**Doktorarbeit**

zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktor
der Naturwissenschaften **(Dr. rer. nat.)**

zum Thema

# Numerische Lösung von Multi-Netzwerk Poroelastizitätsproblemen

"Numerical solution of multi-network poroelasticity problems"

Fakultät für Mathematik der Universität Duisburg-Essen

Fadi Philo
Tag der Einreichung: 15.09.2022
Tag der Disputation: 01.12.2022

Betreuer und Erstgutachter:
**Herr Prof. Dr. Johannes Kraus**
Zweitgutachter:
**Herr Prof. Dr. Adrian Florin Radu**

**DOI:** 10.17185/duepublico/78147
**URN:** urn:nbn:de:hbz:465-20230411-102704-8

# Abstrakt

In dieser Dissertation wird ein abstraktes Stabilitätsergebnis für gestörte Sattelpunktprobleme $2 \times 2$-Blocksystem und $3 \times 3$-Blocksystem bewiesen, das auf geeigneten Normen basiert. Dieses abstrakte Framework führt zur Konstruktion von parameter-robusten norm-äquivalenten Vorkonditionierern. Das Ergebnis wird dann verwendet, um die parameter-robusten norm-äquivalenten Vorkonditionierer für das quasi-statische ($3 \times 3$-Blocksystem) und das dynamische ($2 \times 2$-Blocksystem) Multi-Netzwerk-Poroelastizität (MPET) Problem, die eine Verallgemeinerung der entsprechenden Biot-Modelle sind, zu konstruieren. Auch diese Dissertation beschäftigt sich mit der iterativen Lösung von quasi-statischen Systemen. Es wird eine erweiterte Lagrange-Uzawa-Methode verwendet, um ein vollständig entkoppeltes iteratives Schema zu erhalten. Die Fehlerabschätzungen des zeit-diskreten Systems wird untersucht, das aus dem dynamischen MPET-Problem nach Anwendung eines impliziten Zeitschrittverfahrens zweiter Ordnung (Crank-Nicolson) entsteht. Alle theoretischen Ergebnisse werden in numerischen Experimenten bestätigt.

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Einleitung

Der folgende historische Überblick ist eine Zusammenfassung der Einleitung aus [39]. Der Begriff Poroelastizität wurde erstmals von J. Geertsma als Fußnote in seiner Arbeit "Problems of rock mechanics in petroleum production engineering" geprägt. Poroelastisches Verhalten kann einen unerwarteten Zusammenhang zwischen einem kausalen Ereignis und seinen Folgen erklären. Z.B.:

1. F. H. King berichtete, dass der Wasserstand in einem Brunnen in der Nähe des Bahnhofs in Whitewater (Wisconsin) stieg, wenn sich einem Zug näherte, und sank, als ein Zug den Bahnhof verließ. Die Wasserstandsschwankungen waren bei einem schweren Güterzug stärker als bei einem leichteren und schnelleren Personenzug.

2. Der Bundesstaat Texas beanspruchte den Teil des Goose Creek-Erdölfelds in der Nähe von Galveston, Texas, das nach der Erdölförderung mit Wasser aus der Galveston Bay bedeckt wurde. Der Staat argumentierte, dass das versunkene Land dem Staat gehörte. Die Gegenklage der Landbesitzer basierte auf einer geologischen Studie von Pratt und Johnson, die zeigte, dass die Senkung auf die Gewinnung von 100 Millionen Barrel Wasser, Öl und Sand aus dem Reservoir zurückgeführt werden konnte. Die Gerichte entschieden sich gegen die staatliche Forderung, weil das Untertauchen auf menschliches Handeln und nicht auf natürliche Ursachen zurückzuführen war.

Zwei grundlegende Phänomene liegen dem poroelastischen Verhalten zugrunde:

- Solid-zu-Fluid-Kopplung tritt auf, wenn eine Änderung der angelegten Spannung eine Änderung des Flüssigkeitsdrucks oder der Flüssigkeitsmasse bewirkt (Beispiel 1).

- Fluid-zu-Solid-Kopplung tritt auf, wenn eine Änderung des Flüssigkeitsdrucks oder der Flüssigkeitsmasse eine Volumenänderung des porösen Materials bewirkt (Beispiel 2).

Die wissenschaftliche Geschichte poroelastischer Konzepte umfasst etwa einhundertfünfzig Jahre. Von der Veröffentlichung des Darcy-Gesetzes in den Jahren 1856 bis 1900 enthalten Beobachtungen das Verhalten von Brunnen als Reaktion auf verschiedene Phänomene wie Zugverkehr. Die verstärkte Erschließung von Grundwasser und Kohlenwasserstoffressourcen in der Zeit von 1900 bis 1930 war die Motivation für ein verbessertes wissenschaftliches und technisches Verständnis der Prinzipien, die ihr Ereignis bestimmen. Auch der verstärkte Tiefbau in dieser Zeit wurde zur Motivation für ein besseres Verständnis des Verhaltens des Bodens als Gründungsmaterial. Das kanonische geomechanische Problem war die Bodenverfestigung und das kanonische hydrogeologische Problem die elastische Speicherung in einem begrenzten Grundwasserleiter. Von 1930 bis 1960 wurden bedeutende Fortschritte in der Entwicklung grundlegender Konzepte, der Formulierung oder Erweiterung von konstitutiven Gesetzen und der Grundgleichungen (governing equations) erzielt und auch analytische Lösungen für bestimmte Probleme gefunden. Nach 1960 wurden auch komplexere analytische Lösungen für Probleme in der Landsenkungs- und Erdbebenmechanik entdeckt. Numerische Lösungen gewannen an Bedeutung, da der digitale Computer realistischere Simulationen geologischer Situationen ermöglichte.

Karl Terzaghi (1883–1963) versuchte durch Laborexperimente das Verhalten des Bodens als Fundamentmaterial zu verstehen. Terzaghis mathematische Behandlung basierte auf seinen eindimensionalen Laborexperimenten.

Die allgemeine dreidimensionale Theorie der Poroelastizität wurde 1941 von Biot [19][18] eingeführt und basiert auf folgenden Annahmen, siehe [41]:

1 - das poröse Medium ist mit Flüssigkeit gesättigt und die Temperatur ist konstant.

2 - das Fluid im porösen Medium ist (fast) inkompressibel.

3 - das solide Skeleton (Matrix) wird durch ein elastisches Material gebildet und Deformationen und Dehnungen sind relativ klein.

4 - der Flüssigkeitsstrom folgt dem Darcy-Gesetz (laminare Strömung).

Für homogene isotrope, lineare, elastische, poröse Medien lautet das Biot-Modell in einem beschränkten Lipschitz-Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d = 2, 3$, dann folgendermaßen:

$$-\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \alpha \nabla p = \mathbf{f} \qquad \text{in} \quad \Omega \times (0,T), \tag{1.1a}$$

$$\boldsymbol{v} = -K \nabla p \qquad \text{in} \quad \Omega \times (0,T), \tag{1.1b}$$

$$\alpha \text{div } \dot{\boldsymbol{u}} + \text{div } \boldsymbol{v} + c_p \dot{p} = g \qquad \text{in} \quad \Omega \times (0,T), \tag{1.1c}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}) + \lambda \text{div } (\boldsymbol{u}) \mathbf{I} = 2\mu \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}) + \lambda Tr(\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u})) \mathbf{I}, \tag{1.1d}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^T), \tag{1.1e}$$

wobei $\lambda$ und $\mu$ die Lamé-Parameter bezeichnen, die wie folgt definiert sind:

$$\lambda := \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad , \quad \mu := \frac{E}{2(1+\nu)},$$

wobei $E$ den Elastizitätsmodul (Youngscher Modul) und $\nu$ die Poissonzahl bezeichnet.

- Die Konstante $\alpha \in (0, 1)$ koppelt den Porendruck $p$ und die Verschiebung $\boldsymbol{u}$ und heißt Biot-Willis-Konstante.

- Die Konstante $c_p \geq 0$ ist der spezifische Speicherkoeffizient.

- $K = \boldsymbol{\kappa}/\eta$ ist die hydraulische Leitfähigkeit, gegeben durch den Quotienten aus Permeabilität des porösen Mediums $\boldsymbol{\kappa}$ und der Viskosität des Fluids $\eta$. $K$ kann eine symmetrische positive definite Matrix sein.
- $\mathbf{I}$ bezeichnet den Identitätstensor.
- $\boldsymbol{\sigma}$ und $\boldsymbol{\epsilon}$ sind der effektiv Spannungstensor und der Dehnungstensor. Der Spannungstensor ist gegeben durch des Hookesches Gesetz.
- $\boldsymbol{v}$ bezeichnet den Fluidfluss, manchmal auch Perkolationsgeschwindigkeit des Fluids genannt.
- $\mathbf{f}$ ist die Dichte der eingeprägten Volumenkräfte.
- $g$ ist eine Verteilungsfunktion der Flüssigkeitsquelle (positiv, wenn Flüssigkeit hinzugefügt wird).

Die Gleichung (1.1a) ist eine Gleichgewichtsgleichung, (1.1b) ist das Darcy-Gesetz, (1.1c) ist die Kontinuitätsgleichung (Massenerhaltungsgleichung), (1.1d) ist die konstitutive Gleichung und die Gleichung (1.1e) ist eine Verträglichkeitsbedingung.

Nach der Definition der Multi-Porositätstheorie von Aifantis *"Introducing a multi-porous medium 1977"* für ein Medium, das endliche Diskontinuitäten im Porositätsfeld hat, wird angenommen, dass es eine Multi-porositätseigenschaft besitzt [12]. Die vereinheitlichte Formulierung basierend auf der Multi-Porosity-Theorie wurde in [12] präsentiert. Die Gleichungen, die das Modell beschreiben, sind

$$-\mathrm{div}\ \boldsymbol{\sigma} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \nabla p_i = \boldsymbol{f} \qquad \text{in} \qquad \Omega \times (0,T), \tag{1.2a}$$

$$\boldsymbol{v}_i = -K_i \nabla p_i \qquad \text{in} \qquad \Omega \times (0,T), \tag{1.2b}$$

$$\alpha_i \mathrm{div}\ \dot{\boldsymbol{u}} + \mathrm{div}\ \boldsymbol{v}_i + c_{p_i}\dot{p}_i + \sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} \beta_{ij}(p_i - p_j) = g_i \qquad \text{in} \qquad \Omega \times (0,T), \tag{1.2c}$$

für $i = 1, \ldots, n$, wobei $\beta_{ij}(p_i - p_j)$ Transportphänomene von Netzwerk zu Netzwerk beschreiben und $\beta_{ij}$ der Übertragungskoeffizient ist, der den Fluss von Netzwerk $i$ zu Netzwerk $j$ skaliert.

Die Stabilität der Zeit- und Raumdiskretisierung durch Finite-Differenzen- oder Finite-Volumen-Methoden wurde in [8, 35, 34, 57] studiert und wird hier nicht behandelt. Stattdessen konzentrieren wir uns auf gleichmäßige inf-sup-stabile Finite-Elemente-Diskretisierungen des Multi-Netzwerk poroelastischen Problems. Es ist bekannt, dass die Wohlgestelltheitsanalyse von Sattelpunktproblem in ihrer schwachen Formulierung auf einer Stabilitätsabschätzung beruht, die oft als Ladyzenskaja-Babuska-Brezzi(LBB)-Bedingung [23, 31] bezeichnet wird. Auch die LBB-Bedingung, siehe [27], ist entscheidend für die Analyse stabiler Diskretisierungen. Inf-sup-Stabilität für das Darcy-Problem sowie für das Stokes- und lineare Elastizitätsproblem wurden unter eher allgemeinen Bedingungen festgestellt und im Laufe der Jahre wurden verschiedene stabile gemischte Diskretisierungen dieser Probleme vorgeschlagen, siehe z.B. [23] und die darin enthaltenen Referenzen.

Der Beweis der Stabilität wird mit Hilfe eines neuen abstrakten Stabilitätsergebnisses [44] für gestörte Sattelpunktprobleme geführt, das auf passenden Normen basiert. Das vorgeschlagene Framework leitet die Konstruktion vom parameter-robusten norm-äquivalenten Vorkonditionierer.

Die parameter-robuste Stabilität für die klassische Dreifeldformulierung von Biot und MPET (multiple-network poroelastic theory), die das Darcy-Gesetz enthält, wurde in den Arbeiten [41, 42] nachgewiesen. Alternative Formulierungen für das Biot-Modell werden für eine Zweifeldformulierung [22, 1], eine neue Dreifeldformulierung [58, 50], bei der neben der Verschiebung und dem Flüssigkeitsdruck ein Gesamtdruck als dritte Variable einführt wird, und für eine Vierfeldformulierung [49], bei der der Spannungstensor als Variable einführt wird, betrachtet. Der erste Versuch, parameter-robuste stabile Diskretisierung für das MPET-Modell zu analysieren, wird in der Arbeit [51] vorgestellt. Diese schlägt eine gemischte Finite-Elemente-Formulierung vor, die auf der Einführung eines Gesamtdrucks als Variable basiert.

Es gibt verschiedene Diskretisierungen für die klassische Dreifeldformulierung des Biot-Modells, die parameter-robuste Stabilität aufweisen. Zum Beispiel das Triplett $CR_l/RT_{l-1}/\mathcal{P}_{l-1}$ ($l$=1,2) zusammen mit den vorgeschlagenen Stabilisierungstechniken in [38, 46], siehe auch [33], oder das Triplett $\mathcal{P}_2/RT_0/\mathcal{P}_0$ (in 2D) und $\mathcal{P}_2^{stab}/RT_0/\mathcal{P}_0$ (in 3D), oder $\mathcal{P}_2/RT_1/\mathcal{P}_1$. Hierin bezeichnet $CR_l$ den Raum von Crouzeix–Raviart Funktionen von Grad $l$, $RT_{l-1}$ den Raum Raviart–Thomas Funktionen von Grad $(l-1)$ und $\mathcal{P}_{l-1}$ den Raum stückweiser vollständiger Polynome von Grad $(l-1)$. Die oben genannten Finite-Elemente-Methoden haben jedoch nicht die Eigenschaft der Massenerhaltung im starken (punktweisen) Sinn [41]. In den letzten Jahren wurden für verschiedene Probleme diskontinuierliche Galerkin-(DG)-Verfahren entwickelt. Dieses Verfahren erfüllen physikalische Erhaltungssätze wie Massenerhaltung [6, 5, 28, 40].

Es gibt verschiedene Arbeiten zur Diskretisierung, zur effizienten iterativen Lösung und Vorkonditionierung für das quasi-statische Biot-Modell für Zwei-feld [22, 1], Drei-feld [58, 46, 50, 41], und Vierfeldformulierung [49, 11]. Zwei der beliebtesten und effizientesten iterativen Verfahren zur Lösung der Gleichungen der Poroelastizität sind die sogenannten undrained-split- und fixed-stress-split-iterativen Methoden, die im Gegensatz zu den drained-split- und fixed-strain-split-Methoden bedingungslos stabil sind [48]. Ein Vorteil des in [42] vorgestellten Ansatzes ist die exakte Massenerhaltung. Ein Nachteil ist, dass das System wegen der Präsenz von $n$ Flüssen mit $n$ Drücken im Allgemeinen schwieriger und auch zeitaufwendiger zu lösen ist. Die Konvergenzanalyse ersterer Methoden wurde in [56] für das quasi-statische Biot-System vorgestellt. Danach verfeinerte Ergebnisse konzentrieren sich meist auf Varianten der fixed-stress-Methode, die sich mit Multirate fixed-stress-split-Iterationsschemata [3], heterogenen Medien und linearisierten Biot-Gleichungen [24], oder Raum-Zeit-Finite-Elemente-Approximationen des quasi-statischen Biot-Systems beschäftigen [17, 14]. Eine Strategie zur Optimierung des Stabilisierungsparameters in der fixed-stress-split Methode für das Biot-Problem in der Zweifeldformulierung wurde in [63] vorgeschlagen. Die fixed-stress-split-iterative Methode wurde in [45] nicht nur auf Biot ($n = 1$), sondern auch auf das allgemeinere MPET-System ($n \geq 1$) angewendet. Dort wurde auch eine vollständig parameter-robuste Konvergenzanalyse präsentiert und ein optimaler Beschleunigungsparameter bestimmt. In dem konservativen Ansatz, der durch Verallgemeinerung der klassischen Dreifeldformulierung des Biot-Modells erhalten wurde, koppelt der Block von $n$ unbekannten Flüssen (mit jeweils $d$ Komponenten) mit dem Block von $n$ unbekannten Drücken, wodurch ein Subsystem mit $n(d+1)$ skalaren Größen entsteht. Betrachtet man also beispielsweise das Vier-Netzwerk-Modell ($n = 4$) in einem dreidimensionalen Raum ($d = 3$), so ergibt sich ein Fluss-Druck-Subsystem mit 16/19 der Größe des Gesamtsystems. Deshalb ist eine weitere Entkopplung des Fluss-Blocks vom Druck-Blocks in einem iterativen Verfahren von besonderem Interesse.

Wir werden eine augmentierte Lagrange-Uzawa-Methode analysieren, die in [43] vorgestellt wurde. Diese Methode basiert auf einem Framework, bei dem das Drei-mal-Drei-Blocksystem augmentiert und aufgeteilt wird. Der resultierende Vorkonditionierer definiert ein vollständig entkoppeltes iteratives Schema für die Flüsse, Drücke und Verschiebung.

Im nächsten Abschnitt stellen wir eine Definition des Sattelpunktproblems und einige seiner Eigenschaften vor. Dann präsentieren wir ein Ergebnis (Satz 2.11), das für das ungestörte sowie gestörte Sattelpunktproblem funktioniert und in der Arbeit [44] vorgestellt wurde.

Im dritten Abschnitt werden das quasi-statische und das dynamische MPET-Modells vorgestellt und die auftretenden Parameter erklärt. Mit Hilfe des neuen Satzes 2.11 finden wir parameterabhängigen Normen, um die parameter-robuste Stabilität des Modells zu studieren. Schließlich wird jeweils ein Vorkonditionierer angegeben.

Dann werden im vierter Abschnitt die oben genannten Modelle in endlich-dimensionale Räume übertragen und ihre Stabilität studiert. Im fünften Abschnitt wird die Fehleranalyse des dynamischen MPET-Modells vorgestellt. Im letzten Abschnitt wird ein iterative Verfahren für das quasi-statische MPET-Modell vorgestellt, das nach Anwendung der augmentierten Lagrange-Uzawa-Methode entsteht. Die numerische Ergebnisse werden am Ende des Abschnitts angegeben.

***Ich möchte erwähnen, dass die meisten Hauptresultate dieser Doktorarbeit in den Arbeiten [42, 43, 44] zu finden sind.***

## 1.1 Grund Begriff von der Funktionalanalysis und Notationen

Im diesem Unterabschnitt werden Definitionen und Resultate aus der Funktionalanalysis vorgestellt, die in dieser Arbeit vorkommen und die man in zahlreichen Bücher z.B [36, Exkurs über Funktionalanalysis] [31, Appendices] oder [26, Chapter 1,2] finden kann.

**Definition 1.1.** *[36, Definition 4.20] $V$ sei ein linearer Raum über dem Körper $\mathbb{K}$ der reellen oder komplexen Zahlen. $\|\cdot\|$ heißt **Norm** in $V$, falls*

*i.* $\|v\| = 0 \quad \Leftrightarrow v = 0,$

*ii.* $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *für alle* $u, v \in V,$

*iii.* $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{K}, v \in V.$

Falls nur (ii,iii) erfüllt sind, wird $\|\cdot\|$ **semi-Norm** genannt und als $|\cdot|$ bezeichnet. Der mit einer Norm versehene lineare Raum $V$ heißt **normierter Raum** und wird durch das Paar $(V, \|\cdot\|_V)$ bezeichnet.

**Definition 1.2.** *[36, 6.1.3]*

- $\{x_n \in X : n \geq 1\}$ *heißt **Cauchy-Folge**, wenn* $\sup\{\|x_n - x_m\|_X : n, m \geq k\} \to 0$ *für* $k \to \infty$.

- *Ein Raum $X$ heißt **vollständig**, wenn jede Cauchy-Folge in $X$ gegen ein $x \in X$ konvergiert.*
- *Ein **Banach-Raum** ist ein normierter und vollständiger Raum.*

**Definition 1.3.** *[31, Definition A.9, Proposition A.10] Seien $V$ und $W$ zwei normierte Räume. $\mathcal{L}(V;W)$ ist der Vektorraum von stetigen linearen Abbildungen von $V$ nach $W$ . Die Abbildung $A \in \mathcal{L}(V;W)$ nennt man **Operator**. Es sei $W$ ein Banach-Raum, dann ist $\mathcal{L}(V;W)$ mit der Norm*

$$\|A\|_{\mathcal{L}(V;W)} = \sup_{v \in V} \frac{\|Av\|_W}{\|v\|_V}, \qquad \forall A \in \mathcal{L}(V;W),$$

*auch ein Banach-Raum.*

**Definition 1.4.** *[31, Definition A.14, Remark A.15] $V$ sei ein normierter Raum. Der **Dual-Raum** von $V$ ist $\mathcal{L}(V;\mathbb{R})$ und wird mit $V^*$ bezeichnet. Der Dual-Raum $V^*$ ist ein Banach-Raum mit der Norm*

$$\forall f \in V^*, \qquad \|f\|_{V^*} = \sup_{v \in V} \frac{\langle f, v\rangle_{V^*,V}}{\|v\|_V}.$$

**Definition 1.5.** *[66, Definition V.1.1] Eine Abbildung $(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) heißt **Skalarprodukt** (oder inneres Produkt) auf $X$, falls*

| | | |
|---|---|---|
| *a)* | $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$ | *für alle* $x_1, x_2, y \in X$, |
| *b)* | $\lambda(x, y) = (\lambda x, y)$ | *für alle* $x, y \in X, \lambda \in \mathbb{K}$ |
| *c)* | $(x, y) = \overline{(y, x)}$ | *für alle* $x, y \in X$, |
| *d)* | $(x, x) \geq 0$ | *für alle* $x \in X$, |
| *e)* | $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$ | |

**Definition 1.6.** *[66, Definition V.1.4] Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|_X)$ heißt **Prähilbertraum**, wenn es ein Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ auf $X \times X$ mit $(x, x) = \|x\|_X^2$ für alle $x \in X$ gibt. Ein vollständiger Prähilbertraum heißt **Hilbert-Raum**.*

**Definition 1.7.** *[36, 6.1.4] Ein Banach-Raum $(X, \|\cdot\|_X)$ heißt **Hilbert-Raum**, wenn ein Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_X$ auf $X$ existiert, sodass $(x, x)_X = \|x\|_X^2$ für alle $x \in X$.*

**Definition 1.8.** *[31, Definition B.4., Theorem B.5.] Für $1 \leq p \leq \infty$ sind die **Lebesgue Räume** gegeben durch*

$$L^p(\Omega) := \{f \text{ ist messbar }, \quad \|f\|_{L^p(\Omega)} < +\infty\},$$

*wobei*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \begin{cases} \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{für} \quad 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| = \inf\{M \geq 0; |f(x)| \leq M; \text{ fast überall in } \Omega\} & \text{für} \quad p = \infty. \end{cases}$$

*Der Vektorraum $L^p(\Omega)$ ausgestattet mit der $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$-Norm ist einen Banach-Raum.*

**Definition 1.9.** *[32, Definition 64.17] Sei $J$ eine nichtleere, beschränkte, offene Menge in $\mathbb{R}$ und $V$ ein Banach-Raum. Für $1 \leq p \leq \infty$ ist der* ***Bochner-Raum*** *einen Raum, der aus den starken messbaren Funktionen $f : J \to V$ entsteht, so dass die folgende Norm endlich ist*

$$\|f\|_{L^p(J;V)} := \begin{cases} \left( \int_J \|f(t)\|_V^p dt \right)^{\frac{1}{p}} & \textit{wenn} \quad 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{t \in J} \|f(t)\|_V & \textit{wenn} \quad p = \infty. \end{cases}$$

Der Einfachheit halber wird $J$ im Index nicht geschrieben, d.h

$$\|f\|_{L^p(J;V)} := \|f\|_{L^p(V)}.$$

**Satz 1.10.** *[32, Theorem 64.19] Sei $J$ eine nichtleere, beschränkte, offene Menge in $\mathbb{R}$ und $V$ ein Banach-Raum. Dann ist $L^p(J;V)$ einen Banach-Raum für alle $p \in [1, \infty]$.*

**Satz 1.11.** *[31, Definition B.9.] $L^2(\Omega)$, ausgestattet mit dem Skalarprodukt*

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega uv,$$

*ist einen Hilbert-Raum. Wir bezeichnen die entsprechende Norm mit*

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega u^2.$$

Im Laufe der Arbeit wird der Index für $L^2(\Omega)$ nicht geschrieben, d.h

$$\|u\| := \|u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \text{und } (u, v) := (u, v)_{L^2(\Omega)}.$$

**Definition 1.12.** *[23, 2.1] Für $m \geq 1$ sind die Standard-Sobolev-Räume gegeben durch*

$$H^m(\Omega) := \{v : v \in L^2(\Omega), D^\alpha v \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\},$$

*wobei*

$$D^\alpha v := \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \qquad |\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n.$$

*Die Norm ist gegeben durch*

$$\|v\|^2_m := \|v\|^2_{m,\Omega} := \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|^2,$$

*und die Semi-Norm durch*

$$|v|^2_m := |v|^2_{m,\Omega} := \sum_{|\alpha| = m} \|D^\alpha v\|^2.$$

Neben $L^2(\Omega)$ betrachten wir auch noch die folgenden Standard-Sobolev-Räume bzw. Unterräume in dieser Arbeit:

- $H^1(\Omega)$: Für $m = 1$ ist die Norm in $H^1$ gegeben durch
$$\|v\|_1^2 := \|v\|^2 + \|\nabla v\|^2,$$
und sein Unterraum
$$H_0^1 := \{v : v \in H^1(\Omega), v|_{\partial\Omega} = 0\}.$$
- $H(\mathrm{div}\,;\Omega)$:
$$H(\mathrm{div}\,;\Omega) := \{v : v \in (L^2(\Omega))^n, \mathrm{div}\ v \in L^2(\Omega)\},$$
mit der Norm
$$\|v\|_{\mathrm{div}}^2 := \|v\|^2 + \|\mathrm{div}\ v\|^2,$$
und seinem Unterraum
$$H_0(\mathrm{div}\,;\Omega) := \{v : v \in H(\mathrm{div}\,;\Omega), v \cdot n|_{\partial\Omega} = 0\}.$$
- $L_0^2(\Omega)$:
$$L_0^2(\Omega) := \{v : v \in L^2(\Omega), \int_\Omega v = 0\}.$$

**Satz 1.13.** *[31, Theorem 3.77 (Korn's first inequality)] Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Dann gibt es $c_k$, sodass*
$$\forall \boldsymbol{x} \in H_0^1(\Omega)^3, \qquad c_k\|\boldsymbol{x}\|_1 \leq \|\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{x})\|.$$
*Außerdem gilt, vgl. [31, the proof of Theorem 3.77]:*
$$\forall \boldsymbol{x} \in H_0^1(\Omega)^3, \qquad \|\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{x})\|^2 = \frac{1}{2}(\|\nabla \boldsymbol{x}\|^2 + \|\mathrm{div}\ \boldsymbol{x}\|^2).$$

**Satz 1.14.** *[31, Proposition (A.5 A.7)] Sei $V$ ein Hilbert-Raum, dann gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung:*
$$\forall v, w \in V, \qquad (v, w)_V \leq \|v\|_V\|w\|_V,$$
*und*
$$\forall \gamma > 0, \quad \forall v, w \in V, \qquad (v, w)_V \leq \frac{\gamma}{2}\|v\|_V^2 + \frac{1}{2\gamma}\|w\|_V^2.$$

**Definition 1.15.** *[36, 6.5 Bilinearformen] Es sei $V$ Hilbert-Raum. Die Abbildung*
$$a(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$$
*heißt **Bilinearform**, falls*
$$a(x + \lambda y, z) = a(x, z) + \lambda a(y, z) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y, z \in V,$$
$$a(x, y + \lambda z) = a(x, y) + \lambda a(x, z) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y, z \in V.$$
*Zusätzlich heißt $a(\cdot,\cdot)$*

- ***stetig*** *(oder beschränkt), falls eine Konstante* $\overline{C}_a \in \mathbb{R}$ *existiert, sodass*

$$|a(v,w)| \leq \overline{C}_a \|v\|_V \|w\|_W, \quad \forall v, w \in V.$$

- ***V-elliptisch*** oder **koerziv**, *falls sie auf* $V \times V$ *stetig ist und die folgende Ungleichung erfüllt:*

$$a(v,v) \geq \underline{C}_a \|v\|^2 \qquad v \in V, \quad \underline{C}_a > 0.$$

  *Für* $\underline{C}_a = 0$ *heißt* $a(\cdot,\cdot)$ ***positive semi-definit.***

- ***symmetrisch****, falls*

$$a(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}, \qquad a(x,y) = a(y,x), \qquad \forall x, y \in V$$

Der Raum von stetigen bilinearen Operatoren ist gegeben durch:

$$\mathcal{L}(V \times W, \mathbb{R}) = \{T : V \times W \to \mathbb{R} : T \text{ bilinear und stetig}\}.$$

**Definition 1.16.** *[25, III 3.5 Definition] Seien* $V$ *und* $W$ *normierte Räume. Eine bijektive, lineare Abbildung* $T : V \to W$ *ist ein Isomorphismus, wenn* $T$ *und* $T^{-1}$ *stetig sind.*

**Lemma 1.17.** *[31, Proposition A.21] Es seien* $V, W$ *Banach-Räume und sei* $a \in \mathcal{L}(V \times W, \mathbb{R})$*, dann ist die Abbildung* $A : V \to W^*$ *definiert durch*

$$a(x,y) = \langle Ax, y \rangle_{W^*,W} \qquad \text{für alle } x \in V, y \in W$$

*in* $\mathcal{L}(V, W^*)$*.*

# 2

# Abstrakte Sattelpunktprobleme

## 2.1 Formulierung in Hilberträumen

• **Klassische Sattelpunktprobleme** : Es seien $V, Q$ zwei Hilberträume und $V^*, Q^*$ die zugehörigen Dualräume. Gesucht sei $(u,p) \in V \times Q$:

$$\begin{aligned} a(u,v) + b(v,p) &= \langle f, v\rangle, \qquad \forall v \in V, \\ b(u,q) &= \langle g, q\rangle, \qquad \forall q \in Q, \end{aligned} \tag{2.1}$$

wobei $a(\cdot,\cdot) \in \mathcal{L}(V \times V, \mathbb{R}),\quad b(\cdot,\cdot) \in \mathcal{L}(V \times Q, \mathbb{R}),\quad f \in V^*,\quad g \in Q^*.$

Das Gleichungssystem (2.1) kann als eine Variationsgleichung geschrieben werden:

$$\mathcal{A}((u;p),(v;q)) = \langle f, v\rangle + \langle g, q\rangle. \tag{2.2}$$

mit

$$\mathcal{A}((u;p),(v;q)) = a(u,v) + b(v,p) + b(u,q), \qquad \forall (u,p),(v,q) \in V \times Q, \tag{2.3}$$

**Definition 2.1.** *[31, Def. 2.37] Es seien $X, Y$ zwei Mengen. Wir betrachten die Abbildung $J : X \times Y \to \mathbb{R}$. Dann heißt $(\tilde{x}, \tilde{y})$ **Sattelpunkt** von $J$, wenn*

$$J(\tilde{x}, y) \leq J(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq J(x, \tilde{y}), \qquad \forall x \in X, y \in Y.$$

**Lemma 2.2.** *[31, Lemma 2.38] $(u,p)$ ist genau dann ein Sattelpunkt von $J$,wenn:*

$$\inf_{v\in V} \sup_{q\in Q} J(v,q) = \sup_{q\in Q} J(u,q) = J(u,p) = \inf_{v\in V} J(v,p) = \sup_{q\in Q} \inf_{v\in V} J(v,q).$$

**Satz 2.3.** *[36, Satz 12.9] Es seien $a(\cdot,\cdot) \in \mathcal{L}(V \times V, \mathbb{R})$, $b(\cdot,\cdot) \in \mathcal{L}(V \times Q, \mathbb{R})$ und $a(\cdot,\cdot)$ symmetrisch und $V$-elliptisch. $(u,p) \in V \times Q$ ist genau dann eine Lösung des Sattelpunktproblems (2.1), wenn*

$$J(u,q) \leq J(u,p) \leq J(v,p) \qquad \forall v \in V, q \in Q.$$

*Eine weitere, äquivalente Charakterisierung ist*

$$J(u,p) = \min_{v\in V} J(v,p) = \max_{q\in Q}\min_{v\in V} J(v,q),$$

*wobei*

$$J(v,q) := a(v,v) + 2b(v,q) - 2\langle f,v\rangle - 2\langle g,q\rangle.$$

Mit anderen Worten ist $J$ minimal bezüglich der Variation in $V$ und maximal bezüglich der Variation in $Q$.
Um das Sattelpunktproblem (2.1) etwas klarer zu machen, führen wir die Operatoren ein, die zu den Bilinearformen gehören,

$$\begin{aligned}
A &: V \to V^* & \langle Au, v\rangle &= a(u,v), & &\forall v \in V,\\
B^T &: Q \to V^* & \langle v, B^T p\rangle &= b(v,p), & &\forall v \in V,\\
B &: V \to Q^* & \langle Bu, q\rangle &= b(u,q), & &\forall q \in Q,\\
\bar{\mathcal{A}} &: V\times Q \to V^*\times Q^* & \langle \bar{\mathcal{A}}(u;p),(v;q)\rangle &= \mathcal{A}((u;p),(v;q)), & &\forall (v,q) \in V\times Q.
\end{aligned}$$

Dann kann (2.1) in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} Au + B^T p &= f\\ Bu &= g \end{aligned} \quad\Leftrightarrow\quad \bar{\mathcal{A}}\begin{bmatrix} u\\ p\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f\\ g\end{bmatrix} \text{ wobei } \bar{\mathcal{A}} := \begin{bmatrix} A & B^T\\ B & 0\end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

- **Gestörtes Sattelpunktproblem** : Es sei $c(\cdot,\cdot)$ eine stetige Bilinearform auf $Q\times Q$.

$$C : Q \to Q^*, \qquad \langle Cp, q\rangle = c(p,q), \qquad \forall q \in Q.$$

Wir betrachten die folgende Erweiterung des Problems (2.1), die als gestörtes Sattelpunktproblem bezeichnet wird:

$$\begin{aligned} a(u,v) + b(v,p) &= \langle f,v\rangle, & &\forall v\in V,\\ b(u,q) - c(p,q) &= \langle g,q\rangle, & &\forall q \in Q. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Das Gleichungssystem (2.5) kann als eine Variationsgleichung geschrieben werden:

$$\mathcal{A}((u;p),(v;q)) = \langle f,v\rangle + \langle g,q\rangle, \tag{2.6}$$

mit

$$\mathcal{A}((u;p),(v;q)) = a(u,v) + b(v,p) + b(u,q) - c(p,q), \qquad \forall (u,p),(v,q) \in V\times Q, \tag{2.7}$$

oder als Operatorgleichung:

$$\begin{aligned} Au + B^T p &= f,\\ Bu - \quad Cp &= g, \end{aligned} \tag{2.8}$$

bzw. in der Form

$$\bar{\mathcal{A}}\begin{bmatrix} u\\ p\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f\\ g\end{bmatrix} \quad \text{wobei} \quad \bar{\mathcal{A}} := \begin{bmatrix} A & B^T\\ B & -C\end{bmatrix}. \tag{2.9}$$

**Bemerkung 2.4.** *[23, Remark 4.3.1] Wenn $a(\cdot,\cdot)$ und $c(\cdot,\cdot)$ symmetrisch sind, ist dieses Problem äquivalent zum Sattelpunktproblem:*

$$\inf_{v\in V}\sup_{q\in Q}\left\{\frac{1}{2}a(v,v)+b(v,q)-\frac{1}{2}c(q,q)-\langle f,v\rangle+\langle g,q\rangle\right\}.$$

- **Doppeltes Sattelpunktproblem** : Es seien

$$\begin{aligned} A_2 : V_2 &\to V_2^* & \langle A_2u,v\rangle &= a_2(u,v), & \forall v &\in V_2,\\ B_2^T : Q &\to V_2^* & \langle v,B_2^Tp\rangle &= b_2(v,p), & \forall v &\in V_2,\\ B_2 : V_2 &\to Q^* & \langle B_2u,q\rangle &= b_2(u,q), & \forall q &\in Q, \end{aligned}$$

wobei $a_2(\cdot,\cdot)\in\mathcal{L}(V_2\times V_2,\mathbb{R})$, $\;b_2(\cdot,\cdot)\in\mathcal{L}(V_2\times Q,\mathbb{R})$.
Wir betrachten die folgende Erweiterung des Problems (2.5), das als doppeltes Sattelpunktproblem bekannt ist[1]:

$$\begin{array}{llll} a_1(u_1,v_1) & +b_1(v_1,p) & & =\langle f_1,v_1\rangle, \quad \forall v_1\in V_1,\\ b_1(u_1,q) & -c(p,q) & +b_2(u_2,q) & =\langle g,q\rangle, \quad \forall q\in Q,\\ & b_2(v_2,p) & +a_2(u_2,v_2) & =\langle f_2,v_2\rangle, \quad \forall v_2\in V_2, \end{array} \tag{2.10}$$

wobei $f_2\in V_2^*$ ein lineares Funktional ist. Das Gleichungssystem (2.10) kann als eine Variationsgleichung geschrieben werden:

$$\mathcal{A}((u_1;u_2;p),(v_1;v_2;q))=\langle f_1,v_1\rangle+\langle f_2,v_2\rangle+\langle g,q\rangle, \tag{2.11}$$

mit

$$\begin{aligned}\mathcal{A}((u_1;u_2;p),(v_1;v_2;q)) &= a_1(u_1,v_1)+a_2(u_2,v_2)+b_1(v_1,p)+b_2(v_2,p)+b_1(u_1,q)+b_2(u_2,q)\\ &\quad - c(p,q), \qquad \forall (u_1;u_2;p),(v_1;v_2;q)\in V_1\times V_2\times Q,\end{aligned} \tag{2.12}$$

oder als Operatorgleichung:

$$\begin{array}{llll} A_1u_1 & +B_1^Tp & & =f_1,\\ B_1u_1 & -Cp & +B_2u_2 & =g,\\ & B_2^Tp & +A_2u_2 & =f_2, \end{array} \tag{2.13}$$

bzw. in der Form

$$\bar{\mathcal{A}}\begin{bmatrix}u_1\\p\\u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1\\g\\f_2\end{bmatrix}, \quad \text{wobei} \quad \bar{\mathcal{A}}:=\begin{bmatrix}A_1 & B_1^T & 0\\ B_1 & -C & B_2\\ 0 & B_2^T & A_2\end{bmatrix}. \tag{2.14}$$

[1] Im Sinne eine einheitliche Schreibweise verwenden wir den Index "1" für die Formen und Operatoren in (2.5) und (2.8)

## 2.2 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

Betrachten wir das Sattelpunktproblem (2.4). Nimmt man die Existenz von $A^{-1} \in L(V^*, V)$ an, so kann man die erste Gleichung nach $u$ auflösen:

$$u = A^{-1}(f - B^T p)$$

und $u$ in der zweite Gleichung einsetzen:

$$BA^{-1}(f - B^T p) = g \quad \Leftrightarrow \quad BA^{-1}B^T p = BA^{-1}f - g$$

Das heißt, wir brauchen $BA^{-1}B^T$ und die Invertierbarkeit von $A$. Mit anderen Worten ausgedrückt:

**Anmerkung 2.5.** *[36, Anmerkung 12.10] Unter den Voraussetzungen*

$$A^{-1} \in L(V^*, V), \qquad (BA^{-1}B^T)^{-1} \in L(Q^*, Q),$$

*ist das Sattelpunktproblem (2.4) eindeutig lösbar.*

Die beiden Voraussetzungen in der Anmerkung 2.5 sind oft schwer zu überprüfen. Deswegen benötigen wir andere Bedingungen, die die Lösbarkeit garantieren.

**Satz 2.6.** *[23, Theorem 4.2.3] Angenommen, dass die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

$$\begin{array}{lll} i) & \exists\ \alpha > 0: & a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \qquad \textit{für alle } v \in \mathrm{Ker}(B). \\ ii) & \exists\ \beta > 0: & \inf\limits_{q \in Q} \sup\limits_{v \in V} \dfrac{b(v,q)}{\|v\|_V \|q\|_Q} \geq \beta. \end{array}$$

*Dann gilt für jedes $(f, g) \in V^* \times Q^*$, Problem (2.1) hat eine eindeutige Lösung.*

Wir betrachten nochmal das gestörte Sattelpunktproblem (2.5):

$$\begin{aligned} a(u,v) + b(v,p) &= \langle f, v \rangle, \qquad && \forall v \in V, \\ b(u,q) - c(p,q) &= \langle g, q \rangle, \qquad && \forall q \in Q. \end{aligned} \tag{2.5}$$

**Satz 2.7.** *[23, Proposition 4.3.1] Sei $a(\cdot,\cdot) \in L(V \times V, \mathbb{R})$ V-elliptisch, $b(\cdot,\cdot) \in L(V \times Q, \mathbb{R})$ und $c(\cdot,\cdot) \in L(Q \times Q, \mathbb{R})$ Q-elliptisch. Dann hat das Problem (2.5) zu jedem $f \in V^*$ und $g \in Q^*$ eine eindeutige Lösung $(u, p)$.*

**Satz 2.8.** *[23, Theorem 4.3.1] Seien $a(\cdot,\cdot) \in L(V \times V, \mathbb{R})$ , $c(\cdot,\cdot) \in L(Q \times Q, \mathbb{R})$ symmetrisch positiv semi-definit und $b(\cdot,\cdot) \in L(V \times Q, \mathbb{R})$ und sowie $\mathrm{Im}(B)$ abgeschlossen. Ferner gelte:*
*i) $a(\cdot,\cdot)$ ist V-elliptisch auf $\mathrm{Ker}(B)$,*

$$a(v_0, v_0) \geq \alpha_0 \|v_0\|_V^2 \qquad v_0 \in \mathrm{Ker}(B),$$

*ii)*

$$\inf_{q\in(\mathrm{Ker}(B^T))^\perp} \sup_{v\in V} \frac{b(v,q)}{\|q\|_Q\|v\|_V} = \inf_{v\in(\mathrm{Ker}(B))^\perp} \sup_{q\in Q} \frac{b(v,q)}{\|q\|_Q\|v\|_V} = \beta_0 > 0,$$

*iii)* $c(\cdot,\cdot)$ *ist Q-elliptisch auf* $\mathrm{Ker}(B^T)$,

$$c(q_0,q_0) \geq \gamma_0\|q_0\|_Q^2 \qquad q_0 \in \mathrm{Ker}(B^T).$$

*Dann hat das Problem (2.5) zu jedem* $f \in V^*$ *und* $g \in Q^*$ *eine eindeutige Lösung* $(u,p)$ *und es gilt mit einem* $C_0 > 0$*:*

$$\|u\|_V + \|p\|_Q \leq C_0\left(\|f\|_{V^*} + \|g\|_{Q^*}\right).$$

Der folgende Satz ist nützlich, wenn wir das Sattelpunktproblem als eine Variationsgleichung betrachten, siehe (2.3) bzw.(2.7).

**Satz 2.9.** [2] *[25, Kapitel III Satz 3.6][10, Theorem 5.2.1.] Seien* $U$ *und* $V$ *Hilbert-Räume. Eine lineare Abbildung* $\bar{\mathcal{A}} : U \to V^*$ *ist genau dann ein Isomorphismus, wenn die zugehörige Form* $\mathcal{A} : U\times V \to R$ *folgende Bedingungen erfüllt:*
*1 (Stetigkeit). Es ist mit* $\alpha > 0$*:*

$$|\mathcal{A}(u,v)| \leq \alpha\|u\|_U\|v\|_V, \tag{2.15a}$$

*2 (Inf-sup-Bedingung). Es ist mit einem* $\beta > 0$*:*

$$\inf_{\substack{u\in U\\u\neq 0}} \sup_{\substack{v\in V\\v\neq 0}} \frac{\mathcal{A}(u,v)}{\|u\|_U\|v\|_V} \geq \beta, \tag{2.15b}$$

*3 Zu jedem* $v \in V, v \neq 0$*, gibt es ein* $u \in U$ *mit:*

$$\exists u \in U, \qquad \mathcal{A}(u,v) \neq 0. \tag{2.15c}$$

*Ferner existiert zu jedem* $f \in V^*$ *ein eindeutiges Element* $u_0 \in U$*:*

$$\mathcal{A}(u_0,v) = f(v) \quad \forall v \in V,$$

*und es gilt mit einem* $C > 0$*:*

$$\|u_0\|_U \leq C\|f\|_{V^*}.$$

**Bemerkung 2.10.** *Die Bedingung (2.15c) ist erfüllt, falls* $U = V$ *und* $\mathcal{A}(\cdot,\cdot)$ *symmetrisch ist.*

[2] vergleiche Theorem 2.1 in [9]

***Beweis***. Aus der Bedingung (2.15b) und der Symmetrie von $\mathcal{A}(\cdot,\cdot)$ folgt:

$$\begin{aligned}\beta \leq \inf_{\substack{v\in V\\ v\neq 0}} \sup_{\substack{u\in V\\ u\neq 0}} \frac{\mathcal{A}(v,u)}{\|u\|_V\|v\|_V} &\Leftrightarrow \forall v\in V, v\neq 0,\ \sup_{\substack{u\in V\\ u\neq 0}} \frac{\mathcal{A}(v,u)}{\|u\|_V} \geq \beta\|v\|_V\\ &\Leftrightarrow \forall v\in V, v\neq 0, \exists u_0\in V\ \mathcal{A}(v,u_0)\geq \beta\|v\|_V\|u_0\|_V\\ &\Leftrightarrow \forall v\in V, v\neq 0, \exists u_0\in V\ \mathcal{A}(u_0,v)\geq \beta\|v\|_V\|u_0\|_V.\end{aligned}$$

□

Offensichtlich gelten die Bedingungen (2.15) direkt für gestörte Sattelpunktprobleme. Andererseits reichen die Bedingungen in Satz 2.6 im Fall $c(\cdot,\cdot)\not\equiv 0$ nicht aus, um die Bedingung (2.15) zu zeigen. Wir schlagen eine Verallgemeinerung der klassischen Brezzi-Bedingungen für die Analyse gestörtes Sattelpunktproblem mit $c(\cdot,\cdot)\not\equiv 0$ vor. Diese neuen Bedingungen implizieren die Babuška-Bedingung (2.15). Außerdem bietet der Satz einen Ansatz zur Auswahl geeigneter Normen, die den Beweis von Stabilität vereinfacht und verkürzt.
Wie in [44] werden wir zunächst geeignete Normen definieren. Es sei die Norm in $Q$ definiert als

$$\|q\|_Q^2 := |q|_Q^2 + c(q,q) := \langle \bar{Q}q, q\rangle, \tag{2.16a}$$

und die Norm in $V$ definiert als

$$\|v\|_V^2 := |v|_V^2 + |v|_b^2 := |v|_V^2 + \langle Bv, \bar{Q}^{-1}Bv\rangle_{Q^*\times Q} = |v|_V^2 + \|Bv\|_{Q^*}^2. \tag{2.16b}$$

Es sei $Y := V\times Q$, ausgestattet mit der Norm $\|\cdot\|_Y$, definiert durch

$$\|y\|_Y^2 = (y,y)_Y = (v,v)_V + (q,q)_Q = \|v\|_V^2 + \|q\|_Q^2, \qquad \forall y = (v;q) := \begin{pmatrix} v\\ q\end{pmatrix} \in Y, \tag{2.16c}$$

wobei $\bar{Q}: Q\to Q^*$ ein linearer Operator und $|\cdot|_Q, |\cdot|_V, |\cdot|_b$ Semi-Normen sind. Aus der Definition (2.16) folgt die Stetigkeit von $b(\cdot,\cdot)$, da

$$b(v,q) = \langle \bar{Q}^{-1}Bv, \bar{Q}q\rangle_{Q^*\times Q} = (\bar{Q}^{-1}Bv, q)_Q \leq \|\bar{Q}^{-1}Bv\|_Q\cdot\|q\|_Q \leq \|v\|_V\cdot\|q\|_Q.$$

**Satz 2.11.** *Angenommen $\|\cdot\|_V, \|\cdot\|_Q$ erfüllen das Splitting in (2.16), $a(\cdot,\cdot)\in L(V\times V,\mathbb{R})$, $c(\cdot,\cdot)\in L(Q\times Q,\mathbb{R})$ und $a(\cdot,\cdot), c(\cdot,\cdot)$ sind symmetrisch positiv semi-definit. Weiters gelte*

$$a(v,v)\geq \underline{C}_a|v|_V^2, \qquad \forall v\in V, \tag{2.17a}$$

$$\exists\beta>0: \sup_{\substack{v\in V\\ v\neq 0}} \frac{b(v,q)}{\|v\|_V} \geq \underline{\beta}|q|_Q, \qquad \forall q\in Q. \tag{2.17b}$$

*Dann sind die Bedingungen (2.15) in Satz 2.9 erfüllt.*

***Beweis.*** Die Bedingung (2.15a) ist klar, da

$$\begin{aligned}\mathcal{A}((u;p),(v;q)) =& a(u,v)+b(v,p)+b(u,q)-c(p,q)\\ \leq& \bar{C}_a\|u\|_V\|v\|_V+(\|v\|_V\|p\|_Q+\|u\|_V\|q\|_Q)+\|p\|_Q\|q\|_Q\\ \leq& \bar{C}(\|u\|_V+\|p\|_Q)(\|v\|_V+\|q\|_Q)\leq 2\bar{C}\|(u;p)\|_Y\|(v;q)\|_Y.\end{aligned}$$

wobei $\bar{C}=\max\{\bar{C}_a,1\}$. Um die Bedingung (2.15b) zu überprüfen, halten wir zunächst fest, dass nach (2.17b) ein $\tilde{u}\in V$ existiert, sodass

$$b(\tilde{u},p)=|p|_Q^2, \tag{2.18a}$$

$$\|\tilde{u}\|_V\leq\underline{\beta}^{-1}|p|_Q. \tag{2.18b}$$

Dann wählen wir

$$v:=\delta u+\tilde{u}, \tag{2.19a}$$

$$q:=-\delta p+\tilde{p}, \tag{2.19b}$$

wobei $\delta$ eine positive Konstante ist, die später bestimmt wird, und

$$\tilde{p}:=\bar{Q}^{-1}Bu. \tag{2.20}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\|v\|_V\leq&\|\delta u\|_V+\|\tilde{u}\|_V\leq\delta\|u\|_V+\underline{\beta}^{-1}|p|_Q\leq\delta\|u\|_V+\underline{\beta}^{-1}\|p\|_Q,\\ \|q\|_Q\leq&\delta\|p\|_Q+\|\tilde{p}\|_Q=\delta\|p\|_Q+(\bar{Q}^{-1}Bu,\bar{Q}^{-1}Bu)_Q^{1/2}=\delta\|p\|_Q+|u|_b.\end{aligned}$$

Das heißt

$$\|(v;q)\|_Y^2=\|v\|_V^2+\|q\|_Q^2\leq 2(\delta^2+1)\|u\|_V^2+2(\underline{\beta}^{-2}+\delta^2)\|p\|_Q^2,$$

und deshalb

$$\|(v;q)\|_Y\leq\left(2\max\{(\delta^2+1),(\underline{\beta}^{-2}+\delta^2)\}\right)^{\frac{1}{2}}\|(u;p)\|_Y. \tag{2.22}$$

Für das ausgewählte $v$ und $q$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathcal{A}((u;p),(v;q)) =& a(u,\delta u+\tilde{u})+b(\delta u+\tilde{u},p)-b(u,\delta p-\tilde{p})+c(p,\delta p-\tilde{p})\\ =&\delta a(u,u)+a(u,\tilde{u})+\delta b(u,p)+b(\tilde{u},p)-\delta b(u,p)+\langle Bu,\bar{Q}^{-1}Bu\rangle_{Q'\times Q}\\ &+\delta c(p,p)-\langle Cp,\bar{Q}^{-1}Bu\rangle_{Q'\times Q}\\ \geq&\delta a(u,u)-\frac{1}{2}\epsilon^{-1}a(u,u)-\frac{1}{2}\epsilon a(\tilde{u},\tilde{u})+|p|_Q^2+|u|_b^2+\delta c(p,p)\\ &-\frac{1}{2}\langle Cp,p\rangle_{Q'\times Q}-\frac{1}{2}\langle C\bar{Q}^{-1}Bu,\bar{Q}^{-1}Bu\rangle_{Q'\times Q}\\ \geq&\left(\delta-\frac{1}{2}\epsilon^{-1}\right)a(u,u)-\frac{1}{2}\epsilon\bar{C}_a\underline{\beta}^{-2}|p|_Q^2+|p|_Q^2+|u|_b^2+\delta c(p,p)-\frac{1}{2}c(p,p)-\frac{1}{2}|u|_b^2\\ \geq&\left(\delta-\frac{1}{2}\epsilon^{-1}\right)\underline{C}_a|u|_V^2+\left(1-\frac{1}{2}\epsilon\bar{C}_a\underline{\beta}^{-2}\right)|p|_Q^2+(\delta-\frac{1}{2})c(p,p)+\frac{1}{2}|u|_b^2.\end{aligned}$$

Setzen wir $\epsilon = \frac{1}{2}\bar{C}_a^{-1}\underline{\beta}^2$ und $\delta = \max\{\frac{1}{2}\underline{C}_a^{-1} + \bar{C}_a\underline{\beta}^{-2}, 1\}$ ein, so ergibt sich damit

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}((u;p),(v;q)) &\geq \left(\delta - \bar{C}_a\underline{\beta}^{-2}\right)\underline{C}_a|u|_V^2 + \frac{3}{4}|p|_Q^2 + \left(\delta - \frac{1}{2}\right)c(p,p) + \frac{1}{2}|u|_b^2 \\
&\geq \frac{1}{2}\left(\|u\|_V^2 + \|p\|_Q^2\right) = \frac{1}{2}\|(u;p)\|_Y^2.
\end{aligned} \tag{2.23}
$$

Aus (2.22) und (2.23) folgt schließlich

$$
\sup_{(v;q)\in Y} \frac{\mathcal{A}((u;p),(v;q))}{\|(v;q)\|_Y} \geq \underline{\alpha}\|(u;p)\|_Y \qquad \forall (u;p) \in Y, \tag{2.24}
$$

womit wir gezeigt haben, dass die Bedingung (2.15b) erfüllt ist. □

Wir werden den Satz 2.11 nun für das doppelte Sattelpunktproblem (2.10) modifizieren. Wie vorhin definieren wir zunächst die Normen. Es sei die Norm in $V_1$ definiert als

$$
\|v_1\|_{V_1}^2 := |v_1|_{V_1}^2 + |v_1|_{b_1}^2 := |v_1|_{V_1}^2 + \langle B_1 v_1, \bar{Q}^{-1}B_1 v_1\rangle_{Q^*\times Q} = |v_1|_{V_1}^2 + \|B_1 v_1\|_{Q^*}^2, \ \forall v_1 \in V_1, \tag{2.25a}
$$

oder

$$
\|v_1\|_{V_1}^2 := |v_1|_{V_1}^2, \qquad \text{falls} \quad |v_1|_{V_1}^2 \geq \underline{C}_{b1}|v_1|_{b_1}^2, \quad \underline{C}_{b1} > 0, \tag{2.25b}
$$

und die Norm in $V_2$ als

$$
\|v_2\|_{V_2}^2 := |v_2|_{V_2}^2 + |v_2|_{b_2}^2 := |v_2|_{V_2}^2 + \langle B_2 v_2, \bar{Q}^{-1}B_2 v_2\rangle_{Q^*\times Q} = |v_2|_{V_2}^2 + \|B_2 v_2\|_{Q^*}^2, \ \forall v_2 \in V_2, \tag{2.26a}
$$

oder

$$
\|v_2\|_{V_2}^2 := |v_2|_{V_2}^2, \qquad \text{falls} \quad |v_2|_{V_2}^2 \geq \underline{C}_{b2}|v_2|_{b_2}^2 \quad \underline{C}_{b2} > 0. \tag{2.26b}
$$

Man beachte, dass durch (2.25)(2.26) volle Normen erklärt sind, da im Fall (2.25b)(2.26b) auch die Semi-Normen $|\cdot|_{V_1}, |\cdot|_{V_2}$ bereits volle Normen sind. Die Norm auf $Q$ sei nach wie vor gemäß (2.16a) definiert. Weiters sei $Y := V_1 \times V_2 \times Q$ ausgestattet mit der Norm $\|\cdot\|_Y$ definiert durch

$$
\|y\|_Y^2 = (y,y)_Y = (v_1,v_1)_{V_1} + (v_2,v_2)_{V_2} + (q,q)_Q = \|v_1\|_{V_1}^2 + \|v_2\|_{V_2}^2 + \|q\|_Q^2 \quad \forall y := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ q \end{pmatrix} \in Y. \tag{2.27}
$$

Aus den Definitionen (2.25),(2.26) sieht man, dass $b_1(\cdot,\cdot) \in L(V_1 \times Q, \mathbb{R})$ und $b_2(\cdot,\cdot) \in L(V_2 \times Q, \mathbb{R})$ da

$$
\begin{aligned}
b_1(v_1,q) &= \langle \bar{Q}^{-1}B_1 v_1, \bar{Q}q\rangle_{Q^*\times Q} = (\bar{Q}^{-1}B_1 v, q)_Q \leq \|\bar{Q}^{-1}B_1 v_1\|_Q \cdot \|q\|_Q \leq \|v_1\|_{V_1} \cdot \|q\|_Q, \\
b_2(v_2,q) &= \langle \bar{Q}^{-1}B_2 v_2, \bar{Q}q\rangle_{Q^*\times Q} = (\bar{Q}^{-1}B_2 v, q)_Q \leq \|\bar{Q}^{-1}B_2 v_2\|_Q \cdot \|q\|_Q \leq \|v_2\|_{V_2} \cdot \|q\|_Q.
\end{aligned}
$$

**Korollar 2.12.** *Angenommen* $\|\cdot\|_{V_1}, \|\cdot\|_{V_2}, \|\cdot\|_Q$ *erfüllen das Splitting in* (2.25), (2.26), (2.16a), $a_1(\cdot,\cdot) \in L(V_1 \times V_1, \mathbb{R}), a_2(\cdot,\cdot) \in L(V_2 \times V_2, \mathbb{R}), c(\cdot,\cdot) \in L(Q \times Q, \mathbb{R})$ *und* $a_1(\cdot,\cdot), a_2(\cdot,\cdot), c(\cdot,\cdot)$ *sind symmetrisch positiv semi-definit. Außerdem gelte*

$$a_1(v_1, v_1) \geq \underline{C}_{a1}|v_1|^2_{V_1}, \qquad \forall v_1 \in V_1, \tag{2.28a}$$

$$a_2(v_2, v_2) \geq \underline{C}_{a2}|v_2|^2_{V_2}, \qquad \forall v_1 \in V_2, \tag{2.28b}$$

$$\exists \beta > 0 : \sup_{\substack{(v_1;v_2)\in V_1\times V_2 \\ (v_1;v_2)\neq(0;0)}} \frac{b_1(v_1,q) + b_2(v_2,q)}{(\|v_1\|^2_{V_1} + \|v_2\|^2_{V_2})^{\frac{1}{2}}} \geq \underline{\beta}|q|_Q, \qquad \forall q \in Q, \tag{2.28c}$$

*und mindesten eine der beiden folgenden Bedingungen sei erfüllt:*

$$a_1(v_1, v_1) \geq \underline{C}_{ab1}|v_1|^2_{b_1}, \qquad \forall v_1 \in V_1, \tag{2.29a}$$

$$a_2(v_2, v_2) \geq \underline{C}_{ab2}|v_2|^2_{b_2}, \qquad \forall v_1 \in V_2. \tag{2.29b}$$

*Dann sind die Bedingungen* (2.15) *in Satz 2.9 erfüllt.*

***Beweis.*** Die Bedingung (2.15a) lässt sich ähnlich wie im Beweis von Satz 2.11 nachrechnen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}((u_1;u_2;p),(v_1;v_2;q)) =& a_1(u_1,v_1) + a_2(u_2,v_2) + b_1(v_1,p) + b_2(v_2,p) - b_1(u_1,q) - b_2(u_2,q) + c(p,q) \\
\leq& \bar{C}(\|u_1\|_{V_1}\|v_1\|_{V_1} + \|u_2\|_{V_2}\|v_2\|_{V_2} + \|v_1\|_{V_1}\|p\|_Q + \|v_2\|_{V_2}\|p\|_Q + \|u_1\|_{V_1}\|q\|_Q \\
&+ \|u_2\|_{V_2}\|q\|_Q + \|p\|_Q\|q\|_Q) \\
\leq& \bar{C}(\|u_1\|_{V_1} + \|u_2\|_{V_2} + \|p\|_Q)(\|v_1\|_{V_1} + \|v_2\|_{V_2} + \|q\|_Q) \\
\leq& 3\bar{C}\|(u_1;u_2;p)\|_Y\|(v_1;v_2;q)\|_Y,
\end{aligned}$$

wobei $\bar{C} = \max\{\bar{C}_{a1}, \bar{C}_{a2}, 1\}$. Um die Bedingung (2.15b) zu überprüfen, halten wir fest, dass nach (2.28c) ein $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \in V_1 \times V_2$ existiert, sodass

$$b_1(\tilde{u}_1, p) + b_2(\tilde{u}_2, p) = |p|^2_Q, \tag{2.30a}$$

$$(\|\tilde{u}_1\|^2_{V_1} + \|\tilde{u}_2\|^2_{V_2})^{\frac{1}{2}} \leq \underline{\beta}^{-1}|p|_Q. \tag{2.30b}$$

Dann wählen wir

$$v_1 := \delta u_1 + \tilde{u}_1, \qquad v_2 := \delta u_2 + \tilde{u}_2, \qquad q := -\delta p + \tilde{p}, \tag{2.31}$$

wobei $\delta$ eine positive Konstante ist, die später bestimmt wird, und

$$\tilde{p} := \bar{Q}^{-1}(B_1u_1 + B_2u_2). \tag{2.32}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\|v_1\|_{V_1} \leq& \|\delta u_1\|_{V_1} + \|\tilde{u}_1\|_{V_1} \leq \delta\|u_1\|_{V_1} + \underline{\beta}^{-1}|p|_Q \leq \delta\|u_1\|_{V_1} + \underline{\beta}^{-1}\|p\|_Q, \\
\|v_2\|_{V_2} \leq& \|\delta u_2\|_{V_2} + \|\tilde{u}_2\|_{V_2} \leq \delta\|u_2\|_{V_2} + \underline{\beta}^{-1}|p|_Q \leq \delta\|u_2\|_{V_2} + \underline{\beta}^{-1}\|p\|_Q, \\
\|q\|_Q \leq& \delta\|p\|_Q + \|\tilde{p}\|_Q = \delta\|p\|_Q + (\bar{Q}^{-1}(B_1u_1 + B_2u_2), \bar{Q}^{-1}(B_1u_1 + B_2u_2))^{1/2}_Q \\
=& \delta\|p\|_Q + \|B_1u_1 + B_2u_2\|_{Q^*} \leq \delta\|p\|_Q + \|B_1u_1\|_{Q^*} + \|B_2u_2\|_{Q^*},
\end{aligned}$$

das heißt

$$\|(v_1;v_2;q)\|_Y^2 = \|v_1\|_{V_1}^2 + \|v_2\|_{V_2}^2 + \|q\|_Q^2 \leq (2\delta^2+3)\|u_1\|_{V_1}^2 + (2\delta^2+3)\|u_2\|_{V_2}^2 + (4\underline{\beta}^{-2}+3\delta^2)\|p\|_Q^2.$$

Das bedeutet

$$\|(v_1;v_2;q)\|_Y \leq \Big(\max\{(2\delta^2+3),(4\underline{\beta}^{-2}+3\delta^2)\}\Big)^{\frac{1}{2}} \|(u_1;u_2;p)\|_Y. \tag{2.34}$$

Für die ausgewählten $v_1, v_2$ und $q$ bekommen wir

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}((u_1;u_2;p),(v_1;v_2;q)) = {}& a_1(u_1,\delta u_1+\tilde{u}_1) + a_2(u_2,\delta u_2+\tilde{u}_2) + b_1(\delta u_1+\tilde{u}_1,p) + b_2(\delta u_2+\tilde{u}_2,p)\\
&- b_1(u_1,\delta p - \bar{Q}^{-1}(B_1u_1+B_2u_2)) - b_2(u_2,\delta p - \bar{Q}^{-1}(B_1u_1+B_2u_2))\\
&+ c(p,\delta p - \bar{Q}^{-1}(B_1u_1+B_2u_2))\\
={}&\delta a_1(u_1,u_1) + a_1(u_1,\tilde{u}_1) + \delta a_2(u_2,u_2) + a_2(u_2,\tilde{u}_2) + |p|_Q^2 + \delta c(p,p)\\
&+ \langle B_1u_1+B_2u_2, \bar{Q}^{-1}(B_1u_1+B_2u_2)\rangle_{Q^*\times Q} - \langle Cp, \bar{Q}^{-1}(B_1u_1+B_2u_2)\rangle_{Q^*\times Q}\\
\geq{}&\delta a_1(u_1,u_1) - \frac{1}{2}\epsilon^{-1}a_1(u_1,u_1) - \frac{1}{2}\epsilon a_1(\tilde{u}_1,\tilde{u}_1) + \delta a_2(u_2,u_2) - \frac{1}{2}\epsilon^{-1}a_2(u_2,u_2)\\
&- \frac{1}{2}\epsilon a_1(\tilde{u}_2,\tilde{u}_2) + |p|_Q^2 + \delta c(p,p) + \langle B_1u_1+B_2u_2, \bar{Q}^{-1}(B_1u_1+B_2u_2)\rangle_{Q^*\times Q}\\
&- \frac{1}{2}\langle Cp,p\rangle_{Q^*\times Q} - \frac{1}{2}\langle C\bar{Q}^{-1}(B_1u_1+B_2u_2), \bar{Q}^{-1}(B_1u_1+B_2u_2)\rangle_{Q^*\times Q}\\
\geq{}&(\delta - \frac{1}{2}\epsilon^{-1})a_1(u_1,u_1) - \frac{1}{2}\epsilon\bar{C}_{a1}\underline{\beta}^{-2}|p|_Q^2 + (\delta - \frac{1}{2}\epsilon^{-1})a_2(u_2,u_2) - \frac{1}{2}\epsilon\bar{C}_{a2}\underline{\beta}^{-2}|p|_Q^2\\
&+ |p|_Q^2 + (\delta - \frac{1}{2})c(p,p) + \frac{1}{2}\langle B_1u_1+B_2u_2, \bar{Q}^{-1}(B_1u_1+B_2u_2)\rangle_{Q^*\times Q}.
\end{aligned}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass die Bedingung (2.29a) erfüllt. (Der Beweis unter Annahme der Bedingung (2.29b) verläuft analog.)

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}((u_1;u_2;p),(v_1;v_2;q)) \geq{}& (\delta - \frac{1}{2}\epsilon^{-1})a_1(u_1,u_1) + (\delta - \frac{1}{2}\epsilon^{-1})a_2(u_2,u_2) - \frac{1}{2}\epsilon(\bar{C}_{a1}+\bar{C}_{a2})\underline{\beta}^{-2}|p|_Q^2\\
&+ |p|_Q^2 + (\delta - \frac{1}{2})c(p,p) + \frac{1}{2}\langle B_1u_1+B_2u_2, \bar{Q}^{-1}(B_1u_1+B_2u_2)\rangle_{Q^*\times Q}\\
&+ \frac{3}{4}\langle B_1u_1, \bar{Q}^{-1}B_1u_1\rangle_{Q^*\times Q} - \frac{3}{4}\langle B_1u_1, \bar{Q}^{-1}B_1u_1\rangle_{Q^*\times Q}\\
\geq{}&(\delta - \frac{1}{2}\epsilon^{-1} - \frac{3}{4}\underline{C}_{ab1}^{-1})a_1(u_1,u_1) + (\delta - \frac{1}{2}\epsilon^{-1})a_2(u_2,u_2) - \frac{1}{2}\epsilon(\bar{C}_{a1}+\bar{C}_{a2})\underline{\beta}^{-2}|p|_Q^2\\
&+ |p|_Q^2 + (\delta - \frac{1}{2})c(p,p) + \frac{1}{4}\langle B_2u_2, \bar{Q}^{-1}B_2u_2\rangle_{Q^*\times Q} + \frac{1}{4}\langle B_1u_1, \bar{Q}^{-1}B_1u_1\rangle_{Q^*\times Q}.
\end{aligned}$$

Setzen wir nun $\epsilon = \frac{1}{2}(\bar{C}_{a1}+\bar{C}_{a2})^{-1}\underline{\beta}^2$ und $\delta = \max\{\frac{1}{4}\underline{C}_{a1}^{-1} + (\bar{C}_{a1}+\bar{C}_{a2})\underline{\beta}^{-2} + \frac{3}{4}\underline{C}_{ab1}^{-1}, \frac{1}{4}\underline{C}_{a2}^{-1} + (\bar{C}_{a1} + \bar{C}_{a2})\underline{\beta}^{-2}, \frac{3}{4}\}$ ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathcal{A}((u_1;u_2;p),(v_1;v_2;q)) &\geq \left(\delta - (\bar{C}_{a1}+\bar{C}_{a2})\underline{\beta}^{-2} - \frac{3}{4}\underline{C}_{ab1}^{-1}\right)\underline{C}_{a1}|u_1|_{V_1}^2 + \frac{1}{4}\|B_2u_2\|_{Q^*}^2 + \frac{1}{4}\|B_1u_1\|_{Q^*}^2 \\ &\quad + \left(\delta - (\bar{C}_{a1}+\bar{C}_{a2})\underline{\beta}^{-2}\right)\underline{C}_{a2}|u_2|_{V_2}^2 + \frac{3}{4}|p|_Q^2 + \left(\delta - \frac{1}{2}\right)c(p,p) \\ &\geq \frac{1}{4}|u_1|_{V_1}^2 + \frac{1}{4}\|B_1u_1\|_{Q^*}^2 + \frac{1}{4}|u_2|_{V_2}^2 + \frac{1}{4}\|B_2u_2\|_{Q^*}^2 + \frac{3}{4}|p|_Q^2 + \frac{1}{4}c(p,p) \\ &\geq \frac{1}{4}\left(\|u_1\|_{V_1}^2 + \|u_2\|_{V_2}^2 + \|p\|_Q^2\right) = \frac{1}{4}\|(u_1;u_2;p)\|_Y^2. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Aus (2.34) und (2.35) folgt schließlich

$$\sup_{(v_1;v_2;q)\in Y} \frac{\mathcal{A}((u_1;u_2;p),(v_1;v_2;q))}{\|(v_1;v_2;q)\|_Y} \geq \underline{\alpha}\|(u_1;u_2;p)\|_Y, \qquad \forall (u_1;u_2;p)\in Y, \tag{2.36}$$

womit wir gezeigt haben, dass die Bedingung (2.15b) erfüllt ist. □

## 2.3 Operator-Vorkonditionierung

Der folgende Überblick ist aus [53]. Betrachten wir das System

$$\mathcal{A}x = f,$$

wobei $\mathcal{A}$ ein unbeschränkter Operator sei, oder alternativ $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X, X^*)$, wobei $X$ ein Hilbert-Raum sei und

$$\langle \mathcal{A}u, v\rangle = \langle u, \mathcal{A}v\rangle, \qquad u, v \in X.$$

Der kanonische Vorkonditionierer $\mathcal{B}$, den wir für den Operator $\mathcal{A}$ betrachten wollen, ist ein Isomorphismus von $X^*$ auf $X$. Weiterhin nehmen wir an, dass der Vorkonditionierer $\mathcal{B}$ symmetrisch und positiv definit ist, in dem Sinne , dass $\langle \mathcal{B}\cdot, \cdot\rangle$ ein inneres Produkt auf $X^*$ ist. Daher ist der Vorkonditionierer ein Riesz-Operator, der von $X^*$ nach $X$ abbildet.

Als Konsequenz ist $\langle \mathcal{B}^{-1}\cdot, \cdot\rangle$ ein inneres Produkt auf $X$ mit zugehöriger Norm, die äquivalent zu $\|.\|_X$ ist, z.B, $\langle \mathcal{B}^{-1}\cdot, \cdot\rangle := \|.\|_X^2$.
Das heißt, die Verkettung

$$\mathcal{B}\mathcal{A} : X \xrightarrow{\mathcal{A}} X^* \xrightarrow{\mathcal{B}} X$$

ist wieder ein Isomorphismus von X auf X.

**Bemerkung 2.13.** *Der Vorkonditionierer $\mathcal{B}$ ist nicht eindeutig, da der Raum $X^*$ verschiedene innere Produkte haben kann, die zu derselben Topologie führen.*

Wir betrachten das Sattelpunktproblem (2.4), also

$$\bar{\mathcal{A}} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \text{ wobei } \bar{\mathcal{A}} := \begin{bmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

und nehmen an, dass $\bar{\mathcal{A}}$ ein Isomorphismus ist,

$$\bar{\mathcal{A}} : X \to X^*, \quad \text{wobei} \quad X = V \times W \quad X^* = V^* \times W^*.$$

Als nächstes betrachten wir einen abstrakten Vorkonditionierer für das Sattelpunktproblem (2.4). Der jeweilige Vorkonditionierer $\mathcal{B}$ soll ein Isomorphismus sein, der $X^*$ auf $X$ abbildet. Die kanonische Wahl ist ein Riesz-Operator, der $X^*$ auf $X$ abbildet und die Form

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}$$

hat, wobei $M : V^* \to V$ und $N : W^* \to W$ symmetrisch und positiv-definite Isomorphismen sind. Daher sind block-diagonale Vorkonditionierer in einem gewissen Sinn eine natürliche Wahl für diese Probleme.

# 3 Multi-Netzwerk poroelastizitätstheorie (MPET)

## 3.1 Quasistatisches Problem

### 3.1.1 Das biotsche Modell

Zur Erinnerung wiederholen wir an dieser Stelle nochmals die Problemstellung (vgl. Kapitel 1). Für homogene isotrope, lineare, elastische, poröse Medien lautet das Biot-Modell in einem beschränkten Lipschitz-Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d = 2, 3$, wie folgt:

$$-\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \alpha \nabla p = \mathbf{f} \qquad \text{in} \quad \Omega \times (0, T), \tag{1.1a}$$

$$\boldsymbol{v} = -K \nabla p \qquad \text{in} \quad \Omega \times (0, T), \tag{1.1b}$$

$$\alpha \text{div } \dot{\boldsymbol{u}} + \text{div } \boldsymbol{v} + c_p \dot{p} = g \qquad \text{in} \quad \Omega \times (0, T), \tag{1.1c}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}) + \lambda \text{div } (\boldsymbol{u})\mathbf{I} = 2\mu \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}) + \lambda Tr(\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}))\mathbf{I}, \tag{1.1d}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^T). \tag{1.1e}$$

Die Anfangs- und Randbedingungen sind erforderlich, um die Existenz und die Eindeutigkeit der mathematischen Lösung sicherzustellen. Für die Anfangsbedingungen benötigen wir entweder Anfangs-Spannungs- oder Anfangs-Verschiebungsfeld und ein Druckfeld oder ein Flussfeld. Die angegebenen Bedingungen müssen selbst einige Einschränkungen erfüllen, wie die Gleichgewichtsgleichung (1.1a) und die Kompatibilitätsgleichung (1.1d).
Die Randbedingung besteht im allgemeinen aus zwei Typen: einem (Potential) Dirichlet- und einem (Gradient) Neumann-Typ. Für ein poroelastisches Medium sind Randbedingungen sowohl für den porösen Körper als auch für das Fluid erforderlich, siehe [30].

Eine allgemeine Anfgangsbedingung ist gegeben durch

$$p(x, 0) = p_0(x), \quad \boldsymbol{u}(x, 0) = \boldsymbol{u}_0(x), \qquad x \in \Omega.$$

Wir betrachten zuerst Randbedingungen für die Festkörperkomponente:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}(x,t) &= \boldsymbol{u}_D(x,t); \quad x \in \Gamma_{\boldsymbol{u},D}, \quad t>0, \\ (\boldsymbol{\sigma}(x,t)+\alpha \mathbf{I})\boldsymbol{n}(x) &= \boldsymbol{g}_N(x,t); \quad x \in \Gamma_{\boldsymbol{u},N}, \quad t>0, \end{aligned}$$

wobei $\boldsymbol{n}$ die äußere Normale zu $\partial\Omega$ bezeichnet und $\bar{\Gamma}_{\boldsymbol{u},D} \cup \bar{\Gamma}_{\boldsymbol{u},N} = \partial\Omega$ und $\Gamma_{\boldsymbol{u},D} \cap \Gamma_{\boldsymbol{u},N} = \phi$. Die erste Bedingung (Verschiebung) ist eine Dirichlet-Randbedingung, während die zweite (Traktion) eine Neumann-Randbedingung ist.
Dann betrachten wir Randbedingungen für die Flüssigkeitskomponente:

$$\begin{aligned} p(x,t) &= p_D(x,t); \quad x \in \Gamma_{p,D}, \quad t>0, \\ -(K\nabla p(x,t)) \cdot \boldsymbol{n}(x) = \boldsymbol{v}(x,t)\cdot \boldsymbol{n}(x) &= q_N(x,t); \quad x \in \Gamma_{p,N}, \quad t>0, \end{aligned}$$

wobei $\bar{\Gamma}_{p,D} \cup \bar{\Gamma}_{p,N} = \partial\Omega$ und $\Gamma_{p,D} \cap \Gamma_{p,N} = \phi$ . Die erste Bedingung (Druck) ist eine Dirichlet-Randbedingung, während die zweite eine Neumann-Randbedingung (für den Normalfluss) ist. Die Wohlgestelltheit des System (1.1) kann man in [61, 69] finden.

Ein üblicher Weg, das zeitabhängige Problem numerisch zu lösen, besteht darin, es zeitlich zu diskretisieren und in jedem Zeitschritt ein statisches Problem zu lösen. Unter Verwendung der Rückwärts-Euler-Methode für die Zeitdiskretisierung erhält man auf diese Weise ein $3 \times 3$-Block-System von Zeit-Schritt-Gleichungen. Zuerst wenden wir die Rückwärts-Euler-Methode auf die Gleichung (1.1c) an:

$$\begin{aligned} \alpha \mathrm{div} \left( \frac{\boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{u}^{k-1}}{\tau} \right) + \mathrm{div}\ \boldsymbol{v}^k + \alpha_p \left( \frac{p^k - p^{k-1}}{\tau} \right) &= g^k \\ \Leftrightarrow \alpha \mathrm{div}\ \boldsymbol{u}^k + \mathrm{div}\ \boldsymbol{v}^k + \tau\alpha_p p^k &= \tau g^k + p^{k-1} + \alpha \mathrm{div}\ (\boldsymbol{u}^{k-1}) \\ \Leftrightarrow \alpha \mathrm{div}\ \boldsymbol{u}^k + \mathrm{div}\ \boldsymbol{v}^k + \tau\alpha_p p^k &= \tilde{g}^k. \end{aligned}$$

Multiplizieren wir (1.1b) mit $\tau$ und schreiben wir $\tilde{g}$ ohne Tilde, so erhalten wir:

$$\mathcal{A} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}^k \\ \boldsymbol{v}^k \\ p^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}^k \\ \mathbf{0} \\ g^k \end{bmatrix} \qquad \text{wobei} \qquad \mathcal{A} := \begin{bmatrix} -2\mu \mathrm{div}\ \boldsymbol{\epsilon} - \lambda\nabla\mathrm{div} & 0 & \alpha\nabla \\ 0 & \tau K^{-1} I & \tau\nabla \\ -\alpha\mathrm{div} & -\tau\mathrm{div} & -c_p I \end{bmatrix}, \tag{3.2}$$

für die unbekannten Zeitschrittfunktionen:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}^k &= \boldsymbol{u}(x,t_k) \in \boldsymbol{U} := \{\boldsymbol{u} \in H^1(\Omega)^d : \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_D \text{ auf } \Gamma_{\boldsymbol{u},D}\}, \\ \boldsymbol{v}^k &= \boldsymbol{v}(x,t_k) \in \boldsymbol{V} := \{\boldsymbol{v} \in H(\mathrm{div}\ ,\Omega) : \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = q_N \text{ auf } \Gamma_{p,N}\}, \\ p^k &= p(x,t_k) \in P := L^2(\Omega), \end{aligned}$$

und $\boldsymbol{f}^k = \boldsymbol{f}(x,t), g^k = g(x,t) = \alpha\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}^k + \mathrm{div}\ \boldsymbol{v}^k + \tau\alpha_p p^k$ zu jedem gegebenen Zeitpunkt $t = t_k = t_{k-1} + \tau$.

### 3.1.2 Das MPET-Modell

Die MPET-Gleichungen (multiple-network poroelastic theory) können verwendet werden, um die Interaktion vieler Fluidnetzwerke zu beschreiben, die einen elastischen Körper (auch manchmal Matrix genannt) durchdringen.
Die MPET-Gleichungen wurden in der Geomechanik [12] eingeführt, um die mechanische Deformation und den Fluidfluss in porösen Medien zu beschreiben. Während des letzten Jahrzehnts hat MPET viele wichtige Anwendungen in der Medizin und Biomechanik gefunden und wurde somit ein aktiver Bereich der wissenschaftlichen Forschung. Das biologische MPET-Modell erfasst den Fluss über Skalen und Netzwerke in weichem Gewebe. Insbesondere wird MPET modifiziert, um eine detaillierte Untersuchung des räumlich-zeitlichen Transports von Flüssigkeit zwischen dem zerebralen Blut, der Cerebrospinalflüssigkeit (CSF) und dem Hirnparenchym über Skalen hinweg zu ermöglichen [64].

Auch hier sei nochmals die mathematische Formulierung des Problems aus Kapital 1 wiederholt. Für ein beschränktes Lipschitz-Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d = 2, 3$ wird das MPET-Modell durch die Verschiebung $\boldsymbol{u}$, $n$ Flüsse $\boldsymbol{v}_i$ und $n$ entsprechende Drücke $p_i$ beschrieben. Die Gleichungen, die das Modell beschreiben, sind

$$-\mathrm{div}\ \boldsymbol{\sigma} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \nabla p_i = \boldsymbol{f} \qquad \text{in} \qquad \Omega \times (0, T), \tag{1.2a}$$

$$\boldsymbol{v}_i = -K_i \nabla p_i \qquad \text{in} \qquad \Omega \times (0, T), \tag{1.2b}$$

$$\alpha_i \mathrm{div}\ \dot{\boldsymbol{u}} + \mathrm{div}\ \boldsymbol{v}_i + c_{p_i} \dot{p}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \beta_{ij}(p_i - p_j) = g_i \qquad \text{in} \qquad \Omega \times (0, T), \tag{1.2c}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}) + \lambda \mathrm{div}\ (\boldsymbol{u})\mathbf{I}, \tag{1.1d}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^T), \tag{1.1e}$$

für $i = 1, \ldots, n$.

Wir verwenden auch hier wieder die Rückwärts-Euler-Methode für die Zeitdiskretisierung der MPET- Gleichung, um das zeitabhängige Problem numerisch zu lösen. Damit erhält man auf analoge Weise ein $(2n + 1) \times (2n + 1)$-Block-System von Zeit-Schritt-Gleichungen.

$$\mathcal{A} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}^k \\ \boldsymbol{v}_1^k \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_n^k \\ p_1^k \\ \vdots \\ p_n^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}^k \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \tilde{g}_1^k \\ \vdots \\ \tilde{g}_n^k \end{bmatrix}, \tag{3.4}$$

wobei

$$\mathcal{A} := \begin{bmatrix} -2\mu\mathrm{div}\,\boldsymbol{\epsilon} - \lambda\nabla\mathrm{div} & 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_1\nabla & \dots & \dots & \alpha_n\nabla \\ \\ 0 & \tau K_1^{-1} I & 0 & \dots & 0 & \tau\nabla & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \tau K_n^{-1} I & 0 & \dots & 0 & \tau\nabla \\ \\ -\alpha_1\mathrm{div} & -\tau\mathrm{div} & 0 & \dots & 0 & -c_{p_1}I - \tau\beta_{11}I & \tau\beta_{12}I & \dots & \tau\beta_{1n}I \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots & \tau\beta_{21}I & \ddots & & \tau\beta_{2n}I \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -\alpha_n\mathrm{div} & 0 & \dots & 0 & -\tau\mathrm{div} & \tau\beta_{n1}I & \tau\beta_{n2}I & \dots & -c_{p_n}I - \tau\beta_{nn}I \end{bmatrix},$$

und $\beta_{ii} = \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} \beta_{ij}$. Für die unbekannten Zeitschrittfunktionen gilt:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}^k &= \boldsymbol{u}(x,t_k) \in \boldsymbol{U} := \{\boldsymbol{u} \in H^1(\Omega)^d : \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_D \text{ auf } \Gamma_{\boldsymbol{u},D}\}, \\ \boldsymbol{v}_i^k &= \boldsymbol{v}_i(x,t_k) \in \boldsymbol{V}_i := \{\boldsymbol{v} \in H(\mathrm{div}\,,\Omega) : \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{n} = q_{i,N} \text{ auf } \Gamma_{p_i,N}\}, \quad i = 1,\dots,n, \\ p_i^k &= p_i(x,t_k) \in P_i := L^2(\Omega), \quad i = 1,\dots,n, \end{aligned}$$

und $\boldsymbol{f}^k = \boldsymbol{f}(x,t_k)$ , $\tilde{g}_i^k = -\tau g_i(x,t_k) - \alpha_i \mathrm{div}\,(\boldsymbol{u}^{k-1}) - c_{p_i} p_i^{k-1}$ zu jedem gegebenen Zeitpunkt $t = t_k = t_{k-1} + \tau$. Betrachtet man den Fall $\Gamma_{\boldsymbol{u},D} = \Gamma_{p_i,N} = \Gamma$, $\boldsymbol{u}_D = \boldsymbol{0}$ und $q_{i,N} = 0$, so sind $\boldsymbol{U} = H_0^1(\Omega)^d$ und $\boldsymbol{V}_i = H_0(\mathrm{div}\,,\Omega)$ zu verwenden.

## 3.2 Dynamisches Problem

### 3.2.1 Das biotsche Modell

Wir beginnen mit dem Ein-Netzwerk-Modell, das wir auch als dynamisches Biot-Problem bezeichnen wollen. Für ein offenes Gebiet $\Omega \subset \mathbf{R}^d, d = 2,3$ sind die Verschiebung $\boldsymbol{u}$ der festen Matrix, die relative Verschiebung $\boldsymbol{v} := \varphi(\tilde{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{u})$ der Flüssigkeit und der Flüssigkeitsdruck $p$ die unbekannten physikalischen Größen im dynamischen Biot-Problem [20, 18], wobei $\tilde{\boldsymbol{v}}$ die Verschiebung der Flüssigkeit und mit $\varphi \in (0,1)$ die Porosität des Festkörpers sind [1] vgl. [19].

[1] Aus [19] ist die Porosität $\varphi$ definiert als $\varphi = \frac{V_p}{V_b}$, wobei $V_p$ das Volumen der Poren in der Probekörper des Volumens $V_b$ ist.

Im Regime der linearen Elastizität (unter Annahme des Hookeschen Gesetzes) haben wir die Beziehungen

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) = 2\mu\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}) + \lambda \mathrm{div}\,(\boldsymbol{u})\mathbf{I}, \tag{1.1d}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\left(\nabla\boldsymbol{u} + (\nabla\boldsymbol{u})^T\right). \tag{1.1e}$$

Die Gesamtdichte $\rho$ des fluid-gesättigten porösen Mediums ist durch

$$\rho := \varphi\rho_f + (1-\varphi)\rho_s, \tag{3.5}$$

definiert, wobei $\rho_f$ die Flüssigkeitsdichte und $\rho_s$ die Feststoffdichte sind. Die erste Bewegungsgleichung lautet

$$-\mathrm{div}\;\boldsymbol{\sigma} + \rho\ddot{\boldsymbol{u}} + \rho_f\dot{\boldsymbol{v}} + \alpha\nabla p = \boldsymbol{f}, \quad \text{in } \Omega\times(0,T), \tag{3.6a}$$

wobei $\alpha \in [\varphi, 1]$ die Biot-Willis-Konstante bezeichnet [2].

Die zweite Bewegungsgleichung beschreibt die Impulsbilanz des Fluid und lautet

$$\rho_f\ddot{\boldsymbol{u}} + \rho_{m_f}\ddot{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{K}^{-1}\dot{\boldsymbol{v}} + \nabla p = -\boldsymbol{g}, \quad \text{in } \Omega\times(0,T), \tag{3.6b}$$

wobei $\rho_{m_f} \geq \rho_f/\varphi$ die effektive Flüssigkeitsdichte, $\boldsymbol{f} = \rho\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{g} = \rho_f\boldsymbol{b}$ [67] sind und $\boldsymbol{b}$ die Erdbeschleunigung ist. Das System wird durch die Massenerhaltungsgleichung geschlossen

$$-\alpha\dot{\mathrm{div}}\;\boldsymbol{u} - \dot{\mathrm{div}}\;\boldsymbol{v} - c_p\dot{p} = 0, \quad \text{in } \Omega\times(0,T). \tag{3.6c}$$

Das dynamische Biot-Problem (3.6) muss durch geeignete Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt $t = t_0$ ergänzt werden, z.B., $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{u}^{(0)}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{v}^{(0)}(\boldsymbol{x})$, $p(\boldsymbol{x},0) = p^{(0)}(\boldsymbol{x})$, $\dot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{u}^{(1)}(\boldsymbol{x})$, $\dot{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{v}^{(1)}(\boldsymbol{x})$ zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ und durch die richtigen Randbedingungen zu jeder Zeit $t > t_0$, z.B.,

$$\begin{aligned}
p(\boldsymbol{x},t) &= p_D(\boldsymbol{x},t) \quad \text{für } \boldsymbol{x}\in\Gamma_{p,D}, \quad t>0, && (3.7a)\\
\boldsymbol{K}\frac{\partial p(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{n}} &= q_N(\boldsymbol{x},t) \quad \text{für } \boldsymbol{x}\in\Gamma_{p,N}, \quad t>0, && (3.7b)\\
\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) &= \boldsymbol{u}_D(\boldsymbol{x},t) \quad \text{für } \boldsymbol{x}\in\Gamma_{\boldsymbol{u},D}, \quad t>0, && (3.7c)\\
(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},t) - \alpha p\boldsymbol{I})\,\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{g}_N(\boldsymbol{x},t) \quad \text{für } \boldsymbol{x}\in\Gamma_{\boldsymbol{u},N}, \quad t>0, && (3.7d)
\end{aligned}$$

wobei $\Gamma_{p,D}\cap\Gamma_{p,N} = \emptyset$, $\overline{\Gamma}_{p,D}\cup\overline{\Gamma}_{p,N} = \Gamma = \partial\Omega$ und $\Gamma_{\boldsymbol{u},D}\cap\Gamma_{\boldsymbol{u},N} = \emptyset$, $\overline{\Gamma}_{\boldsymbol{u},D}\cup\overline{\Gamma}_{\boldsymbol{u},N} = \Gamma$. Einen Beweis der Wohlgestelltheit des Systems (3.6) kann man zum Beispiel in [55] finden.

Ein anderes weitverbreitetes Modell ist z.B. in [61, p.313] zu finden, welches im Vergleich zu (3.6) eine Vereinfachung darstellt, die sich in speziellen Fällen rechtfertigen lässt. In [15] wurde ein iteratives Kopplungsschema für die numerische Approximation des in [61] vorgestellten Systems für die dynamische Porositätselastizität vorgelegt. In [16] sind die numerische Approximation

[2]Aus physikalischen Gründen nehmen wir an, dass $\varphi \leq \alpha \leq 1$, vgl. [21].

des in [61] vorgestellten Systems durch die Raum-Zeit Finite-Elemente-Methode studiert und die Fehlerschätzungen nachgewiesen.
In komprimierter Notation kann das System (3.6a)–(3.6c) in folgender Form geschrieben werden

$$\mathcal{M}\,\ddot{\boldsymbol{y}} + \mathcal{D}\dot{\boldsymbol{y}} + \mathcal{L}\boldsymbol{y} = \mathcal{F}, \tag{3.8}$$

wobei die Operatoren $\mathcal{M}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{L}$, die rechte Seite $\mathcal{F}$, und der unbekannter Vektor $\boldsymbol{y}$ durch

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \rho I & \rho_f I & 0 \\ \rho_f I & \rho_{m_f} I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.9a}$$

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{K}^{-1} & 0 \\ -\alpha \mathrm{div} & -\mathrm{div} & -c_p I \end{bmatrix}, \tag{3.9b}$$

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} -2\mu \mathrm{div}\, \boldsymbol{\epsilon} - \lambda \nabla \mathrm{div} & 0 & \alpha\nabla \\ 0 & 0 & \nabla \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.9c}$$

und

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{g} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \\ p \end{bmatrix}, \tag{3.10}$$

gegeben sind.

Viele implizite Zeitintegrationsschemata, beispielsweise die Crank Nicolson-Methode, vgl. [37], können nicht direkt angewendet werden, da sie die Invertierbarkeit von $\mathcal{M}$ verlangen. Weitere verfeinerte Methoden wurden im vorliegenden Kontext jedoch bereits in [68] berücksichtigt. Bevor wir uns auch mit diesem Problem befassen, werden wir das System (3.6) verallgemeinern, um das dynamische MPET-Modell als Gegenstand weiterer Diskussionen vorzustellen.

### 3.2.2 Das MPET-Modell

Das MPET-Modell wird durch die Verschiebung $\boldsymbol{u}$, sowie jeweils $n$ Verschiebungen $\tilde{\boldsymbol{v}}_i$ von Fluiden und zugehörige relative Verschiebung $\boldsymbol{v}_i = \varphi_i(\tilde{\boldsymbol{v}}_i - \boldsymbol{u})$ und $n$ Drücke $p_i$ beschrieben, wobei $\varphi_i$ die Porosität des Festkörpers $i$-ten Netzwerks bezeichnet. Entsprechend der Definition von $\varphi$ in [19] können wir annehmen

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i = \varphi \in (0,1) \quad \text{und} \quad \varphi_i \in (0,1) \quad \text{für alle } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Dann lautet das MPET-Modell folgendermaßen

$$
\begin{aligned}
-\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \ddot{\boldsymbol{u}} + \sum_{i=1}^{n} \rho_i \ddot{\boldsymbol{v}}_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \nabla p_i &= \boldsymbol{f}, \quad \text{in } \Omega \times (0,T), && (3.11a)\\
\rho_i \ddot{\boldsymbol{u}} + \rho_{m_i} \ddot{\boldsymbol{v}}_i + \boldsymbol{K}_i^{-1} \dot{\boldsymbol{v}}_i + \nabla p_i &= \boldsymbol{g}_i, \quad \text{in } \Omega \times (0,T), \quad \text{für alle } i = 1,\dots,n, && (3.11b)\\
-\alpha_i \operatorname{div} \dot{\boldsymbol{u}} - \operatorname{div} \dot{\boldsymbol{v}}_i - c_{p_i} \dot{p}_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \tilde{\beta}_{ij}(p_i - p_j) &= 0, \quad \text{in } \Omega \times (0,T), \quad \text{für alle } i = 1,\dots,n, && (3.11c)
\end{aligned}
$$

wobei $\rho := \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \rho_i + (1-\varphi)\rho_s$, $\rho_i$ die $i$-ten Flüssigkeitsdichte, $\alpha_i \in [\varphi_i, 1]$ die Biot-Willis-Konstante des $i$-ten Netzwerks und $\rho_{m_i} \geq \frac{\rho_i}{\varphi_i}$ seine effektive Dichte ist, vgl. [20].

Auch hier kann das System (3.11) in der Form (3.8) dargestellt werden, jetzt jedoch mit Operatoren $\mathcal{M}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{L}$, rechter Seite $\mathcal{F}$ und unbekanntem Vektor $\boldsymbol{y}$ gegeben durch

$$
\mathcal{M} = \begin{bmatrix}
\rho I & \rho_1 I & \cdots & \rho_n I & 0 & \cdots & 0\\
\rho_1 I & \rho_{m_1} I & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\rho_n I & 0 & \cdots & \rho_{m_n} I & 0 & \cdots & 0\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix}, \mathcal{D} = \begin{bmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & \boldsymbol{K}_1^{-1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{K}_n^{-1} & 0 & \cdots & 0\\
-\alpha_1 \operatorname{div} & -\operatorname{div} & \cdots & 0 & -c_{p1} I & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
-\alpha_n \operatorname{div} & 0 & \cdots & -\operatorname{div} & 0 & \cdots & -c_{pn} I
\end{bmatrix}, \tag{3.12a}
$$

$$
\mathcal{L} = \begin{bmatrix}
-2\mu \operatorname{div} \boldsymbol{\epsilon} - \lambda \nabla \operatorname{div} & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \nabla & \cdots & \alpha_n \nabla\\
0 & 0 & \cdots & 0 & \nabla & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \nabla\\
0 & 0 & \cdots & 0 & -\tilde{\beta}_{11} I & \cdots & \tilde{\beta}_{1n} I\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{\beta}_{n1} I & \cdots & -\tilde{\beta}_{nn} I
\end{bmatrix}, \quad \mathcal{F} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}\\ \boldsymbol{g}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{g}_n\\ 0\\ \vdots\\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{v}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{v}_n\\ p_1\\ \vdots\\ p_n \end{bmatrix}. \tag{3.12b}
$$

wobei $\tilde{\beta}_{ii} = \sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} \tilde{\beta}_{ij}$. Man beachte, dass $(\mathcal{M} + \mathcal{L} + \mathcal{D})$ wie zuvor selbstadjungiert ist. Im nächsten Abschnitt werden wir (Block-) Operatoren verwenden, die aus Sub-Matrizen von $\mathcal{M}$, $\mathcal{L}$ und $\mathcal{D}$ bestehen. Aus diesem Grund definieren wir

$$
\mathcal{M} := \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{11} & \mathcal{M}_{12} & \mathcal{M}_{13}\\ \mathcal{M}_{21} & \mathcal{M}_{22} & \mathcal{M}_{23}\\ \mathcal{M}_{31} & \mathcal{M}_{32} & \mathcal{M}_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D} := \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{11} & \mathcal{D}_{12} & \mathcal{D}_{13}\\ \mathcal{D}_{21} & \mathcal{D}_{22} & \mathcal{D}_{23}\\ \mathcal{D}_{31} & \mathcal{D}_{32} & \mathcal{D}_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{L} := \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & \mathcal{L}_{13}\\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & \mathcal{L}_{23}\\ \mathcal{L}_{31} & \mathcal{L}_{32} & \mathcal{L}_{33} \end{bmatrix}, \tag{3.13}
$$

wobei die $3 \times 3$-Blockstruktur von $\mathcal{M}$, $\mathcal{L}$ und $\mathcal{D}$ der Partitionierung des unbekannten Vektors $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{u}^T; \boldsymbol{v}^T; \boldsymbol{p}^T)^T$ entspricht und $\boldsymbol{v} := (\boldsymbol{v}_1^T, \ldots, \boldsymbol{v}_n^T)^T$, $\boldsymbol{p} := (p_1, \ldots, p_n)^T$. Die Definition von $\mathcal{M}_{ij}$, $\mathcal{L}_{ij}$ und $\mathcal{D}_{ij}$ für $1 \leq i, j \leq 3$ folgt dann aus dem Gleichsetzen entsprechender Blöcke in (3.13) und (3.12).

Wir betrachten ein Zeitintervall $[0, T]$, das in $n_T$ äquidistante Teilintervalle der Länge $\tau$ unterteilt ist, d.h. $\tau := T/n_T$. Ausgehend von bekannten Anfangswerten für $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{p}$ zur Zeit $t = 0$, die wir mit $\boldsymbol{u}^0$, $\boldsymbol{v}^0$ und $\boldsymbol{p}^0$ bezeichnen und in einem Vektor $\boldsymbol{y}^0$ zusammenfassen, liefert das Zeitschrittschema, das wir konstruieren möchten, sollte eine Approximation $\boldsymbol{y}^{k+1}$ der Lösung zum Zeitpunkt $t_{k+1} = t_k + \tau$, die aus der Approximation $\boldsymbol{y}^k$ zum Zeitpunkt $t_k$ durch Lösen einer Operatorgleichung der Form

$$\mathcal{A}\boldsymbol{y}^{k+1} = \mathcal{G}^{k+1}, \tag{3.14}$$

gewonnen wird, wobei $\mathcal{G}^{k+1}$ aus berechenbaren Größen zu den Zeitpunkten $t_k$ und $t_{k+1}$ besteht.

Da $\mathcal{M}$ nicht invertierbar ist, betrachten wir für gegebenen Druckvektor $\boldsymbol{p}$ ein eingeschränktes dynamisches Problem für die Unbekannten $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$, in dem $\bar{\mathcal{M}}$ invertierbar ist

$$\bar{\mathcal{M}}\ddot{\boldsymbol{r}} + \bar{\mathcal{D}}\dot{\boldsymbol{r}} + \bar{\mathcal{L}}\boldsymbol{r} = \bar{\mathcal{F}}, \tag{3.15}$$

wobei $\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{u}^T, \boldsymbol{v}^T)^T$ und die Operatoren $\bar{\mathcal{M}}$, $\bar{\mathcal{D}}$, $\bar{\mathcal{L}}$ und die rechte Seite $\bar{\mathcal{F}}$ durch

$$\bar{\mathcal{M}} := \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{11} & \mathcal{M}_{12} \\ \mathcal{M}_{21} & \mathcal{M}_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathcal{D}} := \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{11} & \mathcal{D}_{12} \\ \mathcal{D}_{21} & \mathcal{D}_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathcal{L}} := \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathcal{F}} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{g} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{13} \\ \mathcal{L}_{23} \end{bmatrix} \boldsymbol{p}, \tag{3.16}$$

definiert sind. Dann führen wir die neue Variablen $\boldsymbol{s} := \dot{\boldsymbol{r}}$ ein. Das System zweiter Ordnung (3.15) kann als äquivalentes System erster Ordnung geschrieben werden

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{s}, \tag{3.17a}$$

$$\dot{\boldsymbol{s}} = -\bar{\mathcal{M}}^{-1}\bar{\mathcal{D}}\boldsymbol{s} - \bar{\mathcal{M}}^{-1}\bar{\mathcal{L}}\boldsymbol{r} + \bar{\mathcal{M}}^{-1}\bar{\mathcal{F}} =: \bar{\mathcal{H}}. \tag{3.17b}$$

Nach der Anwendung der Crank-Nicolson-Methode auf (3.17) bekommen wir

$$\boldsymbol{r}^{k+1} = \boldsymbol{r}^k + \frac{\tau}{2}(\boldsymbol{s}^k + \boldsymbol{s}^{k+1}), \tag{3.18a}$$

$$\boldsymbol{s}^{k+1} = \boldsymbol{s}^k + \frac{\tau}{2}(\bar{\mathcal{H}}(\boldsymbol{r}^k, \boldsymbol{s}^k, t_k) + \bar{\mathcal{H}}(\boldsymbol{r}^{k+1}, \boldsymbol{s}^{k+1}, t_{k+1})) =: \boldsymbol{s}^k + \frac{\tau}{2}(\bar{\mathcal{H}}^k + \bar{\mathcal{H}}^{k+1}). \tag{3.18b}$$

Unter Verwendung der Definition von $\bar{\mathcal{H}}^k$ und $\bar{\mathcal{H}}^{k+1}$ gemäß (3.17b) ergibt sich

$$(\bar{\mathcal{M}} + \frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})\boldsymbol{s}^{k+1} = (\bar{\mathcal{M}} - \frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})\boldsymbol{s}^k - \frac{\tau}{2}(\bar{\mathcal{L}}\boldsymbol{r}^{k+1} + \bar{\mathcal{L}}\boldsymbol{r}^k) + \frac{\tau}{2}(\bar{\mathcal{F}}^k + \bar{\mathcal{F}}^{k+1}). \tag{3.19}$$

Fügen wir (3.19) in (3.18a) ein, so erhalten wir die Zeitschrittgleichung. Für das eingeschränkte dynamische Problem (3.15) folgt

$$(\bar{\mathcal{M}} + \frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}} + \frac{\tau^2}{4}\bar{\mathcal{L}})\boldsymbol{r}^{k+1} = \frac{\tau^2}{4}(\bar{\mathcal{F}}^k + \bar{\mathcal{F}}^{k+1}) + (\bar{\mathcal{M}} + \frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}} - \frac{\tau^2}{4}\bar{\mathcal{L}})\boldsymbol{r}^k + \tau\bar{\mathcal{M}}\boldsymbol{s}^k, \tag{3.20a}$$

$$\frac{\tau}{2}\boldsymbol{s}^{k+1} - \boldsymbol{r}^{k+1} = -\boldsymbol{r}^k - \frac{\tau}{2}\boldsymbol{s}^k, \tag{3.20b}$$

wobei

$$\bar{\mathcal{F}}^k + \bar{\mathcal{F}}^{k+1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}^k \\ \boldsymbol{g}^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}^{k+1} \\ \boldsymbol{g}^{k+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{13} \\ \mathcal{L}_{23} \end{bmatrix} \boldsymbol{p}^k - \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{13} \\ \mathcal{L}_{23} \end{bmatrix} \boldsymbol{p}^{k+1}. \tag{3.21}$$

Unter Verwendung der Operatoren aus (3.13) können wir die Gleichung (3.11c) in der Form

$$\mathcal{D}_{31}\dot{\boldsymbol{u}} + \mathcal{D}_{32}\dot{\boldsymbol{v}} + \mathcal{D}_{33}\dot{\boldsymbol{p}} + \mathcal{L}_{33}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}, \tag{3.22}$$

schreiben, oder, äquivalent dazu,

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{p}}} = -\mathcal{L}_{33}\boldsymbol{p}. \tag{3.23}$$

wobei $\tilde{\boldsymbol{p}} := \mathcal{D}_{31}\boldsymbol{u} + \mathcal{D}_{32}\boldsymbol{v} + \mathcal{D}_{33}\boldsymbol{p}$ ist. Nach der Anwendung der Crank-Nicolson-Methode auf (3.23), erhalten wir

$$\tilde{\boldsymbol{p}}^{k+1} = \tilde{\boldsymbol{p}}^k - \frac{\tau}{2}(\mathcal{L}_{33}\boldsymbol{p}^k + \mathcal{L}_{33}\boldsymbol{p}^{k+1}). \tag{3.24}$$

Dies kann auch in der Form

$$\mathcal{D}_{31}\boldsymbol{u}^{k+1} + \mathcal{D}_{32}\boldsymbol{v}^{k+1} + (\frac{\tau}{2}\mathcal{L}_{33} + \mathcal{D}_{33})\boldsymbol{p}^{k+1} = \mathcal{D}_{31}\boldsymbol{u}^k + \mathcal{D}_{32}\boldsymbol{v}^k - (\frac{\tau}{2}\mathcal{L}_{33} - \mathcal{D}_{33})\boldsymbol{p}^k.$$

ausgedrückt werden. Um die Symmetrie des Systems sicherzustellen, multiplizieren wir die obige Gleichung mit $\frac{\tau^2}{4}$ und erhalten so

$$\frac{\tau^2}{4}\mathcal{D}_{31}\boldsymbol{u}^{k+1} + \frac{\tau^2}{4}\mathcal{D}_{32}\boldsymbol{v}^{k+1} + \frac{\tau^2}{4}(\frac{\tau}{2}\mathcal{L}_{33} + \mathcal{D}_{33})\boldsymbol{p}^{k+1} = \frac{\tau^2}{4}\mathcal{D}_{31}\boldsymbol{u}^k + \frac{\tau^2}{4}\mathcal{D}_{32}\boldsymbol{v}^k - \frac{\tau^2}{4}(\frac{\tau}{2}\mathcal{L}_{33} - \mathcal{D}_{33})\boldsymbol{p}^k. \tag{3.25}$$

Das kombinierte Schema, das auf (3.20) basiert, können wir dann wie folgt zusammenfassen:

$$\begin{aligned}(\bar{\mathcal{M}} + \frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}} + \frac{\tau^2}{4}\bar{\mathcal{L}})\boldsymbol{r}^{k+1} + \frac{\tau^2}{4}\begin{bmatrix} \mathcal{L}_{13} \\ \mathcal{L}_{23} \end{bmatrix}\boldsymbol{p}^{k+1} &= \frac{\tau^2}{4}\begin{bmatrix} \boldsymbol{f}^k \\ \boldsymbol{g}^k \end{bmatrix} + \frac{\tau^2}{4}\begin{bmatrix} \boldsymbol{f}^{k+1} \\ \boldsymbol{g}^{k+1} \end{bmatrix} - \frac{\tau^2}{4}\begin{bmatrix} \mathcal{L}_{13} \\ \mathcal{L}_{23} \end{bmatrix}\boldsymbol{p}^k \\ &\quad + (\bar{\mathcal{M}} + \frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}} - \frac{\tau^2}{4}\bar{\mathcal{L}})\boldsymbol{r}^k + \tau\bar{\mathcal{M}}\boldsymbol{s}^k, &&(3.26a) \\ \frac{\tau}{2}\boldsymbol{s}^{k+1} - \boldsymbol{r}^{k+1} &= -\boldsymbol{r}^k - \frac{\tau}{2}\boldsymbol{s}^k. &&(3.26b)\end{aligned}$$

Schließlich stellen wir (3.25) und (3.26a) in der modifizierten Form (3.14) dar, wobei der Operator $\mathcal{A}$ und der rechte Seite $\mathcal{G}^{k+1}$ wie folgt gegeben sind

$$\mathcal{A} := \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{A}}_{11} & \bar{\mathcal{A}}_{12} & \frac{\tau^2}{4}\mathcal{L}_{13} \\ \bar{\mathcal{A}}_{21} & \bar{\mathcal{A}}_{22} & \frac{\tau^2}{4}\mathcal{L}_{23} \\ \frac{\tau^2}{4}\mathcal{D}_{31} & \frac{\tau^2}{4}\mathcal{D}_{32} & \frac{\tau^3}{8}\mathcal{L}_{33} + \frac{\tau^2}{4}\mathcal{D}_{33} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{p} \end{bmatrix}, \tag{3.27}$$

mit

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathcal{A}}_{11} & \bar{\mathcal{A}}_{12} \\ \bar{\mathcal{A}}_{21} & \bar{\mathcal{A}}_{22} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{11} + \frac{\tau}{2}\mathcal{D}_{11} + \frac{\tau^2}{4}\mathcal{L}_{11} & \mathcal{M}_{12} + \frac{\tau}{2}\mathcal{D}_{12} + \frac{\tau^2}{4}\mathcal{L}_{12} \\ \mathcal{M}_{21} + \frac{\tau}{2}\mathcal{D}_{21} + \frac{\tau^2}{4}\mathcal{L}_{21} & \mathcal{M}_{22} + \frac{\tau}{2}\mathcal{D}_{22} + \frac{\tau^2}{4}\mathcal{L}_{22} \end{bmatrix}, \tag{3.28}$$

und

$$\mathcal{G}^{k+1} := \begin{bmatrix} \frac{\tau^2}{4}(\boldsymbol{f}^k + \boldsymbol{f}^{k+1}) + (\mathcal{M}_{11} + \frac{\tau}{2}\mathcal{D}_{11} - \frac{\tau^2}{4}\mathcal{L}_{11})\boldsymbol{u}^k + (\mathcal{M}_{12} + \frac{\tau}{2}\mathcal{D}_{12} - \frac{\tau^2}{4}\mathcal{L}_{12})\boldsymbol{v}^k - \frac{\tau^2}{4}\mathcal{L}_{13}\boldsymbol{p}^k + \tau(\mathcal{M}_{11}\dot{\boldsymbol{u}}^k + \mathcal{M}_{12}\dot{\boldsymbol{v}}^k) \\ \frac{\tau^2}{4}(\boldsymbol{g}^k + \boldsymbol{g}^{k+1}) + (\mathcal{M}_{21} + \frac{\tau}{2}\mathcal{D}_{21} - \frac{\tau^2}{4}\mathcal{L}_{21})\boldsymbol{u}^k + (\mathcal{M}_{22} + \frac{\tau}{2}\mathcal{D}_{22} - \frac{\tau^2}{4}\mathcal{L}_{22})\boldsymbol{v}^k - \frac{\tau^2}{4}\mathcal{L}_{23}\boldsymbol{p}^k + \tau(\mathcal{M}_{21}\dot{\boldsymbol{u}}^k + \mathcal{M}_{22}\dot{\boldsymbol{v}}^k) \\ \frac{\tau^2}{4}\mathcal{D}_{31}\boldsymbol{u}^k + \frac{\tau^2}{4}\mathcal{D}_{32}\boldsymbol{v}^k - \frac{\tau^2}{4}(\frac{\tau}{2}\mathcal{L}_{33} - \mathcal{D}_{33})\boldsymbol{p}^k \end{bmatrix}. \tag{3.29}$$

Die rechte Seite ist definiert durch $\boldsymbol{u}^k, \boldsymbol{v}^k$ und $\boldsymbol{p}^k$, die aus dem vorherigen Zeitschritt bekannt sind, und zusätzlich $\boldsymbol{f}^k, \boldsymbol{g}^k$ sowie $\boldsymbol{f}^{k+1}, \boldsymbol{g}^{k+1}$, die aufgrund der bekannten rechten Seite von (3.11) jederzeit ausgewertet werden können. Die Vektoren $\dot{\boldsymbol{u}}^k, \dot{\boldsymbol{v}}^k$ werden nach jedem Zeitschritt gemäß (3.26b) aktualisiert, sodass

$$\dot{\boldsymbol{u}}^{k+1} = \frac{2}{\tau}(\boldsymbol{u}^{k+1} - \boldsymbol{u}^k) - \dot{\boldsymbol{u}}^k, \qquad \dot{\boldsymbol{v}}^{k+1} = \frac{2}{\tau}(\boldsymbol{v}^{k+1} - \boldsymbol{v}^k) - \dot{\boldsymbol{v}}^k. \tag{3.30}$$

Zusammenfassend haben wir ein Zeitschrittschema mit dem selbstadjungierten Operator $\mathcal{A}$ definiert, das in jedem Zeitschritt die Lösung einer Gleichung der Form (3.14) erfordert.

Der Einfachheit halber führen wir folgende neuen Abkürzungen ein

$$\gamma_i := \rho_i, \quad \gamma_u := \rho, \quad \gamma_{v,i} := \rho_{m_i} + \frac{\tau}{2}K_i^{-1}, \tag{3.31a}$$

$$\beta_{ij} := \frac{\tau^3}{8}\tilde{\beta_{ij}}, \quad 1 \le i,j \le n,\ i \ne j, \quad \beta_{ii} := \sum_{\substack{j=1 \\ i\ne j}}^{n} \frac{\tau^3}{8}\tilde{\beta_{ij}} + \frac{\tau^2}{4}c_{p_i}, \quad 1 \le i \le n, \tag{3.31b}$$

wobei wir der Einfachheit halber annehmen wollen, dass $\boldsymbol{K}_i = K_i\boldsymbol{I}$. Dann kann der selbstadjungierter Operator $\mathcal{A}$, wie folgt geschrieben werden

$$\mathcal{A} := \begin{bmatrix} -\frac{\tau^2}{4}\mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma} + \gamma_u & -\gamma_1 & \cdots & -\gamma_n & \frac{\tau^2}{4}\alpha_1\nabla & \cdots & \frac{\tau^2}{4}\alpha_n\nabla \\ -\gamma_1 & \gamma_{v,1} & \cdots & 0 & \frac{\tau^2}{4}\nabla & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -\gamma_n & 0 & \cdots & \gamma_{v,n} & 0 & \cdots & \frac{\tau^2}{4}\nabla \\ -\frac{\tau^2}{4}\alpha_1\mathrm{div} & -\frac{\tau^2}{4}\mathrm{div} & \cdots & 0 & -\beta_{11} & \cdots & \beta_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\tau^2}{4}\alpha_n\mathrm{div} & 0 & \cdots & -\frac{\tau^2}{4}\mathrm{div} & \beta_{n1} & \cdots & -\beta_{nn} \end{bmatrix}.$$

## 3.3 Variationsformulierung des quasistatischen Problems

Vor der Herleitung der schwachen Formulierung wollen wir das System (3.4) durch Skalierung und Variablensubstitutionen noch etwas handlicher gestalten. Zuerst dividieren wir die Gleichungen durch $2\mu$ dann substituieren wir

$$\lambda/2\mu \to \lambda \quad , \quad \alpha_i/2\mu \to \alpha_i \quad , \quad \boldsymbol{f}/2\mu \to \boldsymbol{f} \quad , \quad \tau/2\mu \to \tau \quad , \quad c_{p_i}/2\mu \to c_{p_i} \quad , \quad g_i/2\mu \to g_i,$$

und erhalten somit aus (3.4):

$$-\text{div } \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}) - \lambda \nabla \text{div } \boldsymbol{u} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \nabla p_i = \boldsymbol{f}, \tag{3.32a}$$

$$\tau K_i^{-1} \boldsymbol{v}_i + \tau \nabla p_i = \boldsymbol{0}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.32b}$$

$$-\alpha_i \text{div } \boldsymbol{u} - \tau \text{div } \boldsymbol{v}_i - c_{p_i} p_i + \tau \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \beta_{ij}(p_i - p_j) = g_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.32c}$$

Danach machen wir die Substitutionen

$$\alpha_i p_i \to \tilde{p}_i \ , \ \frac{\tau}{\alpha_i} \boldsymbol{v}_i \to \tilde{\boldsymbol{v}}_i \ , \ \frac{g_i}{\alpha_i} \to \tilde{g}_i,$$

und dividieren die Gleichung (3.32b) durch $\tau$ und (3.32c) durch $\alpha_i$. Damit ergibt sich

$$-\text{div } \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}) - \lambda \nabla \text{div } \boldsymbol{u} + \sum_{i=1}^{n} \nabla \tilde{p}_i = \boldsymbol{f},$$

$$\tau^{-1} K_i^{-1} \alpha_i^2 \tilde{\boldsymbol{v}}_i + \nabla \tilde{p}_i = \boldsymbol{0}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$-\text{div } \boldsymbol{u} - \text{div } \tilde{\boldsymbol{v}}_i - \frac{c_{p_i}}{\alpha_i \alpha_i} \tilde{p}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \left(-\frac{\tau \beta_{ij}}{\alpha_i \alpha_i} \tilde{p}_i + \frac{\tau \beta_{ij}}{\alpha_i \alpha_j} \tilde{p}_j\right) = \tilde{g}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Aus praktischen Gründen lassen wir das "Tilde" Symbol weg, womit wir folgendes System erhalten:

$$-\text{div } \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}) - \lambda \nabla \text{div } \boldsymbol{u} + \sum_{i=1}^{n} \nabla p_i = \boldsymbol{f}, \tag{3.33a}$$

$$\tau^{-1} K_i^{-1} \alpha_i^2 \boldsymbol{v}_i + \nabla p_i = \boldsymbol{0}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.33b}$$

$$-\text{div } \boldsymbol{u} - \text{div } \boldsymbol{v}_i - \frac{c_{p_i}}{\alpha_i \alpha_i} p_i + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \left(-\frac{\tau \beta_{ij}}{\alpha_i \alpha_i} p_i + \frac{\tau \beta_{ij}}{\alpha_i \alpha_j} p_j\right) = g_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.33c}$$

Jetzt führen wir noch die neuen Parameter

$$R_i^{-1} := \tau^{-1} K_i^{-1} \alpha_i^2 \quad , \quad b_{ij} := \frac{\tau \beta_{ij}}{\alpha_i \alpha_j} \quad , \quad \tilde{\alpha}_{ij} := \frac{\tau \beta_{ij}}{\alpha_i^2} \quad , \quad \alpha_{p_i} := \frac{c_{p_i}}{\alpha_i^2},$$

ein, deren Wert sich ohne Beschränkung der Allgemeinheit in den Bereichen

$$\lambda > 0, \qquad R_1^{-1}, \ldots, R_n^{-1} > 0, \qquad \alpha_{p_1}, \ldots, \alpha_{p_n} \geq 0, \qquad \tilde{\alpha}_{ij} \geq 0, \quad b_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

bewegen. Schließlich erhalten wir das System

$$-\text{div}\ \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}) - \lambda \nabla \text{div}\ \boldsymbol{u} + \sum_{i=1}^{n} \nabla p_i = \boldsymbol{f}, \tag{3.34a}$$

$$R_i^{-1} \boldsymbol{v}_i + \nabla p_i = \boldsymbol{0}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.34b}$$

$$-\text{div}\ \boldsymbol{u} - \text{div}\ \boldsymbol{v}_i - \alpha_{p_i} p_i + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} (-\tilde{\alpha}_{ij} p_i + b_{ij} p_j) = g_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.34c}$$

oder in der Matrixform

$$\bar{\mathcal{A}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{g} \end{bmatrix} \qquad \text{wobei} \quad \bar{\mathcal{A}} := \begin{bmatrix} A_1 & 0 & B_1^T \\ 0 & A_2 & B_2^T \\ B_1 & B_2 & -C \end{bmatrix}, \tag{3.35}$$

mit

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}, \qquad A_1 := \begin{bmatrix} -\text{div}\ \boldsymbol{\epsilon} - \lambda \nabla \text{div} \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -\text{div} \\ \vdots \\ -\text{div} \end{bmatrix},$$

$$A_2 := \begin{bmatrix} R_1^{-1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & R_n^{-1} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_d, \qquad B_2 := \begin{bmatrix} -\text{div} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & -\text{div} \end{bmatrix},$$

$$C := \begin{bmatrix} (\alpha_{p_1} + \tilde{\alpha}_{11}) & -b_{12} & \ldots & -b_{1n} \\ -b_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -b_{n-1,n} \\ -b_{n1} & \ldots & -b_{n,n-1} & (\alpha_{p_n} + \tilde{\alpha}_{nn}) \end{bmatrix}, \qquad \text{wobei} \quad \tilde{\alpha}_{ii} = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \tilde{\alpha}_{ij}.$$

Die schwache Formulierung von (3.34) lautet dann:

Gesucht ist $(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v};\boldsymbol{p}) \in \boldsymbol{U} \times (\boldsymbol{V}_1 \times \cdots \times \boldsymbol{V}_n) \times (P_1 \times \cdots \times P_n) =: \boldsymbol{U} \times \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{P}$, so dass für jedes Element $(\boldsymbol{w};\boldsymbol{z};\boldsymbol{q}) \in \boldsymbol{U} \times \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{P}$:

$$(\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{w})) + \lambda(\text{div } \boldsymbol{u}, \text{div } \boldsymbol{w}) - \sum_{i=1}^{n}(p_i, \text{div } \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{w}), \tag{3.36a}$$

$$R_i^{-1}(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{z}_i) - (p_i, \text{div } \boldsymbol{z}_i) = 0, \tag{3.36b}$$

$$-(\text{div } \boldsymbol{u}, q_i) - (\text{div } \boldsymbol{v}_i, q_i) - \alpha_{p_i}(p_i, q_i) + \sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n}(-\tilde{\alpha}_{ij}(p_i, q_i) + b_{ij}(p_j, q_i)) = (g_i, q_i), \tag{3.36c}$$

für $i = 1, 2, \ldots, n$.

Als nächstes wollen wir geeignete parameter-abhängige Normen für die Räume $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{P}$ definieren. Diese sind der Schlüssel zur parameter-robusten Stabilität des MPET-Modells (3.36) in den Parameterbereichen

$$\lambda_0 = \max\{1, \lambda\}, \quad R_1^{-1}, \ldots, R_n^{-1} > 0, \quad \alpha_{p_1}, \ldots, \alpha_{p_n} \geq 0, \quad \tilde{\alpha}_{ij} \geq 0, \quad b_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Um die Normen sowie das Gleichungssystem (3.36) in einer handlichen Form schreiben zu können, führen wir die folgende Matrizen und Parameter ein

$$\mathbf{R}_v := \begin{bmatrix} R_1^{-1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & R_2^{-1} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ldots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & R_n^{-1} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_d, \qquad \Lambda_1 := \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_{11} & -b_{12} & \ldots & -b_{1n} \\ -b_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -b_{n-1,n} \\ -b_{n1} & \ldots & -b_{n,n-1} & \tilde{\alpha}_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n},$$

$$\Lambda_2 := \begin{bmatrix} \alpha_{p_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha_{p_n} \end{bmatrix}_{n\times n}, \; \Lambda_3 := \begin{bmatrix} R & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & R \end{bmatrix}_{n\times n}, \text{ wobei } R^{-1} := \max\{R_1^{-1}, \ldots, R_n^{-1}\},$$

$$\Lambda_4 := \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_0} & \ldots & \ldots & \frac{1}{\lambda_0} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\lambda_0} & \ldots & \ldots & \frac{1}{\lambda_0} \end{bmatrix}_{n\times n}, \qquad \Lambda := \sum_{i=1}^{4} \Lambda_i. \tag{3.37}$$

Da $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_4$ symmetrisch positiv semi-definit (SPSD) sind und $\Lambda_3$ symmetrisch positiv definit (SPD) ist, folgt es, dass $\Lambda$ SPD ist. Betrachten wir die Hilbert-Räume $\boldsymbol{U} = H_0^1(\Omega)^d, \boldsymbol{V} = H_0(\text{div }, \Omega)^n$ und $\boldsymbol{P} = (L_0^2(\Omega))^n$ mit parameter-abhängigen Normen $\|\cdot\|_{\boldsymbol{U}}, \|\cdot\|_{\boldsymbol{V}}, \|\cdot\|_{\boldsymbol{P}}$ induziert durch die inneren Produkte:

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})_{\boldsymbol{U}} := (\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{w})) + \lambda(\text{div } \boldsymbol{u}, \text{div } \boldsymbol{w}), \tag{3.38a}$$

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{z})_{\boldsymbol{V}} := (\mathbf{R}_v \boldsymbol{v}, \boldsymbol{z}) + (\Lambda^{-1}\text{Div}\boldsymbol{v}, \text{Div}\boldsymbol{z}), \tag{3.38b}$$

$$(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})_{\boldsymbol{P}} := (\Lambda \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}), \tag{3.38c}$$

wobei

$$\text{Div}\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \text{div } \boldsymbol{v}_1 \\ \vdots \\ \text{div } \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix}, \qquad \text{für alle } \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}.$$

Die zum Gleichungssystem (3.36) gehörige Bilinearform hat dann die Gestalt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}((\boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}; \boldsymbol{p}), (\boldsymbol{w}; \boldsymbol{z}; \boldsymbol{q})) &= (\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{w})) + \lambda(\text{div } \boldsymbol{u}, \text{div } \boldsymbol{w}) - \sum_{i=1}^{n}(p_i, \text{div } \boldsymbol{w}) + \sum_{i=1}^{n} R_i^{-1}(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{z}_i) \\
&- \sum_{i=1}^{n}(p_i, \text{div } \boldsymbol{z}_i) - \sum_{i=1}^{n}(\text{div } \boldsymbol{u}, q_i) - \sum_{i=1}^{n}(\text{div } \boldsymbol{v}_i, q_i) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_{p_i}(p_i, q_i) \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} (-\tilde{\alpha}_{ij}(p_i, q_i) + b_{ij}(p_j, q_i)) \\
&= (\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{w})) + \lambda(\text{div } \boldsymbol{u}, \text{div } \boldsymbol{w}) - (\boldsymbol{p}, \underline{\text{Div}}\boldsymbol{w}) + (\mathbf{R}_v \boldsymbol{v}, \boldsymbol{z}) - (\boldsymbol{p}, \text{Div}\boldsymbol{z}) \\
&- (\underline{\text{Div}}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{q}) - (\text{Div}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{q}) - ((\Lambda_1 + \Lambda_2)\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}),
\end{aligned}$$

wobei

$$\underline{\text{Div}}\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \text{div } \boldsymbol{u} \\ \vdots \\ \text{div } \boldsymbol{u} \end{pmatrix} \quad \text{für alle } \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}.$$

## 3.4 Variationsformulierung des dynamische Problems

Die schwache Formulierung des Systems (3.26a) und (3.25) lautet dann:
Gesucht ist $(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}; \boldsymbol{p}) \in \boldsymbol{U} \times \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{P}$, so dass für alle $(\boldsymbol{w}; \boldsymbol{z}; \boldsymbol{q}) \in \boldsymbol{U} \times \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{P}$:

$$\frac{\mu\tau^2}{2}(\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{w})) + \frac{\lambda\tau^2}{4}(\text{div } \boldsymbol{u}, \text{div } \boldsymbol{w}) + (\gamma_u \boldsymbol{u} + \bar{\mathcal{A}}_{12}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) - \frac{\tau^2}{4}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{p}, \underline{\text{Div}}\boldsymbol{w}) = (\mathcal{G}_1, \boldsymbol{w}), \tag{3.39a}$$

$$(\bar{\mathcal{A}}_{21}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}) + (\bar{\mathcal{A}}_{22}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{z}) - \frac{\tau^2}{4}(\boldsymbol{p}, \text{Div}\boldsymbol{z}) = (\mathcal{G}_2, \boldsymbol{z}), \tag{3.39b}$$

$$-\frac{\tau^2}{4}(\boldsymbol{\alpha}\underline{\text{Div}}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{q}) - \frac{\tau^2}{4}(\text{Div}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{q}) + ((\frac{\tau^3}{8}\mathcal{L}_{33} + \frac{\tau^2}{4}\mathcal{D}_{33})\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = (\mathcal{G}_3, \boldsymbol{q}), \tag{3.39c}$$

wobei $\boldsymbol{\alpha}$ eine Diagonalmatrix ist mit $(\boldsymbol{\alpha})_{ii} = \alpha_i, \quad i = 1, \ldots, n$.

Betrachten wir die Hilbert-Räume $\boldsymbol{U} = H_0^1(\Omega)^d$, $\boldsymbol{V} = (H_0(\text{div}\,,\Omega))^n$, und $\boldsymbol{P} = (L_0^2(\Omega))^n$ mit parameter-abhängigen Normen $\|(\cdot;\cdot)\|_{\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}}, \|\cdot\|_{\boldsymbol{P}}$ induziert durch die inneren Produkte

$$((\boldsymbol{u};\boldsymbol{v}),(\boldsymbol{w};\boldsymbol{z}))_{\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}} = \frac{\mu\tau^2}{2}(\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{w})) + \frac{\lambda\tau^2}{4}(\text{div}\ \boldsymbol{u},\text{div}\ \boldsymbol{w}) + (\Lambda_{uv}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{v}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\boldsymbol{w}\\ \boldsymbol{z}\end{pmatrix})$$
$$+\frac{\tau^2}{4}(\Lambda^{-1}(\text{Div}\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\alpha}\underline{\text{Div}}\boldsymbol{u}),\text{Div}\boldsymbol{z}+\boldsymbol{\alpha}\underline{\text{Div}}\boldsymbol{w}), \tag{3.40a}$$
$$(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})_{\boldsymbol{P}} = \frac{\tau^2}{4}(\Lambda\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}), \tag{3.40b}$$

wobei

$$\Lambda := \Lambda_1+\Lambda_2+\Lambda_3,\quad \Lambda_1 := -(\frac{\tau}{2}\mathcal{L}_{33}+\mathcal{D}_{33}),\quad \Lambda_2 := \frac{\tau^2}{4}\bar{\mathcal{A}}_{22}^{-1},\quad \Lambda_3 := \frac{\tau^2}{4\gamma}\boldsymbol{\alpha}\Lambda_4\boldsymbol{\alpha},$$
$$\gamma := \max\{\frac{\tau^2\mu}{2},\frac{\tau^2\lambda}{4},\gamma_u\},\quad \Lambda_4 := \mathbf{1}_{n\times n},\qquad \Lambda_{uv} := \bar{\mathcal{M}}+\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix}\gamma_u & \bar{\mathcal{A}}_{12}\\ \bar{\mathcal{A}}_{21} & \bar{\mathcal{A}}_{22}\end{bmatrix}. \tag{3.41}$$

Die Matrizen $\Lambda$ und $\Lambda_{uv}$ sind SPD. Schließlich erhalten wir für das Gleichungssystem (3.39) die folgende Bilinearform ein

$$\mathcal{A}((\boldsymbol{u};\boldsymbol{v};\boldsymbol{p}),(\boldsymbol{w},\boldsymbol{z};\boldsymbol{q})) = \frac{\mu\tau^2}{2}(\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{w})) + \frac{\lambda\tau^2}{4}(\text{div}\ \boldsymbol{u},\text{div}\ \boldsymbol{w}) + (\Lambda_{uv}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{v}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\boldsymbol{w}\\ \boldsymbol{z}\end{pmatrix})$$
$$-\frac{\tau^2}{4}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha}\underline{\text{Div}}\boldsymbol{w}+\text{Div}\boldsymbol{z}) - \frac{\tau^2}{4}(\boldsymbol{\alpha}\underline{\text{Div}}\boldsymbol{u}+\text{Div}\boldsymbol{v},\boldsymbol{q}) - \frac{\tau^2}{4}(\Lambda_1\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}). \tag{3.42}$$

## 3.5 Parameter-robuste inf-sup-Bedingung

Das Hauptergebnis dieses Abschnitts ist die Wohlgestelltheit des Problems (3.36) sowie (3.39) unter den durch (3.38) sowie (3.40) induzierten Normen. Bevor wir den Stabilität zeigen, benötigen wir die folgenden zwei Lemmata, siehe [23],

**Lemma 3.1.** *Es existiert eine Konstante $\beta_d > 0$ mit:*

$$\inf_{q\in P}\sup_{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}}\frac{(\text{div}\ \boldsymbol{v},q)}{\|\boldsymbol{v}\|_{\text{div}}\,\|q\|} \geq \beta_d. \tag{3.43}$$

**Lemma 3.2.** *Es existiert eine Konstante $\beta_s > 0$ mit:*

$$\inf_{(q_1,\dots,q_n)\in P_1\times\dots\times P_n}\sup_{\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{U}}\frac{\left(\text{div}\boldsymbol{u},\sum\limits_{i=1}^n q_i\right)}{\|\boldsymbol{u}\|_1\left\|\sum\limits_{i=1}^n q_i\right\|} \geq \beta_s. \tag{3.44}$$

Darüber hinaus werden wir das folgende Lemma verwenden.

**Lemma 3.3.** *Es sei* $\tilde{\Lambda} = C_3\Lambda_3 + C_4\Lambda_4$ *eine SPD Matrix, dann gilt*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\tilde{\Lambda}^{-1})_{ij} \leq \frac{1}{C_4}. \tag{3.45}$$

*wobei* $C_3, C_4$ *Konstante sind, und*

$$\Lambda_3 = \mathbf{I}_n, \qquad \Lambda_4 = \mathbf{1}_{n\times n}.$$

***Beweis.*** In Anbetracht der Sherman-Morrison-Woodbury-Formel gilt für eine beliebige invertierbare Matrix $S$

$$(S - \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T)^{-1} = S^{-1} + \frac{S^{-1}\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T S^{-1}}{1 - \boldsymbol{v}^T S^{-1}\boldsymbol{u}}.$$

Für

$$S := C_3\Lambda_3, \qquad \boldsymbol{u} := -C_4\boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{v} := (\underbrace{1,\dots,1}_{n})^T,$$

ergibt sich somit

$$S^{-1}(\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T)S^{-1} = -C_4 \begin{bmatrix} \frac{1}{C_3} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{C_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{C_3} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{C_3} \end{bmatrix} = \frac{-C_4}{C_3^2}\Lambda_4,$$

$$\boldsymbol{v}^T S^{-1}\boldsymbol{u} = \frac{-C_4}{C_3}(1,\dots,\dots,1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{-C_4}{C_3}n.$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{1 - \boldsymbol{v}^T S^{-1}\boldsymbol{u}} = \frac{C_3}{C_3 + C_4 n}.$$

Damit ist

$$\tilde{\Lambda}^{-1} = (S - \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T)^{-1} = \frac{1}{C_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{C_3}{C_3 + C_4 n}\frac{-C_4}{C_3^2} \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

woraus wir schließen, dass

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\tilde{\Lambda}^{-1})_{ij} = \frac{n}{C_3} + \frac{1}{C_3 + C_4 n}\frac{-C_4}{C_3}n^2 = \frac{C_3 n + C_4 n^2 - C_4 n^2}{C_3(C_3 + C_4 n)} = \frac{n}{C_3 + C_4 n} \leq \frac{1}{C_4}.$$

□

### 3.5.1 Stabilität des quasistatischen MPET-Systems

Um das Korollar 2.12 anwenden zu können, benötigen wir zuerst eine passende Aufspaltung der Normen. In Anlehnung an (2.25b),(2.26a) und (2.16a) kann man die Normen in (3.38) wie folgt darstellen:

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{U}}^2 = \|\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u})\|^2 + \lambda\|\text{div } \boldsymbol{u}\|^2 =: |\boldsymbol{u}|_U^2, \tag{3.46a}$$

$$\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{V}}^2 = \|\mathbf{R}_v^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{v}\|^2 + \|\Lambda^{-\frac{1}{2}}\text{Div}\boldsymbol{v}\|^2 =: |\boldsymbol{v}|_{\boldsymbol{V}}^2 + \|\text{Div}\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{P}^*}^2, \tag{3.46b}$$

$$\|\boldsymbol{p}\|_{\boldsymbol{P}}^2 = \|\Lambda^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}\|^2 = \|(\Lambda_1 + \Lambda_2)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}\|^2 + \|(\Lambda_3 + \Lambda_4)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}\|^2 =: c(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}) + |\boldsymbol{p}|_{\boldsymbol{P}}^2. \tag{3.46c}$$

**Satz 3.4.** *Der Operator $\mathcal{A}$, der das doppelte Sattelpunktproblem (3.4)(bzw.(3.35)) beschreibt und durch (3.36) definiert, stellt einen Isomorphismus auf $\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{P}$ dar. Durch das doppelte Sattelpunktproblem (3.36) wird genau dann ein Isomorphismus $\mathcal{A}$ in (3.4) (oder (3.35))erklärt.*

***Beweis.*** Die Bedingungen (2.28a),(2.28b) sind trivialerweise erfüllt, da

$$a_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{w})) + \lambda(\text{div } \boldsymbol{u}, \text{div } \boldsymbol{w}) = |\boldsymbol{u}|_U^2,$$
$$a_2(\boldsymbol{v},\boldsymbol{z}) = (\mathbf{R}_v\boldsymbol{v},\boldsymbol{z}) = |\boldsymbol{v}|_{\boldsymbol{V}}^2.$$

Wir werden nächst die Bedingung (2.29a) überprüfen. Für $\tilde{\Lambda} = \Lambda_3 + \Lambda_4$ ist klar, dass

$$(\Lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) \geq (\tilde{\Lambda}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}), \qquad \text{was äquivalent ist zu} \qquad (\Lambda^{-1}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) \leq (\tilde{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}).$$

Somit folgt, nach Lemma 3.3 für $C_3 = R, C_4 = \frac{1}{\lambda_0}$, dass

$$\begin{aligned}
\|\underline{\text{Div}}\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{P}^*}^2 &= (\Lambda^{-1}(\underbrace{\text{div } \boldsymbol{u}, \dots, \text{div } \boldsymbol{u}}_{n})^T, (\underbrace{\text{div } \boldsymbol{u}, \dots, \text{div } \boldsymbol{u}}_{n})^T) \\
&\leq (\tilde{\Lambda}^{-1}(\underbrace{\text{div } \boldsymbol{u}, \dots, \text{div } \boldsymbol{u}}_{n})^T, (\underbrace{\text{div } \boldsymbol{u}, \dots, \text{div } \boldsymbol{u}}_{n})^T) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\tilde{\Lambda}^{-1})_{ij}(\text{div } \boldsymbol{u}, \text{div } \boldsymbol{u}) \leq \lambda_0(\text{div } \boldsymbol{u}, \text{div } \boldsymbol{u}) \leq |\boldsymbol{u}|_{\boldsymbol{U}} = a_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}).
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Es bleibt die Bedingung (2.28c) zu überprüfen. Halten wir zunächst fest, dass nach Lemma 3.1 für alle $p_i \in P_i, i = 1, \dots, n$ ein $\bar{\boldsymbol{v}}_i \in V_i$ existiert, sodass

$$\text{div } \bar{\boldsymbol{v}}_i = \sqrt{R}p_i \quad \text{und} \quad \|\bar{\boldsymbol{v}}_i\|_{\text{div}} \leq \beta_d^{-1}\sqrt{R}\|p_i\|, \quad i = 1, \dots, n,$$

daher auch ein

$$\bar{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V} \quad \text{so dass} \quad \mathrm{Div}\bar{\boldsymbol{v}} = \sqrt{R}\boldsymbol{p} \quad \text{und} \quad \|\bar{\boldsymbol{v}}\|_{\mathrm{Div}} \leq \beta_d^{-1}\sqrt{R}\|\boldsymbol{p}\| = \|\Lambda_3^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}\|, \tag{3.48}$$

wobei $\|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{Div}} := \|\boldsymbol{v}\|^2 + \|\mathrm{Div}\boldsymbol{v}\|^2$. Des Weiteren existiert nach Lemma 3.2 ein

$$\bar{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{U} \quad \text{so dass} \quad \mathrm{div}\ \bar{\boldsymbol{u}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}(\sum_{i=1}^{n} p_i) \quad \text{und} \quad \|\bar{\boldsymbol{u}}\|_1 \leq \beta_s^{-1}\frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}\|\sum_{i=1}^{n} p_i\| = \beta_s^{-1}\|\Lambda_4^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}\|. \tag{3.49}$$

Es seien

$$\boldsymbol{u}_0 := \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}\bar{\boldsymbol{u}}, \qquad \boldsymbol{v}_0 := R^{\frac{1}{2}}\bar{\boldsymbol{v}}.$$

Aus der Dreiecksungleichung und der Kornschen Ungleichung folgt für eine generische Konstante $C_c > 0$

$$\|\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u})\|^2 = \frac{1}{4}\|\nabla\boldsymbol{u} + (\nabla\boldsymbol{u})^T\|^2 \leq \|\nabla\boldsymbol{u}\|^2, \qquad \|\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u})\|^2 \geq C_c\|\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}\|^2.$$

Mit der Definition von $\|\cdot\|_1$ erhalten damit

$$\|\boldsymbol{u}\|_1^2 = \|\nabla\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{u}\|^2 \geq \|\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u})\|^2 \geq C_c(\|\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u})\|^2 + \|\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}\|^2), \quad \text{für alle} \quad \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}. \tag{3.50}$$

Setzen wir obige Ungleichung in (3.49) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\beta_s^{-2}\|\Lambda_4^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}\|^2 &\geq C_c(\|\boldsymbol{\epsilon}(\bar{\boldsymbol{u}})\|^2 + \|\mathrm{div}\ \bar{\boldsymbol{u}}\|^2) = C_c\lambda_0(\|\boldsymbol{\epsilon}(\frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}\bar{\boldsymbol{u}})\|^2 + \|\mathrm{div}\ (\frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}\bar{\boldsymbol{u}})\|^2)\\ &= C_c\lambda_0(\|\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}_0)\|^2 + \|\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}_0\|^2) \geq C_c(\|\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}_0)\|^2 + \lambda\|\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}_0\|^2) = C_c|\boldsymbol{u}_0|_{\boldsymbol{U}}^2.\end{aligned} \tag{3.51}$$

Unter Verwendung von (3.48) und der Definition von $\|\cdot\|_{\mathrm{Div}}$ bekommen wir

$$\begin{aligned}\beta_d^{-2}\|\Lambda_3^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}\|^2 &\geq \|\bar{\boldsymbol{v}}\|_{\mathrm{Div}} = \|\bar{\boldsymbol{v}}\|^2 + \|\mathrm{Div}\bar{\boldsymbol{v}}\|^2 \geq \|\mathbf{R}_v^{\frac{1}{2}}R^{\frac{1}{2}}\bar{\boldsymbol{v}}\|^2 + \|R^{-\frac{1}{2}}R^{\frac{1}{2}}\mathrm{Div}\bar{\boldsymbol{v}}\|^2\\ &= \|\mathbf{R}_v^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{v}_0\|^2 + \|R^{-\frac{1}{2}}\mathrm{Div}\boldsymbol{v}_0\|^2 \geq \|\mathbf{R}_v^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{v}_0\|^2 + \|\Lambda^{-\frac{1}{2}}\mathrm{Div}\boldsymbol{v}_0\|^2 = |\boldsymbol{v}_0|_{\boldsymbol{V}}^2 + \|\mathrm{Div}\boldsymbol{v}_0\|_{\boldsymbol{P}^*}^2.\end{aligned} \tag{3.52}$$

Kombinieren wir (3.51) und (3.52), folgt

$$\|(\Lambda_3 + \Lambda_4)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}\|^2 \geq \beta^2 C_c(|\boldsymbol{u}_0|_{\boldsymbol{U}}^2 + |\boldsymbol{v}_0|_{\boldsymbol{V}}^2 + \|\mathrm{Div}\boldsymbol{v}_0\|_{\boldsymbol{P}^*}^2) = \beta^2 C_c(\|\boldsymbol{u}_0\|_{\boldsymbol{U}}^2 + \|\boldsymbol{v}_0\|_{\boldsymbol{V}}^2),$$

wobei $\beta^{-2} = \max\{\beta_d^{-2}, \beta_s^{-2}\}$. Das heißt

$$(\boldsymbol{p}, \underline{\mathrm{Div}}\boldsymbol{u}_0) + (\boldsymbol{p}, \mathrm{Div}\boldsymbol{v}_0) = \|(\Lambda_3 + \Lambda_4)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}\|^2 \geq C_c|\boldsymbol{p}|_{\boldsymbol{P}} \cdot (\|\boldsymbol{u}_0\|_{\boldsymbol{U}}^2 + \|\boldsymbol{v}_0\|_{\boldsymbol{V}}^2)^{\frac{1}{2}},$$

Daraus ergibt sich schließlich, dass

$$\sup_{(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v})\in\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}} \frac{b_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{p}) + b_2(\boldsymbol{v},\boldsymbol{p})}{(\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{U}}^2 + \|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{V}}^2)^{\frac{1}{2}}} \geq \frac{b_1(\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{p}) + b_2(\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{p})}{(\|\boldsymbol{u}_0\|_{\boldsymbol{U}}^2 + \|\boldsymbol{v}_0\|_{\boldsymbol{V}}^2)^{\frac{1}{2}}} \geq C_c|\boldsymbol{p}|_{\boldsymbol{P}},$$

womit wir gezeigt haben, dass die Bedingung (2.28c) erfüllt ist. □

Außerdem liefert Korollar (2.12) dann noch die folgende Abschätzung:

**Bemerkung 3.5.** *Es sei* $(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v};\boldsymbol{p}) \in \boldsymbol{U} \times \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{P}$ *die Lösung von* (3.36). *Dann gilt:*

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{U}} + \|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{V}} + \|\boldsymbol{p}\|_{\boldsymbol{P}} \leq C(\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{U}^*} + \|\boldsymbol{g}\|_{\boldsymbol{P}^*}),$$

*wobei* $C$ *eine Konstante unabhängig von allen Parametern und die Netzwerkskala* $n$ *ist.*

### 3.5.2 Stabilität des dynamischen MPET-Systems

Um den Satz 2.11 zu verwenden, benötigen wir zuerst die geeigneten Normen. Es seien

$$|(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v})|^2_{\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}} := \frac{\mu\tau^2}{2}(\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u})) + \frac{\lambda\tau^2}{4}(\operatorname{div}\,\boldsymbol{u},\operatorname{div}\,\boldsymbol{u}) + (\Lambda_{uv}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{v}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{v}\end{pmatrix}), \tag{3.53a}$$

$$|(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v})|^2_b := \frac{\tau^2}{4}(\Lambda^{-1}(\mathrm{Div}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\alpha}\underline{\mathrm{Div}}\boldsymbol{u}), \mathrm{Div}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\alpha}\underline{\mathrm{Div}}\boldsymbol{u}), \tag{3.53b}$$

$$|\boldsymbol{p}|^2_{\boldsymbol{P}} := \frac{\tau^2}{4}((\Lambda_2+\Lambda_3)\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}). \tag{3.53c}$$

Damit lassen sich die Normen in (3.40) dann in der Form von (2.16b), (2.16a) schreiben:

$$\|(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v})\|^2_{\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}} = |(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v})|^2_{\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}} + |(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v})|^2_b, \tag{3.54a}$$

$$\|\boldsymbol{p}\|^2_{\boldsymbol{P}} = \frac{\tau^2}{4}\|\Lambda_1^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}\|^2 + |\boldsymbol{p}|^2_{\boldsymbol{P}}. \tag{3.54b}$$

Bevor wir die Stabilität studieren, benötigen wir noch folgende Lemmata:

**Lemma 3.6.** *Die Determinante der Matrix*

$$A := \begin{bmatrix} -b_1 & -b_2 & \cdots & \cdots & -b_n \\ a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a & 0 \end{bmatrix}_{n\times n} \quad \textit{ist } \det(A) = (-1)^n \cdot a^{n-1} \cdot b_n.$$

***Beweis.*** Nach vollständiger Induktion. Für $n = 1$ haben wir $\det(A) = -b_1$. Unter der Annahme die Aussage des Lemmas gilt für eine natürliche Zahl $(n-1)$ zeigen wir sie im Induktionsschritt für $n$. Dazu verwenden wir den Laplaceschen Entwicklungssatzes für Determinanten auf die letzte

Zeile an und erhalten

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= (-1)^{n+n-1} \cdot a \cdot \begin{vmatrix} -b_1 & -b_2 & \cdots & -b_{n-2} & -b_n \\ a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a & 0 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} \\
&= -a\left((-1)^{n-1} a^{n-2} b_n\right) = (-1)^n \cdot a^{n-1} \cdot b_n.
\end{aligned}
$$

□

**Lemma 3.7.** *Die Determinante der Matrix*

$$
B := \begin{bmatrix} c & -b_1 & -b_2 & \cdots & b_n \\ -b_1 & a & \cdots & \cdots & 0 \\ -b_2 & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -b_n & 0 & \cdots & \cdots & a \end{bmatrix}_{(n+1)\times(n+1)} \qquad \textit{ist } \det(B) = a^{n-1}\left(a \cdot c - \sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).
$$

***Beweis.*** Nach vollständiger Induktion. Für $n = 1$ haben wir $\det(A) = a \cdot c - b_1^2$. Angenommen, die Aussage gilt für $(n-1)$, dann zeigen wir sie im Induktionsschritt für $n$. Unter Verwendung des Laplacesche Entwicklungssatzes folgt

$$
\begin{aligned}
\det(B) = (-1)^{n+1+1} \cdot (-b_n) \cdot \begin{vmatrix} -b_1 & \cdots & \cdots & -b_n \\ a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a & 0 \end{vmatrix}_{n\times n} &+ (-1)^{2n+2} \cdot a \cdot \begin{vmatrix} c & -b_1 & \cdots & b_{n-1} \\ -b_1 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b_{n-1} & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}_{n\times n} \\
= (-1)^n \cdot (-b_n)((-1)^n a^{n-1} b_n) + a \cdot a^{n-2}\left(a \cdot c - \sum_{i=1}^{n-1} b_i^2\right) &= -a^{n-1} \cdot b_n^2 + a^{n-1}\left(a \cdot c - \sum_{i=1}^{n-1} b_i^2\right).
\end{aligned}
$$

□

**Satz 3.8.** *Das klassische Sattelpunktproblem* (3.39) *definiert einen Isomorphismus* $\mathcal{A}$ *in* (3.27).

***Beweis.*** Die erste Bedingung (2.17a) in Satz 2.11 ist trivialerweise erfüllt, da

$$
a((\boldsymbol{u};\boldsymbol{v}),(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v})) = |(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v})|^2_{\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}}.
$$

Es bleibt die Bedingung (2.17b) zu überprüfen. Halten wir zunächst fest, dass es für alle $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{P}$ nach Lemma 3.1

$$\exists\ \bar{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V} \quad \text{sodass} \quad \mathrm{Div}\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{A}}_{22}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{p} \quad \text{und} \quad \|\bar{\boldsymbol{v}}\|_{\mathrm{Div}} \leq \beta_d^{-1}\|\Lambda_2^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}\|, \tag{3.55}$$

und ebenso, nach Lemma 3.2

$$\exists\ \bar{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{U} \quad \text{sodass} \quad \underline{\mathrm{Div}}\bar{\boldsymbol{u}} = \frac{\tau}{2\sqrt{\gamma}}\Lambda_4\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{p} \quad \text{und} \quad \|\bar{\boldsymbol{u}}\|_1 \leq \frac{\tau\beta_s^{-1}}{2\sqrt{\gamma}}\|\Lambda_4^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{p}\| = \beta_s^{-1}\|\Lambda_3^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}\|. \tag{3.56}$$

Es seien

$$\boldsymbol{u}_0 := \frac{\tau}{2\sqrt{\gamma}}\bar{\boldsymbol{u}}, \qquad \boldsymbol{v}_0 := \frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{A}}_{22}^{-\frac{1}{2}}\bar{\boldsymbol{v}}.$$

Zunächst werden wir $\|\Lambda^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\alpha}\underline{\mathrm{Div}}\boldsymbol{u}\|$ und $\|\Lambda_{uv}^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_0\\ \boldsymbol{v}_0\end{pmatrix}\|$ abschätzen. Nach der Definition von $\Lambda$ und mit Lemma 3.3 bekommen wir

$$\begin{aligned}
\|\Lambda^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\alpha}\underline{\mathrm{Div}}\boldsymbol{u}\|^2 &= \|(\Lambda_1 + \frac{\tau^2}{4}\bar{\mathcal{A}}_{22}^{-1} + \frac{\tau^2}{4\gamma}\boldsymbol{\alpha}\Lambda_4\boldsymbol{\alpha})^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\alpha}\underline{\mathrm{Div}}\boldsymbol{u}\|^2 \\
&= \|(\boldsymbol{\alpha}^{-1}\Lambda_1\boldsymbol{\alpha}^{-1} + \frac{\tau^2}{4}\boldsymbol{\alpha}^{-2}\bar{\mathcal{A}}_{22}^{-1} + \frac{\tau^2}{4\gamma}\Lambda_4)^{-\frac{1}{2}}\underline{\mathrm{Div}}\boldsymbol{u}\|^2 \\
&\leq \frac{4}{\tau^2}\|(\boldsymbol{\alpha}^{-2}\bar{\mathcal{A}}_{22}^{-1} + \frac{1}{\gamma}\Lambda_4)^{-\frac{1}{2}}\underline{\mathrm{Div}}\boldsymbol{u}\|^2 \leq \frac{4\gamma}{\tau^2}\|\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}\|, \qquad \text{für alle} \quad \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}.
\end{aligned} \tag{3.57}$$

$$\begin{aligned}
\|\Lambda_{uv}^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_0\\ \boldsymbol{v}_0\end{pmatrix}\| &= \|\Lambda_{uv}^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\frac{\tau}{2\sqrt{\gamma}}\bar{\boldsymbol{u}}\\ \frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{A}}_{22}^{-\frac{1}{2}}\bar{\boldsymbol{v}}\end{pmatrix}\|^2 = \frac{\tau^2}{4}\left(\underbrace{\begin{bmatrix} c & \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\bar{\mathcal{A}}_{12}\bar{\mathcal{A}}_{22}^{-\frac{1}{2}} \\ (\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\bar{\mathcal{A}}_{12}\bar{\mathcal{A}}_{22}^{-\frac{1}{2}})^T & \mathbf{I}\end{bmatrix}}_{:=G}\begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{u}}\\ \bar{\boldsymbol{v}}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{u}}\\ \bar{\boldsymbol{v}}\end{pmatrix}\right) \\
&\leq \frac{\tau^2}{4}\lambda_{\max}(G)(\|\bar{\boldsymbol{u}}\|^2 + \|\bar{\boldsymbol{v}}\|^2) \underset{(3.56),(3.55)}{\leq} \frac{\tau^2}{4}\lambda_{\max}(G)\left(\beta_s^{-2}\|\Lambda_3^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}\|^2 + \beta_d^{-2}\|\Lambda_2^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}\|^2\right),
\end{aligned} \tag{3.58}$$

wobei $c := \frac{\gamma_u}{\gamma} \leq 1$ ist. Nun sei $-b_i := (\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\bar{\mathcal{A}}_{12}\bar{\mathcal{A}}_{22}^{-\frac{1}{2}})_i = -\gamma_i\sqrt{\frac{1}{\gamma_{v,i}}}\frac{1}{\sqrt{\gamma}}, i = 1, \ldots, n$, dann ist

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\rho_i^2\frac{1}{\rho_{m_i} + \frac{\tau}{2}K_i^{-1}}\frac{1}{\gamma}\right) \leq \sum_{i=1}^{n}\left(\rho_i^2\frac{1}{\frac{\rho_i}{\varphi_i}}\frac{1}{\rho}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\rho_i\varphi_i}{\rho} \leq 1. \tag{3.59}$$

Um die Eigenwerte der Matrix $G$ zu finden, verwenden wir Lemma 3.7 :

$$\det(G-\lambda I) = \begin{vmatrix} c-\lambda & -b_1 & \cdots & \cdots & -b_n \\ -b_1 & 1-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1-\lambda & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -b_n & 0 & \cdots & \cdots & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^{n-1}\left((1-\lambda)(c-\lambda) - \sum_{i=1}^n b_i^2\right)$$
$$= (1-\lambda)^{n-1}\left(\lambda^2 - (1+c)\lambda + c - \sum_{i=1}^n b_i^2\right) = 0.$$

Es folgt

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = \frac{(1+c) \pm \sqrt{(1-c)^2 + 4\sum_{i=1}^n b_i^2}}{2},$$

$$\lambda_{\max}^2 = \frac{\left((1+c) + \sqrt{(1-c)^2 + 4\sum_{i=1}^n b_i^2}\right)^2}{4} \le \frac{2(1+c)^2 + 2(1-c)^2 + 8\sum_{i=1}^n b_i^2}{4}$$
$$\underbrace{\le}_{(3.59)} \frac{4+4c^2+8}{4} \le 4. \tag{3.60}$$

Schließlich erhalten wir aus (3.58):

$$\|\Lambda_{uv}^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_0 \\ \boldsymbol{v}_0 \end{pmatrix}\|^2 \le \frac{\tau^2}{2}\left(\beta_s^{-2}\|\Lambda_3^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}\|^2 + \beta_d^{-2}\|\Lambda_2^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}\|^2\right). \tag{3.61}$$

Nach (3.56), (3.50) und der Definition von $\gamma$ folgt für eine generische Konstante $C_c > 0$

$$\beta_s^{-2}\|\Lambda_3^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}\|^2 \ge C_c(\|\boldsymbol{\epsilon}(\bar{\boldsymbol{u}})\|^2 + \|\mathrm{div}\ \bar{\boldsymbol{u}}\|^2) = C_c\frac{4\gamma}{\tau^2}(\|\frac{\tau}{2\sqrt{\gamma}}\boldsymbol{\epsilon}(\bar{\boldsymbol{u}})\|^2 + \|\mathrm{div}\ (\frac{\tau}{2\sqrt{\gamma}}\bar{\boldsymbol{u}})\|^2)$$
$$= C_c\frac{4\gamma}{\tau^2}(\|\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}_0)\|^2 + \|\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}_0\|^2) \ge C_c\frac{4}{\tau^2}(\frac{\mu\tau^2}{2}\|\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}_0)\|^2 + \frac{\tau^2\lambda}{4}\|\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}_0\|^2 + \gamma\|\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}_0\|^2). \tag{3.62}$$

Setzen wir (3.57) in obiger Ungleichung ein, so erhalten wir

$$\beta_s^{-2}\|\Lambda_3^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}\|^2 \ge C_c\frac{4}{\tau^2}(\frac{\mu\tau^2}{2}\|\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}_0)\|^2 + \frac{\tau^2\lambda}{4}\|\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}_0\|^2 + \frac{\tau^2}{4}\|\Lambda^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\alpha}\underline{\mathrm{Div}}\boldsymbol{u}_0\|^2). \tag{3.63}$$

Nach (3.55) und der Definition von $\|\cdot\|_{\mathrm{Div}}$ bekommen wir

$$\beta_d^{-2}\|\Lambda_2^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}\|^2 \ge \|\bar{\boldsymbol{v}}\|_{\mathrm{Div}} = \|\bar{\boldsymbol{v}}\|^2 + \|\mathrm{Div}\bar{\boldsymbol{v}}\|^2 \ge \|(\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{A}}_{22}^{-\frac{1}{2}})^{-1}(\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{A}}_{22}^{-\frac{1}{2}})\mathrm{Div}\bar{\boldsymbol{v}}\|^2$$
$$= \|\Lambda_2^{-\frac{1}{2}}\mathrm{Div}\boldsymbol{v}_0\|^2 \ge \|\Lambda^{-\frac{1}{2}}\mathrm{Div}\boldsymbol{v}_0\|^2. \tag{3.64}$$

Schließlich kombinieren wir (3.63),(3.61) und (3.64), wenden wir Dreiecksungleichung an und erhalten damit

$$\begin{aligned}\frac{\tau^2}{4}\|(\Lambda_2+\Lambda_3)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}\|^2 \geq C_c\Big(\frac{\mu\tau^2}{2}\|\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}_0)\|^2+\frac{\tau^2\lambda}{4}\|\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}_0\|^2+\frac{\tau^2}{4}\|\Lambda^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{\alpha}\underline{\mathrm{Div}}\boldsymbol{u}_0+\mathrm{Div}\boldsymbol{v}_0)\|^2 \\ +\|\Lambda_{uv}^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_0\\ \boldsymbol{v}_0\end{pmatrix}\|^2\Big) \quad = \quad C_c\|(\boldsymbol{u}_0;\boldsymbol{v}_0)\|^2_{\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}}.\end{aligned} \tag{3.65}$$

Nach den Definitionen von $\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{v}_0$ gilt

$$\begin{aligned}\frac{\tau^2}{4}\Big(\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{p}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}\underline{\mathrm{Div}}\boldsymbol{u}_0\\ \mathrm{Div}\boldsymbol{v}_0\end{pmatrix}\Big)=\frac{\tau^2}{4}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha}\underline{\mathrm{Div}}\boldsymbol{u}_0)+\frac{\tau^2}{4}(\boldsymbol{p},\mathrm{Div}\boldsymbol{v}_0)=\frac{\tau^2}{4}\|(\Lambda_2+\Lambda_3)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}\|^2 \\ \geq C_c|\boldsymbol{p}|_{\boldsymbol{P}}\cdot\|(\boldsymbol{u}_0;\boldsymbol{v}_0)\|_{\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}}.\end{aligned}$$

Es folgt also

$$\sup_{(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v})\in\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}}\frac{b\Big(\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{v}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{p}\end{pmatrix}\Big)}{\|(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v})\|_{\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}}}\geq\frac{b\Big(\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_0\\ \boldsymbol{v}_0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{p}\end{pmatrix}\Big)}{\|(\boldsymbol{u}_0;\boldsymbol{v}_0)\|_{\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}}}\geq C_c|\boldsymbol{p}|_{\boldsymbol{P}},$$

womit wir gezeigt haben, dass die Bedingung (2.17b) erfüllt ist. □

Die folgende Stabilitätsschätzung ist eine Folge des obigen Satzes.

**Korollar 3.9.** *Es sei $(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v};\boldsymbol{p})\in\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{P}$ die Lösung von (3.39), dann gilt die folgende Abschätzung*

$$\|(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v})\|_{\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}}+\|\boldsymbol{p}\|_{\boldsymbol{P}}\leq C(\|(\mathcal{G}_1;\mathcal{G}_2)\|_{\boldsymbol{U}^*\times\boldsymbol{V}^*}+\|\mathcal{G}_3\|_{\boldsymbol{P}^*}), \tag{3.66}$$

*wobei*

$$\|(\mathcal{G}_1;\mathcal{G}_2)\|_{\boldsymbol{U}^*\times\boldsymbol{V}^*}=\sup_{(\boldsymbol{w};\boldsymbol{z})\in\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}}\frac{((\mathcal{G}_1;\mathcal{G}_2),(\boldsymbol{w};\boldsymbol{z}))}{\|(\boldsymbol{w};\boldsymbol{z})\|_{\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}}},\qquad\|\mathcal{G}_3\|_{\boldsymbol{P}^*}=\sup_{\boldsymbol{q}\in\boldsymbol{P}}\frac{(\mathcal{G}_3,\boldsymbol{q})}{\|\boldsymbol{q}\|_{\boldsymbol{P}}}=\|\Lambda^{-\frac{1}{2}}\mathcal{G}_3\|,$$

*und $C$ eine Konstante unabhängig von allen Parametern und der Netzwerkskala $n$ ist.*

## 3.6 Norm-äquivalenter Vorkonditionierer $\mathcal{B}$

### 3.6.1 Norm-äquivalenter Vorkonditionierer für das quasistatische MPET-System

Wir betrachten nochmals die parameter-abhängigen Normen induziert durch

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})_{\boldsymbol{U}}&=(\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{w}))+\lambda(\mathrm{div}\ \boldsymbol{u},\mathrm{div}\ \boldsymbol{w}),\\ (\boldsymbol{v},\boldsymbol{z})_{\boldsymbol{V}}&=(\mathbf{R}_v\boldsymbol{v},\boldsymbol{z})+(\Lambda^{-1}\mathrm{Div}\boldsymbol{v},\mathrm{Div}\boldsymbol{z}),\\ (\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})_{\boldsymbol{P}}&=(\Lambda\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}).\end{aligned}$$

Nach der in [53] vorgestellten Theorie, vgl. auch Kapitel 2.3, folgt nach Satz 3.4, dass der Operator

$$\mathcal{B} := \begin{bmatrix} \mathcal{B}_{\boldsymbol{u}}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{B}_{\boldsymbol{v}}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathcal{B}_{\boldsymbol{p}}^{-1} \end{bmatrix}, \tag{3.68}$$

den kanonischen Vorkonditionierer für den Operator $\mathcal{A}$ definiert, der in (3.4) (oder (3.35)) definiert ist, wobei

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) &:= (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})_{\boldsymbol{U}} = -(\operatorname{div} \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{w}) - \lambda(\nabla \operatorname{div} \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = ((-\operatorname{div} \boldsymbol{\epsilon} - \lambda \nabla \operatorname{div} )\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}), \\ (\mathcal{B}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{z}) &:= (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{z})_{\boldsymbol{V}} = (\mathbf{R}_v\boldsymbol{v}, \boldsymbol{z}) + (\Lambda^{-1}\operatorname{Div}\boldsymbol{v}, \operatorname{Div}\boldsymbol{z}) = (\mathbf{R}_v\boldsymbol{v}, \boldsymbol{z}) + \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}(\Lambda^{-1})_{ij}\operatorname{div} \boldsymbol{v}_j, \operatorname{div} \boldsymbol{z}_i) \\ &= (\mathbf{R}_v\boldsymbol{v}, \boldsymbol{z}) - \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}(\Lambda^{-1})_{ij}\nabla \operatorname{div} \boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{z}_i) = (\mathbf{R}_v\boldsymbol{v}, \boldsymbol{z}) - ((\Lambda^{-1} \otimes I_d)\boldsymbol{\nabla}\operatorname{Div}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{z}) \\ &= ((\mathbf{R}_v - (\Lambda^{-1} \otimes I_d)\boldsymbol{\nabla}\operatorname{Div})\boldsymbol{v}, \boldsymbol{z}), \\ (\mathcal{B}_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) &:= (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})_{\boldsymbol{P}} = (\Lambda\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}), \end{aligned}$$

und

$$\boldsymbol{\nabla}\operatorname{Div}\boldsymbol{v} := \begin{pmatrix} \nabla \operatorname{div} \boldsymbol{v}_1 \\ \vdots \\ \nabla \operatorname{div} \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix}.$$

### 3.6.2 Norm-äquivalenter Vorkonditionierer für das dynamische MPET-System

**Anmerkung 3.10.** *Es sei $\boldsymbol{W} := \boldsymbol{U} \times \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{P}$ mit der Norm $\|\cdot\|_{\boldsymbol{W}}^2 := \|\cdot\|_{\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}}^2 + \|\cdot\|_{\boldsymbol{P}}^2$ und der Operator*

$$\mathcal{A} := \begin{bmatrix} -\frac{\tau^2}{4}\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} + \gamma_u & \bar{\mathcal{A}}_{12} & \frac{\tau^2}{4}\nabla\bar{\boldsymbol{\alpha}} \\ \bar{\mathcal{A}}_{21} & \bar{\mathcal{A}}_{22} & \frac{\tau^2}{4}\nabla\mathbf{I}_n \\ -\frac{\tau^2}{4}\operatorname{div} \bar{\boldsymbol{\alpha}}^T & -\frac{\tau^2}{4}\operatorname{div}\mathbf{I}_n & -\frac{\tau^2}{4}\Lambda_1 \end{bmatrix},$$

*definiert durch die Bilinearform (3.42), wobei $\bar{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{bmatrix}$. Nach der Theorie in [53] folgt in Anbetracht von Satz 3.8, dass der Operator*

$$\mathcal{B} := \begin{bmatrix} \mathcal{B}_{\boldsymbol{uv}}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{B}_{\boldsymbol{p}}^{-1} \end{bmatrix}, \tag{3.69}$$

*den kanonische Vorkonditionierer für den Operator $\mathcal{A}$ definiert, wobei*

$$\mathcal{B}_{\boldsymbol{uv}} = \frac{\tau^2}{4}\tilde{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{uv}} + \Lambda_{uv}, \qquad \mathcal{B}_{\boldsymbol{p}} = \frac{\tau^2}{4}\Lambda,$$

$$\tilde{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{uv}} := \begin{bmatrix} -2\mu \mathrm{div}\, \boldsymbol{\epsilon} - \lambda \nabla \mathrm{div} \; - \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \bar{\gamma}_{ij} \alpha_j \nabla \mathrm{div} & - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{\gamma}_{i1} \nabla \mathrm{div} & \cdots & - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{\gamma}_{in} \nabla \mathrm{div} \\ - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{\gamma}_{i1} \nabla \mathrm{div} & -\bar{\gamma}_{11} \nabla \mathrm{div} & \cdots & -\bar{\gamma}_{1n} \nabla \mathrm{div} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{\gamma}_{in} \nabla \mathrm{div} & -\bar{\gamma}_{n1} \nabla \mathrm{div} & \cdots & -\bar{\gamma}_{nn} \nabla \mathrm{div} \end{bmatrix},$$

*und* $(\bar{\gamma}_{ij}) := (\Lambda^{-1})_{ij}$.

# 4 Gemischte Finite Element Methoden

## 4.1 Vorwort und Notation

Im Folgenden wird ein Überblick über Finite-Elemente und endlich-dimensionale Approximationen der Räume $L^2(\Omega), H(\mathrm{div}\ ,\Omega)$, $H^1(\Omega)$ gegeben, der großteils auf den Quellen [36, 25, 23] beruht.

### 4.1.1 Das Ritz–Galerkin-Verfahren

Gegeben seien Hilbertraum $V$, eine $V$-elliptische stetige Bilinearform $a : V \times V \to \mathbb{R}$ und ein stetiges Funktional $F : V \to \mathbb{R}$. Gesucht ist $u \in V$ sodass

$$a(u, v) = F(v), \qquad v \in V. \tag{4.1}$$

Die konforme Galerkin-Approximation besteht darin, einen endlichen dimensional abgeschlossenen Teilraum $V_h \subset V$ zu wählen, in dem man die Lösung des Problems

$$a(u_h, v_h) = F(v_h), \qquad v_h \in V_h, \tag{4.2}$$

bestimmt. Da $v_h \in V_h \subset V$, gilt

$$a(u, v_h) = a(u_h, v_h) \quad \implies a(u - u_h, v_h) = 0. \tag{4.3}$$

Die Relation (4.3) wird oft als Galerkin–Orthogonalität bezeichnet [25]. Das folgende Ergebnis spielt eine wichtige Rolle bei der Abschätzung des Diskretisierungsfehlers der Galerkin-Approximation:

**Lemma 4.1.** *[25, II 4.2 Lemma von Céa] Es seien $u \in V$ bzw. $u_h \in V_h \subset V$ die Lösungen der Variationsaufgabe (4.1) bzw. (4.2). Dann gilt*

$$\|u - u_h\|_V \le \frac{\overline{C}_a}{\underline{C}_a} \inf_{v_h \in V_h} \|v_h - u_h\|_V ,$$

*wobei $\underline{C}_a, \overline{C}_a$ die Konstanten aus der $V$-Elliptizität und der Stetigkeit der Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ sind.*

### 4.1.2 Finite Element Methoden

Um Finite Element Räumen zu konstruieren, zerlegt man das gegebene Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ in endlich viele Teilgebiete und betrachtet Funktionen, die auf jedem Teilgebiet Polynome sind. Die Teilgebiete werden als Elemente bezeichnet. Für $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ kann man Dreieckes oder Viereckes-Elemente, und für $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ Tetraeder-, Würfel- oder Quader-Element wählen.

**Definition 4.2.** *[25, II 5.1 Definition]*

1. *Eine Zerlegung $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \ldots, T_m\}$ von $\Omega$ in Dreiecks- bzw. Vierecks-Elemente heißt **zulässig**, wenn sie folgende Eigenschaften erfüllt sind:*
   a. $\overline{\Omega} = \cup_{i=1}^{m} T_i$.
   b. *Besteht $T_i \cap T_j$ aus genau einem Punkt, so ist dieser ein Eckpunkt sowohl von $T_i$ als auch von $T_j$.*
   c. *Besteht $T_i \cap T_j$ für $i \neq j$ aus mehr als einem Punkt, so ist $T_i \cap T_j$ eine Kante sowohl von $T_i$ als auch von $T_j$.*

2. *Es kann $\mathcal{T}_h$ anstatt $\mathcal{T}$ geschrieben werden, wenn jedes Element einen Durchmesser von höchstens $2h$ besitzt.*

3. *Eine Familie von Zerlegungen $\mathcal{T}$ heißt **quasi-uniform**, wenn es eine Zahl $k > 0$ gibt, so dass jedes $T$ von $\mathcal{T}_h$ einen Kreis vom Radius $\rho_T$ mit*

$$\rho_T \geq h_T/k$$

*enthält, wobei $h_T$ der halbe Durchmesser von $T$ ist.*

4. *Eine Familie von Zerlegungen $\mathcal{T}_h$ heißt **uniform**, wenn es eine Zahl $k > 0$ gibt, so dass jedes Element $T$ von $\mathcal{T}_h$ einen Kreis mit Radius $\rho_T \geq h/k$ enthält.*

**Definition 4.3.** *[25, II 5.8 Definition ]*

*Ein Finites Element ist ein Tripel $(T, \Pi, \sum)$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. *$T$ ist ein Polyeder im $\mathbb{R}^d$. (Die Teile der Oberfläche $\partial T$, die auf einer Hyperebene liegen, werden als Seiten bezeichnet.)*

2. *$\Pi$ ist ein Unterraum von $C(T)$ mit endlicher Dimension $s$. Die Funktionen in $\Pi$ heißen Formfunktionen (engl. shape functions).*

3. *$\sum$ ist eine Menge von $s$-linear unabhängigen Funktionalen über $\Pi$. Jedes $p \in \Pi$ ist durch die Werte der $s$-Funktionale aus $\sum$ eindeutig bestimmt. Da sich die Funktionale häufig auf Funktionswerte und Ableitungen an Punkten in $T$ beziehen, spricht man von (verallgemeinerten) Interpolationsbedingungen.*

Wie im vorherigen Abschnitt gezeigt wurde, liegt die Lösung des Gleichungssystems (3.36),(3.39) in den Räumen $L^2(\Omega), H(\text{div}\ ,\Omega)$ und $H^1(\Omega)$, d.h.,

- die Lösung aus (3.36): $(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v};\boldsymbol{p}) \in H^1(\Omega)^d \times (H(\text{div}\ ,\Omega))^n \times (L^2(\Omega))^n$,
- die Lösung aus (3.39): $(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v};\boldsymbol{p}) \in H^1(\Omega)^d \times (H(\text{div}\ ,\Omega))^n \times (L^2(\Omega))^n$.

Wir betrachten nun die endlich-dimensionalen Unterräume von $L^2(\Omega), H(\text{div}\ ,\Omega)$ und für $H^1(\Omega)$ verwenden wir die diskontinuierliche Galerkin-Methode, die später erklärt wird.

### 4.1.3 Approximation der Räume $L^2(\Omega)$ und $H(\text{div}\ ,\Omega)$

Definieren wir auf dem Element $T \in \mathcal{T}_h$

$$\mathcal{P}_k(T) := \text{ Raum der Polynome vom Grad } \leq k, \tag{4.4a}$$

$$R_k(\partial T) := \{\phi \ : \ \phi \in L^2(\partial T), \phi|_{e_i} \in \mathcal{P}_k(e_i) \ \text{ für alle Kanten } e_i \text{ von } T\}. \tag{4.4b}$$

Es sei

$$\mathcal{P}_k(\Omega) := \{v : v|_T \in \mathcal{P}_k(T) \text{ für jedes } T \in \mathcal{T}_h\}.$$

Es ist klar, dass $\mathcal{P}_k(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ ist, da dieser Raum aus stückweisen Polynomen vom Grad $k$ besteht.

Den folgenden Überblick und weitere Details kann man in [23] finden. Die Funktionen in der Approximation von $H(\text{div}\ ,\Omega)$ sollen stetige Normalkomponenten an den Elementgrenzen besitzen, was in folgenden Räume auftritt:

$$\mathcal{P}_k^s(T) := \{\boldsymbol{p} \in (\mathcal{P}_k(T))^d : \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{n} \in R_s(\partial T)\}, \tag{4.5a}$$

$$\mathcal{P}_{k+xk}^s(T) := \{\boldsymbol{p} \in \Big((\mathcal{P}_k(T))^d + \boldsymbol{x}\mathcal{P}_k(T)\Big) : \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{n} \in R_s(\partial T); \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d\}, \tag{4.5b}$$

wobei $\boldsymbol{n}$ den Einheitsnormalenvektor bezeichnet. Einige klassische Fälle sind unter folgenden Namen bekannt:

- Brezzi-Douglas-Marini Raum
$$BDM_k(T) := \mathcal{P}_k^k(T).$$
- Raviart-Thomas Raum
$$RT_k(T) := \mathcal{P}_{k+xk}^k(T).$$
- Brezzi-Douglas-Fortin-Marini Raum
$$BDFM_k(T) := \mathcal{P}_k^{k-1}(T).$$

Dabei gelten die folgenden Beziehungen zwischen den eben definierten Räumen:

$$RT_{k-1} \subset BDFM_k \subset BDM_k \subset RT_k.$$

In den folgenden Fehlerabschätzung werden die obigen Räume als $M_k(T)$ bezeichnet, wobei $(\mathcal{P}_k(T))^d \subset M_k(T)$ und $(\mathcal{P}_{k+1}(T))^d \not\subset M_k(T)$. D.h, $M_k(T) \in \{BDM_k(T), RT_k(T), BDFM_{k+1}(T)\}$ sein. Es seien

$$M_k(\Omega, \mathcal{T}_h) := \{q | q \in H(\text{div }; \Omega), q|_T \in M_k(T)\},$$

und die Interpolationsoperatoren gegeben durch

$$\rho_T : H(\text{div }; \Omega) \cap (L^s(T))^d \to M_k(T), \quad \text{und} \quad \Pi_h : H(\text{div }; \Omega) \cap (L^s(\Omega))^d \to M_k(\Omega, \mathcal{T}_h), \quad s > 2,$$

dann gilt:

$$\Pi_h q|_T = \rho_T(q|_T).$$

**Bemerkung 4.4.** *[23, Proposition 2.5.2]*

$$\int_T v\text{div }(\rho_T q)dx = \int_T v\text{div } q dx, \qquad \forall v \in \text{div }(M_k(T)).$$

Damit lässt sich folgende Fehlerabschätzung zeigen:

**Satz 4.5.** *[23, Proposition 2.5.4] Sei $\mathcal{T}_h$ eine quasi-uniforme Zerlegung von $\Omega$. Dann existiert eine von $h$ unabhängige Konstante $c$ sodass*

$$\|q - \Pi_h q\| \le ch^m |q|_{m,\Omega}, \qquad 1 \le m \le k+1, \tag{4.6a}$$

$$\|\text{div }(q - \Pi_h q)\| \le ch^s |\text{div } q|_{s,\Omega}, \tag{4.6b}$$

*wobei $s \le k$ für den Raum $BDM_k$ und $s \le k+1$ für die anderen Wahlmöglichkeiten von $M_k$.*

### 4.1.4 Discontinuous-Galerkin(DG) Methode

Im Gegensatz zur Continuous-Galerkin(CG)-Diskretisierung sind die Funktionen beim Übergang von Element zu Element im Allgemeinen unstetig. Deswegen führen wir einige neue Bezeichnungen ein. Die folgende Zusammenfassung von DG-Methoden wurde überwiegend aus [41] übernommen.

Sei $\mathcal{T}_h$ eine quasi-uniforme Triangulierung des Gebiets $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit der Maschenweite $h$ in Dreiecke $T \in \mathcal{T}_h$. Die Menge aller inneren Kanten (oder Flächen) von $\mathcal{T}_h$ bezeichnen wir mit $\mathcal{E}_h^I$, die Menge aller Randkanten (oder Randflächen) mit $\mathcal{E}_h^B$ und setzen $\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^B \cup \mathcal{E}_h^I$.

Für $s \ge 1$, definieren wir :

$$H^s(\mathcal{T}_h) = \left\{\phi \in L^2(\Omega) : \phi|_T \in H^s(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\right\}.$$

Sei $e = \partial T_1 \cap \partial T_2$ der gemeinsame Rand von zwei Elementen $T_1$ und $T_2$ in $\mathcal{T}_h$ und seien $n_1$ und $n_2$ die Einheitsnormalenvektoren von $e$, die nach außen von $T_1$ bzw. $T_2$ zeigen. Für jeden Skalar $q \in H^1(\mathcal{T}_h)$, Vektor $\boldsymbol{v} \in H^1(\mathcal{T}_h)^d$ und Tensor $\boldsymbol{\tau} \in H^1(\mathcal{T}_h)^{d\times d}$ definieren wir **die Mittelwerte**:

$$\{\boldsymbol{v}\} = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{v}|_{\partial T_1\cap e} \cdot \boldsymbol{n}_1 - \boldsymbol{v}|_{\partial T_2\cap e} \cdot \boldsymbol{n}_2), \quad \{\boldsymbol{\tau}\} = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\tau}|_{\partial T_1\cap e}\boldsymbol{n}_1 - \boldsymbol{\tau}|_{\partial T_2\cap e}\boldsymbol{n}_2), \qquad \text{für alle } e \in \mathcal{E}_h^I,$$

$$\{\boldsymbol{v}\} = \boldsymbol{v}|_e \cdot \boldsymbol{n}, \qquad \{\boldsymbol{\tau}\} = \boldsymbol{\tau}|_e\boldsymbol{n}, \qquad \text{für alle } e \in \mathcal{E}_h^B,$$

und **die Sprünge**:

$$[q] = q|_{\partial T_1\cap e} - q|_{\partial T_2\cap e}, \quad [\boldsymbol{v}] = \boldsymbol{v}|_{\partial T_1\cap e} - \boldsymbol{v}|_{\partial T_2\cap e}, \qquad \text{für alle } e \in \mathcal{E}_h^I,$$

$$[q] = q|_e, \qquad [\boldsymbol{v}] = \boldsymbol{v}|_e, \qquad \text{für alle } e \in \mathcal{E}_h^B.$$

Als Nächstes betrachten wir den Finite-Elemente Raum:

$$V_h = \{\boldsymbol{v} \in H(\text{div }; \Omega) : \boldsymbol{v}|_T \in V(T),\ T \in \mathcal{T}_h;\ \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \text{ on } \partial\Omega\},$$

Nach der Definition von $V_h$ ist die Normalkomponente von $\boldsymbol{v} \in V_h$ auf den inneren Kanten stetig und verschwindet am Rand. Durch Aufspaltung von $\boldsymbol{v} \in V_h$ in Normal- und Tangentialkomponente $\boldsymbol{v}_n$ und $\boldsymbol{v}_t$ erhalten wir:

$$\boldsymbol{v}_n := (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{v}_t := \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_n,$$

$$\forall e \in \mathcal{E}_h \quad \int_e [\boldsymbol{v}].\tau ds = \int_e [\boldsymbol{v}_n].\tau ds + \int_e [\boldsymbol{v}_t].\tau ds = \int_e [\boldsymbol{v}_t].\tau ds \quad \tau \in H(\mathcal{T}_h)^d, \boldsymbol{v} \in V_h.$$

Es sei die Bilinearform $a_h(\cdot,\cdot)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} a_h(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) := \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_T \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{w})dx - \sum_{e\in\mathcal{E}_h} \int_e \{\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u})\} \cdot [\boldsymbol{w}_t]ds - \sum_{e\in\mathcal{E}_h} \int_e \{\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{w})\} \cdot [\boldsymbol{u}_t]ds \\ + \sum_{e\in\mathcal{E}_h} \int_e \eta h_e^{-1}[\boldsymbol{u}_t] \cdot [\boldsymbol{w}_t]ds, \qquad v, w \in V_h, \end{aligned} \tag{4.7}$$

wobei $\eta$ ein Stabilisierungsparameter ist, der von der Maschengröße $h$ unabhängig ist. Um eine passende Norm zu definieren, führen wir für $\boldsymbol{v} \in V_h$ folgende gitter-abhängigen Normen ein:

$$\|\boldsymbol{v}\|_h^2 = \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \|\epsilon(\boldsymbol{v})\|_{0,T}^2 + \sum_{e\in\mathcal{E}_h} h_e^{-1}\|[\boldsymbol{v}_t]\|_{0,e}^2,$$

$$\|\boldsymbol{v}\|_{1,h}^2 = \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \|\nabla\boldsymbol{v}\|_{0,T}^2 + \sum_{e\in\mathcal{E}_h} h_e^{-1}\|[\boldsymbol{v}_t]\|_{0,e}^2.$$

Schließlich definieren wir noch die "DG"Norm:

$$\|\boldsymbol{v}\|_{DG}^2 = \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \|\nabla\boldsymbol{v}\|_{0,T}^2 + \sum_{e\in\mathcal{E}_h} h_e^{-1}\|[\boldsymbol{v}_t]\|_{0,e}^2 + \sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2|\boldsymbol{v}|_{2,T}^2.$$

Wir fassen nun einige Ergebnisse betreffend der soeben definierten DG-Billinearform und Normen zusammen:

- Unter Verwendung der diskreten kornschen Ungleichung erhalten wir, dass die Normen $\|\cdot\|_{DG}, \|\cdot\|_h$ und $\|\cdot\|_{1,h}$ äquivalent auf $V_h$ sind, d.h.,

$$\|\boldsymbol{v}\|_{DG} \eqsim \|\boldsymbol{v}\|_h \eqsim \|\boldsymbol{v}\|_{1,h}, \quad \text{für alle} \quad \boldsymbol{v} \in V_h. \tag{4.8a}$$

$$\|\boldsymbol{v}\|_{DG}^2 \leq \overline{C}_{DG,1}\|\boldsymbol{v}\|_{1,h}^2, \qquad \underline{C}_{DG,h}\|\boldsymbol{v}\|_h^2 \leq \|\boldsymbol{v}\|_{DG}^2 \leq \overline{C}_{DG,h}\|\boldsymbol{v}\|_h^2. \tag{4.8b}$$

- Die in (4.7) eingeführte Bilinearform $a_h(\cdot,\cdot)$ ist stetig und koerziv:

$$|a_h(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})| \leq \overline{C}_{ah}\|\boldsymbol{v}\|_{DG}\|\boldsymbol{w}\|_{DG}, \quad \text{für alle} \quad \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w} \in H^2(\mathcal{T}_h)^d, \tag{4.9a}$$

$$a_h(\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{v}_h) \geq \underline{C}_{ah}\|\boldsymbol{v}_h\|_h^2, \quad \text{für alle} \quad \boldsymbol{v}_h \in V_h, \tag{4.9b}$$

- Die diskrete Poincaré-Ungleichung , vgl. [6]

$$\|\boldsymbol{v}\|^2 \leq \overline{C}_{dp}\|\boldsymbol{v}\|_{1,h}^2, \quad \text{für alle} \quad \boldsymbol{v} \in V_h. \tag{4.10}$$

  wobei $\overline{C}_{ah}, \overline{C}_{dp}, \underline{C}_{ah}$ positive Konstanten unabhängig von der Maschengröße $h$ sind.

Für eine geeignete Auswahl der Finite-Elemente-Räume $\boldsymbol{U}_h, \boldsymbol{V}_h, \boldsymbol{P}_h$ gelten die folgenden Inf-sup-Bedingungen [60, 23]:

$$\inf_{q_h\in P_h}\sup_{\boldsymbol{u}_h\in \boldsymbol{U}_h}\frac{(\operatorname{div}\boldsymbol{u}_h, q_h)}{\|\boldsymbol{u}_h\|_{1,h}\|q_h\|} \geq \beta_{s,h}, \qquad \inf_{q_h\in P_h}\sup_{\boldsymbol{v}_h\in \boldsymbol{V}_h}\frac{(\operatorname{div}\boldsymbol{v}_h, q_h)}{\|\boldsymbol{v}_h\|_{\operatorname{div}}\|q_h\|} \geq \beta_{d,h}, \tag{4.11}$$

wobei $\beta_{s,h}$ und $\beta_{d,h}$ positive Konstanten unabhängig von der Maschengröße $h$ sind.

## 4.2 Diskretisierung der MPET-Gleichungen

Wir definieren wir die Finite-Elemente Räume:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{U}_h &= \{\boldsymbol{u} \in H(\operatorname{div};\Omega) : \boldsymbol{u}|_T \in \boldsymbol{U}(T), T \in \mathcal{T}_h; \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = 0 \text{ auf } \partial\Omega\},\\
\boldsymbol{V}_{i,h} &= \{\boldsymbol{v} \in H(\operatorname{div};\Omega) : \boldsymbol{v}|_T \in \boldsymbol{V}_i(T), T \in \mathcal{T}_h; \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}, \qquad i = 1,\dots,n,\\
P_{i,h} &= \left\{q \in L^2(\Omega) : q|_T \in P_i(T), T \in \mathcal{T}_h; \int_\Omega q dx = 0\right\}, \qquad i = 1,\dots,n.
\end{aligned}$$

Die Diskretisierung des quasi-statischen MPET-Problems beruht auf der Verwendung der lokalen Räume $\boldsymbol{U}(T)/\boldsymbol{V}_i(T)/P_i(T)$, die durch die Tripletts $BDM_l(T)/RT_{l-1}(T)\ /\mathcal{P}_{l-1}(T)$ oder $BDFM_l(T)/RT_{l-1}(T)/\mathcal{P}_{l-1}(T)$ für $l \geq 1$ definiert sind. Man beachte, dass für jede dieser Wahlmöglichkeiten die wichtige Bedingung $\operatorname{div}\boldsymbol{U}(T) = \operatorname{div}\boldsymbol{V}_i(T) = P_i(T)$ erfüllt ist, siehe [28]. Zur Diskretisierung des entsprechenden dynamischen Problems verwenden wir die lokalen Räume $\boldsymbol{U}(T)/\boldsymbol{V}_i(T)/P_i(T)$, die durch die Tripletts $BDM_l(T)/BDM_l(T)\ /\mathcal{P}_{l-1}(T)$ definiert sind. Zur Vereinfachung der Schreibweise seien

$$\boldsymbol{v}_h := (\boldsymbol{v}_{1,h}^T,\dots\boldsymbol{v}_{n,h}^T)^T, \quad \boldsymbol{p}_h := (p_{1,h},\dots,p_{n,h})^T, \quad \boldsymbol{z}_h := (\boldsymbol{z}_{1,h}^T,\dots\boldsymbol{z}_{n,h}^T)^T, \quad \boldsymbol{q}_h := (q_{1,h},\dots,q_{n,h})^T,$$
$$\boldsymbol{V}_h := \boldsymbol{V}_{1,h}\times\dots\times\boldsymbol{V}_{n,h}, \quad \boldsymbol{P}_h := P_{1,h}\times\dots\times P_{n,h}.$$

### 4.2.1 Quasi-statisches Problem

Die Diskretisierung des Variationsproblems (3.36) lautet: Gesucht ist $(\boldsymbol{u}_h; \boldsymbol{v}_h; \boldsymbol{p}_h) \in \boldsymbol{U}_h \times \boldsymbol{V}_h \times \boldsymbol{P}_h$, so dass für jedes $(\boldsymbol{w}_h; \boldsymbol{z}_h; \boldsymbol{q}_h) \in \boldsymbol{U}_h \times \boldsymbol{V}_h \times \boldsymbol{P}_h$ gilt:

$$a_h(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{w}_h) + \lambda(\operatorname{div} \boldsymbol{u}_h, \operatorname{div} \boldsymbol{w}_h) - (\boldsymbol{p}_h, \underline{\operatorname{Div}} \boldsymbol{w}_h) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{w}_h), \tag{4.12a}$$

$$(\mathbf{R}_v \boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{z}_h) - (\boldsymbol{p}_h, \operatorname{Div} \boldsymbol{z}_h) = 0, \tag{4.12b}$$

$$-(\underline{\operatorname{Div}} \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{q}_h) - (\operatorname{Div} \boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{q}_h) - ((\Lambda_1 + \Lambda_2)\boldsymbol{p}_h, \boldsymbol{q}_h) = (\boldsymbol{g}, \boldsymbol{q}_h), \tag{4.12c}$$

wobei $a_h(\cdot, \cdot)$ in (4.7) definiert wurde. Da $\boldsymbol{U}_h \not\subset \boldsymbol{U}$, definieren wir noch die gitterabhängige Norm $\| \cdot \|_{\boldsymbol{U}_h}$ durch:

$$\|\boldsymbol{u}_h\|^2_{\boldsymbol{U}_h} := \|\boldsymbol{u}_h\|^2_{DG} + \lambda \|\operatorname{div} \boldsymbol{u}_h\|^2. \tag{4.13}$$

Auf dem üblichen Weg erhalten wir für das Problem (4.12) die folgende Bilinearform:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_h((\boldsymbol{u}_h;\boldsymbol{v}_h;\boldsymbol{p}_h), (\boldsymbol{w}_h; \boldsymbol{z}_h; \boldsymbol{q}_h)) &= a_h(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{w}_h) + \lambda(\operatorname{div} \boldsymbol{u}_h, \operatorname{div} \boldsymbol{w}_h) - (\boldsymbol{p}_h, \underline{\operatorname{Div}} \boldsymbol{w}_h) \\ &+ (\mathbf{R}_v \boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{z}_h) - (\operatorname{Div} \boldsymbol{z}_h, \boldsymbol{p}_h) - (\underline{\operatorname{Div}} \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{q}_h) - (\operatorname{Div} \boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{q}_h) - ((\Lambda_1 + \Lambda_2)\boldsymbol{p}_h, \boldsymbol{q}_h).\end{aligned} \tag{4.14}$$

### 4.2.2 Dynamisches Problem

Die Diskretisierung des Variationsproblems (3.39) lautet: Gesucht ist $(\boldsymbol{u}_h; \boldsymbol{v}_h; \boldsymbol{p}_h) \in \boldsymbol{U}_h \times \boldsymbol{V}_h \times \boldsymbol{P}_h$ so dass für jedes $(\boldsymbol{w}_h; \boldsymbol{z}_h; \boldsymbol{q}_h) \in \boldsymbol{U}_h \times \boldsymbol{V}_h \times \boldsymbol{P}_h$ gilt:

$$\frac{\mu\tau^2}{2} a_h(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{w}_h) + \frac{\lambda\tau^2}{4}(\operatorname{div} \boldsymbol{u}_h, \operatorname{div} \boldsymbol{w}_h) + \gamma_u(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{w}_h) + (\bar{\mathcal{A}}_{12}\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{w}_h) - \frac{\tau^2}{4}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{p}_h, \underline{\operatorname{Div}} \boldsymbol{w}_h) = (\mathcal{G}_1, \boldsymbol{w}_h), \tag{4.15a}$$

$$(\bar{\mathcal{A}}_{21}\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{z}_h) + (\bar{\mathcal{A}}_{22}\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{z}_h) - \frac{\tau^2}{4}(\boldsymbol{p}_h, \operatorname{Div} \boldsymbol{z}_h) = (\mathcal{G}_2, \boldsymbol{z}_h), \tag{4.15b}$$

$$-\frac{\tau^2}{4}(\boldsymbol{\alpha}\underline{\operatorname{Div}} \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{q}_h) - \frac{\tau^2}{4}(\operatorname{Div} \boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{q}_h) - \frac{\tau^2}{4}(\Lambda_1 \boldsymbol{p}_h, \boldsymbol{q}_h) = (\mathcal{G}_3, \boldsymbol{q}_h), \tag{4.15c}$$

wobei $a_h(\cdot, \cdot)$ in (4.7) definiert wurde. Da $\boldsymbol{U}_h \not\subset \boldsymbol{U}$, wird die gitterabhängige Norm $\|(\cdot;\cdot)\|_{\boldsymbol{U}_h \times \boldsymbol{V}}$ definieren durch:

$$\|(\boldsymbol{u}_h; \boldsymbol{v}_h)\|^2_{\boldsymbol{U}_h \times \boldsymbol{V}} := \frac{\mu\tau^2}{2}\|\boldsymbol{u}_h\|^2_{DG} + \frac{\tau^2\lambda}{4}\|\operatorname{div} \boldsymbol{u}_h\|^2 + \|\Lambda_{uv}^{\frac{1}{2}} \left( \begin{smallmatrix} \boldsymbol{u}_h \\ \boldsymbol{v}_h \end{smallmatrix} \right) \|^2 + \frac{\tau^2}{4}\|\Lambda^{-\frac{1}{2}} \left(\operatorname{Div} \boldsymbol{v}_h + \boldsymbol{\alpha}\underline{\operatorname{Div}} \boldsymbol{u}_h\right) \|^2. \tag{4.16}$$

Zur Beschreibung des diskreten Problems (4.15) erhalten wir in Anbetracht der Definition der Matrix $\Lambda_{uv}$ folgende Bilinearform

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_h((\boldsymbol{u}_h; \boldsymbol{v}_h; \boldsymbol{p}_h), (\boldsymbol{w}_h; \boldsymbol{z}_h; \boldsymbol{q}_h)) &= \frac{\mu\tau^2}{2} a_h(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{w}_h) + \frac{\tau^2\lambda}{4}(\operatorname{div} \boldsymbol{u}_h, \operatorname{div} \boldsymbol{w}_h) + (\Lambda_{uv} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_h \\ \boldsymbol{v}_h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_h \\ \boldsymbol{z}_h \end{pmatrix}) \\ &- \frac{\tau^2}{4}(\boldsymbol{p}_h, \boldsymbol{\alpha}\underline{\operatorname{Div}} \boldsymbol{w}_h + \operatorname{Div} \boldsymbol{z}_h) - \frac{\tau^2}{4}(\boldsymbol{\alpha}\underline{\operatorname{Div}} \boldsymbol{u}_h + \operatorname{Div} \boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{q}_h) - \frac{\tau^2}{4}(\Lambda_1 \boldsymbol{p}_h, \boldsymbol{q}_h).\end{aligned} \tag{4.17}$$

## 4.3 Stabilität des diskreten Problems

Ziel dieses Abschnitts ist es die Wohlgestelltheit der Probleme (4.12) und (4.15) unter den Normen (4.13),(3.38b) und (3.38c) bzw. (4.16) und (3.40b) zu zeigen.

### 4.3.1 Quasi-statisches Problem

Um das Korollar 2.12 verwenden zu können, benötigen wir zuerst die geeigneten Normen. Im Vergleich zu (2.25b),(2.26a) und (2.16a) kann man die Normen in (4.13),(3.38b) und (3.38c) in folgender Form schreiben:

$$\|\boldsymbol{u}_h\|^2_{\boldsymbol{U}_h} = \|\boldsymbol{u}_h\|^2_{DG} + \lambda\|\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}_h\|^2 := |\boldsymbol{u}_h|^2_{\boldsymbol{U}_h}, \tag{4.18a}$$

$$\|\boldsymbol{v}_h\|^2_{\boldsymbol{V}} = \|\mathbf{R}_v^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{v}_h\|^2 + \|\Lambda^{-\frac{1}{2}}\mathrm{Div}\boldsymbol{v}_h\|^2 := |\boldsymbol{v}_h|^2_{\boldsymbol{V}} + \|\mathrm{Div}\boldsymbol{v}_h\|^2_{\boldsymbol{P}^*}, \tag{4.18b}$$

$$\|\boldsymbol{p}_h\|^2_{\boldsymbol{P}} = \|\Lambda^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}_h\|^2 = \|(\Lambda_1+\Lambda_2)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}_h\|^2 + \|(\Lambda_3+\Lambda_4)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}_h\|^2 := c(\boldsymbol{p}_h,\boldsymbol{p}_h) + |\boldsymbol{p}_h|^2_{\boldsymbol{P}}. \tag{4.18c}$$

**Satz 4.6.** *Durch das doppelte Sattelpunktproblem* (4.12) *wird ein Isomorphismus* $\mathcal{A}_h$ *erklärt.*

***Beweis.*** Die Bedingungen (2.28a),(2.28b) sind leicht zu überprüfen, da

$$a_1(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{u}_h) = a_h(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{u}_h) + \lambda(\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}_h, \mathrm{div}\ \boldsymbol{u}_h) \geq \min\{\underline{C}_{ah}\overline{C}^{-1}_{DG,h}, 1\}|\boldsymbol{u}_h|^2_{\boldsymbol{U}_h},$$
$$a_2(\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{v}_h) = (\mathbf{R}_v\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{v}_h) = |\boldsymbol{v}_h|^2_{\boldsymbol{V}}.$$

Als Nächstes werden wir die Bedingung (2.29a) überprüfen. Wegen (3.47) haben wir

$$\|\underline{\mathrm{Div}}\boldsymbol{u}_h\|^2_{\boldsymbol{P}^*} \leq \lambda_0(\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}_h, \mathrm{div}\ \boldsymbol{u}_h) \leq \|\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}_h\|^2 + \lambda\|\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}_h\|^2 \leq a_1(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{u}_h). \tag{4.19}$$

Es bleibt die Bedingung (2.28c) zu überprüfen. Halten wir zunächst fest, dass nach (4.11) ein $\overline{\boldsymbol{v}}_{i,h} \in V_{i,h}$ existiert, sodass

$$\overline{\boldsymbol{v}}_{i,h} \in V_{i,h} \ \text{ so dass } \ \mathrm{div}\ \overline{\boldsymbol{v}}_{i,h} = \sqrt{R}p_{i,h} \ \text{ und } \ \|\overline{\boldsymbol{v}}_{i,h}\|_{\mathrm{div}} \leq \beta^{-1}_{d,h}\sqrt{R}\|p_{i,h}\|, \quad i = 1,\dots,n,$$
$$\overline{\boldsymbol{v}}_h \in \boldsymbol{V}_h \ \text{ so dass } \ \mathrm{Div}\overline{\boldsymbol{v}}_h = \sqrt{R}\boldsymbol{p}_h \ \text{ und } \ \|\overline{\boldsymbol{v}}_h\|_{\mathrm{Div}} \leq \beta^{-1}_{d,h}\sqrt{R}\|\boldsymbol{p}_h\| = \|\Lambda_3^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}_h\|. \tag{4.20}$$

Auch existiert nach (4.11) ein $\overline{\boldsymbol{u}}_h \in \boldsymbol{U}_h$ , sodass

$$\overline{\boldsymbol{u}}_h \in \boldsymbol{U}_h \ \text{ so dass } \ \mathrm{div}\ \overline{\boldsymbol{u}}_h = \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}(\sum_{i=1}^n p_{i,h}), \quad \|\overline{\boldsymbol{u}}_h\|_{1,h} \leq \beta^{-1}_{s,h}\frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}\|\sum_{i=1}^n p_{i,h}\| = \beta^{-1}_{s,h}\|\Lambda_4^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}_h\|. \tag{4.21}$$

Es seien

$$\boldsymbol{u}_{0,h} := \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}\overline{\boldsymbol{u}}_h, \qquad \boldsymbol{v}_{0,h} := R^{\frac{1}{2}}\overline{\boldsymbol{v}}_h.$$

Aus (4.8) ergibt sich

$$\|\boldsymbol{u}_h\|^2_{1,h} \eqsim \|\boldsymbol{u}_h\|^2_{DG} \geq \frac{1}{2}(\|\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}_h\|^2 + \|\boldsymbol{u}_h\|^2_{DG}), \quad \text{für alle } \ \boldsymbol{u}_h \in \boldsymbol{U}_h, \tag{4.22}$$

Setzen wir die obige Ungleichung in (4.21) ein, so folgt

$$\begin{aligned}\beta_{s,h}^{-2}\|\Lambda_4^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}_h\|^2 &\geq \frac{1}{2}(\|\overline{\boldsymbol{u}}_h\|_{DG}^2 + \|\mathrm{div}\ \overline{\boldsymbol{u}}_h\|^2) = \frac{1}{2}\lambda_0(\|\frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}\overline{\boldsymbol{u}}_h\|_{DG}^2 + \|\mathrm{div}\ (\frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}\overline{\boldsymbol{u}}_h)\|^2)\\ &= \frac{1}{2}\lambda_0(\|\boldsymbol{u}_{0,h}\|_{DG}^2 + \|\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}_{0,h}\|^2) \geq (\|\boldsymbol{u}_{0,h}\|_{DG}^2 + \lambda\|\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}_{0,h}\|^2) = |\boldsymbol{u}_{0,h}|_{\boldsymbol{U}_h}^2. \end{aligned}\tag{4.23}$$

In Anbetracht von (4.20) und der Definition von $\|\cdot\|_{\mathrm{Div}}$ gilt

$$\begin{aligned}\beta_{d,h}^{-2}\|\Lambda_3^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}_h\|^2 &\geq \|\overline{\boldsymbol{v}}_h\|_{\mathrm{Div}} = \|\overline{\boldsymbol{v}}_h\|^2 + \|\mathrm{Div}\overline{\boldsymbol{v}}_h\|^2 \geq \|\mathbf{R}_v^{\frac{1}{2}}R^{\frac{1}{2}}\overline{\boldsymbol{v}}_h\|^2 + \|R^{-\frac{1}{2}}R^{\frac{1}{2}}\mathrm{Div}\overline{\boldsymbol{v}}_h\|^2\\ &= \|\mathbf{R}_v^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{v}_{0,h}\|^2 + \|R^{-\frac{1}{2}}\mathrm{Div}\boldsymbol{v}_{0,h}\|^2 \geq \|\mathbf{R}_v^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{v}_{0,h}\|^2 + \|\Lambda^{-\frac{1}{2}}\mathrm{Div}\boldsymbol{v}_{0,h}\|^2\\ &= |\boldsymbol{v}_{0,h}|_{\boldsymbol{V}}^2 + \|\mathrm{Div}\boldsymbol{v}_{0,h}\|_{\boldsymbol{P}^*}^2.\end{aligned}\tag{4.24}$$

Kombinieren wir (4.23) und (4.24), so bekommen wir

$$\|(\Lambda_3+\Lambda_4)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}_h\|^2 \geq \beta_h^2(|\boldsymbol{u}_{0,h}|_{\boldsymbol{U}_h}^2 + |\boldsymbol{v}_{0,h}|_{\boldsymbol{V}}^2 + \|\mathrm{Div}\boldsymbol{v}_{0,h}\|_{\boldsymbol{P}^*}^2) = \beta_h^2(\|\boldsymbol{u}_{0,h}\|_{\boldsymbol{U}_h}^2 + \|\boldsymbol{v}_{0,h}\|_{\boldsymbol{V}}^2),$$

wobei $\beta_h^{-2} = \max\{\beta_{d,h}^{-2}, \beta_{s,h}^{-2}\}$. Es folgt

$$(\boldsymbol{p}_h, \underline{\mathrm{Div}}\boldsymbol{u}_{0,h}) + (\boldsymbol{p}_h, \mathrm{Div}\boldsymbol{v}_{0,h}) = \|(\Lambda_3+\Lambda_4)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}_h\|^2 \geq \beta_h|\boldsymbol{p}_h|_{\boldsymbol{P}}\cdot(\|\boldsymbol{u}_{0,h}\|_{\boldsymbol{U}_h}^2 + \|\boldsymbol{v}_{0,h}\|_{\boldsymbol{V}}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Daher ergibt sich schließlich

$$\sup_{(\boldsymbol{u}_h;\boldsymbol{v}_h)\in\boldsymbol{U}_h\times\boldsymbol{V}_h}\frac{b_1(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{p}_h)+b_2(\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{p}_h)}{(\|\boldsymbol{u}_h\|_{\boldsymbol{U}_h}^2+\|\boldsymbol{v}_h\|_{\boldsymbol{V}}^2)^{\frac{1}{2}}} \geq \frac{b_1(\boldsymbol{u}_{0,h},\boldsymbol{p}_h)+b_2(\boldsymbol{v}_{0,h},\boldsymbol{p}_h)}{(\|\boldsymbol{u}_{0,h}\|_{\boldsymbol{U}_h}^2+\|\boldsymbol{v}_{0,h}\|_{\boldsymbol{V}}^2)^{\frac{1}{2}}} \geq \beta_h|\boldsymbol{p}_h|_{\boldsymbol{P}},$$

womit wir gezeigt haben, dass die Bedingung (2.28c) erfüllt ist. □

**Korollar 4.7.** *Es sei $(\boldsymbol{u}_h;\boldsymbol{v}_h;\boldsymbol{p}_h)\in\boldsymbol{U}_h\times\boldsymbol{V}_h\times\boldsymbol{P}_h$ die Lösung von (4.12). Dann gilt:*

$$\|\boldsymbol{u}_h\|_{\boldsymbol{U}_h} + \|\boldsymbol{v}_h\|_{\boldsymbol{V}} + \|\boldsymbol{p}_h\|_{\boldsymbol{P}} \leq C(\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{U}_h^*} + \|\boldsymbol{g}\|_{\boldsymbol{P}^*}),$$

*wobei $C$ eine Konstante unabhängig von allen Parametern, der Netzwerkskala $n$ und der Maschenweite $h$ ist.*

### 4.3.2 Dynamisches Problem

Um den Satz 2.11 verwenden zu können, benötigen wir zuerst die geeigneten Normen. Es seien

$$|(\boldsymbol{u}_h;\boldsymbol{v}_h)|_{\boldsymbol{U}_h\times\boldsymbol{V}}^2 := \frac{\mu\tau^2}{2}\|\boldsymbol{u}_h\|_{DG}^2 + \frac{\tau^2\lambda}{4}\|\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}_h\|^2 + \|\Lambda_{uv}^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_h\\ \boldsymbol{v}_h\end{pmatrix}\|^2, \tag{4.25a}$$

$$|(\boldsymbol{u}_h;\boldsymbol{v}_h)|_b^2 := \frac{\tau^2}{4}\|\Lambda^{-\frac{1}{2}}\left(\mathrm{Div}\boldsymbol{v}_h + \boldsymbol{\alpha}\underline{\mathrm{Div}}\boldsymbol{u}_h\right)\|^2, \tag{4.25b}$$

$$|\boldsymbol{p}_h|_{\boldsymbol{P}}^2 := \frac{\tau^2}{4}\|(\Lambda_2+\Lambda_3)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}_h\|^2. \tag{4.25c}$$

Dann erhalten wir im Vergleich zu (4.16)

$$\|(\boldsymbol{u}_h;\boldsymbol{v}_h)\|^2_{\boldsymbol{U}_h\times\boldsymbol{V}} = |(\boldsymbol{u}_h;\boldsymbol{v}_h)|^2_{\boldsymbol{U}_h\times\boldsymbol{V}} + |(\boldsymbol{u}_h;\boldsymbol{v}_h)|^2_b, \tag{4.26a}$$

$$\|\boldsymbol{p}_h\|^2_{\boldsymbol{P}} = \frac{\tau^2}{4}\|\Lambda_1^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}_h\|^2 + |\boldsymbol{p}_h|^2_{\boldsymbol{P}}. \tag{4.26b}$$

**Satz 4.8.** *Durch das Sattelpunktproblem (4.15) wird ein Isomorphismus $\mathcal{A}_h$ erklärt.*

***Beweis.*** Die erste Bedingung in Satz 2.11 ist leicht gezeigt, da

$$a((\boldsymbol{u}_h;\boldsymbol{v}_h),(\boldsymbol{u}_h;\boldsymbol{v}_h)) \geq \min\{\underline{C}_{ah}\overline{C}^{-1}_{DG,h},1\}|(\boldsymbol{u}_h;\boldsymbol{v}_h)|^2_{\boldsymbol{U}_h\times\boldsymbol{V}}.$$

Es bleibt die Bedingung (2.17b) zu überprüfen. Halten wir zunächst fest, dass nach (4.11) ein $\overline{\boldsymbol{v}}_{i,h} \in \boldsymbol{V}_{i,h}$ existiert, sodass

$$\begin{aligned}
&\bar{\boldsymbol{v}}_{i,h} \in \boldsymbol{V}_{i,h} \;\text{ sodass }\; \operatorname{div}\bar{\boldsymbol{v}}_{i,h} = \frac{\tau}{2}(\bar{\mathcal{A}}_{22})_{ii}^{-\frac{1}{2}}p_{i,h} \;\text{ und }\; \|\bar{\boldsymbol{v}}_{i,h}\|_{\mathrm{div}} \leq \beta^{-1}_{d,h}\|(\Lambda_2)^{\frac{1}{2}}_{ii}p_{i,h}\|, i=1,\dots,n,\\
&\bar{\boldsymbol{v}}_h \in \boldsymbol{V}_h \;\text{ sodass }\; \mathrm{Div}\bar{\boldsymbol{v}}_h = \frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{A}}_{22}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}_h \;\text{ und }\; \|\bar{\boldsymbol{v}}_h\|_{\mathrm{Div}} \leq \beta^{-1}_{d,h}\|\Lambda_2^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}_h\|.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Auch existiert nach (4.11) ein $\overline{\boldsymbol{u}}_h \in \boldsymbol{U}_h$ , sodass

$$\bar{\boldsymbol{u}}_h \in \boldsymbol{U}_h \;\text{ sodass }\; \underline{\mathrm{Div}}\bar{\boldsymbol{u}}_h = \frac{\tau}{2\sqrt{\gamma}}\Lambda_4\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{p}_h, \quad \|\bar{\boldsymbol{u}}_h\|_{1,h} \leq \frac{\tau\beta^{-1}_{s,h}}{2\sqrt{\gamma}}\|\Lambda_4^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{p}_h\| = \beta^{-1}_{s,h}\|\Lambda_3^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}_h\|. \tag{4.28}$$

Wir definieren

$$\boldsymbol{u}_{0,h} := \frac{\tau}{2\sqrt{\gamma}}\bar{\boldsymbol{u}}_h, \qquad \boldsymbol{v}_{0,h} := \frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{A}}_{22}^{-\frac{1}{2}}\bar{\boldsymbol{v}}_h.$$

Als Nächstes werden wir $\|\Lambda^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\alpha}\underline{\mathrm{Div}}\boldsymbol{u}_h\|$ und $\|\Lambda_{uv}^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_{0,h}\\ \boldsymbol{v}_{0,h}\end{pmatrix}\|$ abschätzen. Mit denselben Schritten wie im Beweis von Satz 3.8 bekommen wir aus (3.57)

$$\|\Lambda^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\alpha}\underline{\mathrm{Div}}\boldsymbol{u}_h\|^2 \leq \frac{4\gamma}{\tau^2}\|\mathrm{div}\;\boldsymbol{u}_h\|, \qquad \text{für alle} \quad \boldsymbol{u}_h \in \boldsymbol{U}_h. \tag{4.29}$$

Ebenso, erhalten wir aus (3.58)

$$\begin{aligned}
\|\Lambda_{uv}^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\frac{\tau}{2\sqrt{\gamma}}\bar{\boldsymbol{u}}_h\\ \frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{A}}_{22}^{-\frac{1}{2}}\bar{\boldsymbol{v}}_h\end{pmatrix}\|^2 &\leq \frac{\tau^2}{4}\lambda_{\max}(G)(\|\bar{\boldsymbol{u}}_h\|^2+\|\bar{\boldsymbol{v}}_h\|^2) \underbrace{\leq}_{(4.10)} \frac{\tau^2}{4}\lambda_{\max}(G)(\overline{C}_{pd}\|\bar{\boldsymbol{u}}_h\|^2_{1,h}+\|\bar{\boldsymbol{v}}_h\|^2)\\
&\underbrace{\leq}_{(4.28),(4.27)} \frac{\tau^2}{4}\lambda_{\max}(G)\left(\beta^{-2}_{s,h}\overline{C}_{pd}\|\Lambda_3^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}_h\|^2 + \beta^{-2}_{d,h}\|\Lambda_2^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}_h\|^2\right).
\end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir aus (3.60):

$$\|\Lambda_{uv}^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_{0,h} \\ \boldsymbol{v}_{0,h} \end{pmatrix} \|^2 \leq \frac{\tau^2}{2} \left( \beta_{s,h}^{-2} \overline{C}_{pd} \|\Lambda_3^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{p}_h\|^2 + \beta_{d,h}^{-2} \|\Lambda_2^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{p}_h\|^2 \right). \tag{4.30}$$

Aus (4.8) ergibt sich

$$\|\boldsymbol{u}_h\|_{1,h}^2 \eqsim \|\boldsymbol{u}_h\|_{DG}^2 \geq \frac{1}{2}(\|\text{div } \boldsymbol{u}_h\|^2 + \|\boldsymbol{u}_h\|_{DG}^2), \quad \text{für alle} \quad \boldsymbol{u}_h \in \boldsymbol{U}_h. \tag{4.31}$$

Setzen wir die obige Ungleichung in (4.28) ein, so ergibt sich für eine generische Konstante $C_c > 0$

$$\begin{aligned} \beta_{s,h}^{-2} \|\Lambda_3^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{p}_h\|^2 &\geq \frac{1}{2}(\|\bar{\boldsymbol{u}}_h\|_{DG}^2 + \|\text{div } \bar{\boldsymbol{u}}_h\|^2) = \frac{1}{2}\frac{4\gamma}{\tau^2}(\|\frac{\tau}{2\sqrt{\gamma}}\bar{\boldsymbol{u}}_h\|_{DG}^2 + \|\text{div } (\frac{\tau}{2\sqrt{\gamma}}\bar{\boldsymbol{u}}_h)\|^2) \\ &= \frac{1}{2}\frac{4\gamma}{\tau^2}(\|\boldsymbol{u}_{0,h}\|_{DG}^2 + \|\text{div } \boldsymbol{u}_{0,h}\|^2) \geq C_c \frac{4}{\tau^2}(\frac{\mu\tau^2}{2}\|\boldsymbol{u}_{0,h}\|_{DG}^2 + \frac{\tau^2\lambda}{4}\|\text{div } \boldsymbol{u}_{0,h}\|^2 + \gamma\|\text{div } \boldsymbol{u}_{0,h}\|^2). \end{aligned} \tag{4.32}$$

Nun setzen wir (4.29) in die obige Ungleichung ein und erhalten damit

$$\beta_{s,h}^{-2} \|\Lambda_3^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{p}_h\|^2 \geq C_c \frac{4}{\tau^2}(\frac{\mu\tau^2}{2}\|\boldsymbol{u}_{0,h}\|_{DG}^2 + \frac{\tau^2\lambda}{4}\|\text{div } \boldsymbol{u}_{0,h}\|^2 + \frac{\tau^2}{4}\|\Lambda^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\alpha} \underline{\text{Div}} \boldsymbol{u}_{0,h}\|^2). \tag{4.33}$$

Nach (4.27) und der Definition von $\|\cdot\|_{\text{Div}}$ bekommen wir

$$\begin{aligned} \beta_{d,h}^{-2} \|\Lambda_2^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{p}_h\|^2 &\geq \|\bar{\boldsymbol{v}}_h\|_{\text{Div}} = \|\bar{\boldsymbol{v}}_h\|^2 + \|\text{Div}\bar{\boldsymbol{v}}_h\|^2 \geq \|(\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{A}}_{22}^{-\frac{1}{2}})^{-1}(\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{A}}_{22}^{-\frac{1}{2}})\text{Div}\bar{\boldsymbol{v}}_h\|^2 \\ &= \|\Lambda_2^{-\frac{1}{2}} \text{Div} \boldsymbol{v}_{0,h}\|^2 \geq \|\Lambda^{-\frac{1}{2}} \text{Div} \boldsymbol{v}_{0,h}\|^2. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Danach kombinieren wir noch (4.33),(4.30) und (4.34), wenden die Dreiecksungleichung an und erhalten die Abschätzung

$$\begin{aligned} \frac{\tau^2}{4}\|(\Lambda_2 + \Lambda_3)^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{p}_h\|^2 &\geq C_c \Big( \frac{\mu\tau^2}{2}\|\boldsymbol{u}_{0,h}\|_{DG}^2 + \frac{\tau^2\lambda}{4}\|\text{div } \boldsymbol{u}_{0,h}\|^2 + \frac{\tau^2}{4}\|\Lambda^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{\alpha}\underline{\text{Div}}\boldsymbol{u}_{0,h} + \text{Div}\boldsymbol{v}_{0,h})\|^2 \\ &\quad + \|\Lambda_{uv}^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_{0,h} \\ \boldsymbol{v}_{0,h} \end{pmatrix} \|^2 \Big) \quad = \quad C_c \|(\boldsymbol{u}_{0,h}; \boldsymbol{v}_{0,h})\|_{\boldsymbol{U}_h \times \boldsymbol{V}}^2. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Außerdem haben wir

$$\begin{aligned} b(\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_{0,h} \\ \boldsymbol{v}_{0,h} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_h \\ \boldsymbol{p}_h \end{pmatrix}) &= \frac{\tau^2}{4}(\begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_h \\ \boldsymbol{p}_h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}\underline{\text{Div}}\boldsymbol{u}_{0,h} \\ \text{Div}\boldsymbol{v}_{0,h} \end{pmatrix}) = \frac{\tau^2}{4}(\boldsymbol{p}_h, \boldsymbol{\alpha}\underline{\text{Div}}\boldsymbol{u}_{0,h}) + \frac{\tau^2}{4}(\boldsymbol{p}_h, \text{Div}\boldsymbol{v}_{0,h}) \\ &= \frac{\tau^2}{4}\|(\Lambda_2 + \Lambda_3)^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{p}_h\|^2 \geq C_c |\boldsymbol{p}_h|_{\boldsymbol{P}} \cdot \|(\boldsymbol{u}_{0,h}; \boldsymbol{v}_{0,h})\|_{\boldsymbol{U}_h \times \boldsymbol{V}}. \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\sup_{(\boldsymbol{u}_h;\boldsymbol{v}_h)\in \boldsymbol{U}_h\times \boldsymbol{V}_h} \frac{b(\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_h\\ \boldsymbol{v}_h\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_h\\ \boldsymbol{p}_h\end{pmatrix})}{\|(\boldsymbol{u}_h;\boldsymbol{v}_h)\|_{\boldsymbol{U}_h\times \boldsymbol{V}}} \geq \frac{b(\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_{0,h}\\ \boldsymbol{v}_{0,h}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_h\\ \boldsymbol{p}_h\end{pmatrix})}{\|(\boldsymbol{u}_{0,h};\boldsymbol{v}_{0,h})\|_{\boldsymbol{U}_h\times \boldsymbol{V}}} \geq C_c|\boldsymbol{p}_h|_{\boldsymbol{P}},$$

womit wir gezeigt haben, dass die Bedingung (2.17b) erfüllt ist. □

Die folgende Stabilitätsschätzung ist eine Folge des obigen Satzes.

**Korollar 4.9.** *Es sei $(\boldsymbol{u}_h;\boldsymbol{v}_h;\boldsymbol{p}_h) \in \boldsymbol{U}_h \times \boldsymbol{V}_h \times \boldsymbol{P}_h$ die Lösung von (4.15). Dann gilt die folgende Abschätzung*

$$\|(\boldsymbol{u}_h;\boldsymbol{v}_h)\|_{\boldsymbol{U}_h\times \boldsymbol{V}} + \|\boldsymbol{p}_h\|_{\boldsymbol{P}} \leq C(\|(\mathcal{G}_1;\mathcal{G}_2)\|_{\boldsymbol{U}_h^*\times \boldsymbol{V}^*} + \|\mathcal{G}_3\|_{\boldsymbol{P}^*}), \tag{4.36}$$

*wobei*

$$\|(\mathcal{G}_1;\mathcal{G}_2)\|_{\boldsymbol{U}_h^*\times \boldsymbol{V}^*} = \sup_{(\boldsymbol{w}_h;\boldsymbol{z}_h)\in \boldsymbol{U}_h\times \boldsymbol{V}_h} \frac{((\mathcal{G}_1;\mathcal{G}_2),(\boldsymbol{w}_h;\boldsymbol{z}_h))}{\|(\boldsymbol{w}_h;\boldsymbol{z}_h)\|_{\boldsymbol{U}_h\times \boldsymbol{V}}},$$

$$\|\mathcal{G}_3\|_{\boldsymbol{P}^*} = \sup_{\boldsymbol{q}_h\in \boldsymbol{P}_h} \frac{(\mathcal{G}_3,\boldsymbol{q}_h)}{\|\boldsymbol{q}_h\|_{\boldsymbol{P}}} = \|\Lambda^{-\frac{1}{2}}\mathcal{G}_3\|,$$

*und $C$ eine Konstante unabhängig von allen Parametern, der Netzwerkskala $n$ und der Maschenweite $h$ ist.*

## 4.4 Norm-äquivalenter Vorkonditionierer

**Anmerkung 4.10.** *Es sei $\boldsymbol{W}_{q,h} := \boldsymbol{U}_h \times \boldsymbol{V}_h \times \boldsymbol{P}_h$ mit der Norm $\|\cdot\|^2_{\boldsymbol{W}_{q,h}} := \|\cdot\|^2_{\boldsymbol{U}_h} + \|\cdot\|^2_{\boldsymbol{V}} + \|\cdot\|^2_{\boldsymbol{P}}$ ausgestattet. Wir betrachten den Operator*

$$\mathcal{A}_h := \begin{bmatrix} -\mathrm{div}_h\boldsymbol{\epsilon}_h - \lambda\nabla_h\mathrm{div}_h & \mathbf{0}_{1\times n} & \nabla_h\mathbf{1}_{1\times n} \\ \mathbf{0}_{n\times 1} & \mathbf{R}_v & \nabla_h\boldsymbol{I}_n \\ -\mathrm{div}_h\mathbf{1}_{n\times 1} & -\mathrm{div}_h\boldsymbol{I}_n & -\Lambda_1-\Lambda_2 \end{bmatrix}, \tag{4.37}$$

*definiert durch die Bilinearform (4.14). Nach der in [53] vorgestellten Theorie, siehe auch Kapitel 2.3, folgt nach Satz 4.6, dass der Operator*

$$\mathcal{B}_h := \begin{bmatrix} (-\mathrm{div}_h\boldsymbol{\epsilon}_h - \lambda\nabla_h\mathrm{div}_h)^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{R}_v - (\Lambda^{-1}\otimes I_d)\boldsymbol{\nabla}_h\mathrm{Div}_h)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Lambda^{-1} \end{bmatrix}, \tag{4.38}$$

*den kanonische Vorkonditionierer für den Operator $\mathcal{A}_h$ definiert, wobei*

$$\boldsymbol{\nabla}_h\mathrm{Div}_h\boldsymbol{v} := \begin{pmatrix} \nabla_h\mathrm{div}_h\boldsymbol{v}_1 \\ \vdots \\ \nabla_h\mathrm{div}_h\boldsymbol{v}_n \end{pmatrix}.$$

**Anmerkung 4.11.** *Es sei* $\boldsymbol{W}_{d,h} := \boldsymbol{U}_h \times \boldsymbol{V}_h \times \boldsymbol{P}_h$ *mit der Norm* $\|\cdot\|^2_{\boldsymbol{W}_{d,h}} := \|\cdot\|^2_{\boldsymbol{U}_h\times\boldsymbol{V}} + \|\cdot\|^2_{\boldsymbol{P}}$ *ausgestattet, Wir betrachten den Operator*

$$\mathcal{A}_h := \begin{bmatrix} -\frac{\tau^2}{4}\mathrm{div}_h\boldsymbol{\sigma}_h + \gamma_u & \bar{\mathcal{A}}_{12} & \frac{\tau^2}{4}\nabla_h\bar{\boldsymbol{\alpha}} \\ \bar{\mathcal{A}}_{21} & \bar{\mathcal{A}}_{22} & \frac{\tau^2}{4}\nabla\mathbf{I}_n \\ -\frac{\tau^2}{4}\mathrm{div}_h\bar{\boldsymbol{\alpha}}^T & -\frac{\tau^2}{4}\mathrm{div}_h\mathbf{I}_n & -\frac{\tau^2}{4}\Lambda_1 \end{bmatrix},$$

*definiert durch die Bilinearform (4.17). Nach der in [53] vorgestellten Theorie, siehe auch Kapitel 2.3, folgt nach Satz 4.8, dass der Operator*

$$\mathcal{B}_h := \begin{bmatrix} \mathcal{B}^{-1}_{h,\boldsymbol{uv}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{B}^{-1}_{h,\boldsymbol{p}} \end{bmatrix}, \tag{4.39}$$

*den kanonische Vorkonditionierer für den Operator* $\mathcal{A}_h$ *definiert, wobei*

$$\mathcal{B}_{h,\boldsymbol{uv}} = \frac{\tau^2}{4}\tilde{\mathcal{B}}_{h,\boldsymbol{uv}} + \Lambda_{uv}, \qquad \mathcal{B}_{h,\boldsymbol{p}} = \frac{\tau^2}{4}\Lambda,$$

$$\tilde{\mathcal{B}}_{h,\boldsymbol{uv}} := \begin{bmatrix} -2\mu\mathrm{div}_h\boldsymbol{\epsilon} - \lambda\nabla_h\mathrm{div}_h - \sum_{i,j=1}^n \alpha_i\bar{\gamma}_{ij}\alpha_j\nabla_h\mathrm{div}_h & -\sum_{i=1}^n \alpha_i\bar{\gamma}_{i1}\nabla_h\mathrm{div}_h & \cdots & -\sum_{i=1}^n \alpha_i\bar{\gamma}_{in}\nabla_h\mathrm{div}_h \\ -\sum_{i=1}^n \alpha_i\bar{\gamma}_{i1}\nabla_h\mathrm{div}_h & -\bar{\gamma}_{11}\nabla_h\mathrm{div}_h & \cdots & -\bar{\gamma}_{1n}\nabla_h\mathrm{div}_h \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\sum_{i=1}^n \alpha_i\bar{\gamma}_{in}\nabla_h\mathrm{div}_h & -\bar{\gamma}_{n1}\nabla_h\mathrm{div}_h & \cdots & -\bar{\gamma}_{nn}\nabla_h\mathrm{div}_h \end{bmatrix},$$

*und*

$$\bar{\gamma}_{ij} := (\Lambda^{-1})_{ij}, \qquad 1 \le i,j \le n.$$

# 5 Fehlerschätzungen für das dynamische MPET-Problem

In diesem Abschnitt werden eine Fehlerschätzung für das dynamische MPET-Problem (4.15) herleiten. Der Beweis beruht auf dem Stabilitätsresultat aus Korollar 4.9 und der Arbeit von Baker [13].

In Anlehnung an [13] betrachten wir ein Lemma und führen ein paar Notationen ein, die wir im Laufe der Analyse benötigen. Es sei $\boldsymbol{x}$ eine Feldvariable, kurz „ein Feld“, d.h., im betrachteten Fall $\boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{v}, \dot{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{p}\}$. Wir führen die folgenden Notationen ein

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\boldsymbol{x}}^0 &:= \mathbf{0}, \qquad \varphi_{\boldsymbol{x}}^n := \sum_{k=0}^{n-1} (\boldsymbol{x}^{k+1} + \boldsymbol{x}^k), \qquad 1 \le n \le J, \\
\boldsymbol{x}^{k+\frac{1}{2}} &:= \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^{k+1} + \boldsymbol{x}^k), \qquad \partial_t \boldsymbol{x}^k := \frac{1}{\tau}(\boldsymbol{x}^{k+1} - \boldsymbol{x}^k), \qquad k = 0, 1, \cdots, J-1, \\
\varphi_{\boldsymbol{x}}^{n+\frac{1}{2}} &:= \frac{1}{2}(\varphi_{\boldsymbol{x}}^{n+1} + \varphi_{\boldsymbol{x}}^n) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^{n+1} + \boldsymbol{x}^n) + \varphi_{\boldsymbol{x}}^n, \qquad 1 \le n \le J-1.
\end{aligned} \tag{5.1}
$$

wobei $J := \frac{T}{\tau}$ ist. Für die Fehlerabschätzung benötigen wir Normen in den Räumen $H^r(\Omega)$ und in den Bochner Räumen $L^2(H^r(\Omega))$. Angenommen $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{p}) \in L^p(H^{r+1}(\Omega)^d) \times L^p(H^r(\Omega)^{d \cdot n}) \times L^p(H^r(\Omega)^n), p \in \{2, \infty\}$, dann definieren wir die parameter-abhängigen Normen $\|(\cdot;\cdot)\|_{\boldsymbol{U}_r^p \times \boldsymbol{V}_r^p}, \|\cdot\|_{\boldsymbol{P}_r^p}$ durch:

$$
\begin{aligned}
\|(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v})\|^2_{\boldsymbol{U}_r^p \times \boldsymbol{V}_r^p} = {} & \frac{\mu}{2}\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^p(H^{r+1}(\Omega)^d)} + \frac{\lambda}{4}\|\operatorname{div} \boldsymbol{u}\|^2_{L^p(H^r(\Omega)^d)} + |||\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix} |||^2_{L^p(H^r(\Omega)^{d(n+1)})} \\
& + |||\bar{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix} |||^2_{L^p(H^r(\Omega)^{d(n+1)})} + |||\Lambda^{-\frac{1}{2}} \mathrm{Div} \boldsymbol{v}|||^2_{L^p(H^r(\Omega)^n)} + |||\Lambda^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\alpha} \underline{\mathrm{Div}} \boldsymbol{u}|||^2_{L^p(H^r(\Omega)^n)},
\end{aligned} \tag{5.2a}
$$

$$
\|\boldsymbol{p}\|^2_{\boldsymbol{P}_r^p} = |||\Lambda^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{p}|||^2_{L^p(H^r(\Omega)^n)}, \tag{5.2b}
$$

wobei

$$\|\!|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{x}\|\!|_{H^r(\Omega)^m} := \|(|\mathcal{A}|)^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\|\boldsymbol{x}_1\|_{H^r(\Omega)}\\ \vdots \\ \|\boldsymbol{x}_m\|_{H^r(\Omega)}\end{pmatrix}\|, \quad \boldsymbol{x}\in H^r(\Omega)^m, \tag{5.3a}$$

$$\|\!|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{x}\|\!|_{L^p(H^r(\Omega)^m)} := \begin{cases}\left(\int_J \|\!|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{x}\|\!|^p_{H^r(\Omega)^m}dt\right)^{\frac{1}{p}} & \text{wenn} \quad 1\le p<\infty,\\ \operatorname{ess\,sup}_{t\in J}\|\!|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{x}\|\!|_{H^r(\Omega)^m} & \text{wenn} \quad p=\infty,\end{cases} \tag{5.3b}$$

$\mathcal{A}$ eine SPSD Matrix ist, und wir die Bezeichnung $(|\mathcal{A}|)_{ij} := |(\mathcal{A})_{ij}|$, $1\le i,j\le m$, verwenden wollen. Durch Anwendung der Cauchy-Schwarz Ungleichung ist leicht einzusehen, dass

$$\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{x}\|_{H^r(\Omega)} \le \|\!|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{x}\|\!|_{H^r(\Omega)}.$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise lassen wir ab nun den Index für die Raumdimension sowie die Definitionsmenge bei der Bezeichnung von Normen weg, d.h.,

$$\|\boldsymbol{x}\|_{L^p(H^r)} := \|\boldsymbol{x}\|_{L^p(H^r(\Omega)^d)}.$$

**Lemma 5.1.** *Es sei $\boldsymbol{x}$ eine differenzierbare Funktion in der Zeit $\boldsymbol{x}^k=\boldsymbol{x}(t^k)$, $\boldsymbol{x}^{k+1}=\boldsymbol{x}(t^{k+1})$ und $\mathcal{A}$ eine SPSD-Matrix, die unabhängig von der Zeit ist. Wir definieren*

$$\rho_{\boldsymbol{x}}^k := \frac{\boldsymbol{x}^{k+1}-\boldsymbol{x}^k}{\tau} - \frac{\dot{\boldsymbol{x}}^{k+1}+\dot{\boldsymbol{x}}^k}{2} = \frac{1}{2\tau}\int_{k\tau}^{(k+1)\tau}((k+1)\tau-s)(k\tau-s)\frac{\partial^3\boldsymbol{x}}{\partial t^3}(\cdot,s)ds, \tag{A0}$$

*wobei $\tau=t^{k+1}-t^k, t^k:=k\tau$, $t\in[0,T]$. Für $n,m\le J$ gilt:*

$$\sum_{k=0}^{n}\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\rho_{\boldsymbol{x}}^k\|^2 \le \frac{1}{5!}\tau^3\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^3\boldsymbol{x}}{\partial t^3}\|^2_{L^2(L^2)}, \tag{A1}$$

$$\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{x}}^k+\sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{x}}^k)\|^2 \le \frac{T}{30}\tau^2\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^3\boldsymbol{x}}{\partial t^3}\|^2_{L^2(L^2)}, \tag{A2}$$

$$\sum_{n=0}^{m}\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{x}}^k+\sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{x}}^k)\|^2 \le \frac{T^2}{30}\tau\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^3\boldsymbol{x}}{\partial t^3}\|^2_{L^2(L^2)}, \tag{A3}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x}^{k+1}-\boldsymbol{x}^k)\|^2 \le \tau\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial t}\|^2_{L^2(L^2)}, \tag{A4}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x}^{k+1}+\boldsymbol{x}^k)\|^2 \le \tau\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial t}\|^2_{L^2(L^2)}. \tag{A5}$$

***Beweis.*** Aus (A0) folgt

$$\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\rho_{\boldsymbol{x}}^k = \frac{1}{2\tau}\int_{k\tau}^{(k+1)\tau}((k+1)\tau-s)(k\tau-s)\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^3\boldsymbol{x}}{\partial t^3}(\cdot,s)ds.$$

Durch Anwendung der Cauchy-Schwarz Ungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\rho_{\boldsymbol{x}}^k\|^2 &\leq \frac{1}{4\tau^2}\int_{k\tau}^{(k+1)\tau}\|((k+1)\tau-s)(k\tau-s)\|^2 ds \int_{k\tau}^{(k+1)\tau}\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^3\boldsymbol{x}}{\partial t^3}(\cdot,s)\|^2 ds\\ &= \frac{1}{4\tau^2}\frac{\tau^5}{30}\int_{k\tau}^{(k+1)\tau}\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^3\boldsymbol{x}}{\partial t^3}(\cdot,s)\|^2 ds = \frac{1}{5!}\tau^3\int_{k\tau}^{(k+1)\tau}\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^3\boldsymbol{x}}{\partial t^3}(\cdot,s)\|^2 ds. \qquad (5.5a)\end{aligned}$$

Summieren wir (5.5a) über das Zeitintervall, so erhalten wir (A1). Anwendung der Dreiecksungleichung auf der linken Seite von (A2) und danach der Cauchy-Schwarz Ungleichung ergibt

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{x}}^k+\sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{x}}^k)\|^2 &\leq 2(\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{x}}^k\|^2+\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{x}}^k\|^2) \leq 2(2\frac{T}{\tau}\sum_{k=0}^{n}\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\rho_{\boldsymbol{x}}^k\|^2)\\ &\underset{(A1)}{\leq} \frac{4T}{\tau}\cdot\frac{1}{5!}\tau^3\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^3\boldsymbol{x}}{\partial t^3}\|^2_{L^2(L^2)}.\end{aligned}$$

Die Ungleichung (A3) folgt aus (A2), da $\sum_{n=0}^{m}1 \leq \frac{T}{\tau}$ ist. Es gilt

$$\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x}^{k+1}-\boldsymbol{x}^k) = \int_{k\tau}^{(k+1)\tau}\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial t}(\cdot,s)ds,$$

und mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung:

$$\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x}^{k+1}-\boldsymbol{x}^k)\|^2 \leq \int_{k\tau}^{(k+1)\tau}1.ds\int_{k\tau}^{(k+1)\tau}\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial t}\|^2 ds = \tau\int_{k\tau}^{(k+1)\tau}\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial t}\|^2 ds. \qquad (5.5b)$$

Auf ähnliche Weise haben wir

$$\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x}^{k+1}+\boldsymbol{x}^k) = \int_{(k+\frac{1}{2})\tau}^{(k+1)\tau}\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial t}(\cdot,s)ds - \int_{k\tau}^{(k+\frac{1}{2})\tau}\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial t}(\cdot,s)ds,$$

und durch Anwendung der Dreiecksungleichung und der Cauchy-Schwarz Ungleichung:

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x}^{k+1}+\boldsymbol{x}^k)\|^2 &\leq 2\int_{(k+\frac{1}{2})\tau}^{(k+1)\tau}1.ds\int_{(k+\frac{1}{2})\tau}^{(k+1)\tau}\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial t}(\cdot,s)\|^2 ds\\ &+2\int_{k\tau}^{(k+\frac{1}{2})\tau}1.ds\int_{k\tau}^{(k+\frac{1}{2})\tau}\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial t}(\cdot,s)\|^2 ds = \tau\int_{k\tau}^{(k+1)\tau}\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial t}(\cdot,s)\|^2 ds. \qquad (5.5c)\end{aligned}$$

Summieren wir (5.5b),(5.5c) über das Zeitintervall, so erhalten (A4) und (A5). □

Der Einfachheit halber verwenden wir den Index “$e$” für die exakte Lösung von (3.11), “$I$” als Index der Interpolierten der exakten Lösung, die im folgenden Lemma erklärt wird, und “$h$”, wie bereits früher, als Index der approximierten Lösung, d.h., der Lösung von (4.15). Außerdem verwenden wir die Indizes “$eI$” und “$hI$”, um Differenzen der entsprechenden Größen zu bezeichnen, so zum Beispiel

$$\boldsymbol{x}_{eI} = \boldsymbol{x}_e - \boldsymbol{x}_I, \qquad \boldsymbol{x}_{hI} = \boldsymbol{x}_h - \boldsymbol{x}_I.$$

**Hypothese 5.2.** *Für die Lösung* $(\boldsymbol{u}_e; \boldsymbol{v}_e; \boldsymbol{p}_e)$ *von* (3.11) *gelte*

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{u}_e; \frac{\partial \boldsymbol{u}_e}{\partial t}) &\in L^p(H^{r+1}(\Omega)^d) \times L^p(H^{r+1}(\Omega)^d),\\
(\boldsymbol{v}_e; \frac{\partial \boldsymbol{v}_e}{\partial t}) &\in L^p(H^{r+1}(\Omega)^{d\cdot n}) \times L^p(H^{r+1}(\Omega)^{d\cdot n}),\\
\boldsymbol{p}_e &\in L^p(H^r(\Omega)^n),
\end{aligned}$$

*wobei* $1 \leq r, p \in \{2, \infty\}$.

In Anbetracht der Approximationseigenschaften der verwendeten Finite Elemente Räume gilt das folgende Lemma, siehe [5, 4.3. Approximation.], [23, Proposition 2.5.4],[31, Corollary 1.109].

**Lemma 5.3.** *Unter Annahme der Hypothese 5.2 gibt es* $(\boldsymbol{u}_I, \boldsymbol{v}_I, \boldsymbol{p}_I) \in \boldsymbol{U}_h \times \boldsymbol{V}_h \times \boldsymbol{P}_h$ $(BDM_r \times BDM_r \times \mathcal{P}_{r-1})$ *mit*

$$\begin{aligned}
(\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}_I, \boldsymbol{w}_h) &= (\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}_e, \boldsymbol{w}_h) && \textit{für alle}\ \ \boldsymbol{w}_h \in \mathrm{div}\ (\boldsymbol{U}_h), && (5.6a)\\
(\mathrm{Div}\boldsymbol{v}_I, \boldsymbol{v}_h) &= (\mathrm{Div}\boldsymbol{v}_e, \boldsymbol{v}_h) && \textit{für alle}\ \ \boldsymbol{v}_h \in \mathrm{Div}(\boldsymbol{V}_h), && (5.6b)\\
(\boldsymbol{p}_I, \boldsymbol{q}_h) &= (\boldsymbol{p}_e, \boldsymbol{q}_h) && \textit{für alle}\ \ \boldsymbol{q}_h \in \boldsymbol{P}_h, && (5.6c)\\
(\mathrm{div}\ \dot{\boldsymbol{u}}_I, \boldsymbol{w}_h) &= (\mathrm{div}\ \dot{\boldsymbol{u}}_e, \boldsymbol{w}_h) && \textit{für alle}\ \ \boldsymbol{w}_h \in \mathrm{div}\ (\boldsymbol{U}_h), && (5.6d)\\
(\mathrm{Div}\dot{\boldsymbol{v}}_I, \boldsymbol{v}_h) &= (\mathrm{Div}\dot{\boldsymbol{v}}_e, \boldsymbol{v}_h) && \textit{für alle}\ \ \boldsymbol{v}_h \in \mathrm{Div}(\boldsymbol{V}_h), && (5.6e)
\end{aligned}$$

*sodass gilt:*

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{u}_{eI}\| \leq Ch^r \|\boldsymbol{u}_e\|_{H^r(\Omega)^d}, \quad \|\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}_{eI}\| \leq Ch^r \|\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}_e\|_{H^r(\Omega)}, \ \|\boldsymbol{u}_{eI}\|_{DG} \leq Ch^r \|\boldsymbol{u}_e\|_{H^{r+1}(\Omega)^d}, && (5.7a)\\
&\|\boldsymbol{v}_{eI}\| \leq Ch^r \|\boldsymbol{v}_e\|_{H^r(\Omega)^{nd}}, \quad \|\mathrm{Div}\boldsymbol{v}_{eI}\| \leq Ch^r \|\mathrm{Div}\boldsymbol{v}_e\|_{H^r(\Omega)^n}, \quad \|\boldsymbol{p}_{eI}\| \leq Ch^r \|\boldsymbol{p}_e\|_{H^r(\Omega)^n}, && (5.7b)\\
&\|\dot{\boldsymbol{u}}_{eI}\| \leq Ch^r \|\dot{\boldsymbol{u}}_e\|_{H^r(\Omega)^d}, \quad \|\mathrm{div}\ \dot{\boldsymbol{u}}_{eI}\| \leq Ch^r \|\mathrm{div}\ \dot{\boldsymbol{u}}_e\|_{H^r(\Omega)}, && (5.7c)\\
&\|\dot{\boldsymbol{v}}_{eI}\| \leq Ch^r \|\dot{\boldsymbol{v}}_e\|_{H^r(\Omega)^{nd}}, \quad \|\mathrm{Div}\dot{\boldsymbol{v}}_{eI}\| \leq Ch^r \|\mathrm{Div}\dot{\boldsymbol{v}}_e\|_{H^r(\Omega)^n}. && (5.7d)
\end{aligned}$$

*sowie für jede SPSD-Matrix* $\mathcal{A}$*:*

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{A}\boldsymbol{r}_{eI}\| \leq Ch^r \|\!|\mathcal{A}\boldsymbol{r}_e|\!\|_{H^r(\Omega)^{d(1+n)}}, \ \|\mathcal{A}\boldsymbol{s}_{eI}\| \leq Ch^r \|\!|\mathcal{A}\boldsymbol{s}_e|\!\|_{H^r(\Omega)^{d(1+n)}}, \ \|\mathcal{A}\boldsymbol{p}_{eI}\| \leq Ch^r \|\!|\mathcal{A}\boldsymbol{p}_e|\!\|_{H^r(\Omega)^n},\\
&\|\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}\underline{\mathrm{Div}}\boldsymbol{u}_{eI} + \mathrm{Div}\boldsymbol{v}_{eI})\| \leq Ch^r(\|\!|\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}\underline{\mathrm{Div}}\boldsymbol{u}_e|\!\|_{H^r(\Omega)^n} + \|\!|\mathcal{A}\mathrm{Div}\boldsymbol{v}_e)|\!\|_{H^r(\Omega)^n}). && (5.8)
\end{aligned}$$

Für die Anfangsbedingungen wollen wir im Weiteren stets annehmen, dass

$$(\boldsymbol{r}_e^0 - \boldsymbol{r}_h^0, \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_h \\ \boldsymbol{z}_h \end{pmatrix}) = (\boldsymbol{s}_e^0 - \boldsymbol{s}_h^0, \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_h \\ \boldsymbol{z}_h \end{pmatrix}) = (\boldsymbol{p}_e^0 - \boldsymbol{p}_h^0, \boldsymbol{q}_h) = 0. \tag{5.9}$$

Man beachte, dass diese Bedingung auch in der Praxis leicht realisierbar ist, indem man einfach mit den entsprechenden $L^2$-Projektionen der Anfangsbedingungen arbeitet. Die schwache Formulierung (4.15) kann man in Anbetracht der Definition von $\mathcal{G}$, siehe (3.29), auf folgende Weise ausdrücken

$$\mu\tau^2 a_h(\boldsymbol{u}_h^{k+\frac{1}{2}}, \boldsymbol{w}_h) + \frac{\lambda\tau^2}{2}(\operatorname{div}\, \boldsymbol{u}_h^{k+\frac{1}{2}}, \operatorname{div}\, \boldsymbol{w}_h) + ((\bar{\mathcal{M}} + \frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})(\boldsymbol{r}_h^{k+1} - \boldsymbol{r}_h^k), \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_h \\ \boldsymbol{z}_h \end{pmatrix})$$

$$- \frac{\tau^2}{2}(\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{p}_h^{k+\frac{1}{2}} \\ \boldsymbol{p}_h^{k+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{\operatorname{Div}}\boldsymbol{w}_h \\ \operatorname{Div}\boldsymbol{z}_h \end{pmatrix}) - \tau(\bar{\mathcal{M}}\boldsymbol{s}_h^k, \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_h \\ \boldsymbol{z}_h \end{pmatrix}) = \frac{\tau^2}{2}(\begin{pmatrix} \boldsymbol{f}^{k+\frac{1}{2}} \\ \boldsymbol{g}^{k+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_h \\ \boldsymbol{z}_h \end{pmatrix}), \tag{5.10a}$$

$$- \frac{\tau^2}{4}(\boldsymbol{\alpha}\underline{\operatorname{Div}}(\boldsymbol{u}_h^{k+1} - \boldsymbol{u}_h^k), \boldsymbol{q}_h) - \frac{\tau^2}{4}(\operatorname{Div}(\boldsymbol{v}_h^{k+1} - \boldsymbol{v}_h^k), \boldsymbol{q}_h) + \frac{\tau^3}{4}(\mathcal{L}_{33}\boldsymbol{p}_h^{k+\frac{1}{2}}, \boldsymbol{q}_h)$$

$$+ \frac{\tau^2}{4}(\mathcal{D}_{33}(\boldsymbol{p}_h^{k+1} - \boldsymbol{p}_h^k), \boldsymbol{q}_h) = 0. \tag{5.10b}$$

Die folgende Anmerkung lässt uns das Gleichungssystem (3.11) dann in ähnliche Form schreiben.

**Anmerkung 5.4.** *Es sei* $(\boldsymbol{u}_e; \boldsymbol{v}_e; \boldsymbol{p}_e)$ *die Lösung von* (3.11). *Dann gilt:*

$$\frac{\mu\tau^2}{2}(\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}_e^{k+1} + \boldsymbol{u}_e^k), \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{w})) + \frac{\lambda\tau^2}{4}(\operatorname{div}\, (\boldsymbol{u}_e^{k+1} + \boldsymbol{u}_e^k), \operatorname{div}\, \boldsymbol{w}) + ((\bar{\mathcal{M}} + \frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})(\boldsymbol{r}_e^{k+1} - \boldsymbol{r}_e^k), \begin{pmatrix} \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix})$$

$$- \frac{\tau^2}{4}(\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{p}_e^{k+1} + \boldsymbol{p}_e^k) \\ \boldsymbol{p}_e^{k+1} + \boldsymbol{p}_e^k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{\operatorname{Div}}\boldsymbol{w} \\ \operatorname{Div}\boldsymbol{z} \end{pmatrix}) - \tau(\bar{\mathcal{M}}\boldsymbol{s}_e^k, \begin{pmatrix} \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix}) \quad = \quad \frac{\tau^2}{4}(\begin{pmatrix} \boldsymbol{f}^k + \boldsymbol{f}^{k+1} \\ \boldsymbol{g}^k + \boldsymbol{g}^{k+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix})$$

$$+ \tau((\bar{\mathcal{M}} + \frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})\rho_{\boldsymbol{r}}^k, \begin{pmatrix} \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix}) + \frac{\tau^2}{2}(\bar{\mathcal{M}}\rho_{\boldsymbol{s}}^k, \begin{pmatrix} \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix}), \tag{5.11a}$$

$$-\frac{\tau^2}{4}(\boldsymbol{\alpha}\underline{\operatorname{Div}}(\boldsymbol{u}_e^{k+1} - \boldsymbol{u}_e^k), \boldsymbol{q}) - \frac{\tau^2}{4}(\operatorname{Div}(\boldsymbol{v}_e^{k+1} - \boldsymbol{v}_e^k), \boldsymbol{q}) + \frac{\tau^3}{8}(\mathcal{L}_{33}(\boldsymbol{p}_e^{k+1} + \boldsymbol{p}_e^k), \boldsymbol{q})$$

$$+ \frac{\tau^2}{4}(\mathcal{D}_{33}(\boldsymbol{p}_e^{k+1} - \boldsymbol{p}_e^k), \boldsymbol{q}) = -\frac{\tau^3}{4}(\boldsymbol{\alpha}\underline{\operatorname{Div}}\rho_{\boldsymbol{u}}^k, \boldsymbol{q}) - \frac{\tau^3}{4}(\operatorname{Div}\rho_{\boldsymbol{v}}^k, \boldsymbol{q}) + \frac{\tau^3}{4}(\mathcal{D}_{33}\rho_{\boldsymbol{p}}^k, \boldsymbol{q}), \tag{5.11b}$$

*und*

$$\boldsymbol{r}_e^{k+1} - \boldsymbol{r}_e^k = \frac{\tau}{2}(\boldsymbol{s}_e^{k+1} + \boldsymbol{s}_e^k) + \tau\rho_r^k. \tag{5.11c}$$

***Beweis.*** Aus (3.17) und (3.22) folgt

$$\bar{\mathcal{M}}\dot{\boldsymbol{s}}_e + \bar{\mathcal{D}}\dot{\boldsymbol{r}}_e + \bar{\mathcal{L}}\boldsymbol{r}_e + \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{13} \\ \mathcal{L}_{23} \end{bmatrix} \boldsymbol{p}_e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{g} \end{bmatrix}, \tag{5.12a}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_e = \boldsymbol{s}_e, \tag{5.12b}$$

$$\mathcal{D}_{31}\dot{\boldsymbol{u}}_e + \mathcal{D}_{32}\dot{\boldsymbol{v}}_e + \mathcal{D}_{33}\dot{\boldsymbol{p}}_e + \mathcal{L}_{33}\boldsymbol{p}_e = \boldsymbol{0}. \tag{5.12c}$$

Für zwei Zeitpunkte $t^k$ und $t^{k+1}$ kombinieren wir die entstehenden Gleichungssystems von (5.12) und erhalten so

$$\bar{\mathcal{M}}(\dot{\boldsymbol{s}}_e^{k+1}+\dot{\boldsymbol{s}}_e^k)+\bar{\mathcal{D}}(\dot{\boldsymbol{r}}_e^{k+1}+\dot{\boldsymbol{r}}_e^k)+\bar{\mathcal{L}}(\boldsymbol{r}_e^{k+1}+\boldsymbol{r}_e^k)+\begin{bmatrix}\mathcal{L}_{13}\\ \mathcal{L}_{23}\end{bmatrix}(\boldsymbol{p}_e^{k+1}+\boldsymbol{p}_e^k)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}^{k+1}+\boldsymbol{f}^k\\ \boldsymbol{g}^{k+1}+\boldsymbol{g}^k\end{bmatrix}, \tag{5.13a}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_e^{k+1}+\dot{\boldsymbol{r}}_e^k=\boldsymbol{s}_e^{k+1}+\boldsymbol{s}_e^k, \tag{5.13b}$$

$$\mathcal{D}_{31}(\dot{\boldsymbol{u}}_e^{k+1}+\dot{\boldsymbol{u}}_e^k)+\mathcal{D}_{32}(\dot{\boldsymbol{v}}_e^{k+1}+\dot{\boldsymbol{v}}_e^k)+\mathcal{D}_{33}(\dot{\boldsymbol{p}}_e^{k+1}+\dot{\boldsymbol{p}}_e^k)+\mathcal{L}_{33}(\boldsymbol{p}_e^{k+1}+\boldsymbol{p}_e^k)=\boldsymbol{0}. \tag{5.13c}$$

Unter Verwendung der Definition (A0) von $\rho_x^k$ ergibt sich

$$2\bar{\mathcal{M}}(\frac{\boldsymbol{s}_e^{k+1}-\boldsymbol{s}_e^k}{\tau}-\rho_s^k)+2\bar{\mathcal{D}}(\frac{\boldsymbol{r}_e^{k+1}-\boldsymbol{r}_e^k}{\tau}-\rho_r^k)+\bar{\mathcal{L}}(\boldsymbol{r}_e^{k+1}+\boldsymbol{r}_e^k)+\begin{bmatrix}\mathcal{L}_{13}\\ \mathcal{L}_{23}\end{bmatrix}(\boldsymbol{p}_e^{k+1}+\boldsymbol{p}_e^k)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}^{k+1}+\boldsymbol{f}^k\\ \boldsymbol{g}^{k+1}+\boldsymbol{g}^k\end{bmatrix}, \tag{5.14a}$$

$$2\Big(\frac{\boldsymbol{r}_e^{k+1}-\boldsymbol{r}_e^k}{\tau}-\rho_r^k\Big)=\boldsymbol{s}_e^{k+1}+\boldsymbol{s}_e^k, \tag{5.14b}$$

$$2\mathcal{D}_{31}(\frac{\boldsymbol{u}_e^{k+1}-\boldsymbol{u}_e^k}{\tau}-\rho_u^k)+2\mathcal{D}_{32}(\frac{\boldsymbol{v}_e^{k+1}-\boldsymbol{v}_e^k}{\tau}-\rho_v^k)+2\mathcal{D}_{33}(\frac{\boldsymbol{p}_e^{k+1}-\boldsymbol{p}_e^k}{\tau}-\rho_p^k)+\mathcal{L}_{33}(\boldsymbol{p}_e^{k+1}+\boldsymbol{p}_e^k)=\boldsymbol{0}. \tag{5.14c}$$

Multiplizieren wir (5.14b) mit $\frac{2}{\tau}\bar{\mathcal{M}}$ und kombinieren die entstehenden Gleichung mit (5.14a), so entsteht das System

$$\begin{aligned}2\bar{\mathcal{M}}(\frac{\boldsymbol{s}_e^{k+1}-\boldsymbol{s}_e^k}{\tau}-\rho_s^k)+2\bar{\mathcal{D}}(\frac{\boldsymbol{r}_e^{k+1}-\boldsymbol{r}_e^k}{\tau}-\rho_r^k)+\bar{\mathcal{L}}(\boldsymbol{r}_e^{k+1}+\boldsymbol{r}_e^k)+\begin{bmatrix}\mathcal{L}_{13}\\ \mathcal{L}_{23}\end{bmatrix}(\boldsymbol{p}_e^{k+1}+\boldsymbol{p}_e^k)\\ =\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}^{k+1}+\boldsymbol{f}^k\\ \boldsymbol{g}^{k+1}+\boldsymbol{g}^k\end{bmatrix}-2\frac{2}{\tau}\bar{\mathcal{M}}(\frac{\boldsymbol{r}_e^{k+1}-\boldsymbol{r}_e^k}{\tau}-\rho_r^k)+\frac{2}{\tau}\bar{\mathcal{M}}(\boldsymbol{s}_e^{k+1}+\boldsymbol{s}_e^k).\end{aligned} \tag{5.15}$$

Danach multiplizieren wir (5.15) noch mit $\frac{\tau^2}{4}$ und (5.14c) mit $\frac{\tau^3}{8}$. Die entstehenden Gleichungen lauten damit

$$\begin{aligned}(\bar{\mathcal{M}}+\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})(\boldsymbol{r}_e^{k+1}-\boldsymbol{r}_e^k)+\frac{\tau^2}{4}\bar{\mathcal{L}}(\boldsymbol{r}_e^{k+1}+\boldsymbol{r}_e^k)+\frac{\tau^2}{4}\begin{bmatrix}\mathcal{L}_{13}\\ \mathcal{L}_{23}\end{bmatrix}(\boldsymbol{p}_e^{k+1}+\boldsymbol{p}_e^k)-\tau\bar{\mathcal{M}}\boldsymbol{s}_e^k=\frac{\tau^2}{4}\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}^{k+1}+\boldsymbol{f}^k\\ \boldsymbol{g}^{k+1}+\boldsymbol{g}^k\end{bmatrix}\\ +\tau(\bar{\mathcal{M}}+\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})\rho_r^k+\frac{\tau^2}{2}\bar{\mathcal{M}}\rho_s^k,\end{aligned} \tag{5.16a}$$

$$\begin{aligned}\frac{\tau^2}{4}\mathcal{D}_{31}(\boldsymbol{u}_e^{k+1}-\boldsymbol{u}_e^k)+\frac{\tau^2}{4}\mathcal{D}_{32}(\boldsymbol{v}_e^{k+1}-\boldsymbol{v}_e^k)+\frac{\tau^2}{4}\mathcal{D}_{33}(\boldsymbol{p}_e^{k+1}-\boldsymbol{p}_e^k)+\frac{\tau^3}{8}\mathcal{L}_{33}(\boldsymbol{p}_e^{k+1}+\boldsymbol{p}_e^k)\\ =\frac{\tau^3}{4}\mathcal{D}_{31}\rho_u^k+\frac{\tau^3}{4}\mathcal{D}_{32}\rho_v^k+\frac{\tau^3}{4}\mathcal{D}_{33}\rho_p^k.\end{aligned} \tag{5.16b}$$

Das Gleichungssystem (5.11) ist dann die schwache Formulierung des Systems (5.16). □

Als Nächstes werden wir zwei Gleichungssysteme, (5.18) und (5.21), herleiten, die wir später für die Fehlerabschätzung benötigen werden. Dazu subtrahieren wir (5.11) von (5.10). Mit (3.30) und der Konsistenz von $a_h(\cdot,\cdot)$ folgt

$$\begin{aligned}
&\frac{\mu\tau^2}{2}a_h((\boldsymbol{u}_h^{k+1}+\boldsymbol{u}_h^k),\boldsymbol{w}_h)+\frac{\lambda\tau^2}{4}(\mathrm{div}\ (\boldsymbol{u}_h^{k+1}+\boldsymbol{u}_h^k),\mathrm{div}\ \boldsymbol{w}_h)+((\bar{\mathcal{M}}+\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})(\boldsymbol{r}_h^{k+1}-\boldsymbol{r}_h^k),\begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_h\\ \boldsymbol{z}_h\end{pmatrix})\\
&\quad-\frac{\tau^2}{4}(\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{p}_h^{k+1}+\boldsymbol{p}_h^k)\\ \boldsymbol{p}_h^{k+1}+\boldsymbol{p}_h^k\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\underline{\mathrm{Div}}\boldsymbol{w}_h\\ \mathrm{Div}\boldsymbol{z}_h\end{pmatrix})-\tau(\bar{\mathcal{M}}\boldsymbol{s}_h^k,\begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_h\\ \boldsymbol{z}_h\end{pmatrix})=\ \frac{\mu\tau^2}{2}a_h(\boldsymbol{u}_e^{k+1}+\boldsymbol{u}_e^k,\boldsymbol{w}_h)\\
&\quad+\frac{\lambda\tau^2}{4}(\mathrm{div}\ (\boldsymbol{u}_e^{k+1}+\boldsymbol{u}_e^k),\mathrm{div}\ \boldsymbol{w}_h)+((\bar{\mathcal{M}}+\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})(\boldsymbol{r}_e^{k+1}-\boldsymbol{r}_e^k),\begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_h\\ \boldsymbol{z}_h\end{pmatrix})-\frac{\tau^2}{2}(\bar{\mathcal{M}}\rho_{\boldsymbol{s}}^k,\begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_h\\ \boldsymbol{z}_h\end{pmatrix})\\
&\quad-\frac{\tau^2}{4}(\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{p}_e^{k+1}+\boldsymbol{p}_e^k)\\ \boldsymbol{p}_e^{k+1}+\boldsymbol{p}_e^k\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\underline{\mathrm{Div}}\boldsymbol{w}_h\\ \mathrm{Div}\boldsymbol{z}_h\end{pmatrix})-\tau(\bar{\mathcal{M}}\boldsymbol{s}_e^k,\begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_h\\ \boldsymbol{z}_h\end{pmatrix})-\tau((\bar{\mathcal{M}}+\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})\rho_{\boldsymbol{r}}^k,\begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_h\\ \boldsymbol{z}_h\end{pmatrix}),
\end{aligned}\tag{5.17a}$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{\tau^2}{4}(\boldsymbol{\alpha}\underline{\mathrm{Div}}(\boldsymbol{u}_h^{k+1}-\boldsymbol{u}_h^k),\boldsymbol{q}_h)-\frac{\tau^2}{4}(\mathrm{Div}(\boldsymbol{v}_h^{k+1}-\boldsymbol{v}_h^k),\boldsymbol{q}_h)+\frac{\tau^3}{8}(\mathcal{L}_{33}(\boldsymbol{p}_h^{k+1}+\boldsymbol{p}_h^k),\boldsymbol{q}_h)\\
&\quad+\frac{\tau^2}{4}(\mathcal{D}_{33}(\boldsymbol{p}_h^{k+1}-\boldsymbol{p}_h^k),\boldsymbol{q}_h)=-\frac{\tau^2}{4}(\boldsymbol{\alpha}\underline{\mathrm{Div}}(\boldsymbol{u}_e^{k+1}-\boldsymbol{u}_e^k),\boldsymbol{q}_h)-\frac{\tau^2}{4}(\mathrm{Div}(\boldsymbol{v}_e^{k+1}-\boldsymbol{v}_e^k),\boldsymbol{q}_h)\\
&\quad+\frac{\tau^3}{8}(\mathcal{L}_{33}(\boldsymbol{p}_e^{k+1}+\boldsymbol{p}_e^k),\boldsymbol{q}_h)+\frac{\tau^2}{4}(\mathcal{D}_{33}(\boldsymbol{p}_e^{k+1}-\boldsymbol{p}_e^k),\boldsymbol{q}_h)+\frac{\tau^3}{4}(\boldsymbol{\alpha}\underline{\mathrm{Div}}\rho_{\boldsymbol{u}}^k,\boldsymbol{q}_h)\\
&\quad+\frac{\tau^3}{4}(\mathrm{Div}\rho_{\boldsymbol{v}}^k,\boldsymbol{q}_h)-\frac{\tau^3}{4}(\mathcal{D}_{33}\rho_{\boldsymbol{p}}^k,\boldsymbol{q}_h),
\end{aligned}\tag{5.17b}$$

und

$$\boldsymbol{r}_h^{k+1}-\boldsymbol{r}_h^k-\frac{\tau}{2}(\boldsymbol{s}_h^{k+1}+\boldsymbol{s}_h^k)=\boldsymbol{r}_e^{k+1}-\boldsymbol{r}_e^k-\frac{\tau}{2}(\boldsymbol{s}_e^{k+1}+\boldsymbol{s}_e^k)-\tau\rho_{\boldsymbol{r}}^k.\tag{5.17c}$$

Damit erhalten wir für $(\boldsymbol{u}_I,\boldsymbol{v}_I,\boldsymbol{p}_I)\in\boldsymbol{U}_h\times\boldsymbol{V}_h\times\boldsymbol{P}_h$ dank Lemma 5.3 das erste System

$$\begin{aligned}
&\frac{\mu\tau^2}{2}a_h((\boldsymbol{u}_{hI}^{k+1}+\boldsymbol{u}_{hI}^k),\boldsymbol{w}_h)+\frac{\lambda\tau^2}{4}(\mathrm{div}\ (\boldsymbol{u}_{hI}^{k+1}+\boldsymbol{u}_{hI}^k),\mathrm{div}\ \boldsymbol{w}_h)+((\bar{\mathcal{M}}+\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})(\boldsymbol{r}_{hI}^{k+1}-\boldsymbol{r}_{hI}^k),\begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_h\\ \boldsymbol{z}_h\end{pmatrix})\\
&\quad-\frac{\tau^2}{4}(\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{p}_{hI}^{k+1}+\boldsymbol{p}_{hI}^k)\\ \boldsymbol{p}_{hI}^{k+1}+\boldsymbol{p}_{hI}^k\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\underline{\mathrm{Div}}\boldsymbol{w}_h\\ \mathrm{Div}\boldsymbol{z}_h\end{pmatrix})-\tau(\bar{\mathcal{M}}\boldsymbol{s}_{hI}^k,\begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_h\\ \boldsymbol{z}_h\end{pmatrix})=\ \frac{\mu\tau^2}{2}a_h(\boldsymbol{u}_{eI}^{k+1}+\boldsymbol{u}_{eI}^k,\boldsymbol{w}_h)\\
&\quad+((\bar{\mathcal{M}}+\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})(\boldsymbol{r}_{eI}^{k+1}-\boldsymbol{r}_{eI}^k),\begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_h\\ \boldsymbol{z}_h\end{pmatrix})-\tau(\bar{\mathcal{M}}\boldsymbol{s}_{eI}^k,\begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_h\\ \boldsymbol{z}_h\end{pmatrix})-\tau((\bar{\mathcal{M}}+\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})\rho_{\boldsymbol{r}}^k,\begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_h\\ \boldsymbol{z}_h\end{pmatrix})\\
&\quad-\frac{\tau^2}{2}(\bar{\mathcal{M}}\rho_{\boldsymbol{s}}^k,\begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_h\\ \boldsymbol{z}_h\end{pmatrix}),
\end{aligned}\tag{5.18a}$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{\tau^2}{4}(\boldsymbol{\alpha}\underline{\mathrm{Div}}(\boldsymbol{u}_{hI}^{k+1}-\boldsymbol{u}_{hI}^k),\boldsymbol{q}_h)-\frac{\tau^2}{4}(\mathrm{Div}(\boldsymbol{v}_{hI}^{k+1}-\boldsymbol{v}_{hI}^k),\boldsymbol{q}_h)+\frac{\tau^3}{8}(\mathcal{L}_{33}(\boldsymbol{p}_{hI}^{k+1}+\boldsymbol{p}_{hI}^k),\boldsymbol{q}_h)\\
&\quad+\frac{\tau^2}{4}(\mathcal{D}_{33}(\boldsymbol{p}_{hI}^{k+1}-\boldsymbol{p}_{hI}^k),\boldsymbol{q}_h)=\frac{\tau^3}{4}(\boldsymbol{\alpha}\underline{\mathrm{Div}}\rho_{\boldsymbol{u}}^k,\boldsymbol{q}_h)+\frac{\tau^3}{4}(\mathrm{Div}\rho_{\boldsymbol{v}}^k,\boldsymbol{q}_h)-\frac{\tau^3}{4}(\mathcal{D}_{33}\rho_{\boldsymbol{p}}^k,\boldsymbol{q}_h).
\end{aligned}\tag{5.18b}$$

und

$$\boldsymbol{r}_{hI}^{k+1} - \boldsymbol{r}_{hI}^{k} - \frac{\tau}{2}(\boldsymbol{s}_{hI}^{k+1} + \boldsymbol{s}_{hI}^{k}) = \boldsymbol{r}_{eI}^{k+1} - \boldsymbol{r}_{eI}^{k} - \frac{\tau}{2}(\boldsymbol{s}_{eI}^{k+1} + \boldsymbol{s}_{eI}^{k}) - \tau\rho_{r}^{k}. \tag{5.18c}$$

Wir sehen, dass (5.18a) unter Verwendung von (5.18c) umgeschrieben werden kann. Aus (5.18c) haben wir

$$(\boldsymbol{r}_{hI}^{k+1} - \boldsymbol{r}_{hI}^{k}) - \tau\boldsymbol{s}_{hI}^{k} - (\boldsymbol{r}_{eI}^{k+1} - \boldsymbol{r}_{eI}^{k}) + \tau\boldsymbol{s}_{eI}^{k} + \tau\rho_{r}^{k} = \frac{\tau}{2}(\boldsymbol{s}_{hI}^{k+1} - \boldsymbol{s}_{hI}^{k}) - \frac{\tau}{2}(\boldsymbol{s}_{eI}^{k+1} - \boldsymbol{s}_{eI}^{k}). \tag{5.19}$$

Setzen wir (5.19) in (5.18a) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\frac{\mu\tau^2}{2}a_h((\boldsymbol{u}_{hI}^{k+1} + \boldsymbol{u}_{hI}^{k}), \boldsymbol{w}_h) + \frac{\lambda\tau^2}{4}(\operatorname{div}\,(\boldsymbol{u}_{hI}^{k+1} + \boldsymbol{u}_{hI}^{k}), \operatorname{div}\,\boldsymbol{w}_h) + \frac{\tau}{2}(\bar{\mathcal{D}}(\boldsymbol{r}_{hI}^{k+1} - \boldsymbol{r}_{hI}^{k}), \begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_h\\ \boldsymbol{z}_h\end{pmatrix})\\
&\quad - \frac{\tau^2}{4}(\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{p}_{hI}^{k+1} + \boldsymbol{p}_{hI}^{k})\\ \boldsymbol{p}_{hI}^{k+1} + \boldsymbol{p}_{hI}^{k}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\underline{\operatorname{Div}}\boldsymbol{w}_h\\ \operatorname{Div}\boldsymbol{z}_h\end{pmatrix}) + \frac{\tau}{2}(\bar{\mathcal{M}}(\boldsymbol{s}_{hI}^{k+1} - \boldsymbol{s}_{hI}^{k}), \begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_h\\ \boldsymbol{z}_h\end{pmatrix})\\
&\quad = \frac{\mu\tau^2}{2}a_h(\boldsymbol{u}_{eI}^{k+1} + \boldsymbol{u}_{eI}^{k}, \boldsymbol{w}_h) + \frac{\tau}{2}(\bar{\mathcal{D}}(\boldsymbol{r}_{eI}^{k+1} - \boldsymbol{r}_{eI}^{k}), \begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_h\\ \boldsymbol{z}_h\end{pmatrix}) + \frac{\tau}{2}(\bar{\mathcal{M}}(\boldsymbol{s}_{eI}^{k+1} - \boldsymbol{s}_{eI}^{k}), \begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_h\\ \boldsymbol{z}_h\end{pmatrix})\\
&\quad - \frac{\tau^2}{2}(\bar{\mathcal{D}}\rho_{\boldsymbol{r}}^{k}, \begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_h\\ \boldsymbol{z}_h\end{pmatrix}) - \frac{\tau^2}{2}(\bar{\mathcal{M}}\rho_{\boldsymbol{s}}^{k}, \begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_h\\ \boldsymbol{z}_h\end{pmatrix}).
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Um das zweite Gleichungssystem zu erzeugen, summieren wir (5.18) von $k = 0$ bis $k = n \leq J-1$ und dann von $k = 0$ bis $k = n-1 \leq J-2$, und kombinieren die entstehenden Gleichungen. Schließlich multiplizieren wir das Ergebnis mit $\frac{1}{2}$, verwenden die Definition (5.1) und erhalten so

$$\begin{aligned}
&\frac{\mu\tau^2}{2}a_h(\varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{n+\frac{1}{2}}, \boldsymbol{w}_h) + \frac{\lambda\tau^2}{4}(\operatorname{div}\,\varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{n+\frac{1}{2}}, \operatorname{div}\,\boldsymbol{w}_h) + ((\bar{\mathcal{M}} + \frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})\boldsymbol{r}_{hI}^{n+\frac{1}{2}}, \begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_h\\ \boldsymbol{z}_h\end{pmatrix}) - \frac{\tau^2}{4}(\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\\ \varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\underline{\operatorname{Div}}\boldsymbol{w}_h\\ \operatorname{Div}\boldsymbol{z}_h\end{pmatrix})\\
&\quad = \frac{\mu\tau^2}{2}a_h(\varphi_{\boldsymbol{u},eI}^{n+\frac{1}{2}}, \boldsymbol{w}_h) + \frac{\tau}{2}(\bar{\mathcal{M}}(\varphi_{\boldsymbol{s},hI}^{n} - \varphi_{\boldsymbol{s},eI}^{n}), \begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_h\\ \boldsymbol{z}_h\end{pmatrix}) + ((\bar{\mathcal{M}} + \frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})\boldsymbol{r}_{eI}^{n+\frac{1}{2}}, \begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_h\\ \boldsymbol{z}_h\end{pmatrix})\\
&\quad - (\frac{\tau}{2}(\bar{\mathcal{M}} + \frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{r}}^{k} + \sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{r}}^{k}) + \frac{\tau^2}{4}\bar{\mathcal{M}}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{s}}^{k} + \sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{s}}^{k}), \begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_h\\ \boldsymbol{z}_h\end{pmatrix}),
\end{aligned} \tag{5.21a}$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{\tau^2}{4}(\boldsymbol{\alpha}\underline{\operatorname{Div}}\boldsymbol{u}_{hI}^{n+\frac{1}{2}}, \boldsymbol{q}_h) - \frac{\tau^2}{4}(\operatorname{Div}\boldsymbol{v}_{hI}^{n+\frac{1}{2}}, \boldsymbol{q}_h) + \frac{\tau^3}{8}(\mathcal{L}_{33}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}, \boldsymbol{q}_h) + \frac{\tau^2}{4}(\mathcal{D}_{33}\boldsymbol{p}_{hI}^{n+\frac{1}{2}}, \boldsymbol{q}_h)\\
&\quad = \frac{\tau^3}{8}(\boldsymbol{\alpha}\underline{\operatorname{Div}}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{u}}^{k} + \sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{u}}^{k}) + \operatorname{Div}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{v}}^{k} + \sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{v}}^{k}), \boldsymbol{q}_h) - \frac{\tau^3}{8}(\mathcal{D}_{33}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{p}}^{k} + \sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{p}}^{k}), \boldsymbol{q}_h).
\end{aligned} \tag{5.21b}$$

Die Gleichung (5.21a) können wir noch in anderer Form schreiben. Zunächst summieren wir (5.18c) von $k = 0$ bis $k = n-1 \leq J-2$, wodurch sich

$$\frac{\tau}{2}(\varphi_{\boldsymbol{s},hI}^{n} - \varphi_{\boldsymbol{s},eI}^{n}) = \boldsymbol{r}_{hI}^{n} - \boldsymbol{r}_{eI}^{n} + \boldsymbol{r}_{hI}^{0} - \boldsymbol{r}_{eI}^{0} + \tau\sum_{k=0}^{n-1}\rho_{r}^{k}, \tag{5.22}$$

ergibt. Dann setzen wir (5.22) in (5.21a) ein und erhalten unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen (5.9) die neue Form von (5.21a)

$$\frac{\mu\tau^2}{2}a_h(\varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{n+\frac{1}{2}},\boldsymbol{w}_h)+\frac{\lambda\tau^2}{4}(\mathrm{div}\ \varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{n+\frac{1}{2}},\mathrm{div}\ \boldsymbol{w}_h)+\frac{\tau}{4}(\bar{\mathcal{D}}(\boldsymbol{r}_{hI}^{n+1}+\boldsymbol{r}_{hI}^{n}),\begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_h\\ \boldsymbol{z}_h\end{pmatrix})+\frac{1}{2}(\bar{\mathcal{M}}(\boldsymbol{r}_{hI}^{n+1}-\boldsymbol{r}_{hI}^{n}),\begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_h\\ \boldsymbol{z}_h\end{pmatrix})$$
$$-\frac{\tau^2}{4}(\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\\ \varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\underline{\mathrm{Div}}\boldsymbol{w}_h\\ \mathrm{Div}\boldsymbol{z}_h\end{pmatrix})=\frac{\mu\tau^2}{2}a_h(\varphi_{\boldsymbol{u},eI}^{n+\frac{1}{2}},\boldsymbol{w}_h)+\frac{\tau}{4}(\bar{\mathcal{D}}(\boldsymbol{r}_{eI}^{n+1}+\boldsymbol{r}_{eI}^{n}),\begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_h\\ \boldsymbol{z}_h\end{pmatrix})$$
$$+\frac{1}{2}(\bar{\mathcal{M}}(\boldsymbol{r}_{eI}^{n+1}-\boldsymbol{r}_{eI}^{n}),\begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_h\\ \boldsymbol{z}_h\end{pmatrix})-(\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{M}}\rho_{\boldsymbol{r}}^{n}+\frac{\tau^2}{4}\bar{\mathcal{D}}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{r}}^{k}+\sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{r}}^{k})+\frac{\tau^2}{4}\bar{\mathcal{M}}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{s}}^{k}+\sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{s}}^{k}),\begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_h\\ \boldsymbol{z}_h\end{pmatrix}). \tag{5.23}$$

Mit Hilfe von (5.22) können wir $\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}(\varphi_{\boldsymbol{s},hI}^{n}-\varphi_{\boldsymbol{s},eI}^{n})\|$ abschätzen:

$$\begin{aligned}\frac{\tau}{2}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}(\varphi_{\boldsymbol{s},hI}^{n}-\varphi_{\boldsymbol{s},eI}^{n})\| &= \|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{r}_{hI}^{n}-\boldsymbol{r}_{eI}^{n}+\boldsymbol{r}_{hI}^{0}-\boldsymbol{r}_{eI}^{0}+\tau\sum_{k=0}^{n-1}\rho_r^k)\|\\
&\le \|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}_{hI}^{n}\|+\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}_{eI}^{n}\|+\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{r}_{h}^{0}-\boldsymbol{r}_{e}^{0})\|+\tau\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{n-1}\rho_r^k\|\\
&\le \|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}_{hI}^{n}\|+\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}_{eI}^{n}\|+\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{r}_{h}^{0}-\boldsymbol{r}_{e}^{0})\|+\tau(\frac{T}{\tau}\sum_{k=0}^{n-1}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\rho_r^k\|^2)^{\frac{1}{2}}\\
&\underset{(5.8),(A1)}{\le} \|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}_{hI}^{n}\|+Ch^r(\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}_{e}^{n}\|_{H^r}+\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}_{e}^{0}\|_{H^r})+\sqrt{\frac{T}{5!}}\tau^2\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^3\boldsymbol{r}_e}{\partial t^3}\|_{L^2(L^2)}\\
&\le \|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}_{hI}^{n}\|+Ch^r\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}_{e}\|_{L^\infty(H^r)}+\sqrt{\frac{T}{5!}}\tau^2\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^3\boldsymbol{r}_e}{\partial t^3}\|_{L^2(L^2)}.\end{aligned} \tag{5.24}$$

Im folgende Lemma werden wir das grundlegende Stabilitätresultat anwenden. Danach führen zwei Lemmata ein, um die Restterme in Lemma 5.5 abzuschätzen. Schließlich liefert uns Satz 5.8 dann die Fehlerschätzung für $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ in $\|(\cdot;\cdot)\|_{\boldsymbol{U}_h\times\boldsymbol{V}}$.

**Lemma 5.5.** *Es sei die Hypothese 5.2 erfüllt. Dann gilt:*

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{r}_{hI}^{n+\frac{1}{2}}\|_{\boldsymbol{U}_h\times\boldsymbol{V}}+\|\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|_{\boldsymbol{P}} \le C_1\Big(&h^r\|(\frac{\partial\boldsymbol{u}_e}{\partial t};\frac{\partial\boldsymbol{v}_e}{\partial t})\|_{\boldsymbol{U}_r^2\times\boldsymbol{V}_r^2}+h^r\|(\boldsymbol{u}_e;\boldsymbol{v}_e)\|_{\boldsymbol{U}_r^\infty\times\boldsymbol{V}_r^\infty}\\
&+\tau^2\|(\frac{\partial^3\boldsymbol{u}_e}{\partial t^3};\frac{\partial^3\boldsymbol{v}_e}{\partial t^3})\|_{\boldsymbol{U}_0^2\times\boldsymbol{V}_0^2}+\tau^3\|(\frac{\partial^4\boldsymbol{u}_e}{\partial t^4};\frac{\partial^4\boldsymbol{v}_e}{\partial t^4})\|_{\boldsymbol{U}_0^2\times\boldsymbol{V}_0^2}+\tau^3\|\frac{\partial^3\boldsymbol{p}}{\partial t^3}\|_{\boldsymbol{P}_0^2}+\frac{\tau}{2}\max_{0\le k\le J}\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{k}\|\\
&+\max_{0\le k\le J}\sqrt{\frac{\mu\tau^2}{2}}\|\varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{k}\|_{DG}+\max_{0\le k\le J}\sqrt{\frac{\lambda\tau^2}{4}}\|\mathrm{div}\ \varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{k}\|+\max_{0\le k\le J}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}_{hI}^{k}\|\Big),\end{aligned} \tag{5.25}$$

*wobei $C_1$ eine Konstante unabhängig von allen Parametern, der Netzwerkskala $n$, der Maschenweite $h$ und der Zeitschrittweite $\tau$ ist.*

***Beweis.*** Das Ergebnis folgt aus dem Stabilitätresultat von Korollar 4.9. Um das einzusehen, schreiben wir das Gleichungssystem (5.21) in der Form des Gleichungssystems (4.15) an und bekommen

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mu\tau^2}{2}a_h(\boldsymbol{u}_{hI}^{n+\frac{1}{2}},\boldsymbol{w}_h)+\frac{\lambda\tau^2}{4}(\operatorname{div}\boldsymbol{u}_{hI}^{n+\frac{1}{2}},\operatorname{div}\boldsymbol{w}_h)+((\bar{\mathcal{M}}+\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})\boldsymbol{r}_{hI}^{n+\frac{1}{2}},\begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_h\\ \boldsymbol{z}_h\end{pmatrix})-\frac{\tau^2}{4}(\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\\ \varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\underline{\operatorname{Div}}\boldsymbol{w}_h\\ \operatorname{Div}\boldsymbol{z}_h\end{pmatrix})\\
&=-\frac{\mu\tau^2}{2}a_h(\varphi_{\boldsymbol{u},hI}^n,\boldsymbol{w}_h)-\frac{\lambda\tau^2}{4}(\operatorname{div}\,\varphi_{\boldsymbol{u},hI}^n,\operatorname{div}\,\boldsymbol{w}_h)+\frac{\mu\tau^2}{2}a_h(\varphi_{\boldsymbol{u},eI}^{n+\frac{1}{2}},\boldsymbol{w}_h)+\frac{\tau}{2}(\bar{\mathcal{M}}(\varphi_{\boldsymbol{s},hI}^n-\varphi_{\boldsymbol{s},eI}^n),\begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_h\\ \boldsymbol{z}_h\end{pmatrix})\\
&+((\bar{\mathcal{M}}+\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})\boldsymbol{r}_{eI}^{n+\frac{1}{2}},\begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_h\\ \boldsymbol{z}_h\end{pmatrix})-(\frac{\tau}{2}(\bar{\mathcal{M}}+\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{r}}^k+\sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{r}}^k)+\frac{\tau^2}{4}\bar{\mathcal{M}}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{s}}^k+\sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{s}}^k),\begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_h\\ \boldsymbol{z}_h\end{pmatrix}),
\end{aligned}
\tag{5.26a}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\tau^2}{4}(\boldsymbol{\alpha}\underline{\operatorname{Div}}\boldsymbol{u}_{hI}^{n+\frac{1}{2}},\boldsymbol{q}_h)-\frac{\tau^2}{4}(\operatorname{Div}\boldsymbol{v}_{hI}^{n+\frac{1}{2}},\boldsymbol{q}_h)+\frac{\tau^3}{8}(\mathcal{L}_{33}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}},\boldsymbol{q}_h)+\frac{\tau^2}{4}(\mathcal{D}_{33}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}},\boldsymbol{q}_h)=\frac{\tau^2}{4}(\mathcal{D}_{33}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n},\boldsymbol{q}_h)\\
&+\frac{\tau^3}{8}(\boldsymbol{\alpha}\underline{\operatorname{Div}}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{u}}^k+\sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{u}}^k)+\operatorname{Div}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{v}}^k+\sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{v}}^k),\boldsymbol{q}_h)-\frac{\tau^3}{8}(\mathcal{D}_{33}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{p}}^k+\sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{p}}^k),\boldsymbol{q}_h).
\end{aligned}
\tag{5.26b}
$$

Unter Verwendung von Korollar 4.9 und der Definition von $\Lambda_{uv}$(3.41) ($\Lambda_{uv}=\bar{\mathcal{M}}+\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}}$) ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{r}_{hI}^{n+\frac{1}{2}}\|_{\boldsymbol{U}_h\times\boldsymbol{V}}+\|\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|_{\boldsymbol{P}}\leq C\Big(&\sqrt{\frac{\mu\tau^2}{2}}\|\varphi_{\boldsymbol{u},hI}^n\|_{DG}+\sqrt{\frac{\lambda\tau^2}{4}}\|\operatorname{div}\,\varphi_{\boldsymbol{u},hI}^n\|+\sqrt{\frac{\mu\tau^2}{2}}\|\varphi_{\boldsymbol{u},eI}^{n+\frac{1}{2}}\|_{DG}\\
&+\frac{\tau}{2}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}(\varphi_{\boldsymbol{s},hI}^n-\varphi_{\boldsymbol{s},eI}^n)\|+\|(\bar{\mathcal{M}}+\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}_{eI}^{n+\frac{1}{2}}\|+\frac{\tau}{2}\|(\bar{\mathcal{M}}+\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{r}}^k+\sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{r}}^k)\|\\
&+\frac{\tau^2}{4}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{s}}^k+\sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{s}}^k)\|+\frac{\tau^2}{4}\|\Lambda^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{\alpha}\underline{\operatorname{Div}}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{u}}^k+\sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{u}}^k)+\operatorname{Div}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{v}}^k+\sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{v}}^k))\|\\
&+\frac{\tau}{2}\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^n\|+\frac{\tau^2}{4}\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{p}}^k+\sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{p}}^k)\|\Big).
\end{aligned}
\tag{5.27}
$$

Mit Hilfe der Lemmata 5.1 und 5.3 schätzen wir die Terme auf der rechten Seite wie folgt ab:

- $$
\begin{aligned}
\frac{\mu\tau^2}{2}\|\varphi_{\boldsymbol{u},eI}^{n+\frac{1}{2}}\|_{DG}^2&=\frac{\mu\tau^2}{2}\|\frac{1}{2}(\boldsymbol{u}_{eI}^{n+1}+\boldsymbol{u}_{eI}^n)+\sum_{k=0}^{n-1}(\boldsymbol{u}_{eI}^{k+1}+\boldsymbol{u}_{eI}^k)\|_{DG}^2\leq\frac{\mu\tau^2}{2}\frac{2T}{\tau}\sum_{k=0}^{n}\|(\boldsymbol{u}_{eI}^{k+1}+\boldsymbol{u}_{eI}^k)\|_{DG}^2\\
&\underset{(5.7)}{\leq}Ch^{2r}\frac{\mu\tau^2}{2}\frac{2T}{\tau}\sum_{k=0}^{n}\|(\boldsymbol{u}_e^{k+1}+\boldsymbol{u}_e^k)\|_{H^{r+1}}^2\underset{(A5)}{\leq}Ch^{2r}\tau\frac{\mu\tau^2}{2}\frac{2T}{\tau}\|\frac{\partial\boldsymbol{u}_e}{\partial t}\|_{L^2(H^{r+1})}^2,
\end{aligned}
\tag{5.28a}
$$
- $$
\begin{aligned}
\|(\bar{\mathcal{M}}+\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}_{eI}^{n+\frac{1}{2}}\|^2&\underset{(5.8)}{\leq}Ch^{2r}(\|\!|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}_e^{n+\frac{1}{2}}|\!\|_{H^r}^2+\|\!|(\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}_e^{n+\frac{1}{2}}|\!\|_{H^r}^2)\\
&\underset{(A5)}{\leq}C\frac{\tau}{2}h^{2r}(\|\!|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\boldsymbol{r}_e}{\partial t}|\!\|_{L^2(H^r)}^2+\|\!|(\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\boldsymbol{r}_e}{\partial t}|\!\|_{L^2(H^r)}^2),
\end{aligned}
\tag{5.28b}
$$

- $\frac{\tau}{2}\|(\bar{\mathcal{M}}+\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})^{\frac12}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{r}}^{k}+\sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{r}}^{k})\| \underset{(A2)}{\leq} \sqrt{\frac{T}{120}}\tau^2\|(\bar{\mathcal{M}}+\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})^{\frac12}\frac{\partial^3\boldsymbol{r}_e}{\partial t^3}\|_{L^2(L^2)}, \qquad (5.28c)$
- $\frac{\tau^2}{4}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac12}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{s}}^{k}+\sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{s}}^{k})\| \underset{(A2)}{\leq} \sqrt{\frac{T}{480}}\tau^3\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac12}\frac{\partial^4\boldsymbol{r}_e}{\partial t^4}\|_{L^2(L^2)}, \qquad (5.28d)$
- $\|\Lambda^{-\frac12}(\boldsymbol{\alpha}\underline{\mathrm{Div}}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{u}}^{k}+\sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{u}}^{k})+\mathrm{Div}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{v}}^{k}+\sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{v}}^{k}))\|$
$$\underset{(A2)}{\leq} \sqrt{\frac{T\tau^2}{30}}\|\Lambda^{-\frac12}(\boldsymbol{\alpha}\underline{\mathrm{Div}}\frac{\partial^3\boldsymbol{u}_e}{\partial t^3}+\mathrm{Div}\frac{\partial^3\boldsymbol{v}_e}{\partial t^3})\|_{L^2(L^2)}, \tag{5.28e}$$
- $\frac{\tau^2}{4}\|(-\bar{\mathcal{D}}_{33})^{\frac12}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{p}}^{k}+\sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{p}}^{k})\| \underset{(A2)}{\leq} \sqrt{\frac{T}{480}}\tau^3\|(-\bar{\mathcal{D}}_{33})^{\frac12}\frac{\partial^3\boldsymbol{p}_e}{\partial t^3}\|_{L^2(L^2)}. \qquad (5.28f)$

Setzen wir (5.28) und (5.24) in (5.27) ein, dann gilt für eine Konstante $\tilde{C}_1$, die unabhängig von allen Parametern, der Netzwerkskala $n$, der Maschenweite $h$ und der Zeitschrittweite $\tau$ ist, die Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{r}_{hI}^{n+\frac12}\|_{\boldsymbol{U}_h\times\boldsymbol{V}}+\|\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac12}\|_{\boldsymbol{P}} \leq \tilde{C}_1\Big(&h^r\sqrt{\frac{\mu\tau^2}{2}}\|\frac{\partial\boldsymbol{u}_e}{\partial t}\|_{L^2(H^{r+1})}+\frac{\sqrt{\tau}}{2}h^r\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac12}\frac{\partial\boldsymbol{r}_e}{\partial t}\|_{L^2(H^r)}\\
&+\frac{\sqrt{\tau}}{2}h^r\|(\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})^{\frac12}\frac{\partial\boldsymbol{r}_e}{\partial t}\|_{L^2(H^r)}+h^r\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac12}\boldsymbol{r}_e\|_{L^\infty(H^r)}+\tau^2\|(\bar{\mathcal{M}}+\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})^{\frac12}\frac{\partial^3\boldsymbol{r}_e}{\partial t^3}\|_{L^2(L^2)}\\
&+\frac{\tau^3}{2}\|\Lambda^{-\frac12}(\boldsymbol{\alpha}\underline{\mathrm{Div}}\frac{\partial^3\boldsymbol{u}_e}{\partial t^3}+\mathrm{Div}\frac{\partial^3\boldsymbol{v}_e}{\partial t^3})\|_{L^2(L^2)}+\tau^3\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac12}\frac{\partial^4\boldsymbol{r}_e}{\partial t^4}\|_{L^2(L^2)}+\tau^3\|(-\bar{\mathcal{D}}_{33})^{\frac12}\frac{\partial^3\boldsymbol{p}_e}{\partial t^3}\|_{L^2(L^2)}\\
&+\frac{\tau}{2}\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac12}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n}\|+\sqrt{\frac{\mu\tau^2}{2}}\|\varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{n}\|_{DG}+\sqrt{\frac{\lambda\tau^2}{4}}\|\mathrm{div}\ \varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{n}\|+\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac12}\boldsymbol{r}_{hI}^{n}\|\Big).
\end{aligned}$$

Schließlich verwenden wir noch die Definition der Norm (5.2) und nehmen das Maximum auf der rechten Seite, woraus (5.25) folgt. □

**Lemma 5.6.** *Es sei die Hypothese 5.2 erfüllt. Dann gilt:*

$$\begin{aligned}
\frac{\tau^2}{4}\max_{1\leq n\leq J-1}\|\Lambda^{\frac12}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac12}\|^2 \leq C_2\Big(&\bar{\epsilon}_1\max_{1\leq k\leq J}\frac{\mu\tau^2}{2}\|\varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{k}\|_{DG}^2+\bar{\epsilon}_2\max_{1\leq k\leq J}\frac{\lambda\tau^2}{4}\|\mathrm{div}\ \varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{k}\|^2\\
&+\bar{\epsilon}_3\max_{0\leq k\leq J}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac12}\boldsymbol{r}_{hI}^{k}\|^2+\bar{\epsilon}_4\|(\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})^{\frac12}(\boldsymbol{r}_{hI}^{n+1}+\boldsymbol{r}_{hI}^{n})\|^2+\bar{\epsilon}_5\frac{\tau^2}{4}\max_{1\leq k\leq J}\|(-\bar{\mathcal{D}}_{33})^{\frac12}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n}\|^2\\
&+\bar{\epsilon}_6\frac{\tau^3}{8}\|(-\bar{\mathcal{L}}_{33})^{\frac12}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac12}\|^2+\tau h^{2r}\|(\frac{\partial\boldsymbol{u}_e}{\partial t};\frac{\partial\boldsymbol{v}_e}{\partial t})\|_{\boldsymbol{U}_r^2\times\boldsymbol{V}_r^2}^2+\tau^5\|(\frac{\partial^3\boldsymbol{u}_e}{\partial t^3};\frac{\partial^3\boldsymbol{v}_e}{\partial t^3})\|_{\boldsymbol{U}_0^2\times\boldsymbol{V}_0^2}^2\\
&+\tau^6\|(\frac{\partial^4\boldsymbol{u}_e}{\partial t^4};\frac{\partial^4\boldsymbol{v}_e}{\partial t^4})\|_{\boldsymbol{U}_0^2\times\boldsymbol{V}_0^2}^2\Big),
\end{aligned}\tag{5.29}$$

*wobei $C_2,\bar{\epsilon}_1,\bar{\epsilon}_2,\bar{\epsilon}_3,\bar{\epsilon}_4,\bar{\epsilon}_5,\bar{\epsilon}_6$ Konstanten unabhängig von allen Parametern, der Netzwerkskala $n$, der Maschenweite $h$ und der Zeitschrittweite $\tau$ sind.*

***Beweis***. Für jedes $(\boldsymbol{u}_h;\boldsymbol{v}_h;\boldsymbol{p}_h) \in \boldsymbol{U}_h \times \boldsymbol{V}_h \times \boldsymbol{P}_h$ existiert nach (4.11) ein $\boldsymbol{v}_{0,h}^k \in \boldsymbol{V}$, sodass

$$\mathrm{Div}\boldsymbol{v}_{0,h}^k = \frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{A}}_{22}^{-\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad \|\boldsymbol{v}_{0,h}^k\|_{\mathrm{Div}} \leq \beta_{d,h}^{-1}\|\Lambda_2^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|. \tag{5.30a}$$

Ebenso existiert ein $\boldsymbol{u}_{0,h}^k \in \boldsymbol{U}_h$, sodass

$$\underline{\mathrm{Div}}\boldsymbol{u}_{0,h}^k = \frac{\tau}{2\sqrt{\gamma}}\Lambda_4\boldsymbol{\alpha}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}, \quad \|\boldsymbol{u}_{0,h}^k\|_{1,h} \leq \beta_{s,h}^{-1}\|\Lambda_3^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|. \tag{5.30b}$$

Wählen wir $\begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_h\\ \boldsymbol{z}_h\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{\tau}{2\sqrt{\gamma}}\boldsymbol{u}_{0,h}^k\\ -\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{A}}_{22}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{v}_{0,h}^k\end{pmatrix} = \boldsymbol{r}_{0,h}^k$ in (5.23), so ergibt sich

$$\begin{aligned}
-\frac{\mu\tau^2}{2}a_h(\varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{n+\frac{1}{2}},\frac{\tau}{2\sqrt{\gamma}}\boldsymbol{u}_{0,h}^k) - \frac{\lambda\tau^2}{4}(\mathrm{div}\ \varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{n+\frac{1}{2}},\mathrm{div}\ (\frac{\tau}{2\sqrt{\gamma}}\boldsymbol{u}_{0,h}^k)) + \frac{\tau}{4}(\bar{\mathcal{D}}(\boldsymbol{r}_{hI}^{n+1}+\boldsymbol{r}_{hI}^n),\boldsymbol{r}_{0,h}^k)&\\
+\frac{1}{2}(\bar{\mathcal{M}}(\boldsymbol{r}_{hI}^{n+1}-\boldsymbol{r}_{hI}^n),\boldsymbol{r}_{0,h}^k) + \frac{\tau^2}{4}\|(\Lambda_2+\Lambda_3)^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 = \frac{\mu\tau^2}{2}a_h(\varphi_{\boldsymbol{u},eI}^{n+\frac{1}{2}},\frac{\tau}{2\sqrt{\gamma}}\boldsymbol{u}_{0,h}^k)&\\
+(\frac{\tau}{4}\bar{\mathcal{D}}(\boldsymbol{r}_{eI}^{n+1}+\boldsymbol{r}_{eI}^n)+\frac{1}{2}\bar{\mathcal{M}}(\boldsymbol{r}_{eI}^{n+1}-\boldsymbol{r}_{eI}^n),\boldsymbol{r}_{0,h}^k) - (\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{M}}\rho_{\boldsymbol{r}}^n + \frac{\tau^2}{4}\bar{\mathcal{D}}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{r}}^k + \sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{r}}^k),\boldsymbol{r}_{0,h}^k)&\\
-\frac{\tau^2}{4}(\bar{\mathcal{M}}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{s}}^k + \sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{s}}^k),\boldsymbol{r}_{0,h}^k).&
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Mit der Definition von $\Lambda_{uv}$ (3.41) und (4.30) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|(\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}_{0,h}^k\|^2,\ \|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}_{0,h}^k\|^2 \leq \|\Lambda_{uv}^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\frac{\tau}{2\sqrt{\gamma}}\boldsymbol{u}_{0,h}^k\\ \frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{A}}_{22}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{v}_{0,h}^k\end{pmatrix}\|^2 &\leq \frac{\tau^2}{2}\left(\beta_{s,h}^{-2}\bar{C}_{pd}\|\Lambda_3^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \beta_{d,h}^{-2}\|\Lambda_2^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|^2\right)\\
&\leq \tau^2\beta_1^2\|\bar{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|^2,
\end{aligned} \tag{5.32}$$

wobei $\beta_1^2 := \max\{\beta_{s,h}^{-2}\bar{C}_{pd},\beta_{d,h}^{-2}\}, \bar{\Lambda} = \Lambda_2+\Lambda_3$ ist. Unter Verwendung der Definition von $\gamma$ (3.41) und (5.30) bekommen wir dann

$$\begin{aligned}
\frac{\mu\tau^2}{2}a_h(\varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{n+\frac{1}{2}},\frac{\tau}{2\sqrt{\gamma}}\boldsymbol{u}_{0,h}^k) &\leq \frac{\mu\tau^2}{2}\frac{\epsilon_1}{2}\|\varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|_{DG}^2 + \bar{C}_{ah}^2\frac{\mu\tau^2}{2}\frac{1}{2\epsilon_1}\|\frac{\tau}{2\sqrt{\gamma}}\boldsymbol{u}_{0,h}^k\|_{DG}^2\\
&\leq \frac{\mu\tau^2}{2}\frac{\epsilon_1}{2}\|\varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|_{DG}^2 + \bar{C}_{ah}^2\frac{\tau^2}{4}\frac{1}{2\epsilon_1}\|\boldsymbol{u}_{0,h}^k\|_{DG}^2 \leq \frac{\mu\tau^2}{2}\frac{\epsilon_1}{2}\|\varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|_{DG}^2 + \frac{\tau^2}{4}\frac{\beta^2}{2\epsilon_1}\|\bar{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|^2,
\end{aligned} \tag{5.33}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda\tau^2}{4}(\mathrm{div}\ \varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{n+\frac{1}{2}},\mathrm{div}\ (\frac{\tau}{2\sqrt{\gamma}}\boldsymbol{u}_{0,h}^k)) &\leq \frac{\lambda\tau^2}{4}\frac{\epsilon_2}{2}\|\mathrm{div}\ \varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{\lambda\tau^2}{4}\frac{1}{2\epsilon_2}\|\frac{\tau}{2\sqrt{\gamma}}\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}_{0,h}^k\|^2\\
&\leq \frac{\lambda\tau^2}{4}\frac{\epsilon_2}{2}\|\mathrm{div}\ \varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{\tau^2}{4}\frac{1}{2\epsilon_2}\|\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}_{0,h}^k\|^2 \leq \frac{\lambda\tau^2}{4}\frac{\epsilon_2}{2}\|\mathrm{div}\ \varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{\tau^2}{4}\frac{\beta^2}{2\epsilon_2}\|\bar{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|^2,
\end{aligned} \tag{5.34}$$

wobei $\beta^2 := \max\{\beta_1^2, \beta_{s,h}^{-2}, \beta_{s,h}^{-2}\bar{C}_{ah}^2\bar{C}_{DG,1}\}$ ist. Jetzt wenden wir die Cauchy-Schwarz-Ungleichung auf (5.31) an, und folgern mit Hilfe von (5.32),(5.33) und (5.34)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\tau^2}{4}\|\bar{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \leq \frac{\mu\tau^2}{2}\frac{\epsilon_1}{2}\|\varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|_{DG}^2 + \frac{\tau^2}{4}\frac{\beta^2}{2\epsilon_1}\|\bar{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{\epsilon_2}{2}\frac{\lambda\tau^2}{4}\|\mathrm{div}\ \varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{\tau^2}{4}\frac{\beta^2}{2\epsilon_2}\|\bar{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \\
&\quad + \frac{1}{4}\frac{\epsilon_3}{2}\|(\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{r}_{hI}^{n+1} + \boldsymbol{r}_{hI}^{n})\|^2 + \tau^2\beta^2\frac{1}{2\epsilon_3}\|\bar{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{1}{4}\frac{\epsilon_4}{2}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{r}_{hI}^{n+1} - \boldsymbol{r}_{hI}^{n})\|^2 \\
&\quad + \tau^2\beta^2\frac{1}{2\epsilon_4}\|\bar{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{\mu\tau^2}{2}\frac{\epsilon_5}{2}\|\varphi_{\boldsymbol{u},eI}^{n+\frac{1}{2}}\|_{DG}^2 + \frac{\tau^2}{4}\frac{\beta^2}{2\epsilon_5}\|\bar{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{1}{4}\frac{\epsilon_6}{2}\|(\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{r}_{eI}^{n+1} + \boldsymbol{r}_{eI}^{n})\|^2 \\
&\quad + \tau^2\beta^2\frac{1}{2\epsilon_6}\|\bar{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{1}{4}\frac{\epsilon_7}{2}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{r}_{eI}^{n+1} - \boldsymbol{r}_{eI}^{n})\|^2 + \tau^2\beta^2\frac{1}{2\epsilon_7}\|\bar{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{\epsilon_8}{2}\frac{\tau^2}{4}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\rho_{\boldsymbol{r}}^{n}\|^2 \\
&\quad + \tau^2\beta^2\frac{1}{2\epsilon_8}\|\bar{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{\tau^2}{4}\frac{\epsilon_9}{2}\|(\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{r}}^{k} + \sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{r}}^{k})\|^2 + \tau^2\beta^2\frac{1}{2\epsilon_9}\|\bar{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \\
&\quad + \frac{\tau^4}{16}\frac{\epsilon_{10}}{2}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{s}}^{k} + \sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{s}}^{k})\|^2 + \tau^2\beta^2\frac{1}{2\epsilon_{10}}\|\bar{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|^2.
\end{aligned} \tag{5.35}
$$

Addieren wir zu beiden Seiten $\frac{\tau^2}{4}\|(-\bar{\mathcal{D}}_{33})^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{\tau^3}{8}\|(-\bar{\mathcal{L}}_{33})^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|^2$, dann erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\frac{\tau^2}{4}\|\Lambda^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \quad &\leq \quad \frac{\mu\tau^2}{2}\frac{\epsilon_1}{2}\|\varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|_{DG}^2 + \frac{\epsilon_2}{2}\frac{\lambda\tau^2}{4}\|\mathrm{div}\ \varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{\epsilon_3}{8}\|(\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{r}_{hI}^{n+1} + \boldsymbol{r}_{hI}^{n})\|^2 \\
&\quad + \frac{\epsilon_4}{8}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{r}_{hI}^{n+1} - \boldsymbol{r}_{hI}^{n})\|^2 + \frac{\mu\tau^2}{2}\frac{\epsilon_5}{2}\|\varphi_{\boldsymbol{u},eI}^{n+\frac{1}{2}}\|_{DG}^2 + \frac{\epsilon_6}{8}\|(\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{r}_{eI}^{n+1} + \boldsymbol{r}_{eI}^{n})\|^2 \\
&\quad + \frac{\epsilon_7}{8}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{r}_{eI}^{n+1} - \boldsymbol{r}_{eI}^{n})\|^2 + \frac{\tau^2\epsilon_8}{8}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\rho_{\boldsymbol{r}}^{n}\|^2 + \frac{\tau^2\epsilon_9}{8}\|(\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{r}}^{k} + \sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{r}}^{k})\|^2 \\
&\quad + \frac{\tau^4\epsilon_{10}}{32}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{s}}^{k} + \sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{s}}^{k})\|^2 + \frac{\tau^2}{4}\|(-\bar{\mathcal{D}}_{33})^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{\tau^3}{8}\|(-\bar{\mathcal{L}}_{33})^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \\
&\quad + (\frac{\beta^2}{2\epsilon_1} + \frac{\beta^2}{2\epsilon_2} + \frac{\beta^2}{2\epsilon_3} + \frac{\beta^2}{2\epsilon_4} + \frac{\beta^2}{2\epsilon_5} + \frac{\beta^2}{2\epsilon_6} + \frac{\beta^2}{2\epsilon_7} + \frac{\beta^2}{2\epsilon_8} + \frac{\beta^2}{2\epsilon_9} + \frac{\beta^2}{2\epsilon_{10}})\tau^2\|\bar{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|^2.
\end{aligned} \tag{5.36}
$$

Setzen wir in obiger Ungleichung dann

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_4 = \epsilon_5 = \epsilon_6 = \epsilon_7 = \epsilon_8 = \epsilon_9 = \epsilon_{10} = 40\beta^2$$

so lassen sich mit Hilfe der Lemmata 5.1 und 5.3 die Terme auf der rechten Seite wie folgt abschätzen:

- $$\frac{\mu\tau^2}{2}\|\varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|_{DG}^2 + \frac{\lambda\tau^2}{4}\|\mathrm{div}\ \varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \leq \max_{1\leq k\leq J}\frac{\mu\tau^2}{2}\|\varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{k}\|_{DG}^2 + \max_{1\leq k\leq J}\frac{\lambda\tau^2}{4}\|\mathrm{div}\ \varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{k}\|^2, \tag{5.37a}$$
- $$\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{r}_{hI}^{n+1} - \boldsymbol{r}_{hI}^{n})\|^2 \leq 4\max_{0\leq k\leq J}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}_{hI}^{k}\|^2, \tag{5.37b}$$

- $$\frac{\mu\tau^2}{2}\|\varphi_{\boldsymbol{u},eI}^{n+\frac{1}{2}}\|_{DG}^2 \underset{(5.28a)}{\leq} 2CTh^{2r}\frac{\mu\tau^2}{2}\|\frac{\partial \boldsymbol{u}_e}{\partial t}\|_{L^2(H^{r+1})}^2, \tag{5.37c}$$
- $$\|(\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{r}_{eI}^{n+1}+\boldsymbol{r}_{eI}^n)\|^2 \underset{(5.8)}{\leq} Ch^{2r}\|\|(\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{r}_e^{n+1}+\boldsymbol{r}_{eI}^n)\|\|_{H^r}^2 \underset{(A5)}{\leq} C\tau h^{2r}\|\|(\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}}\frac{\partial \boldsymbol{r}_e}{\partial t}\|\|_{L^2(H^r)}^2, \tag{5.37d}$$
- $$\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{r}_{eI}^{n+1}-\boldsymbol{r}_{eI}^n)\|^2 \underset{(5.8)}{\leq} Ch^{2r}\|\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{r}_{eI}^{n+1}-\boldsymbol{r}_{eI}^n)\|\|_{H^r}^2 \underset{(A4)}{\leq} C\tau h^{2r}\|\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial \boldsymbol{r}_e}{\partial t}\|\|_{L^2(H^r)}^2, \tag{5.37e}$$
- $$\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\rho_{\boldsymbol{r}}^n\|^2 \underset{(A1)}{\leq} \frac{\tau^3}{5!}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^3 \boldsymbol{r}_e}{\partial t^3}\|_{L^2(L^2)}^2, \tag{5.37f}$$
- $$\|(\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{r}}^k+\sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{r}}^k)\|^2 \underset{(A2)}{\leq} \frac{\tau^2 T}{30}\|(\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^3 \boldsymbol{r}_e}{\partial t^3}\|_{L^2(L^2)}^2, \tag{5.37g}$$
- $$\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{s}}^k+\sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{s}}^k)\|^2 \underset{(A2)}{\leq} \frac{\tau^2 T}{30}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^4 \boldsymbol{r}_e}{\partial t^4}\|_{L^2(L^2)}^2, \tag{5.37h}$$
- $$\frac{\tau^2}{4}\|(-\bar{\mathcal{D}}_{33})^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \leq \frac{\tau^2}{4}\max_{1\leq k\leq J}\|(-\bar{\mathcal{D}}_{33})^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^n\|^2. \tag{5.37i}$$

Setzen wir nun (5.37) in (5.36) ein, so sehen wir, dass es Konstanten $C_2, \bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, \bar{\epsilon}_3, \bar{\epsilon}_4$ gibt, die unabhängig von allen Parametern, der Netzwerkskala $n$, der Maschenweite $h$ und der Zeitschrittweite $\tau$ sind, sodass:

$$\begin{aligned}
\frac{\tau^2}{4}\|\Lambda^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \leq C_2\Big(&\bar{\epsilon}_1\max_{1\leq k\leq J}\frac{\mu\tau^2}{2}\|\varphi_{\boldsymbol{u},hI}^k\|_{DG}^2+\bar{\epsilon}_2\max_{1\leq k\leq J}\frac{\lambda\tau^2}{4}\|\mathrm{div}\ \varphi_{\boldsymbol{u},hI}^k\|^2+\bar{\epsilon}_3\max_{0\leq k\leq J}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}_{hI}^k\|^2\\
&+\bar{\epsilon}_4\|(\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{r}_{hI}^{n+1}+\boldsymbol{r}_{hI}^n)\|^2+\bar{\epsilon}_5\frac{\tau^2}{4}\max_{1\leq k\leq J}\|(-\bar{\mathcal{D}}_{33})^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^n\|^2+\bar{\epsilon}_6\frac{\tau^3}{8}\|(-\bar{\mathcal{L}}_{33})^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|^2\\
&+h^{2r}\frac{\mu\tau^2}{2}\|\frac{\partial \boldsymbol{u}_e}{\partial t}\|_{L^2(H^{r+1})}^2+\tau^2h^{2r}\|\|\bar{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial \boldsymbol{r}_e}{\partial t}\|\|_{L^2(H^r)}^2+\tau h^{2r}\|\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial \boldsymbol{r}_e}{\partial t}\|\|_{L^2(H^r)}^2\\
&+\tau^5\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^3 \boldsymbol{r}_e}{\partial t^3}\|_{L^2(L^2)}^2+\tau^5\|\bar{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^3 \boldsymbol{r}_e}{\partial t^3}\|_{L^2(L^2)}^2+\tau^6\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^4 \boldsymbol{r}_e}{\partial t^4}\|_{L^2(L^2)}^2\Big).
\end{aligned}$$

Schließlich verwenden wir noch die Definition der Norm (5.2) und folgern damit (5.29). $\square$

**Lemma 5.7.** *Es sei die Hypothese 5.2 erfüllt. Dann gilt:*

$$\begin{aligned}
&\max_{1\leq k\leq J}\sqrt{\frac{\mu\tau^2}{2}}\|\varphi_{\boldsymbol{u},hI}^k\|_{DG}+\max_{1\leq k\leq J}\sqrt{\frac{\lambda\tau^2}{4}}\|\mathrm{div}\ \varphi_{\boldsymbol{u},hI}^k\|+\max_{0\leq k\leq J}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}_{hI}^k\|+\frac{\tau}{2}\max_{0\leq k\leq J}\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^k\|\\
&\quad\leq\ C_3\Big(h^r\|(\boldsymbol{u}_e;\boldsymbol{v}_e)\|_{\boldsymbol{U}_r^\infty\times\boldsymbol{V}_r^\infty}+h^r\|(\frac{\partial \boldsymbol{u}_e}{\partial t};\frac{\partial \boldsymbol{v}_e}{\partial t})\|_{\boldsymbol{U}_r^2\times\boldsymbol{V}_r^2}+\tau^2\|(\frac{\partial^3 \boldsymbol{u}_e}{\partial t^3};\frac{\partial^3 \boldsymbol{v}_e}{\partial t^3})\|_{\boldsymbol{U}_0^2\times\boldsymbol{V}_0^2}\\
&\qquad+\tau^2\|(\frac{\partial^4 \boldsymbol{u}_e}{\partial t^4};\frac{\partial^4 \boldsymbol{v}_e}{\partial t^4})\|_{\boldsymbol{U}_0^2\times\boldsymbol{V}_0^2}+\tau^2\|\frac{\partial^3 \boldsymbol{p}}{\partial t^3}\|_{\boldsymbol{P}_0^2}\Big).
\end{aligned}\tag{5.38}$$

*wobei $C_3$ eine Konstante unabhängig von allen Parametern, der Netzwerkskala $n$, der Maschenweite $h$ und der Zeitschrittweite $\tau$ ist.*

***Beweis***. Zunächst wählen wir in (5.23), (5.21b),

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_h \\ \boldsymbol{z}_h \end{pmatrix} = 2(\varphi_{\boldsymbol{r},hI}^{n+1} - \varphi_{\boldsymbol{r},hI}^{n}) = 2(\boldsymbol{r}_{hI}^{n+1} + \boldsymbol{r}_{hI}^{n}), \quad \boldsymbol{q}_h = -4\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
&\frac{\mu\tau^2}{2} a_h(\varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{n+1}, \varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{n+1}) - \frac{\mu\tau^2}{2} a_h(\varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{n}, \varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{n}) + \frac{\lambda\tau^2}{4}\|\text{div }(\varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{n+1})\|^2 - \frac{\lambda\tau^2}{4}\|\text{div }(\varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{n})\|^2 \\
&\quad + \|(\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{r}_{hI}^{n+1} + \boldsymbol{r}_{hI}^{n})\|^2 + \|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}_{hI}^{n+1}\|^2 - \|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}_{hI}^{n}\|^2 - \tau^2(\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}} \\ \varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{\text{Div}}\boldsymbol{u}_{hI}^{n+\frac{1}{2}} \\ \text{Div}\boldsymbol{v}_{hI}^{n+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}) \\
&\quad = \mu\tau^2 a_h(\varphi_{\boldsymbol{u},eI}^{n+\frac{1}{2}}, \varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{n+1} - \varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{n}) + (\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}}(\boldsymbol{r}_{eI}^{n+1} + \boldsymbol{r}_{eI}^{n}), \boldsymbol{r}_{hI}^{n+1} + \boldsymbol{r}_{hI}^{n}) \\
&\quad - \frac{\tau^2}{2}(\bar{\mathcal{D}}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{r}}^k + \sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{r}}^k), \boldsymbol{r}_{hI}^{n+1} + \boldsymbol{r}_{hI}^{n}) + (\bar{\mathcal{M}}(\boldsymbol{r}_{eI}^{n+1} - \boldsymbol{r}_{eI}^{n}), \boldsymbol{r}_{hI}^{n+1} + \boldsymbol{r}_{hI}^{n}) \\
&\quad - (\frac{\tau^2}{2}\bar{\mathcal{M}}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{s}}^k + \sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{s}}^k) + \tau\bar{\mathcal{M}}\rho_{\boldsymbol{r}}^n, \boldsymbol{r}_{hI}^{n+1} + \boldsymbol{r}_{hI}^{n}),
\end{aligned} \tag{5.39a}$$

$$\begin{aligned}
&\tau^2(\boldsymbol{\alpha}\underline{\text{Div}}\boldsymbol{u}_{hI}^{n+\frac{1}{2}}, \varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}) + \tau^2(\text{Div}\boldsymbol{v}_{hI}^{n+\frac{1}{2}}, \varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}) - \frac{\tau^3}{2}(\mathcal{L}_{33}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}, \varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}) - \frac{\tau^2}{2}(\mathcal{D}_{33}(\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+1} - \varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n}), \varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}) \\
&\quad = -\frac{\tau^3}{2}(\boldsymbol{\alpha}\underline{\text{Div}}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{u}}^k + \sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{u}}^k), \varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}) - \frac{\tau^3}{2}(\text{Div}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{v}}^k + \sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{v}}^k), \varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}) \\
&\quad + \frac{\tau^3}{2}(\mathcal{D}_{33}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{p}}^k + \sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{p}}^k), \varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}).
\end{aligned} \tag{5.39b}$$

Nun kombinieren wir die obigen Gleichungen und erhalten so

$$\begin{aligned}
&\frac{\mu\tau^2}{2}(a_h(\varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{n+1}, \varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{n+1}) - a_h(\varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{n}, \varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{n})) + \frac{\lambda\tau^2}{4}(\|\text{div }(\varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{n+1})\|^2 - \|\text{div }(\varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{n})\|^2) \\
&+ \|(\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{r}_{hI}^{n+1} + \boldsymbol{r}_{hI}^{n})\|^2 + \|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}_{hI}^{n+1}\|^2 - \|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}_{hI}^{n}\|^2 + \frac{\tau^2}{4}(\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+1}\|^2 - \|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n}\|^2) \\
&+ \frac{\tau^3}{2}\|(-\mathcal{L}_{33})^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \quad = \quad \frac{\tau}{2}\Big(\bar{\mathcal{D}}(\boldsymbol{r}_{eI}^{n+1} + \boldsymbol{r}_{eI}^{n}) - \tau\bar{\mathcal{D}}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{r}}^k + \sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{r}}^k), \boldsymbol{r}_{hI}^{n+1} + \boldsymbol{r}_{hI}^{n}\Big) \\
&\quad + \mu\tau^2 a_h(\varphi_{\boldsymbol{u},eI}^{n+\frac{1}{2}}, \varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{n+1} - \varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{n}) + \Big(\bar{\mathcal{M}}(\boldsymbol{r}_{eI}^{n+1} - \boldsymbol{r}_{eI}^{n}) - \frac{\tau^2}{2}\bar{\mathcal{M}}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{s}}^k + \sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{s}}^k) - \tau\bar{\mathcal{M}}\rho_{\boldsymbol{r}}^n, \boldsymbol{r}_{hI}^{n+1} + \boldsymbol{r}_{hI}^{n}\Big) \\
&\quad - \frac{\tau^3}{2}\Big(\boldsymbol{\alpha}\underline{\text{Div}}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{u}}^k + \sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{u}}^k) + \text{Div}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{v}}^k + \sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{v}}^k), \varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\Big) + \frac{\tau^3}{2}\Big(\mathcal{D}_{33}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{p}}^k + \sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{p}}^k), \varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\Big).
\end{aligned}$$

Verwenden wir nun die Cauchy-Schwarz Ungleichung und summieren dann die entstehende Ungleichungen von $n = 0$ bis $n = m \leq J-1$, so ergibt sich

$$\frac{\mu\tau^2}{2} a_h(\varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{m+1}, \varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{m+1}) + \frac{\lambda\tau^2}{4}\|\text{div } (\varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{m+1})\|^2 + \sum_{n=0}^{m} \|(\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{r}_{hI}^{n+1} + \boldsymbol{r}_{hI}^{n})\|^2 + \|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}_{hI}^{m+1}\|^2$$
$$- \|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}_{hI}^{0}\|^2 + \frac{\tau^3}{2}\sum_{n=0}^{m}\|(-\mathcal{L}_{33})^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{\tau^2}{4}\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{m+1}\|^2 \leq \text{RS}_{(5.40)}. \tag{5.40}$$

$$\text{RS}_{(5.40)} := \frac{\mu\tau^2\bar{C}_{ah}^2}{2}\frac{1}{\epsilon_1\tau}\sum_{n=0}^{m}\|\varphi_{\boldsymbol{u},eI}^{n+\frac{1}{2}}\|_{DG}^2 + \frac{\mu\tau^2}{2}(\tau\epsilon_1)\sum_{n=0}^{m}\|\varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{n+1} - \varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{n}\|_{DG}^2$$
$$+ \sum_{n=0}^{m}\|(\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{r}_{eI}^{n+1} + \boldsymbol{r}_{eI}^{n})\|^2 + \tau^2\sum_{n=0}^{m}\|(\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{r}}^k + \sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{r}}^k)\|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{m}\|(\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{r}_{hI}^{n+1} + \boldsymbol{r}_{hI}^{n})\|^2$$
$$+ \frac{3}{2}\frac{1}{\tau\epsilon_2}\sum_{n=0}^{m}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{r}_{eI}^{n+1} - \boldsymbol{r}_{eI}^{n})\|^2 + \frac{3}{2}\frac{1}{\tau\epsilon_2}\sum_{n=0}^{m}\|\frac{\tau^2}{2}\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{s}}^k + \sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{s}}^k)\|^2 + \frac{3}{2}\frac{1}{\tau\epsilon_2}\sum_{n=0}^{m}\|\tau\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\rho_{\boldsymbol{r}}^n\|^2$$
$$+ \frac{\tau\epsilon_2}{2}\sum_{n=0}^{m}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{r}_{hI}^{n+1} + \boldsymbol{r}_{hI}^{n})\|^2 + \frac{\epsilon_3}{2}\sum_{n=0}^{m}\tau^3\|\frac{1}{2}\Lambda^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{\alpha}\underline{\text{Div}}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{u}}^k + \sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{u}}^k) + \text{Div}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{v}}^k + \sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{v}}^k))\|^2$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{1}{\epsilon_3}\sum_{n=0}^{m}\tau^3\|\Lambda^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{1}{2\epsilon_4}\sum_{n=0}^{m}\frac{\tau^3}{2}\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{p}}^k + \sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{p}}^k)\|^2 + \frac{\epsilon_4}{2}\sum_{n=0}^{m}\frac{\tau^3}{2}\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|^2.$$

Mit Hilfe der Lemmata 5.1 und 5.3 schätzen wir die Terme auf der rechten Seite wie folgt ab:

- $$\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}_{hI}^{0}\| \leq \|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}_{eI}^{0}\| + \|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{r}_{h}^{0} - \boldsymbol{r}_{e}^{0})\| \leq 2Ch^r\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}_{e}^{0}\|_{H^r} \leq 2Ch^r\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}_{e}\|_{L^\infty(H^r)}, \tag{5.41a}$$
- $$\sum_{n=0}^{m}\|\varphi_{\boldsymbol{u},eI}^{n+\frac{1}{2}}\|_{DG}^2 \underset{(5.28a)}{\leq} 2CTh^{2r}\sum_{n=0}^{m}\|\frac{\partial\boldsymbol{u}_e}{\partial t}\|_{L^2(H^{r+1})}^2 \leq 2C\frac{T^2}{\tau}h^{2r}\|\frac{\partial\boldsymbol{u}_e}{\partial t}\|_{L^2(H^{r+1})}^2, \tag{5.41b}$$
- $$\tau\sum_{n=0}^{m}\|\varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{n+1} - \varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{n}\|_{DG}^2 \leq 4\tau\sum_{n=0}^{m}\|\varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{n+1}\|_{DG}^2 \leq 4T\max_{0\leq k\leq J}\|\varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{k}\|_{DG}^2, \tag{5.41c}$$
- $$\sum_{n=0}^{m}\|(\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{r}_{eI}^{n+1} + \boldsymbol{r}_{eI}^{n})\|^2 \underset{(5.8)}{\leq} Ch^{2r}\sum_{n=0}^{m}\|(\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{r}_{e}^{n+1} + \boldsymbol{r}_{e}^{n})\|_{H^r}^2 \underset{(A5)}{\leq} Ch^{2r}\tau\|(\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\boldsymbol{r}_e}{\partial t}\|_{L^2(H^r)}^2, \tag{5.41d}$$
- $$\tau^2\sum_{n=0}^{m}\|(\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{r}}^k + \sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{r}}^k)\|^2 \underset{(A3)}{\leq} \tau^2\frac{T^2\tau}{30}\|(\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^3\boldsymbol{r}_e}{\partial t^3}\|_{L^2(L^2)}^2, \tag{5.41e}$$
- $$\frac{1}{\tau}\sum_{n=0}^{m}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{r}_{eI}^{n+1} - \boldsymbol{r}_{eI}^{n})\|^2 \underset{(5.8)}{\leq} \frac{1}{\tau}Ch^{2r}\sum_{n=0}^{m}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{r}_{e}^{n+1} - \boldsymbol{r}_{e}^{n})\|_{H^r}^2 \underset{(A4)}{\leq} Ch^{2r}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\boldsymbol{r}_e}{\partial t}\|_{L^2(H^r)}^2, \tag{5.41f}$$
- $$\frac{1}{\tau}\sum_{n=0}^{m}\|\frac{\tau^2}{2}\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{s}}^k + \sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{s}}^k)\|^2 \underset{(A2)}{\leq} \frac{1}{\tau}\frac{T^2\tau}{30}\|\frac{\tau^2}{2}\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^4\boldsymbol{r}_e}{\partial t^4}\|_{L^2(L^2)}^2, \tag{5.41g}$$

- $\frac{1}{\tau}\sum_{n=0}^{m}\|\tau\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\rho_{\boldsymbol{r}}^{n}\|^2 \underset{(A1)}{\leq} \frac{1}{\tau}\frac{\tau^3}{5!}\|\tau\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^3 \boldsymbol{r}_e}{\partial t^3}\|^2_{L^2(L^2)},$ (5.41h)
- $\tau\sum_{n=0}^{m}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{r}_{hI}^{n+1}+\boldsymbol{r}_{hI}^{n})\|^2 \leq 4T\max_{0\leq k\leq J}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}_{hI}^{k}\|^2,$ (5.41i)
- $\tau^3\sum_{n=0}^{m}\|\frac{1}{2}\Lambda^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{\alpha}\underline{\mathrm{Div}}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{u}}^{k}+\sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{u}}^{k})+\mathrm{Div}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{v}}^{k}+\sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{v}}^{k}))\|^2$

$$\underset{(A3)}{\leq} \tau^3\frac{T^2\tau}{30}\|\frac{1}{2}\Lambda^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{\alpha}\underline{\mathrm{Div}}\frac{\partial^3 \boldsymbol{u}_e}{\partial t^3}+\mathrm{Div}\frac{\partial^3 \boldsymbol{v}_e}{\partial t^3})\|^2_{L^2(L^2)}, \tag{5.41j}$$

- $\sum_{n=0}^{m}\|\Lambda^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \leq \frac{T}{\tau}\max_{0\leq n\leq J-1}\|\Lambda^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|^2,$ (5.41k)
- $\tau^3\sum_{n=0}^{m}\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}(\sum_{k=0}^{n}\rho_{\boldsymbol{p}}^{k}+\sum_{k=0}^{n-1}\rho_{\boldsymbol{p}}^{k})\|^2 \underset{(A2)}{\leq} \tau^3\frac{T^2\tau}{30}\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^3 \boldsymbol{p}_e}{\partial t^3}\|^2_{L^2(L^2)},$ (5.41l)
- $\sum_{n=0}^{m}\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \leq \frac{T}{\tau}\max_{0\leq k\leq J}\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{k}\|^2.$ (5.41m)

Setzen wir Nun (5.41) in (5.40) ein, so erhalten wir für eine Konstante $\bar{C}_3$, die unabhängig von alle Parametern, der Netzwerkskala $n$, der Maschenweite $h$ und der Zeitschrittweite $\tau$ ist, die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\underline{C}_{ah}\overline{C}_{DG,h}^{-1}\frac{\mu\tau^2}{2}\|\varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{m+1}\|^2_{DG}+\frac{\lambda\tau^2}{4}\|\mathrm{div}\,(\varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{m+1})\|^2+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{m}\|(\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{r}_{hI}^{n+1}+\boldsymbol{r}_{hI}^{n})\|^2+\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}_{hI}^{m+1}\|^2\\
&+\frac{\tau^3}{2}\sum_{n=0}^{m}\|(-\mathcal{L}_{33})^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|^2+\frac{\tau^2}{4}\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{m+1}\|^2\\
&\leq \bar{C}_3\Big(h^{2r}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}_e\|^2_{L^\infty(H^r)}+h^{2r}\frac{\mu}{2}\|\frac{\partial \boldsymbol{u}_e}{\partial t}\|^2_{L^2(H^{r+1})}+\tau^2h^{2r}\|\bar{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial \boldsymbol{r}_e}{\partial t}\|^2_{L^2(H^r)}+\tau^4\|\bar{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^3 \boldsymbol{r}_e}{\partial t^3}\|^2_{L^2(L^2)}\\
&+h^{2r}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial \boldsymbol{r}_e}{\partial t}\|^2_{L^2(H^r)}+\tau^4\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^4 \boldsymbol{r}_e}{\partial t^4}\|^2_{L^2(L^2)}+\tau^4\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^3 \boldsymbol{r}_e}{\partial t^3}\|^2_{L^2(L^2)}+\tau^4\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^3 \boldsymbol{p}_e}{\partial t^3}\|^2_{L^2(L^2)}\\
&+\tau^4\|\Lambda^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{\alpha}\underline{\mathrm{Div}}\frac{\partial^3 \boldsymbol{u}_e}{\partial t^3}+\mathrm{Div}\frac{\partial^3 \boldsymbol{v}_e}{\partial t^3})\|^2_{L^2(L^2)}\Big)+4T\epsilon_1\frac{\mu\tau^2}{2}\max_{0\leq k\leq J}\|\varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{k}\|^2_{DG}\\
&+2T\epsilon_2\max_{0\leq k\leq J}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}_{hI}^{k}\|^2+\frac{T\tau^2}{2\epsilon_3}\max_{0\leq n\leq J-1}\|\Lambda^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|^2+\frac{T\tau^2\epsilon_4}{4}\max_{0\leq k\leq J}\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{k}\|^2\\
&\leq \bar{C}_3\Big(h^{2r}\|(\boldsymbol{u}_e;\boldsymbol{v}_e)\|^2_{\boldsymbol{U}_r^\infty\times\boldsymbol{V}_r^\infty}+h^{2r}\|(\frac{\partial \boldsymbol{u}_e}{\partial t};\frac{\partial \boldsymbol{v}_e}{\partial t})\|^2_{\boldsymbol{U}_r^2\times\boldsymbol{V}_r^2}+\tau^4\|(\frac{\partial^3 \boldsymbol{u}_e}{\partial t^3};\frac{\partial^3 \boldsymbol{v}_e}{\partial t^3})\|^2_{\boldsymbol{U}_0^2\times\boldsymbol{V}_0^2}\\
&+\tau^4\|(\frac{\partial^4 \boldsymbol{u}_e}{\partial t^4};\frac{\partial^4 \boldsymbol{v}_e}{\partial t^4})\|^2_{\boldsymbol{U}_0^2\times\boldsymbol{V}_0^2}+\tau^4\|\frac{\partial^3 \boldsymbol{p}}{\partial t^3}\|^2_{\boldsymbol{P}_0^2}\Big)+4T\epsilon_1\frac{\mu\tau^2}{2}\max_{0\leq k\leq J}\|\varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{k}\|^2_{DG}+2T\epsilon_2\max_{0\leq k\leq J}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}_{hI}^{k}\|^2\\
&+\frac{T\tau^2}{2\epsilon_3}\max_{0\leq n\leq J-1}\|\Lambda^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|^2+\frac{T\tau^2\epsilon_4}{4}\max_{0\leq k\leq J}\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{k}\|^2.
\end{aligned}\tag{5.42}$$

Aus (5.29) für $\epsilon_3 = 2TC_2$ sehen wir, dass es eine Konstante $\tilde{C}_3$ gibt, die unabhängig von allen Parametern, der Netzwerkskala $n$, der Maschenweite $h$ und der Zeitschrittweite $\tau$ ist, sodass

$$\begin{aligned}
&\underline{C}_{ah}\overline{C}_{DG,h}^{-1}\frac{\mu\tau^2}{2}\|\varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{m+1}\|_{DG}^2 + \frac{\lambda\tau^2}{4}\|\mathrm{div}\ (\varphi_{\boldsymbol{u},hI}^{m+1})\|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{m}\|(\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{r}_{hI}^{n+1} + \boldsymbol{r}_{hI}^{n})\|^2 + \|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}_{hI}^{m+1}\|^2\\
&+ \frac{\tau^3}{2}\sum_{n=0}^{m}\|(-\mathcal{L}_{33})^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{\tau^2}{4}\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{m+1}\|^2 \ \leq\ \tilde{C}_3\Big(h^{2r}\|(\boldsymbol{u}_e;\boldsymbol{v}_e)\|_{\boldsymbol{U}_r^\infty\times\boldsymbol{V}_r^\infty}^2\\
&+ h^{2r}\|(\frac{\partial\boldsymbol{u}_e}{\partial t};\frac{\partial\boldsymbol{v}_e}{\partial t})\|_{\boldsymbol{U}_r^2\times\boldsymbol{V}_r^2}^2 + \tau^4\|(\frac{\partial^3\boldsymbol{u}_e}{\partial t^3};\frac{\partial^3\boldsymbol{v}_e}{\partial t^3})\|_{\boldsymbol{U}_0^2\times\boldsymbol{V}_0^2}^2 + \tau^4\|(\frac{\partial^4\boldsymbol{u}_e}{\partial t^4};\frac{\partial^4\boldsymbol{v}_e}{\partial t^4})\|_{\boldsymbol{U}_0^2\times\boldsymbol{V}_0^2}^2 + \tau^4\|\frac{\partial^3\boldsymbol{p}}{\partial t^3}\|_{\boldsymbol{P}_0^2}^2\Big)\\
&+ (4T\epsilon_1 + \bar{\epsilon}_1)\frac{\mu\tau^2}{2}\max_{0\leq k\leq J}\|\varphi_{\boldsymbol{u},hI}^k\|_{DG}^2 + (2T\epsilon_2 + \bar{\epsilon}_3)\max_{0\leq k\leq J}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}_{hI}^k\|^2 + \bar{\epsilon}_2\max_{1\leq k\leq J}\frac{\lambda\tau^2}{4}\|\mathrm{div}\ \varphi_{\boldsymbol{u},hI}^k\|^2\\
&+ (T\epsilon_4 + \bar{\epsilon}_5)\frac{\tau^2}{4}\max_{0\leq k\leq J}\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^k\|^2 + \bar{\epsilon}_4\|(\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{r}_{hI}^{n+1} + \boldsymbol{r}_{hI}^{n})\|^2 + \bar{\epsilon}_6\frac{\tau^3}{8}\|(-\bar{\mathcal{L}}_{33})^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^{n+\frac{1}{2}}\|^2.
\end{aligned}\tag{5.43}$$

Setzen wir zunächst $\bar{\epsilon}_4 = \bar{\epsilon}_6 = \frac{1}{4}, \tilde{\epsilon}_1 = (4T\epsilon_1 + \bar{\epsilon}_1), \tilde{\epsilon}_2 = (2T\epsilon_2 + \bar{\epsilon}_3), \tilde{\epsilon}_3 = T\epsilon_4 + \bar{\epsilon}_5$ und nehmen dann das Maximum auf der linken Seite, d.h.,

$$\begin{aligned}
&\max_{1\leq k\leq J}\frac{\mu\tau^2}{2}\|\varphi_{\boldsymbol{u},hI}^k\|_{DG}^2 \leq \underline{C}_{ah}^{-1}\overline{C}_{DG,h}\mathrm{RS}_{(5.43)}, \quad \max_{1\leq k\leq J}\frac{\lambda\tau^2}{4}\|\mathrm{div}\ \varphi_{\boldsymbol{u},hI}^k\|^2 \leq \mathrm{RS}_{(5.43)},\\
&\max_{0\leq k\leq J}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}_{hI}^k\|^2 \leq \mathrm{RS}_{(5.43)} + \|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}_{hI}^0\|^2, \quad \frac{\tau^2}{4}\max_{0\leq k\leq J}\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^k\|^2 \leq \mathrm{RS}_{(5.43)},
\end{aligned}\tag{5.44}$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\max_{1\leq k\leq J}\frac{\mu\tau^2}{2}\|\varphi_{\boldsymbol{u},hI}^k\|_{DG}^2 + \max_{1\leq k\leq J}\frac{\lambda\tau^2}{4}\|\mathrm{div}\varphi_{\boldsymbol{u},hI}^k\|^2 + \max_{0\leq k\leq J}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}_{hI}^k\|^2 + \frac{\tau^2}{4}\max_{0\leq k\leq J}\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^k\|^2\\
&\quad\leq\ \tilde{C}_{3,0}\Big(h^{2r}\|(\boldsymbol{u}_e;\boldsymbol{v}_e)\|_{\boldsymbol{U}_r^\infty\times\boldsymbol{V}_r^\infty}^2 + h^{2r}\|(\frac{\partial\boldsymbol{u}_e}{\partial t};\frac{\partial\boldsymbol{v}_e}{\partial t})\|_{\boldsymbol{U}_r^2\times\boldsymbol{V}_r^2}^2 + \tau^4\|(\frac{\partial^3\boldsymbol{u}_e}{\partial t^3};\frac{\partial^3\boldsymbol{v}_e}{\partial t^3})\|_{\boldsymbol{U}_0^2\times\boldsymbol{V}_0^2}^2\\
&\quad+ \tau^4\|(\frac{\partial^4\boldsymbol{u}_e}{\partial t^4};\frac{\partial^4\boldsymbol{v}_e}{\partial t^4})\|_{\boldsymbol{U}_0^2\times\boldsymbol{V}_0^2}^2 + \tau^4\|\frac{\partial^3\boldsymbol{p}}{\partial t^3}\|_{\boldsymbol{P}_0^2}^2\Big) + (\underline{C}_{ah}^{-1}\overline{C}_{DG,h} + 3)\tilde{\epsilon}_1\frac{\mu\tau^2}{2}\max_{0\leq k\leq J}\|\varphi_{\boldsymbol{u},hI}^k\|_{DG}^2\\
&\quad+ (\underline{C}_{ah}^{-1}\overline{C}_{DG,h} + 3)\Big(\tilde{\epsilon}_2\max_{0\leq k\leq J}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}_{hI}^k\|^2 + \tilde{\epsilon}_3\frac{\tau^2}{4}\max_{0\leq k\leq J}\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}\varphi_{\boldsymbol{p},hI}^k\|^2\\
&\quad+ \bar{\epsilon}_2\max_{1\leq k\leq J}\frac{\lambda\tau^2}{4}\|\mathrm{div}\ \varphi_{\boldsymbol{u},hI}^k\|^2\Big).
\end{aligned}\tag{5.45}$$

wobei $\tilde{C}_{3,0}$ eine Konstante ist, die unabhängig von allen Parametern, der Netzwerkskala $n$, der Maschenweite $h$ und der Zeitschrittweite $\tau$ ist. Setzen wir abschließend noch $\tilde{\epsilon}_1 = \tilde{\epsilon}_2 = \tilde{\epsilon}_3 = \bar{\epsilon}_2 = \frac{1}{2}(\underline{C}_{ah}^{-1}\overline{C}_{DG,h} + 3)^{-1}$ und ziehen die Wurzel aus der entstehenden Ungleichung, so erhalten wir (5.38). $\square$

**Satz 5.8.** *Es sei die Hypothese 5.2 erfüllt. Dann gilt:*

$$\max_{0\le n\le J-1}\|\boldsymbol{r}_h^{n+\frac12}-\boldsymbol{r}_e^{n+\frac12}\|_{\boldsymbol{U}_h\times\boldsymbol{V}}\le C_{uv}\Big(h^r\|(\boldsymbol{u}_e;\boldsymbol{v}_e)\|_{\boldsymbol{U}_r^\infty\times\boldsymbol{V}_r^\infty}+h^r\|(\frac{\partial\boldsymbol{u}_e}{\partial t};\frac{\partial\boldsymbol{v}_e}{\partial t})\|_{\boldsymbol{U}_r^2\times\boldsymbol{V}_r^2}$$
$$+\tau^2\|(\frac{\partial^3\boldsymbol{u}_e}{\partial t^3};\frac{\partial^3\boldsymbol{v}_e}{\partial t^3})\|_{\boldsymbol{U}_0^2\times\boldsymbol{V}_0^2}+\tau^2\|(\frac{\partial^4\boldsymbol{u}_e}{\partial t^4};\frac{\partial^4\boldsymbol{v}_e}{\partial t^4})\|_{\boldsymbol{U}_0^2\times\boldsymbol{V}_0^2}+\tau^2\|\frac{\partial^3\boldsymbol{p}}{\partial t^3}\|_{\boldsymbol{P}_0^2}\Big),\quad(5.46)$$

*wobei $C_{uv}$ eine Konstante unabhängig von allen Parametern, der Netzwerkskala $n$, der Maschenweite $h$ und der Zeitschrittweite $\tau$ ist.*

***Beweis***. Nach der Definition von $\|(\cdot;\cdot)\|^2_{\boldsymbol{U}_h\times\boldsymbol{V}}$ sowie (4.16), Lemma 5.3 und (A5) haben wir

$$\|\boldsymbol{r}_{eI}^{n+\frac12}\|^2_{\boldsymbol{U}_h\times\boldsymbol{V}}=\frac{\mu\tau^2}{2}\|\boldsymbol{u}_{eI}^{n+\frac12}\|^2_{DG}+\frac{\lambda\tau^2}{4}\|\text{div }\boldsymbol{u}_{eI}^{n+\frac12}\|^2+\frac{\tau^2}{4}\|\Lambda^{-\frac12}\left(\text{Div}\boldsymbol{v}_{eI}^{n+\frac12}+\boldsymbol{\alpha}\underline{\text{Div}}\boldsymbol{u}_{eI}^{n+\frac12}\right)\|^2$$
$$+\|\Lambda_{uv}^{\frac12}\boldsymbol{r}_{eI}^{n+\frac12}\|^2\le Ch^{2r}\tau\Big(\frac{\mu}{2}\|\frac{\partial\boldsymbol{u}_e}{\partial t}\|^2_{L^p(H^{r+1})}+\frac{\lambda}{4}\|\text{div }\frac{\partial\boldsymbol{u}_e}{\partial t}\|^2_{L^p(H^r)}+\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac12}\frac{\partial\boldsymbol{r}_e}{\partial t}\|^2_{L^p(H^r)}$$
$$+\|\bar{\mathcal{D}}^{\frac12}\frac{\partial\boldsymbol{r}_e}{\partial t}\|^2_{L^p(H^r)}+\|\Lambda^{-\frac12}\text{Div}\frac{\partial\boldsymbol{v}_e}{\partial t}\|^2_{L^p(H^r(\Omega)^n)}+\|\Lambda^{-\frac12}\boldsymbol{\alpha}\underline{\text{Div}}\frac{\partial\boldsymbol{u}_e}{\partial t}\|^2_{L^p(H^r)}\Big)$$
$$=Ch^{2r}\tau\|(\frac{\partial\boldsymbol{u}_e}{\partial t};\frac{\partial\boldsymbol{v}_e}{\partial t})\|^2_{\boldsymbol{U}_r^2\times\boldsymbol{V}_r^2}.\quad(5.47)$$

Anwendung der Dreiecksungleichung ergibt

$$\|\boldsymbol{r}_h^{n+\frac12}-\boldsymbol{r}_e^{n+\frac12}\|_{\boldsymbol{U}_h\times\boldsymbol{V}}\le\|\boldsymbol{r}_{eI}^{n+\frac12}\|_{\boldsymbol{U}_h\times\boldsymbol{V}}+\|\boldsymbol{r}_{hI}^{n+\frac12}\|_{\boldsymbol{U}_h\times\boldsymbol{V}}.\quad(5.48)$$

Setzen wir (5.38) in (5.25) ein, so erhalten wir

$$\|\boldsymbol{r}_{hI}^{n+\frac12}\|_{\boldsymbol{U}_h\times\boldsymbol{V}}\le C\Big(h^r\|(\boldsymbol{u}_e;\boldsymbol{v}_e)\|_{\boldsymbol{U}_r^\infty\times\boldsymbol{V}_r^\infty}+h^r\|(\frac{\partial\boldsymbol{u}_e}{\partial t};\frac{\partial\boldsymbol{v}_e}{\partial t})\|_{\boldsymbol{U}_r^2\times\boldsymbol{V}_r^2}+\tau^2\|(\frac{\partial^3\boldsymbol{u}_e}{\partial t^3};\frac{\partial^3\boldsymbol{v}_e}{\partial t^3})\|_{\boldsymbol{U}_0^2\times\boldsymbol{V}_0^2}$$
$$+\tau^2\|(\frac{\partial^4\boldsymbol{u}_e}{\partial t^4};\frac{\partial^4\boldsymbol{v}_e}{\partial t^4})\|_{\boldsymbol{U}_0^2\times\boldsymbol{V}_0^2}+\tau^2\|\frac{\partial^3\boldsymbol{p}}{\partial t^3}\|_{\boldsymbol{P}_0^2}\Big).\quad(5.49)$$

Setzen wir dann noch (5.49) und (5.47) in (5.48) ein, so folgt (5.46). □

**Lemma 5.9.** *Es sei die Hypothese 5.2 erfüllt. Dann gilt:*

$$\max_{0\le k\le J-1}\|\boldsymbol{p}_{hI}^{k+\frac12}\|_{\boldsymbol{P}}\le C_4\Big(h^r\|(\frac{\partial\boldsymbol{u}_e}{\partial t};\frac{\partial\boldsymbol{v}_e}{\partial t})\|_{\boldsymbol{U}_r^2\times\boldsymbol{V}_r^2}+h^r\|(\frac{\partial\boldsymbol{u}_e}{\partial t};\frac{\partial\boldsymbol{v}_e}{\partial t})\|_{\boldsymbol{U}_r^\infty\times\boldsymbol{V}_r^\infty}$$
$$+\tau^2\|(\frac{\partial^3\boldsymbol{u}_e}{\partial t^3};\frac{\partial^3\boldsymbol{v}_e}{\partial t^3})\|_{\boldsymbol{U}_0^2\times\boldsymbol{V}_0^2}+\tau^3\|(\frac{\partial^4\boldsymbol{u}_e}{\partial t^4};\frac{\partial^4\boldsymbol{v}_e}{\partial t^4})\|_{\boldsymbol{U}_0^2\times\boldsymbol{V}_0^2}+\tau^3\|\frac{\partial^3\boldsymbol{p}}{\partial t^3}\|_{\boldsymbol{P}_0^2}+\frac{\tau}{2}\max_{0\le k\le J}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac12}\boldsymbol{s}_{hI}^k\|$$
$$+\sqrt{\frac{\mu\tau^2}{2}}\max_{0\le k\le J}\|\boldsymbol{u}_{hI}^k\|_{DG}+\sqrt{\frac{\lambda\tau^2}{4}}\max_{0\le k\le J}\|\text{div }\boldsymbol{u}_{hI}^k\|+\frac{\tau}{2}\max_{0\le k\le J}\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac12}\boldsymbol{p}_{hI}^k\|\Big),\quad(5.50)$$

*wobei $C_4$ eine Konstante unabhängig von allen Parametern, der Netzwerkskala $n$, der Maschenweite $h$ und der Zeitschrittweite $\tau$ ist.*

***Beweis.*** Das Ergebnis ist eine Folgerung von Korollar 4.9. Wir schreiben das Gleichungssystem (5.18) in der Form des Gleichungssystem (4.15) an und erhalten

$$\begin{aligned}
&\frac{\mu\tau^2}{2}a_h\Big(\frac{\boldsymbol{u}_{hI}^{k+1}-\boldsymbol{u}_{hI}^{k}}{2},\boldsymbol{w}_h\Big)+\frac{\lambda\tau^2}{4}\Big(\operatorname{div}\frac{\boldsymbol{u}_{hI}^{k+1}-\boldsymbol{u}_{hI}^{k}}{2},\operatorname{div}\boldsymbol{w}_h\Big)+\Big((\bar{\mathcal{M}}+\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})\frac{\boldsymbol{r}_{hI}^{k+1}-\boldsymbol{r}_{hI}^{k}}{2},\begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_h\\\boldsymbol{z}_h\end{pmatrix}\Big)\\
&\quad-\frac{\tau^2}{4}\Big(\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{p}_{hI}^{k+\frac12}\\\boldsymbol{p}_{hI}^{k+\frac12}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\underline{\operatorname{Div}}\boldsymbol{w}_h\\\operatorname{Div}\boldsymbol{z}_h\end{pmatrix}\Big)=\ \frac{\tau}{2}\Big(\bar{\mathcal{M}}\boldsymbol{s}_{hI}^k,\begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_h\\\boldsymbol{z}_h\end{pmatrix}\Big)-\frac{\mu\tau^2}{2}a_h(\boldsymbol{u}_{hI}^k,\boldsymbol{w}_h)-\frac{\lambda\tau^2}{4}(\operatorname{div}\boldsymbol{u}_{hI}^k,\operatorname{div}\boldsymbol{w}_h)\\
&\quad+\frac{\mu\tau^2}{2}a_h(\boldsymbol{u}_{eI}^{k+\frac12},\boldsymbol{w}_h)+\frac12\Big((\bar{\mathcal{M}}+\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})(\boldsymbol{r}_{eI}^{k+1}-\boldsymbol{r}_{eI}^{k}),\begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_h\\\boldsymbol{z}_h\end{pmatrix}\Big)-\frac{\tau}{2}\Big(\bar{\mathcal{M}}\boldsymbol{s}_{eI}^k,\begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_h\\\boldsymbol{z}_h\end{pmatrix}\Big)\\
&\quad-\frac{\tau}{2}\Big((\bar{\mathcal{M}}+\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})\rho_{\boldsymbol{r}}^k,\begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_h\\\boldsymbol{z}_h\end{pmatrix}\Big)-\frac{\tau^2}{4}\Big(\bar{\mathcal{M}}\rho_{\boldsymbol{s}}^k,\begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_h\\\boldsymbol{z}_h\end{pmatrix}\Big),
\end{aligned}\tag{5.51a}$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{\tau^2}{4}\Big(\boldsymbol{\alpha}\underline{\operatorname{Div}}\frac{\boldsymbol{u}_{hI}^{k+1}-\boldsymbol{u}_{hI}^{k}}{2},\boldsymbol{q}_h\Big)-\frac{\tau^2}{4}\Big(\operatorname{Div}\frac{\boldsymbol{u}_{hI}^{k+1}-\boldsymbol{u}_{hI}^{k}}{2},\boldsymbol{q}_h\Big)+\frac{\tau^3}{8}(\mathcal{L}_{33}\boldsymbol{p}_{hI}^{k+\frac12},\boldsymbol{q}_h)+\frac{\tau^2}{4}(\mathcal{D}_{33}\boldsymbol{p}_{hI}^{k+\frac12},\boldsymbol{q}_h)\\
&\qquad=\ \frac{\tau^2}{4}(\mathcal{D}_{33}\boldsymbol{p}_{hI}^k,\boldsymbol{q}_h)+\frac{\tau^3}{8}(\boldsymbol{\alpha}\underline{\operatorname{Div}}\rho_{\boldsymbol{u}}^k,\boldsymbol{q}_h)+\frac{\tau^3}{8}(\operatorname{Div}\rho_{\boldsymbol{v}}^k,\boldsymbol{q}_h)-\frac{\tau^3}{8}(\mathcal{D}_{33}\rho_{\boldsymbol{p}}^k,\boldsymbol{q}_h).
\end{aligned}\tag{5.51b}$$

Anwendung von Korollar 4.9 ergibt dann

$$\begin{aligned}
&\Big\|\frac{\boldsymbol{r}_{hI}^{k+1}-\boldsymbol{r}_{hI}^{k}}{2}\Big\|_{\boldsymbol{U}_h\times\boldsymbol{V}}+\|\boldsymbol{p}_{hI}^{k+\frac12}\|_{\boldsymbol{P}}\le C\Big(\frac{\tau}{2}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac12}\boldsymbol{s}_{hI}^k\|+\sqrt{\frac{\mu\tau^2}{2}}\|\boldsymbol{u}_{hI}^k\|_{DG}+\sqrt{\frac{\lambda\tau^2}{4}}\|\operatorname{div}\boldsymbol{u}_{hI}^k\|\\
&\quad+\sqrt{\frac{\mu\tau^2}{2}}\|\boldsymbol{u}_{eI}^{k+\frac12}\|_{DG}+\frac12\|(\bar{\mathcal{M}}+\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})^{\frac12}(\boldsymbol{r}_{eI}^{k+1}-\boldsymbol{r}_{eI}^{k})\|+\frac{\tau}{2}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac12}\boldsymbol{s}_{eI}^k\|+\frac{\tau}{2}\|(\bar{\mathcal{M}}+\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})^{\frac12}\rho_{\boldsymbol{r}}^k\|\\
&\quad+\frac{\tau^2}{4}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac12}\rho_{\boldsymbol{s}}^k\|+\frac{\tau}{2}\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac12}\boldsymbol{p}_{hI}^k\|+\frac{\tau^2}{4}\|\Lambda^{-\frac12}(\boldsymbol{\alpha}\underline{\operatorname{Div}}\rho_{\boldsymbol{u}}^k+\operatorname{Div}\rho_{\boldsymbol{v}}^k)\|+\frac{\tau^2}{4}\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac12}\rho_{\boldsymbol{p}}^k\|\Big).
\end{aligned}\tag{5.52}$$

Mit Hilfe der Lemmata 5.1 und 5.3 schätzen wir die Terme auf der rechten Seite wie folgt ab:

- $$\frac{\mu\tau^2}{2}\|\boldsymbol{u}_{eI}^{k+\frac12}\|_{DG}^2\underset{(5.7)}{\le}Ch^{2r}\frac{\mu\tau^2}{2}\|\boldsymbol{u}_e^{k+\frac12}\|_{H^{r+1}}^2\underset{(A4)}{\le}Ch^{2r}\tau\frac{\mu\tau^2}{2}\Big\|\frac{\partial\boldsymbol{u}_e}{\partial t}\Big\|_{L^2(H^{r+1})}^2,\tag{5.53a}$$
- $$\begin{aligned}\|(\bar{\mathcal{M}}+\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})^{\frac12}(\boldsymbol{r}_{eI}^{k+1}-\boldsymbol{r}_{eI}^{k})\|^2&\underset{(5.8)}{\le}Ch^{2r}\big(|||\bar{\mathcal{M}}^{\frac12}(\boldsymbol{r}_e^{k+1}-\boldsymbol{r}_e^{k})|||_{H^r}^2+|||(\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})^{\frac12}(\boldsymbol{r}_e^{k+1}-\boldsymbol{r}_e^{k})|||_{H^r}^2\big)\\&\underset{(A4)}{\le}C\tau h^{2r}\Big(|||\bar{\mathcal{M}}^{\frac12}\frac{\partial\boldsymbol{r}_e}{\partial t}|||_{L^2(H^r)}^2+|||(\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})^{\frac12}\frac{\partial\boldsymbol{r}_e}{\partial t}|||_{L^2(H^r)}^2\Big),\end{aligned}\tag{5.53b}$$
- $$\frac{\tau^2}{4}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac12}\boldsymbol{s}_{eI}^k\|^2\underset{(5.8)}{\le}C\frac{\tau^2}{4}h^{2r}|||\bar{\mathcal{M}}^{\frac12}\boldsymbol{s}_e^k|||_{H^r}^2\le C\frac{\tau^2}{4}h^{2r}|||\bar{\mathcal{M}}^{\frac12}\frac{\partial\boldsymbol{r}_e}{\partial t}|||_{L^\infty(H^r)}^2,\tag{5.53c}$$
- $$\frac{\tau^2}{4}\|(\bar{\mathcal{M}}+\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})^{\frac12}\rho_{\boldsymbol{r}}^k\|^2\underset{(A1)}{\le}\frac{\tau^2}{4}\frac{\tau^3}{5!}\Big\|(\bar{\mathcal{M}}+\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})^{\frac12}\frac{\partial^3\boldsymbol{r}_e}{\partial t^3}\Big\|_{L^2(L^2)}^2,\tag{5.53d}$$

- $$\frac{\tau^4}{16}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\rho_{\boldsymbol{s}}^k\|^2 \underset{(A1)}{\leq} \frac{\tau^4}{16}\frac{\tau^3}{5!}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^4 \boldsymbol{r}_e}{\partial t^4}\|^2_{L^2(L^2)}, \tag{5.53e}$$
- $$\frac{\tau^4}{16}\|\Lambda^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{\alpha}\underline{\mathrm{Div}}\rho_{\boldsymbol{u}}^k + \mathrm{Div}\rho_{\boldsymbol{v}}^k)\|^2 \underset{(A1)}{\leq} \frac{\tau^4}{16}\frac{\tau^3}{5!}\|\Lambda^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{\alpha}\underline{\mathrm{Div}}\frac{\partial^3 \boldsymbol{u}_e}{\partial t^3} + \mathrm{Div}\frac{\partial^3 \boldsymbol{v}_e}{\partial t^3})\|^2_{L^2(L^2)}, \tag{5.53f}$$
- $$\frac{\tau^4}{16}\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}\rho_{\boldsymbol{p}}^k\|^2 \underset{(A1)}{\leq} \frac{\tau^4}{16}\frac{\tau^3}{5!}\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^3 \boldsymbol{p}_e}{\partial t^3}\|^2_{L^2(L^2)}. \tag{5.53g}$$

Setzen wir (5.53) in (5.52), so folgt für eine Konstante $\bar{C}_4$, die unabhängig von allen Parametern, der Netzwerkskala $n$, der Maschenweite $h$ und der Zeitschrittweite $\tau$ ist, dass

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{p}_{hI}^{k+\frac{1}{2}}\|_{\boldsymbol{P}} \leq \bar{C}_4\Big(& h^r\frac{\mu}{2}\|\frac{\partial \boldsymbol{u}_e}{\partial t}\|_{L^2(H^{r+1})} + h^r|\!|\!|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial \boldsymbol{r}_e}{\partial t}|\!|\!|_{L^2(H^r)} + h^r|\!|\!|(\frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}}\frac{\partial \boldsymbol{r}_e}{\partial t}|\!|\!|_{L^2(H^r)} \\
&+ \tau h^r|\!|\!|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial \boldsymbol{r}_e}{\partial t}|\!|\!|_{L^\infty(H^r)} + \tau^2\|(\bar{\mathcal{M}} + \frac{\tau}{2}\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^3 \boldsymbol{r}_e}{\partial t^3}\|_{L^2(L^2)} + \tau^3\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^4 \boldsymbol{r}_e}{\partial t^4}\|_{L^2(L^2)} \\
&+ \tau^3\|\Lambda^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{\alpha}\underline{\mathrm{Div}}\frac{\partial^3 \boldsymbol{u}_e}{\partial t^3} + \mathrm{Div}\frac{\partial^3 \boldsymbol{v}_e}{\partial t^3})\|_{L^2(L^2)} + \tau^3\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^3 \boldsymbol{p}_e}{\partial t^3}\|_{L^2(L^2)} + \frac{\tau}{2}\max_{0\leq k\leq J}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{s}_{hI}^k\| \\
&+ \sqrt{\frac{\mu\tau^2}{2}}\max_{0\leq k\leq J}\|\boldsymbol{u}_{hI}^k\|_{DG} + \sqrt{\frac{\lambda\tau^2}{4}}\max_{0\leq k\leq J}\|\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}_{hI}^k\| + \frac{\tau}{2}\max_{0\leq k\leq J}\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}_{hI}^k\|\Big).
\end{aligned} \tag{5.54}$$

Schließlich verwenden wir die Definition der Norm (5.2) und nehmen das Maximum auf der linken Seite und erhalten damit (5.50). □

Um die Terme, die von approximierte Lösung abhängen, in der rechten Seite von (5.50) abzuschätzen, führen wir das folgende Lemma ein.

**Lemma 5.10.** *Es sei die Hypothese 5.2 erfüllt. Dann gilt:*

$$\begin{aligned}
&\max_{0\leq k\leq J}\frac{\tau}{2}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{s}_{hI}^k\| + \sqrt{\frac{\mu\tau^2}{2}}\max_{0\leq k\leq J}\|\boldsymbol{u}_{hI}^k\|_{DG} + \sqrt{\frac{\lambda\tau^2}{4}}\max_{0\leq k\leq J}\|\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}_{hI}^k\| + \frac{\tau}{2}\max_{0\leq k\leq J}\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}_{hI}^k\| \\
&\quad - \bar{\epsilon}_0\max_{0\leq k\leq n}\|\boldsymbol{p}_{hI}^{k+\frac{1}{2}}\|_{\boldsymbol{P}} \leq \quad C_5\Big(h^r\|(\frac{\partial \boldsymbol{u}_e}{\partial t};\frac{\partial \boldsymbol{v}_e}{\partial t})\|_{\boldsymbol{U}_r^\infty\times\boldsymbol{V}_r^\infty} + h^r\|(\boldsymbol{u}_e;\boldsymbol{v}_e)\|_{\boldsymbol{U}_r^\infty\times\boldsymbol{V}_r^\infty} + h^r\tau\|\boldsymbol{p}_e\|_{\boldsymbol{P}_r^\infty} \\
&\quad + h^r\|(\frac{\partial \boldsymbol{u}_e}{\partial t};\frac{\partial \boldsymbol{v}_e}{\partial t})\|_{\boldsymbol{U}_r^2\times\boldsymbol{V}_r^2} + \tau h^r\|(\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_e}{\partial t^2};\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}_e}{\partial t^2})\|_{\boldsymbol{U}_r^2\times\boldsymbol{V}_r^2} + \tau^2\|(\frac{\partial^3 \boldsymbol{u}_e}{\partial t^3};\frac{\partial^3 \boldsymbol{v}_e}{\partial t^3})\|_{\boldsymbol{U}_0^2\times\boldsymbol{V}_0^2} \\
&\quad + \tau^3\|(\frac{\partial^4 \boldsymbol{u}_e}{\partial t^4};\frac{\partial^4 \boldsymbol{v}_e}{\partial t^4})\|_{\boldsymbol{U}_0^2\times\boldsymbol{V}_0^2} + \tau^3\|\frac{\partial^3 \boldsymbol{p}}{\partial t^3}\|_{\boldsymbol{P}_0^2}\Big),
\end{aligned} \tag{5.55}$$

*wobei $C_5, \bar{\epsilon}_0$ Konstanten unabhängig von allen Parametern, der Netzwerkskala $n$, der Maschenweite $h$ und der Zeitschrittweite $\tau$ sind.*

***Beweis***. Zunächst wählen wir in (5.20) und (5.18b)

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_h\\ \boldsymbol{z}_h\end{pmatrix} = 2(\boldsymbol{r}_{hI}^{k+1} - \boldsymbol{r}_{hI}^k) \underset{(5.18c)}{=} 2\tau\boldsymbol{s}_{hI}^{k+\frac{1}{2}} + 2\tau(\partial_t\boldsymbol{r}_{eI}^k - \boldsymbol{s}_{eI}^{k+\frac{1}{2}} - \rho_{\boldsymbol{r}}^k), \qquad \boldsymbol{q} = 2(\boldsymbol{p}_{hI}^{k+1} + \boldsymbol{p}_{hI}^k).$$

Kombination der entstehenden Gleichungen ergibt dann

$$\begin{aligned}
&\mu\tau^2 a_h(\boldsymbol{u}_{hI}^{k+1},\boldsymbol{u}_{hI}^{k+1}) - \mu\tau^2 a_h(\boldsymbol{u}_{hI}^{k},\boldsymbol{u}_{hI}^{k}) + \frac{\lambda\tau^2}{2}\|\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}_{hI}^{k+1}\|^2 - \frac{\lambda\tau^2}{2}\|\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}_{hI}^{k}\|^2 + \|(\tau\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{r}_{hI}^{k+1}-\boldsymbol{r}_{hI}^{k})\|^2\\
&\quad + \frac{\tau^2}{2}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{s}_{hI}^{k+1}\|^2 - \frac{\tau^2}{2}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{s}_{hI}^{k}\|^2 + (\tau^{\frac{3}{2}}\bar{\mathcal{M}}(\boldsymbol{s}_{hI}^{k+1}-\boldsymbol{s}_{hI}^{k}),\tau^{\frac{1}{2}}(\partial_t\boldsymbol{r}_{eI}^{k}-\boldsymbol{s}_{eI}^{k+\frac{1}{2}}-\rho_{\boldsymbol{r}}^{k}))\\
&\quad + \tau^3\|(-\mathcal{L}_{33})^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}_{hI}^{k+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{\tau^2}{2}\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}_{hI}^{k+1}\|^2 - \frac{\tau^2}{2}\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}_{hI}^{k}\|^2 \ = \ 2\mu\tau^2 a_h(\boldsymbol{u}_{eI}^{k+\frac{1}{2}},\boldsymbol{u}_{hI}^{k+1}-\boldsymbol{u}_{hI}^{k})\\
&\quad + ((\tau\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{r}_{eI}^{k+1}-\boldsymbol{r}_{eI}^{k}),(\tau\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{r}_{hI}^{k+1}-\boldsymbol{r}_{hI}^{k})) + (\tau^{\frac{1}{2}}\bar{\mathcal{M}}(\boldsymbol{s}_{eI}^{k+1}-\boldsymbol{s}_{eI}^{k}),\tau^{\frac{3}{2}}(\boldsymbol{s}_{hI}^{k+\frac{1}{2}}+\partial_t\boldsymbol{r}_{eI}^{k}-\boldsymbol{s}_{eI}^{k+\frac{1}{2}}-\rho_{\boldsymbol{r}}^{k}))\\
&\quad - (\tau(\tau\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}}\rho_{\boldsymbol{r}}^{k},(\tau\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{r}_{hI}^{k+1}-\boldsymbol{r}_{hI}^{k})) - \tau^3(\bar{\mathcal{M}}\rho_{\boldsymbol{s}}^{k},\boldsymbol{s}_{hI}^{k+\frac{1}{2}}+\partial_t\boldsymbol{r}_{eI}^{k}-\boldsymbol{s}_{eI}^{k+\frac{1}{2}}-\rho_{\boldsymbol{r}}^{k})\\
&\quad - \tau^3(\boldsymbol{\alpha}\underline{\mathrm{Div}}\rho_{\boldsymbol{u}}^{k}+\mathrm{Div}\rho_{\boldsymbol{v}}^{k},\boldsymbol{p}_{hI}^{k+\frac{1}{2}}) + \tau^3(\mathcal{D}_{33}\rho_{\boldsymbol{p}}^{k},\boldsymbol{p}_{hI}^{k+\frac{1}{2}}).
\end{aligned}\tag{5.56}$$

Danach verwenden wir die Cauchy-Schwarz-Ungleichung und die Dreiecksungleichung, um folgende Abschätzung zu erhalten:

$$\begin{aligned}
&\mu\tau^2 a_h(\boldsymbol{u}_{hI}^{k+1},\boldsymbol{u}_{hI}^{k+1}) - \mu\tau^2 a_h(\boldsymbol{u}_{hI}^{k},\boldsymbol{u}_{hI}^{k}) + \frac{\lambda\tau^2}{2}\|\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}_{hI}^{k+1}\|^2 - \frac{\lambda\tau^2}{2}\|\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}_{hI}^{k}\|^2 + \|(\tau\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{r}_{hI}^{k+1}-\boldsymbol{r}_{hI}^{k})\|^2\\
&\quad + \frac{\tau^2}{2}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{s}_{hI}^{k+1}\|^2 - \frac{\tau^2}{2}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{s}_{hI}^{k}\|^2 + \tau^3\|(-\mathcal{L}_{33})^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}_{hI}^{k+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{\tau^2}{2}\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}_{hI}^{k+1}\|^2\\
&\quad - \frac{\tau^2}{2}\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}_{hI}^{k}\|^2 \quad\le\quad \frac{\tau^3}{2\epsilon_1}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{s}_{hI}^{k+1}-\boldsymbol{s}_{hI}^{k})\|^2 + 3\frac{\tau\epsilon_1}{2}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\partial_t\boldsymbol{r}_{eI}^{k})\|^2 + 3\frac{\tau\epsilon_1}{2}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{s}_{eI}^{k+\frac{1}{2}}\|^2\\
&\quad + 3\frac{\tau\epsilon_1}{2}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\rho_{\boldsymbol{r}}^{k}\|^2 + 2\mu\tau\frac{\bar{C}_{ah}^2}{2\epsilon_2}\|\boldsymbol{u}_{eI}^{k+\frac{1}{2}}\|_{DG}^2 + 2\mu\tau^3\frac{\epsilon_2}{2}\|\boldsymbol{u}_{hI}^{k+1}-\boldsymbol{u}_{hI}^{k}\|_{DG}^2 + \|(\tau\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{r}_{eI}^{k+1}-\boldsymbol{r}_{eI}^{k})\|^2\\
&\quad + \frac{1}{4}\|(\tau\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{r}_{hI}^{k+1}-\boldsymbol{r}_{hI}^{k})\|^2 + \frac{\tau\epsilon_3}{2}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{s}_{eI}^{k+1}-\boldsymbol{s}_{eI}^{k})\|^2 + 4\frac{\tau^3}{2\epsilon_3}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{s}_{hI}^{k+\frac{1}{2}}\|^2 + 4\frac{\tau^3}{2\epsilon_3}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\partial_t\boldsymbol{r}_{eI}^{k}\|^2\\
&\quad + 4\frac{\tau^3}{2\epsilon_3}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{s}_{eI}^{k+\frac{1}{2}}\|^2 + 4\frac{\tau^3}{2\epsilon_3}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\rho_{\boldsymbol{r}}^{k}\|^2 + \tau^2\|(\tau\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}}\rho_{\boldsymbol{r}}^{k}\|^2 + \frac{1}{4}\|(\tau\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{r}_{hI}^{k+1}-\boldsymbol{r}_{hI}^{k})\|^2 + \frac{\tau^3\epsilon_4}{2}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\rho_{\boldsymbol{s}}^{k}\|^2\\
&\quad + 4\frac{\tau^3}{2\epsilon_4}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{s}_{hI}^{k+\frac{1}{2}}\|^2 + 4\frac{\tau^3}{2\epsilon_4}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\partial_t\boldsymbol{r}_{eI}^{k}\|^2 + 4\frac{\tau^3}{2\epsilon_4}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{s}_{eI}^{k+\frac{1}{2}}\|^2 + 4\frac{\tau^3}{2\epsilon_4}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\rho_{\boldsymbol{r}}^{k}\|^2 + \frac{\tau^3}{2\epsilon_5}\|\Lambda^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}_{hI}^{k+\frac{1}{2}}\|^2\\
&\quad + \frac{\tau^3\epsilon_5}{2}\|\Lambda^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{\alpha}\underline{\mathrm{Div}}\rho_{\boldsymbol{u}}^{k}+\mathrm{Div}\rho_{\boldsymbol{v}}^{k})\|^2 + \frac{\tau^3\epsilon_6}{2}\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}\rho_{\boldsymbol{p}}^{k}\|^2 + \frac{\tau^3}{2\epsilon_6}\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}_{hI}^{k+\frac{1}{2}}\|^2.
\end{aligned}$$

Summieren wir nun von $k=0$ bis $k=n\le J-1$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\mu\tau^2 a_h(\boldsymbol{u}_{hI}^{n+1},\boldsymbol{u}_{hI}^{n+1}) + \frac{\lambda\tau^2}{2}\|\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}_{hI}^{n+1}\|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\|(\tau\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{r}_{hI}^{k+1}-\boldsymbol{r}_{hI}^{k})\|^2 + \frac{\tau^2}{2}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{s}_{hI}^{n+1}\|^2\\
&\quad - \frac{\tau^2}{2}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{s}_{hI}^{0}\|^2 + \tau^3\sum_{k=0}^{n}\|(-\mathcal{L}_{33})^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}_{hI}^{k+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{\tau^2}{2}\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}_{hI}^{n+1}\|^2 - \mu\tau^2\overline{C}_{ah}\|\boldsymbol{u}_{hI}^{0}\|_{DG}^2\\
&\quad - \frac{\lambda\tau^2}{2}\|\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}_{hI}^{0}\|^2 - \frac{\tau^2}{2}\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}_{hI}^{0}\|^2 \quad\le\quad \mathrm{RS}_{(5.57)},
\end{aligned}\tag{5.57}$$

wobei

$$
\begin{aligned}
\mathrm{RS}_{(5.57)} = \quad & 2\mu\tau\frac{\bar{C}_{ah}^2}{2\epsilon_2}\sum_{k=0}^{n}\|\boldsymbol{u}_{eI}^{k+\frac{1}{2}}\|_{DG}^2 + 2\mu\tau^3\frac{\epsilon_2}{2}\sum_{k=0}^{n}\|\boldsymbol{u}_{hI}^{k+1}-\boldsymbol{u}_{hI}^{k}\|_{DG}^2 + \frac{\tau^3}{2\epsilon_1}\sum_{k=0}^{n}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{s}_{hI}^{k+1}-\boldsymbol{s}_{hI}^{k})\|^2 \\
& + (\frac{2\tau^3}{\epsilon_3}+\frac{2\tau^3}{\epsilon_4})\sum_{k=0}^{n}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{s}_{hI}^{k+\frac{1}{2}}\|^2 + (3\frac{\epsilon_1\tau}{2}+\frac{2\tau^3}{\epsilon_3}+\frac{2\tau^3}{\epsilon_4})\sum_{k=0}^{n}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\partial_t\boldsymbol{r}_{eI}^{k}\|^2 \\
& + (3\frac{\tau\epsilon_1}{2}+\frac{2\tau^3}{\epsilon_3}+\frac{2\tau^3}{\epsilon_4})\sum_{k=0}^{n}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{s}_{eI}^{k+\frac{1}{2}}\|^2 + (3\frac{\tau\epsilon_1}{2}+\frac{2\tau^3}{\epsilon_3}+\frac{2\tau^3}{\epsilon_4})\sum_{k=0}^{n}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\rho_{\boldsymbol{r}}^{k}\|^2 \\
& + \sum_{k=0}^{n}\|(\tau\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{r}_{eI}^{k+1}-\boldsymbol{r}_{eI}^{k})\|^2 + \frac{\tau\epsilon_3}{2}\sum_{k=0}^{n}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{s}_{eI}^{k+1}-\boldsymbol{s}_{eI}^{k})\|^2 + \tau^2\sum_{k=0}^{n}\|(\tau\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}}\rho_{\boldsymbol{r}}^{k}\|^2 \\
& + \frac{\tau^3\epsilon_4}{2}\sum_{k=0}^{n}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\rho_{\boldsymbol{s}}^{k}\|^2 + \frac{\tau^3}{2\epsilon_5}\sum_{k=0}^{n}\|\Lambda^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}_{hI}^{k+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{\tau^3\epsilon_5}{2}\sum_{k=0}^{n}\|\Lambda^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{\alpha}\underline{\mathrm{Div}}\rho_{\boldsymbol{u}}^{k}+\mathrm{Div}\rho_{\boldsymbol{v}}^{k})\|^2 \\
& + \frac{\tau^3\epsilon_6}{2}\sum_{k=0}^{n}\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}\rho_{\boldsymbol{p}}^{k}\|^2 + \frac{\tau^3}{2\epsilon_6}\sum_{k=0}^{n}\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}_{hI}^{k+\frac{1}{2}}\|^2. \qquad (5.58)
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe der Lemmata 5.1 und 5.3 schätzen wir die Terme in (5.57) und (5.58) wie folgt ab:

- $\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{s}_{hI}^0\| \le \|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{s}_{eI}^0\| + \|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{s}_e^0-\boldsymbol{s}_h^0)\| \underset{(5.8)}{\le} 2Ch^r\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial \boldsymbol{r}_e^0}{\partial t}\|_{H^r} \le 2Ch^r\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial \boldsymbol{r}_e}{\partial t}\|_{L^\infty(H^r)},$ (5.59a)
- $\|\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}_{hI}^0\| \le \|\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}_{eI}^0\| + \|\mathrm{div}\ (\boldsymbol{u}_e^0-\boldsymbol{u}_h^0)\| \underset{(5.7)}{\le} 2Ch^r\|\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}_e^0\|_{H^r} \le 2Ch^r\|\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}_e\|_{L^\infty(H^r)},$ (5.59b)
- $\|\boldsymbol{u}_{hI}^0\|_{DG} \le \|\boldsymbol{u}_{eI}^0\|_{DG} + \|\boldsymbol{u}_e^0-\boldsymbol{u}_h^0\|_{DG} \underset{(5.7)}{\le} 2Ch^r\|\boldsymbol{u}_e^0\|_{H^{r+1}} \le 2Ch^r\|\boldsymbol{u}_e\|_{L^\infty(H^{r+1})},$ (5.59c)
- $\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}_{hI}^0\| \le \|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}_{eI}^0\| + \|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{p}_e^0-\boldsymbol{p}_h^0)\| \underset{(5.8)}{\le} 2Ch^r\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}_e^0\|_{H^r}$
  $\le 2Ch^r\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}_e\|_{L^\infty(H^r)},$ (5.59d)
- $\sum_{k=0}^{n}\|\boldsymbol{u}_{eI}^{k+\frac{1}{2}}\|_{DG}^2 \underset{(5.7)}{\le} Ch^{2r}\sum_{k=0}^{n}\|\boldsymbol{u}_e^{k+\frac{1}{2}}\|_{H^{r+1}}^2 \underset{(A5)}{\le} Ch^{2r}\tau\|\frac{\partial \boldsymbol{u}_e}{\partial t}\|_{L^2(H^{r+1})}^2,$ (5.59e)
- $\sum_{k=0}^{n}\|\boldsymbol{u}_{hI}^{k+1}-\boldsymbol{u}_{hI}^{k}\|_{DG}^2 \le 4\frac{T}{\tau}\max_{0\le k\le J}\|\boldsymbol{u}_{hI}^{k}\|_{DG}^2,$ (5.59f)
- $\sum_{k=0}^{n}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{s}_{hI}^{k+1}-\boldsymbol{s}_{hI}^{k})\|^2 \le 4\frac{T}{\tau}\max_{0\le k\le J}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{s}_{hI}^{k}\|^2,$ (5.59g)
- $\sum_{k=0}^{n}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{s}_{hI}^{k+\frac{1}{2}}\|^2 \le \frac{T}{\tau}\max_{0\le k\le J}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{s}_{hI}^{k}\|^2,$ (5.59h)

- $$\sum_{k=0}^{n} \|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}} \partial_t \boldsymbol{r}_{eI}^k\|^2 \underset{(5.8)}{\leq} Ch^{2r} \sum_{k=0}^{n} |||\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}} \partial_t \boldsymbol{r}_e^k|||_{H^r}^2 \underset{(A4)}{\leq} C\frac{1}{\tau} h^{2r} |||\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \boldsymbol{r}_e}{\partial t}|||_{L^2(H^r)}^2, \tag{5.59i}$$
- $$\sum_{k=0}^{n} \|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{s}_{eI}^{k+\frac{1}{2}}\|^2 \underset{(5.8)}{\leq} Ch^{2r} \sum_{k=0}^{n} |||\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{s}_e^{k+\frac{1}{2}}|||_{H^r}^2 \underset{(A5)}{\leq} C\frac{\tau}{4} h^{2r} |||\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_e}{\partial t^2}|||_{L^2(H^r)}^2, \tag{5.59j}$$
- $$\sum_{k=0}^{n} \|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}} \rho_{\boldsymbol{r}}^k\|^2 \underset{(A1)}{\leq} \frac{\tau^3}{5!} \|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^3 \boldsymbol{r}_e}{\partial t^3}\|_{L^2(L^2)}^2, \tag{5.59k}$$
- $$\sum_{k=0}^{n} \|(\tau\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}} (\boldsymbol{r}_{eI}^{k+1} - \boldsymbol{r}_{eI}^k)\|^2 \underset{(5.8)}{\leq} Ch^{2r} \sum_{k=0}^{n} |||(\tau\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}} (\boldsymbol{r}_e^{k+1} - \boldsymbol{r}_e^k)|||_{H^r}^2 \underset{(A4)}{\leq} C\tau h^{2r} |||(\tau\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \boldsymbol{r}_e}{\partial t}|||_{L^2(H^r)}^2, \tag{5.59l}$$
- $$\sum_{k=0}^{n} \|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}} (\boldsymbol{s}_{eI}^{k+1} - \boldsymbol{s}_{eI}^k)\|^2 \underset{(5.8)}{\leq} Ch^{2r} \sum_{k=0}^{n} |||\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}} (\boldsymbol{s}_e^{k+1} - \boldsymbol{s}_e^k)|||_{H^r}^2 \underset{(A4)}{\leq} C\tau h^{2r} |||\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_e}{\partial t^2}|||_{L^2(H^r)}^2, \tag{5.59m}$$
- $$\sum_{k=0}^{n} \|(\tau\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}} \rho_{\boldsymbol{r}}^k\|^2 \underset{(A1)}{\leq} \frac{\tau^3}{5!} \|(\tau\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^3 \boldsymbol{r}_e}{\partial t^3}\|_{L^2(L^2)}^2, \tag{5.59n}$$
- $$\sum_{k=0}^{n} \|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}} \rho_{\boldsymbol{s}}^k\|^2 \underset{(A1)}{\leq} \frac{\tau^3}{5!} \|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^3 \boldsymbol{s}_e}{\partial t^3}\|_{L^2(L^2)}^2 = \frac{\tau^3}{5!} \|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^4 \boldsymbol{r}_e}{\partial t^4}\|_{L^2(L^2)}^2, \tag{5.59o}$$
- $$\sum_{k=0}^{n} \|\Lambda^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{p}_{hI}^{k+\frac{1}{2}}\|^2 \leq \frac{T}{\tau} \max_{0\leq k\leq n} \|\Lambda^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{p}_{hI}^{k+\frac{1}{2}}\|^2 \leq \frac{4T}{\tau^3} \max_{0\leq k\leq n} \|\boldsymbol{p}_{hI}^{k+\frac{1}{2}}\|_{\boldsymbol{P}}^2, \tag{5.59p}$$
- $$\sum_{k=0}^{n} \|\Lambda^{-\frac{1}{2}} (\boldsymbol{\alpha}\underline{\mathrm{Div}} \rho_{\boldsymbol{u}}^k + \mathrm{Div} \rho_{\boldsymbol{v}}^k)\|^2 \underset{(A1)}{\leq} \frac{\tau^3}{5!} \|\Lambda^{-\frac{1}{2}} (\boldsymbol{\alpha}\underline{\mathrm{Div}} \frac{\partial^3 \boldsymbol{u}_e}{\partial t^3} + \mathrm{Div} \frac{\partial^3 \boldsymbol{v}_e}{\partial t^3})\|_{L^2(L^2)}^2, \tag{5.59q}$$
- $$\sum_{k=0}^{n} \|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}} \rho_{\boldsymbol{p}}^k\|^2 \underset{(A1)}{\leq} \frac{\tau^3}{5!} \|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^3 \boldsymbol{p}_e}{\partial t^3}\|_{L^2(L^2)}^2, \tag{5.59r}$$
- $$\sum_{k=0}^{n} \|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{p}_{hI}^{k+\frac{1}{2}}\|^2 \leq \frac{T}{\tau} \max_{0\leq k\leq J} \|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{p}_{hI}^k\|^2. \tag{5.59s}$$

Setzen wir nun (5.59) in (5.57) ein, so erhalten wir für eine generische Konstanten $\bar{C}_5$, die unabhängig von allen Parametern, der Netzwerkskala $n$, der Maschenweite $h$ und der Zeitschrittweite $\tau$ ist, die Abschätzung

$$\begin{aligned} \mu\tau^2 a_h(\boldsymbol{u}_{hI}^{n+1}, \boldsymbol{u}_{hI}^{n+1}) + \frac{\lambda\tau^2}{2} \|\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}_{hI}^{n+1}\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \|(\tau\bar{\mathcal{D}})^{\frac{1}{2}} (\boldsymbol{r}_{hI}^{k+1} - \boldsymbol{r}_{hI}^k)\|^2 + \frac{\tau^2}{2} \|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{s}_{hI}^{n+1}\|^2 \\ + \tau^3 \sum_{k=0}^{n} \|(-\mathcal{L}_{33})^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{p}_{hI}^{k+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{\tau^2}{2} \|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{p}_{hI}^{n+1}\|^2 \leq \mathrm{RS}_{(5.60)}, \end{aligned} \tag{5.60}$$

wobei

$$\mathrm{RS}_{(5.60)} = \bar{C}_5\Big(h^{2r}\tau^2 |||\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial \boldsymbol{r}_e}{\partial t}|||^2_{L^\infty(H^r)} + h^{2r}\mu\tau^2\|\boldsymbol{u}_e\|^2_{L^\infty(H^{r+1})} + h^{2r}\lambda\tau^2\|\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}_e\|^2_{L^\infty(H^r)}$$
$$+ h^{2r}\frac{\tau^2}{2}\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}_e\|^2_{L^\infty(H^r)} + h^{2r}\mu\tau^2\|\frac{\partial \boldsymbol{u}_e}{\partial t}\|^2_{L^2(H^{r+1})} + h^{2r}|||\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial \boldsymbol{r}_e}{\partial t}|||^2_{L^2(H^r)}$$
$$+ h^{2r}\tau^2|||\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_e}{\partial t^2}|||^2_{L^2(H^r)} + \tau^4\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^3 \boldsymbol{r}_e}{\partial t^3}\|^2_{L^2(L^2)} + h^{2r}\tau^2|||\bar{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial \boldsymbol{r}_e}{\partial t}|||^2_{L^2(H^r)} + \tau^6\|\bar{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^3 \boldsymbol{r}_e}{\partial t^3}\|^2_{L^2(L^2)}$$
$$+ \tau^6\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^4 \boldsymbol{r}_e}{\partial t^4}\|^2_{L^2(L^2)} + \tau^6\|\Lambda^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{\alpha}\underline{\mathrm{Div}}\frac{\partial^3 \boldsymbol{u}_e}{\partial t^3} + \mathrm{Div}\frac{\partial^3 \boldsymbol{v}_e}{\partial t^3})\|^2_{L^2(L^2)} + \tau^6\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^3 \boldsymbol{p}_e}{\partial t^3}\|^2_{L^2(L^2)}\Big)$$
$$+ \frac{4T}{\tau}2\mu\tau^3\frac{\epsilon_2}{2}\max_{0\le k\le J}\|\boldsymbol{u}^k_{hI}\|^2_{DG} + \frac{T}{\tau}(\frac{4\tau^3}{2\epsilon_1} + \frac{2\tau^3}{\epsilon_3} + \frac{2\tau^3}{\epsilon_4})\max_{0\le k\le J}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{s}^k_{hI}\|^2$$
$$+ \frac{\tau^3}{2\epsilon_5}\frac{4T}{\tau^3}\max_{0\le k\le n}\|\boldsymbol{p}^{k+\frac{1}{2}}_{hI}\|^2_{\boldsymbol{P}} + \frac{\tau^3}{2\epsilon_6}\frac{T}{\tau}\max_{0\le k\le J}\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}^k_{hI}\|^2.$$

Es seien $\tilde{\epsilon}_1 = 8T\epsilon_2, \tilde{\epsilon}_2 = 4T(\frac{4}{2\epsilon_1} + \frac{2}{\epsilon_3} + \frac{2}{\epsilon_4}), \tilde{\epsilon}_3 = \frac{4T}{2\epsilon_5}, \tilde{\epsilon}_4 = \frac{T}{\epsilon_6}$, dann erhalten wir auf ähnliche Weise wie (5.44) und (5.45) unter Verwendung des Maximums auf der rechten Seite

$$\max_{0\le k\le J}\frac{\tau^2}{4}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{s}^k_{hI}\|^2 + \frac{\mu\tau^2}{2}\max_{0\le k\le J}\|\boldsymbol{u}^k_{hI}\|^2_{DG} + \frac{\lambda\tau^2}{4}\max_{0\le k\le J}\|\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}^k_{hI}\|^2 + \frac{\tau^2}{2}\max_{0\le k\le J}\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}^k_{hI}\|^2$$
$$\le \bar{C}_5\Big(h^{2r}\tau^2|||\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial \boldsymbol{r}_e}{\partial t}|||^2_{L^\infty(H^r)} + h^{2r}\mu\tau^2\|\boldsymbol{u}_e\|^2_{L^\infty(H^{r+1})} + h^{2r}\lambda\tau^2\|\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}_e\|^2_{L^\infty(H^r)}$$
$$+ h^{2r}\frac{\tau^2}{2}\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}_e\|^2_{L^\infty(H^r)} + h^{2r}\mu\tau^2\|\frac{\partial \boldsymbol{u}_e}{\partial t}\|^2_{L^2(H^{r+1})} + h^{2r}|||\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial \boldsymbol{r}_e}{\partial t}|||^2_{L^2(H^r)}$$
$$+ h^{2r}\tau^2|||\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_e}{\partial t^2}|||^2_{L^2(H^r)} + \tau^4\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^3 \boldsymbol{r}_e}{\partial t^3}\|^2_{L^2(L^2)} + h^{2r}\tau^2|||\bar{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial \boldsymbol{r}_e}{\partial t}|||^2_{L^2(H^r)} + \tau^6\|\bar{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^3 \boldsymbol{r}_e}{\partial t^3}\|^2_{L^2(L^2)}$$
$$+ \tau^6\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^4 \boldsymbol{r}_e}{\partial t^4}\|^2_{L^2(L^2)} + \tau^6\|\Lambda^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{\alpha}\underline{\mathrm{Div}}\frac{\partial^3 \boldsymbol{u}_e}{\partial t^3} + \mathrm{Div}\frac{\partial^3 \boldsymbol{v}_e}{\partial t^3})\|^2_{L^2(L^2)} + \tau^6\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^3 \boldsymbol{p}_e}{\partial t^3}\|^2_{L^2(L^2)}\Big)$$
$$+ (\underline{C}_{ah}^{-1}\overline{C}_{DG,h} + 3)\Big(\tilde{\epsilon}_1\frac{\mu\tau^2}{2}\max_{0\le k\le J}\|\boldsymbol{u}^k_{hI}\|^2_{DG} + \tilde{\epsilon}_2\max_{0\le k\le J}\frac{\tau^2}{4}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{s}^{n+1}_{hI}\|^2 + \tilde{\epsilon}_3\max_{0\le k\le n}\|\boldsymbol{p}^{k+\frac{1}{2}}_{hI}\|^2_{\boldsymbol{P}}$$
$$+ \tilde{\epsilon}_4\frac{\tau^2}{2}\max_{0\le k\le J}\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}^k_{hI}\|^2\Big). \tag{5.61}$$

Setzen wir in obiger Ungleichung dann noch $\tilde{\epsilon}_1 = \tilde{\epsilon}_2 = \tilde{\epsilon}_4 = \frac{1}{2}(\underline{C}_{ah}^{-1}\overline{C}_{DG,h} + 3)^{-1}$ und $\tilde{\epsilon}_5 = \tilde{\epsilon}_3(\underline{C}_{ah}^{-1}\overline{C}_{DG,h} + 3)$ und verwenden die Definition der Norm (5.2), so folgt

$$\max_{0\le k\le J}\frac{\tau^2}{4}\|\bar{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{s}^k_{hI}\|^2 + \frac{\mu\tau^2}{2}\max_{0\le k\le J}\|\boldsymbol{u}^k_{hI}\|^2_{DG} + \frac{\lambda\tau^2}{4}\max_{0\le k\le J}\|\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}^k_{hI}\|^2 + \frac{\tau^2}{2}\max_{0\le k\le J}\|(-\mathcal{D}_{33})^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}^k_{hI}\|^2$$
$$- 2\tilde{\epsilon}_5\max_{0\le k\le n}\|\boldsymbol{p}^{k+\frac{1}{2}}_{hI}\|^2_{\boldsymbol{P}} \le \quad \bar{C}_5\Big(h^{2r}\|(\frac{\partial \boldsymbol{u}_e}{\partial t};\frac{\partial \boldsymbol{v}_e}{\partial t})\|^2_{\boldsymbol{U}^\infty_r\times\boldsymbol{V}^\infty_r} + h^{2r}\|(\boldsymbol{u}_e;\boldsymbol{v}_e)\|^2_{\boldsymbol{U}^\infty_r\times\boldsymbol{V}^\infty_r}$$
$$+ h^{2r}\tau^2\|\boldsymbol{p}_e\|^2_{\boldsymbol{P}^\infty_r} + h^{2r}\|(\frac{\partial \boldsymbol{u}_e}{\partial t};\frac{\partial \boldsymbol{v}_e}{\partial t})\|^2_{\boldsymbol{U}^2_r\times\boldsymbol{V}^2_r} + \tau^2h^{2r}\|(\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_e}{\partial t^2};\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}_e}{\partial t^2})\|^2_{\boldsymbol{U}^2_r\times\boldsymbol{V}^2_r}$$
$$+ \tau^4\|(\frac{\partial^3 \boldsymbol{u}_e}{\partial t^3};\frac{\partial^3 \boldsymbol{v}_e}{\partial t^3})\|^2_{\boldsymbol{U}^2_0\times\boldsymbol{V}^2_0} + \tau^6\|(\frac{\partial^4 \boldsymbol{u}_e}{\partial t^4};\frac{\partial^4 \boldsymbol{v}_e}{\partial t^4})\|^2_{\boldsymbol{U}^2_0\times\boldsymbol{V}^2_0} + \tau^6\|\frac{\partial^3 \boldsymbol{p}}{\partial t^3}\|^2_{\boldsymbol{P}^2_0}\Big). \tag{5.62}$$

Schließlich ziehen wir noch auf beiden Seiten der obigen Ungleichung die Wurzel, woraus sich (5.55) ergibt. □

**Satz 5.11.** *Es sei die Hypothese 5.2 erfüllt. Dann gilt:*

$$\begin{aligned}\max_{0\le n\le J-1} \|\boldsymbol{p}_h^{n+\frac{1}{2}} - \boldsymbol{p}_e^{n+\frac{1}{2}}\|_{\boldsymbol{P}} \le C_p\Big(& h^r\|(\frac{\partial \boldsymbol{u}_e}{\partial t};\frac{\partial \boldsymbol{v}_e}{\partial t})\|_{\boldsymbol{U}_r^\infty\times \boldsymbol{V}_r^\infty} + h^r\|(\boldsymbol{u}_e;\boldsymbol{v}_e)\|_{\boldsymbol{U}_r^\infty\times \boldsymbol{V}_r^\infty} + h^r\|\boldsymbol{p}_e\|_{\boldsymbol{P}_r^\infty}\\ &+ h^r\|(\frac{\partial \boldsymbol{u}_e}{\partial t};\frac{\partial \boldsymbol{v}_e}{\partial t})\|_{\boldsymbol{U}_r^2\times \boldsymbol{V}_r^2} + h^r\|(\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_e}{\partial t^2};\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}_e}{\partial t^2})\|_{\boldsymbol{U}_r^2\times \boldsymbol{V}_r^2} + h^r\|\frac{\partial \boldsymbol{p}_e}{\partial t}\|_{\boldsymbol{P}_r^2}\\ &+ \tau^2\|(\frac{\partial^3 \boldsymbol{u}_e}{\partial t^3};\frac{\partial^3 \boldsymbol{v}_e}{\partial t^3})\|_{\boldsymbol{U}_0^2\times \boldsymbol{V}_0^2} + \tau^3\|(\frac{\partial^4 \boldsymbol{u}_e}{\partial t^4};\frac{\partial^4 \boldsymbol{v}_e}{\partial t^4})\|_{\boldsymbol{U}_0^2\times \boldsymbol{V}_0^2} + \tau^3\|\frac{\partial^3 \boldsymbol{p}}{\partial t^3}\|_{\boldsymbol{P}_0^2}\Big),\end{aligned} \tag{5.63}$$

*wobei $C_p$ eine Konstante unabhängig von allen Parametern, der Netzwerkskala $n$, der Maschenweite $h$ und der Zeitschrittweite $\tau$ ist.*

***Beweis.*** Nach der Definition von $\|(\cdot;\cdot)\|_{\boldsymbol{P}}^2$ sowie (4.26), Lemma 5.3 und (A5) haben wir

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{p}_{eI}^{n+\frac{1}{2}}\|_{\boldsymbol{P}}^2 &= \frac{\tau^2}{4}\|\Lambda^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}_{eI}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \le C\frac{\tau^2}{4}h^{2r}\|\Lambda^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}_e^{n+\frac{1}{2}}\|_{H^r}^2 \le C\frac{\tau^2}{4}h^{2r}\frac{\tau}{4}\|\Lambda^{\frac{1}{2}}\frac{\partial \boldsymbol{p}_{eI}}{\partial t}\|_{L^2(H^r)}^2\\ &= Ch^{2r}\frac{\tau^3}{16}\|\frac{\partial \boldsymbol{p}_e}{\partial t}\|_{\boldsymbol{P}_r^2}^2.\end{aligned} \tag{5.64}$$

Die Dreiecksungleichung liefert uns

$$\|\boldsymbol{p}_h^{n+\frac{1}{2}} - \boldsymbol{p}_e^{n+\frac{1}{2}}\|_{\boldsymbol{P}} \le \|\boldsymbol{p}_{eI}^{n+\frac{1}{2}}\|_{\boldsymbol{P}} + \|\boldsymbol{p}_{hI}^{n+\frac{1}{2}}\|_{\boldsymbol{P}}. \tag{5.65}$$

Wir multiplizieren (5.55) mit $C_4$ aus (5.50) und setzen $\bar{\epsilon}_0 := \frac{1}{2C_4}$. Setzen wir dann die entstehende Gleichung in (5.50) ein, so erhalten für eine generische Konstanten $\bar{C}$, die unabhängig von allen Parametern, der Netzwerkskala $n$, der Maschenweite $h$ und der Zeitschrittweite $\tau$ ist, die Abschätzung

$$\begin{aligned}\max_{0\le k\le J-1} \|\boldsymbol{p}_{hI}^{k+\frac{1}{2}}\|_{\boldsymbol{P}} \le \quad \bar{C}\Big(& h^r\|(\frac{\partial \boldsymbol{u}_e}{\partial t};\frac{\partial \boldsymbol{v}_e}{\partial t})\|_{\boldsymbol{U}_r^\infty\times \boldsymbol{V}_r^\infty} + h^r\|(\boldsymbol{u}_e;\boldsymbol{v}_e)\|_{\boldsymbol{U}_r^\infty\times \boldsymbol{V}_r^\infty} + h^r\tau\|\boldsymbol{p}_e\|_{\boldsymbol{P}_r^\infty}\\ &+ h^r\|(\frac{\partial \boldsymbol{u}_e}{\partial t};\frac{\partial \boldsymbol{v}_e}{\partial t})\|_{\boldsymbol{U}_r^2\times \boldsymbol{V}_r^2} + \tau h^r\|(\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_e}{\partial t^2};\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}_e}{\partial t^2})\|_{\boldsymbol{U}_r^2\times \boldsymbol{V}_r^2}\\ &+ \tau^2\|(\frac{\partial^3 \boldsymbol{u}_e}{\partial t^3};\frac{\partial^3 \boldsymbol{v}_e}{\partial t^3})\|_{\boldsymbol{U}_0^2\times \boldsymbol{V}_0^2} + \tau^3\|(\frac{\partial^4 \boldsymbol{u}_e}{\partial t^4};\frac{\partial^4 \boldsymbol{v}_e}{\partial t^4})\|_{\boldsymbol{U}_0^2\times \boldsymbol{V}_0^2} + \tau^3\|\frac{\partial^3 \boldsymbol{p}}{\partial t^3}\|_{\boldsymbol{P}_0^2}\Big).\end{aligned} \tag{5.66}$$

Einsetzen von (5.66) und (5.64) in (5.65) liefert schließlich (5.63). □

# 6 Iterative Lösungsverfahren

In den folgenden zwei Abschnitten wird ein Überblick über stationäre und Krylov Verfahren gegeben, der sich im Wesentlichen an den Quellen [59, 47, 7] orientiert.

## 6.1 Stationäre Verfahren

Wir betrachten das lineare System

$$Ax = b, \tag{6.1}$$

wobei $A$ eine $n \times n$ reelle Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$ ist. Wir suchen nach einem Vektor $x \in \mathbb{R}^n$, der (6.1) erfüllt.

**Definition 6.1.** *[7, Definition 5.4 ]*
• *Ein Verfahren erster Ordnung zur Lösung von (6.1) ist definiert durch*

$$\tilde{M}d^{k+l} = -\alpha_k r^k, \qquad x^{k+1} = x^k + d^{k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

*wobei $r_k = Ax_k - b$, $\{\alpha_k\}$ eine Folge von gegebenen Parametern ist, $x^0$ gegeben ist und $\tilde{M}$ eine nicht-singuläre Matrix ist. Wenn $\alpha_k = \alpha$ für alle $k$ ist, dann heißt die Methode* ***stationär****.*
• *Ein Verfahren zweiter Ordnung ist definiert durch*

$$\tilde{M}s^k = r^k, \qquad x^{k+1} = \alpha_k x^k + (1 - \alpha_k)x^{k-1} - \beta_k s^k, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

*wobei $\{\alpha_k\}, \{\beta_k\}$ Folgen von Parametern sind und $\alpha_0 = 1$ gilt.*

**Bemerkung 6.2.** *[7, Remark 5.7] Für die stationäre Methode erster Ordnung haben wir*

$$x^{k+1} = Gx^k + f, \tag{6.2}$$

*wobei $G$ **die Iterationsmatrix** heißt und*

$$G = I - M^{-1}A, \qquad f = M^{-1}b, \qquad M = \alpha^{-1}\tilde{M},$$

*gilt. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir $\alpha = 1$ setzen.*

Die Iteration (6.2) kann als Technik (lineare Fixpunktiteration) zur Lösung des Systems angesehen werden

$$(I - G)x = f.$$

Da $G$ die Form $G = I - M^{-1}A$ hat, kann dieses System umgeschrieben werden in der Form

$$M^{-1}Ax = M^{-1}b. \tag{6.3}$$

Das obige System (6.3), das dieselbe Lösung wie das ursprüngliche System (6.1) hat, wird ein vorkonditioniertes System genannt, wobei $M$ Vorkonditionierungsmatrix oder Vorkonditionierer genannt wird. Im Folgenden seien die Vorkonditionierungsmatrizen einiger klassischer stationärer Iterationsverfahren erster Ordnung-Jacobi, Gauss-Seidel, SOR (Successive Over Relaxation) und SSOR (Symmetric SOR) angegeben:

$$M_{JA} = D, \tag{6.4a}$$
$$M_{GS} = D + L, \tag{6.4b}$$
$$M_{SOR} = \omega^{-1}(D + \omega L), \tag{6.4c}$$
$$M_{SSOR} = \omega^{-1}(2-\omega)^{-1}(D + \omega L)D^{-1}(D + \omega R). \tag{6.4d}$$

wobei $\omega$ eine Relaxationsparameter ist und $D$ die Diagonale von A, $L$ das strikte untere Dreieck und $R$ das strikte obere Dreieck von A, bzw. die daraus gebildeten Matrizen, bezeichnen.

**Satz 6.3.** *[59, Theorem 4.1 ] Sei $G$ eine quadratische Matrix mit $\rho(G) := |\lambda_{\max}| < 1$. Dann ist $I-G$ eine nicht-singuläre Matrix und die Iteration (6.2) konvergiert für jedes $f$ und $x^0$. Umgekehrt, wenn die Iteration (6.2) für beliebige $f$ und $x^0$ konvergiert, dann ist $\rho(G) < 1$.*

## 6.2 Krylov Verfahren

Seien $A$ eine $n \times n$ reelle Matrix und $\mathcal{K}_m$ und $\mathcal{L}_m$ zwei $m$-dimensionale Unterräume des $\mathbb{R}^n$. Eine Projektionstechnik auf den Unterraum $\mathcal{K}_m$ und orthogonal zu $\mathcal{L}_m$ ist ein Prozess, der eine approximierte Lösung $\tilde{x}$ zu $x$ aus (6.1) findet, sodass $\tilde{x} \in \mathcal{K}_m$ und der neue Residuenvektor $(b - A\tilde{x})$ orthogonal zu $\mathcal{L}_m$ ist:

$$\text{Gesucht} \qquad \tilde{x} \in \mathcal{K}_m, \quad \text{sodass} \qquad b - A\tilde{x} \perp \mathcal{L}_m. \tag{6.5}$$

Es gibt zwei große Klassen von Projektionsverfahren: orthogonale und schräge (oblique). Bei einer orthogonalen Projektionstechnik gilt $\mathcal{K}_m = \mathcal{L}_m$. Bei einer schrägen Projektionsmethode unterscheidet sich $\mathcal{L}_m$ von $\mathcal{K}_m$ und kann völlig unabhängig von $\mathcal{K}_m$ sein.

**Satz 6.4.** *[59, Proposition 5.2] Es seien $A$ symmetrisch positiv definit und $\mathcal{K}_m = \mathcal{L}_m$. Dann ist ein Vektor $\tilde{x}$ genau dann das Ergebnis einer (orthogonalen) Projektionsmethode auf $\mathcal{K}_m$ mit Startvektor $x_0$, wenn er den Fehler in der A-Norm über $x_0 + \mathcal{K}_m$ minimiert, d.h.,*

$$E(\tilde{x}) = \min_{x^* \in x_0 + \mathcal{K}_m} E(x^*), \qquad E(x^*) = \|x^* - x\|_A.$$

**Satz 6.5.** *[59, Proposition 5.3] Es seien $A$ eine beliebige quadratische Matrix und $\mathcal{K}_m = A\mathcal{L}_m$. Dann ist ein Vektor $\tilde{x}$ genau dann das Ergebnis einer (schrägen) Projektionsmethode auf $\mathcal{K}_m$ orthogonal zu $\mathcal{L}_m$ mit Startvektor $x_0$, wenn er den Residualvektor $b - Ax$ in der 2-Norm über $x \in x_0 + \mathcal{K}_m$ minimiert, d.h.,*

$$R(\tilde{x}) = \min_{x \in x_0 + \mathcal{K}_m} R(x), \qquad R(x) = \|b - Ax\|_2.$$

**Satz 6.6.** *[59, Proposition 5.6] Angenommen, $\mathcal{K}_m$ ist Invariante unter $A$ ( $A\mathcal{K}_m \subset \mathcal{K}_m$), $x_0 = 0$ und $b \in \mathcal{K}_m$. Dann ist die approximierte Lösung einer beliebigen (schrägen oder orthogonalen) Projektionsmethode auf $\mathcal{K}_m$ exakt.*

**Definition 6.7.** *Ein Krylov-Unterraumverfahren ist ein Verfahren, für das der Unterraum $\mathcal{K}_m$ als Krylov-Unterraum gewählt wird, d.h.,*

$$\mathcal{K}_m(A, r_0) = span\{r_0, Ar_0, A^2 r_0, \ldots, A^{m-1} r_0\}, \qquad r_0 = b - Ax_0.$$

Um eine Orthonormalbasis des Krylov-Raums $\mathcal{K}_m$ zu einem regulären System zu konstruieren, verwendet man z.B. den folgenden Algorithmus.

**Algorithmus 1** Modifiziertes Arnoldi-Verfahren (Gram-Schmidt) [59, ALGORITHM 6.2]

**1:** Wähle einen Startvektor $v_1$ mit $\|v_1\|_2 = 1$
**2:** For $j = 1, 2, \ldots, m$ Do:
**3:** Compute $w_j := Av_j$
**4:** For $i = 1, \ldots, j$ Do:
**5:** $h_{ij} = (w_j, v_i)$
**6:** $w_j := w_j - h_{ij} v_i$
**7:** EndDo,
**8:** $h_{j+1,j} = \|w_j\|_2$. If $h_{j+1,j} = 0$ Stop,
**9:** $v_{j+1} = w_j / h_{j+1,j}$
**10:** EndDo,

**Satz 6.8.** *[59, Proposition 6.4] Unter der Annahme, dass Algorithmus 1 vor dem m-ten Schritt nicht stoppt, bilden die Vektoren $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ eine Orthonormalbasis des Krylov-Unterraums*

$$\mathcal{K}_m = span\{v_1, Av_1, \ldots, A^{m-1} v_1\}.$$

Wenn $A$ symmetrisch ist, führt dies zu folgender Form des modifizierten Arnoldi-Verfahrens (Gram-Schmidt).

**Algorithmus 2** Lanczos Algorithmus [59, ALGORITHM 6.15]

**1:** Whälen einen Startvektor $v_1$ mit $\|v_1\|_2 = 1$. Setze $\beta_1 \equiv 0$, $v_0 \equiv 0$,
**2:** For $j = 1, 2, \ldots, m$ Do:
**3:** $\quad w_j := Av_j - \beta_j v_{j-1}$
**4:** $\quad \alpha_j := (w_j, v_j)$
**5:** $\quad w_j := w_j - \alpha_j v_j$
**6:** $\quad \beta_{j+1} = \|w_j\|_2$. If $\beta_{j+1} = 0$ Stop,
**7:** $\quad v_{j+1} = w_j / \beta_{j+1}$
**8:** EndDo.

**Lemma 6.9.** *[47, Lemma 6.10.] Die durch*

$$H_k := V_k^T A V_k \in \mathbb{R}^{k \times k}, \tag{6.6}$$

*definierte Matrix ist eine obere Hessenberg-Matrix mit Einträgen*

$$(H_k)_{ij} := \begin{cases} h_{ij} & \text{für} \quad i \leq j+1, \\ 0 & \text{für} \quad i > j+1, \end{cases} \tag{6.7}$$

*falls $V_k := [v_1, v_2, \ldots, v_k]$ und $h_{ij}$ mit dem Arnoldi-Verfahren (Algorithmus 1) berechnet wurden.*

**Lemma 6.10.** *[47, Lemma 6.11.] Die durch*

$$\bar{H}_k := \begin{pmatrix} & H_k & \\ 0 \cdots 0 & & h_{k+1,k} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(k+1) \times k}, \tag{6.8}$$

*definierte Matrix (mit $H_k$ aus(6.7)) genügt der Gleichung*

$$AV_k = V_{k+1} \bar{H}_k.$$

**Definition 6.11.** *[47, Definition 3.16.] Eine Matrix $G_{ij} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ der Gestalt*

$$G_{ij} = (G_{ij}(c,s))_{kl} := \begin{cases} c & \text{für} \quad k = l \in \{i, j\}, \\ s & \text{für} \quad k = j, l = i, \\ -s & \text{für} \quad k = i, l = j, \\ 1 & \text{für} \quad k = l \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i, j\}, \\ 0 & \quad \text{sonst}, \end{cases} \tag{6.9}$$

*mit $c^2 + s^2 = 1$ heißt **Givens-Rotation**. Für $i = j$ wird formal $G_{ij} = I_m$ gesetzt.*

Die Generalized-Minimum-Residual-Methode (GMRES) ist eine Projektionsmethode, die auf der Wahl $\mathcal{K} = \mathcal{K}_m$ und $\mathcal{L} = A\mathcal{K}_m$ basiert, wobei $\mathcal{K}_m$ der $m$-te Krylov-Unterraum zu $v_1 = \frac{r_0}{\|r_0\|_2}$ ist. Im GMRES Algorithmus werden wir zunächst durch Anwendung des modifizierten Arnoldi-Verfahrens eine Orthonormalbasis des Krylov-Unterraums erzeugen. Dann, um $R(\tilde{x})$ aus Satz 6.5 zu berechnen, werden wir eine einfache Implementierung betrachten. Es folgt ein Kurzüberblick über die einzelnen Schritte. Die Details kann man z.B. in [47, 6.2 GMRES für reguläre Systeme] oder [54, 4.3.2.4 Das GMRES-Verfahren] finden.

- Da $x \in x_0 + \mathcal{K}_k$ ist, gibt es ein $y$, sodass $x = x_0 + V_k y$.
- Wir schreiben $\|b - Ax\|$ in der Form $\|\|r_0\|e_1 - \bar{H}y\|$, wobei $e_1 = (1, 0, \cdots, 0)^T \in \mathbb{R}^{k+1}$, $\bar{H}_k$ aus (6.8) und $\|r_0\| = \|b - Ax_0\|$ sind.
- Durch Anwendung der Givens-Rotationen auf $\|r_0\|e_1$ und $\bar{H}$ bekommen wir

  $$\|\|r_0\|e_1 - \bar{H}y\|^2 = \|\bar{z}^k - \bar{R}_k y\|^2 = \|z^k - R_k y\|^2 + |\zeta|^2, \quad \bar{z}^k = \begin{pmatrix} z^k \\ \zeta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k+1}, \bar{R}^k = \begin{pmatrix} R_k \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

  wobei $R_k \in \mathbb{R}^{k \times k}$ eine oberen Dreiecksmatrix ist.
- Schließlich durch Rückwärtssubstitution rechnen wir $y$ aus $z^k = R_k y$.

Die Endfassung des GMRES-Verfahrens lautet:

**Algorithmus 3** GMRES-Verfahren [47, Algorithmus 6.12. (GMRES-Verfahren) ]

Wähle Startvektor $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und Abbruchparameter $\epsilon \geq 0$,
Setze $r_0 = b - Ax_0, \beta := \|r_0\|, v_1 := r_0/\beta$ und $z_1 := \beta$,
For $k = 1, 2, \ldots$
  % Modifizierter Arnoldi-Algorithmus
  $w_k := Av_k$;
  For $i = 1 : k$
    $h_{ik} := (v_i, w_k)$;
    $w_k := w_k - h_{ik} v_i$;
  End
  $h_{k+1,k} := \|w_k\|$;
  $v_{k+1} := w_k / h_{k+1,k}$;
  % Anwendung von Givens-Rotationen,
  For $i = 1 : k - 1$
    $\begin{pmatrix} h_{ik} \\ h_{i+1,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_i & s_i \\ -s_i & c_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{ik} \\ h_{i+1,k} \end{pmatrix}$
  End
  $\nu := \sqrt{h_{kk}^2 + h_{k+1,k}^2}$;
  $c_k := h_{kk}/\nu$;
  $s_k := h_{k+1,k}/\nu$;
  $h_{kk} := \nu$;
  $h_{k+1,k:=0}$;
  $z_{k+1} := -s_k z_k$;
  $z_k := c_k z_k$;
  % Abbruchkriterium,
  If $|z_{k+1}|/\beta \leq \epsilon$: STOP
END
% Rückwärtssubstitution zur Berechnung von $y_k$,
$y_k := z_k / h_{kk}$;
For $i = (k-1) : -1 : 1$
  $y_i = (z_i - \sum_{j=i+1}^{k} h_{ij} y_j)/h_{ii}$;
END
% Berechnung der Näherungslösung $x_k$,
$x_k := x_0 + \sum_{i=1}^{k} y_i v_i$;

Das GMRES-Verfahren verwendet man für allgemeine reguläre Systeme. Es gibt auch noch das MINRES (Minimal Residual)-Verfahren, das man für symmetrische Systeme verwenden kann. Beim MINRES Verfahren verwendet man den Lanczos Algorithmus 2 und im Vergleich zu $H_k$ in (6.7) bekommt man in diesem Fall eine Tridiagonalmatrix. Die anderen Details kann man z.B in [47, 6.4 MINRES für symmetrische Systeme] finden. Das MINRES-Verfahen wird durch folgenden Algorithmus realisiert:

**Algorithmus 4** MINRES-Verfahen [47, Algorithmus 6.19. (MINRES-Verfahren) ]

Wähle Startvektor $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und Abbruchparameter $\epsilon \geq 0$,
Setze $k := 0, r_0 := b - Ax_0, \zeta_0 := \|r_0\|, \zeta = \zeta_0, v := 0, v_{new} := r_0/\zeta_0$ und $\beta_{new} := 0$.
Setze $c := 1, s := 0, c_{new} := 1, s_{new} := 0$.
Setze $p := 0, p_{new} := 0$ und $x := x_0$.
For $k = 1, 2, \dots$
    % Lanczos-Algorithmus zur Berechnung von $\bar{T}_k$,
    $\beta := \beta_{new}$;
    $v_{old} := v$;
    $v := v_{new}$;
    $v_{new} := Av - \beta v_{old}$;
    $\alpha := (v_{new}, v)$;
    $v_{new} := v_{new} - \alpha v$;
    $\beta_{new} := \|v_{new}\|$;
    $v_{new} := v_{new}/\beta_{new}$;
  % Anwendung von Givens-Rotationen,
    $c_{old} := c$;
    $s_{old} := s$;
    $c := c_{new}$;
    $s := s_{new}$;
    $\rho_1 := s_{old}\beta$;
    $\rho_2 := cc_{old}\beta + s\alpha$;
    $\tilde{\rho}_3 := c\alpha - sc_{old}\beta$;
    $\nu := \sqrt{\tilde{\rho}_3^2 + \beta_{new}^2}$;
    $c_{new} := \tilde{\rho}_3/\nu$;
    $s_{new} := \beta_{new}/\nu$;
    $\rho_3 := \nu$;
    $p_{old} := p$;
    $p := p_{new}$;
    $p_{new} := (v - \rho_1 p_{old} - \rho_2 p)/\rho_3$;
    % Berechnnng der neuen Iterierten $x_k$
    $x := x + c_{new}\zeta p_{new}$;
    % Abbruchkriterium,
    $\zeta := -s_{new}\zeta$;
    If $|\zeta|/\zeta_0 \leq \epsilon$: STOP
END

Um die Effizienz und Robustheit eines iterativen Verfahrens zur Lösung eines linearen Gleichungssystems (6.1) zu verbessern, wendet man die iterative Methode üblicherweise auf ein vorkonditioniertes System an. Es seien $P_L, P_R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zwei reguläre Matrizen, dann ist (6.1) äquivalent zu jedem der folgenden Systeme [47]:

$$\begin{aligned} P_L^{-1}Ax &= P_L^{-1}b && \text{(Links-Vorkonditionierung)},\\ AP_R^{-1}y &= b, \quad x = P_R^{-1} && \text{(Rechts-Vorkonditionierung)},\\ P_L^{-1}AP_R^{-1}y &= P_L^{-1}b, \quad x = P_R^{-1} && \text{(zweiseitige-Vorkonditionierung)}. \end{aligned}$$

## 6.3 Iterative Verfahren für das quasi-statische MPET-Problem

Der Operator (3.35) definiert eine doppeltes Sattelpunktproblem und kann nach entsprechender Permutation der Variablen-Blöcke in folgender Form geschrieben werden

$$\tilde{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2^T & 0 \\ B_2 & -C & B_1 \\ 0 & B_1^T & A_1 \end{bmatrix}. \tag{6.10}$$

Diese Form passt zur Definition eines Multi-Sattelpunktoperators, siehe [62] wo block-diagonale Schur-Komplement Vorkonditionierer für Multi-Sattelpunktprobleme von block-tridiagonaler Form analysiert werden. Wir werden eine kombinierte Augmentations (Augmented-Lagrangian-Uzawa)- und Splitting (Block-Gauß-Seidel)-Technik verwenden, um eine entkoppelte Methode für lineare Systeme mit einem Operator (Matrix) der kanonischen Form (3.35) zu konstruieren. Aus Gründen der besseren Lesbarkeit verwenden wir die Indizes $u$ und $v$ statt 1 und 2 in (6.10).

### 6.3.1 Die Fixed-Stress-Split iterative Methode

Für jeden Operator $\Lambda_L : \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{P}^*$, lässt sich $\tilde{\mathcal{A}}$ wie folgt zerlegen:

$$\tilde{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} A_v & B_v^T & 0 \\ B_v & -C - \Lambda_L & 0 \\ 0 & B_u^T & A_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_L & B_u \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.11}$$

Wendet man das Block-Gauß-Seidel-Verfahren auf das obige System an, so erhalten wir

$$\begin{bmatrix} A_v & B_v^T & 0 \\ B_v & -C - \Lambda_L & 0 \\ 0 & B_u^T & A_u \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}^{k+1} \\ \boldsymbol{p}^{k+1} \\ \boldsymbol{u}^{k+1} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_L & B_u \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}^{k} \\ \boldsymbol{p}^{k} \\ \boldsymbol{u}^{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{g} \\ \boldsymbol{f} \end{pmatrix}, \tag{6.12}$$

oder äquivalent dazu,

$$\begin{bmatrix} A_v & B_v^T & 0 \\ B_v & -C - \Lambda_L & 0 \\ 0 & B_u^T & A_u \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}^{k+1} \\ \boldsymbol{p}^{k+1} \\ \boldsymbol{u}^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{g} \\ \boldsymbol{f} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_L & B_u \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}^{k} \\ \boldsymbol{p}^{k} \\ \boldsymbol{u}^{k} \end{pmatrix}. \tag{6.13}$$

Dies ist (eine Blockvariante von) der Fixed-Stress-Methode. In [45] wurde eine parameter-robuste Konvergenzanalyse dieser Methode für die Wahl

$$\Lambda_L = L \begin{bmatrix} I & I & \dots & I \\ I & \ddots & & I \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ I & I & \dots & I \end{bmatrix}, \tag{6.14}$$

präsentiert, wobei $L \geq \frac{1}{\lambda + c_K^2}$ und $I$ den Identitätsoperator und $c_K$ die Konstante in folgender Abschätzung bezeichnen:

$$\|\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{w})\| \geq c_k \|\mathrm{div}\ \boldsymbol{w}\| \quad \text{für alle } \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{U}. \tag{6.15}$$

Die Abschätzung (6.15) gilt zum Beispiel für $c_k = 1/\sqrt{d}$, wobei $d$ die Raumdimension ist.

### 6.3.2 Methoden vom Uzawa-Typ im Gauss-Seidel-Rahmen

Für einen beliebigen positiv definiten Operator $M : \boldsymbol{P}^* \to \boldsymbol{P}$, betrachten wir das äquivalente augmentierte MPET-System

$$\bar{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{u} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_v + B_v^T M B_v & B_v^T - B_v^T M C & B_v^T M B_u \\ -B_v & C & -B_u \\ 0 & B_u^T & A_u \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_v^T M \boldsymbol{g} \\ -\boldsymbol{g} \\ \boldsymbol{f} \end{pmatrix}. \tag{6.16}$$

Dann lässt sich der Operator $\bar{\mathcal{A}}$ für einen beliebigen positiv definiten Operator $S : \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{P}^*$ auf folgende Art aufspalten:

$$\bar{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} A_v + B_v^T M B_v & 0 & 0 \\ -B_v & S & 0 \\ 0 & B_u^T & A_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B_v^T - B_v^T M C & B_v^T M B_u \\ 0 & -S + C & -B_u \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.17}$$

Wendet man die block Gauss-Seidel-Methode auf das entsprechende System an, so erhält man

$$\begin{bmatrix} A_v + B_v^T M B_v & 0 & 0 \\ -B_v & S & 0 \\ 0 & B_u^T & A_u \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}^{k+1} \\ \boldsymbol{p}^{k+1} \\ \boldsymbol{u}^{k+1} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B_v^T - B_v^T M C & B_v^T M B_u \\ 0 & -S + C & -B_u \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}^{k} \\ \boldsymbol{p}^{k} \\ \boldsymbol{u}^{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_v^T M \boldsymbol{g} \\ -\boldsymbol{g} \\ \boldsymbol{f} \end{pmatrix},$$

beziehungsweise

$$\begin{bmatrix} A_v + B_v^T M B_v & 0 & 0 \\ -B_v & S & 0 \\ 0 & B_u^T & A_u \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}^{k+1} \\ \boldsymbol{p}^{k+1} \\ \boldsymbol{u}^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_v^T M \boldsymbol{g} \\ -\boldsymbol{g} \\ \boldsymbol{f} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & B_v^T - B_v^T M C & B_v^T M B_u \\ 0 & -S + C & -B_u \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}^{k} \\ \boldsymbol{p}^{k} \\ \boldsymbol{u}^{k} \end{pmatrix}. \tag{6.18}$$

Das System (6.18) lässt sich auch in schwacher Form (unter Verwendung von Bilinearformen) schreiben:

**Algorithmus 5** Entkoppeltes iteratives Schema für die $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{p},\boldsymbol{u})$-Formulierung des MPET-Systems

**Step a:** Angegeben $\boldsymbol{p}^k$ und $\boldsymbol{u}^k$, lösen wir zuerst für $\boldsymbol{v}^{k+1}$,

$$(\mathbf{R}_v\boldsymbol{v}^{k+1},\boldsymbol{z})+(M\mathrm{Div}\boldsymbol{v}^{k+1},\mathrm{Div}\boldsymbol{z})=-(M\boldsymbol{g},\mathrm{Div}\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{p}^k,\mathrm{Div}\boldsymbol{z})-(M(\Lambda_1+\Lambda_2)\boldsymbol{p}^k,\mathrm{Div}\boldsymbol{z})$$
$$-(M\underline{\mathrm{Div}}\boldsymbol{u}^k,\mathrm{Div}\boldsymbol{z}). \tag{6.19}$$

**Step b:** Angegeben $\boldsymbol{u}^k$ und $\boldsymbol{v}^{k+1}$, lösen wir für $\boldsymbol{p}^{k+1}$,

$$(S\boldsymbol{p}^{k+1},\boldsymbol{q})=-(\boldsymbol{g},\boldsymbol{q})+(S\boldsymbol{p}^k,\boldsymbol{q})-((\Lambda_1+\Lambda_2)\boldsymbol{p}^k,\boldsymbol{q}))-(\underline{\mathrm{Div}}\boldsymbol{u}^k,\boldsymbol{q})-(\mathrm{Div}\boldsymbol{v}^{k+1},\boldsymbol{q}). \tag{6.20}$$

**Step c:** Angegeben $\boldsymbol{p}^{k+1}$ und $\boldsymbol{v}^{k+1}$, lösen wir für $\boldsymbol{u}^{k+1}$,

$$(\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}^{k+1}),\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{w}))+\lambda(\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}^{k+1},\mathrm{div}\ \boldsymbol{w})=(\boldsymbol{f},\boldsymbol{w})+(\boldsymbol{p}^{k+1},\underline{\mathrm{Div}}\boldsymbol{w}). \tag{6.21}$$

---

Es seien

$$\boldsymbol{e}_u^k = \boldsymbol{u}^k-\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{U}, \tag{6.22a}$$
$$\boldsymbol{e}_{v_i}^k = \boldsymbol{v}_i^k-\boldsymbol{v}_i\in\boldsymbol{V}_i,\quad i=1,\dots,n, \tag{6.22b}$$
$$e_{p_i}^k = p_i^k-p_i\in P_i,\quad i=1,\dots,n, \tag{6.22c}$$

die von Algorithmus 5 in der $k$-ten Iteration erzeugten, zu $\boldsymbol{u}^k$, $\boldsymbol{v}_i^k$, $p_i^k$, $i=1,\dots,n$, gehörigen, Fehler. Betrachten wir zunächst die folgenden Fehlergleichungen

$$(\mathbf{R}_v\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1},\boldsymbol{z})-(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^k,\mathrm{Div}\boldsymbol{z})+(M\underline{\mathrm{Div}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^k,\mathrm{Div}\boldsymbol{z})+(M\mathrm{Div}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1},\mathrm{Div}\boldsymbol{z})+(M(\Lambda_1+\Lambda_2)\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^k,\mathrm{Div}\boldsymbol{z})=0, \tag{6.23a}$$
$$(S\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1},\boldsymbol{q})-(S\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^k,\boldsymbol{q})+(\underline{\mathrm{Div}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^k,\boldsymbol{q})+(\mathrm{Div}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1},\boldsymbol{q})+((\Lambda_1+\Lambda_2)\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^k,\boldsymbol{q})=0, \tag{6.23b}$$
$$(\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^{k+1}),\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{w}))+\lambda(\mathrm{div}\ \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^{k+1},\mathrm{div}\ \boldsymbol{w})-(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1},\underline{\mathrm{Div}}\boldsymbol{w})=0, \tag{6.23c}$$

wobei $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^k=((\boldsymbol{e}_{v_1}^k)^T,\dots,(\boldsymbol{e}_{v_n}^k)^T)^T$, $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^k=(e_{p_1}^k,\dots,e_{p_n}^k)^T$. Um die Konvergenzeigenschaften von Algorithmus 5 zu studieren, müssen wir noch $M$ und $S$ bestimmen. Für alle $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}\in\boldsymbol{P}$ gibt es nach Lemma 3.1

$$\boldsymbol{\psi}_i\in V_i\ \text{ sodass }\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{\psi}_i=\boldsymbol{e}_{p_i}^{k+1}\ \text{ und }\ \|\boldsymbol{\psi}_i\|_{\mathrm{div}}\le\beta_d^{-1}\|\boldsymbol{e}_{p_i}^{k+1}\|,\quad i=1,\dots,n,$$

nämlich

$$\boldsymbol{\psi}\in\boldsymbol{V}\ \text{ sodass }\ \mathrm{Div}\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}\ \text{ und }\ \|\boldsymbol{\psi}\|_{\mathrm{Div}}\le\beta_d^{-1}\|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}\|. \tag{6.24}$$

Setzen wir $\boldsymbol{q}=S^{-1}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}$ in (6.23b) und $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{\psi}$ in (6.23a), so erhalten wir

$$(\mathbf{R}_v\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1},\boldsymbol{\psi})-(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^k,\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1})+(M\underline{\mathrm{Div}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^{k+1}+M\mathrm{Div}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}+M(\Lambda_1+\Lambda_2)\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^k,\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1})=0, \tag{6.25a}$$
$$(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1},\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1})-(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^k,\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1})+(S^{-1}\underline{\mathrm{Div}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^k+S^{-1}\mathrm{Div}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}+S^{-1}(\Lambda_1+\Lambda_2)\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^k,\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1})=0. \tag{6.25b}$$

Subtraktion von (6.25a) von (6.25b) liefert

$$\|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}\|^2 = (\mathbf{R}_v \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}, \boldsymbol{\psi}) - ((S^{-1} - M)(\underline{\mathrm{Div}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^{k} + \mathrm{Div}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1} + (\Lambda_1 + \Lambda_2)\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k}), \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}),$$

das heißt

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}\|^2 &\leq \|\mathbf{R}_v^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}\|\|\mathbf{R}_v^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\psi}\| + \|(S^{-1} - M)(\underline{\mathrm{Div}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^{k+1} + \mathrm{Div}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1} + (\Lambda_1 + \Lambda_2)\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k})\|\|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}\| \\
&\leq \sqrt{R^{-1}}\|\mathbf{R}_v^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}\|\|\boldsymbol{\psi}\| + \|(S^{-1} - M)(\underline{\mathrm{Div}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^{k} + \mathrm{Div}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1} + (\Lambda_1 + \Lambda_2)\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k})\|\|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}\| \\
&\leq \beta_d^{-1}\sqrt{R^{-1}}\|\mathbf{R}_v^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}\|\|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}\| + \|(S^{-1} - M)(\underline{\mathrm{Div}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^{k} + \mathrm{Div}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1} + (\Lambda_1 + \Lambda_2)\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k})\|\|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}\|.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}\| \leq \beta_d^{-1}\sqrt{R^{-1}}\|\mathbf{R}_v^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}\| + \|(S^{-1} - M)(\underline{\mathrm{Div}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^{k} + \mathrm{Div}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1} + (\Lambda_1 + \Lambda_2)\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k})\|. \tag{6.26}$$

Um die obere Schranke für $\|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}\|$ in obiger Abschätzung (6.26) zu minimieren, wählen wir $S = M^{-1}$.

**Lemma 6.12.** *Betrachten wir den Algorithmus 5 und sei $S = M^{-1}$. Dann gilt*

$$\|\mathbf{R}_v^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}\|^2 \geq R\beta_d^2\|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}\|^2 = \beta_d^2\|\Lambda_3^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}\|^2. \tag{6.27}$$

Im Rest dieses Abschnitt analysieren und testen wir Algorithmus 5 für die spezifische Wahl

$$S := M^{-1} = \hat{\Lambda}, \quad \hat{\Lambda} := (1 + L_0)(\Lambda_1 + \Lambda_2) + L_1\Lambda_3 + L_2\Lambda_4, \tag{6.28}$$

wobei $L_0, L_1$ und $L_2$ skalare Parameter sind, die später festgelegt werden.

### 6.3.3 Konvergenzanalyse des Uzawa-Algorithmus für das MPET-Problem

In diesem Abschnitt werden wir die Konvergenzeigenschaften des Algorithmus 5 studieren. Wir werden eine gleichmäßige Schranke für die Konvergenzrate herleiten, d.h., eine Schranke, die unabhängig von Modell- und Diskretisierungsparametern ist.

**Satz 6.13.** *Betrachten wir Algorithmus 5. Dann erfüllt der in (6.22) definierte Fehler $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k}$ die folgende Abschätzung:*

$$\|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}\|_{\boldsymbol{P}}^2 \leq rate^2(\lambda, R, n)\|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k}\|_{\boldsymbol{P}}^2 \leq \frac{\beta_s^{-2} - c_k^2}{\beta_s^{-2}}\|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k}\|_{\boldsymbol{P}}^2,$$

*wobei*

$$rate^2(\lambda, R, n) = \frac{1}{1 + C_p}, \quad C_p := \min\{2\beta_d^2 L^{-1}, \frac{\lambda_0}{\beta_s^{-2} + \lambda}L^{-1}\}, \quad L = \frac{\lambda_0(\beta_s^{-2} - c_k^2)}{(\lambda + c_k^2)(\lambda + \beta_s^{-2})} \cdot \frac{n}{R\lambda + n},$$

*und $\beta_d, \beta_s$ die Konstanten aus Lemmata 3.1 und 3.2 und $c_k$ die Konstante aus (6.15) sind.*

***Beweis***. Für alle $(\sum_{i=1}^n \boldsymbol{e}_{p_i}^{k+1}) \in P_i$ gilt nach Lemma 3.2:

$$\exists \boldsymbol{w}_0 \in \boldsymbol{U} \quad \text{sodass} \quad \text{div } \boldsymbol{w}_0 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} \sum_{i=1}^n \boldsymbol{e}_{p_i}^{k+1} \quad \text{und} \quad \|\boldsymbol{w}_0\|_1 \leq \beta_s^{-1} \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} \| \sum_{i=1}^n \boldsymbol{e}_{p_i}^{k+1}\| = \beta_s^{-1} \|\Lambda_4^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}\|, \tag{6.29}$$

$$\text{nämlich} \quad \underline{\text{Div}} \boldsymbol{w}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} \sum_{i=1}^n \boldsymbol{e}_{p_i}^k \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} \sum_{i=1}^n \boldsymbol{e}_{p_i}^k \end{pmatrix} = \sqrt{\lambda_0} \Lambda_4 \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}.$$

Setzen wir $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_0$ in (6.23c), so folgt:

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}, \sqrt{\lambda_0}\Lambda_4 \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}) &= (\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^{k+1}), \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{w}_0)) + \lambda(\text{div } \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^{k+1}, \text{div } \boldsymbol{w}_0) \\
&\leq (\|\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^{k+1})\|^2 + \lambda \|\text{div } \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^{k+1}\|^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (\|\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{w}_0)\|^2 + \lambda \|\text{div } \boldsymbol{w}_0\|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (\|\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^{k+1})\|^2 + \lambda \|\text{div } \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^{k+1}\|^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (\beta_s^{-2} \|\Lambda_4^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}\|^2 + \lambda \|\Lambda_4^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}\|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= (\|\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^{k+1})\|^2 + \lambda \|\text{div } \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^{k+1}\|^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (\beta_s^{-2} + \lambda)^{\frac{1}{2}} \|\Lambda_4^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}\|,
\end{aligned}$$

das heißt

$$\frac{\lambda_0}{\beta_s^{-2} + \lambda} \|\Lambda_4^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}\|^2 \leq \|\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^{k+1})\|^2 + \lambda \|\text{div } \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^{k+1}\|^2. \tag{6.30}$$

Setzen wir $\boldsymbol{q} = M\text{Div}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}$ in (6.23b) und $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}$ in (6.23a), bekommen wir

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{R}_v \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}) - (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^k, \text{Div}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}) + (M\underline{\text{Div}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^k + M\text{Div}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1} + M(\Lambda_1 + \Lambda_2)\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^k, \text{Div}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}) = 0, \\
&(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}, \text{Div}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}) = (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^k, \text{Div}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}) - (M\underline{\text{Div}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^k + M\text{Div}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1} + M(\Lambda_1 + \Lambda_2)\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^k, \text{Div}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}).
\end{aligned}$$

Kombinieren wir die obigen Gleichungen, so bekommen wir

$$(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}, \text{Div}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}) = (\mathbf{R}_v \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}). \tag{6.32}$$

Setzen wir $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}$ in (6.23b) und $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^k$ in (6.23c), so folgt

$$(\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^k), \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^k)) + \lambda(\text{div } \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^k, \text{div } \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^k) - (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^k, \underline{\text{Div}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^k) = 0, \tag{6.33a}$$

$$(S\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}) = (S\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^k, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}) - (\underline{\text{Div}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^k, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}) - (\text{Div}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}) - ((\Lambda_1 + \Lambda_2)\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^k, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}). \tag{6.33b}$$

Kombinieren wir die Gleichungen (6.33a),(6.33b), verwenden wir (6.32) und die Definition (6.28) von $S$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^k)\|^2 + \lambda \|\text{div } \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^k\|^2 + \|\hat{\Lambda}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}\|^2 &- ((L_0(\Lambda_1 + \Lambda_2) + L_1\Lambda_3 + L_2\Lambda_4)\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^k, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}) \\
&= (\underline{\text{Div}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^k, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^k - \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}) - \|\mathbf{R}_v^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}\|^2.
\end{aligned} \tag{6.34}$$

Nun gilt folgende Identität für $\|\hat{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}\|^2 - ((L_0(\Lambda_1+\Lambda_2)+L_1\Lambda_3+L_2\Lambda_4)\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^k, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1})$:

$$
\begin{aligned}
&\|\hat{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}\|^2 - ((L_0(\Lambda_1+\Lambda_2)+L_1\Lambda_3+L_2\Lambda_4)\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^k, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}) \\
&\quad = ((1+L_0)(\Lambda_1+\Lambda_2)+L_1\Lambda_3+L_2\Lambda_4)\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}) - ((L_0(\Lambda_1+\Lambda_2)+L_1\Lambda_3+L_2\Lambda_4)\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^k, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}) \\
&\quad = \|(\Lambda_1+\Lambda_2)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}\|^2 + \frac{L_1}{2}\left(\|\Lambda_3^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}\|^2 - \|\Lambda_3^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k}\|^2 + \|\Lambda_3^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}-\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k})\|^2\right) \\
&\quad + \frac{L_0}{2}\left(\|(\Lambda_1+\Lambda_2)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}\|^2 - \|(\Lambda_1+\Lambda_2)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k}\|^2 + \|(\Lambda_1+\Lambda_2)^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}-\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k})\|^2\right) \\
&\quad + \frac{L_2}{2}\left(\|\Lambda_4^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}\|^2 - \|\Lambda_4^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k}\|^2 + \|\Lambda_4^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}-\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k})\|^2\right). \qquad (6.35)
\end{aligned}
$$

Um $(\underline{\mathrm{Div}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^k, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^k - \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1})$ abzuschätzen verwenden wir die Cauchy-Schwarz-Ungleichung und erhalten für alle $c_\epsilon \geq 0$

$$
\begin{aligned}
(\underline{\mathrm{Div}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^k, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^k - \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}) &= (\mathrm{div}\ \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^k, \sum_{i=1}^n(\boldsymbol{e}_{pi}^k - \boldsymbol{e}_{pi}^{k+1})) \leq \frac{\lambda+c_\epsilon^2}{2}\|\mathrm{div}\ \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^k\|^2 + \frac{1}{2(\lambda+c_\epsilon^2)}\|\sum_{i=1}^n(\boldsymbol{e}_{pi}^k - \boldsymbol{e}_{pi}^{k+1})\|^2 \\
&= \frac{\lambda+c_\epsilon^2}{2}\|\mathrm{div}\ \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^k\|^2 + \frac{\lambda_0}{2(\lambda+c_\epsilon^2)}\|\Lambda_4^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^k - \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1})\|^2. \qquad (6.36)
\end{aligned}
$$

Jetzt setzen wir (6.35) und (6.36) in (6.34) ein, verwenden die Abschätzung $\|\Lambda_4\boldsymbol{x}\|^2 \leq \frac{n}{\lambda_0}\|\boldsymbol{x}\|^2$ und erhalten

$$
\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^k)\|^2 + \lambda\|\mathrm{div}\ \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^k\|^2 + (1+\frac{L_0}{2})\|(\Lambda_1+\Lambda_2)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}\|^2 + \frac{L_1}{2}\|\Lambda_3^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}\|^2 + \frac{L_2}{2}\|\Lambda_4^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}\|^2 \\
&\quad \leq \frac{\lambda+c_\epsilon^2}{2}\|\mathrm{div}\ \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^k\|^2 + \frac{\lambda_0}{2(\lambda+c_\epsilon^2)}\|\Lambda_4^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^k - \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1})\|^2 - \|\mathbf{R}_v^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}\|^2 + \frac{L_0}{2}\|(\Lambda_1+\Lambda_2)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^k\|^2 \\
&\quad + \frac{L_1}{2}\left(\|\Lambda_3^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^k\|^2 - \|\Lambda_3^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}-\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^k)\|^2\right) + \frac{L_2}{2}\left(\|\Lambda_4^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^k\|^2 - \|\Lambda_4^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}-\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^k)\|^2\right) \\
&\quad \leq \frac{\lambda+c_\epsilon^2}{2}\|\mathrm{div}\ \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^k\|^2 + \frac{\lambda_0}{2(\lambda+c_\epsilon^2)}\|\Lambda_4^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^k - \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1})\|^2 - \|\mathbf{R}_v^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}\|^2 + \frac{L_0}{2}\|(\Lambda_1+\Lambda_2)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^k\|^2 \\
&\quad + \frac{L_1}{2}\left(\|\Lambda_3^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^k\|^2 - \frac{R\lambda_0}{n}\|\Lambda_4^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}-\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^k)\|^2\right) + \frac{L_2}{2}\left(\|\Lambda_4^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^k\|^2 - \|\Lambda_4^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}-\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^k)\|^2\right) \\
&\quad = \frac{\lambda+c_\epsilon^2}{2}\|\mathrm{div}\ \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^k\|^2 - \|\mathbf{R}_v^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}\|^2 + \frac{L_0}{2}\|(\Lambda_1+\Lambda_2)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^k\|^2 + \frac{L_1}{2}\|\Lambda_3^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^k\|^2 + \frac{L_2}{2}\|\Lambda_4^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^k\|^2 \\
&\quad + \left(\frac{\lambda_0}{2(\lambda+c_\epsilon^2)} - \frac{L_1}{2}\frac{R\lambda_0}{n} - \frac{L_2}{2}\right)\|\Lambda_4^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}-\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^k)\|^2. \qquad (6.37)
\end{aligned}
$$

Mit der Abschätzung (6.15) ergibt sich

$$(c_k^2+\lambda)\|\mathrm{div}\ \boldsymbol{w}\|^2 \leq \|\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{w})\|^2 + \lambda\|\mathrm{div}\ \boldsymbol{w}\|^2, \qquad (6.38)$$

und setzen wir (6.38) (für $c_\epsilon \in [0, c_k]$) und (6.27) in (6.37) ein und nehmen

$$L_1 \frac{R\lambda_0}{n} + L_2 \geq \frac{\lambda_0}{\lambda + c_\epsilon^2}, \tag{6.39}$$

an, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^k)\|^2 + \frac{\lambda}{2}\|\text{div } \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^k\|^2 + (1 + \frac{L_0}{2})\|(\Lambda_1 + \Lambda_2)^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}\|^2 + \beta_d^2 \|\Lambda_3^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}\|^2 + \frac{L_1}{2}\|\Lambda_3^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}\|^2 \\ + \frac{L_2}{2}\|\Lambda_4^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}\|^2 \leq \frac{L_0}{2}\|(\Lambda_1 + \Lambda_2)^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k}\|^2 + \frac{L_1}{2}\|\Lambda_3^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k}\|^2 + \frac{L_2}{2}\|\Lambda_4^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k}\|^2. \end{aligned} \tag{6.40}$$

Aus (6.30) bekommen wir

$$\begin{aligned} &(1 + \frac{L_0}{2})\|(\Lambda_1 + \Lambda_2)^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}\|^2 + (\beta_d^2 + \frac{L_1}{2})\|\Lambda_3^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}\|^2 + \frac{L_2}{2}\|\Lambda_4^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}\|^2 \\ &\qquad \leq \frac{L_0}{2}\|(\Lambda_1 + \Lambda_2)^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k}\|^2 + \frac{L_1}{2}\|\Lambda_3^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k}\|^2 + (\frac{L_2}{2} - \frac{\lambda_0}{2(\beta_s^{-2} + \lambda)})\|\Lambda_4^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k}\|^2, \end{aligned}$$

Es seien $L := L_1 = L_2 - \frac{\lambda_0}{(\beta_s^{-2}+\lambda)}$ und $L_0 := \max\{0, L-1\}$, dann folgt

$$(\frac{1}{2} + \frac{L}{2})\|(\Lambda_1 + \Lambda_2)^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}\|^2 + (\beta_d^2 + \frac{L}{2})\|\Lambda_3^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}\|^2 + (\frac{\lambda_0}{2(\beta_s^{-2} + \lambda)} + \frac{L}{2})\|\Lambda_4^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}\|^2 \leq \frac{L}{2}\|\Lambda^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k}\|^2.$$

Schreiben die obige Ungleichung um, so sehen wir, dass

$$\|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}\|_{\boldsymbol{P}}^2 \leq \frac{1}{1 + \frac{\tilde{C}}{L}}\|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k}\|_{\boldsymbol{P}}^2, \quad \tilde{C} = \min\{2\beta_d^2, \frac{\lambda_0}{\beta_s^{-2} + \lambda}\}, \quad L = L_2 - \frac{\lambda_0}{(\beta_s^{-2} + \lambda)},$$

Je kleiner also $L$ ist, desto kleiner wird auch der Konvergenzfaktor. Aus (6.39) und der Definition von $L$ bekommen wir schließlich die Beziehungen $L = \frac{\lambda_0(\beta_s^{-2} - c_\epsilon^2)}{(\lambda + c_\epsilon^2)(\lambda + \beta_s^{-2})} \cdot \frac{n}{R\lambda_0 + n}, \quad c_\epsilon = c_k$. □

**Satz 6.14.** *Wir betrachten Algorithmus 5. Dann erfüllt die in (6.22) definierten Fehler $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^k, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^k$ die folgenden Abschätzungen:*

$$\|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^k\|_{\boldsymbol{U}} \leq C_u \left[rate(\lambda, R, n)\right]^k, \qquad \|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}\|_{\boldsymbol{V}} \leq C_v \left[rate(\lambda, R, n)\right]^k,$$

*wobei die Konstanten $C_u, C_v$ unabhängig von allen Parametern und der Zeitschrittweite $\tau$ sind und $rate(\lambda, R, n)$ im Satz 6.13 definiert wurde.*

***Beweis.*** Um $\|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^{k+1}\|_{\boldsymbol{U}}$ abzuschätzen, setzen wir $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^{k+1}$ in (6.23c), wenden die Cauchy-Schwarz-Ungleichung an, benutzen (6.38) und bekommen somit

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^{k+1})\|^2 + \lambda\|\text{div } \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^{k+1}\|^2 &= (\sum_{i=1}^n \boldsymbol{e}_{p_i}^{k+1}, \text{div } \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^{k+1}) \leq \|\sum_{i=1}^n \boldsymbol{e}_{p_i}^{k+1}\| \cdot \|\text{div } \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^{k+1}\| \\ &= \sqrt{\lambda_0}\|\Lambda_4^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}\| \cdot \|\text{div } \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^{k+1}\| \\ &\leq \sqrt{\lambda_0}\|\Lambda_4^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}\| \cdot \sqrt{\frac{1}{c_k^2 + \lambda}(\|\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^{k+1})\|^2 + \lambda\|\text{div } \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^{k+1}\|^2)}, \end{aligned}$$

woraus sich die erste gewünschte Abschätzung ergibt:

$$\|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^{k+1}\|_{\boldsymbol{U}}^2 \le \frac{\lambda_0}{c_k^2+\lambda}\|\Lambda_4^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}\|^2 \le c_k^{-2}\|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k+1}\|_{\boldsymbol{P}}^2 \le c_k^{-2}\left[rate(\lambda,R,n)\right]^{2(k+1)}\|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^0\|_{\boldsymbol{P}}^2.$$

Um $\|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}\|_{\boldsymbol{V}}$ abzuschätzen, setzen wir $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}$ in (6.23a) ein, verwenden dann die Cauchy-Schwarz-Ungleichung und erhalten so

$$\begin{aligned}
(\mathbf{R}_v\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1},\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}) &+ (\hat{\Lambda}^{-1}\mathrm{Div}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1},\mathrm{Div}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}) = (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k},\mathrm{Div}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}) - (\hat{\Lambda}^{-1}\underline{\mathrm{Div}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^{k}+\hat{\Lambda}^{-1}(\Lambda_1+\Lambda_2)\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k},\mathrm{Div}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1})\\
&= (\hat{\Lambda}^{-1}(L_0(\Lambda_1+\Lambda_2)+L_1\Lambda_3+L_2\Lambda_4)\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k},\mathrm{Div}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}) - (\hat{\Lambda}^{-1}\underline{\mathrm{Div}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^{k},\mathrm{Div}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1})\\
&\le \|\hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}(L_0(\Lambda_1+\Lambda_2)+L_1\Lambda_3+L_2\Lambda_4)\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k}\|^2 + \frac{1}{4}\|\hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{Div}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}\|^2 + \|\hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}\underline{\mathrm{Div}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^{k}\|^2\\
&+ \frac{1}{4}\|\hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{Div}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}\|^2.
\end{aligned}$$

Mit der Definition von $\hat{\Lambda}$ und nach dem Lemma 3.3 ergibt sich

$$(\mathbf{R}_v\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1},\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}) + \frac{1}{2}(\hat{\Lambda}^{-1}\mathrm{Div}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1},\mathrm{Div}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}) \le \|\hat{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k}\|^2 + \frac{\lambda_0}{L_2}\|\mathrm{div}\ \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^{k}\|^2. \tag{$\star$}$$

Bevor wir den Beweis zu Ende führen benötigen wir noch ein paar Abschätzungen. Nach der Definition von $L_1$ und $L_2$ ist klar, dass

$$\begin{aligned}
&L_1 \le L_2 \qquad \text{da} \qquad L_1 = L > 0 \qquad \text{woraus folgt, dass} \qquad L_2 \ge \frac{\lambda_0}{\beta_s^{-2}+\lambda},\\
&L_2 = L + \frac{\lambda_0}{\beta_s^{-2}+\lambda} = \frac{\lambda_0(\beta_s^{-2}-c_k^2)}{(\lambda+c_k^2)(\lambda+\beta_s^{-2})}\cdot\frac{n}{R\lambda_0+n} + \frac{\lambda_0}{\beta_s^{-2}+\lambda} \le \frac{\lambda_0(\beta_s^{-2}-c_k^2)}{(\lambda+c_k^2)(\lambda+\beta_s^{-2})} + \frac{\lambda_0}{\beta_s^{-2}+\lambda}\\
&= \frac{\lambda_0}{c_k^2+\lambda} \le \frac{\lambda_0}{c_k^2+c_k^2\lambda} \le c_k^{-2}.
\end{aligned} \tag{6.41}$$

Mit den Definitionen von $\Lambda, \hat{\Lambda}, L_0$ und obigen Abschätzungen bekommen wir

$$(\hat{\Lambda}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = (((1+L_0)(\Lambda_1+\Lambda_2)+L_1\Lambda_3+L_2\Lambda_4)\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) \le (\tilde{L}\Lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}), \quad \tilde{L} := \max\{L_2,1\}, \quad \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{P}.$$

Jetzt erhalten wir aus ($\star$):

$$\begin{aligned}
(\mathbf{R}_v\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1},\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}) + \frac{1}{2\tilde{L}}(\Lambda^{-1}\mathrm{Div}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1},\mathrm{Div}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}) &\le \tilde{L}\|\Lambda^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k}\|^2 + \lambda_0\frac{\beta_s^{-2}+\lambda}{\lambda_0}\|\mathrm{div}\ \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^{k}\|^2\\
&\le \tilde{L}\|\Lambda^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{k}\|^2 + c_k^{-2}\beta_s^{-2}\|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^{k}\|_{\boldsymbol{U}}^2.
\end{aligned} \tag{6.42}$$

Nun unterscheiden wir noch zwei Fälle für $\tilde{L}$.

- $\tilde{L} = L_2$ :

$$(\mathbf{R}_v \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}) + \frac{c_k^2}{2}(\Lambda^{-1}\mathrm{Div}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}, \mathrm{Div}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}) \leq c_k^{-2}\|\Lambda^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^k\|^2 + c_k^{-2}\beta_s^{-2}\|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^k\|_{\boldsymbol{U}}^2$$
$$\leq (\beta_s^{-2}c_k^{-2} + 1)c_k^{-2}\left[rate(\lambda, R, n)\right]^{2k}\|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^0\|_{\boldsymbol{P}}^2.$$

Das heißt

$$\|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}\|_{\boldsymbol{V}}^2 = (\mathbf{R}_v \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}) + (\Lambda^{-1}\mathrm{Div}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}, \mathrm{Div}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}) \leq 2(\beta_s^{-2}c_k^{-2} + 1)c_k^{-4}\left[rate(\lambda, R, n)\right]^{2k}\|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^0\|_{\boldsymbol{P}}^2.$$

- $\tilde{L} = 1$:

$$(\mathbf{R}_v \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}) + \frac{1}{2}(\Lambda^{-1}\mathrm{Div}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}, \mathrm{Div}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}) \leq \|\Lambda^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^k\|^2 + c_k^{-2}\beta_s^{-2}\|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}^k\|_{\boldsymbol{U}}^2$$
$$\leq (c_k^{-4}\beta_s^{-2} + 1)\left[rate(\lambda, R, n)\right]^{2k}\|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^0\|_{\boldsymbol{P}}^2.$$

Das heißt

$$\|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}\|_{\boldsymbol{V}}^2 = (\mathbf{R}_v \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}) + (\Lambda^{-1}\mathrm{Div}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}, \mathrm{Div}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}^{k+1}) \leq 2(c_k^{-4}\beta_s^{-2} + 1)\left[rate(\lambda, R, n)\right]^{2k}\|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^0\|_{\boldsymbol{P}}^2.$$

□

## 6.4 Numerische Ergebnisse

### 6.4.1 Quasi-statisches Problem

Die numerischen Ergebnisse werden für das 4-Netzwerk-Modell in der Tabelle 6.1 präsentiert. Diese validieren die theoretischen Konvergenzabschätzungen der linearen stationären iterativen Methode basierend auf dem Algorithmus 5, der zusätzlich gegen den vorkonditionierten GMRES-Algorithmus getestet wurde.

Um die Leistung der vorkonditionierten GMRES- und Augmented-Lagrangian-Uzawa-Methoden weiter zu vergleichen, stellen wir Tabelle 6.3 vor, wobei die verstrichenen Zeiten in Sekunden gemessen werden. Diese numerischen Tests wurden auf einem *Dell Latitude 7380* Notebook mit einem *Intel Core i7-7600U Prozessor* und *16 GB RAM* durchgeführt. Wie die Ergebnisse zeigen, ist das Verfahren vom Uzawa-Typ rechnerisch effizienter als das vorkonditionierte GMRES-Verfahren.

Der Block-Gauß-Seidel-Vorkonditionierer, den wir verwendet haben, um das GMRES-Verfahren zu beschleunigen, entspricht der unteren Block-Dreiecksmatrix auf der linken Seite von (6.18) wobei $M = S^{-1}$ und $S$ in (6.28) angegeben ist.

Alle numerischen Ergebnisse, die in diesem Abschnitt beschrieben werden, wurden mit Hilfe von FEniCS erzeugt, siehe z.B. [4, 52]. In allen Testfällen ist der Aufbau wie folgt:

- Das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ist das Einheitsquadrat, das in $2N^2$ kongruente rechtwinklige Dreiecke unterteilt ist,
- Die Diskretisierungseinstellung ist dieselbe wie in [45, 42], d.h., wir verwenden diskontinuierliche-stückweise-konstante Elemente, Raviart-Thomas-Elemente und Brezzi-Douglas-Marini-Elemente niedrigster Ordnung, um die Drücke, Flüsse und Verschiebungen (in dieser Reihenfolge) zu approximieren,

- Für alle Experimente, die mit Algorithmus 5 durchgeführt werden, setzen wir

$$L_2 = L_1 + \frac{\lambda_0}{\lambda + \beta_s^{-2}}, \qquad L_1 = \frac{\lambda_0(\beta_s^{-2} - c_k^2)}{(\lambda + c_k^2)(\lambda + \beta_s^{-2})} \cdot \frac{n}{R\lambda_0 + n},$$

  und $\beta_s^2 = 0.18$, vgl. [29].

- Das Abbruchkriterium des iterativen Prozesses ist die Reduzierung des initialen vorkonditionierten Residuums um einen Faktor $10^8$.

### Das Vier-Netzwerk-Modell

Wir betrachten das System (1.2) für $n = 4$. Wir bezeichnen den unteren, rechten, oberen und linken Teil von $\Gamma = \partial\Omega$ mit $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ und $\Gamma_4$. Wir setzen $\boldsymbol{u} = 0$ auf $\Gamma_4$, $(\boldsymbol{\sigma} - p_1\boldsymbol{I} - p_2\boldsymbol{I} - p_3\boldsymbol{I} - p_4\boldsymbol{I})\boldsymbol{n} = (0,0)^T$ auf $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $(\boldsymbol{\sigma} - p_1\boldsymbol{I} - p_2\boldsymbol{I} - p_3\boldsymbol{I} - p_4\boldsymbol{I})\boldsymbol{n} = (0,-1)^T$ auf $\Gamma_3$, $p_1 = 2$ auf $\Gamma$, $p_2 = 20$ auf $\Gamma$, $p_3 = 30$ auf $\Gamma$ und $p_4 = 40$ auf $\Gamma$. Alle rechten Seiten wurden Null gewählt. Die Referenzwerte der Parameter stammen aus [65] und sind in Tabelle 6.2 angegeben.

Tabelle 6.1 zeigt, dass der Algorithmus 5 und die vorkonditionierte GMRES-Verfahren ein ähnliches Konvergenzverhalten über einen weiten Bereich von Parametern haben. Darüber hinaus demonstrieren die präsentierten numerischen Ergebnisse die Robustheit des neuen vorgeschlagenen Algorithmus bezüglich großer Variationen der Koeffizienten $K_3$, $K = K_1 = K_2 = K_4$ , $\lambda$ und der Maschenweite $h$.

## 6.4.2 Dynamisches Problem

Das folgende numerische Experiment ist für ein 1-Netzwerk-Problem (Biot-Modell). Wir nehmen an, dass der Definitionsbereich $\Omega$ das Einheitsquadrat in $\mathbb{R}^2$ ist und im Zuge der Diskretisierung durch Halbierungen in $N \times N$ Quadrate mit der Maschenweite $h = 1/N$ partitioniert wurde.

Zur Diskretisierung verwenden wir diskontinuierliche-stückweise-linear Elemente, Brezzi-Douglas-Marini-Elemente und Brezzi-Douglas-Marini-Elemente zweiter Ordnung, also $\mathcal{P}_1 \times BDM_2 \times BDM_2$, um den Druck, die relative Verschiebung und die Verschiebung (in dieser Reihenfolge) zu approximieren. Bei der Initialisierung wurde ein Zufallsvektor verwendet. Alle numerischen Ergebnisse in diesem Abschnitt wurden auf der FEniCS-Plattform durchgeführt. Das Ziel dieser Experimente ist es

(i) die Konvergenz der Fehlerschätzungen in den parameter-abhängigen Normen zu validieren,

(ii) die Robustheit der vorgeschlagenen block-diagonalen Vorkonditionierer zu testen, indem wir innerhalb des MinRes-Algorithmus verwendet werden.

Um den Fehler zu berechnen, bilden wir zwischen zwei Zeitpunkte $\tau^k$ und $\tau^{k+1}$ eine lineare Funktion zu der approximierten Lösung für jedes Feld, siehe [2], dann rechnen wir den maximalen Fehler in $\tau 10^{-1}$ Punkten zwischen $\tau^k$ und $\tau^{k+1}$. Das heißt, wir rechnen die Fehler in $\frac{T}{\tau}10^{-1}$ Punkten aus.

Tabelle 6.1: Anzahl der GMRES (G) und augmented Uzawa-type (U) Iterationen für eine Reduktion des Anfangsresiduums um den Faktor $10^8$ bei Lösung des 4-Netzwerk-MPET-Problems. Die Tests wurden durchgeführt für $h = 1/32$ und $h = 1/64$.

| | | $h = 1/32$ | | | | | | $h = 1/64$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $K = 10^{-2}$ | | $K = 10^{-1}$ | | $K = 1$ | | $K = 10^{-2}$ | | $K = 10^{-1}$ | | $K = 1$ | |
| $\lambda$ | $\boldsymbol{K}_3$ | G | U | G | U | G | U | G | U | G | U | G | U |
| 1E0 | 1E-2 | 7 | 15 | 7 | 15 | 6 | 14 | 7 | 15 | 7 | 14 | 6 | 14 |
| | 1E0 | 7 | 15 | 7 | 15 | 7 | 14 | 7 | 15 | 7 | 14 | 7 | 14 |
| | 1E2 | 7 | 15 | 8 | 15 | 7 | 14 | 7 | 14 | 7 | 15 | 7 | 14 |
| | 1E4 | 7 | 15 | 7 | 14 | 8 | 15 | 7 | 14 | 7 | 14 | 8 | 14 |
| | 1E10 | 7 | 15 | 7 | 14 | 7 | 14 | 7 | 14 | 7 | 14 | 7 | 14 |
| 1E3 | 1E-2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| | 1E0 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| | 1E2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| | 1E4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| | 1E10 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 1E6 | 1E-2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| | 1E0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| | 1E2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| | 1E4 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| | 1E10 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

Tabelle 6.2: Referenz-Werte der Parameter des 4-Netzwerk-MPET-Modells.

| Parameter | Wert | Einheit |
|---|---|---|
| $\lambda$ | 505 | $\mathrm{Nm}^{-2}$ |
| $\mu$ | 216 | $\mathrm{Nm}^{-2}$ |
| $c_{p_1} = c_{p_2} = c_{p_3} = c_{p_4}$ | $4.5 * 10^{-10}$ | $\mathrm{N}^{-1}\mathrm{m}^2$ |
| $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$ | 0.99 | |
| $\beta_{12} = \beta_{24}$ | $1.5 * 10^{-19}$ | $\mathrm{N}^{-1}\mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-1}$ |
| $\beta_{23}$ | $2.0 * 10^{-19}$ | $\mathrm{N}^{-1}\mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-1}$ |
| $\beta_{34}$ | $1.0 * 10^{-13}$ | $\mathrm{N}^{-1}\mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-1}$ |
| $K_1 = K_2 = K_4 = K$ | $3.75 * 10^{-6}$ | $\mathrm{N}^{-1}\mathrm{m}^4\mathrm{s}^{-1}$ |
| $K_3$ | $1.57 * 10^{-9}$ | $\mathrm{N}^{-1}\mathrm{m}^4\mathrm{s}^{-1}$ |

## Das Biot-Modell

Wir betrachten den einfachsten Fall des Systems für $n = 1$ mit exakter Lösung:

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -\cos(2\pi t)\sin(-2\pi x) \\ -\cos(2\pi t)\sin(-2\pi y) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t)\sin(-2\pi x) \\ \cos(2\pi t)\sin(-2\pi y) \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{p} = \frac{1}{2\pi}\cos(2\pi t)(\cos(-2\pi x) + \cos(-2\pi y)).$$

Tabelle 6.3: Rechenzeiten in Sekunden für GMRES ($t_G$) und augmented Uzawa-type ($t_U$) für eine Reduktion des vorkonditionierten Anfangsresiduums um den Faktor $10^8$ bei Lösung des 4-Netzwerk-MPET-Problems. Die Tests wurden durchgeführt für $h = 1/64$.

| | | $K = 10^{-2}$ | | $K = 10^{-1}$ | | $K = 1$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lambda$ | $\boldsymbol{K}_3$ | $t_G$ | $t_U$ | $t_G$ | $t_U$ | $t_G$ | $t_U$ |
| 1E0 | 1E-2 | 19.32 | 13.48 | 19.48 | 13.11 | 18.97 | 13.53 |
| | 1E0 | 19.21 | 13.50 | 19.92 | 12.78 | 19.39 | 12.90 |
| | 1E2 | 19.43 | 12.88 | 19.44 | 12.50 | 19.12 | 11.67 |
| | 1E4 | 19.39 | 13.46 | 19.45 | 12.89 | 19.33 | 11.57 |
| | 1E10 | 19.29 | 11.26 | 19.38 | 12.27 | 19.28 | 13.01 |
| 1E3 | 1E-2 | 18.71 | 10.28 | 18.84 | 10.72 | 18.85 | 10.93 |
| | 1E0 | 18.67 | 11.12 | 18.86 | 11.05 | 19.50 | 9.84 |
| | 1E2 | 19.22 | 11.17 | 18.71 | 9.10 | 18.78 | 11.20 |
| | 1E4 | 18.71 | 11.12 | 19.04 | 10.44 | 18.66 | 8.61 |
| | 1E10 | 19.36 | 10.98 | 18.67 | 11.06 | 19.00 | 11.18 |
| 1E6 | 1E-2 | 18.76 | 8.17 | 18.55 | 10.50 | 18.48 | 10.81 |
| | 1E0 | 18.82 | 10.61 | 18.68 | 10.46 | 18.73 | 10.22 |
| | 1E2 | 18.39 | 10.42 | 18.75 | 10.44 | 18.62 | 10.69 |
| | 1E4 | 18.61 | 11.08 | 18.37 | 10.72 | 18.71 | 10.04 |
| | 1E10 | 18.69 | 11.05 | 18.63 | 9.31 | 18.71 | 11.19 |

Die Experimente wurden für eine Vielzahl von Eingabeparametern $c_p$, $\lambda$, $R_1^{-1}$ und für $\mu = 216, \rho_s = 1038$, $\rho_f = 1000, \varphi = 0.5$ und $\rho_{m_f} = \rho_f/\varphi$ durchgeführt. Um die Gleichung (3.6c) zu erfüllen, wird $\alpha = -\frac{c_p}{4\pi^2} + 1$ ausgewählt. Bei diesen Experimenten wird der Fehler der numerischen Lösung in den eingeführten parameter-abhängigen Normen $\|\cdot\|_{U_h \times V}$, $\|\cdot\|_P$ sowie $\|\cdot\|$ berechnet, siehe Tabellen [6.4–6.11]. Das Abbruchkriterium des iterativen Prozesses ist die Reduzierung des initialen vorkonditionierten Residuums um einen Faktor $10^8$. Wie die experimentelle Konvergenzordnung (EOC)[1], die durch (6.43) definiert ist, in den Tabellen [6.4–6.11] zeigt, verringert sich der Fehler in den betrachteten parameter-abhängigen Normen (4.26) um den Faktor 2, wenn die Maschenweite und die Zeitschrittweite um den gleichen Faktor verringert wird.

$$\mathrm{EOC} = \log_2 \frac{e_k}{e_{k+1}}, \tag{6.43}$$

wobei $e_k$ den Fehler in einem Test bezeichnet, indem die Maschenweite und die Zeitschrittweite gleich sind, d.h. $h_k = \tau_k$, und $e_{k+1}$ den Fehler im nächsten Test, wobei $h_{k+1} = \tau_{k+1} = \tau_k/2$ ist.

[1] experimental order of convergence (EOC)

## Zusammenfassung

Das erste Hauptergebnis dieser Dissertation (Satz 2.11 und 2.12) ist die uniforme Stabilität sowie die Möglichkeit der parameter-robusten Vorkonditionierung für die gestörten Sattelpunktprobleme (2.9) sowie (2.14). Mit Hilfe dieses Resultats lassen sich die Stabilität von quasi-statischem MPET-System (3.36) sowie dynamischem MPET-System (3.39) studieren und geeignete Normen (3.38) und (3.40) zur parameter-robusten Vorkonditionierung konstruieren. Wie gezeigt wird, liegt die Lösung des Gleichungssystems (quasi-statische (3.36) und dynamische (3.39)) in den $L^2(\Omega), H(\text{div}\ , \Omega)$ und $H^1(\Omega)$ Räumen

- die Lösung von (3.36): $(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}; \boldsymbol{p}) \in H_0^1(\Omega)^d \times (H_0(\text{div}\ , \Omega))^n \times (L_0^2(\Omega))^n$,
- die Lösung von (3.39): $(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}; \boldsymbol{p}) \in H_0^1(\Omega)^d \times (H_0(\text{div}\ , \Omega))^n \times (L_0^2(\Omega))^n$.

Um die Stabilität im diskreten Fall zu studieren, haben wir die diskontinuierliche Galerkin-Methode für die Verschiebung, einen Unterraum zur Approximation von $H(\text{div}\ , \Omega)$ für den Fluss (beim dynamischen MPET-Problem für die relative Verschiebung) und einen Unterraum zur Approximation von $L_2(\Omega)$ für den Druck verwendet. Das zweite Hauptergebnis ist die Fehlerabschätzung, für eine voll diskrete Lösung, die durch Zeit-(Crank-Nicolson) und Raum-Diskretisierung des dynamische System (3.39) entsteht. Die Sätze 5.8 und 5.11 fassen die Fehlerabschätzungen zusammen und die numerischen Ergebnisse bestätigen, dass der Fehler zweiter Ordnung bezüglich der Zeit ist.

Das dritte Hauptergebnis besteht darin, ein vollständiges entkoppeltes iteratives Schema 5 zu konstruieren. Außerdem konnten wir zeigen, dass das Schema durch Anwendung der augmentierte Lagrange-Uzawa-Typ-Methode entsteht und von linearer Konvergenz ist, wobei die Konvergenzrate unabhängig von allen Modell- und Diskretisierungsparametern ist. Die numerische Ergebnisse bestätigten, dass die neue Methode vom Uzawa-Typ schneller als das entsprechende vorkonditionierte GMRES-Verfahren ist.

Tabelle 6.4: Fehler in parameter-abhängiger Norm $\|\cdot\|_{\boldsymbol{U}_h \times \boldsymbol{V}}$.

| | | | $c_p = 0, \alpha = 1$ | | | | $c_p = 0.1, \alpha = 0,99747$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lambda$ | $\boldsymbol{K}$ | $\frac{1}{\tau}$ | $\|\cdot\|_{\max}$ | EOC | $\|\cdot\|_2$ | EOC | $\|\cdot\|_{\max}$ | EOC | $\|\cdot\|_2$ | EOC |
| 1E0 | 1E-6 | 4 | 1.19E+02 | | 1.96E+02 | | 1.20E+02 | | 1.96E+02 | |
| | | 8 | 2.23E+01 | 2.42 | 4.19E+01 | 2.23 | 2.25E+01 | 2.41 | 4.19E+01 | 2.23 |
| | | 16 | 4.03E+00 | 2.47 | 7.91E+00 | 2.40 | 4.11E+00 | 2.46 | 7.93E+00 | 2.40 |
| | | 32 | 7.27E-01 | 2.47 | 1.44E+00 | 2.46 | 7.51E-01 | 2.45 | 1.45E+00 | 2.45 |
| | 1E-10 | 4 | 1.19E+04 | | 1.95E+04 | | 1.19E+04 | | 1.95E+04 | |
| | | 8 | 2.22E+03 | 2.43 | 4.16E+03 | 2.23 | 2.22E+03 | 2.43 | 4.16E+03 | 2.23 |
| | | 16 | 3.98E+02 | 2.48 | 7.80E+02 | 2.42 | 3.98E+02 | 2.48 | 7.80E+02 | 2.42 |
| | | 32 | 7.06E+01 | 2.49 | 1.40E+02 | 2.48 | 7.06E+01 | 2.49 | 1.40E+02 | 2.48 |
| 1E8 | 1E-6 | 4 | 1.25E+03 | | 1.70E+03 | | 1.26E+03 | | 1.71E+03 | |
| | | 8 | 1.63E+02 | 2.94 | 2.84E+02 | 2.58 | 1.64E+02 | 2.93 | 2.87E+02 | 2.58 |
| | | 16 | 2.06E+01 | 2.98 | 3.81E+01 | 2.90 | 2.09E+01 | 2.97 | 3.88E+01 | 2.88 |
| | | 32 | 2.59E+00 | 2.99 | 4.87E+00 | 2.97 | 2.68E+00 | 2.97 | 5.04E+00 | 2.94 |
| | 1E-10 | 4 | 1.14E+04 | | 1.89E+04 | | 1.20E+04 | | 1.96E+04 | |
| | | 8 | 2.12E+03 | 2.43 | 4.02E+03 | 2.23 | 2.23E+03 | 2.43 | 4.17E+03 | 2.23 |
| | | 16 | 3.79E+02 | 2.49 | 7.47E+02 | 2.43 | 3.99E+02 | 2.48 | 7.81E+02 | 2.42 |
| | | 32 | 6.70E+01 | 2.50 | 1.33E+02 | 2.49 | 7.07E+01 | 2.50 | 1.40E+02 | 2.48 |

Tabelle 6.5: Fehler in parameter-abhängiger Norm $\|\cdot\|_{\boldsymbol{P}}$.

| | | | $c_p = 0, \alpha = 1$ | | | | $c_p = 0.1, \alpha = 0,99747$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lambda$ | $\boldsymbol{K}$ | $\frac{1}{\tau}$ | $\|\cdot\|_{\max}$ | EOC | $\|\cdot\|_2$ | EOC | $\|\cdot\|_{\max}$ | EOC | $\|\cdot\|_2$ | EOC |
| 1E0 | 1E-6 | 4 | 4.86E-01 | | 8.72E-01 | | 8.20E-01 | | 1.28E+00 | |
| | | 8 | 3.15E-02 | 3.95 | 5.05E-02 | 4.11 | 1.14E-01 | 2.85 | 1.83E-01 | 2.81 |
| | | 16 | 2.01E-03 | 3.97 | 3.30E-03 | 3.94 | 1.48E-02 | 2.95 | 2.37E-02 | 2.95 |
| | | 32 | 1.28E-04 | 3.98 | 2.04E-04 | 4.02 | 1.86E-03 | 2.99 | 3.00E-03 | 2.98 |
| | 1E-10 | 4 | 4.93E-01 | | 8.78E-01 | | 8.22E-01 | | 1.29E+00 | |
| | | 8 | 3.19E-02 | 3.95 | 5.10E-02 | 4.11 | 1.14E-01 | 2.85 | 1.83E-01 | 2.81 |
| | | 16 | 2.03E-03 | 3.98 | 3.35E-03 | 3.93 | 1.48E-02 | 2.95 | 2.37E-02 | 2.95 |
| | | 32 | 1.28E-04 | 3.99 | 2.00E-04 | 4.07 | 1.87E-03 | 2.99 | 3.01E-03 | 2.98 |
| 1E8 | 1E-6 | 4 | 6.99E+00 | | 1.25E+01 | | 6.17E-01 | | 1.05E+00 | |
| | | 8 | 6.07E-01 | 3.52 | 9.64E-01 | 3.69 | 7.83E-02 | 2.98 | 1.29E-01 | 3.03 |
| | | 16 | 5.65E-02 | 3.43 | 8.70E-02 | 3.47 | 9.83E-03 | 2.99 | 1.60E-02 | 3.01 |
| | | 32 | 5.51E-03 | 3.36 | 8.43E-03 | 3.37 | 1.23E-03 | 3.00 | 2.00E-03 | 3.00 |
| | 1E-10 | 4 | 1.68E+03 | | 3.01E+03 | | 6.17E-01 | | 1.05E+00 | |
| | | 8 | 2.17E+02 | 2.96 | 3.69E+02 | 3.03 | 7.83E-02 | 2.98 | 1.29E-01 | 3.03 |
| | | 16 | 2.74E+01 | 2.98 | 4.60E+01 | 3.01 | 9.85E-03 | 2.99 | 1.61E-02 | 3.01 |
| | | 32 | 3.44E+00 | 3.00 | 5.75E+00 | 3.00 | 1.23E-03 | 3.00 | 2.01E-03 | 3.00 |

Tabelle 6.6: Fehler in parameter-unabhängigen Normen für $\boldsymbol{u}$.

| | | | $c_p = 0, \alpha = 1$ | | | | $c_p = 0.1, \alpha = 0,99747$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lambda$ | $\boldsymbol{K}$ | $\frac{1}{\tau}$ | $\|\cdot\|_{\max}$ | EOC | $\|\cdot\|_2$ | EOC | $\|\cdot\|_{\max}$ | EOC | $\|\cdot\|_2$ | EOC |
| 1E0 | 1E-6 | 4 | 3.41E-01 | | 5.55E-01 | | 3.15E-01 | | 5.93E-01 | |
| | | 8 | 9.09E-02 | 1.91 | 1.69E-01 | 1.71 | 9.26E-02 | 1.77 | 1.92E-01 | 1.63 |
| | | 16 | 2.30E-02 | 1.98 | 4.47E-02 | 1.92 | 2.43E-02 | 1.93 | 4.97E-02 | 1.95 |
| | | 32 | 5.78E-03 | 1.99 | 1.13E-02 | 1.98 | 6.15E-03 | 1.98 | 1.27E-02 | 1.97 |
| | 1E-10 | 4 | 3.43E-01 | | 5.59E-01 | | 3.16E-01 | | 5.95E-01 | |
| | | 8 | 9.14E-02 | 1.91 | 1.70E-01 | 1.71 | 9.28E-02 | 1.77 | 1.93E-01 | 1.63 |
| | | 16 | 2.32E-02 | 1.98 | 4.50E-02 | 1.92 | 2.44E-02 | 1.93 | 5.00E-02 | 1.95 |
| | | 32 | 5.81E-03 | 1.99 | 1.14E-02 | 1.98 | 6.17E-03 | 1.98 | 1.28E-02 | 1.97 |
| 1E8 | 1E-6 | 4 | 1.54E-01 | | 2.13E-01 | | 1.54E-01 | | 2.12E-01 | |
| | | 8 | 3.95E-02 | 1.96 | 7.07E-02 | 1.59 | 3.95E-02 | 1.96 | 7.06E-02 | 1.59 |
| | | 16 | 9.94E-03 | 1.99 | 1.89E-02 | 1.90 | 9.94E-03 | 1.99 | 1.89E-02 | 1.90 |
| | | 32 | 2.49E-03 | 2.00 | 4.79E-03 | 1.98 | 2.49E-03 | 2.00 | 4.79E-03 | 1.98 |
| | 1E-10 | 4 | 3.20E-01 | | 5.25E-01 | | 1.54E-01 | | 2.12E-01 | |
| | | 8 | 8.61E-02 | 1.89 | 1.61E-01 | 1.70 | 3.95E-02 | 1.96 | 7.06E-02 | 1.59 |
| | | 16 | 2.18E-02 | 1.98 | 4.26E-02 | 1.92 | 9.94E-03 | 1.99 | 1.89E-02 | 1.90 |
| | | 32 | 5.48E-03 | 1.99 | 1.08E-02 | 1.98 | 2.49E-03 | 2.00 | 4.79E-03 | 1.98 |

Tabelle 6.7: Fehler in parameter-unabhängigen Normen für $\boldsymbol{v}$.

| | | | $c_p = 0, \alpha = 1$ | | | | $c_p = 0.1, \alpha = 0,99747$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lambda$ | $\boldsymbol{K}$ | $\frac{1}{\tau}$ | $\|\cdot\|_{\max}$ | EOC | $\|\cdot\|_2$ | EOC | $\|\cdot\|_{\max}$ | EOC | $\|\cdot\|_2$ | EOC |
| 1E0 | 1E-6 | 4 | 3.36E-01 | | 5.55E-01 | | 3.37E-01 | | 5.93E-01 | |
| | | 8 | 8.85E-02 | 1.92 | 1.69E-01 | 1.71 | 8.87E-02 | 1.93 | 1.92E-01 | 1.63 |
| | | 16 | 2.24E-02 | 1.98 | 4.47E-02 | 1.92 | 2.25E-02 | 1.98 | 4.97E-02 | 1.95 |
| | | 32 | 5.63E-03 | 1.99 | 1.13E-02 | 1.98 | 5.64E-03 | 1.99 | 1.27E-02 | 1.97 |
| | 1E-10 | 4 | 3.37E-01 | | 5.59E-01 | | 3.37E-01 | | 5.95E-01 | |
| | | 8 | 8.89E-02 | 1.93 | 1.70E-01 | 1.71 | 8.89E-02 | 1.93 | 1.93E-01 | 1.63 |
| | | 16 | 2.25E-02 | 1.98 | 4.50E-02 | 1.92 | 2.25E-02 | 1.98 | 5.00E-02 | 1.95 |
| | | 32 | 5.65E-03 | 1.99 | 1.14E-02 | 1.98 | 5.65E-03 | 1.99 | 1.28E-02 | 1.97 |
| 1E8 | 1E-6 | 4 | 1.54E-01 | | 2.13E-01 | | 3.37E-01 | | 2.12E-01 | |
| | | 8 | 3.95E-02 | 1.96 | 7.07E-02 | 1.59 | 8.88E-02 | 1.93 | 7.06E-02 | 1.59 |
| | | 16 | 9.94E-03 | 1.99 | 1.89E-02 | 1.90 | 2.25E-02 | 1.98 | 1.89E-02 | 1.90 |
| | | 32 | 2.49E-03 | 2.00 | 4.79E-03 | 1.98 | 5.65E-03 | 1.99 | 4.79E-03 | 1.98 |
| | 1E-10 | 4 | 3.15E-01 | | 5.25E-01 | | 3.37E-01 | | 2.12E-01 | |
| | | 8 | 8.38E-02 | 1.91 | 1.61E-01 | 1.70 | 8.89E-02 | 1.93 | 7.06E-02 | 1.59 |
| | | 16 | 2.13E-02 | 1.98 | 4.26E-02 | 1.92 | 2.25E-02 | 1.98 | 1.89E-02 | 1.90 |
| | | 32 | 5.34E-03 | 1.99 | 1.08E-02 | 1.98 | 5.65E-03 | 1.99 | 4.79E-03 | 1.98 |

Tabelle 6.8: Fehler in parameter-unabhängigen Normen für $\boldsymbol{p}$.

| | | | $c_p = 0, \alpha = 1$ | | | | $c_p = 0.1, \alpha = 0,99747$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lambda$ | $\boldsymbol{K}$ | $\frac{1}{\tau}$ | $\|\cdot\|_{\max}$ | EOC | $\|\cdot\|_2$ | EOC | $\|\cdot\|_{\max}$ | EOC | $\|\cdot\|_2$ | EOC |
| 1E0 | 1E-6 | 4 | 9.90E+02 | | 1.78E+03 | | 2.07E+01 | | 3.25E+01 | |
| | | 8 | 2.56E+02 | 1.95 | 4.10E+02 | 2.11 | 5.76E+00 | 1.85 | 9.24E+00 | 1.81 |
| | | 16 | 6.48E+01 | 1.98 | 1.06E+02 | 1.95 | 1.49E+00 | 1.95 | 2.40E+00 | 1.95 |
| | | 32 | 1.62E+01 | 2.00 | 2.59E+01 | 2.04 | 3.77E-01 | 1.99 | 6.07E-01 | 1.98 |
| | 1E-10 | 4 | 1.01E+03 | | 1.79E+03 | | 2.08E+01 | | 3.25E+01 | |
| | | 8 | 2.61E+02 | 1.95 | 4.17E+02 | 2.11 | 5.77E+00 | 1.85 | 9.28E+00 | 1.81 |
| | | 16 | 6.64E+01 | 1.98 | 1.10E+02 | 1.93 | 1.50E+00 | 1.95 | 2.40E+00 | 1.95 |
| | | 32 | 1.67E+01 | 1.99 | 2.61E+01 | 2.07 | 3.78E-01 | 1.99 | 6.09E-01 | 1.98 |
| 1E8 | 1E-6 | 4 | 1.53E+05 | | 2.74E+05 | | 1.56E+01 | | 2.66E+01 | |
| | | 8 | 3.66E+04 | 2.07 | 5.81E+04 | 2.24 | 3.96E+00 | 1.98 | 6.52E+00 | 2.03 |
| | | 16 | 9.12E+03 | 2.01 | 1.40E+04 | 2.05 | 9.95E-01 | 1.99 | 1.62E+00 | 2.01 |
| | | 32 | 2.28E+03 | 2.00 | 3.49E+03 | 2.01 | 2.49E-01 | 2.00 | 4.05E-01 | 2.00 |
| | 1E-10 | 4 | 1.35E+08 | | 2.41E+08 | | 1.56E+01 | | 2.66E+01 | |
| | | 8 | 3.47E+07 | 1.96 | 5.90E+07 | 2.03 | 3.96E+00 | 1.98 | 6.52E+00 | 2.03 |
| | | 16 | 8.77E+06 | 1.98 | 1.47E+07 | 2.01 | 9.97E-01 | 1.99 | 1.62E+00 | 2.01 |
| | | 32 | 2.20E+06 | 2.00 | 3.68E+06 | 2.00 | 2.50E-01 | 2.00 | 4.06E-01 | 2.00 |

Tabelle 6.9: Fehler in parameter-unabhängigen Normen für div $\boldsymbol{u}$.

| | | | $c_p = 0, \alpha = 1$ | | | | $c_p = 0.1, \alpha = 0,99747$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lambda$ | $\boldsymbol{K}$ | $\frac{1}{\tau}$ | $\|\cdot\|_{\max}$ | EOC | $\|\cdot\|_2$ | EOC | $\|\cdot\|_{\max}$ | EOC | $\|\cdot\|_2$ | EOC |
| 1E0 | 1E-6 | 4 | 2.13E+00 | | 3.48E+00 | | 2.01E+00 | | 3.75E+00 | |
| | | 8 | 5.61E-01 | 1.92 | 1.05E+00 | 1.73 | 5.89E-01 | 1.77 | 1.22E+00 | 1.63 |
| | | 16 | 1.42E-01 | 1.98 | 2.78E-01 | 1.92 | 1.55E-01 | 1.93 | 3.17E-01 | 1.94 |
| | | 32 | 3.57E-02 | 1.99 | 7.04E-02 | 1.98 | 3.92E-02 | 1.98 | 8.10E-02 | 1.97 |
| | 1E-10 | 4 | 2.15E+00 | | 3.49E+00 | | 2.01E+00 | | 3.76E+00 | |
| | | 8 | 5.65E-01 | 1.92 | 1.05E+00 | 1.73 | 5.91E-01 | 1.77 | 1.22E+00 | 1.62 |
| | | 16 | 1.43E-01 | 1.98 | 2.79E-01 | 1.91 | 1.55E-01 | 1.93 | 3.18E-01 | 1.94 |
| | | 32 | 3.60E-02 | 1.99 | 7.07E-02 | 1.98 | 3.93E-02 | 1.98 | 8.13E-02 | 1.97 |
| 1E8 | 1E-6 | 4 | 1.00E+00 | | 1.36E+00 | | 1.00E+00 | | 1.36E+00 | |
| | | 8 | 2.60E-01 | 1.94 | 4.54E-01 | 1.58 | 2.60E-01 | 1.94 | 4.54E-01 | 1.58 |
| | | 16 | 6.57E-02 | 1.99 | 1.22E-01 | 1.90 | 6.57E-02 | 1.99 | 1.22E-01 | 1.90 |
| | | 32 | 1.65E-02 | 2.00 | 3.09E-02 | 1.98 | 1.65E-02 | 2.00 | 3.09E-02 | 1.98 |
| | 1E-10 | 4 | 1.99E+00 | | 3.29E+00 | | 1.00E+00 | | 1.36E+00 | |
| | | 8 | 5.31E-01 | 1.91 | 1.00E+00 | 1.71 | 2.60E-01 | 1.94 | 4.54E-01 | 1.58 |
| | | 16 | 1.35E-01 | 1.98 | 2.65E-01 | 1.92 | 6.57E-02 | 1.99 | 1.22E-01 | 1.90 |
| | | 32 | 3.39E-02 | 1.99 | 6.71E-02 | 1.98 | 1.65E-02 | 2.00 | 3.09E-02 | 1.98 |

Tabelle 6.10: Fehler in parameter-unabhängigen Normen für div $\boldsymbol{v}$.

| | | | $c_p = 0, \alpha = 1$ | | | | $c_p = 0.1, \alpha = 0,99747$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lambda$ | $\boldsymbol{K}$ | $\frac{1}{\tau}$ | $\|\cdot\|_{\max}$ | EOC | $\|\cdot\|_2$ | EOC | $\|\cdot\|_{\max}$ | EOC | $\|\cdot\|_2$ | EOC |
| 1E0 | 1E-6 | 4 | 2.13E+00 | | 3.48E+00 | | 2.14E+00 | | 3.49E+00 | |
| | | 8 | 5.61E-01 | 1.92 | 1.05E+00 | 1.73 | 5.64E-01 | 1.92 | 1.05E+00 | 1.73 |
| | | 16 | 1.42E-01 | 1.98 | 2.78E-01 | 1.92 | 1.43E-01 | 1.98 | 2.78E-01 | 1.92 |
| | | 32 | 3.57E-02 | 1.99 | 7.04E-02 | 1.98 | 3.58E-02 | 2.00 | 7.06E-02 | 1.98 |
| | 1E-10 | 4 | 2.15E+00 | | 3.49E+00 | | 2.15E+00 | | 3.49E+00 | |
| | | 8 | 5.65E-01 | 1.92 | 1.05E+00 | 1.73 | 5.65E-01 | 1.92 | 1.05E+00 | 1.73 |
| | | 16 | 1.43E-01 | 1.98 | 2.79E-01 | 1.91 | 1.43E-01 | 1.98 | 2.79E-01 | 1.91 |
| | | 32 | 3.60E-02 | 1.99 | 7.07E-02 | 1.98 | 3.60E-02 | 1.99 | 7.07E-02 | 1.98 |
| 1E8 | 1E-6 | 4 | 1.00E+00 | | 1.36E+00 | | 2.15E+00 | | 3.49E+00 | |
| | | 8 | 2.60E-01 | 1.94 | 4.54E-01 | 1.58 | 5.65E-01 | 1.92 | 1.05E+00 | 1.73 |
| | | 16 | 6.57E-02 | 1.99 | 1.22E-01 | 1.90 | 1.43E-01 | 1.98 | 2.79E-01 | 1.91 |
| | | 32 | 1.65E-02 | 2.00 | 3.09E-02 | 1.98 | 3.59E-02 | 2.00 | 7.07E-02 | 1.98 |
| | 1E-10 | 4 | 1.99E+00 | | 3.29E+00 | | 2.15E+00 | | 3.49E+00 | |
| | | 8 | 5.31E-01 | 1.91 | 1.00E+00 | 1.71 | 5.65E-01 | 1.92 | 1.05E+00 | 1.73 |
| | | 16 | 1.35E-01 | 1.98 | 2.65E-01 | 1.92 | 1.43E-01 | 1.98 | 2.79E-01 | 1.91 |
| | | 32 | 3.39E-02 | 1.99 | 6.71E-02 | 1.98 | 3.60E-02 | 1.99 | 7.07E-02 | 1.98 |

Tabelle 6.11: Fehler in parameter-unabhängigen Normen für $\nabla \boldsymbol{u}$.

| | | | $c_p = 0, \alpha = 1$ | | | | $c_p = 0.1, \alpha = 0,99747$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lambda$ | $\boldsymbol{K}$ | $\frac{1}{\tau}$ | $\|\cdot\|_{\max}$ | EOC | $\|\cdot\|_2$ | EOC | $\|\cdot\|_{\max}$ | EOC | $\|\cdot\|_2$ | EOC |
| 1E0 | 1E-6 | 4 | 2.40E+00 | | 3.72E+00 | | 2.08E+00 | | 3.90E+00 | |
| | | 8 | 7.09E-01 | 1.76 | 1.28E+00 | 1.54 | 7.08E-01 | 1.55 | 1.39E+00 | 1.49 |
| | | 16 | 1.75E-01 | 2.02 | 3.17E-01 | 2.01 | 1.75E-01 | 2.01 | 3.39E-01 | 2.04 |
| | | 32 | 4.41E-02 | 1.99 | 8.11E-02 | 1.97 | 4.41E-02 | 1.99 | 8.66E-02 | 1.97 |
| | 1E-10 | 4 | 2.41E+00 | | 3.75E+00 | | 2.08E+00 | | 3.91E+00 | |
| | | 8 | 7.17E-01 | 1.75 | 1.29E+00 | 1.54 | 7.12E-01 | 1.55 | 1.40E+00 | 1.48 |
| | | 16 | 1.78E-01 | 2.01 | 3.20E-01 | 2.01 | 1.76E-01 | 2.02 | 3.40E-01 | 2.04 |
| | | 32 | 4.47E-02 | 1.99 | 8.21E-02 | 1.96 | 4.43E-02 | 1.99 | 8.70E-02 | 1.97 |
| 1E8 | 1E-6 | 4 | 9.98E-01 | | 1.35E+00 | | 9.98E-01 | | 1.35E+00 | |
| | | 8 | 2.59E-01 | 1.95 | 4.50E-01 | 1.59 | 2.59E-01 | 1.95 | 4.50E-01 | 1.59 |
| | | 16 | 6.51E-02 | 1.99 | 1.20E-01 | 1.90 | 6.51E-02 | 1.99 | 1.20E-01 | 1.90 |
| | | 32 | 1.62E-02 | 2.00 | 3.05E-02 | 1.98 | 1.62E-02 | 2.00 | 3.05E-02 | 1.98 |
| | 1E-10 | 4 | 2.23E+00 | | 3.42E+00 | | 9.98E-01 | | 1.35E+00 | |
| | | 8 | 6.73E-01 | 1.73 | 1.19E+00 | 1.52 | 2.59E-01 | 1.95 | 4.50E-01 | 1.59 |
| | | 16 | 1.65E-01 | 2.03 | 3.01E-01 | 1.99 | 6.51E-02 | 1.99 | 1.21E-01 | 1.90 |
| | | 32 | 4.14E-02 | 1.99 | 7.68E-02 | 1.97 | 1.63E-02 | 2.00 | 3.06E-02 | 1.98 |

# Literaturverzeichnis


[1] J.H. Adler, F. J. Gaspar, X. Hu, C. Rodrigo, and L.T. Zikatanov. Robust block preconditioners for Biot's model. In *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XXIV. DD 2017. Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, volume 125, pages 3–16. Springer, Cham, 2019.

[2] G. Akrivis, C. Makridakis, and R. H. Nochetto. A posteriori error estimates for the Crank-Nicolson method for parabolic equations. *Mathematics of Computation*, 75(254):511–531, 2006.

[3] T. Almani, K. Kumar, A. Dogru, G. Singh, and M.F. Wheeler. Convergence analysis of multirate fixed-stress split iterative schemes for coupling flow with geomechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 311:180–207, 2016.

[4] M. S. Alnæs, J. Blechta, J. Hake, A. Johansson, B. Kehlet, A. Logg, C. Richardson, J. Ring, M. E. Rognes, and G. N. Wells. The FEniCS project version 1.5. *Archive of Numerical Software*, 3(100), 2015.

[5] D. N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, and L. D. Marini. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 39(5):1749–1779, 2002.

[6] D.N. Arnold. An interior penalty finite element method with discontinuous elements. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 19(4):742–760, 1982.

[7] O. Axelsson. *Iterative Solution Methods.* Cambridge University Press, 1994.

[8] O. Axelsson, R. Blaheta, and P. Byczanski. Stable discretization of poroelasticity problems and efficient preconditioners for arising saddle point type matrices. *Computing and Visualization in Science*, 15(4):191–207, 2012.

[9] I. Babuška. Error-bounds for finite element method. *Numerische Mathematik*, 16(4):322–333, January 1971.

[10] I. Babuška and A. K. Aziz. *"Survey Lectures on the Mathematical Foundation of the Finite Element Method," In: A. K. Aziz, Ed., The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations.* Academic Press, New York, 1972.

[11] T. Bærland, J.J. Lee, K.-A. Mardal, and R. Winther. Weakly imposed symmetry and robust preconditioners for Biot's consolidation model. *Computational Methods in Applied Mathematics*, 17(3):377–396, 2017.

[12] M. Bai, D. Elsworth, and J. Roegiers. Multiporosity/multipermeability approach to the simulation of naturally fractured reservoirs. *Water Resources Research*, 29(6):1621–1633, 1993.

[13] G. A. Baker. Error estimates for finite element methods for second order hyperbolic equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 13(4):564–576, 1976.

[14] M. Bause. Iterative coupling of mixed and discontinuous Galerkin methods for poroelasticity. In *Numerical mathematics and advanced applications—ENUMATH 2017*, volume 126 of *Lect. Notes Comput. Sci. Eng.*, pages 551–560. Springer, Cham, 2019.

[15] M. Bause, J. W. Both, and F. A. Radu. Iterative coupling for fully dynamic poroelasticity. In F. J. Vermolen and C. Vuik, editors, *Numerical Mathematics and Advanced Applications ENUMATH 2019*, pages 115–123. Springer International Publishing, Cham, 2021.

[16] M. Bause, U. Köcher, and F. A. Radu. Convergence of a continuous Galerkin method for mixed hyperbolic-parabolic systems. *arXiv preprint arXiv:2201.12014*, 2022.

[17] M. Bause, F.A. Radu, and U. Köcher. Space–time finite element approximation of the Biot poroelasticity system with iterative coupling. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 320:745–768, 2017.

[18] M. A. Biot. General theory of three dimensional consolidation. *Journal of Applied Physics*, 12(2):155–164, 1941.

[19] M. A. Biot. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid. *Journal of Applied Physics*, 26(2):182–185, 1955.

[20] M. A. Biot. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media. *Journal of Applied Physics*, 33(4):1482–1498, 1962.

[21] M. A. Biot and D. G. Willis. The elastic coefficients of the theory of consolidation. *Journal of Applied Mechanics*, 24:594–601, 1957.

[22] D. Boffi, M. Botti, and D.A. Di Pietro. A nonconforming high-order method for the Biot problem on general meshes. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 38(3):A1508–A1537, 2016.

[23] D. Boffi, F. Brezzi, and M. Fortin. *Mixed Finite Element Methods and Applications.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.

[24] J. W. Both, M. Borregales, J. M. Nordbotten, K. Kumar, and F. A. Radu. Robust fixed stress splitting for Biot's equations in heterogeneous media. *Applied Mathematics Letters*, 68:101–108, 2017.

[25] D. Braess. *Finite Elemente Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie*. Springer Spektrum, 2013.

[26] S. Brenner and R. Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer-Verlag New York, 2008.

[27] F. Brezzi. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers. *Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 8:129–151, 1974.

[28] B. Cockburn, G. Kanschat, and D. Schötzau. A note on discontinuous Galerkin divergence-free solutions of the Navier–Stokes equations. *Journal of Scientific Computing*, 31(1):61–73, 2007.

[29] M. Costabel and M. Dauge. On the inequalities of Babuška-Aziz, Friedrichs and Horgan-Payne. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 217:873–898, 2015.

[30] E. Detournay and A. H. Cheng. Fundamentals of poroelasticity. *Journal of Fluid Mechanics*, pages 113–171, 1993.

[31] A. Ern and J. Guermond. *Theory and Practice of Finite Elements*. Springer-Verlag New York, 2004.

[32] A. Ern and J. Guermond. *Finite Elements III, First-Order and Time-Dependent PDEs*. Springer, Cham, 2021.

[33] M. Fortin and M. Soulie. A non-conforming piecewise quadratic finite element on triangles. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 19(4):505–520, 1983.

[34] F. J. Gaspar, F. J. Lisbona, and P. N. Vabishchevich. Staggered grid discretizations for the quasi-static Biot's consolidation problem. *Applied Numerical Mathematics. An IMACS Journal*, 56(6):888–898, 2006.

[35] F. J. Gaspar, F. J. Lisbona, and P.N. Vabishchevich. A finite difference analysis of Biot's consolidation model. *Applied Numerical Mathematics. An IMACS Journal*, 44(4):487–506, 2003.

[36] W. Hackbusch. *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen*. Springer Spektrum, 2017.

[37] E. Hairer, C. Lubich, and G. Wanner. *Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*, volume 31. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2010.

[38] P. Hansbo and M.G. Larson. Discontinuous Galerkin and the Crouzeix-Raviart element: application to elasticity. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 37(01):63–72, 2003.

[39] F. W. Herbert. *Theory of Linear Poroelasticity with Applications to Geomechanics and Hydrogeology.* Princeton University Press, 2017.

[40] Q. Hong, J. Hu, S. Shu, and J. Xu. A discontinuous Galerkin method for the fourth-order curl problem. *Journal of Computational Mathematics*, 30(6):565–578, 2012.

[41] Q. Hong and J. Kraus. Parameter-robust stability of classical three-field formulation of Biot's consolidation model. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 48:202–226, 2018.

[42] Q. Hong, J. Kraus, M. Lymbery, and F. Philo. Conservative discretizations and parameter-robust preconditioners for Biot and multiple-network flux-based poroelasticity models. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 26(4):e2242, 2019.

[43] Q. Hong, J. Kraus, M. Lymbery, and F. Philo. Parameter-robust Uzawa-type iterative methods for double saddle point problems arising in Biot's consolidation and multiple-network poroelasticity models. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 30(13):2523–2555, 2020.

[44] Q. Hong, J. Kraus, M. Lymbery, and F. Philo. A new practical framework for the stability analysis of perturbed saddle-point problems and applications. *Mathematics of Computation*, electronically published on November 17, 2022. DOI: https://doi.org/10.1090/mcom/3795 (to appear in print).

[45] Q. Hong, J. Kraus, M. Lymbery, and M. F. Wheeler. Parameter-robust convergence analysis of fixed-stress split iterative method for multiple-permeability poroelasticity systems. *Multiscale Modeling & Simulation*, 18(2):916–941, 2020.

[46] X. Hu, C. Rodrigo, F.J. Gaspar, and L.T. Zikatanov. A nonconforming finite element method for the Biot's consolidation model in poroelasticity. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 310:143–154, 2017.

[47] C. Kanzow. *Numerik linearer Gleichungssysteme: Direkte und iterative Verfahren.* Springer, Berlin, Heidelberg, 1 edition, 2005.

[48] J. Kim, H.A. Tchelepi, and R. Juanes. Stability, accuracy and efficiency of sequential methods for coupled flow and geomechanics. *SPE Journal*, 16(2), 2011.

[49] J. J. Lee. Robust error analysis of coupled mixed methods for Biot's consolidation model. *Journal of Scientific Computing*, 69(2):610–632, 2016.

[50] J. J. Lee, K.-A. Mardal, and R. Winther. Parameter-robust discretization and preconditioning of Biot's consolidation model. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 39(1):A1–A24, 2017.

[51] J. J. Lee, E. Piersanti, K.-A. Mardal, and M. E. Rognes. A mixed finite element method for nearly incompressible multiple-network poroelasticity. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 41(2):A722–A747, 2019.

[52] A. Logg, K.-A. Mardal, Garth N. Wells, et al. *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method*. Springer, 2012.

[53] K.-A. Mardal and R. Winther. Preconditioning discretizations of systems of partial differential equations. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 18(1):1–40, 2011.

[54] A. Meister. *Numerik linearer Gleichungssysteme-Eine Einführung in moderne Verfahren. Mit MATLAB®-Implementierungen von C. Vömel*. Springer Spektrum, Wiesbaden, 5 edition, 2015.

[55] A. Mielke and E. Rohan. Homogenization of elastic waves in fluid-saturated porous media using the Biot model. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 23(05):873–916, 2013.

[56] A. Mikelić and M.F. Wheeler. Convergence of iterative coupling for coupled flow and geomechanics. *Computational Geosciences*, 17:455–461, 2013.

[57] J.M. Nordbotten. Stable cell-centered finite volume discretization for Biot equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 54(2):942–968, 2016.

[58] R. Oyarzúa and R. Ruiz-Baier. Locking-free finite element methods for poroelasticity. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 54(5):2951–2973, 2016.

[59] Y. Saad. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, second edition, 2003.

[60] D. Schötzau, C. Schwab, and A. Toselli. Mixed hp-DGFEM for incompressible flows. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 40(6):2171–2194, 2002.

[61] R.E. Showalter. Diffusion in poro-elastic media. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 251(1):310–340, 2000.

[62] J. Sogn and W. Zulehner. Schur complement preconditioners for multiple saddle point problems of block tridiagonal form with application to optimization problems. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 39:1328–1359, 2019.

[63] E. Storvik, J. W. Both, K. Kumar, J. M. Nordbotten, and F. A. Radu. On the optimization of the fixed-stress splitting for Biot's equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 120(2):179–194, 2019.

[64] B. Tully and Y. Ventikos. Cerebral water transport using multiple-network poroelastic theory: application to normal pressure hydrocephalus. *Journal of Fluid Mechanics*, 667:188–215, 2011.

[65] J.C. Vardakis, D. Chou, B.J. Tully, C.C. Hung, T.H. Lee, P.H. Tsui, and Y. Ventikos. Investigating cerebral oedema using poroelasticity. *Medical Engineering and Physics*, 38(1):48–57, 2016.

[66] D. Werner. *Funktionalanalysis*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.

[67] O. C. Zienkiewicz. Basic formulation of static and dynamic behaviours of soil and other porous media. *Applied Mathematics and Mechanics*, 3:457–468, 1982.

[68] O. C. Zienkiewicz and T. Shiomi. Dynamic behaviour of saturated porous media; the generalized Biot formulation and its numerical solution. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 8:71–96, 1984.

[69] A. Ženíšek. The existence and uniqueness theorem in Biot's consolidation theory. *Aplikace matematiky*, 29(3):194–211, 1984.