

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktor der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

zum Thema

Optimale Steuerung eines nichtglatten elliptischen Problems vom Stackelbergtyp

eingereicht an der Fakultät für Mathematik der Universität Duisburg-Essen

von

Sven Perske, M. Sc.

Betreuer und Erstgutachter: Prof. Dr. Arnd Rösch - Universität Duisburg-Essen
Zweitgutachter: Prof. Dr. Christian Meyer - Technische Universität Dortmund

Vorsitzende des Prüfungsausschusses: Prof. Dr. Petra Wittbold - Universität Duisburg-Essen

Datum der mündlichen Prüfung: 21. Juni 2022

genehmigte Dissertation

DuEPublico

Duisburg-Essen Publications online

UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN

Offen im Denken

ub | universitäts
bibliothek

Diese Dissertation wird via DuEPublico, dem Dokumenten- und Publikationsserver der Universität Duisburg-Essen, zur Verfügung gestellt und liegt auch als Print-Version vor.

DOI: 10.17185/duepublico/78421

URN: urn:nbn:de:hbz:465-20230609-062427-1

Alle Rechte vorbehalten.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Dissertationsschrift wird ein sogenanntes Bilevel-Optimalsteuerproblem beleuchtet. Hierbei handelt es sich um ein zweistufiges Optimierungsproblem im Funktionenraum. Zunächst erfolgt eine literarische Einordnung in den aktuellen wissenschaftlichen Kontext auf dem Gebiet der optimalen Steuerung, insbesondere im Bereich der Bilevel-Optimalsteuerung.

Nachdem die notwendigen mathematischen Grundlagen bereitgestellt sind werden in Kapitel 3 im Zuge der Analyse des vorliegenden Problems zunächst die Fragen nach Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung beantwortet.

Im Anschluss rücken in Kapitel 4 die Theorie und anschließende Durchführung einer Transformation auf ein einstufiges Optimalsteuerproblem in den Vordergrund. Hierbei richtet sich der Fokus auf die Frage nach Eindeutigkeit einer Lösung des einstufigen Problems sowie nach der Gültigkeit seiner Lösung für das ursprüngliche zweistufige Optimalsteuerproblem. Nach Umformulierung des Ausgangsproblems liegt ein einstufiges Optimierungsproblem mit Komplementaritätsbedingungen - ein sogenanntes MPCC - im reflexiven Banachraum vor.

Im Zusammenhang mit den Fragen nach Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung findet in Kapitel 5 zudem eine Analyse ihrer Stationarität im Rahmen der MPCC-Theorie im Funktionenraum statt. Hierbei erfolgt eine weitere wesentliche Transformation des MPCCs.

Nachdem das transformierte MPCC im reflexiven Banachraum aus Kapitel 5 mit der Finite-Elemente-Methode diskretisiert wurde, wird in Kapitel 6 schließlich eine auf die präsentierte Lösungstheorie zugeschnittene primal-duale Aktive-Mengen-Strategie hergeleitet. Ihre Implementierung wird in den wichtigsten Facetten erläutert und ihre Funktionsweise mit zugehörigen dokumentierten numerischen Ergebnissen gestützt.

Schließlich werden die wichtigsten Ergebnisse dieser Arbeit zusammengefasst und ein Ausblick hinsichtlich noch zu bewältigender Herausforderungen in dieser Problemklasse wird gegeben.

Abstract

In this PhD thesis a so called bilevel optimal control problem is examined. It can be identified as a two-stage optimization problem in a function space. Firstly, a scientific classification in the context of current findings in optimal control, especially bilevel optimal control, is given.

After the required mathematical preliminaries have been provided, in the course of the problem analysis in chapter 3 arising questions concerning the existence and uniqueness of the solution of the problem are being picked up and answered.

In Chapter 4, the theory and subsequent implementation of a transformation to a one-level optimal control problem are put forward. The focus here is on the question of the uniqueness of a solution to the one-level problem and the validity of its solution for the original bilevel optimal control problem. After reformulating the initial problem, a one-level optimization problem with complementarity constraints - a so called MPCC - in the reflexive Banach space arises.

In connection with questions concerning the existence and uniqueness of a solution of the MPCC, Chapter 5 also contains the analysis of its stationarity within the framework of the MPCC theory in the function space setting. In the course of this analysis another essential transformation of the MPCC is carried out.

After the discretization of the final MPCC from chapter 5 with the finite element method a primal-dual active set strategy tailored to the presented solution theory is derived in chapter 6. Its implementation is explained in the most important facets and its functionality is supported by the documentation of appropriate numerical test.

Finally, the results of this thesis are summarized and an outlook is given with regard to the challenges that still need to be overcome in this problem class.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	8
1.1	Was ist optimale Steuerung?	8
1.2	Was ist Bilevel-Optimierung?	9
1.3	Was ist Bilevel-Optimalsteuerung?	10
1.4	Das Bilevel-Optimalsteuerproblem und eine erste Umformulierung	12
1.5	Zur Struktur dieser Arbeit	16
2	Mathematische Grundlagen und Hilfsresultate	17
2.1	Funktionalanalytische Grundlagen	17
2.2	Hilfsresultate für Existenz und Eindeutigkeit	26
3	Existenz- und Eindeutigkeitsresultate zu (BO)	29
3.1	Existenztheorie der Follower-Ebene	29
3.2	Ein Optimalitätssystem für die Follower-Ebene	32
3.2.1	Lagrange-Funktion und Variationsungleichung	33
3.2.2	Punktweise Diskussion der Variationsungleichung und die Projektionsgleichung	35
3.3	Existenztheorie der Leader-Ebene	38
3.4	Allgemeine Existenztheorie	41
3.4.1	Notationen, Annahmen und das Modell	41
3.4.2	Analysis der Optimalwert-Funktion und das Existenzresultat	42
3.4.3	Eine Anwendung	45
4	Regularitätsbedingungen und KKT-Theorie für die Optimierung in Banachräumen	46
4.1	Wichtige Rechenregeln und Kegel für die Optimierung in Banachräumen	49
4.2	Einige wichtige Regularitätsbedingungen für Optimierungsprobleme in Banachräumen	52
4.3	MPCCs in Banachräumen und die KKT-Transformation für (BO)	58
4.3.1	Der adjungierte Zustand als Lagrange-Multiplikator	59
4.3.2	Eine Alternative zur Variationsungleichung	60
4.3.3	Hinreichende Optimalitätsbedingungen für (BO_F) und das KKT-Modell	63
4.4	Ein Hilfsproblem zu (KKT) für die Stationaritätsanalyse	66
5	Stationaritätskonzepte für MPCCs in reflexiven Banachräumen	70
5.1	Regularitätsbedingungen und Stationaritätskonzepte für endlichdimensionale MPCCs	70
5.2	Schwache und starke Stationarität für allgemeine MPCCs in reflexiven Banachräumen	75
5.3	Notwendige Optimalitätsbedingungen und starke Stationarität für (BO)	82
6	Implementierung und numerische Resultate	89
6.1	Herleitung eines Optimalitätssystems	89
6.2	Die Implementierungsstrategie	93
6.3	Diskretisierung und numerische Umsetzung	97
6.3.1	Die Diskretisierung des Problems	98
6.3.2	Eine primal-duale Aktive-Mengen-Strategie für $(KKT_{mod,disk}^{red})$	101
6.4	Numerische Resultate	104
6.4.1	Gewählte Zielzustände und numerische Tests	106
7	Zusammenfassung und Fazit	118

1 Einleitung

Optimale Steuerung und Bilevel-Optimierung sind Felder in der Mathematik, denen in den letzten Jahren eine stetig wachsende Bedeutung zugekommen ist. Darum werden diese beiden Disziplinen hier zur Einordnung in den für diese Arbeit wichtigsten Facetten kurz präsentiert.

1.1 Was ist optimale Steuerung?

Die optimale Steuerung gewöhnlicher oder partieller Differentialgleichungen beschäftigt sich mit der Optimierung im Funktionenraum. Meist werden eine zu wählende Steuerung (russisch: **управление**) u und ein zugehöriger optimaler Zustand y zur Lösung eines unendlichdimensionalen Optimierungsproblems gesucht. Hierbei beschreibt u eine Funktion, die ein gegebenes Zielfunktional unter einer gewöhnlichen oder partiellen Differentialgleichung als Nebenbedingung minimiert, wobei y die Lösung der Differentialgleichung, die von u abhängt, beschreibt. Diese können linearer oder nichtlinearer Natur und im Fall von partiellen Differentialgleichungen elliptischen, parabolischen oder hyperbolischen Typs sein. Stark vereinfacht formuliert kann ein Optimalsteuerproblem etwa darin bestehen, die Temperatur eines Körpers Ω mittels einer angelegten Steuerung $u(x)$ - beispielsweise durch elektromagnetische Induktion - an eine gewünschte Zieltemperatur $y_\Omega(x)$ anzunähern. Hierbei kann die Steuerung auf dem Rand Γ von Ω oder alternativ ebenso im Gebiet/Körper Ω selbst wirken. Vor diesem Hintergrund würde $y(x)$ die Lösung einer partiellen Differentialgleichung - etwa der stationären oder instationären Wärmeleitungsgleichung - darstellen. Im zugehörigen Zielfunktional würde die Differenz aus $y(x)$ und $y_\Omega(x)$ minimiert werden. Je kleiner sie ist, desto näher liegt die tatsächliche Temperatur des Körpers (auf dem Rand oder im Inneren) an der angepeilten Zieltemperatur. Die Steuerung $u(x)$ würde als Summand versehen mit einem Kostenfaktor ebenfalls im Zielfunktional auftauchen, da sie ein Maß für die benötigte Energiezufuhr zur Erreichung der gewünschten Temperatur darstellt und minimal gehalten werden soll. Somit besäße unter den am einfachsten anzunehmenden physikalischen Gegebenheiten an den aufzuheizenden Körper Ω für den Fall einer am Rand des Körpers angelegten, zeitlich konstanten Steuerung das soeben skizzierte Optimalsteuerproblem folgende Form:

$$\min_{u,y} f(u,y) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} (y(x) - y_\Omega(x))^2 dx + \frac{\alpha}{2} \int_{\Gamma} u(x)^2 ds(x)$$

bei

$$\begin{aligned} -\Delta y &= 0 && \text{in } \Omega \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} &= \lambda(u - y) && \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

und

$$U_{\text{ad}} = \left\{ u(x) \mid u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \text{ auf } \Gamma \right\}.$$

Dies ist ein **linear-quadratisches elliptisches Randsteuerproblem**: Die **Zielfunktion** ist **quadratisch**, die (partielle) **Differentialgleichung** als Zustandsgleichung **linear elliptisch** und die **Steuerung** wirkt **auf dem Rand** des Gebiets bzw. Körpers. Die Beschränkung der Steuerung u durch

die Schranken u_a und u_b in der Menge U_{ad} kann als minimal investierbare bzw. maximal zur Verfügung stehende Energiekapazität interpretiert werden. Weiterhin bezeichnet ds das Oberflächenelement, $\nu = \nu(x)$ den nach außen gerichteten Normalenvektor auf dem Rand Γ und die Funktion λ die Wärmeübergangszahl von Ω in das umgebende Medium.

Da im Funktionenraum und nicht mehr endlichdimensional gearbeitet wird, liegt es nahe, dass die Wahl geeigneter Räume, denen die Komponenten eines solchen Optimalsteuerproblems entstammen - in obigem Beispiel etwa $L^2(\Gamma)$ oder $H_0^1(\Gamma)$ -, für die Beantwortung der Fragen nach Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung sowie deren Regularität aber ebenso für die Konstruktion von Algorithmen zur Realisierung numerischer Ergebnisse von essentieller Bedeutung ist. Um dem Leser ein grobes Bild von der Struktur eines Optimalsteuerproblems zu geben, wurde an dieser Stelle allerdings darauf verzichtet. Insbesondere in der Physik und den Ingenieurwissenschaften - beispielsweise in der Lagerlogistik, der Robotik oder etwa der Optimierung der Funktionsweise von Kraftwerken - wurde die optimale Steuerung als mathematischer Kompetenzbereich nach und nach unverzichtbar (vgl. [1], [2], [3], [10], [53], [54] und [57]). Aber auch in der Ökonomie zeigte sich bereits 1969, dass Optimalsteuerprobleme - beispielsweise zur Maximierung des Profits eines Unternehmens in einem bestimmten Zeitintervall unter dynamischen Nebenbedingungen - als mathematisches Modellierungswerkzeug hilfreich sein können (vgl. [72], Kapitel 2).

1.2 Was ist Bilevel-Optimierung?

Bei der mathematischen Modellierung von Optimierungsproblemen, die aus Anwendungen in der realen Welt resultieren, kommt es nicht selten vor, dass sogenannte hierarchische Optimierungsprobleme zu lösen sind. 1934 wurden Problemstellungen dieser Art erstmals von Heinrich von Stackelberg in einem spieltheoretischen Rahmen untersucht (vgl. [71]). In seiner Monographie modelliert er auf dem Gebiet der Mikrotheorie ein Spiel zwischen zwei Spielern, deren Kostenfunktionale und Mengen zulässiger Strategien von den Entscheidungen des jeweils anderen Spielers abhängen. Probleme dieser Art unterscheiden sich in ihrer Struktur und auch hinsichtlich des Rechenaufwands grundlegend von herkömmlichen (einstufigen) Optimierungsproblemen. Ein exzellenter Überblick über die unterschiedlichen (endlich- und unendlichdimensionalen) Typen hierarchischer Optimierungsprobleme und die vielfältigen algorithmischen Herangehensweisen wird in [22] gegeben. Für einen umfassenden Einblick in die Bilevel-Optimierung sei weiter auf [23] verwiesen.

Ein hierarchisches oder auch Bilevel-Optimierungsproblem beschreibt genau genommen die Optimierungsprobleme von (mindestens) zwei Entscheidern, die auf verschiedenen Ebenen agieren: Das Zielfunktional sowie die zulässige Menge möglicher Lösungen des Entscheiders auf der oberen Ebene - oft und auch im Verlauf dieser Arbeit fast immer als 'Leader' bezeichnet - hängen implizit von der Lösungsmenge eines zweiten parametrischen Optimierungsproblems - dem des Entscheiders auf der unteren Ebene, im weiteren Verlauf fast immer als 'Follower' bezeichnet - ab.

Ein recht allgemein gehaltenes, hierarchisches Optimierungsproblem hat die Form

$$\min_{x^L, x^F} f^L(x^L, x^F)$$

bei

$$\begin{aligned} x^L &\in \Sigma^L(x^L, x^F) \\ x^F &\in \Psi(x^L), \end{aligned} \tag{BL}$$

wobei $\Psi(x^L)$ für ein fixiertes x^L die Lösungsmenge des parametrischen Optimierungsproblems

$$\min_{x^F} f^F(x^L, x^F)$$

bei

$$x^F \in \Sigma^F(x^L, x^F) \quad (B_F)$$

beschreibt. Wir gehen an dieser Stelle nur auf die Aspekte der Dynamik eines solchen Bilevel-Optimierungsproblems ein, die für diese Arbeit im Rahmen der Bilevel-Optimalsteuerung von Bedeutung sein werden.

$\Sigma^L(x^L, x^F)$ und $\Sigma^F(x^L, x^F)$ stehen für die jeweilige Restriktionsmenge von Leader und Follower, wobei die darin enthaltenen Gleichungen und Ungleichungen auf beiden Ebenen sowohl von x^L als auch von x^F abhängen können. Die zweite Nebenbedingung in (B_L) zeigt an, dass x^F als Parameter eine Lösung des Problems (B_F) sein muss. Die beiden Akteure agieren wie folgt: Zunächst entscheidet sich der Leader initial für ein \bar{x}^L aus seiner zulässigen Menge und transferiert dieses an den Follower. Nun löst dieser sein Problem unter Berücksichtigung des an ihn übergebenen \bar{x}^L und übergibt seinerseits seine optimale Lösung \bar{x}^F zurück an den Leader. Dieser berechnet schließlich unter Berücksichtigung der erhaltenen optimalen Lösung des Followers - was $\bar{x}^F \in \Psi(\bar{x}^L)$ bedeutet - seinen optimalen Zielfunktionswert $f^L(\bar{x}^L, \bar{x}^F)$.

Von großer Bedeutung für diese Arbeit ist die Tatsache, dass in diesem Modell auf der oberen Ebene bezüglich x^L **und** x^F optimiert wird. Diese Möglichkeit ist nicht immer gegeben. Im Allgemeinen wird bei hierarchischen Optimierungsproblemen davon ausgegangen, dass der Leader die Menge an Lösungen für das Problem auf der Follower-Ebene kennt, letztlich aber keinerlei Einfluss auf die Wahl des Followers hinsichtlich einer für ihn optimalen Lösung \bar{x}^F hat. Entscheidend ist die Frage, ob die Lösung \bar{x}^F , die dem Leader zugespielt wird, eindeutig ist oder nicht: Dies kann einerseits von den Kooperationsmöglichkeiten der beiden Akteure abhängen. Hierbei wird etwa angenommen, dass es für den Follower als Akteur mehr als eine optimale Lösung gibt und der Leader erwarten darf, dass der Follower sich in seiner Entscheidungsfindung kooperativ verhält und dem Leader stets die für ihn beste Lösung $\bar{x}^F \in \Psi(\bar{x}^L)$ zuspiziert. Zum Anderen können Konvexitätseigenschaften von Zielfunktion und Restriktionsmenge des Followers zur Folge haben, dass die Lösung \bar{x}^F für jedes vorgegebene \bar{x}^L automatisch eindeutig ist. Diese beiden Szenarien resultieren in dem sogenannten 'Optimistic Approach' zur Lösung des Bilevel-Optimierungsproblems, bei welchem, wie im Modell dargestellt, die Zielfunktion des Leaders bezüglich beider Variablen minimiert werden kann. Des Weiteren ist dies auch die Basis für eine Reihe von Transformationmöglichkeiten eines solchen Problems, die vergleichsweise effiziente Lösungswege eröffnen (vgl. [4] und [25]). Den Gegenentwurf zum 'Optimistic Approach' stellt der sogenannte 'Pessimistic Approach' dar, wobei ebenfalls angenommen wird, dass die Lösung auf der Follower-Ebene nicht eindeutig ist, jedoch das vorrangige Ziel des Leaders darin besteht, den entstehenden "Schaden" durch eine für sich selbst unliebsame Wahl eines \bar{x}^F durch den Follower möglichst gering zu halten. Hier werden die beiden Zielfunktionale ausschließlich bezüglich x^L bzw. x^F minimiert. Die Möglichkeit der Herangehensweise über den 'Optimistic Approach' wird auch für das in dieser Arbeit behandelte Bilevel-Optimalsteuerproblem von zentraler Bedeutung sein.

Grundsätzlich zeichnen sich Bilevel-Optimierungsprobleme in ihrem Anspruch dadurch aus, dass sie sehr häufig in Ermangelung von Konvexitäts-, Regularitäts- und Differenzierbarkeitseigenschaften deutlich schwieriger zu lösen sind als einstufige Optimierungsprobleme.

1.3 Was ist Bilevel-Optimalsteuerung?

Sogenannte Bilevel-Optimalsteuerprobleme verbinden die hierarchische Struktur eines Bilevel-Optimierungsproblems mit der unendlichdimensionalen Optimierung in Banachräumen unter (partiellen) Differentialgleichungen und meist weiteren Restriktionen als einzuhaltende Nebenbedingungen.

Definitiv spricht man von einem Bilevel-Optimalsteuerproblem, sobald ein Entscheider auf einer der beiden Hierarchieebenen ein Optimalsteuerproblem zu lösen hat. Mit Blick auf die Frage, ob gleich auf beiden oder nur auf einer Ebene ein Optimalsteuerproblem gelöst werden muss, lassen sich Bilevel-Optimalsteuerprobleme theoretisch in drei Klassen unterteilen. Jede dieser Problemklassen hat in der Praxis ihre Daseinsberechtigung.

- Anwendungsbeispiele aus der Klasse der Bilevel-Optimalsteuerprobleme, in denen auf der Follower-Ebene ein Optimalsteuerproblem zu lösen ist, finden sich etwa in der Analyse und Optimierung menschlicher Arm-, Hand- oder genereller Körperbewegungsmuster wieder, um diese für Konstruktionsprobleme in der Robotik nutzbar zu machen (vgl. [2], [3] und [57]). Auch Probleme hinsichtlich der optimalen Interaktion von Robotern mit anderen beweglichen Objekten aus der Natur (vgl.[1]) fallen in diese Problemklasse. Allerdings treten bei diesen Beispielen meistens gewöhnliche Differentialgleichungen als Nebenbedingung auf der Follower-Ebene auf. Für theoretischere Fragen nach numerischen Strategien oder der Herleitung praktikabler Optimalitätsbedingungen lohnt ein Blick in [79] und [81]. Bilevel-Optimalsteuerprobleme, die sich durch partielle Differentialgleichungen auf der Follower-Ebene auszeichnen, können beispielsweise Modelle zur Lösung von Parameter-Identifikations- bzw. Parameter-Rekonstruktionsproblemen sein, wobei hier die ersten essentiellen Schritte und vorzeigbaren Ergebnisse 2018 in den Publikationen [8], [26] und [45] veröffentlicht wurden. In diese Klasse wird auch das für diese Arbeit zentrale Optimalsteuerproblem eingeordnet, wobei sich seine Beschaffenheit in einigen Facetten entscheidend von den betrachteten Problemen in den genannten Arbeiten unterscheidet. Das wird sowohl in der Lösungstheorie als auch der numerische Herangehensweise deutlich.
- Bilevel-Optimalsteuerprobleme, bei denen nur auf der Leader-Ebene ein Optimalsteuerproblem zu lösen ist, haben erstmals 2016 Beachtung gefunden und werden in [9] und [11] betrachtet, wobei hier jeweils speziell der Zustand als Lösung der Differentialgleichungsnebenbedingung gewissen Restriktionen unterworfen ist. In der Arbeit [10] wird ein zweistufiges Problemmodell zur optimalen Steuerung der Gasbilanz in einem Energienetzwerk betrachtet. In diesen drei Literaturbeispielen bestehen die Nebenbedingungen der Optimalsteuerprobleme auf der Leader-Ebene aus gewöhnlichen Differentialgleichungen und es finden sich auf der Follower-Ebene sowohl unendlich- als auch endlichdimensionale Probleme.
- Bilevel-Optimalsteuerprobleme, wo schließlich sowohl auf der Leader- als auch auf der Follower-Ebene ein zu lösendes Optimalsteuerproblem auftritt, finden sich beispielsweise in der Arbeit [53], wo das Problem in der automatischen Erfüllung von Sicherheitsanforderungen an den Bahnverlauf von Hochregallagersystemen besteht. Zusätzlich sei der interessierte Leser auf [16] und [54] verwiesen. Der Beantwortung nach Fragen der Existenz von Lösungen und effizienten numerischen Herangehensweisen solcher Probleme wird sich in den Veröffentlichungen [17] und [39] gewidmet. Allerdings treten in diesen Beispielen sowohl auf der Leader- als auch auf der Follower-Ebene ausschließlich gewöhnliche Differentialgleichungen auf. Erste theoretische Diskussionen hinsichtlich der Lösbarkeit von Bilevel-Optimalsteuerproblemen mit partiellen Differentialgleichungen auf beiden Ebenen unter gewissen Zusatzannahmen bezüglich der unteren Entscheidungsebene haben 2016 in [59] stattgefunden. Vertieft und verallgemeinert wurden diese Erkenntnisse mit Blick auf neue Regularitätsaussagen und die Formulierung zugehöriger Optimalitätsbedingungen schließlich 2018 in [63]. Insgesamt wird deutlich, dass Bilevel-Optimalsteuerproblemen als Problemklasse erst seit wenigen Jahren größere Aufmerksamkeit gewidmet wird. Das in dieser Arbeit vorgestellte Problem bringt insbesondere mit Blick auf die Werke [8], [26] und [45] einige neue theoretische und praktische Herausforderungen mit und fügt sich in die Klasse der Bilevel-Optimalsteuerprobleme mit zu lösendem Optimalsteuerproblem auf der Follower-Ebene ein.

1.4 Das Bilevel-Optimalsteuerproblem und eine erste Umformulierung

Wir betrachten nun das für diese Arbeit zentrale Problem

$$\min_{u^L, u^F} F^L(y, u^L) := \frac{1}{2} \|y - y_d^L\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha^L}{2} \|u^L\|_{L^2(\Omega)}^2$$

bei

$$u^F \in \Psi(u^L)$$

und

$$u^L \in U_{\text{ad}}^L = \left\{ u^L(x) \in L^2(\Omega) \mid u_a^L(x) \leq u^L(x) \leq u_b^L(x) \text{ fast überall in } \Omega \right\},$$

wobei $\Psi(u^L)$ für ein fixiertes u^L die Lösungsmenge des Optimalsteuerproblems

$$\min_{u^F} f^F(y, u^F) := \frac{1}{2} \|y - y_d^F\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha^F}{2} \|u^F\|_{L^2(\Omega)}^2$$

bei

$$\begin{aligned} -\Delta y &= u^L + u^F && \text{in } \Omega \\ y &= 0 && \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

und

$$u^F \in U_{\text{ad}}^F = \left\{ u^F(x) \in L^2(\Omega) \mid u_a^F(x) \leq u^F(x) \leq u_b^F(x) \text{ fast überall in } \Omega \right\}$$

darstellt.

An dieser Stelle fällt bereits ins Auge, dass auf der oberen Ebene bezüglich der Variablen beider Ebenen optimiert wird. Darauf wird im nächsten Kapitel weiter eingegangen. Zunächst folgen einige Bemerkungen zu den Komponenten des Problems:

Annahme 1.4.1.

Das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ist ein beschränktes Lipschitz-Gebiet mit Rand Γ , wodurch sichergestellt wird, dass der Rand hinreichende Glattheitseigenschaften besitzt. Sowohl für die Zielzustände als auch für die gesuchten Steuerungen auf beiden Ebenen gilt $y_d^L, y_d^F, u^L, u^F \in L^2(\Omega)$. Dieser Raum ist insbesondere für die Steuerungen auf beiden Ebenen gut geeignet, da er, anders als beispielsweise die Menge aller stetigen Funktionen, mit Blick auf U_{ad}^F und U_{ad}^L die nötigen Eigenschaften für die Durchführung eines späteren Existenzbeweises mitbringt. Für die Steuerschranken u_a^L, u_b^L, u_a^F und u_b^F aus $L^2(\Omega)$ gilt $u_a^L(x) < u_b^L(x)$ und $u_a^F(x) < u_b^F(x)$ fast überall auf Ω und für die Mengen zulässiger Steuerungen $U_{\text{ad}}^L \neq \emptyset$ und $U_{\text{ad}}^F \neq \emptyset$. Schließlich seien $\alpha^L, \alpha^F \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$.

Die Dynamik der Lösungen der beiden Problemebenen - die im weiteren Verlauf ebenfalls, wenn nicht anders angemerkt, als Leader- und Follower-Ebene bezeichnet werden - stellt sich genauso dar, wie sie bereits für das Modellproblem in Abschnitt 1.2 beschrieben wurde. An dieser Stelle wird der Übersicht halber (noch) auf Iterationsindizes verzichtet.

Der Leader als Akteur entscheidet sich initial für eine zulässige Steuerung $u^L \in U_{\text{ad}}^L$ und übergibt diese an die Follower-Ebene. Aus der Perspektive des Followers ist die an ihn übergebene Steuerung u^L eine fixe Funktion, die er als getroffene Entscheidung des Leaders in die Nebenbedingung

$$\begin{aligned} -\Delta y &= u^L + u^F && \text{in } \Omega \\ y &= 0 && \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

mit aufnimmt und anschließend unter Berücksichtigung der Erfüllung dieser partiellen Differentialgleichung sowie der Menge U_{ad}^F eine für sich optimale Steuerung \bar{u}^F ermittelt. Diese für den Follower optimale Lösung \bar{u}^F müsste streng genommen mit $\bar{u}^F(u^L)$ bezeichnet werden, da sie von der zuvor erhaltenen Lösung \bar{u}^L des Leaders abhängt. Da dieser Umstand aber spätestens jetzt offenbar geworden ist, wird die Steuerung der Follower-Ebene nur noch mit u^F (bzw. \bar{u}^F) bezeichnet - außer die ausformulierte Darstellung $u^F(u^L)$ ist explizit vonnöten.

Aufgrund der Linearität des Laplace-Operators kann an der Poisson-Gleichung mit homogener Dirichlet-Randbedingung

$$\begin{aligned} -\Delta y &= u^L + u^F && \text{in } \Omega && (PO_{\text{LF}}) \\ y &= 0 && \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

mithilfe des Superpositionsprinzips die Aufteilung von (PO_{LF}) in

$$\begin{aligned} -\Delta y^L &= u^L && \text{in } \Omega && (PO_{\text{L}}) \\ y^L &= 0 && \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} -\Delta y^F &= u^F && \text{in } \Omega && (PO_{\text{F}}) \\ y^F &= 0 && \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

vorgenommen werden, was für den Rest der Arbeit von großem Nutzen sein wird. Schließlich lässt sich die Lösung y von (PO_{LF}) mittels der Lösungen y^L und y^F von (PO_{L}) bzw. (PO_{F}) durch

$$y = y^L + y^F$$

darstellen. Demnach ist y^L die Lösung zum Steuerungs paar $(u^L, u^F = 0)$ und y^F umgekehrt die Lösung zu $(u^L = 0, u^F)$. Für detaillierte Informationen rund um das Superpositionsprinzip sei an dieser Stelle auf [65] verwiesen.

Die durchgeführte Entkopplung der Nebenbedingung auf der Follower-Ebene eröffnet die Möglichkeit, obiges Bilevel-Optimalsteuerproblem in die Form

$$\min_{u^L, u^F} F^L(y^L, y^F, u^L) := \frac{1}{2} \|y^L + y^F - y_d^L\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha^L}{2} \|u^L\|_{L^2(\Omega)}^2$$

bei

$$u^F \in \Psi(u^L) \tag{BO}$$

und

$$u^L \in U_{\text{ad}}^L = \left\{ u^L(x) \in L^2(\Omega) \mid u_a^L(x) \leq u^L(x) \leq u_b^L(x) \text{ fast überall in } \Omega \right\},$$

wobei $\Psi(u^L)$ für ein fixiertes u^L die Lösungsmenge des Optimalsteuerproblems

$$\min_{u^F} f^F(y^L, y^F, u^F) := \frac{1}{2} \|y^L + y^F - y_d^F\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha^F}{2} \|u^F\|_{L^2(\Omega)}^2$$

bei

$$\begin{aligned} -\Delta y^L - \Delta y^F &= u^L + u^F && \text{in } \Omega \\ y^L + y^F &= 0 && \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

und

$$u^F \in U_{\text{ad}}^F = \left\{ u^F(x) \in L^2(\Omega) \mid u_a^F(x) \leq u^F(x) \leq u_b^F(x) \text{ fast überall in } \Omega \right\}$$

beschreibt, zu bringen.

Auf der Follower-Ebene können natürlich äquivalent auch zwei voneinander getrennte PDE-Nebenbedingungen formuliert werden:

$$\min_{u^F} f^F(y^L, y^F, u^F) := \frac{1}{2} \|y^L + y^F - y_d^F\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha^F}{2} \|u^F\|_{L^2(\Omega)}^2$$

bei

$$\begin{aligned} -\Delta y^L &= u^L && \text{in } \Omega, & -\Delta y^F &= u^F && \text{in } \Omega, \\ y^L &= 0 && \text{auf } \Gamma, & y^F &= 0 && \text{auf } \Gamma \end{aligned} \tag{BO}_F^{\text{sep}}$$

und

$$u^F \in U_{\text{ad}}^F = \left\{ u^F(x) \in L^2(\Omega) \mid u_a^F(x) \leq u^F(x) \leq u_b^F(x) \text{ fast überall in } \Omega \right\}$$

Das Problem $(BO)_F^{\text{sep}}$ wird unter anderem für die Existenztheorie in Kapitel 3 eine wichtige Rolle spielen.

Bemerkung 1.4.2.

Das Tupel (y^L, u^L) aus (BO) korrespondiert mit der Variable x^L aus der oberen Problemebene in Abschnitt (1.2) und (y^F, u^F) analog mit x^F .

Interpretation von (BO)

Das Bilevel-Optimalsteuerproblem (BO) kann in einem Szenario betrachtet werden, in welchem die Akteure Leader und Follower einen Aufheizvorgang zu ihren eigenen Gunsten kostenminimal durchführen möchten. Zur Verdeutlichung sei an dieser Stelle die Annahme getroffen dass das Gebiet Ω in zwei disjunkte, zusammenhängende Gebiete Ω^L und Ω^F aufgeteilt werden kann, so dass $\Omega = \Omega^L \cup \Omega^F$ und $\Omega^L \cap \Omega^F = \emptyset$ gilt. Weiter orientiert man sich bei der Betrachtung des Follower-Problems an (BO_F^{sep}) und setzt voraus, dass die separierten Zustandsgleichungen auf Ω^L bzw. Ω^F gelöst werden:

$$\begin{aligned} -\Delta y^L &= u^L & \text{in } \Omega^L, & & -\Delta y^F &= u^F & \text{in } \Omega^F, \\ y^L &= 0 & \text{auf } \Gamma^L, & & y^F &= 0 & \text{auf } \Gamma^F \end{aligned}$$

Diese stellen sogenannte homogene Wärmeleitungsgleichungen dar. Mann kann sie derart interpretieren, dass die Steuerung u^L bzw. u^F als Temperaturquelle im Gebiet Ω^L bzw. Ω^F wirkt und das Innere des entsprechenden Gebiets in den aufgeheizten Zustand y^L bzw. y^F versetzt. Die Bedingungen $y^L = 0$ auf Γ^L und $y^F = 0$ auf Γ^F bedeuten hierbei, dass die Temperatur auf dem Rand beider Gebiete gleich Null bleibt. Zur Veranschaulichung kann man sich etwa vorstellen, dass Leader und Follower gemeinsam nebeneinander vor einem Heizkörper sitzen und jeder sukzessive die Heizung vor sich (mithilfe der Steuerung u^L bzw. u^F) so einstellen möchte, dass in dem Bereich, in dem er sitzt (Ω^L bzw. Ω^F), eine für ihn angenehme Temperatur herrscht. Diese angepeilte Zieltemperatur wird durch y_d^L bzw. y_d^F dargestellt. Hierbei hat jeder Akteur einen eigenen Regler, mit dem er seinem Bereich Wärme zuführen kann. Entscheidend ist in diesem Prozess, dass der Leader zuerst entscheiden darf und Wärme zu seinen Gunsten fließen lässt. Hierbei steht ihm allerdings ein begrenztes Energiekontingent zur Verfügung. Dies wird durch die zu erfüllende Bedingung $u^L \in U_{\text{ad}}^L$ deutlich. Der (Tikhonov-)Koeffizient $\alpha^L > 0$ im Zielfunktional des Leaders kann vor diesem Hintergrund als Kostenfaktor für die investierte Energie interpretiert werden. Gleiches gilt für α^F im Zielfunktional auf der Follower-Ebene. Nachdem der Leader initial eine Wahl $u^L \in U_{\text{ad}}^L$ getroffen hat, darf der Follower schließlich entscheiden. Auch er kann wegen $u^F \in U_{\text{ad}}^F$ seinem Bereich bzw. Gebiet nur ein begrenztes Maß an Wärme zuführen und möchte auf diesem Weg in seinem Bereich Ω^F die Zieltemperatur y_d^F generieren. Zudem fällt auf, dass in beiden Zielfunktionalen die Summe $y^L + y^F$ auftaucht, was so interpretiert werden kann, dass in jedem Entscheidungsschritt die bestehende Temperatur in beiden Sitzbereichen berücksichtigt wird. Das bedeutet, dass bei der Formulierung der jeweiligen Zieltemperatur y_d^L bzw. y_d^F der beiden Akteure die herrschende Temperatur im Bereich des jeweils anderen Akteurs mit einkalkuliert wird. Leader und Follower entscheiden unter stetiger Erfüllung der gegebenen Restriktionen, so dass für sie eine bestmögliche Näherung der vorher festgelegten Zieltemperatur erreicht ist. Alternativ kann der Entscheidungsprozess auch so lange fortgesetzt werden, bis die Zieltemperatur für beide Akteure approximativ erreicht worden ist.

1.5 Zur Struktur dieser Arbeit

Nachdem im zweiten Kapitel einige für diese Arbeit benötigte mathematische Grundlagen präsentiert wurden, werden in Kapitel 3 für beide Ebenen die Fragen nach Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung diskutiert. Des Weiteren werden für das Problem auf der Follower-Ebene Optimalitätsbedingungen hergeleitet. Schließlich wird die Existenz- und Eindeutigkeitstheorie für Bilevel-Optimalsteuerprobleme in einem allgemeineren Setting skizziert und an einem Anwendungsbeispiel illustriert.

Im vierten Kapitel steht die Diskussion von Regularitätsbedingungen für Optimierungsprobleme in Banachräumen im Mittelpunkt. Die Erfüllung einer solchen Bedingung für eine Lösung des Follower-Problems schafft die Voraussetzungen dafür, das Problem auf der unteren Ebene durch seine notwendigen (und ggf. gleichzeitig hinreichenden) Optimalitätsbedingungen zu ersetzen und so an ein einstufiges Optimalsteuerproblem zu gelangen, das stattdessen betrachtet und gelöst werden kann. Allerdings wird zuvor geprüft, ob eine solche alternative Betrachtung auch wirklich zulässig ist und Lösungen des ursprünglichen und des transformierten Problems miteinander korrespondieren. Hierbei spielt die Existenz von Lagrange-Multiplikatoren für die Nebenbedingungen des Problems auf der Follower-Ebene eine wichtige Rolle und es wird offenbar, dass eine enge Verwandtschaft zwischen Bilevel-Optimalsteuerproblemen und Optimierungsproblemen unter Komplementaritätsbedingungen - sogenannten MPCCs (**M**athematical **P**roblems with **C**omplementarity **C**onstraints) - in Banachräumen besteht. Um später numerische Ergebnisse zu realisieren, besteht das Ziel schließlich darin für das neue Problem Optimalitätsbedingungen zu formulieren.

In Kapitel 5 wird die zuvor durchgeführte Transformation in ein einstufiges Optimalsteuerproblem im Rahmen der MPCC-Theorie in Banachräumen in den Fokus gerückt. Dazu wird die Frage nach Regularität einer Lösung aufgrund der auftretenden Komplementaritätsbedingungen neu gestellt und eine Analyse ihrer Stationarität durchgeführt.

In Kapitel 6 wird schließlich eine auf die Lösungstheorie aus Kapitel 4 zugeschnittene primal-duale Aktive-Mengen-Strategie hergeleitet und implementiert. Dazu wird das transformierte Problem aus Kapitel 5 mit der Finite-Elemente-Methode diskretisiert. Die Implementierung wird dokumentiert und ihre Funktionalität durch die Präsentation numerischer Resultate gestützt.

2 Mathematische Grundlagen und Hilfsresultate

In diesem Abschnitt werden einige für diese Arbeit grundlegende Definitionen und Hilfsresultate aus der Funktionalanalysis und der Optimierung in Banachräumen angegeben. Die in diesem Abschnitt verwendeten Notationen bleiben, sofern nicht zu Beginn eines Kapitels oder Abschnitts anders angemerkt, für den Rest der Arbeit gültig. Für die Beweise aller in diesem Kapitel angegebenen Sätze, Lemmata und Korollare sei bereits an dieser Stelle auf [73] und [77] verwiesen.

2.1 Funktionalanalytische Grundlagen

Für eine mengenwertige Abbildung $\Psi : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{Y}$, die Elemente aus dem Banachraum \mathcal{X} auf Teilmengen des Banachraums \mathcal{Y} abbildet, definiert man den effektiven Definitionsbereich, den Kern und den Graph von Ψ durch $dom \Psi := \{x \in \mathcal{X} \mid \Psi(x) \neq \emptyset\}$, $ker \Psi := \{x \in \mathcal{X} \mid 0 \in \Psi(x)\}$ bzw. $gph \Psi := \{(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \mid y \in \Psi(x)\}$. Eine Folge $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ in einem beliebigen Raum X wird fortwährend mit $\{x_k\}$ bezeichnet. I beschreibt die Einheitsmatrix.

Banach- und Hilbert-Räume

Zu einem Banachraum \mathcal{X} mit zugehöriger Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ bezeichnen wir seinen dualen Raum mit $\mathbb{L}(\mathcal{X}, \mathbb{R}) = \mathbb{L}(\mathcal{X})$ oder kurz mit \mathcal{X}^* . Dies ist der Raum aller auf \mathcal{X} definierten linearen, stetigen Funktionale. Das zugehörige sogenannte duale Paar $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{X}} : \mathcal{X}^* \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ bzgl. \mathcal{X} wird durch $\langle x^*, x \rangle_{\mathcal{X}} := x^*[x]$ bzw. $\langle x^*, x \rangle := x^*[x] \forall x^* \in \mathcal{X}^*$ definiert. Wegen der Vollständigkeit von \mathbb{R} ist \mathcal{X}^* immer ein Banachraum. Einen allgemeinen normierten Raum \mathcal{K} bezeichnet man als reflexiv, falls für seinen Bidualraum $\mathcal{K}^{**} = (\mathcal{K}^*)^*$ wieder $\mathcal{K}^{**} = \mathcal{K}$ gilt. Für zwei lineare, normierte Räume \mathcal{U} und \mathcal{V} ist $\mathbb{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ der Raum aller linearen und stetigen Operatoren von \mathcal{U} nach \mathcal{V} und stellt ebenfalls einen Banachraum dar. Zu einem Operator $\mathcal{A} \in \mathbb{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ beschreibt $\mathcal{A}^* \in \mathbb{L}(\mathcal{Y}^*, \mathcal{X}^*)$ den adjungierten Operator. Dabei ist jeder lineare Operator genau dann beschränkt, wenn er stetig ist. Das Skalarprodukt eines Hilbertraums $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ wird mit $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$ bezeichnet. Jeder Hilbertraum ist reflexiv.

Lebesgue- und Soboloev-Räume

Der Raum aller auf einem Gebiet Ω definierten reellwertigen Funktionen, die bezüglich des Lebesgue-Maßes zur p -ten Potenz integrierbar sind, wird Lebesgue-Raum genannt und mit $L^p(\Omega)$ bezeichnet. Ausgestattet mit der Norm

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{bzw.} \quad \|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|$$

bilden die Räume $L^p(\Omega)$ bzw. $L^\infty(\Omega)$ Banachräume. $L^\infty(\Omega)$ stellt den Raum der fast überall gleichmäßig beschränkten und messbaren Funktionen dar. Das Gebiet Ω soll hierbei stets polygonal berandet

und konvex sein. Für $p > 1$ beschreibt q den zu p konjugierten Index mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Die Sobolev-Räume $W^{k,p}(\Omega)$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p \leq \infty$ enthalten alle Funktionen $u \in L^p(\Omega)$, deren schwache Ableitungen bis zum Grad k in $L^p(\Omega)$ liegen, und sind ausgestattet mit der Norm

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \left(\int_{\Omega} |D^{\alpha}u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{bzw.} \quad \|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha}u\|_{L^{\infty}(\Omega)}$$

ebenfalls Banachräume.

Im Fall $p = 2$ sind $L^2(\Omega)$ und $H^1 = W^{1,2}(\Omega)$ Hilbert-Räume ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$(f, g) := (f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} fg \, dx \quad \text{bzw.} \quad (u, v) := (u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} uv \, dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

Definition 2.1.1. (Abschluss in $W^{k,p}(\Omega)$)

Unter dem Raum $W_0^{k,p}(\Omega)$ versteht man den Abschluss der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger $C_0^{\infty}(\Omega)$ in $W^{k,p}(\Omega)$. Als abgeschlossener Unterraum von $W^{k,p}(\Omega)$ kann $W_0^{k,p}(\Omega)$ ebenfalls mit der Norm $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ versehen werden. Insbesondere gilt wieder $H_0^k(\Omega) := W_0^{k,2}(\Omega)$. (Der Fall $k = 1$ ist insbesondere für die Lösungstheorie partieller Differentialgleichungen von Bedeutung.)

Satz 2.1.2. (Hölder'sche Ungleichung, allgemeine Version)

Es sei $f \in L^p(\Omega)$ und $g \in L^q(\Omega)$ mit $1 \leq p$ und $q \leq \infty$ (mit der Konvention $\frac{1}{\infty} = 0$), wobei p und q als zueinander konjugierte Exponenten $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ erfüllen. Dann ist $fg \in L^1(\Omega)$ und es gilt

$$\int_{\Omega} |fg| \, dx \leq \left(\int_{\Omega} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

oder kurz $\|fg\|_{L^1(\Omega)} = \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}$.

Der Spezialfall $p = q = 2$ wird als **Cauchy-Schwarz-Ungleichung** bezeichnet.

Satz 2.1.3. (Poincaré-Friedrichs-Ungleichung)

Ist Ω ein beschränktes Lipschitzgebiet, so existiert eine nur von Ω abhängige Konstante c_{Ω} , sodass die Ungleichung

$$\int_{\Omega} y^2 \, dx \leq c_{\Omega} \int_{\Omega} |\nabla y|^2 \, dx$$

für alle $y \in H_0^1(\Omega)$ erfüllt ist.

Korollar 2.1.4. (Stetige Einbettung von $L^p(\Omega)$ nach $L^q(\Omega)$)

Es sei $1 \leq p \leq q \leq \infty$ und $u \in L^p(\Omega)$. Dann liegt u auch in $L^q(\Omega)$ und es gilt

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{p-q}{pq}} \|u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Für $p = \infty$ sei dabei $\frac{p-q}{pq} = \frac{1}{q}$ (bei $q < \infty$) bzw. $\frac{p-q}{pq} = 0$ (bei $q = \infty$). Man schreibt $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$

Bemerkung 2.1.5.

Obiges Korollar bedeutet

$$L^\infty \hookrightarrow \dots \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow L^1(\Omega).$$

Lebesgue-Räume mit höherem Index p sind also im Sinne von Unterräumen die „besseren“ und besitzen zudem eine stärkere Norm. Wenn man $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ schreibt, sagt man, dass $L^p(\Omega)$ für $p \geq q$ stetig in $L^q(\Omega)$ eingebettet ist. Mit Blick auf die Ungleichung in Korollar 2.1.4 wird deutlich, dass dies am endlichen Maß von Ω liegt.

Satz 2.1.6. (Einbettungssätze für Sobolev-Räume)

Für ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ mit Lipschitzrand, $1 < p < \infty$ sowie eine nichtnegative, ganze Zahl m sind die folgenden Einbettungen definiert und stetig:

- (i) Für $mp < N$: $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, falls $1 \leq q \leq \frac{Np}{N-mp}$,
- (ii) Für $mp = N$: $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, falls $1 \leq q < \infty$,
- (iii) Für $mp > N$: $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$.

Definition 2.1.7. (elliptischer Differentialoperator)

Ein Operator \mathcal{A} der Form

$$\mathcal{A}y(x) = - \sum_{i,j=1}^n D_i(a_{ij}(x)D_jy(x))$$

heißt elliptischer Differentialoperator. Die Koeffizientenfunktionen a_{ij} von \mathcal{A} stammen aus $L^\infty(\Omega)$ und genügen der Symmetriebedingung $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ in Ω sowie mit einem $\alpha_0 > 0$ der sogenannten Bedingung der gleichmäßigen Elliptizität,

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha_0|\xi|^2,$$

für alle Vektoren $\xi \in \mathbb{R}^N$ und alle $x \in \Omega$.

Im nächsten Satz wird der Vollständigkeit halber noch einmal das Superpositionsprinzip erläutert, das bereits bei der Trennung der PDE-Nebenbedingung in Abschnitt 1.4 angewendet wurde.

Satz 2.1.8. (Superpositionsprinzip)

Es sei \mathcal{D} ein linearer Differentialoperator (in den Variablen x_1, x_2, \dots, x_n), f_1 und f_2 Funktionen (in den selben Variablen) und c_1 und c_2 beliebige Konstanten.

- (i) Falls u_1 die lineare partielle Differentialgleichung $\mathcal{D}u = f_1$ und u_2 die lineare partielle Differentialgleichung $\mathcal{D}u = f_2$ löst, dann löst $u = c_1u_1 + c_2u_2$ die lineare partielle Differentialgleichung $\mathcal{D}u = c_1f_1 + c_2f_2$. Lösen insbesondere u_1 und u_2 die gleiche homogene, lineare partielle Differentialgleichung, dann ist auch $u = c_1u_1 + c_2u_2$ eine Lösung davon.
- (ii) Falls u_1 die lineare Randbedingung $\mathcal{D}u|_\Gamma = f_{1|\Gamma}$ und u_2 die lineare Randbedingung $\mathcal{D}u|_\Gamma = f_{2|\Gamma}$ erfüllt, dann erfüllt $u = c_1u_1 + c_2u_2$ die lineare Randbedingung $\mathcal{D}u|_\Gamma = (c_1f_1 + c_2f_2)|_\Gamma$. Erfüllen u_1 und u_2 insbesondere die gleiche homogene lineare Randbedingung, so erfüllt $u = c_1u_1 + c_2u_2$ diese ebenfalls.

Zur eindeutigen Lösbarkeit von (PO_L) und (PO_F)

Lemma 2.1.9. (*Lax-Milgram*)

Es sei $(\mathcal{V}, \|\cdot\|_{\mathcal{V}})$ ein reeller Hilbertraum und $B : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform mit den folgenden Eigenschaften: Es existieren positive Konstanten α_0 und β_0 , so dass $\forall v, y \in \mathcal{V}$ die Beziehungen

$$\begin{aligned} |B[y, v]| &\leq \alpha_0 \cdot \|y\|_{\mathcal{V}} \|v\|_{\mathcal{V}} && \text{(Beschränktheit)} \\ B[y, y] &\geq \beta_0 \cdot \|y\|_{\mathcal{V}}^2 && \text{(Koerzivität)} \end{aligned}$$

erfüllt sind. Dann hat die Variationsformulierung

$$B[y, v] = F(v) \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad (2.1)$$

für jedes $F \in \mathcal{V}^*$ genau eine Lösung $y \in \mathcal{V}$ und es existiert eine von F unabhängige Konstante c_a mit

$$\|y\|_{\mathcal{V}} \leq c_a \cdot \|F\|_{\mathcal{V}^*}. \quad (2.2)$$

An dieser Stelle richten wir den Fokus noch einmal auf die beiden entkoppelten, linearen elliptischen Differentialgleichungen (PO_L) und (PO_F) . Ihre (eventuell eindeutige) Lösbarkeit hat natürlich Auswirkungen auf die Frage nach Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung für (BO_F^{sep}) .

Da gemeinhin nicht erwartet werden kann, dass eine partielle Differentialgleichung immer eine klassische Lösung besitzt, ist zur Beantwortung dieser Frage ein erweiterter Lösungs-begriff - die sogenannte schwache Lösung - entwickelt worden. Nicht selten weisen zu einer partiellen Differentialgleichung gehörende Parameterfunktionen nicht die benötigten Differenzierbarkeitseigenschaften auf oder die dem Problem zugrunde liegenden Gebiete (insbesondere in höheren Dimensionen) erfüllen notwendige geometrische Eigenschaften nicht. Um strukturelle Mängel dieser Art aufzufangen und gleichzeitig trotzdem Aussagen hinsichtlich Existenz und ggf. Eindeutigkeit einer Lösung machen zu können, wird der Lösungs-begriff abgeschwächt. Das Konzept hierzu entspringt der Formel der partiellen Integration und besteht in der Multiplikation der partiellen Differentialgleichung mit einer sogenannten Testfunktion aus einem zugehörigen Testraum und anschließender (partieller) Integration über das Gebiet - in unserem Fall Ω -, wodurch, verkürzt ausgedrückt, die Differentiationsanforderungen an die nun gesuchte, schwache Lösung im Vergleich zu denen an eine klassische durch die Produktbildung mit einer geeigneten Testfunktion im Zuge der partiellen Integration reduziert wird. Dieser Raum der Testfunktionen ist üblicherweise der Raum $C_0^\infty(\Omega)$, da seine Elemente mit Blick auf die Anforderungen an eine klassische Lösung - im Fall der beiden PDEs aus (BO_F^{sep}) jeweils $y \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ - die nötigen Glattheitseigenschaften aufweisen. Die Abschließung von $C_0^\infty(\Omega)$ liegt des Weiteren dicht in $H_0^1(\Omega)$, wobei $H_0^1(\Omega)$ für die betrachteten partiellen Differentialgleichungen mit homogenen Randdaten ein zudem sinnvoller Testraum ist. Für eine umfangreiche Einführung der schwachen Lösungstheorie über elliptische partielle Differentialgleichungen hinaus lohnt ein Blick in [44] und [73].

Im Folgenden wird demnach mittels Betrachtung der schwachen oder auch sogenannten variationellen Formulierung die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung geprüft. Dieses Vorgehen beschreiben wir exemplarisch für die partielle Differentialgleichung (PO_L) ,

$$\begin{aligned} -\Delta y^L &= u^L && \text{in } \Omega \\ y^L &= 0 && \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Das Vorgehen für (PO_F) ,

$$\begin{aligned} -\Delta y^F &= u^F && \text{in } \Omega \\ y^F &= 0 && \text{auf } \Gamma, \end{aligned}$$

ist komplett analog.

Multiplikation von (PO_L) mit einer beliebigen aber festen Testfunktion $v \in H_0^1(\Omega)$ und partielle Integration über Ω unter Berücksichtigung verschwindender Randintegrale liefert folgende

Definition 2.1.10.

Ein $y \in H_0^1(\Omega)$ wird schwache Lösung von (PO_L) genannt, wenn die schwache Formulierung bzw. Variationsformulierung

$$\int_{\Omega} \nabla y^L \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} u^L v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (2.3)$$

erfüllt ist.

Die linke Seite in (2.3) entspricht der Bilinearform B im Lemma von Lax-Milgram, die rechte Seite dem Funktional F . Die Koerzivitätsbedingung wird manchmal auch als V-Elliptizität bezeichnet.

Die (eindeutige) Lösbarkeit linearer elliptischer partieller Differentialgleichungen (mit homogenen Randbedingungen) kann auf das Lemma von Lax-Milgram zurückgeführt werden:

Satz 2.1.11.

Auf einem beschränkten Lipschitz-Gebiet Ω besitzt (PO_L) für jedes $u^L \in L^2(\Omega)$ genau eine schwache Lösung $y^L \in H_0^1(\Omega)$ und es existiert eine von u^L unabhängige Konstante c_L , so dass

$$\|y^L\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c_L \cdot \|u^L\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.4)$$

gilt.

Bemerkung 2.1.12.

Mit der Normierung

$$\|y\|_{H_0^1(\Omega)} := \int_{\Omega} |\nabla y|^2 \, dx$$

kann der Beweis komplett für $\mathcal{V} = H_0^1(\Omega)$ durchgeführt werden. Alternativ aber auch für $\mathcal{V} = H^1(\Omega)$, da $H_0^1(\Omega)$ ein Teilraum von $H^1(\Omega)$ ist, was im Beweis in Klammern parallel skizziert wird.

Beweis. Das Lemma von Lax-Milgram soll zur Verifizierung der Aussage angewendet werden. Dazu muss gezeigt werden, dass die Bilinearform $B[y^L, v] = \int_{\Omega} \nabla y^L \cdot \nabla v \, dx$ die nötigen Voraussetzungen in $\mathcal{V} = H_0^1(\Omega)$ erfüllt. Die Beschränktheit der Bilinearform ergibt sich mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung (mit $\alpha_0 = 1$):

$$|B[y^L, v]| = \left| \int_{\Omega} \nabla y^L \cdot \nabla v \, dx \right| \stackrel{(CSU)}{\leq} \left(\int_{\Omega} |\nabla y^L|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = \|y^L\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{V} = H^1(\Omega) : |B[y^L, v]| = \left| \int_{\Omega} \nabla y^L \cdot \nabla v \, dx \right| \stackrel{(\text{CSU})}{\leq} \left(\int_{\Omega} |\nabla y^L|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\
\leq \left(\int_{\Omega} (y^L)^2 + |\nabla y^L|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} v^2 + |v|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
\left. = \|y^L\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \text{ mit } \alpha_0 = 1 \right).
\end{aligned}$$

Die Koerzivität (bzw. V-Elliptizität) der Bilinearform folgt im Grunde direkt aus der $H_0^1(\Omega)$ -Norm (mit $\beta_0 = 1$):

$$B[y^L, y^L] = \int_{\Omega} \nabla y^L \cdot \nabla y^L \, dx = \int_{\Omega} |\nabla y^L|^2 \, dx = \|y^L\|_{H_0^1(\Omega)}^2$$

(Für $\mathcal{V} = H^1(\Omega)$ folgt die Koerzivität mittels der Poincaré-Friedrichs-Ungleichung:

$$\begin{aligned}
B[y^L, y^L] &= \int_{\Omega} |\nabla y^L|^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla y^L|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla y^L|^2 \, dx \\
&\stackrel{(\text{PFU})}{\geq} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla y^L|^2 \, dx + \frac{1}{2c_{\Omega}} \int_{\Omega} (y^L)^2 \, dx \geq \underbrace{\frac{1}{2} \min\left(1, \frac{1}{c_{\Omega}}\right)}_{=\beta_0} \cdot \|y^L\|_{H^1(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Damit sind die Voraussetzungen der Bilinearform aus dem Lemma von Lax-Milgram für $\mathcal{V} = H_0^1(\Omega)$ erfüllt die Beschränktheit (bzw. Stetigkeit) des Funktionals F aus dem Lemma erhält man mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und der Poincaré-Friedrichs-Ungleichung:

$$|F(v)| = |(u^L, v)_{L^2(\Omega)}| = \left| \int_{\Omega} u^L v \, dx \right| \stackrel{(\text{CSU})}{\leq} \|u^L\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \stackrel{(\text{PFU})}{\leq} c_{\Omega} \cdot \|u^L\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

(Für $\mathcal{V} = H^1(\Omega)$ werden die Cauchy-Schwarz-Ungleichung und die lineare sowie stetige Einbettung von $H^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ ausgenutzt:

$$|F(v)| = |(u^L, v)_{L^2(\Omega)}| = \left| \int_{\Omega} u^L v \, dx \right| \stackrel{(\text{CSU})}{\leq} \|u^L\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u^L\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Damit gilt $F \in \mathcal{V}^*$ mit $\|F\|_{\mathcal{V}^*} \leq c \cdot \|u^L\|_{L^2(\Omega)}$ (mit $c = c_{\Omega} \|v\|_{H^1(\Omega)}$). Setzt man dieses Resultat jetzt in die Abschätzung (2.2) aus dem Lax-Milgram-Lemma ein, so folgt

$$\|y^L\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c_a \cdot \|F\|_{\mathcal{V}^*} \leq c_L \cdot \|u^L\|_{L^2(\Omega)},$$

womit auch (2.4) bewiesen ist. □

Bemerkung 2.1.13.

Die Benutzung von $\mathcal{V} = H_0^1(\Omega)$ anstelle von $H^1(\Omega)$ ist zulässig, da $\|y\|_{H_0^1(\Omega)} := \int_{\Omega} |\nabla y|^2 dx$ tatsächlich eine Norm in $H_0^1(\Omega)$ ist. Das kann leicht durch Anknüpfen an die letzte Zeile der Abschätzung für die Koerzivität im Fall $\mathcal{V} = H^1(\Omega)$ eingesehen werden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \min\left(1, \frac{1}{c_{\Omega}}\right) \cdot \|y^L\|_{H^1(\Omega)} &= \frac{1}{2} \min\left(1, \frac{1}{c_{\Omega}}\right) \cdot \int_{\Omega} (y^L)^2 dx + \frac{1}{2} \min\left(1, \frac{1}{c_{\Omega}}\right) \cdot \int_{\Omega} |\nabla y^L|^2 dx \\ &\geq \frac{1}{2} \min\left(1, \frac{1}{c_{\Omega}}\right) \cdot \int_{\Omega} |\nabla y^L|^2 dx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \min\left(1, \frac{1}{c_{\Omega}}\right) \cdot \int_{\Omega} |\nabla y^L|^2 dx \leq \frac{1}{2} \min\left(1, \frac{1}{c_{\Omega}}\right) \cdot \|y^L\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} |\nabla y^L|^2 dx = \|y^L\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Division durch $\frac{1}{2} \min\left(1, \frac{1}{c_{\Omega}}\right)$ liefert

$$c_1 \cdot \|y^L\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|y^L\|_{H^1(\Omega)} \leq c_2 \cdot \|y^L\|_{H_0^1(\Omega)}$$

mit $c_1 = 1$ und $c_2 = \frac{1}{\frac{1}{2} \min\left(1, \frac{1}{c_{\Omega}}\right)}$.

Die partielle Differentialgleichung mit homogener Dirichlet-Randbedingung (PO_L) besitzt also (genau wie (PO_F)) für jedes vorgegebene $u^L \in L^2(\Omega)$ (bzw. $u^F \in L^2(\Omega)$) eine eindeutige Lösung. Die nachgewiesene Abschätzung am Ende des Beweises von Satz 2.1.11 wird im nächsten Korollar in der Bezeichnungsweise des Lax-Milgram-Lemmas noch einmal aufgegriffen, da sie, wie wir im Anschluss sehen werden, noch aus einem anderen Grund wichtige Informationen für das weitere Vorgehen in diesem Kapitel bereit hält.

Korollar 2.1.14.

Die eindeutig existierende Lösung der variationellen Formulierung (2.1) erfüllt

$$\|y\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{1}{\beta_0} \|F\|_{\mathcal{V}^*}.$$

Beweis. Einsetzen von y in die variationelle Formulierung

$$B[y, v] = F(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}$$

liefert

$$\beta_0 \cdot \|y\|_{\mathcal{V}}^2 \leq B[y, y] = F(y) \leq \|F\|_{\mathcal{V}^*} \|y\|_{\mathcal{V}}.$$

Division durch $\beta_0 \cdot \|y\|_{\mathcal{V}}$ ergibt

$$\|y\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{1}{\beta_0} \|F\|_{\mathcal{V}^*}.$$

□

Bemerkung 2.1.15.

Formal wird die stetige Abhängigkeit der Lösung y der variationellen Formulierung von den gegebenen Daten F durch obiges Korollar noch einmal deutlich: Der Lösungsoperator $G : \mathcal{V}^* \rightarrow \mathcal{V}$, der ein vorgegebenes $F \in \mathcal{V}^*$ auf die Lösung y der Bilinearform $B[y, v] = F(v) \forall v \in \mathcal{V}$ abbildet, ist linear und stetig. Insbesondere gilt also

$$\|G(F)\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{\|F\|_{\mathcal{V}^*}}{\beta_0}.$$

Schwache Konvergenz und Stetigkeit in Banachräumen**Definition 2.1.16. (Unter- und Oberhalbstetigkeit in Banachräumen)**

Es sei $f : M \rightarrow (-\infty, \infty]$ eine Abbildung von einer abgeschlossenen, konvexen Menge M mit $M \subset \mathcal{X}$ in einen Banachraum \mathcal{X} . Man betrachte für beliebiges $t \in \mathbb{R}$ die Mengen

$$L_t = f^{-1}\left((-\infty, t]\right) = \{x \in M \mid f(x) \leq t\} \quad \text{und} \quad U_t = f^{-1}\left([t, \infty)\right) = \{x \in M \mid f(x) \geq t\}.$$

Dann gelten folgende Aussagen:

- (i) Die Abbildung $f : M \rightarrow (-\infty, \infty]$ heißt *halbstetig von unten* dann und nur dann, wenn die Menge L_t für alle $t \in \mathbb{R}$ abgeschlossen ist.
- (ii) Die Abbildung $f : M \rightarrow (-\infty, \infty]$ heißt *halbstetig von oben* dann und nur dann, wenn die Menge U_t für alle $t \in \mathbb{R}$ abgeschlossen ist. Alternativ wird die Abbildung f genau dann *halbstetig von oben* genannt, wenn $-f$ *halbstetig von unten* ist.

Definition 2.1.17. (Schwache Konvergenz)

Es sei \mathcal{X} ein reeller Banachraum. Eine Folge von Elementen $\{x_n\}$ aus \mathcal{X} heißt *schwach konvergent*, wenn für alle Funktionale $f \in \mathcal{X}^*$ ein Element $x \in \mathcal{X}$ existiert, so dass

$$f(x_n) \rightarrow f(x) \quad \text{für} \quad n \rightarrow \infty,$$

gilt. Man schreibt dann $x_n \rightharpoonup x$.

Definition 2.1.18. (Schwache Unter- und Oberhalbstetigkeit in Banachräumen)

Ein Funktional $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ in einem Banachraum \mathcal{X} heißt *schwach unterhalbstetig*, falls für eine schwach konvergente Folge $\{x_n\}$

$$f(x_n) \leq c \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq c \quad \left(\Leftrightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq f(x) \right)$$

gilt. Umgekehrt heißt f *schwach oberhalbstetig*, falls $-f$ *unterhalbstetig* ist, also mit einer schwach konvergenten Folge $\{x_n\}$

$$-f(x_n) \leq c \quad \Rightarrow \quad -f(x) \leq c \quad \left(\Leftrightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq f(x) \right)$$

gilt.

Definition 2.1.19. (Stetigkeit zwischen Banachräumen)

Man definiere die Menge $N_\varepsilon(f(x)) = \{f(a) \in \mathbb{R} \mid \|f(a) - f(x)\| < \varepsilon\}$. Eine Abbildung $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ zwischen zwei Banachräumen \mathcal{X} und \mathcal{Y} ist stetig in \hat{x} genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass mit $\hat{y} = f(\hat{x})$ die Inklusion $N_\delta(\hat{x}) \subseteq f^{-1}(N_\varepsilon(\hat{y}))$ gültig ist. f ist genau dann stetig, wenn es in jedem Punkt $x \in \mathcal{X}$ stetig ist. Alternativ ist f stetig in $\hat{x} \in \mathcal{X}$ genau dann, wenn für jede Folge $\{x_t\}$ in \mathcal{X} mit $x_t \rightarrow \hat{x}$ auch $f(x_t) \rightarrow f(\hat{x})$ gilt.

Definition 2.1.20. (Schwache Folgenstetigkeit)

Eine Abbildung $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ zwischen zwei reellen Banachräumen \mathcal{X} und \mathcal{Y} heißt schwach folgenstetig, wenn aus der schwachen Konvergenz einer beliebigen Folge $\{x_n\}$ von Elementen aus \mathcal{X} mit Grenzwert x in \mathcal{X} folgt, dass die zugehörige Bildfolge $\{F(x_n)\}$ ebenfalls schwach gegen $F(x)$ in \mathcal{Y} konvergiert, was

$$x_n \rightarrow x \quad \Rightarrow \quad F(x_n) \rightarrow F(x) \quad \text{für } x \rightarrow \infty$$

(und $f(F(x_n)) \rightarrow f(F(x))$ für $n \rightarrow \infty$ für alle Funktionale $f \in \mathcal{Y}$) bedeutet.

Definition 2.1.21. (Schwache Folgenabgeschlossenheit)

M sei eine Teilmenge eines reellen Banachraums \mathcal{X} . M heißt schwach folgenabgeschlossen, wenn für jede schwach konvergente Folge $\{x_n\}$ mit $x_n \in M$ auch ihr schwacher Grenzwert wieder in M liegt:

$$x_n \rightarrow x \quad \Rightarrow \quad x \in M.$$

Definition 2.1.22. (Relativ schwache Folgenkompaktheit)

M sei wieder eine Teilmenge eines reellen Banachraums \mathcal{X} . M heißt relativ schwach folgenkompakt, wenn aus jeder Folge $\{x_n\}$ in M eine schwach konvergente Teilfolge $\{x_{n_k}\}$ mit Grenzwert in \mathcal{X} ausgewählt werden kann, d.h.

$$\forall \{x_n\} \in M \quad \exists \{x_{n_k}\} \quad \text{mit } x_{n_k} \rightarrow x \quad \text{und } x \in \mathcal{X} \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Definition 2.1.23. (Schwache Folgenkompaktheit)

Jede relativ schwach folgenkompakte Menge, die außerdem schwach folgenabgeschlossen ist, heißt schwach folgenkompakt.

Konvexitätsbegriffe**Definition 2.1.24. ((strikte) Konvexität für Funktionale und Mengen auf Banachräumen)**

(i) Ein Funktional f im reellen Banachraum \mathcal{X} heißt konvex, falls

$$f(tx + (1-t)y) \leq t \cdot f(x) + (1-t) \cdot f(y) \quad \forall x, y \in \mathcal{X} \quad \forall t \in (0, 1)$$

gilt. Das Funktional wird strikt konvex genannt, falls in der Ungleichung \leq durch $<$ ersetzt werden kann.

(ii) Eine Teilmenge $M \subset \mathcal{X}$ heißt konvex, wenn für zwei beliebige Elemente $x, y \in M$ gilt, dass auch die Konvexkombination $tx + (1-t)y \quad \forall t \in (0, 1)$ zu M gehört.

Definition 2.1.25. ($-K$ -Konvexität)

$F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ sei eine stetige, Fréchet-differenzierbare Abbildung zwischen Banachräumen \mathcal{X} und \mathcal{Y} , $K \subseteq \mathcal{Y}$ ein nichtleerer, abgeschlossener, konvexer Kegel. Die Abbildung F heißt $-K$ -konvex, falls gilt:

$$F(\lambda x + (1 - \lambda)y) - \lambda F(x) - (1 - \lambda)F(y) \in K \quad \forall x, y \in \mathcal{X} \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

2.2 Hilfsresultate für Existenz und Eindeutigkeit

Für die Existenz- und Eindeutigkeitstheorie für (BO) in Kapitel 3 werden im kommenden Abschnitt noch einige zentrale Resultate aus der Funktionalanalysis geordnet präsentiert. Auf diese Weise kann die Analyse in diesem Kapitel sauberer durchgeführt werden.

Satz 2.2.1.

Sei \mathcal{X} ein Banachraum und $V \in \mathcal{X}$ eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge. Ist dann $\{x_n\}$ eine schwach konvergente Folge in V mit $x_n \rightarrow x$, so gilt $x \in V$.

Satz 2.2.2.

Jeder lineare Operator $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ ist schwach folgenstetig.

Beweis. Zu zeigen ist, dass aus $x_n \rightarrow x$ folgt, dass $Ax_n \rightarrow Ax$ gilt, was $f(Ax_n) \rightarrow f(Ax)$ für alle $f \in \mathcal{Y}^*$ bedeutet. Für ein fixiertes $f \in \mathcal{Y}^*$ ist das (zusammengesetzte) Funktional F , definiert durch $F(x) := f(Ax)$, linear und stetig auf \mathcal{X} und demnach ein Element aus \mathcal{X}^* . Aus der schwachen Konvergenz der Folge $\{x_n\}$ folgt dann $F(x_n) \rightarrow F(x)$. Aus der Konstruktion von F folgt $f(Ax_n) \rightarrow f(Ax)$ und aus der Beliebigkeit von f schließlich $Ax_n \rightarrow Ax$. □

Satz 2.2.3.

Jede beschränkte Teilmenge eines reflexiven Banachraums ist relativ schwach folgenkompakt.

Satz 2.2.4.

Jede konvexe und abgeschlossene Menge eines Banachraums ist schwach folgenabgeschlossen. Ist der Raum reflexiv und die Menge zusätzlich beschränkt, dann ist sie schwach folgenkompakt.

Die nächsten drei Sätze werden für den Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis einer Lösung für die Follower-Ebene eine entscheidende Rolle spielen.

Satz 2.2.5.

Es sei $f : M \rightarrow (-\infty, \infty]$ eine Abbildung von einer abgeschlossenen, konvexen Menge M mit $M \subset \mathcal{X}$ in einem Banachraum \mathcal{X} .

(i) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (a) $U_t = f^{-1}([t, \infty)) = \{x \in M \mid f(x) \geq t\}$ ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ abgeschlossen.
- (b) $f^{-1}((-\infty, t)) = [U_t]^c$ ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ offen.
- (c) Für jedes $x \in M$ gilt: Falls eine Folge $\{x_n\}$ in M gegen x konvergiert, dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein N , so dass für alle $n > N$ die Ungleichung $f(x) > f(x_n) - \varepsilon$ gilt.

(ii) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (a) $L_t = f^{-1}((-\infty, t]) = \{x \in M \mid f(x) \leq t\}$ ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ abgeschlossen.
- (b) $f^{-1}((t, \infty)) = [L_t]^c$ ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ offen.
- (c) Für jedes $x \in M$ gilt: Falls eine Folge $\{x_n\}$ in M gegen x konvergiert, dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein N , so dass für alle $n > N$ die Ungleichung $f(x) < f(x_n) + \varepsilon$ gilt.

Beweis. Bewiesen werden nur die Äquivalenzen der Aussagen (a) – (c) unter Punkt (i). Der Beweis für die Aussagen unter (ii) läuft komplett analog.

- (i)(a) \Rightarrow (i)(b): Da U_t genau dann abgeschlossen ist, wenn $[U_t]^c$ offen ist, folgt die Aussage unmittelbar.
- (i)(b) \Rightarrow (i)(c): Man beginnt mit der Gegenannahme, dass es ein $x \in M$ und eine Folge $\{x_n\}$ in M gibt, die gegen x konvergiert, so dass für ein $\varepsilon > 0$ unendlich viele n mit $f(x) \leq f(x_n) - \varepsilon$ existieren. Wähle ein $t \in (f(x), f(x) + \varepsilon)$. Dann existieren unendlich viele n mit $x_n \in U_t$. Diese x_n bilden eine Folge in U_t , die gegen x konvergiert. Jedoch gilt $x \notin U_t$. Damit ist U_t nicht abgeschlossen und $[U_t]^c$ folglich nicht offen.
- (i)(c) \Rightarrow (i)(a): Man wähle ein $t \in \mathbb{R}$. Bei $U_t = \emptyset$ ist nichts weiter zu tun. Anderenfalls wähle eine konvergente Folge $\{x_n\}$ in U_t mit $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Gezeigt werden muss $x \in U_t$. Nach (i)(c) existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein N , sodass für alle $n > N$

$$f(x) > f(x_n) - \varepsilon$$

gilt. Wegen $x_n \in U_t$ und $f(x_n) \geq t$ folgt $f(x) > t - \varepsilon$. Da dies für beliebiges $\varepsilon > 0$ gelten muss, folgt $f(x) \geq t$, was $x \in U_t$ impliziert.

□

Satz 2.2.6.

Die Abbildung $f : M \rightarrow [-\infty, \infty]$ mit $M \subseteq \mathcal{X}$ in einem Banachraum \mathcal{X} ist stetig genau dann, wenn sie sowohl von unten als auch von oben halbstetig ist.

Beweis. Die jeweilige Existenz des Index N in den Aussagen (i)(c) und (ii)(c) aus Satz 2.2.5 ist äquivalent dazu, dass zu jeder gegen x konvergenten Folge $\{x_n\}$ für jedes $\varepsilon > 0$ ein N' existiert, so dass für alle $n > N'$

$$f(x_n) \in N_\varepsilon(f(x)) = \{f(a) \in \mathbb{R} \mid \|f(a) - f(x)\| < \varepsilon\}$$

gilt und $f(x_n)$ folglich gegen $f(x)$ konvergiert. Damit ist f nach Definition 2.1.19 stetig.

□

Satz 2.2.7.

Es sei $F : M \rightarrow [-\infty, \infty]$ in einem Banachraum \mathcal{X} mit $M \subseteq \mathcal{X}$ und man betrachte die folgenden Aussagen:

- (i) F ist unterhalbstetig auf M .
- (ii) F ist folgenhalbstetig von unten auf M .
- (iii) F ist schwach unterhalbstetig auf M .

Dann gilt:

1. Die Aussagen (i) und (ii) sind äquivalent.
2. Falls M abgeschlossen und konvex und F konvex ist, so sind die Aussagen (i),(ii) und (iii) paarweise äquivalent.

Beweis.

Zu 1:

(i) \Rightarrow (ii) : Falls F nicht folgenhalbstetig von unten in u ist, so existiert eine Folge $\{u_n\}$ in M mit $u_n \rightarrow u$ und $F(u) > \liminf_{n \rightarrow \infty} F(u_n)$. Dann existieren weiter Zahlen r und n_0 , sodass $F(u) > r \geq F(u_n) \forall n \geq n_0$ gilt. Dies steht allerdings im Widerspruch zur relativen Abgeschlossenheit von $M_t = \{x \in M \mid f(x) \leq t\}$ bzgl. M .

(ii) \Rightarrow (i) : Aus $u_n \in M_r$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $u_n \rightarrow u$ für $n \rightarrow \infty$ folgt, dass $F(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F(u_n) \leq r$ und damit $u \in M_r$ gilt.

Zu 2:

(i) \Rightarrow (iii) : $M_t \subset M$ ist jetzt konvex und abgeschlossen und damit schwach abgeschlossen, was für $u_n \rightarrow u$ ($n \rightarrow \infty$) bei $u_n \in M_t$ immer $u \in M_t$ bedeutet. Falls F nicht schwach unterhalbstetig für beliebiges u ist, so folgt für die schwach gegen u konvergente Folge $\{u_n\}$, dass $F(u) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} F(u_n)$ gilt, und es existieren ein r und ein n_0 , sodass

$$F(u) > r \geq F(u_n) \quad \forall n \geq n_0$$

gilt, was im Widerspruch zur schwachen Folgenabgeschlossenheit von M_t steht.

(iii) \Rightarrow (i) : Umgekehrt gilt durch die schwache Unterhalbstetigkeit von F zusammen mit der Abgeschlossenheit und Konvexität von M die Unterhalbstetigkeit von F auf M . Für jede schwach konvergente Folge $\{u_n\}$ mit $u_n \in M_t$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $u_n \rightarrow u$ für $n \rightarrow \infty$ gilt nämlich

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(u_n) \geq f(u),$$

wodurch in Verbindung mit der schwachen Folgenabgeschlossenheit von M

$$M_t = \{x \in M \mid f(x) \leq t\}$$

für alle t abgeschlossen ist.

□

3 Existenz- und Eindeutigkeitsresultate zu (BO)

3.1 Existenztheorie der Follower-Ebene

In diesem Abschnitt widmen wir uns der Frage, ob es für die untere Ebene von (BO) als separat betrachtetes Optimalsteuerproblem stets eine Lösung gibt und diese darüber hinaus möglicherweise sogar eindeutig ist. Betrachtet wird im Folgenden also

$$\min_{u^F} f^F(y^L, y^F, u^F) := \frac{1}{2} \|y^L + y^F - y_d^F\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha^F}{2} \|u^F\|_{L^2(\Omega)}^2$$

bei

$$\begin{aligned} -\Delta y^L &= u^L & \text{in } \Omega, & & -\Delta y^F &= u^F & \text{in } \Omega, \\ y^L &= 0 & \text{auf } \Gamma, & & y^F &= 0 & \text{auf } \Gamma \end{aligned} \quad (BO_F^{\text{sep}})$$

und

$$u^F \in U_{\text{ad}}^F = \left\{ u^F(x) \in L^2(\Omega) \mid u_a^F(x) \leq u^F(x) \leq u_b^F(x) \text{ fast überall in } \Omega \right\}.$$

Vor dem Hintergrund der nachgewiesenen eindeutigen Lösbarkeit von (PO_L) und (PO_F) in Satz 2.1.11 wird der eindeutige Lösungsoperator

$$S : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega), \quad u^L \mapsto y^L(u^L),$$

- im Rahmen von Optimalsteuerproblemen häufig auch als Steuerungs-Zustands-Operator bezeichnet - definiert. Doch wieso kann hier $L^2(\Omega)$ als Bild- **und** Urbildraum verwendet werden? Der Raum $H^1(\Omega)$ und damit auch sein Teilraum $H_0^1(\Omega)$ sind, wie bereits angemerkt, wegen $\|y\|_{L^2(\Omega)} \leq \|y\|_{H^1(\Omega)}$ linear und stetig (und unter stärkeren Voraussetzungen nach einem Satz von Rellich sogar kompakt, vgl. [34] und [43]) in $L^2(\Omega)$ eingebettet. G kann deswegen alternativ auch als linearer und stetiger Operator mit Bild in $L^2(\Omega)$ aufgefasst werden. Genauer entspricht der oben definierte Operator S also nicht unmittelbar G , sondern $E_{\mathcal{Y}}G$, wobei $E_{\mathcal{Y}} : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ als Einbettungsoperator jeder Funktion $y \in \mathcal{Y} = H^1(\Omega)$ die gleiche Funktion in $L^2(\Omega)$ zuordnet. $E_{\mathcal{Y}}$ ist linear und stetig und da $H_0^1(\Omega)$ Teilraum von $H^1(\Omega)$ ist und ihre Normen äquivalent sind, bettet $E_{\mathcal{Y}}$ auch $H_0^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ ein. Die Benutzung von $L^2(\Omega)$ anstelle von $H_0^1(\Omega)$ als Bildraum hat zudem den Vorteil, dass der adjungierte Operator S^* , der später beim Differenzieren der Zielfunktionale auf beiden Ebenen auftritt, wieder im Raum $L^2(\Omega)$ wirkt. Dies liegt daran, dass $L^2(\Omega)$ aufgrund der Definition der konjugierten Exponenten p und q durch $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ sein eigener Dualraum ist ($(L^p(\cdot))^* = L^q(\cdot)$ für $1 < p < \infty$).

Da (PO_F) die gleiche Struktur wie (PO_L) besitzt, stellt

$$S : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega), \quad u^F \mapsto y^F(u^F),$$

mit der gleichen Motivation den linearen und stetigen Steuerungs-Zustands-Operator (bzw. Lösungsoperator) dar.

Vor diesem Hintergrund kann das Optimalsteuerproblem auf der Follower-Ebene jetzt in ein quadratisches Optimierungsproblem im (reflexiven) Hilbertraum $L^2(\Omega)$ umgeschrieben werden. Zusammen mit dem Superpositionsprinzip und dem soeben definierten Lösungsoperator S können die Lösungen der beiden partiellen Differentialgleichungen direkt in das (um y^F und y^L) reduzierte Zielfunktional integriert werden:

$$\min_{u^F} f^F(u^F) := \frac{1}{2} \|Su^L + Su^F - y_d^F\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha^F}{2} \|u^F\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (BO_F^{\text{red}})$$

bei

$$u^F \in U_{\text{ad}}^F = \left\{ u^F(x) \in L^2(\Omega) \mid u_a^F(x) \leq u^F(x) \leq u_b^F(x) \text{ fast überall in } \Omega \right\}.$$

Die Differenz $Su^L - y_d^F$ im ersten Summanden der Zielfunktion stellt hierbei aus der Perspektive des Followers nach wie vor eine fixierte Funktion aus $L^2(\Omega)$ dar. Um eine Aussage bezüglich Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des Problems (BO_F^{sep}) machen zu können, schaut man sich zuletzt die Zielfunktion $f^F(u^F)$ und die Menge der für den Follower zulässigen Steuerungen U_{ad}^F an.

Lemma 3.1.1.

Die Zielfunktion $f^F(u^F)$ ist konvex (im Fall $\alpha^F > 0$ sogar strikt konvex) und die Menge der für den Follower zulässigen Steuerungen U_{ad}^F ist eine beschränkte, abgeschlossene und konvexe Teilmenge des $L^2(\Omega)$.

Beweis.

- Für alle $t \in (0, 1)$ gilt zunächst in einem Hilbertraum \mathcal{U}

$$\begin{aligned} \|tu + (1-t)v\|_{\mathcal{U}}^2 &= t^2 \|u\|_{\mathcal{U}}^2 + 2t(1-t)(u, v)_{\mathcal{U}} + (1-t)^2 \|v\|_{\mathcal{U}}^2 \\ &= t \|u\|_{\mathcal{U}}^2 + (1-t) \|v\|_{\mathcal{U}}^2 - (t-t^2) \|u\|_{\mathcal{U}}^2 + 2t(1-t)(u, v)_{\mathcal{U}} \\ &\quad - \underbrace{((1-t) - (1-t)^2)}_{=t-t^2} \|v\|_{\mathcal{U}}^2 \\ &= t \|u\|_{\mathcal{U}}^2 + (1-t) \|v\|_{\mathcal{U}}^2 - (t-t^2) \|u - v\|_{\mathcal{U}}^2. \end{aligned}$$

Wegen $t^2 < t$ folgt weiter

$$\|tu + (1-t)v\|_{\mathcal{U}}^2 \leq t \|u\|_{\mathcal{U}}^2 + (1-t) \|v\|_{\mathcal{U}}^2,$$

was bedeutet, dass $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}^2$ konvex ist, wodurch gezeigt ist, dass beide Summanden von f^F konvex sind. Deswegen gilt weiter

$$\begin{aligned} f^F(tu + (1-t)v) &\leq \frac{t}{2} \|S(u) + S(u^L) - y_d^F\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha^F t}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{1-t}{2} \|S(v) + S(u^L) - y_d^F\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha^F (1-t)}{2} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= t \cdot f^F(u) + (1-t) \cdot f^F(v). \end{aligned}$$

Die strikte Konvexität folgt aus der Tatsache, dass für $u \neq v$ sogar gilt:

$$\|tu + (1-t)v\|_{\mathcal{U}}^2 < t \|u\|_{\mathcal{U}}^2 + (1-t) \|v\|_{\mathcal{U}}^2.$$

- Dass U_{ad}^F eine beschränkte Teilmenge des $L^2(\Omega)$ ist, sieht man leicht ein: Für alle $u^F \in U_{\text{ad}}^F$ gilt $\|u^F\|_{L^2(\Omega)} < \|u_a^F\|_{L^2(\Omega)} + \|u_b^F\|_{L^2(\Omega)}$, was bedeutet, dass U_{ad}^F beschränkt ist.

- Die Konvexität sieht man wie folgt ein: Für beliebige $u, v \in U_{\text{ad}}^F$ und $t \in [0, 1]$ gilt

$$u_a^F = tu_a^F + (1-t)u_a^F \leq tu + (1-t)v \leq tu_b^F + (1-t)u_b^F = u_b^F,$$

woraus $tu + (1-t)v \in U_{\text{ad}}^F$ für beliebige $u, v \in U_{\text{ad}}^F$ mit $t \in [0, 1]$ folgt.

- Die Abgeschlossenheit kann indirekt gezeigt werden: Angenommen $\{u_n^F\} \subset U_{\text{ad}}^F$ ist eine konvergente Folge mit Grenzelement $u^F \notin U_{\text{ad}}^F$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird weiter angenommen, dass die Einhaltung der Beschränkung $u_a^F < u^F$ verletzt ist. Dann existiert eine Menge $M \subset \Omega$, die positives Maß hat, so dass $u^F < u_a^F$ fast überall in M gilt. Es folgt

$$0 < (u^F - u_a^F, 1)_{L^2(M)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{(u^F - u_n^F, 1)_{L^2(M)}}_{\leq 0} \leq 0,$$

was ein Widerspruch ist. Damit folgt $u \in U_{\text{ad}}^F$ und die Abgeschlossenheit von U_{ad}^F .

□

Definition 3.1.2. (optimale Steuerung)

Eine Steuerung $\bar{u}^F \in U_{\text{ad}}^F = \left\{ u^F(x) \in L^2(\Omega) \mid u_a^F(x) \leq u^F(x) \leq u_b^F(x) \text{ fast überall in } \Omega \right\}$ wird optimale Steuerung und $\bar{y}^F = y^F(\bar{u}^F)$ zugehöriger optimaler Zustand genannt, wenn für das Zielfunktional $f^F(y^L, y^F, u^F)$ die Relation

$$f^F(y^L, \bar{y}^F, \bar{u}^F) \leq f^F(y^L, y^F, u^F) \quad \forall u^F \in U_{\text{ad}}^F \text{ mit } y^F = y(u^F)$$

gilt.

Mit den präsentierten Resultaten sind wir nun in der Lage einen Existenzsatz für (BO_F^{red}) zu formulieren und zu beweisen.

Satz 3.1.3. (Existenzsatz für Follower)

Die Menge zulässiger Steuerungen U_{ad}^F sei nichtleer. Dann hat das Problem (BO_F^{red}) für jedes fixierte $u^L \in L^2(\Omega)$ eine optimale und eindeutige Lösung \bar{u}^F .

Beweis. Da $f^F(u^F) \geq 0$ für alle $u^F \in U_{\text{ad}}^F$ gilt, kann man schließen, dass das Infimum

$$j := \inf_{u^F \in U_{\text{ad}}^F} f^F(u^F)$$

existiert. Demnach existiert eine Infimalfolge $\{u_n^F\} \subset U_{\text{ad}}^F$ mit $f^F(u_n^F) \rightarrow j$ für $n \rightarrow \infty$. Da U_{ad}^F nach Lemma 3.1.1 eine beschränkte Teilmenge eines reflexiven Banachraums ist, ist sie nach Satz 2.2.3 insbesondere schwach folgenkompakt, was

$$\text{zu } \{u_n^F\} \in U_{\text{ad}}^F \quad \exists \quad \{u_{n_k}^F\} \quad \text{mit} \quad u_{n_k} \rightharpoonup \bar{u} \in \Omega^F \quad \text{für} \quad k \rightarrow \infty$$

bedeutet. Da die Menge U_{ad}^F nach Lemma 3.1.1 des Weiteren konvex und abgeschlossen ist, ist sie nach Satz 2.2.4 schwach folgenabgeschlossen, was für den obigen Grenzwert \bar{u} der Teilfolge $\{u_{n_k}^F\}$ schließlich $\bar{u} \in U_{\text{ad}}^F$ bedeutet. Relativ schwache Folgenkompaktheit und schwache Folgenabgeschlossenheit liefern nach Definition 2.1.23 und Satz 2.2.4 schwache Folgenkompaktheit. Da das Zielfunktional f^F nach Lemma 3.1.1 konvex und der Lösungsoperator S nach Korollar 2.1.14 und der darauffolgenden Bemerkung stetig ist, ist f^F selbst ebenfalls stetig. Zusammen mit den Resultaten aus Satz 2.2.6 und Satz 2.2.7 folgt die schwache Unterhalbstetigkeit von f^F , was bedeutet, dass für die schwach konvergente Folge $\{u_{n_k}^F\}$ mit Grenzwert in U_{ad}^F

$$\{u_{n_k}^F\} \text{ mit } u_{n_k} \rightarrow \bar{u} \quad \Rightarrow \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} f^F(u_{n_k}^F) \geq f^F(\bar{u}^F)$$

gilt. Da j das existierende Infimum sein soll und \bar{u}^F in U_{ad}^F liegt und nicht kleiner als j werden kann, muss $j = f^F(\bar{u}^F)$ gelten. Damit ist \bar{u}^F eine optimale Steuerung.

Weiter ist f^F nach Lemma 3.1.1 strikt konvex. Die Eindeutigkeit von \bar{u}^F im Fall strikter Konvexität von f^F wird durch eine Widerspruchsannahme deutlich: Falls $\bar{v}^F \in U_{\text{ad}}^F$ eine weitere globale Lösung mit $\bar{u}^F \neq \bar{v}^F$ ist, so gilt mit der strikten Konvexität von f^F für beliebiges $t \in (0, 1)$

$$f^F(t\bar{u}^F + (1-t)\bar{v}^F) \leq tf^F(\bar{u}^F) + (1-t)f^F(\bar{v}^F) = tj + (1-t)j = j.$$

Auf diese Weise würde beispielsweise der Wert $\frac{1}{2}(f^F(\bar{u}^F) + f^F(\bar{v}^F))$ auf der linken Seite als Konvexkombination in U_{ad}^F liegen (aufgrund der Konvexität von U_{ad}^F) und einen kleineren Funktionswert als j liefern, welches das Infimum beschreibt. Das führt zu einem Widerspruch, womit die Eindeutigkeit der optimalen Steuerung bei strikter Konvexität des Zielfunktionals gezeigt ist. □

3.2 Ein Optimalitätssystem für die Follower-Ebene

Das Optimalitätssystem wird hier mithilfe der formalen Lagrange-Technik bestimmt (vgl. [73], Kapitel 6). Es gibt allerdings noch andere Wege (siehe bspw. [73]). Wir werden uns an der Struktur des Problems (BO_F^{sep}) aus Abschnitt 1.4 orientieren. Zunächst wird der sogenannte adjungierte Zustand zum Follower-Problem hergeleitet. Dazu werden die beiden PDE-Nebenbedingungen (BO_F^{sep}) als Erstes (mittels Anwendung des Superpositionsprinzips) wieder zusammengefügt:

$$\min_{u^F} f^F(y^L, y^F, u^F) := \frac{1}{2} \|y^L + y^F - y_d^F\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha^F}{2} \|u^F\|_{L^2(\Omega)}^2$$

bei

$$\begin{aligned} -\Delta y^L - \Delta y^F &= u^L + u^F && \text{in } \Omega \\ y^L + y^F &= 0 && \text{auf } \Gamma \end{aligned} \quad (BO_F)$$

und

$$u^F \in U_{\text{ad}}^F = \left\{ u^F(x) \in L^2(\Omega) \mid u_a^F(x) \leq u^F(x) \leq u_b^F(x) \text{ fast überall in } \Omega \right\}.$$

3.2.1 Lagrange-Funktion und Variationsungleichung

Zu einer optimalen Steuerung \bar{u}^F und einem zugehörigen optimalen Zustand \bar{y}^F ist die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}^F : H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ zum Problem (BO_F) definiert als

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^F(\bar{y}^F, \bar{u}^F, \bar{p}^F) &= f^F(y^L, \bar{y}^F, \bar{u}^F) - (-\Delta y^L - \Delta \bar{y}^F - u^L - \bar{u}^F, \bar{p}^F)_{L^2(\Omega)} \\ &= \frac{1}{2} \|y^L + \bar{y}^F - y_d^F\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha^F}{2} \|\bar{u}^F\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad - \left[- \int_{\Omega} \Delta y^L \bar{p}^F \, dx - \int_{\Omega} \Delta \bar{y}^F \bar{p}^F \, dx - \int_{\Omega} u^L \bar{p}^F \, dx - \int_{\Omega} \bar{u}^F \bar{p}^F \, dx \right]. \end{aligned}$$

Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \|y^L + \bar{y}^F - y_d^F\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha^F}{2} \|\bar{u}^F\|_{L^2(\Omega)}^2 - \left[- \underbrace{\int_{\Gamma} \partial_{\nu} y^L \bar{p}^F \, ds}_{=0} + \int_{\Omega} \nabla y^L \nabla \bar{p}^F \, dx \right. \\ &\quad \left. - \underbrace{\int_{\Gamma} \partial_{\nu} \bar{y}^F \bar{p}^F \, ds}_{=0} + \int_{\Omega} \nabla \bar{y}^F \nabla \bar{p}^F \, dx - \int_{\Omega} u^L \bar{p}^F \, dx - \int_{\Omega} \bar{u}^F \bar{p}^F \, dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \|y^L + \bar{y}^F - y_d^F\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha^F}{2} \|\bar{u}^F\|_{L^2(\Omega)}^2 - \int_{\Omega} \nabla y^L \nabla \bar{p}^F \, dx - \int_{\Omega} \nabla \bar{y}^F \nabla \bar{p}^F \, dx \\ &\quad + \int_{\Omega} u^L \bar{p}^F \, dx + \int_{\Omega} \bar{u}^F \bar{p}^F \, dx. \end{aligned}$$

\bar{p}^F wird (auch) als Lagrange-Multiplikator bezeichnet (siehe Abschnitt 4.3). Die Herleitung der schwachen Formulierung der adjungierten Gleichung erfolgt über Multiplikation von $D_{\bar{y}^F} \mathcal{L}^F(\bar{y}^F, \bar{u}^F, \bar{p}^F)$ mit einer beliebigen Testfunktion $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} D_{\bar{y}^F} \mathcal{L}^F(\bar{y}^F, \bar{u}^F, \bar{p}^F) \cdot v &= (y^L + \bar{y}^F - y_d^F, v)_{L^2(\Omega)} - D_{\bar{y}^F} \left(\int_{\Omega} \nabla \bar{y}^F \nabla \bar{p}^F \, dx \right) \cdot v \\ &= (y^L + \bar{y}^F - y_d^F, v)_{L^2(\Omega)} - D_{\bar{y}^F} \left(\underbrace{\int_{\Gamma} \bar{y}^F \partial_{\nu} \bar{p}^F \, ds}_{=0} - \int_{\Omega} \bar{y}^F \Delta \bar{p}^F \, dx \right) \cdot v \\ &= (y^L + \bar{y}^F - y_d^F, v)_{L^2(\Omega)} + (\Delta \bar{p}^F, v)_{L^2(\Omega)} \\ &= \int_{\Omega} (y^L + \bar{y}^F - y_d^F) \cdot v \, dx + \int_{\Omega} \Delta \bar{p}^F \cdot v \, dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Aufgrund der Beliebigkeit von v folgt aus obiger schwacher Formulierung für alle Tupel (y^F, u^F) schließlich das Problem

$$\begin{aligned} -\Delta p^F = y^L + \bar{y}^F - y_d^F & \quad \text{in } \Omega, & \iff & \quad p^F = S^*(Su^L + S\bar{u}^F - y_d^F) & \quad \text{in } \Omega, \\ p^F = 0 & \quad \text{auf } \Gamma, & & \quad p^F = 0 & \quad \text{auf } \Gamma, \end{aligned} \quad (3.1)$$

dessen Lösung den adjungierten Zustand \bar{p}^F zur Lösung $\bar{y}^F(\bar{u}^F)$ darstellt. S^* stellt den zu S adjungierten Lösungsoperator dar. An dieser Stelle sei noch einmal betont, dass sowohl y_d^F als auch y^L in diesem Kontext fixe Funktionen sind. Die rechte Seite ist aus $L^2(\Omega)$, da $y_d^F \in L^2(\Omega)$ vorausgesetzt wurde und $y^L, y^F \in Y = H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ gilt. Nach Satz 2.1.11 besitzt obiges Problem genau eine Lösung $p^F \in H_0^1(\Omega)$.

Auf dem gleichen Weg kann die Nebenbedingung $u^F \in U_{\text{ad}}^F$ durch Differenzieren der Lagrange-funktion \mathcal{L}^F nach u^F 'verarbeitet' werden. Das Resultat ist eine Variationsungleichung, deren Erfüllung eine sowohl notwendige als auch hinreichende Optimalitätsbedingung ist. \bar{u}^F sei im Folgenden eine Lösung von (BO_F) :

$$\begin{aligned} D_{\bar{u}^F} \mathcal{L}^F(\bar{y}^F, \bar{u}^F, \bar{p}^F)(u^F - \bar{u}^F) &= \alpha^F(\bar{u}^F, u^F - \bar{u}^F)_{L^2(\Omega)} + (\bar{p}^F, u^F - \bar{u}^F)_{L^2(\Omega)} \geq 0 \\ &\iff \int_{\Omega} (\alpha^F \bar{u}^F + \bar{p}^F)(u^F - \bar{u}^F) \, dx \geq 0 \quad \forall u^F \in U_{\text{ad}}^F. \end{aligned}$$

Dies motiviert

Satz 3.2.1.

Zu einer optimalen Steuerung \bar{u}^F von (BO_F) und einem zugehörigen optimalen Zustand \bar{y}^F existiert genau eine schwache Lösung \bar{p}^F von (3.1), so dass die Variationsungleichung

$$\int_{\Omega} (\bar{p}^F(x) + \alpha^F \bar{u}^F(x))(u^F(x) - \bar{u}^F(x)) \, dx \geq 0 \quad \forall u^F \in U_{\text{ad}}^F \quad (3.2)$$

erfüllt ist. Umgekehrt ist jedes $\bar{u}^F \in U_{\text{ad}}^F$ optimal, das mit dem zugehörigen optimalen Zustand $\bar{y}^F = \bar{y}^F(\bar{u}^F)$ und der Lösung \bar{p}^F von (3.1) der Variationsungleichung (3.2) genügt.

Bemerkung 3.2.2.

Die Umkehrung der Aussage im zweiten Teil des Satzes ist wegen der Konvexität von f^F gültig. Eine Steuerung u^F ist also genau dann Lösung von (BO_F) , wenn sie zusammen mit y^F und p^F das Optimalitätssystem

$$\begin{aligned} -\Delta y^L - \Delta y^F = u^L + u^F & \quad \text{in } \Omega, & -\Delta p^F = y^L + y^F - y_d^F & \quad \text{in } \Omega, \\ y^L + y^F = 0 & \quad \text{auf } \Gamma, & p^F = 0 & \quad \text{auf } \Gamma, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$(p^F + \alpha^F u^F, u - u^F)_{L^2(\Omega)} \geq 0 \quad \forall u \in U_{\text{ad}}^F,$$

$$u^F \in U_{\text{ad}}^F = \left\{ u^F(x) \in L^2(\Omega) \mid u_a^F(x) \leq u^F(x) \leq u_b^F(x) \text{ fast überall in } \Omega \right\}$$

erfüllt.

3.2.2 Punktweise Diskussion der Variationsungleichung und die Projektionsgleichung

Die Variationsungleichung (3.2) kann in die Form

$$\int_{\Omega} (\bar{p}^F + \alpha^F \bar{u}^F) \bar{u}^F dx \leq \int_{\Omega} (\bar{p}^F + \alpha^F \bar{u}^F) u^F dx \quad \forall u^F \in U_{\text{ad}}^F$$

bzw.

$$\int_{\Omega} (\bar{p}^F + \alpha^F \bar{u}^F) \bar{u}^F dx = \min_{u^F \in U_{\text{ad}}^F} \int_{\Omega} (\bar{p}^F + \alpha^F \bar{u}^F) u^F dx$$

umgeschrieben werden. Mithilfe des schwachen Minimumprinzips (vgl. [73], Satz 2.27) folgt weiter, dass eine optimale Steuerung \bar{u}^F die Variationsungleichung (3.2) genau dann erfüllt, wenn

$$\bar{u}^F = \begin{cases} u_a^F(x), & \text{falls } \bar{p}^F(x) + \alpha^F \bar{u}^F(x) > 0, \\ \in [u_a^F(x), u_b^F(x)], & \text{falls } \bar{p}^F(x) + \alpha^F \bar{u}^F(x) = 0, \\ u_b^F(x), & \text{falls } \bar{p}^F(x) + \alpha^F \bar{u}^F(x) < 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

gilt. Da nach Voraussetzung stets $\alpha^F > 0$ gilt, liefert das Eintreten des mittleren Falls direkt die Beziehung

$$\bar{u}^F(x) = -\frac{1}{\alpha^F} \bar{p}^F(x),$$

was zu folgendem Satz führt:

Satz 3.2.3.

Bei $\alpha^F > 0$ ist \bar{u}^F genau dann die optimale Steuerung von (BO_F) , falls mit dem zugehörigen adjungierten Zustand \bar{p}^F die Projektionsgleichung

$$\bar{u}^F(x) = \mathbb{P}_{[u_a^F(x), u_b^F(x)]} \left\{ -\frac{1}{\alpha^F} \bar{p}^F(x) \right\} \quad (3.5)$$

für fast alle $x \in \Omega$ erfüllt ist. Hierbei gilt $\mathbb{P}_{[a,b]} := \min\{b, \max\{a, u\}\}$.

Beweis. Zunächst stellt man fest, dass $\bar{u}^F(x)$ genau dann optimal für (BO_F) ist, wenn es für fast alle $x \in \Omega$ das Minimumprinzip

$$\min_{v \in [u_a^F(x), u_b^F(x)]} \left(\bar{p}^F(x) \cdot v + \frac{\alpha^F}{2} \cdot v^2 \right) = \bar{p}^F(x) \cdot \bar{u}^F(x) + \frac{\alpha^F}{2} \cdot (\bar{u}^F(x))^2$$

erfüllt. Für ein fixiertes x kann für das konvexe, reellwertige Optimierungsproblem

$$\min_{v \in [u_a^F(x), u_b^F(x)]} g(v) := \left(\bar{p}^F(x) \cdot v + \frac{\alpha^F}{2} \cdot v^2 \right) \quad (3.6)$$

die Variationsungleichung

$$g'(\bar{v})(v - \bar{v}) \geq 0 \Leftrightarrow (\bar{p}^F(x) + \alpha^F \bar{v})(v - \bar{v}) \geq 0 \quad \forall v \in [u_a^F(x), u_b^F(x)] \quad (3.7)$$

formuliert werden. Für $\bar{v} = \bar{u}^F$ in (3.7) gelangt man zu (3.2).

Als Nächstes wird bewiesen, dass \bar{u}^F (3.6) umgekehrt löst, indem (3.7) in einer Fallunterscheidung ausgewertet wird:

$$1. \text{ Fall: } \bar{p}^F(x) + \alpha^F u_a^F(x) > 0 \Leftrightarrow u_a^F(x) > -\frac{1}{\alpha^F} \bar{p}^F(x).$$

In diesem Fall muss $v - \bar{v} \geq 0 \quad \forall v \in [u_a^F(x), u_b^F(x)]$ gelten. $\Rightarrow \bar{v} = u_a^F(x)$.

$$2. \text{ Fall: } \bar{p}^F(x) + \alpha^F u_b^F(x) < 0 \Leftrightarrow u_b^F(x) < -\frac{1}{\alpha^F} \bar{p}^F(x).$$

In diesem Fall muss $v - \bar{v} \leq 0 \quad \forall v \in [u_a^F(x), u_b^F(x)]$ gelten. $\Rightarrow \bar{v} = u_b^F(x)$.

$$3. \text{ Fall: } u_a^F(x) \leq -\frac{1}{\alpha^F} \cdot \bar{p}^F(x) \leq u_b^F(x) < -\frac{1}{\alpha^F} \bar{p}^F(x).$$

In diesem Fall muss

$$\begin{aligned} & (\bar{p}^F(x) + \alpha^F \bar{v}) \left(-\frac{1}{\alpha^F} \bar{p}^F(x) - \bar{v} \right) \geq 0 \quad \forall v \in [u_a^F(x), u_b^F(x)] \\ \Leftrightarrow & (\bar{p}^F(x) + \alpha^F \bar{v}) (\bar{p}^F(x) + \alpha^F \bar{v}) \cdot \left(-\frac{1}{\alpha^F} \right) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & -\|\bar{p}^F(x) + \alpha^F \bar{v}\|^2 \geq 0 \Rightarrow \bar{v} = -\frac{1}{\alpha^F} \cdot \bar{p}^F(x) \end{aligned}$$

gelten.

Zusammengefasst bedeutet das

$$\bar{v} = \left\{ \begin{array}{ll} u_a^F(x), & \text{falls } -\frac{1}{\alpha^F} \cdot \bar{p}^F(x) < u_a^F(x) \\ -\frac{1}{\alpha^F} \cdot \bar{p}^F(x), & \text{falls } u_a^F(x) < -\frac{1}{\alpha^F} \cdot \bar{p}^F(x) < u_b^F(x) \\ u_b^F(x), & \text{falls } -\frac{1}{\alpha^F} \cdot \bar{p}^F(x) < u_b^F(x) \end{array} \right\} = \bar{u}^F$$

$$\text{oder äquivalent } \bar{u}^F(x) = \mathbb{P}_{[u_a^F(x), u_b^F(x)]} \left\{ -\frac{1}{\alpha^F} \bar{p}^F(x) \right\}.$$

□

Damit nimmt das Optimalitätssystem (3.3) folgende Form an:

$$\begin{aligned} -\Delta y^L - \Delta y^F &= u^L + u^F & \text{in } \Omega, & & -\Delta p^F &= y^L + y^F - y_d^F & \text{in } \Omega, \\ y^L + y^F &= 0 & \text{auf } \Gamma, & & p^F &= 0 & \text{auf } \Gamma, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$u^F(x) = \mathbb{P}_{[u_a^F(x), u_b^F(x)]} \left\{ -\frac{1}{\alpha^F} p^F(x) \right\}$$

Mit dieser Erkenntnis lässt sich das Ausgangsproblem (BO) mit Hilfe des Lösungsoperators S folgendermaßen formulieren:

$$\begin{aligned} \min_{u^L} F^L(u^L, u^F) &:= \frac{1}{2} \|Su^L + Su^F - y_d^L\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha^L}{2} \|u^L\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \text{bei} \\ u^F &= \mathbb{P}_{[u_a^F(x), u_b^F(x)]} \left\{ -\frac{1}{\alpha^F} p^F(x) \right\} \end{aligned} \quad (3.9)$$

und

$$u^L \in U_{\text{ad}}^L = \left\{ u^L(x) \in L^2(\Omega) \mid u_a^L(x) \leq u^L(x) \leq u_b^L(x) \text{ fast überall in } \Omega \right\}.$$

Es ist also gelungen, das Bilevel-Optimalsteuerproblem (BO) durch Integration der Lösung der Follower-Ebene als Nebenbedingung in die Leader-Ebene in ein einstufiges Optimalsteuerproblem zu überführen. An dieser Stelle muss der adjungierte Zustand $p^F(x)$ im Argument der Projektionsformel durch $p^L(x)$ ersetzt werden, da ab hier die Perspektive des Leaders eingenommen wird, u^L und y^L keine fixierten Funktionen mehr sind und sich diese Eigenschaft auch auf den durch $-\Delta p^F = y^L + y^F - y_d^F$ definierten adjungierten Zustand p^F überträgt. Die adjungierte Gleichung hat aus der Sicht des Leaders die Gestalt

$$\begin{aligned} -\Delta p^L = y^L + y^F - y_d^F & \quad \text{in } \Omega, & \iff & \quad p^L = S^*(Su^L + Su^F - y_d^F) & \quad \text{in } \Omega, \\ p^L = 0 & \quad \text{auf } \Gamma, & & \quad p^L = 0 & \quad \text{auf } \Gamma, \end{aligned} \quad (3.10)$$

(3.9) wird zu

$$\begin{aligned} \min_{u^L} F^L(u^L, u^F) &:= \frac{1}{2} \|Su^L + Su^F - y_d^L\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha^L}{2} \|u^L\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \text{bei} \\ u^F &= \mathbb{P}_{[u_a^F(x), u_b^F(x)]} \left\{ -\frac{1}{\alpha^F} p^L(x) \right\} \end{aligned} \quad (BO_{\text{one}})$$

und

$$u^L \in U_{\text{ad}}^L = \left\{ u^L(x) \in L^2(\Omega) \mid u_a^L(x) \leq u^L(x) \leq u_b^L(x) \text{ fast überall in } \Omega \right\}$$

und das Optimalitätssystem (3.8) lautet schließlich

$$\begin{aligned} -\Delta y^L - \Delta y^F = u^L + u^F & \quad \text{in } \Omega, & -\Delta p^L = y^L + y^F - y_d^F & \quad \text{in } \Omega, \\ y^L + y^F = 0 & \quad \text{auf } \Gamma, & p^L = 0 & \quad \text{auf } \Gamma, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$u^F(x) = \mathbb{P}_{[u_a^F(x), u_b^F(x)]} \left\{ -\frac{1}{\alpha^F} p^L(x) \right\}.$$

3.3 Existenztheorie der Leader-Ebene

Ausgehend von (*BOme*) wird in diesem Abschnitt nachgewiesen, dass (auch) das Problem auf der Leader-Ebene zu jedem vorgegebenen u^F stets eine Lösung besitzt. Wir bringen noch die nötigen Hilfsmittel für den Existenzsatz der Leader-Ebene in Form eines Lemmas und eines Satzes an.

Lemma 3.3.1.

Seien $\hat{y}_{d_1} := y_d^F - y_1^L$ und $\hat{y}_{d_2} := y_d^F - y_2^L$ mit wie bisher definiertem y_d^F und y_1^L, y_2^L als schwache Lösungen zu u_1^L und u_2^L gegeben. Weiter seien $\bar{u}_1^F, \bar{u}_2^F \in U_{ad}^F$ die zu \bar{y}_1^F bzw. \bar{y}_2^F gehörenden optimalen Steuerungen und \bar{y}_1^F, \bar{y}_2^F , wie bisher, als Teil des Zielfunktionalen erklärt. Gilt

$$\left\| \hat{y}_{d_1} - \hat{y}_{d_2} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon,$$

so folgt daraus

$$\left\| \bar{u}_1^F - \bar{u}_2^F \right\|_{L^2(\Omega)} \leq c \cdot \varepsilon$$

mit c als von \bar{u}_1^F, \bar{u}_2^F unabhängige Konstante.

Beweis. Zunächst betrachtet man die Variationsungleichung zu \bar{u}_1^F und \bar{u}_2^F :

$$\left(S^*(S\bar{u}_1^F - \hat{y}_{d_1}^F) + \alpha^F \bar{u}_1^F, u^F - \bar{u}_1^F \right)_{L^2(\Omega)} \geq 0 \quad \forall u^F \in U_{ad}^F \quad (3.12)$$

$$\left(S^*(S\bar{u}_2^F - \hat{y}_{d_2}^F) + \alpha^F \bar{u}_2^F, u^F - \bar{u}_2^F \right)_{L^2(\Omega)} \geq 0 \quad \forall u^F \in U_{ad}^F. \quad (3.13)$$

Wegen $\bar{u}_1^F, \bar{u}_2^F \in U_{ad}^F$ kann (3.12) mit \bar{u}_2^F und (3.13) mit \bar{u}_1^F getestet werden:

$$\left(S^*(S\bar{u}_1^F - \hat{y}_{d_1}^F) + \alpha^F \bar{u}_1^F, \bar{u}_2^F - \bar{u}_1^F \right)_{L^2(\Omega)} \geq 0 \quad \forall u^F \in U_{ad}^F \quad (3.14)$$

$$\left(S^*(S\bar{u}_2^F - \hat{y}_{d_2}^F) + \alpha^F \bar{u}_2^F, \bar{u}_1^F - \bar{u}_2^F \right)_{L^2(\Omega)} \geq 0 \quad \forall u^F \in U_{ad}^F. \quad (3.15)$$

Addition von (3.14) und (3.15) liefert (alle Normen und Skalarprodukte sind weiterhin bzgl. $L^2(\Omega)$ zu verstehen)

$$\begin{aligned} & \left(S^*(S\bar{u}_1^F - \hat{y}_{d_1}^F), \bar{u}_2^F - \bar{u}_1^F \right) + \left(\alpha^F \bar{u}_1^F, \bar{u}_2^F - \bar{u}_1^F \right) - \left(S^*(S\bar{u}_2^F - \hat{y}_{d_2}^F), \bar{u}_2^F - \bar{u}_1^F \right) - \left(\alpha^F \bar{u}_2^F, \bar{u}_2^F - \bar{u}_1^F \right) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & -\alpha^F \left\| \bar{u}_1^F - \bar{u}_2^F \right\|^2 + \left(S^*(S\bar{u}_1^F - \hat{y}_{d_1}^F) - S^*(S\bar{u}_2^F - \hat{y}_{d_2}^F), \bar{u}_2^F - \bar{u}_1^F \right) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & -\alpha^F \left\| \bar{u}_1^F - \bar{u}_2^F \right\|^2 + \left(S^*S(\bar{u}_1^F - \bar{u}_2^F), \bar{u}_2^F - \bar{u}_1^F \right) + \left(S^*(\hat{y}_{d_2}^F - \hat{y}_{d_1}^F), \bar{u}_2^F - \bar{u}_1^F \right) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & -\alpha^F \left\| \bar{u}_1^F - \bar{u}_2^F \right\|^2 + \left(S(\bar{u}_1^F - \bar{u}_2^F), S(\bar{u}_1^F - \bar{u}_2^F) \right) \geq -\left(S^*(\hat{y}_{d_2}^F - \hat{y}_{d_1}^F), \bar{u}_2^F - \bar{u}_1^F \right) \\ \Leftrightarrow & \alpha^F \left\| \bar{u}_1^F - \bar{u}_2^F \right\|^2 + \underbrace{\left\| S(\bar{u}_1^F - \bar{u}_2^F) \right\|^2}_{\geq 0} \leq \left(S^*(\hat{y}_{d_2}^F - \hat{y}_{d_1}^F), \bar{u}_2^F - \bar{u}_1^F \right) \leq \|S^*\| \cdot \left\| \hat{y}_{d_2}^F - \hat{y}_{d_1}^F \right\| \cdot \left\| \bar{u}_2^F - \bar{u}_1^F \right\| \\ \Rightarrow & \alpha^F \left\| \bar{u}_1^F - \bar{u}_2^F \right\|^2 \leq \|S^*\| \cdot \left\| \hat{y}_{d_2}^F - \hat{y}_{d_1}^F \right\| \cdot \left\| \bar{u}_2^F - \bar{u}_1^F \right\| \\ \Rightarrow & \alpha^F \left\| \bar{u}_1^F - \bar{u}_2^F \right\| \leq \|S^*\| \cdot \left\| \hat{y}_{d_2}^F - \hat{y}_{d_1}^F \right\| \left(= \|S^*\| \cdot \left\| \hat{y}_{d_1}^F - \hat{y}_{d_2}^F \right\| \right) \leq \|S^*\| \cdot \varepsilon, \end{aligned}$$

woraus mit $c := \frac{\|S^*\|}{\alpha^F}$ die Behauptung folgt. □

Satz 3.3.2.

Es seien $\{u_n^L\} \subset U_{ad}^L$, $\{u_n^F\} \subset U_{ad}^F$ Folgen von Steuerungen und $\{y_n^L\}$, $\{y_n^F\}$ Folgen der zugehörigen Zustände. $\{u_n^L\}$ konvergiere schwach gegen u^L . Dann folgt (alle Konvergenzen sind in $L^2(\Omega)$ zu verstehen):

(i) $y_n^L \rightarrow y^L$,

(ii) $u_n^F \rightarrow u^F$,

(iii) $y_n^F \rightarrow y^F$.

Beweis.

zu (i): Betrachtet man (PO_L) mit den Folgen $\{y_n^L\}$ und $\{u_n^L\}$,

$$\begin{aligned} -\Delta y_n^L &= u_n^L && \text{in } \Omega \\ y_n^L &= 0 && \text{auf } \Gamma, \end{aligned}$$

so sieht man, dass die rechte Seite schwach gegen u^L konvergiert. Aufgrund der Linearität und Stetigkeit des Steuerungs-Zustands-Operators $G : L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$, $u_n^L \rightarrow u^L$, ist dieser auch schwach stetig und es folgt, dass sich die schwache Konvergenz auf der rechten Seite auf die Zustandsfolge $\{y_n^L\}$ überträgt. $\{y_n^L\}$ konvergiert also schwach in $H_0^1(\Omega)$ gegen y^L . Da $H_0^1(\Omega)$ kompakt in $L^2(\Omega)$ eingebettet werden kann, folgt

$$y_n^L \rightarrow y^L.$$

zu (ii): Hier werden Lemma 3.3.1 und Aussage (i) dieses Satzes benötigt.

Man betrachtet $\hat{y}_{d_n} := y_d^F - y_n^L$ und $\hat{y}_d^L := y_d^F - y^L$. Damit ist man mit der Notation und Struktur in Lemma 3.3.1 konsistent, die Verschiebung um y_d^F ändert an der Konvergenz von y_n^L selbst nichts und für die Differenz $\hat{y}_{d_n} - \hat{y}_d^L$ gilt

$$\left\| \hat{y}_{d_n} - \hat{y}_d^L \right\|_{L^2(\Omega)} = \left\| y_d^F - y_n^L - (y_d^F - y^L) \right\|_{L^2(\Omega)} = \left\| y_n^L - y^L \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Demnach folgt aus $u_n^L \rightarrow u^L$ wegen (i) dieses Satzes zunächst $y_n^L \rightarrow y^L$ und aus $\left\| \hat{y}_{d_n} - \hat{y}_d^L \right\|_{L^2(\Omega)} = \left\| y_n^L - y^L \right\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$ folgt wegen Lemma 3.3.1 $\left\| u_n^F - u^F \right\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$ und damit

$$u_n^F \rightarrow u^F.$$

zu (iii): Die Stetigkeit von S liefert zusammen mit (ii) dieses Satzes sofort

$$y_n^F = S u_n^F \rightarrow S u^F = y^F.$$

□

Satz 3.3.3. (Existenzsatz für Leader)

Die zulässigen Mengen U_{ad}^F und U_{ad}^L seien nichtleer. Das Problem (BO_{one}) besitzt zu jedem vorgegebenen $\bar{u}^F \in U_{ad}^F$ eine optimale Lösung \bar{u}^L mit zugehörigem optimalen Zustand \bar{y}^L und \bar{y}^F als Lösung von (PO_F) .

Beweis. Da allgemein offenbar $F^L(u^L, u^F) \geq 0$ gilt, existiert das Infimum

$$i := \inf_{u^L \in U_{ad}^L} F^L(u^L, u^F)$$

aller möglichen Funktionswerte, wobei u^F die Projektionsgleichung erfüllt. Dann existiert eine Infimalfolge $\{(y_n^F, u_n^L)\}$ mit $u_n^L \in U_{ad}^L$ und y_n^F als Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta y_n^F &= u_n^F && \text{in } \Omega \\ y_n^F &= 0 && \text{auf } \Gamma, \end{aligned}$$

was $F^L(u^L, u^F) \rightarrow i$ für $n \rightarrow \infty$ bedeutet. u_n^F erfüllt hier stets die Projektionsgleichung. U_{ad}^L ist nach Lemma 3.1.1 abgeschlossen, beschränkt und konvex und außerdem Teilmenge des reflexiven Banachraums $L^2(\Omega)$. Aus diesen Eigenschaften folgt nach Satz 2.2.4, dass U_{ad}^L schwach folgenkompakt ist, d.h.

$$\exists \{u_{n_k}^L\} \quad \text{mit} \quad u_{n_k}^L \rightharpoonup \bar{u}^L \in U_{ad}^L \quad \text{für} \quad k \rightarrow \infty.$$

Mit (i) und (iii) aus Satz 3.3.2 gilt nun, dass aus $u_{n_k}^L \rightarrow \bar{u}^L$

$$(y_{n_k} =) y_{n_k}^F + y_{n_k}^L \rightarrow \bar{y}^F + \bar{y}^L (= \bar{y})$$

folgt, wobei \bar{y}^F die eindeutige Lösung von (PO_F) mit $u^F = \bar{u}^F$ und \bar{y}^L die eindeutige Lösung von (PO_L) mit $u^L = \bar{u}^L$ ist. Außerdem liefert Teil (ii) des selben Satzes, dass aus $u_{n_k}^L \rightarrow \bar{u}^L$ für $n \rightarrow \infty$

$$u_{n_k}^L \rightarrow \bar{u}^L$$

folgt. Es sei noch einmal angemerkt, dass \bar{u}^L gerade dasjenige u^L ist, von dem \bar{u}^F abhängt.

Mit diesen Erkenntnissen und der Tatsache, dass Stetigkeit und Konvexität von $\|u_{n_k}^L\|_{L^2(\Omega)}^2$ die schwache Unterhalbstetigkeit von $F^L(y_{n_k}^F, u_{n_k}^L)$ liefern, folgt aus der Grenzwertbildung schließlich

$$\begin{aligned} i &= \lim_{k \rightarrow \infty} F^L(u_{n_k}^F, u_{n_k}^L) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \|S u_{n_k}^L + S u_{n_k}^F - y_d^L\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha^L}{2} \|u_{n_k}^L\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \|S u_{n_k}^L + y_{n_k}^F - y_d^L\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha^L}{2} \|u_{n_k}^L\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \|y_{n_k}^L + y_{n_k}^F - y_d^L\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha^L}{2} \|u_{n_k}^L\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \|y_{n_k}^L + y_{n_k}^F - y_d^L\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha^L}{2} \|\bar{u}^L\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$= \frac{1}{2} \|\bar{y}^L + \bar{y}^F - y_d^L\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha^L}{2} \|\bar{u}^L\|_{L^2(\Omega)}^2 \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \|S \bar{u}^L + S \bar{u}^F - y_d^L\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha^L}{2} \|\bar{u}^L\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= F^L(\bar{u}^F, \bar{u}^L). \end{aligned}$$

Der Schritt von (3.16) zu (3.17) ist möglich, da $\|\cdot\|^2$ stetig ist und $y_{n_k}^L + y_{n_k}^F - y_d^L$ in $L^2(\Omega)$ stark konvergiert. Mit i als Infimum von $F^L(u^F, u^L) = F^L(y^F, u^L)$ für alle zulässigen Funktionswerte kann $F^L(\bar{y}^F, \bar{u}^L)$ nicht kleiner als i sein. Deswegen muss in der Zeile (3.16) Gleichheit gelten. Das Paar (\bar{y}^F, \bar{u}^L) liefert also den Zielfunktionswert i .

Daraus folgt, dass \bar{u}^L optimal für (BO_{one}) ist mit zugehörigem optimalen Zustand $\bar{y}^L (= y^L(\bar{u}^L))$ und $\bar{y}^F (= y^F(\bar{u}^F(\bar{u}^L)))$. Des Weiteren ist die Zugehörigkeit der einzelnen Funktionen $(\bar{y}, \bar{u}^F, \bar{u}^L)$ untereinander nachgewiesen - insbesondere $\bar{u}^F = \bar{u}^F(\bar{u}^L)$. □

3.4 Allgemeine Existenztheorie

Abschließend wird die Existenz- und Eindeigkeitstheorie aus größerer Distanz beleuchtet. Dazu lösen wir uns von der konkreten Struktur und betrachten ein mit (BO) vergleichbares Problemmodell, das allerdings allgemeinere Voraussetzungen mitbringt. Auf diese Weise bekommt man einen Eindruck davon, welche Bedingung an die beiden Ebenen gestellt werden müssen, damit eine Lösung für ein Problem dieses Typs überhaupt existiert und gegebenenfalls eindeutig ist. Es sei noch angemerkt, dass im Modell-Problem dieses Abschnitts, genau wie in (BO), ausschließlich auf der unteren Ebene ein Optimalsteuerproblem gelöst werden muss.

3.4.1 Notationen, Annahmen und das Modell

\mathcal{X} und \mathcal{Z} bezeichnen in diesem Abschnitt stets Banachräume. Für eine mengenwertige Abbildung $\Xi : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{Z}$ beschreibt $\text{gph } \Xi := \{(x, z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Z} \mid z \in \Xi(x)\}$ den Graph von Ξ und $\text{dom } \Xi := \{x \in \mathcal{X} \mid \Xi(x) \neq \emptyset\}$ den Definitionsbereich von Ξ .

Wir betrachten das Bilevel-Optimalsteuermodell

$$F(x, z) \rightarrow \min_{x, z}$$

bei

$$\begin{aligned} x &\in X_{\text{ad}}, \\ z &\in \Psi(x), \end{aligned} \tag{BM}$$

wobei $\Psi : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{Z}$ die Lösungsabbildung für das parametrische Optimalsteuerproblem

$$f(x, z) \rightarrow \min_z$$

bei

$$\begin{aligned} z &\in \Xi(x), \\ z &\in Z_{\text{ad}} \end{aligned}$$

beschreibt. Man bemerkt, dass auf der oberen Ebene bezüglich beider Variablen x und z minimiert wird, was dem sogenannten 'Optimistic Approach' entspricht.

Für den Rest des Abschnitts wird bezüglich (BM) angenommen, dass die beiden Zielfunktionale $F, f : \mathcal{X} \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ schwach unterhalbstetig sind. Die Mengen $X_{\text{ad}} \subset \mathcal{X}$ und $Z_{\text{ad}} \subset \mathcal{Z}$ seien nichtleer und zudem schwach folgenkompakt. Des Weiteren sei $\Xi : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{Z}$ eine mengenwertige Abbildung mit $X_{\text{ad}} \subset \text{dom } \Xi$, so dass die Menge $(X_{\text{ad}} \times Z_{\text{ad}}) \cap \text{gph } \Xi$ schwach folgenkompakt ist.

Für die Analysis von (BM) wird folgende Definition benötigt:

Definition 3.4.1. (Optimalwert-Funktion)

Für jedes $x \in X_{ad}$ ordne die Funktion $\varphi : X_{ad} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi(x) := \inf_{z \in Z_{ad}} \{f(x, z) \mid z \in \Xi(x)\}$$

den optimalen Funktionswert des Problems der unteren Ebene zu.

Die getroffenen Annahmen garantieren, dass der Infimalwert $\varphi(x)$ stets angenommen wird und demnach $\Psi(x) \neq \emptyset$ gilt, da $f(x, \cdot) : Z \rightarrow \mathbb{R}$ für alle $x \in X_{ad}$ schwach unterhalbstetig und $\Xi(x)$ nichtleer und schwach folgenkompakt ist.

3.4.2 Analysis der Optimalwert-Funktion und das Existenzresultat

Für den weiteren Verlauf werden gewisse Stetigkeitseigenschaften von φ benötigt. Um diese nachzuweisen, wird folgende Stetigkeitsdefinition für die Abbildung Ξ eingeführt.

Definition 3.4.2.

Für ein fixiertes Tupel $(\hat{x}, \hat{z}) \in \text{gph } \Xi \subset X_{ad} \times Z_{ad}$ wird Ξ

(i) *innen halbstetig in (\hat{x}, \hat{z}) genannt, falls für jede Folge $\{x_n\} \subset \text{dom } \Xi$, für die $x_n \rightarrow \hat{x}$ gilt, eine Folge $\{z_n\} \subset Z_{ad}$ existiert, die $z_n \in \Xi(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie $z_n \rightarrow \hat{z}$ erfüllt.*

(ii) *innen schwach-schwach halbstetig in (\hat{x}, \hat{z}) genannt, falls für jede Folge $\{x_n\} \subset \text{dom } \Xi$, für die $x_n \rightarrow \hat{x}$ gilt, eine Folge $\{z_n\} \subset Z_{ad}$ existiert, die $z_n \in \Xi(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie $z_n \rightarrow \hat{z}$ erfüllt.*

Die Definition von innerer schwach-schwacher Halbstetigkeit in (ii) ist im Grunde nichts anderes als schwache Folgenstetigkeit für die mengenwertige Abbildung Ξ . Die schwachen Grenzwerte der Folgen $\{x_n\}$ und $\{z_n\}$ liegen (auch) wegen der schwachen Folgenkompaktheit wieder in X_{ad} bzw. Z_{ad} . Die Folge der Mengen $\Xi(x_n)$ konvergiert also schwach gegen die Menge $\Xi(\hat{x})$.

Im folgenden Lemma wird die Oberhalbstetigkeit der Funktion φ bewiesen, die später gebraucht wird, um Abgeschlossenheitseigenschaften für die zulässige Menge $(X_{ad} \times Z_{ad} \cap \text{gph } \Psi)$ von (BM) nachzuweisen.

Lemma 3.4.3.

Man fixiere einen beliebigen Punkt $\hat{x} \in X_{ad}$ und ein zugehöriges $\hat{z} \in \Psi(\hat{x})$. Angenommen f ist schwach oberhalbstetig in (\hat{x}, \hat{z}) , während Ξ innen schwach-schwach halbstetig in (\hat{x}, \hat{z}) ist. Dann ist φ schwach unterhalbstetig in \hat{x} .

Beweis. Angenommen $\{x_n\} \subset X_{ad}$ ist eine Folge, für die $x_n \rightarrow \hat{x}$ gilt. Aufgrund der inneren schwach-schwachen Halbstetigkeit von Ξ in (\hat{x}, \hat{z}) existiert eine Folge $\{z_n\} \subset Z_{ad}$, so dass $z_n \in \Xi(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $z_n \rightarrow \hat{z}$ gilt. Nach Definition von φ gilt $\varphi(x_n) \leq f(x_n, z_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt mit der vorausgesetzten schwachen Oberhalbstetigkeit von f in (\hat{x}, \hat{z})

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) \stackrel{(a)}{\leq} \limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n, z_n) \stackrel{(b)}{\leq} f(\hat{x}, \hat{z}) \stackrel{(c)}{=} \varphi(\hat{x}).$$

Die Beziehung (a) folgt direkt aus der Definition der Optimalwert-Funktion φ . (b) beschreibt die vorausgesetzte schwache Oberhalbstetigkeit von f . Die Gleichheit in (c) entspricht der Forderung $\hat{z} \in \Psi(\hat{x})$. Damit gilt insbesondere $\limsup_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) \leq \varphi(\hat{x})$. Da \hat{x} beliebig war, folgt die schwache Oberhalbstetigkeit von φ . □

Lemma 3.4.3 kann jetzt verwendet werden, um die Existenz einer optimalen Lösung von (BM) zu beweisen.

Satz 3.4.4.

Die Mengen $X_{ad} \subset \mathcal{X}$ und $Z_{ad} \subset \mathcal{Z}$ seien nichtleer. Ist die Abbildung f schwach oberhalbstetig auf $X_{ad} \times Z_{ad}$ während Ξ innen schwach-schwach halb stetig auf $X_{ad} \times Z_{ad}$ ist, so besitzt (BM) eine optimale Lösung.

Beweis. Da die Zielfunktion F nach Voraussetzung schwach unterhalbstetig ist, muss nur noch nachgewiesen werden, dass die für (BM) zulässige Menge $(X_{ad} \times Z_{ad} \cap gph \Psi)$ nichtleer und schwach folgenkompakt ist, da jede schwach unterhalbstetige Funktion auf einer nichtleeren, schwach folgenkompakten Menge ihr Minimum annimmt. Da von φ aufgrund von $X_{ad} \neq \emptyset$, $Z_{ad} \neq \emptyset$ und der schwachen Folgenkompaktheit beider Mengen zusammen mit der schwachen Unterhalbstetigkeit von f für jedes $x \in X_{ad}$ der Infimalwert $\varphi(x)$ tatsächlich angenommen wird, folgt $\Psi(x) \neq \emptyset$ für alle $x \in X_{ad}$. Damit ist klar, dass die Menge $(X_{ad} \times Z_{ad} \cap gph \Psi)$ ebenfalls nicht leer ist.

Sei nun $\{(x_n, z_n)\} \subset (X_{ad} \times Z_{ad} \cap gph \Psi)$ eine beliebige Folge. Insbesondere gilt für diese Folge $\{(x_n, z_n)\} \subset (X_{ad} \times Z_{ad} \cap gph \Xi)$. Dann existiert aufgrund der für $(X_{ad} \times Z_{ad} \cap gph \Xi)$ zu Beginn des Kapitels vorausgesetzten schwachen Folgenkompaktheit eine Teilfolge von $\{(x_n, z_n)\}$, die schwach gegen $(\hat{x}, \hat{z}) \in (X_{ad} \times Z_{ad} \cap gph \Xi)$ konvergiert. Nun muss nur noch gezeigt werden, dass \hat{z} aus dem schwachen Grenzwert (\hat{x}, \hat{z}) in $\Psi(\hat{x})$ liegt. Es gilt

$$\varphi(\hat{x}) \stackrel{(1)}{\leq} f(\hat{x}, \hat{z}) \stackrel{(2)}{\leq} \liminf_{n \rightarrow \infty} f(\hat{x}, \hat{z}) \stackrel{(3)}{=} \liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) \stackrel{(4)}{\leq} \varphi(\hat{x}).$$

Die Beziehungen (1) und (3) folgen direkt aus der Definition von φ . (2) gilt wegen der schwachen Unterhalbstetigkeit von f und (4) aufgrund der in Lemma 3.4.3 nachgewiesenen schwachen Oberhalbstetigkeit von φ . Da an beiden Enden $\varphi(\hat{x})$ steht, muss überall Gleichheit gelten, was $\varphi(\hat{x}) = f(\hat{x}, \hat{z})$ bedeutet und wiederum zur Folge hat, dass $\hat{z} \in \Psi(\hat{x})$ gilt. Dies bedeutet, dass insgesamt der Punkt (\hat{x}, \hat{z}) zu $(X_{ad} \times Z_{ad} \cap gph \Psi)$ gehört, was zusammen mit der schwachen Folgenkompaktheit der Menge $(X_{ad} \times Z_{ad} \cap gph \Psi)$ die Behauptung liefert. □

Eine speziellere aber gleichzeitig typische Situation liegt vor, wenn das Problem auf der unteren Ebene für jeden zulässigen Punkt der oberen Ebene eindeutig lösbar ist.

Satz 3.4.5.

Angenommen es existiert eine Abbildung $\psi : X_{ad} \rightarrow \mathcal{Z}$, die schwach konvergente Folgen aus X_{ad} auf schwach konvergente Folgen in \mathcal{Z} abbildet, so dass $\Psi(x) = \{\psi(x)\}$ für alle $x \in X_{ad}$ gilt. Dann besitzt (BM) eine optimale Lösung.

Beweis. Die Annahmen des Satzes garantieren, dass (BM) zu

$$F(x, \psi(x)) \rightarrow \min_x$$

bei

$$x \in X_{ad}$$

äquivalent ist. Des Weiteren ist $X_{\text{ad}} \ni x \mapsto F(x, \psi(x)) \in \mathbb{R}$ schwach unterhalbstetig auf X_{ad} , da dies für F auf $\mathcal{X} \times \mathcal{Z}$ gilt und ψ die schwache Konvergenz der Folgen aus X_{ad} erbt. Zusammen mit der zu Beginn des Abschnitts vorausgesetzten schwachen Folgenkompaktheit von $X_{\text{ad}} \subset X$ besitzt das obige Problem eine Lösung \bar{x} , was bedeutet, dass (BM) die optimale Lösung $(\bar{x}, \psi(\bar{x}))$ besitzt. □

3.4.3 Eine Anwendung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand Γ . Für fixierte Parameter $x^w \in \mathbb{R}^n$ und $x^s \in L^2(\Omega)$, fixierte Funktionen $f^1, \dots, f^n \in L^2(\Omega)$ und Funktionen $u_a, u_b \in L^2(\Omega)$ mit $u_a < u_b$ fast überall auf Ω wird das Bilevel-Optimalsteuerproblem

$$\frac{1}{2} \|y - y_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|u - u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow \min_{x,y,u}$$

bei

$$\begin{aligned} (x^w, x^s) &\in X_{\text{ad}}, \\ (y, u) &\in \Psi(x^w, x^s), \end{aligned}$$

wobei $\Psi : \mathbb{R}^n \times L^2(\Omega) \rightrightarrows H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ die Lösungsabbildung für das parametrische Optimalsteuerproblem

$$\frac{1}{2} \left\| y - \sum_{i=1}^n x_i^w f^i \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow \min_{y,u}$$

bei

$$-\Delta y = x^s + u$$

und

$$u \in U_{\text{ad}} = \left\{ u(x) \in L^2(\Omega) \mid u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \text{ fast überall in } \Omega \right\}$$

beschreibt, betrachtet. Die Variablen y und u entstammen den Räumen $H_0^1(\Omega)$ bzw. $L^2(\Omega)$. Die PDE-Restriktion auf der unteren Ebene kann im schwachen Sinn in $H^{-1}(\Omega) := H_0^1(\Omega)^*$ aufgefasst werden. Vor diesem Hintergrund kann der Ausdruck $x^s + u$ von $L^2(\Omega)$ nach $H^{-1}(\Omega)$ eingebettet werden. Da auf der unteren Ebene kein Regularisierungsparameter für die Steuerung u im Zielfunktional auftaucht, entstehen möglicherweise optimale Steuerungen, die ausschließlich Werte in u_a und u_b annehmen, sogenannte Bang-Bang-Steuerungen (vgl. [73], Abschnitt 2.9.1).

Durch das Problem auf der oberen Ebene soll der Zielzustand des Problems auf der unteren Ebene durch korrekte Wahl der Gewichte $x^w \in \mathbb{R}^n$ und $x^s \in L^2(\Omega)$ aus einer nichtleeren, abgeschlossenen, konvexen und beschränkten Menge $X_{\text{ad}} \subset \mathbb{R}^n \times L^2(\Omega)$ identifiziert werden, so dass sich die resultierende optimale Lösung möglichst nah an beobachteten Daten $y_0, u_0 \in L^2(\Omega)$ befindet.

Aufgrund der Stetigkeit und Konvexität der Zielfunktionale sind diese folglich schwach unterhalbstetig. Da die Einbettung $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ kompakt ist, ist die Zielfunktion auf der unteren Ebene sogar schwach folgenstetig. Die Menge X_{ad} ist nach Voraussetzung nichtleer und schwach folgenkompakt. Nutzt man die Linearität und Stetigkeit des Lösungsoperators $(-\Delta)^{-1}$ aus, so ist es leicht einzusehen, dass der Graph der mengenwertigen Abbildung

$$\Xi(x^s) := \left\{ (u, y) \in L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \mid g(x^s, u, y) = x^s + u + \Delta y \in C = \{0\} \right\}$$

konvex und abgeschlossen ist. Die Beschränktheit von X_{ad} sichert schließlich die Beschränktheit der Menge $(X_{\text{ad}} \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)) \cap \text{gph } \Xi$ ab, woraus ihre schwache Folgenkompaktheit resultiert. Zusammen mit den Eigenschaften von $(-\Delta)^{-1}$ folgt nach Definition 3.4.2 die innere schwach-schwache Halbstetigkeit von Ξ in allen Punkten. Dann liefert Satz 3.4.4 die Existenz einer Lösung des vorliegenden Bilevel-Optimalsteuerproblems.

4 Regularitätsbedingungen und KKT-Theorie für die Optimierung in Banachräumen

In diesem Kapitel soll es darum gehen, einen geeigneten Lösungsansatz für

$$\min_{u^L, u^F} F^L(y^L, u^L) := \frac{1}{2} \|y^L + y^F - y_d^L\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha^L}{2} \|u^L\|_{L^2(\Omega)}^2$$

bei

$$u^F \in \Psi(u^L) \tag{BO_L}$$

und

$$u^L \in U_{\text{ad}}^L = \left\{ u^L(x) \in L^2(\Omega) \mid u_a^L(x) \leq u^L(x) \leq u_b^L(x) \text{ fast überall in } \Omega \right\},$$

wobei $\Psi(u^L)$ für ein fixiertes u^L die Lösung des Optimalsteuerproblems

$$\min_{u^F} f^F(y^F, u^F) := \frac{1}{2} \|y^L + y^F - y_d^F\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha^F}{2} \|u^F\|_{L^2(\Omega)}^2$$

bei

$$\begin{aligned} -\Delta y^L - \Delta y^F &= u^L + u^F && \text{in } \Omega \\ y^L + y^F &= 0 && \text{auf } \Gamma \end{aligned} \tag{BO_F}$$

und

$$u^F \in U_{\text{ad}}^F = \left\{ u^F(x) \in L^2(\Omega) \mid u_a^F(x) \leq u^F(x) \leq u_b^F(x) \text{ fast überall in } \Omega \right\}$$

beschreibt, zu finden und einen Rahmen für die Herleitung notwendiger Optimalitätsbedingungen zu schaffen. Zwecks Übersicht wird ab jetzt im Zielfunktional der Leader-Ebene auf y^F und im Zielfunktional der Follower-Ebene auf y^L als Komponente im Argument verzichtet, da die Abhängigkeit einer Lösung vom jeweiligen Parameter auf der entsprechenden Ebene in Kapitel 3 ausführlich beschrieben wurde und selbstverständlich weiter gültig bleibt.

Bemerkung 4.0.1.

Natürlich gilt weiterhin Annahme 1.4.1. Nach Lemma 3.1.1 sind die Zielfunktionale F^L und f^F (für $\alpha^L > 0$ bzw. $\alpha^F > 0$ strikt) konvex und U_{ad}^L und U_{ad}^F beschränkte, abgeschlossene und konvexe Teilmengen des $L^2(\Omega)$. F^L und f^F sind außerdem Fréchet-differenzierbar $\forall u^L \in U_{\text{ad}}^L$ bzw. $\forall u^F \in U_{\text{ad}}^F$ (vgl. [73]).

Eine grundsätzliche Herangehensweise an ein Bilevel-Optimalsteuerproblem besteht darin, es in ein einstufiges Optimalsteuerproblem zu transformieren und nachzuweisen, dass eine Lösung dieses einstufigen Problems auch Lösung des Bilevel-Problems ist. Dafür gibt es, je nach dem welche Eigenschaften das vorliegende Problem hat, drei gängige Konzepte, die an folgendem Bilevel-Optimalsteuermodell erläutert werden sollen:

$$\begin{aligned}
 & F(x, z) \rightarrow \min_{x, z} \\
 & \text{bei} \\
 & \quad G(x) \in C \\
 & \quad z \in \Psi(x),
 \end{aligned} \tag{BP}$$

wobei $\Psi : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{Y}$ die Lösungsabbildung für das parametrische Optimalsteuerproblem

$$\begin{aligned}
 & f(x, z) \rightarrow \min_z \\
 & \text{bei} \\
 & \quad g(x) \in K
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

beschreibt.

- Für den Fall, dass das Problem (4.1) zu jedem Parameter $x \in X^L = \{x \in \mathcal{X} \mid G(x) \in C\}$ eine eindeutige Lösung $\psi(x) \in \Psi(x)$ besitzt, kann das ursprüngliche Modell in die äquivalente Form

$$\begin{aligned}
 & F(x, \psi(x)) \rightarrow \min_x \\
 & \text{bei} \\
 & \quad x \in X^L
 \end{aligned}$$

überführt werden. Für dieses Szenario ist die Theorie sowohl im Endlich- als auch im Unendlichdimensionalen recht ausgereift. In [21] etwa findet die Analyse eines endlichdimensionalen Bilevel-Optimierungsproblems mit eindeutiger Lösung auf der unteren Ebene statt. Mit Hilfe der nachgewiesenen Richtungs-differenzierbarkeit der Lösungsabbildung auf der Follower-Ebene gelingt die Transformation zu einem einstufigen Optimierungsproblem und die Formulierung notwendiger und hinreichender Optimalitätsbedingungen. Hierbei wird die Erfüllung einer Regularitätsbedingung - Slater-CQ bzw. Constant-Rank-CQ - vorausgesetzt.

In [61] wird ein Bilevel-Optimalsteuerproblem mit linearem, beschränktem, elliptischem Operator und ebenfalls eindeutiger Lösung auf der unteren Ebene betrachtet. Das Problem ist dort außerdem steuerbeschränkt und man optimiert nach dem 'Optimistic Approach'. Für eine Lipschitz-stetige und Fréchet-differenzierbare Zielfunktion f kann auch hier Richtungs-differenzierbarkeit für die Lösungsabbildung der unteren Ebene nachgewiesen werden. Die Ideen hierzu gehen auf [42] zurück. Mit Hilfe der Theorie für MPCCs in Banachräumen lassen sich schließlich schwache und starke Stationaritätsbedingungen für die einstufige Version des Bilevel-Optimalsteuerproblems formulieren. [48] und [76] sind weitere Beispiele, in denen Eindeutigkeitesresultate bezüglich der Lösungsabbildung einer vorgegebenen Variationsungleichung auf der unteren Ebene zur optimalen Steuerung des 'Obstacle Problems' ausgenutzt werden.

- Eine weitere Möglichkeit bietet die Verwendung der sogenannten 'Optimal Value Function', definiert durch $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$,

$$\varphi(x) := \inf_x \{f(x, y) \mid g(x, y) \in K\} \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

Wegen $y \in \Psi(x) \Leftrightarrow f(x, y) \leq \varphi(x)$ und $g(x, y) \in K$ kann das Problem

$$F(x, z) \rightarrow \min_{x, z}$$

bei

$$\begin{aligned} G(x) &\in C && (OV) \\ f(x, y) - \varphi(x) &\leq 0 \\ g(x, y) &\in K \end{aligned}$$

äquivalent zu (BP) behandelt werden. Eine grundsätzliche Herausforderung bei dieser Methode liegt darin, dass φ eventuell nichtglatt und unstetig ist und gängige Regularitätsbedingungen - etwa die MFCQ in [24] - nicht erfüllbar sind. Auch zu diesem Ansatz finden sich in der Fachliteratur mit Blick auf Theorie und numerische Umsetzung bereits etliche Beiträge. Für Beispiele zur endlichdimensionalen (Bilevel-)Optimierung mit Hilfe der Optimal Value Function sei etwa auf [27] und [29] verwiesen. Zur Bilevel-Optimalsteuerung gewöhnlicher Differentialgleichungen mittels der Optimal Value Function lohnt ein Blick in [9], [10] und [79].

- Ein dritter Weg, um eine Transformation von einem zwei- in ein einstufiges Problem dieser Art durchzuführen, besteht im Ersetzen der Bedingung $z \in \Psi(x)$ durch die notwendigen (und bei Konvexität auf der unteren Ebene hinreichenden) Optimalitätsbedingungen bezüglich z . Falls eine Variationsgleichung als notwendige bzw. hinreichende Optimalitätsbedingung resultiert, kann diese direkt als Nebenbedingung in die obere Ebene integriert werden. Endlichdimensionale Vertreter für dieses Vorgehen sind etwa [78] und [80]. In [46] und [47] wird die optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen mit Variationsungleichungen als (weitere) Nebenbedingungen thematisiert.
Eine weitere Möglichkeit (BP) mit den notwendigen (und ggf. hinreichenden) Optimalitätsbedingungen der unteren Ebene in ein einstufiges Optimierungsproblem zu transformieren besteht darin, das Follower-Problem durch sein KKT-System zu ersetzen. Mit dem Lagrange-Multiplikator als zusätzliche Entscheidungsvariable ist das resultierende One-Level-Problem allerdings nicht notwendigerweise äquivalent zur ursprünglichen Bilevel-Version (siehe etwa [24] als endlichdimensionales Beispiel). Dieser sogenannte KKT-Ansatz wird in [28] und [83] für endlichdimensionale Bilevel-Optimierungsprobleme verwendet. In [63] und [69] wird eine KKT-Transformation für ein zweistufiges Optimalsteuerproblem durchgeführt, das allerdings lediglich gewöhnliche Differentialgleichungen in den Nebenbedingungen besitzt. Deswegen wird eine KKT-Transformation als Lösungsansatz für (BO) das Mittel der Wahl sein. Wir werden in den nächsten beiden Kapiteln sehen, welche Voraussetzungen für ein zweistufiges, elliptisches, steuerbeschränktes Optimalsteuerproblem auf der unteren Ebene zu diesem Zweck erfüllt sein müssen. Für die Theorie der KKT-Transformation für Bilevel-Optimalsteuerprobleme sei ebenfalls auf [63] verwiesen.
Eine zentrale Voraussetzung für eine solche KKT-Transformation ist die Erfüllung einer entsprechenden Regularitätsbedingung. Dies wird Inhalt des zweiten Teils dieses Kapitels sein.

4.1 Wichtige Rechenregeln und Kegel für die Optimierung in Banachräumen

Für Regularitätsfragen zu Optimierungsproblemen in Banachräumen sind die folgenden Notationen und Resultate hilfreich.

Zu einem reellen, reflexiven Banachraum \mathcal{X} und einer nichtleeren Teilmenge $A \subseteq \mathcal{X}$ bezeichnet $\text{lin}(A)$ den kleinsten Unterraum von \mathcal{X} , der A enthält, $\text{cone}(A)$ die konische Hülle von A , $\text{conv}(A)$ die konvexe Hülle von A und $\text{cl}(A)$ ihren Abschluss. Der polare Kegel und der Annihilator zur Menge A sind definiert als

$$A^\circ := \{x^* \in \mathcal{X}^* \mid (x^*, x)_\mathcal{X} \leq 0 \ \forall x \in A\} \quad \text{und} \quad A^\perp := \{x^* \in \mathcal{X}^* \mid (x^*, x)_\mathcal{X} = 0 \ \forall x \in A\}.$$

Es gilt $A^\circ = (\text{cl}A)^\circ$, $A^\circ = (\text{conv}A)^\circ$ und $A^\circ = (\text{cone}A)^\circ$. Weiter gilt $A^\perp = A^\circ \cap (-A)^\circ$ und damit $S^\perp = S^\circ$ für jeden Unterraum $S \subseteq \mathcal{X}$. Für eine ebenfalls nichtleere Teilmenge $B \subseteq \mathcal{X}^*$ gilt analog zu obigen Definitionen

$$B_\circ := \{x \in \mathcal{X} \mid (x^*, x)_\mathcal{X} \leq 0 \ \forall x^* \in B\} \quad \text{und} \quad B_\perp := \{x \in \mathcal{X} \mid (x^*, x)_\mathcal{X} = 0 \ \forall x^* \in B\}.$$

Aufgrund der Reflexivität von \mathcal{X} stimmen die Identifikationen $B^\circ = B_\circ$ und $B^\perp = B_\perp$. Wir fügen noch folgende Lemmata an:

Lemma 4.1.1.

Es sei \mathcal{X} ein Banachraum und $A, B \subseteq \mathcal{X}$ nichtleer. Dann gilt

$$\text{cl}(A + B) = \text{cl}(\text{cl}(A + B)) = \text{cl}(\text{cl}(A) + \text{cl}(B)).$$

Beweis. Für den Beweis sei auf Proposition 2.40 in [13] und Lemma 2.1 in [60] verwiesen. □

Lemma 4.1.2.

Für einen Banachraum \mathcal{X} und eine nichtleere Teilmenge $S \subseteq \mathcal{X}$ gilt

$$\text{lin}(S) = \text{conv}\left(\bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} \alpha S\right).$$

Beweis. Für den Beweis sei auf Lemma 2.2 in [13] verwiesen. □

Lemma 4.1.3.

Es sei \mathcal{X} reflexiver Banachraum und $K \subseteq \mathcal{X}$ ein Kegel. Dann gilt $(K^\circ)^\circ = \text{cl}(K)$.

Beweis. Für den Beweis sei auf Proposition 2.40 in [13] verwiesen. □

Mit diesem Lemma folgt für jeden Unterraum $S \subseteq \mathcal{X}$ eines reflexiven Banachraums weiter $(S^\perp)^\perp = \text{cl}(S)$ und für jeden Punkt $\hat{x} \in \mathcal{X}$ $\text{lin}\{\hat{x}\} = (\{\hat{x}\}^\perp)^\perp = (\{\hat{x}\}^\perp)^\circ$.

Lemma 4.1.4.

Seien $K_1, K_2 \subseteq \mathcal{X}$ nichtleere, abgeschlossene, konvexe Kegel eines reflexiven Banachraums \mathcal{X} . Dann gilt:

$$(K_1^\circ)^\circ = K_1, \tag{4.2}$$

$$(K_1 + K_2)^\circ = K_1^\circ \cap K_2^\circ, \tag{4.3}$$

$$(K_1 \cap K_2)^\circ = \text{cl}(K_1^\circ + K_2^\circ), \tag{4.4}$$

$$(K_1^\circ)^\perp = K_1 \cap (-K_1). \tag{4.5}$$

(4.2) ist nichts anderes als Lemma 4.1.3. Für (4.3) und (4.4) sei auf (2.31)+(2.32) aus [13] und für (4.5) auf Lemma 2.12 aus [60] oder Satz 4.1 aus [75] verwiesen.

Lemma 4.1.5.

\mathcal{X} sei ein reflexiver Banachraum. Jeder elliptische Operator $\mathcal{A} \in \mathbb{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*)$ ist abgeschlossen, injektiv und surjektiv.

Beweis. Da $\mathcal{A} \in \mathbb{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*)$ elliptisch ist, existiert ein $\alpha_0 > 0$, so dass

$$(\mathcal{A}x, x)_{\mathcal{X}} \geq \alpha_0 \|x\|_{\mathcal{X}}^2 \quad \forall x \in \mathcal{X}$$

gilt (vgl. Definition 2.1.7). Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung (vgl. Satz 2.1.2) liefert

$$\alpha_0 \|x\|_{\mathcal{X}} \leq \|\mathcal{A}x\|_{\mathcal{X}^*} \leq \|\mathcal{A}\|_{\mathbb{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*)} \|x\|_{\mathcal{X}} \quad \forall x \in \mathcal{X}. \quad (4.6)$$

Mit (4.6) sieht man direkt, dass $\mathcal{A}x = 0 \Rightarrow 0 = \|\mathcal{A}x\| \geq \alpha_0 \|x\| \Rightarrow x = 0$ gilt, woraus $\text{kern}(\mathcal{A}) = 0$ und damit die Injektivität von \mathcal{A} folgt.

Weiter ist $\mathcal{A}[\mathcal{X}]$ abgeschlossen. Dafür wählt man eine Folge $\{x_n\} \subseteq \mathcal{X}$, so dass $\{\mathcal{A}x_n\} \subseteq \mathcal{X}^*$ gegen ein $x^* \in \mathcal{X}^*$ konvergiert. Insbesondere ist $\{\mathcal{A}x_n\}$ beschränkt und wegen (4.6) ebenso $\{x_n\}$. Aufgrund der Reflexivität von \mathcal{X} existiert eine Teilfolge $\{x_{n_i}\}$ von $\{x_n\}$, die schwach gegen $\hat{x} \in \mathcal{X}$ konvergiert. Dann ist für jedes $x \in \mathcal{X}$

$$(\mathcal{A}\hat{x}, x)_{\mathcal{X}} = (A^*x, \hat{x})_{\mathcal{X}} = \lim_{i \rightarrow \infty} (A^*x, x_{n_i})_{\mathcal{X}} = \lim_{i \rightarrow \infty} (\mathcal{A}x_{n_i}, x)_{\mathcal{X}} = (x^*, x)_{\mathcal{X}}$$

und es gilt $x^* = \mathcal{A}\hat{x} \in \mathcal{A}[\mathcal{X}]$, was die Abgeschlossenheit von $\mathcal{A}[\mathcal{X}]$ liefert. Wegen der Elliptizität von \mathcal{A} gilt $\mathcal{A}[\mathcal{X}]^\perp = \{0\}$. Zusammen mit Lemma 4.1.3 folgt

$$\mathcal{X}^* = \{0\}^\perp = \mathcal{A}[\mathcal{X}]^{\perp\perp} = \text{cl}(\mathcal{A}[\mathcal{X}]) = \mathcal{A}[\mathcal{X}],$$

was die Surjektivität von \mathcal{A} beweist. Damit ist jeder elliptische Operator $\mathcal{A} \in \mathbb{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*)$ abgeschlossen, injektiv und surjektiv. □

Bei der Optimierung in Banachräumen spielt eine Reihe von verschiedenen Kegeln eine wichtige Rolle. Es folgen einige Definitionen und eine grobe Skizzierung der Zusammenhänge dieser Kegel untereinander, um so auf die wichtigsten Resultate zurückgreifen zu können. Darüber hinaus sei auf die angegebene Literatur verwiesen. Es sei $A \subseteq \mathcal{X}$ eine nichtleere, abgeschlossene Menge und $\hat{x} \in \text{cl}A$. Zunächst wird der sogenannte radiale Kegel

$$\mathcal{R}_A(\hat{x}) := \{d \in \mathcal{X} \mid \exists \hat{t} > 0 \forall t \in (0, \hat{t}] : \hat{x} + td \in A\}$$

definiert (vgl. [13], Definition 2.54).

Des Weiteren der Tangentialkegel (vgl. [66], Definition 1.8 (i))

$$\mathcal{T}_A(\hat{x}) := \left\{ d \in \mathcal{X} \mid \exists \{d_k\} \subseteq \mathcal{X} \exists \{t_k\} \subseteq \mathbb{R} : d_k \rightarrow d, t_k \searrow 0, \hat{x} + t_k d_k \in A \forall k \in \mathbb{N} \right\}$$

und der Clark'sche Tangentialkegel (vgl. [66], Definition 1.8 (iii))

$$\mathcal{T}_A^c(\hat{x}) := \left\{ d \in \mathcal{X} \mid \forall \{x_k\} \subseteq A \forall \{t_k\} \subseteq \mathbb{R} (x_k \rightarrow \hat{x}, t_k \searrow 0 \Rightarrow \exists \{d_k\} \subseteq \mathcal{X} : d_k \rightarrow d, \hat{x} + t_k d_k \in A \forall k \in \mathbb{N}) \right\}.$$

Die Kegel $\mathcal{T}_A(\hat{x})$ und $\mathcal{T}_A^c(\hat{x})$ sind nach [6], Kapitel 4, abgeschlossen, $\mathcal{T}_A^c(\hat{x})$ nach [6], Proposition 4.1.6, außerdem konvex und unmittelbar aus den Definitionen folgt die Inklusion

$$\mathcal{T}_A^c(\hat{x}) \subseteq \mathcal{T}_A(\hat{x}).$$

Für eine konvexe Menge $A \subseteq \mathcal{X}$ gilt des Weiteren (vgl. [6], Proposition 4.2.1 und [63], Abschnitt 2)

$$cl\mathcal{R}_A(\hat{x}) = \mathcal{T}_A^c(\hat{x}) = \mathcal{T}_A(\hat{x}) \quad (4.7)$$

und insbesondere

$$\mathcal{R}_A(\hat{x}) = cone(A - \{\hat{x}\}) = \{\beta(x - \hat{x}) : \beta \geq 0, x \in A\}. \quad (4.8)$$

Falls die Menge $A \subseteq \mathcal{X}$ ein abgeschlossener, konvexer Kegel ist, der \hat{x} enthält, so gelten die Identitäten

$$\mathcal{R}_A(\hat{x}) = A + lin\{\hat{x}\}, \quad \mathcal{T}_A(\hat{x}) = cl(A + lin\{\hat{x}\}).$$

Weiter folgt zusammen mit (4.3)

$$\mathcal{T}_A(\hat{x})^\circ = A^\circ \cap \{\hat{x}\}^\perp. \quad (4.9)$$

Der abgeschlossene Kegel

$$\mathcal{K}_A(\hat{x}, x^*) := \mathcal{T}_A(\hat{x}) \cap \{x^*\}_\perp$$

wird für abgeschlossenes, konvexes A kritischer Kegel an A bzgl. (\hat{x}, x^*) genannt.

Zuletzt führen wir folgende Normalenkegel in unendlichdimensionalen Räumen ein, die in erster Linie auf Mordukhovich (vgl. [66]) zurückzuführen sind. Wieder sei $A \subseteq \mathcal{X}$ eine nichtleere, abgeschlossene Menge und $\hat{x} \in clA$. Der Kegel

$$\widehat{\mathcal{N}}_A(\hat{x}) := \left\{ \eta \in \mathcal{X}^* \mid \limsup_{x \rightarrow \hat{x}, x \in A} \frac{(\eta, x - \hat{x})_{\mathcal{X}}}{\|x - \hat{x}\|_{\mathcal{X}}} \leq 0 \right\}$$

wird Fréchet-Normalenkegel an A in \hat{x} genannt (vgl. [66], Definition 1.1(i)). Weiter beschreibt

$$\mathcal{N}_A(\hat{x}) := \left\{ \eta \in \mathcal{X}^* \mid \exists \{\sigma_k\} \subseteq \mathbb{R} \exists \{x_k\} \subseteq A \exists \{\eta_k\} \subseteq \mathcal{X}^* : \sigma_k \downarrow 0, x_k \rightarrow \hat{x}, \eta_k \rightarrow \eta, \eta_k \in \widehat{\mathcal{N}}_A^{\sigma_k}(x_k) \forall k \in \mathbb{N} \right\}$$

den Mordukhovich-Normalenkegel an A in \hat{x} , wobei mit $\{\sigma_k\}$ die Folge der σ -Normalen gemeint ist (vgl. [66], Definition 1.1(ii)).

Der Clark'sche Normalenkegel wird schließlich definiert als der polare Clark'sche Tangentialkegel:

$$\mathcal{N}_A^c(\hat{x}) := \mathcal{T}_A^c(\hat{x})^\circ.$$

Alle betrachteten Normalenkegel an A sind in einem beliebigen Punkt $x \in clA$ nichtleer. $\widehat{\mathcal{N}}_A(\hat{x})$ und $\mathcal{N}_A^c(\hat{x})$ sind per Definition abgeschlossene, konvexe Kegel. Weiter ist $\mathcal{N}_A(\hat{x})$ im Allgemeinen weder abgeschlossen noch konvex.

Genau wie für die präsentierten Tangentialkegel gibt es auch für die betrachteten Normalenkegel ein Koizidenzresultat für den Fall, dass die Menge A konvex ist (vgl. [60], Proposition 1.3 und [20], Proposition 2.4.4). Es gilt

$$\widehat{\mathcal{N}}_A(\hat{x}) = \mathcal{N}_A(\hat{x}) = \mathcal{N}_A^c(\hat{x}) = \left\{ \eta \in \mathcal{X}^* \mid \forall x \in A : (\eta, x - \hat{x}) \leq 0 \right\}. \quad (4.10)$$

4.2 Einige wichtige Regularitätsbedingungen für Optimierungsprobleme in Banachräumen

Die Inhalte dieses Abschnitts dienen als Vorbereitung, um die KKT-Transformation für (BO_F) durchführen zu können. Hierbei werden die benötigten Resultate nur in dem Rahmen präsentiert, in dem sie mit Blick auf (BO) gebraucht werden. Für eine umfassende Präsentation der KKT-Theorie im Banachraum sei auf [13] und [60] verwiesen.

Wir folgen der Notation des Problems (BP) vom Anfang des Kapitels und betrachten das allgemeine One-Level-Optimierungsproblem im Banachraum der Gestalt

$$F(x) \rightarrow \min_x$$

bei

$$G(x) \in C. \tag{4.11}$$

Die Menge $M = \{x \in \mathcal{X} \mid G(x) \in C\}$ kann als Urbild $G^{-1}(C)$ der nichtleeren, abgeschlossenen und konvexen Menge $C \subseteq \mathcal{Y}$ aufgefasst werden. Im nachfolgenden Lemma werden zwei notwendige Optimalitätsbedingungen für (4.11) zusammengefasst (vgl. [67], Proposition 5.1 + 5.3).

Lemma 4.2.1.

Es sei $\bar{x} \in M$ lokal optimal für (4.11), so dass F in einer Umgebung von \bar{x} endlich ist. Dann gilt:

(i) *Ist F in \bar{x} Fréchet-differenzierbar, so gilt $-F'(\bar{x}) \in \widehat{\mathcal{N}}_M(\bar{x})$.*

(ii) *Ist F lokal Lipschitz-stetig in \bar{x} und \mathcal{X} ein reflexiver Banachraum, so gilt $0 \in \partial F(\bar{x}) + \mathcal{N}_M(\bar{x})$.*

Die nächsten beiden Lemmata sind hilfreich für die Berechnung von Tangential- und Normalenkegeln zu Urbildern von Mengen, wie in (4.11). Sie beinhalten außerdem eine Regularitätsbedingung, die eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Lagrange-Multiplikators zu einer lokalen Lösung \bar{x} von (4.11) darstellt.

Lemma 4.2.2.

\mathcal{X} und \mathcal{Y} seien Banachräume und $K \subseteq \mathcal{Y}$ ein nichtleerer, abgeschlossener, konvexer Kegel. Weiter sei $\mathcal{A} \in \mathbb{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ein beschränkter, linearer Operator und es gelte $\mathcal{A}[\mathcal{X}] - K = \mathcal{Y}$. Dann folgt

$$\mathcal{A}^*[K^\circ] = \{x \in \mathcal{X} \mid \mathcal{A}[x] \in K\}^\circ.$$

Beweis. Die Identität in diesem Lemma ist lediglich eine Verallgemeinerung der Rechenregel (4.4) (vgl. [41] und [60]).

□

Lemma 4.2.3.

Sei $G : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ eine stetig Fréchet-differenzierbare Abbildung zwischen den Banachräumen \mathcal{X} und \mathcal{Y} und $C \subseteq \mathcal{Y}$ eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Menge. Weiter sei die Regularitätsbedingung

$$G'(x)\mathcal{X} - \mathcal{R}_C(G(x)) = \mathcal{Y} \tag{4.12}$$

für ein $\hat{x} \in M = \{x \in \mathcal{X} \mid G(x) \in C\}$ erfüllt. Dann gilt

$$\mathcal{T}_M^c(\hat{x}) = \mathcal{T}_M^b(\hat{x}) = \mathcal{T}_M(\hat{x}) = \mathcal{T}_M^w(\hat{x}) = \{d \in \mathcal{X} \mid G'(\hat{x})[d] \in \mathcal{T}_C(G(\hat{x}))\}. \quad (4.13)$$

Wenn \mathcal{X} zusätzlich reflexiv ist, folgt weiter

$$\widehat{\mathcal{N}}_M(\hat{x}) = \mathcal{N}_M(\hat{x}) = \mathcal{N}_M^s(\hat{x}) = \mathcal{N}_M^c(\hat{x}) = G'(\hat{x})^*[\mathcal{N}_C(G(\hat{x}))]. \quad (4.14)$$

Bemerkungen 4.2.4.

Bevor der zugehörige Beweis geführt wird, folgen der Vollständigkeit halber ein paar Bemerkungen zu den im Lemma verwendeten Kegeln:

(i) Der schwache Tangentialkegel (vgl. [66], Definition 1.8 (ii)) ist definiert als

$$\mathcal{T}_A^w(\hat{x}) := \left\{ d \in \mathcal{X} \mid \exists \{d_k\} \subseteq \mathcal{X} \exists \{t_k\} \subseteq \mathbb{R} : d_k \rightarrow d, t_k \searrow 0, \hat{x} + t_k d_k \in A \forall k \in \mathbb{N} \right\}$$

und der innere Tangentialkegel (vgl. [6], Definition 4.1.5) als

$$\mathcal{T}_A^b(\hat{x}) := \left\{ d \in \mathcal{X} \mid \forall \{t_k\} \subseteq \mathbb{R} (t_k \searrow 0 \Rightarrow \exists \{d_k\} \subseteq \mathcal{X} : d_k \rightarrow d, \hat{x} + t_k d_k \in A \forall k \in \mathbb{N}) \right\}.$$

(ii) Der Kegel $\mathcal{T}_A^b(\hat{x})$ ist nach [6], Kapitel 4, abgeschlossen und unmittelbar aus den Definitionen folgen die Inklusionen

$$\mathcal{T}_A^c(\hat{x}) \subseteq \mathcal{T}_A^b(\hat{x}) \subseteq \mathcal{T}_A(\hat{x}) \subseteq \mathcal{T}_A^w(\hat{x}) \quad \text{und} \quad \mathcal{R}_A(\hat{x}) \subseteq \mathcal{T}_A^b(\hat{x}).$$

(iii) Für eine konvexe Menge $A \subseteq \mathcal{X}$ gilt sogar (vgl. [6], Proposition 4.2.1 und [63], Abschnitt 2)

$$cl\mathcal{R}_A(\hat{x}) = \mathcal{T}_A^c(\hat{x}) = \mathcal{T}_A^b(\hat{x}) = \mathcal{T}_A(\hat{x}) = \mathcal{T}_A^w(\hat{x}).$$

(iv) Der Kegel

$$\mathcal{N}_A^s(\hat{x}) := \left\{ \eta \in \mathcal{X}^* \mid \exists \{\sigma_k\} \subseteq \mathbb{R} \exists \{x_k\} \subseteq A \exists \{\eta_k\} \subseteq \mathcal{X}^* : \sigma_k \downarrow 0, x_k \rightarrow \hat{x}, \eta_k \rightarrow \eta, \eta_k \in \widehat{\mathcal{N}}_A^{\sigma_k}(x_k) \forall k \in \mathbb{N} \right\}$$

beschreibt den sogenannten starken Mordukhovich-Normalenkegel an A in \hat{x} (vgl. [40]), wobei man für ein $\sigma \geq 0$ die Menge der σ -Normalen (vgl. [66], Definition 1.1(i)) als

$$\widehat{\mathcal{N}}_A^\sigma(\hat{x}) := \left\{ \eta \in \mathcal{X}^* \mid \limsup_{x \rightarrow \hat{x}, x \in A} \frac{(\eta, x - \hat{x})_{\mathcal{X}}}{\|x - \hat{x}\|_{\mathcal{X}}} \leq \sigma \right\}$$

definiert.

(v) $\mathcal{N}_A^s(\hat{x})$ ist ein abgeschlossener Kegel, der nicht notwendig konvex ist. Außerdem gilt

$$\mathcal{N}_A(\hat{x}) = \mathcal{N}_A^s(\hat{x}) = \mathcal{N}_A^c(\hat{x}) = \{\eta \in \mathcal{X}^* \mid \forall x \in A : (\eta, x - \hat{x}) \leq 0\},$$

falls die Menge A konvex ist (vgl. [60], Proposition 1.3 und [20], Proposition 2.4.4).

Nun zum Beweis von Lemma 4.2.3:

Beweis. Die Identitäten

$$\mathcal{T}_M^c(\hat{x}) = \mathcal{T}_M^b(\hat{x}) = \mathcal{T}_M(\hat{x}) = \{d \in \mathcal{X} \mid G'(\hat{x})[d] \in \mathcal{T}_C(G(\hat{x}))\}$$

folgen direkt mit [13], Korollar 2.91, unter Erfüllung der Regularitätsbedingung (4.12). Die Inklusion $\mathcal{T}_M(\hat{x}) \subseteq \mathcal{T}_M^w(\hat{x})$ gilt per Definition und für $\mathcal{T}_M^w(\hat{x}) \subseteq \mathcal{T}_M(\hat{x})$ sei an dieser Stelle auf [60], Lemma 2.31, verwiesen.

Mit der Reflexivität von \mathcal{X} und dem ersten Teil des Satzes gilt

$$\widehat{\mathcal{N}}_M(\hat{x}) \subseteq \mathcal{N}_M^s(\hat{x}) \subseteq \mathcal{N}_M(\hat{x}) \subseteq \mathcal{N}_M^c(\hat{x}) = \mathcal{T}_M^c(\hat{x})^\circ = \mathcal{T}_M^w(\hat{x})^\circ = \widehat{\mathcal{N}}_M(\hat{x}),$$

was überall Gleichheit bedeutet. Aufgrund der Identität $\mathcal{T}_M^c(\hat{x}) = \{d \in \mathcal{X} \mid G'(\hat{x})[d] \in \mathcal{T}_C(G(\hat{x}))\}$ in (4.13) folgt mit $\mathcal{A} = G'(\hat{x})$ und $K = \mathcal{T}_C(G(\hat{x}))$ in Lemma 4.2.2 schließlich $\mathcal{T}_M^c(\hat{x})^\circ = G'(\hat{x})^*[\mathcal{N}_C(G(\hat{x}))]$, da die Regularitätsbedingung (4.12) die Beziehung

$$G'(\hat{x})\mathcal{X} - \mathcal{T}_C(G(\hat{x})) = \mathcal{Y} \tag{4.15}$$

impliziert, womit die Voraussetzungen von Lemma 4.2.2 erfüllt sind. □

Bemerkung 4.2.5.

Die Vorausgesetzte Regularitätsbedingung (4.12) in Lemma 4.2.3 wird Kurcyusz-Robinson-Zowe-Constraint-Qualification - kurz KRZCQ - genannt. Sie wurde zum ersten Mal von S.M. Robinson in [70] verwendet, um Stabilitätseigenschaften von Lösungsmengen nichtlinearer Gleichungssysteme in Banachräumen zu untersuchen. 1979 machten J. Zowe und S. Kurcyusz sie sich schließlich zunutze, um Existenz und Eindeutigkeit von Lagrange-Multiplikatoren für Optimierungsprobleme in Banachräumen nachzuweisen (vgl. [56]).

Polarisiert man (4.12), indem man die einzelnen Mengen auf beiden Seiten durch ihre polaren Entsprechungen ersetzt, führt dies zu

$$\{\lambda \in \mathcal{T}_C(G(\hat{x}))^\circ \mid G'(\hat{x})^*\lambda = 0\} = \{0\} \tag{4.16}$$

(vgl. hierzu die Identitäten (2.182) und (2.183) in [13]). Die Menge, die die linke Seite in (4.16) darstellt, wird als Menge der singulären Lagrange-Multiplikatoren bezeichnet (vgl. [38] und [63]). Da diese unter Erfüllung von (4.12) lediglich die 0 enthält, kann die Funktionsweise der KRZCQ so gedeutet werden, dass im Fall ihrer Gültigkeit die Menge der nichttrivialen singulären Lagrange-Multiplikatoren stets leer ist (vgl. [56], Satz 4.1, oder [13], Proposition 3.16 (ii)). Außerdem gilt wegen der Konvexität der Menge C die Identität $\mathcal{T}_C(G(\hat{x}))^\circ = \mathcal{N}_C(G(\hat{x}))$, so dass (4.16) äquivalent zur Identität

$$\{\lambda \in \mathcal{N}_C(G(\hat{x})) \mid G'(\hat{x})^*\lambda = 0\} = \{0\} \tag{4.17}$$

ist. Schließlich kann man die Menge der Lagrange-Multiplikatoren zu einer lokal optimalen Lösung des Problems (4.11) definieren:

Definition 4.2.6.

Zu einer lokal optimalen Lösung \bar{x} von (4.11) beschreibt

$$\Lambda(\bar{x}) := \{\bar{\lambda} \in \mathcal{N}_C(G(\bar{x})) \mid F'(\bar{x}) + G'(\bar{x})^* \bar{\lambda} = 0\} \quad (4.18)$$

die Menge der Lagrange-Multiplikatoren.

Bemerkung 4.2.7.

Als Polarisierungsergebnis wird die Bedingung (4.17) von der KRZCQ impliziert. Da 0 das einzige Element ist, das diese Menge enthält, wird sie in der Literatur auch als NNAMCQ - No Nonzero Abnormal Multiplier Constraint Qualification - bezeichnet.

Zur Einordnung werden weitere (stärkere und schwächere) Regularitätsbedingungen vorgestellt, die in der einschlägigen Literatur Verwendung finden, um für Optimierungsprobleme in Banachräumen die Existenz von Lagrange-Multiplikatoren abzusichern. Dazu definiert man noch den (stets abgeschlossenen) linearisierten Tangentialkegel an M in \hat{x} ,

$$\mathcal{L}_M(\hat{x}) := \{d \in \mathcal{X} \mid G'(\hat{x})[d] \in \mathcal{T}_C(G(\hat{x}))\},$$

und den linearisierten Normalenkegel $\mathcal{S}_M(\hat{x})$ an M in \hat{x} ,

$$\mathcal{S}_M(\hat{x}) := \{G'(\hat{x})^*[\lambda] \in \mathcal{X}^* \mid \lambda \in \mathcal{T}_C(G(\hat{x}))^\circ\}$$

(vgl. [14] und [38]).

Definition 4.2.8.

Es sei $\hat{x} \in M$ beliebig gewählt.

- (i) Die sogenannte Abadie Constraint Qualification, kurz ACQ, ist in \hat{x} erfüllt, wenn die Relation $\mathcal{T}_M(\hat{x}) = \mathcal{L}_M(\hat{x})$ gilt, wobei $\mathcal{S}_M(\hat{x})$ abgeschlossen bzgl. der schwach- \star -Topologie ist.
- (ii) Die sogenannte Guignard Constraint Qualification, kurz GCQ, ist in \hat{x} erfüllt, wenn die Relation $\mathcal{T}_M(\hat{x})^\circ = \mathcal{S}_M(\hat{x})$ gilt.
- (iii) Eine Bedingung, die die KRZCQ impliziert, ist die sogenannte Full Range Constraint Qualification, kurz FRCQ. Sie ist erfüllt, wenn $G'(\hat{x})\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ gilt, womit sie sich auf die Surjektivität von $G'(\hat{x})$ reduziert.

Das folgende Lemma verdeutlicht das Verhältnis der angesprochenen Regularitätsbedingungen zueinander. Für den Beweis und vertiefende Ausführungen sei auf [38] verwiesen.

Lemma 4.2.9.

Es sei $\hat{x} \in M$ beliebig gewählt. Dann gelten für die oben präsentierten Regularitätsbedingungen folgende Implikationen, sofern sie in \hat{x} erfüllt sind:

$$\text{FRCQ} \Rightarrow \text{KRZCQ} \Rightarrow \text{ACQ} \Rightarrow \text{GCQ}.$$

Des Weiteren sind die KKT-Bedingungen in \bar{x} erfüllt, falls es ein lokales Minimum von (4.11) ist. Damit ist jede dieser Regularitätsbedingungen hinreichend dafür, dass die KKT-Bedingungen notwendige Optimalitätsbedingungen für (4.11) darstellen.

Lemma 4.2.10.

Die Abbildung $G : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ sei stetig Fréchet-differenzierbar zwischen den Banachräumen \mathcal{X} und \mathcal{Y} und $C \subseteq \mathcal{Y}$ sei eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Menge. Weiter sei die KRZCQ für einen Punkt \bar{x} aus der zusätzlich konvexen Menge $M = \{x \in \mathcal{X} \mid G(x) \in C\}$ erfüllt, welcher lokal optimale Lösung von (4.11) ist, so dass F in diesem Punkt Fréchet-differenzierbar ist. Dann existiert ein sogenannter (regulärer) Lagrange-Multiplikator $\bar{\lambda} \in \mathcal{N}_C(G(\bar{x}))$, der die Identität

$$F'(\bar{x}) + G'(\bar{x})^*[\bar{\lambda}] = 0$$

erfüllt.

Beweis. Aus dem ersten Teil von Lemma 4.2.1 folgt $-F'(\bar{x}) \in \widehat{\mathcal{N}}_M(\bar{x})$ und damit $-F'(\bar{x}) \in \mathcal{N}_M^c(\bar{x})$. Da in \bar{x} die KRZCQ gilt, folgt aus Lemma 4.2.2 mit $\mathcal{A} = G'(\bar{x})$ und Lemma 4.2.3

$$\mathcal{N}_M^c(\bar{x}) = \mathcal{T}_M^c(\bar{x})^\circ = \{d \in \mathcal{X} \mid G'(\bar{x})[d] \in \mathcal{T}_C(G(\bar{x}))^\circ\} = G'(\bar{x})^*[\mathcal{T}_C(G(\bar{x}))^\circ].$$

Die Konvexität der Menge C liefert schließlich $\mathcal{T}_C(G(\bar{x}))^\circ = \mathcal{N}_C(G(\bar{x}))$, womit die Aussage bewiesen ist. □

Bemerkung 4.2.11.

Die notwendigen Optimalitätsbedingungen aus Lemma 4.2.10 werden KKT-Bedingungen des Problems (4.11) genannt, falls C eine konvexe Menge ist. Ist C ein nichtleerer, abgeschlossener, konvexer Kegel, so gilt $\bar{\lambda} \in C^\circ \cap \{G(\bar{x})\}^\perp$. Im Zusammenhang mit der KRZCQ wurden diese Bedingungen zuerst in [56] aufgestellt. \bar{x} selbst wird unter diesen Voraussetzungen Karush-Kuhn-Tucker-Punkt, kurz KKT-Punkt, von (4.11) genannt (vgl. auch [13], Satz 3.9).

Neben der Existenz eines Lagrange-Multiplikators für 4.11 kann (zusammen mit der Erfüllung der Voraussetzungen aus Satz 4.2.10) auch seine Eindeutigkeit durch eine Regularitätsbedingung abgesichert werden. Wie diese Bedingung aussieht, wird im nächsten Satz thematisiert. Zuvor wird noch folgendes Hilfsresultat benötigt (vgl. [75]):

Lemma 4.2.12.

Der Punkt $\bar{x} \in \mathcal{X}$ sei zulässig für (4.11). Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- (i) Für alle $F \in \mathcal{F} := \{F : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \mid F \text{ ist Fréchet-differenzierbar}\}$ existiert für (4.11) höchstens ein Lagrange-Multiplikator in \bar{x} .
- (ii) Für alle $F \in \mathcal{F}$, für die \bar{x} ein lokaler Minimierer von (4.11) ist, existiert höchstens ein Lagrange-Multiplikator in \bar{x} .
- (iii) Es gilt

$$\ker G'(\bar{x})^* \cap \text{lin}(\mathcal{T}_C(G(\bar{x}))^\circ) = \{0\}. \quad (4.19)$$

Beweis. (i) \rightarrow (ii) ist offensichtlich.

(ii) \rightarrow (iii): Da $\mathcal{T}_C(G(\bar{x}))^\circ$ ein konvexer Kegel ist, gilt $\text{lin}(\mathcal{T}_C(G(\bar{x}))^\circ) = \mathcal{T}_C(G(\bar{x}))^\circ - \mathcal{T}_C(G(\bar{x}))^\circ$. Es gelte nun

$$\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2 \in \ker G'(\bar{x})^* \cap \text{lin}(\mathcal{T}_C(G(\bar{x}))^\circ) \quad (4.20)$$

mit beliebigen $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2 \in \mathcal{T}_C(G(\bar{x}))^\circ$. Setzt man $F(x) := -\langle \bar{\lambda}_1, G(x) \rangle \forall x \in \mathcal{X}$, so gilt $F(x) - F(\bar{x}) = -\langle \bar{\lambda}_1, G(x) - G(\bar{x}) \rangle \geq 0$ für alle $x \in \mathcal{X}$, die zulässig für (4.11) sind. Somit ist \bar{x} für dieses F ein lokaler Minimierer von (4.11). Per Definition von F gilt $F'(\bar{x}) + G'(\bar{x})^* \bar{\lambda}_1 = 0$. $\bar{\lambda}_1$ ist also ein Lagrange-Multiplikator. Die Beziehung (4.20) impliziert weiter, dass $\bar{\lambda}_2$ ebenfalls ein Lagrange-Multiplikator ist. (ii) liefert dann $\bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2$, was (iii) impliziert.

(iii) \rightarrow (i): Gegeben seien $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ und die Multiplikatoren $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2 \in \mathcal{T}_C(G(\bar{x}))^\circ$. Dann gilt $F'(\bar{x}) + G'(\bar{x})^* \bar{\lambda}_i = 0$ für $i \in \{1, 2\}$. Damit gilt weiter $G'(\bar{x})^*(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2) = 0$ und (iii) impliziert $\bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2$. Somit existiert mindestens ein Lagrange-Multiplikator. □

Um nun anstelle der Bedingung (iii) in Lemma 4.2.12 eine äquivalente Aussage im primalen Raum \mathcal{Y} zu erhalten, wird noch eine weitere Bedingung benötigt. Diese ist Inhalt des folgenden Satzes (vgl. [75]).

Satz 4.2.13.

Es gelte

$$cl\left(G'(\bar{x})\mathcal{X} - \mathcal{T}_C(G(\bar{x}))^{\circ\perp}\right) = \mathcal{Y}. \quad (4.21)$$

Dann gilt (4.19).

Beweis. Definiert man $A := \ker G'(\bar{x})^*$ und $B := \text{lin}\left(\mathcal{T}_C(G(\bar{x}))^\circ\right)$ als Unterräume von \mathcal{Y}^* , so gilt $A^\perp = cl\left(G'(\bar{x})\mathcal{X}\right)$ und $B^\perp = \mathcal{T}_C(G(\bar{x}))^{\circ\perp}$ (vgl. (2.4) in Lemma 4.1.4). In diesem Fall ist Voraussetzung (4.21) äquivalent zu $cl(A^\perp - B^\perp) = \mathcal{Y}$. Damit ist (4.19) gleichbedeutend mit $A \cap B = \{0\}$. □

Bemerkung 4.2.14.

Es ist sofort ersichtlich, dass die Erfüllung der FRCQ die Identität (4.21) impliziert.

Unter gewissen Konvexitätsvoraussetzungen stellen die Bedingungen aus Lemma 4.2.10 ein hinreichendes Kriterium für globale Optimalität dar (vgl. [60]):

Lemma 4.2.15.

F sei ein konvexes Funktional, die Abbildung $G : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ stetig Fréchet-differenzierbar zwischen den Banachräumen \mathcal{X} und \mathcal{Y} , $C \subseteq \mathcal{Y}$ ein nichtleerer, abgeschlossener, konvexer Kegel und G des Weiteren $-C$ -konvex, erfülle also

$$G(\alpha x + (1 - \alpha)x') - \alpha G(x) - (1 - \alpha)G(x') \in C \quad \forall x, x' \in \mathcal{X}.$$

Wählt man ein $\bar{x} \in M := G^{-1}(C)$, wo F Fréchet-differenzierbar ist, und nimmt an, dass dort die KKT-Bedingungen gelten, so ist \bar{x} eine global optimale Lösung von (4.11).

Beweis. Da C ein konvexer Kegel ist und die KKT-Bedingungen in \bar{x} erfüllt sind, existiert ein $\bar{\lambda} \in C^\circ \cap \{G(\bar{x})\}^\perp$ mit $F'(\bar{x}) + G'(\bar{x})^*[\bar{\lambda}] = 0$. Angenommen es gibt ein $x \in G^{-1}(C)$ mit $F(x) < F(\bar{x})$, so dass \bar{x} nicht global optimal für (4.11) ist. Aus der $-C$ -Konvexität von G folgt $G(\bar{x}) + G'(\bar{x})[x - \bar{x}] - G(x) \in C$ (vgl. [52]). Dann liefert die Konvexität von F zusammen mit $\langle \bar{\lambda}, G(x) \rangle_{\mathcal{Y}} \leq 0$ und $\langle \bar{\lambda}, G(\bar{x}) \rangle_{\mathcal{Y}} = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \langle F'(\bar{x}) + G'(\bar{x})^*[\bar{\lambda}], x - \bar{x} \rangle_{\mathcal{X}} = F'(\bar{x})[x - \bar{x}] + \langle \bar{\lambda}, G'(\bar{x})[x - \bar{x}] \rangle_{\mathcal{Y}} \\ &\leq F'(\bar{x})[x - \bar{x}] + \langle \bar{\lambda}, \underbrace{G(\bar{x}) + G'(\bar{x})[x - \bar{x}] - G(x)}_{\leq 0, \text{ vgl. [52], Th. 2.20}} \rangle_{\mathcal{Y}} \\ &\leq F'(\bar{x})[x - \bar{x}] \leq F(x) - F(\bar{x}) < 0, \end{aligned}$$

was ein Widerspruch ist. Somit ist \bar{x} global optimal für (4.11). □

4.3 MPCCs in Banachräumen und die KKT-Transformation für (BO)

In diesem Abschnitt soll die Theorie aus Unterkapitel 4.2 am Bilevel-Optimalsteuerproblem (BO) in die Praxis umgesetzt werden. Zunächst wird geprüft, ob für das Problem auf der Follower-Ebene eine Regularitätsbedingungen erfüllt ist, um die Existenz eines Lagrange-Multiplikators für die PDE-Nebenbedingung abzusichern, wobei die Steuerbeschränkungen im Zuge der KKT-Transformation separat betrachtet werden. Schließlich wird untersucht, ob die Multiplikatoren zu bestimmten Nebenbedingungen der Follower-Ebene eindeutig sind und in welcher Beziehung lokale bzw. globale Lösungen des KKT-Modells und des Problems (BO) zueinander stehen.

Rücken wir also

$$\min_{u^F, y^F} f^F(y^L, y^F, u^F) := \frac{1}{2} \|y^L + y^F - y_d^F\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha^F}{2} \|u^F\|_{L^2(\Omega)}^2$$

bei

$$\begin{aligned} -\Delta y^L &= u^L & \text{in } \Omega, & & -\Delta y^F &= u^F & \text{in } \Omega \\ y^L &= 0 & \text{auf } \Gamma, & & y^F &= 0 & \text{auf } \Gamma \end{aligned} \quad (BO_F^{\text{sep}})$$

und

$$u^F \in U_{\text{ad}}^F = \left\{ u^F(x) \in L^2(\Omega) \mid u_a^F(x) \leq u^F(x) \leq u_b^F(x) \text{ fast überall in } \Omega \right\}$$

in den Fokus und untersuchen, ob eine der in Abschnitt 4.2 vorgestellten Regularitätsbedingungen erfüllt ist. Die gebräuchlichste CQ im Rahmen von Optimierungsproblemen in Banachräumen ist die KRZCQ (4.12). Zudem lässt sie sich relativ gut prüfen. Gleiches gilt für die FRCQ, welche die KRZCQ impliziert (vgl. Lemma 4.2.9). Zuvor halten wir noch fest, dass die zulässige Menge jetzt die Struktur

$$M^F = \left\{ u^F \in U_{\text{ad}}^F \mid g(u^F) \in C \right\}$$

mit $g(u^F) = Su^F - u^F$ und $C = \{0\}$ hat. Das Parameterpaar (u^L, y^L) ist an dieser Stelle fixiert und die entsprechende Nebenbedingung bei der Regularitätsüberprüfung an dieser Stelle deswegen zu vernachlässigen. $S : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, $u^F \mapsto y^F(u^F)$, mit $S = E_{H^1(\Omega)}G$ und $E_{H^1(\Omega)} : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ beschreibt wieder, wie in Abschnitt 3.1, den Lösungsoperator, so dass $g : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ mit $L^2(\Omega)^* = L^2(\Omega)$ gilt.

Bemerkung 4.3.1.

Die Formulierung der PDE-Nebenbedingung über den Lösungsoperator S wird insbesondere für die Überprüfung einer Regularitätsbedingung von Vorteil sein. Wir behalten für die Dauer dieses Abschnitts die Äquivalenz

$$-\Delta y^F = u^F \quad \Leftrightarrow \quad y^F = Su^F$$

stets im Hinterkopf. Im Kontext von Regularitätsbedingungen wird die letzte Schreibweise über den Lösungsoperator S hilfreich sein. Formal halten wir für den Rest dieses Abschnitts aber ansonsten (noch) an der Struktur von (BO_F^{sep}) fest.

Satz 4.3.2.

Die Annahmen und Voraussetzungen aus Bemerkung 4.0.1 seien erfüllt. Es sei (\bar{u}^F, \bar{y}^F) die Lösung von (BO_F) zum vorgegebenen Parameterpaar (\bar{u}^L, \bar{y}^L) . Dann ist die FRCQ in (\bar{u}^F, \bar{y}^F) erfüllt und es existiert zur Restriktion $g(\bar{u}^F, \bar{y}^F) = \bar{y}^F - S\bar{u}^F \in C = \{0\}$ mit $C \subset L^2(\Omega)$ ein Lagrange-Multiplikator $\bar{\lambda}^F \in C^\circ$. Da es sich um eine Gleichungsrestriktion handelt, entsteht keine zusätzliche komplementäre Schlupfbedingung.

Beweis. Mit S als stetig invertierbarem Operator, $g'(\bar{u}^F, \bar{y}^F) = (-S, I)$ und $A = U_{\text{ad}}^F \times H_0^1(\Omega)$ ist die Regularitätsbedingung

$$g'(\bar{u}^F, \bar{y}^F)\mathcal{R}_A(\bar{u}^F, \bar{y}^F) = L^2(\Omega)$$

mit

$$\mathcal{R}_A(\bar{u}^F, \bar{y}^F) = \left\{ \beta \left((u^F, y^F) - (\bar{u}^F, \bar{y}^F) \right) \mid \beta \geq 0, (u^F, y^F) \in A \right\}$$

stets erfüllt, da die Gleichung

$$g'(\bar{u}^F, \bar{y}^F) \left[(u^F, y^F) - (\bar{u}^F, \bar{y}^F) \right] = (-S, -I) \left((u^F, y^F) - (\bar{u}^F, \bar{y}^F) \right) = -S(u^F - \bar{u}^F) + I(y^F - \bar{y}^F) = z$$

für jedes $z \in L^2(\Omega)$ mit $u^F = -S^{-1}z + \bar{u}^F$ und $y^F = \bar{y}^F$ lösbar ist. Damit existiert nach Lemma 4.2.9 und Lemma 4.2.10 ein $\bar{\lambda}^F \in C^\circ$ mit $(f^F)'(\bar{u}^F, \bar{y}^F) + g'(\bar{u}^F, \bar{y}^F)^*[\bar{\lambda}^F] = 0$. □

4.3.1 Der adjungierte Zustand als Lagrange-Multiplikator

Als Nächstes wird untersucht, welche Rolle der in Kapitel 3 eingeführte adjungierte Zustand p^F im Rahmen der KKT-Theorie spielt. Dies wurde in Abschnitt 3.2.1 bereits angedeutet. Mit der soeben nachgewiesenen Existenz des Lagrange-Multiplikators $\bar{\lambda}^F$ zur Restriktion $g(\bar{u}^F, \bar{y}^F) = \bar{y}^F - S\bar{u}^F \in C = \{0\}$ gilt für die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}^F(\bar{y}^F, \bar{u}^F, \lambda^F) = f^F(\bar{y}^F, \bar{u}^F) - (\bar{y}^F - S\bar{u}^F, \bar{\lambda}^F)_{L^2(\Omega)}$$

und folglich die Äquivalenz

$$D_{\bar{y}^F} \mathcal{L}^F(\bar{y}^F, \bar{u}^F, \bar{p}^F) = 0 \iff \bar{\lambda}^F = \bar{y}^L + \bar{y}^F - y_d^F.$$

Mit Blick auf die Herleitung bzw. Definition von p^F in Abschnitt 3.2.1 schließt man sofort auf die Identität

$$\bar{p}^F = S^* \bar{\lambda}^F. \tag{4.22}$$

Satz 4.3.3.

(\bar{u}^F, \bar{y}^F) sei die Lösung von (BO_F) zum Parameterpaar (\bar{u}^L, \bar{y}^L) . Dann ist der Lagrange-Multiplikator $\bar{\lambda}^F$ aus Satz 4.3.2 eindeutig.

Beweis. $\bar{\lambda}^F$ ist unter diesen Voraussetzungen nach der letzten der oben aufgeführten Äquivalenz zur Lagrange-Funktion definiert als

$$\bar{\lambda}^F = \bar{y}^L + \bar{y}^F - y_d^F.$$

Da y_d^F als Zielzustand der Follower-Ebene eindeutig vorgegeben ist und die Zustände \bar{y}^L und \bar{y}^F nach Satz 2.1.11 eindeutige Lösungen von (PO_L) bzw. (PO_F) sind, ist $\bar{\lambda}^F$ als Lagrange-Multiplikator zur Zustandsgleichung $\bar{y}^F - S\bar{u}^F = 0$ ebenfalls stets eindeutig. □

Bemerkung 4.3.4.

Alternativ kann für den Nachweis der Eindeutigkeit des Multiplikators auch der Weg über die Regularitätsbedingung (4.21) aus Satz 4.2.13 und die Äquivalenzen aus Lemma 4.2.12 gegangen werden. Mit Blick auf die angegebene Äquivalenz zur partiellen Ableitung der Lagrange-Funktion ist der Weg in obigem Beweis allerdings wesentlich intuitiver.

4.3.2 Eine Alternative zur Variationsungleichung

Um für die Durchführung der KKT-Transformation auch für die aus $u^F \in U_{\text{ad}}^F$ resultierenden Steuerbeschränkungen

$$u_a^F(x) \leq u^F(x) \quad \text{und} \quad u^F(x) \leq u_b^F(x) \tag{4.23}$$

die Existenz von (möglicherweise eindeutigen) Lagrange-Multiplikatoren nachzuweisen, rufen wir uns die Äquivalenzaussage aus Satz 3.2.1 und die darauf folgende Bemerkung in Erinnerung: Eine Steuerung \bar{u}^F ist genau dann Lösung von (BO_F) , wenn sie die Variationsungleichung

$$(\bar{p}^F + \alpha^F \bar{u}^F, u^F - \bar{u}^F)_{L^2(\Omega)} \geq 0 \quad \forall u^F \in U_{\text{ad}}^F$$

als Teil des Optimalitätssystems (3.3) erfüllt. Im Folgenden wird die Möglichkeit geprüft, die Variationsungleichung (3.2) durch Einführung von Lagrange-Multiplikatoren für die Box-Restriktionen $u_a^F(x) \leq u^F(x)$ und $u^F(x) \leq u_b^F(x)$ als weitere Gleichung zu formulieren.

Satz 4.3.5.

Die Variationsungleichung (3.2) ist äquivalent zur Existenz fast überall nichtnegativer Funktionen $\bar{\mu}_a^F, \bar{\mu}_b^F \in L^2(\Omega)$, die die Gleichung

$$\bar{p}^F + \alpha^F \bar{u}^F - \bar{\mu}_a^F + \bar{\mu}_b^F = 0 \tag{4.24}$$

sowie die Komplementaritätsbedingungen

$$(\bar{\mu}_a^F(x), u_a^F(x) - \bar{u}^F(x))_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \text{und} \quad (\bar{\mu}_b^F(x), \bar{u}^F(x) - u_b^F(x))_{L^2(\Omega)} = 0 \tag{4.25}$$

fast überall in Ω erfüllen.

Beweis. Zunächst wird gezeigt, dass aus der Variationsungleichung (3.2) die Beziehungen (4.24) und (4.25) folgen. Dazu definiert man die Multiplikatoren

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_a^F(x) &:= (\bar{p}^F(x) + \alpha^F \bar{u}^F(x))^+ = \max(0, \bar{p}^F(x) + \alpha^F \bar{u}^F(x)), \\ \bar{\mu}_b^F(x) &:= (\bar{p}^F(x) + \alpha^F \bar{u}^F(x))^- = -\min(0, \bar{p}^F(x) + \alpha^F \bar{u}^F(x)), \end{aligned} \tag{4.26}$$

für die nach Definition $\bar{\mu}_a^F \geq 0$ und $\bar{\mu}_b^F \geq 0$ gilt. Weiter gilt $\bar{p}^F + \alpha^F \bar{u}^F = \bar{\mu}_a^F - \bar{\mu}_b^F$, also (4.24). Wegen der Beziehungen in (3.4) gelten außerdem folgende Implikationen:

$$\begin{aligned} \bar{p}^F(x) + \alpha^F \bar{u}^F(x) > 0 &\Rightarrow \bar{u}^F(x) = u_a^F(x), \\ \bar{p}^F(x) + \alpha^F \bar{u}^F(x) < 0 &\Rightarrow \bar{u}^F(x) = u_b^F(x), \\ u_a^F(x) \leq \bar{u}^F(x) \leq u_b^F(x) &\Rightarrow \bar{p}^F(x) + \alpha^F \bar{u}^F(x) = 0. \end{aligned}$$

Damit sind für fast alle $x \in \Omega$ die Komplementaritätsbedingungen in (4.25) erfüllt: Falls $\bar{\mu}_a^F(x) > 0$ gilt, ist $\bar{\mu}_b^F(x)$ nach Definition in (4.26) automatisch gleich Null, womit die zweite Bedingung in (4.25) erfüllt ist. Da bei $\bar{\mu}_a^F(x) > 0$ außerdem $\bar{u}^F(x) = u_a^F(x)$ gilt, ist auch das erste Produkt in (4.25) gleich Null. Bei $\bar{\mu}_a^F(x) = 0$ ist die erste Bedingung sofort erfüllt und $\bar{p}^F(x) + \alpha^F \bar{u}^F(x) \leq 0$ muss gelten. Das hat $\bar{u}^F(x) = u_b^F(x)$ bei $\bar{p}^F(x) + \alpha^F \bar{u}^F(x) < 0$ und $\bar{\mu}_b^F(x) = 0$ bei $\bar{p}^F(x) + \alpha^F \bar{u}^F(x) = 0$ zur Folge, womit auch das zweite Produkt Null ist. Falls umgekehrt $\bar{\mu}_b^F(x) > 0$ ist, muss $\bar{\mu}_a^F(x)$ nach (4.26) Null sein und das erste Produkt in (4.25) ist Null. Außerdem muss wegen $\bar{p}^F(x) + \alpha^F \bar{u}^F(x) < 0$ wieder $\bar{u}^F(x) = u_b^F(x)$ gelten, womit die zweite Bedingung erfüllt ist. Bei $\bar{\mu}_b^F(x) = 0$ ist die zweite Bedingung sofort erfüllt und $\bar{p}^F(x) + \alpha^F \bar{u}^F(x) \geq 0$ muss gelten. Das hat $\bar{u}^F(x) = u_a^F(x)$ bei $\bar{p}^F(x) + \alpha^F \bar{u}^F(x) > 0$ und $\bar{\mu}_a^F(x) = 0$ bei $\bar{p}^F(x) + \alpha^F \bar{u}^F(x) = 0$ zur Folge, womit auch das erste Produkt Null ist.

Wenn umgekehrt (4.24) und (4.25) mit $\bar{u}^F \in U_{\text{ad}}^F$ erfüllt sind, können für beliebiges $u^F \in U_{\text{ad}}^F$ drei Fälle eintreten: Für fast alle x mit $u_a^F(x) < \bar{u}^F(x) < u_b^F(x)$ folgt aus den Komplementaritätsbedingungen in (4.25) die Beziehung $\bar{\mu}_a^F(x) = \bar{\mu}_b^F(x) = 0$ und aus (4.24) $\bar{p}^F(x) + \alpha^F \bar{u}^F(x) = 0$ und somit

$$(\bar{p}^F(x) + \alpha^F \bar{u}^F(x))(u^F(x) - \bar{u}^F(x)) \geq 0. \quad (4.27)$$

Im Fall $\bar{u}^F(x) = u_a^F(x)$ gilt wegen $\bar{u}^F \in U_{\text{ad}}^F$ die Beziehung $u^F(x) - \bar{u}^F \geq 0$. Der zweite Teil von (4.25) liefert direkt $\bar{\mu}_b^F(x) = 0$ und aus (4.24) folgt $\bar{p}^F(x) + \alpha^F \bar{u}^F(x) = \bar{\mu}_a^F(x) \geq 0$, was ebenfalls (4.27) bedeutet. Bei $\bar{u}^F(x) = u_b^F(x)$ gilt analog $u^F(x) - \bar{u}^F \leq 0$ und mit $\bar{\mu}_a^F(x) = 0$ folgt aus (4.24) $\bar{p}^F + \alpha^F \bar{u}^F = -\bar{\mu}_b^F \leq 0$, was wieder zu (4.27) führt. Demnach ist (4.27) für fast alle $x \in \Omega$ erfüllt und nach Integration ergibt sich die Variationsungleichung (3.2). \square

Bemerkung 4.3.6.

Im Falle des Vorliegens einer optimalen Steuerung \bar{u}^F lassen sich folgende äquivalente Aussagen zusammenfassen:

- (i) \bar{u}^F ist optimale Steuerung nach Definition 3.1.2.
- (ii) \bar{u}^F erfüllt die Variationsungleichung (3.2)
- (iii) \bar{u}^F erfüllt die Projektionsgleichung (3.5).
- (iv) Es existieren Lagrange-Multiplikatoren $\bar{\mu}_a^F$ und $\bar{\mu}_b^F$, die (4.24) und (4.25) erfüllen.

Diese Beobachtungen werden insbesondere für die numerische Behandlung in Kapitel 6 von Bedeutung sein.

Als Nächstes überlegt man sich, dass die Multiplikatoren $\bar{\mu}_a^F$ und $\bar{\mu}_b^F$ aus Satz 4.3.5 natürlich in die Lagrange-Funktion \mathcal{L}^F aufgenommen werden können. Mit Blick auf Satz 4.3.2 und Abschnitt 4.3.1 bedeutet das $\mathcal{L}^F : H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ und

$$\mathcal{L}^F(\bar{y}^F, \bar{u}^F, \bar{\lambda}^F, \bar{\mu}_a^F, \bar{\mu}_b^F) = f^F(\bar{y}^F, \bar{u}^F) - (\bar{y}^F - S\bar{u}^F, \bar{\lambda}^F)_{L^2(\Omega)} + (u_a^F - \bar{u}^F, \bar{\mu}_a^F)_{L^2(\Omega)} + (\bar{u}^F - u_b^F, \bar{\mu}_b^F)_{L^2(\Omega)},$$

wobei, wie zu Beginn des Abschnitts angekündigt, weiterhin bzgl. der für das Follower-Problem relevanten Zustandsgleichung der Notation $\bar{y}^F = S\bar{u}^F$ gefolgt wird. Es gelten die Äquivalenzen

$$\begin{aligned}
D_{u^F} \mathcal{L}^F(\bar{y}^F, \bar{u}^F, \bar{p}^F, \bar{\mu}_a^F, \bar{\mu}_b^F) = 0 &\iff \alpha^F \bar{u}^F + (S, \bar{\lambda}^F)_{L^2(\Omega)} - \bar{\mu}_a^F + \bar{\mu}_b^F = 0, \\
D_{\lambda^F} \mathcal{L}^F(\bar{y}^F, \bar{u}^F, \bar{p}^F, \bar{\mu}_a^F, \bar{\mu}_b^F) = 0 &\iff g(\bar{u}^F, \bar{y}^F) \in C = \{0\}, \\
D_{\mu_a^F} \mathcal{L}^F(\bar{y}^F, \bar{u}^F, \bar{p}^F, \bar{\mu}_a^F, \bar{\mu}_b^F) \leq 0 &\iff \text{erste Ungleichung in (4.23)}, \\
D_{\mu_b^F} \mathcal{L}^F(\bar{y}^F, \bar{u}^F, \bar{p}^F, \bar{\mu}_a^F, \bar{\mu}_b^F) \leq 0 &\iff \text{zweite Ungleichung in (4.23)}
\end{aligned}$$

und

$$D_{y^F} \mathcal{L}^F(\bar{y}^F, \bar{u}^F, \bar{p}^F, \bar{\mu}_a^F, \bar{\mu}_b^F) = 0 \iff \bar{\lambda}^F = \bar{y}^L + \bar{y}^F - y_d^F.$$

Für die erste der oben aufgeführten Äquivalenzen zur Lagrange-Funktion folgt schließlich mit der Identität 4.22

$$D_{u^F} \mathcal{L}^F(\bar{y}^F, \bar{u}^F, \bar{p}^F, \bar{\mu}_a^F, \bar{\mu}_b^F) = 0 \iff \alpha^F \bar{u}^F + \bar{p}^F - \bar{\mu}_a^F + \bar{\mu}_b^F = 0,$$

was gerade Gleichung 4.24 entspricht.

Offen bleibt die Frage nach der Eindeutigkeit der Multiplikatoren $\bar{\mu}_a^F(x)$ und $\bar{\mu}_b^F(x)$.

Satz 4.3.7.

Die Multiplikatoren $\bar{\mu}_a^F$ und $\bar{\mu}_b^F$ sind eindeutig bestimmt.

Beweis. Genau wie im zweiten Teil des Beweises von Satz 4.3.5 spielt man die Fälle, die für eine optimale Steuerung \bar{u}^F eintreten können, durch. Bei $u_a^F < \bar{u}^F < u_b^F$ folgt aus den Komplementaritätsbedingungen in (4.25) sofort die Beziehung $\bar{\mu}_a^F = \bar{\mu}_b^F = 0$. Falls $\bar{u}^F = u_a^F$ gilt, folgt natürlich $\bar{u}^F < u_b^F$ und damit $\bar{\mu}_b^F = 0$, da

$$\left(\bar{\mu}_b^F(x), \underbrace{\bar{u}^F(x) - u_b^F(x)}_{\leq 0} \right)_{L^2(\Omega)} = 0$$

erfüllt sein muss. Damit folgt mit (4.24) weiter

$$\bar{p}^F + \alpha^F \bar{u}^F - \bar{\mu}_a^F = 0 \iff \bar{p}^F + \alpha^F \bar{u}^F = \bar{\mu}_a^F.$$

Da \bar{p}^F als adjungierter Zustand des Follower-Problems nach Satz 2.1.11 ebenso eindeutig ist wie \bar{u}^F als optimale Steuerung von (BO_F) nach Satz 3.1.3 und α^F als vorgegebener Koeffizient im Zielfunktional von (BO_F) eine fixierte, positive Konstante darstellt, folgt die Eindeutigkeit von $\bar{\mu}_a^F$. Analog schließt man auf die Eindeutigkeit von $\bar{\mu}_b^F$ mit dem Ansatz $\bar{u}^F = u_b^F$. □

Damit kann das Optimalitätssystem (3.3) mit der Variationsungleichung durch das folgende Karush-Kuhn-Tucker-System ersetzt werden:

$$\begin{aligned}
-\Delta y^L = u^L & \quad \text{in } \Omega, & -\Delta y^F = u^F & \quad \text{in } \Omega, & -\Delta p^F = y^L + y^F - y_d^F & \quad \text{in } \Omega, \\
y^L = 0 & \quad \text{auf } \Gamma, & y^F = 0 & \quad \text{auf } \Gamma, & p^F = 0 & \quad \text{auf } \Gamma, \\
p^F + \alpha^F u^F - \mu_a^F + \mu_b^F & = 0, & & & & (4.28)
\end{aligned}$$

$$u_a^F \leq u^F \leq u_b^F,$$

$$\mu_a^F = (p^F + \alpha^F u^F)^+ \geq 0, \quad \mu_b^F = (p^F + \alpha^F u^F)^- \geq 0,$$

$$\left(\mu_a^F, u_a^F - u^F \right)_{L^2(\Omega)} = 0, \quad \left(\mu_b^F, u^F - u_b^F \right)_{L^2(\Omega)} = 0.$$

4.3.3 Hinreichende Optimalitätsbedingungen für (BO_F) und das KKT-Modell

Jetzt ist es an der Zeit, das aus (BO_F) resultierende KKT-Modell vorzustellen und die Beziehung der beiden Probleme zueinander bzgl. ihrer globalen Lösungen zu erörtern. Zunächst aber beschäftigen wir uns mit der Bedeutung der KKT-Bedingungen als Optimalitätskriterium und betrachten anstelle von (BO_F) das dazu äquivalente Problem (BO_F^{sep}) :

Satz 4.3.8.

Die Zielfunktion $f^F(y^F, u^F)$ und die Restriktion $-\Delta y^F = u^F$ in (BO_F^{sep}) erfüllen die Voraussetzungen von Lemma 4.2.15, wobei mit Blick auf Satz 4.3.2 $-\Delta y^F = u^F \Leftrightarrow g(u^F, y^F) = y^F - Su^F \in C = \{0\}$ gilt. Die Restriktion $-\Delta y^L = u^L$ muss nicht berücksichtigt werden, da sie nur von fixierten Parametern abhängt. Insbesondere ist $g(u^F, y^F) - C$ -konvex. Damit ist die Erfüllung der Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen ein hinreichendes Optimalitätskriterium.

Beweis. Der Kegel $C = \{0\}$ ist nichtleer, abgeschlossen und konvex, das Funktional $f^F(y^F, u^F)$ per Definition konvex und $g : L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ in $(\tilde{u}^F, \tilde{y}^F)$ Fréchet-differenzierbar. $g(u^F, y^F)$ ist insbesondere $-C$ -konvex, denn es gilt für alle Paare $(u^F, y^F), (\tilde{u}^F, \tilde{y}^F) \in L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}
& g\left(\alpha(u^F, y^F) + (1 - \alpha)(\tilde{u}^F, \tilde{y}^F)\right) - \alpha \cdot g(u^F, y^F) - (1 - \alpha)g(\tilde{u}^F, \tilde{y}^F) \\
&= (\alpha y^F + (1 - \alpha)\tilde{y}^F) - (\alpha Su^F + (1 - \alpha)S\tilde{u}^F) - \alpha \cdot (y^F - Su^F) - (1 - \alpha) \cdot (\tilde{y}^F - S\tilde{u}^F) \\
&= \alpha y^F + (1 - \alpha)\tilde{y}^F - \alpha Su^F - (1 - \alpha)S\tilde{u}^F - \alpha y^F + \alpha Su^F - (1 - \alpha)\tilde{y}^F + (1 - \alpha)S\tilde{u}^F \\
&= 0 \in C.
\end{aligned}$$

Damit sind die KKT-Bedingungen in (4.28) nach Lemma 4.2.15 eine hinreichende Optimalitätsbedingung für (BO_F) . □

Mit Blick auf die Sätze 4.3.2 und 4.3.5 kann schließlich das einstufige KKT-Modell zu (BO) formuliert werden, wobei das KKT-System (4.28) die Follower-Ebene komplett ersetzt:

$$\min_{u^L, u^F, p^F, \mu_a^F, \mu_b^F} F^L(y^L, u^L) := \frac{1}{2} \|y^L + y^F - y_d^L\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha^L}{2} \|u^L\|_{L^2(\Omega)}^2$$

bei

$$-\Delta y^L = u^L, \quad -\Delta y^F = u^F, \quad -\Delta p^F = y^L + y^F - y_d^F, \quad (\text{KKT})$$

$$p^F + \alpha^F u^F - \mu_a^F + \mu_b^F = 0,$$

$$u_a^F \leq u^F \leq u_b^F,$$

$$\mu_a^F = (p^F + \alpha^F u^F)^+ \geq 0, \quad \mu_b^F = (p^F + \alpha^F u^F)^- \geq 0,$$

$$\left(\mu_a^F, u_a^F - u^F\right)_{L^2(\Omega)} = 0, \quad \left(\mu_b^F, u^F - u_b^F\right)_{L^2(\Omega)} = 0$$

und

$$u^L \in U_{\text{ad}}^L = \left\{ u^L(x) \in L^2(\Omega) \mid u_a^L(x) \leq u^L(x) \leq u_b^L(x) \text{ fast überall in } \Omega \right\}.$$

Aufgrund der nachgewiesenen Eindeutigkeit von $\bar{p}^F, \bar{\mu}_a^F$ und $\bar{\mu}_b^F$ kann zusammen mit den Erkenntnissen aus den Abschnitten 3.1 und 3.3 folgendes Resultat bezüglich der Beziehung globaler Lösungen von (BO) und (KKT) zueinander angegeben werden:

Satz 4.3.9.

Falls $(\bar{u}^L, \bar{u}^F) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ optimale Lösung von (BO) ist, so ist $(\bar{u}^L, \bar{u}^F, \bar{p}^F, \bar{\mu}_a^F, \bar{\mu}_b^F)$ die optimale Lösung von (KKT). Ist umgekehrt $(\bar{u}^L, \bar{u}^F, \bar{p}^F, \bar{\mu}_a^F, \bar{\mu}_b^F) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ optimale Lösung von (KKT), so ist (\bar{u}^L, \bar{u}^F) eindeutige optimale Lösung von (BO).

Beweis. Da (\bar{u}^L, \bar{u}^F) globale Lösung von (BO) ist und in (\bar{u}^F, \bar{y}^F) die KRZCQ erfüllt ist, existieren eindeutige Lagrange-Multiplikatoren $\bar{p}^F, \bar{\mu}_a^F, \bar{\mu}_b^F$, so dass die KKT-Bedingungen (4.28) erfüllt sind. Da \bar{u}^L des Weiteren bei $y^F = \bar{y}^F$ eindeutige Lösung des Leader-Problems in (BO) ist, ist (\bar{u}^L, \bar{u}^F) auch Lösung von (KKT), womit der erste Teil der Behauptung folgt.

Umgekehrt löst $(\bar{u}^L, \bar{u}^F, \bar{p}^F, \bar{\mu}_a^F, \bar{\mu}_b^F)$ nach Voraussetzung das Problem (KKT) und $\bar{p}^F, \bar{\mu}_a^F, \bar{\mu}_b^F$ sind eindeutig bestimmt. Angenommen (\bar{u}^L, \bar{u}^F) ist keine global optimale Lösung von (BO). Dann muss es $(\tilde{u}^L, \tilde{u}^F)$ mit $\tilde{u}^L \in U_{\text{ad}}^L$ und \tilde{u}^F als Lösung des Follower-Problems geben, so dass $F^L(\tilde{u}^L, \tilde{u}^F) < F^L(\bar{u}^L, \bar{u}^F)$ gilt. Da (\tilde{u}^F, \bar{y}^F) das Follower-Problem löst und dort die KRZCQ nach Satz 4.3.2 erfüllt ist, gelten die KKT-Bedingungen und es existieren eindeutige Multiplikatoren

$\tilde{p}^F, \tilde{\mu}_a^F, \tilde{\mu}_b^F$ mit

$$-\Delta \tilde{y}^L = \tilde{u}^L, \quad -\Delta \tilde{y}^F = \tilde{u}^F, \quad -\Delta \tilde{p}^F = \tilde{y}^L + \tilde{y}^F - y_d^F,$$

$$\tilde{p}^F + \alpha^F \tilde{u}^F - \tilde{\mu}_a^F + \tilde{\mu}_b^F = 0,$$

$$u_a^F \leq \tilde{u}^F \leq u_b^F,$$

$$\tilde{\mu}_a^F = (\tilde{p}^F + \alpha^F \tilde{u}^F)^+ \geq 0, \quad \tilde{\mu}_b^F = (\tilde{p}^F + \alpha^F \tilde{u}^F)^- \geq 0,$$

$$\left(\tilde{\mu}_a^F, u_a^F - \tilde{u}^F \right)_{L^2(\Omega)} = 0, \quad \left(\tilde{\mu}_b^F, \tilde{u}^F - u_b^F \right)_{L^2(\Omega)} = 0,$$

was zeigt, dass $(\tilde{u}^L, \tilde{u}^F, \tilde{p}^F, \tilde{\mu}_a^F, \tilde{\mu}_b^F)$ eine zulässige Lösung für (KKT) ist. Zusammen mit der Tatsache, dass $F^L(\tilde{u}^L, \tilde{u}^F) < F^L(\bar{u}^L, \bar{u}^F)$ gilt, folgt dass $(\bar{u}^L, \bar{u}^F, \bar{p}^F, \bar{\mu}_a^F, \bar{\mu}_b^F)$ kein global optimaler Punkt von (KKT) ist. Das ist ein Widerspruch zur vorausgesetzten Optimalität von $(\bar{u}^L, \bar{u}^F, \bar{p}^F, \bar{\mu}_a^F, \bar{\mu}_b^F)$ und es folgt der zweite Teil der Behauptung. \square

Der Vollständigkeit halber wird an dieser Stelle zusätzlich das Optimalitätssystem für das einstufige KKT-Modell (KKT) in reduzierter Form angegeben:

$$Su^L = u^L, \quad Su^F = u^F,$$

$$p^L = S^*(Su^L + Su^F - y_d^L), \quad p^F = S^*(Su^L + Su^F - y_d^F),$$

$$(p^L + \alpha^L u^L, u - u^L)_{L^2(\Omega)} \geq 0 \quad \forall u \in U_{\text{ad}}^L, \quad p^F + \alpha^F u^F - \mu_a^F + \mu_b^F = 0, \quad (4.29)$$

$$u_a^F \leq u^F \leq u_b^F,$$

$$\mu_a^F = (p^F + \alpha^F u^F)^+ \geq 0, \quad \mu_b^F = (p^F + \alpha^F u^F)^- \geq 0,$$

$$\left(\mu_a^F, u_a^F - u^F \right)_{L^2(\Omega)} = 0, \quad \left(\mu_b^F, u^F - u_b^F \right)_{L^2(\Omega)} = 0.$$

4.4 Ein Hilfsproblem zu (KKT) für die Stationaritätsanalyse

Das in diesem Abschnitt präsentierte Hilfsproblem wird im nächsten Kapitel benötigt, um die Frage nach starker Stationarität für den Minimierer von (BO) beantworten zu können. Ohne dieses Hilfsproblem, das eine modifizierte Form von (KKT) darstellen wird, bekommt man Schwierigkeiten beim Nachweis der Surjektivität des linearisierten Operators aller Nebenbedingungen des einstufigen Modells, und erhält deswegen nicht die Regularitätsbedingung, die als notwendige Bedingung für das Vorliegen starker Stationarität erfüllt sein muss.

Genauer besteht das Ziel dieser Modifikation darin die Multiplikatoren $\bar{\mu}_a^F$ und $\bar{\mu}_b^F$ durch einen einzigen Multiplikator $\bar{\mu}^F$ zu ersetzen, wobei dieser durch $\bar{\mu}_a^F$ und $\bar{\mu}_b^F$ definiert ist. Die beiden zugehörigen Box-Constraints $u_a^F \leq \bar{u}^F$ und $\bar{u}^F \leq u_b^F$ werden in einer Nebenbedingung vereint. Hierbei wird für eine Menge $A \subset \Omega$ der Einsatz charakteristischer Funktionen der Form

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

hilfreich sein. Gleichzeitig muss die Erfüllung der Komplementaritätsbedingungen in den Nebenbedingungen weiterhin gewährleistet sein. Dabei kommen die aktiven Mengen

$$\mathcal{A}^-(\bar{u}^F) = \left\{ x \in A \mid \bar{u}^F(x) = u_a^F(x) \right\} \quad \text{und} \quad \mathcal{A}^+(\bar{u}^F) = A \setminus \mathcal{A}^-(\bar{u}^F)$$

zum Einsatz. Konkret hat diese Modifikation von (KKT) mit $\bar{\mu}^F = \chi_{\mathcal{A}^-(\bar{u}^F)} \cdot \bar{\mu}_a^F + \chi_{\mathcal{A}^+(\bar{u}^F)} \cdot \bar{\mu}_b^F$ die Gestalt

$$\min_{u^L, u^F, p^F, \mu^F} F^L(y^L, u^L) := \frac{1}{2} \|y^L + y^F - y_d^L\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha^L}{2} \|u^L\|_{L^2(\Omega)}^2$$

bei

$$-\Delta y^L = u^L, \quad -\Delta y^F = u^F, \quad -\Delta p^F = y^L + y^F - y_d^F, \quad (\text{KKT}_{mod})$$

$$p^F + \alpha^F u^F + (-\chi_{\mathcal{A}^-(\bar{u}^F)} + \chi_{\mathcal{A}^+(\bar{u}^F)}) \cdot \mu^F = 0,$$

$$\chi_{\mathcal{A}^-(\bar{u}^F)}(u_a^F - u^F) + \chi_{\mathcal{A}^+(\bar{u}^F)}(u^F - u_b^F) \leq 0,$$

$$\mu^F \geq 0,$$

$$\left(\mu^F, \chi_{\mathcal{A}^-(\bar{u}^F)}(u_a^F - u^F) + \chi_{\mathcal{A}^+(\bar{u}^F)}(u^F - u_b^F) \right)_{L^2(\Omega)} = 0$$

und

$$u^L \in U_{ad}^L = \left\{ u^L(x) \in L^2(\Omega) \mid u_a^L(x) \leq u^L(x) \leq u_b^L(x) \text{ fast überall in } \Omega \right\}.$$

Der Vollständigkeit halber geben wir an dieser Stelle auch das Follower-Problem mit dieser neuen Notation an:

$$\min_{u^F, \mu^F} f^F(y^L, y^F, u^F) := \frac{1}{2} \|y^L + y^F - y_d^F\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha^F}{2} \|u^F\|_{L^2(\Omega)}^2$$

bei

$$\begin{aligned} -\Delta y^L = u^L & \quad \text{in } \Omega, & -\Delta y^F = u^F & \quad \text{in } \Omega, \\ y^L = 0 & \quad \text{auf } \Gamma, & y^F = 0 & \quad \text{auf } \Gamma \end{aligned} \quad (BO_{F, \text{mod}}^{\text{sep}})$$

und

$$\chi_{A^-(u^F)}(u_a^F - u^F) + \chi_{A^+(u^F)}(u^F - u_b^F) \leq 0,$$

$$\mu^F \geq 0,$$

$$\left(\mu^F, \chi_{A^-(u^F)}(u_a^F - u^F) + \chi_{A^+(u^F)}(u^F - u_b^F) \right)_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Die zugehörigen KKT-Bedingungen lauten

$$\begin{aligned} -\Delta \bar{y}^L = \bar{u}^L & \quad \text{in } \Omega, & -\Delta \bar{y}^F = \bar{u}^F & \quad \text{in } \Omega, & -\Delta \bar{p}^F = \bar{y}^L + \bar{y}^F - y_d^F & \quad \text{in } \Omega, \\ \bar{y}^L = 0 & \quad \text{auf } \Gamma, & \bar{y}^F = 0 & \quad \text{auf } \Gamma, & \bar{p}^F = 0 & \quad \text{auf } \Gamma, \end{aligned}$$

$$\bar{p}^F + \alpha^F \bar{u}^F + (-\chi_{A^-(\bar{u}^F)} + \chi_{A^+(\bar{u}^F)}) \cdot \bar{\mu}^F = 0,$$

$$\chi_{A^-(\bar{u}^F)}(u_a^F - \bar{u}^F) + \chi_{A^+(\bar{u}^F)}(\bar{u}^F - u_b^F) \leq 0, \quad (4.30)$$

$$\bar{\mu}^F \geq 0,$$

$$\left(\bar{\mu}^F, \chi_{A^-(\bar{u}^F)}(u_a^F - \bar{u}^F) + \chi_{A^+(\bar{u}^F)}(\bar{u}^F - u_b^F) \right)_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Korollar 4.4.1.

Das Tupel (\bar{u}^F, \bar{y}^F) ist genau dann Lösung des Problems (BO_F^{sep}) zu einem vorgegebenen Parameterpaar (\bar{u}^L, \bar{y}^L) , wenn es $(BO_{F, \text{mod}}^{\text{sep}})$ löst. Die Optimalitätsbedingungen (4.28) und (4.30) sind notwendig und hinreichend für die jeweils eindeutige Lösung.

Beweis. Zunächst führt man sich vor Augen, dass aus dem Beweis von Satz 4.3.5 folgende Implikationen resultieren:

$$\bar{\mu}_a^F > 0 \Leftrightarrow \bar{\mu}_b^F = 0, \quad \bar{\mu}_b^F > 0 \Leftrightarrow \bar{\mu}_a^F = 0, \quad (4.31)$$

$$\bar{u}^F = u_a^F \Rightarrow \bar{\mu}_b^F = 0, \quad \bar{u}^F = u_b^F \Rightarrow \bar{\mu}_a^F = 0, \quad (4.32)$$

$$u_a^F < \bar{u}^F < u_b^F \Rightarrow \bar{\mu}_a^F = \bar{\mu}_b^F = 0. \quad (4.33)$$

Man macht sich die Äquivalenz der Probleme (BO_F^{sep}) und $(BO_{F, \text{mod}}^{\text{sep}})$ mittels folgender Verbindung zwischen $(\bar{\mu}_a^F, \bar{\mu}_b^F)$ und $\bar{\mu}^F = \chi_{A^-(\bar{u}^F)} \cdot \bar{\mu}_a^F + \chi_{A^+(\bar{u}^F)} \cdot \bar{\mu}_b^F$ klar:

Ersetzt man die Beziehungen

$$u_a^F \leq \bar{u}^F \leq u_b^F,$$

$$\bar{\mu}_a^F = (\bar{p}^F + \alpha^F \bar{u}^F)^+ \geq 0, \quad \bar{\mu}_b^F = (\bar{p}^F + \alpha^F \bar{u}^F)^- \geq 0,$$

$$\left(\bar{\mu}_a^F, u_a^F - \bar{u}^F \right)_{L^2(\Omega)} = 0, \quad \left(\bar{\mu}_b^F, \bar{u}^F - u_b^F \right)_{L^2(\Omega)} = 0$$

durch

$$\chi_{A^-(\bar{u}^F)}(u_a^F - \bar{u}^F) + \chi_{A^+(\bar{u}^F)}(\bar{u}^F - u_b^F) \leq 0,$$

$$\bar{\mu}^F \geq 0, \quad (4.34)$$

$$\left(\bar{\mu}^F, \chi_{A^-(\bar{u}^F)}(u_a^F - \bar{u}^F) + \chi_{A^+(\bar{u}^F)}(\bar{u}^F - u_b^F) \right)_{L^2(\Omega)} = 0$$

mit $\mathcal{A}^-(\bar{u}^F) = \{x \in A \mid \bar{u}^F(x) = u_a^F(x)\}$ und $\mathcal{A}^+(\bar{u}^F) = A \setminus \mathcal{A}^-(\bar{u}^F)$, so können folgende Fälle eintreten:

Bei $\bar{u}^F(x) = u_a^F(x)$ gilt $\bar{u}^F(x) - u_b^F(x) < 0$. Damit ist $x \in \mathcal{A}^-(\bar{u}^F)$ und die erste Ungleichung in (4.34) ist mit Gleichheit erfüllt.

Im Fall $\bar{u}^F(x) \leq u_b^F(x)$ müssen wiederum zwei Fälle betrachtet werden: Bei $\bar{u}^F(x) = u_b^F(x)$ gilt $\chi_{A^+(\bar{u}^F)}(x) = 1$, $\chi_{A^-(\bar{u}^F)}(x) = 0$ und $\bar{u}^F(x) - u_b^F(x) = 0$, womit die erste Ungleichung in (4.34) wieder mit Gleichheit erfüllt ist. Bei $\bar{u}^F(x) < u_b^F(x)$ gilt ebenfalls $\chi_{A^+(\bar{u}^F)}(x) = 1$ und $\chi_{A^-(\bar{u}^F)}(x) = 0$ und die erste Ungleichung in (4.34) ist wegen $\bar{u}^F(x) - u_b^F(x) < 0$ wieder gültig.

Auch die Konstruktion von $\bar{\mu}^F = \chi_{A^-(\bar{u}^F)} \cdot \bar{\mu}_a^F + \chi_{A^+(\bar{u}^F)} \cdot \bar{\mu}_b^F$ ist konsistent mit dem Verhalten von $\bar{\mu}_a^F$ und $\bar{\mu}_b^F$ in Satz 4.3.5:

Aus $\bar{u}^F(x) = u_a^F(x)$ folgt mit (4.32) $\bar{\mu}_b^F = 0$ und mit $\chi_{A^-(\bar{u}^F)}(x) = 1$ und (4.31) weiter $\bar{\mu}_a^F > 0$, was $\bar{\mu}^F = \bar{\mu}_a^F$ bedeutet. Für den Fall $\bar{u}^F(x) = u_b^F(x)$ folgt mit (4.32) analog $\bar{\mu}_a^F = 0$ und mit $\chi_{A^+(\bar{u}^F)}(x) = 1$ und (4.31) weiter $\bar{\mu}_b^F > 0$, was zu $\bar{\mu}^F = \bar{\mu}_b^F$ führt. Schließlich folgt aus $u_a^F(x) < \bar{u}^F(x) < u_b^F(x)$ mit

(4.33) $\bar{\mu}_a^F = \bar{\mu}_b^F = 0$, was sofort $\bar{\mu}^F = 0$ bedeutet.

Analog zum zweiten Teil des Beweises zu Satz 4.3.5 kann mit (4.31)-(4.33) gezeigt werden, dass die Komplementaritätsbeziehung in (4.34) stets erfüllt ist. Schließlich ist wegen $\bar{\mu}_a^F, \bar{\mu}_b^F \geq 0$ und $\chi_{A^+(\bar{u}^F)} \in \{0, 1\}$ sowie $\chi_{A^-(\bar{u}^F)} \in \{0, 1\}$ auch die Beziehung $\bar{\mu}^F \geq 0$ bewiesen.

Aus der strikten Konvexität von (BO_F^{sep}) und $(BO_{F, \text{mod}}^{\text{sep}})$ folgt, dass die Bedingungen (4.28) und (4.30) sowohl notwendig als auch hinreichend sind. □

Bemerkung 4.4.2.

Man sieht leicht ein, dass auch die Identität

$$\bar{p}^F + \alpha^F \bar{u}^F + (-\chi_{A^-(\bar{u}^F)} + \chi_{A^+(\bar{u}^F)}) \cdot \bar{\mu}^F = 0$$

konsistent mit

$$\bar{p}^F + \alpha^F \bar{u}^F - \bar{\mu}_a^F + \bar{\mu}_b^F = 0$$

ist: Da bei $\bar{u}^F(x) = u_a^F(x)$ nach (4.32) $\bar{\mu}_b^F(x) = 0$ und außerdem $\chi_{A^-(\bar{u}^F)}(x) = 1$ gilt, ist $\bar{p}^F + \alpha^F \bar{u}^F + (-\chi_{A^-(\bar{u}^F)} + \chi_{A^+(\bar{u}^F)}) \cdot \bar{\mu}^F = 0$ äquivalent zu $\bar{p}^F + \alpha^F \bar{u}^F - \bar{\mu}_a^F + \bar{\mu}_b^F = 0$. Umgekehrt folgt diese Äquivalenz bei $\bar{u}^F(x) = u_b^F(x)$ wegen $\bar{\mu}_a^F(x) = 0$ nach (4.32) und $\chi_{A^+(\bar{u}^F)}(x) = 1$. Im Fall $u_a^F < \bar{u}^F < u_b^F$ folgt schließlich mit (4.33) direkt $\bar{\mu}_a^F = \bar{\mu}_b^F = 0$ und damit $(-\chi_{A^-(\bar{u}^F)} + \chi_{A^+(\bar{u}^F)}) \cdot \bar{\mu}^F = 0$.

Das Problem $(\text{KKT}_{\text{mod}})$ wird die Basis für den letzten Abschnitt des nächsten Kapitels sein.

5 Stationaritätskonzepte für MPCCs in reflexiven Banachräumen

Die (KKT)-Transformation aus Kapitel 4.11 wird nun aufgrund der äquivalenten Betrachtungsmöglichkeiten aus Satz 4.3.9 in den Vordergrund gerückt und anstelle von (BO) als MPCC im Banachraum gelöst. Zunächst werden anhand eines allgemeinen MPCCs in einem reflexiven Banachraum einige Resultate präsentiert, die für die Behandlung von (KKT) im zweiten Kapitelteil benötigt werden. Hierbei wird deutlich, dass für ein solches MPCC keine bis hierhin bekannte Regularitätsbedingung erfüllt werden kann. Diese Schwierigkeit kann jedoch durch das Arbeiten mit einer Reihe von 'Hilfsproblemen' umschifft werden, um so eine Lösung des MPCCs (und später von (KKT)) auf schwache bzw. starke Stationarität zu prüfen und schließlich notwendige Optimalitätsbedingungen zu formulieren. Zur besseren Einordnung wird dieses Vorgehen für den endlichdimensionalen Fall in seinen wichtigsten Facetten dargestellt.

5.1 Regularitätsbedingungen und Stationaritätskonzepte für endlichdimensionale MPCCs

Da MPCCs (in Banachräumen) ein zentraler Baustein dieser Arbeit sein werden, soll dem Leser an dieser Stelle ein Überblick über die wichtigsten Eigenschaften dieser Problemklasse hinsichtlich Stationaritätstypen und erfüllbarer Regularitätsbedingungen mit auf den Weg gegeben werden. Hierbei werden lediglich die wichtigsten Aussagen und Implikationen skizziert. Für vertiefende Ausführungen und zugehörige Beweise wird auf die entsprechende Literatur verwiesen. Eine Optimierungsaufgabe der Form

$$f(x) \rightarrow \min_x$$

bei

$$\begin{aligned} g(x) \leq 0, \quad h(x) = 0, \\ G(x) \geq 0, \quad H(x) \geq 0, \quad G(x)^T H(x) = 0 \end{aligned} \tag{sMPCC}$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ und $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ und der nichtleeren zulässigen Menge

$$M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \leq 0, h(x) = 0, G(x) \geq 0, H(x) \geq 0, G(x)^T H(x) = 0\}$$

wird als Optimierungsproblem mit Komplementaritätsbedingungen oder kurz MPCC (**M**athematical **P**roblem with **C**omplementarity **C**onstraints) bezeichnet. Da für Probleme dieses Typs wegen der Komplementaritätsforderung in den Nebenbedingungen die meisten Standard-Regularitätsbedingungen, inklusive MFCQ und somit auch LICQ (vgl. [35], Abschnitt 2.2), in jedem zulässigen Punkt $\hat{x} \in M$ verletzt sind, bleiben nur relativ unhandliche Regularitätsbedingungen übrig, um sicherzustellen,

dass die KKT-Bedingungen notwendige Optimalitätsbedingungen darstellen. Deswegen müssen neue, auf (sMPCC) zugeschnittene Regularitätsbedingungen gefunden werden, um Bedingungen für Optimalität eines zulässigen Punktes $\hat{x} \in M$ herleiten zu können. Man wird sehen, dass hierbei kein Lagrange-Multiplikator für die komplementäre Nebenbedingung entsteht. Der Preis dafür ist jedoch, dass die resultierenden Stationaritätskonzepte qualitativ hinter dem der starke Stationarität liegen.

Zu diesem Zweck ist es zunächst hilfreich für ein $\hat{x} \in M$ die Indexmengen

$$\begin{aligned} I_g(\hat{x}) &:= \{i \mid g_i(\hat{x}) = 0\} \\ I_{0+}(\hat{x}) &:= \{i \mid G_i(\hat{x}) = 0, \quad H_i(\hat{x}) > 0\}, \\ I_{+0}(\hat{x}) &:= \{i \mid G_i(\hat{x}) > 0, \quad H_i(\hat{x}) = 0\}, \\ I_{00}(\hat{x}) &:= \{i \mid G_i(\hat{x}) = 0, \quad H_i(\hat{x}) = 0\} \end{aligned}$$

zu definieren.

Ein zulässiger Punkt $\hat{x} \in M$ von (sMPCC) wird stark stationär genannt, wenn er ein KKT-Punkt von (sMPCC) ist oder äquivalent Multiplikatoren $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^p$, $\nu, \xi \in \mathbb{R}^q$ mit

$$\begin{aligned} \nabla f(\hat{x}) + \nabla g(\hat{x})\lambda + \nabla h(\hat{x})\mu - \nabla G(\hat{x})\nu - \nabla H(\hat{x})\xi &= 0, \\ \lambda &\geq 0 \text{ und } \lambda_i = 0 \quad \forall i \notin I_g(\hat{x}), \\ \nu_i &= 0 \quad \forall i \in I_{+0}(\hat{x}), \\ \xi_i &= 0 \quad \forall i \in I_{0+}(\hat{x}), \\ \nu_i &\geq 0, \quad \xi_i \geq 0 \quad \forall i \in I_{00}(\hat{x}). \end{aligned}$$

existieren. Mit dieser Notation kann man außerdem die folgenden Hilfsprobleme formulieren, die später für die Überprüfung von Regularitätsbedingungen und die Definition weiterer Stationaritätstypen für (sMPCC) von Nutzen sein werden:

$$f(x) \rightarrow \min_x$$

bei

$$\begin{aligned} g(x) &\leq 0, \quad h(x) = 0, & \text{(sTNLP)} \\ G(x) &= 0, \quad H(x) \geq 0 \quad \forall i \in I_{0+}(\hat{x}), \\ G(x) &\geq 0, \quad H(x) = 0 \quad \forall i \in I_{+0}(\hat{x}), \\ G(x) &= 0, \quad H(x) = 0 \quad \forall i \in I_{00}(\hat{x}). \end{aligned}$$

(sTNLP) stellt ein bezüglich (sMPCC) verschärftes (tightened) Optimierungsproblem dar. Die zulässige Menge von (sTNLP) ist in der zulässigen Menge von (sMPCC) enthalten.

$$f(x) \rightarrow \min_x$$

bei

$$\begin{aligned} g(x) &\leq 0, \quad h(x) = 0, & \text{(sRNLP)} \\ G(x) &= 0, \quad H(x) \geq 0 \quad \forall i \in I_{0+}(\hat{x}), \\ G(x) &\geq 0, \quad H(x) = 0 \quad \forall i \in I_{+0}(\hat{x}), \\ G(x) &\geq 0, \quad H(x) \geq 0 \quad \forall i \in I_{00}(\hat{x}). \end{aligned}$$

(sRNLP) stellt ein bezüglich (sMPCC) relaxiertes Optimierungsproblem dar. Die zulässige Menge von (sMPCC) ist in der zulässigen Menge von (sRNLP) enthalten. Ein genauerer Blick offenbart, dass die Bedingungen für starke Stationarität gerade den KKT-Bedingungen von (sRNLP) entsprechen.

$$f(x) \rightarrow \min_x$$

bei

$$\begin{aligned} g(x) &\leq 0, & h(x) &= 0, & & (\text{sNLP}(\beta_1, \beta_2)) \\ G(x) &= 0, & H(x) &\geq 0 & \forall i \in I_{0+}(\hat{x}) \cup \beta_1, \\ G(x) &\geq 0, & H(x) &= 0 & \forall i \in I_{+0}(\hat{x}) \cup \beta_2. \end{aligned}$$

Für die Mengen β_1 und β_2 gilt $I_{00} = \beta_1 \cup \beta_2$ und $\beta_1 \cap \beta_2 = \emptyset$. (sNLP(β_1, β_2)) stellt ein bezüglich (sMPCC) reduziertes Optimierungsproblem dar. Die zulässige Menge von (sNLP(β_1, β_2)) ist in der zulässigen Menge von (sMPCC) enthalten.

Es fällt auf, dass sich alle Hilfsprobleme ausschließlich auf der sogenannten biaktiven Menge I_{00} unterscheiden.

Um beispielsweise GCQ und ACQ zu diskutieren, werden für einen zulässigen Punkt $\hat{x} \in M$ von (sMPCC) die Kegel

$$\begin{aligned} L_M(\hat{x}) = \left\{ d \in \mathbb{R}^n \mid \nabla g_i(\hat{x}) \leq 0 \quad \forall i \in I_g(\hat{x}), \right. \\ \nabla h(\hat{x})^T d = 0 \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ \nabla G_i(\hat{x})^T d = 0 \quad \forall i \in I_{0+}(\hat{x}), \\ \nabla H_i(\hat{x})^T d = 0 \quad \forall i \in I_{+0}(\hat{x}), \\ \left. \nabla G_i(\hat{x})^T d \geq 0, \quad \nabla H_i(\hat{x})^T d \geq 0 \quad \forall i \in I_{00}(\hat{x}) \right\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} L_M(\hat{x})^\circ = \left\{ d \in \mathbb{R}^n \mid d = \nabla g(\hat{x})\lambda + \nabla h(\hat{x})\mu - \nabla G(\hat{x})\nu - \nabla H(\hat{x})\xi, \right. \\ \lambda_i \geq 0, \text{ falls } i \in I_g(\hat{x}), \\ \lambda_i = 0, \text{ falls } i \notin I_g(\hat{x}), \\ \nu_i = 0, \text{ falls } i \in I_{+0}(\hat{x}), \\ \xi_i = 0, \text{ falls } i \in I_{0+}(\hat{x}), \\ \left. \nu_i \geq 0, \quad \xi \geq 0, \text{ falls } i \in I_{00}(\hat{x}) \right\} \end{aligned}$$

benötigt. Außerdem ist es sinnvoll sich noch den (Bouligand-) Tangentialkegel

$$T_M(\hat{x}) := \left\{ d \in \mathbb{R}^n \mid \exists \{x^k\} \rightarrow_M \hat{x}, \{t_k\} \geq 0 : t_k(x^k - \hat{x}) \rightarrow d \right\}$$

und den zu einer Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ polaren Kegel

$$K^\circ := \{ w \in \mathbb{R}^n \mid w^T d \leq 0 \quad \forall d \in K \}$$

in Erinnerung zu rufen.

Eine Standard-CQ, die für (sMPCC) auf Umwegen in einem $\hat{x} \in M$ erfüllbar ist, ist die GCQ. Sie gilt, wenn $T_M(\hat{x})^\circ = L_M(\hat{x})^\circ$ erfüllt ist. Die Inklusion $T_M(\hat{x})^\circ \subseteq L_M(\hat{x})^\circ$ ist stets gegeben, allerdings muss $L_M(\hat{x})^\circ \subseteq T_M(\hat{x})^\circ$ abgesichert werden. Das ist möglich, wenn die sogenannte MPCC-LICQ gilt (vgl. [37]). Sie ist in $\hat{x} \in M$ erfüllt, wenn die Gradienten

$$\nabla g_i(\hat{x}) \ (i \in I_g), \quad \nabla h_i(\hat{x}) \ (i = 1, \dots, p), \quad \nabla G_i(\hat{x}) \ (i \in I_{0+} \cup I_{00}), \quad \nabla H_i(\hat{x}) \ (i \in I_{+0} \cup I_{00})$$

linear unabhängig sind. In [35], Kapitel 4, wurde bewiesen, dass zu einem lokalen Minimierer \bar{x} von (sMPCC), in dem die MPCC-LICQ erfüllt ist, eindeutige Multiplikatoren existieren, die die Bedingungen für starke Stationarität erfüllen. Für den Beweis ist das Hilfsproblem (sNLP(β_1, β_2)) von zentraler Bedeutung. Falls \bar{x} ein lokales Minimum von (sMPCC) ist und die GCQ dort erfüllt ist, so ist \bar{x} ebenfalls stark stationär (vgl. [37]). Die MPCC-LICQ impliziert also GCQ. Des Weiteren gilt die ACQ in einem Punkt $\hat{x} \in M$, falls dort $I_{00}(\hat{x}) = \emptyset$ gilt. Allerdings ist $T_M(\hat{x})$ im Gegensatz zu $L_M(\hat{x})$ im Allgemeinen nicht konvex, was die ACQ in den meisten Fällen unbrauchbar macht (vgl. [36], Abschnitt 3.1).

Die KKT-Bedingungen von (sTNLP) liefern die Definition für schwache Stationarität in einem Punkt $\hat{x} \in M$:

$$\begin{aligned} \nabla f(\hat{x}) + \nabla g(\hat{x})\lambda + \nabla h(\hat{x})\mu - \nabla G(\hat{x})\nu - \nabla H(\hat{x})\xi &= 0, \\ \lambda &\geq 0 \text{ und } \lambda_i = 0 \quad \forall i \notin I_g(\hat{x}), \\ \nu_i &= 0 \quad \forall i \in I_{+0}(\hat{x}), \\ \xi_i &= 0 \quad \forall i \in I_{0+}(\hat{x}). \end{aligned}$$

Man sagt, dass MPCC-LICQ bzw. MPCC-MFCQ in \hat{x} erfüllt ist, falls LICQ bzw. MFCQ für (sTNLP) in \hat{x} gilt. Ein lokales Minimum \bar{x} von (sMPCC) ist sowohl unter MPCC-LICQ als auch unter MPCC-MFCQ schwach stationär. An dieser Stelle tut sich folgende Problematik auf: Starke Stationarität korrespondiert mit den KKT-Bedingungen von (sRNLP) und kann nur unter MPCC-LICQ garantiert werden. Schwache Stationarität ist einfacher abzusichern, korrespondiert aber nur mit den KKT-Bedingungen von (sTNLP). Das Ziel besteht nun darin, Stationaritätsbedingungen herzuleiten, die stärker als schwache Stationarität sind, sich aber gleichzeitig besser als starke Stationarität absichern lassen.

Aus den Fritz-John-Bedingungen für (sMPCC), die in jedem zulässigen Punkt $\hat{x} \in M$ erfüllt sind, kann zusammen mit der Subdifferential-Theorie nach Clarke zunächst folgendes Stationaritätskriterium formuliert werden:

Ein zulässiger Punkt $\hat{x} \in M$ von (sMPCC) wird Clarke-stationär (oder kurz C-stationär) genannt, wenn Multiplikatoren $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^p$, $\nu, \xi \in \mathbb{R}^q$ existieren, die dem System

$$\begin{aligned} \nabla f(\hat{x}) + \nabla g(\hat{x})\lambda + \nabla h(\hat{x})\mu - \nabla G(\hat{x})\nu - \nabla H(\hat{x})\xi &= 0, \\ \lambda &\geq 0 \text{ und } \lambda_i = 0 \quad \forall i \notin I_g(\hat{x}), \\ \nu_i &= 0 \quad \forall i \in I_{+0}(\hat{x}), \\ \xi_i &= 0 \quad \forall i \in I_{0+}(\hat{x}), \\ \nu_i \cdot \xi_i &\geq 0 \quad \forall i \in I_{00}(\hat{x}) \end{aligned}$$

genügen. Ein lokales Minimum \bar{x} von (sMPCC) ist bei Erfüllung von MPCC-LICQ bzw. MPCC-MFCQ C-stationär.

Das Problem bei der Überprüfung der Abadie-CQ, die erfüllt ist, wenn $T_M(\hat{x}) = L_M(\hat{x})$ gilt, besteht bei der Betrachtung von (sMPCC) darin, dass $L_M(\hat{x})$ stets konvex ist, $T_M(\hat{x})$ jedoch nicht konvex sein muss. Als Ausweg orientiert man sich wieder an (sTNLP) und definiert zunächst den sogenannten MPCC-linearisierten Tangentialkegel

$$\begin{aligned} L_M^{\text{MPCC}}(\hat{x}) &:= \left\{ d \in \mathbb{R}^n \mid \begin{aligned} &\nabla g_i(\hat{x}) \leq 0 \quad \forall i \in I_g(\hat{x}), \\ &\nabla h(\hat{x})^T d = 0 \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ &\nabla G_i(\hat{x})^T d = 0 \quad \forall I_{0+}(\hat{x}), \\ &\nabla H_i(\hat{x})^T d = 0 \quad \forall I_{+0}(\hat{x}), \\ &0 \leq \nabla G_i(\hat{x})^T d \perp \nabla H_i(\hat{x})^T d \geq 0 \quad \forall i \in I_{00}(\hat{x}) \end{aligned} \right\} \\ &= \left\{ d \in L_M(\hat{x}) \mid (\nabla G_i(\hat{x})^T d)(\nabla H_i(\hat{x})^T d) = 0 \quad \forall i \in I_{00}(\hat{x}) \right\}. \end{aligned}$$

Damit lauten die sogenannte MPCC-Abadie-CQ (kurz MPCC-ACQ) $T_M(\hat{x}) = L_M^{\text{MPCC}}(\hat{x})$ und die MPCC-Guignard-CQ (kurz MPCC-GCQ) $T_M(\hat{x})^\circ = L_M^{\text{MPCC}}(\hat{x})$.

Weiter wird ein zulässiger Punkt $\hat{x} \in M$ Mordukhovic-stationär (oder kurz M-stationär) genannt, wenn Multiplikatoren $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^p$, $\nu, \xi \in \mathbb{R}^q$ existieren, die dem System

$$\begin{aligned} &\nabla f(\hat{x}) + \nabla g(\hat{x})\lambda + \nabla h(\hat{x})\mu - \nabla G(\hat{x})\nu - \nabla H(\hat{x})\xi = 0, \\ &\lambda \geq 0 \text{ und } \lambda_i = 0 \quad \forall i \notin I_g(\hat{x}), \\ &\nu_i = 0 \quad \forall i \in I_{+0}(\hat{x}), \\ &\xi_i = 0 \quad \forall i \in I_{0+}(\hat{x}), \\ &\nu_i \cdot \xi_i \geq 0 \quad \text{oder} \quad \nu_i \geq 0, \xi_i \geq 0 \quad \forall i \in I_{00}(\hat{x}) \end{aligned}$$

genügen. Ein lokales Minimum \bar{x} von (sMPCC) ist bei Erfüllung von MPCC-GCQ M-stationär.

Zusammengefasst gelten für die Regularitätsbedingungen für (sMPCC) folgende Implikationen:

$$MPCC - LICQ \implies MPCC - MFCQ \implies MPCC - ACQ \implies MPCC - GCQ$$

Ein zulässiger Punkt $\hat{x} \in M$ von (sMPCC) heißt

- schwach stationär, falls

$$\begin{aligned} &\nabla f(\hat{x}) + \nabla g(\hat{x})\lambda + \nabla h(\hat{x})\mu - \nabla G(\hat{x})\nu - \nabla H(\hat{x})\xi = 0, \\ &\lambda \geq 0 \text{ und } \lambda_i = 0 \quad \forall i \notin I_g(\hat{x}), \\ &\nu_i = 0 \quad \forall i \in I_{+0}(\hat{x}), \\ &\xi_i = 0 \quad \forall i \in I_{0+}(\hat{x}), \end{aligned}$$

- C-stationär, falls zusätzlich $\nu_i \cdot \xi_i \geq 0 \quad \forall i \in I_{00}(\hat{x})$,
- M-stationär, falls zusätzlich $\nu_i \cdot \xi_i \geq 0 \quad \text{oder} \quad \nu_i \geq 0, \xi_i \geq 0 \quad \forall i \in I_{00}(\hat{x})$,
- und stark stationär, falls zusätzlich $\nu_i \geq 0, \xi_i \geq 0 \quad \forall i \in I_{00}(\hat{x})$

gilt.

5.2 Schwache und starke Stationarität für allgemeine MPCCs in reflexiven Banachräumen

Ein allgemeines MPCC in einem reflexiven Banachraum hat die Form

$$a(x) \rightarrow \min_x$$

bei

$$\begin{aligned} b(x) &\in C && \text{(MPCC)} \\ c(x) &\in K \\ d(x) &\in K^\circ \\ (c(x), d(x)) &= 0 \end{aligned}$$

mit Fréchet-differenzierbaren Funktionen $a : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, $b : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, $c : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}$ und $d : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}^*$, reflexiven Banachräumen $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$, der abgeschlossenen, konvexen, nichtleeren Menge $C \subseteq \mathcal{Y}$ und einem abgeschlossenen, konvexen, nichtleeren Kegel $K \subseteq \mathcal{Z}$.

Das in diesem Abschnitt vorgestellte Konzept zur Stationaritätsanalyse für MPCCs in reflexiven Banachräumen geht im Wesentlichen auf [63] und [75] zurück.

Viele gebräuchliche Regularitätsbedingungen aus der unendlichdimensionalen Optimierung sind für MPCCs nicht erfüllbar. Hierzu gehört beispielweise auch die KRZCQ, die bereits eine recht starke und häufig verwendbare Regularitätsbedingung darstellt.

Damit man trotzdem überprüfbare CQs zur Hand hat, um auf diese Weise notwendige (und ggf. auch hinreichende) Optimalitätsbedingungen herleiten zu können, formuliert man eine Reihe von Hilfsproblemen, die die komplementäre Komponente aus (MPCC) umgehen. Für diese Hilfsprobleme lassen sich dann verifizierbare Regularitätsbedingungen angeben, bei deren Erfüllung starke und schwache Stationarität für (MPCC) im reflexiven Banachraum sinnvoll definiert werden können. Man wird sehen, dass diese Definitionen mit denen aus der endlichdimensionalen Theorie für MPCCs weitestgehend übereinstimmen.

Da, anders als in Abschnitt 5.1, keine aktiven, inaktiven und biaktiven Indexmengen zur Verfügung stehen, behilft man sich mit der Notation von Kegeln (vgl. Abschnitt 4.1). So gilt etwa mit (4.9)

$$\begin{aligned} c(x) &\in K \cap d(x)^\perp = \mathcal{T}_{K^\circ}(d(x))^\circ, \\ d(x) &\in K^\circ \cap c(x)^\perp = \mathcal{T}_K(c(x))^\circ. \end{aligned}$$

Die besagten Hilfsprobleme sind:

$$a(x) \rightarrow \min_x$$

bei

$$\begin{aligned} b(x) &\in C && \text{(RNLP)} \\ c(x) &\in \mathcal{T}_{K^\circ}(d(x))^\circ \\ d(x) &\in \mathcal{T}_K(c(x))^\circ. \end{aligned}$$

(RNLP) ist ein bezüglich (MPCC) relaxiertes Problem. Die zulässige Menge von (MPCC) ist in der zulässigen Menge von (RNLP) enthalten.

$$a(x) \rightarrow \min_x$$

bei

$$\begin{aligned} b(x) &\in C && (\text{NLP}_c) \\ c(x) &\in \mathcal{T}_{K^\circ}(d(x))^\circ \cap \mathcal{T}_K(c(x))^{\circ\perp} \\ d(x) &\in \mathcal{T}_K(c(x))^\circ. \end{aligned}$$

(NLP_c) ist ein bezüglich (MPCC) reduziertes Problem. Die zulässige Menge von (NLP_c) ist in der zulässigen Menge von (MPCC) enthalten.

$$a(x) \rightarrow \min_x$$

bei

$$\begin{aligned} b(x) &\in C && (\text{NLP}_d) \\ c(x) &\in \mathcal{T}_{K^\circ}(d(x))^\circ \\ d(x) &\in \mathcal{T}_K(c(x))^\circ \cap \mathcal{T}_{K^\circ}(d(x))^{\circ\perp}. \end{aligned}$$

(NLP_d) ist ebenfalls ein bezüglich (MPCC) reduziertes Problem. Auch die zulässige Menge von (NLP_d) ist in der zulässigen Menge von (MPCC) enthalten.

$$a(x) \rightarrow \min_x$$

bei

$$\begin{aligned} b(x) &\in C && (\text{TNLP}) \\ c(x) &\in \mathcal{T}_{K^\circ}(d(x))^\circ \cap \mathcal{T}_K(c(x))^{\circ\perp} \\ d(x) &\in \mathcal{T}_K(c(x))^\circ \cap \mathcal{T}_{K^\circ}(d(x))^{\circ\perp}. \end{aligned}$$

(TNLP) ist ein bezüglich (MPCC) verschärftes (tightened) Problem. Die zulässige Menge von (TNLP) ist in der zulässigen Menge von (MPCC) enthalten.

Bemerkung 5.2.1.

Für die in der Notation der Hilfsprobleme verwendeten Kegel gelten die folgenden Identitäten (vgl. Abschnitt 4.1):

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{K^\circ}(d(x))^\circ &= K \cap d(x)^\perp, \\ \mathcal{T}_K(c(x))^\circ &= K^\circ \cap c(x)^\perp, \\ \mathcal{T}_K(c(x))^{\circ\perp} &= (K^\circ \cap c(x)^\perp)^\perp, \\ \mathcal{T}_{K^\circ}(d(x))^{\circ\perp} &= (K \cap d(x)^\perp)^\perp. \end{aligned}$$

Wie bereits oben erwähnt, ist die KRZCQ im Kontext von (MPCC) keine Regularitätsbedingung, die in einem zulässigen Punkt erfüllbar ist und eignet sich somit nicht (mehr), um Optimalitätsbedingungen zu erhalten und Stationaritätstypen für (MPCC) zu charakterisieren. Um die Ungültigkeit der KRZCQ für (MPCC) in jedem zulässigen Punkt zu beweisen, arbeiten wir mit Bemerkung 4.2.7 und nutzen aus, dass die Erfüllung der KRZCQ impliziert, dass die Menge der singulären Lagrange-Multiplikatoren (vgl. 4.16 bzw. 4.17) neben der 0 keine weiteren Elemente enthält.

Lemma 5.2.2.

Die KRZCQ ist für keinen zulässigen Punkt

$$\hat{x} \in M^{\text{MPCC}} := \{x \in \mathcal{X} \mid b(x) \in C, c(x) \in K, d(x) \in K^\circ, (c(x), d(x)) = 0\}$$

von (MPCC) erfüllt.

Beweis. Im Folgenden wird gezeigt, dass in einem beliebigen Punkt von (MPCC) ein singulärer Lagrange-Multiplikator existiert, der nicht die 0 ist. Nach der Kontraposition von Bemerkung 4.2.7 folgt dann, dass die KRZCQ dort verletzt ist. Das Quadrupel $(\lambda, \nu, \xi, \rho) \in \mathcal{T}_C(b(x))^\circ \times K^\circ \times K \times \mathbb{R}$ ist ein singulärer Lagrange-Multiplikator von $\hat{x} \in M^{\text{MPCC}}$, falls

$$\begin{aligned} 0 &= b'(x)^*[\lambda] + c'(x)^*[\nu] + d'(x)^*[\xi] + \rho(c'(x)^*[d(x)] + d'(x)^*[c(x)]), \\ 0 &= (\nu, c(x)) = (\xi, d(x)) \end{aligned}$$

erfüllt ist. Die erste Gleichung kann umgeschrieben werden in

$$0 = b'(x)^*[\lambda] + c'(x)^*[\nu + \rho \cdot d(x)] + d'(x)^*[\xi + \rho \cdot c(x)],$$

sodass $\bar{\lambda} := 0$, $\bar{\nu} := d(x)$, $\bar{\xi} := c(x)$ und $\bar{\rho} := 1$ die Bedingungen

$$\begin{aligned} 0 &= b'(x)^*[\lambda] + c'(x)^*[\nu + \rho \cdot d(x)] + d'(x)^*[\xi + \rho \cdot c(x)], \\ 0 &= (\nu, c(x)) = (\xi, d(x)) \end{aligned}$$

aufgrund der Komplementaritätsbedingung $(c(x), d(x)) = 0$ erfüllen. Damit ist $(\bar{\lambda}, \bar{\nu}, \bar{\xi}, \bar{\rho})$ ein nicht verschwindender, singulärer Lagrange-Multiplikator von (MPCC), was bedeutet, dass die KRZCQ in $\hat{x} \in M^{\text{MPCC}}$ nach Bemerkung 4.2.7 nicht erfüllbar ist. Da $\hat{x} \in M^{\text{MPCC}}$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Anstelle von (MPCC) werden die Hilfsprobleme (RNLP) und (TNLP) die Ausgangspunkte darstellen, um schwache Stationarität (ausgehend von (TNLP)) und starke Stationarität (ausgehend von (RNLP)) zu definieren. Dies wird über die KKT-Systeme der beiden Probleme geschehen. Bevor wir uns diesen beiden Definitionen widmen, werden noch folgende Resultate zur Geometrie der Kegel

$$\begin{aligned} P(x) &:= K \cap d(x)^\perp, \\ Q(x) &:= K^\circ \cap c(x)^\perp, \\ U(x) &:= K \cap d(x)^\perp \cap (K^\circ \cap c(x)^\perp)^\perp, \\ V(x) &:= K^\circ \cap c(x)^\perp \cap (K \cap d(x)^\perp)^\perp \end{aligned}$$

benötigt (vgl. [60], Lemma 3.2, und [63], Lemma 3.2).

Lemma 5.2.3.

Für beliebiges $\hat{x} = M^{MPCC} = \left\{ x \in \mathcal{X} \mid b(x) \in C, c(x) \in K, d(x) \in K^\circ, (c(x), d(x)) = 0 \right\}$ gilt

$$\mathcal{N}_{U(\hat{x})}(c(\hat{x})) = cl(K^\circ - K^\circ \cap c(\hat{x})^\perp) \cap c(\hat{x})^\perp, \quad (5.1)$$

$$\mathcal{N}_{V(\hat{x})}(d(\hat{x})) = cl(K - K \cap d(\hat{x})^\perp) \cap d(\hat{x})^\perp, \quad (5.2)$$

$$\mathcal{N}_{P(\hat{x})}(c(\hat{x})) = K_{K^\circ}(d(\hat{x}), c(\hat{x})), \quad (5.3)$$

$$\mathcal{N}_{Q(\hat{x})}(d(\hat{x})) = K_K(c(\hat{x}), d(\hat{x})). \quad (5.4)$$

Beweis. Zuerst wird (5.1) gezeigt. (5.2) folgt mit identisch analoger Argumentation. Aus $\hat{x} = M^{MPCC}$ folgt zunächst $d(\hat{x}) \in K^\circ \cap c(\hat{x})^\perp$. Zusammen mit der Monotonie des Operators lin kann man $lin(d(\hat{x})) \subseteq lin(K^\circ \cap c(\hat{x})^\perp)$ schließen, was

$$lin(d(\hat{x})) + lin(K^\circ \cap c(\hat{x})^\perp) = lin(K^\circ \cap c(\hat{x})^\perp)$$

liefert. Da K° ein konvexer Kegel ist, gilt $K^\circ + K^\circ \cap c(\hat{x})^\perp = K^\circ$. Zusammen mit Lemma (4.1.1) und $lin(K) = K - K$ erhält man

$$\begin{aligned} U(\hat{x})^\perp &= cl\left(K^\circ + lin(d(\hat{x})) + cl(lin(K^\circ \cap c(\hat{x})^\perp))\right) \\ &= cl\left(K^\circ + lin(d(\hat{x})) + lin(K^\circ \cap c(\hat{x})^\perp)\right) \\ &= cl\left(K^\circ + lin(K^\circ \cap c(\hat{x})^\perp)\right) \\ &= cl\left(K^\circ + K^\circ \cap c(\hat{x})^\perp - K^\circ \cap c(\hat{x})^\perp\right) \\ &= cl\left(K^\circ - K^\circ \cap c(\hat{x})^\perp\right). \end{aligned}$$

Da $U(\hat{x})$ ein abgeschlossener und konvexer Kegel ist, gilt außerdem $\mathcal{N}_{U(\hat{x})}(c(\hat{x})) = U(\hat{x})^\circ \cap c(\hat{x})^\perp$, was (5.1) beweist.

Als Nächstes wird (5.3) gezeigt. Nutzt man aus, dass $K \cap d(\hat{x})^\perp$ ein abgeschlossener und konvexer Kegel ist, sieht man sofort, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{K \cap d(\hat{x})^\perp}(c(\hat{x})) &= (K \cap d(\hat{x})^\perp)^\circ \cap c(\hat{x})^\perp \\ &= cl\left(K^\circ + lin(d(\hat{x}))\right) \cap c(\hat{x})^\perp \\ &= \mathcal{T}_{K^\circ}(d(\hat{x})) \cap c(\hat{x})^\perp \\ &= \mathcal{K}_{K^\circ}(d(\hat{x}), c(\hat{x})) \end{aligned}$$

gilt. Die Identität (5.4) folgt analog dazu. □

Als Nächstes können schwache und starke Stationarität für (MPCC) über die KKT-Systeme von (TNLP) und (RNLP) definiert werden. Bereits in [75] wurde gezeigt, dass der Begriff der starken Stationarität für MPCCs in Banachräumen eine sinnvolle Verallgemeinerung seines endlichdimensionalen Pendantes ist. Gleiches gilt für die schwache Stationarität in nachstehender Definition (vgl. [63], Lemma 3.5).

Definition 5.2.4.

Sei der Punkt $\hat{x} \in M^{MPCC}$ beliebig gewählt.

- (i) \hat{x} wird schwach stationärer Punkt von (MPCC) genannt, falls er ein KKT-Punkt von (TNLP) ist. Das bedeutet, es existieren Multiplikatoren $\hat{\lambda} \in \mathcal{Y}^*$, $\hat{\nu} \in \mathcal{Z}^*$, $\hat{\xi} \in \mathcal{Z}$, die das System

$$\begin{aligned} 0 &= a(\hat{x})^* + b'(\hat{x})^*[\hat{\lambda}] + c'(\hat{x})^*[\hat{\nu}] + d'(\hat{x})^*[\hat{\xi}] \\ \hat{\lambda} &\in \mathcal{T}_C(b(\hat{x}))^\circ \\ \hat{\nu} &\in cl(K^\circ - K^\circ \cap c(\hat{x})^\perp) \cap c(\hat{x})^\perp = \mathcal{N}_{U(\hat{x})}(c(\hat{x})) \\ \hat{\xi} &\in cl(K - K \cap d(\hat{x})^\perp) \cap d(\hat{x})^\perp = \mathcal{N}_{V(\hat{x})}(d(\hat{x})) \end{aligned}$$

lösen.

- (ii) \hat{x} wird stark stationärer Punkt von (MPCC) genannt, falls er ein KKT-Punkt von (RNLP) ist. Das bedeutet, es existieren Multiplikatoren $\hat{\lambda} \in \mathcal{Y}^*$, $\hat{\nu} \in \mathcal{Z}^*$, $\hat{\xi} \in \mathcal{Z}$, die das System

$$\begin{aligned} 0 &= a(\hat{x})^* + b'(\hat{x})^*[\hat{\lambda}] + c'(\hat{x})^*[\hat{\nu}] + d'(\hat{x})^*[\hat{\xi}] \\ \hat{\lambda} &\in \mathcal{T}_C(b(\hat{x}))^\circ \\ \hat{\nu} &\in \mathcal{K}_{K^\circ}(d(x), c(x)) = \mathcal{N}_{P(\hat{x})}(c(\hat{x})) \\ \hat{\xi} &\in \mathcal{K}_K(c(x), d(x)) = \mathcal{N}_{Q(\hat{x})}(d(\hat{x})) \end{aligned}$$

lösen.

Korollar 5.2.5.

Jeder stark stationäre Punkt $\hat{x} \in M^{MPCC}$ ist auch schwach stationär.

Beweis. Wegen

$$\begin{aligned} \hat{\nu} &\in cl(K^\circ - K^\circ \cap c(\hat{x})^\perp) \cap c(\hat{x})^\perp, \\ \hat{\xi} &\in cl(K - K \cap d(\hat{x})^\perp) \cap d(\hat{x})^\perp \end{aligned}$$

bei schwacher und

$$\begin{aligned} \hat{\nu}_i &\in \mathcal{T}_{K^\circ}(d(\hat{x})) \cap c(\hat{x})^\perp, \\ \hat{\xi} &\in \mathcal{T}_K(c(\hat{x})) \cap d(\hat{x})^\perp \end{aligned}$$

bei starker Stationarität genügt es für den Beweis die Inklusionen

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{K^\circ}(d(\hat{x})) &\subseteq cl(K^\circ - K^\circ \cap c(\hat{x})^\perp), \\ \mathcal{T}_K(c(\hat{x})) &\subseteq cl(K - K \cap d(\hat{x})^\perp) \end{aligned}$$

nachzuweisen. Zum Nachweis der ersten Inklusion stellt man zunächst fest, dass $d(\hat{x}) \in K^\circ \cap c(\hat{x})^\perp$ aus der Zulässigkeit von \hat{x} für (MPCC) folgt. Damit erhält man $K^\circ + \text{lin}(d(\hat{x})) \subseteq K^\circ - K^\circ \cap c(\hat{x})^\perp$. Da K° ein abgeschlossener, konvexer Kegel ist, folgt weiter

$$cl(K^\circ + \text{lin}(d(\hat{x}))) = \mathcal{T}_{K^\circ}(d(\hat{x})) \subseteq cl(K^\circ - K^\circ \cap c(\hat{x})^\perp).$$

Komplett analog folgt die zweite Inklusion über den Ansatz $c(\hat{x}) \in K \cap d(\hat{x})^\perp$.

□

Bemerkung 5.2.6.

Die Konzepte zu schwacher und starker Stationarität konnten sinnvoll aus dem Endlichdimensionalen für MPCCs in reflexiven Banachräumen übertragen werden, wie man an der letzten Definition sehen kann. Allerdings ist nach wie vor unklar, ob dies auch für die Stationaritätsdefinitionen nach Abadie, Guignard und Mordukhovich möglich ist ([63], S. 8, und [75], S. 491).

Als Nächstes wird eine Regularitätsbedingung präsentiert, die schwache Stationarität in einem Punkt $\bar{x} \in M^{\text{MPCC}}$ absichert. Dafür definiert man noch den Operator $\mathcal{H} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y} \times \mathcal{Z} \times \mathcal{Z}^*$ als

$$\mathcal{H}(x) := (b(x), c(x), d(x)) \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

Satz 5.2.7.

Sei $\bar{x} \in M^{\text{MPCC}}$ ein lokaler Minimierer von (MPCC). Der konvexe Kegel $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{Y} \times \mathcal{Z} \times \mathcal{Z}^*$ sei definiert als

$$\mathcal{C} := \mathcal{R}_{\mathcal{C}}(b(\bar{x})) \times \left(\mathcal{R}_K(c(\bar{x})) \cap (-\mathcal{K}_K(c(\bar{x}), d(\bar{x}))) \right) \times \left(\mathcal{R}_{K^\circ}(d(\bar{x})) \cap (-\mathcal{K}_{K^\circ}(d(\bar{x}), c(\bar{x}))) \right)$$

und weiter sei die Regularitätsbedingung

$$\mathcal{H}'(\bar{x})[\mathcal{X}] - \mathcal{C} = \mathcal{Y} \times \mathcal{Z} \times \mathcal{Z}^* \tag{5.5}$$

erfüllt. Dann ist \bar{x} ein schwach stationärer Punkt von (MPCC).

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass die Bedingung (5.5) äquivalent zur RKZCQ für (TNLP) ist. Da \bar{x} ebenfalls lokaler Minimierer von (TNLP) ist und die Bedingungen für schwache Stationarität äquivalent zu den KKT-Bedingungen für dieses Problem sind, folgt mit Lemma 4.2.10 und Bemerkung 4.2.11 die Behauptung.

Mit den Kegeln $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{Z}$ und $\mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{Z}^*$, definiert durch

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &:= K \cap d(\bar{x})^\perp \cap (K^\circ \cap c(\bar{x})^\perp)^\perp, \\ \mathcal{C}_2 &:= K^\circ \cap c(\bar{x})^\perp \cap (K \cap d(\bar{x})^\perp)^\perp \end{aligned}$$

hat die KRZCQ für (TNLP) die Form

$$\mathcal{H}'(\bar{x})[\mathcal{X}] - \mathcal{R}_{\mathcal{C}}(b(\bar{x})) \times \mathcal{R}_{\mathcal{C}_1}(c(\bar{x})) \times \mathcal{R}_{\mathcal{C}_2}(d(\bar{x})) = \mathcal{Y} \times \mathcal{Z} \times \mathcal{Z}^*.$$

Demnach müssen nur die Identitäten

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\mathcal{C}_1}(c(\bar{x})) &= \mathcal{R}_K(c(\bar{x})) \cap (-\mathcal{K}_K(c(\bar{x}), d(\bar{x}))), \\ \mathcal{R}_{\mathcal{C}_2}(d(\bar{x})) &= \mathcal{R}_{K^\circ}(d(\bar{x})) \cap (-\mathcal{K}_{K^\circ}(d(\bar{x}), c(\bar{x}))) \end{aligned}$$

nachgewiesen werden. Im Folgenden wird nur die erste Identität gezeigt. Der Beweis zur zweiten läuft komplett analog. Zusammen mit (4.5) und Lemma 4.1.2 gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{\mathcal{C}_1}(c(\bar{x})) &= K \cap d(\bar{x})^\perp \cap (K^\circ \cap c(\bar{x})^\perp)^\perp + \text{lin}(c(\bar{x})) \\
&= (K + \text{lin}(c(\bar{x}))) \cap d(\bar{x})^\perp \cap (K^\circ \cap c(\bar{x})^\perp)^\perp \\
&= (K + \text{lin}(c(\bar{x}))) \cap d(\bar{x})^\perp \cap (\mathcal{T}_K(c(\bar{x}))^\circ)^\perp \\
&= \mathcal{R}_K(c(\bar{x})) \cap d(\bar{x})^\perp \cap (\mathcal{T}_K(c(\bar{x}))) \cap (-\mathcal{T}_K(c(\bar{x}))) \\
&= \mathcal{R}_K(c(\bar{x})) \cap (-\mathcal{K}_K(c(\bar{x}), d(\bar{x}))).
\end{aligned}$$

Damit ist \bar{x} KKT-Punkt von (TNLP) und somit schwach stationär für (MPCC). □

Um schließlich starke Stationarität für eine lokale Lösung \bar{x} von (MPCC) nachzuweisen, existieren im Grunde zwei Wege. Beide bringen als Voraussetzungen gleiche mehrere Regularitätsbedingungen mit, die für die Hilfsprobleme (TNLP), (NLP_c) und (NLP_d) in \bar{x} erfüllt sein müssen. Der erste Weg ist Inhalt des nächsten Satzes.

Satz 5.2.8.

Es sei $\bar{x} \in M^{MPCC}$ lokaler Minimierer von (MPCC). Weiter erfülle (TNLP) die Regularitätsbedingung (4.21) und (NLP_c) sowie (NLP_d) die KRZCQ jeweils in \bar{x} . Dann ist \bar{x} stark stationär.

Beweis. Da \bar{x} lokaler Minimierer von (MPCC) ist, ist es auch lokaler Minimierer von (NLP_c) und (NLP_d) . Da für diese beiden Probleme die KRZCQ in \bar{x} erfüllt ist, existieren Lagrange-Multiplikatoren $(\bar{\mu}^c, \bar{\nu}^c)$ für (NLP_c) und $(\bar{\mu}^d, \bar{\nu}^d)$ für (NLP_d) . Da die zulässige Menge von (TNLP) gerade der Schnitt der zulässigen Mengen von (NLP_c) und (NLP_d) ist, sind die Multiplikatoren $(\bar{\mu}^c, \bar{\nu}^c)$ und $(\bar{\mu}^d, \bar{\nu}^d)$ auch Lagrange-Multiplikatoren von (TNLP) in \bar{x} . Ein Blick auf die Bedingungen

$$\begin{aligned}
\bar{\mu}^d &\in \mathcal{T}_{K^\circ}(d(\bar{x})) \cap c(\bar{x})^\perp \\
\bar{\nu}^c &\in \mathcal{T}_K(c(\bar{x})) \cap d(\bar{x})^\perp
\end{aligned}$$

für $\bar{\mu}^d$ aus dem KKT-System von (NLP_d) und $\bar{\nu}^c$ aus dem KKT-System von (NLP_c) macht sofort deutlich, dass dieses Paar $(\bar{\mu}^d, \bar{\nu}^c)$ ebenfalls Lagrange-Multiplikator für (RNLP) in \bar{x} ist. Zusätzlich ist dieser eindeutig, da (TNLP) in \bar{x} (4.21) erfüllt, was nach Satz 4.2.13 und Lemma 4.2.12 wiederum die Eindeutigkeit von $\bar{\mu}^d$ und $\bar{\nu}^c$ impliziert. Damit ist \bar{x} nach Definition 5.2.4 stark stationär. □

Da allerdings insbesondere die Überprüfung der Regularitätsbedingung (4.21) recht kompliziert und aufwendig werden kann, werden noch zwei stärkere - und gleichzeitig besser überprüfbare - Regularitätsbedingungen vorgestellt, um starke Stationarität für einen zulässigen Punkt $\hat{x} \in M^{MPCC}$ abzusichern (vgl. für folgende Proposition [75], Proposition 5.1).

Proposition 5.2.9.

Angenommen das Problem (TNLP) erfüllt die KRZCQ in $\hat{x} \in M^{MPCC}$. Dann ist diese Regularitätsbedingung in diesem Punkt auch für (NLP_c) und (NLP_d) erfüllt.

Beweis. Die Behauptung folgt im Grunde direkt aus der Beobachtung, dass die zulässigen Mengen von (NLP_c) und (NLP_d) jeweils Obermengen der zulässigen Menge von (TNLP) sind. Für eine größere zulässige Menge bleibt die KRZCQ unter den Voraussetzungen von (MPCC) gültig (vgl. Bemerkung 4.1 (b) in [75]). □

Eine noch stärkere Forderung zur Absicherung von starker Stationarität für eine lokale Lösung \bar{x} von (MPCC) als die KRZCQ für (TNLP) ist die Surjektivität von

$$\mathcal{H}'(x) := (b'(x), c'(x), d'(x)) \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

Für den Beweis wird unter anderem die letzte Proposition benötigt.

Proposition 5.2.10.

Angenommen x ist ein zulässiger Punkt (TNLP) . Weiter gelte

$$\mathcal{H}'(x)\mathcal{X} = \mathcal{Y} \times \mathcal{Z} \times \mathcal{Z}^*$$

mit $\mathcal{H}(x) := (b(x), c(x), d(x))$. Dann erfüllt (TNLP) in x die Regularitätsbedingung (4.21). Falls x ein lokaler Minimierer von (MPCC) ist, so ist x stark stationär.

Beweis. Die Surjektivität von \mathcal{H}' impliziert nach Definition 4.2.8 die Erfüllung der FRCQ für (TNLP) . Damit ist zunächst nach Lemma 4.2.9 auch die KRZCQ für (TNLP) in x erfüllt. Proposition 5.2.9 liefert dann die Gültigkeit der KRZCQ in x für (NLP_c) und (NLP_d) . Nach Bemerkung 4.2.14 gilt dort weiter die Regularitätsbedingung (4.21) für (TNLP) , womit die Voraussetzungen von Satz 5.2.8 erfüllt sind. Somit ist x als lokaler Minimierer von (MPCC) stark stationär. □

5.3 Notwendige Optimalitätsbedingungen und starke Stationarität für (BO)

Mit der Theorie aus dem letzten Abschnitt wird nun versucht die Bedingungen für schwache und starke Stationarität für einen zulässigen Punkt $(u^L, u^F) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ von (KKT_{mod}) unter Zuhilfenahme der KKT-Systeme der entsprechenden Hilfsprobleme zu formulieren und auf diese Weise notwendige Optimalitätsbedingungen für dieses Problem anzugeben. Bereits in Abschnitt 4.4 wurde angekündigt, dass die Durchführbarkeit der Stationaritätsanalyse anhand von (KKT_{mod}) gewährleistet ist. Aus diesem Grund wird die Theorie aus Unterkapitel 5.2 auf (KKT_{mod}) angewendet. Vor dem Hintergrund von Satz 4.3.8 gelangt man so gleichzeitig an Optimalitätsbedingungen für das Bilevel-Optimalsteuerproblem (BO).

Zuvor wird das System aus Nebenbedingungen in (KKT_{mod}) jedoch noch etwas abgeändert und in eine kompaktere Form gebracht. Das Ziel dieses Vorgehens besteht darin, die Nebenbedingungen von (KKT_{mod}) der Struktur aus (MPCC) anzupassen, um folglich analog zum letzten Abschnitt die entsprechenden Hilfsprobleme formulieren und schließlich mit Hilfe von Proposition 5.2.10 starke Stationarität für die optimale Lösung von (KKT_{mod}) (bzw. äquivalent von (BO)) nachweisen zu können. Hierbei wird auch deutlich werden, welche Rolle die Komponenten $a(x), b(x), c(x)$ und $d(x)$

in (MPCC) spielen. Die Struktur des reduzierten Optimalitätssystems (4.29) am Ende von Abschnitt (4.3) deutet die Umformulierungsstrategie bereits an.

Zunächst nutzt man aus, dass die Gleichungen

$$-\Delta y^L = u^L, \quad -\Delta y^F = u^F$$

mit Hilfe des Superpositionsprinzips nach wie vor in

$$\begin{aligned} -\Delta y^L = u^L &\Leftrightarrow y^L = (-\Delta)^{-1}u^L = Su^L, \\ -\Delta y^F = u^F &\Leftrightarrow y^F = (-\Delta)^{-1}u^F = Su^F \end{aligned}$$

umgeschrieben werden können. Des Weiteren kann der adjungierte Zustand und Lagrange-Multiplikator p^F nach (3.1) in die Form

$$p^F = S^* \left(Su^L + Su^F - y_d^F \right)$$

gebracht werden. Ersetzt man nun überall in (KKT_{mod}) y^L, y^F und p^F entsprechend und streicht zudem die Bedingung $u^L \in U_{ad}^L$, so erhält man zunächst das folgende auf u^L, u^F und $\mu^F = \chi_{A^-(u^F)} \cdot \mu_a^F + \chi_{A^+(u^F)} \cdot \mu_b^F$ reduzierte Optimierungsproblem im Banachraum:

$$\min_{u^L, u^F, \mu^F} F^L(u^L, u^F) := \frac{1}{2} \|Su^L + Su^F - y_d^F\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha^L}{2} \|u^L\|_{L^2(\Omega)}^2$$

bei

$$S^* \left(Su^L + Su^F - y_d^F \right) + \alpha^F u^F + (-\chi_{A^-(u^F)} + \chi_{A^+(u^F)}) \cdot \mu^F = 0, \quad (\text{BO}^{red})$$

$$\chi_{A^-(u^F)}(u_a^F - u^F) + \chi_{A^+(u^F)}(u^F - u_b^F) \leq 0,$$

$$\mu^F \geq 0$$

und

$$\left(\mu^F, \chi_{A^-(u^F)} \cdot (u_a^F - u^F) + \chi_{A^+(u^F)} \cdot (u^F - u_b^F) \right)_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Bemerkung 5.3.1.

Man beachte, dass dieses Problem ohne Steuerschranken für den Leader formuliert ist. Das ist ein notwendiger Schritt auf dem Weg zum Hauptresultat dieses Abschnitts.

Um mit der Notation des letzten Abschnitts konsistent zu bleiben, bringen wir obiges Problem in die Form

$$\min_{u^L, u^F, \mu^F} F^L(u^L, u^F) := \frac{1}{2} \|Su^L + Su^F - y_d^L\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha^L}{2} \|u^L\|_{L^2(\Omega)}^2$$

bei

$$S^*(Su^L + Su^F - y_d^F) + \alpha^F u^F + (-\chi_{A^-(u^F)} + \chi_{A^+(u^F)}) \cdot \mu^F \in \{0\}, \quad (\text{KKT}_{\text{mod}}^{\text{red}})$$

$$\chi_{A^-(u^F)}(u_a^F - u^F) + \chi_{A^+(u^F)}(u^F - u_b^F) \in (L^2(\Omega)^+)^{\circ},$$

$$\mu^F \in L^2(\Omega)^+,$$

und

$$\left(\mu^F, \chi_{A^-(u^F)}(u_a^F - u^F) + \chi_{A^+(u^F)}(u^F - u_b^F) \right)_{L^2(\Omega)} = 0,$$

wobei $L^2(\Omega)^+$ den Kegel der fast überall nichtnegativen Funktionen aus $L^2(\Omega)$ beschreibt.

Bemerkung 5.3.2.

An dieser Stelle kann man gut einsehen, wie die Nebenbedingungen von $(\text{KKT}_{\text{mod}}^{\text{red}})$ und (MPCC) miteinander korrespondieren. Es gelten die Entsprechungen

$$a(x) \hat{=} \frac{1}{2} \|Su^F + Su^L - y_d^L\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha^L}{2} \|u^L\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

$$b(x) \in C \hat{=} S^*(Su^L + Su^F - y_d^F) + \alpha^F u^F + (-\chi_{A^-(u^F)} + \chi_{A^+(u^F)}) \cdot \mu^F \in \{0\},$$

$$c(x) \in K \hat{=} \chi_{A^-(u^F)}(u_a^F - u^F) + \chi_{A^+(u^F)}(u^F - u_b^F) \in (L^2(\Omega)^+)^{\circ},$$

$$d(x) \in K^{\circ} \hat{=} \mu^F \in L^2(\Omega)^+$$

mit Fréchet-differenzierbaren Funktionen $a : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, $b : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, $c : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ und $d : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, die nachfolgend auch für die Formulierung der Hilfsprobleme gültig bleiben.

Der komplementären Beziehung $(c(x), d(x)) = 0$ wird durch

$$\left(\mu^F, \chi_{A^-(u^F)}(u_a^F - u^F) + \chi_{A^+(u^F)}(u^F - u_b^F) \right)_{L^2(\Omega)} = 0$$

ebenfalls Rechnung getragen.

Schließlich nehmen die Hilfsprobleme aus dem letzten Abschnitt mit den Identitäten

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{(L^2(\Omega)^+)^{\circ}}\left(\chi_{A^-(u^F)}(u_a^F - u^F) + \chi_{A^+(u^F)}(u^F - u_b^F)\right)^{\circ} &= L^2(\Omega)^+ \cap \left(\chi_{A^-(u^F)}(u_a^F - u^F) + \chi_{A^+(u^F)}(u^F - u_b^F)\right)^{\perp}, \\ \mathcal{T}_{L^2(\Omega)^+}(\mu^F)^{\circ} &= (L^2(\Omega)^+)^{\circ} \cap (\mu^F)^{\perp}\end{aligned}$$

für das MPCC (KKT_{mod}^{red}) folgende Gestalt an:

$$\min_{u^L, u^F, \mu^F} F^L(u^L, u^F) := \frac{1}{2} \|Su^L + Su^F - y_d^L\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha^L}{2} \|u^L\|_{L^2(\Omega)}^2$$

bei

$$S^*(Su^L + Su^F - y_d^F) + \alpha^F u^F + (-\chi_{A^-(u^F)} + \chi_{A^+(u^F)}) \cdot \mu^F \in \{0\}, \quad (\text{RNLP}_{KKT})$$

$$\chi_{A^-(u^F)}(u_a^F - u^F) + \chi_{A^+(u^F)}(u^F - u_b^F) \in \mathcal{T}_{L^2(\Omega)^+}(\mu^F)^{\circ},$$

$$\mu^F \in \mathcal{T}_{(L^2(\Omega)^+)^{\circ}}\left(\chi_{A^-(u^F)}(u_a^F - u^F) + \chi_{A^+(u^F)}(u^F - u_b^F)\right)^{\circ}.$$

(RNLP_{KKT}) ist ein bezüglich (KKT_{mod}^{red}) relaxiertes Problem. Die zulässige Menge von (KKT_{mod}^{red}) ist in der zulässigen Menge von (RNLP_{KKT}) enthalten.

$$\min_{u^L, u^F, \mu^F} F^L(u^L, u^F) := \frac{1}{2} \|Su^L + Su^F - y_d^L\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha^L}{2} \|u^L\|_{L^2(\Omega)}^2$$

bei

$$S^*(Su^L + Su^F - y_d^F) + \alpha^F u^F + (-\chi_{A^-(u^F)} + \chi_{A^+(u^F)}) \cdot \mu^F \in \{0\}, \quad (\text{NLP}_{KKT}^{u^F})$$

$$\chi_{A^-(u^F)}(u_a^F - u^F) + \chi_{A^+(u^F)}(u^F - u_b^F) \in \mathcal{T}_{L^2(\Omega)^+}(\mu^F)^{\circ} \cap \mathcal{T}_{(L^2(\Omega)^+)^{\circ}}\left(\chi_{A^-(u^F)}(u_a^F - u^F) + \chi_{A^+(u^F)}(u^F - u_b^F)\right)^{\circ\perp},$$

$$\mu^F \in \mathcal{T}_{(L^2(\Omega)^+)^{\circ}}\left(\chi_{A^-(u^F)}(u_a^F - u^F) + \chi_{A^+(u^F)}(u^F - u_b^F)\right)^{\circ}.$$

(NLP_{KKT}^{u^F}) ist ein bezüglich (KKT_{mod}^{red}) reduziertes Problem. Die zulässige Menge von (NLP_{KKT}^{u^F}) ist in der zulässigen Menge von (KKT_{mod}^{red}) enthalten.

$$\min_{u^L, u^F, \mu^F} F^L(u^L, u^F) := \frac{1}{2} \|Su^L + Su^F - y_d^L\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha^L}{2} \|u^L\|_{L^2(\Omega)}^2$$

bei

$$S^*(Su^L + Su^F - y_d^F) + \alpha^F u^F + (-\chi_{A^-(u^F)} + \chi_{A^+(u^F)}) \cdot \mu^F \in \{0\},$$

$$\chi_{A^-(u^F)}(u_a^F - u^F) + \chi_{A^+(u^F)}(u^F - u_b^F) \in \mathcal{T}_{L^2(\Omega)^+}(\mu^F)^\circ, \quad (\text{NLP}_{KKT}^{\mu^F})$$

$$\mu^F \in \mathcal{T}_{(L^2(\Omega)^+)^{\circ}} \left(\chi_{A^-(u^F)}(u_a^F - u^F) + \chi_{A^+(u^F)}(u^F - u_b^F) \right)^\circ \cap \mathcal{T}_{L^2(\Omega)^+}(\mu^F)^{\circ\perp}.$$

$(\text{NLP}_{KKT}^{\mu^F})$ ist ebenfalls ein bezüglich (KKT_{mod}^{red}) reduziertes Problem. Auch die zulässige Menge von $(\text{NLP}_{KKT}^{\mu^F})$ ist in der zulässigen Menge von (KKT_{mod}^{red}) enthalten.

$$\min_{u^L, u^F, \mu^F} F^L(u^L, u^F) := \frac{1}{2} \|Su^L + Su^F - y_d^L\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha^L}{2} \|u^L\|_{L^2(\Omega)}^2$$

bei

$$S^*(Su^L + Su^F - y_d^F) + \alpha^F u^F + (-\chi_{A^-(u^F)} + \chi_{A^+(u^F)}) \cdot \mu^F \in \{0\}, \quad (\text{TNLP}_{KKT})$$

$$\chi_{A^-(u^F)}(u_a^F - u^F) + \chi_{A^+(u^F)}(u^F - u_b^F) \in \mathcal{T}_{L^2(\Omega)^+}(\mu^F)^\circ \cap \mathcal{T}_{(L^2(\Omega)^+)^{\circ}} \left(\chi_{A^-(u^F)}(u_a^F - u^F) + \chi_{A^+(u^F)}(u^F - u_b^F) \right)^{\circ\perp},$$

$$\mu^F \in \mathcal{T}_{(L^2(\Omega)^+)^{\circ}} \left(\chi_{A^-(u^F)}(u_a^F - u^F) + \chi_{A^+(u^F)}(u^F - u_b^F) \right)^\circ \cap \mathcal{T}_{L^2(\Omega)^+}(\mu^F)^{\circ\perp}.$$

(TNLP_{KKT}) ist ein bezüglich (KKT_{mod}^{red}) verschärftes (tightened) Problem. Die zulässige Menge von (TNLP_{KKT}) ist in der zulässigen Menge von (KKT_{mod}^{red}) enthalten.

Nun können analog zu Definition 5.2.4 für einen Punkt (u^L, u^F) aus der Menge

$$M^L := \left\{ (u^L, u^F) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \mid G(u^L, u^F) = 0, \chi_{A^-(u^F)}(u_a^F - u^F) + \chi_{A^+(u^F)}(u^F - u_b^F) \in (L^2(\Omega)^+)^{\circ}, \mu^F \in L^2(\Omega)^+ \right\}$$

mit $G(u^L, u^F) = S^*(Su^L + Su^F - y_d^F) + \alpha^F u^F + (-\chi_{A^-(u^F)} + \chi_{A^+(u^F)}) \cdot \mu^F$ die Bedingungen für schwache und starke Stationarität für eine Lösung von (KKT_{mod}^{red}) formuliert werden:

Definition 5.3.3.

Es sei der Punkt $(\hat{u}^L, \hat{u}^F) \in M^L$ beliebig gewählt.

- (i) (\hat{u}^L, \hat{u}^F) wird schwach stationärer Punkt von (KKT_{mod}^{red}) (oder äquivalent von (BO^{red})) genannt, falls er KKT-Punkt von $(TNLP_{KKT})$ ist. Das bedeutet, es existieren Multiplikatoren $\hat{\lambda}^L \in L^2(\Omega)$, $\hat{\mu}^F \in L^2(\Omega)^+$, $\hat{\beta} \in cl(L^2(\Omega)^+ - L^2(\Omega)^+ \cap (\chi_{A^-(\hat{u}^F)}(u_a^F - u^F) + \chi_{A^+(\hat{u}^F)}(u^F - u_b^F))^\perp)$ und $\hat{\eta} \in cl((L^2(\Omega)^+)^{\circ} - (L^2(\Omega)^+)^{\circ} \cap (\mu^F)^\perp)$, die das System

$$\begin{aligned} S^* (S\hat{u}^F + S\hat{u}^L - y_d^L) + \alpha^L \hat{u}^L + S^* S^* [\hat{\lambda}^L] &= 0 \\ S^* (\hat{u}^F + S\hat{u}^L - y_d^L) + (S^* S + I \cdot \alpha^F)^* [\hat{\lambda}^L] + (\chi_{A^+(\hat{u}^F)} - \chi_{A^-(\hat{u}^F)}) \cdot \hat{\beta} &= 0 \\ S^* (S\hat{u}^F + S\hat{u}^L - y_d^F) + \alpha^F \hat{u}^F + (-\chi_{A^-(\hat{u}^F)} + \chi_{A^+(\hat{u}^F)}) \cdot \hat{\mu}^F &= 0 \\ (\chi_{A^+(\hat{u}^F)} - \chi_{A^-(\hat{u}^F)}) \cdot \hat{\lambda}^L + 1 \cdot \hat{\eta} &= 0, \\ (\hat{\mu}^F, \chi_{A^-(\hat{u}^F)}(u_a^F - \hat{u}^F) + \chi_{A^+(\hat{u}^F)}(\hat{u}^F - u_b^F)) &= (\hat{\beta}, \chi_{A^-(\hat{u}^F)}(u_a^F - \hat{u}^F) + \chi_{A^+(\hat{u}^F)}(\hat{u}^F - u_b^F)) \\ &= (\hat{\mu}^F, \hat{\eta}) = 0 \end{aligned} \tag{5.6}$$

lösen. Alle Skalarprodukte in der letzten Zeile sind als L^2 -Skalarprodukte zu verstehen.

- (ii) Der Punkt $(\hat{u}^L, \hat{u}^F) \in M^L$ wird stark stationärer Punkt von (KKT_{mod}^{red}) (oder äquivalent von (BO^{red})) genannt, falls er KKT-Punkt von $(RNLP_{KKT})$ ist. Das bedeutet, es existieren Multiplikatoren $\hat{\lambda}^L \in L^2(\Omega)$, $\hat{\mu}^F \in L^2(\Omega)^+$, $\hat{\beta} \in \mathcal{T}_{L^2(\Omega)^+}(\hat{\mu}^F)$ und $\hat{\eta} \in \mathcal{T}_{(L^2(\Omega)^+)^{\circ}}(\chi_{A^-(\hat{u}^F)}(u_a^F - \hat{u}^F) + \chi_{A^+(\hat{u}^F)}(\hat{u}^F - u_b^F))$, die das System (5.6) lösen.

Es folgt das zentrale Resultat dieses Abschnitts. Um starke Stationarität für den Minimierer $(\bar{u}^L, \bar{u}^F) \in M^L$ von (BO^{red}) nachzuweisen, folgt man der Argumentation aus Proposition 5.2.10, definiert den entsprechenden Operator $\mathcal{H}(u^L, u^F, \mu^F)$ in $(\bar{u}^L, \bar{u}^F, \bar{\mu}^F) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ und weist die Surjektivität von $\mathcal{H}'(\bar{u}^L, \bar{u}^F, \bar{\mu}^F)$ nach.

Satz 5.3.4.

Der Punkt $(\bar{u}^L, \bar{u}^F) \in M^L$ sei die optimale Lösung von (BO^{red}) . Dann ist er stark stationär für (BO^{red}) , was äquivalent zur Surjektivität der Fréchet-Ableitung von

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\bar{u}^L, \bar{u}^F, \bar{\mu}^F) := & \left(S^* (S\bar{u}^L + S\bar{u}^F - y_d^F) + \alpha^F \bar{u}^F + (-\chi_{A^-(\bar{u}^F)} + \chi_{A^+(\bar{u}^F)}) \cdot \bar{\mu}^F, \chi_{A^-(\bar{u}^F)}(u_a^F - \bar{u}^F) \right. \\ & \left. + \chi_{A^+(\bar{u}^F)}(\bar{u}^F - u_b^F), \bar{\mu}^F \right) \end{aligned}$$

ist.

Beweis. Ist der Operator $\mathcal{H}(u^L, u^F, \mu^F)$ wie oben definiert, so lautet seine Fréchet-Ableitung in $\bar{u} = (\bar{u}^L, \bar{u}^F, \bar{\mu}^F)$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'(\bar{u})(d_{u^L}, d_{u^F}, d_{\mu^F}) = & \left(S^* S[d_{u^L}] + (S^* S + I \cdot \alpha^F)[d_{u^F}] + (-\chi_{A^-(\bar{u}^F)} + \chi_{A^+(\bar{u}^F)})[d_{\mu^F}], \right. \\ & \left. (\chi_{A^+(\bar{u}^F)} - \chi_{A^-(\bar{u}^F)})[d_{u^F}], [d_{\mu^F}] \right) \end{aligned}$$

für ein $(d_{u^L}, d_{u^F}, d_{\mu^F}) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Für einen beliebigen Punkt $(u_1, u_2, u_3) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ muss nun geprüft werden, ob die Gleichung

$$\mathcal{H}'(\bar{u})(d_{u^L}, d_{u^F}, d_{\mu^F}) = (u_1, u_2, u_3) \quad (5.7)$$

stets lösbar ist. Es folgt sofort $[d_{\mu^F}] = u_3$. Weiter ergibt sich

$$(\chi_{A^+(\bar{u}^F)} - \chi_{A^-(\bar{u}^F)})[d_{u^F}] = u_2 \quad \Leftrightarrow \quad d_{u^F} = \frac{u_2}{\chi_{A^+(\bar{u}^F)} - \chi_{A^-(\bar{u}^F)}}$$

und schließlich

$$\begin{aligned} & S^* S [d_{u^L}] + (S^* S + I \cdot \alpha^F) [d_{u^F}] + (-\chi_{A^-(\bar{u}^F)} + \chi_{A^+(\bar{u}^F)}) [d_{\mu^F}] = u_1 \\ \Leftrightarrow & S^* S [d_{u^L}] + \frac{u_2}{\chi_{A^+(\bar{u}^F)} - \chi_{A^-(\bar{u}^F)}} (S^* S + I \cdot \alpha^F) + (-\chi_{A^-(\bar{u}^F)} + \chi_{A^+(\bar{u}^F)}) u_3 = u_1 \\ \Leftrightarrow & d_{u^L} = (S^* S)^{-1} \left(u_1 - \frac{u_2}{\chi_{A^+(\bar{u}^F)} - \chi_{A^-(\bar{u}^F)}} (S^* S + I \cdot \alpha^F) - (-\chi_{A^-(\bar{u}^F)} + \chi_{A^+(\bar{u}^F)}) u_3 \right). \end{aligned}$$

Damit ist

$$\left((S^* S)^{-1} \left(u_1 - \frac{u_2}{\chi_{A^+(\bar{u}^F)} - \chi_{A^-(\bar{u}^F)}} (S^* S + I \cdot \alpha^F) - (-\chi_{A^-(\bar{u}^F)} + \chi_{A^+(\bar{u}^F)}) u_3 \right), \frac{u_2}{\chi_{A^+(\bar{u}^F)} - \chi_{A^-(\bar{u}^F)}}, u_3 \right)$$

immer eine Lösung von (5.7) und die Surjektivität von $\mathcal{H}'(\bar{u}) = \mathcal{H}'(\bar{u}^L, \bar{u}^F, \bar{\mu}^F)$ ist bewiesen. Somit ist $(\bar{u}^L, \bar{u}^F, \bar{\mu}^F)$ nach Proposition 5.2.10 stark stationär für (KKT_{mod}^{red}) und nach Satz (4.3.9) auch für (BO). □

Bemerkungen 5.3.5.

(i) Aufgrund der in Korollar 4.4.1 und Bemerkung 4.4.2 nachgewiesenen Äquivalenz von $(\bar{\mu}_a^F, \bar{\mu}_b^F)$ und $\bar{\mu}^F$ kann man jetzt in (BO^{red}) und (KKT_{mod}^{red}) natürlich wieder die Formulierung

$$\mu_a^F = (p^F + \alpha^F u^F)^+ \geq 0, \quad \mu_b^F = (p^F + \alpha^F u^F)^- \geq 0,$$

$$\left(\mu_a^F, u_a^F - u^F \right)_{L^2(\Omega)} = 0, \quad \left(\mu_b^F, u^F - u_b^F \right)_{L^2(\Omega)} = 0$$

verwenden.

(ii) Wie bereits im Zuge der Herleitung von (KKT_{mod}^{red}) angemerkt, kann obiges Stationaritätsresultat nur unter Außerachtlassen von $u^L \in U_{ad}^L$ erhalten werden. Das Leader-Problem muss 'frei' sein, da sonst eine Vorzeichenbedingung für d_{u^L} entsteht, die nicht eingehalten werden kann. Deswegen ist bisher unklar, wie starke Stationarität unter der Bedingung

$$u^L \in U_{ad}^L = \left\{ u^L(x) \in L^2(\Omega) \mid u_a^L(x) \leq u^L(x) \leq u_b^L(x) \text{ fast überall in } \Omega \right\}$$

abgesichert werden kann.

6 Implementierung und numerische Resultate

Der Ausgangspunkt für eine numerische Umsetzung wird das System (5.6) sein. Eine Lösung von (KKT_{mod}^{red}) (oder äquivalent von (BO^{red})) wird schwach stationär genannt, falls sie (5.6) genügt. Wir arbeiten mit diesem Ansatz, da bisher unklar ist, wie man die Bedingungen für starke Stationarität aus Definition 5.3.3 nutzen kann, um ein Optimalitätssystem zu erhalten. Hierbei stellen vor allem die Vorzeichenbedingungen für die Multiplikatoren β und η ein Problem dar. Für die Realisierung numerischer Resultate soll auf Basis des hergeleiteten Optimalitätssystems anschließend eine primal-duale Aktive-Mengen-Strategie verwendet werden (vgl. [12] und [55]). Zunächst wird die Implementierungsstrategie hergeleitet. Im nächsten Abschnitt wird die Diskretisierung des Optimalitätssystems als eine Approximation durch die Finite-Elemente-Methode beschrieben. Schließlich folgen eine Dokumentation der wichtigsten Komponenten der durchgeführten Implementierung sowie numerischer Ergebnisse, die die Funktionsfähigkeit der umgesetzten primal-dual Aktive-Mengen-Strategie stützen.

6.1 Herleitung eines Optimalitätssystems

Der nächste Schritt besteht also darin das System (5.6) in ein Optimalitätssystem zu überführen, das für eine Implementierung verwendet werden kann. Zwecks besserer Lesbarkeit schreiben wir u^F anstatt \hat{u}^F und übernehmen diese Anpassung analog für alle anderen Komponenten des Systems. Unter Berücksichtigung der Vorzeichenbedingungen für die Lagrange-Multiplikatoren lauten die Kriterien für einen schwach Stationären Punkt von (KKT_{mod}^{red}) (oder äquivalent von (BO^{red}))

$$\begin{aligned}
(I) \quad & S^* \left(Su^F + Su^L - y_d^L \right) + \alpha^L u^L + S^* S^* [\lambda^L] = 0, \\
(II) \quad & S^* \left(Su^F + Su^L - y_d^L \right) + (S^* S + I \cdot \alpha^F)^* [\lambda^L] + (\chi_{A^+(u^F)} - \chi_{A^-(u^F)}) \cdot \beta = 0, \\
(III) \quad & S^* \left(Su^F + Su^L - y_d^F \right) + \alpha^F u^F + (-\chi_{A^-(u^F)} + \chi_{A^+(u^F)}) \cdot \mu^F = 0, \\
(IV) \quad & (\chi_{A^+(u^F)} - \chi_{A^-(u^F)}) \cdot \lambda^L + 1 \cdot \eta = 0, \\
(V) \quad & \beta \in cl \left(L^2(\Omega)^+ - L^2(\Omega)^+ \cap (\chi_{A^-(u^F)}(u_a^F - u^F) + \chi_{A^+(u^F)}(u^F - u_b^F))^\perp \right), \\
(VI) \quad & \eta \in cl \left((L^2(\Omega)^+)^{\circ} - (L^2(\Omega)^+)^{\circ} \cap (\mu^F)^\perp \right), \\
(VII) \quad & \lambda^L \in L^2(\Omega), \\
(VIII) \quad & \mu^F \in L^2(\Omega)^+, \\
(IX) \quad & \left(\mu^F, \chi_{A^-(u^F)}(u_a^F - u^F) + \chi_{A^+(u^F)}(u^F - u_b^F) \right) = 0, \\
(X) \quad & \left(\beta, \chi_{A^-(u^F)}(u_a^F - u^F) + \chi_{A^+(u^F)}(u^F - u_b^F) \right) = 0, \\
(XI) \quad & (\mu^F, \eta) = 0.
\end{aligned} \tag{6.1}$$

An dieser Stelle sei noch einmal an die Definitionen

$$\mu_a^F = (p^F + \alpha^F u^F)^+ \geq 0, \quad \mu_b^F = (p^F + \alpha^F u^F)^- \geq 0$$

sowie

$$\mu^F = \chi_{A^-(u^F)} \cdot \mu_a^F + \chi_{A^+(u^F)} \cdot \mu_b^F$$

erinnert.

Zusammen mit der Identität $(L^2(\Omega)^+)^{\circ} = L^2(\Omega)^-$, der Definition des Lösungsoperators S in Abschnitt 3.1 und der adjungierten Gleichung (3.1) kann man (6.1) formal in das System

$$\begin{aligned} -\Delta y^L &= u^L, & -\Delta y^F &= u^F, & -\Delta \Lambda^L &= \lambda^L, \\ -\Delta p^F &= y^L + y^F - y_d^F, & -\Delta p^L &= y^L + y^F + \Lambda^L - y_d^L, \\ (I) \quad p^L + \alpha^L u^L &= 0, \\ (II) \quad p^L + \alpha^F \lambda^L + (\chi_{A^+(u^F)} - \chi_{A^-(u^F)}) \cdot \beta &= 0, \\ (III) \quad p^F + \alpha^F u^F + (\chi_{A^+(u^F)} - \chi_{A^-(u^F)}) \cdot \mu^F &= 0, \\ (IV) \quad (\chi_{A^+(u^F)} - \chi_{A^-(u^F)}) \cdot \lambda^L + 1 \cdot \eta &= 0, \\ (V) \quad \beta \in cl\left(L^2(\Omega)^+ - L^2(\Omega)^+ \cap (\chi_{A^-(u^F)}(u_a^F - u^F) + \chi_{A^+(u^F)}(u^F - u_b^F))^\perp\right), & (6.2) \\ (VI) \quad \eta \in cl\left(L^2(\Omega)^- - L^2(\Omega)^- \cap (\mu^F)^\perp\right), \\ (VII) \quad \lambda^L \in L^2(\Omega), \\ (VIII) \quad \mu^F \in L^2(\Omega)^+ \\ (IX) \quad \left(\mu^F, \chi_{A^-(u^F)}(u_a^F - u^F) + \chi_{A^+(u^F)}(u^F - u_b^F)\right) &= 0, \\ (X) \quad \left(\beta, \chi_{A^-(u^F)}(u_a^F - u^F) + \chi_{A^+(u^F)}(u^F - u_b^F)\right) &= 0, \\ (XI) \quad (\mu^F, \eta) &= 0. \end{aligned}$$

überführen.

Als Nächstes soll (6.2) in eine kompaktere Form gebracht werden. Hierzu wollen wir die Vorzeichen- und Komplementaritätsbedingungen (V) – (XI) als explizite Komponenten des Systems eliminieren.

Wie sehen dann die Bedingungen an die eine Lösung (\bar{u}^F, \bar{u}^L) von (KKT_{mod}^{red}) aus?

- (V) + (X) : Es soll

$$\bar{\beta} \in cl\left(L^2(\Omega)^+ - L^2(\Omega)^+ \cap (\chi_{A^-(\bar{u}^F)}(u_a^F - \bar{u}^F) + \chi_{A^+(\bar{u}^F)}(\bar{u}^F - u_b^F))^\perp\right)$$

gelten und es ist mit $\bar{\chi} = \chi_{A^-(\bar{u}^F)}(u_a^F - \bar{u}^F) + \chi_{A^+(\bar{u}^F)}(\bar{u}^F - u_b^F)$

$$L^2(\Omega)^+ \cap (\bar{\chi})^\perp = \left\{ \sigma \in L^2(\Omega)^+ \mid (\bar{\chi}, \sigma)_{L^2(\Omega)} = 0 \right\}.$$

Da weiter stets $\bar{\chi} \in L^2(\Omega)^-$ erfüllt ist, gilt für jedes $\sigma \in L^2(\Omega)^+ \cap (\bar{\chi})^\perp$ automatisch $\sigma = 0$, wo $\bar{\chi} < 0$ bzw. $u_a^F < \bar{u}^F < u_b^F$ ist. Damit gilt zunächst $\bar{\beta} \in L^2(\Omega)^+$ bzw. $\bar{\beta} \geq 0$ auf $I(\bar{u}^F) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid u_a^F < \bar{u}^F < u_b^F \right\}$. Zusammen mit (X) gilt schließlich $\bar{\beta} = 0$ auf $I(\hat{u}^F)$.

- (VI) + (VIII) + (XI) : Es soll

$$\bar{\eta} \in cl\left(L^2(\Omega)^- - L^2(\Omega)^- \cap (\bar{\mu}^F)^\perp\right)$$

gelten und es ist

$$L^2(\Omega)^- \cap (\bar{\mu}^F)^\perp = \left\{ \sigma \in L^2(\Omega)^- \mid (\bar{\mu}^F, \sigma)_{L^2(\Omega)} = 0 \right\}.$$

Da weiter stets $\bar{\mu}^F \in L^2(\Omega)^+$ erfüllt ist, gilt für jedes $\sigma \in L^2(\Omega)^- \cap (\bar{\mu}^F)^\perp$ automatisch $\sigma = 0$, wo $\bar{\mu}^F > 0$ ist. Damit gilt zunächst $\bar{\eta} \in L^2(\Omega)^-$ bzw. $\bar{\eta} \leq 0$, wo $\bar{\mu}^F > 0$ ist. Zusammen mit (XI) gilt schließlich $\bar{\eta} = 0$, wo $\bar{\mu}^F > 0$ ist.

- (IV) + (VII) : Es gilt

$$(\chi_{A^+(\bar{u}^F)} - \chi_{A^-(\bar{u}^F)}) \cdot \lambda^L + 1 \cdot \eta = 0 \Leftrightarrow \bar{\lambda}^L = -\frac{\bar{\eta}}{(\chi_{A^+(\bar{u}^F)} - \chi_{A^-(\bar{u}^F)})} \Rightarrow \begin{cases} \bar{\lambda}^L = 0, & \text{wo } \bar{u}^F = u_b^F, \\ \bar{\lambda}^L = 0, & \text{wo } \bar{u}^F = u_a^F, \end{cases}$$

da nach (VI), (VIII) und (XI) dort $\bar{\eta} = 0$ ist, wo $\bar{\mu}^F > 0$ gilt und stets entweder $\chi_{A^+(\bar{u}^F)} = 1$ oder $\chi_{A^-(\bar{u}^F)} = 1$ ist. Bei $\chi_{A^+(\bar{u}^F)} = 1$ folgt $\bar{\lambda}^L = 0$ und da weiter $\bar{\mu}^F > 0$ erfüllt sein muss, gilt nach Satz 4.3.5 $\bar{\mu}_b^F > 0$. Um dort die Komplementaritätsbedingung in (4.25) zu erfüllen, muss $\bar{u}^F = u_b^F$ sein. Bei $\chi_{A^-(\bar{u}^F)} = 1$ gilt $\bar{u}^F = u_a^F$, was $\bar{\mu}_a^F > 0$ bedeutet. Analog zu oben muss $\bar{u}^F = u_a^F$ gelten. Weiter ist dann ebenfalls $\bar{\lambda}^L = 0$. An dieser Stelle wird noch die Menge

$$M_{a,b}^F := \left\{ x \in \Omega \mid \bar{u}^F(x) = u_a^F(x) \vee \bar{u}^F(x) = u_b^F(x) \right\}$$

eingeführt.

- Unter Berücksichtigung der gewonnenen Erkenntnisse aus (V) und (X) kann man bei Betrachtung von (II),

$$\bar{p}^L + \alpha^F \bar{\lambda}^L = -(\chi_{A^+(\bar{u}^F)} - \chi_{A^-(\bar{u}^F)}) \cdot \bar{\beta},$$

sofort auf die Bedingung

$$\bar{p}^L + \alpha^F \bar{\lambda}^L = 0 \quad \text{auf} \quad I(\bar{u}^F)$$

schließen.

- Zuletzt gilt für (III) mit $\bar{\mu}^F = \chi_{A^-(\bar{u}^F)} \cdot \bar{\mu}_a^F + \chi_{A^+(\bar{u}^F)} \cdot \bar{\mu}_b^F$

$$\begin{aligned} \bar{p}^F + \alpha^F \bar{u}^F &= -(\chi_{A^+(\bar{u}^F)} - \chi_{A^-(\bar{u}^F)}) \cdot \bar{\mu}^F \\ \Leftrightarrow \bar{p}^F + \alpha^F \bar{u}^F &= -(\chi_{A^+(\bar{u}^F)} - \chi_{A^-(\bar{u}^F)}) \cdot (\chi_{A^-(\bar{u}^F)} \cdot \bar{\mu}_a^F + \chi_{A^+(\bar{u}^F)} \cdot \bar{\mu}_b^F) \\ \Leftrightarrow \bar{p}^F + \alpha^F \bar{u}^F - \chi_{A^-(\bar{u}^F)}^2 \cdot \bar{\mu}_a^F + \chi_{A^+(\bar{u}^F)}^2 \cdot \bar{\mu}_b^F &= 0 \end{aligned}$$

und zusammen mit

$$u_a^F \leq \bar{u}^F \leq u_b^F \quad \text{und} \quad (\bar{\mu}_a^F(x), u_a^F(x) - \bar{u}^F(x))_{L^2(\Omega)} = 0 = (\bar{\mu}_b^F(x), \bar{u}^F(x) - u_b^F(x))_{L^2(\Omega)}$$

ist (III) nach Bemerkung 4.3.6 äquivalent zu

$$\bar{u}^F(x) = \mathbb{P}_{[u_a^F(x), u_b^F(x)]} \left\{ -\frac{1}{\alpha^F} \bar{p}^F(x) \right\},$$

womit auch die Komplementaritätsbedingung (IX) verarbeitet ist.

Mit diesen Erkenntnissen erhält man schließlich das Optimalitätssystem

$$\begin{aligned} -\Delta y^L &= u^L, & -\Delta y^F &= u^F, & -\Delta \Lambda^L &= \lambda^L, \\ -\Delta p^F &= y^L + y^F - y_d^F, & -\Delta p^L &= y^L + y^F + \Lambda^L - y_d^L, \\ p^L + \alpha^L u^L &= 0, & p^L + \alpha^F \lambda^L &= 0 \quad \text{auf} \quad I(\bar{u}^F), \\ \lambda^L &= 0, \quad \text{auf} \quad M_{a,b}^F, \end{aligned} \tag{6.3}$$

$$u^F(x) = \mathbb{P}_{[u_a^F(x), u_b^F(x)]} \left\{ -\frac{1}{\alpha^F} p^F(x) \right\}.$$

6.2 Die Implementierungsstrategie

Bei der Herleitung der Implementierungsstrategie werden wir uns am zu erfüllenden System (6.3) orientieren. Zur Komponente \bar{u}^F einer Lösung (\bar{u}^L, \bar{u}^F) von (KKT_{mod}^{red}) definiert man sich

$$\tau^F = -\left((\alpha^F)^{-1}\bar{p}^F + \bar{u}^F\right). \quad (6.4)$$

Aus der Projektionsgleichung, die von \bar{u}^F erfüllt werden muss, folgt dann

$$\bar{u}^F(x) = \begin{cases} u_a^F(x), & \text{falls } -(\alpha^F)^{-1}\bar{p}^F(x) < u_a^F(x) & (\Leftrightarrow \tau^F(x) < 0), \\ -(\alpha^F)^{-1}\bar{p}^F(x), & \text{falls } -(\alpha^F)^{-1}\bar{p}^F(x) \in [u_a^F(x), u_b^F(x)] & (\Leftrightarrow \tau^F(x) = 0), \\ u_b^F(x), & \text{falls } -(\alpha^F)^{-1}\bar{p}^F(x) > u_b^F(x) & (\Leftrightarrow \tau^F(x) > 0). \end{cases} \quad (6.5)$$

In der ersten Zeile von (6.5) gilt nach Definition von τ^F und wegen $\bar{u}^F = u_a^F$ die Ungleichung $\tau^F(x) < 0$ und somit $\bar{u}^F(x) + \tau^F(x) < u_a^F(x)$. In der dritten Zeile folgt analog $\bar{u}^F(x) + \tau^F(x) > u_b^F(x)$. Im zweiten Fall gilt $\tau^F(x) = 0$ und damit $\bar{u}^F(x) + \tau^F(x) = -(\alpha^F)^{-1}\bar{p}^F(x) \in [u_a^F(x), u_b^F(x)]$. Also erfüllt $u^F = \bar{u}^F$ die Beziehungen

$$u^F(x) = \begin{cases} u_a^F(x), & \text{falls } u^F(x) + \tau^F(x) < u_a^F(x), \\ -(\alpha^F)^{-1}p^F(x), & \text{falls } u^F(x) + \tau^F(x) \in [u_a^F(x), u_b^F(x)], \\ u_b^F(x), & \text{falls } u^F(x) + \tau^F(x) > u_b^F(x). \end{cases} \quad (6.6)$$

Betrachtet man umgekehrt ein $u^F \in U_{ad}^F$, das (6.6) erfüllt, so erfüllt u^F die Projektionsbeziehung $u^F(x) = \mathbb{P}_{[u_a^F(x), u_b^F(x)]} \left\{ -\frac{1}{\alpha^F} p^F(x) \right\}$ und ist folglich optimal. Aus der obersten Zeile von (6.6) folgt wegen $u^F = u_a^F$ direkt $\tau^F(x) < 0$ und damit

$$0 > -(\alpha^F)^{-1}p^F - u^F = -(\alpha^F)^{-1}p^F - u_a^F,$$

woraus $-(\alpha^F)^{-1}p^F < u_a^F$ und schließlich $u^F(x) = \mathbb{P}_{[u_a^F(x), u_b^F(x)]} \left\{ -\frac{1}{\alpha^F} p^F(x) \right\}$ folgt. Aus der dritten Zeile von (6.6) folgt analog $\tau^F(x) > 0$ und damit $-(\alpha^F)^{-1}p^F > u_b^F$. Der mittlere Fall liefert sofort $u^F(x) = \mathbb{P}_{[u_a^F(x), u_b^F(x)]} \left\{ -\frac{1}{\alpha^F} p^F(x) \right\}$.

Damit kann die Größe $u^F + \tau^F$ als Indikator verwendet werden, um festzustellen, ob bzgl. der entsprechenden Ungleichungsrestriktionen Aktivität oder Inaktivität herrscht. Dafür müssen lediglich die Ungleichungen

$$u^F(x) + \tau^F(x) < u_a^F(x) \quad \text{und} \quad u^F(x) + \tau^F(x) > u_b^F(x)$$

auf Richtigkeit überprüft werden. Dies resultiert in folgender primal-dualer Aktive-Mengen-Strategie:

S0 Wähle beliebige Startfunktionen $u^{F,(0)}, u^{L,(0)}, \tau^{F,(0)} \in L^2(\Omega)$, wobei $u^{F,(0)}$ nicht zulässig sein muss. Die Iterierten $u^{F,(k-1)}, u^{L,(k-1)}, \tau^{F,(k-1)}$ seien bereits bestimmt worden.

S1 Bestimme die folgenden aktiven und inaktiven Mengen:

$$\begin{aligned} A_a^{F,(k)} &:= \left\{ x \in \Omega \mid u^{F,(k-1)}(x) + \tau^{F,(k-1)}(x) < u_a^F(x) \right\}, \\ A_b^{F,(k)} &:= \left\{ x \in \Omega \mid u^{F,(k-1)}(x) + \tau^{F,(k-1)}(x) > u_b^F(x) \right\}, \\ I^{F,(k)} &:= \left\{ \Omega \setminus (A_a^{F,(k)} \cup A_b^{F,(k)}) \right\} \end{aligned}$$

sowie die Mengen

$$\begin{aligned} M_{a,b}^{F,(k)} &:= \left\{ x \in \Omega \mid u^{F,(k-1)}(x) = u_a^F(x) \vee u^{F,(k-1)}(x) = u_b^F(x) \right\}, \\ I(u^{F,(k-1)})^{(k)} &:= \left\{ x \in \Omega \mid u_a^F(x) < u^{F,(k-1)}(x) < u_b^F(x) \right\} \end{aligned}$$

Wenn $A_a^{F,(k)} = A_a^{F,(k-1)}$ und $A_b^{F,(k)} = A_b^{F,(k-1)}$ gilt, dann breche das Verfahren wegen Optimalität ab. Ansonsten gehe zu S2.

S2 Bestimme neue Steuerungen $u^{F,(k)}, u^{L,(k)}$ und einen Lagrange-Multiplikator $\lambda^{L,(k)}$ durch Lösen des linearen Systems

$$\begin{aligned} -\Delta y^L &= u^L, & -\Delta y^F &= u^F, & -\Delta \Lambda^L &= \lambda^L, \\ -\Delta p^F &= y^L + y^F - y_d^F, & -\Delta p^L &= y^L + y^F + \Lambda^L - y_d^L, \end{aligned}$$

$$u^F = \begin{cases} u_a^F, & \text{auf } A_a^{F,(k)}, \\ -(\alpha^F)^{-1} p^F, & \text{auf } I^{F,(k)}, \\ u_b^F, & \text{auf } A_b^{F,(k)}, \end{cases} \quad (6.7)$$

$$p^L + \alpha^L u^L = 0, \quad p^L + \alpha^F \lambda^L = 0 \text{ auf } I(u^{F,(k-1)})^{(k)}, \quad \lambda^L = 0, \text{ auf } M_{a,b}^{F,(k)},$$

für $u^F, u^L \in L^2(\Omega)$ und $y^F, y^L, p^F, p^L \in H_0^1(\Omega)$. Definiere anschließend

$$u^{F,(k)} := u^F, \quad p^{F,(k)} := p^F, \quad \tau^{F,(k)} := -(\alpha^F)^{-1} p^{F,(k)} + u^{F,(k)}, \quad u^{L,(k)} := u^L, \quad \lambda^{L,(k)} = \lambda^L, \quad p^{L,(k)} := p^L,$$

setze $k := k + 1$ und gehe zu S1.

Bemerkung 6.2.1.

Die eindeutige Lösbarkeit des linearen Systems (6.7) resultiert daraus, dass es die notwendigen (und hinreichenden) Optimalitätsbedingungen für ein eindeutig lösbares, linear quadratisches Optimalsteuerproblem beschreibt (bei Fixierung von $u^F = u_a^F$ auf $A_a^{F,(k)}$ und $u^F = u_b^F$ auf $A_b^{F,(k)}$).

Es ist praktikabler das zu lösende lineare System (6.7) in anderer Weise aufzuschreiben. Hierbei helfen die charakteristischen Funktionen

$$\chi_{A_a}^{F,(k)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A_a^{F,(k)} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad \chi_{A_b}^{F,(k)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A_b^{F,(k)} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

zu den aktiven Mengen $A_a^{F,(k)}$ und $A_b^{F,(k)}$ sowie

$$\chi_{M_{a,b}}^{F,(k)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in M_{a,b}^{F,(k)} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

zur Menge $M_{a,b}^{F,(k)}$ und

$$\chi_{I(u^{F,(k-1)})}^{(k)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in I(u^{F,(k-1)})^{(k)} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

zur Menge $I(u^{F,(k-1)})^{(k)}$. Man fasst die Beziehung in (6.7) für u^F wie folgt zusammen:

$$u^F + \left(1 - \chi_{A_a}^{F,(k)} - \chi_{A_b}^{F,(k)}\right) (\alpha^F)^{-1} p^F = \chi_{A_a}^{F,(k)} u_a^F + \chi_{A_b}^{F,(k)} u_b^F, \quad (6.8)$$

In (6.8) gilt für

$$\begin{aligned} x \in A_a^{F,(k)} : & \quad u^F(1 - 1 - 0)(\alpha^F)^{-1} p^F = 1 \cdot u_a^F + 0 \cdot u_b^F \Leftrightarrow u^F = u_a^F, \\ x \in A_b^{F,(k)} : & \quad u^F(1 - 0 - 1)(\alpha^F)^{-1} p^F = 0 \cdot u_a^F + 1 \cdot u_b^F \Leftrightarrow u^F = u_b^F, \\ x \in I^{F,(k)} : & \quad u^F(1 - 0 - 0)(\alpha^F)^{-1} p^F = 0 \cdot u_a^F + 0 \cdot u_b^F \Leftrightarrow u^F = -(\alpha^F)^{-1} p^F. \end{aligned}$$

Analog macht man sich klar, dass die Beziehungen

$$\chi_{I(u^{F,(k-1)})}^{(k)} \cdot \left(p^L + \alpha^F \chi_{M_{a,b}}^{F,(k)} \cdot \lambda^L\right) = 0 \quad \text{und} \quad \chi_{M_{a,b}}^{F,(k)} \cdot \lambda^L = 0$$

den Bedingungen

$$p^L(x) + \alpha^F \lambda^L(x) = 0 \quad \text{auf} \quad I(u^{F,(k-1)})^{(k)} \quad \text{und} \quad \lambda^L(x) = 0 \quad \text{auf} \quad M_{a,b}^{F,(k)}$$

entsprechen.

In S2 ist demnach das folgende System bei homogenen Randbedingungen für y^F, y^L, p^F und p^L zu lösen:

$$\begin{aligned} -\Delta y^F - u^F &= 0 \\ -\Delta y^L - u^L &= 0 \\ -\Delta \Lambda^L - \chi_{M_{a,b}}^{F,(k)} \cdot \lambda^L &= 0 \\ -\Delta p^F - y^L - y^F &= -y_d^F \\ -\Delta p^L - y^L - y^F - \Lambda^L &= -y_d^L \\ \left(1 - \chi_{A_a}^{F,(k)} - \chi_{A_b}^{F,(k)}\right) (\alpha^F)^{-1} p^F + u^F &= \chi_{A_a}^{F,(k)} u_a^F + \chi_{A_b}^{F,(k)} u_b^F \\ p^L + \alpha^L u^L &= 0 \\ \chi_{I(u^{F,(k-1)})}^{(k)} \cdot \left(p^L + \alpha^F \chi_{M_{a,b}}^{F,(k)} \cdot \lambda^L\right) &= 0 \end{aligned} \tag{6.9}$$

Auch dieses System kann mit dem Lösungsoperator $S : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ wieder in folgende reduzierte Form gebracht werden, sodass nur noch die Steuerungen $u^F (= u^{F,(k)})$ und $u^L (= u^{L,(k)})$ und der Lagrange-Multiplikator $\lambda^L (= \lambda^{L,(k)})$ gesucht sind:

$$\begin{aligned} \left(1 - \chi_{A_a}^{F,(k)} - \chi_{A_b}^{F,(k)}\right) (\alpha^F)^{-1} \left(S^* \left(Su^L + Su^F - y_d^F\right)\right) + u^F &= \chi_{A_a}^{F,(k)} u_a^F + \chi_{A_b}^{F,(k)} u_b^F, \\ S^* \left(Su^L + Su^F + S \cdot \chi_{M_{a,b}}^{F,(k)} \cdot \lambda^L - y_d^L\right) + \alpha^L u^L &= 0, \\ \chi_{I(u^{F,(k-1)})}^{(k)} \cdot \left(Su^L + Su^F + S\lambda^L - y_d^L + \alpha^F \cdot \chi_{M_{a,b}}^{F,(k)} \cdot \lambda^L\right) &= 0 \end{aligned} \tag{6.10}$$

Im Anschluss bzw. nach Erfüllung des Abbruchkriteriums können $y^{F,(k)}, y^{L,(k)}, \Lambda^{L,(k)}, p^{F,(k)}, p^{L,(k)}$ und $\tau^{F,(k)}$ über

$$\begin{aligned} y^{F,(k)} &= Su^{F,(k)} \\ y^{L,(k)} &= Su^{L,(k)} \\ \Lambda^{L,(k)} &= S\lambda^{L,(k)} \\ p^{F,(k)} &= S^* \left(Su^{F,(k)} + Su^{L,(k)} - y_d^F\right) \\ p^{L,(k)} &= S^* \left(Su^{L,(k)} + Su^{F,(k)} + S\lambda^{L,(k)} - y_d^L\right) \\ \tau^{F,(k)} &= -(\alpha^F)^{-1} \left(S^* \left(Su^{F,(k)} + Su^{L,(k)} - y_d^F\right) + u^{F,(k)}\right) \end{aligned}$$

berechnet werden.

Bemerkung 6.2.2.

An der Fallunterscheidung in (6.5) ändert sich offenbar nichts, wenn die Funktion τ^F durch ein positives Vielfaches $c_F \tau^F$ ersetzt wird. Dieses Vorgehen kann bei der numerischen Umsetzung von Vorteil sein und wird auch für die Konvergenzanalyse genutzt.

Für die Analysis des Verfahrens sei auf [12], [50] und [51] verwiesen. Der beschriebene Algorithmus kann auch als halbglattes Newton-Verfahren interpretiert werden, was der Grund für seine überlineare Konvergenz ist (vgl. [49] und [51]).

6.3 Diskretisierung und numerische Umsetzung

Die Diskretisierung erfolgt durch eine Approximation mithilfe der Finite-Elemente-Methode. Die wichtigsten Annahmen werden im Folgenden nur grob umrissen. Hierbei wird das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ als polygonal berandet vorausgesetzt, so dass es durch eine reguläre Triangulation in endlich viele Dreiecke mit paarweise disjunktem Inneren zerlegt werden kann. Dazu sei $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ eine Familie von Triangulierungen auf $\bar{\Omega}$. Das Gitter \mathcal{T}_h besteht aus offenen und paarweise disjunkten Dreiecken $T \in \mathcal{T}_h$, so dass

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} \bar{T}$$

gilt. Des Weiteren liegt keine Ecke eines Dreiecks im Inneren einer Kante einer anderen Zelle. Für jedes Element $T \in \mathcal{T}_h$ definiert man die Parameter $\rho_T = \sup\{\text{diam}(S) \mid S \subset \mathbb{R}^2 \text{ ist ein Ball in } T\}$ und $h_T = \text{diam}(T)$. Die maximale Gitterweite wird durch $h := \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T$ beschrieben und man nimmt an, dass alle Triangulationen die folgenden Regularitätsannahmen erfüllen:

- Formregularität: Es existiert unabhängig von h eine Konstante $\theta > 0$, so dass für alle $T \in \mathcal{T}_h$ die Beziehung

$$\frac{h_T}{\rho_T} \leq \theta$$

erfüllt ist.

- Größenregularität: Es existiert unabhängig von h eine Konstante $\hat{\theta} > 0$, so dass die Beziehung

$$h \leq \hat{\theta} \min_{T \in \mathcal{T}_h} h_T$$

erfüllt ist.

Die Finite-Elemente-Räume werden durch

$$V_h := \left\{ z_h \in C(\bar{\Omega}) \mid z_{h|_T} \in \mathbb{P}_1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \right\}$$

und

$$V_{h,0} := V_h \cap H_0^1(\Omega)$$

beschrieben, wobei $\mathbb{P}_1(T)$ den Raum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich 1 auf T angibt. Die Menge der Knoten von \mathcal{T}_h wird durch $\{x_1, \dots, x_l\}$ bezeichnet und für einen Knoten x_i , $i = 1, \dots, l$, definiert man das Teilstück $\Delta_i := \{T \in \mathcal{T}_h \mid x_i \in T\}$. Die standardmäßigen nodalen Basisfunktionen von V_h werden durch $\{\Phi_1, \dots, \Phi_l\}$ beschrieben und erfüllen die Bedingungen

$$\Phi_i = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, l,$$

wobei mit δ_{ij} die Kronecker-Delta-Funktion,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ 0, & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

gemeint ist. Somit gilt $\text{supp}(\Phi_i) = \Delta_i$, $i = 1, \dots, l$.

Für eine umfangreiche und vertiefende Einführung in die Theorie der Finite-Elemente-Methode sei auf die Bücher [15], [19] und [33] verwiesen.

6.3.1 Die Diskretisierung des Problems

Die Finite-Elemente-Methode ist ein erprobtes und wissenschaftlich aktuelles Verfahren, um partielle (aber auch gewöhnliche) Differentialgleichungen zu approximieren und zu lösen. Im Folgenden beschränken wir uns zunächst auf die partielle Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -\Delta y &= u && \text{in } \Omega \\ y &= 0 && \text{auf } \Gamma \end{aligned} \tag{6.11}$$

und lösen uns für einen Moment von der Unterscheidung zwischen Leader und Follower, da die auftretenden Zustandsgleichungen für beide Akteure identisch sind. Die Gleichung wird mit einer Testfunktion $v \in H_0^1(\Omega)$ multipliziert und mit partieller Integration erhält man genau wie in Satz 2.1.11 die schwache Formulierung

$$B(y, v) := (\nabla y, \nabla v) = (u, v) =: F(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{6.12}$$

Da die Bilinearform $B : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und koerziv und die rechte Seite $F(v)$ beschränkt und linear ist, existiert nach dem Lemma von Lax-Milgram (siehe Lemma 2.1.9) stets eine eindeutige Lösung $y \in H_0^1(\Omega)$ zu jeder vorgegebenen rechten Seite u in $L^2(\Omega)$. Die schwache Formulierung wird nun durch die Wahl eines geeigneten endlichdimensionalen Testraums V_h als Teilraum von $H_0^1(\Omega)$ approximiert. Hierbei bezeichnet $h > 0$ als Diskretisierungsparameter bzw. Gitterweite die Feinheit unserer Approximation. Nach diesem Übergang sucht man nach einer Funktion $y_h \in V_h$, so dass die Gleichung

$$B(y_h, v_h) = F(v_h)$$

für alle $v_h \in V_h^1 := \left\{ v \in C(\bar{\Omega}) \mid v_T \in \mathbb{P}_1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}, \quad v|_{\Gamma} = 0 \right\}$ erfüllt ist. Für den endlichdimensionalen Raum V_h^1 mit Dimension l existiert eine Menge linear unabhängiger, stückweise linearer und stetiger Basisfunktionen $\{\Phi_1, \dots, \Phi_l\}$, so dass jede Funktion $y_h \in V_h^1$ eindeutig durch den Ansatz

$$y_h(x) = \sum_{i=1}^l y_h^i \Phi_i(x)$$

mit $y_h^i \in \mathbb{R}$ dargestellt werden kann. Analog kann jede Funktion u_h als Steuerung in dem endlichdimensionalen Raum $V_h^0 := \{v \in L^2(\Omega) \mid v_T \in \mathbb{P}_0(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}\}$ mit Dimension m mit Hilfe zugehöriger linear unabhängiger, stückweise konstanter Basisfunktionen $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ eindeutig durch

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^m u_h^i \varphi_i(x)$$

mit $u_h^i \in \mathbb{R}$ dargestellt werden. Der Zustand y wird also mit stückweise linearen und die Steuerung u mit stückweise konstanten Finiten Elementen diskretisiert. Nach Einsetzen dieser Ansätze in die schwache Formulierung (6.12) mit der Wahl des Testraums $H_0^1(\Omega)$ ist sie äquivalent zu dem linearen System

$$\mathbb{K}_h y_h = \mathbb{B}_h u_h$$

mit $y_h = (y_1, \dots, y_l)^T$ und $u_h = (u_1, \dots, u_m)^T$. Hierbei bezeichnet

$$\mathbb{K}_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \Phi_i \cdot \nabla \Phi_j \, dx$$

die sogenannte Steifigkeitsmatrix und

$$\mathbb{B}_{ij} = \int_{\Omega} \Phi_i \cdot \varphi_j \, dx$$

die Matrix, die stückweise konstante und stückweise lineare Finite Elemente miteinander koppelt. Diese Gleichung wird schließlich auf dem regulär triangulierten Gebiet $\bar{\Omega}$ gelöst.

Des Weiteren nimmt ein zugehöriges Zielfunktional $\frac{1}{2} \|y - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2$ die diskrete Struktur

$$\frac{1}{2} y_h^T \mathbb{M}_h y_h - a_h^T y_h + \frac{\alpha}{2} u_h^T \mathbb{D}_h u_h + \frac{1}{2} \|y_d\|_{L^2(\Omega)}^2$$

mit den Massematrizen

$$\mathbb{M}_{ij} = \int_{\Omega} \Phi_i \cdot \Phi_j \, dx \quad \text{und} \quad \mathbb{D}_{ij} = \int_{\Omega} \varphi_i \cdot \varphi_j \, dx$$

und dem Vektor

$$\mathbf{a}_i = \int_{\Omega} \Phi_i \cdot y_d \, dx$$

an. Die diskreten Versionen der Box-Constraints $u_a, u_b \in L^2(\Omega)$ erhält man durch Lösen von

$$(\mathbb{D}_h \mathbf{u}_a) = \int_{\Omega} u_a \cdot \varphi_i \, dx, \quad (\mathbb{D}_h \mathbf{u}_b) = \int_{\Omega} u_b \cdot \varphi_i \, dx.$$

Weil die Inneren der Teildreiecke zueinander disjunkt sind, ist \mathbb{D}_h eine Diagonalmatrix. Da der konstante Term $\frac{1}{2} \|y_d\|_{L^2(\Omega)}^2$ keinen Einfluss auf die Minimierung hat, lautet die komplette diskretisierte Optimalsteueraufgabe

$$\min \frac{1}{2} y_h^T \mathbb{M}_h y_h - \mathbf{a}_h^T y_h + \frac{\alpha}{2} u_h^T \mathbb{D}_h u_h$$

bei

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_h y_h &= \mathbb{B}_h u_h, \\ \mathbf{u}_a &\leq u_h \leq \mathbf{u}_b \end{aligned}$$

und das zugehörige Optimalitätssystem

$$\begin{aligned}\mathbb{K}_h y_h &= \mathbb{B}_h u_h, & \mathbf{u}_a &\leq u_h \leq \mathbf{u}_b, \\ \mathbb{K}_h p_h &= \mathbb{M}_h y_h - \mathbf{a}_h, \\ (\alpha \mathbb{D}_h u_h + \mathbb{B}_h^T p_h)^T &(\hat{u}_h - u_h) \geq 0, & \mathbf{u}_a &\leq u_h \leq \mathbf{u}_b.\end{aligned}$$

Mit ebendiesem Vorgehen überträgt man das Problem (KKT_{mod}^{red}) in die diskrete Form

$$\min_{u_h^L, u_h^F, p_h^F, \mu_h^F} F_h^L(y_h^L, u_h^L) := \frac{1}{2}(y_h^L)^T \mathbb{M}_h y_h^L + \frac{1}{2}(y_h^F)^T \mathbb{M}_h y_h^F - (\mathbf{a}_h^L)^T y_h^L + \frac{\alpha^L}{2}(u_h^L)^T \mathbb{D}_h u_h^L$$

bei

$$\begin{aligned}\mathbb{K}_h y_h^L &= \mathbb{B}_h u_h^L, & \mathbb{K}_h y_h^F &= \mathbb{B}_h u_h^F, & \mathbb{K}_h p_h^F &= \mathbb{M}_h y_h^L + \mathbb{M}_h y_h^F - \mathbf{a}_h^F, \\ p_h^F + \alpha^F u_h^F + (-\chi_{A^-(\bar{u}^F)} + \chi_{A^+(\bar{u}^F)}) \cdot \mu_h^F &= 0, \\ \mathbf{u}_a^F &\leq u_h^F \leq \mathbf{u}_b^F, & & & & (\text{KKT}_{mod,disk}^{red})\end{aligned}$$

$$\mu_h^F \geq 0,$$

$$\left(\mu_h^F, \chi_{A^-(\bar{u}^F)}(\mathbf{u}_a^F - u_h^F) + \chi_{A^+(\bar{u}^F)}(u_h^F - \mathbf{u}_b^F) \right)_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Das zugehörige Optimalitätssystem lautet unter Berücksichtigung der Struktur von (6.3)

$$\begin{aligned}\mathbb{K}_h y_h^L &= \mathbb{B}_h u_h^L, & \mathbb{K}_h y_h^F &= \mathbb{B}_h u_h^F, & \mathbb{K}_h \lambda_h^L &= \mathbb{B}_h \lambda_h^L \\ \mathbb{K}_h p_h^L &= \mathbb{M}_h y_h^L + \mathbb{M}_h y_h^F + \mathbb{M}_h \lambda_h^L - \mathbf{a}_h^L, & \mathbb{K}_h p_h^F &= \mathbb{M}_h y_h^L + \mathbb{M}_h y_h^F - \mathbf{a}_h^F, \\ \mathbb{M}_h p_h^L + \alpha^L u_h^L &= 0, & & & & (6.13)\end{aligned}$$

$$\mathbb{M}_h p_h^L + \alpha^F \lambda_h^L = 0 \quad \text{auf} \quad \mathcal{I}(u_h^F) = \left\{ x \in \Omega \mid \mathbf{u}_a^F(x) < u_h^F(x) < \mathbf{u}_b^F(x) \right\},$$

$$\lambda_h^L = 0 \quad \text{auf} \quad \mathcal{M}_{a,b}^F = \left\{ x \in \Omega \mid u_h^F(x) = \mathbf{u}_a^F(x) \vee u_h^F(x) = \mathbf{u}_b^F(x) \right\}$$

$$u_h^F = \mathbb{P}_{[\mathbf{u}_a^F(x), \mathbf{u}_b^F(x)]} \left\{ -\frac{1}{\alpha^F} p_h^F(x) \right\}.$$

Hier wurde jede der Äquivalenzen aus Bemerkung 4.3.6 ausgenutzt: Die Formulierungen des Optimalitätssystems über die Variationsungleichungen, die Lagrange-Multiplikatoren und die Projektionsgleichungen sind allesamt äquivalent.

6.3.2 Eine primal-duale Aktive-Mengen-Strategie für $(\text{KKT}_{mod,disk}^{red})$

Ausgehend vom diskreten Optimalitätssystem (6.13) wird nun in Anlehnung an den vorherigen Abschnitt eine implementierbare primal-duale Aktive-Mengen-Strategie für die Berechnung einer Lösung $(\bar{u}_h^L, \bar{u}_h^F)$ von $(\text{KKT}_{mod,disk}^{red})$ hergeleitet.

Da \mathbb{D}_h eine Diagonalmatrix ist, kann analog zum unendlichdimensionalen Fall (6.4) mit

$$\tau_h^F = -\left((\alpha^F \mathbb{D})^{-1} \mathbb{B}_h^T \bar{p}_h^F + \bar{u}_h^F\right)$$

für den Vektor \bar{u}_h^F wie in (6.6) auf

$$(\bar{u}_h^F)_i = \begin{cases} \mathbf{u}_a^F, & \text{falls } (\bar{u}_h^F)_i + (\tau_h^F)_i < \mathbf{u}_a^F, \\ -(\alpha^F)^{-1}(\bar{p}_h^F)_i, & \text{falls } (\bar{u}_h^F)_i + (\tau_h^F)_i \in [\mathbf{u}_a^F, \mathbf{u}_b^F], \\ \mathbf{u}_b^F, & \text{falls } (\bar{u}_h^F)_i + (\tau_h^F)_i > \mathbf{u}_b^F, \end{cases}$$

$i = 1, \dots, m$, geschlossen werden. Durch den Vergleich mit dem unendlichdimensionalen Fall erhält man die folgende primal-duale Aktive-Mengen-Strategie.

Als Startwerte werden Vektoren $u_h^{L,(0)}, u_h^{F,(0)}, \lambda_h^{L,(0)}, \tau_h^{F,(0)}$ gewählt.

Im k -ten Iterationsschritt sind die Mengen der aktiven bzw. inaktiven Restriktionen durch

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_a^{F,(k)} &:= \left\{ i \in \{1, \dots, m\} \mid \left(u_h^{F,(k-1)}\right)_i + \left(\tau_h^{F,(k-1)}\right)_i < \mathbf{u}_a^F \right\}, \\ \mathcal{A}_b^{F,(k)} &:= \left\{ i \in \{1, \dots, m\} \mid \left(u_h^{F,(k-1)}\right)_i + \left(\tau_h^{F,(k-1)}\right)_i > \mathbf{u}_b^F \right\}, \\ \mathcal{I}^{F,(k)} &:= \left\{ \{1, \dots, m\} \setminus (\mathcal{A}_a^{F,(k)} \cup \mathcal{A}_b^{F,(k)}) \right\} \end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{a,b}^{(k)} &:= \left\{ i \in \{1, \dots, m\} \mid \left(u_h^{F,(k-1)}\right)_i = \mathbf{u}_a^F(x) \vee \left(u_h^{F,(k-1)}\right)_i = \mathbf{u}_b^F(x) \right\}, \\ \mathcal{I}(u_h^{F,(k-1)})^{(k)} &:= \left\{ i \in \{1, \dots, m\} \mid \mathbf{u}_a^F < \left(u_h^{F,(k-1)}\right)_i < \mathbf{u}_b^F \right\} \end{aligned}$$

definiert. Nachdem die neuen Mengen $\mathcal{A}_a^{F,(k)}, \mathcal{A}_b^{F,(k)}, \mathcal{M}_{a,b}^{(k)}$ und $\mathcal{I}(u_h^{F,(k-1)})^{(k)}$ festgelegt wurden, kann man analog zu den in (6.8) verwendeten charakteristischen Funktionen $\chi_{\mathcal{A}_a}^{F,(k)}, \chi_{\mathcal{A}_b}^{F,(k)}, \chi_{\mathcal{M}_{a,b}}^{F,(k)}$ und $\chi_{\mathcal{I}}^{L,(k)}$

Diagonalmatrizen mit Diagonalelementen

$$\left(\chi_{\mathcal{A}_a}^{F,(k)}\right)_{ii} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i \in \mathcal{A}_a^{F,(k)}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad \left(\chi_{\mathcal{A}_b}^{F,(k)}\right)_{ii} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i \in \mathcal{A}_b^{F,(k)}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\left(\chi_{\mathcal{M}_{a,b}}^{F,(k)}\right)_{ii} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i \in \mathcal{M}_{a,b}^{F,(k)}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad \left(\chi_{\mathcal{I}(u_h^{F,(k-1)})}^{(k)}\right)_{ii} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i \in \mathcal{I}(u_h^{F,(k-1)})^{(k)}, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

berechnen. Anschließend setzt man

$$\mathbb{E}_h^F := (\alpha^F \mathbb{D}_h)^{-1} \left(I - \chi_{\mathcal{A}_a}^{F,(k)} - \chi_{\mathcal{A}_b}^{F,(k)} \right) \quad \text{und} \quad \mathbf{U}_{a,b}^F = \chi_{\mathcal{A}_a}^{F,(k)} \mathbf{u}_a^F + \chi_{\mathcal{A}_b}^{F,(k)} \mathbf{u}_b^F.$$

Die Diagonalelemente $(e_h^F)_{ii}$ von \mathbb{E}_h^F verschwinden genau dann, wenn $i \in \mathcal{A}_a^{F,(k)} \cup \mathcal{A}_b^{F,(k)}$ gilt. Demnach muss das folgende lineare Gleichungssystem gelöst werden:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{K}_h & 0 & -\mathbb{B}_h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{K}_h & 0 & -\mathbb{B}_h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{K}_h & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbb{B}_h \chi_{\mathcal{M}_{a,b}}^{F,(k)} \\ 0 & \mathbb{K}_h & 0 & -\mathbb{M}_h & -\mathbb{M}_h & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{K}_h & 0 & -\mathbb{M}_h & -\mathbb{M}_h & -\mathbb{M}_h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{E}_h^F \mathbb{M}_h & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ \mathbb{M}_h & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha^L & 0 & 0 \\ \chi_{\mathcal{I}(u_h^{F,(k-1)})}^{(k)} \mathbb{M}_h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \chi_{\mathcal{I}(u_h^{F,(k-1)})}^{(k)} \alpha^F \chi_{\mathcal{M}_{a,b}}^{F,(k)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_h^{L,(k)} \\ p_h^{F,(k)} \\ \Lambda_h^{L,(k)} \\ y_h^{L,(k)} \\ y_h^{F,(k)} \\ u_h^{L,(k)} \\ u_h^{F,(k)} \\ \lambda_h^{L,(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\mathbf{a}_h^F \\ -\mathbf{a}_h^L \\ \mathbf{U}_{a,b}^F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Anschließend resultieren neue Vektoren

$$u_h^{L,(k)} := u_h^L, \quad u_h^{F,(k)} := u_h^F, \quad \lambda_h^{L,(k)} := \lambda_h^L$$

und

$$\tau_h^{F,(k)} := -\left((\alpha^F \mathbb{D})^{-1} \mathbb{B}_h^T p_h^{F,(k)} + u_h^{F,(k)} \right).$$

Bemerkungen 6.3.1.

(i) Es kann bewiesen werden, dass dieser Algorithmus nach endlich vielen Schritten das Optimum erreicht. Dieser Fall tritt ein, wenn zum ersten Mal

$$\mathcal{A}_a^{F,(k)} = \mathcal{A}_a^{F,(k-1)} \quad \text{und} \quad \mathcal{A}_b^{F,(k)} = \mathcal{A}_b^{F,(k-1)}$$

gilt. In diesem Fall erfüllen $u_h^{L,(k)}$ und $u_h^{F,(k)}$ alle Restriktionen. Insofern erzeugt die primal-duale Aktive-Mengen-Strategie abgesehen vom Optimum ausschließlich unzulässige Iterierte (vgl. [12], [50] und [51]).

(ii) Das Ersetzen von $\tau_h^{F,(k)}$ durch sein Vielfaches $c_f \cdot \tau_h^{F,(k)}$ mit $c_f > 0$ kann bei der Implementierung hilfreich sein und die Konvergenz gegen das Optimum beschleunigen.

Die primal-duale Aktive-Mengen-Strategie für das Problem (KKT_{mod,disk}^{red}) lautet somit:

S0 Wähle Startvektoren $u_h^{L,(0)}, u_h^{F,(0)}, \lambda_h^{L,(0)}, \tau_h^{F,(0)}$.

S1 Bestimme im k -ten Iterationsschritt die Mengen

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_a^{F,(k)} &:= \left\{ i \in \{1, \dots, m\} \mid \left(u_h^{F,(k-1)}\right)_i + \left(\tau_h^{F,(k-1)}\right)_i < \mathbf{u}_a^F \right\}, \\ \mathcal{A}_b^{F,(k)} &:= \left\{ i \in \{1, \dots, m\} \mid \left(u_h^{F,(k-1)}\right)_i + \left(\tau_h^{F,(k-1)}\right)_i > \mathbf{u}_b^F \right\}, \\ \mathcal{I}^{F,(k)} &:= \left\{ \{1, \dots, m\} \setminus (\mathcal{A}_a^{F,(k)} \cup \mathcal{A}_b^{F,(k)}) \right\} \end{aligned}$$

sowie die Mengen

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{a,b}^{(k)} &:= \left\{ i \in \{1, \dots, m\} \mid \left(u_h^{F,(k-1)}\right)_i = \mathbf{u}_b^F \vee \left(u_h^{F,(k-1)}\right)_i = \mathbf{u}_a^F \right\}, \\ \mathcal{I}(u_h^{F,(k-1)})^{(k)} &:= \left\{ i \in \{1, \dots, m\} \mid \mathbf{u}_a^F < \left(u_h^{F,(k-1)}\right)_i < \mathbf{u}_b^F \right\}. \end{aligned}$$

Falls $\mathcal{A}_a^{F,(k)} = \mathcal{A}_a^{F,(k-1)}$ und $\mathcal{A}_b^{F,(k)} = \mathcal{A}_b^{F,(k-1)}$ gilt, breche das Verfahren aufgrund des gefundenen Optimums ab. Anderenfalls gehe zu S2.

S2 Löse das lineare Gleichungssystem, definiere anschließend

$$u_h^{L,(k)} := u_h^L, \quad u_h^{F,(k)} := u_h^F, \quad \lambda_h^{L,(k)} := \lambda_h^L$$

sowie

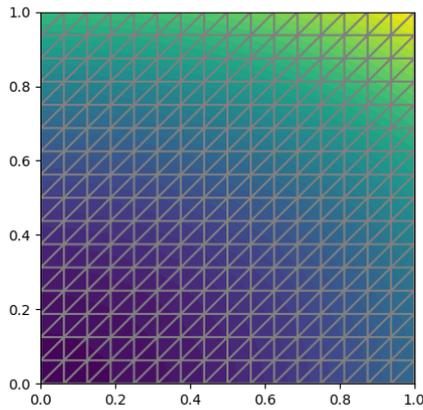
$$\tau_h^{F,(k)} := -\left((\alpha^F \mathbb{D})^{-1} \mathbb{B}_h^T p_h^{F,(k)} + u_h^{F,(k)} \right),$$

setze $k := k + 1$ und gehe zu S1.

6.4 Numerische Resultate

In diesem Abschnitt soll die Funktionsfähigkeit einer Implementierung der zuvor präsentierten primal-dual Aktiven-Mengen-Strategie anhand numerischer Tests illustriert werden. Es folgen zunächst einige allgemeine Anmerkungen zur Implementierung. Im Anschluss werden die gewählten Testprobleme vorgestellt und es folgt die Dokumentation der numerischen Ergebnisse.

Die primal-duale Aktive-Mengen-Strategie aus Abschnitt 6.2 wurde in Python 3 implementiert. Des Weiteren wurden entsprechende FEniCS-Pakete verwendet, um die benötigten Steifigkeits- und Masse-Matrizen zu erzeugen. Alle numerischen Tests wurden auf dem Einheitsquadrat $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ durchgeführt. In Abbildung 6.1 sind mit Blick auf die Finite-Elemente-Methode exemplarisch ein Gitter auf dem Einheitsquadrat mit Gitterweite 32×32 sowie eine Übersicht der Verfeinerungen der Gitterweite dargestellt, die später für die numerischen Tests verwendet werden.



Feinheit	Gitter	Gitterweite
1	(4,4)	3.53553391e-01
2	(8,8)	1.76776700e-01
3	(16,16)	8.83883476e-02
4	(32,32)	4.41941738e-02
5	(64,64)	2.20970869e-02
6	(128,128)	1.10485435e-02
7	(256,256)	5.52427173e-03
8	(512,512)	2.76213586e-03

Abbildung 6.1: 32×32 -mesh und verwendete Gitterweiten

Genau wie in der skizzierten Diskretisierung des Modell-Problems aus Abschnitt 6.3.1 wurden die Steuerungen u^L und u^F mit stückweise konstanten und die zugehörigen Zustände y^L und y^F mit stückweise linearen Finiten Elementen diskretisiert.

Die Größe des Parameters τ^F ist maßgeblich dafür verantwortlich wie die Mengen im Schritt S1 der primal-dual Aktiven-Mengen-Strategie im jeweiligen Iterationsschritt aussehen. Es hat sich bei der Implementierung gezeigt, dass der Parameter τ^F insbesondere für einen sehr kleinen Tikhonov-Parameter α^F sehr groß werden kann, was dazu geführt hat, dass die Mengen $\mathcal{A}_a^{F,(k)}$ und $\mathcal{A}_b^{F,(k)}$ entweder sehr einseitig vollgeladen wurden oder über mehrere Iterationen hinweg leer blieben, was numerisch wenig Fortschritt mit sich brachte und zu hohen Durchlaufzahlen führte. Hierbei kommt zum Tragen, dass α^F in reziproker Form in der Definition von

$$\tau_h^{F,(k)} := -\left((\alpha^F \mathbb{D})^{-1} \mathbb{B}_h^T p_h^{F,(k)} + u_h^{F,(k)} \right)$$

auftritt. Mit Blick auf Bemerkung 6.2.2 bestand die Lösung dieses Problems in der Verwendung von $c_{\tau^F} \cdot \tau^F$ anstelle von τ^F mit einer geeigneten Konstante $c_{\tau^F} > 0$ definiert durch

$$c_{\tau^F} = \frac{1}{(-1)^k \cdot \|\tau^F\|_{L^2(\Omega)}}.$$

Dieses Vorgehen führte zu einer Stabilisierung des Wertebereichs von τ^F und schließlich zu 'besser' beschaffenen Mengen $\mathcal{A}_a^{F,(k)}$ und $\mathcal{A}_b^{F,(k)}$ sowie besserer Konvergenz.

Als Abbruchkriterium wurde bei der Implementierung, genau wie in Schritt 1 der primal-dualen Aktive-Mengen-Strategie für (KKT $_{mod}^{red}$), die Gleichheit der aktiven Mengen $\mathcal{A}_a^{F,(k)}$ und $\mathcal{A}_b^{F,(k)}$ hinsichtlich zwei aufeinanderfolgender Iterationsschritte verwendet, da in diesem Fall das Optimum erreicht ist und zuvor ausschließlich unzulässige Iterierte erzeugt wurden (vgl. Bemerkungen 6.3.1).

Die initialen Steuerungen $u_h^{L,(0)}$ und $u_h^{F,(0)}$ sowie der initiale Lagrange-Multiplikator $\lambda_h^{L,(0)}$ wurden zufällig generiert, wobei für $u_h^{F,(0)}$ die Bedingung $u_h^{F,(0)} \in U_{ad,h}^F$ erfüllt ist. Der zu $u_h^{F,(0)}$ zugehörige initiale Startvektor $\tau_h^{F,(0)}$ wurde anhand der Identität in Schritt S2 ermittelt. Für eine unzulässige initiale Steuerung $u_h^{F,(0)}$ ändern sich die beobachteten numerischen Resultate nicht wesentlich.

Des Weiteren passen die Voraussetzungen hinsichtlich der Menge der zulässigen Steuerungen, unter denen die Analysis bisher durchgeführt wurde, nicht ganz zur numerischen Umsetzung: Um zu garantieren, dass die zulässige Menge $U_{ad,h}^F$ zu keinem Zeitpunkt leer ist, trifft man zusätzliche Annahmen, die absichern, dass für eine hinreichend feine Diskretisierung stets eine zulässige Steuerung u_h^F existiert. Dafür setzt man der Einfachheit halber voraus, dass \mathbf{u}_a^F und \mathbf{u}_b^F aus $C(\bar{\Omega})$ stammen und ein σ^F so existiert, dass $\mathbf{u}_b^F - \mathbf{u}_a^F > \sigma^F$ gilt.

Für die numerischen Tests wurden aus den Quellen [31], [55] und [58] Zielzustände inklusive der dort gewählten Steuerschranken herangezogen. Die Tatsache, dass auf der Leader-Ebene keine Steuerschranken vorhanden sind, fällt nicht sonderlich ins Gewicht. Vielmehr hat sich gezeigt, dass die Wahl der Tikhonov-Parameter α^L und α^F und insbesondere ihr Verhältnis zueinander absolut wesentlich dafür ist, in welche Richtung sich der approximierte Zielzustand $y_h = y_h^L + y_h^F$ entwickelt: Je kleiner einer der beiden Parameter im Vergleich zum anderen gewählt wird, desto schneller konvergiert die Lösung y_h gegen den Zielzustand der Problemebene, bezüglich der der kleinere Tikhonov-Parameter gewählt wurde. Dieses Konvergenzverhalten ist vermutlich mit dem Umstand zu erklären, dass die entsprechende Steuerung für ein relativ klein gewähltes α^L bzw. α^F im Zielfunktional weniger ins Gewicht fällt. Interessant ist vor allem, wie sich bei unterschiedlichen Kombinationen von Regularisierungsparametern die Defekte $\|y_h - y_d^L\|_{L^2(\Omega)}$ bzw. $\|y_h - y_d^F\|_{L^2(\Omega)}$ entwickeln.

6.4.1 Gewählte Zielzustände und numerische Tests

Folgende Zielzustandspaare (y_d^1, y_d^2) und (y_d^3, y_d^4) werden für die numerischen Testläufe herangezogen. Währenddessen werden sie wechselseitig die Rolle von y_d^L und y_d^F einnehmen. Der Definitionsbereich ist stets $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$.

$$y_d^1 = \begin{cases} 1, & x_1 \leq 0.5 \text{ und } x_2 \leq 0.5, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$y_d^2 = \cos^2(\pi x_1) + x_2,$$

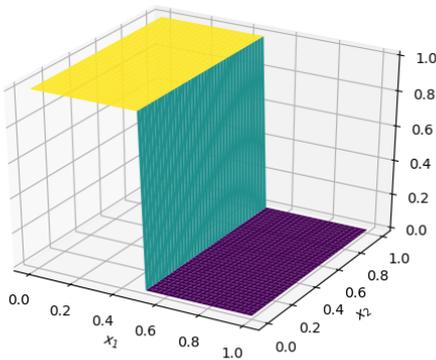


Abbildung 6.2: Zielzustand y_d^1

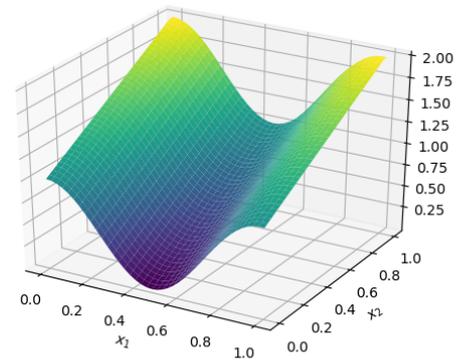


Abbildung 6.3: Zielzustand y_d^2

$$y_d^3 = (4\pi + 1) \cdot \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2), \quad y_d^4 = \begin{cases} x_1 \cdot \sin(2\pi x_1) + 3\cos(2\pi x_2) + 2x_2, & x_1 \leq 0.5, \\ x_1 \cdot \sin(2\pi x_1) + 3\cos(2\pi x_2) + 2x_2 - 2, & \text{sonst.} \end{cases}$$

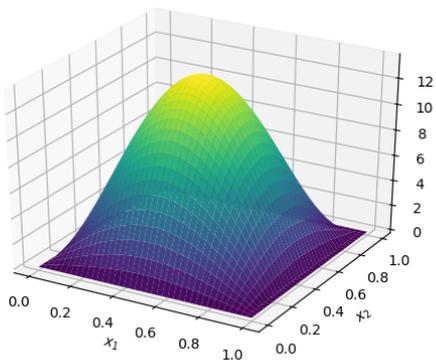


Abbildung 6.4: Zielzustand y_d^3

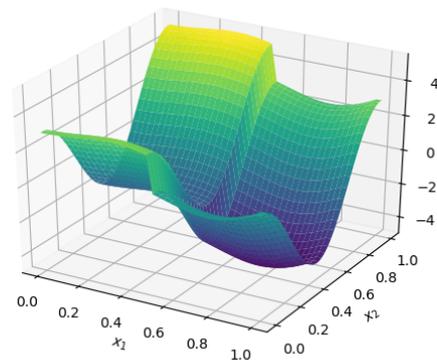


Abbildung 6.5: Zielzustand y_d^4

Es folgen numerische Resultate zur Lösung des diskreten Optimierungsproblems

$$\min_{u_h^L, u_h^F, p_h^F, \mu_h^F} F_h^L(y_h^L, u_h^L) := \frac{1}{2}(y_h^L)^T \mathbb{M}_h y_h^L + \frac{1}{2}(y_h^F)^T \mathbb{M}_h y_h^F - (\mathbf{a}_h^L)^T y_h^L + \frac{\alpha^L}{2}(u_h^L)^T \mathbb{D}_h u_h^L$$

bei

$$\mathbb{K}_h y_h^L = \mathbb{B}_h u_h^L, \quad \mathbb{K}_h y_h^F = \mathbb{B}_h u_h^F, \quad \mathbb{K}_h p_h^F = \mathbb{M}_h y_h^L + \mathbb{M}_h y_h^F - \mathbf{a}_h^F,$$

$$p_h^F + \alpha^F u_h^F + (-\chi_{A^-(\bar{u}^F)} + \chi_{A^+(\bar{u}^F)}) \cdot \mu_h^F = 0,$$

$$\mathbf{u}_a^F \leq u_h^F \leq \mathbf{u}_b^F, \quad (\text{KKT}_{mod,disk}^{red})$$

$$\mu_h^F \geq 0,$$

$$\left(\mu_h^F, \chi_{A^-(\bar{u}^F)}(\mathbf{u}_a^F - u_h^F) + \chi_{A^+(\bar{u}^F)}(u_h^F - \mathbf{u}_b^F) \right)_{L^2(\Omega)} = 0,$$

mit

$$\mathbf{a}_i^L = \int_{\Omega} \Phi_i \cdot y_d^L dx \quad \text{und} \quad \mathbf{a}_i^F = \int_{\Omega} \Phi_i \cdot y_d^F dx$$

anhand von vier Testproblemen mit den Zielzustandspaaren

$$\left(y_d^L, y_d^F \right)^1 = \left(y_d^1, y_d^2 \right), \quad \left(y_d^L, y_d^F \right)^2 = \left(y_d^2, y_d^1 \right), \quad \left(y_d^L, y_d^F \right)^3 = \left(y_d^3, y_d^4 \right) \quad \text{und} \quad \left(y_d^L, y_d^F \right)^4 = \left(y_d^4, y_d^3 \right).$$

Für jedes Testproblem wird einer der beiden Tikhonov-Parameter zuerst bei 10^{-1} und dann bei 10^{-2} fixiert. Das jeweils andere α rangiert zwischen 10^{-1} und 10^{-4} bzw. zwischen 10^{-2} und 10^{-5} .

Die Ergebnisse werden für die zu Beginn des Abschnitts präsentierten Gitterweiten angegeben. Neben den gewählten Tikhonov-Parametern und der Feinheit des Gitters l (grid level) werden die Defekte der approximierten Zielzustände in der L^2 -Norm sowie die benötigte Anzahl an Iterationen ausgewiesen.

Testproblem 1

Für diesen Test wählen wir $(y_d^L, y_d^F)^1 = (y_d^1, y_d^2)$, also

- $y_d^L = \begin{cases} 1, & x_1 \leq 0.5 \text{ und } x_2 \leq 0.5, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$
- $y_d^F = \cos^2(\pi x_1) + x_2$,

und die Steuerschranken

- $u_a^F = -1, \quad u_b^F = 1.$

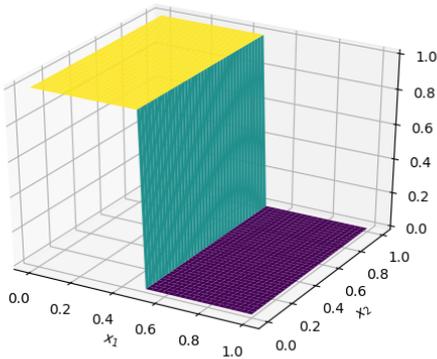


Abbildung 6.6: Zielzustand Leader Test 1

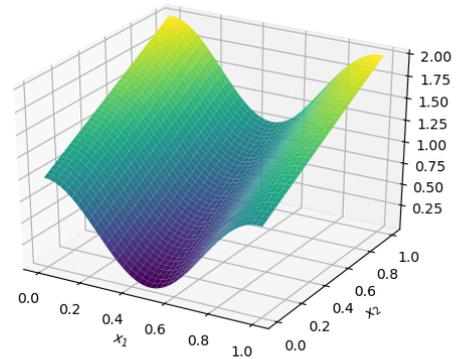


Abbildung 6.7: Zielzustand Follower Test 1

Feinheit	α^L	α^F	$\ y_h - y_d^L\ _{L^2(\Omega)}$	$\ y_h - y_d^F\ _{L^2(\Omega)}$	#IT
1	10^{-1}	10^{-1}	5.51094197e-01	2,953765204	3
2	10^{-1}	10^{-1}	2.35552318e-02	4,197300354	4
3	10^{-2}	10^{-1}	3.64036486e-03	5,263414645	5
4	10^{-2}	10^{-1}	2.82575266e-03	6,347678062	5
5	10^{-3}	10^{-1}	5.35261101e-04	7,509303147	6
6	10^{-3}	10^{-1}	2.98272390e-04	8,395400919	7
7	10^{-4}	10^{-1}	3.68794360e-05	8,889050493	8
8	10^{-4}	10^{-1}	2.79558016e-05	9,334391922	8
1	10^{-2}	10^{-2}	1.67294976e-01	2,265598635	4
2	10^{-2}	10^{-2}	9.21999413e-02	3,233009252	4
3	10^{-2}	10^{-3}	2.52214828e-03	4,180280963	6
4	10^{-2}	10^{-3}	1.09997468e-03	5,024697718	8
5	10^{-2}	10^{-4}	8.03278201e-04	5,848748143	9
6	10^{-2}	10^{-4}	5.11174129e-04	6,497959187	11
7	10^{-2}	10^{-5}	1.16095691e-04	6,880688983	12
8	10^{-2}	10^{-5}	6.40311548e-05	7,272888255	12

Feinheit	α^L	α^F	$\ y_h - y_d^F\ _{L^2(\Omega)}$	$\ y_h - y_d^L\ _{L^2(\Omega)}$	#IT
1	10^{-1}	10^{-2}	6.12624245e-02	3,236644118	3
2	10^{-1}	10^{-2}	5.07539330e-02	4,541011698	3
3	10^{-1}	10^{-2}	1.43292417e-02	5,807953961	4
4	10^{-1}	10^{-3}	9.75352239e-03	7,341253807	4
5	10^{-1}	10^{-3}	5.60163949e-03	8,736092030	5
6	10^{-1}	10^{-3}	2.10975489e-03	10,20375549	8
7	10^{-1}	10^{-4}	4.41479926e-04	10,76190092	9
8	10^{-1}	10^{-4}	2.46694486e-04	11,34196738	10
1	10^{-2}	10^{-3}	4.70798675e-01	2,695522489	3
2	10^{-2}	10^{-3}	4.10654355e-01	3,897725519	4
3	10^{-2}	10^{-3}	1.33303840e-01	5,043656822	4
4	10^{-2}	10^{-4}	1.18162040e-01	6,128043038	6
5	10^{-2}	10^{-4}	5.44094313e-02	6,875664289	7
6	10^{-2}	10^{-4}	4.60366187e-02	7,673241347	7
7	10^{-2}	10^{-5}	1.51883231e-02	8,102942862	9
8	10^{-2}	10^{-5}	1.12292587e-02	8,541312071	11

Testproblem 2

Für diesen Test wählen wir $(y_d^L, y_d^F)^2 = (y_d^2, y_d^1)$, also

- $y_d^L = \cos^2(\pi x_1) + x_2$,
- $y_d^F = \begin{cases} 1, & x_1 \leq 0.5 \text{ und } x_2 \leq 0.5, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$

und die Steuerschranken

- $u_a^F = -1, \quad u_b^F = 1.$

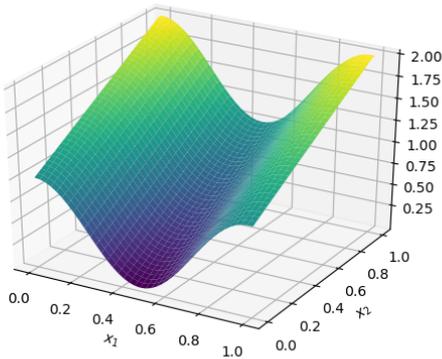


Abbildung 6.8: Zielzustand Leader Test 2

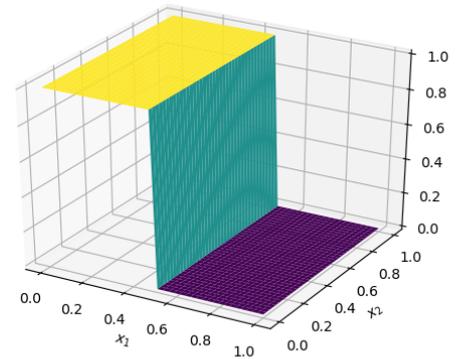


Abbildung 6.9: Zielzustand Follower Test 2

Feinheit	α^L	α^F	$\ y_h - y_d^L\ _{L^2(\Omega)}$	$\ y_h - y_d^F\ _{L^2(\Omega)}$	#IT
1	10^{-1}	10^{-1}	9.10825307e-01	3,365998522	4
2	10^{-1}	10^{-1}	5.97683731e-02	4,776351903	4
3	10^{-2}	10^{-1}	2.23154972e-02	6,123283139	5
4	10^{-2}	10^{-1}	1.76472696e-02	7,752076454	5
5	10^{-3}	10^{-1}	3.21660160e-03	9,193962675	7
6	10^{-3}	10^{-1}	2.54112620e-03	10,29723820	7
7	10^{-4}	10^{-1}	5.39505601e-04	10,90374553	8
8	10^{-4}	10^{-1}	3.53070664e-04	11,47401142	9
1	10^{-2}	10^{-2}	4.05355944e-01	2,778541212	3
2	10^{-2}	10^{-2}	3.57024914e-01	4,098348288	4
3	10^{-3}	10^{-2}	1.49511636e-01	5,209000674	5
4	10^{-3}	10^{-2}	1.31042313e-01	6,328935819	6
5	10^{-4}	10^{-2}	4.57412054e-02	7,582065111	8
6	10^{-4}	10^{-2}	3.91848291e-02	8,416092273	10
7	10^{-5}	10^{-2}	1.26492436e-02	8,916008154	12
8	10^{-5}	10^{-2}	9.50528558e-03	9,379640578	12

Feinheit	α^L	α^F	$\ y_h - y_d^F\ _{L^2(\Omega)}$	$\ y_h - y_d^L\ _{L^2(\Omega)}$	#IT
1	10^{-1}	10^{-2}	2.71856917e-02	3,632482363	4
2	10^{-1}	10^{-2}	2.16910081e-02	5,419663686	5
3	10^{-1}	10^{-2}	1.04984638e-02	6,839615571	5
4	10^{-1}	10^{-3}	5.87482905e-03	8,529000617	6
5	10^{-1}	10^{-3}	1.69155893e-03	7,514537989	6
6	10^{-1}	10^{-3}	4.68184205e-04	8,461369775	7
7	10^{-1}	10^{-4}	3.42505111e-04	8,927591250	8
8	10^{-1}	10^{-4}	2.50149084e-04	9,390040477	10
1	10^{-2}	10^{-3}	9.87815288e-01	2,159855440	4
2	10^{-2}	10^{-3}	3.22440378e-01	3,200905762	4
3	10^{-2}	10^{-3}	5.23679549e-02	4,045944883	5
4	10^{-2}	10^{-4}	2.86672310e-02	5,053385159	7
5	10^{-2}	10^{-4}	1.65714611e-02	6,059008806	7
6	10^{-2}	10^{-4}	8.76347777e-03	7,149630391	8
7	10^{-2}	10^{-5}	3.34551022e-03	7,551439619	11
8	10^{-2}	10^{-5}	4.75837806e-04	7,962993078	12

Testproblem 3

Für diesen Test wählen wir $(y_d^L, y_d^F)^3 = (y_d^3, y_d^4)$, also

- $y_d^L = (4\pi + 1) \cdot \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2)$,
- $y_d^F = \begin{cases} x_1 \cdot \sin(2\pi x_1) + 3\cos(2\pi x_2) + 2x_2, & x_1 \leq 0.5, \\ x_1 \cdot \sin(2\pi x_1) + 3\cos(2\pi x_2) + 2x_2 - 2, & \text{sonst,} \end{cases}$

und die Steuerschranken

- $u_a^F = -2, \quad u_b^F = 5.$

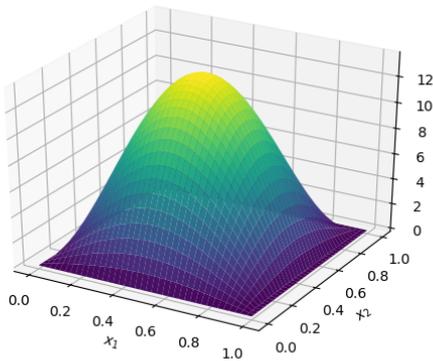


Abbildung 6.10: Zielzustand Leader Test 3

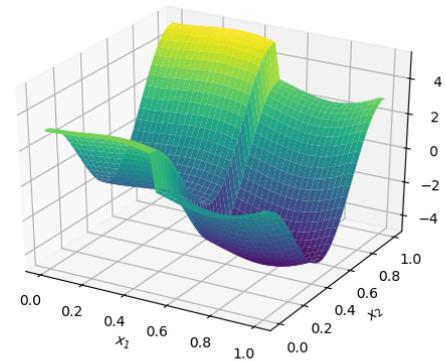


Abbildung 6.11: Zielzustand Follower Test 3

Feinheit	α^L	α^F	$\ y_h - y_d^L\ _{L^2(\Omega)}$	$\ y_h - y_d^F\ _{L^2(\Omega)}$	#IT
1	10^{-1}	10^{-1}	1.12175420e-00	20,64489536	3
2	10^{-1}	10^{-1}	8.99556901e-01	23,10163791	4
3	10^{-2}	10^{-1}	2.82494931e-01	25,94313937	5
4	10^{-2}	10^{-1}	8.22551378e-02	28,66716910	5
5	10^{-3}	10^{-1}	4.03840788e-02	30,92040849	7
6	10^{-3}	10^{-1}	9.20011995e-03	33,18996647	8
7	10^{-4}	10^{-1}	5.30871112e-03	35,11830352	10
8	10^{-4}	10^{-1}	2.91151498e-03	37,08844035	12
1	10^{-2}	10^{-2}	1.68754774e-00	16,34877790	3
2	10^{-2}	10^{-2}	8.43256011e-01	20,28883337	5
3	10^{-3}	10^{-2}	5.54983218e-01	23,53504671	6
4	10^{-3}	10^{-2}	4.69066108e-01	26,50046260	8
5	10^{-4}	10^{-2}	2.97398030e-01	28,54099822	9
6	10^{-4}	10^{-2}	6.08544439e-02	30,62163699	11
7	10^{-5}	10^{-2}	2.855085207e-02	32,44668655	11
8	10^{-5}	10^{-2}	1.15516696e-02	34,22800965	12

Feinheit	α^L	α^F	$\ y_h - y_d^F\ _{L^2(\Omega)}$	$\ y_h - y_d^L\ _{L^2(\Omega)}$	#IT
1	10^{-1}	10^{-2}	1.00770237e-00	17,66398851	4
2	10^{-1}	10^{-2}	6.83244864e-01	20,69822524	4
3	10^{-1}	10^{-2}	2.38662915e-01	22,92196444	4
4	10^{-1}	10^{-3}	1.91671559e-01	24,81920481	5
5	10^{-1}	10^{-3}	4.48679543e-02	26,77247623	5
6	10^{-1}	10^{-3}	3.49650466e-02	28,80986167	5
7	10^{-1}	10^{-4}	6.93020620e-03	30,51252449	8
8	10^{-1}	10^{-4}	5.68795651e-03	32,28530216	9
1	10^{-2}	10^{-3}	1.43664691e-01	16,27855324	5
2	10^{-2}	10^{-3}	1.06814349e-01	18,09018102	5
3	10^{-2}	10^{-3}	1.92854168e-02	20,05517759	6
4	10^{-2}	10^{-4}	1.07409443e-02	21,57190456	8
5	10^{-2}	10^{-4}	1.85924833e-03	23,25451311	8
6	10^{-2}	10^{-4}	1.32951648e-03	24,95906892	9
7	10^{-2}	10^{-5}	1.50642293e-04	26,42915808	11
8	10^{-2}	10^{-5}	1.18021277e-04	27,76118765	12

Testproblem 4

Für diesen Test wählen wir $(y_d^L, y_d^F)^4 = (y_d^4, y_d^3)$, also

- $y_d^L = \begin{cases} x_1 \cdot \sin(2\pi x_1) + 3\cos(2\pi x_2) + 2x_2, & x_1 \leq 0.5, \\ x_1 \cdot \sin(2\pi x_1) + 3\cos(2\pi x_2) + 2x_2 - 2, & \text{sonst,} \end{cases}$
- $y_d^F = (4\pi + 1) \cdot \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2)$

und die Steuerschranken

- $u_a^F = 5, \quad u_b^F = 15.$

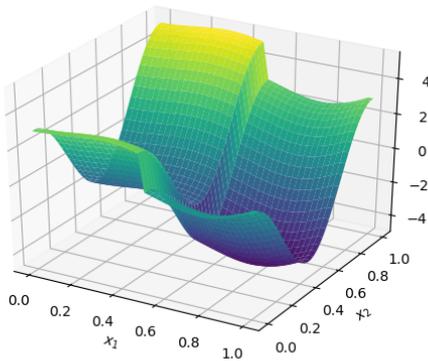


Abbildung 6.12: Zielzustand Leader Test 4

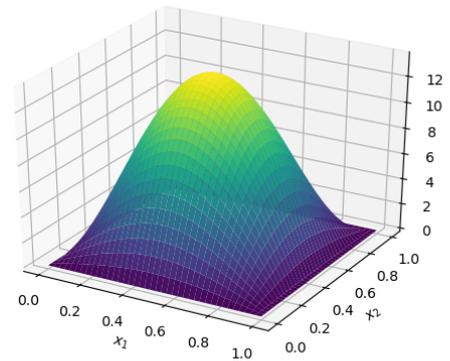


Abbildung 6.13: Zielzustand Follower Test 4

Feinheit	α^L	α^F	$\ y_h - y_d^L\ _{L^2(\Omega)}$	$\ y_h - y_d^F\ _{L^2(\Omega)}$	#IT
1	10^{-1}	10^{-1}	2.71066473e-01	19,21548966	4
2	10^{-1}	10^{-1}	1.55623935e-01	23,50054385	4
3	10^{-2}	10^{-1}	2.30166421e-02	27,33113250	4
4	10^{-2}	10^{-1}	1.80101727e-02	30,39221934	5
5	10^{-3}	10^{-1}	2.39166361e-03	32,74761634	6
6	10^{-3}	10^{-1}	1.78528658e-03	35,22333614	6
7	10^{-4}	10^{-1}	3.88796381e-04	37,27333430	8
8	10^{-4}	10^{-1}	1.81549211e-04	39,26373035	10
1	10^{-2}	10^{-2}	8.37262230e-01	16,37452169	3
2	10^{-2}	10^{-2}	5.16028450e-01	21,17225655	4
3	10^{-3}	10^{-2}	6.70392496e-02	24,79271241	6
4	10^{-3}	10^{-2}	4.75766335e-02	28,73475369	7
5	10^{-4}	10^{-2}	2.35358219e-02	31,02778703	9
6	10^{-4}	10^{-2}	1.52246227e-02	33,42933775	10
7	10^{-5}	10^{-2}	4.04547884e-03	35,16766331	11
8	10^{-5}	10^{-2}	2.75086095e-03	36,97528121	11

Feinheit	α^L	α^F	$\ y_h - y_d^F\ _{L^2(\Omega)}$	$\ y_h - y_d^L\ _{L^2(\Omega)}$	#IT
1	10^{-1}	10^{-2}	1.01083398e-00	18,74411150	3
2	10^{-1}	10^{-2}	5.09647852e-01	23,39265115	3
3	10^{-1}	10^{-2}	9.63938492e-02	27,67350631	4
4	10^{-1}	10^{-3}	7.17715851e-02	30,63457149	6
5	10^{-1}	10^{-3}	2.35343047e-02	33,08227375	7
6	10^{-1}	10^{-3}	1.84557139e-02	35,65938288	9
7	10^{-1}	10^{-4}	3.56690224e-03	37,54576423	10
8	10^{-1}	10^{-4}	2.27253060e-03	39,46510370	10
1	10^{-2}	10^{-3}	2.58944929e-00	16,38857964	5
2	10^{-2}	10^{-3}	1.81169755e-00	20,04323290	6
3	10^{-2}	10^{-3}	1.27875790e-00	24,01179301	6
4	10^{-2}	10^{-4}	9.25340835e-01	27,68559734	8
5	10^{-2}	10^{-4}	3.16891741e-01	29,89767657	9
6	10^{-2}	10^{-4}	2.30324192e-01	32,07422743	11
7	10^{-2}	10^{-5}	7.98151290e-02	33,97943654	11
8	10^{-2}	10^{-5}	4.78499051e-02	35,70898986	13

Beobachtungen, Erkenntnisse und weiterführende Ideen

- Wie bereits zu Beginn des Abschnitts angedeutet, hängt die Konvergenz des Verfahrens gegen einen der angepeilten Zielzustände der beiden Akteure in erster Linie von der Wahl der Tikhonov-Parameter α^L und α^F bzw. von ihrem Verhältnis zueinander ab. Wählte man sie gleich groß oder relativ nah beieinander, so dass

$$0.1 < \frac{\alpha^L}{\alpha^F} < 10$$

galt, so wurde der Zielzustand y_d^L approximativ erreicht, was durch einen Blick in die ersten beiden Zeilen der jeweils ersten Tabelle deutlich wird. Diese Eigenschaft kann mit dem Fehlen von Steuerschranken auf der Leader-Ebene begründet werden.

- Bei allen anderen gewählten Konstellationen von α^L und α^F spielte das Fehlen der Bedingung $u^L \in U_{\text{ad}}^L$ offenbar keine entscheidende Rolle. Grundsätzlich waren zwei Faktoren für die Approximation des Zielzustands und ihre Genauigkeit ausschlaggebend: So bald sich die Größe der beiden Tikhonov-Parameter um mehr als eine Zehnerpotenz unterschied, war der kleinere Parameter dafür maßgebend, welcher Zielzustand approximativ berechnet wurde. Zudem war erkennbar, dass sich bei zunehmender Feinheit des Gitters mit der Anzahl der benötigten Durchläufe auch die Güte des approximierten y_d erhöhte.
- Weiter ließ sich durch einen Plot nach jeder Iteration beobachten, dass in den meisten Fällen nach etwa einem Drittel der insgesamt benötigten Iterationsdurchläufe der vom Algorithmus angepeilte Zustand bereits gut erkennbar war, was für die Funktionalität der Implementierung spricht. Insgesamt ist die zuverlässige Konvergenz der primal-dualen Aktive-Mengen-Strategie gut erkennbar.
- Die Modifikation der Konstruktionsweise der aktiven Mengen des Followers in jedem Schritt durch das Ersetzen von τ^F durch $c_{\tau^F} \cdot \tau^F$ mit

$$c_{\tau^F} = \frac{1}{(-1)^k \cdot \|\tau^F\|_{L^2(\Omega)}}$$

hat dazu geführt, dass der Konvergenzprozess im Vergleich zur ursprünglich angedachten Verwendung von τ^F beschleunigt wurde. Hierbei bewirkt der Faktor $(-1)^k$ das Springen von $\mathcal{A}_a^{F,(k)}$ zu $\mathcal{A}_b^{F,(k)}$ ohne vorher inaktiv zu werden.

- Als alternative Abbruchkriterien anstelle der Gleichheit der aktiven Mengen in zwei aufeinanderfolgenden Iterationsschritten wäre eine Kriteriumsformulierung über die L^2 -Norm des Defekts bezüglich der Zielzustände mit Konstanten $c_L, c_F > 0$ denkbar, etwa

$$\|y_h - y_d^L\|_{L^2(\Omega)} \leq c_L \quad \text{und} \quad \|y_h - y_d^F\|_{L^2(\Omega)} \leq c_F.$$

- Mit zusätzlich vorhandenen Kenntnissen über die gesuchten Steuerungen könnte die Anzahl der benötigten Iterationen eventuell reduziert werden, indem man die initialen Steuerungen in der Nähe der gesuchten Steuerungen wählt.

- Anstelle von stückweise konstanten Finiten Elementen können die Steuerungen ebenso wie die Zustände über den stückweise linearen Ansatz

$$u_h^L(x) = \sum_{i=1}^l u_h^{L^i} \Phi_i(x) \quad \text{und} \quad u_h^F(x) = \sum_{i=1}^l u_h^{F^i} \Phi_i(x)$$

diskretisiert werden. In diesem Fall ist \mathbb{D}_h keine Diagonalmatrix mehr und die Diskussion der Variationsungleichung in Abschnitt $\text{KKT}_{mod,disk}^{red}$ ist nicht korrekt. Dann müsste die in Abschnitt 6.2 skizzierte beschriebene Aktive-Mengen-Strategie für den stetigen Fall punktweise in den Gitterpunkten der Triangulierung verwendet werden.

Da im Zusammenhang mit der Finite-Elemente-Methode stets der Fehler zwischen der exakten optimalen Steuerung bzw. des exakten optimalen Zustands mit ihren ermittelten diskreten Pendanten hinsichtlich der Feinheit des gewählten Finite-Elemente-Gitters von Interesse ist, sei abschließend auf [5], [18], [49] und [64] verwiesen.

7 Zusammenfassung und Fazit

In dieser Arbeit wurde ein sogenanntes Bilevel-Optimalsteuerproblem behandelt. Zunächst fand eine Einordnung in den aktuellen wissenschaftlichen Kontext auf dem Gebiet der optimalen Steuerung und die Bereitstellung der benötigten mathematischen Grundlagen in Kapitel 2 statt.

Nachdem das für diese Arbeit zentrale Problem in seinen wichtigsten Facetten beleuchtet wurde, konnte in Kapitel 3 nachgewiesen werden, dass für das vorliegende Problem stets eine Lösung existiert und diese zudem eindeutig ist. Außerdem wurden notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen hergeleitet.

Nach einer kurzen Skizzierung der Lösungs- und Eindeigkeitstheorie für Bilevel-Optimalsteuerprobleme in einem allgemeineren Setting wurde in Kapitel 4 das mathematische Rüstzeug bereitgestellt, um zu überprüfen, ob das betrachtete zweistufige Optimalsteuerproblem in ein einstufiges Problem überführt werden kann. Weiterhin wurde die Durchführung einer solchen Transformation in der Theorie vorgestellt und schließlich an dem konkreten Ausgangsproblem durchgeführt. Im Zusammenhang mit dieser Umformulierung traten Optimierungsprobleme unter Komplementaritätsbedingungen - sogenannten MPCCs - in Banachräumen in den Vordergrund, da nach der One-Level-Transformation ein Problem dieses Typs das Resultat war. Zunächst rückten wiederum die Fragen nach Existenz und Eindeigkeit einer Lösung in den Fokus. Anschließend konnte bewiesen werden, dass eine eindeutige Lösung des nun betrachteten einstufigen MPCCs auch stets das ursprünglich betrachtet Bilevel-Optimalsteuerproblem löst. Die Gültigkeit der Umkehrung dieser Beziehung wurde ebenfalls gezeigt. Schließlich wurden auch für dieses neue einstufige Optimierungsproblem im Funktionenraum notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen hergeleitet und seine Struktur als Vorbereitung auf das nächste Kapitel etwas modifiziert.

In den ersten beiden Teilen von Kapitel 5 wurden zunächst die wichtigsten Regularitätsbedingungen im Rahmen der MPCC-Theorie für endlichdimensionale Optimierungsprobleme sowie für Optimierungsprobleme im reflexiven Banachraum vorgestellt. Anschließend wurde für eine Lösung des einstufigen und im Vergleich zum Ausgangsproblem um die Steuerschranken auf der Leader-Ebene reduzierten unendlichdimensionalen MPCCs (KKT_{mod}^{red}) starke Stationarität nachgewiesen werden.

In Kapitel 6 wurde ausgehend von den Bedingungen für schwache Stationarität einer Lösung von (KKT_{mod}^{red}) eine implementierbare primal-duale Aktive-Mengen-Strategie hergeleitet und ihre Funktionsweise beschrieben. Im Anschluss wurden das Problem (KKT_{mod}^{red}) und das zugehörige Optimalitätssystem mithilfe der Finite-Elemente-Methode diskretisiert. Schließlich folgte im letzten Teil von Kapitel 6 die Präsentation numerischer Resultate anhand einiger Testbeispiele, wodurch die Funktionalität der in Python durchgeführten Implementierung untermauert wurde. Hierbei war die zuverlässige Konvergenz der primal-dualen Aktive-Mengen-Strategie gut erkennbar. Nachdem die Rollen der wichtigsten Parameter und Komponenten der Implementierung erläutert wurden folgten abschließende Beobachtungen sowie Gedanken zur Verbesserung des Verfahrens.

Sowohl die Analysis als auch die numerische Behandlung des in dieser Arbeit betrachteten Problems werfen einige weiterführende Gedanken auf.

So kann etwa die Frage gestellt werden, wie sich die Dynamik zwischen den beiden Problemebenen verändern würde, wenn Leader und Follower nicht mehr auf einer Gemeinsamen Menge Ω sondern

auf separaten Untermengen $\Omega_L \subset \Omega$ und $\Omega_F \subset \Omega$ mit $\Omega_L \cap \Omega_F = \emptyset$ agieren. Auch der Ausschluss der Disjunktheit kann hier in Betracht gezogen werden. Folglich bliebe die Frage offen, ob an den entsprechenden Stellen des resultierenden einstufigen Problems die Regularität erhalten bleibt, um weiterhin starke Stationarität für eine Lösung garantieren zu können oder sich diese gegebenenfalls abschwächt.

In eine ähnliche Richtung geht die Idee, die Steuerschranken u_a^L, u_b^L, u_a^F und u_b^F sowie die gesuchten Steuerungen u^L und u^F dem Raum $H_0^1(\Omega)$ entstammen zu lassen. Auch hier könnte die benötigte Regularität für die in Kapitel 4 durchgeführte One-Level-Transformation sowie zum Nachweis starker Stationarität verloren gehen. Erste Erkenntnisse zu diesem Ansatz finden sich bereits in [31]. In Verbindung damit ist ebenfalls offen, ob neben schwacher und starker Stationarität auch die Stationaritätskonzepte nach Abadie, Guignard und Mordukhovic auf die MPCC-Theorie im Funktionenraum übertragen werden können.

Auch für die Herleitung eines implementierbaren Verfahrens zur Lösung von $(\text{KKT}_{mod,disk}^{red})$ gibt es durchaus Alternativen. So haben etwa die Autoren O. Ebel, S. Schmidt und A. Walther in [32] mit der sogenannten Absolutwert-Linearisierung eine Technik für nichtdifferenzierbare Optimierungsprobleme entwickelt, die für eine Implementierung genutzt werden kann. Des Weiteren ist eine numerische Umsetzung mithilfe eines halbglaten Newton-Verfahrens denkbar, wie sie beispielsweise in [31] verwendet wird.

Weiterhin wurde bereits am Ende von Abschnitt (6.4) darauf hingewiesen, dass Steuerungen und Zustände alternativ komplett mit stückweise konstanten Finiten Elementen diskretisiert werden können.

Bei der Zustandsgleichung

$$\begin{aligned} -\Delta y &= u^L + u^F && \text{in } \Omega \\ y &= 0 && \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

auf der Follower-Ebene von (BO) handelt es sich um eine Differentialgleichung linearen Typs. In diesem Zusammenhang sei noch die Frage aufgeworfen, was sich mit Blick auf Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung ändert, wenn man dort nichtlineare Komponenten zulässt. Ebenso die Transformations- und Stationaritätstheorie in den Kapiteln 4 und 5 müssten vermutlich neu beleuchtet werden. Auch diese Fragen können Gegenstand zukünftiger Forschung auf dem Gebiet der Bilevel-Optimalsteuerung sein.

Abbildungsverzeichnis

6.1	32×32 -mesh und verwendete Gitterweiten	104
6.2	Zielzustand y_d^1	106
6.3	Zielzustand y_d^2	106
6.4	Zielzustand y_d^3	106
6.5	Zielzustand y_d^4	106
6.6	Zielzustand Leader Test 1	108
6.7	Zielzustand Follower Test 1	108
6.8	Zielzustand Leader Test 2	110
6.9	Zielzustand Follower Test 2	110
6.10	Zielzustand Leader Test 3	112
6.11	Zielzustand Follower Test 3	112
6.12	Zielzustand Leader Test 4	114
6.13	Zielzustand Follower Test 4	114

Literaturverzeichnis

- [1] S. ALBRECHT, M. BUSS, C. PASSENBERG, M. SOBOTKA, A. PEER, M. ULBRICH: *Optimization Criteria for Human Trajectory Formation in Dynamic Virtual Environments*. EuroHaptics 2010: Haptics: Generating and Perceiving Tangible Sensations, International Conference, EuroHaptics, Amsterdam, The Netherlands, July 8-10, 2010. Proceedings, Part II. doi: 10.1007/978-3-642-14075-4_37
- [2] S. ALBRECHT, M. LEIBOLD, M. ULBRICH: *A Bilevel Optimization Approach to Obtain Optimal Cost Functions for Human Arm-Movements*. Numerical Algebra, Control and Optimization, Volume 2, Issue 1, pp. 105-127, 2012. doi: 10.3934/naco.2012.2.105
- [3] S. ALBRECHT, M. ULBRICH: *Mathematical Programs with Complementarity Constraints in the Context of Inverse Optimal Control for Locomotion*. Optimization Methods and Software, Volume 32, 2017 - Issue 4: The 17th British-French-German Conference on Optimization, 15-17 June 2015, London, United Kingdom. doi: 10.1080/10556788.2016.1225212
- [4] G.B. ALLENDE, G. STILL: *Solving Bilevel Programs with the KKT-Approach*. Mathematical Programming, Volume 138, Issue 1-2, pp. 309-332, 2013. doi: 10.1007/s10107-012-0535-x
- [5] N. ARADA, E. CASAS, F. TRÖLTZSCH: *Error Estimates for a Semilinear Elliptic Control Problem*. Computational Optimization and Applications, Volume 23, Issue 2, pp. 201-229, November 2002. doi: 10.1023/A:1020576801966
- [6] J.-P. AUBIN, H. FRANKOWSKA: *Set-Valued Analysis*. Birkhäuser. Boston, Basel, Berlin, Reprint of the 1990 Edition.
- [7] H.W. ALT: *Lineare Funktionalanalysis, 6., überarbeitete Auflage*. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, 1985.
- [8] R.C. BARNARD, G. HOLLER, K. KUNISCH: *A Bilevel Approach for Parameter Learning in Inverse Problems*. Inverse Problems, Volume 34, Issue 11, 2018. URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6420/aade77/pdf>
- [9] F. BENITA, S. DEMPE, P. MEHLITZ: *Bilevel Optimal Control Problems with Pure State Constraints and Finite-dimensional Lower Level*. SIAM Journal on Optimization, Volume 26, Issue 1, pp. 564-588, 2016. doi: 10.1137/141000889
- [10] F. BENITA, V.V. KALASHNIKOV, P. MEHLITZ: *The Natural Gas Cash-Out Problem: A Bilevel Optimal Control Approach*. Mathematical Problems in Engineering, New York, 2015. doi: 10.1155/2015/286083
- [11] F. BENITA, P. MEHLITZ: *Bilevel Optimal Control With Final-State-Dependent Finite-Dimensional Lower Level*. SIAM Journal on Optimization, Volume 26, Issue 1, pp. 718-752, 2016. doi: 10.1137/15M1015984
- [12] M. BERGOUNIOUX, K. ITO, K. KUNISCH: *Primal-Dual Strategy for Constrained Optimal Control Problems*. SIAM Journal on Control and Optimization, Volume 37, Issue 4, pp. 1176-1194, 1999. URL: <https://doi.org/10.1137/S0363012997328609>
- [13] J.F. BONNANS, A. SHAPIRO: *Perturbation Analysis of Optimization Problems*. Springer-Verlag. New York, 2000.

- [14] E. BÖRGENS, C. KANZOW, P. MEHLITZ, G. WACHSMUTH: *New Constraint Qualifications for Optimization Problems in Banach Spaces Based on Asymptotic KKT Conditions*. SIAM Journal on Optimization, Volume 30, Issue 4, pp. 2956-2982, 2020. doi: 10.1137/19M1306804
- [15] S.C. BRENNER, L.R. SCOTT: *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Texts in Applied Mathematics 15, Third Edition, Springer, 2008
- [16] C. BÜSKENS, M. KNAUER: *Hybrid Solution Methods for Bilevel Optimal Control Problems with Time Dependent Coupling*. Recent Advances in Optimization and its Applications in Engineering, M. Diehl, F. Glineur, W. Michiels (Hrsg.), S. 237-246, Springer Verlag, 2010. doi: 10.1007/978-3-642-12598-0_20
- [17] D.A. CARLSON: *Existence of Optimal Controls for a Bi-Level Optimal Control Problem*. Advances in Dynamic Games, pp.71-84, November 2013. doi: 10.1007/978-3-319-02690-9_4
- [18] E. CASAS, M. MATEOS, F. TRÖLTZSCH: *Error Estimates for the Numerical Approximation of Boundary Semilinear Elliptic Control Problems*. Computational Optimization and Applications, Volume 31, Issue 2, pp.193-219, Juni 2005. doi: 10.1007/s10589-005-2180-2
- [19] P.G. CIARLET: *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. Classics in Applied Mathematics 40, 2002.
- [20] F.H. CLARKE: *Optimization and Nonsmooth Analysis*. Library of Congress Cataloging-in-Publication Data, Wiley, New York, 1983.
- [21] S. DEMPE: *A Necessary and a Sufficient Optimality Condition for Bilevel Programming Problems*. Optimization, Vol. 25, pp. 341-354, 1992. doi: 10.1080/02331939208843831
- [22] S. DEMPE: *Bilevel Optimization: Theory, Algorithms and Applications*. Preprint, TU Bergakademie Freiberg (2018). URL: https://tu-freiberg.de/sites/default/files/media/fakultaet-fuer-mathematik-und-informatik-fakultaet-1-9277/prep/preprint_2018_11_dempe.pdf
- [23] S. DEMPE: *Foundations of Bilevel Programming*. Nonconvex Optimization and Its Applications, Volume 61. Kluwer Academic Publishers. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow, 2002.
- [24] S. DEMPE, J. DUTTA: *Is Bilevel Programming a Special Case of a Mathematical Program with Complementarity Constraints?*. Mathematical Programming, Volume 131, Issue 1, pp. 37-48, 2012. doi: 10.1007/s10107-010-0342-1
- [25] S. DEMPE, S. FRANKE: *Solutions of Bilevel Optimization Problems Using the KKT Approach*. Preprint, TU Bergakademie Freiberg (2016). URL: https://tu-freiberg.de/sites/default/files/media/fakultaet-fuer-mathematik-und-informatik-fakultaet-1-9277/prep/2016-11_fertig.pdf
- [26] S. DEMPE, F. HARDER, P. MEHLITZ, G. WACHSMUTH: *Solving Inverse Optimal Control Problems via Value Functions to Global Optimality*. Journal of Global Optimization, Volume 74, Issue 2, pp 297–325, 2019. doi: 10.1007/s10898-019-00758-1
- [27] S. DEMPE, M. PILECKA: *Necessary Optimality Conditions for Optimistic Bilevel Programming Problems Using Set-Valued Programming*. Journal of Global Optimization, Volume 61, Issue 4, pp. 769-788, 2015. doi: 10.1007/s10898-014-0200-4
- [28] S. DEMPE, A.B. ZEMKOHO: *KKT-Reformulation and Necessary Conditions for Optimality in Nonsmooth Bilevel Optimization*. SIAM Journal on Optimization, Volume 24, Issue 4, pp. 1639–1669, 2014. doi: 10.1007/s10107-011-0508-5

- [29] S. DEMPE, A.B. ZEMKOHO: *The Bilevel Programming Problem: Reformulations, Constraint Qualifications and Optimality Conditions*. Mathematical Programming, Volume 138, pp. 447–473, 2013. doi: 10.1007/s10107-011-0508-5
- [30] S. DEMPE, A.B. ZEMKOHO: *The Generalized Mangasarian-Fromowitz Constraint Qualification and Optimality Conditions for Bilevel Programs*. Journal of Optimization Theory and Applications, Issue 1, Volume 148, pp. 46–68, 2011. doi: 10.1007/s10957-010-9744-8
- [31] Y. DENG, P. MEHLITZ, U. PRÜFERT: *Optimal Control in First-Order Sobolev Spaces with Inequality Constraints*. Computational Optimization and Applications, Volume 72, Issue 3, pp. 797-826, 2019. URL: <https://doi.org/10.1007/s10589-018-0053-8>
- [32] O. EBEL, S. SCHMIDT, A. WALTHER: *Solving Non-Smooth Semi-Linear Optimal Control Problems with Abs-Linearization*. DFG, Priority Programme 1962, Preprint Number SPP1962-093r, 2020. URL: <https://spp1962.wias-berlin.de/preprints/093r.pdf>
- [33] A. ERN, J.-L. GUERMOND: *Theory and Practice of Finite Elements*. Graduate Studies in Mathematics Volume 19, 1997.
- [34] L.C. EVANS: *Partial Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences, Volume 159, Springer, 2004.
- [35] M.L. FLEGEL: *Constraint Qualifications and Stationarity Concepts for Mathematical Programs with Equilibrium Constraints*. Dissertation, Universität Würzburg, 2005. URL: <https://d-nb.info/975013661/34>
- [36] M.L. FLEGEL, C. KANZOW: *An Abadie-Type Constraint Qualifications for MPECs*. Institute of Applied Mathematics and Statistics, University of Würzburg, Preprint, November 2002. URL: <https://www.mathematik-informatik.uni-wuerzburg.de/fileadmin/10040700/paper/ACQMPEC.pdf>
- [37] M.L. FLEGEL, C. KANZOW: *On the Guignard Constraint Qualification for Mathematical Programs with Equilibrium Constraints*. Optimization, Issue 6, Volume 54, pp. 517-534, 2005. URL: <https://www.mathematik-informatik.uni-wuerzburg.de/fileadmin/10040700/paper/GCQMPEC.pdf>
- [38] S. FRANKE, P. MEHLITZ, M. PILECKA: *Optimality Conditions for the Simple Convex Bilevel Programming Problem in Banach Spaces*. Optimization, Volume 67, Issue 2, pp. 237-268, 2018. doi: 10.1080/02331934.2017.1394296
- [39] M. GERDTS, K.D. PALAGACHEV: *Exploitation of the Value Function in a Bilevel Optimal Control Problem*. IFIP Conference on System Modeling and Optimization, pp. 410-419, April 2016. doi: 10.1007/978-3-319-55795-3_39
- [40] W. GEREMEW, B.S. MORDUKHOVIC, N.M. NAM: *Coderivative Calculus and Metric Regularity for Constraint and Variational Systems*. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, Volume 70, Issue 1, pp. 529-552, 2019. URL: <https://doi.org/10.1016/j.na.2007.12.025>
- [41] B.M. GLOVER: *A Generalized Farkas Lemma with Applications to Quasidifferentiable Programming*. Zeitschrift für Operations Research, Volume 26, Issue 1, pp. 125-141, 1982. doi: 10.1007/BF01917106
- [42] R. GRIESSE, T. GRUND, D. WACHSMUTH: *Update Strategies for Perturbed Nonsmooth Equations*. Optimization Methods and Software, Volume 23, Issue 3, pp. 323-341, 2008. doi: 10.1080/10556780701523551

- [43] P. GRISVARD: *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. Library of Congress Cataloging in Publication Data, 1985.
- [44] W. HACKBUSCH: *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen (4., überarbeitete Auflage)*. Springer Fachmedien Wiesbaden, Kiel, Juni 2016.
- [45] F. HARDER, G. WACHSMUTH: *Optimality Conditions for a Class of Inverse Optimal Control Problems with Partial Differential Equations*. Optimization, Volume 68, Issue 2-3: 11th International Conference on Parametric Optimization and Related Topics, pp. 615-643, 2018. doi: 10.1080/02331934.2018.1495205
- [46] R. HERZOG, C. MEYER, G. WACHSMUTH: *B- and Strong Stationarity for Optimal Control of Static Plasticity with Hardening*. SIAM Journal on Optimization, Volume 23, Issue 1, pp. 321-352, 2013. doi: 10.1137/110821147
- [47] M. HINTERMÜLLER, I. KOPACKA: *Mathematical Programs with Complementarity Constraints in Function Space: C- and Strong Stationarity and a Path-Following Algorithm*. SIAM Journal on Optimization, Volume 20, Issue 2, pp. 868-902, 2009. doi: 10.1137/080720681
- [48] M. HINTERMÜLLER, B.S. MORDUKHOVICH, T.M. SUROWIEC: *Several Approaches for the Derivation of Stationarity Conditions for Elliptic MPECs with Upper-Level Control Constraints*. Mathematical Programming 146, pp. 555-582, 2014. doi: 10.1007/s10107-013-0704-6
- [49] M. HINZE, R. PINNAU, M. ULBRICH, S. ULBRICH: *Optimization with PDE Constraints*. Mathematical Modelling: Theory and Applications, Volume 23, Springer, 2009.
- [50] K. ITO, K. KUNISCH: *Augmented Lagrangian Methods for Nonsmooth Convex Optimization in Hilbert Spaces*. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, Volume 41, Issues 5-6, pp. 591-616, 2000. URL: [https://doi.org/10.1016/S0362-546X\(98\)00299-5](https://doi.org/10.1016/S0362-546X(98)00299-5)
- [51] K. ITO, K. KUNISCH: *Lagrange-Multiplier Approach to Variational Problems and Applications*. Library of Congress Cataloging-in-Publication Data, 2008.
- [52] J. JAHN: *Vector Optimization-Theory, Applications and Extensions*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH, 2004.
- [53] M. KNAUER: *Bilevel-Optimalsteuerung mittels hybrider Lösungsmethoden am Beispiel eines deckengeführten Regalbediengerätes in einem Hochregallager*. Dissertation, Universität Bremen, 2009. URL: <https://d-nb.info/995320942/34>
- [54] M. KNAUER: *Fast and Save Container Cranes as Bilevel Optimal Control Problems*. Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems, Volume 18, Issue 4, pp 465-486. doi: 10.1080/13873954.2011.642388
- [55] K. KUNISCH, A. RÖSCH: *Primal-Dual Active Set Strategy for a General Class of Constrained Optimal Control Problems*. SIAM Journal on Optimization, Volume 13, Issue 2, pp 321-334, 2002. URL: <https://doi.org/10.1137/S1052623499358008>
- [56] S. KURCYUSZ, J. ZOWE: *Regularity and Stability for the Mathematical Programming Problem in Banach Spaces*. Applied Mathematics and Optimization, Volume 5, pp 49-62, 1979. doi: 10.1007/BF01442543
- [57] J.-P. LAUMOND, K. MOMBAUR, A. TRUONG: *From Human to Humanoid Locomotion-An Inverse Optimal Control Approach*. Autonomous Robots, Volume 28, Issue 3, pp 369-383. doi: 10.1007/s10514-009-9170-7

- [58] P. MADAUSS: *Optimale Steuerung von einem Komplementaritätsproblem*. Masterarbeit, Universität Duisburg-Essen, 2016
- [59] P. MEHLITZ: *Bilevel Programming Problems with Simple Convex Lower Level*. Optimization, Volume 65, Issue 6, pp 1203-1227, 2016. doi: 10.1080/02331934.2015.1122006
- [60] P. MEHLITZ: *Contributions to Complementarity and Bilevel Programming in Banach Spaces*. Dissertation, Technische Universität Bergakademie Freiberg, 2017. URL: <https://tubaf.qucosa.de/api/qucosa%3A23128/attachment/ATT-0/>
- [61] P. MEHLITZ: *Necessary Optimality Conditions for a Special Class of Bilevel Programming Problems with Unique Lower Level Solution*. Optimization, Volume 66, Issue 10, pp 1533-1562, 2017. doi: 10.1080/02331934.2017.1349123
- [62] P. MEHLITZ, G. WACHSMUTH: *Bilevel Optimal Control: Existence Results and Stationarity Conditions*. In S. Dempe und A. B. Zemkoho, Editoren, Bilevel Optimization: Advances and next Challenges, pp 451-484. Springer, 2019. zur Publikation angenommen. doi: 10.1007/978-3-030-52119-6
- [63] P. MEHLITZ, G. WACHSMUTH: *Weak and Strong Stationarity in Generalized Bilevel Programming and Bilevel Optimal Control*. Optimization, Volume 65, Issue 5, 2016. doi: 10.1080/02331934.2015.1122007
- [64] C. MEYER, A. RÖSCH: *Superconvergence Properties of Optimal Control Problems*. SIAM Journal on Control and Optimization, Volume 43, Issue 3, pp. 970-985, 2004. URL: <https://doi.org/10.1137/S0363012903431608>
- [65] H. MEZIANI: *Advanced Differential Equations (for Engineers)*. Scriptum, Florida International University, Spring 2021. URL: <https://faculty.fiu.edu/~meziani/MAP4401.html>
- [66] B.S. MORDUKHOVICH: *Variational Analysis and Generalized Differentiation I - Basic Theory*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 330.
- [67] B.S. MORDUKHOVICH: *Variational Analysis and Generalized Differentiation II - Applications*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 331.
- [68] I. NEITZEL, U. PRUEFERT, T. SLAWIG: *A Smooth Regularization of the Projection Formula for Constrained Parabolic Optimal Control Problems*. Numerical Functional Analysis and Optimization, Volume 32, Issue 12, p. 1283-1315, 2011. doi: 10.1080/01630563.2011.597915
- [69] K. PALAGACHEV: *Mixed-Integer Optimal Control and Bilevel Optimization: Vanishing Constraints and Scheduling Tasks*. Dissertation, Universität der Bundeswehr München, 2017. URL: <https://athene-forschung.unibw.de/doc/123583/123583.pdf>
- [70] S.M. ROBINSON: *Stability Theory for Systems of Inequalities, Part II: Differentiable Nonlinear Systems*. SIAM Journal on Numerical Analysis, Volume 13, No. 4, pp. 497-513, 1976. URL: <https://www.jstor.org/stable/2156241>
- [71] H.V. STACKELBERG: *Marktform und Gleichgewicht*. Springer, Berlin, 1934.
- [72] P. THOMPSON: *Lecture Notes on Dynamic Modeling*. Scriptum, Florida International University, March 2004. URL: <http://www.peterthompson.gatech.edu/index.php?page=dynamic-modeling>
- [73] F. TRÖLFTZSCH: *Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen-Theorie, Verfahren und Anwendungen, 1. Auflage*. Vieweg Verlag. Wiesbaden, 2005.

- [74] M. ULBRICH: *Semismooth Newton Methods for Variational Inequalities and Constrained Optimization Problems in Function Spaces*. MOS-SIAM Series on Optimization, 2011.
- [75] G. WACHSMUTH: *Mathematical Programs with Complementarity Constraints in Banach Spaces*. Journal of Optimization Theory and Applications, Volume 166, Issue 2, pp. 480-507, 2015. doi: 10.1007/s10957-014-0695-3
- [76] G. WACHSMUTH: *Towards M-Stationarity for Optimal Control of the Obstacle Problem with Control Constraints*. SIAM Journal on Control and Optimization, Volume 54, Issue 2, pp. 964–986, 2016. doi: 10.1137/140980582
- [77] D. WERNER: *Funktionalanalysis, 7., korrigierte und erweiterte Auflage*. Springer-Verlag. Heidelberg, Dordrecht, London, New York, 2011.
- [78] J.J. YE: *Constraint Qualifications and Necessary Optimality Conditions for Optimization Problems with Variational Inequality Constraints*. SIAM Journal on Control and Optimization, Volume 10, Issue 4, pp. 943–962, 2000. doi: 10.1137/S105262349834847X
- [79] J.J. YE: *Necessary Conditions for Bilevel Dynamic Optimization Problems*. SIAM Journal on Control and Optimization, Volume 33, Issue 4, pp. 1208–1223, 1995. doi: 10.1137/S0363012993249717
- [80] J.J. YE, X.Y. YE: *Necessary Optimality Conditions for Optimization Problems with Variational Inequality Constraints*. Mathematics of Operations Research, Volume 22, No. 4, pp. 977-997, 1997. URL: <https://www.jstor.org/stable/3690259>
- [81] J.J. YE: *Optimal Strategies for Bilevel Dynamic Problems*. SIAM Journal on Control and Optimization, Volume 35, Issue 2, pp. 512-531, 1997. doi: 10.1137/S0363012993256150
- [82] K. YOSIDA: *Functional Analysis (Sixth Edition)*. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York, 1980.
- [83] A.B. ZEMKOHO: *Bilevel Programming: Reformulations, Regularity and Stationarity*. Dissertation, Technische Universität Bergakademie Freiberg, 2012. URL: https://www.researchgate.net/publication/228078488_Bilevel_programming_reformulations_regularity_and_stationarity