

Konzeptionierung und Umsetzung einer Entwicklungsumgebung für den Einsatz kooperierender Drohnen für den Lasttransport

Von der Fakultät für Ingenieurwissenschaften,
Abteilung Maschinenbau und Verfahrenstechnik der

Universität Duisburg-Essen

zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Ingenieurwissenschaften

Dr.-Ing.

genehmigte Dissertation

von

Lukas Herrmann

aus

Heilbronn

Gutachter:

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Dr. h.c. Dieter Schramm

Prof. Dr.-Ing. Markus Bröcker

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Alexander Malkwitz

Tag der mündlichen Prüfung: 22.05.2023

Danksagung

Diese Arbeit entstand in Kooperation mit dem Lehrstuhl für Mechatronik der Universität Duisburg-Essen während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Fakultät Mechanik und Elektronik der Hochschule Heilbronn. Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr.-Ing. h.c. Dieter Schramm, der mir das Vertrauen entgegenbrachte, die vorliegende Arbeit durchzuführen. Außerdem gilt ihm mein Dank für die wertvollen Anregungen und das Überlassen dringend benötigter Bauteile. Seitens der Hochschule Heilbronn gilt mein Dank Herrn Prof. Dr.-Ing. Markus Bröcker der mir stets alle Möglichkeiten zur freien wissenschaftlichen Arbeit gegeben hat. Auch möchte ich meinem Drittgutachter Herrn Prof. Dr.-Ing. Alexander Malkwitz für sein Interesse an meiner Arbeit und für die Erstellung des Gutachtens danken.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Tobias Bruckmann möchte ich für die stets anregenden Diskussionen und Impulse danken, die mir eine große Hilfe bei der Ausrichtung dieser Arbeit waren. Ein Dankeschön auch an Herrn Roland Boumann für seine unermüdliche Unterstützung vor allem in der letzten Phase meiner Arbeit.

Meinen Kollegen an der Hochschule Heilbronn danke ich für die gemeinsame Zeit und Unterstützung. Besonders gilt mein Dank Herrn Dr.-Ing. Jens Klaski für die Unterstützung bei der Fertigung von 3D-Druckteilen.

Abschließend gilt ein herzliches Dankeschön meiner Familie und im Besonderen meiner Frau Katharina. Sie alle waren mir über die Jahre ein sehr großer Rückhalt und haben mich zu jeder Zeit aus vollem Herzen unterstützt.

Heilbronn, im Juni 2023

Lukas Herrmann

Kurzfassung

Nachdem Drohnen im Freizeitsektor bereits seit vielen Jahren weit verbreitet sind, ergeben sich auch im industriellen Umfeld immer mehr Einsatzmöglichkeiten. Dies liegt unter anderem daran, dass die verfügbaren Systeme bezüglich ihrer Nutzlast und ihrer maximalen Flugdauer immer leistungsfähiger werden. Einige Beispiele für den professionellen Einsatz von Drohnen sind deren Verwendung in der Filmindustrie als Kameraträger, in der Agrarwirtschaft zum Ausbringen von Dünger oder im Bausektor zur Überwachung einer Baustelle. Besonders die Tatsache, dass es sich bei Drohnen um ungebundene Roboter handelt, welche sich frei im Raum bewegen können, verschafft ihnen große Vorteile. Hinzu kommt, dass sie sich einfach bedienen und sehr präzise steuern lassen. Da es sich bei Drohnen um nicht eigenstabile Systeme handelt, ist gerade Letzteres keine Selbstverständlichkeit. Das Ziel, eine stabile Fluglage zu erreichen und Drohnen präzise zu steuern, gelingt nur durch das Zusammenspiel aller Teilgebiete der Mechatronik. Dies ist mit ein Grund dafür, dass Drohnen seit Beginn der 90er-Jahre bis heute ein beliebtes Forschungsgebiet sind. Besonders wichtige Teilaspekte sind die Sensorik oder Aktuatorik, die Entwicklung mathematischer Simulationsmodelle und der Entwurf geeigneter Regelungsalgorithmen. Jüngste Entwicklungen beschäftigen sich zunehmend mit der Untersuchung kooperierender Drohnen, zum Beispiel für den gemeinsamen Transport einer Nutzlast. Die Komplexität und der Entwicklungsaufwand für derartige Drohnensysteme erhöhen sich im Vergleich zur Betrachtung einer einzelnen Drohne stark. Um zukünftige Entwicklungen zu beschleunigen und zu vereinfachen, ist es sinnvoll, eine gemeinsame Ausgangsbasis zu schaffen. Die Betrachtung neuer Systeme soll dann stets nach der gleichen Vorgehensweise erfolgen und der Entwickler wird im Idealfall bei den einzelnen Teilschritten der Entwicklung optimal unterstützt.

In dieser Arbeit werden die notwendigen Grundlagen für die Betrachtung unterschiedlicher Drohnen und Drohnensysteme in einer gemeinsamen Entwicklungsumgebung geschaffen. Hierfür wird zunächst ein Überblick über das Forschungsgebiet der Drohnen gegeben. Dazu gehört unter anderem die Betrachtung unterschiedlicher Drohnenkonfigurationen, die Analyse der zugrunde liegenden mathematischen Modelle und deren Modelltiefe, ein Überblick über verwendete Entwicklungsumgebungen sowie der eigentliche Hardwareaufbau von Drohnen im Entwicklungsstadium. Im Besonderen wird der bisherige Stand bei der Modellbildung von Multikopterantrieben erfasst, indem Messungen an aktuell verfügbaren Reglern durchgeführt und analysiert werden. Dabei zeigt sich, dass die Antriebe ein nichtlineares Systemverhalten aufweisen. Die häufig verwendete Beschreibung als ein proportional wirkendes Verzögerungsglied erster Ordnung ist damit unzulänglich. Aus dieser Analyse ergeben sich die zu erarbeitenden Grundlagen dieser Arbeit. Dazu gehören

- der Entwurf eines Gleichungssystems für die Beschreibung einer möglichst großen Anzahl von unterschiedlichen Drohnenkonfigurationen,
- die Erweiterung des Gleichungssystems für kooperierende Drohnen,
- die Untersuchung und mathematische Beschreibung der Antriebseinheit eines Multikopters sowie
- der Aufbau einer Entwicklungsumgebung mit dem Ziel, die Entwicklung zu beschleunigen indem die Komplexität reduziert und die Vorgehensweise vereinheitlicht wird.

Der erste Schritt für eine gemeinsame Basis stellt ein einheitliches Gleichungssystem zur Beschreibung unterschiedlicher Drohnen dar. Die Vorgehensweise wird dabei von den Grundlagen der Modellbildung über die zugrunde liegende Idee bis hin zu einem allgemeingültigen Gleichungssystem ausführlich dargestellt. Das resultierende Gleichungssystem ermöglicht es, das dynamische Mehrkörpermodell einer Drohne rein intuitiv aufgrund ihres geometrischen Aufbaus zu implementieren. Es bietet außerdem die notwendigen Voraussetzungen, um alle relevanten physikalischen Effekte zu berücksichtigen. Viele davon werden jedoch in dieser Arbeit nicht explizit behandelt, da hierzu bereits zahlreiche Arbeiten existieren. Ein besonderes Augenmerk wird hingegen auf die Betrachtung des Multikopterantriebs gelegt, da hierzu kaum Literatur vorhanden ist. Aufbauend auf den Modellen für eine einzelne Drohne werden die notwendigen Erweiterungen betrachtet, um das Gleichungssystem auch für Drohnensysteme nutzbar zu machen. Die Implementierung der Gleichungssysteme wird abschließend skizziert.

Im Anschluss an die mechanische Modellbildung werden die Multikopterantriebe ausführlich behandelt. Die Ausführungen beschränken sich dabei auf permanent-erregte Synchronmaschinen, da diese bei Multikoptern die dominierende Variante sind. Ziel ist der Entwurf einer Regelung, welche der Antriebseinheit ein deterministisches lineares Verhalten aufprägt. Hierfür wird zunächst die Modellbildung der Antriebseinheiten ausführlich erläutert. Daran anschließend wird der Hardwareaufbau des Motorreglers, der implementierte PI-Drehzahlregler in Kombination mit einer flachheitsbasierten Vorsteuerung sowie die notwendige Parameteridentifikation ausführlich thematisiert. Die abschließende Betrachtung von Messergebnissen zeigt, dass das gewünschte Ziel mit einem erhöhten Aufwand erreicht werden kann.

Um das entwickelte Gleichungssystem sowohl in der Simulation als auch in der Praxis umsetzen zu können, bedarf es einer geeigneten Entwicklungsumgebung. Die vorgestellte Hard- und Softwareumgebung bietet durch ihre Bestandteile wie beispielsweise einer automatischen Code-Generierung, einer echtzeitfähigen 3D-Visualisierung, der Verwendung unterschiedlicher Eingabegeräte sowie der Einbindung von Prüfständen optimale Möglichkeiten für ein Rapid Control Prototyping von Drohnen und Drohnensystemen. Der modulare Aufbau der Entwicklungsumgebung ist Voraussetzung dafür, dass sämtliche Bestandteile unabhängig voneinander weiterentwickelt werden können.

Die Entwicklungsumgebung wird in dieser Arbeit für den Entwurf von Simulationsmodellen für unterschiedliche Drohnen wie zum Beispiel dem klassischen Quadrocopter, einem Trikopter mit schwenkbaren Antriebseinheiten und Weiteren genutzt. Um einen Vergleich zu ermöglichen, werden alle Drohnenmodelle mit demselben Regelungskonzept der exakten Linearisierung ausgelegt. Die dargestellten Ergebnisse zeigen das erwartete Verhalten der Drohnen auf und dienen als Validierung für die Gleichungssysteme. Eine praktische Validierung erfolgt durch zwei Prüfstandsexperimente. Darüber hinaus wird die Anwendung der Entwicklungsumgebung für kooperierende Drohnen beispielhaft für den Transport einer gemeinsamen Last auf einer Baustelle dargestellt. Ziel ist die Errichtung des Mauerwerks für ein Gebäude, indem die dafür notwendigen Steine von ihrer Start- zu ihrer Zielposition transportiert werden. Die Optimierung der Flugbahnen erfolgt mit Hilfe eines Optimierers, der ausführlich vorgestellt wird. Für einen Seilroboter wurden hierzu bereits relevante Arbeiten an der Universität Duisburg-Essen durchgeführt und dienen für das Drohnensystem als Vergleich. Die Optimierungsergebnisse werden erfolgreich in der Simulation überprüft und mit denen eines Seilroboters verglichen.

Abstract

Since drones have been widely used in the leisure sector for many years, the possible fields of industrial applications are also gradually increasing. This is partly due to the fact that the available systems are becoming increasingly more powerful in terms of their payload and maximum flight duration. Some examples of the professional use of drones are their use in the film industry as camera carriers, in the agricultural industry for spreading fertilizer or in the construction sector for monitoring a building site. Especially the fact that drones are non-stationary robots which can move freely in space offers great advantages to the user. Moreover, they are easy to handle and can be controlled very precisely. Since drones are not inherently stable systems, the latter in particular cannot be taken for granted. The goal of achieving stable flight and controlling drones precisely can only be achieved through the interaction of all fields of mechatronics. This is one of the reasons why drones have been a popular field of research since the early 1990s. Particularly important aspects are the sensor and actuator technology, the mathematical modelling and the design of suitable control algorithms. Recent developments for instance are dealing with the investigation of cooperating drones that work together to transport heavy payloads. The complexity of such drone systems is much more complex than that of individual drones and thus their development needs even more time. To accelerate and simplify future developments, it makes sense to create a common approach. The development process for drones and drone systems should then always follow the same procedure which optimally supports the developer in each individual development step.

In this thesis, the fundamentals for the development of different drones and drone systems in a common development environment are established. For this purpose, the first step is an overview of the research field of drones. This includes, among other things, the consideration of different drone configurations, the analysis of the underlying mathematical models and their model depth, an overview of used development environments as well as the actual hardware design of drones in the development stage. In particular, the state of the art in modeling multicopter drives is surveyed by performing and analyzing measurements on currently available controllers. The outcome is that the multicopter drives exhibit nonlinear system behavior. The frequently used description as a linear first-order lag system is thus inadequate. The fundamentals of this thesis result from this analysis. This includes

- the derivation of a system of equations for the description of a large number of different multicopter configurations,
- the extension of the system of equations for cooperating drones,

- the investigation and mathematical description of the multicopter drives and
- the implementation of a development environment with the goal of accelerating the development by reducing complexity and unifying the procedure.

The first step towards a common approach is a uniform system of equations for the description of different types of drones. The derivation of the system of equations is presented in detail, starting with the basics of mechanics and the underlying idea. The resulting system of equations makes it possible to intuitively set up the simulation model for the multibody system dynamics based on the geometric structure of a drone. The equation system fulfills the requirements to consider all relevant physical effects. However, many of these are not discussed explicitly in this thesis, as numerous works already exist on this subject. Therefore, special attention is paid to the consideration of the multicopter drives, since almost no literature is available on this topic so far. The necessary extensions to the system of equations for use with cooperating drones are also considered. The implementation of the systems of equations is outlined.

Following the mechanical modeling, the multicopter drives are discussed in detail. The explanations are limited to permanent magnet synchronous motors, since these are the dominant variant for multicopters. The aim is to design a closed-loop system which imposes a deterministic linear behavior on the multicopter drives. For this purpose, the mathematical modeling of the multicopter drives is first explained. Afterwards the hardware design of the electronic speed controller, the implemented PI speed controller in combination with a flatness-based control as well as the necessary parameter identification are presented in detail. The final consideration of measurement results shows that the desired goal of a deterministic linear behavior can be achieved with increased effort.

In order to be able to implement the system of equations both in simulation and in practice, an appropriate development environment is required. The presented hardware and software environment enables optimal possibilities for rapid control prototyping of drones and drone systems. The development environment includes components such as an automatic code generation, a real-time capable 3D visualization, the use of different input devices as well as the integration of test benches. The modular structure of the development environment is a prerequisite for the fact that all components can be further developed independently of each other.

In this thesis the development environment is used to create and test simulation models for different types of drones such as the classic quadcopter, a tricopter with tilting rotors and others. To allow a comparison, all drone models are designed with the same control concept of exact linearization. The presented results show the expected behavior of the drones and serve as validation for the system of equations. A practical validation is done using two test bench experiments. Moreover the application of the development environment for cooperating drones is illustrated by transporting a common payload on a construction site. The goal is to erect the

masonry for a building by transporting the necessary bricks from their starting position to their target position. The optimization of the trajectories in between is done with the help of an optimizer, which is presented in detail. Relevant work on this has already been carried out for a cable robot at the University of Duisburg-Essen and serves as a comparison for the drone system. The optimization results are successfully verified in the simulation and compared with those of the cable robot.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	xv
Tabellenverzeichnis	xix
Nomenklatur	xxi
1 Einleitung	1
1.1 Definition der Problemstellung	1
1.2 Stand der Technik und Literaturübersicht	5
1.3 Zielsetzung	13
1.4 Aufbau der Arbeit	15
2 Modellbildung für Multikoptersysteme	19
2.1 Grundlagen der Modellbildung von Mehrkörpersystemen	19
2.1.1 Kinematik eines Systems starrer Körper	19
2.1.2 Kinetik eines Systems starrer Körper	29
2.2 Modellbildung für Multikopter	33
2.2.1 Grundsätzliche Überlegungen	33
2.2.2 Dynamik eines Multikopters	35
2.3 Parametrierung und Implementierung der Multikoptermodelle	41
2.3.1 Betrachtung der Trägerplatte	41
2.3.2 Betrachtung des Basisauslegers	44
2.3.3 Programmstruktur für die Simulation	48
2.4 Modell kooperierender Drohnen	51
3 Entwicklung einer dynamischen und effizienten Antriebseinheit für Multikopter	57
3.1 Übersicht und Einordnung	57
3.2 Theoretische Grundlagen der Synchronmaschine	60
3.2.1 Aufbau der permanenterregten Synchronmaschine	60
3.2.2 Stranggleichungen für eine dreiphasige Synchronmaschine	61
3.2.3 Mathematische Beschreibung der Synchronmaschine	64
3.3 Entwicklung des Motorreglers	71
3.3.1 Ansteuerung des Motors	71
3.3.2 Hardwarelayout und Softwarearchitektur	77
3.4 Parameteridentifikation	80
3.5 Drehzahlregelung der Antriebseinheit	90
3.5.1 Dynamik des Multikopterantriebs	90
3.5.2 Flachheitsbasierte Vorsteuerung für eine hohe Effizienz	91
3.5.3 Drehzahlmessung	96

3.5.4	Entwurf eines PI-Zustandsreglers	100
3.6	Messergebnisse	101
4	Topologie und Aufbau der Testumgebung	107
4.1	Topologie der Entwicklungsumgebung	107
4.1.1	Grundlegende Darstellung der Systemarchitektur	107
4.1.2	Systemarchitektur eines Multikopters	110
4.2	Mechanischer Aufbau der Prüfstände und Multikopter	115
5	Analyse verschiedener Multikoptermodelle	119
5.1	Grundlagen des Reglerentwurfs	119
5.2	Betrachtung des Einarmsystems	127
5.3	Betrachtung eines unteraktuierten Quadropters	135
5.4	Betrachtung eines vollaktuierten Triopters	143
5.5	Betrachtung überaktuierter Multikopter	148
5.5.1	Quadropters mit schwenkbaren Motoreinheiten	150
5.5.2	Oktokopter mit räumlich angeordneten Auslegern	155
5.6	Vergleich der unterschiedlichen Multikoptermodelle	158
6	Trajektorienplanung für Bauprozesse mit Multikoptern	163
6.1	Trajektorienplanung mit Hilfe eines Optimierers	163
6.1.1	Formulierung des Testszenarios	164
6.1.2	Aufbau des Optimierers	167
6.1.3	Definition des Optimierungsproblems	169
6.2	Betrachtung der Optimierungsparameter	171
6.2.1	Optimierung der Seilkräfte	172
6.2.2	Berechnung der inversen Dynamik einer Drohne	174
6.2.3	Wichtige Eigenschaften eines Seilroboters	176
6.2.4	Vermeidung von Objekt- und Seilkollisionen	178
6.3	Transport einer Nutzlast mit einem Quadropters	184
6.4	Transport einer Nutzlast mit drei Quadropters	195
6.5	Vergleich zwischen einem Seilroboter und einem Drohnensystem	202
7	Zusammenfassung und Ausblick	211
7.1	Zusammenfassung und wissenschaftlicher Beitrag der Arbeit	211
7.2	Zukünftige Arbeiten	216
	Literaturverzeichnis	219
A	Betrachtung der permanenterregten Synchronmaschine	235
A.1	Motordaten	235
A.2	Mathematische Beschreibung der Luftspaltfelder	236
A.2.1	Felderregerkurve der Statorwicklung	237
A.2.2	Rotormagnetfeld	240
A.3	Berechnung des Drehmoments	244
B	Reglerauslegung für den Quadropters	251

C	Komponenten und technische Daten der Robotersysteme	255
C.1	Technische Daten der Lastdrone	255
C.2	Technische Daten des Seilroboters	257

Abbildungsverzeichnis

1.1	Produktentstehungsprozess in der Bauteilfertigung mit Hilfe von CAx-Systemen	1
1.2	Seilroboter für das automatisierte Errichten eines Gebäudes	3
1.3	Darstellung unterschiedlicher Multikoptermodelle	6
1.4	Sprungantworten eines Poly-Tec-Reglers	7
1.5	Sprungantworten des gesteuerten Reglers YGE-LV35T	8
1.6	Sprungantworten des drehzahlgeregelten Motorreglers YGE-LV35T	9
1.7	Erweiterter digitaler Regelkreis	12
1.8	Entwurf einer Entwicklungsumgebung für Multikopter und Multikoptersysteme	15
2.1	Definition wichtiger Vektoren zur Beschreibung von Systemen starrer Körper	20
2.2	Beschreibung der Lage eines starren Körpers	21
2.3	Definition der Translations- und der Winkelgeschwindigkeit eines starren Körpers	24
2.4	Topologie eines Multikopters in offener Baumstruktur	35
2.5	Definition der notwendigen Vektoren zur Beschreibung von Gelenken	38
2.6	Varianten des Auslegers A_1 mit schwenkbarer Motoreinheit	39
2.7	Vektoren zur Beschreibung der Trägerplatte und mögliche Lagerungen	41
2.8	Definition benötigter Vektoren zur Beschreibung eines Basisauslegers	44
2.9	Eingeprägte Kräfte und Momente am Ausleger	47
2.10	Symbolische Berechnung eines Quadropters in MATLAB®	49
2.11	Schema zur numerischen Simulation verschiedener Multikoptermodelle	50
2.12	Transport einer Last mit Multikoptern	52
3.1	Schematischer Aufbau des verwendeten Motors MT 4008-12 KV 600	60
3.2	Ersatzschaltbild für einen Strang einer Synchronmaschine und Prinzipskizze der Verhältnisse zwischen Stator und Rotor	62
3.3	Ersatzschaltbild einer Synchronmaschine in einer Dreieck- und Sternschaltung	64
3.4	Transformation der Stranggrößen \mathbf{x}_{uvw} in das $\alpha\beta$ - und das dq-Koordinatensystem	68
3.5	Pulsweitenmodulation durch Vergleich eines Trägersignals mit einem wertdiskreten Sollwertsignal	72
3.6	Symmetrierte Sinusmodulation	74
3.7	Flat-Top-Modulation mit und ohne Nachlauf	75
3.8	Erfassen der Nullposition	76
3.9	Aufbau des Motorreglers mit Bezeichnung der wichtigsten Bauteile	77

3.10	Aufbau der kompletten Antriebseinheit	78
3.11	Programmablaufplan des Motorreglers	79
3.12	Messung der Auftriebskraft	80
3.13	Ermittlung des Widerstandsmoments der Antriebseinheit	81
3.14	Messung des Strangwiderstands	82
3.15	Bestimmung des verketteten Permanentmagnetflusses	83
3.16	Messung der Sprungantwort zur Bestimmung der Stranginduktivität	83
3.17	Drehzahl- und Gleichstromkennfeld für den Motor MT4008	84
3.18	Ermittelte Eigeninduktivität der PMSM und berechneter Verlauf der Kurve mit maximalen Drehmoment pro Ampere	86
3.19	Ersatzschaltbild des Stators mit Berücksichtigung der Ummagneti- sierungsverluste	87
3.20	Ermittelte Eigeninduktivität der PMSM und berechneter Verlauf der Kurve mit maximalem Wirkungsgrad unter Berücksichtigung zusätzlicher Verluste	88
3.21	Sollspannungen im dq-Koordinatensystem für ein maximales Dreh- moment pro Ampere und einen maximalen Wirkungsgrad	89
3.22	Vergleich verschiedener Methoden zur Berechnung von Zeitableitun- gen	95
3.23	Blockschaltbild der flachheitsbasierten Vorsteuerung	95
3.24	Vergleich verschiedener Sprungantworten für das gesteuerte System	96
3.25	Vergleich verschiedener Filterkonzepte zur Drehzahlerfassung	98
3.26	Blockschaltbild des verwendeten PI-Beobachters	98
3.27	Geschätzte Motordrehzahl unter Verwendung des PI-Beobachters .	100
3.28	Blockschaltbild des verwendeten PI-Reglers	101
3.29	Vergleich des Stromverbrauchs und des Wirkungsgrads für verschie- dene Drehzahlregler	102
3.30	Verlustbetrachtung verschiedener PWM-Verfahren mit dem 3Phase- Regler	102
3.31	Sprungantwort mit vorgegebener Zeitkonstante $T_{P1} = 40$ ms	104
3.32	Sprungantwort mit vorgegebener Zeitkonstante $T_{P1} = 20$ ms	104
3.33	Sprungantwort für eine Drehrichtungsumkehr und eine Verzögerung mit einer vorgegebenen Zeitkonstante von $T_{P1} = 20$ ms	104
4.1	Übergeordnete Topologie der Entwicklungsumgebung	108
4.2	Topologie des Multikopter-Prüfstands	111
4.3	Typische Programmstruktur für den Einplatinencomputer	112
4.4	Programmablauf des STM32 NUCLEO-F429ZI	113
4.5	Mechanischer Aufbau des Quadropters	115
4.6	Aufbau eines Auslegers mit starrer und drehbarer Motoreinheit . .	116
4.7	Mechanischer Aufbau der verwendeten Prüfstände	118
5.1	Blockschaltbild einer Trajektorienfolgeregelung mit zwei Freiheits- graden	126

5.2	Solltrajektorien für den Simulationsvergleich unterschiedlicher Multikopter	126
5.3	Blockschaltbild des Simulationsmodells für das Einarmsystem . . .	128
5.4	Ermittlung der Reibparameter für das Einarmsystem	129
5.5	Untersuchung der Gleichgewichtslage für das Einarmsystem	131
5.6	Stabilitätsanalyse der Ruhelagen für das Einarmsystem	132
5.7	Regelungskonzept für das Einarmsystem	133
5.8	Simulations- und Messergebnis für das Einarmsystem	134
5.9	Blockschaltbild des Simulationsmodells des Quadropters	135
5.10	Einfluss der Motordynamik auf den Quadropter	137
5.11	Regelungskonzept für die Stabilisierung eines Quadropters	138
5.12	Messergebnisse für die Stabilisierung des Quadropters auf dem Kugelgelenkprüfstand	139
5.13	Simulationsergebnis der Bahnfolgeregelung des Quadropters . . .	142
5.14	Verlauf wichtiger Größen für die Bahnfolgeregelung des Quadropters	143
5.15	Blockschaltbild des Simulationsmodells eines vollaktuierten Triopters	144
5.16	Verlauf wichtiger Größen des vollaktuierten Triopters in Gleichgewichtslagen um die x -Achse	146
5.17	Dynamische Erweiterung der Regelkreisstruktur	147
5.18	Simulationsergebnis der Bahnfolgeregelung des vollaktuierten Triopters	149
5.19	Verlauf wichtiger Größen für die Bahnfolgeregelung des vollaktuierten Triopters	149
5.20	Simulationsergebnis für die Rotation des vollaktuierten Triopters .	149
5.21	Blockschaltbild des Simulationsmodells eines Quadropters mit schwenkbaren Motoreinheiten	151
5.22	Verlauf wichtiger Größen des überaktuierten Quadropters in Gleichgewichtslagen um die x -Achse	153
5.23	Simulationsergebnis der Bahnfolgeregelung des überaktuierten Quadropters	154
5.24	Verlauf wichtiger Größen für die Bahnfolgeregelung des überaktuierten Quadropters	154
5.25	Simulationsergebnis für die Rotation des überaktuierten Quadropters	154
5.26	Blockschaltbild des Simulationsmodells eines überaktuierten Oktokopters mit acht starren Antrieben	155
5.27	Rotorwinkelgeschwindigkeiten des überaktuierten Oktokopters in Gleichgewichtslagen um die x -Achse	157
5.28	Simulationsergebnis der Bahnfolgeregelung des überaktuierten Oktokopters	159
5.29	Verlauf wichtiger Größen für die Bahnfolgeregelung des überaktuierten Oktokopters	159
5.30	Simulationsergebnis für die Rotation des überaktuierten Oktokopters	159
6.1	Einsatzszenario eines Drohnensystems auf einer Baustelle	164

6.2	Schematischer Aufbau des Bahnplaners	168
6.3	Berücksichtigung von Hindernissen durch den Optimierer	178
6.4	Methodik zur Erkennung einer Seilkollision	180
6.5	Transport einer Nutzlast mit einem Quadrocopter	184
6.6	Validierung der inversen Dynamik eines Drohnensystems	189
6.7	Stellgrößenverläufe zur Validierung der inversen Dynamik	189
6.8	Detaillierte Betrachtung einer eindimensionalen Bewegung für ein Drohnensystem	190
6.9	Einflussgrößen auf die inverse Dynamik für den Transport einer Nutzlast mit einem Quadrocopter	191
6.10	Optimierte Referenztrajektorie für den Transport einer Nutzlast mit einem Quadrocopter	193
6.11	Referenzverläufe für den Transport einer Nutzlast mit einem Qua- drocopter	193
6.12	Simulationsergebnis für den Transport eines Steins mit einem Qua- drocopter	194
6.13	Transport einer Nutzlast mit drei Quadrocoptern	195
6.14	Optimierte Bahnkurve für den Transport einer Nutzlast mit drei Quadrocoptern	199
6.15	Referenzverläufe wichtiger Größen für die optimierte Bahnkurve des Drohnensystems mit drei Quadrocoptern	200
6.16	Simulationsergebnis für den Verlauf der Plattformtrajektorie	202
6.17	Optimierungsergebnis für den Seilroboter	205
6.18	Optimierungsergebnis für das Drohnensystem	205
6.19	Optimierter Seilkraftverlauf für den Seilroboter	206
6.20	Referenzverläufe für die optimierte Bahnkurve des Drohnensystems mit drei Quadrocoptern	208
A.1	Darstellung der Verhältnisse zwischen Stator und Rotor	237
A.2	Fourierreihendarstellung des Statormagnetfelds mit den dazugehö- rigen Amplituden der Grund- und Oberwellen	240
A.3	Verlauf des Luftspaltflusses	241
A.4	Fourierreihendarstellung des Rotormagnetfelds mit den dazugehö- rigen Amplituden der Grund- und Oberwellen	242

Tabellenverzeichnis

2.1	Parametrierung von Drehbewegungen	23
2.2	Modellparameter für verschiedene Multikoptertopologien	50
4.1	Übersicht der verwendeten Sensoren	114
4.2	Physikalische und geometrische Parameter der einzelnen Teilkörper eines Multikopters	117
5.1	Gegenüberstellung verschiedener Multikoptertopologien	160
6.1	Transportablauf für einen Stein	165
6.2	Roboterparameter für den Transport einer Last mit einem Quadro- kopter	185
6.3	Optimierungsparameter für das Drohnensystem	192
6.4	Optimierungsparameter für den Seilroboter	204
A.1	Parameter der permanenterregten Synchronmaschine MT4008-12 KV 600	236
C.1	Komponenten der Lastdrone	255
C.2	Technische Daten der Lastdrone	256
C.3	Parameter des Seilroboters	257

Nomenklatur

Lateinische Buchstaben

a_i	Koeffizienten eines Polynoms oder einer Differentialgleichung
a_T	Tastgrad oder auch Aussteuergrad
\mathbf{a}	Vektor der translatorischen Beschleunigung
$\hat{\mathbf{a}}$	Beschleunigungsvektor des starren Körpers
$\bar{\mathbf{a}}^{\text{rel}}$	explizit von der Zeit abhängige translatorische Gelenkbeschleunigung
$\hat{\bar{\mathbf{a}}}^{\text{rel}}$	explizit von der Zeit abhängige Gelenkbeschleunigung
\mathbf{A}	lineare Systemmatrix
b	Anzahl holonomer Bindungen in einem System
b_{ij}	Abstand der Punkte i und j in y -Richtung des Basisauslegers
$\mathbf{b}_{jx}, \mathbf{b}_{jy}, \mathbf{b}_{jz}$	Basisvektoren des kartesischen Koordinatensystems \mathcal{K}_j
\mathbf{b}_{Pj}	körperfester Vektor vom Ursprung O_j zu einem beliebigen Punkt P_j von Körper K_j
\mathbf{b}_{Sj}	körperfester Vektor vom Ursprung O_j zum Schwerpunkt von Körper K_j
\mathbf{B}	Eingangsmatrix
\mathbf{B}_j	Basis des Koordinatensystems von Körper K_j
\mathbf{B}_δ	Luftspaltfeld
c_T	Auftriebskraftbeiwert
c_W, c_R, c_0	Widerstandsbeiwert
\mathbf{c}	Vektor von einem Körper-Bezugspunkt zu einer Gelenkachse
\mathbf{C}	Bindungsmatrix impliziter Gelenkbindungen
d_R, d_S	Durchmesser Rotor/Stator
\mathbf{d}_{ji}	Vektor von einer Gelenkachse i zum Koordinatenursprung O_j

D_δ	Entkopplungsmatrix zur exakten Linearisierung
e	Einheitsvektor
e	Regelabweichung
E	Einheitsmatrix
f	Anzahl der Freiheitsgrade
F_A	Auftriebskraft
f^e, f^c, f^z	Vektor der eingprägten Kräfte, der Kreisel- und Corioliskräfte sowie der Reaktionskräfte
$\hat{f}^e, \hat{f}^c, \hat{f}^z$	Kraftwinder der eingprägten Kräfte, der Kreisel- und Corioliskräfte und der Reaktionskräfte
f_R	Vektor aller an einem Endeffektor angreifenden Seilkräfte
g	Erdbeschleunigung
g	Vektor der impliziten Bindungen
G	Jacobi-Matrix eines Gelenks
h_{ij}	Abstand der Punkte i und j in z -Richtung des Basisauslegers
H	Matrix in der kinematischen Differentialgleichung
i_d, i_q	Strangstrom im dq-Koordinatensystem
$i_{S,x}$	Strangstrom
I_{DC}	Gleichstrom zum Motorregler
J	Jacobi-Matrix der expliziten Bindungen
J_M	Trägheitsmoment Motor
k_I	Verstärkungsfaktor für den I-Anteil des PI-Zustandsreglers
K	Verstärkungsfaktoren für den Lageregler einer Drohne
k	Rückführverstärkungsvektor des PI-Zustandsreglers
l_{ij}	Abstand der Punkte i und j in x -Richtung des Basisauslegers
L_h	Hauptinduktivität eines Strangs
L_S	Stranginduktivität im dq-Koordinatensystem
l	Seilvektor
L	Drehimpuls
L_a^k	Lie-Ableitung k -ter Ordnung

\mathbf{L}_i	Parameter des PI-Zustandsbeobachters
m	Masse
\mathbf{M}	Massenmatrix
n_c	Anzahl der gezählten Encoder-Schritte
n_M	Motordrehzahl in Umdrehungen pro Sekunde
n_K, n_D	Anzahl Körper, Anzahl Drohnen
n_S	Anzahl der verwendeten Stützpunkte einer Trajektorie
\mathbf{n}	Gelenkachse mit $ \mathbf{n} = 1$
O_j	Ursprung des Koordinatensystems von Körper K_j
p	Polpaarzahl
\mathbf{p}	Impuls
P_i, P_{zi}	i -te kontinuierliche beziehungsweise zeitdiskrete Polstelle eines Systems
P_V	Verlustleistung
\mathbf{p}	Vektor der Euler-Parameter
\mathbf{q}	Vektor der Minimalkoordinaten
R_C	Ersatzwiderstand Eisenverluste
R_S	Strangwiderstand
$\hat{\mathbf{r}}$	Lagevektor des starren Körpers
\mathbf{r}_{ji}	Vektor vom Ursprung O_i nach O_j
\mathbf{r}_{Pj}	Vektor vom Ursprung O_0 zu einem beliebigen Punkt P_j von Körper K_j
\mathbf{r}_{Sj}	Vektor vom Ursprung O_0 zum Schwerpunkt von Körper K_j
\mathbf{R}	Rotationstensor
s	komplexe Frequenz
\mathbf{s}	Vektor der Minimalgeschwindigkeiten
t	Zeit
t_t	Transitionszeit einer Trajektorie
T	Periodendauer
T_A	Abtastzeit

T_F	Filterzeitkonstante
T_M	Dominierende Zeitkonstante für die Antriebseinheit
T_{Pi}	i -te Zeitkonstante des Motorreglers
T_S	Dominierende Zeitkonstante für den Servomotor
\mathbf{T}	Drehmatrix
\mathbf{T}_{Ai}	Drehmatrix für den i -ten Ausleger einer Drohne
\mathbf{T}_m	Transformationsmatrix einer modalen Transformation
\mathbf{T}_P	Transformationsmatrix der Parktransformation
u_{Batt}	Batteriespannung
u_d, u_q	Strangspannung im dq-Koordinatensystem
u_{Mi}, u_{Si}	Eingangsgröße für den i -ten Motor/Servomotor einer Drohne
$u_{S,x}$	Strangspannung
U_{Batt}	Batteriespannung
U_{DC}	Gleichspannung am Motorregler
\mathbf{u}	Vektor der Eingangsgrößen
v_{ARR}	Wert bei dem der Zähler des Mikrocontrollers zurückgesetzt wird
\mathbf{v}	Vektor der translatorischen Geschwindigkeit
$\hat{\mathbf{v}}$	Geschwindigkeitsvektor des starren Körpers
$\bar{\mathbf{v}}^{\text{rel}}$	explizit von der Zeit abhängige translatorische Gelenkgeschwindigkeit
$\bar{\hat{\mathbf{v}}}^{\text{rel}}$	explizit von der Zeit abhängige Gelenkgeschwindigkeit
\mathbf{V}	Versatzmatrix
w, \mathbf{w}	Führungsgröße oder Führungsgrößenvektor
\mathbf{W}	Wegematrix
\mathbf{x}	Zustandsvektor
\mathbf{y}_{lin}	Vektor der flachen Ausgänge
\mathbf{y}_{Rt}	Vektor der Referenztrajektorien
z	komplexe Variable für zeitdiskrete Systeme
\mathbf{z}	Zustandsgrößenvektor

Griechische Buchstaben

α	Kardan-Winkel
α_B	Parameter zur numerischen Stabilisation nach Baumgarte
β	Kardan-Winkel
β_B	Parameter zur numerischen Stabilisation nach Baumgarte
γ	Kardan-Winkel
γ_S	Umfangswinkel Stator
δ	Offset bei der Anpassung von Pulsmustern
η	Wirkungsgrad
Θ	Trägheitstensor
λ	Vektor der homogenen Lösung eines linearen Gleichungssystems
κ	Term in impliziter Gelenkbindung
τ^e, τ^c, τ^z	eingepprägtes Moment, Kreiselmoment und Reaktionsmoment
τ_D	Summe der wirkenden Haft- und Gleitreibung an der permanenterregten Synchronmaschine
τ_{Mi}	inneres Moment der permanenterregten Synchronmaschine
τ_R	Reibmoment im Gelenk G_1
τ_{Si}	inneres Moment des Servomotors
τ_W	Widerstandsmoment an der permanenterregten Synchronmaschine
\boldsymbol{v}	Einheitsvektor in Seilrichtung
φ	Drehwinkel
φ	Drehzeiger
Φ	Drehzeiger einer infinitesimalen Drehung
Ψ_S, Ψ_R	Magnetischer Fluss im Stator beziehungsweise Rotor
Ψ	Gütefunktion
Ψ_d, Ψ_q	magnetischer Fluss im dq-Koodinatensystem

Ψ_M, Ψ_S	Vektor der Rotorwinkel der Motoren bzw. Vektor der Schwenkwinkel der Servomotoren
Ψ_{PM}	Magnetischer Fluss der Permanentmagnete des Motors
ω_{el}	elektrische Winkelgeschwindigkeit eines Motors
ω	Vektor der Winkelgeschwindigkeit
$\bar{\omega}^{rel}$	explizit von der Zeit abhängiger Winkelgeschwindigkeitsvektor eines Gelenks
ω_{M0}	Vektor der Schwebedrehzahl
ω_M, ω_S	Vektor der mechanischen Winkelgeschwindigkeit der Antriebs- bzw. der Servomotoren

Mathematische Zeichen und Funktionen

\mathbf{a}, \mathbf{b}	Vektoren, dargestellt durch fette Kleinbuchstaben
$\mathbf{a}_{1:3}$	Vektor \mathbf{a} , mit den Elementen 1 bis 3
\mathbf{A}, \mathbf{B}	Matrizen, dargestellt durch fette Großbuchstaben
$\Re\{\}$	Realteil einer komplexen Zahl
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	Skalarprodukt zweier Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b}
$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$	Kreuzprodukt zweier Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b}
$\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b}$	Kreuzprodukt zweier Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} in Matrixschreibweise
$\mathbf{A} \circ \mathbf{B}$	Elementweises Produkt der Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B}
\mathbf{A}^+	Moore-Penrose-Pseudoinverse einer Matrix
\mathbf{A}^T	Transponierte einer Matrix
\mathbf{A}^{-1}	Inverse einer Matrix
${}^i\mathbf{x}$	Vektor \mathbf{x} dargestellt im Koordinatensystem \mathcal{K}_i
${}^{ij}\mathbf{T}$	Koordinatentransformation vom Koordinatensystem \mathcal{K}_j nach \mathcal{K}_i
$\ \mathbf{x}\ _2$	Euklidische Norm des Vektors \mathbf{x}
$\text{rang}(\mathbf{A})$	Rang der Matrix \mathbf{A}
$\det(\mathbf{A})$	Determinante der Matrix \mathbf{A}
$\dim(\mathbf{A})$	Dimension der Matrix \mathbf{A}
$\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \dddot{\mathbf{x}}$	Ein-, zwei beziehungsweise dreimalige Ableitung von \mathbf{x} nach der Zeit
$\mathbf{x}^{(i)}$	i -te Ableitung von \mathbf{x} nach der Zeit

1 Einleitung

Multikopter sind seit vielen Jahren häufig genutzte Systeme, die eine Vielzahl interessanter Einsatzmöglichkeiten bieten. Weitere Anwendungsszenarien ergeben sich, wenn durch die Verwendung kooperierender Drohnen die Nutzlast gesteigert wird. Die Umsetzung derartiger Systeme besitzt allerdings eine sehr große Komplexität. Die in dieser Arbeit vorgestellte Entwicklungsumgebung soll dabei helfen, den Entwicklungsprozess zu beschleunigen. In Abschnitt 1.1 werden zunächst aktuelle und zukünftig mögliche Anwendungsgebiete für Multikopter dargestellt und eine Problemstellung herausgearbeitet. Auf Basis des in Abschnitt 1.2 vorgestellten Stands der Technik werden in Abschnitt 1.3 die Zielstellungen dieser Arbeit definiert. Der Aufbau dieser Arbeit wird in Abschnitt 1.4 dargestellt.

1.1 Definition der Problemstellung

Der Produktentstehungsprozess moderner Fertigungsteile ist in der heutigen Zeit stark durch den Einsatz computergestützter Systeme geprägt. Der Oberbegriff CAx (engl.: Computer Aided x) erfasst dabei alle computergestützten Teilprozesse und Systeme. Typische im Verlauf des Produktentstehungsprozesses eingesetzte Systeme sind in Abbildung 1.1 dargestellt. In einem ersten Schritt erfolgt der Einsatz von CAD-Software (engl.: Computer Aided Design), welche eine rechnergestützte Bauteilkonstruktion ermöglicht. Parallel dazu wird mit sogenannten CAE-Systemen (engl.: Computer Aided Engineering) das Produkt bereits berechnet, simuliert und optimiert. Die hieraus gewonnenen Erkenntnisse fließen dann direkt wieder in die Anpassung der CAD-Daten ein. Für das fertige Produkt können aus dem CAD-Programm technische 2D-Zeichnungen abgeleitet werden. Vor allem bei zunehmend

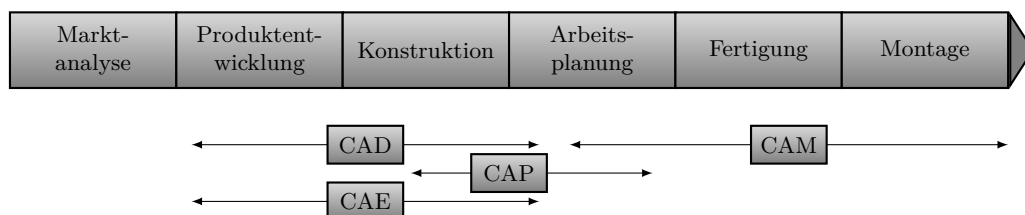


Abbildung 1.1: Produktentstehungsprozess in der Bauteilfertigung mit Hilfe von CAx-Systemen

komplexeren Bauteilen sind diese Zeichnungen jedoch schwierig zu lesen und dadurch eine häufige Fehlerquelle. Aus diesem Grund wurde Ende der 50er-Jahre am MIT mit der Erforschung der Grundlagen zu numerisch gesteuerten Werkzeugmaschinen begonnen. Daraus haben sich sogenannte CAM-Systeme (engl.: Computer Aided Manufacturing) entwickelt. Diese dienen zur Erstellung von NC-Programmen, die zur Steuerung moderner Maschinen verwendet werden können. Sogenannte CAP-Systeme (engl.: Computer Aided Planning) helfen dem Planer bei der Belegung der Maschinen und der Optimierung von Arbeitsabläufen. Der Einsatz von CAX-Systemen führt letztendlich zu einer Steigerung der Bauteilqualität bei gleichzeitiger Reduzierung der Kosten und Fertigungszeit (Hehenberger, 2011).

Im Gegensatz zu dem etablierten Einsatz von CAX-Systemen in der Bauteilfertigung ist die Planung und Errichtung von Bauwerken nach wie vor zum Großteil nicht standardisiert und beruht vor allem im Bereich der Umsetzung auf traditionellen manuellen Verfahren und zweidimensionalen technischen Zeichnungen. Um die Vorteile einer modernen Bauteilfertigung in ähnlicher Weise auch bei der Errichtung moderner Bauwerke zu erzielen, entwickeln sich auch in diesem Bereich nach und nach ähnliche Prozessketten. Hierbei hat sich die Methode der Bauwerksdatenmodellierung (engl.: Building Information Modeling, kurz: BIM) etabliert (Borrmann u. a., 2015). Analog zur Bauteilfertigung steht auch beim BIM eine digitale Modellierung des Bauwerks am Beginn des Prozesses. Im Gegensatz zur CAD gestützten Erstellung von Bauteilen basiert die Modellierung beim BIM auf parametrierbaren Objekten, Funktionen und Logiken. Die Verwendung von BIM liefert für den Anwender einige Vorteile und unterstützt diesen in vielen unterschiedlichen Bereichen. Neben der Erstellung von Bedarfs- und Zeichnungsplänen ermöglicht BIM zum Beispiel auch die Berechnung der Gesamtkosten, eine vereinfachte Terminplanung sowie die Visualisierung des Bauwerks. Am Ende der Modellierung lassen sich aus den Modellen Fertigungsdaten generieren. Diese enthalten unter anderem Informationen zu jedem Objekt und geben zum Beispiel Auskunft über dessen Position innerhalb des Bauwerks. Diese Datensätze dienen wie beim CAM als Grundlage, bestimmte Arbeitsabläufe zu automatisieren und von unterschiedlichen Robotern ausführen zu lassen (Templin und Popielarczyk, 2020; Vähä u. a., 2013).

Als Beispiel für einen Automatisierungsvorgang auf einer Baustelle wird die Errichtung des Mauerwerks eines Gebäudes durch den Einsatz eines Roboters vorgestellt. Ein Post-Processing Algorithmus liefert auf Basis des BIM-Modells einen Verlegeplan, welcher die notwendigen Informationen über das Mauerwerk enthält. Diese beinhalten beispielsweise für jeden verwendeten Stein dessen Zielposition und Orientierung im Mauerwerk. Ein mögliches Robotersystem stellt der an der Universität Duisburg-Essen entwickelte Seilroboter nach Abbildung 1.2 dar (Bruckmann u. a., 2016). Seilroboter sind eine Sonderform von parallelen Manipulatoren und gehören somit zu derselben Roboterklasse wie ein Hexapod. Der Arbeitsraum des Seilroboters wird durch einen Rahmen aufgespannt und ist in gewissen Grenzen frei skalierbar. Innerhalb dieses Arbeitsraumes kann der Endeffektor des dargestellten

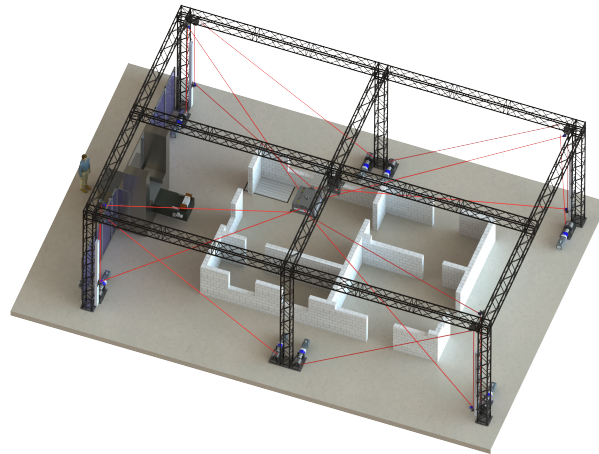


Abbildung 1.2: Seilroboter für das automatisierte Errichten eines Gebäudes¹

Roboters durch die gezielte Längenänderung der Seile frei in allen sechs Freiheitsgraden positioniert werden. Die Seile verlaufen ausgehend von motorgesteuerten Seilwinden über Seilführungen zu mehreren Befestigungspunkten am Endeffektor. Die Seilführungen sind wahlweise fest oder beweglich am Rahmen befestigt. Die Aufgabe des Seilroboters besteht nun darin, die Steine mit seinem Endeffektor in Position A aufzunehmen, ihn in möglichst kurzer Zeit an seine Zielposition B zu bringen und dort mit der vorgegebenen Orientierung abzusetzen. Der Seilroboter besitzt zwei Eigenschaften, die ihn für diesen Einsatzzweck prädestinieren. Zum einen kann der Endeffektor durch die Überaktuierung des Systems gleichzeitig positioniert und in sich verspannt werden, wodurch das resultierende Gesamtsystem deutlich versteift wird. Zum anderen sind die zu bewegenden Massen im Vergleich zu herkömmlichen Kränen gering, da sich diese im Wesentlichen auf den Endeffektor und die zu transportierende Last beschränken. Diese beiden Eigenschaften machen ihn zu einem präzise steuerbaren Roboter der, trotz seiner vergleichsweise hohen Nutzlast, eine große erzielbare Beschleunigung und einen großen Arbeitsraum besitzt. Ungeachtet seiner nahezu beliebigen Skalierbarkeit eignet sich der Seilroboter jedoch nicht dazu, Lasten über die gesamte Baustelle zu transportieren. Grund hierfür sind die Seile, die sich ständig innerhalb des gesamten Arbeitsraumes befinden. Die Gefahr von Seilkollisionen mit bereits bestehenden Gebäuden oder sich bewegenden Objekten ist demnach sehr groß. Ein weiteres Bewertungskriterium ist die Wirtschaftlichkeit des Seilroboters, weshalb sowohl die Anschaffungskosten als auch die Rüstkosten bei einer Machbarkeitsanalyse stets mit in Betracht gezogen werden müssen (Bruckmann u. a., 2018).

Demgegenüber ist ein Multikopter ein Robotersystem mit vergleichsweise geringen Rüstkosten und örtlich sehr flexibler Einsetzbarkeit. Seit Beginn ihrer Entwicklung werden diese für den Transport von leichten Objekten eingesetzt. Ein bedeutsames Anwendungsbeispiel ist die Verwendung einer Drohne als Kameraträger. Wo früher in der Film- und Werbebranche fast ausschließlich Hubschrauber zum Einsatz kamen, werden heute überwiegend Drohnen eingesetzt, da sie wesentlich vielseitigere

¹ Mit freundlicher Genehmigung des Lehrstuhls für Mechatronik, Universität Duisburg-Essen.

Kameraeinstellungen bieten und deutlich kostengünstiger sind. Bei Großveranstaltungen dienen Kameradrohnen der Polizei und den Veranstaltern zur Überwachung des Veranstaltungsraums und der Lenkung des Besucherstroms. Ein weiteres, wenn auch noch nicht so weit verbreitetes Anwendungsszenario findet sich in der Landwirtschaft. Hier werden Drohnen als Geräteträger zur Schädlingsbekämpfung eingesetzt (Bright u. a., 2016). Im Bauwesen finden Drohnen vorwiegend Einsatz bei der Landvermessung, der Dokumentation des Baufortschritts oder der Schadensbegutachtung an schwer zugänglichen Stellen von Bauwerken (Ashour u. a., 2016; Rizo-Maestre u. a., 2020; Suarez Fernandez, Dominguez und Campoy, 2017). Außerdem werden sie zur aktiven Überwachung von Baustellen verwendet, um eine Erhöhung der Baustellensicherheit zu erzielen. Einen guten Überblick gibt (Vanderhorst, Suresh und Suresh, 2019). Allen bisher genannten Anwendungsfällen ist jedoch gemein, dass die getragene Nutzlast vergleichsweise gering ist.

Über die Jahre hinweg hat sich die Nutzlast für Drohnen jedoch zunehmend erhöht. Grund dafür sind unter anderem immer bessere Lithium-Ionen-Akkus, welche die Verwendung leistungsstärkerer Motoren ermöglichen (Placke u. a., 2017). Forschungen im Bereich alternativer Energiequellen, wie zum Beispiel der Verwendung einer Brennstoffzelle, können zukünftig die Betriebsdauer erhöhen (Apeland, Pavlou und Hemmingsen, 2020). Durch den Einsatz mehrerer, kooperierender Drohnen lässt sich die Nutzlast weiter steigern und deren Manövrierfähigkeit erhöhen. Aufgrund dieser Entwicklungen werden Drohnen damit zunehmend interessanter für die Durchführung von Transportaufgaben schwerer Lasten oder den Einsatz in der internen Logistik (Olivares u. a., 2015). Ein mögliches Szenario wäre der Einsatz kooperierender Drohnen auf Großbaustellen zur Abwicklung der internen Baustellenlogistik oder der Durchführung einfacher Baumaßnahmen, wie zum Beispiel dem bereits angesprochenen automatischen Mauern. Im Gegensatz zu Seilrobotern sind Drohnen nicht örtlich gebunden und der durch das Gesamtsystem eingenommene Baustellenraum ist lokal eng begrenzt. Diese Vorteile zusammen mit weiteren Steigerungen der Nutzlast versprechen zukünftig noch deutlich mehr Einsatzmöglichkeiten.

Im Vorfeld des Einsatzes einer Drohne oder eines Drohnensystems steht in der Regel eine aufwendige Entwicklungsarbeit. Diese zeichnet sich auf mehreren Ebenen durch einen hohen Grad an Komplexität aus. Teilaufgaben sind unter anderem

- die mathematische Modellbildung,
- die Erstellung eines Simulationsmodells,
- der Entwurf von Regelungskonzepten für das betrachtete System,
- das Durchführen von Simulationsstudien,
- die Auswahl von Hardware wie Motoren und Sensoren,
- die Sensordatenauswertung und Sensordatenfusion,

- die Programmierung der Hardware sowie
- die Durchführung und Auswertung von Versuchen.

Die Vielzahl der Aufgaben äußert sich dabei in langen Entwicklungszeiten. Diese steigen weiter, wenn für eine Aufgabe unterschiedliche Systeme miteinander verglichen werden sollen. Für die Untersuchung und spätere Umsetzung der angesprochenen Anwendungsszenarien muss die Komplexität der Entwicklung reduziert und beherrschbar gemacht werden. Die dafür notwendigen Grundlagen werden in dieser Arbeit vorgestellt.

1.2 Stand der Technik und Literaturübersicht

Multikoptertopologien und deren Modellbildung: Multikopter haben bereits heute ein weites Anwendungsfeld. Um den unterschiedlichen Anforderungen zu genügen, werden immer neue Drohnenkonzepte entwickelt, welche sich dementsprechend hinsichtlich ihrer Eigenschaften unterscheiden. Neben den klassischen Multikoptern mit starren Motoreinheiten, wie Quadro-, Hexa- oder Oktokoptern, können Drohnen auch schwenkbare Motoreinheiten besitzen. Zahlreiche Systeme sind hierzu bereits in der Vergangenheit untersucht worden. Bei Systemen mit starren Antrieben ist der Quadrokopter die am häufigsten betrachtete Variante (Hamel u. a., 2002). Um deren geringe Nutzlast zu steigern, kann die Anzahl der Antriebe erhöht werden. Beispiele sind der Hexa- oder Oktokopter, welche in (Alaimo u. a., 2013; Lee u. a., 2013) betrachtet werden. Da bei diesen Modellen jeder Rotor dem Multikopter lediglich eine Schubkraft und ein Drehmoment in axialer Richtung aufprägt und die Anordnung der Antriebe in einer Ebene erfolgt, besitzen all diese Konfigurationen lediglich vier unabhängige Freiheitsgrade. Dadurch sind diese Topologien in ihrem Bewegungsfreiheitsgrad eingeschränkt.

Für Systeme mit zusätzlichen Antrieben besteht die Möglichkeit, durch die gezielte Anordnung der Motoren in mehreren nicht parallelen Ebenen, die Anzahl der Freiheitsgrade zu erhöhen. In (Salazar u. a., 2008) werden zum Beispiel vier Rotoren in der horizontalen und vier in der vertikalen Ebene angeordnet. In (Brescianini und D'Andrea, 2016) werden die Motoren jeweils in den Ecken eines Würfels angeordnet, wobei die jeweiligen Rotorachsen senkrecht auf den Raumdiagonalen stehen. Hierdurch wird der Multikopter omnidirektional steuerbar und jeder Freiheitsgrad kann unabhängig von den anderen beeinflusst werden.² Da jedoch der Auftrieb der einzelnen Motoren nicht mehr gleichgerichtet ist, erkauft man sich die Vorteile der zusätzlichen Freiheitsgrade mit einem erhöhten Energiebedarf. Eine Optimierung für die Anordnung der Rotoren wird in (Park u. a., 2016) vorgeschlagen. Eine weitere Möglichkeit, die Anzahl der Freiheitsgrade zu erhöhen, bietet der Einsatz von

² Bei einem omnidirektional steuerbaren System kann innerhalb eines endlichen Zeitintervalls das System durch einen entsprechend gewählten Eingangsgrößenverlauf von jedem Anfangszustand aus auf einer beliebig vorgegebenen Trajektorie in jeden Endzustand überführt werden. Siehe auch (Adamy, 2018).

schwenkbaren Antriebseinheiten. Dabei kann bereits mit drei schwenkbaren Motor-einheiten ein vollständig steuerbarer Trikoopter aufgebaut werden (Escareno u. a., 2008). In (Ryll, 2012) wird ein Quadrokoopter mit schwenkbaren Armen ausgeführt, wodurch sich sogar ein überaktuiertes System ergibt. Der Einsatz schwenkbarer Systeme führt ebenfalls zu einem erhöhten Energieaufwand. Abbildung 1.3 zeigt das Modell eines unter-, eines voll- und eines überaktuierten Systems.

Neben den notwendigen Unterschieden in der Modellbildung aufgrund des Aufbaus einer Drohne variieren die verwendeten Modelle häufig auch in ihrer Modellgüte. Eine hohe Modellgüte ist vor allem dann erforderlich, wenn für die Erfüllung komplexer Aufgaben modellbasierte Regelungskonzepte eingesetzt werden (Hamel u. a., 2002; Ryll, 2015). Die einfachsten Gleichungssysteme berücksichtigen den gesamten Aufbau des Multikopters lediglich als einen starren Körper, dessen Auftrieb direkt über Kraftvektoren vorgegeben wird. Hierdurch wird der Einfluss der sich drehenden Rotoren und der damit verbundenen gyroskopischen Effekte vollständig vernachlässigt (Formentin und Lovera, 2011). Durch die Berücksichtigung der gyroskopischen Effekte der Rotoren ergeben sich bereits komplexere Modelle, wie sie zum Beispiel in (Kondak u. a., 2007) zu finden sind. In den bisher angeführten Arbeiten wird jedoch noch eine wesentliche Vereinfachung im Hinblick auf die aerodynamischen Einflüsse der Rotoren gemacht, indem stets mit der reinen Auftriebskraft gerechnet wird. Diese Betrachtung ist für hochdynamische Flugmanöver häufig nicht ausreichend. Die Berücksichtigung weiterer aerodynamischer Effekte finden sich zum Beispiel in den Arbeiten von (Bangura und Mahony, 2012; Huang u. a., 2009; Hoffmann u. a., 2009). In (Bagura u. a., 2016) werden Verfahren beschrieben, die zusätzliche Parameter wie zum Beispiel die Geometrie der Rotorblätter berücksichtigen.

Die Modellierung der Antriebseinheiten stellt ein weiteres Unterscheidungsmerkmal bei der Modellgüte dar. Dieser kommt vor allem dann eine hohe Priorität zu, wenn schnell auf äußere Störeinflüsse reagiert werden muss. Eine Verbesserung der Modellgüte wird in vielen Arbeiten dadurch erreicht, dass anstelle der Auftriebskraft als Eingangsgröße das Verhalten der Antriebseinheit modelliert wird. Die gesamte Antriebseinheit, bestehend aus Motor, Propeller und Motorregler, wird in der Regel als eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung angenommen.



Abbildung 1.3: Darstellung unterschiedlicher Multikoptermodelle mit a) einem unteraktuierten Quadrokoopter, b) einem vollaktuierten Trikoopter und c) einem überaktuierten Quadrokoopter

Dabei wird die Motorspannung als Eingangsgröße und die Drehzahl als Ausgangsgröße gewählt (Bouabdallah, Murrieri und Siegwart, 2005). Diese Annahme erweist sich vor allem aus zwei Gründen als eine Vereinfachung. Zum einen sind die am Propeller angreifenden Strömungswiderstände nichtlinearer Natur und zum anderen entspricht das an den Motorregler übergebene Signal meist nicht der effektiven Motorspannung. Um dem entgegenzuwirken, wird in (Mahony, Kumar und Corke, 2012) die Regelung des Antriebs mit einem drehzahlabhängigen Korrekturterm vorgeschlagen. Dieser gleicht im besten Fall jedoch lediglich die Nichtlinearität der statischen Verstärkung aus. Bisher liegen in der Literatur keine dem Autor bekannten Untersuchungen zur Motordynamik bei Multikoptern vor, weshalb an dieser Stelle einige Vorabuntersuchungen gezeigt werden. Für diese wird eine Motor-Propeller-Kombination gewählt und das Drehzahlverhalten für dynamische Lastveränderungen mit unterschiedlichen Motorreglern getestet. Die Messergebnisse eines Reglers der Firma Poly-Tec in Abbildung 1.4 zeigen das erwartete nichtlineare Verhalten der Antriebseinheit in Abhängigkeit vom Betriebspunkt. Dargestellt sind die Sprungantworten für eine Änderung der Pulsweite am Eingang des Motorreglers um $\Delta t = 0,05$ ms. Das Ergebnis für eine Erhöhung der Pulsweite um Δt ist für eine Ausgangsdrehzahl von $n_M \approx 26 \text{ s}^{-1}$ in Abbildung 1.4a und für eine Ausgangsdrehzahl von $n_M \approx 42 \text{ s}^{-1}$ in Abbildung 1.4b dargestellt. Die dazugehörigen umgekehrten Sprungantworten sind entsprechend in den Abbildungen 1.4c und 1.4d abgebildet. Zusätzlich ist zum Vergleich jeweils die approximierte Sprungantwort für ein mögliches PT1-Systemverhalten mit der Motorzeitkonstanten T_M und der Drehzahldifferenz Δn_M eingezeichnet. Eine Auswertung der Messergebnisse ergibt sowohl in Abhängigkeit der Ausgangsdrehzahl als auch in Abhängigkeit

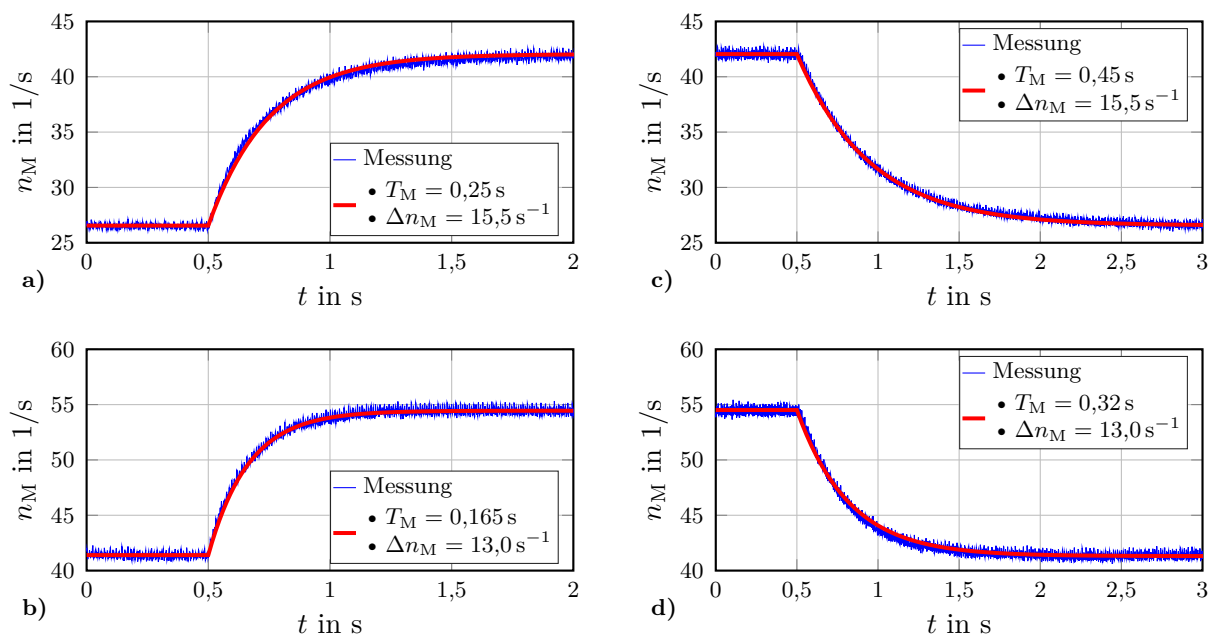


Abbildung 1.4: Sprungantworten eines Poly-Tec-Reglers für eine Erhöhung der Drehzahl in a) und b) sowie eine Verringerung der Drehzahl in c) und d)

der Sprungrichtung deutliche Unterschiede in der Dynamik der Antriebseinheit. Auffällig ist vor allem, dass bei diesem Regler die Dynamik trotz steigender Strömungswiderstände für den oberen Drehzahlsprung zunimmt. Die für die Dynamik eines PT1-Systems charakteristische Zeitkonstante T_M variiert hierbei zwischen $T_M = 0,165\text{ s}$ und $T_M = 0,45\text{ s}$. Dies entspricht einem prozentualen Unterschied von über 270 %. Ebenso sind Unterschiede in der statischen Verstärkung anhand der Änderung der Sprunghöhe Δn_M zu erkennen. Die maximale Abweichung liegt für die gemessenen Sprunghöhen bei ungefähr 20 %. Bei vielen Herstellern lässt sich die Motordynamik in gewissen Grenzen einstellen. Beispielhaft sind in Abbildung 1.5 die Sprungantworten für zwei unterschiedliche Parametrierungen des Reglers YGE-LV35T dargestellt. Für die Sprungantworten einer ersten Messung mit geringer Dynamik ergeben sich offensichtliche Unterschiede im dynamischen Verhalten. Bei der Einstellung für eine maximal erzielbare Dynamik in einer zweiten Messung sind die Unterschiede sehr viel geringer. Für Letztere erfolgt erneut eine Approximation mit einem PT1-Modell. Die ausgemachten Unterschiede bewegen sich im Bereich zwischen $T_M = 0,08\text{ s}$ und $T_M = 0,115\text{ s}$. Dies entspricht einer Abweichung von circa 44 %. Die Abweichungen bei der statischen Verstärkung variieren in etwa um 13 %. Die resultierenden Abweichungen aus dem nichtlinearen Übertragungsverhalten müssen bei nicht geregelten Antriebseinheiten durch den Lageregler des Multikopters ausgeglichen werden. Motorregler mit eingebautem Drehzahlregler können diese Nachteile vermeiden, da diese mit dem Lageregler eine Kaskadenregelkreisstruktur bilden. Auftretende Störungen und Abweichungen werden so schneller korrigiert (González u. a., 2013). Bei den am Markt verfügbaren Reglern handelt es sich meist um PI-Drehzahlregler. Dies gilt auch für den

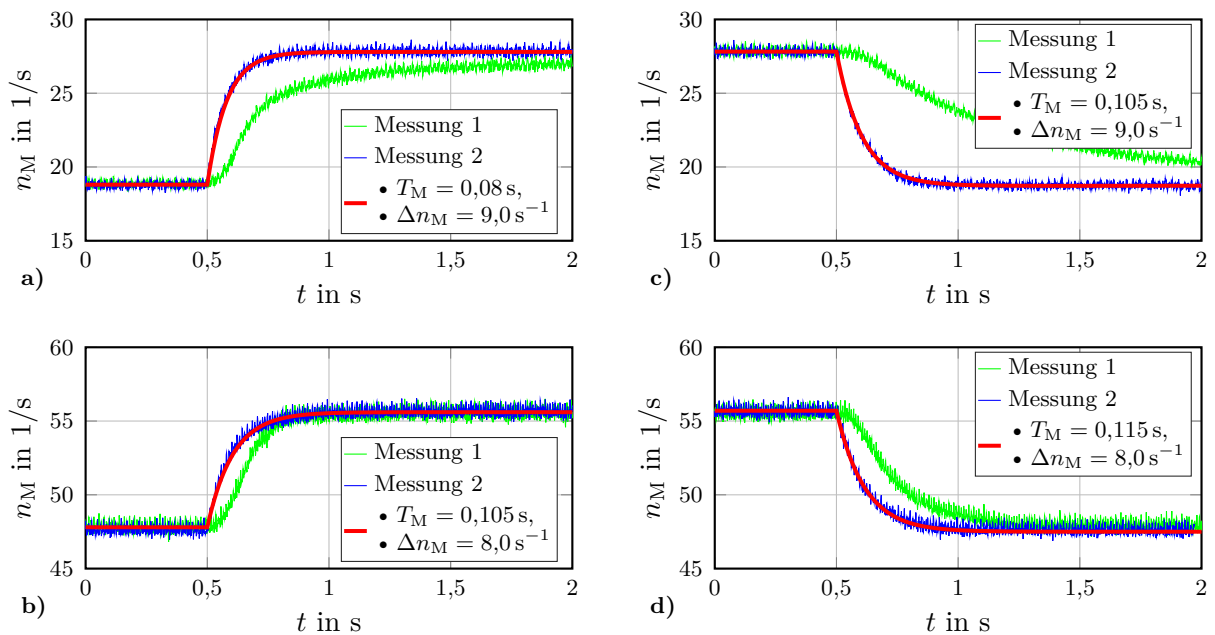


Abbildung 1.5: Sprungantworten des gesteuerten Reglers YGE-LV35T für eine Erhöhung der Drehzahl in a) und b) sowie eine Verringerung der Drehzahl in c) und d)

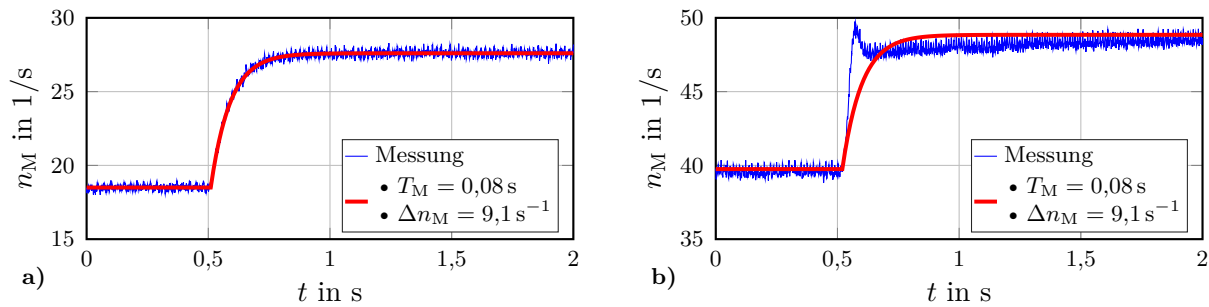


Abbildung 1.6: Sprungantworten des drehzahlgeregelten Motorreglers YGE-LV35T für eine Sprungantwort ausgehend von a) einer Drehzahl von $n_M = 18 s^{-1}$ und b) einer Drehzahl von $n_M = 40 s^{-1}$

hier betrachteten Regler YGE-LV35T. Bei der Einstellung der Regler zeigt sich einerseits die Problematik der notwendigen Abwägung zwischen einer schnellen und dynamischen Anregelzeit und der Begrenzung der Überschwingweite. Andererseits resultiert aufgrund der konstanten Reglerparameter erneut ein unterschiedliches Verhalten je nach Betriebspunkt. Für die gleichen Reglerparameter ergibt sich für eine Ausgangsdrehzahl von $n_M = 18 s^{-1}$ das gewünschte PT1-Verhalten nach Abbildung 1.6a, wohingegen die Systemantwort bei einer Ausgangsdrehzahl von $n_M = 40 s^{-1}$ gemäß Abbildung 1.6b ein deutliches Überschwingen aufweist. Im Unterschied zu nicht geregelten Systemen sind die Sprunghöhen in beiden Fällen gleich groß, sodass die statische Verstärkung ein lineares Verhalten aufweist. Die Ergebnisse zeigen die mit diesem Regler maximal erzielbare Dynamik. Die Ergebnisse aller Messungen machen deutlich, dass die vereinfachte Modellierung der Antriebseinheit die Realität häufig nicht genau genug abbildet.

Alle dargestellten Unterschiede in der Modellgüte, das heißt sowohl die unterschiedliche Modelltiefe bei der mechanischen Modellbildung als auch bei der Modellierung der Antriebseinheiten, machen deutlich, dass eine Vergleichbarkeit von Simulationsergebnissen in der Regel nicht gegeben ist. Der simulative Vergleich unterschiedlicher Konzepte, welche nicht auf der Grundlage gleicher Modelle entstanden sind, ist daher wenig aussagekräftig. Für eine kurze Entwicklungszeit sind Simulationsstudien jedoch unbedingt notwendig, weshalb eine gemeinsame Basis wünschenswert wäre.

Transport einer Nutzlast mit Multikoptern: Für den Transport einer Nutzlast mit einem Multikopter wird dieser mit einem Endeffektor ausgerüstet, der in der Lage ist, die zu transportierende Last aufzunehmen. Im Wesentlichen werden in der Literatur drei verschiedene Ansätze verfolgt (Liang u. a., 2021). Im einfachsten Fall, ist der Endeffektor fest mit einer Drohne verbunden (Augugliaro u. a., 2014; Naldi, Gentili und Marconi, 2010; Pounds, Bersak und Dollar, 2011; Wang u. a., 2020). Dieser erste Ansatz besitzt bei der Verwendung unteraktuierter Drohnen jedoch den Nachteil, dass die Nutzlast nicht beliebig ausgerichtet werden kann. Eine Möglichkeit, die Unteraktuierung zu überwinden, ist die Verwendung eines starr angebrachten Endeffektors in Verbindung mit einem voll- oder überaktuier-

ten Multikopter (Ryll u. a., 2017). Dieser zweite Ansatz ermöglicht es die Nutzlast omnidirektional zu steuern. Alternativ werden in den Arbeiten (Muscio u. a., 2016; Tognon u. a., 2017) die Drohnen mit Roboterarmen ausgestattet. Die beiden bisher beschriebenen Ansätze eignen sich besonders für den Transport und/oder die Manipulation leichter Gegenstände. Ein Nachteil ist jedoch, dass sich die Nutzlast in der Regel in geringem Abstand zur Drohne befindet. Deshalb befasst sich ein dritter Ansatz mit dem Transport einer Nutzlast, welche über ein Seil mit einer Drohne verbunden ist. Dadurch kann der Abstand der Nutzlast zur Drohne nahezu beliebig angepasst werden.

Zum Transport einer Nutzlast, welche über ein Seil mit einer Drohne verbunden ist, existieren bereits mehrere Arbeiten. Diese weisen größere Unterschiede bei der Komplexität des zugrunde liegenden dynamischen Modells sowie der Modellierungstiefe auf. Die meisten Arbeiten vereinfachen die dynamischen Modelle, indem das verwendete Seil im Schwerpunkt der Drohne befestigt, das Seil als masselos angenommen und die Nutzlast als Punktmasse beschrieben wird (Guerrero u. a., 2015; Luo, Du und Yu, 2019). In (Palunko, Fierro und Cruz, 2012) befindet sich die Seilaufhängung in beliebigem Abstand zum Schwerpunkt der Drohne. Eine noch realistischere Betrachtungsweise ergibt sich, indem die Masse und die Flexibilität des Seils modelliert werden. In (Dai, Lee und Bernstein, 2015; Goodarzi, Lee und Lee, 2015) wird dafür das gesamte Seil in mehrere massebehaftete Teilstücke zerlegt.

Zur Steigerung der Nutzlast und der Manövrierfähigkeit, kann die Anzahl der am Transport beteiligten Drohnen erhöht werden. Da dieser Anwendungsfall zunehmend interessant wird, finden sich auch hierzu einige Arbeiten mit unterschiedlichen Ansätzen. In (Alothman und Gu, 2018) wird die Nutzlast weiterhin als Punktmasse betrachtet und deren Transport mit Hilfe von zwei Drohnen untersucht. Das betrachtete System besitzt keine vollständige Steuerbarkeit. Damit die angeordneten Drohnen nicht kollidieren, müssen die Seile in einem aus energetischer Sicht sehr ungünstigen Winkel verlaufen. Der Transport eines starren Balkens unter Verwendung von zwei Quadroptern wird in (Gassner, Cieslewski und Scaramuzza, 2017) demonstriert. Ab der Verwendung von drei Drohnen kann die Nutzlast vollständig gesteuert werden. Flugmanöver mit drei Drohnen werden zum Beispiel in (Michael, Fink und Kumar, 2011; Manubens u. a., 2013; Mohammadi, Sirouspour und Grivani, 2020) präsentiert. Bei der Verwendung von drei oder mehr Drohnen besteht die Möglichkeit, die Drohnen im Raum zu rekonfigurieren ohne die Nutzlast zu bewegen. Mit diesen Manövern im Nullraum lassen sich die Eigenschaften des Systems beeinflussen. Diese Tatsache und der Zusammenhang zur Seilrobotik werden in (Masone, Bulthoff und Stegagno, 2016) betrachtet.

Unabhängig von der Anzahl der verwendeten Drohnen ist es für die Überführung einer Nutzlast von ihrer Start- zu ihrer Zielposition häufig notwendig, eine geeignete Trajektorie vorab zu planen und hinsichtlich bestimmter Kriterien optimieren. Das Ziel eine optimale Trajektorie bezüglich des Seilwinkels und der Energieeffizienz zu finden, wird in (Hashemi und Heidari, 2020) verfolgt. Die Pfadplanung unter

äußeren Einflüssen zeigt (Qian und Liu, 2020) auf. In (Guo u. a., 2020) wird die Trajektorie für das Durchfliegen eines Fensters dargestellt. Mit hochdynamischen Trajektorien beschäftigt sich zum Beispiel (Foehn u. a., 2017). Neben dem eigentlichen Transport der Nutzlast spielen auch weitere Flugmanöver eine wichtige Rolle. Beispielsweise wird das Anheben der Nutzlast in den Arbeiten (Cruz und Fierro, 2014; Cruz, Oishi und Fierro, 2015) näher betrachtet. Aus Sicht der Regelungstechnik ist für den Transport einer Nutzlast über ein Seil ein wesentliches Ziel, den Seilwinkel zu kontrollieren und zu minimieren. Hierfür werden unterschiedliche Regelungskonzepte eingesetzt (Guerrero-Sánchez u. a., 2017; Yang und Xian, 2020; Lv, Wu und Rui, 2020). Der realitätsnahe Einsatz von Multikoptern zum Einsatz auf Baustellen hat trotz der großen Anzahl an Veröffentlichungen bisher wenig Beachtung gefunden.

Hard- und Softwarestruktur eines Multikopters: Im Laufe der Jahre haben sich eine ganze Reihe von Firmen mit der Entwicklung von Drohnen beschäftigt. Da es sich hierbei um kommerzielle Einsatzgebiete handelt, ist die eingesetzte Hard- und Software in der Regel proprietär und damit der Forschung nicht zugänglich. Dem gegenüber stehen eine Vielzahl von Open-Source-Projekten, welche die Entwicklung von Drohnen verfolgen. An erster Stelle ist hier der Pixhawk-Autopilot zu nennen. Dabei handelt es sich um eine Hardware zur Regelung von Multikoptern. Diese unterstützt mehrere Multikoptertopologien und Flugmodi. Hierzu zählen Aufgaben wie „Höhe halten“ oder „Person folgen“. Die Hardware kann sowohl mit der Pixhawk-Autopilot-Software als auch mit der Ardupilot-Software kombiniert und dadurch auf einfache Weise konfiguriert werden. Beide Softwares enthalten außerdem einfach handhabbare Werkzeuge, beispielsweise zur Pfadplanung oder Drohnenüberwachung. Die Verwendung zahlreicher zusätzlicher Sensorik wird unterstützt. Die genannten Aspekte machen den Umgang mit der Pixhawk-Autopilot-Hardware sehr anwenderfreundlich. Eine Übersicht über aktuelle Open-Source Projekte bietet (Ebeid, Skriver und Jin, 2017; Lim u. a., 2012).

In vielen Open-Source-Projekten sind der Einstieg und die Erweiterung des Programmcodes eine hohe Hürde, was vor allem bei der Erarbeitung neuer Konzepte im wissenschaftlichen Kontext Probleme bereitet. Außerdem besteht ein hoher Programmieraufwand. Aus diesen Gründen werden häufig etablierte Entwicklungswerkzeuge wie MATLAB® und Simulink® eingesetzt, die eine benutzerfreundliche Programmierung ermöglichen (The MathWorks, 2022b; The MathWorks, 2022e). Mit der Erweiterung Simulink Coder™ lässt sich automatisch C-Code generieren, wodurch die Entwicklung beschleunigt und der Grad der Komplexität reduziert wird (The MathWorks, 2022c). Diese Möglichkeiten wurden bereits vor dem Erscheinen vieler Open-Source-Projekte erfolgreich eingesetzt (Escareno, Salazar-cruz und Lozano, 2006; Srikanth u. a., 2009). Mit dem Embedded Coder® wird der generierte C-Code für unterstützte Mikrocontroller optimiert (The MathWorks, Inc., 2022). Eine derartige Erweiterung besteht auch für die Pixhawk-Autopilot Hardware (Quan, Dai und Wang, 2020). Allen Anwendungen ist gemein, dass die zur Verfügung stehenden Programmbibliotheken stets auf die Verwendung mit einer bestimmten Hardware zugeschnitten sind. Der notwendige Programmcode ist für

die verwendeten Peripherien in Bibliotheken hinterlegt und über eine sogenannte S-function in Simulink® eingebunden. Demnach werden bei weitem nicht alle verfügbaren Systeme und Mikrocontroller unterstützt. Dasselbe gilt für die in Simulink® vorhandenen Blockbausteine. Ein weiterer Nachteil ist, dass der generierte C-Code trotz Optimierung vergleichsweise groß ist. Dadurch kann es bei komplizierten Regelkreisstrukturen zu Leistungsengpässen bei den eingesetzten Mikrocontrollern kommen. Weitere Probleme ergeben sich aufgrund auftretender Kompatibilitätsprobleme zwischen unterschiedlichen Entwicklungsständen des Open-Source-Projekts und der proprietären Software. Aus diesem Grund wurden im Bereich der Forschung alternativ Systeme eingesetzt, die mit Simulink Real-Time™ die von MathWorks® angebotene Lösung für Echtzeitanwendungen verwenden, siehe z. B. (Salazar-Cruz u. a., 2006; The MathWorks, 2022d). Dies garantiert, dass sämtliche Programmteile uneingeschränkt zur Verfügung stehen und immer aktuell gehalten werden. Nachteilig ist jedoch zunächst, dass auf die Hardware und Programme des Open-Source-Projekts nicht zurückgegriffen werden kann.

Unabhängig von der Wahl der Hardware muss diese in der Lage sein, den Multirotor zu stabilisieren. Hierfür muss auf der Hardware jeder Drohne ein Regelkreis nach Abbildung 1.7 implementiert werden, welcher die benötigten Sensorwerte und Sollwertgrößen aufnimmt, verarbeitet und die Stellgrößen wieder ausgibt. Außerhalb der Entwicklung eignet sich für die Umsetzung einer derartigen Regelkreisstruktur ein Hardwareaufbau, der auf Mikrocontrollern basiert. Dabei ergibt sich meistens eine Systemarchitektur, wie sie zum Beispiel in (do Nascimento u. a., 2012) dargestellt ist. Für sehr aufwendige Rechenoperationen könnte die ausschließliche Verwendung von Mikrocontrollern aber zum Problem werden. Soll für eine schnelle Entwicklungsarbeit die C-Code-Generierung von Simulink Real-Time™ verwendet werden, folgt aus der Umsetzung einer derartigen Struktur das Zusammenarbeiten unterschiedlicher Hardwarekomponenten innerhalb eines Systems (Ryll, 2015). Daraus ergeben sich mehrere Herausforderungen. Am Übergang zwischen zeitkontinuierlichem und zeitdiskretem System müssen die erfassten Sensorsignale $\mathbf{y}_M(t)$ abgetastet und digitalisiert werden. Moderne Sensorik, in Abbildung 1.7 in grün dargestellt, kombiniert die Erfassung der Messwerte $\mathbf{y}(t)$ oftmals bereits mit einem nachgeschalteten Filterkonzept, um unter anderem das hochfrequente Mess-

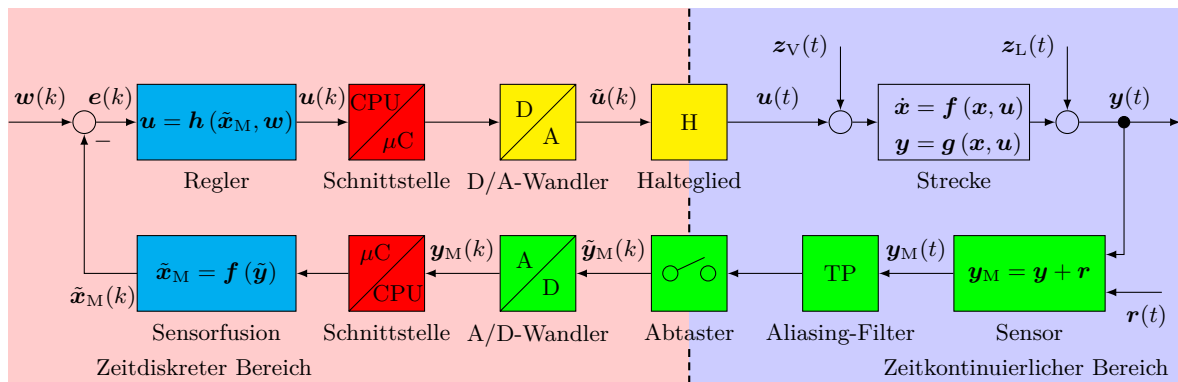


Abbildung 1.7: Erweiterter digitaler Regelkreis

rauschen $\mathbf{r}(t)$ herauszufiltern. Mit dem integrierten A/D-Wandler stellt der Sensor bereits vorverarbeitete Digitalsignale $\mathbf{y}_M(k)$ zur Verfügung. Am Übergang von digitalen zu analogen Signalen besteht die Aufgabe der in gelb dargestellten Hardware darin, die digitalen Stellsignale $\mathbf{u}(k)$ in die analogen Stellsignale $\mathbf{u}(t)$ umzuwandeln. Beide Übergänge werden für gewöhnlich auf Hardwareebene mit Mikrocontrollern realisiert, da diese mit den erforderlichen Peripherien ausgestattet sind. Sind die Daten erst einmal diskretisiert, kommt es bei der weiteren Verarbeitung und Berechnung des Regelkreises in den blau dargestellten Blöcken hauptsächlich auf eine ausreichende Rechenleistung an. Für diese Berechnungsschritte eignet sich in besonderem Maße ein Einplatinencomputer mit einem leistungsstarken Prozessor.

Die erzielbare Regelgüte hängt bei Systemen im Wesentlichen von der Abtastzeit im Verhältnis zu den dominierenden Zeitkonstanten des betrachteten Systems ab. Generell gilt, je kleiner die Abtastzeit ist, desto besser (Gurdan u. a., 2007; Lunze, 2016). Werden die einzelnen Softwarebausteine auf unterschiedliche Hardwarekomponenten aufgeteilt, kommt es insbesondere auf einen schnellen Austausch größerer Datenmengen an. Die in Abbildung 1.7 in rot dargestellten Blöcke symbolisieren die Schnittstellen zwischen der Hardware auf Mikrocontrollerebene und dem Einplatinencomputer. Diese haben sich in der Vergangenheit häufig als Engpass im System erwiesen. Die Sollwertsignale $\mathbf{w}(t)$ werden in der Regel durch übergeordnete, eigenständige Systeme oder eine Mensch-Maschine-Schnittstelle (engl.: Human Machine Interface, kurz: HMI) vorgegeben und müssen ebenfalls über eine geeignete Schnittstelle eingebunden werden. Aufgrund der häufig niedrigeren notwendigen Abtastraten ist diese Schnittstelle normalerweise kein limitierender Faktor. Neben der Problematik der Datenübertragung bietet diese Aufteilung aber auch Vorteile. Unter anderem sind Softwarebausteine in weiten Teilen unabhängig voneinander und können in einem ersten Schritt separat weiterentwickelt und getestet werden. So können beispielsweise die Sensordatenerfassung und die daran anschließende Auswertung zunächst unabhängig von der Entwicklung einer Lageregelung erfolgen.

1.3 Zielsetzung

Die Entwicklung von Drohnenmodellen besitzt einen hohen Grad an Komplexität in unterschiedlichen Bereichen der Ingenieurwissenschaften. Als Folge daraus ergeben sich zahlreiche unterschiedliche Ansätze bei den verwendeten dynamischen Modellen, den untersuchten Multikoptertopologien, den zugrunde liegenden Hardwarekonzepten sowie bei der Umsetzung der Software. Die Validierung der Modelle wird in der Regel anhand der Ergebnisse für bestimmte Anwendungsszenarien durchgeführt. Hierzu zählt zum Beispiel der Nachweis der Realisierbarkeit einer Trajektorienfolgeregelung. Aufgrund der großen Anzahl an Unterscheidungsmerkmalen lassen sich die Resultate unterschiedlicher Arbeiten häufig sehr schwer miteinander vergleichen. Der mit der Komplexität einhergehende hohe zeitliche Aufwand bedingt, dass es bisher üblich ist, ein ausgewähltes Drohnenmodell hinsichtlich bestimmter Eigenschaften oder definierter Anwendungsszenarien zu un-

tersuchen. Aus praktischer Sicht wäre jedoch die umgekehrte Herangehensweise von Vorteil. Die Herausforderung besteht dann darin, für eine gegebene Aufgabe die bestmögliche Drohnenkonfiguration auszuwählen. Dafür müssten jedoch eine Vielzahl unterschiedlicher Multikoptertopologien untersucht und ihre Vor- und Nachteile gegeneinander abgewogen werden. Simulationsstudien könnten bei dieser Entscheidungsfindung helfen. Voraussetzung ist aber, dass von jeder gewünschten Multikopterkonfiguration ein vergleichbares Simulationsmodell vorliegt. Zudem ist es bei der Entwicklung eines Multikopters vorteilhaft, wenn das System mit reduzierten Freiheitsgraden getestet werden kann. Dazu wird der Multikopter zum Beispiel auf einem Dreh- oder Kugelgelenk montiert (Bouabdallah, Murrieri und Siegwart, 2005). Auch für diese Testzwecke müssen Simulationsmodelle vorhanden sein. Besonders aufwendig wird die Entwicklung für Drohnensysteme. Ohne eine systematische Vorgehensweise ist die Herleitung und Implementierung der notwendigen Gleichungssysteme zeitaufwendig, komplex und fehleranfällig. Um mehrere Drohnenkonfigurationen oder Drohnensysteme miteinander in der Simulation vergleichen zu können, bedarf es einer gemeinsamen mathematischen Grundlage, welche einen objektiven Vergleich der verschiedenen Systeme ermöglicht. Um die Modellbildung zu beschleunigen, soll die Herleitung der beschreibenden Differentialgleichungen beziehungsweise der Aufbau eines Simulationsmodells für einen Multikopter ohne das explizite Aufstellen der physikalischen Beziehungen möglich sein. Im Idealfall sind hierfür keine Fachkenntnisse notwendig. Die Realisierung eines derartigen Gleichungssystems ist eines der Ziele dieser Arbeit.

Da viele der verwendeten Regelungskonzepte für Drohnen auf modellbasierten Ansätzen basieren, spielt für den Entwurf des Lagerreglers einer Drohne das dynamische Verhalten der Antriebseinheit eine entscheidende Rolle. Trotzdem ist dieses bisher oft nur unzulänglich berücksichtigt worden. Anstelle des Entwurfs eines komplexen Modells der Antriebseinheit ist die Entwicklung einer Antriebseinheit, welche unabhängig vom Arbeitspunkt ein deterministisches, hochdynamisches und mathematisch einfach zu beschreibendes Verhalten aufweist ein weiteres Ziel dieser Arbeit.

Damit der Entwickler ganzheitlich unterstützt wird, soll außerdem eine Entwicklungsumgebung mit dem in Abbildung 1.8 dargestellten Arbeitsablauf umgesetzt werden. Ziel ist es, durch den Einsatz verschiedener Technologien sowohl die Entwicklungsdauer als auch die Komplexität und Fehleranfälligkeit zu reduzieren und gleichzeitig die Anwenderfreundlichkeit zu erhöhen. Ein besonderes Augenmerk muss bei dem Entwurf der Entwicklungsumgebung auf die Modularität gelegt werden. Dies soll garantieren, dass die Entwicklungsumgebung vielseitig anwendbar ist und sich leicht durch zusätzliche Systeme erweitern lässt. Vereinfacht dargestellt, besteht die Entwicklungsumgebung aus einer Eingabeebene, einer Modellebene, einer Ausgabeebene und einer Ebene zur Signalverarbeitung. Innerhalb jeder Ebene kann nacheinander das gewünschte Element ausgewählt werden, wobei auch Mehrfachauswahlen möglich sind. Hierdurch entsteht eine Art Baukastenprinzip. Die Eingabeebene bietet eine Auswahl für Mensch-Maschine-Schnittstellen und lässt sich schnell und auf einfache Weise erweitern. Beispielhaft ist die Steuerung der

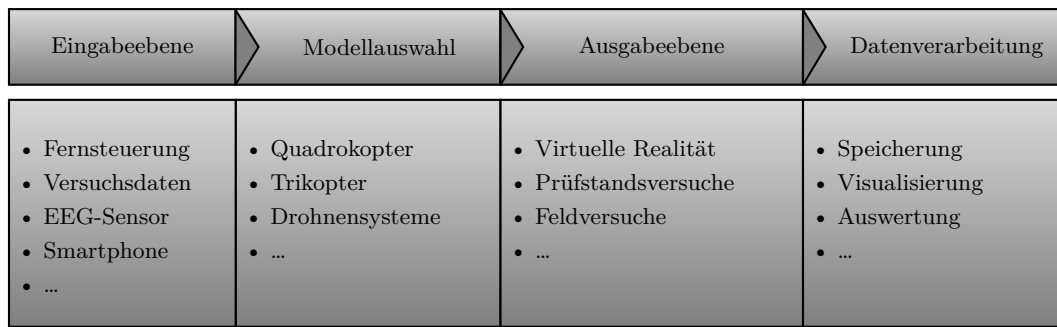


Abbildung 1.8: Entwurf einer Entwicklungsumgebung für Multikopter und Multikoptersysteme

Modelle über eine Fernbedienung, einen Computer oder mittels der Messung von Hirnströmen dargestellt. Anschließend folgt auf Modellebene die Wahl eines Modells, welches entweder in der Simulation oder der Praxis untersucht werden soll. Die Ausgabebene bietet die Möglichkeit, Regelungs- und Hardwarekonzepte, Softwarestände oder auch Szenarien sowohl simulativ als auch an realen Systemen zu untersuchen. Neben dem eigentlichen Feldversuch sind zwei weitere Elemente vorgesehen. Für die Simulation soll aufgrund der hohen Komplexität und der großen Anzahl an Freiheitsgraden eine virtuelle Realität (VR) zum Einsatz kommen. Diese erleichtert die Interpretation der Ergebnisse deutlich. Der Einsatz von Prüfständen ermöglicht unter anderem den sicheren Test neuartiger Konzepte oder die Identifikation von Parametern. Anfallende Simulations- oder Versuchsdaten müssen auf der Datenverarbeitungsebene aufgezeichnet, ausgewertet und abgespeichert werden können.

Um die Funktionsweise der Entwicklungsumgebung zu demonstrieren, soll diese anhand von mehreren Beispielen erläutert und dargestellt werden. Aufgrund der Vielzahl möglicher Systeme werden einige Beispiele herausgegriffen. Da Drohnen im Allgemeinen instabile Systeme darstellen, muss für alle Beispiele eine Regelung implementiert werden. Aus Gründen der Vergleichbarkeit wird die Verwendung eines einheitlichen Regelungskonzepts angestrebt. Die Betrachtung von im Schwarm agierenden Drohnen soll theoretisch für das automatische Mauern eines Gebäudes untersucht werden. Hierzu wird ein Vergleich mit dem bereits angeführten Seilroboter angestrebt, welcher in dieser Anwendung bereits erfolgreich getestet wurde (Heidel u. a., 2022; Roske u. a., 2021). In dieser Arbeit soll die Methodik im Vordergrund stehen, weshalb die entworfenen Regelungskonzepte nicht für den einzelnen Anwendungsfall optimiert werden.

1.4 Aufbau der Arbeit

Kapitel 2 dieser Arbeit beschäftigt sich zunächst mit der allgemeinen Modellbildung von Multikoptern. Im Vordergrund steht die Herleitung eines für viele Konfigurationen gültigen Modells, welches zur Modellierung einer möglichst großen Anzahl an unterschiedlichen Multikoptertopologien geeignet ist. Anschließend werden

für das zunächst allgemeingültige Gleichungssystem Vereinfachungen durchgeführt, welche in der Realität auf die allermeisten Drohnenkonfigurationen zutreffen. Die Implementierung der resultierenden mathematischen Modelle wird aufgezeigt. Im letzten Teil dieses Kapitels wird das Gleichungssystem für die Beschreibung kooperierender Drohnen, die über Seile eine gemeinsame Nutzlast tragen, erweitert.

In Kapitel 3 wird die Entwicklung einer Antriebseinheit mit deterministischem Verhalten sowohl in der Theorie als auch in der Praxis vorgestellt. Die Grundlage hierfür bildet ein vereinfachtes, aber hinreichend genaues Modell einer permanenterregten Synchronmaschine, welcher die allermeisten Multikopterantriebe zuzuordnen sind. Basierend auf diesem Modell wird ein flachheitsbasiertes Regelungskonzept entwickelt, welches zusammen mit einem Zustandsregler und einem Zustandsbeobachter der Maschine ein deterministisches Verhalten aufprägt. Außerdem garantiert das vorgestellte Verfahren eine hohe Effizienz. Da dieses Regelungskonzept von den Parametern des Motors abhängig ist, wird ausführlich auf die notwendige Parameteridentifikation eingegangen. Abschließend wird die Gültigkeit der Beschreibung der Antriebseinheit als ein lineares System erster Ordnung durch praktische Versuche verifiziert. Hierfür wird der Drehzahlregler auf einer eigens dafür entwickelten Hardware implementiert und mit den Messergebnissen kommerziell verfügbarer Drehzahlregler verglichen.

Kapitel 4 behandelt ausführlich den Hardwareaufbau der gesamten Entwicklungsumgebung. Diese wird auf einem verteilten System, bestehend aus Mikrocontrollern und einem Einplatinencomputer, umgesetzt. Die Softwarearchitektur wird für beide Teilsysteme vorgestellt und die notwendigen Schritte für ein echtzeitfähiges System erläutert. Zur Visualisierung der Simulationsdaten in Echtzeit wird die Modellebene um eine VR ergänzt. Zum Abschluss dieses Kapitels werden die verwendeten Testprüfstände und der mechanische Aufbau der Drohnen dargelegt und der Zusammenhang zu den Simulationsmodellen erläutert.

Kapitel 5 beschäftigt sich mit der Untersuchung unterschiedlicher Drohnenkonfigurationen. Zur Gewährleistung der Vergleichbarkeit wird für alle betrachteten Modelle dasselbe Regelungskonzept verwendet. Die notwendigen Grundlagen werden ausführlich dargestellt. Die Anwendung der entworfenen Multikopterbibliothek wird anhand mehrerer Drohnenkonfigurationen demonstriert, wobei sowohl Systeme mit starren als auch mit schwenkbaren Motoreinheiten untersucht werden. Für den Quadropter mit starren Motoreinheiten wird das Regelungskonzept auf einem Kugelgelenkprüfstand durch praktische Versuche analysiert.

Gegenstand von Kapitel 6 ist die Bahnplanung und Regelung kooperierender Drohnen, welche über Seile eine gemeinsame Nutzlast tragen. Der für die Bahnplanung verwendete Optimierer wird ausführlich vorgestellt. Ein besonderes Augenmerk liegt dabei auf den verwendeten Kostenfunktionen. Diese garantieren zum einen eine kollisionsfreie Bahn, zum anderen aber auch, dass alle beteiligten Drohnen die notwendigen Stellkräfte zu jedem Zeitpunkt zur Verfügung stellen können. Der

Optimierer wird für das Transportieren einer Nutzlast im Kontext des automatisierten Bauens angewendet. Die Ergebnisse werden in der Simulation überprüft. Zum Abschluss wird ein simulativer Vergleich zwischen einem Seilroboter und einem Drohnensystem angestellt.

Die Arbeit schließt in Kapitel 7 mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick auf weitere Projekte, die mit der vorgestellten Entwicklungsumgebung zukünftig bearbeitet werden sollen.

2 Modellbildung für Multikoptersysteme

In diesem Kapitel wird ein Konzept zur mathematischen Beschreibung unterschiedlicher Multikoptermodelle und im Schwarm agierender Systeme erarbeitet. Abschnitt 2.1 wiederholt die dafür notwendigen Grundlagen der Modellbildung mechanischer Systeme. Die zugrunde liegende Idee für die mathematische Beschreibung eines einzelnen Multikopters wird zu Beginn von Abschnitt 2.2 erläutert, bevor anschließend das Modell im Detail hergeleitet wird. Aus dem resultierenden und zunächst allgemeingültigen Gleichungssystem können durch entsprechende Parametrierung verschiedene Multikoptermodelle abgeleitet und simuliert werden. Die Parametrierung und Implementierung des gefundenen Gleichungssystems wird in Abschnitt 2.3 beschrieben. Die Gleichungen einer einzelnen Drohne werden in Abschnitt 2.4 für den gemeinsamen Transport einer Nutzlast mit mehreren Drohnen erweitert.

2.1 Grundlagen der Modellbildung von Mehrkörpersystemen

Die unterschiedlichen Multikopterkonfigurationen werden als offene Mehrkörpersysteme betrachtet und auf Basis der Newton-Euler-Gleichungen hergeleitet. Die überwiegende Mehrheit der Multikopter kann dieser Klasse zugeschrieben werden, weshalb die nachfolgenden Ausführungen auf offene Mehrkörpersysteme begrenzt werden. Weiterführende Betrachtungen finden sich zum Beispiel in (Schramm, Hiller und Bardini, 2013).

2.1.1 Kinematik eines Systems starrer Körper

Das Gebiet der Kinematik behandelt die geometrische Beschreibung der Bewegung von Körpern. Sie wird unterteilt in die Beschreibung der Lage, der Geschwindigkeit und der Beschleunigung.

Einführung wichtiger Koordinatensysteme und Vektoren: Für die Beschreibung der Multikopter wird neben dem gemeinsamen raumfesten Inertialsystem \mathcal{K}_0 für jeden Körper K_j ein körperfestes Koordinatensystem \mathcal{K}_j eingeführt. Jedes Koordinatensystem besteht dabei im \mathbb{R}^3 aus den drei Basisvektoren $\mathbf{b}_{jx}, \mathbf{b}_{jy}, \mathbf{b}_{jz}$, einem Koordinatenursprung $O_j \in \mathbb{R}^3$ und ist formal als Menge $\mathcal{K}_j = \{O_j, \mathbf{b}_{jx}, \mathbf{b}_{jy}, \mathbf{b}_{jz}\} = \{O_j, \mathbf{B}_j\}$ definiert. Die Basisvektoren bilden die Spaltenvektoren von \mathbf{B}_j , der sogenannten Basis des Koordinatensystems \mathcal{K}_j . Jeder Vektor lässt sich in einem Koordinatensystem als Linearkombination dieser Basisvektoren darstellen. Die für

die Beschreibung eines Mehrkörpersystems notwendigen Vektoren werden für einen Körper gemäß Abbildung 2.1a mit kartesischen Koordinaten beschrieben. Der Vektor $\mathbf{r}_{j,0}$ weist vom Ursprung O_0 des Inertialsystems \mathcal{K}_0 zum Ursprung O_j des körperfesten Koordinatensystems \mathcal{K}_j . Vom Ursprung O_0 weist außerdem der Vektor \mathbf{r}_{Pj} auf einen beliebigen Punkt P_j und der Vektor \mathbf{r}_{Sj} auf den Schwerpunkt S_j des betrachteten starren Körpers. Vom Ursprung O_j sind dies entsprechend die körperfesten Vektoren \mathbf{b}_{Pj} und \mathbf{b}_{Sj} .

Der ungebundene starre Körper verfügt über drei translatorische sowie drei rotatorische und somit in Summe über $f_K = 6$ Freiheitsgrade. Für die Anzahl der Freiheitsgrade eines ungebundenen Mehrkörpersystems (MKS), welches aus n_K starren Körpern besteht, gilt folglich $f_{\text{MKS}} = 6n_K$. Wird das MKS jedoch durch b holonome Bindungen eingeschränkt, reduziert sich die Anzahl der Freiheitsgrade auf $f_{\text{MKS}} = 6n_K - b$. Die Lage des Mehrkörpersystems ist dann zu jedem Zeitpunkt durch die Kenntnis von f_{MKS} unabhängigen Koordinaten, den sogenannten Minimalkoordinaten

$$\mathbf{q} = \left[\mathbf{q}_1^T \ \mathbf{q}_2^T \ \dots \ \mathbf{q}_{n_K}^T \right]^T, \quad \text{mit } \mathbf{q}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{Rj} \\ \mathbf{q}_{Tj} \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, n_K \quad (2.1)$$

definiert. Diese lassen sich nach den rotatorischen Freiheitsgraden \mathbf{q}_{Rj} und den translatorischen Freiheitsgraden \mathbf{q}_{Tj} trennen. Für die Beschreibung offener Mehrkörpersysteme nach Abbildung 2.1b werden die Gelenkkoordinaten als Minimalkoordinaten verwendet. Die Topologie eines Mehrkörpersystems kann über die Wegematrix \mathbf{W} mit den Elementen

$$W_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 1, & \text{falls } j \text{ auf dem Weg von } 0 \text{ nach } i \text{ liegt} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.2)$$

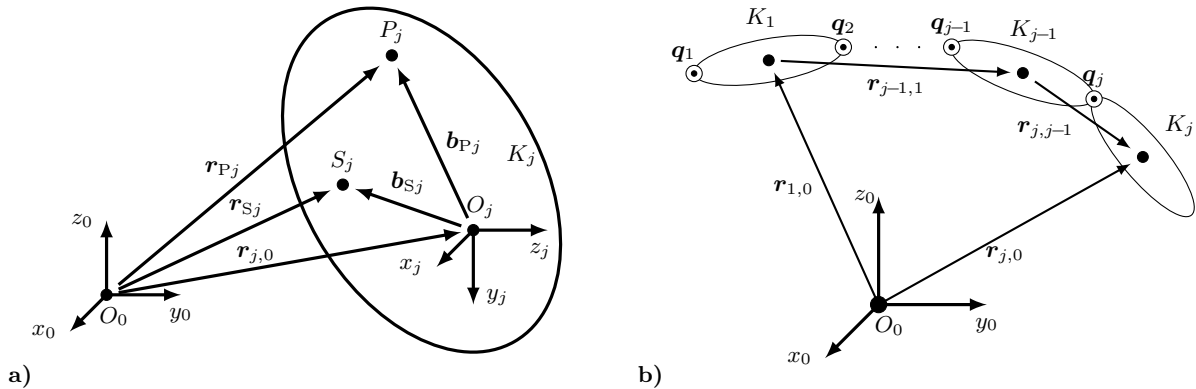


Abbildung 2.1: Definition wichtiger Vektoren zur Beschreibung a) eines starren Körpers und b) eines Systems starrer Körper in offener Baumstruktur

festgehalten werden. Die Kenntnis der Wegematrix erweist sich im weiteren Verlauf als sehr nützlich, da auch andere Matrizen deren Struktur besitzen.

Beschreibung der Lage: Die aktuelle Lage des starren Körpers K_j ist dann vollständig bekannt, wenn zu jedem Zeitpunkt sowohl die Position des Koordinatenursprungs O_j als auch die Orientierung des körperfesten Koordinatensystems \mathcal{K}_j gegenüber dem Inertialsystem bekannt sind. Die Position ist eindeutig durch die Kenntnis des Ortsvektors

$$\mathbf{r}_{j,0}(\mathbf{q}(t), t) = \begin{bmatrix} x_{j,0}(\mathbf{q}(t), t) \\ y_{j,0}(\mathbf{q}(t), t) \\ z_{j,0}(\mathbf{q}(t), t) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

bestimmt. Die Punkte, die während der Bewegung vom Koordinatenursprung durchlaufen werden, beschreiben die sogenannte Bahnkurve oder auch Trajektorie. Diese lässt sich, wie in Abbildung 2.2a dargestellt, unabhängig für jede Koordinate angeben.

Die Orientierung des starren Körpers K_j ist vollständig bekannt, wenn zu jedem Zeitpunkt die Basisvektoren des Koordinatensystems \mathcal{K}_j in diejenigen des Inertialsystems \mathcal{K}_0 überführt werden können. Dies ist gleichbedeutend mit der Aufgabe, einen Vektor aus seiner Ausgangslage $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0)$ in eine beliebige aktuelle Lage $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t)$ mit $|\mathbf{r}_0| = |\mathbf{r}_1|$ zu überführen. Dies gelingt gemäß Abbildung 2.2b durch die Drehung des Vektors \mathbf{r}_0 um den Drehzeiger $\varphi(\mathbf{n}(t), \varphi(t))$. Hierbei beschreibt der Einheitsvektor $\mathbf{n}(t)$ die Drehachse und $\varphi(t)$ den dazugehörigen Drehwinkel. Der Ortsvektor \mathbf{r}_1 kann über die Linearkombination

$$\mathbf{r}_1(t) = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NV} + \overrightarrow{VQ} \quad (2.4)$$

beschrieben werden. Für die einzelnen Summanden müssen jeweils die Beziehungen

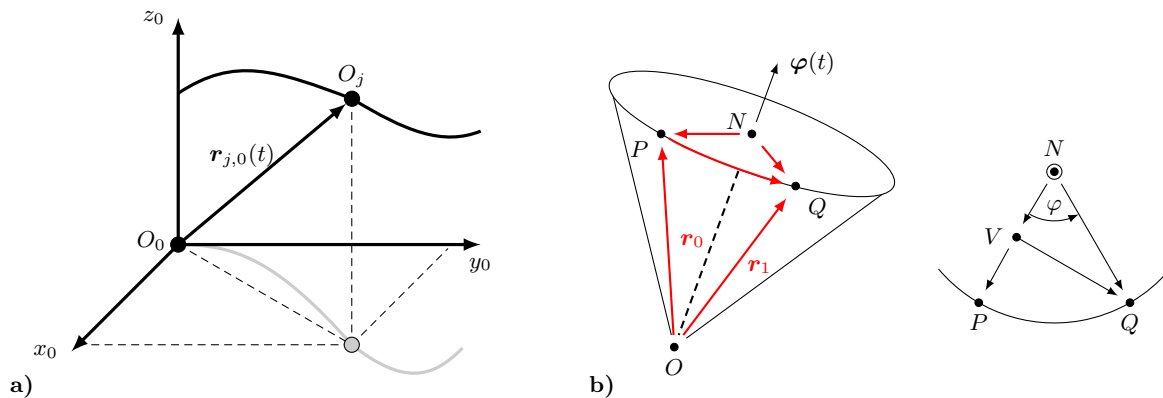


Abbildung 2.2: Beschreibung der Lage eines starren Körpers. Für a) die Position durch den Ortsvektor und b) die Orientierung durch den Drehzeiger

zu den Vektoren \mathbf{n}, \mathbf{r}_0 und dem Drehwinkel φ gefunden werden. Diese lauten

$$\overrightarrow{ON} = \mathbf{n} \cdot |\overrightarrow{ON}| = \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0)^{*)^1} = \mathbf{n}\mathbf{n}^T \mathbf{r}_0, \quad (2.5a)$$

$$\overrightarrow{NP} = \mathbf{r}_0 - \overrightarrow{ON} = \mathbf{r}_0 - \mathbf{n}\mathbf{n}^T \mathbf{r}_0 \rightarrow \overrightarrow{NV} = (\mathbf{r}_0 - \mathbf{n}\mathbf{n}^T \mathbf{r}_0) \cos(\varphi), \quad (2.5b)$$

$$\overrightarrow{VQ} = \tilde{\mathbf{n}} \mathbf{r}_0 \sin(\varphi), \text{ da } |\tilde{\mathbf{n}} \mathbf{r}_0| = |\overrightarrow{NP}| \Rightarrow |\overrightarrow{VQ}| = |\overrightarrow{NP}| \sin(\varphi). \quad (2.5c)$$

Für das Kreuzprodukt wird die kompakte Matrizenschreibweise

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \tilde{\mathbf{a}} \mathbf{b}, \quad \text{mit } \tilde{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

verwendet. Die Auswertung des Vektorzugs (2.4) liefert den Zusammenhang

$$\mathbf{r}_1 = (\cos(\varphi) \mathbf{E} + (1 - \cos(\varphi)) \mathbf{n}\mathbf{n}^T + \sin(\varphi) \tilde{\mathbf{n}}) \mathbf{r}_0. \quad (2.7)$$

Die Drehung eines Vektors mit dem Rotationstensor

$$\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi) = \cos(\varphi) \mathbf{E} + (1 - \cos(\varphi)) \mathbf{n}\mathbf{n}^T + \sin(\varphi) \tilde{\mathbf{n}} \quad (2.8)$$

liefert somit den gedrehten Vektor im selben Koordinatensystem. Handelt es sich bei den Vektoren um Basisvektoren, kann der Zusammenhang ${}^0\mathbf{B}_j(t) = {}^0\mathbf{R}_{j,0}(t) {}^0\mathbf{B}_0$ zwischen der Basis des Inertialsystems und der Basis des Koordinatensystems \mathcal{K}_j angegeben werden. Mit einem hochgestellten Index vor der jeweiligen Größe wird nachfolgend das Koordinatensystem gekennzeichnet, indem diese Größe angegeben wird.

Im Gegensatz zu der aktiven Drehung eines Vektors nach Gleichung (2.7) besteht die Aufgabe oft auch darin, einen Vektor anstatt im körperfesten Koordinatensystem \mathcal{K}_j im Inertialsystem darzustellen oder umgekehrt. Die erforderliche Koordinatentransformation kann ebenso durch eine lineare Abbildung der Form

$${}^0\mathbf{r} = {}^{0,j}\mathbf{T} {}^j\mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad {}^j\mathbf{r} = {}^{j,0}\mathbf{T} {}^0\mathbf{r}, \quad \text{mit } {}^{j,0}\mathbf{T} = {}^{0,j}\mathbf{T}^T \quad (2.9)$$

beschrieben werden. Wird ein Vektor gemäß Gleichung (2.7) gedreht, so ist ersichtlich, dass für diesen Vektor ${}^0\mathbf{r}_0 = {}^j\mathbf{r}_j$ gelten muss, da die Basisvektoren ebenfalls dieselbe Drehung erfahren. Somit kann aus dem Vergleich der Gleichungen (2.7) und (2.9) der Zusammenhang ${}^{0,j}\mathbf{T} = {}^0\mathbf{R}_{j,0}$ angegeben werden. Während demnach durch die Multiplikation mit \mathbf{R} eine aktive Drehung des Vektors

1 in kartesischen Koordinaten.

Tabelle 2.1: Parametrierung von Drehbewegungen

Parametrierung	Parameter	Nebenbedingung	Singularität
Drehzeiger	$\boldsymbol{\varphi} = (\mathbf{n}, \varphi)$	$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$	$\mathbf{n}(0)$
zxz -EULER-Winkel	Ψ, Θ, Φ	keine	$\Theta = 0, \pi$
xyz -KARDAN-Winkel	α, β, γ	keine	$\beta = \pm \frac{\pi}{2}$
Euler-Parameter	p_s, p_x, p_y, p_z	$p_s^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = 1$	keine

\mathbf{r}_0 erfolgt, bleibt der Vektor bei einer Koordinatentransformation stets derselbe. Leonhard Euler konnte beweisen, dass im \mathbb{R}^3 durch maximal drei aufeinander folgende ebene Elementardrehungen jede beliebige Orientierung erreicht werden kann. Daraus folgt die Beschreibung einer Drehung als kinematische Ersatzkette $\mathbf{R}_{j,0} = \mathbf{R}_{j,b}\mathbf{R}_{b,a}\mathbf{R}_{a,0}$. Entsprechend gilt dies auch für eine Koordinatentransformation gemäß ${}^0_j\mathbf{T} = {}^0_a\mathbf{T}^a_b\mathbf{T}^b_j\mathbf{T}$. Die Parametrierung des Drehtensors \mathbf{R} und damit die Beschreibung der finiten Drehung sind somit nicht eindeutig. Einige Möglichkeiten der Parametrierung sind in Tabelle 2.1 aufgelistet.

Die bisherigen Betrachtungen können ohne Weiteres gemäß Abbildung 2.1b auf mehrere Körper erweitert werden. Der Vektor $\mathbf{r}_{j,j-1}$ weist dann vom Ursprung O_{j-1} des Körpers K_{j-1} zum Ursprung O_j des Körpers K_j . Für die Beschreibung offener Mehrkörpersysteme werden die Ortsvektoren eines Körpers K_j vorteilhaft in Abhängigkeit seines Vorgängerkörpers als Vektorzug

$${}^0\mathbf{r}_{j,0}(\mathbf{q}, t) = {}^0\mathbf{r}_{j-1,0}(\mathbf{q}, t) + {}^0_{j-1}\mathbf{T}^{j-1}\mathbf{r}_{j,j-1}(\mathbf{q}_j, t) \quad (2.10)$$

angegeben. Sämtliche Summanden müssen im gleichen Koordinatensystem beschrieben werden. Der Rotationstensor $\mathbf{R}_{j,j-1}$ dreht die Basisvektoren von \mathcal{K}_{j-1} in diejenigen von \mathcal{K}_j . Die Orientierung gegenüber dem Inertialsystem folgt aus der Hintereinanderschaltung

$$\mathbf{R}_{j,0}(\mathbf{q}_R, t) = \mathbf{R}_{j,j-1}(\mathbf{q}_{Rj}, t)\mathbf{R}_{j-1,0}(\mathbf{q}_R, t). \quad (2.11)$$

Die Lage eines Mehrkörpersystems starrer Körper gegenüber dem Inertialsystem ist vollständig bekannt, wenn die Menge

$$\hat{\mathbf{r}}_{j,0} = \{\mathbf{R}_{j,0}, \mathbf{r}_{j,0}\}, \quad \text{für } j = 1, \dots, n_K, \quad (2.12)$$

zu jeder Zeit für alle n_K Körper bekannt ist.

Beschreibung der Geschwindigkeit: In einem ersten Schritt wird die Geschwindigkeit eines starren Körpers K_j gegenüber seinem Vorgängerkörper K_{j-1} im Koordinatensystem \mathcal{K}_{j-1} angegeben. Für die Herleitung werden die Vektoren aus Abbildung 2.3a betrachtet. Die translatorische Momentangeschwindigkeit ist mit

$$\mathbf{v}_{j,j-1}(t) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}_{j,j-1}(t + \Delta t) - \mathbf{r}_{j,j-1}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}_{j,j-1}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{r}}_{j,j-1}(t) \quad (2.13)$$

definiert. Wird der Vektor $\mathbf{r}_{j,j-1}$ in Abhängigkeit der zu dem Gelenk G_j gehörenden Minimalkoordinaten $\mathbf{q}_j(t)$ beschrieben, folgt aus der totalen zeitlichen Ableitung das Ergebnis

$$\dot{\mathbf{r}}_{j,j-1}(\mathbf{q}_j, \dot{\mathbf{q}}_j, t) = \frac{\partial \mathbf{r}_{j,j-1}(\mathbf{q}_j, t)}{\partial \mathbf{q}_j} \frac{d\mathbf{q}_j}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}_{j,j-1}(\mathbf{q}_j, t)}{\partial t}. \quad (2.14)$$

Für das Maß der Änderung der Rotation wird eine ähnliche Definition wie für die translatorische Geschwindigkeit angestrebt. Dafür wird, wie in Abbildung 2.3b veranschaulicht, die Drehung des Ausgangsvektors \mathbf{r}_0 in seine Endposition $\mathbf{r}_1(t + \Delta t)$ gemäß der Vorschrift

$$\mathbf{r}_1(t + \Delta t) = \mathbf{R}_{1,0}(t + \Delta t) \mathbf{r}_0 \quad (2.15)$$

betrachtet. Wird der Rotationstensor in Gleichung (2.15) mit $\mathbf{R}_{1,0}(t + \Delta t) = \mathbf{R}(\phi) \mathbf{R}(\varphi)$ in zwei Teildrehungen zerlegt und wird berücksichtigt, dass $\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{R}(\varphi) \mathbf{r}_0$ gilt, folgt

$$\mathbf{r}_1(t + \Delta t) - \mathbf{r}_1(t) = (\mathbf{R}(\phi) - \mathbf{E}) \mathbf{r}_1(t). \quad (2.16)$$

Wird die Änderung des Ortsvektors (2.16) erneut auf das Zeitelement Δt bezo-

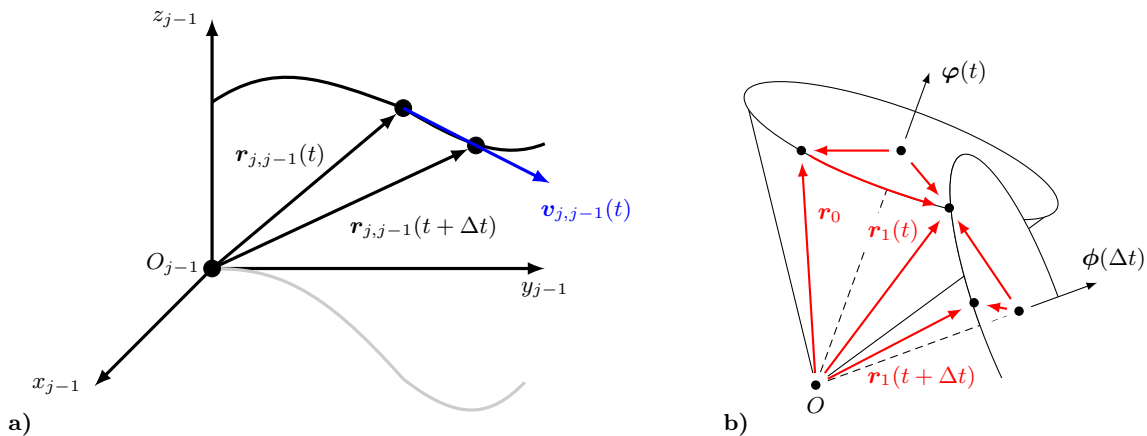


Abbildung 2.3: Definition von a) der Translations- und b) der Winkelgeschwindigkeit eines starren Körpers

gen, führt dies analog zur Definition der Translationsgeschwindigkeit (2.13) auf die Grenzwertbetrachtung

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}_1(t + \Delta t) - \mathbf{r}_1(t)}{\Delta t} = \frac{\mathbf{R}(\phi) - \mathbf{E}}{\Delta t} \mathbf{r}_1(t) = \frac{\mathbf{R}_\Delta(\phi)}{\Delta t} \mathbf{r}_1(t). \quad (2.17)$$

Für eine weitere Auswertung wird der Rotationstensor $\mathbf{R}_\Delta(\phi)$ mit $\phi = \phi(\Delta t)$ in eine Taylorreihe entwickelt. Im Arbeitspunkt $\Delta t = 0$ ergibt sich der Drehzeiger $\bar{\phi}(\mathbf{e}(t), 0)$. Die weitere Auswertung von (2.17) führt auf

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}_\Delta(\phi)}{\Delta t} \mathbf{r}_1(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\mathbf{R}_\Delta(\bar{\phi})}{\Delta t} + \frac{\mathbf{R}'_\Delta(\bar{\phi})}{\Delta t} \Delta t + \frac{\mathbf{R}''_\Delta(\bar{\phi})}{2\Delta t} \Delta t^2 + \dots \right) \mathbf{r}_1(t), \quad (2.18a)$$

$$= \mathbf{R}'_\Delta(\bar{\phi}) \mathbf{r}_1(t). \quad (2.18b)$$

Die Berechnung der erforderlichen Ableitung des Drehtensors $\mathbf{R}'_\Delta(\mathbf{e}(t), 0)$ nach dessen Definition (2.8) liefert zusammen mit Gleichung (2.17) die Definition der Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \tilde{\mathbf{e}} \mathbf{r}_1 = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{1,0} \mathbf{r}_1 = \boldsymbol{\omega}_{1,0} \times \mathbf{r}_1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega}_{1,0} = \frac{d\phi}{dt} \mathbf{e} = \frac{d\phi}{dt} \mathbf{e}. \quad (2.19)$$

Demnach beschreibt der Winkelgeschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{\omega}$ die zeitliche Änderung des Drehwinkels um die momentane Drehachse \mathbf{e} . Die Definition der Winkelgeschwindigkeit (2.19) beinhaltet mit der momentanen Drehachse eine meist unbekannte Größe. Ein wesentlich einfacherer Zusammenhang folgt aus der Betrachtung des Vektorzugs $\mathbf{r}_1(t + dt) = \mathbf{r}_1(t) + d\mathbf{r}_1$ mit der Definition für eine infinitesimal kleine Drehung $d\mathbf{r}_1 = d\phi \tilde{\mathbf{e}} \mathbf{r}_1(t)$ aus Gleichung (2.19). Dieser Vektorzug lässt sich weiter umformen zu

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{1,0}(t + dt) \mathbf{r}_0 &= \mathbf{R}_{1,0}(t) \mathbf{r}_0 + d\phi \tilde{\mathbf{e}} \mathbf{R}_{1,0}(t) \mathbf{r}_0, \\ \frac{\mathbf{R}_{1,0}(t + dt) - \mathbf{R}_{1,0}(t)}{dt} &= \frac{d\phi}{dt} \tilde{\mathbf{e}} \mathbf{R}_{1,0}(t), \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{1,0} &= \dot{\mathbf{R}}_{1,0}(t) \mathbf{R}_{1,0}(t)^T. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Während sich Gleichung (2.19) lediglich für Anwendungsfälle mit starren Drehachsen eignet, kann Gleichung (2.20) für alle Anwendungsfälle räumlich veränderlicher Drehungen verwendet werden. Für die Winkelgeschwindigkeit zwischen dem Koordinatensystem \mathcal{K}_i des Körpers K_i und dem Koordinatensystem \mathcal{K}_j des Körpers K_j folgt

$${}^i\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{j,i} = {}^i\dot{\mathbf{R}}_{j,i} {}^i\mathbf{R}_{j,i}^T \quad \text{oder} \quad {}^i\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{j,i} = {}^{i,j}\dot{\mathbf{T}}^{i,j} \mathbf{T}^T. \quad (2.21)$$

Wird der Drehzeiger ϕ aus Gleichung (2.19) in Abhängigkeit der gewählten Minimalkoordinaten angegeben, folgt für die Winkelgeschwindigkeit analog zur Translationsgeschwindigkeit

$$\omega_{j,j-1}(\mathbf{q}_{Rj}, \dot{\mathbf{q}}_{Rj}, t) = \frac{\partial \phi_j(\mathbf{q}_{Rj}, t)}{\partial \mathbf{q}_{Rj}} \frac{d\mathbf{q}_{Rj}}{dt} + \frac{\partial \phi_j(\mathbf{q}_{Rj}, t)}{\partial t}. \quad (2.22)$$

Mit der Erkenntnis, dass die Minimalkoordinaten des Gelenks G_j freie Koordinaten sind, resultiert der skleronome Rotationstensor $\mathbf{R}_{Gj} = \mathbf{R}_{Gj}(\mathbf{q}_{Rj})$. Eine Auswertung nach Gleichung (2.20) liefert den Zusammenhang $\tilde{\omega}_{Gj} = \mathbf{R}_{Gj}(\mathbf{q}_{Rj}) \mathbf{R}_{Gj}(\mathbf{q}_{Rj})^T$, welcher auf die Form $\omega_{Gj} = \mathbf{L}_{Rj}(\mathbf{q}_{Rj}) \dot{\mathbf{q}}_{Rj}$ gebracht werden kann. Die inverse Beziehung $\dot{\mathbf{q}}_{Rj} = \mathbf{H}_{Rj}(\mathbf{q}_{Rj}) \omega_{Gj}$ mit $\mathbf{H}_{Rj} = \mathbf{L}_{Rj}^{-1}$ wird auch als kinematische Differentialgleichung der Rotation bezeichnet. Die Berechnung der Winkelgeschwindigkeit $\omega_{j,j-1}$ nach Gleichung (2.22) kann somit entweder mit den Ableitungen der Minimalkoordinaten $\dot{\mathbf{q}}_{Rj}$ oder mit den zum Gelenk gehörenden Winkelgeschwindigkeiten ω_{Gj} parametrisiert werden. Letztere werden auch als Minimalgeschwindigkeiten der Rotation \mathbf{s}_{Rj} bezeichnet. Im translatorischen Fall gilt stets $\dot{\mathbf{q}}_{Tj} = \mathbf{E} \mathbf{s}_{Tj}$, da die Größen über eine einfache zeitliche Ableitung nach Gleichung (2.13) verknüpft sind. Daraus folgt $\mathbf{H}_j = \text{diag}(\mathbf{H}_{Rj}, \mathbf{H}_{Tj})$. Die Einführung des Vektors der Minimalgeschwindigkeiten

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1^T & \mathbf{s}_2^T & \dots & \mathbf{s}_{n_K}^T \end{bmatrix}^T \quad \text{mit} \quad \mathbf{s}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{Rj} \\ \mathbf{s}_{Tj} \end{bmatrix}, \quad \text{für } j = 1, \dots, n_K \quad (2.23)$$

erlaubt es, Gleichung (2.14) und (2.22) auf die gemeinsame Form

$$\begin{bmatrix} \omega_{j,j-1} \\ \mathbf{v}_{j,j-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_j(\mathbf{q}_{Rj}, t)}{\partial \mathbf{q}_{Rj}} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathbf{r}_{j,j-1}(\mathbf{q}_j, t)}{\partial \mathbf{q}_{Rj}} & \frac{\partial \mathbf{r}_{j,j-1}(\mathbf{q}_j, t)}{\partial \mathbf{q}_{Tj}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{Rj} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{Tj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{Rj} \\ \mathbf{s}_{Tj} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_j(\mathbf{q}_{Rj}, t)}{\partial t} \\ \frac{\partial \mathbf{r}_{j,j-1}(\mathbf{q}_j, t)}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (2.24a)$$

$$\hat{\mathbf{v}}_{j,j-1} = \mathbf{G}_j \mathbf{s}_j + \hat{\mathbf{v}}_{j,j-1}^{\text{rel}} \quad (2.24b)$$

zu bringen (Woernle, 2016). Für die Jacobi-Matrizen des Gelenks gilt

$$\mathbf{G}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{Rj} \\ \mathbf{G}_{Tj} \end{bmatrix}, \quad \text{mit} \quad \mathbf{G}_{Rj} = \frac{\partial \phi_j}{\partial \mathbf{q}_j} \mathbf{H}_j(\mathbf{q}_j), \quad \mathbf{G}_{Tj} = \frac{\partial \mathbf{r}_{j,j-1}}{\partial \mathbf{q}_j} \mathbf{H}_j(\mathbf{q}_j). \quad (2.25)$$

Für die Wahl $\mathbf{s}_{Rj} = \dot{\mathbf{q}}_{Rj}$ folgt $\mathbf{H}_{Rj}(\mathbf{q}_{Rj}) = \mathbf{E}$ und damit wieder Gleichung (2.22). Sofern es sich nicht um eine Drehbewegung mit fester Drehachse handelt, werden die Jacobi-Matrizen der Rotation \mathbf{G}_{Rj} vorteilhaft aus der Winkelgeschwindigkeit nach Gleichung (2.20) herausgelöst. Weitere Berechnungsmöglichkeiten finden sich in (Schramm, Hiller und Bardini, 2013).

Die Gleichungen (2.22) und (2.14) werden im Folgenden für die Beschreibung von MKS herangezogen, indem die Geschwindigkeit des aktuellen Körpers mit Bezug zu dem direkten Vorgängerkörper angegeben wird. Die Winkelgeschwindigkeit in Abhängigkeit des Vorgängerkörpers ergibt sich, indem in der Definition der Winkelgeschwindigkeit (2.21) der Rotationstensor mit der Beziehung (2.11) ersetzt wird. Dies führt zu

$$\begin{aligned} {}^0\tilde{\omega}_{j,0} &= \left({}^{0,j-1}\dot{\mathbf{T}}^{j-1,i}\mathbf{T} + {}^{0,j-1}\mathbf{T}^{j-1,i}\dot{\mathbf{T}} \right) \cdot \left({}^{0,j-1}\mathbf{T}^{j-1,i}\mathbf{T} \right)^{\mathrm{T}} \quad \Big| \quad (\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \\ &= {}^{0,j-1}\dot{\mathbf{T}}\mathbf{E} {}^{0,j-1}\mathbf{T}^{\mathrm{T}} + {}^{0,j-1}\mathbf{T}^{j-1}\tilde{\omega}_{j,j-1} {}^{0,j-1}\mathbf{T}^{\mathrm{T}} \\ &= {}^0\tilde{\omega}_{j-1,0} + {}^0\tilde{\omega}_{j,j-1}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (2.24a) und (2.25) folgt daraus der Zusammenhang

$$\omega_{j,0} = \omega_{j-1,0} + \mathbf{G}_{Rj}\mathbf{s}_j + \bar{\omega}_{j,j-1}^{\mathrm{rel}}. \quad (2.27)$$

Für die translatorische Geschwindigkeit wird der Vektorzug (2.10) abgeleitet und die Zusammenhänge aus den Gleichungen (2.24a) und (2.25) eingesetzt. Daraus folgt

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{v}_{j,0} &= {}^0\dot{\mathbf{r}}_{j-1,0} + {}^{0,j-1}\dot{\mathbf{T}}\mathbf{r}_{j,j-1} + {}^{0,j-1}\mathbf{T} \left({}^{j-1}\mathbf{G}_{Tj}\mathbf{s}_j + \frac{\partial^{j-1}\mathbf{r}_{j,j-1}}{\partial t} \right) \\ &= \dot{\mathbf{r}}_{j-1,0} + \tilde{\omega}_{j-1,0}\mathbf{r}_{j,j-1} + \mathbf{G}_{Tj}\mathbf{s}_j + \bar{\mathbf{v}}_{j,j-1}^{\mathrm{rel}}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Die translatorische Geschwindigkeit und die Winkelgeschwindigkeit für den Körper K_j gegenüber dem Inertialsystem folgen aus der kompakten Darstellung von (2.27) und (2.28) aus der Beziehung

$$\begin{bmatrix} \omega_{j,0} \\ \mathbf{v}_{j,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ -\tilde{\mathbf{r}}_{j,j-1} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{j-1,0} \\ \mathbf{v}_{j-1,0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{Rj} \\ \mathbf{G}_{Tj} \end{bmatrix} \mathbf{s}_j + \begin{bmatrix} \bar{\omega}_{j,j-1}^{\mathrm{rel}} \\ \bar{\mathbf{v}}_{j,j-1}^{\mathrm{rel}} \end{bmatrix} \quad (2.29a)$$

$$\hat{\mathbf{v}}_{j,0} = \mathbf{V}_{j,j-1}\hat{\mathbf{v}}_{j-1,0} + \mathbf{G}_j\mathbf{s}_j + \hat{\mathbf{v}}_{j,j-1}^{\mathrm{rel}} \quad (2.29b)$$

unter der Voraussetzung, dass der Geschwindigkeitsvektor $\hat{\mathbf{v}}_{j-1,0}$ des Körpers K_{j-1} bekannt ist. Die Winkelgeschwindigkeit des Körpers K_j setzt sich somit aus der Winkelgeschwindigkeit $\omega_{j-1,0}$ des Vorgängerkörpers K_j und der zusätzlich durch das Gelenk eingebrachten Winkelgeschwindigkeit $\omega_{j,j-1} = \mathbf{G}_{Rj}\mathbf{s}_j + \bar{\omega}_{j,j-1}^{\mathrm{rel}}$ zusammen. Die translatorische Geschwindigkeit hängt zunächst von der translatorischen Geschwindigkeit des Vorgängerkörpers $\mathbf{v}_{j-1,0}$ ab, ergänzt um den Anteil $\tilde{\omega}_{j-1,0}\mathbf{r}_{j,j-1}$, welcher durch die Rotation des Vorgängerkörpers K_{j-1} bei gedachtem starren Gelenk entsteht. Ein weiterer Anteil entsteht durch die vom Gelenk eingebrachte

translatorische Geschwindigkeit $\mathbf{v}_{j,j-1} = \mathbf{G}_{Tj} \mathbf{s}_{Tj} + \bar{\mathbf{v}}_{j,j-1}^{\text{rel}}$. Die Umformung von Gleichung (2.29b) führt auf den Zusammenhang

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{V}_{j,j-1} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}_{j-1,0} \\ \hat{\mathbf{v}}_{j,0} \end{bmatrix} = \mathbf{G}_j \mathbf{s}_j + \hat{\mathbf{v}}_{j,j-1}^{\text{rel}}, \quad (2.30)$$

welcher sich aufgrund der rekursiven Struktur auf die Beziehung

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{V}_{2,1} & \mathbf{E} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & -\mathbf{V}_{n_K, n_K-1} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}_{1,0} \\ \hat{\mathbf{v}}_{2,0} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{v}}_{n_K-1,0} \\ \hat{\mathbf{v}}_{n_K,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_2 & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{G}_{n_K-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{G}_{n_K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{s}_{n_K-1} \\ \mathbf{s}_{n_K} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}_{1,0}^{\text{rel}} \\ \hat{\mathbf{v}}_{2,0}^{\text{rel}} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{v}}_{n_K-1,0}^{\text{rel}} \\ \hat{\mathbf{v}}_{n_K,0}^{\text{rel}} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

$$\mathbf{V} \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{G} \mathbf{s} + \hat{\mathbf{v}}^{\text{rel}}$$

für n_K starre Körper erweitern lässt. Daraus ergeben sich die gesuchten Geschwindigkeiten aller starren Körper gegenüber dem Inertialsystem mit

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{s} + \mathbf{V}^{-1} \hat{\mathbf{v}}^{\text{rel}} = \mathbf{J} \mathbf{s} + \hat{\mathbf{v}}. \quad (2.32)$$

Die in Gleichung (2.32) definierte Jacobi-Matrix $\mathbf{J} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{G}$ beschreibt den direkten Einfluss der Minimalgeschwindigkeiten auf die Geschwindigkeit jedes einzelnen starren Körpers gegenüber dem Inertialsystem. Die inverse Matrix \mathbf{V}^{-1} resultiert aus der Wegematrix \mathbf{W} , indem die Elemente der Hauptdiagonalen mit Einheitsmatrizen und die mit eins belegten Elemente der Nebendiagonale mit den Versatzmatrizen $\mathbf{V}_{i,j}$ besetzt werden, wobei für die einzelnen Matrizen

$$\mathbf{V}_{i,j} = \mathbf{V}_{i,k} \cdot \mathbf{V}_{k,j} \quad (2.33)$$

gilt. Da die Matrix \mathbf{G} eine Diagonalmatrix ist, besitzt die Jacobi-Matrix \mathbf{J} ebenfalls die Struktur der Wegematrix, wobei sich die einzelnen Elemente nach der Vorschrift $\mathbf{J}_{i,j} = \mathbf{V}_{i,j} \mathbf{G}_j$ ergeben. Für die Verknüpfung von Minimalkoordinaten und -geschwindigkeiten gilt für das MKS die kinematische Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{s}, \quad \text{mit } \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{H}_{n_K} \end{bmatrix}, \quad \text{und } \mathbf{H}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{Rj} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{Tj} \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

Der Vorteil der beschriebenen Vorgehensweise ist, dass sich das Gesamtsystem aus den einfach zu bestimmenden Gelenkmatrizen \mathbf{G}_j und den Versatzmatrizen $\mathbf{V}_{i,j}$ aufbauen lässt. Sofern die Struktur des Mehrkörpersystems in Form der Wegematrix \mathbf{W} bekannt ist, kann die benötigte Jacobi-Matrix des Gesamtsystems \mathbf{J} direkt angegeben werden.

Beschreibung der Beschleunigung: Die Gleichungen für einen starren Körper auf Beschleunigungsebene resultieren aus der Ableitung von Gleichung (2.24b) nach der Zeit. Dies führt zu den expliziten Bindungen auf Beschleunigungsebene

$$\hat{\mathbf{a}}_{j,j-1} = \ddot{\mathbf{r}}_{j,j-1} = \mathbf{G}_j \dot{\mathbf{s}}_j + \dot{\mathbf{G}}_j \mathbf{s}_j + \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{j,j-1}}{\partial t} = \mathbf{G}_{j,j-1} \dot{\mathbf{s}} + \hat{\mathbf{a}}_{j,j-1}^{\text{rel}}. \quad (2.35)$$

Entsprechend der Vorgehensweise für den Geschwindigkeitsvektor $\hat{\mathbf{v}}$ folgt für den Beschleunigungsvektor des Mehrkörpersystems

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{s}} + \dot{\mathbf{J}} \mathbf{s} + \hat{\mathbf{a}} \quad (2.36)$$

mit den Ableitungen der Jacobi-Matrizen

$$\dot{\mathbf{J}}_j = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{J}}_{Rj} \\ \dot{\mathbf{J}}_{Tj} \end{bmatrix}, \quad \text{mit } \dot{\mathbf{J}}_{Rj} = \frac{\partial \mathbf{J}_{Rj}}{\partial t}, \quad \dot{\mathbf{J}}_{Tj} = \frac{\partial \mathbf{J}_{Tj}}{\partial t}. \quad (2.37)$$

2.1.2 Kinetik eines Systems starrer Körper

Die Kinetik gibt Antwort über den zeitlichen Verlauf der Beschleunigung eines Körpers bei gegebenen Kraft- und Drehmomentverläufen über der Zeit. Die Beschreibung der Kinetik eines starren Körpers erfolgt unter Verwendung des Impuls- und des Drallsatzes.

Impulssatz: Für die Beschreibung der Dynamik eines starren Körpers mit der konstanten Masse m_j ist dessen Schwerpunkt von großer Bedeutung. Vom Ursprung des Inertialsystems zum Schwerpunkt des homogenen starren Körpers zeigt der Vektor

$$\mathbf{r}_{Sj} = \frac{1}{m_j} \int_{K_j} \mathbf{r}_{Pj} dm_{Pj}. \quad (2.38)$$

Die Betrachtung des Impulses für ein infinitesimal kleines Masseteilchen und die anschließende Integration über den gesamten Körper führt auf den Gesamtimpuls

$$d\mathbf{p}_{Pj} = \dot{\mathbf{r}}_{Pj} dm_{Pj} \xrightarrow{\int_{K_j}} \mathbf{p}_j = \int_{K_j} \dot{\mathbf{r}}_{Pj} dm_{Pj} \quad (2.39)$$

des starren Körpers. Einmaliges Ableiten von Gleichung (2.38) und anschließendes Einsetzen in (2.39) vereinfacht letztere zu

$$\mathbf{p}_j = m_j \dot{\mathbf{r}}_{Sj}. \quad (2.40)$$

Die Beschreibung der Geschwindigkeit des Schwerpunkts mit Bezug zum Ursprung des körperfesten Koordinatensystems \mathcal{K}_j erfolgt über den Vektorzug $\mathbf{r}_{Sj} = \mathbf{r}_{j,0} + \mathbf{b}_{Sj}$. Das Einsetzen von dessen Ableitung in Gleichung (2.40) führt auf die gleichwertige Beschreibung

$$\mathbf{p}_j = m_j (\dot{\mathbf{r}}_{j,0} + \boldsymbol{\omega}_{j,0} \times \mathbf{b}_{Sj}). \quad (2.41)$$

Der Impulssatz für den starren Körper lautet damit

$$\frac{d\mathbf{p}_j}{dt} = \mathbf{f}_j \quad \xRightarrow{\text{Gl. (2.41)}} \quad m_j (\ddot{\mathbf{r}}_{j,0} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{j,0} \times \mathbf{b}_{Sj} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{j,0} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{j,0} \mathbf{b}_{Sj}) = \mathbf{f}_j. \quad (2.42)$$

Drehimpulssatz: Der Gesamtdrehimpuls \mathbf{L}_0 eines starren Körpers bezüglich des Ursprungs des Inertialsystems O_0 wird aus der Betrachtung des Drehimpulses für ein infinitesimal kleines Masseteilchen und der anschließenden Integration über den gesamten Körper hergeleitet. Es gilt

$$d\mathbf{L}_0 = \mathbf{r}_{Pj} \times \dot{\mathbf{r}}_{Pj} dm_{Pj} \quad \xRightarrow{\int_{K_j}} \quad \mathbf{L}_0 = \int_{K_j} \mathbf{r}_{Pj} \times \dot{\mathbf{r}}_{Pj} dm_{Pj}. \quad (2.43)$$

Wird der Drehimpuls erneut mit einem Vektorzug über den Ursprung des körperfesten Koordinatensystems beschrieben, folgt nach längerer Rechnung

$$\mathbf{L}_0 = \int_{K_j} (\mathbf{r}_{j,0} + \mathbf{b}_{Pj}) \times (\dot{\mathbf{r}}_{j,0} + \boldsymbol{\omega}_{j,0} \times \mathbf{b}_{Pj}) dm_{Pj} = m_j \tilde{\mathbf{r}}_{j,0} \dot{\mathbf{r}}_{Sj} + m_j \tilde{\mathbf{b}}_{Sj} \dot{\mathbf{r}}_{j,0} + \boldsymbol{\Theta}_j \boldsymbol{\omega}_{j,0}, \quad (2.44)$$

wobei $\boldsymbol{\Theta}_j \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ den Trägheitstensor des starren Körpers bezüglich des Koordinatenursprungs O_j des körperfesten Koordinatensystems \mathcal{K}_j bezeichnet.

Der Drehimpulssatz beschreibt den Zusammenhang zwischen einer Änderung des Drehimpulses und den auf den starren Körper einwirkenden Drehmomenten $\boldsymbol{\tau}_{j,0}$ und lautet

$$\frac{d\mathbf{L}_0}{dt} = \sum \boldsymbol{\tau}_{j,0} \quad \xRightarrow{\text{Gl. (2.44)}} \quad m_j \tilde{\mathbf{r}}_{j,0} \ddot{\mathbf{r}}_{Sj} + m_j \tilde{\mathbf{b}}_{Sj} \ddot{\mathbf{r}}_{j,0} + \boldsymbol{\Theta}_j \dot{\boldsymbol{\omega}}_{j,0} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{j,0} \boldsymbol{\Theta}_j \boldsymbol{\omega}_{j,0} = \boldsymbol{\tau}_{j,0}. \quad (2.45)$$

Unter Zuhilfenahme des Impulssatzes (2.42) lassen sich die Gleichungen weiter

vereinfachen zu

$$m_j \tilde{\mathbf{b}}_{Sj} \ddot{\mathbf{r}}_{j,0} + \boldsymbol{\Theta}_j \dot{\boldsymbol{\omega}}_{j,0} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{j,0} \boldsymbol{\Theta}_j \boldsymbol{\omega}_{j,0} = \boldsymbol{\tau}_j. \quad (2.46)$$

Folglich unterscheiden sich die Gleichungen (2.45) und (2.46) ausschließlich durch den Bezugspunkt der wirkenden Drehmomente.

Bewegungsgleichung für ein Mehrkörpersystem: Die Gleichungen für den Impulssatz (2.42) und für den Drallsatz (2.46) können zu der für einen starren Körper allgemein gültigen Matrizengleichung

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Theta}_j & m_j \tilde{\mathbf{b}}_{Sj} \\ m_j \tilde{\mathbf{b}}_{Sj}^T & m_j \mathbf{E} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{j,0} \\ \ddot{\mathbf{r}}_{j,0} \end{bmatrix} \\ \hat{\mathbf{M}}_j & \hat{\mathbf{a}}_{j,0} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{j,0} \boldsymbol{\Theta}_j \boldsymbol{\omega}_{j,0} \\ -m_j \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{j,0} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{j,0} \mathbf{b}_{Sj} \end{bmatrix} \\ \hat{\mathbf{f}}_j^c \end{array} + \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_j^e \\ \mathbf{f}_j^e \end{bmatrix} \\ \hat{\mathbf{f}}_j^e \end{array} + \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_j^z \\ \mathbf{f}_j^z \end{bmatrix} \\ \hat{\mathbf{f}}_j^z \end{array} \quad (2.47)$$

zusammengefasst werden. Die Anwendung des Impuls- und Drallsatzes auf ein Mehrkörpersystem führt zu der Matrizengleichung

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{M}}_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \hat{\mathbf{M}}_{n_K} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}}_{1,0} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{a}}_{n_K,0} \end{bmatrix} \\ \hat{\mathbf{M}} & \hat{\mathbf{a}} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_1^c \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{f}}_{n_K}^c \end{bmatrix} \\ \hat{\mathbf{f}}^c \end{array} + \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_1^e \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{f}}_{n_K}^e \end{bmatrix} \\ \hat{\mathbf{f}}^e \end{array} + \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_1^z \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{f}}_{n_K}^z \end{bmatrix} \\ \hat{\mathbf{f}}^z \end{array}, \quad (2.48)$$

wobei der Kraftwinder $\hat{\mathbf{f}}$ in den Kraftwinder der allgemeinen Kreisel- und Zentrifugalkräfte $\hat{\mathbf{f}}^c$, den Kraftwinder der eingprägten Kräfte $\hat{\mathbf{f}}^e$ und den Kraftwinder der Zwangskräfte $\hat{\mathbf{f}}^z$ aufgeteilt wird.

Betrachtung der wirkenden Zwangskräfte: Das Gleichungssystem (2.48) ist nicht nach dem Vektor der Beschleunigungen $\hat{\mathbf{a}}$ lösbar, da die Zwangskräfte $\hat{\mathbf{f}}^z$ unbekannt sind. Hierbei handelt es sich um Stütz- oder Haltekräfte, welche zum Beispiel durch ein Seil, eine Führungsschiene oder ein Gelenk hervorgerufen werden und die Bewegung eines starren Körpers oder eines Mehrkörpersystems einschränken. Die Zwangskraft bewirkt somit, dass sich ein Körper nicht aus dem durch Zwangsbedingungen vorgeschriebenen Bereich hinausbewegen kann. Die Erfahrung aus Beobachtungen lehrt, dass die bei holonom skleronomen Zwangsbedingungen auftretenden Zwangskräfte nicht in der Lage sind, Körper oder Massen zu beschleunigen. Demnach können Zwangskräfte keine Arbeit verrichten, weshalb

$$dW = \mathbf{f}^z(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}(t) = 0 \quad (2.49)$$

gilt. Zwangskräfte sind somit stets senkrecht zur Bewegungsrichtung orientiert.

Bei rheonomen Zwangsbindungen, also jenen, die sich in Abhängigkeit der Zeit ändern, kann eine Zwangskraft durchaus Arbeit verrichten. Ein Beispiel dafür ist die Betrachtung eines Drahtes, auf den eine Perle reibungsfrei aufgefädelt ist und der um einen Punkt rotiert. In diesem Beispiel übt die Zwangskraft in Form des Drahts eine reale Arbeit auf die Perle aus. Durch die Rotation des Drahts vergrößert sich der Abstand der Perle zur Drehachse, wodurch ihre Tangentialgeschwindigkeit zunimmt. Die notwendige Kraft für die Beschleunigung liefert die Zwangskraft, obwohl diese weiterhin in jedem Augenblick senkrecht zur Zwangsbedingung orientiert ist. Für das Skalarprodukt rheonomer Zwangsbedingungen gilt folglich

$$dW = \mathbf{f}^z(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}(t) \neq 0. \quad (2.50)$$

Diese Tatsache wird durch die Überlegung bekräftigt, dass der Geschwindigkeitsvektor der Perle nun nicht mehr ausschließlich in Bewegungsrichtung der Zwangsbedingung gerichtet ist. Die Bedingung (2.49) würde weiterhin gelten, wenn man sich das System für eine kurze Zeit erstarrt vorstellt. Verschiebungen, die mit den Zwangsbedingungen des erstarrten Systems vereinbar sind, werden als virtuelle Verschiebung beziehungsweise als virtuelle Verrückung bezeichnet. Für skleronome Verschiebungen sind die realen Verschiebungen $d\mathbf{r}$ mit den virtuellen Verschiebungen $\delta\mathbf{r}$ identisch. Für die Zwangskräfte eines Massenpunktsystems gilt

$$\delta W = \sum_{j=1}^n \mathbf{f}_j^z(\mathbf{r}_j) \cdot \delta\mathbf{r}_j(t) = 0. \quad (2.51)$$

Für statische Systeme ist dieses Gleichgewichtsprinzip das Prinzip der virtuellen Arbeit. Das Postulat und der Nachweis, dass dieses Prinzip auch für die Dynamik gilt, wurde von d'Alembert erbracht und wird daher als d'Alembertsches Prinzip bezeichnet. Neben den newtonschen Axiomen handelt es sich dabei um ein weiteres wichtiges Axiom der theoretischen Mechanik. Es ermöglicht die Lösung von Systemen mit Bindungen, ohne dass die Zwangskräfte zuvor explizit bestimmt werden müssen. Bei dem d'Alembertschen Prinzip für Mehrkörpersysteme werden die virtuellen Verschiebungen um die virtuellen Verdrehungen erweitert. Für Mehrkörpersysteme gilt

$$\delta W = \sum_{j=1}^n \boldsymbol{\tau}_j^z \cdot \delta\boldsymbol{\varphi}_j + \mathbf{f}_j^z \cdot \delta\mathbf{r}_j = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta W = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_1^{zT} & \dots & \hat{\mathbf{f}}_{n_K}^{zT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\hat{\mathbf{r}}_1 \\ \vdots \\ \delta\hat{\mathbf{r}}_{n_K} \end{bmatrix} = 0. \quad (2.52)$$

Die möglichen virtuellen Verschiebungen und Verdrehungen ergeben sich durch die Taylorreihenentwicklung der expliziten Lagebindung zu

$$\delta\hat{\mathbf{r}} = \underbrace{\frac{\partial\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{q}, t)}{\partial\mathbf{q}}}_{\mathbf{J}} \delta\mathbf{q} + \frac{\partial\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{q}, t)}{\partial t} \underbrace{\delta t}_{:=0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J}(\mathbf{q}, t) \delta\mathbf{q}. \quad (2.53)$$

Einsetzen der Gleichung (2.53) in (2.52) ergibt den Zusammenhang

$$\delta W = \hat{\mathbf{f}}^z{}^T \mathbf{J} \delta \mathbf{q} = (\mathbf{J} \delta \mathbf{q})^T \hat{\mathbf{f}}^z = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{J}^T \hat{\mathbf{f}}^z = 0. \quad (2.54)$$

Aufgrund der Tatsache, dass $\delta \mathbf{q}$ beliebige Werte annehmen kann, folgt direkt die wichtige Beziehung

$$\mathbf{J}^T \hat{\mathbf{f}}^z = \mathbf{0}. \quad (2.55)$$

Mit der Aussage des d'Alembertschen Prinzips in der Form von Gleichung (2.55) kann Gleichung (2.48) nun gelöst werden.

Lösen von Gleichungen in Minimalkoordinaten: Mit Hilfe des d'Alembertschen Prinzips können die Zwangskräfte in Gleichung (2.48) eliminiert werden. Werden zusätzlich die absoluten Beschleunigungen in Abhängigkeit der Minimalgeschwindigkeiten nach Gleichung (2.36) ausgedrückt, ergibt sich die für diese Arbeit verwendete Ausgangsgleichung

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{M}} \hat{\mathbf{a}} &= \hat{\mathbf{f}}^e + \hat{\mathbf{f}}^c + \hat{\mathbf{f}}^z & | \mathbf{J}^T \hat{\mathbf{f}}^z &= \mathbf{0} \\ \mathbf{J}^T \hat{\mathbf{M}} \hat{\mathbf{a}} &= \mathbf{J}^T \hat{\mathbf{f}}^e + \mathbf{J}^T \hat{\mathbf{f}}^c & | \text{ mit Gl. (2.36)} \\ \mathbf{J}^T \hat{\mathbf{M}} (\mathbf{J} \dot{\mathbf{s}} + \dot{\mathbf{J}} \mathbf{s} + \hat{\mathbf{a}}) &= \mathbf{J}^T \hat{\mathbf{f}}^{ec}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

2.2 Modellbildung für Multikopter

2.2.1 Grundsätzliche Überlegungen

Viele der aktuell in der Forschung und Industrie eingesetzten Multikopter bestehen aus einer in der Mitte befindlichen Trägerplatte und einer unterschiedlichen Anzahl daran befestigter Ausleger. Durch die gezielte Drehzahländerung der am Ende eines jeden Auslegers befindlichen Rotoren und der damit verbundenen Schubkraft kann der Multikopter gesteuert werden. Einige Modelle verfügen darüber hinaus noch über die Möglichkeit, die komplette Motoreinheit zu schwenken und damit die Orientierung der Schubkraft relativ zur Trägerplatte aktiv zu verändern. Prinzipiell könnte diese Schwenkeinrichtung bis zu drei Freiheitsgrade (engl.: Degrees of Freedom, kurz: DOF) besitzen, in der Praxis sind jedoch lediglich eindimensionale Drehgelenke von Bedeutung. Die Ergebnisse dieses Abschnitts basieren auf (Herrmann u. a., 2018).

Während die Trägerplatte für die mathematische Beschreibung als ein starrer Körper angesehen werden kann, wird ein Ausleger vorzugsweise in drei, durch zwei Gelenke miteinander verbundene, starre Teilkörper unterteilt. Mit dieser Vorgehensweise lassen sich auf einfache Weise Ausleger sowohl mit einer starren als auch

mit einer drehbaren Motoreinheit darstellen. Jeder Multikopter, aufgebaut aus einer Trägerplatte und den n -Auslegern A_i für $i = 1 \dots n$, besteht somit in Summe aus $n_K = 3n + 1$ Teilkörpern K_j mit $j = 1 \dots n_K$. Damit besitzen viele Multikoptermodelle die Topologie eines offenen Mehrkörpersystems in Baumstruktur gemäß Abbildung 2.4. Die beschreibende Wegematrix \mathbf{W} folgt direkt aus der Anwendung von Gleichung (2.2) auf die dargestellte Baumstruktur. In dieser repräsentiert der Körper K_1 die Trägerplatte, welche jeden Ausleger sowohl in seiner Position als auch in seiner Orientierung fest fixiert. Für den i -ten Ausleger beschreibt der Körper K_{3i-1} seinen ersten Teilkörper. Dieser fungiert als reines Verbindungselement und ist in der Regel als Rund- oder Vierkantrohr ausgeführt. An dessen Ende sitzt das Drehgelenk G_{3i} , das im Falle schwenkbarer Motoreinheiten die Motorhalterung K_{3i} gegenüber dem Verbindungselement K_{3i-1} drehbar lagert. Dieses Gelenk ist durch die Drehachse \mathbf{n}_{3i} und den Drehwinkel Ψ_{S_i} vollständig beschrieben. Im Falle einer starren Motoreinheit entfällt das Gelenk G_{3i} . Das Drehgelenk G_{3i+1} mit der Drehachse \mathbf{n}_{3i+1} und dem Drehwinkel Ψ_{M_i} stellt die Lagerung des Rotors K_{3i+1} der antreibenden Maschine gegenüber dem Stator dar. Der Stator ist mit der Motorhalterung fest verschraubt und muss demnach dem Körper K_{3i} zugerechnet werden. Im Entwicklungsprozess eines Multikopters ist es häufig notwendig, einzelne Freiheitsgrade der Körperbewegung zu fixieren. Für diese Fälle kann die Drohne mit dem Gelenk G_1 gegenüber dem Inertialsystem K_0 gelagert werden. Aus der zugrunde liegenden Topologie für Multikopter ist zu erkennen, dass sich die Ausleger nicht direkt gegenseitig beeinflussen. Aus diesem Grund können Gleichungen gefunden werden, die sich nach der Trägerplatte und den Auslegern trennen lassen. Die Matrix \mathbf{J} besitzt den Aufbau der Wegematrix und es gilt

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{J}_{2,1} & \mathbf{J}_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{J}_{3,1} & \mathbf{J}_{3,2} & \mathbf{J}_{3,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{J}_{4,1} & \mathbf{J}_{4,2} & \mathbf{J}_{4,3} & \mathbf{J}_{4,4} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{J}_{5,1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{J}_{5,5} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{J}_{6,1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{J}_{6,5} & \mathbf{J}_{6,6} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{J}_{7,1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{J}_{7,5} & \mathbf{J}_{7,6} & \mathbf{J}_{7,7} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{J}_{3n-1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{J}_{3n-1,3n-1} & 0 & 0 \\ \mathbf{J}_{3n,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{J}_{3n,3n-1} & \mathbf{J}_{3n,3n} & 0 \\ \mathbf{J}_{3n+1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{J}_{3n+1,3n-1} & \mathbf{J}_{3n+1,3n} & \mathbf{J}_{3n+1,3n+1} \end{bmatrix}. \quad (2.57a)$$

Werden sämtliche Elemente der j -ten Spalte von \mathbf{J} zu der Matrix \mathbf{J}_j zusammengefasst kann die Jacobi-Matrix \mathbf{J} kompakt geschrieben werden als

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_2 & \dots & \mathbf{J}_{3n+1} \end{bmatrix}. \quad (2.57b)$$

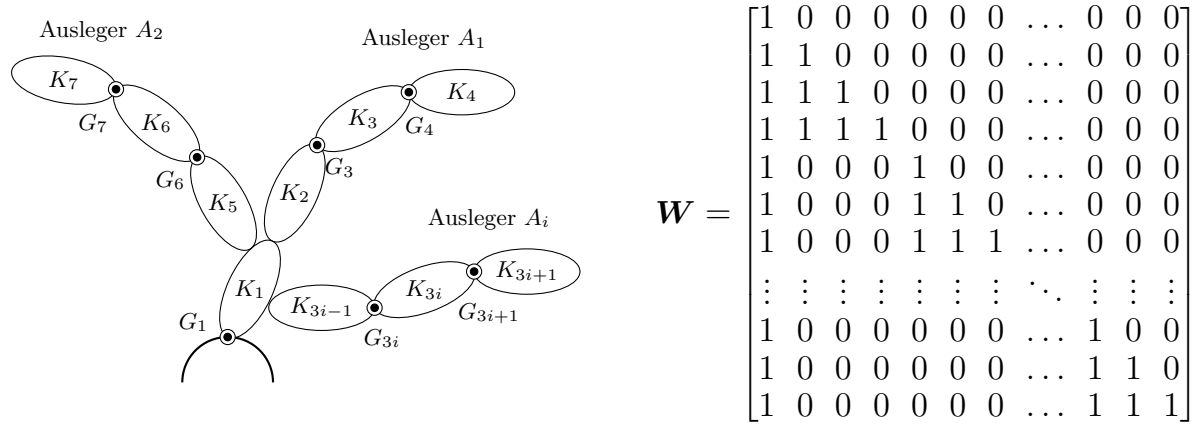


Abbildung 2.4: Topologie eines Multikopters in offener Baumstruktur mit zugehöriger Wegematrix W nach Gleichung (2.2)

2.2.2 Dynamik eines Multikopters

Herleitung des allgemeingültigen Modells: Die Gelenkbeschleunigungen \dot{s} ergeben sich durch Auswertung der Gleichung (2.56) unter Berücksichtigung der Tatsache, dass für die hier vorliegenden skleronomen Bindungen $\hat{a} = 0$ gilt. Für das Gelenk G_1 ergibt sich

$$J_1^T \hat{f}^{ec} = J_1^T \hat{M} \left(J_1 \dot{s}_1 + \dot{J}_1 s_1 + \sum_{i=1}^n \left(J_{3i} \dot{s}_{3i} + J_{3i+1} \dot{s}_{3i+1} + \dot{J}_{3i} s_{3i} + \dot{J}_{3i+1} s_{3i+1} \right) \right). \quad (2.58)$$

Dadurch, dass das Gelenk G_2 fehlt, entfallen die Terme in Abhängigkeit von s_{3i-1} . Für die Gelenke G_{3i} und G_{3i+1} gelten die Berechnungsvorschriften

$$J_{3i}^T \hat{f}^{ec} = J_{3i}^T \hat{M} \left(J_1 \dot{s}_1 + J_{3i} \dot{s}_{3i} + J_{3i+1} \dot{s}_{3i+1} + \dot{J}_1 s_1 + \dot{J}_{3i} s_{3i} + \dot{J}_{3i+1} s_{3i+1} \right), \quad (2.59)$$

$$J_{3i+1}^T \hat{f}^{ec} = J_{3i+1}^T \hat{M} \left(J_1 \dot{s}_1 + J_{3i} \dot{s}_{3i} + J_{3i+1} \dot{s}_{3i+1} + \dot{J}_1 s_1 + \dot{J}_{3i} s_{3i} + \dot{J}_{3i+1} s_{3i+1} \right). \quad (2.60)$$

Die Ergebnisse der Gleichungen (2.59) und (2.60) bestätigen, dass die Gleichungen für die Gelenke G_{3i} und G_{3i+1} aufgrund der vorliegenden Baumstruktur lediglich von den Minimalkoordinaten und Minimalgeschwindigkeiten des betrachteten Auslegers abhängen. Nachfolgend werden die Gleichungen (2.58) bis (2.60), beginnend mit den Blattkörpern K_{3i+1} , rekursiv nach den gesuchten Gelenkbeschleunigungen umgeformt. Blattkörper sind Körper, die keinen Nachfolgekörper besitzen. Die Gelenkbeschleunigungen für die Gelenke G_{3i+1} berechnen sich über

$$\dot{s}_{3i+1} = k_{3i+1}^{-1} J_{3i+1}^T \left[\hat{f}^{ec} - \hat{M} \left(J_1 \dot{s}_1 + J_{3i} \dot{s}_{3i} + \dot{J}_1 s_1 + \dot{J}_{3i} s_{3i} + \dot{J}_{3i+1} s_{3i+1} \right) \right], \quad (2.61a)$$

mit dem zu invertierenden Term

$$k_{3i+1} = J_{3i+1}^T \hat{M} J_{3i+1}. \quad (2.61b)$$

Die Berechnung der Gelenkbeschleunigungen erfolgt bei einer Implementierung nach dem Prinzip der Vorwärtskinematik. Hieraus resultiert die Tatsache, dass die Gelenkbeschleunigungen von Körpern, welche in der kinematischen Kette vor dem aktuell betrachteten Körper liegen, nicht explizit eingesetzt werden müssen. Da es sich bei den Körpern K_{3i+1} um die Blattkörper handelt, müssen die Beschleunigungen $\dot{\mathbf{s}}_{3i}$ und $\dot{\mathbf{s}}_1$ nicht direkt eingesetzt werden. Für die Gelenkkoordinaten $\dot{\mathbf{s}}_{3i}$ ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}}_{3i} = & \mathbf{k}_{3i}^{-1} \mathbf{J}_{3i}^T \left[\hat{\mathbf{f}}^{\text{ec}} - \hat{\mathbf{M}} \left(\mathbf{J}_1 \dot{\mathbf{s}}_1 + \dot{\mathbf{J}}_1 \mathbf{s}_1 + \dot{\mathbf{J}}_{3i} \mathbf{s}_{3i} + \dot{\mathbf{J}}_{3i+1} \mathbf{s}_{3i+1} \right. \right. \\ & \left. \left. + \mathbf{J}_{3i+1} \mathbf{k}_{3i+1}^{-1} \mathbf{J}_{3i+1}^T \left[\hat{\mathbf{f}}^{\text{ec}} - \hat{\mathbf{M}} \left(\mathbf{J}_1 \dot{\mathbf{s}}_1 + \dot{\mathbf{J}}_1 \mathbf{s}_1 + \dot{\mathbf{J}}_{3i} \mathbf{s}_{3i} + \dot{\mathbf{J}}_{3i+1} \mathbf{s}_{3i+1} \right) \right] \right] \right], \end{aligned} \quad (2.62a)$$

mit dem zu invertierenden Ausdruck

$$\mathbf{k}_{3i} = \mathbf{J}_{3i}^T \hat{\mathbf{M}} \mathbf{J}_{3i} - \mathbf{J}_{3i}^T \hat{\mathbf{M}} \mathbf{J}_{3i+1} \mathbf{k}_{3i+1}^{-1} \mathbf{J}_{3i+1}^T \hat{\mathbf{M}} \mathbf{J}_{3i}. \quad (2.62b)$$

In einem letzten Schritt werden die Beschleunigungen am Gelenk G_1 der Trägerplatte berechnet. Die Auswertung der Gleichung (2.58) unter Verwendung von (2.61) und (2.62) führt auf die Gelenkbeschleunigung

$$\dot{\mathbf{s}}_1 = \left(\hat{\mathbf{M}}_T + \sum_{i=1}^n \hat{\mathbf{M}}_{Ai} \right)^{-1} \cdot \left(\hat{\mathbf{f}}_T + \sum_{i=1}^n \hat{\mathbf{f}}_{Ai} \right) = \hat{\mathbf{M}}_D^{-1} \hat{\mathbf{f}}_D. \quad (2.63)$$

Die Einflüsse sind dabei nach den Anteilen der Trägerplatte (Index T) und den n Auslegern A_i aufgeteilt. Gleichung (2.63) weist den aufgrund der Wegematrix erwarteten additiven Aufbau auf. Die Struktur der Gleichungen für die einzelnen Ausleger ist dabei immer identisch. Für die Komponenten der Trägerplatte ergibt sich

$$\hat{\mathbf{M}}_T = \mathbf{J}_{1,1}^T \hat{\mathbf{M}}_1 \mathbf{J}_{1,1}, \quad (2.64a)$$

$$\hat{\mathbf{f}}_T = \mathbf{J}_{1,1}^T \hat{\mathbf{f}}_1^{\text{ec}} - \mathbf{J}_{1,1}^T \hat{\mathbf{M}}_1 \dot{\mathbf{J}}_{1,1} \mathbf{s}_1. \quad (2.64b)$$

Die Anteile der Massenmatrizen und der Kraftvektoren ergeben sich für den i -ten Ausleger mit

$$\hat{\mathbf{M}}_{Ai} = \sum_{j=3i-1}^{3i+1} \left(\mathbf{J}_{j,1}^T \hat{\mathbf{M}}_j \mathbf{J}_{j,1} \right) + \sigma_{Ai} \hat{\mathbf{M}} \mathbf{J}_1, \quad (2.65a)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{f}}_{Ai} = & \sum_{j=3i-1}^{3i+1} \left(\mathbf{J}_{j,1}^T \hat{\mathbf{f}}_j^{\text{ec}} - \mathbf{J}_{j,1}^T \hat{\mathbf{M}}_j \dot{\mathbf{J}}_{j,1} \mathbf{s}_1 \right) + \sigma_{Ai} \left[\hat{\mathbf{f}}^{\text{ec}} - \hat{\mathbf{M}} \left(\dot{\mathbf{J}}_1 \mathbf{s}_1 + \dot{\mathbf{J}}_{3i} \mathbf{s}_{3i} \right. \right. \\ & \left. \left. + \dot{\mathbf{J}}_{3i+1} \mathbf{s}_{3i+1} \right) \right] - \mathbf{J}_1^T \hat{\mathbf{M}} \left(\dot{\mathbf{J}}_{3i} \mathbf{s}_{3i} + \dot{\mathbf{J}}_{3i+1} \mathbf{s}_{3i+1} \right), \end{aligned} \quad (2.65b)$$

wobei die Abkürzung

$$\begin{aligned} \sigma_{Ai} = & \mathbf{J}_1^T \hat{\mathbf{M}} \mathbf{J}_{3i} \mathbf{k}_{3i}^{-1} \mathbf{J}_{3i}^T \left[\hat{\mathbf{M}} \mathbf{J}_{3i+1} \mathbf{k}_{3i+1}^{-1} \mathbf{J}_{3i+1}^T - \mathbf{E} \right] + \mathbf{J}_1^T \hat{\mathbf{M}} \mathbf{J}_{3i+1} \mathbf{k}_{3i+1}^{-1} \mathbf{J}_{3i+1}^T \\ & \cdot \left[\hat{\mathbf{M}} \mathbf{J}_{3i} \mathbf{k}_{3i}^{-1} \mathbf{J}_{3i}^T \left[\mathbf{E} - \hat{\mathbf{M}} \mathbf{J}_{3i+1} \mathbf{k}_{3i+1}^{-1} \mathbf{J}_{3i+1}^T \right] - \mathbf{E} \right] \end{aligned} \quad (2.65c)$$

eingeführt wird. Die Gleichungen (2.61), (2.62) und (2.63) mit den Anteilen (2.64) und (2.65) bilden ein System gekoppelter Differentialgleichungen, das hinsichtlich des Aufbaus der Trägerplatte und der Ausleger keinerlei Einschränkungen besitzt.

Aufbau der Massen- und Jacobi-Matrizen: Die Konfiguration des Multikopters legt den Aufbau der Jacobi-Matrizen fest. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird angenommen, dass das körperfeste Koordinatensystem stets im Schwerpunkt des jeweiligen Teilkörpers liegt. Damit besitzen die Massenmatrizen der Bewegungsgleichung (2.47) mit $\mathbf{b}_{Sj} = \mathbf{0}$ den Aufbau

$$\hat{\mathbf{M}}_j = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Theta}_j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m_j \mathbf{E} \end{bmatrix}. \quad (2.66)$$

Für die Bestimmung der Jacobi-Matrizen wird der Aufbau der Gelenkmatrizen \mathbf{G}_j benötigt. Die zur Beschreibung der Gelenke notwendigen Vektoren werden nach Abbildung 2.5 eingeführt. Das Gelenk am Körper K_1 wird zunächst als ein Gelenk mit $f_{G1} = 6$ Freiheitsgraden angenommen, welches aus dem Kugelgelenk \mathbf{G}_K

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\phi_{1,0}}{dt} = \boldsymbol{\omega}_{1,0} & \xRightarrow{\boldsymbol{\omega}_{1,0} = \mathbf{s}_{R1}} \mathbf{G}_{K,R} = \mathbf{E} \\ \frac{d\mathbf{r}_{1,0}}{dt} = \frac{d(\mathbf{c}_0 + \mathbf{d}_{1,1})}{dt} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{1,0} \mathbf{d}_{1,1} & \xRightarrow{\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b} = -\tilde{\mathbf{b}}\mathbf{a}} \mathbf{G}_{K,T} = -\tilde{\mathbf{d}}_{1,1} \end{aligned} \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ -\tilde{\mathbf{d}}_{1,1} \end{bmatrix} = \mathbf{G}_K \quad (2.67)$$

und dem dreiachsigen Schubgelenk \mathbf{G}_S

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\phi_{1,0}}{dt} = \mathbf{0} & \Rightarrow \mathbf{G}_{S,R} = \mathbf{0} \\ \frac{d\mathbf{r}_{1,0}}{dt} = \frac{d(\mathbf{c}_0 + \mathbf{B}_1 \mathbf{q}_{T1} + \mathbf{d}_{1,1})}{dt} = \mathbf{B}_1 \mathbf{s}_{T1} & \Rightarrow \mathbf{G}_{S,T} = \mathbf{B}_1 \end{aligned} \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{G}_S \quad (2.68)$$

besteht. Basierend auf dem Gelenk können zu einem späteren Zeitpunkt für die Beschreibung der Drohnen wichtige Spezialfälle abgeleitet werden. Für das Gelenk G_1 mit der Gelenkmatrix $\mathbf{G}_1 = [\mathbf{G}_K \ \mathbf{G}_S]$ gilt die Jacobi-Matrix

$$\mathbf{J}_{j,1} = \mathbf{V}_{j,1} \mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ -\tilde{\mathbf{r}}_{j,1} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ -\tilde{\mathbf{d}}_{1,1} & \mathbf{B}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ -\tilde{\mathbf{d}}_{j,1} & \mathbf{B}_1 \end{bmatrix}, \quad (2.69)$$

wobei der Vektor $\tilde{\mathbf{d}}_{j,i} = \tilde{\mathbf{d}}_{i,i} + \tilde{\mathbf{r}}_{j,i}$ vom Ursprung der i -ten Gelenkachse zum Schwerpunkt des j -ten Teilkörpers weist. Für die Drehgelenke an Körper G_{3i} und G_{3i+1} ergeben sich mit der dazugehörigen Gelenkmatrix

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\phi_{j,j-1}}{dt} &= \boldsymbol{\omega}_{j,j-1} & \omega_{j,j-1} = \mathbf{n}_j s_j &\Rightarrow \mathbf{G}_{D,Rj} = \mathbf{n}_j \\ \frac{d\mathbf{r}_{j,j-1}}{dt} &= \frac{d(\mathbf{c}_{j-1} + \mathbf{d}_{j,j})}{dt} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{j,j-1} \mathbf{d}_{j,j} & \tilde{\omega}_{j,j-1} = \tilde{\mathbf{n}}_j s_j &\Rightarrow \mathbf{G}_{D,Tj} = \tilde{\mathbf{n}}_j \mathbf{d}_{j,j} \end{aligned} \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{n}_j \\ \tilde{\mathbf{n}}_j \mathbf{d}_{j,j} \end{bmatrix} = \mathbf{G}_{Dj} \quad (2.70)$$

die beiden Jacobi-Matrizen

$$\mathbf{J}_{j,3i} = \mathbf{V}_{j,3i} \mathbf{G}_{3i} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ -\tilde{\mathbf{r}}_{j,3i} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{3i} \\ \tilde{\mathbf{n}}_{3i} \mathbf{d}_{3i,3i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{3i} \\ \tilde{\mathbf{n}}_{3i} \mathbf{d}_{j,3i} \end{bmatrix}, \quad (2.71)$$

$$\mathbf{J}_{3i+1,3i+1} = \mathbf{V}_{3i+1,3i+1} \mathbf{G}_{3i+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{3i+1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{3i+1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (2.72)$$

Da der Schwerpunkt der Körper K_{3i+1} konstruktionsbedingt auf der Drehachse liegt, gilt $\tilde{\mathbf{n}}_{3i+1} \mathbf{d}_{3i+1,3i+1} = \mathbf{0}$. Hierbei liegt die Annahme zugrunde, dass der gewuchtete Rotor stets eine symmetrische Massenverteilung besitzt.

Die Ableitungen der Jacobi-Matrizen im Zusammenhang mit Gelenk G_1 ergeben

$$\dot{\mathbf{J}}_{j,1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\dot{\tilde{\mathbf{d}}}_{j,1} & \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{1,0} \mathbf{B}_1 \end{bmatrix}. \quad (2.73)$$

Für die Ableitungen der zu den Gelenken G_{3i} und G_{3i+1} gehörenden Jacobi-Matrizen gilt

$$\dot{\mathbf{J}}_{3i,3i} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{3i-1,0} \mathbf{n}_{3i} \\ \dot{\tilde{\mathbf{n}}}_{3i} \mathbf{d}_{3i,3i} + \tilde{\mathbf{n}}_{3i} \dot{\mathbf{d}}_{3i,3i} \end{bmatrix}, \quad (2.74)$$

$$\dot{\mathbf{J}}_{3i+1,3i+1} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{3i,0} \mathbf{n}_{3i+1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (2.75)$$

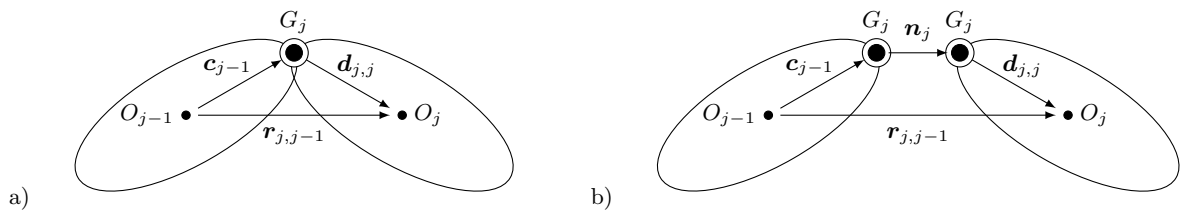


Abbildung 2.5: Definition der notwendigen Vektoren zur Beschreibung von a) Kugel- und Drehgelenken sowie b) Schubgelenken

Die in den Gleichungen (2.73) bis (2.75) befindlichen Ableitungen des Vektors $\mathbf{d}_{j,i}$ bezüglich des Inertialsystems berechnen sich über die Beziehungen

$$\dot{\mathbf{d}}_{j,i} = \tilde{\omega}_{i,0} \mathbf{d}_{j,i} + \sum_{\alpha=i+1}^j \tilde{\omega}_{\alpha,\alpha-1} \mathbf{d}_{j,\alpha}, \quad (2.76)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{d}}}_{j,i} = \tilde{\omega}_{i,0} \tilde{\mathbf{d}}_{j,i} - \tilde{\mathbf{d}}_{j,i} \tilde{\omega}_{i,0} + \sum_{\alpha=i+1}^j \tilde{\omega}_{\alpha,\alpha-1} \tilde{\mathbf{d}}_{j,\alpha} - \sum_{\alpha=i+1}^j \tilde{\mathbf{d}}_{j,\alpha} \tilde{\omega}_{\alpha,\alpha-1}. \quad (2.77)$$

Für die Ableitung des Ausdrucks $\tilde{\mathbf{n}}_3$ ergibt sich

$$\dot{\tilde{\mathbf{n}}}_3 = \widetilde{\tilde{\omega}_{2,0} \mathbf{n}_3} = \tilde{\omega}_{2,0} \tilde{\mathbf{n}}_3 - \tilde{\mathbf{n}}_3 \tilde{\omega}_{2,0}. \quad (2.78)$$

Konstruktionsbedingte Vereinfachungen: Die Gleichungen (2.61), (2.62) und (2.63) besitzen keinerlei Einschränkungen bezüglich der Auswahl und Positionierung der Gelenke. Bei einem Großteil der Konstruktionen vereinfachen sich die Gleichungen aufgrund der Auslegung der Gelenke G_{3i} und G_{3i+1} als Drehgelenke. Es werden daher für alle weiteren Betrachtungen die folgenden beiden Annahmen getroffen:

- Die Drehachse \mathbf{n}_{3i+1} mit dem dazugehörigen Drehwinkel Ψ_{Mi} weist stets in die z_{3i+1} -Richtung. Außerdem weist die Drehachse \mathbf{n}_{3i} mit dem dazugehörigen Drehwinkel Ψ_{Si} entweder in die x_{3i} - oder y_{3i} -Richtung.
- Die Koordinatenachse z_{3i} ist stets parallel zur Koordinatenachse z_{3i+1} .

Diese Annahmen sollen gemäß Abbildung 2.6 konstruktionsbedingt im weiteren Verlauf dieser Arbeit stets erfüllt sein, weshalb sich die folgenden Schlussfolgerungen ziehen lassen:

1. Die Drehachsen \mathbf{n}_{3i} und \mathbf{n}_{3i+1} stehen zu jedem Zeitpunkt senkrecht aufeinander.
2. Der Rotor und der Propeller sind achsensymmetrisch zur Rotationsachse z_{3i+1} . Bei der gesamten Rotoreinheit ist die Rotationsachse z_{3i+1} in jedem Fall eine Hauptträgheitsachse und es gilt $\Theta_{xz} = \Theta_{yz} = 0$. Im Fall der richtigen Ausrichtung von Rotor zu Propeller gilt sogar $\Theta_{yx} = 0$.

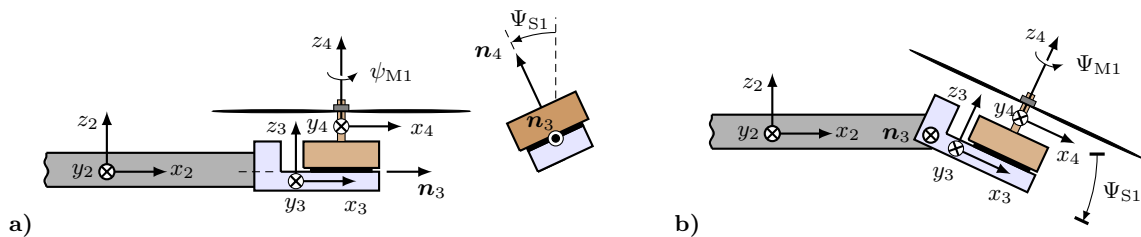


Abbildung 2.6: Varianten des Auslegers A_1 mit schwenkbarer Motoreinheit um die Drehachse \mathbf{n}_3 in Richtung a) der x_2 -Achse und b) der y_2 -Achse

Diese Schlussfolgerungen führen dazu, dass unabhängig davon ob die Bedingung $\Theta_{yx} = 0$ erfüllt ist

$$\mathbf{J}_{3i}^T \hat{\mathbf{M}} \mathbf{J}_{3i+1} = \mathbf{J}_{3i+1,3i}^T \hat{\mathbf{M}}_{3i+1} \mathbf{J}_{3i+1,3i+1} = \mathbf{n}_{3i}^T \boldsymbol{\Theta}_{3i+1} \mathbf{n}_{3i+1} = 0, \quad (2.79a)$$

$$\mathbf{J}_{3i+1}^T \hat{\mathbf{M}} \mathbf{J}_{3i} = \mathbf{J}_{3i+1,3i+1}^T \hat{\mathbf{M}}_{3i+1} \mathbf{J}_{3i+1,3i} = \mathbf{n}_{3i+1}^T \boldsymbol{\Theta}_{3i+1} \mathbf{n}_{3i} = 0, \quad (2.79b)$$

$$\mathbf{J}_{3i+1}^T \hat{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{J}}_{3i+1} = \mathbf{J}_{3i+1,3i+1}^T \hat{\mathbf{M}}_{3i+1} \dot{\mathbf{J}}_{3i+1,3i+1} = \mathbf{n}_{3i+1}^T \boldsymbol{\Theta}_{3i+1} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{3i,0} \mathbf{n}_{3i+1} = 0, \quad (2.79c)$$

gilt. Dadurch Verschwinden sämtliche Ausdrücke, welche diese Terme beinhalten. Aufgrund der Beschränkung der Gelenke G_{3i} und G_{3i+1} auf eindimensionale Drehgelenke handelt es sich bei den Größen k_{3i} aus Gleichung (2.62b) und k_{3i+1} nach Gleichung (2.61b) im Folgenden um skalare Größen.

Ausnutzung der Baumstruktur: Die Auswertung der Gleichungen erfolgt vorzugsweise im Koordinatensystem \mathcal{K}_1 der Trägerplatte. Während die Vektoren und Matrizen der Trägerplatte direkt in diesem Koordinatensystem aufgestellt werden, werden die des Auslegers zunächst im körperfesten Koordinatensystem \mathcal{K}_2 erfasst. Mittels der Transformationsmatrix ${}^{1,2}\mathbf{T}$ werden diese in das körperfeste Koordinatensystem \mathcal{K}_1 überführt. Die Koordinatentransformation ${}^{1,2}\mathbf{T}$ überführt einen Ausleger in dessen Lage und sorgt dafür, dass dessen Anteile korrekt berücksichtigt werden. Als Konsequenz daraus reicht die Betrachtung eines Basisauslegers A_0 . Dieser ist per Definition in x_1 -Richtung orientiert und es gilt ${}^{1,2}\mathbf{T} = \mathbf{T}_{A0} = \mathbf{E}$. Die Teilkörper dieses Basisauslegers werden mit K_i für $i = 2, 3, 4$ bezeichnet. Unter Berücksichtigung der konstruktiven Annahmen (2.79) vereinfachen sich die Gleichungen für die Gelenkbeschleunigungen des Basisauslegers zu

$$\dot{\mathbf{s}}_3 = k_3^{-1} \mathbf{J}_3^T \left[\hat{\mathbf{f}}^{\text{ec}} - \hat{\mathbf{M}} \left(\mathbf{J}_1 \dot{\mathbf{s}}_1 + \dot{\mathbf{J}}_1 \mathbf{s}_1 + \dot{\mathbf{J}}_3 \mathbf{s}_3 + \dot{\mathbf{J}}_4 \mathbf{s}_4 \right) \right], \quad \text{mit } k_3 = \mathbf{J}_3^T \hat{\mathbf{M}} \mathbf{J}_3, \quad (2.80)$$

$$\dot{\mathbf{s}}_4 = k_4^{-1} \mathbf{J}_4^T \left[\hat{\mathbf{f}}^{\text{ec}} - \hat{\mathbf{M}} \left(\mathbf{J}_1 \dot{\mathbf{s}}_1 + \dot{\mathbf{J}}_1 \mathbf{s}_1 + \dot{\mathbf{J}}_3 \mathbf{s}_3 + \dot{\mathbf{J}}_4 \mathbf{s}_4 \right) \right], \quad \text{mit } k_4 = \mathbf{J}_4^T \hat{\mathbf{M}} \mathbf{J}_4. \quad (2.81)$$

Für die zum Gelenk G_1 gehörenden Gelenkbeschleunigungen (2.63) ergeben sich die vereinfachten Anteile eines Basisauslegers

$$\hat{\mathbf{M}}_{A0} = \sum_{j=2}^4 \left(\mathbf{J}_{j,1}^T \hat{\mathbf{M}}_j \mathbf{J}_{j,1} \right) + \boldsymbol{\sigma}_{A0} \hat{\mathbf{M}} \mathbf{J}_1, \quad (2.82a)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{f}}_{A0} = & \sum_{j=2}^4 \left(\mathbf{J}_{j,1}^T \hat{\mathbf{f}}_j^{\text{ec}} - \mathbf{J}_{j,1}^T \hat{\mathbf{M}}_j \dot{\mathbf{J}}_{j,1} \mathbf{s}_1 \right) \\ & + \boldsymbol{\sigma}_{A0} \left[\hat{\mathbf{f}}^{\text{ec}} - \hat{\mathbf{M}} \left(\dot{\mathbf{J}}_1 \mathbf{s}_1 + \dot{\mathbf{J}}_3 \mathbf{s}_3 + \dot{\mathbf{J}}_4 \mathbf{s}_4 \right) \right] - \mathbf{J}_1^T \hat{\mathbf{M}} \left(\dot{\mathbf{J}}_3 \mathbf{s}_3 + \dot{\mathbf{J}}_4 \mathbf{s}_4 \right), \end{aligned} \quad (2.82b)$$

mit der Abkürzung

$$\boldsymbol{\sigma}_{A0} = -\mathbf{J}_1^T \hat{\mathbf{M}} \mathbf{J}_3 k_3^{-1} \mathbf{J}_3^T - \mathbf{J}_1^T \hat{\mathbf{M}} \mathbf{J}_4 k_4^{-1} \mathbf{J}_4^T. \quad (2.82c)$$

Das Gleichungssystem mit den Gleichungen (2.80), (2.81) sowie Gleichung (2.63) mit den Anteilen (2.82) bildet die Grundlage für die in dieser Arbeit betrachteten Drohnenmodelle. Für den Fall, dass die konstruktionsbedingten Vereinfachungen nicht zutreffen, müssen die allgemeingültigen Gleichungen verwendet werden.

2.3 Parametrierung und Implementierung der Multikoptermodelle

2.3.1 Betrachtung der Trägerplatte

Die zentrale Trägerplatte dient der Aufnahme der verschiedenen Ausleger eines Multikopters. Für die Trägerplatte werden die Vektoren gemäß Abbildung 2.7a eingeführt. Gemäß der Definition aus Abschnitt 2.1.1 weist der Ortsvektor $\mathbf{r}_{1,0}$ vom Ursprung des Inertialsystems zum Ursprung des körperfesten Koordinatensystems \mathcal{K}_1 . Von dem Gelenk G_1 ist dies der Vektor $\mathbf{d}_{1,1}$. Das körperfeste Koordinatensystem befindet sich im Schwerpunkt des Körpers K_1 . Die Trägerplatte besitzt die Masse m_1 . Die Orientierung des Koordinatensystems \mathcal{K}_1 ist so gewählt, dass die Koordinatenachsen in Richtung der Hauptträgheitsachsen zeigen. Aufgrund angestrebter Symmetrie sind die Deviationsmomente des Trägheitstensors oftmals um mehrere Größenordnungen kleiner, sodass es sich bei den Koordinatenachsen um die Hauptträgheitsachsen handelt. In vielen Fällen kann daher mit ${}^1\Theta_1 = \text{diag}(\Theta_{1xx}, \Theta_{1yy}, \Theta_{1zz})$ gerechnet werden.

Beschreibung auf Lageebene: Die Trägerplatte ist mit dem Gelenk G_1 gegenüber der Umgebung gelagert. Im Falle eines freifliegenden Multikopters handelt es

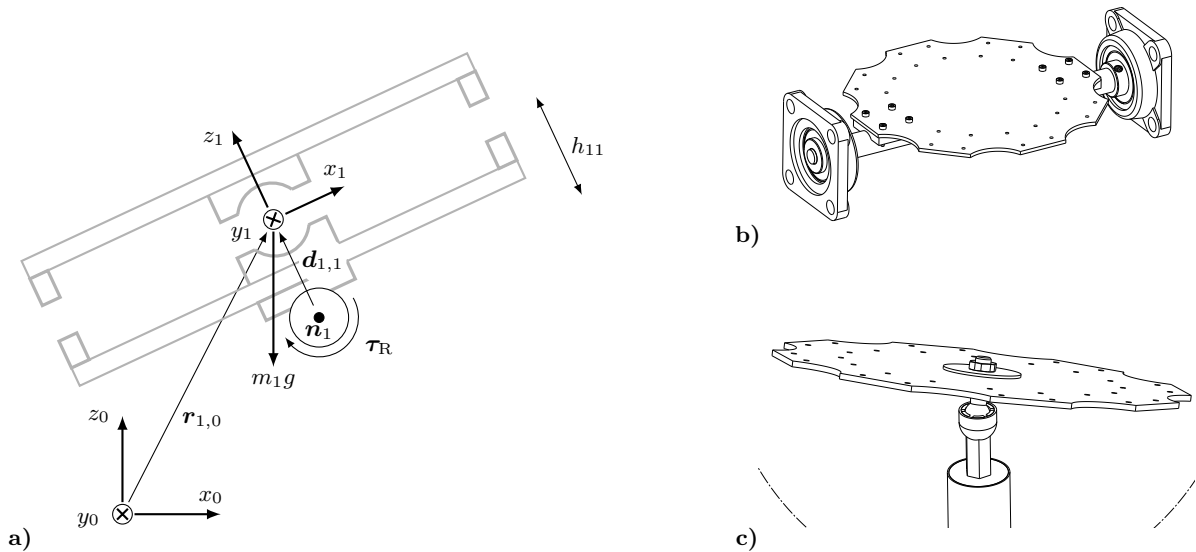


Abbildung 2.7: Vektoren zur Beschreibung der Trägerplatte in a), sowie beispielhaft die Lagerung über ein Drehgelenk in b) und ein Kugelgelenk in c)

sich bei diesem um ein Gelenk mit sechs Freiheitsgraden. Für Prüf- und Testzwecke können die Freiheitsgrade eingeschränkt werden. Beispielhaft ist in Abbildung 2.7b die Lagerung der Trägerplatte über ein Drehgelenk und in Abbildung 2.7c über ein Kugelgelenk dargestellt. Die Position der Trägerplatte wird über den Ortsvektor $\mathbf{r}_{1,0}$ in Abhängigkeit der Minimalkoordinaten $\mathbf{q}_1(t)$ beschrieben. Um Singularitäten für das Gelenk G_1 zu vermeiden, erfolgt die Beschreibung der Orientierung vorteilhaft mit den Euler-Parametern

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_s & p_x & p_y & p_z \end{bmatrix}^T, \quad \text{mit } p_s^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = 1. \quad (2.83)$$

Für die Beschreibung der Lage über $\hat{\mathbf{r}}_{1,0} = \{\mathbf{R}_{1,0}, \mathbf{r}_{1,0}\}$ gelten die Beziehungen

$$\mathbf{r}_{1,0} = \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ y_{1,0} \\ z_{1,0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{1,0} = 2 \begin{bmatrix} p_s^2 + p_x^2 - \frac{1}{2} & p_x p_y - p_s p_z & p_x p_z + p_s p_y \\ p_x p_y + p_s p_z & p_s^2 + p_y^2 - \frac{1}{2} & p_y p_z - p_s p_x \\ p_x p_z - p_s p_y & p_y p_z + p_s p_x & p_s^2 + p_z^2 - \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \quad (2.84)$$

Für die weiteren Betrachtungen gilt zudem ${}^{0,1}\mathbf{T} \equiv \mathbf{R}_{1,0}$. In Abhängigkeit der Gelenkwahl wird eine unterschiedliche Anzahl von Minimalkoordinaten benötigt. Im allgemeinen Fall $\mathbf{q}_1 \in \mathbb{R}^{7 \times 1}$ gilt

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{R1} \\ \mathbf{q}_{T1} \end{bmatrix}, \quad \text{mit } \mathbf{q}_{R1} = \begin{bmatrix} p_s & p_x & p_y & p_z \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{q}_{T1} = \begin{bmatrix} x_{1,0} & y_{1,0} & z_{1,0} \end{bmatrix}^T. \quad (2.85)$$

Der Vektor ${}^1\mathbf{d}_{1,1} = [l_{11} \ b_{11} \ h_{11}]^T$ weist vom Drehgelenk zum körperfesten Koordinatensystem \mathcal{K}_1 . Für den gelagerten Multikopter ergeben sich die Abstände aus der Konstruktion. Handelt es sich um einen freifliegenden Multikopter, verläuft die Drehachse stets durch den Schwerpunkt des betrachteten Gesamtsystems. Dieser kann zu jederzeit über die Beziehung

$$\mathbf{r}_S(t) = -\mathbf{d}_{1,1} = \frac{\sum_{j=1}^{n_K} (\mathbf{r}_{Sj}(t) \cdot m_j)}{\sum_{j=1}^{n_K} m_j} \quad (2.86)$$

bestimmt werden und ist im Allgemeinen von der Zeit t abhängig.

Beschreibung der Geschwindigkeit und Beschleunigung: Für das Gelenk G_1 werden die Minimalgeschwindigkeiten $\mathbf{s}_1 \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$ definiert. Es gilt

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{R1} \\ \mathbf{s}_{T1} \end{bmatrix}, \quad \text{mit } \mathbf{s}_{R1} = \begin{bmatrix} \omega_{1x} & \omega_{1y} & \omega_{1z} \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{s}_{T1} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{1,0} & \dot{y}_{1,0} & \dot{z}_{1,0} \end{bmatrix}^T. \quad (2.87)$$

Die Verknüpfung zu den Minimalkoordinaten ist durch die kinematische Differentialgleichung (2.34) über

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_{R1} \\ \dot{\mathbf{q}}_{T1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1(\mathbf{q}_{R1}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{R1} \\ \mathbf{s}_{T1} \end{bmatrix}, \quad \text{mit} \quad \mathbf{H}_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -p_x & -p_y & -p_z \\ p_s & -p_z & p_y \\ p_z & p_s & -p_x \\ -p_y & p_x & p_s \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

gegeben. Für die benötigte Jacobi-Matrix und deren Ableitung ergibt sich im Koordinatensystem \mathcal{K}_1

$${}^1\mathbf{J}_{1,1} = {}^1\mathbf{V}_{1,1} {}^1\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ -{}^1\tilde{\mathbf{d}}_{1,1} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \Rightarrow {}^1\dot{\mathbf{J}}_{1,1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\dot{{}^1\tilde{\mathbf{d}}}_{1,1} & \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{1,0} \end{bmatrix}. \quad (2.89)$$

Betrachtung der wirkenden Kräfte und Momente: Die auf die Trägerplatte wirkenden eingepägten Kräfte sind die Gewichtskraft und ein eventuelles Reibmoment im Lager. Das Reibmoment wird direkt im körperfesten Koordinatensystem abgelesen, wohingegen die Gewichtskraft vorteilhaft aus dem Inertialsystem transformiert wird. Zusammen mit den wirkenden Kreisel- und Corioliskräften ergibt sich

$${}^1\hat{\mathbf{f}}_1^e = \begin{bmatrix} \tau_1^e \\ \mathbf{f}_1^e \end{bmatrix}, \quad \text{mit} \quad {}^1\mathbf{f}_1^e = {}^{1,0}\mathbf{T} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_1g \end{bmatrix}, \quad {}^1\tau_1^e = \tau_R, \quad {}^1\hat{\mathbf{f}}_1^c = \begin{bmatrix} -{}^1\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{1,0} {}^1\boldsymbol{\Theta}_1 {}^1\boldsymbol{\omega}_{1,0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (2.90)$$

Zuletzt muss das Reibmoment, das aufgrund der Lagerreibung entsteht, genauer betrachtet werden. Das Reibmoment τ_R kann zum Beispiel in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_1$ über die Stribeck-Kurve modelliert werden. Unter der Annahme symmetrischer Reibverhältnisse ergibt sich

$$\tau_R(\boldsymbol{\omega}_{1,0}) = c_V \boldsymbol{\omega}_{1,0} + \text{sign}(\boldsymbol{\omega}_{1,0}) \left(\tau_C + \tau_{He} \left(-\frac{|\boldsymbol{\Omega}_{1,0}|}{c_H} \right) \right), \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\Omega}_{1,0} = \text{diag}(\boldsymbol{\omega}_{1,0}). \quad (2.91a)$$

Diese Gleichung ist aufgrund der Signum-Funktion nicht stetig differenzierbar. Abhilfe schafft die Approximation der Signum-Funktion über

$$\text{sign}(x) \approx \frac{2}{\pi} \cdot \arctan(kx). \quad (2.91b)$$

Für die Bestimmung der Reibverhältnisse im Lager sind somit die fünf unbekannten Parameter c_V , τ_C , τ_H , c_H und k zu bestimmen. Im Falle des freifliegenden Multiko-

pters gilt $\tau_R = \mathbf{0}$. Mit Hilfe der bereits dargestellten Vektoren und Matrizen können sowohl die Massen- als auch die Kraftanteile der Trägerplatte über die Gleichung (2.64) ermittelt werden.

2.3.2 Betrachtung des Basisauslegers

Die für die Beschreibung des Basisauslegers notwendigen Vektoren sind gemäß Abbildung 2.8 definiert. Die Körperbezugspunkte befinden sich ebenfalls in den Körperschwerpunkten. Die Beschreibung der Vektoren und Matrizen für den Ausleger erfolgt ebenfalls im Koordinatensystem \mathcal{K}_1 .

Beschreibung auf Lageebene: Basisausleger gleichen Typs unterscheiden sich allein durch die Orientierung zur Trägerplatte und damit durch ihre Transformationsmatrix ${}^{1,2}\mathbf{T}$. Für die Transformation können zum Beispiel die zyx -Kardan-Winkel verwendet werden.

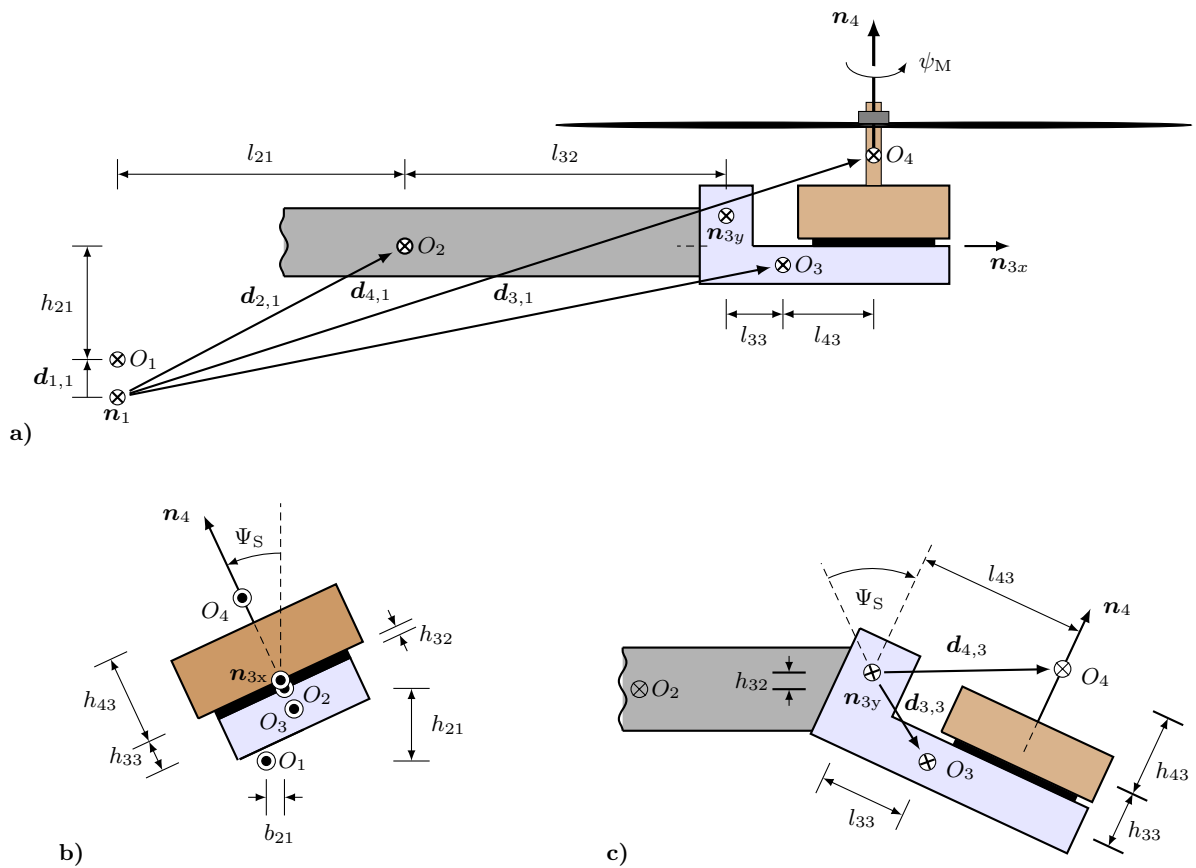


Abbildung 2.8: Definition benötigter Vektoren zur Beschreibung eines Basisauslegers mit a) starrer Motoreinheit, b) schwenkbarer Motoreinheit um die Drehachse \mathbf{n}_{3x} und c) schwenkbarer Motoreinheit um die Drehachse \mathbf{n}_{3y}

Die Transformationsvorschrift lautet mit ${}^{1,2}\mathbf{T} \equiv \mathbf{T}_{z,y,x}(\alpha, \beta, \gamma)$ sowie $c x \equiv \cos(x)$ und $s x \equiv \sin(x)$

$${}^{1,2}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma s\alpha s\gamma + c\alpha s\beta c\gamma \\ s\alpha c\beta c\alpha c\gamma + s\alpha s\beta s\gamma s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix}. \quad (2.92)$$

Die Angabe der benötigten Vektoren $\mathbf{d}_{j,i}$ erfolgt durch eine Kettenbemaßung. Dies ist nicht zwingend erforderlich, vereinfacht jedoch die gemeinsame Beschreibung von Auslegern mit einer starren oder drehbaren Motoreinheit. Die Vektoren für den Basisausleger lauten im Koordinatensystem \mathcal{K}_1

$${}^1\mathbf{d}_{2,1} = {}^1\mathbf{d}_{1,1} + {}^{1,2}\mathbf{T} \begin{bmatrix} l_{21} \\ b_{21} \\ h_{21} \end{bmatrix}, \quad (2.93a)$$

$${}^1\mathbf{d}_{3,1} = {}^1\mathbf{d}_{2,1} + {}^{1,2}\mathbf{T} \left(\begin{bmatrix} l_{32} \\ 0 \\ h_{32} \end{bmatrix} + {}^{2,3}\mathbf{T} \begin{bmatrix} l_{33} \\ 0 \\ h_{33} \end{bmatrix} \right) \quad \Bigg| \quad {}^3\mathbf{d}_{3,3} = \begin{bmatrix} l_{33} \\ 0 \\ h_{33} \end{bmatrix}, \quad (2.93b)$$

$${}^1\mathbf{d}_{4,1} = {}^1\mathbf{d}_{2,1} + {}^{1,2}\mathbf{T} \left(\begin{bmatrix} l_{32} \\ 0 \\ h_{32} \end{bmatrix} + {}^{2,3}\mathbf{T} \begin{bmatrix} l_{43} \\ 0 \\ h_{43} \end{bmatrix} \right) \quad \Bigg| \quad {}^3\mathbf{d}_{4,3} = \begin{bmatrix} l_{43} \\ 0 \\ h_{43} \end{bmatrix}. \quad (2.93c)$$

Die zur Beschreibung drehbarer Motoreinheiten notwendigen Transformationsmatrizen lauten für den Fall eines um die x -Achse schwenkbaren Auslegers ${}^{2,3}\mathbf{T}_x$ und für den Fall eines um die y -Achse schwenkbaren Auslegers ${}^{2,3}\mathbf{T}_y$. Hieraus wird die Gesamtmatrix

$${}^{2,3}\mathbf{T} = {}^{2,3}\mathbf{T}_x {}^{2,3}\mathbf{T}_y = \begin{bmatrix} \cos(\Psi_{Sy}) & 0 & \sin(\Psi_{Sy}) \\ 0 & \cos(\Psi_{Sx}) - \cos(\Psi_{Sy}) \sin(\Psi_{Sx}) & \sin(\Psi_{Sx}) \\ -\cos(\Psi_{Sx}) \sin(\Psi_{Sy}) & \sin(\Psi_{Sx}) & \cos(\Psi_{Sx}) \cos(\Psi_{Sy}) \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

gebildet. Demnach gilt entweder $\Psi_{Sx} \in \mathbb{R}, \Psi_{Sy} = 0$ oder $\Psi_{Sx} = 0, \Psi_{Sy} \in \mathbb{R}$. Für den Fall, dass es sich um einen Ausleger mit starrer Motoreinheit handelt, gilt ${}^{2,3}\mathbf{T} = \mathbf{E}$. Für das Drehgelenk des Motors gilt die Transformationsmatrix

$${}^{3,4}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos(\Psi_M) - \sin(\Psi_M) & 0 \\ \sin(\Psi_M) & \cos(\Psi_M) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.95)$$

Die Drehachsen der Drehgelenke werden durch die normierten Vektoren

$${}^1\mathbf{n}_{3x} = {}^{1,2}\mathbf{T} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^1\mathbf{n}_{3y} = {}^{1,2}\mathbf{T} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^1\mathbf{n}_4 = {}^{1,2}\mathbf{T} {}^{2,3}\mathbf{T} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.96)$$

festgelegt. Für die Trägheitstensoren der Ausleger kann in vielen Fällen mit

$${}^1\boldsymbol{\Theta}_j \approx {}^{1,j}\mathbf{T} \begin{bmatrix} \Theta_{jx} & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_{jy} & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_{jz} \end{bmatrix} {}^{1,j}\mathbf{T}^T \quad \text{für } j = 2, \dots, 4 \quad (2.97)$$

gerechnet werden, da die Deviationsmomente im Verhältnis vernachlässigbar klein sind.

Geschwindigkeits- und Beschleunigungsebene: Die Winkelgeschwindigkeiten der Gelenke G_3 und G_4 ergeben sich gemäß Gleichung (2.21) zu

$${}^1\boldsymbol{\omega}_{3,2} = {}^{1,2}\mathbf{T} \begin{bmatrix} \omega_{Sx} \\ \omega_{Sy} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^1\boldsymbol{\omega}_{4,3} = {}^{1,2}\mathbf{T} {}^{2,3}\mathbf{T} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_M \end{bmatrix}. \quad (2.98)$$

Für die Winkelgeschwindigkeiten gegenüber dem Inertialsystem folgt damit

$${}^1\boldsymbol{\omega}_{2,0} = {}^1\boldsymbol{\omega}_{1,0} + \underbrace{{}^1\boldsymbol{\omega}_{2,1}}_{=0}, \quad {}^1\boldsymbol{\omega}_{3,0} = {}^1\boldsymbol{\omega}_{2,0} + {}^1\boldsymbol{\omega}_{3,2}, \quad {}^1\boldsymbol{\omega}_{4,0} = {}^1\boldsymbol{\omega}_{3,0} + {}^1\boldsymbol{\omega}_{4,3}. \quad (2.99)$$

Für den Fall, dass der Winkelgeschwindigkeitstensor verwendet wird, erfolgt eine Koordinatentransformation gemäß der Vorschrift für Tensoren zweiter Stufe über die Transformationsvorschrift

$${}^1\tilde{\boldsymbol{\omega}} = {}^{1,i}\mathbf{T} {}^i\tilde{\boldsymbol{\omega}} {}^{1,i}\mathbf{T}^T. \quad (2.100)$$

Im Zusammenhang mit dem Gelenk G_1 ergeben sich die benötigten Jacobi-Matrizen und deren Ableitung im Koordinatensystem \mathcal{K}_1 zu

$${}^1\mathbf{J}_{j,1} = {}^1\mathbf{V}_{j,1} {}^1\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ -{}^1\tilde{\mathbf{d}}_{j,1} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \Rightarrow {}^1\dot{\mathbf{J}}_{j,1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\dot{{}^1\tilde{\mathbf{d}}}_{j,1} & \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{1,0} \end{bmatrix}. \quad (2.101)$$

Für das Gelenk G_3 folgt

$${}^1\mathbf{J}_{j,3} = {}^1\mathbf{V}_{j,3} {}^1\mathbf{G}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_3 \\ \tilde{\mathbf{n}}_3 \mathbf{d}_{j,3} \end{bmatrix} \Rightarrow {}^1\dot{\mathbf{J}}_{j,3} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{2,0} \mathbf{n}_3 \\ \dot{\tilde{\mathbf{n}}}_3 \mathbf{d}_{j,3} + \tilde{\mathbf{n}}_3 \dot{\mathbf{d}}_{j,3} \end{bmatrix}. \quad (2.102)$$

Für das Gelenk G_4 gelten die Beziehungen

$${}^1\mathbf{J}_{4,4} = {}^1\mathbf{V}_{4,4} {}^1\mathbf{G}_4 = \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{n}_4 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \quad {}^1\dot{\mathbf{J}}_{4,4} = \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_{3,0} {}^1\mathbf{n}_4 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (2.103)$$

Betrachtung der wirkenden Kräfte und Momente: Der Kraftwinder der eingepprägten Kräfte ${}^1\hat{\mathbf{f}}_j^e$ ergibt sich aus den Beziehungen in Abbildung 2.9. Zu den eingepprägten Kräften auf jeden Körper zählt zunächst die jeweilige Gewichtskraft. Für den Körper K_4 kommt zusätzlich die Auftriebskraft F_A hinzu, welche durch die Drehung der Rotoren erzeugt wird. Die Vektoren der eingepprägten Kräfte lauten

$${}^1\mathbf{f}_j^e = {}^{1,0}\mathbf{T} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_j g \end{bmatrix}, \quad \text{für } j = 2, 3, \quad {}^1\mathbf{f}_4^e = {}^{1,0}\mathbf{T} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_4 g \end{bmatrix} + {}^{1,4}\mathbf{T} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_A \end{bmatrix}. \quad (2.104)$$

Die eingepprägten Momente setzen sich aus den Momenten des Antriebsmotors τ_M im Gelenk G_4 und denen eines Servomotors τ_S im Gelenk G_3 zusammen. Das resultierende Antriebsmoment τ_M setzt sich aus dem inneren Drehmoment des Antriebsmotors τ_{Mi} und dem Widerstandsmoment τ_W zusammen. Letzteres entsteht durch die Luftreibung der Rotoren. Für die eingepprägten Momente folgt

$${}^1\boldsymbol{\tau}_2^e = {}^{1,2}\mathbf{T} \begin{bmatrix} -\tau_{Sx} \\ -\tau_{Sy} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^1\boldsymbol{\tau}_3^e = {}^{1,3}\mathbf{T} \begin{bmatrix} \tau_{Sx} \\ \tau_{Sy} \\ -\tau_{Mi} \end{bmatrix}, \quad {}^1\boldsymbol{\tau}_4^e = {}^{1,4}\mathbf{T} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{Mi} - \tau_W \end{bmatrix}. \quad (2.105)$$

Die auftretenden Motormomente sind von der mathematischen Beschreibung der Motoren abhängig. Eine genauere Betrachtung der Antriebsmomente der Motoren sowie die Abhängigkeit der Auftriebskraft F_A von deren Winkelgeschwindigkeit folgt in Kapitel 3 dieser Arbeit. Weitere auftretende aerodynamische Effekte werden in dieser Arbeit nicht betrachtet. Dazu gehört beispielsweise der Bodeneffekt,

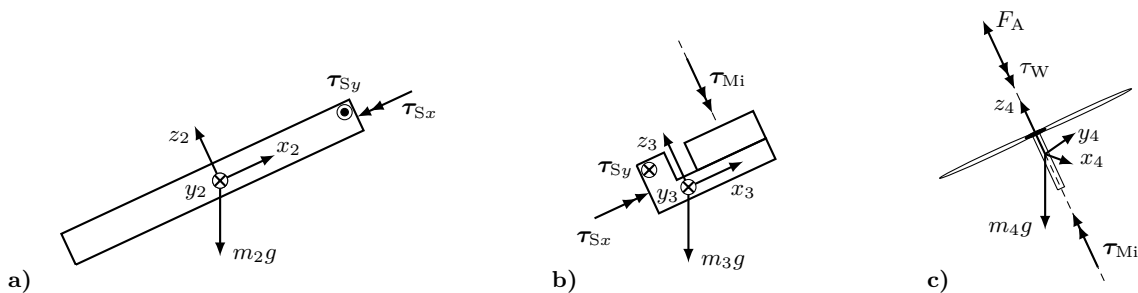


Abbildung 2.9: Eingepprägte Kräfte und Momente an a) Körper K_2 , b) Körper K_3 und c) Körper K_4

bei dem in Bodennähe der Druck unter dem Rotorblatt steigt und als Folge sich die dynamische Auftriebskraft erhöht. Aber auch das sogenannte Blade Flapping, dessen Ursache auf eine zusätzliche nicht rein axiale Anströmung der Rotoren zurückzuführen ist, wird in dieser Arbeit nicht weiter betrachtet. Diese und weitere Effekte können durch die Erweiterung der wirkenden Kräfte und Momente jederzeit mitberücksichtigt werden. Eine zusammenfassende Darstellung findet sich in (Quan, Dai und Wang, 2020), ausführliche Darstellungen zum Beispiel in (Bagura u. a., 2016). Für die Winder der Corioliskräfte gilt die allgemeine Formel

$${}^1\hat{\mathbf{f}}_j^c = \begin{bmatrix} -{}^1\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{j,0} {}^1\boldsymbol{\Theta}_j {}^1\boldsymbol{\omega}_{j,0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (2.106)$$

Die Corioliskräfte \mathbf{f}_j^c sind aufgrund der Festlegung der Körperbezugspunkte im Schwerpunkt stets null.

2.3.3 Programmstruktur für die Simulation

Gemäß Gleichung (2.63) mit ihren dazugehörigen Anteilen (2.64) und (2.65) setzt sich das gesamte Gleichungssystem additiv aus dem Anteil der Trägerplatte und den Anteilen der jeweiligen Ausleger zusammen. Ein Multikopter besteht in der Regel aus mehreren Auslegern gleichen Typs, die sich ausschließlich in ihrer Orientierung zur Trägerplatte unterscheiden. Die Gleichungen (2.65) sind für jeden Ausleger gültig. Für die symbolische Berechnung der Gleichung (2.63) bietet es sich daher an, jeweils eine Funktion für die Trägerplatte und eine für jeden Auslegertyp zu schreiben. An diese Funktionen werden die für die Berechnung notwendigen Variablen und Parameter übergeben. Die Anteile der Trägerplatte resultieren aus dem Funktionsaufruf $[\hat{\mathbf{M}}_T \hat{\mathbf{f}}_T] = \text{Trägerplatte}()$. Diese Funktion besitzt keine Übergabeparameter und gibt sowohl die Massenmatrix $\hat{\mathbf{M}}_T$ als auch die auf die Trägerplatte einwirkenden Kräfte $\hat{\mathbf{f}}_T$ nach Gleichung (2.64) zurück. Der Funktionsaufruf vom Typ $[\hat{\mathbf{M}}_{Ai} \hat{\mathbf{f}}_{Ai}] = \text{Ausleger}({}^{1,2}\mathbf{T}_{Ai}, \Psi_{Mi}, \Psi_{Si}, \eta_{Mi}, \eta_{Si}, u_{Mi}, u_{Si})$ hat die entsprechenden Anteile des Auslegers $\hat{\mathbf{M}}_{Ai}$ und $\hat{\mathbf{f}}_{Ai}$ als Rückgabeparameter. Im Gegensatz zur Berechnung der Trägerplatte müssen dieser Funktion in jedem Fall Parameter übergeben werden. Hierzu gehören neben den zyx -Kardan-Winkeln der Matrix ${}^{1,2}\mathbf{T}_{Ai}$ auch die Eingangsgröße u_{Mi} für den Antriebsmotor sowie die zum Schwenken der Motoreinheit notwendige Eingangsgröße u_{Si} des Servomotors. Außerdem müssen die zum jeweiligen Ausleger gehörenden Zustandsgrößen der Antriebseinheit Ψ_{Mi} und s_{Mi} sowie der Schwenkeinrichtung Ψ_{Si} und s_{Si} der Funktion übergeben werden. Die Auswertung der Gleichung (2.63) ergibt die für eine Drohne D_i gesuchte Gesamtmassenmatrix $\hat{\mathbf{M}}_{Di}$ und den Gesamtvektor aller Kräfte $\hat{\mathbf{f}}_{Di}$. In Abbildung 2.10 ist der Programmteil für die Berechnung eines überaktuierten Quadropters mit schwenkbaren Motoreinheiten dargestellt. Für die Berechnung einer gelagerten Drohne werden die zu den gesperrten Raumrichtungen gehörenden Zustandsgrößen zu null gesetzt. Unabhängig von der Lagerung kommt es bei der

Auswertung der Gelenkbeschleunigungen von Gelenk G_1 zu der Invertierung der Matrix $\hat{\mathbf{M}}_{Di} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$. Dies lässt sich weiter auf die Invertierung von 3×3 -Matrizen reduzieren, wenn die Matrix $\hat{\mathbf{M}}_{Di}$ in Gleichung (2.63) als eine 2×2 -Blockmatrix betrachtet wird. Für die Massenmatrix der Drohne

$$\hat{\mathbf{M}}_{Di} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (2.107)$$

ergibt sich dann die inverse Matrix aus

$$\hat{\mathbf{M}}_{Di}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} & -\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{T}^{-1} & \mathbf{D}^{-1} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix}, \text{ mit } \mathbf{T} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}. \quad (2.108)$$

Voraussetzung für die Berechnungsvorschrift (2.108) ist lediglich, dass die Matrizen \mathbf{D} und \mathbf{T} invertierbar sind. Diese Vorgehensweise bringt bei der symbolischen Berechnung erhebliche Vorteile bezüglich der Berechnungsdauer und des notwendigen Speicherplatzbedarfs. Durch die unterschiedliche Parametrierung der Auslegerfunktionen lassen sich verschiedene Multikoptertopologien simulieren. Die notwendigen zyx -Kardan-Winkel sind in Tabelle 2.2 für eine Auswahl verschiedener Multikoptertopologien aufgelistet. Die Anordnung der Ausleger sagt dabei jedoch noch nichts darüber aus, ob es sich bei dem betrachteten Modell um ein Modell mit starren und/oder schwenkbaren Motoreinheiten handelt.

Die Implementierung der Gleichungen für eine numerische Simulation, zum Beispiel mit Simulink®, sieht prinzipiell ähnlich aus. Auch hier werden die Gleichungen für die Ausleger und die Trägerplatte auf unterschiedliche Subsysteme aufgeteilt und in einer Programmbibliothek abgespeichert. Über eine Eingabemaske des Subsystems werden die Winkel für die Matrix ${}^{1,2}\mathbf{T}_{Ai}$ parametrieren. Nach der Parametrierung

```
%% Berechnung der Massenmatrix und Kraftanteil der Trägerplatte
[MTd,fTd]=Trägerplatte ();

%% Berechnung der Massenmatrizen und Kraftanteile der Ausleger
[MA1d,fA1d]=Ausleger (0,0,0,PsiM1,PsiS1,wM1,wS1,uM1,uS1 );
[MA2d,fA2d]=Ausleger (0,0,90,PsiM2,PsiS2,wM2,wS2,uM2,uS2 );
[MA3d,fA3d]=Ausleger (0,0,180,PsiM3,PsiS3,wM3,wS3,uM3,uS3 );
[MA4d,fA4d]=Ausleger (0,0,270,PsiM4,PsiS4,wM4,wS4,uM4,uS4 );

%% Zusammenfassen der einzelnen Anteile
MD = simplify (MTd + MA1d + MA2d + MA3d + MA4d);
fD = simplify (fTd + fA1d + fA2d + fA3d + fA4d);
```

Abbildung 2.10: Symbolische Berechnung eines Quadropters in MATLAB®

Tabelle 2.2: Modellparameter für verschiedene Multikoptertopologien mit

$$\beta = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

	Trikopter	Quadrokopter	Hexakopter	Oktokopter Variante 1	Oktokopter Variante 2
Ausleger 1	$\mathbf{T}(0,0,0)$	$\mathbf{T}(0,0,0)$	$\mathbf{T}(0,0,0)$	$\mathbf{T}(0,0,0)$	$\mathbf{T}(\frac{\pi}{4}, -\beta, -\frac{\pi}{4})$
Ausleger 2	$\mathbf{T}(\frac{2\pi}{3}, 0, 0)$	$\mathbf{T}(\frac{\pi}{2}, 0, 0)$	$\mathbf{T}(\frac{\pi}{3}, 0, 0)$	$\mathbf{T}(\frac{\pi}{4}, 0, 0)$	$\mathbf{T}(\frac{3\pi}{4}, -\beta, \frac{3\pi}{4})$
Ausleger 3	$\mathbf{T}(\frac{4\pi}{3}, 0, 0)$	$\mathbf{T}(\pi, 0, 0)$	$\mathbf{T}(\frac{2\pi}{3}, 0, 0)$	$\mathbf{T}(\frac{\pi}{2}, 0, 0)$	$\mathbf{T}(\frac{5\pi}{4}, -\beta, -\frac{\pi}{4})$
Ausleger 4	X	$\mathbf{T}(\frac{3\pi}{2}, 0, 0)$	$\mathbf{T}(\pi, 0, 0)$	$\mathbf{T}(\frac{3\pi}{4}, 0, 0)$	$\mathbf{T}(\frac{7\pi}{4}, -\beta, \frac{3\pi}{4})$
Ausleger 5	X	X	$\mathbf{T}(\frac{4\pi}{3}, 0, 0)$	$\mathbf{T}(\pi, 0, 0)$	$\mathbf{T}(\frac{\pi}{4}, \beta, \frac{\pi}{4})$
Ausleger 6	X	X	$\mathbf{T}(\frac{5\pi}{3}, 0, 0)$	$\mathbf{T}(\frac{5\pi}{4}, 0, 0)$	$\mathbf{T}(\frac{3\pi}{4}, \beta, -\frac{3\pi}{4})$
Ausleger 7	X	X	X	$\mathbf{T}(\frac{3\pi}{2}, 0, 0)$	$\mathbf{T}(\frac{5\pi}{4}, \beta, \frac{\pi}{4})$
Ausleger 8	X	X	X	$\mathbf{T}(\frac{7\pi}{4}, 0, 0)$	$\mathbf{T}(\frac{7\pi}{4}, \beta, -\frac{3\pi}{4})$

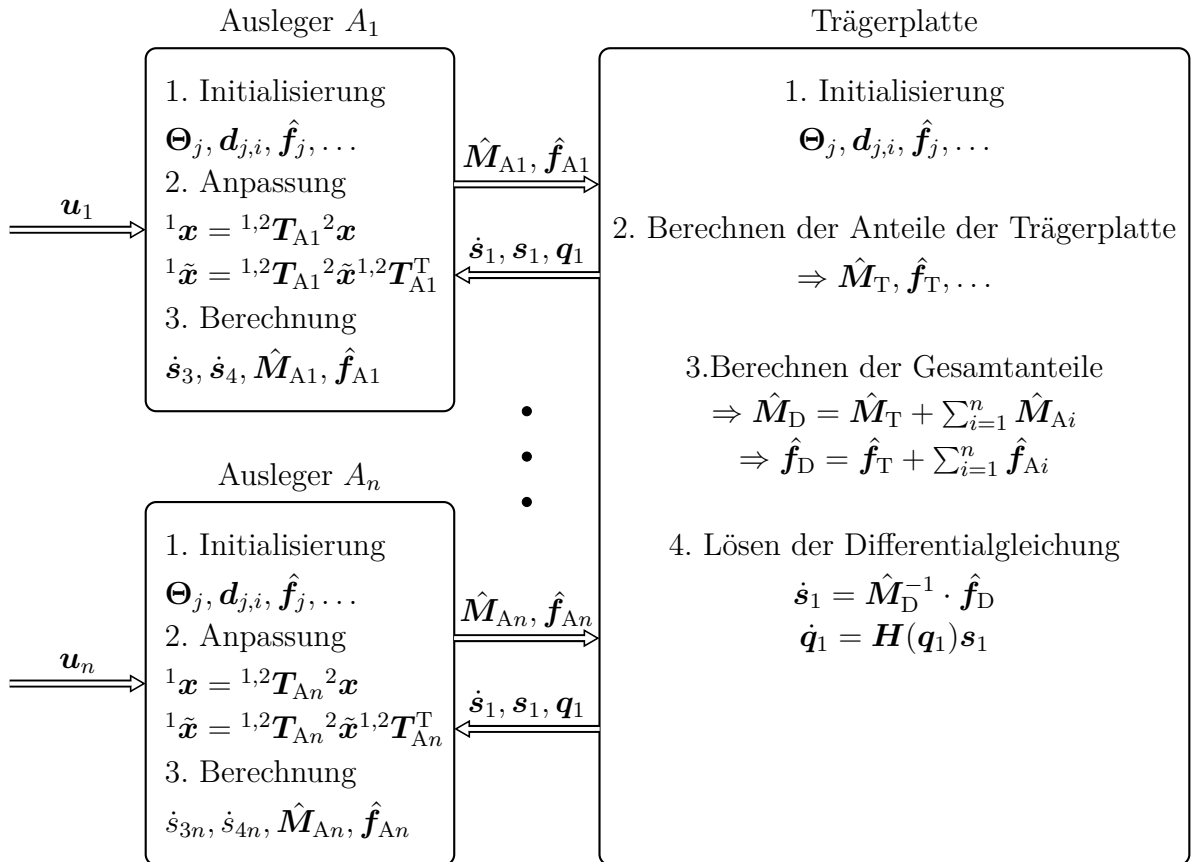


Abbildung 2.11: Schema zur numerischen Simulation verschiedener Multikoptermodelle

beschreibt das Subsystem dann einen definierten Ausleger der Drohne und liefert die entsprechenden Anteile zurück. Pro Ausleger wird demnach ein eigenes Subsystem vom Typ Ausleger benötigt. Das Subsystem der Trägerplatte erfasst sämtliche Anteile der Ausleger. Außerdem beinhaltet es die Berechnung der Plattformanteile und das Lösen von Gleichung (2.63). Über eine Eingabemaske wird die Anzahl der notwendigen Eingänge für das Subsystem der Trägerplatte parametrisiert. Daraus resultiert eine Programmstruktur gemäß dem Schema nach Abbildung 2.11. Während der Initialisierung des Modells werden die hinterlegten Zahlwerte der geometrischen und physikalischen Parameter geladen. Außerdem werden die Gleichungen entsprechend der Lagerkonfiguration im Gelenk G_1 angepasst, indem die Minimalkoordinaten der gesperrten Raumrichtungen und deren Ableitungen zu null gesetzt werden. Während der eigentlichen Simulation erfolgt die Berechnung der Anteile für die jeweiligen Ausleger und die Trägerplatte, wobei die entsprechende Orientierung des jeweiligen Auslegers berücksichtigt wird. Bei der Berechnung der Eulerparameter muss darauf geachtet werden, dass die Nebenbedingung (2.83) stets eingehalten wird. Möglichkeiten hierzu werden zum Beispiel in (Zhao und van Wachem, 2013) beschrieben.

2.4 Modell kooperierender Drohnen

Für die Simulation und Analyse einer Transportaufgabe mit Hilfe einer oder mehrerer Drohnen werden im Folgenden die notwendigen Gleichungen hergeleitet. Die zu transportierende Nutzlast wird durch den sogenannten Endeffektor aufgenommen. Dieser ist wiederum durch jeweils ein Seil mit einer unterschiedlichen Anzahl an Drohnen verbunden. Nachfolgend wird der Verbund aus Endeffektor und Nutzlast vereinfachend als Plattform bezeichnet. Ziel ist es, ein Modell ohne Einschränkungen hinsichtlich der Anzahl der verwendeten Multikopter und der Anordnung der Seile herzuleiten. Beispielhaft ist in Abbildung 2.12a der Transport der Plattform mit Quadroptern schematisch dargestellt. Die Seile sind dabei im Allgemeinen unterhalb der Drohne befestigt und üben Zwangskräfte auf diese aus. Dasselbe gilt auch für die Anordnung der Seile am Endeffektor. Seile sind prinzipiell so beschaffen, dass sie lediglich Zugkräfte aufnehmen können. Weiterhin folgt die Annahme, dass die Seile masselos sind und kein Drehmoment übertragen können. Die Drohnen sollen sich ausschließlich oberhalb der Plattform befinden. Die auf die Plattform wirkende Gewichtskraft belastet die Seile dann auf Zug. Es werden nachfolgend nur derartige Flugmanöver betrachtet, in denen die Seile stets gespannt bleiben. Für die Beschreibung des Gesamtsystems werden sowohl die Plattform als auch die Drohnen als starre Körper angesehen.

Bei der Herleitung des Gesamtsystems wird sowohl die Anzahl der Drohnen n_D als auch deren Konfiguration offen gehalten. Aus diesem Grund wird das Gesamtsystem in seinen $6(n_D + 1)$ absoluten Koordinaten

$$\hat{\mathbf{r}} = \left[\hat{\mathbf{r}}_{D1}^T \ \hat{\mathbf{r}}_{D2}^T \ \dots \ \hat{\mathbf{r}}_{Dn_D}^T \ \hat{\mathbf{r}}_P^T \right]^T \quad (2.109)$$

beschrieben. Diese sind jedoch nicht alle unabhängig voneinander, da zwischen jedem Befestigungspunkt an der Plattform und dem Seilangriffspunkt der jeweiligen Drohne eine geometrische Zwangsbedingung besteht. Die zur Beschreibung des Gesamtsystems notwendigen Vektoren werden entsprechend Abbildung 2.12b definiert. Das Koordinatensystem der Plattform \mathcal{K}_P mit seinem Ursprung O_P fällt im Allgemeinen nicht mit dem Schwerpunkt der Plattform S_P zusammen. Die Position des Schwerpunkts der Plattform bezüglich des Ursprungs O_P wird durch den Vektor \mathbf{b}_{SP} beschrieben. Das Koordinatensystem der jeweiligen Drohne \mathcal{K}_{D_i} mit dem jeweiligen Koordinatenursprung O_{D_i} ist identisch mit dem jeweiligen Koordinatensystem \mathcal{K}_1 . Daher befindet sich auch das Koordinatensystem \mathcal{K}_{D_i} im Allgemeinen nicht im Schwerpunkt S_{D_i} der Drohne. Die Position des Schwerpunkts der Drohne bezüglich des Ursprungs O_{D_i} wird durch den Vektor \mathbf{b}_{SD_i} beschrieben. Der Vektor \mathbf{r}_P weist vom Ursprung des Inertialsystems \mathcal{K}_0 zum Ursprung des Plattformkoordinatensystems \mathcal{K}_P und die Vektoren \mathbf{r}_{D_i} zum Ursprung des Koordinatensystems \mathcal{K}_{D_i} der jeweiligen Drohne. Der körperfeste Vektor \mathbf{p}_{Ri} weist vom Ursprung der Plattform O_P zu dem jeweiligen Seilangriffspunkt an der Plattform. Der körperfeste Vektor \mathbf{b}_{Ri} weist vom Ursprung O_{D_i} zum Seilangriffspunkt der jeweiligen Drohne. Vom Ursprung des Inertialsystems O_0 sind dies entsprechend die Vektoren \mathbf{r}_{Ri} und \mathbf{r}_{Bi} . Der Seilvektor

$$\mathbf{l}_i = \mathbf{r}_{D_i} + \mathbf{b}_{Ri} - \mathbf{r}_P - \mathbf{p}_{Ri} \quad (2.110)$$

verbindet die jeweiligen zueinander gehörenden Seilangriffspunkte und zeigt von der Plattform in Richtung der Drohne. Der Betrag des Vektors \mathbf{l}_i entspricht der Seillänge $l_{0,i}$ des i -ten Seils. Die implizite geometrische Bindung zwischen den Drohnen

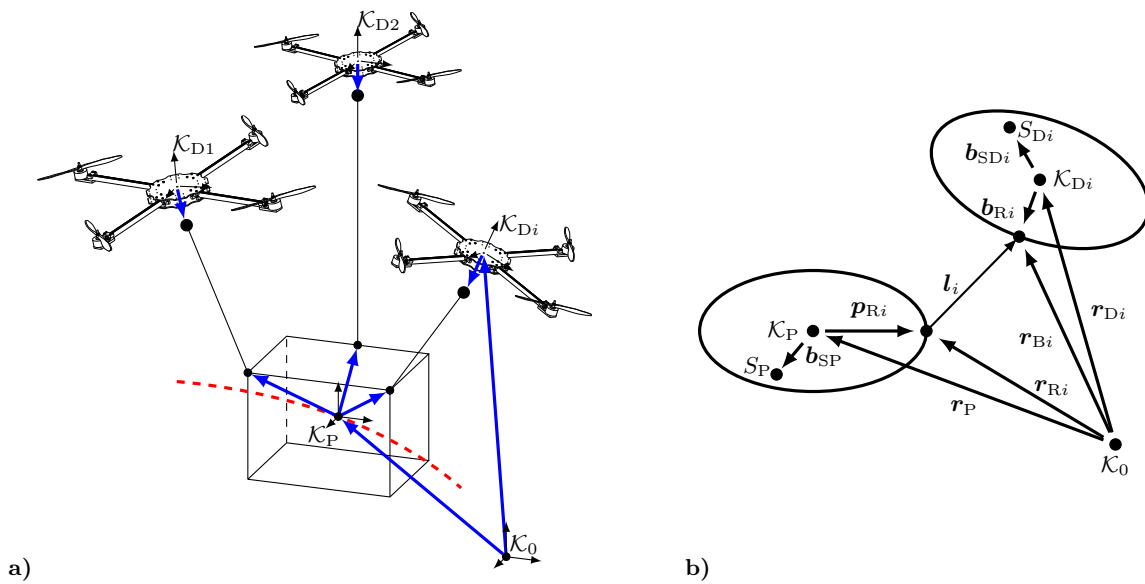


Abbildung 2.12: Transport einer Last mit Multikoptern in a) und den zur Beschreibung des Gesamtsystems notwendigen Vektoren in b)

und der Plattform lautet

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n_D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (\mathbf{l}_1^T \mathbf{l}_1 - l_{0,1}^2) \\ \frac{1}{2} (\mathbf{l}_2^T \mathbf{l}_2 - l_{0,2}^2) \\ \vdots \\ \frac{1}{2} (\mathbf{l}_{n_D}^T \mathbf{l}_{n_D} - l_{0,n_D}^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.111)$$

Die dazugehörige Bindung auf Geschwindigkeitsebene ergibt sich durch die Ableitung von Gleichung (2.111) für das Drohnensystem zu

$$\begin{aligned} \dot{g}_i &= \mathbf{l}_i^T \dot{\mathbf{l}}_i \\ &= \mathbf{l}_i^T \left(\dot{\mathbf{r}}_{Di} - \tilde{\mathbf{b}}_{Ri} \boldsymbol{\omega}_{Di} - \dot{\mathbf{r}}_P + \tilde{\mathbf{p}}_{Ri} \boldsymbol{\omega}_P \right) \\ &= \left[\mathbf{l}_i^T \tilde{\mathbf{p}}_{Ri} - \mathbf{l}_i^T \right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_P \\ \dot{\mathbf{r}}_P \end{bmatrix} + \left[-\mathbf{l}_i^T \tilde{\mathbf{b}}_{Ri} \quad \mathbf{l}_i^T \right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{Di} \\ \dot{\mathbf{r}}_{Di} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{C}_{Pi} \dot{\mathbf{r}}_P + \mathbf{C}_{Di} \dot{\mathbf{r}}_{Di}. \end{aligned} \quad (2.112)$$

Erneutes Ableiten liefert die geometrische Bindung auf Beschleunigungsebene

$$\begin{aligned} \ddot{g}_i &= \mathbf{l}_i^T \ddot{\mathbf{l}}_i + \dot{\mathbf{l}}_i^T \dot{\mathbf{l}}_i \\ &= \mathbf{l}_i^T \left(\ddot{\mathbf{r}}_{Di} - \dot{\tilde{\mathbf{b}}}_{Ri} \boldsymbol{\omega}_{Di} - \tilde{\mathbf{b}}_{Ri} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{Di} - \ddot{\mathbf{r}}_P + \dot{\tilde{\mathbf{p}}}_{Ri} \boldsymbol{\omega}_P + \tilde{\mathbf{p}}_{Ri} \dot{\boldsymbol{\omega}}_P \right) + \dot{\mathbf{l}}_i^T \dot{\mathbf{l}}_i \\ &= \mathbf{C}_{Di} \ddot{\mathbf{r}}_{Di} + \mathbf{C}_{Pi} \ddot{\mathbf{r}}_P + \mathbf{l}_i^T (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{Di} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{Di} \mathbf{b}_{Ri} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_P \tilde{\boldsymbol{\omega}}_P \mathbf{p}_{Ri}) + \dot{\mathbf{l}}_i^T \dot{\mathbf{l}}_i \\ &= \mathbf{C}_{Di} \ddot{\mathbf{r}}_{Di} + \mathbf{C}_{Pi} \ddot{\mathbf{r}}_P + \boldsymbol{\kappa}_i. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Die impliziten Bindungen auf Geschwindigkeits- und Beschleunigungsebene für das Gesamtsystem lassen sich auf die kompakte Form

$$\dot{\mathbf{g}} = \mathbf{C} \dot{\mathbf{r}}, \quad \ddot{\mathbf{g}} = \mathbf{C} \ddot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\kappa} \quad (2.114)$$

bringen. Die in Gleichung (2.114) vorkommende implizite Bindungsmatrix \mathbf{C} und der nicht von den Beschleunigungen abhängige Anteil $\boldsymbol{\kappa}$ besitzen den Aufbau

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{D1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{P1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{D2} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{P2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{C}_{Dn_D} & \mathbf{C}_{Pn_D} \end{bmatrix}, \quad (2.115a)$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_1^T (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{D1} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{D1} \mathbf{b}_{R1} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_P \tilde{\boldsymbol{\omega}}_P \mathbf{p}_{R1}) + \dot{\mathbf{l}}_1^T \dot{\mathbf{l}}_1 \\ \mathbf{l}_2^T (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{D2} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{D2} \mathbf{b}_{R2} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_P \tilde{\boldsymbol{\omega}}_P \mathbf{p}_{R2}) + \dot{\mathbf{l}}_2^T \dot{\mathbf{l}}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{l}_{n_D}^T (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{Dn_D} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{Dn_D} \mathbf{b}_{Rn_D} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_P \tilde{\boldsymbol{\omega}}_P \mathbf{p}_{Rn_D}) + \dot{\mathbf{l}}_{n_D}^T \dot{\mathbf{l}}_{n_D} \end{bmatrix}. \quad (2.115b)$$

Unter der Annahme, dass die $b = n_D$ holonomen Bindungen unabhängig voneinander sind, besitzt das Gesamtsystem den Gesamtfreiheitsgrad $f_{\text{MKS}} = 6(n_D + 1) - n_D$. Dies ist jedoch nur dann der Fall, wenn $\text{rang}(\mathbf{C}) = n_D$ gilt. Trifft dies zu, so wird der Freiheitsgrad der Plattform pro Seil und Drohne um einen Freiheitsgrad reduziert und es gilt $f_P = 6 - n_D$. In diesem Fall ist die

$$\text{Plattform} = \begin{cases} \text{statisch unterbestimmt, falls } n_D < 6, \\ \text{statisch bestimmt, falls } n_D = 6, \\ \text{statisch überbestimmt, falls } n_D > 6. \end{cases} \quad (2.116)$$

Die auf die Plattform wirkenden Zwangskräfte $\hat{\mathbf{f}}_P^z$ setzen sich aus den einzelnen Seilkräften \mathbf{f}_{Ri} additiv zusammen. Nach dem Prinzip von d'Alembert (2.52) ist bekannt, dass zu jedem Zeitpunkt $\hat{\mathbf{f}}^z \delta \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$ gilt, weshalb die Zwangskräfte stets in Richtung der gesperrten Raumrichtung wirken. Aus Gleichung (2.114) folgt $\mathbf{C} \delta \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$. Da die virtuelle Verschiebung $\delta \hat{\mathbf{r}}$ beliebige Werte annehmen kann, müssen die Zeilenvektoren der Matrix \mathbf{C} zu jeder Zeit senkrecht zu dieser orientiert sein. Demnach lassen sich die Zwangskräfte mit Hilfe der Bindungsmatrix über $\hat{\mathbf{f}}_P^z = \mathbf{C}^T \boldsymbol{\lambda}$ beschreiben. Für die über das i -te Seil an der Plattform angreifende Zwangskraft $\hat{\mathbf{f}}_{Pi}^z$ und die an der jeweiligen Drohne angreifende Zwangskraft $\hat{\mathbf{f}}_{Di}^z$ gilt

$$\hat{\mathbf{f}}_{Pi}^z = \mathbf{C}_{Pi}^T \lambda_i = \begin{bmatrix} -\tilde{\mathbf{p}}_{Ri} \mathbf{l}_i \\ -\mathbf{l}_i \end{bmatrix} \lambda_i, \quad \hat{\mathbf{f}}_{Di}^z = \mathbf{C}_{Di}^T \lambda_i = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_{Ri} \mathbf{l}_i \\ \mathbf{l}_i \end{bmatrix} \lambda_i. \quad (2.117)$$

Damit folgt für die resultierende Zwangskraft an der Plattform

$$\hat{\mathbf{f}}_P^z = \begin{bmatrix} -\tilde{\mathbf{p}}_{R1} \mathbf{l}_1 & \dots & -\tilde{\mathbf{p}}_{Rn_D} \mathbf{l}_{n_D} \\ -\mathbf{l}_1 & \dots & -\mathbf{l}_{n_D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n_D} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_P^T \boldsymbol{\lambda}. \quad (2.118)$$

Die Bewegungsgleichung für das Drohnensystem, bestehend aus einer Plattform und n_D Drohnen, lautet somit

$$\hat{\mathbf{M}}_{DS} \ddot{\hat{\mathbf{r}}} = \hat{\mathbf{f}}_{DS} + \mathbf{C}^T \boldsymbol{\lambda}, \quad (2.119a)$$

mit den Vektoren und Matrizen

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{M}}_{\text{DS}} &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{M}}_{\text{D1}} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{M}}_{\text{D2}} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \hat{\mathbf{M}}_{\text{D}n_{\text{D}}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \hat{\mathbf{M}}_{\text{P}} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{f}}_{\text{DS}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_{\text{D1}} \\ \hat{\mathbf{f}}_{\text{D2}} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{f}}_{\text{D}n_{\text{D}}} \\ \hat{\mathbf{f}}_{\text{P}}^{\text{ec}} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}^{\text{T}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{\text{D1}}^{\text{T}} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{\text{D2}}^{\text{T}} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{C}_{\text{D}n_{\text{D}}}^{\text{T}} \\ & & & \mathbf{C}_{\text{P}}^{\text{T}} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.119\text{b})$$

Die in Gleichung (2.119) enthaltenen Vektoren $\hat{\mathbf{f}}_{\text{D}i}$ und Matrizen $\hat{\mathbf{M}}_{\text{D}i}$ folgen aus den Ausführungen in Abschnitt 2.2. Die Größen $\hat{\mathbf{f}}_{\text{P}}^{\text{ec}}$ und $\hat{\mathbf{M}}_{\text{P}}$ ergeben sich für die Plattform mit der Masse m_{P} und dem Trägheitstensor Θ_{P} aus der allgemeinen Newton-Euler-Gleichung

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Theta_{\text{P}} & m_{\text{P}}\tilde{\mathbf{b}}_{\text{S}} \\ m_{\text{P}}\tilde{\mathbf{b}}_{\text{S}}^{\text{T}} & m_{\text{P}}\mathbf{E} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{M}}_{\text{P}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{P}} \\ \ddot{\mathbf{r}}_{\text{P}} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{r}}_{\text{P}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{P}}\Theta_{\text{P}}\boldsymbol{\omega}_{\text{P}} \\ -m_{\text{P}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{P}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{P}}\mathbf{b}_{\text{S}} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{f}}_{\text{P}}^{\text{c}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_{\text{P}}^{\text{e}} \\ \mathbf{f}_{\text{P}}^{\text{e}} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{f}}_{\text{P}}^{\text{e}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_{\text{P}}^{\text{z}} \\ \mathbf{f}_{\text{P}}^{\text{z}} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{f}}_{\text{P}}^{\text{z}}} \quad (2.120)$$

gemäß Abschnitt 2.1. Die Lösung der Vorwärtsdynamik ergibt sich, indem Gleichung (2.119a) nach $\ddot{\mathbf{r}}$ aufgelöst wird und anschließend in die Bindungsgleichung auf Beschleunigungsebene (2.114) eingesetzt wird. Aus der resultierenden Gleichung folgt

$$\boldsymbol{\lambda} = \left(\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C} \hat{\mathbf{M}}_{\text{DS}}^{-1} \hat{\mathbf{f}}_{\text{DS}} + \boldsymbol{\kappa} \right), \quad \text{mit } \mathbf{Q} = \mathbf{C} \hat{\mathbf{M}}_{\text{DS}}^{-1} \mathbf{C}^{\text{T}}. \quad (2.121)$$

Als Voraussetzung für diese Umformung muss \mathbf{Q} regulär sein. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Matrix \mathbf{C} einen vollen Rang besitzt. Die absolute Beschleunigung

$$\ddot{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{M}}_{\text{DS}}^{-1} \left(\mathbf{E} - \mathbf{C}^{\text{T}} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C} \hat{\mathbf{M}}_{\text{DS}}^{-1} \right) \hat{\mathbf{f}}_{\text{DS}} - \hat{\mathbf{M}}_{\text{DS}}^{-1} \mathbf{C}^{\text{T}} \mathbf{Q}^{-1} \boldsymbol{\kappa} \quad (2.122)$$

ergibt sich, indem der Vektor $\boldsymbol{\lambda}$ aus Gleichung (2.121) in Gleichung (2.119a) substituiert wird.

Bei der numerischen Lösung von Gleichung (2.122) kommt es allerdings zu Schwierigkeiten, da im Gleichungssystem lediglich die Bindungen auf Beschleunigungsebe-

ne berücksichtigt werden. Dies führt dazu, dass durch unvermeidlich auftretende numerische Fehler die Zwangsbedingungen auf Geschwindigkeits- und Lageebene nicht mehr eingehalten werden. Dieser durch den numerischen Drift verursachte Fehler kann durch eine numerische Erweiterung begrenzt werden. Eine häufig verwendete Methode ist die nach Baumgarte, welche eine Erweiterung der Bindungen auf Beschleunigungsebene vorsieht. Diese ist gegeben zu

$$\ddot{\mathbf{g}}_B = \ddot{\mathbf{g}} + 2\alpha_B \dot{\mathbf{g}} + \beta_B^2 \mathbf{g}. \quad (2.123)$$

Die Wahl der Parameter $\alpha_B > 0$ und $\beta_B = \alpha_B$ führt auf ein aperiodisches Verhalten der numerischen Lösung (Baumgarte, 1972).

3 Entwicklung einer dynamischen und effizienten Antriebseinheit für Multikopter

Elektromotoren und die dazugehörigen Motorregler sind wesentliche Bestandteile eines jeden Multikopters. Das Zusammenspiel dieser beiden Komponenten bestimmt neben der Flugdynamik und -stabilität die Flugdauer in entscheidender Weise. Aus diesem Grund wird in diesem Kapitel ein Motorregler vorgestellt, bei dessen Entwicklung vor allem die Dynamik und Effizienz der Antriebseinheit in den Fokus genommen wird. Abschnitt 3.1 gibt zunächst eine Übersicht über unterschiedliche Synchronmotoren und deren korrekte Ansteuerung durch einen Motorregler. Die wesentlichen theoretischen Grundlagen zur Beschreibung einer permanenterregten Synchronmaschine werden in Abschnitt 3.2 dargestellt. Der entwickelte Drehzahlregler sowie die dazugehörige Softwarearchitektur werden in Abschnitt 3.3 vorgestellt. Abschnitt 3.4 behandelt die Parameteridentifikation auf Basis einer Abfolge verschiedener, einfach durchzuführender Messungen. Das in Abschnitt 3.5 vorgestellte Regelungskonzept ermöglicht es, dem Motor ein dynamisches und vor allem auch deterministisches Verhalten aufzuprägen. Schlussendlich erfolgt in Abschnitt 3.6 eine abschließende Betrachtung und Beurteilung des Motorreglers und des Regelungskonzepts sowie ein Vergleich mit am Markt verfügbaren Motorreglern.

3.1 Übersicht und Einordnung

Unterscheidungsmerkmale von Motorreglern: In Abhängigkeit vom Anwendungsbereich werden mitunter sehr hohe Anforderungen an Multikopter gestellt. Diese reichen vom Ziel einer maximalen Flugdauer über die Erfüllung bestimmter Stabilitätskriterien bis hin zu sehr hohen Dynamikanforderungen. Die Auswahl einer geeigneten Kombination aus Motor und Propeller sowie einer dazu passenden Ansteuerungselektronik ist hierbei von entscheidender Bedeutung, vor allem wenn es darum geht, die geforderten Kriterien einzuhalten oder diese zu optimieren (Pounds, Mahony und Corke, 2010). Die Funktionsweise von Motorreglern unterscheidet sich hauptsächlich in zwei Aspekten. Das erste Unterscheidungsmerkmal ergibt sich aus der Tatsache, dass es permanenterregte Synchronmotoren mit einer trapezförmig oder einer sinusförmig rückinduzierten Spannung des Rotors

gibt. Diese Spannung wird auch als entgegenwirkende elektromotorische Kraft oder Gegen-EMK bezeichnet. Im Falle einer trapezförmigen Gegen-EMK wird der Motor als bürstenloser Gleichstrommotor (BLDC-Motor) und im Falle einer sinusförmigen Gegen-EMK als permanenterregte Synchronmaschine (PMSM) bezeichnet. Die Ausprägung der Gegen-EMK besitzt einen direkten Einfluss auf die Ansteuerung des Motors. Denn für einen BLDC-Motor sollte eine Block- und für eine PMSM eine Sinuskommutierung verwendet werden. Demnach dient die Kommutierungsmethode als ein erstes Unterscheidungsmerkmal für Motorregler (Pillay und Krishnan, 1991). Damit sich der Rotor in Drehung versetzt braucht es im Stator ein magnetisches Drehfeld, das gegenüber dem Rotorfluss eine bestimmte Phasenlage besitzt. Für die gezielte Einprägung der Strangspannungen muss die aktuelle Rotorposition bekannt sein. Die Methode zur Erfassung der aktuellen Rotorposition ist das zweite Unterscheidungsmerkmal.

Ansteuerung einer permanenterregten dreiphasigen Synchronmaschine: Prinzipiell wird für die Ansteuerung von permanenterregten dreiphasigen Motoren eine Schaltung bestehend aus drei Halbbrücken verwendet und die mittlere Spannung über eine Pulsweitenmodulation (PWM) reguliert. Im Falle von BLDC-Motoren wird bei der geforderten Blockkommutierung lediglich alle 60° elektrisch das Tastverhältnis der Halbleiter geändert. Hieraus resultiert ein trapezförmiger Strangstrom und in Kombination mit dem Rotorfluss ein konstantes Drehmoment. Für einen hohen Wirkungsgrad sollte der trapezförmige Strangstrom mit der trapezförmigen Polradspannung exakt in Phase sein, weshalb aufgrund der Induktivität der Motorwicklung die Phasenspannung gegenüber dem Phasenstrom voreilen muss. Somit kann über die Phasenlage zwischen Polrad- und Strangspannung der Wirkungsgrad beeinflusst werden. Diese Einstellung wird bei vielen Reglerherstellern im Hobbybereich auch Timing genannt. Im Falle einer PMSM mit Sinuskommutierung ist die Implementierung einer feldorientierten Regelung vor allem bei hochwertigen Servoantrieben gängige Praxis. Für einen hohen Wirkungsgrad muss hier der Statorfluss kontinuierlich über eine elektrische Umdrehung hinweg in definierter Phasenlage zum Rotorfluss geführt werden. Hierzu ist die Kenntnis der aktuellen Rotorposition notwendig. Detailliertere Darstellungen finden sich in (Ahmad, 2010; Binder, 2017). Bestimmte Regelungskonzepte zielen darauf ab, die Phasenlage zwischen Rotor- und Statorfluss hinsichtlich der Effizienz laufend optimal anzupassen. Dies bedingt in der Regel die Messung der aktuell auftretenden Außenleiterströme. Deren Erfassung sowie die notwendige Signalverarbeitung sind jedoch sehr komplex. Hinzu kommt, dass die notwendige Analog-Digital-Wandlung Zeit benötigt, wodurch die minimale Abtastzeit der Regelung limitiert wird. Aus diesem Grund wäre es in vielen Fällen von Vorteil, wenn auf deren Messung verzichtet werden könnte. Weitere Effizienzsteigerungen sind durch spezielle PWM-Verfahren möglich.

Erfassen der Rotorposition und der Drehzahl: Im Falle eines BLDC-Motors kann die Rotorposition aus der Gegen-EMK bestimmt werden, indem deren Nulldurchgang in der aktuell nicht bestromten Phase detektiert wird. Dadurch ist eine Auflösung von sechs Schritten pro elektrischer Umdrehung möglich. Diese Methode

benötigt jedoch für eine richtige Funktionsweise eine bestimmte Mindestdrehzahl und ist aufgrund der notwendigen nicht bestromten Phase lediglich in Verbindung mit einer Blockkommutierung einsetzbar. Wird zusätzlich die Motordrehzahl benötigt, kann diese für eine Abtastperiode aus der Positionsänderung errechnet werden. Gerade für hochdynamische Antriebe, wie sie bei Multikoptern vorkommen, ergibt sich aber aufgrund der geringen Auflösung eine unzureichende Genauigkeit. Dies kann vor allem bei niedrigeren Drehzahlen zu Problemen führen, wenn beispielsweise eine Drehrichtungsumkehr gewünscht ist (Brescianini und D’Andrea, 2016). Die Implementierung eines Beobachters kann die Genauigkeit der Positionsermittlung und damit auch der Drehzahlberechnung deutlich verbessern. Die Betrachtung anisotroper magnetischer Effekte bietet eine weitere und zudem hochauflösendere Möglichkeit, die Rotorposition auf Basis der Motorinduktivität sensorlos zu bestimmen. Dabei wird ausgenutzt, dass sich die Induktivitäten in Abhängigkeit der Rotorposition ändern. Für diese Methodik muss das System mit zusätzlichen Strömen gepulst werden. Die Bestimmung der Rotorlage erfolgt mit Hilfe der gemessenen Signale und einem individuell abgestimmten Motormodell (Jebai u. a., 2012; Roetzer, Vollmer und Kennel, 2017). Daher ist diese Methode in der Umsetzung sehr aufwendig, eignet sich aber auch zum Einsatz bei einer PMSM. Im Gegensatz hierzu zeigt der Einsatz eines Positionssensors einige Vorteile. Der hauptsächliche Vorteil liegt darin, dass die Rotorposition mit minimaler Rechenleistung bei gleichzeitig hoher Genauigkeit bestimmt werden kann. Um die durch die Verwendung eines externen Sensors entstehenden Nachteile, wie zusätzliche Materialkosten oder eine erhöhte Störanfälligkeit gegenüber äußeren Einflüssen, zu minimieren, müssen diese bei der Entwicklung direkt berücksichtigt werden.

Anforderungen an den Motorregler: Die Vorabuntersuchung zum dynamischen Verhalten von Antriebseinheiten in Abschnitt 1.2 zeigt, dass diese kein lineares Verhalten aufweisen und sich über den ganzen Drehzahlbereich hinweg kein ausreichend dynamisches Verhalten ergibt. Aus diesem Grund soll ein neu zu entwickelnder, frei programmierbarer Motorregler sicherstellen, dass die Antriebseinheit ein deterministisches Verhalten in allen Situationen besitzt. Dies setzt voraus, dass der Motor über einen Drehzahlregler verfügt, der nicht nur die Drehzahl exakt regelt, sondern auch die Motordynamik zu jedem Zeitpunkt garantiert und Störungen ausgleicht. Die Verwendung einer Drehzahlregelung macht die Bestimmung der Drehzahl aus dem Positionssignal notwendig (Petrella u. a., 2007; Corradini u. a., 2012). Um den Regler unabhängig von der durch den Motor geforderten Kommutierungsart verwenden zu können, wird ein externer Positionssensor verwendet, welcher eine Umdrehung in bis zu 4.096 Schritte auflöst. Die Basis des Motorreglers bildet ein 72 MHz Mikrocontroller, welcher eine Drehzahlregelung mit einer Frequenz von 20 kHz ermöglicht. Im Detail wird eine feldorientierte Regelung implementiert, die ohne die Messung der Außenleiterströme eine hohe Effizienz der Antriebseinheit erzielt. Das vorgestellte Konzept eignet sich aufgrund der notwendigen Parameteridentifikation vor allem für den Bereich professioneller Anwendungen und wird explizit für eine PMSM entwickelt.

3.2 Theoretische Grundlagen der Synchronmaschine

3.2.1 Aufbau der permanenterregten Synchronmaschine

Die Herleitung der theoretischen Grundlagen wird für den in dieser Arbeit verwendeten Motor des Typs MT 4008-12 KV 600 durchgeführt. Nähere Angaben zu diesem Motor sind in Anhang A.1 angegeben. Es handelt sich um einen permanent-erregten Synchronmotor mit Oberflächenmagneten. Dieser Motortyp kommt sehr häufig bei Multikoptern zum Einsatz und wird nachfolgend ausschließlich behandelt. Prinzipiell kann die Vorgehensweise jedoch auch auf andere permanenterregte Synchronmotoren übertragen werden. Im vorliegenden Fall besteht der Motor nach Abbildung 3.1a pro Strang aus $n_C = 6$ Spulen. Die Wicklungen des Stators sind bei dieser Maschine als eine sogenannte Zweischichtwicklung ausgeführt, was bedeutet, dass in einer Nut die Wicklungen zweier unterschiedlicher Stränge liegen. Da die Spulen jeweils genau einen Zahn des Stators umfassen, werden sie auch als Zahnspulen bezeichnet. Der Stator einer dreiphasigen elektrischen Maschine besteht in der Regel pro Phase aus mehreren, in Serien- oder Parallelschaltung zu einem sogenannten Strang zusammengeschalteten Spulen. Die Polpaarzahl wird durch den Rotor definiert und ist entsprechend dessen Aufbau nach Abbildung 3.1b für den vorliegenden Motor $p = 12$. Der Motor wird in Rotation versetzt, indem über die drei Anschlussklemmen U,V,W den jeweiligen Strängen des Stators u,v,w ein Strom derart eingeprägt wird, dass im Luftspalt zwischen Stator und Rotor ein drehendes Statormagnetfeld erzeugt wird. Läuft dieses sogenannte Drehfeld mit der Winkelgeschwindigkeit ω_M um, so folgt der Rotor diesem synchron, also mit derselben Winkelgeschwindigkeit. Aus dieser Eigenschaft leitet sich der Name Synchronmaschine ab. Die mathematische Analyse von elektrischen Maschinen beruht im Wesentlichen auf der Beschreibung der auftretenden Rotor- und Statorluftspaltfelder

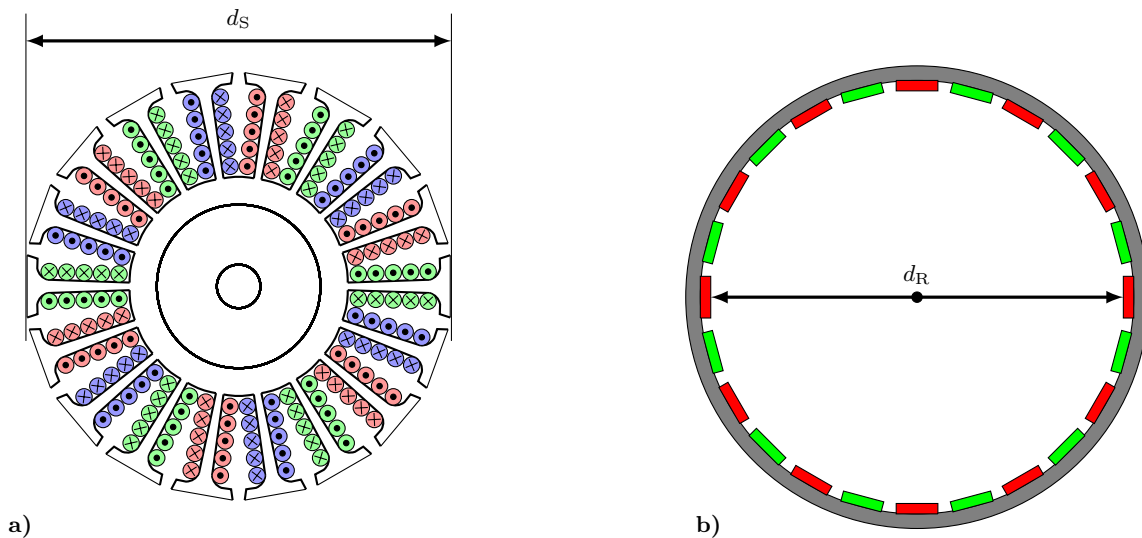


Abbildung 3.1: Schematischer Aufbau des verwendeten Motors MT 4008-12 KV 600 für a) den Stator und b) den Rotor

durch eine Fourieranalyse. Die analytische Betrachtung zeigt, dass an der Bildung eines konstanten mechanischen Drehmoments nur jeweils ein Fourierkoeffizient von Rotor- und Statorfeld beteiligt ist. Im Falle der vorliegenden Maschine sind dies die Hauptwelle des Rotormagnetfelds und die erste Oberwelle des Statorfelds. Die übrigen Anteile führen zu pulsierenden Drehmomenten und anderen störenden Effekten. Eine nähere Betrachtung findet sich in Anhang A.3. Durch geeignete Maßnahmen, wie zum Beispiel einer nicht hundertprozentigen Polbedeckung des Rotors mit Magneten oder einer Sehnung der Statorspulen, können die Amplituden der nicht am Nutzdrehmoment beteiligten Anteile reduziert oder gar eliminiert werden. Von entscheidender Bedeutung ist die durch das rechteckförmige Rotorfeld im Stator induzierte Form der Gegen-EMK. Je nach Ausführung des Stators kommt es zu einem trapez- oder sinusförmigen Spannungsverlauf. Soll die Maschine ein konstantes Drehmoment liefern, muss ihr auch eine konstante Leistung zugeführt werden. Im Falle einer trapezförmig induzierten Gegen-EMK bedeutet dies, dass die Ströme im Stator ebenfalls trapezförmig verlaufen müssen. Bei sinusförmigem Verlauf der Gegen-EMK wird entsprechend ein sinusförmiger Verlauf des Stroms gefordert. Nachfolgende Betrachtungen beziehen sich ausschließlich auf Maschinen mit einer sinusförmigen Gegen-EMK. Ist lediglich das Maschinenverhalten bezüglich des Nutzdrehmoments von Interesse, genügt die Beschreibung der Nutzwelle.

3.2.2 Stranggleichungen für eine dreiphasige Synchronmaschine

Bei der mathematischen Betrachtung eines einzelnen Strangs müssen verschiedene physikalische Effekte berücksichtigt werden. Wird ein Strang $x \in u, v, w$ mit der zeitlich veränderlichen Strangspannung $u_{s,x}(t)$ beaufschlagt, so fließt innerhalb des Strangs der Strangstrom $i_{s,x}(t)$. Aufgrund des Stromflusses kommt es zu unvermeidbaren ohmschen Verlusten im Leiter und damit zu einem Spannungsabfall, der durch den Strangwiderstand $R_{s,x}$ beschrieben wird. Des Weiteren bildet sich in Abhängigkeit des Strangstroms $i_{s,x}(t)$ das in Abhängigkeit des Umfangswinkels γ_s räumlich über den Luftspalt verteilte Statorluftspaltfeld $B_{s,x}(\gamma_s, t)$ aus. Dieses verursacht eine Flussänderung durch die Spulenfläche und induziert damit die Spannung $u_{L,x}$ in den Strang. Der sich unter den Spulen hinwegdrehende Rotor erzeugt, durch sein Rotormagnetfeld $B_{\delta R}(\gamma_s)$, welches räumlich über dem Luftspalt verteilt ist, einen zusätzlichen, sich zeitlich ändernden magnetischen Fluss durch jede Statorspule. Hieraus resultiert eine induzierte Spannung $u_{i,x}(t)$, die sogenannte Polradspannung. Basierend auf diesen Effekten ergibt sich das in Abbildung 3.2a dargestellte Ersatzschaltbild für einen Strang der elektrischen Maschine. Die beschreibenden Differentialgleichungen für das Ersatzschaltbild ergeben sich aus dem Faraday'schen Gesetz

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} d\vec{A} = -\frac{d\Psi}{dt}, \quad (3.1)$$

wobei die linke Seite das Integral über den geschlossenen Umlauf der Erregerspule und die rechte Seite die Änderung des magnetischen Flusses durch die eingeschlos-

sene Fläche beschreibt. Die Auswertung für einen Strang ergibt

$$-u_{S,x} + R_{S,x}i_{S,x} = -\frac{d\Psi_{S,x}}{dt} - \frac{d\Psi_{R,x}}{dt}. \quad (3.2)$$

Strangwiderstand: Der Strangwiderstand berechnet sich aus der Summe der Einzelwiderstände aller Spulen eines Strangs in Abhängigkeit ihrer Verschaltung. Dabei können neben reinen Serien- oder Parallelschaltungen auch Mischformen auftreten. Im Falle des betrachteten Motors handelt es sich um eine reine Reihenschaltung und es gilt

$$R_{S,x} = \sum_{i=1}^{n_C} R_{x,i}. \quad (3.3)$$

Aufgrund der symmetrischen Bauweise der Maschine werden die Strangwiderstände aller Stränge als identisch angenommen und es gilt fortan $R_{S,x} = R_S$.

Eigeninduktivität eines Strangs: Die magnetische Flussdichte $B_{S,x}$ verursacht innerhalb einer Spule des Strangs x den verketteten Fluss $\Psi_{S,x}$. Dieser ergibt sich für eine Zahnspule aus dem Integral der magnetischen Flussdichte über eine Spulenweite multipliziert mit der Anzahl der Windungen. Der gesamte verkettete Fluss aller Spulen eines Strangs folgt dann für eine Serienschaltung aus der Summe der Einzelflüsse. Eine ausführliche Darstellung findet sich in Anhang A.2.1. Im Ergebnis führt dies auf den Zusammenhang

$$\Psi_{S,x} = L_h i_{S,x}(t). \quad (3.4)$$

Die Eigeninduktivität L_h eines Strangs beschreibt den Zusammenhang zwischen dem Strom durch den betrachteten Strang und dem daraus resultierenden magnetischen Statorfluss. Da die Statorfelder eines Strangs räumlich über den Umfang des Luftspalts verteilt sind, wird jeder Strang x entsprechend Abbildung 3.2b zusätzlich durch den magnetischen Fluss der beiden weiteren Stränge erfasst. Zu der

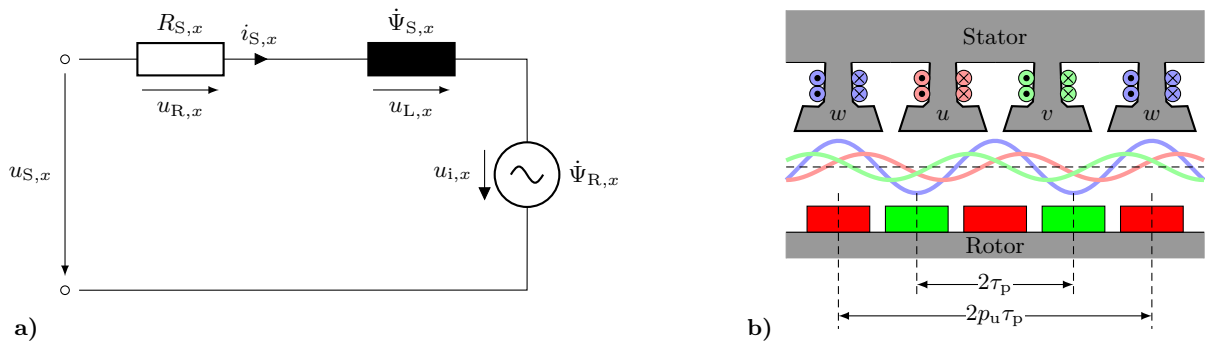


Abbildung 3.2: Ersatzschaltbild für einen Strang einer Synchronmaschine in a) und Prinzipskizze der Verhältnisse zwischen Stator und Rotor in b)

bereits betrachteten Hauptinduktivität kommen somit zwei Koppelinduktivitäten hinzu. Aufgrund des räumlichen Versatzes der Nachbarspulen sind die verketteten Flüsse der fremden Stränge phasenverschoben. Wird die Maschine ganzheitlich betrachtet, ändert sich Gleichung (3.4) für die Gesamtdurchflutung zu

$$\Psi_{S,x} = L_h \left(i_{S,u} \cos\left(\frac{2\pi}{3}s_x\right) + i_{S,v} \cos\left(\frac{2\pi}{3}(s_x - 1)\right) + i_{S,w} \cos\left(\frac{2\pi}{3}(s_x - 2)\right) \right). \quad (3.5)$$

Für die Betrachtung aller Stränge ergibt sich in kompakter Matrixschreibweise

$$\begin{bmatrix} \Psi_{S,u} \\ \Psi_{S,v} \\ \Psi_{S,w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_h & -0,5L_h & -0,5L_h \\ -0,5L_h & L_h & -0,5L_h \\ -0,5L_h & -0,5L_h & L_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{S,u} \\ i_{S,v} \\ i_{S,w} \end{bmatrix} = \mathbf{L}_h \mathbf{i}_S, \quad s_x = \begin{cases} 0, & \text{für } x = u \\ 1, & \text{für } x = v \\ 2, & \text{für } x = w \end{cases}. \quad (3.6)$$

Die induzierte Spannung

$$\mathbf{u}_L = \frac{d\mathbf{\Psi}_S}{dt} = \frac{d\mathbf{L}_h}{dt} \mathbf{i}_S + \mathbf{L}_h \frac{d\mathbf{i}_S(t)}{dt} \quad (3.7)$$

folgt aus Gleichung (3.6) durch einmaliges Ableiten nach der Zeit.

Induzierte Polradspannung: Gemäß den Darstellungen in Anhang A.2.2 ergibt sich der mit einer Spule des Strangs x verkettete Fluss $\Psi_{R,x}$ aus dem Integral der magnetischen Flussdichte $B_{\delta,R}$ über eine Spulenweite unter Berücksichtigung der Anzahl der Windungen. Entsprechend Abbildung 3.2b wird aufgrund der Symmetrie der Maschine jede weitere Spule des Strangs von derselben Durchflutung erfasst. Mit der Annahme, dass alle Spulen des Strangs in Reihe sind, ergibt sich die gesamte Durchflutung $\Psi_{i,S}$ mit der Amplitude $\hat{\Psi}_{i,S}$ aus der Summe über alle Einzelspulen. Im Ergebnis führt dies auf

$$\Psi_{i,S} = \hat{\Psi}_{i,S} \cos(p\omega_M t), \quad (3.8)$$

wobei ω_M die mechanische Winkelgeschwindigkeit des Rotors beschreibt. Da sich die Grundwelle der Fourieranalyse des Rotormagnetfelds nach jedem Polpaar wiederholt, dreht während einer mechanischen Umdrehung das Rotormagnetfeld p -mal unter einer Statorspule hindurch. Das Rotormagnetfeld wiederholt sich demnach nach einer elektrischen Umdrehung und es gilt $\omega_{el} = p\omega_M$. Die induzierte Spannung

$$-u_{i,x} = -\hat{U}_i \sin(\omega_{el} t), \quad \text{mit } \hat{U}_i = \Psi_{PM} \omega_{el} \quad (3.9)$$

folgt durch einmalige Differentiation aus Gleichung (3.8).

Die um 120° elektrisch versetzten Stränge werden nacheinander mit dem selben Polradfluss durchflutet. Die Gegeninduktivität der drei Stränge ergibt sich folglich aus

$$u_{i,x} = -\Psi_{PM}\omega_{el} \sin\left(\omega_{el}t - \frac{2\pi}{3}s_x\right). \quad (3.10)$$

Stranggleichung: Für jeden der drei Stränge resultiert der gesuchte Zusammenhang zwischen der Strangspannung als Eingangsgröße und dem Strangstrom als Ausgangsgröße aus der Anwendung des Faraday'schen Gesetzes und unter Berücksichtigung der Koppelinduktivitäten zu

$$u_{S,x} = u_{R,x} + \frac{d\Psi_x}{dt} = R_S i_{S,x} + \frac{d\Psi_{S,x}}{dt} + u_{i,x}. \quad (3.11)$$

Der Zusammenhang kann somit als eine Differentialgleichung erster Ordnung beschrieben werden.

3.2.3 Mathematische Beschreibung der Synchronmaschine

Betrachtung der Stern- und Dreieckschaltung: Die drei Stränge der PMSM sind entweder in Form einer Dreieckschaltung gemäß Abbildung 3.3a oder einer Sternschaltung gemäß Abbildung 3.3b elektrisch miteinander verbunden. Die Ergebnisse der Betrachtungen in Abschnitt 3.2.2 müssen dafür auf drei Stränge erweitert werden. Das beschreibende Differentialgleichungssystem ergibt sich aus der Betrachtung von drei Maschen. Aufgrund der induzierten Spannungen muss das

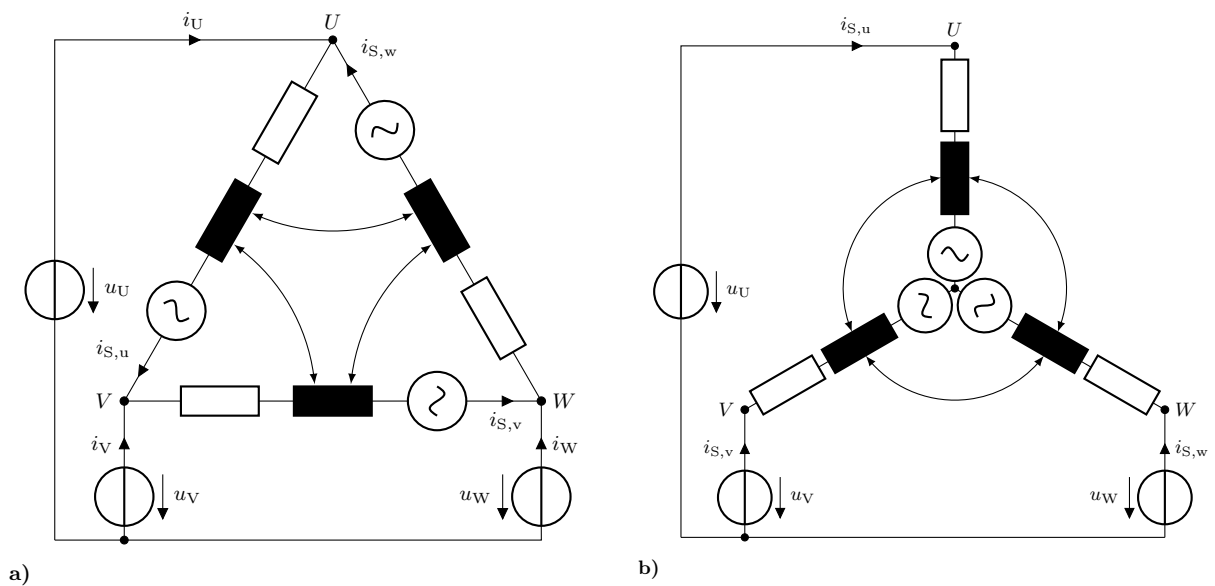


Abbildung 3.3: Ersatzschaltbild einer Synchronmaschine in a) einer Dreieckschaltung und b) einer Sternschaltung

Gesetz von Faraday angewandt werden. Sowohl für die Dreieck- als auch für die Sternschaltung ergibt sich das Differentialgleichungssystem

$$\begin{bmatrix} R_S & 0 & 0 \\ 0 & R_S & 0 \\ 0 & 0 & R_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{S,u} \\ i_{S,v} \\ i_{S,w} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Psi_{S,u} \\ \Psi_{S,v} \\ \Psi_{S,w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{i,u} \\ u_{i,v} \\ u_{i,w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{S,u} \\ u_{S,v} \\ u_{S,w} \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Unabhängig von der elektrischen Verschaltung handelt es sich bei den physikalischen Größen in (3.12) um die jeweiligen Stranggrößen des Systems. Die zusätzlichen Spannungsquellen liefern die Spannungen u_x an den Anschlussklemmen $x = U, V, W$. Zur besseren Unterscheidung zu den Strangspannungen werden diese nachfolgend als Phasenspannungen bezeichnet.

Erzeugung eines Drehfelds: Damit sich der Rotor in Bewegung setzt, muss im Stator ein Drehfeld erzeugt werden. Dies gelingt, wenn alle drei Stränge geeignet bestromt werden. Wird lediglich die Grundwelle betrachtet, ist die Verteilung des magnetischen Feldes über dem Luftspalt kosinusförmig. Für die von den einzelnen Spulen erzeugte magnetische Flussdichte gilt

$$B_{S,x} = \hat{B}_x \cos\left(\gamma_S - \frac{2\pi}{3}s_x\right). \quad (3.13)$$

Werden diese Einzelfelder zu $B_S(\gamma_S, t) = B_{S,u} + B_{S,v} + B_{S,w}$ addiert, ergibt die Auswertung

$$\begin{aligned} B_S(\gamma_S, t) &= \left(\hat{B}_{S,u} + \hat{B}_{S,v} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \hat{B}_{S,w} \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right) \cos(\gamma_S) \\ &\quad + \left(\hat{B}_{S,v} \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \hat{B}_{S,w} \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right) \sin(\gamma_S). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Da für alle $\hat{B}_{S,x} = \hat{B}_{S,x}(i_{S,x})$ gilt, folgt aus (3.14) für die Annahme, dass sämtliche Spulen mit dem zeitlich selben Strom $i_{S,u} = i_{S,v} = i_{S,w} = i_S(t)$ durchflossen werden, dass das Gesamtfeld $B_S(\gamma_S, t)$ null ist. Werden in den Spulen hingegen Strangströme der Form

$$i_{S,x} = \hat{I}(t) \cos\left(\omega_I t - \frac{2\pi}{3}s_x\right) \quad (3.15)$$

eingepreßt, folgt das resultierende Feld

$$B_S(\gamma_S, t) = \frac{3}{2} \hat{B}_S(t) \cos(\gamma_S - \omega_I t). \quad (3.16)$$

Auf diese Weise ergibt sich ein über den Umfang der Maschine kosinusförmig verteiltes Luftspaltfeld, dessen Maximum mit der Kreisfrequenz des Stroms ω_I über den Umfang wandert.

Symmetrische Komponenten und Raumzeiger: Die nähere Betrachtung von Gleichung (3.12) zeigt, dass die einzelnen Stränge untereinander induktiv gekoppelt sind. Durch eine sogenannte Modaltransformation gelingt es, die einzelnen Stränge mathematisch zu entkoppeln. Zwischen dem Vektor der Drehstromgrößen \mathbf{x} und dem Vektor der modalen Größen $\tilde{\mathbf{x}}$ besteht dann der Zusammenhang

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}_m \tilde{\mathbf{x}}(t) \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T}_m^{-1} \mathbf{x}(t). \quad (3.17)$$

In symmetrisch aufgebauten Dreiphasensystemen sind die Parametermatrizen zyklisch, sodass als Transformationsmatrix eine Matrix der Form

$$\mathbf{T}_m = \begin{bmatrix} \underline{k}_1 & \underline{k}_2 & \underline{k}_3 \\ \underline{k}_1 \underline{a}^2 & \underline{k}_2 \underline{a} & \underline{k}_3 \\ \underline{k}_1 \underline{a} & \underline{k}_2 \underline{a}^2 & \underline{k}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{k}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{k}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{k}_3 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

stets auf eine Diagonalmatrix und damit zu einer Entkopplung führt (Oswald, 2020). Die Größe $\underline{a} = e^{j2\pi/3}$ bezeichnet darin einen komplexen Drehoperator. Die frei wählbaren Faktoren \underline{k}_1 , \underline{k}_2 und \underline{k}_3 werden in der Diagonalmatrix \mathbf{K}_M zusammengefasst. Die Anwendung der modalen Transformation auf Größen im Zeitbereich ergibt zunächst formal den Zusammenhang

$$\begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{x}^* \\ x_0 \end{bmatrix} = \mathbf{K}_M^{-1} \begin{bmatrix} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_u \\ x_v \\ x_w \end{bmatrix}, \quad (3.19a)$$

$$\begin{bmatrix} x_u \\ x_v \\ x_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{K}_M \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{x}^* \\ x_0 \end{bmatrix}. \quad (3.19b)$$

Die Transformation (3.19a) ordnet folglich den reellen Größen x_u, x_v, x_w die zwei komplexen Größen \underline{x} und \underline{x}^* sowie eine reelle Zahl x_0 zu. Die komplexen Größen werden dabei auch als Raumzeiger bezeichnet. Damit die Addition der Zeiger in der inversen Beziehung (3.19b) direkt den Wert der reellen Größe ergibt, muss $\mathbf{K}_M = \text{diag}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ gewählt werden. Mit der Einführung des doppelten Nullsystems $x_h = 2x_0$ und unter Berücksichtigung der Tatsache, dass $\underline{a} = (\underline{a}^2)^*$ und $\underline{a}^2 = \underline{a}^*$ gilt, folgt aus der Auswertung von Gleichung (3.19b)

$$\begin{bmatrix} x_u \\ x_v \\ x_w \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ \underline{a}^2 \\ \underline{a} \end{bmatrix}}_{\text{Mitsystem}} \underline{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ \underline{a} \\ \underline{a}^2 \end{bmatrix}}_{\text{Gegensystem}} \underline{x}^* + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{Nullsystem}} x_h \right) = \begin{bmatrix} \Re\{\underline{x}\} + x_0 \\ \Re\{\underline{a}^2 \underline{x}\} + x_0 \\ \Re\{\underline{a} \underline{x}\} + x_0 \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Demnach können drei zeitlich beliebig veränderliche Größen in drei Teilsysteme, bestehend aus drei einzelnen Zeigern, aufgeteilt werden. Die Zeiger im Mit- und Gegensystem besitzen jeweils einen Phasenwinkel von 120° zueinander. Im Vergleich zum originalen Dreiphasensystem besitzt das Mitsystem dieselbe und das Gegensystem eine gegenläufige Phasenfolge. Das Nullsystem besteht aus drei identischen Zeigern, deren Phasenverschiebung 0° entspricht. Bemerkenswert ist, dass es auf diese Weise gelingt, aus einem unsymmetrischen System drei symmetrische Teilsysteme zu generieren.

Die Clarke-Transformation: Die Modaltransformation (3.19a) liefert im Ergebnis zwei komplexe Komponenten, welche konjugiert komplex zueinander und damit nicht unabhängig voneinander sind. Aus diesem Grund ist für die Beschreibung der beiden Raumzeiger die Kenntnis des Realteils x_α und des Imaginärteils x_β ausreichend. Diese Tatsache führt auf die alternative Darstellungsform

$$\begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{x}^* \\ x_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & j & 0 \\ 1 & -j & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \\ x_0 \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Durch Einsetzen der Gleichung (3.21) in (3.19b) folgt der Zusammenhang

$$\begin{bmatrix} x_u \\ x_v \\ x_w \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & j & 0 \\ 1 & -j & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \\ x_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ \underline{a} + \underline{a}^2 j(\underline{a}^2 - \underline{a}) & 2 & \\ \underline{a} + \underline{a}^2 j(\underline{a} - \underline{a}^2) & 2 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \\ x_0 \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Die Auswertung dieser Gleichung liefert die sogenannte Clarke-Transformation

$$\begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \\ x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_u \\ x_v \\ x_w \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x_u \\ x_v \\ x_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \\ x_0 \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

welche die jeweiligen Stranggrößen auf die Komponenten des Raumzeigers gemäß Abbildung 3.4a transformiert. Geometrisch lässt sich die Transformation deuten, wenn zunächst die Nullkomponente betrachtet wird. Die Darstellung in Abbildung 3.4a verdeutlicht, dass die Nullkomponente in jede ursprüngliche Größe mit dem gleichen Anteil eingeht. Werden die dreiphasigen Komponenten in ein dreidimensionales Koordinatensystem eingezeichnet, entspricht die Nullkomponente der Raumdiagonalen. Diese Raumdiagonale steht normal auf der Nullebene. In der Nullebene befindet sich auf der Abszissenachse der Realteil x_α und auf der Ordinatenachse der Imaginärteil x_β . Weitere Ausführungen finden sich in (Teodorescu, Liserre und Rodríguez, 2011).

Die Park-Transformation: Für die regelungstechnische Behandlung der Synchronmaschine ist ein rotorfestes Koordinatensystem von besonderem Vorteil. Es bewegt sich dann mit der Winkelgeschwindigkeit ω_P und überstreicht in einer gewissen Zeit den Winkel $\beta_P = \omega_P t$. Gemäß Abbildung 3.4b dreht die Koordinatentransformation

$$\begin{bmatrix} x_d \\ x_q \\ x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega_P t) & \sin(\omega_P t) & 0 \\ -\sin(\omega_P t) & \cos(\omega_P t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \\ x_0 \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

$$\begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \\ x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega_P t) & -\sin(\omega_P t) & 0 \\ \sin(\omega_P t) & \cos(\omega_P t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d \\ x_q \\ x_0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

das Koordinatensystem um die Achse der Nullkomponente, die dadurch von der Transformation unbeeinflusst bleibt. Wird die Clarke- mit der anschließenden Koordinatentransformation kombiniert, ergibt sich die sogenannte Park-Transformation

$$\begin{bmatrix} x_d \\ x_q \\ x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \cos(\omega_P t) & \frac{2}{3} \cos(\omega_P t - \frac{2\pi}{3}) & \frac{2}{3} \cos(\omega_P t - \frac{4\pi}{3}) \\ -\frac{2}{3} \sin(\omega_P t) & -\frac{2}{3} \sin(\omega_P t - \frac{2\pi}{3}) & -\frac{2}{3} \sin(\omega_P t - \frac{4\pi}{3}) \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_u \\ x_v \\ x_w \end{bmatrix} = \mathbf{T}_P \mathbf{x}_{uvw}, \quad (3.26)$$

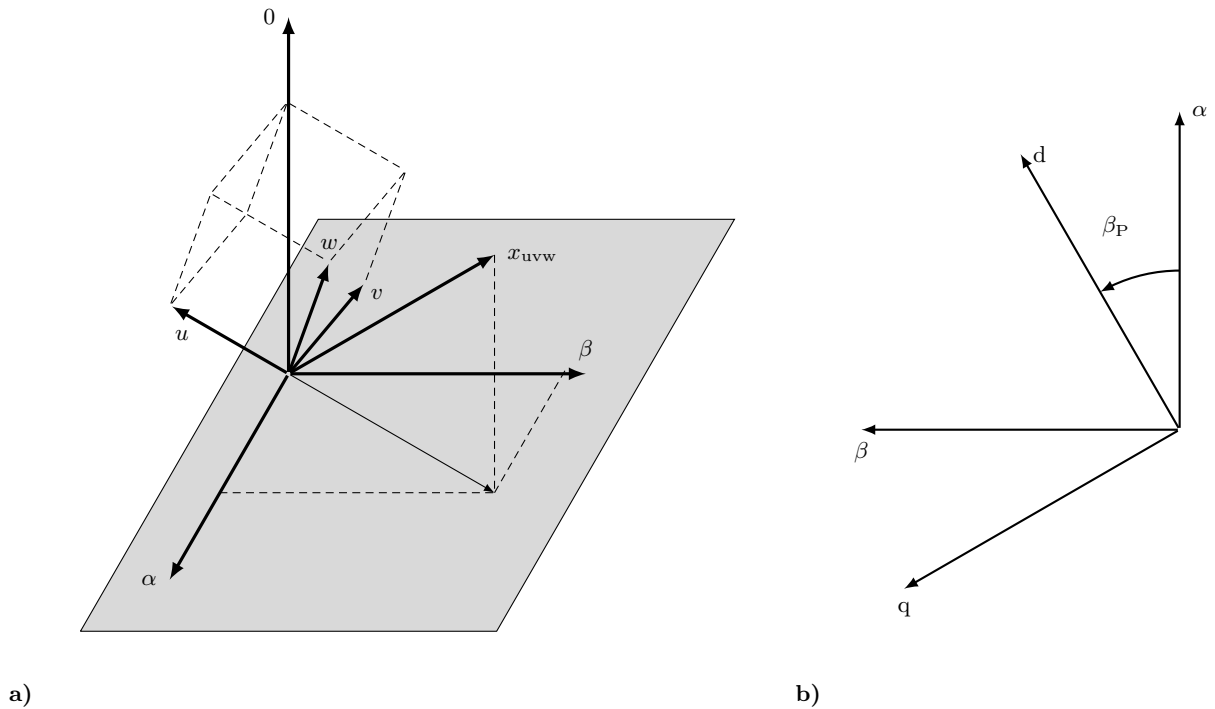


Abbildung 3.4: Transformation der Stranggrößen \mathbf{x}_{uvw} in a) das α/β - und b) das dq-Koordinatensystem

$$\begin{bmatrix} x_u \\ x_v \\ x_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega_P t) & -\sin(\omega_P t) & 1 \\ \cos(\omega_P t - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\omega_P t - \frac{2\pi}{3}) & 1 \\ \cos(\omega_P t - \frac{4\pi}{3}) & -\sin(\omega_P t - \frac{4\pi}{3}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d \\ x_q \\ x_0 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_P^{-1} \mathbf{x}_{dq0}. \quad (3.27)$$

Alternativ kann die Herleitung der Park-Transformation auch ohne den Umweg über die Clarke-Transformation erfolgen. Eine äquivalente Darstellungsweise von Gleichung (3.27) liefert die Darstellung

$$\begin{bmatrix} x_u \\ x_v \\ x_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{x_d^2 + x_q^2} \cos(\omega_P t - \arctan(\frac{x_q}{x_d})) + x_0 \\ \sqrt{x_d^2 + x_q^2} \cos(\omega_P t - \frac{2\pi}{3} - \arctan(\frac{x_q}{x_d})) + x_0 \\ \sqrt{x_d^2 + x_q^2} \cos(\omega_P t - \frac{4\pi}{3} - \arctan(\frac{x_q}{x_d})) + x_0 \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Daraus folgt, dass die Amplitude des Zeigers im dq-Koordinatensystem der Amplitude im uvw-Koordinatensystem entspricht. Demnach resultiert aus der getroffenen Wahl der Matrix \mathbf{K}_M eine amplitudeninvariante dq-Transformation.

Modellgleichungen im rotorfesten Koordinatensystem: Die Gleichung (3.12) lässt sich mit Hilfe der Parktransformation (3.26) in das rotorfeste Koordinatensystem überführen. Dazu werden die Drehstromgrößen \mathbf{x}_{uvw} durch die modalen Größen \mathbf{x}_{dq0} ersetzt. Daraus folgt

$$\mathbf{R}_S \mathbf{T}_P^{-1} \mathbf{i}_{S,dq0} + \frac{d}{dt} (\mathbf{T}_P^{-1} \mathbf{\Psi}_{S,dq0}) + \mathbf{T}_P^{-1} \mathbf{u}_{i,dq0} = \mathbf{T}_P^{-1} \mathbf{u}_{S,dq0}. \quad (3.29)$$

Anschließend wird die Gleichung (3.29) von links mit der Transformationsmatrix \mathbf{T}_P multipliziert. Unter Berücksichtigung von $\mathbf{T}_P \mathbf{T}_P^{-1} = \mathbf{E}$ folgt

$$\mathbf{T}_P \mathbf{R}_S \mathbf{T}_P^{-1} \mathbf{i}_{S,dq0} + \mathbf{T}_P \frac{d}{dt} (\mathbf{T}_P^{-1} \mathbf{\Psi}_{S,dq0}) + \mathbf{u}_{i,dq0} = \mathbf{u}_{S,dq0}. \quad (3.30)$$

Die in (3.30) enthaltene Ableitung entspricht der Ableitung eines Vektors in einem körperfesten Koordinatensystem, wobei die Transformationsmatrix \mathbf{T}_P ebenfalls von der Zeit abhängt. Für $\omega_P = \omega_{el}$ folgt sowohl für die Dreieckschaltung als auch für die Sternschaltung das Ergebnis

$$\begin{bmatrix} u_d \\ u_q \\ u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_S & 0 & 0 \\ 0 & R_S & 0 \\ 0 & 0 & R_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} 0 & -\omega_M & 0 \\ \omega_M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_d \\ \Psi_q \\ \Psi_0 \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Psi_d \\ \Psi_q \\ \Psi_0 \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

Die Flusskomponenten im dq-Koordinatensystem ergeben sich aus der Anwendung der Park-Transformation auf die Flusskomponenten (3.6) und (3.8). Wird das rotorfeste Koordinatensystem so gelegt, dass der Fluss der Permanentmagnete genau

in der d-Achse liegt folgt

$$\Psi_d = L_S i_d + \Psi_{PM}, \quad (3.32)$$

$$\Psi_q = L_S i_q. \quad (3.33)$$

Der verkettete Fluss der Permanentmagnete Ψ_{PM} hat folglich keinen Einfluss auf die q-Achse. Aus der Transformation resultiert zudem der Zusammenhang $L_S = \frac{3}{2}L_h$. Unter Vernachlässigung der Nullstromkomponente folgt

$$\begin{bmatrix} u_d \\ u_q \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Psi_d \\ \Psi_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_S & -p\omega_M L_S \\ p\omega_M L_S & R_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ p\omega_M \Psi_{PM} \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

Die in Gleichung (3.34) enthaltenen Parameter sind im einfachsten Fall alle konstant, im Allgemeinen jedoch abhängig von Größen wie den Strömen, der Temperatur oder der aktuellen Rotorposition.

Für die Beschreibung der Dynamik der Maschine ist das erzeugte Drehmoment der Maschine von besonderem Interesse. Für die Entstehung des elektromagnetischen Drehmoments sind ausschließlich die tangential am Rotor angreifenden Kräfte verantwortlich. Diese berechnen sich durch Integration der tangential gerichteten Komponente der Maxwellschen Spannung im Luftspalt über die geschlossene Hüllfläche des Läufers. Aus dieser Betrachtung resultieren mehrere Anteile, die ein Drehmoment erzeugen. Ein kontinuierliches Drehmoment liefern jedoch nur das sogenannte Reluktanzmoment sowie das aus der Normalkomponente des Rotormagnetfelds und der Tangentialkomponente des Statorfelds entstehende Nutzmoment. Für eine detailliertere Herleitung sei auf den Anhang A.3 oder auf (Müller und Ponick, 2009) verwiesen. Bei der betrachteten Maschine ist aufgrund der Anordnung der Magneten auf der Oberfläche des Rotors das Reluktanzmoment vernachlässigbar klein. Das Drehmoment berechnet sich im rotorfesten Koordinatensystem über

$$\tau_{Mi} = \frac{3}{2}p\Psi_{PM}i_q. \quad (3.35)$$

Folglich hängt das resultierende Nutzmoment τ_{Mi} lediglich von der Stromkomponente i_q ab. In Summe führt dies auf die dynamische Beschreibung der Synchronmaschine

$$J_M \dot{\omega}_M = \tau_{Mi} - \tau_W. \quad (3.36)$$

Hierin ist J_M das Trägheitsmoment sämtlicher rotierender Teile. Dazu zählen neben dem Rotor der PMSM auch der dazugehörige Propeller sowie sämtliche Teile für dessen Befestigung. Dem antreibenden Moment τ_{Mi} wirkt lediglich das Widerstandsmoment τ_W entgegen.

3.3 Entwicklung des Motorreglers

3.3.1 Ansteuerung des Motors

Funktionsweise der Pulsweitenmodulation: Für den Betrieb der Synchronmaschine muss im Stator ein Drehfeld erzeugt werden. Dies kann nach Abschnitt 3.2.3 dadurch erreicht werden, dass in den jeweils 120° räumlich versetzten Spulen ebenfalls um 120° phasenverschobene Ströme fließen. Dies erfordert die Einprägung sinusförmiger Strangspannungen, die in Frequenz und Amplitude veränderbar sind. Die Aufgabe des Motorreglers besteht vor allem darin, aus der konstanten Gleichspannung U_{DC} auf möglichst effiziente Weise eine dreiphasige frequenzvariable Wechselspannung zu erzeugen. Eine im zeitlichen Mittel veränderbare Spannung kann durch Anwendung einer Pulsweitenmodulation erzeugt werden. Bei diesem Verfahren kann durch mehrfaches Pulsen, also dem Hin- und Herschalten der Versorgungsspannung zwischen dem positiven und negativen Batteriepotential, im zeitlichen Mittel jede Spannung im Bereich des Batteriepotentials eingestellt werden. Der Betrag der Ausgangsspannung kann dabei über das Verhältnis der Ein- und Ausschaltzeiten variiert werden. Die Ausgangsspannung berechnet sich zu

$$u_A = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{T_{\text{Ein}}} U_{\text{Ein}} dt = \frac{T_{\text{Ein}}}{T} U_{\text{Ein}} = a_T U_{DC}, \quad 0 \leq a_T \leq 1, \quad (3.37)$$

wobei das Verhältnis der Einschaltdauer T_{Ein} und der vollen Periodendauer T als Tastgrad oder Aussteuergrad a_T bezeichnet wird. Für die praktische Umsetzung gibt es verschiedene Verfahren (Schröder und Marquardt, 2019), die in zwei Kategorien unterteilt werden können. Bei den Varianten der ersten Kategorie werden die Ein- und Ausschaltzeiten explizit berechnet. Dieses Vorgehen benötigt jedoch vergleichsweise viel Rechenkapazität und ist zudem ohne Gleitkommaeinheit sehr aufwendig in der Umsetzung. Für den hier verwendeten Mikrocontroller STM32F1 der Firma STMicroelectronics, ohne Gleitkommaeinheit, eignen sich deswegen Verfahren der zweiten Kategorie. Diese beruhen darauf, dass das Pulsmuster durch Vergleich des gewünschten Spannungsverlaufs beziehungsweise Aussteuergrads mit einem periodischen Signal, dem sogenannten Trägersignal, erzeugt werden kann. Als Trägersignal kommen dabei Sägezahn- oder Dreieckssignale zum Einsatz. Da der Mikrocontroller diesen Vergleich direkt in der Hardware durchführt, wird quasi keine Rechenleistung benötigt. Bei diesem Verfahren wird für $U_T \leq a_T$ die Spannung ein- und für $U_T > a_T$ ausgeschaltet, oder umgekehrt. Im Ergebnis stellt sich dann ein Pulsmuster ein, das gemäß Gleichung (3.37) das gewünschte Tastverhältnis besitzt und im zeitlichen Mittel die gewünschte Ausgangsspannung erzeugt. Für die in Abbildung 3.5a dargestellten konstanten Aussteuergrade ergeben sich direkt die erforderlichen Pulsmuster zur Spannung u_x nach Abbildung 3.5b. Nach der gleichen Vorgehensweise kann das Pulsmuster von zeitlich sich ändernden Signalverläufen entsprechend Abbildung 3.5c erzeugt werden. Durch die Signalverarbeitung in einem Mikrocontroller liegt das Sollwertsignal in diskreten Werten vor und wird zwi-

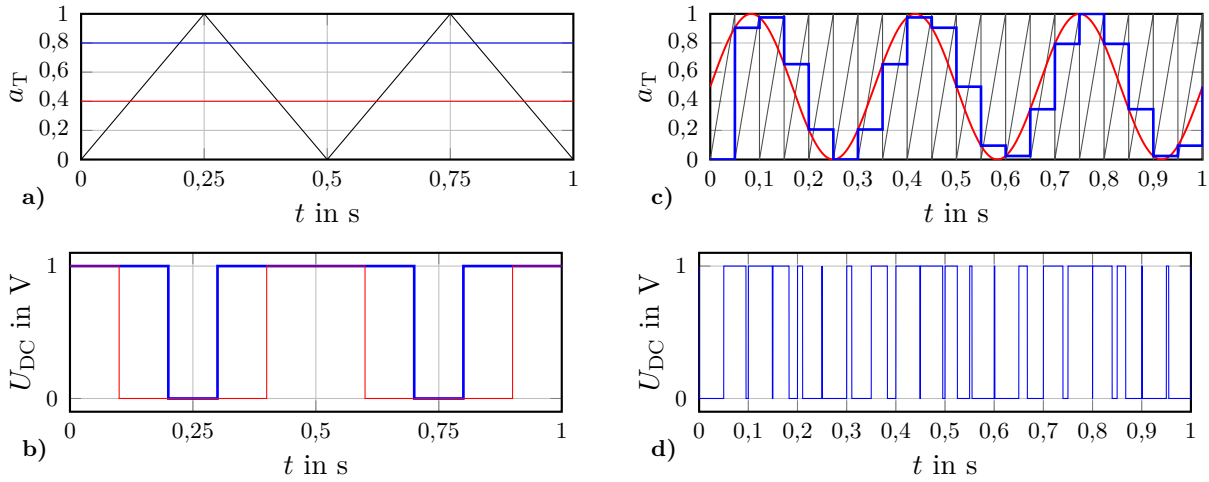


Abbildung 3.5: Pulsweitenmodulation durch Vergleich eines Trägersignals mit einem wertdiskreten Sollwertsignal für konstante Aussteuergrade in a) und den resultierenden Pulsmustern in b), sowie für einen sinusförmig veränderlichen Aussteuergrad in c) mit resultierendem Pulsmuster in d)

schen zwei Abtastzeitpunkten auf einem konstanten Wert gehalten. Je kürzer die Zeit zwischen zwei Abtastzeitpunkten ist, desto genauer entspricht das abgetastete dem kontinuierlichen Signal. Dem Shannon'schen Abtasttheorem muss dabei entsprochen werden. Da das Träger- mit dem Sollwertsignal nicht synchronisiert ist, unterscheiden sich die entstehenden Pulsmuster gemäß Abbildung 3.5d zwischen zwei Perioden. Für den Motor soll eine PWM-Frequenz $f_{\text{PWM}} = 20 \text{ kHz}$ erzielt werden. Für die Erzeugung einer PWM wird der Timer 1 des STM32F1 verwendet. Der verwendete Timer läuft mit der maximalen Frequenz von $f_{\text{TIM1}} = 72 \text{ MHz}$. Als Trägersignal wird ein Sägezahnsignal verwendet. Der Zählwert v_{ARR} , an dem der Timer zurückgesetzt wird, ergibt sich zu

$$v_{\text{ARR}} = \frac{f_{\text{TIM1}}}{f_{\text{PWM}}} - 1 = \frac{72 \text{ MHz}}{20 \text{ kHz}} - 1 = 3599. \quad (3.38)$$

Immer dann, wenn der Timer den Wert v_{ARR} erreicht, wird ein Interrupt ausgelöst, indem das Sollwertsignal ausgewertet und der Aussteuergrad angepasst wird. Die Vorgabe der Spannung kann damit in 3599 Schritte diskretisiert werden.

Optimierung des Pulsmusters: Die drei Anschlussklemmen des Motors U,V,W sind über die drei Halbbrücken des Motorreglers mit den Batterieklemmen verbunden. Die Batterie hat am Pluspol das Potential U_{DC} . Die maximale Amplitude der Potentiale an den Motorklemmen U,V,W ist bei geforderter symmetrischer Belastung identisch und beträgt mit einem Versatz von $U_{\text{DC}}/2$ ebenfalls $\hat{U}_{\text{UVW}} = U_{\text{DC}}/2$. Die gepulsten Verläufe der Phasenspannungen u_x werden für alle weiteren Überlegungen durch ihre gedachte Grundschwingungsspannung der Form $u_x = \hat{U}_{\text{UVW}} \cos(\omega_{\text{el}} t + \frac{2\pi}{3} s_x)$ ersetzt. Die Amplitude der Außenleiterspannung

\hat{U}_A ergibt sich gemäß Abbildung 3.3 aus den Differenzen der Phasenspannungen $u_U - u_V, u_V - u_W, u_W - u_U$ zu

$$\hat{U}_A = \sqrt{3} \hat{U}_{UVW} = \frac{\sqrt{3} U_{DC}}{2} \approx 0,866 U_{DC}. \quad (3.39)$$

Während bei einer Dreieckschaltung die Strangspannung gleich der Außenleiterspannung ist, ist diese im Fall der Sternschaltung um den Faktor $\sqrt{3}$ kleiner. Für den hier betrachteten Fall einer Dreieckschaltung ergibt sich der Zusammenhang zwischen dem dq-Koordinatensystem und den Strangspannungen aus Gleichung (3.28) zu

$$\hat{U}_S = \sqrt{u_d^2 + u_q^2} = \frac{\sqrt{3} U_{DC}}{2}. \quad (3.40)$$

Die Berechnung des Effektivwerts

$$U_{S,\text{eff}} = \frac{\hat{U}_S}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} U_{DC}}{2\sqrt{2}} \approx 0,612 U_{DC} \quad (3.41)$$

zeigt, dass nur etwa 61,2% des Batteriepentials ausgenutzt werden. Da die maximale Amplitude der Außenleiterspannung begrenzt ist, kann der elektrischen Maschine mit dem bisher betrachteten PWM-Verfahren weniger Energie zugeführt werden als es durch das Batteriepential möglich wäre.

Nachfolgende Überlegungen zeigen eine Möglichkeit, das Batteriepential besser auszunutzen. Die Summe der über die Halbbrücken aufgeprägten Sollwerte für die Phasenspannungen ist zu jedem Zeitpunkt null. Demzufolge müssen stets alle Amplituden der drei Sinusspannungen um denselben Faktor verändert werden. Am einfachsten lässt sich das Prinzip erkennen, wenn in Abbildung 3.6a der Zeitpunkt betrachtet wird, an dem eine Phasenspannung den Maximalwert $\frac{U_{DC}}{2}$ besitzt. Zu diesem Zeitpunkt besitzen die beiden anderen Außenleiterspannungen den Wert $-\frac{U_{DC}}{4}$. In diesem Punkt kann zunächst keine Erhöhung der Sollwertspannungen erfolgen, da das maximale Potential sofort überschritten werden würde. Daher werden die Amplituden der beiden zu diesem Zeitpunkt betragsmäßig größten Sollwertspannungen $u_{s,|\max|}$ und $u_{s,|\min|}$ zunächst mit einem Versatz δ symmetrisch zum halben Batteriepential ausgerichtet. Anschließend werden sämtliche Sollwertspannungen in ihrer Amplitude vergrößert. Aus diesen Überlegungen ergibt sich die Forderung

$$u_{s,|\max|} + \delta = -(u_{s,|\min|} + \delta), \quad \Rightarrow -2\delta = u_{s,|\max|} + u_{s,|\min|}. \quad (3.42)$$

Aus der Tatsache heraus, dass für die Summe der drei Sinusspannungen zu jedem Zeitpunkt $u_{s,|\max|} + u_{s,|\min|} + u_{s,|\text{mit}|} = 0$ gilt, ergibt sich für den gesuchten Versatz

$$\delta = 0,5 u_{s,|\min|}. \quad (3.43)$$

Dies hat zur Folge, dass wie in Abbildung 3.6 dargestellt zu jedem Zeitpunkt das betragsmäßig kleinste Sollwertsignal gefunden und davon die Hälfte als Versatz auf die Sollwertsignale addiert werden muss. Dieser Anpassungsvorgang der drei verschobenen sinusförmigen Sollwertsignale ist grafisch in Abbildung 3.6b dargestellt. Wie zu erkennen ist, besitzen die um den Versatz angepassten Sollwertsignale eine Spannungsreserve. Dementsprechend können, wie Abbildung 3.6c zeigt, die angepassten Signale um den Faktor $\frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1,1547$ erhöht werden. Die in Abbildung 3.6d dargestellten Außenleiterspannungen bleiben nach wie vor sinusförmig, wobei nun die maximale Amplitude von U_{DC} erreicht wird. Aufgrund dieser Vorgehensweise wird diese Methode auch als symmetrierte Sinusmodulation bezeichnet.

Ähnliche Überlegungen führen zu einer anderen Optimierung des Pulsmusters, die auch als Flat-Top-Modulation bezeichnet wird. Dabei sollen, zusätzlich zur Steigerung der Potentialausnutzung, die Schaltverluste minimiert werden, indem während bestimmter Zeitfenster das Umschalten einzelner MOSFETs vermieden wird. Dafür muss das Sollwertsignal in dieser Zeit einen minimalen oder maximalen Aussteuergrad haben. Sind Spannung und Strom in Phase, müsste stets die betragsmäßig größte Sollspannung auf $a_T = 0$ beziehungsweise $a_T = 1$ gesetzt werden. Da nach wie vor die Bedingung $u_{s,|max|} + u_{s,|mit|} + u_{s,|min|} = 0$ erfüllt sein muss, berechnet sich der notwendige Versatz zu

$$\delta = \text{sign}(u_{s,|max|}) \frac{U_{DC}}{2} - u_{s,|max|}. \quad (3.44)$$

In Abbildung 3.7a ist die Berechnung des Versatzes für ein Flat-Top gezeigt, welche 0° aus der Mitte herausgeschoben ist. Hieraus resultieren die angepassten Sollwertkurven in Abbildung 3.7b. Im Prinzip kann dieses Flat-Top an jeder gewünschten Position eingebracht werden. Die größte Steigerung des Wirkungsgrads kann dann

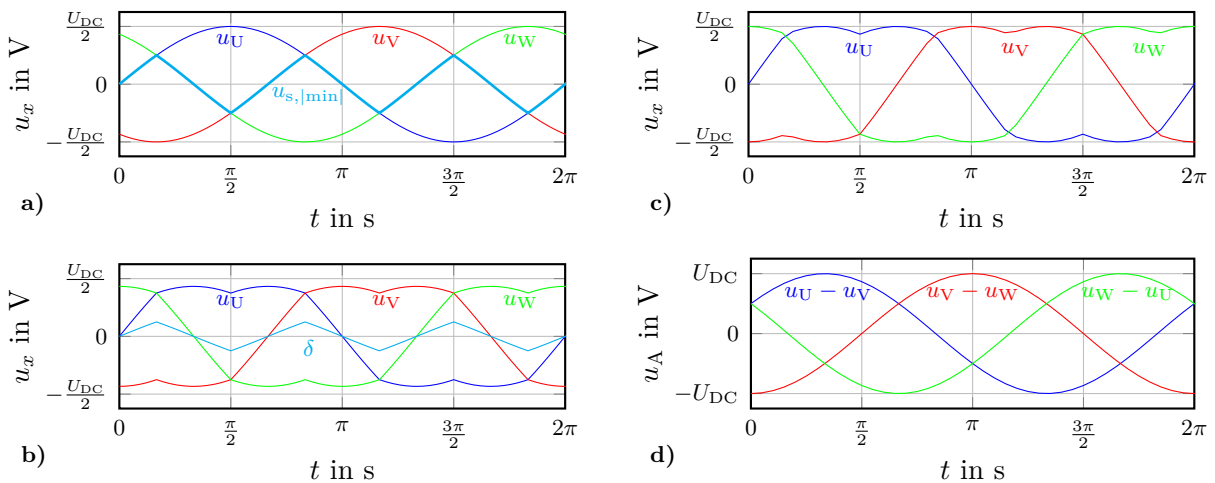


Abbildung 3.6: Symmetrierte Sinusmodulation mit der Ermittlung der kleinsten Sollwertspannung in a), den mit δ angepassten Sollwertspannungen in b), den erhöhten Sollwertspannungen in c) und den resultierenden Außenleiterspannungen in d)

erreicht werden, wenn das Umschalten bei hohem Stromfluss vermieden wird. Weil bei Motoren der Strom nacheilt, wird dieses Flat-Top häufig aus der Mitte des Spannungsmaximums herausgeschoben. In Abbildung 3.7c wird der Versatz für ein um 30° aus der Mitte heraus verschobenes Flat-Top dargestellt. Die zugehörigen, angepassten Sollwertkurven sind in Abbildung 3.7d dargestellt. Die Außenleiterspannung bleibt auch bei der Flat-Top-Modulation sinusförmig und nutzt bei Bedarf das volle Batteriepotential. Unabhängig von der Modulationsart ist der direkte Zusammenhang zwischen dem eingestellten Vergleichswert im Timer des Mikrocontrollers und der sich ergebenden Strangspannung von Interesse. Dabei entspricht der maximale Zählwert des Timers der maximalen Spannung an den Klemmen U,V,W und es gilt $v_{ARR} \equiv U_{DC}$. Die bei einer Dreieckschaltung als Strangspannung wirkende Außenleiterspannung ist demnach für das Standard PWM-Verfahren in Abhängigkeit des vorgegebenen Counterwerts

$$\hat{U}_S = \frac{U_{DC}\sqrt{3}}{3599}\hat{U}_{\mu c}, \quad \hat{U}_{\mu c} \in \{\mathbb{N}|0 \leq \hat{U}_{\mu c} \leq 1799\}. \quad (3.45)$$

Dasselbe gilt in dieser Arbeit auch für die optimierten PWM-Verfahren, da von der möglichen Erhöhung der Sollwertspannungen kein Gebrauch gemacht wurde. Weiter ist zu beachten, dass die durch die Halbbrücken gestellten und an den Anschlussklemmen U,V,W wirkenden Potentiale nicht phasengleich mit den Außenleiterspannungen sind, sondern eine Phasenverschiebung von $\varphi_x = \frac{\pi}{6}$ aufweisen. Daraus ergibt sich die Außenleiterspannung beziehungsweise die Strangspannung zu

$$u_{S,x} = \frac{U_{DC}\sqrt{3}}{3599}\hat{U}_{\mu c} \cos\left(\omega_{el}t + \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}s_x\right). \quad (3.46)$$

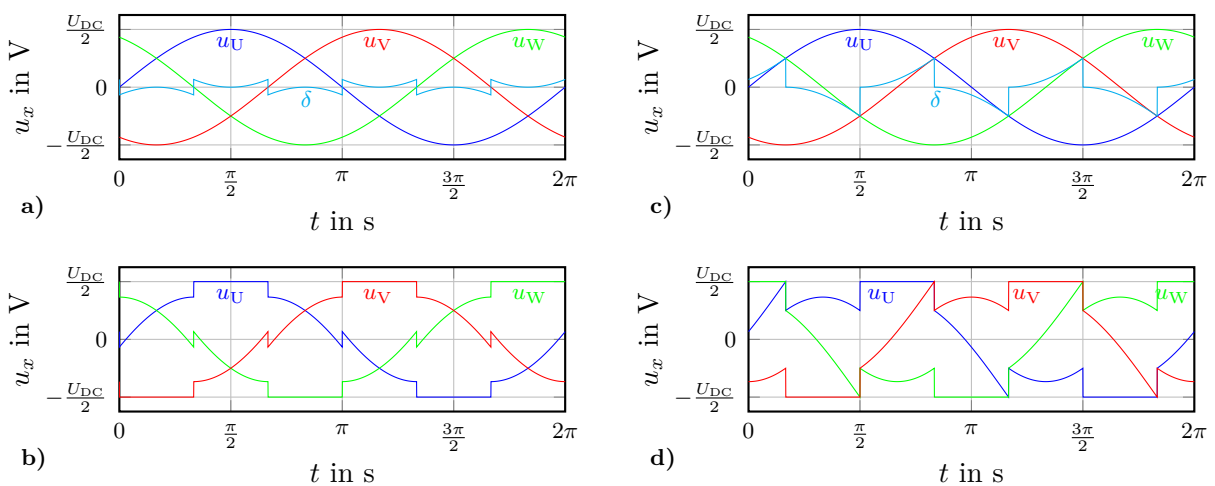


Abbildung 3.7: Sollwertspannungen mit zugehörigem δ in a) und den resultierenden Sollwertspannungen in b) für eine Flat-Top-Modulation ohne Nachlauf, sowie die entsprechenden Größen in c) und d) für eine Flat-Top-Modulation mit Nachlauf

Identifikation der Rotornulllage: Da Magnet, Encoder sowie die gesamte Motoreinheit manuell montiert werden, ist die Nullposition des Rotors zunächst nicht bekannt. Für die spätere Betrachtung der Maschine in dq-Koordinaten muss der Rotorfluss in Richtung der d-Achse ausgerichtet sein. Diese Position muss, sofern sie nicht im Speicher hinterlegt ist, nach jedem Einschalten des Motorreglers gefunden werden. Zu diesem Zweck wird in zwei aufeinanderfolgenden Schritten die Nullposition erfasst. Im ersten Schritt wird der Rotor grob in die d-Achse ausgerichtet, indem dem Stator ein Stromvektor in d-Richtung aufgeprägt wird. Der Rotor richtet sich dann in die entsprechende Position aus. Damit dies an der realen Maschine gelingt, muss der entsprechende Spannungsvektor an den Halbbrücken gestellt werden. Hierbei sind die Zusammenhänge nach Gleichung (3.46) zu beachten. Für die vorliegende Dreieckschaltung werden beispielsweise die Sollspannungen der jeweiligen Phasenspannungen mit

$$\hat{U}_{U,\mu c} = 100, \quad \hat{U}_{V,\mu c} = 0, \quad \hat{U}_{W,\mu c} = 50$$

gewählt. Für $\omega_{el} = 0$ führt dies auf ein Statorfeld in exakter d-Richtung. Nachdem der Rotor sich in diese Richtung orientiert hat, ist die Drehzahl $\omega_M = 0$. Der vom Mikrocontroller in dieser Position erfasste Zählwert entspricht dann dem Zählwert für den Motorwinkel $\varphi_M = 0$. Bedingt durch die Phasenverschiebung von $\varphi_x = \frac{\pi}{6}$ entspricht dieser im Motorregler einem Wert von $\varphi_{x,\mu c} = 28^\circ$.

Aufgrund des wirkenden Nutrastrmoments der PMSM und weiterer Einflussfaktoren kann die Nullposition weiterhin leicht verschoben sein. Deshalb wird nun in einem zweiten Schritt dem Motor ein Spannungsvektor mit einer konstanten positiven Spannung U_q aufgeprägt und die sich einstellende Drehzahl gemessen. Danach wird bei dem Spannungszeiger das Vorzeichen der Spannung U_q umgedreht. Erneut wird die Drehzahl gemessen. Im Idealfall sollten beide Drehzahlen einen identischen Betrag aufweisen. In vielen Fällen wird die Drehzahl zu Beginn jedoch nicht gleich sein. Das liegt gemäß Abbildung 3.8 daran, dass die zu Beginn identifizierte Nulllage d_0 gegenüber der wahren Nulllage d leicht verschoben sein kann. Dies wiederum führt dazu, dass die anfangs gestellten Spannungszeiger U_0^+ und U_0^- nicht symmetrisch um die wahre Nulllage verteilt sind. Auf Basis der gemessenen Drehzahldifferenz wird die Nulllage korrigiert. Dieser Vorgang wird für

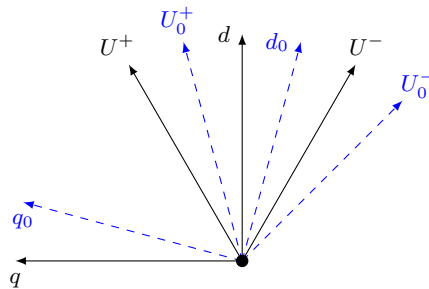


Abbildung 3.8: Erfassen der Nullposition

den positiven und negativen Spannungszeiger solange wiederholt, bis sich die Differenz innerhalb eines definierten Toleranzbereichs befindet. Ist dies der Fall, so ist die Identifikation der Nulllage abgeschlossen.

3.3.2 Hardwarelayout und Softwarearchitektur

Grundlegender Aufbau des Leiterplattenlayouts: Der Motorregler ist gemäß Abbildung 3.9 aufgebaut. Er wird über die beiden Anschlüsse U_{DC}^+ und U_{DC}^- mit einer Spannung von $0 \dots 36 \text{ V}$ versorgt. Die Spannung wird durch einen Elektrolytkondensator stabilisiert. Ein DC/DC-Schaltregler wandelt die Eingangsspannung U_{DC} auf die von den ICs benötigte Spannung von $3,3 \text{ V}$. Den Kern des Motorreglers bildet der Mikrocontroller STM32F1 mit einer Taktfrequenz von 72 MHz . Der Nachteil dieses Mikrocontrollers ist, dass er keine Gleitkommaeinheit besitzt. Als Taktquelle dient ein 8 MHz Quarz. Der Mikrocontroller ist über die PWM-Kanäle von Timer 1 mit dem Gate-Treiber DRV8305 der Firma Texas Instruments verbunden. Dieser steuert die drei Halbbrücken des Motorreglers. Jede Halbbrücke besteht aus zwei N-Kanal MOSFETs der Firma ON Semiconductor mit einem $R_{DS,ON}$ -Widerstand von maximal $3,7 \text{ m}\Omega$. Der DRV8305 besitzt unter anderem eine einstellbare Totzeit, einen Unterspannungsschutz sowie die Möglichkeit zur Strommessung

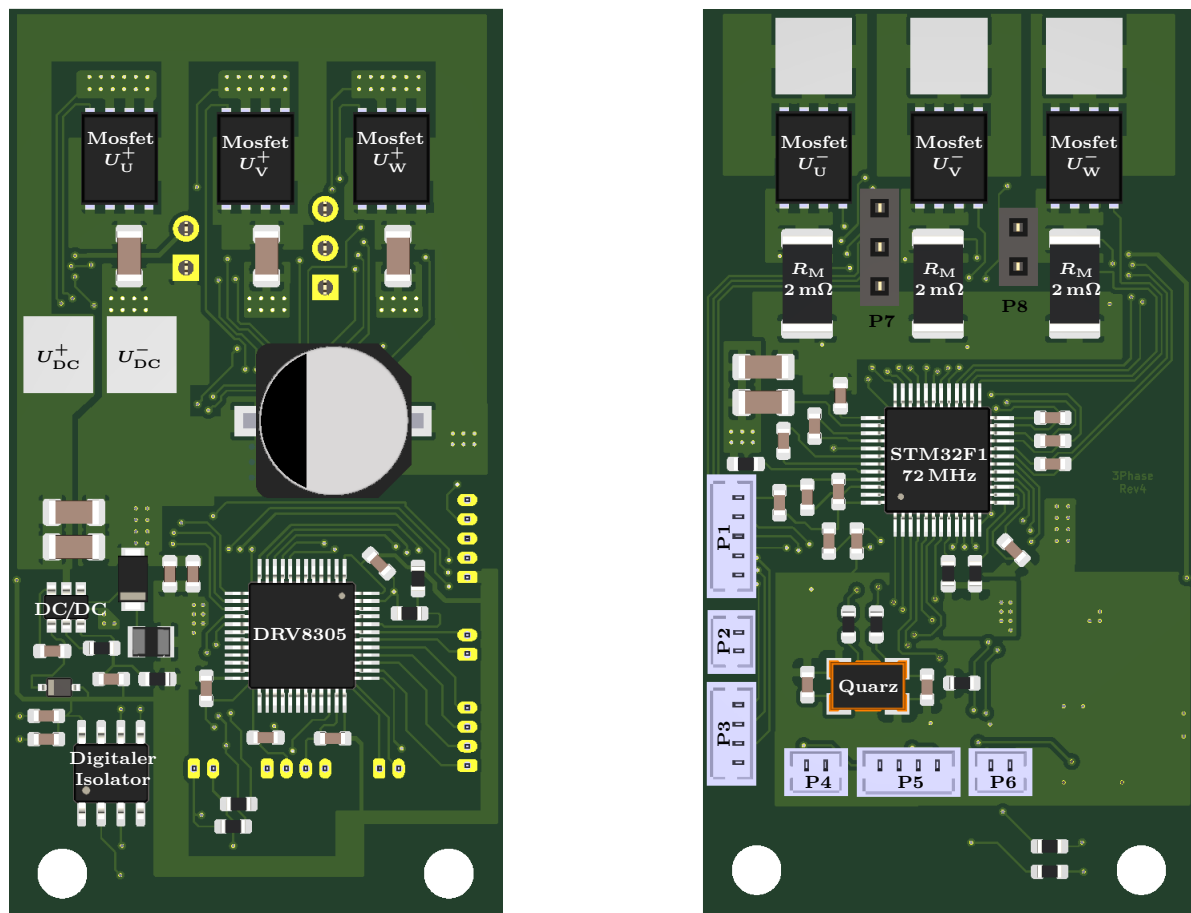


Abbildung 3.9: Aufbau des Motorreglers mit Bezeichnung der wichtigsten Bauteile

in den Außenleitern. Hierzu sind in den Außenleitern die Shunt-Widerstände R_M eingebaut. Entsprechende Verstärkungsfaktoren können beim Gate-Treiber parametrisiert werden. Weiter bietet der Gate-Treiber die Möglichkeit eines aktiven Freilaufs. Somit können die Verluste reduziert werden und ein aktives Bremsen des Motors ist möglich. Prinzipiell wäre auch die Rückspeisung von Energie in die Batterie möglich. Zur Einstellung der notwendigen Parameter des Gate-Treibers kommuniziert dieser über eine SPI-Schnittstelle mit dem Mikrocontroller. Die Stecker P1 bis P4 und P6 dienen als Zugang zu diversen Peripherien des Mikrocontrollers. Zur Kommunikation mit weiteren Peripherien stehen ein Timer, eine SPI-, eine I2C-, eine ADC- sowie eine USART- oder CAN-Schnittstelle zur Verfügung. Der Stecker P5 dient zur Programmierung des Motorreglers über die ST-Link-Schnittstelle von STM. Während der Entwicklungsphase können über diese Schnittstelle Parameter während der Laufzeit ausgelesen und verändert werden. Bei Bedarf einer galvanischen Trennung können die Signale des Steckers P4 über einen digitalen Isolator geführt werden. Der Stecker P1 ist als Schnittstelle zu dem verwendeten Drehzahlensor vorgesehen. Alternativ kann die entworfene Sensorplatine auch direkt über die Stecker P7 und P8 aufgesteckt werden. Die Drehzahlmessung erfolgt über den Sensor AS5047p der Firma AMS. Dieser Sensor löst eine Umdrehung in bis zu 4.096 Schritte auf und stellt die Daten über unterschiedliche Schnittstellen bereit. Hierzu zählt unter anderem die verwendete ABI-Spur. Dabei wird pro Encoderschritt eine Flanke generiert. Über den Versatz der Flanken in der A- und B-Spur kann die Drehrichtung ermittelt werden. Die Index-Spur liefert nach jeder vollen Umdrehung einen Nullimpuls. Die Daten der ABI-Spur können auf einfache Weise mit dem STM32F1 in der Hardware ausgewertet werden und benötigen daher kaum CPU-Ressourcen. Die Positionserfassung funktioniert laut Hersteller bis zu einer Drehzahl von 28.000 min^{-1} und basiert auf dem Hall-Effekt. Aus diesem Grund muss, wie in Abbildung 3.10a eingezeichnet, auf der Motorwelle ein Magnet im

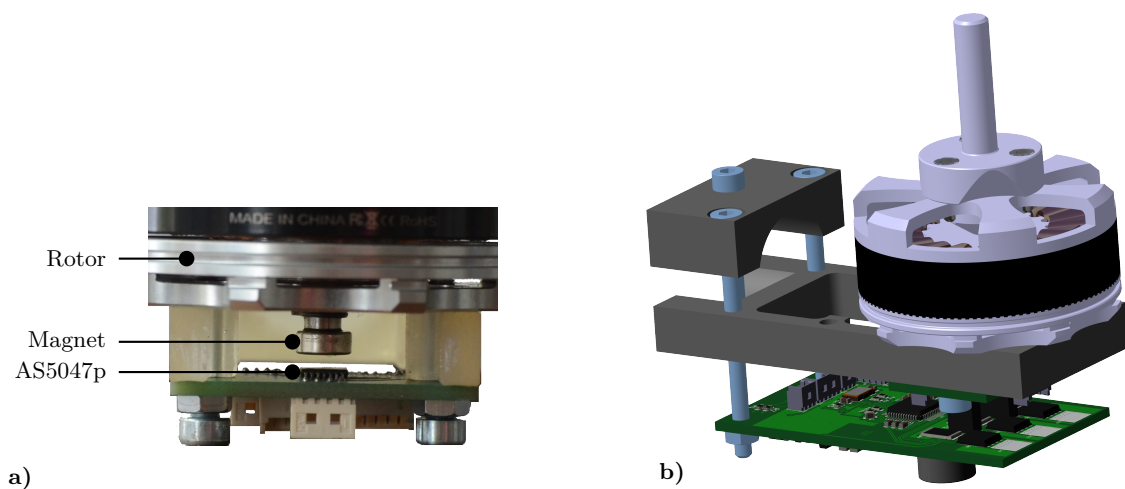


Abbildung 3.10: Aufbau der kompletten Antriebseinheit mit der Positionierung des Magnetfeldsensors in a) und der Darstellung der kompletten Antriebseinheit in b)

Abstand von circa 0,5 ... 3 mm zum Sensor angebracht werden. Zur besseren Kühlung ist der Motorregler zusammen mit allen weiteren Komponenten unterhalb des Motors verbaut. Aufgrund dieser Anordnung kann in der Regel auf einen Kühlkörper verzichtet werden. Bei der Motorhalterung handelt es sich wahlweise um glasfaser- oder kohlefaserverstärkte Epoxidharzbauteile. Eine Übersicht über die komplette Antriebseinheit stellt Abbildung 3.10b dar.

Programmstruktur des Motorreglers: Der im Wesentlichen interruptgesteuerte Programmablauf für den Motorregler ist in Abbildung 3.11 dargestellt. Nach dem Einschalten des Motorreglers wird zunächst in der Funktion *SysInit()* der Mikrocontroller initialisiert. Unter anderem wird hier die Frequenz des verbauten Schwingquarzes eingestellt. Anschließend erfolgt die Initialisierung sämtlich verwendeter Peripherie in der Funktion *PeriphInit()*. Hierunter fallen die Programmierung der Kommunikationsschnittstellen oder die Einstellungen des Encoders. Wichtig ist auch die Parametrierung des Gate-Treibers. Dieser Schritt beinhaltet vor allem die Einstellung der notwendigen Totzeiten zwischen dem oberen und unteren N-Kanal MOSFET einer jeden Halbbrücke, um mögliche Kurzschlüsse zu verhindern. Danach startet die Main-Routine des Mikrocontrollers. Im Takt der PWM wird mit einer Frequenz von $f_{TIM1} = 20 \text{ kHz}$ der Interrupt ausgelöst. Innerhalb dessen wird mit der Abfrage *NullPos()* geprüft, ob die Nullposition bereits ermittelt wurde. Ist dies nicht der Fall, so wird diese über den Funktionsaufruf *PosInit()* wie bereits beschrieben erfasst. Ist die Initialisierung der Nullposition abgeschlossen, erfolgt die zyklische Berechnung der eigentlichen Regelschleife. Zu Beginn wird die geforderte Soll-drehzahl mit der Funktion *GetW()* über die initialisierte Kommunikationsschnittstelle empfangen und an den Regler übergeben. Dieser errechnet innerhalb der Funktion *Regler()* die erforderlichen Spannungen auf Basis der um einen Zeitschritt verzögerten Drehzahlwerte. Anschließend wird die aktuelle Drehzahl für den nächsten Berechnungsschritt ermittelt. Nach der Bestimmung der aktuellen Position über *GetPos()* wird diese in der Funktion *PWM()* dazu

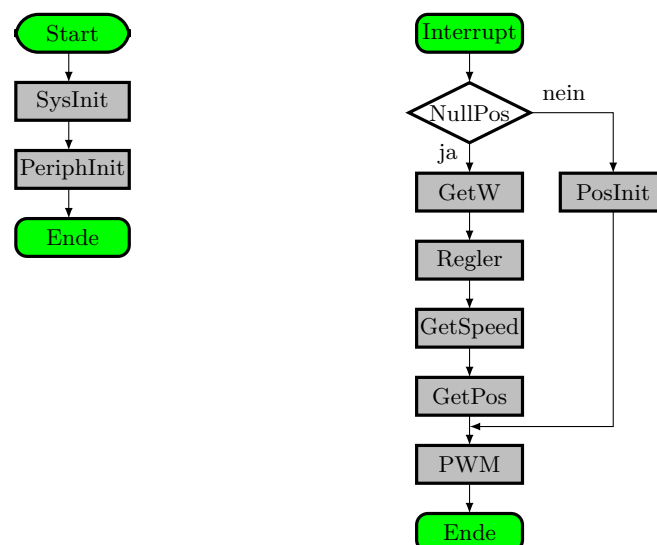


Abbildung 3.11: Programmablaufplan des Motorreglers

verwendet, mittels der inversen Park-Transformation die Strangspannungen zu ermitteln. Für die Implementierung der zeitdiskreten Regelung ist es von äußerster Wichtigkeit, dass die Abtastperiode immer gleich bleibt. Aus diesem Grund wurde mit Hilfe eines Oszilloskops die Echtzeitfähigkeit der Interrupt-Schleife verifiziert. Die Zykluszeit wurde mit $t_{\text{IRQ}} = 15,458 \dots 20,402 \mu\text{s}$ gemessen. Da der Aufruf des Timer Interrupts mit einer der Frequenz $f_{\text{TIM1}} = 20 \text{ kHz}$ erfolgt, ist die Auslastung des Mikrocontrollers kleiner 50 %.

3.4 Parameteridentifikation

Zur mathematischen Beschreibung der Synchronmaschine müssen sowohl elektrische als auch strömungsabhängige Parameter identifiziert werden. Die nachfolgend betrachteten Verfahren beruhen allesamt darauf, dass die Identifikation ohne spezielle Messeinrichtungen durchgeführt werden kann. Die für die jeweiligen Parameter angegebenen Werte sind entsprechend der Messunsicherheit auf die signifikanten Stellen gerundet.

Bestimmung der Auftriebskraft: Für die Messung der Auftriebskraft in Abhängigkeit zur Drehzahl wurde der Versuchsaufbau in Abbildung 3.12a verwendet. Hierbei wird ein zweiter Ausleger gegenüber der Antriebseinheit so angebracht, dass sich das System im Gleichgewicht befindet. Über eine Waage unterhalb des zweiten Auslegers kann dann die Auftriebskraft ermittelt werden. Das Ergebnis der Messung in Abbildung 3.12b zeigt, dass die Auftriebskraft ausreichend genau durch eine quadratische Funktion der Form

$$F_A = c_T \omega_M^2 \quad (3.47)$$

angenähert werden kann. Eine Kurvenapproximation ergibt $c_T \approx 4,518 \cdot 10^{-5} \frac{\text{Ns}^2}{\text{rad}^2}$.

Messung des Widerstandsmoments: Die Rotation des Motors in Kombination mit dem Propeller erzeugt ein Widerstandsmoment. Dieses wird als quadratische Funktion

$$\tau_W = c_W \omega_M^2 + c_R \omega_M + c_0 \quad (3.48)$$

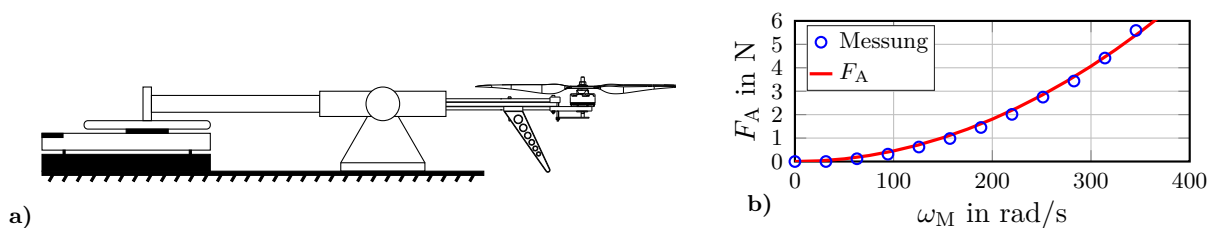


Abbildung 3.12: Messung der Auftriebskraft mit a) einer schematischen Darstellung des verwendeten Messaufbaus und b) der ermittelten Kennlinie

angenommen (Mahony und Kumar, 2012). Darin spiegelt der quadratische Anteil den Strömungswiderstand des Propellers, der lineare Anteil die Lagerreibung und der konstante Anteil die Haftreibung wider. Die Bestimmung der Parameter erfolgt in zwei Schritten. Zuerst wird die Messung der Lager- und Haftreibung mit Hilfe des Versuchsaufbaus in Abbildung 3.13a durchgeführt. Hierzu wird ein über eine Seiltrommel am Motor befestigtes Gewicht aus großer Höhe fallen gelassen. Nach kurzer Zeit erreicht der Motor seine maximale Geschwindigkeit. Durch Verwendung einer sehr dünnen Schnur kann deren Gewicht vernachlässigt werden und das Drehmoment bleibt während des gesamten Vorgangs nahezu konstant. Aus der Messung der maximalen Geschwindigkeit und dem wirkenden Drehmoment an der Seiltrommel kann das entgegenwirkende Moment τ_D bestimmt werden. Eine schrittweise Erhöhung der Gewichte führt auf die Messergebnisse in Abbildung 3.13b. Der reale Verlauf weicht aufgrund des Nutrastrmoments von dem durch eine Gerade approximierten idealen Verlauf ab und muss durch einen Regler ausgeglichen werden. Das ermittelte Reibmoment wird durch die Gerade $\tau_D = c_R \omega_M + c_0$ mit den Koeffizienten $c_R = 1,797 \cdot 10^{-5} \frac{\text{Nm}\cdot\text{s}}{\text{rad}}$ und $c_0 = 5,005 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}$ beschrieben.

In einem zweiten Schritt wird der Strömungswiderstand mittels dem Aufbau in Abbildung 3.13c ermittelt. Zu diesem Zweck wird eine Antriebseinheit auf einem drehbaren Unterbau montiert. An diesem ist eine Drehmomentstütze angebracht, welche über eine Umlenkrolle mit einem Gewicht auf einer Waage verbunden ist. Dabei sind sowohl die Länge der Drehmomentstütze als auch die Masse des Ge-

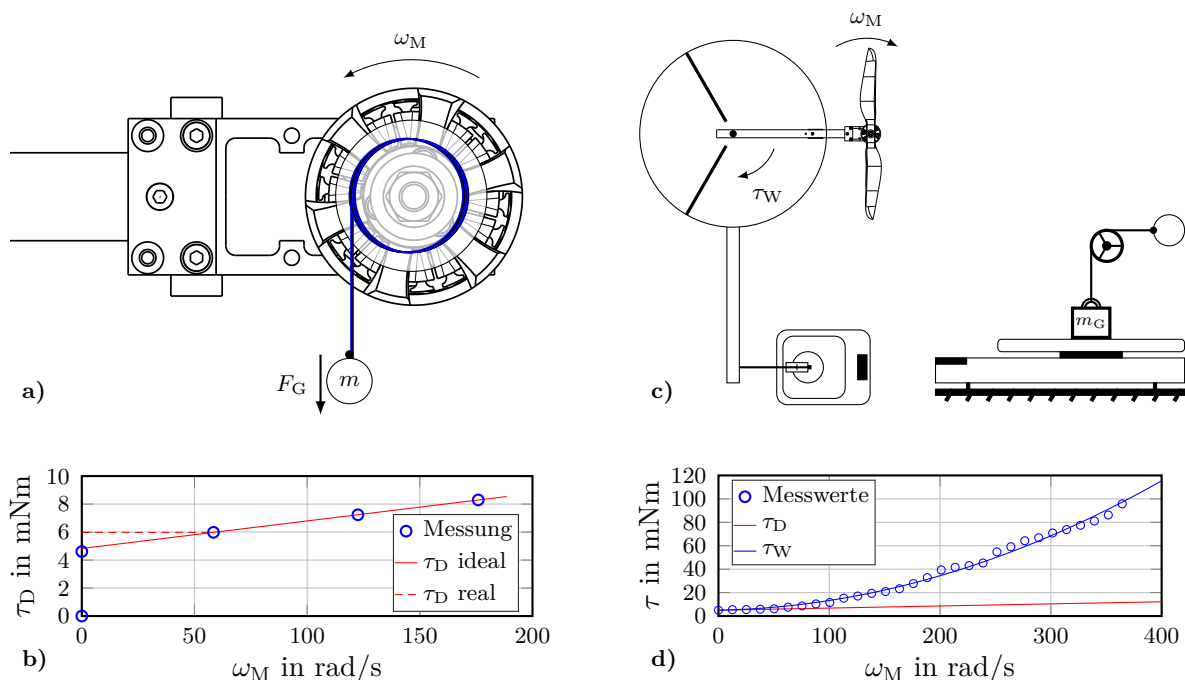


Abbildung 3.13: Ermittlung des Widerstandsmoments der Antriebseinheit mit dem Versuchsaufbau in a) und den Messergebnissen in b) für den linearen Reibanteil und mit dem Versuchsaufbau in c) und den Messergebnissen in d) mit zusätzlichem quadratischem Anteil

wichts Größen, welche sich vergleichsweise einfach mit großer Genauigkeit bestimmen lassen. Mit zunehmender Motordrehzahl wird die Waage zunehmend entlastet und das wirkende Drehmoment τ_W kann aus den geometrischen Beziehungen ermittelt werden. Die Messung zeigt, dass die Annahme eines quadratischen Zusammenhangs gültig ist. Die Annäherung des Messergebnisses in Abbildung 3.13d nach Gleichung (3.48) liefert das Ergebnis $c_W = 6,742 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Nm s}^2}{\text{rad}^2}$.

Bestimmung des Trägheitsmoments: Das Trägheitsmoment J_M erfasst alle drehenden Teile der Antriebseinheit. Darunter fallen der eigentliche Rotor sowie der daran befestigte Propeller. Das Trägheitsmoment wird mit einem im CAD detailgetreu nachkonstruierten Bauteil ermittelt. Für das Trägheitsmoment findet sich der Wert $J_M = 1,915 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2$.

Messung des Strangwiderstands: Die Bestimmung des Strangwiderstands erfolgt gemäß der Schaltung nach Abbildung 3.14a. Dabei wird der Motor über zwei Klemmen mit einer Spannungsquelle verbunden. Die dritte Klemme verbleibt offen. Auf diese Weise entsteht eine Parallelschaltung. Der resultierende Strom ist für mehrere Messpunkte in Abbildung 3.14b dargestellt. Aus der Steigung der Ausgleichsgeraden folgt $R_G = 93,69 \text{ m}\Omega$ und damit auch der benötigte Strangwiderstand

$$R_S = \frac{3U_{\text{DC}}}{2I_{\text{DC}}} = \frac{3}{2}R_G = 140,6 \text{ m}\Omega. \quad (3.49)$$

Magnetischer Fluss der Permanentmagnete: Für die Bestimmung des verketteten Permanentmagnetflusses wird der Motor mit einem externen Antrieb in Rotation versetzt. Dadurch kann an den offenen Klemmen die durch die Permanentmagneten induzierte Spannung, die sogenannte Polradspannung, gemessen werden. Aufgrund der vorliegenden Dreieckschaltung lässt sich nach dem Gesetz von Faraday ermitteln, dass die nicht näher betrachteten Oberwellen mit den Ordnungszahlen $k_R = 3, 9, \dots$ einen Kreisstrom in der Dreieckschaltung hervorrufen. Dieser

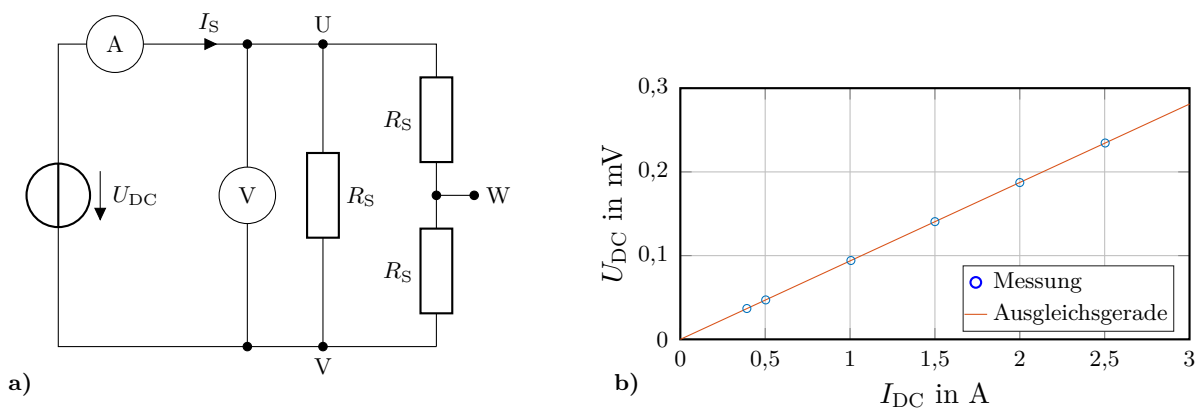


Abbildung 3.14: Messung des Strangwiderstands mit a) dem Ersatzschaltbild des Versuchsaufbaus und b) den resultierenden Messergebnissen

ist so orientiert, dass er der induzierten Spannung entgegenwirkt. Die induzierten Spannungen der k_R -ten Oberwellen werden damit unterdrückt. Die Messung der induzierten Spannung zwischen zwei Klemmen ist zusammen mit der berechneten induzierten Spannung in Abbildung 3.15a dargestellt. Bei der vorliegenden Maschine ergibt sich demzufolge ein annähernd sinusförmiger Verlauf entsprechend der ebenfalls eingezeichneten Grundwelle. So kann der gemessene Scheitelwert mit hinreichender Genauigkeit direkt als Amplitude der Grundwelle verwendet werden. Nach Gleichung (3.12) kann in Kenntnis der Drehzahl, der induzierten Spannung und der Polpaarzahl auf den verketteten Fluss der Permanentmagnete rückgeschlossen werden. Wird der Scheitelwert der Spannungsamplitude für verschiedene Drehzahlen übereinander aufgetragen, ergibt sich die Darstellung nach Abbildung 3.15b. Die für die Messreihe berechnete Ausgleichsgerade ergibt sich zu

$$\hat{U}_i = \Psi_{PM}\omega_{el} = 0,00155351\omega_{el} \text{ V}, \quad \Rightarrow \quad \Psi_{PM} = 0,00155351 \text{ Wb.} \quad (3.50)$$

Bestimmung der Eigeninduktivität: Die Bestimmung der Stranginduktivität legt zunächst die Messung der Sprungantwort auf einen Spannungssprung am Eingang nahe. Durch das Bestimmen der Zeitkonstante kann dann theoretisch auf die Stranginduktivität zurück geschlossen werden. Eine derartige Messung ist in Abbildung 3.16 dargestellt.

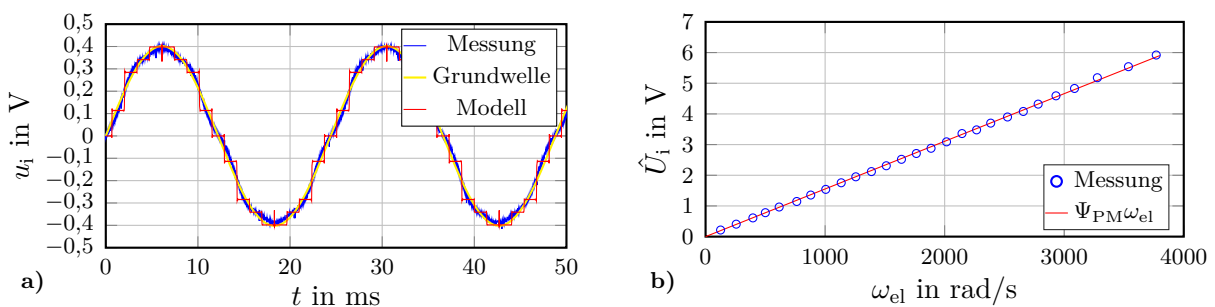


Abbildung 3.15: Bestimmung des verketteten Permanentmagnetflusses mit dem gemessenen Signalverlauf für eine Drehzahl in a) und der induzierten Spannungsamplitude für unterschiedliche Drehzahlen in b)

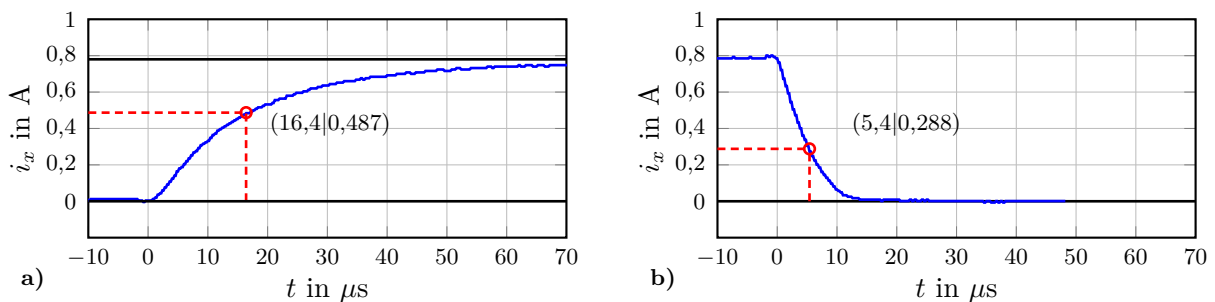


Abbildung 3.16: Messung der Sprungantwort zur Bestimmung der Stranginduktivität L_S für a) einen positiven und b) einen negativen Spannungssprung

Diese Vorgehensweise beinhaltet mehrere Probleme:

1. Die Spannungsquelle bricht wegen des hohen Stroms kurzzeitig ein, sodass die Spannung während der Messung nicht konstant auf der eingestellten Sprunghöhe gehalten werden kann.
2. Aufgrund der sehr kleinen Induktivitäten müssen alle weiteren im Messsystem vorliegenden Induktivitäten mitberücksichtigt werden. Diese sind aber nicht alle bekannt. Auch deren Größenordnung kann nur sehr schwer abgeschätzt werden.
3. Die Sprungantwort für den positiven Sprung in Abbildung 3.16a unterscheidet sich deutlich vom negativen Sprung in Abbildung 3.16b.

Die zuvor genannten Gründe machen eine Bestimmung der Induktivität auf diesem Weg unmöglich. Nachfolgend wird deshalb eine Alternative aufgezeigt, die auf Messungen der Maschine im stationären Zustand beruht. Die Aufnahme einer Messreihe besteht dann darin, dass zu unterschiedlichen Spannungsvektoren $\mathbf{u} = [u_d \ u_q]^T$ sowohl die sich einstellende Winkelgeschwindigkeit ω_M als auch der aufgenommene Gleichstrom I_{DC} gemessen wird. Sämtliche Messgrößen sind dabei leicht zugänglich und mit guter Genauigkeit bestimmbar. Das Kennlinienfeld in Abbildung 3.17a wurde unter Berücksichtigung der thermischen Gegebenheiten aufgenommen und beschränkt sich auf einen für den Motor zulässigen Betriebsbereich. In der Spitze nimmt der Motor die Wirkleistung $P_{el} \approx 280 \text{ W}$ auf. Während es theoretisch möglich ist, den Motor in jedem Betriebspunkt dieses Kennfelds zu betreiben, ist es für den Antrieb eines Multikopters nur von Relevanz, den Motor bei gegebener Drehzahl mit einer minimalen Stromaufnahme zu betreiben. Die Trajektorie des maximalen Wirkungsgrads η_{\max} verläuft entlang den Punkten, an denen die Isolinien gleicher Geschwindigkeit tangential an den Isolinien gleichen

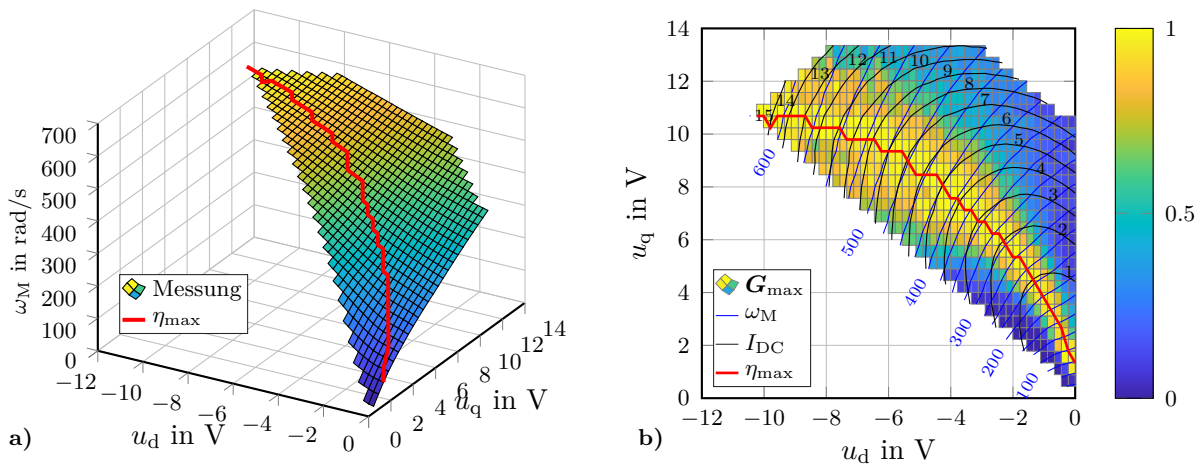


Abbildung 3.17: Drehzahlkennfeld in a) und Gleichstromkennfeld in b) für den Motor MT4008 zusammen mit der ermittelten Trajektorie des maximalen Wirkungsgrads für $U_{DC} = 18,5 \text{ V}$

Stroms liegen. Senkrecht auf den Isolinien stehen die Gradienten

$$\nabla(\omega_M) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \omega_M(u_d, u_q)}{\partial u_d} \\ \frac{\partial \omega_M(u_d, u_q)}{\partial u_q} \end{bmatrix}, \quad \nabla(I_{DC}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial I_{DC}(u_d, u_q)}{\partial u_d} \\ \frac{\partial I_{DC}(u_d, u_q)}{\partial u_q} \end{bmatrix}. \quad (3.51)$$

Mathematisch kann aus den Messdaten diese Kennlinie derart abgeleitet werden, dass das Skalarprodukt der Gradienten beider Kennfelder betrachtet wird. Dieses erreicht entlang der Kurve maximalen Wirkungsgrads sein Maximum. Da lediglich das Verhältnis untereinander entscheidend ist und nicht die absolute Größe, werden die Gradienten normiert. Es ergibt sich die Berechnungsvorschrift

$$\mathbf{G}_{\max} = \left(\frac{\nabla(\omega_M)}{|\nabla(\omega_M)|} \right)^T \circ \frac{\nabla(I_{DC})}{|\nabla(I_{DC})|}. \quad (3.52)$$

Die Matrix \mathbf{G}_{\max} ergibt sich demnach aus dem elementweisen Skalarprodukt der beiden normierten Gradienten. Deren Elemente stellen ein Maß für die Zugehörigkeit zur idealen Trajektorie dar. Der Wert null bedeutet, dass das Element nicht zur Trajektorie des maximalen Wirkungsgrads gehört und der Wert eins, dass es sich um einen Punkt der Trajektorie handelt. In Abbildung 3.17b sind die Ergebnisse einer derartigen Berechnung dargestellt. Für die Ermittlung der Stranginduktivität werden die Gleichungen für den eingeschwungenen Zustand, das heißt $\frac{d\Psi_{d,q}}{dt} = 0$, zunächst nach den gesuchten Strömen i_d , i_q sowie der Stranginduktivität L_S umgeformt. In Abhängigkeit der vorgegebenen Eingangsspannungen u_d und u_q sowie der gemessenen Winkelgeschwindigkeit ω_M ergeben sich die Gleichungen

$$i_q = 2 \frac{c_W \omega_M^2 + c_R \omega_M + c_0}{3p\Psi_{PM}}, \quad (3.53a)$$

$$i_d = \frac{u_d + \sqrt{(u_d^2 - 4R_S^2 i_q^2 + 4R_S u_q i_q - 4\Psi_{PM} R_S i_q p \omega_M)}}{2R_S}, \quad (3.53b)$$

$$L_S = - \frac{u_d - \sqrt{(u_d^2 - 4R_S^2 i_q^2 + 4R_S u_q i_q - 4p \omega_M \Psi_{PM} R_S i_q)}}{2p \omega_M i_q}. \quad (3.53c)$$

Die berechnete Stranginduktivität ist in Abbildung 3.18a dargestellt. Es ist eine deutliche Abhängigkeit der Induktivität von den Strömen zu erkennen, was auf eine Sättigung des Eisens zurückzuführen ist. Die Annahme einer konstanten Induktivität L_S kann nicht aufrecht erhalten werden, wenn die PMSM über einen weiten Betriebsbereich hinweg betrieben wird. Im weiteren Verlauf wird deswegen von $L_S = L_S(i_d, i_q)$ ausgegangen. Da das Drehmoment einzig von dem Strom i_q abhängt und in den Gleichungen nur die Kupferverluste $P_{V,Cu} = R_S \sqrt{i_d^2 + i_q^2}$ berücksichtigt sind, ergibt sich bei vorgegebenem Drehmoment der maximale Wirkungsgrad für $i_d = 0$. Aus der Grundgleichung der PMSM (3.34) folgen die not-

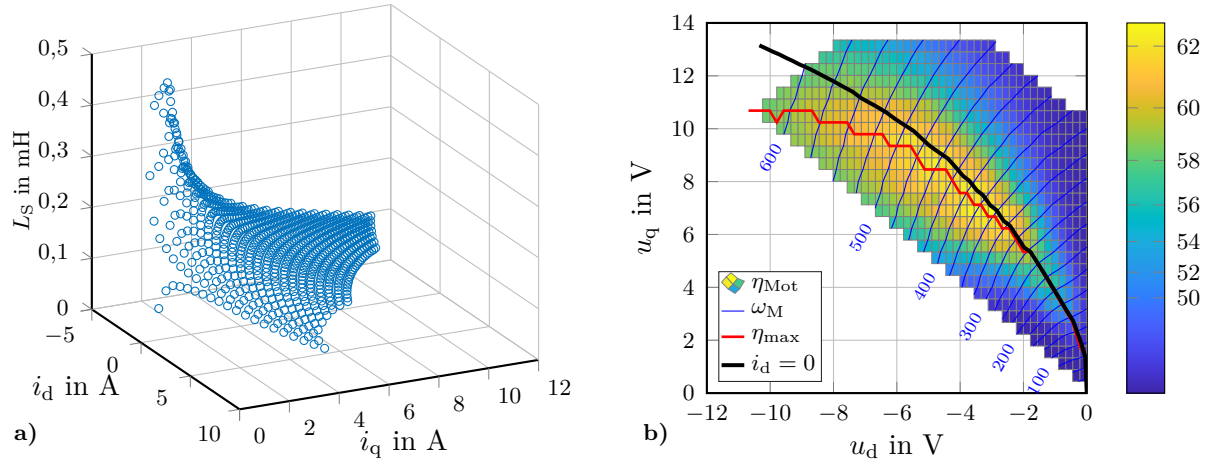


Abbildung 3.18: Ermittelte Eigeninduktivität der PMSM in a) und berechneter Verlauf der Kurve mit maximalen Drehmoment pro Ampere in b)

wendigen optimalen Spannungen

$$u_{d,0} = -p\omega_M L_S i_q, \quad (3.54a)$$

$$u_{q,0} = R_S i_q + p\omega_M \Psi_{PM}. \quad (3.54b)$$

Die Auswertung des für eine Drehzahl notwendigen q-Stroms nach Gleichung (3.53a) und die anschließende Berechnung der optimalen Spannungen (3.54) liefert die Trajektorie des maximalen Wirkungsgrads für $i_d = 0$ nach Abbildung 3.18b. Die berechnete Trajektorie läuft bis $\omega_M \approx 275 \text{ rad/s}$ im Bereich des maximalen Wirkungsgrads, darüber wird die Abweichung zunehmend größer. Bezogen auf den Motorwirkungsgrad

$$\eta_{\text{Mot}} = \frac{\tau_W \omega_M}{U_{\text{DC}} I_{\text{DC}}} \quad (3.55)$$

liegt die Abweichung dennoch lediglich im Bereich von zwei Prozent. Trotzdem soll durch die Betrachtung zusätzlicher Verluste nachfolgend überprüft werden, ob sich das Ergebnis noch verbessern lässt.

Betrachtung zusätzlicher Verluste: Die mit zunehmender Drehzahl größer werdende Abweichung deutet darauf hin, dass zusätzliche Verluste eine Rolle spielen. Aus diesem Grund werden nachfolgend neben den durch den Widerstand R_S berücksichtigten Kupferverlusten $P_{V,\text{Cu}}$ auch die sogenannten Ummagnetisierungsverluste oder Eisenverluste $P_{V,\text{Fe}}$ mitberücksichtigt. Für die Berücksichtigung der Eisenverluste existieren zahlreiche Lösungsansätze, welche zum Beispiel auf Ansätzen von Bertotti oder Steinmetz beruhen (Bertotti, 1988; Steinmetz, 1892). Die Eisenverluste sind in einer vereinfachten Betrachtung proportional zum Quadrat Flussdichteamplitude des Luftspaltfelds, weshalb $P_{V,\text{Fe}} \propto B_\delta^2$ gilt (Binder, 2017). Da darüber hinaus die Amplitude der Summe der induzierten Spannungen pro-

portional zur Flussdichteamplitude des Luftspaltfelds ist, können die Ummagnetisierungsverluste mit einem zu den induzierten Spannungen parallelen Widerstand R_C berücksichtigt werden. Damit ergeben sich die in Abbildung 3.19 dargestellten, erweiterten Ersatzschaltbilder. Die Stranggleichungen für eine Synchronmaschine erweitern sich zu

$$\frac{d\Psi_d}{dt} = u_d - R_S (i_d + i_{d0}) + p\omega_M L_S i_q, \quad (3.56a)$$

$$\frac{d\Psi_q}{dt} = u_q - R_S (i_q + i_{q0}) - p\omega_M L_S i_d - p\omega_M \Psi_{PM}. \quad (3.56b)$$

Unter Berücksichtigung der Eisenverluste lassen sich die Induktivität L_S und die Ströme i_d und i_q für den stationären Zustand $\frac{d\Psi_{d,q}}{dt} = 0$ ebenfalls direkt berechnen. Der Strom in den parallelen Zweigen berechnet sich über

$$i_{d0} = \frac{u_{h,d}}{R_C} = -\frac{p\omega_M \Psi_q}{R_C}, \quad i_{q0} = \frac{u_{h,q}}{R_C} = \frac{p\omega_M \Psi_d}{R_C}. \quad (3.57)$$

Während die Berechnung für den Strom i_q nach Gleichung (3.53a) unverändert bleibt, ergibt sich für die beiden übrigen Größen

$$i_d = \frac{R_C u_d + 2R_C \sqrt{\sigma_1}}{2R_C R_S}, \quad (3.58a)$$

$$L_S = -\frac{R_C u_d - 2R_C \sqrt{\sigma_1}}{2p i_q \omega_M (R_C - R_S)} \quad (3.58b)$$

mit

$$\sigma_1 = R_S i_q \cdot \left(u_q - R_S i_q - \frac{p\omega_M \Psi_{PM}}{R_C} (R_C + R_S) + \frac{u_d^2}{4R_S i_q} \right). \quad (3.58c)$$

Unter Berücksichtigung der Eisenverluste ergibt sich die in Abbildung 3.20a darge-

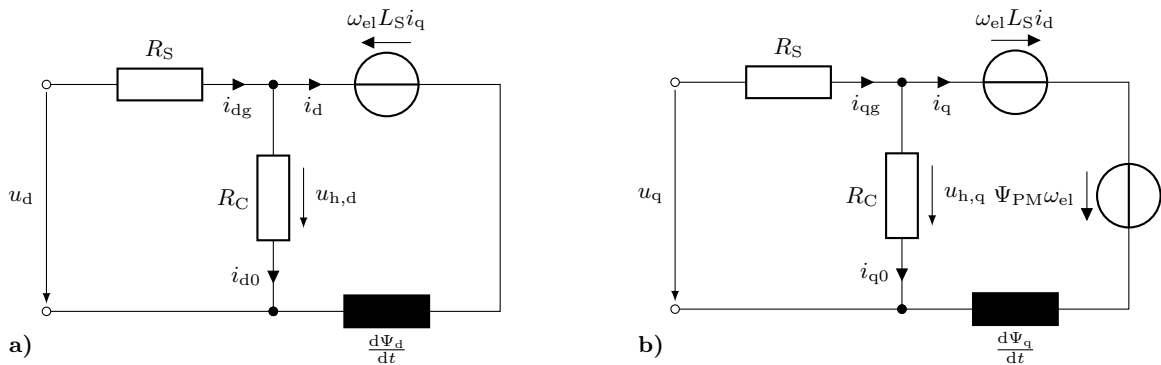


Abbildung 3.19: Ersatzschaltbild des Stators mit Berücksichtigung der Ummagnetisierungsverluste für die d-Achse in a) und die q-Achse in b)

stellte Stranginduktivität. Neben den Kupferverlusten hängen auch die Ummagnetisierungsverluste von den Strömen $i_{d,q}$ ab. Eventuell können somit die Gesamtverluste weiter reduziert werden, indem erhöhte Kupferverluste in Kauf genommen werden (Schröder, 2015). Im vorliegenden Fall des Multikopterantriebs hängt das Moment direkt von der Drehzahl des Rotors ω_M und damit vom Strom i_q ab. Ziel ist es daher im Folgenden, für eine gegebene Geschwindigkeit und somit für $\omega_M = \text{konst.}$ und $i_q = \text{konst.}$ die aufgenommene Wirkleistung

$$p(t) = \frac{3}{2} (u_d i_d + u_q i_q) \quad (3.59)$$

zu minimieren. Der Faktor $\frac{3}{2}$ in Gleichung (3.59) resultiert aus der amplitudeninvarianten Park-Transformation (O'Rourke u. a., 2019). Das gesuchte Minimum in Abhängigkeit des Stroms i_d erfüllt die Bedingungen

$$\frac{dp}{di_d} = 0 : \quad \frac{3 \left((R_S + R_C) (L_S^2 p^2 \omega_M^2 i_d + \Psi_{PM} L_S p^2 \omega_M^2) + R_S R_C^2 i_d \right)}{R_C^2} \quad (3.60a)$$

$$\frac{d^2 p}{d^2 i_d} > 0 : \quad \frac{3 \left((R_S + R_C) L_S^2 p^2 \omega_M^2 + R_S R_C^2 \right)}{R_C^2} > 0 \quad (3.60b)$$

Aus der ersten Ableitung der Wirkleistung (3.60a) folgt der gesuchte optimale Strom

$$i_{d,\text{opt}} = - \frac{(R_S + R_C) L_S \Psi_{PM} p^2 \omega_M^2}{(R_S + R_C) L_S^2 p^2 \omega_M^2 + R_S R_C^2}. \quad (3.61)$$

Gleichung (3.60b) beweist, dass es sich bei der gefundenen Extremstelle um ein Minimum handelt. Es ist ersichtlich, dass die Minimierung der Verluste mit zuneh-

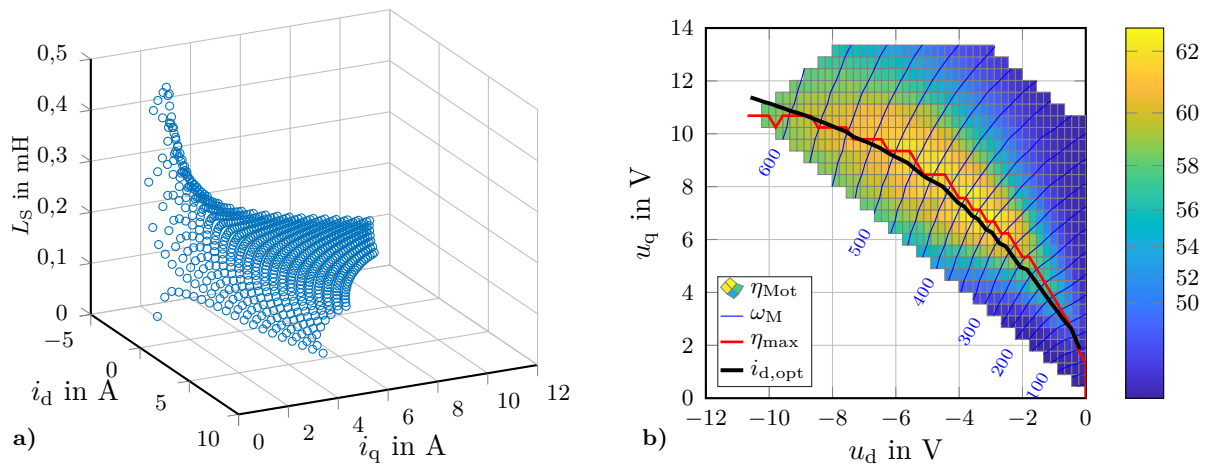


Abbildung 3.20: Ermittelte Eigeninduktivität der PMSM in a) und berechneter Verlauf der Kurve mit maximalem Wirkungsgrad unter Berücksichtigung zusätzlicher Verluste in b)

mender Drehzahl durch eine Erhöhung des negativen d-Stroms erreicht wird. Für die Berechnung der Trajektorie folgt

$$u_{d,\text{opt}} = R_S i_{d,\text{opt}} - L_S i_{q,\text{opt}} p \omega_M \left(1 + \frac{R_S}{R_C} \right), \quad (3.62a)$$

$$u_{q,\text{opt}} = R_S i_q + \frac{R_S p \omega_M (\Psi_{\text{PM}} + L_S i_{d,\text{opt}})}{R_C} + \Psi_{\text{PM}} p \omega_M + L_S i_{d,\text{opt}} p \omega_M. \quad (3.62b)$$

Der Parameter für den Ersatzwiderstand wird über eine Optimierung zu $R_C = 45 \, \Omega$ bestimmt. Für die Trajektorie des maximalen Wirkungsgrads ergibt sich das Ergebnis in Abbildung 3.20b. Diese zeigt über den vollen Betriebsbereich der betrachteten Maschine eine gute Übereinstimmung zur ermittelten Trajektorie maximalen Wirkungsgrads. Aufgrund des geringen Wirkungsgradvorteils muss jedoch abgewogen werden, ob dieser den zusätzlichen Aufwand für die Implementierung der deutlich komplizierteren Gleichungen (3.62) gegenüber (3.54) rechtfertigt. Abbildung 3.21 stellt die beiden berechneten Spannungsverläufe gegenüber. Während sich die berechneten Spannungen $u_{d,0}$ und $u_{d,\text{opt}}$ der beiden Modelle kaum unterscheiden, ist die Spannung $u_{q,\text{opt}}$ wie erwartet etwas geringer als die Spannung $u_{q,0}$.

Mit den gefundenen Parametern wird die PMSM hinreichend genau beschrieben. Trotzdem soll an dieser Stelle nochmals darauf verwiesen werden, dass zahlreiche Einflussgrößen nicht berücksichtigt werden können, was unter anderem an der Baugröße des vorliegenden Systems liegt. Um den Implementierungsaufwand in Grenzen zu halten wird nachfolgend außerdem die Ableitung der Flusskomponenten $\Psi_{d,q}$ mit

$$\dot{\Psi}_d = L_S (i_{d,q}) \frac{di_d}{dt}, \quad \dot{\Psi}_q = L_S (i_{d,q}) \frac{di_q}{dt} \quad (3.63)$$

angenähert. Einen weiterführenden Überblick über die Parameteridentifikation von permanenterregten Synchronmaschinen bietet (Kellner, 2012).

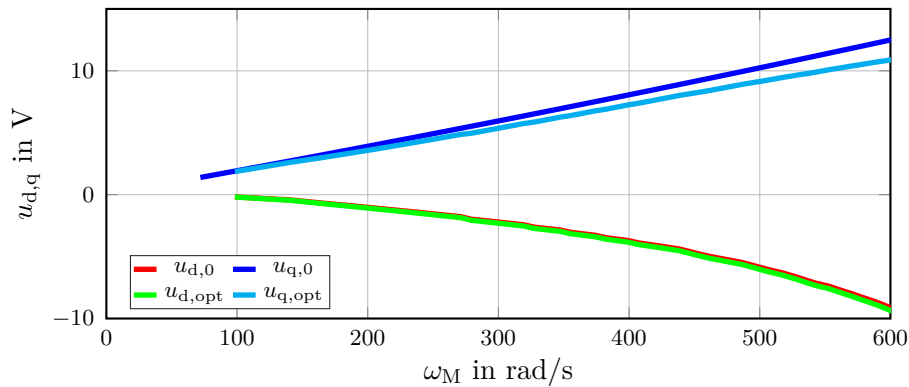


Abbildung 3.21: Verlauf der Sollspannungen im dq-Koordinatensystem für ein maximales Drehmoment pro Ampere und einen maximalen Wirkungsgrad

3.5 Drehzahlregelung der Antriebseinheit

Für die Regelung einer einzelnen Drohne wird ein Regelungskonzept in Kaskadenstruktur verwendet. Während der Lageregler einer Drohne die äußere Kaskade darstellt, bildet der Drehzahlregler jedes Motors eine innere Kaskade. Aufgrund des direkten Zusammenhangs zwischen Drehzahl und Drehmoment der PMSM ergibt sich das Regelungsziel, bei minimaler Leistung die maximal mögliche Drehzahl zu erzielen. Weitaus bedeutender ist jedoch die Forderung, dass die Antriebseinheit als System eine definierte Dynamik aufweist. Mit der Lösung dieser Aufgabe beschäftigen sich die nachfolgenden Abschnitte und (Herrmann u. a., 2019).

3.5.1 Dynamik des Multikopterantriebs

Die PMSM besitzt nach Gleichung (3.34) ein nichtlineares Systemverhalten. Da die Antriebe über einen weiten Drehzahlbereich eingesetzt werden sollen, gibt es keinen definierten Arbeitspunkt und eine Linearisierung ist nicht zielführend. Bei der Betrachtung eines Multikopterantriebs gilt die Besonderheit, dass zu jeder Motordrehzahl ein durch den Propeller verursachtes Widerstandsmoment gehört, wodurch dieses bei der Modellbildung direkt berücksichtigt werden kann. Aus der Herleitung der Bewegungsgleichungen in Kapitel 2 folgt weiter, dass auf das Gelenk des Motors viele weitere Kräfte infolge der Bewegung der Drohne einwirken. Diese werden nachfolgend als Störmomente $z_L = f(\mathbf{q}_1, \mathbf{s}_1, s_3, s_4)$ angenommen. Für den Drallsatz des Motors (3.36) ergibt sich mit $J_M = \Theta_{4z}$ die um die Störmomente erweiterte Beziehung

$$\frac{d\omega_M}{dt} = \frac{\tau_{Mi} - \tau_W}{\Theta_{4z}} + \frac{f(\mathbf{q}_1, \mathbf{s}_1, s_3, s_4)}{\Theta_{4z}}. \quad (3.64)$$

Ausgehend von der Gleichung (3.64) und den dazugehörigen Anteilen (3.35) und (3.48), sowie der Gleichung (3.56) mit dem Anteil (3.57), ergibt sich mit den Zustandsgrößen $x_1 = i_d$, $x_2 = i_q$ und $x_3 = \omega_M$ sowie den Ausgangsgrößen $y_1 = i_d$ und $y_2 = \omega_M$ das nichtlineare ungestörte Zustandsraummodell dritter Ordnung

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_S}{L_S} \left(\frac{pL_S x_2 x_3}{R_C} - x_1 \right) + p x_2 x_3 \\ -\frac{R_S}{L_S} \left(x_2 + \frac{p x_3 (L_S x_1 + \Psi_{PM})}{R_C} \right) - p x_1 x_3 - \frac{p \Psi_{PM}}{L_S} x_3 \\ \frac{3p \Psi_{PM}}{2\Theta_{4z}} x_2 - \frac{c_W}{\Theta_{4z}} x_3^2 - \frac{c_R}{\Theta_{4z}} x_3 - \frac{c_0}{\Theta_{4z}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_S} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_S} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_d \\ u_q \end{bmatrix}, \quad (3.65)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \quad (3.66)$$

Bei dem Zustandsraummodell für eine PMSM handelt es sich folglich um ein nichtlineares Mehrgrößensystem.

3.5.2 Flachheitsbasierte Vorsteuerung für eine hohe Effizienz

Unter den getroffenen Annahmen hängt das von der PMSM erzeugte Drehmoment (3.35) nur vom Strom i_q ab. Die Betrachtung weiterer Verluste hat ergeben, dass die Einprägung eines negativen d-Stroms zu einer Verringerung der Gesamtverluste und damit in Summe zu einem erhöhten Wirkungsgrad führen kann. Diese Erkenntnisse werden nachfolgend für die dynamische Ansteuerung der Maschine mit Hilfe einer flachheitsbasierten Regelung verwendet. Hierbei handelt es sich um einen Regelkreis mit zwei Freiheitsgraden, bestehend aus einer nichtlinearen Vorsteuerung und einem Regler (Herrmann u. a., 2019). Wenn ein System die Eigenschaft flach besitzt, kann zu einem definierten Ausgang \mathbf{y}_{lin} eine Vorsteuerung gefunden werden, die es ermöglicht, den Ausgang einer zuvor definierten Referenztrajektorie exakt folgen zu lassen. Voraussetzung ist allerdings, dass das Modell ideal ist und keine Störungen auf das System einwirken. Prinzipiell wird ein System als flach bezeichnet, wenn es einen realen oder fiktiven Ausgangsvektor \mathbf{y}_{lin} besitzt, der die folgenden Bedingungen erfüllt (Levine, 2009; Rothfuss, Rudolph und Zeitz, 1996):

- Die Elemente von \mathbf{y}_{lin} können in Abhängigkeit der Zustände \mathbf{x} , dem Eingang \mathbf{u} und einer endlichen Anzahl $\alpha \in \mathbb{N}$ von Ableitungen dieser Größen berechnet werden, weshalb $\mathbf{y}_{\text{lin}} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(\alpha)})$ gilt.
- Die Elemente von \mathbf{y}_{lin} sind differentiell unabhängig. Es existieren für eine endliche Zahl $\beta \in \mathbb{N}$ keine Differentialgleichungen $\mathbf{Q}(\mathbf{y}_{\text{lin}}, \dot{\mathbf{y}}_{\text{lin}}, \dots, \mathbf{y}_{\text{lin}}^{(\beta)}) = 0$.

Die letzte Bedingung ist äquivalent zu der Bedingung, dass zum einen $\dim(\mathbf{y}_{\text{lin}}) = \dim(\mathbf{u})$ gilt und das darüber hinaus die Funktionen

$$\mathbf{x} = \Phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}_{\text{lin}}, \dot{\mathbf{y}}_{\text{lin}}, \dots, \mathbf{y}_{\text{lin}}^{(\beta)}), \quad (3.67a)$$

$$\mathbf{u} = \Phi_{\mathbf{u}}(\mathbf{y}_{\text{lin}}, \dot{\mathbf{y}}_{\text{lin}}, \dots, \mathbf{y}_{\text{lin}}^{(\beta+1)}) \quad (3.67b)$$

gefunden werden können. Ist der gewählte Ausgangsvektor flach, wird der linearisierende Ausgang \mathbf{y}_{lin} und dessen Zeitableitungen in Gleichung (3.67b) mit dem Vektor der Referenztrajektorie \mathbf{y}_{ref} und dessen Ableitungen ersetzt, was letztendlich auf das Gesetz der nichtlinearen Vorsteuerung

$$\mathbf{u}_V = \psi(\mathbf{y}_{\text{ref}}, \dot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \dots, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(\beta+1)}) \quad (3.68)$$

führt.

Flachheitsbasierte Vorsteuerung zur Verlustminimierung: Als mögliche Wahl flacher Ausgänge werden entsprechend der Dimension des Eingangsvektors $\dim(\mathbf{u}) = 2$ der Strom $i_d = x_1$ und die Winkelgeschwindigkeit $\omega_M = x_3$ betrachtet. Im Folgenden soll nun überprüft werden, ob es sich bei den beiden Ausgängen um

flache Ausgänge handelt. Zunächst gilt

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{\text{lin},1} \\ y_{\text{lin},2} \end{bmatrix}. \quad (3.69)$$

Einmaliges Ableiten nach der Zeit führt zu

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_{\text{lin},1} \\ \dot{y}_{\text{lin},2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_S}{L_S} \left(\frac{pL_S x_2 y_{\text{lin},2}}{R_C} - y_{\text{lin},1} \right) + p x_2 y_{\text{lin},2} + \frac{u_d}{L_S} \\ \frac{3p\Psi_{\text{PM}}}{2\Theta_{4z}} x_2 - \frac{c_W}{\Theta_{4z}} y_{\text{lin},2}^2 - \frac{c_R}{\Theta_{4z}} y_{\text{lin},2} - \frac{c_0}{\Theta_{4z}} \end{bmatrix}. \quad (3.70)$$

Aus der Beziehung für $\dot{y}_{\text{lin},2}$ lässt sich direkt der gesuchte Zusammenhang für die zweite Zustandsgröße

$$x_2 = \frac{2 \left(\Theta_{4z} \dot{y}_{\text{lin},2} + c_W y_{\text{lin},2}^2 + c_R y_{\text{lin},2} + c_0 \right)}{3p\Psi_{\text{PM}}} \quad (3.71)$$

gewinnen. In Verbindung mit Gleichung (3.69) ist die notwendige Darstellung (3.67a) für alle drei Zustandsgrößen gefunden. Der Nachweis der Bedingung (3.67b) für die Eingangsgröße u_d ergibt sich aus der Betrachtung der Ableitung $\dot{y}_{\text{lin},1}$ in der Zustandsgleichung (3.70). Durch die Einführung von Referenztrajektorien $y_{\text{ref},i}$ für die Komponenten des flachen Ausgangsvektors folgt daraus mit $y_{\text{lin},1} = y_{\text{ref},1} = i_{d,\text{ref}}$ und $y_{\text{lin},2} = y_{\text{ref},2} = \omega_{M,\text{ref}}$ für den Verlauf der Steuerspannung in der d-Achse

$$u_{V,d} = -2L_S y_{\text{ref},2} (R_S + R_C) \cdot \frac{\Theta_{4z} \dot{y}_{\text{ref},2} + c_W y_{\text{ref},2}^2 + c_R y_{\text{ref},2} + c_0}{3\Psi_{\text{PM}} R_C} \quad (3.72)$$

$$+ L_S \dot{y}_{\text{ref},1} + R_S y_{\text{ref},1}.$$

Für die Steuerspannung $u_{V,q}$ folgt der gesuchte Zusammenhang aus der Zustandsgleichung (3.65) für \dot{x}_2 und Einsetzen der Ableitung der Beziehung (3.71) zu

$$u_{V,q} = 2L_S \frac{\Theta_{4z} \ddot{y}_{\text{ref},2} + 2c_W y_{\text{ref},2} \dot{y}_{\text{ref},2} + c_R \dot{y}_{\text{ref},2}}{3p\Psi_{\text{PM}}} + L_S p y_{\text{ref},1} y_{\text{ref},2} + \Psi_{\text{PM}} p y_{\text{ref},2} \quad (3.73)$$

$$+ R_S \frac{\Psi_{\text{PM}} + L_S y_{\text{ref},1}}{R_C} p y_{\text{ref},2} + 2R_S \frac{\Theta_{4z} \dot{y}_{\text{ref},2} + c_W y_{\text{ref},2}^2 + c_R y_{\text{ref},2} + c_0}{3p\Psi_{\text{PM}}}.$$

Mit den Gleichungen (3.72) und (3.73) ist die Bedingung (3.67b) erfüllt. Für die gewählten Ausgänge ist das betrachtete Modell der Synchronmaschine flach.

Flachheitsbasierte Vorsteuerung für ein maximales Drehmoment pro Ampere: Wird das Konzept $i_d = 0$ angewandt, gilt $i_{d,\text{ref}} = 0$. Dadurch vereinfachen sich die Gleichungen zur Berechnung der notwendigen Stellspannungen (3.72)

und (3.73) zu

$$u_{V,d} = -2L_S y_{\text{ref},2} \frac{\Theta_{4z} \dot{y}_{\text{ref},2} + c_W y_{\text{ref},2}^2 + c_R y_{\text{ref},2} + c_0}{3\Psi_{\text{PM}} R_C} (R_C + R_S), \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} u_{V,q} = & 2L_S \frac{\Theta_{4z} \ddot{y}_{\text{ref},2} + 2c_W y_{\text{ref},2} \dot{y}_{\text{ref},2} + c_R \dot{y}_{\text{ref},2}}{3p\Psi_{\text{PM}}} + \frac{R_S \Psi_{\text{PM}}}{R_C} p y_{\text{ref},2} \\ & + 2R_S \frac{\Theta_{4z} \dot{y}_{\text{ref},2} + c_W y_{\text{ref},2}^2 + c_R y_{\text{ref},2} + c_0}{3p\Psi_{\text{PM}}} + \Psi_{\text{PM}} p y_{\text{ref},2}. \end{aligned} \quad (3.75)$$

In sämtlichen betrachteten Gleichungen muss die vom Strom abhängige Induktivität berücksichtigt werden, wofür mehrere Möglichkeiten zur Verfügung stehen. Die Induktivität kann zum Beispiel als Tabelle zum Nachschlagen im Speicher des Mikrocontrollers hinterlegt werden. Der entsprechende Wert wird dann auf Basis der Stromwerte des vorangegangenen Abtastschritts aus den hinterlegten Daten interpoliert. Im vorliegenden Fall wird die Induktivität jedoch in Abhängigkeit des Stroms i_q für $i_d = 0$ berechnet, weshalb nachfolgend $L_S = L_S(i_q)$ gilt. Dadurch wird an dieser Stelle ein Fehler in Kauf genommen, der sich in Summe aber nicht merkbar auswirkt.

Bestimmung der Referenztrajektorien: Das vorliegende System besitzt nach Abschnitt 5.1 den vektoriellen relativen Grad $\delta = [1 \ 2]^T$, weshalb die Referenztrajektorie des Stroms $i_{d,\text{ref}}$ bis zur ersten Ableitung bekannt sein muss. Der Verlauf der Referenztrajektorie $y_{\text{ref},1} = i_{d,\text{ref}}$ folgt für den betrachteten Motor aus der Optimierung (3.61) zu

$$y_{\text{ref},1} = -\frac{(R_S + R_C) L_S \Psi_{\text{PM}} p^2 y_{\text{ref},2}^2}{(R_S + R_C) L_S^2 p^2 y_{\text{ref},2}^2 + R_S R_C^2}. \quad (3.76)$$

Die Ableitung lautet dementsprechend

$$\dot{y}_{\text{ref},1} = \frac{\Psi_{\text{PM}} p^2 (R_S + R_C) \left(L_S^2 y_{\text{ref},2}^4 p^2 (R_S + R_C) \dot{L}_S - R_S R_C^2 (2L_S y_{\text{ref},2} \dot{y}_{\text{ref},2} + \dot{L}_S y_{\text{ref},2}^2) \right)}{\left(L_S^2 y_{\text{ref},2}^2 p^2 (R_S + R_C) + R_S R_C^2 \right)^2}. \quad (3.77)$$

Die Referenztrajektorie der Drehzahl der PMSM wird über ein PT2-Filter realisiert, da aufgrund der sich stetig verändernden Sollwerte diese und die benötigten Ableitungen nicht, wie zum Beispiel in (Herrmann und Bröcker, 2015; Bröcker und Herrmann, 2017), im Voraus berechnet werden können. Für die Implementierung stehen mehrere Möglichkeiten zur Verfügung. Eine besteht darin, das Filter durch zwei hintereinandergeschaltete PT1-Systeme

$$T_{Pi} \dot{y}_{Pi}(t) + y_{Pi}(t) = u_{Pi}(t), \quad i = 1, 2 \quad (3.78)$$

zu realisieren. Der Vorteil dieser Methode ist, dass die Diskretisierung von (3.78) mit der Vorwärts-Rechteck-Regel auf die einfach zu implementierende rekursive Berechnungsvorschrift

$$y_{P_i}(k) = y_{P_i}(k-1) + \frac{T_A}{T_{P_i}} (u_{P_i}(k-1) - y_{P_i}(k-1)) \quad (3.79)$$

mit der Abtastzeit T_A führt. Über die Zeitkonstante kann das jeweilige Filter und somit das dynamische Verhalten der PMSM angepasst werden. Der Eingang $u_P = u_{P1}$ stellt die gewünschte Solldrehzahl, der Ausgang y_{P2} den Verlauf der Referenzgeschwindigkeit $y_{\text{ref},2}$ dar. Ein Nachteil bei dieser Vorgehensweise ist, dass die benötigten Ableitungen durch numerische Differentiation

$$\dot{y}_{\text{ref},2}(k) \approx \frac{y_{\text{ref},2}(k) - y_{\text{ref},2}(k-1)}{T_A}, \quad (3.80a)$$

$$\ddot{y}_{\text{ref},2}(k) \approx \frac{y_{\text{ref},2}(k) - 2y_{\text{ref},2}(k-1) + y_{\text{ref},2}(k-2)}{T_A^2} \quad (3.80b)$$

berechnet werden müssen. Mit steigendem Grad der Ableitung führt dies zu einem zunehmenden numerischen Rauschen. Eine Verbesserung gelingt mit dem sogenannten Zustandsvariablenfilter (ZVF) durch die direkte Berechnung der höchsten Ableitung $\ddot{y}_{\text{ref},2}(k)$ und die anschließende Integration bis $y_{\text{ref},2}(k)$. Für das PT2-Filter ergibt sich dann zunächst die Berechnungsvorschrift

$$\ddot{y}_{\text{ref},2}(k) = \frac{1}{T_{P1}T_{P2}} (u_P - (T_{P1} + T_{P2}) \dot{y}_{\text{ref},2}(k) - y_{\text{ref},2}(k)). \quad (3.81a)$$

Die fehlenden Informationen für $\dot{y}_{\text{ref},2}(k)$ und $y_{\text{ref},2}(k)$ werden durch die zeitdiskrete Integration aus

$$\dot{y}_{\text{ref},2}(k) = \dot{y}_{\text{ref},2}(k-1) + T_A \ddot{y}_{\text{ref},2}(k), \quad (3.81b)$$

$$y_{\text{ref},2}(k) = y_{\text{ref},2}(k-1) + T_A \dot{y}_{\text{ref},2}(k) \quad (3.81c)$$

gewonnen. Die simulierten Sprungantworten beider Filtermethoden sind für einen Sprung der Solldrehzahl von $n_{M,\text{ref}} = 0 \text{ s}^{-1}$ auf $n_{M,\text{ref}} = 20 \text{ s}^{-1}$ in Abbildung 3.22 gegenübergestellt. Deutlich ist der numerische Vorteil des ZVFs erkennbar, sodass folgend nur dieses Verfahren weiter betrachtet wird. Die Ableitung (3.77) von Gleichung (3.76) kann ebenfalls nach der Vorschrift (3.80) numerisch berechnet werden. Aufgrund der begrenzten Rechenleistung und der fehlenden Gleitkommaeinheit wird diese Methode in dieser Arbeit sogar bevorzugt. Sowohl die Annäherung der Ableitung als auch die Vorgehensweise zur Berechnung der Induktivität müssen für jeden Motor auf Gültigkeit überprüft werden.

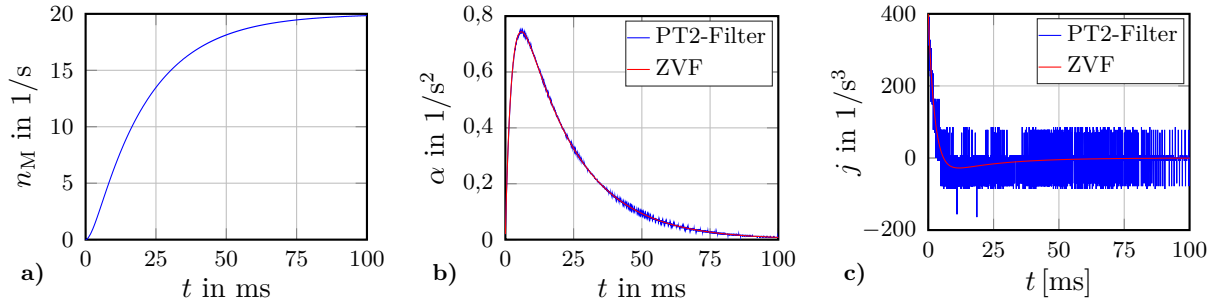


Abbildung 3.22: Vergleich verschiedener Methoden zur Berechnung von Zeitableitungen mit a) der Geschwindigkeit als Ausgangssignal, b) der ersten Ableitung der Winkelbeschleunigung und c) der zweiten Ableitung dem Ruck

Modell des gesteuerten Systems: Im Falle eines idealen Modells kann das hintereinandergeschaltete System, bestehend aus flachheitsbasierter Vorsteuerung und dem Modell der PMSM nach Abbildung 3.23, zwischen dem Eingang der Solldrehzahl und dem Drehzahlausgang x_3 als lineares System zweiter Ordnung betrachtet werden. Dieser Verbund wird dann vollständig durch das lineare Zustandsraummodell

$$\mathbf{x}_M(k+1) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_M(k) + \mathbf{b}_d u_P(k), \quad (3.82a)$$

$$y_M(k) = \mathbf{c}_d^T \mathbf{x}_M(k) \quad (3.82b)$$

beschrieben, mit den Matrizen

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_d^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.82c)$$

und den Abkürzungen

$$a_0 = \frac{(T_{P1} - T_A)(T_{P2} - T_A)}{T_{P1}T_{P2}}, \quad a_1 = -\frac{T_{P2}(T_{P1} - T_A) + T_{P1}(T_{P2} - T_A)}{T_{P1}T_{P2}}, \quad (3.82d)$$

$$b_0 = \frac{T_A^2}{T_{P1}T_{P2}}.$$

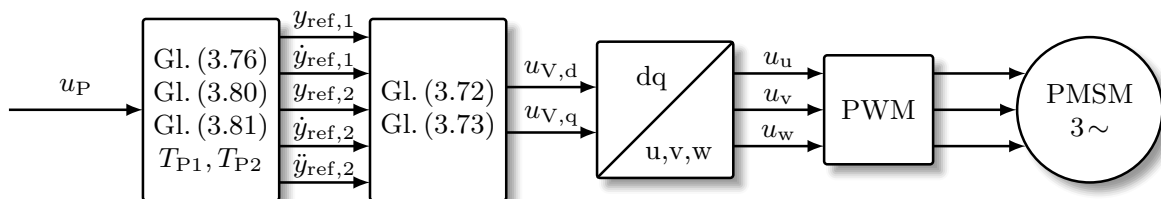


Abbildung 3.23: Blockschaltbild der flachheitsbasierten Vorsteuerung

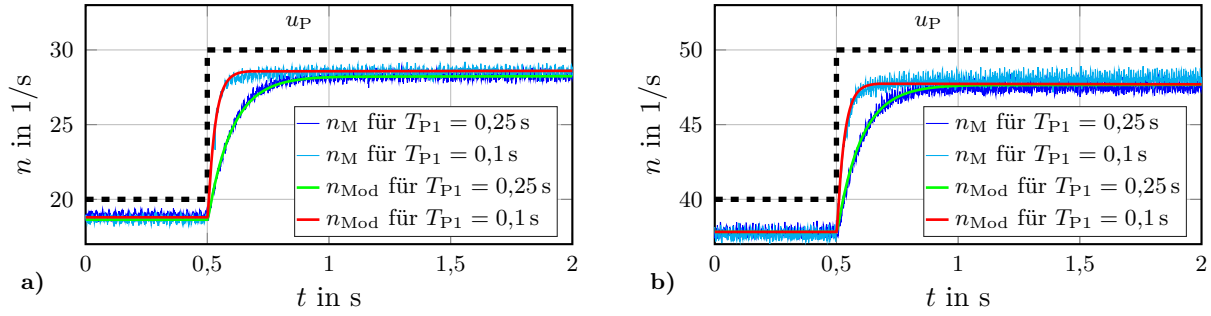


Abbildung 3.24: Vergleich verschiedener Sprungantworten für das gesteuerte System für einen Drehzahlsprung um $\Delta u_P = 10 \text{ s}^{-1}$ ausgehend von $u_P = 20 \text{ s}^{-1}$ in a) und $u_P = 40 \text{ s}^{-1}$ in b)

Die Eingangsgröße $u_P(k)$ ist die Solldrehzahl und die Ausgangsgröße $y_M(k) = n_M$ die Ist-drehzahl der PMSM. Die Verwendung von Drehzahlgrößen anstelle von Winkelgeschwindigkeiten erfolgt aufgrund der einfacheren Implementierung auf dem Mikrocontroller. Damit die Vorsteuerung weiterhin die richtige statische Verstärkung erzeugt, muss der Faktor 2π entsprechend berücksichtigt werden. Die Zeitkonstanten T_{P1} und T_{P2} können beliebig gewählt werden, sind jedoch durch die maximal mögliche Systemspannung beschränkt. Die Messergebnisse zweier dynamisch unterschiedlicher Sprungantworten des gesteuerten Systems sind für einen Sprung von $u_P = 20 \text{ s}^{-1}$ auf $u_P = 30 \text{ s}^{-1}$ in Abbildung 3.24a und für $u_P = 40 \text{ s}^{-1}$ auf $u_P = 50 \text{ s}^{-1}$ in Abbildung 3.24b gegenübergestellt. Zunächst fällt auf, dass die gemessenen Drehzahlen n_M für beide Drehzahlsprünge sowohl vor als auch nach dem Drehzahlsprung von den durch u_P vorgegebenen Drehzahlen abweichen. Diese Abweichungen sind vor allem auf den entstehenden Spannungsabfall zwischen Messstelle und Motorregler zurückzuführen, welcher durch die Steuerung nicht ausgeglichen werden kann. Durch den Vergleich der gemessenen Drehzahlen n_M mit den ebenfalls eingezeichneten und auf die tatsächlichen Ausgangsdrehzahlen angepassten berechneten Modelldrehzahlverläufe n_{Mod} ist zu erkennen, dass dem System die vorgegebene Dynamik bereits sichtbar aufgeprägt wird. Die mit Hilfe der Modelle ermittelten Sprunghöhen liegen für die Messungen im Bereich $9,33 \text{ s}^{-1} \leq \Delta n_{Mod} \leq 9,81 \text{ s}^{-1}$. Damit sind die gemessenen Drehzahldifferenzen Δn_M im Vergleich zu den vorgegebenen Sprunghöhen von $\Delta u_P = 10 \text{ s}^{-1}$ stets etwas zu klein. Im Detail lassen sich außerdem minimale Abweichungen in der Dynamik erkennen. Um diese Abweichungen und zusätzlich auftretende externe Störungen auszugleichen, ist eine Regelung unabdingbar.

3.5.3 Drehzahlmessung

Für die Implementierung einer Drehzahlregelung muss die Drehzahl zunächst gemessen werden. Diese Aufgabe umfasst alle notwendigen Schritte zur Ermittlung der Drehzahl aus den Encoderwerten. Im einfachsten Fall wird hierzu die Änderung des Encoderwerts in jedem Programmzyklus abgefragt und durch die verstrichene Zeit $\Delta t = T_A$ geteilt. Beobachtungen haben gezeigt, dass der Encoder normalerweise

se keinen Puls verpasst. Daher wird angenommen, dass die erreichbare Genauigkeit bei ± 1 c liegt. Damit folgt für die Geschwindigkeit

$$n_M(k) = \frac{\frac{\Delta c_{\text{Enc}}(k)}{c_{\text{pU}}} \pm \frac{1c}{c_{\text{pU}}}}{T_A} = n_c(k) \pm \Delta n_c, \quad \text{mit } c_{\text{pU}} = 4000 \frac{c}{U}. \quad (3.83)$$

Das Drehzahlsignal n_M unterliegt mit abnehmender Abtastzeit einem zunehmenden Rauschen. Im Fall der angestrebten Abtastzeit von $T_A = 0,05$ ms beträgt das Rauschen demnach $\Delta n_M = \pm 5 \frac{U}{s}$. Für die Rauschminimierung können zahlreiche Methoden verwendet werden.

Einfache Filter: Mit Hilfe einfacher Filter soll die Messgenauigkeit erhöht werden. Das einfachste Filter mit endlicher Impulsantwort stellt die Berechnung des gleitenden Durchschnitts dar. Die Berechnung des Durchschnittswerts aus den letzten n_k Abtastwerten erhöht die Genauigkeit im selben Maß, sodass für die Drehzahl

$$n_M(k) = \frac{1}{n_k} \left(\sum_{i=k-n_k+1}^k \left(\frac{\Delta c_{\text{Enc}}(i)}{c_{\text{pU}} T_A} \right) \pm \frac{1c}{c_{\text{pU}} T_A} \right) = \frac{1}{n_k} \left(\sum_{i=k-n_k+1}^k n_c(i) \pm \Delta n_c \right) \quad (3.84)$$

gilt. Bei Berücksichtigung von zehn Werten würde sich das Rauschen noch auf $\Delta n_M = \pm 0,5 \frac{U}{s}$ belaufen. Im Gegenzug bedeutet die Zunahme an Genauigkeit eine zunehmende Signalverschiebung. Diese beläuft sich für ein Rampensignal auf

$$\Delta t = \frac{n_k - 1}{2} T_A. \quad (3.85)$$

Voraussetzung für die Berechnung des gleitenden Durchschnitts der Drehzahl n_M ist, dass die letzten n_k Abtastwerte bekannt sein müssen. Diese können beispielsweise in einem Array abgelegt werden. Für den gemittelten Drehzahlwert folgt die Berechnungsvorschrift

$$n_M(k) = n_M(k-1) + \frac{n_c(k) - n_c(k-n_k)}{n_k}. \quad (3.86)$$

Eine alternative und ebenfalls einfache Vorgehensweise zur Rauschunterdrückung stellt die Verwendung verschiedener digitaler Filter dar. Für das einfache PT1-Filter gilt

$$n_M(k) = n_M(k-1) + \frac{T_A}{T_F} (n_c(k-1) - n_M(k-1)). \quad (3.87)$$

Für einen Drehzahlsprung sind die mittels gleitendem Durchschnitt berechneten Werte in Abbildung 3.25a dargestellt. Es ist festzustellen, dass bereits bei Berücksichtigung der letzten $n_k = 16$ Abtastwerte der Drehzahlverlauf sichtbar rekonstruiert und mit zunehmender Anzahl an Abtastwerten weiter geglättet wird. Aller-

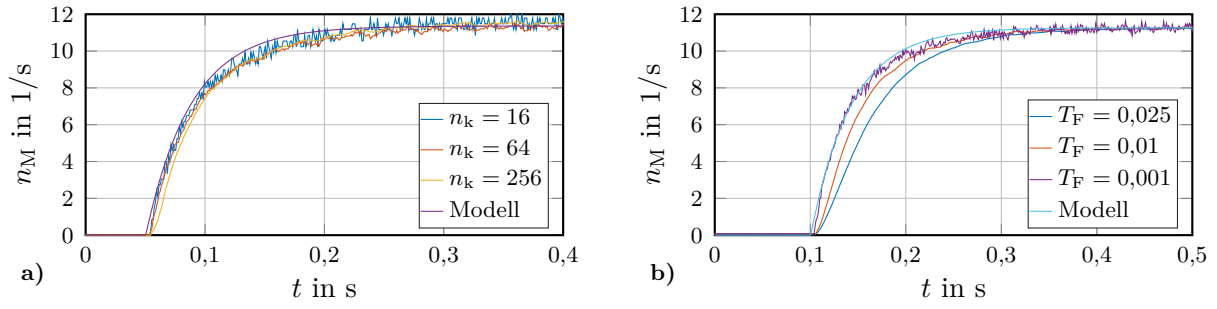


Abbildung 3.25: Vergleich verschiedener Filterkonzepte zur Drehzahlerfassung durch a) die Berechnung des gleitenden Durchschnitts n_k -ter Ordnung oder b) die Verwendung eines PT1-Filters mit der Zeitkonstanten T_F

dings erhöht sich im gleichen Maße der Signalnachlauf, sodass die Verwendung von $n_k \geq 17$ bei einer hohen Dynamik bereits ausscheidet. Derselbe Zielkonflikt ergibt sich auch bei Verwendung eines PT1-Filters in Abbildung 3.25b. Hierbei verbessert sich mit größer werdender Zeitkonstante zwar die Rauschunterdrückung, aber die Signallaufzeit nimmt stark zu. Bei einer weiteren Erhöhung der Systemdynamik liefern diese Ansätze somit keine geeignete Grundlage für den Aufbau der Regelung. Bei der Initialisierung der Rotorposition kommen sie dennoch zum Einsatz, da dort der statische Drehzahlendwert von Interesse ist und der Signalnachlauf keine Rolle spielt.

Zustandsbeobachter: Um den bereits aufgezeigten Zielkonflikt zwischen dem Signalrauschen und der Signallaufzeit abzumildern, wird im Folgenden der Einsatz eines PI-Beobachters mit der Struktur gemäß Abbildung 3.26 untersucht. Aus dieser Abbildung kann der Zusammenhang $\mathbf{u}_B(k) = (\mathbf{L}_1 + T_A \mathbf{L}_3 \mathbf{L}_2) \hat{\mathbf{e}}(k) + T_A \mathbf{L}_3 \hat{\mathbf{f}}_o(k)$

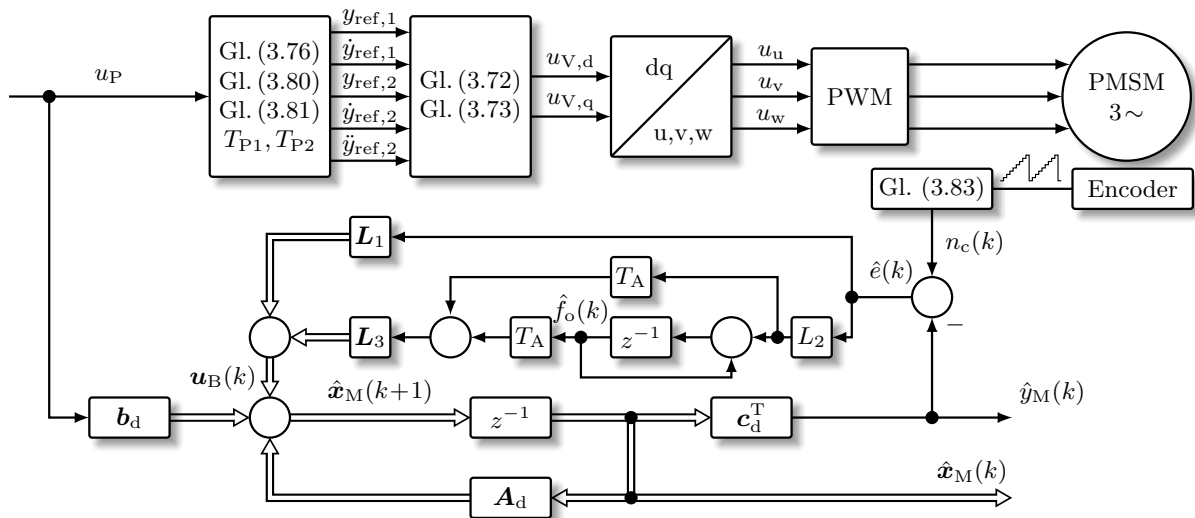


Abbildung 3.26: Blockschaltbild des verwendeten PI-Beobachters nach (Söffker, Yu und Müller, 1995)

abgeleitet werden, wobei im vorliegenden Fall $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_3 \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ und $L_2, \hat{f}_o(k) \in \mathbb{R}$ gilt. Für den Beobachter ergeben sich dadurch die Zustandsdifferenzgleichungen

$$\hat{\mathbf{x}}_M(k+1) = \mathbf{A}_d \hat{\mathbf{x}}_M(k) + \mathbf{b}_d u_P(k) + \mathbf{L}_1 \hat{e}(k) + T_A \mathbf{L}_3 (\hat{f}_o(k) + L_2 \hat{e}(k)), \quad (3.88)$$

$$\hat{f}_o(k+1) = \hat{f}_o(k) + L_2 \hat{e}(k) \quad (3.89)$$

mit $\hat{e}(k) = n_c(k) - \hat{y}_M(k)$. Daraus lässt sich wiederum das Zustandsraummodell

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_M(k+1) \\ \hat{f}_o(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d & T_A \mathbf{L}_3 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_M(k) \\ \hat{f}_o(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_d \\ 0 \end{bmatrix} u_P(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 + T_A \mathbf{L}_3 L_2 \\ L_2 \end{bmatrix} (n_c(k) - \hat{y}_M(k)) \quad (3.90)$$

herleiten. Mit $\hat{y}_M(k) = \mathbf{c}_d^T \hat{\mathbf{x}}_M(k)$ und $\hat{\mathbf{x}} = [\hat{\mathbf{x}}_M^T \hat{f}_o]^T$ führt eine weitere Umformung auf

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_d - (\mathbf{L}_1 + T_A \mathbf{L}_3 L_2) \mathbf{c}_d^T & T_A \mathbf{L}_3 \\ -L_2 \mathbf{c}_d^T & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_o} \hat{\mathbf{x}}(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_d \\ 0 \end{bmatrix} u_P(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 + T_A \mathbf{L}_3 L_2 \\ L_2 \end{bmatrix} n_c(k). \quad (3.91)$$

Dabei ist der Vektor \mathbf{L}_3 frei wählbar und wird im Folgenden zu $\mathbf{L}_3 = [1 \ 1]^T$ gewählt. Die fehlenden Parameter $\mathbf{L}_1 = [L_{11} \ L_{21}]^T$ und L_2 ergeben sich durch einen Koeffizientenvergleich zwischen dem charakteristischen Polynom

$$P_o(z) = \det(z\mathbf{E} - \mathbf{A}_o), \quad (3.92)$$

der Matrix \mathbf{A}_o und dem unter Beachtung des relativen Grads $n + \dim(\hat{f}_o)$ gewählten Sollpolynom dritten Grades

$$C_o(z) = (z - P_{z1}^o)(z - P_{z2}^o)(z - P_{z3}^o). \quad (3.93)$$

Zum besseren Verständnis erfolgt die Wahl der Polstellen $P_{z,i}^o$ mit Bezug zu den kontinuierlichen Polen P_i^o über $P_{z,i}^o = e^{P_i^o T_A}$. Der Vergleich zwischen den beiden Gleichungen (3.92) und (3.93) liefert die gesuchten Verstärkungsfaktoren. Für eine erste Untersuchung des Beobachterverhaltens werden wahlweise die kontinuierlichen Pole $P_1^o = -400$ und $P_{2,3}^o = -50$ oder $P_{2,3}^o = -100$ gewählt. Der in Abbildung 3.27a dargestellte Drehzahlsprung weist mit $T_{P1} = 40$ ms lediglich die halbe Dynamik wie der Drehzahlsprung in Abbildung 3.27b mit $T_{P1} = 20$ ms auf. Bei der Beurteilung der Ergebnisse muss beachtet werden, dass die Drehzahlsprünge nicht geregelt sind. Zum Vergleich wird das mit einem PT1-Filter für die Zeitkonstante von $T_F = 0,5$ ms ermittelte Drehzahlssignal dargestellt. Im Ergebnis zeigt sich, dass in beiden Fällen durch den Einsatz des Beobachters das Rauschen bei gleicher Signalnachlaufzeit erheblich reduziert werden kann.

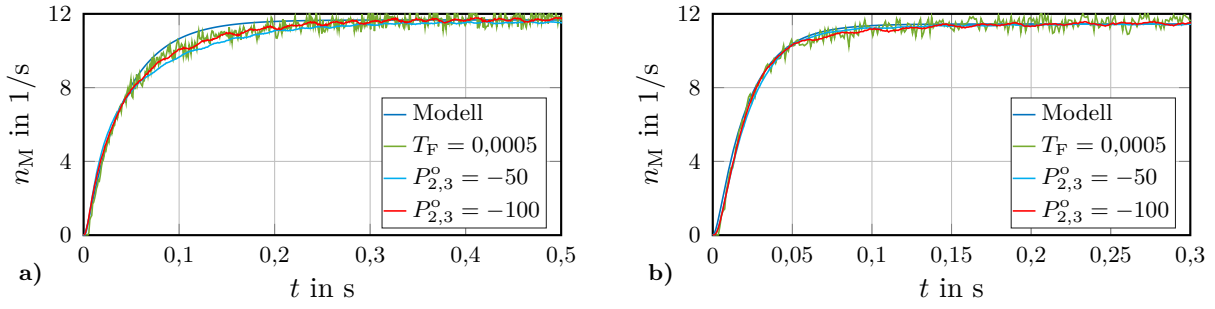


Abbildung 3.27: Geschätzte Motordrehzahl unter Verwendung des PI-Beobachters für $T_{P2} = 2,5 \text{ ms}$ und a) $T_{P1} = 40 \text{ ms}$ oder b) $T_{P1} = 20 \text{ ms}$

3.5.4 Entwurf eines PI-Zustandsreglers

Als Drehzahlregler für die PMSM kommt ein PI-Zustandsregler gemäß Abbildung 3.28 zum Einsatz. Da aufgrund des zusätzlichen I-Anteils im Regler der Regelfehler stets verschwindet, gilt nachfolgend $r_w = 0$. Aus Abbildung 3.28 lassen sich die Zustandsgleichungen

$$\mathbf{x}_M(k+1) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_M(k) + \mathbf{b}_d \left(k_I T_A (w_M(k) - y_M(k)) + k_I T_A f_r(k) - \mathbf{k}^T \mathbf{x}_M(k) \right), \quad (3.94)$$

$$f_r(k+1) = f_r(k) + w_M(k) - y_M(k) \quad (3.95)$$

in Abhängigkeit der gewünschten Drehzahl $w_M \in \mathbb{R}$, des Verstärkungsfaktors des I-Reglers $k_I \in \mathbb{R}$, der Verstärkung der Rückführung $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ und der Zustandsvariablen $f_r \in \mathbb{R}$ ableiten. Die Gleichungen (3.94) und (3.95) ergeben die Matrizen-gleichung

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_M(k+1) \\ f_r(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d - \mathbf{b}_d \mathbf{k}^T & \mathbf{b}_d k_I T_A \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_M(k) \\ f_r(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_d k_I T_A \\ 1 \end{bmatrix} (w_M(k) - y_M(k)). \quad (3.96)$$

Setzt man darin $y_M(k) = \mathbf{c}_d^T \mathbf{x}_M(k)$, führt dies auf

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_M(k+1) \\ f_r(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_d - \mathbf{b}_d (k_I T_A \mathbf{c}_d^T + \mathbf{k}^T) & \mathbf{b}_d k_I T_A \\ -\mathbf{c}_d^T & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_r} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_M(k) \\ f_r(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_d k_I T_A \\ 1 \end{bmatrix} w_M(k). \quad (3.97)$$

Die Parameter k_I und \mathbf{k} werden einmal mehr durch den Vergleich der Koeffizienten zwischen dem charakteristischen Polynom

$$P_r(z) = \det(z\mathbf{E} - \mathbf{A}_r) \quad (3.98)$$

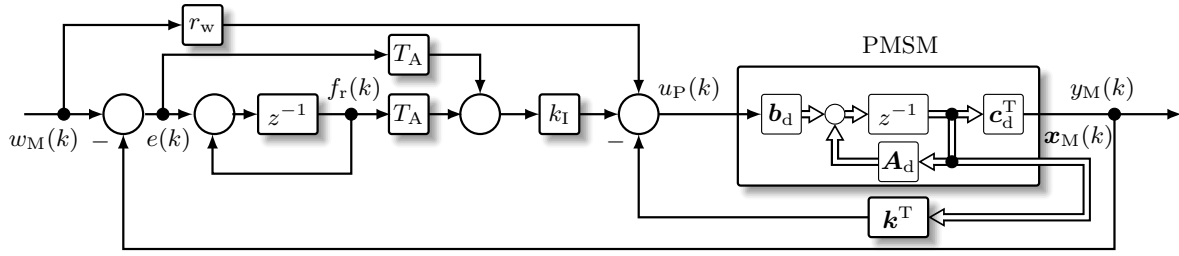


Abbildung 3.28: Blockschaltbild des verwendeten PI-Reglers

der Matrix \mathbf{A}_r und dem Sollpolynom

$$C_r(z) = (z - P_{z1}^r)(z - P_{z2}^r)(z - P_{z3}^r) \quad (3.99)$$

unter Berücksichtigung der Systemordnung $n + \dim(f_r)$ gefunden. Aufgrund des Separationstheorems werden für den Regler die Größen $\hat{x}_M(k), \hat{y}_M(k)$ anstatt der Signale $x_M(k), y_M(k)$ verwendet.

3.6 Messergebnisse

Der selbst entwickelte Regler wird im Folgenden als 3Phase-Regler bezeichnet und messtechnisch untersucht. Er wird dabei im Hinblick auf seine Effizienz und sein dynamisches Regelungsverhalten mit drei am freien Markt verfügbaren Reglern verschiedener Preisklassen verglichen.

Messergebnisse zur Effizienz des Motorreglers: Für den Vergleich der Effizienz wird der dem Netzteil entnommene Gleichstrom in Abhängigkeit der Drehzahl bei konstanter Spannung von $U_{DC} = 18,5 \text{ V}$ abgelesen. Die Drehzahl wird dabei in einem Bereich zwischen $n_M = 0 \text{ s}^{-1}$ und $n_M = 102,5 \text{ s}^{-1}$ variiert. Da sämtliche Regler, außer dem 3Phase-Regler, über einen Sender angesteuert werden, sind deren Messpunkte nicht äquidistant zueinander. Die Messergebnisse sind in Abbildung 3.29a dargestellt. Aufgrund des drehzahlabhängigen Widerstandsmoments τ_W ergeben sich für alle Regler erwartungsgemäß ähnliche Verläufe. Während im Bereich unter $n_M = 30 \text{ s}^{-1}$ die Kurven nahezu aufeinander liegen, zeigen sich in dem für den Betrieb eines Multikopters relevanten darüberliegenden Bereich teils deutliche Unterschiede. Die Betrachtung des Motorwirkungsgrads η_{Mot} nach Gleichung (3.55) in Abbildung 3.29b zeigt diese noch deutlicher auf. Während die Regler der Firma Poly-Tec und Turnigy im relevanten Bereich einen circa 10 % schlechteren Wirkungsgrad gegenüber dem 3Phase-Regler aufzeigen, weist der YGE-Regler lediglich einen um circa 3 % schlechteren Wirkungsgrad auf. Auffällig ist, dass größere Wirkungsgradunterschiede auftreten obwohl sämtliche Vergleichsregler mit einer Blockkommutierung arbeiten. Um dies abschließend zu beurteilen, müssten die Regler mit weiteren Motoren untersucht und der Einfluss der PWM-Frequenz näher betrachtet werden. Der gegenüber dem 3Phase-Regler bessere Wirkungsgrad des YGE-Reglers im unteren Drehzahlbereich bis $n_M = 30 \text{ s}^{-1}$ lässt sich vor al-

lem durch die höhere Stromaufnahme des zusätzlichen Drehzahlsensors sowie die höhere PWM-Frequenz erklären.

Für den 3Phase-Regler wird zusätzlich der Einfluss der Kommutierungsmethode auf den Wirkungsgrad betrachtet. Hierzu werden die symmetrierte Sinusmodulation sowie die Flat-Top-Modulation mit und ohne Nachlauf in Abbildung 3.30 gegenübergestellt. Dabei erfolgt die Aufnahme der Messwerte in der Weise, dass das System mit der flachheitsbasierten Vorsteuerung betrieben wird. Die Solldrehzahlen $u_P = 2,5k_U$, für $k_U = 0 \dots 39$, werden vorgegeben und die resultierenden Drehzahlen n_M und der Strom I_{DC} gemessen. In Abbildung 3.30a ist ersichtlich, dass das gesteuerte System die vorgegebene Drehzahl u_P mit einer maximalen Abweichung von 2 % im relevanten Bereich erreicht. Betrachtet man in Abbildung 3.30b die Drehzahl n_M in Abhängigkeit des benötigten Stroms I_{DC} , lassen sich keine messbaren Vorteile einer Kommutierungsart erkennen. Der Motorwirkungsgrad (3.55) ist demnach über die gesamte Maschine betrachtet gleich. Da für das gesteuerte System zu

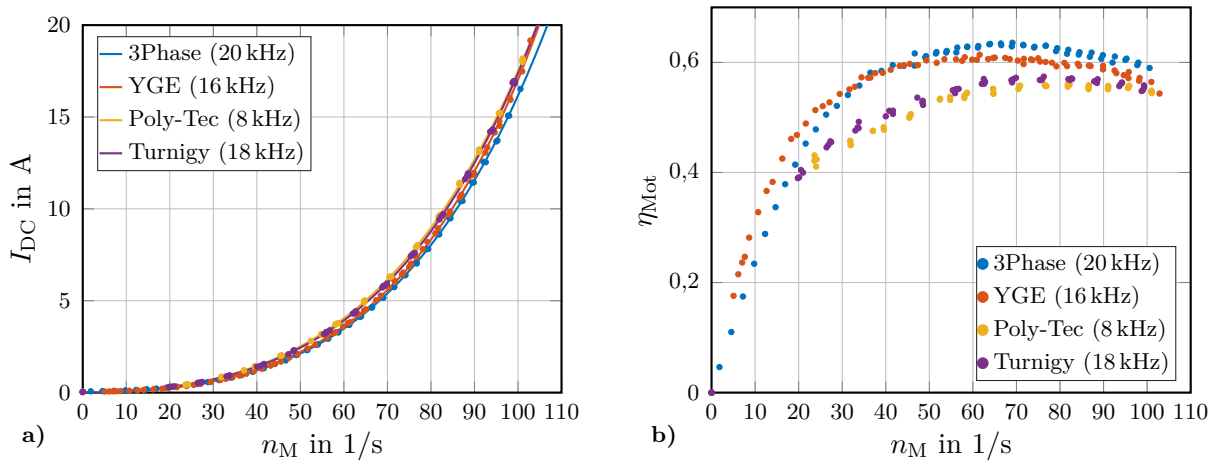


Abbildung 3.29: Vergleich des Stromverbrauchs in a) und des Wirkungsgrads in b) für verschiedene Drehzahlregler

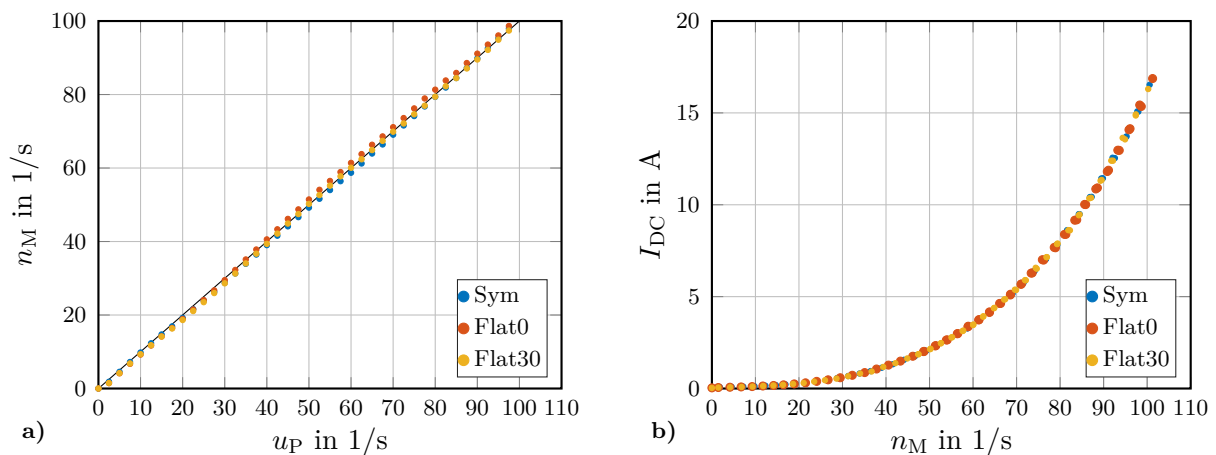


Abbildung 3.30: Verlustbetrachtung verschiedener PWM-Verfahren mit dem 3Phase-Regler mit Gegenüberstellung der resultierenden Drehzahl in a) und dem Stromverbrauch in b)

jeder Solldrehzahl stets derselbe Spannungsvektor $\mathbf{u} = [u_{d,opt} \ u_{q,opt}]^T$ gehört, wird im Umkehrschluss deutlich, dass dieser in Abhängigkeit der Kommutierungsart für eine gegebene Drehzahl n_M variiert. Bei Verwendung der Flat-Top-Modulation stellt sich bei geringerer Spannung und gleich aufgenommener Wirkleistung dieselbe Drehzahl ein, wie bei der symmetrierten Sinusmodulation für eine höhere Spannungsamplitude. Da jedoch der Stellgrößenvektor für eine Drehzahl variiert, muss darauf geschlossen werden, dass abhängig von der Kommutierungsart die Verluste innerhalb der Antriebseinheit unterschiedlich verteilt werden. Grund hierfür könnten zum Beispiel auftretende Stromoberwellen bei der Flat-Top-Modulation sein. Ähnliche Ergebnisse werden auch in (Gemaßmer, 2015) vorgestellt.

Messergebnisse zur Dynamik der Antriebseinheit: Das entwickelte Regelungskonzept wird zusammen mit dem Motorregler und dem Motor im Folgenden hinsichtlich seines dynamischen Verhaltens genauer untersucht. Dazu werden unterschiedliche Drehzahlsprünge bei unterschiedlichen Reglereinstellungen miteinander verglichen. Für sämtliche dargestellten Messergebnisse liegt der erste Pol des Beobachters bei $P_1^o = -400$. Die übrigen Pole $P_{2,3}^o$ sind entsprechend der Angabe in der Legende der jeweiligen Abbildung gewählt. Gute Testergebnisse können erzielt werden, indem zwei der drei Pole des Reglers in Abhängigkeit der Zeitkonstanten T_{P1} und T_{P2} gewählt werden und der dritte Pol weiter links in der komplexen s-Halbebene platziert wird. Dies führt im Falle von $T_{P1} = 40$ ms und $T_{P2} = 2,5$ ms zu den Polstellen $P_1^r = -25$, $P_2^r = -400$ und $P_3^r = -900$. Diese Parametrierung führt für einen Drehzahlsprung aus dem Stillstand auf $n_M = 10$ s⁻¹ zu der Sprungantwort in Abbildung 3.31a. Für einen Eingangssprung von $n_M = 40$ s⁻¹ auf $n_M = 50$ s⁻¹ sind die Ergebnisse in Abbildung 3.31b dargestellt. Der Motor zeigt in beiden Fällen das gewünschte, vorgegebene Systemverhalten, das dem ebenfalls eingezeichneten PT3-Modell entspricht. Der Motor reagiert nahezu ohne einen erkennbaren Signalnachlauf und der Endwert wird nach ungefähr $5T_{P1} = 0,2$ s ohne Überspringen und exakt erreicht. Die gemessene Drehzahl schwankt in beiden Fällen mit $\Delta n_M \approx \pm 0,1$ s⁻¹ um den Sollwert, was bei $n_M = 10$ s⁻¹ einer Schwankung von $\Delta n_M \approx \pm 1$ % und bei $n_M = 50$ s⁻¹ einer Schwankung von $\Delta n_M \approx \pm 0,2$ % entspricht. Für dieselben Sprunghöhen kann die Dynamik weiter erhöht werden. Bei Vorgabe der Zeitkonstanten $T_{P1} = 20$ ms und $T_{P2} = 2,5$ ms führt dies zu den Polstellen des Zustandsreglers $P_1^r = -50$, $P_2^r = -400$ und $P_3^r = -900$. Die Ergebnisse hierzu sind für den Drehzahlsprung aus dem Stillstand auf $n_M = 10$ s⁻¹ in Abbildung 3.32a und für den Drehzahlsprung von $n_M = 40$ s⁻¹ auf $n_M = 50$ s⁻¹ in Abbildung 3.32b dargestellt. In beiden Fällen kann die vorgegebene Dynamik erzielt und der Endwert ohne Überspringen nach $5T_{P1} = 0,1$ s erreicht werden. Zum Vergleich ist die maximal einstellbare Dynamik des untersuchten YGE-Reglers eingezeichnet. Dadurch wird der enorme Zugewinn in der Dynamik der Antriebseinheiten deutlich.

Eine weitere problematische Situation stellt die Drehzahlumkehr dar. Sie bereitet sensorlosen Systemen oftmals Probleme. Aus diesem Grund werden in Abbildung 3.33a die Sprungantworten von $n_M = -5$ s⁻¹ auf $n_M = 5$ s⁻¹ zum Zeitpunkt

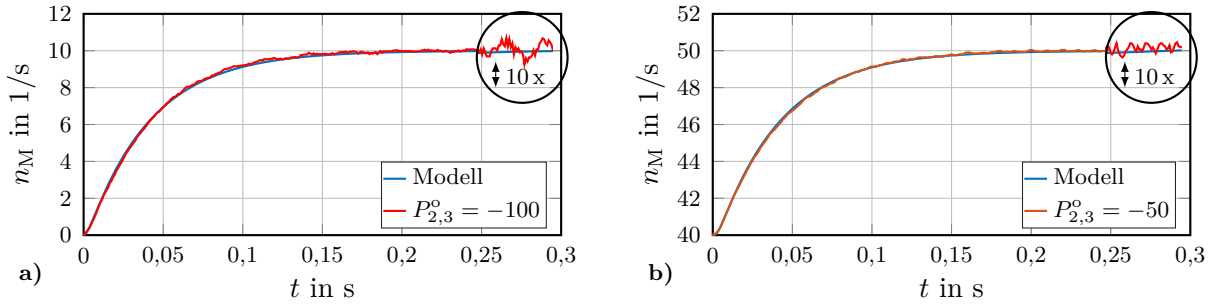


Abbildung 3.31: Sprungantwort mit einer vorgegebenen Zeitkonstante von $T_{P1} = 40$ ms für eine Sprunghöhe von $10 s^{-1}$ und einer Anfangsgeschwindigkeit von a) $0 s^{-1}$ und b) $40 s^{-1}$

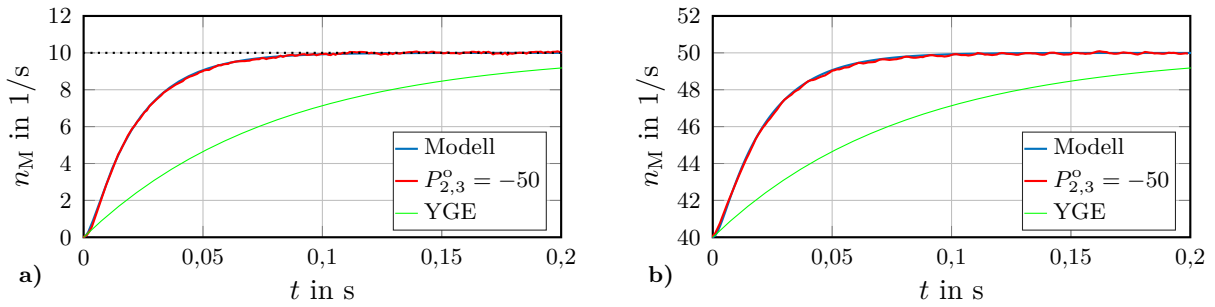


Abbildung 3.32: Sprungantwort mit einer vorgegebenen Zeitkonstante von $T_{P1} = 20$ ms für eine Sprunghöhe von $10 s^{-1}$ und einer Anfangsgeschwindigkeit von a) $0 s^{-1}$ und b) $40 s^{-1}$

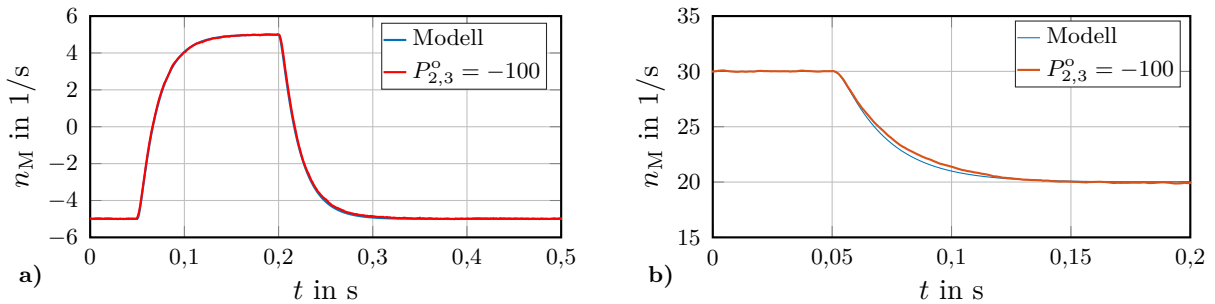


Abbildung 3.33: Sprungantwort für a) eine Drehrichtungsumkehr und b) eine Verzögerung mit einer vorgegebenen Zeitkonstante von $T_{P1} = 20$ ms

$t = 0,05$ s und wieder zurück auf $n_M = -5 s^{-1}$ zum Zeitpunkt $t = 0,2$ s untersucht. Bei beiden Richtungsänderungen weist die Motordrehzahl den gewünschten ruhigen und gleichmäßigen Verlauf am Übergang im Bereich von $n_M = 0 s^{-1}$ auf. Messergebnisse sowohl der flachheitsbasierten Vorsteuerung als auch der getesteten Vergleichsregler wiesen außerdem auf eine veränderte Dynamik bei einer starken Verzögerung der Antriebseinheit hin. Dabei neigt die Antriebseinheit zu einem Überschwingen der Motordrehzahl. Abbildung 3.33b zeigt einen derartigen Bremsvorgang von $n_M = 30 s^{-1}$ auf $n_M = 20 s^{-1}$ mit der dominierenden Zeitkonstante $T_{P1} = 20$ ms. Das Überschwingen kann durch den Regler verhindert werden. Erkennbar ist aber auch, dass die Dynamik nicht mehr eingehalten werden kann. Die erzielte Dynamik entspricht circa einem Wert von $T_{P1} = 22$ ms und ist damit

gegenüber der vorgegebenen Dynamik reduziert. Der wesentliche Grund für dieses Verhalten liegt darin, dass die Spannung u_d auf den Bereich $u_d \leq 100c$ und die Spannung u_q auf den Bereich $u_q \geq -100c$ begrenzt wurden. Die notwendigen Spannungen werden beim Abbremsen der Antriebseinheit mit der gewählten Dynamik über- beziehungsweise unterschritten. Die maximal erzielbare Dynamik ist stets durch die maximale Stellspannung begrenzt. Die Einhaltung der Grenzen kann durch die flachheitsbasierte Vorsteuerung vorab überprüft werden, wobei Reserven für das Eingreifen des Zustandsreglers vorzusehen sind. Die Verwendung der symmetrierten Sinusmodulation oder der Flat-Top-Modulation mit oder ohne Nachlauf bietet durch ihre Möglichkeit die Sollwertspannung um über 15 % zu erhöhen, weiteres Potenzial zur Steigerung der Dynamik der Antriebseinheit.

Fazit der Messergebnisse: Die Messwerte in diesem und die Ausführungen der vorangegangenen Abschnitte zeigen, dass es unter erhöhtem Aufwand möglich ist, der Antriebseinheit ein deterministisches dynamisches Verhalten aufzuprägen. Der erzielbaren Dynamik sind dabei nur durch die maximalen Stellspannungen Grenzen gesetzt. Innerhalb dieser Grenzen kann das dynamische Verhalten zumindest für die vorliegende PMSM im Vergleich zu den am Markt angebotenen und in diesem Vergleich betrachteten Reglern deutlich erhöht werden. Durch die Wahl geeigneter Parameter kann das Übertragungsverhalten der PMSM auf das dynamische Modell eines PT1-Systems vereinfacht werden. Hierzu muss jedoch $T_{P1} \gg T_{P2}$ und $T_{P1} \gg T_{P3}$ gelten. Nur unter diesen Voraussetzungen kann die geregelte Antriebseinheit mit

$$T_M \dot{\omega}_M + \omega_M = u_M \quad (3.100)$$

für $T_M = T_{P1}$ über eine Differentialgleichung erster Ordnung beschrieben werden. Hierbei wurde aus Gründen besserer Lesbarkeit $w_M = u_M$ gesetzt.

4 Topologie und Aufbau der Testumgebung

Dieses Kapitel beschreibt neben der Hard- und Softwarestruktur der gesamten Entwicklungsumgebung auch den mechanischen Aufbau der Prüfstände und Multikopter. In Abschnitt 4.1 wird zunächst die übergeordnete Systemarchitektur der Entwicklungsumgebung dargestellt und deren einzelne Komponenten detailliert erläutert. Darauf folgend wird auf die untergeordnete Hardwarestruktur eingegangen, die einheitlich sowohl bei den Multikoptern als auch bei den Prüfständen Verwendung findet. Des Weiteren wird der grundlegende Aufbau der Softwarearchitektur erläutert. In Abschnitt 4.2 ist beispielhaft die Konstruktion eines Quadropters dargestellt, anhand derer die Aufteilung des Multikopters in die jeweiligen Teilkörper erläutert und die Parameteridentifikation beschrieben wird. Abschließend wird auf die verwendeten Prüfstände kurz eingegangen.

4.1 Topologie der Entwicklungsumgebung

4.1.1 Grundlegende Darstellung der Systemarchitektur

Auf Basis der gestellten Anforderungen wurde eine Entwicklungsumgebung mit der übergeordneten Topologie nach Abbildung 4.1 aufgebaut. Zur Gewährleistung der Anwenderfreundlichkeit dient die weitverbreitete, proprietäre Software MATLAB® und Simulink® von MathWorks® als Grundlage. Diese bietet mit der Komponente Simulink Real-Time™ die Möglichkeit, Programme in Echtzeit auf einer geeigneten Zielhardware auszuführen. Die Steuerung und Kommunikation mit der Zielhardware erfolgt über den Real-Time-Explorer. Die Programme für die Zielhardware werden benutzerfreundlich mittels C-Code-Generierung aus Simulink® heraus erzeugt. Als Standard-Schnittstelle wird Ethernet mit den beiden Übertragungsprotokollen UDP und TCP verwendet. Dies gewährleistet eine ausreichende Kapazität bei den zu übertragenden Datenmengen. Um die Vorteile der proprietären Software voll auszuschöpfen, wird jeder Teilnehmer des Rechnernetzwerks mit einer passenden Zielhardware in Form eines Einplatinencomputers ausgestattet. Das Rechnernetzwerk selbst ist als eine Sterntopologie angelegt, in der ein WLAN-Router als Access Point dient, welcher zusätzlich kabelgebundene Geräte über LAN einbindet. Dies ermöglicht, dass alle Teilnehmer untereinander kommunizieren können. Die Einbindung per LAN oder WLAN wird von vielen HMI-Geräten bereits standardmäßig unterstützt. Für HMI-Geräte, die keine LAN- oder WLAN-Schnittstelle

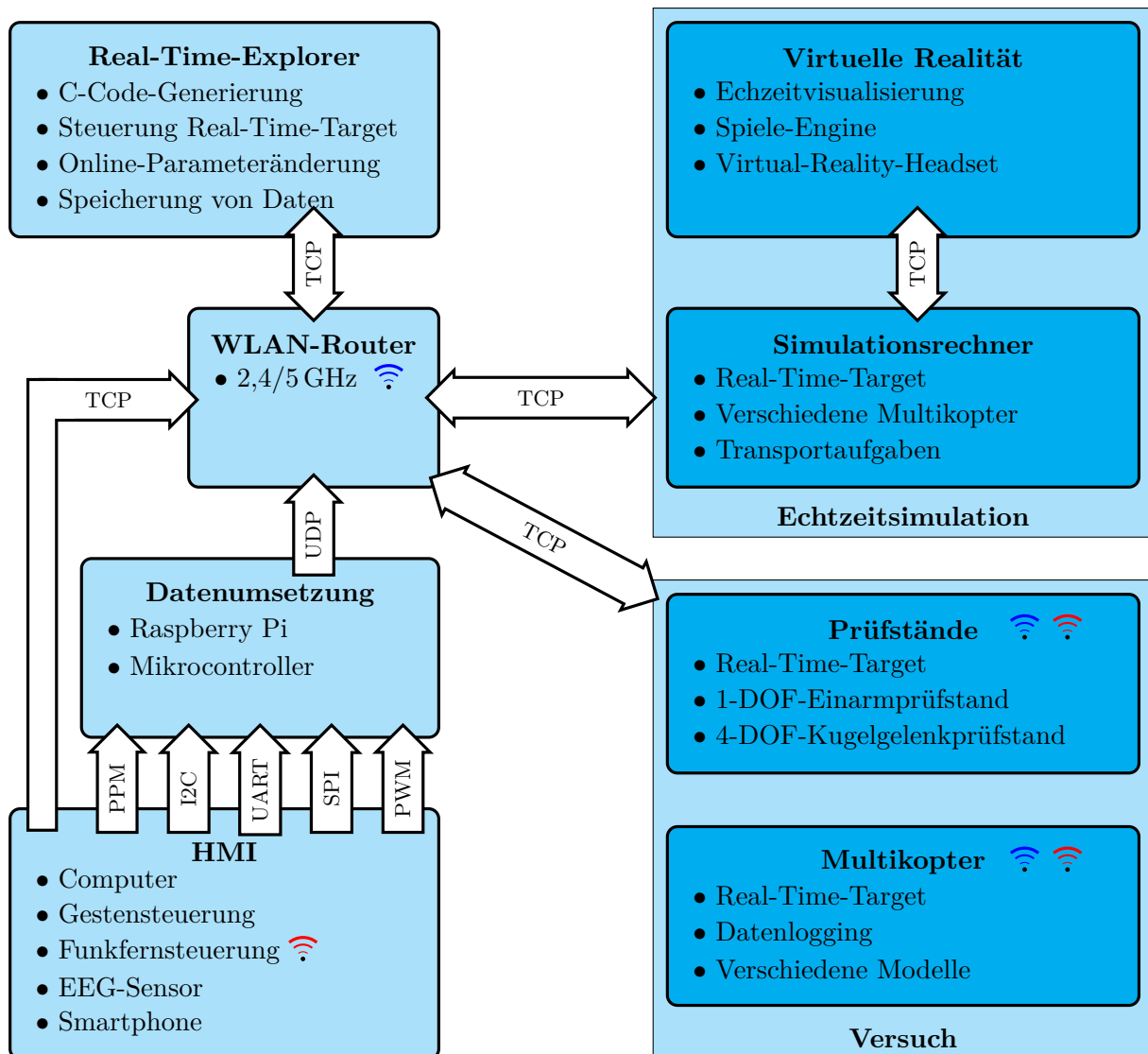




Abbildung 4.1: Übergeordnete Topologie der Entwicklungsumgebung

zur Verfügung haben, muss der Umweg zum Beispiel über einen Raspberry Pi oder einen Mikrocontroller genommen werden. Auf diese Weise kann nahezu jedes Gerät in das Netzwerk eingebunden und nutzbar gemacht werden. Bei der Steuerung der Ausgabekomponenten kommt der Funkfernsteuerung (engl.: Radio control, kurz: RC) eine Sonderrolle zu, da diese sowohl über das Netzwerk  als auch direkt über RC-Funk  mit den Prüfständen und Multikoptern kommunizieren kann. Hintergrund für den Einsatz des RC-Systems ist, dass moderne RC-Systeme eine höhere Übertragungssicherheit und Reichweite im Vergleich zu WLAN bieten.

Für die Entwicklung einer Anwendung stehen auf der Ausgabeseite drei Möglichkeiten zur Verfügung. Auf Basis des in Kapitel 2 vorgestellten Gleichungssystems können die Multikoptermodelle in Echtzeit auf dem Simulationsrechner simuliert werden. Auf einem weiteren per UDP verbundenen Rechner läuft die eigentliche Visualisierung. Mögliche Visualisierungssoftwares sind beispielsweise die Unreal-Engine, die Unity-Engine oder der Open-Source-Flugsimulator FlightGear. Durch

diese Möglichkeit können bereits in der Entwicklungszeit realitätsnahe Simulationen durchgeführt, Anpassungen vorgenommen oder Regler getestet werden. Neben autonomen Flugszenarien können die Modelle auch mit einem HMI-Gerät in der Simulation geflogen werden. Erste Hardwaretests können mit Hilfe von Prüfständen erfolgen. Beispielhaft sind hier der 1-DOF-Einarmprüfstand und der für die Entwicklung der Regelung wichtige 4-DOF-Kugelgelenkprüfstand zu nennen. Schlussendlich besteht die Möglichkeit, Versuche an dem ungebundenen Multikopter durchzuführen. Ein weiterer wichtiger Anwendungsfall in der Entwicklung stellt die Verbindung von den Simulationsmodellen mit der Hardware dar. Dies ist aufgrund der gewählten Sterntopologie des Rechnernetzwerks ohne Probleme möglich. Auf diese Weise können zum Beispiel Sensordaten in der virtuellen Realität während der Laufzeit visualisiert oder eine Hardware-in-the-Loop Simulation durchgeführt werden. Aufgrund der Struktur der Entwicklungsumgebung kann jeder Teil für sich entwickelt oder weiterentwickelt werden. Voraussetzung ist lediglich, dass eine geeignete Kommunikationsschnittstelle vorhanden ist.

Die Verwendung der dargestellten Rechnertopologie in Verbindung mit der Verwendung der proprietären Software Simulink Real-Time™ bietet viele Vorteile. Dazu gehören unter anderem

- die Simulation von Multikoptern oder Multikoptersystemen und deren Visualisierung in Echtzeit,
- die Steuerung der Simulationsmodelle mit unterschiedlichen HMI-Geräten,
- die schnelle und einfache Änderung von Software durch C-Code-Generierung,
- die Onlineüberwachung von Signalen und die Änderung von Parametern während der Laufzeit,
- die Möglichkeit zur unabhängigen Entwicklung oder Weiterentwicklung einzelner Netzwerkteilnehmer,
- die Kopplung zwischen Simulation und Hardware, um zum Beispiel
 - eine Echtzeitvisualisierung von Sensorsignalen zur Fehlerbehebung und Optimierung der Sensordatenerfassung durchzuführen. Hierzu können die Sensorwerte mit Hilfe eines virtuellen Multikopters visualisiert werden, was bei der Interpretation dreidimensionaler Bewegungen und im Besonderen bei der Darstellung von Rotationen große Vorteile bietet, oder
 - einen Hardware-in-the-Loop-Betrieb oder parallelen Betrieb von Modell und Hardware durchzuführen,
- die Erfassung, Visualisierung und Speicherung von bis zu 128 Signalen mit hoher Auflösung, sowie
- eine nachweisbare Echtzeitfähigkeit.

4.1.2 Systemarchitektur eines Multikopters

Hardwarearchitektur: Beim Aufbau der Entwicklungsumgebung auf Hardwareebene muss darauf geachtet werden, dass sich diese nahtlos in die in Abschnitt 4.1 vorgestellte Entwicklungsumgebung einfügt. Der zu diesem Zweck entwickelte Hardwareaufbau, der sowohl an den Prüfständen als auch an frei fliegenden Systemen verwendet wird, ist in Abbildung 4.2 dargestellt. Um eine hohe Abtastrate zu gewährleisten, wurden die Aufgaben eines digitalen Regelkreises hardware-spezifisch nach den jeweiligen Vorzügen entsprechend Abschnitt 1.2 aufgeteilt. Der verbaute Einplatinencomputer Commel LP-177 mit 1,1 GHz Grundtaktfrequenz und 2,5 GHz Burst-Frequenz dient als Zielhardware und erledigt alle rechenintensiven Teilaufgaben. Mit bis zu 8 GB RAM besitzt er genügend Arbeitsspeicher, um über einen längeren Zeitraum viele Messgrößen gleichzeitig erfassen und zwischenspeichern zu können. Für die Auswertung von Sensoren über verschiedene Schnittstellen wie I2C, CAN, PWM, UART, SPI und Weiteren, eignet sich ein derartiger Einplatinencomputer aufgrund fehlender Peripherien nicht, weshalb hierfür der Mikrocontroller STM32F429 eingesetzt wird. Dieser besitzt gegenüber dem Einplatinencomputer mit 180 MHz zwar deutlich weniger Rechenleistung, ist dafür aber mit den notwendigen Hardwarebausteinen ausgestattet. Er eignet sich daher für das Empfangen, Verarbeiten und Weiterleiten von Daten. Als Kommunikationsschnittstelle zu dem Einplatinencomputer dient eine Ethernet-Schnittstelle, welche auch bei größeren Datenmengen einen zügigen Datenaustausch garantiert. Für die Verwendung des STM32F429 wurde in dieser Arbeit auf das Entwicklungsboard NUCLEO-F429ZI von STMicroelectronics zurückgegriffen. Für dieses Board ist ein passendes Aufsteckmodul sowohl für eine inertielle Messeinheit (engl.: Inertial measurement unit, kurz: IMU) als auch für das globale Navigationssatellitensystem (engl.: Global navigation satellite system, kurz: GNSS) kommerziell verfügbar. Die Kommunikation des NUCLEO-Boards mit den jeweiligen Sensoren erfolgt über die geforderte Schnittstelle. Über den Mikrocontroller werden außerdem die Motoreinheiten über PWM, UART oder CAN angesteuert und falls erforderlich, die zurückgesendeten Signale empfangen. Die Kommunikation mit Servomotoren läuft meist über ein PWM-Signal. Werden die Sollwerte über RC-Funk übertragen, wird das vom Empfänger ausgegebene PPM-Signal im Mikrocontroller ausgewertet und an den Einplatinencomputer weitergeleitet.¹ Dient hingegen die WLAN-Schnittstelle als Übertragungsweg, erfolgt die Erfassung direkt über die Ethernet-Schnittstelle des Einplatinencomputers. Der vorgestellte Hardwareaufbau zeichnet sich durch mehrere Eigenschaften aus. Diese sind

- die einfache Programmierung der Lageregelung und der Sensordatenverarbeitung mit der etablierten Software MATLAB® und Simulink®,
- die Auswertung der Sensorik mit individuell einstellbaren Frequenzen,
- die schnelle Kommunikation zwischen Empfänger, Sensorik und Regelung

1 Die Puls-Pausen-Modulation (PPM) ist ein Kodierungsverfahren für Modellbaufunkfernsteuern.

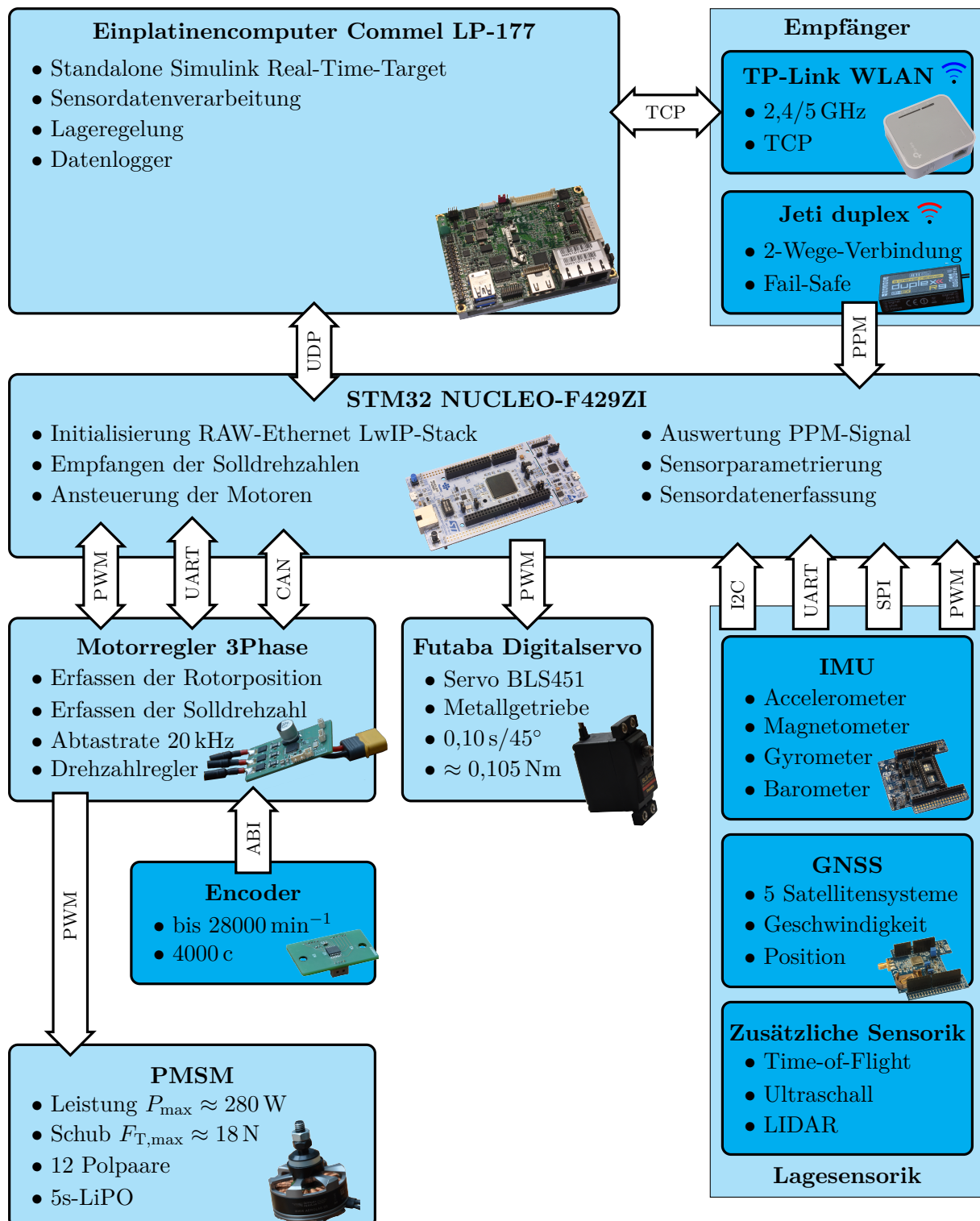


Abbildung 4.2: Topologie des Multikopter-Prüfstands

aufgrund der LAN-Schnittstelle zwischen Einplatinencomputer und Mikrocontroller,

- der Möglichkeit zur sicheren Übertragung der Sollwertsignale über RC-Funk,
- die nachweisbare Echtzeit für das Programm auf dem Mikrocontroller,
- eine erzielbare Abtastzeit von $T_A \leq 1 \text{ ms}$, welche die Sensordatenauswertung und das Regelverhalten des Multikopters begünstigen, sowie
- die Möglichkeit zur parallelen Entwicklung der unterschiedlichen Hardware-systeme.

Softwarearchitektur: Je nach Anwendungsfall und Hardware variiert der Aufbau der zugehörigen Software. Für die Umsetzung einer Echtzeitsimulation ergibt sich eine Programmstruktur, welche dem Blockschaltbild eines Standardregelkreises ähnelt (Lunze, 2020). Die Regelstrecke enthält das Modell eines Multikopters oder eines Multikoptersystems nach Kapitel 2. Die Ein- und Ausgangsgrößen werden bei Bedarf mit entsprechenden Blöcken zum Empfangen und Senden von Daten über UDP oder TCP ersetzt. Gemäß der Hardwaretopologie in Abbildung 4.2 muss für praktische Versuche mit einem Multikopter sowohl für den Einplatinencomputer als auch für den Mikrocontroller Software geschrieben werden. Die Software des Einplatinencomputers beinhaltet im Wesentlichen die Lageregelung sowie die Sensordatenverarbeitung. Hinzu kommen Blöcke zum Empfangen und Senden von Daten. Eine typische Programmstruktur für die Software des Einplatinencomputers ist in Abbildung 4.3 als Blockschaltbild dargestellt. Der automatisch generierte C-Code wird per WLAN auf die Zielhardware übertragen. In der dargestellten Struktur ist der Multikopter mit der Echtzeitvisualisierung verbunden, um zum Beispiel die Sensordaten zu visualisieren. Durch die Verwendung kompatibler Hardware können sämtliche Funktionen von MATLAB®, wie beispielsweise der Real-Time-Explorer, genutzt werden. Die auf einige wenige Ethernet-Schnittstellen beschränkte Treiberunterstützung grenzt die Auswahl der verwendbaren Einplatinencomputer ein. Ist die Entwicklung abgeschlossen, besteht die Möglichkeit, den generierten C-Code zum Beispiel auf einem Raspberry Pi mit Real-Time Linux auszuführen. Der daraus

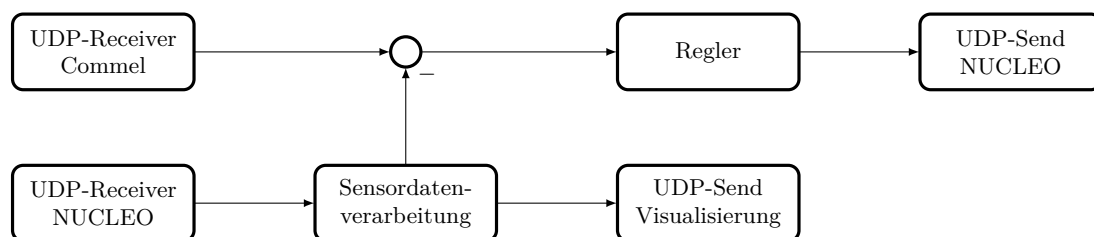


Abbildung 4.3: Typische Programmstruktur für den Einplatinencomputer

resultierende Vorteil liegt in der Gewichtseinsparung, da zum einen leichtere Einplatinencomputer verwendet werden können und zum anderen der WLAN-Router entfällt.

Als zentrale Kommunikationsschnittstelle zwischen dem Einplatinencomputer und den Sensoren beziehungsweise den Motoren dient das Mikrocontrollerboard STM32 NUCLEO-F429ZI. Um den Ethernet-Standard verwenden zu können, wurde auf dem Board ein RAW-Ethernet LWiP-Stack implementiert. Die Umsetzung des Ethernet-Standards ermöglicht den Austausch von Sollwerten und Sensordaten innerhalb kürzester Zeit, bei gleichzeitiger Verwendung aller Funktionalitäten eines Mikrocontrollers. Dies führt dazu, dass die Sensorsignale mit hohen Abtastfrequenzen verwendet und weiterverarbeitet werden können. Die Programmstruktur der verwendeten Software ist für den Mikrocontroller in Abbildung 4.4 dargestellt. Nach der Initialisierung der Hardware laufen sämtliche Programmteile interrupt-gesteuert und unabhängig voneinander in einer Interrupt-Service-Routine (ISR) ab. Die Kommunikationsgeschwindigkeit zwischen dem Einplatinencomputer und dem Mikrocontroller wird durch die eingestellte Sendefrequenz des Programms auf dem Einplatinencomputer bestimmt. Immer dann, wenn der Mikrocontroller eine entsprechende Nachricht über seine Ethernet-Schnittstelle empfängt, wird die Callback-Funktion aufgerufen. Innerhalb dieser Funktion werden die empfangenen Solldrehzahlen an die jeweiligen Motoren weitergeleitet und die Sensordaten an den Einplatinencomputer gesendet. Sämtliche weiteren ISR laufen unabhängig davon mit ihrer eigenen Abtastfrequenz. Das Einlesen der IMU-Sensorik erfolgt innerhalb einer Timer-ISR für alle Sensoren mit derselben Abtastfrequenz. Ist die Abtastfrequenz höher als die eines betrachteten Sensors, so werden die Werte dieses Sensors entsprechend mehrfach eingelesen. Bis auf einen erhöhten Rechenaufwand entstehen hieraus keine weiteren Nachteile. Die Daten des GNSS-Moduls werden in der UART-ISR in der vom Modul vorgegebenen Abtastfrequenz abgefragt und verarbeitet. Dasselbe gilt für das PPM-Signal des Empfängers.

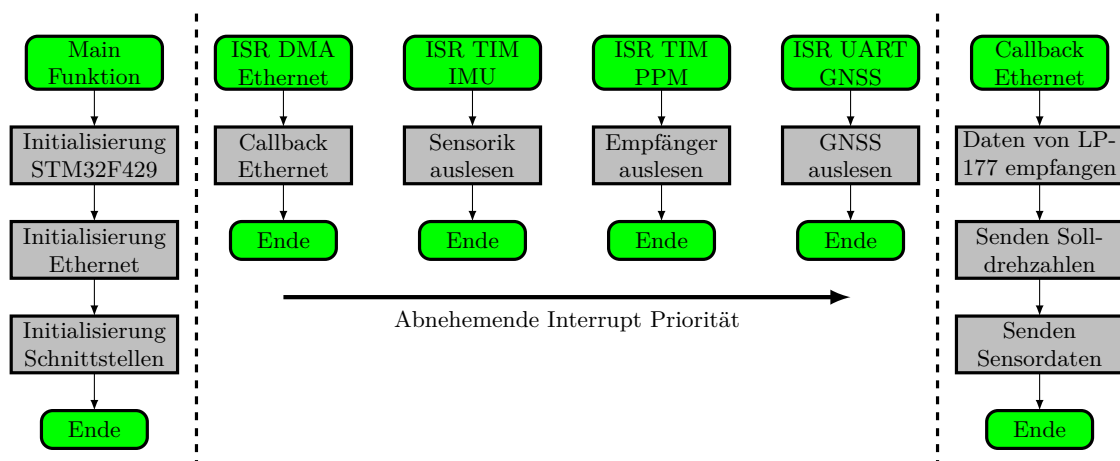


Abbildung 4.4: Programmablauf des STM32 NUCLEO-F429ZI

Betrachtung der verwendeten Lagesensorik: Eine IMU ist eine Ansammlung verschiedener Sensoren, die vorrangig der Bestimmung der aktuellen Orientierung eines Systems dienen. Für dieses Projekt wurde die Sensorplatine STM X-Nucleo-IKS01A2 verwendet. Sie ist direkt kompatibel mit dem verwendeten STM32 NUCLEO-F429ZI-Board. Die Sensorplatine ist dabei mit vier verschiedenen Sensoren ausgestattet, deren Parametrierung und Auswertung über eine I2C-Schnittstelle erfolgt. Der Sensor *LSM6DSL* erfasst sowohl die auftretenden Beschleunigungen als auch die Drehraten. Mit dem Sensor *LSM303AGR* steht ein weiterer Sensor zur Verfügung, der die Beschleunigungen in den drei Raumrichtungen erfasst. Außerdem besitzt er ein Magnetometer zur Messung der Magnetfeldstärke in den drei Raumrichtungen. Der vorherrschende absolute Luftdruck lässt sich mit Hilfe des Sensors *LPS22HB* erfassen. Um Messfehler zu vermeiden, ist bei diesem Sensor auf die Reduzierung von Umwelteinflüssen zu achten. Für die vorgestellten Sensoren gelten die in Tabelle 4.1 dargestellten Werte. Sämtliche Sensoren sind mit einstellbaren Filtern ausgestattet. Sie werden unter anderem deswegen benötigt, da die Sensordaten teilweise mit einer im Vergleich zu deren Datenrate geringeren Übertragungsrate an den Einplatinencomputer übermittelt werden. Um Aliasing-Effekte zu vermeiden und eine bestmögliche Rauschunterdrückung zu garantieren, müssen die Sensordaten vor dem Übertragen gefiltert werden. Die verschiedenen Einstellmöglichkeiten finden sich in den jeweiligen Datenblättern des Sensorherstellers. Im vorliegenden Fall wurden sämtliche Sensoren mit der maximal möglichen Datenrate betrieben und die Filter für eine Übertragungsfrequenz von $f_A = 1 \text{ kHz}$ eingestellt. Das GNSS-Modul dient vorrangig zur Erfassung der Position des Systems. Zum Einsatz kommt das GNSS-Modul X-Nucleo-GNSS1A1. Es bietet die Möglichkeit, die Satellitenkonstellationen von GPS, GLONASS, GALILEO und Beidou zu erfassen. Standardmäßig erfolgt die Datenauswertung über eine UART-Schnittstelle, über welche die sogenannten NMEA-Daten, die unterschiedliche Informationen enthalten, im ASCII-Format gesendet werden. Für die Verwendung des GNSS in einer Drohne sind die wichtigen Informationen in den Nachrichten GPWGA und GPRMC enthalten. Diese beinhalten die Koordinaten, die Geschwindigkeit und die Richtung über Grund. Weitere Nachrichten können

Tabelle 4.1: Übersicht der verwendeten Sensoren

Sensor	Wertebereich	Datenrate	Auflösung
LSM6DSL-Accelerometer	$\mathbf{a}_{\max} = \pm 2^k g$, für $k = 1, \dots, 4$	$f_{\max} = 6,66 \text{ kHz}$	16-bit
LSM6DSL-Gyrometer	$\boldsymbol{\omega}_{\max} = \pm 2^k \cdot 125 \text{ dps}$, für $k = 1, \dots, 4$	$f_{\max} = 6,66 \text{ kHz}$	16-bit
LSM303AGR-Accelerometer	$\mathbf{a}_{\max} = \pm 2^k g$, für $k = 1, \dots, 4$	$f_{\max} = 1,33 \text{ kHz}$	16-bit
LSM303AGR-Magnetometer	$\mathbf{B}_{\max} = \pm 50 \text{ gauss}$	$f_{\max} = 100 \text{ Hz}$	16-bit
LPS22HB-Barometer	$p_{\max} = 260 - 1260 \text{ hPa}$	$f_{\max} = 75 \text{ Hz}$	24-bit

in der Regel deaktiviert werden. Die Sensordatenfusion wird mit einem erweiterten Kalman-Filter realisiert, welches auf dem Einplatinencomputer per C-Code-Generierung implementiert ist. Zur Berechnung und Vorgehensweise sei an dieser Stelle auf Standardliteratur wie zum Beispiel (Adamy, 2018) verwiesen.

4.2 Mechanischer Aufbau der Prüfstände und Multikopter

Aufbau eines Multikopters: Die Konstruktion der jeweiligen Bauteile ist in einem ersten Entwurf so gestaltet, dass durch einfache Anpassungen unterschiedliche Drohnenmodelle aufgebaut werden können. Beispielhaft ist die Konstruktion eines Quadropters in Abbildung 4.5 dargestellt. Der grundlegende Aufbau besteht aus einem Trägerkreuz aus Aluminiumprofilen, welches die komplette Last des Multikopters aufnimmt. Über Halterungen aus Epoxidharz werden die Trägerplatten aus Balsaholz mittig an das Trägerkreuz geklemmt. Mit den dargestellten Trägerplatten lässt sich somit beispielsweise auch ein Oktokopter aufbauen. Für einen Tri- oder Hexakopter werden die Trägerplatten ausgetauscht. Die Landebeine sind im FDM-Druckverfahren hergestellt und ebenfalls am Trägerkreuz befestigt. Die Farben der Landebeine verdeutlichen die Orientierung des Multikopters. Am Ende von jedem Aluminiumprofil wird eine Motorhalterung aus kohlefaserverstärkten Epoxidharzbauteilen montiert, welche sowohl den Motor als auch die notwendige Motor- und Sensorplatine aufnehmen. Zusammen bilden diese Teile die Motor- oder Antriebseinheit. Neben der direkten Montage und der damit verbundenen starren Verbindung zwischen Aluminiumprofil und Motoreinheit besteht auch die Möglichkeit, die Verbindung schwenkbar auszuführen. Hierfür wird am Ende des Aluminiumprofils ein Servomotor mittels Adapter angebracht, der dann die Motoreinheit aufnimmt. Beide Möglichkeiten sind in Abbildung 4.6 dargestellt. Dieses Grundgerüst besitzt eine Spannweite von Motor zu Motor von $d = 700$ mm. Dadurch können Propeller mit einem Durchmesser von bis zu 19 Zoll verwendet wer-

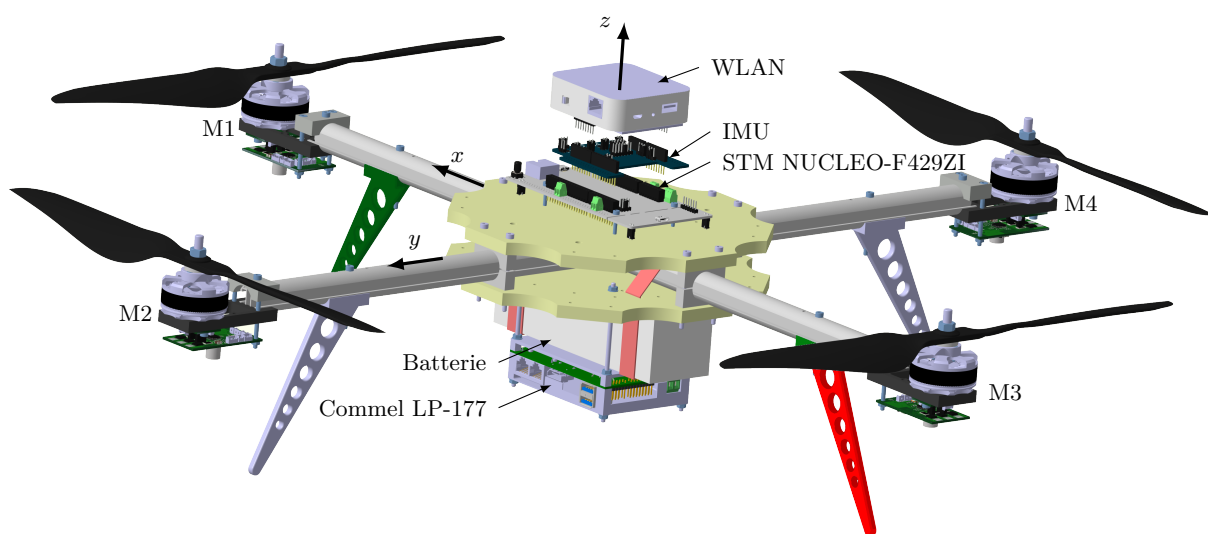
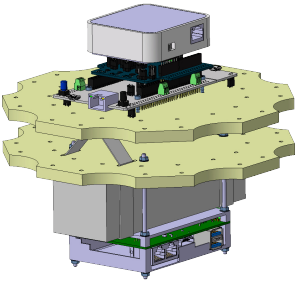
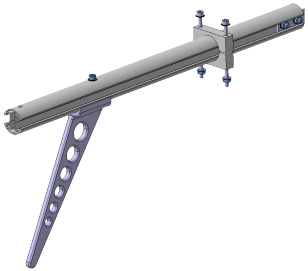
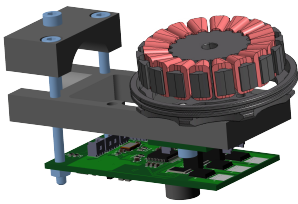



Abbildung 4.5: Mechanischer Aufbau des Quadropters

Tabelle 4.2: Physikalische und geometrische Parameter der einzelnen Teilkörper eines Multikopters

Teilkörper	Einzelkomponenten	Masse in kg Trägheitsmoment in kgm^2	Abstände in m
	<ul style="list-style-type: none"> • Trägerplatten • Akku • Nucleo-Board • WLAN-Router • IMU und GNSS • Einplatinencomputer • Kabel und Schrauben 	$m_1 = 1,2538$ $\Theta_1 \approx \begin{bmatrix} 0,003 & 0 & 0 \\ 0 & 0,004 & 0 \\ 0 & 0 & 0,003 \end{bmatrix}$	$h_{11} = \text{variabel}$ $h_{21} = 0,0287$ $l_{11} = 0$ $l_{21} = 0,1535$
	<ul style="list-style-type: none"> • Aluminiumrohr • Rohrbacken • Fuß 	$m_2 = 0,13099$ $\Theta_2 \approx \begin{bmatrix} 4,12 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5}$	$h_{32} = 0,0034$ $h_{33} = 0,0$ $l_{32} = 0,156$ $l_{33} = 0,0326$
	<ul style="list-style-type: none"> • Motorhalterung • 3Phase-Regler • Sensorplatine • Stator 	$m_3 = 0,121$ $\Theta_3 \approx \begin{bmatrix} 3,56 & 0 & 0 \\ 0 & 7,37 & 0 \\ 0 & 0 & 6,35 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5}$	$h_{43} = 0,017$ $l_{43} = 0,0436$
	<ul style="list-style-type: none"> • Rotor • Propeller 	$m_4 = 0,065$ $\Theta_4 \approx \begin{bmatrix} 22,56 & 0 & 0 \\ 0 & 1,27 & 0 \\ 0 & 0 & 22,47 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5}$	

Aufbau der Prüfstände: Im Rahmen dieser Arbeit werden zwei Prüfstände zum Testen der Hard- und Software eingesetzt. Diese arbeiten mit identischer Hardware, sodass das Übertragen der Ergebnisse ohne Weiteres möglich ist. Der 1-DOF-Einarmprüfstand ermöglicht zum einen die Durchführung von Messungen und wird unter anderem für die Aufnahme der Motorkennfelder und für die Bestimmung der Auftriebskraft in Abschnitt 3.4 verwendet. Zum anderen können aber auch dynamische Versuche, beispielsweise zum Ansprechverhalten des Motorreglers im Bezug zu einer Lageänderung, durchgeführt werden. Aufgrund der eindimensionalen Betrachtungsweise lässt sich das Systemverhalten verhältnismäßig einfach beurteilen und entsprechende Rückschlüsse können gezogen werden. Für den Entwurf einer Regelung zur Stabilisierung der Drohne erweist sich der 4-DOF-Kugelgelenkprüfstand als wichtiger Zwischenschritt. Dieser ist so konstruiert, dass der Drehpunkt des Kugelgelenks möglichst nahe am Schwerpunkt der realen

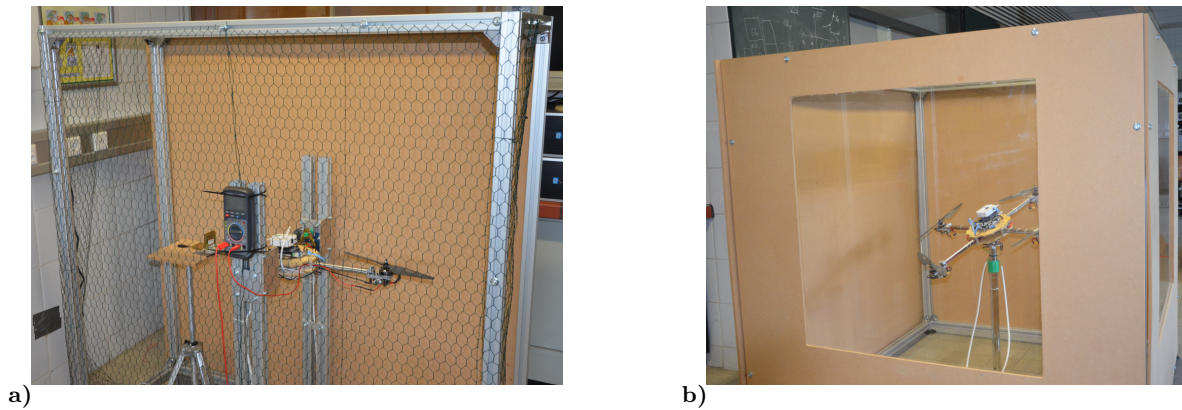


Abbildung 4.7: Mechanischer Aufbau der verwendeten Prüfstände mit a) dem 1-DOF-Einarmprüfstand und b) dem 4-DOF-Kugelgelenkprüfstand

Drohne liegt. Hierdurch wird das Verhalten im frei fliegenden Fall am wenigsten verfälscht. Ein weiterer Freiheitsgrad entsteht durch das translatorische Gelenk in Form eines Teleskoprohrs, auf dem das Kugelgelenk montiert ist. Dadurch kann das Zusammenspiel der Höhenregelung und der Regelung der Orientierung vorab sicher geprüft werden. Beide Prüfstände sind in Abbildung 4.7 dargestellt.

5 Analyse verschiedener Multikoptermodelle

Um eine Vergleichbarkeit herzustellen, wird für alle in dieser Arbeit betrachteten Multikoptermodelle dasselbe Regelungskonzept der exakten Linearisierung verwendet. Dieses Regelungskonzept basiert auf dem Modell des jeweiligen Multikopters. Die in Kapitel 2 hergeleiteten allgemeinen Multikoptergleichungen führen auf komplexe Gleichungsstrukturen, die für den Reglerentwurf ungeeignet sind. Deshalb werden in Abschnitt 5.1 zunächst vereinfachte Gleichungen abgeleitet und die Grundlagen des Regelungskonzepts erläutert. Im Anschluss daran werden die Gleichungssysteme auf unterschiedliche Multikoptersysteme angewandt. In Abschnitt 5.2 wird der Einarmprüfstand sowohl in der Simulation als auch in der Praxis betrachtet. Danach wird jeweils ein unter-, voll- und überaktuierter frei fliegender Multikopter vorgestellt. Als Beispiel für ein unteraktuiertes System wird in Abschnitt 5.3 ein Quadrocopter sowohl in der Simulation als auch in der Praxis untersucht. Der vorgestellte Trikopter mit schwenkbaren Motoreinheiten in Abschnitt 5.4 gehört zu den vollaktuierten Systemen. Sowohl der Quadrocopter mit schwenkbaren Antriebseinheiten als auch der untersuchte Okto-kopter mit acht starren Motoreinheiten sind überaktuierte Systeme. Beide werden in Abschnitt 5.5 vorgestellt. Eine kurze Gegenüberstellung unterschiedlicher Multikoptermodelle erfolgt abschließend in Abschnitt 5.6.

5.1 Grundlagen des Reglerentwurfs

Bei Multikoptern handelt es sich um instabile Systeme, weshalb diese nicht ohne einen Regler betrieben werden können. Um eine gewisse Vergleichbarkeit herzustellen, basieren alle nachfolgenden Betrachtungen auf dem Regelungskonzept der exakten Linearisierung.

Vereinfachte Modelle für die Reglersynthese: Für die Aufgabe des Reglerentwurfs wird angenommen, dass der in Kapitel 3 entwickelte Drehzahlregler in der Lage ist, sämtliche, auf die Motoren einwirkenden Störungen auszugleichen. Durch eine geeignete Wahl der Zeitkonstanten besteht entsprechend Gleichung (3.100) ein linearer Zusammenhang zwischen der Soll- und der Istdrehzahl und es resultiert ein PT1-Verhalten. Das für die mechanischen Modelle notwendige Motordrehmoment folgt aus dem Vergleich von Gleichung (3.100) und dem für den Motor gültigen

Drallsatz (3.36). Für das Moment ergibt sich

$$T_M \dot{\omega}_M + \omega_M = u_M \quad \Longrightarrow \quad \tau_M = \frac{k_4 (u_M - \omega_M)}{T_M}, \quad \tau_M = \tau_{Mi} - \tau_W. \quad (5.1)$$

Dieses Verhalten wird auch für das Schwenken der Motoreinheiten durch die verwendeten Servomotoren angenommen. Deshalb gilt analog

$$T_S \dot{\omega}_S + \omega_S = u_S \quad \Longrightarrow \quad \tau_S = \frac{k_3 (u_S - \omega_S)}{T_S}. \quad (5.2)$$

Falls notwendig, werden mit $\hat{\mathbf{f}}_c = \mathbf{0}$ zusätzlich die auftretenden Corioliskräfte vernachlässigt. Parameter, welche sich in Abhängigkeit der Propellerwinkel $\Psi_{M1:4}$ ändern, wie zum Beispiel der Trägheitstensor Θ_D , werden um $\Psi_{M1:4} = 0$ linearisiert. Für die Annahme, dass die Drehzahlregelung der Motoren zu jedem Zeitpunkt das PT1-Verhalten garantiert, vereinfachen sich die auftretenden Gelenkbeschleunigungen (2.80) und (2.81) zu

$$\dot{s}_3 = k_3^{-1} \mathbf{J}_3^T \hat{\mathbf{f}}^e, \quad \text{mit } k_3 = \mathbf{J}_3^T \hat{\mathbf{M}} \mathbf{J}_3, \quad (5.3)$$

$$\dot{s}_4 = k_4^{-1} \mathbf{J}_4^T \hat{\mathbf{f}}^e, \quad \text{mit } k_4 = \mathbf{J}_4^T \hat{\mathbf{M}} \mathbf{J}_4. \quad (5.4)$$

Zur besseren Unterscheidung werden bei Bedarf die eingepprägten Kräfte $\hat{\mathbf{f}}^e$ nach den eingepprägten Kräften der Eingangsgrößen $\hat{\mathbf{f}}^u$ und der Gewichtskräfte $\hat{\mathbf{f}}^g$ unterteilt. Weiter ergeben sich für die Gelenkbeschleunigung des Gelenks G_1 die Anteile

$$\hat{\mathbf{M}}_{A0} = \sum_{j=2}^4 \mathbf{J}_{j,1}^T \hat{\mathbf{M}}_j \mathbf{J}_{j,1}, \quad (5.5a)$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{A0} = \sum_{j=2}^4 \left(\mathbf{J}_{j,1}^T \hat{\mathbf{f}}_j^e - \mathbf{J}_{j,1}^T \hat{\mathbf{M}}_j \mathbf{J}_{j,1} \mathbf{s}_1 \right) - \sigma_{A0} \hat{\mathbf{f}}^e - \mathbf{J}_1^T \hat{\mathbf{M}} (\mathbf{J}_3 \mathbf{s}_3 + \mathbf{J}_4 \mathbf{s}_4) \quad (5.5b)$$

mit der Abkürzung

$$\sigma_{A0} = \mathbf{J}_1^T \hat{\mathbf{M}} \mathbf{J}_3 k_3^{-1} \mathbf{J}_3^T + \mathbf{J}_1^T \hat{\mathbf{M}} \mathbf{J}_4 k_4^{-1} \mathbf{J}_4^T. \quad (5.5c)$$

Die Gleichung (2.63) mit den Anteilen (2.64) und (5.5) sowie die Gleichungen (5.3) und (5.4) bilden die Grundlage für den Reglerentwurf der in dieser Arbeit betrachteten Drohnenmodelle. Das resultierende nichtlineare Zustandsraummodell für das Gelenk G_1 setzt sich aus den dynamischen Gleichungen der Mechanik

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{B_L} \\ \dot{\mathbf{x}}_{B_V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}(\mathbf{x}_{B_L}) \mathbf{x}_{B_V} \\ \hat{\mathbf{M}}_D^{-1}(\mathbf{x}_{B_L}, t) \hat{\mathbf{f}}_D^{ec}(\mathbf{x}_{B_L}, \mathbf{x}_{B_V}, t) \end{bmatrix} \quad (5.6a)$$

mit den Zuständen des Lagewinders $\mathbf{x}_{\text{BL}} = \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{7 \times 1}$ sowie den Zuständen des Geschwindigkeitswinders $\mathbf{x}_{\text{BV}} = \mathbf{s} \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$ zusammen. Das Zustandsraummodell wird durch die linearen Zustandsgleichungen der Antriebe

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{\text{ML}} \\ \dot{\mathbf{x}}_{\text{SL}} \\ \dot{\mathbf{x}}_{\text{MV}} \\ \dot{\mathbf{x}}_{\text{SV}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\text{MV}} \\ \mathbf{x}_{\text{SV}} \\ -\frac{1}{T_{\text{M}}} \mathbf{x}_{\text{MV}} \\ -\frac{1}{T_{\text{S}}} \mathbf{x}_{\text{SV}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{\text{M}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{\text{S}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\text{M}} \\ \mathbf{u}_{\text{S}} \end{bmatrix} \quad (5.6b)$$

vervollständigt, wobei $\mathbf{x}_{\text{MV}} = \boldsymbol{\omega}_{\text{M}} \in \mathbb{R}^{i_{\text{M}} \times 1}$ sowie $\mathbf{x}_{\text{ML}} = \boldsymbol{\Psi}_{\text{M}} \in \mathbb{R}^{i_{\text{M}} \times 1}$ die Dimension entsprechend der Anzahl der Ausleger mit Antriebsmotor i_{M} haben. Die Dimension der Zustandsgrößen $\mathbf{x}_{\text{SV}} = \boldsymbol{\omega}_{\text{S}} \in \mathbb{R}^{i_{\text{S}} \times 1}$ und $\mathbf{x}_{\text{SL}} = \boldsymbol{\Psi}_{\text{S}} \in \mathbb{R}^{i_{\text{S}} \times 1}$ entspricht der Anzahl der Ausleger mit einer schwenkbaren Motoreinheit i_{S} . Die Matrizen $\mathbf{B}_{\text{M}} = \frac{1}{T_{\text{M}}} \mathbf{E}$ und $\mathbf{B}_{\text{S}} = \frac{1}{T_{\text{S}}} \mathbf{E}$ sind Diagonalmatrizen. Die Eingangsgrößen sind $\mathbf{u}_{\text{M}} \in \mathbb{R}^{i_{\text{M}} \times 1}$ und $\mathbf{u}_{\text{S}} \in \mathbb{R}^{i_{\text{S}} \times 1}$. Aus regelungstechnischer Sicht handelt es sich damit bei Multikoptern um nichtlineare eingangsaffine Mehrgrößensysteme der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (5.7a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{c}(\mathbf{x}), \quad (5.7b)$$

mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_{\text{BL}}^{\text{T}} \ \mathbf{x}_{\text{BV}}^{\text{T}} \ \mathbf{x}_{\text{ML}}^{\text{T}} \ \mathbf{x}_{\text{SL}}^{\text{T}} \ \mathbf{x}_{\text{MV}}^{\text{T}} \ \mathbf{x}_{\text{SV}}^{\text{T}}]^{\text{T}}$.

Exakte Linearisierung: Für den späteren Entwurf eines exakt linearisierenden Regelungskonzepts und der Analyse nichtlinearer eingangsaffiner Systeme bringt die Transformation der Zustandsgleichungen auf eine geeignete Normalform entscheidende Vorteile (Adamy, 2018). Der Grundgedanke der hier vorgestellten Transformationen wird zunächst für ein Eingrößensystem betrachtet. In einem ersten Schritt wird die gewünschte Ausgangsgröße y gemäß der Vorschrift

$$\begin{aligned} y &= c(\mathbf{x}), \\ \dot{y} &= L_{\mathbf{a}}c(\mathbf{x}) + \underbrace{L_{\mathbf{b}}c(\mathbf{x})}_{=0} u, \\ \ddot{y} &= L_{\mathbf{a}}^2c(\mathbf{x}) + \underbrace{L_{\mathbf{b}}L_{\mathbf{a}}c(\mathbf{x})}_{=0} u, \\ &\vdots \\ y^{(\delta-1)} &= L_{\mathbf{a}}^{\delta-1}c(\mathbf{x}) + \underbrace{L_{\mathbf{b}}L_{\mathbf{a}}^{\delta-2}c(\mathbf{x})}_{=0} u, \\ y^{(\delta)} &= L_{\mathbf{a}}^{\delta}c(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{b}}L_{\mathbf{a}}^{\delta-1}c(\mathbf{x})u \end{aligned} \quad (5.8)$$

solange abgeleitet, bis ein direkter Bezug zur Eingangsgröße u besteht. Die Anzahl der notwendigen Ableitungen entspricht dem relativen Grad δ des Systems. Gleichung (5.8) beinhaltet dabei die Lie-Ableitung

$$L_{\mathbf{a}}c(\mathbf{x}) := \frac{\partial c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{a}(\mathbf{x}). \quad (5.9)$$

Der Term $L_{\mathbf{a}}^k c(\mathbf{x})$ beschreibt eine Lie-Ableitung k -ter Ordnung. Diese ist mit

$$L_{\mathbf{a}}^k c(\mathbf{x}) := \frac{\partial L_{\mathbf{a}}^{k-1} c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (5.10)$$

definiert. Für eine mehrfache Lie-Ableitung gilt die Vorschrift

$$L_{\mathbf{f}_2} L_{\mathbf{f}_1} \lambda(\mathbf{x}) = \frac{\partial (L_{\mathbf{f}_1} \lambda(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{\partial \lambda(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}_1(\mathbf{x}) \right) \mathbf{f}_2(\mathbf{x}). \quad (5.11)$$

Für den Fall $\delta = n$ führt die Wahl von n neuen Zustandsgrößen \mathbf{z} auf die nichtlineare Regelungsnormalform

$$\begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(\delta-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(\mathbf{x}) \\ L_{\mathbf{a}}c(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_{\mathbf{a}}^{\delta-1}c(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ L_{\mathbf{a}}^\delta c(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{a}}^{\delta-1} c(\mathbf{x}) \end{bmatrix} u. \quad (5.12)$$

Die gezielte Wahl der Eingangsgröße mit

$$u(\mathbf{x}, v) = \frac{-L_{\mathbf{a}}^\delta c(\mathbf{x}) + v}{L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{a}}^{\delta-1} c(\mathbf{x})} \quad (5.13)$$

liefert unter der Voraussetzung, dass $D_\delta(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{a}}^{\delta-1} c(\mathbf{x}) \neq 0$ für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ stets erfüllt ist, einen linearen Zusammenhang zwischen der neuen Eingangsgröße v und der δ -fachen Ableitung der Ausgangsgröße $y^{(\delta)}$. Die δ -fache Integratorkette ergibt dann den Zusammenhang zwischen der neuen Eingangsgröße v und der Ausgangsgröße y . Setzt man Gleichung (5.13) in (5.12) ein, ergibt sich ein System, das in der sogenannten Brunovský-Normalform vorliegt. Zwischen den Zustandsgrößen \mathbf{x} und den neuen Zustandsgrößen \mathbf{z} besteht der Zusammenhang $\mathbf{z} = \mathbf{t}(\mathbf{x})$. Dabei ist $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ ein Diffeomorphismus. Für den Fall $\delta < n$ bleibt das Vorgehen für die ersten δ Zustandsgrößen identisch. Für die übrigen Zustände $z_{\delta+1}$ bis z_n kann die Funktion \mathbf{t}_i , welche den Zustand \mathbf{x} auf z_i abbildet, unter der Voraussetzung, dass \mathbf{t} ein Diffeomorphismus bleibt, frei gewählt werden. Für den Fall $\delta < n$ führt die Wahl

von n neuen Zustandsgrößen \mathbf{z} auf die sogenannte Byrnes-Isidori-Normalform

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_\delta \\ z_{\delta+1} \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(\mathbf{x}) \\ L_{\mathbf{a}}c(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_{\mathbf{a}}^{\delta-1}c(\mathbf{x}) \\ t_{\delta+1}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ t_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_\delta \\ \dot{z}_{\delta+1} \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ L_{\mathbf{a}}^\delta c(\mathbf{x}) \\ \dot{t}_{\delta+1}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \dot{t}_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ L_{\mathbf{b}}L_{\mathbf{a}}^{\delta-1}c(\mathbf{x}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u. \quad (5.14)$$

Das Verfahren lässt sich unter der Voraussetzung $\dim(\mathbf{y}) = \dim(\mathbf{u}) = m$ auf Mehrgrößensysteme erweitern. Hierfür wird die Vorgehensweise (5.8) für alle m Ausgangsgrößen wiederholt und der jeweils zur Ausgangsgröße dazugehörige relative Grad $\delta_i = \min \{l | L_{\mathbf{b}_k} L_{\mathbf{a}}^{l-1} c_i(\mathbf{x}) \neq 0\}$ mit $i, k = 1, \dots, m$ bestimmt. Die resultierende Byrnes-Isidori-Normalform hat für das Mehrgrößensystem mit $\delta \leq n$ den Aufbau

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{\delta_1} \\ \vdots \\ \dot{z}_{\delta_1+\dots+\delta_{m-1}+1} \\ \dot{z}_{\delta_1+\dots+\delta_{m-1}+2} \\ \vdots \\ \dot{z}_{\delta_1+\dots+\delta_m} \\ \dot{z}_{\delta+1} \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ L_{\mathbf{a}}^{\delta_1} c_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ z_{\delta_1+\dots+\delta_{m-1}+2} \\ z_{\delta_1+\dots+\delta_{m-1}+3} \\ \vdots \\ L_{\mathbf{a}}^{\delta_m} c_m(\mathbf{x}) \\ \dot{t}_{\delta+1}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \dot{t}_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^m L_{\mathbf{b}_k} L_{\mathbf{a}}^{\delta_1-1} c_1(\mathbf{x}) u_k \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^m L_{\mathbf{b}_k} L_{\mathbf{a}}^{\delta_m-1} c_m(\mathbf{x}) u_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

Aus dieser Gleichung lässt sich weiter der Zusammenhang

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{z}_{\delta_1} \\ \vdots \\ \dot{z}_{\delta_m} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{z}}_\delta} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_{\mathbf{a}}^{\delta_1} c_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_{\mathbf{a}}^{\delta_m} c_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}_\delta} + \underbrace{\begin{bmatrix} L_{\mathbf{b}_1} L_{\mathbf{a}}^{\delta_1-1} c_1(\mathbf{x}) & \dots & L_{\mathbf{b}_m} L_{\mathbf{a}}^{\delta_1-1} c_1(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{\mathbf{b}_1} L_{\mathbf{a}}^{\delta_m-1} c_m(\mathbf{x}) & \dots & L_{\mathbf{b}_m} L_{\mathbf{a}}^{\delta_m-1} c_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_\delta} \mathbf{u} = \Phi(\mathbf{z}, \mathbf{u}) \quad (5.16)$$

zwischen dem Eingangsgrößenvektor \mathbf{u} und dem Zustandsgrößenvektor $\dot{\mathbf{z}}_\delta$ angeben. Außerdem gilt $\mathbf{y}_\delta = \dot{\mathbf{z}}_\delta$ mit $\mathbf{y}_\delta = [y_1^{(\delta_1)} \dots y_m^{(\delta_m)}]^\top$. Der Vektor $\boldsymbol{\delta} = [\delta_1 \ \delta_2 \ \dots \ \delta_m]^\top$ definiert den vektoriellen und $\delta = \sum_i \delta_i$ den totalen relativen Grad des Systems. Ein System hat den vektoriellen relativen Grad $\boldsymbol{\delta}$, wenn

1. $L_{\mathbf{b}_k} L_{\mathbf{a}}^{l-1} c_i(\mathbf{x}) = 0$ für $i, k = 1, \dots, m$ und $l = 1, \dots, \delta_i - 1$ gilt und
2. die $m \times m$ -Entkopplungsmatrix $\mathbf{D}_\delta(\mathbf{x})$ regulär ist, was bedeutet, dass $\det(\mathbf{D}_\delta(\mathbf{x})) \neq 0$ ist.

Für ein Mehrgrößensystem mit dem wohldefinierten vektoriellen relativen Grad $\boldsymbol{\delta}$ wird durch den Stellgrößenvektor

$$\mathbf{u} = \mathbf{D}_\delta^{-1}(\mathbf{x}) (\mathbf{v} - \mathbf{c}_\delta(\mathbf{x})) \quad (5.17)$$

eine Eingangs-Ausgangs-Linearisierung erzielt (Sontag u. a., 1995). Systeme mit einem relativen beziehungsweise totalen relativen Grad $\delta < n$ besitzen demnach eine externe und eine interne Dynamik. Dabei kann stets nur die externe Dynamik auf Regelungsnormalform gebracht werden. Die übrigen Zustände verbleiben im Allgemeinen nichtlinear. Sowohl die interne als auch die externe Dynamik müssen bei der Stabilitätsanalyse betrachtet werden und stabil sein.

Entsprechend Abschnitt 3.5 wird ein System als flach bezeichnet, wenn gemäß Gleichung (3.67) die Funktionen

$$\mathbf{x} = \Phi_{\mathbf{x}} \left(\mathbf{y}_{\text{lin}}, \dot{\mathbf{y}}_{\text{lin}}, \dots, \mathbf{y}_{\text{lin}}^{(\beta)} \right) \quad \text{und} \quad \mathbf{u} = \Phi_{\mathbf{u}} \left(\mathbf{y}_{\text{lin}}, \dot{\mathbf{y}}_{\text{lin}}, \dots, \mathbf{y}_{\text{lin}}^{(\beta+1)} \right)$$

für $\dim(\mathbf{y}_{\text{lin}}) = \dim(\mathbf{u})$ existieren. Mit Bezug zur exakten Linearisierung gilt, dass ein exakt zustandslinearisierbares System auch flach ist. Dies folgt unmittelbar aus der inversen Beziehung des Diffeomorphismus $\mathbf{z} = \mathbf{t}(\mathbf{x})$ sowie dessen Ableitung. Handelt es sich um ein Eingrößensystem, so ist die Bedingung hinreichend und notwendig. Im Fall eines Mehrgrößensystems ist die Bedingung lediglich hinreichend. Das bedeutet, dass ein Mehrgrößensystem flach sein kann, obwohl es nicht exakt zustandslinearisierbar ist.

Trajektorienfolgeregelung auf Basis der exakten Linearisierung: Mit dem Eingangsgrößenvektor (5.17) gelingt es, die Nichtlinearitäten der externen Dynamik des auf Byrnes-Isidori-Normalform gebrachten Systems zu kompensieren. Die durch Einsetzen von (5.17) in (5.16) resultierende Integratorkette $\mathbf{y}_\delta = \mathbf{v}$ ist dann zwar linear, aber nicht zwangsläufig stabil. Eine Stabilisierung gelingt durch die Wahl des neuen Eingangsgrößenvektors \mathbf{v} mit den Elementen

$$v_k = K_{S_k} w_k - \sum_{i=0}^{\delta_k-1} a_{k,i} y_k^{(i)}, \quad k = 1, \dots, m. \quad (5.18)$$

Mit dem neuen Eingangsgrößenvektor $\mathbf{v} = [v_1 \dots v_m]^T$ ergibt sich durch das Einsetzen von (5.17) in (5.16) für die jeweilige Integratorkette eine stabile lineare Differentialgleichung

$$y_k^{(\delta_k)} + a_{k,\delta_k-1}y_k^{(\delta_k-1)} + \dots + a_{k,1}\dot{y}_k + a_{k,0}y_k = K_{S_k}w_k, \quad k = 1, \dots, m, \quad (5.19)$$

sofern es sich bei dem zugehörigen charakteristischen Polynom um ein Hurwitz-Polynom handelt. Der dazu notwendige Stellgrößenvektor ergibt sich, indem Gleichung (5.18) in (5.17) eingesetzt wird und lautet

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \mathbf{D}_\delta^{-1} \begin{bmatrix} K_{S1}w_1 - \sum_{i=0}^{\delta_1-1} a_{1,i}L_{\mathbf{a}}^i c_1 \\ \vdots \\ K_{Sm}w_m - \sum_{i=0}^{\delta_m-1} a_{m,i}L_{\mathbf{a}}^i c_m \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} \text{mit } a_{k,\delta_k} = 1 \\ \text{für } k = 1, \dots, m \end{array}. \quad (5.20)$$

Aus der Betrachtung des rückgeführten Systems als ein lineares System gemäß Gleichung (5.19) folgt, dass für eine exakte Trajektorienfolge Regelung die Sollgröße nach der Vorschrift

$$w_k = \frac{1}{K_{S_k}} \left(y_{k,\text{Rt}}^{(\delta_k)} + a_{k,\delta_k-1}y_{k,\text{Rt}}^{(\delta_k-1)} + \dots + a_{k,1}\dot{y}_{k,\text{Rt}} + a_{k,0}y_{k,\text{Rt}} \right), \quad k = 1, \dots, m \quad (5.21)$$

zu wählen ist. Das Einsetzen von (5.21) in (5.20) führt auf das Stellgesetz

$$\mathbf{u} = \underbrace{\mathbf{D}_\delta(\mathbf{x})^{-1} \begin{bmatrix} y_{1,\text{Rt}}^{(\delta_1)} - L_{\mathbf{a}}^{\delta_1} c_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ y_{m,\text{Rt}}^{(\delta_m)} - L_{\mathbf{a}}^{\delta_m} c_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_V} + \underbrace{\mathbf{D}_\delta(\mathbf{x})^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{\delta_1-1} a_{1,i} \left(y_{1,\text{Rt}}^{(i)} - L_{\mathbf{a}}^i c_1(\mathbf{x}) \right) \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{\delta_m-1} a_{m,i} \left(y_{m,\text{Rt}}^{(i)} - L_{\mathbf{a}}^i c_m(\mathbf{x}) \right) \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_R}. \quad (5.22)$$

Die Stellgröße \mathbf{u} setzt sich aus dem Anteil der Vorsteuerung \mathbf{u}_V und dem Anteil zur Stabilisierung der Regelstrecke \mathbf{u}_R zusammen. Der Steueranteil beinhaltet den Referenzverlauf der Eingangsgrößen $\mathbf{y}_{\text{Rt}}^{(\delta)}$ sowie die Kompensation der nichtlinearen Dynamik \mathbf{c}_δ . Im Falle eines idealen Modells sowie der Abwesenheit externer Störeinflüsse reicht der Steueranteil aus, dass das System der vorgegebenen Trajektorie folgt. Abbildung 5.1 zeigt das dazugehörige Blockschaltbild. Handelt es sich um ein flaches System, so kann die Steuerung in Abhängigkeit der Solltrajektorie und deren Ableitungen berechnet werden. Folglich hängt diese nicht mehr vom Systemzustand \mathbf{x} ab. Diese Eigenschaft wird in dieser Arbeit durch die Verwendung von \mathbf{y}_{lin} anstelle von \mathbf{y}_{Rt} kenntlich gemacht. Die Stabilisierung des Gesamtsystems ist nicht an die Berechnung der Stellgröße \mathbf{u}_R gemäß Gleichung (5.22) gebunden und kann durch jeden anderen Regler ersetzt werden. Die Umsetzung des Regelungskonzepts basiert bei den nachfolgend behandelten Beispielen, mit Ausnahme für das

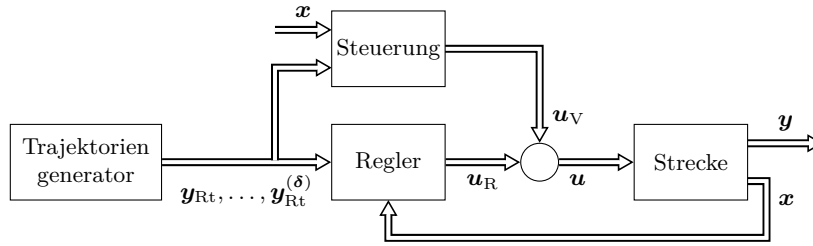


Abbildung 5.1: Blockschaltbild einer Trajektorienfolgeregelung mit zwei Freiheitsgraden

Einarmsystem, auf der äquivalenten Berechnung des Eingangsgrößenvektors nach Gleichung (5.20). Dadurch vereinfacht sich die Erweiterung des Regelungskonzepts um zusätzliche Lageregler.

Definition von Referenztrajektorien: Die Eigenschaften verschiedener unbundener Multikopter werden anhand der beiden in Abbildung 5.2 dargestellten Trajektorienverläufe untersucht. Bei der in Abbildung 5.2a dargestellten Trajektorie handelt es sich um eine Rotation um die x -Achse mit dem Eulerwinkel $p_{x,Rt}$. Der Multikopter steht während der Drehung auf der Stelle. Die vorgegebene Trajektorie lautet

$$\mathbf{q}_{R,Rt} = \mathbf{p}_{Rt} = \begin{bmatrix} \sqrt{1 - (0,3 \sin(0,1t))^2} & 0,3 \sin(0,1t) & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{q}_{T,Rt} = \mathbf{r}_{Rt} = \mathbf{0}. \quad (5.23)$$

Die zweite Bahnkurve stellt eine Raumkurve dar. Während der Multikopter die Trajektorie abfliegt, soll dieser nach Möglichkeit nicht verkippen, das heißt waagrecht gegenüber dem Boden ausgerichtet sein. Außerdem soll keine Rotation um seine körpereigene z -Achse stattfinden. Aus diesen Anforderungen ergeben sich die

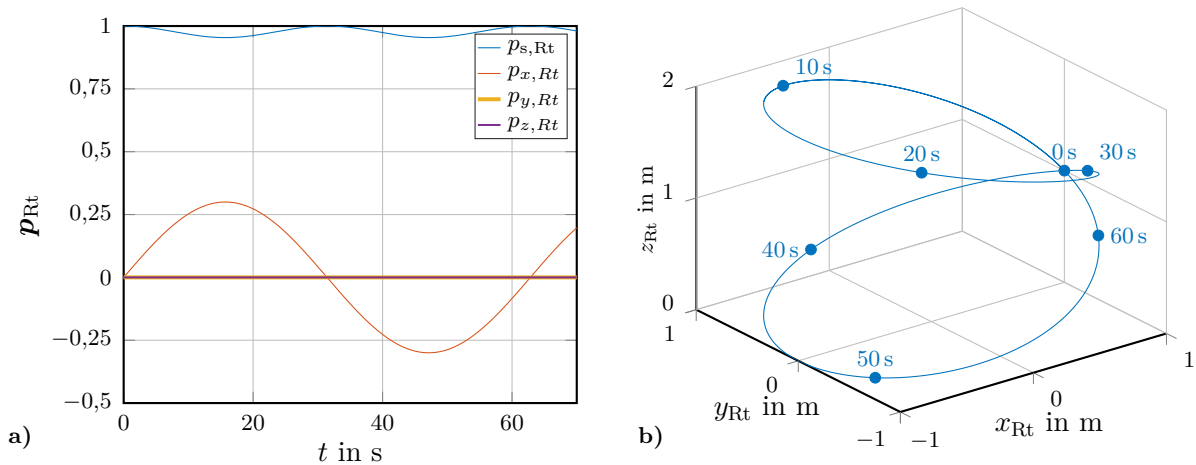


Abbildung 5.2: Solltrajektorien für den Simulationsvergleich unterschiedlicher Multikopter für a) eine Rotation auf der Stelle und b) eine Kurve im Raum

Sollverläufe

$$\mathbf{q}_{R,Rt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{q}_{T,Rt} = {}^0 \begin{bmatrix} \sin(0,2t + \frac{\pi}{2}) & \sin(0,2t) & \sin(0,1t) + 1 \end{bmatrix}^T. \quad (5.24)$$

Je nach betrachtetem Multikopter können die Referenztrajektorien $\hat{\mathbf{r}}_{Rt} = [\mathbf{p}_{Rt}^T \mathbf{r}_T^T]^T$ nicht oder nur unter Einschränkungen abgeflogen werden. Dieser Sachverhalt wird anhand der Betrachtung unterschiedlicher Multikoptermodelle in den nachfolgenden Abschnitten dargestellt.

5.2 Betrachtung des Einarmsystems

In diesem Abschnitt wird die in Kapitel 4 dargelegte Entwicklungsumgebung für die Implementierung einer Winkelregelung an dem vorgestellten Einarmprüfstand verwendet. Das System wird dabei sowohl in der Simulation als auch in der Praxis betrachtet. Das Einarmsystem eignet sich aufgrund des einfachen Aufbaus der resultierenden Gleichungen für eine erste Validierung des Multikopter Gleichungssystems.

Herleitung des Modells: Aufgrund der Einbausituation am realen Prüfstand wird die Winkelregelung um die x_1 -Achse betrachtet. Folglich besitzt das Einarmsystem einen Ausleger in Richtung der y_1 -Achse. Die entsprechende Transformationsmatrix lautet

$${}^{1,2}\mathbf{T}_{A1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.25)$$

Für die Herleitung des Modells werden die Zustandsgrößen \mathbf{x}_{B_L} der gesperrten Raumrichtungen und deren Ableitungen \mathbf{x}_{B_V} zu null gesetzt. Übrig bleibt ein System mit einem Lagefreiheitsgrad. Für die nachfolgenden Betrachtungen werden die Eulerparameter p_s und p_x auf den Winkel φ um die Drehachse $\mathbf{n}_1 = [1 \ 0 \ 0]^T$ zurückgeführt. Dabei gilt $2p_s^2 - 1 = \cos(\varphi)$ und $2p_s p_x = \sin(\varphi)$. Das System besitzt einen Ausleger mit einer starren Motoreinheit, sodass $x_{M_L} \in \mathbb{R}$ und $x_{M_V} \in \mathbb{R}$ gilt. Das daraus resultierende Simulationsmodell ist in Abbildung 5.3 dargestellt. Es besteht lediglich aus je einem Block für die Trägerplattform und den Ausleger. Unter Berücksichtigung der durch das Gelenk G_1 gesperrten Raumrichtungen liefert die Auswertung des Multikoptergleichungssystems entsprechend Abschnitt 2.3.3 das

Zustandsraummodell

$$\dot{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{B_L} \\ \dot{x}_{B_V} \\ \dot{x}_{M_L} \\ \dot{x}_{M_V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{c_T x_4^2 l_{41} - \tau_R - k_1 \cos(x_1) + k_2 \sin(x_1) + (\Theta_{4x} - \Theta_{4y}) \sin(2x_3) x_2 x_4}{k_3 + (\Theta_{4x} - \Theta_{4y}) \sin(x_3)^2} \\ x_4 \\ -\frac{1}{T_M} x_4 + \frac{1}{T_M} u_{M1} \end{bmatrix}, \quad (5.26a)$$

mit den Zuständen $\mathbf{x} = [\varphi \ \omega_x \ \Psi_{M1} \ \omega_{M1}]^T$ und den Abkürzungen

$$k_1 = (m_2 l_{21} + m_3 l_{31} + m_4 l_{41})g, \quad (5.26b)$$

$$k_2 = (m_1 h_{11} + m_2 h_{21} + m_3 h_{31} + m_4 h_{41})g, \quad (5.26c)$$

$$k_3 = \sum_{i=1}^4 (l_{i1}^2 + h_{i1}^2) m_i + \Theta_{1y} + \Theta_{2y} + \Theta_{3y} + \Theta_{4y}. \quad (5.26d)$$

In den Gleichungen (5.26) werden die Abstände $l_{31} = l_{21} + l_{32} + l_{33}$ und $l_{41} = l_{21} + l_{32} + l_{43}$ sowie die Höhen $h_{31} = h_{11} + h_{21} + h_{32} + h_{33}$ und $h_{41} = h_{11} + h_{21} + h_{32} + h_{43}$ verwendet. Für die Reglerauslegung werden die vereinfachten Gleichungen (5.4) und (2.63) mit den Anteilen (5.5) ausgewertet. Daraus ergibt sich ein Zustandsraummodell dritter Ordnung mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x} = [\varphi \ \omega_x \ \omega_{M1}]^T$. Die Vektoren für die eingangsaffine Systemdarstellung (5.7) lauten für das Einarmsystem

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{c_T l_{41} x_3^2 - \tau_R - k_1 \cos(x_1) + k_2 \sin(x_1)}{k_3} \\ -\frac{1}{T_M} x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T_M} \end{bmatrix}, \quad c(\mathbf{x}) = x_1. \quad (5.27)$$

Die nach Gleichung (2.91) zur Berechnung des Reibmoments τ_R benötigten Reibparameter c_V , τ_C , τ_H , c_H und k , werden durch eine Optimierung des Reibungsmodells bezüglich der Messung einer Pendelbewegung bestimmt. Das Ergebnis ist in Abbildung 5.4 dargestellt. Mit den gefundenen Reibparametern weist das Modell einen Winkelfehler von $|\Delta\varphi(t)| < 4^\circ$ auf. Auffällig ist, dass der Übergang zwischen Gleit- und Haftreibung nicht exakt nachgebildet wird. Dies ist für $t > 11$ s deutlich zu

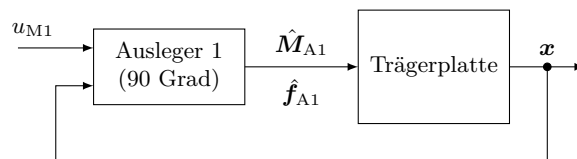
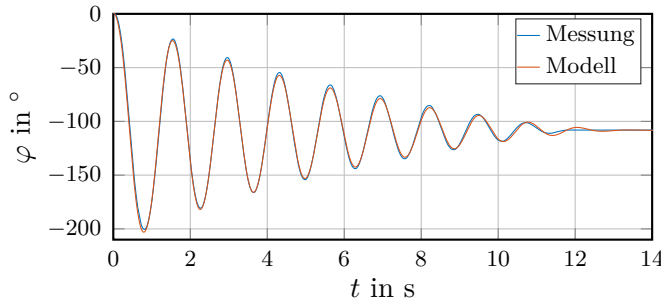


Abbildung 5.3: Blockschaltbild des Simulationsmodells für das Einarmsystem



Parameter	Wert
c_H	$0,0005 \text{ s}^{-1}$
c_V	$0,0081 \text{ Nms}$
γ	$16,98$
τ_C	$0,025 \text{ Nm}$
τ_H	$0,075 \text{ Nm}$

Abbildung 5.4: Ermittlung der Reibparameter für das Einarmsystem

erkennen. Diese Modellungenauigkeit muss durch den Regler ausgeglichen werden. Der relative Grad wird nach der Vorgehensweise (5.8) zu $\delta = 3$ bestimmt, sodass für das Einarmsystem $\delta = n$ gilt. Das vorliegende SISO-System ist folglich exakt zustandslinearisierbar und flach. Es kann auf die nichtlineare Regelungsnormform (5.12) gebracht werden. Der dazugehörige Diffeomorphismus lautet

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \frac{c_T l_{41} x_3^2 - \tau_R - k_1 \cos(x_1) + k_2 \sin(x_1)}{k_3} \end{bmatrix} = \mathbf{t}(\mathbf{x}), \quad (5.28a)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \sqrt{\frac{k_3 z_3 + \tau_R(z_2) + k_1 \cos(z_1) - k_2 \sin(z_1)}{l_{41} c_T}} \end{bmatrix} = \mathbf{t}^{-1}(\mathbf{z}). \quad (5.28b)$$

Für den Entwurf einer Regelung um einen Arbeitspunkt $A(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{u})$ ist häufig die Verwendung eines linearen Reglers ausreichend. Für das linearisierte Modell gilt

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_M} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T_M} \end{bmatrix} \Delta u, \quad \Delta y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{x}, \quad (5.29a)$$

mit den Parametern

$$a_{21} = \frac{k_1 \sin(\bar{x}_1) + k_2 \cos(\bar{x}_1)}{k_3}, \quad a_{22} = -\frac{1}{k_3} \frac{\partial \tau_R}{\partial x_2} \bigg|_{x_2=\bar{x}_2}, \quad a_{23} = \frac{2c_T l_{41} \bar{x}_3}{k_3}. \quad (5.29b)$$

Bestimmung der Ruhe- und der Gleichgewichtslage: Als Ruhelage bezeichnet man die Lage, die das System einnimmt oder beibehält, wenn keine Eingangsgröße auf das System wirkt und das System sich selbst überlassen wird. Dabei verschwinden sämtliche Ableitungen der Zustandsgrößen und es gilt $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}$.

Die Auswertung der Ruhelage für das Einarmsystem ergibt

$$\mathbf{x}_R = \begin{bmatrix} k\pi + \arctan\left(\frac{k_1}{k_2}\right) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{mit } k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.30)$$

Theoretisch gibt es unendlich viele Ruhelagen, die periodisch in einem Abstand von 180° aufeinanderfolgen. Isolierte Ruhelagen existieren nur bei nichtlinearen Systemen.

Bei einer Gleichgewichtslage verschwinden ebenfalls sämtliche Ableitungen, wobei im Gegensatz zu einer Ruhelage die Eingangsgröße nicht null sein muss. Für das Einarmsystem besteht gemäß Gleichung (5.27) zwischen der Drehzahl $x_3 = \omega_M$ und dem resultierenden Winkel $x_1 = \varphi$ die Beziehung

$$\dot{x}_2 = \frac{l_{41}c_T x_3^2 - \tau_R - k_1 \cos(x_1) + k_2 \sin(x_1)}{k_3}. \quad (5.31)$$

Unter Berücksichtigung des Arbeitspunktes $A_G(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) = (\bar{x}_1, 0, \bar{x}_3, \bar{u})$ der Gleichgewichtslage ergibt sich daraus die dazugehörige gesuchte Winkelgeschwindigkeit des Rotors

$$\bar{x}_3 = \sqrt{\frac{k_1 \cos(\bar{x}_1) - k_2 \sin(\bar{x}_1)}{l_{41}c_T}}. \quad (5.32)$$

Gleichung (5.32) besitzt den in Abbildung 5.5 dargestellten Verlauf. Erkennbar ist, dass es zu jeder Rotorgeschwindigkeit genau zwei mögliche Gleichgewichtslagen gibt. Diese sind symmetrisch um das Maximum angeordnet. Die Gleichgewichtslage, in der die maximale Rotordrehzahl benötigt wird, ergibt sich aus der Ableitung von Gleichung (5.32)

$$\dot{\bar{x}}_3 = \frac{-(k_1 \sin(\bar{x}_1) + k_2 \cos(\bar{x}_1))}{\sqrt{4l_{41}c_T (k_1 \cos(\bar{x}_1) - k_2 \sin(\bar{x}_1))}}, \quad (5.33)$$

indem deren Nullstelle

$$k_1 \sin(\bar{x}_1) + k_2 \cos(\bar{x}_1) = 0 \Rightarrow \bar{x}_1 = \arctan\left(-\frac{k_2}{k_1}\right) \quad (5.34)$$

ausgewertet wird. Für die Klärung der Frage, ob die Gleichgewichtslagen für kleine Auslenkungen $\Delta\varphi$ stabil oder instabil sind, wird die linearisierte Systemmatrix \mathbf{A} in (5.29) für den Arbeitspunkt $A_G(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u})$ der Gleichgewichtslage betrachtet. Ihre

Eigenwerte λ ergeben sich aus der Lösung der Gleichung $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$ zu

$$\lambda_1 = -\frac{1}{T_M}, \quad \lambda_{2,3} = \frac{a_{22} \pm \sqrt{a_{22}^2 + 4a_{21}}}{2}. \quad (5.35)$$

Während $\lambda_1 < 0$ stets erfüllt ist, entscheiden $\lambda_{2,3}$ über die Stabilitätseigenschaft des Systems. Eine Auswertung liefert

$$\sum_{\text{Sys}} = \begin{cases} \text{stabil } (\lambda_{2,3} < 0), & \text{falls } \bar{x}_1 < \arctan\left(-\frac{k_2}{k_1}\right) \\ \text{grenzstabil } (\lambda_{2,3} = 0), & \text{falls } \bar{x}_1 = \arctan\left(-\frac{k_2}{k_1}\right) \\ \text{instabil } (\lambda_{2,3} > 0), & \text{falls } \bar{x}_1 > \arctan\left(-\frac{k_2}{k_1}\right) \end{cases}. \quad (5.36)$$

Das System weist damit zwei unterschiedliche, aber dennoch gleich große Stabilitätsbereiche auf. Diese Bereiche sind in Abbildung 5.5 farblich hervorgehoben. Das Stabilitätsverhalten wird beispielhaft für die Winkel $\bar{x}_1 = \pm\frac{\pi}{4}$ untersucht. Im stabilen Bereich führt eine Auslenkung $\pm\Delta\varphi$ bei gleichbleibender Drehzahl des Antriebs zurück in die Ausgangslage. Das Ergebnis ist in Abbildung 5.6a dargestellt. Wird die Gleichgewichtslage im instabilen Bereich verändert, müssen zwei Fälle unterschieden werden. Bei einer geringfügigen Änderung des Winkels um $-\Delta\varphi$ fällt das Einarmsystem zurück in den stabilen Bereich und stabilisiert sich dort wieder im zugehörigen Arbeitspunkt gleicher Drehzahl. Eine Änderung des Winkels um $+\Delta\varphi$ im instabilen Bereich führt hingegen dazu, dass das Einarmsystem über seine obere Ruhelage hinausgeht. In diesem Bereich besteht ein Überschuss an Schubkraft und das Einarmsystem wird beschleunigt. Dies führt dazu, dass, wie in Abbildung

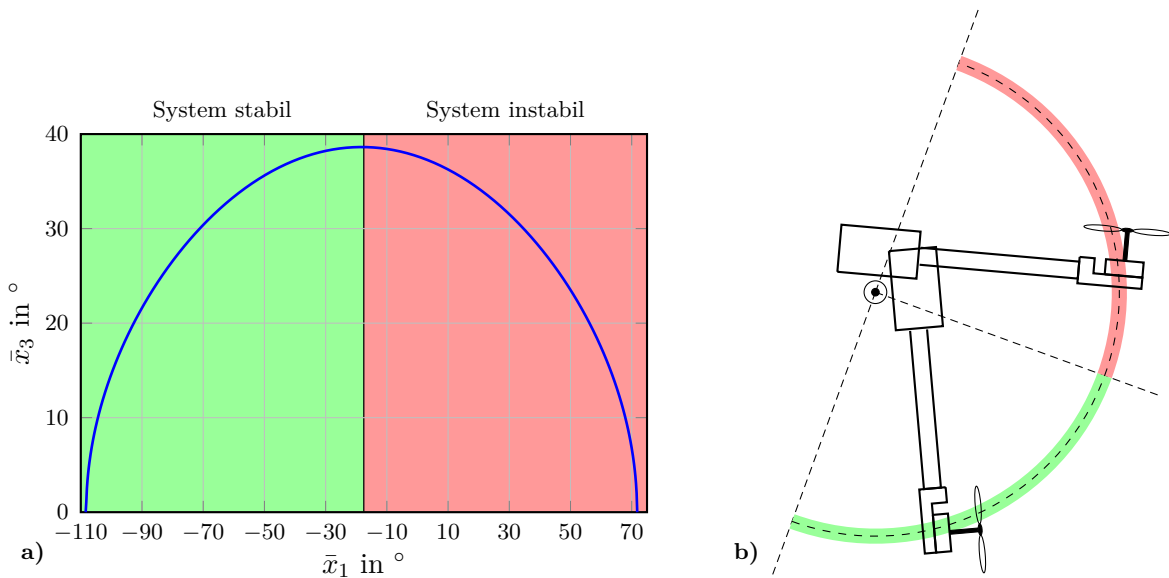


Abbildung 5.5: Untersuchung der Gleichgewichtslage für das Einarmsystem mit a) dem Zusammenhang zwischen dem Armwinkel \bar{x}_1 und der Drehzahl im Arbeitspunkt \bar{x}_3 und b) der schematischen Darstellung

5.6b dargestellt, eine Dauerrotation einsetzt. Das Stabilitätsverhalten des Einarmsystems wird durch die Untersuchung des linearisierten Systems ausreichend beschrieben. Prinzipiell kann aber von der Stabilität eines linearen Systems nicht auf die eines nichtlinearen Systems geschlossen werden. Die Untersuchung der Ruhe- und Gleichgewichtslagen liefern einen guten Anhaltspunkt für die Validierung der Modelle. Praktische Versuche bestätigen das berechnete Stabilitätsverhalten.

Auslegung einer Regelung: Aus Gleichung (5.28b) resultiert mit $\mathbf{z} = [y_{\text{lin}} \ \dot{y}_{\text{lin}} \ \ddot{y}_{\text{lin}}]^T$ die Gleichung

$$\mathbf{x} = \Phi_{\mathbf{x}} \left(y_{\text{lin}}, \dot{y}_{\text{lin}}, \dots, y_{\text{lin}}^{(\delta-1)} \right)$$

der flachen Systemdarstellung, für $y_{\text{lin}} = x_1$. Das Stellgesetz der Form

$$u_V = \Phi_{\mathbf{u}} \left(y_{\text{lin}}, \dot{y}_{\text{lin}}, \dots, y_{\text{lin}}^{(\delta)} \right)$$

ergibt sich nach Gleichung (5.12) beziehungsweise (5.22) über die Beziehung $u_V = D_{\delta}^{-1} \left(\ddot{y}_{\text{lin}} - L_{\mathbf{a}}^{\delta} c(\mathbf{x}) \right)$ zu

$$u_V = \frac{T_M k_3 \ddot{y}_{\text{lin}} + T_M \dot{\tau}_R - (k_1 \sin(y_{\text{lin}}) + k_2 \cos(y_{\text{lin}})) T_M \dot{y}_{\text{lin}} + 2l_{41} c_T x_3^2}{2l_{41} c_T x_3}, \quad (5.37)$$

wobei die Ableitung der Reibung $\dot{\tau}_R(\mathbf{z})$ sowie die Zustandsgröße $x_3(\mathbf{z})$ der besseren Übersichtlichkeit wegen nicht eingesetzt sind. Im Folgenden soll der flache Ausgang dazu genutzt werden, einen Arbeitspunktwechsel des Einarmsystems durchzuführen. Dies bedeutet, dass das System vom Anfangszustand \mathbf{x}_0 zum Zeitpunkt $t_0 \geq 0$ in seinen Endzustand \mathbf{x}_e zum Zeitpunkt $t_e > t_0$ überführt wird. Hierfür benötigt das System die Transitionszeit $t_t = t_e - t_0$. Die gewählte Trajektorie im Transitions-

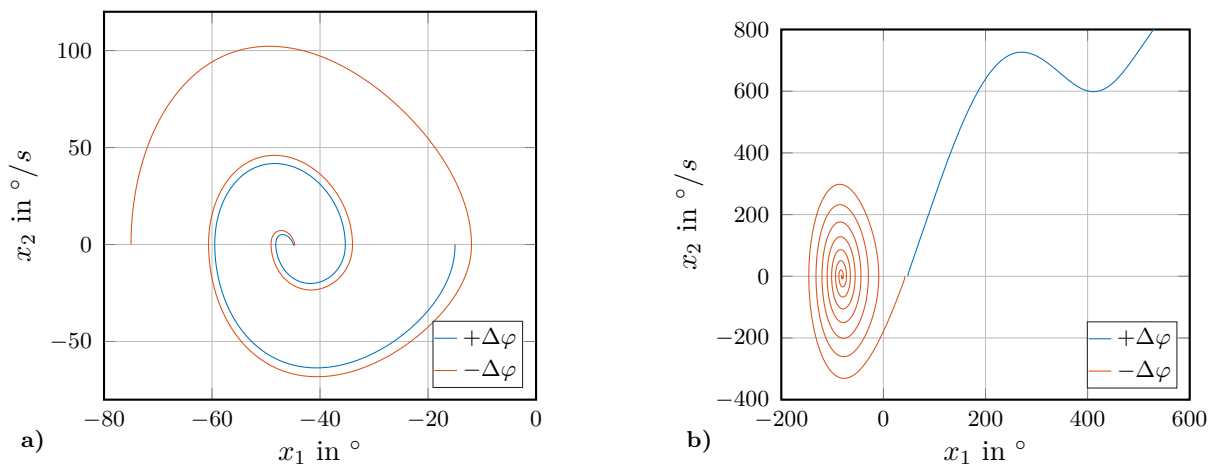


Abbildung 5.6: Stabilitätsanalyse der Ruhelagen im stabilen Bereich in a) und im instabilen Bereich in b)

bereich y_P muss dafür δ -fach stetig differenzierbar sein. Ein möglicher Ansatz stellt die Wahl eines Polynoms dar. Damit für die Trajektorie y_P und deren Ableitungen Randbedingungen vorgegeben werden können, muss diese die Ordnung $n = 2\delta + 1$ besitzen. Für das Einarmsystem ergibt sich

$$y_P = \frac{20(x_0 - x_e)}{t_t^7} t^7 - \frac{70(x_0 - x_e)}{t_t^6} t^6 + \frac{84(x_0 - x_e)}{t_t^5} t^5 - \frac{35(x_0 - x_e)}{t_t^4} t^4 + x_0. \quad (5.38)$$

Aufgrund der Tatsache, dass sowohl Modellungenauigkeiten als auch Störeinflüsse unvermeidbar sind, muss ein zusätzlicher Regler verwendet werden. Im vorliegenden Fall ist dies ein Zustandsregler. Dadurch ergibt sich das Regelungskonzept nach Abbildung 5.7. Da die gesamte Referenztrajektorie durch das Gebiet der stabilen und instabilen Eigenwerte führt, verändern sich die Systemeigenschaften je nach Arbeitspunkt stark. Die Auslegung einer Zustandsregelung für einen festen Arbeitspunkt ist nicht ausreichend. Das charakteristische Polynom des rückgeführten Systems $P(s)$ sowie das gewünschte Sollpolynom $C(s)$ für die Pole P_1, P_2 und P_3 ergeben sich aus den Vorschriften

$$P(s) = \det \left((s\mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{r}^T)) \right), \quad C(s) = \prod_{i=1}^3 (s - P_i). \quad (5.39)$$

Ein Vergleich der Koeffizienten ergibt den vom Arbeitspunkt abhängigen Rückführvektor

$$\mathbf{r} = \left[\frac{T_M(a_{21}b_2 + a_{21}a_{22} + b_0)}{a_{23}} \quad \frac{T_M(a_{22}^2 + a_{22}b_2 + a_{21} + b_1)}{a_{23}} \quad T_M b_2 + T_M a_{22} - 1 \right]^T. \quad (5.40)$$

Für eine kompaktere Darstellung wurden dabei die Abkürzungen $b_0 = -P_1 P_2 P_3$, $b_1 = P_1 P_2 + P_1 P_3 + P_2 P_3$ und $b_2 = -(P_1 + P_2 + P_3)$ eingeführt. Die Referenztrajektorie ist die Führungsgröße im Regelkreis und somit kann das Vorfilter einer klassi-

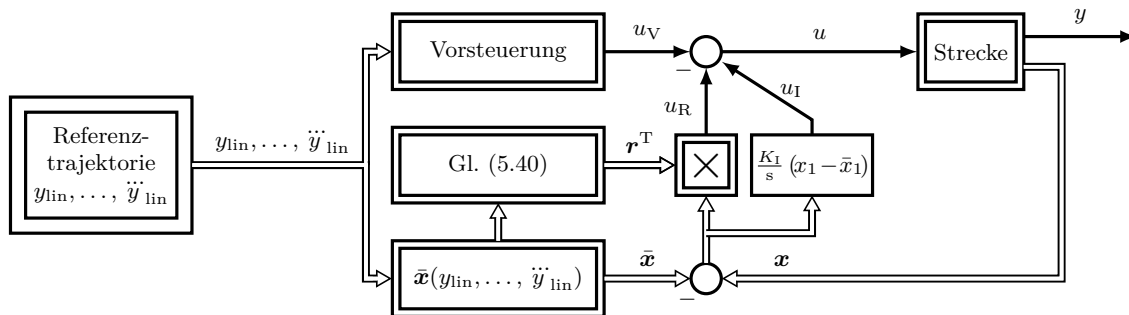


Abbildung 5.7: Regelungskonzept für das Einarmsystem mit flachheitsbasierter Vorsteuerung und adaptiver Zustandsrückführung

schen Zustandsrückführung entfallen. Der Stellgrößenanteil der Zustandsrückführung berechnet sich damit über $u_R = \mathbf{r}^T (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$. Um eine stationäre Genauigkeit zu erreichen, wird der Regler entsprechend Abbildung 5.7 noch um einen I-Anteil erweitert.

Ergebnisse: Zur Untersuchung der Regelung wird die Trajektorie

$$y_{\text{lin}} = \begin{cases} x_0, & t < t_0 \\ y_P, & t_0 \leq t \leq t_e \\ x_e, & t > t_e \end{cases} \quad (5.41)$$

betrachtet. Diese überführt das Pendel aus seiner Ruhelage $\varphi_R \approx -108^\circ$ innerhalb von $t_t = 20\text{s}$ in die horizontale Ebene. Die Startzeit t_0 ist frei wählbar. Der entworfene Regler wird mittels C-Code-Generierung auf den Einplatinencomputer des Prüfstands übertragen. Die Messergebnisse sind für den Arbeitspunktwechsel in Abbildung 5.8 dargestellt. Die Abtastzeit des Systems ist sowohl für die Regelung als auch für die Erfassung der Daten $T_A = 0,01\text{s}$. Der Winkel des Einarmsystems wird über einen Inkrementalgeber erfasst. Die frei wählbaren Pole werden in diesem Versuch mit $P_1 = -4$, $P_2 = -14$ und $P_3 = -22$ gewählt. Für den Integralanteil gilt $K_I = -400$. Im Ergebnis wird die Trajektorie wie gewünscht nachgefahren. Bemerkenswert ist vor allem, dass die auf Basis des Modells berechnete Steuerungsspannung u_V den tatsächlichen Verlauf der Stellgröße u mit einer Abweichung von $|\Delta n_M(t)| < 1\text{s}^{-1}$ sehr gut berechnet. Dies lässt auf eine hohe Modellgüte schließen. Die größten Abweichungen treten direkt zu Beginn bei $t \approx 3\text{s}$ und kurz vor Erreichen der Endhöhe bei $t \approx 17\text{s}$ auf. Grund hierfür ist der schwierig zu beschreibende Übergang von Haft- zu Gleitreibung und umgekehrt, der für kleine Winkelgeschwindigkeiten ω_x zunehmend zum tragen kommt.

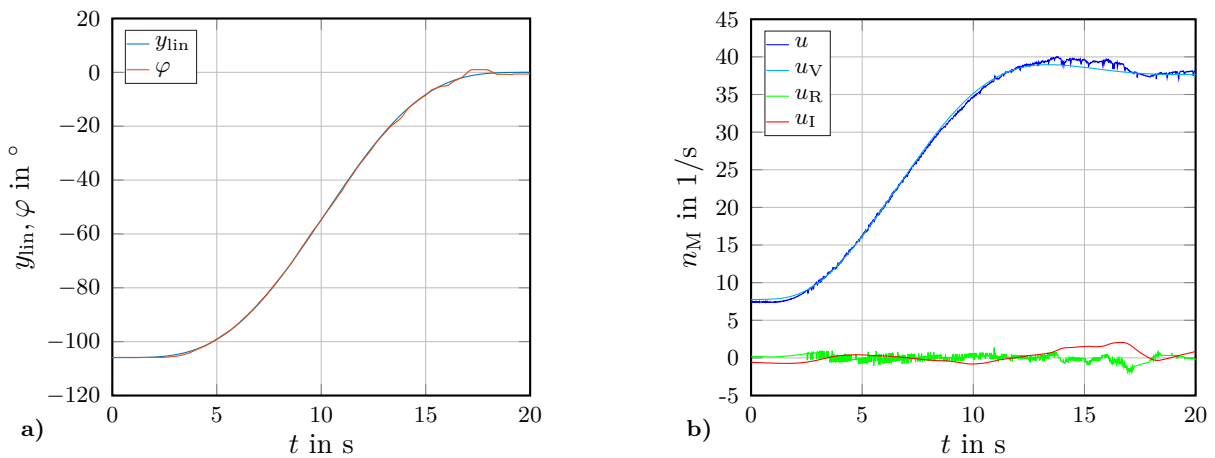


Abbildung 5.8: Simulations- und Messergebnis für das Einarmsystem für den Verlauf der Ausgangsgröße in a) und der Stellgrößen in b)

5.3 Betrachtung eines unteraktuierten Quadropters

Der unteraktuierte Quadropter ist das wohl bekannteste und am häufigsten verwendete Drohnenmodell und wird nachfolgend behandelt. Die Anwendung der Multikopterumgebung wird aufgezeigt.

Herleitung des Modells: Für den hier betrachteten Quadropter befinden sich die Rotoren bei 0, 90, 180 und 270 Grad. Aus der Anordnung der Ausleger folgen die Transformationsmatrizen ^{1,2} \mathbf{T}

$$\mathbf{T}_{A1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{A2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{A3} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{A4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.42)$$

Die freifliegende Drohne besitzt für das Gelenk G_1 alle sechs Freiheitsgrade und für das Reibmoment gilt $\tau_R = \mathbf{0}$. Der Quadropter wird durch die Änderung der Sollwinkelgeschwindigkeiten der Rotoren gesteuert und es gilt $\mathbf{u}_M \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$. Der Zustandsvektor $\mathbf{x}_B \in \mathbb{R}^{13 \times 1}$ erweitert sich um die Zustände $\mathbf{x}_{M_L} = \boldsymbol{\Psi}_M \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ und $\mathbf{x}_{M_V} = \boldsymbol{\omega}_M \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ der Synchronmotoren. In Summe entsteht ein Zustandsraummodell mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{21 \times 1}$. Das komplexe Simulationsmodell ergibt sich nach Abbildung 5.9 aus vier Blöcken für die Ausleger und einem Block für die Trägerplattform. Die nachfolgend betrachtete Reglerauslegung basiert auf der Auswertung der vereinfachten Gleichungen in Abschnitt 5.1 mit der Parametrierung (5.42). Die Ergebnisse sind im Koordinatensystem \mathcal{K}_1 dargestellt. Der Quadropter besitzt die Gesamtmasse $m_D = m_1 + 4 \sum_{i=2}^4 m_i$. Der Trägheitstensor $\boldsymbol{\Theta}_D = \text{diag}(\Theta_{1x} + \sigma, \Theta_{1y} + \sigma, \Theta_z)$ mit den Elementen

$$\sigma = 2h_{11}^2 m_1 + 2 \sum_{i=2}^4 (\Theta_{ix} + \Theta_{iy} + m_i (l_{i1}^2 + 2h_{i1}^2)), \quad \Theta_z = \Theta_{1z} + 4 \sum_{i=2}^4 (\Theta_{iz} + m_i l_{i1}^2) \quad (5.43)$$

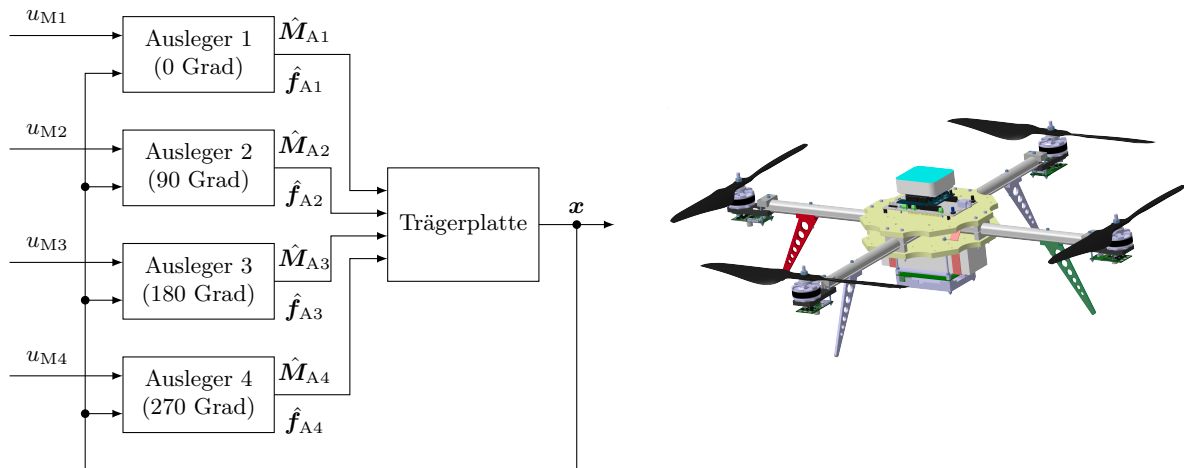


Abbildung 5.9: Blockschaltbild des Simulationsmodells des Quadropters

unterscheidet sich aufgrund der Symmetrie des Quadropters in der x_1 - und y_1 -Richtung lediglich durch den Anteil des Körpers K_1 . Aus Symmetriegründen wird für den Vektor zum Gesamtschwerpunkt der Drohne vereinfachend $l_{11}, b_{11} = 0$ angenommen. Aus Gleichung (2.86) berechnet sich der für einen Quadropter konstante Abstand

$$h_{11} = -4 \sum_{i=2}^4 \frac{m_i h_{i1}}{m_D} = -4 \frac{m_2 h_{21} + m_3 h_{31} + m_4 h_{41}}{m_D}. \quad (5.44)$$

Weiter ergeben sich aus dem Gleichungssystem die für die Beschleunigung $\dot{\mathbf{x}}_{B_V} = \dot{\mathbf{x}}_{8:13}$ relevanten eingprägten Kräfte

$$\hat{\mathbf{f}}^g = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{10}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_D g \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{f}}^u = \begin{bmatrix} c_T (x_{19}^2 - x_{21}^2) l_{41} \\ c_T (x_{20}^2 - x_{18}^2) l_{41} \\ \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\Theta_{4z}}{T_M} (x_{Mi} - u_{Mi}) - c_W |x_{Mi}| x_{Mi} - c_R x_{Mi} \right) \\ 0 \\ 0 \\ c_T \sum_{i=1}^4 x_{Mi}^2 \end{bmatrix}. \quad (5.45)$$

Für den Quadropter ist aus der Betrachtung der eingprägten Kräfte ersichtlich, dass die beiden Zustände x_{11} und x_{12} , das heißt die translatorischen Bewegungen in x_1 - und y_1 -Richtung, nicht durch eine Veränderung der Motordrehzahlen beeinflussbar sind. Dies hat zur Folge, dass nicht jeder Freiheitsgrad der Drohne unabhängig von den anderen beeinflusst werden kann. Eine Bewegung in die x_0 - oder y_0 -Richtung erfordert demnach immer ein Verkippen der Drohne. Aus Gleichung (5.45) lässt sich darüber hinaus der Einfluss der Motordynamik auf die Beschleunigungen des Quadropters erkennen. Die Zustände $x_8 = \omega_x$, $x_9 = \omega_y$ und $x_{13} = \dot{z}_1$ werden von den Eingangsgrößen indirekt über die Winkelgeschwindigkeiten der Motoren ω_M beeinflusst. Dies geschieht gemäß Gleichung (5.6b) mit einer Verzögerung erster Ordnung. Im Gegensatz dazu haben die transienten Motormomente $\frac{\Theta_{4z}}{T_M} (x_{Mi} - u_{Mi})$ einen direkten Einfluss auf die Winkelbeschleunigung $x_{10} = \dot{\omega}_z$ um die z_1 -Achse. Auf einen Drehzahlsprung reagieren deshalb die dazugehörigen Beschleunigungen mit einer unterschiedlichen Dynamik. Beispielfhaft für die unterschiedlichen Wirkungsweisen sind in Abbildung 5.10a die Beschleunigung $\dot{x}_{13} = \ddot{z}_1$ und in Abbildung 5.10b die Winkelbeschleunigung $\dot{x}_{10} = \dot{\omega}_z$ als Reaktion auf einen Drehzahlsprung dargestellt. Das in den Ergebnissen für $\dot{\omega}_z$ konstant wirkende Drehmoment wird dabei durch das resultierende Widerstandsmoment τ_W der Rotoren bestimmt. Das Modell des Quadropters lässt sich auf die Form eines eingangslinearen Zustandsraummodells (5.7) bringen.

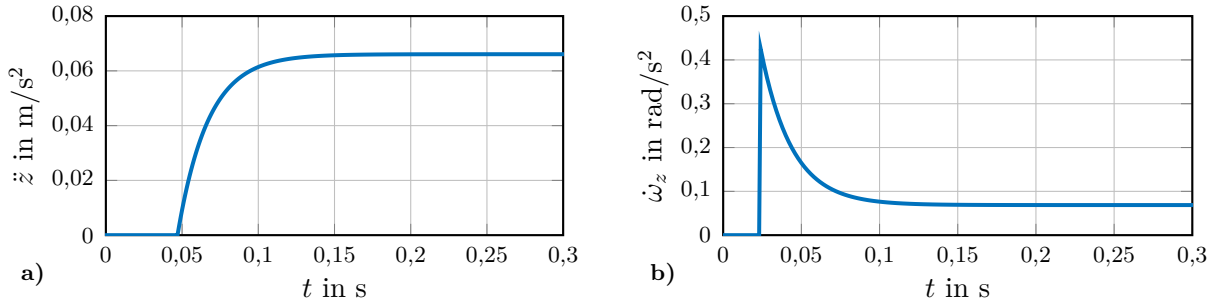


Abbildung 5.10: Einfluss der Motordynamik auf den Quadropter für die Zustände $x_{8,9,13}$ in a) und den Zustand x_{10} in b)

Gleichgewichtslage: Die Zustände in der Gleichgewichtslage $\bar{\mathbf{x}}$ folgen für $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ aus den Zustandsgleichungen (5.6). Die Zustände $\bar{\mathbf{x}}_{1:4}$ ergeben sich unter Berücksichtigung der Nebenbedingung (2.83) zu

$$\bar{x}_1 = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right), \quad \bar{x}_{2,3} = 0, \quad \bar{x}_4 = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right). \quad (5.46)$$

Eine Auswertung des Rotationstensors (2.84) macht deutlich, dass es sich bei der Lösung (5.46) um unendlich viele Gleichgewichtslagen in der horizontalen Ebene handelt, wobei der Parameter p_z frei wählbar ist. Die Rotordrehzahlen in der Gleichgewichtslage berechnen sich zu

$$\bar{x}_{18,20} = \bar{\omega}_{M1,M3} = \sqrt{\frac{m_D g}{4c_T}}, \quad \bar{x}_{19,21} = \bar{\omega}_{M2,M4} = -\sqrt{\frac{m_D g}{4c_T}}. \quad (5.47)$$

Demnach müssen in der Gleichgewichtslage die Winkelgeschwindigkeiten aller Motoren betragsmäßig gleich groß sein, wobei gegenüberliegende Rotoren eine gleiche und nebeneinanderliegende Motoren eine entgegengesetzte Drehrichtung aufweisen. Die Zustände $\bar{\mathbf{x}}_{5:7}$ sind frei wählbar. Das aus den Gleichungssystemen abgeleitete Ergebnis entspricht den bekannten Eigenschaften eines Quadropters.

Reglersynthese: Durch die Wahl geeigneter Ausgangsgrößen lässt sich das Modell auf die nichtlineare Regelungsnormalform bringen. Das Zustandsraummodell des Quadropters sowie die für das Reglergesetz (5.20) notwendigen Lie-Ableitungen sind in Anhang B aufgeführt. Für den Ausgangsvektor $\mathbf{y} = [x_8 \ x_9 \ x_{10} \ x_{13}]^T$ folgt der vektorielle relative Grad $\boldsymbol{\delta} = [2 \ 2 \ 1 \ 2]^T$ und der totale relative Grad $\delta = 7$. Mit der Wahl dieser Ausgangsgrößen wird das System auf Geschwindigkeitsebene linearisiert. Da die vorgegebenen Sollwerte oder Trajektorien jedoch auf Lageebene vorgegeben werden, wird das Regelungskonzept noch um eine äußere Kaskade zur Lageregelung erweitert. Daraus ergibt sich das in Abbildung 5.11 dargestellte Gesamtregelungskonzept. Für den betrachteten Quadropter ergibt sich die nach

Gleichung (5.16) berechnete Entkopplungsmatrix

$$\mathbf{D}_\delta(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2c_T l_{41}}{\Theta_x T_M} x_{19} & 0 & -\frac{2c_T l_{41}}{\Theta_x T_M} x_{21} \\ -\frac{2c_T l_{41}}{\Theta_y T_M} x_{18} & 0 & \frac{2c_T l_{41}}{\Theta_y T_M} x_{20} & 0 \\ -\frac{\Theta_{4z}}{\Theta_z T_M} & -\frac{\Theta_{4z}}{\Theta_z T_M} & -\frac{\Theta_{4z}}{\Theta_z T_M} & -\frac{\Theta_{4z}}{\Theta_z T_M} \\ \frac{2c_T}{T_M m_D} x_{18} & \frac{2c_T}{T_M m_D} x_{19} & \frac{2c_T}{T_M m_D} x_{20} & \frac{2c_T}{T_M m_D} x_{21} \end{bmatrix}. \quad (5.48)$$

Sofern $\mathbf{x}_{M_V} \neq \mathbf{0}$ gilt, ist diese mit $\det(\mathbf{D}_\delta) \neq 0$ regulär und der relative Grad ist wohldefiniert. In der praktischen Umsetzung bedeutet dies, dass die Regelung erst eingeschaltet werden kann, wenn die Motoren bereits eine minimale Geschwindigkeit haben. Da für das vorliegende Modell $\delta < n$ gilt, besitzt das System eine interne Dynamik, die für eine erfolgreiche Umsetzung stabil sein muss.

Die ermittelte exakte Linearisierung soll in einem praktischen Versuch validiert werden. Hierzu wird die Stabilisierung der Drohne im Schwebezustand auf dem Kugelgelenkprüfstand betrachtet. Da sich der Quadrokopter in seiner waagerechten Ruheposition befinden soll, werden die Referenztrajektorie \mathbf{y}_{Rt} und deren Ableitungen identisch zu Null gewählt. Für die Korrektur der Eulerparameter p_x und p_y wird ein PI-Regler in der äußeren Kaskade verwendet. Der Zusammenhang zwischen den Eulerparametern und den Winkelgeschwindigkeiten über die kinematische Differentialgleichung (2.88) wird für kleine Winkel um die Gleichgewichtslage linearisiert. Daraus resultiert, dass mit $p_x = p_x(\omega_x)$ und $p_y = p_y(\omega_y)$ die jeweiligen Richtungen entkoppelt sind und die dazugehörigen Regler unabhängig voneinander eingestellt werden können. Für die Sollgrößen w_{p_z} und w_z wird kein äußerer Regelkreis verwendet, weshalb die Größen ω_z und \dot{z}_1 lediglich durch die Zustandsrückführung auf Null geregelt werden. Für den zeitdiskreten Stellgrößenvektor des Lagerreglers $\mathbf{u}_{R,L} \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ gilt folglich

$$\mathbf{u}_{R,L} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\omega_{x,y}}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad \text{mit } \mathbf{u}_{\omega_{x,y}}(z) = \left(K_{P_{p_{x,y}}} + K_{I_{p_{x,y}}} \frac{T_A(z+1)}{2(z-1)} \right) \mathbf{e}_{p_{x,y}}. \quad (5.49)$$

Der Regler wird mit den Verstärkungsfaktoren $K_{P_{p_{x,y}}} = 10$ und $K_{I_{p_{x,y}}} = 1$ para-

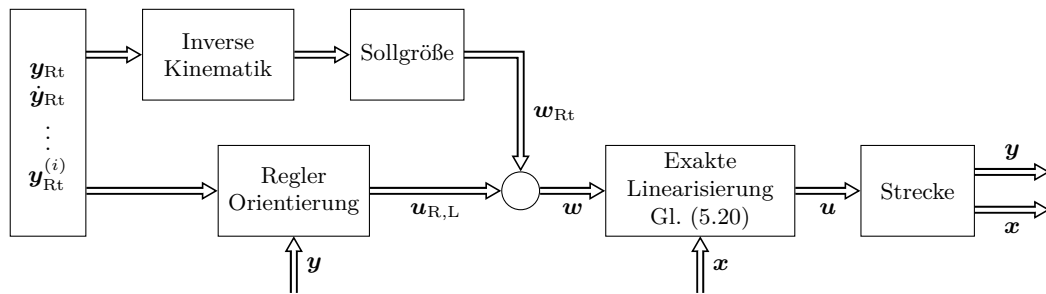


Abbildung 5.11: Regelungskonzept für die Stabilisierung eines Quadrokopters

metriert. Für die Stabilisierung werden die Koeffizienten der Differentialgleichung (5.19) mit $a_{\omega_{x0}}, a_{\omega_{y0}} = 10000$, $a_{\omega_{z0}} = 100$ und $a_{\omega_{x1}}, a_{\omega_{y1}} = 200$ gewählt. Das Regelungskonzept wird anschließend auf die Zielhardware per C-Code-Generierung übertragen und läuft dort mit einer Abtastzeit von $T_A = 1$ ms. Zur Überprüfung der Funktionsweise wird das System mit Laststörungen beaufschlagt. Dazu wird es zu den Zeitpunkten $t \approx 2$ s, $t \approx 5$ s und $t \approx 8,5$ s von außen in negativer Richtung p_x aus dem Gleichgewicht gebracht. Dasselbe erfolgt für die Zeitpunkte $t \approx 11$ s und $t \approx 15,8$ s in negativer p_y -Richtung. Abschließend wird zum Zeitpunkt $t \approx 19$ s der Quadropters in negativer p_z -Richtung angestoßen. Das Ergebnis dieser Versuche ist in Abbildung 5.12 dargestellt. Bei den aufgezeichneten Signalen handelt es sich um die Ausgangsgrößen des eingesetzten erweiterten Kalman-Filters. Sowohl die geschätzten Winkel in Abbildung 5.12a als auch die geschätzten Winkelgeschwin-

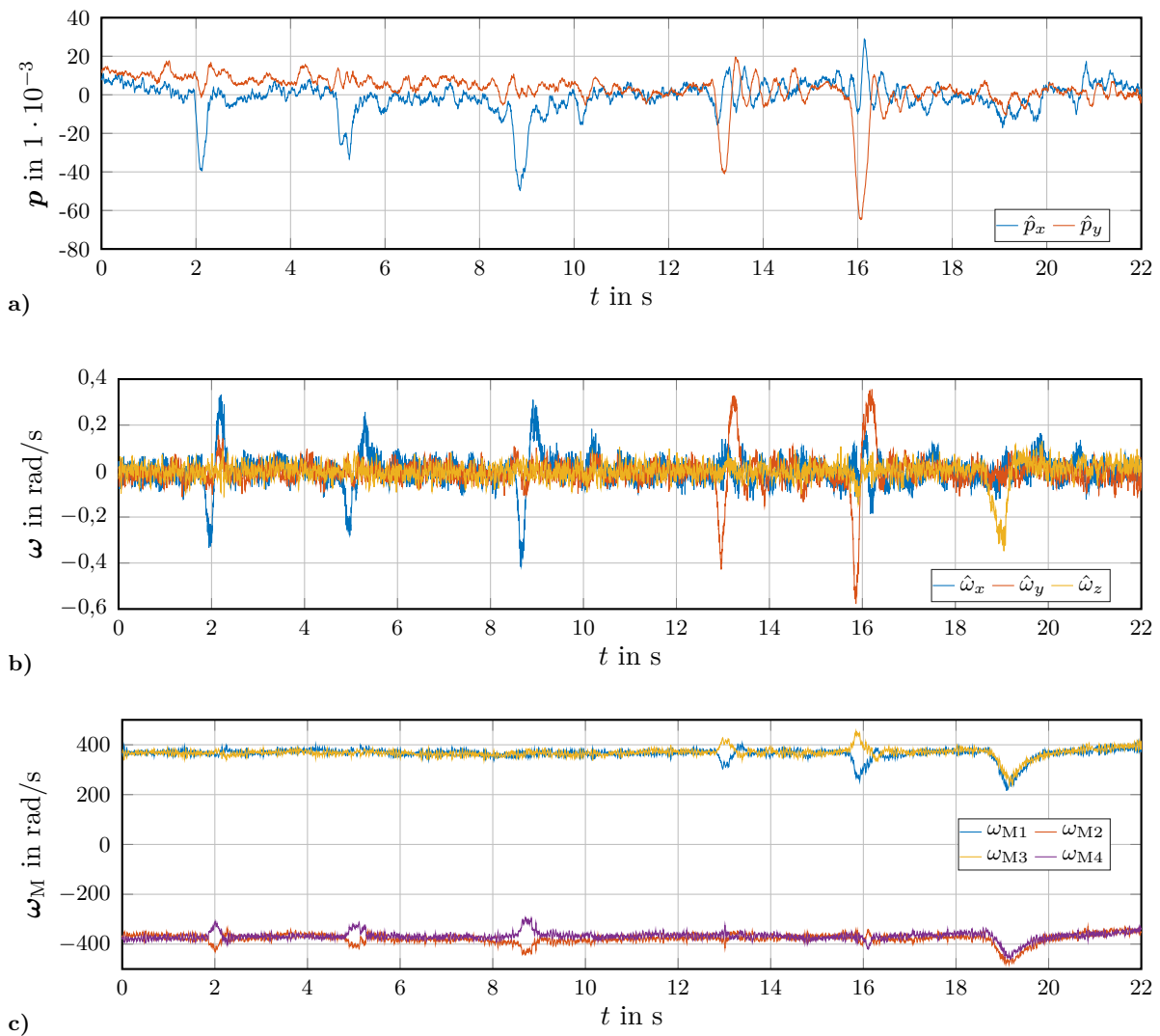


Abbildung 5.12: Messergebnisse für die Stabilisierung des Quadropters auf dem Kugelgelenkprüfstand mit den Eulerparametern in a) den Winkelgeschwindigkeiten in b) und den Rotorwinkelgeschwindigkeiten in c)

digkeiten in Abbildung 5.12b zeichnen die mechanischen Laststörungen deutlich erkennbar auf. Die maximale Auslenkung resultiert aus dem Stoß in p_y -Richtung zum Zeitpunkt $t \approx 15,8\text{s}$ und beträgt circa $6,9^\circ$. Sämtliche Störungen werden dabei ohne ein Überspringen innerhalb von $t \approx 0,5\text{s}$ ausgeglichen. Die Stellgrößen in Abbildung 5.12c weisen den erwarteten Verlauf auf. So reagieren bei einer Abweichung der Nulllage von $p_x = 0$ hauptsächlich die Motoren M2 und M4 und bei einer Abweichung der Nulllage von $p_y = 0$ vorwiegend die Motoren M1 und M3, jeweils in entgegengesetzter Richtung. Auf die Störung der Größe ω_z reagiert das System, indem die Motoren M1 und M3 verzögert und die Motoren M2 und M4 beschleunigt werden. Die Entkopplung der einzelnen Größen ist vor allem für die ersten drei Auslenkungen in p_x -Richtung gut zu erkennen, da hier das Aufbringen der Störung in nur eine Richtung am besten gelungen ist. Durch die Entkopplung erfolgt das Ausregeln des Winkelfehlers nahezu ohne Einfluss auf die Größe p_y . Das Ergebnis belegt die Funktionsweise der exakten Linearisierung in Kombination mit dem zusätzlichen Regler für die Orientierung.

Für die Simulation einer Trajektorienfolgeregelung eines freifliegenden Quadropters wird ebenfalls das in Abbildung 5.11 dargestellte Regelungskonzept verwendet. Für eine Trajektorienfolgeregelung ist es von Vorteil, wenn alle Lagegrößen \mathbf{x}_{B_L} , zumindest aber der Ortsvektor $\mathbf{r}_{1,0} = [x \ y \ z]^T$ vorgegeben werden kann. Ausgangspunkt für die weiteren Überlegungen bietet das durch das Stellgesetz (5.22) teillinearisierte Modell mit den neuen fiktiven Eingangsgrößen $\mathbf{v} = [v_{\omega_x} \ v_{\omega_y} \ v_{\omega_z} \ {}^1v_{\dot{z}}]^T$. Entsprechend dem vektoriellen relativen Grad $\boldsymbol{\delta} = [2 \ 2 \ 1 \ 2]^T$ resultieren für das Stellgesetz (5.20) der Trajektorienfolgeregelung die nach Gleichung (5.21) definierten Sollgrößen

$$w_{\omega_x} = \frac{1}{K_{S,\omega_x}} \left(\ddot{\omega}_{x,\text{Rt}} + a_{\omega_{x1}} \dot{\omega}_{x,\text{Rt}} + a_{\omega_{x0}} \omega_{x,\text{Rt}} \right), \quad (5.50a)$$

$$w_{\omega_y} = \frac{1}{K_{S,\omega_y}} \left(\ddot{\omega}_{y,\text{Rt}} + a_{\omega_{y1}} \dot{\omega}_{y,\text{Rt}} + a_{\omega_{y0}} \omega_{y,\text{Rt}} \right), \quad (5.50b)$$

$$w_{\omega_z} = \frac{1}{K_{S,\omega_z}} \left(\dot{\omega}_{z,\text{Rt}} + a_{\omega_{z0}} \omega_{z,\text{Rt}} \right), \quad (5.50c)$$

$${}^1w_{\dot{z}} = \frac{1}{K_{S,\dot{z}_1}} \left({}^1\ddot{z}_{1,\text{Rt}} + a_{z_1} {}^1\dot{z}_{1,\text{Rt}} + a_{z_0} {}^1z_{1,\text{Rt}} \right). \quad (5.50d)$$

Keine der Sollgrößenverläufe (5.50) kann direkt in Abhängigkeit der Solltrajektorien nach Gleichung (5.23) beziehungsweise (5.24) berechnet werden. Der kinematische Zusammenhang zwischen den Sollgrößenverläufen $w_{\omega_{\text{Rt}}}$ der teillinearisierten Strecke und den vorgegebenen Sollverläufen ${}^0\mathbf{q}_{T,\text{Rt}} = [x_{\text{Rt}} \ y_{\text{Rt}} \ z_{\text{Rt}}]^T$ ist durch die

beiden Gleichungen

$$\dot{\mathbf{q}}_{\text{R,Rt}} = \mathbf{H}(\mathbf{q}_{\text{R,Rt}})\boldsymbol{\omega}_{\text{Rt}}, \quad (5.51a)$$

$${}^0 \begin{bmatrix} \ddot{x}_{\text{Rt}} \\ \ddot{y}_{\text{Rt}} \\ \ddot{z}_{\text{Rt}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} + \mathbf{R}_{10}(\mathbf{q}_{\text{R,Rt}}) {}^1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{z}_{1,\text{Rt}} \end{bmatrix} \quad (5.51b)$$

gegeben. Die Gleichungen sind dabei über die Eulerparameter $\mathbf{q}_{\text{R,Rt}} = \mathbf{p}_{\text{Rt}}$ gekoppelt, weshalb in einem ersten Schritt (5.51b) nach den Eulerparametern $p_{x,\text{Rt}}$ und $p_{y,\text{Rt}}$ sowie der Eingangsgröße ${}^1\ddot{z}_{1,\text{Rt}}$ umgeformt wird. Es zeigt sich, dass das Gleichungssystem nur für $p_{z,\text{Rt}} = 0$ lösbar ist. Zusammen mit der Normierungsbedingung (2.83) ergeben sich aus dem Zusammenhang (5.51b) die gesuchten Eulerparameter

$$\begin{bmatrix} p_{s,\text{Rt}} \\ p_{x,\text{Rt}} \\ p_{y,\text{Rt}} \\ p_{z,\text{Rt}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma \\ \frac{{}^0\ddot{y}_{\text{Rt}}(1-2\sigma^2)}{2\sigma(g+{}^0\ddot{z}_{\text{Rt}})} \\ \frac{{}^0\ddot{x}_{\text{Rt}}(2\sigma^2-1)}{2\sigma(g+{}^0\ddot{z}_{\text{Rt}})} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \sigma &= \frac{(g+{}^0\ddot{z}_{\text{Rt}})\sqrt{\sigma_1+\sigma_1}}{2\sigma_1}, \\ \sigma_1 &= g^2 + 2g\ddot{z}_{\text{Rt}} + {}^0\ddot{x}_{\text{Rt}} + {}^0\ddot{y}_{\text{Rt}} + {}^0\ddot{z}_{\text{Rt}}, \end{aligned} \quad (5.52)$$

Einmaliges Ableiten der Gleichung (5.52) und Einsetzen in (5.51a) liefert den gesuchten Zusammenhang zwischen den Beschleunigungen in den kartesischen Koordinaten des Inertialsystems und den Winkelgeschwindigkeiten gemäß

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{Rt}} = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q}_{\text{R,Rt}})\dot{\mathbf{q}}_{\text{R,Rt}}, \quad \text{mit } \dot{p}_{z,\text{Rt}} = 0. \quad (5.53a)$$

Der Zusammenhang für die Solltrajektorie in z_1 -Richtung wird mit den gefundenen Eulerparametern und dem Basisvektor \mathbf{b}_{1z} des körperfesten Koordinatensystems \mathcal{K}_1 über die Beziehungen

$${}^1\dot{z}_{\text{Rt}} = {}^1\mathbf{b}_{1z}\mathbf{R}_{10}^{\text{T}0}\dot{\mathbf{q}}_{\text{T,Rt}}, \quad {}^1\ddot{z}_{\text{Rt}} = {}^1\mathbf{b}_{1z}\mathbf{R}_{10}^{\text{T}0}\ddot{\mathbf{q}}_{\text{T,Rt}}, \quad {}^1\ddot{\dot{z}}_{\text{Rt}} = {}^1\mathbf{b}_{1z}\mathbf{R}_{10}^{\text{T}0}\ddot{\dot{\mathbf{q}}}_{\text{T,Rt}} \quad (5.53b)$$

berechnet. Die Gleichungen (5.53) bilden die inverse Kinematik der Regelkreisstruktur aus Abbildung 5.11. Für die darauffolgende Berechnung der fiktiven Stellgrößen (5.50) muss Gleichung (5.53a) zweimal nach der Zeit abgeleitet werden, was bedeutet, dass der zeitliche Verlauf der Solltrajektorien x_{Rt} , y_{Rt} und z_{Rt} bis zur fünften Ableitung bekannt sein muss. Zum Ausgleichen der Lagefehler $e_x = x_{\text{Rt}} - x$, $e_y = y_{\text{Rt}} - y$ und $e_z = z_{\text{Rt}} - z$ wird ein zusätzlicher Lageregler mit den Stellgrößen-

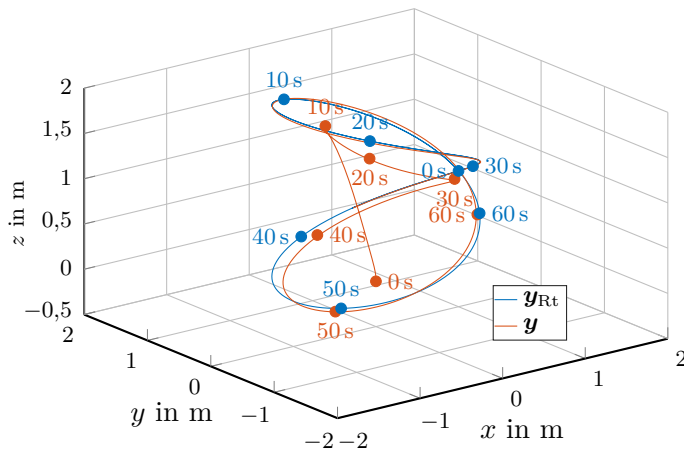
anteilen

$$\mathbf{u}_\omega = K_{P_{px,y}} \left(\begin{bmatrix} p_{x,Rt} \\ p_{y,Rt} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left[\left(K_{P_L} + \frac{K_{I_L}}{s} \right) \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{x}_{Rt} \\ \dot{y}_{Rt} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \right] \right), \quad (5.54)$$

$$u_z = K_{P_z} \left(\left(K_{P_L} + \frac{K_{D_L}s}{T_Ds + 1} \right) e_z + \dot{z}_{Rt} - \dot{z} \right)$$

verwendet. Beide Anteile zusammen bilden für den Quadrokopter den Stellgrößenvektor des Lagereglers $\mathbf{u}_{R,L} = [\mathbf{u}_\omega^T u_z]^T \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$.

Simulationsergebnisse: Der Quadrokopter ist nicht vollständig steuerbar. Darum werden lediglich die Ergebnisse für die Trajektorie (5.24) betrachtet. Der Quadrokopter befindet sich zu Beginn der Simulation in Ruhe im Ursprung des raumfesten Koordinatensystems und muss zunächst den Abstand zur Raumkurve egalalisieren. Die verwendeten Reglerparameter sowie das Simulationsergebnis sind in Abbildung 5.13 dargestellt. Das Ergebnis zeigt, dass es mit dem getesteten Regelungskonzept gelingt, den Quadrokopter auf die Bahnkurve einzuregeln. Definiert man einen absoluten Fehler von $\|\mathbf{y}_{Rt} - \mathbf{y}\|_2 < 0,05$ m als gewünschte Genauigkeit, so erreicht der Quadrokopter gemäß Abbildung 5.14c seine Bahnkurve nach $t \approx 71$ s. Der Quadrokopter nähert sich der Solltrajektorie in z -Richtung ohne ein Überspringen asymptotisch an. Das Einregeln in x - und y -Richtung erfolgt hingegen mit mehrfachem Überspringen. Für das Abfliegen der Trajektorie muss der Quadrokopter entsprechend Abbildung 5.14b periodisch in p_x - und p_y -Richtung geneigt werden. Entsprechend der Vorgabe bleibt $p_z = 0$. Die Winkelgeschwindigkeiten in Abbildung 5.14a bleiben mit $|\omega_{M,\max}| = 662$ rad/s unter den gesetzten Grenzen von $|\omega_M| \leq 700$ rad/s. Diese hohen Geschwindigkeiten ergeben sich jedoch nur für den Bruchteil einer Sekunde. Bereits für $t \geq 0,3$ s befinden sich die Winkelgeschwindigkeiten innerhalb des Bereichs von $|\omega_{Mi}| = |\omega_{M0}| \pm 0,2$ rad/s. Der Einfluss der



Parameter	Wert
$K_{P_{px,y}}$	10
K_{P_z}	5
K_{P_L}, K_{D_L}	0,1
K_{I_L}	0,05
$a_{\omega_{x0}}, a_{\omega_{y0}}, a_{z0}$	10000
$a_{\omega_{x1}}, a_{\omega_{y1}}, a_{z1}$	200
$a_{\omega_{z0}}$	100

Abbildung 5.13: Simulationsergebnis der Bahnfolgeregelung des Quadrokters

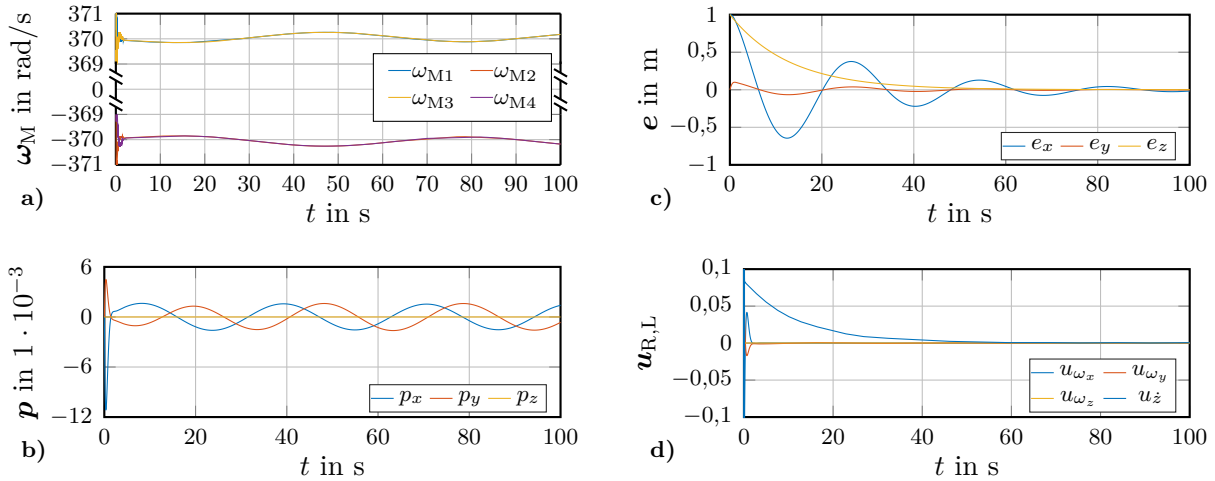


Abbildung 5.14: Verlauf wichtiger Größen für die Bahnfolgeregelung des Quadropters unterteilt nach den Rotorwinkelgeschwindigkeiten in a), den Eulerparametern in b), den auftretenden Positionsfehlern in c) und den Stellgrößen des äußeren Reglers in d)

zusätzlichen Lageregler ist in Abbildung 5.14d dargestellt. Dabei ist sowohl für die Regelung der Winkelgeschwindigkeiten $\omega_{x,y,z}$ als auch der Geschwindigkeit \dot{z} zu sehen, dass die Stellgrößen \mathbf{u}_ω beziehungsweise $u_{\dot{z}}$ gegen null streben. Das bedeutet, dass die komplette Stellgröße nach einer gewissen Zeit aus dem Anteil der Vorsteuerung besteht. Dies wiederum ist der Nachweis dafür, dass die Invertierung des Modells, bestehend aus der exakten Linearisierung und dem vorgeschalteten inversen Modell, exakt ist.

5.4 Betrachtung eines vollaktuierten Trikopters

Der hier betrachtete Trikopter besitzt drei Ausleger mit schwenkbaren Motoreinheiten und somit insgesamt sechs Stelleingriffe. Hieraus resultiert ein vollaktuiertes Multikoptermodell, das nachfolgend eingehend betrachtet wird.

Herleitung des Modells: Bei dem in Abbildung 5.15 vorgestellten Trikopter befinden sich die Ausleger bei 0, 120 und 240 Grad. Daraus ergeben sich für die Modellparametrierung die Transformationsmatrizen

$$T_{A1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{A2} = \begin{bmatrix} -0,5 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{A3} = \begin{bmatrix} -0,5 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.55)$$

Neben den drei Eingangsgrößen der Sollwinkelgeschwindigkeit $\mathbf{u}_M \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ können die Motoreinheiten zusätzlich über die Stellgrößen $\mathbf{u}_S \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ geschwenkt werden. Die Zustände $\mathbf{x}_B \in \mathbb{R}^{13 \times 1}$ für die Bewegung der Trägerplattform werden für den

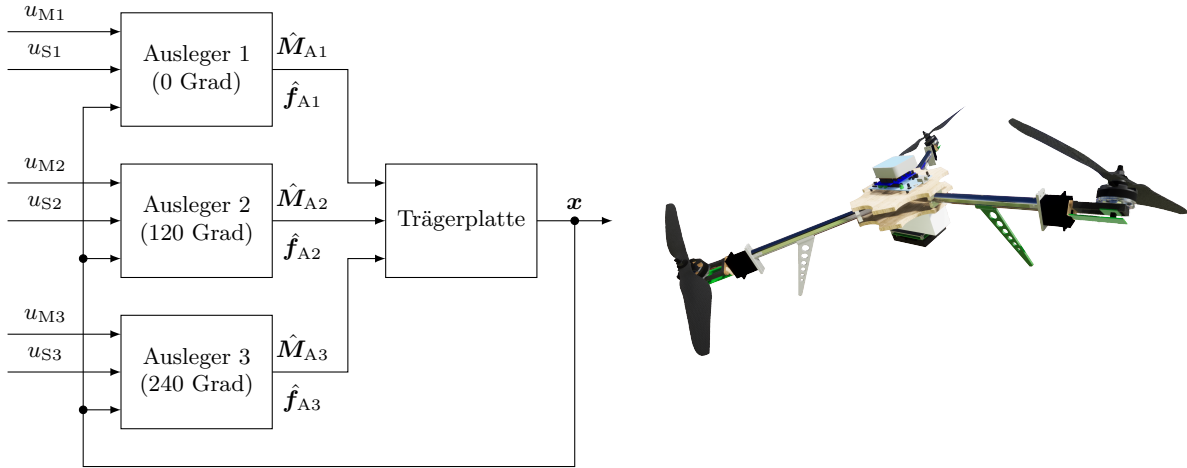


Abbildung 5.15: Blockschaltbild des Simulationsmodells eines vollaktuierten Tri-kopters

Trikopter sowohl um die Zustände der Antriebsmotoren $\mathbf{x}_{M_L} = \boldsymbol{\Psi}_M \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ und $\mathbf{x}_{M_V} = \boldsymbol{\omega}_M \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ als auch die Zustände der Servomotoren $\mathbf{x}_{S_L} = \boldsymbol{\Psi}_S \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ und $\mathbf{x}_{S_V} = \boldsymbol{\omega}_S \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ ergänzt. Das resultierende Zustandsraummodell besitzt den Zustandsvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{25 \times 1}$. Für das Reibmoment gilt erneut $\boldsymbol{\tau}_R = \mathbf{0}$. Die Auswertung des Multikoptergleichungssystems liefert den Vektor zum Gesamtschwerpunkt

$$\mathbf{d}_{1,1} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}m_3h_{33}+\sqrt{3}m_4h_{43}}{2m_D} (\sin(\Psi_{S2}) - \sin(\Psi_{S3})) \\ \frac{(m_3h_{33}+m_4h_{43})}{m_D} \sin(\Psi_{S1}) - \frac{m_3h_{33}+m_4h_{43}}{2m_D} (\sin(\Psi_{S2}) + \sin(\Psi_{S3})) \\ \frac{-3m_2h_{21}-3(m_3+m_4)(h_{21}+h_{32})-(m_3h_{33}+m_4h_{43})\sum_{i=1}^3 \cos(\Psi_{Si})}{m_D} \end{bmatrix}. \quad (5.56)$$

Die Lage des Gesamtschwerpunkts unterscheidet sich gegenüber dem des Quadropters. Durch die schwenkbaren Motoreinheiten besitzt der Trikopter für $\boldsymbol{\Psi}_S \neq \mathbf{0}$ keinen symmetrischen Aufbau mehr und der Schwerpunkt liegt nicht mehr auf der z_1 -Achse des körperfesten Koordinatensystems, sondern variiert in Abhängigkeit der Stellwinkel. Für die Reglersynthese werden die vereinfachten Gleichungen des Triopters nach Abschnitt 5.1 hergeleitet. Der Abstand zum Schwerpunkt (5.56) vereinfacht sich auf $\mathbf{d}_{1,1} = [0 \ 0 \ h_{11}]^T$. Die Gesamtmasse für den Trikopter ist $m_D = m_1 + 3 \sum_{i=2}^4 m_i$. Für das vereinfachte Modell ergibt sich der konstante Trägheitstensor $\boldsymbol{\Theta}_D = \text{diag}(\Theta_{1x} + \sigma, \Theta_{1y} + \sigma, \Theta_{1z})$ mit den Elementen

$$\begin{aligned} \sigma &= h_{11}^2 m_1 + 3 \sum_{i=2}^4 \left(\frac{\Theta_{ix} + \Theta_{iy}}{2} + m_i \left(h_{i1}^2 + \frac{l_{i1}^2}{2} \right) \right), \\ \Theta_z &= \Theta_{1z} + 3 \sum_{i=2}^4 (\Theta_{iz} + m_i l_{i1}^2). \end{aligned} \quad (5.57)$$

Die Berechnung des Vektors der eingprägten Gewichtskräfte $\hat{\mathbf{f}}^g$ ist für alle frei-

fliegenden Multikoptersysteme identisch und berechnet sich damit auch für den Trikofter entsprechend der Gleichung (5.45). Ähnlich zum Quadrokofter, ergeben sich auch beim Trikofter Terme, die einen Beitrag leisten solange $(x_{M_i} - u_{M_i}) \neq 0$ beziehungsweise $(x_{S_i} - u_{S_i}) \neq 0$ gilt. Die daraus resultierenden transienten Kräfte und Momente tragen jedoch keinen konstanten Anteil zur Steuerung des Systems bei, weshalb diese für die Steuerung des Systems unbrauchbar sind. Werden keine weiteren Vereinfachungen getroffen, wird jeder Zustand $\dot{\mathbf{x}}_{B_V}$ aufgrund der transienten Motormomente direkt durch eine Eingangsgröße beeinflusst. Deshalb besitzt das System für die Ausgänge $\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_{8:13}$ einen vektoriellen relativen Grad von $\boldsymbol{\delta} = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$. Die translatorischen Geschwindigkeiten hängen direkt von den transienten Motormomenten der Servomotoren ab. Daraus folgt die Teilmatrix $\mathbf{D}_{\boldsymbol{\delta}3:6,1:3} = \mathbf{0}$, was bedeutet, dass die translatorischen Geschwindigkeiten nicht durch die Eingangsgrößen u_{M_i} beeinflusst werden können. Trotz $\text{rang}(\mathbf{D}_{\boldsymbol{\delta}}) = 6$ hat das gefundene Reglergesetz offensichtlich keinen technischen Nutzen. Hinzu kommt, dass sofern mehr als ein Servowinkel $\Psi_{S_i} = 0$ ist, es zu einem Rangabfall der Matrix $\mathbf{D}_{\boldsymbol{\delta}}$ kommt. Aus den genannten Gründen kann das System nicht ohne Weiteres exakt linearisiert werden. Für die Reglersynthese werden daher die transienten Motormomente für die Zustände $\mathbf{x}_{8:13}$ vernachlässigt. Mit diesen Annahmen und den Abkürzungen $c_i \equiv \cos(\Psi_{S_i})$ und $s_i \equiv \sin(\Psi_{S_i})$ sowie $F_{A_i} = c_T \omega_{M_i}$ ergibt sich der Vektor der Eingangsgrößen

$$\hat{\mathbf{f}}^u = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}(\tau_{M2}s_2 - \tau_{M3}s_3) + 2b_{11} \sum_{i=1}^3 F_{A_i}c_i + \sqrt{3}(F_{A2}c_2 - F_{A3}c_3)l_{41} + (2F_{A1}s_1 - F_{A2}s_2 - F_{A3}s_3)h_{G3}}{2} \\ \frac{2\tau_{1}s_1 + \tau_{M2}s_2 + \tau_{M3}s_3 - 2(l_{11} + l_{41})F_{A1}c_1 - (2l_{11} - l_{41})(F_{A2}c_2 + F_{A3}c_3) + \sqrt{3}(F_{A2}s_2 - F_{A3}s_3)h_{G3}}{2} \\ \frac{-2(l_{11} + l_{41})F_{A1}s_1 + (l_{11} - 2l_{41} - \sqrt{3}b_{11})F_{A2}s_2 + (l_{11} - 2l_{41} + \sqrt{3}b_{11})F_{A3}s_3 - 2(\tau_{M1}c_1 - \tau_{M2}c_2 - \tau_{M3}c_3)}{2} \\ \frac{\sqrt{3}(F_{A2}s_2 - F_{A3}s_3)}{2} \\ -\frac{2F_{A1}s_1 - F_{A2}s_2 - F_{A3}s_3}{2} \\ F_{A1}c_1 + F_{A2}c_2 + F_{A3}c_3 \end{bmatrix}, \quad (5.58)$$

mit den Abkürzungen $l_{41} = l_{21} + l_{32} + l_{43}$ und $h_{G3} = h_{11} + h_{21} + h_{32}$.

Gleichgewichtslage: Die Frage, welche Stellkräfte zu einer Gleichgewichtslage führen, lässt sich für den Trikofter nicht so einfach beantworten wie das beim Quadrokofter der Fall war. Dass es aber für jede Orientierung eine Kombination von Stellgrößen geben muss, die das System in seiner aktuellen Lage halten, folgt aus dem Satz der impliziten Funktionen mit

$$\text{rang} \left(\frac{\partial (\hat{\mathbf{f}}^u + \hat{\mathbf{f}}^g)}{\partial (\boldsymbol{\omega}_M, \Psi_S)} \right) = 6. \quad (5.59)$$

In Abbildung 5.16 sind die numerisch berechneten Stellgrößen exemplarisch für mögliche Gleichgewichtslagen um die x -Achse dargestellt. Erwartungsgemäß dre-

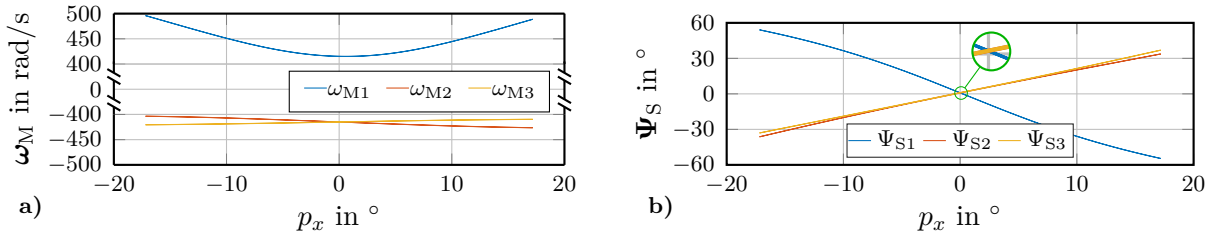


Abbildung 5.16: Verlauf wichtiger Größen des vollaktuierten Trikopfers in Gleichgewichtslagen um die x -Achse mit dem Verlauf der Rotorwinkelgeschwindigkeiten in a) und dem Verlauf der Servowinkel in b)

hen nach Abbildung 5.16a zwei der drei Rotoren stets in dieselbe Richtung. In der vergrößerten Darstellung ist in Abbildung 5.16b zu erkennen, dass in der horizontalen Lage für $p_x = 0$ sämtliche Servowinkel $\Psi_S \neq 0$ sind. Diese Verkippung ist notwendig, da sich bei betragsmäßig gleicher Drehzahl aller Motoren zwar die aus der Auftriebskraft resultierenden Drehmomente im Schwerpunkt aufheben, sich jedoch die Widerstandsmomente τ_{W_i} aller Rotoren in Summe nicht egalisieren. Diese Tatsache ist auf den quadratischen Zusammenhang nach Gleichung (3.48) zurückzuführen. Dies hat zur Folge, dass die Auftriebskräfte nicht exakt antiparallel zur auftretenden Gewichtskraft wirken. Der notwendige Energieaufwand, um den Trikotter in seiner Gleichgewichtslage zu halten, steigt mit zunehmendem Verkippwinkel. Die Signalverläufe der Motoreinheiten M2 und M3 sind für die Drehung um die x -Achse punktsymmetrisch zum Ursprung.

Reglersynthese: Im Gegensatz zu dem unteraktuierten Quadrokopter kann bei dem betrachteten vollaktuierten System jeder Freiheitsgrad der Trägerplatte direkt über Gleichung (5.58) beeinflusst werden. Bei genauerer Betrachtung ist ersichtlich, dass die Stellgrößen \mathbf{u}_M die Zustände $\mathbf{x}_{8:13}$ indirekt mit einer Verzögerung erster Ordnung über die Winkelgeschwindigkeit der Motoren ω_M beeinflussen. Die Stellgrößen \mathbf{u}_S wirken hingegen indirekt über die Servowinkel Ψ_S mit einer Verzögerung zweiter Ordnung auf die Zustände $\mathbf{x}_{8:13}$. Die Tatsache, dass die Eingangsgrößen die Zustandsgleichungen $\dot{\mathbf{x}}_{B_V}$ auf unterschiedlicher, dynamischer Ebene beeinflussen, stellt ein Problem dar. Die resultierende Entkopplungsmatrix besitzt für die mögliche Wahl der Ausgänge $\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_{8:13}$ die Struktur $\mathbf{D}_\delta = [\mathbf{D}_{6 \times 3} \mathbf{0}_{6 \times 3}]$ mit $\text{rang}(\mathbf{D}_\delta) = 3 \leq n$. Aufgrund der entstehenden Nullmatrix ist die Matrix \mathbf{D}_δ nicht invertierbar. Ziel muss es sein, das Modell so zu beeinflussen, dass die Winkelgeschwindigkeiten $\omega_{x,y,z} = \mathbf{x}_{8:10}$ erst für eine höhere Ableitung durch die Eingangsgrößen beeinflusst werden. Dies gelingt durch eine sogenannte dynamische Erweiterung der Zustände für die Eingangsgrößen \mathbf{u}_M . Dazu werden die Elemente des Eingangsgrößenvektors $\mathbf{u}_M \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ in der Zustandsgleichung (5.6b) durch die neuen Zustandsgrößen $\mathbf{x}_D = \mathbf{x}_{26:28}$ ersetzt und der neue Stellgrößenvektor $\mathbf{u}_D \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$

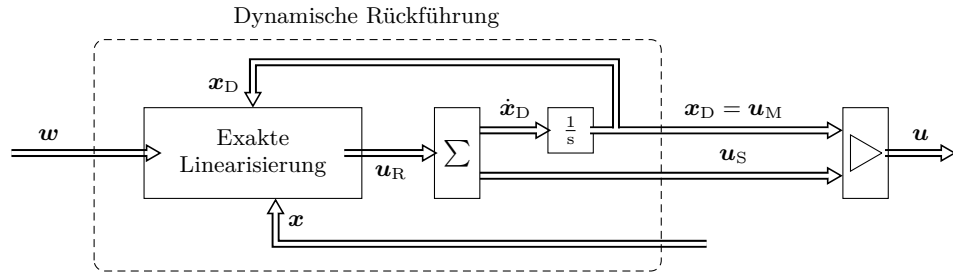


Abbildung 5.17: Dynamische Erweiterung der Regelkreisstruktur

definiert. Die Zustandsgleichungen erweitern sich zu

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{B_L} \\ \dot{x}_{B_V} \\ \dot{x}_{M_L} \\ \dot{x}_{M_V} \\ \dot{x}_{S_L} \\ \dot{x}_{S_V} \\ \dot{x}_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \mathbf{x}_{B_V} \\ \hat{\mathbf{M}}_D^{-1} \hat{\mathbf{f}}_D^e \\ \mathbf{x}_{M_V}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_D) \\ -\frac{1}{T_M}(\mathbf{x}_{M_V} - \mathbf{x}_D) \\ \mathbf{x}_{S_V} \\ -\frac{1}{T_S} \mathbf{x}_{S_V} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_S \\ \mathbf{E}_{3 \times 3} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_D \\ \mathbf{u}_S \end{bmatrix}. \quad (5.60)$$

Durch die dynamische Erweiterung besitzt das System einen vektoriellen relativen Grad von $\boldsymbol{\delta} = [3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3]^T$. Die Entkopplungsmatrix besitzt für alle $\boldsymbol{\omega}_M \neq \mathbf{0}$ mit $\text{rang}(\mathbf{D}_{\boldsymbol{\delta}}) = 6$ einen wohldefinierten Grad. Die Berechnung des Stellgrößenvektors wurde mit den neuen Zuständen \mathbf{x}_D dynamisch erweitert. Die Regelkreisstruktur der exakten Linearisierung in Abbildung 5.11 muss entsprechend mit der Regelkreisstruktur in Abbildung 5.17 erweitert werden.

Bei dem vorgestellten Trikotter können somit sämtliche Zustände \mathbf{x}_{B_V} unabhängig voneinander vorgegeben werden. Mit Hilfe der kinematischen Differentialgleichung

$$\mathbf{s}_{Rt} = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q}_{Rt}) \dot{\mathbf{q}}_{Rt} \quad (5.61)$$

kann der Zusammenhang zu den Lagegrößen dargestellt werden. Zur Berechnung der Stellgrößen nach (5.21) müssen gemäß dem vektoriellen relativen Grad die Größen der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_{Rt}, \dots, \boldsymbol{\omega}_{Rt}^{(3)}$ und die Größen des Ortsvektors $\dot{\mathbf{r}}_{Rt}, \dots, \mathbf{r}_{Rt}^{(4)}$ bekannt sein. Sollen die Trajektorien im Inertialsystem vorgegeben werden, hat eine entsprechende Umrechnung mit ${}^1\mathbf{r}_{Rt} = \mathbf{R}_{10}^T \mathbf{r}_{Rt}$ zu erfolgen. Da, wie im Falle des Quadropters das System auf Geschwindigkeitsebene exakt linearisiert und geregelt wird, muss auch für den Trikotter ein zusätzlicher Lageregler zum Einsatz kommen. Hierbei ergibt sich sowohl für die Position als auch für die

Orientierung bereits für die Verwendung des P-Reglers

$$\mathbf{u}_{R,L} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_\omega^T & \mathbf{u}_r^T \end{bmatrix}^T, \quad \text{mit } \mathbf{u}_\omega = K_{Pp}(\mathbf{p}_{Rt} - \mathbf{p}), \quad \mathbf{u}_r = K_{Pr}(\mathbf{r}_{Rt} - \mathbf{r}) \quad (5.62)$$

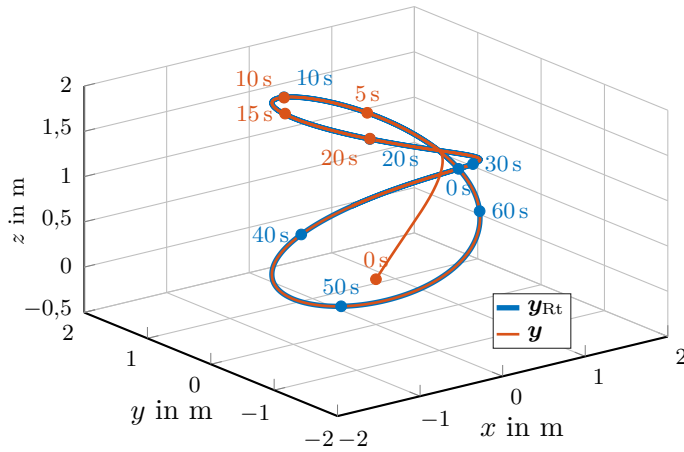
ein zufriedenstellendes Ergebnis.

Simulationsergebnisse: In einer ersten Simulation wird die Trajektorie nach Gleichung (5.24) untersucht. Das Ergebnis ist in den Abbildungen 5.18 und 5.19 dargestellt. Es zeigt, dass der Trikotter die gewünschte Genauigkeit von $\|\mathbf{y}_{Rt} - \mathbf{y}\| < 0,05 \text{ m}$ nach $t \approx 1,1 \text{ s}$ dauerhaft erreicht. Sowohl für die Position als auch für die Orientierung klingt der Fehler asymptotisch stabil ab. Nach Erreichen der Referenztrajektorie drehen alle Rotoren mit Winkelgeschwindigkeiten von $|\omega_{Mi}| = |\omega_{M0}| \pm 0,6 \text{ rad/s}$. Nach dem Einschwingen des Systems, mit anfänglichen Stellwinkeln bis $|\Psi_S| \approx 40^\circ$, reduzieren sich die Stellgrößen der Servowinkel auf den Bereich $|\Psi_S| \leq 2^\circ$. Die Bewegung in die x_0 - und y_0 -Richtung wird somit hauptsächlich durch das Verkippen der Motoreinheiten eingeleitet. Diese Winkel ändern sich dann periodisch mit einer Periodendauer von $T = 10\pi \text{ s}$. Die Eulerparameter streben gegen null, sodass der Trikotter wie gewünscht die Spirale in waagerechter Position abfliegt.

Aufgrund der vollständigen Steuerbarkeit der relevanten Zustände ist der Trikotter zudem in der Lage, eine Rotation auf der Stelle durchzuführen. Für eine Rotation um die x_1 -Achse nach Gleichung (5.23), ist das Ergebnis in Abbildung 5.20 dargestellt. Es zeigt, dass es sowohl bei der Position als auch bei der Orientierung zu unerwünschten Abweichungen kommt. Für die Position sind die Abweichungen mit $|e_y| < 5 \text{ mm}$ in y -Richtung und mit $|e_z| < 2 \text{ mm}$ in z -Richtung im einstelligen Millimeterbereich. Die Abweichung in x -Richtung ist mit $|e_x| < 0,25 \text{ mm}$ um circa eine Größenordnung kleiner. Bei der Orientierung sind die Winkelfehler p_x und p_z gegenüber p_y mit $\varphi_y \approx 0,8^\circ$ vernachlässigbar. Die Ursache für die Abweichungen sind die bei der Herleitung der linearisierenden Stellgrößen vernachlässigten transienten Motormomente. Somit wirkt jede Beschleunigung an einem der Motoren als Störgröße auf das System, welche ausgegelt werden muss.

5.5 Betrachtung überaktuierter Multikopter

In diesem Abschnitt werden zwei unterschiedliche überaktuierte Multikopter untersucht. Zum einen wird der bereits in Abschnitt 5.3 betrachtete Quadrokofter um zusätzliche Stellgrößen erweitert, indem alle Ausleger mit schwenkbaren Motoreinheiten ausgestattet werden. Dadurch entsteht ein überaktuiertes Modell, das mehr Stellgrößen als Freiheitsgrade besitzt. Zum anderen wird ein ebenfalls überaktuierter Multikopter betrachtet, der über acht Ausleger mit starren Motoreinheiten verfügt. In beiden Fällen führt die Überaktuierung dazu, dass die Entkopplungsmatrix $\mathbf{D}_\delta \in \mathbb{R}^{6 \times 8}$ nicht quadratisch und somit nicht invertierbar ist. Die allgemeine Lösung der Gleichung (5.16) ergibt sich im Fall der betrachteten Systeme mit acht



Parameter	Wert
K_{P_p}	2
K_{P_x}	2
$a_{\omega_{x0}}, a_{\omega_{y0}}, a_{\omega_{z0}}$	125000
$a_{\omega_{x1}}, a_{\omega_{y1}}, a_{\omega_{z1}}$	7500
$a_{\omega_{x2}}, a_{\omega_{y2}}, a_{\omega_{z2}}$	150
$a_{\dot{x}_0}, a_{\dot{y}_0}, a_{\dot{z}_0}$	3375
$a_{\dot{x}_0}, a_{\dot{y}_1}, a_{\dot{z}_1}$	675
$a_{\dot{x}_0}, a_{\dot{y}_2}, a_{\dot{z}_2}$	45

Abbildung 5.18: Simulationsergebnis der Bahnfolgeregelung des vollaktuierten Trikopters

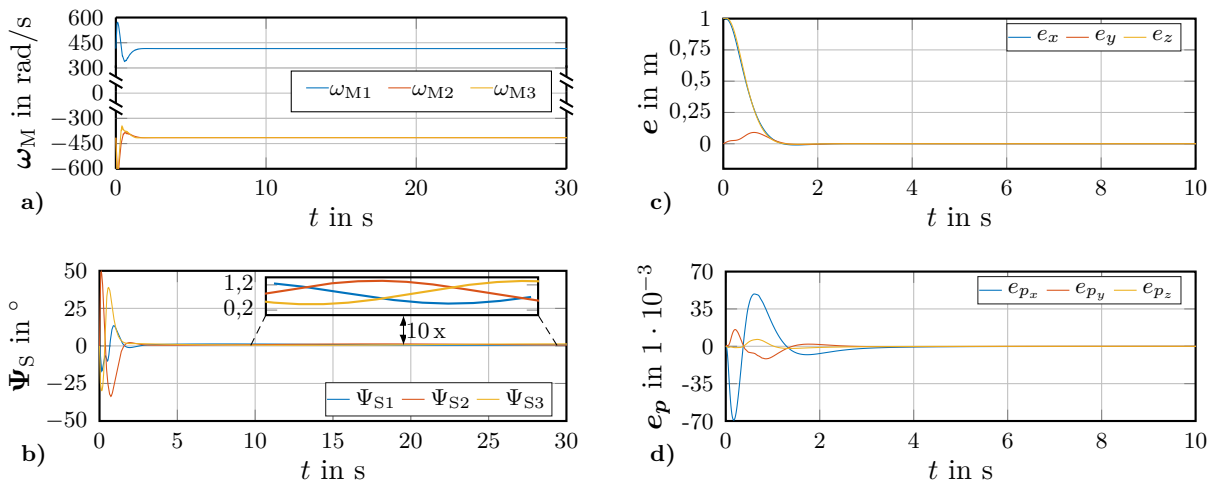


Abbildung 5.19: Verlauf wichtiger Größen für die Bahnfolgeregelung des vollaktuierten Trikopters unterteilt nach den Rotorwinkelgeschwindigkeiten in a), den gestellten Servowinkeln in b), den auftretenden Positionsfehlern in c) und den Fehlern in den Eulerparametern in d)

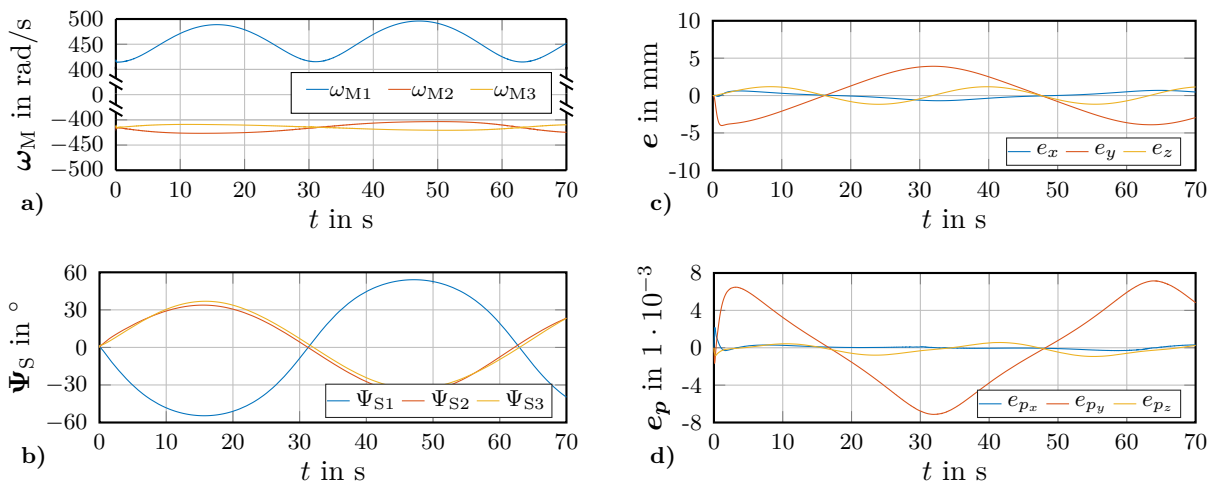


Abbildung 5.20: Simulationsergebnis für die Rotation des vollaktuierten Trikopters mit den notwendigen Rotorwinkelgeschwindigkeiten in a), den nötigen Servowinkeln in b), den auftretenden Positionsfehlern in c) und den Fehlern in den Eulerparametern in d)

Eingangsgrößen aus

$$\mathbf{u} = \mathbf{D}_\delta^+ (\mathbf{v} - \mathbf{c}_\delta) + (\mathbf{E}_{8 \times 8} - \mathbf{D}_\delta^+ \mathbf{D}_\delta) \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{u}_p + \mathbf{u}_{\text{hom}}. \quad (5.63)$$

Bei der Matrix \mathbf{D}_δ^+ handelt es sich um die Moore-Penrose-Inverse von \mathbf{D}_δ . Damit das lineare Gleichungssystem eine Lösung besitzt, muss $\text{rang}(\mathbf{D}_\delta) = 6$ gelten. Die Lösung \mathbf{u} ist die Summe aus der partikulären Lösung \mathbf{u}_p und der homogenen Lösung \mathbf{u}_{hom} , wobei \mathbf{u} von $\boldsymbol{\lambda}$ nach der euklidischen Norm $\|\mathbf{u} - \boldsymbol{\lambda}\|_2$ den kleinsten Abstand besitzt. So kann über die Wahl von $\boldsymbol{\lambda}$ der Stellgrößenvektor \mathbf{u} beeinflusst werden.

5.5.1 Quadropter mit schwenkbaren Motoreinheiten

Herleitung des Modells: Das hier betrachtete Multikoptermodell wird ausführlich in (Ryll, 2015) vorgestellt. Entsprechend dem Quadropter aus Abschnitt 5.3 lauten die Transformationsmatrizen

$$T_{A1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{A2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{A3} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{A4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.64)$$

Im Unterschied zum Quadropter mit starren Motoreinheiten besitzt das hier betrachtete Modell, neben den vier Eingangsgrößen der Sollwinkelgeschwindigkeit $\mathbf{u}_M \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$, zusätzlich vier Stellgrößen $\mathbf{u}_S \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ für die Sollwinkelgeschwindigkeit der Servomotoren. Das Zustandsraummodell mit $\mathbf{x}_B \in \mathbb{R}^{13 \times 1}$ wird um die Zustände $\mathbf{x}_{M_L} = \boldsymbol{\Psi}_M \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ und $\mathbf{x}_{M_V} = \boldsymbol{\omega}_M \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ für die Antriebsmotoren und $\mathbf{x}_{S_L} = \boldsymbol{\Psi}_S \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ sowie $\mathbf{x}_{S_V} = \boldsymbol{\omega}_S \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ für die Servomotoren erweitert. Das resultierende Zustandsraummodell besitzt dadurch den Zustandsvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{29 \times 1}$. Die Auswertung des Multikoptergleichungssystems liefert den Vektor zum Gesamtschwerpunkt

$$\mathbf{d}_{1,1} = \begin{bmatrix} -\frac{m_3 h_{33} + m_4 h_{43}}{m_D} (\sin(\Psi_{S2}) - \sin(\Psi_{S4})) \\ \frac{m_3 h_{33} + m_4 h_{43}}{m_D} (\sin(\Psi_{S1}) - \sin(\Psi_{S3})) \\ \frac{-4m_2 h_2 - 4(m_3 + m_4)(h_2 + h_{32}) - (m_3 h_{33} + m_4 h_{43}) \sum_{i=1}^4 \cos(\Psi_{Si})}{m_D} \end{bmatrix}. \quad (5.65)$$

Dieser verändert analog zum Trikopter seine Lage in Abhängigkeit der Winkel der Servomotoren $\boldsymbol{\Psi}_S$. Der Aufbau des Simulationsmodells ist in Abbildung 5.21 dargestellt. Für die Reglersynthese werden die vereinfachten Gleichungen nach Abschnitt 5.1 berechnet. Hieraus resultiert erneut der konstante Vektor $\mathbf{d}_{1,1} = [0 \ 0 \ h_{11}]^T$ zum Drohnenschwerpunkt. Die Formel zur Berechnung der Gesamtmasse entspricht mit $m_D = m_1 + 4 \sum_{i=2}^4 m_i$ der eines Quadropters, wobei sich die Massen m_2 und m_3 zwischen beiden Modellen aufgrund des mechanischen Aufbaus nach Abbildung 4.6 unterscheiden. Entsprechendes gilt mit $\boldsymbol{\Theta}_D = \text{diag}(\Theta_{1x} + \sigma, \Theta_{1y} + \sigma, \Theta_z)$ und den jeweiligen Anteilen nach Gleichung (5.43) auch für den Trägheitstensor.

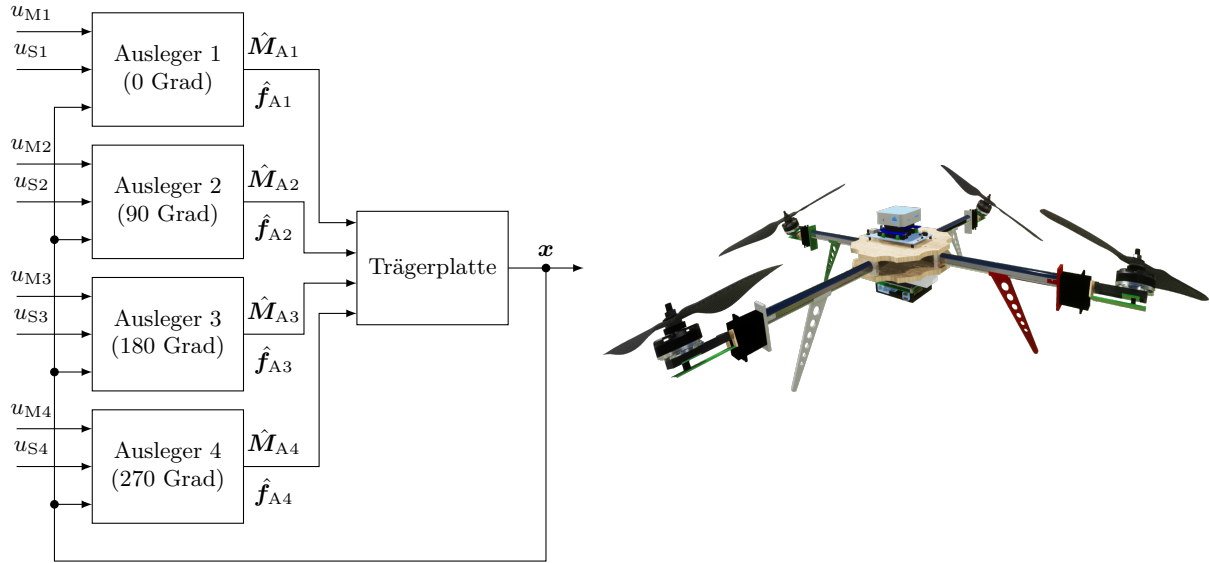


Abbildung 5.21: Blockschaltbild des Simulationsmodells eines Quadropters mit schwenkbaren Motoreinheiten

Auch für den überaktuierten Quadropters folgt ohne weitere Maßnahmen zunächst ein eingangslineares Zustandsraummodell, das für die Wahl der Ausgangsgrößen $\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_{8:13}$ den vektoriellen relativen Grad $\boldsymbol{\delta} = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ besitzt. Zusätzlich hat die Entkopplungsmatrix mit $\text{rang}(\mathbf{D}_{\boldsymbol{\delta}}) = 3 < 6$ keinen vollen Zeilenrang für $\Psi_S = 0$. Der mittels der Entkopplungsmatrix berechnete Stellgrößenvektor nach Gleichung (5.63) hätte somit erneut keinen technischen Nutzen. Werden analog zur Vorgehensweise beim Trikopter zunächst die transienten Motormomente vernachlässigt, ergibt sich mit den Abkürzungen $c_i \equiv \cos(\Psi_{Si})$ und $s_i \equiv \sin(\Psi_{Si})$ sowie $F_{Ai} = c_T \omega_{Mi}$ der Vektor der eingprägten Kräfte

$$\hat{\mathbf{f}}^u = \begin{bmatrix} \tau_{M2}s_2 - \tau_{M4}s_4 + F_{A2}l_y^+c_2 - F_{A4}l_y^-c_4 + F_{A1}s_1h_{G3} - F_{A3}s_3h_{G3} + F_{A1}c_1b_{11} + F_{A3}c_3b_{11} \\ \tau_{M1}s_1 - \tau_{M3}s_3 + F_{A3}l_x^-c_3 - F_{A1}l_x^+c_1 + F_{A2}s_2h_{G3} - F_{A4}s_4h_{G3} - F_{A2}c_2l_{11} - F_{A4}c_4l_{11} \\ -F_{A1}l_x^+s_1 - F_{A2}l_y^+s_2 - F_{A3}l_x^-s_3 - F_{A4}l_y^-s_4 + \sum_{i=1}^4 (-1)^i \tau_i c_i \\ F_{A2}s_2 - F_{A4}s_4 \\ F_{A3}s_3 - F_{A1}s_1 \\ F_{A1}c_1 + F_{A2}c_2 + F_{A3}c_3 + F_{A4}c_4 \end{bmatrix}. \quad (5.66)$$

Dabei gilt $l_y^\pm = \pm b_{11} + l_{21} + l_{32} + l_{43}$, $l_x^\pm = \pm l_{11} + l_{21} + l_{32} + l_{43}$ und $h_{G3} = h_{11} + h_{21} + h_{32}$. Es lässt sich sofort erkennen, dass mit diesem Vektor sämtliche relevanten Zustandsgrößen beeinflusst werden können.

Reglersynthese: Die Entkopplungsmatrix $\mathbf{D}_{\boldsymbol{\delta}} = [\mathbf{J}_{6 \times 4} \ \mathbf{0}_{6 \times 4}]$ besitzt erneut eine Nullmatrix, deren Existenz den geforderten vollen Zeilenrang verhindert. Dieses Problem ist der Verwendung von Auslegern mit einer schwenkbaren Motoreinheit geschuldet. Für die dynamische Erweiterung der Eingangsgrößen \mathbf{u}_M werden die neuen Zustandsgrößen $\mathbf{x}_D = \mathbf{x}_{30:33}$ und die neue Eingangsgröße $\mathbf{u}_D \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ einge-

führt. Die Zustandsgleichungen erweitern sich zu

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{\text{B}_\text{L}} \\ \dot{\mathbf{x}}_{\text{B}_\text{V}} \\ \dot{\mathbf{x}}_{\text{M}_\text{L}} \\ \dot{\mathbf{x}}_{\text{M}_\text{V}} \\ \dot{\mathbf{x}}_{\text{S}_\text{L}} \\ \dot{\mathbf{x}}_{\text{S}_\text{V}} \\ \dot{\mathbf{x}}_{\text{D}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \mathbf{x}_{\text{B}_\text{V}} \\ \hat{\mathbf{M}}_{\text{D}}^{-1} \hat{\mathbf{f}}_{\text{D}}^{\text{e}} \\ \mathbf{x}_{\text{M}_\text{V}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{\text{D}}) \\ -\frac{1}{T_{\text{M}}}(\mathbf{x}_{\text{M}_\text{V}} - \mathbf{x}_{\text{D}}) \\ \mathbf{x}_{\text{S}_\text{V}} \\ -\frac{1}{T_{\text{S}}}\mathbf{x}_{\text{S}_\text{V}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{\text{S}} \\ \mathbf{E}_{4 \times 4} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\text{D}} \\ \mathbf{u}_{\text{S}} \end{bmatrix}. \quad (5.67)$$

Im Ergebnis ergibt sich eine Entkopplungsmatrix mit $\text{rang}(\mathbf{D}_{\delta}) = 6$, sofern $\omega_{\text{M}} \neq 0$ gilt. Der Aufbau des Lagereglers unterscheidet sich für den überaktuierten Quadroptopter, bis auf die abweichende Berechnung des Stellgrößenvektors nach Gleichung (5.63), nicht von dessen Aufbau für den Trikotpter. Aus diesem Grund wird an dieser Stelle auf die Angaben und Vorgehensweisen in Abschnitt 5.4 verwiesen.

Gleichgewichtslage: Aufgrund der Überaktuierung und des vollen Zeilenrangs der Matrix \mathbf{D}_{δ} , besitzt der überaktuierte Quadroptopter gleich dem vollaktuierten Trikotpter unendlich viele Gleichgewichtslagen. Im Unterschied gibt es jedoch für den Quadroptopter aufgrund seiner Überaktuierung zu einer gegebenen Gleichgewichtslage mehrere mögliche Lösungen für den gesuchten Stellgrößenvektor. Diese Stellgrößenvektoren können daher über den Vektor $\boldsymbol{\lambda}$ nach bestimmten Kriterien, wie zum Beispiel dem Energieverbrauch des Gesamtsystems oder der Stabilität der Drohne, optimiert werden. Der Vektor $\boldsymbol{\lambda}$ wird für den Quadroptopter mit schwenkbaren Motoreinheiten mit

$$\boldsymbol{\lambda} = K \left[(\omega_{\text{M}0} - \mathbf{x}_{30:33})^{\text{T}} \mathbf{0}^{\text{T}} \right]^{\text{T}} \quad (5.68)$$

gewählt. Abbildung 5.22 zeigt den Verlauf der Stellgrößen für Gleichgewichtslagen um die x -Achse. Für einen besseren Vergleich wird in beiden Fällen dieselbe Skalierung verwendet. Für die Wahl von $K = 0$ resultiert aus Gleichung (5.68) $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$. Das Ergebnis stellt die optimale Lösung für minimale Beschleunigungen der Antriebsmotoren und Winkelgeschwindigkeiten der Servomotoren dar. Für die zweite Betrachtung mit $K = 2$ ergibt sich aus Gleichung (5.68) eine Lösung, die einen möglichst geringen Abstand zur Schwebedrehzahl $\omega_{\text{M}0} \approx 386,7 \text{ rad/s}$ und der Winkelgeschwindigkeit $\omega_{\text{S}} = \mathbf{0}$ aufweist. Im Vergleich ergeben sich zwei komplett unterschiedliche Stellgrößenverläufe, wobei die erste Lösung eher zu einer stabileren Fluglage und die zweite zu einem geringeren Energieverbrauch führt. Die geringeren Drehzahlen der Antriebsmotoren gehen dabei mit kleineren Stellwinkeln der Servomotoren einher. Der betrachtete Vergleich soll nur den Einfluss des Vektors $\boldsymbol{\lambda}$ demonstrieren und basiert nicht auf einer Optimierung hinsichtlich eines Kriteriums.

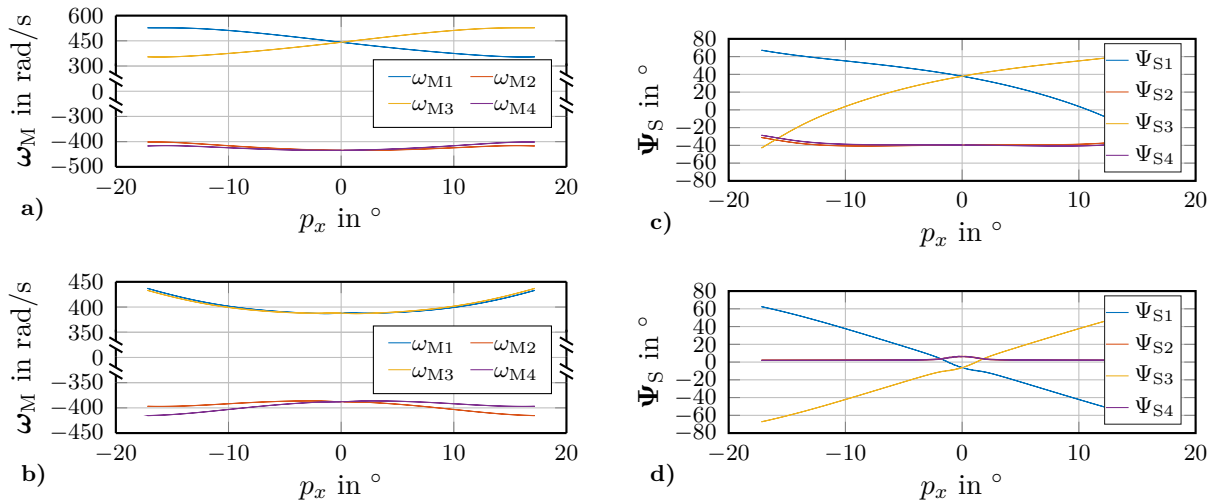
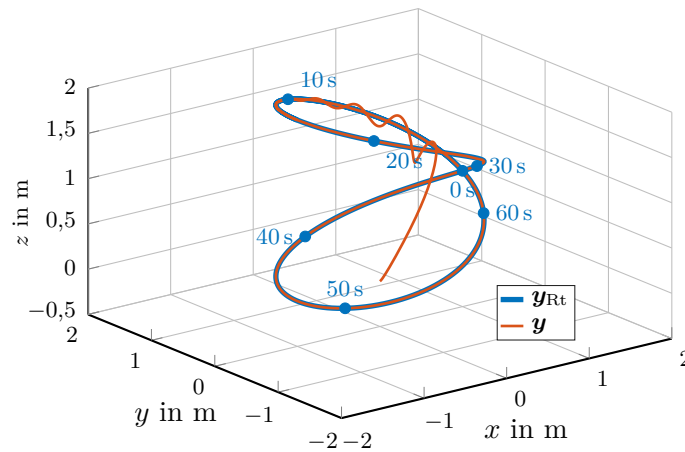


Abbildung 5.22: Verlauf wichtiger Größen des überaktuierten Quadropters in Gleichgewichtslagen um die x -Achse mit dem Verlauf der Rotorwinkelgeschwindigkeiten für a) $K = 0$ und b) $K = 2$ sowie dem Verlauf der Servowinkel für c) $K = 0$ und d) $K = 2$

Simulationsergebnisse: Nachfolgende Betrachtungen beziehen sich ausschließlich auf Simulationen für $K = 0$, da das System für $K = 2$ deutlich mehr zum Schwingen neigt. Zunächst wird wieder die Trajektorie nach Gleichung (5.24) untersucht. Das Ergebnis ist zusammen mit den verwendeten Reglerparametern in den Abbildungen 5.23 und 5.24 dargestellt. Es zeigt, dass der überaktuierte Quadropters die gewünschte Genauigkeit von $\|\mathbf{y}_{Rt} - \mathbf{y}\|_2 < 0,05 \text{ m}$ nach $t \approx 6 \text{ s}$ dauerhaft erreicht. In allen drei Raumrichtungen ist ein deutliches Schwingverhalten erkennbar. Der Fehler für die Position und die Orientierung klingt asymptotisch stabil ab. Nach Erreichen der Referenztrajektorie drehen alle Rotoren mit Winkelgeschwindigkeiten von $|\omega_{Mi}| = |\omega_{M0}| \pm 0,6 \text{ rad/s}$. Nachdem sich das System im eingeschwungenen Zustand befindet, reduzieren sich die Servowinkel auf $|\Psi_S| \approx 40,5 \pm 0,25^\circ$. Die Bewegung in die x - und y -Richtung wird somit zusätzlich durch das Verkippen der Motoreinheiten eingeleitet. Aufgrund der großen Servowinkel sind die Winkelgeschwindigkeiten mit $|\omega_M| \approx 444 \text{ rad/s}$ knapp 15 % über der theoretisch zum Schweben benötigten Drehzahl ω_{M0} . Die Servowinkel ändern sich erneut periodisch mit einer Periodendauer von $T = 10\pi \text{ s}$. Abbildung 5.25 zeigt das Ergebnis für die nach Gleichung (5.23) definierte Rotation auf der Stelle. Die auftretenden Abweichungen bei der Position wie auch der Orientierung sind in etwa eine Größenordnung größer als die entsprechenden Abweichungen für den Trikopter. Für die Position sind die maximalen Abweichungen mit $|e_y| < 0,04 \text{ m}$ in y -Richtung und $|e_z| < 0,01 \text{ m}$ in z -Richtung erneut im einstelligen Zentimeterbereich. Die maximale Abweichung in x -Richtung liegt bei $|e_x| < 0,0026 \text{ m}$. Bei der Orientierung sind die Winkelfehler p_x und p_z gegenüber p_y mit maximal $\varphi_y \approx 0,85^\circ$ vernachlässigbar klein. Wiederum wirken die vernachlässigten dynamischen Kräfte als Störeingriffe auf das System und verursachen so die Abweichungen. Aufgrund der geringen Dynamik der betrachteten Bahnkurven macht sich die Vernachlässigung der allgemeinen Kreisel- und Corioliskräfte bei der Reglersynthese nicht bemerkbar.



Parameter	Wert
K_{P_p}	2
K_{P_x}	1
$a_{\omega_{x0}}, a_{\omega_{y0}}, a_{\omega_{z0}}$	125000
$a_{\omega_{x1}}, a_{\omega_{y1}}, a_{\omega_{z1}}$	7500
$a_{\omega_{x2}}, a_{\omega_{y2}}, a_{\omega_{z2}}$	150
$a_{\dot{x}_0}, a_{\dot{y}_0}, a_{\dot{z}_0}$	3375
$a_{\dot{x}_1}, a_{\dot{y}_1}, a_{\dot{z}_1}$	675
$a_{\dot{x}_2}, a_{\dot{y}_2}, a_{\dot{z}_2}$	45

Abbildung 5.23: Simulationsergebnis der Bahnfolgeregelung des überaktuierten Quadropters

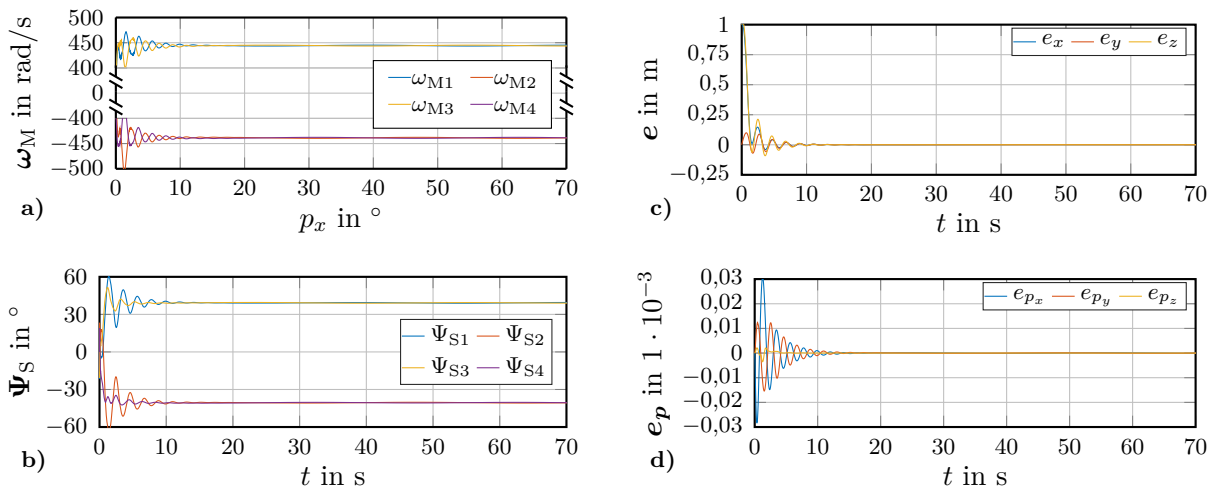


Abbildung 5.24: Verlauf wichtiger Größen für die Bahnfolgeregelung des überaktuierten Quadropters unterteilt nach den Rotorwinkelgeschwindigkeiten in a), den gestellten Servowinkeln in b), den auftretenden Positionsfehlern in c) und den Fehlern in den Eulerparametern in d)

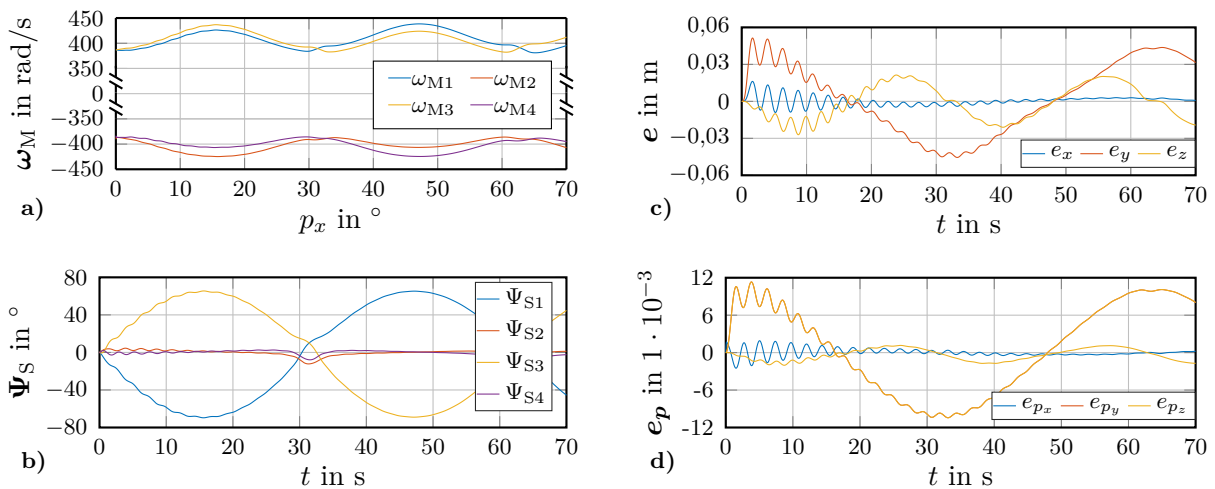


Abbildung 5.25: Simulationsergebnis für die Rotation des überaktuierten Quadropters mit den Rotorwinkelgeschwindigkeiten in a), den Servowinkeln in b), den Positionsfehlern in c) und den Fehlern in den Eulerparametern in d)

5.5.2 Oktokopter mit räumlich angeordneten Auslegern

Der im Folgenden untersuchte überaktuierte Oktokopter orientiert sich an (Brescianini und D'Andrea, 2016). Das in Abbildung 5.26 dargestellte Modell besitzt acht Ausleger mit starren Motoreinheiten, die sich in den Ecken eines Würfels befinden. Die notwendigen Transformationsmatrizen ${}^{1,2}\mathbf{T}$ lauten mit $a = 0,5 + \frac{1}{\sqrt{12}}$, $b = 0,5 - \frac{1}{\sqrt{12}}$ und $c = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{A1} &= \begin{bmatrix} c & -b & -a \\ c & a & b \\ c & -c & c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{A2} = \begin{bmatrix} -c & a & b \\ c & b & a \\ c & c & -c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{A3} = \begin{bmatrix} -c & b & a \\ -c & -a & -b \\ c & -c & c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{A4} = \begin{bmatrix} c & -a & -b \\ -c & -b & -a \\ c & c & -c \end{bmatrix}, \\ \mathbf{T}_{A5} &= \begin{bmatrix} c & -b & a \\ c & a & -b \\ -c & c & c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{A6} = \begin{bmatrix} -c & a & -b \\ c & b & -a \\ -c & -c & -c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{A7} = \begin{bmatrix} -c & b & -a \\ -c & -a & b \\ -c & c & c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{A8} = \begin{bmatrix} c & -a & b \\ -c & -b & a \\ -c & -c & -c \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.69)$$

Die Ausrichtung der Ausleger ist so gestaltet, dass die Schubkräfte zweier zum Ursprung punktsymmetrischer Ausleger stets in die gleiche Richtung weisen. Der Oktokopter besitzt als Eingangsgrößen somit die acht Sollwinkelgeschwindigkeiten $\mathbf{u}_M \in \mathbb{R}^{8 \times 1}$. Das Zustandsraummodell mit $\mathbf{x}_B \in \mathbb{R}^{13 \times 1}$ wird um die Zustände $\mathbf{x}_{M_L} = \boldsymbol{\Psi}_M \in \mathbb{R}^{8 \times 1}$ und $\mathbf{x}_{M_V} = \boldsymbol{\omega}_M \in \mathbb{R}^{8 \times 1}$ erweitert. In Summe entsteht,

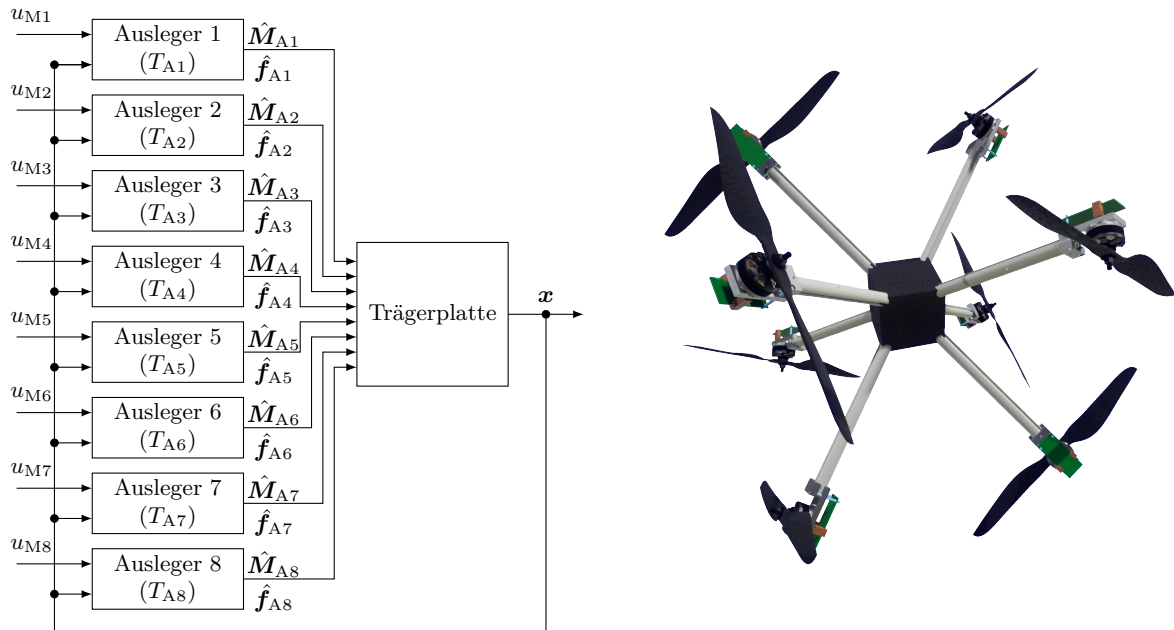


Abbildung 5.26: Blockschaltbild des Simulationsmodells eines überaktuierten Oktokopters mit acht starren Antrieben

analog zum überaktuierten Quadropter, ein Zustandsraummodell mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{29 \times 1}$. Die Auswertung des Multikoptergleichungssystems liefert den Vektor zum Gesamtschwerpunkt $\mathbf{d}_{1,1} = \mathbf{0}$. Hierbei wurde der Körper der Trägerplattform vereinfachend als symmetrischer Würfel angenommen, sodass der Schwerpunkt von K_1 sich exakt in der Mitte befindet. Dies führt bezüglich des Gesamtschwerpunkts zu einem symmetrischen Aufbau. Das resultierende Simulationsmodell besitzt demnach acht Simulationsblöcke für die starren Ausleger und einen Block für die Trägerplattform. Die Reglersynthese erfolgt auf Basis der vereinfachten Gleichungen in Abschnitt 5.1. Entsprechend der Vorgehensweise beim Trikotter und dem Quadropter mit schwenkbaren Motoreinheiten werden auch beim überaktuierten Oktokopter die dynamischen Motorkräfte vernachlässigt. Für den Vektor der beeinflussbaren eingeprägten Kräfte- und Momente folgt mit den beiden Abkürzungen $F_{Ai} = c_T \omega_{Mi}$ und $\sigma_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{\sqrt{12}}$ der Zusammenhang

$$\hat{\mathbf{f}}^u = \begin{bmatrix} \sigma_1 L_4 (F_{A1} - F_{A3} + F_{A5} - F_{A7}) - \sigma_2 L_4 (F_{A2} - F_{A4} + F_{A6} - F_{A8}) \\ + \sigma_2 (\tau_{A1} + \tau_{A3} - \tau_{A5} - \tau_{A7}) + \sigma_1 (\tau_{A2} - \tau_{A4} - \tau_{A6} + \tau_{A8}) \\ \sigma_2 L_4 (F_{A1} - F_{A3} + F_{A5} - F_{A7}) - \sigma_1 L_4 (F_{A2} - F_{A4} + F_{A6} - F_{A8}) \\ + \sigma_1 (\tau_{A1} - \tau_{A3} - \tau_{A5} + \tau_{A7}) + \sigma_2 (\tau_{A2} - \tau_{A4} - \tau_{A6} + \tau_{A8}) \\ \frac{\sqrt{3}}{3} (L_4 c_T \sum_{i=1}^8 |\omega_{Mi}| \omega_{Mi} - \tau_{A1} + \tau_{A2} - \tau_{A3} + \tau_{A4} + \tau_{A5} - \tau_{A6} + \tau_{A7} - \tau_{A8}) \\ - \sigma_2 c_T (x_{22}^2 - x_{24}^2 + x_{26}^2 - x_{28}^2) - \sigma_1 c_T (x_{23}^2 - x_{25}^2 + x_{27}^2 - x_{29}^2) \\ - \sigma_1 c_T (x_{22}^2 - x_{24}^2 + x_{26}^2 - x_{28}^2) - \sigma_2 c_T (x_{23}^2 - x_{25}^2 + x_{27}^2 - x_{29}^2) \\ \frac{\sqrt{3}}{3} (F_{A1} - F_{A2} + F_{A3} - F_{A4} + F_{A5} - F_{A6} + F_{A7} - F_{A8}) \end{bmatrix}. \quad (5.70)$$

Demnach sind auch bei dem hier vorgestellten Oktokopter alle Freiheitsgrade durch die Stellkräfte steuerbar. Die Gesamtmasse berechnet sich mit $m_D = m_1 + 8 \sum_{i=2}^4 m_i$. Außerdem ergibt sich der konstante Trägheitstensor $\Theta_D = \text{diag}(\Theta_{1x} + \sigma, \Theta_{1y} + \sigma, \Theta_{1z} + \sigma)$ mit der Abkürzung

$$\sigma = \frac{8}{3} \sum_{i=2}^4 (\Theta_{ix} + \Theta_{iy} + \Theta_{iz} + 2m_i (h_{i1}^2 + l_{i1}^2)). \quad (5.71)$$

Im Falle eines symmetrischen Würfels als Körper K_1 folgt daraus sogar $\Theta_{1x} = \Theta_{1y} = \Theta_{1z}$.

Reglersynthese: Um eine Entkopplungsmatrix mit vollem Zeilenrang zu erhalten, ist keine dynamische Erweiterung notwendig, da das Modell keine schwenkbaren Motoreinheiten besitzt. Die Wahl der Ausgangsgrößen $\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_{8:13}$ ergibt den

vektoriellen relativen Grad $\delta = [2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2]^T$. Die Entkopplungsmatrix \mathbf{D}_δ besitzt mit $\text{rang}(\mathbf{D}_\delta) = 6$ einen vollen Zeilenrang, sofern mindestens fünf Rotoren drehen. Die nachfolgenden Betrachtungen gelten für $K = 0$. Der zusätzlich notwendige Lageregler entspricht dem des vollaktuierten Trikopfers oder des überaktuierten Quadropters, wobei auf die dynamische Erweiterung aufgrund der starren Motoreinheiten verzichtet werden kann.

Gleichgewichtslage: Der betrachtete Oktokopter besitzt ebenfalls unendlich viele Gleichgewichtslagen und aufgrund seiner Überaktuierung mehrere mögliche Stellgrößenvektoren, um einen Gleichgewichtszustand zu halten. In Abbildung 5.27 sind die Stellgrößenverläufe für die Lösung von Gleichung (5.63) für $K = 0$ dargestellt. Es ist zu erkennen, dass die Rotoren der Ausleger A1 bis A4 eine positive Winkelgeschwindigkeit und diejenigen der Ausleger A5 bis A8 eine negative Winkelgeschwindigkeit besitzen. Da bei dem vorliegenden Modell die Propellersteigung in Abhängigkeit der Drehrichtung des Rotors entweder links- oder rechtsgängig bestimmt ist, darf keine Drehrichtungsumkehr eines Propellers erfolgen. Die Symmetrie des Oktokopters spiegelt sich in den Stellgrößenverläufen der Winkelgeschwindigkeiten wider. Aufgrund der nicht parallelen Ausrichtung der Schubkräfte ergibt sich der Nachteil eines vergrößerten Energieaufwands. Im konkreten Fall bedeutet dies, dass der betrachtete Oktokopter mit den in Kapitel 3 betrachteten Motoren an deren Belastungsgrenze betrieben werden muss, wodurch keine Schubreserven mehr für etwaige Stelleingriffe zur Verfügung stehen. Dadurch verliert der Multikopter seine Steuerbarkeit. Um dies zu verhindern, muss entweder eine andere Motor-Propeller-Kombination verwendet werden oder der resultierende Stellgrößenvektor \mathbf{u}_M muss derart über den Vektor $\boldsymbol{\lambda}$ beeinflusst werden, dass dieser realisierbar wird.

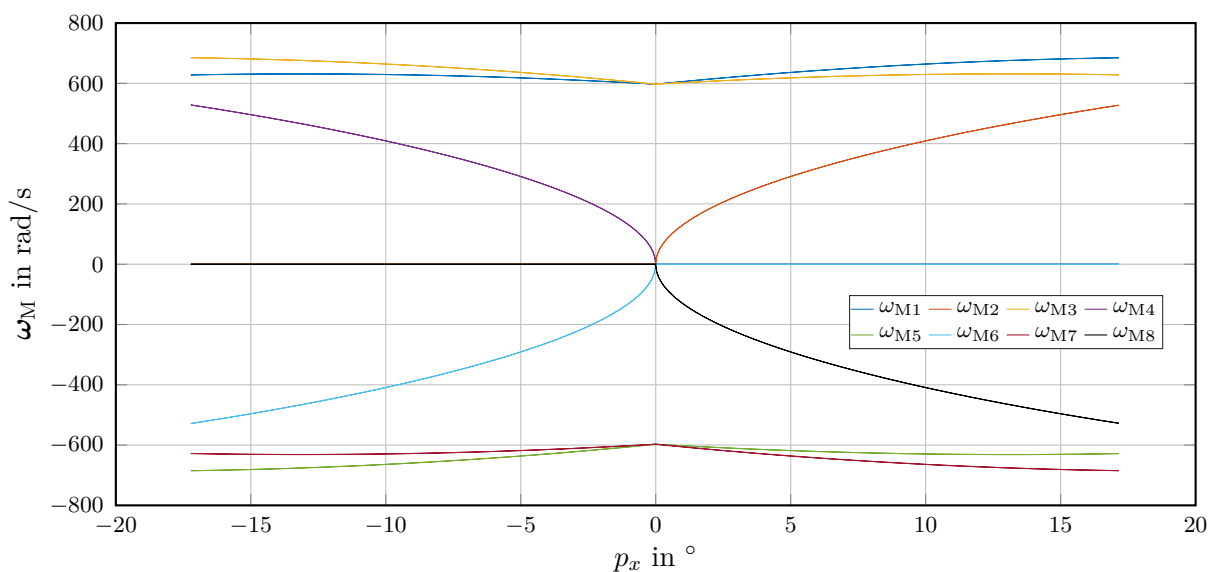


Abbildung 5.27: Rotorwinkelgeschwindigkeiten des überaktuierten Oktokopters in Gleichgewichtslagen um die x -Achse

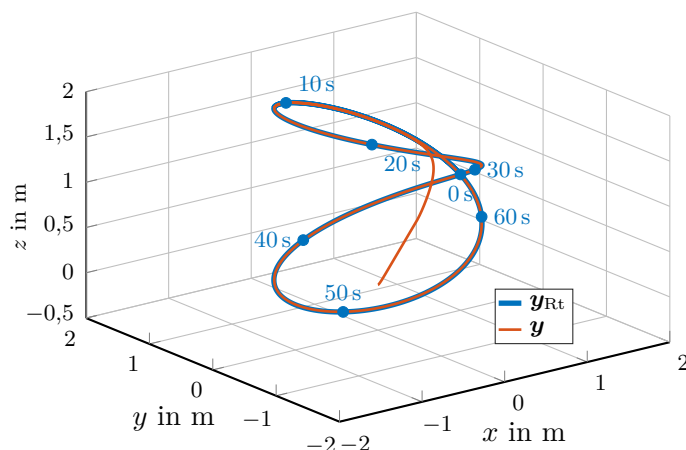
Simulationsergebnisse: In einem ersten Versuch wird die Simulation der Trajektorie nach Gleichung (5.24) untersucht. Das Ergebnis ist zusammen mit den verwendeten Reglerparametern in Abbildung 5.28 dargestellt. Die dazugehörigen Motorwinkelgeschwindigkeiten sind in Abbildung 5.29a dargestellt. Dabei zeigt sich, dass das Abfliegen der betrachteten Trajektorie bei den Antrieben A1, A3, A5 und A7 zu einer Überschreitung ihrer maximal zulässigen Drehzahl führt. Außerdem ist ersichtlich, dass stets zwei Antriebe stillstehen. Gemäß Abbildung 5.29b wird die Referenztrajektorie nach $t \approx 2\text{ s}$ mit der gewünschten Genauigkeit von $\|\mathbf{y}_{\text{Rt}} - \mathbf{y}\|_2 < 0,05\text{ m}$ dauerhaft erreicht. Für die Position klingt der Fehler ohne ein Überschwingen asymptotisch stabil ab. Dasselbe gilt auch für die auftretenden Winkelfehler, welche aufgrund der starren Antriebe vernachlässigbar klein sind. Aus diesem Grund wurde auf eine genauere Betrachtung an dieser Stelle verzichtet.

Das Ergebnis für die nach Gleichung (5.23) definierte Rotation auf der Stelle ist in Abbildung 5.30 dargestellt. Die maximal auftretenden Positionsfehler sind mit $|e_{x,y,z}| < 0,2\text{ mm}$ vernachlässigbar klein. Dasselbe gilt auch für die Fehler bei der Orientierung $|p_{x,y,z}| < 2 \cdot 10^{-4}$. Wiederum wirken die vernachlässigten dynamischen Kräfte als Störeingriffe auf das System und verursachen so die Abweichungen. Aufgrund der geringen Dynamik der betrachteten Bahnkurven macht sich die Vernachlässigung der allgemeinen Kreisel- und Corioliskräfte nicht bemerkbar.

5.6 Vergleich der unterschiedlichen Multikoptermodelle

Abschließend werden die betrachteten, freifliegenden Multikoptermodelle der vorangegangenen Abschnitte 5.3, 5.4 sowie 5.5 gegenübergestellt und hinsichtlich ihrer Eignung für den Lasttransport beurteilt. Als Grundlage des Vergleichs dienen die Motorkennlinien aus Kapitel 3 und die für eine Beurteilung wichtigen Größen der vorangegangenen Abschnitte, welche in Tabelle 5.1 angegeben sind. Unter den näher betrachteten Modellen ist lediglich der Quadrokopter mit starren Motoreinheiten nicht omnidirektional steuerbar. Er kann deshalb räumliche Trajektorien nicht ohne Verkippen abfliegen. Allerdings hat die Simulation der Raumkurve (5.24) auch deutlich gemacht, dass die notwendigen Neigungswinkel mitunter sehr gering sind. Dies führt dazu, dass die Stellkräfte während des Abfliegens der Bahnkurve nahezu antiparallel zur Gewichtskraft sind und der Quadrokopter nahezu konstant mit seiner Schwebedrehzahl fliegt. Der Quadrokopter erzielt dadurch einen vergleichsweise hohen Wirkungsgrad.

Der vollaktuierte Trikopter besitzt im Vergleich zum Quadrokopter einen Ausleger weniger. Durch das zusätzliche Gewicht der Servomotoren ist der vollaktuierte Trikopter in Summe nur etwas leichter als der Quadrokopter mit starren Motoreinheiten. Als direkte Konsequenz müssen sich seine Rotoren mit $\omega_{\text{M0}} \approx 415\text{ rad/s}$ etwa 12 Prozent schneller drehen. Sie laufen damit zwar im effizientesten Betriebspunkt der PMSM, trotzdem braucht jeder Motor circa 37 Prozent mehr Strom. Somit bleibt im Vergleich zum Quadrokopter die gesamte Stromaufnahme nahezu



Parameter	Wert
K_{P_p}	2
K_{P_x}	1
$a_{\omega_{x0}}, a_{\omega_{y0}}, a_{\omega_{z0}}$	2500
$a_{\omega_{x1}}, a_{\omega_{y1}}, a_{\omega_{z1}}$	100
$a_{\dot{x}0}, a_{\dot{y}0}, a_{\dot{z}0}$	2500
$a_{\dot{x}0}, a_{\dot{y}1}, a_{\dot{z}1}$	100

Abbildung 5.28: Simulationsergebnis der Bahnfolgeregelung des überaktuierten Oktokopters

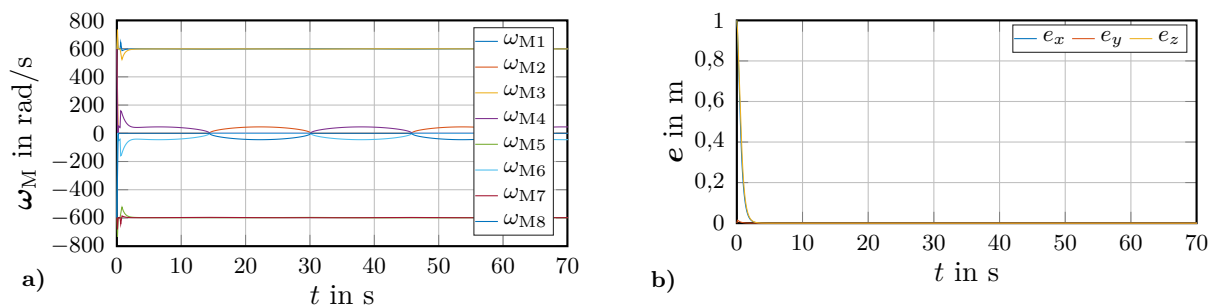


Abbildung 5.29: Verlauf wichtiger Größen für die Bahnfolgeregelung des überaktuierten Oktokopters mit den Rotorwinkelgeschwindigkeiten in a) und den auftretenden Positionsfehlern in b)

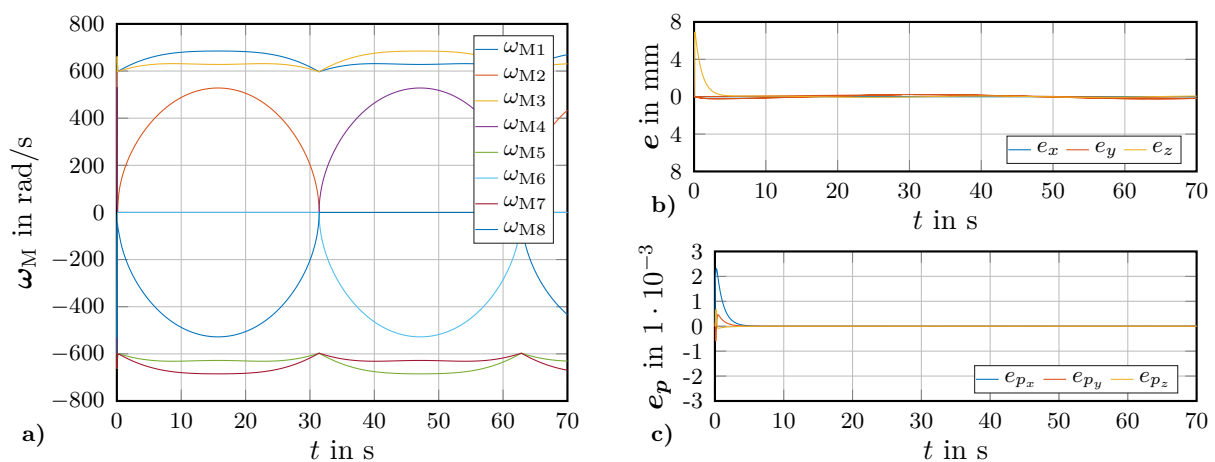


Abbildung 5.30: Simulationsergebnis für die Rotation des überaktuierten Oktokopters mit den notwendigen Rotorwinkelgeschwindigkeiten in a), den Positionsfehlern in b) und den Fehlern in den Eulerparametern in c)

Tabelle 5.1: Gegenüberstellung verschiedener Multikoptertopologien

Multikopter	steuerbare Zustände	Gesamtmasse m_D in kg	Theoretisches ω_{M0} in rad/s	Reales ω_{M0} in rad/s	max. Schub $F_{A,max}$ in N	Flugdauer t_{Flug} und Stromaufnahme I_{DC}
Quadrokopter starr	$\omega_{x,y,z}, \dot{z}$ x, y, z	2,52	4×370	4×370	88,58	$t_{Flug} = 20,83 \text{ min}$ $I_{DC} = 13,36 \text{ A}$
Trikopter schwenkbar	✓	2,38	$3 \times 415,01$	$3 \times 415,3$	66,32	$t_{Flug} = 20,23 \text{ min}$ $I_{DC} = 13,76 \text{ A}$
Quadrokopter schwenkbar	✓	2,76	4×387	$4 \times 438/388$	88,58	$t_{Flug} = 13,02/18,3 \text{ min}$ $I_{DC} = 21,38/15,21 \text{ A}$
Oktokopter räumlich	✓	3,79	8×321	4×597	51,11	$t_{Flug} = 6,71 \text{ min}$ $I_{DC} = 41,47 \text{ A}$
Oktokopter Ebene	$\omega_{x,y,z}, \dot{z}$ x, y, z	3,79	8×321	8×321	177,17	$t_{Flug} = 47,0 \text{ min}$ $I_{DC} = 5,94 \text{ A}$

gleich. Sowohl für den Trikopter als auch für den Quadrokopter ergeben sich für den verwendeten Akku eine Flugdauer von $t_{Flug} \approx 20 \text{ min}$. Als Bemessungsgrundlage werden 80 % der Akkukapazität herangezogen. Bei einem Lasttransport hat, aufgrund der beschriebenen Merkmale, der Quadrokopter im Vergleich zum Trikopter in etwa 49 % mehr Schubreserven.

Der überaktuierte Quadrokopter hat hinsichtlich der Steuerbarkeit keine Vorteile gegenüber dem vollaktuierten Trikopter. Im Gegenteil, bei dem verwendeten Regelungskonzept ergeben sich aufgrund der zusätzlichen Freiheitsgrade weitere Herausforderungen bezüglich der Wahl des Vektors λ . Durch den zusätzlichen Ausleger reduziert sich die Schwebedrehzahl im Vergleich zum Trikopter um etwa 7 Prozent, woraus ein geringer Vorteil bei den Schubkraftreserven resultiert. Durch den höheren Stromverbrauch im Vergleich zum Quadrokopter und Trikopter reduziert sich die Flugdauer um 11 Prozent auf $t_{Flug} \approx 18 \text{ min}$. Aus den bisherigen Ausführungen geht hervor, dass die Regelgüte durch die entstehenden dynamischen Momente der Servomotoren maßgeblich beeinflusst wird. Dieser Nachteil wird bei dem überaktuierten Oktokopter vermieden, indem die acht Ausleger in nicht parallelen Ebenen angeordnet werden. Aufgrund der Ausrichtung der Schubvektoren liefern lediglich vier Rotoren einen Beitrag für die Schubkraft in z_0 -Richtung. Die theoretisch notwendige Minstdrehzahl pro Propeller liegt bei $\omega_{M0} \approx 597 \text{ rad/s}$. Die verwendete Motor-Propeller-Kombination wäre in diesem Fall gerade noch ausreichend und die Schubreserven entsprechend begrenzt. Basierend auf diesen Werten ergibt sich eine Flugdauer von $t_{Flug} \approx 6,7 \text{ min}$.

Verzichtet man auf die omnidirektionale Steuerbarkeit wäre der klassische Oktokopter mit acht in einer Ebene angeordneten Auslegern mit starren Motoreinheiten eine Alternative zu dem betrachteten Quadrokopter mit starren Motoreinheiten. Auf Grundlage der bisherigen Ergebnisse kann die Nutzlast und die Flugdauer auch für dieses Modell abgeschätzt werden. Ausgehend von einer identischen Gesamtmasse m_D wie beim überaktuierten Oktokopter ergibt sich für den klassischen Oktokopter eine Schwebedrehzahl von $\omega_{M0} \approx 321 \text{ rad/s}$. Der Strom für einen Motor würde auf $I_{DC} \approx 0,74 \text{ A}$ sinken. Mit einem Gesamtstrom von $I_{DC} \approx 5,94 \text{ A}$ ergibt

sich eine Flugdauer von $t_{\text{Flug}} \approx 47$ min. Damit wäre er im direkten Vergleich zu den anderen betrachteten Modellen das effizienteste Modell zum Tragen schwerer Lasten. Um dennoch eine vollständige Steuerbarkeit zu erreichen, könnten einige der acht Ausleger schwenkbar ausgeführt werden. Der Vergleich macht deutlich, dass man sich die zusätzlichen Freiheitsgrade der voll- oder überaktuierten Modelle mit deutlichen Nachteilen bei der Flugdauer erkauft, weshalb diese Eigenschaften sorgfältig gegeneinander abzuwägen sind.

6 Trajektorienplanung für Bauprozesse mit Multikoptern

In diesem Kapitel wird der Transport einer Nutzlast mit Multikoptern am Beispiel der Errichtung eines Mauerwerks betrachtet. Die für den Transport der Steine notwendige Bahnplanung wird unter Einsatz eines Optimierers durchgeführt. Zu Beginn von Abschnitt 6.1 wird ein Testszenario definiert und der Aufbau des Bahnplaners erläutert. Abschnitt 6.2 beschäftigt sich mit den verwendeten Kostenfunktionen, welche eine zentrale Rolle bei Optimierungsproblemen spielen. Im Detail wird auf die Einhaltung der realisierbaren Stellgrößen und die Kollisionsvermeidung eingegangen. Die Anwendung des Bahnplaners wird in Abschnitt 6.3 für die Verwendung eines Drohnensystems mit einem Quadrocopter und in Abschnitt 6.4 für die Verwendung eines Drohnensystems mit drei Quadrocoptern dargestellt. Im abschließenden Abschnitt 6.5 erfolgt für das beschriebene Szenario ein simulativer Vergleich zwischen einem Drohnensystem und einem Seilroboter.

Die steigende Nutzlast von Drohnen macht diese auch zunehmend für den Transport größerer Lasten interessant. Einige Gründe sprechen dafür, die Last über einen Endeffektor aufzunehmen, der wiederum mit einer oder mehreren Drohnen über jeweils ein Seil verbunden ist. Die für eine Untersuchung eines derartigen Szenarios notwendigen Gleichungen wurden bereits in Abschnitt 2.4 hergeleitet. Ein Seilroboter ist ein weiteres Robotersystem, welches sich für den Lasttransport eignet. Der Aufbau eines Seilroboters ähnelt prinzipiell dem des Drohnensystems, weshalb beide Systeme in einem gemeinsamen Software Framework beschrieben werden können. Die nachfolgenden Untersuchungen geben einen Einblick in die Grundlagen beider Robotersysteme. Teile dieses Kapitels werden in (Herrmann u. a., 2022) behandelt. Als Praxisbeispiel dient das automatisierte Errichten eines Gebäudes. Der erforderliche Bauplan des Mauerwerks für ein Gebäude resultiert mit Hilfe eines Algorithmus aus einem BIM-Modell und wird im Folgenden als gegeben angenommen.

6.1 Trajektorienplanung mit Hilfe eines Optimierers

Ziel der Trajektorienplanung ist das Auffinden einer Trajektorie, entlang welcher ein Objekt in einer gewissen Transitionszeit t_t von einem Startpunkt A an einen

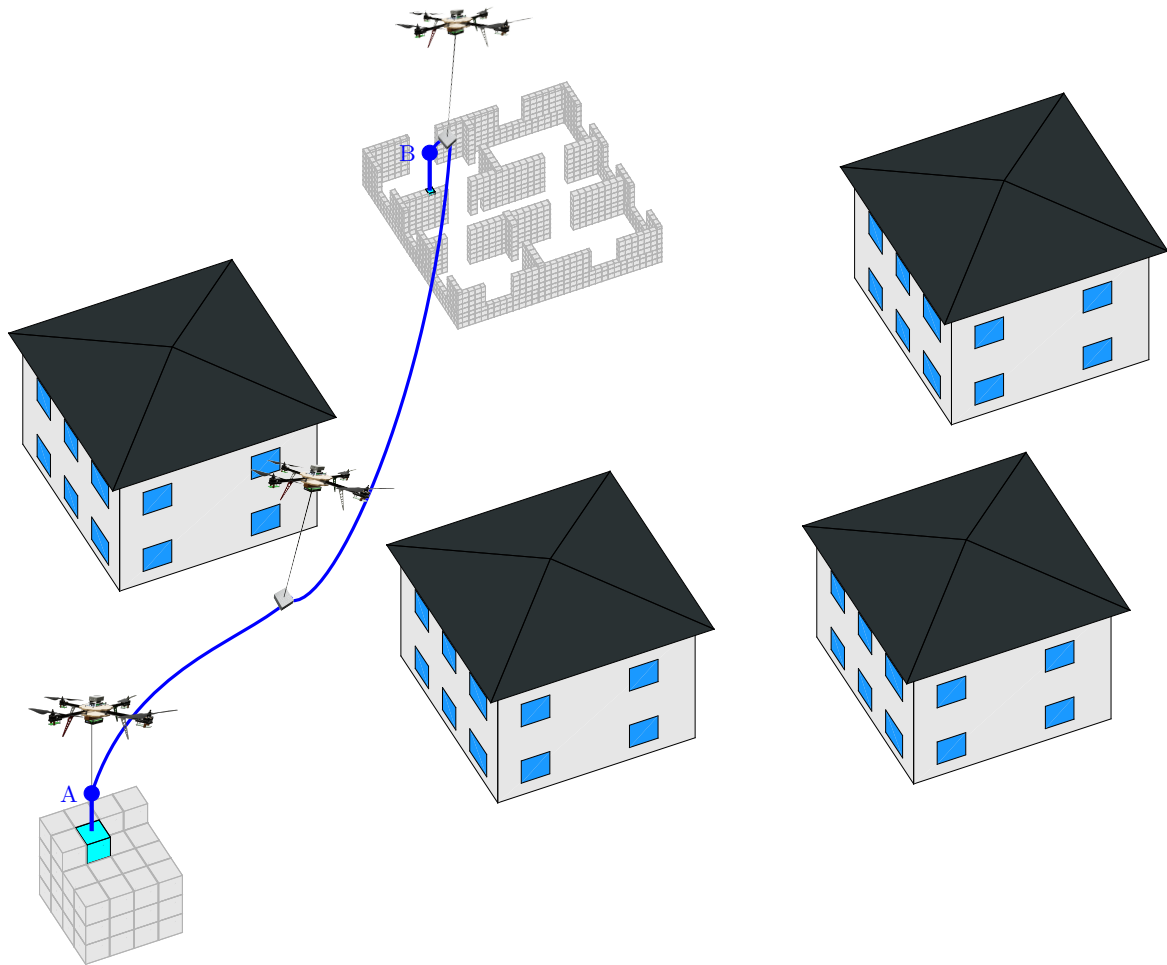


Abbildung 6.1: Einsatzszenario eines Drohnensystems auf einer Baustelle

Zielpunkt B überführt wird. Die Trajektorie ist dabei anhand zuvor definierter Kriterien bestmöglich auszuwählen.

6.1.1 Formulierung des Testszenarios

Für das Errichten der Außen- und Innenwände eines Hauses müssen Steine von ihrer Startposition aus an ihre entsprechende Stelle im Mauerwerk des Hauses transportiert werden. Die notwendigen Informationen zu einem Stein, wie zum Beispiel dessen Position und Orientierung, sind hierzu in einer Tabelle hinterlegt. In diesem digitalen Bauplan besitzt jeder Stein einen individuellen Indikator. Das hier betrachtete Gebäude besteht für das Erdgeschoss aus 1720 unterschiedlich großen Steinen mit einer Dichte von $\rho_S = 2000 \text{ kg/m}^3$. Das zu transportierende Gewicht der Steine variiert demnach zwischen $m_S \approx 10,7 \text{ kg}$ für Kimmsteine und $m_S = 53,7 \text{ kg}$ für Tür- oder Fensterstürze. Bei beiden betrachteten Robotersystemen funktioniert das Aufnehmen der Steine über eine Greifeinheit am sogenannten Endeffektor. Mögliche Einsatzszenarien sind in den Abbildungen 1.2 und 6.1 dargestellt. Während das Drohnensystem für beide Szenarien geeignet ist, kommt der

Tabelle 6.1: Transportablauf für einen Stein

Bahn	Funktion	Stein	Zeit t_t in s
1	Aufnahmeposition einmessen	nein	32,7
2	Langsam zur Aufnahmeposition herunterfahren	nein	9,12
3	Stein aufnehmen	nein	5,54
4	Langsam einen halben Meter hochfahren	ja	4,89
5	Hochfahren bis auf Querfahrtshöhe	ja	optimiert
6	Querfahren	ja	optimiert
7	Auf einen halben Meter über die Absetzposition herunterfahren	ja	optimiert
8	Absetzposition einmessen	ja	20,64
9	Langsam einen halben Meter herunterfahren	ja	2,62
10	Stein absetzen	ja	11,78
11	Langsam einen halben Meter hochfahren	nein	1,31
12	Hochfahren bis auf Querfahrtshöhe	nein	optimiert
13	Querfahren	nein	optimiert
14	Auf einen halben Meter über dem nächsten Stein herunterfahren	nein	optimiert
15	Warten bis Mörtelanlage den nächsten Stein vorbereitet hat	nein	variabel

Seilroboter aufgrund seiner Beschaffenheit lediglich für das Szenario nach Abbildung 1.2 in Frage. Hierbei ist zu beachten, dass sowohl die Seilrollen der unteren Seile als auch die Mörtelanlage mit zunehmender Höhe angehoben werden müssen, um eine Kollision zwischen den Seilen im Arbeitsraum und dem bereits fertiggestellten Teil des Mauerwerks zu verhindern.

Um den Prozess des automatischen Mauerns präzise abbilden zu können wird der Transport eines Steins in 15 aufeinanderfolgende unabhängige Teilschritte zerlegt. Für jeden davon wird im Optimierer eine einzelne Trajektorie angelegt, sodass diesen unterschiedliche Eigenschaften zugewiesen werden können. Tabelle 6.1 gibt einen Überblick über den Transportablauf. Im Wesentlichen unterscheiden sich die Trajektorien darin, ob der Endeffektor gerade einen Stein transportiert und ob die Transitionszeit für die Trajektorie optimiert wird. Dadurch verändern sich die Eigenschaften des Robotersystems nicht nur zwischen dem Transport zweier Steine unterschiedlicher Größe und Masse, sondern auch zwischen den einzelnen Bahnen¹. Beim Einmessen des Endeffektors während der Trajektorien 1 und 8 wird der Endeffektor mit Hilfe eines Lasersensors optimal über der Auf- oder Absetzposition ausgerichtet. Bei den Trajektorien 1 bis 14 wird die Transitionszeit durch den Prozess vorgegeben. Bei der Trajektorie 15 wird die benötigte Zeit hingegen von der

¹ Die Begriffe Bahn und Trajektorie werden in dieser Arbeit synonym verwendet

Mörtelanlage bestimmt. Neben einer fest vorgegebenen Zeit t_M , die die Mörtelanlage braucht um den Mörtel aufzubringen, benötigt auch das Hochfahren der Mörtelanlage eine gewisse Zeit t_H . Die Zeit, welche der Seilroboter warten muss, berechnet sich demnach über

$$t_{c,15} = t_M + t_H - \sum_{i=1}^{14} t_i. \quad (6.1)$$

Im Fall des Drohnensystems besteht die Gefahr einer Seilkollision mit dem bereits fertiggestellten Teil des Mauerwerks nicht. Aus diesem Grund wird auf ein Hochfahren der Mörtelanlage verzichtet und die Transitionszeit der Bahn berechnet sich über

$$t_{d,15} = t_M - \sum_{i=1}^{14} t_i. \quad (6.2)$$

Im Fall, dass $t_{c,15}$ oder $t_{d,15}$ negativ werden, wird die Trajektorie 15 übersprungen und es gilt $t_{15} = 0$.

In Abhängigkeit des verwendeten Robotersystems besitzt die Plattform bis zu $f_P = 6$ Freiheitsgrade. Das bedeutet, dass alle Elemente des Lagevektors \hat{r}_P durch voneinander unabhängige Splines vorgegeben werden können. Der Anfangs- und Endpunkt einer Trajektorie wird auch als Stützstelle bezeichnet. Unter Umständen ist es sinnvoll, weitere Stützstellen einzuführen. Sämtliche Stützstellen ergeben zusammen mit dem Start- und Endpunkt die Wegpunkte, die eine Trajektorie durchläuft. Durch diese Einteilung entsteht zwischen zwei nebeneinanderliegenden Wegpunkten ein Bahnsegment. Besteht eine Trajektorie aus n_W Wegpunkten, besitzt diese $n_W - 1$ Bahnsegmente. Die Beschreibung jedes Bahnsegments erfolgt pro Freiheitsgrad über ein Polynom. Dies hat zum Vorteil, dass stetige und glatte Trajektorien resultieren. Die Anzahl der zu definierenden Randbedingungen berechnet sich für jedes einzelne Polynom über $n_{Bi} = 2(\delta_i + 1)$ und hängt damit direkt von dem in Abschnitt 5.1 definierten zugehörigen relativen Grad δ_i ab. Damit das resultierende Gleichungssystem eindeutig lösbar ist, muss das dazugehörige Polynom die Ordnung $n = 2\delta_i + 1$ haben. An den Stützstellen sind die Randbedingungen frei wählbar, wobei für zwei aufeinanderfolgende Bahnsegmente die Randbedingungen im gemeinsamen Stützpunkt identisch sein müssen. Im Start- und Endpunkt sind hingegen sämtliche Ableitungen in der Regel null, da sich das Objekt dort in Ruhe befindet. Die Vorgabe dieser Randbedingungen erfolgt im allgemeinen Fall für jeden Freiheitsgrad und für jeden Wegpunkt unabhängig voneinander. Fasst man die Polynome eines Freiheitsgrads für alle Bahnsegmente zusammen, ergibt sich ein sogenannter Spline. Alle Trajektorien mit Ausnahme der Trajektorien 6 und 13 haben neben ihrem Startpunkt A und ihrem Endpunkt B keine zusätzlichen Stützpunkte. In Transportszenarien in denen für die Trajektorien 6 und 13 eine gewisse Flexibilität gefragt ist, werden diese aus drei Bahnsegmenten zusammengesetzt. Diese Wahl stellt ein Kompromiss zwischen der gewünschten Flexibilität und einer

zunehmenden Anzahl an Optimierungsvariablen dar. Für die Trajektorien 6 und 13 ergeben sich dadurch die folgenden Randbedingungen:

- **Startpunkt:** Die Position ist vorgegeben. Die Geschwindigkeit und alle höheren Ableitungen sind null. Demnach besitzt das System im Startpunkt keine Optimierungsparameter.
- **Erster und zweiter Stützpunkt:** Die Parameter Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung werden bei der numerischen Optimierung berücksichtigt. Dies sind in Summe drei Parameter pro Freiheitsgrad und Stützpunkt. Im Fall der $f_P = 6$ Freiheitsgrade der Plattform ergeben sich 18 Optimierungsparameter pro Wegpunkt. Der Ruck und alle höheren Ableitungen werden zu null gesetzt.
- **Endpunkt:** Die Position ist vorgegeben. Die Geschwindigkeit und alle höheren Ableitungen sind null. Demnach besitzt das System im Endpunkt keine Optimierungsparameter.

Eine Trajektorie mit n_S zusätzlichen Stützpunkten besitzt $3f_P n_S$ Optimierungsparameter zur Beschreibung der Bewegung. Außerdem kann die Transitionszeit als Optimierungsparameter definiert werden. Hieraus resultieren nochmals $n_S + 1$ weitere Optimierungsparameter.

Für alle Bahnen wird eine vollständige Kollisionsprüfung durchgeführt. Dafür werden für beide Robotersysteme die einzelnen Trajektorien jeweils mit n_A Abtastpunkten diskretisiert. Die konkreten Zeitpunkte ergeben sich aus

$$t_A(k) = kT_A, \quad \text{mit } T_A = \frac{t_t}{n_A}, \quad k \in \{1, \dots, n_A\}. \quad (6.3)$$

Gleichung (6.3) erlaubt aus dem räumlichen Abstand zweier Abtastzeitpunkte Rückschlüsse darauf, mit welcher Geschwindigkeit die Trajektorie an dieser Stelle durchlaufen wird. Zusätzlich liefert die Änderung der Abstände zweier aufeinanderfolgender Abtastpunkte Erkenntnisse über die Beschleunigung des Systems.

6.1.2 Aufbau des Optimierers

Die Analyse der unterschiedlichen Robotersysteme erfolgt mit einer Softwareumgebung, deren Implementierung die Bahnplanung in den Fokus nimmt. Um so flexibel wie möglich zu sein, basiert das Framework auf einem objektorientierten Programmieransatz. Dadurch kann der Arbeitsablauf für den Transport eines Steins in mehrere Trajektorien aufgeteilt werden, wobei jede Bewegung, wie z.B. das Anheben, das Anfahren einer Zielposition, das Absetzen und das Zurückfahren zur Ausgangsposition, ein eigenständiges Optimierungsproblem mit eigener Parametrierung darstellt. Diese umfasst beispielsweise die Definition der Start- und Zielposition (z. B. auf der Grundlage der bereitgestellten BIM-Daten), der Spezifikation

des verwendeten Roboters und seiner Eigenschaften, der zu optimierenden Parameter, der pro Trajektorie anzuwendenden Kostenfunktionen, der statischen Objekte, die zur Kollisionsvermeidung berücksichtigt werden müssen, sowie die Definition der Nutzlast. Der grundlegende Aufbau des Optimierers und dessen Arbeitsweise sind in Abbildung 6.2 dargestellt. Der Kern des Frameworks umfasst eine Reihe von Optimierungsalgorithmen, sowohl aus der Optimization Toolbox als auch aus der Global Optimization Toolbox von MATLAB® (The MathWorks, 2022a). Für die Optimierung von Trajektorien, die die Abstimmung mehrerer Parameter pro Spline-Segment erfordern, ist ein globales Optimierungsverfahren wie beispielsweise eine Partikelschwarmoptimierung sinnvoll. Im Gegensatz dazu kann ein gradientenbasierter Optimierer die Rechenzeit verringern. Sein Einsatz ist vor allem dann sinnvoll, wenn zum Beispiel eine räumlich definierte Trajektorie nur zeitlich optimiert werden soll. Für die Optimierung werden Kostenfunktionen erstellt, die technischen Kriterien entsprechen und für jede Trajektorie individuell ausgewertet werden. Da unter Umständen mehrere Kostenfunktionen erforderlich sind, werden sie mit Hilfe von Gewichten zu einer einzigen Gesamtkostenfunktion addiert. Ziel der Optimierung ist es, hinsichtlich der definierten Kriterien die Trajektorie mit den geringsten Gesamtkosten zu finden.

Eine Trajektorie und ihre dazugehörigen Ableitungen beschreiben die Bewegung des Roboters und seiner Komponenten in Abhängigkeit der Zeit. Sie enthält damit alle notwendigen Informationen zur Beschreibung des Bewegungsablaufs. Die Beschreibung der Trajektorien durch Polynome erlaubt es dem Optimierer durch numerische Variation der Parameter deren Verlauf zu ändern. Die Koeffizienten des Polynoms werden dann in jedem Optimierungsschritt durch das Lösen des linearen Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ gefunden, wobei der Vektor \mathbf{b} die Randparameter enthält, wovon manche auch Optimierungsgrößen sind. Während die Matrix

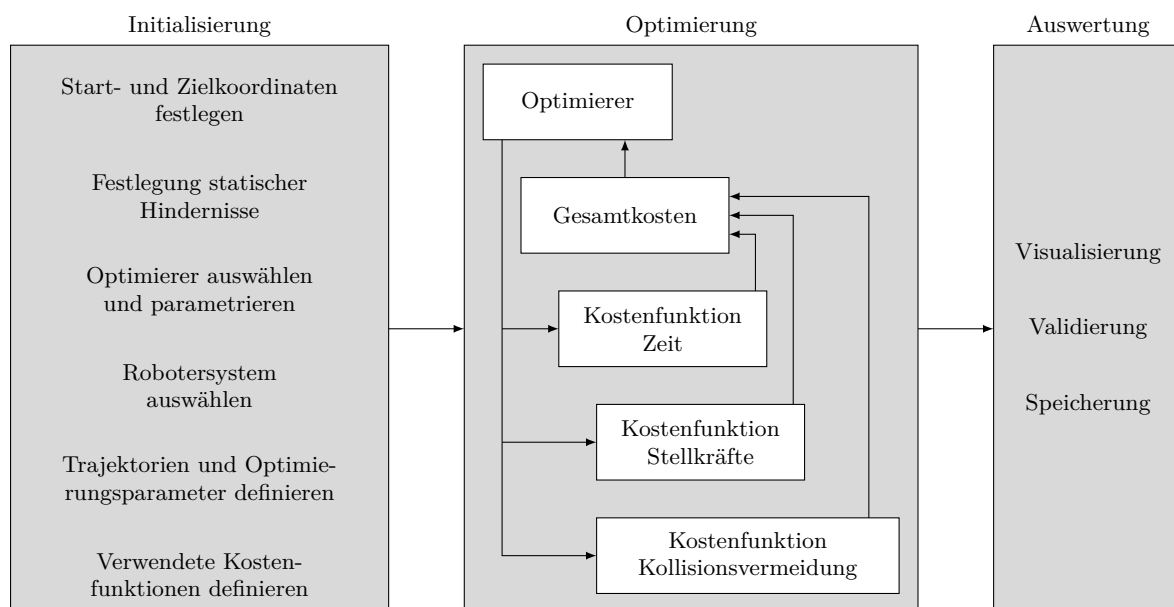


Abbildung 6.2: Schematischer Aufbau des Bahnplaners

\mathbf{A} die Potenzen der Zeitpunkte t_0 und t_e enthält, sind die Koeffizienten des linearen Gleichungssystems im Vektor \mathbf{x} zusammengefasst. Durch die Veränderung der Optimierungsgrößen wird so in jedem Berechnungsschritt ein neuer Lösungsvektor \mathbf{x} und damit eine neue Trajektorie generiert. Diese wird anschließend an den n_A Abtastpunkten bezüglich der zuvor definierten Kostenfunktionen bewertet.

Aufgrund des objektorientiert programmierten Frameworks müssen lediglich die Modelle für das individuelle physikalische Verhalten des Roboters und die entsprechenden Kostenfunktionen angepasst werden, um einen Vergleich unterschiedlicher Robotersysteme für den Aufbau eines vorgegebenen Mauerwerks durchzuführen.

6.1.3 Definition des Optimierungsproblems

Die Aufgabe, eine geeignete Trajektorie von Punkt A nach Punkt B zu finden, wird in einem Optimierungsproblem formuliert. Da die Trajektorie Randbedingungen unterliegt, existieren Nebenbedingungen und es ergibt sich das beschränkte Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \Psi(\mathbf{x}), \quad (6.4a)$$

$$\text{mit } \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad (6.4b)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}. \quad (6.4c)$$

Im vorliegenden Fall ist das Optimierungsproblem der Gesamtkostenfunktion $\Psi(\mathbf{x})$ als Minimierungsproblem formuliert. Die Minimierung von $\Psi(\mathbf{x})$ muss dabei unter Einhaltung der als Gleichung oder Ungleichung formulierten Nebenbedingungen $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ und $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ erfolgen. Das beschränkte Optimierungsproblem lässt sich durch eine Anpassung auf ein unbeschränktes Optimierungsproblem zurückführen, indem zu den mit \mathcal{W} gewichteten Kosten $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ bei Nichteinhaltung einer Nebenbedingung ein Strafterm $\mathcal{P}(\mathbf{x})$ hinzuaddiert wird. Für die Optimierung mehrerer Parameter χ lautet das unbeschränkte Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \Psi(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \sum_{\chi} \Psi_{\chi} = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \sum_{\chi} (\mathcal{W}_{\chi} \cdot \mathcal{V}_{\chi} + \mathcal{P}_{\chi}). \quad (6.5)$$

Über den Strafterm \mathcal{P}_{χ} kann für einen Optimierungsparameter die Verletzung einer physikalischen Grenze berücksichtigt werden. Der Strafterm dient damit als Ersatz für die Gleichungsnebenbedingung. Für $\mathcal{P}_{\chi} \rightarrow \infty$ kann erwartet werden, dass die Nebenbedingung χ eingehalten wird (Papageorgiou, Leibold und Buss, 2015). Die Summe aus den mit \mathcal{W}_{χ} gewichteten Kosten \mathcal{V}_{χ} und dem dazugehörigen Strafterm \mathcal{P}_{χ} wird nachfolgend als Kostenfunktion Ψ_{χ} bezeichnet. Das multikriterielle Optimierungsverfahren (6.5) wurde gewählt, da mit ihm sehr viele unterschiedliche Einflussfaktoren berücksichtigt werden können, um einer Vielzahl von Prioritäten gerecht zu werden. Dazu gehören zum Beispiel Einflussfaktoren wie die Produk-

tivität (Zeitoptimierung), Wirtschaftlichkeit (Energieoptimierung) oder Sicherheit (Kollisionsvermeidung). Darüber hinaus ist es einfach zu verstehen und ermöglicht eine einfache Anpassung zur Berücksichtigung individueller Präferenzen. Für die gemeinsame Beschreibung der unterschiedlichen Optimierungsparameter in einer einzigen Optimierungsfunktion müssen die physikalischen Einheiten der enthaltenen Gewichte dafür jeweils so gewählt werden, dass die Kosten für jedes χ dimensionslos werden. Für die Optimierung der Trajektorie werden in dieser Arbeit die folgenden Ziele in einer Kostenfunktion berücksichtigt:

- **Minimierung der Transitionszeit:** Damit eine Trajektorie so schnell wie möglich durchlaufen wird, wird die Transitionszeit durch die Kosten $\mathcal{V}_{\text{Zeit}} = t_e - t_0$ berücksichtigt. Da die Transitionszeit in der Regel keine obere Grenze hat gilt hier $\mathcal{P}_{\text{Zeit}} = 0$.
- **Minimierung der Bahnlänge:** Die Bahnlänge wird durch die Definition der Kosten $\mathcal{V}_B = \int_A^B \|\mathbf{v}_B\|_2 dt$ so gering wie möglich gehalten. Der Optimierer versucht dadurch einen möglichst direkten Weg von A nach B zu finden. Diese Kostenfunktion überschneidet sich mit der Minimierung der Transitionszeit, sorgt jedoch für eine schnellere Konvergenz. Auch für die Bahnlänge gilt $\mathcal{P}_B = 0$.
- **Maximale Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung des Endeffektors:** Für jeden Zeitschritt in dem eine der Obergrenzen für die Position, die Geschwindigkeit oder die Beschleunigung des Endeffektors überschritten wird, wird der Strafterm \mathcal{P}_χ erhöht. Die Kosten sind hingegen mit $\mathcal{V}_\chi = 0$ gewählt. Dies gilt für $\chi \in \{\text{pos}, \text{vel}, \text{acc}\}$. Die Grenzen der Position ergeben sich dabei aus dem Aufbau des Roboters, die Grenzen der Geschwindigkeit und der Beschleunigung hängen von den Motorspezifikationen ab, können aber auch aus Sicherheitsgründen begrenzt werden.
- **Seil- und Stellkräfte am Roboter:** In Abhängigkeit der Höhe der Seilkräfte werden die dazugehörigen Kosten $\mathcal{V}_{\text{Seil}}$ ermittelt. Da es Grenzwerte für eine minimal zulässige Seilkraft $f_{R,\min}$ und eine maximal zulässige Seilkraft $f_{R,\max}$ gibt, existiert auch ein entsprechender Strafterm $\mathcal{P}_{\text{Seil}}$. Die gewählten Grenzen sollen ein Durchhängen beziehungsweise Reißen der Seile verhindern (Mattern u. a., 2016). Bei einem Seilroboter werden die benötigten Seilkräfte von einer Seilwinde mit E-Motor bereitgestellt. Die entsprechenden Kosten $\mathcal{V}_{\text{Moment}}$ und der Strafterm $\mathcal{P}_{\text{Moment}}$ berücksichtigen dabei auch deren Trägheitsmoment. Der Einfachheit halber werden die maximalen Drehmomente des Motors als konstant angenommen. Im Falle des Drohnensystems werden die Seilkräfte letztendlich durch den Auftrieb der Propeller in Abhängigkeit der Rotationsgeschwindigkeit ω_{Mi} erzeugt. Daraus resultiert die Definition der Kosten \mathcal{V}_ω und des Strafterms \mathcal{P}_ω .
- **Leistung und Energieverbrauch:** Die Leistung der verwendeten Motoren beziehungsweise der verwendeten Energiequellen sind sowohl beim Seilroboter als auch beim Drohnensystem limitiert. Um diese vor einer Überlas-

tung zu schützen, muss deren Leistung begrenzt werden. Dies wird durch den Strafterm $\mathcal{P}_{\text{Leistung}}$ berücksichtigt. Kosten werden bei der Leistung nicht berechnet, weshalb $\mathcal{V}_{\text{Leistung}} = 0$ gilt. Sie könnten jedoch zum Beispiel dazu verwendet werden, die thermische Belastung mit zu berücksichtigen. Der Energieverbrauch ist einer der Faktoren, welcher die Wirtschaftlichkeit des Robotersystems beeinflusst. Daher kann auch dieser Parameter über die Kosten $\mathcal{V}_{\text{Energie}}$ berücksichtigt werden. Für den Energieverbrauch gibt es oftmals keine physikalische Grenze weshalb nachfolgend $\mathcal{P}_{\text{Energie}} = 0$ gesetzt wird.

- **Kollisionsvermeidung am Roboter:** Dies beinhaltet Kollisionen zwischen
 - den vom Endeffektor zu den Drohnen beziehungsweise den Umlenksrollen verlaufenden Seilen untereinander. Derartige Seil-Seil-Kollisionen werden über die Kostenfunktion Ψ_{CaCa} berücksichtigt, sowie
 - den Drohnen untereinander. Kollisionen diesen Typs werden über die Kostenfunktion Ψ_{DD} berücksichtigt und entfallen für den Seilroboter.
- **Kollisionsvermeidung zwischen dem Roboter und seiner Umgebung:** Dies beinhaltet Kollisionen zwischen
 - Teilen des Roboters und Hindernissen in der Umgebung, berücksichtigt durch die Kostenfunktionen Ψ_{ObD} und Ψ_{ObEE} , sowie
 - den Seilen und Objekten in ihrer Umgebung. Die dazugehörige Kostenfunktion lautet Ψ_{CaOb} .

Kollisionen zwischen den Seilen und dem Roboter Ψ_{CaD} werden als Kostenfunktion vom Typ Ψ_{CaOb} behandelt.

Optimierungsprobleme nach Gleichung (6.5) mit ihren Teilkostenfunktionen Ψ_{χ} haben in der Regel die wesentliche Eigenschaft eines Zielkonflikts. Die Verbesserung eines Kriteriums geht häufig mit der Verschlechterung von mindestens einem anderen Kriterium einher. Aus diesem Grund muss das Ergebnis stets als bestmöglicher Kompromiss verstanden werden. Um ein bestimmtes Design oder eine bestimmte Eigenschaft der Trajektorie zu erhalten, kann der Einfluss jedes Kriteriums auf die Zielfunktion durch die Wahl der Gewichtungsfaktoren \mathcal{W}_{χ} beeinflusst und damit das Ideal in Richtung eines Kriteriums verschoben werden. Die Auswertung der Gütekriterien erfolgt für einen Spline an den definierten Abtastpunkten. Die Anzahl an Abtastpunkten n_{A} muss aufgrund der damit einhergehend zunehmenden Optimierungsdauer so gering wie nötig gehalten werden. Während der Optimierung sorgen die Strafterme \mathcal{P}_{χ} dafür, dass der Optimierer in Richtung straffreier Trajektorien optimiert. Am Ende der Optimierung sind jedoch nur straffreie Trajektorien mit $\sum_{\chi} \mathcal{P}_{\chi} = 0$ gültige Trajektorien.

6.2 Betrachtung der Optimierungsparameter

Das Ergebnis der Optimierung hängt wesentlich von der Definition und Auswahl der im vorangegangenen Abschnitt aufgelisteten Kostenfunktionen ab. Nachfolgend wird auf die Definitionen der nicht trivialen Kostenfunktionen genauer eingegangen.

6.2.1 Optimierung der Seilkräfte

Für die Beurteilung einer Trajektorie ist die Kenntnis der dafür notwendigen Stellkräfte unerlässlich. Für den Seilroboter bedeutet dies, dass die Motormomente an den Seilwinden zu jeder Zeit realisierbar sein müssen. Im Falle des Drohnensystems gilt dies analog für die Winkelgeschwindigkeiten ω_{Mi} der einzelnen Rotoren. Für beide Robotersysteme hängen die notwendigen Drehmomente an den Motoren von den wirkenden Seilkräften am Endeffektor ab. Aus diesem Grund müssen diese zu jederzeit in Abhängigkeit der Trajektorie $\hat{\mathbf{r}}_P$ und ihrer Ableitungen $\hat{\mathbf{r}}_P^{(n)}$ bekannt sein. Dies ist gleichbedeutend mit der Aufgabe das inverse dynamische Modell der Plattform zu bestimmen. Hierzu wird in einem ersten Schritt die Berechnung des resultierenden Kraftwinders auf die Plattform angestrebt, der der Plattform die zu einer bestimmten Trajektorie $\mathbf{y}_{P,Rt}$ gehörende Beschleunigung $\dot{\mathbf{s}}_P$ aufprägt. Aus Gleichung (2.119) folgt die Berechnungsvorschrift

$$\hat{\mathbf{f}}_P^z = \hat{\mathbf{M}}_P \dot{\mathbf{s}}_P - \hat{\mathbf{f}}_P^c(\mathbf{q}_P, \mathbf{s}_P) - \hat{\mathbf{f}}_P^e(\mathbf{q}_P, \mathbf{s}_P). \quad (6.6)$$

Die in Gleichung (6.6) enthaltenen Größen m_P und Θ_P setzen sich aus den Größen des Endeffektors und denjenigen des gerade aufgenommenen Steins zusammen. Während für die Masse stets $m_P = m_{EE} + m_S$ gilt, variiert der Trägheitstensor auch mit der Wahl des Koordinatensystems \mathcal{K}_P . Der Ursprung O_P des Koordinatensystems \mathcal{K}_P befindet sich zentral unterhalb der Greifeinheit. Sofern sich gerade ein Stein im Greifer befindet, fällt \mathcal{K}_P mit der Mitte der Unterseite des Steins zusammen. Der Trägheitstensor der Plattform Θ_P ergibt sich mit Bezug zum Plattformkoordinatensystem \mathcal{K}_P aus der Summe des Trägheitstensor des Endeffektors Θ_{EE} und desjenigen des gerade aufgenommenen Steins Θ_S . Werden diese beiden Trägheitstensoren jeweils mit Bezug zu ihrem körpereigenen Schwerpunkt angegeben, muss für die Berechnung von Θ_P zusätzlich der Steinersche Satz berücksichtigt werden. Die Zwangskräfte an der Plattform $\hat{\mathbf{f}}_P^z$ können mit Hilfe von Gleichung (2.118) beschrieben werden. Mit dem Zusammenhang $\mathbf{f}_{Ri} = \mathbf{l}_i \lambda_i$ resultiert daraus die äquivalente Schreibweise

$$\hat{\mathbf{f}}_P^z = - \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}}_{R1} & \cdots & \tilde{\mathbf{p}}_{Rn_D} \\ \mathbf{E} & \cdots & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{R1} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{Rn_D} \end{bmatrix} = -\mathbf{P}^T \mathbf{f}_R. \quad (6.7)$$

Mit der vom Aufbau des Endeffektors abhängigen Strukturmatrix \mathbf{P}^T erfolgt die Aufteilung des Kraftwinders $\hat{\mathbf{f}}_P^z$ auf die Seilkräfte \mathbf{f}_R gemäß der Berechnungsvorschrift

$$\hat{\mathbf{f}}_P^z = \mathbf{P}^T \mathbf{f}_R, \quad (6.8a)$$

$$\mathbf{f}_R = (\mathbf{P}^T)^+ \hat{\mathbf{f}}_P^z + (\mathbf{E}_{3n_D \times 3n_D} - (\mathbf{P}^T)^+ \mathbf{P}) \boldsymbol{\lambda}_0. \quad (6.8b)$$

Die Matrix \mathbf{P} enthält dabei die jeweiligen Faktoren, mit denen die Anteile der einzelnen Seilkräfte in den Gesamtkraftwinder eingehen. Im körperfesten Koordinatensystem der Plattform enthält die Matrix \mathbf{P} lediglich konstante Werte. In Abhängigkeit der Anzahl der Seile n_R ist das Gleichungssystem (6.8a) vollständig-, über- oder unterbestimmt. Unter der Voraussetzung, dass die impliziten Seilbindungen unabhängig voneinander sind, wird die Plattform ab drei Seilen vollständig steuerbar. Für das Drohnensystem kann der Nullraum dazu verwendet werden, die Drohnen neu anzuordnen, ohne dabei die Plattform zu bewegen, siehe z. B. (Masone, Bulthoff und Stegagno, 2016). Der Nullvektor $\boldsymbol{\lambda}_0$ kann dann als weitere Optimierungsgröße definiert werden.

Für den Seilroboter ergibt sich die zu Gleichung (6.7) äquivalente Darstellung

$$\hat{\mathbf{f}}_P^z = - \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{R1} & \cdots & \mathbf{v}_{Rn_R} \\ \tilde{\mathbf{p}}_{R1} \mathbf{v}_{R1} & \cdots & \tilde{\mathbf{p}}_{Rn_R} \mathbf{v}_{Rn_R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{R1} \\ \vdots \\ f_{Rn_R} \end{bmatrix} = -\mathbf{A}^T \mathbf{f}_R, \quad (6.9)$$

wobei zwischen dem Seilkraftvektor \mathbf{f}_{Ri} und der skalaren Seilkraft f_{Ri} der Zusammenhang

$$\mathbf{f}_{Ri} = \mathbf{l}_i \lambda_i = \frac{\mathbf{l}_i}{\|\mathbf{l}_i\|_2} \|\mathbf{l}_i\|_2 \lambda_i = \mathbf{v}_{Ri} f_{Ri}. \quad (6.10)$$

besteht. Im Unterschied zur Beschreibung der Zwangskräfte bei der Drohne gemäß Gleichung (6.7) sind die Seilrichtungen beim Seilroboter bekannt, da die Umlenrollen fest im Rahmen fixiert sind. Aus diesem Grund erfolgt die Berechnung der skalaren Seilkräfte mit Hilfe einer Active-Set-Methode unter Verwendung der Matrix \mathbf{A}^T . Diese Vorgehensweise ist ein üblicher Ansatz für bei einem Seilroboter. Solange sich der Endeffektor innerhalb des Arbeitsraums befindet, liefert der Algorithmus Kräfte zwischen den Grenzen f_{\min} und f_{\max} (Pott, 2018). Der Algorithmus zur Optimierung der Seilkräfte wird dabei in jedem Optimierungsschritt der Trajektorienoptimierung aufgerufen.

Da eine höhere Seilkraft eine größere benötigte Leistung zur Folge hat, werden für die Seilkräfte die Kosten

$$\mathcal{V}_{\text{Seil}} = \frac{1}{n_R n_A} \left(\sum_{k=1}^{n_A} \sum_{i=1}^{n_R} \frac{f_{Ri}(k) - f_{R,\min}}{f_{R,\max} - f_{R,\min}} \right) \quad (6.11)$$

definiert. Für die Seilspannung existiert sowohl eine untere Grenze $f_{R,\min}$, welche ein Durchhängen des Seils verhindert als auch eine obere Grenze $f_{R,\max}$, die ein Reißen des Seils verhindert. Für jeden Zeitschritt in dem eine dieser beiden Grenzen verletzt wird, wird der Strafterm $\mathcal{P}_{\text{Seil}}$ aufaddiert und $\mathcal{V}_{\text{Seil}}$ zu Null gesetzt. Dadurch kann die Kostenfunktion Ψ_{Seil} nicht negativ werden.

6.2.2 Berechnung der inversen Dynamik einer Drohne

Für das Drohnensystem wirken sich die Seilkräfte direkt auf die benötigten Rotordrehzahlen aus. Um eine kurze Berechnungszeit der Stellkräfte zu ermöglichen und damit die Optimierungsdauer zu reduzieren, basiert das inverse Modell ähnlich der Vorgehensweise für den Reglerentwurf für eine einzelne Drohne auf vereinfachten Modellen. Um Drohnensysteme mit einer unterschiedlichen Anzahl an Multikoptern verwenden zu können und damit die Wahl der Drohnenkonfiguration nicht eingeschränkt ist, wird die Berechnung der inversen Dynamik zunächst allgemein gehalten und orientiert sich an (Sreenath und Kumar, 2013). Für die Berechnung der Rotordrehzahlen wird ausgehend von den Seilkräften die Translation des Seilangriffspunkts am Multikopter bestimmt. Ausgehend von dem jeweiligen Ortsvektor des Seilangriffspunkts an der Plattform \mathbf{r}_{Ri} , wird dazu der Vektor zum Seilangriffspunkt der jeweiligen Drohne \mathbf{r}_{Bi} berechnet. Gemäß Abbildung 2.12 gilt

$$\mathbf{r}_{Bi} = \mathbf{r}_{Ri} + \mathbf{l}_i = \mathbf{r}_{Ri} + \mathbf{v}_{Ri} l_{i,0}, \quad \text{mit } \mathbf{v}_{Ri} = \frac{\mathbf{f}_{Ri}}{\|\mathbf{f}_{Ri}\|_2} = \frac{\mathbf{f}_{Ri}}{\sqrt{\mathbf{f}_{Ri}^T \mathbf{f}_{Ri}}}. \quad (6.12)$$

Wie sich später herausstellen wird, muss der Seilrichtungsvektor \mathbf{v}_{Ri} für die Invertierung der dynamischen Gleichungen mehrfach abgeleitet werden. Ohne eine gewisse Methodik führt dies sehr schnell auf unübersichtliche und große Terme sowie eine lange Berechnungsdauer. Für eine effizientere Berechnung der Ableitung wird der Seilrichtungsvektor aus Gleichung (6.12) zunächst in das Produkt $\mathbf{v}_{Ri} = \mathbf{c}_1(t) g_1(t)$ zerlegt, wobei im konkreten Fall $\mathbf{c}_1(t) = \mathbf{f}_{Ri}$ und $g_1(t) = 1/\sqrt{\mathbf{f}_{Ri}^T \mathbf{f}_{Ri}}$ gilt. Generell kann für die mehrfache Ableitung eines Produkts die Leibnizregel angewandt werden. Dies führt im Fall des Seilrichtungsvektors auf die Berechnungsvorschrift

$$\mathbf{v}_{Ri}^{(j)} = \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \mathbf{c}_1^{(k)} g_1^{(j-k)}. \quad (6.13)$$

Die für die Ableitung des Vektors \mathbf{c}_1 benötigten Ableitungen des Seilrichtungsvektors \mathbf{f}_{Ri} werden berechnet, indem zunächst Gleichung (6.8a) entsprechend

$$\hat{\mathbf{f}}_P^{z(j)} = \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \mathbf{P}^{(k)} \mathbf{f}_R^{(j-k)} \quad (6.14)$$

abgeleitet wird und anschließend die Gleichung analog zu der Vorgehensweise in Gleichung (6.8b) unter Berücksichtigung der Annahme $\boldsymbol{\lambda}_j = \mathbf{0}$ für die j -te Ableitung gelöst wird. Die Ableitung der Funktion g_1

$$\frac{dg_1}{dt} = -\frac{\mathbf{f}_R^T \dot{\mathbf{f}}_R}{\sqrt{(\mathbf{f}_{Ri}^T \mathbf{f}_{Ri})^3}} = c_2 g_2, \quad \text{mit } c_2 = \mathbf{f}_{Ri}^T \dot{\mathbf{f}}_R, \quad g_2 = -\frac{1}{\sqrt{(\mathbf{f}_{Ri}^T \mathbf{f}_{Ri})^3}} \quad (6.15)$$

setzt sich erneut aus einem Produkt zusammen und kann wiederum auf zwei Terme aufgeteilt werden. Die Funktion $c_2(t)$ lässt sich mittels der Leibnizregel (6.13) mit überschaubarem Aufwand ableiten und wird deswegen nachfolgend nicht weiter betrachtet. Einmaliges Ableiten der Funktion $g_2(t)$ ergibt

$$\frac{dg_2}{dt} = \frac{3\dot{\mathbf{f}}_{Ri}^T \mathbf{f}_{Ri}}{\sqrt{(\mathbf{f}_{Ri}^T \mathbf{f}_{Ri})^5}} = c_2 g_3, \quad \text{mit } c_2 = \dot{\mathbf{f}}_{Ri}^T \mathbf{f}_{Ri}, \quad g_3 = \frac{3}{\sqrt{(\mathbf{f}_{Ri}^T \mathbf{f}_{Ri})^5}}. \quad (6.16)$$

Hierin findet sich erneut der Term c_2 . Darüber hinaus kann zwischen den Termen g_1, g_2 und g_3 der Zusammenhang

$$g_j = \frac{(-1)^{j-1} \cdot \prod_{k=1}^{j-1} (2j - (2k + 1))}{\sqrt{(\mathbf{f}_{Ri}^T \mathbf{f}_{Ri})^{2j-1}}}, \quad \text{mit } j = 1, \dots, n+1 \quad (6.17a)$$

gefunden werden, welcher sich auch für weitere Ableitungen fortsetzt. Die Ableitungen der Terme g_j werden wiederum nach der Leibnizregel berechnet. Werden n -Ableitungen des Seilrichtungsvektors \mathbf{v}_{Ri} des i -ten Seilvektors benötigt, ergeben sich die notwendigen Ableitungen der Funktionen g_n mit

$$\begin{aligned} g_1^{(j)} &= \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j-1}{k} c_2^{(k)} g_2^{(j-1-k)}, & j \in \mathbb{N}_+ \leq n-1 \\ &\vdots & \\ g_{n-1}^{(j)} &= \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j-1}{k} c_2^{(k)} g_n^{(j-1-k)}, & j = 1, 2 \\ \dot{g}_n &= c_2 g_{n+1}. \end{aligned} \quad (6.17b)$$

Durch die Vorgehensweise (6.17) können die benötigten Ableitungen deutlich übersichtlicher und numerisch schneller berechnet werden, da die Berechnung der Ableitungen von \mathbf{v}_{Ri} in eine kompakte, rekursive Berechnungsvorschrift zerlegt wird. Dies beruht auf der mehrfachen Verwendung wiederkehrender Anteile.

In einem letzten Schritt müssen die für die Bewegung notwendigen Motordrehzahlen in Abhängigkeit der Bewegung des Seilangriffspunkts an der Drohne und der wirkenden Seilkraft berechnet werden. Je nachdem, ob das verwendete Multikoptermodell unter-, voll- oder überaktuiert ist, sind verschiedene Vorgehensweisen anzuwenden. Die Anzahl der benötigten Ableitungen der Plattformtrajektorien wird letztendlich durch die erforderlichen Ableitungen zur Bestimmung der inversen Dynamik vorgegeben. Zur Beurteilung einer Trajektorie werden zuletzt die Winkelgeschwindigkeiten am Rotor herangezogen. Da der Motorstrom entsprechend einer ganzrationalen Funktion ansteigt, werden die Rotorwinkelgeschwindigkeiten

oberhalb einer definierten Grenze $\omega_{M,\min}$ mit den Kosten

$$\mathcal{V}_\omega = \frac{1}{n_A n_D n_M} \left(\sum_{k=1}^{n_A} \sum_{i=1}^{n_D} \sum_{j=1}^{n_M} \frac{\omega_{M,i,j}(k) - \omega_{M,\min}}{\omega_{M,\max} - \omega_{M,\min}} \right)^3, \quad \text{mit } n_D = n_R \quad (6.18)$$

beaufschlagt. Sofern die Rotordrehzahl ω_{Mj} einer der j Rotoren oberhalb der Maximaldrehzahl $\omega_{M,\max}$ oder unterhalb Mindestdrehzahl $\omega_{M,\min}$ liegt, wird der Strafterm \mathcal{P}_ω angewandt.

6.2.3 Wichtige Eigenschaften eines Seilroboters

Das Seilwindendrehmoment in Abhängigkeit der Seilkraft lässt sich berechnen, indem zunächst das auf die Seite der Seilwinde reduzierte Trägheitsmoment des Antriebsstrangs

$$J = J_W + J_C + J_{MW} i_G^2 + J_G i_G^2 \quad (6.19)$$

ermittelt wird. Dieses setzt sich aus dem Trägheitsmoment der Seilwinde J_W , der Kupplung J_C , der Motorwelle J_{MW} und des Getriebes J_G , unter der Berücksichtigung der Getriebeübersetzung i_G , zusammen. Mit dem Seilwindenradius r_W und der aktuellen Beschleunigung des Seils \ddot{q}_S , ergibt sich das benötigte Motormoment für das i -te Kabel

$$\tau_{t,i} = \frac{f_{R,i} r_W}{i_G \eta_G} + \frac{J \ddot{q}_{Si}}{i_G \eta_G r_W}. \quad (6.20)$$

Die Reibung des Antriebsstrangs wird vereinfacht durch den Getriebewirkungsgrad η_G berücksichtigt.² Da das maximal mögliche Drehmoment der Seilwindenmotoren $\tau_{t,\max}$ begrenzt ist, wird der Strafterm $\mathcal{P}_{\text{Moment}}$ gesetzt, sobald $\tau_{t,i}$ diese Grenze überschreitet.

Auf Grundlage des Seilwindendrehmoments kann die aktuelle Leistung und der Energieverbrauch der Seilwinde bestimmt werden. Bei den verwendeten Motoren handelt es sich um hocheffiziente permanenterrregte Synchronmotoren. Auf eine detaillierte Modellierung wird an dieser Stelle verzichtet, stattdessen wird die benötigte Leistung aus einer Leistungsbilanz ermittelt. Die mechanische Leistung der Seilwinde

$$P_{M,i}(k) = \tau_{t,i}(k) \omega_{W,i}, \quad (6.21)$$

kann pro Kabel für jeden Zeitschritt k berechnet werden. Dabei ist $\omega_{W,i}$ die Winkelgeschwindigkeit der i -ten Seilwinde. Unter Berücksichtigung des Strangwiderstands R_S und der Drehmomentkonstanten k_t aus dem Datenblatt des Motorenherstellers,

² Der Getriebewirkungsgrad η_G unter Vollast folgt aus dem Datenblatt des Herstellers

können die Kupferverluste

$$P_{C,i} = 3 \left(\frac{\tau_{t,i}}{k_t} \right)^2 R_S \quad (6.22)$$

der in Stern geschalteten Maschine berechnet werden (Pillay und Krishnan, 1991). Wird zudem der Wirkungsgrad des Inverters η_{ESC} sowie dessen Effizienz beim Rekuperieren η_R berücksichtigt, führt dies auf die Leistung

$$P_{W,i} = \begin{cases} (P_{M,i}\eta_G + P_{C,i}) \eta_{ESC} \eta_R & \text{falls } P_{M,i} + P_{C,i} < 0 \\ (P_{M,i}\frac{1}{\eta_G} + P_{C,i})\frac{1}{\eta_{ESC}} & \text{falls } P_{M,i} + P_{C,i} \geq 0 \end{cases}, \quad (6.23)$$

welche dem Stromnetz entnommen oder in selbiges eingespeist werden muss. Die Gesamtleistung des Seilroboters im Zeitschritt k ergibt sich dann aus

$$P(k) = \sum_{i=1}^{n_R} P_{W,i}(k). \quad (6.24)$$

Für den Fall, dass die benötigte Leistung $P_{W,i}(k)$ einer der Motoren in einem Zeitschritt k die Maximalleistung des Inverters P_{\max} überschreitet, wird der Strafterm $\mathcal{P}_{\text{Leistung}}$ berücksichtigt. Ausgehend von den berechneten Leistungen wird der Energieverbrauch des Seilroboters mit Hilfe der Trapezregel über

$$\mathcal{V}_{\text{Energie}} = \sum_{k=2}^{n_S} \frac{P(k) + P(k-1)}{2} T_A \quad (6.25)$$

ermittelt (Bruckmann, Reichert und Ji, 2019). Sofern eine Energiebetrachtung zum Vergleich unterschiedlicher Systeme in eine Analyse mit einbezogen wird, werden die Kosten $\mathcal{V}_{\text{Energie}} = E_{\text{total}}$ definiert. Zu beachten ist, dass in dieser Arbeit weder $\mathcal{V}_{\text{Leistung}}$ noch $\mathcal{V}_{\text{Energie}}$ oder $\mathcal{P}_{\text{Energie}}$ innerhalb der Optimierung verwendet werden. Sie werden deshalb zu Null gesetzt.

Der in dieser Arbeit betrachtete Seilroboter verfügt über $n_R = 8$ Seile, welche in jeder Ecke über Seilrollen in den Arbeitsraum geführt werden. Um Kollisionen zu vermeiden, müssen die unteren vier Umlenkrollen angehoben werden, sobald eine Schicht des Mauerwerks fertiggestellt wurde. Das Verfahren der Umlenkrollen passiert zwischen den Trajektorien 14 und 15. Hierfür sind die Umlenkrollen auf Führungsschienen angebracht. Die Ansteuerung erfolgt über zusätzliche Motoren. Die daraus resultierenden dynamischen Effekte, sowie der notwendige Energieverbrauch werden in dieser Arbeit nicht weiter betrachtet. Weitere Ausführungen zur Modellierung der Dynamik finden sich in (Bruckmann und Boumann, 2021). Das Verfahren der Umlenkrollen unter Belastung wurde in (Reichert, Glogowski und Bruckmann, 2015) demonstriert.

6.2.4 Vermeidung von Objekt- und Seilkollisionen

Bei der Kollisionsprüfung werden für jeden Abtastpunkt $k = 1, \dots, n_A$ sämtliche Körper auf Kollision hin überprüft. Dadurch steigt der Berechnungsaufwand mit einer zunehmenden Anzahl an Abtastpunkten stark an. Gerade für eine sichere Kollisionserkennung ist jedoch eine ausreichend hohe Anzahl an Abtastpunkten notwendig. Wird die Optimierung in einem ersten Durchgang mit einer reduzierten Anzahl an Abtastpunkten durchgeführt, empfiehlt es sich, die optimierte Trajektorie im Nachgang noch einmal mit einer erhöhten Anzahl an Abtastpunkten auf mögliche Kollisionen hin zu überprüfen. Um den Aufwand von vornherein zu reduzieren, wird nicht jeder Stein eines Gebäudes als einzelnes Objekt angesehen. Stattdessen werden vor dem Start der Optimierung sämtliche fertigen Steinlagen zu einem Hindernis zusammengefasst. Dasselbe wird auch für Steine gemacht, welche sich in einer Reihe der aktuellen Schicht befinden. Lediglich die hieraus resultierenden Hindernisse werden dann in der Kollisionsprüfung berücksichtigt.

Eigenkollision des Roboters und Kollisionen des Roboters mit seiner Umgebung: Die Strategie zur Kollisionsvermeidung beruht darauf, dass Objekte von Hüllkörpern entsprechend Abbildung 6.3a erfasst werden. An dieser Stelle werden einfache achsenorientierte Quader (engl.: Axis Aligned Bounding Box, kurz: AABB) als Hüllkörper verwendet. Diese sind unabhängig von der Ausrichtung des einzuhüllenden Objekts entlang den Hauptachsen des Inertialsystems ausgerichtet. Für die Beschreibung eines Hüllquaders genügt die Angabe von dessen Mittelpunkt über den Vektor \mathbf{c}_{AABB} sowie jeweils die Angabe der halben Seitenlänge entlang aller drei Hauptachsen mit Bezug zum Mittelpunkt. Letzteres wird in dem Vektor $\mathbf{e}_{\text{AABB}} = [e_x \ e_y \ e_z]^T$ zusammengefasst. Sollte sich die Orientierung des Objekts ändern, muss der Hüllkörper neu berechnet werden. Neben den dargestellten sta-

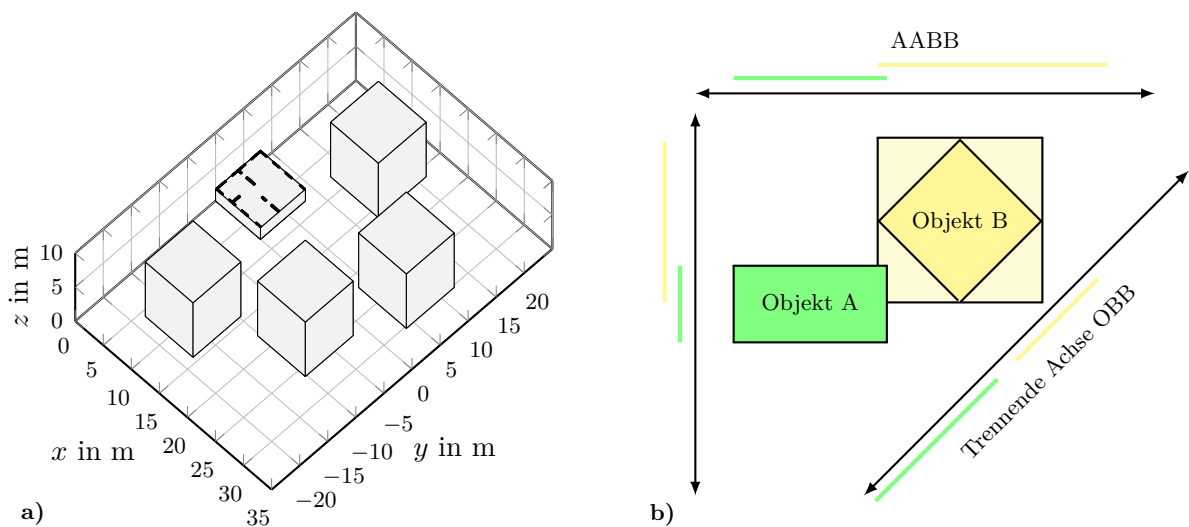


Abbildung 6.3: Berücksichtigung von Hindernissen durch den Optimierer durch a) das Einführen von Hüllkörpern und b) der Prüfung einer Kollision mit einem Schnitttest

tischen Hindernissen werden in dieser Arbeit außerdem der Endeffektor, der Stein sowie im Falle des Drohnensystems die Drohnen bei der Kollisionsprüfung berücksichtigt. Sind sämtlich zu überprüfende Hindernisse n_O in AABBs eingehüllt, ist der Nachweis einer Kollision mit dem sogenannten Schnitttest besonders einfach zu führen. Um eine mögliche Kollision zwischen den Hüllkörpern A und B zu prüfen, werden die Körper zunächst auf die Achsen des Inertialsystems projiziert. Findet auf einer der Achsen keine Überlagerung der projizierten Strecken statt, schneiden sich die Hüllkörper nicht. Demnach muss für den Schnitttest bei der Verwendung von AABBs lediglich der Vektor

$$\mathbf{k} = |\mathbf{c}_A - \mathbf{c}_B| > (\mathbf{e}_A + \mathbf{e}_B) \quad (6.26)$$

überprüft werden. Die Auswertung von \mathbf{k} erfolgt zeilenweise, wobei $k_i = 1$ gilt, wenn die Aussage in der i -ten Zeile des Vektors \mathbf{k} wahr ist und $k_i = 0$ gilt, wenn die Aussage falsch ist. Eine Überlappung der Quader und damit ein positiver Schnitttest liegt vor, wenn $n_k = \sum k_i = 0$ gilt. Für $n_k > 0$ gibt es n_k trennende Achsen und die Hüllkörper A und B schneiden sich nicht. Liegt eine Kollision des Typs $\chi \in \{DD, ObEE, ObD\}$ vor, werden die dazugehörigen Strafterme \mathcal{P}_{DD} , \mathcal{P}_{ObEE} oder \mathcal{P}_{ObD} , berücksichtigt. Auf diese Weise erlaubt Gleichung (6.26) zunächst nur die Aussage, ob eine Kollision vorliegt. Diese Tatsache wird nachfolgend jedoch zur Fallunterscheidung bei der Berechnung der Kosten benutzt.

Für das Szenario soll ein Punkt der Trajektorie im Hinblick auf ein Hindernis schlechter bewertet werden, sobald der Abstand

$$\mathbf{d}_k = |\mathbf{c}_A - \mathbf{c}_B| - (\mathbf{e}_A + \mathbf{e}_B) \quad (6.27)$$

zwischen zwei Objekten einen Grenzwert unterschreitet. Mit der Definition

$$d = \begin{cases} \sqrt{(\mathbf{k} \circ \mathbf{d}_k)^T (\mathbf{k} \circ \mathbf{d}_k)}, & \text{falls } n_k > 0 \\ \sqrt{\mathbf{d}_k^T \mathbf{d}_k} & \text{falls } n_k = 0 \end{cases} \quad (6.28)$$

entspricht der Abstand d unter der Voraussetzung $n_k > 0$ der euklidischen Norm der nicht überlappenden Richtungen. Die elementweise Multiplikation $\mathbf{k} \circ \mathbf{d}_k$ blendet dabei die Richtungen, in denen eine Überlappung stattfindet, aus. Sofern mit $n_k = 0$ in sämtlichen Raumrichtungen eine Überlappung besteht, entspricht d einem Maß für die Eindringtiefe. Für die hier betrachteten Kollisionen ergeben sich die Kosten

$$\mathcal{V}_\chi = \frac{1}{n_A n_{OO}} \left(\sum_{i=1}^{n_O-1} \sum_{j=1+i}^{n_O} \sum_{k=1}^{n_A} 1 - \frac{d_{ij}(k)}{d_{\min}} \right), \quad \text{mit} \quad (6.29)$$

$$n_{OO} = \binom{n_O}{2}, \quad \chi \in \{DD, ObEE, ObD\},$$

sofern $0 \leq d_{ij}(k) \leq d_{\min}$ gilt. Für den Fall, dass für den Abstand zweier AABBs $d_{ij}(k) > d_{\min}$ gilt, werden keine Kosten berücksichtigt und es gilt $\mathcal{V}_\chi = 0$, $\chi \in \{\text{DD}, \text{ObEE}, \text{ObD}\}$. Der Binomialkoeffizient n_{OO} gibt dabei die Anzahl aller möglichen Kombinationen von Hindernissen an.

Unterliegen die Objekte einer Kollisionsprüfung größeren Drehungen, so kommt es zunehmend zu falschen Kollisionsentscheidungen, da die AABBs die Form nicht mehr eng umschließen. Wird etwas mehr Rechenleistung in Kauf genommen, kann der Wechsel zu den orientierten Hüllkörpern (engl.: Orientated Bounding Box, kurz: OBB) Abhilfe schaffen. In der beispielhaften Darstellung in Abbildung 6.3b würde damit richtigerweise entschieden werden, dass keine Kollision vorliegt. Prinzipiell können auch andere Formen und Strategien verwendet werden, um Kollisionen zu detektieren (Ericson, 2005). Ein beliebter Algorithmus ist der GJK-Algorithmus (engl.: Gilbert Johnson Keerthi distance algorithm), der aber zugleich rechenintensiv ist und aus diesem Grund hier nicht weiter verfolgt wird.

Seil-Seil-Kollisionen: Die Überprüfung, ob innerhalb eines Zeitschritts T_A , das heißt zwischen den zwei Abtastzeitpunkten t_k und t_{k+1} eine Seilkollision stattgefunden hat, erfolgt mit Hilfe einfacher geometrischer Überlegungen nach Abbildung 6.4a. Dargestellt sind die Plattform mit ihren zwei Seilen S_i und S_j im körperfesten Koordinatensystem der Plattform \mathcal{K}_P für die zwei aufeinanderfolgenden Zeitpunkte t_k und t_{k+1} . In diesem Koordinatensystem sind die Vektoren \mathbf{p}_{Ri} und \mathbf{p}_{Rj} zu den Seilangriffspunkten der Plattform $R_i = R_{i,k} = R_{i,k+1}$ und $R_j = R_{j,k} = R_{j,k+1}$ konstant. Die Seilangriffspunkte an den Drohnen B_i und B_j mit ihren dazugehörigen Vektoren

$$\mathbf{r}_{PBi,k} = \mathbf{p}_{Ri} + \mathbf{l}_{i,k}, \quad \mathbf{r}_{PBi,k+1} = \mathbf{p}_{Ri} + \mathbf{l}_{i,k+1}, \quad (6.30a)$$

$$\mathbf{r}_{PBj,k} = \mathbf{p}_{Rj} + \mathbf{l}_{j,k}, \quad \mathbf{r}_{PBj,k+1} = \mathbf{p}_{Rj} + \mathbf{l}_{j,k+1} \quad (6.30b)$$

bewegen sich jedoch innerhalb des Zeitschritts relativ zur Plattform auf einem

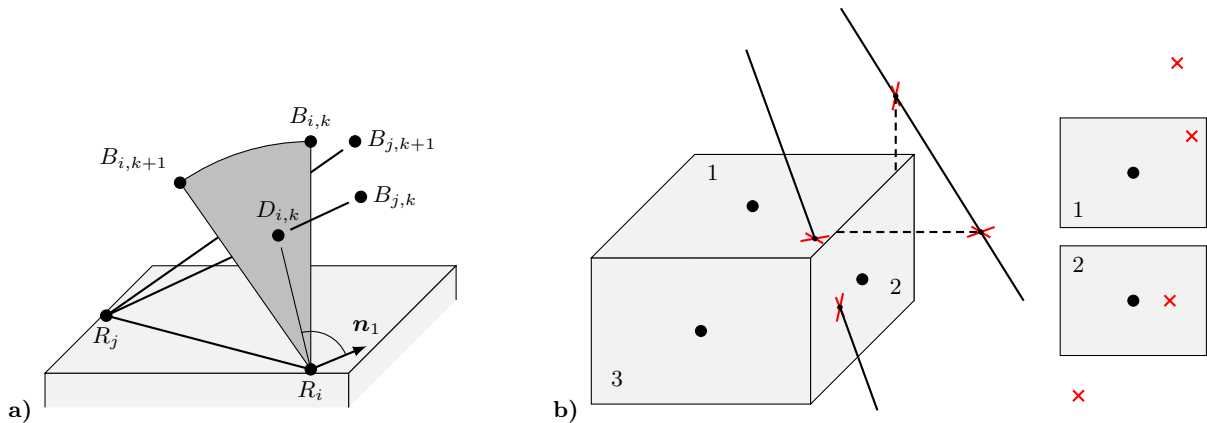


Abbildung 6.4: Methodik zur Erkennung einer Seilkollision zwischen einem Seil und
a) einem weiteren Seil und b) einem Hindernis

Kreisbogen mit dem Radius l_0 . Das Seil S_i überstreicht dabei den Kreisausschnitt K_i , welcher durch die drei Punkte R_i , $B_{i,k}$ und $B_{i,k+1}$ definiert wird. Analog überstreicht das Seil S_j den Kreisausschnitt K_j , welcher durch die drei Punkte R_j , $B_{j,k}$ und $B_{j,k+1}$ definiert ist. Sofern die beiden Kreisausschnitte nicht parallel zueinander liegen, kann in jedem Zeitschritt stets ein Schnittpunkt zwischen dem Kreisausschnitt K_i und dem Seil S_j sowie zwischen dem Kreisausschnitt K_j und dem Seil S_i berechnet werden. Eine Kollision kann nur dann vollständig ausgeschlossen werden, wenn sich die berechneten Schnittpunkte $D_{i,k}$ und $D_{i,k+1}$ zwischen dem Kreisausschnitt K_i und dem Seil S_j sowie die berechneten Schnittpunkte $D_{j,k}$ und $D_{j,k+1}$ zwischen dem Kreisausschnitt K_j und dem Seil S_i alle außerhalb der Kreisausschnitte befinden. Dabei wird vorausgesetzt, dass der Zeitabschnitt ausreichend klein gewählt ist, sodass die Bewegung als geradlinig und konstant angesehen werden kann.

Für die eigentliche Kollisionsprüfung werden die beiden Kreisausschnitte zunächst als Ebenen in ihrer Normalenform $(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} = 0$ erfasst. Dabei ist \mathbf{x} der Vektor zu einem beliebigen Punkt auf der Ebene, \mathbf{p} der Stützvektor zum Seilangriffspunkt des betrachteten Kreisausschnitts und \mathbf{n} der Normalenvektor der Ebene. In einem ersten Schritt werden die Schnittpunkte $D_{i,k}$ und $D_{i,k+1}$ zwischen der Ebene K_i und dem Seil S_j , welches durch den Seilvektor \mathbf{l}_j beschrieben wird, separat für die beiden Zeitschritte t_k und t_{k+1} berechnet. Hierfür werden in die Normalenform für den Vektor \mathbf{x} nacheinander die Geradengleichungen der Seile in Parameterform eingesetzt. Der Vektor \mathbf{p} wird durch den Ortsvektor \mathbf{p}_{Ri} ersetzt. Aus dieser Vorgehensweise folgen die beiden Ortsvektoren

$$\mathbf{d}_{i,k} = \mathbf{p}_{Rj} + s_{j,k} \mathbf{l}_{j,k}, \quad \text{mit } s_{j,k} = \frac{(\mathbf{p}_{Ri} - \mathbf{p}_{Rj})^T \mathbf{n}_i}{\mathbf{l}_{j,k}^T \mathbf{n}_i}, \quad (6.31a)$$

$$\mathbf{d}_{i,k+1} = \mathbf{p}_{Rj} + s_{j,k+1} \cdot \mathbf{l}_{j,k+1}, \quad \text{mit } s_{j,k+1} = \frac{(\mathbf{p}_{Ri} - \mathbf{p}_{Rj})^T \mathbf{n}_i}{\mathbf{l}_{j,k+1}^T \mathbf{n}_i} \quad (6.31b)$$

der Durchstoßpunkte $D_{i,k}$ und $D_{i,k+1}$. Damit der Durchstoßpunkt überhaupt in Frage kommt, muss dieser sich in Reichweite der Seillänge befinden. Hieraus folgt die erste Bedingung für eine mögliche Seilkollision

$$C_{1i,k} : (0 < s_{j,k} \leq 1), \quad C_{1i,k+1} : (0 < s_{j,k+1} \leq 1). \quad (6.32)$$

Trifft eine der Bedingungen $C_{1i,k}$ oder $C_{1i,k+1}$ zu, wird in einem zweiten Schritt überprüft, ob der jeweilige Durchstoßpunkt innerhalb des Kreisausschnitts liegt. Hierfür wird der Kreisausschnitt in Parameterform $\mathbf{x}_i = \mathbf{p}_{Ri} + s_{i,k} \mathbf{l}_{i,k} + s_{i,k+1} \mathbf{l}_{i,k+1}$ mit den affinen Koordinaten $s_{i,k}$ und $s_{i,k+1}$ aufgestellt. Setzt man die Durchstoßpunkte $\mathbf{d}_{i,k}$ und $\mathbf{d}_{i,k+1}$ aus Gleichung (6.31) nacheinander in die Parameterform des

Kreisausschnitts ein, ergeben sich deren Ortsvektoren zu

$$\mathbf{s}_{D,i,k} = \mathbf{S}_i^+ (\mathbf{d}_{i,k} - \mathbf{p}_{Ri}) \quad \mathbf{s}_{D,i,k} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}, \quad (6.33a)$$

$$\mathbf{s}_{D,i,k+1} = \mathbf{S}_i^+ (\mathbf{d}_{i,k+1} - \mathbf{p}_{Ri}) \quad \mathbf{s}_{D,i,k+1} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}. \quad (6.33b)$$

Die Matrix \mathbf{S}^+ ist die Pseudoinverse der Matrix $\mathbf{S} = [\mathbf{l}_{i,k} \ \mathbf{l}_{i,k+1}]$. Der Durchstoßpunkt liegt innerhalb des Kreisausschnitts, sofern für beide Zeitschritte die Bedingungen

$$C_{2i,k} : ((\mathbf{s}_{D,i,k}(1) > 0) \wedge (\mathbf{s}_{D,i,k}(2) > 0)), \quad C_{3i,k} : \|\mathbf{S}_i \mathbf{s}_{D,i,k}\|_2 \leq l_0 \quad (6.34)$$

$$C_{2i,k+1} : ((\mathbf{s}_{D,i,k+1}(1) > 0) \wedge (\mathbf{s}_{D,i,k+1}(2) > 0)), \quad C_{3i,k+1} : \|\mathbf{S}_i \mathbf{s}_{D,i,k+1}\|_2 \leq l_0 \quad (6.35)$$

erfüllt sind. Die Überprüfung der Bedingungen (6.32), (6.34) und (6.35) muss umgekehrt auch noch für den Kreisausschnitt K_j und das Seil S_i wiederholt werden. Hieraus resultieren dann die Bedingungen $C_{1j,k}$, $C_{2j,k}$ und $C_{3j,k}$ für den Zeitschritt t_k sowie die Bedingungen $C_{1j,k+1}$, $C_{2j,k+1}$ und $C_{3j,k+1}$ für den Zeitschritt t_{k+1} . Die abschließende Bedingung zur Überprüfung einer möglichen Seilkollision lautet dann

$$C_{\text{ges}} = (C_{1i,k} \wedge C_{2i,k} \wedge C_{3i,k}) \vee (C_{1i,k+1} \wedge C_{2i,k+1} \wedge C_{3i,k+1}) \vee \\ (C_{1j,k} \wedge C_{2j,k} \wedge C_{3j,k}) \vee (C_{1j,k+1} \wedge C_{2j,k+1} \wedge C_{3j,k+1}). \quad (6.36)$$

Wird die Bedingung C_{ges} ausgewertet, folgt

- aus $C_{\text{ges}} = 0$, dass eine Kollision ausgeschlossen werden kann und
- aus $C_{\text{ges}} = 1$, dass für die gewählte Schrittweite eine Kollision vorliegt.

Sofern eine Kollision vorliegt, kann es unter Umständen sinnvoll sein, die Kollisionsprüfung mit kleinerer Schrittweite zu wiederholen. Im Falle einer Seilkollision wird der Strafterm $\mathcal{P}_{\text{CaCa}}$ hinzugefügt. Kosten werden für eine Annäherung der Seile nicht berücksichtigt, weshalb $\mathcal{V}_{\text{CaCa}} = 0$ gilt. Der vorgestellte Ansatz zur Berechnung von Seil-Seil-Kollisionen wurde von den Arbeiten von Gouttefarde (Nguyen und Gouttefarde, 2015) inspiriert und aufgrund seiner einfachen Implementierung gewählt. Weiterführende Ansätze finden sich zum Beispiel in (Merlet, 2004; Merlet und Daney, 2006; Perreault u. a., 2010; Blanchet und Merlet, 2014).

Seil-Hindernis-Kollisionen: Für eine Kollisionsprüfung zwischen einem Seil und einem Hindernis gemäß Abbildung 6.4b, werden alle $f = 1, \dots, 6$ Flächen des zu überprüfenden Hüllkörpers einzeln auf eine Kollision mit dem jeweiligen Seil i überprüft. Der Vektor \mathbf{c}_f zeigt dabei auf den Mittelpunkt der betrachteten Fläche, deren Position mit Hilfe des Vektors der halben Seitenlänge $\mathbf{e}_f = [e_{fx} \ e_{fy} \ e_{fz}]^T$ der AABB berechnet werden. Analog zu der Vorgehensweise bei Kollisionen vom Typ

$\chi = \text{CaCa}$ wird jede Hüllfläche des Hüllkörpers über die Ebenengleichung in Normalform $(\mathbf{x}_i - \mathbf{c}_f) \cdot \mathbf{n}_f = 0$ formuliert und das betrachtete Seil als Geradengleichung in Parameterform $\mathbf{x}_i = \mathbf{r}_{Ri} + s_i \mathbf{l}_i$ aufgestellt. Anschließend wird der Schnittpunkt

$$\mathbf{d}_{i,f} = \mathbf{r}_{Ri} + s_{i,f} \mathbf{l}_i, \quad \text{mit } s_{i,f} = \frac{(\mathbf{c}_f - \mathbf{r}_{Ri})^T \mathbf{n}_f}{\mathbf{l}_i^T \mathbf{n}_f}, \quad \text{für} \quad (6.37)$$

$$f = 1, \dots, 6, \quad i = 1, \dots, n_R$$

für alle n_R Seile berechnet. Vom Mittelpunkt jeder Fläche zeigt der Vektor

$$\mathbf{q}_{i,f} = \begin{bmatrix} q_{i,f,x} \\ q_{i,f,y} \\ q_{i,f,z} \end{bmatrix} = (\mathbf{d}_{i,f} - \mathbf{c}_f) \quad (6.38)$$

zum Durchstoßpunkt zwischen dem betrachteten Seil und der betrachteten Fläche. Sofern die Bedingungen

$$C_1 : \left((|q_{i,f,x}| \leq e_{fx}) \wedge (|q_{i,f,y}| \leq e_{fy}) \wedge (|q_{i,f,z}| \leq e_{fz}) \right), \quad (6.39)$$

$$C_2 : \|\mathbf{d}_{i,f} - \mathbf{r}_{Ri}\|_2 \leq l_0 \quad (6.40)$$

erfüllt sind, liegt eine Kollision vor und die Überprüfung wird mit dem Strafterm $\mathcal{P}_{\text{CaOb}}$ für das betrachtete Seil beendet.

Im Gegenteil zur Seil-Seil-Kollision, wird für eine Seil-Hindernis-Kollision eine Kostenfunktion definiert. Zu diesem Zweck wird für jedes Seil $i = 1, \dots, n_R$ der Abstand zur nächstgelegenen Oberfläche aller $j = 1, \dots, n_O$ Hindernisse über

$$d_{ij} = \min_{\forall f} (\|\mathbf{d}_{i,j,f} - \mathbf{c}_{i,j,f}\|) \quad (6.41)$$

berechnet. Daraus ergeben sich dann die Kosten $\mathcal{V}_{\text{CaOb}}$ gemäß der Vorschrift

$$\mathcal{V}_{\text{CaOb}} = \frac{1}{n_R n_A n_O} \left(\sum_{i=1}^{n_R} \sum_{j=1}^{n_O} \sum_{k=1}^{n_A} 1 - \frac{d_{ij}(k)}{d_{\min}} \right). \quad (6.42)$$

Der Wert d_{\min} bestimmt dabei analog zu Gleichung (6.29) eine Grenze oberhalb derer keine Kosten anfallen.

6.3 Transport einer Nutzlast mit einem Quadrokofter

Aufgrund des Gewichts des Endeffektors und der zu transportierenden Steine sind die in Abschnitt 4.2 vorgestellten Drohnen nicht für den Transport schwerer Lasten geeignet. Aus diesem Grund werden bei den nachfolgenden Betrachtungen die technischen Daten einer Lastdrohne aus Anhang C.1 verwendet. Die wichtigsten Parameter sind in Tabelle 6.2 angegeben. Für die nachfolgenden Betrachtungen wird aus dem Bauplan des Hauses der Stein mit dem Index 1000 gewählt.

Vorwärtsdynamik: Für das Modell, bestehend aus einer Drohne und einer Plattform, wird der Seilangriffspunkt nach Abbildung 6.5 in die Mitte der Oberseite des Endeffektors gelegt. Der Ursprung des körperfesten Koordinatensystems der Plattform \mathcal{K}_P befindet sich mittig an der Unterseite des Steins. Daraus resultiert der Seilvektor ${}^P\mathbf{p}_{R1} = [0 \ 0 \ p_{1z}]^T$. Der Ursprung des körperfesten Koordinatensystem $\mathcal{K}_D = \mathcal{K}_1$ befindet sich nicht im Schwerpunkt der Drohne. Das Seil an der Drohne wird vorteilhaft mittig und mit möglichst kleinem Abstand b_{1z} in z -Richtung unterhalb des Koordinatenursprungs O_D befestigt. Der dazugehörige Vektor zum Seilangriffspunkt der Drohne lautet demnach ${}^D\mathbf{b}_{R1} = [0 \ 0 \ b_{1z}]^T$. Für den Vektor zum Schwerpunkt der Drohne gilt nach Gleichung (5.44) ${}^D\mathbf{b}_{SD} = [0 \ 0 \ h_{11}]^T$. Für die Beschreibung des Seilvektors \mathbf{l}_1 folgt aus Gleichung (2.111)

$$\mathbf{l}_1 = \mathbf{r}_{D1} + \mathbf{b}_{R1} - \mathbf{r}_P - \mathbf{p}_{R1} = \begin{bmatrix} x_{D1} \\ y_{D1} \\ z_{D1} \end{bmatrix} + {}^{0D}\mathbf{T} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_{1z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix} - {}^{0P}\mathbf{T} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_{1z} \end{bmatrix}. \quad (6.43)$$

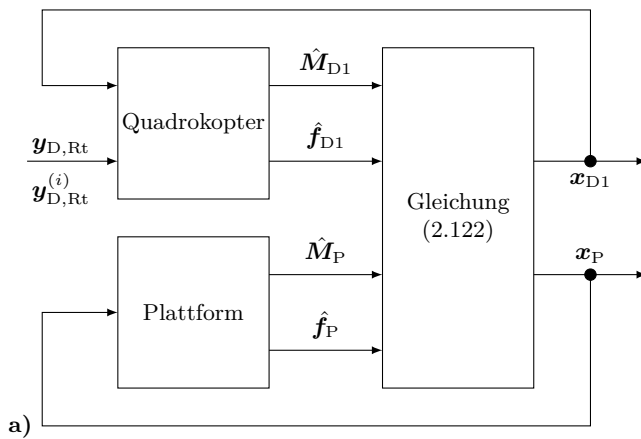


Abbildung 6.5: Transport einer Nutzlast mit einem Quadrokofter. Aufbau des Simulationsmodells in a) und Darstellung des Gesamtsystems in der virtuellen Realität in b)

Für das Gesamtsystem resultiert damit die implizite Zwangsbedingung

$$g_1 = \mathbf{l}_1^T \mathbf{l}_1 - l_{0,1}^2 = 0. \quad (6.44)$$

Für das betrachtete Drohnensystem ergeben sich die beschreibenden Differentialgleichungen mit den Massenmatrizen $\hat{\mathbf{M}}_{D1}$ und $\hat{\mathbf{M}}_P$ sowie den Vektoren der Gesamtkraft $\hat{\mathbf{f}}_{D1}$ und $\hat{\mathbf{f}}_P^{ec}$ aus der Herleitung nach Kapitel 2, wobei zusätzlich der Einfluss der Seilkraft \mathbf{f}_{R1} mitberücksichtigt werden muss. Der ausgewählte Stein hat eine Masse von $m_S \approx 21,5 \text{ kg}$. Aufgrund der verwendeten Massen ergibt sich eine Schwebedrehzahl von

$$\omega_{M0} = \sqrt{\frac{(m_{D1} + m_{EE} + m_S) g}{4c_T}} \approx 434,6 \text{ rad/s}. \quad (6.45)$$

Der Trägheitstensor der Plattform Θ_P ergibt sich als Summe aus dem Trägheitstensor des Endeffektors Θ_{EE} und dem des Steins Θ_S mit Bezug zu dem Schwerpunkt der Plattform. Demnach variieren die Eigenschaften der Plattform von Stein zu Stein. Sowohl für die Drohne als auch für die Plattform wird ein Rotationstensor in Euler-Parametrierung verwendet. Somit ergibt sich für das Gesamtsystem der Lagevektor $\hat{\mathbf{r}} = [\hat{\mathbf{r}}_{D1}^T \hat{\mathbf{r}}_P^T]^T \in \mathbb{R}^{14 \times 1}$. Die Ableitung der Zwangsbedingung (6.44) ergibt

$$\dot{g}_1 = [\mathbf{C}_{D1} \ \mathbf{C}_{P1}] \begin{bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{r}}}_{D1} \\ \dot{\hat{\mathbf{r}}}_P \end{bmatrix}. \quad (6.46)$$

Tabelle 6.2: Roboterparameter für den Transport einer Last mit einem Quadrokopter

Parameter	Wert
Drohnenanzahl	$n_D = 1$
Endeffektormasse	$m_{EE} = 20 \text{ kg}$
Drohnenmasse	$m_D = 14,26 \text{ kg}$
Steinmasse	$m_S = 10,7 \text{ kg} - 53,7 \text{ kg}$
Seillänge	$l_{0,1} = 5,7 \text{ m}$
Seilangriffspunkt der Drohne	$\mathbf{b}_{R1} = [0 \text{ m} \ 0 \text{ m} \ -0,04 \text{ m}]^T$
Trägheitstensor Drohne	$\Theta_D \approx \text{diag}(0,33 \text{ kgm}^2, 0,33 \text{ kgm}^2, 0,78 \text{ kgm}^2)$
Trägheitstensor Plattform	$\Theta_P \approx \text{diag}(1,45 \text{ kgm}^2, 1,93 \text{ kgm}^2, 1,28 \text{ kgm}^2)$
Auftriebsbeiwert	$c_T = 7,243 \cdot 10^{-4} \text{ N s}^2/\text{rad}^2$
Widerstandskoeffizient	$c_{W0} = 3,137 \cdot 10^{-5} \text{ N m s}^2/\text{rad}^2$
Wirkungsgrad	$\eta_{M0} \approx 0,00137 \omega_{M0} \%$
Rotorwinkelgeschwindigkeit	$\omega_{M,\max} = 560 \text{ rad/s}$
Seilangriffspunkt Plattform	$\mathbf{p}_{R1} = [0 \text{ m} \ 0 \text{ m} \ 0,6 \text{ m}]^T$

Mit $\text{rang}(\mathbf{C}) = 1$ hat das System einen Gesamtfreiheitsgrad $f_{\text{MKS}} = 11$. Betrachtet man lediglich die Plattform bei gedachter fest fixierter Drohne so ist die Plattform mit $f_P = 5$ 5-fach statisch unterbestimmt. Das komplexe Simulationsmodell besteht nach Abbildung 6.5 aus einem Block für den Quadrokopter und aus einem Block für die Plattform. Bei dem Block für den Quadrokopter handelt es sich um das mit der Zwangskraft $\hat{\mathbf{f}}_{D1}^z$ erweiterte Simulationsmodell aus Abschnitt 5.3. Die eigentliche Lösung des Differentialgleichungssystems erfolgt nach Gleichung (2.122). Zur Stabilisierung der numerischen Simulation wird die Methode nach Baumgarte (2.123) verwendet. Die Wahl der Parameter $\alpha_B, \beta_B = 100$ führt für die angegebenen Zahlenwerte zu einer numerisch stabilen Integration über der Zeit.

Inverse Dynamik: Vor der eigentlichen Berechnung des inversen Modells wird zunächst die dynamische Gleichung der Plattform nach Gleichung (2.48) betrachtet. Werden die von dem Seil ausgehenden Zwangskräfte $\hat{\mathbf{f}}_P^z = [(\mathbf{p}_{R1} \times \mathbf{f}_{R1})^T \mathbf{f}_{R1}^T]^T$ als Eingangsgrößen auf die Plattform aufgefasst, zeigt sich, dass das System lediglich für die Wahl der drei translatorischen Freiheitsgrade als Ausgangsgrößen auf die nichtlineare Regelungsnormalform (5.14) mit $\det(\mathbf{D}_\delta) \neq 0$ gebracht werden kann. Demnach können die drei translatorischen Freiheitsgrade unabhängig voneinander vorgegeben werden. Die Entkopplungsmatrix \mathbf{D}_δ ist dabei unabhängig von der Wahl des Seilangriffspunkts an der Plattform. Aufgrund der fehlenden Steuerbarkeit der Orientierung der Plattform muss bei der Invertierung vereinfachend $\boldsymbol{\omega}_P = \mathbf{0}$ gesetzt werden. Hierdurch fallen auch die allgemeinen Kreisel- und Corioliskräfte weg. Das für die Optimierung der Stellkräfte benötigte inverse Modell wird unter diesen Annahmen entsprechend der Vorgehensweise aus Abschnitt 6.2.1 berechnet. Die wirkenden Zwangskräfte nach Gleichung (6.6) lauten

$$\begin{bmatrix} f_{Px}^z \\ f_{Py}^z \\ f_{Pz}^z \end{bmatrix} = m_P \begin{bmatrix} \ddot{x}_P \\ \ddot{y}_P \\ \ddot{z}_P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_P g \end{bmatrix}. \quad (6.47)$$

Die Aufteilung des resultierenden Kraftwinders an der Plattform ist im vorliegenden Fall mit nur einem Seil besonders einfach, da $\mathbf{f}_P^z = \mathbf{f}_{R1}$ gilt. Die notwendige Bewegung des Seilangriffspunkts an der Drohne ist über die Beziehung

$$\mathbf{r}_{B1}^{(i)} = \mathbf{r}_{R1}^{(i)} + \mathbf{v}_{R1}^{(i)} l_{1,0} \quad (6.48)$$

gegeben. Die notwendigen Ableitungen ergeben sich aus der Anwendung der Leibniz-Regel (6.13) mit den jeweiligen Ableitungen nach (6.17).

Als letzter Teilschritt wird die inverse Dynamik zwischen dem Schwerpunkt des Quadrokopters und den Rotorwinkelgeschwindigkeiten benötigt. Um für die Optimierung verwertbare Gleichungen zu erhalten, wird ein stark vereinfachtes Drohnenmodell betrachtet. Dabei wird die Drohne als ein starrer Körper angesehen, deren Koordinatensystem \mathcal{K}_D im Schwerpunkt sitzt. Daraus resultiert für das in-

verse Modell $\mathbf{b}_{SD} = \mathbf{0}$ und damit $\mathbf{f}_D^c = \mathbf{0}$. Die wirkenden Schubkräfte sind die direkten Eingangsgrößen für das Modell. Auftretende Kreisel- und Corioliskräfte werden ebenfalls vernachlässigt. Gemäß Tabelle 2.1 werden an dieser Stelle die xyz -Kardan-Winkel α_D , β_D und γ_D für die Beschreibung der Orientierung der Drohne verwendet. Dies stellt bezüglich der Wahl der Trajektorien keine praktische Einschränkung dar, erleichtert aber die Herleitung. Die Drehung um die z -Achse wird zu null gesetzt, weshalb für die Gesamtdrehung ${}^{0D}\mathbf{T} = \mathbf{T}_x \mathbf{T}_y$ gilt. Die Impulssätze bezüglich des Drohnenschwerpunkts lauten im Inertialsystem

$$m_D \begin{bmatrix} \ddot{x}_D \\ \ddot{y}_D \\ \ddot{z}_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_A \sin(\beta_D) \\ -F_A \cos(\beta_D) \sin(\alpha_D) \\ F_A \cos(\alpha_D) \cos(\beta_D) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_D g \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_{Rx}^z \\ f_{Ry}^z \\ f_{Rz}^z \end{bmatrix}. \quad (6.49)$$

Die für die translatorische Bewegung erforderlichen Kardanwinkeln des Quadrokopters

$$\alpha_D = -\arctan\left(\frac{m_D \ddot{y}_D + f_{Ry}^z}{m_D (\ddot{z}_D + g) + f_{Rz}^z}\right), \quad (6.50a)$$

$$\beta_D = \arctan\left(\cos(\alpha_D) \frac{m_D \ddot{x}_D + f_{Rx}^z}{m_D (\ddot{z}_D + g) + f_{Rz}^z}\right) \quad (6.50b)$$

resultieren aus Gleichung (6.49). Der Betrag der Schubkraft aller Propeller F_A folgt aus

$$F_A = \sqrt{c_T \boldsymbol{\omega}_M^T \boldsymbol{\omega}_M} = \sqrt{\left(\ddot{x}_D m_D + f_{Rx}^z\right)^2 + \left(\ddot{y}_D m_D + f_{Ry}^z\right)^2 + \left((\ddot{z}_D + g) m_D + f_{Rz}^z\right)^2}. \quad (6.51)$$

Die dazu notwendigen Winkelgeschwindigkeiten der einzelnen Rotoren ergeben sich aus dem Drallsatz mit der im Vergleich zu Gleichung (3.48) notwendigen vereinfachten Beziehung $\tau_{Wi} = c_{W0} \omega_{Mi}^2$. Die Auswertung des Drallsatzes im Koordinatensystem der Drohne liefert

$$\boldsymbol{\Theta}_D \begin{bmatrix} \dot{\omega}_{Dx} \\ \dot{\omega}_{Dy} \\ \dot{\omega}_{Dz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_T (\omega_{M2}^2 - \omega_{M4}^2) l_{41} \\ -c_T (\omega_{M1}^2 - \omega_{M3}^2) l_{41} \\ -c_{W0} (\omega_{M1}^2 - \omega_{M2}^2 + \omega_{M3}^2 - \omega_{M4}^2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\tau_{Rx} \\ \tau_{Ry} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.52a)$$

mit den wirkenden Drehmomenten

$$\tau_{Rx} = b_{Rz} \left(f_{Ry}^z \cos(\alpha_D) + f_{Rz}^z \sin(\alpha_D) \right), \quad (6.52b)$$

$$\tau_{Ry} = b_{Rz} \left(f_{Rx}^z \cos(\beta_D) + f_{Ry}^z \sin(\alpha_D) \sin(\beta_D) - f_{Rz}^z \cos(\alpha_D) \sin(\beta_D) \right). \quad (6.52c)$$

Die Berechnung des Widerstandsbeiwerts nach Anhang C.1 bezieht sich auf die Eingangsleistung am Motorregler. Dadurch muss für die Berechnung der korrekten Drehzahl der Wirkungsgrad der kompletten Antriebseinheit $\eta_{M0} = 0,00137\omega_{M0}$ berücksichtigt werden. Demnach gilt für das benötigte Giernmoment $\tau_G = \frac{\Theta_D \dot{\omega}_{Dz}}{\eta_{M0}}$. Die Gleichung (6.52) lässt sich in Verbindung mit Gleichung (6.51) nach den Winkelgeschwindigkeiten

$$\begin{bmatrix} \omega_{M1} \\ \omega_{M2} \\ \omega_{M3} \\ \omega_{M4} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{l_{41}c_Tc_{W0}}} \begin{bmatrix} \sqrt{l_{41}c_{W0}F_A + 2c_{W0}\tau_{Ry} - 2\Theta_{Dy}c_{W0}\dot{\omega}_{Dy} - l_{41}c_T\tau_G} \\ -\sqrt{l_{41}c_{W0}F_A + 2c_{W0}\tau_{Rx} + 2\Theta_{Dx}c_{W0}\dot{\omega}_{Dx} + l_{41}c_T\tau_G} \\ \sqrt{l_{41}c_{W0}F_A - 2c_{W0}\tau_{Ry} + 2\Theta_{Dy}c_{W0}\dot{\omega}_{Dy} - l_{41}c_T\tau_G} \\ -\sqrt{l_{41}c_{W0}F_A - 2c_{W0}\tau_{Rx} - 2\Theta_{Dx}c_{W0}\dot{\omega}_{Dx} + l_{41}c_T\tau_G} \end{bmatrix} \quad (6.53)$$

lösen. In einem letzten Schritt müsste der noch fehlende Zusammenhang zwischen der Bewegung des Drohnenschwerpunkts \mathbf{r}_{D1} und dem Seilangriffspunkt der Drohne \mathbf{r}_{B1} hergestellt werden. Hierfür kann jedoch kein expliziter Zusammenhang angegeben werden, weshalb nachfolgend $\mathbf{r}_{D1} = \mathbf{r}_{B1}$ angenommen werden muss. Die Berechnung der Winkelgeschwindigkeiten der Rotoren in Abhängigkeit der vorgegebenen Plattformbewegung ist durch die gewählten Vereinfachungen nicht exakt. Es stellt sich jedoch die Frage, wie groß der resultierende Fehler ist. Sind die Fehler innerhalb einer definierten Toleranz, überwiegen die Vorteile der verkürzten Rechenzeit gegenüber der Genauigkeit und das vorgestellte inverse Modell kann für den Optimierer verwendet werden. Für eine bessere Beurteilung der Ergebnisse werden zusätzlich die Seilwinkel α_S und β_S definiert. Bei diesen Winkeln handelt es sich wie bei den Drohnenwinkeln ebenfalls um xyz -Kardan-Winkel gemäß Tabelle 2.1. Durch diese Definition wird der anfängliche Seilrichtungsvektor ${}^0\mathbf{v}_{R0} = [0 \ 0 \ 1]^T$ zu jeder Zeit mit der Transformationsmatrix $\mathbf{R}(\alpha_S, \beta_S)$ auf den aktuellen Vektor $\mathbf{v}_R(t)$ abgebildet.

Abschließend muss die Ordnung der Referenztrajektorie bestimmt werden. Der Zusammenhang zwischen den Kardanwinkeln α_D, β_D und der Winkelgeschwindigkeit ω_D ist über die kinematische Differentialgleichung $\dot{\mathbf{q}}_D = \mathbf{H}(\mathbf{q}_D)\omega_D$ gegeben. Aus der Tatsache, dass in Gleichung (6.52) die Elemente der Ableitung $\dot{\omega}_D$ benötigt werden, folgt, dass die zweiten Ableitungen der Drohnenwinkel $\ddot{\alpha}_D$ und $\ddot{\beta}_D$ bekannt sein müssen. Aus Gleichung (6.50) ergibt sich weiter, dass dafür die vierte Ableitung des Ortsvektors $\mathbf{r}_D^{(4)}$ benötigt wird. Mit $\mathbf{r}_{D1} = \mathbf{r}_{B1}$ folgt damit nach Gleichung (6.48), dass der Seilrichtungsvektor und damit \mathbf{f}_{R1} ebenfalls bis zur vierten Ableitung bekannt sein müssen. Dies führt wegen $\mathbf{f}_P^z = \mathbf{f}_{R1}$ dazu, dass nach Gleichung

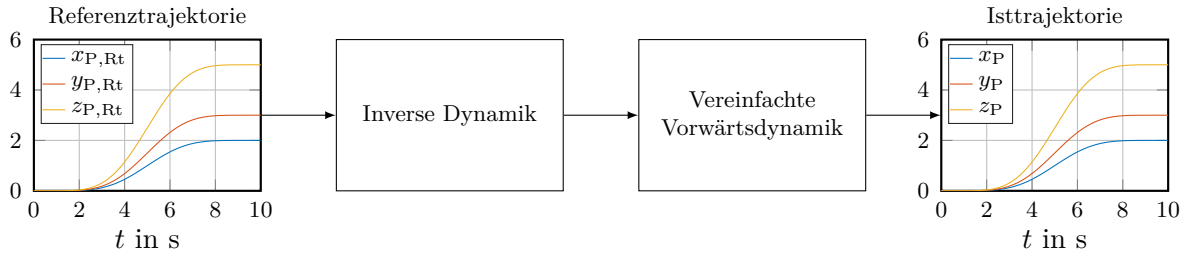


Abbildung 6.6: Validierung der inversen Dynamik eines Drohnensystems

(6.47) die Referenztrajektorie $\mathbf{r}_{P,Rt}$ und ihre Ableitungen $\mathbf{r}_{P,Rt}^{(i)}$ für $i = 1, \dots, 6$ vorgegeben werden müssen. Dies wiederum führt nach den Überlegungen in Abschnitt 6.1 dazu, dass die Solltrajektorie ein Polynom 13. Ordnung sein muss.

Validierung der inversen Dynamik: Ausgehend von einer korrekten Berechnung der notwendigen Winkelgeschwindigkeiten durch das inverse Modell, muss die Vorwärtskinematik unter Berücksichtigung aller Vereinfachungen wieder exakt zu der vorgegebenen Trajektorie führen. Die Überprüfung kann simulativ entsprechend der Vorgehensweise nach Abbildung 6.6 erfolgen. Hierzu wird für jede der drei Raumrichtungen ein Spline vorgegeben. Die resultierende Trajektorie überführt das System innerhalb der Transitionszeit $t_t = 10\text{ s}$ aus seiner Ruhelage $\mathbf{r}_{P,Rt}(0) = \mathbf{0}\text{ m}$ in die neue Ruhelage $\mathbf{r}_{P,Rt}(t_e) = [2\text{ m } 3\text{ m } 5\text{ m}]^T$. Die Auswertung der Differenz zwischen der Referenz- und Isttrajektorie liefert das Ergebnis $\mathbf{e}_P = \mathbf{r}_{P,Rt} - \mathbf{r}_P = \mathbf{0}\text{ m}$. Das inverse Modell ist demnach korrekt implementiert worden. Die zu der Bewegung berechneten Stellgrößenverläufe sind in Abbildung 6.7a dargestellt. Der Vergleich der Beträge aller vier Rotorwinkelgeschwindigkeiten zeigt, dass der wesentliche Anteil der Abweichung von der Schwebedrehzahl aus der Bewegung in z -Richtung stammt. Der für eine Verkipfung der Drohne notwendige Drehzahlunterschied gegenüberliegender Motoren ist für diese Trajektorie $\Delta\omega_{13}, |\Delta\omega_{24}| < 1\text{ rad/s}$ und deshalb in dieser Darstellung nur schwer zu erkennen. Die sich einstellenden Seil- und Drohnenwinkel sind in Abbildung 6.7b dargestellt. Für die vorgegebenen Trajektorien sind Winkel von $\alpha_{S,D}, \beta_{S,D} < 2,5^\circ$ notwendig. Dabei zeigt sich zwischen den jeweiligen Seil- und den Drohnenwinkel ein minimaler Unterschied von $\Delta\alpha_{S,D}, \Delta\beta_{S,D} < 0,5^\circ$.

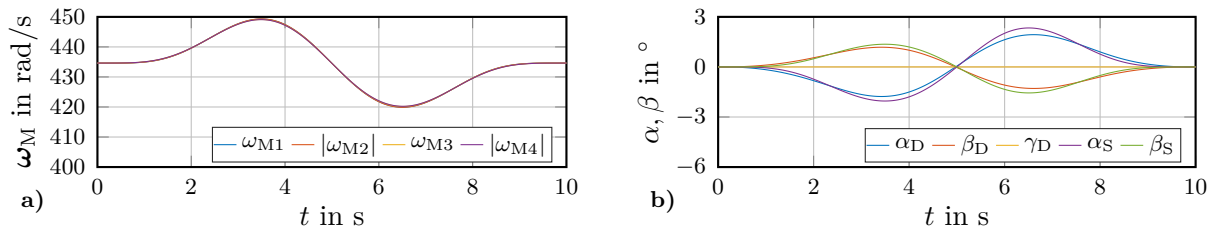


Abbildung 6.7: Stellgrößenverläufe zur Validierung der inversen Dynamik mit a) dem berechneten Stellgrößenverlauf und b) den Verläufen der Seil- und Drohnenwinkel

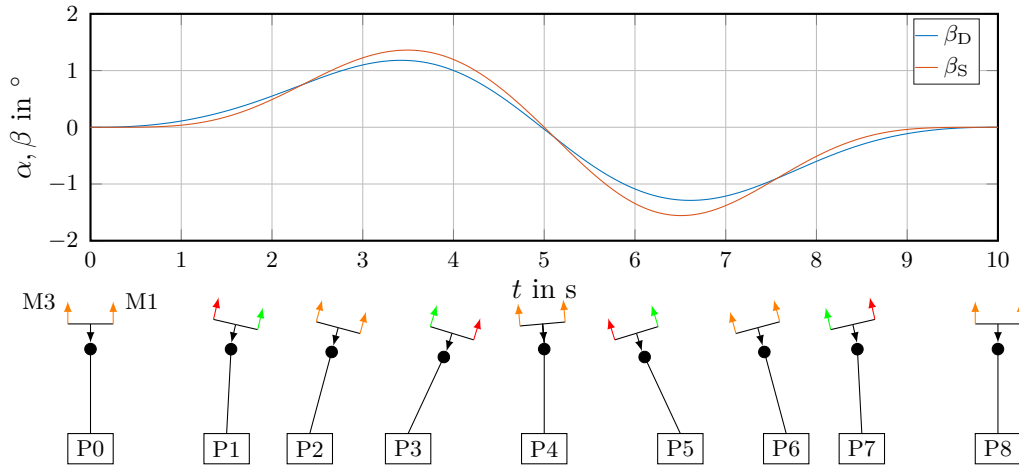


Abbildung 6.8: Detaillierte Betrachtung einer eindimensionalen Bewegung für ein Drohnensystem entlang der x -Achse mit dazugehöriger schematischer Darstellung der Systemanordnung

Für eine bessere Interpretation der Ergebnisse sind in Abbildung 6.8 die Seil- und Drohnenwinkel für eine translatorische Punkt-zu-Punkt-Bewegung in x -Richtung dargestellt. Außerdem ist der dazugehörige Systemzustand schematisch für neun unterschiedliche Zeitpunkte $P0$ bis $P8$ überzeichnet dargestellt. Sowohl der Zeitraum der Beschleunigung zwischen $0\text{ s} < t < 5\text{ s}$ als auch der Zeitraum der Verzögerung zwischen $5\text{ s} < t < 10\text{ s}$ kann in zwei Abschnitte unterteilt werden. In der ersten Hälfte der Beschleunigungsphase für $0\text{ s} < t < 2,34\text{ s}$ ist entsprechend $P1$ der Drohnenwinkel größer als der Seilwinkel und $M3$ dreht schneller als $M1$. In Position $P2$ zum Zeitpunkt $t \approx 2,34\text{ s}$ sind sowohl der Seil- und der Drohnenwinkel als auch die Winkelgeschwindigkeiten ω_{M1} und ω_{M3} jeweils gleich groß. In der zweiten Phase für $2,34\text{ s} < t < 5\text{ s}$ ist nun entsprechend $P3$ der Seilwinkel größer als der Drohnenwinkel und die Rotorgeschwindigkeit $M1$ größer als $M3$. Aufgrund des dynamischen Verhaltens der Drohne und der Plattform vergrößert sich der Seilwinkel auch noch in der zweiten Phase bis zu dem Zeitpunkt $P3$ bei $t \approx 3,5\text{ s}$. Dies hat zur Folge, dass bis zu diesem Zeitpunkt die Plattformbeschleunigung zunimmt. In der Position $P4$ ist der Seilwinkel exakt null. Die Rotorwinkelgeschwindigkeiten sind zu diesem Zeitpunkt gleich groß. Dieser Vorgang findet in umgekehrter Reihenfolge auch während der Verzögerung für $5\text{ s} < t < 10\text{ s}$ statt. In den Positionen $P0$ und $P8$ befindet sich das System vollkommen in Ruhe.

Eine wesentliche aber notwendige Vereinfachung bei der Herleitung der inversen Dynamik war die Annahme $\mathbf{r}_{D1} = \mathbf{r}_{B1}$. Dadurch unbeeinflusst wird für die Berechnung des Drehmoments durch die Seilkraft \mathbf{f}_R^z in Gleichung (6.52) der Abstand b_{1z} berücksichtigt. Um dessen Einfluss abzuschätzen, wird zunächst der Stellgrößenverlauf für $b_{1z} = 0$ berechnet, jedoch die Vorwärtsdynamik mit $b_{1z} = -0,04\text{ m}$ simuliert. Die resultierenden Stellgrößenverläufe der Motordrehzahlen sind in Abbildung 6.9a dargestellt und die Position des Gesamtsystems ist in Abbildung 6.9b den Splines der Sollgrößen gegenübergestellt. Dabei zeigt sich, dass lediglich der Spline in

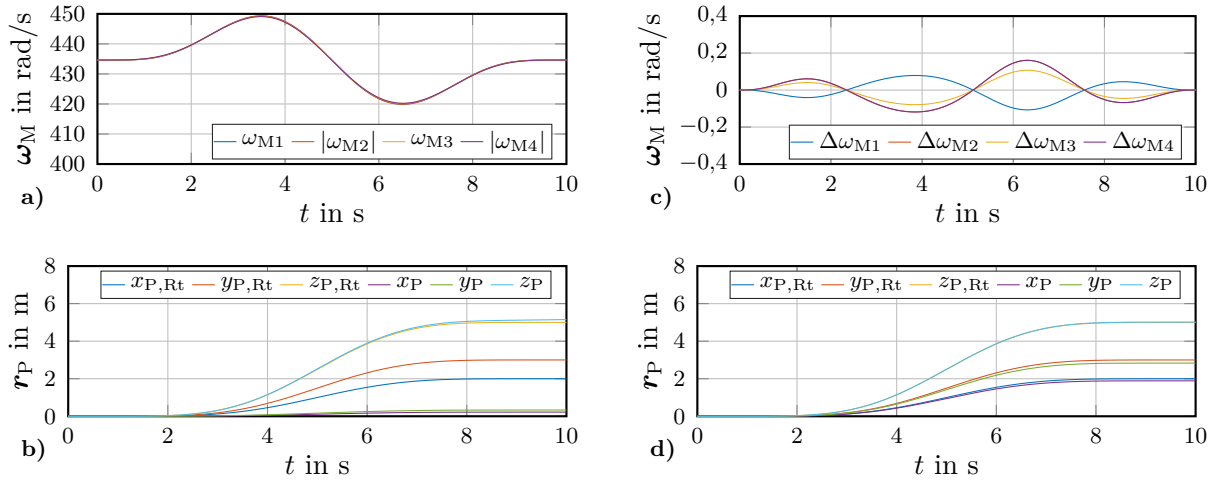


Abbildung 6.9: Einflussgrößen für den Transport einer Nutzlast mit einem Quadrokopter mit den für $b_{1z} = 0\text{ m}$ berechneten Stellgrößenverläufen in a) und dem dazugehörigen Ergebnis in b) sowie die Abweichungen zu den mit $b_{1z} = -0,04\text{ m}$ berechneten Stellgrößenverläufen in c) mit zugehörigem Ergebnis in d)

z -Richtung mit einer bleibenden Abweichung von $\Delta z_P \approx 0,15\text{ m}$ erkennbar nachgefahren wird. Die Abweichungen in der x - und y -Richtung sind mit $\Delta x_P \approx 1,8\text{ m}$ und $\Delta y_P \approx 2,7\text{ m}$ deutlich. In einer zweiten Simulation wird der Stellgrößenverlauf mit $b_{1z} = -0,04\text{ m}$ genauer berechnet. Die Abweichungen der Stellgrößen im Vergleich zur vereinfachten Stellgrößenberechnung sind in Abbildung 6.9c dargestellt. Sie fallen mit $\Delta\omega_{M,\max} < 0,2\text{ rad/s}$ sehr gering aus. Im Ergebnis werden die einzelnen Splines für alle drei Raumrichtungen mit $\Delta x_P \approx 0,12\text{ m}$, $\Delta y_P \approx 0,17\text{ m}$ und $\Delta z \approx 0,02\text{ m}$ jedoch sehr viel genauer nachgefahren. Die wesentliche Erkenntnis dieses Vergleichs ist, dass der Einfluss der Parameter auf den berechneten Stellgrößenverlauf prozentual gesehen sehr gering ist. Jedoch haben diese geringen Unterschiede einen sehr großen Einfluss auf die Ausgangsgrößen. Dieses Verhalten ist auf die grenzstabile Systemeigenschaft des Quadrokopters zurückzuführen. Mit den gewonnenen Erkenntnissen kann davon ausgegangen werden, dass die Abweichungen der erwarteten Drehzahlen für $r_D \neq r_B$ vernachlässigbar für die Bewertung der Trajektorien sind.

Trajektorienplanung für die Transportaufgabe: Im Folgenden wird der Bahnplaner verwendet, um mit Hilfe des inversen Modells eine Trajektorie für die Transportaufgabe nach Abbildung 6.1 zu planen und diese anschließend mit dem Simulationsmodell nach Abbildung 6.5 zu überprüfen. Der Bahnplaner soll dabei die optimale Trajektorie bezüglich den in Abschnitt 6.1 definierten Optimierungskriterien für den Stein mit dem Index 1000 finden. An dieser Stelle wird lediglich die sechste Trajektorie zur Überführung des Steins von seinem Startpunkt $A = (30 | -6 | 2,45)$ zu seinem Zielpunkt $B = (2,8625 | 3,90 | 2,45)$ betrachtet. Die Orientierung des Steins kann aufgrund der fehlenden Steuerbarkeit systembedingt nicht aktiv beeinflusst werden. Im vorliegenden Fall besitzt die Trajektorie zwei zusätzliche Stützpunkte

$S1$ und $S2$. In den Punkten A und B soll sich der Stein in vollkommener Ruhe befinden. In den Stützpunkten $S1$ und $S2$ optimiert der Optimierer hingegen jeweils die Position, die Geschwindigkeit und Beschleunigung der Plattform. Die Randbedingungen aller weiteren Ableitungen werden in den Stützpunkten auf null gesetzt. Für die Transitionszeit gilt die Randbedingung $1\text{ s} \leq t_t \leq 70\text{ s}$, wobei als Startwert $t_t = 50\text{ s}$ gewählt wird. Die Stützpunkte sollen sich mit $\mathbf{r}_\Delta = \overrightarrow{AB}$ für den Punkt $S1$ im Bereich $(\mathbf{r}_A + 0,1\mathbf{r}_\Delta) \leq \mathbf{r}_{S1} \leq (\mathbf{r}_A + 0,5\mathbf{r}_\Delta)$ und für den Punkt $S2$ im Bereich $(\mathbf{r}_A + 0,5\mathbf{r}_\Delta) \leq \mathbf{r}_{S2} \leq (\mathbf{r}_A + 0,9\mathbf{r}_\Delta)$ befinden. Sie dürfen pro Raumrichtung mit der Geschwindigkeit $-2\text{ m/s} \leq v_{S1,2} \leq 2\text{ m/s}$ durchfahren werden. Für die Beschleunigung in den Punkten gilt $-2\text{ m/s}^2 \leq a_{S1,2} \leq 2\text{ m/s}^2$. Für die Optimierung wird die Partikelschwarmoptimierung von MATLAB® zusammen mit den Parametern aus Tabelle 6.3 verwendet. Eine Kollisionsprüfung wird für die Kostenfunktionen $\chi = \{\text{CaCa}, \text{ObCa}, \text{ObD}, \text{DD}\}$ an $n_A = 400$ Abtastpunkten durchgeführt. Der vergleichsweise hohe Wert für \mathcal{W}_ω resultiert aus der dritten Potenz in Gleichung (6.18) und den notwendigen kleinen Drohnenwinkeln, um die Vereinfachung $\mathbf{r}_{Bi}^{(n)} \approx \mathbf{r}_{Di}^{(n)}$ zu rechtfertigen.

Die Anwendung des Bahnplaners für die Optimierung der Trajektorie für den Stein mit dem Index 1000 führt auf die in Abbildung 6.10 dargestellte Trajektorie. Es ist ersichtlich, dass die gefundene Trajektorie Kollisionen mit den Hindernissen vermeidet. Die Überführung des Steins vom Punkt A in den Punkt B dauert $t_t \approx 19,7\text{ s}$. Die berechneten Stellgrößenverläufe für die Winkelgeschwindigkeiten variieren gemäß Abbildung 6.11a und sind mit $|\omega_{Mi}| < |\omega_{M0}| \pm 2\text{ rad/s}$ unterhalb von $\omega_{M,\max}$. Für dieses Anwendungsszenario sind die Differenzdrehzahlen $\Delta\omega_{M1,3}$ und $\Delta\omega_{M2,4}$ minimal. Der in der inversen Dynamik berechnete Verlauf der Seil- und Drohnenwinkel ist in Abbildung 6.11b dargestellt. Über den gesamten Verlauf gilt für die Winkel $|\alpha_{D,S}|, |\beta_{D,S}| < 5^\circ$. Erneut sind die Verläufe für die Seil- und Drohnenwinkel sehr ähnlich. Die größte Abweichung ergibt sich für $\Delta\beta_{S,D}$ zum Zeitpunkt $t \approx 10,5\text{ s}$.

Tabelle 6.3: Optimierungsparameter für das Drohnensystem

Kostenfunktion	Kosten	Gewichtung	Strafterm	Grenzen
Transitionszeit	1	$1 \frac{1}{\text{s}}$	-	-
Propellerdrehzahl	1	21952	10000	$5 \dots 560\text{ rad/s}$
DD	1	1	$1 \cdot 10^5$	$d_{\min} = 1\text{ m}$
CaCa	1	1	$1 \cdot 10^6$	$d_{\min} = 0,1\text{ m}$
ObD	1	0	$1 \cdot 10^6$	$d_{\min} = 0,1\text{ m}$
ObCa	1	1	$1 \cdot 10^6$	$d_{\min} = 0,1\text{ m}$
Position des Endeffektors	1	0	1000	$z_P = 0 \dots 4,5\text{ m}$
Geschwindigkeit des Endeffektors	1	0	1000	$ v_{\max} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Beschleunigung des Endeffektors	1	0	1000	$ a_{\max} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

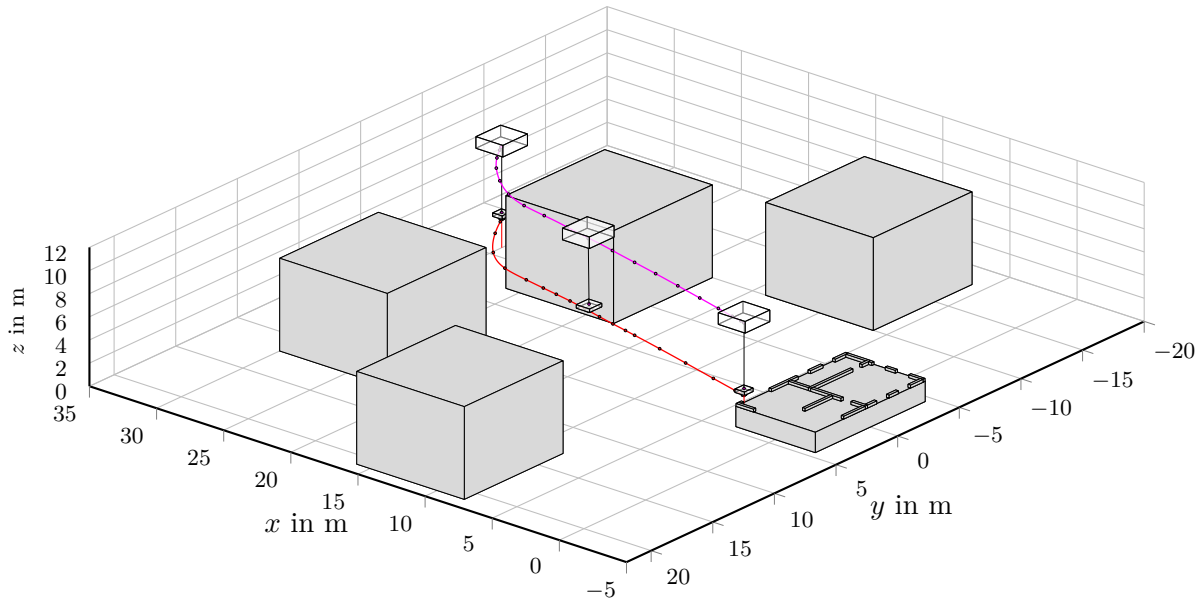


Abbildung 6.10: Optimierte Referenztrajektorie für den Transport einer Nutzlast mit einem Quadrokopter

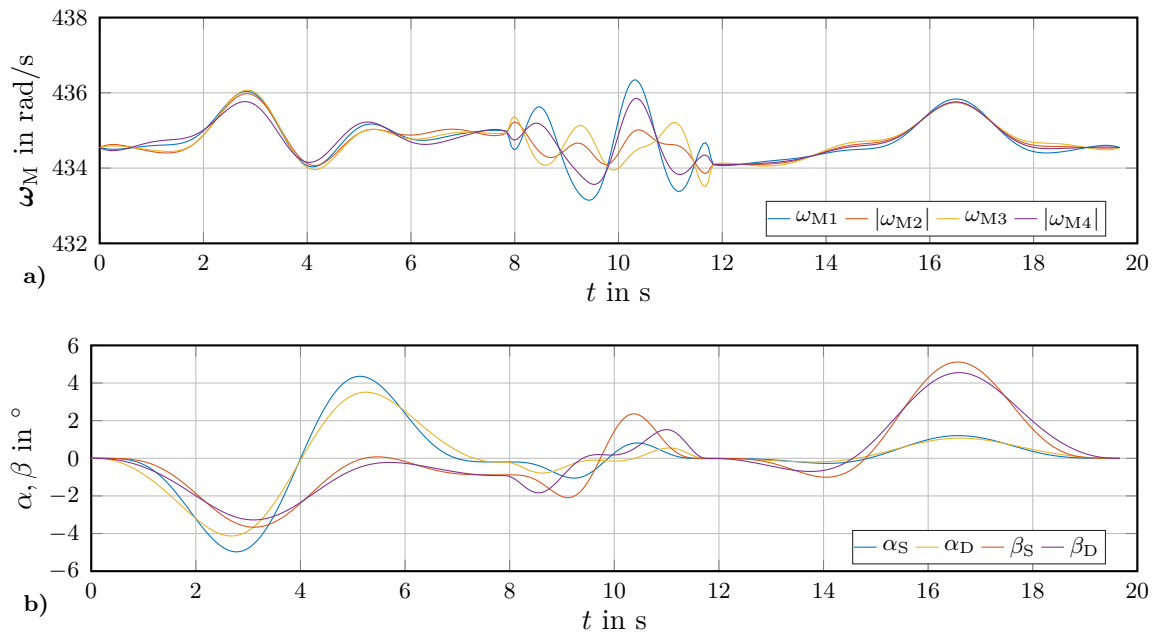


Abbildung 6.11: Referenzverläufe für den Transport einer Nutzlast mit einem Quadrokopter mit dem Verlauf der Rotorwinkelgeschwindigkeiten in a) sowie den Seil- und Drohnenwinkeln in b)

Der Verlauf der optimierten Trajektorie ist in Abbildung 6.12 für die Beurteilung in seine drei Raumrichtungen unterteilt. Die optimierte Trajektorie verbindet wie gewünscht den Startpunkt A mit dem Zielpunkt B . Die geforderten Randbedingungen werden in den Punkten A und B mit $\mathbf{r}_{P,A}^{(i)} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{r}_{P,B}^{(i)} = \mathbf{0}$ eingehalten. Die Referenztrajektorie der Plattform $\mathbf{r}_{P,Rt}$ passiert zum Zeitpunkt $t_{S1} = 7,83\text{ s}$ den Stützpunkt $\mathbf{r}_{P,Rt}(t_{S1}) \approx [21,77\text{ m } -0,37\text{ m } 2,45\text{ m}]^T$ und zum Zeitpunkt $t_{S2} = 11,83\text{ s}$

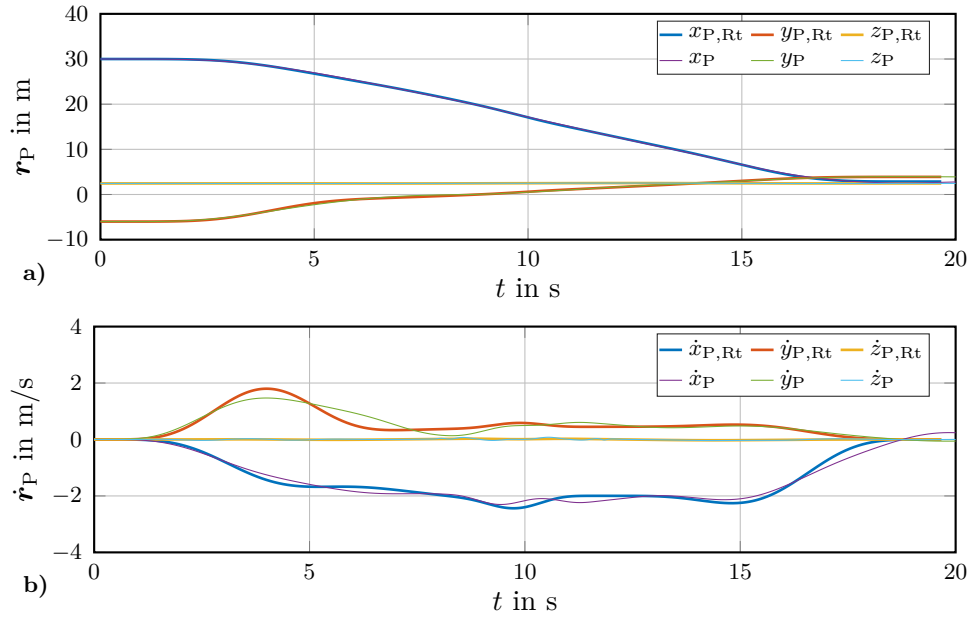


Abbildung 6.12: Simulationsergebnis für den Transport eines Steins mit einem Quadrokopter mit dem Vergleich der Referenz- und Istgrößen der Position in a) und der Geschwindigkeit in b)

den Stützpunkt $\mathbf{r}_{P,Rt}(t_{S2}) \approx [13,27 \text{ m } 1,49 \text{ m } 2,53 \text{ m}]^T$. Die Beschleunigungen sind in den Wegpunkten mit $\ddot{\mathbf{r}}_{P,Rt}(t_{S1}) \approx [-0,18 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} 0,04 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} 0,02 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}]^T$ und $\ddot{\mathbf{r}}_{P,Rt}(t_{S2}) \approx [0,00 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} 0,00 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} -0,02 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}]^T$ innerhalb des vorgegebenen Bereichs. Dasselbe gilt mit $\dot{\mathbf{r}}_{P,Rt}(t_{S1}) \approx [-1,94 \frac{\text{m}}{\text{s}} 0,36 \frac{\text{m}}{\text{s}} 0,02 \frac{\text{m}}{\text{s}}]^T$ und $\dot{\mathbf{r}}_{P,Rt}(t_{S2}) \approx [-2,00 \frac{\text{m}}{\text{s}} 0,45 \frac{\text{m}}{\text{s}} 0,01 \frac{\text{m}}{\text{s}}]^T$ auch für die Geschwindigkeiten in den Zwischenpunkten.

Die gefundene Bahnkurve wird mit dem komplexen Simulationsmodell 6.5a überprüft. Dabei wird das Regelungskonzept des Quadrokopters aus Abschnitt 5.3 übernommen. Die einzige Anpassung betrifft die Berücksichtigung der Seilkräfte in der Berechnung der Stellgröße der exakten Linearisierung. Auftretende Abweichungen zwischen Referenzposition der Plattform $\mathbf{r}_{P,Rt}$ und deren Istposition \mathbf{r}_P werden in dieser Simulation nicht durch einen Regler korrigiert. Die Eingangsgrößen in das System sind die in Abhängigkeit der Plattformtrajektorie berechnete Referenztrajektorie $\mathbf{y}_{D,Rt}$ der Drohne. Diese muss nach Abschnitt 5.3 bis zur fünften Ableitung bekannt sein und wird mit den in diesem Kapitel vorgestellten Gleichungen berechnet. Das Ergebnis der Simulation ist zusammen mit den Referenztrajektorien in Abbildung 6.12 dargestellt. In den jeweiligen Richtungen ergeben sich daraus Positionsabweichungen von $\Delta x_P = |x_{P,Rt} - x_P| < 0,3 \text{ m}$, $\Delta y_P = |y_{P,Rt} - y_P| < 0,35 \text{ m}$ und $\Delta z_P = |z_{P,Rt} - z_P| < 0,02 \text{ m}$. Damit umfliegt auch das simulierte Modell sämtliche Hindernisse. Der Zielpunkt B wird zum Zeitpunkt t_e mit einer Genauigkeit von $\Delta x_P(t_e) < 0,08 \text{ m}$, $\Delta y_P(t_e) < 0,01 \text{ m}$ und $\Delta z_P(t_e) < 0,01 \text{ m}$ erreicht. Die Plattformgeschwindigkeiten haben eine maximale Abweichung von $\Delta \dot{x}_P < 0,45 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\Delta \dot{y}_P < 0,35 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und $\Delta \dot{z}_P < 0,06 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Für ein besseres Ergebnis muss das Drohnensystem zukünftig zusätzlich geregelt werden.

6.4 Transport einer Nutzlast mit drei Quadrokokptern

Die Betrachtung des Transports mit einer Drohne hat gezeigt, dass lediglich die Position aber nicht die Orientierung der Plattform aktiv beeinflusst werden kann. Außerdem liegen für die betrachtete Kombination aus Plattform und Drohne die erforderlichen Rotordrehzahlen bereits im oberen Drehzahlbereich der Antriebsmotoren, sodass der Transport schwererer Steine bereits problematisch werden kann. Aus diesen Gründen werden zwei weitere Drohnen für den Transport der Plattform verwendet. Das System besteht somit in Summe aus $n_D = 3$ Drohnen mit $i = 1, \dots, n_D$.

Vorwärtsdynamik: Die Verwendung von drei Drohnen führt auf das Simulationsmodell in Abbildung 6.13 mit drei identischen Subsystemen für die jeweilige Drohne. Die Seilangriffspunkte werden an der Plattform mit den Vektoren ${}^P\mathbf{p}_{R1} = [p_{1x} \ p_{1y} \ p_{1z}]^T$, ${}^P\mathbf{p}_{R2} = [p_{2x} \ p_{2y} \ p_{2z}]^T$ und ${}^P\mathbf{p}_{R3} = [p_{3x} \ p_{3y} \ p_{3z}]^T$ positioniert. Für die drei baugleichen Drohnen gilt jeweils ${}^{Di}\mathbf{b}_{Ri} = [0 \ 0 \ -b_{iz}]^T$ und ${}^{Di}\mathbf{b}_{SDi} = [0 \ 0 \ h_{11}]^T$. Das vorliegende System besitzt die drei impliziten Zwangsbedingungen

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_1^T \mathbf{l}_1 - l_{0,1}^2 \\ \mathbf{l}_2^T \mathbf{l}_2 - l_{0,2}^2 \\ \mathbf{l}_3^T \mathbf{l}_3 - l_{0,3}^2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (6.54)$$

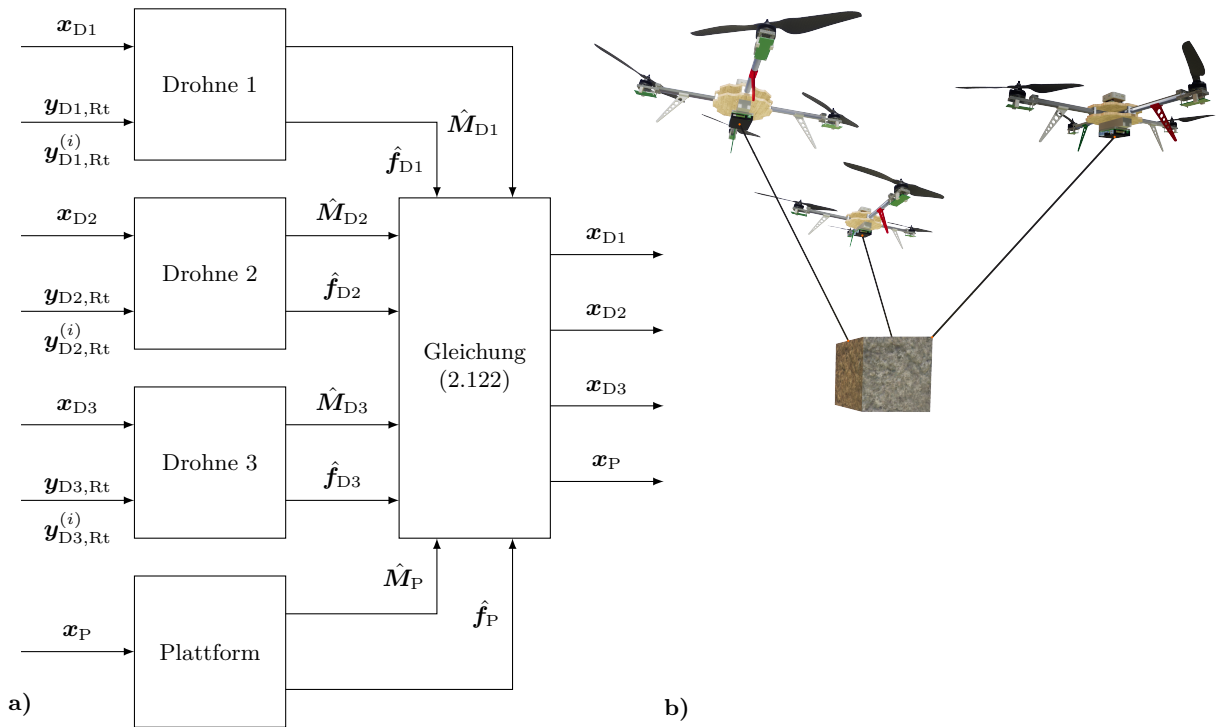


Abbildung 6.13: Transport einer Nutzlast mit drei Quadrokokptern. Aufbau des Simulationsmodells in a) und Darstellung des Gesamtsystems in der virtuellen Realität in b)

mit dem Seilvektor $\mathbf{l}_i = \mathbf{r}_{D_i} + \mathbf{b}_{R_i} - \mathbf{r}_P - \mathbf{p}_{R_i}$ aus Gleichung (2.111). Die Seile haben alle die gleiche Länge, sodass nachfolgend $l_{0,i} = l_0$ gilt. Die Massenmatrizen $\hat{\mathbf{M}}_{D_i}$ sowie der Vektor der Gesamtkraft $\hat{\mathbf{f}}_{D_i}$ ergeben sich aus der Herleitung nach Abschnitt 5.3. Für die Beschreibung des Gesamtsystems folgt der Lagevektor $\hat{\mathbf{r}} = [\hat{\mathbf{r}}_{D1}^T \hat{\mathbf{r}}_{D2}^T \hat{\mathbf{r}}_{D3}^T \hat{\mathbf{r}}_P^T]^T \in \mathbb{R}^{28 \times 1}$. Die Ableitung der Zwangsbedingung (6.54) ergibt

$$\dot{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{D1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{P1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{D2} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{P2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{D3} & \mathbf{C}_{P3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{r}}}_{D1} \\ \dot{\hat{\mathbf{r}}}_{D2} \\ \dot{\hat{\mathbf{r}}}_{D3} \\ \dot{\hat{\mathbf{r}}}_P \end{bmatrix}. \quad (6.55)$$

Für das hier im Detail betrachtete Gesamtmodell werden die Parameter aus Tabelle 6.2 grundsätzlich übernommen. Lediglich die Seilangriffspunkte an der Plattform ändern sich zu

$${}^P\mathbf{p}_{R1} = \begin{bmatrix} 0,34 \text{ m} \\ -0,1525 \text{ m} \\ 0,6 \text{ m} \end{bmatrix}, \quad {}^P\mathbf{p}_{R2} = \begin{bmatrix} 0,0 \text{ m} \\ 0,3050 \text{ m} \\ 0,6 \text{ m} \end{bmatrix}, \quad {}^P\mathbf{p}_{R3} = \begin{bmatrix} -0,34 \text{ m} \\ -0,1525 \text{ m} \\ 0,6 \text{ m} \end{bmatrix}. \quad (6.56)$$

Werden erneut die Seilkräfte als Eingangsgrößen auf die Plattform gesehen, besitzt das vorliegende System neun Eingangsgrößen. Das Modell der Plattform lässt sich für die Wahl der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_P$ sowie der translatorischen Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}_P$ als Ausgangsgrößen und den Seilkräften als Eingangsgrößen auf die nichtlineare Regelungsnormform (5.16) bringen. Mit der vorliegenden Seilkonfiguration nach (6.56) folgt für die Entkopplungsmatrix der Plattform $\text{rang}(\mathbf{D}_P) = 6$. Demnach kann diese in allen sechs Freiheitsgraden gezielt und vollständig gesteuert werden. Bei der Wahl der Seilangriffspunkte an der Plattform ist zu beachten, dass zum einen eine ungünstige Wahl der Seilangriffspunkte zu einem Rangabfall bei der Matrix \mathbf{D}_P führen kann, was den Verlust der vollständigen Steuerbarkeit zur Folge hat. Zum anderen hat die Wahl der Seilangriffspunkte an der Plattform einen wesentlichen Einfluss auf die Verteilung der Kräfte. Die Seilangriffspunkte sind im vorliegenden Fall so gewählt, dass im Schwebeflug alle Drohnen die gleiche Last tragen. Aufgrund der Überaktuierung existiert für die Lösung der Seilkräfte gemäß Gleichung (6.8b) eine Nullmatrix, über welche die Seilkräfte beeinflusst werden können. Mit den verwendeten Massen ergibt sich für die vorliegende Seilkonfiguration eine theoretisch minimale Schwebedrehzahl von

$$\omega_{M0} = \sqrt{\frac{(m_D + \frac{m_P}{3})g}{4c_T}} \approx 308,18 \text{ rad/s}. \quad (6.57)$$

Diese befindet sich im zulässigen Bereich der Motor-Propeller-Kombination von

$\omega_{M,\max} \leq 560 \text{ rad/s}$. Die vollständige Steuerbarkeit darf jedoch nicht darüber hinwegtäuschen, dass die Plattform mit $\text{rang}(\mathbf{C}) = 3$ dreifach statisch unterbestimmt ist. Zur Stabilisierung der numerischen Simulation nach Baumgarte werden die Parameter $\alpha_B, \beta_B = 100$ verwendet. Außerdem müssen die Anfangsbedingungen des Simulationsmodells konsistent mit den Zwangsbedingungen (6.54) gewählt werden.

Inverse Dynamik: Basierend auf der Tatsache, dass auch in dieser Betrachtung Quadrokokpter für den Transport eingesetzt werden, können die Ergebnisse und Erkenntnisse aus Abschnitt 6.3 größtenteils übernommen werden. Die Berechnung erfolgt dabei analog nach Gleichung (6.17) für jede Drohne. Die Berechnung der einzelnen Seilvektoren und deren Ableitungen unterscheidet sich geringfügig. Denn zum einen ist die Plattform aufgrund der drei verwendeten Seile nun vollständig steuerbar und zum anderen muss der berechnete Gesamtkraftwinder $\hat{\mathbf{f}}_P^z \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$ auf die jeweiligen Seilkräfte $\mathbf{f}_{Ri} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ nach Gleichung (6.8b) aufgeteilt werden. Für den Transport mit drei Seilen wird angenommen, dass die Plattform lediglich um ihre z -Achse gedreht wird und die Hauptträgheitsachsen des Endeffektors mit den Koordinatenachsen der Plattform übereinstimmen. Dies gilt auch für die homogenen und symmetrischen Steine. Unter der Annahme, dass ein Stein immer zentral aufgenommen wird, gilt $\mathbf{b}_{SP} = [0 \ 0 \ b_{SPz}]^T$ und $\Theta_P = \text{diag}(\Theta_{Pxx}, \Theta_{Pyy}, \Theta_{Pzz})$. Aus diesen Annahmen folgt, dass mit $\tilde{\omega}_P \Theta_P \omega_P = \mathbf{0}$ keine Corioliskräfte wirken. Demnach gilt nach Gleichung (6.6) für die Berechnung des notwendigen Gesamtkraftvektors ohne Einschränkung

$$\begin{bmatrix} \tau_P^z \\ \mathbf{f}_P^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_P & m_P \tilde{\mathbf{b}}_S \\ m_P \tilde{\mathbf{b}}_S^T & m_P \mathbf{E} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{s}}_P + \begin{bmatrix} \tau_P^e \\ \mathbf{f}_P^e \end{bmatrix}. \quad (6.58)$$

Bei der Berechnung der Ableitungen von $\hat{\mathbf{f}}_P^z$ muss darauf geachtet werden, dass die Massenmatrix $\hat{\mathbf{M}}_P$ aufgrund des Trägheitstensors Θ_P im Inertialsystem zeitabhängig ist. Für die Ableitung der Massenmatrix gilt

$$\dot{\mathbf{M}}_P = \begin{bmatrix} \dot{\Theta}_P & m_P \dot{\tilde{\mathbf{b}}}_S \\ m_P \dot{\tilde{\mathbf{b}}}_S^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_P \Theta_P - \Theta_P \tilde{\omega}_P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (6.59)$$

Da für die Ableitung

$$\tilde{\omega}_P \Theta_P - \Theta_P \tilde{\omega}_P = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{Pz} (\Theta_{Pxx} - \Theta_{Pyy}) & 0 \\ \omega_{Pz} (\Theta_{Pxx} - \Theta_{Pyy}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.60)$$

gilt, ist das Produkt $\dot{\mathbf{M}}_P \ddot{\mathbf{r}}_P$ mit dem Vektor $\ddot{\mathbf{r}}_P = [0 \ 0 \ \dot{\omega}_{Pz} \ \ddot{\mathbf{r}}_P^T]^T$ stets null. Da außerdem als einzige eingeprägte Kraft die Gewichtskraft betrachtet wird, ergibt

sich für die Ableitungen der Zwangskräfte

$$\hat{\mathbf{f}}_P^{z(i)} = \hat{\mathbf{M}}_P \mathbf{s}_P^{(i+2)}. \quad (6.61)$$

Infolge der verwendeten drei Drohnen muss der berechnete Zwangskraftwinder auf die einzelnen Seilkräfte über die Gleichung (6.8b) aufgeteilt werden. Die Ableitungen für die Seilkräfte würden sich dann ergeben, indem zunächst Gleichung (6.8a) abgeleitet wird. Es folgt nach der Leibnizregel für die Ableitung von Produkten

$$\dot{\hat{\mathbf{f}}}_P^z = \dot{\mathbf{P}} \mathbf{f}_R + \mathbf{P} \dot{\mathbf{f}}_R \quad (6.62a)$$

$$\ddot{\hat{\mathbf{f}}}_P^z = \ddot{\mathbf{P}} \mathbf{f}_R + 2\dot{\mathbf{P}} \dot{\mathbf{f}}_R + \mathbf{P} \ddot{\mathbf{f}}_R \quad (6.62b)$$

$$\hat{\mathbf{f}}_P^{z(3)} = \mathbf{P}^{(3)} \mathbf{f}_R + 3\ddot{\mathbf{P}} \dot{\mathbf{f}}_R + 3\dot{\mathbf{P}} \ddot{\mathbf{f}}_R + \mathbf{P} \mathbf{f}_R^{(3)} \quad (6.62c)$$

$$\hat{\mathbf{f}}_P^{z(4)} = \mathbf{P}^{(4)} \mathbf{f}_R + 4\mathbf{P}^{(3)} \dot{\mathbf{f}}_R + 6\ddot{\mathbf{P}} \ddot{\mathbf{f}}_R + 4\dot{\mathbf{P}} \mathbf{f}_R^{(3)} + \mathbf{P} \mathbf{f}_R^{(4)} \quad (6.62d)$$

Die Gleichungen können anschließend mit Hilfe der Pseudoinversen nach den Ableitungen der einzelnen Seilvektoren umgeformt werden. Es folgt

$$\mathbf{f}_R = \mathbf{P}^+ \hat{\mathbf{f}}_P^z + (\mathbf{E}_{9 \times 9} - \mathbf{P}^+ \mathbf{P}) \boldsymbol{\lambda}_0 \quad (6.63a)$$

$$\dot{\mathbf{f}}_R = \mathbf{P}^+ \left(\dot{\hat{\mathbf{f}}}_P^z - \dot{\mathbf{P}} \mathbf{f}_R \right) + (\mathbf{E}_{9 \times 9} - \mathbf{P}^+ \mathbf{P}) \boldsymbol{\lambda}_1 \quad (6.63b)$$

$$\ddot{\mathbf{f}}_R = \mathbf{P}^+ \left(\ddot{\hat{\mathbf{f}}}_P^z - \ddot{\mathbf{P}} \mathbf{f}_R - 2\dot{\mathbf{P}} \dot{\mathbf{f}}_R \right) + (\mathbf{E}_{9 \times 9} - \mathbf{P}^+ \mathbf{P}) \boldsymbol{\lambda}_2 \quad (6.63c)$$

$$\mathbf{f}_R^{(3)} = \mathbf{P}^+ \left(\hat{\mathbf{f}}_P^{z(3)} - \mathbf{P}^{(3)} \mathbf{f}_R - 3\ddot{\mathbf{P}} \dot{\mathbf{f}}_R - 3\dot{\mathbf{P}} \ddot{\mathbf{f}}_R \right) + (\mathbf{E}_{9 \times 9} - \mathbf{P}^+ \mathbf{P}) \boldsymbol{\lambda}_3 \quad (6.63d)$$

$$\mathbf{f}_R^{(4)} = \mathbf{P}^+ \left(\hat{\mathbf{f}}_P^{z(4)} - \mathbf{P}^{(4)} \mathbf{f}_R - 4\mathbf{P}^{(3)} \dot{\mathbf{f}}_R - 6\ddot{\mathbf{P}} \ddot{\mathbf{f}}_R - 4\dot{\mathbf{P}} \mathbf{f}_R^{(3)} \right) + (\mathbf{E}_{9 \times 9} - \mathbf{P}^+ \mathbf{P}) \boldsymbol{\lambda}_4. \quad (6.63e)$$

Die Ableitungen der Strukturmatrix $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{6 \times 9}$ ergeben sich analog zu den Ableitungen der Massenmatrix $\hat{\mathbf{M}}_P$, indem die jeweiligen Blockmatrizen abgeleitet werden. Die Vektoren $\boldsymbol{\lambda}_i \in \mathbb{R}^{9 \times 1}$ sind voneinander nicht abhängig und können frei gewählt werden.

Optimierung der Bahnkurve: Die Optimierung der Trajektorie erfolgt erneut für den Stein mit dem Index 1000 und damit für dieselben Wegpunkte A und B wie bei der Betrachtung mit einem Quadropter. Im Unterschied kann aufgrund der vollständigen Steuerbarkeit der Plattform auch deren Orientierung gezielt beeinflusst werden. In diesem Fall soll der gewählte Stein eine zusätzliche Rotation von -90 Grad um die z_P -Achse erfahren. Eine weitere Optimierungsgröße kommt dadurch hinzu, dass sich die Drohnen im Nullraum bewegen können. Aufgrund der Verwendung von drei Drohnen wird für nachfolgende Untersuchung

$$\lambda_0 = \begin{bmatrix} \lambda_{0,1} \\ \lambda_{0,2} \\ \lambda_{0,3} \end{bmatrix} \lambda_S, \text{ mit } \lambda_{0,1} = \begin{bmatrix} \sin(60^\circ) \\ -\cos(60^\circ) \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda_{0,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda_{0,3} = \begin{bmatrix} -\sin(60^\circ) \\ -\cos(60^\circ) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.64)$$

festgelegt. Hierbei ist $\lambda_S \in \mathbb{R}$ der Spreizfaktor. Durch diese Wahl, ergeben sich Lösungen, bei denen die Drohnen möglichst einen Abstand von 120° um die z_P -Achse haben. Wie weit sich die Drohnen voneinander entfernen, wird über den Spreizfaktor festgelegt. Für sämtliche Ableitungen aus (6.63) wird $\lambda_i = \mathbf{0}$ für $i = 1, \dots, 4$ gewählt.

Die Definition der Randbedingungen für den Optimierer erfolgt analog der Betrachtung mit einem Quadrokokter. Die Gütefunktionen erweitern sich lediglich dahingehend, dass λ_S eine Optimierungsgröße ist. Das Ergebnis in Abbildung 6.14 zeigt den Verlauf der optimierten Solltrajektorie von A über die zwei Stützpunkte $S1$ und $S2$ nach B . Sämtliche Hindernisse werden dabei wie gewünscht umflogen. Die Transitionszeit wird durch den Optimierer von den anfänglichen $t_t = 50$ s auf $t_t \approx 27,02$ s reduziert. Die gefundene Trajektorie des Steins passiert zum Zeitpunkt $t_{S1} \approx 10,81$ s den Stützpunkt $\mathbf{r}_{P,Rt}(t_{S1}) \approx [16,32 \text{ m } 2,08 \text{ m } 2,45 \text{ m}]^T$ und zum Zeitpunkt $t_{S2} \approx 16,21$ s den Stützpunkt $\mathbf{r}_{P,Rt}(t_{S2}) \approx [11,57 \text{ m } 2,82 \text{ m } 2,33 \text{ m}]^T$. Die Plattform ist mit $\hat{\mathbf{r}}_P^{(i)} = \mathbf{0}$ im Start- und Zielpunkt der Trajektorie in vollkommener Ruhe. Die zu Beginn der Optimierung in den beiden Stützpunkten angenommenen Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{r}}_{P,Rt}(t_{S1}), \dot{\mathbf{r}}_{P,Rt}(t_{S2}) = \mathbf{0} \text{ m/s}$ verändert der Optimierer auf $\dot{\mathbf{r}}_{P,Rt}(t_{S1}) \approx [-0,96 \frac{\text{m}}{\text{s}} \ 0,16 \frac{\text{m}}{\text{s}} \ -0,08 \frac{\text{m}}{\text{s}}]^T$ und $\dot{\mathbf{r}}_{P,Rt}(t_{S2}) \approx [-1,26 \frac{\text{m}}{\text{s}} \ 0,17 \frac{\text{m}}{\text{s}} \ 0,03 \frac{\text{m}}{\text{s}}]^T$ und die Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{r}}_{P,Rt}(t_{S1}) = \mathbf{0} \text{ m/s}^2$, $\ddot{\mathbf{r}}_{P,Rt}(t_{S2}) = \mathbf{0} \text{ m/s}^2$ auf $\ddot{\mathbf{r}}_{P,Rt}(t_{S1}) \approx$

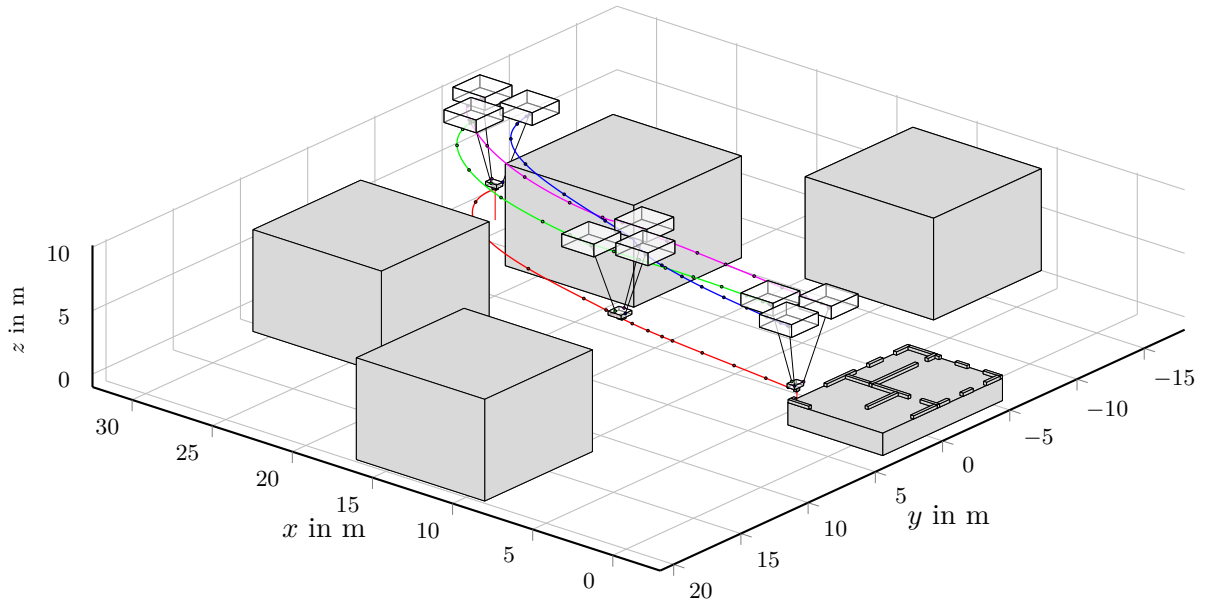


Abbildung 6.14: Optimierte Bahnkurve für den Transport einer Nutzlast mit drei Quadrokoktern

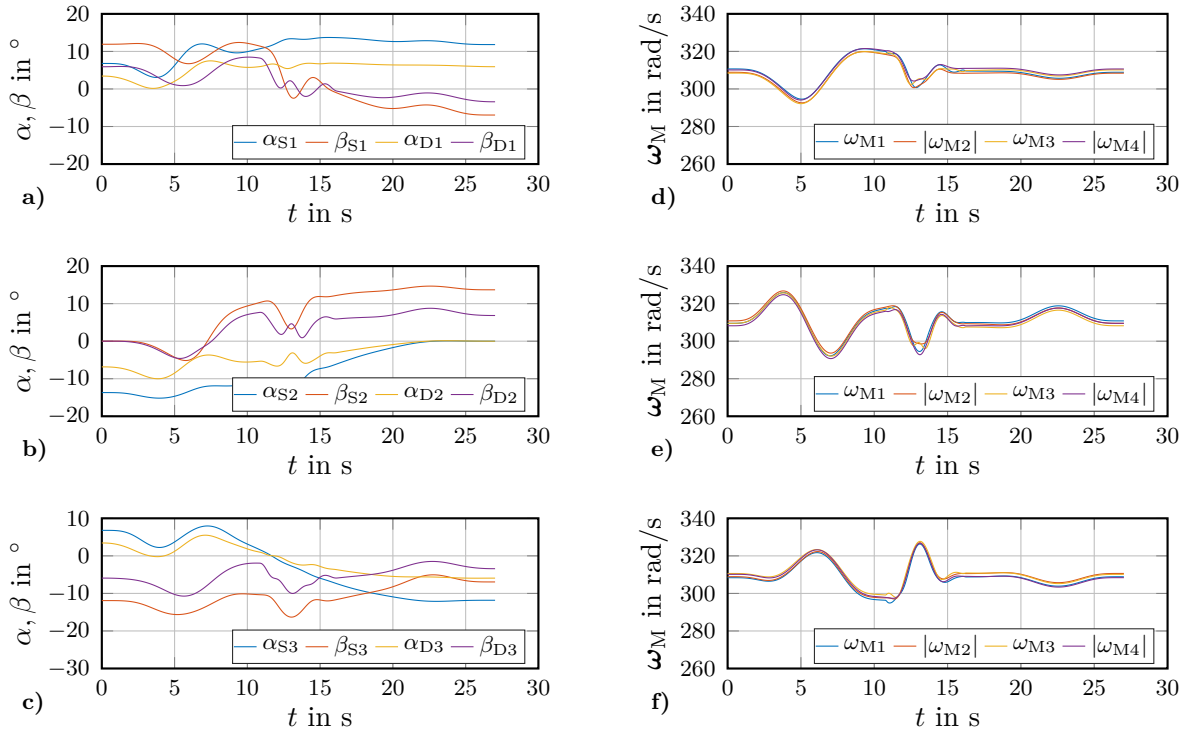


Abbildung 6.15: Referenzverläufe für die optimierte Bahnkurve des Drohnensystems mit drei Quadroptern für die jeweiligen Seil- und Drohnenwinkeln in a) - c) und den Rotorwinkelgeschwindigkeiten in d) - f)

$[0,861 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \ -0,10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \ 0,10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}]^T$ und $\ddot{\mathbf{r}}_{\text{P,Rt}}(t_{\text{S}2}) \approx [-0,03 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \ -0,01 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \ 0,00 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}]^T$. Um einen besseren Eindruck über den Bewegungsablauf zu gewinnen, sind die berechneten Bahnkurven der Plattform und der Seilangriffspunkte an den Drohnen zusätzlich in konstanten Zeitabständen markiert. Eine Häufung von Punkten bedeutet demnach eine langsamere Bewegung. Für die Drehung des Steins muss der gesamte Endeffektor gedreht werden. Damit dies gelingt müssen die Drohnen ihre absolute Position koordiniert ändern. Die Drohnen selbst erfahren dabei keine Drehung um ihre körpereigene z -Achse. Aus dem zeitlichen Verlauf der Seilangriffspunkte an den Drohnen ist deren koordinierte Positionsänderung anhand der Überschneidungen deutlich zu erkennen. Außerdem ist die durch den Vektor λ_0 angestrebte Ausrichtung der Drohnen im 120° -Winkel gut sichtbar. Der Spreizfaktor hat nach der Optimierung den Wert $\lambda_S \approx 33,06$. Im Wesentlichen wird dieser durch zwei Kostenfunktionen beeinflusst. Zum einen erhöhen sich die Kosten der Rotorkräfte je größer λ_S und damit die Spreizung wird, weshalb der Optimierer versucht einen möglichst kleinen Spreizwinkel zu erzielen. Dahingegen steigen mit abnehmendem λ_S die Kosten \mathcal{V}_{DD} , da die Hüllkörper sich immer näher kommen. Über die Gewichtung von \mathcal{W}_ω und \mathcal{W}_{DD} kann demnach der Spreizfaktor beeinflusst werden.

Die Verläufe der berechneten Seil- und Drohnenwinkel sowie der benötigten Rotordrehzahlen sind in Abbildung 6.15 abgebildet. Die Verläufe der Seil- und Drohnenwinkel in den Abbildungen 6.15a-c weisen im Start- und Zielpunkt die erwarteten

Werte auf. Beispielhaft werden die Ergebnisse für die Drohne D2 näher betrachtet. Für diese folgt aus dem Vektor λ_0 , dass der Seilvektor der Drohne im Startpunkt in einer zur yz -Ebene parallelen Ebene liegt und in die positive y_0 - und z_0 -Richtung weist. Dafür ist eine reine Drehung des Seilvektors um die x_0 -Achse mit $\alpha_{S2} < 0^\circ$ notwendig. Weiterhin folgt daraus direkt $\beta_{S2} = 0^\circ$. Damit ein stabiles Systemverhalten überhaupt auftreten kann, muss die Drohnenneigung im stationären Zustand geringer als die Seilneigung sein, weshalb $|\alpha_{D2}| < |\alpha_{S2}|$ gelten muss. Beide Überlegungen werden durch die vom Optimierer berechneten Winkel bestätigt. Im Zielpunkt ist die Drohne D2 nun so ausgerichtet, dass das Seil in einer zur xz -Ebene parallelen Ebene liegt und in die positive x_0 - und z_0 -Richtung weist. Dafür ist eine reine Drehung des Seilvektors mit $\beta_{S2} > 0^\circ$ und $\alpha_{S2} = 0^\circ$ notwendig. Des Weiteren muss $|\beta_{D2}| < |\beta_{S2}|$ gelten. Auch diese Überlegungen werden durch die Winkelverläufe in Abbildungen 6.15b bestätigt. Mit der analogen Vorgehensweise können auch die Seil- und Drohnenwinkel der übrigen Drohnen im Start- und Zielpunkt plausibilisiert werden. Während der Trajektorie treten maximale Winkel von $|\alpha_{S,D}|, |\beta_{S,D}| < 15^\circ$ auf. Die Differenzen zwischen den Seil- und Drohnenwinkel sind $\Delta\alpha_{S,D} = |\alpha_S - \alpha_D| < 6^\circ$ und $\Delta\beta_{S,D} = |\beta_S - \beta_D| < 6^\circ$. Die Betrachtung der berechneten Rotorwinkelgeschwindigkeiten in den Abbildungen 6.15d-f zeigt, dass durch die gewählte Anordnung der Seile am Endeffektor alle Drohnen im stationären Fall die gleiche Last tragen müssen. Im Start- und Zielpunkt können die berechneten Drehzahlen erneut auf Plausibilität geprüft werden. Für die Drohne D2 müssen zum Erreichen von $\alpha_{S2} < 0^\circ$ und $|\alpha_{D2}| < |\alpha_{S2}|$ die Rotorwinkelgeschwindigkeiten die Bedingungen $\omega_{M1} = \omega_{M3}$ und $|\omega_{M2}| > |\omega_{M4}|$ erfüllen. Nur auf diese Weise kann das notwendige Reaktionsmoment zu dem vom Seil aufgebrachten Zwangsmoment erzeugt werden. Diese Tatsache spiegelt sich auch in den berechneten Rotorwinkelgeschwindigkeit in Abbildung 6.15e wider. Für das eigentliche Abfliegen der Trajektorie sind nur geringe Abweichungen zur Schwebedrehzahl von etwa $|\omega_{Mi}| \approx |\omega_{M0}| \pm 15 \text{ rad/s}$ notwendig. Prinzipiell zeigen die Sollverläufe sowohl der Seil- und Drohnenwinkel als auch der Rotorwinkelgeschwindigkeiten den gewünschten, glatten Verlauf.

Simulationsergebnisse: Die gefundene Referenztrajektorie wird mit dem komplexen Modell nach Abbildung 6.13 abgeflogen. Die Regelung der jeweiligen Drohne wird unverändert aus Abschnitt 5.3 übernommen. Die jeweiligen Referenztrajektorien \mathbf{y}_{Di} für $i = 1, 2, 3$ und deren Ableitungen $\mathbf{y}_{Di}^{(i)}$ für $i = 1, \dots, 5$ erhält man aus der inversen Dynamik nach der Vorgehensweise in Abschnitt 6.2.1. Das daraus resultierende Ergebnis ist zusammen mit den Referenztrajektorien für die translatorischen Verläufe in den Abbildungen 6.16a-b und für die rotatorischen Verläufe in den Abbildungen 6.16c-d dargestellt. Die Abweichung der Referenzposition $\mathbf{r}_{P,Rt}$ zur Istposition \mathbf{r}_P kann über den Verlauf der Trajektorie mit $|\mathbf{e}_{r_P}| \leq [0,34 \text{ m } 0,27 \text{ m } 0,04 \text{ m}]^T$ angegeben werden. Trotz dieser Abweichungen werden sämtliche statischen Hindernisse sicher umflogen. Wäre dies nicht der Fall, müssten entweder die Abweichungen von der Solltrajektorie durch die Optimierung der Regelung minimiert oder die AABBs der statischen Hindernisse bewusst größer angenommen werden. Zum Zeitpunkt $t = t_t$ wird die Zielposition mit einer

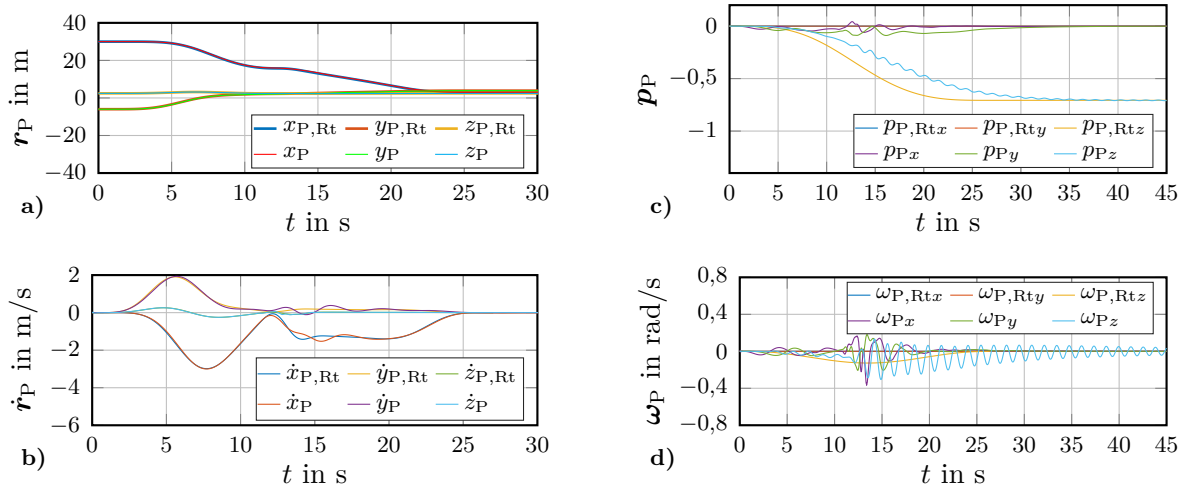


Abbildung 6.16: Simulationsergebnis für den Verlauf der Plattformtrajektorie mit den Referenz- und Istgrößen von a) der Position, b) der Geschwindigkeit, c) der Orientierung und d) der Winkelgeschwindigkeit

Abweichung von $\Delta \mathbf{r}_{P,B} = |\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_P| < 0,03 \text{ m}$ erreicht. Im Falle der Orientierung entstehen mit $|\mathbf{e}_{pp}| \leq [6,88^\circ \ 10,33^\circ \ 26,00^\circ]^T$ deutlich größere Fehler. Es dauert bis zum Zeitpunkt $t = 45 \text{ s}$ bis diese am Zielpunkt B eliminiert sind. Während der Trajektorie kommt es bei der Rotation um die z -Achse zu einem unerwünschten Schwingverhalten. Um das Verhalten zu verbessern, müssen zusätzliche Regler eingesetzt werden. Dies wird an dieser Stelle jedoch nicht weiter vertieft und ist Gegenstand zukünftiger Arbeiten.

6.5 Vergleich zwischen einem Seilroboter und einem Drohnensystem

Für das automatisierte Errichten eines Mauerwerks mit einem Seilroboter wurden an der Universität Duisburg-Essen zahlreiche Arbeiten durchgeführt. Diese umfassen auch erste praktische Arbeiten, welche die Eignung des Seilroboters für den Transport schwerer Lasten bestätigen (Roske u. a., 2021; Heidel u. a., 2022). Ein Nachteil, der sich dabei herausstellte, sind die vergleichsweise hohen Rüstkosten, der Aufwand für den Aufbau des Seilroboters sowie die lokal begrenzte Einsetzbarkeit. Demgegenüber ist ein Drohnensystem sehr flexibel und nahezu sofort einsatzbereit. Da in den beiden vorangegangenen Abschnitten 6.3 und 6.4 bereits nachgewiesen wurde, dass der Transport schwerer Lasten mit Drohnen möglich ist, soll an dieser Stelle ein abschließender simulativer Vergleich zwischen einem Seilroboter und einem Drohnensystem mit drei Quadroptern durchgeführt werden. Die Bewertungskriterien sind die benötigte Gesamtenergie und die Bauzeit.

Definition des Szenarios: Aufgrund der örtlich begrenzten Einsatzfähigkeit eines Seilroboters wird als Vergleich das bereits in Abbildung 1.2 schematisch dargestellte Szenario herangezogen. Hierbei handelt es sich um das automatische Errichten eines Mauerwerks, wobei die Zuführung der Steine über eine Mörtelanlage erfolgt, welche räumlich an das Grundgerüst des Seilroboters gebunden ist. Des Weiteren befinden sich am Grundgerüst des Seilroboters Seilführungen über welche die Seile in den eigentlichen Arbeitsraum gelangen. Der am Ende der Seile befestigte Endeffektor wird über die gezielte Längenänderung der einzelnen Seile gesteuert. Das dafür notwendige Drehmoment kommt aus permanenterregten Synchronmaschinen, die über einen Umrichter direkt am Stromnetz betrieben werden. Wird das Drohnensystem verwendet, wird lediglich die Mörtelanlage des Seilroboters übernommen, da dieser neben dem eigentlichen Zuführen der Steine auch für das Aufbringen des Mörtels zuständig ist. Die Bewegung der Plattform resultiert bei dem Drohnensystem durch die Bewegung der einzelnen Drohnen. Für einen Vergleich werden die in Tabelle 6.1 angegebenen Trajektorien für alle 1720 Steine des Erdgeschosses optimiert und hinsichtlich benötigter Zeit und eingesetzter Energie verglichen. Der Endeffektor beider Systeme unterscheidet sich dadurch, dass bei dem Endeffektor des Seilroboters der Stein aktiv gedreht werden kann. Bei dem Drohnensystem kommt, wie bereits in Abschnitt 6.4 diskutiert wurde, die Drehung aus der koordinierten absoluten Positionsänderung der Drohnen zueinander. Aus diesem Grund kann der Endeffektor des Drohnensystems deutlich einfacher und leichter konstruiert werden, da die Rotationseinheit, welche aus einem leistungsstarken Elektromotor, einer stabilen Lagerung und einem zusätzlichen Rahmen besteht, weggelassen werden kann. Darüber hinaus können die einzelnen Rahmenelemente deutlich schwächer ausgelegt werden, da die zu erwartenden Seilkräfte sehr viel geringer ausfallen. Außerdem fallen fünf Seilangriffspunkte und Kraftmessdosen weg. Basierend auf diesen Annahmen wird angenommen, dass sich das Gewicht des Endeffektors von $m_{EE} = 100 \text{ kg}$ für den Seilroboter auf $m_{EE} = 20 \text{ kg}$ für das Drohnensystem verringert. Aufgrund des lokal begrenzten Bauraums werden die Steine in diesem Szenario über geradlinige Trajektorien vom Start- zum Zielpunkt überführt. Das bedeutet, dass es auch bei den Trajektorien 6 und 13 keine zusätzlichen Stützpunkte gibt. Hierdurch vereinfachen sich zahlreiche Vorgänge, ohne dass ein Nachteil entsteht, sofern davon ausgegangen werden kann, dass sich außer den bereits gesetzten Steinen im Mauerwerk keinerlei Hindernisse im Arbeitsraum befinden. Dies ist eine zwingende Voraussetzung, da der Roboter nicht mehr in der Lage ist Hindernisse zu umgehen. Die Verwendung geradliniger Trajektorien bedeutet aber nicht, dass es sich bei den Polynomen um Geradengleichungen handelt. Allerdings sind die Polynome der einzelnen Richtungen linear abhängig.

Optimierungsergebnisse für den Seilroboter und das Drohnensystem: Bei dem hier betrachteten Seilroboter werden die Seile über die Umlenkrollen mit den Parametern

$${}^0\mathbf{b}_R = \begin{bmatrix} 4,8 & -4,8 & 4,33 & -4,33 & 4,8 & -4,8 & 4,33 & -4,33 \\ -6,996 & -6,996 & -7,096 & -7,096 & 6,996 & 6,996 & 7,096 & 7,096 \\ 0,5 & 0,5 & 5,1875 & 5,1875 & 0,5 & 0,5 & 5,1875 & 5,1875 \end{bmatrix} \quad (6.65)$$

in den Arbeitsraum eingeführt. Die Seilangriffspunkte an der Plattform befinden sich an den Stellen

$${}^P\mathbf{p}_R = \begin{bmatrix} 0,5100 & -0,5100 & 0,5100 & -0,5100 & 0,5100 & -0,5100 & 0,5100 & -0,5100 \\ -0,0315 & -0,0315 & -0,4450 & -0,4450 & 0,0315 & 0,0315 & 0,4450 & 0,4450 \\ 0,7140 & 0,7140 & 0,3240 & 0,3240 & 0,7140 & 0,7140 & 0,3240 & 0,3240 \end{bmatrix}. \quad (6.66)$$

Die Seile können eine maximale Kraft von $f_{R,\max} = 4500 \text{ N}$ aufbringen. Die minimale Grenze von $f_{R,\min} = 150 \text{ N}$ ergibt sich aus praktischen Erfahrungen und darf zu keiner Zeit unterschritten werden. Alle weiteren wichtigen Parameter sind für den Seilroboter in Anhang C.2 aufgeführt oder können aus (Bruckmann und Boumann, 2021) entnommen werden. Beim Seilroboter wird durch den Optimierer unter Einhaltung aller Randbedingungen die Zeit als einzige Optimierungsgröße reduziert, weshalb eine klassische Optimierungsmethode verwendet wird. Die Optimierungsparameter sind für den Seilroboter in Tabelle 6.4 aufgelistet. Das Drohnensystem besitzt dieselben Eigenschaften wie in Abschnitt 6.4. Neben der eigentlichen Transitionszeit wird zusätzlich noch der Spreizfaktor λ_S optimiert. Als

Tabelle 6.4: Optimierungsparameter für den Seilroboter

Kostenfunktionen	Kosten	Gewichtung	Strafterm	Grenzen
Transitionszeit	1	$1 \frac{1}{s}$	-	-
Seilkraft	1	0	10000	150 ... 4500 N
Seilkraftgrenzen	1	0	1000	$6 \frac{m}{s}$
ObD	1	0	1000	$d_{\min} = 0,1 \text{ m}$
CaCa	1	0	1000	-
ObCa	1	0	1000	$d_{\min} = 0,1 \text{ m}$
Position des Endeffektors	1	0	1000	$z_P = 0 \dots 4,5 \text{ m}$
Geschwindigkeit des Endeffektors	1	0	1000	$ v_{\max} = 3 \frac{m}{s}$
Beschleunigung des Endeffektors	1	0	1000	$ a_{\max} = 5 \frac{m}{s^2}$
Motormoment	1	0	1000	$\tau_t = -100 \dots 1100 \text{ Nm}$
Motorleistung	1	0	1000	$P_{\max} = 32000 \text{ W}$

Optimierungsmethode kommt erneut eine Partikelschwarmoptimierung zum Einsatz. Die Parameter der Kostenfunktion sind dieselben wie in Tabelle 6.3, mit der Ausnahme $\mathcal{W}_\chi = 0$ für $\chi \in \{\text{ObD}, \text{ObCa}\}$.

In den Darstellungen 6.17 und 6.18 sind die Robotersysteme beispielhaft für den Stein 1000 und die Bahnsegmente 4 bis 10 dargestellt. Die Querfahrt im Bahnsegment 6 überführt die Plattform von ihrer Position $\mathbf{r}_{P,A} = [0 \text{ m } -5,5575 \text{ m } 2,45 \text{ m}]^T$ zum Startzeitpunkt in ihre Position $\mathbf{r}_{P,B} = [2,8625 \text{ m } 3,9 \text{ m } 2,45 \text{ m}]^T$ zum Zielzeit-

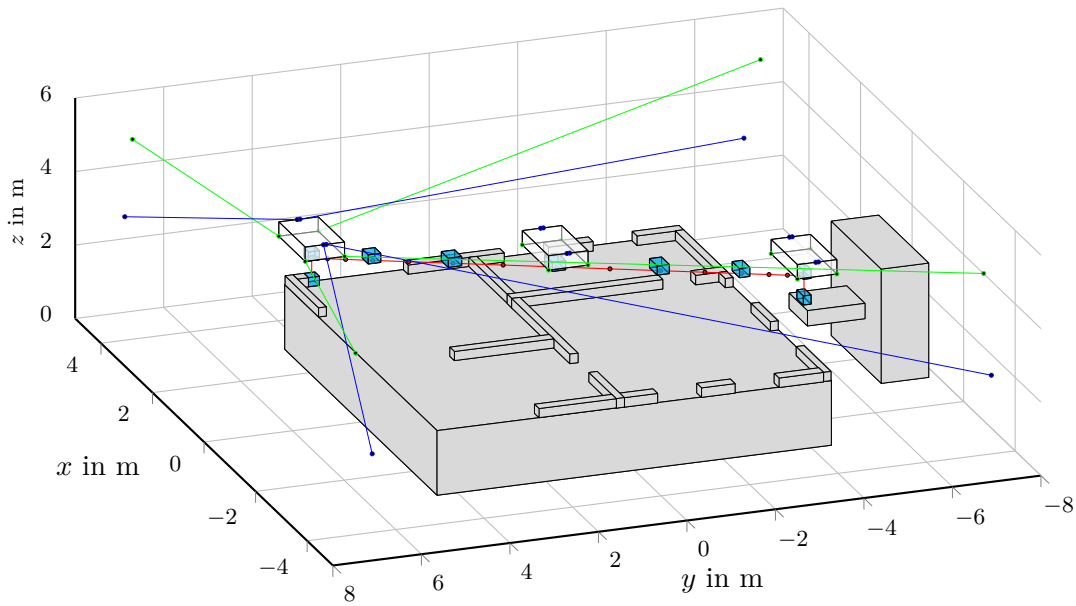


Abbildung 6.17: Optimierungsergebnis für den Seilroboter

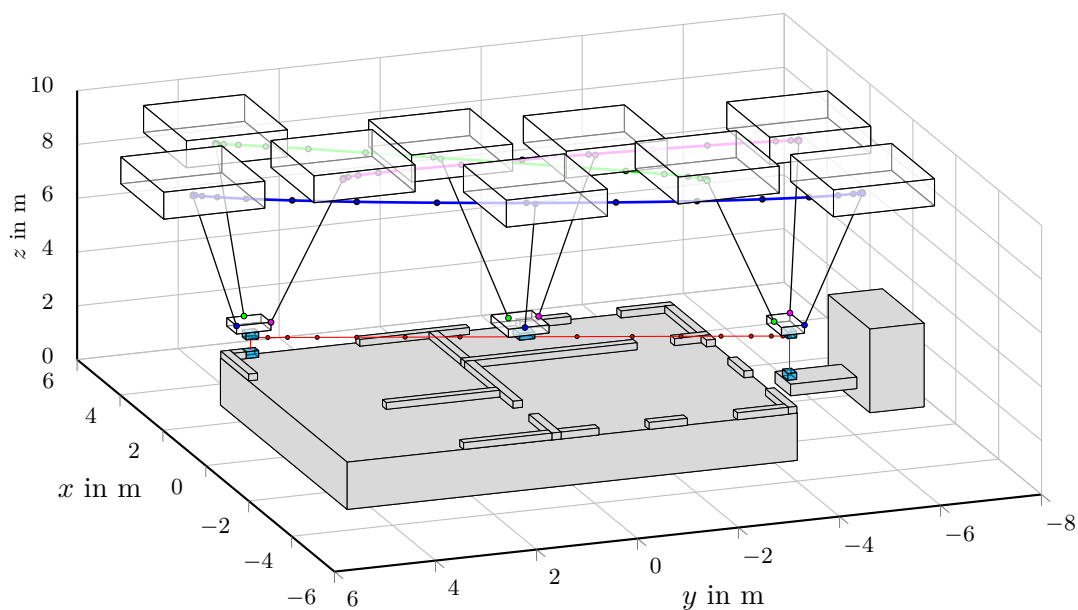


Abbildung 6.18: Optimierungsergebnis für das Drohnensystem

punkt. Zusätzlich wird der Stein während der Querfahrt um -90° gedreht. Für beide Systeme sind die direkten geradlinigen Verbindungen gut zu erkennen. Anhand der Hüllkörper um den Endeffektor und den Stein lässt sich die unterschiedliche Realisierung der Rotation des Steins um die körpereigene z -Achse vergleichen. Für den Seilroboter besitzt der Endeffektor eine zusätzliche Einrichtung für die Drehung des Steins. Demnach behält der Endeffektor seine Orientierung während des gesamten Transports bei. Bei dem Drohnensystem wird die Rotation hingegen durch eine Verdrehung des Endeffektors realisiert, mit dem der Stein fest verbunden ist. Die Drehung des Steins erfolgt durch die koordinierte Positionierung der Drohnen. Für beide Darstellungen ist eine Größenänderung der Hüllkörper während der Drehung zu erkennen. Diese Tatsache ist auf die Verwendung von AABB-Hüllkörpern zurückzuführen. Des Weiteren ist zu erkennen, dass sich bei dem Seilroboter die Seile ständig im kompletten Arbeitsraum befinden. Dadurch steigt die Gefahr von Seilkollisionen. Um das dargestellte Szenario überhaupt zu ermöglichen, wurden sowohl die Mörtelanlage als auch die unteren Seilrollen für den Stein 1000 bereits hochgefahren. Dahingegen sind die Seile bei dem Drohnensystem stets oberhalb des Mauerwerks. Seilkollisionen mit dem Mauerwerk sind dadurch nahezu ausgeschlossen.

Die resultierenden Seilkraftverläufe sind für den Seilroboter in Abbildung 6.19 zu sehen. Analog sind dies die Rotorwinkelgeschwindigkeiten in den Abbildungen 6.20d-f für das Drohnensystem. Deutlich sind die sprunghaft ansteigenden und abfallenden Seilkräfte beziehungsweise Rotordrehzahlen bei der Aufnahme und dem Absetzen des Steins zu erkennen. Die Ursache dafür ist, dass sich die Masse der Plattform nach dem Greifen des Mauersteins zwischen den Trajektorien 3 und 4 und nach dem Absetzen des Steins zwischen den Trajektorien 10 und 11 unmittelbar ändert. Dies führt zwangsläufig zu Diskontinuitäten, zum Beispiel bei den Kräften oder den Propellergeschwindigkeiten und damit zu theoretisch unendlich großen Beschleunigungen beispielsweise bei den Motoren oder den Drohnen. Da das

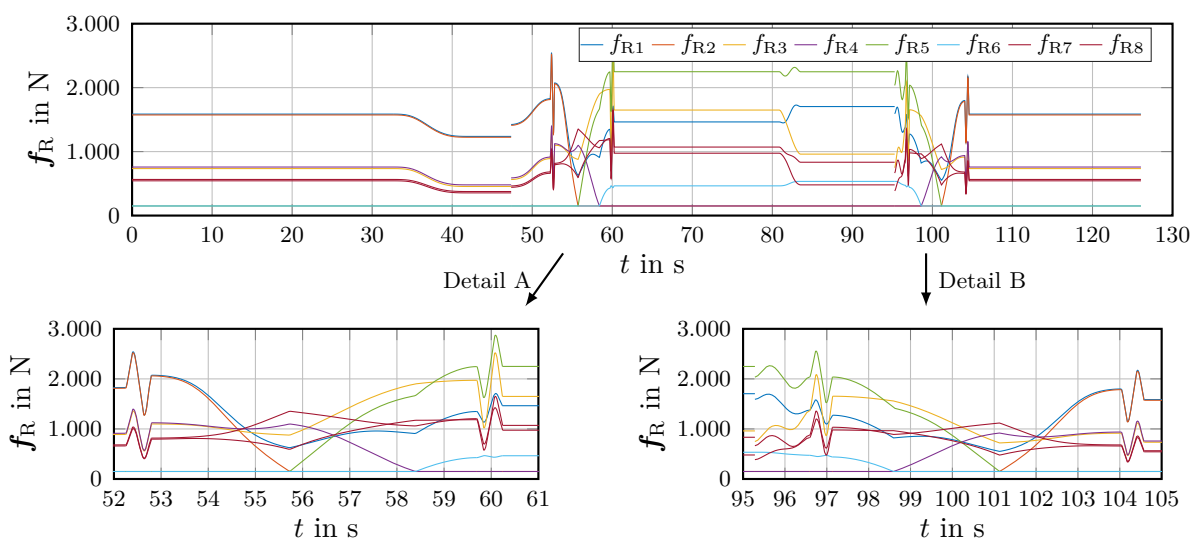


Abbildung 6.19: Optimierter Seilkraftverlauf für den Seilroboter für den Stein 1000

Softwareframework jedoch ein physikalisches Modell im offenem Regelkreis verwendet und jede Trajektorie unabhängig voneinander berechnet wird, hat dies keinen Einfluss auf die Optimierung. Die Auswirkungen dieser kurzen Zeitspanne in Bezug auf den Energieverbrauch und die Gesamtbauzeit werden als vernachlässigbar angesehen und in dieser Arbeit nicht berücksichtigt. Zur Vermeidung dieser Unstetigkeiten, müssen die Modelle in zukünftigen Arbeiten präzisiert werden. Dies beinhaltet vor allem, die mathematische Modellierung, wie die Seilkräfte ansteigen, bevor der Mauerstein durch die Mörtelanlage zu Beginn des Hebevorgangs freigegeben wird und wie die Kräfte abnehmen, wenn der Mauerstein gesetzt wird. Diese Vorgänge haben natürlich eine endliche Übergangszeit, was zu einem kontinuierlichen Übergang aller Parameter zwischen den oben genannten Trajektorien führt.

Die Gewichtskraft der Plattform variiert je nach aufgenommenem Stein zwischen $F_{G,S} = 1050 \text{ N}$ und $F_{G,S} = 1508 \text{ N}$ für den Seilroboter und $F_{G,D} = 301 \text{ N}$ und $F_{G,D} = 723 \text{ N}$ für das Drohnensystem. Aufgrund der sich mit der Plattform mitbewegenden Drohnen beträgt die von einer Drohne aufzubringende Seilkraft nur knapp mehr als ein Drittel von $F_{G,D}$. Dafür muss beim Drohnensystem jede Drohne zusätzlich zu dem Anteil der Plattform auch noch ihr eigenes Gewicht tragen. Sofern das Gewicht der Seile beim Seilroboter vernachlässigt wird, müssen die Seilkräfte lediglich die Gewichtskraft der Plattform tragen. Aufgrund der außerhalb des Bauraums fixierten Seilumlenkrollen verlaufen die Seile jedoch häufig in einem sehr flachen Winkel zur Plattformoberseite. Dadurch bewegen sich die Seilkräfte des Seilroboters eher im unteren kN-Bereich und betragen demnach ein Vielfaches der Seilkräfte des Drohnensystems. Ein weiterer Grund für die hohen Seilkräfte beim Seilroboter ist, dass die unteren Seile die Plattform nach unten verspannen. Demnach sind die Seile beim Drohnensystem deutlich weniger beansprucht. Unter diesen Voraussetzungen resultiert für die Drohnen die von der Plattformmasse abhängige theoretische Schwebedrehzahl der Rotoren

$$\omega_{M0} = \sqrt{\frac{\left(m_D + \frac{m_P}{3}\right) g}{4c_T}} \approx 308,18 \dots 362,59 \text{ rad/s.} \quad (6.67)$$

Mit zunehmender Spreizung der Drohnen liegt die tatsächliche Drehzahl entsprechend höher. Über den Auftriebsbeiwert kann eine theoretisch notwendige Kraft pro Drohne zwischen $F_A \approx 275,16 \text{ N}$ und $F_A \approx 380,90 \text{ N}$ berechnet werden. Das deutlich bessere Verhältnis zwischen aufzubringender Kraft zu notwendiger Kraft liegt allein an den Seilwinkeln an der Plattform und der deutlich geringeren Verspannung.

Trotz der deutlich größeren notwendigen Seilkräfte erweist sich der Seilroboter aufgrund seines Antriebskonzepts als das deutlich effizientere System. Letztendlich kommt die notwendige Seilkraft aus hocheffizienten permanenterregten Synchronmaschinen, welche über einen Umrichter direkt am Netz betrieben werden. Wirkungsgrade von über 90 Prozent sind bei derartigen Systemen die Regel. Mit den in

Anhang C.2 angegebenen Parametern und den Gleichungen (6.19) bis (6.23) kann das Verhältnis aus erzeugter Seilkraft zur eingesetzten Leistung für den stationären Fall hergeleitet werden. Dies führt letztendlich auf den Zusammenhang

$$\eta_{\text{Seil}} = \frac{[N]}{[W]} = \frac{2 (i_G \eta_G k_t)^2 \eta_{\text{ESC}}}{3 r_W^2 R_S f_R} \approx \frac{2 (10 \cdot 0,8941 \cdot 1,4)^2 \cdot 0,95}{3 \cdot 0,135^2 \cdot 0,12 f_R} = \frac{45374,5}{f_R}. \quad (6.68)$$

Aus den Herstellerangaben für die Antriebseinheit des Drohnensystems ergibt sich das Verhältnis

$$\eta_{\text{Drohne}} = \frac{[N]}{[W]} = \frac{4 \sqrt{c_T^3}}{2 c_W \sqrt{F_A}} \approx \frac{1,243}{\sqrt{F_A}}. \quad (6.69)$$

Beiden Systemen ist gemein, dass das Verhältnis mit zunehmender Kraft abnimmt und zwar beim Seilroboter mit $1/f_R$ sogar stärker als beim Drohnensystem mit $1/\sqrt{F_A}$. Vergleicht man die Wirkungsgrade η_{Seil} und η_{Drohne} für die Startposition des Steins 1000 jeweils gemäß den Abbildungen 6.19 und 6.20d-f so ergibt sich für den Seilroboter eine Seilkraft von $f_{R1} = 1586 \text{ N}$ und für das Drohnensystem eine Auftriebskraft für beispielsweise die Drohne D2 von $F_A = 205 \text{ N}$. Daraus lässt sich für den Seilroboter das Verhältnis $\eta_{\text{Seil}} = 28,61 \text{ N/W}$ berechnen, welches über 329

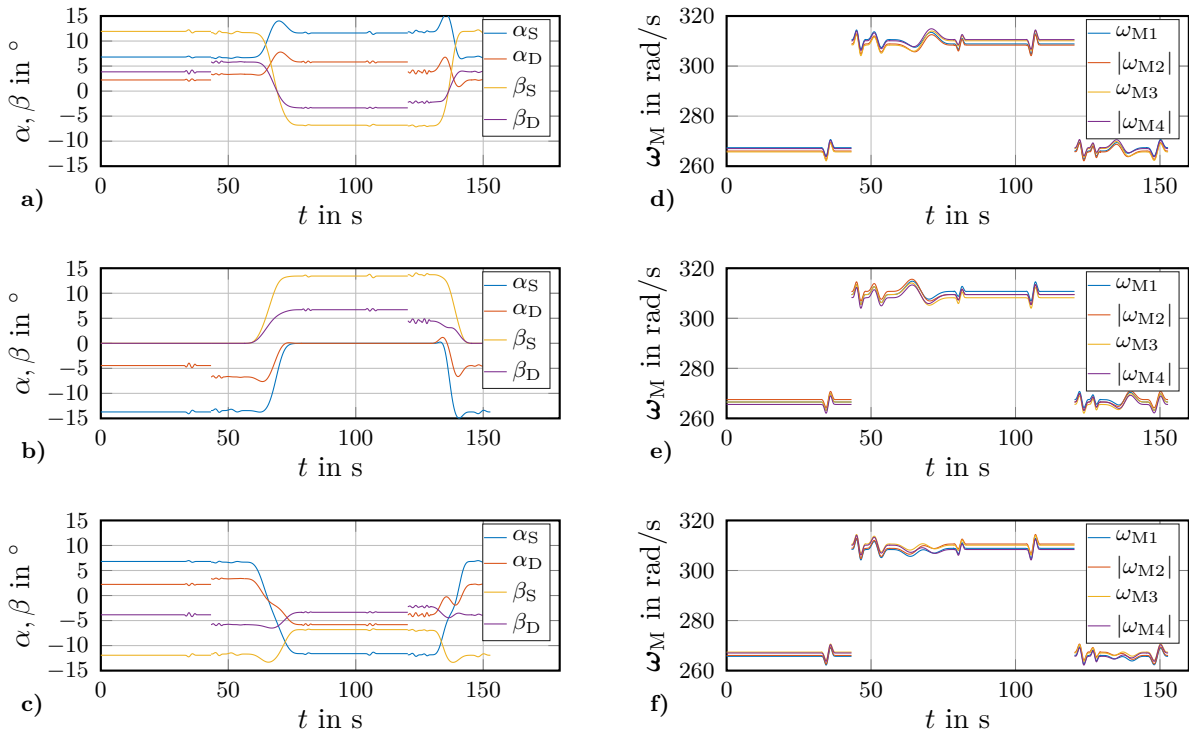


Abbildung 6.20: Referenzverläufe für die optimierte Bahnkurve des Drohnensystems mit drei Quadroptern für die jeweiligen Seil- und Drohnenwinkeln in a) - c) und den Rotorwinkelgeschwindigkeiten in d) - f) für den Stein 1000

Mal größer ist als das der Drohne mit $\eta_{\text{Drohne}} = 0,087 \text{ N/W}$. Ein weiterer Vorteil des Seilroboters ist, dass er Energie rekuperieren kann, wenn die Plattform verzögert oder ihre Höhe verringert. Eine Rekuperation von gespeicherter Energie ist beim Drohnensystem prinzipiell nicht möglich.

Abschließender Vergleich und Fazit: Aus der Optimierung aller 1720 Steine folgt, dass bezogen auf den Seilroboter mit einer Bauzeit von $t_S = 58,85 \text{ h}$ das Drohnensystem mit einer Bauzeit von $t_D = 83,09 \text{ h}$ circa $\Delta t = 24,4 \text{ h}$ mehr Zeit benötigt. Dies entspricht einem Wert von gut 41 %. Die meiste Zeit entfällt bei beiden Robotersystemen mit $t = 25,48 \text{ h}$ auf das Einmessen des Endeffektors während der Trajektorien 1 und 8. Dies wirkt sich vor allem bei dem Drohnensystem aufgrund des hohen Energiebedarfs sehr negativ aus. Das Drohnensystem benötigt mit $E_D = 602,15 \text{ kWh}$ mehr als 44-mal so viel Energie wie der Seilroboter mit $E_S = 13,68 \text{ kWh}$. Diese Tatsache ist vor allem auf das schlechte Verhältnis aus eingesetzter Leistung zur resultierenden Auftriebskraft zurückzuführen. In der Praxis bedeutet das für das Drohnensystem, dass circa 186 Batteriewechsel pro Drohne durchgeführt werden müssen, um die benötigte Energiemenge bereitzustellen. Unter der Annahme, dass es zwei Minuten dauert um die Batterien aller drei Drohnen auszutauschen, würde dieser Vorgang zusätzlich $t_B = 6,2 \text{ h}$ dauern. Betrachtet man die rekuperierte Energie beim Seilroboter, so ergibt sich über alle Steine eine Energiemenge von $E_{\text{Rek}} = 7,94 \text{ kWh}$. Dies entspricht einem prozentualen Wert von 36,72 %. Demnach trägt die Rekuperationsfähigkeit wesentlich zu dem geringen Energiebedarf des Seilroboters bei. Die Bereitstellung von Energie spielt beim Seilroboter keine Rolle.

Ein weiterer Nachteil für das Drohnensystem ist die deutlich komplexere Positionierung und Regelung des Systems. Während die Position des Endeffektors beim Seilroboter direkt über die Länge der Seile mit einer hohen Genauigkeit bestimmt werden kann, müssen für das Drohnensystem aufwändige Verfahren zur Positionsbestimmung verwendet werden. Denkbar sind zum Beispiel der Einsatz eines RTK-Verfahrens oder aber auch eines optischen Trackingsystems. Außerdem ist die Plattform mit nur drei Seilen bei dem Drohnensystem statisch unterbestimmt, weshalb diese durch Störeinflüsse von außen stets zu unerwünschten Bewegungen angeregt werden kann. Demgegenüber ist die Plattform beim Seilroboter mit acht Seilen sogar statisch überbestimmt. Seine Vorteile spielt das Drohnensystem jedoch da aus, wo es auf einen räumlich flexiblen Transport über größere Distanzen wie zum Beispiel für den Anwendungsfall in Abschnitt 6.4 ankommt. Hier ist der Seilroboter keine Alternative. Das Gleiche gilt auch für sehr große und/oder hohe Gebäude. Hier müssten das Gerüst des Seilroboters, die Mörtelanlage und die Umlenkrollen ständig angepasst werden. Aufgrund des beschränkten Arbeitsraums ist es für den Seilroboter sogar schon von Bedeutung, dass sich das Mauerwerk zentriert im Bauraum des Seilroboters befindet.

Abschließend kann festgehalten werden, dass sich beide Systeme für den Lasttransport eignen. Der Seilroboter ist prinzipiell in der Lage noch deutlich schwerere Lasten zu tragen. Aufgrund der großen Unterschiede in ihrer Charakteristik kommen

beide Robotersysteme für unterschiedliche Anwendungsfälle in Frage. Während sich der Seilroboter durch seine gute Positionierbarkeit und den geringen Energieverbrauch für die Bewegung sehr großer Lasten innerhalb begrenzter Arbeitsräume eignet, spielt ein Drohnensystem seine Vorteile vor allem dann aus, wenn der Transport über größere Distanzen stattfinden muss.

7 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde eine Entwicklungsumgebung entworfen, die es dem Anwender ermöglicht, ohne spezielle Vorkenntnisse die beschreibenden Differentialgleichungssysteme und Simulationsmodelle für unterschiedliche Drohnen und Drohnensysteme zu erstellen, zu simulieren und in der Praxis zu testen. Die Funktionsweise der Entwicklungsumgebung wurde anhand zahlreicher Beispiele demonstriert. Dieses Kapitel fasst die notwendigen Schritte zusammen, die im Rahmen dieser Arbeit zur Realisierung der Entwicklungsumgebung durchgeführt wurden, und ordnet sie in den wissenschaftlichen Kontext ein. Außerdem wird ein Ausblick auf mögliche weiterführende Arbeiten gegeben.

7.1 Zusammenfassung und wissenschaftlicher Beitrag der Arbeit

Der Entwicklungsaufwand für Drohnen und Drohnensysteme ist aufgrund ihrer Komplexität sehr groß. Soll für eine Anwendung die bestmögliche Drohnenkonfiguration gefunden werden, müssen unter Umständen zahlreiche Systeme miteinander verglichen werden. Dieses Vorhaben ist ohne eine systematische Vorgehensweise nur mit einem sehr großen zeitlichen Aufwand möglich. In der vorliegenden Arbeit wurde aus diesem Grund eine Entwicklungsumgebung präsentiert, welche die Komplexität der Untersuchung einzelner Multikopter und Multikoptersysteme reduziert und in gewissen Grenzen standardisiert. Um dies zu erreichen, wird der Benutzer bei der Entwicklung auf mehreren Ebenen unterstützt. Die praktische Umsetzung der Entwicklungsumgebung wurde ausführlich vorgestellt.

Den Kern der Entwicklungsumgebung bildet ein Gleichungssystem, welches auf unterschiedliche Drohnen und Drohnensysteme angewendet werden kann. Das Gleichungssystem ermöglicht die Betrachtung von Multikoptermodellen mit starren und schwenkbaren Motoreinheiten (Herrmann u. a., 2018). Der Ansatz basiert auf der Tatsache, dass sich die einzelnen Ausleger eines Multikopters nicht direkt gegenseitig beeinflussen. Die notwendigen Schritte zur Herleitung des allgemeingültigen Gleichungssystems wurden im Detail dargestellt. Mögliche, aber nicht zwingend erforderliche Vereinfachungen des Gleichungssystems wurden aufgezeigt. In der Realität auftretende komplexe aerodynamische Effekte wurden in dieser Arbeit nur mit einem einfachen Modell berücksichtigt oder zum Teil ganz vernachlässigt.

Sie können ohne Weiteres nachträglich ergänzt werden. An entsprechender Stelle wurde darauf hingewiesen. Im Anschluss an die Entwicklung des Gleichungssystems für einen einzelnen Multikopter, wurde das Gleichungssystem für den gemeinsamen Transport einer über Seile mit Drohnen verbundenen Last erweitert, da derartige Szenarien eine zunehmende Rolle in der Wissenschaft spielen. Um die Modelle interdisziplinär anwenden zu können, sind die Gleichungen so umgesetzt, dass der Aufbau der Simulationsmodelle einfach, schnell und ohne Fachkenntnisse der Modellbildung erfolgen kann. Die dafür notwendigen Funktionen können zum Beispiel in einer Bibliothek zusammengefasst werden. Basierend auf den Gleichungssystemen einer einzelnen Drohne lassen sich auch die Gleichungen für den Transport einer Nutzlast mit mehreren Drohnen in wenigen Schritten implementieren. Aus der Verwendung des Gleichungssystems ergeben sich für den Anwender mehrere Vorteile. Diese sind:

- die Simulation und Untersuchung unterschiedlicher Multikopter und Multikoptersysteme,
- die Möglichkeit zur Berücksichtigung aller physikalischen Effekte,
- die Simulation und Untersuchung unterschiedlicher Lagerungen,
- die Verwendung der Bibliothek ohne Kenntnisse im Bereich der Mehrkörpersimulation,
- die Vergleichbarkeit verschiedener Modelle aufgrund gleicher Modellgüte, sowie
- ein schneller und einfacher Aufbau der Simulationsmodelle.

Ein besonderes Augenmerk wurde bei der Modellbildung auf die Antriebseinheiten gelegt, da deren dynamisches Verhalten bisher oft nur stark vereinfacht und in vielen Fällen unzureichend berücksichtigt wurde. Konkret werden die Antriebseinheiten häufig über eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung beschrieben. Zu Beginn der Arbeit vorgestellte Messergebnisse zeigen jedoch ein vom Arbeitspunkt abhängiges, stark nichtlineares Verhalten. Deshalb war ein weiteres Ziel dieser Arbeit, einen Drehzahlregler für die Antriebseinheit zu entwerfen, der es ermöglicht, der Motoreinheit ein definiertes dynamisches Verhalten unabhängig vom Drehzahlbereich aufzuprägen. Um dies zu erreichen, wurde eine eigens entwickelte Leistungselektronik und deren Softwarearchitektur vorgestellt. Der darauf implementierte PI-Regler ermöglicht in Kombination mit einer flachheitsbasierten Vorsteuerung das gewünschte deterministische Verhalten. Die für die Drehzahlregelung notwendige aktuelle Drehzahl wurde basierend auf einem Positionssensor mit einem PI-Beobachter ermittelt. Da das verwendete Regelungskonzept modellbasiert ist, werden die beschreibenden Parameter der elektrischen Maschine benötigt. Die hierfür notwendige Parameteridentifikation wurde im Detail dargestellt. Zentral war dabei die Aufnahme von den Drehzahlkennfeldern der Motor-Propeller-Kombination, welche jeweils aus 828 einzelnen Messpunkten bestehen. Um die Erfassung der Kennlinienfelder zu beschleunigen, wurden die einzelnen Messpunkte

mit Hilfe der vorgestellten Entwicklungsumgebung automatisch angefahren. Ein Vergleich mit am Markt verfügbaren Reglern zeigte die Vorteile des vorgestellten Drehzahlregelkonzepts auf. Dieses erwies sich als besonders dynamisch und energiesparend. Außerdem konnte gezeigt werden, dass unter Einsatz des vorgestellten Regelungskonzepts und der richtigen Wahl der Zeitkonstanten die Antriebseinheit ein proportionales Übertragungsverhalten mit einer Verzögerung erster Ordnung aufweist (Herrmann u. a., 2019). Die so entworfene Antriebseinheit, bestehend aus Motorregler, Motor und Propeller, funktioniert als eigenständiges System und wird im Regelkreis als innere Kaskade betrieben. Die Ausführungen in dieser Arbeit bezogen sich dabei ausschließlich auf permanenterregte Synchronmaschinen. Das vorgestellte Konzept lässt sich prinzipiell auch auf bürstenlose Gleichstrommaschinen übertragen.

Das allgemeingültige Gleichungssystem ist der zentrale Baustein der ausführlich vorgestellten Entwicklungsumgebung. Weitere wesentliche Bestandteile sind eine virtuelle Realität, die Möglichkeit für den Einsatz unterschiedlicher HMI-Geräte sowie die Einbindung von Prüfständen und Multikoptern. Die Kommunikation der Teilnehmer untereinander erfolgt über LAN und WLAN und bietet damit ausreichende Kapazitäten für einen schnellen und sicheren Austausch größerer Datenmengen. Zudem ist die Vernetzung der einzelnen Komponenten sehr einfach durchführbar. Als zentrales Programm zur Steuerung der Echtzeitumgebung wird Simulink Real-TimeTM verwendet, sodass die Benutzerfreundlichkeit gewährleistet ist. Zusammenfassend bietet die Entwicklungsumgebung neben der Modularität folgende Vorteile:

- Einbindung der HMI-Eingabegeräte über Ethernet. Dies ermöglicht geringe Latenzzeiten und eine einfache Einbindung. Auch primär nicht LAN-fähige Geräte lassen sich auf einfache Weise einbinden.
- Entwurf der Modelle auf Basis der entstandenen Programmbibliothek.
- Übertragung der entwickelten Lageregelung und der Algorithmen zur Sensordatenverarbeitung per C-Code-Generierung auf die Hardware.
- Durchführung von Echtzeit- und HiL-Simulationen.
- Onlinevisualisierung von Sensordaten. Dies ist besonders vorteilhaft bei der Einstellung der Sensorik und dem Konzept für die Sensordatenfusion.
- Parameterveränderungen während der Laufzeit.
- Unabhängige Entwicklung einzelner Elemente der Entwicklungsumgebung.
- Schnelle Regelung mit einer garantierten Abtastzeit von $T_A \leq 1$ ms.

Der generierte C-Code läuft auf einer geeigneten Zielhardware. Die Verknüpfung zur Mikrocontrollerebene wird über Ethernet realisiert, indem auf einem LAN-fähigen Mikrocontroller von STM ein RAW-Ethernet-Stack implementiert wurde.

Der Einsatz der mathematischen Modelle und der Entwicklungsumgebung wurde anhand einiger Beispiele aufgezeigt. Um einen Vergleich überhaupt zu ermöglichen, wurde für alle Modelle das Regelungskonzept der exakten Linearisierung auf Geschwindigkeitsebene verwendet und dieses um eine Lageregelung ergänzt. Der praktische Einsatz der Entwicklungsumgebung wurde zunächst anhand des vorgestellten Einarmsystems demonstriert. Die auf den Grundlagen der Modelle berechneten Stellgrößenverläufe zeigten eine sehr gute Übereinstimmung zu den in der Praxis gemessenen Stellgrößen auf. Außerdem wurde das Verhalten eines Quadropters mit starren Antriebseinheiten auf dem Kugelgelenkprüfstand untersucht. Die Tatsache, dass die Implementierung der auf Grundlage der mathematischen Modelle entworfenen Regler in beiden Fällen ohne weitere Anpassungen auf den jeweiligen Zielsystemen zu guten Regelungsergebnissen führte, wurde als Validierung für das zugrunde liegende Differentialgleichungssystem herangezogen. Weitere Multikoptermodelle konnten auf Grundlage der Multikopterbibliothek innerhalb weniger Stunden aufgebaut und in der Simulation getestet werden. Die unterschiedlichen Modelle wurden anhand einer Bahnkurve im Raum und einer Rotation auf der Stelle miteinander verglichen.

Der Einsatz von Robotersystemen für den Transport von schweren Lasten rückt zunehmend in den Fokus von Forschung und Industrie. Die zunehmende Nutzlast von Drohnen ermöglicht beispielsweise auch ihren Einsatz auf einer Baustelle. Als ein praktischer Anwendungsfall wurde in dieser Arbeit das automatische Mauern eines Gebäudes für zwei unterschiedliche Drohnensysteme betrachtet. Diese Transportaufgabe wurde für die Verwendung von einer und drei Drohnen untersucht und in einem abschließenden Vergleich mit einem Seilroboter verglichen. Die Untersuchungen basieren auf einem objektorientiert programmierten Framework zur modellbasierten dynamischen Bahnplanung. Der Hauptvorteil des objektorientierten Ansatzes ist die einfache Anpassung des Frameworks an verschiedene Szenarien, neue Roboter oder zu berücksichtigende Kostenfunktionen. Insgesamt hat sich das Softwaretool als effizientes Werkzeug für die Untersuchung von Robotern erwiesen, die eine gemeinsame Last über Seile transportieren.

Das Optimierungsergebnis hängt stark von der Definition der Kostenfunktionen und den Straftermen ab. Während die Strafterme sicherstellen, dass physikalische Grenzen eingehalten und Kollisionen vermieden werden, wird die Qualität einer straffreien Trajektorie durch einen skalaren Wert der Kostenfunktion bewertet. Für die Berücksichtigung der physikalischen Grenzen wie Seilkräfte, Motorgrenzen oder Energieverbrauch wurde das inverse Modell des jeweiligen Robotersystems detailliert abgeleitet. Zusätzlich wurde die Modellierung für Seil-Seil-Kollisionen sowie Seil-Hindernis-Kollisionen und Roboter-Hindernis-Kollisionen vorgestellt. Die Optimierung eines ersten Szenarios für den Transport mit einer und drei Drohnen demonstrierte die volle Funktionalität des Optimierers für den Transport einer Nutzlast in einer komplexen Umgebung. Die resultierenden optimierten Trajektorien wurden abschließend mittels des komplexen Simulationsmodells auf Gültigkeit überprüft. Dies führte in beiden Anwendungsszenarien zu einem positiven Ergebnis.

Abschließend wurde in einem zweiten Szenario das Errichten des ersten Stockwerks eines Gebäudes sowohl für einen Seilroboter als auch für ein Drohnensystem mit drei Drohnen betrachtet, indem die Trajektorien aller 1720 Mauersteine optimiert wurden. Das Ergebnis zeigt zum einen, dass beide Robotersysteme in der Lage sind, schwere Lasten von mindestens 100 kg zu transportieren.¹ Zum anderen wurden aber auch große Unterschiede in ihren Eigenschaften deutlich. Vorteile für den Seilroboter zeigten sich hinsichtlich der benötigten Zeit und der aufgebrauchten Gesamtenergie. Das Drohnensystem hat hingegen bei seiner Flexibilität und dem Transport einer Last über große Distanzen deutliche Vorteile. Letztendlich ergeben sich daraus unterschiedliche Einsatzgebiete für die beiden Systeme. (Herrmann u. a., 2022)

Abschließend kann festgehalten werden, dass die Verwendung der Entwicklungsumgebung in allen betrachteten Fällen dazu beigetragen hat, dass in kurzer Zeit zufriedenstellende Ergebnisse erhalten wurden. Dabei war eine deutliche Erleichterung der Entwicklungsarbeit spürbar. Der wesentliche Vorteil bei der Implementierung der einzelnen Anwendungsfälle war, dass die Umsetzung immer dem gleichen Muster folgte. Ist das Prinzip der Modellierung einmal verstanden, können ohne Weiteres Simulationen durchgeführt werden. Die Anwendung der Entwicklungsumgebung in Studien- und Abschlussarbeiten hat gezeigt, dass die Methodik den Anwendern schnell vermittelt werden konnte. Hierin ist der größte Vorteil des vorgestellten Konzepts gegenüber der herkömmlichen Herangehensweise zu sehen. Außerdem kann der Anwender sich von Beginn an um die Bearbeitung weiterführender Themen kümmern und seine Ergebnisse trotzdem auf komplexe Simulationsmodelle stützen. Hierzu zählen zum Beispielen Aufgaben wie die Optimierung der Regelparameter oder die Einstellung der Sensorik. Dies erlaubt es auch, mehrere Drohnen untereinander zu vergleichen, da der eigentliche Implementierungsaufwand stark reduziert werden konnte. Bezüglich der Hardware erwies sich die Aufteilung der Software auf unterschiedliche, über Ethernet verbundene Hardwarekomponenten als ein wichtiger Schritt. Dadurch konnte die hohe Benutzerfreundlichkeit von MATLAB® und Simulink® mit den wichtigen Eigenschaften eines Mikrocontrollers zur Verarbeitung von Sensordaten kombiniert werden, ohne Kompatibilitäts- oder Latenzprobleme hinnehmen zu müssen. Außerdem steht der volle Leistungsumfang von MATLAB® und Simulink® weiterhin zur Verfügung. Diese Tatsachen stellen ein wichtiges Unterscheidungsmerkmal zu bisherigen Arbeiten dar. Als ein weiterer sehr wichtiger und zentraler Baustein hat sich der Einsatz der virtuellen Realität erwiesen. Diese erleichtert zum Beispiel die Interpretation und Validierung der Simulationsergebnisse deutlich. Weitere Vorteile einer virtuellen Realität zeigten sich darüber hinaus bei der Einstellung der Sensorik. Hierzu wurden die Modelle der virtuellen Realität mit den Sensorwerten gekoppelt. Dadurch konnte zum Beispiel der Einfluss der rotierenden Propeller auf die Sensordaten direkt und in Echtzeit visualisiert werden.

1 Der Seilroboter ist in der Lage, weitaus größere Lasten zu transportieren

7.2 Zukünftige Arbeiten

Die Anwendung der Entwicklungsumgebung bei der Herleitung der in dieser Arbeit präsentierten Modelle hat bereits deren Vorzüge aufgezeigt. Trotzdem ergibt sich viel Raum für Verbesserungen sowie zukünftige Entwicklungen. Die entstandenen Mehrkörpermodelle müssen um die in dieser Arbeit bewusst vernachlässigten aerodynamischen Effekte ergänzt werden. Außerdem wurde festgestellt, dass in der Praxis die drehenden Rotoren einen erheblichen Einfluss auf die Regelgüte haben, da mit zunehmender Drehzahl sich die Vibrationen in den Sensorwerten bemerkbar machen. Daher wäre es vorteilhaft, wenn dieses Verhalten der Sensorik zukünftig in der Simulation abgebildet wird. Denkbar wäre es auch, eine Rückkopplung der virtuellen Realität in das Simulationsmodell einzufügen, sodass das Modell von der virtuellen Realität beeinflusst wird. Auf diese Weise wäre dann beispielsweise auch das Verhalten der Drohne beim Überfliegen eines Gebäudes realitätsnah abbildbar, wenn beispielsweise die Höhenregelung auf einer Entfernungsmessung beruht. Obwohl durch die Implementierung von Bibliotheksfunktionen der Aufwand und die Komplexität sowohl für den Aufbau von numerischen Simulationsmodellen als auch die Berechnung von symbolischen Gleichungen für unterschiedliche Multikoptermodelle deutlich reduziert werden konnte, würde die Implementierung grafischer Benutzeroberflächen zur Parametrierung der Modelle die Anwenderfreundlichkeit weiter erhöhen. Letztendlich müssen weitere praktische Versuche die Richtigkeit der Modelle bestätigen und zeigen, dass auch Modelle mit schwenkbaren Motoreinheiten korrekt abgebildet werden. In diesem Zusammenhang muss außerdem noch der Nachweis erbracht werden, dass auch Servomotoren derart geregelt werden können, dass sie analog zu den Antriebsmotoren ein deterministisches Verhalten aufweisen.

Für die Verwendung von Drohnensystemen müssen zukünftig geeignete Regelkreise entworfen werden, die beispielsweise die auftretenden Störungen sicher und schnell ausregeln können. Hierbei ist im Besonderen zu klären, welche zusätzlichen Messgrößen für eine erfolgreiche Regelung messtechnisch erfasst werden müssen, falls die Messung sämtlicher Teilnehmer über RTK sich als nicht ausreichend erweisen würde. Ist dies abgeschlossen, kann mit dem Aufbau der Hardware für ein Drohnensystem begonnen werden. In einem weiteren Schritt müssen dann die Trajektorienfolgeregelungen in der Praxis getestet und die Modelle validiert werden. Ein Ergebnis der Optimierung des Bahnplaners war, dass die Einmessvorgänge vor dem Greifen und Absetzen der Steine sehr viel Zeit und damit im Falle des Drohnensystems auch sehr viel Energie in Anspruch nehmen. Um die gesamte Bauzeit zu beschleunigen, wird sich eine zukünftige Untersuchung mit der Verbesserung des Positionierungsprozesses des Endeffektors beim Greifen oder Setzen der Mauersteine beschäftigen. Dies soll durch eine Optimierung der Messroutine der Lasersensoren erreicht werden, um die Erkennung der Lage der Mauersteine sowie die Erkennung der errichteten Gebäudestruktur zu beschleunigen.

Bei der Hardware kann der derzeitige Prototyp vor allem im Bereich des Einplatinencomputers und der Sensorik verbessert werden. An oberster Stelle steht dabei

das proprietäre Entwicklungsboard STM32F429 NUCLEO gegen eine selbst entwickelte Hardware auszutauschen. Interessant wäre hier der Einsatz eines System on chip (SoC), welches einen Mikroprozessor und einen Mikrocontroller kombiniert. Idealerweise laufen dann auf einer Hardware sowohl der per C-Code-Generierung erzeugte Code für die Regelung der Drohnen als auch der Code für die Sensordatenerfassung und Ansteuerung der Motoren. Außerdem ist die verwendete Sensorik besser vor äußeren Einflüssen zu schützen. Hierzu zählen vor allem der Schutz des Barometers vor den durch die Propellerverwirbelungen ausgelösten Luftdruckschwankungen sowie die Dämpfung beziehungsweise Entkopplung der Beschleunigungssensorik von Vibrationen im Gestell der Drohne. Eine komplette Neuentwicklung ist dafür nicht unbedingt erforderlich. Denkbar ist auch eine Weiterentwicklung vorhandener Open-Source-Hardware, um die erforderliche Ethernet-Schnittstelle. Für alle vorgestellten Szenarien spielt die absolute Positionierung der Drohnen eine entscheidende Rolle. Eine genaue messtechnische Erfassung der Drohnenposition ist deswegen elementar. Im Außenbereich eignet sich unter Umständen die Verwendung einer Echtzeitkinematik (engl.: Real-time kinematic, kurz: RTK). Hierfür müssen die notwendigen Schritte implementiert und die erreichbare Genauigkeit beurteilt werden.

Literaturverzeichnis

- Adamy, J. (2018). *Nichtlineare Systeme und Regelungen*. 3., aktualisierte Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg und Springer Vieweg. ISBN: 978-3-662-55684-9.
- Ahmad, M. (2010). *High Performance AC Drives*. Bd. 1. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. ISBN: 978-3-642-13149-3.
- Alaimo, A., Artale, V., Milazzo, C., Ricciardello, A. und Trefiletti, L. (2013). „Mathematical modeling and control of a hexacopter“. In: *International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, S. 1043–1050. DOI: 10.1109/ICUAS.2013.6564793.
- Alothman, Y. und Gu, D. (2018). „Using Constrained Model Predictive Control to Control Two Quadrotors Transporting a Cable-Suspended Payload“. In: *13th World Congress on Intelligent Control and Automation (WCICA)*, S. 228–233. DOI: 10.1109/WCICA.2018.8630488.
- Apeland, J., Pavlou, D. und Hemmingsen, T. (2020). „State-of-Technology and Barriers for Adoption of Fuel Cell Powered Multirotor Drones“. In: *International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*. IEEE, S. 1359–1367. ISBN: 978-1-7281-4278-4. DOI: 10.1109/ICUAS48674.2020.9213971.
- Ashour, R., Taha, T., Mohamed, F., Hableel, E., Kheil, Y. A., Elsalamouny, M., Kadadha, M., Rangan, K., Dias, J., Seneviratne, L. und Cai, G. (2016). „Site inspection drone: A solution for inspecting and regulating construction sites“. In: *IEEE 59th International Midwest Symposium on Circuits and Systems (MWSCAS)*. IEEE, S. 1–4. ISBN: 978-1-5090-0916-9. DOI: 10.1109/MWSCAS.2016.7870116.
- Augugliaro, F., Lupashin, S., Hamer, M., Male, C., Hehn, M., Mueller, M., Willmann, J. S., Gramazio, F., Kohler, M. und D’Andrea, R. (2014). „The Flight Assembled Architecture installation: Cooperative construction with flying ma-

- chines“. In: *IEEE Control Systems* 34.4, S. 46–64. ISSN: 1066-033X. DOI: 10.1109/MCS.2014.2320359.
- Bagura, M., Melega, M., Naldi, R. und Mahony, R. (2016). *Aerodynamics of Rotor Blades for Quadrotors*. Ithaca, New York: arXiv. DOI: 10.48550/ARXIV.1601.00733.
- Bangura, M. und Mahony, R. (2012). „Nonlinear Dynamic Modeling for High Performance Control of a Quadrotor“. In: *Proceedings of Australasian Conference on Robotics and Automation*.
- Baumgarte, J. (1972). „Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems“. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1.1, S. 1–16. ISSN: 00457825. DOI: 10.1016/0045-7825(72)90018-7.
- Bertotti, G. (1988). „General properties of power losses in soft ferromagnetic materials“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 24.1, S. 621–630. DOI: 10.1109/20.43994.
- Binder, A. (2017). *Elektrische Maschinen und Antriebe*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. ISBN: 978-3-662-53240-9. DOI: 10.1007/978-3-662-53241-6.
- Blanchet, L. und Merlet, J.-P. (2014). „Interference detection for cable-driven parallel robots (CDPRs)“. In: *IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*, S. 1413–1418. DOI: 10.1109/AIM.2014.6878280.
- Borrmann, A., König, M., Koch, C. und Beetz, J. (2015). *Building Information Modeling*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden. ISBN: 978-3-658-05605-6.
- Bouabdallah, S., Murrieri, P. und Siegwart, R. (2005). „Towards Autonomous Indoor Micro VTOL“. In: *Autonomous Robots* 18.2, S. 171–183. ISSN: 09295593. DOI: 10.1007/s10514-005-0724-z.
- Brescianini, D. und D’Andrea, R. (2016). „Design, modeling and control of an omni-directional aerial vehicle“. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, S. 3261–3266. DOI: 10.1109/ICRA.2016.7487497.

- Bright, L. Z., Handley, M., Chien, I., Curi, S., Brownworth, L. A., D'hers, S., Bernier, U. R., Gurman, P. und Elman, N. M. (2016). „Analytical models integrated with satellite images for optimized pest management“. In: *Precision Agriculture* 17, S. 628–636. ISSN: 1385-2256. DOI: 10.1007/s11119-016-9434-0.
- Bröcker, M. und Herrmann, L. (2017). „Flatness based control and tracking control based on nonlinearity measures“. In: *IFAC-PapersOnLine* 50.1, S. 8250–8255. ISSN: 24058963. DOI: 10.1016/j.ifacol.2017.08.1394.
- Bruckmann, T., Mattern, H., Spengler, A., Reichert, C., Malkwitz, A. und König, M. (2016). „Automated Construction of Masonry Buildings using Cable-Driven Parallel Robots“. In: *Proceedings of the 33rd ISARC*. DOI: 10.22260/ISARC2016/0041.
- Bruckmann, T. und Boumann, R. (Okt. 2021). „Simulation and optimization of automated masonry construction using cable robots“. In: *Advanced Engineering Informatics* 50, S. 101388. ISSN: 1474-0346. DOI: 10.1016/j.aei.2021.101388.
- Bruckmann, T., Reichert, C. und Ji, H. (2019). „Energy Consumption Reduction of a Cable-Driven Storage and Retrieval System“. In: *Advances in Robot Kinematics 2018*, S. 383–391. DOI: 10.1007/978-3-319-93188-3_44.
- Bruckmann, T., Spengler, A. J., Karl, C. K., Reichert, C. und König, M. (2018). „Process Analysis of Cable-Driven Parallel Robots for Automated Construction“. In: *Mechatronics for Cultural Heritage and Civil Engineering*, S. 63–83. DOI: 10.1007/978-3-319-68646-2_3.
- Corradini, M. L., Ippoliti, G., Longhi, S. und Orlando, G. (2012). „A Quasi-Sliding Mode Approach for Robust Control and Speed Estimation of PM Synchronous Motors“. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 59.2, S. 1096–1104. ISSN: 0278-0046. DOI: 10.1109/TIE.2011.2158035.
- Cruz, P. und Fierro, R. (2014). „Autonomous lift of a cable-suspended load by an unmanned aerial robot“. In: *IEEE Conference on Control Applications (CCA)*. IEEE, S. 802–807. ISBN: 978-1-4799-7409-2. DOI: 10.1109/CCA.2014.6981439.
- Cruz, P. J., Oishi, M. und Fierro, R. (2015). „Lift of a cable-suspended load by a quadrotor: A hybrid system approach“. In: *American Control Conference*

- (ACC). IEEE, S. 1887–1892. ISBN: 978-1-4799-8684-2. DOI: 10.1109/ACC.2015.7171008.
- Dai, S., Lee, T. und Bernstein, D. S. (2015). „Adaptive control of a quadrotor UAV transporting a cable-suspended load with unknown mass“. In: *53rd IEEE Conference on Decision and Control*, S. 6149–6154. DOI: 10.1109/CDC.2014.7040352.
- do Nascimento, D. A., Rufino, C. Z., Oliveira, S. C. und Feitosa, M. A. F. (2012). „Modeling and Design of an Autonomous Unmanned Aerial Vehicle Quadrotor Prototype for Applications in Swarm of Robots“. In: *Brazilian Robotics Symposium and Latin American Robotics Symposium*, S. 325–328. DOI: 10.1109/SBR-LARS.2012.60.
- Ebeid, E., Skriver, M. und Jin, J. (2017). „A Survey on Open-Source Flight Control Platforms of Unmanned Aerial Vehicle“. In: *2017 Euromicro Conference on Digital System Design (DSD)*. IEEE, S. 396–402. ISBN: 978-1-5386-2146-2. DOI: 10.1109/DSD.2017.30.
- Ericson, C. (2005). *Real-time collision detection*. The Morgan Kaufmann Series in Interactive 3D Technology. San Francisco, CA, USA: Elsevier Morgan Kaufmann. ISBN: 1-55860-732-3.
- Escareno, J., Salazar-cruz, S. und Lozano, R. (2006). „Embedded control of a four-rotor UAV“. In: *American Control Conference*. IEEE, 6 pp. ISBN: 1-4244-0209-3. DOI: 10.1109/ACC.2006.1657333.
- Escareno, J., Sanchez, A., Garcia, O. und Lozano, R. (2008). „Triple tilting rotor mini-UAV: Modeling and embedded control of the attitude“. In: *American Control Conference*, S. 3476–3481. DOI: 10.1109/ACC.2008.4587031.
- Foehn, P., Falanga, D., Kuppuswamy, N., Tedrake, R. und Scaramuzza, D. (2017). „Fast Trajectory Optimization for Agile Quadrotor Maneuvers with a Cable-Suspended Payload“. In: *Proceedings of the Robotics: Science and Systems XIII*. DOI: 10.15607/RSS.2017.XIII.030.
- Formentin, S. und Lovera, M. (2011). „Flatness-based control of a quadrotor helicopter via feedforward linearization“. In: *50th IEEE Conference on Decision and*

- Control and European Control Conference*, S. 6171–6176. DOI: 10.1109/CDC.2011.6160828.
- Gassner, M., Cieslewski, T. und Scaramuzza, D. (2017). „Dynamic collaboration without communication: Vision-based cable-suspended load transport with two quadrotors“. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. IEEE, S. 5196–5202. ISBN: 978-1-5090-4633-1. DOI: 10.1109/ICRA.2017.7989609.
- Gemaßmer, T. (2015). *Effiziente und dynamische Drehmomenteinprägung in hoch ausgenutzten Synchronmaschinen mit eingebetteten Magneten*. Karlsruhe, Germany: Technische Informationsbibliothek u. Universitätsbibliothek und KIT Scientific Publishing. ISBN: 9783731503668. DOI: 10.5445/KSP/1000046666.
- González, I., Salazar, S., Torres, J., Lozano, R. und Romero, H. (2013). „Real-Time Attitude Stabilization of a Mini-UAV Quad-rotor Using Motor Speed Feedback“. In: *Journal of Intelligent & Robotic Systems* 70.1-4, S. 93–106. ISSN: 0921-0296. DOI: 10.1007/s10846-012-9713-6.
- Goodarzi, F. A., Lee, D. und Lee, T. (2015). „Geometric control of a quadrotor UAV transporting a payload connected via flexible cable“. In: *International Journal of Control, Automation And Systems* 13.6, S. 1486–1498. ISSN: 15986446. DOI: 10.1007/s12555-014-0304-0.
- Guerrero, M. E., Mercado, D. A., Lozano, R. und Garcia, C. D. (2015). „Passivity based control for a quadrotor UAV transporting a cable-suspended payload with minimum swing“. In: *54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, S. 6718–6723. DOI: 10.1109/CDC.2015.7403277.
- Guerrero-Sánchez, M. E., Mercado-Ravell, D. A., Lozano, R. und García-Beltrán, C. D. (2017). „Swing-attenuation for a quadrotor transporting a cable-suspended payload“. In: *ISA transactions* 68, S. 433–449. DOI: 10.1016/j.isatra.2017.01.027.
- Guo, M., Gu, D., Zha, W., Zhu, X. und Su, Y. (2020). „Controlling a Quadrotor Carrying a Cable-Suspended Load to Pass Through a Window“. In: *Journal of Intelligent & Robotic Systems* 98.2, S. 387–401. ISSN: 0921-0296. DOI: 10.1007/s10846-019-01038-6.

- Gurdan, D., Stumpf, J., Achtelik, M., Doth, K.-M., Hirzinger, G. und Rus, D. (2007). „Energy-efficient Autonomous Four-rotor Flying Robot Controlled at 1 kHz“. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. IEEE, S. 361–366. ISBN: 1-4244-0602-1. DOI: 10.1109/ROBOT.2007.363813.
- Hamel, T., Mahony, R., Lozano, R., Ostrowski, J., Hamel, T., Mahony, R., Lozano, R. und Ostrowski, J. (2002). „Dynamic Modelling and Configuration Stabilization for an X4-Flyer“. In: *IFAC Proceedings Volumes* 35.1, S. 217–222. DOI: 10.3182/20020721-6-ES-1901.00848.
- Hashemi, D. und Heidari, H. (2020). „Trajectory Planning of Quadrotor UAV with Maximum Payload and Minimum Oscillation of Suspended Load Using Optimal Control“. In: *Journal of Intelligent & Robotic Systems* 100.3-4, S. 1369–1381. ISSN: 0921-0296. DOI: 10.1007/s10846-020-01166-4.
- Hehenberger, P. (2011). *Computerunterstützte Fertigung: Eine kompakte Einführung*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg. ISBN: 978-3-642-13475-3.
- Heidel, R., Lemmen, P., Boumann, R. und Bruckmann, T. (2022). „Auslegung und Inbetriebnahme eines Seilroboters zum automatisierten Mauern von Gebäudewänden“. In: *Fachtagung VDI Mechatronik 2022*. Darmstadt, Germany, S. 126–132. DOI: <https://doi.org/10.26083/tuprints-00020963>.
- Herrmann, L., Boumann, R., Lehmann, M., Müller, S. und Bruckmann, T. (2022). „Simulation-Based Comparison of Novel Automated Construction Systems“. In: *MDPI Robotics* 11.6. DOI: 10.3390/robotics11060119.
- Herrmann, L. und Bröcker, M. (2015). „Flatness based control of a ball in tube system“. In: *IFAC-PapersOnLine* 48.1, S. 790–795. ISSN: 24058963. DOI: 10.1016/j.ifacol.2015.05.036.
- Herrmann, L., Bruckmann, T., Bröcker, M. und Schramm, D. (2019). „Development of a Dynamic Electronic Speed Controller for Multicopters“. In: *18th European Control Conference (ECC)*. IEEE, S. 4010–4015. ISBN: 978-3-907144-00-8. DOI: 10.23919/ECC.2019.8795711.

- Herrmann, L., Bruckmann, T., Schramm, D. und Bröcker, M. (2018). „Mathematische Betrachtung und Simulation von Multicoptern“. In: *4th IFToMM D-A-CH Conference 2018*. DOI: 10.17185/dupublico/45324.
- Hoffmann, G., Huang, H., Waslander, S. und Tomlin, C. (2009). „Quadrotor Helicopter Flight Dynamics and Control: Theory and Experiment“. In: *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit*. DOI: 10.2514/6.2007-6461.
- Huang, H., Hoffmann, G. M., Waslander, S. L. und Tomlin, C. J. (2009). „Aerodynamics and control of autonomous quadrotor helicopters in aggressive maneuvering“. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, S. 3277–3282. DOI: 10.1109/ROBOT.2009.5152561.
- Jebai, A. K., Malrait, F., Martin, P. und Rouchon, P. (2012). „Sensorless position estimation of Permanent-Magnet Synchronous Motors using a nonlinear magnetic saturation model“. In: *XXth International Conference on Electrical Machines*. IEEE, S. 2245–2251. ISBN: 978-1-4673-0142-8. DOI: 10.1109/ICElMach.2012.6350194.
- Kellner, S. L. (2012). *Parameteridentifikation bei permanenterregten Synchronmaschinen*.
- Kondak, K., Bernard, M., Meyer, N. und Hommel, G. (2007). „Autonomously Flying VTOL-Robots: Modeling and Control“. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, S. 736–741. DOI: 10.1109/ROBOT.2007.363074.
- Lee, H., Kim, S., Lim, H., Kim, H. und Lee, D. (2013). „Control of an octa-copter from modeling to experiments“. In: *IEEE International Symposium on Robotics (ISR)*, S. 1–5. DOI: 10.1109/ISR.2013.6695646.
- Levine, J. (2009). *Analysis and Control of Nonlinear Systems*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. ISBN: 978-3-642-00838-2. DOI: 10.1007/978-3-642-00839-9.
- Liang, X., Fang, Y., Sun, N., Lin, H. und Zhao, X. (2021). „Adaptive Nonlinear Hierarchical Control for a Rotorcraft Transporting a Cable-Suspended Payload“. In: *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems* 51.7, S. 4171–4182. ISSN: 21682216. DOI: 10.1109/TSMC.2019.2931812.

- Lim, H., Park, J., Lee, D. und Kim, H. J. (2012). „Build Your Own Quadrotor: Open-Source Projects on Unmanned Aerial Vehicles“. In: *IEEE Robotics & Automation Magazine* 19.3, S. 33–45. DOI: 10.1109/MRA.2012.2205629.
- Lunze, J. (2016). *Regelungstechnik 2*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. ISBN: 978-3-662-52675-0.
- Lunze, P. J. (2020). *Regelungstechnik 1*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. ISBN: 978-3-662-60745-9. DOI: 10.1007/978-3-662-60746-6.
- Luo, C., Du, Z. und Yu, L. (2019). „Neural Network Control Design for an Unmanned Aerial Vehicle with a Suspended Payload“. In: *MDPI Electronics* 8.9, S. 931. DOI: 10.3390/electronics8090931.
- Lu, Z.-Y., Wu, Y. und Rui, W. (2020). „Nonlinear Motion Control for a Quadrotor Transporting a Cable-Suspended Payload“. In: *IEEE Transactions on Vehicular Technology* 69.8, S. 8192–8206. ISSN: 0018-9545. DOI: 10.1109/TVT.2020.2997733.
- Mahony, R., Kumar, V. und Corke, P. (2012). „Multirotor Aerial Vehicles: Modeling, Estimation, and Control of Quadrotor“. In: *IEEE Robotics & Automation Magazine* 19.3, S. 20–32. DOI: 10.1109/MRA.2012.2206474.
- Mahony, R. und Kumar, V. (2012). „Aerial Robotics and the Quadrotor“. In: *IEEE Robotics & Automation Magazine* 19.3, S. 19. ISSN: 10709932. DOI: 10.1109/MRA.2012.2208151.
- Manubens, M., Devaurs, D., Ros, L. und Cortés, J. (2013). „Motion Planning for 6-D Manipulation with Aerial Towed-cable Systems“. In: *Robotics: Science and Systems IX*. Robotics: Science and Systems Foundation. ISBN: 9789810739379. DOI: 10.15607/RSS.2013.IX.028.
- Masone, C., Bulthoff, H. H. und Stegagno, P. (2016). „Cooperative transportation of a payload using quadrotors: A reconfigurable cable-driven parallel robot“. In: *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. IEEE, S. 1623–1630. ISBN: 978-1-5090-3762-9. DOI: 10.1109/IROS.2016.7759262.

- Mattern, H., Bruckmann, T., Spengler, A. J. und König, M. (2016). „Simulation of Automated Construction using Wire Robots“. In: *Proceedings of the 2016 Winter Simulation Conference*. IEEE Press, S. 3302–3313.
- Merlet, J.-P. (2004). „Analysis of the Influence of Wires Interference on the Workspace of Wire Robots“. In: *On Advances in Robot Kinematics*. Hrsg. von J. Lenarčič und C. Galletti. Dordrecht: Springer Netherlands, S. 211–218. ISBN: 978-1-4020-2249-4.
- Merlet, J.-P. und Daney, D. (2006). „Legs interference checking of parallel robots over a given workspace or trajectory“. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, S. 757–762. DOI: 10.1109/ROBOT.2006.1641801.
- Michael, N., Fink, J. und Kumar, V. (2011). „Cooperative manipulation and transportation with aerial robots“. In: *Autonomous Robots* 30.1, S. 73–86. ISSN: 09295593. DOI: 10.1007/s10514-010-9205-0.
- Mohammadi, K., Sirouspour, S. und Grivani, A. (2020). „Control of Multiple Quad-Copters With a Cable-Suspended Payload Subject to Disturbances“. In: *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 25.4, S. 1709–1718. ISSN: 1083-4435. DOI: 10.1109/TMECH.2020.2995138.
- Müller, G. und Ponick, B. (2009). *Theorie elektrischer Maschinen*. 6., völlig neu bearb. Aufl. Bd. / Hrsg.: Germar Müller ; 3. Elektrische Maschinen. Weinheim: Wiley-VCH. ISBN: 978-3-527-40526-8.
- Muscio, G., Pierri, F., Trujillo, M. A., Cataldi, E., Giglio, G., Antonelli, G., Caccavale, F., Viguria, A., Chiaverini, S. und Ollero, A. (2016). „Experiments on coordinated motion of aerial robotic manipulators“. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, S. 1224–1229. DOI: 10.1109/ICRA.2016.7487252.
- Naldi, R., Gentili, L. und Marconi, L. (2010). „Modeling and control of the interaction between flying robots and the environment“. In: *IFAC Proceedings Volumes* 43.14, S. 975–980. DOI: 10.3182/20100901-3-IT-2016.00306.
- Nguyen, D. Q. und Gouttefarde, M. (2015). „On the Improvement of Cable Collision Detection Algorithms“. In: *Cable-Driven Parallel Robots*. Hrsg. von A. Pott

- und T. Bruckmann. Cham: Springer International Publishing, S. 29–40. ISBN: 978-3-319-09489-2.
- Olivares, V., Cordova, F., Sepúlveda, J. M. und Derpich, I. (2015). „Modeling Internal Logistics by Using Drones on the Stage of Assembly of Products“. In: *Procedia Computer Science* 55, S. 1240–1249. DOI: 10.1016/j.procs.2015.07.132.
- Oswald, B. R. (2020). *Berechnung von Drehstromnetzen*. 4. Auflage. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden. ISBN: 978-3-658-29506-6. DOI: 10.1007/978-3-658-29506-6.
- O’Rourke, C. J., Qasim, M. M., Overlin, M. R. und Kirtley, J. L. (2019). „A Geometric Interpretation of Reference Frames and Transformations: dq0, Clarke, and Park“. In: *IEEE Transactions on Energy Conversion* 34.4, S. 2070–2083. DOI: 10.1109/TEC.2019.2941175.
- Palunko, I., Fierro, R. und Cruz, P. (2012). „Trajectory generation for swing-free maneuvers of a quadrotor with suspended payload: A dynamic programming approach“. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. IEEE, S. 2691–2697. ISBN: 978-1-4673-1405-3. DOI: 10.1109/ICRA.2012.6225213.
- Papageorgiou, M., Leibold, M. und Buss, M. (2015). *Optimierung: Statische, dynamische, stochastische Verfahren für die Anwendung*. 4., korrigierte Auflage. Berlin und Heidelberg: Springer Vieweg. ISBN: 978-3-662-46936-1. DOI: 10.1007/978-3-662-46936-1.
- Park, S., Her, J., Kim, J. und Lee, D. (2016). „Design, modeling and control of omni-directional aerial robot“. In: *2016 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, S. 1570–1575. DOI: 10.1109/IROS.2016.7759254.
- Perreault, S., Cardou, P., Gosselin, C. M. und Otis, M. J.-D. (2010). „Geometric Determination of the Interference-Free Constant-Orientation Workspace of Parallel Cable-Driven Mechanisms“. In: *Journal of Mechanisms and Robotics* 2.3. ISSN: 1942-4302. DOI: 10.1115/1.4001780.
- Petrella, R., Tursini, M., Peretti, L. und Zigliotto, M. (2007). „Speed measurement algorithms for low-resolution incremental encoder equipped drives: a compara-

- tive analysis“. In: *International Aegean Conference on Electrical Machines and Power Electronics*, S. 780–787. DOI: 10.1109/ACEMP.2007.4510607.
- Pillay, P. und Krishnan, R. (1991). „Application characteristics of permanent magnet synchronous and brushless DC motors for servo drives“. In: *IEEE Transactions on Industry Applications* 27.5, S. 986–996. ISSN: 00939994. DOI: 10.1109/28.90357.
- Placke, T., Kloepsch, R., Dühren, S. und Winter, M. (2017). „Lithium ion, lithium metal, and alternative rechargeable battery technologies: the odyssey for high energy density“. In: *Journal of Solid State Electrochemistry* 21.7, S. 1939–1964. ISSN: 1432-8488. DOI: 10.1007/s10008-017-3610-7.
- Pott, A. (Mai 2018). *Cable-Driven Parallel Robots: Theory and Application*. ISBN: 978-3-319-76137-4. DOI: 10.1007/978-3-319-76138-1.
- Pounds, P., Mahony, R. und Corke, P. (2010). „Modelling and control of a large quadrotor robot“. In: *Control Engineering Practice* 18.7, S. 691–699. ISSN: 09670661. DOI: 10.1016/j.conengprac.2010.02.008.
- Pounds, P. E. I., Bersak, D. R. und Dollar, A. M. (2011). „Grasping from the air: Hovering capture and load stability“. In: Bd. IEEE International Conference 2011, S. 2491–2498. DOI: 10.1109/ICRA.2011.5980314.
- Qian, L. und Liu, H. H. (2020). „Path-Following Control of A Quadrotor UAV With A Cable-Suspended Payload Under Wind Disturbances“. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 67.3, S. 2021–2029. ISSN: 0278-0046. DOI: 10.1109/TIE.2019.2905811.
- Quan, Q., Dai, X. und Wang, S. (2020). *Multicopter Design and Control Practice*. Singapore: Springer Singapore. ISBN: 978-981-15-3137-8. DOI: 10.1007/978-981-15-3138-5.
- Reichert, C., Glogowski, P. und Bruckmann, T. (2015). „Dynamische Rekonfiguration eines seilbasierten Manipulators zur Verbesserung der mechanischen Steifigkeit“. In: *Fachtagung VDI Mechatronik 2015*: S. 91–96. DOI: 10.17877/DE290R-7388.
- Rizo-Maestre, C., González-Avilés, Á., Galiano-Garrigós, A., Andújar-Montoya, M. D. und Puchol-García, J. A. (2020). „UAV + BIM: Incorporation of Pho-

- togrammetric Techniques in Architectural Projects with Building Information Modeling Versus Classical Work Processes“. In: *Remote Sensing* 12.14, S. 2329. DOI: 10.3390/rs12142329.
- Roetzer, M., Vollmer, U. und Kennel, R. (2017). „Anisotropy-based position estimation for highly-saturated permanent magnet synchronous machines in slowly-sampled control systems“. In: *19th European Conference on Power Electronics and Applications*. DOI: 10.23919/EPE17ECCEurope.2017.8099092.
- Roske, T., Eden, W., Schäfers, M., Lemmen, P., Heidel, R., Boumann, R., Spengler, A. J., Bruckmann, T., Lipowsky, J. und Palzer, U. (2021). „Automated Construction of Calcium Silicate Masonry by Cable Robots“. In: *AAC worldwide* 3.1, S. 34–40. ISSN: 2569-7064.
- Rothfuss, R., Rudolph, J. und Zeitz, M. (1996). „Flatness based control of a non-linear chemical reactor model“. In: *Automatica* 32.10, S. 1433–1439. DOI: 10.1016/0005-1098(96)00090-8.
- Ryll, M. (2012). „Modeling and control of a quadrotor UAV with tilting propellers“. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, S. 4606–4613. DOI: 10.1109/ICRA.2012.6225129.
- Ryll, M. (2015). *A novel overactuated quadrotor UAV*. Stuttgart, Germany. DOI: <http://dx.doi.org/10.18419/opus-4606>.
- Ryll, M., Muscio, G., Pierri, F., Cataldi, E., Antonelli, G., Caccavale, F. und Franchi, A. (2017). „6D physical interaction with a fully actuated aerial robot“. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, S. 5190–5195. DOI: 10.1109/ICRA.2017.7989608.
- Salazar, S., Romero, H., Lonzano, R. und Garcia, P. (2008). *Modeling and Real-Time Stabilization of an Aircraft Having Eight Rotors*. Bd. 54. Journal of Intelligent and Robotic Systems, S. 455–470. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10846-008-9274-x>.
- Salazar-Cruz, S., Kendoul, F., Lozano, R. und Fantoni, I. (2006). „Real-Time Control of a Small-Scale Helicopter Having Three Rotors“. In: *2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. IEEE, S. 2924–2929. ISBN: 1-4244-0258-1. DOI: 10.1109/IRoS.2006.282145.

- Schramm, D., Hiller, M. und Bardini, R. (2013). *Modellbildung und Simulation der Dynamik von Kraftfahrzeugen*. 2., vollständig überarbeitete Auflage. Springer-Link. Berlin und Heidelberg: Springer Vieweg. ISBN: 978-3-642-33887-8.
- Schröder, D. (2015). *Elektrische Antriebe - Regelung von Antriebssystemen*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. ISBN: 978-3-642-30095-0. DOI: 10.1007/978-3-642-30096-7.
- Schröder, D. und Marquardt, R. (2019). *Leistungselektronische Schaltungen*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. ISBN: 978-3-662-55324-4. DOI: 10.1007/978-3-662-55325-1.
- Söffker, D., Yu, T. und Müller, P. C. (1995). „State estimation of dynamical systems with nonlinearities by using proportional-integral observer“. In: *International Journal of Systems Science* 26.9, S. 1571–1582. ISSN: 0020-7721.
- Sontag, E. D., Thoma, M., Isidori, A., van Schuppen, J. H. und Isidori, A. (1995). *Nonlinear Control Systems*. London: Springer London. ISBN: 978-1-4471-3909-6. DOI: 10.1007/978-1-84628-615-5.
- Sreenath, K. und Kumar, V. (2013). „Dynamics, Control and Planning for Cooperative Manipulation of Payloads Suspended by Cables from Multiple Quadrotor Robots“. In: *Robotics: Science and Systems IX*. DOI: 10.15607/RSS.2013.IX.011.
- Srikanth, M. B., Dydek, Z. T., Annaswamy, A. M. und Lavretsky, E. (2009). „A robust environment for simulation and testing of adaptive control for mini-UAVs“. In: *American Control Conference*. IEEE, S. 5398–5403. ISBN: 978-1-4244-4523-3. DOI: 10.1109/ACC.2009.5160468.
- Steinmetz, C. P. (1892). „On the Law of Hysteresis“. In: *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers* IX.1, S. 1–64. DOI: 10.1109/T-AIEE.1892.5570437.
- Suarez Fernandez, R. A., Dominguez, S. und Campoy, P. (2017). „L1 adaptive control for Wind gust rejection in quad-rotor UAV wind turbine inspection“. In: *International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*. IEEE, S. 1840–1849. ISBN: 978-1-5090-4495-5. DOI: 10.1109/ICUAS.2017.7991485.

- Templin, T. und Popielarczyk, D., Hrsg. (2020). *Proceedings of the Creative Construction e-Conference*. Budapest, Hungary: Budapest University of Technology and Economics. ISBN: 978-615-5270-61-1.
- Teodorescu, R., Liserre, M. und Rodríguez, P. (2011). *Grid converters for photovoltaic and wind power systems*. Chichester, West Sussex: Wiley IEEE. ISBN: 978-0-470-05751-3. DOI: 10.1002/9780470667057.
- The MathWorks, I. (2022a). *MATLAB Global Optimization Toolbox®: Solve linear, quadratic, conic, integer, and nonlinear optimization problems*. URL: <https://de.mathworks.com/help/gads/index.html> (besucht am 18.10.2022).
- The MathWorks, I. (2022b). *MATLAB®: The Language of Technical Computing*. URL: <https://de.mathworks.com/help/matlab> (besucht am 18.10.2022).
- The MathWorks, I. (2022c). *Simulink Coder™: Generate C and C++ code from Simulink and Stateflow models*. URL: <https://de.mathworks.com/help/rtw/> (besucht am 18.10.2022).
- The MathWorks, I. (2022d). *Simulink Real-Time™: Perform rapid control prototyping and hardware-in-the-loop testing*. URL: <https://de.mathworks.com/help/slrealtime/index.html> (besucht am 18.10.2022).
- The MathWorks, I. (2022e). *Simulink®: Simulation and Model-Based Design*. URL: <https://de.mathworks.com/help/simulink/index.html> (besucht am 18.10.2022).
- The MathWorks, Inc. (2022). *Embedded Coder®: Generate C and C++ code optimized for embedded systems*. URL: <https://de.mathworks.com/help/ecoder/index.html> (besucht am 18.10.2022).
- Tognon, M., Yuksel, B., Buondonno, G. und Franchi, A. (2017). „Dynamic decentralized control for protocentric aerial manipulators“. In: *2017 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. IEEE, S. 6375–6380. ISBN: 978-1-5090-4633-1. DOI: 10.1109/ICRA.2017.7989753.
- Vähä, P., Heikkilä, T., Kilpeläinen, P., Järviluoma, M. und Gambao, E. (2013). „Extending automation of building construction — Survey on potential sensor technologies and robotic applications: Automation in Construction, 36, 168-178“. In: DOI: 10.1016/j.autcon.2013.08.002.

-
- Vanderhorst, H. R., Suresh, S. und Suresh, R. (2019). „Systematic literature review of the current implementation of Unmanned Aerial System (UAS) in the construction industry“. In: *International Journal of Innovative Technology and Exploring Engineering* 8.11S, S. 416–428. DOI: 10.35940/ijitee.K1073.09811S19.
- Wang, Y., Cai, H., Zhang, J. und Li, X. (2020). „Disturbance Attenuation Predictive Optimal Control for Quad-Rotor Transporting Unknown Varying Payload“. In: *IEEE Access* 8, S. 44671–44686. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.2977681.
- Woernle, C. (2016). *Mehrkörpersysteme*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. ISBN: 978-3-662-46686-5. DOI: 10.1007/978-3-662-46687-2.
- Yang, S. und Xian, B. (2020). „Energy-Based Nonlinear Adaptive Control Design for the Quadrotor UAV System With a Suspended Payload“. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 67.3, S. 2054–2064. ISSN: 0278-0046. DOI: 10.1109/TIE.2019.2902834.
- Zhao, F. und van Wachem, B. G. M. (2013). „A novel Quaternion integration approach for describing the behaviour of non-spherical particles“. In: *Acta Mechanica* 224.12, S. 3091–3109. ISSN: 0001-5970. DOI: 10.1007/s00707-013-0914-2.

A Betrachtung der permanentenerregten Synchronmaschine

A.1 Motordaten

Für die Definition einer permanentenerregten Synchronmaschine (PMSM) werden gewisse Kennzahlen verwendet, welche die Maschine charakterisieren. Die wichtigsten sind die

- **Strangzahl:** Die betrachtete PMSM wird an einem dreiphasigen Wechselstrom betrieben, weshalb sie über die drei Stränge u,v,w verfügt. Die Strangzahl m bezeichnet die Anzahl der Stränge einer Maschine und der Parameter n_C die Spulenzahl.
- **Polpaarzahl:** Das Rotormagnetfeld einer elektrischen Maschine weist im Luftspalt mindestens einen Nordpol und einen Südpol und demnach eine Polpaarzahl von $p \geq 1$ auf. Bei einer PMSM definiert das Rotormagnetfeld die Polpaarzahl.
- **Polteilung:** Die Polteilung gibt den Abstand zweier benachbarter Pole im Luftspaltfeld zueinander an. Die Betrachtung erfolgt für den gemittelten Durchmesser aus Statordurchmesser d_S und Rotordurchmesser d_R . Die Polteilung berechnet sich somit über

$$\tau_P = (d_M \pi) / (2p), \quad \text{mit } d_M = (d_S + d_R) / 2. \quad (\text{A.1})$$

- **Urschema:** Das Urschema beschreibt eine komplette Abfolge der Spulenanzahl bis sich die Wicklungsanordnung wiederholt. Um einen Bezug zur Polpaarzahl herzustellen wird die Polpaarzahl je Urschema p_u definiert.
- **Spulenweite:** Der Abstand zweier Spulenseiten in Meter (z. B. U+ zu U-) wird als Spulenweite W bezeichnet und ergibt sich aus der Maschinengeometrie.
- **Magnetquerschnitt:** Die Kennzahl b_M gibt die Breite und h_M die Höhe der verwendeten Magnete an.
- **Polbedeckung:** Nicht der ganze Rotor muss mit Magneten abgedeckt sein. Das Verhältnis zwischen dem mit Magneten bedeckten Umfang und dem Gesamtumfang des Rotors bezeichnet die Polbedeckung α_e . Sie berechnet sich somit entsprechend

$$\alpha_e \approx (2pb_M) / (\pi d_M). \quad (\text{A.2})$$

Tabelle A.1: Parameter der permanenterregten Synchronmaschine
MT4008-12 KV 600

Kenngröße	d_M	b_m/h_m	α_e	m	n_C	$p p_u$	τ_p	W
Wert	39,3 mm	4,0 mm	0,7717	3	18	12 2	$1,65\pi$ mm	4,6 mm

Für die betrachtete Maschine ergeben sich die Kennwerte in Tabelle A.1.

A.2 Mathematische Beschreibung der Luftspaltfelder

Sowohl die Permanentmagnete als auch die mit Strom durchflossenen Spulen verursachen ein Magnetfeld im Luftspalt. Die mathematische Beschreibung dieser Felder gelingt mit Hilfe von Fourierreihen

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\gamma) + b_k \sin(k\gamma)). \quad (\text{A.3})$$

Für eine 2π -periodische Funktion ergeben sich die Fourier-Koeffizienten

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(k\gamma) d\gamma \quad \text{für } k \geq 0, \quad (\text{A.4})$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(k\gamma) d\gamma \quad \text{für } k \geq 1. \quad (\text{A.5})$$

Mit Hilfe der Fourier-Koeffizienten lassen sich dann die Amplitude und die Phasenlage der im Luftspaltfeld enthaltenen Frequenzanteile über

$$A_0 = \frac{a_0}{2}, \quad A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad (\text{A.6})$$

$$\varphi_k = \arcsin\left(\frac{a_k}{A_k}\right), \quad \arccos\left(\frac{b_k}{A_k}\right), \quad 0 \leq \varphi_k \leq 2\pi \quad (\text{A.7})$$

bestimmen. Besteht eine Achsensymmetrie zur y -Achse handelt es sich um eine gerade Funktion und für sämtliche Koeffizienten b_k gilt $b_k = 0$. Die Koeffizienten sind dann bereits nach der halben Periode bestimmt und die Berechnung vereinfacht sich zu

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(k\gamma) d\gamma \quad \text{für } k \geq 0. \quad (\text{A.8})$$

A.2.1 Felderregerkurve der Statorwicklung

Die durch die Durchflutung Θ_x einer einzigen Spule L eines Strangs x erzeugte magnetische Flussdichte $\mathbf{B}_{S,x}$ berechnet sich mit Hilfe des Ampèreschen Gesetzes

$$\oint_S \mathbf{B}_{S,x} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \mu_r \Theta_x, \quad \text{mit } \Theta_x = N_C i_x(t). \quad (\text{A.9})$$

Das Integral wird dabei über die geschlossene Kurve S berechnet. Dabei bezeichnet N_C die Anzahl der Spulenwindungen. Umläuft man das Integral im Uhrzeigersinn, werden die Ströme in die Ebene hinein positiv gezählt und umgekehrt. Der Zusammenhang zur magnetischen Feldstärke besteht über die idealisierte linearisierte Betrachtung

$$\mathbf{B}_{S,x} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H}_{S,x}. \quad (\text{A.10})$$

Für die Berechnung der magnetischen Feldstärke $\mathbf{H}_{S,x}$ und der magnetischen Flussdichte $\mathbf{B}_{S,x}$ sind die Verhältnisse schematisch in Abbildung A.1 dargestellt. Für jede geschlossene Kurve verläuft das Wegintegral jeweils einmal im Rotor und Stator sowie zweimal im Luftspalt. Unter Berücksichtigung von Gleichung (A.10) und der Annahme einer unendlich großen Eisenpermeabilität $\mu_{Fe} \gg \mu_{r,\delta}$ ergibt sich

$$\int_{C_1} \mathbf{H}_{S,x} \cdot d\mathbf{s} = \underbrace{\hat{H}_{R1}}_{\approx 0} \delta_{R1} + \underbrace{\hat{H}_{S1}}_{\approx 0} \delta_{S1} + \hat{H}_{L2} \delta_L + \hat{H}_{L1} \delta_L = N_C i_{S,x}, \quad (\text{A.11})$$

$$\int_{C_2} \mathbf{H}_{S,x} \cdot d\mathbf{s} = \underbrace{\hat{H}_{R2}}_{\approx 0} \delta_{R2} + \underbrace{\hat{H}_{S2}}_{\approx 0} \delta_{S2} + \hat{H}_{L3} \delta_L + \hat{H}_{L1} \delta_L = N_C i_x. \quad (\text{A.12})$$

Aus der Tatsache heraus, dass es keine magnetischen Monopole gibt, muss zusätzlich das Gaußsche Gesetz

$$\oint \hat{\mathbf{B}}_{S,x} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad (\text{A.13})$$

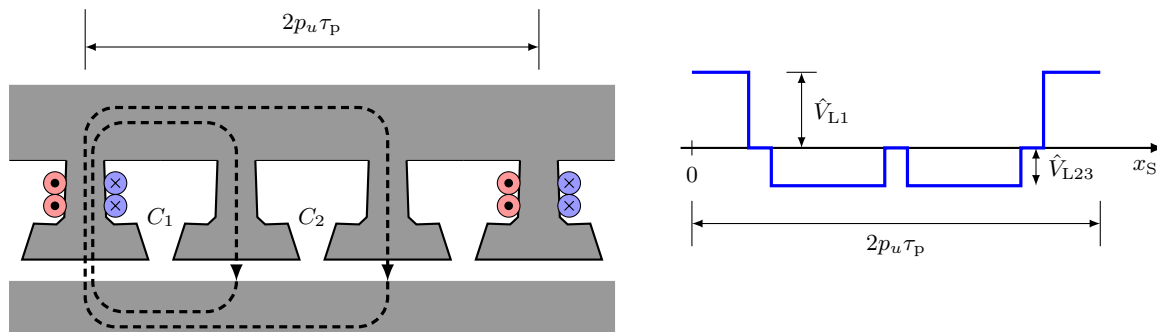


Abbildung A.1: Darstellung der Verhältnisse zwischen Stator und Rotor

stets erfüllt sein. Die Auswertung von (A.13) für das Luftspaltfeld gemäß Abbildung A.1 über den Umfang $2p_u\tau_p$ eines Urschemas und die Maschinenlänge l_M ergibt

$$l_M \int_0^{2p_u\tau_p} \hat{\mathbf{B}}_{S,x} \cdot d\mathbf{x}_S = \frac{l_M W}{\mu_0} (\hat{H}_{L1} - \hat{H}_{L2} - \hat{H}_{L3}) = 0. \quad (\text{A.14})$$

Die Lösung der Gleichungen (A.11), (A.12) und (A.14) führt auf die magnetischen Feldstärken

$$\hat{H}_{L1} = \frac{2\Theta_x}{3\delta_L}, \quad \hat{H}_{L2|3} = \frac{\Theta_x}{3\delta_L}. \quad (\text{A.15})$$

Betrachtet man statt nur eines Urschemas die komplette Maschine mit n_C Spulen so läuft das Magnetfeld einer einzelnen Spule durch $n_C - 1$ Spulen zurück zur umwickelten Spule. Es ergeben sich dann die Amplituden der Felderregerkurve zu

$$\hat{H}_{L1} = \frac{(n_C - 1)\Theta_x}{n_C\delta_L}, \quad \hat{H}_{L2\dots n_C} = \frac{\Theta_x}{n_C\delta_L}. \quad (\text{A.16})$$

Bildet man nun erneut die Summe über alle Spulen eines Strangs ergeben sich wieder die Amplituden nach (A.15), weshalb die Betrachtung eines Urschemas ausreichend ist. Über den Zusammenhang

$$\mathbf{V}_{S,x} = \delta_L \mathbf{H}_{S,x} \quad (\text{A.17})$$

ergibt sich die Amplitude der magnetischen Spannungen. Deren Verlauf wird auch als Felderregerkurve bezeichnet. Die magnetische Flussdichte, die magnetische Feldstärke sowie die Felderregerkurve besitzen wegen des konstanten Luftspalts δ_L alle den selben qualitativen Verlauf und unterscheiden sich lediglich durch Proportionalitätsfaktoren. Nachfolgend wird daher der Verlauf der Felderregerkurve betrachtet. Sämtliche weiteren Felder können daraus abgeleitet werden.

Die Beschreibung der Felderregerkurve erfolgt für ein statorfestes Koordinatensystem entlang der Umlaufkoordinate x_S des Stators. Über

$$\gamma_S = \frac{\pi}{p_u\tau_p} x_S \quad (\text{A.18})$$

ist der Zusammenhang zum Umfangswinkel des Stators γ_S gegeben. Damit ist bei $x_S = 2p_u\tau_p$ der Umfangswinkel des Stators stets 2π . Da die Felderregerkurve im Luftspalt achsensymmetrisch zur y -Achse ist, kann diese gemäß Gleichung (A.8) über die Fourierreihe

$$s\mathbf{V}_{S,x}(x_S, t) = \sum_{k_S=1}^{\infty} \hat{V}_{x,k_S} \cos\left(\frac{k_S\pi}{p_u\tau_p} x_S\right) \quad (\text{A.19})$$

beschrieben werden. Für die Berechnung der Fourier-Koeffizienten \hat{V}_{x,k_S} gilt aufgrund des Gaußschen Gesetzes (A.13) stets $\hat{V}_{x,0} = 0$.

Das Integral für die Berechnung der Fourier-Koeffizienten \hat{V}_{x,k_S} kann auf zwei Integrale für jeweils den Anteil mit positiver und negativer Amplitude der Feldwelle aufgeteilt werden. In den Zahnücken ist die Amplitude Null und liefert somit keinen Anteil. Das Integral für die positive Amplitude geht von $x_S = 0$ bis $x_S = \frac{W}{2}$. Für das Integral der negativen Amplitude wird die Breite einer Zahnücke mit

$$d_Z = \frac{2p_u\tau_P - 3W}{3} \quad (\text{A.20})$$

berechnet. Damit geht das Integral von $x_S = \left(\frac{W}{2} + d_Z\right)$ bis $x_S = \left(\frac{3W}{2} + d_Z\right)$. Die Auswertung des Fourierkoeffizienten ergibt

$$\begin{aligned} \hat{V}_{x,k_S} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \hat{V}(\gamma_S) \cos(k_S \gamma_S) d\gamma_S \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{p_u\tau_P} \frac{W}{2}} \hat{V}_1 \cos(k_S \gamma_S) d\gamma_S - \int_{\frac{2\pi}{3} - \frac{W\pi}{2p_u\tau_P}}^{\frac{2\pi}{3} + \frac{W\pi}{2p_u\tau_P}} \hat{V}_2 \cos(k_S \gamma_S) d\gamma_S \right) \\ &= \frac{2\hat{V}_1}{k_S\pi} \left[\sin\left(\frac{W\pi k_S}{2p_u\tau_P}\right) \right] - \frac{2\hat{V}_2}{k_S\pi} \left[\sin\left(k_S \frac{2\pi}{3} + k_S \frac{W\pi}{2p_u\tau_P}\right) - \sin\left(k_S \frac{2\pi}{3} - k_S \frac{W\pi}{2p_u\tau_P}\right) \right] \\ &= \frac{2\hat{V}_1}{k_S\pi} \left[\sin\left(\frac{W\pi k_S}{2p_u\tau_P}\right) \right] - \frac{2\hat{V}_2}{k_S\pi} \cdot \underbrace{\left[2 \cos\left(\frac{2\pi k_S}{3}\right) \sin\left(\frac{W\pi k_S}{2p_u\tau_P}\right) \right]}_{=-1 \forall k_S | k_S=3,6,9,\dots} \\ &= \frac{2(\hat{V}_1 + \hat{V}_2)}{k_S\pi} \sin\left(\frac{W\pi k_S}{2p_u\tau_P}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

mit den Fourierkoeffizienten gemäß Gleichung (A.21)

$$\hat{V}_{x,k_S} = \begin{cases} \frac{2\Theta_x}{k_S\pi} \sin\left(\frac{W\pi k_S}{2p_u\tau_P}\right), & \text{für } k = 1, 2, 4, 5, \dots \\ 0, & \text{für } k = 3, 6, 9, \dots \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

Das Ergebnis der Reihenentwicklung der Felderregerkurve und die dazugehörigen Koeffizienten der Grund- und Oberwellen sind in Abbildung A.2 dargestellt.

Eine weitere wichtige Größe für die Beschreibung einer elektrischen Maschine ist der Strombelag, welcher als Durchflutung pro Längeneinheit definiert ist. Dieser ist ein rein konstruktives Maß, vereinfacht aber die Berechnung der elektrischen

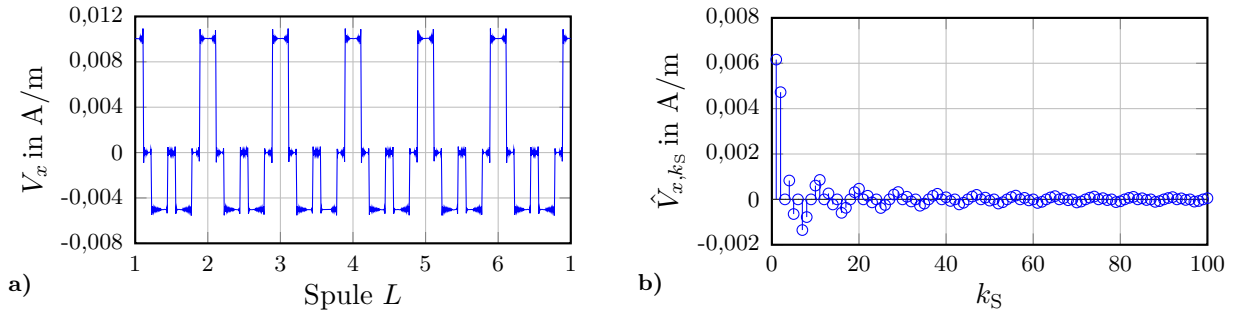


Abbildung A.2: Fourierreihendarstellung des Statormagnetfelds in a) mit den dazugehörigen Amplituden der Grund- und Oberwellen in b)

Maschine. Für den Strombelag gilt

$$^s \mathbf{A}_{S,x}(x_S, t) = \frac{dV(x_S, t)}{dx_S} = -\sum_{k_S=1}^{\infty} \hat{A}_{x,k_S} \sin\left(\frac{k_S \pi}{p_u \tau_p} x_S\right), \quad \hat{A}_{x,k_S} = \frac{2\Theta_x}{p_u \tau_p} \sin\left(\frac{W \pi k_S}{2p_u \tau_p}\right). \quad (\text{A.23})$$

Die Durchflutung ergibt sich für einen Strang aus dem Integral der magnetischen Flussdichte $\mathbf{B}_{S,x}$ über eine Spulenweite zu

$$\begin{aligned} \Phi_{S,x} &= l_M \sum_{k_S=1}^{\infty} \hat{B}_{x,k_S} \int_{-W/2}^{W/2} \cos\left(\frac{k_S \pi}{p_u \tau_p} x_S\right) dx_S \\ &= \sum_{k_S=1}^{\infty} \frac{4\mu_0 l_M p_u \tau_p N_C}{k_S^2 \pi^2 \delta_L} i_{S,x}(t) \cdot \sin\left(\frac{k_S \pi W}{2p_u \tau_p}\right) \\ &= \sum_{k_S=1}^{\infty} L_{h,k_S} i_{S,x}(t). \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Die induzierte Spannung berechnet sich unter Annahme einer konstanten Induktivität durch einmalige Differentiation des verketteten Flusses $\Psi_{S,x} = N_C \Phi_{S,x}$ zu

$$u_{L,x} = \frac{d\Psi_{S,x}}{dt} = \sum_{k_S=1}^{\infty} L_{h,k_S} \frac{di_{S,x}(t)}{dt}. \quad (\text{A.25})$$

A.2.2 Rotormagnetfeld

Der mit den Oberflächenmagneten besetzte Rotor bildet im Luftspalt zwischen Stator und Rotor das Magnetfeld \mathbf{B}_R aus. Dieses kann mit Bezug zu einem rotorfesten Koordinatensystem idealisiert als Rechteckverlauf gemäß Abbildung A.3 über den Umfangswinkel

$$\gamma_R = \frac{\pi}{\tau_p} x_R \quad (\text{A.26})$$

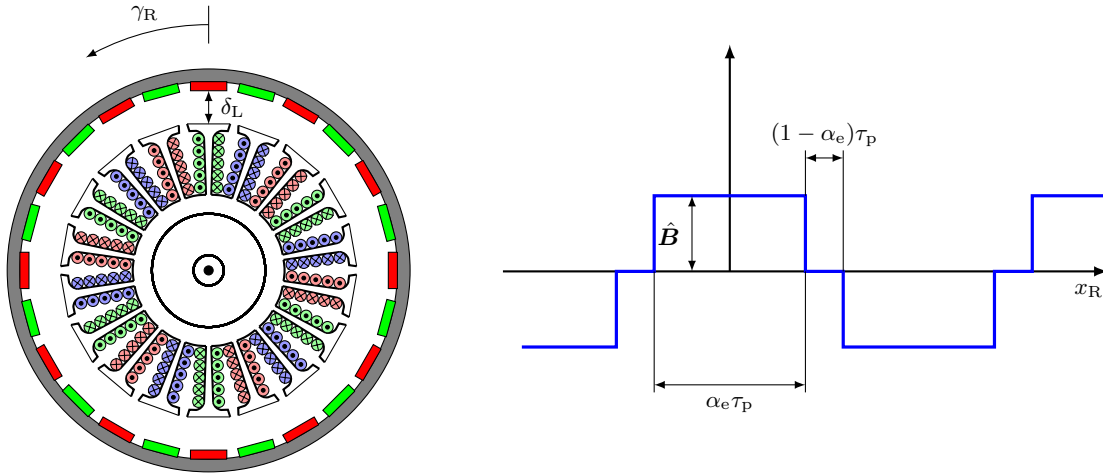


Abbildung A.3: Verlauf des Luftspaltflusses

betrachtet werden. Der volle elektrische Winkel ergibt sich nach $x_R = 2\tau_p$. Für eine mathematische Beschreibung wird die periodische Funktion wiederum in eine Fourierreihe entwickelt. Dabei verschwindet aufgrund der Symmetrie zur x -Achse der Gleichanteil a_0 . Für die magnetische Flussdichte des Rotors ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \hat{B}_{k_R} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(k_R \gamma_R) d\gamma_R \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\alpha_e \pi}{2}} \hat{B} \cos(k_R \gamma_R) d\gamma_R - \int_{\frac{(2-\alpha_e)\pi}{2}}^{\pi} \hat{B} \cos(k_R \gamma_R) d\gamma_R \right) \\
 &= \frac{2\hat{B}}{k_R \pi} \left(\sin\left(k_R \frac{\alpha_e \pi}{2}\right) + \sin\left(k_R \frac{(2-\alpha_e)\pi}{2}\right) \right) \\
 &= \frac{2\hat{B}}{k_R \pi} \left(\sin\left(k_R \frac{\alpha_e \pi}{2}\right) - \cos(k_R \pi) \sin\left(k_R \frac{\alpha_e \pi}{2}\right) \right) \\
 &= \frac{2\hat{B}}{k_R \pi} \left(\sin\left(k_R \frac{\alpha_e \pi}{2}\right) - \sin\left(k_R \frac{\alpha_e \pi}{2}\right) (-1)^{k_R} \right) \\
 &= \frac{2\hat{B}}{k_R \pi} \sin\left(\frac{k_R \alpha_e \pi}{2}\right) (1 - (-1)^{k_R}).
 \end{aligned} \tag{A.27}$$

Für die Fourierreihe des Luftspaltfelds gilt somit

$${}^R \mathbf{B}_R(x_R, t) = \sum_{k_R=1}^{\infty} \hat{B}_{k_R} \cos\left(\frac{\pi k_R}{\tau_p} x_R\right) \tag{A.28}$$

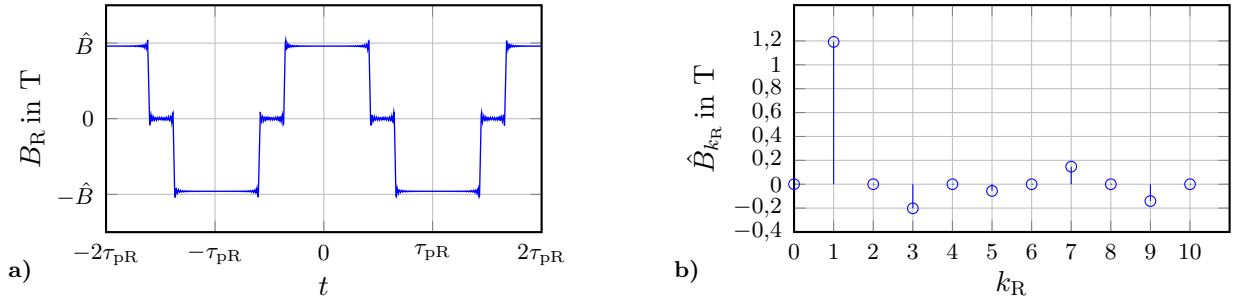


Abbildung A.4: Fourierreihendarstellung des Rotormagnetfelds in a) mit den dazugehörigen Amplituden der Grund- und Oberwellen in b)

mit den Fourierkoeffizienten gemäß Gleichung (A.27)

$$\hat{B}_{k_R} = \begin{cases} \frac{4\hat{B}}{k_R\pi} \sin\left(\frac{k\alpha_e\pi}{2}\right), & \text{für } k = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & \text{für } k = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (\text{A.29})$$

Für den betrachteten Motor ist das Ergebnis der Fourierreihe A.4 mit den dazugehörigen Koeffizienten der Grund- und Oberwellen in Abbildung dargestellt.

Eine gemeinsame Betrachtung der Rotor- und Statorfelder setzt die Verwendung desselben Koordinatensystems voraus. Für den stehenden Motor sind beide Koordinatensysteme identisch und es gilt stets $x_S = x_R = x$. Sobald sich der Rotor jedoch dreht, ist das rotorfixe Koordinatensystem gegenüber dem statorfesten Koordinatensystem um den Winkel $\Delta\gamma_R = \omega_R t$ verdreht. Aus Sicht des statorfesten Koordinatensystems wandert das Rotormagnetfeld entlang der Umlaufkoordinate um den Umfang Δx weiter. Für den Zusammenhang zwischen der Umlaufkoordinate des Rotors und des Stators gilt dann

$$x_S = x_R + \Delta x_R. \quad (\text{A.30})$$

Damit geht Gleichung (A.28) über in

$$\begin{aligned} {}^S\mathbf{B}_R(x_S, t) &= \sum_{k_R=1}^{\infty} \hat{B}_{k_R} \cos\left(\frac{k_R\pi}{\tau_p}(x_S - \Delta x_R)\right) & |\Delta x_R = \omega_R r_M t \\ &= \sum_{k_R=1}^{\infty} \hat{B}_{k_R} \cos\left(\frac{k_R\pi}{\tau_p}x_S - \frac{\pi k_R}{\tau_p}\omega_R t\right) & \left|\frac{\pi r_M}{\tau_p} = \frac{\pi d_M}{2\tau_p} = p\right. \\ &= \sum_{k_R=1}^{\infty} \hat{B}_{k_R} \cos\left(\frac{k_R\pi}{\tau_p}x_S - k_R\omega_{el}t\right). \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Die elektrische Drehzahl des Rotors $\omega_{el} = p\omega_R$ berücksichtigt dessen Polpaarzahl.

Induzierte Polradspannung: Die in einer Spule des Stators induzierte Spannung ergibt sich aus dem Faradayschen Gesetz

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} d\vec{A} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (\text{A.32})$$

wobei die linke Seite das Integral über den geschlossenen Umlauf der Erregerspule und die rechte Seite die Änderung des magnetischen Flusses durch diese Fläche beschreibt. Um den gesamten Fluss durch eine Spule zu erhalten, muss dieses wechselnde Magnetfeld über die Spulenweite W aller N_C Spulenwindungen aufintegriert werden. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \Psi_{i,l} &= N_C l_M \sum_{k_R=1}^{\infty} \int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} \hat{B}_{k_R} \cos\left(\frac{\pi k_R}{\tau_p} x_S - k\omega_{el}t\right) dx_S \\ &= N_C \sum_{k_R=1}^{\infty} \frac{8\tau_p l_M \hat{B}_{k_R}}{\pi k_R} \sin\left(\frac{k_R \pi W}{2\tau_p}\right) \cos(k_R \omega_{el}t). \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Aufgrund der Symmetrie gemäß Abbildung 3.2b der Maschine wird jede weitere Spule des Strangs von derselben Durchflutung erfasst. Mit der Annahme, dass alle Spulen des Strangs in Reihe sind, ergibt sich die Durchflutung für den kompletten Strang indem die Summe über alle Spulen gebildet wird. Es folgt

$$\begin{aligned} \Psi_{i,S} &= N_C \sum_{k_R=1}^{\infty} \sum_{L=1}^{L=\frac{p}{p_u}} \frac{2\tau_p l_M \hat{B}_{k_R}}{\pi k_R} \sin\left(\frac{k_R \pi W}{2\tau_p}\right) \cos(k_R \omega_{el}t) \\ &= N_C \sum_{k_R=1}^{\infty} \frac{2p\tau_p l_M \hat{B}_{k_R}}{p_u \pi k_R} \sin\left(\frac{k_R \pi W}{2\tau_p}\right) \cos(k_R \omega_{el}t). \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Für das Umlaufintegral der elektrischen Feldstärke über einen Strang folgt für $i_{S,x} = 0$ aus dem Ersatzschaltbild 3.2 der Zusammenhang

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -u_{i,x}. \quad (\text{A.35})$$

Zusammen mit Gleichung (A.32) folgt damit für die induzierte Strangspannung

$$\begin{aligned} -u_{i,x} &= -\left(-N_C \sum_{k_R=1}^{\infty} \frac{2p\tau_p l_M \hat{B}_{k_R} \omega_{el}}{p_u \pi} \sin\left(\frac{k_R \pi W}{2\tau_p}\right) \sin(k_R \omega_{el}t) + L \frac{dI}{dt}\right) \\ U_{i,S} &= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2pN_C \tau_p l_M \hat{B}_{k_R} \omega_{el}}{p_u \pi} \sin\left(\frac{k_R \pi W}{2\tau_p}\right) \sin(k_R \omega_{el}t) \\ &= -\sum_{k_R=1}^{\infty} \hat{U}_{i,k_R} \sin(k_R \omega_{el}t) \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

mit der Spannungsamplitude

$$\hat{U}_{i,k_R} = \hat{\psi}_{PM,k_R} \cdot \omega_{el} \quad \text{mit} \quad \hat{\psi}_{PM,k_R} = \frac{2pN_C\tau_p l_M \hat{B}_{k_R}}{p_u \pi} \sin\left(\frac{k_R \pi W}{2\tau_p}\right). \quad (\text{A.37})$$

Für die Gegeninduktivität ist die Erweiterung auf das dreiphasige System einfach, da die Phasen lediglich um 120° versetzt mit dem selben Polradfluss durchflutet werden. Deshalb ergibt sich für die drei Phasen jeweils die Beziehung

$$u_{i,x} = - \sum_{k=1}^{\infty} \hat{\Psi}_{PM,k_R} \omega_{el} \sin\left(k_R \omega_{Re} t - \frac{2\pi k_R}{3} s_x\right). \quad (\text{A.38})$$

A.3 Berechnung des Drehmoments

Das Drehmoment einer elektrischen Maschine entsteht aufgrund der wirkenden Kräfte auf Ladungsträger. Die erweiterte Form der Lorentzkraft lautet

$$F_q = F_E + F_B = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (\text{A.39})$$

Mit der Definition der Raumladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ kann die auf ein Volumen wirkende Kraft

$$F_q = \int_V \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) d\mathbf{r} = \int_V (\rho\mathbf{E} + \rho\mathbf{v} \times \mathbf{B}) d\mathbf{r} = \int_V (\rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) d\mathbf{r} \quad (\text{A.40})$$

ermittelt werden. Hierbei ist \mathbf{J} die elektrische Stromdichte. Mit dem Gaußschen Gesetz und dem ampèreschen Gesetz¹ in der jeweiligen differentiellen Form

$$\text{Gaußsches Gesetz: } \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (\text{A.41})$$

$$\text{Ampèresches Gesetz: } \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

kann Gleichung (A.40) umgeschrieben werden zu

$$F_q = \int_V \left(\varepsilon_0 (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right) d\mathbf{r} = F_q = \int_V \mathcal{F}_q d\mathbf{r}. \quad (\text{A.42})$$

Der letzte Summand aus Gleichung (A.42) ergibt sich durch Umformung der allgemeinen Ableitungsbeziehung

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{A.43})$$

1 Ergänzt durch den von Maxwell zusätzlich eingeführten Verschiebungsstrom

zu

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad | \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{A.44})$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}). \quad (\text{A.45})$$

Einsetzen von (A.45) in (A.42) liefert

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_q &= \varepsilon_0 \left((\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) \right) \\ &+ \frac{1}{\mu_0} \left(\underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}}_{=0} - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \right) - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

Hierbei wurde der Term $(\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} = \mathbf{0}$ hinzugefügt um eine Symmetrie zwischen dem ersten und zweiten Summand zu erreichen. Mit den Rechenregeln des Nabla-Operators $\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = 0,5 \nabla \mathbf{A}^2 - (\mathbf{A} \nabla) \mathbf{A}$ folgt, angewandt auf die entsprechenden Terme von \mathbf{E} und \mathbf{B} , die wirkende Lorentzkraft

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_q &= \varepsilon_0 \left((\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} - \frac{1}{2} \nabla \mathbf{E}^2 \right) \\ &+ \frac{1}{\mu_0} \left((\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \frac{1}{2} \nabla \mathbf{B}^2 \right) - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

Die Einführung des Maxwellschen Spannungstensors \mathbf{T}_S mit den Komponenten

$$T_{S,ij} = \varepsilon_0 \left(E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \mathbf{E}^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \mathbf{B}^2 \right) \quad (\text{A.48})$$

zeigt, dass dessen Divergenz

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T}_S &= \varepsilon_0 \left((\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} - \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{E}^2 \right) \\ &+ \frac{1}{\mu_0} \left((\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{B}^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

zwei der drei Summanden von (A.47) hervorbringt. In Gleichung (A.48) beschreibt δ_{ij} das Kronecker-Delta. Mit Gleichung (A.49) geht Gleichung (A.42) über in

$$F_q = \int_V \left(\nabla \cdot \mathbf{T}_S - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \right) d\mathbf{r}. \quad (\text{A.50})$$

Unter der Annahme, dass in der PMSM rein die magnetischen Felder zum Drehmoment beitragen, vereinfachen sich mit $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ sowohl die Komponenten des

Maxwellschen Spannungstensors als auch Gleichung (A.50). Für die Lorentzkraft bei einer PMSM gilt

$$F_q = \int_S \mathbf{T}_S d\mathbf{r}, \quad \text{mit } T_{S,ij} = \frac{1}{\mu_0} \left(B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \mathbf{B}^2 \right). \quad (\text{A.51})$$

Hierbei wurde das Volumenintegral über die Beziehung $\int_V \nabla dr = \int_S dr$ durch ein Oberflächenintegral ersetzt. Der Maxwellsche Spannungstensor lautet für eine PMSM demnach

$$\mathbf{T}_S = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\mu_0} (B_x^2 - B_y^2 - B_z^2) & \frac{1}{\mu_0} (B_x B_y) & \frac{1}{\mu_0} (B_x B_z) \\ \frac{1}{\mu_0} (B_y B_x) & \frac{1}{2\mu_0} (B_y^2 - B_x^2 - B_z^2) & \frac{1}{\mu_0} (B_y B_z) \\ \frac{1}{\mu_0} (B_z B_x) & \frac{1}{\mu_0} (B_z B_y) & \frac{1}{2\mu_0} (B_z^2 - B_x^2 - B_y^2) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.52})$$

Nimmt man für die PMSM zum einen eine zylindrische Form des Rotors an und zum anderen, dass die Felder in der xy -Ebene liegen, folgt $B_z = 0$. Auf diese Weise kann das Problem auf zwei Dimensionen reduziert werden und es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_S &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2\mu_0} (B_x^2 - B_y^2) & \frac{1}{\mu_0} (B_x B_y) \\ \frac{1}{\mu_0} (B_y B_x) & \frac{1}{2\mu_0} (B_y^2 - B_x^2) \end{bmatrix} \\ \Rightarrow^R \mathbf{T}_S &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2\mu_0} (B_n^2 - B_t^2) & \frac{1}{\mu_0} (B_n B_t) \\ \frac{1}{\mu_0} (B_t B_n) & \frac{1}{2\mu_0} (B_t^2 - B_n^2) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

Eine Umrechnung in die Normal und Tangentialkomponente erfolgt durch die Drehmatrix ${}^R\mathbf{T}$. Es gelten die Beziehungen

$$\begin{bmatrix} B_n \\ B_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix}, \quad {}^R\mathbf{T} = {}^{R0} \mathbf{T} \mathbf{T}_S {}^{R0} \mathbf{T}^T. \quad (\text{A.54})$$

Für ein im Luftspalt betrachtetes Flächenstück mit der Orientierung $\mathbf{n} = [1 \ 0]^T$ folgt der Kraftvektor $\mathbf{f} = \mathbf{n}^{\text{TR}} \mathbf{T}_S = {}^R \mathbf{T}_S \mathbf{n}$

$$\mathbf{f}(\alpha, t) = \begin{bmatrix} f_n \\ f_t \end{bmatrix} = \frac{1}{2\mu_0} \begin{bmatrix} B_n^2 - B_t^2 \\ 2B_n B_t \end{bmatrix} \quad (\text{A.55})$$

Ein für die Drehung wirksames Drehmoment, kann lediglich aus der Tangentialkraft herrühren. Zusammen mit der Länge des Stator beziehungsweise des Rotors l_M und

dem Hebelarm $\frac{d_M}{2}$ berechnet sich das Gesamtdrehmoment über

$$\tau_{Mi}(t) = \frac{d_M}{2} l_M \int_0^{2\pi} f_t d\alpha. \quad (\text{A.56})$$

Das Magnetfeld im Luftspalt setzt sich aus dem Rotor- und dem Statorfeld zusammen. Mit $B_t = B_{PM,t} + B_{S,t}$ und $B_n = B_{PM,n} + B_{S,n}$ folgt

$$M(t) = \frac{d_M}{2\mu_0} l_M \left[\int_0^{2\pi} (B_{PM,t} B_{PM,n} + B_{S,t} B_{S,n} + B_{PM,t} B_{S,n} + B_{S,t} B_{PM,n}) d\alpha \right]. \quad (\text{A.57})$$

Bei der vorliegenden Maschine mit Oberflächenmagneten trägt lediglich der letzte Term wesentlich zum Hauptdrehmoment bei. Auf Grundlage einer zweidimensionalen Feldbetrachtung kann gezeigt werden, dass wegen

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathbf{A}_S dx = \Theta = \oint_C \mathbf{H} ds = \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{H}_{t,\delta} - \underbrace{\mathbf{H}_{t,Fe}}_{\approx 0} dx = \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{H}_{t,\delta} dx \quad (\text{A.58})$$

$\mathbf{A}_S = \mathbf{H}_{t,\delta}$ gilt (Binder, 2017). Damit kann das wesentliche Drehmoment einer PMSM mit Oberflächenmagneten gemäß der Beziehung

$$\tau_{Mi} = \frac{d_M}{2} l_M \int_0^{\frac{2\pi p}{p_u}} {}^S A_S(\gamma_S, t) {}^S B_R(\gamma_S, t) \frac{p_u \tau_p}{\pi} d\gamma_S \quad (\text{A.59})$$

berechnet werden. Hierbei ist zu beachten, dass wegen der Auswertung im statorfesten Koordinatensystem pro Urschema eine volle Periode durchlaufen wird. Die Integrationsgrenze für einen vollen mechanischen Umlauf lautet demnach $\frac{n_c}{m} 2\pi = \frac{2\pi p}{p_u}$. Die Auswertung dieses Integrals ergibt

$$\begin{aligned} \tau_{Mi,k} &= \frac{l_M d_M}{2} \int_0^{\frac{2\pi p}{p_u}} \frac{3}{2} \hat{A}_{k_S} \sin(k_S \gamma_S - \varphi_I - \varphi_i) \cdot \hat{B}_{k_R} \sin(k_R p_u \gamma_S - k_R \omega_{el} t) \frac{p_u \tau_p}{\pi} d\gamma_S \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{\hat{A}_{k_S} \hat{B}_{k_R} l_M d_M p_u \tau_p}{4\pi} \int_0^{\frac{2\pi p}{p_u}} \sin\left((k_S - k_R p_u) \gamma_S - \varphi_I - \varphi_i + k_R \omega_{el} t\right) \\ &\quad + \sin\left((k_S + k_R p_u) \gamma_S - \varphi_I - \varphi_i - k_R \omega_{el} t\right) d\gamma_S. \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

Für die Berechnung des Drehmoments muss bei der Integration eine Fallunterscheidung getroffen werden. Das Integral lautet für $|k_S| \neq |p_u k_R|$

$$\tau_{Mi} = \frac{-3\hat{A}_{k_S}\hat{B}_{k_R}l_M d_M p_u \tau_p}{8\pi} \left[\left(\frac{1}{k_S - p_u k_R} \cos([k_S - p_u k_R] \gamma_S - \varphi_I - \varphi_i + k_R \omega_{el} t) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{k_S + p_u k_R} \cos([k_S + p_u k_R] \gamma_S - \varphi_I - \varphi_i - k_R \omega_{el} t) \right) \right]_0^{\frac{2\pi p}{p_u}}, \quad (\text{A.61})$$

$$\tau_{Mi} = \frac{-3\hat{A}_{k_S}\hat{B}_{k_R}l_M d_M p_u \tau_p}{8\pi} \left[\frac{1}{k_S - p_u k_R} \left(\cos \left(\underbrace{[k_S - p_u k_R] \frac{2\pi p}{p_u}}_{2\pi k \text{ mit } k=1,2,\dots} - \varphi_I - \varphi_i + k_R \omega_{el} t \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \cos(-\varphi_I - \varphi_i + k_R \omega_{el} t) \right) + \frac{1}{k_S + p_u k_R} \left(\cos \left(\underbrace{[k_S + p_u k_R] \frac{2\pi p}{p_u}}_{2\pi k \text{ mit } k=1,2,\dots} - \varphi_I - \varphi_i - k_R \omega_{el} t \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \cos(-\varphi_I - \varphi_i - k_R \omega_{el} t) \right) \right]. \quad (\text{A.62})$$

Es ist damit zu jedem Zeitpunkt Null. Aus der gegenseitigen Wirkung von Stator- und Läuferwellen, welche die Bedingung $|k_S| \neq |p_u k_R|$ erfüllen, resultiert somit kein Drehmoment. Ist $|k_S| = |k_R p_u|$ erfüllt, folgt für das Integral

$$\tau_{Mi} = \frac{3\hat{A}_{k_S}\hat{B}_{k_R}l_M d_M p_u \tau_p}{8\pi} \left[\sin(-\varphi_I - \varphi_i + k_R \omega_{el} t) \gamma_S \right. \\ \left. - \frac{1}{2k_S} \cos(2k_S \gamma_S - \varphi_I - \varphi_i - k_R \omega_{el} t) \right]_0^{\frac{2\pi p}{p_u}} \\ = \frac{3\hat{A}_{k_S}\hat{B}_{k_R}l_M d_M p_u \tau_p}{8\pi} \left[\sin(-\varphi_I - \varphi_i + k \omega_{Re} t) \frac{2\pi p}{p_u} \right. \\ \left. - \frac{1}{2k_S} \left[\cos \left(2k_S \frac{2\pi p}{p_u} - \varphi_I - \varphi_i - k_R \omega_{el} t \right) - \cos(-\varphi_I - \varphi_i - k_R \omega_{el} t) \right] \right]. \quad (\text{A.63})$$

Das größte Drehmoment wird für die vorliegende PMSM durch die Grundwelle des Rotormagnetfelds für $k_R = 1$ und die erste Oberwelle des Statorfelds $k_S = 2$

erzeugt. Daraus folgt für $\omega_I = \omega_{el}$ das konstante Drehmoment

$$\tau_{Mi} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{l_M \pi d_M^2}{4} \hat{A}_2 \hat{B}_1 \sin(-\varphi_i) = \frac{3}{2} \hat{I}(t) \hat{\Psi}_{PM} p \sin(\varphi_i), \quad (\text{A.64})$$

welches für $\varphi_i = \frac{\pi}{2}$ seinen maximalen Wert annimmt. Das bedeutet, dass der Statorstrom dem Luftspaltfeld des Rotors B_R um 90-Grad vorausseilt. Wird das Rotormagnetfeld an der d -Achse ausgerichtet, führt ein reiner Strom in der q -Achse auf das maximale Drehmoment

$$\tau_{Mi} = \frac{3}{2} \hat{\Psi}_{PM} p i_q. \quad (\text{A.65})$$

B Reglerauslegung für den Quadrokofter

Die bei der Reglerauslegung zugrunde liegenden vereinfachten Differentialgleichungen ergeben sich aus den Ausführungen in Abschnitt 5.1. Der Quadrokofter mit starren Antrieben wird über das nichtlineare eingangsaffine Differentialgleichungssystem (5.7) beschrieben. Die notwendigen Größen sind das Vektorfeld

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -0,5 (x_2 x_8 - x_3 x_9 - x_4 x_{10}) \\ 0,5 (x_1 x_8 + x_3 x_{10} - x_4 x_9) \\ 0,5 (x_1 x_9 - x_2 x_{10} + x_4 x_8) \\ 0,5 (x_1 x_{10} + x_2 x_9 - x_3 x_8) \\ x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ \frac{1}{\Theta_{Dx}} (c_T \cdot (x_{19}^2 - x_{21}^2) \cdot l_{41}) \\ -\frac{1}{\Theta_{Dy}} (c_T \cdot (x_{18}^2 - x_{20}^2) \cdot l_{41}) \\ -\frac{1}{\Theta_{Dz}} \left(c_R \sum_{i=18}^{21} x_i + c_W \sum_{i=18}^{21} (-1)^i x_i - \frac{\Theta_{4z}}{T_M} \sum_{i=18}^{21} x_i \right) \\ 2g (x_1 \cdot x_3 - x_2 \cdot x_4) \\ -2g (x_1 \cdot x_2 + x_3 \cdot x_4) \\ 2g (x_2^2 + x_3^2 - 0,5) + \frac{c_T}{m_G} (x_{18}^2 + x_{19}^2 + x_{20}^2 + x_{21}^2) \\ x_{18} \\ x_{19} \\ x_{20} \\ x_{21} \\ -\frac{1}{T_M} x_{18} \\ -\frac{1}{T_M} x_{19} \\ -\frac{1}{T_M} x_{20} \\ -\frac{1}{T_M} x_{21} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.1a})$$

die Eingangsmatrix

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} & & \mathbf{0}_{4 \times 4} & \\ & & \mathbf{0}_{3 \times 4} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\Theta_{4z}}{\Theta_{Dz}T_M} & -\frac{\Theta_{4z}}{\Theta_{Dz}T_M} & -\frac{\Theta_{4z}}{\Theta_{Dz}T_M} & -\frac{\Theta_{4z}}{\Theta_{Dz}T_M} \\ & & \mathbf{0}_{3 \times 4} & \\ & & \mathbf{0}_{4 \times 4} & \\ \frac{1}{T_M} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{T_M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{T_M} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.1b})$$

sowie der Eingangs- und Ausgangsgrößenvektor

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_{M1} & u_{M2} & u_{M3} & u_{M4} \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} x_8 & x_9 & x_{10} & x_{13} \end{bmatrix}^T. \quad (\text{B.1c})$$

Die Berechnung des Stellgrößenvektors erfolgt nach Gleichung (5.20). Mit der Umformung

$$\sum_{i=0}^{\delta_m} a_{m,i} L_{\mathbf{a}}^i c_m = \begin{bmatrix} a_{m,0} & \dots & a_{m,\delta_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_m(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_{\mathbf{a}}^{\delta_m} c_m \end{bmatrix} = \mathbf{a}_m^T \mathbf{L}_m \quad (\text{B.2})$$

folgt

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \mathbf{D}_{\delta}^{-1} \begin{bmatrix} K_{S1} w_1 - \mathbf{a}_1^T \mathbf{L}_1 \\ \vdots \\ K_{Sm} w_m - \mathbf{a}_m^T \mathbf{L}_m \end{bmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

Für den Quadrokopter ergeben sich die statischen Verstärkungen $K_{S1,2,3} = 10000$ und $K_{S3} = 100$ aus Abbildung 5.13. Die Vektoren der Vorfaktoren lauten

$$\mathbf{a}_{1,2,4} = \begin{bmatrix} 10000 & 200 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 100 & 1 \end{bmatrix}^T. \quad (\text{B.4})$$

Die Vektoren der Lie-Ableitungen ergeben sich zu

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L}_1 &= \begin{bmatrix} x_8 \\ \frac{c_T l_{41}}{\Theta_{Dx}} (x_{19}^2 - x_{21}^2) \\ -\frac{2c_T l_{41}}{\Theta_{Dx} T_M} (x_{19}^2 - x_{21}^2) \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{L}_2 &= \begin{bmatrix} x_9 \\ -\frac{c_T l_{41}}{\Theta_{Dy}} (x_{18}^2 - x_{20}^2) \\ \frac{2c_T l_{41}}{\Theta_{Dy} T_M} (x_{18}^2 - x_{20}^2) \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{L}_3 &= \begin{bmatrix} x_{10} \\ \frac{1}{\Theta_{Dz} T_M} (\Theta_{4z} \sum_{i=18}^{21} x_i - T_M c_R \sum_{i=18}^{21} x_i - T_M c_W \sum_{i=18}^{21} (-1)^i x_i^2) \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{L}_4 &= \begin{bmatrix} x_{13} \\ g(2x_2^2 + 2x_3^2 - 1) + \frac{c_T}{m_G} \sum_{i=18}^{21} x_i \\ -2(\frac{c_T}{T_M m_G} \sum_{i=18}^{21} x_i^2 - g(x_1 x_2 x_8 + x_1 x_3 x_9 - x_2 x_4 x_9 + x_3 x_4 x_8)) \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{B.5a}$$

Zusammen mit der Entkopplungsmatrix nach Gleichung (5.48) kann der Stellgrößenvektor (5.20) der exakten Linearisierung für den Quadropter berechnet werden.

C Komponenten und technische Daten der Robotersysteme

C.1 Technische Daten der Lastdrone

Für die Simulationsstudien zum Transport von schweren Lasten wird eine Drohne mit den Komponenten aus Tabelle C.1 verwendet.

Tabelle C.1: Komponenten der Lastdrone

Teil	Bezeichnung	Stück	Stückpreis	Gewicht	Gesamtgewicht	Preis
1	Motor KDE8218XF-120	4	517,61 €	0,845 kg	3,38 kg	2070,42 €
2	Propeller 30,5 × 9,7 Zoll CW/CCW	2	278,11 €	0,0529 kg	0,1058 kg	556,22 €
3	Regler KDE-UAS125UVC-HE	4	304,16 €	0,22 kg	0,88 kg	1216,64 €
4	Regler Pixhawk 2.1 The Cube Orange Standard Set	1	301 €	0,4 kg	0,4 kg	301,00 €
5	Akku SLS QUANTUM 5 Ah 14S1P 51,8V	4	283,01 €	1,748 kg	6,992 kg	1132,04 €
6	Rahmen mit Landegestell	1	1000 €	2,0 kg	2,0 kg	1000,00 €
7	Kabel und DC/DC-Wandler	1	100 €	0,5 kg	0,5 kg	100,00 €
Σ	Quadrokopter				14,26 kg	6376,32 €

Das System wird mit 14S-LiPo-Akkus und einer Ladeschlussspannung von $U_{DC} = 60,9 \text{ V}$ betrieben. Die Drehmomentkonstante des Motors beträgt $k_M = 0,0796 \text{ Nm/A}$. Mit diesen Angaben und den Messwerten des Herstellers der jeweiligen Komponenten können die Werte aus Tabelle C.2 angegeben oder berechnet werden.

Tabelle C.2: Technische Daten der Lastdrone

ω_M in rad/s	F_A in N	I_{DC} in A	P_{In} in W	τ_{Mi} in Nm	P_{Out} in W	η_{ESC}
0	0	0	0	0	0	-
215,723	32,17	5	304,5	0,398	85,9	0,282
289,027	59,33	11,4	694,3	0,907	262,3	0,378
351,858	88,85	20,9	1272,8	1,663	585,4	0,460
406,313	119,84	33,9	2064,1	2,698	1096,4	0,531
467,050	155,93	51,1	3112,0	4,068	1899,8	0,610
512,080	191,33	70,5	4293,5	5,612	2873,7	0,669
561,298	229,18	93,1	5669,8	7,411	4159,6	0,734

Durch Kurvenapproximationen können folgende Zusammenhänge ermittelt werden.

$$P_{In} = 3,16 \cdot 10^{-5} \omega_M^3, \quad (C.1a)$$

$$P_{Out} = 4,149 \cdot 10^{-8} \omega_M^4, \quad (C.1b)$$

$$\eta_M = \frac{P_{Out}}{P_{In}} = 0,00137 \omega_M, \quad (C.1c)$$

$$\tau_{M,Out}(P_{Out}) = 3,137 \cdot 10^{-5} \omega_M^2, \quad (C.1d)$$

$$\tau_{M,In}(P_{In}) = 3,131 \cdot 10^{-8} \omega_M^3. \quad (C.1e)$$

C.2 Technische Daten des Seilroboters

Bei dem zugrunde liegenden Seilroboter handelt es sich um ein an der Universität Duisburg-Essen entwickeltes Modell. Die in Tabelle C.3 angegebenen Daten beziehen sich im Wesentlichen auf (Bruckmann und Boumann, 2021).

Tabelle C.3: Parameter des Seilroboters

Parameter	Wert
Endeffektormasse	$m_{EE} = 100 \text{ kg}$
Steinmasse	$m_S = 10,7 \text{ kg} - 53,7 \text{ kg}$
Seillänge	$l_{0,1} = \text{variabel}$
Radius Winde	$r_W = 0,135 \text{ m}$
Getriebeübersetzung	$i_G = 10$
Trägheitstensor Endeffektor	$\Theta_{EE} = \begin{bmatrix} 9,74921 & 0,33186 & 0,35942 \\ 0,33186 & 12,67795 & 0,27916 \\ 0,35942 & 0,27916 & 15,43681 \end{bmatrix} \text{ kgm}^2$
Wirkungsgrad	$\eta_{M0} \approx 0,00137 \omega_{M0} \%$
Wirkungsgrad Umrichter	$\eta_{ESC} = 0,95$
Wirkungsgrad Rekuperation	$\eta_R = 0,85$
Wirkungsgrad Getriebe	$\eta_G = 0,841$
Vektor zum Schwerpunkt des Endeffektors	$\mathbf{b}_{EE} = [-0,0103 \quad -0,00978 \quad 0,4981]^T \text{ m}$
Position der Umlenkrollen	siehe Gleichung (6.65)
Seilangriffspunkt Plattform	siehe Gleichung (6.66)
Maximale, minimale Seilkraft	$f_{R,\min} = 150 \text{ N}, \quad f_{R,\max} = 4500 \text{ N}$
Strangwiderstand Motor	$R_S = 0,12 \Omega$
Drehmomentkonstante Motor	$k_t = 1,4 \text{ Nm/A}$
Trägheitsmoment Seilwinde	$\Theta_W = 0,293 \text{ kgm}^2$
Trägheitsmoment Kupplung	$\Theta_C = 0,0162 \text{ kgm}^2$
Trägheitsmoment Motorwelle	$\Theta_S = 0,0135 \text{ kgm}^2$
Trägheitsmoment Getriebe	$\Theta_G = 0,00192 \text{ kgm}^2$
Seildurchmesser	$d_S = 0,035 \text{ m}$
Radius Umlenkrolle	$d_R = 0,063 \text{ m}$

DuEPublico

Duisburg-Essen Publications online

UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN

Offen im Denken

ub | universitäts
bibliothek

Diese Dissertation wird via DuEPublico, dem Dokumenten- und Publikationsserver der Universität Duisburg-Essen, zur Verfügung gestellt und liegt auch als Print-Version vor.

DOI: 10.17185/duepublico/78533

URN: urn:nbn:de:hbz:465-20230706-082744-0

Alle Rechte vorbehalten.