Das Studysche Übertragungsprinzip
Study's Principle of Transference

Harald Löwe, Technische Universität Braunschweig, Institut für Partielle Differentialgleichungen,
38106 Braunschweig, Deutschland, h.loewe@tu-bs.de
Bertold Bongardt, Technische Universitiät Braunschweig, Institut für Robotik und Prozessinformatik,
38106 Braunschweig, Deutschland, b.bongardt@tu-bs.de
Baozhen Lei, Beijing Union University, College of Robotics,
Beijing, China 100020, leibaozhen@126.com

Kurzfassung

Der für die IFToMM D–A–CH 2022 geplante Vortrag bietet einen Einblick in die Interpretation des Studyschen Übertragungsprinzips aus Sicht der Differentialgeometrie. Dieses Prinzip lässt sich vielfältig in der Kinematik einsetzen; so beruhen die Lösungen der speer–geometrischen Paden–Kahan Probleme auf dem Übertragungsprinzp [2].
Duale Größen wie normalisierte Plückerkoordinaten zur Beschreibung räumlicher Geraden oder duale Quaternionen haben seit Beginn des 20. Jahrhunderts ihren festen Platz in der Kinematik. Ein Grund für ihre Bedeutung ist das auf Alexander Kotelnikoff zurückgehende *Studysche Übertragungsprinzip* [4, 8], das allerdings lange Zeit nur in recht vagen Formen bekannt war. So findet sich beispielsweise bei Rooney [7] (in freier Übersetzung):

> "Alle gültigen Gesetze und Formeln, die durch ein System von Einheitsvektoren beschrieben werden und folglich reelle Variablen enthalten, behalten ihre Gültigkeit für das äquivalente System von normalisierten Plückerkoordinaten, wenn jede der Variablen x in den Formeln durch die zugehörige duale Variable $x+\varepsilon\dot{x}$ ersetzt wird."

Prinzipiell musste aufgrund des fehlenden Nachweises jede Anwendung des Prinzips in Nachhinein gerechtfertigt werden. Wenigstens partielle Abhilfe boten rigorosere Versionen des Übertragungsprinzips mit den dazugehörigen Beweisen; diese sind allerdings in der Literatur erst seit etwa 1980 zu finden [6].
Eine weitere Anwendung finden duale Zahlen in der Differentialgeometrie [1]. Hier wird das Differenzieren von Funktionen als Skalarerweiterung von den reellen zu den dualen Zahlen aufgefasst: Ist $f: V \to W$ eine differenzierbare Funktion zwischen den reellen Vektorräumen V und W, so kann ihre Tangentialabbildung als

$$\mathrm{T}f : \mathrm{T}V = V \oplus \varepsilon V \to \mathrm{T}W;\ \ (\mathrm{T}f)(v+\varepsilon\dot{v}) = f(v) + \varepsilon\,(D_v f)(\dot{v})$$

beschrieben werden, wobei $D_v f$ die gewöhnliche Ableitung (Jacobi–Matrix) von f bezeichnet. Dies überträgt sich auf differenzierbare Funktionen zwischen Mannigfaltigkeiten V und W, wobei man für $\mathrm{T}V$ und $\mathrm{T}W$ die sogenannten Tangentialbündel der betreffenden Mannigfaltigkeiten zu nehmen hat. Die Anwendbarkeit dieser Theorie in der Kinematik und insbesondere auf das Studysche Übertragungsprinzip beruht auf der geometrischen Deutung etlicher Tangentialbündel. Einige Beispiele hierfür sind in der folgenden Tabelle aufgelistet:

Tabelle 1 Interpretationen einiger Tangentialbündel im kinematischen Kontext.

Objekt	*Name*	*Tangentialobjekt*	*Interpretation*
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen	$\mathrm{T}\mathbb{R} = \mathbb{R} + \varepsilon\mathbb{R}$	duale Zahlen
$\mathbb{S}_2$	Einheitsvektoren	$\mathrm{T}\mathbb{S}_2$	Speere (normalisierte Plückerkoordinaten)
$\mathrm{SO}(3)$	Drehungen	$\mathrm{TSO}(3) = \mathrm{AdSE}(3)$	Bewegungen in adjungierter Darstellung
$\mathfrak{so}(3)$	Rotationsalgebra	$\mathrm{T}\mathfrak{so}(3)$	Schrauben
$\mathbb{H}$	Quaternionen	$\mathrm{T}\mathbb{H} = \mathbb{H} + \varepsilon\mathbb{H}$	duale Quaternionen

Eine mögliche Interpretation des angesprochenen Übertragungsprinzips entpuppt sich in diesem Kontext als die Kettenregel für differenzierbare Funktionen. Zur Erläuterung betrachten wir eine Gleichung der Form $f(x) = y_0$, wobei x ein "System von Einheitsvektoren" ist, das bestimmten Nebenbedingungen genügt. Aus differentialgeometrischer Sicht können wir dies durch die Forderung modellieren, dass x aus einer geeigneten Mannigfaltigkeit M stammt. Die differenzierbare Abbildung f geht dann von M in eine weitere Mannigfaltigkeit N, aus der auch die rechte Seite y_0 der Gleichung stammt. Wir setzen voraus, dass die Gleichung durch Argumente der Form $x = \sigma(p)$ gelöst wird, wobei p aus einer weiteren Mannigfaltigkeit P stammt und die Abbildung $\sigma: P \to M$ ebenfalls differenzierbar ist. Wenn nun jedes $x = \sigma(p)$ die Gleichung löst, so gilt $f(\sigma(p)) = y_0$ für alle $p \in P$. Anwenden der Kettenregel $\mathrm{T}(f \circ \sigma) = (\mathrm{T}f) \circ (\mathrm{T}\sigma)$ zeigt nun:

$$(\mathrm{T}f)(x+\varepsilon\dot{x}) = y_0 \text{ gilt für jedes } x+\varepsilon\dot{x} = (\mathrm{T}\sigma)(p+\varepsilon\dot{p}) \text{ mit } p+\varepsilon\dot{p} \in \mathrm{T}P.$$

Damit sind die Erwartungen des Übertragungsprinzips vollständig erfüllt: Die Lösung $x = \sigma(p)$ der Gleichung $f(x) = y_0$

überträgt sich auf die Gleichung $(\mathrm{T}f)(x+\varepsilon\dot{x}) = y_0$ für das "System" $x+\varepsilon\dot{x}$ normalisierter Plückervektoren.
Allerdings ist das Übertragungsprinzip keineswegs universell gültig: Nimmt man eine Aussage der Form "$f(x) = 0$ gilt genau für $x = \sigma(p)$", so ergibt die Übertragung auf die Ableitung in einigen Fällen eine falsche Aussage. Hier muss man für f und σ geeignete Forderungen stellen; genauer, der Rang beider Abbildungen muss konstant sein, da die Probleme bei der Übertragung an den Stellen mit Rangabfall der Ableitung auftreten. Auch bei dem Aufzeigen der Fallstricke beim Übertragungsprinzip erweist sich die Differentialgeometrie daher als hilfreiches Werkzeug. An dieser Stelle wird erneut die enge Verbindung zwischen der traditionellen Kinematik und der differentialgeometrischen Formulierung der Mechanik (vgl. zum Beispiel Bullo und Lewis [3]) sichtbar.
Der Vortrag gibt sowohl eine kurze, elementare Einführung in die Differentialgeometrie als auch eine etwas ausführliche Diskussion der in Tabelle 1 enthaltenen Objekte. Hauptziel ist es, das Studysche Übertragungsprinzip für Gleichungen (vgl. [5]) zu erläutern, sowie die Grenzen dieses Prinzips sichtbar zu machen. Als Anwendungsbeispiel steht eine ausführlichere Betrachtung des ersten Paden–Kahan-Problems auf dem Programm.

Literatur

[1] Bertram, W.: *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces over General Base Fields and Rings*. Memoirs of the AMS 192 (2008), AMS.

[2] Bongardt, B.: *Closed–Form Solutions and Solvability of Line–Geometric Padan–Kahan Problems*. In Vorbereitung.

[3] Bullo, F.; Lewis, A.D.: *Geometric Control of Mechanical Systems*. Heidelberg: Springer–Verlag (2005).

[4] Dimentberg, F.M.: *The Screw Calculus and Its Application in Mechanics*. Clearinghouse for Federal and Scientific Technical Information, Nauka, Moscow, 1965.

[5] Löwe, H.; Bongardt, B.; Lei Baozhen: *The Principle of Transference in Kinematics I: Equations*. In Vorbereitung.

[6] Martínez, J.M.R.; Duffy, J.: *The Principle of Transference: History, Statement and Proof.*. Mech. Mach. Theory **28** (1993), 165–177.

[7] Rooney, J.: *On the principle of transference*. In: Proc. of the Fourth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms (1975), 1089–1094.

[8] Study, E.: *Die Geometrie der Dyaden*. Leibzig: Teubner (1903).

In: Achte IFToMM D-A-CH Konferenz 2022

DOI: 10.17185/duepublico/75436
URN: urn:nbn:de:hbz:465-20220222-172529-2