Zwischen Vorstellung und Kalkül: Ergiebige Sachkontexte beim graphischen Ableiten nutzen

MARC BOSSE & MARCEL KLINGER

Die Analysis ist eine Teildisziplin der Mathematik, die einen großen Beziehungsreichtum zwischen ihren Konzepten und Begriffen zu einer umfassenden und häufig deduktiv aufbereiteten Theorie vereint. Gerade deshalb mag es oft schwerfallen, sinnstiftende Erfahrungen in einzelnen Unterrichtsstunden aufzubereiten (DANCKWERTS & VOGEL, 2006). Häufig führt dieser Umstand vor allem dazu, dass die Gegenstände der Analysis eher isoliert betrachtet und in erster Linie die damit verbundenen (algorithmischen) Routinen vermittelt werden, um Lernziele zu erreichen (KLINGER, 2018).

1 Qualitative Analysis und graphisches Ableiten

Ein alternativer Zugang zur Analysis, der versucht, primär kalkülgeprägten Unterrichtskonzepten entgegenzutreten, kann eine qualitative Betrachtung bieten. So hält etwa HUßMANN ein Plädoyer für die sogenannte qualitative Analysis, welche durch die vorrangige Betrachtung von graphischen und verbalen Repräsentationsformen zu einer chancenreichen „Brille" werden kann, *„um Veränderungen ihrer Qualität nach zu erfassen"* (HUßMANN, 2010, 4).

Eine Tätigkeit, die hierbei helfen kann, ist das graphische Ableiten, welches spätestens seit der Erlassung der Bildungsstandards im Jahr 2012 Bestandteil von Curricula der Länder ist. Im Gegensatz zum gewohnten Ableiten durch (algebraisch-kalkülhafte) Differentiation eines Funktionsterms, muss beim graphischen Ableiten der Funktionsgraph der Ableitungsfunktion ausgehend vom Funktionsgraphen einer entsprechenden Stammfunktion bestimmt werden; die Funktionsgleichung der abzuleitenden Funktion ist dabei nicht bekannt – und deren Kenntnis auch nicht notwendig.

Die Schüler/innen müssen zur Bewältigung dieser Aufgabe, d. h. der Konstruktion eines Ableitungsgraphen anhand des lediglich graphisch gegebenen Funktionsgraphen, Kenntnisse über die Beziehungen zwischen den Eigenschaften der beiden Graphen bzw. zwischen der Funktion und ihrer Ableitung (etwa die Beschreibung des Monotonieverhaltens der Funktion durch das Vorzeichen der Ableitungsfunktion) besitzen. Genauer haben sie beim graphischen Ableiten die Gelegenheit, diese verstehensorientiert zu erwerben. Die Lernenden müssen charakteristische Stellen des Graphen der Funktion jenen der Ableitungsfunktion zuordnen und das Wachstumsverhalten der Funktion mit positiven und negativen Wertebereichen der Ableitungsfunktion in Einklang bringen. Sie können so verschiedene Aspekte und Ebenen der funktionalen Zusammenhänge miteinander in Verbindung bringen. Die Kovariation in Form des Wachstumsverhaltens der Ausgangsfunktion verwandelt sich auf Ableitungsebene in eine Zuordnung des Vorzeichens. Entsprechende Vorstellungen hinsichtlich des Zusammenhangs von Funktions- und Ableitungsgraph funktionaler Zusammenhänge können so also besonders gefördert werden (Klinger, 2018).

Andererseits ist durch die hohen Vorgaben, die z. B. zentrale Prüfungen an unterrichtende Lehrkräfte stellen, die Verlockung groß, graphisches Ableiten vornehmlich auf Kalkülebene zu betrachten. Im schlimmsten Fall verkommt die potentiell vorstellungsreiche Tätigkeit auf diese Weise zu einer reinen Schritt-für-Schritt-Prozedur nach Rezept, die nur noch wenig mit einer Forderung nach einer qualitativen Betrachtung der Analysis zu tun hat. Dieser Eindruck bekräftigte sich durch entsprechende Schülerfehler im Rahmen einer Studie von Klinger (2018) mit über 3000 Lernenden.
Einerseits ist graphisches Ableiten also eine Tätigkeit, die helfen kann, das umfassende Beziehungsgeflecht der Analysis besser zu durchdringen und entsprechende Vorstellungen auszubilden. Andererseits sorgt gerade dieser Umstand auch dafür, dass es sich um eine derart herausfordernde Übung handelt, zu deren Bewältigung man erneut jene Überbetonung des Kalküls in Kauf nimmt, die man doch gerade durch die Einführung solcher Übungen in den Unterricht zurückzudrängen erhofft hatte.

2 Sachkontexte beim graphischen Ableiten nutzen: Beispiel „SkyTrain"

Ein Ausweg aus diesem Dilemma findet sich dann, wenn das Arbeiten mit den entsprechenden Funktionsgraphen nicht sachzusammenhangslos geschieht, sondern wenn die Tätigkeit des graphischen Ableitens mit sinnstiftenden und schülerbetreffenden Kontexten verbunden wird. Im Folgenden wird daher eine Lernumgebung vorgestellt, die graphisches Ableiten in einen realweltlichen Kontext einbindet, ohne den Schüler/inne/n a priori offenzulegen, dass es sich um die Operation „Ableiten" handelt. Sinnstiftung erfolgt also nicht über den mathematisch-curricularen Kanon (*„als Nächstes kommt eben (graphisches) Ableiten dran"*), sondern über den Sachkontext. Erst nach Anfertigung des Ableitungsgraphen kann man die Schüler/innen diskutieren lassen, welche Gründe dafürsprechen, dass man diese Tätigkeit als graphisches Ableiten bezeichnet.

Der Kontext generiert sich aus der kinematischen Beschreibung der Fahrt eines “SkyTrains” am Flughafen in Düsseldorf (Abb. 1). Das verwendete Unterrichtsmaterial kann unter http://klngr.de/mnu kostenlos bezogen werden. Die Schüler/innen setzen sich in diesem Kontext zunächst mit dem durch die Lehrkraft dargelegten Zeit-Weg-Graphen auseinander, indem sie die mathematischen Eigenschaften des Graphen mit einigen (vorgegebenen) Realmodellaspekten (z. B. Start und Ziel der Fahrt, Geschwindigkeiten, Abbrems- und Beschleunigungsvorgänge) in Verbindung setzen können (siehe Abb. 2). Diese Aktivität dient der sachkontextuellen Erschließung des Bewegungsvorgangs genauso wie der Förderung funktionalen Denkens, wie sie schon in der Sekundarstufe I stattfindet, v. a. mit dem Fokus auf den Kovariationsaspekt.

Abb. 1. „SkyTrain"-Strecke (Quelle: Düsseldorf Airport)

Im Anschluss daran wird der Auftrag formuliert, dass die Lernenden selbstständig den Zeit-Geschwindigkeits-Graphen des entsprechenden Bewegungsverlaufs der Kabinenbahn erstellen sollen; sie leiten aus den Eigenschaften des funktionalen Zusammenhangs von Zeit und Weg jenen zwischen Zeit und Geschwindigkeit selbstständig ab.

Sachsituationen, in denen Schüler/innen der Analysis erstmals begegnen und die auf der Beschreibung von Bewegungsvorgängen beruhen, haben bereits seit einigen Jahren Eingang in gängige Lehrwerke und sicherlich auch in den üblichen Mathematikunterricht der Kolleg/innen gefunden. Wir sind aber davon überzeugt, dass gerade der oben genannte Sachkontext ergiebige Perspektiven mit sich bringt, die fruchtbar für das mathematische Lernen der Schüler/innen sind.

3 Argumente für die unterrichtliche Thematisierung des geschilderten Kontexts

Nachfolgend werden fünf Argumente für die unterrichtliche Thematisierung dieses Kontexts geliefert.

3.1 Mathematisches Lernen mit Sinn

Der oben genannte Bewegungskontext dient als verständnisschaffender und authentischer Prototyp für den Zusammenhang zwischen Weg und Änderung des Weges pro Zeit. Er ist relativ authentisch und stammt aus der Lebenswelt der Lernenden. Man kann davon ausgehen, dass konkret-lebensweltliche Kontexte mit exemplarischem Charakter für kinematische Prozesse eher zu nachhaltigem Lernen mathematischer Begriffe wie *Änderungsrate* oder *Steigung* führen (Ubuz, 2008; Lambert, 2017). Die mathematikunterrichtliche Praxis der Autoren zeigte, dass die Lernenden auch zu einem späteren Zeitpunkt der Unterrichtsreihe immer wieder auf den kinematischen Prozess des „SkyTrains" verweisen konnten, wenn Begriffe gefunden oder erklärt werden sollten. Man kann annehmen, dass ein solcher Prototyp Grundvorstellungen induziert, die späteres Lernen analytischer Konzepte begünstigen (ebd.).

3.2 Modellierungskompetenz

Mit Blick auf die Förderung mathematischer Grundbildung nach Winter (1995) ist es für den Analysisunterricht wünschenswert, dass die Lernenden nicht nur die analytischen Gegenstände und Sachverhalte mit den zugehörigen Begriffen, Symbolen und Kalkülen kennen (Mathematik als Struktur), sondern ebenfalls die Grunderfahrung machen, mit der Analysis u. a. technische und kulturelle Erscheinungen und Vorgänge wahrzunehmen, zu verstehen und zu beurteilen (Mathematik als Anwendung). Infolgedessen trägt der Realitätskontext dazu bei, die Schüler/innen in ihrer Mathematical Literacy zu stärken und analytische Betätigungen mit Gegenwartsbedeutung zu versehen. Unter der Perspektive unterrichtlicher Zielsetzung bedeutet dies, dass der Sachkontext die Modellierungskompetenz der Lernenden fördert. Um Situationen in der realen Welt zu mathematisieren und Mathematik zu interpretieren, sind nach Hußmann und Prediger (2010) Grundvorstellungen nötig, die entsprechende kognitive Aktivitäten tragen. Diese Grundvorstellungen dienten als „Übersetzungsscharniere" zwischen realer Welt und Mathematik. Sie seien *„vorwiegend als inhaltliche Interpretationen mathematischer Konzepte mental repräsentiert und ermöglichen, diese Konzepte zur Mathematisierung von Situationen zu nutzen oder umgekehrt mathematische Sachverhalte lebensweltlich zu deuten"* (Hußmann & Prediger, 2010, 35).

Beim „SkyTrain"-Beispiel speisen sich die Grundvorstellungen aus der Vorstellung der Geschwindigkeit als Änderung vom Weg relativ zur Zeit. Will man Lernende dazu befähigen, formale Ableitung und Momentangeschwindigkeit als Begriffspaar des gleichen Konzepts begreifen zu können, eignen sich Übersetzungs- und Deutungsaktivitäten zwischen realer Welt und Mathematik in besonderer Weise: Eigenschaften der Graphen wie Extrempunkte, Steigungsverhalten oder Schnittpunkte mit der t-Achse erfahren sachkontextuelle Bedeutung und werden mit Sinn versehen.

Das unterrichtliche Beispiel überlässt den Schüler/inne/n keine im Sinne des Modellierungskreislaufes (Blum & Leiss, 2005) vollständige Modellierung, zumal wichtige Entscheidungen für das Realmodell die Lehrkraft übernimmt und das erste mathematische Modell (der Zeit-Weg-Graph) den Lernenden ebenfalls vorliegt. Vielmehr generieren die Schüler/innen aus dem Zeit-Weg-Graphen durch Interpretationstätigkeiten sachsituative Informationen (Graph der Zeit-Weg-Funktion steigt ↔ *Skytrain fährt vorwärts*), die sie dann für die Erstellung des Graphen der Zeit-Geschwindigkeit-Funktion abermals mathematisieren (*Skytrain fährt vorwärts* ↔ *Graph der Zeit-Geschwindigkeit-Funktion liegt über der t-Achse*). Die Lernenden pendeln also gedanklich zwischen sachsituativen Vorstellungen im „Skytrain"-Kontext und ihren mathematischen Äquivalenten.

3.3 Negative Änderungsrate der Zeit-Weg-Funktion

Weil die Kabinenbahn nur an wenigen Stationen hält und zwischen einem Anfangs- und Endpunkt hin und her pendelt, d. h. vorwärts und rückwärts fährt, besitzt der Graph der Zeit-Weg-Funktion Zeitintervalle, in denen die Steigung des Graphen negativ ist (Abb. 2). Andere kinematische Kontexte – wie z. B. das Anfahren eines Autos – bringen oft mit sich, dass es beim zugehörigen Funktionsgraphen nur nicht-negative Steigungen gibt. Negative Steigungen bieten bei der Aktivität des graphischen Ableitens Diskussions- und Interpretationsanlässe, die im Sinne des vorherigen Abschnitts lernförderliche Grundvorstellungen induzieren (z. B. weil negative Steigungen immer zu negativen Werten der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion führen, diese aber keine Aussage über das Vorzeichen der Zeit-Weg-Funktion machen usw.).

3.4 Negative Werte der Zeit-Weg-Funktion

Grundsätzlich könnte bei der Thematisierung des Kontexts der vollständige Modellierungskreislauf (Greefrath, 2010) durchlaufen werden – etwa durch eine entsprechende Sammlung von Messdaten mithilfe einer Smartphone-App am Flughafen selbst. Es bietet sich aber an, Überlegungen zum Realmodell nicht den Lernenden zu überlassen, sondern den kinematischen Prozess a priori so zu modellieren, dass die Kabinenbahn an einer mittleren Station, z. B. der Haltestelle „Parkhaus P4/P5", startet.

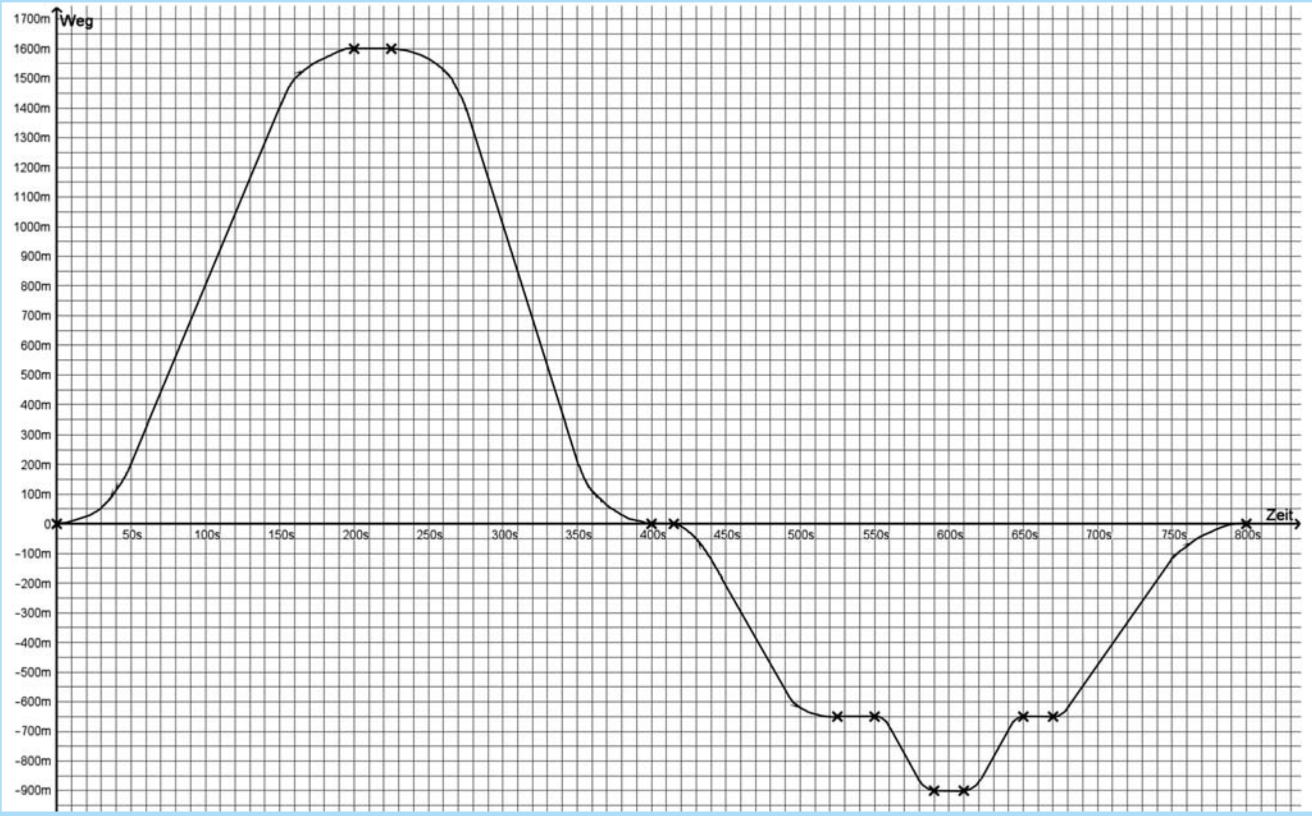

Abb. 2. Graph der Zeit-Weg-Funktion einer (im Vorfeld modellierten) Kabinenbahnfahrt

Wenn man diese Annahme für das Realmodell trifft, ergibt sich, dass die Wertemenge der Zeit-Weg-Funktion nicht nur positiv ist und sich die Kabinenbahn zum Zeitpunkt $t = 0$ an dieser Station befindet (Abb. 2). Dass das Vorzeichen der Funktionswerte der Zeit-Weg-Funktion keinerlei Beziehung zum Vorzeichen der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion hat, ist eine Chance, Fehlvorstellungen über den Zusammenhang der Vorzeichen von Funktion und Ableitung präventiv zu begegnen. Die Wahl des Startes an einer mittleren Station ist somit nicht nur eine Entscheidung bei der Konzeption des Realmodells, sondern bietet gleichsam einen lernförderlichen, didaktischen Mehrwert.

3.5 Propädeutik der (formalen) Kurvendiskussion

Charakteristische Stellen und Intervalle der beiden Graphen, die in einem Bedeutungszusammenhang stehen, können über das vorstellungsinduzierende Gerüst des "SkyTrain"-Kontexts von den Schüler/inne/n verstanden werden, ohne dass eine formale Funktionsuntersuchung (Kurvendiskussion) im Unterricht Gegenstand gewesen ist. So wird beispielsweise ein an einer Haltestelle stehender Kabinenwagen durch einen Kurvenabschnitt des Zeit-Weg-Graphen repräsentiert, der parallel zur *t*-Achse verläuft, und durch die Stelle des Geschwindigkeit-Zeit-Graphen dargestellt, an der die Kurve die *t*-Achse

Graph der Zeit-Weg-Funktion	Graph der Zeit-Geschwindigkeit-Funktion	Interpretation der Situation im Sachkontext
parallel zur *t*-Achse	auf der *t*-Achse (Geschwindigkeit ist 0)	Skytrain steht still; ist am Bahnhof
steigend	über der *t*-Achse (Geschwindigkeit ist positiv)	Skytrain fährt vorwärts
fallend	unter der *t*-Achse (Geschwindigkeit ist negativ)	Skytrain fährt rückwärts
Geradenstück	parallel zur *t*-Achse (Geschwindigkeit ist konstant)	Skytrain fährt mit konstanter Geschwindigkeit
oberhalb der *t*-Achse	unbekannt	Skytrain befindet sich zwischen Parkhaus und Bahnhof
unterhalb der *t*-Achse	unbekannt	Skytrain befindet sich zwischen Parkhaus und den Terminals
…	…	…

Tab. 1. Beobachtungen zum Verlauf der Graphen

schneidet. Ist die Geschwindigkeit der Kabinenbahn (und damit die Ableitung) null, so steht die Bahn still (waagerechter Streckenabschnitt). Dieser vorstellungsorientierte Ansatz vermag es, erste Ansätze dafür zu liefern, waagerechte Tangenten synchron zu Nullstellen der Ableitungsfunktion zu denken; mithin wird der Schritt der notwendigen Bedingung für Extremstellen sicherlich einfacher fallen.
Im Unterricht können die Lernenden ihre Modellierungs- und Deutungsaktivitäten beim graphischen Ableiten dokumentieren (Tab. 1). Die Vorstellungskomponente, die so gewinnbringend für das graphische Ableiten ist, wird somit selbst zum Unterrichtsgegenstand und Teil der Ergebnissicherung.

4 Fazit

Graphisches Ableiten kann potenziell den vorstellungsorientierten Umgang mit Konzepten der Analysis fördern, bietet gleichzeitig jedoch auch die Verlockung zu kalkülorientiertem Unterricht. Ergiebige Sachkontexte, die auch im weiteren Verlauf des Unterrichts immer wieder adressiert werden, bieten hier einen erfolgversprechenden Ausweg. Das Beispiel „Sky-Train“ erfüllt aus Sicht der Autoren dieses Kriterium und zeigte sich auch im Rahmen eigener Unterrichtserfahrungen als entsprechend ergiebig.

Literatur

BLUM, W. & LEIß, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der „Tanken“-Aufgabe. *Mathematik Lehren*, Heft 128, 18–21.

DANCKWERTS, R. & VOGEL, D. (2006). *Analysis verständlich unterrichten: Mathematik Primar- und Sekundarstufe*. Heidelberg: Spektrum.

GREEFRATH, G. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Sekundarstufe*. Heidelberg: Spektrum.

HUßMANN, S. (2010). Veränderungen verstehen – aus qualitativer Sicht. *Praxis der Mathematik in der Schule 52*(31), 4–8.

HUßMANN, S. & PREDIGER, S. (2010). Vorstellungsorientierte Analysis – auch in Klassenarbeiten und zentralen Prüfungen. *Praxis der Mathematik in der Schule 52*(31), S. 35–38.

KLINGER, M. (2018). *Funktionales Denken beim Übergang von der Funktionenlehre zur Analysis: Entwicklung eines Testinstruments und empirische Befunde aus der gymnasialen Oberstufe*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

LAMBERT, A. (2017). Analysis – erst mal geometrisch: Änderungen differenzieren und integrieren – zunächst in Geschwindigkeits-Zeit-Graphen. *Mathematik Lehren*, Heft 200, 38–40.

UBUZ, B. (2007). Interpreting a graph and constructing its derivative graph: stability and change in students' conceptions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 38*(5), 609–637.

WINTER, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, Heft 61, 37–46.

Dr. MARC BOSSE, marc.bosse@filderbenden.de, ist Studienrat am Gymnasium in den Filder Benden, Moers.

Dr. MARCEL KLINGER, marcel.klinger@uni-due.de, ist Studienrat im Hochschuldienst an der Fakultät für Mathematik, Universität Duisburg-Essen, Essen.

DOI: 10.17185/duepublico/74009
URN: urn:nbn:de:hbz:464-20210208-100115-3

Erschienen in: *MNU-Journal*, 73(06), 2020, S. 457-461. ISSN 0025-5866
https://www.mnu.de/zeitschriften/585-mnu-heft-2020-06