

# Ähnlichkeit als durchgängiges Konzept für einen digital gestützten Geometrieunterricht

Jens Weitendorf

Universität Hamburg

*Für den längerfristigen und nicht nur sporadischen Einsatz digitaler Medien im Mathematikunterricht sind Konzepte erforderlich. Das heißt, man benötigt eine Art „roten Faden“, was der Begriff Ähnlichkeit leisten könnte. Wesentliche Inhalte des Geometrieunterrichts beruhen auf dem Prinzip der Ähnlichkeit. Mit Hilfe von DGS lässt diese sich leicht entdecken. Dies bietet für Schülerinnen und Schüler neben der mathematischen Begründung eine zusätzliche visuelle Bestätigung durch die DGS. In dem Beitrag werden Inhalte der Geometrie unter dem Aspekt der Ähnlichkeit diskutiert.*

## Der Begriff der Ähnlichkeit

Der Begriff der Ähnlichkeit verbindet die Leitideen Messen, Raum und Form und funktionaler Zusammenhang sowie fast alle geometrischen Inhalte ab Klasse 7 (vgl. Weitendorf, 2020a, 2020b). Besonders die Inhalte der Leitidee Messen sind in einem digital gestützten Geometrieunterricht gut zugänglich, da ein DGS jederzeit die Möglichkeit bietet, Streckenlängen zu messen und darüber hinaus lassen sich auch Quotienten leicht berechnen. Des Weiteren ergibt sich eine Verbindung zur Optik im Physik-Unterricht, die in der Regel in Klasse 7 oder 8 behandelt wird. Die Ähnlichkeit spielt normalerweise im Geometrieunterricht in Klasse 7 keine Rolle. Es lässt sich aber Äquivalenz als Spezialfall der Ähnlichkeit auffassen. Man kann entweder mit der Äquivalenz beginnen und überlegen, wie sich Voraussetzungen abschwächen lassen, damit man zumindest noch ähnliche Figuren erhält; bzw. den umgekehrten Weg gehen, der im Rahmen des Artikels vorgeschlagen wird. Der Begriff der Kongruenz ist nicht unproblematisch, während der Begriff der Ähnlichkeit den Schülerinnen und Schülern aus dem Alltag vertraut ist. So besteht für den Unterricht die Aufgabe, einen alltäglichen Begriff für den Mathematikunterricht zu präzisieren. Des Weiteren besteht ein Vorteil darin, dass sich ein Beispiel für die Proportionalität und damit eine Verbindung zur Leitidee funktionaler Zusammenhang ergibt. In ähnlichen Figuren sind die Längen entsprechender Seiten proportional zueinander. Eine weitere Verbindung ergibt sich dadurch, dass Parabeln ähnlich sind. Eine Parabel ist der geometrische Ort aller Punkte, die von einem Punkt, dem Brennpunkt und einer Geraden gleich weit entfernt sind.

Das heißt, durch einen Punkt, der nicht auf der Geraden liegt, und eine Gerade ist die Parabel eindeutig bestimmt. Das bedeutet, man muss doch nur eine Gerade und einen Punkt durch eine zentrische Streckung auf eine andere Gerade und einen anderen Punkt abbilden. Durch Drehung und Verschiebung ist es immer zu erreichen, dass die beiden Geraden aufeinander liegen. Man lege dann eine Gerade durch die beiden Punkte, was immer möglich ist, wenn die Parabeln nicht schon vorher kongruent waren. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit den beiden zu den Parabeln gehörenden Geraden ist das gesuchte Zentrum der Streckung.

Zu einer gegebenen Parabel findet man den Brennpunkt durch die Eigenschaft, dass reflektierte Strahlen durch den Brennpunkt verlaufen. Des Weiteren liegt der Brennpunkt natürlich auf der Symmetrieachse. Damit sind zu jeder Parabel auch Brennpunkt und die definierende Gerade eindeutig bestimmt.

### Ähnliche Dreiecke



Abbildung 1: Zwei ähnliche Dreiecke

Bezüglich der begrifflichen Präzisierung beginnt man zunächst mit Dreiecken. Zeichnungen an der Tafel und entsprechende Zeichnungen in den Heften sind ähnlich. Dies gilt auch insbesondere für die verwendeten Geodreiecke. Schülerinnen und Schüler erkennen, dass in ähnlichen Dreiecken die Innenwinkel gleich groß sind. Die Frage, ob zwei gleichgroße Winkel genügen, führt zum Innenwinkelsummensatz. Kongruenzsätze und Konstruktionen werden wie traditionell behandelt.

### Strahlensätze und zentrische Streckungen

Wenn man die Ähnlichkeit über ähnliche Dreiecke einführt, ergeben sich die Strahlensätze automatisch. Vor allem der zweite Strahlensatz macht den Schülerinnen und Schülern oft Schwierigkeiten, da die Streckenlängen sich ja auf den Abstand zum Zentrum beziehen müssen.

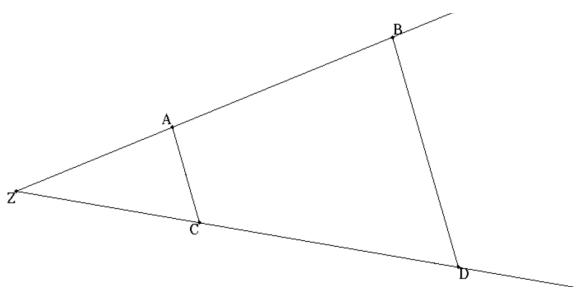


Abbildung 2: Strahlensatzfigur

Die Form  $\frac{\overline{AB}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{ZC}}$  lässt sich mit Termumformungen direkt aus  $\frac{\overline{ZB}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{ZD}}{\overline{ZC}} \Rightarrow \frac{\overline{ZA} + \overline{AB}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{ZC} + \overline{CD}}{\overline{ZC}}$  herleiten

### Kreise und eine dezimale Darstellung von $\pi^3$

Alle Kreise sind ähnlich! Daraus folgen die entsprechenden Proportionalitäten:  $U \sim r$  und  $F \sim r^2$ . Begründen lassen sich die Proportionalitäten mit Quadraten, die natürlich auch alle ähnlich sind (s. Abb.

<sup>3</sup> Eine ausführliche Darstellung findet sich in dem entsprechenden Artikel (s. Literaturverzeichnis)

3). Umfang und Flächeninhalt von Quadraten sind bekannt und proportional zu  $r$  bzw.  $r^2$ . Die Figur lässt sich längs der Halbgeraden  $IG$  mit Zentrum  $I$  strecken bzw. stauchen.

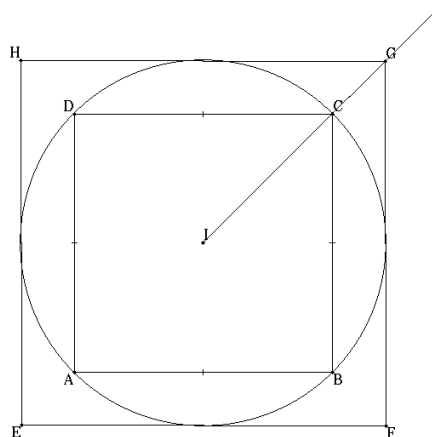


Abbildung 3: Kreis mit inliegendem und umliegendem Quadrat

Die Fläche eines Kreises lässt sich nur schwer händisch messen. Man müsste die Kreisfläche z. B. mit kleinen Quadraten auslegen, was eher mühselig ist. Wenn die Proportionalität gezeigt werden soll, muss dieses für verschiedene Radien durchgeführt werden. Deutlich einfacher ist es, den Umfang von Kreisen zu messen. Man könnte zylindrische Körper mit einem Band umspannen und deren Länge messen, bzw. die Zylinder auf einem Blatt Papier abrollen und die Länge der Spur messen. Die erhaltenen Durchmesser und Umfänge lassen sich in eine Tabellenkalkulation eintragen und mit deren Hilfe lässt sich zum einen die Proportionalität zeigen und zum anderen ergibt sich eine erste Näherung für  $\pi$ .

Das händische Abrollen lässt sich simulieren. Als Software wurde GeoGebra gewählt (s. Abb. 4). Der Kreis ist so konzipiert, dass mit Hilfe der Schieberegler sowohl das Abrollen (s. Abb. 4 Schieberegler a) als auch der Radius des Kreises verändert werden können. Der Mittelpunkt  $A$  des Kreises hat die Koordinaten  $A(a,r)$ . Dadurch wird zum einen das Abrollen simuliert, zum anderen rollt der Kreis immer auf der  $x$ -Achse ab. Der Punkt  $B'$  dient als Fixpunkt, mit dessen Hilfe die Bewegung des Kreises deutlich wird. Insbesondere ergibt sich eine vollständige Drehung, wenn die Punkte  $B$  und  $B'$  aufeinanderliegen. Die Länge der Strecke  $f = CB$  entspricht dann der Länge des Kreisumfangs. In die Lage des Punktes  $B'$  geht die Konstante  $\pi$  ein. Die Punkte  $BAB'$  beschreiben einen Winkel, der den Wert  $a/r$  gemessen in Bogenmaß hat. Die Genauigkeit lässt sich dadurch erhöhen, dass die Schrittweite des Schiebereglers  $a$  verkleinert wird. Dem sind natürlich durch die Auflösung des Bildschirms Grenzen gesetzt.

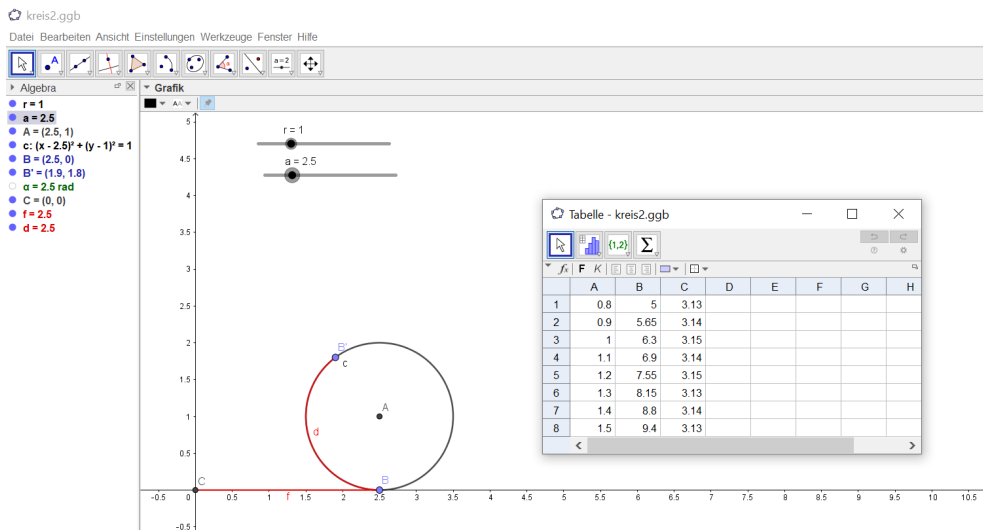


Abbildung 4: Simulation des Abrollens mit GeoGebra

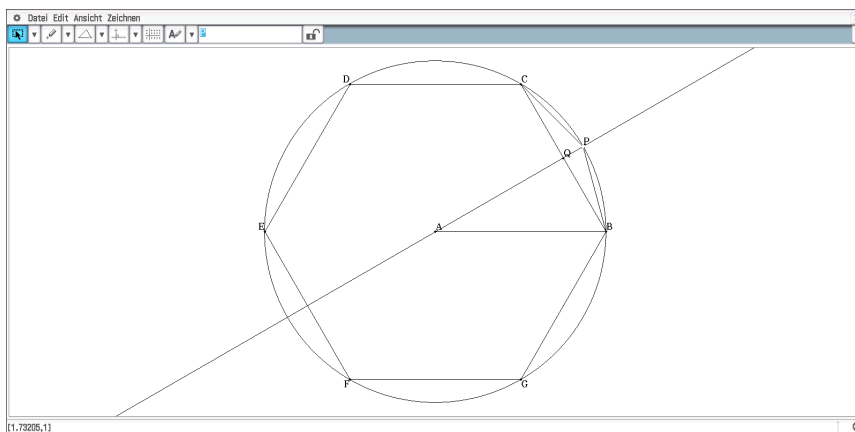


Abbildung 5: Kreis mit einbeschriebenem 6-Eck

Im Folgenden wollen wir eine dezimale Näherung für  $\pi$  bestimmen (s. Abb. 5). Durch Konstruktion der Mittelsenkrechten der jeweiligen Seiten des Sechsecks, erhält man ein 12-Eck, dessen Umfang sich mehr dem Umfang des Kreises annähert. Das heißt, es ist der Umfang des 12-Ecks bzw. die Länge einer Kante zu bestimmen. Für ein Näherungsverfahren ist ein Algorithmus erforderlich. Das heißt, wenn der Umfang des 12-Ecks bestimmt ist, müsste man als Nächstes ein  $n$ -Eck mit einem größeren  $n$  wählen. So ist zunächst eine Möglichkeit zu finden, aus dem Umfang des 6-Ecks den Umfang des 12-Ecks zu bestimmen. Wenn es gelingt, dass in diesem Verfahren die konkreten Zahlen 6 und 12 nicht auftreten, lässt sich dies verallgemeinern und man hat einen allgemeinen Zusammenhang zwischen den Kantenlängen  $s_n$  und  $s_{2n}$ , mit dem sich  $\pi$  näherungsweise bestimmen lässt.

Aus der Zeichnung ist ersichtlich, dass sich die beiden rechtwinkligen Dreiecke  $ABQ$  und  $BPQ$  ergeben. Wir fügen folgende Bezeichnungen ein:  $\overline{AQ} = x$  und  $\overline{QP} = y$ . Des Weiteren gelte für den Radius des Kreises  $r = 1$ .

$$\Delta BPQ: \quad s_{2n}^2 = \frac{1}{4}s_n^2 + y^2$$

$$\Delta ABQ: \quad 1 = x^2 + \frac{1}{4}s_n^2$$

Und:  $1 = x + y$

Als Lösung ergibt sich:  $s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$

Näherungswerte für  $\pi$  lassen sich jetzt mit Hilfe der Tabellenkalkulation berechnen (s. Abb. 6)

	A	B	C	D	E	F
1	n-Eck					
2	6	1	3			
3	12	0.51764	3.105828541			
4	24	0.26105	3.132628613			
5	48	0.13081	3.139350203			
6	96	0.06544	3.141031951			
7	192	0.03272	3.141452472			
8	384	0.01636	3.141557608			
9	768	8.18E-3	3.141583892			
10	1536	4.09E-3	3.141590463			
11	3072	2.05E-3	3.141592106			
12	6144	1.02E-3	3.141592512			
13	12288	5.11E-4	3.141592602			
14	24576	2.56E-4	3.141592722			
15	49152	1.28E-4	3.141592482			
16	98304	6.39E-5	3.141593443			

Abbildung 6: Berechnung einer Näherung für  $\pi$

Aus der Abbildung 6 erkennt man, dass der Wert für das 49152-Eck nicht stimmen kann, da die Werte auf Grund des Verfahrens nicht fallen können. Lässt man weitere Werte berechnen, so ergibt sich eine sogenannte Subtraktionskatastrophe (s. Abb. 7).

19	786432	7.98936793E-6	3.141547302		
20	1572864	3.99499687E-6	3.141793379		
21	3145728	1.99749844E-6	3.141793379		
22	6291456	1E-6	3.145728		
23	12582912	0	0		

Abbildung 7: Subtraktionskatastrophe

Das Problem hinsichtlich der Subtraktion lässt sich dadurch umgehen, indem der Berechnungsterm mit  $\sqrt{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}$  erweitert wird. Nach einigen Umformungen unter Berücksichtigung der dritten binomischen Formel ergibt sich dann für den Algorithmus:  $s_{2n} = \frac{s_n}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}}$ . Wie Abbildung 8 (die verbesserten Werte stehen in den Spalten E und F) zeigt, erhält man so eine Näherung für  $\pi$  mit einer Genauigkeit von 10 Stellen, und dieser Wert bleibt stabil.

	A	B	C	D	E	F	G
1	n-Eck						
2	6	1	3		1	3	
3	12	0.5176380902	3.105828541		0.5176380902	3.105828541	
4	24	0.2610523844	3.132628613		0.2610523844	3.132628613	
5	48	0.1308062585	3.139350203		0.1308062585	3.139350203	
6	96	0.0654381656	3.141031951		0.0654381656	3.141031951	
7	192	0.0327234633	3.141452472		0.03272346325	3.141452472	
8	384	0.0163622792	3.141557608		0.01636227921	3.141557608	
9	768	8.1812081E-3	3.141583892		8.18120805E-3	3.141583892	
10	1536	4.0906126E-3	3.141590463		4.09061258E-3	3.141590463	
11	3072	2.0453074E-3	3.141592106		2.04530736E-3	3.141592106	
12	6144	1.0226538E-3	3.141592512		1.02265381E-3	3.141592517	
13	12288	5.1132692E-4	3.141592602		5.11326924E-4	3.141592619	
14	24576	2.5566347E-4	3.141592722	3.141592654	2.55663464E-4	3.141592645	
15	49152	1.2783173E-4	3.141592482		1.27831732E-4	3.141592651	
16	98304	6.3915882E-5	3.141593443		6.39158662E-5	3.141592653	
17	196608	3.1957941E-5	3.141593443		3.19579331E-5	3.141592653	
18	393216	1.5979049E-5	3.141608823		1.59789665E-5	3.141592654	

Abbildung 8: Verbesserte Näherung für  $\pi$

## Zur Satzgruppe des Pythagoras

Die Sätze am rechtwinkligen Dreieck werden im Prinzip als Flächensätze bewiesen. Wenn man sich hingegen die auf den Beweis der Sätze folgenden Aufgaben anschaut, so geht es nicht darum, Flächeninhalte zu bestimmen, sondern Streckenlängen zu berechnen. Von daher wird ein anderes Beweisverfahren vorgeschlagen, um diesen Bruch zu vermeiden.

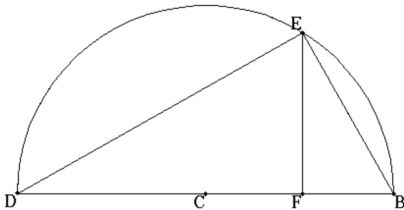


Abbildung 9: Das rechtwinklige Dreieck DBE mit der Höhe EF

Die Höhe FE teilt das ursprüngliche rechtwinklige Dreieck DBE in die beiden ebenfalls rechtwinkligen Dreiecke DFE und FBE (s. Abb. 9). Es ist leicht einzusehen, dass alle drei Dreiecke ähnlich sind. So lässt sich zunächst der Höhensatz (s. Abb. 10) beweisen. Die Konstruktion und die Messungen sind natürlich kein Beweis für den Satz. Es bietet aber Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit, die Korrektheit des Satzes zumindest einzusehen.

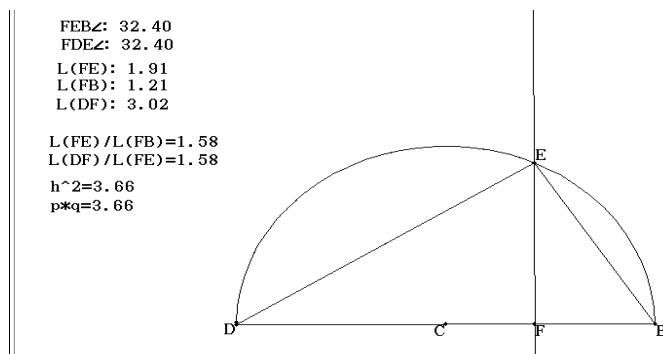


Abbildung 10: Beweis des Höhensatzes

Der Beweis ist durch die Abbildung 10 schon vorstrukturiert. Betrachtet man die beiden ähnlichen Dreiecke DFE und FBE, so lassen sich jeweils die Katheten zueinander ins Verhältnis setzen:

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{FE}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{FB}} \rightarrow \overline{DF} \cdot \overline{FB} = \overline{FE}^2$$

Der Höhensatz ist damit bewiesen.

Den Kathetensatz (s. Abb. 11) beweist man entsprechend:

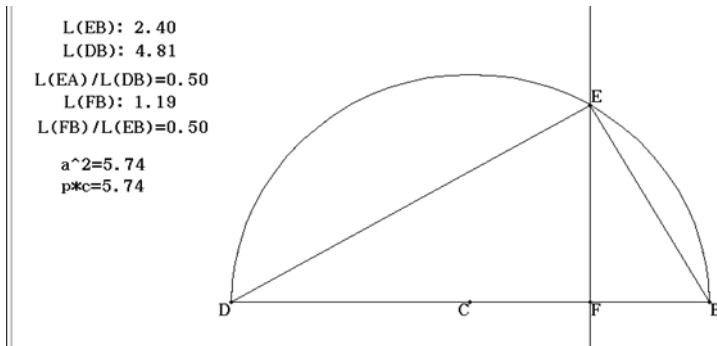


Abbildung 11: Beweis des Kathetensatzes

$$\frac{\overline{EB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{FB}}{\overline{EB}} \rightarrow \overline{EB}^2 = \overline{DB} \cdot \overline{FB}$$

Für die zweite Kathete lässt es sich entsprechend zeigen.

Den Satz des Pythagoras erhält man dann automatisch aus der Anwendung des Kathetensatzes auf die beiden Katheten.

$$a^2 = p \cdot c \quad \text{und} \quad b^2 = q \cdot c \rightarrow a^2 + b^2 = p \cdot c + q \cdot c = (p + q) \cdot c$$

Aus dem Ansatz folgt automatisch ein Zusammenhang zwischen Verhältnis- und Flächensätzen.

### **Die trigonometrischen Funktionen<sup>4</sup>**

Zur Einführung der trigonometrischen Funktionen sollten Schülerinnen und Schüler erkennen, dass in rechtwinkligen Dreiecken die Seitenverhältnisse von den gegebenen Winkeln abhängen. Dies schließt somit unmittelbar an die Einheit über ähnliche Dreiecke an. Dazu wird zunächst gezeigt, dass die Seitenverhältnisse konstant bleiben, wenn ein weiterer Winkel fest vorgegeben ist (s. Abb. 11). Dazu wird der Punkt D (s. Abb. 11) auf der Strecke [AC] fixiert, und mittels einer Animation des Punktes D auf dieser Strecke werden ähnliche rechtwinklige Dreiecke ADE mit erzeugt (s. Abb. 11). Wir zeigen zunächst numerisch, dass die Seitenverhältnisse in diesem Dreieck jeweils gleich sind (s. Abb. 12)

<sup>4</sup> Eine ausführliche Darstellung findet sich in dem entsprechenden Artikel (s. Literaturverzeichnis)

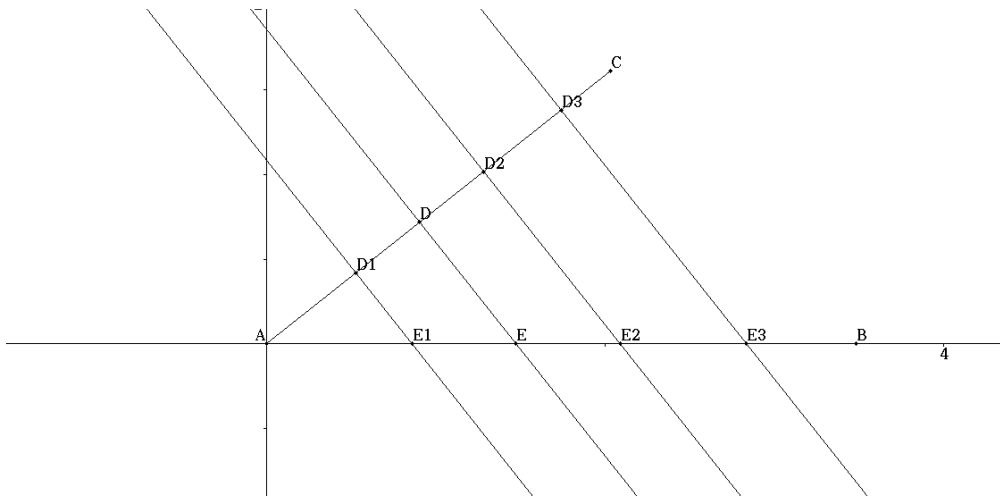


Abb. 12 Ähnliche Dreiecke mit rechtem Winkel

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	AE	DE	AD	DE/AE	AD/AE			
2	0	0	0					
3	0.34824	0.26827	0.22204	0.77035	0.63762	1		
4	0.69648	0.53654	0.44409	0.77035	0.63762			
5	1.04472	0.80481	0.66613	0.77035	0.63762			
6	1.39296	1.07308	0.88818	0.77035	0.63762			
7	1.74121	1.34134	1.11022	0.77035	0.63762			
8	2.08945	1.60961	1.33226	0.77035	0.63762			
9	2.43769	1.87788	1.55431	0.77035	0.63762			
10	2.78593	2.14615	1.77635	0.77035	0.63762			
11	3.13417	2.41442	1.99840	0.77035	0.63762			
12	3.48241	2.68269	2.22044	0.77035	0.63762			
13	3.83065	2.95096	2.44249	0.77035	0.63762			
14	4.17889	3.21923	2.66453	0.77035	0.63762			
15	4.52713	3.48750	2.88657	0.77035	0.63762			
16	4.87537	3.75577	3.10862	0.77035	0.63762			
17								
=D3^2+E3^2								

Abb. 13 Auswertungen der Animation

Die sich aus der Animation ergebenden Seitenverhältnisse können über die Tabellenfunktion im Messfenster in die Tabellenkalkulation übertragen werden. In der Spalte D stehen die sin- und in Spalte E die cos- Werte des Winkels am Eckpunkt A. Als Ergänzung wurde noch das Quadrat der beiden Werte gebildet und diese wurden summiert (s. Abb. 13: Zelle F3)

Daraus wird verständlich, dass das Verhältnis der entsprechenden Seiten ein Maß für den entsprechenden Winkel ist. Das heißt, die Winkelfunktionen sin, cos und tan lassen sich für Winkel zwischen 0° und 90° definieren.

Werte für die trigonometrischen Funktionen erhält man durch Animationen, indem man den Winkel variiert. Man legt dazu den Eckpunkt mit dem rechten Winkel auf einen Halbkreis, lässt diesen durch eine Animation auf diesem wandern und misst die entstehenden Seitenverhältnisse.

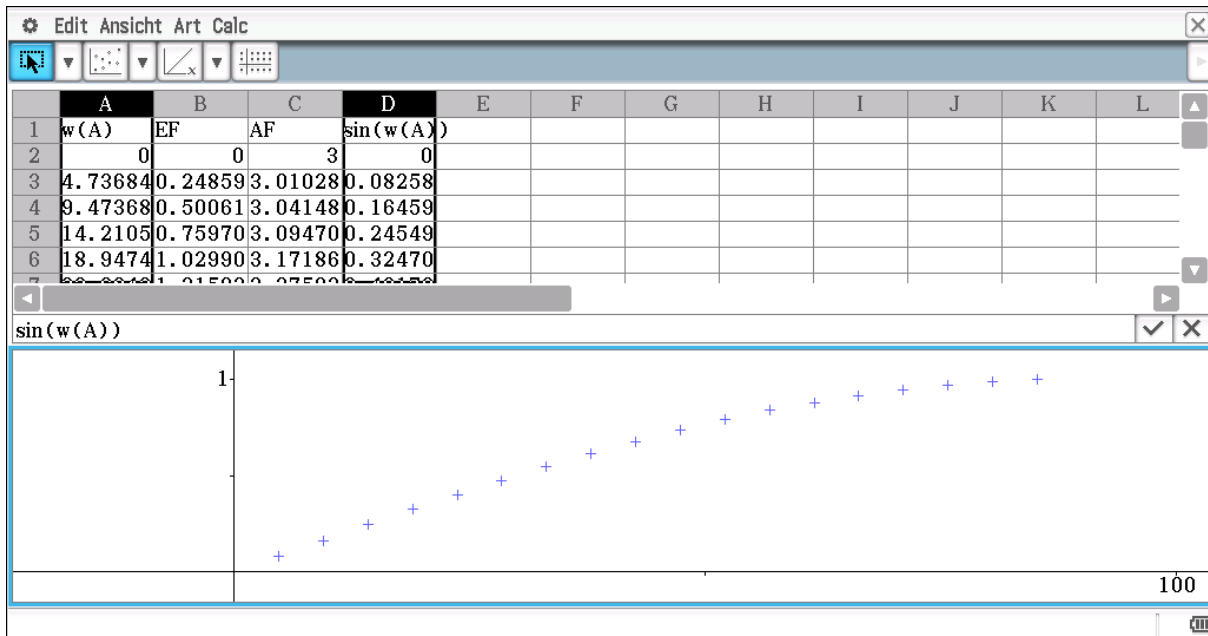


Abb. 14 Berechnung von sin-Werten und ihre grafische Darstellung

Die Werte werden dann wieder in die Tabellenkalkulation hinein übertragen, so dass die entsprechenden Verhältnisse berechnet werden können (s. Abb. 13). Durch Markierung der Spalte mit den Winkeln und mit den sin-Werten lassen sich die Funktionswerte grafisch darstellen. Die Darstellung in Abbildung 13 entspricht nicht der üblichen, da für die x-Achse als Einheit das Gradmaß gewählt wurde. Selbst wenn man zunächst die Winkelgrößen in Bogenmaß umrechnen lässt, erhält man nicht die übliche Darstellung, da in der Tabellenkalkulation die Achseneinheiten willkürlich gesetzt werden. Im Unterricht sollten als Nächstes die üblichen Dreiecksberechnungen behandelt werden, auf die wir hier nicht weiter eingehen wollen. Im Zusammenhang mit dem Einsatz neuer Medien sollte für die Schülerinnen und Schüler verständlich werden, dass die jetzt möglichen Berechnungen die Grundlage dafür liefern, dass die Dreieckskonstruktionen und das Messen von Winkeln möglich sind.

Das gilt aber bisher nur für rechtwinklige Dreiecke. Für die Berechnung beliebiger Dreiecke werden der Sinus- und der Kosinussatz benötigt. Auf die Herleitung und Begründung dieser beiden Sätze wollen wir hier nicht weiter eingehen. Bzgl. der Anwendungen werden zunächst nur Dreiecke betrachtet, deren Innenwinkel höchstens ein Maß von  $90^\circ$  haben. Von den Konstruktionen her ist bekannt, dass der Fall ssw im Allgemeinen nicht zu einer eindeutigen Lösung führt. Da aber der Zusammenhang zwischen Berechnungen und Konstruktionen besteht, muss sich dieses auch in der Berechnung mit Hilfe des Sinussatzes niederschlagen.

Die obigen Überlegungen lassen eine Erweiterung des Definitionsbereichs der trigonometrischen Funktionen sinnvoll erscheinen. Für eine Erweiterung des Definitionsbereiches übertragen wir die bisherigen Erkenntnisse auf einen Viertelkreis, dessen Radius die Länge 1 hat (s. Abb. 14).

y

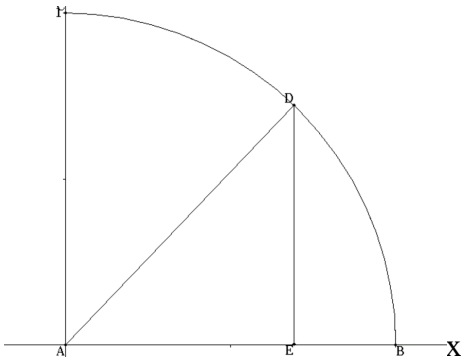


Abb. 15 Zusammenhang zwischen einem Viertelkreis mit dem Radius 1 und den trigonometrischen Funktionen

Die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass die Koordinaten des Punktes D gleich dem Kosinus- bzw. Sinuswert des Winkels am Punkt A sind. Dies kann zum einen natürlich durch theoretische Überlegungen geschehen. Zum anderen lässt sich der Zusammenhang dadurch überprüfen, dass der Punkt D animiert wird und die Koordinaten des Punktes D mit den Kosinus- und Sinuswerten des Winkels bei A verglichen werden. Im Geometrie Modul ist dies nicht direkt möglich. Die Werte lassen sich aber, wie oben beschrieben, in die Tabellenkalkulation übertragen.

Jetzt ergibt sich die Möglichkeit, den Definitionsbereich der Sinus- und Kosinusfunktion zu erweitern. Dazu erweitert man den Viertel-Einheitskreis zu einem Vollkreis oder erst zu einem Halbkreis. Die Sinus- und Kosinuswerte werden als Koordinaten des einem Winkel zugehörigen Punktes, der auf dem Kreis liegt, definiert. Eine Motivation für eine Erweiterung des Definitionsbereiches für Winkelgrößen, die mehr als  $180^\circ$  bzw.  $360^\circ$  betragen, ergibt sich aus der Geometrie nicht. Diese ergibt sich aber aus physikalischen Betrachtungen.

## Literatur

- Weitendorf, J. (2020a). Trigonometrische Funktionen. In N. Noster & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Mathematische Erkundungen* (S. 55–67), Lehrstuhl für Mathematik V (Didaktik der Mathematik) der Fakultät für Mathematik und Informatik an der Julius-Maximilians-Universität Würzburg. <https://mathematik-lehr-netzwerk.de/download/mathematische-erkundungen/>
- Weitendorf, J. (2020b). Berechnung einer dezimalen Näherung für die Kreiszahl  $\pi$ . In N. Noster & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Mathematische Erkundungen* (S. 85–96), Lehrstuhl für Mathematik V (Didaktik der Mathematik) der Fakultät für Mathematik und Informatik an der Julius-Maximilians-Universität Würzburg. <https://mathematik-lehr-netzwerk.de/download/mathematische-erkundungen/>

# DuEPublico

Duisburg-Essen Publications online

UNIVERSITÄT  
DUISBURG  
ESSEN

*Offen im Denken*

ub | universitäts  
bibliothek

Dieser Text wird über DuEPublico, dem Dokumenten- und Publikationsserver der Universität Duisburg-Essen, zur Verfügung gestellt. Die hier veröffentlichte Version der E-Publikation kann von einer eventuell ebenfalls veröffentlichten Verlagsversion abweichen.

**DOI:** 10.17185/duepublico/76042

**URN:** urn:nbn:de:hbz:465-20220615-155106-3



Dieses Werk kann unter einer Creative Commons Namensnennung 4.0 Lizenz (CC BY 4.0) genutzt werden.