrittweise vom Ansatzpunkt der Bohrung bis zum aktuellen Bohrfortschritt die Position in kartesischen Koordinaten bestimmt werden (Lions u.a., 2012).

$$Nord = MD \cdot \sin\left(\frac{\xi_i + \xi_{i+1}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\eta_j + \eta_{j+1}}{2}\right) \quad (\text{A.1})$$

$$Ost = MD \cdot \sin\left(\frac{\xi_i + \xi_{i+1}}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\eta_j + \eta_{j+1}}{2}\right) \quad (\text{A.2})$$

$$Vertikal = MD \cdot \cos\left(\frac{\xi_i + \xi_{i+1}}{2}\right) \quad (\text{A.3})$$

Sind diese drei Werte zwischen zwei benachbarten Surveys bestimmt, kann man den zurückgelegten Bohrfortschritt nach Gl.(A.4) als Vektor \mathbf{x} darstellen (Lions u.a., 2012):

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} Nord \\ Ost \\ Vertikal \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Die Summe aller Bohrabschnitte \mathbf{x} vom Ansatzpunkt der Bohrung bis zu einem beliebigen Survey oder der Endteufe bildet die zugehörigen räumlichen Koordinaten des betrachteten Bohrpunkts.

A.2. Spannungen um ein Bohrloch

Der in situ Spannungszustand $(\sigma_v, \sigma_H, \sigma_h)$ kann mittels Koordinatentransformation auf ein lokales Koordinatensystem $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$, bei dem σ_z in die geplante Bohrrichtung orientiert ist, umgerechnet werden. Das Vorgehen für die Bestimmung der dafür benötigten Drehmatrix ist

in Gl. (A.5) zusammengefasst, wobei c_n für das jeweilige Koordinatensystem steht (Aadnoy & Looyeh, 2010):

$$c_n \rightarrow \boxed{\eta}_{\sigma_v} \rightarrow c_{n+1} \rightarrow \boxed{\xi}_{\sigma_h} \rightarrow c_{n+2} \quad (\text{A.5})$$

Das Produkt zur Bestimmung der Drehmatrix in ausgeschriebener Form ist in Gl.(A.6) ersichtlich (Aadnoy & Looyeh, 2010):

$$\begin{bmatrix} \cos \eta & -\sin \eta & 0 \\ \sin \eta & \cos \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \xi & 0 & \sin \xi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \xi & 0 & \cos \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \eta \cdot \cos \xi & \sin \eta \cdot \cos \xi & -\sin \xi \\ -\sin \eta & \cos \eta & 0 \\ \cos \eta \cdot \sin \xi & \sin \eta \cdot \sin \xi & \cos \xi \end{bmatrix} = R \quad (\text{A.6})$$

Mit der Drehmatrix R nach Gl. (A.6) können die Koordinaten des in situ Spannungszustandes auf den lokalen Spannungszustand am Bohrloch transformiert werden. Dies erfolgt durch Multiplikation des in situ Spannungstensors mit der transponierten Drehmatrix R^T und anschließender Multiplikation mit der Drehmatrix R , wie in Gl. (A.7) dargelegt. Darin ist der in situ Spannungszustand durch den Tensor T_{SZ} und die Spannungen in Richtung des Bohrlochs mit dem Tensor T_{Bohr} ausgedrückt (Laugwitz, 1967).

$$T_{Bohr} = R^T : T_{SZ} : R \quad (\text{A.7})$$

Die vollständige Transformationsgleichung für die Betrachtung des lokalen Koordinatensystems ist in Gl. (A.8) dargelegt:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \eta \cos^2 \xi & \sin^2 \eta \cdot \cos^2 \xi & \sin^2 \xi & 0 & 0 & 0 \\ \sin^2 \eta & \cos^2 \eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos^2 \eta \sin^2 \xi & \sin^2 \eta \cdot \sin^2 \xi & \cos^2 \xi & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} \sin 2\eta \cos \xi & \frac{1}{2} \sin 2\eta \cos \xi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \cos^2 \eta \sin 2\xi & \frac{1}{2} \sin^2 \eta \sin 2\xi & -\frac{1}{2} \sin 2\xi & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} \sin 2\eta \sin \xi & \frac{1}{2} \sin 2\eta \sin \xi & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_H \\ \sigma_h \\ \sigma_v \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Für die Transformation des lokalen Spannungszustands $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ in Zylinderkoordinaten wird eine Drehmatrix nach Gl.(A.9) gebildet, welche in Gl.(A.10) dargelegt ist.

$$c_{n,kart.} \rightarrow \boxed{\omega}_{\sigma_z} \rightarrow c_{n+1,zyl.} \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R_{Zyl.} \quad (\text{A.10})$$

Durch die Transformation des lokalen Spannungszustands am Bohrloch mit der Drehmatrix $R_{Zyl.}$ nach Gl.(A.10) kann dieser in Zylinderkoordinaten um die geplante Bohrlochachse ausgedrückt werden.

$$\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\omega \\ \sigma_z \\ \tau_{r\omega} \\ \tau_{rz} \\ \tau_{\omega z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \omega & \sin^2 \omega & 0 & -\sin 2\omega & 0 & 0 \\ \sin^2 \omega & \cos^2 \omega & 0 & \sin 2\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \sin 2\omega & -\frac{1}{2} \sin 2\omega & 0 & \cos 2\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \omega & -\sin \omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

Die Schubspannungen aus der Spannungsumlagerung durch die Herstellung der Bohrung können nach Aadnoy & Looyeh (2010) anhand von Gl. (A.12) für elastisches Materialverhalten unter Annahme eines ebenen Verformungszustands berechnet werden:

$$\begin{aligned} \tau_{r\omega} &= \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \left(1 - 3\frac{a^4}{r^4} + 2\frac{a^2}{r^2}\right) \sin 2\omega + \tau_{xy} \left(1 - 3\frac{a^4}{r^4} + 2\frac{a^2}{r^2}\right) \cos 2\omega \\ \tau_{rz} &= \tau_{xy} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \cos \omega + \tau_{xz} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \sin \omega \\ \tau_{\omega z} &= -\tau_{xy} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \sin \omega + \tau_{xz} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \cos \omega \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

A.3. Versuchsergebnisse aus echten triaxialen Versuchen

Im Folgenden sind die Versuchsergebnisse aus echten Triaxialversuchen nach Mogi (2007) und Ma u.a. (2017) tabellarisch aufgeführt. Die nachstehenden Tabellen enthalten die berechneten Ergebniswerte für die normierten Darstellungen der Versuchsergebnisse.

Tabelle A.1: Ergebnisse echter triaxialer Versuche für Dunham Dolomit, Solnhofener Kalkstein und Inada-Granit nach Mogi (2007) und Coconino Sandstein nach Ma u.a. (2017)

Dolomit			Kalkstein			Granit			Sandstein		
σ_1	σ_2	σ_3	σ_1	σ_2	σ_3	σ_1	σ_2	σ_3	σ_1	σ_2	σ_3
MPa			MPa			MPa			MPa		
400	25	25	397	20	20	508	20	20	56	0	0
475	66	25	417	51	20	556	44	20	87	15	0
495	96	25	413	92	20	611	46	20	80	27	0
560	129	25	453	165	20	643	74	20	94	47	0
571	174	25	460	206	20	624	101	20	77	77	0
586	229	25	465	233	20	607	127	20	162	10	10
545	272	25	449	40	40	692	40	40	194	41	10
487	45	45	446	40	40	722	63	40	194	72	10
570	97	45	486	80	40	743	88	40	191	101	10
576	126	45	499	113	40	802	120	40	171	171	10
606	160	45	530	193	40	760	142	40	235	20	20
639	183	45	547	274	40	791	147	40	269	62	20
670	240	45	535	315	40	834	174	40	249	98	20
670	266	45	473	60	60	841	70	70	243	133	20
622	294	45	517	87	60	879	70	70	226	226	20
540	60	60	537	102	60	1003	100	100	347	50	50
568	65	65	530	113	60	1023	100	100	364	103	50
638	117	65	576	164	60	1046	138	100	375	160	50
644	153	65	550	197	60	1037	148	100	368	212	50
687	208	65	553	275	60	1083	199	100	341	341	50
685	262	65	557	345	60	1141	239	100	428	80	80
746	318	65	528	80	80	1125	291	100	464	145	80
701	393	65	572	126	80	1131	336	100	456	207	80
620	85	85	577	150	80	1138	150	150	472	280	80
684	128	85	647	208	80	1198	150	150	430	430	80
719	153	85	591	225	80	1223	164	150	465	100	100
744	233	85	677	283	80	1279	195	150	508	169	100
773	306	85	665	298	80	1316	215	150	504	237	100
818	376	85	650	378	80	1332	273	150	541	324	100
798	445	85	680	454	80	1342	309	150	494	494	100

Tabelle A.2: Ergebniswerte \tilde{l} , \tilde{r} und $\tilde{r}_{ang.}$ für die Versuchsergebnisse an Coconino Sandstein nach Ma u.a. (2017)

σ_1	σ_2	σ_3	\tilde{l}	\tilde{r}	Θ	$\tilde{r}_{ang.}$
MPa			MPa		°	MPa
56	0	0	32	46	-30	69
162	10	10	105	124	-30	186
235	20	20	159	176	-30	264
347	50	50	258	243	-30	364
428	80	80	339	284	-30	426
465	100	100	384	298	-30	447
506	120	120	431	315	-30	473
565	150	150	500	339	-30	509
87	15	0	59	66	-21	90
194	41	10	142	140	-21	189
269	62	20	203	189	-21	256
364	103	50	298	237	-21	322
464	145	80	398	290	-21	394
508	169	100	449	308	-21	419
540	192	120	492	317	-21	431
620	230	150	577	355	-21	483
80	27	0	62	58	-11	69
194	72	10	160	133	-11	157
249	98	20	212	165	-11	196
375	160	50	338	234	-11	277
456	207	80	429	270	-10	319
504	237	100	485	290	-10	343
541	263	120	533	303	-10	358
601	303	150	609	325	-10	383

Fortsetzung von *Tabelle A.2*

σ_1	σ_2	σ_3	\tilde{l}	\tilde{r}	Θ	$\tilde{r}_{ang.}$
MPa			MPa		°	MPa
94	47	0	81	67	0	67
191	101	10	174	128	0	127
243	133	20	229	158	0	157
368	212	50	364	225	0	223
472	280	80	480	277	0	275
557	341	120	588	309	0	307
648	403	150	694	352	0	349
77	77	0	89	63	30	31
171	171	10	203	131	30	66
226	226	20	272	168	30	84
341	341	50	423	238	30	119
430	430	80	543	286	30	143
494	494	100	628	321	30	161
528	528	120	679	333	30	166
621	621	150	803	384	30	192

Tabelle A.3: Ergebniswerte \tilde{l} , \tilde{r} und $\tilde{r}_{ang.}$ für die Versuchsergebnisse an Solnhofener Kalkstein nach Mogi (2007)

σ_1	σ_2	σ_3	\tilde{l}	\tilde{r}	Θ	$\tilde{r}_{ang.}$
MPa			MPa		°	MPa
397	20	20	252	308	-30	462
446	40	40	304	331	-30	497
473	60	60	342	337	-30	506
528	80	80	397	366	-30	549
417	51	20	282	312	-26	450
486	80	40	350	349	-25	498
517	87	60	383	363	-27	529
572	126	80	449	384	-25	549
413	92	20	303	296	-20	398
499	113	40	376	349	-21	476
530	113	60	406	364	-24	512
577	150	80	466	380	-22	525
453	165	20	368	312	-11	371
530	193	40	441	355	-12	430
550	197	60	466	358	-14	446
677	283	80	600	429	-10	507
460	206	20	396	312	-5	340
547	274	40	497	359	-2	374
553	275	60	513	350	-4	375
665	298	80	602	418	-8	478

Tabelle A.4: Ergebniswerte d_{1MC} und d_{2MC} für die Versuchsergebnisse an Dunham-Dolomit nach Mogi (2007) für ($\varphi = 36.6^\circ$; $c = 99.3 \text{ MPa}$)

σ_1	σ_2	σ_3	\bar{d}_{1MC}	\bar{d}_{2MC}
MPa			MPa	
400	25	25	0.50	0.94
475	66	25	0.58	0.90
495	96	25	0.67	0.83
560	129	25	0.71	0.82
571	174	25	0.73	0.72
586	229	25	0.75	0.61
545	272	25	0.74	0.47
487	45	45	0.55	0.96
570	97	45	0.64	0.90
576	126	45	0.67	0.83
606	160	45	0.68	0.78
639	183	45	0.71	0.76
670	240	45	0.74	0.67
670	266	45	0.74	0.62
622	294	45	0.73	0.51
540	60	60	0.55	0.96
568	65	65	0.56	0.97
638	117	65	0.64	0.91
644	153	65	0.66	0.82
687	208	65	0.69	0.75
685	262	65	0.71	0.64
746	318	65	0.74	0.59
701	393	65	0.75	0.42
620	85	85	0.55	0.95
684	128	85	0.61	0.91
719	153	85	0.65	0.88
744	233	85	0.68	0.74
773	306	85	0.71	0.63
818	376	85	0.75	0.56
798	445	85	0.76	0.43

Fortsetzung von *Tabelle A.4:*

σ_1	σ_2	σ_3	\tilde{d}_{1MC}	\tilde{d}_{2MC}
MPa			MPa	
682	105	105	0.55	0.95
778	167	105	0.62	0.89
786	205	105	0.65	0.82
805	268	105	0.67	0.72
863	270	105	0.69	0.77
824	334	105	0.70	0.62
840	356	105	0.70	0.60
822	415	105	0.72	0.50
725	125	125	0.54	0.93
824	187	125	0.61	0.88
860	239	125	0.66	0.81
863	293	125	0.67	0.72
897	362	125	0.69	0.64
941	414	125	0.72	0.59
918	463	125	0.73	0.51
886	516	125	0.73	0.41
845	145	145	0.56	0.97
883	253	145	0.62	0.79
927	296	145	0.66	0.76
923	324	145	0.66	0.71
922	349	145	0.67	0.67
1015	392	145	0.70	0.68
1002	410	145	0.71	0.64
952	455	145	0.70	0.54

Tabelle A.5: Ergebniswerte d_{1MMGC} und d_{2MMGC} für die Versuchsergebnisse an Dunham-Dolomit nach Mogi (2007) für ($\alpha = 0$; $\varphi = 29.5^\circ$; $c = 108.4$ MPa)

σ_1	σ_2	σ_3	\bar{d}_{1MMGC}	\bar{d}_{2MMGC}
MPa			MPa	
400	25	25	0.45	0.78
475	66	25	0.53	0.76
495	96	25	0.56	0.71
560	129	25	0.61	0.71
571	174	25	0.63	0.63
586	229	25	0.66	0.54
545	272	25	0.66	0.41
487	45	45	0.47	0.82
570	97	45	0.55	0.78
576	126	45	0.57	0.72
606	160	45	0.60	0.68
639	183	45	0.62	0.67
670	240	45	0.66	0.60
670	266	45	0.67	0.55
622	294	45	0.66	0.45
540	60	60	0.48	0.83
568	65	65	0.48	0.84
638	117	65	0.55	0.79
644	153	65	0.57	0.73
687	208	65	0.61	0.66
685	262	65	0.63	0.57
746	318	65	0.67	0.53
701	393	65	0.68	0.38
620	85	85	0.48	0.83
684	128	85	0.54	0.80
719	153	85	0.56	0.79
744	233	85	0.60	0.66
773	306	85	0.64	0.57
818	376	85	0.68	0.51
798	445	85	0.69	0.39

Fortsetzung von *Tabelle A.5:*

σ_1	σ_2	σ_3	\tilde{d}_{1MMGC}	\tilde{d}_{2MMGC}
MPa			MPa	
682	105	105	0.48	0.84
778	167	105	0.55	0.80
786	205	105	0.57	0.74
805	268	105	0.60	0.65
863	270	105	0.62	0.69
824	334	105	0.63	0.57
840	356	105	0.64	0.55
822	415	105	0.66	0.45
725	125	125	0.47	0.82
824	187	125	0.55	0.79
860	239	125	0.58	0.73
863	293	125	0.60	0.65
897	362	125	0.63	0.58
941	414	125	0.66	0.54
918	463	125	0.67	0.46
886	516	125	0.67	0.37
845	145	145	0.50	0.87
883	253	145	0.56	0.72
927	296	145	0.59	0.69
923	324	145	0.60	0.65
922	349	145	0.60	0.61
1015	392	145	0.64	0.62
1002	410	145	0.65	0.59
952	455	145	0.64	0.50

Tabelle A.6: Ergebniswerte d_{1MMGC} und d_{2MMGC} für die Versuchsergebnisse an Dunham-Dolomit nach Mogi (2007) für ($\alpha = -0,15$; $\varphi = 32,3^\circ$; $c = 102,8$ MPa)

σ_1	σ_2	σ_3	\bar{d}_{1MMGC}	\bar{d}_{2MMGC}
MPa			MPa	
400	25	25	0.47	0.81
475	66	25	0.55	0.79
495	96	25	0.58	0.74
560	129	25	0.63	0.74
571	174	25	0.66	0.65
586	229	25	0.68	0.55
545	272	25	0.69	0.42
487	45	45	0.49	0.85
570	97	45	0.57	0.81
576	126	45	0.59	0.75
606	160	45	0.62	0.71
639	183	45	0.64	0.69
670	240	45	0.68	0.61
670	266	45	0.69	0.57
622	294	45	0.68	0.47
540	60	60	0.49	0.86
568	65	65	0.50	0.87
638	117	65	0.57	0.82
644	153	65	0.59	0.75
687	208	65	0.63	0.68
685	262	65	0.65	0.58
746	318	65	0.69	0.55
701	393	65	0.70	0.39
620	85	85	0.50	0.86
684	128	85	0.55	0.83
719	153	85	0.58	0.81
744	233	85	0.62	0.68
773	306	85	0.66	0.59
818	376	85	0.69	0.52
798	445	85	0.71	0.40

Fortsetzung von *Tabelle A.6:*

σ_1	σ_2	σ_3	\tilde{d}_{1MMGC}	\tilde{d}_{2MMGC}
MPa			MPa	
682	105	105	0.50	0.86
778	167	105	0.57	0.82
786	205	105	0.59	0.76
805	268	105	0.62	0.67
863	270	105	0.64	0.71
824	334	105	0.65	0.58
840	356	105	0.66	0.56
822	415	105	0.67	0.46
725	125	125	0.49	0.85
824	187	125	0.56	0.81
860	239	125	0.59	0.75
863	293	125	0.61	0.67
897	362	125	0.65	0.59
941	414	125	0.67	0.56
918	463	125	0.68	0.47
886	516	125	0.69	0.38
845	145	145	0.52	0.89
883	253	145	0.57	0.74
927	296	145	0.60	0.71
923	324	145	0.61	0.66
922	349	145	0.62	0.63
1015	392	145	0.66	0.64
1002	410	145	0.66	0.60
952	455	145	0.66	0.51

A.4. Ergebnistabellen der Simulationsergebnisse

Tabelle A.7: Parameterkombinationen von φ und c unter Ansatz des Spannungszustands R im Grenzzustand, unter Verwendung der MMGC, für eine Bohrung mit 0,2 m Durchmesser

etV.		$\sigma_n = 0$ Mpa		$\sigma_n = 10$ Mpa		$\sigma_n = 5$ Mpa		$\sigma_n = 2$ Mpa	
φ	c	φ	c	φ	c	φ	c	φ	c
33.0	0.0	56.0	0.0	36.0	0.0	42.0	0.0	47.0	0.0
25.5	5.0	48.0	2.5	28.0	5.0	32.0	5.0	36.0	5.0
17.0	10.0	42.0	5.0	22.5	7.5	26.5	7.5	25.0	10.0
8.0	15.0	35.0	7.5	17.0	10.0	21.0	10.0	14.0	15.0
0.0	20.0	29.0	10.0	12.5	12.5	10.0	15.0	4.0	20.0
		24.0	12.5	8.0	15.0	0.0	21.0	0.0	22.0
		18.0	15.0	0.0	20.0				
		8.0	20.0						
		0.0	24.0						

Tabelle A.8: Parameterkombinationen von φ und c unter Ansatz des Spannungszustands R im Grenzzustand, unter Verwendung der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb, für eine Bohrung mit 0,2 m Durchmesser

etV.		$\sigma_n = 0$ Mpa		$\sigma_n = 10$ Mpa		$\sigma_n = 5$ Mpa		$\sigma_n = 2$ Mpa	
φ	c	φ	c	φ	c	φ	c	φ	c
40.7	0.0	79.0	0.0	44.0	0.0	48.0	0.0	59.0	0.0
32.0	5.0	70.0	0.1	33.0	5.0	38.0	5.0	45.0	5.0
23.0	10.0	66.0	1.0	28.0	7.5	32.8	7.5	33.0	10.0
13.0	15.0	61.0	2.5	23.0	10.0	29.7	8.8	21.0	15.0
5.0	20.0	54.0	5.0	23.0	10.0	26.0	10.0	10.0	20.0
0.0	22.8	47.0	7.5	18.0	12.5	21.0	12.5	0.0	25.0
		40.0	10.0	14.0	15.0	16.0	15.0		
		32.0	12.5	5.0	20.0	7.0	20.0		
		25.0	15.0	0.0	23.0	0.0	24.0		
		14.0	20.0						
		4.0	25.0						
		0.0	27.0						

Tabelle A.9: Parameterkombinationen von φ und c unter Ansatz der Spannungszustände K, E & R im Grenzzustand, unter Verwendung der MMGC, für eine Bohrung mit 0,2 m Durchmesser

etV. K		etV. E		etV. R	
φ	c	φ	c	φ	c
25.0	0.0	36.0	0.0	33.0	0.0
18.0	5.0	25.0	5.0	25.5	5.0
10.0	10.0	15.0	10.0	17.0	10.0
3.0	15.0	4.0	15.0	8.0	15.0
0.0	16.8	0.0	17.0	0.0	20.0

Tabelle A.10: Parameterkombinationen von φ und c unter Ansatz der Spannungszustände K, E & R im Grenzzustand, unter Verwendung der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb, für eine Bohrung mit 0,2 m Durchmesser

etV. K		etV. E		etV. R	
φ	c	φ	c	φ	c
25.0	0.0	36.0	0.0	40.7	0.0
18.0	5.0	25.0	5.0	32.0	5.0
10.0	10.0	15.0	10.0	23.0	10.0
3.0	15.0	4.0	15.0	13.0	15.0
0.0	16.8	0.0	17.0	5.0	20.0
				0.0	22.8

Tabelle A.11: Parameterkombinationen von φ und c unter Ansatz des Spannungszustands R im Grenzzustand, unter Verwendung der MMGC, für eine Bohrung mit 1 m Durchmesser

etV.		$\sigma_n = 0$ Mpa		$\sigma_n = 10$ Mpa		$\sigma_n = 5$ Mpa		$\sigma_n = 2$ Mpa	
φ	c	φ	c	φ	c	φ	c	φ	c
34.0	0.0	55.0	0.0	36.0	0.0	42.0	0.0	47.0	0.0
25.5	5.0	41.0	5.0	27.0	5.0	33.0	5.0	37.0	5.0
17.0	10.0	28.0	10.0	17.0	10.0	20.0	10.0	25.0	10.0
8.0	15.0	18.0	15.0	8.0	15.0	12.0	15.0	15.0	15.0
0.0	20.0	8.0	20.0	0.0	20.0	1.0	20.0	5.0	20.0
		0.0	24.0			0.0	20.5	0.0	22.0

Tabelle A.12: Parameterkombinationen von φ und c unter Ansatz des Spannungszustands R im Grenzzustand, unter Verwendung der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb, für eine Bohrung mit 1 m Durchmesser

etV.		$\sigma_n = 0$ Mpa		$\sigma_n = 10$ Mpa		$\sigma_n = 5$ Mpa		$\sigma_n = 2$ Mpa	
φ	c	φ	c	φ	c	φ	c	φ	c
41.0	0.0	80.0	0.0	42.0	0.0	50.0	0.0	58.0	0.0
32.0	5.0	70.0	0.1	33.0	5.0	38.0	5.0	46.0	5.0
23.0	10.0	54.0	5.0	23.0	10.0	27.0	10.0	33.0	10.0
13.0	15.0	38.0	10.0	14.0	15.0	17.0	15.0	21.0	15.0
5.0	20.0	25.0	15.0	5.0	20.0	6.0	20.0	10.0	20.0
0.0	23.0	14.0	20.0	0.0	23.0	0.0	24.0	1.0	25.0
		3.0	25.0					0.0	25.5
		0.0	27.0						

Tabelle A.13: Parameterkombinationen von φ und c mit 10-fach größeren Spannungen für eine Bohrung mit 1 m Durchmesser, unter Verwendung der MMGC

$\sigma_n = 50$ Mpa		$\sigma_n = 5$ Mpa	
φ	c	φ	c
33.0	50.0	33.0	5.0
21.0	100.0	20.0	10.0
11.3	150.0	12.0	15.0
1.0	200.0	1.0	20.0

Tabelle A.14: Parameterkombinationen von φ und c mit 10 Fach größeren Spannungen für eine Bohrung mit 1 m Durchmesser, unter Verwendung der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb

$\sigma_n = 50$ Mpa		$\sigma_n = 5$ Mpa	
φ	c	φ	c
39.2	50.0	38.0	5.0
28.0	100.0	27.0	10.0
17.0	150.0	17.0	15.0
7.0	200.0	6.0	20.0

Anhang B Programmcodes

Die folgenden Programmcodes basieren auf den von Plaxis B.V. (2016) und ab 2019 von Bentley (2019) frei zum Download zur Verfügung gestellten exemplarischen Programmcodes `udsm_examples_2016`. Diese enthalten Examplecodes zur Implementierung von Stoffmodellen in Form eines User-Defined-Soil-Models (UDSM) in die Berechnungssoftware PLAXIS 3D. Eine grundlegende Beschreibung des Aufbaus und eine Erläuterung der vorgegebenen Struktur für eine Implementierung eines UDSM in PLAXIS 3D, ist in dem Material-Models-Manual im Kapitel User-Defined-Soil-Models, das von Plaxis B.V. (2014) und ab 2020 von Bentley (2020) ebenfalls frei zum Download zur Verfügung gestellt wird, enthalten.

Um numerische Standsicherheitsuntersuchungen an einem Bohrloch durchführen zu können, wurde die modifizierte Grenzbedingung Mogi-Coulomb (MMGC) in ein linearelastisches und idealplastisches Stoffmodell integriert und in PLAXIS 3D implement. Dafür ist aufbauend auf den `udsm_examples_2016`, in dem vom Autor initiierten und betreuten Masterprojekt von Feller (2019), die erste Version eines Stoffmodells (`Mogi_Coulomb_CF.f90`), das die MMGC als Grenzbedingung enthält, umgesetzt worden. Innerhalb dieser ersten Version können über die Vorgabe der elastischen Konstanten und der Materialparameter Dehnungen berechnet und die resultierenden Spannungen mit der MMGC auf plastisches Materialverhalten überprüft werden. Liegt plastisches Materialverhalten vor, können Spannungszustände, welche die Grenzbedingung erfüllen, bestimmt und den Dehnungen zugeordnet werden.

In der weiteren Bearbeitung sind vom Autor Abfragen eingearbeitet worden, mit denen während einer Berechnung überprüft werden kann, ob die nicht konvexen Bereiche der Fließfläche in einem vermeintlich elastischen Lastschritt übersprungen werden, was allgemein als elastischer Jump-Over bezeichnet wird. Einhergehend mit dieser Kontrolle ist der Steuerungsparameter EJO eingepflegt worden, der es beim Auftreten eines elastischen Jump-Overs ermöglicht, den Einfluss auf das Berechnungsergebnis zu evaluieren und festzulegen, wie damit umgegangen werden soll. Auf der Grundlage weiterer Untersuchungen bezüglich des Einflusses der Materialparameter auf die Gesteinsfestigkeit ist der Wertebereich des Aufweitungsparmeters Alpha auf einen negativen Wertebereich von null bis minus eins erweitert worden. Somit können Spannungszustände als Ergebnis triaxialer Versuche im Kompressionsbereich oder Extensionsbereich adäquat differenziert werden.

Das Gesamtergebnis stellt das vorliegende Stoffmodell MMGC64 dar, dessen Programmcode in diesem Kapitel dargelegt wird. Um diesen verwenden zu können, müssen die einzelnen Programme zu einer Dynamic-Link-Library kompiliert und in den UDSM-Ordner des Berechnungsprogramms PLAXIS 3D eingefügt werden.

B.1. Unterprogramm Eingabefenster

```

1 !*****
2 !*****
3 ! Eingabefenster.f90 basiert auf der Datei USRADDDF.for aus den von
4 ! Plaxis B.V. (2016) per Download zur Verfügung gestellten
5 ! udsm_examples_2016 und beinhaltet deren vorgegebene Struktur
6 ! zur Implementierung eines UDSM in die Berechnungssoftware
7 ! PLAXIS 3D 2017
8 ! Die hier vorliegende Version baut auf dem vom Autor initiierten und
9 ! betreuten Masterprojekt von Feller (2019) auf und stellt den aktuellen
10 ! Stand der Bearbeitung des UDSM MMGC64.dll dar.
11 !
12 ! Erstellt mit MS. Visual Studio 2017
13 ! mit Intel Compiler 19.1 for Intel 64 Visual Studio 2017 environment
14 !*****
15 !*****
16 ! Die Subroutines dieser Datei werden in der Datei USRMOD aufgerufen
17 !*****
18 Subroutine Get_Model_Count(nMod)
19 ! Hier wird die Anzahl der Modelle einer DLL festgelegt
20 !*****
21     Integer (Kind=4) nMod
22     nMod = 1
23     Return
24 End
25 !*****
26 Subroutine Get_Model_Name(iMod, ModelName)
27 ! Hier werden die Namen der einzelnen Modelle festgelegt
28 !*****
29     Integer iMod
30     Character (Len= * ) ModelName
31
32     Select Case (iMod)
33     Case (1)
34         ModelName = 'MMGC'
35     End Select
36
37     Return
38 End
39 !*****
40 Subroutine Get_Param_Count(iMod, nParam)
41 ! Hier wird die Anzahl der Parameter festgelegt
42 !*****
43     Select Case (iMod)
44     Case ( 1 )
45         nParam = 7
46     End Select
47     Return
48 End
49 !*****

```

```

50 Subroutine GetParamAndUnit(iMod, iParam, ParamName, Units)
51 ! Hier werden die Parameternamen und Einheiten festgelegt:
52 ! Einheiten:           F : Kraft
53 !                     L : Länge
54 !                     T : Zeit
55 ! Parameternamen:     @ : erzeugt griechische Buchstaben
56 !                     ^ : stellt alles dahinter hoch
57 !                     # : beendet die zuvor beschriebenen Sachen
58 !*****
59 Character (Len=255) ParamName, Units, tName
60
61 Select Case (iMod)
62
63     Case (1)
64
65         Select Case (iParam)
66             Case (1)
67                 ParamName = 'G' ; Units = 'F/L^2#'
68             Case (2)
69                 ParamName = '@n#'; Units = '-'
70             Case (3)
71                 ParamName = 'c' ; Units = 'F/L^2#'
72             Case (4)
73                 ParamName = '@j#'; Units = 'deg'
74             Case (5)
75                 ParamName = '@y#'; Units = 'deg'
76             Case (6)
77                 ParamName = '@a#'; Units = '-'
78             Case (7)
79                 ParamName = 'EJO'; Units = '-'
80         End Select
81
82 End Select
83
84 Return
85 End
86 !*****
87 Subroutine Get_StateVar_Count(iMod, nVar)
88 ! Zur Anzahl an Zustandsvariablen
89 ! Wird nicht genutzt
90 !*****
91     Select Case (iMod)
92         Case (1)
93             nVar = 0
94     End Select
95
96     Return
97 End
98
99 !*****
100 Subroutine GetStateVarNameAndUnit(iMod, iVar, Name, Unit)

```

```
101      ! Zur Angabe der Namen und Einheiten von Zustandsvariablen
102      ! Wird nicht genutzt
103 !*****
104      Character (Len=255) Name, Unit
105
106      Select Case (iMod)
107          Case (1)
108              Select Case (iVar)
109                  Case (1)
110                      Name = 'var_1#' ; Unit = '-'
111              End Select
112      End Select
113
114      Return
115 End
116 !*****
117 !*****
118
```

B.2. Hauptprogramm USRMOD, Hauptroutine zur Interaktion mit Plaxis

```

1 !*****
2 !*****
3 ! USRMOD.f90 basiert auf der Datei USRMOD.for aus den von
4 ! Plaxis B.V. (2016) per Download zur Verfügung gestellten
5 ! udsm_examples_2016 und beinhaltet deren vorgegebene Struktur
6 ! zur Implementierung eines UDSM in die Berechnungssoftware
7 ! PLAXIS 3D 2017
8 ! Die hier vorliegende Version baut auf dem vom Autor initiierten und
9 ! betreuten Masterprojekt von Feller (2019) auf und stellt den aktuellen
10 ! Stand der Bearbeitung des UDSM MMGC64.dll dar.
11 !
12 ! Erstellt mit MS. Visual Studio 2017
13 ! und Intel Compiler 19.1 für Intel 64 Visual Studio 2017 environment
14 !*****
15 !*****
16 ! Dies ist die Hauptsubroutine:
17 !*****
18 Subroutine User_Mod      (IDTask, iMod, IsUndr,          &
19      &                  iStep, iTer, iEl, Int,          &
20      &                  X, Y, Z,                        &
21      &                  Time0, dTime,                   &
22      &                  Props, Sig0, Swp0, StVar0,      &
23      &                  dEps, D, Bulk_W,                &
24      &                  Sig, Swp, StVar, ipl,           &
25      &                  nStat, NonSym, iStrsDep, iTimeDep, iTang, &
26      &                  iPrjDir, iPrjLen, iAbort)
27 !*****
28 ! Initialisierungen aller Speicher
29
30      Implicit Double Precision (A-H, O-Z)
31 !      Alles von A - H und O - Z      wird Double
32 !      Alles von I -N                wird Integer
33
34 ! Dimensionierung der Vektoren und Matrizen
35
36      Dimension  Props(*), Sig0(*), StVar0(*), dEps(*), D(6,6), &
37      &          Sig(*),  StVar(*), iPrjDir(*)
38
39 ! Zeile zur Kompilierung mit dem Intel Fortran-Compiler:
40
41      !DEC$ ATTRIBUTES DLLEXP, StdCall, reference :: User_Mod
42 !
43
44 ! Wahl der verwendeten Modelle und Wechsel in entsprechende Subroutine
45
46 Select Case (iMod)
47

```

```

48     Case (1)
49         Call MMGC   (IDTask, iMod, IsUndr,           &
50         &          iStep, iTer, iEl, Int,           &
51         &          X, Y, Z,                         &
52         &          Time0, dTime,                    &
53         &          Props, Sig0, Swp0, StVar0,        &
54         &          dEps, D, Bulk_W,                 &
55         &          Sig, Swp, StVar, ipl,             &
56         &          nStat, NonSym, iStrsDep, iTimeDep, &
57         &          iTang, iAbort)
58
59     Case Default
60         iAbort=1   ! Abbruch der Berechnung
61
62     Return
63 End Select
64 ! _____
65
66 ! Nach Durchlauf der Subroutine geht es hier weiter und
67 ! alle berechneten Werte werden an Plaxis übergeben
68
69 Return
70 End
71 !*****
72 !*****
73 ! Subroutinen zum Aufruf der Subroutinen der Datei Eingabefenster
74 ! zur Einstellung des Interfaces in Plaxis:
75 !*****
76 Subroutine Add_Str_Length( aString )
77 ! Ausgelagerte Subroutine zur Zählung und Übergabe der Länge von
78 ! Character-Speichern
79 !*****
80     Implicit None
81     Character*(*) aString
82     Character *255 tString
83     Integer Lt
84
85         tString = aString
86         Lt      = Len_Trim(tString)
87         aString = Char(Lt) // tString(1:Lt)
88
89 End Subroutine Add_Str_Length
90 !*****
91 Subroutine GetModelCount(nMod)
92 ! Ruft die Subroutine GetModelCount auf
93 !*****
94     Implicit None
95     Integer (Kind=4) nMod
96
97     !DEC$ ATTRIBUTES DLLEExport, StdCall, reference  :: GetModelCount
98
99     Call Get_Model_Count(nMod)

```



```
100
101 Return
102 End
103 !*****
104 Subroutine GetModelName(iMod, ModelName)
105 ! Ruft die Subroutine GetModelName auf
106 !*****
107     Implicit None
108     Integer iMod
109     Character (Len= * ) ModelName
110     Character (Len=255) tName
111
112     !DEC$ ATTRIBUTES DLLEExport, StdCall, reference  :: GetModelName
113
114     Call Get_Model_Name(iMod, ModelName)
115     Call Add_Str_Length(ModelName)
116
117 End
118 !*****
119 Subroutine GetParamCount( iMod , nParam )
120 ! Ruft die Subroutine GetParamCount auf
121 !*****
122     Implicit None
123     Integer iMod, nParam
124
125     !DEC$ ATTRIBUTES DLLEExport, StdCall, reference  :: GetParamCount
126
127     Call Get_Param_Count(iMod, nParam)
128
129 End
130 !*****
131 Subroutine GetParamName(iMod, iParam, ParamName)
132 ! Ruft die Subroutine GetParamName auf
133 !*****
134     Implicit None
135     Integer iMod, iParam
136     Character (Len=255) ParamName, Units
137
138     !DEC$ ATTRIBUTES DLLEExport, StdCall, reference  :: GetParamName
139
140     Call GetParamAndUnit(iMod, iParam, ParamName, Units)
141     Call Add_Str_Length(ParamName)
142
143 End
144 !*****
145 Subroutine GetParamUnit( iMod , iParam, Units )
146 ! Ruft die Subroutine GetParamUnit auf
147 !*****
148     Implicit None
149     Integer iMod, iParam
150     Character (Len=255) ParamName, Units
151
```

```

152      !DEC$ ATTRIBUTES DLLEExport, StdCall, reference  :: GetParamUnit
153
154          Call GetParamAndUnit(iMod, iParam, ParamName, Units)
155          Call Add_Str_Length(Units)
156
157 End
158 !*****
159 Subroutine GetStateVarCount( iMod , nVar )
160 ! Ruft die Subroutine GetStateVarCount auf
161 !*****
162     Implicit None
163         Integer iMod, nVar
164
165     !DEC$ ATTRIBUTES DLLEExport, StdCall, reference  :: GetStateVarCount
166
167         Call Get_StateVar_Count( iMod , nVar )
168
169 End
170 !*****
171 Subroutine GetStateVarName(iMod, iVar, Name)
172 ! Ruft die Subroutine GetStateVarName auf
173 !*****
174     Implicit None
175         Integer iMod, iVar
176         Character (Len=255) Name, Unit
177
178     !DEC$ ATTRIBUTES DLLEExport, StdCall, reference  :: GetStateVarName
179
180         Call GetStateVarNameAndUnit(iMod, iVar, Name, Unit)
181         Call Add_Str_Length(Name)
182
183 End
184 !*****
185 Subroutine GetStateVarUnit( iMod , iVar, Unit )
186 ! Ruft die Subroutine GetStateVarUnit
187 !*****
188     Implicit None
189         Integer iMod, iVar
190         Character (Len=255) Name, Unit
191
192     !DEC$ ATTRIBUTES DLLEExport, StdCall, reference  :: GetStateVarUnit
193
194         Call GetStateVarNameAndUnit(iMod, iVar, Name, Unit)
195         Call Add_Str_Length(Unit)
196
197 End

```

B.3. Unterprogramm MMGC, eigentliches Stoffmodell

```

1 !*****
2 !*****
3 ! 1_MMGC.for basiert auf den Dateien MYMOD_MC.for, MC_Tens.for und
4 ! MYMODEL1.for aus den von Plaxis B.V. (2016) per Download zur Verfügung
5 ! gestellten udsm_examples_2016 und beinhaltet deren vorgegebene
6 ! Struktur zur Implementierung eines UDSM in die Berechnungssoftware
7 ! PLAXIS 3D 2017
8 ! Die hier vorliegende Version baut auf dem vom Autor initiierten und
9 ! betreuten Masterprojekt von Feller (2019) auf und stellt den aktuellen
10 ! Stand der Bearbeitung des UDSM MMGC64.dll dar.
11 !
12 ! Erstellt mit MS. Visual Studio 2017
13 ! und Intel Compiler 19.1 für Intel 64 Visual Studio 2017 environment
14 !*****
15 !*****
16
17 !*****
18 !*****
19 ! Subroutine Interface MMGC
20 ! Holt die Werte (Props) aus dem Interface und bearbeitet sie ggf.
21 ! Die Werte werden immer durch diese Subroutine abgerufen
22 !*****
23 Subroutine Interface_MMGC                &
24 &          (Props,                        &          ! Input aus Plaxis
25 &          G, xNu, C, Phi, Psi, alpha,    &          ! Output Umbenennung
26 &          sPhi, sPsi, CcosPhi, ejo)      ! Output Bearbeitung
27 !*****
28 Implicit none
29 !*****
30 ! Globale Speicher (Interaktion mit Plaxis)
31 ! Input-Speicher
32 !*****
33
34 double Precision Props (*)      ! Benutzerdefinierte Modellparameter
35                                ! (Vektor mit bis zu 50 Dimensionen)
36
37 !*****
38 ! Semi-Globale Speicher (agieren mit anderen Subroutinen, aber nicht
39 !                               mit Plaxis)
40 ! Output Speicher
41 !*****
42
43 double Precision G              ! Output-Parameter: Schubmodul G
44
45 double Precision xNu           ! Output-Parameter: Querkontraktionszahl
46
47 double Precision C             ! Output-Parameter: Kohäsion
48
49 double Precision Phi           ! Output-Parameter: Reibungswinkel

```

```

50
51 double Precision Psi          ! Output-Parameter: Dilatanzwinkel
52
53 double Precision alpha        ! Output-Parameter: Aufweitungsparameter
54
55 double Precision sPhi         ! Output-Parameter: sin(Phi)
56
57 double Precision sPsi         ! Output-Parameter: sin(Psi)
58
59 double Precision CcosPhi      ! Output-Parameter: c*cos(Phi)
60
61 integer EJO                   ! Kontrollparameter elastischer
62                               ! jump-over:
63 ! 1: bei Auftreten eines elastischen Jump-Overs wird die Berechnung
64 !   Abgebrochen
65 ! 2: bei Auftreten eines elastischen Jump-Overs wird dieser angezeigt
66 !   und FMMGC(XDP) und FMMGC(Sig) ausgegeben
67 ! 3: elastische Jump-Over werden ignoriert
68
69 !*****
70 ! lokale Speicher
71 !*****
72 double Precision Pi
73
74 double Precision Rad
75 !*****
76 Pi = 3.141592653589793238462643383279502884197169399D0
77
78 Rad = 180D0/Pi
79 !*****
80
81 G      =      Props(1)
82
83 xNu    =      Props(2)
84
85 ! Begrenzung von xNu
86
87       If (xNu > 0.495D0) Then
88           xNu = 0.495D0
89       End If
90
91 C      =      Props(3)
92
93 ! Begrenzung von C
94
95       If (C < 0D0) Then
96           C = 0D0
97       End If
98
99 Phi    =      Props(4)
100
101 Psi    =      Props(5)

```

```

102 !Bearbeitung für Trigonometrie
103
104 sPhi = sin(Phi/ Rad)
105
106 sPsi = sin(Psi/Rad)
107
108 CcosPhi = C*cos(Phi/Rad)
109
110 Alpha = Props(6)
111
112 ! Begrenzung von Alpha
113
114     If (Alpha < -1D0 ) Then
115         Alpha = -1D0
116     End If
117
118     If (Alpha >= 1D0 ) Then
119         Alpha = 1D0
120     End If
121
122 Ejo = Props(7)
123
124 ! Begrenzung von EJO
125
126     If (EJO < 0 ) Then
127         EJO = 3
128     End If
129
130     If (EJO>3 ) Then
131         EJO = 3
132     End If
133
134     Return
135
136 End
137 !*****
138 !*****
139     Subroutine MMGC &
140     & (IDTask, iMod, IsUndr, &
141     & iStep, iTer, iEl, Int, &
142     & X, Y, Z, &
143     & Time0, dTime, &
144     & Props, Sig0, Swp0, StVar0, &
145     & dEps, D, Bulk_W, &
146     & Sig, Swp, StVar, ipl, &
147     & nStat, NonSym, iStrsDep, iTimeDep, &
148     & iTang, iAbort)
149
150 !*****
151 ! Dieses ist das in "User_Mod" aufgerufene Modell MMGC
152 !*****
153 !*****

```



```

258                                     ! Spannungspunktes
259
260 double Precision StVar(*)          ! Zustandsvariablen zum Schritttende des
261                                     ! laufenden
262                                     ! Spannungspunktes (Vektor)
263
264 integer iPl                         ! Plastischer Indikator
265                                     ! = 0 keine Plastizität
266                                     ! = 1 Plastizitäts Kriterium
267                                     ! = 2 Tension Cut-Off Kriterium
268                                     ! = 3 Punkt der Kappenverfestigung
269                                     ! = 4 Punkt der Kappenreibung
270                                     ! = 5 Punkt der Reibungsverfestigung
271
272 integer nStat                       ! Anzahl an Zustandsvariablen
273
274 integer NonSym                      ! Indikator, ist die Steifigkeitsmatrix:
275                                     ! symmetrisch (NonSym = 0)
276                                     ! nicht symmetrisch (NonSym = 1)
277
278 integer iStrsDep                   ! Indikator, ist die Steifigkeitsmatrix:
279                                     ! spannungsabhängig (iStrsDep = 1)
280                                     ! spannungsunabhängig (iStrsDep = 0)
281
282 integer iTimeDep                   ! Indikator, ist die Steifigkeitsmatrix:
283                                     ! zeitabhängig (iTimeDep = 1)
284                                     ! nicht zeitabhängig (iTimeDep = 0)
285
286 integer iTang                      ! Indikator, ist die Steifigkeitsmatrix:
287                                     ! Tangentenmatrix (iTang = 1)
288                                     ! oder nicht (iTang = 0)
289
290 integer iAbort                     ! Parameter um die Kalkulation zu stoppen
291                                     ! (iAbort = 1)
292
293 !*****
294 ! Weitere Speicher
295 ! Input Speicher aus der Subroutine Interface_Mogi
296 !*****
297
298 double Precision G                 ! Output-Parameter: Schubmodul
299
300 double Precision xNu               ! Output-Parameter: Querkontraktionszahl
301
302 double Precision C                 ! Output-Parameter: Kohäsion
303
304 double Precision Phi               ! Output-Parameter: Reibungswinkel
305
306 double Precision Psi               ! Output-Parameter: Dilatanzwinkel
307
308 double Precision Alpha             ! Output-Parameter: Aufweitungsparameter
309

```



```
310 double Precision sPhi      ! Output-Parameter: sin(Phi)
311
312 double Precision sPsi      ! Output-Parameter: sin(Psi)
313
314 double Precision CcosPhi    ! Output-Parameter: c*cos(Phi)
315
316 integer ejo                 ! Kontrollparameter elastischer Jump-Over
317
318 !*****
319
320 double Precision hs1       ! unsortierte kartesische Hauptspannung sig0(x)
321
322 double Precision hs2       ! unsortierte kartesische Hauptspannung sig0(y)
323
324 double Precision hs3       ! unsortierte kartesische Hauptspannung sig0(z)
325
326 double Precision hsp1      ! unsortierte kartesische Hauptspannung sig(x)
327
328 double Precision hsp2      ! unsortierte kartesische Hauptspannung sig(y)
329
330 double Precision hsp3      ! unsortierte kartesische Hauptspannung sig(z)
331
332 double Precision sort1     ! Sektor in dem sich sig0(3) befindet
333
334 double Precision sort2     ! Sektor in dem sich sig(3) befindet
335
336 double Precision dp1_1     ! Hauptspannungskomponente1 des Durchstoßpunkts
337                          ! zwischen Sektor 1&2
338
339 double Precision dp1_2     ! Hauptspannungskomponente2 des Durchstoßpunkts
340                          ! zwischen Sektor 1&2
341
342 double Precision dp1_3     ! Hauptspannungskomponente3 des Durchstoßpunkts
343                          ! zwischen Sektor 1&2
344
345 double Precision dp2_1     ! Hauptspannungskomponente1 des Durchstoßpunkts
346                          ! zwischen Sektor 3&4
347
348 double Precision dp2_2     ! Hauptspannungskomponente2 des Durchstoßpunkts
349                          ! zwischen Sektor 3&4
350
351 double Precision dp2_3     ! Hauptspannungskomponente3 des Durchstoßpunkts
352                          ! zwischen Sektor 3&4
353
354 double Precision dp3_1     ! Hauptspannungskomponente1 des Durchstoßpunkts
355                          ! zwischen Sektor 5&6
356
357 double Precision dp3_2     ! Hauptspannungskomponente2 des Durchstoßpunkts
358                          ! zwischen Sektor 5&6
359
360 double Precision dp3_3     ! Hauptspannungskomponente3 des Durchstoßpunkts
361                          ! zwischen Sektor 5&6
```

```

362 double Precision fmogil_sig ! F_MMGC für sig(3)
363
364 double Precision fmogil_dp1 ! F_MMGC für dp1(3)
365
366 double Precision fmogil_dp2 ! F_MMGC für dp2(3)
367
368 double Precision fmogil_dp3 ! F_MMGC für dp3(3)
369
370 !*****
371
372 integer iopt ! Parameter zur Übergabe in Subroutine
373 ! prnsig (aus Usrlib)
374
375 double Precision dSig(6) ! Spannungsänderung (Vektor R6)
376
377 double Precision s1 ! größte Hauptnormalspannung
378 ! (in X1-Richtung)
379 ! (Achtung: Zug->positiv!) aus Subroutine
380 ! prnsig (aus Usrlib)
381
382 double Precision s2 ! mittlere Hauptnormalspannung
383 ! (in X2-Richtung)
384 ! (Achtung: Zug->positiv!) aus Subroutine
385 ! prnsig (aus Usrlib)
386
387 double Precision s3 ! kleinste Hauptnormalspannung
388 ! (in X3-Richtung)
389 ! (Achtung: Zug->positiv!) aus Subroutine
390 ! prnsig (aus Usrlib)
391
392 double Precision xN1(3) ! Normalenvektor der größten Spannung
393 ! (Vektor R3, kartesisches KO) aus
394 ! Subroutine prnsig (aus Usrlib)
395
396 double Precision xN2(3) ! Normalenvektor der mittleren Spannung
397 ! (Vektor R3, kartesisches KO) aus
398 ! Subroutine prnsig (aus Usrlib)
399
400 double Precision xN3(3) ! Normalenvektor der kleinsten Spannung
401 ! (Vektor R3, kartesisches KO) aus
402 ! Subroutine prnsig (aus Usrlib)
403
404 double Precision f1 ! Wert in Steifigkeitsmatrix (i==j)
405
406 double Precision f2 ! Wert in Steifigkeitsmatrix (i /= j)
407
408 double Precision prs_Trial(3) ! SigmaTrial (Vektor R3)
409 ! (als Hauptnormalspannung)
410
411 double Precision dswp ! Änderungdes überschüssigen Porendrucks
412
413 double Precision dEpsV ! Summe dEps

```

```
414 integer i                ! Zeilenkomponente in Vektor/Matrix
415
416 integer j                ! Spaltenkomponente in Matrix
417
418 double Precision xNu_u   ! Querkontraktion undrainiert
419
420 double Precision p       ! hydrostatischer Druck
421
422 double Precision q       ! Spannung auf Deviatorebene
423
424 integer nStatV           ! Anzahl Zustandsvariablen zur
425                          ! Initialisierung
426
427 !*****
428
429 double Precision xI1_Trial ! 1. Invariante von Prs_Trial
430
431 double Precision xI2_Trial ! 2. Invariante von Prs_Trial
432
433 double Precision xI1_PrS  ! 1. Invariante von Prs
434
435 double Precision xI2_PrS  ! 2. Invariante von Prs
436
437 double Precision f_Mogi_Trial ! F_MMGC mit Prädiktorspannung
438
439 double Precision f_Mogi    ! F_MMGC mit Prs
440
441 double Precision f_Tens_Trial ! F_MMGC_tens mit Prädiktorspannung
442                          ! (noch nicht implementiert)
443
444 double Precision f_Tens    ! F_MMGC_tens mit Prs
445                          ! (noch nicht implementiert)
446
447 double Precision f_Dach_Tens ! F_MMGC_tens ohne Konstante
448                          ! mit Prs_EQ_Tens
449                          ! (noch nicht implementiert)
450
451 double Precision grad_g_Mogi(6) ! Dehnungsrate für MMGC
452
453 double Precision grad_g_Tens(6) ! Dehnungsrate für MMGC_tens
454
455 double Precision Prs_EQ_Mogi6(6) ! Vergleichsspannungsrate für MMGC
456                          ! (6 Dimensionen)
457
458 double Precision Prs_EQ_Tens6(6) ! Vergleichsspannungsrate für
459                          ! MMGC_tens (6 Dimensionen)
460
461 double Precision Prs_EQ_Mogi(3) ! Vergleichsspannungsrate für MMGC
462                          ! (3 Dimensionen)
463
464 double Precision Prs_EQ_Tens(3) ! Vergleichsspannungsrate MMGC_tens
465                          ! (3 Dimensionen)
```

```

466 double Precision f_Tol          ! Grenzbedingung (F=0) Grenzwert
467
468 double Precision xLambda_Mogi    ! plastischer Multiplikator nach
469                                     ! MMGC
470
471 double Precision xLambda_Tens     ! plastischer Multiplikator nach
472                                     ! MMGC_tens
473
474 double Precision dgdJ             ! Ableitung der Potentialfunktion
475                                     ! nach Deviator
476
477 double Precision dI1dSig(3)      ! Ableitung von I1 nach Sig
478
479 double Precision dI2dSig(3)      ! Ableitung von I2 nach Sig
480
481 double Precision dIdSig(3)       ! Ableitung des hydrostatischen
482                                     ! Anteil nach Sig
483
484 double Precision dJdSig(3)       ! Ableitung des Deviatoranteil nach
485                                     ! Sig
486
487 double Precision dgdI             ! Ableitung der Potentialfunktion
488                                     ! nach I
489
490 double Precision grad_g_Mogi3(3) ! Dehnungsrate nach Mogi
491                                     ! mit 3 Dimensionen
492
493 !*****
494
495     nstatV = 0
496
497 ! Ende Initialisierungen aller Speicher
498 !
499 !
500
501 ! IDTask = 1           Überprüfung der Werte und Kommentare zu
502 !                       Anpassungen im Interface
503
504 If (idtask==1) Then   ! Initialisierung von Zustandsvariablen
505
506 !
507 ! Einholen der Interface-Werte
508
509     call  Interface_MMGC           &
510     &   (Props,                   &   ! Input aus Plaxis
511     &   G, xNu, C, Phi, Psi, alpha, &   ! Output Umbenennung
512     &   sPhi, sPsi, CcosPhi, ejo)   ! Output Bearbeitung
513 !
514
515 ! Falls nu kleiner 0
516
517     If (xnu <= 1D-6) Then

```

```
518
519     Call ok_messagebox('Unzulässiger Wert für "nu" (0<nu<0,495)!')
520
521         iabort = 1             ! Abbruch der Kalkulation
522
523     Return
524
525     End If
526
527 ! Falls 0,495 < nu
528
529     If (Props(2) > 0.495D0) Then ! In Unterroutine Interface
530
531     Call ok_messagebox('"nu" wurde gleich 0,495 gesetzt      &
532     &    (max.Wert)!')
533
534     End If
535
536 ! Falls C < 0
537
538     If (Props(3) < 0D0) Then    ! In Unterroutine Interface
539
540     Call ok_messagebox('"C" wurde gleich 0 gesetzt (min.Wert)!')
541
542     End If
543
544 ! Falls Phi kleiner gleich 0
545
546     If (Phi <= 1D-6) Then
547
548     Call ok_messagebox('Phi muss größer null gewählt werden!')
549
550         iabort = 1             ! Abbruch der Kalkulation
551
552     End If
553
554 ! Falls G kleiner gleich 0
555
556     If (G < 1D-6) Then
557
558     Call ok_messagebox('Bitte für G einen Wert größer 0 eingeben!')
559
560         iabort = 1
561
562     End If
563
564 ! Falls Psi kleiner 0
565
566     If (Psi < -1D-6) Then
567     Call ok_messagebox('Psi muss zwischen 0 und Phi      &
568     &    gewählt werden!')
569
```

```
570         iabort = 1
571
572     Return
573
574     End If
575
576 ! Falls Phi kleiner Psi
577
578     If (Phi < Psi) Then
579
580         Call ok_messagebox('Psi darf nicht größer als Phi sein!')
581
582         iabort = 1
583
584         Return
585
586     End If
587
588 ! Falls Alpha < -1 gewählt wurde
589
590     If ( Props(6) < -1D0) Then      ! In Unterroutine Interface
591
592         Call ok_messagebox(' Alpha wurde gleich -1 gesetzt  &
593         &      (min. Wert)!')
594
595         Return
596
597     End If
598
599 ! Falls Alpha > 1 gewählt wurde
600
601     If ( Props(6) > 1D0) Then      ! In Unterroutine Interface
602
603         Call ok_messagebox('Alpha wurde gleich 1 gesetzt (max. Wert)!')
604
605         Return
606
607     End If
608
609 End If
610
611 ! _____
612 ! _____
613
614 ! IDTask = 3      Effektive Steifigkeitsmatrix D nach Gl.2.33
615 !                (identisch zu IDTask = 6)
616
617 If (idtask==3) Then
618
619
620
621
```

```

622 !
623 ! Holen der Interface-Werte
624
625     call  Interface_MMGC  &
626     &    (Props,          &    ! Input aus Plaxis
627     &    G, xNu, C, Phi, Psi, alpha, &    ! Output Umbenennung
628     &    sPhi, sPsi, CcosPhi, ejo)      ! Output Bearbeitung
629 !


---


630 ! Erstellung der Matrix nach Hooke:
631
632     f1 = 2D0*G*(1D0-xNu)/(1D0-2D0*xNu)    ! Hauptspannung
633
634     f2 = 2D0*G*(xNu)/(1D0-2D0*xNu)        ! Scherspannung
635
636     Call mzeror(D, 36)                    ! In Userlib.for
637                                           ! erstellt Matrix D
638                                           ! mit 36 Komponenten
639     Do i = 1, 3                            ! füllt Matrix D
640                                           ! nach Hooke
641         Do j = 1, 3
642             D(i, j) = f2
643         End Do
644             D(i, i) = f1
645
646             D(i+3, i+3) = G
647
648     End Do
649
650 ! Kompressionsmodul des wassergesättigten Bodens:
651
652     Bulk_W = 0
653
654     if (isundr==1) Then
655
656         xNu_u = 0.495D0                    ! undrainierte Poissonzahl
657
658         Bulk_W = 2D0*G/3D0*((1D0+xnu_u)/(1D0-2D0*xnu_u) &
659         &    - (1D0+xnu)/(1D0-2D0*xnu))
660
661     End If
662
663     Return
664
665 End If
666 !


---


667 !


---


668
669 ! IDTask = 4      Rückgabe der Anzahl an Zustandsvariablen
670
671 If (idtask==4) Then
672
673     nstat = nstatv

```

```

674     Return
675
676 End If
677 !
678 !
679
680 ! IDTask = 5      Gibt die Attribute/Art der Matrix an
681 !                (NonSym, iStrsDep, iTimeDep, iTang)
682
683 If (idtask==5) Then
684
685     nonsym        = 0 ! 1 für nicht-symmetrische D-matrix
686
687     istrsdep      = 0 ! 1 für spannungsabhängige D-matrix
688
689     itang         = 0 ! 1 für Tangenten-Matrix
690
691     itimedep      = 0 ! 1 für zeitabhängige D-matrix
692
693     Return
694
695 End If
696 !
697 !
698
699 ! IDTask = 6      Elastische Steifigkeitsmatrix nach Gl.2.33
700 !                (Identisch zu IDTask = 3)
701
702 If (idtask==6) Then
703
704 !
705 ! Holen der Interface-Werte
706
707     call  Interface_MMGC          &
708     &   (Props,                  &   ! Input aus Plaxis
709     &   G, xNu, C, Phi, Psi, alpha, &   ! Output Umbenennung
710     &   sPhi, sPsi, CcosPhi, ejo)  &   ! Output Bearbeitung
711 !
712
713 ! Erstellung der Matrix nach Hooke:
714
715     f1 = 2D0*G*(1D0-xNu)/(1D0-2D0*xNu)    ! Hauptspannung
716
717     f2 = 2D0*G*(xNu)/(1D0-2D0*xNu)        ! Scherspannung
718
719     Call mzeror(D, 36)                    ! In Userlib erstellt
720                                           ! Matrix D mit 36
721                                           ! Komponenten
722     Do i = 1, 3                            ! füllt Matrix D
723                                           ! nach Hooke
724     Do j = 1, 3
725     D(i, j) = f2

```



```

726             End Do
727                 D(i, i) = f1
728
729                 D(i+3, i+3) = G
730
731             End Do
732
733 ! Kompressionsmodul des wassergesättigten Bodens:
734
735     Bulk_w = 0
736
737     If (isundr==1) Then
738
739         xNu_u = 0.495D0           ! undrainierte Poissonzahl
740
741         Bulk_w = 2D0*G/3D0*((1D0+xnu_u)/(1D0-2D0*xnu_u) &
742 &         - (1D0+xnu)/(1D0-2D0*xnu))
743
744     End If
745
746 Return
747
748 End If
749 !
750 !
751
752 ! IDTask = 2      Berechnung der grundlegenden Spannungen
753
754 If (idtask==2) Then
755
756     Call copyrvec(stvar0, stvar, nstatv)
757
758 !
759     ! Holen der Interface-Werte
760
761     call  Interface_MMGC           &
762 &     (Props,                      &     ! Input aus Plaxis
763 &     G, xNu, C, Phi, Psi, alpha,  &     ! Output Umbenennung
764 &     sPhi, sPsi, CcosPhi, ejo)    ! Output Bearbeitung
765 !
766
767 ! Porenwasserüberdruck:
768
769     If (isundr==1) Then           ! für undrainierte
770                                     ! Verhältnisse
771
772         xnu_u = 0.495D0           ! Undrainierte Poissonszahl
773
774         Bulk_w = 2D0*G/3D0*((1D0+xnu_u)/(1D0-2D0*xnu_u) &
775 &         - (1D0+xnu)/(1D0-2D0*xnu))
776
777         depsv = deps(1) + deps(2) + deps(3)

```

```

778
779         dswp = Bulk_w*depsv
780
781         swp = swp0 + dswp
782
783     Else                                     ! für drainierte Verhältnisse
784
785         swp = swp0
786
787     End If
788 !
789
790 ! Elastischer Spannungszuwachs dSig(6)
791
792     Call matvec(D, 6, deps, 6, dsig)          ! (aus USRLIB)
793
794 ! Elastische Spannungen
795
796     Call addvec(sig0, dsig, 1D0, 1D0, 6, sig) ! (aus USRLIB)
797
798 !*****
799 ! Kontrolle auf EJO:
800 !*****
801 ! Es werden die Hauptspannungen des vorangegangenen Schrittes (sig0)
802 ! und des aktuellen Schrittes (sig) auf ihre Sortierung überprüft
803
804 if (ejo==3) then          ! wenn keine Überprüfung auf einen e. Jump-Over
805     goto 50              ! durchgeführt werden soll
806 end if
807
808     iopt = 1
809
810     Call HSB(iopt, sig0, xn1, xn2, xn3, hs1, hs2, hs3)
811     ! (aus USRLIB)
812
813         hs1=-hs1          ! unsortierte Hauptspannungen zu
814         hs2=-hs2          ! Schrittbeginn
815         hs3=-hs3
816
817     call HSB(iopt, sig, xn1, xn2, xn3, hsp1, hsp2, hsp3)
818     ! (aus USRLIB)
819
820         hsp1=-hsp1        ! unsortierte Hauptspannungen zu
821         hsp2=-hsp2        ! Schritttende
822         hsp3=-hsp3
823
824
825 !*****
826 ! Vorab Kontrolle:      wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind,
827 !                        ist kein Jump-Over möglich
828 !*****
829

```

```

830 If (hs1==hs2 .and. hs2==hs3) then          ! Ausgehend von hydr. Achse
831         goto 50
832
833     else if (hs1==hs2 .and. hs2>hs3) then ! Ausgehend von Ext. Grat
834         goto 50
835
836     else if (hs2==hs3 .and. hs2>hs1) then ! Ausgehend von Ext. Grat
837         goto 50
838
839     else if (hs1==hs3 .and. hs3>hs2) then ! Ausgehend von Ext. Grat
840         goto 50
841
842 end if
843
844 !*****
845 ! Überprüfung ob sich die Sortierung geändert hat, mit Subroutine sort
846 ! aus USRLIB, welche die beiden Spannungszustände den sechs Sektoren
847 ! zuordnet.
848 ! Hat sich die Sortierung nicht geändert liegt kein elastischer
849 ! Jump-Over vor!
850 !*****
851
852     call sort(hs1, hs2, hs3, hsp1, hsp2, hsp3, sort1, sort2)
853
854 if (sort1==sort2) then
855     goto 50
856
857 !*****
858 ! Hat sich die Sortierung geändert ==> Überprüfung ob ein
859 ! elastischer Jump-Over vorliegt, durch Überprüfung der
860 ! Durchstoßpunkte (DP) und der Trailpunkte. Ist F_MMGC(DP)>0 liegen
861 ! diese außerhalb der Fließfläche. Ist zusätzlich F_MMGC(sig_trail)<0
862 ! liegt ein elastischer Jump-Over vor!
863 ! Es werden die Subroutinen:
864 ! fmogilohde, prnsig, dp1, dp2, dp3, ok_messagebox2, aus der USRLIB
865 ! verwendet
866 !*****
867
868 ! Kontrolle zwischen Sektor 1 und 2:
869
870     else if      (sort1==1d0 .and. sort2==2d0 .or. sort1==2d0 .and. &
871                 &      sort2==1d0 .or. sort1==1d0 .and. sort2==3d0 .or. &
872                 &      sort1==3d0 .and. sort2==1d0 .or. sort1==6d0 .and. &
873                 &      sort2==2d0 .or. sort1==2d0 .and. sort2==6d0 ) then
874
875 ! Berechnung des Durchstoßpunktes und seines Funktionswerts:
876
877     call dp1(hs1,hs2,hs3,hsp1,hsp2,hsp3,dp1_1,dp1_2,dp1_3)
878
879     call fmogilohde(dp1_1, dp1_2, dp1_3, alpha, phi, C, fmogil_dp1)
880
881         f_tol=1D-10

```

```
882         if (fmogil_dp1>f_tol) then
883
884 ! Berechnung der HS. von sig und dessen Funktionswerts:
885
886         call prnsig(iopt, sig, xn1, xn2, xn3, s1, s2, s3, p, q)
887
888             s1=-s1
889             s2=-s2
890             s3=-s3
891
892         call fmogilohde(s1, s2, s3, alpha, phi, C, fmogil_sig)
893
894         if (fmogil_sig<f_tol) then
895
896 ! Ausgabe einer Warnung, wenn fmogil_dp1>0 und fmogil_sig<0 ist:
897
898             Call ok_messagebox2      ('Achtung elastischer      &
899             &                        jump-over! in Ebene DP1', &
900             &                        fmogil_dp1, fmogil_sig)
901
902             if (ejo==2) then
903                 goto 50
904
905             else if (ejo==1) then
906                 iabort=1
907             end if
908
909         end if
910
911     end if
912
913 ! Kontrolle zwischen Sektor 3 und 4:
914
915     else if      (sort1==3d0 .and. sort2==4d0 .or. sort1==4d0 .and. &
916     &            sort2==3d0 .or. sort1==2d0 .and. sort2==4d0 .or. &
917     &            sort1==4d0 .and. sort2==2d0 .or. sort1==3d0 .and. &
918     &            sort2==5d0 .or. sort1==5d0 .and. sort2==3d0) then
919
920 ! Berechnung des Durchstoßpunktes und seines Funktionswerts:
921
922     call dp2(hs1,hs2,hs3,hsp1,hsp2,hsp3,dp2_1,dp2_2,dp2_3)
923
924     call fmogilohde(dp2_1, dp2_2, dp2_3, alpha, phi, C, fmogil_dp2)
925
926     f_tol=1D-10
927
928     if (fmogil_dp2>f_tol) then
929
930 ! Berechnung der HS. von sig und dessen Funktionswerts:
931
932     Call prnsig(iopt, sig, xn1, xn2, xn3, s1, s2, s3, p, q)
933
```

```
934             s1=-s1
935             s2=-s2
936             s3=-s3
937
938             call fmogilohde(s1, s2, s3, alpha, phi, C, fmogil_sig)
939
940             if (fmogil_sig<f_tol) then
941
942 ! Ausgabe einer Warnung, wenn fmogil_dp2>0 und fmogil_sig<0 ist:
943
944             Call ok_messagebox2      ('Achtung elastischer      &
945             &                        jump-over! in Ebene DP2', &
946             &                        fmogil_dp2, fmogil_sig)
947
948             if (ejo==2) then
949                 goto 50
950
951             else if (ejo==1) then
952                 iabort=1
953             end if
954         end if
955     end if
956
957
958 ! Kontrolle zwischen Sektor 5 und 6:
959
960     else if      (sort1==6d0 .and. sort2==5d0 .or. sort1==5d0 .and.&
961     &           sort2==6d0 .or. sort1==1d0 .and. sort2==5d0 .or. &
962     &           sort1==5d0 .and. sort2==1d0 .or. sort1==6d0 .and. &
963     &           sort2==4d0 .or. sort1==4d0 .and. sort2==6d0) then
964
965 ! Berechnung des Durchstoßpunktes und seines Funktionswerts:
966
967     call dp3(hs1,hs2,hs3,hsp1,hsp2,hsp3,dp3_1,dp3_2,dp3_3)
968
969     call fmogilohde(dp3_1, dp3_2, dp3_3, alpha, phi, C, fmogil_dp3)
970
971     f_tol=1d-10
972
973     if (fmogil_dp3>f_tol) then
974
975 ! Berechnung der HS. von sig und dessen Funktionswerts:
976
977     Call prnsig(iopt, sig, xn1, xn2, xn3, s1, s2, s3, p, q)
978
979             s1=-s1
980             s2=-s2
981             s3=-s3
982
983     call fmogilohde(s1, s2, s3, alpha, phi, C, fmogil_sig)
984
985     if (fmogil_sig<f_tol) then
```

```

986 ! Ausgabe einer Warnung, wenn fmogil_dp3>0 und fmogil_sig<0 ist:
987
988         Call ok_messagebox2      ('Achtung elastischer      &
989         &                        jump-over! in Ebene DP3', &
990         &                        fmogil_dp3, fmogil_sig)
991
992         if (ejo==2) then
993             goto 50
994
995         else if (ejo==1) then
996             iabort=1
997         end if
998     end if
999
1000     end if
1001
1002 end if
1003 !*****
1004 ! Ende Kontrolle auf EJO
1005 !*****
1006
1007 50 continue
1008
1009 ! Berechnung der Hauptnormalspannungen und -Richtungen
1010
1011     iopt = 1
1012     Call prnsig(iopt, sig, xn1, xn2, xn3, s1, s2, s3, p, q)
1013     ! (aus USRLIB)
1014 ! _____
1015
1016 !*****
1017 ! Anmerkung:      Zug ist positiv in Plaxis (mechanische Konvention)
1018
1019 ! Übergabe der Spannungen an Prs_Trial(3) und Umrechnung
1020 ! auf geotechnische Konvention (Druck --> positiv)
1021
1022 ! Prädiktorspannung:
1023
1024         prs_Trial(1) = -s1
1025         prs_Trial(2) = -s2
1026         prs_Trial(3) = -s3
1027
1028 !*****
1029 ! Überprüfen, ob die Anwendung eines Return Mapping Algorithmus (RMA)
1030 ! notwendig ist:
1031 !*****
1032
1033 ! Berechnung der Grenzbedingung mit Prädiktorspannung Prs_Trial
1034
1035 ! Grenzbedingung (für alle F = 0):
1036

```

```

1037     f_Tol = 1D-10
1038
1039 ! Berechnung der Invarianten:
1040
1041     xI1_Trial = Prs_Trial(1) + Prs_Trial(2) + Prs_Trial(3)
1042
1043     xI2_Trial =      Prs_Trial(1) *Prs_Trial(2)          &
1044     &          + Prs_Trial(2) * Prs_Trial(3)          &
1045     &          + Prs_Trial(3) * Prs_Trial(1)
1046
1047 ! Grenzbedingung MMGC:
1048
1049 f_Mogi_Trial =  sqrt (xI1_Trial**2D0 - 3D0 * xI2_Trial)      &
1050     &          - (prs_Trial(1)+alpha*prs_Trial(2)+prs_Trial(3))&
1051     &          * sPhi-2D0 * CcosPhi
1052
1053 ! Prüfen, ob f_Mogi_Trial < 0      --> elastisch
1054
1055 If (f_Mogi_Trial <= f_Tol ) then  ! --> elastisch, Fließregel nicht
1056                                ! notwendig
1057
1058                                ipl = 0      ! Indikator (= 0--> elastisch)
1059
1060                                Do i = 1, 3      ! Übergabe an Output Prs
1061
1062                                Prs(i) = Prs_Trial(i)
1063
1064                                End Do
1065
1066                                Go To 100
1067     End if
1068 !*****
1069 ! wenn F_MMGC>0 -->plastisch --> Fließregel notwendig
1070 ! Es wird ein aus der MMGC abgeleiteter RMA verwendet
1071 ! Erst reguläre Spannungsrückführung (Regular) mit anschließender
1072 ! Prüfung ob der bestimmte Spannungszustand der richtigen Sortierung
1073 ! entspricht.
1074 ! Falls nicht:      -->  Rückführung Kompression (Möglich!) oder
1075 !                  -->  Rückführung Extension (wird nicht benötigt)
1076
1077     ipl = 1
1078
1079 !*****
1080 !*****
1081 ! FALL: REGULAR
1082 !*****
1083 ! Grenzbedingung F_MMGC=f_Mogi
1084 !*****
1085 !
1086 ! f_Mogi      =  sqrt (xI1**2D0 - 3D0 * xI2)          &
1087 !     &          - (Prs(1) + alpha * Prs(2) + Prs(3)) * sPhi  &
1088 !     &          - 2D0 * CcosPhi

```

```

1089 !*****
1090 ! Aufstellen der Potentialfunktion
1091 !*****
1092 !
1093 ! g_Mogi      =      sqrt (xI1**2D0 - 3D0 * xI2)                &
1094 !      &      - (Prs(1) + alpha * Prs(2) + Prs(3)) * sPsi
1095 !
1096 ! Substitution:
1097 !
1098 ! g_Mogi      =      sqrt (J) - (I) * sPsi
1099 !
1100 ! mit:
1101 !      J = xI1**2 - 3* xI2**2
1102 !      I = Prs(1) + alpha * Prs(2) + Prs(3)
1103 !
1104 !*****
1105 ! Ermittlung der plastischen Dehnungsrate durch Ableitung der
1106 ! Potentialfunktion, wie in Gl.(6.5) dargelegt.
1107 !*****
1108
1109 ! grad_g_Mogi() = dgdJ * (dI1dSig - 3 * dI2dSig) - dgdI * dIdSig
1110
1111 dgdJ = 1D0 / (2D0 * sqrt (xI1_Trial**2D0 -3D0 * xI2_Trial))! Für alle
1112
1113 dI1dSig(1) = 2D0 * xI1_Trial      ! Für alle
1114 dI1dSig(2) = 2D0 * xI1_Trial
1115 dI1dSig(3) = 2D0 * xI1_Trial
1116
1117 dI2dSig(1) = (Prs_Trial(2) + Prs_Trial(3))
1118 dI2dSig(2) = (Prs_Trial(1) + Prs_Trial(3))
1119 dI2dSig(3) = (Prs_Trial(2) + Prs_Trial(1))
1120
1121 Call addvec(dI1dSig, dI2dSig, 1D0, -3D0, 3, dJdSig)      ! aus USRLIB
1122
1123 dIdSig (1) = 1D0
1124 dIdSig (2) = Alpha
1125 dIdSig (3) = 1D0
1126
1127 dgdI = sPsi
1128
1129 Call addvec(dJdSig, dIdSig, dgdJ, -dgdI, 3, grad_g_Mogi3) ! aus USRLIB
1130
1131 ! Übergabe auf 6 Dimensionen zur Multiplikation mit D
1132
1133 grad_g_Mogi(1) = grad_g_Mogi3(1)
1134 grad_g_Mogi(2) = grad_g_Mogi3(2)
1135 grad_g_Mogi(3) = grad_g_Mogi3(3)
1136 grad_g_Mogi(4) = 0D0
1137 grad_g_Mogi(5) = 0D0
1138 grad_g_Mogi(6) = 0D0
1139
1140

```



```
1141 ! Berechnung der plastischen Vergleichsspannungsrate Prs_EQ_Mogi
1142 ! Prs_EQ_Mogi6 = D * grad_g_Mogi
1143
1144 Call matvec(D, 6, grad_g_Mogi, 6, Prs_EQ_Mogi6)      ! aus USRLIB
1145
1146 ! Keine Scherspannung --> Ändern auf 3 Dimensionen
1147
1148     Do i = 1, 3      ! Übergabe für 3 Dimensionen
1149
1150         Prs_EQ_Mogi(i) = Prs_EQ_Mogi6(i)
1151
1152     End Do
1153
1154 !*****
1155 ! Skalieren der plastischen Vergleichsspannungsrate
1156 ! iterativ mit Newton-Verfahren nach Gl.(6.9)
1157 !*****
1158
1159 ! Berechnung des plastischen Multiplikators
1160
1161     call Newton_Mogi (iAbort, Props, Prs_Trial, Prs_EQ_Mogi, &
1162                     &     xLambda_Mogi)
1163
1164 !*****
1165 ! Ermittlung der resultierenden Spannung (nur elastisch)
1166 !*****
1167
1168     ! Prs = Prs_Trial - xLambda_DP * Prs_EQ_DP
1169     ! Übergabe Prs (Output)
1170
1171     Call addvec(Prs_Trial, Prs_EQ_Mogi, 1D0, -xLambda_Mogi, 3, Prs)
1172
1173 !*****
1174 ! Ende Regular
1175 !*****
1176 !*****
1177
1178 if (Prs(2) < Prs(3)) Then      ! Kontrolle des Ergebnisses aus Regular
1179
1180 !*****
1181 !*****
1182 ! FALL: Fehler im Kompressionsbereich
1183 ! Prs(1) > Prs(2) = Prs(3)
1184 !*****
1185
1186 ! Korrektur der Prädiktorspannung über Mittelwert nach Gl.(6.10)
1187
1188     prs_Trial(1) = prs_Trial(1)
1189     prs_Trial(2) = (prs_Trial(2) + prs_Trial(3)) / 2D0
1190     prs_Trial(3) = prs_Trial(2)
1191
1192
```

```

1193 !*****
1194 ! Grenzbedingung
1195 !*****
1196 !     xI1_Trial (bleibt identisch)
1197
1198 !     xI2_Trial = 0.25D0 * (prs_Trial(2)**2)           &
1199 !               &   + 0.25D0 * (prs_Trial(3)**2)       &
1200 !               &   + 0.5D0 * prs_Trial(2) * prs_Trial(3) &
1201 !               &   + prs_Trial(1) * prs_Trial(2)       &
1202 !               &   + prs_Trial(1) * prs_Trial(3)
1203
1204 ! f_Mogi = sqrt (xI1**2D0 - 3D0 * xI2 )           &
1205 !         &   - ( Prs(1) + alpha * (prs_Trial(2) + prs_Trial(3)) / 2D0 &
1206 !         &   + (prs_Trial(2) + prs_Trial(3)) / 2D0 ) * sPhi           &
1207 !         &   - 2D0 * CcosPhi
1208 !
1209 !*****
1210 ! Aufstellen der Potentialfunktion
1211 !*****
1212 !
1213 ! g_Mogi = sqrt (xI1**2D0 - 3D0 * xI2 )           &
1214 !         &   - ( Prs(1) + alpha * (prs_Trial(2) + prs_Trial(3)) / 2D0 &
1215 !         &   + (prs_Trial(2) + prs_Trial(3)) / 2D0 ) * sPsi
1216 !
1217 ! Substitution:
1218 !
1219 ! g_Mogi = sqrt (J) - (I) * sPsi
1220 !
1221 ! mit:
1222 !     J =  xI1**2 - 3* xI2**2
1223 !     I =  Prs(1) + alpha * (prs_Trial(2) + prs_Trial(3)) / 2D0 +
1224 !         (prs_Trial(2) + prs_Trial(3)) / 2D0
1225
1226 !*****
1227 ! Ermittlung der Dehnungsrate durch Ableitung der Potentialfunktion,
1228 ! wie in Gl.(6.12) dargelegt.
1229 !*****
1230
1231 ! grad_g_Mogi() = dgdJ * (dI1dSig - 3 * dI2dSig) - dgdI * dIdSig
1232
1233 dgdJ = 1D0 / (2D0 * sqrt ( xI1_Trial**2D0 -3D0 * xI2_Trial))! Für alle
1234
1235 dI1dSig(1) = 2D0 * xI1_Trial           ! Für alle
1236 dI1dSig(2) = 2D0 * xI1_Trial
1237 dI1dSig(3) = 2D0 * xI1_Trial
1238
1239 dI2dSig(1) = (Prs_Trial(2) + Prs_Trial(3))
1240 dI2dSig(2) = (Prs_Trial(1) + 0.5D0 * Prs_Trial(2)           &
1241 !               &   + 0.5D0 * Prs_Trial(3))
1242 dI2dSig(3) = (Prs_Trial(1) + 0.5D0 * Prs_Trial(2) +           &
1243 !               &   0.5D0 * Prs_Trial(3))
1244

```

```
1245 Call addvec(dI1dSig, dI2dSig, 1D0, -3D0, 3, dJdSig) !(aus USRLIB)
1246
1247 dIdSig (1) = 1D0
1248 dIdSig (2) = 0.5D0 + Alpha * 0.5D0
1249 dIdSig (3) = 0.5D0 + Alpha * 0.5D0
1250
1251 dgdI = sPsi
1252
1253 Call addvec(dJdSig, dIdSig, dgdJ, -dgdI, 3, grad_g_Mogi3)!(aus USRLIB)
1254
1255 ! Übergabe auf 6 Dimensionen zur Multiplikation mit D
1256
1257 grad_g_Mogi(1) = grad_g_Mogi3(1)
1258 grad_g_Mogi(2) = grad_g_Mogi3(2)
1259 grad_g_Mogi(3) = grad_g_Mogi3(3)
1260 grad_g_Mogi(4) = 0D0
1261 grad_g_Mogi(5) = 0D0
1262 grad_g_Mogi(6) = 0D0
1263
1264 ! Berechnung der Vergleichsspannungsrate Prs_EQ_Mogi
1265 ! Prs_EQ_Mogi6 = D * grad_g_Mogi
1266
1267 Call matvec(D, 6, grad_g_Mogi, 6, Prs_EQ_Mogi6)      !(aus USRLIB)
1268
1269 ! Keine Scherspannung --> Ändern auf 3 Dimensionen
1270
1271     Do i = 1, 3                ! Übergabe für 3 Dimensionen
1272
1273         Prs_EQ_Mogi(i) = Prs_EQ_Mogi6(i)
1274
1275     End Do
1276
1277 !*****
1278 ! Skalieren der plastischen Vergleichsspannungsrate nach Gl.(6.9)
1279 !*****
1280
1281 ! Berechnung des plastischen Multiplikators
1282
1283     call Newton_Mogi (iAbort, Props, Prs_Trial, Prs_EQ_Mogi, &
1284                     & xLambda_Mogi)
1285
1286 !*****
1287 ! Ermittlung der resultierenden Spannung (nur elastisch)
1288 !*****
1289
1290     ! Prs = Prs_Trial - xLambda_DP * Prs_EQ_DP
1291     ! Übergabe Prs (Output)
1292
1293     Call addvec(Prs_Trial, Prs_EQ_Mogi, 1D0, -xLambda_Mogi, 3, Prs)
1294
1295 End if
1296
```

```

1297 !*****
1298 ! Ende Fehler im Kompressionsbereich
1299 !*****
1300 !*****
1301
1302 if (Prs(1) < Prs(2)) Then      ! Kontrolle des Ergebnisses aus Regular
1303
1304 !*****
1305 !*****
1306 ! FALL: Fehler im Extensionsbereich
1307 ! Prs(1) = Prs(2) > Prs(3)
1308 ! Aufgrund der konkaven Stelle in der Fließfläche wird dieser Teil
1309 ! nicht benötigt und wurde analog zu Mohr-Coulomb eingepfegt!!!
1310 !*****
1311
1312 ! Neue Initialisierung der Prädiktorspannung:
1313
1314     prs_Trial(1) = -s1
1315     prs_Trial(2) = -s2
1316     prs_Trial(3) = -s3
1317
1318     ! Prs(1) = Prs(2) > Prs(3)
1319
1320     ! Korrektur der Prädiktorspannung über Mittelwert nach Gl.(6.11)
1321
1322     prs_Trial(1) = (prs_Trial(1) + prs_Trial(2)) / 2D0
1323     prs_Trial(2) = prs_Trial(1)
1324     prs_Trial(3) = prs_Trial(3)
1325
1326 !*****
1327 ! Grenzbedingung
1328 !*****
1329
1330 ! Berechnung der Invarianten
1331
1332 !     xI1_Trial (bleibt identisch)
1333
1334     xI2_Trial = 0.25D0 * (prs_Trial(1)**2)           &
1335                & + 0.25D0 * (prs_Trial(2)**2)       &
1336                & + 0.5D0 * prs_Trial(1) * prs_Trial(2) &
1337                & + prs_Trial(1) * prs_Trial(3)       &
1338                & + prs_Trial(2) * prs_Trial(3)       &
1339 !
1340 ! f_Mogi = sqrt (xI1**2D0 - 3D0 * xI2 )           &
1341 !     & - ( prs_Trial(1) + prs_Trial(2)) / 2D0     &
1342 !     & + alpha * (prs_Trial(1) + prs_Trial(2)) / 2D0 &
1343 !     & + Prs(3)) * sPhi - 2D0 * CcosPhi
1344 !
1345 !*****
1346 ! Aufstellen der Potentialfunktion
1347 !*****
1348

```

```

1349 ! g_Mogi      =      sqrt ( J ) - ( I ) * sPsi
1350 !
1351 ! mit:
1352 !      J =      xI1**2 - 3* xI2**2
1353 !      I =      (prs_Trial(1) + prs_Trial(2)) / 2D0      &
1354 !      &      + alpha * (prs_Trial(1)                    &
1355 !      &      + prs_Trial(2)) / 2D0 + prs_Trial(3)
1356
1357 !*****
1358 ! Ermittlung der plastischen Dehnungsrate durch Ableitung der
1359 ! Potentialfunktion
1360 !*****
1361
1362 ! grad_g_Mogi() = dgdJ * ( dI1dSig - 3 * dI2dSig ) - dgdI * dIdSig
1363
1364 dgdJ = 1D0 / (2D0 * sqrt ( xI1_Trial**2D0 -3D0 * xI2_Trial))! Für alle
1365
1366 dI1dSig(1) = 2D0 * xI1_Trial      ! Für alle
1367 dI1dSig(2) = 2D0 * xI1_Trial
1368 dI1dSig(3) = 2D0 * xI1_Trial
1369
1370 dI2dSig(1) = (0.5D0 * Prs_Trial(1) + 0.5D0 * Prs_Trial(2)      &
1371      &      + Prs_Trial(3))
1372 dI2dSig(2) = ( 0.5D0 * Prs_Trial(1) + 0.5D0 * Prs_Trial(2)      &
1373      &      + Prs_Trial(3))
1374 dI2dSig(3) = ( Prs_Trial(1) + Prs_Trial(2) )
1375
1376 Call addvec(dI1dSig, dI2dSig, 1D0, -3D0, 3, dJdSig) !(aus USRLIB)
1377
1378 dIdSig (1) = 0.5D0 + Alpha * 0.5D0
1379 dIdSig (2) = 0.5D0 + Alpha * 0.5D0
1380 dIdSig (3) = 1D0
1381
1382 dgdI = sPsi
1383
1384 Call addvec(dJdSig, dIdSig, dgdJ, -dgdI, 3, grad_g_Mogi3)!(aus USRLIB)
1385
1386 ! Übergabe auf 6 Dimensionen zur Multiplikation mit D
1387
1388 grad_g_Mogi(1) = grad_g_Mogi3(1)
1389 grad_g_Mogi(2) = grad_g_Mogi3(2)
1390 grad_g_Mogi(3) = grad_g_Mogi3(3)
1391 grad_g_Mogi(4) = 0D0
1392 grad_g_Mogi(5) = 0D0
1393 grad_g_Mogi(6) = 0D0
1394
1395 ! Berechnung der plastischen Vergleichsspannungsrate Prs_EQ_Mogi
1396 ! Prs_EQ_Mogi6 = D * grad_g_Mogi
1397
1398      Call matvec(D, 6, grad_g_Mogi, 6, Prs_EQ_Mogi6)!(aus USRLIB)
1399
1400 !      Keine Scherspannung --> Ändern auf 3 Dimensionen

```

```

1401
1402     Do i = 1, 3         ! Übergabe für 3 Dimensionen
1403
1404         Prs_EQ_Mogi(i) = Prs_EQ_Mogi6(i)
1405
1406     End Do
1407
1408 !*****
1409 ! Skalieren der plastischen Vergleichsspannungsrate
1410 !*****
1411
1412 ! Berechnung des plastischen Multiplikators
1413
1414     call Newton_Mogi (iAbort, Props, Prs_Trial, Prs_EQ_Mogi, &
1415                    &     xLambda_Mogi)
1416
1417 !*****
1418 ! Ermittlung der resultierenden Spannung (nur elastisch)
1419 !*****
1420
1421     ! Prs = Prs_Trial - xLambda_DP * Prs_EQ_DP
1422     ! Übergabe Prs (Output)
1423
1424     Call addvec(Prs_Trial, Prs_EQ_Mogi, 1D0, -xLambda_Mogi, 3, Prs)
1425
1426 End if
1427
1428 !*****
1429 ! Ende Fehler im Extensionsbereich
1430 !*****
1431 !*****
1432
1433 100  Continue
1434
1435 ! Umrechnung der resultierenden Hauptnormalspannungen auf mechanische
1436 ! Konvention
1437
1438     s1 = -prs(1)
1439     s2 = -prs(2)
1440     s3 = -prs(3)
1441
1442 ! Umrechnung ins kartesische K0
1443
1444     Call carsig(s1, s2, s3, xn1, xn2, xn3, sig)    ! aus USRLIB
1445
1446 Return
1447
1448 End If         ! IDTask = 2
1449
1450 Return
1451
1452 End Subroutine

```

```
1453 !*****
1454 !*****
1455 ! Ende MMGC
1456 !*****
1457 !*****
1458 !_____
1459 !_____
1460
1461 Subroutine Newton_Mogi (iAbort, Props, Prs_Trial, Prs_EQ_Mogi, &
1462     &     xLambda_Mogi)
1463
1464 !*****
1465 !*****
1466 ! Dieses ist die in "MMGC" aufgerufene Subroutine Newton_Mogi zur
1467 ! iterativen Berechnung des plastischen Multiplikators xLambda_Mogi
1468 ! mit Hilfe des Newton-Verfahrens nach Gl.(6.9)
1469 !*****
1470
1471 ! Deklaration der Speicher
1472
1473 Implicit none      ! nur deklarierte Speicher sind erlaubt
1474
1475 !*****
1476
1477 Double Precision Props(*)      ! Benutzerdefinierte
1478                                ! Modellparameter (Vektor mit bis
1479                                ! zu 50 Dimensionen)
1480
1481 Double Precision Prs_Trial(3)   ! SigmaTrial (Vektor R3) (als
1482                                ! Hauptnormalspannung)
1483
1484 double Precision Prs_EQ_Mogi(3) ! Vergleichsspannungsrate
1485                                ! (3 Dimensionen)
1486
1487 double Precision xLambda_Mogi   ! plastischer Multiplikator
1488                                ! für MMGC
1489
1490 double Precision xLambda0_Mogi  ! plastischer Multiplikator
1491                                ! für MMGC
1492                                ! des vorherigen Schritts
1493
1494 double Precision Tol_Fehler     ! Fehlertoleranz für xLambda_Mogi
1495
1496 double Precision f_xLambda0_Mogi ! MMGC mit Lambda als Variable
1497
1498 double Precision dfdLambda0_Mogi ! Ableitung der MMGC nach Lambda
1499
1500 integer iAbort      ! Parameter um die Kalkulation zu stoppen (iAbort = 1)
1501
1502 integer i           ! Schrittnummer der Schleife
1503
1504 integer maxSchritte ! maximale Schrittzahl der Schleife
```

```

1505 !*****
1506
1507 ! Initialisierungen der Speicher
1508
1509 maxSchritte = 5000
1510
1511 Tol_Fehler = 1D-20
1512
1513 xLambda_Mogi = 0D0      ! Startwert --> f_xLambda > 0
1514
1515 !*****
1516
1517 Do i = 1, maxSchritte
1518
1519     xLambda0_Mogi = xLambda_Mogi
1520
1521     call update_Mogi (Props, Prs_Trial, Prs_EQ_Mogi, xLambda0_Mogi,&
1522                     &     f_xLambda0_Mogi, dfdLambda0_Mogi)
1523
1524     xLambda_Mogi = xLambda0_Mogi - f_xLambda0_Mogi / dfdLambda0_Mogi
1525
1526     if (abs(xLambda_Mogi - xLambda0_Mogi) <= Tol_Fehler)
1527
1528         Then
1529
1530             Go To 10
1531
1532         End If
1533
1534     if (i == maxSchritte) Then
1535
1536         Call ok_messagebox('Newton, wir haben ein Problem!')
1537
1538         iAbort = 1
1539
1540     End If
1541
1542 Return
1543
1544 End Do
1545 !*****
1546
1547 10  Continue
1548
1549 End Subroutine
1550 !*****
1551 ! Ende Newton_Mogi
1552 !*****
1553 !*****
1554
1555 Subroutine update_Mogi (Props, Prs_Trial, Prs_EQ_Mogi, xLambda0_Mogi,&
1556                       &     f_xLambda0_Mogi, dfdLambda0_Mogi)

```



```

1609 double Precision xI2_Prs_Trial_Lambda      ! 2.Invariante
1610                                           ! mit Prs_Trial_Lambda
1611
1612 double Precision f_xLambda0_Mogi          ! MMGC mit Prs_Trial_Lambda
1613
1614 double Precision dfdJ                      ! Ableitung der Wurzel nach Lambda
1615
1616 double Precision dI1dLambda                ! Ableitung I1 nach Lambda
1617
1618 double Precision dI2dLambda                ! Ableitung I2 nach Lambda
1619
1620 double Precision dJdLambda                 ! Ableitung Deviator gesamt
1621
1622 double Precision dIdLambda                 ! Ableitung hydrostatischer Anteil
1623
1624 double Precision dfdLambda0_Mogi          ! dJdLambda + dIdLambda
1625
1626 double Precision xLambda0_Mogi            ! Lambda des vorherigen Schrittes
1627
1628 integer i                                  ! Schritt in Schleife
1629
1630 !*****
1631 !*****
1632
1633 !
1634     ! holen der Interface-Werte
1635
1636     call  Interface_MMGC  (Props, G, xNu, C, Phi, Psi, alpha, &
1637                          &    sPhi, sPsi, CcosPhi, ejo)
1638 !
1639
1640 !*****
1641 ! Update der Spannungen
1642 !*****
1643
1644 Prs_Trial_Lambda(1) = Prs_Trial(1) - xLambda0_Mogi * Prs_EQ_Mogi(1)
1645
1646 Prs_Trial_Lambda(2) = Prs_Trial(2) - xLambda0_Mogi * Prs_EQ_Mogi(2)
1647
1648 Prs_Trial_Lambda(3) = Prs_Trial(3) - xLambda0_Mogi * Prs_EQ_Mogi(3)
1649
1650 !*****
1651 ! Berechnung der Invarianten mit neuen Spannungen
1652 !*****
1653
1654 ! 1.Invariante (I1)
1655
1656 xI1_Prs_Trial_Lambda = Prs_Trial_Lambda(1) + Prs_Trial_Lambda(2) +
1657 Prs_Trial_Lambda(3)
1658
1659 ! 2.Invariante (I2)
1660

```

```

1661 xI2_Prs_Trial_Lambda = Prs_Trial_Lambda(1) * Prs_Trial_Lambda(2) &
1662      &      + Prs_Trial_Lambda(2) * Prs_Trial_Lambda(3)&
1663      &      + Prs_Trial_Lambda(3) * Prs_Trial_Lambda(1)
1664
1665 !*****
1666 ! f_xLambda0_Mogi
1667 !*****
1668 ! Grenzbedingung f_Mogi = MMGC
1669
1670 !      f_Mogi =      sqrt (xI1**2D0 - 3D0 * xI2 )      &
1671 !      &      - ( prs(1) + alpha * prs(2) + prs(3) ) * sPhi &
1672 !      &      - 2D0 * CcosPhi
1673
1674 f_xLambda0_Mogi = sqrt (xI1_Prs_Trial_Lambda**2D0      &
1675      &      - 3D0 * xI2_Prs_Trial_Lambda )      &
1676      &      - (Prs_Trial_Lambda(1) + alpha *Prs_Trial_Lambda(2) &
1677      &      + Prs_Trial_Lambda(3)) * sPhi      &
1678      &      - 2D0 * CcosPhi
1679
1680 !*****
1681 ! dfdLambda0_Mogi ist die Ableitung der Grenzbedingung nach Lambda
1682 !*****
1683
1684 ! f_Mogi = sqrt (xI1**2D0 - 3D0 * xI2 ) &
1685 !      &      - prs(1) * sPhi - alpha * prs(2) * sPhi - prs(3) * sPhi &
1686 !      &      - 2D0 * CcosPhi
1687 !
1688 !      Substitution:
1689 !
1690 !      f_Mogi =      J
1691 !                  +I
1692 !                  -2D0 * CcosPhi
1693 !
1694 !      dfdLambda0_Mogi = dJdLambda + dIdLambda
1695 !
1696 ! mit:      dJdLambda = dfdJ * (dI1dLambda + dI2dLambda)
1697 !
1698 ! dJdLambda:
1699
1700      dfdJ = 1D0 / (2D0 * sqrt (xI1_Prs_Trial_Lambda**2      &
1701      &      -3D0 * xI2_Prs_Trial_Lambda))
1702
1703 dI1dLambda = 2D0 * xI1_Prs_Trial_Lambda * (-Prs_EQ_Mogi(1)      &
1704      &      -Prs_EQ_Mogi(2) - Prs_EQ_Mogi(3))
1705
1706 dI2dLambda = - 3D0 * (-Prs_Trial(1) * Prs_EQ_Mogi(2)      &
1707      &      -Prs_EQ_Mogi(1) * Prs_Trial(2)      &
1708      &      +2D0 * xLambda0_Mogi * Prs_EQ_Mogi(1) * Prs_EQ_Mogi(2) &
1709      &      -Prs_Trial(2) * Prs_EQ_Mogi(3)      &
1710      &      -Prs_EQ_Mogi(2) * Prs_Trial(3)      &
1711      &      +2D0 * xLambda0_Mogi * Prs_EQ_Mogi(2) * Prs_EQ_Mogi(3) &
1712      &      -Prs_Trial(3) * Prs_EQ_Mogi(1)      &

```

```
1713      &      -Prs_EQ_Mogi(3) * Prs_Trial(1)                                &
1714      &      +2D0 * xLambda0_Mogi * Prs_EQ_Mogi(3) * Prs_EQ_Mogi(1))
1715
1716 !*****
1717 ! GESAMT 1.Term
1718
1719 dJdLambda = dfdJ * (dI1dLambda + dI2dLambda)
1720
1721 !*****
1722
1723 ! dIdLambda:
1724
1725 dIdLambda = (Prs_EQ_Mogi(1) + Alpha * Prs_EQ_Mogi(2)          &
1726      &      + Prs_EQ_Mogi(3)) * sPhi
1727
1728 !*****
1729 ! GESAMT
1730
1731 dfdLambda0_Mogi = dJdLambda + dIdLambda
1732 !*****
1733
1734 End Subroutine
1735
1736 !*****
1737 ! Ende update_Mogi
1738 !*****
1739 !*****
```

B.4. Unterprogramm OKMSGIVE zur Ausgabe von Messageboxen

```
1 !*****
2 !*****
3 ! OKMSGIVF.f90 entspricht der Datei OKMSGIVF.for aus den von
4 ! Plaxis B.V. (2016) per Download zur Verfügung
5 ! gestellten udsm_examples_2016 und beinhaltet deren vorgegebene
6 ! Struktur zur Ausgabe von OK_Messageboxen in die Berechnungssoftware
7 ! PLAXIS 3D 2017
8 !
9 ! Erstellt mit MS. Visual Studio 2017
10 ! und Intel Compiler 19.1 für Intel 64 Visual Studio 2017 environment
11 !*****
12 !*****
13
14 Subroutine OK_MessageBox(t)
15     use dfwin
16     use dfwinty
17     integer (kind=Int_Ptr_Kind()) hWnd
18
19     character(*) t
20
21     character(len=256) :: msg, title
22
23 ! Display a messagebox with an OK button
24 ! Note that all strings must be null terminated for C's sake
25
26     msg = Trim(t) // char(0)
27     title = 'Hinweis' // char(0)
28
29     hWnd = 0
30
31     iret = MessageBox(hWnd,msg,title,MB_OK)
32
33     Return
34
35 End
```

B.5. Unterprogramm USRLIB als Programmbibliothek

```

1 !*****
2 !*****
3 ! USRLIB.f90 enthält unter anderem Funktionen der Datei USRLIB.for aus
4 ! den von Plaxis B.V. (2016) per Download zur Verfügung gestellten
5 ! udsm_examples_2016 sowie eigene und modifizierte Funktionen, die auf
6 ! diesen basieren.
7 !
8 ! Erstellt mit MS. Visual Studio 2017
9 ! mit Intel Compiler 19.1 for Intel 64 Visual Studio 2017 environment
10 !*****
11 !*****
12
13 !*****
14 ! Subroutine mzeror(r, k)
15 ! Function: To make a real array R with dimension K to zero
16 !*****
17     Subroutine mzeror(r, k)
18
19         Implicit Double Precision (A-H, O-Z)
20         Dimension r(*)
21
22         Do j = 1, k
23             r(j) = 0.0D0
24         End Do
25
26         Return
27     End Subroutine
28 !*****
29 ! Subroutine mzeroi(i, k)
30 ! Function: To make an integer array I with Dimension K to zero
31 !*****
32     Subroutine mzeroi(i, k)
33
34         Dimension i(*)
35
36         Do j = 1, k
37             i(j) = 0
38         End Do
39
40         Return
41     End Subroutine
42 !*****
43 ! Subroutine setrval(r, k, v)
44 ! Function: To fill a real array R with Dimension K with value V
45 !*****
46     Subroutine setrval(r, k, v)
47
48         Implicit Double Precision (A-H, O-Z)
49         Dimension r(*)

```

```
50
51     Do j = 1, k
52         r(j) = v
53     End Do
54
55     Return
56 End Subroutine
57 !*****
58 ! Subroutine setival(i, k, iv)
59 ! Function: To fill an integer array I with Dimension K with value IV
60 !*****
61     Subroutine setival(i, k, iv)
62
63         Implicit Double Precision (A-H, O-Z)
64         Dimension i(*)
65
66         Do j = 1, k
67             i(j) = iv
68         End Do
69
70         Return
71     End Subroutine
72 !*****
73 ! Subroutine copyivec(i1, i2, k)
74 ! Function: To copy an integer array I1 with Dimension K to I2
75 !*****
76     Subroutine copyivec(i1, i2, k)
77
78         Implicit Double Precision (A-H, O-Z)
79         Dimension i1(*), i2(*)
80
81         Do j = 1, k
82             i2(j) = i1(j)
83         End Do
84
85         Return
86     End Subroutine
87 !*****
88 ! Subroutine copyrvec(r1, r2, k)
89 ! Function: To copy a Double array R1 with Dimension K to R2
90 !*****
91     Subroutine copyrvec(r1, r2, k)
92         Implicit Double Precision (A-H, O-Z)
93         Dimension r1(*), r2(*)
94
95         Do j = 1, k
96             r2(j) = r1(j)
97         End Do
98
99         Return
100    End Subroutine
101
```

```

102 !*****
103 ! Logical Function is0arr
104     Logical Function is0arr(a, n)
105 !*****
106 ! Function: To check whether a real array contains only zero values.
107 !           When an array contains only zero's is might not need to be
108 !           written to the XXX file.
109 !           exit Function when first non-zero value occured or when
110 !           all elements are checked and are zero.
111 !
112 ! Input: A : array to be checked
113 !       N : number of elements in array that should be checked
114 !
115 ! Output : .TRUE.  when all elements are 0
116 !         .FALSE. when at least one element is not zero
117 !
118 ! Called by : Subroutine TOBXX
119
120     Implicit Double Precision (A-H, O-Z)
121     Dimension a(*)
122
123     is0arr = .False.
124     Do i = 1, n
125         If (a(i)/=0) Return
126     End Do
127     is0arr = .True.
128     Return
129 End Function
130 !*****
131 ! Logical Function is0iarr
132     Logical Function is0iarr(iarr, n)
133 !*****
134 ! Function: To check whether a integer array contains only
135 !           zero values. Similar to is0arr
136
137 ! Input:  IARR : array to be checked
138 !       N   : number of elements in array that should be checked
139 !
140 ! Output: .TRUE.  when all elements are 0
141 !         .FALSE. when at least one element is not zero
142 ! Called by : Subroutine TOBXX
143
144     Implicit Double Precision (A-H, O-Z)
145     Dimension iarr(*)
146
147     is0iarr = .False.
148     Do i = 1, n
149         If (iarr(i)/=0) Return
150     End Do
151     is0iarr = .True.
152     Return
153 End Function

```



```

154 !*****
155   Subroutine mulvec(v, f, k)
156 !*****
157 ! Function: To multiply a real vector V with dimension K by F
158 !
159   Implicit Double Precision (A-H, O-Z)
160   Dimension v(*)
161
162   Do j = 1, k
163     v(j) = f*v(j)
164   End Do
165
166   Return
167 End Subroutine
168 !*****
169   Subroutine matvec(xmat, im, vec, n, vecr)
170 !*****
171 ! Calculate VecR = xMat*Vec
172 !
173 ! I   xMat  : (Square) Matrix (IM,*)
174 ! I   Vec   : Vector
175 ! I   N     : Number of rows/columns
176 ! O   VecR  : Resulting vector
177
178   Implicit Double Precision (A-H, O-Z)
179   Dimension xmat(im, *), vec(*), vecr(*)
180
181   Do i = 1, n
182     x = 0
183     Do j = 1, n
184       x = x + xmat(i, j)*vec(j)
185     End Do
186     vecr(i) = x
187   End Do
188   Return
189 End Subroutine
190 !*****
191   Subroutine addvec(vec1, vec2, r1, r2, n, vecr)
192 !*****
193 ! Calculate VecR() = R1*Vec1()+R2*Vec2()
194 !
195 ! I   Vec1,
196 ! I   Vec2  : Vectors
197 ! I   R1,R2 : Multipliers
198 ! I   N     : Number of rows
199 ! O   VecR  : Resulting vector
200
201   Implicit Double Precision (A-H, O-Z)
202   Dimension vec1(*), vec2(*), vecr(*)
203
204   Do i = 1, n
205     x = r1*vec1(i) + r2*vec2(i)

```

```

206     vecr(i) = x
207     End Do
208     Return
209     End Subroutine
210 !*****
211     Double Precision Function dinprod(a, b, n)
212 !*****
213 ! Returns the Inproduct of two vectors
214 !
215 ! I   A,B   : Two vectors
216 ! I   N     : Used length of vectors
217
218     Implicit Double Precision (A-H, O-Z)
219     Dimension a(*), b(*)
220
221     x = 0
222     Do i = 1, n
223         x = x + a(i)*b(i)
224     End Do
225     dinprod = x
226     Return
227     End Function
228 !*****
229     Subroutine matmat(xmat1, id1, xmat2, id2, nr1, nc2, nc1, xmatr, idr)
230 !*****
231 ! Calculate xMatR = xMat1*xMat2
232 ! I   xMat1 : Matrix (Id1,*)
233 ! I   xMat2 : Matrix (Id2,*)
234 ! I   nr1   : Number of rows in resulting matrix (No rows in xMat1)
235 ! I   nc2   : Number of columns in resulting matrix (No cols in xMat2)
236 ! I   nc1   : Number of columns in matrix xMat1
237 !           = Number rows    in matrix xMat2
238 ! O   xMatR : Resulting matrix (IdR,*)
239
240     Implicit Double Precision (A-H, O-Z)
241     Dimension xmat1(id1, *), xmat2(id2, *), xmatr(idr, *)
242
243     Do i = 1, nr1
244         Do j = 1, nc2
245             x = 0
246             Do k = 1, nc1
247                 x = x + xmat1(i, k)*xmat2(k, j)
248             End Do
249             xmatr(i, j) = x
250         End Do
251     End Do
252
253     Return
254     End Subroutine
255 !*****
256     Subroutine matmatsq(n, xmat1, xmat2, xmatr)
257 !*****

```

```

258 ! Calculate xMatR = xMat1*xMat2 for square matrices, size n
259 ! I   n       : Dimension of matrices
260 ! I   xMat1  : Matrix (n,*)
261 ! I   xMat2  : Matrix (n,*)
262 ! O   xMatR  : Resulting matrix (n,*)
263
264     Implicit Double Precision (A-H, O-Z)
265     Dimension xmat1(n, *), xmat2(n, *), xmatr(n, *)
266
267     Do i = 1, n
268         Do j = 1, n
269             x = 0
270             Do k = 1, n
271                 x = x + xmat1(i, k)*xmat2(k, j)
272             End Do
273             xmatr(i, j) = x
274         End Do
275     End Do
276
277     Return
278 End Subroutine
279 !*****
280 Subroutine wrival(io, c, v)
281 !*****
282 ! Write (Double) value to file unit io (when io>0)
283
284     Implicit Double Precision (A-H, O-Z)
285     Character c*(*)
286
287     If (io<=0) Return
288
289     Write (io, *) c, v
290 100 Format (A, 3X, 1X, 1P, E12.5)
291     Return
292 End Subroutine
293 !*****
294 Subroutine wriivl(io, c, i)
295 !*****
296 ! Write (integer) value to file unit io (when io>0)
297
298     Implicit Double Precision (A-H, O-Z)
299     Character c*(*)
300
301     If (io<=0) Return
302
303     Write (io, *) c, i
304 100 Format (A, 3X, 1X, I6)
305     Return
306 End Subroutine
307 !*****
308 Subroutine wriivc(io, c, iv, n)
309 !*****

```

```

310 ! Write (integer) vector to file unit io (when io>0)
311
312     Character c*(*)
313     Dimension iv(*)
314
315     If (io<=0) Return
316
317     Write (io, *) c
318     Write (io, 100)(iv(i), i=1, n)
319 100  Format ((2(3X,5I4)))
320     Return
321 End Subroutine
322 !*****
323 Subroutine wrivec(io, c, v, n)
324 !*****
325 ! Write (Double) vector to file unit io (when io>0)
326 ! 6 values per line
327
328     Implicit Double Precision (A-H, O-Z)
329     Character c*(*)
330     Dimension v(*)
331
332     If (io<=0) Return
333
334     If (len_trim(c)<=6) Then
335         Write (io, 110) c, (v(i), i=1, n)
336     Else
337         Write (io, *) c
338         Write (io, 100)(v(i), i=1, n)
339     End If
340 100  Format ((2(1X,3(1X,1P,E10.3))))
341 110  Format (A, (T7,2(1X,3(1X,1P,E10.3))))
342     Return
343 End Subroutine
344 !*****
345 Subroutine wrivec5(io, c, v, n)
346 !*****
347 ! Write (Double) vector to file unit io (when io>0)
348 ! 5 values per line
349
350     Implicit Double Precision (A-H, O-Z)
351     Character c*(*)
352     Dimension v(*)
353
354     If (io<=0) Return
355
356     Write (io, *) c
357     Write (io, 100)(v(i), i=1, n)
358 100  Format (5(1X,1P,E12.5))
359     Return
360 End Subroutine
361

```

```

362 !*****
363   Subroutine wrimat(io, c, v, nd, nr, nc)
364 !*****
365 ! Write (Double) matrix to file unit io (when io>0)
366 ! 6 values per line
367
368   Implicit Double Precision (A-H, O-Z)
369   Character c*(*)
370   Dimension v(nd, *)
371
372   If (io<=0) Return
373
374   Write (io, *) c
375   Do j = 1, nr
376     Write (io, 100) j, (v(j,i), i=1, nc)
377   End Do
378 100   Format (I4, (T7,2(1X,3(1X,1P,E10.3))))
379   Return
380 End Subroutine
381 !*****
382   Subroutine matinvpiv(aorig, b, n)
383 !*****
384 ! Inversion of square matrices A, by Row-pivoting to B
385
386   Implicit Double Precision (A-H, O-Z)
387   Dimension aorig(n, *), b(n, *), a(:, :)
388   Allocatable :: a
389
390   Allocate (a(n,n)) ! No error checking!
391   Call copyrvec(aorig, a, n*n)
392   Call mzeror(b, n*n)
393   Do i = 1, n
394     b(i, i) = 1D0
395   End Do
396   Do i = 1, n
397     t = a(i, i)
398     ipiv = i
399     Do j = i + 1, n
400       If (abs(a(j,i))>abs(a(ipiv,i))) ipiv = j
401     End Do
402     If (ipiv/=i) Then
403       Do j = 1, n
404         x = a(i, j)
405         a(i, j) = a(ipiv, j)
406         a(ipiv, j) = x
407         x = b(i, j)
408         b(i, j) = b(ipiv, j)
409         b(ipiv, j) = x
410       End Do
411       t = a(i, i)
412     End If
413     Do j = 1, n

```

```

414         a(i, j) = a(i, j)/t
415         b(i, j) = b(i, j)/t
416     End Do
417     Do k = 1, n
418         If (k/=i) Then
419             t = a(k, i)
420             Do j = 1, n
421                 a(k, j) = a(k, j) - t*a(i, j)
422                 b(k, j) = b(k, j) - t*b(i, j)
423             End Do
424         End If
425     End Do
426 End Do
427 Deallocate (a)
428 Return
429 End Subroutine
430 !*****
431 Subroutine prnsig(iopt, s, xn1, xn2, xn3, s1, s2, s3, p, q)
432 !*****
433 ! To determine principal stresses and for iOpt=1 principal directions
434
435     Implicit Double Precision (A-H, O-Z)
436     Dimension s(*), xn1(*), xn2(*), xn3(*)
437
438     If (iopt==1) Then
439         Call eig_3(0, s, xn1, xn2, xn3, s1, s2, s3, p, q)
440         ! with Eigenvectors
441     Else
442         Call eig_3a(0, s, s1, s2, s3, p, q)
443         ! no Eigenvectors
444     End If
445     Return
446 End Subroutine
447 !*****
448 Subroutine eig_3(iopt, st, xn1, xn2, xn3, s1, s2, s3, p, q)
449
450     Implicit Double Precision (A-H, O-Z)
451     Dimension st(6), a(3, 3), v(3, 3), xn1(3), xn2(3), xn3(3)
452
453     ! Get Eigenvalues/Eigenvectors for 3*3 matrix
454     ! Wim Bomhof 15/11/'01
455     ! PGB : adaption to Principal stress calculation
456     !
457     ! Applied on principal stresses, directions
458     ! Stress vector St(): XX, YY, ZZ, XY, YZ, ZX
459
460     a(1, 1) = st(1) ! xx
461     a(1, 2) = st(4) ! xy = yx
462     a(1, 3) = st(6) ! zx = xz
463
464     a(2, 1) = st(4) ! xy = yx
465     a(2, 2) = st(2) ! yy

```

```
466     a(2, 3) = st(5) ! zy = yz
467
468     a(3, 1) = st(6) ! zx = xz
469     a(3, 2) = st(5) ! zy = yz
470     a(3, 3) = st(3) ! zz
471
472     ! Set V to unity matrix
473     v(1, 1) = 1
474     v(2, 1) = 0
475     v(3, 1) = 0
476
477     v(1, 2) = 0
478     v(2, 2) = 1
479     v(3, 2) = 0
480
481     v(1, 3) = 0
482     v(2, 3) = 0
483     v(3, 3) = 1
484
485     abs_max_s = 0.0
486     Do i = 1, 3
487         Do j = 1, 3
488             If (abs(a(i,j))>abs_max_s) abs_max_s = abs(a(i,j))
489         End Do
490     End Do
491     tol = 1D-20*abs_max_s
492     it = 0
493     itmax = 50
494     Do While (it<itmax .And.
495 abs(a(1,2))+abs(a(2,3))+abs(a(1,3))>tol)
496         it = it + 1
497         Do k = 1, 3
498             If (k==1) Then
499                 ip = 1
500                 iq = 2
501             Else If (k==2) Then
502                 ip = 2
503                 iq = 3
504             Else
505                 ip = 1
506                 iq = 3
507             End If
508             ! If (a(ip,iq) .Ne. 0.0) Then
509             If (abs(a(ip,iq))>1D-50) Then ! ongelijk nul ?
510                 tau = (a(iq,iq)-a(ip,ip))/(2.0*a(ip,iq))
511                 If (tau>=0.0) Then
512                     sign_tau = 1.0
513                 Else
514                     sign_tau = -1.0
515                 End If
516                 t = sign_tau/(abs(tau)+sqrt(1.0+tau*tau))
517                 c = 1.0/sqrt(1.0+t*t)
```

```

518         s = t*c
519         a1p = c*a(1, ip) - s*a(1, iq)
520         a2p = c*a(2, ip) - s*a(2, iq)
521         a3p = c*a(3, ip) - s*a(3, iq)
522         a(1, iq) = s*a(1, ip) + c*a(1, iq)
523         a(2, iq) = s*a(2, ip) + c*a(2, iq)
524         a(3, iq) = s*a(3, ip) + c*a(3, iq)
525         a(1, ip) = a1p
526         a(2, ip) = a2p
527         a(3, ip) = a3p
528         v1p = c*v(1, ip) - s*v(1, iq)
529         v2p = c*v(2, ip) - s*v(2, iq)
530         v3p = c*v(3, ip) - s*v(3, iq)
531         v(1, iq) = s*v(1, ip) + c*v(1, iq)
532         v(2, iq) = s*v(2, ip) + c*v(2, iq)
533         v(3, iq) = s*v(3, ip) + c*v(3, iq)
534         v(1, ip) = v1p
535         v(2, ip) = v2p
536         v(3, ip) = v3p
537
538         ap1 = c*a(ip, 1) - s*a(iq, 1)
539         ap2 = c*a(ip, 2) - s*a(iq, 2)
540         ap3 = c*a(ip, 3) - s*a(iq, 3)
541         a(iq, 1) = s*a(ip, 1) + c*a(iq, 1)
542         a(iq, 2) = s*a(ip, 2) + c*a(iq, 2)
543         a(iq, 3) = s*a(ip, 3) + c*a(iq, 3)
544         a(ip, 1) = ap1
545         a(ip, 2) = ap2
546         a(ip, 3) = ap3
547     End If ! a(ip,iq)<>0
548 End Do ! k
549 End Do ! While
550 ! principal values on diagonal of a
551 s1 = a(1, 1)
552 s2 = a(2, 2)
553 s3 = a(3, 3)
554 ! Derived invariants
555 P = (S1+S2+S3)/3
556 Q = Sqrt( ( (S1-S2)**2 + (S2-S3)**2 + (S3-S1)**2 ) / 2 )
557
558 ! Sort eigenvalues S1 <= S2 <= S3
559 is1 = 1
560 is2 = 2
561 is3 = 3
562 If (s1>s2) Then
563     t = s2
564     s2 = s1
565     s1 = t
566     it = is2
567     is2 = is1
568     is1 = it
569 End If

```



```
570     If (s2>s3) Then
571         t = s3
572         s3 = s2
573         s2 = t
574         it = is3
575         is3 = is2
576         is2 = it
577     End If
578     If (s1>s2) Then
579         t = s2
580         s2 = s1
581         s1 = t
582         it = is2
583         is2 = is1
584         is1 = it
585     End If
586     Do i = 1, 3
587         xn1(i) = v(i, is1) ! first column
588         xn2(i) = v(i, is2) ! second column
589         xn3(i) = v(i, is3) ! third column
590     End Do
591     Return
592 End Subroutine      ! Eig_3
593
594 Subroutine eig_3a(iopt, st, s1, s2, s3, p, q) ! xN1,xN2,xN3,
595     Implicit Double Precision (A-H, O-Z)
596     Dimension st(6), a(3, 3) ! V(3,3),xN1(3),xN2(3),xN3(3)
597
598     ! Get Eigenvalues (no Eigenvectors) for 3*3 matrix
599     ! Wim Bomhof 15/11/'01
600     !
601     ! Applied on principal stresses, directions
602     ! Stress vector XX, YY, ZZ, XY, YZ, ZX
603
604     a(1, 1) = st(1) ! xx
605     a(1, 2) = st(4) ! xy = yx
606     a(1, 3) = st(6) ! zx = xz
607
608     a(2, 1) = st(4) ! xy = yx
609     a(2, 2) = st(2) ! yy
610     a(2, 3) = st(5) ! zy = yz
611
612     a(3, 1) = st(6) ! zx = xz
613     a(3, 2) = st(5) ! zy = yz
614     a(3, 3) = st(3) ! zz
615
616     abs_max_s = 0.0
617     Do i = 1, 3
618         Do j = 1, 3
619             If (abs(a(i,j))>abs_max_s) abs_max_s = abs(a(i,j))
620         End Do
621     End Do
```

```

622     tol = 1D-20*abs_max_s
623     If (iopt==1) tol = 1D-50*abs_max_s
624     it = 0
625     itmax = 50
626     Do While(it<itmax .And. abs(a(1,2))+abs(a(2,3))+abs(a(1,3))>tol)
627
628         it = it + 1
629         Do k = 1, 3
630             If (k==1) Then
631                 ip = 1
632                 iq = 2
633             Else If (k==2) Then
634                 ip = 2
635                 iq = 3
636             Else
637                 ip = 1
638                 iq = 3
639             End If
640             ! If (a(ip,iq) .Ne. 0.0) Then ongelijk nul ?
641             If (abs(a(ip,iq))>1D-50) Then ! ongelijk nul ?
642                 tau = (a(iq,iq)-a(ip,ip))/(2.0*a(ip,iq))
643                 If (tau>=0.0) Then
644                     sign_tau = 1.0
645                 Else
646                     sign_tau = -1.0
647                 End If
648                 t = sign_tau/(abs(tau)+sqrt(1.0+tau*tau))
649                 c = 1.0/sqrt(1.0+t*t)
650                 s = t*c
651                 a1p = c*a(1, ip) - s*a(1, iq)
652                 a2p = c*a(2, ip) - s*a(2, iq)
653                 a3p = c*a(3, ip) - s*a(3, iq)
654                 a(1, iq) = s*a(1, ip) + c*a(1, iq)
655                 a(2, iq) = s*a(2, ip) + c*a(2, iq)
656                 a(3, iq) = s*a(3, ip) + c*a(3, iq)
657                 a(1, ip) = a1p
658                 a(2, ip) = a2p
659                 a(3, ip) = a3p
660
661                 ap1 = c*a(ip, 1) - s*a(iq, 1)
662                 ap2 = c*a(ip, 2) - s*a(iq, 2)
663                 ap3 = c*a(ip, 3) - s*a(iq, 3)
664                 a(iq, 1) = s*a(ip, 1) + c*a(iq, 1)
665                 a(iq, 2) = s*a(ip, 2) + c*a(iq, 2)
666                 a(iq, 3) = s*a(ip, 3) + c*a(iq, 3)
667                 a(ip, 1) = ap1
668                 a(ip, 2) = ap2
669                 a(ip, 3) = ap3
670             End If ! a(ip,iq)<>0
671         End Do ! k
672     End Do ! While
673     ! principal values on diagonal of a

```

```

674     s1 = a(1, 1)
675     s2 = a(2, 2)
676     s3 = a(3, 3)
677     ! Derived invariants
678     p = (s1+s2+s3)                                !I1
679     q = sqrt(1D0/6D0 * ((s1-s2)**2+(s2-s3)**2+(s3-s1)**2))
680     ! Wurzel J2
681
682     If (s1>s2) Then
683         t = s2
684         s2 = s1
685         s1 = t
686     End If
687     If (s2>s3) Then
688         t = s3
689         s3 = s2
690         s2 = t
691     End If
692     If (s1>s2) Then
693         t = s2
694         s2 = s1
695         s1 = t
696     End If
697     Return
698 End Subroutine
699 !*****
700     Logical Function lequal(a, b, eps)
701 !*****
702 ! Returns .TRUE. when two real values are (almost) equal,
703 !     .FALSE. otherwise
704 !
705 ! I   A,B   : Two real values to be compared
706 ! I   Eps   : Toleration (Magnitude ~= 1E-5)
707
708     Implicit Double Precision (A-H, O-Z)
709
710     lequal = .True.
711     If (a==b) Return
712     If (dabs(a-b)<0.5D0*eps*(dabs(a)+dabs(b)+eps)) Return
713     lequal = .False.
714     Return
715 End Function
716 !*****
717     Subroutine crossprod(xn1, xn2, xn3)
718 !*****
719 ! Returns cross product of xN1 and xN2
720 !
721 ! I   xN1,xN2 : Two basic vectors
722 ! O   xN3      : Resulting vector
723
724     Implicit Double Precision (A-H, O-Z)
725     Dimension xn1(*), xn2(*), xn3(*)

```

```

726
727     xn3(1) = xn1(2)*xn2(3) - xn1(3)*xn2(2)
728     xn3(2) = xn1(3)*xn2(1) - xn1(1)*xn2(3)
729     xn3(3) = xn1(1)*xn2(2) - xn1(2)*xn2(1)
730
731     Return
732 End Subroutine
733 !*****
734 Double Precision Function arcsin(x, ie)
735 !*****
736 ! Returns the Arc Sine of X
737 !
738 ! I X: Input value
739 ! Note: In stead of using default routine DASIN we use this one
740 !       because  $\sqrt{X^2}$  can be slightly beyond 1 and this will give
741 !       a RTE using DASIN(X)
742
743     Implicit Double Precision (A-H, O-Z)
744
745     ie = 0
746     s = (1-x*x)
747     ! If (S .Lt. -1E-10) Ie=1
748     ! If (S .Lt. -1E-10) Write(*,1) X,S
749     ! If (S .Lt. -1E-10) Write(2,1) X,S
750 100 Format (' ArcSin(', 1X, 1P, E13.5e3, ') , S =', 1X, 1P, E13.5e3)
751     If (s<0) s = 0
752     s = dsqrt(s)
753     arcsin = datan2(x, s)
754     Return
755 End Function ! function ArcSin
756 !*****
757 Subroutine carsig(s1, s2, s3, xn1, xn2, xn3, snew)
758 !*****
759 ! Returns the Cartesian stresses using the principal stresses S1..S3
760 ! and the principal directions
761 !
762 ! I S1..S3 : Principal stresses
763 ! I xn1..xn3 : Principal directions (xNi for Si)
764
765     Implicit Double Precision (A-H, O-Z)
766     Dimension xn1(*), xn2(*), xn3(*), snew(*)
767     Dimension sm(3, 3), t(3, 3), tt(3, 3), stt(3, 3)
768
769 ! Fill transformation (rotation) matrix
770 Do i = 1, 3
771     t(i, 1) = xn1(i)
772     t(i, 2) = xn2(i)
773     t(i, 3) = xn3(i)
774     tt(1, i) = t(i, 1)
775     tt(2, i) = t(i, 2)
776     tt(3, i) = t(i, 3)
777 End Do

```

```

778      ! Call MatTranspose(T,3,TT,3,3,3)
779
780      Call mzeror(sm, 9)
781      sm(1, 1) = s1
782      sm(2, 2) = s2
783      sm(3, 3) = s3
784
785      ! SMnew = T*SM*TT
786
787      Call matmat(sm, 3, tt, 3, 3, 3, 3, stt, 3)
788      Call matmat(t, 3, stt, 3, 3, 3, 3, sm, 3)
789      ! Call MatMatSq(3, SM, TT, STT )    ! STT = SM*TT
790      ! Call MatMatSq(3, T, STT, SM )    ! SM = T*STT
791
792 ! Extract cartesian stress vector from stress matrix
793
794      Do i = 1, 3
795          snew(i) = sm(i, i)
796      End Do
797      snew(4) = sm(2, 1)
798      snew(5) = sm(3, 2)
799      snew(6) = sm(3, 1)
800
801      Return
802  End Subroutine
803 !*****
804  Subroutine setveclen(xn, n, xl)
805 !*****
806      Implicit Double Precision (A-H, O-Z)
807      Dimension xn(*)
808
809      x = 0
810      Do i = 1, n
811          x = x + xn(i)**2
812      End Do
813      If (x/=0) Then
814          f = xl/sqrt(x)
815          Do i = 1, 3
816              xn(i) = xn(i)*f
817          End Do
818      End If
819      Return
820  End Subroutine
821 !*****
822  Subroutine HSB(iopt, st, xn1, xn2, xn3, hs1, hs2, hs3)
823 !*****
824 ! Funktion zur Überprüfung der Sortierung, zur Kontrolle auf einen
825 ! elastischen Jump-Over
826
827      Implicit Double Precision (A-H, O-Z)
828      Dimension st(6), a(3, 3), v(3, 3), xn1(3), xn2(3), xn3(3)
829

```

```

830      ! Berechnung der Hauptspannungen mit:
831      ! Get Eigenvalues/Eigenvectors for 3*3 matrix
832      ! Wim Bomhof 15/11/'01
833      ! PGB : adaption to Principal stress calculation
834      !
835      ! Applied on principal stresses, directions
836      ! Stress vector St(): XX, YY, ZZ, XY, YZ, ZX
837
838      a(1, 1) = st(1) ! xx
839      a(1, 2) = st(4) ! xy = yx
840      a(1, 3) = st(6) ! zx = xz
841
842      a(2, 1) = st(4) ! xy = yx
843      a(2, 2) = st(2) ! yy
844      a(2, 3) = st(5) ! zy = yz
845
846      a(3, 1) = st(6) ! zx = xz
847      a(3, 2) = st(5) ! zy = yz
848      a(3, 3) = st(3) ! zz
849
850      ! Set V to unity matrix
851      v(1, 1) = 1
852      v(2, 1) = 0
853      v(3, 1) = 0
854
855      v(1, 2) = 0
856      v(2, 2) = 1
857      v(3, 2) = 0
858
859      v(1, 3) = 0
860      v(2, 3) = 0
861      v(3, 3) = 1
862
863      abs_max_s = 0.0
864      Do i = 1, 3
865          Do j = 1, 3
866              If (abs(a(i,j))>abs_max_s) abs_max_s = abs(a(i,j))
867          End Do
868      End Do
869      tol = 1D-20*abs_max_s
870      it = 0
871      itmax = 50
872      Do While(it<itmax .And. abs(a(1,2))+abs(a(2,3))+abs(a(1,3))>tol)
873          it = it + 1
874          Do k = 1, 3
875              If (k==1) Then
876                  ip = 1
877                  iq = 2
878              Else If (k==2) Then
879                  ip = 2
880                  iq = 3
881              Else

```

```

882         ip = 1
883         iq = 3
884     End If
885     ! If (a(ip,iq) .Ne. 0.0) Then
886     If (abs(a(ip,iq))>1D-50) Then ! ongelijk nul ?
887         tau = (a(iq,iq)-a(ip,ip))/(2.0*a(ip,iq))
888         If (tau>=0.0) Then
889             sign_tau = 1.0
890         Else
891             sign_tau = -1.0
892         End If
893         t = sign_tau/(abs(tau)+sqrt(1.0+tau*tau))
894         c = 1.0/sqrt(1.0+t*t)
895         s = t*c
896         a1p = c*a(1, ip) - s*a(1, iq)
897         a2p = c*a(2, ip) - s*a(2, iq)
898         a3p = c*a(3, ip) - s*a(3, iq)
899         a(1, iq) = s*a(1, ip) + c*a(1, iq)
900         a(2, iq) = s*a(2, ip) + c*a(2, iq)
901         a(3, iq) = s*a(3, ip) + c*a(3, iq)
902         a(1, ip) = a1p
903         a(2, ip) = a2p
904         a(3, ip) = a3p
905
906         v1p = c*v(1, ip) - s*v(1, iq)
907         v2p = c*v(2, ip) - s*v(2, iq)
908         v3p = c*v(3, ip) - s*v(3, iq)
909         v(1, iq) = s*v(1, ip) + c*v(1, iq)
910         v(2, iq) = s*v(2, ip) + c*v(2, iq)
911         v(3, iq) = s*v(3, ip) + c*v(3, iq)
912         v(1, ip) = v1p
913         v(2, ip) = v2p
914         v(3, ip) = v3p
915
916         ap1 = c*a(ip, 1) - s*a(iq, 1)
917         ap2 = c*a(ip, 2) - s*a(iq, 2)
918         ap3 = c*a(ip, 3) - s*a(iq, 3)
919         a(iq, 1) = s*a(ip, 1) + c*a(iq, 1)
920         a(iq, 2) = s*a(ip, 2) + c*a(iq, 2)
921         a(iq, 3) = s*a(ip, 3) + c*a(iq, 3)
922         a(ip, 1) = ap1
923         a(ip, 2) = ap2
924         a(ip, 3) = ap3
925     End If ! a(ip,iq)<>0
926 End Do ! k
927 End Do ! While
928 ! principal values on diagonal of a
929 hs1 = a(1, 1)
930 hs2 = a(2, 2)
931 hs3 = a(3, 3)
932 return
933 end Subroutine

```

```

934 !*****
935     Subroutine sort(sta1, sta2, sta3, stb1, stb2, stb3, sort1, sort2)
936 !*****
937 ! Zuordnung der Hauptspannungskombination zu einem Sektor
938
939     Implicit Double Precision (A-H, O-Z)
940
941     if      (sta1>=sta2 .and. sta2>=sta3) then
942         sort1=1d0
943     else if (sta2>=sta1 .and. sta1>=sta3) then
944         sort1=2d0
945     else if (sta2>=sta3 .and. sta3>=sta1) then
946         sort1=3d0
947     else if (sta3>=sta2 .and. sta2>=sta1) then
948         sort1=4d0
949     else if (sta3>=sta1 .and. sta1>=sta2) then
950         sort1=5d0
951     else if (sta1>=sta3 .and. sta3>=sta2) then
952         sort1=6d0
953     end if
954
955     if      (stb1>=stb2 .and. stb2>=stb3) then
956         sort2=1d0
957     else if (stb2>=stb1 .and. stb1>=stb3) then
958         sort2=2d0
959     else if (stb2>=stb3 .and. stb3>=stb1) then
960         sort2=3d0
961     else if (stb3>=stb2 .and. stb2>=stb1) then
962         sort2=4d0
963     else if (stb3>=stb1 .and. stb1>=stb2) then
964         sort2=5d0
965     else if (stb1>=stb3 .and. stb3>=stb2) then
966         sort2=6d0
967     end if
968
969     return
970 end Subroutine
971 !*****
972     Subroutine DP1(sta1, sta2, sta3, stb1, stb2, stb3, &
973         &      dp1_1, dp1_2, dp1_3)
974 !*****
975 ! Berechnung des Durchstußpunktes DP1
976
977     Implicit Double Precision (A-H, O-Z)
978
979         p1=sta1
980         p2=sta2
981         p3=sta3
982
983         q1=stb1-sta1
984         q2=stb2-sta2
985         q3=stb3-sta3

```



```

986
987         dp1_1=((p1*q2)-(p2*q1))/(-q1+q2)
988         dp1_2=dp1_1
989         dp1_3=((p1*q3)-(p3*q1)-(p2*q3)+(p3*q2))/(-q1+q2)
990
991         return
992 End Subroutine
993 !*****
994     Subroutine DP2(sta1, sta2, sta3, stb1, stb2, stb3, &
995         &         dp2_1, dp2_2, dp2_3)
996 !*****
997 ! Berechnung des Durchstoßpunktes DP2
998
999     Implicit Double Precision (A-H, O-Z)
1000
1001         p1=sta1
1002         p2=sta2
1003         p3=sta3
1004
1005         q1=stb1-sta1
1006         q2=stb2-sta2
1007         q3=stb3-sta3
1008
1009         dp2_1=-((p1*q2)-(p2*q1)-(p1*q3)+(p3*q1))/(-q2+q3)
1010         dp2_3=((p2*q3)-(p3*q2))/(-q2+q3)
1011         dp2_2=dp2_3
1012
1013     return
1014 End Subroutine
1015 !*****
1016     Subroutine DP3(sta1, sta2, sta3, stb1, stb2, stb3, &
1017         &         dp3_1, dp3_2, dp3_3)
1018 !*****
1019 ! Berechnung des Durchstoßpunktes DP3
1020
1021     Implicit Double Precision (A-H, O-Z)
1022
1023         p1=sta1
1024         p2=sta2
1025         p3=sta3
1026
1027         q1=stb1-sta1
1028         q2=stb2-sta2
1029         q3=stb3-sta3
1030
1031         dp3_1=((p1*q3)-(p3*q1))/(-q1+q3)
1032         dp3_3=dp3_1
1033         dp3_2=((p1*q2)-(p2*q1)+(p2*q3)-(p3*q2))/(-q1+q3)
1034
1035     return
1036 End Subroutine
1037

```

```

1038 !*****
1039 Subroutine fmogilohde(dp1, dp2, dp3, alpha, phi, c, fmogil)
1040 !*****
1041 ! Berechnung von fmogi mit Subroutine fmogilohde
1042
1043     Implicit Double Precision (A-H, O-Z)
1044
1045     pi=3.141592654
1046     aIV1=    dp1+dp2+dp3
1047     aIV2=    dp1*dp2    &
1048     &      + dp1*dp3    &
1049     &      + dp2*dp3
1050     aWJV2=   sqrt(((dp1-dp2)**2d0 &
1051     &      +(dp1-dp3)**2d0    &
1052     &      +(dp2-dp3)**2d0)/6d0)
1053     aJV3=    (dp1-aIV1/3d0)*(dp2-aIV1/3d0)*(dp3-aIV1/3d0)
1054
1055     if (dp1==dp2 .and. dp2==dp3) then
1056         fmogil=(-aiv1/3d0)-(aiv1/2d0-aiv1/3d0)*alpha
1057
1058     else if (dp1/=dp2 .or. dp2/=dp3) then
1059         theta1=- (5.196152423d0*aJV3)
1060
1061         theta2=((2d0*(aWJV2**2d0)**(1.5d0)))
1062
1063         theta=(180/pi*asin(theta1/theta2))/3d0
1064
1065         if (theta1>0d0 .and. theta1>theta2) then
1066             theta=30d0
1067         else if (theta1<0d0 .and. theta1<-theta2)then
1068             theta=-30d0
1069         end if
1070
1071         term1= sqrt((aIV1**2d0)-3d0*aIV2)
1072
1073         term2= -aIV1*sin(phi*pi/180d0)*((2d0+alpha)/3d0)
1074
1075         term3= -aWJV2*sin(phi*pi/180d0)    &
1076         &      *((2d0*sin(theta*pi/180d0)    &
1077         &      *(alpha-1d0))/1.732d0)
1078
1079         term4= -2d0*c*cos(Phi*pi/180d0)
1080
1081         fmogil=term1+term2+term3+term4
1082
1083     end if
1084     return
1085 End Subroutine
1086
1087
1088
1089

```

```
1090 !*****
1091 Subroutine OK_MessageBox2(t,u,v)
1092 !*****
1093 ! MessageBox mit Werten für fmogi(dp,sig)
1094     use dfwin
1095     use dfwinty
1096     integer (kind=Int_Ptr_Kind()) hWnd
1097     character *(*) t
1098
1099     double precision u
1100     double precision v
1101
1102     character(len=256) :: a,b
1103     character(len=256) :: msg,title
1104
1105 ! Display a messagebox with an OK button
1106 ! Note that all strings must be null terminated for C's sake
1107
1108     write(a,*)u
1109     write(b,*)v
1110
1111     msg = trim(t)// ' fmogi_dp://'//Trim(a)// ' fmogi_sig:' &
1112     & // trim(b) //char(0)
1113
1114     title = 'Hinweis' // char(0)
1115
1116     hWnd = 0
1117     iret = MessageBox(hWnd,msg,title,MB_OK)
1118
1119     Return
1120 End Subrout
```


In der Schriftenreihe sind bisher folgende Hefte erschienen:

Forschungsberichte aus dem Fachbereich Bauwesen, Universität Essen Gesamthochschule, Herausgegeben vom Dekan des Fachbereiches 10 - Bauwesen, (in dieser Reihe erschienen als Heft 4)

Heft 1 von H. Nendza und anderen (1978):

Grundbau und Bodenmechanik an der Universität Essen - GHS. Ein Überblick zu Lehre, Forschung und praktischer Anwendung

(enthält Beiträge von: H. Nendza, H. G. Gabener, D. Placzek, D. Rollberg, J. Kramer u. R. Hütz, H. Nendza u. G. Lehmann, K. R. Ulrichs, M. Donel, G. Ehl, J. Kramer, G. Reuter, K. W. John, H.-G. Pühl) *(beim Fachgebiet vergriffen)*

**ohne Angabe über die Schriftenreihe und den Herausgeber,
Druck: Fotodruck J. Mainz, Aachen**

Heft 2 von Karl R. Ulrichs (1980):

Untersuchungen über das Trag- und Verformungsverhalten verankerter Schlitzwände in rolligen Böden, (Dissertation) *(beim Fachgebiet vergriffen)*

**Mitteilungen aus dem Fachgebiet Grundbau und Bodenmechanik,
Universität Essen - GHS, Herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. H. Nendza**

Heft 3 von Dietmar Placzek (1982):

Untersuchungen über das Schwindverhalten bindiger Böden bei der Trocknung unter natürlichen Randbedingungen (Dissertation) *(beim Fachgebiet vergriffen)*

Heft 4 mit Beiträgen verschiedener Autoren (1982):

Grundbau-Seminar 1982, Vorträge, enthält Beiträge von: H. Nendza, K. R. Ulrichs, J. Kramer, N. Veith, H.-G. Pühl, R. M. Spang, M. Donel, G. Reuter, R.H. Rübener, D. Placzek, H.-G. Gabener *(beim Fachgebiet vergriffen)*

Heft 5 von Helmut Nendza, Georg Foik (1982):

Vergleichende Untersuchungen über den Einsatz eines Messerschildes im oberflächennahen Tunnelbau

**Mitteilungen aus dem Fachgebiet Grundbau und Bodenmechanik, Universität -
Gesamthochschule - Essen, Herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. H. Nendza**

Heft 6 von Hans-Günter Gabener (1983):

Untersuchungen über die Anfangsgradienten und Filtergesetze bei bindigen Böden, (Dissertation) *(beim Fachgebiet vergriffen)*

Heft 7 von Helmut Nendza, Claus Nacke (1984):

Das Gebirgsverhalten beim Auffahren dicht beieinander liegender Tunnel im Bielefelder Juratonstein *(beim Fachgebiet vergriffen)*

Heft 8 von Georg Foik (1984):

Die Tragfähigkeit überwiegend horizontal Beanspruchter Fundamente auf dicht gelager-tem Sand, (Dissertation)

Heft 9 von Christoph Heckötter (1985):

Untersuchung zur Abschätzung des Steifemoduls von Grobschluffschüttungen mit Hilfe einfacher, bodenmechanischer Kennwerte, (Dissertation)

Heft 10 mit Beiträgen verschiedener Autoren (1985):

2. Grundbau-Seminar, Vorträge, mit Beiträgen von: H. Nendza, G. Foik, G. Ehl, K. R. Ulrichs, M. Donel, H.G. Gabener, J. Kramer, N. Veith, W. Göb, G. Lehmann, Ch. Heckötter

Forschungsberichte aus dem Fachbereich Bauwesen, Universität Gesamthochschule Essen, Herausgegeben vom Dekan des Fachbereiches 10 - Bauwesen, (in dieser Reihe erschienen als Heft 35)

Heft 11 von Helmut Nendza, Christoph Heckötter (1985):

Die Verwendung von aufbereitetem Bauschutt im Erd- und Straßenbau
(beim Fachgebiet vergriffen)

Mitteilungen aus dem Fachgebiet Grundbau und Bodenmechanik, Universität - Gesamthochschule - Essen, Herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. H. Nendza

Heft 12 von Helmut Nendza, Claus Nacke (1986):

Der Einfluss der Lagerungsdichte auf die Tragfähigkeit überwiegend horizontal beanspruchter und auf Sand gegründeter Fundamente

Heft 13 von Klaus Schulte (1988):

Wasserbewegung in ungesättigten feinkörnigen Böden, (Dissertation)

Mitteilungen aus dem Fachgebiet Grundbau und Bodenmechanik, Universität - Gesamthochschule - Essen, Herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. H. Nendza, Verlag Glückauf

Heft 14 von Claus Nacke (1988):

Horizontal belastete Fundamente mit geneigter Sohlfläche, (Dissertation)

Heft 15 mit Beiträgen verschiedener Autoren (1988):

3. Grundbau-Seminar 1988, Vorträge, mit Beiträgen von: H. Schnettler u. G. Fluck, J. Kramer, H. J. Gräfer, H. Nendza, K. R. Ulrichs, W. Sondermann, Chr. Heckötter, K. Schulte, D. Placzek

Heft 16 von Stefan Schmitz (1989):

Hydraulische Grundbruchsicherheit bei räumlicher Anströmung, (Dissertation)

Heft 17 von Fähran Al. Akhras (1992):

Tragfähigkeit schrägbelasteter Streifenfundamente mit vertikalem Sporn auf dicht gelagertem Sand, (Dissertation)

Heft 18 von Klaus Haubrichs (1993):

Widerstand eines dicht gelagerten Sandes gegen Beanspruchung infolge ausmittigschräg oder exzentrisch belasteter starrer Einzelfundamente, (Dissertation)

Mitteilungen aus dem Fachgebiet Grundbau und Bodenmechanik, Universität - Gesamthochschule Essen, Herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. W. Richwien, Verlag Glückauf

Heft 19 von Eugen W. Perau (1995):

Ein systematischer Ansatz zur Berechnung des Grundbruchwiderstands von Fundamenten, (Dissertation) *(beim Fachgebiet vergriffen)*

Heft 20 von Frank Könemann (1995):

Beeinflussung des Grundwasserspiegels durch unterirdische Bauwerke, (Dissertation) *(beim Fachgebiet vergriffen)*

Heft 21 von Lothar Maßmeier (1995):

Bemessungsgrundlagen der stationären Infiltration von Grundwasser - Untersuchungen an Sanden, (Dissertation)

Heft 22 von Hans-Gerd Schoen (1996):

Untersuchungen zur Gasdurchlässigkeit trockener und teilgesättigter Sande, (Dissertation)

Heft 23 mit Beiträgen verschiedener Autoren (1998):

Beiträge zur aktuellen Forschung in Grundbau und Bodenmechanik, mit Beiträgen von: W. Richwien u. E. Perau, H.-G. Schoen, E. Perau u. K. Golücke u. W. Richwien, E. Perau

Mitteilungen aus dem Fachgebiet Grundbau und Bodenmechanik, Universität Essen, Herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. W. Richwien und Prof. Dr.-Ing. M. Achmus, Verlag Glückauf

Heft 24 von Jörg Malkus (2000):

Untersuchung des Bodenverhaltens im Kontaktbereich von zyklisch axial belasteten Pfählen und Ankern, (Dissertation)

Heft 25 von Zhenggui Wang (2000):

Behaviour of soils and foundation structures under cyclic loads, (Dissertation)

Heft 26 von Jörg Mangels (2000):

Beschreibung von Strömungen im ungesättigten Boden, (Dissertation)

Mitteilungen aus dem Fachgebiet Grundbau und Bodenmechanik, Universität Essen, Herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. W. Richwien, Verlag Glückauf

Heft 27 von Kerstin Lesny (2001):

Entwicklung eines konsistenten Versagensmodells zum Nachweis der Standsicherheit flachgegründeter Fundamente, (Dissertation)

Heft 28 von Eugen Perau (2001):

Die Phasen des Bodens und ihre mechanischen Wechselwirkungen - Ein Konzept zur Mechanik teilgesättigter Böden, (Habilitationsschrift)

Heft 29 von Jens Wiemann, Kerstin Lesny, Werner Richwien (2002):

Gründung von Offshore-Windenergieanlagen Gründungskonzepte und geotechnische Grundlagen

Mitteilungen aus dem Fachgebiet Grundbau und Bodenmechanik, Universität Duisburg-Essen, Herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. W. Richwien, Verlag Glückauf

Heft 30 von Roland Weißmann (2003):

Die Widerstandsfähigkeit von Seedeichbinnenböschungen gegenüber ablaufendem Wasser, (Dissertation)

Heft 31 von Susanne Potthoff (2003):

Simulation von Zweiphasen-Strömungen im Boden Ein Programmsystem auf Basis der Gemischten Finite-Elemente-Methode, (Dissertation)

Heft 32 von Magnus Geduhn (2006):

Geokunststoffummantelte Vakuum-Säulen Ein Gründungsverfahren für sehr weiche bindige Böden, (Dissertation) *(beim Fachgebiet vergriffen)*

Mitteilungen aus dem Fachgebiet Grundbau und Bodenmechanik, Universität Duisburg-Essen, Herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. W. Richwien, VGE Verlag

Heft 33 von Jens Wiemann (2007):

Bemessungsverfahren für horizontal belastete Pfähle Untersuchungen zur Anwendbarkeit der p-y Methode, (Dissertation)

Heft 34 von Aloys Kisse (2008):

Entwicklung eines Systemgesetzes zur Beschreibung der Boden-Bauwerk-Interaktion flachgegründeter Fundamente auf Sand, (Dissertation)

Heft 35 von Patrik Lammertz (2008):

Ermittlung der Tragfähigkeit vibrierter Stahlrohrpfähle in nichtbindigen Böden, (Dissertation)

Heft 36 von Kerstin Lesny (2008):

Gründung von Offshore-Windenergieanlagen – Werkzeuge für Planung und Bemessung, (Habilitationsschrift)

Heft 37 von Peter Hinz (2009):

Beurteilung des Langzeitverhaltens zyklisch horizontal belasteter Monopile-Gründungen, (Dissertation)

**Report Geotechnik, Universität Duisburg-Essen,
Herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. E. Perau, VGE Verlag**

Heft 38 von Carsten Pohl (2010):

Witterungsbedingte Gefügebildung bei See- und Ästuardeichen und ihr Einfluss auf die Deichsicherheit, (Dissertation)

(Bestellung über www.uni-due.de/geotechnik)

Heft 39 von Lars Vavrina (2011):

Bewertung der Schutzfunktion bewachsener Deichbinnenböschungen gegen Erosion, (Dissertation)

(Bestellung über www.uni-due.de/geotechnik)

Heft 40 mit Beiträgen verschiedener Autoren (2013):

Untertage-Pumpspeicherwerke in Anlagen des Berg- und Tagebaus

mit Beiträgen von: E. Perau, U. Schreiber, A. Niemann, H.-J. Wagner, M. K. Koch u. P. Mark; A. J. Daou Pulido, V. Koppers, J. Lohmann, H.-J. Wagner u. M. K. Koch; A. Niemann, R. Alvarado Montero u. T. Wortberg; E. Perau, U. Schreiber u. H. Luick; U. Schreiber, H. Luick u. E. Perau; E. Perau u. S. Korn; D. Sanio u. P. Mark

(vergriffen)

Heft 41 mit Beiträgen verschiedener Autoren (2013):

Baugruben und Grundwasser, Tagungsband zum 4. RuhrGeo Tag am 21.03.2013 in Essen, mit Beiträgen von: E. Perau; B. Schuppener; A. Hettler; K. Borchert u. F. Köne-
mann;

A. Slotta u. E. Perau; L. Röchter u. T. Schanz; C. Heitz, A. Jechorek, u. A. Verhoeks;

B. Odenwald, H. Montenegro, R. Kauther u. M. Herten; D. Placzek, L. König u.

B. Bauckhage; G. Lottritz, M. Pulsfort u. P. Waldhoff; B. Böhle, F. Ludwig u.

R. Otterbein

(Bestellung über www.uni-due.de/geotechnik)

**Report Geotechnik, Universität Duisburg-Essen,
Herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. E. Perau, Shaker Verlag**
(Bestellung über www.shaker.de)

Heft 42 mit Beiträgen verschiedener Autoren (2017):

Wechselwirkung Baugrund – Bauwerk, Tagungsband zum 8. RuhrGeo Tag am 30.03.2017 in Essen, mit Beiträgen von: E. Perau; St. Kinzler, F. Sattler, E. Tafur u. Prof. M. Ziegler; C. Pohl u. D. Placzek; F. Könemann, St. Gutjahr u. B. Kosmann; A. Hettler; E. Perau u. A. Zillmann; B. Odenwald, K. Ratz u. H. Günther; D. König u. T. Schröder; C. Schmüdderich, D. König, P. Gußmann u. T. Schanz; L. Speier, K. van der Smissen u. F. Grübl; J. Schreiber u. A. Verhoeks; M. Stahl, N. Veith u. P. Knopf

Heft 43 von Randa Adel Mahmoud Arafa (2017):

Experimental Analysis of Impact Loading during Installation of Jack-up Units, (Dissertation)

Heft 44 mit Beiträgen verschiedener Autoren (2020):

Geotechnik und Wasser – Planung, Berechnung und Ausführung, Tagungsband zum 11. RuhrGeo-Tag am 26.03.2020 in Essen, mit Beiträgen von: E. Perau; A. Schlenkhoff; N. Meteling; S. Keßler u. R. Jagow-Klaff; W. Baille, K. Reinhardt, K. Sommer; L. Vollmert u. K. von Maubeuge; J. Overmans u. U. Estermann; B. Odenwald; C. Fierenkothen, M. Herten u. M. Pulsfort
(pandemiebedingt fand der 11. RuhrGeo-Tag tatsächlich erst am 24.03.2022 statt)

**Report Geotechnik, Universität Duisburg-Essen,
Herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. Eugen Perau**
als Open Access verfügbar über DuEPublico:

<https://duepublico2.uni-due.de/go/geotech>

ISSN: 2700-4848

Heft 45 von Nils Jasper Meteling (2020):

Parameteridentifikation bei Grundwasserströmung auf Basis analytisch formulierter Näherungslösungen, (Dissertation)

DOI: [10.17185/dupublico/71697](https://doi.org/10.17185/dupublico/71697)

URN: urn:nbn:de:hbz:464-20200429-091836-4

Heft 46 von Matthias Hausmann (2020):

Einfluss der Ringspaltverpressung auf die Beanspruchung der Tübbingröhre in Tunnellängsrichtung, (Dissertation)

DOI: [10.17185/dupublico/73992](https://doi.org/10.17185/dupublico/73992)

URN: urn:nbn:de:hbz:464-20210129-131438-0

Heft 47 von Antonia Dahmen (2022):

Zum Nachweis der Standsicherheit von Verbauwänden mit der Finite-Elemente-Methode, (Dissertation)

DOI: [10.17185/dupublico/76327](https://doi.org/10.17185/dupublico/76327)

URN: urn:nbn:de:hbz:464-20220725-112553-8

Heft 48 von Benedikt Kosmann (2023):

Berechnung der Stabilität tiefer Geothermiebohrungen bei echten triaxialen Spannungszuständen mit einer modifizierten Grenzbedingung nach Mogi-Coulomb, (Dissertation)

DOI: 10.17185/dupublico/78839

URN: urn:nbn:de:hbz:465-20230807-072118-7

Außerhalb der Reihe ist im Shaker-Verlag erschienen:

Lesny, K., Perau, E. (2015): Bodenmechanisches Praktikum, 13. Auflage, Shaker Verlag,
(Bestellung über www.shaker.de)

Berechnung der Stabilität tiefer Geothermiebohrungen bei echten triaxialen Spannungszuständen mit einer modifizierten Grenzbedingung nach Mogi-Coulomb

Um tiefe geothermische Ressourcen erschließen zu können, sind tiefe Bohrungen erforderlich, welche ein hohes Risiko bezüglich der Stabilität aufweisen. Eine Beurteilung der Stabilität kann nur durch numerische Berechnungen erfolgen, die geeignete Stoffmodelle zur Beschreibung der Gesteinsfestigkeit erfordern.

In dieser Arbeit wird daher auf Basis von Stoffmodellen der Einfluss der Gesteinsfestigkeit auf die Stabilität von Geothermiebohrungen untersucht. Um dabei den Einfluss dreidimensionaler Spannungszustände – die drei unterschiedlich große Hauptspannungen aufweisen – auf die Gesteinsfestigkeit zu untersuchen, wird die Grenzbedingung Mogi-Coulomb, in welcher auch der Einfluss der mittleren Hauptspannung Berücksichtigung findet, verwendet. Durch eine in dieser Arbeit vorgenommene Modifizierung kann diese noch besser an die Versuchsergebnisse aus echten Triaxialversuchen angepasst werden. Insbesondere werden der Einfluss der eingehenden Materialparameter sowie deren Gewinnung aus Laborversuchen und die Konvexität der Grenzbedingung behandelt. Um numerische Berechnungen durchführen zu können, wird die modifizierte Grenzbedingung Mogi-Coulomb in einem elastoplastischen Stoffmodell implementiert, welches als User-Defined-Soil-Model in der FEM-Software PLAXIS 3D verwendet wird.

Schlussendlich zeigen numerische Untersuchungen an gestützten Bohrlöchern den Einfluss der mittleren Hauptspannung auf die Bohrlochstabilität. Wonach eine Vernachlässigung der mittleren Hauptspannung unter tatsächlich vorherrschenden echten triaxialen Bedingungen unvermittelt zu einer Überschätzung der Gesteinsfestigkeit führen kann.

- ▶ Felsmechanik, Bohrlochstabilität, numerische Berechnung, Stoffmodelle
- ▶ Gesteinsfestigkeit, mittlere Hauptspannung, echte Triaxialversuche
- ▶ Grenzbedingungen, Mogi-Coulomb, Parametergewinnung, Konvexität