*In diesem Beitrag geht es um eine möglichst sinnerfüllte, nicht abschreckende Einführung der algebraischen Formelsprache im Mathematikunterricht und die damit verbundene didaktische Herausforderung.*

# Wege zur Formelsprache

## Entwicklung algebraischen Denkens als didaktische Aufgabe

Von Lisa Hefendehl-Hebeker

Die Entwicklung der symbolischen Algebra in der frühen Neuzeit war eine für die Mathematik und ihre Anwendungen konstitutive und vorbildlose Neuerung. Die Einführung in den verständigen Gebrauch der Formelsprache ist nach wie vor eine didaktische Herausforderung.

### Was ist und was soll die Formelsprache?

An einem Beispiel wollen wir zunächst den Nutzen und die Leistungsfähigkeit der algebraischen Formelsprache erläutern. Dabei werden wir zugleich Stufen in der Entwicklung eines verständigen Umgangs mit der symbolischen Algebra ausweisen.

Gottfried Wilhelm Leibniz arbeitete im Rahmen seiner kombinatorischen Studien mit Zahlenfolgen von Differenzen, die in seinem Kalkül des Infinitesimalen eine wichtige Rolle spielen sollten[1]. Dabei betrachtete er auch das „harmonische Dreieck" (Abb. 1).

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & & & \\
 & & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & & & \\
 & & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & & & \\
 & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} & & \\
 & \frac{1}{6} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{6} & \\
\frac{1}{7} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{140} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{7}
\end{array}
$$

(1) „Harmonisches Dreieck".

Dieses Dreieck entsteht, wenn man, ausgehend von der Folge der Stammbrüche in der ersten linken Schrägspalte, fortlaufend Differenzenfolgen bildet:

(1) Ausgangsfolge:

$$a_1 = 1 \ , \ a_2 = \frac{1}{2} \ , \ a_3 = \frac{1}{3} \ , \ldots$$

(2) Erste Differenzenfolge:

$$b_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ , \ b_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \ , \ b_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \ , \ldots$$

(3) Zweite Differenzenfolge:

$$c_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \ , \ c_2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12} \ , \ c_3 = \frac{1}{12} - \frac{1}{20} = \frac{1}{30} \ , \ldots$$

Lisa Hefendehl-Hebeker. Foto: Max Greve

Dass die Rechenoperation Subtraktion, in der die Rollen von Minuend und Subtrahend nicht austauschbar sind, ein solches symmetrisches Zahlenschema hervorbringt, mag auf den ersten Blick erstaunen. Wir nähern uns dem Schema in Stufen.

*Stufe 1: Muster erkennen*

Zur Folge der Stammbrüche ein Anfangsstück der ersten Differenzenfolge zu berechnen ist eine nützliche Übung zur Subtraktion von Brüchen. Dabei zeichnet sich bald eine Gesetzmäßigkeit ab: Die Differenz zweier aufeinander folgender Stammbrüche scheint gleich ihrem Produkt zu sein.

*Stufe 2: Inhärente Strukturen erfassen – strukturierte Arithmetik*

Betrachtet man die Rechnungen genauer, dann wird klar, warum das tatsächlich so sein muss. Nehmen wir dazu das Beispiel $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12}$. Die Nenner 3 und 4 der beiden Brüche unterscheiden sich nur um 1, deshalb ist der Hauptnenner gleich ihrem Produkt: $3 \cdot 4 = 12$. Nun erweitert man jeden der Brüche mit dem Nenner des jeweils anderen: $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$, $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$. In den Zählern tauchen die Zahlen 3 und 4 also in umgekehrter Reihenfolge wieder auf und ergeben die Differenz 1: $\frac{1}{12} = \frac{4-3}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$.

Gelingt es, von den speziellen Zahlen 3 und 4 zu abstrahieren und den formalen Aspekt der Rechnung zu erkennen, dann wird klar, dass die Differenzbildungen der ersten Folge *immer* nach diesem Muster ablaufen. So scheint im Einzelfall der allgemeine Fall auf. Gedankliche Vollzüge dieser Art bezeichnen wir im Folgenden als strukturierte Arithmetik. Die beteiligten Zahlen verschmelzen beim Rechnen nicht unkenntlich zu neuen numerischen Ergebnissen; vielmehr werden ihre Rollen und Beziehungen im Gesamtgefüge im Bewusstsein gehalten und einer erklärenden Betrachtung unterworfen. Es entsteht eine „verbale Algebra“[2]. Ausdrucksmittel sind fachsprachliche Begriffe zur Bezeichnung von Objekten und Funktionen von diesen, die den Charakter von Wortvariablen[3] haben: der Nenner des ersten Bruches, der Nenner des zweiten Bruches, der Nachfolger einer natürlichen Zahl, das Produkt zweier Zahlen usw.

*Stufe 3: Symbolisches Beschreiben – Darstellen und Begründen*

Die durch strukturierte arithmetische Betrachtung gewonnene Einsicht lässt sich durch symbolische Beschreibung in kurzer und präziser Form explizit machen. Dazu wird für eine beliebige, aber feste natürliche Zahl das Symbol $n$, für die um eins größere Folgezahl $n+1$ gesetzt. Für Schülerinnen und Schüler ist es zunächst gewöhnungsbedürftig, dass sich mit solchen Ausdrücken, die man im allgemeinen Kontext nicht weiter „ausrechnen“ kann, dennoch effektiv operieren lässt. Im Fall des betrachteten Beispiels sieht das so aus:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

Auf diese Weise wird der gemeinsame Bauplan beziehungsweise das gemeinsame Rechenschema aller Zahlen der ersten Differenzenfolge verdeutlicht. Dabei kann die an Beispielen gewonnene und durchdachte arithmetische Erfahrung die Gewöhnung an die Symbolik stützen.

*Stufe 4: Symbolisches Explorieren – Formeln manipulieren und interpretieren*

Die nächsten Differenzenfolgen auf der Stufe der strukturierten Arithmetik zu untersuchen wird ein zunehmend komplexes Unternehmen, weil die inhärenten Zahlbeziehungen vielfältiger werden und man leicht den Überblick verliert. Verbale Beschreibungen würden schwerfällig und schließlich unmöglich. An dieser Stelle treten Entdecken und symbolisches Darstellen in ein dynamisches Miteinander. Die algebraischen Symbole dienen nicht nur der abschließenden Fixierung der Überlegungen, sie werden als durchgängiges Werkzeug des Denkens von Anfang an eingesetzt – vorausgesetzt, dass bis dahin genügend Vertrautheit mit dieser Darstellungsform entwickelt wurde. So können die weiteren Differenzenfolgen des harmonischen Dreiecks sofort symbolisch erfasst werden:

$$\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+2-n}{n(n+1)\,(n+2)}$$
$$= \frac{2}{n(n+1)\,(n+2)}$$

$$\frac{2}{n(n+1)\,(n+2)} - \frac{2}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}$$
$$= \frac{2(n+3)-2n}{n(n+1)\,(n+2)\,(n+3)} = \frac{6}{n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}$$

usw. Dabei zeigt sich, dass auch hier die Nenner als Produkte aufeinander folgender Zahlen entstehen – ein Zusammenhang, der in der Zahlendarstellung durch Kürzen verwischt wird.

Bei diesem Wechselspiel von Darstellen und Umformen, Explorieren und Interpretieren werden die algebraischen Symbole zu vertrauen Objekten; sie entwickeln sich zu mathematischen Gegenständen eigenen Rechts, die symbolische Algebra zu einem eigenständigen Betätigungsfeld.

*Stufe 5: Neue Muster erkennen – der kreative Blick*

Auf einer nächsten Stufe der Befassung beginnen Mathematiker sich dafür zu interessieren, ob man die komplexer werdenden Terme zur Beschreibung der Differenzen höherer Stufen wiederum durch eine gemeinsame Form kurz und prägnant beschreiben und hiermit auch die Symmetrie des harmonischen Dreiecks erklären kann. Schließlich findet man für den k-ten Koeffizienten in der n-ten Reihe die Darstellung $\frac{k!\,(n-k)!}{(n+1)!}$, wobei das Symbol n! als Abkürzung für das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen verwendet wird. Eine solche Entdeckung wird möglich, wenn sich bei der Betrachtung der symbolischen Ausdrücke vor dem geistigen Auge wiederum Muster und Strukturen abzeichnen und geeignete weiterführende Darstellungsmittel zur Verfügung stehen oder zielgerecht entwickelt werden. Die Spirale des Erkennens geht in die nächste Windung.

In dieser Schilderung hat sich gezeigt, dass die Formelsprache der symbolischen Algebra ein effizientes Werkzeug des Denkens ist. Sie entlastet das Vorstellungsvermögen, indem sie es ermöglicht, inhaltsgebundene logische Argumentationen weitgehend durch inhaltsinvariante Denkoperationen zu ersetzen[4]. Sie erhöht die operative Reichweite, indem sie ein regelgeleitetes Operieren mit Symbolen erlaubt. Ohne ihre Entwicklung in der frühen Neuzeit hätte die Mathematik nicht zu der Schlüsseltechnologie werden können, die sie heute ist[5].

Maßgeblich für die Entwicklung der symbolischen Algebra ist die Idee der Formalisierung, also der Möglichkeit, einen Vorgang oder Zusammenhang formal zu beschreiben. Diese Idee ist nach S. Krämer[6] für die neuzeitliche Wissenschaft kennzeichnend und an drei Bedingungen gebunden: die des schriftlichen, des schematischen und des interpretationsfreien Symbolgebrauchs: Das Operieren mit Gegenständen, Begriffen und Gedanken wird ersetzt durch das Operieren mit Zeichen, die an die Stelle dieser Gegenstände, Begriffe und Gedanken treten.

Zugleich aber hat sich gezeigt, dass ein verständiger Umgang mit der algebraischen Formelsprache eine hohe Abstraktionsleistung und viel Gewöhnung erfordert.

## Symbolisches Rechnen als didaktische Herausforderung

Formeln sind, wie wir gesehen haben, ein grundlegendes Sprachmittel der Mathematik. Sie werden aber in dieser Eigenschaft sehr gegensätzlich erlebt. Während die Einen ihre Klarheit und Effizienz rühmen, wehren sich die Anderen gegen ihre vermeintliche Rätselhaftigkeit und Sinnferne. Manches in der Schule entstandene Mathetrauma hat beim „Buchstabenrechnen“ seinen Ausgang genommen.

Betrachtet man die in der Einführung veranschlagten idealtypischen Lernstufen, so lassen sich zwei Ursachen des Problems schnell diagnostizieren:

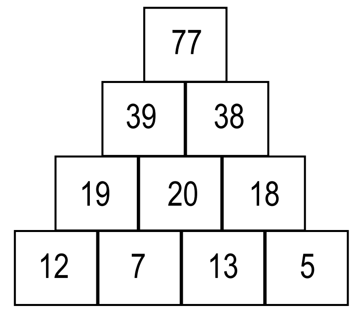
1. Lange Zeit wurde die symbolische Algebra in Klasse 7 sehr unvermittelt in Gebrauch genommen. Die Lernaktivitäten konzentrierten sich weitgehend auf die Techniken der Formelmanipulation. Eine ausreichende Verankerung in einer strukturierten Arithmetik fehlte. Es wurden somit abstrakte Konzepte vermittelt, nicht aber der Prozess des Abstrahierens erfahrbar gemacht.
2. Zugleich erschöpften sich diese Aktivitäten in einem Lernen auf Vorrat. Das symbolische Rechnen blieb ein weitgehend in sich geschlossenes Tätigkeitsfeld, dessen Sinn und Bedeutung sich nur bedingt oder gar nicht offenbarte.

Schülerinnen und Schüler, denen das regelhafte Operieren als solches lag, kamen mit diesem Unterrichtskonzept zurecht; die Übrigen brachten es allenfalls auf „systemkonforme Bewältigungskonzepte“[7] oder scheiterten.

Demgegenüber haben sich in den letzten zwanzig Jahren Konzepte für den Mathematikunterricht entwickelt, die von der Grundschule an auf aktiv-entdeckendes und verstehensorientiertes Lernen ausgelegt sind[8]. Dabei spielt auch die strukturierte Arithmetik eine wichtige Rolle.

Was Kinder in diesem Bereich leisten können, zeigt die folgende Fallstudie aus dem Mathematikunterricht der Klasse 5 zum Thema „Zahlenmauern“[9]. In Abbildung (2) ist exemplarisch eine vierstöckige Zahlenmauer dargestellt.

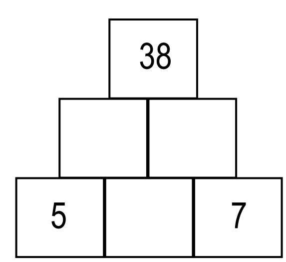
Sie genügt einem einfachen rekursiven Rechenschema. In die Felder der unteren Reihe wurden nach Belieben Zahlen eingetragen; in jedes höher gelegene Feld gehört dann die Summe der beiden darunter liegenden Felder. Das Thema




(2) Zahlenmauer.

Zahlenmauern bietet vielfältige Variationsmöglichkeiten und Lerngelegenheiten für unterschiedliche Jahrgangsstufen und Schwierigkeitsgrade. In der betreffenden Klasse waren in der Zahlenmauer in Abbildung (3) die Lücken auszufüllen:

Karen und Torsten haben beide herausgefunden, dass zwischen 5 und 7 in der unteren Reihe die Zahl 13 eingetragen werden muss. Karen argumentiert so: „5+7=12, 38-12=26, 26:2=13, weil die Zahl zweimal gebraucht wird. Einmal bei der 5 und einmal bei der 7.“

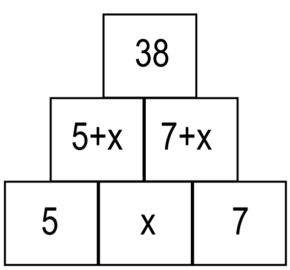



(3) Kleine Zahlenmauer.

Torsten hat eine ganz andere, aber ebenso richtige Begründung gefunden: „Die Differenz zwischen 5 und 7 beträgt 2. So müssen die oberen Zahlen auch eine Differenz von 2 haben, weil 5 und 7 mit der gleichen Zahl addiert werden. Nur

18 und 20 haben eine Differenz von 2 und geben zusammen 38. Dann ist das 13, weil 5+13=18 und 7+13=20.“ Beide Kinder nutzen die erkannten strukturellen Beziehungen zwischen den vorhandenen und den gesuchten Einträgen in der Zahlenmauer, um die unbekannte Zahl in der ersten Reihe zu finden.

Die Ausbildung eines solchen Strukturverständnisses dient vielen Zielen zugleich: Es vertieft den Umgang mit der Arithmetik, es trainiert die Problemlösefähigkeit und es legt wichtige Grundlagen für das algebraische Denken. Mit dessen Hilfe werden Karen und Torsten die Zahlenmaueraufgabe in Abbildung (3) später im Handstreich lösen können, in dem sie für die gesuchte Zahl in der unteren Reihe das Symbol x setzen (Abb. 4) und den Rest durch Operieren mit Zeichen erledigen.

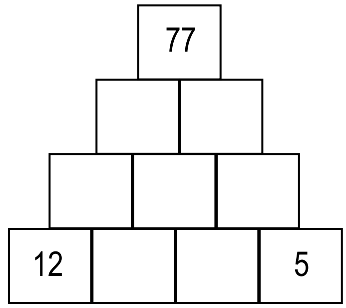



$$5+x+7+x = 38$$
$$2x + 12 = 38$$
$$2x = 38 - 12 = 26$$
$$x = 13$$

(4) Zahlenmauer mit Variablen.

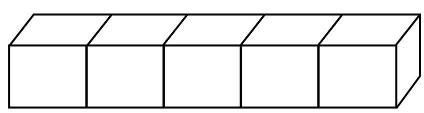
In dieser Gleichungskette sind Karens Argumente nachgebildet. In schwierigeren Fällen eilt das symbolische Operieren dem Lösen in der Vorstellung voraus, zum Beispiel in der Aufgabe in Abbildung (5).

Das Projekt „Entwicklung des algebraischen Denkens“[10] entwickelt Konzepte, wie man von Klasse 5 an strukturierte Arithmetik und eine erste Einführung in die Symbolsprache der Algebra miteinander verbinden und dabei den geschilderten Lernstufen Rechnung tragen kann.




(5) Fülle die Zahlenmauer mit natürlichen Zahlen aus. Geht das auf verschiedene Arten? Auf wie viele Arten?

So zählen zum Beispiel Kinder in Klasse 5 die sichtbaren Quadrate einer auf dem Tisch liegenden Würfelschlange (Abb. 6) und geben mit Hilfe einer Formel an, wie deren Anzahl mit der Anzahl n der Würfel zusammenhängt.



(6) Würfelschlange.

Die erhaltene Formel hängt davon ab, wie der Zählvorgang strukturiert wird:

- Verena zählt nacheinander die Quadrate an der Vorderseite, der Oberseite und der Rückseite der Schlange und fügt zum Schluss die beiden Quadrate an den Enden hinzu. So kommt sie auf den Term n+n+n+2.
- Nikita überlegt sich: Jeder Würfel hat, wenn er allein auf dem Tisch liegt, 5 sichtbare Quadrate. Werden zwei Würfel zusammen geschoben, decken sich zwei vorher sichtbare Quadrate gegenseitig zu. Werden n Würfel zusammen geschoben, entstehen n-1 Nahtstellen dieser Art. Er gelangt zu dem Term $5 \cdot n-(n-1) \cdot 2$.

Dass beide Terme richtig sind, ergibt sich für diese Kinder aus der Sachlogik. Erst später, wenn sie mit solchen Aktivitäten hinreichend vertraut sind, können sie auch auf formaler Ebene die Gleichwertigkeit ihrer Formeln zeigen. Durch Aufgaben dieser Art werden aber bereits früh Grundlagen gelegt, die helfen, die symbolische Algebra besser zu fundieren und zu verstehen.

**Summary**

The development of symbolic algebra in early modern times was a constitutive innovation for mathematics and its applications and was without precedent up until that point. The introduction of symbolic language into reasonable use is still a challenge for mathematics education.

*Anmerkungen*

1) Jahnke 1999
2) Scholz 1990
3) Malle 1993
4) Cohors-Fresenborg 2001
5) Krämer 1988
6) ebd.
7) Andelfinger 1985
8) siehe etwa Müller, Steinbring und Wittmann 1997
9) Sjuts 2006
10) Hefendehl-Hebeker, Berlin, Bertalan, Fischer

*Literatur*

– Andelfinger, B.: Didaktischer Informationsdienst Mathematik. Thema: Arithmetik, Algebra und Funktionen. Soest: Landesinstitut für Schule und Weiterbildung 1985.
– Cohors-Fresenborg, E.: Mathematik als Werkzeug zur Wissensrepräsentation: das Osnabrücker Curriculum. In: Der Mathematikunterricht 47 (1) 2001, S. 5-13.
– Jahnke, H. N. (Hrsg.): Geschichte der Analysis. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg-Berlin 1999.
– Krämer, S.: Symbolische Maschinen. Die Idee der Formalisierung im geschichtlichen Abriss. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1988.
– Malle, G.: Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 1993.

– Müller, G.N., Steinbring, H:, Wittmann E.Ch.: 10 Jahre „mathe 2000“. Bilanz und Perspektiven. Ernst Klett Grundschulverlag, Düsseldorf 1997.
– Scholz, E. (Hrsg.): Geschichte der Algebra. Eine Einführung. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim/Wien/Zürich 1990.
– Sjuts, J.: Diagnostische und didaktische Kompetenz auf Forschungsbasis: das Beispiel Zahlenmauern. In: Rieß, F. (Hrsg.): Einblicke in aktuelle Forschungszusammenhänge zum Mathematikunterricht. Didaktisches Zentrum (diz): Oldenburg 2006, S. 21-37.

## *Die Autorin*

Lisa Hefendehl-Hebeker studierte Mathematik und Evangelische Theologie an den Universitäten Münster und Tübingen und legte in diesen Fächern das Erste und Zweite Staatsexamen (1973 Tübingen, 1979 Paderborn) ab. Im Fach Mathematik promovierte sie 1975 in Erlangen und habilitierte sich 1983 in Duisburg mit einer Arbeit über quadratische Divisionsalgebren über Hilbert-Körpern. Nach einem Jahr hauptamtlicher Tätigkeit im gymnasialen Schuldienst trat sie 1984 eine Professur für Didaktik der Mathematik an der Universität Erlangen-Nürnberg an. Von 1991 bis 2000 hatte sie den Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik an der Universität Augsburg inne. Danach nahm sie einen Ruf an die damalige Gerhard-Mercator-Universität Duisburg an. Nach der Fusion der Universitäten Duisburg und Essen wechselte sie 2004 an den Campus Essen. Lisa Hefendehl-Hebeker war von 2001 bis 2006 geschäftsführende Herausgeberin des Journal für Mathematik-Didaktik und vertritt zurzeit den Bereich Lehramtsausbildung im Präsidium der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

**DOI:** 10.17185/duepublico/73807
**URN:** urn:nbn:de:hbz:464-20210204-155439-0