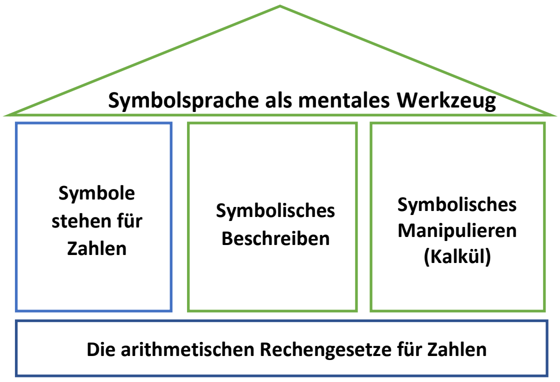
Wege ~~vom~~ in den Kalkül



Herausforderungen auf dem Weg zu Termumformung und Gleichungslehre und Ansätze zu ihrer Bewältigung

Design Based Research zum Einstieg in die Elementare Algebra

Erwin Gerstner

D i s s e r t a t i o n
zum Erwerb des Grades Dr. rer. nat.
vorgelegt bei der Fakultät für Mathematik
der Universität Duisburg-Essen
Januar 2022

Erstgutachter:
Prof. Dr. Andreas Bücher, Fakultät für Mathematik,
Universität Duisburg-Essen

Zweitgutachterin:
Prof. Dr. Katja Lengnink Institut für Didaktik der Mathematik,
Justus-Liebig-Universität Gießen

Termin der mündlichen Prüfung: 21.10.2022

DOI: 10.17185/duepublico/78130
URN: urn:nbn:de:hbz:465-20230424-144050-6

Anmerkungen, das Gendern/Entgendern in dieser Arbeit betreffend:

Diese Arbeit verwendet durchgehend das generische Maskulinum. Dementsprechend wird meist von „dem Schüler“ gesprochen. Selbstverständlich ist damit auch „die Schülerin“ gemeint. Jedesmal „die Schülerin oder der Schüler“ zu schreiben bzw. zu lesen, wäre sehr aufwändig - und stört meines Erachtens den Sprachfluss. Ebenso heißt es meist „der Lehrer“, womit selbstverständlich auch die Lehrerin gemeint ist. Zudem sehe ich von einer durchgehenden Verwendung des Gender-Sternchens ab, da es mein ganz persönliches ästhetisches Sprachempfinden stört.

Meiner Meinung nach ist das generische Maskulinum zutiefst in der deutschen Sprache verankert und es ist keinesfalls geschlechterdiskriminierend. Ich halte es dabei ganz wie Peter Eisenberg: „Die von den Autorinnen gegebene semantische Charakterisierung des generischen Maskulinums „Frauen sind mitgemeint“ ist inkorrekt. Frauen sind gar nicht gemeint, ebenso wenig wie Männer oder Geschlechtsidentitäten jenseits der binären Norm. Darin liegt gerade das Spezifische des generischen Maskulinums. Ein Wort wie Lehrer hat genau zwei Bausteine, nämlich den Verbstamm ‚lehr‘ und das Substantivierungssuffix ‚er‘, das zu Bezeichnungen von Personen führt, die das tun, was der Verbstamm besagt.“ (ebd. 2018)

„Was er sah, war sinnverwirrend.
In einer krausen, kindlich dick aufgetragenen Schrift, die Imma Spoelmanns besondere Federhaltung erkennen ließ, bedeckte ein phantastischer Hokuspokus, ein Hexensabbat verschränkter Runen die Seiten. Griechische Schriftzeichen waren mit lateinischen und mit Ziffern in verschiedener Höhe verkoppelt, mit Kreuzen und Strichen durchsetzt, ober- und unterhalb waagrechter Linien bruchartig aufgereiht, durch andere Linien zeltartig überdacht, durch Doppelstrichelchen gleichgewertet, durch runde Klammern zusammengefasst, durch eckige Klammern zu großen Formelmassen vereinigt. Einzelne Buchstaben, wie Schildwachen vorgeschoben, waren rechts oberhalb der umklammerten Gruppen ausgesetzt. Kabbalistische Male, vollständig unverständlich dem Laiensinn, umfassten mit ihren Armen Buchstaben und Zahlen, während Zahlenbrüche ihnen voranstanden und Zahlen und Buchstaben ihnen zu Häuptern und Füßen schwebten. Sonderbare Silben, Abkürzungen geheimnisvoller Worte waren überall eingestreut, und zwischen den nekromantischen Kolonnen standen geschriebene Sätze und Bemerkungen in täglicher Sprache, deren Sinn so hoch über allen menschlichen Dingen war, dass man sie lesen konnte, ohne mehr davon zu verstehen, als von einem Zaubergemurmel.“

Thomas Mann 1909, „Königliche Hoheit“, gesammelte Werke (1960), S. 242 ff.

Inhalt

„Übrigens ist mir alles verhasst, was mich bloß belehrt, ohne meine Tätigkeit zu vermehren oder unmittelbar zu beleben.“ J.W. v. Goethe 1798 in einem Briefwechsel mit Schiller

Abstract

Die allerersten Anfänge der Algebra datieren auf ca. 2000 v. Chr. Damals wurden durch Umkehrung einfacher praktischer Aufgaben erste Gleichungen mit Unbekannten konstruiert, wobei diese Algebra völlig ohne algebraische Symbole auskam, was kulturübergreifend bis zu Diophant (ca. 200 n. Chr.) so blieb. Er führt als erster symbolische Abkürzungen für *eine* Unbekannte ein, die er in seine sonst verbalen Artikulationen einbettet. Erst im 16. Jahrhundert führt Vieta, zusätzlich zu den Unbekannten, Buchstaben für die Parameter einer Gleichung ein. Dadurch wird das *symbolische Zahlkonzept* (Klein 1936) erfunden und die Algebra wird fortan zu einem Rechnen mit Symbolen und „so kam die mathematische Formel ‚auf die Welt‘ “ (Krämer 1988, S. 12) .

Heute ist man sich einig, dass *Algebra* und *Algebraisches Denken* nicht erst dann beginnt, wenn man mit dem Buchstabenrechnen anfängt. Eine eindeutige Charakterisierung von *Algebra* und *Algebraischem Denken* konnte ich dennoch nirgendwo finden. Es scheint vielmehr so zu sein, dass jeder Charakterisierungsversuch in die Feststellung mündet, „dass die meisten der für die Algebra spezifischen Denkhandlungen auch spezifisch für das Mathematiktreiben im Allgemeinen sind“ (Hefendehl 2007). Die vielleicht passendste Charakterisierung stammt von Radford (2010): „Die Algebra arbeitet mit Objekten *unbestimmter* Natur, mit denen auf eine *analytische Weise* umgegangen wird und die vornehmlich *relational* verarbeitet werden.“

Die Hoffnung, die Algebra könnte sich so ohne weiteres aus der Arithmetik heraus entwickeln, gilt heute gemeinhin als widerlegt. Zu umfangreich und vielschichtig sind die für die Algebra nötigen Um- und Neudeutungen der in der Arithmetik aufgebauten Konzepte. Sowohl die „fachlich-epistemologische Analyse als auch die empirische Realität“ (Hefendehl 2001) zeigen einen Sprung, einen ‚*cognitive gap*‘ (Hersovics & Linchevski 1994) oder ‚*didactical cut*‘ (Filloy & Rojano 1984, 1985) im Lernprozess zwischen der Arithmetik und der Algebra.

Aktuelle Ansätze zur Einführung in die elementare Algebra setzen oft ein *„Primat des Inhalts vor dem Kalkül“* oder versuchen zumindest alle den Kalkül aus bedeutungstragenden Inhalten heraus aufzubauen. Aus diesen Ansätzen heraus sind in meinem Dissertationsprojekt zwei Unterrichtsreihen entstanden, die Zugänge wählen, die anfangs von ganz unterschiedlichen Denkhandlungen ausgehen und die einer *Problemlöseperspektive* und einer *Generalsierungsperspektive* auf die Algebra zugeordnet werden können. Mit diesen beiden Reihen wurde eine mehrjährige *design-based* Entwicklungsforschung im Klassenunterricht durchgeführt.

Die Ergebnisse dieser Entwicklungsforschung widersprechen der Hoffnung, der algebraische Kalkül könne sich so ohne weiteres aus sinnstiftenden und bedeutungstragenden Inhalten heraus entwickeln. Exemplarisch wird anhand der beiden Reihen aufgezeigt, dass inhaltliche, algebraanbahnende Kontexte, die reichhaltige Denkhandlungen ermöglichen, zwar ungemein hilfreich sein können, aber mitunter auch ganz eigene Lern- und Verstehenshürden beim algebraischen Kalkül aufbauen. So müssen z. B. mühsam aufgebaute *Narrative* kollabieren oder die Schüler flüchten in selbst aufgebaute und nun vertraute Inhaltsebenen, um dem mühsamen Geschäft des algebraischen Umformens zu entgehen. Inhaltliche Kontexte, Modelle und Darstellungswechsel können auch Hindernisse sein, wenn sie einem *symbolischen Verständnis von Zahlen*, das eine Grundlage algebraischen Denkens ist, widersprechen (Lins 1992).

Mit einer besonnenen Ausgewogenheit von *Inhalt <u>und</u> Kalkül* kann eine Einführung in die Algebra gelingen, wenn man sich als Lehrkraft nur der vielfältigen neu aufzubauenden Konzepte und Denkhandlungen bewusst ist und diese im *mathematischen Diskurs* des Klassenunterrichts auch möglichst explizit macht.

Einleitung und Motivation

> *„Bis zur 7./8. Klasse hat mir Mathe in der Schule immer Spaß gemacht: Und DANN kamen die Buchstaben! “* ((An-)Klagende Grundschul-Lehramtsstudierende der Universität Essen 2019)

In nuce ist die elementare Algebra (in folgendem kurz Algebra) denkbar einfach: Man bezeichnet unbekannte und unbestimmte Zahlen mit Buchstaben (Variablen) und rechnet mit diesen wie mit Zahlen. Man interpretiert das „=“-Zeichen als Relationszeichen zwischen Zahlen und agiert flexibel mit den Variablen. Einmal denkt man dabei an eine einzelne Zahl, ein andermal an alle Zahlen eines Bereichs gleichzeitig oder zeitlich aufeinanderfolgend.

Es scheint so einfach, aber das Erlernen der Algebra ist für viele mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden. Algebra, in der oben beschriebenen *in-nuce-Form,* hat sich in der Mathematik selbst erst ab dem 16. Jahrhundert entwickelt, obwohl erste algebraische Denkhandlungen schon etwa zwei Jahrtausende in vorchristliche Zeit zurückreichen. In jüngerer Zeit, seit die elementare Algebra integraler Bestandteil der Schulmathematik ist, wurden die Sichtweisen darauf, wie die Algebra zu unterrichten ist, schon mehrmals geändert. Mal wurde das formal-abstrakte, dann wieder das gegenständlich-anschauliche der Algebra betont. Mathematikdidaktische Abhandlungen, die mit einem Unbehagen mit den Ergebnissen des Algebraunterrichts einhergehen, gibt es nicht erst seit gestern und universitäre Klagen über die mangelnde Algebraexpertise der Studierenden wollen nicht verhallen. Und nicht zuletzt die Unterrichtspraxis: Generationen von Schülern erlebten die Algebra als schwierig und wirklichkeitsfremd, und so *„… manches Mathe-Trauma nahm hier seinen Anfang*“ (Hefendehl 2003).

Es ist ein Kreuz mit der Algebra. Lernt man jemanden neu kennen und offenbart sich als Mathematiklehrer, so erfährt man oft wie „schlimm“ und „sinnentleert“ vor allem das Buchstabenrechnen empfunden wurde, selbst wenn man es „irgendwie“ geschafft hat die „sinnlosen“ Verfahren einzupauken, um die Schulmathematik zu „überleben“. Fischer, Hefendehl und Prediger sprechen dabei vom *Problem der erlebten Sinnlosigkeit*:

> *„Algebra ist ein Thema, das bei vielen Schülerinnen und Schülern nicht sehr beliebt ist. Sie empfinden die Algebra häufig als wirklichkeitsfremd, ohne Bezug zur eigenen Person und Lebenswelt: ein System von strengen Regeln, an die man sich strikt halten muss, deren Sinn aber nicht einsichtig ist und deren Anwendung ohne Ziel geschieht. Die Regeln scheinen irgendwie beliebig zu sein.“ (Fischer et al. 2010).*

Als Gymnasiallehrer musste ich immer wieder beobachten, wie Schüler, die in der Orientierungsstufe durchaus mit Motivation und Spaß bei der Sache waren, dieselben mit Einführung der Algebra nach und nach verloren haben und nachfolgend das Mathematiktreiben als einen fortwährenden, nicht selten angsterfüllten, Kampf empfanden, in dem man versucht sich von Klassenarbeit zu Klassenarbeit durchzuhangeln. Das Problem ist schon lange bekannt und in den letzten 20 bis 25 Jahren wurden deshalb viele Bemühungen unternommen, die man unter *„Weg vom Kalkül, hin zum Sinn!“* (Haarmann et al. 1997, S. 20) subsumieren könnte. Dies spiegelt sich auch in veränderten Schulbüchern wider. In den letzten 20 Jahren fand dort eindeutig eine Aspektverschiebung statt, die weg von reproduktiv einzuübenden Aufgabenplantagen hin zu sinnstiftenden und bedeutungstragenden Kontexten ging. Nur wurde es dadurch – nach meiner ganz subjektiven Einschätzung – nicht unbedingt besser.

Lehrer sind insbesondere in der Algebra oft ratlos, wie genau sie den Schülern helfen können ihre Schwierigkeiten zu überwinden. In informellen Gesprächen hört man oft, dass die Inhalte der Algebra für viele Lernende *eben einfach zu abstrakt* und anspruchsvoll seien: *„Manche kapieren es irgendwann und andere eben nie!“*. Ist das wirklich so?
Stellt die Schulalgebra tatsächlich einen Scheideweg dar, wo sich der *homo mathematicus* von seiner Sippe, die fortan nur noch hinterherhinkt, für immer entfernt? Dunkel meine ich mich an andere Zeiten zu erinnern, in denen das Lehren und Lernen von Algebra zwar auch schwierig war, doch „irgendwie“ besser funktionierte. An Zeiten, gewappnet mit dem „grauen“ *Lambacher Schweizer* (Schmidt & Weidig 2008), mit mehr Zeit und Raum für die Algebra, als ich mich noch zu sagen traute: *„Ich kann verstehen, dass du das noch nicht so ganz verstehst. Hab Vertrauen in die Verfahren und mit etwas Fleiß und Beharrlichkeit wird sich das Verständnis schon einstellen!“* Oder malt hier nur die Erinnerung mit goldenen Pinseln?
Kann Algebra denn überhaupt gelingen? Spezifischer:

> *Gibt es Wege, didaktische Ansätze, Lehr-Lernorganisation der elementaren Algebra, die möglichst wenig Lernende zurücklässt und in dem möglichst viele Algebra als sinnvolles, wirkungsvolles und anwendbares Instrument sowohl innerhalb der Mathematik als auch in der Welt um uns herum erleben?*

Diese Frage spiegelt meine allererste persönliche Motivation für die vorliegende Arbeit wieder und von Anfang an war klar, dass alle Bemühungen am Ende am ganz normalen Klassenunterricht gemessen werden sollten.
So sind aktuell diskutierte Ansätze zur Einführung in die Algebra zu zwei Unterrichtsreihen verarbeitet worden, die bewusst Zugänge wählen, die jeweils mit ganz unterschiedlichen Denkhandlungen einhergehen. Eine Reihe wählt einen Zugang über *Zahlenrätsel,* die andere über *Musterverallgemeinerungen.* Die erste beginnt mit Gleichungen und Äquivalenzumformungen, die zweite mit Termen und Termumformungen. Diese Reihen wurden mehrmals in 7. Klassen des Gymnasiums durchgeführt und dabei sukzessive adaptiert.
Auch wenn ich zu Anfang vielleicht die leise Hoffnung hatte, es könnte ihn geben, so wird doch ein Ergebnis sein, dass ich keinen *Königsweg* in die Algebra gefunden habe. Vielmehr beinhalten unterschiedliche Zugänge – wie am Beispiel der beiden durchgeführten Reihen aufgezeigt werden wird – jeweils Ihre eigenen Chancen und Untiefen und gehen mit jeweils unterschiedlichen Denkentwicklungen und insbesondere unterschiedlichen Lern- und Verstehenshürden beim Aufbau der algebraischen Symbolsprache einher. Diese Chancen und Untiefen exemplarisch auszuloten und Wege aufzuzeigen, wie man produktiv mit den jeweiligen Lern- und Verstehenshürden umgehen kann, davon handelt diese Arbeit. Ein Schwerpunkt – nicht zuletzt, weil es in allen Durchführungen der Übergang mit dem größten Verwerfungspotential war – wird dabei sein, *wie genau* aus bedeutungstragenden Kontexten heraus erste verstehensorientierte Kalkülhandlungen aufgebaut werden können. Und umgekehrt: Inwiefern konstituieren Kalkülhandlungen auch Bedeutung?

Die Arbeit beginnt mit einer historischen Betrachtung der Entwicklung der Algebra und was man daraus eventuell für den Unterricht lernen kann. Danach wird versucht werden, Algebra und algebraisches Denken zu charakterisieren und sich der Frage anzunähern, warum die Algebra vielen Schülern so schwerfällt und welche grundlegenden konzeptionellen Änderungen und Lernhürden der Übergang von der Arithmetik zur Algebra mit sich bringt.
Welche Lehr-Lern-Ansätze zur Einführung in die Algebra wurden bereits – theoretisch wie praktisch – erprobt und welche Potentiale und Untiefen enthalten sie? Daraus werden sich am Ende des Theorieteils die Forschungsfragen ergeben.

In zweiten Teil wird dann aufgezeigt, wie aktuell diskutierte Einzelansätze im Sinne eines *Designed-Based-Research* von mir zu zwei unterschiedlichen Unterrichtsgängen zur Einführung in die Algebra in Klasse 7 zusammengeführt wurden. Diese Unterrichtsgänge, vergleichend durchgeführt, bilden das didaktisch-methodische Umfeld zur Beantwortung der Forschungsfragen. Es folgen zentrale Beobachtungen, Analysen und Interpretationen der Durchführungen, insbesondere dabei beobachtete zentrale Verwerfungen, und es wird aufgezeigt, wie diese zu adaptiven Anpassungen der Reihendurchführungen führten.
Im letzten Teil wird versucht, die Forschungsfragen zu beantworten, die Ergebnisse werden zusammengefasst, kritisch reflektiert und ihre mögliche Bedeutung für Theorie und Praxis diskutiert.

I Zur Geschichte der Algebra

„An der ‚Schnittstelle' der orientalischen und griechischen Traditionslinien, dort also, wo das Wissen um Verfahrensweisen in den Rang eines wissenschaftlich begründeten Wissens gehoben wird, entsteht eine für die neuzeitliche Wissenschaft konstitutive und vorbildlose Neuerung: die mathematische Formel" (Krämer 1988, S. 72)

I.I Die historische Entwicklung der Algebra

Heute herrscht Einmütigkeit, dass ein Blick in die Geschichte nützlich für das Lehren und Lernen von Mathematik ist. Die didaktische Literatur dazu ist sehr vielfältig, allenthalben werden spezialisierte Konferenzen dazu abgehalten, Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik sind längst integraler Bestandteil der Hochschulausbildung der Lehrerinnen und Lehrer, aktuelle Schulbücher enthalten mathematikhistorische Exkursionen und nicht wenige Fachdidaktiker schöpfen aus eingehenden Untersuchungen historischer Quellen tiefe Einsichten für ihre theoretische und praktische Arbeit (z. B. Sfard 1995, Radford 2008, Radford & Furinghetti 2018, Charbonneau 1996).
Bei einem oberflächlichen Blick fällt auf, dass die Entwicklung der Algebra, beginnend von ihrem ersten (symbolfreien) Auftreten bei den Babyloniern bis zur Erfindung der modernen algebraischen Symbolsprache im 16. und 17. Jahrhundert durch Vieta, Decartes, u. a. eine außergewöhnlich lange Zeit in Anspruch genommen hat. Die Geschichte der Algebra ist bis ins 18. Jahrhundert hinein eine Geschichte des Lösens von Gleichungen (rhetorisch, synkoptisch, geometrisch, operational-symbolisch; s.u.) und eine Geschichte der geistigen Widerstände und deren Überwindung durch fortschreitende Abstraktionen bis hin zur abstrakten Strukturalgebra unserer Zeit.
Im Wissen, die verwickelten Verhältnisse dabei stark zu vereinfachen, wird hier versucht einen kurzen Abriss dieser Geschichte zu zeichnen. Die meisten Historiker der Geschichte der Algebra benutzen – wenn viele sich auch bewusst sind, dass sie damit die verwickelten Verhältnisse stark vereinfachen (siehe z. B. Boyer 1986) – eine Einteilung der historischen Entwicklung der Algebra gemäß der jeweils vorherrschenden Notationsformen in drei Stufen, die bereits im 19. Jahrhundert durch Nesselmann (ebd. 1842, S. 302 ff.) eingeführt wurde: Die ***rhetorische***, die ***synkopierte*** und die ***symbolische*** Algebra (Tabelle 1).

	Rhetorisch	***Synkopiert***	***Symbolisch***
Geschriebene Form des Problems (der Aufgabe)	nur Worte	Worte und Zahlen	Worte und Zahlen
Geschriebene Form der Lösungsmethode	nur Worte	Worte, Zahlen, Symbole für die Unbekannte; Abkürzungen und math. Symbole für Operationen und Exponenten	Worte, Zahlen, Symbole für Unbekannte und Unbestimmte; Abkürzungen und mathematische Symbole für Operationen und Exponenten
Repräsentation der Unbekannten	nur Worte	Symbol oder Buchstabe	Buchstabe
Repräsentationen für gegebene Zahlen	spezifische Zahlen	spezifische Zahlen	Buchstaben (verallgemeinerte Zahlen, Unbestimmte)

Tabelle 1: *Charakterisierung der 3 Stufen der algebraischen Notationweise (übersetzt und leicht abgeändert nach ‚The reinvention of Algebra' (van Ameron 2002)).*

Diese drei Stufen folgen grob der zeitlichen, abendländisch geprägten Entwicklung von den Babyloniern über Diophant bis hin zu Vietas bahnbrechender Erfindung der symbolischen Algebra im 16. Jahrhundert. Ungeachtet dessen, wie revolutionär diese Erfindung auch war, war sie keineswegs eine notwendige Bedingung für das Aufstellen und Lösen von Gleichungen, um die es fast ausschließlich bis ins 18. Jahrhundert in der Algebra ging (Radford 1995, 1996).

Stufe der rhetorischen Algebra.
Scholz (1990) beschreibt, wie vor ca. 4000 Jahren im alten Mesopotamien erste überlieferte Gleichungen entstanden sind, nämlich durch Umkehrungen einfacher praktischer Aufgaben: „Man nahm eine Aufgabe aus dem praktischen Gebiet; jedoch wurde statt einer der im Alltag bekannten Größen das *Resultat als bekannt angenommen* – im einfachsten Fall waren also Länge und Fläche eines rechteckigen Feldes statt Länge und Breite bekannt“ (ebd. 1990, S.15). In dieser frühen *rhetorischen* Phase wurde ganz ohne Symbole eine mehr oder weniger komplizierte konkrete Größe aus bekannten und unbekannten Größen konstruiert und ihre Maßzahl dann angegeben. In diesem Sinne wurde also eine „Gleichung aufgestellt“ (Scholz 1990, S.21 ff.). Gesucht war dann die unbekannte Größe.
Eine algebraische Denkweise tritt dann zutage, wenn solche Gleichungen mit der sogenannten *analytischen Methode*[1] gelöst werden, man also mit der unbekannten Größe so umgeht, als wäre sie bekannt, und mit dieser unbekannten Größe in ihrem relationalen Gleichungsgefüge so lange operiert, bis am Ende die Identität der Unbekannten enthüllt wird. Gerade in der analytischen Methode wird in Abgrenzung zu arithmetischen Aufgaben, in denen die gesuchten Größen unmittelbar aus den gegebenen bestimmt werden, die algebraische Denkweise gesehen, denn „Algebra schaut nicht auf die Prozeduren, die unmittelbar durchführbar sind, sondern auf die Konzepte, die sich in der Gleichung als Beziehung zwischen Zahlen, Objekten oder Variablen darstellen“ (Steinweg 2012).

Auf einer babylonischen Tontafel um 1600 v. Chr. findet sich eine Aufgabe, die von einem Quadrat handelt, bei der die Maßzahlen von Fläche und Seite zusammen gleich $\frac{3}{4}$ ist[2]. Gleichung und Lösungsalgorithmus werden dabei ausschließlich in Worten angegeben und in moderner Schreibweise kann man diese wie folgt angeben (Scholz 1990, S.21):

$$x^2 + x = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad x^2 + x \cdot 1 = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x + \frac{1}{2} = 1 \quad \Rightarrow x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Typisch für diese frühe Phase ist es, dass der Lösungsalgorithmus im Sinne einer Handlungsanweisung aufgeführt wird, derselbe aber nicht erklärt wird.
Die Babylonier waren auch vertraut mit Verfahren zur Lösung von Problemen mit mehreren Unbekannten (Tropfke 1980). Sie lösten z. B. das in moderner Notation aufgeschriebene Gleichungssystem

$$\text{(I)} \quad x + \frac{1}{4}y = 7$$

---

[1] Der Begriff „analytische“ Methode geht auf Pappus zurück. Nach Mahoney (1968, S. 322) definiert Pappos in Buch 7: „Now analysis is the passage from the thing sought, as if it were admittes, through the things which follow in order [from it], to something admitted as the result of synthesis.”

[2] Übrigens eine rein akademische Aufgabe ohne jedweden praktischen Wert. Wer addiert schon Flächeninhalte mit Seitenlängen?

$$\text{(II)} \quad x + \quad y = 10$$

durch ein Additionsverfahren, indem sie die erste Gleichung mit 4 multiplizierten und dann die zweite Gleichung subtrahierten, um $3x = 18$ zu erhalten. Also ist $x = 6$ und durch die zweite Gleichung folgt $y = 10 - 6 = 4$.

Die Lösungsverfahren beider Beispiele muten schon sehr modern an. Charakteristisch für diese historische Phase ist jedoch, dass es keine Symbole für die Unbekannten gibt, die Lösungsmethoden rein verbal angegeben werden, die Lösungen zwar beschrieben werden, doch i.d.R. kein Versuch unternommen wird diese zu erklären und dass, bis auf die gesuchten Maßgrößen selbst, nur spezifische Maßangaben gegeben sind. Scholz spricht von einer algebraischen Denkweise, die stark auf das Lösen des jeweils gestellten Problems fokussiert, die „kein Interesse an Lösbarkeits- oder Strukturtheorien zeigt“ (Scholz 1990, S.21). Diese rhetorische Phase dauert kulturübergreifend bis ca. 200 n. Chr. an und geht mit der *„Arithmetika“* Diophants in die ***synkopierte*** Phase über.

Stufe der synkopierten Algebra.
Nesselmann, der den Begriff geprägt hat, hält fest:

> „Die zweite Stufe kann man die ***synkopierte*** Algebra nennen. Ihr Vortrag ist dem Wesen nach ***rhetorisch***, wie in der ersten Stufe, aber sie bedient sich für gewisse oft wiederkehrende Begriffe und Operationen constanter Abbreviaturen statt der vollen Worte. Auf dieser Stufe steht Diophantus und die späteren Europäer bis gegen die Mitte des siebzehnten Jahrhunderts, obgleich schon Vieta in seinen Schriften den Keim der modernen Algebra niedergelegt hat, der aber erst einige Zeit nach ihm aufsproßte.“ (Nesselmann 1848, S. 302)

Zuvörderst führt Diophant eine abkürzende Notation für *die* Unbekannte ein und bedient sich dabei des einzigen Symbosl des griechischen Alphabets, das zu dieser Zeit noch keinen spezifischen Zahlenwert in sich begriff, nämlich des *Finalsigmas* ς (Nesselmann 1848). Zudem kamen Abkürzungen für die Potenzen dieser *einen* Unbekannten und ein Symbol für die Subtraktion. In Diophants Artikulationen der Lösungen seiner ‚Gleichungen‘ dominiert die sprachliche Textform, in die seine Abkürzungen eingebettet sind. Oft wird auch *die* Unbekannte selbst im selben Text einmal in Wortform und einmal in seiner symbolischen Notation ς verwendet.
Tropfke (1980, S. 278) weist darauf hin, dass Diophant aber über die reine Notation hinausgeht. Erstens rechnet er mit der symbolischen Unbekannten ς und deren Potenzen. Arithmetische Operationen mit termartigen Ausdrücken (wie z. B. $3\,\varsigma + \varsigma + 1 = 4\varsigma + 1, oder\ 3(\varsigma^2 + 1) = 3\varsigma^2 + 3$) werden wie selbstverständlich ausgeführt, ohne entsprechende Regeln dazu zu benennen. Und zweitens erklärt er – im Gegensatz zu den Babyloniern – allgemein Methode und Zweck des Umformens von Gleichungen, um *die* Unbekannte zu isolieren. Auch wenn Diophant sich um allgemeine Methoden des Lösens von bestimmten und unbestimmten Gleichungen bemüht, stößt seine Algebra auf Grenzen. Nämlich auf Grenzen bezüglich der ***unbekannten Größe***, der ***gegebenen Größen*** und der ***Lösungen***.

Diphant kennt nur ein Symbol (ς) für ***die Unbekannte*** und vermag deshalb nur *eine* Unbekannte in eine Gleichung einzuführen. Wenn ein Problem mehrere Unbekannte enthält, versucht Diophant alle Unbekannten durch eine einzige auszudrücken und arbeitet damit mit sukzessive aufeinander folgenden Einzelgleichungen statt mit einem Gleichungssystem. Unterbestimmte Gleichungen, die also auf eine Endgleichung mit zwei oder mehreren Unbekannten führen würden, führt er auf Gleichungen in einer Unbekannten zurück, indem er für die überzähligen Unbekannten willkürlich gewählte bestimmte Zahlen annimmt und auf diese Weise die Aufgabe in eine bestimmte verwandelt.

Was die ***gegebenen Größen*** angeht – die in moderner Nomenklatur den Parametern und Koeffizienten der Gleichung entsprechen – kennt Diophant nur spezifische Zahlen und Größen. Diophant bemüht sich zwar durch eingehende Beschreibung der Methoden um Allgemeinheit und stellt auch klar, dass diese spezifischen Zahlen und Größen in gleichartigen Problemstellungen auch durch andere ersetzt werden können, aber ohne Symbole für die (unbestimmten) gegebenen Zahlen war es für ihn und die nachfolgenden Mathematiker ein schwieriges Unterfangen, die Algebra auf ein universelleres Niveau zu heben, indem in einem Aufwasch ganze Klassen von Gleichungen und Gleichungssystemen allgemein gelöst werden können. Es ist vor allem diese in konkreten Zahlenbeispielen verhaftete Unzulänglichkeit, die den nachfolgenden, noch der Stufe der synkopierten (mitunter auch der rhetorischen) Algebra zuzurechnenden, Mathematikern – seien es die Inder, die Araber oder die Mitteleuropäer ab dem 12. Jahrhundert – bis ins 16. Jahrhundert hinein anhaftet. Mathematikhistoriker sind sich einig, dass erst Vieta (1540-1603) in einem Geniestreich das Tor zur ***symbolischen*** *Algebra* aufgestoßen hat, indem er auch für die *gegebenen Größen* symbolische Bezeichnungen in Form von Buchstaben eingeführt hat (mehr dazu weiter unten).

Zuletzt sind bei Diophant auch die ***Lösungen*** der Gleichungen stark eingeschränkt. Er akzeptiert nur positive ganzzahlige und rationale Lösungen, keine negativen oder irrationalen Größen und Diophant gibt sich stets damit zufrieden, wenn seine jeweilige Lösungsmethode zu einer einzigen Lösung führt, selbst wenn es offensichtlich mehrere Lösungen gibt (siehe z. B. van Ameron 2002). Ohnehin kannte die griechische Tradition, an deren Ende Diophant ja stand, kein einheitliches Zahlkonzept, wie es für uns gang und gäbe ist, sondern es gab Zahlen (dies waren nur positive Anzahlen einer gegebenen Einheit), Größen, Proportionen (also Verhältnisse von Zahlen oder Größen) und irrationale Größen. Letztere wurden in der griechischen Tradition vornehmlich geometrisch repräsentiert gesehen.

Bevor ich den bahnbrechenden Durchbruch zu erklären versuche, der sich durch die simpel anmutende Einführung von Buchstaben nicht nur für die unbekannten, sondern auch für die gegebenen (unbestimmten) Größen durch Vieta eröffnete, möchte ich hier noch Diophants Lösung einer speziellen Aufgabe darstellen. Es ist gerade diese Aufgabe, die Vieta in seiner *Einführung in die analytische Kunst* benutzt, um die Überlegenheit seines algebraischen Systems über das von Diophant aufzuzeigen.
Es ist folgendes Problem:

> *„Eine gegebene Zahl ist in zwei Summanden zu zerlegen, die eine gegebene Differenz haben."* (Tropfke, 1980).

Diophants Gedankengang kann in moderner Schreibweise wie folgt wiedergegeben werden (ich folge dabei mit kleinen Abweichungen einer Darstellung von Harper (1987), das ‚Original' enthält wesentlich mehr Text; eine englischsprachige Übersetzung einer lateinischen Übersetzung des überlieferten griechischen ‚Originals' kann man auch in Harper (1987) finden):

Nimm an, dass die Summe 100 *und die Differenz* 40 *ist.*
Um die Zahlen zu finden, nenne die kleinere x
Dann ist die größere Zahl $x + 40$
Dann sind beide Zahlen zusammen $2x + 40$

Also folgt $2x + 40 = 100$
Und da ich Gleiches von Gleichem wegnehmen darf, nehme ich 40 *Einheiten von* $2x + 40$ *und* 40 *Einheiten von* 100 *weg*
So folgt $2x = 60$*, also* $x = 30$*. Die beiden Zahlen sind* 30 *und* 70*.*

An dieser – auch im diophant'schen Aufgabenkanon – sehr einfachen Aufgabe kann man einige Spezifika gut erkennen. Obwohl die Aufgabenstellung allgemein von einer beliebig gegebenen Summe und Differenz spricht, beginnt Diophant in Ermangelung eines symbolischen Konzepts für gegebene Größen damit, für Summe und Differenz (willkürliche) spezifische Zahlen zu setzen.
Die direkte Übersetzung der Aufgabe führt geradewegs eher auf ein Gleichungssystem, geschrieben in moderner Notation als

$$x + y = 100$$
$$x - y = 40$$

Während die Babylonier x und y durch Eliminationsverfahren ausrechnen (Tropfke 1990), setzt Diophant in Ermangelung einer symbolischen Notation einer zweiten Unbekannten die kleinere der beiden Zahlen als x an und folgert, dass dann die größere $x + 40$ sein muss, um endlich eine Gleichung mit einer Unbekannten zu erhalten. Die Lösung ist nicht unmittelbar eine allgemeine Lösung des allgemein gestellten Problems. Dazu muss man die anfangs willkürlich gesetzten Zahlen als *generische Variablen* verstehen und sich vorstellen, dass dasselbe Lösungsverfahren für beliebig andere gesetze Zahlen ausgeführt werden könnte.

Die Stufe der symbolischen Algebra
Vieta stellt in seiner 1593 veröffentlichten Abhandlung *Einleitung in die analytische Kunst* seine Lösung der soeben besprochenen Aufgabe Diophants Lösung bewusst gegenüber. Seine Lösung kann in moderner Schreibweise wie folgt dargestellt werden (wieder folge ich – mit leichten Abwandlungen – der Darstellung von Harper (1987); den lateinischen Originaltext nach einer Darstellung von van Schooten und eine englische Übersetzung kann man in van Ameron (2002, S. 41) finden):

Die Summe sei a*, die Differenz* b*.*
Die kleinere Seite sei x*.*
Dann ist die größere Seite $x + b$
Also ist deren Summe $2x + b = a$
Daraus folgt (durch Antithesis) $2x = a - b$ *und* $x = \frac{a-b}{2}$

Danach wird ganz analog y bestimmt ($x = y - b \rightarrow 2y - b = a \rightarrow y = \frac{a+b}{2}$). Zuletzt setzt er beispielhaft $a = 100$ und $b = 40$ in seine Formeln ein und erhält $x = 30$ und $y = 70$.
Vieta feiert seine Erfindung selbst: „Quod est, NULLUM NON PROBLEMA SOLVERE!" (Vieta 1593, zitiert nach Klein 1936, S.194).

Der Vergleich der beiden Aufgabenbearbeitungen macht unmittelbar einsichtig, welchen gewaltigen Fortschritt Vieta durch den Gebrauch von Symbolen für unbestimmte Größen erzielt hat. „This solution is immediately ‚general'. No matter what a and b represent, the two numbers are given by $\frac{a-b}{2}$ and $\frac{a+b}{2}$. Vieta was extremely proud of his innovation (as well he might have, for it opened up a century of mathematical invention the like of which has never been seen since the date)." (Harper 1987, S. 79).
Mathematikhistoriker werden nicht müde Vietas Buchstabengebrauch für gegebene Größen (Vieta nannte diese ‚species') als bahnbrechenden Entwicklungsschritt zu feiern. Für Klein

(1934) entsteht hier der „moderne Begriff der ‚Zahl', wie er dem symbolischen Rechenverfahren zu Grunde liegt, der … in sich selbst — wie das von ihm Gemeinte — symbolischer Natur ist: er ist mit dem Vieta 'schen Begriff der species identisch". Booth (1989) vergleicht den Fortschritt mit dem Übergang vom römischen Zahlensystem zum hindu-arabischen Stellenwertsystem in Europa. Nach Kieran können nun Lösungen in allgemeiner Form dargestellt werden und die Algebra als Werkzeug benutzt werden, um Regeln zu beweisen, die den numerischen Relationen zugrunde liegen: „It is this Vietan stage in the development of algebraic symbolism that forms the basis of what I consider *algebraic thinking* to be." (Kieran 1989, S.166). Viele Mathematikhistoriker sehen hier die Geburtsstunde der mathematischen Formel, die so konstituierend für die nachfolgende Mathematik und Naturwissenschaft war: „Die Algebra bleibt nicht länger ein Rechnen mit – wenn auch noch unbekannten – Zahlen, sondern wird zu einem Rechnen mit Symbolen: So kam die mathematische Formel ‚auf die Welt' " (Krämer 1988, S. 61).
Dieser Entwicklungssprung eröffnet nicht nur viele neue Möglichkeiten, sondern stellt selbstredend auch neue, wesentlich komplexere Denkanforderungen. Beides erleuchtet Harper (1987) überzeugend anhand einfacher Gleichungen, weshalb ich im Folgenden abermals seinen Überlegungen folge.
Betrachten wir zunächst eine allgemeine Gleichung, wie Vieta sie nun untersuchen kann:

$$x + y = a.$$

‚a' kann nun als gegebene Größe betrachtet werden und kann dabei irgendeine Zahl oder alle Zahlen eines Bereichs darstellen. ‚x' und ‚y' treten nun zu ‚a' in Beziehung und können entweder als einzelne unbekannte Zahlen, die durch die Gleichung algebraisch festgelegt sind, oder bei gegebenem ‚a' als miteinander korrelierte Variablen angesehen werden. Es ist unmittelbar einsichtig, dass hier Denkhandlungen nötig und möglich sind, die man nicht braucht, wenn man lediglich an der Bestimmung der zwar unbekannten, doch von vornherein als bestimmt betrachteten Lösung der Gleichung

$$x + 2 = 7$$

oder

$$x + y = 6$$

interessiert ist. Wenn man die allgemeine Lösung der letzten Gleichung in geschlossener Form angeben will, braucht man ebenfalls das Konzept der *unbestimmten Zahl* $(x = t,\ y = 6 - t)$. Diophant löste eine solche unterbestimmte Gleichung ja dadurch, dass er zuerst einen beliebigen Zahlenwert für z. B. y setzte.

Kurz: Vieta führt ein neues Konzept - das ***symbolische Zahlenkonzept*** - ein, durch das die Symbole, die vormals lediglich für Unbekannte gestanden haben, nun radikal neu gedacht und gedeutet werden können[3].
In der Folge erfährt Vietas Symbolismus durch Mathematiker wie Decartes, Stevin, Wallis, Newton, u. a. (siehe z. B. Pycior 1997, Klein 1936) weitere Ausschärfungen, bis sie schließlich um das 18. Jahrhundert in Notation und Gestalt die *algebraische Symbolsprache* wurde, wie wir sie heute noch in der Schule unterrichten. Eine abstrakte Strukturalgebra, in die sich die Algebra in der Moderne dann weiterentwickelte, hat m. E. wenig unmittelbare Relevanz für die Einführung der Algebra in der Schule und wird hier deshalb ausgelassen.

[3] Wir stehen hier mit einem Bein schon bereits im - für die Fachdidaktik sehr zentralen - Feld der Variablenaspekte. Dazu weiter unten mehr.

Soweit mein Versuch, die Nesselmann'sche Stufeneinteilung der historischen Entwicklung der Algebra wiederzugeben, die ich nicht zuletzt deshalb so ausführlich darzustellen versucht habe, weil nicht wenige kompetente Menschen (s.u.) vertreten, dass Schüler beim Erlernen der Algebra ganz analoge Entwicklungsstufen durchlaufen. Keineswegs soll der Eindruck entstehen, dass die Entwicklung zwar in Sprüngen, doch im Großen und Ganzen in eine Richtung verlaufen ist, wie es die Stufeneinteilung in rhetorische, synkopierte und symbolische Algebra suggerieren könnte. Dies zeigt sich schon darin, dass die sogenannte *Geometrische Algebra* der alten Griechen nicht so recht in diese Entwicklungslinie hineinpasst, obwohl diese nachweislich erhebliche Einflüsse auf die Väter der symbolischen Algebra hatte und deren Ideen und Vorstellungen zutiefst in den Aufbau dieser neuen Wissenschaft verstrickt waren (Klein 1936, Pycior 1997).

Die geometrische Algebra der Griechen

Vieta selbst sah sich gerne als Erneuerer des (vergessenen) antiken Wissens und in seiner Algebra sind nur Größen zugelassen, die dem Homogenitätsprinzip[4] genügen, einer Restriktion, die die Algebra der alten Griechen aufgrund ihrer durchgehend geometrischen Deutungshoheit ebenso unterworfen war.

In der *Geometrischen Algebra*[5] werden Größen als Strecken(längen) interpretiert und Operationen dieser Größen untereinander führen auf Strecken, Flächen und Volumina[6]. Dementsprechend ist das Auffinden der Lösung einer Gleichung identisch mit dem Finden einer geometrischen Konstruktion, an deren Ende man die gesuchte Größe abmessen kann (Beispiel b) in Abb.1). Auch Beweise von Zusammenhängen zwischen Größen, die wir heute als algebraische Identitäten in geometrischer Verkleidung wahrnehmen würden, konnten geführt werden (Beispiel a) in Abb.1) . Dieselben Figuren findet man heute auch in Schulbüchern. Sie sollen dort die Gültigkeit algebraischer Regeln (oft die Gültigkeit der *Rechengesetze*) veranschaulichen.

Diese Geometrisierung durchzieht die gesamte griechische Mathematik und beeinflusste Mathematiker, die ja fleißig die alten griechischen Quellen übersetzen und redigieren, über lange Zeiträume. So werden z. B. die algebraischen Schriften der arabischen Gelehrten des frühen Mittelalters, obwohl zeitlich hinter Diophant angesiedelt, der rhetorischen Phase zugerechnet. Sie beschreiben Rechenverfahren, die nicht ausschließlich an geometrische Größen gebunden sind, nur mit Worten allein, oft wird aber eine Begründung der Verfahren mittels einer geometrischen Konstruktion angegeben (siehe z. B. Abb. 2). Mathematikhistoriker (van de Waerden 1983, 1985, Scholz 1990, Klein 1936) sind sich einig, dass besagte Geometrisierung im Wesentlichen zwei Ursachen hat, die beide zutiefst in dem den Griechen eigenen, kultur- und geisteshistorischen Hintergrund verwurzelt sind. Nun galt die Geometrie den Griechen als Vorbild einer Disziplin mit innerer Konsistenz und geistiger Strenge.

---

[4] Das Homogenitätsprinzip lautet kurz, dass nur Größen gleicher Art streng vergleichbar sind; es ist also z.B. unzulässig Strecken, Flächen und Körper miteinander in Beziehung zu setzen.

[5] In jüngeren Studien häufen sich die Stimmen, dass der Terminus *Geometrische Algebra* irreführend wäre, weil das, was so benannt wird, wenig mit Algebra zu tun hätte und im Wesentlichen einfach nur *Geometrie* wäre (wohl angestoßen von Unguru 1975). Für unsere Darstellung ist dies jedoch irrelevant, weil die sogenannte *Geometrische Algebra* in jedem Falle erhebliche Einflüsse auf die Entwicklung der Algebra hatte.

[6] Descartes bezieht die Buchstaben auch auf geometrische Größen (in der Hauptsache Strecken(längen)), doch er schafft es, in seinem Bemühen geometrische Konstruktionen als Operationen innerhalb eines symbolischen Kalküls zu fassen (er nutzt dazu u. a. die Strahlensätze), das Homogenitätsprinzip hinter sich zu lassen (Scholz 1990).

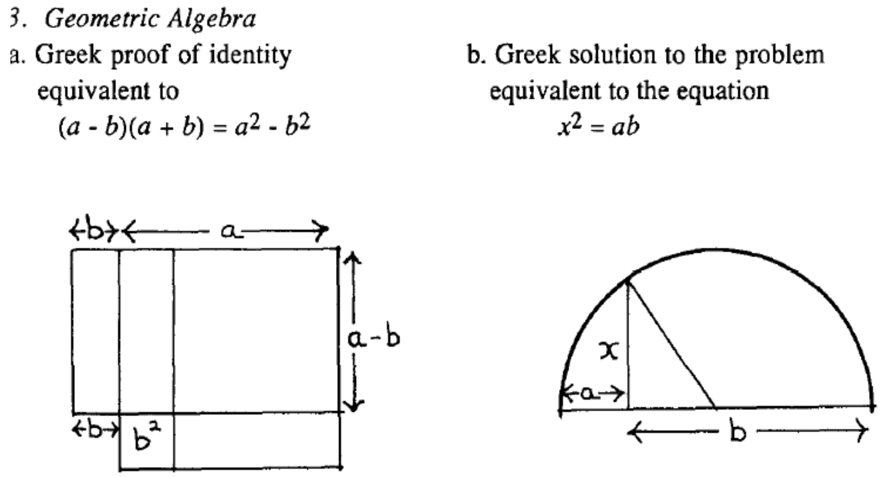


Abb. 1: *Zwei Beispiele aus der Geometrischen Algebra der alten Griechen (entnommen aus Sfard 1995, S.5).*

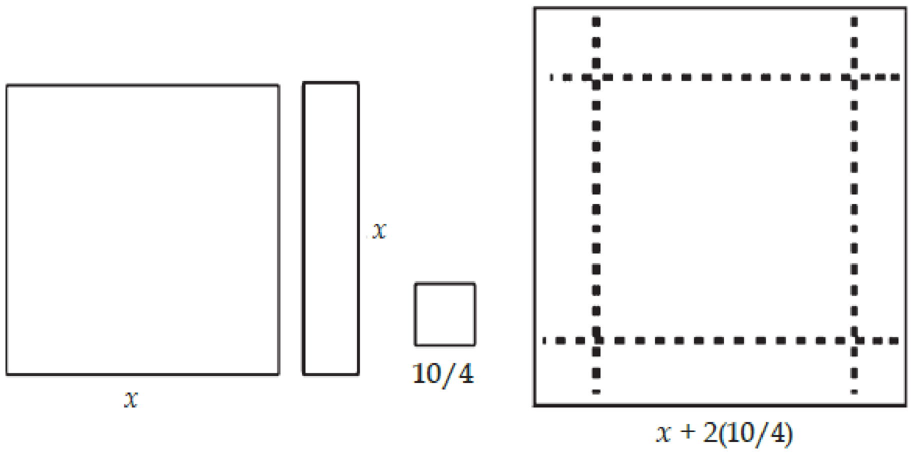


Abb. 2: *Al-Khwarizmis geometrische Begründung der Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 + 10x = 39$ (Bild entnommen aus Radford 1996, S. 642). Al-Kwarizmis Argumentation in moderner Notation (er nutze nur Worte, selbst für die Zahlen): Addiert man zu dem Quadrat x^2 und dem Rechteck $10 \cdot x$ vier Quadrate der Seitenlänge $\frac{10}{4}$ so erhält man ein großes Quadrat der Seitenlänge $x + 2 \cdot \frac{10}{4}$ und so folgt:*

$$x^2 + 4 \cdot \frac{10}{4} x + 4 \cdot \left(\frac{10}{4}\right)^2 = \left(x + 2 \cdot \frac{10}{4}\right)^2 = 39 + 4 \cdot \left(\frac{10}{4}\right)^2 \Rightarrow x = \sqrt{39 + 4 \cdot \left(\frac{10}{4}\right)^2} - \frac{10}{2}$$

Noch heute gelten ja Euklids Elemente als frühes, geradezu paradigmatisches Beispiel der deduktiv-axiomatischen Methode. Viele Autoren (z. B. Alten 2014, Klein 1936) sehen den entscheidenderen Grund für die griechische Geometrisierung der Mathematik jedoch in der Entdeckung der irrationalen Zahlen durch die Pythagoräer, deren Dogma es ja war, alle Verhältnisse in der Welt ließen sich als Quotienten ganzer Zahlen ausdrücken. Die Wurzel aus 2, geometrisch repräsentiert durch die Diagonale eines Quadrats mit Seitenlänge 2, scheint die erste Zahl zu sein, bei der den Griechen der (noch heute landläufige) indirekte Beweis gelang, dass diese Größe nicht durch das Verhältnis zweier ganzer Zahlen darstellbar ist. Mangels eines nicht ausreichend ausgeprägten Zahlbegriffs – Zahl war immer Anzahl einer Einheit – waren die Griechen gezwungen „das Fundament der wissenschaftlichen Zahlenlehre in geometrische Operationen hinabreichen zu lassen" (Krämer 1988, S.34). Im Reich der Zahlen ist $x^2 = 2$ nicht lösbar, im Reich der Geometrie eben schon. Überhaupt zeigen historische Studien, dass die Entwicklung der Algebra bis in die Neuzeit hinein geradezu unentwirrbar mit der (griechischen) Geometrie und mit der Entwicklung und Erweiterung des Zahlkonzepts verstrickt war (zur Ausführung dieser Ideen siehe z. B. Klein 1934, Pycior 1997).

In ihrer mehrtausendjährigen Geschichte entwickelt sich die Algebra also von ihren stark verfahrensorientierten Anfängen nach und nach zu einer abgeschlossenen, die moderne Mathematik geradezu konstituierenden, Disziplin. Doch diese Entwicklung verläuft keineswegs geradlinig, sondern ist von Umwegen, Umbrüchen und der Überwindung von geistigen Widerständen begleitet. Mehrere unterschiedliche Kulturen lieferten dazu ihren Beitrag, jede davon eingebettet in ihren Zeitgeist, in ein komplexes System von sozio-kulturellen Hintergründen, ihrer Bildungskultur, mit ihren eigenen Prägungen, Denkweisen, Vorlieben, Beschränkungen, Widerständen und ihrem eigenen technischen, kognitiven und kulturellen ‚tool kit‘[7]. Schüler befinden sich auch in ihrem eigenen kulturellen Setting, lernen in der 7. Klasse die Algebra in der ‚soziokulturellen Institution‘ Schule (Bosch & Chevallard 1999) innerhalb eines komplexen Systems des Wissenserwerbs, mit ihren eigenen Prägungen, Beschränkungen, Vorlieben und Interessen, ausgestattet mit ihren eigenen technischen, kognitiven und kulturellen ‚tool-kits‘.

I.II Mögliche Verbindungen zwischen der Geschichte und der Schulalgebra

> "*Die Zoologen behaupten, dass die embryonale Entwicklung eines Tieres in sehr kurzer Zeit die ganze Geschichte seiner Vorfahren in den geologischen Epochen durchmacht. Ebenso scheint es mit der Entwicklung des menschlichen Geistes zu sein. Der Erzieher muss das Kind durch alle Phasen führen, die seine Vorfahren durchgemacht haben, bedeutend schneller, aber ohne eine Etappe hinter sich zu verbrennen. In diesem Sinne muss die Geschichte der Wissenschaft unser vornehmster Führer sein.“ (Henry Poincare 1914)*
>
> *„Statt eine besondere Reinheit der Begriffe da zu finden, wo man ihrer Quelle nahe zu sein glaubt, sieht man Alles verschwommen und ungesondert wie durch einen Nebel. Es ist so, als ob jemand, um Amerika kennen zu lernen, sich in die Lage des Columbus zurückversetzen wollte, als er den ersten zweifelhaften Schimmer seines vermeintlichen Indiens erblickte.“ (Gottlob Frege 1884)*
>
> *„Ich sagte mir: all diese Gegenstände ... bei denen nirgends die Frage berührt wird: warum so? Wie kommt man zu ihnen? Alle diese Requisiten müssen doch einmal Objekte eines spannenden Suchens, einer aufregenden Handlung gewesen sein, nämlich damals als sie geschaffen wurden." (Otto Toeplitz 1949*)

Es gibt viele Gründe für den Lehrenden sich mit der Mathematikhistorie zu befassen, sei es z. B. nur um sich vor Augen zu führen, dass die Mathematik noch nie ein fertiges, logisch-abgeschlossenes Gebilde war, oder sei es um im Klassenunterricht die gelernte Herangehensweise an ein Problem mit einer historischen zu vergleichen oder um einfach nur motivierende Anekdoten zu erzählen. Gemäß der Zielperspektive der vorliegenden Arbeit fokussiere ich hier auf die Frage, inwiefern ein Wissen um die historische konzeptuelle Entwicklung hilft, Konzeptentwicklungen der Schüler zu verstehen und Lehr-Lernumgebungen und Lernsituationen für

[7] Das auch schon bei alten Kulturen ‚technische Geräte‘ eine Rolle bei der Entwicklung von mitunter elaborierten Verfahren spielten, zeigt sehr eindrücklich die chinesische „fang-cheng“-Rechnung (um 200 v. Chr.) zur Lösung linearer Gleichungssysteme. Dazu wurden auf dem quadratisch in Zellen angeordneten chinesischen Rechenbrett die Koeffizienten der Gleichungen mit Stäbchen gelegt und Spaltenoperationen durchgeführt (gerade so wie beim Gauß-Algorithmus). Die Anwendung dieser Rechenbretttechnik führte auch auf negative Zahlen und einige Regeln, wie man damit rechnen kann, lange bevor der Rest der Welt dieselben zu akzeptieren bereit war (van Ameron 2002).

die Einführung in die Algebra zu gestalten. Und da in einer solchen Einführung der individuelle Konzeptaufbau des Lernenden zur Algebra ja beginnt, frage ich insbesondere:

> *Welche Verbindungen gibt es zwischen der Entwicklung des algebraischen Denkens der Schüler und der historischen Entwicklung der Algebra und wie können diese für das Lernen nutzbar gemacht werden?*

Viele Mathematiktreibende gehen (oft implizit) wie selbstverständlich davon aus, dass es Analogien zwischen der historischen Entwicklung der Mathematik und der individuellen Konzeptentwicklung der Lernenden gibt.
1866 stellte Häckel die Hypothese auf, dass die Entwicklung des einzelnen Lebewesens (seine Ontogenese) die Stammesentwicklung (Phylogenese) rekapituliert und nannte sie das *Biogenetische Grundgesetz*. Bald schon wurde es als *Psychogenetisches Grundgesetzt* in die psychologische Domäne übertragen: „… the psychic development of the child is but a brief repetition of the phylogenetic evolution“ (Häckel 1912, zitiert aus Radford 2018, S.629). 1918 bezieht sich Poincare auf eben dieses Gesetz und schlägt vor, die Inhalte eines mathematischen Curriculums als kondensierte Form der historischen Entwicklung zu lehren (siehe Zitat oben). Auch wenn Häckels Hypothese in der Biologie heutzutage als überholt gilt, suchen und finden namhafte Forscher (Polya 1962, Vygotsky 1997, Piaget & Garcia in Bringuier 1980, Harper 1987, Sfard 1995, u. a.[8]) seit Anfang des 20. Jahrhunderts bis heute Beziehungen zwischen der phylogenetischen (historischen) Evolution und der ontogenetischen (individuellen) Entwicklung von mathematischen Konzepten. Nach heutigem Forschungsstand darf man die phylogenetisch-ontogenetischen Beziehungen nicht überstrapazieren (und auch die genannten Forscher tun dies keineswegs), indem man etwa allzu starke Parallelen zwischen der individuellen Entwicklung des Mathematiklernenden und der historisch-konzeptionellen Entwicklung der Mathematik sieht. Zur Jahrhundertwende schreiben z. B. Dorier und Rogers:

> “naive recapitulationism has persisted in many forms and now we accept that the relation between ontogenesis and phylogenesis is universally recognized to be much more complex than was originally believed.“ (ebd. 2000, zitiert aus Radford & Furinghetti 2018).

Der heutige Schüler ist eben in vielfältiger Hinsicht von dem antiken, arabischen oder mittelalterlichen Gelehrten weit entfernt.
Aus der Fülle der Untersuchungen rezipiere ich nun zeitgenössische Arbeiten von drei Forschern und Forscherinnen, die tatsächlich Verbindungen zwischen der Entwicklung des algebraischen Denkens der Schüler und der historischen Entwicklung der Algebra sehen.

Eon Harpers „Ghost of Diophantus“ - Die Stufeneinteilung in *rhetorisch, synkopiert, symbolisch* und deren Verbindung zu den algebraischen Konzepten von Schülern

Harpers Untersuchungen (Harper 1979, 1980, 1987), aus denen heraus er Parallelelen zwischen der Nesselmann’schen Stufeneinteilung und der algebraischen Konzeptentwicklung von Schülern ableitet, werden heute noch oft zitiert. Er interviewte 144 Schüler, die aus Year 1 – Year 6 der englischen *grammar-school* (vergleichbar mit den Klassenstufen 5-10 unserer Gymnasien) stammen. Aus jeder Klassenstufe wurden 24 Schüler ausgewählt. Jeder dieser Schüler wurde mit dem diophant’schen Problem konfrontiert, dass wir schon in Abschnitt 1.1 diskutiert haben:

[8] Einen guten Überblick dazu findet man in Radford & Furinghetti 2018.

„If you are given the sum and the difference of any two numbers show that you can always find out what the numbers are. (Harper 1987)"

Die Schüler bearbeiteten die Aufgabe in Anwesenheit von Harper, der jede Frage zur Klärung der Aufgabenstellung beantwortete und sie durften die Aufgabe so lange bearbeiten wie sie wollten.

Harper kategorisiert die Schülerlösungen in

(a) unvollständige und fehlerhafte Lösungen (diese werden nicht weiter untersucht)
(b) „trial and error"-Methoden (auch diese werden nicht weiter beachtet)
(c) „algebraische" Methoden

Die „algebraischen Methoden" sortiert Harper jetzt in das Stufenschema von Nesselmann ein:

(1) „*Rhetorische Methoden*"
Hier werden Lösungen einsortiert, die keine algebraischen Symbole verwenden und stattdessen eine schriftlich formulierte Verfahrensweise angeben, oft gefolgt durch Zahlenbeispiele.

(2) „*Synkopierte Methoden*" (Harper nennt sie ‚Diophantine')
Die Schüler benutzen einen (oder zwei) Buchstaben für die Unbekannten, aber keine Symbole für die ‚gegebene' Summe und Differenz (den Unbestimmten). Harper weist dabei darauf hin, dass bei Schülern, die zwei Unbekannte verwenden, sich der überlagerte Effekt des Unterrichts über lineare Gleichungssysteme zeigt.

(3) „Symbolische Methoden" (Harper nennt sie ‚Vietan')
Die Schüler benutzen Buchstaben für die Unbekannten und die Unbestimmten und lösen das Problem allgemein.

Tabelle 2 zeigt die Ergebnisse der Studie. Auffallend ist, dass der Anteil korrekter Lösungen (Zeile „Total") von der 8. zur 9. Klasse stark zunimmt. In Klasse 10 lösen alle (!) die Aufgabe richtig, was mich aufgrund meiner persönlichen praktischen Lehrerfahrungen wundern lässt. Wenn in Klasse 10 alle Schüler dieses nicht gerade einfache und offen gestellte Problem richtig

TABLE I
Distribution of Rhetorical, Diophantine and Vietan solution-types

Response Type	Number of responses of this type in each Year					
	Year 1	Year 2	Year 3	Year 4	Year 5	Year 6
Rhetorical	4	4	4	1	3	0
Diophantine	0	1	3	5	5	4
Vietan	0	1	0	1	6	20
Total	4	6	7	7	14	24

***Tabelle 2** (entnommen aus Harper (1978), S.83)**:** Verteilung der „algebraischen Lösungen" über die Klassenstufen 5-10 (Year 1-6). In jeder Klassenstufe wurden 24 Schüler interviewt. Insgesamt haben über alle Klassenstufen hinweg 42% die Aufgabe „algebraisch" (rhetorisch, synkopiert oder symbolisch) gelöst. Die nicht aufgeführten Schüler haben die Aufgabe entweder unvollständig bzw. fehlerhaft (insg. 47%) oder durch ‚trial-and-error'-Verfahren (insg. 10%) gelöst.*

lösen und darüber hinaus die überwiegende Mehrheit (20 von 24) das bis dahin gelernte algebraische Know-How zielführend als mentales Werkzeug einsetzen können, welches Problem haben wir dann noch mit der Algebra?

Vielleicht wirkt sich dort der Einfluss des Unterrichts (in etwa das Einüben ganz ähnlicher Aufgaben) aus. Überhaupt mag hier der aufmerksame Leser einwenden, dass diese Ergebnisse lediglich die Unterrichtserfahrungen der Schüler über die Jahre hinweg widerspiegeln. Doch Harper wendet ein, dass die Schüler …

(1) … nie ermutigt wurden, rein schriftliche Lösungen zu liefern
(2) … in den Gebrauch von Buchstaben für Unbekannte im 1. Jahr eingeführt wurden
(3) … Buchstaben für gegebene Größen im Kontext von Funktionen und um Verallgemeinerungen durchzuführen schon ab dem 2. Jahr verwendeten
(4) … lineare Gleichungssysteme im 2. Jahr eingeführt wurden.

Was heißt das nun?
Zunächst einmal scheint hier eine empirische Evidenz vorzuliegen, dass Schüler neue Variablenkonzepte nicht schon direkt nach ihrer Einführung zumindest soweit durchdringen, dass sie in der Lage sind diese selbstbestimmt auf eine etwaige ungewöhnliche Problemstellung anzuwenden. Aber das behauptet sowieso niemand.
Zudem fällt den Schülern der Umgang mit den Unbekannten einfacher als der mit den Unbestimmten. Das erscheint ziemlich offensichtlich, da ja die Denkhandlungen, die mit den Unbestimmten einhergehen, wesentlich vielschichtiger und komplexer sind, als diejenigen, die mit den Unbekannten einhergehen. Dies wird durch die vorgelegte Aufgabe noch verstärkt, weil im Sprung zu der ‚Vietaschen' Bearbeitung nicht einfach die unbestimmten, generalisierten Zahlen allein auftauchen, sondern zusammen mit den Unbekannten. Die einen Variablen muss man sich also als unbekannte (einzelne) Zahlen vorstellen, während man gleichzeitig die Unbestimmten als beliebige Vertreter eines ganzen Zahlbereichs denkt. Dass Schüler damit Probleme haben, weiß der Praktiker aus Erfahrung. Der Wert der Untersuchung ist aber m. E. darin zu sehen, dass dieses praktische Erfahrungswissen empirisch-methodisch untermauert wird.
Aber wozu jetzt noch der Vergleich mit und die Einteilung in die drei Nesselmann'schen Stufen? Wie wird dadurch meine didaktische Handlungsfähigkeit erweitert? Harper analysiert zwar seine Ergebnisse durchaus differenziert, und weist z. B. meiner Meinung nach zu Recht darauf hin, dass die unterschiedlichen Variablenrollen im Unterricht explizit gemacht werden sollten. Aber oft wird Harpers vielzitierte Untersuchung so interpretiert, dass Schüler tatsächlich analoge Stufen zur historischen Entwicklung durchlaufen. So liest man allenthalben Textpassagen wie „Auch Schüler verfügen über diese Entwicklungsstufen. Zu diesem Ergebnis kommt Harper, …" (Kromer 1996) oder „Bei der Behandlung der Algebra in der Schule sollte dieser historische Entwicklungsprozess stärker bedacht werden und dabei auch auf die verschiedenen Arten von Variablen eingegangen werden. Denn wie eine Studie von Harper zeigt, durchlaufen die Schülerinnen und Schüler beim Erlernen der Algebra analoge Phasen zu den oben genannten." (Reimann 2011). Ich stimme darin überein, dass man auf die verschiedenen Arten von Variablen eingehen sollte. Ob Schüler tatsächlich auch die Entwicklungsstufen von Nesselmann durchlaufen? In jedem Falle braucht die Entwicklung eines aspektreichen Variablen- und Termkonzepts seine Zeit.

Anna Sfards historische Perspektive und ihre Theorie der *Reification*

Sfard nutzt den Blick auf die Geschichte der Mathematik als theoretisches Werkzeug, um ganz allgemein die Entwicklung mathematischen Denkens in ihrer Theorie der *Reification* zu beschreiben (Sfard 1995, 2008). Dabei sucht sie nach übergeordneten, gemeinsamen Klammern, nach sogenannten Entwicklungsinvarianten (‚*development invariants*') der historisch-phylogentischen und der individuell-ontogenetischen Entwicklung mathematischen Denkens. Sfard sieht die gemeinsame Klammer in einem zyklisch-aufsteigenden Prozess der *Reification (*Vergegenständlichung*),* indem operational durchgeführte Prozesse in (abstraktere) strukturelle Objekte umgedeutet werden (z. B. das negative Ergebnis einer Differenz als negative Zahl). Diese reifizierten Objekte werden dann selbst wieder Gegenstand operationaler Prozesse, welche später dann wieder strukturell-objekthaft gedacht werden, usw. .

In der Geschichte der Algebra sieht sie in den rhetorisch/synkopierten Phasen das prozedural-operationale Denken vorherrschend, das im Übergang zur symbolischen Phase mehr und mehr von einem strukturell-objekthaften Denken abgelöst wird. Mit der algebraischen Symbolsprache kann man (muss nicht) z. B. den Term $a^2 + 4b$ oder die Gleichung $x = a - y$ operational oder strukturell deuten. In der rhetorischen oder synkoptischen Phase war eine strukturelle Deutung nur schwer möglich, weshalb diese stark zur operationalen Sichtweise tendierten.

In ihrem Artikel 'The Development of Algebra' schreibt sie, „difficulties experienced by an individual learner at different stages of knowledge formation may be quite close to those that once challenged generations of mathematicians." (Sfard 1995, S. 15). Sie stellt fest, dass Schüler und Studierende, die bereits in algebraischen Methoden geschult worden sind, selbständig und von sich aus oft dieselben nicht verwenden und stattdessen verbal formulierte (rhetorische) und operationale Herangehensweisen vorziehen. Sie stützt sich dabei auf drei empirische Studien.

Die erste bezieht sich auf die umfangreichen Untersuchungen der berühmt-berüchtigten Studenten-Professoren-Aufgabe. 1979 stellen Clement und seine Kollegen Studierenden, die ja alle mehrere Jahre Schulalgebra hinter sich hatten, folgende Aufgabe:

> „An einer Universität sind *P* Professoren und *S* Studenten. Auf einen Professor kommen 6 Studenten. Drücken Sie die Beziehung zwischen *S* und *P* durch eine Gleichung aus!"(Clement, Lochhead & Soloway 1979, zitiert nach Malle 1993, S.1)[9].

Ein großer Anteil der Studierenden war nicht in der Lage den korrekten Term $S = 6P$ aufzustellen und beging stattdessen den sogenannten Umkehrfehler: $6S = P$.

In einer Studie von Soloway, Lochhead & Clement (1982) sollte zum gleichen Text ein Computerprogramm geschrieben werden. Dabei schnitten die Studierenden wesentlich besser ab. Sfard vermutet, dass der stärker operationale Charakter eines Computerprogramms im Gegensatz zum abstrakteren, strukturellen algebraischen Symbolismus dafür verantwortlich war. Dies bewog sie zu einer eigenen Studie mit zwei Gruppen von 14 bis 17-jährigen Schülern. Den Teilnehmern wurden zwei Aufgaben vorgelegt. In beiden waren zwei ähnliche verbal beschriebene Zahlbeziehungen gegeben und die Schüler wurden einmal aufgefordert, dieselbe einer von drei „operational-verbalen" und einer von drei „strukturell-symbolischen" Lösungen zuzuordnen (siehe Abb. 3).

---

[9] Dieses Experiment wurde oft – auch mit abweichenden Formulierungen – wiederholt, doch das wesentliche Ergebnis blieb immer dasselbe (siehe z. B. Malle 1993).

PROBLEM	OPERATIONAL SOLUTION	STRUCTURAL SOLUTION
In a class the boys outnumber the girls by four	To find the number of girls we have to:	x = number of girls y = number of boys
	a. add 4 to the number of boys	
	b. subtract 4 from the number of boys	a. $x + 4 = y$ b. $x = y + 4$
	c. none of the above	c. $y > x + 4$

Abb. 3: *Zuweisung eines Problems in Worten zu „operationalen" und „strukturellen" Lösungen. Entnommen aus Sfard 1995, S.22.*

Die Schüler waren dabei in der Zuordnung zur „operationalen Lösung" signifikant erfolgreicher als in der Zuordnung zur „strukturellen Lösung".
Aber ist nicht die Übersetzungsleistung des *verbal gestellten* Problems in die in Sfards *in Wortform angegebene* „operationale Lösung" von Grund auf einfach viel naheliegender als die symbolisch notierte „strukturelle Lösung"?

Zuletzt führt Sfard noch die im vorigen Abschnitt besprochene Untersuchung von Harper an, der ihren Meinung nach gezeigt hat, dass Schüler oft von sich aus rhetorische Methoden wählen, wenn sie nicht explizit dazu aufgefordert werden Algebra zu benutzen, und zwar nicht nur die Jüngeren, sondern auch die Älteren.
Sie schließt: „It seems, therefore, that the precedence of operational over structural thinking must be, at least in this case, one of those developmental invariants we are looking for in this article - it was observed in the historical development of mathematics as well as in the process of individual learning." (Sfard 1995, S. 22).

Sfard sieht sowohl in der historischen als auch in der individuellen Entwicklung einen zyklisch aufsteigenden Prozess der Reifikation, indem zunächst, u.U. auch eine längere Zeit, operational agiert wird, bevor das, mit dem operational agiert wird, den Status eines eigenständigen Denkobjekts erhält. Da diese neu entstandenen Denkobjekte jetzt mit älteren und sich selbst in Relation stehen, kann man mit diesen wiederum operational umgehen, so dass mit jeder Reifikation eine höhere Stufe erreicht wird. Sfard (1995) erklärt das anhand der Geschichte der komplexen Zahlen.
Für das Lernen der Algebra folgert sie daraus, dass die Schüler u. U. längere Zeit mit den algebraischen Objekten (z. B. Termen) operieren müssen, bevor sie in der Lage sind, einen strukturellen Blick auf dieselben einzunehmen, mit dem z. B. ein bestimmter Term nicht mehr unmittelbar als Rechenaufforderung angesehen wird, sondern seinen eigenen Objektcharakter erhält. Das reifizierte Objekt ist aber immer auch abstrakter als seine Vorgänger, aus denen es entstanden ist.
Auch aus der Betrachtung der *Geometrischen Algebra* der Griechen vermag Sfard Lehren für das Algebralernen zu ziehen. Für die Griechen, deren Geometrie ja so weit entwickelt war, war es anfangs sehr nützlich den algebraischen Operationen eine geometrische Interpretation zu geben, doch bald stand ihnen die Vermählung der Algebra mit der Geometrie im Wege. So konnten z. B. die Unbekannten nur auf Längen, Flächen und Volumina verweisen, negative Lösungen waren überhaupt nicht repräsentierbar, Additionen mussten dem Homogenitätsprinzip gehorchen und die zu lösenden Gleichungen blieben fast ausschließlich auf Potenzen kleiner oder gleich drei eingeschränkt. Auch heute werden im Algebraunterricht geometrische

Veranschaulichungen benutzt. Und wenn es auch wenig Zweifel gibt, dass Visualisierungen lernförderlich sein können (siehe z. B. Dreyfuss 1993), so sollten, so Sfard, dieselben mit Vorsicht benutzt werden, denn sie könnten auch einschränkend statt hilfreich wirken, wenn sie einer Reifikation im Wege stehen, denn „Algebra is an inherently abstract discipline and one cannot escape teaching it as such“ (Sfard 1993, S. 23).

Luis Radfords kulturell-semiotische Perspektive

Radford sieht, ganz im Sinne seiner aspektreich integrierenden kulturell-semiotschen Sichtweise, die er in seiner ‚Theory of Objectification‘ (1996, 2002, 2006) entwickelt, das ontogenetisch-phylogenetische Beziehungsgeflecht sehr differenziert und spricht an keiner Stelle von Parallelitäten oder Analogien, sondern stattdessen von ***„oblique“*** *(*engl. für schief, schräg, versteckt) „connections between historical conceptual developments and classroom learning in mathematics*“ (*Radford & Furinghetti 2018*).*

Nach Radford und Furinghetti sind die historischen mathematischen Konzepte und deren Entwicklung zutiefst in die jeweilige Kultur eingebettet. Dies beinhaltet sowohl die kulturspezifische mathematische Tradition, die ihre jeweils eigenen Konzepte, Methoden und Denkweisen hat (z. B. was als relevant angesehen wird, was als evident und was als bewiesen gilt, etc.) als auch die allgemeine soziale Praxis (z. B. wo, wie und wozu Mathematik gelehrt und betrieben wird) (Radford 2006). Die Mathematiker ihrer Zeit befinden sich in ihrem eigenen, spezifischen soziokulturellen Kontext mit ihren eigenen Konzepten, Methoden und Denkweisen, eingebettet in die soziale Praxis in- und außerhalb der Lehrstätten.

Obwohl Radford nicht der Meinung ist, dass die Schüler in ihrer Entwicklung mehr oder weniger die gleichen Schritte durchlaufen, die vermeintlich von der konzeptionellen Entwicklung der Mathematik beschritten wurden, sieht er doch Verbindungen. Diese äußern sich, zwar subtil, aber doch in vielfältiger Weise. Er stellt z. B. in mehreren Unterrichtssituationen fest, dass Schüler von sich aus Probleme in einer Art und Weise angehen, die wenn auch nicht identisch, doch Lösungswege alter mathematischer Quellen widerspiegeln (Radford & Furinghetti 2018). Das folgende Zitat bildet meiner Meinung nach seine Sichtweise recht gut ab:

> „Mathematical problems … are bearers of a human intelligence deposited in them by the cognitive activity of previous generations. They suggest ways of conceptually attending some aspects of the world. They offer intellectual models that suggest relevance. In the same way, the cultural artifacts that the students use to try and solve these problems (e.g., pencil and paper, the cube, written and spoken language, the language of arithmetic and algebra, software) are bearers of human intelligence and, like the mathematical problems, suggest lines of ontogenetic conceptual development. In getting acquainted with the mathematical tradition, the students then mobilize cultural tools that connect cultural concepts with their ontogenetic understanding in ways that do not really reveal an alleged recapitulation but rather unveil the encounter of the ontogenetic and phylogenetic developments. This encounter is produced by the effects of the school as a sociocultural institution equipped with a complex system of knowledge acquisition (teachers and other adults, a chronologically ordered curriculum, spaces of interaction, routines of socialization, experimentation, feedback and so on.)” (Radford & Furinghetti 2018, S. 644)

An anderer Stelle (Radford 1996) weist Radford darauf hin, dass die Variablenrollen der Unbekannten und der Unbestimmten (generalisierte Zahlen, abhängige und unabhängige Variablen, Parameter) mit grundlegend unterschiedlichen Denkhandlungen einhergehen. Das Verwenden von Unbestimmten birgt oft einen Generalisierungsaspekt, indem man einen

bestimmten mathematischen Kontext durch eine allgemeine Formel beschreibt (man denke z. B. an das Aufstellen einer Aufbauformel für eine Zahlenfolge) oder eine algebraische Umformung verallgemeinernd interpretiert (man denke z. B. an die parametrisierte Lösung $x = a - t$ der Gl. $x + y = a$). Löst man jedoch eine Gleichung algebraisch, so sucht man keine Formel, sondern eine Zahl (die Unbekannte eben), die man *analytisch* findet, indem man das relationale Gleichungsgefüge so lange umformt, bis sich die Identität der Unbekannten offenbart.
Auch in der Geschichte der Algebra sieht Radford diese beiden grundsätzlich verschiedenen Denkprozesse am Werk. Lange dominierte das Gleichungslösen und der analytische Umgang mit der Unbekannten und die symbolischen Konzeptualisierungen des Verallgemeinerns mit Unbestimmten kamen erst viel später (frühestens mit Vieta). „The difference is in fact a fundamental difference – a conceptual difference – that often goes unnoticed (school books and even school gidelines frequently do not recognize this difference)" (Radford 1995, S. 111). Eben dieser Unterschied wird im weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit sehr bedeutsam, weil es ein zentraler konzeptioneller Unterschied der beiden von mir designten Unterrichtsreihen ist, dass dort die Konzeptpaare *Term/Unbestimmte* und *Gleichung/Unbekannte* in jeweils umgekehrter Reihenfolge behandelt werden.

I.III (Sehr) kurzer Abriss der Geschichte des Lehrens und Lernens von Algebra

Nun sind ja schon die ältesten mesopotamischen ‚Algebratexte' Lehrtexte, genauer genommen Erklärtexte, die eine spezifische Aufgabenstellung durch ‚Vormachen' lösen. Auch Diophants *Arithmetica* folgt diesem Muster. Es ist eine Sammlung von vorgeführten Aufgaben (Fragestellung, Lösungsbedingungen, Auflösung nach der Unbekannten). Nach Vietas Durchbruch entwickelte sich bis ins 18. Jahrhundert hinein die algebraische Notationsform in Richtung unserer heutigen. Eulers *Vollständige Anleitung zur Algebra (Euler 1770),* dessen Notationsform vollauf der modernen entspricht und der bis heute noch eine ausgezeichnete didaktische Qualität zugesprochen wird (siehe z. B. Dunham 1999, Siebeneicher 2008), zeigt im zweiten Teil immer noch „dieselbe Wesensart auf, welche das Werk Diophants kennzeichnete" (Scholz 1990, S. 82). Nichtsdestotrotz enthält Eulers Buch alle bis heute unterrichteten Algebrainhalte, wie Termumformungen, das Lösen von Gleichungen, Gleichungssystemen und Polynomialgleichungen, in moderner Notation. Den eingehenden und anschaulichen Erklärungen ist m. E. bis heute nichts wesentliches hinzuzufügen. Wir werden in den kommenden Abschnitten noch mehrmals auf dieses bemerkenswerte Buch zurückkommen.
Mit Anfang des 19. Jahrhunderts vollzog sich, einhergehend mit der nun schon weit verbreiteten Institution Schule, eine wichtige Transformation in Richtung einer Aufgabendidaktik (Schubring & Karp 2014). In Preußen wurde z. B. das Lehrwerk für das Gymnasium von Johann Andreas Matthias (Matthias 1813) ab 1813 bis ins 20 Jahrhundert hinein immer wieder aufgelegt. Dieses Lehrwerk enthält eine Anleitung (den *Leitfaden*) für Lernende und eine *Aufgabensammlung*. Der *Leitfaden* folgt dabei dem alten Konzept des Vorführens (z. B. dem Vorführen von Lösungsmethoden algebraischer Gleichungen), mit der *Aufgabensammlung* können diese vorgeführten Lösungsmethoden dann geübt werden. Man kann von einer Aufgabendidaktik sprechen: „Working documents began to be formed by the *Leitfaden-Aufgabensammlung* pair, making the collections of exercises extremely popular"(Schubring & Karp 2014 , S. 140).

Schon Mitte des 19. Jahrhunderts hatte die Algebra bereits einen hohen curricularen Stellenwert. In den neun Jahren des Gymnasiums sollten lineare Gleichungen und Gleichungssysteme, quadratische, kubische und quartische Gleichungen, das Rechnen mit Potenzen und Logarithmen, algebraische Gleichungen und numerische Lösungsmethoden, analytische Geometrie in 2 und 3 Dimensionen und Kegelschnitte behandelt werden (Schubring & Karp 2014, S. 241 ff.).

Die Geschichte des Algebraunterrichts ab Anfang des 20. Jahrhunderts kann man in drei Hauptperioden aufteilen.
Nach la Ponte & Guimarães (in Schubring & Karp 2014, S. 430 ff.) wurde die Schulalgebra in der ersten Periode im Wesentlichen als die Theorie polynomialer Gleichungen und als Vorbereitung auf die Infinitesimalrechnung unterrichtet. Die deutschen Schulbücher folgen dabei noch durchgehend einer Aufgabendidaktik und die Bereiche Geometrie, Algebra und Analysis werden strikt voneinander getrennt (es gibt i. d. R. extra Bücher für jeden dieser Bereiche). Der hohe Stellenwert der Algebra, der sich in den Schulbüchern durch die Vielzahl der gelehrten, meist kalkülorientierten, algebraischen Methoden wiederspiegelt, bleibt erhalten.
Die zweite Periode (ab den 50er Jahren des letzten Jahrhunderts) stand im Zeichen der „New Math“-Bewegung, die Mitte der 60er Jahre auch in deutschen Schulen verankert wurde. Hier wurde versucht moderne fachmathematische Konzepte auf die Schulmathematik zu übertragen. Über die klassische elementare Algebra, in der die algebraischen Objekte immer auf Zahlen verweisen, werden nun auch abstrakte Objekte der Strukturalgebra (wie z. B. Gruppen) in das gesamte Schulcurriculum eingebaut. Algebra und algebraische Strukturen sollten so – ganz im Geiste der Bourbaki-Gruppe (Mashaal 2006) – auch als übergeordnete Grundlagen für das Studium der Arithmetik und der Geometrie fungieren. Viele Schulbücher versuchen in dieser Zeit einem logisch-deduktiven Aufbau zu folgen, und oft geht damit eine Inflation metasprachlicher Begrifflichkeiten einher. Schaut man sich die Bücher dieser, der vorangehenden und der nachfolgenden Perioden an, so fällt auf, dass hier der Aufbau des algebraischen Kalküls wohl am stärksten an die axiomatisch-deduktive Methode angelehnt ist.
Die letzte Phase (ab ca. 1980 bis heute) war dann nach la Ponte & Guimarães von einer „großen Unsicherheit über die Rolle der Algebra im Mathematikcurriculum gekennzeichnet“ (ebd. in Schubring & Karp 2014, S. 465, Übersetzung des Autors). In Fachdidaktik und curricularen Vorgaben häufen sich die Stimmen, die *„Mehr Inhalt – Weniger Kalkül“* (Haarman 1997) fordern und an vielen Stellen (in Studien, Schulbüchern und Lehrplänen) nimmt die Algebra nicht mehr den Raum ein, den sie bis dahin eingenommen hatte. In den im Jahr 2004 veröffentlichten Bildungsstandards der Kultusministerien (KMK 2004) bekommt die Algebra z. B. keinen Platz unter den dort genannten *zentralen fachspezifischen Leitideen Zahl*, *Messen*, *Raum und Form*, *funktionaler Zusammenhang* und *Daten und Zufall.* Stattdessen werden vornehmlich prozessorientierte Aspekte der Algebra (wie Termumformen, Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen) in die Leitidee *funktionaler Zusammenhang* oder in die *allgemeinen Kompetenzbereiche* des Fachs fragmentarisch eingeordnet. Diese Fragmentisierung der Algebra schlägt sich m. E. auch in vielen aktuellen Schulbuchreihen nieder. Vergleicht man z. B. die „graue Ausgabe“ der Schulbuchreihe *Lambacherer Schweizer* (Schmidt & Weidig 2008), die ungefähr bis zum Jahr 2008 in vielen Schulen beschafft wurde, mit der nachfolgenden „bunten Ausgabe“ (Braun et al. 2009), so fällt zuallererst auf, dass nun algebraspezifische Inhalte - insbesondere Kalkültätigkeiten - viel weniger Platz und Lernzeit einnehmen. Stattdessen werden viel mehr (m. E. teilweise inflationär mehr) sinnstiftende Kontexte für das Algebralernen angeboten. Mancherorts offenbart sich dann auch eine fehlende Kohärenz (was hier auch von vielen praktizierenden Lehrern moniert wurde), wenn z. B. in Klasse 9 die allgemeinen

Tetraederformeln (wie z. B. $h = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot a$, $V = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot a^3, a = \sqrt{\frac{O}{\sqrt{3}}}$) hergeleitet werden sollen, ohne dass je vorher das Umformen algebraischer Wurzelterme Schulbuchthema war.

Seit Ende des zweiten Weltkrieges hat die Schulwelt also drei grundlegend verschiedene Strömungen des Mathematiklernens und – damit einhergehend – des Algebralernens erlebt. Bis heute treffen in der Schule Lehrkräfte aufeinander, die als Schüler selbst in einer dieser Strömungen bzw. Traditionen unterrichtet und davon einmal mehr und einmal weniger stark geprägt worden sind.

*

Blickt man aus der Vogelperspektive auf die lange Geschichte der Algebra, so sieht man einen verschlungenen, mitunter steinigen Weg. Konzepte mussten erweitert, manche konzeptuellen Verbindungen überwunden und geistige Widerstände aufgegeben werden. Algebra und Mathematik waren dabei immer eingebettet in das Denken, die Notwendigkeiten, den Zeitgeist und die technischen Mittel der jeweiligen Kultur. Veränderungen entwickelten und konsolidierten sich nicht selten im sozialen Diskurs zwischen den Mathematiktreibenden (oft auch durch kreuzkulturelle Einflüsse). Vielleicht ist dies die auffallendste Parallele zwischen der geschichtlichen und der individuellen Entwicklung: Mathematische Expertise entwickelt sich im sozialen Diskurs (nicht nur) in der soziokulturellen Institution Schule.
Lange war die gesprochene und geschriebene Sprache das Mittel zur Lösung algebraischer Probleme und nach und nach bildete sich die algebraische Symbolsprache heraus. Insgesamt zeigt sich ein zyklisch aufsteigender Prozess vom Konkreten ins Abstrakte. Verfahrensweisen, die mitunter lange konkret-operational durchgeführt wurden, werden durch symbolische Umdeutungen zu eigenständigen abstrakt-strukturellen Objekten, mit denen dann wiederum operational umgegangen wird, bis diese Prozesse wieder … . Oft arbeiteten Mathematiker noch lange prozessural mit neuen Objekten und taten sich schwer damit, diese als eigenständige Denkobjekte zu akzeptieren (man denke nur an die Widerstände gegen negative oder komplexe Zahlen; siehe z. B. Sfard 1995, 2008). Lange war der Symbolgebrauch auf die Unbekannte in einer Gleichung beschränkt und komplexere Variablenrollen traten erst relativ spät auf den Plan. Die Denkhandlungen die mit den *Unbekannten* und die mit den *Unbestimmten* einhergehen sind fundamental unterschiedlich. Die Variable als ‚Platzhalter für Zahlen' weist verschiedene Aspekte auf, die mit unterschiedlich komplexen Denkhandlungen einhergehen.
In der griechischen Antike war die Algebra mit der Geometrie vermählt. Damit konnten zwar einige Probleme umschifft werden (z. B. diejenigen die mit dem noch nicht genügend ausgereiften Zahlkonzept der Griechen zu tun hatten), aber die Geometrisierung schränkte auch ein und behinderte weitere Abstraktionsschritte.
Im 16. Jahrhundert markiert Vietas Einführung von Buchstaben als unbestimmte Parameter in Gleichungen einen Quantensprung. Descartes, Leibniz, Newton u. a. bis hin zu Euler bauen dieses Konzept aus, und es entwickeln sich das *symbolische Zahlkonzept* (Klein 1936) und die *mathematische Formel* (Krämer 1988), die nachfolgend konstituierend auf den weiteren Verlauf der Mathematik und die Naturwissenschaften wirken.
Das 1770 erschienene Lehrbuch der Algebra von Euler enthält bereits alle modernen Inhalte der Schulalgebra und bedient sich der bis heute gültigen Nomenklatur. Im 19. Jahrhundert nimmt die Algebra in den (nicht nur preußischen) Gymnasien einen großen Raum ein, was sich in den breit aufgestellten Algebrainhalten dieser Zeit zeigt. Das 20 Jahrhundert ist von Umbrüchen geprägt, die sich jeweils ganz wesentlich auf den Stellenwert der Algebra im Schulcurriculum auswirkten. Seit den achtziger Jahren des letzten Jahrhunderts blicken viele Beteiligte

kritisch auf den (vermeintlich inhaltsleeren) Kalkül und der Stellenwert der Algebra und insbesondere der des algebraischen Kalküls innerhalb des Schulcurricculums scheint unsicher und umstritten zu sein.

Und wie sieht es heute mit der Algebra aus? Welchen Stellenwert hat sie heute im mathematischen Schulcurriculum? Welche Vorstellungen werden vertreten, wie heute die Algebra zu unterrichten ist und wie fügen diese sich in das Lernen der Mathematik als Ganzes ein?
Einig scheint man sich jedenfalls darin zu sein, dass die (Schul-)Algebra sehr viel mehr beinhalten muss als das bloße Einüben kalkülorientierter Handlungsabläufe. Noch bis in die neunziger Jahre des letzten Jahrhunderts hinein wird in vielen Studien die Schulalgebra stark mit dem Buchstabenrechnen identifiziert (einen Überblick über diese Studien liefert z. B. Nemirovsky 1994, Malle 1993, Radford 2007, u. a.). Danach beginnt eine lebhafte, nicht zuletzt durch zahlreiche Studien, die dem bis dahin tradierten, kalkülorientierten Algebraunterricht eine mangelhafte Ausbeute bescheinigen, angetriebene Diskussion (siehe z. B. Radford 2007 für einen Überblick), wie algebraisches Denken zu charakterisieren ist und ob Algebra nicht sehr viel mehr ausmacht, als den bloßen Gebrauch der formalen Symbolsprache. Haben nicht schon die alten Babylonier ganz ohne algebraische Symbole Algebra betrieben? Beginnt Algebra und algebraisches Denken also nicht schon bevor zum ersten Mal mit Buchstaben gerechnet wird? Also: *„Was ist Algebra*? *Was algebraisches Denken?“*

II Was ist Algebra? Was algebraisches Denken?

> *“The manipulation of symbols is only a small part of what algebra is really about” (Mason 1990)*
>
> ***“****A difficulty in defining algebra is that when one thinks one has get hold of its essence, other aspects occur to one and have to be made room for. It always seems to comprise more than the simple story suggests.” (Wheeler 1996)*
>
> *„It is difficult to characterize algebraic thinking“ (Charbonneau 1996)*
>
> *„Lesen Sie Euler, er ist in allem unser Meister“ (P. S. Laplace, zitiert nach Siebeneicher 2008, S.2).*

Wenn in einer kognitiven Sintflut alle Kenntnisse über die Algebra zerstört würden und nur wenige Sätze weitergereicht werden könnten, welche Aussage über die Algebra würde die größte Information in nur wenigen Worten enthalten?[10]
Meiner Meinung nach wäre dies die *in-nuce* Beschreibung, die ich bereits ganz am Anfang dieser Arbeit gegeben habe:

> ***Symbole stehen für Zahlen****, Variablen wie Terme. Man rechne mit diesen „Zahlen“ wie mit Zahlen. Man interpretiere das „=“-Zeichen als Relationszeichen zwischen Zahlen und agiere flexibel mit den Symbolen. Einmal denkt man dabei an eine einzelne Zahl, ein andermal an alle Zahlen eines Bereichs, gleichzeitig oder zeitlich aufeinanderfolgend.*[11]

Befragen wir den Zahlenmeister Euler selbst. Er gründet die Relevanz der Algebra auf ihre Beziehung zu Zahlen und schreibt Mitte des 18. Jahrhunderts in seinem bemerkenswerten Algebralehrbuch *Vollständige Anleitung zur Algebra*:

> „Hieraus ist klar, dass sich alle Größen, durch Zahlen ausdrücken lassen, und also der Grund aller Mathematischen Wißenschaften darin gesetzt werden muß, daß man die Lehre von den Zahlen, und alle Bechnungs-Arten, so dabey vorkommen können, genau in Erwegung ziehe, und vollständig abhandele. Dieser Grundtheil der Mathematic wird die Analytic oder Algebra genennet .... Wie dieses für sich klar ist, so ist noch zu mercken, daß auf eine allgemeine Art die Zahlen durch Buchstaben, als a, b, c, d, etc. angedeutet werden ... In einem jeglichen Fall also, wann man nur weiss, was für Zahlen durch solche Buchstaben angedeutet werden, findet man durch die Rechenkunst die Summe oder den Werth dergleichen Formeln.“ (Leonard Euler 1770, S. 10-13)

Euler bezeichnet dementsprechend auch durchgehend Ausdrücke mit Variablen als das, was sie bezeichnen, nämlich Zahlen. So wird z. B. a als die Zahl a und $a+b$ als die Zahl $a+b$ bezeichnet.

---

[10] Die Idee zu dieser Sintflut-Frage habe ich Richard Feynmann entlehnt, der in seinen Feynmann Lectures of Physics (Feynmann 1966) dieselbe Frage für die Naturwissenschaften gestellt hat.

[11] Das mag ein Gemeinplatz sein, den ich aber nicht müde werde zu wiederholen. Schüler verlieren immer wieder die einfache Referenz $Symbol \rightarrow Zahl$ (die Arbeit wird dies noch genauer aufzeigen), oft ohne dass dies der Lehrkraft, die ja schon eine ganze Weile Algebra betrieben hat, auffällt.

Auffällig an Eulers Abhandlung ist zudem, dass die Symbolsprache selbst sehr behutsam eingeführt wird. Zunächst werden nur Buchstaben für (unbestimmte) Zahlen und die Zeichen $+$, $\cdot$ und $-$ eingeführt, um damit nun nicht mehr nur mit Zahlen selbst, sondern auch mit Summen von Zahlen, Differenzen, Produkten, Wurzeln, Wurzeln aus Wurzeln, etc.., also Termen zu agieren. Diese Terme werden dann *unter* Beachtung *der Rechengesetze für Zahlen* umgruppiert und abgeändert und so beginnt sich eine algebraische Sichtweise zu entwickeln. Erst nachdem alle möglichen Termumformungen bis hin zu den allgemeinen Wurzel- und Potenzgesetzen durchgeführt worden sind, wird im Kapitel 20 *„Von den verschiedenen Rechnungsarten und ihrer Verbindung überhaupt"* das „="-Zeichen eingeführt:

> „Daher wird es nicht wenig zu beßerer Erleuterung dienen, wann wir den Ursprung dieser Rechnungs-Arten und ihre Verbindung unter sich deutlich erklären, damit man erkennen möge, ob noch andere dergleichen Arten möglich seyn oder nicht.
> Zu diesem Ende brauchen wir ein neues Zeichen, welches anstatt der bisher so häufig vorgekommenen Redens-Art, *ist so viel als,* gesetzt werden kann. Dieses Zeichen ist nun = und wird ausgesprochen *ist gleich.* Also wann geschrieben wird *a =* b, so ist die Bedeutung, daß *a* eben so viel sey als *b,* oder das *a* dem *b* gleich sey" (Euler 1770, S. 76)

Dieses „="-Zeichen, verstanden als relationales Symbol der Gleichheit von Zahlen, erweist sich dann in den folgenden gut 400 Seiten „als Dreh- und Angelpunkt der weiteren systematischen Ausarbeitung" (Siebeneicher 2008).
Das sparsame Haushalten mit Symbolen zeigt sich noch stärker in Eulers *„Einleitung zur Rechenkunst"* (Euler 1738), einem einer russischen Prinzessin gewidmeten Arithmetik-Lehrbuch, das nur die Zahlzeichen 1-9 kennt, ganz ohne die Symbole „ +, · , - , : = " auskommt und trotzdem von einem algebraischen Geist durchdrungen ist. Immer wieder werden nämlich die Beziehungen der Zahlen untereinander ins Blickfeld genommen, um damit Rechnungen zu vereinfachen. Steinweg formuliert es so: *„*Algebra schaut nicht auf die Prozeduren, die unmittelbar durchführbar sind, sondern auf die Konzepte, die sich in der Gleichung als Beziehung zwischen Zahlen, Objekten oder Variablen darstellen*"* (Steinweg 2012, S. 3). In diesem Sinne betreibt schon das Grundschulkind beim Zahlenrechnen Algebra, wenn nur sein Blick auf die Beziehungen zwischen den Zahlen gerichtet ist, indem es z. B. Tausch- oder Nachbaraufgaben benutzt[12].
Wenn also nicht erst dann von Algebra und algebraischem Denken gesprochen wird, wenn Buchstaben und Symbole gebraucht werden (anders könnten die Mathematikhistoriker ja nicht schon von einer Algebra vor Diophant sprechen): *Was ist dann algebraisches Denken?*

R. C. Lins hat 1992 in seiner Doktorarbeit mit dem Titel *„A framework for understanding what algebraic thinking is"* die Literatur bis dahin durchforstet und kam dabei zu dem Schluss, dass „no clear characterisation of the algebraic activity has been available"(Lins 1992, S. 4). Im Jahr 2020 sehe ich zwar viele Arbeiten, die sich dieser Frage annäherten, eine klare Charakterisierung kann ich aber nicht ausmachen. Dies zeigt wahrscheinlich, dass die Algebra, die *in nuce* so einfach daherkommt, eben doch nicht so leicht zu fassen ist. Aus der Vielzahl der

[12] Nicht dass man es so machen muss oder dass es irgendjemand so aufschreibt, aber mit
$$72 \cdot 49 = 72 \cdot (50 - 1) = 72 \cdot 50 - 72 \cdot 1 = 36 \cdot 100 - 72 = (3600 + 28) - (72 + 28) = 3628 - 100 = 3528$$
wird z. B. das Produkt $72 \cdot 49$ „algebraisch" und ganz ohne schriftlichen Multiplikationsalgorithmus ausgerechnet, indem man Beziehungen zwischen (Rechenregeln für) Zahlen verwendet.

Charakterisierungsversuche greife ich nun einige heraus, und zwar solche, mit denen ich selbst – im Hinblick auf die Zielperspektive der Arbeit – am meisten anfangen konnte.

Eine Gruppe um Lisa Hefendehl herum hat sich in mehreren Veröffentlichungen damit beschäftigt, was algebraisches Denken ist und kommt nach einer Analyse der Denkhandlungen, die Algebra ausmachen zu dem Schluss, „dass die meisten der für die Algebra spezifischen Denkhandlungen auch spezifisch für das Mathematiktreiben im Allgemeinen sind" (Hefendehl 2007), so dass eine Differenzierung schwierig wird. Wenn also algebraisches Denken wesentlich mehr als den algebraischen Kalkül enthält, so lohnt es sich nach Hefendehl u. a. diese allgemeinen Denkhaltungen in der Algebra aufzuspüren und weiterzuentwickeln.

Spezifisch allgemeinmathematische (und menschliche) Denkhandlungen, die auch ihre algebraische Ausprägung finden, sind nach Fischer, Hefendehl u. Prediger (2009):

- Verallgemeinern
- Abstrahieren
- Strukturieren
- Darstellen
- Konstruieren
- Deuten und Umdeuten

Spezifisch algebraische Denkhandlungen dagegen

- Algebraisieren
- Kalkül entwickeln
- Interpretationsfreies, kalkülhaftes Umformen
- Wirkungen von Veränderungen untersuchen

Im angelsächsischen Raum vertritt Mason auch eine sehr allgemeine Auffassung. Mason & Sutherland kommen nach Durchsicht einer Menge internationaler Literatur zu einer Sichtweise, in der sich die Algebra nach und nach entlang einer Kette fortlaufender Generalisierungen herausentwickelt:

> „Influenced by our reading and of course by our own perspectives, *we take algebraic thinking to mean moving from the particular to the general*, as seeing and expressing what is generalisable about a particular. This applies to the youngest children moving from number as adjective (2 pencils, 3 beads, 4 yoghurt pots) to number as noun (2, 3, 4, …), and carries on through the notion of tens complements arising from examples such as 2 + 8 = 10, 3 + 7 = 10, to 'methods' of mental and pencil-and-paper algorithms for addition, subtraction, multiplication and division, through seeking methods to resolve types or classes of problems, through the structural reasons for arithmetic on negative numbers, rationals, and decimals, through factoring and completing the square of particular quadratics as exemplars of factoring and completing the square of quadratic expressions in general, and so on into tertiary." (ebd. 2002, S.4).

Wie Hefendehl sieht Mason dabei Denkhandlungen und Motive am Werke, die typisch für das Mathematiktreiben sind, mitunter jedoch in der Algebra eine besonders tiefe Wirkung entfalten. Diese sind u. a. (Mason & Sutherland 2002):

- *Mental imagery (‚*mentale Bilder*')*. Mit der algebraischen Symbolsprache können (müssen) mentale Bilder als Vermittler zwischen der vorgestellten Situation und der abstrakten (algebraisierten) Situation entworfen werden.

- *Freedom & Constraint (‚Freiheit und Einschränkung').* Viele algebraische Probleme ergeben sich dadurch, dass man, ausgehend von einer freien Wahl von Zahlen, Ausdrücken und Funktionen, Beschränkungen einführt und diese Zahlen, Ausdrücke und Funktionen sucht, die diese Beschränkungen erfüllen.
- *Doing & Undoing (‚Tun und rückgängig machen').* Jede Berechnung, jede Problemlösung kann rückgängig gemacht werden. Kann das (diese Zahl, dieser Ausdruck) eine mögliche Antwort sein? Und wenn ja, wie lautet die Frage?
- *Characterising and Organising (‚Charakterisieren und Organisieren').* Algebraische Ausdrücke können Objekte charakterisieren (wie z.B $2n + 1$ als ungerade Zahlen), oder die Lösungen zu einem Problem (z. B. ‚alle positiven Zahlen' oder ‚kann nicht weiter faktorisiert werden') und Prozesse organisiseren (z. B. Lösungsalgorithmen)

In dem international wirkmächtigen Buch „*Developing Thinking in Algebra*“ [13] zeigen Mason, Johnsonn & Wheeler (2005) anhand vieler Aufgabenbeispiele auf, wie solche Denkhandlungen und Motive in der Algebra immer wieder zum Zuge kommen, „to see the general in the particular, and the particular in the general“ (Mason in Kieran et al. 1996, S. 65).

Andere Autoren versuchen sich tatsächlich an einer konkreten Charakterisierung. R.C. Lins erklärt eine solche als zentrale Zielsetzung seiner Dissertation:

> „First, and crucial, we had to develop a characterisation for algebraic thinking, in order to be able to compare students' solutions with that which we would expect to be present in an algebraic solution. We also decided that such a characterisation would have to be useful not only to produce understanding of what happens with students, but also … to offer a framework applicable from elementary school algebra to abstract algebra.” (Lins 1992).

Anhand von Schülerbearbeitungen zu Textaufgaben versucht er algebraische Lösungen von nicht algebraischen zu differenzieren und entwickelt – zusammen mit einer historischen Analyse – daraus eine Charakterisierung. Grundlegend ist für Lins dabei der Aufbau eines *symbolischen Zahlenkonzepts* (ein Begriff, den er vom Mathematikhistoriker Klein entlehnt hat). Damit meint er, dass im Kontext des algebraischen Denkens *die (abstrakten) Zahlen* durch die Beziehungen zu den Operationen, auf denen sie operieren, Bedeutungen gewinnen und nicht etwa durch Beziehungen vornehmlich *(konkreter) (Maß-)Größen* zu irgendwelchen vorliegenden Kontextinterpretationen, wie etwa in geometrischen oder sachbezogenen Kontexten.
Er schlägt vor, dass – ausgestattet mit einem solchen symbolischen Zahlenkonzept - algebraisches Denken genau dann vorliegt, wenn man

- ***arithmetisch denkt,*** d.h. mathematische Probleme mit Zahlen modelliert, wobei man arithmetische Operationen verwendet, um mathematische Beziehungen zu konstituieren. Entscheidend dabei ist – etwa um die arithmetischen Rechenregeln für den symbolischen Raum zu aktivieren - die direkte Referenz der Symbole mit (reinen) Zahlen (er spricht hier vom *semantischen Feld* der Zahlen) und nicht etwa die Referenz zu

[13] Die Aufgaben dieses Buches sind durchgehend sehr schön und es wird dort auch exemplarisch aufgezeigt, wie dieselben helfen können algebraische Denkhandlungen zu entwickeln. So hab ich mich als Lehrer oft gefragt, wie, wo und wann ich einzelne Aufgaben daraus einsetzen könnte. Für mich zeigte sich dabei leider ein Schwachpunkt des Buches: Die Aufgaben sind nicht methodisch kontrolliert curricularen Phasen, Teilthemen oder didaktischen Schwerpunkten zugeordnet (Welche Vorstellungen müssen schon aufgebaut, welche Lernvoraussetzungen müssen schon erfüllt sein, etc. ?) Oft weiß man nicht, wie, wo und wann man Einzelaufgaben daraus kumulativ in einen Lehrgang der Algebra einbauen kann. Wenn die Motive und Denkhandlungen der Algebra ganz allgemeine Motive und Denkhandlungen sind, dann sind diese eben erst einmal auch nur schwer curricular einzuordnen.

kontextabhängigen Maß-größen (dem semantischen Feld der jeweils kontextuell vorhandenen Maßgrößen).

- ***intern denkt***, d.h. bei den arithmetischen Operationen verbleibt und nicht etwa ein arithmetisch modelliertes Problem in ein nicht-arithmetisches überführt, z. B. ein „Problem in Zahlen“ durch eine bildhafte Darstellung löst (er gibt hier ein Beispiel wie z. B. Gleichungen durch bildhafte Darstellungen gelöst werden können; Al-Kwarizmis geometrischer Beweis der Gleichung $x^2 + 10x = 39$ aus Abb. 2 in Abschnitt I.I wäre so ein Beispiel: Man beginnt arithmetisch und wechselt dann ins semantische Feld der Geometrie).
- ***analytisch denkt***, also mit unbestimmten Zahlen so umgeht als wären sie bekannt (im klassisch griechischen Sinne, so wie es Pappus (siehe Abschnitt I.I) beschreibt).

Er weist darauf hin, dass sich so verstandenes algebraisches Denken schon vor dem Gebrauch von Variablen, Termen und Gleichungen entwickeln kann, wenn auch dieselben eingehende und denkentlastende Notationsformen des *symbolischen Zahlenkonzepts* sind. Lins betont, dass es durchaus Problemstellungen gibt, bei denen es hilfreich ist, den algebraischen Denkmodus zu verlassen, doch um algebraisches Denken aufzubauen, können solche Wechsel in nichtalgebraische Modi auch störend wirken. So können nach Lins nicht algebraische Erklärmodelle, wie das Waagemodell oder Flächenzerlegungen, Lernhindernisse aufbauen:

> „… the use of non-algebraic models-such as the scalebalance or areas-to "explain" particular algebraic facts, contribute, in fact, to the constitution of obstacles to the development of an algebraic mode of thinking; not only because the sources of meaning in those models are completely distinct from those in algebraic thinking, but also because the direct manipulation of numbers as measures, by manipulating the objects measured by the numbers, is deeply conflicting with a symbolic understanding of number, which is a necessary aspect of algebraic thinking” (Lins 1992, S. 5).

Luis Radford (Radford 2007, 2010) kommt zu einer ganz ähnlichen Charakterisierung, betont aber den relationalen Charakter, der implizit auch bei Lins auftaucht, expliziter. Auch er plädiert dafür, den Begriff des algebraischen Denkens sehr viel weiter zu fassen als auf den Gebrauch von Buchstaben allein. Dadurch erschließt sich für das Lernen der Algebra eine *„Zone of emergence of algebraic thinking“* (Radford 2010)[14], in der sich algebraische Expertise auch ganz ohne formalen Symbolismus anbahnen kann. In allen Beispielen algebraischen Denkens, von den historischen Quellen, über die Schulalgebra bis hin zur abstrakten universitären Algebra sieht er folgende zentrale und verbindende Aspekte (Radford 2007, 2010):

- Algebra arbeitet mit *Objekten* ***unbestimmter Natur***, z. B. Unbekannten, Variablen and Parametern
- Mit diesen Objekten wird auf eine ***analytische*** *Weise* umgegangen. Dies bedeutet, dass man mit den unbestimmten Quantitäten umgeht als würde man sie kennen, als wären sie spezifische Zahlen (Objekte)
- Da diese unbestimmten Objekte nicht (nur schlecht) operativ (numerisch) verarbeitet werden können, werden sie vornehmlich ***relational*** (in ihren Beziehungen zueinander) verarbeitet

[14] Es ist diese *„Zone of emergence of algebraic thinking“* die Radford in vielen seiner tiefgehenden Studien - von denen wir in dieser Dissertation noch viel lesen werden - immer wieder untersucht.

Kurz: Algebra befasst sich mit *Unbestimmtheit* in einer *relational-analytischen* Art und Weise.

Noch ein Wort zur analytischen Denkweise. Oft wird dies anhand des Vorgehens bei der Lösung einer Gleichung erklärt. Wenn wir nämlich eine Gleichung lösen, befassen wir uns mit der unbekannten Zahl in ihrem Gleichungsgefüge auf analytische Weise, indem wir mit der *Unbekannten* so umgehen, als wäre sie eine (bekannte) Zahl und so lange operieren, bis die Identität der Unbekannten am Ende enthüllt ist. Analytisches Denken ist aber auch im Umgang mit *Unbestimmten* notwendig, wenn man z. B. mit einer Unbestimmten in einem Term oder einer Gleichung operieren muss, ohne überhaupt einen expliziten Wert der Unbestimmten denken zu können. Ein oft beobachtetes Beispiel, bei dem offenbar wird, dass genau dies vielen Lernenden schwer fällt, ist Folgendes.

Wenn n irgendeine Zahl ist, wie heißt dann die um eins größere Zahl?

Viele Lernende haben Probleme die Antwort $n + 1$ zu geben und wundern sich stattdessen, wie sie eins addieren sollen, wenn sie die Zahl n doch gar nicht kennen!

An anderer Stelle stellt Radford heraus, dass mit den Variablenrollen der *Unbekannten* und der *Unbestimmten* und den Konzepten der *Gleichung* und des *Terms* grundlegend unterschiedliche Denkhandlungen einhergehen. Dies zeigt sich nach Radford sowohl in der historischen Entwicklung der Algebra als auch in den einschlägigen Unterrichtskonzepten zu deren Einführung. „The difference is in fact a fundamental difference--a conceptual difference--that often goes unnoticed (school books and even school guidelines frequently do not recognize this difference)“.(Radford 1996, S.111). Kurz ausgedrückt sucht man im ersten Fall die eine unbekannte Zahl einer Gleichung, während man im zweiten Fall die vielen unbestimmten Zahlen als Mittel der Generalisierung, z. B. mit einer Formel, einsetzt (wir werden darauf später noch einmal zurückkommen).

Viel konkreter als die bis hierhin rezitierten Autoren wird Abraham Arcavi in zwei vielzitierten Veröffentlichungen (Arcavi 1994, 2005). Dort versucht er die Fähigkeiten und Einstellungen, die seiner Meinung nach eine algebraische Expertise auf hohem Niveau ausmachen, zu kategorisieren und entwickelt daraus – in Anlehnung an das prominente Konzept des *Number Sense* (Sowder & Schapelle 1989, Dehaene 1997) – sein Konzept des ***Symbol Sense***. Seine Kategorien (er selbst nennt sie *Behaviours*) sind:

Behaviour #1: Beeing Friends with Symbols. Ein Verständnis und ein ästhetisches Gefühl für die Macht der Symbole – wie und wann sie eingesetzt werden können und sollten, um Beziehungen, Verallgemeinerungen und Beweise zu vermitteln, die ansonsten versteckt bleiben. Ein Gefühl dafür, wann eine nichtsymbolische Bearbeitung besser oder angemessener ist.

Behaviour #2: Manipulations and Beyond. Die Fähigkeit symbolische Ausdrücke umzuformen und auch ‚zwischen´ den symbolischen Ausdrücken lesen zu können. Symbolische Manipulationen und das Lesen der dabei entstehenden Ausdrücke sind zwei komplementäre Aspekte beim Lösen algebraischer Problemstellungen.

Behaviour #3: Engineering symbolic Expressions. Das Bewusstsein dafür, dass man symbolische Beziehungen erfolgreich aufstellen kann, die eine gegebene oder gewünschte verbale oder graphische Information algebraisch beschreibt, um damit bei einem Problem weiterzukommen, und die Fähigkeit diese algebraischen Beschreibungen aufzustellen.

Behaviour #4: Choice of Symbols. Die Fähigkeit eine problemangemessene symbolische Repräsentation auszuwählen und gegebenenfalls ihre Unzulänglichkeiten zu erkennen und zielgerichtet eine bessere auszuwählen.

Behaviour #5: Flexible manipulation skills. Die Fähigkeit, algebraische Umformungen durchzuführen und dabei die Bedeutung der Symbole (z. B. der Variablen) zu vergessen. Dabei aber weiterhin den „formalen Sinn" im Auge zu behalten, insbesondere mit einem gewissen Struktursinn, mit einer Wachsamkeit für zirkuläre Schlüsse und einem „Ziel-Sinn" (*Target Sense*) ausgestattet zu sein.

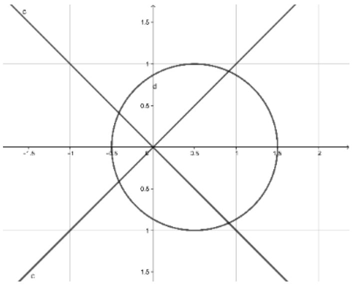
Behaviour #6: Symbols in retrospect. Die Erkenntnis, dass man in einem algebraischen Problemlöseprozess immer wieder die Bedeutung der Symbole interpretieren können muss, sei es während des Prozesses oder bei der Überprüfung des Resultats und die Fähigkeit diese Interpretationen mit seinen eigenen Intuitionen bezüglich des erwartenden Resultats zu vergleichen.

Behaviour #7: Symbols in Context. Die Erkenntnis, dass Symbole verschiedene Rollen in unterschiedlichen Kontexten (z. B. Veränderliche oder Parameter) haben können. Die Erkenntnis, dass ein und dasselbe Symbol während einer Bearbeitung seine Rolle wechseln kann und die Fähigkeit solche Rollenwechsel selbst vorzunehmen.

Arcavi erklärt seine Einteilung mit informativen Beispielen (Tabelle 3 und 4 enthält die Orginalformulierungen seiner ‚Behaviors' mitsamt Beispielen). Er macht deutlich, dass ein ausgeprägter *Symbolsinn* erst in einem verständigen und emergenten Zusammenspiel all dieser Aspekte entsteht. Zudem dürfte das Entdecken von Zusammenhängen außerhalb der Algebra durchaus Einflüsse auf das Verständnis algebraischer Zusammenhänge haben: *„*Symbol Sense is the algebraic component of a broader theme: sensemaking in mathematics*"* (Arcavi 1994, S. 32).
Durch sein Konzept des *Symbol Sense* zeigt Arcavi auf, welch ungeheurer Facettenreichtum und welche Vielfalt, welcher Bedeutungsreichtum und welch mächtige Wirkkraft aus der Algebra entstehen kann, die man ja vielleicht meint, so einfach unter der Formel „Symbole stehen für Zahlen" subsummieren zu können[15]. Viele weitere Autoren adressieren die Frage, welche Denkhandlungen und Tätigkeiten eine algebraische Expertise ausmachen, keiner ist m. E. dabei aber so umfassend wie Arcavi.

[15] Tatsächlich meine ich aber nach wie vor, dass es wirklich so einfach ist, wie es ganz zu Anfang *in nuce* beschrieben wurde: Man bezeichnet unbekannte und unbestimmte Zahlen mit Buchstaben (Variablen) und rechnet mit diesen wie mit Zahlen, man interpretiert das „="-Zeichen als Relationszeichen zwischen Zahlen und agiert flexibel mit den Variablen (einmal denkt man dabei z. B. an eine einzelne Zahl ein andermal an alle Zahlen eines Bereichs, gleichzeitig oder zeitlich aufeinanderfolgend). Es ist nur so, dass Vietas ‚einfache Erfindung' der Unbestimmten, einen ganzes Kosmos an Möglichkeiten, Tätigkeiten und Denkhandlungen eröffnet hat, die alle erst einmal selbst vorgestellt, durchgeführt, gedacht und verinnerlicht werden müssen.

1) *Friend with symbols*. *Understanding of and an aesthetic feel for the power of symbols – how and when symbols can and should be used in order to display relationships, generalizations and proofs that otherwise are hidden and invisible. Feeling, when a non-symbolic treatment is better.*



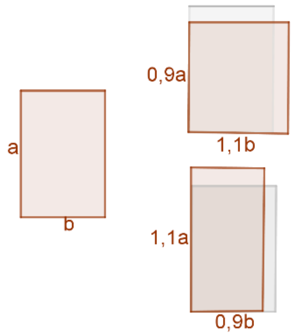
Wie viele Lösungen hat das System

(1) $x^2 - y^2 = 0$

(2) $(x - a)^2 + y^2 = 1$

in Abhängigkeit von a?

Diese Aufgabenstellung zwingt einen förmlich zu einer symbolischen Behandlung. Den Fall $a = \pm 1$ (3 Lösungen) entdeckt man hier nur schwer. Anders bei einer geometrischen Uminterpretation der Aufgabe.
Hier verdunkelt eine symbolische Behandlung eher als sie erhellt.



$A = a \cdot b \qquad A' = 1,1 \cdot 0,9 \cdot ab = 0,99ab$

Bei einem Rechteck wird eine Seite um 10% verkürzt, die andere um 10% verlängert. Wie ändert sich die Fläche?
Die algebraische Symbolsprache löst das Problem und erklärt das Ergebnis. Hier ist eine symbolische Behandlung erhellend und angezeigt.

2) Manipulations and Beyond: *An ability to manipulate and also to 'read through' symbolic expressions as two complimentary aspects in solving algebraic problems.* Nach Arcavi hat diese Fähigkeitskategorie 3 unterschiedliche Facetten (siehe Bsp. unten).

$\frac{2x+3}{4x+6} = 2$ ***i) Reading and Maniplulating*** Solche Gleichungen provozieren oft instinktive Kalkülhandlungen $\rightarrow x = -\frac{3}{2}$: Dass dies keine ‚Lösung' ist erfährt man nur durch Inspektion des Terms. Ein bloßes *„push them around"* ohne eine verständiges *„read throudh"* der Symbole reicht oft nicht.	$\boldsymbol{n^3 - n = what\ numbers}$? $n^3 - n = n(n^2 - 1)$ $= (n-1)n(n+1)$ ***ii) Reading for Reasonableness*** Eine Lösung der Ausgangsfrage erhält man nur, wenn man seinen umgeformten Term interpretiert (3 aufeinander folgende Zahlen $\Rightarrow 6 \mid n^3 - n$	***Write an equation using the variables S and P: "There are six times as many students than professors".*** ***ii) Reading as the Goal for Manipulating*** Viele begehen den ‚Umkehrfehler':$6 \cdot S = P$. Bevor man also mit aufgestellten Ausdrücken weiterrechnet, sollte man – so Arcavi – denselben auf Stimmigkeit überprüfen (was hier z. B. leicht geht)

3) *Engineering symbolic Expressions.* *The awareness that one can successfully engineer symbolic relationships that express (given or desired) verbal or graphical information needed to make progress in a problem, and the ability to engineer those expressions*
Arcavi gibt da ein elaboriertes Bsp. Aber alle Algebraisierungen, z. B. die Überführung von Texten oder geometrischen Verhältnissen in algebraische Ausdrücke wären Beispiele dieser Fähigkeit.

4) *Equivalent Expressions for non-equivalent Meaning.* *Feel for and convidence in new aspects of meaning in equivalent expression*

Take an odd number, square it and then subtract 1. What can be said about the resulting numbers? $(2n-1)^2 - 1 = 4n^2 - 4n = 4n(n-1) = 8 \cdot \frac{n(n-1)}{2}$ Jede äquivalente Umformung offenbart hier eine weiteren Bedeutung (durch 4 teilbar -→ durch 8 teilbar → 8 mal eine Dreieckszahl)	Für eine Streichholzmusterkette wurde folgender Term für die Anzahl der Streichhölzer der n-ten Figur aufgestellt: $n \cdot 4 - (n-1)$. Die Umformung $n \cdot 4 - (n-1) = n \cdot 3 + 1$ offenbart eine neue Zählweise der Streichhölzer. ***Anmerkung:*** Dieses Beispiel wurde vom Autor hinzugefügt, weil es so typisch für die vorliegende Arbeit ist.

Tabelle 3: *Mit Beispielen kommentierte Kategorien des Symbolsinns nach Arcavi (Teil I). Alle kursiv abgedruckten Textpassagen sind wortwörtlich aus Arcavi (1994) entnommen, der Resttext stammt vom Autor. Fast alle Beispiele stammen von Arcavi selbst.*

5) *Choice of Symbols* *The ability to select one possible symbolic representation for a problem (e.g., assigning a symbol for a certain variable), and, if necessary, having, firstly, the courage to recognize and heed one's dissatisfaction with that choice, and, secondly, the resourcefulness to search for a better one.*

Take an odd number, square it and then subtract 1. What can be said about the resulting numbers?
Setzung 1: $n: ungerade\ Zahl \to n^2 - 1 = (n-1)(n+1) \to$ Produkt zweier gerader Zahlen, d.h. teilbar durch 4

Setzung 2: $2n-1: ungerade\ Zahl \to \ (2n-1)^2 - 1 = 4n(n+1) \to$ durch 8 teilbar (siehe vorherige Tabelle Fähigkeit 4)

Denke dir eine zweistellige Zahl. Bilde die Quersumme und subtrahiere diese von deiner gedachten Zahl.
$y: Zehnerstelle, \quad x: Einerstelle$

$\to 10y + x - x - y = 9y \to$ Vielfache von 9!

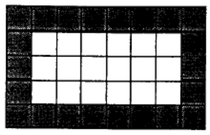
Das Wissen, dass man die Stellenwerte als Variablen setzt, löst erst das Problem
Anmerkung: Bsp. wurde vom Autor hinzugefügt.

6) *Flexible manipulation skills* *Ability to perform manipulations mechanically by forgetting the meaning of the symbol, but not forgetting a "formal sense", esp. be forearmed with a certain structure sense, be aware of circularity and have a target-sense*

$v\sqrt{u} = 1 + 2v\sqrt{1+u}.$
$Löse\ nach\ v\ auf.$
$$\to v = \frac{1}{\sqrt{u} - 2\sqrt{1+u}}$$

Structure Sense
Um richtig aufzulösen, muss man die lineare Struktur der Gleichung in der Variablen v sehen.

Gibt es Rechtecke, bei denen die Anzahl der weißen Quadrate gleich der Anzahl der schwarzen ist?



(1) $2a + 2(b-2) = ab - [2a + 2(b-2)]$
(2) $ab - 4a - 4b + 8 = 0$
(3) $a(b-4) - 4(b-2) = 8 \ |???\to \ +16$
(4) $ab - 4a - 4b + 16 = 8$
(5) $a(b-4) - 4(b-4) = (a-4)(b-4) = 8$
$\Rightarrow a_1 = 12, b_1 = 5; \ a_2 = 8; b_2 = 6$

Target Sense
Die Schritte 1-5 zeigen die Lösung eines Mathematikers. Bei 3 erkennt dieser, dass er die linke Seite vollständig faktorisieren kann, wenn er der konstanten Term 16 addiert und erhälts so $(a-4)(b-4) = 8$, woraus man direkt aus den Faktorisierungen der 8 die beiden Lösungen erschließen kann. Hier zeigt sich ein Target Sense zusammen mit flexiblen Kalkül-

7) *Symbols in Context* *The realisation that symbols can play different roles in different contexts (such as, variables or parameters), and the development of an intuitive feel for those differences.* Anmerkung des Autors : "Rollenwechsel" und unterschiedliche Rollen unterschiedlicher Variablen im selben Ausdruck bereiten Schülern erfahrungsgemäß oft erhebliche Probleme

In the expression $\boldsymbol{y = (x^2 - 4)/(d-2)}$***, find if possible, a number which when substituted for d, a linear function is obtained.***
Lösung eines Schülers:
$$\frac{x^2-4}{d-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{d-2} \to also\ d = x$$
Die Lösung ist falsch, da der Schüler – der durchaus Struktursinn offenbart – die unterschiedlichen Rollen von x (Variable) und d (äußerer Parameter) nicht richtig realisiert.

Einf. Bsp. (hinzugefügt vom Autor):
Gesucht sei der Schnittpunkt SP der Geraden
$y = ax + b$ und $y = -ax + b$
$\to \ 2ax = 0 \to a = 0 \ \vee x = 0$

x ist die Unbekannte $\to SP\ (0|b)$ (für $a \neq 0$)
a ist Parameter $\to für\ a = 0$ sind die Geraden identisch

Tabelle 4: *Mit Beispielen kommentierte Kategorien des Symbolsinns nach Arcavi (Teil II). Alle kursiv abgedruckten Textpassagen sind wortwörtlich aus Arcavi (1994) entnommen, der Resttext stammt vom Autor. Alle Beispiele, außer die explizit mit* ‚vom Autor hinzugefügt' *angemerkten, stammen von Arcavi selbst.*

Ein Aspekt, der bei Arcavi in Behavior #5 enthalten ist, ist der sogenannte algebraische **Struktursinn** (Arcavi spricht von ‚*structure sense*', ‚*target sense*' und ‚*Gestaltview*'). Dieser *Struktursinn* wurde in letzter Zeit ausgiebig untersucht (Linchevski 1995, Linchevski & Livneh 1999, Hoch & Dreyfuß 2006, Hoch 2007, Rüede 2012, 2015, Janßen 2016). Schon Kieran (1989), Malle (1993) und Vollrath (1993) betonen die Wichtigkeit eines Erkennens von Termstrukturen als Voraussetzung für das Umformen. Linchevski und Livneh (1999) definieren den Begriff *structure sense* als die Fähigkeit "to use equivalent structures of an expression flexibly and creatively" (ebd., S. 1991).
Hoch und Dreyfus (2010) versuchen den Begriff Struktursinn zu operationalisieren, indem Sie fünf, für die Sekundarstufe I wichtige, Strukturen angegeben. Diese sind: $a^2 - b^2, a^2 + 2ab +$

b^2, $ab + ac + ad$, $ax + b = 0$ und $ax^2 + bx + c = 0$. *Struktursinn* äußert sich jetzt nach Hoch und Dreyfuss in der Fähigkeit, in einem gegebenen algebraischen Ausdruck eine dieser 5 Strukturen zu erkennen (z. B. das Erkennen der Struktur $a^2 + 2ab + b^2$ im Term $(2x + 3)^2 - 12(2x + 3) + 36$). Das Strukturieren ist hier also in gewissem Sinne ein Klassifizieren von Ausdrücken in bekannte Strukturen. Weiß man, wie man mit diesen bekannten Strukturen umgeht, so kann man nach einer solchen Klassifikation weiter fortschreiten (z. B. den Term faktorisieren, die Gleichung lösen).
Hoch, Dreyfuss, Malle und Kieran sehen in der Struktur eines Ausdrucks vornehmlich eine mathematisch objektive Eigenschaft, die es wahrzunehmen gilt.
Demgegenüber rückt Rüede (2012), der untersucht, wie sich das Strukturieren algebraischer Ausdrücke bei Schülern entwickelt, die individuelle Strukturwahrnehmung stärker in den Fokus. So stellt er der objektiv-mathematischen Struktur das subjektive **Strukturieren** gegenüber. Unter *Strukturieren* versteht Rüede die subjektive (nicht notwendigerweise mathematisch zielführende) Begegnung mit einer Struktur, verstanden als ein Aufeinanderbeziehen von Teilen eines algebraischen Ausdrucks (Rüede 2012, S.31-40). Rüede betont die Wichtigkeit der sogenannten *Prozess-Objekt* Dualität für das Geschäft des Strukturierens: „Das Zentrum dieser Betrachtungen wird die Unterscheidung sein, ob ein algebraischer Term als Prozess oder als Objekt behandelt werden kann“ (ebd. 2012, S.51).
Alle Untersuchungen stimmen darin überein, dass algebraischer Struktursinn und Umformungsfertigkeiten sich zwar konzeptionell sowie empirisch unterscheiden lassen, aber miteinander in Beziehung stehende Fähigkeitsbereiche sind. Insbesondere stellt ja das Umformen einen Prozess des Wechsels von einer Struktur zur anderen dar und je stärker ein gewisser Struktursinn ausgeprägt ist, desto verständiger kann dieses „Strukturwechseln“ werden.

Die naheliegende Frage, wie nun sein *Symbolsinn* aufgebaut werden kann, beantwortet Arcavi in seinem Artikel von 1994 kaum. Als sicher sieht er hier lediglich: „it will be the *activity* the students are led to engage in that will determine if it supports the construction of symbol sense.“ (Arcavi 1994, S.33). Erst in späteren Artikeln (Arcavi 2005, 2008) widmet er sich der Frage, wie solche, den Symbolsinn fördernde, *Aktivitäten* aussehen könnten. Anhand selbst beobachteter Lehr-Lernepisoden stellt er heraus, dass die Entwicklung eines Symbolsinns wohl stark von einer unterstützenden, sinnstiftenden und verstehensorientierten Klassenraumkultur abhängt, in der z. B. immer wieder explizit die Bedeutung algebraischer Ausdrücke ausgehandelt wird. Gerade das bewusste Unterbrechen notwendig bedeutungsleerer, weil das Arbeitsgedächtnis entlastende, Kalkülhandlungen, um zu hinterfragen, zu reflektieren und zu schließen, kann neue Bedeutungen eröffnen und so *Symbolsinn* entwickeln helfen. Auch das immer wieder bewusste Hinterfragen, ob ein gegebenes Problem wirkungsvoll algebraisch modelliert werden kann, hilft hier (Arcavi 2008). Das von ihm selbst aufgestellte Anliegen „… to search the space of examples such that we are comfortable in suggesting a comprehensive list of categories, to convert it into a working, operational framework for either research or instruction “ (Arcavi 2005, S.2) wird aber nicht konkret bedient. Anders als beim *Number Sense* der Arithmetikdidaktik, bei der es durchaus spezifische und methodisch untersucht wirksame Aufgabenformate gibt, die explizit den einen oder anderen Aspekt des *Zahlensinns* fördern und entwickeln helfen (siehe z. B. Bana et al. 1997), gelingt dies hier für den *Symbolsinn* also nicht [16](mir sind auch keine weiteren solche Versuche, die sich explizit

[16] Diese nicht stark ausgeprägte methodisch kontrollierte Entwicklung zeigt m. E. – wie ja auch schon die Aufgabensammlung von Mason et al. (1994) - übrigens auch das im deutschsprachigen Raum nach wie vor als Standardwerk geltende Buch von Malle „Didaktische Probleme der elementaren Algebra“ (Malle 1993). Aus exemplarischen Analysen von Schwierigkeiten, die Schüler mit der Algebra haben, werden Aufgaben vorgeschlagen, die diese überwinden helfen sollen. Bezüglich deren Gelingensbedingungen und deren Einfügung in einen kumulativen Aufbau einer Algebraexpertise ist diese

auf Arcavis *Symbol Sense* beziehen, bekannt). In jedem Fall stellt Arcavi in seinen Debattenbeiträgen die Frage, wie sich eine vernetzende algebraische Expertise langfristig entwickeln kann, zur Diskussion.

Meine Ausführungen zum algebraischen Denken möchte ich mit der Arbeit von Tatjana Berlin abschließen, da diese m. E. eine konkrete, leicht fassbare und operativ wirksame Einteilung der algebraischen Denkentwicklung zu geben in der Lage ist. Berlin (2010) untersucht in ihrer Dissertation in einer sehr sensibel durchgeführten interview-basierten Studie die algebraische Denkentwicklung von Fünftklässlern, die bis dahin wenig oder gar keine Begegnung mit der Algebra hatten. Die den Interviews zugrundeliegende Unterrichtssequenz verwendet dabei vornehmlich Folgen von Zahlen und figurierten Zahlen (wie z. B. Punktmusterfolgen, Würfelbauten und Streichholzketten). Dabei sollen zunächst arithmetische Muster und Strukturen in diesen Folgen erkannt und diese begrifflich und symbolisch (mit Variablen) beschrieben werden, um schließlich Terme regelgeleitet umzuformen. Zudem sollen solche Umformungsergebnisse verständig interpretiert werden (Berlin et. al. 2009).

In ihrer Studie gelingt es Berlin (2010) vier Stadien des Umgangs mit Variablen und Termen zu identifizieren:

> **Stadium 0:** Die Idee, dass Variablen und Terme für Zahlen stehen, wird überhaupt nicht angenommen
>
> **Stadium 1:** Variablen und Terme werden zur Beschreibung der erkannten Muster herangezogen
>
> **Stadium 2:** Die Möglichkeit des Operierens nach arithmetischen Konventionen wird auf Variablen übertragen (Eintritt in den algebraischen Kalkül)
>
> **Stadium 3:** Variablen und Terme werden zum mentalen Werkzeug und zum Instrument des Argumentierens

Sie zeigt auf, dass Kinder diese Stadien sukzessive durchlaufen, wobei nur sehr wenige Fünftklässler ansatzweise bis Stadium 3 vorrücken. Zudem zeigt sie exemplarisch, dass insbesondere beim Übergang zum Kalkül (Stadium 2) die meisten der von ihr untersuchten Schüler ganz erhebliche Schwierigkeiten haben.
Ich mag diese Einteilung, weil sie eine leicht einprägsame und operativ wirksame Kategorisierung des algebraischen Denkens ab dem Eintritt in den Symbolgebrauch liefert, möchte aber dennoch darauf hinweisen, dass diese Entwicklung in *aufeinander abfolgende* Stufen ein Ergebnis des spezifischen Lerngangs der Studie sein könnte. Zu schnell werden meiner Meinung nach (so wie es hier schon bei Harper diskutiert wurde) solche studienspezifische Interpretationen zu allgemein interpretiert, so dass unversehens die algebraische Denkentwicklung *an sich* plötzlich den Entwicklungsstufen nach Berlin folgt. Beispielsweise sind durchaus Lerngänge denkbar – und solche waren und sind Realität – in denen Schüler sehr wohl eine relativ hohe Expertise im Kalkül (Stadium 2) erreichen ohne jedoch ‚davorliegende' Stadien (z. B. das

Aufgabensammlung m. E. jedoch methodisch nicht besonders stark entwickelt (wenn auch viele der von Malle vorgeschlagenen Aufgabenideen längst schon ihren Niederschlag in den einschlägigen Schulbüchern gefunden haben).

Symbolische Beschreiben oder die Erkenntnis *Symbole stehen für Zahlen*) entwickelt und verinnerlicht zu haben. In Berlin‘s Untersuchung lässt sich tatsächlich eine wie oben beschriebene Stufenentwicklung identifizieren, doch das kann auch eine Folge des dort durchgeführten spezifischen, von Zahlen- und Figurenfolgen ausgehenden, Unterrichtsgangs sein. Ich möchte daher die Begrifflichkeiten von Berlin übernehmen, sie aber lieber als nebeneinanderstehende, kohärent verschränkte Facetten des Aufbaus einer algebraischen Expertise ansehen. So entsteht ein Säulenmodell der Konstituierung einer algebraischen Expertise.

Das Fundament bilden die ***Rechengesetze für Zahlen***. Die Säulen bestehen aus den Facetten F_0, F_1 und F_2, die sich relativ klar voneinander abgrenzen lassen. Es gibt kalkülfertige Schüler, die nicht benennen können oder denen es nicht bewusst ist, dass ***Symbole für Zahlen*** stehen. Und solche, die zwar die Symbol-Zahl Konvention annehmen und auch ***symbolisch manipulieren*** können, jedoch erhebliche Schwierigkeiten beim Algebraisieren (***Symbolischen Beschreiben***) haben. Entwickeln die Schüler nach und nach flexibel abrufbare Kompetenzen in den drei Facetten F_0, F_1 und F_2, und gelingt es, diese drei kohärent zu vernetzen, so kann man die ***Symbolsprache als mentales Werkzeug***, etwa für Sachaufgaben, zum Problemlösen und zum Argumentieren und Beweisen, einsetzen.

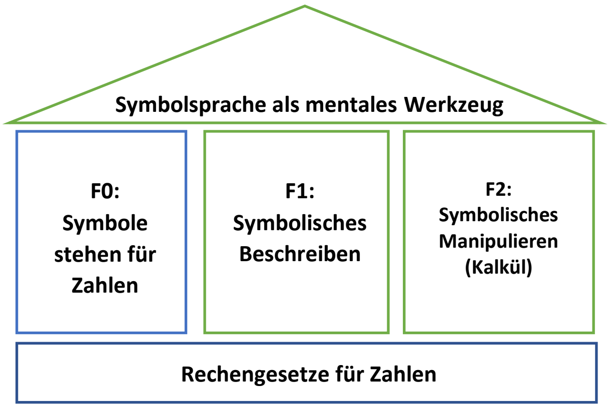


Abb. 4: *Säulenmodell - Konstituierung einer algebraischen Expertise (aufgenommen von Berlin (2009) und leicht adaptiert)*

*

Es ist also nicht einfach algebraisches Denken zu charakterisieren. Es ist so, wie Wheeler es am Anfang dieses Kapitels andeutet: „ when one thinks one has get hold of its essence, other aspects occur to one and have to be made room” (ebd. 1996). Die Algebra mit ihren Verfahren zum Lösen von Gleichungen, zum Umformen von Termen, etc., ist ein Kalkül, aber auch mehr als das. Sie ist ein mächtiges Repräsentationssystem, um inner- und außermathematische Sachverhalte algebraisch zu beschreiben, aber auch mehr als das. Sie ist ein Problemlösungs-, Argumentations- und Beweiswerkzeug, aber auch mehr als das, sie ist ein Werkzeug des Geistes, aber auch usw. .
Der Versuch, die Algebra auf Grundkomponenten herunterzubrechen, endet nicht selten in einer Aufzählung von Tätigkeiten, die nicht inhärent algebraspezifisch sind. Alle hier aufgeführten und alle mir darüber hinaus bekannten und bedeutsamen Studien zeigen auf, dass die Algebra einen schillernden, komplex untereinander verwobenen Facettenreichtum aufweist und daher mit einer Vielzahl reichhaltiger Denkhandlungen einhergeht. Fällt der Versuch schon schwer, die Algebra zu charakterisieren, so scheint es noch schwieriger zu sein aus einer solchen Charakterisierung heraus Lehr-Lerngänge zu entwerfen, die den Aufbau dieser Denkhandlungen begünstigen. Wenn dem so ist und da man sich diese Denkhandlungen ja alle erst aneignen muss, dann könnte es wirklich doch eher auf die praktizierte Lernkultur ankommen, um so – wie es Fischer, Hefendehl und Prediger ausdrücken – „reichhaltige algebraische Denkhandlungen im Lernprozess sichtbar zu machen“ (ebd. 2010). Oder wie Arcavi meint.: „… it

will be the activity the students are led to engage in that will determine if it supports the construction of symbol sense“ (Arcavi 1994, S.33).

Jedenfalls muss es angesichts dieses verwobenen Facettenreichtums auch gar nicht verwundern, dass Schülern das Algebralernen so schwerfällt und dass sie beim Versuch sich diese anzueignen, so viele Fehler machen und so mancher Fehlvorstellung noch lange nachhängen.

III Warum fällt das Algebralernen so schwer?

Es scheint so zu sein, dass zwischen dem (numerischen) Zahlenrechnen und dem Formelrechnen ein Sprung im Lernprozess liegt. Dafür spricht nicht nur die fachlich-epistemologische Analyse, sondern auch die empirische Realität." (Hefendehl-Hebeker 2001, S. 92.)

„Alle glücklichen Familien gleichen einander. Jede unglückliche Familie ist auf ihre eigene Art unglücklich." (Leo Tolstoi, Anna Karenina)

Dass eine Aneignung algebraischer Denkweisen schwerfällt, ist für den Praktiker eine Binsenweisheit. Verstehensschwierigkeiten und Fehler beim Algebralernen, vom absoluten Unverständnis, über die Ausbildung nur zeitweise tragfähiger Vorstellungen bis hin zu scheinbar unvermittelt auftretenden Aussetzern von an und für sich verständigen Lernenden, beobachten Lehrende tagein, tagaus.

Berge von fachdidaktischer Literatur beschäftigen sich mit diesen Fehlern und Schwierigkeiten, so dass man auch schnell den Überblick verlieren kann[17]. Die Studien sind sich einig, dass Schüler beim Aufbau algebraischen Denkens viele alte, insbesondere in der Arithmetik aufgebaute, Konzepte aus- und umbauen und neue Konzepte aufbauen müssen. In diesen Studien tauchen dabei immer wieder die gleichen – wenn auch allenthalben unterschiedlich benannten – Begriffspaare auf, die ich hier benutzen möchte, um die Dinge etwas zu ordnen.

Arithmetik & Algebra

„By [a significant epistemological jump] […] we mean that the pupil has to shift suddenly from one state of mathematical knowledge to another by rapidly assi[m]ilating new notions and procedures […] which build on previously acquired knowledge but which require entirely new types of thinking" (Cortes, Vergnaud & Kavafian 1990, S. 27).

Traditionell wurde die Algebra oft als generalisierte Arithmetik – nach dem Motto ‚*zuerst Zahlen, dann Algebra*' - gesehen. Dies ist insofern richtig, als dass die Algebra ja aus den Objekten der Arithmetik hervorgeht. Doch mittlerweile gilt durch zahlreiche Studien belegt, dass viele der in der Arithmetik aufgebauten Strategien und Vorstellungen nicht ohne Um- und Neugestaltung in die Algebra übernommen werden können (Akinwumni 2012, Mason et al. 1985; Cortes, Vergnaud & Kafian 1990, Siebel 2005, uva). Die angelsächsische Literatur spricht dabei von einem *„cognitive gap"* oder *„didactical cut"* (Hersovics & Linchevski 1994, Filloy & Rojano 1984) zwischen der Arithmetik und der Algebra. Larissa Zwetzschler hat in ihrer Dissertation die fachdidaktische Literatur dazu durchforstet und gibt zu den Vorstellungsumbrüchen beim Übergang von der Arithmetik zur Algebra einen guten Überblick (Zwetzschler 2015). Ich möchte an dieser Stelle lediglich nur auf die Umbrüche eingehen, die die „Rechensymbole" ($+, -, \cdot, :$ und $=$) angehen (weitere werden im praktischen Teil folgen).

Das Gleichheitszeichen „$=$". Über die Jahre hinweg habe ich als Lehrer beobachtet, dass viele Schüler von der Grundschule kommend das „$=$"-Zeichen überhaupt nicht mit dem Konzept

[17] Für einen ersten Überblick ist Malles Standardwerk gut geeignet (ebd. 1993). Specht (2007), Siebel (2005) und Zwetzschler (2015) geben gute Überblicke des aktuellen internationalen Forschungsstands.

der Gleichheit verbinden, sondern es durchweg dazu verwenden, um anzuzeigen, dass sie soeben eine Rechenhandlung durchgeführt haben. Die Lösung einer Aufgabe der Art

$$(7+13)\cdot 3-10$$

wird dann so notiert:

$$7+13=20\cdot 3=60-10=50\,.$$

Diese Art der Benutzung des „=“-Zeichens sieht man bei schriftlichen Schülerlösungen sehr häufig und sie tradiert sich bei vielen Schülern bis in höhere Klassen hinein. Selbst wenn die obenstehende Aufgabe formal korrekt

$$(7+13)\cdot 3-10=20\cdot 3-10=60-10=50$$

aufgeschrieben wird, repräsentiert das „=“-Zeichen für die Schüler oft nur eine asymmetrische, von links nach rechts zu lesende Rechenhandlung.

Die Fachdidaktik (insbesondere im Primarstufenbereich) beschäftigt sich schon seit geraumer Zeit mit den individuellen Vorstellungen im Umgang mit dem Gleichheitszeichen (Behr et al. 1980, McNeil et al. 2006, Nührenbörger & Schwarzkopf 2013, u. a.). Das Gleichheitszeichen wird in der Arithmetik überwiegend als *operationales* Zeichen verstanden, was für viele arithmetische aber nur für wenige algebraische Kontexte tragfähig ist (Winter 1982, S. 186 ff.). In der Algebra wird das Zeichen zentral als *relationales* Zeichen genutzt, das Beziehungen zwischen beiden Seiten des Gleichheitszeichens herstellt[18]. Letztendlich scheint eine frühe Fokussierung auf die relationale Perspektive angezeigt zu sein. Dabei ist grundsätzlich zwischen dem als symmetrisch verstanden „=“-Zeichen als „ist gleich“ für alle Zahlen aus dem entsprechenden Bereich (Zahlzerlegungen, Termumformungen) und dem „=“-Zeichen in Bestimmungleichungen (für welche Zahl ist die rechte und linke Seite der Gleichung gleich?) zu unterscheiden. Dies korrespondiert mit den Konzeptpaaren Term /Unbestimmte und Gleichung/Unbekannte.

Die Operationszeichen. Malle (1993, S. 136 ff) weist darauf hin, dass die Operationszeichen in der Arithmetik vorwiegend als Aufforderung zu „Aktionen“ verstanden werden. So sieht sich der Schüler bei z. B. $4+3+5$ aufgefordert, solange zu addieren, bis kein Operationszeichen mehr vorhanden ist. Anders in der Algebra: Bei $4+x+y$ ist eine solche Additiion nicht möglich, der Term $4+x+y$ wird jetzt zum Zahlnamen der unbestimmten Zahl $4+x+y$, die man erhält, wenn man 4 zu den unbestimmten Zahlen x und y addiert. Kein Grundschüler wird $4+3+5$ als Zahlnamen akzeptieren, sondern nur das Ergebnis 12. In der Algebra dagegen beschreibt $4+x+y$ sowohl eine Rechenanweisung (was zu tun ist, wenn man unterschiedliche Zahlen für x und y einsetzt), als auch den Zahlnamen der Zahl $4+x+y$. Diese „*Prozess-Objekt*“-Dualität ist ganz zentral und ich werde weiter unten vertiefter darauf eingehen. Die in der Arithmetik dominante Deutung der Operationszeichen als Aktionszeichen kann dazu führen, dass Schüler einen Ausdruck, wie z. B. $4+x+y$ nicht als Ergebnis akzeptieren („lack of closure“, Collis 1978, Malle 1993). Sie (fehl-)interpretieren die darin enthaltenen Operationszeichen nach wie vor als Aufforderung „weiterzurechnen“ , befinden sich dabei aber meist in einem kognitiven Konflikt: „*Wie kann ich x zu 4 addieren, wenn ich gar nicht weiß,*

[18] Ganz unvermittelt fällt mir dabei wieder Euler ein, der das „=“ ganz aus der Arithmetik heraushält und es in der Algebra erst relativ spät und dann klar und explizit als Relationszeichen allein einführt.

wie groß x ist?“ Dieser Konflikt wird dann oft dadurch aufgelöst, dass man „irgendwie“ weiterrechnet (siehe z. B. Matz 1980, Ekenstam & Greger 1987): z. B. $4 + x + y = 4xy$ (immerhin ist hier kein Operationszeichen mehr ‚*sichtbar*‘!).

Prozess & Objekt

> *„Arithmetik und Algebra verhalten sich ähnlich wie Gebäude und Bauplan. Algebra ist also eine Kurzschrift, um Rechnungen zu planen. Arithmetik ist die Ausführung dieser Planungen, wobei man nach Ausführung der Operationen aus dem Ergebnis nicht mehr zurückschließen kann, welche Rechnung ausgeführt wurde“ (Lörcher 1995, S.16).*

> *„If we subject this symbolism to close scrutiny, we find that, although every attempt ist made to refine it to make it explizit and unambigious, its power lies in a very specific kind of ambiguity. It often refers both to something to do, and the result of that doing. So ¾ refers to the intention to divide 3 by 4, it indicates a process to be applied, and also to the result of the action applying the process, the fraction ¾ !“ (Gray & Tall 1994, S. 209)*

In den im Zusammenhang mit dieser Arbeit durchgeführten Unterrichtsreihen zur Einführung der Algebra in Klasse 7, habe ich im Vorfeld Pretests durchgeführt, die ausloten sollten, inwiefern bei den Schülern schon algebraische Präkonzepte ausgebildet sind[19]. Bei einem dieser Pretests schnitt ein Schüler ganz exorbitant gut ab. Als ich ihn fragte, weshalb ihm die Aufgaben vergleichsweise so leichtgefallen sind, erzählte er mir Folgendes (seine Mutter hatte ihm irgendwann vorher mal von der Zahl π erzählt):

> *„Letztes Jahr hab ich mit dem Taschenrechner rumprobiert. Die hatte eine π -Taste. Wenn man da π gedrückt hat, hat der Taschenrechner 3 komma und viele Kommastellen gezeigt. Da hab ich Pi mal zwei eingegeben und gedacht, was da für eine abgefahrene Zahl bei rauskommt, und was hat der Taschenrechner angezeigt: 2π !!!“* (Kai 2019)

Dieses Interview war mein ganz persönliches Erweckungserlebnis bezüglich der sogenannten *Objekt-Prozess*-Dualität. Der Schüler berichtete hier von einer ganz persönlichen Prozess-Objekt-Erfahrung. Zunächst war er nur am numerischen Ergebnis der Rechnung $2 \cdot \pi$ interessiert, doch der Taschenrechner zeigte ihm das Ergebnis 2π! Letztendlich hat er wohl das Ergebnis 2π als Zahlobjekt akzeptiert und <u>er selbst</u> hat diese Einzelerfahrung als Grund angeführt, weshalb er mit den („algebraischen“) Aufgaben des Pretests so gut klarkam.

Namhafte Mathematikdidaktiker (Sfard 1991, 2008, Malle 1993, Kaput 1999, Nydegger 2018, uva.) betonen immer wieder, dass viele mathematische und insbesondere algebraische Objekte aus zwei unterschiedlichen, komplementären Perspektiven gedacht werden können und oft auch müssen. In der Arithmetik können die beiden Konzepte noch visuell salient auseinandergehalten werden: $2 + 3$ bezeichnet die Operation und 5 das Ergebnis. Algebraische Terme hingegen repräsentieren in ein und derselben Schreibfigur sowohl die Operation als auch das Ergebnis.

> „In arithmetic it is easy to keep this meanings separate by putting them in different expressions. $2 + 3$ denotes the operation, 5 is the outcome. No such separation is possible in algebra, in an expression like $\mathrm{a} + \mathrm{b}$ or $3(\mathrm{z} + 5) + 1$. Here the prozess can not

---

[19]Die Aufgabenstellungen dieser Pretests kann man sich in Anhang A angucken.

be actually formed; no added value results from the operation." (Sfard & Linchevski 1994)

In der Arithmetik dominiert noch der Prozess der operativen Rechenhandlung, in der Algebra werden aber beide Denkweisen wichtig. Die eine strukturell-interpretierend, die andere operational -funktional (Schneider 2006, S. 49). Viele Studien befassen sich – verschiedene Nuancen fokussierend – mit dieser Dualität und verwenden zur Beschreibung unterschiedliche Begriffspaare (Prozess/Objekt, operational/relational , operational/strukturell, prozessural/konzeptionell, usw.; siehe z. B. Zwetzschler 2015).

Sfard (1991) und Sfard & Linchevski (1994) zeigen auf, dass viele Schüler beim Algebratreiben nicht über eine solche duale Sichtweise verfügen und betrachten die Ausbildung derselben als große Herausforderung für den Algebraunterricht. Sind beide Sichtweisen vorhanden und situativ abrufbar, so sprechen Gray & Tall, die Begriffe Prozess und Konzept vereinigend, von einem *proceptual thinking* (Gray & Tall 1994).

Nun kann man mit einer operationalen Sichtweise mitunter sehr weit kommen. Löst man z. B. die Gleichung $4x + 3 = 9$ durch Rückwärtsrechnen, reicht es aus sowohl den Term $4x + 3$ als auch das „="-Zeichen rein operational zu denken. Bei der Gleichung $3(x + 4) = (x + 1) \cdot 2 + 1$ z. B. wird ein *procepturelles* Denken schon notwendiger. Stellt man z. B. aus einem Sachzusammenhang die Gleichung $3(x + 4) = (x + 1) \cdot 2 + 1$ auf, konstruiert man *relationale* Beziehungen zwischen den Zahlobjekten (Größen) $3(x + 4)$ und $2(x - 1)$ rechts und links der Gleichung. Multipliziert man die Terme links und rechts aus, so agiert man *operational* und sieht die Terme implizit prozessural. Löst man die so entstandene Gleichung durch Äquivalenzumformen, so tritt die *relationale, objekthafte* Seite wieder in den Vordergrund[20]. Phasen *relational-objekthafter* Sichtweisen wechseln sich also mit Phasen *operational-prozesshafter* Sichtweisen fortwährend ab (Nydegger 2018).

Zahl & Variable

> *"The whole of Jacob Klein's book* Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra *is dedicated to showing that Vieta's invention, the use of letters for both known and unknown values in an equation, fully stated in 1591 in his* Introduction to the Analytical Art*-is the crystallisation of a new concept of number, namely, that of* ***symbolic number****." (Lins 1992, S. 142)*

Klein sieht in der Erfindung des *symbolischen Zahlkonzepts*, durch die Vieta nach Klein „zum eigentlichen Begründer der modernen Mathematik" (Klein 1934, S. 20) wird, viel mehr als eine Buchstaben-Notationsform für Zahlen (diese gab es schon vorher). Vieta führt durch Buchstaben symbolisch repräsentierte Zahlen (seine *species*) als unbestimmte Parameter in Gleichungen und Gleichungssystemen ein und löst damit auf einen Schlag ganze Problemklassen. Neu ist, dass diese Zahlen sich jetzt nicht mehr per se auf „konkrete Dinge" beziehen, deren Anzahlen oder Größen man bestimmt, sondern stattdessen „*symbolisch*" verstanden werden. Diese symbolisch verstandenen Zahlen erhalten ihre Bedeutung durch Beziehungen zum

[20] Am aus $3(x + 4) = (x + 1) \cdot 2 + 1$ zu $3(x + 4) = (x + 4) \cdot 3 + 1$ abgeänderten Beispiel kann man sich auch klarmachen, dass die verschieden Sichtweisen, die man auf die algebraischen Ausdrücke einnimmt, zu unterschiedlichen Bearbeitungen führen können. Wer in der Lage ist die Gleichung strukturell-relational zu sehen - einen Struktursinn sein eigen nennt - kann unmittelbar erkennen, dass sie unlösbar ist. Wer operational getrimmt ist, formt evtl. so lange um bis er in „$0 = 1$" das Signal sieht, das ihn $L = \{\,\}$ schreiben lässt.

algebraischen System (z. B. der Gleichung) in dem sie definiert wurden, also insbesondere auch in den Beziehungen zu den Eigenschaften der Operationen auf diesem System (Klein 1934). Im *symbolischen Zahlkonzept* stehen die Variablen also für reine Zahlen und ihre Beziehungen zueinander werden durch die Gesetze der Arithmetik konstituiert. Lins drückt das so aus: „ the concept of symbolic number is produced through an **arithmetical internalism.**" (ebd. 1992, S. 147).

Die Variablen innerhalb dieser Beziehungen muss man sich aber mitunter auch verschieden vorstellen (z. B. als Unbekannte, generalisierte Zahlen, Parameter, etc.). Davon handeln die sogenannten *Variablenaspekte* oder *Variablenrollen*. Viele Studien zur elementaren Algebra unterstreichen die Notwendigkeit eines verständigen Auf- und Ausbaus von nachhaltigen Vorstellungen zu Variablen (Küchemann 1981, Malle 1993, Lörcher 1995, Ursini 2001, u.v.a.). Für Ursini (2001) kann sich ein solches Variablenkonzept durch generalisierende Denkweisen aus der Arithmetik heraus entwickeln. In der Arithmetik operiert man stets mit konkreten Zahlen. Lenkt man seinen Blick vom bloßen Zahlenrechnen hin zum Generalisieren, indem man nach dem Allgemeinen im Besonderen sucht, so steht man bereits mit einem Bein in der Algebra. Stellt man z. B. fest, das $2 \cdot 5 - 1 = 9$ ist und abstrahiert (evtl. mit Hilfe weiterer strukturgleicher Rechenbeispiele) in diesen Rechnungen von der „Fünf"-heut, so denkt man die Fünf nicht mehr als *Zahl* sondern als *generische Variable* und kann z. B. erkennen, dass Rechnungen der Art $2 \cdot \square - 1$ immer ungerade Zahlen liefern[21]. Andererseits kann eine symbolische Notation durchaus auch konkret interpretiert werden: Die Äquivalenz $2a + 3a = 5a$ wird oft auch im Sinne von *„2 Dinge + 3 Dinge = 5 Dinge*" verstanden[22]. Die Bedeutung eines Objekts steckt also nicht im Objekt selbst, sondern in der Art und Weise, wie ich das Objekt anschaue, wie ich es denke und damit umgehe.

Anstelle der *konkreten Zahlen* treten in der Algebra *konkrete Zahlen, generische Variablen, Variablen* und *Terme* (die auch als Zahlen gedacht werden können, z. B. die ungerade Zahl $2n + 1$) auf. Die Variable selbst tritt, je nachdem wie man diese sieht und damit umgeht, in unterschiedlichen *Variablenaspekten* oder auch *Variablenrollen* auf, die von unzähligen Autoren unter unterschiedlichen Perspektiven ausdifferenziert wurden (als Überblick z. B.: Siebel 2005, Akinwunmi 2012). Diese Perspektiven lassen sich grob einteilen in solche, die eher fachdidaktisch (Küchemann 1981, Malle 1993, Lörcher 1995, u. a.) und solche die eher fachwissenschaftlich (z. B. Pickert 1961, Freudenthal 1972, Vollrath 1994, v.d.Twer 2000, Hefendehl 2021) geprägt sind. Die Variablenaspekte sind gleichsam Ausdifferenzierungen des am Anfang von mir genannten lapidaren Satzes *„…man agiere flexibel mit den Variablen (einmal denkt man dabei an eine einzelne Zahl ein andermal an alle Zahlen eines Bereichs, gleichzeitig oder zeitlich aufeinanderfolgend)*". Für Vollrath (1994) lassen sich die unterschiedlichen Variablenrollen dadurch fassen, wie sich ihr Gebrauch abhängig von *„möglichen Bindungen*" in unterschiedlichen Situationen unterscheidet. Er unterscheidet dabei, in Anlehnung an Pickert (1961), Bindungen durch Quantoren, Mengenbildung, Funktionsbildung und Kennzeichnung (Vollrath 1994, S. 29 ff). Diese Bindungen entstehen durch die Kontexte, in denen die Variablen genutzt werden: „Als wichtige Kontexte für unterschiedliche Aspekte beim Arbeiten mit Variablen erweisen sich: Eigenschaften der Zahlbereiche, Terme und Termumformungen, Funktionen, Gleichungen und Formeln."(Vollrath 1994, S. 71). Hefendehl (2021) nennt als die zwei grundsätzlich unterschiedlichen „Bedeutungsfacetten" die der *Unbekannten* und der *Unbestimmten.* Eine Durchdringung dieser beiden Bedeutungen ist auch für das von mir

[21] In einem solches Absehen vom Besonderen einer Rechnung, dieser Fähigkeit „to see the general in the particular", sehen Courant & Robins ein ganz zentrales Verfahren der mathematischen Erkenntnisgewinnung (ebd. 1941).

[22] Diese heutzutage als „Obstsalatarithmetik" verschrieene Vorstellung kann durchaus temporär – aber eben nur temporär – zielführend sein, z. B. beim Vereinfachen algebraischer Summen.

anvisierte Unterrichtsprojekt einer Einführung in die Algebra entscheidend und ausreichend. Je nach Zusammenhang erfährt die Unbestimmte noch weitere Ausdifferenzierungen (z. B. als abhängige und unabhängige *Veränderliche* oder *Parameter*) die eng mit den Typen der algebraischen Ausdrücke verbunden sind, in denen die Variablen auftauchen (Terme, allgemeingültige Gleichungen, Bestimmungsgleichungen, Funktionen, Gleichungsklassen, Funktionenscharen).

Malle entwickelte aus dem Versuch heraus das Grundvorstellungskonzept von Vom Hofe (1995, 2003, 2006) auf Variablen zu übertragen, folgende Variablenaspekte:

(1) Gegenstandsaspekt: Variable als unbekannte oder nicht näher bestimmte Zahl (allgemeiner als unbekannter oder nicht näher bestimmter Denkgegenstand)
(2) Einsetzungsaspekt: Variable als Platzhalter für Zahlen bzw. Leerstelle, in die man Zahlen (genauer: Zahlnamen) einsetzen darf
(3) Kalkülaspekt *(Rechenaspekt)****:*** Variable als bedeutungsloses Zeichen, mit dem man nach bestimmten Regeln operieren darf (Malle 1993, S. 46).

Malle betont ausdrücklich, dass eine flexible Fähigkeit zum Aspektwechsel zum Fortschreiten in der Algebra notwendig ist. Oft kann (und muss) man in ein und derselben Algebraaufgabe zwischen unterschiedlichen Aspekten hin und her wechseln. Zudem weist er darauf hin, dass alle drei Aspekte auch auf Terme und Gleichungen anwendbar sind. Betrachtet man z. B. einen Term als bloße Zeichenreihe, mit der regelkonform operiert werden darf, so verwendet man denselben im Kalkülaspekt.

	Gegenstandsaspekt	Einsetzungsaspekt	Kalkülaspekt
Variable	Zahl	Platzhalter	Zeichen
Term	Zahl	Zahlform	Zeichenreihe
Gleichung	Aussage (Zahl=Zahl)	Aussageform	Zeichenreihe

Tabelle 5: *Malles Aspekte in Anwendung auf Variablen, Terme und Gleichungen (ebd. 1993, S.47)*

In Malles Ausführungen wird nicht ganz klar, weshalb er beim Gegenstandsaspekt auch explizit *„nicht näher bestimmte Denkgegenstände“* (s.o.) nennt. Möchte er damit die Tür zu abstrakten Strukturalgebra aufhalten, in der ja die durch Variablen bezeichneten Objekte ihre Bedeutung nicht durch ihre Referenz zu Zahlen sondern durch ihre Referenz zu anderen Denkgegenständen (wie z. B. Drehungen) oder nur durch ihre axiomatisch konstituierten Beziehungen zueinander erhalten? Oder denkt er dabei an ein in der Schulmathematik weit verbreitetes *Objektverständnis*, wenn man z. B. in Gedanken die Seiten a eines gleichseitigen Dreiecks zu $3a$ addiert, ohne dabei an die dahinterstehenden Zahlgrößen (Seitenlängen) zu denken, oder wenn man eine sogenannte „Obstsalatarithmetik“ ($3a + 2a = 5a \rightarrow$ „3 Äpfel + 2 Äpfel = 5 Äpfel“) mit Variablen betreibt? Gegen Letzteres spricht, dass er an anderer Stelle ein solches, nicht durch Zahlen hinterlegtes, Objektverständnis als einen „Verstoß gegen die Objekt-Zahl-Konvention“ (Malle 1993, S. 68) bezeichnet. In jedem Falle ist die Objekt-Zahl-Konvention in einer Einführung in die elementare Algebra zentral und grundlegend. Aus dieser ‚*Symbole stehen für Zahlen*‘-Vorstellung kann sich der Einsetzungsaspekt zwanglos entwickeln und aus ihr lässt sich auch, falls man nicht einen axiomatisch-syntaktischen Weg in den Kalkül einschlägt, der Kalkülaspekt über die *Rechengesetze für Zahlen* entwickeln.

Malle differenziert den Gegenstandsaspekt noch weiter aus:

„Eine Variable kann Zahlen aus einem bestimmten Bereich auf verschiedene Arten repräsentieren:

(1) ***Einzelzahlaspekt:*** Variable als beliebige, aber feste Zahl aus dem betroffenen Bereich. Dabei wird nur eine Zahl aus dem Bereich repräsentiert
(2) ***Bereichsaspekt:*** Variable als beliebige Zahl aus dem betreffenden Bereich, wobei jede Zahl aus dem Bereich repräsentiert wird.
Dieser Aspekt tritt in zwei Ausprägungen auf:
  (a) ***Simultanaspekt:*** Alle Zahlen aus dem betreffenden Bereich werden gleichzeitig repräsentiert
  (b) ***Veränderlichenaspekt:*** Alle Zahlen aus dem betroffenen Bereich werden in zeitlicher Aufeinanderfolge repräsentiert (wobei der Bereich in einer bestimmten Weise durchlaufen wird)“ (Malle 1993, S.80)

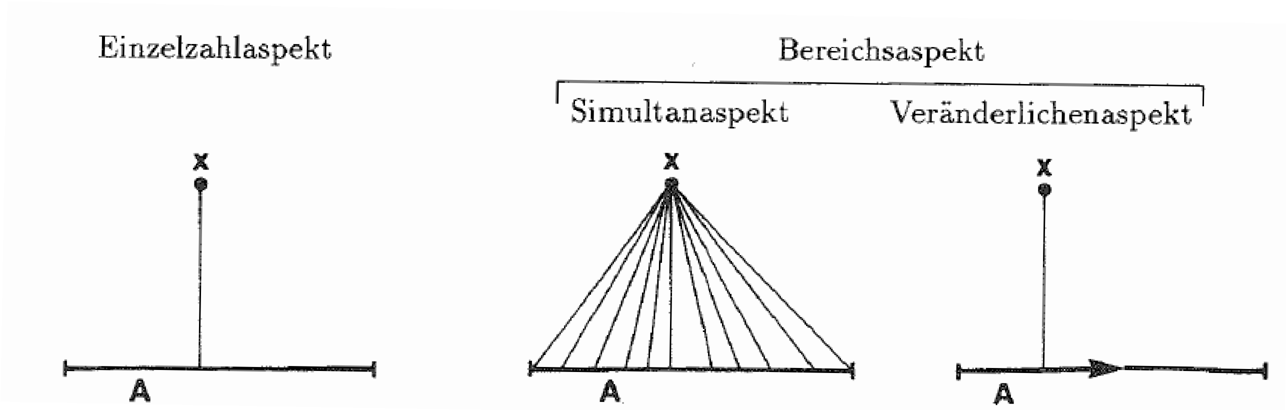


Abb. 5: *Ausdifferenzierungen des Objektaspekts nach Malle (entnommen aus ebd. 1993, S.80)*

Malles Aspekte bilden die unterschiedlichen, in verschiedenen Kontexten auftauchenden, zu denkenden Denkweisen mit Variablen gut ab. Im Gegensatz zu den oben genannten eher fachmathematisch geprägten Variablenrollen, nennt Malle zusätzlich auch den Kalkülaspekt. In ihm wird die Variable, wenn man z. B. eine Termumformung automatisiert ablaufen lässt, als bedeutungsloses Zeichen gedacht. Nach Kleinert ist es hier charakteristisch, dass sich „der ganze Prozess in eine Manipulation der Zeichen verlagert. Das Denken bedarf nicht des ständigen Hinblicks auf die idealen Sachverhalte selbst; es kann sich, auf weite Strecken hin, damit begnügen, an Stelle der Operationen mit den „Ideen“ die Operationen mit den „Zeichen“ zu setzen.“ (Kleinert 2006, S. 24). Aber es ist nicht ganz so oberflächlich. Nach Kleinert muss bei jeder Kalkülhandlung, die auf einer uninterpretierten Ebene der Symbole stattfindet, die Ebene der interpretierten Symbole stets mitschwingen. Sonst besteht die Gefahr, dass der Kalkül zu einer bedeutungslosen Verfahrensabarbeitung degradiert wird. Es sollte also vielmehr so sein, dass der denkende Mensch, der Schüler, wenn er beim Kalkül die Bedeutung vergisst, seinen Geist dennoch in „Hab-Acht-Stellung“ hält, um zu entscheiden, ob das Ziel oder Teilziele schon erreicht sind, oder um seine Kalkülhandlungen zu revidieren.

Küchemann (1978, 1980) rückt die Vorstellungen und Denkhandlungen von Schülern noch stärker in den Mittelpunkt, indem er aus der Analyse von Schülerlösungen heraus Variablenkonzepte entwickelt, die neben tragfähigen Vorstellungen auch solche beschreiben, denen Schüler zwar nachhängen, die jedoch keine langfristig trag- und ausbaufähigen Konzepte darstellen (die nachfolgenden englischen Namen und Charakterisierungen stammen wortwörtlich von Küchemann (1980) selbst).

- *‚**Letter evaluated‘:** This category applies to responses where the letter is assigned a numerical value from the outset.*
  Die Schüler vermeiden hier das Operieren mit Buchstaben, die für Zahlen stehen und ersetzen stattdessen diese immer durch bestimmte, oft willkürlich gewählte, Zahlen. Küchemann gibt hier folgendes Beispiel.

  Was kann man über r sagen, wenn $r = s + t$ und $r + s + t = 30$ ist?

  Um diese Frage richtig zu beantworten, muss $s + t$ in $r + s + t = 30$ durch r ersetzt werden (also mit den Buchstaben und nicht mit einzelnen Zahlen operiert werden). Küchemann vermutet, dass die nicht wenigen Schüler, die hier $r = 10$ als Lösung angaben, dieses unbestimmte Operieren zu vermeiden suchten und daher einzelne Zahlen $(10 + 10 + 10 = 30)$ Einsetzen.

- *‚**Letter not used’:** Here the children ignore the letter, or at best acknowledge its existence but without giving it a meaning.*
  Die Vorstellung, dass Buchstaben für unbestimmte Zahlen stehen, wird hier nicht benutzt oder gar nicht angenommen. Schüler können mit dieser Vorstellung durchaus z. B. die Aufgabe

  Wenn $a + b = 42$, was kannst du dann über $a + b + 2$ sagen?

  richtig lösen, scheitern aber bei der Aufgabe

  Wenn $e + f = 8$, was kannst du dann über $e + f + g$ sagen?.

  Bei der ersten Aufgabe reicht es $a + b$ einfach mit 42 zu identifizieren, um die Lösung 44 zu finden.
  Bei der zweiten Aufgabe kann man zwar immer noch $e + f$ mit 8 identifizieren, doch die Schüler müssen nun noch mit der Unbestimmten g operieren. Manche setzten nun wieder bestimmte Zahlen ein ($4 + 4 + 4 = 12$ oder $8 + 1 = 9$) oder nehmen die Variable g als solche wahr, formen aber bedeutungslos um (z. B. $8 + g = 8g$).

- *‚**Letter as an object’:** The letter is regarded as a shorthand for an object or as an object in its own right.’*
  Der Buchstabe wird als Abkürzung für ein Objekt (z. B. Seite einer Figur e, Professor P und Student S, Äpfel a und Birnen b) statt als Platzhalter für eine Zahl (Länge e der Seite einer Figur, Anzahl P an Professoren, usw.) angesehen. Manipulieren Schüler mit einer solchen Vorstellung algebraische Ausdrücke, so spricht man von „Obstsalatarithmetik“. Eine solche Obstsalatarithmetik kann bei der Vereinfachung algebraischer Summen zielführend sein und Malle lässt diese Vorstellung am Anfang des Termumformens durchaus gelten : *„Wenngleich diese Denkweise problematisch ist, erzeugt sie hier* [beim Zusammenfassen gleichartiger Ausdrücke; Anm. des Verfassers] *wenigstens keine Fehler und ist durchaus nicht unpraktisch*.“ (Malle 1993, S. 247).

Küchemann nennt desweitern die vollumfänglich ausbaufähigen Variablenkonzepte ‚***Letter used as a specific unknown***‘**,** ‚***Letter used as a generalized number***‘ und ‚***Letter used as a variable***‘, die weitgehend mit den Rollen der *Unbekannten*, *Unbestimmten* und *Veränderlichen* übereinstimmen.

Den Schreibfiguren mit Variablen (den Termen, Gleichungen und sonstigen algebraischen Ausdrücken) selbst ist so einfach nicht anzusehen, welche Aspekte der Variablen jetzt gerade gedacht werden müssen. Höchstens die algebraische Struktur und der mathematische Kontext, in dem die Variablen auftauchen (z. B. der Term oder die Gleichung; das Umformen oder das Lösen), bieten dafür erste Hinweise. Diese sind aber auch nicht eindeutig (man denke z. B. an die Unbekannte und die Parameter derselben Gleichung). Der Variablenaspekt wird also vornehmlich durch den gedanklichen (und mathematischen) Kontext, in dem die Variable vorkommt, bestimmt. Die Variablenaspekte müssen sich m. E. im Verstand der Schüler erst entwickeln, indem sie sich genügend oft in diese Kontexte begeben und dabei jeweils die entsprechenden Aspekte genügend oft handelnd erleben, denken und sich vorstellen. Dabei braucht man m. E. die Namen der Aspekte nicht zu kennen, jedenfalls nicht, solange der Schüler den Aspekt in seinem Denken selbst noch gar nicht ausgebildet hat („… den Begriff selbst in seinem Geiste noch gar nicht gebildet hat“ (Wolff 2019))[23].

Term & Gleichung

> “*But this difference is not uniquely at the word level, which would lead us to believe that an unknown is but a variable, and an equation is only a type of formula. The difference is in fact a fundamental difference--a conceptual difference--that often goes unnoticed (school books and even school guidelines frequently do not recognize this difference)*.” (Radford 1996, S. 111)

Obwohl wir ja im ersten Kapitel festgestellt haben, dass man eine historische Messlatte nicht so ohne weiteres an den heutigen Schüler anlegen sollte, fällt doch Eines auf. Seit mesopotamischen Zeiten kennt die Mathematik schon das Konzeptpaar *Unbekannte/Gleichung* und ihren Umgang damit. Die Erfindung der *Unbestimmten* ließ aber bis ins 16. Jahrhundert hinein auf sich warten, wenn auch schon bei Diophant erste Termumformungen zu sehen sind (siehe Abschnitt I.I). Bei Vieta bezeichnen die *unbestimmten* Buchstaben maßfreie (Gleichungs-)Parameter, reine *symbolische Zahlen*.
Seit babylonischen Zeiten ist die *Unbekannte* die, zwar durch die Gleichung festgelegte, doch noch nicht bekannte Zahl, die man bestimmt, indem man die analytische Methode im Pappo’schen Sinne anwendet. Also indem man mit der *unbekannten* Zahl so umgeht als wäre sie eine konkrete, bereits bekannte Zahl. Man denkt *eine*, wenn auch unbekannte, Zahl oder Größe. Im Malle’schen Sinne wird der Gegenstandsaspekt im Einzelzahlaspekt und der Einsetzaspekt, wobei nur eine einzige Zahl eine korrekte Einsetzung ist, aktiviert.
Demgegenüber repräsentiert die *Unbestimmte* alle Zahlen aus einem Bereich und je nachdem, wie sie gedacht wird, erfährt sie ihre Ausdifferenzierungen als allgemeine Zahl, als Veränderliche, als freier oder gebundener Parameter. Im Malle’schen Sinne wird hier der Einsetzaspekt, wobei alle Zahlen eines Bereichs gleichberechtigt eingesetzt werden können, und der Gegenstandsaspekt im Bereichsaspekt mit seinen Ausdifferenzierungen Simultan- und Veränderlichenaspekt aktiviert.

Radford (1996) sieht die Konzeptpaare *Unbekannte/Gleichung* und *Unbestimmte/Term* aus unterschiedlichen Wurzeln hervorsprießend. Für ihn ist die logische Basis des Paars *Unbestimmte/Term* ein Akt der Generalisierung, die sich von wahrgenommenen Fakten (etwa dem

[23] In einem Algebra-Workshop, den ich während der Konferenz „Mathe für alle“ 2018 gegeben habe, stellte ich einleitend die Variablenaspekte von Malle vor. Eine Referendarin meinte, sie kenne diese gut, da sie diese im Studium gelernt habe, es sei ihr aber nicht klar, was sie damit im praktischen Unterricht anfangen könne. In der anschließenden Diskussion meinte man, man könne ja diese „Begriffe“ explizit „erklären“, damit die Schüler wissen, wie man mit Variablen umgehen muss. M. E. macht dies wenig Sinn, jedenfalls nicht bevor sich diese Begriffe im Schüler selbst entwickelt haben. Es macht aber sehr wohl einen Sinn, die hinter den Begriffen stehenden Vorstellungen und Denkhandlungen explizit zu machen und zur Not auch zu „erklären“.

strukturellen Zusammenhang zwischen Folgegliedern) zu verallgemeinerndem, abstraktem Wissen (etwa der Aufbauformel) bewegt. Demgegenüber sieht er die logische Basis des Paars *Unbekannte/Gleichung* in grundsätzlich anderen Denkhandlungen. Zentral ist für ihn dabei, dass man sich in eine „hypothetische Situation“ begibt, in der man annimmt, dass man die unbekannte Zahl, die man sucht, schon bereits kennt und sie mit Hilfe der *analytischen Denkweise* aufspürt.

> „The generalization way of thinking and the analytic way of thinking … are independent and essentially irreducible, structured forms of algebraic thinking … the algebraic concepts of *unknowns* and *equations* appear to be intrinsically bound to the problem-solving approach, and the concepts of *variable* and *formula* appear to be intrinsically bound to the pattern generalization approach" (Radford 1996, S.111)

Auch auf der Ebene der prozessbezogenen Verfahren (Malle würde wohl vom Kalkülaspekt des Terms /der Gleichung sprechen) zeigen sich wesentliche Unterschiede.
Versteht man eine algebraische Gleichung als relationale Beziehung zwischen Zahlen, so gebärt die Logik die Sinn- und Statthaftigkeit der *Äquivalenzumformungen* (*„Auf beiden Seiten dasselbe tun“* , besser: *„Wende auf beide gleichen Zahlen auf beiden Seiten der Gleichung eine bijektive Abbildung an und es entsteht eine Gleichung mit der gleichen Lösung*“). Es müssen also nicht unbedingt neuen Regeln gelernt oder alte aktiviert werden. Zudem ist es eine Eigentümlichkeit der Äquivalenzumformungsregeln, dass sie bei einer Kette von Äquivalenzumformungen jeweils einzeln hintereinander und voneinander getrennt eingesetzt werden.
Dies ist beim *Termumformen* anders. Oft werden dort mehrere Einzelschritte hintereinander im Kopf ausgeführt und es kommen „gleichzeitig“ mehrere Rechengesetze zum Zuge. Malle (1993, S. 246) gibt das Beispiel

$$-(2x+3y-5)\cdot x=-2x^2-3xy+5x.$$

In diesem Rechenschritt wird das Auflösen des Minus vor der Klammer (Minus-Klammerregel), das Ausmultiplizieren (Distributivgesetz), das Vertauschen und Zusammenfassen in Produkten (Kommutativgesetz, evtl. Distributivgesetz), sowie die Ersetzung $x\cdot x=x^2$ (Schreibkonvention) im Kopf durchgeführt. Zusätzlich müssen die arithmetischen Rechengesetze erst gekonnt und auf das Rechnen mit Variablen übertragen werden.
Gerade weniger leistungsstarke Schüler bringen die den Termen und Gleichungen spezifischen prozessbezogenen Handlungsabläufe immer wieder durcheinander[24].

Das Konkrete & das Abstrakte

> *„Das Wort Abstraktion (lateinisch abstractus, abgezogen, abziehen, entfernen, trennen) bezeichnet meist den induktiven Denkprozess des erforderlichen Weglassens von Einzelheiten und des Überführens auf etwas Allgemeineres oder Einfacheres.“ (*https://de.wikipedia.org/wiki/Abstraktion*, zuletzt abgerufen am 10.12.2021)*

[24] Beispiele hierfür gibt es zuhauf. Z. B. Schüler, die folgende Umformung vornehmen: $f(x)=\frac{1}{6}x^2+x+\frac{1}{3}\ |\cdot 6 \Leftrightarrow\ f(x)=x^2+6x+2$. So entledigt man sich der störenden Brüche, indem man das automatisierte Normieren von Nullstellen*gleichungen* auf den Funktions*term* anwendet: Methoden, die nur bei Gleichungen greifen, werden auf Terme angewendet.

> *„ Abstraction from context' which Diophantos achieved for early algebra nearly 2000 years ago, is a source of the power of mathematics." (Mason & Sutherland 2002, S.$)*

Fraglos ist die Abstraktion eine der großen Stärken der Mathematik. Abstraktion ist dabei immer unidirektional: Sie geht vom Konkreten ins Abstrakte. Durch Abstraktion entsteht das Abstrakte (es muss aber nicht durch Abstraktion entstehen).
Grundschüler beginnen z. B. das Addieren und Multiplizieren mit konkreten Dingen (Steinchen, Plättchen, etc.) und nach und nach wird einfach nur mit den Zahlen, losgelöst von konkreten Kontexten, gerechnet. Unversehens werden dann diese abstrakten Zahlen zu etwas Konkretem. Die Algebra abstrahiert diese Zahlen noch weiter, indem sie sich nicht mehr auf konkrete Zahlenwerte festlegt, sondern unbestimmte Zahlen zulässt, mit denen man nach arithmetischen Konventionen symbolisch operiert.

Nach Mason & Sutherland (2002) liegt die Stärke der Abstraktion darin, dass sie es ermöglicht …

- … sich auf einen Lösungsprozess unabhängig vom gerade speziell untersuchten Kontext zu konzentrieren
- … sich auf eine allgemeinere Struktur zu konzentrieren, um effektive Lösungswege für eine ganze Problemklassen zu finden
- … diese Prozeduren auf eine Vielzahl von oberflächlich sehr unterschiedlichen Kontexten anzuwenden

> „Unfortunately this very strength is a weakness when it comes to education, for there is a strong temptation to teach the abstracted technique isolated from all context, and a converse temptation to teach the technique as a set of rules to be followed in specific contexts" (Mason & Sutherland 2002, S. 5).

Es besteht also die Gefahr, dass die Schüler – z. B. nach intensivem Üben – sehr wohl Gleichungen auf formaler Ebene lösen können, aber diese Kompetenz nicht auf konkrete Kontexte anwenden können. Dies mag auch daran liegen, dass allenthalben ein abstraktes Konzept, ein abstraktes Verfahren ohne eine vorangegangene Abstraktion eingeführt wird.
Umgekehrt kann es aber auch passieren, dass Schüler zwar auf eingeübte Kontexte mit dem richtigen algebraischen Kalkül reagieren, denselben aber nicht auf (oft nur leicht) abgeänderte, vom abstrakten Standpunkt aus identische, Kontexte anwenden können.

Aber was meinen Lernende genau, wenn sie behaupten, die Algebra sei Ihnen einfach zu abstrakt? Sie meinen damit wohl, dass sie ihnen zu wenig konkret ist, dass Ihnen vertraute, konkrete Ansatzpunkte zum Verständnis fehlen. Die konkreten Objekte hinter der Algebra sind in erster Linie die (abstrakten) Zahlen. Man kann sehr wohl algebraische Denkhandlungen einleiten, indem man von noch konkreteren Objekten (Plättchen, Flächen, Maßgrößen, etc.) ausgeht, aber eine genuin algebraische Sichtweise wird vielleicht erst dann daraus, wenn man von diesen konkreteren Objekten auf die darauf referenzierenden Zahlen abstrahiert. So wie Lins es behauptet: Nur wenn man *arithmetisch* denkt, kann man *algebraisch* denken. In diesem Sinne stimmt es vielleicht wirklich: „Algebra is an inherently abstract discipline and one cannot escape teaching it as such."(Sfard 1995, S.9).

Semantik & Syntax (Inhalt & Kalkül)

> *"The majority of the remarkable mistakes in transformation of algebraic expressions made by pupils … are due to the fact that the expression and the transformation are meaningless jargon to the pupil." (J. W. A. Wright 1903, S.11)*

Die Algebra ist eine Symbolsprache. Wie in der gesprochenen und geschriebenen Sprache entwickelt sich die algebraische Symbolsprache dann zu einem mächtigen mentalen Werkzeug, wenn semantische und syntaktische Ebene wechselseitig verstärkend einander aufbauen, wenn Inhalt und Kalkül einander die Hand reichen. Um im Bild der Muttersprache zu bleiben: Man kann sich leicht eine Maschine vorstellen, die, gefüttert mit grammatikalisch-syntaktischen Regeln, nichts als geschliffenes sinnleeres Geplapper erzeugt. Umgekehrt lässt sich ein Mensch vorstellen, der Sinn und Bedeutung der Wörter und Redewendungen durchdringt, dem aber das grammatikalisch-syntaktische Know-How fehlt, um produktiv zu kommunizieren und zu denken.

Bis um die Jahrtausendwende war der Algebraunterricht stark kalkülorientiert und bisweilen ist er es heute noch. Seit dem letzten Quartal des vergangenen Jahrhunderts häufen sich die Stimmen, die eine Abkehr von dieser „überbetonten" Kalkülorientierung fordern (Biehler et al. 1995, Baumert et al. 1997, Haarmann et al. 1997, Prediger 2009, 2009a uva.). Diese Stimmen beziehen sich auf zahlreiche internationale Studien zur mangelnden Ausbeute des bis dahin kalkülorientierten Algebraunterrichts, dem damit einhergehenden allgemeinen Unbehagen und eines Antizipierens der wohl kommenden Herausforderungen mit den heraufziehenden Möglichkeiten des Computers[25] (Freudenthal 1974[26], Hischer 1993, Schupp 1992[27], Herget et al. 2000). Spätestens ab den sogenannten Timms- und PISA-Schocks (Goffrey 1995, Martin & Owen 2001, Hefendehl 2003) um die Jahrhundertwende, ändern sich auch die Richtlinien und damit die Algebrainhalte in den Schulbüchern in eine Richtung *„Weg vom Kalkül, hin zum Sinn"* (Haarmann et al. 1997)[28].

Vereinzelt finden sich aber auch Stimmen, denen diese Abkehr zu weit geht (z. B. Kleinert 2006, 2015, Cohors-Fresenborg 2010, Schröder 2014, Büchter, Bauer & Gerstner 2019). Es ist ein Kreuz mit dem Kalkül, unter dem ich – wie Kleinert – „jedes Verfahren, dass mathematische Aussagen durch regelgeleitete Symbolumwandlungen gewinnt" verstehe. Cohors-Fresenborg sieht als Charakteristikum und zentrale Stärke des Kalküls, dass es die Vorstellung und das Denken entlastet, indem inhaltsgebundene logische Operationen weitgehend durch inhaltsinvariante Denkoperationen ersetzt werden (ebd. 2001).

Es ist aber gerade diese Inhaltsinvarianz der Operationen, die es ermöglicht, deren Handhabung an Maschinen zu übertragen, und die Versuchung ist groß, das (mitunter mühsame)

---

[25] Unzählige Studien untersuchen die Möglichkeiten computertechnischer Umgebungen für den Algebraunterricht (für einen Überblick siehe z. B. Barzel 2012 und Barzel et al. 2004, 2015). Diese werden aber dieser Arbeit ganz bewusst nur am Rande angesprochen.

[26] „Wenn unser Unterricht heute darin besteht, dass wir Kindern Dinge eintrichtern, die in einem oder zwei Jahrzehnten besser von Rechenmaschinen erledigt werden, beschwören wir Katastrophen herauf." (Freudenthal, 1974)

[27] „Der Computer zwing uns zum Nachdenken über Dinge, über die wir auch ohne Computer längst hätten nachdenken müssen." (Hans Schupp, auf der GDM-Tagung im Frühjahr 1992)

[28] Es ist eine – wenn auch schriftlich kaum fixierte – Tatsache, dass seither Lehrer aller Altersklassen die nun weitgehend aus den Schulbüchern verbannten „Aufgabenplantagen" immer wieder aus ihren Schubladen herausholen, damit die Schüler das kalkülhafte Operieren mechanisch einüben. Wenn also heutzutage eine weitverbreitete fachdidaktische Überzeugung darin besteht, dass ein solches mechanisches Einüben wenig bis gar nicht lernförderlich ist, wie kommt es dann, dass die praktizierenden Lehrer nach wie vor auf eben solche Aufgabenplantagen in ihrem Unterricht zurückgreifen?

Erlernen des algebraischen Kalküls vollständig in Frage zu stellen, wo doch Computer „das Gleiche“ fehlerfrei und viel schneller durchführen können, als es der denkende Mensch je tun kann[29].
Es stimmt natürlich, dass Computersoftware es ermöglicht langwierige, mechanisch abzuarbeitende und fehleranfällige Berechnungen schnell und zuverlässig zu erledigen. Man denke da nur an das in der Linearen Algebra nötige Lösen von linearen Gleichungssystemen. Aber auch wenn heutige Software die Schüler dazu befähigt algebraisches Kalkül an Maschinen zu übergeben, brauchen sie dann nicht doch noch zumindest etwas Erfahrung im Kalkül, um zu entscheiden, was genau die entsprechende Software überhaupt für sie tun soll?
Und konstituieren nicht verständig durchgeführte Kalkülhandlungen mitunter auch Bedeutung?
Einige Autoren adressieren diese letzte Frage (z. B. Schröder 2014, Bauer, Büchter & Gerstner 2019, Greefrath & Müller 2012). Schröder vertritt die Ansicht, dass die Kalküle inhärente Bestandteile der mathematischen Begriffsbildung sind und sieht in fachdidaktischen Bestrebungen, die „*Weg vom Kalkül*“ wollen, das „eigentliche Problem des ‚modernen' Mathematikunterrichtes“ (Schröder 2014, S. 8). Je mehr man nämlich glaubt – so Schröder, dass die Begriffe durch Anweisungen an Maschinen über auswendig gelernte Regeln und Verfahren („dazu gehören dann auch die mit Verfallsdatum behafteten Bedienungsanleitungen für das elektronische Rechenwerkzeug“ Schröder (2014, S. 12)) verfügbar gemacht werden können, desto mehr erscheint die Mathematik als bloße Ansammlung von Faktenwissen, anstatt als mächtige Sprache, die Beziehungen beschreibt, die aufeinander aufbauen. Er gibt als Beispiel die unterrichtliche Behandlung des Ableitungsbegriffs:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Diese symbolisch-formale Notation verdichtet die Definition der Ableitung und weist visuell salient auf den ‚arithmetisch-kalkülhaften' infinitesimalen Prozess zum Bilden einer Ableitung hin. Früher – so Schröder – war eben dieser infinitesimale Prozess zentrales Oberstufenthema. Er wurde über Folgen und Reihen vorbereitet und über die Verkleinerung des kontrollierbaren Fehlers h numerisch-arithmetisch durchgeführt, was schon „Kalkül vom feinsten war“ (Schröder 2014, S. 2). Anschließend wurde dann beim Übergang vom Differenzen- zum Differentialquotienten, z. B. mittels der sogenannten *h-Methode*, auf elementares algebraisches Mittelstufenkalkül zurückgegriffen, um den Differenzenquotienten auf den Grenzübergang vorzubereiten, so dass der Nenner keinen gegen Null strebenden Faktor mehr enthält. Wenn man heute also in der Unterrichtspraxis oft den prozesshaften Grenzwertvorgang nicht mehr zuerst numerisch-arithmetisch nachvollzieht, indem man für die Änderung h immer kleinere Werte einsetzt (das kann der Computer ungemein beschleunigen), um dann in einem weiteren Formalisierungsschritt das explizit-numerische Vorgehen durch ein analytisch-algebraisches Kalkül (h-Methode) zu ersetzen, sondern gleich die intuitive Vorstellung der Tangentensteigung mit der Ableitung gleichsetzt, in der Folge dann den Computer diese Ableitungen

[29] Seit dem Einführen des graphikfähigen Taschenrechners (GTR) hört man solche Argumente immer wieder von seinen Schülern. Nachdem man z. B. in der Oberstufe die Lösungsverfahren für Lineare Gleichungssysteme wiederholt, in einem weiteren formal-algorithmischen Schritt das Gauß-Verfahren entwickelt hat, um schließlich den Schülern zu zeigen, wie man Lineare Gleichungssysteme schnell und einfach mit dem GTR löst, hört man oft Fragen wie diese: „Wozu mussten wir das denn alles durchpauken, wo mir doch jetzt der Taschenrechner sofort die richtige Lösung liefert?“.

bestimmen oder alternativ die Schüler die Ableitungsregeln auswendig lernen lässt, wie viel Verständnis vom Begriff Ableitung baut sich dann noch auf ? [30]

Hefendehl und Rezat stellten erst kürzlich fest, dass „die für curriculare Entscheidungen und Lehrbuchgestaltung relevante Frage ‚*Wie viel Termumformung braucht der Mensch?*‘[31] immer noch nicht ausdiskutiert“ ist (Hefendehl und Rezat 2015, S. 144). Dasselbe gilt m. E. für die Frage, in welchen Ausmaße Kalkültätigkeiten *konstituierend* für die Begriffsbildung sind.

Es ist verzwickt. Einerseits kann eine Algebra ohne Kalkül wohl kaum diesen Bedeutungsreichtum entfalten, den z. B. Arcavi in seinem Konzept des Symbolsinns beschreibt, andererseits ist es gerade ein Charakteristikum eben dieses Kalküls, denkentlastende, inhaltsinvariante Operationen durchzuführen. Das birgt aber die Gefahr, dass beim symbolischen Manipulieren eben überhaupt kein Inhalt, keine Bedeutung mehr gesehen oder gar erzeugt wird. Vielleicht ist auch hier wieder der beste Ausweg eine Kultur zu pflegen, die immer wieder die Routinen unterbricht und nach der Bedeutung fragt: „In other words, competence would include, the timely postponement of meaning in favor of quick and effective applications of procedures, but also, when necessary, desirable or when people ‘feel’ it, the interruption of an automatic routine in order to question, reflect, conclude, relate ideas or create new meaning” (Arcavi 2005, S.45)

Prädikatives & Funktionales Denken

> *„Solche Befunde erschüttern die Illusion, mathematische Zusammenhänge seien zweifelsfrei erklärbar. Wenn Lehrende meinen, sie hätten längst alles Wesentliche gesagt, kann das Gesagte für Lernende immer noch unsäglich schwer zu durchdringen sein.“ (Hefendehl 2003, S. 15)*

Inge Schwank (1996, 1999/2000, 2003) hat anhand langjähriger Beobachtungen und kognitionspsychologischer Untersuchungen, insbesondere durch Auswertung von Bearbeitungsprozessen zu Musterergänzungsaufgaben (siehe Abb. 6), zwei grundsätzlich unterschiedliche Denktypen ausgemacht, die sie *prädikatives* und *funktionales* Denken nennt. Zudem schlagen ihre Untersuchungsergebnisse vor, dass Lernende individuelle, sich evtl. über die Jahre selbst verfestigende, Präferenzen bzgl. dieser beiden Typen aufweisen.
Der *prädikativ Denkende* denkt eher statisch und sucht in einem Problemlöseprozess nach Gleichbleibendem, nach ‚Prädikaten‘, die im Prozess gleich bleiben. Der *funktional Denkende* denkt eher dynamisch, sucht Konstruktionsschritte und blickt auf die Handlungs(ab)folgen, die Unterschiede im Prozess hervorheben.

[30] In „Der Computer zwingt uns zum Nachdenken“ (Bauer, Bücher & Gerstner 20019) wird exemplarisch eine aktuelle Schulbuchvorgehensweise, in der das rechnerunterstützte Testeinsetzen einen vorrangigen Status zum algebraischen Ableitungskalkül einnimmt, kritisch reflektiert.
[31] „Wie viel Termumformung braucht der Mensch“ war der Arbeitstitel einer Tagung, die schon 1992 die Frage adressiert hat, welche Änderungen Computer & Co. für den Mathematikunterricht mit sich bringen (Herscher et al.1992). Weitere Quellen dazu findet man in Herget et al.(1995) und Herget (2000).

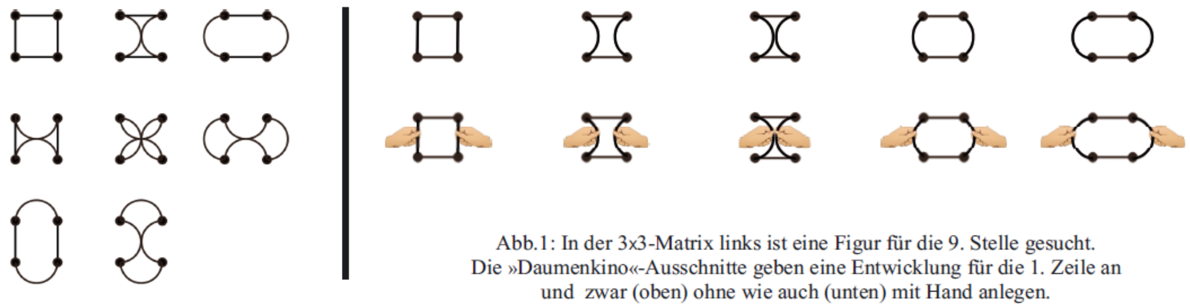


***Abb. 6** (entnommen aus Schwank 2003)**:** Ein Aufgabenformat zur Diagnose von prädikativen und funktionalem Denken. Es soll die fehlende Figur unten rechts gefunden werden. Dem prädikativen Denker fällt auf, dass in den Zeilen die Deckel und Böden und in den Spalten die Seitenwände jeweils gleich sind und kann sich anhand dieser Prädikate die fehlende Figur erschließen. Der funktionale Denker sieht, dass sich in den Zeilen die Seitenwände und in den Spalten die Deckel und Böden verändern und kommt z. B. durch die Prozessabfolge „Zuerst eindrücken, dann auseinanderziehen" zur fehlenden Figur.*

Eine Reihe von Studien konnten diese Denktypen auch im Zusammenhang mit algebrarelevanten Aufgabenformaten nachweisen. Sjuts u. a. untersuchten dazu unterschiedliche „mentale Konstruktionen" beim Lösen von Textaufgaben (Sjuts 2003, Kaune & Sjuts 2005) und konnten auch hier die funktionalen von den prädikativen Denkern trennen.
Striethorst (2005) spürte die beiden Typen im Zusammenhang mit Schülervorstellungen beim Gleichunglösen auf.
Chohors-Fresenborg und Striethorst (2003) untersuchten Schülerlösungen in einer symbolischen Kunstwelt, die das axiomatisch-regelbasierte Termumformen abbilden soll (Abb. 7). Die Schüler mussten dabei mithilfe axiomatisch definierter Regeln eine abstrakte ikonische Struktur in eine andere überführen. Ihre Ergebnisse schlagen vor, dass Schüler auch beim ‚Termumformen' entweder die prädikative oder die funktionale Denkweise präferieren. Durch die Auswertung von Schüleräußerungen, die ihre Denkhandlungen beschreiben, zeigen die Autoren hier zudem auf, dass in ihrer Kunstwelt ein und dieselbe schriftliche Bearbeitung durchaus auch mit zwei völlig unterschiedlichen Denkhandlungen einhergehen kann: Sowohl der prädikative als auch der funktionale Denker kann mitunter auch ein und dieselbe Symbolkette zur Lösung des hier aufgestellten Problems erzeugen.

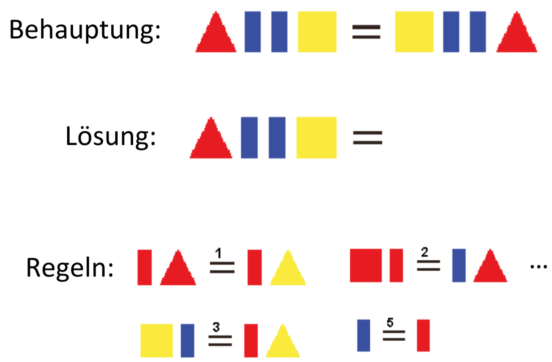


***Abb. 7:** Die symbolische Kunstwelt von Cohors-Fresenborg & Striethorst (2003). Oben steht die Behauptung, die durch sukzessive Regelanwendung (abgebildet sind 4 von 12 Regeln) nachgewiesen werden soll.*

Die hier genannten Studien stellen auch fest, dass es dem funktionalen Denker oft schwerer fällt, seine Denkvorgänge in Worte zu fassen. Funktionale Denker können oft mit prädikativen Erklärungen wenig anfangen und umgekehrt. Für die Schulpraxis wird dies besonders relevant, wenn man sich vergegenwärtigt, dass der Lehrende höchstwahrscheinlich ja selbst eine solche Präferenz ausgebildet hat, während die Lehrenden mitunter die jeweils andere Denkweise bevorzugen:

> „Solche Befunde erschüttern die Illusion, mathematische Zusammenhänge seien zweifelsfrei erklärbar. Wenn Lehrende meinen, sie hätten längst alles Wesentliche gesagt, kann das Gesagte für Lernende immer noch unsäglich schwer zu durchdringen sein.“ (Hefendehl 2001).

Ähnliches gilt auch für eine ganze Reihe weiterer ‚Denkweisen‘ (wie z. B. Bewegliches Denken, Systemisches Denken, etc..; siehe z. B. Roth 2005 für einen Überblick), die u.U. bei den Teilnehmern des mathematischen Diskurs unterschiedlich stark ausgeprägt sind. Eine diesbezügliche Bewusstheit und Sensibilität der Lehrperson scheint also angezeigt zu sein. Es muss eben nicht immer nur die Erklärung des Lehrers sein, die am besten verstanden wird. Auch hieraus folgt, wie wichtig es ist die Schüler (die prädikativen sowie die funktionalen) im mathematischen Diskurs zu Wort kommen zu lassen und dabei darauf zu achten, dass auch die jeweils andere Argumentationsweise nachvollzogen wird.

*

Lernende haben Schwierigkeiten mit der Algebra, weil die Algebra eben (auch) schwierig ist. Alte Konzepte müssen erweitert und neue Konzepte, die sich oft in einem wechselseitig bedingenden Spannungsfeld befinden, erst erlernt werden. Während man in der Arithmetik vornehmlich operational agierte, müssen sich nun zunehmend auch operationale und relationale Denkweisen einander abwechseln. Letzteres kann sich u.U. erst langsam entwickeln. Ein und derselbe algebraische Ausdruck muss als Prozess (Rechenanweisung) gedeutet werden können, aber auch als Objekt (Produkt dieser Rechenanweisung), ohne dass man in der Lage ist diese Rechenanweisung explizit durchzuführen. Variablen, Terme und Gleichungen entfalten – je nach Gebrauch und Bedeutung – unterschiedliche Aspekte, die man klar voneinander abgrenzen können und zwischen denen man auch flexibel zu wechseln lernen muss.
Hinter Gleichungen und Termen verstecken sich grundlegend unterschiedliche Denkhandlungen.
Die Algebra ist von Natur aus abstrakt. Ob und wie kontextuelle Konkretisierungen der Algebra, die versuchen den Abstraktionsgrad zu reduzieren, dem Lernen der Algebra auch im Weg stehen können, scheint nicht vollständig geklärt zu sein.
Der Kalkül selbst birgt die Gefahr, dass Schüler jeglicher Bedeutungsbezug verloren geht und sie so die Algebra als „ein System von strengen Regeln, an die man sich strikt halten muss, deren Sinn aber nicht einsichtig ist und deren Anwendung ohne Ziel geschieht“ (Fischer et al. 2010) empfinden.
Kognitionspsychologisch untermauerte Studien zeigen auf, dass sich hinter vermeintlich gleichen Bearbeitungen auch vollkommen verschiedene Denkweisen verbergen können.

Lehrende seien also gewappnet: Das Unterrichten der Algebra kann nicht ohne Verwerfungen stattfinden (die empirische Realität des Klassenraums spricht sowieso genau davon). Die vielen neuen Denkweisen müssen ja erst einmal angeeignet werden und es wundert nicht, dass dabei auch mitunter erhebliche Schwierigkeiten auftauchen. Aus dem gleichen Grunde sei man auf viele Fehler gefasst. Fehler unterschiedlichster Arten und vielfältigster Natur. Viele Studien führten umfangreiche Fehleranalysen durch (z. B. Radatz 1979, 1980, Lörcher 1987, 1995, Tietze 1988, Malle 1993, Stahl 2000, u.v.a.). Sehr umfangreich sind die Fehlerlisten und die Autoren tun sich schwer diese für den Unterricht operativ wirksam zu klassifizieren. Tietze (1988) analysierte z. B. mit drei Tests, die mit 171 Schülern einer 8. Klasse einer Gesamtschule durchgeführt wurden, allein bei Aufgaben des Typs $ax + b = c$ knapp 5000 Fehler und isolierte ca. 250 Fehlermuster. In der Algebra gibt es auch typische, immer wiederkehrende, Fehlermuster, auf die ich im praktischen Teil der Arbeit näher eingehen werde, doch meiner Erfahrung nach kann man all die Fehler, die Schüler machen, im Vorfeld kaum antizipieren und es fehlt einfach die Zeit auf alle einzugehen. Deswegen kommt man meiner Einschätzung nach nicht umhin, gerade auch in der Algebra eine Fehlerkultur im Klassenraum aufzubauen und zu pflegen, indem typische und systematische Fehler besprochen werden und indem die Schüler von sich aus Kontrollstrategien benutzen, die sie in die Lage versetzen, Fehler selbsttätig aufzuspüren und darauf angemessen zu reagieren.

IV Zugänge zur Algebra

Zu einem guten Ende gehört auch ein guter Beginn. (Konfuzius 551 - 479 v. Chr.)

Algebraisches Denken ist schon weit vor der Einführung von Variablen möglich. Landläufig spricht man aber erst von der Einführung in die „Algebra“, wenn Variablen benutzt werden <u>und</u> dabei erste Kalkülhandlungen aufgebaut werden, wenn also technisch gesehen dabei auch erste Termumformungen durchgeführt und lineare Gleichungen algebraisch gelöst werden.
Wie können jetzt unterrichtliche Umsetzungen dazu aussehen? Welche Aufgabenformate, Lernumgebungen und Situationen könnten leitend sein, so dass in der Einführung der Algebra ein nachhaltiges algebraischen Denkens entsteht, das sich weiter entwickeln kann und einen verständigen, sinnstiftenden Aufbau und Gebrauch der algebraischen Konzepte ermöglicht?
Was sagt die Fachdidaktik dazu?

IV.I Eine Klassifizierung möglicher Zugänge

“The radical mistake of algebraical teaching for many generations was in passing by a jump from Particular Arithmetic to purely Symbolic Algebra, and thereby omitting a sufficient training in ***Generalized Arithmetic****” (Brandford 1908, S. 253).*

“*There is a long-standing question whether school algebra should be presented the way algebra was understood in the early nineteenth century, that is, as* ***generalized arithmetic****, governed by the same familiar laws as those concerning computations on plain numbers.*” (Demby 1997, S. 47)

“What should the student say in order to convince us that she understands the meaning of the equality 3(x+2)=3x+6? The "classic" answer to this question speaks of making the student aware of "the arithmetic connection"--of the fact that algebraic equivalencies are generalizations of numerical relationships.” (Kieran & Sfard 1999, S.2)

“Because of the rules. But I don't know how we got the rules.” (Schülerzitat aus Kieran & Sfard 1999, S.2)

Die Algebra wurde und wird oft als „verallgemeinerte Arithmetik“ bezeichnet. Eine genaue Definition dieses Begriffs konnte ich jedoch nicht ausmachen. Viele Autoren zeigen bei Benutzung dieses Begriffs zwar in dieselbe Richtung, setzen dabei aber ganz unterschiedliche Akzente. Die früheste Quelle dieses Begriffs habe ich in *„A Study of Mathematical Education“* (Brandford 1908) gefunden. Brandford sieht die symbolische Algebra am Ende dreier Hauptstufen, die der ‚*Particular Arithmetic*‘, der ‚*Generalized Arithmetic*‘ und der ‚*Symbolical Algebra*‘. Die ‚*Generalized Arithmetic*‘ entwickelt sich aus der ‚*Particular Arithmetic*‘, wenn der Blick vom bloßen Rechnen mit einzelnen konkreten Zahlen hin zu Beziehungen und Strukturen in diesen Rechnungen gerichtet wird, was dann in die algebraisch formulierten Rechengesetze (z. B. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$) mündet (Brandford 1908, S. 361 ff). Für Brandford ist die ‚*Generalized Arithmetic*‘ also ein Zwischenstadium zwischen der Arithmetik und der Algebra: „Algebra is a generalization of *generalized arithmetic.*“ (ebd. 1908, S. 375). Spätere Autoren (z. B. Freudenthal 1973, 1983, 1991, Mason 1985, Usiskin 1988) sehen in der Verallgemeinerung der Arithmetik einen übergeordneten Ansatz und verstehen darunter das Verwenden von

Buchstaben, um die allgemeinen Gesetze des Körpers der reellen Zahlen auszudrücken und diese auf unterschiedlichste Situationen manipulativ anwenden zu lernen (Freudenthal 1973).
Ab den 70er Jahren des letzten Jahrhunderts häufen sich die Studien, die an dem bis dahin weitverbreiteten Glauben rütteln, die Algebra könnte sich so ohne Weiteres aus der Arithmetik entwickeln. Collis (1975), Davis (1975) und Booth (1984, 1987) zeigen viele Unstimmigkeiten zwischen der praktizierten Arithmetik und der Algebra und damit einhergehende Lernschwierigkeiten auf. Herscovicsh & Chalouh (1985) berichten von Schülerschwierigkeiten, die durch Konflikte zwischen einer arithmetischen und einer algebraischen Rahmung entstehen. Lee and Wheeler (1989) zeigen, dass für viele Schüler, auch solche, die algebraische Aufgaben erfolgreich durchführen können, die Arithmetik und die Algebra zwei vollkommen getrennte Welten sind. Demby (1994, 1997) stellt fest, dass das Erklären von Umformungsschritten durch die Rechengesetze für Zahlen etwas ist, dass„ … many people are not able to do, even if they can perform correct transformations" (ebd. 1994, S. 246, zitiert nach Kieran & Sfard 1999).
Manche Autoren sehen das Hauptproblem darin, dass Schüler zwar gelernt haben symbolisch zu manipulieren, aber „all too often they are unable to see the mathematical objects to which these symbols are supposed to refer” (Kieran & Sfard 1999, S.3). Sie versuchen deshalb Kalkülhandlungen aufzubauen, in denen die Variablen und Ausdrücke nicht bloß für Zahlen, sondern auch für andere Objekten stehen (z. B. Funktionen (Kieran 1993, Kieran & Sfard 1993) oder geometrische Objekte (Wellstein 1978, Malle 1993, Prediger 2009)).

Viele Autoren sehen in der Algebra nun mehr als nur „Verallgemeinerte Arithmetik“, während die meisten doch derselben einen zentralen Stellenwert zuweisen. Mason, Graham, Pimm & Gowar (1985) z. B. geben vier ‚*Roots to Algebra*“ an, wobei sie in der ‚*Generalized Arithmetic*‘ eine zentrale und übergeordnete Wurzel der Algebra sehen.

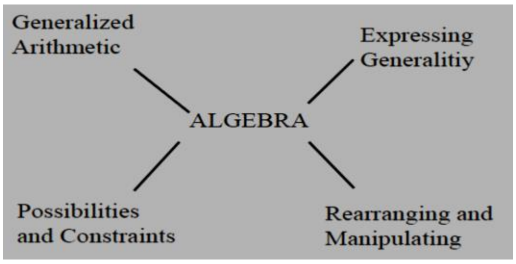


Abb. 8: *Mason et al.: Routes to/Roots of Algebra*

Oder sollte man die Algebra doch stärker als *Symbolisches System* unterrichten, in dem sich Regelwerke zum Termumformen und Gleichunglösen aus Axiomen und daraus hergeleiteten Sätzen ergeben? Die Versuche der „New Math“-Bewegung gingen wohl in eine solche Richtung, aber auch in jüngerer Zeit gab es noch vereinzelt solche Bestrebungen, z. B. im Rahmen des Osnabrücker Curriculums (Chohors-Fresenborg 2001, Cohors-Fresenborg et al. 2003 a,b).

Mit Bednarz, Kieran und Lee’s „Approaches to Algebra“(1996)[32] erscheint 1996 als Tagungsband eine im angelsächsischen Raum sehr wirkmächtige Zusammenstellung eines internationalen Kolloquiums, die den Diskussionsstand bis dahin gut zusammenfasst und unterschiedliche Zugänge zur Algebra untersucht. Diese Zugänge legen durchweg Wert darauf die Algebra aus inhaltlichen Kontexten heraus sinnstiftend aufzubauen, indem die Variable von Anfang an für etwas steht, das im jeweiligen Kontext bedeutsam ist. Sie verlagern alle das symbolische Manipulieren nach hinten. Die Zugänge werden in vier verschiedene Kategorien[33] aufgeteilt, die unterschiedliche Perspektiven auf die Algebra fokussieren:

[32] Die Autorenliste dieses Bandes lässt sich auch heute noch als ein „Who is who?“ der internationalen Algebradidaktik lesen.
[33]

- **Generalisierungsperspektive:** „generalizing patterns (numeric and geometric) and the laws of governing numerical relations“
- **Problemlöseperspektive:** „solving of specific problems or classes of problems“
- **Modellierungsperspektive:** „modelling of physical phenomena“
- **Funktionale Perspektive:** „focussing on the concept of variable and function“

Da sich m. E. die verschiedenen aktuell diskutierten Zugänge nach wie vor in diese 4 Kategorien einteilen lassen, hier der Versuch einer Zusammenfassung:

Zugang über das Generalisieren. Dieser Zugang ist heute – auch in den eingängigen Schulbüchern – sehr prominent. Ausgangspunkt dafür können numerische *Zahlenfolgen* (z. B. Zahlenfolgen, strukturierte Päckchen) und geometrisch-repräsentierte *Zahlenfolgen* (z. B. Punktmusterfolgen, Streichholzmuster, Würfelbauten) sein. Die Suche nach einem Muster in diesen Folgen, die es einem ermöglichen, den Wert eines beliebigen Folgegliedes anzugeben, führt dabei auf eine algebraische Formel. Visuelle oder konkret-haptische Repräsentationen der Folgen, die man abzählen, umschichten und umbauen kann, erleichtern dabei oft den Weg beim Auffinden einer Formel.
Zwei unterschiedliche Vorgehensweisen sind beobachtbar.
Eine Fokussierung auf die Zahlenwerte der Folgeglieder führt oft auf eine rekursive Regel, die zeigt wie man den folgenden Wert aus dem aktuellen bestimmen kann.
Die Entdeckung eines Musters (numerisch oder visuell) führt direkt auf eine explizite Formel.
In der Regel werden dabei verschiedene Muster entdeckt, die auf unterschiedliche Terme für die gleiche Folge führen.
Termumformungen können dann aus der Beobachtung heraus entstehen, dass unterschiedlich aussehende Terme die gleiche Folge repräsentieren, also *gleichwertig* sein müssen. So können Kalkülaspekte in einen Kontext gestellt werden, aus dem heraus sie entstehen können. Dieser Zugang führt also zu den *Termumformungen* und arbeitet mit der Variablen als *Unbestimmte*.

Zugang über Textaufgaben (word problems) und dem Aufstellen und Lösen von Gleichungen.
In diesen Zugängen werden aus Sachsituationen Beziehungen zwischen Größen mathematisch beschrieben, zuerst mit Bildern und Zahlen, später mit Variablen und Gleichungen. Die so entstandenen Gleichungen sollen dann gelöst werden. ‚*Algebraisch*‘ wird das Lösen dieser Gleichungen aber erst, wenn *relational* gedacht und mit der Unbekannten *analytisch* verfahren wird, nämlich wenn mit unbekannten (gesuchten) Größe in ihrem Gleichungsgefüge so umgegangen wird, als wäre sie bekannt. *Trial-and-Error*-Methoden und das *Rückwärtsrechnen* ordnen die Autoren weniger dem algebraischen Denken zu. Hier arbeitet man also mit der Variablen als *Unbekannter* und der Schwerpunkt der sich dabei entwickelnden Kalkülaspekte liegt auf den Äquivalenzumformungen.

Zugang über Modellieren. Darunter werden Ansätze zusammengefasst, in denen lebenswirkliche Kontexte algebraisch mathematisiert werden, aber auch umgekehrt algebraische Beschreibungen in lebenswirkliche Kontexte übersetzt werden. Je nach Kontext ergeben sich Terme, Gleichungen oder auch Funktionen. Ein wesentlicher Unterschied zu den *word problems* (Textaufgaben) wird darin gesehen, dass letztere oft didaktisch konstruiert werden und erstere (angeblich) nicht.

Zugang über Funktionen. Diese Ansätze betonen den Zusammenhang zwischen *unabhängigen* und *abhängigen Variablen*. Die unterschiedlichen Repräsentationen als Wertetabelle, Graph oder Funktionsgleichung werden hier intensiv genutzt. Oft wird mit Hilfe von Tabellenkalkulation, graphikfähigen Taschenrechnern oder speziell entworfenen Computerprogrammen dafür gesorgt, dass diese Repräsentationsebenen schnell und simultan zugänglich sind. Die algebraische Symbolsprache entwickelt sich hier aus dem Versuch, die in Wertetabelle und Graph sichtbaren Zusammenhänge zwischen den Größen (allgemein) zu beschreiben. Der algebraische Kalkül soll dann durch extensive Nutzung der unterschiedlichen Repräsentationen angebahnt werden, indem man etwa innerhalb der graphischen Repräsentation die Funktion $f(x) = 3 \cdot (3x + 2)$ als identisch mit der Funktion $g(x) = 9x + 6$ identifiziert, woraus algebraisch folgt, dass $3 \cdot (3x + 2) = 9x + 6$ ist (Kieran et al. 1993, Kieran & Sfard 1999).

Diese vier Zugangskategorien unterscheiden sich also u. a. auch darin, auf welche Variablenaspekte und welche damit verbundenen algebraischen Strukturen (Term, Gleichung, Funktion) sie jeweils fokussieren (Tabb. 6) . Wählt man einen der Zugänge, so ist es wichtig, sich im Vorhinein zu überlegen, inwiefern es von dort aus weitergehen kann, um auch Vorstellungen für die noch fehlenden Variablenkonzepte und algebraische Strukturen aufzubauen.

Zugang	***Variablenrolle***	***die dabei vornehmlich behandelte algebraische Struktur***
Generalisierung von Mustern	Unbestimmte	Term
Textaufgaben	Unbekannte	Gleichung
Modellieren	Unbekannte, Unbestimmte, ab- und unabhängige Variable	Gleichung, Term, Funktionsgleichung
Funktionen	unabhängige und abhängige Variable	Funktionsgleichung

Tabelle 6: *Die 4 Zugänge aus Bednarz et al. 1996 und die damit verbundenen Variablenaspekte und algebraischen Strukturen.*

Aus Erfahrung weiß ich, dass die größten Verwerfungen beim Einführen der Algebra mit dem Kalkülaufbau zusammenhängen, so dass ich bei jedweder Literaturdurchsicht mein besonderes Augenmerk darauf gerichtet habe. Auch wenn die 4 Perspektiven allesamt Kontexte liefern, aus denen Kalkülhandlungen motiviert werden können, wird in dem Tagungsband von Bednarz et al. kaum adressiert, *wie* genau sich daraus Kalkülhandlungen konstituieren können oder es verbleibt zumindest *im Ungefähren*.

IV.II Wege zum Termumformen

Im gleichen Jahr wie der Tagungsband von Bednarz erschien auch das immer noch als Standardwerk der deutschsprachigen Algebradidaktik geltende Buch „Didaktische Probleme der elementaren Algebra“ von Malle (1993). Nachdem hier exemplarisch das allgemeine Unbehagen mit den Ergebnissen des Algebraunterrichts herausgearbeitet wurde, werden vielfältige Schülerschwierigkeiten analysiert und Aufgaben zu deren Überwindung vorgeschlagen. Dieser Aufgabenkatalog ist wenig kontrolliert methodisch entwickelt und es ist schwer Aufgaben auszuwählen, die sich zu einer kumulativ wirksamen Abfolge in eine Einführung der Algebra integrieren lassen. Die Aufgaben sind eben Aufgaben zur Überwindung von wahrgenommen Schwierigkeiten und als solche lassen sie sich auch gut einsetzen (etwa in Rückblicken, Wiederholungen und als Reaktion auf beobachtete Fehleranhäufungen).
Was die Einführung des Kalküls angeht, ergeben sich für Malle Terumformungsregeln ***zwanglos*** *„*im Rahmen des Aufstellens und Interpretierens in bedeutungsvollen Situationen (Rechensituationen, geometrische Situationen, Sachsituationen)“ (Malle 1993, S. 239), wenn ein und derselbe Sachverhalt zwei unterschiedliche algebraische Terme hervorbringt. Terme, die die gleiche Situation beschreiben und daher für jede Einsetzung den gleichen Wert liefen müssen, ***können*** zu der Frage führen, „ob man nicht formal entscheiden kann, daß diese Terme gleichwertig sind. Dadurch kann ein Bedürfnis nach Termumformungsregeln geweckt werden.“ (Malle 1993, S.241). Er bezieht sich hier auf eine Idee von Wellstein (1978), der aufzeigt, wie aus Punktmusterfolgen verschiedenste gleichwertige Terme entspringen können, z. B. $4n - 4 + 2(n-2) - 1$, $3n + (n-3) \cdot 3$ und $6n - 9$. ***Wie genau*** jetzt aus einem solchen Fundus gleichwertiger Terme ***zwanglos*** das Termumformen entwickelt werden kann, darauf geht er nicht ein. Stattdessen folgt eine gestufte Aufzählung von hintereinander zu beschreitenden Lernschritten (Wortlaut und Beispiele wortwörtlich übernommen aus Malle 1993, S.247 ff.):

1. Zusammenfassen gleichartiger Ausdrücke (z. B. $2 \cdot x + 3 \cdot x = 5 \cdot x$)
2. Vertauschen und Zusammenfassen in „Summen“ (z. B. $2 \cdot x - y + 4 \cdot x + 5 \cdot y = 6 \cdot x - 4 \cdot y$)
3. Auflösen von Klammern (z. B. $3 \cdot x - (2 \cdot x - y) = x + y$)
4. Vertauschen und Zusammenfassen von Produkten (z. B. $2 \cdot a \cdot 5 \cdot a \cdot b = 10a^2b$)
5. Ausmultiplizieren von Klammern (z. B. $4 \cdot (3x + 7y - z) = 12x + 28y - 4z$)
6. Kombination von Klammerausmultiplizieren und Klammerauflösen (z. B. $4 \cdot (3x - 1) - 6 \cdot (x-4) = 6x + 20$)
7. Multiplizieren von Klammern (z. B. $(x+2) \cdot (y+5) = xy + 5x + 2y + 10$)
8. Umformen von Bruchtermen (z. B. $x - \frac{x-1}{5} = \frac{4x+1}{5}$)

Ähnliches gilt auch für die international wirkmächtige Zusammenstellung von Mason, Graham & Johnston-Wilder (2005), die sehr schöne Aufgaben und viele bedeutungsvolle Kontexte enthält, jedoch weitgehend auf didaktische Reflexionen verzichtet. Die Idee, das Termumformen über offensichtlich *gleichwertige* Terme zu motivieren*,* die aus vielfältigen Situationen heraus entstehen, taucht auch hier in vielen Aufgabenbeispielen auf. *Wie* aus einer solchen Motivation heraus sich das Termumformen *genau* entwickeln kann wird hier gar nicht adressiert.

Marc Sauerwein (2020) baut in seiner Dissertation die Idee von Wellstein (1978) zu einer Lernumgebung mit figurierten Zahlen aus und untersucht deren Wirksamkeit mit Schülern (in einzelnen Schülergruppen wie auch im Klassenunterricht). Einer seiner Foki ist auch der Weg zum Termumformen. In seiner Studie entwickeln die Schüler gleichwertige Terme zu figurierten Zahlen (z. B. die Terme $2x-1,\ x+(x-1)$ und $x^2-(x-1)^2$ für die figurierte Folge der ungeraden Zahlen). Die Frage, ob die Terme „gleich" sind, werden von den meisten Schülern auf der Beschreibungsebene bejaht. Zudem beobachtet Sauerwein, dass es vielen Schülern als Beweis der „Gleichheit" schon genügt, wenn eine Einsetzung gleiche Werte liefert. Der Übergang zum Termumformen ergibt sich in seinen Durchführungszyklen kaum, und wenn überhaupt, *nur in Ansätzen*.

Eine Gruppe um Hefendehl-Hebeker hat versucht, kontrolliert methodisch entwickelte Zugänge zur Algebra zu entwerfen. Zu nennen sind hier die Versuche, substantielle Aufgabenformate (etwa über geometrisch repräsentierte Folgen, systematische Variationen oder konkrete Problemsituationen) zu entwickeln, die die Einsicht in Zahlbeziehungen fundieren (Berlin et al. 2009, Hefendehl 2003) und *„reichhaltige algebraische Denkhaltungen im Lernprozess sichtbar machen"* sollen (Fischer et al. 2010). Berlin (2010) schafft es im Zusammenhang mit ihrer bereits im vorherigen Abschnitt angesprochenen Dissertation, die Generalisierungsperspektive zu einer in sich schlüssigen und abgeschlossenen gegenständlich repräsentierten Lernumgebung für Fünftklässler auszuarbeiten und identifiziert dabei die bereits angesprochenen 4 Stadien der algebraischen Denkentwicklung. In ihrer Studie wird exemplarisch evident, *wie schwer* vielen Schülern der Übergang vom symbolischen Beschreiben zum symbolischen Manipulieren (zum *Kalkül* also) fällt.
Dagmar Melzig beschäftigt sich mit *„Ursprünglichen Erfahrungen zum Variablenbegriff"* (Melzig 2013) von Siebtklässlern in einem Lehr-Lernsetting und untersucht dabei welche lernförderlichen Momente dabei gegenständliches Material (insbesondere auch Streichholzschachteln als Stellvertreter für Variablen[34]) und Schülerinteraktionen entfalten können.

Eine Gruppe um Susanne Prediger appelliert im Sinne des von Prediger entwickelten didaktischen Konzepts *„Inhaltliches Denken vor Kalkül"* (Prediger 2009) sehr dezidiert dafür, Kalkkülhandlungen aus inhaltstragenden Kontexten heraus aufzubauen. Es wird auch methodisch-kontrolliert eine Lernumgebung entwickelt, die aus einem sachbezogenen Lernkontext heraus bis hin zur Termumformung führt (Prediger 2009, Fischer, Hefendehl & Prediger 2010, Zwetzschler & Prediger 2013, Zwetzschler 2015) und seinen Niederschlag im Schulbuch „Mathewerkstatt" findet. In der Lernumgebung *„Preise beim Fensterbau – Flächen berechnen und Terme vergleichen"* (Barzel et al. 2012) werden Umfang und Flächeninhalt für verschiedene Fenster geometrisch, numerisch und algebraisch repräsentiert. Unterschiedliche Flächenzerlegungen (inhaltliche Beschreibungen) führen dabei auf unterschiedliche algebraische Terme. Dass diese Terme tatsächlich für alle Fenstermaße dieselben Werte liefern, also *gleichwertig* sind, kann man durch die offensichtliche Zerlegungsgleichheit der entsprechenden Flächenfigur erkennen, durch Testeinsetzungen überprüfen und schließlich durch algebraisches Umformen nachweisen. Dementsprechend sprechen Prediger und andere (Prediger 2009, Barzel et al. 2012, Zwetzschler 2015) von *Beschreibungs-*, *Einsetzungs-* und *Umformungsgleichheit*.
Als zentrales Mittel zum Aufbau eines Kalküls aus inhaltlichen Vorstellungen heraus sehen sie dabei, wie Malle und Mason und im Konsens mit der internationalen Gemeinschaft (Kieran 1981; Knuth et al. 2006; McNeil, Grandau, Knuth, Alibali, Stephens, Hattikudur & Krill 2006; Rittle-Johnson et al. 2011, Malle1993, Pimm 1995, Kieran & Sfard 1999 ; Prediger 2009; Pilet 2012, 2013, u. a.) , das Konzept der *Gleichwertigkeit von Termen*.

[34] Die Streichholzschachtel (Box) ist in den Realisierungen „Knack die Box" bzw. „Knack die Boxen" als materialbasierter Zugang zu linearen Gleichungen und linearen Gleichungssystem aktuell sehr prominent (Affolter et al. 2015).

*„Termumformungen nach dem Prinzip „Inhaltliches Denken vor Kalkül" zu unterrichten, erfordert einen Perspektivwechsel vom Fokus auf die Tätigkeit des Umformens auf Kalkülebene hin zum **dahinterliegenden strukturellen Konzept, der Gleichwertigkeit**" (Prediger 2009, S.15).*

Was genau hier mit „*dahinterliegenden strukturellen Konzept der Gleichwertigkeit*" gemeint ist, verstehe ich nicht so ganz. Inwiefern ist die *Gleichwertigkeit* ein strukturelles Konzept? Welche Struktur *genau* verbirgt sich im Gleichwertigkeitskonzept? Ich stimme zu, dass das Konzept der Gleichwertigkeit von Termen ein zentrales, dem Termumformen Bedeutung gebendes, Konzept ist. Inwiefern ich persönlich das Konzept der Gleichwertigkeit als zentral für das Termumformen sehe, versuche ich jetzt zu klären.

Zur zentralen Rolle des Gleichwertigkeitskonzepts für das Termumformen
Zwei Terme sind dann und nur dann *äquivalent*, wenn sie für jede Zahleinsetzung die gleichen Werte liefern. So wird die Gleichwertigkeit überall definiert. Oft wird das Termumformen als einzig mathematisch schlüssige Möglichkeit eines rechnerischen Nachweises der *Gleichwertigkeit* zweier Terme angesehen (z. B. Pimm 1995, Pilet 2012, 2013 , Braun et al.2019 c, Lergenmüller & Schmidt 2011). Auch wenn sich aus Idee heraus erste Termumformungen motivieren lassen („sich ein Bedürfnis danach zwanglos ergibt" (Malle 1993, S.239)), halte ich diesen Aspekt, in dem das Termumformen zuvörderst als Nachweismöglichkeit der Gleichwertigkeit gesehen wird, dennoch nicht für den zentralen.
Betrachten wir einmal ein paar praktische Beispiele, bei denen das Termumformen seine Wirksamkeit entfaltet:

$$x^2 + 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x+2) = 0$$

$$\mathrm{n} + (\mathrm{n}+1) + (\mathrm{n}+2) = \cdots = 3 \cdot (\mathrm{n}+1)$$

$$(2n+1)^2 - 1 = 4n^2 + 4n = 4n \cdot (n+1) = 8 \cdot n \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\frac{(x_o^2 + h) - x_o^2}{h} = \frac{x_o^2 + 2x_0 h + h^2 - x_0^2}{h} = \frac{2x_o h + h^2}{h} = 2x_o + h$$

$$\int \sqrt{x^4 - 2x^2}\; dx = \int x \cdot \sqrt{x^2 - 2}\; dx = \frac{1}{2} \cdot \int 2x \cdot \sqrt{x^2 - 2}\; dx$$
$$= \frac{1}{2} \int f'(x) \cdot f(x)\, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2-2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$$

In allen Besipielen geht es eben nicht zentral um den rechnerischen Nachweis der *Gleichwertigkeit*, sondern um ein *regelgeleitetes* und *bewusst zielgerichtetes* Umformen von einer Termstruktur zur anderen. Die Zielstruktur kann dann anders gelesen oder besser weiterverarbeitet werden. In diesem Sinne besteht die Zielperspektive des Lernens von Termumformungen im Verfügbarmachen von Methoden Termen eine andere Gestalt (Struktur) zu geben. Das *Bewusstsein* dafür, dass bei solchen strukturverändernden Umformungen der umgestaltete Term aber *gleichwertig* zum Ausgangsterm ist, ist ganz wesentlich. Nach jeder Umformungskette beschreibt der umgestaltete Term die gleichen Zahlen, die gleiche Situation wie der Ausgangsterm, der jetzt aber ganz neu interpretiert oder einfacher weiterverarbeitet werden kann.

Arcavi nennt eine Beispielaufgabe:

> „Wähle eine ungerade Zahl, quadriere sie und ziehe 1 ab. Was kann man über die Zahlen sagen, die herauskommen?" (Arcavi 1994, S. 28 zitiert nach Meyer 2015)

Gesetzt den Fall, ich probiere einige ungerade Zahlen aus und erkenne, dass alle Ergebnisse durch 4 (8) teilbar sind. Wie kann ich nachweisen, ob das immer so ist? Ich beginne zu $(2n+1)^2-1$ zu algebraisieren und verwende im Wissen, dass Teilbarkeit sich in Faktorisierungen offenbart, den CAS-Befehl „factorize()" o.ä., der mir den Term $4n\cdot(n+1)$ liefert. Ganz zentral ist jetzt mein Wissen darum, dass die faktorisierenden Umformungen einen *gleichwertigen* Term erzeugt haben, der dieselben Zahlen *beschreibt*. Dem umgeformten Term kann ich jetzt direkt ansehen, dass alle damit beschriebenen Zahlen durch 4 (8) teilbar sind[35].

Dies ist ein schönes Beispiel, wie der automatisierte Kalkül des Termumformens Bedeutung zu Tage fördert, sofern ich nur weiß, dass jede korrekte Termumformung einen *gleichwertigen* Term hervorbringt.

Das Beispiel zeigt auch, dass Terme oft nur Zahlen und sonst nichts beschreiben. Stellt man einen Term aber aus einer Anwendungssituation (etwa eine Flächeninhaltsformel) auf, so ist auch hier das Wissen um die *situative Gleichwertigkeit* (Prediger spricht dann von *Beschreibungsgleichheit*) ganz zentral: Ein jeder der umgeformten Terme beschreibt nach wie vor dieselbe Situation. Jedwede Information, die ich diesen umgeformten Termen entnehmen kann, ist auch eine Information über den Ausgangsterm und damit auch über die durch diese *gleichwertigen* Terme beschriebene Situation.

Es ist auch ganz interessant für Arcavis Beispiel eine Punktmusterpräsentation zu konstruieren, um eine weitere (noch konkretere?) Inhaltsebene zu realisieren. In Abb. 9 wurde dies für $n=3$ getan.

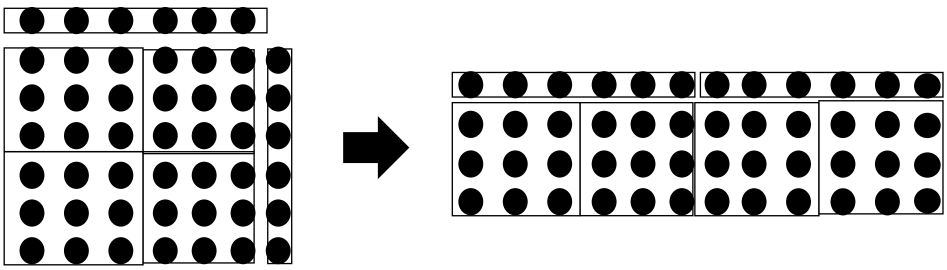


Abb. 9: *Konkret ikonische Repräsentation der Identität* $(2n+1)^2-1=4n\cdot(n+1)$. *Die Seiten wurden absichtlich nicht mit* $2n+1, n, 2n, usw.$ *beschriftet. Wer dies tut verwendet schon die algebraische Symbolsprache und kann auch gleich umformen.*

Diese Repräsentation hat m. E. nun nur wenig Erklärkraft. Es ist hier eher so, dass man sich aus dem Wissen um $(2n+1)^2-1=4n\cdot(n+1)$ die rechte Figur aus der linken konstruiert[36]. Man kann hier die Teilbarkeit durch 4 (8) auch konkret repräsentiert erkennen, aber die

[35] Dass in $4n(n+1)$ auch noch eine Dreieckszahl als Faktor „versteckt" ist, kann mir wohl kein technisches Gerät mehr mitteilen. Da muss ich schon selber umformen: $4n(n+1)=8n\cdot\frac{n(n+1)}{2}$.

[36] Ein sehr schönes kleines Buch, indem sich vielerlei genussvolle Beispiele visueller Darstellungen von algebraischen Beweisen und Identitäten finden ist *„Proof without Words, Exercises in visual Thinking"* (Nelssen 1993).

Erklärkraft dieser konkreten Umsetzung der Zahlbeziehung ist m. E. verschwindend gering. Wie man eine solche Punktumschichtung ganz ohne algebraische Notation und Kalkül findet und dabei generisch einen Nachweis der Teilbarkeit erkennt, ist mir schleierhaft. Geschweige denn, wie eine solche Umschichtung in der Lage ist, die Kalkülhandlungen zwischen $(2n+1)^2 - 1$ und $4n \cdot (n+1)$ verständlich werden zu lassen.
Inwiefern und in welchem Ausmaße solch konkrete Repräsentationen von Termumformungen verständnisfördernd sind, lasse ich hier offen. Wir kommen später noch einmal darauf zurück.

Kurz: Das Wissen, dass *umformungsgleiche Terme gleichwertig (*also auch *beschreibungs-* und *einsetzungsgleich) sind*, halte ich für *zentraler* als das Wissen, dass *gleichwertige Terme umformungsgleich sind*. Oder mathematischer ausgedrückt: Die Implikation „Gleichwertigkeit ⇒ Umformungsgleichheit" ist m. E. weniger zentral als die Implikation „Umformungsgleichheit ⇒ Gleichwertigkeit".

Der Nachweis der *Gleichwertigkeit* kann zwar das Termumformen motivieren, das Termumformen wird aber erst dann zu einem mentalen Werkzeug, wenn man damit bewusst und zielgerichtet Termstrukturen wechselt[37]. *Zentral* ist dabei jedenfalls das situativ abrufbare Wissen darum, dass korrekt *umgeformte Terme gleichwertig sind*, also für jede Einsetzung gleiche Werte liefern und die gleichen Zahlen oder die gleiche Situation beschreiben.

Das Konzept der Gleichwertigkeit wird von Prediger weiter in die drei Ebenen *Beschreibungs-*, *Einsetzungs-* und *Umformungsgleichheit* ausdifferenziert. Die algebraische Beschreibung ein und derselben Situation kann auf unterschiedliche algebraische Formeln führen, die eben diese Situation *beschreiben,* also *beschreibungsgleich* sind.
Egal welche Werte man in die verschiedenen Formeln einsetzt, man erhält stets das gleiche Ergebnis: Die Terme sind *einsetzungsgleich*.
Überträgt man jetzt die arithmetischen Konventionen auf Variablen und Terme, so kann man die unterschiedlichen *beschreibungs-* und *einsetzungsgleichen* Terme ineinander *umformen*, sie sind also *umformungsgleich* (Prediger 2009, Zwetzschler 2015, Prediger et al. 2013, Melzig 2013, Affolter et al. 2015).
Ein möglicher Weg vom Inhalt zum Kalkül besteht nun nach Prediger darin, etappenweise aus der Beschreibungs- und Einsetzungsgleichheit (dem Inhalt) die Umformungsgleichheit (das Kalkül) zu entwickeln (siehe auch Kasten 1 und 2 in Abbschnitt VI.I). Prediger zitiert in ihrem Artikel *„Inhaltliches Denken vor Kalkül"* (2009) eine für diese Vorgehensweise paradigmatische Aufgabe aus dem Lehrbuch *Neue Wege 7 (Abb. 10,* Lergenmüller & Schmidt 2011*).*

Zwetzschler (2015) arbeitet diesen von Prediger präskriptiv ausgearbeiteten Weg vom Inhalt zum Kalkül weiter aus, spart dabei die Umformungsgleichheit *jedoch weitgehend aus*:

> „Der Lernweg geht von inhaltlichen Vorstellungen aus und überführt diese in kalkülhaftes, aber inhaltlich verstandenes Umformen. Für die Arbeit sind dabei die ersten beiden Schritte des Lernwegs, die erste Entwicklung der Konzepte zur ‚Gleichwertigkeit

---

Andreas Büchter äußerte sich einmal über die Prominenz und Beliebtheit dieses Büchleins in fachdidaktischen Kreisen wie folgt: „Es kommt mir so vor, wie wenn Weinkenner untereinander genussvoll über Bukett und Finesse teurer Weine schwelgen." Inwiefern die schönen Beispiele dort, ohne eine vorherige oder parallel stattfindende algebraische Sichtweise, über eine reine Visualisierung bereits anderweitig nachgewiesener Identitäten hinausgehen und auch eine eigenständige visuelle Erklärkraft entfalten, mag der interessierte Leser dieses genussvollen Büchleins selbst entscheiden.

[37] Dieses Strukturwechseln wird dabei umso bedeutungsvoller, je mehr *Struktursinn* (siehe Kapitel II.; Rüede 2012, uva) man aufgebaut hat.

von Termen als Einsetzungsgleichheit' und zur ‚Gleichwertigkeit von Termen als Beschreibungsgleichheit', besonders relevant, denn das Forschungsinteresse der Arbeit fokussiert auf die Entwicklung dieser inhaltlichen Vorstellungen "(Zwetzschler 2015, S.55).

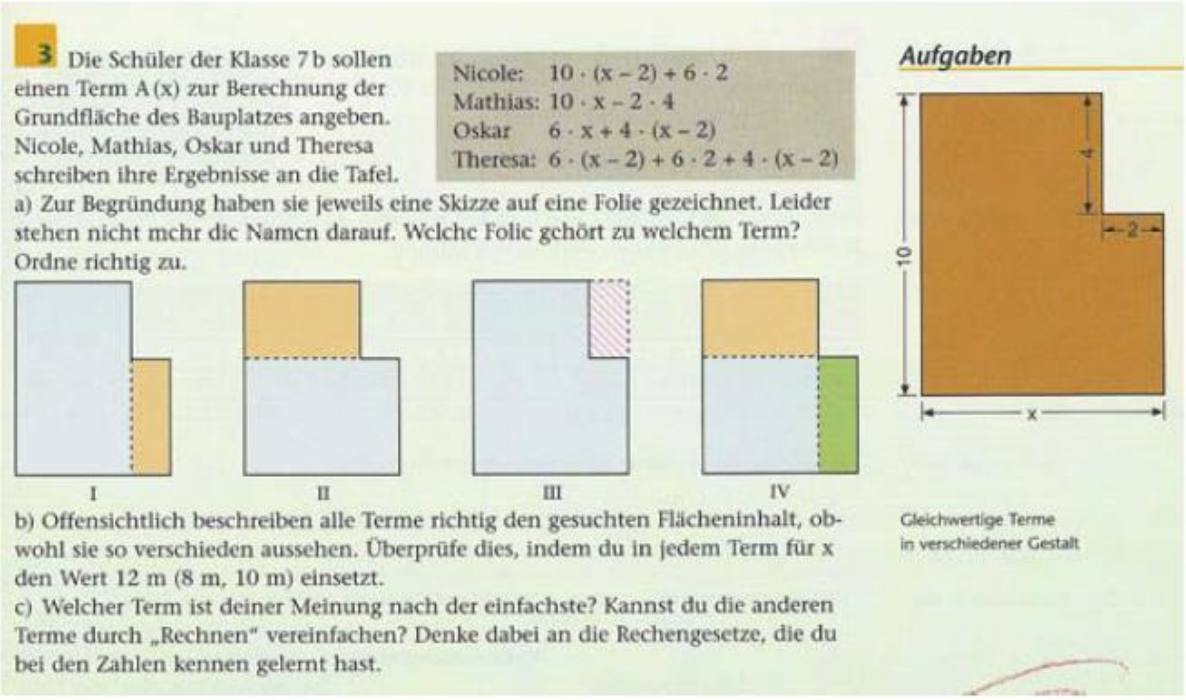


Abb. 10: *Lernweg von der Gleichwertigkeit zur Termumformung (aus Neue Wege 7, Lergenmüller et al. 2011)*

Bezüglich der Frage, wie der Anschluss an die Umformungsgleichheit gelingen kann, nennt Zwetzschler das didaktische Prinzip der *Fortschreitenden Schematisierung.* Auch Prediger sieht in der Anwendung dieses Prinzips die Möglichkeit eines Übergangs zum Kalkül:

> „Entscheidend ist, Vertrautheit mit den inhaltlichen Deutungen der Gleichwertigkeit aufzubauen, bevor der Übergang zum Kalkül begonnen wird. Dieser erfolgt idealerweise nach dem Prinzip der fortschreitenden Schematisierung (Treffers 1983), indem Lernende ihre inhaltlichen Denkwege bei der Suche gleichwertiger Terme sukzessive schematisieren und so entlang geeigneter Beispiele selbständig zu Umformungsregeln kommen.*"* (Prediger 2009, S. 15).

Nun ist das Prinzip der *Fortschreitenden Schematisierung* in der Fachdidaktik sehr prominent und es gibt überaus überzeugende und lernwirksame Anwendungen desselben in unterschiedlichen Bereichen der Mathematikdidaktik (Treffers 1983, Winter 1989, Glade 2016, uva), so dass ich sehr beeindruckt war und mich gefragt habe, *ob* und *wie genau* dieses Prinzip beim Übergang vom Inhalt zum algebraischen Kalkül seine Wirksamkeit entfalten könnte.
Treffers (1983) stellt komplexe Divisionsaufgaben, greift die individuellen und *präformalen* Aufgabenbearbeitungen von Grundschülern auf und zeigt, wie daraus durch behutsames Ordnen, Schematisieren und Formalisieren der schriftliche Divisions*algorithmus* entwickelt werden kann (das gleiche Beispiel bearbeitet auch Winter 1989).
Glade (2016) greift die Grundvorstellung „Anteil vom Anteil" der Multiplikation zweier Bruchzahlen auf und zeigt, wie konkrete Repräsentationen – insbesondere Visualisierungen – dieser Grundvorstellung schrittweise immer weiter schematisiert und formalisiert werden können,

um den symbolischen Multiplikationsalgorithmus für Brüche zu entwickeln. Nach Glade (2016) sind für einen gelingenden Prozess der fortschreitenden Schematisierung, die drei Lernzielstufen *anwendbarer*, *interpretierbarer* und *begründbarer Kalkül* zentral. Für das Beispiel der Multiplikation von Brüchen identifiziert er insbesondere in Bezug auf die Lernzielstufe *begründbarer Kalkül* zwei Gelingensbedingungen. Es darf „keine ‚sprunghaften Entwicklungen', die eine adäquate Verinnerlichung verhindern, so dass letztlich inadäquate Vorstellungen schematisiert werden (ebd. 2003, S.65)", geben und „es müssen die relevanten Elemente des Begründungswissens vorhanden sein, sonst kann nicht begründet werden (notwendige Bedingung)" (ebd. 2003, S.265). Beide Punkte sind beim Aufbau des Kalküls aus inhaltlichen Gleichwertigkeitsüberlegungen und dem arithmetischen Wissen heraus meiner Meinung nach, wenn überhaupt, dann nur sehr bedingt erfüllt. Viele Teile der Arbeit werden genau darauf nochmal zurückkommen.
Eine grundlegende Gelingensbedingung für das Anwenden des Prinzips der *Fortschreitenden Schematisierung* ist es m. E., dass die zu f*ormalisierenden* Schritte in den *präformalen* bzw. *weniger formalen* vorangegangenen Bearbeitungen bereits im Wesentlichen angelegt sind[38]. Nun besteht ja, wie schon öfters erwähnt, der Schritt zum symbolischen Manipulieren darin, die arithmetischen Rechenregeln auf das Rechnen mit Buchstaben zu übertragen und eben dies ist im vorherigen symbolischen Beschreiben nicht *per se* angelegt. Zudem wird diese Arbeit zeigen, dass das formale Rechnen mit Variablen eben nicht *per se* im „präformalen" Rechnen mit Zahlen angelegt ist. Tatsächlich könnte das Konzept der *Einsetzungsgleichheit* hier eine Brücke schlagen, da darüber ja die Referenz zu den Zahlen in den Fokus gerückt wird. Dazu später sehr viel mehr.

Alle hier aufgeführten Studien sehen in aus inhaltlichen Kontexten heraus entspringenden *gleichwertigen* Termen die Möglichkeit eines Wegs zum Termumformen. Dieser Ansatz ist m. E. aktuell auch einer international prominentesteten Wege der Fachdidaktik zur „Einführung in die Algebra", die heutzutage in der Sekundarstufe I im Doppeljahrgang 7/8 angesiedelt ist. Diese Einführung enthält aber auch noch die Gleichungslehre, die die meisten gymnasialen Schulbücher in Klasse 7 direkt nach, manchmal auch direkt vor dem Termumformen, behandeln.

IV.2 Wege in die Gleichungslehre

Will man die Gleichungslehre aus bedeutungstragenden Inhalten heraus aufbauen, so kann man Gleichungen z. B. aus Sachkontexten heraus aufstellen. Dies ist sicherlich einer der aktuell prominentesten Zugänge (siehe z. B. Nydegger 2018). Aber auch die funktionale Perspektive ist denkbar (Schnittpunkte zweier Geraden, z. B. Barzel et al. 2021). Zahlenrätsel eignen sich dazu auch gut, die nach Weidig (1994) bis in die 70er Jahre des letzten Jahrhunderts der übliche Einstieg in die Gleichungslehre waren.

Schüler haben wohl implizit erste Gleichungen schon in der Grundschule gelöst($\text{z. B. } 2 + \blacksquare = 7$).

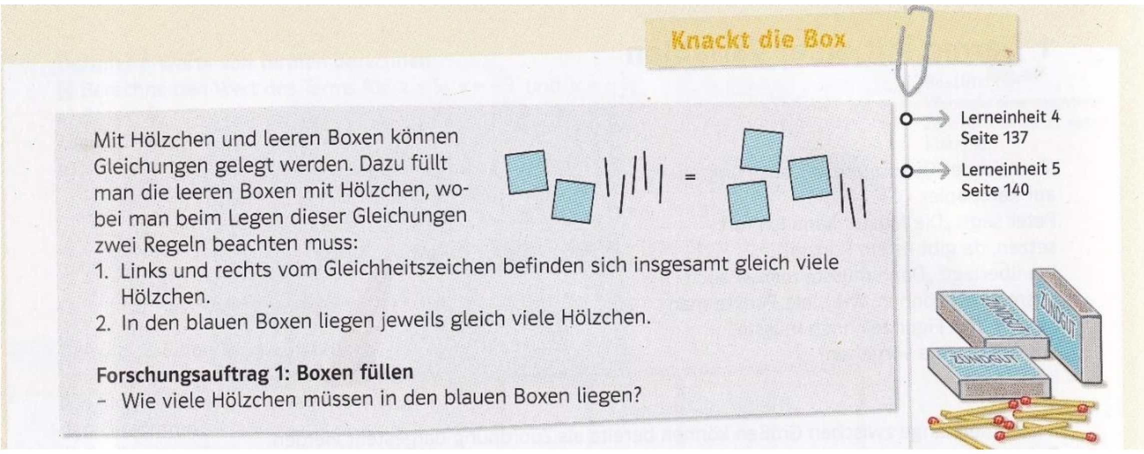
[38] Hat man eine gewisse algebraische Kalkülexpertise, so lässt sich das Prinzip der Fortschreitenden Schematisierung m. E. durchaus problemlos auch auf die Algebra anwenden. Man denke z. B. an die Konstruktion von Algorithmen, z. B. den Gaußalgorithmus. So lässt sich aus dem Additionsverfahren problemlos der Gaußalgorithmus entwickeln, da ja dieser lediglich eine weitere Formalisierungsstufe darstellt. Oder man abstrahiert von von Einzellösungen (z. B. von quadratischen Gleichungen) und entwickelt daraus durch weitere Formalisierung, indem man Zahlen durch Parameter ersetzt, einen Lösungsalgorithmus für die übergeordnete Problemklasse (z. B. die p/q-Formel).

Kieran (1992) fasst die verschiedenen Methoden, die Schüler beim Lösen von Gleichungen verwenden, wie folgt zusammen:

(a) use of number facts
(b) use of counting techniques
(c) cover-up
(d) undoing (or working backwards)
(e) trial-and-error substitution
(f) transposing (that is, Change Side – Change Sign)
(g) performing the same operation on both sides

Die Methoden (a)-(c) und (e) bezeichnet Kieran als „*guess & test*“-Methoden. Das *Rückwärtsrechnen* (d) verwenden Schüler gerne auch noch nachdem Äqivalenzumformungen eingeführt worden sind, es funktioniert aber nur bei Gleichungen der Form $ax + b = c$. Kieran (1992) betont ausdrücklich, dass Schüler, die in der Anfangsphase die *trial-and-error*-Methode (e) benutzten, eine bessere Vorstellung der Balance zwischen linker und rechter Seite besitzen als Schüler, die diese Methode nicht verwendeten. Erstere erfahren ja am eigenen Leib, dass einmal die linke, ein andermal die rechte Seite größer ist und sich Gleichheit erst bei einer Zahl, der Lösung eben, einstellt.
Breidenbach (1979) weist schon 1979 im Lehrerband eines Schulbuchs darauf hin, dass das Gleichunglösen sich keineswegs im Äquivalenzumformen erschöpft: *„*Außerdem will es mir mehr als komisch scheinen, daß wir plötzlich übergangslos so tun sollen, als könne der Schüler Gleichungen wie $\mathrm{x} + 2 = 6$ oder $4 \cdot \mathrm{x} = 12$ nicht lösen, ehe er von Äquivalenzumformungen gehört hat*“* (ebd. 1979, S. 55). Für Vollrath (1992) zieht sich das Gleichunglösen durch die gesamte Sekundarstufe und sollte schon ab Klasse 5 beginnen. Zuerst durch Probieren, Überlegen und Rückwärtsrechen, um dann später zu Äquivalenzumformungen fortzuschreiten. Schüler können, so Vollrath, Gleichungen schnell und sicher lösen, wenn sie über eine algorithmische Lösungstrategie verfügen. Da Schüler seiner Ansicht nach eine Neigung zur Algorithmisierung haben, sollten Sie Algorithmen – wenn möglich – selbst entwickeln.

Durchgehend werden Äquivalenzumformungen durch Visualisierungen und Modelle veranschaulicht. Obwohl andere Modelle vorgeschlagen und untersucht wurden (siehe z. B. Filloy & Rojano 1989 und Lörcher 1995), dominiert, trotz seiner Beschränkungen auf positive Zahlen und Koeffizienten, wohl immer noch das *Waagemodell*. In den letzten Jahren wird das Modell „*Knack die Box*“ (Abb. 11), dass über das schweizer *mathbuch.ch* (Affolter et al. 2015) im deutschsprachigen Raum bekannt wurde, immer prominenter. Dort fungieren Boxen (*schweizerisch* für Streichholzschachteln) als Platzhalter für unbekannte Zahlen und Streichhölzer repräsentieren Zahlen. Dieses Modell lässt sich auch auf unbestimmte Zahlen (Affolter et. al 2012, S. 78 ff. , Krauth & Warmeling 2018, Gerstner 2018b) und auf lineare Gleichungssysteme (Affolter et al. 2012, Gerstner 2018a) erweitern. Thomas Janßen (2016) zeigt in seiner Dissertation auf, wie das Modell „Knack die Box“ genutzt werden kann, damit Schüler sich handlungsorientiert und weitgehend selbsttätig zentrale Aspekte der Methode Äquivalenzumformungen erarbeiten.



Knackt die Box

Lerneinheit 4 Seite 137

Lerneinheit 5 Seite 140

Mit Hölzchen und leeren Boxen können Gleichungen gelegt werden. Dazu füllt man die leeren Boxen mit Hölzchen, wobei man beim Legen dieser Gleichungen zwei Regeln beachten muss:

1. Links und rechts vom Gleichheitszeichen befinden sich insgesamt gleich viele Hölzchen.
2. In den blauen Boxen liegen jeweils gleich viele Hölzchen.

Forschungsauftrag 1: Boxen füllen

– Wie viele Hölzchen müssen in den blauen Boxen liegen?

Abb. 11: *Eine Schulbuchumsetzung von „Knack die Box" (entnommen aus Lambacher-Schweizer, Braun et al. 2019c)*

Zwei fundamentale Eigenschaften von algebraischen Gleichungen sind in die Spielregeln von *Knack-die-Box* mit eingebaut. So wie links und rechts des Gleichheitszeichens bei einer Gleichung immer die *gleiche Zahl* steht, so befinden sich links und rechts des Gleichheitszeichens bei Knack-die-Box immer *gleichviele Hölzchen* (Regel 1 in Abb. 11). Und so wie *jede Variable gleichen Namens* in einer algebraischen Gleichung immer für die *gleiche Zahl* steht, so befindet sich in *jeder Box gleicher Farbe gleich viele Hölzchen* (Regel 2 in Abb. 11).

*

In aktuell diskutierten Zugängen zur Algebra dominieren Wege in die Termumformung. Die meisten sehen dabei in der ein oder anderen Weise das Konzept der *Gleichwertigkeit* als zentral an. Eine Motivation zum Termumformen kann entstehen, wenn aus Sachsituationen, geometrischen Kontexten oder Generalisierungstätigkeiten verschiedene gleichwertige Terme für ein und dieselbe Situation entspringen. Die Zugänge, die dabei die Generalsierungsperspektive der Algebra betonen, liefern, über ihre, die Termumformungen motivierende Funktion hinaus, Möglichkeiten zu reichhaltigen mathematischen Denkhandlungen. Allen fachdidaktischen Untersuchungen zur praktischen Umsetzung dieser Generalsierungsperspektive ist gemein, dass das ‚*wie genau*?' des expliziten Übergangs in den Kalkül m. E. noch nicht vollständig ausgearbeitet ist[39].

Für das Termumformen lassen sich zwei Aspekte verorten:

(1) (semantisch) Jeder Termumformungschritt kann verstanden werden als eine Überführung in einen gleichwertigen Term, der durch die Rechengesetze für Zahlen vermittelt wird. Eine Rechtfertigung und unmittelbare Bedeutung liefert also die Referenz zu den Zahlen.

[39] Blickt man übrigens in die aktuell landläufig verbreitenden Schulbücher, so wird das Termumformen i.d.R. sehr schnell und ohne große Umwege anhand von Erklärtexten eingeführt, indem darauf hingewiesen wird, dass Variablen ja für Zahlen stehen und deswegen die Rechengesetze für Zahlen darauf anwendbar sind. „Da für die Variablen Zahlen eingesetzt werden können, kann man die Terme nach den Rechenregeln für rationale Zahlen umformen" (Blank et al. 2017, Lambacher-Schweizer 7, S. 116) oder „Mit Termen können wir nach den gleichen Gesetzen rechnen wie mit Zahlen … Durch Anwenden dieser Rechengesetze können wir Terme in gleichwertige Terme umformen." (Lergenmüller & Schmidt 2001, Neue Wege 7, S. 178).

(2) (syntaktisch) Jeder Termumformungschritt ergibt sich aus der Anwendung axiomatisch gesetzer Regeln mit bedeutungslosen Zeichen. Die Rechtfertigung liefern diese Regeln.

Der syntaktische Aspekt scheint einem vielleicht alleinstehend als zu abstrakt-strukturalgebraisch für den Schulgebrauch vorzukommen. Doch je mehr sich der Kalkülaspekt herausbildet, desto mehr verlagert sich das Termumformen auch in eine rein syntaktische Manipulation der Zeichen (den *Kalkülaspekt*) [40].

Wesentlich weniger Untiefen enthält die Gleichungslehre (und das wird sich auch in dieser Studie bewahrheiten). Auch hier lassen sich wieder zwei Aspekte des Äquivalenzumformens verorten. Ein semantisch hinterlegtes Operieren mit den gleichen Zahlen auf beiden Seiten einer Gleichung oder ein syntaktisches Operieren nach festgelegten und eingeübten Regeln. Das ‚*wie genau*?' liegt bei der Gleichungslehre in vielen Studien ausgebreitet vor. Das mag auch daran liegen, dass das Konzept der *Unbekannten* mitsamt seinen damit verbundenen Tätigkeiten viel einfacher zu fassen ist als das Konzept der *Unbestimmten*. Es ist aber gut, dass in einer Einführung beide Konzepte ihren Raum haben, denn die Fähigkeit zum Aspektwechsel, dass ‚x', die Variable, unterschiedlich zu denken, ist ja konstituierend für eine Expertise der Algebra. Es wird auch darauf ankommen die Konzeptpaare *Unbekannte/ Gleichung* und *Unbestimmte/Term* klar voneinander abzugrenzen. Zu oft beobachtet man nämlich Schüler, die diese beiden Konzepte durcheinanderbringen.

*

Wir beenden hier die Darstellung der für die Entwicklungsforschung dieser Dissertation relevanter fachdidaktischer Theoriebausteine und schreiten allmählich zur praktischen Umsetzung des Forschungsanliegens fort. Da hierbei auch die individuelle Konzeptentwicklung in den Fokus gerückt, sich ganz bewusst in den Klassenunterricht begeben und von einer dynamischen Entwicklung ausgegangen wird, bekommen auch allgemeinere methodisch-didaktische Modelle und insbesondere Lerntheorien einen hohen Stellenwert.

[40] Auch wenn dieser „syntaktische" Ansatz heute kaum mehr und auch in dieser Arbeit nicht weiter verfolgt wird, würde ich persönlich ihn doch nicht endgültig verteufeln wollen. Auch über das Termumformen als „Spiel mit gesetzen Regeln" kann man nachdenken. Wir alle spielen ja gerne Spiele. Und in denselben werden mitunter eine Vielzahl von „Spielregeln" ‚willkürlich' gesetzt, mit denen wir dann gerne zielführend agieren. Wird der Umgang mit diesen Regeln von uns als (zu) abstrakt wahrgenommen? Und die Regeln des algebraischen Kalküls sind noch nicht einmal willkürlich, sondern sind eben Regeln, die für Zahlen gelten. Und waren es nicht auch diese „Rechenregeln der Zahlen", mit der die Mathematiker der Renaissance aus dem „Spiel mit Gleichungen neue mathematische Objekte herauskristallisierten. Negative Zahlen, irrationale Zahlen, komplexe Zahlen …" (de Padova 2021, S. 289)?
Man sollte dabei nur nicht vergessen, dass die Algebra, als mächtiges mentales Werkzeug, eben viel mehr ist, als ein bloßes „Spiel mit Regeln".

V Kommunizieren, Denken, Lernen

„If you want to succeed, double your failure rate.“ T. J. Watson (1987)

„Knowledge, then, is a system of transformations that become progressively adequate.” (Piaget 1968, Genetic Epistemology)

„Jedes Tun ist Erkennen, und jedes Erkennen ist Tun.“ (Maturana & Varela 1987)

„The developmental transformations are the results of two complementary processes, that of individualization of the collective and that of communalization of the individual.” (Sfard 2008, S.80)

„Will man jedoch den Prozess der Entwicklung von Wissen … beim individuellen Lernen erklären, besteht ein Hauptproblem darin, dass kaum zu sehen ist, wie mit den auf einer bestimmten Entwicklungsstufe gegebenen Erkenntnismitteln „neue“ Theorien oder neue Überzeugungen formuliert werden können, die ja gerade insofern neu sind, als sie Elemente enthalten, die weder aus den gegebenen Mitteln abgeleitet werden können, noch auch einfach induktiv zu erschließen sind.“ (M. H. G. Hoffmann 2005, S. XI)

Die wohl einflussreichsten psychologisch hinterlegten Lernparadigmen sind – historisch aufeinander abfolgend - jene des **Behaviorismus**, des **Kognitivismus** und des **Konstruktivismus**. Alle drei haben zahlreiche pädagogische und didaktische Modelle der Unterrichtsgestaltung beeinflusst und stehen auch in dieser Reihenfolge für eine sich ändernde Sichtweise, die die Lernenden mehr und mehr als aktiv beteiligte denn als passiv aufzunehmende Personen begreift.

Im **Behaviorismus** lernt die Black-Box „Lernender“ etwas Neues, durch das Bilden von Assoziationen zwischen Reiz und Reaktion. Das Lernen kann durch Verstärkung dieser Assoziationen (Belohnen und Bestrafen) gesteuert werden: „Es kommt folglich zur Stärkung bzw. Abschwächung von Assoziationen infolge von Handlungskonsequenzen. Die elementarste Form der Assoziationsbildung beruht auf räumlicher oder zeitlicher Nähe zweier Reize“ (Vogt & Hechenleitner 2006, S. 4). Dies führte in unterrichtspraktischen Umsetzungen oft dazu, dass Wissen möglichst kleinschrittig vermittelt wurde. Das Reiz-Reaktionsmodell mag vielleicht bei einem automatisierten Einüben des algebraischen Kalküls Anwendung finden, wie dabei jedoch ein verständiger Vorstellungsaufbau in der Algebra erreicht werden soll, ist mehr als fragwürdig.

Der **Kognitivismus** füllt in gewisser Weise die „Black Box“ der Behavioristen, „indem er sich auf die beim Lernen intern ablaufenden Prozesse der Informationsverarbeitung“ (Vogt & Hechenleitner 2006, S. 8) konzentriert. Denken, Verstehen und Verständnis werden nun zu zentralen Kategorien. In Piagets genetischem Modell der *Formalstufen des Denkens* (Piaget 1972) verläuft die Entwicklung des Denkens etappenweise und sequenziell, wobei jedoch mitunter erhebliche individuelle Zeitunterschiede zwischen den Lernenden auftreten können. Im Alter von ca. 12 Jahren erreicht das Kind die Stufe des *Formal-Operationalen* Stadiums. Hier wird nach Piaget das Denken *abstrakter*, es können verschiedene Faktoren systematisch variiert (*Variablenkontrolle*), logische Verknüpfungen zwischen Aussagen hergestellt werden (*Aussagenlogik*) und ein *reversibles Denken* – manifestiert durch die Fähigkeiten zur Umkehrung und Kompensation von Operationen – wird möglich (siehe z. B. Oerter & Montanda 2002). Das sind alles Fähigkeiten, die geradezu konstituierend für den Aufbau einer algebraischen Expertise zu sein scheinen.

Der Übergang vom Kognitivismus zum ***Konstruktivismus*** ist fließend. Beide betrachten den Wissenserwerb als individuellen Aufbauprozess. Der (radikale) Konstruktivismus hält aber „ … die Vermittlung von Wissen für unmöglich, da nach seiner Auffassung Lernen primär durch das Individuum und nicht durch die Umwelt bestimmt wird, also Wissen immer wieder individuell konstruiert, reorganisiert und erweitert werden muss“ (Vogt & Hechenleitner 2006). Der

Lehrer wird im Kognitivismus zum „didactic leader“, zum „Steuermann“, indem er den Lernstoff und dessen zeitliche Abfolge vorgibt und im Konstruktivismus zum „Coach“ bzw. Moderator, der den individuellen Konstruktionsprozess mehr anregt und unterstützt als ihn zu steuern (Hasselhorn & Gold, 2006).

Bleibt die Frage, inwiefern sich denn der konstruktivistische Ansatz in das starre System von ständig wiederkehrenden, lernstoffzentrierten Leistungsüberprüfungen und inwieweit sich individuell-kognitivistische Entwicklungsmodelle auf den kollektiven Klassenunterricht abbilden lassen? Insbesondere ist auch fragwürdig, inwiefern Modelle greifen, die auf individuelle Entwicklungen fokussieren, wenn – wie in der Algebra - stark konventionalisierte[41] und vielleicht unumgänglich nur sozial zu vermittelnde[42] Inhalte gelernt werden sollen.
Vygotskij (1934) erweitert die Lerntheorie um seine soziale Dimension. Für ihn entspringen höhere kognitive Funktionen zuallererst in kommunikativen, sozialen Relationen, im „kollektiven Zusammenarbeiten“ zwischen Menschen (nach Meyer 2015, S.26).

> “Within this general process of development two qualitatively original main lines can already be distinguished: the line of biological formation of elementary processes and the line of the socio-cultural formation of the higher psychological functions; the real history of child behaviour is born from the interweaving of these two lines.”(Vygotskij & Luria, 1994, S. 148)

Ein jeder Unterrichtsprozess im sozialen Kontext des Klassenunterrichts ist nach Vygotskij *„…* Quelle für die Entwicklung. Er aktiviert eine Reihe von Prozessen, die ohne ihn in der Entwicklung überhaupt nicht entstehen könnten“ (ebd. 1934, S.304). Für das „Verhältnis zwischen der Entwicklung des Kindes und den Möglichkeiten, es zu unterrichten“ (ebd. 1934, S. 298) ist die sogenannte *Zone der nächsten Entwicklung* wichtig, die die „Differenz zwischen dem Niveau, auf dem die Aufgaben unter Anleitung, unter Mithilfe der Erwachsenen gelöst werden, und dem Niveau, auf dem das Kind Aufgaben selbständig löst“ (ebd. 1934, S. 300) umfasst. In diesem Sinne muss also der Unterricht nach Vygotskij auch der individuellen Entwicklung vorauseilen (ebd. 1934, S.34) und so werden auch „kompetente Andere“ bedeutsam. Diese **sozialkonstruktivistische Perspektive** wird von weiteren Autoren (z. B. Leontjew (1982), Äbli (1981), u. a.) weiter ausgeschärft und gewann auch an Bedeutung in der Mathematikdidaktik. 2001 vergleichen Kieran & Sfard ältere mit neueren Texten zum Mathematiklernen und bemerken:

> „The language of *mental schemes*, *misconceptions,* and *cognitive conflicts* seems to be giving way to a discourse on *activities*, *patterns of interaction*, and *communication failures.* While the older texts speak of learning in terms of personal *acquisition,* the newer ones portray it as the process of becoming a *participant* in a collective doing.” (ebd. 2001, S. 1)

---

[41] Da gibt es Konventionen bzgl. der Schreibfiguren (z. B. „|“ , das „⟺ " Zeichen, die Abkürzung $3 \cdot x = 3x$ oder die Definition $x \cdot x = x^2$), aber auch bedeutungstragende Konventionen wie die Vorzeichenregeln und den Verweisungscharakter der Variablen (siehe Abschnitt VI.I.1). Beide müssen und können letztendlich wohl nur mitgeteilt und als gesetzt akzeptiert werden.

[42] Hier wird ganz lapidar mit „vielleicht unumgänglich nur sozial zu vermittelnd“ das für mich größte Rätsel des Lernens und Lehrens der Algebra angesprochen, über das ich endlos sinniert habe. Inwiefern können sich Schüler zentrale Konzepte der Algebra überhaupt selbst konstruieren? Und warum verfallen Lehrer gerade in der Algebra immer noch und immer wieder in eine, als längst überholt geglaubte, „Erklärideologie“? Dabei geht es nicht darum, ob z. B. das Termumformen sich schneller und effektiver durch Instruktion vermitteln lässt, sondern darum, inwieweit dasselbe überhaupt ohne Vormachen und Erklären von den Schülern selbst konstruiert werden kann (und wenn ja, wie?). An welchen Stellen in der Einführung der Algebra hat man überhaupt eine Wahl zwischen Instruktion und Konstruktion?

Aufgrund der deutlichen Betonung von Sprache und Kommunikation in den neueren Schriften sehen sie ein “Aufkommen” der ***diskursiven Perspektive*** („ advent of the discursive approach“ (ebd. 2001, S.2)), der „as one of many possible implementations of the sociocultural call for research that acknowledges the inherently social nature of human thought ” (ebd. 2001, S. 4) gesehen werden kann. Die kognitivistischen Konzepte des Lernens als individuell-intellektuelle Aneignung und als innere Veränderung des Individuums durch Konfrontation mit der Außenwelt treten nun etwas in den Hintergrund. Stattdessen wird stärker auf die Veränderungen, wie der Lernende mit Anderen im mathematischen Diskurs kommuniziert, fokussiert. Der Begriff „*Diskurs*” umfasst dabei ein sehr weitgehendes Verständnis von allgemeinen Sprachhandlungen, sogenannten *discursive practises*, die Gesten, Zeichen, Mimik und alle Arten von Artefakten[43] beinhalten (Lermann 2001). Durch solche *discursive practices* verändert sich die Kommunikation im Klassenraum und so entwickelt sich – vereinfacht gesagt – auch die internalisierte Kommunikation im individuellen Lernenden, „d.h. das Denken der Schülerinnen und Schüler entwickelt sich weiter” (Meyer 2013, S.27). Die sozial vermittelte Diskursentwicklung geht also mit der Entwicklung des Denkens, verstanden als internalisierte Kommunikation der Schüler, einher.

> “… when learning mathematics is conceptualized as developing a discourse, probably the most natural units of analysis can be found in the discourse itself (as opposed to such formerly favored units as *concepts, mental schemes,* or *student’s knowledge*).” (Kieran & Sfard, 2001, S.7).

Ein sich entwickelnder Diskurs ist in diskursiver Perspektive also zutiefst mit einem sich entwickelnden Denken der Schülerinnen und Schüler verwoben.
Da alle praktischen Durchführungen dieser Dissertation ja längere Entwicklungen im Klassenraum im Blick haben und die diskursive Perspektive Möglichkeiten eröffnet, um aufzuzeigen wie individuelle Wissenskonstruktion, mathematisches Denken, Klassenraumkultur und soziokulturelles Umfeld miteinander verwoben sind, bietet sie sich als theoretische Brille für die vorliegende Arbeit an.

In „*Thinking as Communicating*“ entfaltet Sfard (2001) ihre Version der diskursiven Perspektive. Sfard definiert Kommunikation als eine kollektiv durchgeführte, strukturierte (*patternd*) Aktivität, in der die Aktion A eines Individuums der Aktion B eines Anderen folgt. Aktion A ist dabei Element eines wohldefinierten Repertoires von Aktionen, die als kommunikativ angesehen werden. Aktion B gehört zu einem Repertoires von Reaktionen, die als zu A passend wahrgenommen werden (Sfard 2008, S. 82). Denken wird als individualisierte Form einer (interpersonellen) Kommunikation gesehen, „as a type of human doing that emerges when individuals become capable of communicating with themselves the way they communicate with others.” (Sfard 2008, S. 91). Interne kognitive Prozesse und internalisierte Kommunikation sind nach Sfard zwei Seiten einer Medaille, weshalb sie von *Commognition* – einer Verbindung der Begriffe Kognition und Kommunikation – spricht. Als *Diskurs* bezeichnet sie „the different forms of communication, and thus of commognition, that draw some individuals together while excluding others“ (Sfard 2008, S.91). Mathematik-Lernen bedeutet demgemäß “becoming fluent in a discourse that would be recognized as mathematical by expert interlocutors“ (Sfard, Forman & Kieran, 2002, S. 5). Mathematische Diskurse entwickeln sich weiter, indem ihre Routinen, Prozesse, Denkweisen und Objektmengen durch ‚Objectification‘ (*Saming,*

[43] Diese Artefakte sind sämtliche Kommunikationsmittel, die dieser oder frühere Diskurse erzeugt haben (z. B. Graphen, Diagramme, Werkzeuge, Computerprogramme, etc.).

Encapsulation und *Reification* (Sfard 2008, S. 35 ff.) zu eigenständigen (reifizierten) Objekten eines neuen Meta-Diskurses werden.
Sfard sieht sowohl in der historischen Entwicklung der Mathematik (siehe Kapitel I) als auch in der Entwicklung der Lernenden eine fortwährend komplexer werdende Diskursentwicklung, indem die Objekte des jeweils aktuellen Diskurses die (jetzt objektifizierten) Diskurse von gestern waren. Für Sfard ist es dabei unumgänglich, dass die Denkweisen und Konzepte, definiert als Begriffe, zusammen mit ihrem diskursiven Gebrauch, beim Übergang zu neuen Diskursen substanzielle Um- und Neudeutungen erfahren müssen. Besonders ausgeprägt ist dies bei der Entwicklung des algebraischen Meta-Diskurses aus den arithmetischen Diskursen heraus. Sfard hat ja viele algebradidaktische Untersuchungen durchgeführt und dabei immer wieder auf tiefgreifende Disruptionen im Übergang von der Arithmetik zur Algebra hingewiesen (z. B. Sfard 1991, Sfard & Linchevski 1994, Sfard 1995, Kieran & Sfard 1999, Sfard 2007, Sfard 2008, Caspi & Sfard 2012).

Da also in der diskursiven Perspektive die Entwicklungen der kollektiven Kommunikation und des individuellen Denkens – wenn überhaupt – nur schwer voneinander trennbar sind, achtet die diskursive Brille stark auf die Diskursentwicklung selbst, als ein „ extremely complex network of communally established games (Sfard 2008, S. 74 in Bezug auf Wittgensteins „Sprachspiele“ 1961), um den Entwicklungs- und Denkprozessen der Lernenden nachzuspüren. Dabei spielen viele Variablen, wie z. B. die jeweilige kontextuelle Situiertheit, das Framing, die Rollen und Identitäten der Lehrenden und Lernenden, die vergangenen Schuldiskurse und auch die parallel stattfindenden außerschulischen Diskurse (wie die mit den Eltern, dem Nachhilfeinstitut, mit „Lehrerschmidt“ (Schmidt 2021), mit dem Internet, etc…), eine Rolle. Insbesondere im zweiten Teil von Kapitel VII(Entwicklungsforschung im Klassenunterricht) wird versucht, eine ganzheitlich diskursive Perspektive einzunehmen, indem ich den Verlauf zweier Durchführungen in ihrer Gänze nachzeichne, um dabei insbesondere der Diskursentwicklung des algebraischen Kalküls nachzuspüren.

VI Umfeld, Methodik und Forschungsfragen

"*Du musst geben, bevor du nimmst – und bauen, bevor du wohnst*" (Antoine de Saint-Exupéry**)**

Es war von Anfang an das zentrale Forschungsanliegen auf Grundlage des aktuellen Forschungsstands in der Didaktik der Algebra Unterrichtsreihen im Sinne eines *Design-Based-Research* zu entwickeln und deren Wirksamkeit im Klassenunterricht zu testen. Dementsprechend war von Anfang an geplant, die gesamte ca. 10 Wochen dauernde Durchführung bis hin zu Term- und Äquivalenzumformung methodisch kontrolliert zu beobachten.
Ein erster relevanter Punkt hierbei ist auszuloten, mit welchen Vorstellungen bzgl. algebraischer Objekte die Schüler in die Reihen eintreten, weshalb in allen Durchführungen Pretests dazu durchgeführt wurden. Da in den Durchführungen selbst, neben den fachlich-didaktischen Schwerpunktsetzungen und der Unterrichtsmethodik, das Vorgehen der Lehrkräfte, die individuellen Schülervorstellungen, die Motivationslage sowie die Art und Weise des Umgangs miteinander relevante Faktoren sind, wurden unterschiedliche Erhebungsinstrumente gewählt. Das sind Einzel- und Partnerinterviews mit Schülern, das Videographieren von Plenumsgesprächen, Protokolle von Unterrichtsbeobachtungen, Kurztests zu zentralen Inhalten, die Klassenarbeiten und weitere schriftlich fixierte Schülerprodukte.
Leider sind die beiden letzten Durchführungen ausgerechnet in Corona-Lockdown-Phasen hineingefallen. Die vorletzte hatte gerade begonnen, als der erste Lockdown 2020 kam und muss leider als abgebrochen gelten (zwar wurde versucht die Reihe in Distanz fortzuführen, aber das hat im 1. Lockdown aus unterschiedlichsten Gründen nicht funktioniert). Die zweite Coronadurchführung begann im Wechselunterricht, wechselte dann von Volldistanz- wieder zu Wechselunterricht, um am Ende des Schuljahres im Präsenzunterricht zu enden.
Leider führte das dazu, dass die intendierten Erhebungen teilweise nur fragmentarisch durchgeführt werden konnten. Dementsprechend bin ich der Meinung, dass die methodisch-kontrolliert erhobenen Evidenzen der im nächsten Kapitel vorgestellten Forschungsergebnisse leider weit hinter den an und für sich gegebenen Möglichkeiten bleiben. In diesem Bewusstsein versucht also die folgende Abhandlung aufgrund des und mit dem vorliegenden fragmentarischen Erhebungsmaterial dennoch die Forschungsfragen zu beantworten und zentrale Punkte herauszukristallisieren.

VI.I Die designten Reihen und ihr Setting

„Die Menschen stärken, die Sachen klären“ (Hartmut von Hentig, zit. nach Hefendehl-Hebeker 2004, S. 184).

Insgesamt wurden die beiden von mir designten Reihen mit zehn 7. Klassen des Gymnasiums in 5 Durchführungszyklen begonnen (Tabelle 7). Mit vier Klassen wurden die Reihen vor Ausbruch der Corona-Pandemie vollumfänglich in Präsenz durchgeführt (eine davon wurde in der Mitte abgebrochen, weil die Lehrerin mit der implizierten Unterrichtsmethodik unglücklich war). In 4 der 6 ‚Corona-Klassen' musste der Präsenzunterricht durch den 1. Corona-Lockdown 2020 schon früh abgebrochen werden, bei den restlichen zwei Klassen wurde die Reihe unter Coronabedingungen im ständigen Wechsel zwischen Präsenz-, Wechsel- und Distanzunterricht bis zum Ende durchgeführt. In den ersten 4 Durchführungszyklen war das eingeführte

Lehrbuch Lambacher Schweizer 7 G8 (Braun et al. 2009). Im letzten Zyklus war es der Lambacher-Schweizer 7 G9 (Blank et al. 2019 c).

Nr.	Zeitraum	Schule	Klassen	Zugang über	Dauer	Inhalte
1	Feb.-April 2017	Schule 1	7e G8	Muster	10 Wochen	Variablenkonzept Terme/Gleichungen
2	Feb.-April 2018 Mai 2018	Schule 2	7d G8	Muster	10 Wochen	Variablenkonzept Terme/Gleichungen LGS (+2Wochen)
3	Feb.-April 2019 Juni 2019	Schule 1	7b G8	Zahlenrätsel	8 Wochen	Variablenkonzept Gleichungen/Terme LGS (+2 Wochen)
4	Feb.-Mai 2020	Schule 1	7a,7e G8 7b,7d G8	Zahlenrätsel Muster	ca. 2,5 Wo. *Corona-Lock-down*	Variablenkonzept Terme/Gleichungen
5	Feb.-Juni 2021	Schule 2	7b G9 7d G9	Zahlenrätsel Muster	*Corona:* 13 Wo	Variablenkonzept Terme/Gleichungen

Tabelle 7: *Die Durchführungszyklen der Studie.*
Legende: Schule 1 und Schule 2 stehen für die beiden (anonymisierten) Projekt-Gymnasien
G8/G9: 8- bzw. 9-jähriges Gymnasium LGS: Lineare Gleichungssysteme

Flankiert und genährt wurden die auf diese Klassenunterrichtsphasen ausgerichteten Bemühungen zuvörderst durch meine Erfahrungen als praktizierende Lehrkraft und durch eine Reihe von Tätigkeiten, die ich im Zeitraum von Feb. 2016 -Jan. 2022 im Zusammenhang mit meiner Abordnung an die Universität Duisburg Essen (UDE) ausübte. Zu nennen sind dort u. a.:

- die Mitarbeit beim Erstellen des Algebra-MUED-Koffers (Krauth & Warmeling 2018), der einen Schwerpunkt auf materialbasierte Lernumgebungen zur Algebra legt
- Workshops zur Einführung der elementaren Algebra, die ich 2018 in Dortmund bei „Mathe für alle“ hielt
- Erfahrungen mit Studierenden, die ich in Übungsgruppen und Seminaren an der UDE sammeln konnte; insbesondere was deren algebraische Expertise angeht (gerade auch die der Grundschullehramt-Studierenden)
- mehrere Besuche von Klassen (Realschule 5 bis Gymnasium 8) im Mathematischen Schülerlabor „Mathecheker“ der UDE, dessen Koordinator ich war, die dort i.d.R. einen ganzen Vormittag materialbasiert an algebraischen Themen arbeiteten
- die Arbeit mit Studierenden des Lehramts Gymnasium/Gesamtschule, insb. dabei die Begleitung der Studierenden beim Vorbereiten und Durchführen algebraspezifischer Unterrichtsstunden

Auch wenn sich die Unterrichtsreihen von Jahr zu Jahr durch einen adaptiven Prozesszyklus veränderten, haben sich am Ende doch zwei unterschiedliche Reihen herausgebildet, die anfangs jeweils mit ganz unterschiedlichen Denkhandlungen einhergehen und die sich grob über ihr jeweiligen Einstige unterscheiden lassen.
Der Einstieg über „***Muster***“ beginnt mit algebraischen Beschreibung von gegenständlich repräsentierten Musterfolgen (vornehmlich Würfelbauten und Streichholzmusterfolgen) durch Terme, führt dann zu Termumformungen und zuletzt zum Thema Gleichungen und Äquivalezumformungen.

Der Einstieg über „***Zahlenrätse*l**" beginnt mit gegenständlich repräsentierten Zahlenrätseln (Streichholzschachteln als Container für Zahlen), führt dann zu Gleichungen und Äquivalenzumformungen, um danach zu den Termumformungen zu gelangen.
Im Folgenden nenne ich die beiden Reihen nach ihren Zugängen einfach kurz Reihe *Zahlenrätsel* oder Reihe *Muster.* In beiden Reihendurchführungen sollen – wenn auch in unterschiedlichen Reihenfolgen – die gleichen fachspezifischen Kompetenzen aufgebaut werden

Die Bildungsstandards (Bildungsstandards KMK 2004, 2012) und die Kernlehrpläne (Kernlehrplan NRW 2007, 2019) weisen der Algebra einen wichtigen Stellenwert in der Sekundarstufe zu, wenn auch die geforderten algebraischen Kompetenzen wenig kohärent in Fragmenten auf die dort angegebenen allgemeinen und inhaltsbezogenen Kompetenzbereiche verteilt sind. Explizit algebraische Kompetenzen werden in den Bildungsstandards auf die allgemeinen Kompetenzbereiche (z. B. K4 „Modellieren" oder „K5: Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen") und auf einen der inhaltlichen, durch sogenannte Leitideen des Faches realisierte, Kompetenzbereiche verteilt. Diese Leitideen sind *Zahl*, *Messen*, *Raum und Form*, *funktionaler Zusammenhang* und *Daten und Zufall*. Algebraische Kompetenzen (alle nur formal-algebraisch) werden hier nur bei der Leitidee *funktionaler Zusammenhang* genannt. Durch diese Fragmentierung wird m. E. ein kohärentes Bild einer für die Sekundarstufe zentralen Disziplin Algebra hier also nicht mit ins Zentrum gestellt. Der Kernlehrplan Mathematik NRW für die Gymnasien nennt die obligatorischen Inhaltsfelder der Algebra mitsamt konkretisierter Kompetenzerwartungen in Stufe I des Bereichs Arithmetik/Algebra (Kernlehrplan NRW G9 2019, Kernlehrplan NRW G8 2007)[44]. Daraus ergeben sich im Einklang mit den konkreten schulinternen Umsetzungen dieser Kernlehrpläne für die Einführung der elementaren Algebra in Klasse 7 die folgenden fachlichen Gegenstände:

- Das Variablenkonzept (Variablen als unbekannte und als unbestimmte Zahlen)
- (lineare) Terme
  - Terme aufstellen, interpretieren
  - Terme umformen:
    Zusammenfassen algebraischer Summen (z. B. $x + 3 - 2x = -x + 3$)
    Anwendung der Assoziativ-, Kommutativgesetze und des Distributivgesetzes (Ausklammern, Faktorisieren)
- Lineare Gleichungen $ax + b = cx + d$
  - Gleichungen aufstellen und interpretieren
  - Gleichungen lösen:
    Systematisches Probieren
    Rückwärtsrechnen ($ax + b = d$)
    Äquivalenzumformungen
- Lineare Gleichungssysteme

Genau dies waren – ausgenommen die linearen Gleichungssysteme für den letzten Durchgang – die Inhaltsfelder und die anzustrebenden fachlichen Kompetenzen für die

[44] Die ersten vier Durchführungen fanden Im Rahmen von G8, die letzte im Rahmen von G9 statt. Die einzige wesentliche Änderung auf der Ebene der schulinternen Curricula war dabei, dass das Thema „Lineare Gleichungssysteme" aus dem 2. Halbjahr von Klasse 7 in Klasse 8 verschoben wurde und deshalb kein Gegenstand der letzten Durchführung war.

Reihendurchführungen an beiden Projektschulen. Das in allen Projektschulen eingeführte Lehrbuch war der Lambacher Schweizer (G8 bzw. G9). Dieses Lehrwerk ist an nordrheinwestfälischen Gymnasien weit verbreitet. Mit der G8 Ausgabe von 2009 (Braun et al. 2009a-c) waren viele praktizierende Lehrkräfte sehr unzufrieden, die einmütig diesem Lehrwerk eine fehlende Stimmigkeit und Kohärenz der algebraanbahnenden und algebraspezifischen Inhalte bescheinigten. Die, zwar sehr viele unterschiedlichen Inhaltskontexte anbietenden und dabei doch sehr gedrungenen, Aufgaben und Ausführungen zur Algebra funktionierten meist so nicht, wie sie es zu intendieren scheinten, so dass viele der Lehrkräfte nach ersten Versuchen mit dem Buch hier weitgehend auf ihr eigenes Unterrichtsmaterial zurückgriffen. Die G9-Ausgabe (Blank et al. 2017a-c), die beim letzten Durchgang an der Projektschule eingeführt war, zeigte hier wesentliche Verbesserungen.

Vorstellungsgrundlagen der Schüler und fachinhaltliche Spezifizierung für die Einführung in die Algebra

> *“The majority of the remarkable mistakes in transformation of algebraic expressions made by pupils … are due to the fact that the expression and the transformation are meaningless jargon to the pupil.” (J. W. A. Wright 1903, zitiert aus Mason & Sutherland 2002, S.11)*

Die Einführung der elementaren Algebra in der 7. Klasse ist für die Schüler keine Stunde null der algebraischen Denkweisen und Konzepte. (Prä-)Algebraische Schreib- und Denkweisen wurden vielleicht schon in der Grundschule behandelt, z. B. Gleichungen mit Platzhaltern (z. B. in der Form $3 + \square = 8$) oder ein impliziter Gebrauch des „=“-Zeichens als Relationszeichen (etwa bei Zahlzerlegungen, wie $3 + 7 = 5 + 5$).
Da, wie gesagt, in allen Projektschulen der Studie der Lambacher Schweizer das eingeführte Lehrbuch war, sind hier – in Übereinstimmung mit den schulinternen Lehrplänen – als algebraische Vorerfahrungen zu nennen:

(1) Formulierung der Rechengesetze für rationalen Zahlen, zum Teil auch in algebraischer Notation, z. B. $a \cdot b = b \cdot a$, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, …
(2) Gebrauch von Buchstaben bei Flächeninhaltsformeln, z. B. $A_R = a \cdot b$, $A_D = g \cdot h : 2$, …
(3) Algebraische Beschreibung linearer Funktionen $y = mx + t$

Variablen wurden also schon gebraucht, und zwar vornehmlich in *Rechengesetzen*, in Formeln als *Platzhalter*, in die man bei konkreten Aufgaben Zahlen einsetzt, aber auch als *Veränderliche* in linearen Funktionen.
Wie ausgeprägt die unterrichtsspezifischen Vorerfahrungen in (1)-(3) waren, variiert von Klasse zu Klasse. Zudem haben sich dadurch ja evtl. auch konzeptionelle Vorstellungen, wie etwa Variablen(prä)konzepte oder ein relationales Denken, entwickelt. Um dies zu erheben, wurde in allen Klassen vor der Reihendurchführung ein 60-minütiger Pretest durchgeführt (Anhang A). Grob gesprochen können die Aufgaben dieses Tests in folgende sich teilweise überlappende Kategorien eingeteilt werden:

(1) **Rechengesetze.** Wie vertraut sind die Schüler mit den arithmetischen Rechengesetzen und deren algebraischer Formulierung?
(2) **Unterrichtspezifische Vorkenntnisse.** Wie gut können die Schüler mit symbolisch-algebraisch konnotierten Fragestellungen umgehen, die eng verwandt zu

Aufgabenformaten sind, die sie schon vorher im Unterricht kennengelernt haben? (etwa das Benutzen von Flächeninhaltsformeln und das Aufstellen von linearen Funktionsgleichungen)

(3) **Relationales Denken.** Inwieweit ist ein relationales Denken im Zusammenhang mit Gleichungen schon ausgebildet?

(4) **Variablenkonzepte.** Welche (Prä-)Konzepte zu Variablen, Termen und Gleichungen wurden bereits aufgebaut?

Bei der Aufgabenentwicklung dieser Pretest[45] wurde auf international immer wieder verwendete Items zurückgegriffen (Küchemmann 1981, Hart 1981, Stephens & Ribeiro 2007, 2008, 2012, u. a.) .
Im Großen und Ganzen zeigt sich, dass bei allen Klassen bezüglich ihres Vorwissens und ihrer Vorvorstellungen keine übermäßig auffallenden Unterschiede auszumachen sind.

Unterrichtspezifische Vorkenntnisse sind zu einem befriedigenden Ausmaß vorhanden. Ein verständiger Umgang mit den **Rechengesetzen** ist bei allen Klassen nur schwach entwickelt. Relativ viele Schüler (ca. 50%) zeigen bereits gut ausgeprägte **relationale Denkansätze**, indem sie recht gut in der Lage sind mit den Abhängigkeiten der Unbekannten und Unbestimmten im relationalen Gefüge einer Gleichung zu argumentierten. Was die **Variablenkonzepte** angeht, scheinen – um in Küchemanns Nomenklatur zu sprechen – die Vorstellungen ‚*letter evaluated*‘ und ‚*letter as object*‘ noch weit verbreitet zu sein, aber einige Schüler gehen bereits darüber hinaus.
Eine ausführliche Analyse für die beiden Klassen des letzten Durchgangs wird in Abschnitt VI.III.1 vorgenommen. Insgesamt scheint es bei allen Klassen sowohl auf der Ebene der gelernten Methoden als auch bei Aufgaben, bei denen man sich auf die Beziehungen zwischen Zahlen und Variablen einlassen muss, genug Vorwissen zu geben, auf das man bei der Einführung in die Algebra aufbauen kann. Und dies gilt – wie gesagt – für alle Durchführungen.
Bei der Einführung in die elementare Algebra soll nun, darauf aufbauend, das *Variablenkonzept* vertieft und mit dem *Symbolische Manipulieren* begonnen werden. Technisch gesehen geht es dabei um erste Termumformungen und algebraische Lösungsmethoden für lineare Gleichungen. In drei der fünf Durchführungszyklen wurden – gemäß der schulinternen G9-Lehrpläne – auch Lineare Gleichungssysteme behandelt. Dieser Durchführungsteil wird hier aber nur am Rande angesprochen.

Aus langjähriger persönlicher Lehrerfahrung und aus der Durchsicht der fachdidaktischen Literatur war noch vor der 1. Durchführung klar, dass der Teufel im Aufbau des algebraischen Kalküls steckt. So war von Anfang an die folgende Frage zentral:

> *Wie genau kann es gelingen, dass sich ein verständiges algebraisches Kalkül aus bedeutungstragenden Inhalten heraus nachhaltig entwickelt?*

Und dies, ohne dass Schüler trotz inhaltstragender Zugänge Kalkülhandlungen entwickeln, die für sie nur „meaningless jargon“ sind. Die aktuelle Fachdidaktik zeigt m. E. zwar viele, gute und reichhaltige Inhaltsfelder auf, aus denen sich algebraische Denkhandlungen entwickeln

[45] In Anhang A ist dieser Pretest zu sehen .

können, *wie genau* aber aus diesen Feldern heraus der explizite Eintritt in den Kalkül stattfinden soll, darüber bleibt sie m. E. oft *im Ungefähren*.

Ob durch Übung automatisiert oder bewusst verständig angewandt, sind die ***Kalkülregeln*** (die alle auf einem verständigen Umgang mit Zahlen beruhen) für die Einführung der Algebra die Folgenden.

Zum ***Gleichunglösen*** braucht man die Äquivalenzumformungsregeln:

- Auf beiden Seiten die gleiche Zahl oder den gleichen Term addieren
- Auf beiden Seiten die gleiche Zahl oder den gleichen Term subtrahieren
- Auf beiden Seiten mit der gleichen Zahl multiplizieren, aber man darf nicht mit 0 multiplizieren
- Auf beiden Seiten durch die gleiche Zahl dividieren, aber man darf nicht durch 0 teilen[46]
- Beide Seiten vertauschen

Hier kommen im Verlauf der weiteren Schulzeit nur noch wenige Regeln hinzu (z. B. das ‚kritische' beidseitige Quadrieren beim Lösen von Wurzelgleichungen).

Zur ***Termumformung*** …

- … muss man wissen wie man ***algebraische Summen*** (wie z. B. $3 + x + 2x - 1 - x$; $x + 2y - 2x + y$) zusammenfasst
- … braucht man das ***Distributivgesetz***,

$$a(b + c) = ab + ac \qquad a(b - c) = ab - ac$$

- … die ***Klammerregeln***

$$+(x + y + \cdots) = x + y + \cdots \qquad -(x + y) = -x - y - \cdots$$

- …. und die ***Kommutativ-*** und ***Assoziativgesetze*** der Addition und Multiplikation.

Hier kommen in der weiteren Schullaufbahn noch einige dazu (Bruchterme, binomische Formeln, Wurzelterme, etc. …). All diese Termumformungsregeln konstituieren sich aus den *arithmetischen Rechengesetzen* für Zahlen und deshalb muss es beim Aufbau des Kalküls darauf ankommen, wie es gelingen kann, diese arithmetischen Grundlagen auf das Rechnen mit Buchstaben (*dem Symbolischen Operieren*) zu übertragen. Ein so verstandener Aufbau des Kalküls ist Schwerpunkt der Arbeit. Die oben angegebenen Regeln erscheinen mir dabei hinreichend und notwendig. *Notwendig* und *hinreichend* deshalb, da man sie zur Rechtfertigung *aller* statthaften Umformungen braucht und umgekehrt damit alle statthaften Umformungen gerechtfertigt werden können. Findet man bei einer speziellen Umformung keine Rechtfertigung aufgrund dieser Gesetze, so ist dieselbe ernsthaft in Erwägung zu ziehen. Die Anzahl der von Schülern „selbst erfundenen Regeln" ist enorm. Art und Anzahl der Fehler, die Schüler beim Unformen machen, ist geradezu gigantisch und nur schwer methodisch wirksam zu

[46] Im Sinne einer ausgeprägten Ausprägung des Gegenstandsaspekts, in der Variablen ($x, a, \ldots$) und auch Terme ($2x, 3a - 4, \ldots$) als ‚Zahlen' gesehen werden, wird die Formulierung „… die gleiche Zahl oder den gleichen Term" zu einer Tautologie. Es würde also auch reichen – sofern man Variablen und Terme durchgehend auch als Zahlen ansieht – nur von Zahlen zu sprechen.

klassifizieren (gigantische Fehlersammlungen mit mehr oder weniger gelungenen Klassifizierungen findet man z. B. in Lörcher 1987*,* Tietze 1988, Stark 2000). Es ist daher unumgänglich eine Kultur der Kontrollstrategien aufzubauen, die die Schüler befähigt, ihre Fehler eigenständig zu entdecken und auch zu beheben. Schon Malle weist darauf hin, dass es damit bei vielen Schülern nicht sehr weit her ist:

> „Unsere empirischen Beobachtungen haben im Großen und Ganzen bestätig, dass die Kontrollmechanismen bei den meisten Schülern schwach entwickelt sind." (Malle 1993, S.162).

Neben dem ***Begründen*** der Vorgehensweise ***durch Regeln*** ist das hier fraglos auch das ***Einsetzen von Zahlen***.

Beide Reihen wurden von Zyklus zu Zyklus adaptiv angepasst und die *Zahlenrätsel*-Reihe wurde überhaupt erst nach dem zweiten Durchgang aus einem Unbehagen mit einer zentralen Nahtstelle zwischen *symbolischem Beschreiben* und *symbolischen Operieren* bei der *Musterreihe* entwickelt. Zentrale Arbeitsblätter zu beiden Reihen finden sich im Anhang. Die so entstandenen Reihen sind aber in keinem Fall als hintereinander abzuarbeitende Handlungsanweisungen zu verstehen. Eher als konzeptionelle Landkarten einer Einführung in die Algebra, in der beide Reihen die gleichen Gebiete in unterschiedlichen Diskursabfolgen besuchen und zentrale Weg- und Gebietsmarken eingeschlagen sind. Letztendlich kommt es auch darauf an, auf mitunter spontan auftauchende und nicht im Vorfeld antizipierte Diskursentwicklungen so zu reagieren, damit sich die intendierten zentralen Konzepten daraus entwickeln können. Manchmal markieren gerade unerwartete – mitunter auch zutiefst situativ bedingte – Probleme und Schwierigkeiten im Laufe des Diskurses Wegscheiden, die, wenn sie aufgenommen werden, das Lernen fördern können (konkrete Beispiele dazu in Abschnitt VI.III). Am Ende muss man als Lehrkraft, wie jede professionell tätige Person, die sich in einer komplexen Situationslage befindet, eben immer auch improvisieren. Dieses Improvisieren wird umso einfacher und zielführender, je mehr man auf eine Basis von theoretischem, konzeptuellem und empirischem Wissen zurückgreifen kann.

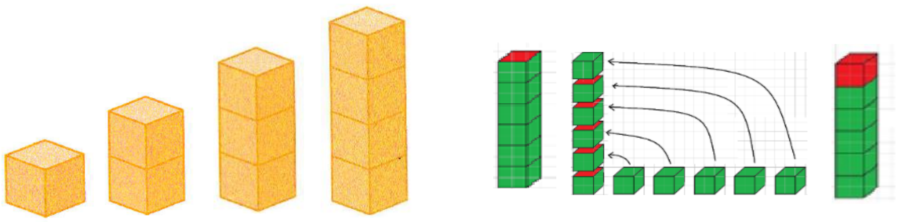
Jetzt beschreibe ich zu einer ersten Orientierung zunächst die beiden Reihen in gedrungener Form. Im praktischen Teil wird dann auf mehrere zentrale Wegstellen, auf die adaptiven Änderungen im Design-Prozess und auf die Beobachtungen, die dazu geführt haben, näher eingegangen. In jedem Falle sollen dabei nicht Bilder sklavisch zu verfolgender Handlungsabläufe vermittelt werden. Vielmehr Bilder zweier konzeptioneller, Orientierung gebender Landkarten von Einführungen in die Algebra, die verschiedene Zugänge wählen und jeweils mit ihren ganz eigenen Diskurstätigkeiten, Denkhandlungen, Verwerfungen und Verstehenshürden einhergehen.

Die Reihe *Muster*

> *"Ich musste eine weiße aufstellen, dann zwei blaue, dann eine weiße, zwei blaue, usw. Wenn ich neben zwei blaue eine weitere blaue setzen wollte, insistierte mein Vater auf einer weißen ….‚Mel, bitte laß den Jungen eine blaue Fliese aufstellen, wenn er es möchte.' [sagte meine Mutter] Mein Vater erwiderte: ‚Nein ich möchte, dass er auf Muster achtet. Das ist das Einzige, was ich in seinem Alter für seine mathematische Erziehung tun kann."* *(R. Feynmann in seiner Nobelpreisrede, zitiert aus Wittmann 2002, S.26)*

Folge von Würfeltürmen
Gezählt wurden die Anzahl der sichtbaren Seitenflächen (Quadrate) des 1., 2., 3., …, n.ten Würfelturms.

$4 \cdot 1 + 1, 4 \cdot 2 + 1, 4 \cdot 3 + 1, \ldots \to 4 \cdot n + 1$



1	2	3	4	…	n
5	9	13	17		$4 \cdot n + 1$, $n \cdot 5 - (n - 1)$ $(n - 1) \cdot 4 + 5, \ldots$

Die grün-rot gefärbten Skizzen liefern ikonische Erklärungen für die drei angegebenen Terme, die sich auf eine entdeckte Aufbaustruktur der Würfeltürme beziehen. Die darüberstehende Zahlensequenz begründet stärker auf der Ebene der gezählten Anzahlen.

***Abb. 12:** Eine durch Würfelbauten enaktiv und ikonisch repräsentierte Zahlenfolge.*

Devlin (1988, S. 10) beschreibt die Mathematik als „Wissenschaft von den Mustern“. Für Vogel & Wessolowski (2005) können „Muster und Strukturen“[47] eine Leitidee für den Mathematikunterricht darstellen, da „… der Blick auf ‚Muster‘ Möglichkeiten eröffnet, die Arbeitsweisen der Mathematik aktiv zu erschließen und transparent zu machen“ (Vogel 2005, S.1). In Abschnitt II.IV wurde besprochen, wie Muster und Strukturen eine Bedeutung für den Algebraunterricht erhalten können, wenn Aufbauformeln für geometrisch-numerisch repräsentierte Zahlenfolgen, etwa Punktmusterfolgen, gesucht werden. In einer Folge $\{z_1, z_2, z_3, \ldots\}$ von mitunter gegenständlich-ikonisch repräsentierten Zahlen wird ein *Muster* erkannt, dass dann mit Hilfe der algebraischen Symbolsprache zu einer für alle Folgeglieder gültigen Aufbauregel z_n verallgemeinert wird.
Dieser der Generalsierungsperspektive (Abschnitt IV.I) zuzuordnende Zugang hat längst schon seinen Niederschlag in Schulbüchern gefunden (z. B. Affolter et al. 2015, Barzel et al. 2014).
Es ist diese Form der Generalisierung, die am Anfang der Reihe *Muster* steht. Konkret werden z. B. Türme aus Holzwürfeln gebaut, die sichtbaren Seitenflächen gezählt und Aufbauregeln als Variablenterme gesucht (Abb. 12).

Termumformungen können dann aus der Beobachtung heraus motiviert werden, dass unterschiedlich aussehende Terme (z. B. $4 \cdot n + 1$ und $(n - 1) \cdot 4 + 5$) das gleiche *Muster*

[47] Eine allgemeine Definition der Termini Muster und Strukturen ist schwierig. Für Wittmann & Haug (2013) geht es bei einer Struktur darum „… zu erkennen, wie Teile eines komplexen Ganzen zueinander angeordnet sind“ und bei Mustern darum, ob sich innerhalb der Strukturen Regelmäßigkeiten erkennen lassen. Erkennt man z. B. Beziehungen zwischen den Zahlen einer Tabelle, so entdeckt man eine Struktur. Wird ein Bildungsprinzip in diesen Zahlen erkannt, so nimmt man ein Muster wahr. Wird dieses Bildungsgesetz zudem dazu benutzt das Muster gar mittels geeigneter Beschreibungsmittel (etwa der algebraischen Symbolsprache) zu beschreiben, so ist man in der Lage das Muster zu reproduzieren und geht über das „gewahr werden“ (Devlin 2002, S. 24 ff) hinaus.

repräsentieren, also *gleichwertig* sein müssen. So – die Hoffnung – werden Kalkülaspekte in einen Kontext gestellt, indem sie als sinnvoll erkannt und weiterentwickelt werden können.
Es ist wichtig zu betonen, dass die gegenständlich-ikonisch repräsentierten Folgen reinen Zahlenfolgen nicht nur aus allgemeindidaktischen Prinzipien (EIS-Prinzip, Bruner 1974) vorzuziehen sind. Die dadurch verfügbaren unterschiedlichen Repräsentationsebenen bieten natürliche Anlässe für das Aufstellen *verschiedener* gleichwertiger Aufbauterme, die hier ja Dreh- und Angelpunkt des Eintritts in den Kalkül sein sollen, ungemein.
Die Gleichungslehre kann dann z. B. durch folgende Frage angebahnt werden: *„Bei welchem Turm sieht man 489 Quadrate?"*, indem die Schüler durch algebraische Vorgehensweisen die Gleichung $(n-1)\cdot 4+5=498$ zu lösen versuchen.

Vorher liefern aber einige solcher konkret-repräsentierter Zahlenfolgen in mathematisch reichhaltigem Tun einen Fundus verschiedener gleichwertiger Terme. Diesen Fundus für einen Übergang in den Kalkül zu instrumentalisieren gelingt in den Durchführungen nicht ohne Verwerfungen. U. a. scheinen die *narrative* Aufladung der Aufbauformeln und die direkte Referenz auf konkrete Dinge einer Übertragung der arithmetischen Konventionen auf Variablen und Terme im Wege zu stehen. Große Teile der Arbeit werden hierauf nochmal zurückkommen.

Beim weiteren Einüben der Termumformung kann durchaus gewinnbringend auch auf weitere sinnstiftende Kontexte zurückgegriffen werden, etwa das Aufstellen von Umfangs- und Flächeninhaltstermen (Abb. 13). Solche Kontexte schaffen die Möglichkeit zu viel reichhaltigeren und konstruktiv vernetzenden Denkhandlungen als das bloße Einüben von Umformungspäckchen.

1. Stelle einen möglichst langen und eines möglichst kurzen Term für den <u>Umfang</u> der Figur rechts auf.
   Wie kannst du überprüfen, ob beide Terme stimmen?

2. a) Stelle möglichst viele unterschiedliche Terme für den <u>Flächeninhalt</u> der Figur rechts auf. Wie viele unterschiedliche Terme schaffst du?
   b) Bestätige durch passende Umformungen, dass alle deine Flächeninhaltsterme gleichwertig sind.

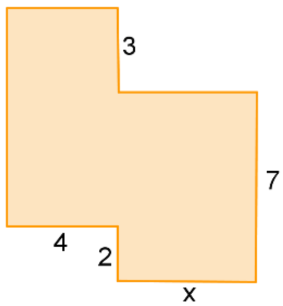


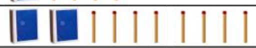
Abb. 13: *Gleichwertige Terme im geometrischen Kontext*

Die in diesem Unterrichtsgang noch fehlende Gleichungslehre kann, wie schon erwähnt, im Rückgriff auf die Musterfolgen eingeleitet werden. Der Weg hin zu den Äquivalenzumformungen und den Gleichungen in Sachkontexten ist dann aber ganz ähnlich wie bei der zweiten erprobten Reihe, der Reihe *Zahlenrätsel.*

Die Reihe *Zahlenrätsel*

„Hieraus ist klar, daß sich alle Größen, durch Zahlen ausdrücken lassen, und also der Grund aller Mathematischen Wißenschaften darin gesetzt werden muß, daß man die Lehre von den Zahlen, und alle Berechnungs-Arten, so dabey vorkommen können, genau in Erwegung ziehe, und vollständig abhandele." (L. Euler *1770, S.10)*

„The interest in numbers seems implanted in the human mind" (Nils Hendrik Abels 1890)

Text	Boxenanordnung	Term
Denk dir eine Zahl.		x
Addiere 4.		$x + 4$
Verdoppele.		$2 \cdot x + 8$
Subtrahiere 10	???	$2 \cdot x - 2$
Nenne mir dein Ergebnis und ich sage dir die gedachte Zahl!		

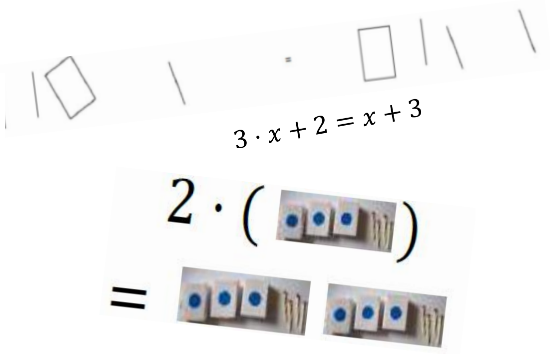


***Abb. 14:** Mit dem Boxenmodell von Zahlenrätseln über Gleichungen bis hin zu Termumformungen*

Diese Reihe wurde überhaupt erst entwickelt, weil sich in den ersten beiden Zyklen der Übergang zwischen dem Aufstellen der Terme und dem Eintritt in den Kalkül als schwierig erwies. Eine zentrale Lernhürde beim Generalsierungsansatz war, dass die Schüler die Variable (den Term) aufgrund der kontextuellen Vorgeschichte mehr mit seiner konkreten kontextuellen Bedeutung als Nummer der Figur (Anzahl der Quadrate) als mit den „dahinterstehenden" Zahlen verbunden hatten. Das Umformen von Termen konstituiert sich aber aus den Rechengesetzen für Zahlen, die direkte Referenz der Variablen (des Terms) zu den Zahlen ist jetzt also entscheidend. Auf der Suche nach einem sinnstiftenden Kontext, der direkt auf Zahlen referenziert, kam ich auf den Lerngegenstand *Zahlenrätsel*.
Dabei konnte ich beim Design der Reihe auf viele Quellen zurückgreifen. Zahlenrätsel nehmen in Schulbüchern seit jeher und bis heute noch ihren Raum ein. Aber auch Fachdidaktiker greifen immer wieder Zahlenrätsel für die Algebra auf. Sehr profitiert habe ich dabei von meiner Mitarbeit beim MUED-Algebra Koffer (Krauth & Warmeling 2018). Dort wurden zwei umfangreiche, materialbasierte Lernumgebungen entwickelt, die aus Zahlenrätseln heraus die Konzepte des Terms und der Gleichung einführen.

Die Reihe *Zahlenrätsel* arbeitet von Anfang an und durchgehend mit dem Modell der Box als Platzhalter für Zahlen (Affolter et al. 2015, Melzig 2013). In einer Streichholzschachtel (kurz Box) befinden sich unbekannte oder unbestimmte Anzahlen von Streichhölzern. Die Box ist also ein Platzhalter für unbestimmte und unbekannte Zahlen. Die Variable x steht für die Anzahl der Hölzchen in der Box (und nicht etwa für die Box selbst!). Anfangs stellt man sich die gedachte Zahl in der Box versteckt vor und die Rechenanweisungen des Zahlenrätsels werden direkt auf Boxenebene durchgeführt (Abb. 14). Die Intention, den Trick des Zahlenrätsels zu knacken, führt auf (zunächst nur in Boxenschreibweise repräsentierte) Gleichungen der Form $ax + b = E$ ($a, b > 0$; E: Ergebniszahl des Rätsels). Aus zwei Gründen führt man relativ schnell die formale Schreibweise ein: Als reine schreibmethodische Vereinfachung (man denke z. B. an die Gleichung $100x + 50 = 250$) und aus der Notwendigkeit heraus, dass durch das Boxenmodell nur positive Zahlen und Vorzeichen dargestellt werden können (Abb. 14)[48]. Man behält sich aber die Boxen weiterhin zur Verfügung. Anfangs gibt es keine weitere

[48] Schon auf dieser basalen Ebene spiegelt sich ein wesentliches Charakteristikum der algebraischen Symbolsprache. Die formale Schreibweise ist hier nicht bloß ein Beschreibungsmittel, sondern wird zum „Werkzeug des Geistes" (Krämer 1988, S. 171), indem durch dieselbe jetzt auch negative Lösungen und Vorzeichen gedacht und dargestellt werden können.

Bedeutungsebene als die der (gedachten) Zahlen und so hat man zunächst nur mit Problemstellungen folgender Art zu tun:

$2 \cdot x - 4 = 48$:	*Für welche Zahl x ist die Zahl $2 \cdot x - 4$ gleich der Zahl 48?*
$2 \cdot x + 4 = x + 5$:	*Für welche Zahl x ist die Zahl $2 \cdot x + 4$ gleich der Zahl $x + 5$?*

Jetzt, da man mit der Box als Platzhalter für Zahlen vertraut ist, bietet es sich an, dass die Methode Äquivalenzumformungen (nach Ideen von Afollter et al. 2015 und Janßen 2016) nach dem EIS-Prinzip von Schülern weitgehend selbsttätig entwickelt wird (Anhang F) [49]. Die direkte Referenz *Variable* → *Zahl* wird erst aufgegeben, wenn die erarbeiteten Lösungsmethoden auf Sachsituationen angewendet werden und so die Zahlen dann noch eine zusätzliche sachkontextuelle Bedeutung erhalten.

Rätsel	Term 1	Term 2
Denk dir eine Zahl.	x	x
Addiere 5	$x + 5$	$x + 5$
Verdopple	$2 \cdot x + 10$	$2 \cdot (x + 5)$
Subtrahiere 6	$2 \cdot x + 4$	$2 \cdot (x + 5) - 6$
Dividiere durch 2	$x + 2$	$(2 \cdot (x + 5) - 6): 2$

Abb. 15: *Ein Zahlenrätsel – zwei Algebraisierungen*

Der Übergang zum Termumformen kann dann sowohl über Sachkontexte, bei denen die dazu aufgestellten Gleichungen Klammerterme beinhalten (z. B. $2x - 50 + (x - 50) \cdot 3 = 350$), als auch im Rückgriff auf Zahlenrätsel, deren Anweisungen unterschiedlich verarbeitet werden, stattfinden. Vereinfacht man z. B. den Term $(2 \cdot (x + 5) - 6): 2 = (\mathbf{2x + 10} - 6): 2 = (\mathbf{2x + 4}): 2 = \mathbf{x + 2}$ so sieht man, dass die dabei aufeinander abfolgenden Schritte, genau den Operationen entsprechen, die man ja am Anfang der Reihe nutzte, um auf einen einfachen Term für die Ergebniszahl zu kommen (Abb. 15).

Zum notwendigen Üben des Termumformens eignet sich nun wieder der oben beschriebene geometrische Kontext. Wenn man mag, kann man am Ende auch noch Aufbauformeln gemäß der Generalisierungsperspektive erzeugen. Der Schwerpunkt liegt dabei aber nun eindeutig auf dem *symbolischen Beschreiben* und der Äquivalenznachweis der dabei entstehenden gleichwertigen Terme ist nun nurmehr eine Anwendung des Termumformens.

VI.II Forschungsfragen

Das Forschungsumfeld bilden also zwei konzeptionell verschiedene, ca. acht- bis zehnwöchige, Unterrichtsreihen zur Einführung in die Algebra in 7. Klassen des Gymnasiums. Das zentrale Forschungsinteresse und die damit verbundenen offenen Problemstellungen, lassen sich nun kurz in folgenden Fragen zusammenfassen:

[49] Das Modell „*Knackt die Box*“ kann übrigens als „*Knackt die Box**en***“ auch lernwirksam auf Lineare Gleichungssysteme erweitert werden (Afollter et al. 2015 , Krauth et al. 2018, Gerstner 2018). Dies ist in fast allen Durchführungszyklen auch geschehen, wird hier aber aus Platzgründen nicht weiter thematisiert werden.

> Wie können Schülerinnen und Schüler zu einem verständigen Arbeiten in der elementaren Algebra befähigt werden? Welches Potenzial enthalten aktuell diskutierte Ansätze und welche Untiefen enthalten sie? Wie können sich im Klassenunterricht diese Potenziale entfalten und wie kann dort diesen Untiefen konstruktiv begegnet werden?

Konkreter werden damit folgende Fragen impliziert:

1. Welche Vorstellung bzgl. algebraischer Objekte (insb. Variablen) haben Schülerinnen und Schüler vor der Einführung der elementaren Algebra?

2. Welche Vorstellungen für das Arbeiten mit Variablen, Termen und Gleichungen bauen Schülerinnen und Schüler bei den unterschiedlichen Ansätzen, operationalisiert durch verschiedene Reihendurchführungen, auf? Gibt es reihenspezifische Unterschiede beim Konzeptaufbau?

3. Welche Schwierigkeiten lassen sich bei unterschiedlichen Reihen bei den Schülerinnen und Schülern beobachten und wie hängen diese mit den Vorstellungen zusammen? Gibt es reihenspezifische Fehleranhäufungen?

4. Wie kann im Klassenunterricht auf diese Schwierigkeiten und auf die Fehler reagiert werden?

5. Welche Vorstellungshürden tun sich insbesondere bei der Entwicklung des algebraischen Kalküls auf und wie kann der Übergang vom Inhalt zum Kalkül gelingen?

6. Welche Kontrollstrategien entwickeln die Schülerinnen und Schüler beim und mit dem Kalkülaufbau und wie kann deren Entwicklung gefördert werden, damit die Schüler selbstreguliert ihre Fehler entdecken und darauf reagieren können?

7. An welchen Stellen sind Darstellungswechsel hilfreich, an welchen ggfs. auch hinderlich?

*****

So sind also zwei Unterrichtsreihen entstanden, mit denen die am Anfang dieses Kapitels aufgeführten fachspezifischen Kompetenzen aufgebaut werden sollen. Zuerst entstand die *Musterreihe* aus dem Versuch heraus, die in der Fachdidaktik aktuell prominent diskutierte Generalisierungsperspektive als Zugang zur Algebra in ein kohärentes Lehr-Lernarragement zur Einführung in die Algebra zu integrieren. Erst als sich dabei mitunter erhebliche Lernhürden beim Aufbau des Kalküls zeigten, entwickelte ich aus einem damit einhergehenden Unbehagen heraus die *Zahlenrätselreihe.* Während sich aus dem Generalisierungsansatz wie von selbst die Reihenfolge erst *Terme und Unbestimmte*, dann *Gleichungen und Unbekannte* ergibt, ist das bei den Zahlenrätseln genau umgekehrt[50]. Da also die beiden Reihen ganz unterschiedliche

[50] Ein Blick in die einschlägigen Schulbücher zeigt, dass – ungeachtet wie stark vorher schon „guess & test"-Methoden Gegenstand gewesen sind – die allermeisten Bücher bei der Einführung in die Algebra zuerst Terme,

Lernwege beschreiten und die Konzeptpaare *Gleichung*/*Unbekannte* und *Term/Unbestimmte* ja auch mit grundlegend unterschiedlichen Denkhandlungen einhergehen, drängte es sich geradezu auf, die Reihendurchführungen vergleichend zu untersuchen. Dies wurde ab dem 4. Zyklus intendiert und ist teilweise – unter den beeinträchtigenden Bedingungen von Corona – auch geschehen.

Im jetzt folgenden Kapitel wird nun versucht werden, die oben gestellten Forschungsfragen zu beantworten, indem wir uns in die Reihendurchführungen in ihren sukzessiven und adaptiv sich veränderten Diskursdurchläufen mit einem vorrangigen Fokus auf die Entwicklung des alberaischen Kalküls begeben.

dann Gleichungen behandeln. Es gibt Ausnahmen. In Neue Wege (Lergenmüller et al.2011) werden die Gleichungen vor den Termen behandelt. Im mathbuch.ch (Afollter et al. 2015) fällt es aufgrund seiner außergewöhnlichen Struktureinteilung in einzelne Lernumgebungen ohnehin schwer eine ‚Einführung in die Algebra' auszumachen. Vielmehr sind hier algebraische und algebra-propädeutische Inhalte in vielen Lernumgebungen über die Jahrgangsstufenbände verteilt.

VII Entwicklungsforschung im Klassenunterricht

"Aber hier, wie überhaupt, kommt es anders, als man glaubt" (Wilhelm Busch, 1882)

VII.I Umsetzungen der Generalisierungsperspektive – Die Reihe *Muster (1. und 2. Durchgang)*

Diese Reihe wurde mit insgesamt 6 Klassen durchgeführt, drei davon leider unter Corona-Einschränkungen. Die Einführung in die Algebra baut dabei auf dem Musterverallgemeinerungsansatz auf und die dabei verwendeten Folgen werden nicht nur numerisch und ikonisch, sondern auch durch gegenständliches Material (Holzwürfel und Streichhölzer) repräsentiert. Insgesamt sollte – ganz beseelt von meiner Abordnung an die Universität, meinem damit einhergehenden neuen Posten als Koordinator des mathematischen Schülerlabors Mathe-Checker[51] und meiner Mitarbeit am MUED-Algebrakoffer[52] – geguckt werden, inwieweit gegenständliche Materialien und Darstellungswechsel helfen können, die abstrakten algebraischen Symbole mit inhaltlich bedeutsamen Vorstellungen zu verknüpfen[53].

Diese Einführung in die Algebra kann man in 3 Phasen aufteilen:

- **Phase 1:** Das Aufstellen von **Aufbauformeln** für gegenständlich-ikonisch repräsentierte Zahlenfolgen – ***Symbolisches Beschreiben***
- **Phase 2: Gleichwertigkeit** von Termen und Termumformungen – ***Symbolisches Manipulieren*** von Termen
- **Phase 3: Äquivalenzumformungen von Gleichungen** – Symbolisches Manipulieren von Gleichungen und Symbolisches Beschreiben von Sachkontexten durch Gleichungen[54]

---

[51] Im mathematischen Schülerlabor Mathe-Checker der Universität Essen können Schülergruppen einen Vormittag kooperativ und materialbasiert an ausgewählten Themen arbeiten. Einige dieser Themen sind auch algebraspezifisch (z. B. Lineare Gleichungssysteme, Figurierte Zahlen, etc.).

[52] Die MUED-Mathekoffer sind aus dem Mathekoffer (Elschenbroich 2008) heraus entstanden und sollen *„insbesondere den Wunsch vieler Lehrkräfte nach Klassensätzen an Materialien“* (Krauth et al. 2018) erfüllen. Der Mathekoffer Algebra enthält in 16 Lernumgebungen von Klasse 5 bis Klasse 8 unterrichtlich erprobte Ideen zur materialgestützten Einführung in die Algebra.

[53] Vorschläge zum Materialeinsatz in der Algebra gibt es zuhauf (z. B. Hall 1999, Wiegand & Wiegand 2006, Wieland 2006, Haug & Wittmann 2013, Krauth & Warmeling 2018, Affolter et al. 2015). Systematische Untersuchungen, inwiefern diese Materialien wirklich lernförderlich für die Algebra sind, gibt es m. E. kaum. Darstellungswechsel und insbesondere Visualisierungen werden heutzutage in der Schulalgebra nahezu durchgehend verwendet (z. B. Dreyfus 1991, Malle 1993, Prediger 2009 , u.v.a.). Die Frage, wie *genau* solche Visualisierungen – insbesondere in der Algebra – helfen können nachhaltige Vorstellungen aufzubauen, wird m. E. zu wenig adressiert. Malle schreibt z. B. dazu: *„Im Folgenden führe ich einige Aufgaben an, die zum Ziel haben die Sichtweise von Termen als Zahlen bzw. Formeln als Beziehungen zwischen Zahlen zu entwickeln. Die meisten dieser Aufgaben basieren auf der Idee, Terme bzw. Formeln zu visualisieren. Durch eine geeignete Visualisierung* ***kann*** *ein Term als zeichnerisches Objekt (Strecke, Rechteck, Markierung auf einer Skala usw.) dargestellt werden, was es* ***vermutlich*** *erleichtert, den Term selbst als ein Objekt (eine Zahl) anzusehen. In ähnlicher Weise kann eine geeignete Visualisierung einer Formel* ***vermutlich*** *helfen, die zeichnerisch dargestellte Objektbeziehung (Beziehung zwischen Strecken, Rechtecken, Markierungen usw.) als Zahlbeziehung aufzufassen.“ (*ebd. 1997, S. 151, Hervorhebungen durch den Autor*)*

[54] In zwei der vier Durchführungen gab es, gemäß der schulinternen Curricula, noch eine Phase 4 „Lineare Gleichungssysteme“, welche nach einem im mathematischen Schülerlabor MatheChecker entwickeltem Lernheft (Gerstner 2019), das stark vom schweizerischen mathbuch.ch (Affolter et al. 2015) inspiriert wurde,

Von Anfang an war dabei klar, dass es von besonderem Interesse sein wird, wie genau der Übergang von Phase 1 in Phase 2, der Eintritt in den algebraischen Kalkül also, stattfinden kann, damit sich ein verständiger Kalkül aufbaut.

Kalküle selbst entwickeln – eine Leitidee auf dem Weg von der Gleichwertigkeit von Termen zur Termumformung

1. Etappe: *Gleichwertigkeit von Termen im Sinne der Beschreibungs- und Einsetzungsgleichheit erarbeiten*

Lernende …

1. … entdecken, dass es unterschiedliche Terme gibt, die dieselbe Situation oder dasselbe Bild mit allgemeinen Größen beschreiben (sie entdecken die Existenz beschreibungsgleicher Terme);
2. … erfahren durch Ausprobieren, dass die Beschreibungsgleichheit die Einsetzungsgleichheit impliziert;
3. … finden zu einer Situation oder einem Bild mehrere beschreibungsgleiche Terme. Sie überprüfen oder widerlegen ihre Gleichwertigkeit mit der Einsetzungsgleichheit
4. … zeigen durch Konstruktion einer passenden Situation oder eines Bildes, dass zwei Terme gleichwertig sind

Kasten 1: *Erste Etappe zum algebraischen Kalkül (wortwörtlich übernommen aus Fischer et al. 2010, angelehnt an Prediger 2009)*

Kalküle selbst entwickeln – eine Leitidee auf dem Weg von der Gleichwertigkeit von Termen zur Termumformung

2. Etappe: *Kalkülhaften Übergang zwischen gleichwertigen Termen erarbeiten*

Lernende …

5. … suchen rechnerische Möglichkeiten, die Gleichwertigkeit zweier Terme ohne inhaltlichen Bezug schneller zu erkennen und entdecken Umformungsregeln, um einen Term umzuwandeln;
6. … nutzen Termumformungsregeln als Möglichkeit, auf der Kalkül-Ebene zu gleichwertigen Termen überzugehen;
7. … gewinnen Vertrauen in den Kalkül durch mehrmaliges Prüfen der Entsprechung von Inhalts- und Kalkülebene (also von Beschreibungs-/Einsetzungsgleichheit und Umformungsgleichheit)
8. … deuten auch später immer wieder umformungsgleiche Terme als beschreibungs- und einsetzungsgleich

Kasten 2: Zweite Etappe zum algebraischen Kalkül (wortwörtlich übernommen aus Fischer et al. 2010, angelehnt an Prediger 2009)

Fischer, Hefendehl & Prediger (2010) sehen im Aufstellen von Aufbauformeln (Phase 1) und der damit verbundenen *Denkhandlung des Verallgemeinerns* eine mögliche *Leitidee* zur Einführung der Variablen. Die Gleichwertigkeit verschiedener Aufbauterme initiiert und speist die Denkhandlung *„Kalkül entwickeln* … . Verschiedene, in einer Klasse gefundene Terme zu vergleichen, ist ein bewährter instruktiver Anlass zur Entwicklung eines Kalküls zum Identifizieren gleichwertiger Terme, der Termumformung*“.* (ebd. 2010, S. 6). Als Leitschnur, wie die

---

unterrichtet wurde. Dieses Lernheft verwendet auch das Boxenmodell. Die Beobachtungen und Ergebnisse aus Phase 4 (Lineare Gleichungssysteme) werden in dieser Dissertationschrift jedoch nicht vorgestellt.

Gleichwertigkeit dazu benutzt werden kann, um den algebraischen Kalkül zu entwickeln, geben sie einen achtschrittigen Weg in zwei Etappen an (Kasten 1 und 2 aus Fischer et al. 2010, S.10).

Es war einer der Schwerpunkte der ersten Durchführungen, zu untersuchen, inwieweit sich dieser in Kasten 1 und 2 skizzierte Weg im Klassenunterricht beschreiten und inwiefern sich dadurch erste verständige Kalkülhandlungen aufbauen lassen.

VII.I.1 Phase 1 der Musterreihe– Symbolisches Beschreiben

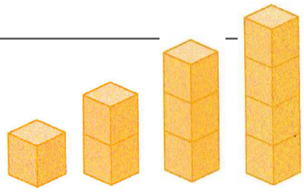
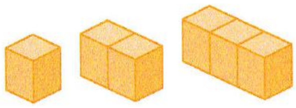
	
(I) Würfeltürme	**(II) Würfelschlangen**
• *Baut Würfeltürme.* • Wie viele Quadrate sind <u>sichtbar</u>, bei einem drei-, vier-, fünf-,… -stöckigen Turm? • Wie viele Quadrate sind sichtbar bei einem Turm aus allen Würfeln eurer Klasse?	• Wie viele sichtbaren Quadrate gibt es bei der 1., 2., 3., 4., 10. und 20. Würfelschlange. Wie viele bei der 100. Schlange, bei der 142. Schlange? • Findet eine „Zählregel“, mit der ihr die Anzahl der sichtbaren Quadrate für eine *x-beliebige* Würfelschlange bestimmen könnt.
$4x+1$ $5\ +(x-1)\cdot 4$ $5\cdot x-(x-1)$	$x\cdot 3+2$ $\quad$ $(x\cdot 6)-(x\cdot 3)+2$ $(x-2)\cdot 3+2\cdot 4$ $\quad$ $4\cdot x-(x-2)$ $4x-x+2$

Abb. 16 a: Die ersten beiden Erarbeitungen mitsamt den dazugehörigen zentralen Fragen. Es sind Terme angegeben, die genauso von Schülern aufgestellt wurden. Man zählt die Anzahl der sichtbaren Quadrate.

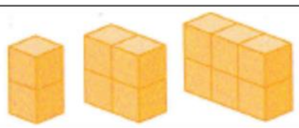
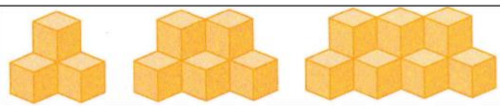
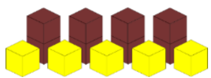
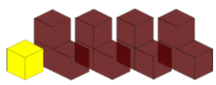
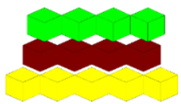
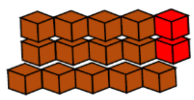
	
(III) Würfelmauern	**(IV) Gestaffelte Würfelmauern**
• Wie viele Quadrate sind sichtbar, bei der 1., 2., 3., 4., …10., 100. und 142. Würfelmauer? • Schreibe einen Term für eine x-beliebige Mauer! **Wofür steht das x? Wofür dein Term?** • Findet weitere Terme und erklärt eure Terme an zwei verschieden langen Mauern.	 $2\cdot x+(x+1)$  $1+3\cdot x$  $x+x+(x+1)$  $3\cdot(x+1)-2$
$x\cdot 5+4$ $4x+x+4$ $(x\cdot 2)\cdot 2+4+x$ $4+x+(2\cdot x)\cdot 2$ $9x-(x-1)\cdot 4$ $(x\cdot 2)\cdot 6-((x\cdot 3)+(x-1)\cdot 4)$	• Liefern alle vier Terme für x-beliebig lange Mauern die richtige Anzahl an Würfeln? ***Erkläre auf <u>verschiedene</u> Arten und Weisen!***

Abb. 16 b: Erarbeitung (III) und (IV). Erarbeitung (IV) soll den Übergang ins Kalkül einleiten. Dort zählt man statt der sichtbaren Quadrate einfach nur die Würfelanzahl der x-ten Figur.

Als gegenständlich-ikonische Repräsentationen von Folgen wurden in allen Durchführungen Würfelbauten, Streichholzketten und vereinzelt auch Punktmusterfolgen verwendet. Holzwürfel wurden dabei im Klassenunterricht eingesetzt, Hölzchenketten in Hausaufgaben.
Die Abbildungen 16 a,b zeigen die wesentlichen Arbeitsaufträge der ersten vier Erarbeitungen (in Anhang B sind die Arbeitsblätter dazu zu sehen), mit denen jede Durchführung startete. Die Arbeitsaufträge sind dabei in allen Durchführungen im Wesentlichen dieselben geblieben. Von Erarbeitung zu Erarbeitung wird immer stärker auf das Aufstellen eines Terms abgezielt. Erarbeitung (IV) soll den Übergang ins Kalkül anbahnen. Nach jeder Erarbeitungsphase, die die Schüler in Partnerarbeit absolvieren, folgt eine Phase des Ordnens im Plenum, in der die Ergebnisse zusammengefasst und gesichert werden. In der Regel haben dann die Schüler nach diesen Sicherungsphasen die Möglichkeit, das Gelernte als Hausaufgabe mit Hölzchenmustern anzuwenden (Anhang C zeigt z. B. eine längere Hausaufgabe, die nach Erarbeitung (II) eingesetzt wurde). Erarbeitung (I) lässt die Lösungswege noch bewusst offen und fragt nur nach den Ergebnissen für hohe Figurennummern, fordert aber explizit noch keine Verallgemeinerungen ein. Erarbeitung (II) fordert aber schon ein, das Vorgehen allgemein in Worten (als *„Zählregel“*) zu beschreiben und diese auch zu erklären. Erst ab Erarbeitung (III) werden die Schüler explizit aufgefordert, einen Term *‚mit x‘* aufzustellen, einzelne Schüler haben aber immer schon ab Erarbeitung (I) von sich aus erste Variablenterme aufgestellt. Zum Überprüfen der Zählregeln oder Terme wird von Anfang an und durchgehend zu Testeinsetzungen ermutigt.
In Erarbeitung (I) sind alle Schüler in der Lage Muster in der Folge zu erkennen, zumindest den Zuwachs von +4 sichtbaren Quadraten von Folgeglied zu Folgeglied. Es ist hier essenziell, dass man nicht direkt nach einem Term für einen x-beliebige Würfelturm fragt, sondern den Umweg über große Figurennummern geht, etwa: „Wie viele sichtbare Quadrate hat die 142. Figur?“. Nur so werden die Schüler dazu aufgefordert, explizit Muster zu finden oder sich der bereits entdeckten Muster bewusst zu werden, um sie operativ anwenden zu können, bevor sie dieselben überhaupt explizit formulieren können. Oder sie reorganisieren ihre Entdeckungen, indem Sie sich z. B. fragen was passiert, wenn 141-mal die Zahl 4 addiert wird.
Beim Versuch, die Anzahl für eine hohe Figurennummer zu bestimmen, entwickeln sich dann zwei unterschiedliche Sichtweisen, eine eher *dynamische*, die eher die Veränderung von Folgeglied zu Folgeglied in den Blick nimmt und oft nur auf die gezählten Anzahlen guckt und eine eher *statische*, die eher auf die Aufbaustruktur der Würfeltürme blickt, und z. B. erkennt, dass jeder Würfel einer jeden Figur 4 sichtbare Quadrate beiträgt und dann noch ein Quadrat oben aufliegt (Abb. 12).
Die meisten Schüler beginnen bei den ersten Erarbeitungen mit dem Zählen der sichtbaren Quadrate und halten ihre Ergebnisse in Wertetabellen fest. Sucht man mit dieser numerischen Repräsentation eine Aufbauformel, so liegt eine *dynamische* Sichtweise auf der Hand. Aber es entwickeln sich auch *statisch-figurative* Sichtweisen (siehe Abb. 17), und zwar insbesondere dann, wenn nach Möglichkeiten einer Erklärung der gefundenen Terme gesucht wird.

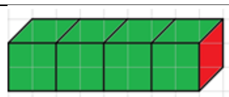
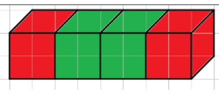
Würfel-schlange Nr.	 Lena	 Leo	Term-wert	3. Möglichkeit
4	$4 \cdot 3 + 2$	$(4-2) \cdot 3 + 2 \cdot 4$	14	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x				

Abb. 17: *Lena und Leo haben Figur Nr. 5 eingefärbt, um ihre gefundenen Terme zu erklären. Findet noch einen weiteren Term und erklärt ihn wie Lena und Leo durch Einfärben.*

nummer der Fig.

$5 \cdot x + 4$ ← für die 4 sichtbaren felder an der seite der Fig.

immer sichtbare fälder bei 2 aufeinandergestapelten würfeln.

steht dein *x*?

$x \cdot 5 + 4$

weil es kommen immer 5 Seiten dazu und 4 sind die Anfang- und Endseiten.

Term: $4+x+(2\cdot x)\cdot 2$

Links und rechts sind immer genau 4 Seiten sichtbar und oben sind immer soviele Seiten sichtbar, wie man Würfel verwendet.

deswegen: $4+x$

Auf der forder Seit sind doppellt soviele Quadrate sichtbar wie die Nummer der Figur deswegen: $2\cdot x$. Und weil es auch noch eine Rückseit gibt rechnet man das noch $\cdot 2$

Und dan kommt $4+x+(2\cdot x)\cdot 2$ raus.

dem Blatt)

$(x\cdot 2)\cdot 6 - ((x\cdot 3)+(x-1)\cdot 4)$

nicht sichtbare Quadrate

Anzahl der Würfel

Anzahl aller Quadrate

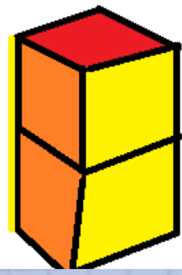
nicht sichtbare Quadrate zwischen den Säulen

nicht sichtbare Quadrate pro Säule

2*(x*2)+4+x

2*(x*2)+4+x

2*(1*2)+4+1=9



$9+(5\cdot x)$

x steht für zusätzliche säule

$9\cdot x-(x-1)\cdot 4$

Wenn man eine Mauer aufstellt ($x=1$), dann sieht man 9 Quadrate. Deshalb rechne ich „$9\cdot x$", da es ja logisch wäre wenn gelten würde: $x=1:9$ $x=2:2\cdot 9$. Das würde auch stimmen, wenn man 3 einzelne Mauern nehmen würde. Die Mauern werden jedoch zusammengesetzt und so entstehen an jedem Punkt an dem sich zwei Mauern treffen 4 unsichtbare Quadrate die vorher als sichtbar gezählt wurden. So könnte man nun eigentlich schreiben: $9\cdot x-x\cdot 4$. Das wäre aber nicht richtig, denn da an jeder Außenseite doch noch 2 Quadrate sichtbar sind, und $2+2=4$ ist, sind es immer vier Quadrate weniger als $x\cdot 4$. Also $(x-1)\cdot 4$.

Abb. 18: Auswahl von Schülerterm mitsamt Erklärungen zu Erarbeitung (III) (Würfelmauern) aus dem vierten Durchgang.

Schüler, denen es leicht fällt ihre Terme *statisch-figurativ* zu erklären, können diese in der Regel auch *dynamisch* erklären. Andere Schüler bleiben der dynamischen Sichtweise verhaftet. Erstere kamen öfter auf belastbare Regeln, um Anzahlen für hohe Figurennummern zu bestimmen.
Die „Rechenweise" für eine hohe Figurennummer wird dann zu einer Aufbauregel für x-beliebige Zahlen verallgemeinert, die oft zunächst als Zählregel formuliert wird (z. B. *„Ich rechne die Anzahl der Würfel mal 4 und dann +1"*). Einzelne Schüler wählen aber schon von sich aus die formale Beschreibung mit der Variablen x.
Schüler mit einer eher dynamischen Sichtweise machen häufig folgenden Fehler: Sie proportionalisieren und bestimmen z. B. die Anzahl der 100. Figur durch das Zehnfache dessen, was sie bei der 10. Figur gezählt haben. Zudem zeigen genau diese Schüler eher Schwierigkeiten dabei, die Bedeutung der Variablen x (Figurennummer) auszumachen. Dabei entsteht dann z. B. bei Erarbeitung (I) oft der Term $5 + x \cdot 4$ (statt $5 + (x - 1) \cdot 4 = 1 + x \cdot 4$) . Die gleichen Schüler tun sich i. d. R. auch schwer mehrere unterschiedliche Terme zu finden.
Schwächere Schüler gehen an das Aufstellen eines Terms mit einem *trial&error*-Verfahren heran. Sie probieren erst einmal einen Term und passen diesen an die gezählten Zahlenwerte an, bis er für eines oder mehrere Glieder gilt. Im Laufe der Diskursentwicklung versuchen diese Schüler oft die vorgeführten Denkweisen „kompetenter Anderer" zu imitieren und entwickeln daraus mal mehr und mal weniger funktionierende individuelle Verfahren. Diese Verfahren münden oft in einer empirisch gefundenen heuristischen Regel, dass bei einem Zuwachs von $+a$ der Term ‚immer' $ax + b$ ‚sein muss'. Der Parameter b wird dann durch Probieren an ein Zahlenpaar angepasst und so entsteht mal ein richtiger, mal ein falscher Term der Form $ax + b$[55].
Es fällt mir schwer, solche sich diskursiv entwickelnden individuellen Routinen den eher kognitivistisch konnotierten Kategorien *prädikativ* oder *funktional* zuzuordnen. Deshalb spreche ich im Folgenden – wie Tatjana Berlin (2010) – stattdessen lieber von *dynamischen* und *statischen* Strategien und führe zudem die Kategorie *Heuristische Strategien* ein. Letztere verwende ich, wenn ein Schüler durch Anpassen der Formel $ax + b$ auf einzelne Zahlenwerte oder durch ein *Trial & Error*-Verfahren auf seine Aufbauformel kommt.
Nachdem nach und nach immer stärker zur algebraischen Schreibweise übergangen wurde, gelang es fast allen Schülern, mindestens einen exakten Term aufzustellen, vielen aber auch auf unterschiedlichste Denkarten zwei oder mehr, die sie auch nachvollziehbar erklären konnten (Abb. 18).

Wenn die Variable in einem Term mehr als einmal auftauchte zeigte sich bei fast allen Schülern ein weiterer Fehler. Schüler entdecken z. B. bei dem Würfelturm (Erarbeitung I), dass, wenn sie jedem Würfel 5 sichtbare Quadrate zuordnen, sie bei allen bis auf einen Würfel ein Quadrat zu viel gezählt haben. Statt $5 \cdot x - (x - 1)$ stellen viele Schüler jetzt aber den Term $5 \cdot x - x$ auf! Dieser Fehler ist bekannt. Nydegger (2018) identifiziert in ihrer Dissertation viele solche Fehler beim symbolischen Beschreiben und meint dazu:

[55] In allen Durchführungen war das Aufstellen von linearen Funktionsgleichungen aus einem Graphen und aus einer Wertetabelle heraus Gegenstand der direkt vorher durchgeführten Reihe. Obwohl viele Schüler von sich aus Wertetabellen für die enaktiv-ikonisch repräsentierten Zahlenfolgen anfertigten, kam es nicht vor, dass jemals ein einziger Schüler sein prozedurales Wissen (das durchaus vorhanden war, wie die Pretests und in einer Durchführung die Ergebnisse einer unmittelbar vor der Algebrareihe durchgeführten Klassenarbeit zeigte) über lineare Funktionsgleichungen nutzte, um so einen Term für die Zahlenfolge aufzustellen, indem man z. B. zwei Wertepaare nutzt.

„Innerhalb eines Kontextes steht der gleiche Buchstabe für dieselbe Zahl, denselben Term oder dieselbe Zahlenmenge. Die Formulierung *Die Variable steht für eine beliebige Zahl* kann auch falsch verstanden werden. Das Wort *beliebig* ist nur beschränkt zutreffend. Wird die Variable mit einer bestimmten Zahl belegt, gilt diese Bindung für den gesamten Term oder für die gesamte Gleichung.“ (Nydegger (2016), S. 59)

Malle spricht hier von *Bedeutungskonstanz* (ebd. 1993, S. 111) und Siebel (2005) vom *Verweisungscharakter* der Variablen.

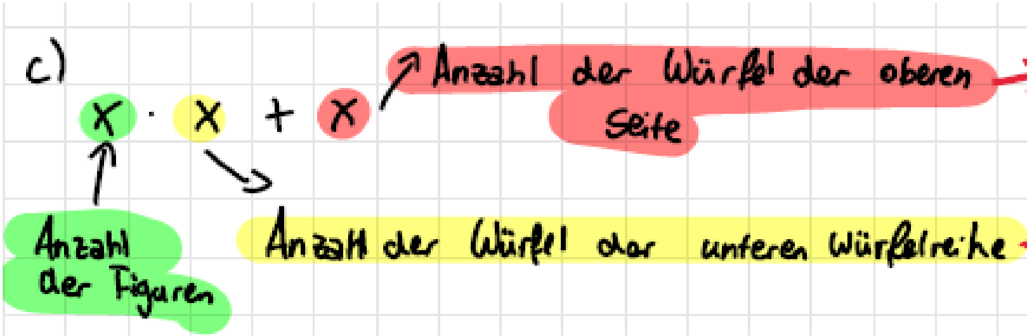


Abb. 18: *Ein drastisches Beispiel, wie die Bedeutungskonstanz der Variablen verletzt, die Formulierung „x steht für eine beliebige Zahl“ überinterpretiert, wird. Zu sehen ist ein „Aufbauterm“ für die Folge „Mauern mit Zinnen“ (Anhang C). Gezählt wird hier die Anzahl der Würfel (□) der Folge*  *… .*

Was könnte hinter diesen Unsicherheiten mit dem Verweisungscharakter der Variablen stecken?
In dieser frühen Phase der symbolischen Algebra stellen sich die Schüler die Variablen oft als „Container“ für Zahlen vor. In der Platzhalterschreibweise wird das offensichtlicher. Sieht man in der Schreibfigur $5 \cdot \square - \square$ (respektive $5 \cdot x - x$) in $\square$ (resp. x) lediglich „Container“ für Zahlen, ist es durchaus vernünftig, diese „Container“ mit verschiedenen Zahlen zu befüllen. Ein so denkender Schüler, der direkt nach dem Aufstellen seiner Formel $5 \cdot x - x$ mit derselben hantiert, würde auf richtige Ergebnisse kommen, indem er seine Denkhandlungen in die „Platzhalter“ $\square$ und x hineindenkt. Schon auf der Ebene des symbolischen Beschreibens ist die Variable also mehr als ein bloßer „Platzhalter für Zahlen“. Der *Verweisungscharakter* ist eine Konvention, die die kollaborative und internalisierte Kommunikation über Terme erst möglich macht, indem sie es ermöglicht, die Denkhandlungen beim Aufstellen eines Terms in symbolischer Form abzubilden. Der Schüler, der Tage später seine selbst aufgestellte Formel $5x - x$ anguckt, kann daraus seine eigene Denkweise höchstwahrscheinlich nicht mehr nachkonstruieren – ganz im Gegensatz zur Formel $5x - (x - 1)$! Durch Verweis auf die Bedeutung der Variable als Nummer der Figur konnte dieser Verweisungscharakter, indem man Verstöße gegen denselben diskutierte, immer leicht geklärt werden.

Es treten auch weitere Schreibkonventionsverletzungen auf. Manchmal wird die ‚Punkt vor Strich‘- Regel missachtet und keine Klammern gesetzt, wo sie eigentlich gesetzt werden sollten. In der Regel werden aber eher zu viel als zu wenig Klammern benutzt. Viele Schüler nutzen von sich aus Klammern, um einzelne Denk- und Rechenweisen einzukapseln und voneinander abzugrenzen, um mit ihrer Aufbauformel möglichst eindeutig das *Narrativ* ihrer Denkweise zu erzählen. Ein Schüler, der z. B. bei den Würfelschlangen (Erarbeitung (II), Abb. 17) den Term $(x \cdot 3) + 2$ statt $x \cdot 3 + 2$ aufstellt, möchte damit eindeutig mitteilen, dass zuerst ein jeder Würfel der x-ten Figur mit 3 sichtbaren Quadraten zur Gesamtzahl der Quadrate beiträgt und dann noch die beiden Quadrate ganz links und rechts dazukommen. Vereinzelt treten auch Schreibfiguren auf, die zwar das richtige Narrativ erzählen, aber nahezu jegliche Konvention verletzen. Bei den Würfelschlangen sieht das dann so aus:

$$x \cdot 3 = x + 2 = x.$$

Auf den ersten Blick sieht diese Rechenkette vielleicht wie vollkommener Blödsinn aus. Auf den zweiten Blick und zusammen mit den Erklärungen der Schüler wird aber klar, dass sich hierin eine korrekte Aufbauregel in konventionsverletzender Schreibweise widerspiegelt. Das Narrativ hinter dieser Schreibfigur ist erklärbar: Man nehme die Zahl x (die Nummer der Figur) und muliplizìere diese mit 3, und man erhält das Ergebnis x: $x \cdot 3 = x$. Da jetzt noch die beiden Quadrate links und rechts fehlen, addiere man dazu 2 und erhält die gesuchte Zahl x: $x \cdot 3 = x + 2 = x$.
Die Notation $x \cdot 3 = x + 2 = x$ spiegelt also eine zutiefst operational-arithmetische Denkweise wider, in der die Konventionen des „$=$"-Zeichens als Relationszeichen, des Referenz- und des Verweisungscharakters verletzt werden. Die Gleichungskette muss von links nach rechts gelesen werden, das „$=$"-Zeichen zeigt das Ausführen einer Rechenhandlung an und die Variable x fungiert einfach nur als Container, in den hintereinander unterschiedliche Zahlen einsortiert werden. Setzt man rechts z. B. $x = 5$ ein, so wird x hintereinander 15 und 17. Es ist klar, dass dieser Schüler unmöglich mit Variablen rechnen kann. Taucht so etwas im Unterricht auf, dann liegt eine didaktische Goldgrube vor, weil man hier die Konventionen durch Konventionsverletzungen explizit machen kann. An einer einzigen Schreibfigur kann man klären, dass das „$=$"-Zeichen als Relationszeichen zu lesen ist, dass die Variable immer auf das Gleiche referenziert und dass dann, wenn mehrere gleichbenannte Variablen im gleichen Kontext auftauchen, alle zwar für beliebige, aber doch gleiche, Zahlen stehen.

Bis hierhin wurden also unterschiedliche Terme zu gleichen Folgen aufgestellt und diese auch immer wieder durch Testeinsetzungen überprüft. Um mit der Nomenklatur von Prediger zu sprechen, waren also die beiden Gleichwertigkeitsaspekte der *Beschreibungsgleichheit* und der *Einsetzungsgleichheit* dominierend. In jedem Falle entstand so ab der allerersten Durchführung stets ein Klassenfundus an gleichwertigen Termen, so dass es eine wahre Freude war (siehe auch Anhang C). Abbildung 18 zeigt eine Auswahl von Schülertermen für Erarbeitung (III) mitsamt Erklärungen. Dieser Fundus könnte nun das Tor zum algebraischen Kalkül aufschließen, wenn es nur gelänge, die Äquivalenz der Terme durch Umformen nachzuweisen.
Erarbeitung (IV) (Abb. 16) soll nun den Aspekt der *Umformungsgleichheit* als Übergang zum Termumformen anbahnen. Hier wird nun absichtlich die Anzahl der Würfel statt die Anzahl der Quadrate gezählt, damit die Strukturen der aufgestellten Terme nicht zu komplex ausfallen. Zur Beantwortung der Teilaufgabe e) in Erarbeitung (IV) kann nun prinzipiell auf drei Ebenen argumentiert werden.

Die Terme liefern für beliebig lange Mauern die richtige Anzahl Würfel, da …

- … sie alle drei dieselbe Würfelmauer beschreiben, also *beschreibungsgleich* sind
- … beliebige Einsetzungen immer die gleichen Termwerte ergeben, sie also *einsetzungsgleich* sind
- … sie durch Umformen ineinander überführbar, also *umformungsgleich* sind

Es zeigt sich nun in allen Durchführungen, dass beim Versuch, die selbst aufgestellten gleichwertigen Terme zu nutzen, um aus den inhaltlichen Ebenen der Beschreibungs- und Einsetzungsgleichheit heraus die kalkülhafte Ebene der Umformungsgleichheit zu entwickeln, sich ganz wesentliche Lernhürden auftun.

VII.I.2 Der Übergang ins Kalkül bei der Musterreihe

1. Durchführung – Aufbauterme als Motivation des Termumformens?

Erarbeitung (IV)– gestaffelte Würfelmauern

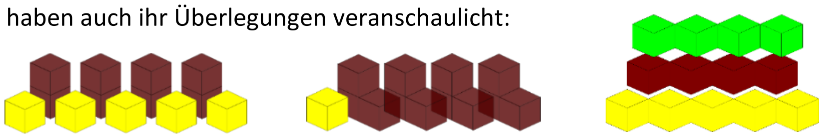
Jemand hat aus Würfeln diese Mauern gebaut.

a) Baut nach und findet die Anzahl der Würfel für die Glieder 1, 2, 3 und 4

Milena, Paul und Erkan beschreiben die Anzahl Würfel dieser Mauern unterschiedlich.

Erkan: $(x+1)+x+x$ **Milena:** $2 \cdot x+(x+1)$; **Paul:** $1+3 \cdot x$

Die Kinder haben auch ihr Überlegungen veranschaulicht:



b) ***Wofür steht das x?*** *Welche der Skizzen gehört zu welchem Kind? Erklärt, wie die drei gedacht haben!*

c) *Überprüft für $x = 3, 4 \text{ und } 100$, ob die Terme der drei Kinder alle die gleichen Werte liefern. Vergleicht auch mit euren eigenen Ergebnissen aus Teil a).*

d) Wie kann man sicher sein, dass alle drei Terme für beliebig lange Mauern die richtige Anzahl Würfel liefern? Begründet eure Antwort auf verschiedene Arten.

Kasten 3: *Erarbeitung (IV), die einen Übergang in das Kalkül anbahnen soll.*

Als Abschluss der Phase des symbolischen Beschreibens wird die Erarbeitung IV (Kasten 3) in Partnerarbeit durchgeführt. Danach werden die Ergebnisse im Plenum gesichert und diskutiert. Nachdem die Teile a)-c) besprochen sind, folgt eine Plenumsdiskussion von Teil d).
Dabei wird u. a. thematisiert, inwiefern man durch Zahleinsetzungen die Gleichwertigkeit zweier Terme nachweisen kann. Genau davon handelt die folgende Episode 1 .

***

Episode 1 – Muss man wirklich unendlich viele Zahlen einsetzen?

> 01 Lehrer: *Kann man sich jetzt also sicher sein, dass alle drei Terme für beliebig lange Mauern die richtigen Ergebnisse liefern? Was habt ihr euch dazu überlegt?*

Einzelne Schüler argumentieren auf der Beschreibungsebene, dass alle drei Terme „dieselbe Situation darstellen", „für dieselbe Mauer stehen".
Mehrere Schüler argumentieren, dass sie Zahlen eingesetzt haben. Das greift der Lehrer auf und es entsteht zusammen mit den Schülern eine Wertetabelle an der Tafel, indem in alle drei Terme $x = 1$ und $x = 2$ eingesetzt und so beides mal das gleiche Ergebnis $(4 \text{ und } 7)$ erzielt wird.

> 02 Lehrer: *Aber kann man sich wirklich sicher sein, dass, egal was ich einsetze … egal welche Zahl, immer der gleiche Wert herauskommt?*

Daraufhin wird auf Vorschlag eines Schülers die Zahl $x = 100$ eingesetzt und dabei – an der Tafel notiert – für alle drei Terme der Wert 301 erzielt.

> 03 Lehrer: *Gut. Jetzt haben wir also gezeigt, dass für drei x-Werte immer die gleiche Anzahl herauskommt … Was meint ihr: Kann man sich jetzt sicher sein, dass immer, egal für welche Zahl, der gleiche Wert herauskommt*

Die Schüler sind sich durchgängig sicher. Vielmehr scheint sie die Frage zu befremden. Der Lehrer meint daraufhin, dass man, um sich wirklich sicher sein zu können, unendlich viele Zahlen einsetzen müsste, was man ja nicht ‚wirklich' tun kann. Daraufhin spricht er explizit die Schülerin Lena an, mit der er in der Erarbeitungsphase schon ein Zwiegespräch hatte, dass darum ging, dass man den Termen $2 \cdot x + (x+1)$ und $(x+1) + x + x$ auch „so ansehen würde", dass sie gleich sind.

> 04 Lehrer: *Lena! Du hattest doch noch eine andere Idee, warum die Terme gleich sein müssen ... also ohne, dass man Zahlen einsetzen muss. Magst du das mal erklären?*

> 05 Lena: *Also… hmmm.. Milena und Erkans Terme sind ja irgendwie gleich …. Beide haben 2 x'e und x plus 1, also beide haben 3 x und 1*

Hier endet die Stunde und der Lehrer gibt die Hausaufgabe über Lenas Aussage nachzudenken und eine Hölzchenaufgabe zu bearbeiten, in der ein (falscher) Term bei $x = 1$ wertgleich zu drei weiteren (richtigen) Termen ist und erst durch Einsetzen von $x = 2$ als falsch überführt wird.

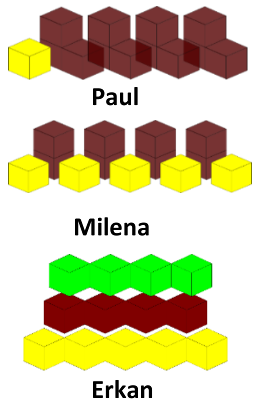
***

Am Anfang der nächsten Stunde führe ich ein 20-minütiges Interview mit Maria, einer eher leistungsstärkeren Schülerin, die am Tag vorher zusammen mit Lena in der Partnerarbeitsphase in die Diskussion um die ‚visuelle' Gleichheit der Terme verwickelt war.

***

Episode 2 – Ist es nicht logisch, dass $1 + 3 \cdot x$ und $2 \cdot x + (x+1)$ „gleich" sind?

Im Interview wurden Maria unzugeordnet die drei gleichwertigen Terme $1 + 3 \cdot x$, $2 \cdot x + (x+1)$, $(x+1) + x + x$ der letzten Unterrichtsstunde und deren Erklärskizzen vorgelegt. Nachdem sie Skizzen und Terme richtig erklärend zugeordnet hat, setzt sie als Reaktion auf die Frage *„Ob man denn jetzt sicher sein könne, dass alle 4 Terme für jede x-beliebige Mauer die gleichen Werte liefern"* den Wert $x = 100$ ein und erhält so für alle vier Terme den Wert 301. Unmittelbar danach spricht sie *von sich aus* die „Gleichheit" der beiden Terme $1 + 3 \cdot x$ und $2 \cdot x + (x+1)$ an:



(1) Maria: *Ist es nicht logisch, dass der und der* [zeigt auf die beiden Terme $1 + 3 \cdot x$ und $2 \cdot x + (x+1)$] *eigentlich gleich sind?*

(2) Int.: *Wie meinst du das?*

(3) *Hmmm. Ja 2x und x* [zeigt auf $2 \cdot x$ und x in $2 \cdot x + (x+1)$] ist drei x … und noch 1

(4) Int.: *Das ist interessant! Kannst du das mal aufschreiben?* [Maria überlegt lange, es kommt nichts] *Du könntest z. B. die Klammer um x plus 1 einfach weglassen.*

(5) Maria: [überlegt] …. *Nö, das geht nicht, weil das* [zeigt auf $(x+1)$] *gehört ja zusammen, das iss ja die unterste Reihe* [zeigt auf die gelbe Würfelreihe von Milena]

Maria fragt sich, ob es nicht „logisch ist", dass die *„Terme"* $3 \cdot \mathrm{x} + 1$ und $2 \cdot \mathrm{x} + (\mathrm{x} + 1)$ „eigentlich gleich sind?" Und Sie denkt dabei wohl nicht daran, dass beide Terme die gleiche Würfelmauer beschreiben, weil sie ja ‚2x' und ‚x' zusammenfasst. Nach der Aufforderung diese Überlegung aufzuschreiben kommt lange nichts.
Der Hinweis die Klammern aufzulösen ist nicht zielführend. Vielmehr könnte dadurch die Beschreibungsebene wieder dominanter werden, da die Klammer für Maria ja eventuell Teil des *Narrativs* der Formel $2 \cdot x + (x + 1)$ ist. Nur durch die Klammern in $(x + 1)$ *erzählt* die Formel ja von der Denkweise von Milena. Viele Schüler setzten beim Aufstellen mehr Klammern als nötig, z. B. $(2 \cdot x) + (x + 1)$ oder $9 + (5 \cdot x)$ (siehe auch Abb. 18), und benutzen die Klammern mehr als narrativaufbauende, denn als die Reihenfolge der *Rechnung* festlegenden Symbole. Diese durch das Aufstellen von Termen entstehende narrative Blockade ist in der Fachdidaktik bekannt. Radford & Puig (2007) sprechen davon, dass ein selbst aufgestellter Term die Geschichte über seine Entstehung „erzählt": „Producing an algebraic text is a sense-making labour" (ebd. 2007, S.160). Jede Transformation eines solchen narrativ aufgeladenen Terms (z. B. schon das Weglassen von Klammern und das Umsortieren von Teiltermen) führt zu einem Zustand, in dem die Schüler „ihre Geschichte" verlieren und so wehren sie sich innerlich dagegen. Schon das Umgruppieren ist schwierig, da es das Narrativ zerstören kann. Wie schwer ist es dann, den narrativ aufgeladenen Term als abstrakten symbolischen Ausdruck anzusehen, den man regelgeleitet umformen kann? Radford formuliert es sehr treffend: *„The narrative dimension of formulas has to collapse" (Radford 2010, S. 11)*.

Zudem spricht Maria davon, dass „2x *und* x drei x ist". Und nicht davon, dass sie $2x$ und x addiert oder „plusrechnet". Es kann also durchaus sein, dass Maria die 2 x'en und das eine x so wie Bauklötzchen ‚zusammensortiert', wobei sie halt dann das eine x aus der Klammer ‚herausholt'. Jedenfalls deutet nichts sicher darauf hin, dass sie mit den Variablen *rechnet*.

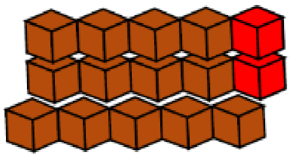


Abb. 19: $3 \cdot (x + 1) - 2$

Ab der zweiten Durchführung wurde dann noch eine weitere Zählweise in die schnelleren Partnerarbeitsgruppen hineingegeben, die auf den Aufbauterm $3 \cdot (x + 1) - 2$ führt (Abb. 19)[56]. Auch wenn hier in der Partnerarbeit wieder beobachtet werden konnte, dass Schüler auch auf der *„Termebene"* argumentierten, dass $x \cdot 2 + (x + 1)$, $x + (x + 1) + x$ und $1 + 3 \cdot x$ „das Gleiche ist", konnte ich hier nicht beobachten, dass irgendjemand so mit dem Term $3 \cdot (x + 1) - 2$ argumentiert hat, indem ja nur ein x von Klammern „umschlossen" wird.

***

Beide Episoden des ersten Durchgangs zeigen schon auf, dass der Übergang zur *Umformungsgleichheit* kein geradliniger ist.
Die Schüler halten das Einsetzen von Zahlen (und oft auch das Einsetzen einer einzigen Zahl) für ausreichend, um die „Gleichwertigkeit" zweier Terme nachzuweisen. In einem späteren Durchgang wurde die Teilaufgabe d) als schriftliche Abfrage mit 19 Schülern gestellt (Kasten 4). Zwei der 19 Schüler beantworteten die Frage gar nicht, zwei sagen nur, dass *„alle stimmen"*, ohne dabei eine Erklärung abzugeben. Drei geben eine Erklärung nur auf der Beschreibungsebene ab, zwei auf der Beschreibungsebene und dadurch, dass sie eine Zahl Einsetzen. Der restlichen 10 Schülern setzen lediglich Zahlen ein und acht davon nur eine einzige Zahl (siehe Kasten 4).

---

[56] Ab der 4. Durchführung war dann der Term $3 \cdot (x + 1) - 1$ integraler Bestandteil des Arbeitsblatts zu Erarbeitung (IV) „gestaffelte Würfelmauern" (siehe Anhang B).

Wie kann man sicher sein, dass alle drei Terme für beliebig lange Mauern die richtige Anzahl Würfel liefern? Begründet eure Antwort auf verschiedene Arten.

Schülerantwort	Anzahl der Schüler
… keine Antwort	2
… keine Erklärung	2
… Argumentation auf der Beschreibungsebene	5
… setzten eine Zahl in jeden Term ein	10
… setzen zwei oder drei Zahlen in jeden Term ein	3

Kasten 4: *Ergebnisse einer schriftlichen Kurzabfrage zu den Termen aus Erarbeitung (IV) in der 2. Durchführung mit 19 Schülern.*

In allen Plenums- und Einzelgesprächen aller Durchführungen offenbart sich, dass viele Schüler es von sich aus für ausreichend halten, eine Zahl einzusetzen, um die Gleichwertigkeit zweier Terme zu zeigen. Und das auch nachdem bereits im Unterricht schon thematisiert worden war, dass zwei nicht beschreibungsgleiche Terme sehr wohl auch in einem x-Wert wertgleich sein können. Werden die Schüler dann oft genug mit Termen konfrontiert , die nur für eine einzige Zahl wertgleich sind, dann halten einige es eben für ausreichend zwei Zahlen einzusetzen. Da es sich hier durchgehend um lineare Terme handelt, haben die Schüler – ohne aber den Grund dafür benennen zu können – sogar recht damit, dass zwei Einsetzungen ausreichen[57]. Die Äußerung des Lehrers in obenstehendem Plenumsgespräch, um sicher zu sein, müsse man unendlich viele Zahlen einsetzen, was man ja nicht könne, geht durchaus d'accord mit der landläufigen Argumentation in vielen Schulbüchern. Das eingeführte Lehrbuch *Lambacher Schweizer G8* (Braun et al. 2009) z. B. arbeitet im Erklärtext zur Einführung des Termumformens auch mit gestaffelten Würfelmauern und gibt die beiden Aufbauformeln $3 \cdot e + 1$ und $2 \cdot e + (1 + e)$ an: „Nun kann man sich fragen, ob beide Terme für beliebig lange Mauern die richtige Anzahl Würfel liefern. Zur Beantwortung müsste man alle möglichen Zahlen (also unendlich viele) einsetzen, was unmöglich ist. Man kann die **Gleichwertigkeit** – man sagt auch **Äquivalenz** – beider Terme durch Umformen zeigen." (Braun et al. 2009, S. 116). Danach wird im Erklärtext der Term $2 \cdot e + (1 + e)$ mit Bezug auf das Kommutativ- und Assoziativgesetz zu $3 \cdot e + 1$ vereinfacht und man ist beim Termumformen angelangt.

Im weiteren Reihenverlauf der ersten Durchführung wurde erst einmal nicht mehr weiterverfolgt, wie die Äquivalenz der vielerlei in Phase 1 aufgestellten gleichwertigen Terme durch Umformen gezeigt werden kann. Stattdessen wurden die Termumformungsregeln in neuen Kontexten in einem gestuften Vorgehen schrittweise eingeführt. Zuerst *das Vertauschen und Zusammenfassen in* sogenannten *algebraischen Summen (*Assoziativ- und Kommutativgesetze, z. B. $x \cdot 4 + 2 - 3x + 1$*),* danach das *Ausmultiplizieren von Klammern* (Distributivgesetz*, z. B.* $3(x - 2) - 2(x + 1)$) und zuletzt das *Auflösen von Klammern* (Plus- und

[57] Ein (hypothetischer) Zugang zur Algebra, der die Funktionsperspektive (siehe Abschnitt IV.I) extensiv nutzen würde, käme für den Nachweis der Gleichwertigkeit zweier Terme ganz ohne Termumformungen aus. Für lineare Terme reichen eben zwei, für quadratische drei, usw., Einsetzungen. Aber die zentrale Zielperspektive des Termumformens besteht eben nicht im rechnerischen Nachweis der Gleichwertigkeit, sondern im Verfügbarmachen von Methoden, Termen eine andere Gestalt (Struktur) zu geben. Beim verständigen Anwenden von Termumformungen geht es doch meist um ein regelgeleitetes und *bewusst zielgerichtetes* Umformen von einer Termstruktur zur anderen, was wiederum die Ausbildung eines *Struktursinns* (Rüede 2012, uva) voraussetzt.

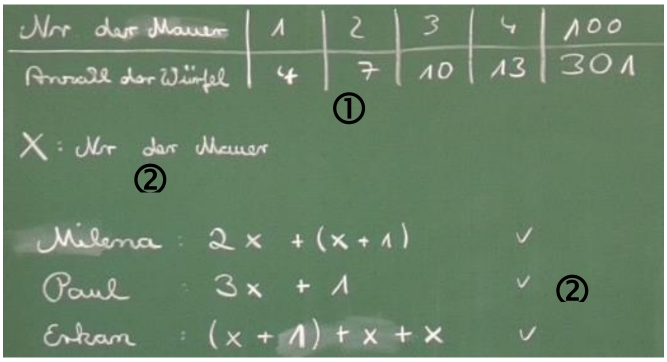
Minusklammerregel, z. B. $3x - (2x - 3)$). Erst danach wurde die Gleichwertigkeit an einem Teil der in Phase 1 selbst aufgestellten Terme als Anwendung der gelernten Umformungsregeln rechnerisch nachgewiesen.

Die Intention der Generalisierungsperspektive, Termumformungen in einen Kontext zu stellen aus dem sie heraus entstehen können, nämlich aus der Beobachtung heraus, dass unterschiedlich aussehende Terme die gleiche Folge repräsentieren, also *gleichwertig* sein müssen, hinterließ ein gewisses Unbefriedigtsein. Es scheint hier wirklich einen kognitiven Sprung zwischen dem Aufstellen von Termen aus sinnstiftenden Kontexten heraus und dem Termumformen zu geben. Und dies schon bei den allereinfachsten selbst aufgestellten Termen (wie z. B. $1 + 3 \cdot x$ und $2 \cdot x + (x + 1)$)! Der Übergang von der Beschreibungs- und Einsetzungsgleichheit zur Umformungsgleichheit scheint nicht so einfach zu sein, wie es Kasten 2 (S. 90) eventuell suggerieren könnte. Dementsprechend sollte im zweiten Durchgang genau da noch einmal etwas genauer hingeschaut werden.

Wir halten fest:

- Die überwiegende Mehrheit der Schüler hält es von sich aus für ausreichend, eine, höchstens zwei Zahlen einzusetzen, um die „Gleichheit" zweier Terme nachzuweisen. Und das auch weit nachdem sie eines Besseren belehrt wurden.
- Das beim Aufstellen von Termen aufgebaute Narrativ muss kollabieren, bevor man überhaupt ans Termumformen denken kann.
- Hinter Äußerungen von Schülern, die einem versierten Termumformer vielleicht wie erste Ansätze zur Termumformung vorkommen, könnten auch ganz andere Denkweisen stecken. Schülern, die den Termen „ihre Gleichheit" anzusehen meinen, könnten in Gedanken auch einfach nur die ‚x'en' als Objekte zusammenpuzzeln (Küchemmanns *letter as object*), ohne dass sie dabei an irgendwelche „Rechenhandlungen" mit Zahlen denken.

2. Durchführung – Schwierigkeiten und Lernhürden beim ‚Benutzen' der Aufbauterme zum Übergang ins Termumformen



Auch im zweiten Durchgang werden mittels der Erarbeitungen (I)-(III) viele gleichwertige Terme aufgestellt. In der 5. Unterrichtsstunde der Reihe wird Erarbeitung (IV) in Partnerarbeit bearbeitet. Schnellere Schülergruppen, die bei Teil d) schon gut auf der Einsetzungsebene argumentieren, werden in die Kleingruppen hinein gefragt, ob sie die „Gleichheit" der Terme auch durch ‚Rechnen mit x' zeigen können. Diese Aufforderung befremdete alle Schüler: *„Ja ich hab aber gar keine Zahlen, wie soll ich da denn rechnen*?" Einige Schülergruppen argumentierten dann aber, dass ja *„eigentlich alle 3-mal x rechnen"*.

Am Ende dieser Stunde wurden in einer 18-minütigen Plenumsphase die Ergebnisse gesichert. Zuerst wird eine Tabelle der Zuordnung an der Tafel fixiert (①) und die Zählweisen begründend den Skizzen zugeordnet (②). Danach wurde Aufgabenteil d) im Plenum besprochen (Episode 3).

***

Episode 3 – „Alle drei Kinder rechnen das Gleiche, nur auf eine andere Weise"

01 Lehrerin: ___ *Jetzt kommt die spannende Frage d). Wer liest nochmal vor?*

02 Lena (liest vor): *Wie kann man sicher sein, dass alle drei Terme für beliebig lange Mauern die richtige Anzahl Würfel liefern? Begründet eure Antwort auf verschiedene Arten.*

03 Lehrerin: *So, wer traut sich jetzt mal nach vorne und versucht das zu erklären? ___Warum haben sie alle recht? ___ (*nur zwei Schüler melden sich*) Finja, ich hatte schon so das Gefühl, dass du schon'ne Idee hattest, dann lass uns doch mal Anteil haben daran.* ___

04 Finja: *Also Milena rechnet 2 mal x und hat dann in der Klammer noch ein x, ähhh, Paul rechnet sofort 3 mal x und, ähhh, Erkan hat auch drei x in der Rechnung, die Erkan dann einzeln zusammenrechnet ,ähhh, Paul hat die also sofort, also wenn man 3 mal x rechnet das ist ja dasselbe wie x plus x plus x ....*[Die Lehrerin schreibt $3 \cdot x = x + x + x$ an die Tafel (③)] *.... Ähmm, und das 2-mal x ist auch eigentlich dasselbe, weil in der Klammer noch eins dazukommt ....* [Die Lehrerin schreibt $2 \cdot x = x + x$ an die Tafel (④)]

05 Lehrerin: *Ok ___ Wer kann nochmal wiederholen was Finja da festgestellt hat?*

06 Jori: *Also, dass die eigentlich alle fast das Gleiche rechnen nur auf ´ne andere Weise, ah, Milena erstmal 2 mal x plus x plus eins, ähhh, dann Paul 3 mal x plus eins, da haben die beide dreimal das x plus einen dazu gerechnet, ähhh, und Milena hat es noch etwas länger gemacht, erstmal 2 mal x und noch ein x dazu und Erkan hat auch x plus eins plus x plus x, also drei x zusammen und dann noch eins dazu, also theoretisch rechnen die alle das Gleiche …*[Die Lehrerin schreibt folgenden Satzanfang an die Tafel: Die 3 Kinder rechnen das Gleiche, (⑤)]

07 Lehrerin: *So jetzt hast du ´ne Einschränkung gemacht: Alle Kinder rechnen das Gleiche…*

08 Jori: *… nur, dass sie es etwas anders formulieren, nur auf eine andere Weise …*[Die Lehrerin ergänzt den Satz an der Tafel zu: Die 3 Kinder rechnen das Gleiche, nur auf eine andere Weise]

09 Lehrerin: *So, das hört sich jetzt noch ein bisschen komisch an ___ ist es jetzt das Gleiche oder ist es jetzt doch anders?___*

10 Josip: *Also ähmm, das iss halt, ich würd eher sagen, das ist das Gleiche, weil die schreiben es halt anders auf, also die ham´ ´ne andere Schreibweise, aber sonst ist der Gedankengang, sag ich mal, gleich …*[Die Lehrerin schreibt an die Tafel: Gedankengang gleich – andere Schreibweise (⑥)]

11 Lehrerin: *Bleiben wir mal bei dem Gedanken von Josip, da meldet sich die Sarah.*

12 Sarah: *Also, ich glaube, die denken alle gleich, ihr Gedanke ist aber, die gehen anders voran, die denken gleich, aber fangen anders an, einen anderen Anfangspunkt … …*[Die Lehrerinn schreibt an die Tafel: Anderer Anfangspunkt – gleicher Gedanke (⑦)]

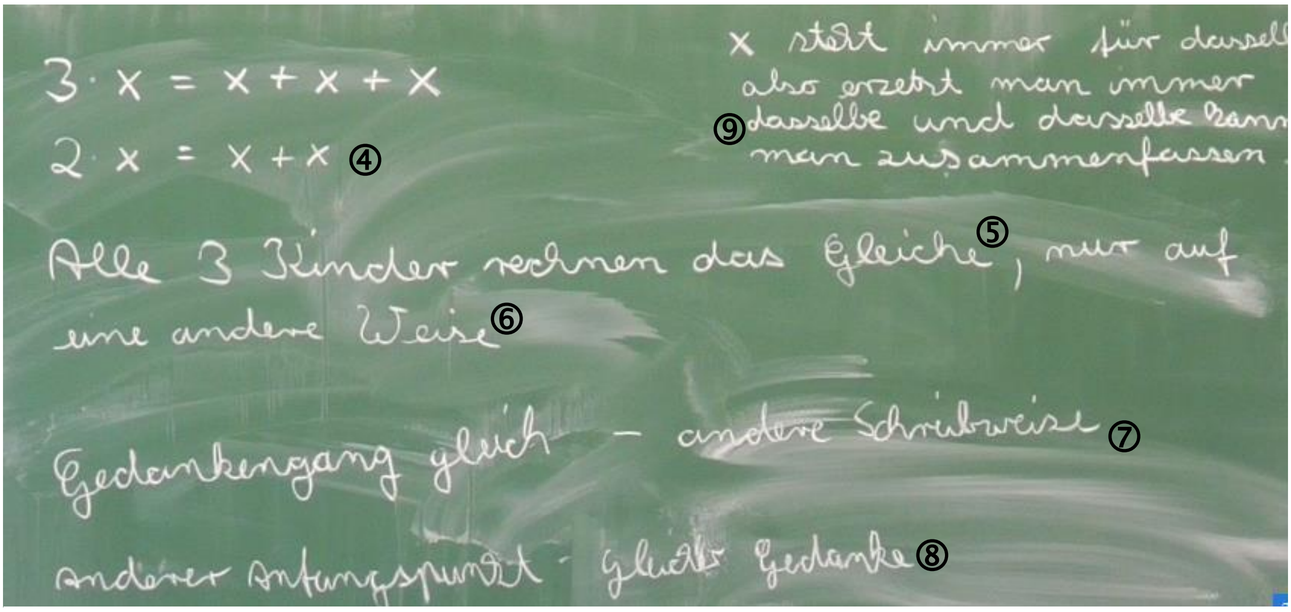


Abb. 20: *Tafelbild zu allerersten „Rechenhandlungen" mit Variablen*

Die Lehrerinn nimmt gleich Finja – ein überdurchschnittlich guter Schüler – dran, bei dem schon in den Partnerarbeitsgesprächen offenbar wurde, dass er die Zahlen hinter den Variablen sieht (03). Finja spricht jetzt (im Gegensatz zu Maria aus Episode 1) explizit von ‚Rechnen' : *„also, wenn man 3-mal x rechnet das ist ja dasselbe wie x plus x plus x …"* (04) und man kann sagen, dass die Lehrerin mit ihrem Tafelanschrieb „$3 \cdot x = x + x + x$" tatsächlich Finjas Gedanken schriftlich abbildet. Jori (06) greift dieses „Rechnen mit Termen" auf, erklärt auf Termebene *„drei x zusammen und dann noch eins dazu"* und schließt: „*also theoretisch rechnen die alle das Gleiche … nur auf eine andere Weise".* An den Äußerungen von Jossip (10) und Sarah (11) ist nicht mehr zu erkennen, ob sie an das „Rechnen mit Termen" von Finja und Jori anschließen, oder eher an die Beschreibungsebene denken („*andere Schreibweise*, *aber sonst ist der Gedankengang, sag ich mal, gleich*", „*die denken gleich aber fangen anders an*"). Da eröffnet Finja die Zahlenebene:

13 Finja: *Man könnte das x ja zum Beispiel auch, also die x stehen ja immer für das Selbe, ähhh und demnach hat man ja auch, ersetzt man ja die auch immer durch das Selbe, ähhh, zum Beispiel bei Erkans Rechnung jetzt 1 plus 1 plus 1 plus 1 und da könnte man auch einfach 3 mal x plus eins schreiben weil die gleichen Zahlen kann man zusammenrechnen [*Lehrerin schreibt an die Tafel: x steht immer für dasselbe, also ersetzt man immer dasselbe und das kann man zusammenfassen (⑧)]

Finja sieht die Referenz zu den Zahlen („*die x stehen ja immer für dasselbe")* und benutzt die Zahl 1 als generische Variable, um zu begründen, warum man so die x'en addieren kann. Das ist natürlich Klasse!

14 Lehrerin: ___ Das ist ne ganz tolle Erklärung. Da wollen wir nächste Stunde weitermachen.

***

Am Anfang der nächsten Unterrichtsstunde erklärt Finja (er ist der Einzige der sich auf die dementsprechende Aufforderung meldet) die Gleichwertigkeit der Terme $3 \cdot x + 1$ und $(x + 1) + x + x$ durch Addition der x'en. Er schreibt einfach: $(x + 1) + x + x = 3 \cdot x + 1$. Nach Anfrage benutzt er nochmals eine Zahl zur Begründung, dieses Mal die Zahl 2.
Danach wird im Plenum zunächst der Begriff *Gleichwertigkeit* anhand dieser beiden Terme eingeführt. Dabei wird geklärt, dass die Terme gleichwertig sind, weil sie das Gleiche beschreiben, weil Einsetzungen die gleichen Ergebnisse liefern und weil man die Terme ineinander umformen kann.

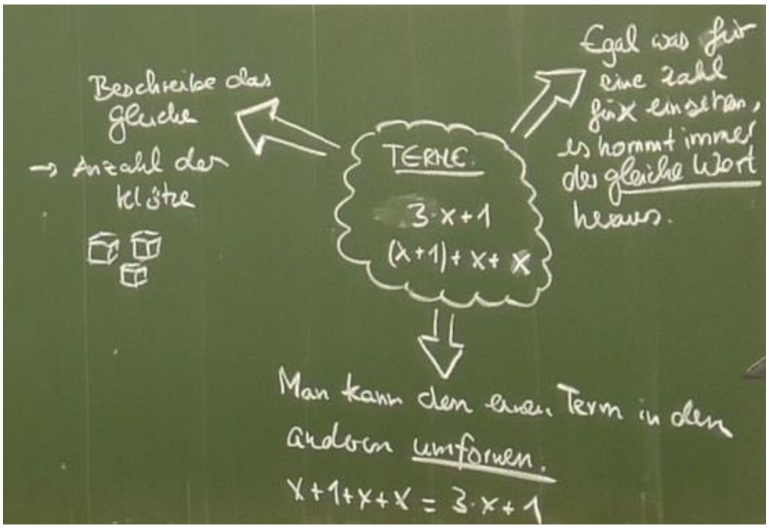


Abb. 21: *Tafelbild Gleichwertigkeit von Termen*

Danach sollte geguckt werden, inwiefern die Schüler von sich aus schon in der Lage sind, Terme, deren Gleichwertigkeit sie bereits auf der Beschreibungs- und Einsetzungsebene untersucht hatten, auch durch ‚Rechnen mit x' ineinander ‚umzuformen'. Dazu gab es das Arbeitsblatt *„Würfelschlangen revisited"* (Abb. 22).

AB Würfelschlangen *revisited*
Hier siehst du Terme, die in eurer Klasse für die Anzahl der sichtbaren Quadrate der Würfelschlangen aufgestellt wurden. Durch das Einsetzen von Zahlen hattet wir schon die Terme überprüft. Die Einfärbungen hattet ihr vorgenommen, um die verschiedenen Zählweisen zu erklären.

a) Welcher Term ist deiner Meinung nach der Einfachste?
b) Kannst du die anderen Terme nur durch „Rechnen" vereinfachen? Denke dabei an die Rechengesetze für Zahlen.

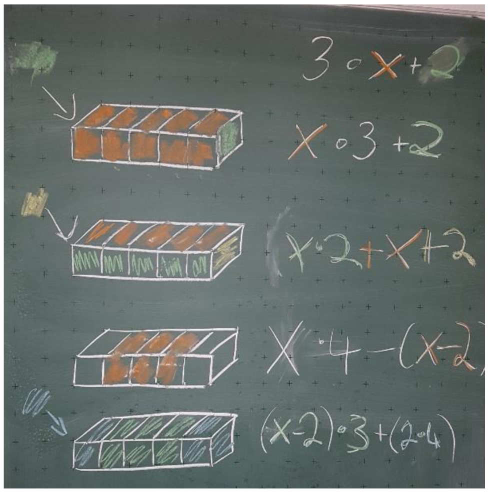


Abb. 22: *Arbeitsblatt, nachdem erste „Rechenhandlungen" mit Termen vorgeführt worden waren. Können die Schüler die Rechengesetze für Zahlen aktivieren, um selbst aufgestellte Terme zu vereinfachen?*

Nach dem gemeinsamen Lesen der Arbeitsaufträge und dem expliziten Hinweis der Lehrerin, dass „Rechnen" hier nicht bedeutet, Zahlen einzusetzen, sondern mit *„der Variable x zu rechnen, so wie wir es ja gestern schon mit den Termen von Milena, Paul und Erkan gemacht haben, nämlich ohne Zahlen einzusetzen"*, geht es in die Partnerarbeit.
In der Partnerarbeit zeigt sich dann, dass die Schüler durchweg mit dem Arbeitsauftrag überfordert sind. Alle Schüler identifizieren entweder $3 \cdot x + 2$ oder $x \cdot 3 + 2$ als die einfachsten Terme. Mit der Vorstellung eines ‚Rechnens mit x' können aber die allerwenigsten etwas anfangen. Stattdessen diskutieren die meisten Schülergruppen wieder auf der Beschreibungs- oder Einsetzungsebene und fragen sich, welche Zählweisen hinter den unterschiedlichen Termen stehen oder setzen Zahlen ein, um zu gucken, ob da auch *„wirklich überall das Gleiche herauskommt"*.

Nur einzelne Schüler argumentieren, dass – ähnlich wie gestern – es auch „logisch“ ist, dass $x \cdot 2 + x + 2 = 3x + 2$ ist.

Weitere Schüler zählen einfach nur die visuell sichtbaren x’en und die Zahlen zusammen: z. B.
$x \cdot 2 + x + 2 = 2x + 4$ oder $(x - 2) \cdot 3 + (2 \cdot 4) = x + 2$.

Wieder andere „verkleben“ irgendwie die einzelnen Teilterme, z. B. so:
$x \cdot 2 + x + 2 = x \cdot (2 + 2) + x$ oder $x \cdot 2 + x + 2 = (x \cdot x) + (2 + 2)$.
Darf man so *mit Zahlen* rechnen?

Bei den Termen, bei denen man das Distributivgesetz oder die Minus-Klammerregel bräuchte ($(x - 2) \cdot 3 + (2 \cdot 4)$ und $x \cdot 4 - (x - 2)$), haben sie überhaupt keine Idee was zu tun wäre. Lediglich Finja lässt bei $x \cdot 4 - (x - 2)$ einfach die Klammern weg, schreibt $x \cdot 4 - (x - 2) = 3x - 2$ und ist dann von der -2 in $3x - 2$ irritiert.

Es ist natürlich schön, wenn man einen „kompetenten Anderen“ wie Finja in der Klasse hat. Insgesamt entstand aber der Eindruck, dass die Diskursakzente der letzten Stunde zum „Rechnen mit Termen“ so ganz und gar nicht gefruchtet hatten. Stattdessen flüchten die meisten Schüler, die das „Rechnen mit x“ schlichtweg befremdet, in die schon vertrauten Inhaltsebenen. Man mag natürlich einwenden, dass die Idee „Rechengesetze zum Rechnen mit Termen zu aktivieren“ hier viel zu früh auftaucht. Aber hier sollte auch nur mal geguckt werden, inwiefern Schüler von sich aus – nachdem allererste einfache „Umformungen“ vorgeführt und erklärt worden waren – in der Lage sind, sich ein „Rechnen“ mit Termen vorstellen zu können und ob sie dieses „Rechnen“ gegebenenfalls auch schon auf einzelne Rechengesetze für Zahlen beziehen können.

In der kurzen Besprechung dieser Erarbeitung wird im Wesentlichen nur darauf eingegangen, weshalb die beiden Terme $3 \cdot x + 2$ und $x \cdot 3 + 2$ gleichwertig sind. Die Frage der Lehrerin, nach welchem Gesetz denn $3 \cdot x$ und $x \cdot 3$ das Gleiche sind, initiierte eine Ratespiel. Eine Schülerin nennt das *Assoziativgesetz*, eine andere das *Kommutativgesetz*. Auch der Begriff *Distributivgesetz* fällt. Die Lehrerin klärt, dass es das Kommutativgesetz ist und schreibt

„Kommutativgesetz $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 \quad a \cdot b = b \cdot a$"

an die Tafel. Daraufhin werden gemeinsam, mit dem Hinweis, dass man diese für das Rechnen mit Variablen braucht, die Rechengesetze für Zahlen gesammelt und an der Tafel festgehalten.

Diese und viele andere Beobachtungen erhellen jedenfalls: Die Vorstellung man könne mit Variablentermen rechnen, befremdet die Schüler ungemein. Rückblickend braucht man sich darüber auch gar nicht zu wundern.

Kurzer Einschub, warum man sich nicht zu wundern braucht

Bis hierhin haben die Schüler ja gekonnt Aufbauformeln aufgestellt, z. B. $4 \cdot x + 1$ für die Würfeltürme. Welche Vorstellung verbinden jetzt die Schüler mit der Variablen x und dem Term $4 \cdot x + 1$? Die Pretests (siehe Abschnitt V.IV und VI.III.1) haben ja gezeigt, dass viele Schüler mit den Konzepten ‚*letter as object*‘ und ‚*letter evaluated*‘ in die Reihe gehen und speziell mit der Vorstellung ‚*letter evaluated*‘ kommt man beim Symbolischen Beschreiben relativ weit.

Einziger Sinn und Zweck des Terms $4 \cdot x + 1$ ist ja, eine Formel zu finden, in die ich jeden x-beliebigen Wert Einsetzen kann, um dann die gesuchte Anzahl ausrechnen zu können. Deshalb reicht hier auch ein ‚*letter evaluated*', in der die Variable x für einen Platzhalter steht, in den ich eine Zahl einsetzte, um sodann mit der „Formel" $4 \cdot x + 1$ den Termwert zu berechnen. Im Malle'schen Sinne werden hier Variable und Term im Einsetzungsaspekt gesehen. Wenn jetzt z. B. der Term $x + x$ zu $2 \cdot x$ zusammengefasst werden soll, dann sind zwei Vorstellungen zielführend (und nur eine wirklich erwünscht). Ich kann mir die x'en gemäß einer ‚*letter as object*'-Vorstellung als Ding-Objekte vorstellen, und so wie Apfel plus Apfel zwei Äpfel ergibt, ergibt x plus x eben 2x. Oder ich muss x – nach Malle – im Gegenstandsaspekt denken, nämlich als die (unbestimmte) *Zahl* x. Erst wenn ich in der Lage bin, das x als Zahl zu sehen, kann ich die Bedeutung von $x + x = 2 \cdot x$ begreifen. Das vorherige symbolische Beschreiben hat aber eine solche Gegenstandsaspektdeutung nicht vorbereitet. Für das Narrativ $2x + (x + 1)$ genügt der Malles'sche Einsetzaspekt, für das Umformen von $2x + (x + 1)$ brauche ich den Gegenstandsaspekt. Deshalb plädiere ich auch dafür, wenigstens am Anfang nicht vom Term x oder $4x + 1$, sondern von der Zahl x, der Zahl $2 \cdot x + 5$[58] und von der Formel x[59], oder der Formel $2x + 5$ zu sprechen (Formel ist ja ein Begriff, der im diskursiven Gebrauch durchaus bei den Schülern eine ganz klare Vorstellung herbeiruft, nämlich die, Zahlen einzusetzen, um den Wert für dieses oder jenes herauszubekommen).
Wenn jetzt auch noch Klammern auftauchen, wird es noch verzwickter. Sehe ich in den x'en Ding-Objekte, dann kann ich ein x als Ding in der Klammer einfach „rausklauben" und zu den anderen x'en „dazutun". Bin ich aber bereits in der Lage (wie z. B. Finja) in x eine Zahl zu sehen, brauche ich jetzt Regeln, die mir sagen, wie ich dieser Klammern abhandenkommen kann. Ich muss also die *Rechengesetze* für Zahlen bewusst anwenden.
Im *symbolischen Beschreiben*, im Finden einer als Narrativ gedeuteten Aufbau*formel*, ist eher der *Einsetzungsaspekt* (*letter evaluated*) als der *Gegenstandsaspekt* angelegt. Letzteren muss ich aber denken, wenn ich Terme verständig umformen möchte. Zudem muss der Schüler jetzt noch die *Rechengesetze für Zahlen* kennen und deren Handhabung verständig auf die *symbolischen Zahlen* übertragen können.

Auch das *generische Einsetzen* (nicht das Testeinsetzen) von Zahlen hilft hier nicht viel weiter. Bei Termen ohne Klammern (wie $x + x + x + 1$) funktioniert das noch gut:

$$2 + 2 + 2 + 1 = 3 \cdot 2 + 1$$
$$5 + 5 + 5 + 1 = 3 \cdot 5 + 1$$
… , also
$$x + x + x + 1 = 3 \cdot x + 1.$$

Wenn aber Klammern auftauchen wird dies schon viel komplizierter. Jetzt sollte man z. B. die Minus-Klammerregel verwenden und z. B.

$$4 \cdot 5 - (5 - 1) = 4 \cdot 5 - 5 + 1$$

schreiben. Aber kein Kind macht das, sondern rechnet einfach

$$4 \cdot 5 - (5 - 1) = 20 - 4.$$

[58] Statt einem „Löse die Gleichung $3x = 2x + 5$!" kann man anfangs auch fragen: „Für welche Zahl x ist die Zahl $3 \cdot x$ gleich der Zahl $2 \cdot x + 5$?"
[59] Die Bezeichnung ‚Formel' für die Variable x kommt einem vielleicht etwas schräg vor (immerhin muss man ja, wie sonst immer bei Formeln, gar nichts mehr ausrechnen). In Abschnitt VI.I.3 werden wir sehen, dass Schüler den Aufbauterm x tatsächlich oft lieber als $x \cdot 1$, $1 \cdot x$, $1 \cdot x + 0$ oder $x = x$ aufschreiben, obwohl sie nur ein x „sehen".

Und überhaupt: Was die Rechengesetze für Zahlen angeht, so erinnern sich die Schüler nur dunkel daran, und wenn sie sich erinnern, können sie diese zwar halbwegs formulieren, aber gar nicht bewusst – noch nicht einmal in reinen Zahlentermen – anwenden (obwohl viele beim Kopfrechnen, z. B. bei $3 \cdot 99$, implizit das Distributivgesetz benutzen).
Diese Eindrücke waren in der hier nicht beschriebenen Parallelklasse die Gleichen (dort gab es nur keinen „Finja“).

Bei dem in Kasten 1 und 2 beschriebenem Lernweg zeigten sich also beim Übergang ins Kalkül erhebliche Lernhürden. Insbesondere die Durchführung der Schritte

5. ... suchen rechnerische Möglichkeiten, die Gleichwertigkeit zweier Terme ohne inhaltlichen Bezug schneller zu erkennen und entdecken Umformungsregeln, um einem Term umzuwandeln

   und

6. … nutzen Termumformungsregeln als Möglichkeit, auf der Kalkül-Ebene zu gleichwertigen Termen überzugehen

sind nicht so einfach.

Der Versuch den in Phase 1 reichhaltigen Fundus an selbstaufgestellten gleichwertigen Termen zu nutzen, um daraus den Kalkül zu entwickeln, hat auch hier nicht wirklich funktioniert. Stattdessen wurde diese Terme erstmal beiseite gestellt, um wieder gestuft anhand einfacherer Beispielterme das Termumformen einzuführen. Erst geraume Zeit später, nachdem schon genügend Kalkülregeln aufgestellt und eingeübt worden waren, wurde auf einen Teil der in Phase 1 aufgestellten Terme als Anwendungsbeispiele des Termumformens zurückgegriffen. Die selbst aufgestellten Aufbauformeln hatten dann aber längst schon ihre Aktualität verloren. Auch hier verblieb also ein gewisses Unbefriedigtsein mit dem Übergang vom *symbolischen Beschreiben* ins *symbolische Operieren*. Da in der dritten Durchführung ein völlig anderer Zugang versucht wurde und die 4. Durchführung an Corona zerschellte, sollte es bis zur 5. Durchführung dauern, bis auch in der *Musterreihe* ein Weg gefunden wurde, der wesentlich besser funktionierte. Doch davon später.

Es folgte also in beiden Klassen abermals ein schrittweises Erarbeiten des Termumforms nach einem schwierigkeitsgestuften Vorgehen. Dieses Mal zuerst *das Vertauschen und Zusammenfassen in algebraischen Summen,* danach das *Auflösen von Klammern* vor denen ein positives oder negatives Vorzeichen steht und zuletzt das *Ausmultiplizieren von Klammern* nach dem Distributivgesetz. Nachdem die 1. Stunde zum Distributivgesetz gehalten war, wurden in den darauffolgenden zwei Wochen insgesamt 17 Interviews mit 19 Schülern derselben Klasse geführt.

VI.I.3 Interviewstudie zum Dreiklang „Beschreibungs-, Einsetzungs- und Umformungsgleichheit“

An der Interviewstudie nahmen 19 Schüler der Klasse 7d teil, in der es 21 Schüler gab. Während der zweiwöchigen Interviewphase wurde im Unterricht das Termumformen beendet und zum Thema Gleichungen übergangen.

Ziel der Interviewsequenz war es …

… im Allgemeinen die individuellen Vorstellungen und Fortschritte beim Aufbau des Kalküls zu erheben und

… im Speziellen dabei auszuloten, wie sich der Dreiklang Beschreibungs-, Einsetzungs- und Umformungsgleichheit auf die einzelnen Schüler ausgewirkt hat.

Spezifischer sind dabei folgende Fragen besonders relevant:

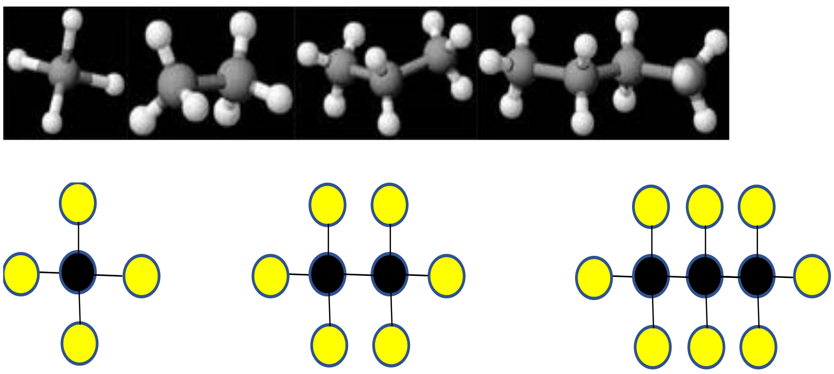
- Konsolidiert sich das Vertrauen der Schüler in den Kalkül, indem Sie die Entsprechung der Kalkül- und der Inhaltsebene (also die der Beschreibungs-/Einsetzungsgleichheit und Umformungsgleichheit) überprüfen?
- Deuten sie von sich aus umformungsgleiche Terme als beschreibungs- und einsetzungsgleich?
- Hilft den Schülern bei Schwierigkeiten im Kalkül ein Bezug auf die Inhaltsebene? Suchen Sie von sich aus einen solchen Bezug?

Dazu gab es zwei Aufgabenfomate, die Aufgabe KREISE (Abb. 23) und die Aufgabe Hölzchenquadrate (Abb. 24), die hintereinander und im gleichem Interview bearbeitet wurden.

1 Die Aufgaben der Interviews

Die Aufgabe KREISE

Aufgabe KREISE (nach Berlin 2010)



1 2 3 …

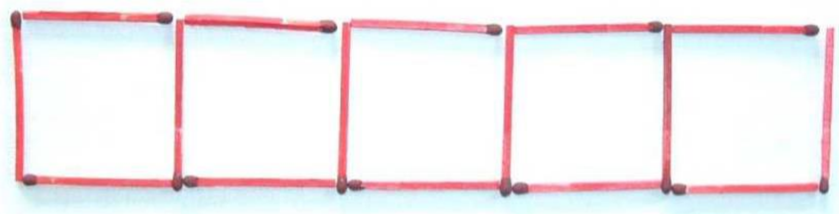
Figurennummer	1	2	3	4	…	x	…	7	…	50
Anz. der schwarzen Kreise	1	2	3	4		x		7		50
Anz. der gelben Kreise	4	6	8	10		$2x+2$		16		102
Anz. der Kreise insgesamt	5	8	11	14		$3x+2$		23		152

***Abb. 23**: Diese Aufgabe stammt von Tatjana Berlin (2010). Die grau hinterlegten Felder sind von den Schülern zu füllen. Interessant für den Kalkülaufbau ist dabei, dass der Term für die Anzahl der Kreise insgesamt sich auf zweierlei Arten finden lässt. Einmal auf der Inhaltsebene und einmal auf der Kalkülebene, nämlich durch Addition der vorher auf der Inhaltsebene gefundenen Terme* x *und* $2x+2$ *für die Anzahlen der schwarzen und gelben Kreise.*

Die Aufgabe KREISE (Abb. 23) wurde von 19 Schülerinnen und Schülern in einer Interviewsituation bearbeitet, die zwischen 5:20 und 28:00 Minuten dauerte. Für die Schüler war dies in der Reihe die erste Zahlenfolge, die ikonisch durch *Punktmuster* repräsentiert wurde (bislang gab es nur Würfelbauten und Hölzchenketten).
In welcher Reihenfolge die leeren Tabellenzellen zu füllen sind, wurde dabei nicht vorgegeben. Phase 1, in der ja unterschiedlichste Terme für enaktiv-ikonisch und numerisch repräsentierte Zahlenfolgen aufgestellt wurden, ist beim Start der Interviews seit ca. 3 Wochen vorbei. Fachlicher Schwerpunkt dieser Aufgabe ist das Aufstellen der Terme aus einer ikonischen Repräsentation heraus. Das Umformen (Zusammenfassen) tritt durch den Umstand auf den Plan, dass der Term für die Anzahl der Kreise insgesamt auf zweierlei Arten erzielt werden kann. Durch Aufstellen eines Terms auf der Grundlage aller sichtbaren Kreise oder durch Addieren der Terme für die gelben und die schwarzen Kreise, also durch eine Termaddition: $x + 2x + 2 = 3x + 2$ (Abb. 23).

Die Aufgabe HÖLZCHENQUADRATE

Aufgabe Hölzchenquadrate



In einer Klasse wurden für die Anzahl der Hölzchen der x-ten Figur die folgenden Terme aufgestellt:

1. $2 \cdot 4 + 2 \cdot (x - 2) + (x - 3)$
2. $3 \cdot (x - 1) + 4$
3. $4 \cdot (x - 1) + 3$
4. $4 + (x - 1) \cdot 3$
5. $3 \cdot x + 1$
6. $x \cdot 4 - (x - 1)$
7. $x + (x + 1) + x$

Abb. 24: *Wie stellen die Schüler fest, ob alle Terme „stimmen“? Alle bis auf den Term* $4 + (x - 1) \cdot 3$ *beschreiben die Anzahl der Hölzchen für eine x-beliebige Figur der Hölzchenkette, von der die 5. Figur oben abgebildet ist.*

Diese Aufgabe wurde im Anschluss an die Aufgabe KREISE von insgesamt 16 Schülerinnen und Schülern bearbeitet. Die Zeitdauer betrug zwischen 5:10 und 26:10 Minuten[60]. Zu einer Kette aus Streichhölzern (Abb. 24) werden 7 Terme vorgelegt und folgende Frage gestellt:

> *„Hier siehst du 7 Terme, die zu der Streichholzkette aufgestellt wurden. Sie können stimmen, oder nicht. Wie kannst du feststellen, ob die Terme die richtigen Anzahlen für eine x- beliebige Figur liefern?“*

[60] Diese weite Zeitspanne erklärt sich dadurch, dass einzelne Schüler sehr lange mit der Aufgabe KREISE beschäftigt waren, während andere damit schnell fertig waren. Bei drei der 19 Schüler lohnte sich ein Anfangen der Hölzchenaufgabe in dem für das Interview zur Verfügung stehenden Zeitfenster gar nicht mehr.

Hierbei wurde absichtlich auf Formulierungen wie *„wie kannst du überprüfen, ob"*, oder *„beschreiben alle Terme die Anzahl … richtig"* verzichtet, damit nicht etwaige damit einhergehende Konnotationen wachgerufen werden, die eine gewisse Bearbeitung stimulieren. Das Verb *„überprüfen"* könnte z. B. schon so oft von einer Zahleinsetzung gefolgt worden sein, dass eine Beantwortung auf der Einsetzungsebene stimuliert wird. Ähnlich könnte auch das Wort *„beschreiben"* als Stimulus agieren, um auf der Beschreibungsebene zu antworten.

Dieser Teil des Interviews beginnt damit, dass die ersten drei bis vier Figuren der Kette enaktiv mit Streichhölzern gelegt werden (In Abb. 24 ist die 5. Figur der Kette abgebildet). Dann stellen die Schüler einen eigenen Term für die Hölzchenquadrate auf. Erst danach wird die obenstehende Frage gestellt. Dieser erste Schritt auf der Beschreibungsebene wurde ganz bewusst gewählt, damit die Beschreibungsgleichheit mit in das Bewusstsein tritt. Von sich aus beantworten die Schüler solche Fragen, wie die oben gestellte, nämlich vornehmlich auf der Ebene der Einsetzungsgleichheit. Die Antworten, die ich mir von der Interviewsequenz erhoffte, zielen aber ja auf die Verschränkung aller drei Ebenen der Gleichwertigkeit, nämlich der Beschreibungs-, Einsetzungs- und Umformungsgleichheit.

Die Schüler zeigen insgesamt unterschiedlichste Herangehensweisen: Keine zwei vermitteln weitgehend identische Eindrücke. In folgendem werden exemplarisch Interviewausschnitte mit drei Schülerinnen wiedergegeben. Danach werden die Ergebnisse aller Schülerinnen und Schüler tabellarisch zusammengefasst. Dabei wird neben der Rekonstruktion der Vorgehensweisen analysiert, ob die Schüler statisch (also durch Betrachtung des Musters anhand eines Folgeglieds), dynamisch (also durch Betrachtung der Veränderung von einem Folgeglied zum nächsten) oder heuristisch (durch Probieren) gewonnen wird.

2 Exemplarische Interviewausschnitte mit drei Schülerinnen

***

Episode 4 – Interview mit Lin: „Ich finde das Thema einfach, weil es logisches Denken ist."

Lin ist eine Schülerin, die nach Aussage ihrer Mathematiklehrerin eher Schwierigkeiten mit der Mathematik hat. Im Pretest hat sie dennoch überdurchschnittlich gut abgeschnitten. Im Unterricht war sie dadurch aufgefallen, dass sie sichtlich Spaß beim Aufstellen von Aufbautermen hatte und sich auch immer der Bedeutung der Variablen und Terme als Figurennummern und Anzahlen bewusst war. Mit dem seit drei Wochen praktizierten Termumfomen hat sie Probleme, obwohl sie mittlerweile die Rechengesetze kennt. Ganz am Anfang des Interviews äußert sie sich bezüglich der Algebra:

> Lin: *Ich finde das Thema einfach, weil es logisches Denken ist und wir ham ja auch schon so nen Vortest geschrieben gehabt und den fand ich schon so einfach, weil es einfach alles mit Logik zu tun hat und mir die Sachen dann sehr schnell klar sind.*

4a) Lin bestimmt die Aufbauformeln für die Kreismuster

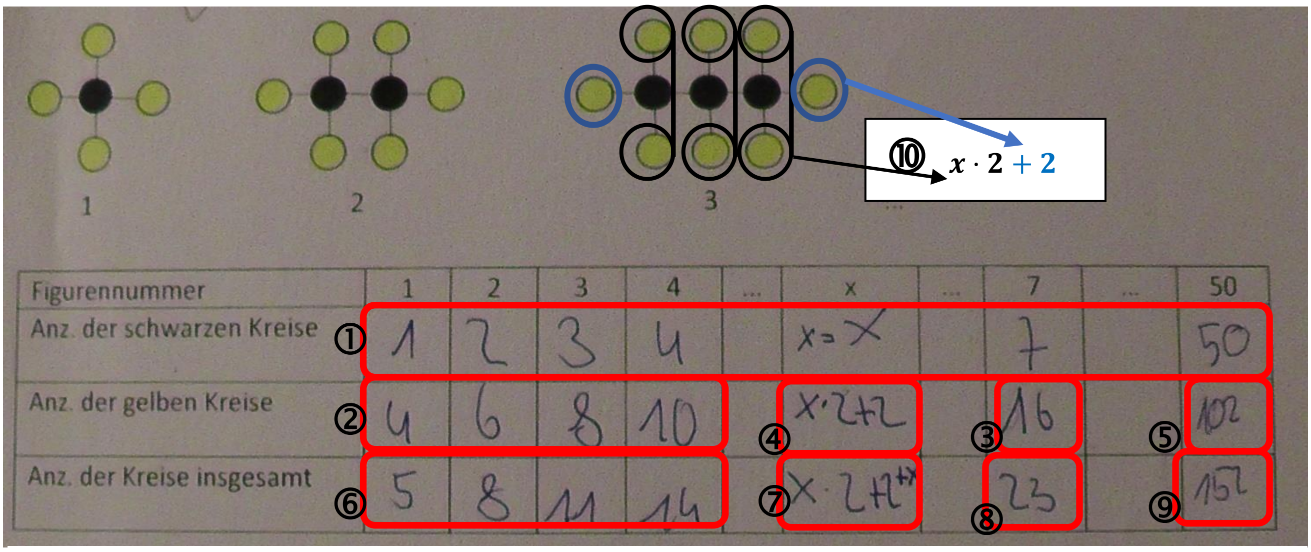


Abb. 25: *Lin: Aufgabe KREISE*

Lin füllt zuerst die erste Zeile der Tabelle (①) aus. Anhand der ersten 4 Anzahlen der zweiten Zeile (②) erkennt sie durch den Zuwachs von *+2 (dynamisch)* die dahinterstehende Rechenweise und berechnet die Zahl 16 durch $7 \cdot 2 + 2$ (③). Erst danach schreibt sie die Aufbauformel $x \cdot 2 + 2$ (④) auf , womit sie dann 102 (⑤) berechnet:

01 Lin: *Die Schwarzen sind ja eigentlich immer nur sich selber fortgesetzt, also sind die immer nur wie die Zahl oben auch ist und dann ist x gleich x* [schreibt „$x = x$“ in die x-Spalte], *weil je nachdem wie viel das sind ist das ja auch die Anzahl ... bei den gelben Kreisen ist immer, wenn eins dazu kommt, 2 mehr, also generell da, generell, also hier sind es, weils eine Figur ist 4, dann 6, dann ist hier 8 und dann 10* [schreibt 4, 6, 8, 10 in die ersten 4 Zellen von Zeile 2] *und dann ist hier* [zeigt auf die Zelle x=7] *7 mal zwei ist 14 und hmmm 2 halt noch, ähhh* [schreibt 16 in die Zelle x=7] *und dann hier x mal mmm 2 plus 2* [schreibt $x \cdot 2 + 2$ in die x-Spalte], *wegen den 2 die immer noch dazu kommen*

02 Int.: *Mhhmm. Und noch die 50?*

03 Lin: *50 mal 2 sind 100 .. 102*

Bis hier hat Lin sehr zügig die ersten beiden Zeilen vollständig ausgefüllt und kam auch sehr schnell auf den Term $x \cdot 2 + 2$.

04 Int.: *Gut! Dann die Anzahl der Kreise insgesamt.*

05 Lin: *5, und das sind quasi immer die zwei plus gerechnet* [schreibt 5, 8, 11, 14 ⑥] *und dann würd ich einfach sagen die Formel heißt ... ähhh ... halt, also ich würde mit der Formel arbeiten* [zeigt auf $x \cdot 2 + 2$ und schreibt $x \cdot 2 + 2 + x$ in die Tabelle] … *also x mal 2 plus zwei und dann noch plus x, weil das iss ja ... so richtig.* [Lin lächelt dabei].

Nachdem Sie in Zeile 3 die ersten 4 Zahlen einträgt (⑥), benutzt sie nach kurzem Zögern direkt die beiden schon aufgestellten Formeln $x \cdot 2 + 2$ und x, um $x \cdot 2 + 2 + x$ als Term für die Kreise insgesamt zu erhalten.

06 Int.: *Super. Kannst du nochmal genau erklären, was du dir dabei gedacht hast?*

07 Lin: *Weil, ich hab ja schon die x mal 2 plus 2, da hab ich schon die Gelben berechnet, weil es sind immer, je nachdem bei welcher Figur man ist* [tippt auf die oberen und unteren gelben Kreise der 3. Figur], *halt die Anzahl* [tippt mehrmals auf verschiedene gelbe Zweierpärchen] *mal x und plus die zwei die immer am Rand sind* [tippt auf die Randkreise] *und um die auch noch zu haben* [tippt auf die drei schwarzen Kreise von Figur 3] *plus x, weil das sind ja immer die x*

Lin könnte hier erklären, was sie sich beim Addieren gedacht hat, oder was sie sich beim Aufstellen der Terme für die weißen und schwarzen Kreise gedacht hat. Sie erklärt Letzteres (vielleicht weil es ihr einfach klar ist, dass man die beiden Formeln addieren kann).

08 Int.: *Genau*

09 Lin: *Und hier, das sind 16 plus 7 , also* [tippt auf die entsprechenden Teilterme von $x \cdot 2 + 2 + x$] *14 plus 2 sind 16, 16 plus 7 sind 23* [trägt die 23 ein]. *Und 50 sind das, 100, 102, 152* [trägt 152 ein]

Lin hat wohl erkannt, dass die Terme $x \cdot 2 + 2$ und x für die Anzahlen der gelben bzw. schwarzen Kreise stehen und somit die Anzahl der Kreise insgesamt durch den Summenterm $x \cdot 2 + 2 + x$ gegeben sein muss. Die Aufforderung, noch einmal genau zu erklären, was sie sich dabei gedacht hat, versteht sie jetzt als eine Aufforderung, ihren Term auf der Beschreibungsebene zu erklären, was sie auch anhand der 3. Figur macht, wobei sie jetzt eine *statische* Erklärweise wählt (05 und ⑩). Bis hierhin erweckt Lin den Eindruck, dass sie ziemlich genau weiß was sie tut. Die Bedeutung der Variablen x und der Terme ist ihr bewusst und so wie sie die Anzahlen der gelben und schwarzen Kreise addieren kann um die Gesamtanzahl zu erhalten ($152 = 100 + 52$ ⑨), kann sie auch die Terme $x \cdot 2 + 2$ und x addieren, um die Summe $x \cdot 2 + 2 + x$ zu erhalten. Die nächste Frage leitet nun den Übergang ins Kalkül ein.

4b) Lin versucht den Term $x \cdot 2 + 2 + x$ zu vereinfachen

10 Int.: *Super. Eine Frage noch. Da hast ja diesen Term* [zeigt auf $x \cdot 2 + 2 + x$] *richtig aufgestellt. Kannst du den Term noch ein bisschen vereinfachen, weil der so lang ist? Kannst du ja da drunter schreiben.*

11 Lin: *Also, ich denk, dass man die 2 plus 2* [tippt auf die beiden Zweien in $x \cdot 2 + 2 + x$] *zu 4 machen kann… obwohl?* ___ [schreibt den Term $x \cdot 2 + 2 + x$ unter die Tabelle und guckt dann lange auf den Term] ... *hmmm … also, wenn man die Zweien zusammentut, dann kommt ja ein komplett anderes Ergebnis raus*

12 Int.: *Warum darf man denn die Zweien gar nicht zusammentun?*

13 Lin: *Weil ja dann das Ergebnis komplett anders ist, also wenn man 2-mal 2 plus 2 oder 2-mal 4 rechnet, das ist ja komplett anders … hmmm*

14 Int.: *Ich versuch dir mal zu helfen: x-mal zwei, das kann man auch anders schreiben …*

15 Lin: *... x2 oder 2x?*

16 Int.: *Ja genau, 2x. Schreib doch mal 2x statt x-mal 2, vielleicht hilft dir das ja!*

17 Lin: [schreibt $2x + 2 + x$ unter $x \cdot 2 + 2 + x$, guckt lange darauf und überlegt] *2 x plus 2 x, nööö, das vielleicht* [tippt auf 2+x] *in ne Klammer packen ...* [schreibt nichts auf und kommt sichtlich nicht weiter]

So sicher sich Lin beim Aufstellen der Terme war, so unsicher und ratlos scheint sie beim Vereinfachen des Terms $x \cdot 2 + 2 + x$ zu sein. Sie erkennt aber, dass ihr Versuch des *'Zusammentuns'* des Terms, der ja auf den Term $4x$ führen würde, falsch sein muss (13). Weshalb Sie auf die Idee kommt, $2 + x$ in eine Klammer *'zu packen'* (17) ist unklar, es ist jedenfalls eine Handlung, die beim Aufstellen eines Terms einen Teilterm zusammenfasst, um ein entdecktes „Aufbaunarrativ" im Term abzubilden (So wie z. B. bei Erkans Term $x + x + (x + 1)$ die $+(x + 1)$ das Narrativ *„Und dann kommt noch die untere Würfelreihe dazu"* abbildet).

18 Int.: *Machen wir mal was anderes. Du hast ja den Term für die Gelben* [zeigt auf $x \cdot 2 + 2$ in der Tabelle] *ja gerade eben total toll erklärt, vielleicht könntest du ähnlich auch für alle Kreise - vergiss einfach, ob die schwarz oder gelb sind - einen Term aufstellen?*

Der Aufforderung (18), einen Term für die Gesamtzahl der Kreise aufzustellen (dieser wurde von Lin ja durch Addition der Teilterme für die Gelben und die Schwarzen bestimmt) kommt Lin im Folgenden gerne nach und kommt, *statisch* anhand der 3. Figur erklärt, schnell und ohne Probleme auf den Term $x \cdot 3 + 2$ und schreibt diesen unter den Term $2x + 2 + x$ (Abb. 26).

19 Int.: *Top! Und jetzt guck mal, jetzt hast du selbst zwei Terme aufgestellt* [tippt auf die beiden untereinanderstehenden Terme $2x + 2 + x$ und $x \cdot 3 + 2$ in Abb. 26] *und jetzt kannst du dir ja mal überlegen, wie man von dem Term auf den kommt* [tippt nochmal die beiden Terme an]

20 Lin: *mmmh ... indem man das x plus 2 gerechnet hat* [zeigt auf das x und die $+2$ in $2x + 2 + x$] ... *hmm*

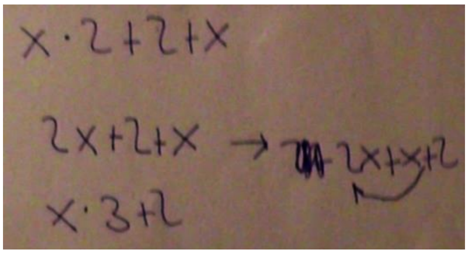


Abb. 26: *Steckt hier eine Rechenhandlung dahinter?*

21 Int.: Wie viel ist denn eigentlich 2x plus x?

22 Lin: Drei x? ….

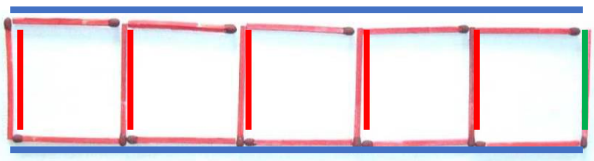
Lin kommt auch hier nicht weiter und am Ende erklärt der Interviewer, dass man die $2 + x$ wegen des Kommutativgesetzes tauschen kann und dann die jetzt nebeneinanderstehenden $2x$ und x addieren kann [Lin schreibt dabei → $2x + x + 2$ (Abb. 26)] und meint.:

23 Lin: … *ja, dann sind das quasi drei* [verbindet $2x + x$ mit einem Bogen (Abb. 26) und tippt auf $x \cdot 3 + 2$]

Lin hat keine Probleme damit, die Terme aufzustellen und scheint die Bedeutungen der Variable x und der aufgestellten Terme im Einsetz- und Gegenstandsaspekt zu kennen. Beim Rechnen mit diesen Variablen und Termen hat sie aber ganz erhebliche Schwierigkeiten und scheint dabei jeglichen Bedeutungsbezug zu verlieren. Obwohl in Abb. 26 untereinander alle

„Umformungsschritte“ stehen, ist Lin nicht in der Lage, die transformierenden Schritte zu „sehen“. Dies ist umso erstaunlicher, wenn man weiß, dass Lin im Unterricht zwar auch Probleme beim Termumformen hat , doch z. B. mit dem Zusammenfassen von Termen in anderen Kontexten und auch mit einfachen Anwendungen des Distributivgesetzes relativ gut klar kam. Den Vorschlag eines Wechsels von der Umformungsebene auf die Beschreibungsebene nimmt sie dankbar an, aber das scheint ihr in keiner Weise beim Umformen zu helfen. Aber wie auch? Die ganze Tabelle lässt sich ja durch Nutzung der Beschreibungs- und Einsetzungsebene ausfüllen, und es ist inhaltlich klar, dass $x \cdot 2 + 2 + x$ und $x \cdot 3 + 2$ gleichwertig sein müssen. Wie jetzt ein Wechsel auf die Beschreibungsebene nützen kann, um die kalkülhaften Transformationschritte von $\cdot\, 2 + 2 + x$ nach $x \cdot 3 + 2$ durchzuführen, ist schleierhaft. Man kann einwenden, dass eine Aktivierung der Einsetzungsebene, also ein Einsetzen von Zahlen und eine Bewusstmachen der Objekt-Zahl-Konvention während der Umformungsversuche hier kalkülunterstützend wirken könnte. Tatsächlich wird im zweiten Teil des Interviews mit Lin, indem sie im Hölzchenkontext ganz ähnlich auf einen nicht zusammengefassten Term ($x \cdot 2 + x \cdot 1 + 1$) kommt, genau eine solche Aktivierung der Einsetzungsebene versucht werden.

4c) Lin stellt den Term $x \cdot 2 + x \cdot 1 + 1$ für die Hölzchenquadrate auf und überprüft diesen



$x \cdot 2 + x \cdot 1 + 1$

Diese Episode beginnt damit, dass Interviewer und Lin die ersten vier Figuren der Hölzchenkette aus Quadraten (die Abbildung rechts zeigt die 5. Figur) mit Streichhölzern legen und Lin aufgefordert wird einen Term für die Anzahl der Hölzchen einer x-beliebigen Figur der Kette aufzustellen. Lin stellt zügig und begründend anhand der Abbildung der 5. Figur den Term $x \cdot 2 + x \cdot 1 + 1$ auf (Skizze oben). Danach wird das Arbeitsblatt Hölzchenquadrate aufgelegt, dass 6 (von 7) zu diesem Term gleichwertige Terme aufzählt.

01 Int.: *Wie könnte man feststellen, ob die Terme* [die 7 Terme auf dem AB] *stimmen oder ob sie nicht stimmen?*

02 Lin: *Ich würd‘s nachrechnen. Also einsetzen, ich würds direkt mit der fünften Figur machen* [zeigt auf die 5. Figur auf dem Aufgabenblatt], *also dann zähl ich schonmal nach wie viel es hier sind, damit ich auch die richtige Lösung für alle hab, also 1,2,3, ..., 16, das sind 16* [schreibt 16 über die 5. Figur] … *Und jetzt gucken, ob überall 16 herauskommt..*

03 Int.: *Ok. Brauchen wir jetzt erstmal nicht machen. Wenn jetzt bei einem Term nicht 16 herauskommen würde, was würdest du über den Term sagen?*

04 Lin: *Der ist nicht richtig!*

05 Int.: *Und wenn jetzt aber bei allen 16 rauskäme, was würdest du dann sagen?*

06 Lin: *Die sind alle richtig. Das sind alles korrekte Lösungen, die sind beschreibungsgleich.*

Es ist bemerkenswert, dass Lin, eine Schülerin, für die Beschreibungsebene offensichtlich dominant ist, hier und immer wieder den Begriff ‚*beschreibungsgleich*‘ verwendet, obwohl es

hier ja um das Einsetzen geht. Im Unterricht wurden alle drei Begriffe *umformungsgleich*, *einsetzungsgleich* und *beschreibungsgleich* eingeführt.
Lin hält es hier für ausreichend, einen Wert einzusetzen. Es folgt eine längere Diskussion, in der der Interviewer auf Unterrichtssequenzen hinweist, bei denen es um Terme ging, die zwar für ein x den gleichen Wert lieferten, jedoch mitnichten gleichwertig waren.

07 Int.: *Also außer Zahlen einsetzen, gäbe es noch eine Möglichkeit?*

08 Lin: *Rechnen?*

09 Int.: *Was meinst du mit Rechnen?*

10 Lin: *Also nachrechnen den Term und schauen, ob das z. B. … also, wenn man z. B. die 1 nimmt und zu schauen ob das dann auch stimmt oder zu gucken ob der auf den Term passt und so …*

11 Int.: *Also du meinst, dann nochmals einsetzen, also z. B. die 1?*

12 Lin: *Nö, man guckt nur so, ob das überhaupt so auf den Term passt, also, ob ich eine Erklärung finde.*

13 Int. *Ach so, du möchtest den Term erklären. Ok, wir könnten mal einen nehmen, versuch doch mal den Term 6 zu erklären* [zeigt auf den Term $x + (x + 1) + x$]

14 Lin: *Also ich hab ja zweimal x genommen, das haben die so quasi* [zeigt auf das x ganz links und ganz rechts], *die haben quasi auch die Sachen so auseinandergezogen* [zeigt auf die horizontalen Hölzchen in der abgebildeten Figur Nr. 5] *und x plus 1 ist ja quasi das hier* [tippt hintereinander die vertikalen Hölzchen in Figur Nr.5] *und die haben nicht x mal 2 sondern x plus x genommen, also die haben diese Kette* [zeigt auf die obere horizontale Hölzchen reihe] *hier einzeln genommen, diese einzeln genommen* [zeigt auf die untere horizontale Hölzchenreihe] *und diese hier einzeln genommen* [wischt über die vertikalen Hölzchen und zeigt auf $(x + 1)$]

Lin schlägt als erstes vor zu „*Rechnen*" (08), schwenkt aber dann wieder auf die Beschreibungsebene ein, kann dort den Term $x + (x + 1) + x$ erklären und erkennt auch die Verwandschaft der dort zugrundeliegenden Zählweise mit der Ihren (09). Sie sagt „ *die haben nicht x-mal 2 sondern x plus x genommen*" und erklärt damit implizit auch, dass hier $x + x = x \cdot 2$ gilt.
Sie schafft es in der Folge aber immer noch nicht, den Term $x + (x + 1) + x$ weiter zu vereinfachen. Erst nachdem sie unter Hinweis auf die Plus-Klammerregel gesagt bekommt, dass sie die Klammer einfach weglassen kann, gelingt es ihr, auf den Term $3x + 1$ zu kommen und sie entdeckt auch, dass dieser schon in der Liste steht. Nun wissend, dass das Ergebnis $3x + 1$ sein muss, gelingt ihr endlich die Vereinfachung ihres eigenen Terms $x \cdot 2 + x \cdot 1 + 1$:

15 Lin*: Ähmm … also ich würde dann, also hier schonmal zwei x als erstes draus machen* [schreibt $\rightarrow$ $2x + x \cdot 1 + 1$] *ähhh, das mal 1 ist ja eigentlich total irrelevant, das is ja nur fürs Verständnis glaub ich … heißt man kann das auch direkt 3 x machen plus, weil das mal 1 ist ja total unnötig, heißt man kann plus 1 aber auch nehmen, also 3x plus 1* [schreibt $3x + 1$ unter $2x + x \cdot 1 + 1$]

16 Int.: *Und was sagt dir das über deinen Term?*

17 Lin: *Das der beschreibungsgleich ist mit dem Andern und dass der auf den Term auch … dass der richtig ist.*

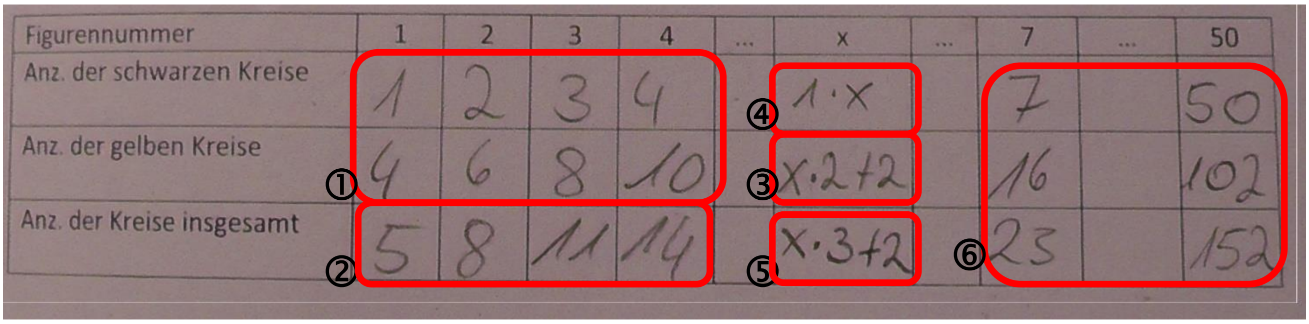
Hier endet das Interview mit Lin. Lin hat also offensichtliche Schwierigkeiten mit dem Kalkül, jedenfalls dann, wenn der angebotene Kontext ihr die Möglichkeit eröffnet, in die Beschreibungsebene zu wechseln, in der sie sich sichtlich wohler fühlt. Sie sucht von sich aus immer wieder einen Bezug zu den Inhaltsebenen, es sieht hier aber so aus, als ob ihr gerade ein solcher Bezug beim Kalkülaufbau im Weg steht, gleichsam einen Ausweg darstellt, dem als schwierig und mühsam empfundenen Kalkül zu entgehen. In diesem Sinne hilft der Dreiklang Beschreibungs-, Einsetzungs- und Umformungsgleichheit Lin nicht beim Kalkülaufbau. Natürlich habe ich mich gefragt, wie Lin zu helfen wäre. Da sie ja das *symbolische Beschreiben* recht gut kann, wäre ihr vielleicht zu empfehlen, sich ganz dezidiert auf das durch Rechengesetze begründete Umformen zu konzentrieren und immer wieder mal durch Einsetzen zu überprüfen, die Beschreibungsebene aber mal ganz bewusst links liegen zu lassen.

***

Episode 5 –Interview mit Pia: „.. also ich könnte mal versuchen das darauf zu beziehen, weil das ist meine Art … zu verstehen …"

Pia ist eine sehr gute Mathematikschülerin und beteiligt sich rege am Unterricht. Auch das Termumformen fällt ihr nicht schwer und sie ist in der Regel in der Lage ihre Umformungsschritte durch das Benennen passender Rechengesetze zu begründen.

5 a) Pia bestimmt die Aufbauformeln für die Kreismuster



Figurennummer	1	2	3	4	…	x	…	7	…	50
Anz. der schwarzen Kreise	1	2	3	4		④ 1·x		7		50
Anz. der gelben Kreise	① 4	6	8	10		③ x·2+2		16		102
Anz. der Kreise insgesamt	② 5	8	11	14		⑤ x·3+2		⑥ 23		152

Abb. 27: Pia – Aufgabe KREISE

Pia bestimmt zunächst für die Spalten 1-4 (vgl. Abb. 27) durch Abzählen die Anzahlen in den ersten beiden Zeilen (①) und dann durch Addition die entsprechenden Anzahlen in Zeile 3 (②). Danach wechselt sie auf die formale Ebene:

01 Pia: *Also ich würd das glaub ich erst mal so machen, dass ich immer x nehme, also das sind ja dann die drei schwarzen Kreise* [tippt auf die schwarzen Kreise bei Figur 3] … *also das sind ja dann x mal 2 für die Gelben* [tippt auf die gelben Kreise von Figur 3], *x mal 2 plus 2, weil das ist ja dann immer hier diese beiden Äußeren auch* [tippt auf die beiden äußeren gelben Kreise von Figur 2] … *also ich würde sagen, die schwarzen Punkte haben immer so zwei gelbe, also eins oben eins unten* [tippt gleichzeitig mit Zeigefinger und Ringfinger hintereinander auf alle drei gelben Punktpaare oben und unten] *und dann gibt es halt außen immer noch zwei dazu* [tippt auf die beiden äußeren gelben Punkte]

02 Int.: *Du kannst das ruhig da reinschreiben. Jetzt hast du also die Gelben genommen, oder?*

03 Pia: *Ja genau, die Gelben. Also ich habe x-mal 2 plus zwei gesagt* [schreibt $x \cdot 2 + 2$ in die entsprechende Zelle (③)] … *und für die Schwarzen ist es ja eigentlich immer nur die Figur, also x … soll ich dann x mal 1 einfach so*?

04 Int.: *Wie du das selber lieber möchtest.*

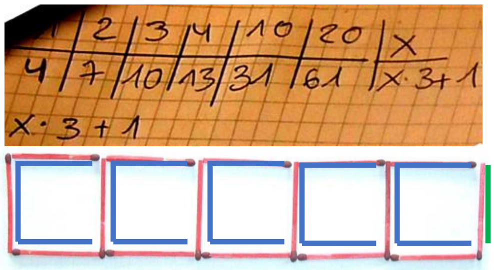
05 Pia.: [schreibt $1 \cdot x$ in die entsprechende Zelle] *Genau! Und Anzahl der Kreise insgesamt, man könnte es einfach nur Plusrechnen, man könnte auch sagen x-mal 3 plus 2, dann, weil, hier ist es x mal eins und hier ist es x mal 2* [schreibt $x \cdot 3 + 2$ in die entsprechende Zelle]

Danach füllt Pia von sich aus mithilfe der Formeln die noch fehlenden Werte für $x = 7$ und $x = 50$ aus und ist fertig.

Pia erklärt ihren Term $x \cdot 2 + 2$ statisch (01) anhand der 3. Figur. Danach addiert sie, wie sie es schon mit den Zahlen getan hat, von sich aus die Terme $1 \cdot x$ und $x \cdot 2 + 2$ im Kopf zu $x \cdot 3 + 2$, um die Anzahlen für die Kreise insgesamt zu erhalten. Man beachte, dass Pia *„ x mal eins“* sagt und „$1 \cdot x$“ schreibt. Statt ‚x‘, ‚$1 \cdot x$‘ , ‚$x \cdot 1$‘ oder auch ‚$1 \cdot x + 0$‘ zu notieren, wurde hier übrigens bei vielen Schülern beobachtet: Es scheint so zu sein, dass ‚x‘ alleine keinen Termstatus hat.

5b) Pia stellt den Term $x \cdot 3 + 1$ für die Hölzchenquadrate auf und überprüft diesen

Nachdem zu Anfang des zweiten Teils des Interviews die Hölzchenkette bis $n = 4$ enaktiv gelegt worden ist, versucht Pia eine Aufbauformel zu finden, indem sie von sich aus eine Wertetabelle anlegt. Dieses Mal findet sie den Term $x \cdot 3 + 1$ durch den Zuwachs von $+3$, geht beim Aufstellen also dynamisch vor, erklärt ihn aber dann statisch anhand der gelegten Hölzchenkette (siehe Skizze rechts) .



Nach dem Auflegen der 7 Terme (Aufgabe Hölzchenquadrate) erkennt sie direkt, dass ihr Term mit in der Liste dabei ist:

01 Pia: [Zeigt auf den Term $3 \cdot x + 1$] *Der eigentlich, also dass is ja 3 mal x plus 1*

02 Int.: *Wie könnte man gucken, ob alle diese Terme stimmen?*

03 Pia: *Also man könnte sie kürzen …*

04 Int.: *Was meinst du mit kürzen?*

05 Pia: *Indem man den Term sozusagen verkürzt, vereinfacht … also wenn man jetzt zum Beispiel* [guckt auf die Terme] … *also man könnte es entweder ausrechnen, dass man x einsetzt, dass man z. B. 2 nimmt oder so und dann jeden Term ausrechnet und gucken was rauskommt, man kann sie auch, also sozusagen den ganzen Term verkürzen, vereinfachen, so dass halt nicht so viele Umwege sind* [zeigt dabei auf den ersten Term $2 \cdot 4 + 2 \cdot (x - 2) + (x - 3)$] … *ähm, das wären jetzt die beiden Möglichkeiten die mir einfallen*

Pia nennt hier das Einsetzen von Zahlen und das Umformen, das sie „kürzen“ nennt. Das entbehrt durchaus nicht einer gewissen Logik. Insbesondere in einem Kontext, in dem Terme aus eigenen Denkhandlungen entstehen, ist es höchst individuell, welcher Term als der Einfachste wahrgenommen wird. Dementsprechend ist landläufig benutzte Terminus „Vereinfachen“ u. U. irreführend. Da die Normalform $3x + 1$ tatsächlich kürzer als all die anderen Terme ist, ist der Terminus „Verkürzen“ in diesem Sinne auch passender.

06 Int.: *Probier doch mal. Nimm doch einfach mal die Möglichkeit, die dir am liebsten ist.*

07 Pia. [guckt auf die Terme] *Ähhh ... ich würde jetzt erstmal versuchen zu verk.., also zu vereinfachen, aber wenn das nicht so gut funktioniert dann würde ich es wahrscheinlich erstmal ausrechnen also mit Zahlen mit zwei oder zehn, also einfach ne Zahl die dann eben x ersetzt ... also, mmm*, [guckt auf die Terme, wählt den Term 3: $4 \cdot (x-1) + 3$ aus] *also bei dem zweiten, des is ja 4 mal x minus 1 plus 3, man könnte statt x minus 1 plus 3 dann eben 3 nur nehmen und dann eben nur das Eine aufrechnen, was dann hierbei sozusagen rauskommt* [zeigt auf den Term 5*:* $3 \cdot x + 1$] *, also wenn man hier z. B. 2 Einsetzen würde, dann hätte man 4 mal 1, also 2 minus 1 das iss ja dann 1, und das wären 4 plus 3* [zeigt auf die Teilterme $4 \cdot (x-1)$ und $+ 3$] das sind ja dann 7 … *und man könnte dann aber auch 3 mal x, also 3 mal zwei sind ja dann 6 plus 1, das wären dann auch 7, weil indem man x minus 1 plus 3 rechnet kommt halt eigentlich 1 dabei raus, also….*

1. $2 \cdot 4 + 2 \cdot (x-2) + (x-3)$
2. $3 \cdot (x-1) + 4$
3. $4 \cdot (x-1) + 3$
4. $4 + (x-1) \cdot 3$
5. $3 \cdot x + 1$
6. $x \cdot 4 - (x-1)$
7. $x + (x+1) + x$

08 Int.: *Das hab ich jetzt nicht verstanden.*

09 Pia: *Nein, ich meine wenn man jetzt sagt, ähmm, wenn man jetzt eben 2 einsetzt, man hat ja bei 4* [zeigt auf den Term 4: $4 \cdot (x-1) + 3$] *mal x minus 1 plus 3, also x minus 1 plus 3 ist sozusagen, das was man bei mal 4 wieder abzieht … und, wenn man dann gar nicht mehr 4 hat, sondern mal 3, also das iss ja dann weniger, in dem Fall wären es ja dann 6 statt eben 8, also wenn man 2 einsetzt, ja und dann wär das x minus 1 plus 3 halt überflüssig, weil man dann ja nicht mehr abziehen muss* [gestikuliert stark, indem sie mit beiden Armen kreisende Bewegungen in der Luft durchführt], *sondern eher was draufrechnen muss, das mein ich!*

Pias Gedankengang einer möglichen „Kürzung“ des Terms $4 \cdot (x-1) + 3$ ist auf Anhieb gar nicht so einfach nachzuvollziehen. Sie vergleicht die 4 in $4 \cdot (x-1) + 3$ mit der 3 in dem ‚kürzesten‘ Term $3 \cdot x + 1$ und versucht zu erklären, dass das, was man bei der Operation $4 \cdot x$ zuviel rechnet, durch die restlichen Operationen wieder rückgängig gemacht wird. Sie möchte den Term $4 \cdot (x-1) + 3$ in $3x + 1$ umformen und versteht hier unter „Termumformen“ eine Art Vorgang, der den Term $4 \cdot (x-1) + 3$ unter Angabe plausibler Gründe in $3x + 1$ überführt (verkürzt). Den Grund (ihre Theorie), den sie dabei angibt, speist sich aus der Vorstellung, dass ein Zuviel in einem Teil des Terms durch einen anderen Teil ausgeglichen werden kann. Sie versucht ihre Theorie dann durch Einsetzen von $x = 2$ zu erklären, und es trifft sich, dass gerade für $x = 2$ ihre Theorie halbwegs greift (für $x = 2$ ergeben alle 7 Terme der Liste denselben Wert 7).

09 Int.: *Was aber ja nur gilt, wenn du zwei einsetzt! Oder?*

Pia versteigt sich in ihre Idee und argumentiert (etwas länglich), dass das immer so sein sollte. Der Interviewer ist nicht überzeugt. Deshalb rechnet sie dann nochmal schriftlich mit $x = 2$ vor, um ihren Gedankengang mit Zahlen zu erklären:

10 Pia: [schreibt $4 \cdot (2-1)+3$] ... *also zwei minus 1 iss ja dann 1 und dann 4 mal 1 plus 3 [schreibt $4 \cdot 1 + 3 = 7$] sind 7 ___ ich könnte das aber auch anders schreiben, also statt 4 einfach 3 nehmen, weil 4 iss ja zu viel, also dann hab ich drei mal zwei minus 1 sind 3 und dann plus 3 sind 6, aber das iss halt zu wenig und dann muss man da noch plus 1 rechnen* [schreibt dabei $3 \cdot (2-1)+3+1$ =7 auf das Blatt] ... *ja aber dann wäre das ja überflüssig, man könnte auch 3 mal 1 +3+ 1 rechnen, das mein ich, dass das dann überflüssig wär ...*

11 Int.: *Ok, und bei der 3?*

12 Pia: *Da würde ich es auch so machen, also 4 mal 3 minus 1 +3 , also 4 mal 2 plus 3, ähhh ja, und das sind 8 und dann plus 3 sind 11* [schreibt $4 \cdot (3-1)+3 = 4 \cdot 2 + 3 = 11$] *und wenn man jetzt hier nur 3 nimmt, also 3 mal 3 minus 1 plus 3, das sind sozusagen ja dann, dass sind, also zwei und hier sind es dann 6, oder, nein 9* [schreibt dabei $3 \cdot (3-1)+3 = 9$] *und dann* [zögert] *ja, dass macht kein Sinn mehr ja dann ham Sie recht ... hmmm ___ also ich hab halt gedacht dieses ... öhhh ... also 4 ist halt einfach zu viel und ähhh da muss man kann wieder was abziehen und das macht ja man hier in dem Fall* [zeigt auf die -1 in $4 \cdot (3-1)+3$] *aber dann zieht man ja wieder zu viel ab und dann muss man wieder was draufrechnen und statt eben was abziehn, was draufrechnen und wieder was abziehn oder so könnte man das halt einfach direkt nicht ganz so viel machen also in dem Fall 3 und dann nur was draufrechnen*

Pia versucht ihre „Theorie", dass $4 \cdot x$ durch die -1 in der Klammer und die $+3$ am Ende irgendwie so ausgeglichen wird, dass bei immer $4 \cdot (x-1)+3$ dieselbe Zahl herauskommt wie bei $3 \cdot x + 1$, durch Zahlenrechnungen zu erhärten. Als sie mit $x = 3$ rechnet, fällt ihr aber auf, dass $4 \cdot (x-1)+3$ dafür nicht das richtige Ergebnis zu Tage fördert.

15 Int.: Ok. Aber bei $4 \cdot (x-1)+3$ ist es ja so, dass du immer 4 abziehst, egal wie groß das x ist, und dann 3 draufrechnest

16 Pia: Ja, aber das mein ich halt … ähmmm, … dass man das halt anders aufschreiben sollte, also wenn *ich jetzt, vielleicht kann man das an dem Term feststellen* [nimmt das Aufgabenblatt in beide Hände] ... *4 mal ... ich versteh halt auch nicht so ganz, wer auch immer das halt geschrieben hätte, was er sich dabei gedacht hätte, wie das eben auf die Schlange* [zeigt mit beiden Händen auf die gelegte Figur Nr. 4] *also auf die Zahl hier, also auf die Streichhölzer bezogen ist, weil man könnte ja immer 4, das wär ja also das hier* [kreist mit dem Stift jeweils die 4er-Quadrate der gelegten 4. Figur ein], *ja dann sind halt diese 3 hier sozusagen zu viel gerechnet* [zeigt mit dem Stift auf die drei mittleren vertikalen Hölzchen der 4. Figur] ... *aber für mich macht das halt keinen Sinn* [zeigt auf den Term $4 \cdot (x-1)+3$], *weil ... hmmm.*

17 Int.: *Also, du meinst der Term* $4 \cdot (x-1)+3$ *könnte falsch sein?*

18 Pia: *Zum Beispiel, weil ich versteh halt nicht, wie das darauf bezogen ist ... also wie halt eben bei 3 mal x plus 1, da kann man verstehn wie das zusammenhängt, man hat hier immer drei* [zieht händisch die gelegte Hölzchenfigur Nr. 4 auseinander, damit man die Dreierpäckchen sieht] ... *also immer so drei die aneinanderhängen und dann plus 1*

[hebt das übriggebliebene Hölzchen an und legt es wieder hin] *... aber bei dem anderen Term hier, bei dem zweitem versteh ich nicht, wie es darauf bezogen sein soll, weil man muss ja immer gucken woher kriegt man die Idee und man schaut sich ja an was es hier ist* [hantiert mit den Hölzchen] *und dann guckt man was man für ne Idee hat ....*

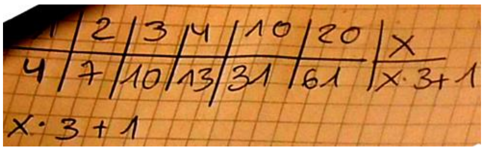
Pia ist sich bewusst, dass beim „Kürzen" das x für Zahlen steht und sucht lange nach einer „Regel", mit der sie begründen kann, dass der Term $4 \cdot (x-1)+3$ in $3x+1$ übergeht. Sie sieht dann ein, dass „ihre Regel" so nicht funktioniert, und wechselt dann auf die Beschreibungsebene. Sie erklärt nochmal die Zählweise, die sie hinter dem Term $3x+1$ sieht. Sie versteht aber nicht, wie der Term $4 \cdot (x-1)+3$ eine Zählweise für die Hölzchenkette sein könnte, *„wie es darauf bezogen sein soll"*.

19 Int.: ___ *bleibt aber immer noch die Frage: Stimmt jetzt der 2. Term oder nicht?*

20 Pia: *Also ich würd' das jetzt so machen, dass ich ihn gar nicht umforme in meinem Kopf, sondern einfach nochmal nachprüfe mit einer anderen Zahl, also ... soll ich das aufschreiben oder reicht das auch so?*

Pia setzt nun nochmals zwei ein und erhält wieder beide Male die 7. Dann versucht sie es mit der 10 und erhält 32 und 39!

21 Pia: ___ *Also hier hab ich das ja in 'ner Art Tabelle aufgeschrieben* [zeigt auf die selbst angefertigte Tabelle] *und das passt eben nicht, also bei zwei würde es passen, bei 10 aber nicht, und dann könnte ich nochmals mit einem anderen Beispiel, also z. B. 20 ?*



22 Int.: *Brauchst du denn noch ein anderes Beispiel jetzt?*

23 Int.: *Für mich wärs eigentlich nicht nötig, aber es könnte ja auch sein, dass ich mich z. B. verrechnet hätte, deswegen würde ich noch eins mehr machen.*

24 Int.: *Ok, super. Musst du jetzt aber nicht. Ich sag dir jetzt einfach, dass du dich nicht verrechnet hast.*

25 Pia: *Ok* [schreibt auf dem Aufgabenblatt hinter den Term $4 \cdot (x-1)+3$ „falsch"]

Der Interviewer fordert nun Pia auf sich nochmals einen Term auszusuchen und diesen nur zu vereinfachen, sonst nichts.

26 Pia. *Ich glaub ich nimm den Sechsten. Also die Nummer 6 ist $x+(x+1)+x$, da ist auch immer dieses plus muss man halt nicht unbedingt, weil es gibt ja dreimal das x , also könnte man sozusagen immer statt plus x plus x plus x, könnte man sozusagen die Klammer jetzt auflösen, dann wärs x plus x plus 1 plus x* [schreibt $x+x+1+x$] *ähhh und dann könnte man es umstellen z. B. x plus x plus x plus 1* [schreibt $x+x+x+1$] *und dieses x plus x plus x plus x kann man einfach dreimal, weil es ja 3 mal x ist also 3 mal x und dann plus 1* [schreibt $3x+1$] *und dann wär der Term wieder vereinfacht und das würd dann stimmen.*

27 Int.: *Und warum stimmt das?*

28 Int.: *Also ich habe ja hier vorne schonmal den ersten Term aufgestellt* [zeigt auf den selbstaufgestellten Term $x \cdot 3 + 1$] *und das ja nachgeprüft und das ist ja der Gleiche in dem Fall ... äh* [schreibt $3x + 1 = x \cdot 3 + 1$] *jetzt ist es der Gleiche und in dem Fall wärs halt der Richtige, weils halt gleich ist*

29 Int. *Ok, toll! Probier doch mal noch einen Term auf diese Art und Weise?*

30 Pia: *Hmmm* [guckt länger auf die Terme] *also ich könnte mal versuchen das* [zeigt auf den Term $x \cdot 4 - (x - 1)$ und auf die gelegten Hölzchenketten] *darauf zu beziehen, weil das ist meine Art das so ein bisschen zu verstehen, wenn ich das nicht so ganz verstehe, wo der Term herkommt ... also genau, also wenn das jetzt x mal 4 sind also z. B. bei dieser Zahl da wäre x ja dann eben 4 weil das die vierte Figur ist* [zeigt auf Figur 4] *also man hat ja vier Kästchen, also man könnte das vielleicht so rechnen, dass man x mal 4 Kästchen hat* [tippt hintereinander in die 4 Hölzchenquadrate der 4. Figur hinein], *dann hat man aber sozusagen zu viel, weil man die immer doppelt genommen hat* [zeigt auf die mittleren vertikal liegenden Hölzchen] *also man hat ja dieses Kästchen und dieses Kästchen, also es wär ja so, als ob hier immer einer doppelt liegen würde* [holt sich drei zusätzliche Hölzchen aus der auf dem Tisch liegenden Streichholzschachtel und legt sie vertikal in die Figur hinein] … *so, und dann hätte man drei zu viel und deswegen wäre es dann x minus 1, das wären dann ja 4 weil das ja x ist und dann hätte man x minus 1 also drei, die ich da dazu gelegt habe wieder weggenommen* [nimmt die drei Hölzchen wieder weg] *und in dem Fall würde der Term dann auch stimmen.*

Pia vereinfacht den Term $x + (x + 1) + x$ schrittweise durch Anwenden der Plus-Klammerregel und des Kommutativgesetzes der Addition sicher zu $3x + 1$ und identifiziert diesen unter Verwendung des Kommutativgesetzes der Multiplikation mit $x \cdot 3 + 1$. Die dabei benutzten Rechengesetze nennt sie nicht. Dazu aufgefordert, nochmal einen Term zu vereinfachen, nochmal *„einen Term auf diese Art und Weise"* zu „*probieren*", sucht sie sich den Term $x \cdot 4 - (x - 1)$ aus und beginnt direkt damit diesen auf der Beschreibungsebene zu erklären, statt ihn einfach nur umzuformen.

31 Int.: *Super erklärt, Pia. Aber ich wollte noch wissen: Können wir einfach durch Vereinfachen - nur durch Termumformung - zeigen, dass hier auch wieder dieser einfache Term $3x + 1$ herauskommt?*

32 Pia: *Also, wenn ich eine Idee hätte, wie man den umformen könnte, dann wahrscheinlich* schon … [denkt nach]

33 Int.: *Du hast ja vorher die Klammer weggelassen, da durftest du die ja einfach weglassen. Und wenn du jetzt die Klammer weglässt, was müsstest du dann tun?*

34 Pia: *Dann ändert sich das Zeichen.*

Danach schafft es Pia, den Term zu vereinfachen: $x \cdot 4 - (x - 1) = x \cdot 4 - x + 1 = 3 \cdot x + 1$. Als letztes versucht Pia noch den Term $4 + (x - 1) \cdot 3$ zu vereinfachen und hat damit auch Schwierigkeiten. Nachdem Sie aber den Tipp bekommt, den Term mittels der Kommutativgesetze zu $3 \cdot (x - 1) + 4$ umschreiben, gelingt ihr am Ende das Ausmultiplizieren und zusammenfassen zu $3 \cdot x + 1$.

Obwohl Pia in der Lage ist einen gewaltigen „Cognitive Load" zu verarbeiten (sie weiß wovon sie spricht, wechselt ständig die Ebenen und erinnert sich an vorher Gesagtes und Gemachtes und weiß dies einzusetzen) und eine gute Mathematikschülerin ist, hat sie noch Probleme beim Termumformen. Wie Lin, verlässt sie bei Schwierigkeiten gern die Umformungsebene („*das ist so meine Art das zu verstehen*"). Da sie ja ganz offensichtlich das begründende Aufstellen und das überprüfende Einsetzen gut kann, wäre vielleicht auch ihr zu empfehlen sich erst einmal nur auf das durch Rechengesetze begründete und durch Einsetzen zu überprüfende Umformen zu konzentrieren, ohne gleich den ganzen Dreiklang Beschreibungs-, Einsetzungs- und Umformungsgleichheit simultan erklingen zu lassen.

***

Episode 6 –Interview mit Mara: *„Terme aufstellen mag ich nicht so."*

Mara ist nach Aussage ihrer Mathematiklehrerin eine Schülerin im mittleren Leistungsspektrum. Sie fällt im Unterricht nicht besonders auf. Beim Aufstellen von Termen gab sie sich stets damit zufrieden, wenn sie einen Aufbauterm gefunden hatte, während des Interviews äußert sie einmal:

> Mara: *„Terme aufstellen mag ich nicht so."*

3a) Mara bestimmt die Aufbauformeln für die Kreismuster

Mara beginnt damit, die Zahlenwerte für $x = 1$ bis $x = 4$ für die ersten beiden Zellen einzutragen (①). Dann fällt ihr auf, dass die Zahlenwerte in der zweiten Zeile sich aus denen der ersten Zeile sich aus dem Verdoppeln und dem Addieren von 2 ergeben und nutzt dieses Wissen um 16 und 102 einzutragen (③). Für die dritte Zeile untersucht sie die Struktur der figurierten Zahlen und erkennt für die Gesamtzahl der Kreise x Dreierpäckchen plus 2 Kreise außen.:

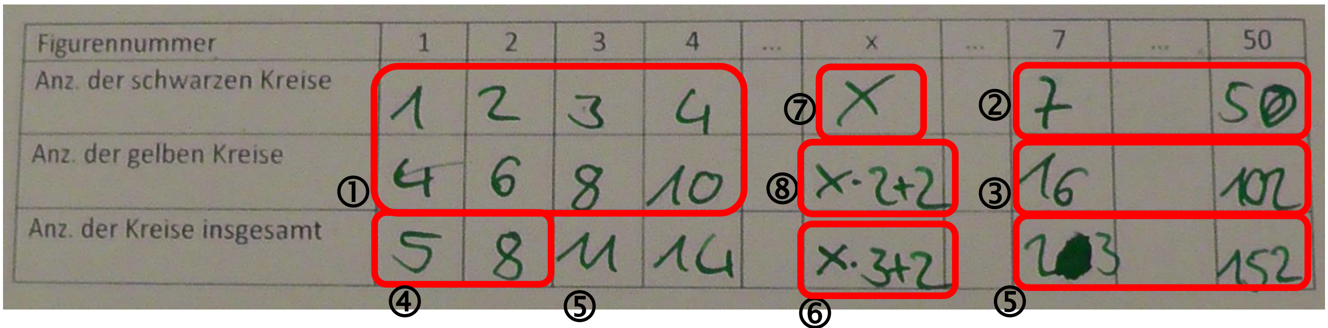


***Abb. 28:** Mara – Aufgabe KREISE*

01 Mara: ... *und die Kreise insgesamt, das sind ... angenommen, das wären hier nur drei das wären immer nur drei* [zeigt auf die beiden Dreierpäckchen in Figur 2], *dann würde man x mal 3 rechnen und dann plus 2, weil 2 noch an der Seite sind* [zeigt auf die beiden Randkreise] … *dann wären das 5* [schreibt 5 und 8 in die Tabelle (④)] *und man kann das hier auch einfach zusammenrechnen* [zeigt auf die 3 und die 8, schreibt dann 11, 14, 23 und 152 in die Tabelle (⑤)]

02 Int.: *Gut gemacht. Fehlt uns nur noch die Spalte x.*

03 Mara: [Schreibt $x \cdot 3 + 2$ für die Kreise insgesamt in die Tabelle (⑥)] *und bei den schwarzen Kreisen, da sind es eigentlich nur x, weil es ja die Anzahl ist* [zeigt auf die schwarzen Kreise, schreibt x in die Tabelle (⑦) und denkt nach] .... *Hmmm* ... [längere Pause] *Es müssten dann ja hier* [wischt über die beiden Dreierpäckchen von Figur 2]

wenn nur die Gelben gemeint sind, die Schwarzen weggenommen werden [streicht über die beiden Schwarzen von Fig. 2], *also x mal 2 plus 2* [schreibt $x \cdot 2 + 2$ in die fehlende Zelle ⑧]

04 Int.: *Mhm, sehr schön. Kannst du mir nochmal erklären, wie du aus der Idee heraus, die Schwarzen wegzunehmen auf den Term $x \cdot 2 + 2$ kommst?*

05 Mara: *Also, wenn man hier das so in ein Netz unterteilt, z. B. hier* [zeigt auf die Dreierpäckchen von Fig. 2 und dann auf dieselben Päckchen von Fig. 3] *und dann jeweils halt zwei gelbe und ein Schwarzer und wenn man die Schwarzen nicht haben möchte, dann kann man die natürlich einfach wegnehmen und dann wären es zwei Pünktchen pro Reihe* [tippt auf die gelben Zweierpärchen in Fig. 3]

06 Int.: *Ok, super. Eine Frage noch. Du hast ja grade erklärt, dass man die Anzahlen für die gelben und die schwarzen Kreise addieren kann, um auf alle Kreise zu kommen. Könnte man denn auch den Term und den Term addieren, um auf den Term zu kommen* [zeigt dabei auf die drei Terme in der x-Spalte]

07 Mara: *Ja, weil x gleich ja 1 mal x ist [tippt auf x] und das ist ja 2 mal x* [zeigt auf $x \cdot 2$ *in* $x \cdot 2 + 2$] *und 1 mal x plus 2 mal x wären 3 mal x und dann käm man hier auf 3 mal x plus 2 [zeigt auf $x \cdot 3 + 2$]*

Mara sucht und findet Strukturen in den Zahlen und den Figuren. Sie verwendet diese Strukturen, um hohe Figurennummern zu bearbeiten, ohne dass sie vorher eine Formel notiert. Die Formel für die Gelben findet sie, indem Sie die schwarzen Kreise von der Gesamtanzahl der Kreise abzieht. Die Zahlen-, Formel- und figurative Ebene scheint gleichermaßen präsent zu sein.

3b) Mara untersucht die verschiedenen Terme für die Hölzchenquadrate

Mara erklärt den Term $3 \cdot x + 1$, wie Pia vorher, statisch anhand der 2. Figur (⊏ ⊏ ⊏ |). Mara nennt direkt als Möglichkeit, die Terme zu überprüfen, das „Kürzen“:

01 Mara: *Wahrscheinlich ähh kürzen und gucken, ob man z. B. jetzt darauf* [tippt auf den Term 3x + 1], *auf das 3 mal x kommt*

Im Folgenden hat sie keine Probleme beim Ausklammern und Zusammenfassen der Terme $4 + (x - 1) \cdot 3$ und $4 \cdot (x - 1) + 3$ und kann auch das Distributivgesetz benennen und beschreiben (①, ②). Beim Versuch den Term $2 \cdot 4 + 2 \cdot (x - 2) + (x - 3)$ zu vereinfachen, stellt für sie die letzte Klammer eine Hürde dar (8 + 2 · x − 2 · 2 + (x − 3)(③)) und sie kommt hier erstmal nicht weiter. Sie wählt stattdessen einen anderen Term aus der Liste:

02 Mara:___ *dann nehm ich den 5.ten $(x \cdot 4 - (x - 1))$ … hmmm* [denkt lange nach] … *nö, dann nehm ich den letzten $(x + (x + 1) + x)$ … also ich hätte das jetzt so gemacht, dass ich die ganzen x zusammengefasst hätte, das wären dann ja 3x, also 3 mal x und dann plus 1*

03 Int.: *Dann hast du ja die Klammern einfach weggelassen. Darf man das?*

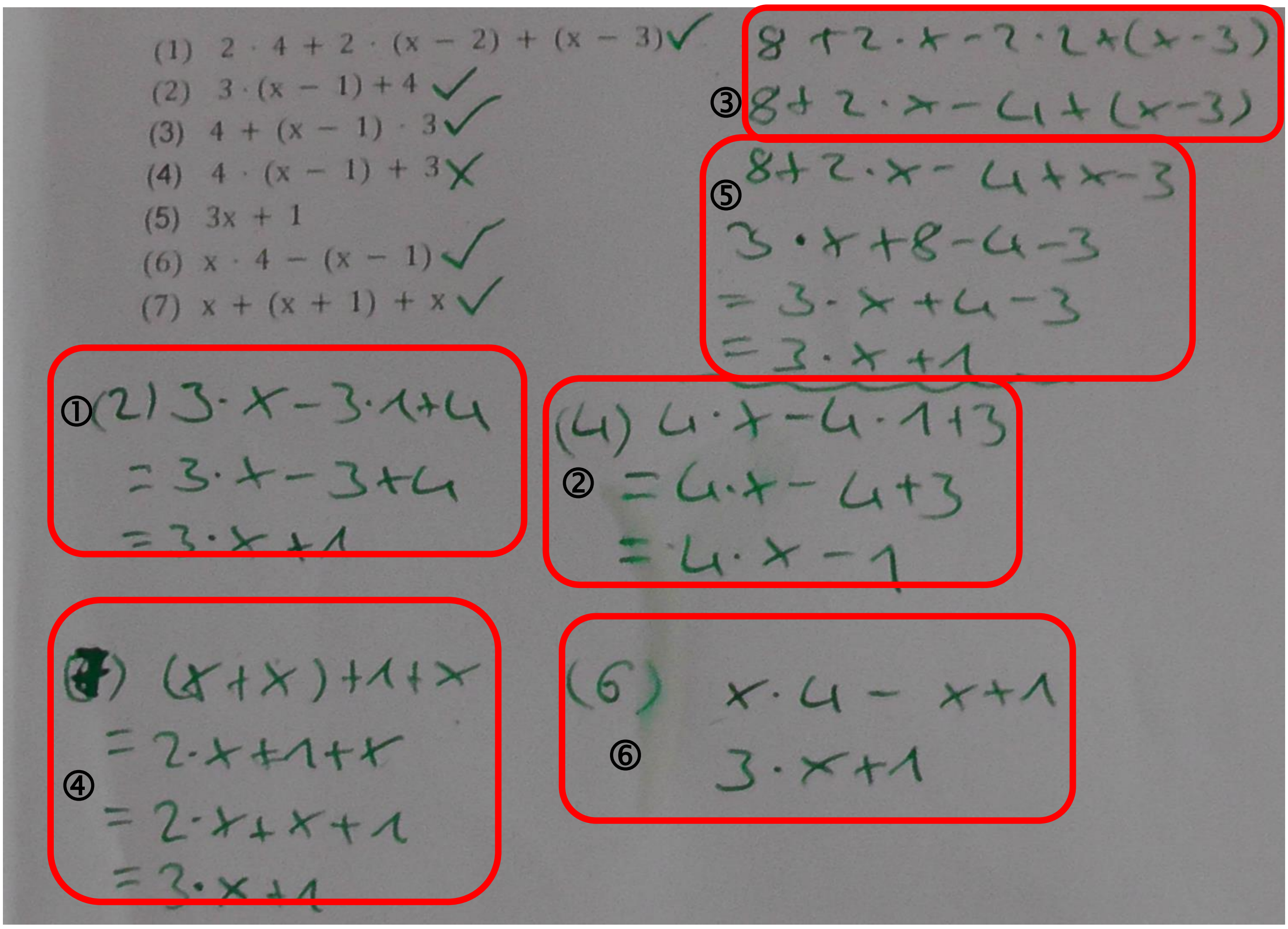


Abb. 28: *Maras Termumformungen zur Aufgabe Hölzchenquadrate.*

04 Mara: *Eigentlich nicht, aber ich weiß, dass es richtig ist. Eigentlich darf man die ja nicht einfach weglassen, aber ich weiß, dass halt genau das rauskommt* [tippt auf $3x + 1$, denkt lange nach] ___ *Man kann auch einfach die Klammer um das x plus x setzen* [tippt auf die ersten beiden x'en in x + (x + 1) + x] *und dann kommt ja 2 mal x raus und dann wär die Klammer ja auch weg und dann plus x wär 3 mal x plus 1 … Assoziativgesetz, wär das* [schreibt $(x + x) + 1 + x = 2x + 1 + x$ (④)] *und dann sollte man das hier einfach tauschen, weil dann kann man es besser zusammenrechnen* [tippt auf die 1 und das x rechts]. *Das ist dann 2 mal x plus x+1 und dann wären das 3 mal x plus 1* [schreibt $2x + x + 1 = 3x + 1$ (④)]

Während Mara bei der Anwendung des Distributivgesetzes keine Probleme hat, weiß sie nicht, wie sie sich der Klammer in $+(x + 1)$ entledigen soll. Sie weiß zwar, dass, wenn sie die Klammer weglässt, das richtige Ergebnis erzielt wird, kennt aber keine Regel, die ihr das gestatten würde. Sie hat die Termumformung als regelgeleitetes Umformen verinnerlicht und findet einen Ausweg über das Assoziativgesetz. Dabei waren die PLUS-(und MINUS-) Klammerregeln eine der ersten, die im Unterricht thematisiert wurden. Warum sie ausgerechnet damit solche Probleme hat, darüber kann man hier nur spekulieren. Vielleicht wusste sie schon in der Arithmetik die Distributiv-, Kommunikativ- und Assoziativgesetze bewusst zu nutzen und das Auflösen von Klammern kam ihr dabei nicht unter? Oder das schiere Weglassen einer Klammer erscheint ihr als nicht regelkonform genug?[61] In jedem Falle schafft sie es durch Anwenden des Assoziativgesetzes die Klammer so zu setzen, damit sie die Variablen jetzt innerhalb der Klammern addieren kann und so die Klammern genau wie in der Arithmetik verschwinden. Der Interviewer erklärt anhand eines Zahlenbeispiels, dass man bei einem Pluszeichen vor der Klammer auch einfach die Klammer weglassen kann (PLUS-Klammerregel).

05 Int.: *Und jetzt könnten wir nochmal den ersten Term versuchen.*

06 Mara: [Schreibt $8 + 2 \cdot x - 4 + x - 3$ unter den schon vorher auf geschreibenen Term $8 + 2 \cdot x - 4 + (x - 3)$ und denkt lange nach]

Obwohl die Klammer jetzt weg ist kommt Mara hier nicht weiter.

07 Int.: *Mhm. Vorher hast du doch folgendes gemacht. Du hast gesagt „Ich tausche so, dass alle x'en zusammen stehen“* [zeigt auf $2x + 1 + x = 2x + x + 1$ (⑤)] *Kannst du hier vielleicht etwas ähnliches machen?*

08 Mara: *Ja, man kann das 2-mal x plus x rechnen das wären 3 mal x und dann 8 minus 4 rechnen das wären 4 und dann minus drei das wären 1, also plus 1 und dann kommt das richtige ...* [schreibt untereinander $3 \cdot x + 8 - 4 - 3$ und $3 \cdot x + 4 - 3$ und $= 3x + 1$ (⑤)] *und dann ist der Term auch korrekt.*

09 Int.: *Super! Ok und jetzt ist noch einer übrig und dann sind wir auch durch!*

Mara versucht sich nun an dem noch verbliebenen Term $4 \cdot x - (x - 1)$ („ *... aus Prinzip würde ich sowieso sagen, dass der falsch ist“),* aber auch hier scheint ihr eine Regel zu fehlen, weshalb sie jetzt auf die Einsetzungsebene wechselt.

10 Mara: *... Man kann den ausrechnen, man kann z. B. hier* [zeigt auf $3x + 1$] *bei dem x ne zwei Einsetzen und dann hier* [zeigt auf $4 \cdot x - (x - 1)$] *auch ne 2*

11 Int.: *Probier mal!*

12 Mara: *Also ich setz einfach mal ein.* [schreibt nichts auf:] *3 mal 1 plus 1 wären 4 und dann 1 mal 4 wären 4 minus 1 minus 1, wären null und dann wären das 4 minus eigentlich null, also falsch*

13 Int.: *Wie, falsch?*

14 Mara: *Weil nicht das gleiche rauskommt ... nö doch, es kommt das Gleiche raus __ Vielleicht ist er auch einfach richtig?*

15 Int.: *Wenn bei zwei Termen für eine Zahl das Gleiche rauskommt, ist das denn dann auch bei allen anderen Zahlen so?*

16 Mara: *Nö, man muss das schon mit mehr Zahlen probieren! ___ Ok, zwei ... 6 plus 1 sind 7, äh 2 mal 4 sind 8 minus 1 sind 7, und wenn ich drei einsetze wären es 9 plus 1*

---

[61] Fachlich wären diese Klammerregeln sowieso überflüssig, da sie sich entweder aus dem Distributivgesetz herleiten ließen $\pm(a + b) = \pm 1 \cdot (a + b)$ oder schlichtweg eine Folge der Rechenkonventionen mit negativen Zahlen sind: $+(\pm a) = \pm a$ und $-(\pm a) = \mp a$).

sind 10 und das sind 12 minus 4 wären ... [denkt nach] ... 12 minus 2, 10 wären das ___ Es kommt wieder dasselbe raus! ... Wahrscheinlich ist der letzte Term auch richtig!

17 Int.: *Ok ich geb dir jetzt einen Tipp. Hier steht ja ein minus vor der Klammer. Ohne das da z. B. ein 2 mal steht, dann wär es ja das Distributivgesetz. Dafür, wenn wir nur ein minus vor der Klammer stehen haben, hatten wir auch eine Regel, wie man dann die Klammern auflösen kann. Kannst du dich daran erinnern?*

18 Mara: *Ja, wenn man die dann auflöst, wird das dann zu plus* [zeigt auf das zweite Minus in $4 \cdot x - (x - 1)$]

19 Int.: *Ja, probier das doch mal!*

20 Mara: [schreibt $x \cdot 4 - x + 1 = 3 \cdot x + 1$ (⑥)] *und 4 mal x minus x iss ja dann dreimal x.*

Mara hat das Termumformen als regelgeleitetes Vorgehen schon gut verinnerlicht und Vertrauen ins Kalkül entwickelt. Sie führt die Gleichwertigkeitsnachweise durchgehend auf der Kalkülebene, ohne dabei einen inhaltlichen Bezug zu suchen. Lediglich in dem Fall, indem Sie den Term als vermeintlich falsch ansieht („ *... aus Prinzip würde ich sowieso sagen, dass der falsch ist“),* versucht sie die Nichtgleichwertigkeit durch das Einsetzen von Zahlen nachzuweisen. Damit macht sie alles richtig, da sie versucht einen (vermeintlich) falschen Term durch Testeinsetzungen als falsch zu entlarven. Bei Mara zeigt sich schon früh, was sich später bei immer mehr Schülern zeigt: Wenn sie erst einmal Vertrauen in das (regelgeleitete) Kalkül gewonnen haben, treten die inhaltlichen Bezüge mehr und mehr in den Hintergrund. Es entwickelt sich ein Kalkülaspekt, indem zwar bestenfalls die dahinter liegenden Umformungsregeln anerkannt und benutzt werden, jedoch keine inhaltliche Rechtfertigungen dieser als gesetzt wahrgenommenen Regeln gesucht werden.

***

Soweit die drei Episoden aus dieser Interviewsequenz. Die Unterschiedlichkeit der Schülerinnen im Herangehen und in ihrer bereits aufgebauten algebraischen Expertise ist dabei ganz exemplarisch für die Gesamtheit der hier Interviewten. Keine zwei Schüler vermitteln weitgehend identische Eindrücke. Insgesamt sind hier, ca. drei Wochen nach Einführung des Kalküls, die Schüler wesentlich besser im *symbolischen Beschreib*en als im *symbolischen Manipulieren*. Im Letzteren zeigt sich ein breites Spektrum von relativ sicherem regelgeleitetem Umformen bis hin zu ganz erheblichen semantischen und syntaktischen Schwierigkeiten. In jedem Falle fällt die „Enkulturation“ in das Rechnen mit Variablen keinem Schüler leicht. Vielmehr wird es anfangs meist durchgehend als mühsames Geschäft und keineswegs als *„einfachere (inhaltsfreie) Möglichkeit, die Gleichwertigkeit nachzuweisen*“ wahrgenommen. Hat sich aber das Kalkül erst einmal (mühsam) in den Köpfen konsolidiert, tritt die Inhaltsebene mehr und mehr in den Hintergrund. Bei schwächeren Schülern hat man den Eindruck, dass die kontextuelle Vielschichtigkeit des hier verfolgten Zugangs immer wieder zu einer Überforderung führt. Zudem bleibt es nach wie vor unklar – ungeachtet dessen, dass diese Vielschichtigkeit eine Vielzahl produktiver Denkhandlungen möglich macht – inwiefern und wie die Inhaltsebenen den Kalkülaufbau unterstützen Nicht wenige Schüler verwenden die Inhaltsebene als Fluchtpunkt, dem neuen, ungewohnten und schwierigen Kalkül aus dem Weg zu gehen. Es folgt eine Zusammenfassung der Beobachtungen aus der gesamten Interviewsequenz.

3 Zusammenfassung und Ergebnisse der gesamten Interviewsequenz

1 Zusammenfassungen zur Aufgabe KREISE

In den Interviews zur Aufgabe KREISE sollten die Schüler 3 Terme aufstellen (symbolisches Besschreiben) und versuchen die Terme für die schwarzen und gelben Punkmuster zusammenzufassen (symbolisches Manipulieren).

Grob lässt sich das Vorgehen– wie schon oben beschrieben – beim Auftsllen der Terme in *heuristisch*, *statisch* und *dynamisch* einteilen, wobei es auch Mischformen gibt. Die Kategoriesierung in *statisch* und *dynamisch* habe ich von Berlin (2010) übernommen, wobei ich diese weiter in dynamisch/statisch-numerisch und dynamisch/statisch-ikonisch ausdifferenziert habe (Erklärung siehe unten). Die zusätzliche Kategorisierung in *heuristisch* wurde von mir eingeführt, nachdem ich festgestellt habe, dass es eine Reihe von Schülern gab, die (oft richtige) Aufbauterme aufstellten, ohne eine Muster oder Struktur in den Folgen zu erkennen.

Schüler, denen ich ein *heuristisches* Verfahren zuschreibe, operieren, nachdem sie die zählbaren Anzahlen gezählt und eingetragen haben, nur noch auf der numerischen Ebene. Die statisch und dynamisch vorgehenden Schüler argumentieren entweder auf der numerischen oder der ikonischen Ebene. Ich komme daher zu folgender Kategorisierung.

Kategorisierung der Denk- und Vorgehensweisen der Schüler beim Aufstellen der Terme:

(1) ***Heuristisch.*** Die Schüler probieren nach einem Trial & Error- Verfahren verschiedene, für sie sinnvoll erscheinende, Terme und passen sie nach und nach den vorliegenden Zahlenwerten an. Im Laufe des Diskurses entwickeln sich bei einigen Schülern empirisch-heuristische Regeln und eigene Vorgehensweisen, in denen die Zahlen auf unterschiedliche Arten der immer wiederkehrenden Struktur $ax + b$ angepasst werden.

(2) ***Dynamisch.*** Das Augenmerk ist eher auf die Veränderungen von Folgeglied zu Folgeglied gerichtet. Hier lassen sich zwei Unterkategorien festmachen:
- *dynamisch-numerisch*: es wird z. B. auf Zahlenebene erkannt, dass von Folgeglied zu Folgeglied immer $+3$ addiert wird
- *dynamisch-ikonisch:* der Schüler erkennt anhand der ikonischen Darstellung, dass von Folgeglied zu Folgeglied z. B. immer 3 Kreise hinzukommen

(3) ***Statisch.*** Die Schüler gucken stärker auf die Aufbaustruktur der beiden Glieder. Auch hier lässt sich eine weitere Einteilung vornehmen:
- *statisch-numerisch:* es wird eine Struktur in den Zahlen gesucht, z. B. indem man erkennt, dass die Zahlen in der zweiten Zeile immer das Doppelte der Zahlen in der ersten Zeile sind plus zwei oder indem man einen Zahlenterm findet, der dann als generischer Term zu einer algebraischen Formel führt
- *statisch-ikonisch*: die Struktur wird in den ikonischen Abbildern der Zahlenfolge gesucht, indem man z. B. erkennt, dass jede Figur x Dreierpäckchen hat und links und rechts noch zwei Kreise dazukommen

Selbstredend ist diese Kategorisierung nicht disjunkt aber meist inklusiv. Wer in der Lage ist eine statische Sichtweise anzunehmen kann i.d.R. auch eine dynamische oder eine heuristische Sichtweise annehmen. Umgekehrt sind Schüler, die (mitunter empirisch-heuristischen) *Trial & Error*-Prozeduren den Vorzug geben, oft nicht in der Lage, *dynamisch* oder *statisch* zu

argumentieren. Ein Schüler kann z. B. sich durchaus eine Wertetabelle dynamisch und sich daraus *dynamisch-numerisch* einen Aufbauterm erschließen, um dann dessen Struktur an der ikonischen Repräsentation aufzuspüren (*statisch-ikonisch*). Auch die Übergänge zwischen *Trial & Error* und *dynamisch* sind fließend: Hat ein Schüler, der z. B. für die Anzahlen der gelben Kreise am Ende den Term $x \cdot 2 + 2$ erzielt hat, implizit seine Erfahrung genutzt, dass der Zuwachs $+2$ immer auf $x \cdot 2$ führen muss oder ‚sieht' er in ‚$x \cdot 2$' den Zuwachs von 2 abgebildet? Demgegenüber weist der Term $4 + (x - 1) \cdot 2$, aber auch der falsche Term $4 + x \cdot 2$, eindeutiger auf eine dynamische Denkweise hin.
Wenn Gestik <u>und</u> Erklärungen der Schüler nicht erkennen ließen, dass beim Aufstellen dynamische oder statische Beobachtungen mit einfließen, habe ich diese Schüler jedenfalls in die heuristische Kategorie eingeordnet. Oft hört man dann: *„Ich hab das einfach nur geraten und dann an den Zahlen getestet"*. Dementsprechend geben die in Tabelle 8 angegebenen Zuordnungen (in der Tabellenspalte „Terme aufstellen") nur einen groben Hinweis auf die Denkweisen der Schüler.

Ob und wie eine Termaddition durchgeführt wurde oder werden konnte wird in der Spalte „Termaddition beschrieben". Das Kürzel „vs" zeigt dabei an, dass der Schüler „von sich aus" eine solche Termaddition durchgeführt hat. Das Kürzel „nA" zeigt an, dass die Termaddition erst auf Anfrage des Interviewers angegangen wurde. Insgesamt geling 12 von 19 Schülern die Termaddition $x + 2x + 2 = 3x + 2$.
Tabelle 8 zeigt eine Zusamenfasssung der Interviewbeobachtungen zur Aufgabe KREISE.

Aufgabe KREISE					
Nr.	**Name (n)**	**Terme aufstellen**	**Termaddition** $\boldsymbol{x + 2x + 2 = 3x + 2}$		
			vs	**nA**	**Bemerkungen**
1	Maria ☑, ✓	$\boldsymbol{s}$: $\boldsymbol{x \cdot 1}$ $\boldsymbol{g}$: $\boldsymbol{x \cdot 2 + 2}$ $\boldsymbol{i}$: $\boldsymbol{x \cdot 3 + 2}$ heuristisch dynamisch-numerisch		**X**	Addiert problemlos die beiden Terme $x \cdot 1 + x \cdot 2 + 2 = x \cdot 3 + 2$
2	Celina ✓	$\boldsymbol{s}$: $\boldsymbol{x \cdot 1}$ $\boldsymbol{g}$: $\boldsymbol{2 + x \cdot 2}$ heuristisch strukturell-ikonisch		**X**	Gewinnt den Term $x \cdot 3 + 2$ nur auf der Umformungsebene, hat keine Probleme bei der Termaddition
3	Marlon ☑, ✓	$\boldsymbol{s}$: $\boldsymbol{x}$ $\boldsymbol{g}$: $\boldsymbol{2 + x \cdot 2}$ statisch-ikonisch $\boldsymbol{i}$: $\boldsymbol{x + 2 + x \cdot 2}$	**X**	**X**	Addiert die auf der Inhaltsebene gefundenen Terme direkt zu $x + 2 + x \cdot 2$ und hat auf Anfrage keine Probleme diesen Term zu $3 \cdot x + 2$ zusammenzufassen
4	Robin ☑, ✓	$\boldsymbol{g}$: $3 - 1 + 3x \rightarrow 3 + x \cdot 2 + 1$ $\rightarrow \boldsymbol{x \cdot 2 + 2}$ heuristisch $\boldsymbol{s}$: $\boldsymbol{x}$ $\boldsymbol{i}$: $\boldsymbol{x \cdot 3 + 2}$ statisch-numerisch		**X**	Kann sich zunächst nicht vorstellen, wie man Terme addieren kann, besinnt sich aber und addiert $x + x \cdot 2 + 2$ zu $x3 + 2$. Sagt dann, dass $x3$ ja dasselbe wie $x \cdot 3$ ist
5/6	Clara & Eve ☑, ✓	s: $y = x + 1 \rightarrow x \rightarrow \boldsymbol{1 \cdot x}$ g: $x \cdot 4 \rightarrow x + 4 \rightarrow \boldsymbol{x \cdot 2 + 2}$ i: $x + 3 + 5 \rightarrow x \cdot 3 + 3 \rightarrow \boldsymbol{x \cdot 3 + 2}$ heuristisch (Trial & Error)	**X**	**X**	Erkennen direkt, dass $1 \cdot x + 2 \cdot x + 2 = 3x + 2$ dasselbe wie $x \cdot 3 + 2$ ist.
7	Pia ☑, ✓	$\boldsymbol{s}$: $\boldsymbol{x \cdot 1}$ $\boldsymbol{g}$: $\boldsymbol{x \cdot 2 + 2}$ $\boldsymbol{i}$: $\boldsymbol{x \cdot 3 + 2}$ statisch-ikonisch	**X**		Erkennt von sich aus, dass man die Terme addieren kann und schreibt x $\underline{x \cdot 2 + 3}$ $x \cdot 3 + 2$

8	Mara ☑ , ✓	$\boldsymbol{s: x \cdot 1}$ $\boldsymbol{i: x \cdot 3 + 2}$ statisch-numerisch u. statisch-ikonisch $\boldsymbol{g: x \cdot 2 + 2}$ durch Subtrahieren von $\boldsymbol{i}$ und $\boldsymbol{s}$	X	X	Erklärt den Term $x \cdot 2 + 2$ darüber, dass man beim Term $x \cdot 3 + 2$ ein x (die Schwarzen) weg-nehmen muss. Kann auf Anfrage die Terme auch „einfach zu-sammenrechnen“: $x \cdot 1 + x \cdot 2 + 2 = x \cdot 3 + 1$
9	Lotte	$\boldsymbol{s: x \cdot 1}$ $\boldsymbol{g: x \cdot 2 + 2}$ $i: x \cdot 3$ heuristisch & statisch-ikonisch		X	Hat erhebliche Probleme die Terme zusammen-zufassen, traut dann ihrem Ergebnis $x \cdot 3$ nicht, weil sie den Faktor 3 auf der Beschreibungs-ebene nicht wiederfindet
10	Thimo ☑ , ✓	$\boldsymbol{s: 1 \cdot x}$ $\boldsymbol{g: 2 + 2 \cdot x}$ $i: 5 + x \cdot 3 \to \boldsymbol{5 + 3 \cdot (x - 1)}$ dynamisch-ikonisch		X	Vereinfacht den Term $\boldsymbol{5 + 3 \cdot (x - 1)}$ mit Hilfe des Distributivgesetzes zu $3 \cdot x + 2$ und erkennt dann, dass sich dieser Term auch durch Addition ergibt.
11	Lin ☑	$\boldsymbol{s: x}$ $\boldsymbol{g : x \cdot 2 + 2}$ statisch-ikonisch $\boldsymbol{i: x \cdot 2 + 2 + x}$ durch Addieren		X	Erkennt zwar, dass sie die Terme addieren kann und stellt so den Term $x \cdot 2 + 2 + x$, hat aber keine Ahnung, wie sie diesen weiter vereinfa-chen kann
12	Noel (✓)	$s: x = \boldsymbol{1 \cdot x}$ $g: x + 2 \to x + 6 \to x \cdot 2 + 4$ $\to x \cdot 1 + 2 \to \boldsymbol{x \cdot 2 + 2}$ Trial & Errorr		X	Hat erhebliche Probleme die Terme zusammen-zufassen. Erhält dann doch durch Addition $3 \cdot x + 2$, vertraut aber diesem Ergebnis nicht.
13/ 14	Isra & Mecht- hild ☑ , ✓	$\boldsymbol{s: x}$ $g: x + x + 3 \to \boldsymbol{x + x + 2}$ $\boldsymbol{i: x + x + x + 2}$ statisch-ikonisch		X	Mechthild fasst den Term problemlos zu $3 \cdot x + 2$ zusammen und erklärt dies mithilfe einer Zahl $(1 + 1 + 1 + 2 = 3 \cdot 1)$ und anhand der 3. Figur.
15	Marc ✓	$\boldsymbol{s: x + 0}$ $\boldsymbol{g: x + x + 2}$ dynamisch-arithmetisch		X	Hat erhebliche Probleme beim Aufstellen der beiden Terme, kann aber dann relativ schnell zu-sammenfassen: $x + 0 + x + x + 2 = 3 \cdot x + 2$
16	Jarno ☑	$\boldsymbol{s: x}$ $g: 2 + x \to x + 2 + x - \cdots \to$ $4 + x \cdot 2 \to 4 + x - 1 \cdot 2$ $\to 4 + (x - 1) \cdot 2 \to \boldsymbol{2 + 2x}$ Heuristisch (Trial & Error)		X	Vereinfacht so: $2 + 2x + x = 2 + 3x$, ist sich aber unsicher und überprüft dann mit Zahlen.
17	Luis ☑	$s: x + 1 \to \boldsymbol{x + 0}$ $\boldsymbol{g: 2 + 2 \cdot x}$ statisch-arithmetisch $\boldsymbol{i: x + 0 + 2 + 2 \cdot x}$	X	X	Luis erhält den dritten Term durch Termaddition. Das Zusammenfassen der Terme geling ihm nicht. Er vereinfacht, indem er die Zweien ad-diert: $x + 0 + 2 + 2 \cdot x = x + 4 \cdot x$
18	Muslim ✓	$\boldsymbol{s: x}$ $g: x \cdot 2 \to \boldsymbol{2 \cdot x + 2}$ $\boldsymbol{i: 3 \cdot x}$		X	Vereinfacht ohne große Probleme: $x + 2x + 2 = 3x + 2$
19	Anette	$\boldsymbol{s: x}$ $\boldsymbol{g: x \cdot 2 + 2}$ Statisch-arithmetisch $\boldsymbol{i: x \cdot 2 + 2 + x}$ durch Addieren	X	X	Annette stellt zwar <u>*nach einem Hinweis*</u> darauf den dritten Term durch Addieren der beiden ers-ten auf, ist aber nicht in der Lage den Term $x \cdot 2 + 2 + x$, zu vereinfachen, schlägt $x \cdot 4$, $(2x + 2) + x$ und $3x + 3$ vor.

Tabelle 8: *Interviewergebnisse zur Aufgabe KREISE.*
*$\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{g}$ und $\boldsymbol{i}$ sind Bezeichnungen für die Terme der **s**chwarzen, **g**elben und die Terme, der Kreise **i**nsgesamt*
Spalte „Terme aufstellen“: Fett gedruckt sind die am Ende gefundenen Aufbauterme. Sind hier mehrere Terme durch Pfeile verknüpft, so bedeutet dies, dass der Endterm über falsche Zwischenterme gefunden wurde, z. B.:
$x \cdot 2 \to \boldsymbol{2 \cdot x + 2}$: der erste Versuch für die gelben Kreise war hier $x \cdot 2$, bevor eine Revision zu $\boldsymbol{2 \cdot x + 2}$ führte
Spalte „Termaddition $\boldsymbol{x + 2x + 2 = 3x + 2}$“: durch die Kürzel „vsa: von sich aus“ und „nA: nach Anfrage“ wird ange-zeigt, ob die Schüler hier von sich aus (vsa) die Termaddition durchführen, oder ob es vom Interviewer angefragt wurde.
☑: *Der Schüler hat richtige Terme für jede der „Farben“ $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{g}$ und $\boldsymbol{i}$ gefunden.*
✓: *Dem Schüler ist es gelungen seine beiden Terme zu addieren und bis zur Normalform zusammenzufassen.*

8 der 19 Schüler gelingt sowhl das Aufstellen der 3 Terme als auch die Termaddition. 5 Schüler stellen 3 richtige Terme auf, können aber nicht zusammenfassen. 4 Schüler waren nicht in der Lage <u>alle</u> drei Terme aufzustellen, ihnen gelang aber die Termaddition. Und 3 Schülern gelang weder das eine noch das andere. Es gab also 13 vollständige richtige Bearbeitungen beim Auf-stellen und 12 korrekte Termadditionen.

2 Zusammenfassungen zur Aufgabe HÖLZCHENQUADRATE

Die Aufgabe Hölzchenquadrate des zweiten Interviewteils fokussiert stärker auf das Termumformen. Schwerpunkte des Interviewteils waren ja, im Allgemeinen die individuellen Vorstellungen und Fortschritte beim Aufbau des Kalküls zu erheben und im Speziellen dabei auszuloten, inwiefern sich der Dreiklang Beschreibungs-, Einsetzungs- und Umformungsgleichheit dabei auf die einzelnen Schüler ausgewirkt hat.
Da alle Interviews ca. 30 Minuten gedauert haben, gibt die Tabelle 9 schon einen ersten Hinweis auf die algebraische Expertise der Schüler. Steht z. B. in der Spalte „Termumformen“ nichts, so bedeutet das schlichtweg, dass die Zeit in diesem zweiten Teil des Interviews gar nicht mehr gereicht hat, um Kalkülhandlungen zu erfragen. Ansonsten werden in der Spalte „Termumformungen“ die Umformungen der einzelnen Schüler grob nachgezeichnet. Hierbei- wird durch die Nummerierung ①, ②, …,⑤ gezählt, wie viele der 7 angebotenen Terme von dem jeweiligen Schüler umgeformt wurden, wobei eine weiße Numerierung (①) eine korrekte und eine schwarze Nummerierung(❶) eine falsche Umformung anzeigt.
In der Spalte „Nachweise der Gleichwertigkeit“ wird jeder Wechsel der Ebenen der Gleichwertigkeit (Ebenenen der Einsetzungs-, Beschreibungs- und Umformungsgleichheit) durch Nennung eines der Kürzel EG, BG und UG angezeigt.
In der Spalte „selbst aufgestellter Term“ ist der Term zu sehen, den der jeweilige Schüler für die Folge der Hölzchenquadrate angab.

Aufgabe HÖLZCHENQUADRATE					
N	**Name (n)**	**selbst aufgestellter Term**	**EG, BG, UG**	**Termumformen**	**Bemerkungen**
1	Maria	$\boldsymbol{x \cdot 3 + 1}$	EG	**-**	Setzt zuerst $x = 2$ in alle Terme ein und meint zunächst, dass alle Terme stimmen. Nach Hilfe setzt sie dann noch $x = 1$ ein und diagnostiziert Term 3 als den Falschen.
2	Celina	$\boldsymbol{x \cdot 3 + 1}$	BG EG UG	① $x + (x + 1) + x = 3x + x$ $= 4x \ldots x + x + x = 3x \ldots$ $= \boldsymbol{3x + 1}$ ❷ $4 \cdot (x - 1) + 3 =$ $4 \cdot x - 1 + 3 = 4x - 1 + 3$ ❸ $x \cdot 4 - (x - 1)$ $= x \cdot 4 \cdot x - 4 \cdot 1$	Celina nennt von sich aus keine Rechengesetze und beim Umformen ist sie sich sehr unsicher und macht auch beim Einsetzte ($x = 2$ und $x = 3$ viele Fehler.
3	Marlon	$\boldsymbol{4x - (x - 1)}$	EG, BG, UG BG UG EG UG	① $x \cdot 4 - (x - 1) = \boldsymbol{3x + 1}$ ② $x + (x + 1) + x = \boldsymbol{3x + 1}$ ③ $4 + (x - 1) \cdot 3$ $= 4 + x - 1 \cdot 3 =$ $= 3x - 3 \cdot 1 + 4 = \boldsymbol{3x + 1}$ ④ $4 \cdot (x - 1) + 3$ $= 4x - 4 + 3 = \boldsymbol{4x - 1\ (f)}$	Marlon nennt zu Anfang ganz allgemein alle drei Strategien zur Überprüfung der GW. Er findet den falschen Term auf der Kalkülebene. Er kann die Rechengesetze zu seinen Umformungen nennen. Bei Problemen mit $4 + (x - 1) \cdot 3$ wechselt er von sich aus auf die Einsetzungsebene.
4	Robin	$\boldsymbol{x \cdot 2 + x + 1}$ $\boldsymbol{= x3 + 1}$	BG UG	① $x + (x + 1) + x = \boldsymbol{3x + 1}$ ② $4 + (x - 1) \cdot 3$ $= 4 + x \cdot 3 - 1 \cdot 3$ $= \boldsymbol{3x + 1}$ ③ $2 \cdot 4 + 2(x - 2) + (x - 3)$ $= 8 + 2x - 2 + x + 3 = nö$ $= 8 + 2 \cdot x - 2 \cdot 2 + x - 3$ $= 8 + 3x - 7 = \boldsymbol{3x + 1}$	Robin formt relativ gekonnt um und bleibt dabei durchgängig auf der Kalkülebene. Er wendet die Rechengesetze weitgehend richtig an, kennt aber nicht deren Namen.
5/6	Clara Eve	$\boldsymbol{x \cdot 3 + 1}$	UG	① $x \cdot 3 + 1 = \boldsymbol{3x + 1}$ ② $2 \cdot 4 + 2(x - 2) + (x + 3)$ $= \cdots = 8 + 2x - 4 - 3$ $= 1 + 3x = \boldsymbol{3x + 1}$ ③ $4 \cdot (x - 1) + 3$ $= 4x - 4 + 3 = \boldsymbol{4x - 1\ (f)}$	Clara und Eve nennen für den Nachweis der GW direkt das Umformen. Clara kann mit dem Distributivgesetz recht sicher umgehen, ist sich beim Nennen der Gesetze aber extrem unsicher (benennt z. B. das K.-gesetz auch als das D.-gesetz)

7	Pia	$\boldsymbol{x\cdot 3+1}$	EG BG UG BG EG UG BG UG	① $x+(x+1)+x=$ $=x+x+1+x$ $=x+x+x+1=3x+1$ $=\boldsymbol{x\cdot 3+1}$ ② $x\cdot 4-(x-1)=$ $=\ x\cdot 4-x+1$ $=\boldsymbol{x\cdot 3+1}$ ③ $4+(x-1)\cdot 3$ $=4+x-1\cdot 3=\cdots$ $=(x-1)\cdot 3+4$ $=x\cdot 3-1\cdot 3+4$ $=x\cdot 3+4-3$ $=x\cdot 3+4$	Pia nennt zu Anfang ganz allgemein alle drei Strategien zur Überprüfung der GW. Wechselt sehr oft die Ebenen (EG, BG und UG). Ringt z. B. mit dem ihr komisch vorkommenden Term $4\cdot(x-1)+3$ auf der B.-Ebene, diagnostiziert ihn dann auf der E.-Ebene als falsch, und weist dies durch Umformen erst ganz am Ende nach.
8	Mara	-	BG UG UG EG UG EG	❶ $2\cdot 4+2(x-2)+(x-3)$ $=8+2x-2\cdot 2+(x-3)$ $=\cdots=?$ ② $4+(x-1)\cdot 3$ $=4+3\cdot x-1=\cdots nö$ $=4+3x-3=\boldsymbol{3x+1}$ ③ $x+(x+1)+x$ $=(x+x)+1+x$ $=2x+1+x$ $=2x+x+1=\boldsymbol{3x+1}$ ④ $4\cdot(x-1)+3$ $=4\cdot x-4\cdot 1+3$ $=4\cdot x-4+3$ $=\boldsymbol{4\cdot x-1\ (f)}$ ⑤ $x\cdot 4-(x-1)$ $=x\cdot 4-x+1=\boldsymbol{3x+1}$	Mara nennt direkt die Methode Vereinfachen: *„Kürzen, ob man auf das 3x+1 kommt, weil das der einfachste und kürzeste Term ist"*. Formt ziemlich sicher um und kann dabei die Rechengesetze benennen. Hat lediglich Probleme mit den Klammerregeln und umgeht die PLUS-Klammerregel gekonnt durch Anwenden des Assoziativgesetzes. Beibt sehr lange auf der Umformungsebene. Kehrt am Ende nochmals zu Term (1) zurück und wechselt da auf die E.-Ebene.
9	Lotte	$\boldsymbol{x\cdot 3+1}$	BG UG EG	① $\boldsymbol{3x+1}=x\cdot 3+1$	Lotte erkennt zu Anfang, dass $3x+1$ gleichwertig zu ihrem Term $x\cdot 3+1$ ist und erklärt das mit dem K.-Gesetz. Danach setzt sie $x=4$ ein und überführt dadurch den falschen Term.
10	Thimo	$\boldsymbol{4+3(x-1)}$	BG UG BG EG BG	① $3(x-1)+4$ $=4+3(x-1)$	Thimo erkennt zu Anfang, dass $3(x-1)+4$ gleichwertig zu seinem Term $4+3(x-1)$ ist. Nennt dann als Möglichkeit des Nachweises der GW die E.-Gleichheit und untersucht die Terme durch Einsetzen von Zahlen. Nennt auf Anfrage alle drei Möglichkeiten (EG, UG, BG) , möchte aber lieber auf der B-Ebene agieren und erklärt den Term $x+(x+1)+x$ auf der B.-Ebene.
11	Lin	$\boldsymbol{x\cdot 2+x\cdot 1+1}$	BG EG BG	-	Lin meint, dass das Einsetzen einer Zahl für den Nachweis der GW ausreicht. Sie tut sich sehr schwer mit dem Umformen und wechselt immer wieder auf die B.-Ebene.
12	Noel	$\boldsymbol{4+3\cdot x}$	BG EG	-	Stellt den falschen Term auf und überprüft ihn durch Einsetzen. Das Einsetzen bewirkt aber keine Termkorrektur.
13 14	Isra & Mecht hild	$\boldsymbol{x+x+x+1}$	BG EG UG	❶ $3\cdot(x-1)+4$ $=3x-1+4=\ 3x+3\,?$ ② $x\cdot 4-(x-1)$ $=4x-x+1=\boldsymbol{3x+1}$	Erklären auf der B.-Ebene, dass $x+x+x+1=3x+1$, setzten dann Zahlen ein bei Termen, die ihnen „komisch" vorkommen. Gehen erst sehr spät und nur nach Aufforderung zum Umformen über.
15	Marc	-	EG	-	Setzt in die Terme (2) bis (6) $x=2$ ein und meint, dass alle Terme richtig sind. Setzt dann nach Aufforderung $x=1$ in den Term $4\cdot(x-1)+3$ ein und folgert, dass dieser Term falsch ist. Hat erhebliche arithmetische Probleme mit negativen Zahlen.
16	Jarno	-	-	-	-
17	Luis	-	-	-	-
18	Muslim	-	-	-	-

19	A- nette	$\boldsymbol{x \cdot 2 + x + 1}$	BG EG UG EG	$x \cdot 2 + x + 1 =?$ ❶ $x \cdot 2 + x + 1$ $= 2 \cdot x + 1 \cdot x + 1$ $= 2x + 2x = 4x$	Annette nennt die Methode „Verkürzen“, setzt aber dann Zahlen ein. Ihr gelingt es (trotz Hilfen) nicht, ihren eigenen Term $x \cdot 2 + x + 1$ zu vereinfachen. Am Ende überprüft sie den Term $3x + 1$ durch Einsetzen von $x = 1$.

Tabelle 9: *Interviewergebnisse zur Aufgabe HÖLZCHENQUADRATE. Jedes Mal, wenn die Bezugsebenen (Beschreibungs- (BG), Einsetzungs-(EG) und Umformungsgleichheit (UG)) gewechselt wird, wir das durch BG, EG oder UG angezeigt.*
In der Spalte „Termumformungen“ werden die niedergeschriebenen Umformungsschritte der Schüler verkürzt wiedergegeben und der ***fett gedruckte*** *Term zeigt den vom jeweiligen Schüler erzielten Endterm an.*
Die Symbole ①, ②, ❸, usw. zeigen an, wie viele Termumformungen der Schüler angegangen ist; Weiß indiziert dabei eine richtige, Schwarz eine falsche Termumformung.

Tabelle 9 kann man entnehmen, wie unterschiedlich die Schüler herangehen, um herauszufinden „welche Terme hier stimmen und welche nicht“. Manche wechseln sehr häufig zwischen allen drei Beschreibungsebenen ((Beschreibungs- (BG), Einsetzungs-(EG) und Umformungsgleichheit (UG)) hin und her (z. B. Pia, Marlon und Thimo). Manche probieren es auf allen möglichen Ebenen, kommen aber mit keiner so recht zum Ziel (z. B. Anette und Celina). Einige bleiben vornehmlich bei der Umformungsgleichheit (Mara, Robin, Clara und Eve). Es gibt auch Schüler, die Probleme beim Aufstellen der Terme haben und mit dem Umformen besser zurecht kommen (Celina und Marc). Andere kommen mit dem Aufstellen von Termen recht gut zurecht, haben aber ehebliche Probleme beim Umformen (Lin, Celina und Isra & Mechthild).

Konsolidiert sich das Kalkül durch die Verschränkung von Inhalts- und Kalkülebene?

Während dieser Interviewphase wurde im Unterricht das Thema Termumformen einstweilen beendet und zum Thema Gleichungen übergegangen. Es muss hier festgestellt werden, dass nicht wenige Schüler in den Interviews erhebliche Probleme mit dem Termumformen hatten, obwohl sie es in vorher geschriebenen Kurztests, in denen nur Terme mechanisch und ohne jeglichen Bedeutungsbezug vereinfacht werden sollten, viel besser konnten. Wir kommen jetzt auf die Fragen vom Anfang dieses Abschnitts zurück, die die Interviewsequenz ja beantworten sollte.

Deuten die Schüler von sich aus umformungsgleiche Terme als beschreibungs- und einsetzungsgleich?

Die überwiegende Mehrheit der Schüler weiß, dass der Nachweis der Gleichwertigkeit prinzipiell auf jede der drei Ebenen durchführbar ist. Viele sind aber nicht in der Lage diesen Nachweis auch auf allen drei Ebenen zu führen (sofern das überhaupt möglich ist). Die meisten Schüler zeigen beim Nachweis der Gleichwertigkeit eine persönlich Präferenz auf eine der drei Ebenen. Viele präferieren das Einsetzen, wobei einige immer noch nicht verinnerlicht haben, dass das Einsetzen *einer* Zahl nicht ausreicht. Manche suchen Erklärungen vornehmlich auf der Ebene der Beschreibungsgleichheit. Oft haben gerade diejenigen Schüler, die die Inhaltsebenen präferieren, erhebliche Probleme beim Umformen. Sie sind in einem gewissen Sinne sehr wohl in der Lage *umformungsgleiche Terme als beschreibungs- und einsetzungsgleich* zu *deuten*, aber diese Deutung scheint ihnen beim Termumformen nicht zu helfen. Werden sie explizit aufgefordert den Term einfach umzuformen, wechseln sie dann oft gerne in die von ihnen jeweils präferierte Inhaltsebene. Demgegenüber fällt auf, dass Schüler, die bereits eine gewisse Kalkülexpertise aufgebaut haben, sehr gerne auf der Umformungsebene verbleiben.

Zu diesem Zeitpunkt scheinen also Inhalts- und Kalkülebene bei vielen Schülern nicht kohärent vernetzt zu sein.

Hilft den Schülern bei Schwierigkeiten im Kalkül ein Bezug auf die Inhaltsebene? Suchen Sie von sich aus einen solchen Bezug?

Nein. Viele Schüler, die bei einer Umformung auf Schwierigkeiten stoßen, wechseln zwar gerne auf die Inhaltsebenen (BG und EG) und oft gelingt ihnen da auch ein Nachweis der Gleichwertigkeit. Kehren sie dann aber wieder auf die Kalkülebene zurück, haben sie in der Regel dabei nichts gelernt, womit sie ihren Kalkülschwierigkeiten begegnen können. Sowohl das Erklären des Terms auf der Beschreibungsebene als auch das Einsetzen von Zahlen liefern nämlich in der Regel keine direkten Hinweise darauf, wie ich jetzt beim Umformen vorzugehen habe. Besonders augenfällig wurde das bei der einfachen Termaddition $2 \cdot x + 2 + x = 3x + 2$ der Aufgabe KREISE. Es gibt Schüler, denen es von sich aus klar ist, dass sich die Teilterme x und $x \cdot 2 + 2$ zur Gesamtzahl der Kreise addieren lassen und doch schaffen sie es nicht den Term $2 \cdot x + 2 + x$ zu vereinfachen. Sie scheinen hier keinerlei Zusammenhang zwischen ihren im Punktmuster selbst aufgespürten Ausdrücken x und $2x$ und dem kalkülmäßigen Zusammenfassen derselben zu $2x + x = 3x$ zu sehen.

Gerade die im Kalkül weniger bewanderten Schüler suchen von sich aus immer wieder den Bezug zur Inhaltsebene, jedoch nicht um daraus Hinweise für das Kalkül zu erhalten (*wie auch?*), sondern um dem mühsamen Geschäft des Kalküls zu entfliehen.

Konsolidiert sich das Vertrauen ins Kalkül, indem Sie die Entsprechung der Kalkül- und der Inhaltsebene überprüfen? Bezogen auf die Schüler, die noch erhebliche Schwierigkeiten beim Kalkül haben, macht diese Frage kaum einen Sinn. Für die anderen muss sie noch etwas spezifiziert werden. Gemeint ist damit, ob sie bei selbst vollzogenen Kalkülhandlungen, bei denen sie sich eventuell nicht so sicher sind, ein Vertrauen in dieselben aufbauen können, wenn sie deren Korrektheit anhand der Inhaltsebene überprüfen. Hier muss man noch weiter spezifizieren.

Wenn ich die Terme, deren Gleichwertigkeitsnachweis ich durch Umformen führen will, vorher aus einem Beschreibungskontext heraus aufgestellt habe, dann vermute ich ja bereits, dass sie gleichwertig sind. Wenn ich auch noch Zahlen eingesetzt habe, dann bin ich mir vielleicht auch ziemlich sicher. Die Überprüfung auf den Inhaltsebenen hat hier also schon vorher stattgefunden. Jetzt konsolidiert sich mein Vertrauen ins Kalkül, wenn es mir gelingt, diese Gleichwertigkeit auch durch Umformen zu zeigen. Das ist so ähnlich, wie wenn ich eine Aufgabe löse, deren Ergebnis ich schon kenne. In diesem Sinne kann die Entsprechung der Ebenen mein Vertrauen ins Kalkül konsolidieren. Es ist mir nämlich durch das Kalkül gelungen etwas nachzuweisen von dem ich vorher schon wusste (oder es zumindest stark vermutetete), dass es stimmt.

In der Phase des Symbolischen Beschreibens war es auch immer so: Ich suche Aufbauformeln mit Hilfe von numerischen und ikonischen Repräsentationen und überprüfe dieselben durch Zahleinsetzungen. In der Interviewsequenz war ein solches vorheriges, kalkülunterstützendes Abarbeiten der Inhaltsebenen aber in keiner Aufgabe umfänglich angelegt.

Zwar wurden in der Aufgabe KREISE die Terme selbst aufgestellt, aber der Sinn und Zweck der Kalkülhandlung $2x + 2 + x = \cdots = 3x + 2$ bestand nicht in dem Nachweis der Gleichwertigkeit zweier unterschiedlicher Aufbauformeln für den gleichen Kontext. Im obigen Sinne – dem Sinne eines Vorabwissens des Ergebnisses – nutzt das vorherige Aufstellen der Terme den Schülern nur dann etwas, wenn sie für die Kreise insgesamt vorher schon den Term $3x + 2$

aufgestellt haben. Just haben auch die Schüler, die die Terme $x \cdot 2 + x \cdot 1 + 2$ und $x \cdot 2 + 2 + x$ (Annete und Lin) aufstellen, erhebliche Problem beim Zusammenfassen.
In der Hölzchenkettenaufgabe wird nur ein einziger Term selbst aufgestellt und zwei Schüler können diesen auch in der Liste der angebotenen Terme entdecken (Marlon und Robin). Der Rest müsste jetzt, um Kalkülhandlungen durch eine Entsprechung mit den Inhaltsebenen zu konsolidieren, dieselben erst eröffnen. Viele Schüler eröffnen in den Interviews auch die Inhaltsebenen, indem sie Zahlen einsetzen oder „Zählweisen“ für die angebotenen Terme suchen. Aber keinem Schüler hilft das beim Kalkül weiter. Es ist vielmehr so, dass diejenigen Schüler, die bereits relativ gut Umformen können, die Notwendigkeit eines Abgleichs mit Inhaltsebenen nicht sehen (wollen). In der Regel sind diese Schüler auch in der Lage ihren Endterm durch Zahleinsetzungen zu überprüfen, aber von sich aus machen sie das fast gar nicht. Das Eröffnen einer noch nicht bereits aufgebauten Beschreibungsebene, um „ein Bild zu finden“, dass beide Terme beschreibt, ist ohnehin ziemlich problematisch. Den Nachweis der Gleichwertigkeit zweier Terme zu führen, indem man einen Kontext („ein Bild“) findet, dass beide Terme beschreibt, ist hochgradig problematisch. Zunächst einmal kann ein jeder Term unzählige verschiedene Bilder zutage fördern. Auf der Beschreibungsebene allein sind zwei Terme also dann gleichwertig, wenn es unter den vielen Bilder eins gibt, dass beide Terme beschreibt. In der Regel weiß ich aber im Vorfeld nicht, ob die beiden Terme gleichwertig sind. Finde ich kein gemeinsames Bild für beide Terme, weiß ich also auch nicht, ob die Terme tatsächlich nicht gleichwertig sind und oder ob es mir nur nicht gelungen ist ein entsprechendes Bild zu finden. Man vergegenwärtige sich in diesem Zusammenhang die Versuche von Pia zu dem falschen Term der Liste sich ein Bild zu machen, das auf die Hölzchenkette passt, und ihre Konfusionen dabei.

Und die Schüler mit Schwächen im Kalkül, suchen zwar gerne die vertrauteren Inhaltsebenen auf, ohne dass es ihnen aber in der Regel dabei hilft, das Kalkül besser zu verstehen.

Insgesamt ist in den Interviews der Eindruck entstanden, dass es gerade den schwächeren Schülern nicht geholfen hat drei Bedeutungsebenen mehr oder weniger gleichzeitig aufzumachen. Es scheint so zu sein, dass für sie das Zusammenspiel der Tätigkeiten und Denkhandlungen semantisch überladen ist und dieser „Cognitive Load“ sie verwirrt und verunsichert.

*

Schon in der Pilotphase zeigte sich, dass die hier gewählte Umsetzung der Generalisierungsperspektive ein motivierendes und ergiebiges Lernfeld der Algebra verkörpern kann. Die Schüler erfahren dabei, wie sie ‚*das x*‘ gebrauchen können, um selbst entdeckte Aufbauregeln kurz und prägnant zu formulieren, die sogar in der Lage sind die spezifische Zählweise zu „erzählen“. Zudem entspringen diesem Ansatz tatsächlich eine ganze Reihe gleichwertiger Terme. Beim Versuch mit eben diesen Termen und über das Konzept der Gleichwertigkeit ins Termumformen einzusteigen, zeigt sich aber, dass sich ganz wesentliche Lernhürden auftun. Die dabei von mir beobachteten Lernschwierigkeiten sind im Wesentlichen:

1. Die Schüler erinnern sich nur dunkel an die Rechengesetze für Zahlen und wenn sie sich erinnern, können Sie diese zwar (halbwegs) formulieren, aber gar nicht bewusst – noch nicht einmal in reinen Zahlentermen – anwenden.

2. Die Schüler befremdet die Vorstellung, man könne mit Variablentermen rechnen. Ihnen fällt es schwer diese Terme kognitiv mit Zahlentermen zu verbinden, um so die Rechengesetze für Zahlen darauf anzuwenden, obwohl sie formulieren können, dass die Variable x für eine beliebige Zahl steht.

3. Die Schüler verbinden aufgrund der kontextuellen Vorgeschichte die Variable x (den Term) mehr mit seiner konkreten kontextuellen Bedeutung als Nummer der Figur (Anzahl der Quadrate) als mit den „dahinterstehenden" Zahlen, deren (weitgehend nicht abrufbaren) Gesetze jetzt ja operationalisiert werden sollen.

4. Der selbst aufgestellte oder mühsam erklärte Term enthält seine Entstehungsgeschichte, die entdeckte Struktur und die zugrundeliegende Denkweise beim Generalisieren. Eine gesetze Klammer (z. B. in $2x + (x + 1)$; E4) wurde bewusst gesetzt und hat eine erklärende Funktion. Warum soll man diese jetzt auflösen? Radford drückt es sehr prägnant so aus: *„The narrative dimension of formulas has to collapse" (Radford 2010, S. 11),* um den Term als abstrakten symbolischen Ausdruck anzusehen, den man dann regelgeleitet umformen kann.

5. Schülern mit Schwierigkeiten beim kalkülhaften Operieren hilft ein Wechseln in die Inhaltsebenen oft nicht. Viele benutzen die Beschreibungs- und Einsetzungsebene als Fluchtpunkte, um dem mühsamen Geschäft des Kalküls zu entgehen. Es kann der Eindruck entstehen, dass gerade diesen Schülern zu raten wäre, sich erst einmal auf das mühsame Geschäft des – durch die (wenigen) Rechengesetze geleitenden – kalkülhaften Operierens zu konzentrieren, um die Inhaltsebene erst dann wieder einzublenden, wenn so Vertrauen ins (jetzt erst denkentlastend empfundene) Kalkül gewonnen worden ist.

Der Übergang ins Kalkül wird hier also durch ganz wesentliche Lernhürden verstellt. Mehr oder weniger gleichzeitig muss die kontextuelle Bedeutung aufgegeben werden, das Narrativ muss kollabieren, die Variablenterme als „unbestimmte Zahlenterme" gesehen und die Rechengesetze der Arithmetik so verfügbar gemacht werden, dass man sie zielführend zum Umformen anwenden kann.

Ich habe ja in Abschnitt IV.II die Auffassung vertreten, dass der eigentliche Zweck des Termumformens darin besteht, einem Term eine andere Struktur zu geben. Nun könnte man meinen, dass das *Narrativ* eines Terms und seine *Struktur* eng miteinander zusammenhängen. An dieser Stelle im Lernprozess kann ich aber keinen solchen Zusammenhang sehen. Das *Narrativ* bildet die generalisierte Zählweise ab (es ist *nur* dafür gemacht Zahlen *einzusetzen*), die *Struktur* schafft Beziehungen zwischen den ‚Zahlen' eines Terms (die sich durch *Zahleinsetzen* auflösen). Beim Termumformen wird aber nicht das *Narrativ* umgeformt (es kollabiert vielmehr), sondern es wird die *Struktur* gewechselt.

*****

Der Übergang zum Gegenstandsbereich *Gleichungen lösen* erfolgt in den ersten beiden Durchführungen in Rückbezug auf enaktiv-ikonisch repräsentierte Zahlenfolgen. Eine Hölzchenkettenaufgabe liefert für die Anzahl der Hölzchen, die man zum Legen der x-ten Figur braucht, z. B. den Term $3x + 1$. Durch die Frage, die wievielte Figur man mit 43 Hölzchen bauen kann, wird der Übergang zum Thema Gleichungen eingeleitet.

Zum eigenständigen Erkunden der Methode *Äquivalenzumformen* zum Lösen linearer Gleichungen wird nun in fast allen Durchführungen (bis auf die Letzte) das Modell „Knack die Box“ (Affolter et al. 2015) verwendet, dass auch in der Umsetzung der Problemlöseperspektive genutzt wird.

VII.II Umsetzungen der Problemlöseperspektive – Die Reihe *Zahlenrätsel (ab dem 3. Durchgang)*

Diese Reihe wurde mit adaptiven Veränderungen insgesamt mit vier 7. Klassen des Gymnasiums in den Jahren 2019 – 2021 durchgeführt. Sie ist entstanden, nachdem in einer ersten Erprobungsphase der Reihe *Musterverallgemeinerungen* die oben beschriebenen Lernhürden evident geworden waren. Eine der Schwierigkeiten war ja, dass die kontextuelle Bedeutungen der Variablen und Terme als Figurennummern und Anzahlen dem Übergang ins Kalkül im Weg standen und zugunsten einer direkteren Referenz der Variable als Zahl ausgeblendet werden musste. Wie kann man also einen sinnstiftenden Kontext finden, in dem die Variable x direkt eine unbestimmte oder unbekannte Zahl bezeichnet? Zahlenrätsel liefern einen solchen Kontext und richtig inszeniert lieben auch Siebtklässler noch solche Rätsel und wollen dem Trick dahinter auf die Spur kommen[62].
Die Variable steht hier zu Anfang direkt für die (gedachten) Zahl(en) und dieser direkte Bezug wird in dieser Reihe lange fortgeschrieben, um erst nach einem ersten Kalkülaufbau in das Symbolische Beschreiben im Gleichungskontext einzutreten.

Phase 1 – Von den Zahlenrätseln zu den Gleichungen

Streichholzanzahlen und Streichholzschachteln (Boxen) dienen hier als enaktive und ikonische Repräsentationen von Zahlen und Variablen. So können die arithmetischen Operationen des Zahlenrätsels auf die unbekannte gedachte Zahl angewendet werden und man erhält einen „Ergebnisterm“ E. Das Zahlenrätsel in Abb. 29 führt also auf die (noch ikonisch repräsentierte) Gleichung $2x + 3 = E$. Zahlenrätsel, die nur mühsam (z. B. mit großen Zahlen) oder nicht ohne weiteres in Boxendarstellung abbildbar sind (z. B. mit negativen Zahlen), motivieren die Einführung der formalen Variablen x, die für die unbekannte gedachte Zahl steht (Abb. 30).
So führen also Zahlenrätsel dieses Typs auf Gleichungen der Form $ax + b = c$.
Die Frage, die mit dem Lösen der Gleichung einhergeht, kann ganz ohne Metasprache so formuliert werden:

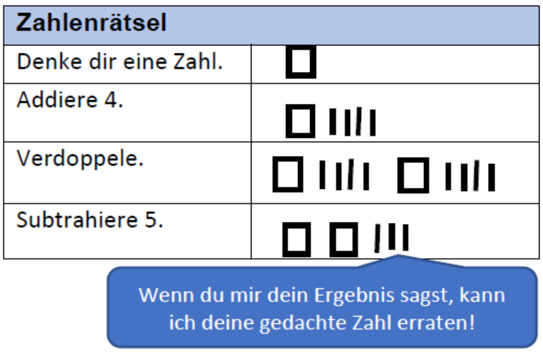


Abb. 29: Zahlenrätsel in Boxendarstellung

Text	*ikonisch*	*formal*
Denk dir eine Zahl.		*x*
Addiere 4.		$2 \cdot x + 4$
Verdoppele.		$2 \cdot x + 8$
Subtrahiere 10	*geht nicht*	$2 \cdot x - 2$

Abb. 31: Grenzen der Boxendarstellung

$2 \cdot x - 2 = 42$: Für welche (gedachte) Zahl x ist die Zahl $2 \cdot x - 2$ gleich der Zahl 42?

[62] Anhang I kann man entnehmen, wie man die Zahlenrätsel in Klasse 7 zum Einstieg in die Reihe motivierend inszenieren kann.

Die allermeisten Schüler lösen von sich aus solche Gleichungen durch Rückwärtsrechnen. Lösungsmethoden von Gleichungen der Form $ax + b = cx + d$ (Für welche Zahl x ist die Zahl $5x + 4$ gleich der Zahl $2x + 19$) können jetzt gut durch Rückgriff auf das Boxenmodell erarbeitet werden. Abbildung 31 zeigt nochmals die „Spielregeln“ von „Knack die Box“.

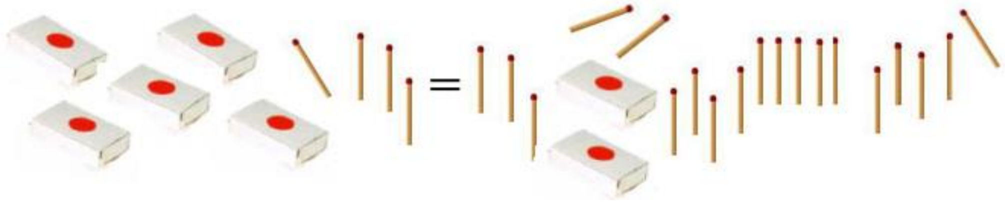


Abb. 31: Knack die Box. *Die Phase „Äquivalenzumformungen von Gleichungen“ hat in jeder Durchführung mit enaktiv gelegten Boxengleichungen begonnen. Die Spielregeln des Spiels „Knack die Box“waren folgdende: Auf jeder Seite des Gleichheitszeichens liegt die gleiche Anzahl von Hölzern. Einige Hölzer befinden sich in den Boxen, und zwar in jeder Box gleich viele. Findet eine Möglichkeit, mit der man herausfinden kann, wie viele Hölzer in jeder Box sein müssen, damit auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens gleich viele Hölzer sind.*
Man beachte, dass der Verweisungscharakter der Variable in die Spielregeln eingebaut ist.

In den Spielregeln ist der Verweisungscharakter der Variablen schon mit eingebaut: Der „Inhalt“ einer jeden Box, d.h. jedes ‚x‘, muss gleich sein.

Im Hinblick darauf, dass die Schüler aus solchen Boxenaufgaben heraus die Methode Äquivalenzumformungen selbst entwickeln sollen, ist es wichtig, dass die entsprechenden Gleichungen nicht zu einfach sind, sonst wenden die meisten Schüler immer nur die Methode des systematischen Probierens an. Wenn man auch gebrochene Hölzchen als Lösung (also Brüche als unbekannte Zahlen[63], siehe auch Anhang F, KdB3) zulässt, scheitern die meisten Schüler mit dem Ausprobieren von Zahlen und entwickeln selbst erste Äquivalenzumformungen (auf beiden Seiten gleich viele Hölzchen oder Boxen wegnehmen; durch die Anzahl der Boxen teilen). Die formale Schreibweise für Gleichungen kann sich dabei simultan entwickeln.
Durch diese enaktiv-ikonische Herangehensweise entwickeln sich nur die Äquivalenzumformungen „*Gleiches auf beiden Seiten subtrahieren*“ und „*Beide Seiten durch die gleiche Zahl dividieren*“, da genau dies die Umformungen sind, die die Boxengleichung von Schritt zu Schritt einfacher werden lassen. Um auch die Äquivalenzumformungen „*Gleiches auf beiden Seiten addieren*“ und „*Beide Seiten mit der gleichen Zahl multiplizieren*“ zu entwickeln, werden in einem nächsten Schritt Gleichungen konstruiert, die eine vorgegebene Lösung haben. Dazu geht man von der Lösung $x = a$ aus und macht die Gleichung schrittweise immer komplizierter (Abb. 32; Anhang F, Ein- und Auspacken). Viele der Übungsaufgaben zum Gleichunglösen sind so entstanden. Ein Schüler konstruiert durch Anwenden der Äquivalenzumformungen eine Gleichung aus $x = a$ heraus („Einpacken“) und ein anderer Schüler versucht genau diese konstruierte Gleichung zu lösen („Auspacken“).

[63] In den Durchführungen wurden auch negative Lösungen zugelassen, repräsentiert durch kleine Zettelchen in den Boxen auf den z. B. -2 stand.

Insgesamt gehen die Schüler dabei – geleitet durch eine Lerntreppe (Anhang F) – weitgehend selbstgesteuert vor . Ausgehend von Hölzchen und Boxen und langsam übergehend zu Zahlen und Variablen konstruieren sie den Algorithmus des Äquivalenzumformens aus ihren eigenen Lösungsmethoden heraus und können ihre Vorgehensweisen auch verständlich erklären (Abb. 34).

Abb. 32: *Schülerprodukt zur Konstruktion von Gleichungen aus deren Lösung.*

Trotzdem treten beim Lösen in der formalen Schreibweise zuhauf Schülerlösungen auf, in denen die Schüler jeglichen Bedeutungsbezug, der ja hier nur in dem Verweis auf Zahlen besteht, verloren zu haben scheinen. Je mehr die Koeffizienten a, b, c und d der Gleichung $ax + b = cx + d$ auch nicht natürliche Zahlen sind, desto stärker häufen sich die Fehler der Schüler und es treten Bearbeitungen auf, in denen sie jeglichen Bedeutungszusammenhang verloren zu haben scheinen. Diese Fehleranfälligkeit wächst, je mehr Koeffizienten der Gleichung negativ werden[64].

Die Gleichungen $4 \cdot x - 8 = x + 4$ oder $-10 \cdot x = x - 2$ (Abb. 33) beispielsweise, können ja auch nicht mehr in die Boxendarstellung überführt werden und es hilft nur noch die Vorstellung, dass die Terme $x,\ 4x,\ 4x - 8,\ x + 4$, usw. alle für Zahlen stehen. Es wurde ja auch von Anfang an penibel darauf geachtet, dass das x nicht etwa für die Box, sondern für die Anzahl der Hölzchen oder die Zahl in der Box steht.

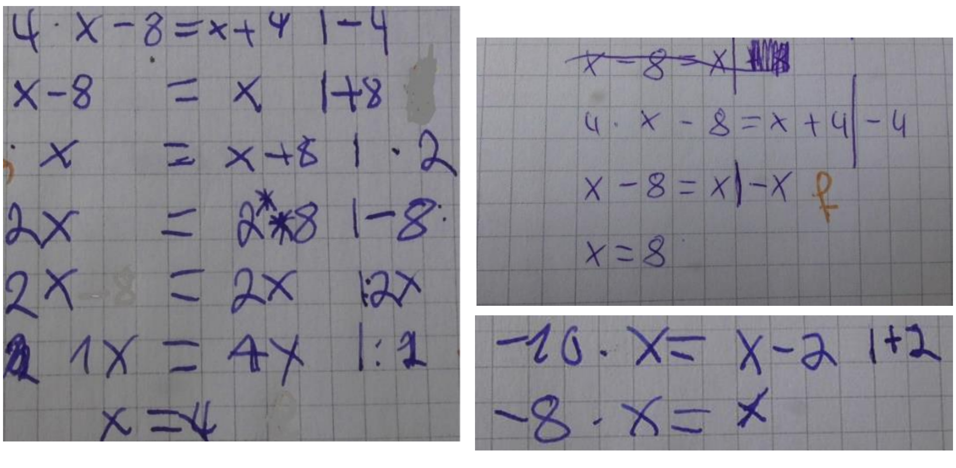


Abb. 33: *Das Ringen von Schülern mit den Gleichungen* $4x - 8 = x + 4$ *und* $-10x = x - 2$

[64] Zu Fehlern beim Lösen linearen Gleichungen liegen umfangreiche quantitative Studien vor (z. B. Radatz 1980, Lörcher 1985, 1990, Stahl 2000). Lörcher (1985) diagnostiziert einen Zusammenhang der Fehlerwahrscheinlichkeit mit dem Zahlbereich der Lösungen, mit der Wahrscheinlichkeit, dass beim Umformen mit negativen Zahlen gerechnet werden muss und dem Zahlbereich der Koeffizienten a, b, c und d der Gleichung $ax + b = cx + d$. Meine Beobachtungen stimmen damit vollauf überein.

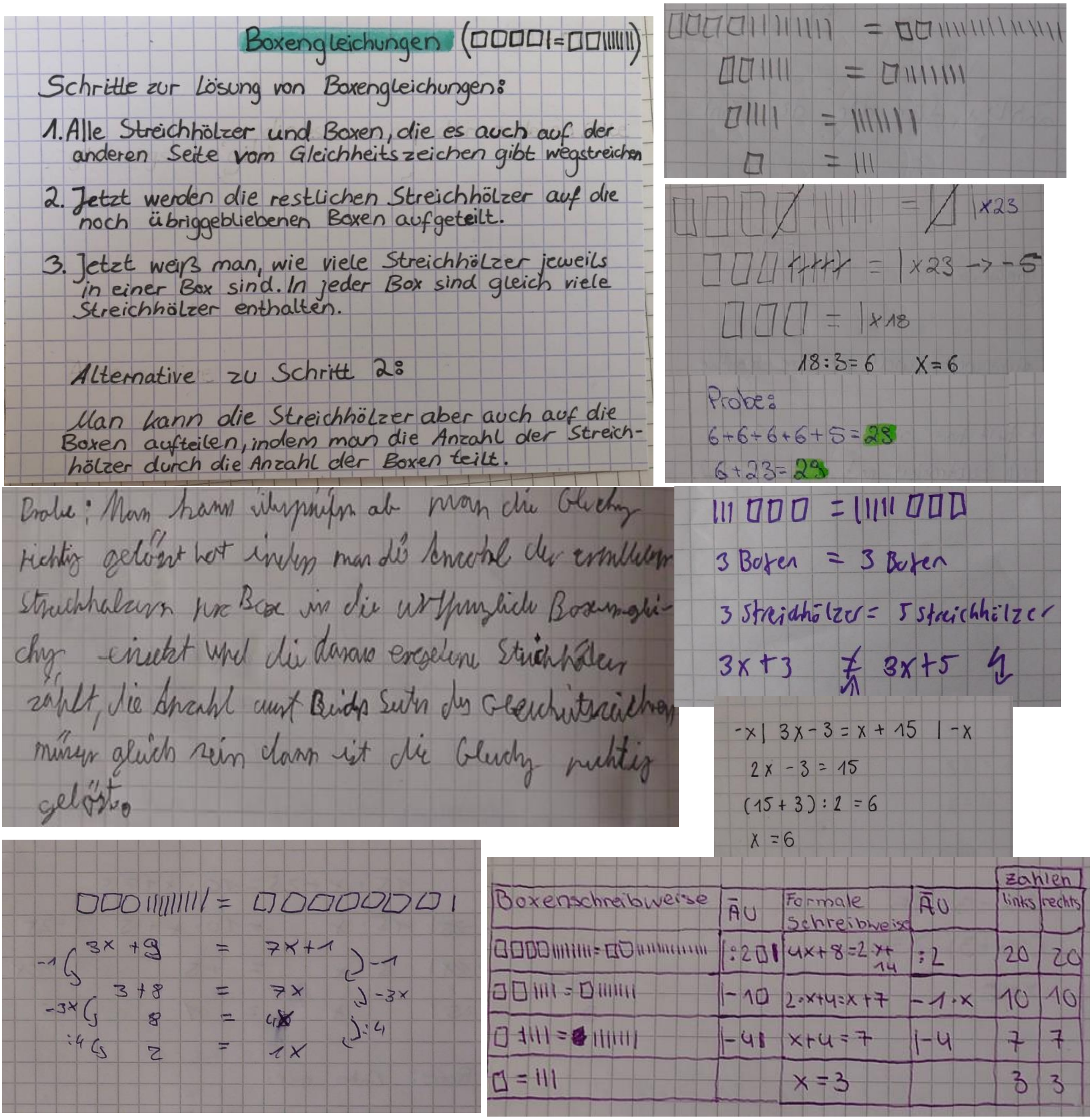


Abb. 34: Schülerprodukte - Auf dem Weg zur formalen Methode ÄU mit Hilfe des Boxenmodells.

Scheinbar regellose Umformungen treten auch bei leistungsstärkeren Schüler auf, wenn nur die Gleichung „komplex" genug wird. Die folgenden Interviewausschnitte mit Victoria sind erhellend, da sie aufzeigen, wie leicht man im „algebraischen Kalkül" die Bedeutung verlieren kann. Victoria gehört zu den leistungsstärksten Schülerinnen, hat an und für sich keine Probleme mit dem Rechnen im negativen Zahlbereich und weiß in der Regel ziemlich genau was sie tut.

***

Episode 7 – Interview mit Victoria –Wenn die Referenz $Variable \rightarrow Zahl$ in den Hintergrund tritt

Am Anfang des Interviews löst Victoria die Gleichung $x + 4 = 3x + 2$ durch äquivalentes Umformen in weniger als einer Minute. Auf die Frage, wie sie denn jemanden, der das, was sie gerade gemacht hat, nicht so gut begreift, helfen würde, rekurriert sie die Boxendarstellung und erklärt sehr schön, dass das x ja für eine Zahl steht *„die man noch nicht kennt und sozusagen in der Box versteckt ist“*. Der Interviewausschnitt beginnt damit, dass Victoria auf die Grenzen der Boxendarstellung hinweist:

> 01 Victoria: *Und wenn es dann in den Minusbereich geht, kann man es schlecht darstellen mit Boxen.*
>
> 02 Int.: *Ja. Kannst du mal ´ne Gleichung aufschreiben, die man mit Boxen nicht gut darstellen kann?*
>
> 03 Victoria: [schreibt $-2 \cdot 3 = -3 - 3$, zögert …] *Ähmmm, da ist ja gar kein x!* [möchte die Gleichung wegradieren]

Um eine Gleichung anzugeben, da man nicht so gut mit Boxen darstellen kann, schreibt Victoria schreibt eine Gleichung auf die maximal *„in den Minusbereich geht“*, nur fehlt jetzt noch eine Variable.

> 04 Int.: *Kannst du stehn lassen, es ist ja ne Gleichung, weil links und rechts ja die gleiche Zahl steht. Versuch doch mal eine Gleichung mit x!*
>
> 05 Victoria: [Sie radiert die zweite -3 links aus und schreibt stattdessen -$-2 \cdot 3 = -3 - 2 - x$] *Also man kann hier jetzt schlecht das mit Boxen machen, weil man ja minus* 2 *hat … also man könnte das auch schlecht darstellen, weil man hier ne minus 2 hat, das wären ja jetzt minus 6 Streichhölzer, also man könnte jetzt minus 6 Streichhölzer aufschreiben* [schreibt $-$ ||||||=], *aber das wär ja viel umständlicher, als wenn man einfach sagen würde* -6 *… und das ist noch hier mit den Boxen, dann wenn man hier 5 Streichhölzer hat* [schreibt $-$||||| | $= -$ |||||], *dann iss … das macht keinen Sinn, wenn man jetzt minus x, dann ist es sowieso schon besser, wenn man das gleich so aufschreibt* [zeigt auf die Gl. $-2 \cdot 3 = -3 - 2 - x$]

Bis hierhin erklärt Victoria die Unzulänglichkeiten und Grenzen der Boxendarstellung. Nun versucht sie ihre selbst aufgestellte Gleichung $-2 \cdot 3 = -3 - 2 - x$ zu lösen:

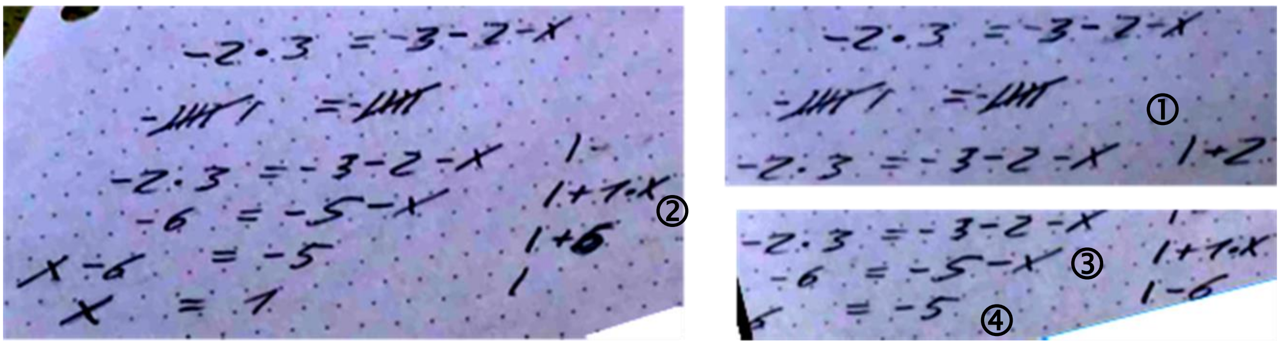


Abb. 35: *Victorias Niederschriften während des Interviews. Victoria arbeitet mit Radiergummi, so dass trotz der (blitzlichtartig rechts abgebildeten) eingeschlagenen Um- und Irrwege am Ende eine mustergültige Lösung der selbst aufgestellten Gleichung* $-2 \cdot 3 = -3 - 2 - x$ *entsteht.*

06 Victoria: *Also als erstes würd´ ich plus 2 rechnen, um die* -2 *hier wegzukriegen* [zeigt auf $-2 \cdot 3$ und schreibt $| + 2$ neben die Gl. (①)] ... *und dann hat man hier noch, wie schreibt man das denn, wenn man hier mal 3 noch hat? ... oder sagt man, dass das minus 6 sind? Hmmm ....*

07 Int.: *Erklär mal, was du gerade denkst.*

08 Victoria: *Also,wenn ich hier plus 2 rechne,dann sind da ja eigentlich nochmal mal 3* [‚$\cdot$ 3‘] *hmmm dann schreib ich einfach 3 auf?* [wartet auf eine Antwort]

09 Int.: Gute *Frage. Da stehn ja eigentlich* -6, *und wenn du jetzt* $+2$ *rechnest ...*

10 Victoria: ... ... *dann ist das nicht das Gleiche* [radiert die $+2$ aus und schreibt -6 unter die $-2 \cdot\ 3$ (②)] , *ok dann würd ich hier minus 6 hinschreiben, weil das ja* -6 *sind und dann würd ich hier hinschreiben minus 5, weil das ja* -5 *sind* [zeigt auf die $-2-3$] *minus* x [schreibt $-x$, und so entsteht die Gl. $-6=-5-x$ (③)] ...

Victoria ist eine sehr gute Schülerin. Trotzdem versucht sie sich der -2 in $-2 \cdot\ 3$ zu entledigen, indem sie versucht auf beiden Seiten die -2 optisch „wegzustreichen“. Ihr Theorem *„Auf beiden Seiten das Gleiche machen“* (siehe unten), dass sie sonst immer richtig als *„auf beiden Seiten die gleiche Zahloperation durchführen“* interpretiert, wird nun, angesichts der komplex empfundenen Gleichung, als falsches Theorem-In-Aktion „auf beiden Seiten die -2 wegstreichen“ interpretiert. Sie kommt aber hier in einen Konflikt, weil ihr das vom linken Operanden befreite Multiplikationszeichen in „$\cdot$ 3" merkwürdig vorkommt (08).

Victoria übernimmt nun den Hinweis des Interviewers, dass da ja „*eigentlich* -6" steht (09), und probiert es mit „$| - 6$“. Sie revidiert diesen Schritt aber schnell, nachdem Sie feststellt, dass dann links „ -12“ stehen würde und erzielt die richtige Lösung $x=1$ durch die Folge „ $| + x \rightarrow | - 6$" (Abb. 35). Nachdem Sie sich durch eine (Einsetz-)Probe vergewissert hat, dass ihre Lösung jetzt stimmt, resümiert sie:

11 Victoria: *Man kann alles machen, wenn man auf beiden Seiten der Gleichung immer das Gleiche macht. Wenn ich auf der eine Seite z. B. mal 100 rechnen möchte, muss ich es auch auf der anderen Seite machen, damit auf beiden nicht ‘was anderes ‘rauskommt, weil gleich heißt ja, dass auf beiden Seiten das Gleiche ist.*

Victoria zeigt hier, im Unterricht und bei schriftlichen Überprüfungen, dass sie durchaus in der Lage ist, die Semantik (das semantische Feld der Zahlen) hinter den Symbolen zu sehen. Trotzdem versucht sie sich der störenden -2 in $-2 \cdot 3$ durch bloßes Wegstreichen zu entledigen und notiert dies durch „$| + 2$“! Da sie jedoch eine sehr gute Schülerin ist, spürt sie dabei ein unterschwelliges Unbehagen. Eventuell schwingt die semantische Ebene im Hintergrund noch mit. Nach dem expliziten Hinweis des Interviewers, dass links ja die Zahl -6 steht, tritt die Semantik wieder in den Vordergrund und sie löst die Gleichung.

Es könnte sein, dass Victoria der für das algebraische Manipulieren typischen Versuchung erliegt - um die Worte von Cohors-Fresenborg (2001) zu benutzen - inhaltsgebundene logische Operationen weitgehend durch inhaltsinvariante (denkentlastende) Operationen zu ersetzen. Es ist eine dem algebraischen Kalkül inhärente Kraft, dass während einer Kalkülhandlung die semantische Ebene schnell ausgeblendet werden kann. Kiran und Sfard warnen: „... beware of the addictive power of algebraic manipulations -- it may make your students unwilling to struggle for meaning" (ebd 1999). Ob Victoria ohne den expliziten Hinweis des Interviewers am Ende auch alleine auf die richtige Lösung gekommen wäre, kann man nicht sagen. Wäre sie es nicht, so hätte ihr eine Probe ihrer Lösung höchstwahrscheinlich geholfen. So kann sie erkennen, dass ihre Lösung fehlerhaft sein muss und kann nun ihre Schritte, jetzt herausgerissen aus der automatisierenden Kalkülhandlung, inhaltsgebunden (d.h. hier in Zahlen denkend) hinterfragen. Ein Schüler, der jedoch nicht in der Lage ist die (Zahlen-) Semantik hinter den Symbolen zu sehen, scheint hier verloren.

***

Die Einsetzprobe kann daher mehr leisten als ein bloßes Überprüfen der Richtigkeit der gefundenen Lösung. Durch Sie kann das u.U. verlorengegangene Bewusstsein wieder erweckt werden, dass alle Äquivalenzoperationen ja Operationen im semantischen Feld der Zahlen sind. So kann die Probe den Schülern helfen, selbstwirksam ihre Fehler zu korrigieren, wenn dabei auch die Zahlenebene („Symbole stehen für Zahlen!") wieder mit in den Vordergrund tritt.

Noch bevor die (Einsetz-)Probe im Plenum als Kontrollstruktur gesichert wurde, wurden die Schüler in allen Durchführungen schriftlich befragt, wie sie denn ihre Lösungen überprüfen können. Einige Schüler führten da eine „Probe" durch, indem sie ihre Lösungen in alle Gleichungen der Lösungskette Einsetzen und überprüften, ob jedes Mal links und rechts die gleiche Zahl steht (Abb. 36).

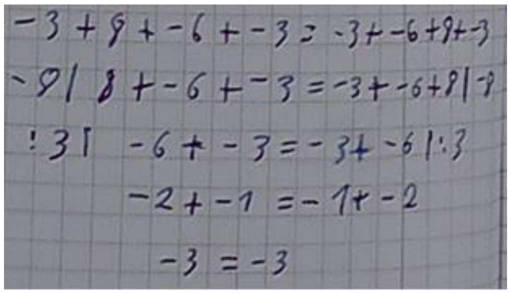


Abb. 36:
Eine eigentümliche Probe der Lösung der Gl. $x + 8 + 2x + x = -3 - 6 + 8 + x$

Eine Lehrkraft hat diese Bearbeitungen im Unterricht einmal als mögliche Methode aufgegriffen, um herauszufinden, an welcher Stelle sich denn ein Fehler eingeschlichen haben könnte: *„Der Fehler könnte sich unmittelbar davor befinden, wo auf beiden Seiten der Gleichung zum ersten Mal nicht dieselbe Zahl steht!".*

Eine solche „erweiterte Probe" hat durchaus ihren Charme. Zum einen kann dadurch die Fehlerstelle aufgespürt werden. Mindestens genauso relevant erscheint mir hierbei aber, dass durch ein situatives Aufgreifen von Schülerlösungen im mathematischen Diskurs die Möglichkeit genutzt wird, zu erhellen, dass in einer jeden Kette äquivalenter Gleichungen jede Gleichung eine Gleichheit zweier Zahlen darstellt.

Die (Einsetz-)Probe ist also ein wichtiges Mittel für Schüler, um eigene Fehler aufzudecken, Lösungswege zu verbessern <u>und</u> um das Bewusstsein wachzuhalten, dass die Buchstaben immer Zahlen referenzieren. Trotzdem „vergessen" Schüler gern die Probe und das Einsetzen von Zahlen. Man sollte m. E. zumindest am Anfang darauf bestehen!
Ein weitere Herausforderung besteht darin, dass gerade die Schüler, die schwach beim Lösen von Gleichungen sind auch mitunter erheblich arithmetische Unzulänglichkeiten aufweisen. Da hilft alles nichts: Schüler und Lehrer müssen da durch! Dem Schüler wäre zu raten, nicht von einer Aufgabe zur anderen durchzuhetzen, sondern lieber sich so lange auf Fehlersuche zu begeben, bis er in der Lage ist, seinen Fehler selbsttätig zu korrigieren.

Phase 2 – Von den Gleichungen zum Termumformen

Bis hierhin bezeichnete eine Variable also immer eine (reine) Zahl. Über Sachaufgaben, die zu linearen Gleichungen algebraisiert werden, erhalten sie nun eine zusätzliche kontextuelle Bedeutung (als Größen und Anzahlen). Auch hier zeigt sich ein wesentlicher Unterschied zum Unterrichtsgang *Muster*. Während in dem hier verfolgten Kontext die Variablen zuvörderst für Zahlen stehen, erhalten diese Zahlen jetzt erst eine zusätzliche Bedeutung im Sachkontext. Jetzt erst tritt die Referenzkette *Variable → Zahl → kontextuelle Bedeutung* auf. Beim Musterzugang steht zunächst die kontextuelle Bedeutung der Variablen im Vordergrund, so dass zunächst die Referenzkette *Variable → kontextuelle Bedeutung → Zahl* dominierte. Dementsprechend fiel in den Unterrichtsbeobachtungen tatsächlich auch auf, dass die Lehrkräfte die Frage *„Wofür steht eigentlich die Variable?"* in Unterrrichtsgang *Muster* wesentlich öfters stellten und darauf meist mit der kontextuellen Bedeutung (etwa der Figurennummer) geantwortet wurde, während in Unterrichtsgang *Zahlenrätsel* meist direkt geantwortet wurde, dass sie für eine Zahl steht, und zwar auch dann, wenn eine zusätzliche kontextuelle Bedeutung vorhanden war.

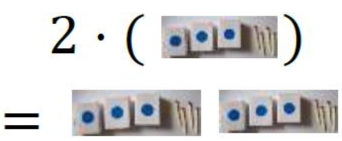
Das Zusammenfassen algebraischer Summen wurde in diesem Kontext schon gepflegt (z. B. $x+3+x+x=2x+4+x \Leftrightarrow 3x+3=2x+4$), weitere Termumformungen können durch – aus Sachzusammenhängen heraus aufgestellten – Gleichungen nötig werden, die Klammern enthalten (z. B. $3\cdot(x+4)-2=(x-1)\cdot 4$).

Jetzt, da die Schüler ja schon sicherer in der formalen Schreibweise agieren, führte die Aufforderung den Term anzugeben, der am Ende des unten abgebildeten Zahlenrätsel steht, bei vielen Schülern von selbst zu dem Term. $(4\cdot(x-2)+6):2$.

Vergleicht man die beiden Termspalten in der Abbildung 37 rechts, so stehen in der Spalte Term 1 von oben nach unten genau diejenigen Schritte, die beim Vereinfachen des Terms $(4\cdot(x-2)+6):2$ zu $2x-1$ notwendig sind.

Text	**Term1**	**Term 2**
Denk dir eine Zahl.	x	x
Subtrahiere 2	$x-2$	$x-2$
Multipliziere mit 4	$4x-8$	$4\cdot(x-2)$
Addiere 6	$4x-2$	$4\cdot(x-2)+6$
Dividiere durch 2	$2x-1$	$(4\cdot(x-2)+6):2$

Abb. 37: *Ein Zahlenrätsel – Zwei Algebraisierungen.*



Die Variablen stehen jetzt, wo man das Termumformen angeht, also wieder nur für Zahlen. Zudem kann man einzelne Rechenregeln im Rückgriff auf die Boxen versinnbildlichen. Jetzt muss man, wie in Zugang *Muster*, die Rechengesetze für Zahlen aktivieren, um regelgeleitet umzuformen. Nach meinen Beobachtungen ist hier das korrekte Termumformen nach wie vor eine Herausforderung, ohne jedoch mit so grundlegenden Lernhürden verbunden zu sein, wie es im *Muster*zugang der Fall war.

Am Ende können jetzt die gegenständlich-ikonisch repräsentierten Zahlenfolgen als vertiefende Algebraisierungen behandelt werden, wobei der algebraische Nachweis der Gleichwertigkeit der dabei entstehenden Terme nur noch eine Anwendung des Gelernten darstellt.

VI.III Vergleichende Durchführung der beiden Reihe (letzter Durchgang)

Nach der ersten Durchführung der Reihe Zahlenrätsel war schon klar, dass diese Vorgehensweise auch nicht der (allein selig machende) Königsweg in die Algebra ist. Wesentliche Probleme und Schwierigkeiten bleiben die Gleichen. Es scheint so auszusehen, dass in beiden Zugängen ein sicheres algebraisches Manipulieren nur langsam und über vielerlei Fehler und einem bewussten, explizit gemachtem Umgang mit diesen Fehlern aufgebaut werden kann. Ein Hauptunterschied scheint darin zu bestehen, dass der Zugang *Zahlenrätsel* keine solch zentralen Lernhürden aufbaut, wie der Zugang *Muster.* Zum Beispiel muss keine mühsam aufgebaute Denkfigur – wie das Narrativ der Aufbauformel – beim Übergang ins Kalkül über Bord geworfen werden. Und es prasseln im Zahlenrätselkontext nicht auf einmal alle möglichen, beliebig komplizierte Terme – und damit beliebig komplizierte Umformungen – auf einen ein. Im Zahlenrätselkontext sind die einzelnen Umformungstätigkeiten auf einen größeren Zeitraum verteilt und bauen kumulativ vom einfachen zum komplexen auf: Zuerst das Vereinfachen von algebraischen Summen (noch unterstützt vom Boxenkontext), dann die Kommutativ-, und Assoziativgesetze, danach noch innerhalb des Sachgleichungskontext das Distributivgesetz und zuletzt noch die restlichen Gesetze mitsamt ihren Verschränkungen.
Der Beginn mit dem sehr motivierenden und herausfordernden Symbolischen Beschreiben birgt aber auch seinen eigenen Zauber. Die Schüler haben sichtlich Spaß daran, Selbstwirksamkeit beim Finden von Aufbauformeln zu erleben und erfahren so schon am Anfang „Wofür man das x wirklich braucht!“ (Gerstner 2018). Gerade leistungsstärkere Schüler können von der kontextuellen Vielschichtigkeit, die durch das Generalisieren entsteht, profitieren. Für schwächere Schüler kann es aber semantisch überladen sein und sie können sich überfordert fühlen.

Deshalb sollten im 4. Durchgang die beiden Reihen zeitgleich in Parallelklassen durchgeführt und verglichen werden. Da in den Durchführungen neben den fachlich-didaktischen Schwerpunktsetzungen und der Unterrichtsmethodik das Vorgehen der Lehrkräfte, die individuellen Schülervorstellungen, die Motivationslage sowie die Art und Weise des Umgangs miteinander relevante Faktoren sind, sollten bewusst ganz unterschiedliche Erhebungsinstrumente gewählt werden. Das sind Einzel- und Partnerinterviews mit Schülern, das Videographieren von Plenumsgesprächen, kurze Diagnosetests (i.d.R. 10 Minuten) zu zentralen Punkten und weitere schriftlich fixierte Schülerprodukte. Es wurden eine Reihe von Diagnosetests konzipiert, die zwar in den beiden Reihen zu unterschiedlichen Zeiten zu Zuge kommen sollten, jedoch inhaltsspezifisch weitestgehend gleich waren. Um die Lernwege der beiden Zugänge noch weiter vergleichen zu können waren auch zwei Interviewseqenzen pro Klasse geplant, die mit ausgewählten Schülern beider Reihen durchgeführt werden sollten. Dabei sollte eine möglichst repräsentative Stichprobe über das Leistungsspektrum ausgewählt werden und die beiden Sequenzen sollten jeweils ab dem Ende des Kalkülaufbaus zum ‚Gleichungen Lösen‘ und zum ‚Termumformen‘ stattfinden (d.h. im *Zahlenrätsel*-Zugang zuerst zum ‚Gleichungen Lösen‘ und dann zum ‚Termumformen‘ und im *Muster*-Zugang genau umgekehrt).
Der vierte Durchgang begann Ende Februar 2020 mit 4 Klassen des Gymnasiums Bayreuther-Str. in Wuppertal. Leider kam 2 Wochen nach dem Start der CORONA-Lockdown. Zwar wurde versucht die Reihe in Distanz fortzuführen, aber das hat im 1. CORONA-Lockdown aus unterschiedlichsten Gründen nicht funktioniert, so dass diese vergleichend geplante Durchführung leider als abgebrochen gelten muss.

Der 5. Durchgang (15. März bis 30. Juni 2021) wurde mit zwei Parallelklassen am Gymnasium Essen-Überruhr durchgeführt. Die schulinternen Unterrichtsverteilung sieht in Klasse 7 meist 120 min (manchmal auch 60, manchmal 180 min) Mathematikunterricht in der Woche vor und 30 min pro Woche für Hausaufgaben. Beide Klassen wurden von der gleichen Lehrerin unterrichtet, die die beiden Reihen bereits kannte. Die Durchführung wurde in Wechsel-, Distanz- und Präsenzunterrichtsphasen nach folgenden Muster unterrichtet:

$$2\,Wo.\ Wechsel \rightarrow Osterf. \rightarrow 1\,Wo. Distanz \rightarrow 2\,Wo. Wechsel \rightarrow 1\,Wo.\ Distanz \rightarrow$$
$$\rightarrow\ 2{,}5\,Wo.\ Wechsel \rightarrow 3\,Wo.\ Päsenz.$$

Leider führte dies abermals dazu, dass die intendierten Erhebungen nur fragmentarisch durchgeführt werden konnten. So wurde z. B. in Präsenzphasen die Zeit in der Schule von allen Beteiligten als so wertvoll wahrgenommen, dass (fast) keine Zeitfenster für Interviews zur Verfügung standen (es gab in der ganzen Zeit nur drei Interviews). In den Wechselunterrichtsphasen wurden die Klassen in zwei Gruppen eingeteilt, die wochenweise von Präsenz nach Distanz wechselten. Neben den allerorts viel diskutierten mit Corona verbunden Verwerfungen ging dabei unversehens auch eine Schwerpunktverschiebung weg von einer eher konstruktivistisch intendierten Vorgehensweise hin zu einer „Erklärideologie“ einher. Wobei viele unterschiedliche „Erklärer“ am mathematischen Diskurs beteiligt waren (Lehrkräfte, Eltern, Geschwister, Nachhilfelehrer, Erklärtexte und Erklärfilme, Lehrerschmidt u. a. You-Tube-Videos, etc.).

Die von mir intendierten Erhebungen konnten also so nicht durchgeführt werden. Dementsprechend bin ich der Meinung, dass die methodisch-kontrolliert erhobene Evidenzen der im Folgendem vorgestellten Beobachtungen leider weit hinter den an und für sich gegebenen Möglichkeiten bleiben. Zudem wirkte sich der ständigen Wechsel von Distanz- und Präsenzunterricht auf die Vergleichbarkeit aus, da dadurch ja schon innerhalb einer Klasse nicht mehr von gleichen Lehr- und Lernvoraussetzungen ausgegangen werden konnte. Zudem führten die Abstands- und Kontaktgebote selbstredend zu einer methodischen Verödung. Im Wesentlichen gab es in Präsenzphasen (sowohl im Wechsel- als auch im Vollpräsenzunterricht) nur zwei Sozialformen: Einzelarbeit und Plenumsgespräche. Die mitunter langen Plenumsgespräche dienten sowohl der Besprechungen und Sicherung der zu Hause bearbeiteten Distanzaufgaben als auch der Einzelarbeitsergebnisse in Präsenz.
In dem Bewusstsein, dass also die erhobenen Daten weit hinter den ursprünglichen Intentionen zurückbleiben, versucht das nachfolgende Kapitel, aufgrund des und mit dem vorliegenden fragmentarischen Erhebungsmaterial, dennoch die Forschungsfragen zu beantworten und weitere zentrale Punkte herauszukristallisieren, indem es die letzte Durchführung mit zwei Klassen näher beleuchtet.

Immerhin zeigte sich in dieser letzten Durchführung, dass die beiden Reihen dahingehend robust sind, dass sie durchaus eine Akzentverschiebung in Richtung einer „Erklärideologie“ verkraftet haben. Genau genommen muss dies noch stärker formuliert werden: Genau an der zentralen Nahtstelle der Musterreihe, zwischen Inhalt und Kalkül, begab es sich, dass die gesamte Klasse im Distanzunterricht war. So wurde hier zum ersten Mal erst gar nicht versucht, dass die Schüler algebraisches Umformungen als Möglichkeit des Nachweises der Gleichwertigkeit selbst „entdecken“, sondern es wurde einfach damit begonnen in einem Erklärtext den Term $(x \cdot 2) \cdot 2 + 4 + x$ (siehe Erarbeitung (III)) unter Bezug auf die Rechengesetze zu $5x + 4$ zu vereinfachen. Interessanterweise wurde da zum ersten Mal von niemandem (Lehrerin wie Schüler) eine Hürde im Lernweg wahrgenommen.

Weitere durchaus positive Einzelaspekte dieser sehr besonderen Durchführung lassen sich benennen. Coronabedingt wurde ja der größte Teil der Lernzeit nach Hause verlagert. Dadurch, dass ich von Anfang an immer alle der digital einzureichenden Distanzaufgaben korrigierte, wuchs Quantität und Qualität der Abgaben von Woche zu Woche, so dass ich in dieser Reihe auf eine Vielzahl von schriftlichen Schülerprodukten zurückgreifen kann. Eine sichere Gewähr, dass diese Produkte tatsächlich auch eigene Produkte sind, gibt es natürlich nicht, augenscheinlich wies aber wenig auf bloßes Abschreiben oder darauf, dass eine völlig andere Person die Aufgaben bearbeitet hatte, hin. Natürlich waren jetzt - wohl mehr als sonst - unterschiedliche „Erklärer“ (Eltern, Geschwister, Lehrerschmidt, etc.) mit beteiligt. Die diskursive Perspektive nach Sfard u. a. (siehe Abschnitt V.II) sieht solche „Fremdeinflüsse“ sowieso als integrale Bestandteile der Diskursentwicklung und jedenfalls nicht als den intendierten Lernweg behindernde, am besten auszuklammernde, „Hintergundgeräusche“. Die methodische „Verödung“ in Hausaufgaben, Einzelarbeit und Plenumsgesprächen vereinfacht in gewissem Sinne nun die Darstellung der Diskursentwicklung. In der Hauptsache wird in Folgendem nämlich exemplarisch aufgezeigt werden, wie durch Aufgabenstellungen und Plenumsgespräche allein, zentrale Diskursentwicklungen in Richtung der tendierten Lerninhalte gesteuert werden können. Deswegen werden jetzt die beiden Reihendurchführungen nicht in ihrer Gänze, aber dennoch in ihrem wesentlichen Verlauf dargestellt.
Das bedingt zwangsläufig eine gewisse Länge der nun folgenden Darstellung. Jeder Versuch noch weitere Passagen aus der Diskursentwicklung auszublenden, kam mir persönlich aber so vor, das Bedingungsgeflecht des Lerngangs nicht mehr hinreichend gut abzubilden. Der Leser mag das Folgende einfach nur als zwei Lehr-Lerngeschichten lesen, die erzählen, wie zwei Einführungen in die Algebra, die jeweils Zugänge wählen, die mit ganz unterschiedlichen Denkweisen einhergehen, am Ende doch und trotz der misslichen Corona-Lage zu recht befriedigenden Ergebnissen führten. Diese Erzählungen starten mit einer Analyse der Pretests, um mit den „algebraischen“ Vorerfahrungen der beiden Klassen, deren diskursive Algebraentwicklung ja dann nachgespürt werden soll, zu beginnen.

VI.III.1 Ergebnisse des Pretests (letzter Durchgang) – Vorstellungsgrundlagen

Der Pretest dieses Durchgangs wurde direkt vor der Durchführung durchgeführt. Die Bearbeitungszeit betrug 60 min. Wie bereits erklärt, versucht der Pretest Wissens- und Vorstellungsgrundlagen aus folgenden, sich teilweise überlappenden, Kategorien zu erheben:

(1) **Rechengesetze.** Wie vertraut sind die Schüler mit den arithmetischen Rechengesetzen und deren algebraischer Formulierung?

(2) **Unterrichtspezifische Vorkenntnisse.** Wie gut können die Schüler mit symbolisch-algebraisch konnotierten Fragestellungen umgehen, die eng verwandt zu Aufgabeformaten sind, die sie schon vorher im Unterricht kennengelernt haben?

(3) **Relationales Denken.** Inwieweit ist ein relationales Denken im Zusammenhang mit Gleichungen schon ausgebildet?

(4) **Variablenkonzepte.** Welche (Prä-)Konzepte zu Variablen, Termen und Gleichungen wurden bereits aufgebaut?

Kategorie *Rechengesetze (Aufgabe 7)*

Aufgabe 7
Die Gleichung $8 \cdot (5-3) = 8 \cdot 5 - 8 \cdot 3$ ist korrekt!

a) Überprüfe dies, indem du die Terme links und rechts des „="-Zeichens berechnest.
b) Was passiert, wenn die 5 durch irgendeine andere Zahl ersetzt wird? Bleibt dann die Gleichung korrekt?
c) Was passiert, wenn du zusätzlich die 8 durch eine andere Zahl ersetzt? Was passiert, wenn du alle drei Zahlen (5, 8 und 3) durch andere Zahlen ersetzt? Bleibt die Gleichung dann immer korrekt, egal durch welche Zahlen die 5, 8 und 3 ersetzt? **Begründe!**

d) Für Zahlen a, b und c gilt:

	Gilt immer	Gilt nie	Gilt manchmal, wenn…
$a+b=b+c$	☐	☐	
$a+b+c=c+a+b$	☐	☐	
$a+b=a+c$	☐	☐	
$a \cdot (b-c) = a \cdot b - c$	☐	☐	
$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$	☐	☐	
$a-(b+c) = a-b+c$	☐	☐	

Kreuze das Richtige an (☒), oder schreib eine kurze Begründung, wenn die Gleichung deiner Meinung nach nur manchmal gilt.

Kasten 5: *Aufgabe 7 des Pretests (5. Durchführung) zur Erhebung der Kategorie „Rechengesetze".*

Kasten 5 zeigt die Aufgabe des Pretest, die zentral Daten zur Kategorie ***Rechengesetze*** gewinnen wollte. Bezüglich der Häufigkeiten der richtigen Antworten und der gemachten Fehler gab es keine erheblichen Unterschiede zwischen den beiden Klassen.
33 der 40 teilnehmenden Schüler beantworteten die Fragen 7a)-c) weitestgehend richtig. Aufgabenteil d) wurde von 19 Schüler weitgehend fehlerfrei beantwortet, von 21 mit Fehlern. Als „weitgehend fehlerfrei" bezeichne ich hier Lösungen, die jede allgemeingültige Gleichung mit ‚Gilt immer' ankreuzen und jede „falsche" Gleichung, die nur für einzelne Zahlenwerte wahr ist, mindestens mit ‚Gilt nie' ankreuzen. 10 dieser 19 Schüler kreuzten bei $a+b=a+c$ auch ‚Gilt manchmal' an und konnten auch die entsprechende Bedingung $b=c$ dazu formulieren. Hier eine Zusammenstellung von Fehlern, die beim Ankreuzen gemacht wurden:

Fehler	$3+a=3a$ als richtig angekreuzt	$a+b=b+c$ als richtig angekreuzt	$a \cdot (b-c) = ab-c$ als richtig angekreuzt	$a \cdot (b-c) = ab-ac$ als falsch angekreuzt	$a-(b+c)=a-b+c$ als richtig angekreuzt
Anzahl	6	7	8	10	18

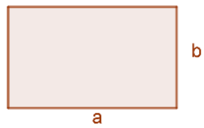
Tabelle 10: *Anzahl der falsch gesetzen Kreuzchen unter den Schülern beider Klassen bei Aufgabe 7 des Pretests.*

Auffallend dabei ist es, dass 10 Schüler (25%) der Meinung sind, dass das Distributivgesetz $a \cdot (b - c) = ab - ac$ nie gilt, obwohl 82,5% aller Schüler in 7c) implizit die Gültigkeit dieses Gesetzes – nur ohne algebraische Notation – folgerten.
Weiterhin fällt die hohe Fehlerquote bei $a - (b + c) = a - b + c$ auf. Diese Gleichung wird sogar von 4 Schüler als allgemeingültig ausgewiesen, die bei $a + b = b + c$ in der Lage waren, die Gültigkeitsbedingung $b = c$ anzugeben und daher wohl antizipieren können, dass die Variablen für unbestimmte Zahlen stehen.
Insgesamt lässt sich zusammenfassen, dass 50% aller Schüler mit der algebraischen Formulierung von Rechengesetzen Schwierigkeiten haben und insbesondere so formulierte Gleichungen nicht durchgehend so lesen können, dass sie in der Lage sind wahre von falschen Aussagen zu trennen.

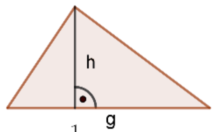
Kategorie *Unterrichtsspezifische Vorkenntnisse (Aufgabe 1 und 2)*

Aufgabe 1

Hier siehst du die Formeln für die Flächeninhalte von Rechteck und Dreieck.



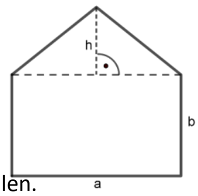
$A = a \cdot b$



$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = (g \cdot h) : 2$

a) *Berechne den Flächeninhalt eines Dreiecks mit einer Höhe $h = 3$ cm und einer Grundseite $g = 10$ cm.*

b) *Gib eine Formel mit a, b und h für den Flächeninhalt der Hausfigur rechts an*



Aufgabe 2

Für eine Taxifahrt ist eine Grundgebühr von 2 € und für jeden Kilometer 2,50 € zu zahlen.

a) *Wie teuer wäre eine Taxifahrt von 12 km Länge?*
b) Wie weit könnte man für 17 Euro fahren?
c) Wie teuer ist eine Taxifahrt, wenn x Kilometer gefahren werden? Stelle dazu eine Formel auf

Kasten 6: *Pretest-Aufgaben zur Kategorie „Unterrichtsspezifische Vorkenntnisse". Doch die Aufgaben geben in ihrer Zusammenschau auch Hinweise auf vermeintliche Variablenkonzepte der Schüler und Aufgabe 2b) zeigt auf, welche Lösungsverfahren die Schüler zum Lösen von Gleichungen der Form $ax + b = c$ verfolgen.*

In Kasten 6 sind die beiden Aufgabe zur Kategorie ***Unterrichtsspezifische Vorkenntnisse*** zu sehen.
Wiederum waren hier keine erheblichen Unterschiede zwischen den Klassen auszumachen. Aufgabe 1a und 2a, in der in vorgegebene Formeln spezifische Zahlen eingesetzt werden

$2{,}5x + 2 = 17$ wurde gelöst durch …	… richtiges Ergebnis ohne Erklärung oder Rechnung	Guess & Test-Methode	Rückwärtsrechnen
Anzahl	5	4	22

Tabelle 11: *Häufigkeit von Lösungsmethoden der Schüler bei Aufgabe 2b)*

müssen (*letter evaluated* in Küchemanns Nomenklatur) bearbeiteten 87,5 % aller Schüler richtig. Aufgabe 1b, die schon ein tieferes Variablenverständnis voraussetzt, da die Substitution $g = a$ nötig wird, wurde von 35 % richtig gelöst. Die Lösungshäufigkeiten bei den Aufgaben 2a) und 2c) waren durchgehend hoch (87,5% und 80%) und 77,5% der Schüler erzielten eine richtige Lösung der Gleichung $2{,}5x + 2 = 17$. Tabelle 11 kann man eine Einordnung der Lösungsmethoden der 35 Schüler, die hier eine richtige Antwort gegeben haben, entnehmen. Viele Schüler können also Gleichungen der Form $ax + b = c$ schon relativ sicher lösen.
Insgesamt lässt sich zusammenfassen, dass die Schüler in dieser Kategorie erfreulich gute Ergebnisse zu Tage förderten.

Kategorie *Relationales Denken (Aufgabe 5a-e)*

Aufgabe 5

Im Folgendem geht es um die rechtsstehende Gleichung.

$18 + \underbrace{\square}_{\text{Box } A} = 20 + \underbrace{\square}_{\text{Box } B}$

a) In die Boxen A und B sollen Zahlen eingetragen werden, so dass korrekte Gleichungen entstehen. Gib in **1.**, **2**. und **3**. drei verschiedene Möglichkeiten an, die Boxen korrekt auszufüllen.

$18 + \underbrace{\square}_{\text{Box } A} = 20 + \underbrace{\square}_{\text{Box } B}$

$18 + \underbrace{\square}_{\text{Box } A} = 20 + \underbrace{\square}_{\text{Box } B}$

$18 + \underbrace{\square}_{\text{Box } A} = 20 + \underbrace{\square}_{\text{Box } B}$

b) Welchen Zusammenhang gibt es zwischen den Zahlen in Box A und Box B in allen Gleichungen?

c) Die Zahl 18 soll nun durch 226 und die Zahl 20 durch 231 ersetzt werden. Welcher Zusammenhang besteht nun zwischen den Zahlen in Box A und Box B?

d) Wenn du irgendeine Zahl in Box A schreibst, kannst du dann immer eine Zahl für Box B finden, so dass die Gleichung korrekt ist? Wenn ja, wie? Erkläre deine Überlegungen!

e) Was kannst du über x und y in der folgenden Gleichung sagen: x+2=y+10?

Kasten 7: *Aufgabe zur Erhebung der Vorstellung des Gleichheitszeichens als relationales Symbol (nach Stephens & Ribeiro 2012).*

Zur Kategorie ***Relationales Denken*** nutzte ich Items, die genauso in mehreren internationalen Studien schon seit langem (Hart 1981, Mason et al. 2008, Stephens 2007, 2008, Stephens & Wang 2008, Stephens & Ribeiro 2012) verwendet werden, um die Ausprägung relationalen Denkens zu untersuchen. Die Aufgaben 5a-e sind Übersetzungen der u. a. von Stephens & Ribeiro (2012) verwendeten Items.
Tabelle 12 bilanziert die Lösungen der Schüler beider Klassen. Teil a ist richtig (✓), wenn korrekte Zahlenwerte angegeben werden.
Die Bearbeitungen der Teile b, c und d, in der ja relationale Aussagen getätigt werden sollen, wurden in der Tabelle als richtig (✓) bezeichnet, wenn eine allgemeine und größenspezifische Relation angegeben wurde, egal ob dabei explizit auf die Platzhalter A und B referenziert wurde oder nicht (Bespiel für eine allgemeine, größenspezifische und referenzierte Relation: „*In Box A müssen immer zwei mehr sein als in Box B*“; Beispiel für eine allgemeine, größenspezifische, aber nicht referenzierte Relation: „*Der Unterschied der beiden Zahlen muss 2 betragen*“). Wurde nur eine richtige relationale, aber nicht größenspezifische Aussage (z. B. „*Die Zahl in Box A ist immer größer als die in Box B*“) darüber getroffen, welcher Boxeninhalt (welche Variable) größer ist, ist das mit „$A > B$ bzw. $x > y$“ vermerkt.

Wurde bei Teil (e) nur die eine Lösung $x = 10$ und $y = 2$ angegeben, ist das in der Tabelle mit „10;2" bezeichnet. Ein nicht zu vernachlässigender Anteil der Schüler denken zwar relational, lassen in Ihrer Vorstellungswelt aber keine negativen Zahlen zu (gekennzeichnet mit „$x > 0$", z. B. bei (d): *„Nein, man kann nicht immer eine entsprechende Zahl für Box B finden. Beispiel: 18+1=20+Box B →geht nicht!").*

Klasse 7b (20 Schüler):

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	f	✓	f	f	f
b	✓	✓	✓	✓	✓	f	✓	✓	✓	✓	✓	A>B	✓	f	×	×	×	×	f	f
c	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	A>B	×	×	f	f	×	×	×	f
d	✓	✓	✓	✓	✓	✓	> 0	> 0	> 0	> 0	> 0	✓	×	✓	f	f	×	×	f	f
e	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	x>y	x>y	x>y	f	10;2	x>y	✓	10;2	10;2	f	x>y	10;2	f
							Keine negativen Lösungen													

Klasse 7d (20 Schüler):

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	f	×
b	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	A>B	A>B	✓	f	✓	✓	×	f	×	×
c	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	×	×	✓	✓	×	×	f	×	×	×
d	✓	✓	✓	✓	✓	✓	f	> 0	> 0	✓	✓	✓	×	f	f	×	f	×	×	×
e	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	x>y	x>y	✓	✓	✓	f	f	f	×	f	f	×	×
								k. n. Lsg.												

Tabelle 12: *Die Lösungen der Schüler zu Aufgabe 5 des Pretests.*

Legende: ✓ richtig gelöst ***f*** *falsch bearbeitet × nicht bearbeitet*

A>B: *nur die Aussage, dass die Zahl in Box A > als in Box B…* ***10;2:*** *nur das Zahlenpaar $x = 10, y = 2$ wird genannt*

>0: *die S antworten mit nein, da sie nur positive Lösungen akzeptieren* ***x>y:*** *geht nur, wenn $x > y$*

Schüler, die Teil (a) nicht korrekt lösen, beantworten auch die nachfolgenden Teilaufgaben falsch.
Eine korrekte oder zumindest korrekt relationale, nicht-größenspezifische („A>B") Beantwortung von Aufgabenteil (b) folgt oft einer korrekten Antwort bei Teil (d), außer bei den Schülern, die keine negativen Lösungen zulassen. Es fällt auf, dass fast alle Schüler, die die Aufgaben nur im positiven Zahlenraum denken auch in Teil (e) eine nicht-größenspezifische Aussage treffen. Und eine korrekte Antwort bei Teil (d) wird fast immer von einer korrekten Lösung von (e) gefolgt. Das Verallgemeinern einer Beziehung zwischen den Variablen x und y in Teil (e)

scheint also den Schüler nicht schwerer zu fallen als das Erfassen einer allgemeinen Beziehung zwischen den Boxeninhalten in Teil (d).[65]
Insgesamt lasst sich zusammenfassen, dass hier, in einem Kontext, in dem Zahlen explizit in den relationalen Kontext einer Gleichung gestellt werden, viele Schüler doch gut mit solchen Zahlen in ihrem relationalen Gefüge zurechtkommen.

Kategorie *Variablenkonzepte (Aufgaben 5 f,g und A6)*

Aufgabe 5

e) i) Was kannst du über y sagen, wenn $y = 3 \cdot x + 1$
$und \quad x = 4$ $\qquad y =$...

ii) Was kannst du über m sagen, wenn $m = n + 3$
$und \quad n = 4$ $\qquad m =$...

iii)

*Wenn $a + b = 43$,	**Wenn $n - 246 = 762$	***Wenn $e + f = 8$
dann ist $a + b + 2 =$.................	dann ist $n - 247 =$....................	dann ist $e + f + g =$.................

f) Was ist größer, $2 \cdot x$ oder $x + 2$? Erkläre!

Kasten 8: *Aufgabe 5 e) und f) zur Erhebung „Variablen(prä-)konzepte“ (entnommen aus Küchemann 1979, 1980). Ein Abnahme der Erfolgsquote ist bei iii)***) und f) zu beobachten: Hier sind die Konzepten ‚letter evaluated‘ und ‚letter not used‘ nicht unbedingt zielführend.*

Natürlich schwingen die Vorstellungen, die die Schüler von Variablen haben in den meisten der Items des Pretest mit, doch hier wurden Aufgaben gestellt, die direkte Rückschlüsse auf ***Variablenkonzepte*** der Schüler erlauben sollten. Alle in dieser Kategorie gestellten Aufgaben (Kasten 8 und 9) sind Items von Küchemann (1979, 1981), der 1976 im Rahmen des Forschungsprojekt „*Concepts in Secondary Mathematics and Science*“ (CSMS, Hart 1981) mit über 1000 Schülern der Klassenstufen 8 bis 10 einen Algebratest durchführte, die untersuchten, wie Schüler Variablen interpretieren und verwenden. Nach Küchemann zeigte die CSMS-Studie, dass trotz unterrichtlicher Behandlung der Algebra nur ein kleiner Prozentsatz der 13-15 jährigen Schüler tragfähige Variablenkonzepte ausgebildet hatten: *„… … in algebra and the other topics investigated, the research has found that children frequently tackle mathematics problems with methods that have little or nothing to do with what has been taught“* (Küchemann 1991, S. 118). 2008/9 wurde diese Studie mit ca. 3000 Schüler der Klassenstufen 7-9 mit nahezu identischen Items wiederholt, und zwar mit weitgehend ähnlichen Ergebnissen (Hodgen et al.2009).
Küchemann nennt drei Variablenkonzepte von Lernenden, mit denen man zwar eine Reihe von Aufgaben richtig lösen kann, die ohne einen weitgehenden Ausbau jedoch keine tragfähigen Variablenkonzepte sind: *letter evaluated*, *letter not used* und *letter as object* (in Kapitel

[65] Die Ergebnisse dieser klassenspezifischen und sicher nicht signifikanten Erhebung ähneln den Ergebnissen der international vielfach durchgeführten Untersuchungen mit derselben Aufgabe (Australia (Stephens, 2007, 2008, Stephens & Wang, 2008, Stephens & Armanto2010 Stephens & Ribeiro 2012), wenn sie auch nicht in allen Punkten übereinstimmen. Stephens & Ribeiro berichten z. B. dass oft (e) auch gelöst wurde, obwohl das bei (d) nicht der Fall war und schließen daraus auf eine wesentlich stärkere Aussage: „This suggests that framing a generalisation in part d may be more difficult for some students than generalising the relationship between c and d.“ (ebd. 2012). Vom Nichtakzeptieren negativer Lösungen wurde in keiner der Studien berichtet.

III wurden diese bereits erklärt). Die Items sollten nun ausloten, inwiefern die Schüler diese drei (Prä-) Konzepte ausgebildet haben, oder ob sie bereits von sich aus darüber hinaus gehen.

Die Aufgaben 5)f)i)-ii) (Tabelle 13) wurden von 85% der Schüler richtig beantwortet (15 % haben die Aufgaben nicht bearbeitet oder Fehler beim Zahlenrechnen). Hier muss ja auch nur eine konkrete Zahl in die Variable eingesetzt werden, ohne das je mit der Variable selbst umgegangen oder operiert wird (*letter evaluated* würde also ausreichen).
Für die Lösung der folgenden Items in Aufgabe 5) f)iii) benötigt man schon Vorstellungen, die teilweise über dieses *letter evaluated* hinausgehen.

Aufgabe 5 f.iii)			
	Wenn $a+b=43$, dann ist $a+b+2=$……	Wenn $n-246=762$ dann ist $n-247=$………	Wenn $e+f=8$ dann ist $e+f+g=$……
nicht bearbeitet	n.b. **7%**	n.b. **5%**	n.b. **17,5%**
falsch bearbeitet		763 **2%**	x; 12; 18 nicht möglich $Zahl > 8$ ……**32,5%**
richtig bearbeitet	45 **93%**	761 **93%**	$8+g$ $8+x$ **50%**
Anteile der richtigen Antworten bei Küchemann (1981)	KÜ 97%	KÜ 74%	KÜ 41%

Tabelle 13: *Aufgabe 5 f.iii): Gehen die Vorstellungen schon über ein ‚letter not used' oder ein ‚letter evaluated' hinaus? Angegeben sind die Antworten mitsamt den Anteilen ihres Auftretens.*

Die beiden ersten Items in Tabelle 13 kann man korrekt lösen, ohne dass man mit den Variablen umgehen, ihnen eine explizite Bedeutung zuschreiben oder mit ihnen gar operieren muss (*letter not used* in Küchemanns Nomenklatur). In der Aufgabe rechts muss man nun aber die Variable g zu 8 addieren und die Lösungshäufigkeit sinkt rapide. Einige Schüler setzen wiederum Zahlen ein ($12 = 4 + 4 + 4, 18 = 8 + 10$), andere geben einen unbestimmten ‚Bereich' an (x, $Zahl\ > 8$) und wieder andere halten dieses Operieren schlichtweg für nicht möglich. Nach Küchemann zeigt dieser Abfall der Lösungshäufigkeit an, dass nicht wenige Schüler noch in den Konzepten *letter evaluated* und *letter not used* verhaftet sind. Überraschenderweise ist die Lösungshäufigkeit der dritten Aufgabe doch recht hoch, obwohl das kalkülhafte Operieren mit Variablen nie Unterrichtsgegenstand war. Der Ausdruck $8 + g$ muss hier als Antwort, als unbestimmte Zahl akzeptiert, werden. Der in diesem Zusammenhang vielfach berichtete *lack-of-closure*-Fehler (Collis 1978, Ekenstam & Greger 1987, Malle 1993) $8 + g = 8g$ trat im Pretest nie auf.

Aufgabenteil 5 g) („Was ist größer? $2x$ oder $x + 2$. Erkläre!"), dessen richtige Antwort ja bereichsspezifisch ist und man daher schon in einem gewissen Ausmaß den *Bereichsaspekt* der Variablen x denken muss, wurde unterschiedlichst bearbeitet (Tabelle 14).
Eine Mehrheit der Schüler weiß , dass man für die Variable x mehrere Zahlen einsetzen kann, um die Frage zu beantworten. 50% sind sogar in der Lage zu erkennen, dass keine der beiden Ausdrücke für alle Werte größer sind. In den Untersuchungen von Küchemann et al.(Küchemann 1981, Brown 2008) erkennen dies nur maximal 10% der Befragten und eine

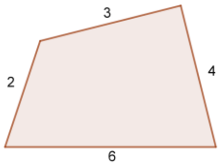
nachgeschobene Interviewstudie förderte zutage, dass die Schüler, die diese Frage richtig beantworteten, dazu tendieren schon das Variablenkonzept der Veränderlichen aufgebaut zu haben (Brown et al 2008, S. 24). Eventuell ist die hohe Erfolgsquote hier also schon eine Folge der der Reihe direkt vorangehenden Unterrichtsfreie *Lineare Funktionen*.

<table>
<tr><td colspan="5">$(2\cdot x \;\square\; x+2)$?→Die Schüler …</td></tr>
<tr><td colspan="5">… haben die Frage nicht beantwortet **6 (15 %)**</td></tr>
<tr><td colspan="5">… meinen, dass man die Frage nicht beantworten kann **3 (7,5%)** z. B.:“*… kann man nicht sagen, da x unbekannt ist“*</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="3">Erklärung</td></tr>
<tr><td colspan="2">… meinen, dass 2x immer größer ist **11 (27,5%)**</td><td>Keine
5</td><td colspan="2">Einsetzen von 1 oder 2 Zahlen
6</td></tr>
<tr><td rowspan="2">…, dass es darauf ankommt, was x ist
20 (50%)
(KÜ 10%)</td><td>geben dabei keine Grenze an
10</td><td>Keine
6</td><td>in Worten (z. B. *„Es kommt darauf an, was x ist“* oder *„… ob man positive oder negative Zahlen hat*“)
2</td><td>Einsetzen von 1 oder 2 Zahlen
2</td></tr>
<tr><td>geben dabei die Grenze x=2 an (z. B. *„2x>x+2, wenn x>2*“)
10</td><td>Keine
3</td><td>In Worten (z. B. („…,weil sie für x=2 gleich groß sind „oder „… wenn man 0,1,2 ausschließt“
2</td><td>Einsetzen von 2 oder mehr Zahlen
5</td></tr>
</table>

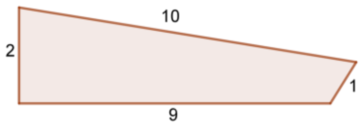
Tabelle 14: *Aufgabe 5 g): ‚Letter as a variable'? (siehe Kapitel III, Zahl & Variable)*

Auch die folgende Aufgabe 6 (Kasten 9) sollen erheben, welchen Variablenkonzepten die Schüler anhängen.
Die ersten drei Items der Aufgabe 6 (Kasten 9) können gut mit der Vorstellung gelöst werden, dass e, h, g und d nur Namen (Label) der Objekte ‚Seiten der Figuren' sind, ohne dass man sich dahinter die unbestimmten Seitenlängen denkt. Diese Ding-Objekte „sammelt“ man dann einfach „zusammen“ (Küchemanns *letter as object*). Lösungen, wie z. B. „$h+h+h+h+g$“, „$4h+1g$" und „$2d\ und\ 5+6$" sprechen für diese Lesart.
Um bei der letzten Aufgabe auf $2\cdot x$ zu kommen, muss mit der unbestimmten Zahl x (die Anzahl der Seiten) umgegangen werden, ohne dass man weiß, welche Zahl genau damit gemeint ist. Hier muss erkannt werden, dass man mit dem Buchstabe x, der für eine unbestimmte Zahl steht, auch rechnen kann Der Abfall der Lösungswahrscheinlichkeit deutet darauf hin, dass dies einigen Schülern schwerfällt. Statt mit der unbestimmten Zahl umzugehen, zählen viele die Anzahl der sichtbaren Seiten der vorgegebenen oder irgendwie selbst ergänzten Figur und rechnen mit dieser Zahl (*letter evaluated*: „$4\cdot 2,\ 15\cdot 2,\ 20\cdot 2,\ 30\cdot 2$").

Aufgabe 6

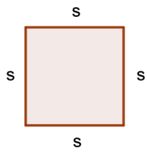


Der Umfang u dieser Figur ist $6+3+4+2=15$.

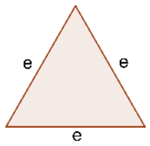


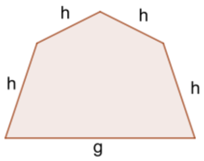
Berechne den Umfang dieser Figur.

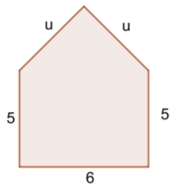
Dieses Quadrat hat die Seitenlänge s, der Umfang ist also $u=4\cdot s$.

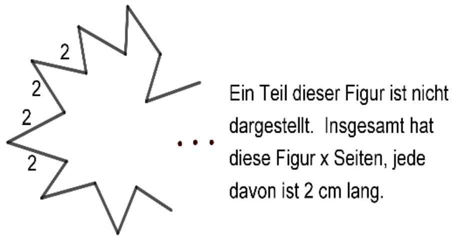


Bestimme den Umfang für jede der folgenden Figuren:









Kasten 9: *Pretest Aufgaben zur Erhebung der vorherrschenden Variablenkonzepte. (entnommen aus Küchemann 1979). Die ersten drei Umfangsterme können mit der Vorstellung ‚letter as object' gefunden werden, der letzte nicht.*

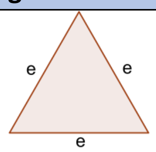
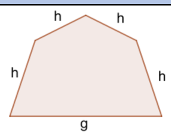
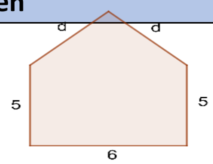
Aufgabe 6: Bestimme den Umfang der Figuren			
			
n.b. **2,5%**	n.b. **2,5%**	n.b. **2,5%**	n.b. **15%**
$3\cdot g$ **2,5%**	$4h\cdot 1g$ $3h+1g$ $4e+g$ **7,5%**	$2\ d\ und\ 5+6$ $2d\cdot 2\cdot 5\cdot 1\cdot 6$ $2d\cdot 3+6$ **7,5%**	$(4\cdot 2)+x\cdot 2$; $2+2+2+2+x\cdot 2$ $4\cdot 2$; $20\cdot 5$; $15\cdot 2$; $30\cdot 2$ $x\cdot u\cdot 4$ **20%**
$3\cdot e$; $e\cdot 3$ **95%**	$4h+1g$; $4h+g$; $h+h+h+h+g$ $h\cdot 4+g$ $(4h)+(1g)$ **90%**	$2\cdot d+2\cdot 5+6$ $(2\cdot 5)+(2\cdot d)+6$ $2\cdot d+16$ **90%**	$2\cdot x$; $x\cdot 2$ $2cm\cdot x$; $x\cdot 2cm$ **65%**
KÜ 94%	KÜ 68%	KÜ 64%	KÜ.. 38%

Tabelle 14: *Aufgabe 6: ‚Letter as object' oder schon ‚letter used as a generalized number' (siehe auch Kapitel III, Zahl & Variable)*

Die Vorstellung *letter as object* ist weit verbreitet und wird oft von Schülern beim Vereinfachen algebraischer Summen (z. B. $3x + 2x = 5x$) verwendet. Diese im deutschen Sprachraum mitunter als „Obstsalatarithmetik“ verschrieene Denkweise wird bis heute allenthalben als Erklärmodell herangezogen, um algebraische Summen zu vereinfachen und eine ganze Reihe von Autoren, weisen darauf hin, dass dies problematisch sein kann (siehe z. B. Nydegger 2018, S.57). Nichtsdestotrotz erklären Schüler oft entsprechende Kalkülhandlungen auf dieser Ding-Objektebene (z. B.: „3 x’en plus 2 x’en sind 5 x’en“). Malle meint dazu: „*Wenngleich diese Denkweise problematisch ist, erzeugt sie hier* [beim Vereinfachen algebraischer Summen: Anm. des Autors] *wenigstens keine Fehler und ist durchaus nicht unpraktisch*.“ Bei Umformungen, die über das Vereinfachen algebraischer Summen hinausgehen, drängt sich diese Objektvorstellung ja ohnehin nicht auf.

Insgesamt fällt auf, dass die Erfolgsquoten des hier besprochenen Pretest in allen Items, die von Küchemann entlehnt wurden, signifikant über die Erfolgsquoten von Küchemann (die in den Tabellen unter KÜ angegeben sind) hinausgehen, obwohl hier Siebtklässler und bei Küchemann (1979) Acht- bis Zehntklässler untersucht wurden.

Aufschlussreich ist auch, wie die Schüler mit Aufgabe 3 des Pretests umgehen, indem es um Übersetzungsleistungen zwischen einem Sachzusammenhang und dessen Algebraisierung geht.

Aufgabe 3 Kleine Gurken kosten 8 Cent das Stück und eine Karotte kostet 6 Cent.

a) Wenn g für die Anzahl der Gurken und k für die Anzahl der Karotten steht, wofür steht dann $8 \cdot g + 6 \cdot k$?
b) Wie groß ist die Gesamtzahl der Gemüsestücke (Gurken und Karotten zusammen)?

16,3% bearbeiten Teil a) nicht. 32,5% antworten richtig, indem sie angeben, dass der Term den Preis von g Karotten und k Gurken beschreibt. Der Rest antwortet sehr unterschiedlich. 34,9% geben eine Lösung wie „8 Gurken und 6 Karotten“ an, die die Variablen g und k mit den Objekten Gurken und Karotten identifziert und gleichzeitig, die im Text angegebene Einzelpreisdeutung der Zahlen 8 und 6 in die Anzahlen dieser Objekte ignoriert oder umdeutet. Solche Objektumdeutungen sind sehr geläufig und wurden vielfach untersucht (z. B. Rosnick & Klement 1980, Küchemann 1981) und Malle nennt sie Verstöße gegen die *Objekt-Zahl-Konvention*: „*In der elementaren Algebra bedeuten Buchstaben nicht die zugrundeliegenden konkreten Objekte, sondern gewisse diesen Objekten zugeordnete Zahlen (bzw. Größen*)“ (ebd 1993, S. 108).
Der Rest (16,3 %) gibt Antworten, die darauf hindeuten, dass diese Schüler nicht in der Lage sind einen solchen Term allgemein zu deuten, ohne vorher Zahlen für die Variablen einzusetzen (*letter evaluated*). Die Antworten reichen dort von „*Das kommt darauf an, was für Zahlen man für g und h einsetzt*“ bis zum expliziten Einsetzen irgendwelcher selbst ausgedachter Zahlen.
Dieselben Schüler setzen bei Teil b) entweder auch irgendwelche Zahlen ein (14%), oder geben als Ergebnis die Zahl 14 an, nachdem sie die beiden einzigen in der Aufgabenstellung angegeben Zahlen 8 und 6 addierten. Der Anteil der Schüler, die explizite Zahlantworten geben, ist in Teil b) sogar wesentlich höher als in Teil a (44,2% zu 16,3%). 20,9% geben bei Teil b) die richtige Antwort $g + k$ und 25,6% bearbeiten die Aufgabe gar nicht.

32,5% gelingt also die hier geforderte Übersetzungsleistung vom Term zum Text und 20,9% die vom Text zum Term. Der Rest bearbeitet die Aufgaben nicht oder zeigt Lösungen, die darauf hindeuten, dass sie den Vorstellungen *letter as object* oder *letter evaluated* anhängen.

*****

Allen Unkenrufen zum Trotz kann die Algebrareihe in Klasse 7 doch auf eine ganze Reihe von anschluss- und ausbaufähigen Vorstellungen aufbauen[66].
Der überwiegende Mehrheit der Schüler scheint es klar zu sein, dass die Variablen für Zahlen stehen und sie haben wenig Probleme Zahlen einzusetzen. Inwiefern sich die Schüler gewahr sind und auch im Geiste damit umgehen können, dass die Variablen für x-beliebige Zahlen eines Bereichs stehen, scheint aber unterschiedlich stark ausgeprägt zu sein. Nicht wenige haben aber bereits angefangen Variablenkonzepte zu entwickeln, die mehr oder weniger weit über Küchemanns *letter evaluated*, *letter not used* und *letter as object* hinausgehen. Einige Schüler haben – die überaus weitverbreitete – Schwierigkeit mit der ‚Zahl x' zu operieren ‚*wo man doch ihren Wert gar nicht kennt*'. Im rechnerischen Operieren mit Variablen scheinen die Schüler genau dann wenig Probleme zu haben, wenn eine *letter as object-Vorstellung* eine ausreichende Erklärung dafür darstellt. Gleichungen der Form $ax + b = c$ lösen viele Schüler schon sicher, die meisten durch Rückwärtsrechnen. Die hier besprochenen und viele darüber hinaus gehenden Beobachtungen (z. B. in den Hausaufgaben, im Unterricht) deuten darauf hin, dass einige Schüler von sich aus ich immer noch dazu neigen in ‚Zahlen' natürliche Zahlen zu sehen, obwohl die unterrichtlichen Zahlbereichsbereichserweiterungen schon bis zum Körper der rationalen Zahlen fortgeschritten ist.

In einer Aufgabenstellung, in der das „="-Zeichen in einen Kontext gestellt wird, in der es explizit als Relationszeichen zwischen zwei Seiten einer (Zahlen-)Gleichung vorgestellt wird (Aufgabe 5), zeigen viele Schüler durchaus die Fähigkeit zum relationalen Denken. Nicht wenige können sogar die Auswirkung des relationales Gefüge auf Variablen so deuten, dass sie zu bereichsspezifischen relationalen Aussagen zwischen den Variablen kommen (z. B. „*y ist immer 8 mehr als x*").

Obwohl die arithmetischen *Rechengesetze für Zahlen* seit der 5. Klasse, begleitend zur fortschreitenden Ausweitung der Zahlbereiche, immer wieder – und auch in symbolischer Notation – Unterrichtsthema waren und ihren Niederschlag in den Merkheften der Schüler fanden, zeigen sich in dieser Kategorie doch viele Antworten, die darauf hindeuten, dass die Schüler Schwierigkeiten haben symbolische Notationen (z. B. $a \cdot (b - c) = ab - ac$)) mit Bedeutung zu versehen. Diese Rechengesetze, die ‚abstrakte', allgemeingültige Beziehungen zwischen Zahlen ausdrücken, nehmen eine konstituierende Schlüsselfunktion beim Übergang ins algebraische Kalkül ein. Es sind diese Gesetze, die jetzt in den algebraisch-symbolischen Raum übertragen werden müssen, ohne – so scheint es zumindest – dass dieselben allen Kindern als ‚abstrakte' Regeln im semantischen Feld der Arithmetik hinreichend vertraut sind.

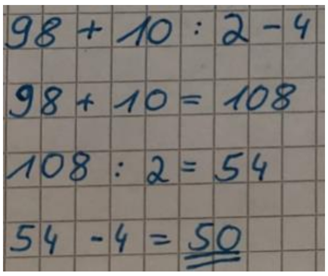
[66] Auch wenn die Ergebnisse des hier eingehender besprochenen Pretests zu den Besseren gehört, gilt das im Großen und Ganzen auch für alle anderen Durchführungen.

VII.III.2 Die Reihe Zahlenrätsel (letzter Durchgang)

Die Reihe wurde mit der Klasse 7b des GEÜ vom 17.03.21 bis 24.06.21 durchgeführt. Es waren 23 Schüler in der Klasse (drei davon wurden zieldifferent unterrichtet). Die Klasse war mir zu Durchführungsbeginn bereits vertraut, da sie schon an zwei Kooperationsprojekten mit der Uni Essen teilgenommen hatte. In der 5. Klasse besuchte sie einen Vormittag lang das mathematische Schülerlabor *MatheChecker* der Uni Essen, um dort materialbasiert und kooperativ Zahlenrätsel zu erforschen. Zum Erklären der Tricks wurden dabei schon Boxen als Platzhalter für die gedachten Zahlen eingesetzt und mit diesen Boxen operiert (siehe Abb. 23, 24 in Abschnitt VI.I). Das an diesem Schülerlabortag angefangene Lernheft „Der Zahlenzauberlehrling“ (Gerstner 2018), dass eine Vielzahl von Aufgaben zur unterrichtlichen Fortsetzung anbietet, wurde tatsächlich von Frau Müller (der Mathematiklehrerin der Klasse, die in folgendem oft mit FM abgekürzt wird) immer wieder und bis kurz vor Durchführungsbeginn mit den Kindern benutzt. Die Reihe konnte mit dieser Klasse also schnell, nochmals mit Zahlenrätseln beginnend, zu Gleichungen fortschreiten.

1 Von Zahlenrätseln zu Gleichungen der Form $\boldsymbol{ax+b=c}$

Die Reihe beginnt zur Motivation mit einer Stunde, in der von mir eine Reihe von Zaubertricks mit Zahlenrätseln vorgeführt werden[67]. Um zu erklären, wie der Trick funktioniert, wird dann nochmals auf die Boxenschreibweise und die formale Schreibweise mit x zurückgegriffen, und der Fokus schnell auf das Lösen von Gleichungen gerichtet. Bei einem Zahlenrätsel, das mit der gedachten Zahl x und am Ende von 5 Operationen ($\left(\left((x+\mathbf{7})\cdot\mathbf{21}-\mathbf{47}\right)-\boldsymbol{x}\right):\mathbf{10}$) auf die ‚Ergebniszahl‘ $2\cdot x+10$ führt, zeigt sich, dass einige Schüler die verbal formulierten Kontextgleichungen $2x+10=31$ und $2x+10=4$ für unlösbar halten, da sie sich nicht vorstellen können, dass man sich nach der Aufforderung „*Denk dir eine Zahl*“ auch gebrochene oder negative Zahlen denken kann.
Die Schüler lösen von sich aus Gleichungen der Form $ax+b=c$ entweder durch Probieren, mehr noch aber durch Rückwärtsrechnen ($x=(c-b):a$). Beide Methoden werden im Plenum gesichert.
In darauffolgenden Hausaufgaben bestimmen von denjenigen Schüler, die die gedachte Zahl richtig und begründend angeben, diese 55% durch Rückwärtsrechen des Endterms $2x-2$, aber auch 36% durch Umkehrung der Rechenkette $x \xrightarrow{+4} \square \xrightarrow{\cdot 2} \square \xrightarrow{-10} \square$, die sich aus den Operationen des Zahlenrätsels ergibt. Beim Aufschreiben verstoßen fast alle Schüler gegen die arithmetischen Konventionen Punkt-vor-Strich und Klammersetzung (Abb. 39).



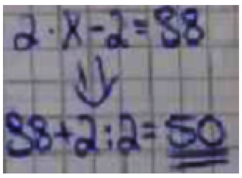
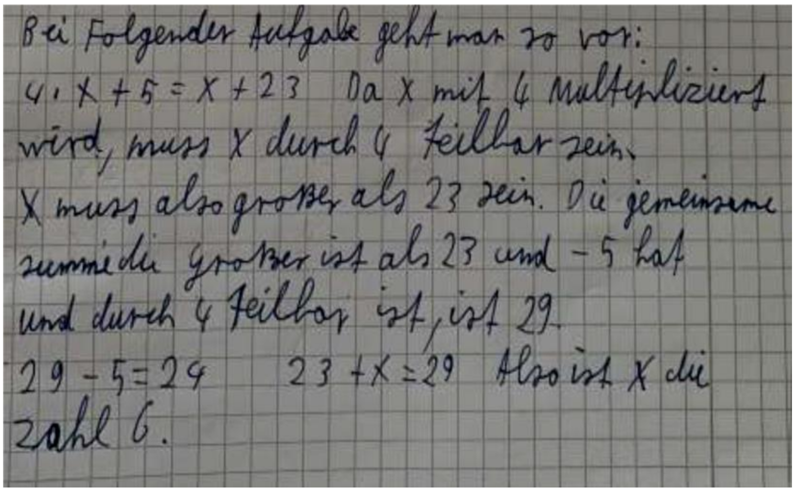


Abb. 39:*Zwei Lösungen des Zahlenrätsels* $x \xrightarrow{+4} \square \xrightarrow{\cdot 2} \square \xrightarrow{-10} \square$ *mit der „Ergebniszahl“* $2x-2$ *.*
Beide Schüler (wie fast alle) rechnen zwar richtig, halten sich beim Aufschreiben jedoch nicht an die arithmetischen Konventionen, d.h. sie setzten keine Klammern.

---

[67] Wie eine motivierende Inszenierung von solchen Zahlenzauberzahlenrätseln aussehen kann, zeigt Anhang I.

Interessant ist es auch, wie Schüler in einer Aufgabe der „Zone der nächsten Entwicklung", bevor überhaupt mit der Entwicklung der Methode Äqivalenzumformungen begonnen worden war, mit der Gleichung $4 \cdot x + 5 = x + 32$[68] umgehen.



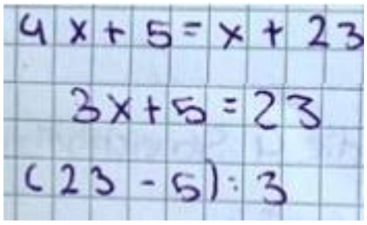


Abb.40: *Zwei erstaunliche Lösungen der Aufgabe „Für welche Zahl x ist die Zahl $4 \cdot x + 5$ gleich der Zahl $x + 23$?" (bevor eine Methode für $ax + b = cx + d$ verfügbar gemacht worden war). Schüler 1 argumentiert verbal-logisch („geradezu rhetorisch") über die Gleichheit der (natürlichen) Zahlen links und rechts und verwendet Teilbarkeitsargumente. Schülerin 2 macht aus der Gl. $4x + 5 = x + 23$ die Gleichung $3x + 5 = 23$ und rechnet dann rückwärts.*

Die meisten finden dann die Lösung durch Probieren, drei Schüler schlagen aber einen hybriden Weg ein, indem sie die Gleichung durch eine ‚Äquivalente' ersetzen, auf die sie die Methode Rückwärtsrechnen anwenden können und einer argumentiert sehr unkonventionell, gleichsam „rhetorisch", mit der gleichen (unbekannten) Zahl links und rechts der Gleichung (siehe Abb. 40).

Solche verbal-logischen Argumentationen wie in Abb. 40 traten immer wieder mal auf (siehe z. B. auch Abb. 38 weiter oben). Wie damit umgehen? In jedem Fall als kreative und logisch korrekte Lösungsvariante feiern. Aber auch darauf hinweisen, dass solche (rhetorischen) Lösungen bei nicht ganzen Zahlen nur schwer funktionieren und insbesondere nur schwer kommunizierbar sind: Anders bei einer Lösung, die die symbolische Schreibweise benutzt.

Zahlenrätsel, die auf Gleichungen der Form $ax + b = cx + d$ führen, markieren dann den Übergang zu der Lernumgebung *Knack die Box* (Anhang E).

2 Weitgehend selbständige Erarbeitung von Lösungsmethoden für Gleichungen der Form $ax + b = cx + d$ mit dem Modell „Knack-die-Box"

Die Schüler bearbeiten selbständig (und teilweise auch in Distanz) durch Boxen und Hölzchen repräsentierte Gleichungen gemäß der Lerntreppe in Anhang E. Während viele Schüler solche Gleichungen lange durch systematisches Probieren lösen, spricht sich doch nach und nach

[68] Hier und noch lange wurde bei linearen Gleichungen keine Metabegriffe (Lösung, Lösungsmenge) verwendet, sondern oft die verbale Darstellungsform verwendet und gepflegt. Beispiel: $2x - 2 = 98$: *Für welche Zahl x ist die Zahl* $2 \cdot x - 2$ *gleich der Zahl 98.* Dies hat zwei Gründe: Erstens wird dadurch wachgehalten, dass links und rechts der Gleichung die gleiche Zahl steht und zweitens implizierte die Formulierung „die Zahl $2 \cdot x - 2$" den Objektcharakter des Terms.

herum, dass man auf ‚*beiden Seiten gleiches wegnehmen darf*'. Vor allem dann, wenn für den Boxeninhalt auch gebrochene oder gar negative Zahlen (repräsentiert durch Zettelchen in der Box auf denen z. B. -2 steht) zugelassen werden (Anhang E AB KdBII), wechseln fast alle auf die Methode ‚*so lange von beiden Seiten Gleiches wegnehmen, bis man der entstandenen Gleichung die Lösung ansieht*'. Diese Methode können die Schüler dann auch recht gut erklären (siehe Abb. 33 in Abschnitt VI.II).
Die formale Schreibweise mit x , die ja durch die Zahlenrätsel schon lange vorbereitet ist, benutzen hier einige Schülern schon von sich aus. Im Laufe des Lernwegs wird die Übersetzung von Boxengleichungen in die formale Schreibweise gesichert und dabei werden auch die mathematischen Schreibkonventionen im Zusammenhang mit Äquivalenzumformungen geklärt. Es hat sich übrigens gezeigt, dass es vielen Schülern hilft, wenn der Äquivalenzumformungsbalken ‚|' anfangs auf beiden Seiten notiert wird, damit auch in der Schreibfigur sichtbar wird, dass die jeweilige Operation auf beiden Seiten der Gleichung durchgeführt wird (Abb. 41). Die Vorgabe für die Schüler war dabei, dass, sobald sie sicher wissen, dass die jeweilige Operation auf beiden Seiten durchgeführt wird, sie das Zeichen ‚|' schreibvereinfachend auch nur rechts setzten dürfen, wie es ja auch in den meisten Büchern getan wird.

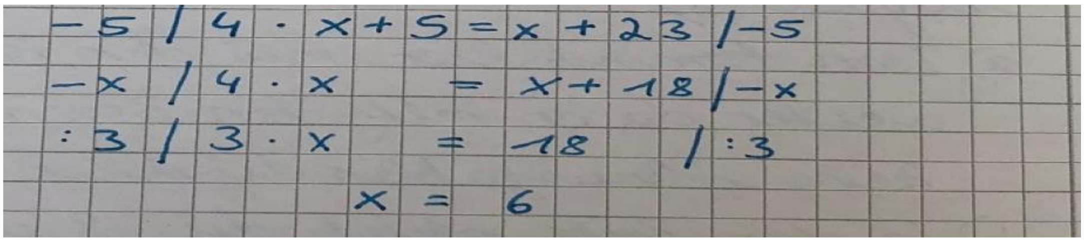


Abb. 41 : *Eine (unübliche) Schreibkonvention, die sichtbar werden lässt, dass Äquivalenzumformungen immer auf beiden Seiten der Gleichung durchgeführt werden.*

Erste Umformen von algebraischen Summen treten hier schon auf, wenn z. B. die Boxengleichung  zunächst in $2 + x + 1 + 2x = 1 + x + 2 + x + 1 + x + 1$ übersetzt und sodann zu $3x + 3 = 3x + 5$ vereinfacht wird. Man sollte hier unbedingt durchgehend auf eine präzise Sprache achten. Die Variable steht nicht für eine Box, sondern für die Zahl in der Box. Man muss ja keiner Ding-Objektvorstellung Vorschub leisten.

Schon beim Lösen von Gleichungen der Form $ax + b = cx + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ treten immer wieder Fehler auf, die hier aber weitestgehend auf rein arithmetische Probleme, insbesondere beim Rechnen mit negativen Zahlen, zurückzuführen sind. Das Pflegen der (Einsetz-)Probe ist hier ein wichtiges Mittel für Schüler, um eigene Fehler aufzudecken und Lösungswege zu verbessern.

Interessant ist, wie hier die Schüler in der „Zone der nächsten Entwicklung" auf die Gleichung $3 \cdot x - 3 = x + 15$ reagieren: Diese Gleichung kann nicht in Boxen und Hölzchen überführt werden und die Methodenentwicklung hat bis dahin noch kein Instrument zum Umgang damit aufgebaut. 55% der Schüler schlagen hier zielführende Lösungswege ein. 72% davon addieren als erstes auf beiden Seiten $+3$ ($\rightarrow 3x = x + 18$) und lösen dann wie bisher. 18% davon subtrahieren zuerst x ($\rightarrow 2x - 3 = 15$) und haben immer noch eine nicht im Boxenmodell repräsentierbare Gleichung. Sie erkennen aber die Struktur $ax + b = c$ und wechseln in die vertraute Routine des Rückwärtsrechnens.

Durch Lösen von Gleichungen im Knack-die-Box-Kontext entwickeln sich bis hierhin lediglich die beiden Äqivalenzumformungen *„auf beiden Seiten Gleiches subtrahieren“* und *„beide Seiten durch dieselbe Zahl teilen“*. Die fehlenden Äquivalenzumformungen entspringen nun durch den zum Lösen der Gleichung umgekehrten Vorgang: Es werden ausgehend von einer Lösung, z. B. $x = 3$, hintereinander und auch durch beidseitiges Multiplizieren und Addieren schrittweise immer komplexererGleichungen konstruiert (siehe Abb. 32 in V.II).
Viele der von den Schülern zu lösenden Gleichungen werden in Vorbereitung auf das Spiel „Ein- und Auspacken“ (siehe Anhang E) so von Mitschülern selbst konstruiert.

Wie schon in Abschnitt V.II beschrieben wächst – im Einklang mit den Ergebnisse vieler Studien – die Fehlerquote beim Lösen von Gleichungen mit dem Zahlbereich der Koeffizienten a, b, c und d in $ax + b = cx + d$, mit dem Zahlbereich der Lösungen x und mit der Wahrscheinlichkeit, dass beim äquivalenten Umformen mit negativen Zahlen gerechnet werden muss. Die Schüler werden angehalten, lieber weniger Aufgaben zu lösen und stattdessen durch die Kontrollstrategien der Probe und evtl. der „erweiterten Probe“ (vgl. Abschnitt VI.II) Fehler aufzuspüren und zu korrigieren.

3 Klassenarbeit

Auch wenn es in dieser Durchführung allenthalben kurze schriftliche Überprüfungen gab und die eingereichten Distanzaufgaben stets durchgesehen wurden, haben doch die Klassenarbeiten eine besonders hohe Relevanz zur Erhebung des Leistungshorizonts der ganzen Klasse. Für die praktizierende Lehrkraft sind sie oft die einzige Möglichkeit sich vom schriftlichen Output eines jeden einzelnen Schülers ein Bild zu machen. Hier die Ergebnisdiskussion der einzigen im Corona-Halbjahr 2021 geplanten und durchgeführten Klassenarbeit. Zwei der 4 Klassenarbeitsaufgaben waren Algebraaufgaben (Kasten 10 und 11), der Rest „negative Zahlen“ und „Winkelsätze“). Die Ergebnisse sind durchaus erhellend, weil sie m. E. u. a. auch aufzeigen, wie die Bearbeitungen der Schüler mit den situativen Unterrichtskontexten im Diskursverlauf verwoben sind und auf welche Art und Weise sie auf ungewohnte Aufgabenstellungen reagieren.

Aufgabe 3 (Zahlenrätsel)

a) Gib für das Zahlenrätsel den Term an, der am Ende des Rätsels steht.
b) Begründe, warum es bei diesem Zahlenrätsel schwerfällt, es mit Boxen und Hölzchen darzustellen.
c) Timo und Patty haben sich jeweils eine Zahl gedacht. Timo hatte am Ende das Ergebnis 13 und Patty das Ergebnis -1. Bestimme die Zahlen, die sich Patty Timo und jeweils gedacht haben.

Denke Dir eine Zahl. Subtrahiere 2 davon. multipliziere das Ergebnis mit 4. Addiere 6 hinzu. Dividiere das Ergebnis durch 2.

***Kasten 10:** Aufgabe Zahlenrätsel der Klassenarbeit. Die Mehrheit der Schüler geben keinen „vereinfachten“ Ergebnisterm an und missachten die Vorzeichenregeln.*

In dieser Unterrichtssequenz wurden bisher die Anweisungen eines Zahlenrätsel immer direkt (meist in vorgegebenen Tabellen) als Operationen einzeln durchgeführt

$$x \overset{-2}{\rightarrow} x - 2 \overset{\cdot 4}{\rightarrow} 4x - 8 \overset{+6}{\rightarrow} 4x - 2 \overset{:2}{\rightarrow} 2x - 1,$$

um „als der Zauberer“ mit dem Ergebnisterm die gedachte Zahl in „Sekundenschnelle“ erraten zu können. Die Ergebnisse der einzelnen Operationen wurden dabei immer in auf Arbeitsblättern vorgegebene Zellen notiert (Spalte Term 1 in Abb. 42).

Text	Term1	Term2
Denk dir eine Zahl.	x	x
Subtrahiere 2	$x - 2$	$x - 2$
Vervierfache	$4 \cdot x - 8$	$4 \cdot (x - 2)$
Addiere 6	$4 \cdot x - 2$	$4 \cdot (x - 2) + 6$
Teile durch 2	$2 \cdot x - 1$	$(4 \cdot (x - 2) + 6):2$

Abb. 42*: Text und Term.*
Spalte Term1: Direktes, bislang stets so durchgeführtes, schrittweises Ausführen des Textes bis zum Ergebnisterm $2x - 1$.
Spalte Term2: Die von der Mehrheit der Schüler in der Klassenarbeit gewählte ‚lange Version‘.

Jetzt reagieren die Schüler auf die Aufgabe *„einen Term anzugeben, der am Ende des Rätsels steht“*, ganz unterschiedlich. Nur 4 der Schüler geben den Ergebnisterm $2x - 1$ an. 3 Schüler geben gar keinen Term an. 13 Schüler übersetzen die Anweisungen in Aufgabe 3a) in einen Term, ohne dabei die Operationen einzeln durchzuführen, wobei nur 3 sich dabei an die richtigen Konventionen der Klammersetzung halten und den korrekten Term $\big((x - 2) \cdot 4 + 6\big): 2$ angeben.

Der Rest hält sich nicht an die Konventionen, die überwiegende Mehrheit davon (5 Schüler) verwendeten gar keine Klammern: $x - 2 \cdot 4 + 6: 2$ (Abb. 43 zeigt die Konventionsverletzungen).

$x - 2 \cdot 4 + 6: 2;$
$x(-2) \cdot 4 + 6: 2$
$4 \cdot (x - 2) + 6: 2$
$(x - 2)(\cdot 4 + 6): 2$

Abb. 43: *Falsche Klammersetzungen.*

Die drei Schüler, die den Term $2x - 1$ angeben, lösen alle die Teilaufgabe b) durch Rückwärtsrechnen der Gleichungen $2x - 1 = 13\ (-1)$ korrekt, kein einziger nutze dabei die Methode Äquivalenzumformen.
17 Schüler kehrten die Einzelanweisungen des Zahlenrätsels um, wobei sich dann aber oft arithmetische Fehler einschlichen (10 Schüler fanden so für das Ergebnis 13 die korrekte gedachte Zahl, 7 Schüler für das Ergebnis -1). Aus Schülersicht sind hier die Klammerkonventionen ja auch überflüssig: Wenn ich $x - 2 \cdot 4 + 6: 2$ von links nach rechts ausführe, was ich beim Eintippen in den Taschenrechner ja auch so mache, kommt ja auch die richtige Zahl heraus! In diesem Lichte scheint die korrekte Notation $\big((x - 2) \cdot 4 + 6\big): 2$ überflüssig und sperrig.
Selbst die Schüler, die einen falschen oder gar keinen Term angegeben hatten, kehrten die Einzeloperationen des Textes korrekt um (wenn sich einige dabei auch verrechnen). Findet man die gedachte Zahl durch Umkehrung der im Text angegebenen Operationen, ist das Aufstellen eines Ergebnisterms (und erst recht der eines den Klammernkonventionen folgenden Terms) ja tatsächlich auch überflüssig[69].

[69] Euler hält übrigens die Klammersymbole vollständig aus der Arithmetik, seiner *Rechenkunst (*Euler 1738), heraus und benutzt Klammern erst in seiner *Vollständigen Anleitung zur Algebra,* um anzuzeigen, wie bestimmte Terme strukturell miteinander verknüpft sind: „Also wann diese Formeln $a + b + c$ und $d + e + f$ zusammen addirt werden sollen, so wird die Summa also angezeigt $(a + b + c) + (d + e + f\,)$ … Solcher gestalt wird die Addition ***nur angedeutet nicht aber vollzogen*** … um dieselbe zu vollziehen man nur nöthig habe die Klammern wegzulaßen: dann da ***die Zahl*** $d + e + f$ zur ersten addirt werden soll, so geschieht solches wann man erstlich $+d$ hernach $+e$ und endlich $+f$ hinzuschreibt, da dann die Summa seyn wird: $a + b + c + d + e + f$.“ (Euler 1770, S. 92, hervorgehoben vom Autor). Hier offenbart sich m. E. eine völlig andere Sichtweise auf Klammern. Sie erfüllen den Zweck der Darstellung einer Struktur und nicht den von Vorfahrtszeichen für Rechenanweisungen. Und will man mit den so nur ***angedeuteten*** Formeln wirklich rechnen, so gibt es dazu – aus der „Rechenkunst“ folgende – Regeln, wie man die Klammern weglassen kann. So erspart man sich den kognitiven Konflikt beim Übergang von der Arithmetik zur Algebra, dass, das was in der Klammer steht, ja

In jedem Falle sollte man die Möglichkeiten erblicken, die sich aus diesen Fehlern für die Diskursentwicklung ergeben. Die Äquivalenz $\left((x-2)\cdot 4+6\right): 2=2x-1$ kann nämlich das Tor zum Termumformen aufstoßen, wenn man sich fragt, wie es möglich sein kann, dass die Terme $2x-1$ und $\left((x-2)\cdot 4+6\right): 2$ für alle gedachten Zahlen die gleichen Ergebnisse liefern? Man beachte, dass alle zum Vereinfachen von $\left((x-2)\cdot 4+6\right): 2$ notwendigen Schritte in Abb. 36 schon einzeln ausgeführt worden sind.
Tatsächlich ist es in der ersten Durchführung dieser Reihe zufällig passiert, dass Schüler schon ganz am Anfang die ‚lange Version' des Ergebnisterms aufstellten, da eine Referendarin in einzelne Partnerarbeitsgruppen hinein den Schülern erklärte, dass z. B. $\left((x-2)\cdot 4+6\right): 2$ und nicht $2x-1$ der „richtige Term" wäre. Dies geschehen, wurde mitgeteilt, dass tasächlich beide Terme das Zahlenrätsel richtig beschreiben und es wurde ein Preis ausgelobt für diejenigen, die zuhause zeigen können, dass beide Terme tatsächlich stimmen. Einzelne Schüler beschäftigten sich tatsächlich damit, argumentierten aber alle durch Einsetzen von Zahlen. Auf die Idee „mit den Termen zu rechnen" kam hier keiner der Schüler. Ein weiterer Hinweis darauf, dass die Vorstellung „mit Termen zu rechnen" den Schülern von sich aus fremd ist!
Jedenfalls eröffnen die ‚beiden Versionen' des Endterms eines Zahlenrätsels eine Möglichkeit des Übergangs zum Termumformen. Der in allen Durchführungen tatsächlich situativ eingeschlagene zentrale Weg von den Gleichungen zu den Termumformungen hat sich aber aus den Sachkontexten heraus entwickelt (dazu unten mehr).

Aufgabe 4 (lineare Gleichungen)

Für die Gleichungen (1)-(3) wurden folgende Lösungen gefunden.

$x=\frac{1}{3}$, $x=\frac{1}{5}$, $x=3$

$x=-3$, $x=-2$

(1) $10x+2=8x+8$

(2) $4x+8=-2x-4$

(3) $10x+1=15x$

a) Welche Gleichung gehört zu welcher Lösung? Begründe.

Zwei Lösungen sind übriggeblieben!

b) Wähle eine der übriggebliebenen Lösungen und stelle eine Gleichung dazu auf. Überprüfe durch eine Probe, ob deine gewählte Lösung tatsächlich eine Lösung deiner Gleichung ist..

Kasten 11: *Aufgabe Lineare Gleichungen der Klassenarbeit. Die Schüler lösen auf drei unterschiedliche Arten (Äquivalenzumformen, Einsetzen und verbal-logisch).*

Die Aufgabenstellung der zweiten Aufgabe (Kasten 11) ist für die Schüler sehr ungewohnt. Bislang wurden nur vorgegebene oder selbst konstruierte Gleichungen gelöst und durch Proben überprüft. Die Aufforderung einer Zuweisung von Lösungen zu Gleichungen kennen die Schüler in diesem Kontext noch nicht. Während der Klassenarbeit wurde mündlich mitgeteilt, dass auch eine Rechnung als Begründung gilt. Die Schülerlösungen lassen sich in drei Kategorien einteilen: Äquivalenzumformen (57%, davon 88% richtig), Einsetzen der ‚Lösungen' (27%, davon 50% richtig) und verbal-logische Zuordnungen (17%, davon 50% richtig). Letztere (Abb.

immer zuerst ausgerechnet werden muss, jetzt, z. B. bei $3\cdot(x+4)$, aber nicht mehr zuerst ausgerechnet werden kann.

38) wurden nie im Unterricht kolportiert, erinnern teilweise an die rhetorische Algebra und stellen auch echte Auseinandersetzungen mit der Frage dar.

	ÄU		Einsetzen		verbal-logisch	
	richtig	falsch	richtig	falsch	richtig	falsch
$10x + 2 = 8x + 8$	60%	0	15%	5%	20%	0%
$4x + 8 = -2x - 4$	50%	10%	5%	15%	10%	10%
$10x + 1 = 15x$	40%	10%	15%	15%	15%	5%

***Tabelle 15**: Lösungsvarianten von Aufgabe 4 der Klassenarbeit.*

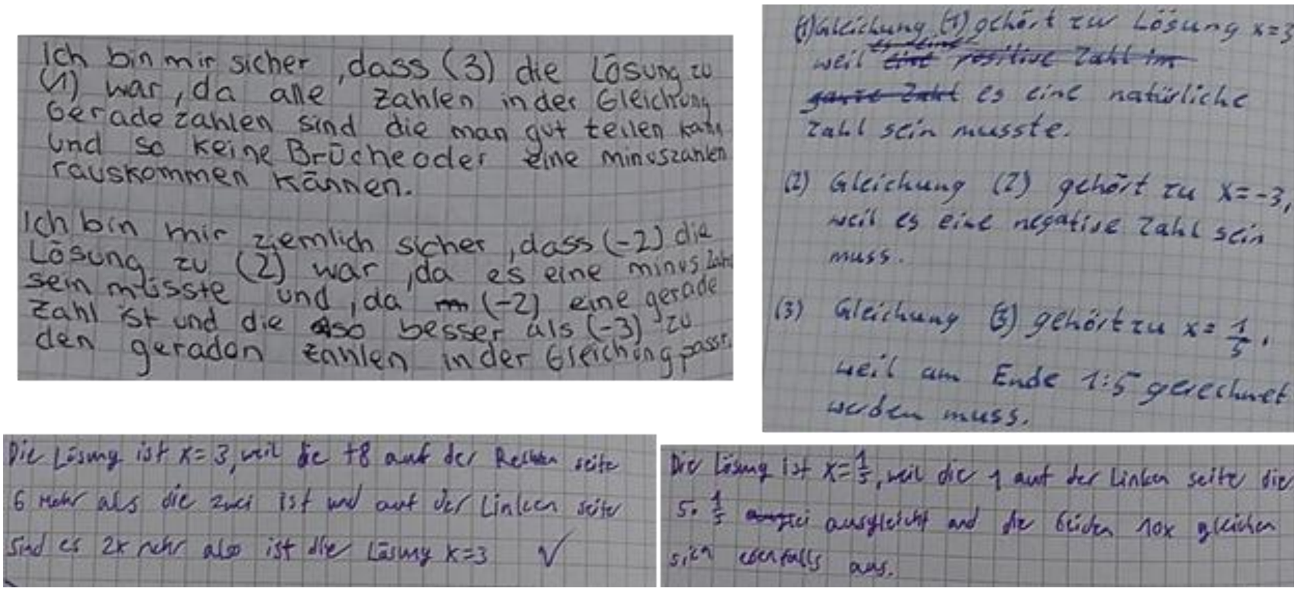


***Abb. 44:** Verbal-logische („rhetorische“) Zuordnungen von Lösung und Gleichung.*

5 Lösungsmengen linearer Gleichungen

Als Abschluss des Themas „Lösungsverfahren linearer Gleichungen“ werden nun im Plenum die Sonderfälle keine und unendlich viele Lösungen besprochen. Dabei wird wieder auf die Bedeutungsebene der Boxendarstellung und ganz früh aufgestellten Aufgaben (Boxengleichungen L und M von KdB II, Anhang E) zurückgegriffen. Da zum Einen die Überlegungen zur Mächtigkeit der Lösungsmengen einen gewissen Abschluss des Themas darstellen und die Zahlenebene nochmals in den Vordergrund tritt und zum Anderen es sich im späteren Diskursverlauf noch zeigen wird, dass der Fall $L = \mathbb{Q}$ eine Brücke zum Termumformen schlagen kann, wird das Plenumsgespräch hier in Teilen wiedergegeben

$$***$$

Episode 8 – Wie das Boxenmodell bei $L = \mathbb{Q}$ und $L = \{\ \}$ hilft

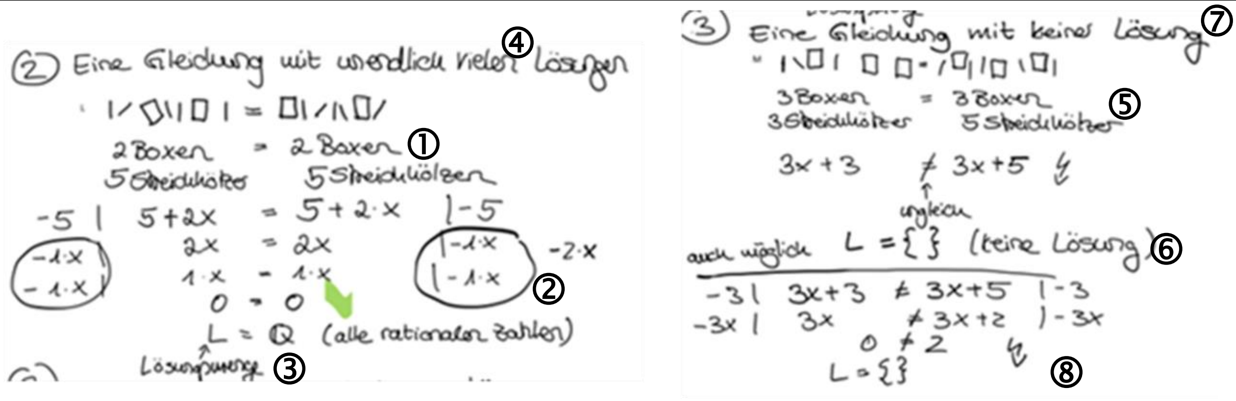


***Abb. 45**: (IPad-)Tafelbild zu $L = \mathbb{Q}$ und $L = \{\ \}$.*

Frau Müller (FM) projiziert die Boxengleichung  an die Wand.

01 FM: *Wenn ich das mit Hölzchen und Boxen so vor mir liegen hab‘, was würdet ihr als erstes tun?*

02 Smilla: *Das in formal umschreiben?* ____

03 Karl: *Gucken, wie viele Hölzchen und Kästchen auf den Seiten sind.*

04 FM: *Ja genau. Das schreiben wir jetzt auf. Wie viel Boxen und Hölzchen sind links und wie viele rechts?*

05 Hirat: *Auf beiden Seiten sind 2 Boxen und auf beiden Seiten sind noch 5 Streichhölzer* [FM schreibt „2 Boxen, 5 Streichhölzer“ = „2 Boxen, 5 Streichhölzer“ an die Tafeln (meint.: via IPad auf die Projektionsfläche) (①)]

06 FM: ____ *Fällt euch jetzt was auf, was ihr dazu sagen würdet?*

07 Max: *Auf beiden Seiten ist dieselbe Anzahl an Boxen und Streichhölzern?*

08 FM: *Ja, genau! Und mein Ziel bei diesem Spiel war ja immer ....?* ___ *Ich sags nicht, sondern ihr! Was ist unser Ziel, immer herauszufinden?*

09 Emilia: *Wir wollen herausfinden, wie viele Streichhölzer in einer Box sind.*

10 FM: *Genau, und wenn ich jetzt ´was dazu sagen muss, wie viele Streichhölzer könnten jetzt in einer Box liegen?*

11 Berkay: *Es ist eigentlich egal, weil auf beiden Seiten immer das Gleiche herauskommt.*

Zur Überprüfung von Berkays Aussage wählen die Schüler zwei beliebige Zahlen (100 und 13) als Boxeninhalt aus und stellen fest, dass tatsächlich auf beiden Seiten die gleiche Anzahl Hölzchen liegt

12 FM: *Müssen wir jetzt noch weiter überprüfen, oder was sagt ihr jetzt zu Berkays Aussage?*

13 Max: *Ich sage, Berkay hat recht!* ____ *Weil,* [längere Pause], *gleichviele Streichhölzer auf jeder Seite sind und wenn die dann plus die gedachte Zahl dann äh addiert, dann hat man auf jeder Seite immer gleichviel.*

14 Justus: *Es ist egal, was in den Boxen ist. Also wenn alles das Gleiche ist, könnten da … 7 drin sein, aber es könnten auch zwei, oder, also es ist egal, welche Menge da drin ist, wenn bei allen das Gleiche drin ist, was ja sein muss, dann ist das Ergebnis auch gleich.*

15 FM: *Genau. Kann dann das jemand anders noch auf seine Weise formulieren, wie ihr draufkommt, dass es egal ist.*

16 Manar: *Also, das ist eigentlich egal, wie viele da drin sind, weil es ähh sind ja immer gleich viele … äh, wenn man das formal aufschreibt, ist das halt auch so, dass das immer gleich ist* [wird immer leiser] *… ich kann das nicht erklären*

17 FM: *Vielleicht kannst du es ja erklären, wenn wir es mal formal hinschreiben.*

Indem hier wieder auf die Boxenebene zurückgegriffen wird, wird, ohne vorher einen Lösungsalgorithmus zu aktivieren, versucht, anschaulich werden zu lassen, dass jede Zahl Lösung ist[70]. Der Übergang zur formalen Behandlung beginnt mit dem Hinweis, dass man es dann vielleicht besser erklären kann.
Daraufhin entsteht mit Hilfe der Schüler die Gleichung $5 + 2 \cdot x = 5 + 2 \cdot x$. Würde man die Bedeutungsebene aktivieren, wäre schon alles klar: Die Zahl rechts und links der Gleichung ist für jedes x immer gleich $5 + 2 \cdot x$.
Die Schüler reagieren aber direkt und wie automatisiert mit der algorithmischen Lösungsroutine, weshalb diese auch an der Tafel durchgeführt wird. So entsteht hintereinander über die Operationen „$| - 5$“, „$| - 1 \cdot x$“ und „$| - 1 \cdot x$ “ die Gleichung „$0 = 0$“ (②).

18 FM: *Und ist die Gleichung „0=0“ richtig?*

19 Victoria: *Es ist ja auf beiden Gleichungen das Gleiche, also ja!*

20 FM. *Genau. ___ Es ist keine wahnsinns-komplizierte Gleichung, aber es ist eine richtige Gleichung! ___ Manar, du wolltest ja mit der formalen Schreibweise rechnen, kannst du jetzt besser erklären, warum Berkay recht hat?*

22 Manar: *Ja, also ich sag dann mal, also egal wie viel man, also wenn man das halt so abzieht, dann kommt halt immer auf beiden Seiten dasselbe raus.*

23 Victoria: *Also, wenn man ja, also wir machen bei Gleichungen immer ja auf beiden Seiten das Gleiche und wenn z. B. auf beiden Seiten immer das Gleiche dazurechnet, wird auf beiden Seiten auch immer das Gleiche bleiben. Also kann man auch alles einsetzen.*

Frau Müller führt jetzt als Kurzform für den Satz „Ich kann alle rationalen Zahlen einsetzen“ die Schreibweise $L = \mathbb{Q}$ ein (③, ④).

Als nächstes wird die unlösbare Gleichung [illegible] aufgelegt und die Schüler gefragt, was sie ohne formales Umformen zu deren Lösung sagen können.

[70] Folgende Vorgehensweise von Schülern habe ich hier schon erlebt. Auf Gleichungen mit unendlichen vielen Lösungen, z. B. $x + x + 3 = 1 + 2x + 2$, wird direkt mit äquivalentem Umformen reagiert und nachdem die Schüler z. B. so bei $3 = 3$ angekommen sind, folgern Sie: *„Es gibt kein x mehr, also kann man diese Gleichung nicht lösen!“*

24 Kira: *Ich würde sagen, das geht nicht, weil man hat immer auf der rechten Seite 2 Streichhölzer mehr. Egal was man macht.*

25 Jakob: *Also es geht nicht auf, weil es sind auf beiden Seiten 3 Boxen und auf der anderen Seite sind mehr Streichhölzer als auf der anderen, also es geht nur auf quasi, wenn dann links mehr Boxen sind als rechts.*

26 Pia: *Also wenn ich da drei x wegnehme auf beiden Seiten, dann geht das nicht, weil da ja dann 3 und 5 Streichhölzer stehn.*

27 Jakob: *Dann ist das nämlich nicht dasselbe auf der rechten und der linken Seite und dann kann man da kein Gleichheitszeichen machen.*

Man sieht m. E. an den vorhergehenden und insbesondere an den letzten Äußerungen (24-27) sehr schön, wie das Modell „Knack-die-Box" genutzt werden kann, um auf der Inhaltsebene die Lösung zu verstehen. Ganz nebenbei kann man auch erkennen, wie hier schon in den Regeln des Spiels dem schon angesprochenen Verstoß gegen den Verweisungscharakter der Variablen entgegengewirkt wird (14: *„..wenn bei allen das Gleiche drin ist, was ja sein muss…").*

Danach wird die formale Gleichung $3x + 4 = 3x + 5$ notiert und thematisiert, dass man dieser schon ansehen kann, dass es keine Zahl x gibt, für die die Zahl $3x + 4$ gleich der Zahl $3x + 5$ ist ($L = \{\,\}$). Die Schreibweise $L = \{\}$ wird eingeführt (⑥, ⑦) und zuletzt wird gemeinsam an der Tafel die Gleichung $3 \cdot x + 3 = 3 \cdot x + 5$ durch „$| - 3x$" zu „$0 = 3$" umgeformt (⑧) und thematisiert, wie auch diese letzte Gleichung „$0 = 3$" zu $L = \{\,\}$ interpretiert werden kann.

***

6 Lineare Gleichungen und Sachkontexte

Jetzt erst geht es um Algebraisierungen von Sachkontexten mit Gleichungen. Frau Müller stellt von Anfang an ganz explizit klar, dass die Variablen bislang ja immer für (reine) Zahlen (Anzahl der Hölzchen, gedachte Zahl oder einfach nur unbekannte Zahlen) standen, es musste also immer eine direkte Referenz *Variable → Zahl* gedacht werden. Jetzt bekommen diese Zahlen noch eine kontextuelle Bedeutung zugeschrieben (als Anzahlen bzw. Größen im jeweiligen Sachkontext). Die ursprüngliche Referenz wird also um eine weitere erweitert: *Variable → Zahl → (Sach-)Bedeutung*. Mit Hilfe solcher Bedeutungszuweisungen werden erste einfache Sachzusammenhänge in lineare Gleichungen übersetzt. Anfangs wird dabei noch vorgegeben, welche der gegebenen Zahlen (bzw. Größen) durch die Variable repräsentiert werden soll, nach und nach müssen dies die Schüler selbst entscheiden (siehe Anhang H).

Schwerpunkt ist nun der Aufbau eines systematischen Verfahrens zum Aufstellen einer Gleichung aus einem Sachkontext heraus. Dieses Verfahren beginnt mit dem verschriftlichten Festlegen der Variablen (Unbekannten) und endet mit einer (Problem-)Probe am Sachkontext. Beim Aufstellen von Gleichungen verstoßen manche Schüler auch hier anfangs noch gegen den Verweisungscharakter (*Bedeutungskonstanz*) der Variable, so dass im gleichen Kontext eine Variable gleichen Namens nicht notwendigerweise für die gleiche Zahl steht.

Die Aufgabe „*Monika ist 3 mal so alt wie ihre Mutter und zusammen sind sie 60 Jahre alt*" wird dann in $x + x = 60$ statt $x + 3x = 60$ übersetzt. Einige Schüler sehen hier keinen Widerspruch und können auch angeben, dass Monika 15 und ihre Mutter 45 Jahre alt ist, geben teilweise als Lösung sogar $x = 15$ und $x = 45$ an, benutzen dafür aber gar nicht die aufgestellte Gleichung. Das algebraische Lösen von Gleichungen entfaltet ja auch erst seine Wirkmächtigkeit, wenn das relationale Beziehungsgefüge komplex genug wird und dann macht es u. a. eben die Konvention der Bedeutungskonstanz möglich, dass dieses komplexe Gefüge überschaubar bleibt.
Solche Verletzungen der Bedeutungskonstanz müssen und können im Plenum schnell geklärt werden. Hier wird das in einem Rückbezug auf die Knack-die-Box-Spielregeln geklärt: Die Hölzchenanzahlen x in einer jeden Box mussten ja gleich sein und „*wenn also ein x für eine Zahl steht, dann muss ein x, dass an einer anderen Stelle steht, für dieselbe Zahl stehen*".

Beim Aufstellen der Gleichungen wurde die im Pretest noch so dominante Fehlvorstellung eines Verstoßes gegen die *Objekt-Zahl-Konvention* fast gar nicht mehr beobachtet. Dies könnte daran liegen, dass die Variablen ja lange genug immer für Zahlen standen, also in jedem Falle Zahlen bezeichnen und nicht irgendwelche anderweitigen Objekte. Die Frage der Lehrkraft „*Für was steht eigentlich das x*?", die man m. E. hier am Anfang der Algebra nicht oft genug stellen kann, wurde und wird auch hier immer zuerst mit „für eine Zahl!" oder „für Zahlen!" beantwortet[71].
Je komplexer die Sachsituationen werden, desto wahrscheinlicher wird es, dass die Schüler nun auf Notwendigkeiten des Termumformens stoßen, wenn z. B. ihre aufgestellte Gleichung Teilterme enthält, die die Anwendung des Distributivgesetzes nahelegen. Lässt man die Schüler selbst bestimmen, für welche Zahl (bzw. Größe) die Unbekannte steht, so entstehen schon bei etwas komplexeren Aufgaben mit einer hohen Wahrscheinlichkeit unterschiedliche Gleichungen zu ein und demselben Sachkontext, was das Tor zum weiteren Termumformen aufstoßen kann. Dies kann man z. B. anhand der folgenden Beispielaufgabe sehen:

Die drei großen Ozeane (Pazifik, Atlantik und Indischer Ozean) haben zusammen eine Wasseroberfläche von ca. 330 Mio. km^2. Der Indische Ozean ist um 10 Mio. Quadratkilometer kleiner als der Atlantik und der Pazifik ist doppelt so groß wie der Atlantik.

In der obenstehende Aufgabe erhält man, je nachdem, ob mit x die Fläche des Atlantiks, des Pazifiks oder des Indischen Ozeans bezeichnet wird, die Gleichungen $x + x - 10 + x \cdot 2 = 330$, $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{2} - 10 = 330$ oder $x + x - 10 + 2 \cdot (x - 10) = 330$. Um die letzte Gleichung zu lösen, benötigt man schon das Distributivgesetz.

6 Aus einem Sachkontext heraus zu den Rechengesetzen für Zahlen

Aufteilung eines Lottogewinns.
Xaver, Patty und Anton haben 350 € im Lotto gewonnen. Aufgrund einer vorherigen Abmachung erhält Patty 50 € weiniger als Xaver und Anton dreimal so viel wie Patty.

[71] Ganz im Gegensatz übrigens zur Musterreihe, wo die Frage „Wofür steht eigentlich das x? über einen langen Zeitraum oft mit „Der Nummer der Figur" beantwortet wird.

Im Diskursverlauf werden nun zwei unterschiedliche Algebraisierungen einer Verteilaufgabe zum Anlass genommen das Distributivgesetz einzuführen. Dazu wird in Präsenz die obenstehende Sachaufgabe „Aufteilung eines Lottogewinns“ bearbeitet und besprochen.

***

Episode 9 – Von unterschiedlichen Setzungen der Variablen im Sachkontext zum Distributivgesetz

Die Schüler bearbeiten die Aufgabe „Aufteilung eines Lottogewinns“ einzeln und stellen Gleichungen nach dem eingeübten Verfahren auf. Je nachdem, ob für die Schüler die Variable das Geld von Xaver oder Patty beschreibt, entstehen inhaltlich die Gleichungen $x + x - 50 + (x - 50) \cdot 3 = 350$ oder $x + x + 50 + x \cdot 3 = 350$, wenn auch mitunter nicht ohne Konventionsverletzungen in der Schreibweise.

Diese beiden Gleichungen greift Frau Müller nun im Klassengespräch auf, wobei nach und nach das folgende Tafelbild (Abb. 46) entsteht. Frau Müller greift ganz zu Anfang auf, dass die Variable bei unterschiedliche Schülern unterschiedliches bezeichnet, einmal das „Geld von Xaver“ und einmal das „Geld von Patty“, um später damit zum Termumformen überleiten zu können.

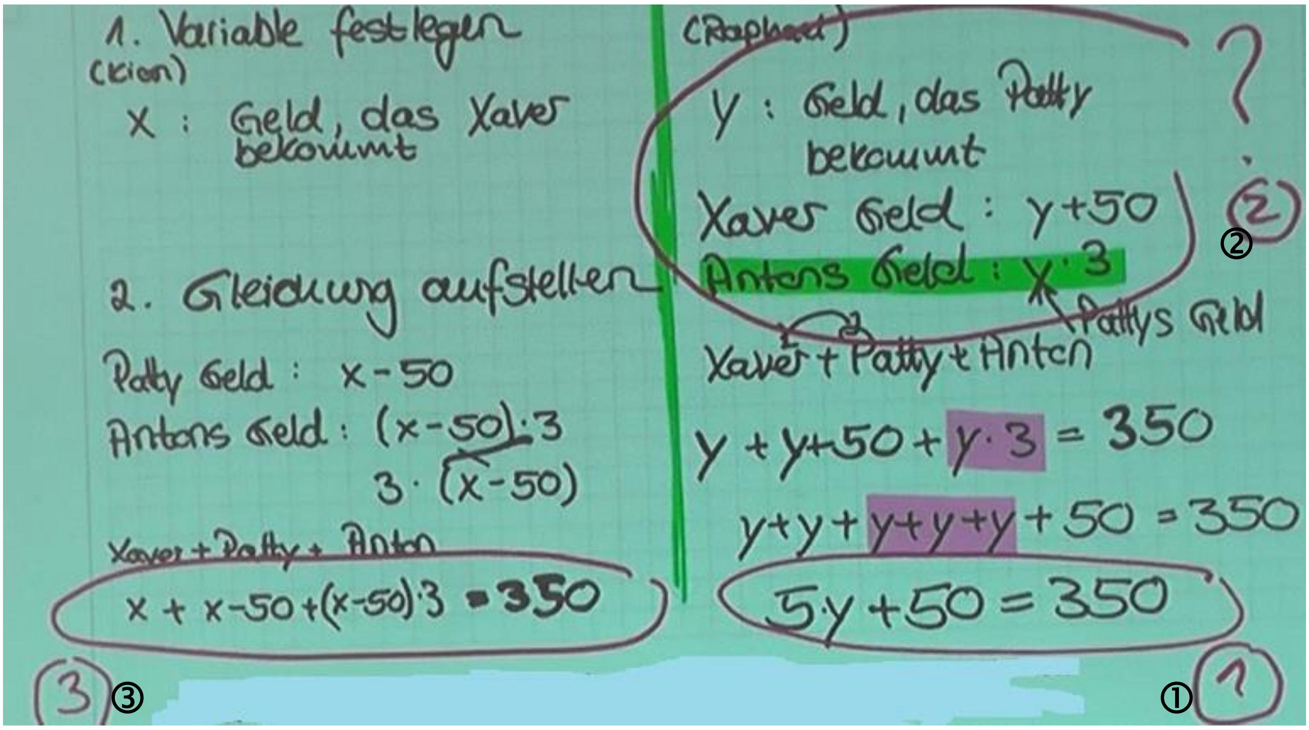


Abb. 46: *Tafelbild – Von den Sachkontexten zum Termumformen*

01 FM : *So, das Aufstellen einer Gleichung machen wir jetzt nochmal alle einmal gemeinsam. Als erstes müssen wir die Variable festlegen. Was habt ihr gesagt ist x?*

02 Kian: *Das Geld, das Xaver bekommt.* [FM schreibt „x: Geld das Xaver bekommt“ an die Tafel (①)]

03 FM: *Gibt es jemand, der was anderes für x hatte?*

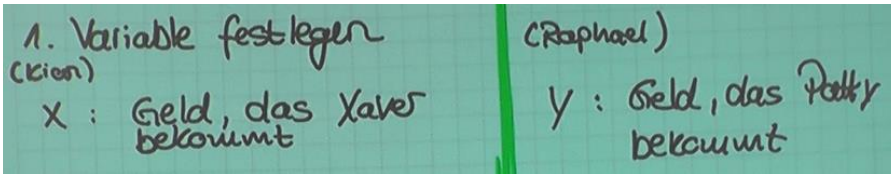
04 Raphael: *Geld, das Patty bekommt.*

05 FM: *Ok, wir gucken uns gleich beides an. Wenn ich jetzt aber wieder x hinschreibe* [schreibt „x: Geld das Patty bekommt“ an die Tafel]. *Was stört uns dann?* ____

06 Ina: *Also man kann nicht x für beide Zahlen nehmen. Also wenn jetzt z. B. Xaver 10 Euro bekommt und Patty 20, dann macht das ja keinen Sinn mehr.*

07 FM. *Genau, wir ham' ja gelernt, dass x für eine unbekannte Zahl steht. Aber wenn ich einmal ein x gewählt habe, dann steht jedes x für die gleiche Zahl ____ also hier waren das ja auch unterschiedliche Kinder, Kian hat das mit seinem x und Raphael mit seinem x gerechnet, ja dann geht das. Nur wenn ich das gleichzeitig an der Tafel hab, dann find ich das blöd und dann haben wir letztes Mal gesagt, was könnt' ich dann machen?*

08 Berkay: *Dann nehmen wir halt y.*



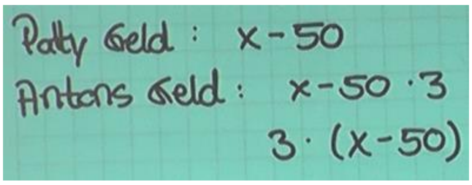
Frau Müller korrigiert an der Tafel und ersetzt rechts x durch y (②). Es wird in der Klasse umgewälzt, dass es so vorkommen kann, dass zwei Leute zur gleichen Aufgabe unterschiedliche Gleichungen aufstellen und auch unterschiedliche Lösungen für x erhalten und dass sie ihre Lösungen nicht einfach durch Vergleichen ihrer „x'en“ vergleichen können.

Bis hierhin wird also herausgestellt, dass unterschiedliche Festlegungen der Variablen auch zu unterschiedlichen, nicht so ohne weiteres vergleichbaren Lösungen führen und dass man hier, wo ja zwei solche unterschiedliche Festlegungen am gleichen Ort beschrieben werden, den Verweisungscharakter zuliebe, doch lieber verschiedene Variablennamen benutzen sollte.

09 Max: *Also ich hatte bei der Ozeanaufgabe zuerst den Atlantik genommen und dann hab ich es auch für x mit dem indischen Ozean probiert.*

Nachdem nochmals geklärt wurde, dass gleiche Sachkontexte durchaus auf unterschiedliche Gleichungen führen können, die aber inhaltlich zu denselben Lösungen führen, geht es nun an das gemeinsame Aufstellen der Gleichungen. Zuerst Kians Gleichung:

10 Manar: *Also Patty hat x minus 50 Euro___und Anton x minus 50 mal 3* [FM schreibt $x - 50$ und $x - 50 \cdot 3$ an die Tafel]



11 FM: *Hab ich das richtig aufgeschrieben?*

12 Manar: *Ja.*

13 FM: *Was sagen die Andern?*

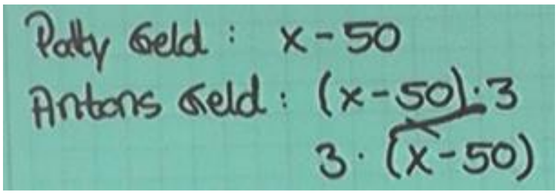
14 Ina: *Also, ich hab bei Anton geschrieben: 3 mal Klammer auf, x minus 50, Klammer zu* [FM schreibt unter $x - 50 \cdot 3$ den Term $3 \cdot (x - 50)$]

15 FM: ____ *Das was Manar gesagt hat, war ja jetzt nicht ganz falsch. Wie kann ich denn das von Manar rechnen, quasi?*

16 Mila: *Also ich hab aufgeschrieben: Klammer auf, x minus 50, Klammer zu, mal 3* [FM setzt um Manars Term die Klammern: $(x-50)\cdot 3$ (③)]

17 FM: *Genau, das hat Manar ja auch gemeint. Das ist ja immer das Schwierige, wenn ich was meine, aber es nicht so aufschreibe, wie ich es meine. Wenn ich jetzt die Klammern hier nicht aufschreibe, so wie Manar, was müsste ich dann rechnen?*

Hier und in folgendem (15-19) weist Frau Müller also nochmals auf die Schreibkonventionen im Zusammenhang mit den Vorfahrtsregeln hin: Nur wenn ich mich daran halte, kann ich sicher gehen, dass ich mit meinen aufgeschriebenen Term auch das abbilde und kommunizieren kann, was ich auch meine.



18 Linda: *Punkt vor Strich. Also 3 mal 50 zuerst.*

19 FM: *Genau, aber das will ich ja nicht, ich will ja erst das Geld von Patty ausrechnen und das dann mal 3 und wenn ich das so machen will, dann muss ich Klammern setzen. Und jetzt haben wir da ja zwei verschiedene Dinge* [zeigt auf die beiden Terme $(x-50)\cdot 3$ und $3\cdot(x-50)$] *und ist das jetzt beides richtig?*

20 Hirat: *Ja.*

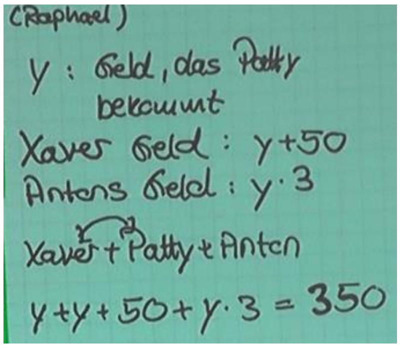
21 FM: *Und warum?*

22 Hirat: *Weil, ähhh, wegen dem Distri… ähhh, wegen dem Kommutativgesetz, weil es egal ist, wenn man mal oder plus rechnet, wenn man die Stellen andersherum nimmt.*

23 FM: *Genau. Das brauchen wir gleich wieder. Also man darf, du sagtest Stellen, du meinst aber Faktoren und die darf ich vertauschen beim Malrechnen.*

Hier nutzt Frau Müller (19-23) die Gelegenheit auf das Anwenden des Kommutativgesetzes im Zusammenhang mit Termen hinzuweisen.

Jetzt werden gemeinsam die Einzelterme zu einer Gleichung zusammengefasst: $x+x-50+(x-50)\cdot 3=350$.

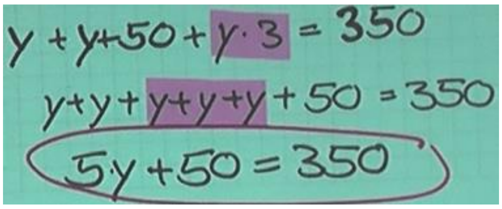


Danach soll die (einfachere) Gleichung aufgestellt werden, die entsteht, wenn y Pattys Geld bezeichnet. Relativ schnell ensteht die Gleichung $y+y+50+y\cdot 3=350$ und gemeinsam wird der Lösungsweg begonnen. Die Schüler versuchen, die linke Seite zu vereinfachen. Frau Müller lenkt dabei dahingehend, dass sämtliche, auch implizit „im Kopf" durchgeführte Umformungen explizit gemacht und durch Rechengesetze gerechtfertigt werden:

24 Lisa: *Das ist 5 mal y plus 50 gleich 350?*
[FM schreibt $5\cdot y+50=350$ an die Tafel]

25 FM: *Und wenn ich das nicht direkt sehe, wie kann ich mir den Term umschreiben, dass ich das direkt sehe, dass das 5 mal y plus 50 ist?*

26 Victoria: *Also, man kann schreiben y+y+y+y+y ___ plus 50 … gleich 350* [FM schreibt zwischen $y + y + 50 + y \cdot 3 = 350$ und $5 \cdot y + 50 = 350$ die Gleichung $y + y + y + y + y + 50 = 350$]



27 FM: *Was hat Victoria hier gemacht?*

28 Linda: *Also das y mal 3 hat sie halt drei y für hin geschrieben … also y mal 3.*

29 FM: *Genau!* [markiert $y \cdot 3$ und $y + y + y$] ___ *Und dann hat sie ja noch ´was in der Reihenfolge gemacht.*

30 Karl: *Sie hat die 50 ans Ende gesetzt.*

31 FM: *Darf sie das eigentlich? Wenn wir Plusrechnen, da einfach etwas ans Ende setzen was vorher in der Mitte stand?*

32 Berkay: *Ja, weil sie das Kommutativgesetz angewendet hat.*

Das Zusammenfassen algebraischer Summen wurden schon mehrfach im Zusammenhang mit Gleichungen ohne Klammerterme durchgeführt. Trotzdem konnten hier am Beispiel des Terms $y + y + 50 + y \cdot 3$ nochmals das Zusammenfassen von reinen Variablentermen ($y + y + 50 + y \cdot 3$) und die Kommutativgesetze explizit gemacht werden.
Die Schüler bekommen nun die Arbeitsauftrag, zuerst die Gleichung $5 \cdot y + 50 = 350$ zu lösen (①), um damit zu beantworten, wie viel Geld Patty, Xaver und Anton bekommen (②). Danach sollen sie versuchen, die Gleichung $x + x - 50 + (x - 50) \cdot 3 = 350$ zu lösen und gucken, ob diese Lösung zur gleichen Geldverteilung führt (③).
Mit diesen Aufträgen gehen die Schüler in eine Einzelarbeitsphase (18 min). Die allermeisten Schüler erhalten $y = 60$ für die erste Gleichung. Beim Versuch, die zweite Gleichung zu lösen, erhalten einige Schüler die korrekte Lösung $x = 110$ (die meisten davon, nachdem sie im Einzeldialog darauf hingewiesen wurden, die Klammer mit dem Distributivgesetz aufzulösen). Andere lassen bei $x + x - 50 + (x - 50) \cdot 3 = 350$ die Klammer einfach weg und erhalten $x = 50$ und wieder andere lassen bei $x + x - 50 + 3 \cdot (x - 50) = 350$ die Klammer einfach weg und kommen auf $x = 80$.

Die darauffolgende Plenumsphase beginnt damit, dass man sich einig ist, dass $y = 60$ die Lösung ist und so also Patty 60 €, Xaver 110 € und Anton 180 € erhalten. Nun beginnt Frau Müller damit, die falschen Lösungen zu thematisieren und stellt dazu erst einmal klar, welche genau die Richtige ist.

34 FM: *Also, wenn ich Kians Gleichung löse und kriege dann* $x = 80$ *raus. Was kann ich dann direkt sagen?* [schreibt x=80 an die Tafel]

35 Jakob: *Dass das nicht stimmt. Weil man vorher schon herausgefunden hat, dass Xaver 110 € bekommt.*

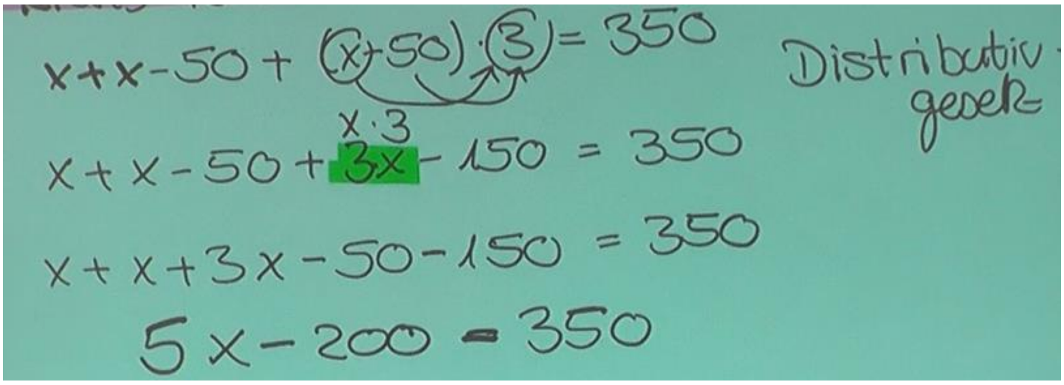
36 FM: *Genau. Denn das hier, was ich jetzt ausrechne ist ja nur Xavers Geld* [bepfeilt das x mit dem Text „Xavers Geld"] ____ *und es kann sein, dass ist jetzt bei dieser Aufgabe auch schwieriger und deswegen besprechen wir das jetzt, aber für die Kontrolle wusstet ihr vorher schon was bei Xaver rauskommt und wenn ihr da was anderes rausbekommt, wisst ihr schon: Ich hab falsch umgeformt!*

Jetzt löst Justus die Gleichung:

37 Justus: *Also ich hab das Distributivgesetz angewendet … also 3 mal x gerechnet, das sind ja dann 3 mal x und 3 mal minus 50, das sind ja dann minus 150* [FM schreibt $x + x - 50 + 3x - 150 = 350$ an die Tafel] ___ *Dann hab ich die 3 x plus die 2 einzelnen x gerechnet, dann hab ich 5x und dann hab ich die minus 50 plus minus 150 gerechnet, also 200, also minus 250* [FM schreibt $x + x + 3x - 50 - 150 = 350$ auf die Tafel]

38 FM: [schreibt daneben noch „Distributivgesetz" auf die Tafel und kommt sichtlich beim Mitschreiben nicht mehr mit] *So, was hast du dann noch gesagt?*

39 Justus: *Also dann habe ich das Ganze 5x minus 200* ___ *gleich 350* [FM schreibt $5x - 200 = 350$]



An dieser Stelle tritt also zum ersten Mal das Distributivgesetz auf den Plan. Es wird nicht verwendet, um eine Gleichwertigkeit nachzuweisen, sondern um der Gleichung $x + x + (x - 50) \cdot 3 = 350$ eine andere Gestalt zu geben, damit sie weiterverarbeitet werden kann.

40 FM: *Justus hat uns jetzt ein Zauberwörtchen genannt, an das wahrscheinlich einige dabei noch nicht gedacht haben: Das Distributivgesetz. Das ist nicht neu, dass habt ihr nur bisher immer nicht so gerne angewendet, oft mit der Begründung, warum soll ich das denn so machen, wenn ich doch auch zuerst ausrechnen kann, was in der Klammer steht, z.B bei sowas* [schreibt $(2 + 8) \cdot 7$] *da habt ihr immer gesagt, da kann ich doch auch zuerst das ausrechnen was in der Klammer steht und dann mal 7 rechnen, statt 2 mal 7 plus 8 mal 7…. Und da hab ich euch immer schon mal wieder angekündigt, wenn wir zu Termen mit x kommen, dann kann ich das einfach nicht zuerst ausrechnen und das ist genau jetzt der Zeitpunkt. Und jetzt hat Justus richtig gesagt, und deswegen hab ich es auch aufgeschrieben, dass das jetzt hier drei x wäre [markiert die 3x grün] aber eigentlich, wenn ich genau in der Reihenfolge rechnen würde, was denn hier steht, was müsste dann da eigentlich steh'n?* ___ *also, wenn ich hier rechnen würde in der Klammer* [zeigt auf en Pfeil in der ersten Zeile der x und 3 verbindet], *dann würde da ja eigentlich …. stehen?*

41 Jakob: *Drei x?*

42 FM: *Ja, wenn ich das im Kopf schon umdrehe, aber wenn ich das in der Klammer einfach nur mit dem rechne, was hinten in der Klammer steht?*

43 Karl: *x mal 3.*

44 FM: *Genau, da würde x mal 3 stehen* [schreibt $x \cdot 3$ über das markierte 3x] *und dann, kann ich das direkt umwandeln, das ist richtig, aber warum? Warum darf ich direkt sagen, wenn ich $x \cdot 3$ schreiben müsste, dann kann ich auch direkt 3 mal x schreiben?*

45 Berkay: *Weil man das Kommutativgesetz anwenden kann.*

In Zeile 40 spricht Frau Müller ein bekanntes Problem an, dass das Distributivgesetz angeht: Die Schüler haben zwar in der Arithmetik schon mehrmals vom Distributivgesetzt gehört (den Namen schon mehrmals ins Merkheft geschrieben), dessen Sinn aber oft nicht verstanden (obwohl einige im Kopf bei Rechnungen, wie $3 \cdot 298$, es selbst implizit anwenden). Man hat ja gelernt, dass man das, was in den Klammern steht, zuerst ausrechnet und was soll dann ein Gesetz, bei dem man das nicht so machen soll? Da scheint es offensichtlich auch nicht geholfen zu haben, dass man im Sinne eines geschickten Rechnens ein paar Beispiele der Art $3 \cdot 298$ oder $15 \cdot 105$ mit Hilfe des Distributivgesetzes „ausrechnet". Und weshalb überhaupt soll man z. B. $2 \cdot (7 + 8)$ umständlich als $2 \cdot 7$ plus $2 \cdot 8$ rechnen, statt gleich $2 \cdot 15$? Da muss man dann ankündigen, dass *„wenn wir zu Termen mit x kommen, dann kann ich das einfach nicht zuerst ausrechnen ..."*.

Insgesamt zeigt dieses Plemumsgespräch sehr schön, wie ausgehend von einfachen Termen der Übergang durch ein durch die Rechengesetze gerechtfertigtes Termumformen eingeleitet werden kann, indem man eine jede Umformungskette auf die elementarsten Schritte herunterbricht und einen jeden dieser Schritte durch Rechengesetze rechtfertigt. Mit fortschreitender Expertise wird man viele dieser elementaren Umformungsschritte im Kopf und mehr oder weniger simultan durchführen. Ziel ist jedoch, sämtliche Umformungsschritte im Prinzip durch Rechengesetze begründen zu können und eine (mitunter unbewusste) Unstimmigkeit zu erleben, wenn einem eine Regel fehlt.

$***$

In der Folge wird dann gemeinsam die vereinfachte Gleichung $5x - 200 = 350$ gelöst und die Ergebnisse mit der 1. Gleichung $5y + 50 = 350$ im Sachkontext verglichen und am Ende der Stunde das Distributivgesetz an der Tafel gesichert.

7 Der Begriff Gleichwertigkeit und die Rechengesetze der Zahlen

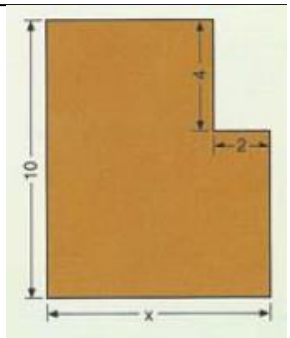
Die folgende Stunde bahnt nun den Begriff „Gleichwertigkeit von Termen" an. Gewappnet mit dem Distributivgesetz bearbeiten die Schüler die folgende Baustellenaufgabe, zunächst in Einzelarbeit.

$***$

Episode 10 – Gleichwertigkeit von Termen

Die Schüler erzielen relativ schnell begründete Bearbeitungen von Teil a) und b) in Kasten 12 und die arithmetischen Berechnungen beim Einsetzen von $x = 8$ werden an der Tafel fixiert. Ein Schüler meldet sich:

Grundfläche eines Bauplatzes



Die Schüler der Klasse 7f sollen einen Term $A(x)$ zur Berechnung der Grundfläche eines Bauplatzes angeben. Vier Kinder schreiben ihre Ergebnisse an die Tafel:

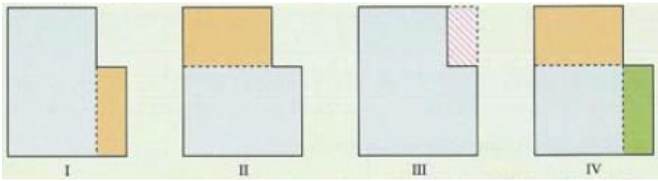
Nicole: $10 \cdot (x-2) + 6 \cdot 2$

Ahmed $10 \cdot x - 2 \cdot 4$

Oskar: $6 \cdot x + (x-2) \cdot 4$

Theresa: $6 \cdot (x-2) + 6 \cdot 2 + 4 \cdot (x-2)$

a) Zur Begründung haben sie jeweils eine Skizze gezeichnet. Leider stehen nicht mehr die Namen drauf. Welche Folie gehört zu welchem Term? Ordne richtig zu.



b) Offensichtlich beschreiben alle Terme richtig den gesuchten Flächeninhalt, obwohl sie so verschieden aussehen. Überprüfe dies, indem du in jedem Term für x den Wert $8\ (m)$ einsetzt.

c) Welcher Term ist deiner Meinung nach der einfachste? Kannst du diesen Term noch weiter vereinfachen? Wenn ja, tue es.

d) Vereinfache alle Terme soweit wie möglich.

Kasten 12: *Aufgabe zur Anbahnung der Gleichwertigkeit in seinen drei Facetten Einsetzungs-, Beschreibungs- und Umformungsgleichheit (nach Lergenmüller & Schmidt 2011).*

01 Jakob: *Also ... ähhh ... ist es nicht logisch, dass immer das Gleiche herauskommt? ___ Die Gleichungen beschreiben ja auch immer die gleiche , ähhh, Baustelle .... Also, ich glaube, da muss immer .... Ähhh ... bei jeder Zahl das Gleiche herauskommen.*

Daraufhin werden die Schüler aufgefordert, dass jeder nochmals eine andere, selbst gewählte Zahl in die 4 Terme einsetzt. Die Schüler setzen $x = 10, 100,\ 1,\ 2, 0$ und einer sogar (nach Aufforderung durch die Lehrkraft) $x = -1$ ein. Im Plenum wird, nachdem auf einzelne Rechenfehler eingegangen worden ist, festgestellt, dass bei gleichen Einsetzungen immer das gleiche Ergebnis erzielt wird – sogar dann, wenn die eingesetze Zahl im Sachkontext überhaupt keine Bedeutung mehr hat. Man einigt sich, dass die Terme im Sachkontext nur für $x > 2$ einen Sinn machen.

Ahmeds Term wird von allen Schülern als der Einfachste angesehen und schnell zu $10x - 8$ vereinfacht. Im Rest der Stunde wird versucht, alle Terme unter Beachtung der Vorzeichenregeln und Anwendung der Distributiv- und der Kommutativgesetze zu $10x - 8$ zu vereinfachen. Es gelingt auch, dass am Ende alle drei Vereinfachungen an der Tafel stehen.

Aufbauend auf dieser „Bauplatzaufgabe“ wird nun in der nächsten Stunde das Konzept der *Gleichwertigkeit* in seinen drei Facetten *Beschreibungs-*, *Einsetzungs-* und *Umformungsgleichheit* eingeführt (dieses Mal werden aber die Begriffe Beschreibungs-, Einsetzungs- und Umformungsgleichheit nicht explizit genannt). Den Begriff *äquivalente Gleichungen* kennen die

Schüler hier schon. Dies versucht Frau Müller aufzugreifen, um auf den Begriff *gleichwertiger, äquivalenter* Terme hinzuführen[72]:

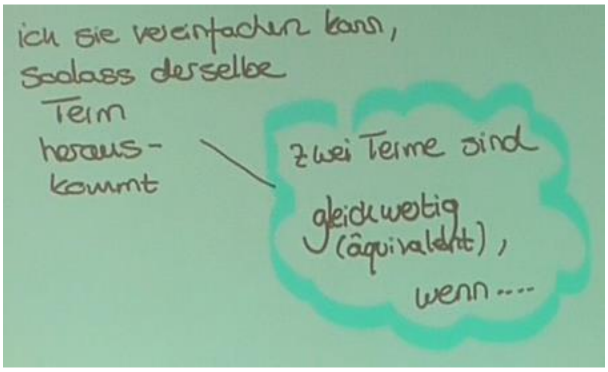
> 02 FM: *Und das Ganze führt uns jetzt dazu, dass wir einmal ein bisschen strukturierter aufschreiben, was für Möglichkeiten wir haben zu erkennen, ob Terme „gleichwertig" sind. Dazu sagt man auch äquivalent. Das Wort kennt ihr schon, woher?*
>
> 03 Pia. *Von der Äquivalenzumformung*.
>
> 04 FM: *Genau. Denn, was mach ich nochmal, bei der Äquivalenzumformung?*
>
> 05 Emilia: *Da mach ich … ähhh, immer auf beiden Seiten das Gleiche.*
>
> 06 FM: *Genau. Da hab ich auch immer auf beiden Seiten das Gleiche gemacht und damit auch gleichwertige Terme erzeugt* ___ *und das wollen wir uns nochmal genauer anschauen* [schreibt als Überschrift auf die Tafel „Gleichwertige (äquivalente) Terme"] ___ *Wenn wir jetzt also zwei Terme haben und wir wollen gucken, ob diese Terme gleichwertig sind, was ham' wir da für Möglichkeiten, um das hmmm meinetwegen „zu beweisen", dass die gleichwertig sind. Was können wir da tun?*
>
> 07 Manar: *Man kann halt erstmal äquivalent umformen und dann die Probe machen.*

Durch das Benutzen des Wortes *äquivalent* (02) ruft Frau Müller in den Schülern direkt die Routinen des *äquivalenten Umformens* wach. Ob sie sich mit *„… und damit auch gleichwertige Terme erzeugt"* (06) nur verspricht (selbst die Konzepte durcheinanderbringt) oder sie die *Äquivalenzumformung* „auf einer oder beiden Seiten den Term umformen" meint, ist nicht mit Sicherheit aufzulösen. Sie lenkt aber im Folgenden wieder von den Gleichungen weg, indem sie auf die Terme der letzten Stunde verweist, worauf ein Schüler mit der damit verbundenen Routine „Vereinfachen" reagiert:

> 08 FM: Das hat sich jetzt so angehört, als ob das 'ne Gleichung wäre, du meinst das jetzt aber schon in die richtige Richtung. Wir haben jetzt aber keine Gleichung, wir haben jetzt sowas wie die Terme von Oskar und Ahmed und wollen zeigen, dass diese beiden Terme gleichwertig sind.____
>
> 09 Berkay: Wir können die Terme vereinfachen und dann zeigen, dass immer das Gleiche herauskommt ____

[72] An und für sich ist m. E. diese landläufig verbreitete Doppelnutzung des Wortes *äquivalent* für Terme und für Gleichungen nicht so glücklich. Äquivalente Terme und äquivalente Gleichungen sind konzeptionell nämlich grundverschieden. Zwei äquivalente Gleichungen sind zwei Gleichungen, die dieselbe(n) Lösung(en) besitzen (die ***für die selbe*** Zahl eine wahre Aussage ergeben). Zwei äquivalente Terme, Terme die ***für jede*** eingesetze Zahl den selben Wert ergeben. Dementsprechend wurden in allen Reihen zwar die Begriffe äquivalente Gleichungen und äquivalente Terme erklärt, aber versucht vornehmlich von *äquivalenten Gleichungen* und *gleichwertigen Termen* zu sprechen, um die Wortdoppelung zu vermeiden.

10 FM: [schreibt „Zwei Terme sind gleichwertig (äquivalent), wenn … ich sie vereinfachen kann, sodass derselbe Term herauskommt] *Was kann ich sonst noch machen?* ____

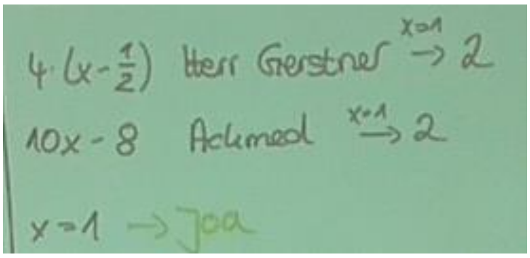


11 Anna: *Also, ich bin mir nicht sicher, aber man kann ja für x bei beiden eine Zahl nehmen und dann schauen, welches Ergebnis ‘rauskommt.*

Anhand der Stellen 02-11 lässt sich etwas einfangen, was oft zu beobachten ist: Die Bedeutung eines Begriffs wird zwar durch seine Definition festgelegt, ***die Bedeutung liegt aber auch in seinem Gebrauch*** (Wittgenstein 2001, §43). So gesehen ist der Begriff *äquivalent* hier mit seinem Gebrauch beim *Äquivalenzumformen* verknüpft und dieser Gebrauch besteht auch aus den entsprechenden Routinen zum Gleichunglösen: Dementsprechend äußert sich Manar (07): *„Man kann halt erstmal äquivalent umformen und dann die Probe machen“*. Ob Manar damit schon *„in die richtige Richtung meint“* (08) sei dahingestellt, jedenfalls ruft der Hinweis auf die Terme der letzten Stunde ihren Gebrauch, die Routinen eben, die damit verbunden waren, wach. In diesem Sinne wird auch durch Berkays Vorschlag eine Routine der letzten Stunde zu verwenden, nämlich die Terme zu vereinfachen, implizit die Definition des undefinierte Begriff „gleichwertig“ begonnen. (09-11). Es geht weiter mit dem Problem, ob eine Testeinsetzung ausreicht:

12 FM: *Genau. Das ist ja das, was ihr gestern gemacht habt. Was würdet ihr sagen – ich glaube wir hatten solche Beispiele noch nicht – aber wir können ja schonmal überlegen: Wenn ich eine einzige Zahl einsetze, reicht das?* ___ *Erstmal könnt ihr vermuten und dann machen wir noch ein Beispiel.* ___ *Ihr könnt ja einfach erstmal vermuten, wenn ich in 2 Terme eine Zahl einsetze, einmal die gleiche Zahl einsetze, weiß ich dann sicher, dass diese Terme auf jeden Fall gleichwertig sind?* ______ *Oder wir machen doch ein Beispiel.*

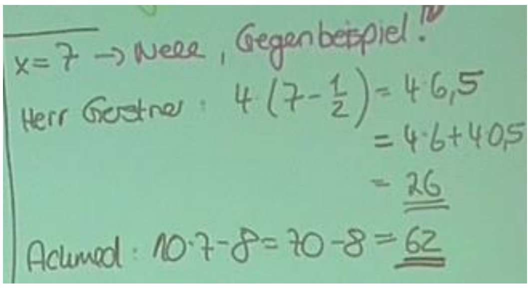
Ad hoc wird zusätzlich zu dem Term $10x - 8$ der Term $4\left(x - \frac{1}{2}\right)$, den ich auf Anfrage nenne, zur Disposition gestellt. Einsetzen von $x = 1$ liefert bei beiden den Wert 2.



13 FM: *Sind die beiden Terme jetzt gleichwertig?*

14 Smilla: *Joa!*

Daraufhin wird in die Terme $10x - 8$ und $4\left(x - \frac{1}{2}\right)$ $x = 7$ eingesetzt und die unterschiedlichen Werte 26 und 62 erzielt.



15 FM. *Was haben wir denn jetzt gesehen? ... Da müssen wir uns wieder zurückerinnern, worum gings eigentlich?*

16 Lisa: *Also, das kommt nicht auf dasselbe raus … wenn man eine andere Zahl einsetzt, also zwar dieselbe Zahl einsetzt aber bei einem anderen Term*

17 FM: *Genau! Also was sagt ihr jetzt, sind jetzt die Terme von Ahmed und Herrn Gerstner „gleichwertig“. An der Stelle habt ihr noch gesagt: Joa!* [schreibt „-> Joa“ neben x=1] *Und was sagt ihr jetzt?*

18 Jakob: *Nein, sind sie nicht, weil wir ein Gegenbeispiel gefunden haben.* [FM schreibt „→ Nee, Gegenbeispiel!“ Neben $x = 7$]

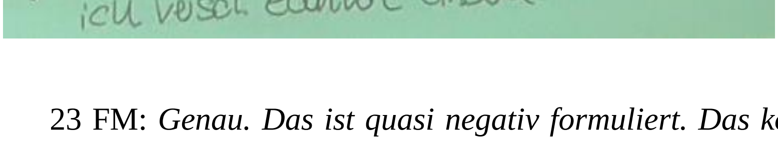
19 FM: *… das heißt, was müssten wir jetzt formulieren bei der richtigen Idee von Anna, wenn ich feststellen möchte, ob zwei Terme gleichwertig sind und wenn ich das mit Zahlen machen möchte … ? Wie kann ich Annas Aussage konkretisieren?*

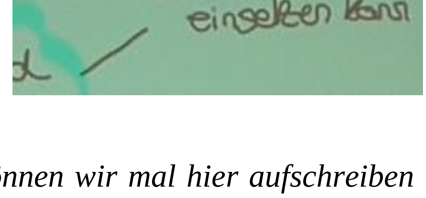
20 Anna: *… also dass man halt… ähmm … äh, dass man, wenn man halt einen Term hat und herausfinden will, ob die beiden gleichwertig sind, … ähmm … dann muss man bei beiden x, also x ähhh, also bei x eine Zahl nehmen und dann muss man halt mehrere Zahlen nehmen und schaun, ob die gleich sind.*

21 FM: *Wie viele ich jetzt genau brauche, dass ist schwierig, dazu wissen wir noch zu wenig über lineare Gleichungen und quadratische Gleichungen, aber zumindest wissen wir jetzt, und vergessen wir auch nicht mehr, eine einzige Zahl reicht uns nicht aus, das kann sozusagen einfach Zufall sein, dass ich jetzt hier 1 genommen hab, weil ich immer 1 nehme und dann hab ich mich gefreut, aber mindestens eine andere Zahl muss ich auch noch verwenden. Deswegen gefällt mir auch die Formulierung, dass wir mehrere Zahlen einsetzen und dann kann ich auch sagen, ok, die sind gleichwertig. Also sagen wir…*

22 Jonas: *… also ich will den Merksatz sagen. Alle Terme mit dem gleichen Ergebnis bei einer Zahl, sind nicht immer gleich, wenn man eine andere Zahl einsetzt?*

Frau Müller entgeht hier dem nicht ganz aufrichtigen Satz *„man müsste alle möglichen Zahlen (also unendlich viele) einsetzen“*. An späterer Stelle, als die Schüler schon mit dem Konzept des Umformens vertraut sind, formuliert es Frau Müller so: *„Also wenn ich keine Lust habe immer mehrere Zahlen in zwei Terme einzusetzen, um zu zeigen ob die gleichwertig sind. Wenn mir das einfach zu mühsam ist, dann kann ich auch einfach den einen Term in den anderen umformen.“* Dieser Satz kann erst dann fruchten, wenn die Schüler mit dem Termumformen schon so vertraut sind, dass es ihnen wirklich weniger mühsam als das Einsetzen von Zahlen vorkommt.
Jonas (22) teilt den in gewissen Sinne „aufrichtigsten Merksatz“ mit, aus dem hervorgeht, dass zwei Terme, die bei einer Zahleinsetzung gleich sind nicht automatisch bei einer anderen Zahleinsetzung gleich sein müssen.



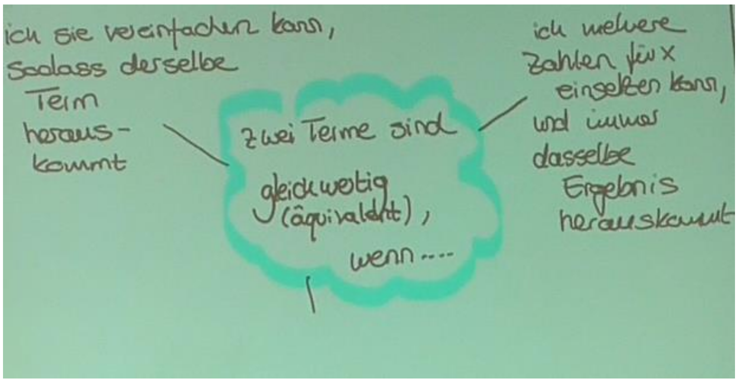


23 FM: *Genau. Das ist quasi negativ formuliert. Das können wir mal hier aufschreiben* [schreibt unter das Achmed-Gerstner Rechenbeispiel „Die Terme sind nicht immer gleich, wenn ich verschiedene Zahlen einsetzte!“] *und hier übernehm ich mal Annas Formulierung*

[schreibt und spricht „…. Wenn ich mehrere Zahlen [Lücke] einsetzen kann“] *Das ist nicht ganz genau, wo setz ich die Zahlen ein?*

24 Justus: *Für x.* [FM schreibt „für x“ in die Lücke und „…, immer dasselbe Ergebnis herauskommt.]

25 FM: *Und Möglichkeit 3?* ___ *Da habt ihr auch gestern schon darüber gesprochen. Wenn wir wieder zu unserer Baustellenaufgabe zurückkehren.*



Längere Unterbrechung und große Aufregung, weil eine Spinne im Klassenzimmer gesichtet wird.

26 FM: ____ *Aber wir fragen uns immer noch …* [macht die Baustellenaufgabe sichtbar] *… also wir haben hier die 4 verschiedenen Terme und wir gehen davon aus, die Terme sind alle richtig, die Kinder haben sich nicht vertan. Wie könntet ihr das jetzt noch erklären* [zeigt auf den Strich unterhalb der Wolke „Zwei Terme sind …“], *warum diese Terme alle gleichwertig sind, warum sind sie das?*

27 Max: *Weil die alle, die gleiche Rechnung halt beschreiben.*

28 FM: *Genau, die haben ja alle die gleiche Ausgangssituation bekommen. Und wenn wir davon ausgehen, dass die sich nicht vertan haben, dann müssen die ja alle gleichwertig sein* ___ [Ina meldet sich innbrünstig, sie will scheint es unbedingt etwas loswerden] *Ina, du willst noch was dazu sagen?*

Bis hierhin wurde der Begriff der Gleichwertigkeit mit seinen Facetten Beschreibungs-, Einsetzungs- und Umformungsgleichheit durch Rekapitulation der Routinen, die die Bauplatzaufgabe der letzten Stunde einforderte, definiert. Durch die Frage einer Schülerin aufgeworfen, geht es jetzt im gleichen Plenumsgespräch um den Zusammenhang zwischen äquivalenten Termen und äquivalenten Gleichungen.

***

Episode 11 – „ … und dann L gleich $\mathbb{Q}$“

29 Ina: *Also wenn es doch immer um die gleiche Aufgabe geht, also vergleichen, dann kann man doch immer eine Gleichung machen aus den beiden Termen, oder? … Wenn man die äquivalent umformen kann.*

Ina hat wohl das Äquivalenzumformen immer noch im Kopf und möchte wieder darauf zurückkommen. Meint sie jetzt, dass, wenn man die Terme äquivalent umformen kann, muss man doch auch eine Gleichung daraus machen können. Oder meint sie, dass man die Gleichung, die man aus den „gleichen Aufgaben“ gemacht hat, doch äquivalent umformen können muss? Was auch immer, Frau Müller greift Inas Äußerung jedenfalls auf:

30 FM: *Ja … hmmm … Und das ist jetzt schon schwierig, wenn ich von vornherein weiß, dass ich zwei gleichwertige Terme habe und also schon weiß, dass für jede Zahl immer das*

Gleiche herauskommt, worauf komme ich denn dann beim äquivalenten Umformen? [längere Pause] Ist das euch klar? Wir können das ja mal machen!

31 Jakob: *Können Sie die Frage nochmal wiederholen?*

32 FM: *Also, Ina hat ja jetzt vorgeschlagen, dass ich diese beiden Terme, die ich habe auch als Gleichung formulieren kann und die dann äquivalent umformen kann. Das kann ich ja machen, nä? Jetzt meine Frage: Bei solchen Gleichungen aus zwei Termen, die gleichwertig sind, wenn ich die dann äquivalent umforme, wohin komm ich dann?*

33 Manar: *Also entweder 0 gleich 0 oder gar kein Ergebnis.*

34 Justus: *Also ich glaub, es iss halt egal, welche Zahl man dann einsetzt ... und dann L gleich Q.*

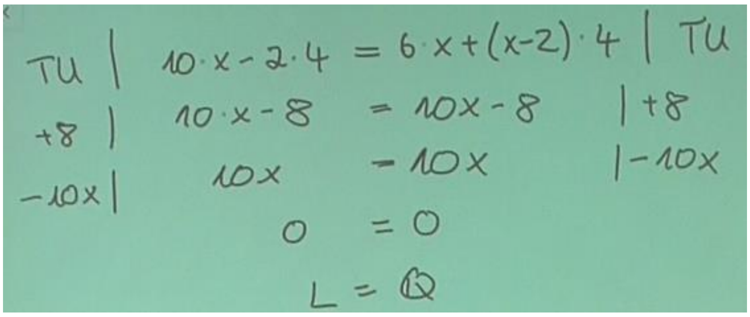
35 FM: *Genau!* [schreibt $L = \mathbb{Q}$] *Wollten die anderen das auch sagen?* [murmelndes JA von ein paar Schülern] *Wir gucken uns das einfach mal an, weil wir hier grad mittendrin sind ... sagt mir mal Ahmeds Term.*

36 Raphael: *10 mal x minus 2 mal 4* [FM schreibt $10 \cdot x - 2 \cdot 4$].

37 FM: *Und jetzt wollen wir das ja gleichsetzen mit einem zweiten gleichwertigen Term .... Der zweiteinfachste bitte ...*

38 Jakob: *6 mal x plus Klammer auf, x minus 2, klammer zu, mal 4* [FM $= 6 \cdot x + (x - 2) \cdot 4$]

Jetzt wird die Gleichung $10 \cdot x - 2 \cdot 4 = 6 \cdot x + (x - 2) \cdot 4$ gemeinsam an der Tafel gelöst (siehe Bild rechts).



39 FM: *Unser Tafelbild* [Abb. 41] *ist noch nicht ganz zu Ende. Huch! Unterricht ist ja fast schon zu Ende ... Schick ich das euch. Also ich ergänze das noch und ihr könnt in der Zwischenzeit erklären, was Ina gesagt hat, wie wir das noch in die Abbildung kriegen* [FM ergänzt im Tafelbild (Abb. 41) „Gleichwertigkeit“: „… sie dieselbe Situation (z. B. gleicher Bauplan) beschreiben“]

40 FM. *So und zu welchen von den Punkten gehört jetzt das, was wir grade über das Äquivalenzumformen gesagt haben? Wo können wir das jetzt noch ergänzen?*

41 Justus: *Ich glaub bei Vereinfachen.*

42 FM: ___ *Und wie würdest du das denn erklären?*

43 Justus: *Also ähhh, da es also zweimal die gleichen Terme sind, ist es egal, was man für x einsetzt.*

44 FM: *Ok.* [schreibt und spricht:] „*da es zweimal der gleiche Term ist“, würde, ich ergänz das mal, würden, „wenn wir sie gleichsetzen, unendlich viele Lösungen herauskommen“* [schreibt das „ .“ und hängt noch $L = \mathbb{Q}$ an]

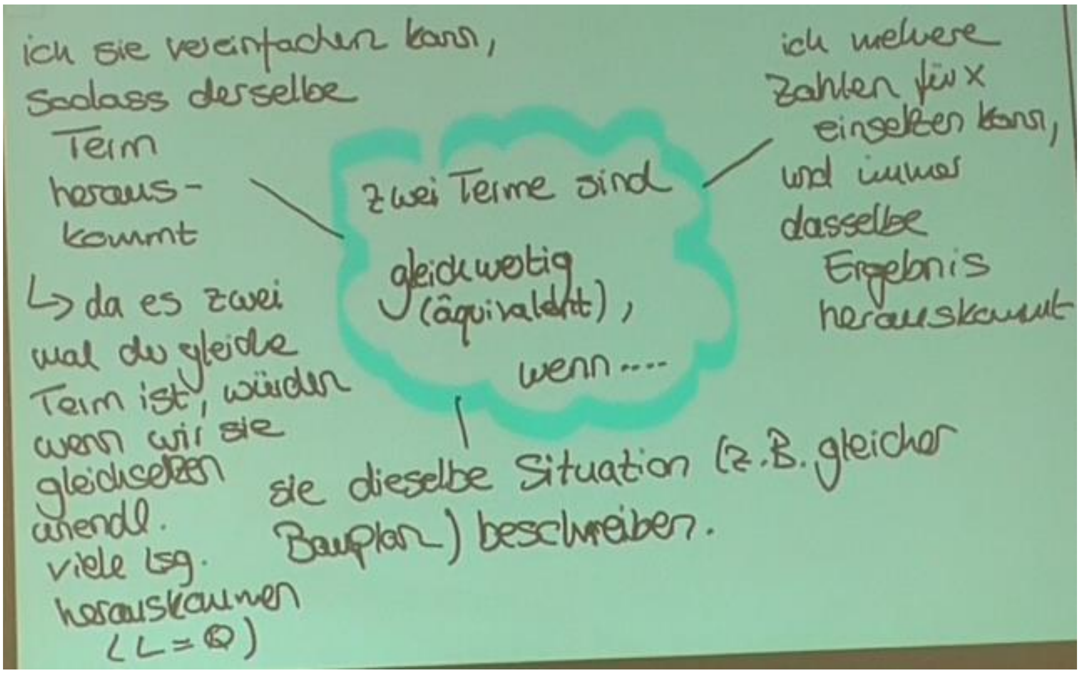


Abb. 47: *Tafelbild – Gleichwertigkeit von Termen. Die Plenumsdiskussion führte hier ungeplant auf einen weiteren kalkülorientierten Nachweis der Gleichwertigkeit zweier Terme, nämlich durch äquivalentes Umformen einer entsprechenden Gleichung mit* $L = \mathbb{Q}$.

Während dieses Plenumsgesprächs hat sich also ganz ungeplant ergeben, dass, wenn man zwei gleichwertige Terme gleichsetzt, die entstehende Gleichung unendlich viele Lösungen hat. Geplant war das nicht. Es scheint hier auch unwahrscheinlich, dass die Schüler, die anfangs auf das Schlüsselwort „äquivalent“ durch Beschreiben der eingeübten Routinen zum Lösen von Gleichungen reagieren, abzusehen in der Lage waren wohin das führen wird. Auch aus Inas Äußerung (29), die viel später, nachdem es schon längst um das reine Termumformen ging, das Äquivalenzumformen wieder zum Thema macht, ist nicht abzulesen, was genau sie antreibt. Frau Müller (32) greift aber die Idee auf, die beiden Terme zu einer Gleichung zu vereinen und fragt die Schüler, was wohl passieren wird, wenn man diese Gleichung jetzt zu lösen versucht. Manar (33) schließt – vielleicht aus dem Gefühl heraus, dass hier ein Sonderfall vorliegen muss - eine eindeutige Lösung aus und Justus erkennt, dass „*dann L gleich Q*“ (34) ist.
Als ganz entscheidend sehe ich auch an, dass man hier sieht, dass Schüler oft auf mathematische Begriffe mit den im Begriffszusammenhang durchgeführten Routinen reagieren. Dasselbe gilt auch für die „Begriffsdefinition“ der *Gleichwertigkeit* dieser Interviewsequenz. Der Begriff der *Gleichwertigkeit* beinhaltet all die Denkhandlungen und Routinen, die man benutzt und durchführt, um zu zeigen, dass zwei Terme *gleichwertig* sind. In diesem Sinne liegt die ***die Bedeutung eines Begriffs in seinem Gebrauch*** und ein so verstandene Bedeutung der *Gleichwertigkeit* ist durchaus facettenreich und kann kumulativ wirken, sofern auch ein Transfer dieses ***Gebrauchs*** auf verwandte Inhaltsbereiche gelingt. Diese ‚Gleichsetzung‘ der Begriffsbedeutung mit den, mit einem Begriff einhergehenden, Denkhandlungen und Routinen habe ich sehr oft bei Schülern beobachtet. Besonders in „unglücklichen“ Unterrichts- und Interviewgesprächen, in der Schüler, auf der Suche nach der richtigen Antwort, auf eine nach der anderen

bekannten Routine zurückgreifen, die eventuell das ‚neue' Problem lösen. Gerade schwächere Schüler suchen oft bei der Lösung von Aufgaben die vertrauten, eingeübten und nicht immer vollständig verstandenen Routinen, die ihnen eine Sicherheit beim Folgen des Diskursverlaufs geben – oft erweitert sich ein Verständnis im Laufe des wiederholten Gebrauchs[73].

***

Bis hierhin sind also schon einige Termumformungen durchgeführt worden. Schon beim Erarbeiten des Gleichunglösens mit dem Boxenmodell wurden beim Übergang erste algebraische Summen zusammengefasst, z. B. $x + 1 + x + 2 + 2x + 3 = 4x + 6$ mit der Erklärungsstütze des Boxenmodells. Die Kommutativgesetze und Assoziativgesetze sind beim Aufstellen von Gleichungen aus Sachkontexte thematisiert worden, wenn z. B. der eine Schüler den Text „das Vierfache der unbekannten Zahl" mit ‚$x \cdot 4$' und der andere mit ‚$4 \cdot x$' übersetzt hat. Zuletzt kam das Distributivgesetz zum Zuge. Nun werden alle den Schülern bekannten Rechengesetze gesammelt und für das Merkheft zusammengefasst (Abb. 42).

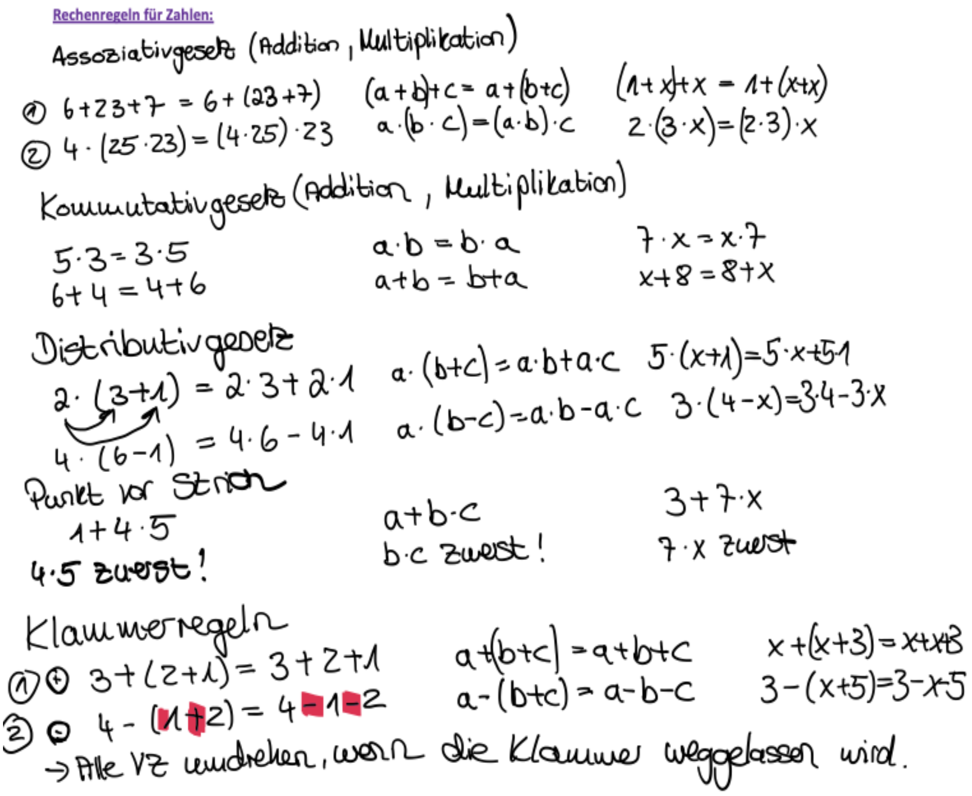


Abb. 48 *: Eintrag ins Merkheft – Rechengesetze für Zahlen.*

Frau Müller weist danach dezidiert darauf hin, dass diese Regeln genau die Regeln sind, die beim Termumformen notwendig und hinreichend sind, um seine Umformungsschritte zu erklären und gibt als Hausaufgabe auf, alle diese Regeln auswendig zu lernen.

[73] Ich möchte hier nicht dem hoffnungsvollen Glauben anheimfallen, dass so, wie sich aus der Arithmetik die Algebra, aus dem Inhalt der Kalkül, aus dem wiederholten Gebrauch partiell verstandener Routinen mit der Zeit ein Verständnis schon von alleine einstellen wird. Aber es kann sich meiner Meinung nach einstellen, wenn immer wieder die automatisierten Routinen unterbrochen werden, „.. to question, reflect, con-clude, relate ideas or create new meaning" (Arcavi 2005, S.45).

8 Einüben des Termumformens und Symbolisches Beschreiben mit Würfelbauten als Anwendung

Mit Hilfe von Sach- und Zahlkontexten, die reichhaltige Denkhaltungen ermöglichen (siehe Aufgaben in Anhang D), geht es weiter mit einem regelbasierten Termumformen, bei dem immer wieder die semantische Eben der Zahlen wachgerufen wird. Der weitere Aufbau des Kalküls hält noch einige Schwierigkeiten bereits, auf die ich hier nicht weiter eingehe, da sie in der folgenden Beschreibung der 2. Reihe noch weiter ausdifferenziert werden und ab hier in beiden Reihen im Wesentlichen die Gleichen sind.

Die *Zahlenrätselreihe* endet mit dem *symbolischen Beschreiben* der Würfeltürme und Würfelschlangen (Erarbeitung (I) und (II)). Auch wenn hier diesem Symbolischen Beschreiben nicht mehr, wie bei der Musterreihe, der Zauber des Anfangs innewohnt, macht es vielen Schülern doch Spaß unterschiedliche Aufbauterme für ein und dieselbe enaktiv-symbolisch repräsentierte Zahlenreihe zu finden. Die bereits beschriebenen Konventionsverletzungen bei der Algebraisierung treten nun fast gar nicht mehr auf und die Schüler führen von sich aus jetzt fast alle den Nachweis der Gleichwertigkeit der Terme durch *symbolisches Operieren*.

VII.III.2 Die Reihe Muster (letzter Durchgang)

Diese Reihe wurde mit der Klasse 7d des GEÜ vom 17.03.21 bis 24.06.21 durchgeführt. Es waren 24 Schüler in der Klasse .

1 Symbolisches Beschreiben

Diese Reihe beginnt mit dem *symbolischen Beschreiben* enaktiv-ikonisch repräsentierter Zahlenfolgen, wie es schon mehrfach beschrieben wurde. Die in Abb. 18 (Abschnitt VI.I) abgebildeten Aufbauterme sind tatsächlich in diesem Durchgang entstanden.

2 Übergang zum Termumformen und die Rechengesetze für Zahlen

Nun begab es sich, dass aufgrund der akuten Corona-Lage, gerade jetzt, nach dem *symbolischen Beschreiben*, die ganze Klasse für eine Woche ins Distanzlernen geschickt wurde. Notgedrungen wurde also erst gar nicht versucht, dass die Schüler algebraisches Umformungen selbst entdecken, sondern es wurde einfach damit begonnen in Erklärtexten Terme zu vereinfachen. Interessanterweise zeigte sich, dass hier zum ersten Mal von niemandem (weder Schüler noch Lehrkraft) ein Unbehagen oder eine schier unüberwindliche Hürde im Lernweg wahrgenommen wurde.

Erklärtexte und Distanzaufgaben zum Übergang ins Kalkül

Da die drei Wochenaufgaben für diese Distanzwoche wesentlicher Bestandteil der Besprechungen der nachfolgenden Präsenzwoche sind, durch die ein erster Kalkülaufbau stattfinden wird, sind sie hier abgebildet (Kasten 13-15). Zudem werden auch die eingereichten Schülerbearbeitungen dazu besprochen. Alle drei Aufgaben dieser Distanzwoche standen unter der Überschrift „Terme vereinfachen“. Es gab insgesamt 19 korrigierbare Abgaben. Da ja gerade in Distanz nicht verboten wurde, zusammenzuarbeiten, kann man per se nicht davon ausgehen, dass dies 19 Einzelschülerbearbeitungen sind. Einige Indizien weisen darauf hin, dass jedenfalls relativ wenig abgeschrieben wurde (keine zwei Abgaben waren identisch, es wurden bei Aufgabe 1 (s.u.) eine Vielzahl unterschiedlicher Aufbauterme aufgestellt und insgesamt differieren die Abgaben sehr).

In Aufgabe 1 b) (Kasten 13) stellten die Schüler insgesamt 12 unterschiedliche Aufbauterme auf, 10 davon waren korrekt (Die Abb. 18, Abschnitt VI.I.1, schon dargestellten Schülerterme stammen tatsächlich aus den eingereichten Aufgaben dieser Distanzlernwoche).

Die Teilaufgabe 1e), in der gefragt wird, wie man überprüfen kann, ob der selbst aufgestellte und Susis Term $(x \cdot 2) \cdot 2 + 4 + x$ stimmen, wird in 14 der 19 Abgaben bearbeitet. 10 Schüler setzen dazu Zahlen ein (7 eine einzige Zahl, 2 zwei Zahlen und einer drei Zahlen). Eine Schülerin argumentiert auf der Beschreibungsebene und durch Einsetzen einer Zahl. Ein Schüler durch Termumformen und Einsetzen einer Zahl und eine Schülerin durch Termumformen allein.

Eine Schülerin hat als eigenen Term exakt Susis Term angegeben, wodurch sich eine Beantwortung der Frage erübrigt. Es könnte sein, dass der Operator „überprüfe“ in der Aufgabenstellung eine Einsetzen von Zahlen provoziert, schlichtweg weil die Schüler schon so oft aufgefordert worden sind ihre Terme durch Einsetzen von Zahlen zu „überprüfen“.

Aufgabe 1: Würfelmauern

Jemand baut Würfelmauern und zählt die Anzahl der sichtbaren Quadrate.

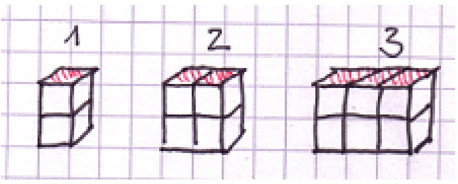
a) *Fülle die Lücken in der Tabelle*:

Nummer x der Figur	1	2	3	4	5	6
Anzahl der sichtbaren Quadrate	9		19			

b) *Stelle einen Term mit x für die Anzahl der sichtbaren Quadrate auf und erkläre diesen. Für was steht dein x?*

c) *Überprüfe deinen Term für $x = 1, 2$ und 3, indem du $x = 1, 2$ und 3 in den Term einsetzt. Erhältst du die gleichen Ergebnisse, wie in der Tabelle oben?*

Susi hat zu den Würfelmauern einen Term für die sichtbaren Flächen aufgestellt und ihre Überlegungen erklärt:



Susi hat bereits damit angefangen ihre Überlegungen mit farbigen Markierungen zu versehen, indem sie Quadrate rot markiert hat und den dazugehörigen Satz ihrer Erklärung mit derselben Farbe unterstrichen hat.

<u>sichtbare:</u>

Mir ist aufgefallen, dass die fordere Seite immer 2-mal die Nummer der Figur ist: $(x \cdot 2)$

Nun multipliziere ich die fordere Seite mit 2, da die hintere Seite genauso viele Flächen hat: $(x \cdot 2) \cdot 2$

Die äußeren Seiten links und rects haben zusammen immer 4 sichtbare Flächen. (Also $(x \cdot 2) \cdot 2 + 4$)

<u>Die obere Seite hat so viele Quadrate, wie die Nummer der Figur (x)</u>

Der Endterm ist also $(x \cdot 2) \cdot 2 + 4 + x$

d) Markiere auch die anderen Sätze mit unterschiedlichen Farben und markiere dazu in der jeweils selben Farbe die entsprechenden Quadrate in der Würfelskizze links.

e) *Vergleiche deinen in Teil b) aufgestellten Term mit Susis Term $(x \cdot 2) \cdot 2 + 4 + x$. Wie kannst du überprüfen, ob beide Terme stimmen?*

Kasten 13: *Aufstellen eines eigenen Aufbauterms zu den Würfelmauern und Vergleich zu dem Term $(x \cdot 2) \cdot 2 + 4 + x$ der später vereinfacht werden soll.*

Aufgabe 2) Vereinfachen von Susis Term

Susis Term $(x \cdot 2) \cdot 2 + 4 + x$ für die Anzahl der sichtbaren Quadrate sieht ziemlich kompliziert aus. Wir wollen nun versuchen diesen zu vereinfachen. Dazu muss man sich klarmachen, dass das x ja für eine Zahl steht. Diese Zahl ist zwar beliebig (je nachdem die wievielte Würfelmauer man betrachtet), aber x steht eben für eine Zahl 1, 2, 3, oder 4 usw….

Gucken wir uns erstmal den Term $(x \cdot 2) \cdot 2$ an. Kann man hier die beiden 2'en multiplizieren?

f) Wie rechnest du möglichst geschickt und ohne Taschenrechner den Zahlenterm $(23 \cdot 25) \cdot 4$ *aus? Tue es!*

Wenn du dir Arbeit erspart hast, dann bist du vielleicht so vorgegangen:

$$(23 \cdot 25) \cdot 4 = 23 \cdot (25 \cdot 4) = 23 \cdot 100 = 2300$$

Assoziativgesetz der Multiplikation
Für beliebige Zahlen a, b und c gilt:
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Das Assoziativgesetz der Multiplikation besagt nämlich, dass man in einem Produkt mit mehr als zwei Faktoren, die Multiplikationen in einer beliebigen Reihenfolge ausführen kann. Da x ja auch für eine Zahl steht, gilt also $(x \cdot 2) \cdot 2 = x \cdot (2 \cdot 2) = x \cdot 4$. Susis Term ka werden: $(x \cdot 2) \cdot 2 + 4 + x = x \cdot 4 + 4 + x$.

Aber es geht noch einfacher. Wir können die Reihenfolge der Addition vertauschen und statt $4 + x$ auch $x + 4$ schreiben, also $4 + x = x + 4$. Addiert man nämlich zwei Zahlen (und x ist ja auch eine Zahl), so kann man die Summanden vertauschen. Das Zahlengesetz dazu kennst du vielleicht schon: Es ist das Kommutativgesetz der Addition.

Kommutativgesetz der Addition
Für beliebige Zahlen a, b gilt:
$$a + b = b + a$$

Wir landen jetzt also bei $(x \cdot 2) \cdot 2 + 4 + x = x \cdot 4 + x + 4$.

Können wir jetzt noch die x-Terme $x \cdot 4$ und x irgendwie „zusammenrechnen“? Dazu machen wir zuerst aus dem Term $x \cdot 4$ den Term $4 \cdot x$. Darf man das? Ja, man darf es, weil man - wie bei der Addition auch - bei der Multiplikation die Reihenfolge vertauschen (lat. *kommutare*) darf.

Kommutativgesetz der Multiplikation
Für beliebige Zahlen a, b gilt:
$$a \cdot b = b \cdot a$$

Also kann man Susis Term auch so schreiben $(x \cdot 2) \cdot 2 + 4 + x = 4 \cdot x + x + 4$.
Kann man noch weiter vereinfachen?
Ja, $4 \cdot x + x$ kann zu $5 \cdot x$ zusammengefasst werden. Dies kann man auf zwei Arten erklären.

Kurzformen:
$1 \cdot x = 1x = x$
$-1 \cdot x = -1x = -x$
$5 \cdot x = 5x$
$-2 \cdot x = -2x$

1. Zunächst einmal ist $x = 1 \cdot x$ (man spricht hier von der ‚versteckten Eins'): die Zahl $1 \cdot 5$ ist eben z. B. auch 5, die Zahl $1 \cdot 87 = 87, \ldots$, die Zahl $1 \cdot x = x$. Es gilt also $4 \cdot x + x = 4 \cdot x + 1 \cdot x$. Viermal eine Zahl plus einmal eine Zahl ist eben fünfmal eine Zahl (z. B. $z.B.\ 4 \cdot 6 + 1 \cdot 6 = 5 \cdot 6$), also
   $4 \cdot x + 1 \cdot x = 5 \cdot x$ oder noch kürzer: $4x + 1x = 5x$.
2. Wer auch hier als Erklärung lieber ein Zahlengesetz anwenden will, kann mit dem Distributivgesetz argumentieren:

Distributivgesetz
Für beliebige Zahlen a, b und c gilt:
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
oder
$$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$$

Wendet man das Distributivgesetz rückwärts an $[b \cdot a + c \cdot a = (b + c) \cdot a]$ und und denkt daran, dass 4, 1 und x alles Zahlen sind, dann folgt:

$$4 \cdot x + 1 \cdot x = (4 + 1) \cdot x = 5 \cdot x$$

Susis Term kann jetzt also zu $(x \cdot 2) \cdot 2 + 4 + x = 5 \cdot x + 4$ vereinfacht werden.

Weiter vereinfachen geht jetzt aber nicht mehr. Manche Leute machen noch weiter, indem sie die 5 und die 4 addieren (das ist aber falsch):

$$5 \cdot x + 4 = 9x \qquad \boldsymbol{f}$$

$5 \cdot x$ kann ja für $5 \cdot 1,\ 5 \cdot 2,\ 5 \cdot 3,\ usw.$ stehen, und deshalb kann man die $5x$ nicht einfach mit der festen Zahl 4 „zusammen rechnen“!!!!

Hier nochmal die Vereinfachungen von Susis Term mitsamt den zugrundeliegenden Rechengesetzen:

$(x \cdot 2) \cdot 2 + 4 + x =$	
$x \cdot (2 \cdot 2) + 4 + x =$	Assoziativgesetz der Multiplikation
$x \cdot 4 + x + 4 =$	Kommutativgesetz der Addition
$4 \cdot x + 1 \cdot x + 4 =$	Kommutativ. der Multiplikation, „versteckte 1“, (Distributivgesetz)
$\mathbf{5 \cdot x + 4}$	

Wir haben jetzt also zwei Terme für die Anzahl der sichtbaren Quadrate: $(x \cdot 2) \cdot 2 + 4 + x$ und $5 \cdot x + 4$.

Beide Terme müssen für alle Zahlen x, die gleichen Werte liefern, z. B. auch für die Zahl $x = 3$:

$$(x \cdot 2) \cdot 2 + 4 + x:\quad (2 \cdot 3) \cdot 2 + 4 + 3 = 6 \cdot 2 + 4 + 3 = 12 + 4 + 3 = 19$$
$$5 \cdot x + 4:\quad 5 \cdot 3 + 4 = 15 + 4 = 19.$$

g) Überprüfe dies auch für $x = 2, 4$ und 5

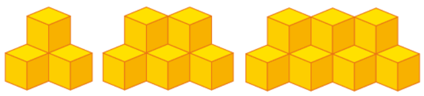
Kasten 14: *Erklärtext zum Vereinfachen des Terms $(x \cdot 2) \cdot 2 + 4 + x$. Schrittweise werden die Gesetze für jeden elementaren Umformungsschritt benannt und anhand generischer Zahlen erklärt.*

Dies ist anders, wenn die Schüler später in Aufgabe 3 c) dazu aufgefordert werden, auf verschiedene Arten und Weisen zu erklären, warum *„alle vier Terme für beliebig lange Mauern die richtige Anzahl an Würfeln“* liefern (Kasten 14). Doch zuerst folgt in Aufgabe 2) ein Erklärtext zur Vereinfachung von Susis Term $(x \cdot 2) \cdot 2 + 4 + x$ (Kasten 13).

Man beachte den, im Vergleich zu den vorherigen Durchführungen der Musterreihe, hier stattfindenden Aspektwechsel an dieser entscheidenden Wegmarke im Übergang zum Kalkül. Es wird hier nicht versucht, dass die Schüler das Termumformen selbst als Möglichkeit eines (effizienteren) Nachweises der Gleichwertigkeit „entdecken“, sondern das Termumformen wird eingeführt, um einem kompliziert aussehenden Term eine einfachere, hier im Sinne von numerisch einfacher weiterzuverarbeitende, Gestalt zu geben.
Aus dem Wissen heraus, dass ein so vereinfachter Term für alle Einsetzungen dieselben Termwerte wie der Ausgangsterm liefert, erschließt sich nun die Möglichkeit des Nachweis der Gleichwertigkeit durch Umformen (Umformungsgleichheit). Deshalb kann man in der nun folgenden Aufgabe in Teil c) ruhig mal nach „verschiedene Arten und Weisen“ fragen, um zu gucken, ob irgendjemand jetzt schon das Termumformen dazu benutzt.

17 der 19 eingereichten Abgaben bearbeiten den Aufgabenteil 3 c). 11 Schüler erklären es nur durch das Einsetzen von Zahlen (7 durch eine Zahl, 4 durch 2 Zahlen). Beim Einsetzen von Zahlen zeigen sich dabei wieder arithmetische Unzulänglichkeiten, insbesondere beim Term $3 \cdot (x+1) - 2$. Vier Schüler rechnen dort $4 \cdot (100+1) - 2 = 4 \cdot 100 + 1 - 2 = 299$ und folgern prompt, dass dieser Term nicht stimmen kann.

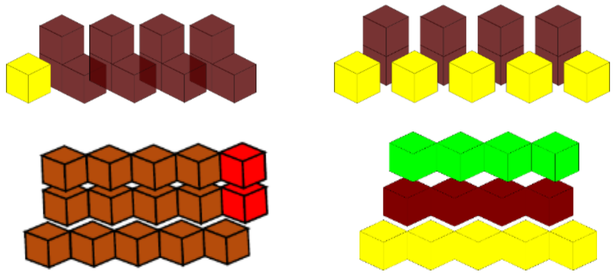
Aufgabe 3: gestaffelte Würfelmauern



Jemand hat aus Würfeln diese Mauern gebaut und zählt die Anzahl der Würfel der 1., 2., 3., 4.ten, …, x-ten Figur. Milena, Paul, Erkan und Maria beschreiben die Anzahl Würfel dieser Mauern mit unterschiedlichen Termen:

Milena: $\mathbf{2 \cdot x + (x+1)}$ **Paul:** $\mathbf{3 \cdot x + 1}$ **Erkan:** $\mathbf{(x+1) + x + x}$ **Maria:** $\mathbf{3 \cdot (x+1) - 2}$

Die Kinder haben auch ihr Überlegungen anhand der 4. Figur ($x = 4$) veranschaulicht.



a) *Wofür steht das x? Wofür die Terme?*

b) *Welche der Skizzen gehört zu welchem Kind? Erkläre, wie die vier gedacht haben!*

c) *Liefern alle vier Terme für beliebig lange Mauern die richtige Anzahl an Würfeln? Erkläre auf verschiedene Arten und Weisen!*

In einer gewissen Art und Weise ist Pauls Term $3 \cdot x + 1$ der Einfachste. Will man bei diesem Term den Wert für ein bestimmtes x (z. B. $x = 100$) ausrechnen, so muss man die 100 nämlich hier nur an einer Stelle Einsetzen. Bei den Termen : $2 \cdot x + (x+1)$ *und* $(x+1) + x + x$ muss man $x = 100$ an mehreren Stellen einsetzen.

d) *Setze in die Terme der Schüler den Wert x=100 ein und berechne den Wert.*

e) *In gewissem Sinne ist Pauls Term* $3x + 1$ *der einfachste. Versuche die anderen Terme so zu vereinfachen wie wir es in Aufgabe 1 mit Susis Term gemacht haben. Am besten du vereinfachst so lange, bis du bei jedem Term bei* $3x + 1$ *angelangt bist. Erkläre dabei deine Umformungsschritte und gib entsprechende Zahlengesetze an, wenn du diese verwendest.*

+-Klammerregel:
Wenn vor einer Klammer ein Pluszeichen steht und man die Klammer weglässt, dann bleiben alle Vorzeichen in der Klammer dieselben:
Bsp.: $3 + (x-1) = 3 + x - 1$
Zahlen: $3 + (7-1) = 3 + 7 - 1$

Tipp: Von den Zahlen weißt du, dass man Klammern vor denen ein + steht einfach weglassen kann $(21 + (9 + 34) = 21 + 9 + 34)$, also gilt z. B. auch $2x + (x+1) = 2x + x + 1$

Kasten 15: *„Erarbeitung (IV)“ in Distanz. Teilaufgabe e) zielt auf das in der vorherigen Aufgabe (Kasten 13) eingeführte Vereinfachen ab.*

2 Schüler erklären „die Gleichheit“ nur auf der Beschreibungsebene („Grundgedanke ist gleich“, „Sie rechnen alle das Gleiche, schreiben es nur anders auf“, 2 Schülerinnen auf der Beschreibungsebene und durch Einsetzen einer Zahl und 2 Schüler erklären es nur durch Termumformungen („Wenn man die Rechengesetze anwendet bekommt man immer Pauls Term“). Fast alle Schüler „übersehen“ also die Aufforderung *„Erkläre auf verschiedene Arten und weisen!“*. Die Ergebnisse sind also hier ganz ähnlich, wie die Ergebnisse der in Abschnitt IV.I.2 (Kasten 3) vorgestellten schriftlichen Abfrage zur selben Frage im identischen Kontext in einer vorherigen Durchführung. Nur, dass diese schriftliche Abfrage durchgeführt wurde, als noch keinerlei Umformungstätgkeit angebahnt worden war. Die überwiegende Mehrheit der Schüler scheinen also hier, nachdem in Aufgabe 2 eine Termumformung schrittweise und regelbasiert vorgemacht worden war, im Umformen noch nicht eine Möglichkeit des Nachweis der Gleichwertigkeit zu sehen.

Auf die explizite Aufforderung, alle Terme soweit zu vereinfachen, bis man bei Pauls Term $3x + 1$ angelangt ist (Teil 3 e), reagieren jetzt aber schon erstaunlich viele Schüler mit weitgehend richtigen Lösungen. 14 der 19 Schüler beantworten die Teilaufgabe 3 e). 9 Schüler machen dabei alles richtig, formen um und geben entsprechende Rechengesetze dazu an. Von den 5 Schülern mit fehlerhaften Lösungen haben 3 nur ein Problem mit dem Distributivgesetz und formen z. B. so um: $3 \cdot (x + 1) - 2 = 3 \cdot x + 1 - 2 = 3x - 1$. Zwei Schüler versuchen mit den „x’en zu rechnen“, machen dies aber scheinbar regellos (z. B. $(x + 1) + x + x = 1 \cdot x + 2 \cdot x$, $1x + x + x = 1x \cdot 2x$ oder $3 \cdot (x - 1) = 3 \cdot 1x$). Der Erklärtext in Aufgabe 2 scheint also durchaus gefruchtet zu haben. Die Schüler scheinen das vorgemachte Vereinfachen anzunehmen, erkennen aber weitgehend noch nicht, dass damit auch eine weitere Nachweismöglichkeit der Gleichwertigkeit gegeben ist.

Soweit die Besprechung der Schülerlösungen der Distanzaufgaben. Diese Aufgaben bahnen auch das Konzept der Gleichwertigkeit von Termen an. Doch es gibt in dieser Durchführung – wie auch schon in der im vorherigen Abschnitt besprochenen Zahlenrätselreihe – eine kleine, doch sehr bedeutsame Akzentverschiebung. (siehe dazu auch Abschnitt IV.II *Zur zentralen Rolle des Gleichwertigkeitskonzepts für das Termumformen*). Es entsteht hier die Umformungsgleichheit nicht aus der Suche nach einem dritten, weniger umständlichen und (vermeintlich) effizienteren, Weg eines Nachweises der Gleichwertigkeit, als das Finden einer beschreibenden Situation oder das Einsetzen hinreichend vieler Werte (Barzel et al. 2021, S. 24). Vielmehr wird das Termumformen eingeführt (hier sogar in einem Erklärtext vorgemacht), um einen kompliziert aussehenden Term eine andere, hier numerisch einfacher zu verarbeitende, Gestalt zu geben. Auch als bei der Zahlenrätselreihe das Distributivgesetz notwendig wurde, geschah dies, um der Gleichung eine andere Gestalt zu geben, damit diese überhaupt weiter verarbeitet werden konnte. Und das ist die Akzentverschiebung, die jetzt in beiden Durchführungen geschieht: Erst wenn einzelne Termumformungen schon durchgeführt worden sind, wird das Konzept der Gleichwertigkeit explizit eingeführt – damit stehen die drei Facetten der Gleichwertigkeit mehr nebeneinander, als dass sich die Umformungsgleichheit aus der Beschreibungs- und Einsetzungsgleichheit heraus entwickelt.
In der nun folgenden Präsenzwoche wird viel Zeit darauf verwendet in Plemumsgesprächen die Distanzaufgaben zu besprechen und zu sichern.

***

Episode 12 – *„Das ist alles eigentlich der gleiche Term, halt nur anders aufgeschrieben."*

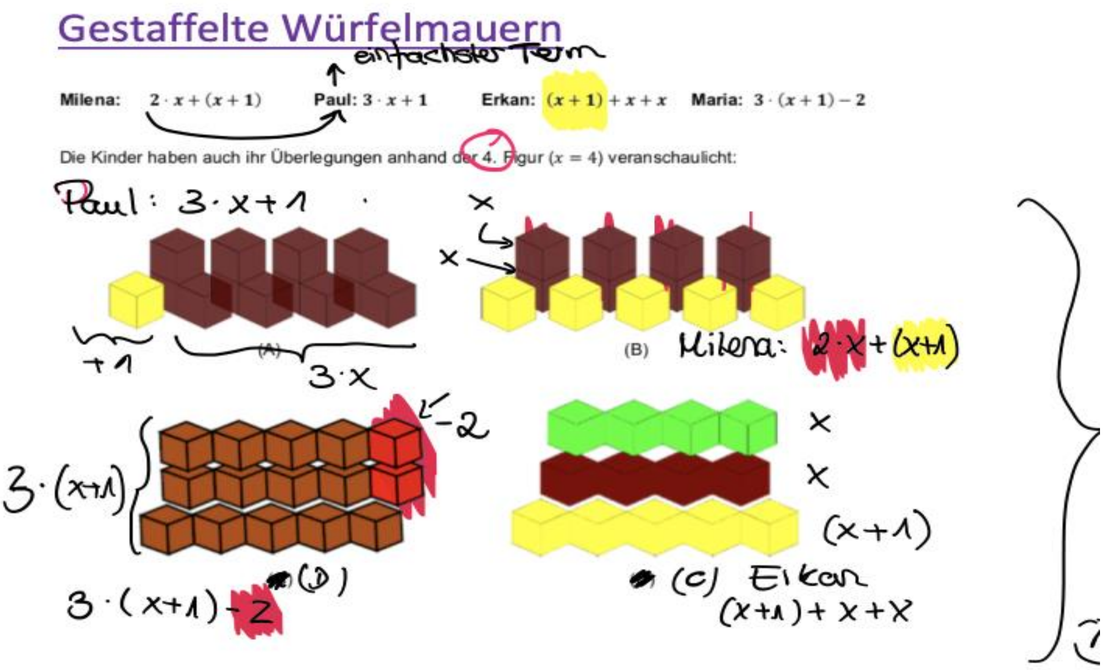


***Abb. 49:** Tafelbild Gestaffelte Würfelmauern - 4 Aufbauformeln mitsamt der ‚Zählweisen'.*

Die Sicherung beginnt mit der letzten Aufgabe. Zuerst werden gemeinsam die vier Terme den 4 Erklärskizzen zugeordnet (Abb. 49) und in jeden Term $x = 4$ eingesetzt. Dann wird die Frage nach „der Gleichheit" der 4 Terme gestellt.

01 FM: *Wie kann man denn jetzt sicher sein, dass alle 4 Terme für eine x-beliebige Zahl, also für jede Zahl, nicht nur für 4, sondern auch für 5, 6, 7, 8, 9, 100 … richtig sind und immer die richtige Anzahl an Würfeln hat?_*

02 Paula: *Also, wenn man sich die Mauern, so wie wir da ähhh angezeichnet haben, anschaut, sieht man, dass jetzt alle nur gucken wollen, … also der Grundgedanke war derselbe, nur dass man das anders anzeichnen kann?*

03 FM: *Hmmm.*

04 Linda: *Also man kann das halt überprüfen, wenn man für x eine Zahl einsetzt, also eine, die man bis jetzt nicht eingesetzt hat und überprüft, ob das funktioniert, also ob bei allen dasselbe Ergebnis ist.*

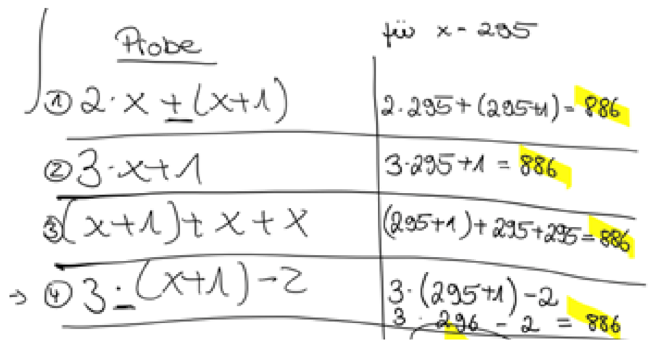


***Abb. 50:** $x = 295$ wird in alle vier Terme eingesetzt.*

Hier wird schon die Beschreibungs- und die Einsetzungsebene genannt. Letztere wird aufgegriffen und auf Vorschlag eines Schülers wird $x = 295$ in alle 4 Terme eingesetzt. Die Klasse wir dazu in 4 Gruppen eingeteilt und ein jeder rechnet mit einem der vier Terme. Gemeinsam wir dann festgestellt, dass der Termwert tatsächlich immer 886 ist (Abb. 50). Es sind jetzt also schon zwei Zahlen ($x = 4$ und $x = 295$) eingesetzt worden.

05 FM: *Jetzt ist halt nur die Frage, hab ich jetzt Lust, das nochmal wieder und nochmal wieder und nochmal wieder zu machen? Natürlich hab ich irgendwie die Vermutung, dass das wahrscheinlich immer passen wird. Die Paula hat ja grade schon gesagt „irgendwo ham' ja alle den gleichen Grundgedanken" gehabt und auch beim Einsetzen und Rechnen habt ihr ja vielleicht auch gesehen, irgendwo ist das im Prinzip alles ähnlich, was wir hier tun. Und in den weiteren Aufgaben habt ihr ja auch schon Terme vereinfacht, um zu sehen, was als vereinfachter Term rauskommt* [Diese Äußerung bezieht sich auf die Umformungstätigkeiten der oben vorgestellten Distanzaufgaben]. *Vielleicht kriegen wir das bei einem, bei dem ersten Term auch schon mal hin* [schreibt „Terme vereinfachen" und darunter $2 \cdot x + (x + 1)$(①)] ___ *Wie können wir den Term* $2 \cdot x + (x + 1)$ *vereinfachen?*

06 Jane: *Also man kann ja, 2 mal x, also gibt es ja dann insgesamt 3 mal des x in dieser Rechnung und dann kann man direkt auch 3 mal x rechnen und dann nur noch den Einen dazurechnen, also 3 mal x plus 1.* [FM schreibt $3 \cdot x + 1$ unter $2 \cdot x + (x + 1)$, lässt aber Platz dazwischen (②)]

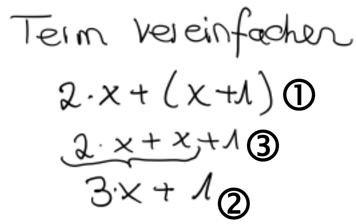


Abb. 51: *Der Term* $2 \cdot x + (x + 1)$ *wird vereinfacht.*

07 FM: ___ *Was hat Jane denn mit der Klammer gemacht?*

08 Raphael: *Die hat er weggemacht!*

09 FM: *Genau. Warum darf ich das? …. Ich darf doch nicht immer in jedem Term, wenn ich lustig bin, einfach Klammern weglassen.*

10 Linda: *Das Distributivgesetz? … Oder Klammerregel?*

11 FM: *Versucht doch das erstmal anschaulich zu erklären. Wir müssen jetzt noch kein Gesetz dazu benennen, sondern es geht jetzt hier erstmal drum: „Was rechne ich denn da?"* ___ [keine Reaktion der Schüler] *Also gucken wir uns nochmal die Terme an* [zoomt am Beamertafelbild auf die 4 Terme aus Abb. 49] *Wenn wir an die Reihenfolge denken, in der wir uns're Terme ausrechnen müssen, was mach ich dann immer zuerst in einem Term.*

12 Raphael: *Also, man muss ja immer die Klammer zuerst rechnen, aber wenn ein Plus vor der Klammer steht, dann kann man die Klammer auch einfach wegmachen?*

13 FM: *Ist euch das allen klar? … Hier unten* [markiert den Term $3 \cdot (x + 1) - 2$ in Abb. 49] *steht ja einmal vor der Klammer, dann darf ich das nicht einfach weglassen, aber hier in dem Term* [zeigt auf $2 \cdot x + (x + 1)$ in Abb. 51] *steht ja einfach ein Plus davor, das heißt, ich darf da eine Klammer setzen, wenn das für mich sinnvoll erscheint* ____ *aber ich muss nicht.* [schreibt $2 \cdot x + x + 1$ zwischen die Terme (③)] *und dann kann ich das hier* [setzt eine geschweifte Klammer um $2 \cdot x + x$] *zusammenrechnen zu* $3x + 1$.

Frau Müller besteht zunächst darauf, es erstmal *„anschaulich“*, ohne Benennung eines Gesetzes, zu erklären (11), lässt aber dann die implizite Nennung der Klammerregel *„aber wenn ein Plus vor der Klammer steht, dann kann man die Klammer auch einfach wegmachen“* (12) doch zu.
Sind jetzt die Rechengesetze *„anschaulich“* oder sind sie es nicht? So sind wohl dann anschaulich, wenn man sich in ihnen die durch die Variablen referenzierten Zahlen vorstellt. Vielleicht hat ja Frau Müller Raphaels Äußerung so aufgefasst, dass er über Zahlen spricht und nicht „bloß“ eine Regel nennt und vielleicht hat Raphael dies auch tatsächlich getan. Hier wäre es vielleicht angezeigt gewesen, gemäß des Credos „Symbole stehen für Zahlen“ auf die dahinterstehenden Zahlen hinzuweisen. Es fällt in obiger Sequenz ohnehin auf, dass gar nicht mehr von den Zahlen gesprochen wird, sondern nur noch von den Variablen: „Beware of the addictive power of algebraic manipula-tions“ (Kieran & Sfard 1999) und der dem Kalkül inhärente Kraft, dass durch das inhaltsinvariante (denkentlastende) Operieren mit Symbolen die semantische Ebene der Zahlen verloren gehen kann. Die Mathematiklehrkraft, die ja schon eine ganze Weile erfolgreich Algebra betreibt und bei der, die durch die Symbole referenzierten Zahlen stets „mitschwingen“, vergisst schnell, dass es den Schülern oft nicht so geht. Oft verlieren Sie im Kalkül den Bezug zu den Zahlen. Deshalb kann man als Lehrkraft m. E. am Anfang die Referenzebene der Zahlen gar nicht oft genug bewusst machen. Schon 1906 schreibt der Mathematiker Wright:

> *“There should never be any difficulty to pass from the symbol to the thing signified (and for quite a while at least the meaning of the symbol should be kept constantly in the foreground). This may be achieved by continually replacing the letters which represent numbers by actual numbers. … the numerical evaluation of expressions by the substitution of specific numbers for letters cannot readily be overdone in the beginning algebra.”* (ebd. 1906, S.297-298).

Nun aber weiter mit dem Plenumsgespräch und der Frage nach „der Gleichheit“ der vier Terme. Zuletzt wird gezeigt, dass der Term $2x + (x + 1)$ durch Umformen in $3x + 1$ übergeht (Abb. 44):

15 FM: Und was hab ich jetzt durch meine Vereinfachung gezeigt?

14 Paula: *Also, da sieht man dabei auch, …, aber ich weiß jetzt nicht, wo das drauf hinausläuft? …. Aber, also, dass Pauls Term der Einfachste ist?*

15 FM: *Pauls Term ist der Einfachste, ok, soviel können wir schonmal sagen. Und was haben wir nämlich gemacht mit Lenas Term?*

16 Melinda: *Den hat man eigentlich zu Pauls Term gemacht. Das ist alles eigentlich der gleiche Term, halt nur anders aufgeschrieben.*

17 FM: *Genau. Wir haben ihn umgewandelt zu Pauls Term, also wir haben aus Milenas Term Pauls Term gemacht und festgestellt: Das ist der „Gleiche“, das ist der gleiche Term, ich kann ihn umwandeln in den Andern. ___ Wir machen das hier nicht mit allen Termen, wir könnten aber, wenn wir das geübt haben, dann können wir alle Terme in Pauls Term umwandeln.*

Hier wird nicht nur thematisiert, wie man Milenas Term vereinfacht, sondern auch, dass damit die Gleichwertigkeit zu Pauls Term nachgewiesen werden kann: Wenn sich ein Term durch

Umformen in einen zweiten Term überführen lässt, so sind beide Terme *gleichwertig*. Dieses Umformen wird weiter thematisiert, indem nun gemeinsam die Umformung des Erklärtextes rekapituliert wird.

***

Episode 13 – Vereinfachung von $(x \cdot 2) \cdot 2 + 4 + x$ und die Rechengesetze der Zahlen

01 FM: *Also wer kann mal Susis Term versuchen zu vereinfachen?* [Schreibt $(x \cdot 2) \cdot 2 + 4 + x$ an die Tafel] (Abb. 52)

02 Jane: *X mal 4 plus, also äh plus Klammer auf, x plus 4, Klammer zu* [$x \cdot 4 + (x + 4)$].

03 FM: *Da hast du viele Schritte auf einmal gemacht. Dass du da x mal 4 hinschreiben willst, ist ja richtig, aber was hast du dabei gerechnet?*

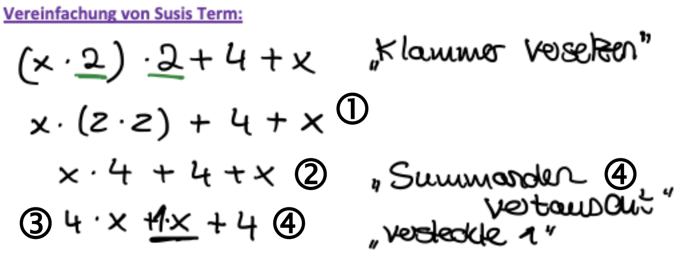


Abb. 52: *Susis Term*

04 Jane: *Also ich habe vorne 2 mal 2 plus gerechnet, dass sind dann x mal 4 […] ja.*

05 Linda: *Also x mal 4 darauf kommt man, weil man darf ja die Klammern versetzen und dann kann man x mal in Klammern 2 mal 2* [FM schreibt „Klammern versetzen" und darunter $x \cdot (2 \cdot 2) + 4 + x$ (①)] *und x mal 2 mal zwei, das sind x mal 4 und dann kommt da x mal 4 raus.*

05 FM: ___ *und dann steht da x mal 4 plus 4 plus x* [schreibt $x \cdot 4 + 4 + x$ (②)] *Und? Kann ich das noch einfacher machen?*

06 Mario: *Also ich glaub 5 mal x. Weil x mal 4 ist ja 4 mal x und dann noch ein x sind 5 mal x und dann plus 4.*

07 FM: *Genau! Also da hast du jetzt auch wieder viele Schritte auf einmal gemacht. Zuerst x mal 4 ist 4 mal x* [schreibt $4 \cdot x$(③)] … *Kurz: Darf ich das?*

08 Emma: Ich glaube schon.

09 FM: *Ja, darf ich machen, ich darf vertauschen: Kommutativgesetz. Die Gesetze machen wir nächste Stunde … ähhh, und dann hast du gesagt, dann ist da hinten ja noch 'n x , dann hast du also sortiert und gesagt, ich schreibe mir mal das x dahin, weil ich sage das x gehört da dazu* [schreibt $4 \cdot x + x + 1$(④)], *also habe ich „Summanden vertauschst"* [schreibt das auch daneben (④)] . *Kurz: Darf ich das?* ____

10 Jane: *Ja!*

11 FM: *Genau. Warum?*

12 Paula: *Wegen dem Kommutativgesetz der Addition.* [FM nickt zustimmend]

13 FM: ___ *Und wenn ich das zusammenrechne, hab‘ ich da 5 mal x plus 4 stehn* [schreibt $5 \cdot x + 4$ (⑤)]. *Ist das euch klar, dass 4 mal x plus x, 5 mal x ergibt?* ___ *Wie viel x ist denn, dass, wenn ich so ’n x da stehn hab?*[FM zeigt auf das einzelne x in ④] ___

14 Raphael: *Also x ist ja im Grunde 1 mal x , und 4 mal x plus 1 mal x ist halt 5 mal x* [FM ändert das einzelne x in ④ in $1 \cdot x$ um und unterstreicht dies]

15 FM: Genau. Wir haben hier quasi so ‘ne „versteckte 1“ (⑥).

Hier wurde das kleinschrittige Umformen des Terms $(x \cdot 2) \cdot 2 + 4 + x$ des Erklärtextes nochmals rekapituliert. Es ist klar, dass Schüler später viele der Schritte simultan und im Kopf ausführen und einige Schüler machen das ja schon jetzt (02, 06). Doch eine belastbare Grundlage für eine solch parallel verarbeitende Prozessabfolge kann am Anfang nur durch kleinschrittiges Umformen gemäß

$$(x \cdot 2) \cdot 2 + 4 + x = x \cdot (2 \cdot 2) + 4 + x = x \cdot 4 + x + 4 = 4x + x + 4 = 5x + 4$$

und das explizite Benennen der dabei angewandten Rechenregeln (Assoziativgesetz der Multiplikation und die Kommutativgesetze der Multiplikation und Addition) geschaffen werden.

3 Gleichwertigkeit von Termen

Nach den Besprechungen der Distanzaufgaben wird nun der Begriff der Gleichwertigkeit eingeführt.

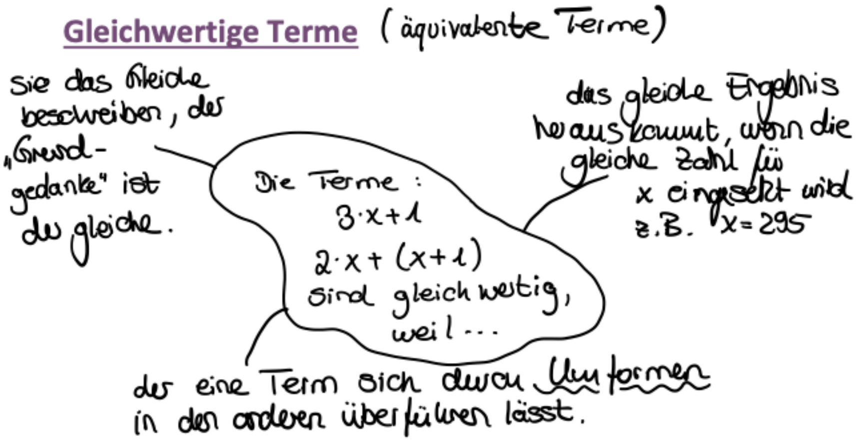


Abb. 53: *Tafelbild – Gleichwertige Terme*

***

Episode 14 – Die drei Facetten der Gleichwertigkeit und warum die Rechengesetze so wichtig sind

Der Satzanfang in der Blase *„Die Terme* $3 \cdot x + 1$ *,* $2x + (x + 1)$*.sind gleichwertig, weil …“* (Abb. 53) ist schon an die Wand projiziert.

01 FM: *Heut' schauen wir uns an, was für Möglichkeiten wir haben zu begründen, warum zwei Terme „**gleichwertig**" sind. Also wir haben gestern gesagt, „das Gleiche ausdrücken" oder so, der Mathematiker sagt dazu „gleichwertig". Wir hatten da ja – kurz zum Reinkommen – verschiedene Personen, die uns die Anzahl der Würfel in einer Würfelmauer beschreiben wollten und da hatten wir uns gestern schon die Terme angeguckt, die zugeordnet und haben uns dann überlegt: Warum sind die gleichwertig! ___ Da war der Term von Paul und von Milena* $3 \cdot x + 1$ *und* $2x + (x + 1)$. *Warum sind diese Terme gleichwertig? ___ Dazu haben wir gestern verschiedene Dinge ausgeführt und gemacht.*

02 Paula: *Weil der Grundgedanke eigentlich immer der Gleiche ist?*

03 FM: Mhmmm. *Also sie beschreiben quasi das Gleiche, sie meinen das Gleiche* ___ [schreibt „sie das ***Gleiche beschreiben***, der „Grundgedanke" ist der gleiche"] *Genau. Daran können wir schon was erkennen, denn wir haben ja immer die gleiche Würfelmauer und die haben sich nur unterschiedliche Dinge dazu überlegt. Und, was haben wir noch dazu gesagt?*

04 Linda: *Also man darf ja die Klammer wegnehmen und 2 mal x plus x ist ja 3 mal x und dann noch plus 1.*

05 FM. *Genau. Also ich kann den einen durch* ***Umformen*** *in den andern umwandeln* ___ *[*schreibt „der eine Term sich durch Umformen in den anderen überführen lässt"*] Genau, das war auch ein Grund. Und, was haben wir gestern noch gemacht? Da hatten wir ja ganz fleißig gerechnet.*____

06 Maxi: *Ähhh, also, sie hatten uns in Gruppen eingeteilt und jede Gruppe hat was anderes gerechnet und wir haben alle das Gleiche herausbekommen.*

07 Karl: *Jeder hat mit einem anderen Term gerechnet.*

08 FM: *Genau: Also was genau hatten wir nochmal gerechnet?*

09 Jona: *Wir haben x durch irgendeine Zahl ersetzt.*

10 FM: *Wir haben irgendeine Zahl eingesetzt und es kam das Gleiche raus und das ist ja auch ein Indiz dafür, dass die Terme gleichwertig sind. Also, wenn wir das Gleiche einsetzen muss auch das Gleiche rauskommen. Da hatten wir gestern 295 eingesetzt* [macht das entsprechende Tafelbild von gestern , in dem x=295 in alle Terme eingesetzt wurde, sichtbar (Abb. 44)] *Das hätten wir jetzt noch für irgendwelche anderen Zahlen machen können, aber da hatten wir dann gesagt, da haben wir jetzt keine Lust mehr, das jetzt für „jede" Zahl zu machen ... Ok,* [schreibt und spricht: „das ***gleiche Ergebnis herauskommt***, wenn die gleiche Zahl für x eingesetzt wird, z. B. x=295"]

Hier wurden kurz und bündig die drei Aspekte der *Gleichwertigkeit* eingeführt, indem das Vorgehen mit zwei der vier Terme der „Gestaffelten Würfelmauern" als generisches Beispiel dahergenommen wurde. Die Grundlagen sind gelegt und um jetzt das Umformen auf alle möglichen - insbesondere auf all die selbst aufgestellten - Terme anwenden zu können, braucht es alle Rechengesetze für Zahlen (fast alle wurden ja schon genannt):

11 FM. *Gut. Damit haben wir jetzt also wiederholt, wann zwei Terme* ***gleichwertig*** *sind. Wir beginnen jetzt damit, dass ihr dieses Tafelbild übernehmt, denn ihr sollt auch wissen, wann sind Terme gleichwertig , oder auch äquivalent* [schreibt in Klammern „äquivalent" hinter die Überschrift]. *Diese drei Punkte sollt ihr abgeschrieben haben und wenn ihr dann fertig seid, dann schreibt ihr schonmal auf welche „Rechenwege" ihr noch kennt. Wir haben gestern schon so ein paar angesprochen, wenn ihr die Namen kennt, schreibt ihr die auf, wenn ihr nur wisst, was man damit machen darf beim Multiplizieren, Addieren und so, schreibt ihr da für euch nur eine Stichpunktliste, was für Regeln ihr da so kennt. Und die sammeln wir dann gleich. ___ also zuerst abschreiben und dann geht es weiter mit den Rechenregeln.*

Danach werden die Rechengesetze gesammelt. Die Schüler nennen die Namen der ihnen bekannten Gesetze, können diese aber nicht immer auf Anhieb mit Inhalt füllen. Die Rechengesetze werden gemeinsam wiederholt und durch Zahlenbeispiele hinterlegt. Es entsteht ein ganz ähnliches Tafelbild (Merkhefteintrag *Rechengesetze*) wie im vorherigen Abschnitt in Abbildung 48.
Jetzt sind also die Rechengesetze der Zahlen gesammelt. Diese und nur diese braucht man um regelgeleitet Terme umzuformen. Und ein so verstandenes regelgeleitete Umformen ist auch der zentrale Fokus des weiteren Kalkülaufbaus. Dementsprechend hängt Frau Müller nach der Sammlung der Rechengesetze eine, m. E. durchaus angezeigte, „Predigt" hintendran:

12 FM: *So, das war jetzt langwierig, all diese Gesetze nochmals zu erinnern und in den verschiedenen Formen aufzuschreiben, aber trotzdem war das sehr wichtig, damit wir wissen: Was dürfen wir und was dürfen wir nicht beim Termumformen. Und vor allem: Wo können wir nachgucken, was wir denn dürfen, wenn wir Terme ineinander umformen wollen, um zu gucken, ob Terme gleichwertig sind. D.h. um dieses Tafelbild könnt ihr euch einen großen roten Kasten machen. Und wenn ihr Terme ineinander umformt und ihr wisst grade nicht, darf ich das oder darf ich das nicht, dann könnt ihr da nachgucken.* **Das sind die Regeln, die ihr dann anwenden dürft und sollt. Andere Regeln gelten so nicht** *und dürft ihr nicht einfach so machen. Also ich werd' euch jetzt mal keine Negativbeispiele geben, das ist es ja gar nicht wert, was ihr da alles nicht machen dürft. Aber hier habt ihr jetzt alles stehen, was ihr machen dürft.*

***

4 Klassenarbeit

Auch die Schüler dieser Klasse schrieben nur eine Klassenarbeit in diesem Corona-Halbjahr. Wieder waren 2 der 4 Klassenarbeitsaufgaben aus dem Bereich Algebra (Kasten 16 und 17). 21 Schüler und Schülerinnen haben teilgenommen. In Aufgabe 3 (Hölzchenkette) geht es um das Aufstellen und Umformen von Termen. Aufgabe 4 (Würfelpallisaden) problematisiert, ob man mit einer Einsetzung überhaupt die Gleichwertigkeit von Termen nachweisen kann.Die allermeisten Schüler hatte keine Probleme bei Aufgabe 3 a)-c). Von den 21 Schülern wurden 25 unterschiedliche Terme aufgestellt, 21 davon sind korrekt und 4 falsch (Abb. 52). Selbst die falschen Terme sind nicht „ganz falsch". Die Terme $x \cdot 6 + 5$ und $6 + x \cdot 5$ sind nur deshalb falsch, weil die Schüler in ihren Erklärungen angeben, dass x für die Nummer der Figur, und nicht etwa für die um eins verminderte Figurennummer, steht.

Der Term $6 \cdot x - 2$ wurde nur für $x = 3$ konstruiert und dafür liefert er auch das richtige Ergebnis. Und in der Rechenkette $x \cdot 5 = x + 1 = x$ taucht hier nochmals, die schon in

Abschnitt VI besprochene und längst ausgestorben geglaubte, Anhäufung von Konventionsverletzungen (Abb. 53).

Bei den Umformungen

$$①: (x+1) + 2x + x \to 4x + 1$$
$$②: (x \cdot 2) \cdot 2 + x + 1 \to 5x + 1)$$

zeigen sich die folgenden Ergebnisse.

Ein Schüler bearbeitet ① nicht, 12 Schüler (57 %) richtig, davon 10 mit Angabe der entsprechenden Rechengesetze. 8 gelingt die Termumformung ① nicht.Die Termumformung ② wird von 2 Schülern nicht bearbeitet. 13 Schülern (62 %) gelingt die richtige Umformung, davon 8 mit Angabe dazu passender Gesetze. 7 Schülern gelingt die Termumformung nicht bis zum „einfachsten“ Term.Alle Schüler, die in der Lage sind, passende Rechengesetze anzugeben, gelingt auch die Termumformung.

Aufgabe 3 (Hölzchenkette)

Jemand hat aus Streichhölzern folgende Kette gelegt:

1 2 3 ... usw.

a) Notiere in der Tabelle für die ersten 5 Figuren die Anzahl der benötigten Streichhölzer

Figur Nr.	1	2	3	4	5
Anzahl Hölzer	6				

b) Gib einen passenden Term für die Anzahl der Streichhölzer für eine „x-beliebige“ Figurennummer an und erkläre deinen Term.

c) Berechne, wie viele Streichhölzer du für die 101.te Figur brauchst.

Jemand hat zu einer anderen Hölzchenkette folgende vier Terme für die Anzahl der Hölzchen, die man für die x-te Figur braucht, aufgestellt.

$$(1):\ 5 \cdot x + 1 \qquad (2):\ (x+1) + 2x + x \qquad (3):\ (x \cdot 2) \cdot 2 + x + 1$$

d) Am einfachsten sieht der Term $5 \cdot x + 1$ aus.
Vereinfache die anderen Terme Schritt für Schritt, indem du die Rechengesetze für Zahlen anwendest. Gib an, welche Rechengesetze du benutzt hast.

***Kasten 16:** Aufgabe 3 (Hölzchenkette) der Klassenarbeit. Beim Aufstellen der Terme schneiden die Schüler sehr gut ab. Etwa 50% gelingt das Vereinfachen in Teil d) bis zum Ende.*

Korrekte Terme		Falsche Terme	
$x \cdot 5 + 1$:	10 mal	$x \cdot 6 + 5$:	1 mal
$5 \cdot x + 1$:	5 mal	$6 + x \cdot 5$:	1 mal
$(x \cdot 5) + 1$:	1 mal	$6 \cdot x - 2$:	1 mal
$x \cdot 6 - (x-1)$:	2 mal	$\boldsymbol{x \cdot 5 = x + 1 = x}$:	1 mal
$(x \cdot 6) - (x-1)$:	1 mal		
$(x-1) \cdot 5 + 6$:	2 mal		

***Abb. 52:** In der Klassenarbeit aufgestellte Aufbauformeln für die Hölzchenkette.*

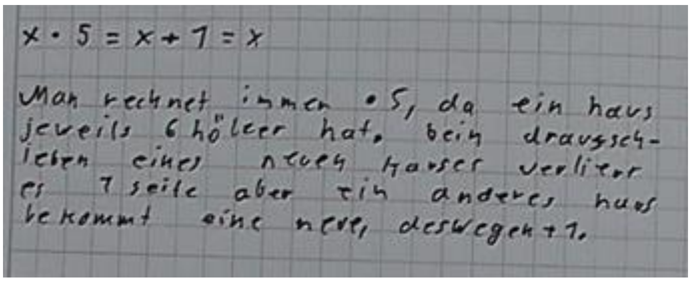
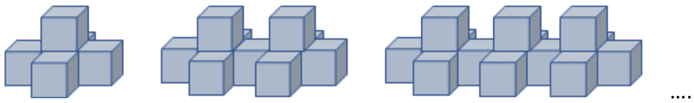


***Abb. 53:** Falsche Schreibfigur.*

Aufgabe 4a) (Kasten 17) beantworten 75% der Schüler richtig, indem sie darauf eingehen, dass bei Moritz Term für $x = 2$ nicht 11 sondern 8 herauskommt. Der Rest versteht die Aufgabenstellung nicht richtig und erklärt auf unterschiedlichste Arten, was hier nicht stimmen könnte (z. B. „Leon hat sich verrechnet“, „Moritz Term passt nicht zu den Würfeln“, „Leon hat falsch gerechnet“).
Die Antworten zu 4 b) differieren stark. 9 Schüler stimmen Leon zu. Drei meinen, dass Leo wohl auch meint, dass man noch einen *„anderen Weg“* (*„Vereinfachen“*, *„Im Würfelbild sehen“*) einschlagen sollte. Drei meinen, weil *„es Zufall sein kann“*, wenn zwei Termwerte gleich sind. Einer meint, dass man *„theoretisch alle Zahlen Einsetzen müsste“* und zwei Schüler vertreten die Ansicht, dass man *„schon mehrere Zahlen“* einsetzen muss.
Aus dem gleichen Grund, dass man schon mehrere Zahlen einsetzen sollte, stimmen zwei Schüler Leon nicht zu. Insgesamt machen dies 6 Schüler. 4 davon stimmen nicht zu, da man beim *„Einsetzen sieht, ob ein Term richtig oder falsch ist“*.
Der Rest bearbeitet die Aufgabe gar nicht (4 Schüler) oder gibt unpassende Antworten (2 Schüler).
Inwiefern das Einsetzen eine hinreichende Möglichkeit zum Nachweis der Gleichwertigkeit sein kann bleibt also ungeklärt (es wurde ja auch nicht geklärt).
Das Symbolische Beschreiben funktioniert auch Wochen später noch recht gut. Das Termumformen noch nicht so (ca. 50% korrekte Lösungen).

Aufgabe 4 (Würfelpallisaden)
Lena und Leo haben jeweils ganz unterschiedliche Terme für die Anzahl der Würfel aufgestellt (siehe Tabelle unten).
Um ihre Terme zu überprüfen, setzten sie Zahlen ein. Hier siehst du die Ergebnisse:



Figur Nr.	Lena: $\boldsymbol{x \cdot 4 + (x+1)}$	Leo: $\boldsymbol{x \cdot 6 - (x-1)}$
1	$1 \cdot 4 + (1+1) = 6$	$1 \cdot 6 - (1-1) = 6$
2	$2 \cdot 4 + (2+1) = 11$	$2 \cdot 6 - (2-1) = 11$

Moritz hat für die Anzahl der Würfel bei den Würfelpalisaden den Term $2 \cdot x + 4$ aufgestellt Er setzt $x = 1$ ein: $2 \cdot 1 + 4 = 6$ und sagt: *„Da bei mir auch 6 rauskommt, stimmt mein Term auch!“*Lena setzt $x = 2$ in Moritz Term ein und behauptet: *„Hier kann etwas nicht stimmen!“.*

a) Was meint Lea damit, wenn Sie sagt, dass hier etwas nicht stimmen kann?
*b) Leo meint.: „Durch Einsetzen kann ich schnell zeigen, dass ein Term **nicht** stimmt. Um aber sicher zu sein, dass ein Term stimmt, reicht das Einsetzen nicht aus.“*
Erkläre, was Leo meint! Stimmst du ihm zu?

Kasten 17: *Aufgabe 4 (Würfelpallisaden) der Klassenarbeit. Inwiefern das Einsetzen eine hinreichende Möglichkeit zum Nachweis der Gleichwertigkeit sein kann ist nicht vollständig geklärt.*

5 Weiter mit dem Termumformen

Jetzt wird das Termumformen geübt, aber nicht mit reinen Umformungspäckchen, sondern in reichhaltigeren Kontexten (oft in geometrischen Umfangs- oder Flächeninhaltskontexten). Jetzt, da man gelernt hat, das Narrativ auch mal auszublenden, schaffen solche Kontexte durchaus die Möglichkeit zu viel reichhaltigeren und konstruktiv vernetzenden Denkhandlungen als das bloße Einüben von Umformungspäckchen.

Nach und nach baut sich endlich genügend Expertise im Termumformen auf, damit man die Gleichwertigkeit der Phase 1 aufgestellten Terme nun auch rechnerisch nachweisen kann. Auch hier wird, wie in der Reihe Zahlenrätsel (Abschnitt VI.III.3., Kasten 11), die Baustellenaufgabe in Präsenzunterricht bearbeitet. Dieses Mal fungiert diese Aufgabe jedoch nicht als zentrale Aufgabe, aus der der Begriff Gleichwertigkeit mitsamt seinen drei Facetten heraus aufgebaut wird, sondern eher als Übungsaufgabe zu Gleichwertigkeit und Termumformen, insbesondere zum Einüben des Distributivgesetzes.

***

Episode 15 – Wenn ich „keine Lust mehr habe", immer wieder Zahlen einzusetzen

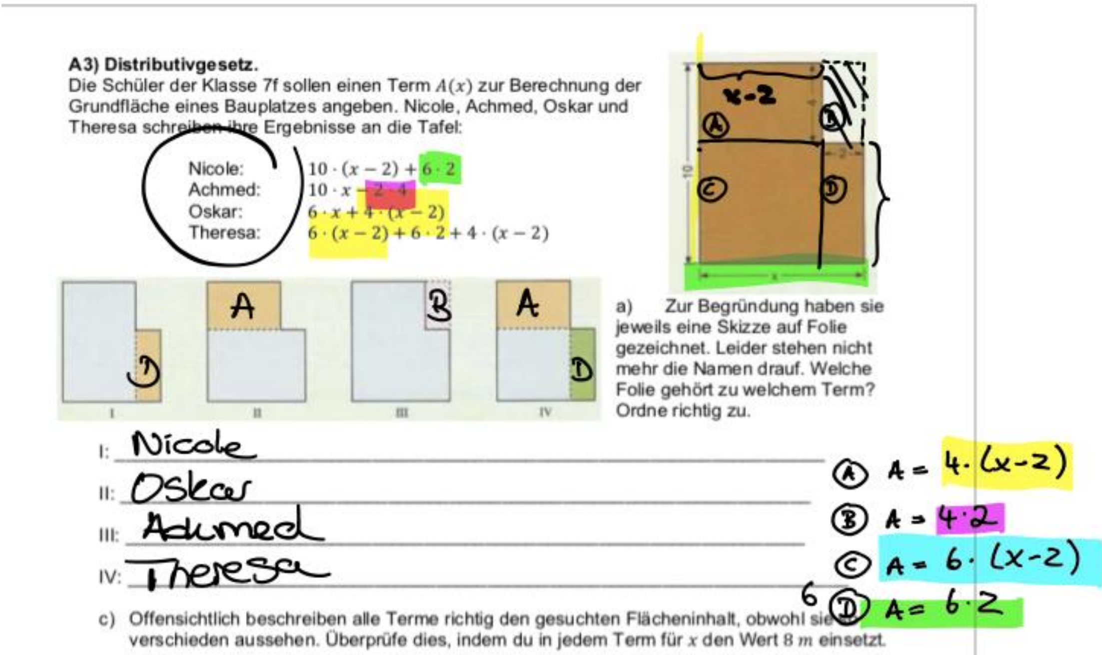


Abb. 54: *Vier „zerlegungsgleiche" Terme für den Flächeninhalt der Baustelle*

Die Schüler haben bei der Baustellenaufgabe (Abb. 54). keine erheblichen Schwierigkeiten, die Terme begründend den Flächenzerlegungen zuzuordnen
Nachdem diese Zuordnungen geklärt sind, und die Schüler erklärt haben, dass alle Terme die Fläche der Baustelle beschreiben, zielt Frau Müller auf die beiden weiteren Facetten der Gleichwertigkeit ab.

01 FM: *Und was könnte ich denn jetzt noch machen, wenn ich mir immer noch nicht sicher bin, ob die wirklich alle* [umkreist an der Tafel die 4 Namen der Kinder] einen gleichwertigen Term haben? ____ *Also ihr habt das jetzt begründet mit einer Situation. Ok, ihr habt gesagt „die beschreiben alle die gleiche Situation", aber ich will es jetzt nochmal überprüfen. Was mach ich dann?* ___

02 Jonas: *Vielleicht irgendeine Zahl für x einsetzen?*

03 FM. *Reicht das? Wenn ich jetzt irgendeine Zahl einsetze für x, reicht das, um zu sagen: Ok, dann sind die alle gleich?*

04 Emma: *Man muss verschiedene Zahlen einsetzen ___ also mehrere.*

05 FM: *Ok, genau. Dann müsste ich also jetzt viel Kopfrechnen … Angenommen, da hätte ich jetzt keine Lust drauf, ich möchte halt auch meine eigenen Algebrafähigkeiten beweisen, um zu zeigen, dass ….*

06 Max: … *Vereinfachen …*

07 FM: *Genau. Ich kann hier alle vereinfachen und gucken, ob die alle „gleich" sind mit dem „einfachsten" Term.*

Hier wurde also nochmals geklärt, dass man *Gleichwertigkeit* auch durch Umformen nachweisen kann. Danach formen die Schüler die Terme um, wobei sie immer noch angehalten werden, ganz bewusst die Rechengesetze einzusetzen und diese auch neben die entsprechenden Umformungsschritte zu schreiben.
Dabei gibt es bei ein und demselben Term auch immer unterschiedliche Wege zum ‚Zielterm' zu kommen, was auch prima zum Anlass genommen werden kann, mit einem bedeutungsvollen Kalkül vertraut zu werden, wenn auch verschiedene Wege gemeinsam explizit gemacht werden. Abb. 49 zeigt das Ergebnis eines solchen Explizitmachens. Beim Vereinfachen des Terms $6 \cdot (x-2) + 6 \cdot 2 + 4 \cdot (x-1)$ wird einmal das Distributivgesetz zum Ausklammern und ein andermal zum Ausmultiplizieren genutzt.

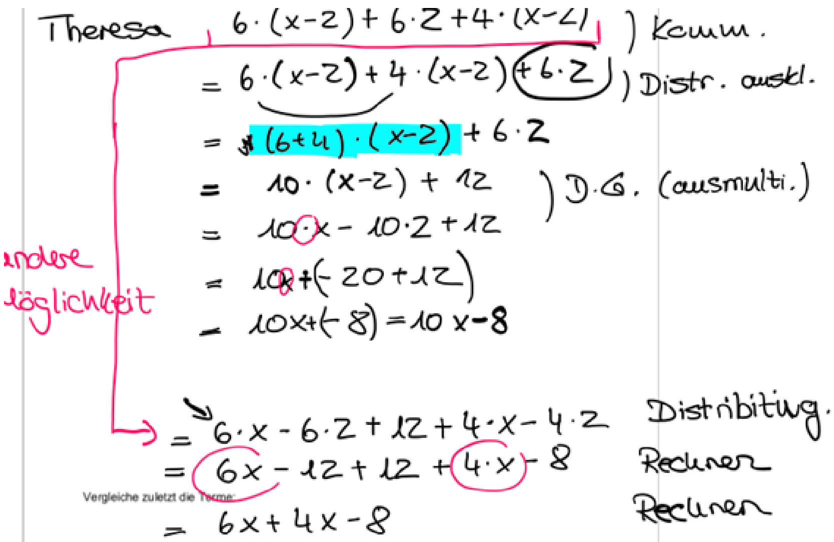


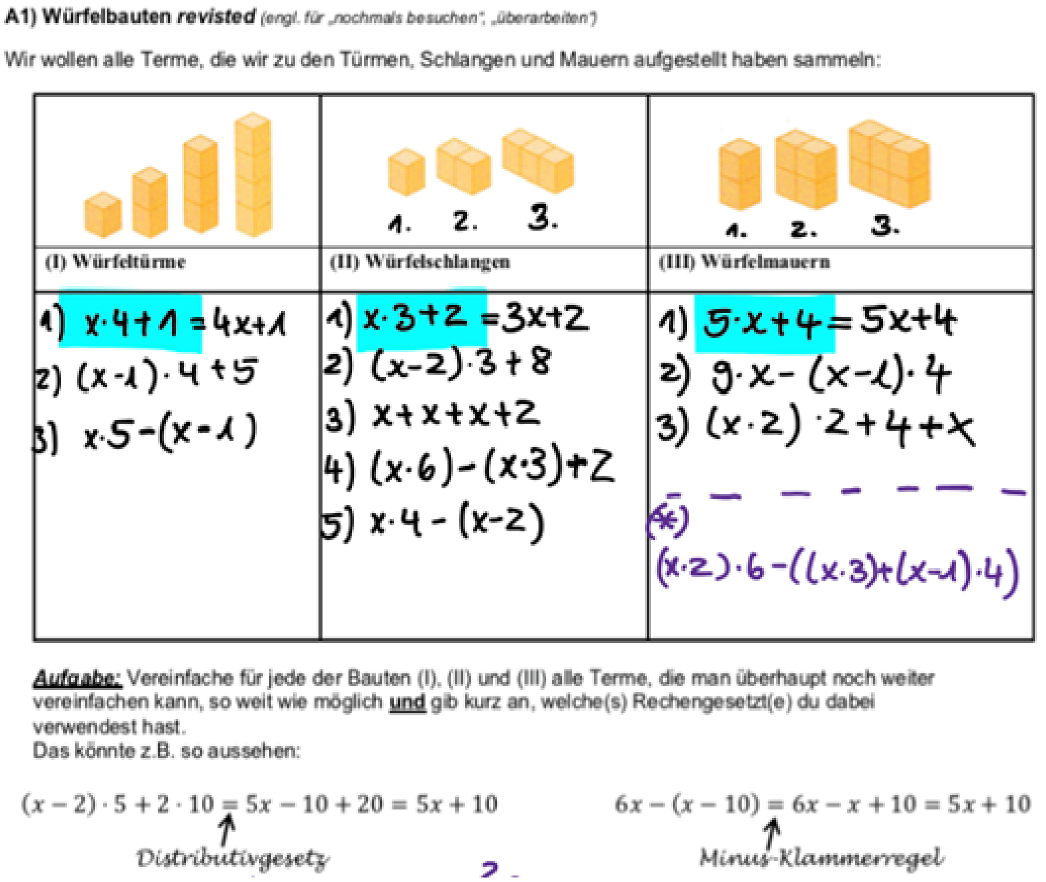
Abb. 55: *Zwei unterschiedliche Wege zum gleichen Zielterm.*

***

Nachdem in Präsenz- und Distanzzeiten noch weiter das Kalkül geübt wurde, ist nun endlich die Zeit reif, zu all die Termen, die ganz am Anfang aufgestellt wurden, zurückzukehren.

***

Episode 16 – Würfelbauten *revisited*



A1) Würfelbauten *revisted* *(engl. für „nochmals besuchen", „überarbeiten")*

Wir wollen alle Terme, die wir zu den Türmen, Schlangen und Mauern aufgestellt haben sammeln:

(I) Würfeltürme	(II) Würfelschlangen	(III) Würfelmauern
1) $x\cdot 4+1 = 4x+1$	1) $x\cdot 3+2 = 3x+2$	1) $5\cdot x+4 = 5x+4$
2) $(x-1)\cdot 4+5$	2) $(x-2)\cdot 3+8$	2) $9\cdot x-(x-1)\cdot 4$
3) $x\cdot 5-(x-1)$	3) $x+x+x+2$	3) $(x\cdot 2)\cdot 2+4+x$
	4) $(x\cdot 6)-(x\cdot 3)+2$	4) $(x\cdot 2)\cdot 6-((x\cdot 3)+(x-1)\cdot 4)$
	5) $x\cdot 4-(x-2)$	

Aufgabe: Vereinfache für jede der Bauten (I), (II) und (III) alle Terme, die man überhaupt noch weiter vereinfachen kann, so weit wie möglich **und** gib kurz an, welche(s) Rechengesetzt(e) du dabei verwendest hast.
Das könnte z.B. so aussehen:

$(x-2)\cdot 5+2\cdot 10 = 5x-10+20 = 5x+10$ — Distributivgesetz

$6x-(x-10) = 6x-x+10 = 5x+10$ — Minus-Klammerregel

Abb. 56: *Sammlung der in einer (Wechselunterrichts-)Gruppe aufgestellten Aufbauterme aus Erarbeitung (I)-(III). Türkis markiert sind die jeweils ‚einfachsten Terme', die ja auch die Zielterme der auszuführenden Umformungskette sind.*

Zuerst werden alle Terme gesammelt, die in der jeweiligen Gruppe aufgestellt wurden (Abb. 56). Die Schüler vereinfachen ca. 30 min lang sehr konzentriert die Terme in Einzelarbeit und suchen dabei nach den Rechengesetzen, die sie benutzen können. Viele Schüler haben dabei sichtlich Spaß, gewappnet mit ihrem Merkhefteintrag zu den Rechengesetzen, den Weg, die begründeten Schritte zum jeweiligen Zielterm zu finden. Dort angekommen haben viele die Freude, das Rätsel geknackt zu haben. Lotte, eine nicht auffallend gute Schülerin, ruft z. B. am Ende einer solchen Rechenkette laut aus: *„Mann! Das macht richtig Spaß."*

> FM: *Ich hab bei ganz vielen gesehn, ihr habt das richtig gut gemacht und ____ es ist nicht schlimm, wenn ihr das nicht alle gleich schnell macht. Einige sind da halt schon super drin, die kriegen das halt superschnell hin und andere brauchen noch ein bisschen länger, das ist überhaupt nicht schlimm. Wichtig ist nur, dass ihr wisst, welches Gesetz ihr anwenden könnt und ihr werdet selber merken, ihr werdet selber immer schneller. Aber es ist gar nicht das Ziel so schnell wie möglich umzuformen, sondern so richtig wie möglich umzuformen und genau zu wissen, welches Gesetz darf ich verwenden, welches Gesetz darf ich nicht verwenden, weil es dieses Gesetz gar nicht gibt.*

Auch wenn es vielen Schülern sichtlich Spaß macht, das Termumformen bleibt herausfordernd. Viele Schüler haben z. B. Probleme mit dem Term $9 \cdot x - (x-1) \cdot 4$[74] (Abb. 57). Das Problem dabei ist , dass hier das Distributivgesetz und die Minusklammerregel (respektive zweimal das Distributivgesetz) direkt hintereinander ausgeführt werden muss. Aber was hat Vorrang?

Das Vereinfachen dieses Terms wird gemeinsam im Plenum durchgeführt:

> 01 FM: *Erstmal, wenn wir uns den jetzt so angucken – egal ob ihr den gemacht habt oder nicht – was findet ihr denn an dem so schwierig? Warum weiß ich da vielleicht nicht direkt, was ich zu tun habe.*

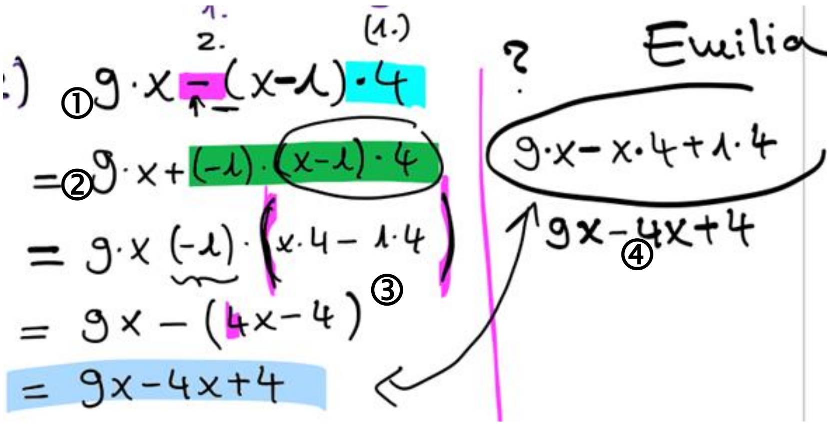


Abb. 57: *Mehrere Wege des Vereinfachens von* $9 \cdot x - (x-1) \cdot 4$*. Beim Termumformen muss und kann sich ein Struktursinn herausbilden.*

> 02 Danielle: *Also ich hatte erstmal die Probleme, dass ich nicht wusste, ob ich die Minus-Klammerregel anwenden soll oder ob ich das Distributivgesetz ….benutzen soll.*

> 03 FM: *Genau. Das kann ich auch gut verstehen ___ Ich hab euch ja auch gesagt, dass die Minus-Klammerregel ja auch quasi das Distributivgesetz ist, vielleicht hilft euch* ***das*** *ja.*

Frau Müller schreibt den Term zu $9 \cdot x + (-1) \cdot (x-1) \cdot 4$ (①) um und lässt diese Umformung von Schülern erklären.

> 04 FM: [markiert den Teilterm $(-1) \cdot (x-1) \cdot 4$] *Was würdet ihr vorschlagen, was ich jetzt tun kann.*

> 05 Anouk: (leise) *Zuerst mit den Zahlen rechnen vielleicht ___ Zuerst mal 4 ____ also minus 1 mal 4? Nööö … 4 mal x? …* […]

> 06 FM: *Wir können das jetzt auf verschiedene Arten und Weisen machen, aber wenn ich das jetzt nur mal 4 machen möchte, was steht denn da* [schreibt $9 \cdot x + (-1)(\quad\quad)$ und zeigt auf den Whitespace zwischen den Klammern].

[74] Die Komplexität dieses Terms gründet auch im Aufbaunarrativ: Jeder von Figur zu Figur hinzugekommen zweistöckiger Würfelturm hat 9 sichtbare Quadrate. Da diese Würfeltürme aber zu einer Würfelmauer zusammen geschoben werden, werden $(x-1)$- mal 4 Quadrate zu viel gezählt. Wenn 4-mal $(x-1)$ Quadrate zuviel gezählt worden wären, wäre der Term $9x - 4 \cdot (x-1)$ und wahrscheinlich einfacher weiterzuverarbeiten.

07 Lisa: *x mal 4 minus 1 mal 4.*

08 FM. *Genau. Das kann ich machen.* [schreibt $9 \cdot x + (-1) \cdot (x \cdot 4 - 4)$ (②)] *Da muss ich aber meine Minusklammer dabei trotzdem davor steh'n lassen, mit der minus 1. Weil das immer noch eine Multiplikation ist.*

Eine weitere Alternative wäre gewesen, den Term $9 \cdot x + (-1) \cdot (x - 1) \cdot 4$ zuerst in $9 \cdot x + (-4) \cdot (x - 1)$ umzuschreiben (Kommutativgesetz) oder auch direkt den Ausgangsterm in $9 \cdot x - 4 \cdot (x - 1)$. Die Komplexität des Terms offenbart sich eben auch in der Vielzahl möglicher zielführender Wege.

Frau Müller macht den nächsten Schritt [$9 \cdot x + (-1) \cdot (x \cdot 4 - 4) = 9x - (4x - 4)$] vor und zwei aufgerufene Schüler vereinfachen dann zu $9x - 4x + 4$ mit Angabe der Minusklammerregel (③).

09 Emilia: *Ich habe eine Frage ob das richtig ist. Ich hab im 1. Schritt 9 mal x minus x mal 4 +1 mal x.*

10 FM: *Plus 1 mal x?*
11 Emilia: *Ähhh, nö. Plus 1 mal 4.*

12 FM: [schreibt $9 \cdot x - x \cdot 4 + 1 \cdot 4$ an die Tafel (④)] *Was sagen die anderen? Könnt ihr das auch beurteilen: Ist das richtig? ___ Jetzt wollen wir wissen: Ist Emilias Term auch der?*[verbindet Emilias Term mit dem Term $9x - 4x + 4$ durch einen Doppelpfeil]

13 Lotte: *Also, wenn man das ausrechnet, dann kommt auch genau das raus ____ also, 9 mal x minus 4 x und dann plus 4.*

14 FM: *Genau. Du* [zeigt auf Emilia] *hast das grade in einem gemacht, du hast in einem diese 4 ausmultipliziert und dann die Minusklammer da reingezogen. Aber ihr müsst das nicht alle im Kopf können. Wenn ihr das im Kopf könnt, dann ist das richtig gut alles auf einmal gemacht, so kann man es auch machen, aber ihr müsst das nicht, ihr dürft das schrittweise machen, da müsst ihr nur richtig klammern.*

15 Emilia: *Also vor der Klammer war ja ein Minus und dann hab ich hinten das Distributivgesetz angewendet, also mal 4, und dann hab ich die Vorzeichen umgedreht, weil da ja noch das Minus vor der Klammer stand.*

***

Emilia gelingt es also schon, die ‚$\cdot 4'$ hinter und das ‚$-$„ vor der Klammer parallel zu verarbeiten, indem sie zuerst ausmultipliziert und dann das Vorzeichen umdreht[75]. Bei solch komplexen Termstrukturen, insbesondere wenn – wie hier – zwei Gesetze miteinander wetteifern, braucht es gar nicht zu wundern, wenn die Schüler damit Schwierigkeiten haben und sich unsicher sind, ob ihre Umformungen denn so stimmen. Deshalb ist es wichtig die Strategie des

[75] Es ist übrigens nicht richtig, dass die Minusklammerregel einfach nur ein Spezialfall des Distributivgesetzes ist. Sie lässt sich zwar mit demselben erklären, aber befindet sich auch in der kognitiven Verwandtschaft von Gegenzahl und dem Aufeinandertreffen von Vor- und Rechenzeichen. In der Arithmetik der negativen Zahlen wird ja ein Minus vor der Klammer aufgelöst, indem das Vorzeichen umgedreht wird, z. B. $3 - (+3) = 3 - 3$ oder $3 - (-3) = 3 + 3$. Überträgt man dieses Zahlenrechnen auf Terme, so landet man bei der Minussklammerregel. Es ist gut möglich, dass bei Emilia eher diese kognitive Verwandschaft mitschwingt.

Testeinsetzens auch als Kontrollstrategie des Termumformens einzuführen und zu pflegen. Zwei Typen von Aufgaben eignen sich dazu (siehe Anhang D Aufg. 6,7) :

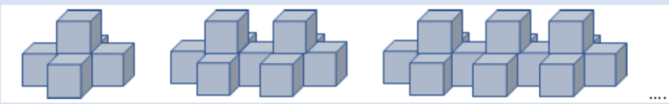
> Typ 1: Es soll durch Einsetzen von 1 oder 2 Zahlen in Ausgangs- und Endterm entschieden werden, ob eine vorgegebene Kette von Termumformungen richtig oder falsch ist. Eine so aufgespürte falsche Umformung soll dann korrigiert werden.
>
> Typ2: Komplexere Vereinfachungen werden selbst durchgeführt und durch zwei Testeinsetzungen überprüft.

Das Hauptproblem bei beiden Aufgaben ist, dass gerade die Schüler, denen das Termumformen schwer fällt, auch arithmetische Probleme beim Ausrechnen von reinen Zahlentermen haben. Zudem sind sie sich dann oft nicht sicher, ob z. B. zwei Testeinsetzungen reichen.
Da es ja hier vornehmlich nicht darum geht, Zahlenterme korrekt auszuwerten, sollte man die Schüler anhalten möglichst „einfache“ Zahlen, z. B. 0 und 1 oder 1 und 2 einzusetzen. Und man sollte m. E. verraten, dass man sich nach zwei Übereinstimmungen wirklich sicher sein kann. Am besten mit dem Hinweis darauf, dass der wahre Grund dafür erst im nächsten oder übernächsten Jahr geklärt werden kann (man vergesse dann aber nicht, diese bloß mitgeteilte Regeln später, z. B. bei quadratischen Termen, entsprechend zu erweitern).

6 Lineare Gleichungen

Gleichungen der Form $ax + b = c$

Der Übergang von den Termen zu den Gleichungen findet wieder im Rückgriff auf die Aufbauformeln statt:



Der Term $5x + 1$ gibt die Anzahl der an Würfel der x-ten Figur der Folge aus Würfelpallisaden an. *Die wievielte Figur kann man 145 Würfeln bauen?*

Die Schüler lösen von sich aus die Gleichung ‚$5x + 1 = 145$′ durch *systematisches Probieren*, mehr aber noch durch *Rückwärtsrechnen*. Im Plenum wird geklärt, dass eine jede solche Gleichung direkt auch eine Frage impliziert, nämlich:

$5x + 1 = 145$:
„Für welche Zahl x ist die Zahl $5 \cdot x + 1$ gleich der Zahl 145?“

Bestimme jeweils die Zahl x durch **Rückwärtsrechnen.**
a) $4 \cdot x + 5 = 33$
b) $3 \cdot x - 7 = 6{,}5$
c) $-2 \cdot x + 1 = 7$

Nach dem Sichern der Methode Rückwärtsrechnen und dem Einüben derselben anhand ein paar Gleichungen der Form $ax + b = c$ wird in der nächsten Stunde ein Kurztest durchgeführt. Folgende Frage wird an die Tafel geschrieben:

Für welche Zahl x ist die Zahl $4 \cdot x + 5$ gleich der Zahl $37\ (4)$?

Prompt melden sich mehrere Schüler, dass sie überhaupt nicht verstehen würden, was hier zu tun wäre. Schon die drei Beispielaufgaben a)-c) oben scheinen also gereicht zu haben, bei einigen Schülern den Hang zu einer algorithmisierten Verfahrensabarbeitung soweit in den Vordergrund gerückt zu haben, dass sie, konfrontiert mit der bedeutungsvollen Übersetzung der Gleichung $4 \cdot x + 5 = 37\ (4)$, nicht verstehen, was hier zu tun ist! Nachdem ein Schüler

erklärt hat, man müsse eben die Zahl finden, für die $4 \cdot x + 5$ gleich 37 bzw. 4 ist, verstehen es alle.
Es wird kurz im Plenum geklärt, was genau denn der Unterschied zwischen einem Term und einer Gleichung ist. Da ich es auch für zentral halte, diesen Unterschied möglichst explizit zu machen, folgt hier ein kurzer Gesprächsausschnitt.

$***$

Episode 17 – Zum Unterschied zwischen Term und Gleichung

01 FM: *Bis jetzt hatten wir ja immer nur einen Term, z. B. für die Anzahl der Hölzchen, die Anzahl der Würfel, usw.… Einen Term z. B.* $2x + 1$. *Was ist der Unterschied zwischen einer Gleichung und einem Term?*

02 Jane: *Dass bei einer Gleichung das Ergebnis feststeht und man muss halt versuchen das x herauszufinden und bei einem Term kann man für x jede beliebige Zahl einsetzen, das Ergebnis ist dann auch unterschiedlich.*

03 FM. *Genau richtig. Nochmal für alle: Für was steht x immer?*

04 Arne: *x steht für eine beliebige Zahl.*

05 FM: *Genau. Also immer für eine Zahl … und jetzt hat Jane ja so schön unterschieden. Kriegt das nochmal jemand hin. Also x steht immer für eine Zahl, aber was ist der Unterschied zwischen einem Term und einer Gleichung?*

06 Alina: *Also, ähhh, bei einem Term können es verschiedene Zahlen sein und bei einer Gleichung ist es immer eine bestimmte Zahl und die muss man halt noch herausfinden.*

Hier wird nochmals in Erinnerung gerufen, dass „Symbole für Zahlen" stehen (03-05) und Jane (02) und Alina (06) erklären kurz und knapp die Variablenrollen der Unbestimmte und der Unbekannten mitsamt der dazu typischen Handlungen (Einsetzen beliebiger Zahlen, Herausfinden einer unbekannten Zahl).

$***$

Gleichungen der Form $ax + b = cx + d$

Der Übergang zu Gleichungen der Form $ax + b = cx + d$ findet hier nach einer Idee der Mathewerkstatt 8 (Barzel et al. 2012) statt: Zwei unterschiedliche Terassenpläne werden durch die Flächeninhaltsformeln $8 \cdot x + 21$ und $6x + 32$ algbebraisch repräsentiert. *Für welches x haben die beiden Terrassen den gleichen Flächeninhalt?*
Die Schüler schlagen hier zwei unterschiedliche Lösungswege ein: Ein Systematisches Probieren und ein „relationales Ausgleichen" der Variablen und Zahlen auf beiden Seiten.
Bei letzterem haben die Schüler bei der Gleichung $8 \cdot x + 21 = 6x + 32$ wie folgt argumentiert. Zunächst einmal sind auf der rechten Seite 11 mehr als auf der linken Seite. Da auf der linken aber $2x$ mehr als auf der rechten Seite sind, müssen diese $2x$ die 11 ausgleichen. Folglich ist $x = 11{:}\,2 = 5{,}5$.
Danach wird das Äquivalenzumformen als dritte Methode eingeführt. Dabei wird hier zum ersten Mal in all den Reihendurchführungen versucht das Waagemodell zum Aufbau des äquivalenten Umformens zu nutzen. Nach dem Aufbau der Methode Äquivalenzumformen und

dem Lösen von Gleichungen (Anhang G zeigt eine Auswahl von Aufgaben dazu) endet diese Reihe mit der Besprechung der Sonderfälle $L = \mathbb{Q}$ und $L = \{\,\}$.

Da ja eine der Forschungsfragen darauf abzielt, inwiefern Darstellungen und Darstellungswechsel in der Algebra lernförderlich sein können, möchte ich nun ganz zum Schluss auf hier gemachten Beobachtungen mit dem Waagemodell eingehen. In den meisten Schulbüchern (z. B. Blank et al. 2009, Blank et al. 2017) wird das Verfahren des Äqivalenzumformens schlichtweg mit dem Waagemodell erklärt, indem parallel aufgezeigt wird, dass alle formal aufgeschriebenen Schritte dabei ihre Analogie im Modell einer Waage haben, die bei jeder dieser Umformungsschritte im Gleichgewicht bleibt. Oft wird dann noch ein Satz hinterhergeschoben, der klärt, dass das so eingeführte Verfahren auch für negative Zahlen funktioniert, z. B.: „Das Verfahren kann man auch auf Gleichungen mit negativen Zahlen übertragen, auch wenn man dies nicht mehr mithilfe eine Waage veranschaulichen kann.“ (Braun et al. 2017). In diesem Sinne wird hier das Waagemodell eher als Analogiemodell, denn als Modell, aus dem die Äquivalenzumformungen aufgebaut werden, genutzt. In dieser Reihe wurde letzteres versucht.

***

Episode 18 – Versuch eines *Aufbaus* der Methode Äquivalenzumformen aus dem Waage-Modell heraus

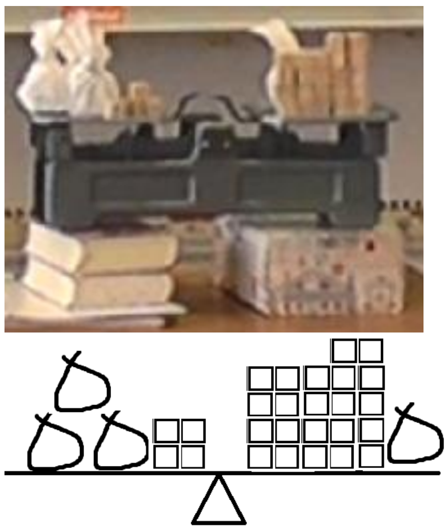


Abb. 58: *Die Gleichung $3x + 4 = x + 22$ im Waagemodell. Oben: Reale Umsetzung mit Holwürfeln und Papiersäckchen. Unten: Ikonische Repräsentation.*

Auf dem Lehrerpult steht eine Waage (Abb. 58). Auf der linken Seiten sind 3 Papiersäckchen und 4 Holzwürfel (Klötzchen), auf der rechten Seite 22 Klötzchen und ein Säckchen. In jedem Säckchen befinden sich gleich viele Klötzchen. Die Papiersäckchen fallen nicht ins Gewicht, so dass die Waage sich im Gleichgewicht befindet.

> *Wie kann man herausfinden, wie viele Klötzchen in jedem Säckchen sind, ohne diese zu öffnen?*

Prompt kommen die Schüler auf folgende zwei Ideen:

> 01 Maxi: *Ich würde alles abräumen, dann ein Papiersäckchen links drauf tun und gucken wie viel Würfel ich dann rechts brauche.*
>
> 02 Danaz: *Links eins Säckchen wegnehmen und dann auf der anderen Seite so viele Würfel wegnehmen, bis es wieder gleich ist. Und alle Würfel zusammen sind dann ja gleich ein Säckchen.*

Klar, mit einer Waage wägt man einfach die versteckten Klötzchen eines Säckchens aus.
Nun wird die Spielregel geklärt: *Es ist nur erlaubt etwas zu tun, was die Waage zu jeder Zeit im Gleichgewicht hält!*

> 03 Bjarne: *Also ich würde erstmal auf jeder Seite ein Säckchen wegnehmen [L. nimmt auf jeder Seite ein Säckchen weg und die Waage bleibt im Gleichgewicht]*
>
> 04 Lotte: *Also, auf der rechten Seite sind jetzt ja 22, und ähh da beide Seiten ja gleich schwer sind, sind links also auch 22, also sind 18 in 2 Säckchen und 9 Würfel in einem.*

Lotte sieht jetzt schon die „Säckchengleichung $2x + 4 = 22$" und findet die versteckte Anzahl „x“ der Klötzchen im Säckchen durch Ausgleichen. Das Rätsel ist hier schon gelöst. Da ja aber im Hinblick auf die Äqivalenzumformungen das beidseitige Wegnehmen zentral ist, werden die Schüler etwas gedrängelt, so lange wegzunehmen, bis man den Inhalt des Säckchens „quasi sieht“:

> 05 Lehrer: *Ok. Lotte sieht das direkt schon nach dem ersten Schritt durch Nachdenken. Wenn wir jetzt aber nicht nachdenken wollen, und einfach weiter links und rechts das Gleiche machen, bis wir direkt sehn, was in einem Säckchen ist. Könnten wir das auch machen?*
>
> 06 Antonia: *Also ich kann sagen, wie man das rechnen kann. Also 22 minus 3, ähh minus 4 und dann geteilt durch 2.*
>
> 07 Linda: *Also auf der einen Seite sind ja noch 4 Würfel und die dann wegnehmen und auf der anderen Seite die dann auch wegnehmen [*L. nimmt auf beiden Seiten 4 Würfel weg*] ___ und jetzt sind ja auf der rechten Seite 18 Würfel übrig, und auf der linken Seite sind dann zwei Säckchen, das heißt, also 18 durch 2 ist dann die Rechnung, und das heißt, dass man jetzt sieht, dass wenn man jetzt rechts 9 Würfel wegnimmt und auf der linken Seiten auch noch ein Säckchen wegnimmt, dann sind halt 9 Würfel und ein Säckchen halt gleich schwer.*

Linda hält sich geduldig an die Vorgabe 05, rechnet zwar auch, nimmt dann aber so lange weg, bis rechts nur noch ein Säckchen ist. Lisa möchte noch einen weiteren Weg vorschlagen und deshalb wird die Ausgangsgleichung $3x + 4 = x + 22$ nochmals aufgebaut.

> 08 Lisa: *Ich hätte auf beiden Seiten erstmal 4 … also dann wären das 18. Ja dann hätt ich 18, 18 Würfel und ein Säckchen … und dann hätt ich ein Säckchen weggenommen … dann hätt ich 18 und 2 Säckchen, dann hätt ich geguckt wie viel übrig bleiben und dann wären die gleich und dann seh ich, dass da 9 drin sein müssen.*

Sowohl Lotte (04) als auch Lisa (08) sehen, dass, wenn in 2 Säckchen 18 Würfel sind, in einem Sack 9 Würfel sein müssen und halten es nicht der Rede wert, da noch die Division ‚: 2‘ zu erwähnen. Jonas hat noch eine weitere Idee:

> 08 Jonas: *Also ich hätte am Anfang zwei Säckchen weggenommen, also eins von der einen, eins von der anderen Seite ___ und dann hätt jetzt angefangen zu rechnen: Rechts hab ich jetzt 22 und links, also, da hab ich jetzt einen Term aufgestellt, das wären 2 mal x plus 4 und das müssten dann 22 sein und dann hab ich rumprobiert und das wären dann 2 mal 9 plus 4 gleich 22.*

Jonas macht es ähnlich wie Lotte (04), übersetzt aber nach dem ersten Schritt („*eins von der einen, eins von der anderen Seite“)* die konkrete Repräsentation in die formale Gleichung $2x + 4 = 22$ und löst diese durch Probieren.
Die Schüler kommen hier auf kreative Ideen, mischen enaktives Tun, rechnerische Überlegungen und vorher durchgeführte Verfahren und sehen bestimmte Zusammenhänge direkt. Nur die Äquivalenzumformungen sind daraus schwer zu extrahieren. Später wird nochmal auf die Situation ‚$2x = 18$‘ eingegangen und gefragt, ob man denn da noch etwas dazu sagen kann, wie man bei der Waage dazu kommen kann, dass auf einer Seite nur noch ein Säckchen und auf der anderen Seite nur noch Klötzchen sind.

09 Bjarne: *Also rechts sind ja 18, links sind zwei Säcke, also wenn ich auf beiden Seiten die Hälfte nehme, dann ist links ein Säckchen und rechts 9 Würfel.*

10 Lehrer: *Genau. Und was, wenn wir denn jetzt, wenn wir z. B. links 3 Säckchen hätten und von mir aus 18 Klötzchen rechts?*

11 Linda: *Dann würd ich zwei Drittel wegnehmen!*

Die Hälfte wegnehmen ist eben nicht zwangsläufig die gleiche Denkhandlung wie etwas durch 2 teilen! Und es ist eben etwas völlig anderes, wenn man ganz spezifische Aspekte einer realen Waage nutzt, um damit vorgeführte Äquivalenzumformungen zu veranschaulichen, als wenn man versucht eine reale Waage zu benutzen, um die Methode des äquivalenten Umformens damit zu erarbeiten. Nicht die reale Waage ist ein Modell des Äquivalenzumformens, sondern idealisierte und ganz spezifisch eingeschränkte Idealisierungen der Waage können als Modell des äquivalenten Umformens dienen. Ist es da nicht gleich effizienter, sich klar zu machen, das gleiche Operationen mit den Zahlen auf beiden Seiten der Gleichung logischerweise wieder zu einer Gleichung führen müssen und dabei vielleicht das Waagemodell – deren spezifische Idealisierung erklärt werden muss - als Analogiemodell zu nutzen? Das Analogiemodell liefert dann eventuell eine Denkhilfe beim äquivalenten Umformen, etwa so: „Es ist wie bei einer Waage, die im Gleichgewicht bleibt, wenn man auf beiden Seiten gleiches macht“. Und diese letzte Formulierung *ohne Zahlen* birgt schon ihre Gefahren. Wenn nämlich ein Schüler sie objekthaft interpretiert und so z. B. in der Gleichung $-10x = x - 2$ nicht *die Zahlen* „$-10x$" und „$x - 2$" sieht, sondern die Ding-Objekte „-10“, „-2“ und „x“ und dann die „-2“ von beiden Seiten „wegnimmt“, um bei . $-8x = x$ zu landen (siehe Abb. 34 in IV.II).

***

VII.IV Vergleich der beiden Zugänge

Keine der beiden Reihen stellt *den* Königsweg ins algebraische Kalkül dar und beide können funktionieren. In beiden müssen – wenn auch an unterschiedlichen Stellen – die gleichen neuen, mitunter den arithmetischen Gepflogenheiten diametral gegenüberstehenden, Vorstellungen, Denkhandlungen und Konzepte aufgebaut werden, um eine verständige Algebra zu konstituieren. Diese konstituierenden Denkhandlungen entwickeln sich, außer vielleicht bei den wenigen *homo mathematici* der Klasse, nicht von selbst und müssen daher im Unterricht explizit gemacht werden. Nur so, indem die Schüler sich das Neue oft genug bewusst vorstellen und es selbst denken, können sich die Begriffe und Konzepte in ihrem Geiste entwickeln. Als besonders zentral sehe ich dabei folgende Vorstellungen, Schreib- und Denkhandlungen. Einige davon sind schlichtweg Konventionen, die aber die Wirkmächtigkeit der symbolischen Algebra überhaupt erst konstituieren.

Zentrale, zu explizierende, Vorstellungen, Schreib- und Denkhandlungen bei einer Einführung in die Algebra

1. Der Kernlehrplan G9 NRW (2009) nennt als einen zentralen Schwerpunkt im Inhaltsbereich Arithmetik/Algebra die Deutung der Variablen als „Platzhalter“ (ebd. S. 28 ff). Die Variable ist aber so viel mehr als ein „Platzhalter“, als ein bloßer „Container“ für x-beliebige Zahlen. In jedem außer- und innermathematischen Kontext bezeichnet die Variable eine – zwar unbestimmte, aber mitnichten x-beliebige – Zahl, die immer eine spezifische Bedeutung

mit sich trägt. Diese Bedeutung wird am Anfang der Aufgabe gesetzt und muss die ganze Aufgabe über mitgedacht werden. Diese Zahl muss z. B. als die erste natürliche Zahl n in der Summe $n + (n + 1) + (n + 2)$ dreier beliebiger aufeinanderfolgender Zahlen, als die (Maß-)Zahl, die diese oder jene ganz spezifische Länge einer geometrischen Figur bezeichnet, als die x-beliebig „gedachte Zahl" eines Zahlenrätsels, als die Nummer der Figur einer ikonisch repräsentierten Folge oder als eine mit einer zweiten Zahl kovariierenden Größe in einem funktionalen Zusammenhang, gedacht werden. Selbst im Malle'schen *Kalkülaspekt* muss immer mitschwingen, dass die Buchstaben Zahlen bezeichnen.
In jeder Aufgabe trägt die Variable also immer eine *ihr inhärente Bedeutung* mit sich, die der Schreibfigur selbst nicht anzusehen ist. Möchte man einen Begriff dafür haben, so könnte man von der *Bedeutungsinhärenz* der Variablen sprechen.
Kurz: Die Variable ist zwar ein „Platzhalter" für eine x-beliebige Zahl, eine Bedeutung bekommt sie aber erst, indem eine inner- oder außermathematische kontextuelle Referenz gesetzt und mitgedacht wird, indem man sich gewahr ist *„Für was das x hier eigentlich steht"*. Genau diese Bedeutungsinhärenz der Variablen muss in beiden Reihen immer wieder explizit gemacht werden. Die Variable bei den Zahlenrätseln und die Variablen in Knack-die-Box stehen für die gedachten, versteckten oder unbekannten Zahlen. Die Variablen in den Aufbauformeln für die Figurennummer, die Variablen in Flächeninhaltsformel für diese eine Seitenlänge, die Variablen in Sachaufgaben für sachkontextuell mitzudenkende Größen, aber immer alle für Zahlen.
Schüler verlieren beim Nachdenken oder Ausführen von Routinen immer wieder die spezifische Bedeutung und „vergessen", wofür die Variable / der Term gerade eigentlich steht. Hier hilft es, wenn sowohl schriftlich als auch verbal immer wieder nachgefragt wird.

2. Zudem ist die Variable nicht einfach ein „Platzhalter für x-beliebige Zahlen" wegen der Konvention der *Bedeutungskonstanz* (dem *Verweisungscharakter*). Wann immer in einem Kontext (einer Gleichungs- oder Termkette) eine Variable gleichen Namens mehrmals auftritt, bezeichnet diese an jeder Stelle die – zwar unbestimmte oder unbekannte, aber mitnichten x-beliebige – gleiche Zahl. Wir haben gesehen, dass Schüler in ihren eigenen Schreibfiguren von sich aus oft diese *Bedeutungskonstanz* verletzten. So denkt der Schüler, der z. B. die Summe dreier aufeinanderfolgender Zahlen durch $x + x + x = 3x$, oder der Schüler, der die Aufbauregel $x \cdot 5 = x + 1 = x$ notiert, durchaus nicht falsch, verletzt aber die Konvention der *Bedeutungskonstanz* und sieht eventuell in den Variablen eher „physikalische Container" für Zahlen, die eben mit beliebigen Zahlen befüllbar sind. Wir haben in Abschnitt VI.I.1 ja diskutiert, dass die Konvention der Bedeutungskonstanz, die kollaborative und internalisierte Kommunikation über Terme erst möglich macht, indem sie einen in die Lage versetzt, die Denkhandlungen beim Aufstellen eines Terms in symbolischer Form abzubilden. Man muss sich darüber bewusst sein, an welchen Stellen erste Verletzungen der Bedeutungskonstanz wahrscheinlich sind und diese Konvention muss und kann in beiden Reihen mitgeteilt und deren Sinnhaftigkeit diskutiert werden. Im Knack-die-Box Kontext wird sie über die Spielregeln mitgeteilt: *„In jeder Box ist die gleiche Zahl versteckt!"*. Beim Finden von Aufbauformeln tritt sie dann auf den Plan, wenn Schüler in ihrer Zählweise, die sie zu verallgemeinern versuchen, mehr als einmal die Figurennummer rekrutieren (z. B. *„6-mal die Würfelanzahl und davon eins weniger als die Würfelanzahl wieder abziehen"*).

3. Auch wenn ich weiß, dass die Schreibfigur x einen „Platzhalter für Zahlen" darstellt, sehe ich doch dieser Schreibfigur nicht unmittelbar an, wie ich mir die Variable vorstellen und wie ich mit ihr handeln soll, welches *Variablenkonzept* oder *Variablenrolle* ich mir also dabei denke. Zum Glück treten in den hier dargestellten Einführungen vorzunehmende *Rollenwechsel* kaum auf[76]. In einem Term habe ich es hier in der Regel mit *Unbestimmten* und in einer Gleichung mit der *Unbekannten* zu tun. Diese beiden Rollen bedingen aber grundsätzlich unterschiedliche Denkhandlungen und Vorgehensweisen, nämlich *analytische* und *generalisierende*. Nicht nur angesichts der empirischen Tatsache, dass Schüler bis in die Oberstufe hinein die *Konzepte Term/Unbestimmte* und *Gleichung/Unbekannte* immer wieder vermischen, scheint es mir hier essentiell, die unterschiedlichen Konzepte an den geeigneten Stellen explizit zu machen. In beiden Reihen muss ein solches Explizieren an den Übergangsstellen zwischen Term und Gleichung und *vice versa* stattfinden. *„Was für eine Frage geht mit einer Gleichung, z. B.* $5x + 1$ *=145 immer einher? – Die Frage, für welche (unbekannte) Zahl, die Zahl* $5x + 1$ *gleich 145 ist!*". *„Was ist denn eigentlich der Unterschied zwischen dem Term* $3x + 4$ *und der Gleichung* $3x + 4 = 10$*?*".

4. Je mehr man Terme umformt und je weiter man in das Kalkül eindringt, desto mehr, gerade auch im Sinne der Anwendbarkeit, muss der Anwendungsbezug und auch der Bedeutungsbezug in den Hintergrund treten. Es muss also im Sinne der Anwendbarkeit der Algebra auf alle möglichen Kontexte von den *spezifischen Kontexten abstrahiert* werden. Je mehr man Term- und Äquivalenzumformungen durchführt, desto mehr operiert man mit kontextfreien, *symbolischen Zahlen*, deren semantische Dimension sich nicht mehr in ihrer kontextuellen Bedeutung, sondern sich vielmehr in ihrem wechselseitigen und arithmetisch konstituierten Beziehungsgefüge offenbart. Mit der Zeit passiert dann früher oder später ein weiterer „Bedeutungsverlust". Beim automatisierten, weil oft wiederholten, Ablauf von Kalkülhandlungen tritt dann noch die Ebene der Zahlen selbst in den Hintergrund und „das Denken bedarf nicht des ständigen Hinblicks auf die idealen Sachverhalte selbst; es kann sich, auf weite Strecken hin, damit begnügen, an Stelle der Operationen mit den „Ideen" die Operationen mit den „Zeichen" zu setzen." (Kleinert 2006, S. 24). Man lernt, dem selbst oder durch einen Rechner durchgeführten, Kalkül zu vertrauen. Man lernt dem denkentlastenden Operieren mit ‚bedeutungslosen' Zeichen zu vertrauen. Man muss aber jederzeit in der Lage sein, die Bedeutungsebene wieder einzublenden, um zu verstehen, was das Kalkül tut oder um zu erkennen, ob das gerade intendierte Ziel schon erreicht ist. Das Kalkül findet die Zahl, die die Gleichung löst. Es bringt einen *gleichwertigen* Term hervor, der die gleiche Situation in anderer Gestalt beschreibt. Bin ich schon bei meinem Ziel angelangt, kann ich schon die Lösung der Gleichung erkennen oder ist das jetzt die Termstruktur, die ich erreichen wollte?
   Wenn man so will, werden beim *Kalkülaspekt* also zwei Bedeutungsebenen ausgeblendet: Die Ebene der Zahlen und die Ebene der inner- wie außermathematischen kontextuellen Bedeutung. Meiner Meinung nach sollte man kalkülorientierte, mitunter vielleicht noch

[76] An einzelnen Stellen gibt es aber auch solche Rollenwechsel, also solche Notwendigkeiten, die Variable jetzt anders zu denken und anders mit ihr umzugehen. Z. B. dann, wenn in der Musterreihe gefragt wird, die wievielte Figur ich mit so und so vielen Würfeln bauen kann und damit also aus einem Term eine Gleichung wird. Oder wenn bei der Zahlenrätselreihe in der Gleichung $x + x + (x - 50) \cdot 3 = 350$ das Distributivgesetz angewendet werden muss, um die Gleichung weiter verabeiten zu können.

nicht vollständig *verstandene*, Routinen nicht allzu gering schätzen (Wer, wann von sich denkt, etwas *verstanden* zu haben, ist sowieso hochgradig individuell). Die Routinen funktionieren ja, sie bescheren mir die Lösung, sie liefern mir den gleichwertigen Term. Gerade für schwächere, im Diskursverlauf mitschwimmende Schüler, sind das Inseln der Sicherheit. Man sollte aber immer wieder die automatisierten Routinen bewusst unterbrechen, um sie zu hinterfragen, zu reflektieren, um sie mit neuen Ideen zu verbinden und neue Bedeutungen zu konstruieren, um also das *Verständnis* kumulativ zu erhöhen. *„Warum sind das beidseitige Multiplizieren und das beidseitige Addieren eigentlich auch Äquivalenzumformungen? Und wo macht das überhaupt Sinn?"*. *„Was habe ich davon, wenn ich einen Term nicht immer nur vereinfache, sondern ihn auch mal ‚komplizierter' mache (z. B., wenn ich ausklammere, statt ausmultipliziere)*?"

5. Das *Symbolische Manipulieren*, das *Rechnen mit Buchstaben, als wären sie Zahlen*, ist ein komplexes Netzwerk von Denk- und Vorstellungshandlungen, das den allermeisten Schülern zu Anfang sehr fremd vorkommt. Nicht nur, dass die Begriffsfelder der Punkte 1.-3. dieser Aufzählung alle erst einmal verinnerlicht werden müssen. Für die Schüler sind Arithmetik und Algebra oft zwei völlig unterschiedliche Welten, verbunden mit Schwierigkeiten, die durch Konflikte zwischen einer arithmetischen und einer algebraischen Rahmung entstehen (siehe z. B. Herscovicsh et al. 1985, Lee and Wheeler 1989, Demby 1994 und auch die Ausführungen in Abschnitt IV.I).
   Zuvörderst muss das „="-Zeichen als relationales Symbol verstanden werden, als „Zeichen", bei dem links und rechts davon immer die *gleiche Zahl* steht. Und nicht als *operationales* Symbol, mit dem ich mitteile, dass jetzt, rechts davon, das Ergebnis meiner Rechenhandlung steht. Dieses operative Verständnis des „="-Zeichens hält sich unter Umständen noch sehr lange, immerhin hat man es ja schon seit frühen Grundschulzeiten so gehandhabt.
   Das Rechnen mit Buchstaben erfordert ein Um- und Neudenken des Rechnens mit (reinen) Zahlen. Z. B. erhalte ich beim Buchstabenrechnen, wenn ich bei ‚$x+3$' aufhören muss, irgendwie ja „kein Ergebnis" (*Lack of Closure*, Collis 1978). Und dann hab ich immer gelernt, dass ich das, was in der Klammer steht, zuerst ausrechnen muss und jetzt, z. B. bei $3 \cdot (x-1)$, geht das gar nicht mehr. Und man sagt mir, ich solle jetzt das Distributivgesetz anwenden, dieses Gesetz, das ich bislang, beim Rechnen mit Zahlen, vielleicht nur als unnützen, lästigen Ballast empfunden habe. Überhaupt sind die Klammersymbole in der Arithmetik und Algebra mit unterschiedlichen Konventionen verknüpft. In der Arithmetik fungieren sie als Vorfahrtsregeln für Rechenhandlungen und in der Algebra erfüllen sie auch den Zweck der Darstellung einer (algebraischen) Struktur, in der eine Rechenhandlung nur *angedeutet, aber nicht vollzogen* wird (Abschnitt VI.III.1.3). Durch $(6x+1)-(x-1)$ z. B. wird angedeutet, dass die beiden Terme (oder die beiden Teilnarrative) subtrahiert werden sollen. Um die *algebraische Rechenhandlung* mit diesen beiden Termen jetzt tatsächlich zu vollziehen, ist es notwendig, der Klammern abhanden zu kommen und dazu brauche ich jetzt die *Rechengesetze für Zahlen*. Da helfen auch keine Variablenvorstellungen, wie die der *letter as object* oder der *letter evaluated*. Mit *letter as object* kann ich vielleicht noch algebraische Summen vereinfachen, aber wenn Klammern auftauchen? Auch ein *letter evaluated* reicht da nicht mehr aus. Ersetzte ich nämlich die Buchstaben durch Zahlen, und selbst, wenn ich diese durch *generische Zahlen* ersetzte, so kann ich ja

sodann die Klammern nach den arithmetisch gesetzen Vorfahrtsregeln auflösen. Ich brauche also jetzt bereits ein ausbaufähiges Variablenkonzept (eins, das über *letter as object* und *letter evaluated* hinausgeht) und *muss* nun die *Rechengesetze* nutzen. Nur die können mir sagen, welche Umformung überhaupt statthaft ist und welche nicht. Ein Operieren in einem *semantischen Feld der Zahlen*, das man *generalisierte Arithmetik* nennen könnte (Brandford 1908), dass verschieden ist vom *semantischen Feld der Arithmetik*, da es vornehmlich die Beziehungen zwischen den Zahlen ins Blickfeld rückt, ist jetzt nötig. Die algebraische Formalisierungen dieser Beziehungen zwischen den Zahlen *sind* die *Rechengesetze*. Die Durchführungen haben gezeigt, dass man bei der Einführung der Algebra nicht davon ausgehen darf, dass die Schüler die Rechengesetze kennen und mit ihnen umgehen können. Vielmehr müssen diese nun zusammen mit dem Kalkülaufbau neu gelernt werden. Für die meisten Schüler bekommen sie auch jetzt erst eine Bedeutung. Ein regelgeleitetes, diese Gesetze nutzendes Operieren kann nur behutsam und schrittweise aufgebaut werden, indem die Anwendungen der Rechengesetze bei jedem einzelnen Umformungsschritt bewusst gemacht wird.

Die algebraische Symbolsprache und insbesondere das algebraische Kalkül ist also eine komplexe, historisch gewachsene Welt von symbolischen Notationen, sinnvollen Konventionen und vollkommen neuen Denkhandlungen, die alle erst einmal verinnerlicht werden müssen. In diesem Sinne kann man von einer *„Enkulturation“* (Radford 2010, 2018) in die Kultur der Algebra sprechen. Dies braucht seine Zeit. Und das *semantische Feld der Zahlen* kann die Bedeutung der Algebra, des Kalküls, generieren. *„Wofür stehen jetzt eigentlich nochmal die Buchstaben?*“. *„Durch welches Rechengesetz kann ich denn diese oder jene Umformung eigentlich begründen*?“. *„Wie kann ich denn noch überprüfen, ob meine Umformung hier stimmt? – Durch Einsetzen von Zahlen!*“. *„Und wenn ich jetzt durch Einsetzen einen Fehler gefunden habe, wie bekomme ich denn heraus, wie ich es richtig mache? – Durch die Rechengesetze!“*

Beide Reihen, sowie andere denkbare Konzeptionen, zur Einführung in die Algebra können gelingen. Sofern sie nur Gelegenheiten bieten (und diese auch wahrgenommen werden), die Konventionen und Denkweisen der obenstehenden Aufzählungen an geeigneten Stellen im Diskursverlauf mit der Klasse zusammen bewusst und explizit zu machen. Frau Müller (FM) hat das sehr schön zusammengefasst:

> „Die beiden Reihen haben auf jeden Fall gezeigt, dass es bei den Kindern da größere Probleme zum Teil im Verständnis und zum Teil im Um- oder Neudenken ihres ‚Algebrakonzepts‘, des x als Zahl und so, gibt. Und wie schwierig das für die Kinder zu begreifen ist: Die Konzepte, die für uns in Fleisch und Blut übergangen sind, die aber den Kindern noch einfach gar nicht klar sein können. Und das, find ich, ist durch die beiden Reihen an unterschiedlichen Stellen immer wieder deutlich geworden … und insgesamt finde ich, und das fand ich wirklich, dass beide Reihen wirklich dazu führen, dass man auch als Lehrer nochmal darüber nachdenkt: Was ist das, was ich da eigentlich grade vermitteln will? Und das fand ich gut und sinnvoll … Was will ich denn grade von den Schülern, was die da alle gerade verstehen und begreifen sollen? … und da fand ich, dass beide Reihen dazu gut geeignet waren.“ (FM 2022)

Ein Hauptunterschied der beiden Reihe besteht darin, dass der Zugang *Zahlenrätsel* keine solch zentralen Lernhürden aufbaut, wie der *Musterzugang*. In letztgenanntem muss das

mühsam aufgebaute *Narrativ* kollabieren, die kontextuelle Bedeutung der Variable als Figurennummer ausgeblendet werden und es prasseln auf einmal beliebig komplexe Termstrukturen auf einen an, die jetzt alle umgeformt werden wollen. Gerade leistungsstärkere Schüler können von der kontextuellen Vielschichtigkeit, die durch das Generalisieren entsteht, auch profitieren. Für schwächere Schüler kann es semantisch überladen sein und sie können sich überfordert fühlen. Die Lehrkraft muss hier also sehr darauf achtgeben, dass nicht Teile der Klasse abgehängt werden. Insbesondere muss man nach meinen Beobachtungen den Schülern über die Hürden helfen (z. B. *„Vergiss doch mal den Aufbau und sieh den Term nur als Rechenformel für Zahlen an*“. *„Vergiss doch mal die Bedeutungsebene und versuche den Term nur mithilfe der Rechengesetze zu vereinfachen.*“).
Demgegenüber sind die Termumformungen bei der Zahlenrätselreihe wesentlich weiter über die gesamte Einführung verteilt und folgen wie von selbst einer kumulativen Steigerung vom Einfachen zum Komplizierteren. Algebraische Summen werden schon im *Knack-die-Box* Kontext beim Übergang zur formalen Schreibweise zusammengefasst. Die Kommutativgesetze können spätestens bei den Sachaufgaben thematisiert werden, wenn z. B. der eine Schüler $x \cdot 4$ und $2x + 5$ und der andere Schüler$\cdot$ $4 \cdot x$ und $5 + 2x$ schreibt. Das Distributivgesetz tritt bereits am Ende der Sachaufgaben auf den Plan, wenn unterschiedliche sachkontextuelle Setzungen der Variablen zu unterschiedlichen Gleichungen führen. Wenn dann zum (eigentlichen) Termumformen übergegangen wird, hat man also schon alle Rechengesetze, die man zum Termumformen benötigt, mindestens einmal aktiviert.

Neben Frau Müller gab es noch eine weitere Lehrkraft, die beide Reihen mit Parallelklassen durchführte, nämlich Herr Schmoe. Auch er meinte, dass beide Vorgehensweisen gut durchführbar sind, er insgesamt jedoch die Zahlenrätsel präferieren würden. Trotz des gerade auch für schwächere Schüler überaus motivierenden Einstiegs mit Würfelbauten, gefalle ihm persönlich die Zahlenrätselreihe besser, weil hier immer die direkte Referenz zu den Zahlen im Vordergrund steht und nicht so viele Lernhürden aufgebaut werden. Frau Müller tat sich schwerer damit eine solche Präferenz abzugeben. Sie meinte nämlich, dass auch einiges dafürspreche die Musterreihe – gerade auch bei schwächeren Lerngruppen – durchzuführen. Der Einstieg über das *symbolische Beschreiben* mit Musterverallgemeinerungen sei gerade auch für schwächere Schüler sehr motivierend. Sie erleben hier nämlich, wie sie zunächst einmal schwierig anmutende Sachverhalte mit Hilfe der algebraischen Symbolsprache selbst in den Griff bekommen können, wozu man *„das x wirklich braucht*!“. Und dies geschieht hier, bevor man gleich in das „abstrakte“ Geschäft des *Symbolischen Operierens* eintaucht, mit dem ja oft gerade diese Schüler erhebliche Schwierigkeiten haben.
Die beiden Aussagen sind natürlich nur individuelle Einschätzungen und zudem nur schwer zu vergleichen. Frau Müller hat in der Musterreihe im Übergang vom *Symbolischen Beschreiben* zum *Symbolischen Operieren* überhaupt keine wesentliche Lernhürde wahrgenommen. Bei ihr wurde ja gar nicht mehr intensiv versucht, erste Kalkülhandlungen aus der Suche nach einer weiteren Möglichkeit des Nachweises der Gleichwertigkeit von Termen heraus aufzubauen, sondern erste regelgeleitete Termumformungen wurden einfach nur durch einen Erklärtext eingeführt. Das hat Herr Schmoe anders erlebt, bei dem noch geguckt wurde, inwieweit Schüler das Termumformen mithilfe des Gleichwertigkeitskonzepts selbst entdecken können. Das hat nie so wirklich gut funktioniert und hinterließ in mir, den Lehrkräften und damit auch bei den Schülern, immer ein gewisses Unbefriedigtsein. Man kann einen solchen

„konstruktivistisch“ intendierten Aufbau des Kalküls versuchen und einige, „kompetente“ Schüler werden auch „konstruktive“ Ansätze zeigen. Meiner Erfahrung nach sollte man sich damit aber nicht zu lange aufhalten und sich nicht zu schade zu sein, die Methode des Termumformens zu erklären. Die Schüler bekommen bei der *Enkulturation* in die Algebra noch genügend Gelegenheit zu einem eigenen konstruktiven Aufbau von Konzepten und auch das sich zu eigen machen und Verinnerlichen der Hinweise und Erklärungen von „kompetenten Anderen“ sind ja zutiefst konstruktivistische Prozesse (Maturana & Valera 1987).

*

VIII Verdichtung der Ergebnisse zu 5 Hypothesen zum Algebralernen, Empfehlungen für die Praxis und Fazit

> “The immediate suspect, it seems, is the visible gulf between research and practice, expressing itself in the lack of significant, lasting improvement in teaching and learning that the research is supposed to bring. It seems that there is little correlation between the intensity of research and research-based development in a given country and the average level of performance of mathematics students in this country (see e.g. Macnab, 2000; Schmidt et al., 1999; Stigler and Hiebert, 1999). This, in turn, means that as researchers we may have yet a long way to go before our solutions to the most basic problems asked by frustrated mathematics teachers and by desperate students to become effective in the long run.” (Sfard 2001, S. 14)

> „Also am Anfang hab ich gar nichts verstanden ...in der Algebra. Das ganze Rechnen mit dem x, Termen, Gleichungen … was da eigentlich passiert! Doch dann hab ich gemerkt, dass es eigentlich gar nicht sooo schwer ist.“ (Maxi 2019, Schülerin)

Kehren wir nun kurz zu den Forschungsfragen zurück. In Abschnitt V.1 wurden diese benannt und ich wiederhole sie hier noch einmal etwas verkürzt:

- Mit welchen (Vor-)Vorstellungen zu algebraischen Objekten treten die Schüler in die Einführung der Algebra ein?
- Welche Konzepte bauen die Schüler in den Reihen auf und gibt es reihenspezifische Unterschiede?
- Welche Schwierigkeiten bauen sich auf, welche Fehler sind typisch und wie kann darauf reagiert werden?
- Welche Vorstellungshürden tun sich insbesondere bei der Entwicklung des algebraischen Kalküls auf und wie kann der Übergang vom Inhalt zum Kalkül gelingen?
- An welchen Stellen sind Darstellungswechsel hilfreich, an welchen ggfs. auch hinderlich?

Vieles davon wurde in den letzten Kapiteln implizit wie explizit angesprochen und einige Antworten wurden gefunden. Es folgt der Versuch einer Zusammenfassung der empirischen sowie theoretischen Evidenzen dieser Arbeit. Statt jede Forschungsfrage einzeln abzuhandeln folgt hier eine Verdichtung der Beobachtungen, Überlegungen und Ergebnisse zu 5 Hypothesen zum Algebraunterricht. In diesen 5 Hypothesen finden sich alle wesentlichen Antworten auf die Forschungsfragen, die ich nach Auswertung und Analyse des Forschungszyklus überhaupt in der Lage zu geben bin.
Zu guter Letzt werden Empfehlungen für die Praxis formuliert und ein Fazit gezogen.

VIII.I Hypothesen zur Einführung in die elementare Algebra

Hypothese 1
Die Semantik der Algebra findet man in den Zahlen

In der Schulalgebra stehen die Symbole für Zahlen, Anzahlen und (Maß-)Größen. In jeder Form des algraischen Kalküls müssen die kontextuellen Bedeutungen in den Hintergrund treten und die Symbole referenzieren nur noch Zahlen. Egal, ob ich eine Gleichung algebraisch löse,

einem Term eine andere Struktur gebe (ihn also umforme), algebraisch aufzuspüren versuche, wie die infinitesimale Änderung des Arguments sich auf den Funktionswert auswirkt (also z. B. die *h-Methode* anwende) oder die Wirkung eines Parameters in einer Funktionenschar untersuche, ich untersuche dabei immer die Beziehungen der durch die Symbole referenzierten Zahlen. Da diese Zahlen unbestimmt sind, können sie nicht mehr – wie in der Arithmetik – rein operational verarbeitet werden. Stattdessen tue ich so, als wären sie bekannt (denke also analytisch), verarbeite diese *symbolischen Zahlen relational* und nutze dabei die Beziehungen der Zahlen untereinander (die *Rechengesetze*). So gesehen sind die algebraischen Kalküle Kalküle mit Zahlen. Symbolische Zahlen eben, die befreit von jeglichem Kontext, erst ihre Transferkraft und Wirkmächtigkeit entfalten. Erst dadurch z. B., dass ich Gleichungen in Zahlen zu lösen gelernt habe, bin ich in der Lage, auf eine aus einem Sachkontext heraus aufgestellte Gleichung mit dem Lösungsalgorithmus zu reagieren, wenn ich nur die sachkontextuelle Bedeutung der Variable ausblende und die Zahl dahinter sehe. Erst dadurch z. B., dass die Parameter einer Gleichung als reine Zahlen ohne jeglichen kontextuellen Bezug gedacht werden, entwickeln sich Lösbarkeits- und Strukturtheorien der Gleichungslehre. Historisch kam ja erst dann, als die Variable keine kontextuellen Größen mehr, sondern nur noch Zahlen repräsentierte, die mathematische Formel auf die Welt (siehe Kapitel I).
Wer algebraisch denkt, denkt also in Zahlen[77] und die Bedeutung dahinter steckt in den Beziehungen zwischen diesen Zahlen. Das heißt, dass beim Aufbau algebraischer Methoden, Visualisierungen, Modelle und spezifische Anwendungskontexte, auch und gerade im Sinne aller möglichen anderen Anwendungen, früher oder später zu Gunsten der Referenz auf Zahlen verlassen werden müssen, damit sich eine symbolisch-algebraische Denkweise entwickeln kann. Es gilt das Credo *„Symbole stehen für Zahlen“* und man kann es gerade in einer Einführung der Algebra nicht oft genug wiederholen.

Hypothese 2
Modelle und Darstellungswechsel können hilfreich sein, sind es aber nicht *per se*

Über den Segen von reichhaltigen, sinnstiftenden Kontexten, erklärenden Modellen und visuelleDarstellungen brauche ich hier nicht zu diskutieren (ein Blick in die Anhänge B-I zeigt, wie intensiv dieselben in beiden Reihen genutzt wurden). Und eigentlich ist es auch ein Gemeinplatz, dass solche Instrumente der Anschauung immer auch auf ihre Lernförderlichkeit analysiert werden müssen. Speziell in der symbolischen Algebra muss man sich fragen, ob und wann genau man die Kontexte, Modelle und Darstellungen hinter sich lassen muss. In jedem Falle dann, wenn dieselben den weiteren Lernweg im Allgemeinen behindern und speziell, wenn sie der Ausbildung eines *symbolischen Zahlkonzepts* im Wege stehen. Insbesondere sollte man sich *genau* fragen, *wie* und *inwiefern* ein solches Anschauungsinstrument in der Lage ist die intendierten Lerninhalte aufzubauen oder eben nicht. In dieser Arbeit wurde z. B. lange untersucht, *inwiefern* sich aus inhaltsgebundenen Gleichwertigkeitskonzepten (aus beschreibungs- und einsetzungsgleichen Aufbauformeln) das algebraische Kalkül des Termumformens entwickeln kann. Und die Durchführungen haben gezeigt, dass es ab der Stelle, wo es explizit ums Termumformen geht, vielen Schülern zu raten wäre, die Bedeutungsebenen erst einmal auszublenden.
Dasselbe gilt für geometrische Visualisierungen. Sie haben mitunter eine ungeheure Erklärkraft (z. B. das Zeigerdiagramm der Eulerschen Formel). Doch auch beim Einsatz von

[77] Ein sehr gelungenes Beispiel dafür findet man in Feynmanns *Lectures of Physics* in dem Kapitel namens Algebra (ebd. 1966 b). Dort wird auf 20 Seiten, lediglich die Addition natürlicher Zahlen voraussetzend, durch fortschreitendes Generalisieren, Abstrahieren und ‚nur‘ durch das numerische Rechnen mit ‚Zahlen‘, die Eulersche Formel $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$ hervorgezaubert (siehe dazu z. B. auch Siebeneicher 2008).

Visualisierungen sollte man sich fragen, *wie genau* und *inwiefern* sie den intendierten mathematischen Inhalt unterstützen. Da ist es wenig hilfreich, wenn z. B. Malle (1993) viele unterschiedliche Visualisierungen anbietet, weil er *vermutet*, dass diese helfen können, die Objekt-Zahl-Beziehung zu konstituieren: „Durch eine geeignete Visualisierung kann ein Term als zeichnerisches Objekt (Strecke, Rechteck, Markierung auf einer Skala usw.) dargestellt werden, was es *vermutlich* erleichtert, den Term selbst als ein Objekt (eine Zahl) anzusehen. In ähnlicher Weise *kann* eine geeignete Visualisierung einer Formel *vermutlich* helfen, die zeichnerisch dargestellte *Objektbeziehung* (Beziehung zwischen Strecken, Rechtecken, Markierungen usw.) als *Zahlbeziehung* aufzufassen" (ebd. 1997, S. 151, Hervorhebungen durch den Autor). Geometrische – an die geometrische Algebra der Griechen erinnernde (Abb.1) – Repräsentationen von algebraischen Identitäten, wie z. B. $a(b+c)=ab+bc,\ (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, finden sich schon seit geraumer Zeit in den Schulbüchern, wurden in den Reihen auch vereinzelt verwendet und können sicher nicht schaden. Ich persönlich habe aber noch keinen einzigen Schüler erlebt, der z. B. die Verwendung der 1. Binomischen Formel durch solch ein Bild erklärt hat. Birgt eine solchen Visualisierung wirklich mehr als eine bloße geometrische Darstellung eines algebraischen Ausdrucks? Findet man hier eine Möglichkeit Termumformungen in Bildern zu denken? Und wenn ja, wie weit geht das? Ist es vorstellbar, dass ich z. B. die Umformung $(2n+1)^2-1=4n^2+4n+1-1=4n^2+4n=4n(n+1)=8n\cdot\frac{n(n+1)}{2}$ (Abschnitt IV.II) vollständig in Bildern durchführe?
Bestenfalls operiert man in Gedanken – wenn überhaupt - in solchen geometrischen Visualisierungen mit Maßgrößen und eben nicht mit (reinen) symbolischen Zahlen. Und in jedem Falle müssen geometrische Visualisierungen spätestens dann durch Formeln ersetzt werden, wenn sie auch für negative Zahlen gültig sein sollen.
Zuletzt gilt das Gleiche auch für Modelle, wie *Knack-die-Box* oder das *Waage-Modell* als Anschauungsinstrumente zum Äquivalenzumformen. Am Ende des Abschnitts VI.III.2 wurde davon berichtet, wie – teilweise vergeblich – versucht wurde, aus dem Umgang mit einer realen Waage das *Waage-Modell* zu entwickeln. Die Beobachtungen zeigten, dass das *Waage-Modell* bereits eine sehr spezifische, auf das Äquivalenzumformen zugeschnittene, Idealisierung einer realen Waage ist und als solche am besten vielleicht einfach erklärt werden muss, um dann durchaus eine nützliche (Erinnerungs-) Hilfe zu sein, nach dem Motto *„Denke an das Waage-Modell, was man da auf beiden Seiten alles machen darf, damit die Waage im Gleichgewicht bleibt*!" Anders beim Modell *Knack-die-Box*, das relativ lange trägt. Die Box kann bei einem durchgehend präzisen Sprachgebrauch als grundlegender Stellvertreter für die Variable (Melzig 2013) fungieren, die Spielregeln enthalten den Verweisungscharakter der Variablen und die Äquivalenzumformungen können sich schrittweise aus enaktiv-ikonischen Vorgehensweisen entwickeln (Abschnitt VI.II und Anhang F)[78]. Doch spätestens beim Auftreten negativer Koeffizienten muss man die Boxenebene verlassen[79], um fortan mit symbolischen Zahlen zu agieren.

Hypothese 3
Die Enkulturation in die algebraische Symbolsprache erfordert *Konstruktion* <u>und</u> *Instruktion*

[78] Das Boxenmodell eignet sich (mit Boxen unterschiedlicher Farben) auch ganz gut, um Gleichsetzungs-, Einsetzungs- und Additionsverfahren nach dem EIS-Prinzip zu erarbeiten (siehe z. B. Affolter et al. 2015, Gerstner 2018).
[79] Auch Erweiterungen des Boxenmodells auf negative Zahlen und Koeffizienten (Boxen und Hölzchen unterschiedlicher) Farbe lassen sich in der Literatur finden (z. B. Wolff 2019).

Es ist eine Binsenweisheit, dass das eigene Tun, die eigenständige Auseinandersetzung mit einem Lerngegenstand den nachhaltigsten Lernerfolg zu Tage fördern kann. Dementsprechend ist – wenn es Zeit und Umstände erlauben – ein konstruktivistischer Aufbau von Wissen einer reinen „Erklär-ideologie" grundsätzlich vorzuziehen.
Nun hat man sich in der historisch gewachsenen Symbolsprache der Algebra auf bestimmte Konventionen geeinigt, die selbstredend nur durch Instruktion vermittelt werden können. Das sind zum einen die rein schreibvereinfachenden Abbreviaturen, wie „$| + 3$", „$3 \cdot x = 3x$", „$L = \{\,\}$" oder „$\Leftrightarrow$ "[80], deren Bedeutung an gegebener Stelle einfach nur mitgeteilt werden müssen. Etwas diffiziler sind schon die Konventionen der Bedeutungsinhärenz und der Bedeutungskonstanz. Die Variable steht nicht einfach nur für eine x-beliebige Zahl, sondern sie bezeichnet in jedem Kontext von Anfang an und durchgehend immer etwas Spezifisches. Und tritt sie in einem Kontext an mehreren Stellen auf, steht sie an jeder dieser Stellen für die gleiche Zahl. Wir haben im Abschnitt VI.I diskutiert, dass gerade diese Konventionen die Wirkmächtigkeit der algebraischen Symbolsprache mit konstituieren, indem sich dadurch erst nachvollziehbare und kommunizierbare Narrative und Strukturen erzeugen lassen. Dementsprechend muss man diese Konventionen mitteilen und sollte deren Sinnhaftigkeit, am besten durch Kontrastieren mit negativen Beispielen, wie „$x \cdot 5 = x + 1 = x$" und „$x \cdot x + x$" (Abschnitt VI.I), auch erklären.
Nun aber zu *Konstruktion* und *Instruktion* beim algebraischen Kalkül. Die Zahlenrätselreihe hat gezeigt, dass es möglich ist, mit dem Knack-die-Box Modell die Methode des äquivalenten Umformens weitestgehend selbsttätig zu konstruieren (Abschnitt VI.II und Anhang F). Auch das *symbolische Beschreiben* der Musterreihe war eine sehr konstruktivistische Phase, in der ja die Schüler nicht müde wurden, immer neue, beschreibungsgleiche Aufbauteme für dieselbe Figurenfolge zu konstruieren (Abschnitt VI.I und Anhang C).
Eine Konstruktion der Methode des Termumformens aus den inhaltlichen Ebenen der Gleichwertigkeit heraus ist in keiner der Durchführungen gelungen. In den ersten beiden Durchführungen der Generalisierungsperspektive blieb ein solch gelagerter Versuch in ersten Ansätzen stecken (Abschnitt VI.I) und es wurde danach zu einer Erklärideologie gewechselt. Im dritten (vollständig durchgeführten) Durchgang wurde das Termumformen gleich anhand eines Erklärtextes eingeführt. Der Versuch einer Kalkülentwicklung mit Hilfe der drei Ebenen der Gleichwertigkeit scheiterte auch an den vielschichtigen, teilweise vorher im Lernprozess aufgebauten Lernhürden (Abschnitt VI.I). Ein tieferer Grund mag auch darin liegen, dass das Narrativ eines Terms nicht mit dessen Struktur identisch ist. Beim Termumformen wird nicht das Narrativ umgeformt, sondern die Struktur geändert.
Im letzten Durchgang wurde das Termumformen zum ersten Mal nicht als Nachweismöglichkeit der Gleichwertigkeit eingeführt. Vielmehr wurde das Termumformen damit begonnen, einem Term eine andere, hier einfachere, im Sinne von einfacher numerisch zu verarbeitende Struktur zu eben. Erst dann wurde keine Lernhürde mehr wahrgenommen (Abschnitt VI.III.2). Das heutzutage etwas in Verruf gekommene „Erklären" hat hier also geholfen. Liegt im Erklären wirklich so ein Übel? Viele Schüler finden immer wieder diesen oder jenen Lehrer so gut „weil er wirklich gut erklären kann". Viele Schüler finden LEHRERSCHMIDT (Schmidt 2021) „cool", wo der doch im Wesentlichen nur erklärt? Ähnliches gilt auch für das

[80] Ein paar Worte zu diesen Abbreviaturen. Meiner Erfahrung nach ist es sinnvoll, das Symbol ‚|+3' am Anfang auf beiden Seiten der Gleichung zu notieren (siehe Abb. VI.III.2). Desgleichen sollte man ‚$3 \cdot x = 3x$' erst spät einführen, damit nicht einer *letter as object* Vorstellung Vorschub geleistet wird. Zuletzt kann man sich überlegen, ob man hier das Äquivalenzeichen ‚$\Leftrightarrow$' wirklich einführen möchte. Wenn man es aber einführt, sollte man auch seine Bedeutung erklären und auf dessen bedeutsamen Gebrauch bestehen. Sonst tapezieren Schüler (und auch Studenten) das Zeichen ⇔ in jedwege Ansammlung von algebraischen Ausdrücken hinein (z. B. zwischen zeilenweise notierten Termumformungen), nur damit es „irgendwie mathematisch ausschaut".

„Päckchenrechnen“ in der Algebra. Wenn es wirklich so wenig Lernfortschritt verspricht, warum holen dann so viele praktizierende Lehrkräfte, fast 30 Jahre nach Wittmanns „Wider die Flut der ‚bunten Hunde‘ und der ‚grauen Päckchen‘“ (ebd. 1994), gerade in der Algebra noch immer die längst aus den Schulbüchern verbannten „Aufgabenplantagen“ aus ihren Schubladen, damit die Schüler einfach mal das Termumformen oder Gleichunglösen mit „grauen Päckchen“ *üben*?

Es ist der Eindruck entstanden, dass den Schülern das Termumformen in der Umsetzung der Problemlöseperspektive leichter gefallen war. Das könnte daran liegen, dass - verteilt über einen längeren Zeitraum - einfache Termumformungen gleichsam immer wieder nebenbei durchgeführt wurden. So ging es beim Übergang in die Phase des Termumformens im Wesentlichen nur noch um das Distributivgesetz. Da reichte dann bei vielen Schülern ein kleiner Schubser: *„Nimm doch mal das Distributivgesetz, um die Klammer aufzulösen*!“. Übrigens wurde auch hier das Distributivgesetz benutzt, um der Gleichung eine andere Struktur, hier eine Struktur, die ein Weiterarbeiten mit der Gleichung erst ermöglicht hat, zu geben (Abschnitt VI.III.2).

Hypothese 4

Aus bedeutungstragenden Inhalten heraus kann sich ein Kalkül entwickeln <u>und umgekehrt</u> können sich aus Kalkülhandlungen heraus Bedeutungen entwickeln

Betrachten wir erst einmal die Frage, inwiefern das Kalkül Bedeutung gebären kann. Die meisten in Tabelle 3 und 4 aufgeführten Beispiele, mit denen Arcavi (1995) ja seinen *Symbol Sense* (Kapitel 2) dokumentiert, handeln genau davon. Was jetzt speziell die hier durchgeführten Reihen angeht, kann ich dazu nur vereinzelte Beispiele nennen. Das Termumformen erzeugt dadurch Bedeutung, dass ein Term eine andere Struktur bekommt, die anders weiterverarbeitet oder anders gelesen werden kann. So entsteht z. B. durch $(2n+1)^2 - 1 = 4n(n+1)$ eine Bedeutung, die da sagt, dass eins weniger als jede ungerade Quadratzahl immer durch 8 teilbar ist (Abschnitt IV.II), indem in dem umgeformten Term $4n(n+1)$ etwas gesehen wird, was der Schreibfigur $(2n+1)^2 - 1$ nicht anzusehen ist. Um das zu sehen, muss sich aber erst einmal ein gewisser *Struktursinn* (Kapitel 2) entwickelt haben. Nun geht es ja in der Einführung der Algebra um eine erste Etablierung der Methode des Termumformens. Ein (algebraischer) *Struktursinn* beginnt sich hier erst zu entwickeln, und zwar in zwei Facetten. Erstens dadurch, dass das Termumformen neue Strukturen erzeugt und ich dadurch mit denselben bekanntgemacht werde. Zweitens durch das Ringen um das Erkennen der richtigen Struktur, die mir mitteilt, welche Anwendungen der Rechengesetze hier überhaupt statthaft und zielführend sind, um den Term umzuformen (siehe z. B. den Plenumsausschnitt zur Vereinfachung des Terms $9x - (x-1) \cdot 4$ (Abb. 52 in Abschnitt VI.III.2)). In diesem Sinne bereiten erste Termumformungen erst vor, dass später aus dem Kalkül heraus Bedeutung entspringen kann. Explizites Strukturdeuten (nicht Struktursehen) tritt in den Reihen nur vereinzelt auf, z. B. bei einer Aufgabe in der Zahlenrätselreihe, in der es darum geht, dass die Summe dreier aufeinanderfolgender Zahlen stets durch 3 teilbar ist (Anhang D, 10c).

Es gibt ein weiteres Beispiel aus der Zahlenrätselreihe, wie das Kalkül Bedeutung generieren kann. Es wurde bislang noch gar nicht angesprochen. Nachdem Schüler eine Boxengleichung mit negativer Lösung $(x = -2)$ bis auf □III = I oder □II = abgeräumt hatten, kamen sie auf der Boxenebene erst einmal nicht weiter. Nachdem aber auf der formalen Ebene erst einmal die Routine *„fahre so lange fort, bis x auf einer Seite alleinsteht“* etabliert war, wurde die negative Lösung $x = 1 - 3$ bzw. $x = 0 - 2$ akzeptiert.

Zur Frage, inwiefern sich aus inhaltstragenden Kontexten ein Kalkül entwickeln kann, hat diese Studie schon viel gesagt.
Beginnen wir mit der Musterreihe. Auch wenn es in keiner Reihe so war, dass sich aus dem reichhaltigen Fundus gleichwertiger Terme ein Bedürfnis zum Termumformen –wie Malle es ausdrückt –, „sich zwanglos“ (ebd. 1993, S.239) ergab, kann man doch, nachdem das Termumformen als Methode verfügbar gemacht worden ist, ein motivierendes Programm ausrufen: Lasst uns jetzt aber versuchen, bei möglichst vielen der aufgestellten Termen die Gleichwertigkeit durch Termumformung nachzuweisen! So inszeniert hatten die Schüler Spaß am Termumformen. Zudem kann der Übergang in das Thema Gleichungen, über die Frage nach der wie vielten Figur, motivierend und stimmig sein. Der hier verfolgte Generalisierungsansatz trägt einen also durchaus lange durch die Reihe.
Was die Zahlenrätselreihe angeht, so führen dieselben unmittelbar auf Gleichungen der Form $ax + b = c$ und man kann schnell zu Gleichungen der Form $ax + b = cx + d$ fortschreiten Wie auch dieser Kontext die Reihe lange zu tragen im Stande ist, wurde in Hypothese 2 und 3 diskutiert.

Auch wenn es hier also nicht immer gelang, das Kalkül direkt aus dem Inhalt heraus zu entwickeln, und die Inhalte immer wieder ausgeblendet werden mussten, können die Kontexte der Reihe doch lange tragen, indem sie immer wieder reichhaltige Denkhandlungen möglich machen, die zumindest Fragen aufwerfen, die einen Kalkülaufbau anstoßen und motivieren können.

Hypothese 5
Die Einführung der Algebra kann durch sinnvolle Tätigkeiten schon ab Klasse 5 (und noch früher) vorentlastet werden

Ein *symbolisches Beschreiben*, wie in der Musterreihe, kann durchaus schon ab Klasse 5 durchgeführt werden. Dies hat auch die Dissertation von Tatjana Berlin (2010) überzeugend aufgezeigt. Es spricht aber einiges dafür es beim Symbolischen Beschreiben zu belassen, so dass kein Collaps des Narrativs herbeigeführt werden muss. So könnte man hier, nachdem eine erste Vertrautheit mit den Variablen aufgebaut und wesentliche Konventionen schon geklärt sind, in Klasse 7 direkt mit dem Termumformen anfangen.
Gleiches gilt auch für die Zahlenrätselreihe. Beginnend mit Boxen und Hölzchen und langsam übergehend zu Variablen und Zahlen können die Zahlenrätsel bis zu ersten – durch Rückwärtsrechnen lösbare – Gleichungen ab Klasse 5 thematisiert werden (Gerstner 2018). Dies ist ja tatsächlich auch mit einer Klasse des letzten Durchgangs so geschehen. So kann man hier gleich mit dem Äquivalenzumformen anfangen.
Einfache Gleichungen, zuerst mit Platzhaltern, dann mit Variablen, können sowieso schon sehr früh behandelt werden. Teilweise passiert das bereits in der Grundschule. Zudem gibt es ohnehin ein mittlerweile etabliertes Forschungsfeld, das der sogenannten „*Early Algebra*“, in dem untersucht wird, wie algebraische (oft relationale) Denk- und Vorgehensweisen ganz ohne algebraische Symbolsprache Teil des Grundschulunterrichts werden können (z. B. Kaput 2008, Cai und Knuth 2011, Akinwumi 2012, Steinweg 2013). Inwiefern die Erkenntnisse dieser *Early Algebra* Einzug in unsere Grundschulen finden wird, bleibt einstweilen wohl eine offene Frage.

Eine echte Vorentlastung wäre es, wenn es gelingen könnte, die Rechengesetze für Zahlen schon vorher zu etablieren. Obwohl diese in der Regel bei beiden Zahlbereichserweiterungen

($\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}^{+} \rightarrow \mathbb{Q}$) gelernt, ins Merkheft geschrieben und im Kontext eines „geschickten Rechnens" angewandt wurden, zeigt sich doch durchgehend, dass dies bei den meisten Schülern nicht gefruchtet hat. Sie können zwar die (lateinischen) Namen nennen und bestenfalls auch die algebraische Notation dazu angeben, aber als Werkzeug des Geistes können sie sie nicht benutzen. Das haben auch die Vortests (Abschnitte V.IV, VI.I und Anhang A) und alle Durchgänge gezeigt.
Eine Etablierung einer *generalisierten Arithmetik* als Zwischenstufe zwischen der *reinen Arithmetik* und der *symbolischen Algebra* im Sinne von Brandfort (1921, Abschnitt IV.I) wäre ein schönes Ziel. Inwiefern das gelingen kann, scheint eine völlig offene Frage der Fachdidaktik und der Unterrichtspraxis zu sein. Neben einer stärkeren frühen Fokussierung auf Zahlbeziehungen und auf das bewusste Nutzen der Rechengesetze beim Zahlenrechnen, könnte da ein explizites Aufgreifen des *Permanenzprinzips* (Freudenthal 1973, 183; Hefendehl &Schwank 2015) bei den Zahlbereichserweiterungen vielleicht helfen. Zum Beispiel bei der berühmt-berüchtigten Begründung, weshalb die Multiplikation zweier negativer Zahlen stets positiv ist: Das Distributivgesetz könnte hier explizit genutzt werden, statt es implizit in *Permanenzreihen* versteckt zu halten.
Mancherorts wird diskutiert, ob Kinder vor der Jahrgangsstufe 7 kognitiv überhaupt in der Lage sind, in *algebraisch notierten Rechengesetzen* auf Zahlen anwendbare Regeln zu erkennen. Dazu wird z. B. das Piaget'sche Entwicklungsstufenmodell (ebd. 1978) herangezogen: Muss dazu nicht erst die ab-straktere Stufe des *Formal-Operationalen* Stadiums (Abschnitt V.II) ausgereift sein, die sich in der Regel erst ab ca. 12 Jahren ausbildet? Dagegen spricht, dass in China wohl schon Grundschüler diese und weitere Rechengesetze nicht nur kennen, sondern auch auf das Zahlenrechnen anzuwenden in der Lage sind (was man aus dem wunderbaren Büchlein von Ma Liping *„Knowing and Teaching Elementary Mathematics" (ebd. 1999)* herauslesen kann).

VII.II Praktische Empfehlungen und Fazit

Es scheint keinen Königsweg zur Algebra zu geben. Vielmehr sollte man sich bewusst sein, dass jede Vorgehensweise ihre eigenen Chancen und Untiefen mit sich bringt, die man jedoch kennen sollte, um mögliche Lernschwierigkeiten zu antizipieren und darauf reagieren zu können. Diese Arbeit war ja von Anfang an darauf ausgerichtet, Lehr-Lerngänge zur Einführung in die Algebra zu beforschen und zu entwickeln, die im ganz normalen praktizierten Klassenunterricht funktionieren können. Durch alle in dieser Arbeit dargestellten und darüber hinaus bedeutsamen Erfahrungen haben sich für mich ganz zentrale Punkte herauskristallisiert, die ich nun zuletzt als Empfehlungen artikulieren möchte.

- Man verliere nie den Bezug zu den Zahlen.

- Man achte auf eine Ausgewogenheit von Syntax und Semantik (Inhalt und Kalkül) und achte darauf, dass durch Modelle und Kontexte nicht das Wesentliche, nämlich die ganz am Anfang als *in nuce* beschriebene Denkweise, verloren geht. Auch wenn es alles andere *als einfach ist*, sich dieselbe anzueignen, so ist es nämlich doch hilfreich, es immer wieder bewusst werden zu lassen, dass es zu guter Letzt *wirklich so einfach ist*.

- Modelle und Kontexte helfen dabei, die neuen Konzepte aufzubauen und sie in reichhaltige Denkprozesse einzubetten, haben aber auch ihre ganz spezifischen Fallen und

Grenzen. Welches Konzept möchte ich überhaupt mit welchem Modell/Kontext aufbauen und bis wohin reicht die Wirkmächtigkeit des Konzepts? Man mache die Grenzen und Unzulänglichkeiten des Modells/Kontextes explizit und man feiere die Grenzüberschreitung, die die formale Symbolsprache als „geistiges Werkzeug" möglich macht.

- Man mache zentrale Konventionen und neue Konzepte möglichst früh explizit und verlasse immer wieder sinnvolle, weil funktionierende, denkentlastende und Sicherheit gebende, automatisierte Routinen, um sie zu hinterfragen, zu reflektieren, um sie mit neuen Ideen zu verbinden und um neue Bedeutungen zu konstruieren.

- Man pflege eine kollaborative und offen austauschende Klassenraumkultur, in der die individuellen Denk- und Vorgehensweisen offenbar und zur Disposition gesetzt werden können. So können die Schwierigkeiten und Fehlvorstellungen der Schüler sichtbar werden. Plemumsdiskussionen über solche Fehlvorstellungen können diese meist auflösen und mehr noch, oft kreieren gerade sie auch neue Sichtweisen und Bedeutungen.
- Man sei sich auch selbst nicht zu schade zum Erklären und lasse auch möglichst oft die anderen „kompetenten Anderen" der Klasse ihre Ergebnisse und Erkenntnisse erklären.

Darüber hinaus mache man sich auf unzählige Fehler und Fehlvorstellungen gefasst, gehe damit in Gesprächen produktiv um und pflege den Auf- und Ausbau einer Fehlerkultur. Die fehleraufklärenden Tätigkeiten werden am Ende wieder von nichts anderem gespeist als von der ganz am Anfang dieser Arbeit beschriebenen *in-nuce-Algebra*:

  - *„Man bezeichnet unbekannte und unbestimmte Zahlen mit Buchstaben (Variablen) und rechnet mit diesen wie mit Zahlen, man interpretiert das „="-Zeichen als Relationszeichen zwischen Zahlen und agiert flexibel mit den Variablen. Einmal denkt man dabei z. B. an eine einzelne Zahl, ein andermal an alle Zahlen eines Bereichs, gleichzeitig oder zeitlich aufeinanderfolgend."*

Die Algebra braucht seine Zeit, man gebe sie ihr[81]. Die Kunst besteht darin, sich solange gemeinsam immer wieder darauf einzulassen, bis möglichst viele merken, dass es *wirklich so einfach* ist, *„dass es eigentlich gar nicht sooo schwer ist"* (Maxi 2019).
Und *last but not least* vergesse man auf keinen Fall, dass Mathematik, auch und gerade die Algebra, spannend ist, Spaß machen und intellektuelle Freude bereiten kann.

*****

[81] In den G9 Durchführungen wurden in den schulinternen Curricula für eine Einführung in die Algebra mit den Themenfeldern Terme, Lineare Gleichungen, Lineare Gleichungssysteme und Sachkontexte 8-10 Wochen eingeräumt. Und dies im feiertagsschwangeren Zeitraum von Mitte Februar bis Ende Mai. Das kann meiner Meinung nach nicht funktionieren. Es sei denn, man nimmt billigend in Kauf, die hier bei einer Grundlegung gelassenen Lücken steineklopfend in den Folgejahren immer wieder schließen zu müssen.

„Detrius saß da und dampfte.
Er verspürte einen großen Hunger – nicht auf Essen, sondern auf Dinge, über die man nachdenken konnte. Im gleichen Maße, wie die Temperatur sank, nahm seine Denkfähigkeit zu und verlangte nach Aufgaben.
Er berechnete die Anzahl der Steine in der Wand, zuerst in Zweiergruppen, dann in Zehnern und schließlich in Sechzehnern. Die Zahlen setzten sich zusammen und marschierten in ängstlicher Folgsamkeit an seinem Gehirn vorbei. Dividieren und Multiplizieren wurde entdeckt. Algebra wurde erfunden … Die Innenwände des Lagers waren mit Zahlen bedeckt. Gleichungen, so komplex wie neuronale Netze, waren in die dünne Eisschicht gekratzt. An einer Stelle der Berechnung war der Mathematiker von Zahlen zu Buchstaben übergewechselt, und dann hatten auch die Buchstaben nicht mehr ausgereicht; Klammern umschlossen Formeln, die für normale Mathematiker ungefähr dem entsprachen, was eine Stadt für einen Stadtplan war. Sie wurden immer einfacher, je näher sie dem Ziel kamen – und doch bewahrten sie in den fließenden Linien ihrer Einfachheit eine so spartanische wie wunderbare Komplexität. Die Gleichungen wurden immer schmaler, während sie in sich gestaucht die Wand hinunter und über den Boden rutschten, bis zu der Stelle, an der der Troll gesessen hatte. Dann waren nur noch ein paar Gleichungen übrig, in denen noch ein Rest von Eigenleben zu zucken und zu funkeln schien. Es handelte sich um Mathematik ohne Zahlen, so rein wie Blitze. Sie zogen sich zu einem Punkt zusammen, und an diesem Punkt war nur noch das sehr simple Symbol „=“ zu sehen.“

Terry Pratchet 1993, Aus dem Scheibenweltzyklus – „Helle Barden“ S. 201 ff

Literatur

Äbli, H. (1981). Denken: Das Ordnen des Tuns. Stuttgart: Klett-Cotta.

Affolter, C.H. et al. (2015). Mathbuch 7-9 Lernumgebungen, Schulverlag plus AG, Bern, und Klett und Balmer AG, Baar.

Akinwunmi, K. (2012): Zur Entwicklung von Variablenkonzepten beim Verallgemeinern mathematischer Muster. Wiesbaden. Vieweg + Teubner.

Alten, J. W. (2014). Geschichte der Algebra, Geschichte – Kulturen – Menschen. Springer Spektrum

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. For the learning of Mathematics, 14(3), 24-35.

Arcavi, A. (1995). Teaching and Learning Algebra: Past, Present, and Future. JOURNAL OF MATHEMATICAL BEHAVIOR 14, 145-162

Arcavi, A. (2005). Developing and using symbol sense in mathematics.For the learning of mathematics,25(2), 42-47.

Arcavi, A. (2008). Algebra: Purpose and empowerment. In C. E. Greenes und R. N. Rubenstein (Hrsg.), Algebra and algebraic thinking in school mathematics. Seventieth NCTM yearbook. (S. 37–49). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Ausubel, Novak, Hanesian (1980). Psychologie des Unterrichts. Band 1. 2., vollständige überarbeitete Auflage. Beltz Verlag. Weinheim und Basel.

Bana J., Farrell B., McIntosh A., Reys B., Reys R. (1997). Number sense in school mathematics: student performance in four countries. Edith Cowan University Research Online ECU Publications

Bandura, A. (1971). Psychological Modeling. Chicago: Aldine & Atherton, Inc.

Barzel, B.; Hußmann, S.; Leuders, T.(2005). Computer, Internet & Co im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Barzel, B. (2012). Computeralgebra – Mehrwert beim Lernen von Mathematik – aber wann? Mathewerkstatt. Münster: Waxmann.

Barzel, B. & Greefrath, G. (2015). Digitale Werkzeuge sinnvoll integrieren. In Blum, W. (Hrsg.), Bildungsstandards Mathematik: konkret – Sekundarstufe II (S. 145-155). Berlin: Cornelsen.

Barzel, B.; Hußmann, S.; Leuders, T.; Prediger, S. (Hrg.) (2015). Mathewerkstatt 8. 1. Aufl., Berlin: Cornelsen.

Barzel, B; Glade, M; Klinger, M. (2021). Algebra und Funktionen. Fachlich und fachdidaktisch. Springer Spektrum.

Bauer, S.; Büchter, A; Gerstner, E. (2019). „Der Computer zwingt uns zum Nachdenken" – Beispiele aus der Analysis, in: Vielfältige Zugänge zum Mathematikunterricht - Konzepte und Beispiele aus Forschung und Praxis; Büchter et al. (Hrsg.), Springer Spektrum, Wiesbaden.

Baumert, J. & Lehmann, R. & al. (1997). TIMSS – Mathematisch–naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich, Opladen 1997

Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (1996): Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching. Dordrecht. Kluwer Academic Publishers.

Behr, M. J., Erlwanger, S. & Nichols, E. (1980): How children view the equals sign. Mathematics Teaching, 92. S. 13-15.

Berlin, T. (2010). Algebra erwerben und besitzen. Eine binationale empirische Studie in der Jahrgangsstufe 5, abrufbar bei DUEPublico2: https://duepublico2.uni-due.de/receive/duepublico_mods_00022563 (zuletzt abgerufen am 02.02.2021).

Biehler, Rolf & Heymann, Hans Werner & Winkelmann, Bernard (Hrsg.) (1995). Mathematik allgemeinbildend unterrichten: Impulse für Lehrerbildung und Schule, IDM–Reihe „Untersuchungen zum Mathematikunterricht", Bd. 21, Köln.

Biener, K. (1997). „Lest EULER - er ist unser aller Meister!", Geschichte der Rechentechnik, RZ-Mitteilungen Nr. 14, April 1997.

KMK Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss (2004). Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 4.12.2003. Luchterhand.

KMK Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (2012), Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012, Wolters Kluwer Deutschland GmbH, Köln.
Bigalke, H. (1976). Zur „Gesellschaftlichen Relevanz“ der Mathematik im Schulunterricht – Aufgaben und Ziele des Mathematikunterrichts, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 8(1), S. 25 – 34.
Blank et al. (2017a) Lambacher Schweizer 5, Mathematik für Gymnasien, NRW-Ausgabe,Klett.
Blank et al. (2017b) Lambacher Schweizer 6, Mathematik für Gymnasien, NRW-Ausgabe,Klett.
Blank et al. (2017c) Lambacher Schweizer 7, Mathematik für Gymnasien, NRW-Ausgabe,Klett.
Bosch, M., & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l’activité mathématique aux ostensifs. Recherches en Didactique des Mathématiques, *19* (1), 77–124.
Booth, L. (1984) Erreurs et incompr´ehension en alg`ebre ´el´ementaire, *petit* x 5, 5–17.
Booth, L.R. (1984). *Algebra: Children’s Strategies and Errors*. Windsor, UK: NFER-Nelson.
Booth, L. (1989) A question of structure or a reaction to: “The early learning of algebra: A structural perspective”, in: Wagner and Kieran (1989), 57–59.
Boyer, Carl (1986). A Concise History Of Mathematics By Dirk J. Struik. *Isi* 40:287-289.
Boyer, C. B.: (1968), A Histor y of Mathematics, John Wiley, New York.
Brandford, B. (1908). A study of mathematical education. Oxford: Clarendon Press. (Erstveröffentlichung 1908)
Braun et al. (2009a). Lambacher Schweizer 5. Mathematik für Gymnasium – G9, NRW, Ernst Klett Verlag, Stuttgart, Leipzig.
Braun et al. (2009b). Lambacher Schweizer 6. Mathematik für Gymnasium – G9, NRW, Ernst Klett Verlag, Stuttgart, Leipzig.
Braun et al. (2009c). Lambacher Schweizer 7. Mathematik für Gymnasium – G9, NRW, Ernst Klett Verlag, Stuttgart, Leipzig.
Brauner, U, ; Bröskamp, H.; Griese, B. (2015). Mathekoffer Zaubern-Spielen-Knobeln. MUED, Notuln-Appelhülsen.
Breidenbach, W. et al. (1979). Breidenbach Mathematik 8. Schuljahr, Lehrerausgabe. Westermann 1979
Bringuier, J.-C. (1980). Conversations with Jean Piaget. Chicago: Chicago University Press. Bruner, J. (1990). Acts of meaning. Cambridge, MA: Harvard University Press.
Bruder, R., Hefendehl-Hebeker, L., Schmidt-Thieme, B., Weigand, H.-G. (Hrsg.) (2010). Handbuch der Mathematikdidaktik, Springer.
Bruner, Jerome (1970). Der Prozeß der Erziehung. Berlin: 42-43, 61-63.
Bruner, Jerome (1974) Entwurf einer Unterrichtstheorie. Berlin: 39 – 43.
Büchter, A., Gerstner E. (2022). Wo ist sie geblieben …? Zu Veränderungen der Rolle und des Auftretens der Algebra in Curricula und Schülbüchern. In: Elementare Algebra. Der Mathematikunterricht, Jahrgang 68, Heft 3 -2022
Cai, J., & Knuth, E. (Hrsg.). (2011). *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives*. New York: Springer.
Charbonneau (1996), From Euclid to Descartes: algebra and its relations to geometry. In: Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (1996): Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching. Dordrecht. Kluwer Academic Publishers.
Chevallard, Yves (1985): La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigne. Grenoble: La Pensée sauvage.
Clement, J., Lochhead, J., & Soloway, E. (1979). Translation between symbol systems: Isolating a common difficulty in solving algebra wordproblems (COINS Tech. Rep. No. 79).
19). Amherst: University of Massachusetts, Department of Computer and Information Sciences.
Cohors-Fresenborg, E. (2001): Mathematik als Werkzeug zur Wissensrepräsentation: das Osnabrücker Curriculum. - In: Der Mathematikunterricht, 47(H.1), S. 5-13
Cohors-Fresenborg E., Striethorst A. (2003), Untersuchung individueller Unterschiede in der mentalen Repräsentation von symbolverarbeitenden Regelsystemen, ZDM 2003 Vol. 35 (3), S. 94-101.

Cohors-Fresenborg E. & Griep M. (2003a). Sätze aus dem Wüstensand und ihre Interpretationen. Schülerband. Schriftenreihe des Forschungsinstituts für Mathematikdidaktik

Cohors-Fresenborg E, Griep M., Kaune C. & Schwank I. (2003b). Sätze aus dem Wüstensand und ihre Interpretationen: Handbuch für Lehrerinnen und Lehrer. Schriftenreihe des Forschungsinstituts für Mathematikdidaktik.

Collis, K.F. (1975 a): A Study of Concrete and Formal Operations in School Mathematics. A Piagetian Viewpoint. Australian Council for Education Research, Melbourne.

Collis, K.F. (1975 b): The Development of Formal Reasoning. University of Newcastle, Australia.

Collis, K.F. (1978): Operational Thinking in Elementary Mathematics. In Keats, J.A. /Collis, K.F. / Halford, G.S. (Eds.): Cognitive Development. Wiley, New York.

Courant, R. & Robbins, H. (1941). *WHAT IS MATHEMATICS? Oxford University Press, New York*

Cortes, A., Vergnaud, G. & Kavafian, N. (1990): From arithmetic to algebra: Negotiating a jump in the learning process. In Booker, G., Cobb, P. & De Mendicuti, T. (Hrsg.): Proceedings of the 14th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 2. Mexico: PME. S. 7-34.

Davis, R. B. (1975). Cognitive Processes Involved in Solving Simple Algebraic Equations. Journal of Children's Mathematical Behaviour, 1, 7-35.

De Padova, T. (2021), Alles wird Zahl. Wie sich die Mathematik in der Renaissance neu erfand. Carl Hauser Verlag, München.

Dehaene (1997). The Number Sense – How the Mind Creates Mathematics.

Demby, A. (1994). Rozwój procedur stosowanych przez uczniów klas V- VIII przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych, rozprawa doktorska obroniona w 1994 r. na WSP w Krakowie (przygotowana pod kierunkiem prof. S. Tur- naua).

Demby, A. (1997). ALGEBRAIC PROCEDURES USED BY 13-TO-15-YEAR-OLDS. Educational Studies in Mathematics **33,**45–70 (1997).

Devlin,K. (1988), Muster der Mathematik. Ordnungsgesetze des Geistes und der Natur. Spektrum, Heidelberg, Berlin.

Dreyfus, T (1991). On the status of visual reasoning in mathematics and mathematical education. In F. Furinghetti (Hrsg.) Proceedings of the 15th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, University of Massachusetts, Department of Computer and Information Science.

Dunham, W. (1999) Euler: The master of us all; Math. Assoc. of America, 1999.

Ekenstam, A., Greger, K.(1987). On Children's Understanding of Elementary Algebra. Journal of Structural Learning 9 (3/4), 303-315.

Eisenberg, P. (2018). Finger weg vom generischen Maskulinum! https://www.tagesspiegel.de/wissen/debatte-um-den-gender-stern-finger-weg-vom-generischen-maskulinum/22881808.html (zuletzt abgerufen am 24.01.2022)

Euler, Leonhard (1738). Einleitung der Rechen=Kunst zum Gebrauch des Gymnasii bei der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg. Akademische Buchdruckerei.

Euler, Leonard (1770). Vollständige Anleitung zur Algebra, herausgegeben von Heinrich Weber, Teubner Berlin und Leipzig.

Feynmann, Richard P. (1966 a), The Feynmann Lectures on physics, Wesley, Massachusetts.

Feynmann, Richard P. (1966 b), The Feynmann Lectures on physics, Chapter 22: Algebra, Addison-Wesley, Massachusetts.

Filloy, E. & Rojano, T. (1984): From Arithmetical to an Algebraic Thought (A clinical study with 12-13 year olds). In Moser, J. (Hrsg.): Proceedings of the 6th Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education. Utrecht, Holland. S. 154-158.

Filloy, E. & Rojano, T. (1985): Operating the unknown and models of teaching (a clinical study with 12-13 year olds with a high proficiency in Pre-Algebra). In Damarin, S. K. & Shelton, S. (Hrsg.): Proceedings of the 7th Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter. Columbus, OH. S. 75-79.

Filloy, E., Rojano, T. (1989). Solving Equations. In: For the Learning of Mathematics 9 (2), S. 19 - 25

Filloy, E. & Rubio, G. (1991): Unknown and variable in Analytical Methods for solving word arithmetic / algebraic problems. In Underhill, R. G. (Hrsg.): Proceedings of the 13th Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter, 1. Blacksburg, VA. PME-NA. S. 64-69.

Filloy, E. & Sutherland, R. (1997), Designing Curricula For Teaching and Learning Algebra, in A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.) International Handbook of Mathematics Education Part 1, Chapter 4, Kluwer, Dordrecht, p 139-160.

Fischer, A., Hefendehl-Hebeker, L., Prediger S., (2010). Einführungsartikel zum Heft „Mehr als Umformen – Algebraisches Denken“, Praxis der Mathematik in der Schule 52 (2010) 33, S. 1-7.

Frege, G. (1884). Grundlagen der Arithmetik: Studienausgabe mit dem Text der Centuryausgabe. Hrsg. 1988 von Thiel, Deutschland: Felix Meiner Verlag.

Freudenthal, Hans, (1974). Mathematics as an Educational Task, Reidel, Dordrecht.

Freudenthal, Hans (1978), Weeding and Sowing: preface to a science of mathematical education, Reidel, Dordrecht.

Freudenthal, Hans (1983), Didactical Phenomenology of Mathematical Structures, Reidel, Dordrecht.

Freudenthal, Hans (1991), Revisiting Mathematics Education: china lectures, Kluwer, Dordrecht

Gerstner, E. (2017), Wofür man das x wirklich brauch! Materialien zum Einstieg in die Algebra nach dem EIS-Prinzip. Unveröffentlichte Unterlagen zu Workshops auf der Tagung Mathe für Alle, Dortmund 2017.

Gerstner, E. (2018 a), Knack die Boxen – Lernheft zu Linearen Gleichungssystemen, Mathematisches Schülerlabor MatheChecker der Uni Duisburg-Essen, unveröffentlicht

Gerstner, E. (2018 b), Lernheft „Der Zahlenzauberlehrling“ – Mathematische Zaubertricks und Algebra in der Orientierungsstufe , Mathematisches Schülerlabor MatheChecker der Uni Duisburg-Essen, unveröffentlicht

Gerstner E. (2022). Wege zum Aufbau der algebraischen Symbolsprache als mentales Werkzeug. In: Elementare Algebra. Der Mathematikunterricht, Jahrgang 68, Heft 3 -2022

Glade, M. (2016). Individuelle Prozesse der fortschreitenden Schematisierung. Empirische Rekonstruktionen zum Anteil vom Anteil. Springer Spektrum

Goethe, J. W., Briefe an Friedrich Schiller, (1798); http://www.zeno.org/Literatur/M/Goethe,+Johann+Wolfgang/Briefe/1798; zuletzt abgerufen am 09.09.2021

Goffrey H. (1995), Mathematics Textbooks: A Comparative Study of Grade 8 Texts. TIMSS Monograph No. 3. Pacific Educational Press. Vancouver

Gray, E. M., & Tall D. O. (1991 a). Duality, Ambiguity and Flexibility in Successful Mathematical Thinking, Proceedings of PME XIII, Assisi Vol. II 72-79.

Gray, E. M. (1991 b). An Analysis of Diverging Approaches to Simple Arithmetic: Preference and its Consequences, Educational Studies in Mathematics, **22**,551-574.

Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A” proceptual” view of simple arithmetic. Jornal for research in Mathematik Education, 116 - 140.

Greefrath, G; Müller, J. (2012) "Computeralgebra in der Schule - Stand der Dinge!?" in "Computeralgebra Rundbrief" Nr. 51, 2012, Fachgruppe Computeralgebra der GI, DMV und GAMM.

Haarmann et al. (1997), Empfehlungen für den Mathematikunterricht an Gymnasien, Herausgeber: Niedersächsisches Kultusministerium, Referat Presse und Öffentlichkeitsarbeit, https://www.nibis.de/uploads/nlq-mey/Mathe-SekII/Empfehlungen1997.pdf, zuletzt abgerufen am 27.12.2021.

Harper, E. W. (1979) The child's interpretation of a numerical variable, unpublished doctorial thesis. Bath University.

Harper, E. W. (1980) The boundary between arithmetic and algebra: Conceptual understandings in two language systems, Int. J. Math. Ed. in Sci. & Technol. 11, 237-243.

Harper, E. (1987). Ghosts of diophantus. Educational Studies in Mathematics **18,** 75–90. https://doi.org/10.1007/BF00367915

Haug R., Wittmann G. (2013), Materialien wachsen mit. Muster und Strukturen vom Kindergarten bis zur Sekundarstufe I., Mathematik lehren, 30 (2013) 176, S. 8-13.

Hasselhorn M., Gold A. (2006), Pädagogische Psychologie: Erfolgreiches Lernen und Lehren, Kohlhammer

Hefendehl-Hebeker, L. (2003). Didaktik der Mathematik als Wissenschaft - Aufgaben, Chancen, Profile. In Krieg (Hrsg.): Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1-2003 (S. 3-29). Teubner Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden.

Hefendehl-Hebeker, L. (2004). Perspektiven für einen künftigen Mathematikunterricht. In: Bayrhuber, H. et al. (Hrsg.). Konsequenzen aus PISA – Perspektiven der Fachdidaktiken. Innsbruck: Studienverlag. S. 141–189.

Hefendehl-Hebeker, L. (2007). Algebraisches Denken – was ist das? In: 41. Tagung für Didaktik der Mathematik (S. 148-152), Franzbecker. Hildesheim, Berlin.

Hefendehl-Hebeker, L. & Schwank, I. (2015). Erweiterungen des Zahlensystems, In: Bruder et al. (Hrsg), Handbuch der Mathematikdidaktik, S. 88. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum

Herget; W.; Heugl, H.; Kutzler, B.; Lehmann,E. (2000). Welche handwerklichen Rechenkompetenzen sind im CAS-Zeitalter unverzichtbar?

Hoch, M. (2007). Structure sense in high school algebra. Dissertation. Tel Aviv: Tel Aviv University.

Hoch, M. und Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. In M. Johnsen Høines und A. B. Fuglestad (Hrsg.), Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Bd. 3, S. 49–56).

Hodgen, Kücheman, Brown & Coeb (2009), Secondary students' understanding of mathematics 30 years on**,** https://www.researchgate.net/publication/267374220 **,** zuletzt abgerufen am 14.11.2021.

Hußmann, St. (2002). Konstruktivistisches Lernen an sinnstiftenden Kontexten.

Hersovics, N. and Chalouh, L. (1985). Conflicting frames of reference in the learning of algebra, in S. Damarin and M. Shelton (eds.), Proceedings of PME-NA VII, Ohio University, Columbus, Ohio, 123-131.

Herscovics, N. & Linchevski, L. (1994): A cognitive gap between arithmetic and algebra. Educational Studies in Mathematics, 27(1). S. 59-78.

Jahnke, Thomas (2015). Mathe Werkstatt 7 – Schulbuch, eine Rezession, GDM-Mitteilungen 98, S. 70-76, 2015.

Janßen, T. (2016). Ausbildung algebraischen Struktursinns im Klassenunterricht. Lernbezogene Neudeutung eines mathematikdidaktischen Begriffs. Dissertationsschrift, Veröffentlicht auf dem Dokumentenserver der Staats- und Universitätsbibliothek Bremen

Hall B. C. (1999), USING ALGEBRA TILES EFFECTIVELY - TOOLS FOR UNDERSTANDING, Prentice Hall, Inc. 1999.

Hart, K (1981), Children's Understanding of Mathematics: 11 - 16, London.

Heymann, Hans–Werner (1996), Allgemeinbildung und Mathematik, Weinheim.

Hischer, H. (1993). Wieviel Termumformung braucht der Mensch? Fragen zu Zielen und Inhalten eines künftigen Mathematikunterrichts angesichts der Verfügbarkeit informatischer Methoden. Hildesheim, Franzbecker.

Hirscher H. (2021), Was ist eine Gleichung? In: GDM-Mitteilungen 110 – 2021, Hrsg.: Götze D., Oktoberdruck GmbH Berlin.

Hoffmann, Michael H.G (2005) Erkenntnisentwicklung, Ein semiotisch-pragmatischer Ansatz. Vitorio Klostermann Frankfurt am Main

Jacobs, Franks, Carpenter,Levi & Betty (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. Journal for research in mathematics education, 38(3), 258-288.

Kaput, J. J. (1999). Representations, inscriptions, descriptions and learning: A kaleidoscope of windows. *Journal of Mathematical Behavior*.

Kaput, J. J., Carraher, D. W., & Blanton, M. L. (Hrsg.). (2008). *Algebra in the early grades*. New York: Lawrence Erlbaum Associates.
Kaune C., Just I. (2005), Spuren kognitiver Strukturen in Schülerlösungen einer Bewegungsaufgabe, In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2005, S. 287 –290, Hildesheim: Franzbecker.
Kernlehrplan G8 (2007) Mathematik für das Gymnasium – Sekundarstufe 1 (G8) für Nordrhein-Westfahlen, Ritterbach Verlag, Frechen
Kernlehrplan G9 (2019) Mathematik für die Sekundarstufe 1 Gymnasium in Nordrhein-Westfahlen, Herausgeber: Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen Völklinger Straße 49, 40221 Düsseldorf
Klein, Jakob (1936). Die griechische Logistik und die Entstehung der Algebra**,** Springer Berlin
Kleinert, Ernst (2007). Mathematik, Schrift und Kalkül, Hamburger Beiträge zur Mathematik
Kleinert, Ernst (2006). Von Zahlen und Figuren, Hamburger Beiträge zur Mathematik
Kline, Morris (1973). Why Johnny Can't Add: The Failure of the New Math. New York: St. Martin's Press.
Kieran, C. (1989). The Early Learning of Algebra: A Structural Perspective, in: Kieran, C. / Wagner, S. (eds.): Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra, S. 33 - 56, Reston 1989
Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. In D. Grouws (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 390-419). New York: Macmillan Publishing Company.
Kieran, C.; Boileau, A.; Garançon, M. (1993). Introducing Algebra by Means of a Technology-supported, Functional Approach, in: Approaches to Algebra pp 257-293, Perspectives for Research and Teaching. Dordrecht. Kluwer Academic Publishers.
Kieran, C., & Sfard, A. (1999). Seeing through symbols: The case of equivalent expressions. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 21*(1), 1-17.
Krauth, B. & Warmeling, A. (2018). Mathekoffer Algebra. MUED, Notuln-Appelhülsen.
Krämer, S. (1988), Symbolische Maschinen. Die Idee der Formalisierung in geschichtlichem Abriss. Wissenschaftliche Buchgesellschaft.
Kromer, Günther (1996). Schwierigkeiten von Schülern mit Algebra, unveröffentlichte Dissertationsschrift
Küchemann, D. (1978): Children's Understanding of numerical Variables. Mathematics in School, 7(4). S. 23-26.
Küchemann, D. E. (1980): The understanding of generalized arithmetic by secondary school children (Dissertation). London. University of London.
Küchemann, D.: Algebra, in: Hart, K. (ed.) 1981, Children's understanding of Mathematics: 11 - 16, S. 102-119, London 1981
Lang, S (1972). The whole thing is of course pure magic. Introduction to Algebraic and Abelian Functions, Addison-Wesley 1972, S.9.
Lee, L. & Wheeler, D. (1989). The arithmetic connection- Educational Studies in Mathematics. Springer
Lenne, H. (1969). Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland. Stuttgart: Ernst Klett.
Leontjew, A. A. (1984). Tätigkeit, Bewusstsein, Persönlichkeit. Köln: Pahl-Rugenstein.
Lergenmüller & Schmidt (2011). Neue Wege 7. Cornelsen.
Lerman, S. (2001). Cultural, Discursive Psychology: A Sociocultural Approach to Studying the Teaching and Learning of Mathematics. Educational Studies in Mathematics , Vol. 46, No. 1/3, Bridging the Individual and the Social: Discursive Approaches to Research in Mathematics Education pp. 87-113. Springer
Lins, R.C. (1992) A framework for understanding what algebraic thinking is. PhD thesis, University of Nottingham.
Liping Ma (1999). Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States, Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
Linchevski, L. (1995). Algebra with numbers and arithmetic with letters: A definition of prealgebra. Journal of Mathematical Behavior 14, 113-120.

Linchevski, L. & Livneh, D. (1999). Structure Sense: The Relationship between Algebraic and Numerical Contexts. In: Educational Studies in Mathematics 40, S. 173–196.
Lörcher, G. A. (1987). Schülerschwierigkeiten bei der Addition und Subtraktion von Termen , in: Kupari, P. (ed.): Mathematics Education Research in Finland, S. 65 – 84
Lörcher, G. A. (1995). Fachliche Grundlagen des Mathematikunterrichts im 7./8. Schuljahr (Skript). Freiburg
Leuders, T., Prediger, S., Barzel, B.; Hußmann, S. (Hrsg.) (2014). Mathewerkstatt 7. Schuljahr, Schülerbuch. Cornelsen Verlag, Berlin
Macnab, D. (2000) 'Raising standards in mathematics education, values, vision, and TIMSS', Educational Studies in Mathematics 42(1), 61-80.
Mahoney, M. S. (1986). THE MATHEMATICAL REALM OF NATURE. Princeton University Press.
Mashaal, M. (2006). Bourbaki. A Secret Society of Mathematicians. American Mathematical Society.
Malle, G. (1985): Schülerinterviews zur elementaren Algebra. In Dörfler, W. &Fischer, R. (Hrsg.): Empirische Untersuchungen zum Lehren und Lernen von Mathematik. Wien. Hölder-Pichler-Tempsky. S. 167-174.
Malle, G. (1993). Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Unter Mitarbeit von H. Bürger. Herausgegeben von E. C. Wittmann.Braunschweig, Wiesbaden. Vieweg.
Mann, Thomas (1960) „Königliche Hoheit“, Ges. Werke, Frankfurt/M 1960, Bd. II, S.242
Martin J. P. & Owen E. (2001). Lernen für das leben. Erste Ergebnisse der internationalen Schulleistungsstudie PISA 2000. OECD.
Matthias, J.A. (1813). Leitfaden für einen heuristischen Schulunterricht über die allgemeine Gröszenlehre, Elementargeometrie, ebene Trigonometrie, gemeine Algebra und die Apollonischen Regelschnitte. Magdeburg: Wilhelm Heinrichshofen.
Maturana, H.; Varela, F. J. (1987): Der Baum der Erkenntnis. Die biologischen Wurzeln des menschlichen Erkennens. Bern, München, Wien: Scherz-Verlag.
Matz, M. (1980), Towards a Computational Theory of Algebraic Competence , in: Journal of Mathematical Behavior 3, 1 , S. 93 - 166, 1980
Matz, M. 1982, Towards a Process Model for High School Algebra Errors, in: Sleeman, D. / Brown, J. (eds.): Intelligent Tutoring Systems, S. 25 - 50, London
Mason, J., Graham, A., Pimm, D. & Gowar, N. (1985): Routes to/ Roots of Algebra. Milton Keynes. The Open University Press.
Mason, J. & Sutherland, R. 2002, Key Aspects of Teaching Algebra in Schools, QCA, London.
Mason, J., Graham, S., Johnston-Wilder, S. (2005). Developing Thinking in Algebra. Thousand Oaks, CA: SAGE Publications.
McNeil, N. M., Grandau, L., Knuth, E. J., Alibali, M. W., Stephens, A. C., Hattikudur, S. & Krill, D. E. (2006): Middle-School Students' Understanding of the Equal Sign: The Books They Read Can't Help. Cognition and Instruction, 24(3). S. 367-385.
Melzig, D. (2013). Die Box als Stellvertreter. Ursprüngliche Erfahrungen zum Variablenbegriff. Springer Spektrum.
Meyer, A. (2015). Diagnose algebraischen Denkens. Von der Diagnose- zur Förderaufgabe mithilfe von Denkmustern. Springer Spektrum.
Nelssen J. (1993). Proofs without words. Exercises in visual thinking. The Mathematical Assoziation of America (Incorporated).
Nemirovsky, R. (1994). On ways of symbolizing: The case of Laura and the velocity sign. Journal of Mathematical Behavior 13, 389-422.
Nesselmann, G. H. F. (1842). Versuch einer kritischen Geschichte der Algebra. Verlag von G. Reimer, Berlin.
Nührenbörger, M. & Schwarzkopf, R. (2013): Gleichungen zwischen „Ausrechnen“ und „Umrechnen“. Beiträge zum Mathematikunterricht 2013. Münster. WTM-Verlag. S. 716-719.
Nydegger-Haas, A. (2018). Algebraisieren von Sachkontexten. Die Bedeutsamkeit der Wechselwirkung zwischen relationaler und operationaler Denk- und Sichtweise beim Lernen von Algebra. Springer Spektrum

Oerter R. & Montanda L. (2002). Entwicklungspsychologie. Psychologie Verlags Union.
Padberg, F. (1996). Aus Fehlern lernen, in: Friedrich Jahresheft XIV, S. 56 – 59.
Piaget, J. (1971). Biology and knowledge. Chicago: Chicago University Press.
Piaget, J, (1978). Das Weltbild des Kindes. dtv/Klett-Cotta, München.
Pickert, G. (1961). Bemerkungen zum Variablenbegriff, in: Mathematisch-physikalische Semesterberichte 7, S. 76 - 88
Pilet, J. (2012): Parcours d'enseignement différencié appuyés sur un diagnosticen algebra élémentaire à la fin de la scolaritè obligatoire: modélisation, implémentation dans une plateforme en ligne et evaluation. Université Paris-Diderot Paris 7.
Pilet, J. (2013). Implicit Learning in The Teaching of Algebra: Designing a task to address the equivalence of expressions. Paper presented at the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME8), Working Group 3: „Algebraic Thinking". Antalya, Turkey.
Pimm, D. (1995). Symbols and meanings in school mathematics. London. Routledge.
Poincare, H (1908) Science et methode, Flammarion, Paris.
Polya (1962). The teaching of mathematics and the biogenetic la', in I. J. Good (ed.), The Scientist Speculates, Heinemann, London, S. 352-356.
Pratchet, T. (1993). Helle Barden. Goldmann Verlag.
Prediger, S. (2009). Inhaltliches Denken vor Kalkül –Ein didaktisches Prinzip zur Vorbeugung und Förderung bei Rechenschwierigkeiten. In: Fritz, Annemarie/Schmidt, Siegbert (Hrsg.): Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I, Beltz Verlag, Weinheim, S. 213-234.
Prediger, S. (2009a): Verstehen durch Vorstellen. Inhaltliches Denken von der Begriffsbildung bis zur Klassenarbeit und darüber hinaus. In: Leuders, T. / Hefendehl-Hebeker, L. / Weigand, H.-G. (Hrsg.): Mathemagische Momente. Berlin: Cornelsen, S. 166-175.
Radatz, H. (1979). Schülerfehler im mathematischen Lernprozess, in: Schriftenreihe des IDM 19, S. 57 - 63, Bielefeld 1979.
Radatz, H. (1980). Fehleranalysen im Mathematikunterricht, Braunschweig.
Radford, L. (1996). The roles of geometry and arithmetic in the development of algebra: historical remarks from a didactic perspective. In Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (Hrsg.): Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching. Dordrecht. Kluwer Academic Publishers.
Radford, L. (2002). On heroes and the collapse of narratives. A contribution to the study of symbolic thinking. In Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, ed. A.D. Cockburn and E. Nardi, Vol. 4, 818. University of East Anglia, UK.
Radford, L. (2006). The cultural-epistemological conditions of the emergence of algebraic symbolism. In F. Furinghetti, S. Kaijser, & C. Tzanakis (Eds.), Proceedings HPM 2004 & ESU 4 (rev. ed., pp. 509–524). Iraklion, Greece: University of Crete.
Radford, L. & Puig, L. (2007). Syntax and Meaning as Sensuos, Visual, Historical Forms of Algebraic Thinking. Educational Studies in Mathematics, 66, 145–164.
Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. Research in Mathematics Education Vol. 12, No. 1, March 2010, S. 1-19.
Radford, L. & Furinghetti (2018). Contrasts and oblique connections between historical conceptual developments and classroom learning in mathematics. In L. English (Ed.), Handbook of International Research in Mathematics Education, 2nd Edition (pp. 626 – 655). New York: Routledge, Taylor and Francis, 626-655.
Reimann, K.; Probleme des Mathematikunterrichtes beim Übergang von Arithmetik zur Algebra, Aus: Beiträge zum Mathematikunterricht 2011 Digital, https://www.fachportal-paedagogik.dem7 (zuletzt abgerufen am 19.08.2021).
Rezat, Sebastian (2008), Die Struktur von Mathematikschulbüchern. JMD 29, 46–67.
Rezat, Sebastian (2009a): Das Mathematikbuch als Instrument des Schülers. Eine Studie zur Schulbuchnutzung in den Sekundarstufen. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag / GWV, Fachverlage, Wiesbaden.

Rezat, Sebastian (2009b): Das Mathematikschulbuch als Instrument des Schülers - Eine empirische Studie zur Schulbuchnutzung in den Sekundarstufen. In: JMD 30 (3-4), S. 287– 288.
Rezat, S. (2011) Wozu verwenden Schüler ihre Mathematikschulbücher? Ein Vergleich von erwarteter und tatsächlicher Nutzung. J Math Didakt 32, 15.
Roth, J. (2005). Bewegliches Denken im Mathematikunterricht. Dissertationsschrift. Bayerische Julius-Maximilians-Universität Würzburg.
Rüede, C. (2012). Strukturieren eines algebraischen Ausdrucks als Herstellen von Bezügen. Journal für Mathematik-Didaktik, 33 (1), 113–141.
Rüede, C. (2015). Strukturierungen von Termen und Gleichungen. Wiesbaden: Springer. doi: 10.1007/978-3-658-08214-7
Pycior, H. (1997), Symbols, Impossible Numbers, and Geometric Entanglements: british algebra through the commentaries on Newton’s Universal Arithmetick, Cambridge University Press, Cambridge.
Sauerwein, M. (2019). Figurierte Zahlen als produktiver Weg in die Mathematik. Ein Entwicklungsforschungsprojekt im Kontext einer Internationalen Vorbereitungsklasse. Springer Spektrum.
Siebel, Franziska (2005) Elementare Algebra und ihre Fachsprache: eine allgemein-mathematische Untersuchung.5, Mühltal, Verl. Allg. Wiss. – HRW.
Siebeneicher C. (2008). Algebra in der Grundschule. Auf der Suche nach einer verlorenen Kunst. Universität Bielefeld, Fakultät für Mathematik, http://www.math.uni-bielefeld.de/~sieben; zuletzt abgerufen im Januar 2019
Schmidt, A. & Weidig, I. (2008) Lambacher Schweizer 7, Mathematisches Unterrichtswerk für das Gymnasium, Ausgabe NRW, Klett.
Schmidt, K. (2021), LEHRERSCHMIDT. Einfach lernen. https://www.lehrer-schmidt.de/ (zuletzt abgerufen am 27.12.2021)
Schmidt, W.H., McKnight, C.C., Cogan, L.S., Jakwerth, P.M. and Houang, R.T. (1999). Facing the Consequences - Using TIMSS for a Closer Look at U.S. Mathematics, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.
Scholz, E. 1990 (Hrsg.), Geschichte der Algebra. Eine Einführung. Mannheim: BI-Wissenschaftsverlag.
Schröder, R. (2014). Kalkül oder Prozess – Das Problem des „modernen“ Mathematikunterrichtes, http://mathematikinformation.info/pdf2/MI61Schroeder.pdf (zuletzt abgerufen am 13.09.2021).
Schubring, G. & Karp, A. (2014) Handbook on the History of Mathematics. Springer.
Schwank, I. (1999/2000): QuaDiPF – Qualitatives Diagnoseinstrument für prädikatives versus funktionales Denken. Sets A/B/C/D. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.
Schwank I. (2003), Einführung in prädikatives und funktionales Denken, ZDM 2003 Vol. 35 (3), S. 70-78.
Schwank I., Armbrust S., Libertus M. (2003), Prädikative versus funktionale Denkvorgänge beim Konstruieren von Algorithmen, ZDM 2003 Vol. 35 (3), S. 79-85.
Siepinska A. (Hrs.g) (2001), Bridging the Individual and the Social: Discursive Approaches to Research in Mathematics Education, Educational Studies in Mathematics, Vol. 46, No. 1/3, Springer.
Sfard, Anna (1987). Two conceptions of mathematical notions: Operational and structural. In J.C. Bergeron, N. Hersovics, & C. Kieran (Eds.), Proceedings of Eleventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, 162- 169). Montreal, Canada: University of Montreal.
Sfard, Anna (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes an dobjects as different sides of the same coin**.** Educational Studies in Mathematics, 22, l-36.
Sfard, Anna (1992). Operational origins of mathematical notions and the quandary of reification thecase of function. In G. Hare1 & E. Dubinsky (Eds.), The concept of function: Aspects of

epistemology and pedagogy (MAA Notes, Vol. 25, pp. 59-84). Washington, DC: Mathematical Association of America.
Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification—the case of algebra *Learning mathematics* (pp. 87-124): Springer.
Sfard, Anna (1995). The Development of Algebra: Confronting Historical and Psychological Perspectives. JOURNAL OF MATHEMATICAL BEHAVIOR 14, 15-39
Sfard, Anna (2001). There Is More to Discourse Than Meets the Ears: Looking at Thinking as Communicating to Learn More about Mathematical Learning. Educational Studies in Mathematics, 2001, Vol. 46, No. 1/3, Bridging the Individual and the Social: Discursive Approaches to Research in Mathematics Education, S. 13-57. Springer
Sfard, Anna (2008). Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing. Cambridge University Press.
Siebeneicher, C (2008), Algebra in der Grundschule - Auf der Suche nach einer verlorenen Kunst, abgerufen zuletzt am 16.12.2020 auf https://www.math.uni-bielefeld.de/~sieben/workshop-deutsch.pdf (2008)
Sjuts J. (2002), Unterschiedliche mentale Konstruktionen beim Aufgabenlösen, Eine Fallstudie zur Mathematik als Werkzeug zur Wissenspräsentation, In: Journal für Mathematik-Didaktik (23), S.106-128
Soloway, Elliot, Lochhead, Jack, & Clement, John (1982). Does computer programming enhance problem solving ability? Some positive evidence on algebra word problems. In R.J. Seidel, R.E. Anderson & B. Hunter (Eds.), Computer literacy (pp. 171-185). New York: Academic.
Sowder, J.; Schappelle, B. (1994). Research into Practice: Number Sense-Making**.** *Arithmetic Teacher*, v41 n6 p342-45 Feb 1994
Specht, B. J. (2007). 36 kleine lila z. Zum Variablenverständnis von Schülerinnen und Schülern der vierten und achten Klasse. Beiträge zum Mathematikunterricht 2007 (pp. 1-4). Hildesheim, DE: Franzbecker
Stahl, R. (2000). Lösungsverhalten von Schülerinnen und Schülern bei einfachen linearen Gleichungen: Eine empirische Untersuchung im 9. Schuljahr und eine Entwicklung eines kategoriellen Computerdiagnosesystems. Online unter: https://publikationsserver.tu-braunschweig.de/receive/dbbs_mods_00001119 (zuletzt abgerufen am 04.01.2021).
Steinweg, A. S. (2012). Algebra in der Grundschule – Muster und Strukturen – Gleichungen – funktionale Beziehungen. Springer Spektrum, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2013.
Stigler, J. and Hiebert, J. (1999) The Teaching Gap, Best Ideas from the World's Teachers for Improving Education in the Classroom, The Free Press, New York.
Striethorst A. (2005), Über die Unterschiedlichkeit von Vorstellungen beim Gleichungslosen, JMD 26 (2005) H. 2, S. 170-171.
Tietze, U.-P. (1988). Schülerfehler und Lernschwierigkeiten in Algebra und Arithmetik -Theoriebildung und empirische Ergebnisse aus einer Untersuchung, in: JMD 9, Heft 2/3, S. 163 - 204
Toeplitz, O. (1949). Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung, Springer-Verlag, Berlin.
Treffers, A. (1983). Fortschreitende Schematisierung, ein natürlicher Weg zur schriftlichen Multiplikation und Division im 3. und 4. Schuljahr. Mathematik lehren, (1), S. 16-20.
Tropfke, J. (1980). Geschichte der Elementarmathematik, 4. Auflage, Band 1 - Arithmetik und Algebra. Vollständig neu bearbeitet von Kurt Vogel, Karin Reich, Helmuth Gericke. Walterde Gruyter. Berlin. New York.
Unguru, S. (1975) . On the need to rewrite the history of greek mathematics. Archive for the History of Exact Sciences, Bd. 15, 1975/76, S. 67–114).
Ursini, S. (2001) General Methods: a Way of Entering the World of Algebra. In Sutherland, R., Rojano, T., Bell, A. und Lins, R. (Hrsg.): Perspectives on School Algebra. Dordrecht. Kluwer. S. 209-229.
Usiskin, Z. (1988). Conceptions of Algebra and Uses of Variables. In NCTM: The Ideas of Algebra, K-12. Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. Reston. NCTM. S. 8-19.

Van Ameron, B.A. (2002). REINVENTION OF EARLY ALGEBRA, Developmental research on the transition from arithmetic to algebra. CD-[beta] Press, Center for Science and Mathematics Education.
Van der Waerden, B. L. (1983). Geometry and Algebra in Ancient Civilizations. Berlin: Springer-Verlag.
Van der Waerden, B. L. (1985). A History of Algebra (from al-Khwarizmi to Emmy Noether). Berlin: Springer-Verlag.
Vogel, R (2005) Muster – eine Leitidee mathematischen Denkens und Lernens, zuletzt abgerufen am 11.01.2021 auf https://eldorado.tu-dortmund.de/handle/2003/30631.
Vogel, R. & Wessolowski, S. (2005). Muster und Strukturen. Eine Leitidee für den Mathematikunterricht. In J. Engel, R. Strukturieren – Modellieren – Kommunizieren. Leitbilder mathematischer und informatischer Aktivitäten (S. 57-67). Hildesheim: Franzbecker.
Vogt, K.; Hechenleitner, A. (2006). Theorien des Lernens - Folgerungen für das Lehren. Herausgeber: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München, www.isb.bayern.de.
Vollrath, H. J. (1994). Algebra in der Sekundarstufe. Mannheim.
Vom Hofe, R. (1995). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Heidelberg Spektrum.
Vom Hofe, R. (2003): Grundbildung durch Grundvorstellungen. Mathematik lehren, 118. S. 4-8.
Vom Hofe, R., Kleine, M., Blum, W. & Pekrun, R. (2006): The effect of mental models ("Grundvorstellungen") for the development of mathematical competencies. First results of the longitudinal study PALMA. In: Bosch, M.(Hrsg.): Proceedings of the CERME 4.
von der Twer T. (2000). Brückenkurs Mathematik. Universität Wuppertal. unveröffentlicht
Vygotskij, L. S. (1934). Denken und Sprechen. Psychologische Untersuchungen. Herausgegeben und aus dem Russischen übersetzt von Joachim Lompscher und Georg Rückriem. 3., neu ausgestattete Auflage 2017, Beltz Verlag, Weinheim und Basel.
Vygotsky, L. S. (1997). *Collected works*, Volume 4 (R. Rieber, Ed.). New York: Plenum Press. Vygotsky, L.
Wagner, S. and Kieran, C. (eds.) (1989). Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra, NCTM, Reston, VA.
Weidig, I. (1994). Gleichungslehre – Entwicklung und Tendenz. In: MU 40 (4), S. 26 -42
Wellstein, H. (1978). Abzählen von Gitterpunkten als Zugang zu Termen. Didaktik der Mathematik 6 (1),54-64.
Wiegand B., Wiegand S. (2006). Der Termbaukasten – Ein aktiver Einstieg in die Algebra. Mathematik lehren 136, S. 44-46.
Wieland, G. (2006). Terme bauen. Impulse für mehr Anschaulichkeit in der elementaren Algebra. Mathematik lehren 136, S. 22-43.
Winter, H. (1982): Das Gleichheitszeichen im Mathematikunterricht der Primarstufe. Mathematica Didactica, (5)1. S. 185-211.
Winter, H. (1989). Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht- Braunschweig: Vieweg – Springer.
Winter, Heinrich Mathematikunterricht und Allgemeinbildung (1996). Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, degruyter.com.
Wittgenstein, L. (1984). Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik. Werkausgabe, Band 6. Suhrkamp Verlag.
Wittmann, E. Ch. (1994). Wider die Flut der „bunten Hunde“ und der „grauen Päckchen“: Die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und des produktiven Übens. In E. Ch. Wittmann, & G. N. Müller, Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1 (S.157-171). Leipzig
Wittmann, Erich Ch. (1995) „Aktiv-entdeckendes und soziales Lernen im Rechenunterricht – vom Kind und vom Fach aus“ In: Wittmann, Erich Ch. und Gerhard N. Müller (Hrsg.) Mit Kindern rechnen. Frankfurt: 10-41
Wittmann E. und Müller G. Projektseite von „MATHE 2000“: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/didaktik/mathe2000/ letzte Aktualisierung: Juli 2013, zuletzt besucht am 04.02.2021

Wittmann, E. Ch. (2003): Was ist Mathematik und welche pädagogische Bedeutung hat das wohlverstandene Fach auch für den Mathematikunterricht der Grundschule. In: Baum, M. & Wielpütz, H. (Hrsg.): Mathematik in der Grundschule - Ein Arbeitsbuch. Kallmeyer, Seelze, S. 22-27.

Wittmann G., & Haug, R (2013). Materialien wachsen mit. Muster und Strukturen vom Kindergarten bis zur Sekundarstufe I. In: Mathematik lehren Heft 176, Februar 2013.

Wolff, C. (1772). Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften, Rengerische Buchhandlung, Halle

Wolff, P. (1976). Zur Didaktik der Gleichungslehre, in: Winter, H./Wittmann, E. (Hrsg.): Beiträge zur Mathematikdidaktik, Festschrift für Wilhelm Oehl, S. 179 -220, Hannover.

Wolff. P. (2019). Elementare Algebra: auch im Jahr 2019 ein Forschungsdesiderat der Mathematikdidaktik. GRIN-Verlag www.grin.com

Waismann, F (1970), Einführung in das mathematische Denken, München

Wittgenstein, L. (1984) Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik. Werkausgabe, Band 6. Suhrkamp Verlag.

Wright, J. (1906), The Teaching of Mathematics in the Elementary and the Secondary School, American Teacher Series, J. Russell (Ed.), Longmans Green, London.

Zwetzschler, L & Prediger, S. (2013). Der lange Weg zum Herstellen von Beziehungen. Fachdidaktische Entwicklungsforschung zur Gleichwertigkeit algebraischer Terme. In: Komorek, Michael & Prediger, Susanne (Hrsg.): Der lange Weg zum Unterrichtsdesign: Zur Begründung und Umsetzung genuin fachdidaktischer Forschungs- und Entwicklungsprogramme. Münster u. a.: Waxmann, S. 141-156.

Zwetzschler, L. (2015), Gleichwertigkeit von Termen - Entwicklung und Beforschung eines diagnosegeleiteten Lehr-Lernarrangements im Mathematikunterricht der 8. Klasse, Berlin: Springer Spektrum

Zsakis, R. (2001), From arithmetic to algebra via big numbers In Chick, Stacey, Vincent & Vincent (Hrsg.): The Future of the Teaching and Learning of Algebra. The University of Melbourne, Australia

Anhang A - Pretests zu Erhebung des Vorwissens

In allen Klassen wurde vor dem Reihenbeginn ein Diagnosetest durchgeführt, der untersuchen sollte, welche Vorstellung bezüglich. algebraischer Objekte die Schüler bereits mitbringen. Die Schüler hatten dazu 60 min Zeit und die Tests sind alle, bis auf den letzten, in Präsenz durchgeführt worden. Grob gesprochen können die Aufgaben der Pretests in folgende Kategorien, die sich teilweise überlappen, eingeteilt werden:

(1) **Rechengesetze.** Wie vertraut sind die Schüler mit den arithmetischen Rechengesetzen und deren algebraischer Formulierung?
(2) **Unterrichtspezifische Vorkenntnisse.** Wie gut können die Schüler mit symbolisch-algebraisch konnotierten Fragestellungen umgehen, die eng verwandt zu Aufgabeformaten sind, die sie schon vorher im Unterricht kennengelernt haben?
(3) **Relationales Denken.** Inwieweit ist ein relationales Denken im Zusammenhang mit Gleichungen schon ausgebildet?
(4) **Variablenkonzepte.** Welche (Prä-)Konzepte zu Variablen, Termen und Gleichungen wurden bereits aufgebaut?

Die Aufgaben zur Erhebung von Kategorie (1) (Rechengesetze) wurden von mir selbst entwickelt (Aufg. 7).
Zu Kategorie (2) konstruierte ich Aufgaben, die sich nah an vorher schon im Unterricht behandelten Aufgabentypen anlehnen. Dies sind Aufgaben zum Umgang mit algebraischen Flächeninhaltsformeln und linearen Funktionen (Aufg. 1 und 2 in P3).
Zu Kategorie (3) (*Relationales Denken*) nutze ich Items die genau so auch in mehreren internationalen Studien schon seit langem (Hart 1981, Mason et al. 2008, Stephens 2007, 2008, Stephens & Wang 2008, Stephens & Ribeiro 2012) verwandt wurden, um die Ausprägung relationalen Denkens zu untersuchen.
Die Kategorie (4 – Variablenkonzepte) wird insbesondere durch die Aufg. 3, Aufg. 5 f,g und Aufg. 6 vertreten Diese Teilaufgaben sind alle von Küchemann (1978, 1980, 1984,) übernommen. Im Rahmen des Forschungsprojekts „*Concepts in Secondary Mathematics and Science*" (CSMS) von 1974.-1979 in England (Hart 1981), stellt Küchemann (1981) die Auswertungen der Bearbeitungen von 31 Items durch über 1000 13 bis 15-jährige Schüler dar und kommt zu dem Ergebnis, dass trotz unterrichtlicher Behandlung der Algebra nur ein kleiner Prozentsatz der 13-15 jährigen Schülern tragfähige Variablenkonzepte ausgebildet hatten. Insbesondere erklärt Küchemann, wie die Lösungshäufigkeit seiner Items Hinweise auf die Ausprägung der einen oder anderen (teilweise falschen) Variablenvorstellung geben kann. Aufgabe 3 will erheben, inwiefern die Schüler in der Lage sind, korrekte Übersetzungsleistungen von Term zu Text und von Text zu Term durchzuführen.
Mit Aufgabe 4 soll erhoben werden inwieweit die Schüler von sich aus in der Lage[82] sind Zahlenfolgen auf Zahlenebene fortzuführen und mit Variablen zu generalisieren. Nach einer Idee von Rina Zsakis (2001) wurde dabei die nicht im Taschenrechner als Dezimalzahl darstellbare Zahl 2^{100} verwendet, um das explizite Ausrechnen von z. B. $2^{100} \cdot (2^{100} + 1)$, dass ja die visuelle Salienz der Aufbaustruktur der Folge verschwinden lässt, zu verhindern.

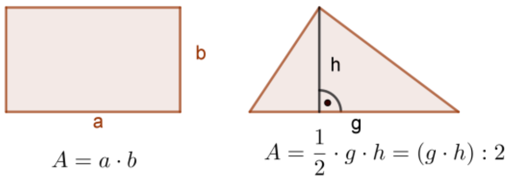
Der so erhobene Lernstand aller teilnehmenden Klassen war im Großen und Ganzen der Gleiche, es gab keine übermäßigen Unterschiede. Auch dieser Pretest erfuhr im Design-Zyklus zweimal eine Veränderung (nämlich direkt nach der Pilotphase und nach der 3. Durchführung). Auch wenn dabei Umformulierungen durchgeführt wurden und die ein oder andere (Teil-)Aufgabe ausgetauscht wurde, blieben die 4 dargestellten Kategorien die gleichen. Im Folgenden ist der letzte Pretest (Durchführung 4 und 5) zu sehen.

[82] Eine Generalisierung von (Zahlen-)folgen mit Unbestimmten, etwa das Aufstellen von Aufbauformeln aus Punktmusterfolgen, war vorher in keiner einzigen Klasse Unterrichtsthema (obwohl in der letzten Durchführung das eingesetze G9-Lehrbuch (Blank et al.) in Klasse 6 entsprechende Aufgaben bereithält).

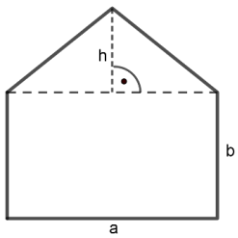
Pretest (4. und 5. Durchführung)

Pretests wurden vor allen Durchführungen geschrieben. Die Inhaltsfelder (Abschnitt V.IV) blieben dabei die Gleichen, die eingesetzten Items änderten sich im Design-Zyklus etwas. Hier die Items der 4. und 5. Durchführung.

Aufgabe 1
Hier siehst du die Formeln für die Flächeninhalte von Rechteck und Dreieck.



a) Berechne den Flächeninhalt eines Dreiecks mit einer Höhe $\mathrm{h} = 3\ \mathrm{cm}$ und einer Grundseite $\mathrm{g} = 10\ \mathrm{cm}$.



b) Gib eine Formel mit a, b und h für den Flächeninhalt der Hausfigur rechts an.

Aufgabe 2
Für eine Taxifahrt ist eine Grundgebühr von 2 € und für jeden Kilometer 2,50 € zu zahlen.

a) Wie teuer wäre eine Taxifahrt von 12 km Länge?
b) Wie weit könnte man für 17 Euro fahren?
c) Wie teuer ist eine Taxifahrt, wenn x Kilometer gefahren werden? Stelle dazu eine Formel auf.

Aufgabe 3
In Zahlenfolgen werden aufeinanderfolgende Zahlen nach bestimmten Regeln gebildet. In den folgenden Tabellen sind solche Zahlenfolgen vorgegeben.
Ergänze jeweils die Zahlen an der $5., 6., 20., 2^{100}.$ und x.-ten Stelle (schreibe die Ergebnisse in die grauen Felder):

Stelle	1	2	3	4	5	6	...	20	...	2^{100}	x
Zahl	2	4	6	8			...		...		

Stelle	1	2	3	4	5	6	...	20	...	2^{100}	x
Zahl	$1 \cdot 2$	$2 \cdot 3$	$3 \cdot 4$	$4 \cdot 5$			...		...		

Hinweis: *2^{100} ist die Zahl, die entsteht, wenn die 2 hundertmal mit sich selbst multipliziert. Versuche nicht die Zahl 2^{100} auszurechnen, sondern rechne einfach mit 2^{100}.*

Aufgabe 4 Kleine Gurken kosten 8 Cent das Stück und eine Karotte kostet 6 Cent.

Wenn g für die Anzahl der Gurken und k für die Anzahl der Karotten steht, wofür steht dann

$$8 \cdot g + 6 \cdot k?$$

Wie groß ist die Gesamtzahl der Gemüsestücke (Gurken und Karotten zusammen)?

Aufgabe 5

Im Folgendem geht es um die rechtsstehende Gleichung.

$$18 + \underset{Box\ A}{\square} = 20 + \underset{Box\ B}{\square}$$

a) In die Boxen A und B sollen Zahlen eingetragen werden, so dass korrekte Gleichungen entstehen. Gib in **1.**, **2**. und **3**. drei verschiedene Möglichkeiten an, die Boxen korrekt auszufüllen.

1: $18 + \underset{Box\ A}{\square} = 20 + \underset{Box\ B}{\square}$

2: $18 + \underset{Box\ A}{\square} = 20 + \underset{Box\ B}{\square}$

3: $18 + \underset{Box\ A}{\square} = 20 + \underset{Box\ B}{\square}$

b) Welchen Zusammenhang gibt es zwischen den Zahlen in Box A und Box B in allen Gleichungen?

c) Die Zahl 18 soll nun durch 226 und die Zahl 20 durch 231 ersetzt werden. Welcher Zusammenhang besteht nun zwischen den Zahlen in Box A und Box B?

d) Wenn du irgendeine Zahl in Box A schreibst, kannst du dann immer eine Zahl für Box B finden, so dass die Gleichung korrekt ist? Wenn ja, wie? Erkläre deine Überlegungen!

e) Was kannst du über x und y in der folgenden Gleichung sagen: $\boldsymbol{x + 2 = y + 10}$?

f) i) Was kannst du über y sagen, wenn $y = 3 \cdot x + 1$ und $x = 4$?

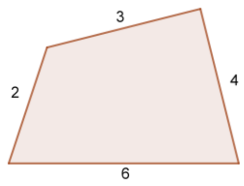
ii) Was kannst du über m sagen, wenn $m = n + 3$ *und* $n = 4$

iii)

Wenn $a + b = 43$, dann ist $a + b + 2 =$……	Wenn $n - 246 = 762$ dann ist $n - 247 =$………	Wenn $e + f = 8$ dann ist $e + f + g =$……

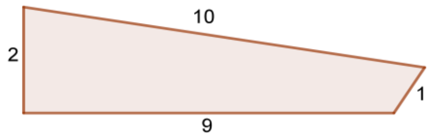
g) Was ist größer, $2 \cdot x$ oder $x + 2$? Erkläre!

Aufgabe 6

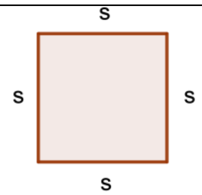


a)
Der Umfang u dieser Figur ist
$2 + 3 + 4 + 6 = 15.$

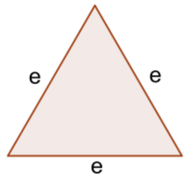
b)

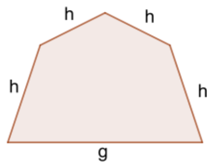


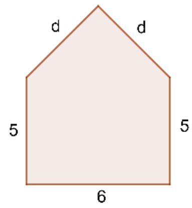
Berechne den Umfang dieser Figur.

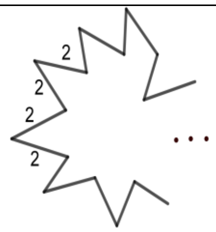


Dieses Quadrat hat die Seitenlänge s, der Umfang ist also $u = 4 \cdot s$.
Bestimme den Umfang für jede der folgenden Figuren:









Ein Teil dieser Figur ist nicht dargestellt. Insgesamt hat diese Figur x Seiten, jede davon ist 2 cm lang.

Aufgabe 7

Die Gleichung $8 \cdot (5 - 3) = 8 \cdot 5 - 8 \cdot 3$ ist korrekt!

a) Überprüfe dies, indem du die Terme links und rechts des „="-Zeichens berechnest.
b) Was passiert, wenn die 5 durch irgendeine andere Zahl ersetzt wird? Bleibt dann die Gleichung korrekt?
c) Was passiert, wenn du zusätzlich die 8 durch eine andere Zahl ersetzt? Was passiert, wenn du alle drei Zahlen (5, 8 und 3) durch andere Zahlen ersetzt? Bleibt die Gleichung dann immer korrekt, egal durch welche Zahlen die 5, 8 und 3 ersetzt werden? **Begründe!**

d) Für beliebige Zahlen a , b und c gilt:

	Gilt immer	Gilt nie	Gilt manchmal, …
$a + b = b + a$	☐	☐	… wenn,
$a + b + c = c + a + b$	☐	☐	… wenn,
$a + b = a + c$	☐	☐	… wenn,
$3 + a = 3a$	☐	☐	… wenn,
$a \cdot (b - c) = a \cdot b - c$	☐	☐	… wenn,
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	☐	☐	… wenn,
$a - (b + c) = a - b + c$	☐	☐	… wenn,

Kreuze das Richtige an (☒), oder schreib eine kurze Begründung, wenn die Gleichung deiner Meinung nach nur manchmal gilt.

<u>*Nur wenn noch Zeit bleibt:*</u> Begründe jeweils kurz (auf einem extra Blatt), wenn du oben „Gilt immer" oder „Gilt nie" angekreuzt hast.

Anhang B - Die vier zentralen Erarbeitungen der *Musterreihe* Phase *Symbolisches Beschreiben*

Erarbeitung (I) – Würfeltürme ***DURCHGANG 1-5***

Ein Würfel liegt vor dir auf dem Tisch. Man kann ihn von allen Seiten betrachten.
5 Quadrate sind sichtbar,
1 Quadrat ist verdeckt.

Bei einem zweistöckigen Turm sind am Boden und im Innern drei Quadrate verdeckt.
9 Quadrate sind sichtbar,
3 Quadrate sind verdeckt.

1 2 3 4 5 …

a) Baut Würfeltürme.
Wie viele Quadrate sind sichtbar, und wie viele sind verdeckt
- bei einem dreistöckigen Turm?
- bei einem vierstöckigen Turm?
- … ?

b) Wie viele Quadrate sind sichtbar bei einem 10-, 20-, 142-stöckigen Turm?

c) Vergleicht eure Ergebnisse. Erklärt euch gegenseitig wie ihr vorgegangen seid und was ihr beobachtet habt. Schreibt dann alles Wichtige auf.

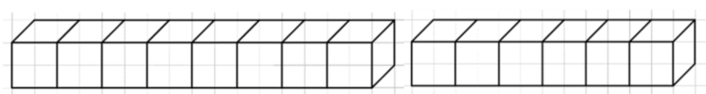
Wenn noch Zeit bleibt: *Was entdeckt ihr für die Anzahl der verdeckten Quadrate ?*

Erarbeitung (II) – Würfelschlangen ***DURCHGANG 1-5***

Man kann aus Würfeln auch Würfelschlangen legen.

Nr.1 Nr. 2 Nr. 3 usw.…

a) Baue die ersten 4 Würfelschlangen. Wie viele sichtbare Quadrate gibt es jeweils?
b) Wie viele sichtbaren Quadrate gibt es bei der 10.und 20. Würfelschlange. Wie viele bei der 142. Schlange? Wie kannst du das herausfinden, ohne alle Schlangen zu bauen?
c) Finde eine „Zählregel" mit denen du die Anzahl der sichtbaren Quadrate für eine *x-beliebige* Würfelschlange (d.h. eine Regel, die für jede Würfelschlange, egal wie lang, gilt) bestimmen kannst und schreibe sie ins Heft!
Erkläre deine Zählregel, indem du die folgenden Würfelschlangen entsprechend einfärbst und eine entsprechende Rechnung darunterschreibst:



d) Vergleiche deine Ergebnisse mit anderen aus deiner Klasse. Habt ihr die gleichen Ergebnisse? Habt ihr auf die gleiche Art gezählt?
Erklärt euch gegenseitig, wie ihr vorgegangen seid. Schreibe dann zwei Vorgehensweisen auf, die dir besonders gut gefallen.

Wenn noch Zeit bleibt: *Finde weitere „Zählregeln", schreibe sie auf und überprüfe, ob sie alle auch die gleichen Ergebnisse liefern! Erkläre deine Regeln, indem du wie in Teil c) Würfelschlangen einfärbst.*

Erarbeitung (III) – Würfelmauern ***DURCHGANG 1-5***

1 2 3 usw....

Baue zweistöckige Würfelmauern. In jedem Schritt kommt eine Säule hinzu.

a) Wie viele Quadrate sind sichtbar, bei der 1., 2., 3., 4., ...10., 100. Würfelmauer?
Schreibe einen Term für eine x-beliebige Mauer?
Wofür steht das x? Wofür dein Term?

b) Findest du weitere Terme? Wie kannst du deine Terme überprüfen?
c) Erkläre deine Terme an zwei verschieden langen Mauern.

Wenn noch Zeit bleibt:

- *Findet ihr auch Terme für höhere (drei-, vier-, ... usw. -stöckige) Mauern?*
- *Was findest du, wenn du anstelle der Quadrate einfach nur die Würfel zählst?*

Erarbeitung (IV)– gestaffelte Würfelmauern ***DURCHGANG 1-3***

1 2 3 ...

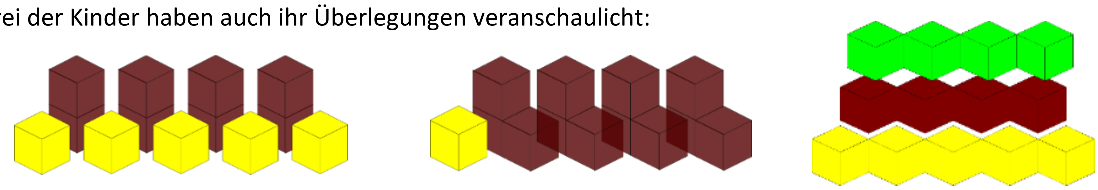
Jemand hat aus Würfeln diese Mauern gebaut.

e) Baue nach und finde die <u>Anzahl der Würfel</u> für die Glieder 1, 2, 3 und 4

Milena, Paul und Erkan beschreiben die Anzahl Würfel dieser Mauern unterschiedlich.

Erkan: $(x+1)+x+x$ **Milena:** $x \cdot 2+(x+1)$; **Paul:** $1+3 \cdot x$

Drei der Kinder haben auch ihr Überlegungen veranschaulicht:



(A) **(B)** **(C)**

b. Wofür steht jeweils das x? Welche der Skizzen gehört zu welchem Kind? Erkläre, wie die beiden gedacht haben?
c. Überprüfe für x=1, 2, 3 und 4, ob die Terme der drei Kinder alle die gleichen Werte liefern und stimmen können. Vergleiche auch mit deinen eigenen Ergebnissen aus Teil a).
d. ***Wie kann man sicher sein, dass alle drei Terme aus Teil a) für beliebig lange Mauern die richtige Anzahl Würfel liefern? Begründe deine Antwort auf verschiedene Arten!***

Erarbeitung (IV)– gestaffelte Würfelmauern ******DURCHGANG 4-5******

1 2 3 ...

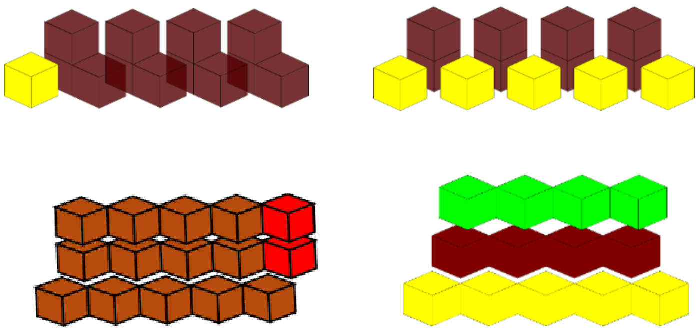
Jemand hat aus Würfeln diese Mauern gebaut.

a) Baut nach und findet die <u>Anzahl der Würfel</u> für die Glieder 1, 2, 3 und 4

Milena, Paul, Erkan und Maria beschreiben die Anzahl Würfel dieser Mauern mit unterschiedlichen Termen:

Milena: $\mathbf{2 \cdot x + (x + 1)}$ **Paul:** $\mathbf{3 \cdot x + 1}$ **Erkan:** $\mathbf{(x + 1) + x + x}$ **Maria:** $\mathbf{3 \cdot (x + 1) - 2}$

Die Kinder haben auch ihr Überlegungen anhand der 4. Figur ($x = 4$) veranschaulicht:



b) Wofür steht jeweils das x? Wofür jeweils die Terme?
c) Welche der Skizzen gehört zu welchem Kind? Erkläre, wie die vier gedacht haben?
d) Liefern alle vier Terme für beliebig lange Mauern die richtige Anzahl an Würfeln? Erkläre auf verschiedene Arten und Weisen!

Lea, Leo und Patty haben für eine andere Reihe von Würfelbauten folgende Terme aufgestellt. Das Bild dazu ging leider verloren.

Lea: 2·(x+1); Leo: (x+2)+x Patty: 2·x+2

Entscheidet ob alle drei Terme stimmen können, ohne das Bild dazu zu kennen.

Hausaufgabe Hölzchenquadrate (Beispiel)

Jemand hat mit Streichhölzern folgende Kette von «Reihenhäusern» gelegt:

***Glied 1:** 1 Haus* ***Glied 2**: 2 Häuser* ***Glied 3:** 3 Häuser* *usw. …*

a) Wie viele Streichhölzer brauchst du für das 1., 2., 3. 4., 5., 6., 7. und 8. Glied der Kette? Stelle deine Ergebnisse in einer Tabelle **im Heft** dar!

b) Mario, Helga und Mohammed haben sich folgende **«Zählregeln»** überlegt, wie man für eine Reihe mit x-beliebig vielen Häusern die Anzahl der Hölzchen herausfinden kann.

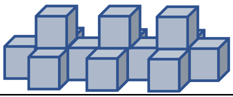
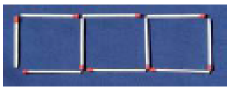
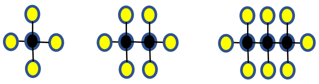
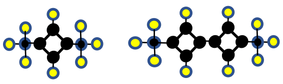
> ***Mario:** «Ich muss die Anzahl der Häuser mit 3 multiplizieren und dann eins dazuzählen»*
>
> ***Helga:** « Ich ziehe von der Anzahl der Häuser eins ab, das Ergebnis multipliziere ich mit 3 und am Ende addiere ich noch 4 dazu»*
>
> ***Mohammed:** «Ich multipliziere die Häuseranzahl mit 4. Vom Ergebnis ziehe ich eins weniger als die Häuseranzahl ab»*

Für Glied 4 haben sie ihre Regeln durch folgende Skizzen veranschaulicht:

Welche Skizze gehört zu welcher Regel? Erkläre **schriftlich im Heft!**

c) Bestimme mit den drei Regeln der Kinder die Anzahl der Hölzchen für das 10. Glied. Bekommen Mario, Helga und Mohammed jeweils das gleiche Ergebnis für das 10. Glied? Was sagen die Regeln für das 42. Glied?

Anhang C – Musterfolgen mitsamt gesammelter Schülerterme

Musterfolge	gezählt wird …	Schülerterme
Würfeltürme 	Anzahl der sichtbaren Quadrate	$4x+1$ $x+x+x+x+1$ $(x-1)\cdot 4+5$ $6x-(2x+1)$
Würfelschlangen 	Anzahl der sichtbaren Quadrate	$3x+2$; $(x-1)\cdot 3+5$; $4x-x+2$ $(x-2)\cdot 3+2\cdot 4$; $2+(x\cdot 3)$ $x\cdot 4-(x-2)$; $x+2+x+x$; $x+(x+2)+x$; $\big((x+1)\cdot 2\big)+x$
Gestaffelte Mauern 	Anzahl der Würfel	$x\cdot 2+(x+1)$; $3\cdot x+1$ $(x+1)+x+x$ $3\cdot(x+1)-2$
Mauer mit Zinnen 	Anzahl der Würfel	$3\cdot x-1$; $x\cdot 2+(x-1)$ $x+x+(x-1)$; $(x-1)\cdot 3+2$ $(x+x-1)\cdot 2-(x-1)$ $2\cdot(2x-1)-(x-1)$ $5\cdot(x-1)-2\cdot(x-2)$
Würfelpallisaden 	Anzahl der Würfel	$x\cdot 4+(x+1)$ $x\cdot 6-(x-1)$ $5x+1$ $x+(x+1)+3x$
Würfelmauern 	Anzahl der sichtbaren Quadrate	$(x\cdot 2)\cdot 2+4+x$; $5x+4$ $x\cdot 2+x\cdot 2+x+4$ $(x-2)\cdot 5+2\cdot 7$ $x\cdot 9-(x-2)\cdot 2$ $(x\cdot 2)\cdot 6-((x\cdot 3)+(x-1)\cdot 4)$
Quadratmuster 	Anzahl der Streichhölzer	$4+(x-1)\cdot 3$; $3x+1$ $x\cdot 4-(x-1)$ $x+(x+1)+x$, $2x+(x+1)$
Dreiecksmuster 	Anzahl der Streichhölzer	$2x+1$ $x\cdot 3-(x-1)$ $(x+1)+x$
Häuser 	Anzahl der Streichhölzer	$2+(x-1)+(1+2x+1)$; $3(x+1)$; $2+(3x-1)+2$ $2+2\cdot x+(x-1)+2$; $4+3(x-1)+2$; $2+x+x+(x-1)+2$
 **Punktmuster 1**	Anzahl der gelben und Anzahl der schwarzen Punkte	*Schwarz:* $x, 1\cdot x, 1\cdot x+0$ *Gelb:* $2x+2$, $x+x+2$ *Gesamt:* $3x+2; 1\cdot x+2\cdot x+2$, $x+x+x+2$,
 **Punktmuster 2**	Anzahl der gelben und Anzahl der schwarzen Punkte	*Schwarz:* $4x+2$ *Gelb:* $2x+6$ *Gesamt:* $6x+8$, $4x+2+2x+6$,

Eine Auswahl der in den Musterreihen eingesetzen gegenständlich und ikonisch repräsentierten Folgen. Die angegebenen Terme wurden von Schülern selbst aufgestellt und spiegeln dabei verwendete Zählregeln wider.

Anhang D – Aufgaben zum Kalkülaufbau (Auswahl)

1) *Gib an, welche der folgenden Paare von Termen gleichwertig sind. Begründe* mit Hilfe von Rechengesetzen für Zahlen oder widerlege, indem du Zahlen einsetzt.

a) $2x + 5$ und $5 + 2x$

b) $2x + 3x$ und $5x$

c) $x - 7$ und $7 - x$

d) $6x - 5$ und x

e) $3 \cdot (4x) + x \cdot 2$ und $14x$

f) $9 \cdot (1 + x)$ und $9 + x$

g) $2x + (1 + x)$ und $3x + 1$

h) $3 \cdot (x - 5)$ und $3x - 15$

i) $\frac{1}{4} \cdot (8x + 4)$ und $2x + 1$

j) $2{,}8x - (x - 1)$ und $1{,}8x - 1$

Vier der Paare sind hier nicht gleichwertig!

2) *Forme mit Hilfe der angegebenen Rechengesetze in einen gleichwertigen Term um.*

Kommutativgesetz: $a)\ 1 + 8x =$ $\quad b)\ x \cdot 3 =$

Assoziativgesetz: $c)\ 4 + (3 + y) =$ $\quad d)\ 0{,}5 \cdot (6 \cdot z) =$

Distributivgesetz: $e)\ 5 \cdot (a - 2) =$ $\quad f)\ (3 + 2b) \cdot 3 =$

Klammerregeln: $f) 2x + (x - 2) =$ $\quad g)\ 2x - (x - 2)\ =$

Die Variable muss nicht immer x heißen!

3) *Forme in einen möglichst einfachen Term um*

(achte beim Zusammenfassen auf die *„unsichtbare 1"*: $x = 1 \cdot x\ , -x = -1 \cdot x$)

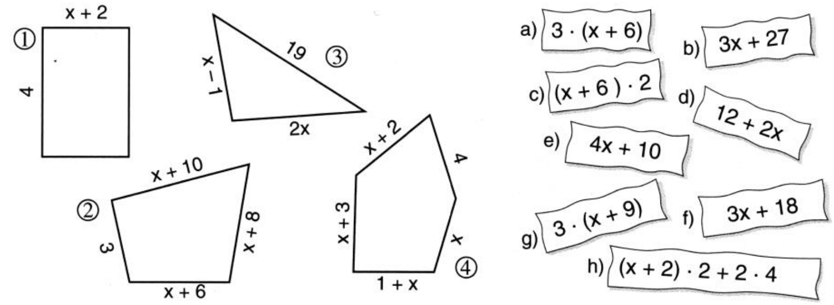
a)
$x + x + x + x$
$x + 2 + 2x + 1$
$6y - 4y - y + 2y$
$n + n + 2n + 1$
$0{,}5 + 1{,}5x + x + 3$

b)
$3 + 5y + 3y + 5$
$2a - 1 + 1 - a$
$14 \cdot (4a) + 12 - 48a$
$x \cdot 3 \cdot 2 + 2 - 2x + 3$
$2 \cdot (x + 1) - x$

c)
$2x - (2x - 1)$
$x \cdot 4 - (x - 1)$
$(x \cdot 2) \cdot 2 + x + 2 \cdot 3$
$3 \cdot (x - 2) + 2$
$6x - (3x + 1)$

4) Die Terme a)-h) beschreiben jeweils den Umfang einer der Vielecke ①-④.

Welcher Term gehört zu welchem Vieleck? Begründe deine Wahl, indem du jeden Term so weit wie möglich vereinfachst.



5) *Vereinfache folgende Terme soweit wie möglich.*

$a)\ 3 \cdot (x + 2)$ $\quad b)\ (2x - 5) \cdot 12$ $\quad e)\ x - (x - 1)$ $\quad d)\ \ 8 \cdot (2x + 3) - 2 \cdot (2x + 3)$

$e)\ 7 - (3x - 3)$ $\quad f)\ 3 \cdot x \cdot 5 - 3 \cdot (4 + 2x)$ $\quad d)\ x - (x - 1) \cdot 2$ $\quad e)\ \ -2 \cdot (-x + 2) - (3x - 4)$

6) *Finde den Fehler!*

Zeige durch Einsetzen einer Zahl in den Ausgangsterm und den Endterm, dass die Umformung nicht stimmen kann. Erkläre, was falsch gemacht wurde, und korrigiere die Rechnung.

a) $10 \cdot (3 \cdot x + 2) + x$
$= 10 \cdot 5 \cdot x + x$
$= 50 \cdot x + x$

Endterm $\quad$ Ausgangsterm

b) $3 \cdot (x - 2) - (x - 6)$
$= 3 \cdot x - 6 - x - 6$
$= 2 \cdot x - 12$

c) $-3 \cdot (2 \cdot x \cdot 3)$
$= -3 \cdot 2 \cdot x \cdot (-3) \cdot 3$
$= 54 \cdot x$

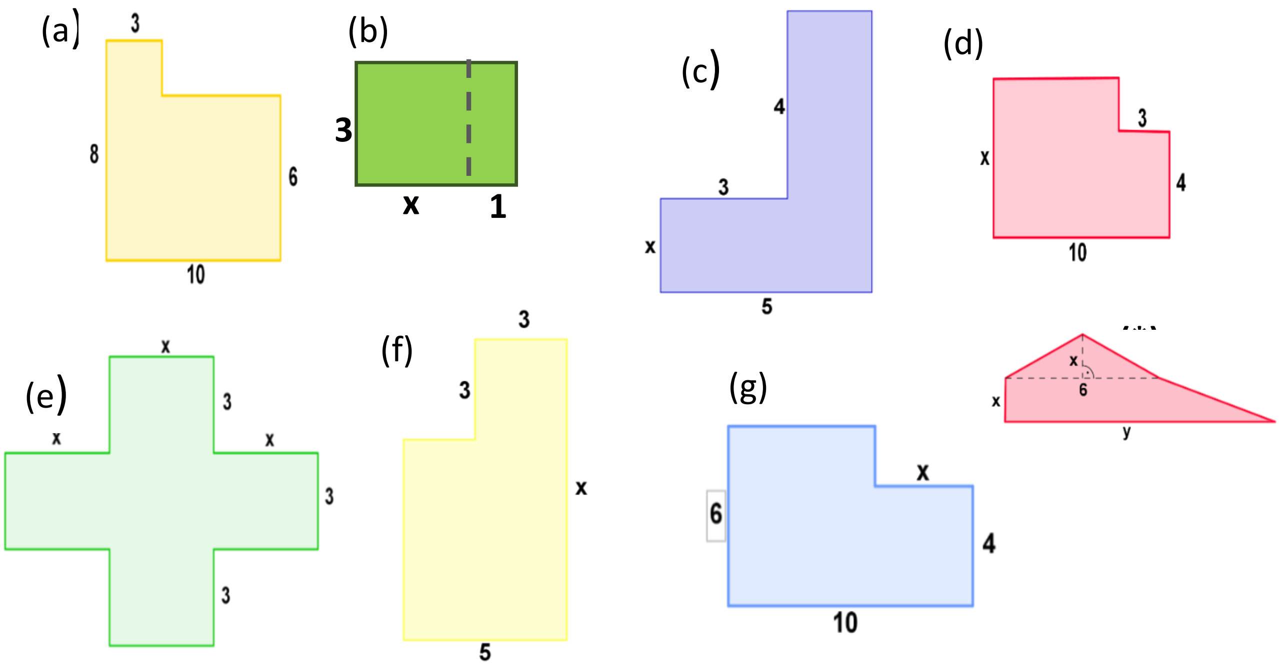
d) $7 \cdot x + 2 \cdot (5 \cdot x - 4)$
$= 7 \cdot x + 2 \cdot 5 \cdot x - 4$
$= 17 \cdot x - 4$

7) *Überprüfung von Termumformungen.*

Vereinfache die Terme so weit wie möglich. Überprüfe dann durch Einsetzen einer Zahl in den Ausgangsterm und deinen vereinfachten Endterm, ob deine Umformung (überhaupt) stimmen kann.

$a)\ 2 \cdot x \cdot 5 - 3 \cdot (x - 2)$ $\quad b)\ 12x - (2x + 5) \cdot 3$ $\quad c)\ \ -2 \cdot (-x + 2) - (3x - 4)$

8) Flächeninhaltsterme aufstellen

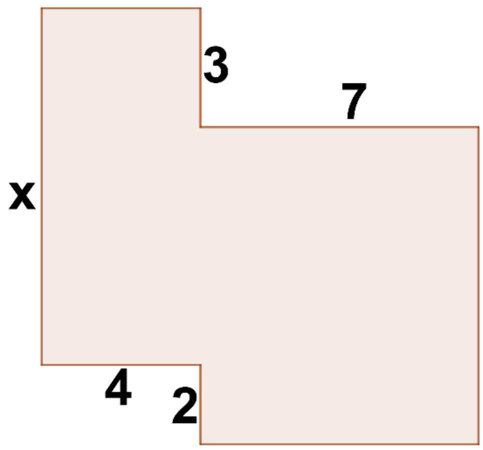


a) Stelle jeweils <u>mindestens zwei</u> unterschiedliche Terme für den Flächeninhalt der Figuren (a)-(c) auf

b) Bestätige durch geeignetes Umformen, dass deine Terme tatsächlich gleichwertig sind (also jeweils den gleichen Flächeninhalt beschreiben).

9) Umfang und Flächeninhalt einer Figur.

Links siehst du eine Figur. Für x kann man alle möglichen Zahlen einsetzen, x steht also für keine bestimmte Zahl (man sagt auch *Unbestimmte*). In diesem Sinne sind rechts unendlich viele Figuren dargestellt.



a) Zeichne die beiden Figuren, die entstehen, wenn man $x = 4$ und wenn man $x = 7$ setzt (alle Angaben in cm) und gib deren Umfang an.

b) Stelle einen möglichst langen und eines möglichst kurzen Term für den <u>Umfang</u> u der Figur rechts auf.
Berechne damit den Umfang für $x = 4$ und $x = 7$ und vergleiche mit dem Ergebnis aus Teil a).

c) Stelle möglichst viele unterschiedliche Terme für den <u>Flächeninhalt</u> A der Figur auf. Wie viele unterschiedliche Terme schaffst du?
Bestätige durch passende Umformungen, dass alle deine Flächeninhaltsterme *gleichwertig* sind.

*10) **Zahlenrätsel und Terme***

A
Denk dir eine Zahl.
Addiere 1.
Multipliziere mit 4.

B
Denk dir eine Zahl,
multipliziere sie mit 3.
Addiere 4.
Subtrahiere deine gedachte Zahl.
Halbiere das Ganze!

C
Denk dir eine Zahl.
Subtrahiere 4.
Multipliziere das Ergebnis mit 2.
Addiere zu diesem Ergebnis 4.
Dividiere anschließend durch 2.

D
Denk dir eine Zahl.
Addiere dazu die Zahl, die um 1 größer ist als deine gedachte Zahl.
Addiere zum Ergebnis die Zahl, die um 2 größer ist als deine gedachte Zahl.

E
Denk dir eine Zahl.
Multipliziere mit 2.
Multipliziere nochmals mit 2
Subtrahiere 4.
Addiere jetzt die gedachte Zahl.

Jemand hat zu den Zahlenrätseln A-E Terme für das Ergebnis aufgestellt:

① $(x+1)\cdot 4$

② $(x\cdot 2)\cdot 2-4+x$

③ $x+x+1+x+2$

④ $(x\cdot 3+4-x)\cdot \frac{1}{2}$

⑤ $(2\cdot(x-4)+4):2$

⑥ $4x+4+x$

⑦ $3\cdot(x+1)$

⑧ $(2x+4)\cdot\frac{1}{2}$

⑨ $4x+4+x$

⑩ $(2x-4):2$

✱ $x-2$

✖ $x+2$

◇ $4x+4$

⊙ $3x+3$

☺ $5x+4$

a) *Ordne den Zahlenrätseln A-E die Ergebnisterme ①-☺ zu. Zu jedem Rätsel gehören drei Terme!*

b) Du hast jetzt für jedes Zahlenrätsel drei Terme bei denen du für jede x-beliebige Zahl das gleiche Ergebnis erhältst. *Kannst du durch „Rechnen" zeigen, dass die Terme jeweils gleichwertig sind? Rechne!*

$4+5+6,$
$19+20+21,$
$25+26+27,$
$111+112+113,$
...

c) In einem Mathematikbuch steht folgender Satz:

„Die Summe dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist immer durch 3 teilbar."

(i) Überprüfe dies anhand von ein paar Zahlenbeispielen.

(ii) Eins der Zahlenrätsel oben hat mit diesem Satz zu tun. Welches ist es?
An welchen der drei dazugehörigen Terme kannst du direkt erkennen, dass das Ergebnis durch 3 teilbar ist. Erkläre!

(iii) In einem Mathematikwettbewerb steht die Aufgabe:

Beweise, dass die Summe dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen immer durch 3 teilbar ist.

Stell dir vor du nimmst an diesem Wettbewerb teil. Schreibe deine Lösung zu der Wettbewerbs-aufgabe auf.

Anhang E – Von den Boxen zur formalen Schreibweise (Zahlenrätselreihe)

Aufgabe 1) Ein Zahlenrätsel für den Taschenrechner

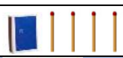
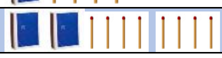
Text	Term	Boxen
Ich denke mir eine Zahl.		□
Ich addiere 7.	$x + 7$	
Ich multipliziere das Ergebnis mit 21.	$21 \cdot x + 147$	
Davon subtrahiere ich 47	$21 \cdot x + 100$	
Ich subtrahiere von diesem Ergebnis die gedachte Zahl.	$20 \cdot x + 100$	
Ich dividiere anschließend durch 10 und erhalte …	$2 \cdot x + 10$	

a) Erklärt euch gegenseitig, wie Schritt für Schritt die Terme zustande kommen. Versucht dann in der Tabelle die zugehörigen Boxen zu zeichnen.
b) Welche Vorteile bieten die Terme gegenüber den Boxen?
c) Leon sagt, dass man am Ende immer 10 mehr als das Doppelte der gedachten Zahl erhält. Stimmt das?
d) Ebru meint, dass sie jetzt die gedachte Zahl in Sekundenschnelle erraten kann, wenn sie das Ergebnis durch 2 teilt und dann 10 subtrahiert. Stimmt das? Probiert es mit Zahlen aus, wenn ihr euch nicht sicher seid!
e) Max erhält als Ergebnis die Zahl 32. Welche Zahl hat er sich gedacht?
Max erhält als Ergebnis 31. Kann das sein?
Max erhält als Ergebnis 4. Kann das sein?

Aufgabe 2)

Leon legt die ersten Schritte eines Zaubertricks auch mit Boxen. Dann merkt er, dass er damit nicht weiterkommt und versucht es mit Termen.

a) Woran liegt es, dass er mit den Boxen hier nicht weiterkommt?
b) Warum steht in der markierten Zeile die +8? Erkläre!
c) Warum steht in der letzten Zeile die „ – 2“?
d) Max erhält als Ergebnis 98 (-2, -4). Welche Zahl hat er sich (jeweils) gedacht?
e) Wie kannst du bei jedem Ergebnis in Sekundenschnelle die gedachte Zahl erraten? Erkläre!

Leon		
Text	**Boxen**	**Term**
Denk dir eine Zahl.		**x**
Addiere 4.		**2 · x + 4**
Verdoppele.		**2 · x + 8**
Subtrahiere 10	**geht nicht**	**2 · x – 2**

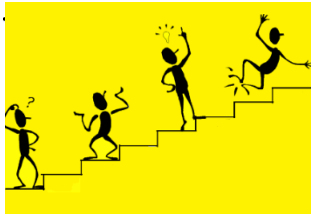
Zum Weiterdenken:

- Erfinde selbst ein Zahlenrätsel, dass man nicht mehr mit Boxen, wohl aber mit Termen, aufschreiben kann.
- Erkläre, wie du hier die gedachte Zahl in Sekundenschnelle herausfinden kannst.
- Funktioniert es immer, egal welche Zahl (z. B. auch Kommazahlen und negativen Zahlen) man sich denkt?

Anhang F – Zentrale Arbeitsblätter zu einem konstruktivistischen Aufbau der Methode Äquivalenzumformen

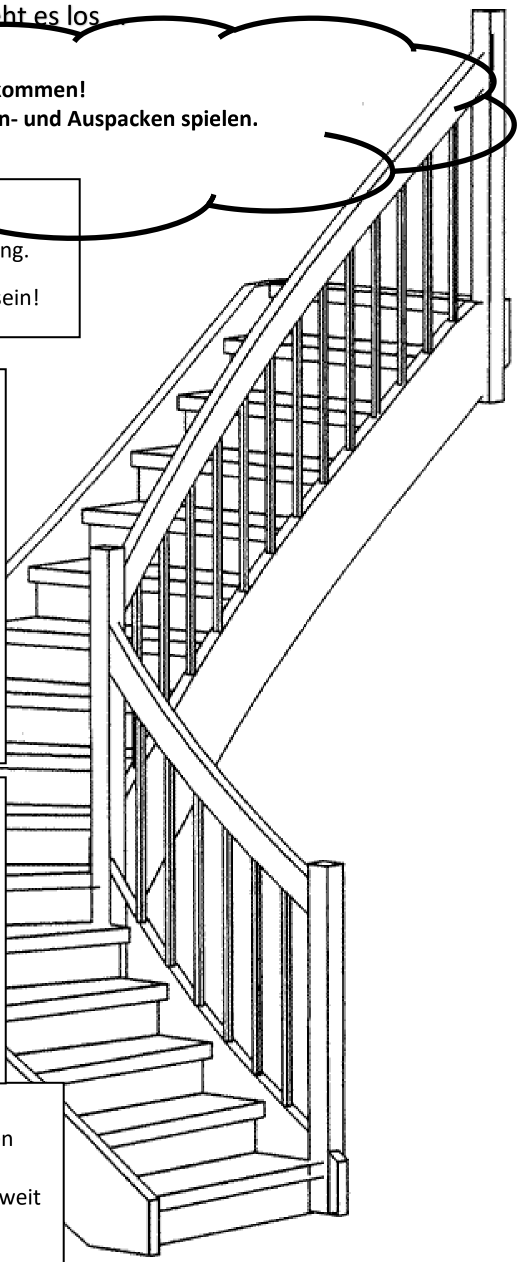
Die Arbeitsblätter von Anhang E sind das Ergebnis eines Aufgreifens und Umarbeitens von Ideen aus der Dissertationsschrift von Marcus Jannsen 2009 .

Lerntreppe zu Gleichungen



Mit diesem Aufgabenblatt lernst du Schritt für Schritt den sicheren Umgang mit Gleichungen. Unten rechts geht es los

Du bist oben angekommen!
Jetzt können wir Ein- und Auspacken spielen.
Viel Spaß dabei!



Schritt 5:

☺ Löse weitere Aufgaben in der formalen Schreibweise und überprüfe deine Lösung.

☺ Bearbeite dann die ABs „Ein- und Auspacken“, um auf das Spiel vorbereitet zu sein!

Schritt 4:

☺ Notiere in Einzelarbeit die Gleichungen, die du bislang gelöst hast, in der offiziellen Formelsprache (formalen Schreibweise). Löse eine von diesen Gleichungen in der formalen Schreibweise und führe die Probe durch.

☺ Erfindet dann gemeinsam eine Methode, mit der man solche Gleichungen immer lösen kann. Nutzt dabei die Erfahrungen, die ihr bei den Boxen gemacht habt. Wie kann man hier die Gleichungen schnell übersichtlich machen?

☺ Bearbeite die Aufgabe KdB4 auf dem AB. Warum kann man diese Gleichungen nicht (so leicht) mit Boxen und Hölzchen legen? Entwirf selbst Gleichungen, die man <u>nicht</u> mit Hölzchen und Boxen legen kann. Löst sie mit eurer Methode!

Schritt 3:

Löse weitere Boxengleichungen:

☺ Wenn du noch üben willst, wähle Gleichungen vom ersten Aufgabenblatt, die du noch nicht bearbeitet hast. Auf dem zweiten Aufgabenblatt *„Knack die Box II“* gibt es bei KdB3) etwas zu entdecken - geht das überhaupt?

☺ Falls du dabei noch weitere Schritte entdeckst, die dir beim Lösen helfen, dann schreibe die auf deine Karte.

☺ Wie kannst du am Ende überprüfen, ob deine Lösung auch wirklich stimmt?

Schritt 2:

Wie habt ihr angefangen? Vor allem bei Gleichungen mit vielen Boxen und Hölzchen kann es helfen, die ganze Situation erst einmal übersichtlicher zu gestalten.
Wie macht ihr das an besten? Überlegt zuerst für euch alleine. Diskutiert dann zu zweit euer Vorgehen.

☺ Schreibt zuletzt alle wichtigen Schritte zur Lösung einer Boxengleichung auf eine Karte.

Wichtiger Hinweis: Bevor du jeweils zum nächsten Schritt emporsteigst gehst du mit deinen Bearbeitungen zu Lehrerin oder Lehrer – die/der zeichnet ab und du kannst weiter aufsteigen!

Schritt 1:

☺ Folge den Anweisungen von KdB1) auf dem AB *„Knack die Box I“.*

☺ Suche dir dann einige Gleichungen von KdB2) auf demselben AB aus und finde jeweils mit Hilfe eurer Anleitung heraus, wie viele Hölzchen in den Boxen sein müssen.

☺ Markiere auf dem AB die Gleichungen, die du selbst bearbeitet hast.

Aufgabenblatt - „Knack die Box 1!“

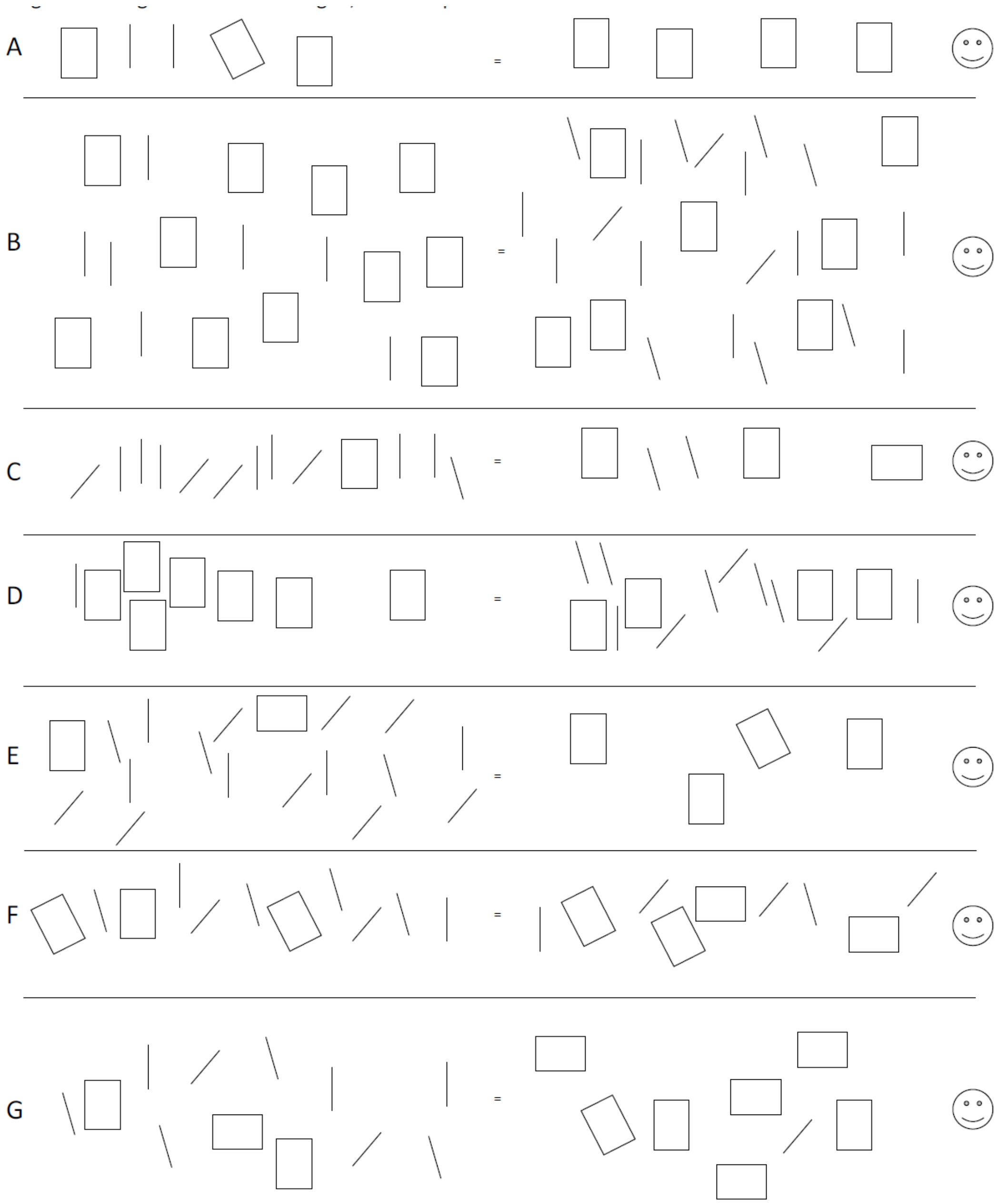
KdB1) In eurer Boxenpackung seht ihr das Bild einer Boxengleichung. Legt die *Gleichung* aus Streichholzschachteln (Boxen) und Streichhölzern.

Auf jeder Seite des Gleichheitszeichens liegt die gleiche Anzahl von Streichhölzern. Einige Streichhölzer befinden sich in den Schachteln, und zwar **in jeder Schachtel gleichviele**.

Eure Aufgaben:

- „Knackt die Box!“ - Findet eine Möglichkeit, mit der man herausfinden kann, wie viele Streichhölzer in jeder Box sein müssen, damit auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens gleich viele Streichhölzer sind.
- Tauscht euch aus, wie ihr auf die Lösung gekommen seid und schreibt dann euer Vorgehen so auf, dass ihr es für spätere Gleichungen als Anleitung nutzen könnt.

KdB2) Es gibt unzählige solcher Gleichungen, z. B.:



<u>Markiert die Gleichungen, die ihr selbst bearbeitet habt!</u>

Aufgabenblatt – „Knack die Box 2“

KdB3) Hier gibt es noch mehr Gleichungen, aber etwas ist anders. *Geht das überhaupt?*

<u>Markiert die Gleichungen, die ihr selbst bearbeitet habt!</u>

Einpacken und Auspacken

Spielanleitung

Einpacken

Als erstes packst du ein. Bislang hast du meistens die Gleichungen immer weiter vereinfacht. Jetzt fängst du mit dem Ergebnis an und machst die Gleichungen immer komplizierter, so dass die Lösung nicht mehr sofort zu erkennen ist.

Beispiel:

$$\begin{aligned} x &= \mathbf{5} && \mid +5x \\ 6x &= 5x+5 && \mid -12 \\ 6x-12 &= 5x-7 && \mid \cdot 2 \\ 12x-24 &= (5x-7)\cdot 2 && \end{aligned}$$

Probe:

Linke Seite *Rechte Seite*

$$\begin{aligned} 12\cdot\mathbf{5}-2\cdot 12 &= (5\cdot\mathbf{5}-7)\cdot 2 \\ 60-24 &= (25-7)\cdot 2 \\ 36 &= 18\cdot 2 \\ 36 &= 36 \; ☑ \end{aligned}$$

Stelle mehrere verschiedene Gleichungen auf. Zeige die einzelnen Schritte nicht deinen Mitschülern, sie sollen die Gleichung später lösen. Überprüfe durch Einsetzen der Lösung in deine Gleichung, ob sie stimmt (siehe Probe oben).

Auspacken

Ihr habt jetzt eine Reihe von Gleichungen vorbereitet und überprüft – mit ihnen tretet ihr gegen die anderen an. Sucht euch eine Gegnerin oder einen Gegner und tauscht die Gleichungen aus. Versucht die Gleichungen, die ihr von eurem „Gegner“ bekommen habt, so schnell wie möglich zu lösen. Am Ende kontrolliert ihr, ob ihr richtig gerechnet habt.

Wertung

Jetzt bekommt ihr eure Gleichungen wieder zurück. Guckt sie euch nochmal an. Wenn ihr der Meinung seid, dass eure Gleichung

- besonders schön,
- besonders kompliziert
- oder besonders ungewöhnlich

ist, dann schreibt sie auf eine Karte und dazu die Kategorie in der ihr antreten wollt. Auf die Rückseite schreibt ihr euren Namen und die Lösung $x =$ ____.

Aber: *Jeder darf mit höchstens zwei Karten an der Wertung teilnehmen!*

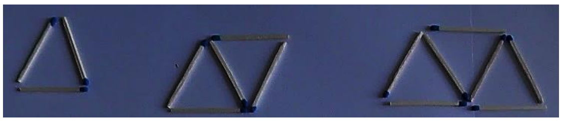
Die Gleichungen werden dann an die Tafel geklebt. Per Abstimmung werden dann die Gewinner- und Gewinnerinnen jeder Kategorie bestimmt.

Aber: *Du kannst nur dann Gewinner sein, wenn deine auf die Karte geschriebene Lösung auch richtig ist!*

Anhang G – Aufgaben zum Übergang Terme – Gleichungen (Auswahl, letzter Durchgang)

<u>Hinweis:</u> Nur im letzten Durchgang wurde (aus Zeitnot) in der Musterreihe das Waage-Modell verwendet. Sonst wurde in allen Durchführungen (auch in der Musterreihe) das Modell Knack-die-Box eingesetzt (Anhang E).

Aufgabe 1) *Und die wievielte Figur kann ich jetzt bauen?*
Mohammed baut zwei unterschiedliche Streichholzketten. Hier siehst die jeweils die 1., 2., und 3. Figur.



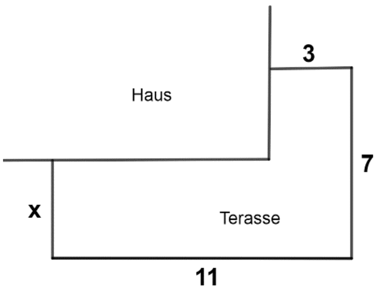
a) Stelle jeweils einen Term auf, mit dem du die Hölzchen für eine x-beliebige Figurennummer berechnen kannst (Diesmal reicht ein Term pro Kette).
b) Mohammed hat eine Streichholzschachtel in der sich **35** Hölzchen befinden. Die wievielte Figur der Kette kann er damit jeweils legen?

Aufgabe 2) *Rückwärtsrechnen*. Bestimme jeweils die Zahl x durch Rückwärtsrechnen.

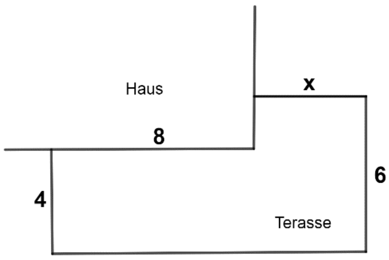
a) $4 \cdot x + 5 = 33$
b) $3 \cdot x - 7 = 6{,}5$
c) $-2 \cdot x + 1 = 7$
d) Für welche Zahl x ist die Zahl $4x - 11$ gleich 21?

Aufgabe 3) *Terrassenbau*
Familie Huber plant eine Terrasse, die um eine Ecke ihres Hauses gehen soll. Sie sind sich noch nicht ganz einig, wie genau die Terrasse aussehen soll, weshalb sie zwei Pläne mit jeweils einer unbestimmten Seitenlänge x skizziert haben.

Planskizze 1:



Planskizze 2:



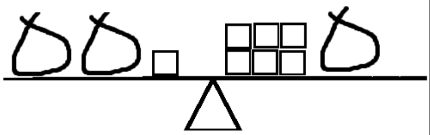
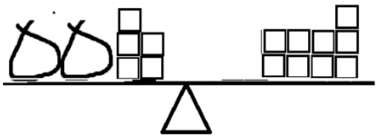
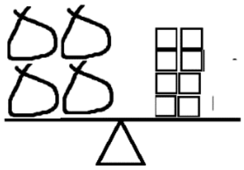
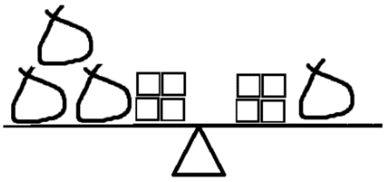
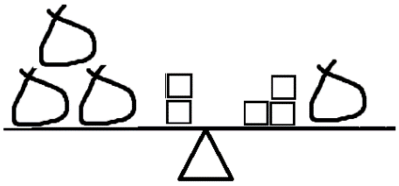
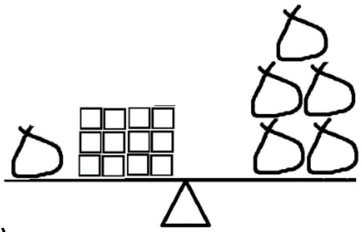
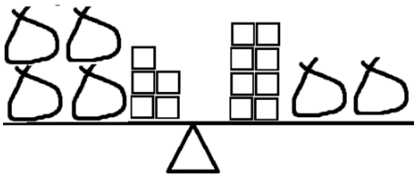
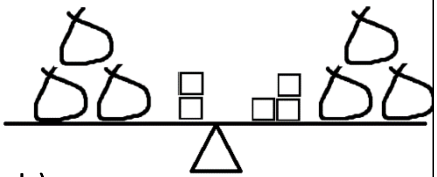
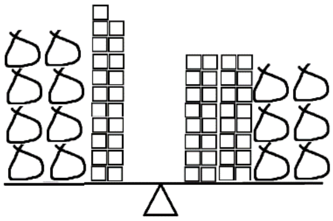
a) Gib für beide Pläne einen Term für den Flächeninhalt der Terrasse an.

b) Bestimme die Flächeninhalte für $x = 3$ (m) und zeichne dafür (für $x = 3$ m) maßstabsgetreu beide Terrassen.
Welche Terrasse ist für $x = 3$ größer? Kannst du auch einen Wert für x angeben, für die die andere Terrasse größer ist? Wenn ja, gib einen solchen Wert an.

c) Für welche Zahl x haben beide Terrassen den gleichen Flächeninhalt?

Aufgabe 4) ***Das Waage-Modell***

Auf der linken und rechten Seite der Waage befinden sich Würfel und Säckchen. In den Säckchen ist eine unbekannte Anzahl von Würfeln versteckt.

 a) $2x + 1 = x + 6$	 b) $\quad = 9$	 c)
 d)	 e)	 f)
 g)	 h)	 i)

a) Übersetze für b)-i) die „Waagegleichung" in eine Gleichung in formaler Schreibweise (schreibe diese direkt unter die Bilder).

b) Such dir selbst eine Gleichung aus und löse sie im Heft nebeneinander in der *Waagedarstellung* und in der *formalen Schreibweise.*
Löse die restlichen Gleichungen nur in der formalen Schreibweise.

c) Du hast jetzt mehrere Gleichungen mit Waage-Modell und in der formalen Schreibweise gelöst. Erkläre, wie du dabei Schritt für Schritt vorgehen musst, um das unbekannte x zu finden! Schreib es so auf, dass jemand anders, der deinen Schritten folgt, es versteht und eine solche Gleichung damit lösen kann.
Erkläre, wie du am Ende überprüfen kannst, ob deine Lösung auch stimmt.

d) Die Gleichung $4 \cdot x - 3 = -2 \cdot x + 15$ kann man nicht so einfach im Waage-Modell mit Säckchen und Würfeln darstellen. Erkläre woran das liegt.

e.) Kannst du sie dennoch lösen? Finde das x, für das $4 \cdot x - 3 = -2 \cdot x + 15$ ist.
Erkläre deine Lösungsschritte und überprüfe deine Lösung durch eine Probe.

f.) Erfinde selbst Gleichungen, die man nicht mehr mit dem Waagemodell darstellen kann und versuche diese zu lösen.
Was hast du beim Lösen auf beiden Seiten der Gleichung jeweils gemacht? Warum darf man das eigentlich?

Aufgabe 5 – Äquivalenzumformgen I) Rechts siehst die nochmals alle Äquivalenzumformgen (ÄU), die du benutzen kannst, um eine Gleichung nach und nach immer einfacher zu machen.

Ia Zu beiden Termen wird dieselbe Zahl addiert

Ib Von beiden Termen wird dieselbe Zahl subtrahiert

IIa Zu beiden Termen wird derselbe Term addiert

IIb Von beiden Termen wird derselbe Term subtrahiert

IIIa Beide Terme werden mit derselben Zahl multipliziert

IIIb Beide Terme werden durch dieselbe Zahl dividiert

IV Der Term auf einer Seite wird durch Umformung in seiner Darstellung verändert oder vereinfacht

a) In den Kärtchen (1)-(8) wurde jeweils nur eine Äquivalenzumformung durchgeführt. Welche ist das jeweils? Ordne die Kärtchen (1)-(8) den entsprechenden Äquivalenzumformungen Ia-IV zu.

(1) $-3|$ $\quad x+3=6 \quad |-3$
$x=3$

(2) $:(-2)|$ $\quad -2x=4 \quad |:(-2)$
$x=-2$

(3) $\cdot 2|$ $\quad 0{,}5x-4=1{,}5x \quad |\cdot 2$
$x-8=3x$

(4) $-4x|$ $\quad 4x-3=5x+7 \quad |-4x$
$-3=x+7$

(5) $+4x|$ $\quad -3x=-4x+3 \quad |+4x$
$x=3$

(6) $TU|$ $\quad x+x+1=2(x+1) \quad |TU$
$2\,x+1=2x+2)$

(7) $+3|$ $\quad 2\,x-3=6 \quad |+3$
$2\,x=9$

(8) $\cdot 7|$ $\quad \frac{1}{7}x=2 \quad |\cdot 7$
$x=14$

Aufgabe 6 – Äquivalenzumformgen II)

a) *Löse die Gleichungen:*

$4x+3=3x+5 \qquad 19x+18=22x+3 \qquad 7x+11=4x+2$

Welche der Äquivalenzumformungen Ia - IV *hast du hier benutzt?*

b) *Löse die Gleichungen:*

$x-3=11 \qquad 2x-10=-6 \qquad 3x-7=-2x-32$

Tipp: Hier können die Äquivalenzumformung Ia und IIa helfen.

c) *Jetzt kann die Äquivalenzumformung* IIIa *hilfreich sein*:

$\frac{1}{3}x=5 \qquad \frac{5}{3}x-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}x+\frac{7}{3} \qquad -3x-3=-2x-4\ (*)$

(*) Warum hier nicht einfach beide Seiten mit (-1) multiplizieren (ÄU IIIa)?

a), b) und c):
$x=-3; x=2;$
$x=8;\ x=-5;\ x=5$
$x=3;\ x=14;$
$x=15;\ x=1;$

d):
$x=12;\ L=\mathbb{Q};\ x=2;$
$x=\frac{1}{2};\ x=7;\ x=-2;$

d) *Löse die Gleichungen:*

$9\cdot(x+4)=99 \qquad x+x-3=-x+3 \qquad 5\cdot(x+1)-1=5x+4$

$2\cdot(1-3x)=(x-1)\cdot 2 \qquad -2x-8=-3x-10 \qquad 4\cdot(3x+2x-24)=8\cdot(6+x)$

b) *Die Äquivalenzumformungen* Ia-IV *sind Umformungen, die die Lösung der Gleichung nicht verändern*. Erkläre in eigenen Worten, warum diese Umformungen die Lösung nicht verändern.

c) Hier fehlt jeweils nur eine Umformung, um zur Lösung zu kommen. Fülle die Lücken …… .

$\frac{1}{3}\cdot x=9 \quad \vert\cdot 3$	$1\cdot x-3=0 \quad \vert\ldots.$	$\frac{1}{2}\cdot x=\frac{5}{4} \quad \vert\ldots.$	$-2\cdot x=4 \quad \vert\ldots.$
$x=\ldots\ldots$	$x=\ldots\ldots$	$x=\ldots\ldots$	$x=\ldots\ldots$

Anhang H – Lineare Gleichungen und Sachkontexte (Auswahl)

1)

x: Alter von Jens….

x: Leute auf der Party…..

x: Pferde auf der Koppel…..

x: Besucher der Ausstellung…..

a) Der erste Schritt, um von einem Sachproblem zu einer Gleichung zu kommen, ist die Variable (Unbekannte) festzulegen. Ganz rechts unten siehst du, was die Variable x jeweils bedeuten soll.
Übersetze für jede der vier Probleme den Text der Bilder in eine Gleichung mit Variable x.

b) Löse die Gleichungen und mache die Probe! Schreibe zu jedem der Bilder einen passenden Antwortsatz. Überprüfe zuletzt, ob deine Lösung auch zum jeweiligen Problem passt.

2) *Fülle die Leerstellen („…….“) aus, stelle eine Gleichung auf, löse diese und überprüfe deine Lösung.*

a) Monika ist x Jahre alt. Ihre Mutter ist dreimal so alt wie Monika, also …………. Jahre alt. Zusammen sind Sie 60 Jahre alt.
Wie alt ist Monika, wie alt ihre Mutter?

b) Judith hat letztes Jahr angefangen Gummienten zu sammeln. Am Anfang hatte sie x Gummienten. Im Laufe des letzten Jahres kamen 36 neue dazu, jetzt hat sie also …………. Gummienten. Insgesamt hat sie jetzt fünfmal so viel wie am Anfang, also ………. Gummienten.
Welche Anzahl x an Gummienten hatte sie am Anfang?

3) Weitere Sachaufgaben

1. Variable (Unbekannte) festlegen
2. Gleichung aufstellen
3. Gleichung lösen
4. Lösung überprüfen

Stelle jeweils eine Gleichung auf, löse diese und mache die Probe. Beginne immer damit, die Variable (die Unbekannte) festzulegen.

x: Geld, das Xaver bekommt

Patty bekommt dann ....

... und Anton ......

a) Xaver, Patty und Anton haben 500 € im Lotto gewonnen. Aufgrund einer vorherigen Abmachung erhält Patty 100 € mehr als Xaver und Anton 60 € mehr als Patty.

b) Die drei großen Ozeane (Pazifik, Atlantik und Indischer Ozean) haben zusammen eine Wasser-oberfläche von ca. 330 Mio. km^2. Der Indische Ozean ist um 10 Mio. Quadratkilometer kleiner als der Atlantik und der Pazifik ist doppelt so groß wie der Atlantik.

c) Diesmal haben Xaver, Patty und Anton 350 € im Lotto gewonnen. Aufgrund einer vorherigen Abmachung erhält Patty 50 € weiniger als Xaver und Anton dreimal so viel wie Patty.
Stelle eine Gleichung dazu auf und löse sie. ***Stimmt alles?.***

4) Aus einem alten chinesischen Rechenbuch (vermutlich 2000 v.Chr.) stammt folgende Aufgabe:
„Auf einem Hof leben Kaninchen und Fasane. Die Tiere haben zusammen 35 Köpfe und 94 Beine. Wie viele Kaninchen und Fasane sind es?"

a) Zwei der Gleichungen (I)-(IV) beschreiben den Sachverhalt richtig! Welche sind das? *Erkläre!* *Wofür genau stehen hier die Variablen?*

$(I): \; 2x + 4x = 94 \qquad (II): \; 4k + 2 \cdot (35 - k) = 94 \qquad (III): \; 2f + 4 \cdot (35 - f) = 94 \qquad (IV): 35x = 94$

b) Löse die beiden Gleichungen und überprüfe deine Lösungen.

5) Text-Term-Gleichung. Welche Gleichung gehört zu welchem Text? *Ordne zu, **wo es geht**, indem du unter den Text die passende Gleichung aufschreibst.*

A: $(x) + (x+1) + (x+2) = 96$	B: $7x - 2 = 3 \cdot (x + 18)$	C: $3 \cdot (x-5) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot 2$
D: $3 \cdot (x - 7) = 2x - 6$	E: $(x - 18) \cdot 7 = 3x - 2$	F: $x \cdot 5 = 3(x+1) + 27$

I: Welche drei aufeinanderfolgenden Zahlen haben die Summe 96?:

II: Das Fünffache einer Zahl ist um 27 größer als das Dreifache der Nachfolgerzahl:

III: Zwei Zahlen unterscheiden sich um 7. Das Dreifache der kleineren Zahl ist um 6 kleiner als das Doppelte der größeren Zahl:

IV: Vermehrt man eine Zahl um 6 und multipliziert die Summe mit 8, erhält man dasselbe, als wenn man zu dem Zwölffachen das Achtfache der Zahl addiert.:

V: Von zwei Zahlen ist die zweite um 18 größer als die erste. Das Siebenfache der ersten Zahl ist um 2 kleiner als das Dreifache der zweiten.:

VI: Wenn man eine Zahl von 20 subtrahiert und die Differenz mit 3 multipliziert, erhält man 36:

Zur Info:
Zählt man von einer Zahl aus mehrmals um eins weiter (z. B. 22,23,24,...) erhält man ***aufeinanderfolgende Zahlen***.
Die Nachfolgerzahl einer Zahl, ist diejenige die um eins größer ist (z. B.: 24 ist die ***Nachfolgerzahl*** von 23). Umgekehrt ist 23 die ***Vorgängerzahl*** von 24.

b) Löse die Gleichungen von 1a), die du einem Text zuordnen konntest.
c) Löse die nicht zugeordneten Gleichungen.
d) Formuliere zu den Gleichungen aus c) die fehlenden Texte.
e) Notiere die Gleichungen der noch verbliebenen Texte und löse sie

6) In dreistöckigen Häusern wohnen Leute, die sich unterschiedlich auf die drei Stockwerke Erdgeschoss (E), 1. Stock (1.) und Dachgeschoss (D) verteilen. In der nachfolgenden Tabelle sind unterschiedliche Verteilungen aufgelistet. Eine der Verteilungen kann algebraisch so dargestellt

Dachgeschoss (D):	$x + 2$
1. Stock (1.):	$4 \cdot x$
Erdgeschoss (E):	x

werden:

D

1.

a) Übertrage die Darstellung im Kasten oben ins entsprechende Feld der Tabelle.

b) Stelle auch die anderen Verteilungen algebraisch dar und suche mögliche Zahlen in der letzten Spalte.

	Text	Algebraische Darstellung	
(I)	In einem dreistöckigen Haus wohnen im Erdgeschoss doppelt so viele Leute wie im Dachgeschoss. Im 1. Stock wohnen dreimal so viele Leute wie im Dachgeschoss.	Dachg.:	3
		1.Stock:	9
		Erdg.:	6
		insgesamt:	18
(II)	In einem dreistöckigen Haus wohnen im 1. Stock vier Leute mehr als im Erdgeschoss. Im Dachgeschoss wohnen zwei Leute mehr als im Erdgeschoss.	Dachg.:	
		1.Stock:	9
		Erdg.:	5
		insgesamt:	
(III)	In einem dreistöckigen Haus wohnen im 1. Stock vier Leute mehr als im Erdgeschoss. Im Dachgeschoss wohnen doppelt so viele Leute wie im Erdgeschoss.	Dachg.:	
		1.Stock:	10
		Erdg.:	
		insgesamt:	
(IV)	In einem dreistöckigen Haus wohnen im 1. Stock viermal so viel Leute wie im Erdgeschoss. Im Dachgeschoss wohnen zwei Leute mehr als im Erdgeschoss.	Dachg.:	
		1.Stock:	8
		Erdg.:	2
		insgesamt:	
(V)	In einem dreistöckigen Haus wohnen im Erdgeschoss viermal so viele Leute wie im Dachgeschoss. Im 1. Stock wohnen dreimal so viele Leute wie im Dachgeschoss.	Dachg.:	
		1.Stock:	
		Erdg.:	
		insgesamt:	
(VI)	In einem dreistöckigen Haus wohnen im Erdgeschoss vier Leute mehr als im Dachgeschoss. Im Dachgeschoss wohnt eine Person mehr als im 1. Stock.	Dachg.:	
		1.Stock:	
		Erdg.:	
		insgesamt:	9

c) Suche für alle Häuser eine Lösung mit insgesamt 24 Bewohnerinnen und Bewohnern, indem du jeweils eine Gleichung aufstellst und diese löst. Eine der Gleichungen hat keine (sinnvolle) Lösung.

Anhang I – Motivierende Inszenierungen der Zahlenrätsel zum Einstieg

Zaubern, Spielen und Knobeln bieten motivierende Lernanlässe für alle Altersstufen. Damit können u. a. Problemlösekompetenzen geschult und fachspezifische Inhalte angebahnt werden. Eine methodisch und didaktisch gut aufbereitete Sammlung solcher Aufgaben ist der *Mathekoffer Zaubern-Spielen-Knobeln (*Brauner et al. 2015*).* Viele aktuelle Schulbücher und Lernmaterialien verwenden auch Zahlenrätsel explizit zum Aufbau algebraischer Inhalte (z. B. Barzel et al. 2015, S. 149 ff., Affolter et al. 2015, Krauth & Warmeling 2018). Mit dem Lernheft *Der Zahlenzauberlehrling* (Gerstner 2019) können algebraspezifische Inhalte mithilfe von Zahlenrätseln schon ab Klasse 5 angebahnt werden.
Für einen motivierenden Einstieg in die Zahlenrätselreihe sind zwei Typen relevant, die im angelsächsischen Sprachraum auch als *„THOAN's*" (für *„Think Of Any Number*") bezeichnet werden. Dabei denkt das Auditorium sich eine beliebige Zahl, mit der im Kopf hintereinander eine ganze Reihe von Rechenoperationen getätigt werden. Bei Typ 1 kommt dabei immer, egal welche Zahl man sich denkt, am Ende das gleiche Ergebnis heraus. Bei Typ 2 kann man am Ende die gedachte Zahl in „Sekundenschnelle" aus dem genannten Endergebnis ermitteln.

Hier nun Tipps, wie solche *THOAN's* von Typ1 und Typ 2 auf erstaunliche und motivierende Art und Weise beim Einstieg in die Zahlenrätselreihe inszeniert werden können.

Typ 1
Denk dir eine Zahl. Addiere 3. Verdoppele. Addiere 4 und multipliziere das Ergebnis mit 5. Subtrahiere davon das 10fache der gedachten Zahl. **Halt!** Mein Superhirn kennt die Zahl, die du jetzt im Kopf hast. Es ist die Zahl 50.

Inszenierung Typ1: „Ich weiß dein Ergebnis":
Der Zauberer behauptet, dass er jedem seinen Willen aufzwängen kann. Ein Schüler wird dazu vor die Tür geschickt. Dann lässt sich der Zauberer von einem anderen in der Runde eine beliebige Zahl nennen. Diese (nennen wir sie z) schreibt er – scheinbar äußerst konzentriert – auf einen leeren Zettel und „versiegelt" diesen. Nun kann der Schüler zurückkommen und der Zauberer bittet ihn, jetzt ganz fest an eine bestimmte Zahl zu denken. Mit dieser gedachten Zahl lässt er den Schüler das Rätsel vom Typ 1 durchführen, wobei am Ende noch die Operation ‚$-(50-z)$' angehängt wird. Dann bittet der Zauberer den Schüler seine Ergebniszahl auf einen Zettel zu schreiben. Erstaunt stellt der Schüler und das gesamte Publikum fest, dass jetzt auf dem Zettel dieselbe Zahl wie im versiegelten Umschlag steht!

Typ 2
Denke dir eine Zahl. Verdoppele sie und addiere 5. Multipliziere das Ergebnis mit 3. Subtrahiere davon die gedachte Zahl, dividiere durch 5. Nenne mir das Ergebnis.

Inszenierung Typ2: „Nenne mir dein Ergebnis und ich sag dir deine gedachte Zahl":
Der Zauberer benutzt ein Rätsel vom Typ 2, lässt sich am Ende ein „Zwischenergebnis" nennen und rechnet an dieser Stelle im Kopf schon die gedachte Zahl aus. Doch dann macht er nicht Schluss, sondern lässt beliebig viele und wilde Rechenschritte folgen. Nachdem er die Schüler derart und trotz Benutzung eines Taschenrechners arg ins Schwitzen gebracht hat, nennt er zum Schluss lächelnd die gedachte Zahl!
Dass kann man auch gut inszenieren, indem das Beamerbild eines Taschenrechners hinter den Lehrer projiziert wird und am Ende ein Schüler – unter Hinweis darauf, dass es aber jetzt ganz entscheidend ist das auch richtig zu machen – die „wilde Zahl" nennt.

Anhang J – Transkriptionsleitfaden

Die Interviews wurden geglättet transkribiert, d.h. dass die folgenden Aspekte nicht beachtet bzw. im Transkript weggelassen wurden, sofern dieselben nicht als bedeutsam wahrgenommen werden:

- Wortdoppelungen, die keine inhaltliche Bedeutung haben, z. B. *„Es ist ist so…“*
- Versprecher, die sofort verbessert wurden, z. B. statt *„ich hat- ich habe“ direkt „ich habe“*
- Das Aufrufen eines Schülers, einer Schülerin von Seiten der Lehrkraft, z. B. *„Jakob. Dann sag du mal was dazu!“*

Pausen im Interview, die maximal 3 Sekunden dauern, werden durch „ … “ gekennzeichnet. Auf längere Pausen als 3 Sekunden wird gesondert in eckigen Klammern, z. B. [denkt sehr lange nach], hingewiesen.

Unverständliche Äußerungen werden durch „[…]“ angezeigt.

Durch „ ___ “ wird eine längere Auslassung gekennzeichnet. Ausgelassen werden dabei Äußerungen und Tätigkeiten, die …

- nicht direkt etwas mit dem gerade verfolgten Gedankengang zu tun haben, z. B. „die Lehrkraft ermahnt Schüler“ oder „ein interviewter Schüler fragt nach einem Blatt Papier“, usw.
- die vornehmlich vom jeweils verfolgten Gedankengang ablenken oder nichts zu diesem beitragen.

In eckige Klammern werden …

- erklärende Äußerungen gesetzt, z. B. [Gemeint ist der erste Term]
- nonverbale Äußerungen/Aktionen, Gesten oder Geräusche beschrieben, z. B. [Schüler wischt mit beiden Händen über die Figur].

Satzzeichen werden eingefügt.

Anhang K– Liste der Episoden

VII.I Umsetzungen der Generalisierungsperspektive

VII.II Umsetzungen der Problemlöseperspektive

VII.IV Reihe Zahlenrätsel (letzter Durchgang)

VII.V Reihe Muster (letzter Durchgang)

Anhang L– Tabellen- und Abbildungsverzeichnis

Erklärung

Hiermit versichere ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Dissertation selbstständig und ohne unerlaubte fremde Hilfe und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur verfasst habe. Alle Textstellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichen Schriften entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht.
Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Wuppertal, den 24.01.22

E. Gerstner