



Herausgegeben von
Professor Dr.-Ing. Eugen Perau
Universität Duisburg-Essen

**Parameteridentifikation bei Grundwasserströmung
auf Basis analytisch formulierter Näherungslösungen**

Nils Jasper Meteling

Parameteridentifikation bei Grundwasserströmung auf Basis analytisch formulierter Näherungslösungen

Von
der Fakultät für Ingenieurwissenschaften
Abteilung Bauwissenschaften
der Universität Duisburg-Essen
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)
genehmigte Dissertation

Vorgelegt von: Nils Jasper Meteling, M.Sc.
aus Borken

Gutachter: Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Eugen Perau
Universität Duisburg-Essen

Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Sascha Henke
Helmut-Schmidt-Universität, Universität der Bundeswehr Hamburg

Tag der Einreichung: 07. Oktober 2019

Tag der mündlichen Prüfung: 26. Februar 2020

Nils Jasper Meteling, Essen, 2020

Impressum

Report Geotechnik · Universität Duisburg-Essen

ISSN: 2700-4848

Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Ingenieurwissenschaften
Abteilung Bauwissenschaften,
Fachgebiet Geotechnik
Univ. Prof. Dr.-Ing. Eugen Perau
45117 Essen

www.uni-due.de/geotechnik

Tel.: +49 (0)201-183-2858

E-Mail: eugen.perau@uni-due.de

DOI: 10.17185/dupublico/71697

URN: urn:nbn:de:hbz:464-20200429-091836-4

Alle Rechte liegen beim Autor.

Vorwort des Herausgebers der Schriftenreihe

Der Startpunkt zum Forschungsthema des vorliegenden Hefts war ein baupraktischer Fall, bei dem aus diversen Messungen zur Grundwasserströmung auf die Eigenschaften des Baugrunds und eine mögliche Wandundichtigkeit rückgeschlossen werden sollte. Sowohl aus den vorliegenden Veröffentlichungen zu diesem Fall als auch aus weiteren einschlägigen Unterlagen wurden auf Basis durchaus fachgerecht konzipierter Messprogramme von verschiedenen Seiten Schlüsse gezogen, die im Wesentlichen intuitiv begründet waren, zum Teil aber auch fragwürdig und in manchen Fällen nachweislich auch völlig abwegig waren. Daraus reifte die Erkenntnis, dass die Rückrechnung von Materialparametern aus Feldversuchen einer systematischeren Herangehensweise bedarf, die auch die Konzeption, Optimierung und eine möglichst objektive Auswertung von Messprogrammen einschließt.

Die vorliegende Dissertation von Herrn Meteling befasst sich mit der Parameteridentifikation bei praktisch relevanten Randwertproblemen, die entstehen wenn für eine Baugrube eine Restwasserhaltung betrieben wird. Aus Sicht der Mathematik handelt es sich hier um „inverse Problemstellungen“, die in der Arbeit formuliert und für exemplarische synthetische Messwerte gelöst werden. Dabei werden nicht nur Materialparameter wie die Durchlässigkeitsbeiwerte und eine daraus ableitbare Anisotropie hergeleitet sondern ebenfalls Geometrieparameter wie die Einbindetiefe oder systematische Fehler wie eine falsche Kalibrierung von Messgebern. Auch Streuungen von Messwerten oder der Ausfall von Messgebern sind Teil der Untersuchungen.

In dieser Arbeit wird dabei anstelle von numerisch gewonnenen Lösungen auf analytisch formulierte Näherungslösungen zurückgegriffen, anhand derer analytisch belegbar die Existenz einer Lösung und deren etwaige Eindeutigkeit ableitbar sind. Begleitet wird die Lösung durch punktuelle numerische Berechnungen, welche die Richtigkeit der analytischen Berechnungen belegen.

Mein Dank gilt Herrn Meteling, der sich in seiner Zeit als Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Geotechnik der Universität Duisburg-Essen mit viel Engagement sehr intensiv mit den geotechnischen, mathematisch analytischen und numerischen sowie programmiertechnischen Fragestellungen auseinander gesetzt hat und seine Ergebnisse in einer angenehm lesbaren Form präsentiert hat. Zugunsten einer größeren Verbreitung der Publikation gehen wir mit dem vorliegenden Heft 45 bei dieser Mitteilungsreihe zum ersten Mal direkt online.

Vorwort des Autors

Die vorliegende Dissertation entstand in den Jahren 2014 bis 2020 während meiner Tätigkeit als Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Geotechnik der Universität Duisburg-Essen. An dieser Stelle möchte ich die Gelegenheit nutzen, mich bei all denen zu bedanken, die in unterschiedlicher Weise zum Gelingen dieser Dissertation beigetragen haben.

An erster Stelle gilt mein besonderer Dank Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. E. Perau für das mir entgegengebrachte Vertrauen und die Möglichkeit unter seiner Leitung zu promovieren. Ich bedanke mich für den Anstoß zu dieser Dissertationsschrift, die stete Diskussionsbereitschaft, die vielfältige Unterstützung während der Entstehungsphase dieser Arbeit und die sehr gute Zusammenarbeit während meiner Zeit als Wissenschaftlicher Mitarbeiter. Insbesondere dann, wenn die mathematischen Schwierigkeiten zur Lösung der Forschungsfrage unüberwindbar erschienen und auf so manchen Irrweg führten, waren die mannigfaltigen Anregungen zur Lösungsfindung von Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. E. Perau außerordentlich wertvoll.

Bei Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. S. Henke bedanke ich mich für das Interesse an meiner Dissertationsschrift und die Übernahme des Korreferats. Über das große Engagement, die fachlichen Hinweise und die konstruktiven Anregungen habe ich mich sehr gefreut. Darüber hinaus möchte ich mich recht herzlich für die Mitwirkung in der Prüfungskommission bei Frau Prof. Dr.-Ing. habil. M. Schnellenbach-Held, Frau Prof. Dr.-Ing. habil. C. Birk und Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. R. Widmann bedanken.

Die Arbeit am Fachgebiet Geotechnik der Universität Duisburg-Essen hat mir aufgrund der sehr angenehmen und kollegialen Arbeitsatmosphäre sehr viel Freude bereitet. Ich bedanke mich bei dem gesamten Team für die angenehme Zeit und die vielfältig erfahrene Hilfestellung. Insbesondere für den fachgebietsinternen wissenschaftlichen Austausch und den Zuspruch in schwierigen Phasen der Promotion bin ich meinen Kollegen Gerald Abea-Núñez, Tobias Askamp, Antonia Dahmen, Claudia Johanning, Benedikt Kosmann, Jörg Nolzen, Achim Slotta, Matthias Uchtmann und Solveig Winkelmann sehr dankbar. Für die kritische Durchsicht und das Korrekturlesen der Doktorarbeit bin ich sowohl Herrn Achim Slotta als auch meinen Geschwistern Romina und Florian zu großem Dank verpflichtet.

Schließlich gilt mein ganz besonderer Dank neben vielen Freunden besonders meinen Eltern, meinen Geschwistern und meiner Freundin Amelie. Ohne das in mich gesetzte Vertrauen, die unermüdliche Unterstützung, die bisweilen notwendige Ablenkung und den positiven Zuspruch in schweren Phasen wäre die vorliegende Arbeit nicht möglich gewesen.

Zusammenfassung

Für Baugruben, die tief in das Grundwasser einbinden, muss die Wirkung des Grundwassers auf die Verbauwände und den Baugrund berücksichtigt werden. Wenn in erreichbarer Tiefe eine schwächer durchlässige Schicht ansteht, empfiehlt es sich, die Verbauwände bis in diese Schicht zu führen und eine Restwasserhaltung zu betreiben. Um die damit verbundene Strömungsaufgabe zu lösen, wird in der vorliegenden Arbeit zunächst ein parametrisiertes Randwertproblem formuliert. Die Lösung dieses Randwertproblems erfolgt anhand von analytisch formulierten Näherungslösungen. Diese ermöglichen es, an bestimmten Stellen im Strömungsgebiet geohydraulische Feldgrößen wie z.B. die Standrohrspiegelhöhe zu berechnen. Die Qualität der Lösung des Strömungsproblems hängt stark von der Güte der Modellparameter ab. Wenn die benötigten Modellparameter nicht direkt über eine Messung bestimmt werden können, sind diese über eine Parameteridentifikation zu ermitteln. Aus mathematischer Sicht stellt die Parameteridentifikation eine inverse Problemstellung dar. Inverse Problemstellungen sind oftmals schlecht gestellt und erfordern die Anwendung von speziellen mathematischen Verfahren.

In dieser Arbeit werden unterschiedliche Anwendungen der Parameteridentifikation am Beispiel einer Baugrube mit Restwasserhaltung analysiert und gelöst. Im Fokus der inversen Analyse stehen Fragestellungen wie z.B. die Rückrechnung der Durchlässigkeitsbeiwerte oder einer damit verbundenen Anisotropie unter Rückgriff auf synthetische in-situ-Messdaten. In diesem Zusammenhang werden zudem Lösungsstrategien zur Überprüfung der Bauausführung, der Kontrolle von in-situ-Messungen oder fehlerhaft arbeitenden Messgebern erarbeitet. Aus den Untersuchungen für das spezielle Randwertproblem wird eine Methodik zur Lösung von Identifikationsprobleme konzipiert, welche sich prinzipiell auf unterschiedliche geotechnische Fragestellungen zur Parameteridentifikation übertragen lässt. Das inverse Problem wird über die Formulierung einer Zielfunktion im Sinne der kleinsten Summe der Abstandsquadrate in eine nichtlineare Minimierungsaufgabe überführt. Die Lösung der Optimierungsaufgabe erfolgt unter Anwendung von unterschiedlichen Gradienten-basierten Optimierungsverfahren.

Sowohl die Planung, das Betreiben als auch die Auswertung eines Messprogramms gehen mit einem erhöhten Kostenaufwand einher. Demzufolge wird unter Anwendung von wissenschaftlichen Methoden eine Analyse und Optimierung des zu planenden Messprogramms für eine Baugrube mit Restwasserhaltung durchgeführt. Da das Messprogramm zumeist vor Baubeginn konzipiert werden muss, werden Handlungsempfehlungen hinsichtlich der räumlichen Verteilung, der notwendigen Anzahl und der optimalen Lage der Messpunkte für die geohydraulischen Feldgrößen erarbeitet. Die daraus gewonnenen Erkenntnisse und Lösungsstrategien können für ähnliche Strömungsprobleme als Hilfestellung dienen.

Abstract

For excavations below the groundwater table, the impact of the groundwater on the pit walls and the subsoil must be considered. If there is a less permeable soil stratum in reachable depth, it is recommended to embed the pit walls into this stratum and to operate a residual water drainage system. In order to solve the resulting flow problem, a parameterized boundary value problem must be framed. The solution of this boundary value problem is based on analytical approximate solutions. These allow to calculate geohydraulic field variables like the hydraulic head at specific points within the flow field. The quality of the solution of the flow problem highly correlates with the quality of the model parameters. If it is not possible to determine the required model parameters by measuring, they must be identified with a parameter identification. From a mathematical point of view this parameter identification is an inverse problem. Oftentimes inverse problems are ill-posed and require the implementation of special mathematical procedures.

In this thesis various implementations of the parameter identification are analyzed and solved by taking the example of an excavation with a residual water drainage system. The focus of the inverse analysis is on problems like e.g. the back-calculation of the coefficient of permeability or the associated anisotropy based on synthetic in-situ measurement data. In this context solution strategies have been worked out for checking the execution of construction work and controlling in-situ measurements or malfunctioning sensors. With the help of these analyses and in relation to the specific boundary value problem a methodology for the solution of identification problems is designed. In principle this methodology can be transferred to various geotechnical problems regarding parameter identification. The inverse problem is transferred to a nonlinear minimization problem in which the objective function is formulated as a sum of squared residuals. The solution of this optimization problem is implemented by the utilization of various gradient based optimization methods.

The planning, the management and the analysis of the measurement program involves increased costs. Therefore, an analysis and an optimization of the planned measurement program for an excavation with a residual water drainage system is executed with the help of scientific methods. Since the measuring program must be designed before the start of construction work, recommendations are given regarding the layout as well as the necessary amount and location of the measuring points for geohydraulic field variables. The gained knowledge and solution strategies may be beneficial for comparable flow problems.

Schlagwörter

Bodenmechanik, Geotechnik, Restwasserhaltung, Baugrube, Grundwasserströmung, numerische Verfahren, Finite-Elemente-Methode, Parameteridentifikation, inverse Problemstellung, Optimierung, Messprogramm, synthetische Messdaten, Gradienten-basierte Optimierungsverfahren, Sensitivität, sequentiell quadratische Programmierung, Matlab, Levenberg-Marquardt-Verfahren, analytische Näherungslösungen, Zielfunktion, Methode der kleinsten Fehlerquadrate

Keywords

Soil mechanics, geotechnical engineering, residual water drainage system, excavation pit, groundwater flow, numerical methods, finite element method, parameter estimation, inverse problem, optimization, measurement program, synthetic measurements, gradient based optimization methods, sensitivity, sequential quadratic programming, Matlab, Levenberg–Marquardt algorithm, analytical approximate solutions, objective function, method of least squares

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	13
1.1	Parameteridentifikation in Naturwissenschaft und Technik	16
1.2	Parameteridentifikation in der Geotechnik.....	18
1.3	Motivation und Zielsetzung.....	21
1.4	Methodik und Vorgehensweise	24
1.5	Aufbau der Arbeit.....	26
2	Mathematische Grundlagen der Parameteridentifikation	28
2.1	Beschreibung der direkten und inversen Problemstellung	28
2.2	Messdaten – Analyse und Unsicherheiten.....	32
2.3	Zielfunktion	35
2.4	Mathematische Optimierung	39
2.5	Optimalitätsbedingungen.....	43
2.6	Optimierungsverfahren.....	46
2.7	Umgang mit mehrdeutigen und instabilen Lösungen.....	50
2.8	Sensitivitätsanalyse	54
3	Grundwasserströmung bei Baugruben	57
3.1	Beschreibung der Problemstellung und erforderliche Nachweise	57
3.2	Strömungsmechanische Grundgleichungen	58
3.3	Formulierung der Strömungsaufgabe als Randwertproblem.....	60
3.4	Kenngrößen	62
3.5	Lösungsansätze.....	63
3.6	Analytisch formulierte Näherungslösungen	66
4	Parameteridentifikation bei Grundwasserströmung.....	77
4.1	Lösungsstrategie	77
4.2	Untersuchungskonzept	79
4.3	Exemplarisches Randwertproblem.....	83
4.4	Analyse der direkten Problemstellung	88
4.5	Sensitivitätsanalyse	89

4.6	Konzeption eines synthetischen Messprogramms.....	97
4.7	Erzeugung der synthetischen Messdaten.....	99
4.8	Zielfunktion und Programmcode zur Optimierung.....	106
5	Exemplarische Anwendungen.....	110
5.1	Lösungsansatz.....	113
5.2	Grad der Anisotropie.....	115
5.3	Grad der Anisotropie und Randpotenzial.....	130
5.4	Grad der Anisotropie und Einbindetiefe.....	137
5.5	Durchlässigkeitsbeiwerte.....	143
5.6	Detektion von Messfehlern.....	152
6	Zusammenfassung und Ausblick.....	160
7	Verzeichnisse.....	163
7.1	Formate.....	163
7.2	Mathematische Bezeichnungen.....	163
7.3	Rechenvorschriften.....	164
7.4	Physikalische Bezeichnungen.....	165
7.5	Indizes.....	166
7.6	Literaturverzeichnis.....	167
Anhang	180
A	Näherungsgleichungen.....	180
A1.	Potenziale in den Stützstellen.....	180
A2.	Potenzialverteilung entlang der Wand, Baugrubenmitte und Wandunterkante ..	181
A3.	Berechnung Wasserzufluss.....	182
B	Programmcode MATLAB.....	183
B1.	Unterprogramme.....	183
B2.	Sensitivitätsanalyse der direkten Problemstellung.....	193
B3.	Synthetische Messdaten.....	194
B4.	Parameteridentifikation.....	199

1 Einleitung

Aufgrund der fortschreitenden Entwicklung in der angewandten Mathematik und dem steigenden Angebot von anwendungsfreundlichen sowie effizienten Softwarepaketen nimmt in der Praxis der Einsatz von numerischen Verfahren – wie z.B. die Finite-Elemente-Methode (FEM) – zur Berechnung von komplexen geotechnischen Aufgabenstellungen, immer weiter zu (Heibaum und Herten, 2007). Um eine gute Übereinstimmung zwischen dem Modelloutput und der messtechnisch erfassten Systemantwort zu erreichen, werden oftmals komplexe Materialmodelle benötigt, welche zumeist eine Vielzahl von Modellparametern erfordern (Pitteloud und Meier, 2009).

Hierbei stellt die hinreichend genaue Ermittlung der Parameter für das mathematische Modell stets eine anspruchsvolle Aufgabe dar. Ein Problem, welches im Gegensatz zu Konstruktionen aus industriell hergestellten Baustoffen wie z.B. Beton oder Stahl besonders in der Geotechnik vorliegt, ist die große Bandbreite an Baugrundeigenschaften. Diese ergibt sich insbesondere bei verschiedenartigen Schichtungen mit unbekannter räumlicher Ausdehnung sowie infolge von Inhomogenität und Anisotropie (Perau und Potthoff, 2003). Pitteloud und Meier (2009) stellen fest, dass der Bedarf Modellparameter, Randbedingungen sowie initiale Zustände hinreichend genau zu bestimmen ansteigt, um die reale Problemstellung möglichst exakt und zuverlässig modellieren zu können.

Um die notwendigen Modellparameter für die Planung und Durchführung geotechnischer Aufgabenstellungen zu bestimmen, werden vorab Baugrunderkundungen durchgeführt. Die erforderlichen Modellparameter sind oft aus wirtschaftlichen oder technischen Gründen nicht direkt messbar und können in der Folge nur indirekt durch standardisierte Labor- oder Feldversuche bestimmt werden. Als Beispiel für einen Feldversuch kann eine statische Pfahlprobelastung genannt werden, bei der unter Verwendung von Verformungs- und Kraftmessungen Ansatzwerte für den Pfahlspitzenwiderstand und die Mantelreibung abgeleitet werden können. Anhand von analytischen Methoden können die benötigten Modellparameter dann unter Anwendung standardisierter Berechnungsverfahren zurückgerechnet werden.

Wenn Erfahrungen hinsichtlich der Planung, Durchführung und Auswertung von Feldversuchen in ausreichendem Maße vorliegen, können die gesuchten Modellparameter in zuverlässiger Weise abgeleitet werden. Falls Feldversuche aus Zeit- und/oder Kostengründen nicht möglich sind oder vermieden werden sollen, erfolgt die Bestimmung der Modellparameter für derartige Fragestellungen auf Basis von indirekten in-situ-Messungen. Aus mathematischer Sicht liegt in diesem Fall eine inverse Problemstellung vor, wobei die inverse Analyse von indirekten Messungen im Allgemeinen auch als Parameteridentifikation bezeichnet wird (Hofmann, 1999). Wenn ein mathematisches Modell für die Messgrößen vorliegt, können die Modellparameter z.B. über die Minimierung einer Zielfunktion bestimmt werden. Die Zielfunktion

stellt in diesem Zusammenhang ein Maß für die Übereinstimmung zwischen den Messwerten und dem simulierten Modelloutput dar (Meier, 2009).

Bei einer praktischen Fragestellung werden im Rahmen einer Parameteridentifikation beispielsweise Verformungen in-situ gemessen und mit einer Simulation unter Variation der Modellparameter iterativ verglichen. Im besten Fall wird nach dem Trial-and-Error-Prinzip ein Satz von Modellparametern bestimmt, welcher eine hinreichend genaue Übereinstimmung zwischen den gemessenen und den simulierten Verformungen aufweist.

Diese wenig systematische Vorgehensweise birgt jedoch die Gefahr, dass die optimale Lösung der Minimierungsaufgabe nicht gefunden oder *Phantomlösungen* derselben erzeugt werden (Sünkel, 2007). Als *Phantomlösungen* oder *Artefakte* werden Lösungen bezeichnet, die rein mathematischer Natur sind und nicht die Realität abbilden (Sünkel, 2007). Da nur wenige Fragestellungen in den Ingenieurwissenschaften eine inverse Analyse erfordern, ist aufgrund des überschaubaren Erfahrungsschatzes hinsichtlich der komplexen mathematischen Hintergründe, vielen Anwender/innen die Existenz von derartigen *Phantomlösungen* oftmals nicht bekannt.

Für einfache Laborversuche, wie dem Durchströmungsversuch nach DARCY, ist die Rückrechnung der Materialparameter i.d.R. relativ leicht möglich (vgl. z.B. Perau und Potthoff, 2003). Grundsätzlich lässt sich die Parameteridentifikation im Gegensatz zu den standardisierten indirekten Versuchen im Labor oder Feld auch auf komplexe Problemstellungen anwenden und ermöglicht zusätzlich die Bestimmung von Parametern, die mit etablierten Methoden gar nicht oder nur unter sehr hohem Aufwand bestimmt werden können. Dieser Umstand ist insbesondere bei komplexen Stoffgesetzen als vorteilhaft anzusehen.

Jedoch ist die Lösung einer inversen Problemstellung im Allgemeinen mit einer Vielzahl von Unsicherheiten behaftet, da es Fragestellungen gibt, bei denen die Rückrechnung der Parameter zu keiner oder sogar zu einer mehrdeutigen Lösung führen kann (vgl. z.B. Sünkel, 2007). Im Spannungsfeld zwischen Planung und Ausführung dient die Lösung von inversen Problemstellungen in der Geotechnik oftmals zur Beantwortung von Ad-hoc-Fragestellungen (Bucher, 1993). In diesem Zusammenhang wird die damit verbundene mathematische Problemstellung zumeist intuitiv formuliert und weniger grundlegend gelöst. Eine derartige intuitive Lösungsstrategie kann mitunter zu einer falschen Entscheidungsgrundlage führen und birgt die Gefahr von Fehlinterpretationen.

Mit Blick auf die Konzeption eines Messprogramms gilt es zu klären, in welcher räumlichen Dichte die Messstellen vorliegen müssen, also an welchen Punkten im Untersuchungsgebiet die Messstellen optimal zu applizieren sind und welche Genauigkeit zur Lösung der inversen Problemstellung erforderlich ist, um die Parameter eindeutig und stabil identifizieren zu können. Es

besteht grundsätzlich die Möglichkeit, ein Messprogramm unter Anwendung von wissenschaftliche Methoden auf systematische Art und Weise für eine durchzuführende Parameteridentifikation zu optimieren (vgl. z.B. Schanz und Meier, 2008).

Die Notwendigkeit zur Optimierung eines Messprogramms liegt nach Bucher (1993) darin begründet, dass bei vielen praktischen Problemstellungen die Wahl der Messpunkte mehr oder weniger *"gefühlsmäßig"* und nach Erfahrungswerten bei vergleichbaren Baumaßnahmen in der Planungsphase festgelegt werden. Wenn ein unzureichendes Messprogramm vorliegt, leisten die Messdaten im ungünstigsten Fall keinen Beitrag zur Lösung einer Problemstellung oder Veränderungen im System werden während der Bauausführung zu spät erkannt (Smoltczyk, 1999). Die Planung und Durchführung von geotechnischen Messungen geht in den meisten Fällen mit einem erhöhten Kostenaufwand einher, sodass es zweckmäßig ist, mit möglichst minimalem Aufwand die erforderlichen Informationen bereitzustellen (Henke, 2009; Boley und Adam, 2012).

Zudem wird durch die Optimierung eines Messprogramms verhindert, dass durch eine Vielzahl von unterschiedlichen Messungen ein *"Berg"* von Messdaten erzeugt wird, welcher von Smoltczyk (1999) als *"Datenfriedhof"* bezeichnet wird, auf dem ggfs. die entscheidenden Daten und Informationen verloren gehen. In diesem Fall steigt der Kostenaufwand sowohl für die Durchführung als auch den Betrieb des Messvorhabens an. Zudem werden die Datenauswertung und die damit verbundene Interpretation der Messergebnisse nachhaltig erschwert (Bucher, 1993).

In dieser Arbeit liegt der Fokus auf den zuvor beschriebenen Schwierigkeiten und Fragestellungen hinsichtlich der Parameteridentifikation und der damit verknüpften möglichen Optimierung eines Messprogramms. Die Untersuchungen erfolgen auf Grundlage eines speziellen Randwertproblems der Geotechnik – einer Baugrube im Grundwasser – unter Verwendung von synthetisch erzeugten Messdaten (vgl. z.B. Rieger, 2005).

1.1 Parameteridentifikation in Naturwissenschaft und Technik

Eine Vielzahl von Prozessen in der Natur und Technik lassen sich anhand von mathematischen Modellen umfassend simulieren (Hofmann, 1999). Durch einen stetigen sowie rasanten Fortschritt in der Mathematik und der progressiven Entwicklung leistungsfähiger Softwarepakete, wird heutzutage eine Vielzahl von ingenieurtechnischen Fragestellungen auf Basis von mathematischen Modellen bearbeitet (Hofmann, 1999). Dadurch sind u.a. Vorhersagen in Bezug auf die Verformung von Bauteilen oder das Langzeitverhalten eines Bauwerks möglich (Mahnken, 1998). Darüber hinaus können Versagensmechanismen im Voraus simuliert, neuralgische Punkte einer Konstruktion lokalisiert sowie die gesamte Konstruktion oder Einzelteile auf Basis dessen optimiert werden (Mahnken, 1998; Braun, 2015).

Die mathematische Beschreibung eines realen Prozesses erfolgt durch ein System von Gleichungen (Hofmann, 1999). In diesem Zusammenhang müssen häufig Randwertprobleme unter Verwendung eines Modellgebiets, dem Ansatz von Anfangs- und Randbedingungen auf dem Modellrand, einer Differentialgleichung und einer bestimmten Anzahl von Modellparametern gelöst werden. Unter der Voraussetzung, dass alle Materialparameter bekannt sind, ist es mit dem sogenannten *direkten Problem* möglich, das reale Systemverhalten mit einer Simulation näherungsweise abzubilden. Wenn das mathematische Modell den Kausalzusammenhang zwischen Ursache und Wirkung vollständig beschreibt, führt eine eindeutige Ursache stets zu einer eindeutigen Wirkung (Hofmann, 1999). Die Lösung der direkten Problemstellung kann im Regelfall als stabil angesehen werden, sodass kleinere Änderungen in den Modellparametern auch nur kleine Änderungen in dem Modelloutput erzeugen (Hofmann, 1999).

Wie zuvor erwähnt, liegt ein grundsätzliches Problem der Modellierung in der Bestimmung der Modellparameter, da nicht alle Modellparameter a priori bekannt sind oder sich durch Voruntersuchungen bestimmen lassen (Al-Zoukra, 2011). Zudem geht die Verbesserung eines Modells zumeist mit einer steigenden Anzahl an Modellparametern einher, welche oft nicht genau oder überhaupt nicht eindeutig bestimmt werden können. Zur Bestimmung der Modellparameter bietet sich eine inverse Analyse im Sinne einer Parameteridentifikation an.

Bei der Parameteridentifikation wird der Versuch unternommen, von *indirekten* Beobachtungen eines Prozesses oder eines technischen Systems auf physikalische Eigenschaften zu schließen, welche *nicht direkt* messbar sind (Watzenig und Steiner, 2007). Das dafür zu lösende inverse Problem kann im mathematischen Sinne als Umkehrproblem der Ursache-Wirkungs-Abbildung verstanden werden, da hierbei die Ursache anhand von beobachteten Wirkungen zu bestimmen ist (Häfner, 1992; Hofmann, 1999). Die Bezeichnung *inverses Problem* deutet dabei an, dass diesem das direkte Problem immanent ist, da die gesuchten Parameter über das mathematische Modell mit den Messungen gekoppelt sind.

Die Identifikationsprobleme sind von Steueraufgaben zu unterscheiden, da bei Steueraufgaben die gesuchten Parameter eine gewünschte Wirkung erzielen sollen (Hofmann, 1999). Zu dieser Aufgabenklasse gehören Problemstellungen in der Logistik oder Produktion, da das Interesse in diesem Bereich darin besteht, Teilprozesse oder bestimmte Konstruktionselemente zu optimieren.

Die Lösung inverser Problemstellungen stellt eine anspruchsvolle Aufgabe dar, da sich die dazu benötigte Mathematik und Numerik als sehr komplex erweist (Sünkel, 2007). Eine unangenehme Eigenschaft von inversen Problemen ist, dass die Lösungen in einigen Fällen instabil, mehrdeutig und sehr rauschempfindlich sind (Watzenig und Steiner, 2007; Sünkel, 2007).

Immer mehr anwendungsorientierte Forschungszweige beschäftigen sich mit der Lösung von inversen Problemen, sodass es nach Watzenig und Steiner (2007) zahlreiche Anwendungsbereiche gibt, wie beispielsweise in der Klimaforschung, in der Medizin (z.B. Computertomografie), in der zerstörungsfreien Werkstoffprüfung, in der Geodäsie oder die Detektion von ferromagnetischen Objekten im Untergrund (z.B. Fliegerbomben) durch Messungen (Brandstätter, 2007). Einen Überblick zu weiteren Anwendungen ist z.B. in Argoul (2012) zu finden.

Auch in unterschiedlichen ingenieurwissenschaftlichen Forschungsfeldern lassen sich vielfältige Anwendungsmöglichkeiten finden, wie beispielsweise:

- die Klassifizierung von Brettschichtholzbalcken mit Hilfe der Parameteridentifikation (Siemers, 1998)
- der Beitrag der Parameteridentifikation zur Fahrdynamikanalyse (Schroeder, 2004)
- die Parameteridentifikation für komplexe Materialmodelle auf der Basis realer und virtueller Testdaten (Rieger, 2005)
- die Bestimmung von Materialeigenschaften zementgebundener Werkstoffe mittels inverser Analyse (Villmann et al., 2006)
- die Identifikation von Verkehrslasten durch inverse Analyse (Lubasch, 2009; Lubasch et al., 2011)
- die Bestimmung des elektrischen Betonwiderstands bei vorhandener Bewehrung (Reichling et al., 2014)
- die Modellbildung, Parameteridentifikation und Modellreduktion für elektrische Batteriespeichermodelle (Witzenhausen, 2017)
- die zerstörungsfreie Bewertung der strukturellen Substanz der Asphaltbefestigung mit Geophonen (Wang et al., 2017)

1.2 Parameteridentifikation in der Geotechnik

In diesem Kapitel wird ein kurzer Überblick zu konkreten Anwendungsfeldern und Fragestellungen in der Geotechnik hinsichtlich der Parameteridentifikation gegeben. Aufgrund der Vielzahl von nationalen sowie internationalen wissenschaftlichen Publikationen zur Parameteridentifikation in der Geotechnik wird der Anspruch auf Vollständigkeit für die folgenden Ausführungen nicht erhoben. In Meier (2009) sowie Pitteloud und Meier (2009) liegt eine ausführliche Übersicht zu unterschiedlichen Anwendungen der Parameteridentifikation in der Geotechnik vor.

Die Bestimmung der Modellparameter erfolgt in der Geotechnik klassischerweise auf Basis von Erfahrungswerten oder mittels Labor- und/oder Feldversuchen. Da die Versuche nur stichprobenhaft und zum Teil an gestörten Proben durchgeführt werden, können die Ergebnisse für die Bodenparameter bestenfalls als repräsentativ für die örtlichen Baugrundverhältnisse gelten (vgl. z.B. Perau und Potthoff, 2003). Für schwierige Baugrundverhältnisse werden dann Parametervariationen unter Verwendung von oberen und unteren Schranken für die gesuchten Parameter durchgeführt (Wolff, 2010).

Eine Alternative dazu bietet die Parameteridentifikation mittels einer inversen Analyse auf Basis von indirekten Messdaten aus Labor - oder Feldversuchen. In diesem Zusammenhang erscheint es sinnvoll, zusätzlich Erfahrungswerte z.B. über die Bodenkennwerte als a priori Wissen in die Parameteridentifikation mit einfließen zu lassen. Als triviales Beispiel für eine Parameteridentifikation kann die Bestimmung eines Durchlässigkeitsbeiwertes k für eine Bodenprobe im Labor anhand eines Durchströmungsversuchs angeführt werden (vgl. Abb. 1.1).

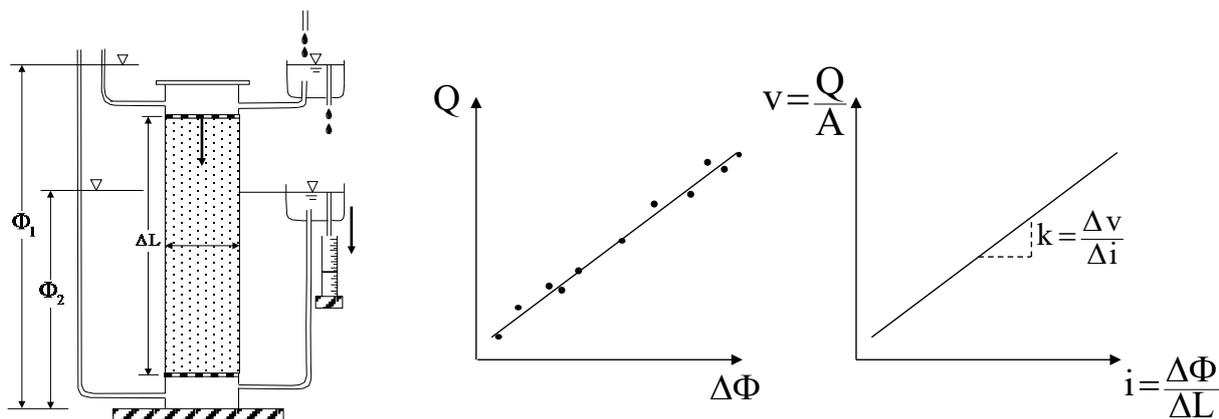


Abbildung 1.1: Durchströmungsversuch an einer exemplarischen Bodenprobe zur Bestimmung eines Durchlässigkeitsbeiwertes k nach Darcy

Eine direkte Messung des Durchlässigkeitsbeiwertes k ist nicht möglich. Über den gemessenen Wasserdurchfluss Q und unter Ausnutzung des linearen Fließgesetzes nach Darcy kann der Durchlässigkeitsbeiwert über eine lineare Ausgleichsgerade bestimmt werden (vgl. Abb. 1.1).

Die Steigung der Ausgleichsgerade ist äquivalent zu dem gesuchten Durchlässigkeitsbeiwert (Perau und Potthoff, 2003). Die Auswertung dieses standardisierten Laborversuchs gelingt zumeist intuitiv, da sich dieses Identifikationsproblem mathematisch leicht lösen lässt. Auf eine Parameteridentifikation für baupraktische Fragestellungen, die in aller Regel Randwertprobleme mit komplexer Geometrie und Nichtlinearitäten bei Material- und Systemverhalten enthalten, lässt sich diese einfache Auswertung nicht übertragen. In diesem Zusammenhang gelingt die Lösung zumeist unter Rückgriff auf wissenschaftliche Methoden der mathematischen Optimierung.

Zur Lösung der inversen Problemstellung wird zunächst eine Zielfunktion formuliert, welche die Übereinstimmung von gemessener Systemantwort und simulierter Modellantwort quantifiziert (vgl. z.B. Meier, 2009). Dadurch kann das Identifikationsproblem auf eine mathematische Optimierungsaufgabe zurückgeführt werden, indem ein Satz von Parametern zu ermitteln ist, welcher die Zielfunktion minimiert. Dies bedeutet, dass die Modellantwort für die optimalen Schätzwerte der Parameter bestmöglich zu der gemessenen Systemantwort passt.

Um die Zielfunktion zu minimieren, kann auf bewährte Methoden der mathematischen Optimierung zurückgegriffen werden (Grabe, 2006; Ulbrich, 2006; Pieper, 2017). Bei der Formulierung der inversen Problemstellung stellt sich die grundlegende Frage, welche Art von Zielfunktion für die vorliegende Fragestellung anzusetzen ist. Hierzu liegen unterschiedliche Ansätze in Bezug auf die Parameteridentifikation vor. Oftmals hat sich ein Ansatz im Sinne der kleinsten Summe der Abstandsquadrate zur Bestimmung der Modellparameter bewährt (Fensterle, 1993; Finno und Calvello, 2005; Calvello et al., 2017; Müthing et al., 2018).

In der Geotechnik liegen diverse Anwendungen zur Parameteridentifikation vor, wie beispielsweise:

- die Rückrechnung der Bodensteifigkeit aus dem Schwingungsverhalten einer fahrenden Vibrationswalze (Grabe, 1993)
- die Bestimmung hydrogeologischer Parameter eines Zweiphasensystems (Fensterle, 1993, 1998, 2006; Perau und Potthoff, 2002)
- die Bestimmung von Bodenparametern im Tunnelbau (Ledesma und Gens, 1997; Zhao et al., 2015)
- die Bestimmung der Erddruckverteilung aus Dehnungsmessungen (Hauser, 2005; Hauser et al., 2006)
- die Bestimmung der horizontalen Bettung von Pfählen aus dem Schwingungsverhalten (Grabe et al., 2006)
- die Identifikation von Bodenparametern bei tiefen Baugruben (Rechea et al., 2008; Tang und Kung, 2009)

- die Anwendung von Optimierungsverfahren bei der Auswertung von Labor- und Feldversuchen (Zimmerer et al., 2009)
- die Bestimmung der Bodenparameter für eine verbesserte Verformungsprognose bei Großbohrpfählen (Wolff, 2010)
- die Bestimmung von Bodenparametern für Dammbauwerke mittels genetischer Algorithmen (Vahdati et al., 2014)
- die Bestimmung der Bodenparameter für weiche Böden (Pitteloud und Meier, 2009; Müthing et al., 2018)

Die Lösungsansätze zur Parameteridentifikation sowie die verwendeten mathematischen Verfahren zur Optimierung unterscheiden sich dabei erheblich, da die Lösungszugänge sehr stark von der jeweiligen Problemstellung abhängen. Jedoch lassen sich Teile der in der Literatur bereits verwendeten Lösungsstrategien auf die vorliegende Problemstellung übertragen und zu dessen Lösung problemspezifisch erweitern.

Da es in dieser Arbeit um ein spezielles Strömungsproblem der Geotechnik und die damit einhergehende Parameteridentifikation geht, wird an dieser Stelle zusätzlich auf wissenschaftliche Publikationen verwiesen, die sich mit Lösungsstrategien für komplexe Strömungsprobleme befassen. In diesem Zusammenhang sind beispielsweise die Beiträge von Yeh (1986), McLaughlin und Townley (1996) oder Hill und Tiedeman (2007) zu nennen. Anwendungen in Praxis und Forschung zur Bestimmung von geohydraulischen Parametern sind z.B. in den Arbeiten von Sun und Yeh (1990), Sun und Yeh (2007), Kuhlmann (1992), Odenwald (1994), Montenegro (1995), Bailey und Fitzpatrick (1997), Poeter und Hill (1997), Wolf (2006) oder Hong et al. (2017) zu finden.

1.3 Motivation und Zielsetzung

Im Rahmen dieser Arbeit werden für ein spezielles Randwertproblem der Geotechnik unterschiedliche Fragestellungen zur Parameteridentifikation behandelt. Die für die eigenen Untersuchungen zugrunde gelegte geotechnische Problemstellung – eine Baugrube mit Restwasserhaltung – ist vereinfachend in Abb. 1.2 dargestellt.

Die Restwasserhaltung kommt häufig zur Anwendung, wenn eine stark durchlässige quartäre Schichtenfolge von einer verhältnismäßig geringer durchlässigen tertiären Schichtenfolge unterlagert wird (vgl. Abb. 1.2 links). Dabei ist es sinnvoll die Verbauwände in die tertiäre Schicht einbinden zu lassen, sodass infolge der Umströmung der Verbauwände ein Strömungsfeld entsteht, das für unterschiedliche Berechnungen und Standsicherheitsnachweise die Grundlage bildet. Ausführungsbeispiele für ähnliche Baugruben wie in Abb. 1.2 sind u.a. bei Mayer et al. (2004), Pähler und Danieli (2010), Placzek und König (2010), Voigt (2014), Katzenbach et al. (2011) oder Sennewald (2011) zu finden.

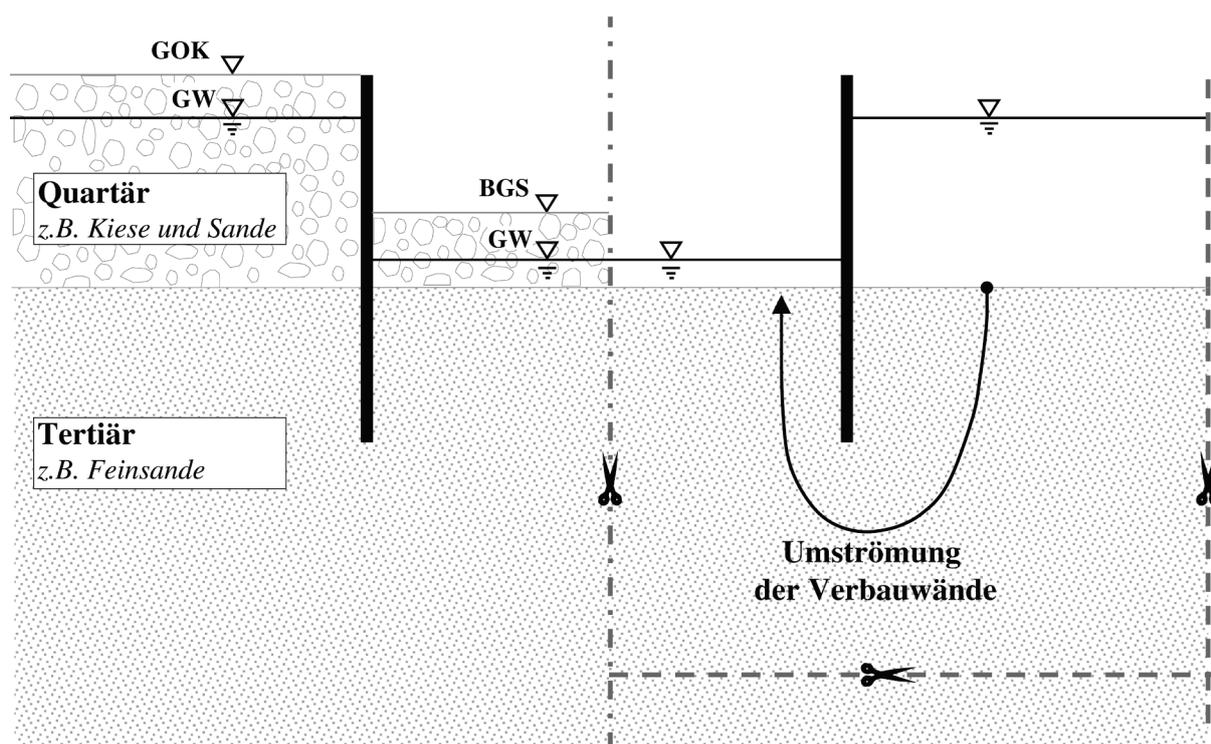


Abbildung 1.2: Prinzip einer Baugrube mit Restwasserhaltung (linke Hälfte) und das dafür zugrunde gelegte geohydraulische Modell (rechte Hälfte)

Für das geohydraulische Modell wird angenommen, dass die schwächer durchlässige tertiäre Schicht den maßgeblichen Widerstand gegen die Umströmung der Verbauwände darstellt (vgl. Abb. 1.2 rechts). Um das mit der Umströmung der Verbauwände verknüpfte Strömungsproblem zu lösen, wird ein Randwertproblem für das geohydraulische Modell formuliert.

Das Randwertproblem lässt sich gewöhnlich unter Zuhilfenahme von numerischen Verfahren (z.B. FEM) näherungsweise lösen (Meteling und Perau, 2019). Hierbei müssen neben der Vorgabe eines Modellgebiets, einer Differentialgleichung und Randbedingungen auf den Modellrändern zusätzlich noch die Materialparameter zur Lösung des Randwertproblems vorgegeben werden, wobei die Lösung stark von der Qualität dieser Modellparameter abhängt (Odenwald et al., 2017). Die entscheidenden Materialparameter für das geohydraulische Modell sind sowohl die Durchlässigkeitsbeiwerte als auch eine damit verbundene Anisotropie. Im Gegensatz zu anderen Problemstellungen in der Geotechnik hängt das zu lösende Randwertproblem der Umströmung der Verbauwände von vergleichsweise wenigen Modellparametern ab.

Insbesondere eine Anisotropie der Durchlässigkeit führt bei einer Konstruktion – wie in Abb. 1.2 – zu einer deutlichen Erhöhung der geohydraulisch erforderlichen Einbindelänge der Verbauwände (Schmitz, 1989; Aulbach, 2016; Perau und Meteling, 2017; Hettler et al., 2018). Es ist somit evident, dass eine hinreichend genaue Ermittlung der Durchlässigkeitsbeiwerte und der Anisotropie für eine ordnungsgemäße, sichere und wirtschaftliche Planung der Konstruktion zwingend erforderlich ist.

Da die direkte Messung der Durchlässigkeitsbeiwerte sowie des Grades der Anisotropie der durchströmten tertiären Bodenschicht nicht möglich ist, können diese Parameter nur indirekt über eine Parameteridentifikation abgeschätzt werden. Die Ermittlung der Durchlässigkeitsbeiwerte erfolgt standardmäßig über Labor- und Feldversuche oder anhand von Erfahrungswerten. Dabei ist zu beachten, dass die im Labor bestimmten Durchlässigkeitsbeiwerte mehr oder minder stark von den tatsächlichen Durchlässigkeitsbeiwerten abweichen können (EANG, 2014).

Die Aufgabe besteht allgemein darin, aus in-situ-Messwerten wie dem Porenwasserdruck, der Standrohrspiegelhöhe oder dem Wasserzufluss auf Materialparameter wie die Durchlässigkeitsbeiwerte oder eine Anisotropie derselben zu schließen. Darüber hinaus wird anhand der in-situ-Messdaten der Versuch unternommen, geometrische Größen wie z.B. die Wandeinbindung zu identifizieren oder Messgrößen im Feld stichprobenhaft zu überprüfen. Zudem kann mit der verwendeten Untersuchungsmethodik überprüft werden, ob die in der Planungsphase getroffenen Annahmen hinsichtlich der Modellparameter für die Berechnung zutreffend waren und der Modelloutput der gemessenen Systemantwort entspricht (Vollenweider, 1988; Smolczyk, 1999; Nagel et al., 2012; Boley und Adam, 2012).

Für die in-situ-Messgrößen gilt es weiter zu klären, in welcher räumlichen Verteilung die Messstellen vorliegen müssen, also an welchen Punkten im Strömungsgebiet die Messgeber optimal zu applizieren sind (Bucher, 1993). Konkret bezogen auf die Problemstellung in Abb. 1.2 stellt sich beispielsweise die Frage, ob die Messpunkte vorzugsweise in der Mitte der Baugrube, eher im Bereich der Verbauwände oder außerhalb der Baugrube anzuordnen sind.

Durch eine systematische Planung des Messprogramms unter Anwendung von wissenschaftlichen Methoden soll vermieden werden, dass zu wenig gemessen wird oder nach der Bauausführung Messwerte fehlen, die ohne großen Aufwand hätten gemessen werden können und die folglich die Auswertung von Messdaten unmöglich machen oder maßgeblich erschweren. In diesem Kontext wird zudem auf weitere Fragestellungen, wie den Einfluss und die Identifikation von defekten Messgebern eingegangen.

Aus geotechnischer und mathematischer Sicht lassen sich die folgenden Leitfragen formulieren:

a) Geotechnische Fragestellungen:

- Welche Parameter lassen sich im Labor oder im Feld nur **indirekt** bestimmen?
- In welcher **räumlichen Verteilung** müssen die Messwerte vorliegen und wie **häufig** müssen die Messgrößen über die **Zeit** gemessen werden?
- Welche **Genauigkeit** müssen die Messdaten aufweisen?
- Wie lassen sich **fehlerhafte Messgeber** (Beschädigungen, falsche Lage beim Einbau, Veränderung des Baugrunds durch Einbau) identifizieren?
- Wie lässt sich das **Messprogramm optimieren** und eine hinreichende **Redundanz** bezüglich der Parameteridentifikation gewährleisten?
- Kann **die Bauausführung** (Fehlstelle in der Wand, Einbindung der Verbauwände) überprüft werden und wenn ja, wie?

b) Mathematische Fragestellungen:

- Welche Art von **Zielfunktion** eignet sich für die vorliegende Problemstellung?
- Existieren für die gewählte Zielfunktion **zulässige** bzw. **optimale Lösungen**?
- Welche **Bedingungen** müssen erfüllt sein, sodass die Lösung als **optimal** charakterisiert werden kann?
- Wie hängt die Lösung von den **verwendeten Daten** und **den Modellparametern** ab und lässt sich diese **eindeutig** bestimmen?
- Lässt sich das Optimierungsproblem mit **bewährten Optimierungsverfahren** lösen?
- Welche **numerischen Eigenschaften** (z.B. Konvergenzrate, Stabilität, Empfindlichkeit gegenüber Wahl der Startwerte, ...) besitzen die Optimierungsverfahren?

Nachfolgend wird auf einen Teil der zuvor genannten Leitfragen für eine Baugrube mit Restwasserhaltung – wie in Abb. 1.2 – eingegangen. Ein weiteres Ziel besteht darin, eine Untersuchungsmethodik zur Lösung von Identifikationsproblemen zu entwickeln, welche sich grundsätzlich auf andere geotechnische Problemstellungen übertragen lässt. Auch wenn die Lösungsansätze zur Parameteridentifikation äußerst vielfältig und variantenreich sind, kann die vorgestellte Methodik dennoch als übergeordnete Lösungsstrategie dienen.

1.4 Methodik und Vorgehensweise

In Abb. 1.3 ist die zugrunde gelegte methodische Vorgehensweise zur Lösung der unterschiedlichen Identifikationsprobleme vereinfachend dargestellt. Zur systematischen Untersuchung einer Baugrube sind Experimente im herkömmlichen Sinne nur schwer möglich. Um dennoch verschiedene Problemstellungen untersuchen zu können, besteht die Möglichkeit, auf reale oder synthetisch erzeugte Messdaten zurückzugreifen. Um die Qualität der Messdaten in Bezug auf die Messabweichungen steuern zu können und den Einfluss von unerkannten Fehlerquellen in den Messwerten infolge von Kalibrierungsfehlern oder falscher Einbaulage der Messgeber auf die inverse Analyse zu verhindern, werden im Rahmen dieser Arbeit synthetische Messdaten verwendet (Perau und Potthoff, 2002; Dahmen und Reusken, 2006; Schanz und Meier, 2008).

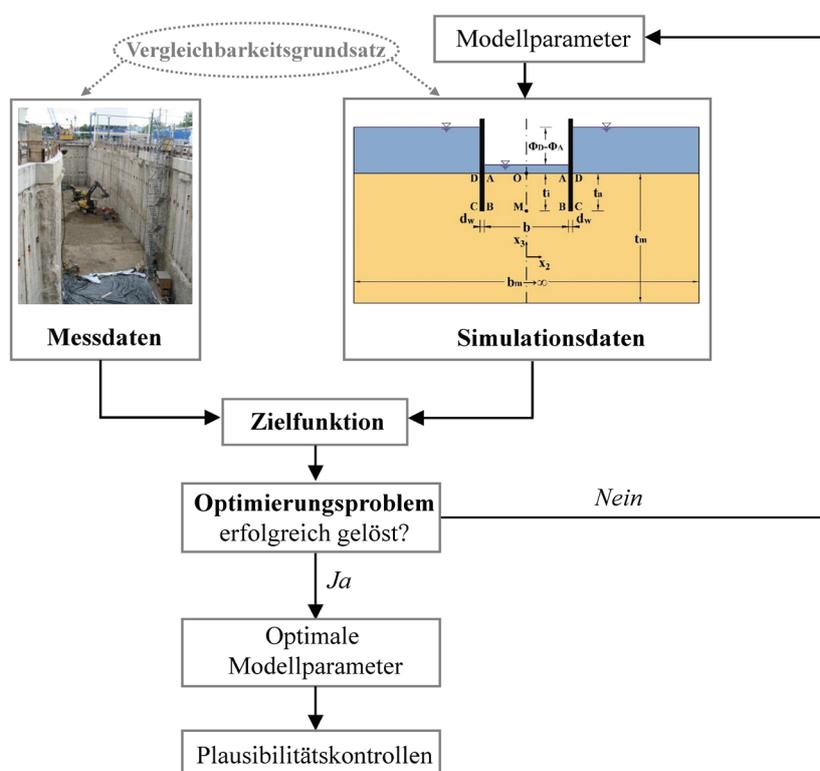


Abbildung 1.3: Vereinfachte Darstellung der Parameteridentifikation für eine Baugrube mit Restwasserhaltung vgl. Meier (2009), Foto nach Perau (2013)

Um ein objektives Maß für die Übereinstimmung zwischen den Messdaten und den Simulationsdaten bereitzustellen, erfolgt die Bestimmung der Parameter mittels der Minimierung einer Zielfunktion im Sinne der kleinsten Summe der Abstandsquadrate unter Verwendung der mathematischen Optimierung (Schanz und Meier, 2008; Müthing et al., 2018). Bei der Formulierung der Zielfunktion ist der *Vergleichbarkeitsgrundsatz* einzuhalten, sodass sichergestellt ist, dass sich die messtechnisch erfasste Systemantwort und die simulationsbasierte Lösung auf die gleiche physikalische Problemstellung beziehen (Meier, 2009).

Zur Lösung der Optimierungsaufgabe kommen unterschiedliche Gradienten-basierte Optimierungsverfahren – wie das Levenberg-Marquardt-Verfahren und das SQP-Verfahren – zum Einsatz (Finsterle, 2006; Kinzler, 2011). Hinsichtlich der Wahl der Zielfunktion und der Optimierungsverfahren zur Bestimmung der optimalen Modellparameter wird auf etablierte Verfahren aus der angewandten Mathematik zurückgegriffen. Die optimalen Modellparameter stellen aus mathematischer Sicht die Lösung für das zuvor definierte Optimierungsproblem dar und sind abschließend mit Blick auf die physikalische Problemstellung auf *Plausibilität* zu überprüfen.

Die Lösung der direkten Problemstellung für eine Baugrube wie in Abb. 1.2 erfolgt heutzutage – bis auf wenige Spezialfälle – mit der FE-Methode (Mayer et al., 2004; Katzenbach et al., 2011). Zur Lösung einer inversen Problemstellung muss die direkte Problemstellung für unterschiedliche Parameterkonstellationen mehrfach gelöst werden (Hofmann, 1999). Insbesondere bei numerischen Berechnungen mit der FEM steigt der Berechnungsaufwand bei komplexen Geometrien oder schwierigen Baugrundverhältnissen stark an.

Bei einer FEM Lösung der direkten Problemstellung sind zudem Einflüsse wie z.B. die Größe des Modellgebiets oder die Güte des FE-Netzes zu überprüfen (Perau und Meteling, 2015). Wenn für das Optimierungsverfahren Ableitungsinformationen in Bezug auf die Modellparameter erforderlich sind, ist es u.a. möglich auf numerische Differenzenverfahren zurückzugreifen. Dadurch erhöht sich zusätzlich der Rechenaufwand und die Anwendung der Differenzenverfahren kann zu weiteren Unsicherheiten – wie z.B. die Bestimmung der erforderlichen Schrittweite für den Differentialquotienten – führen (Schwarz, 2001; Harzheim, 2014).

Um die zuvor skizzierten Schwierigkeiten zu überwinden, wird in dieser Arbeit hinsichtlich der Berechnung der direkten Problemstellung ein alternativer Weg eingeschlagen. In einer gemeinsamen Forschungsarbeit konnte in Perau und Meteling (2015, 2016, 2017) die numerische Lösung der direkten Problemstellung für spezielle Modellannahmen ersetzt werden, indem anhand einer numerischen Parameterstudie an bestimmten Stellen im Strömungsgebiet eine geschlossene analytisch formulierte Näherungslösung zur Bestimmung der Standrohrspiegelhöhe bzw. des Porenwasserdrucks und zur Berechnung des Wasserzuflusses entwickelt wurde.

Diese analytisch formulierten Näherungsfunktionen wurden so konzipiert, dass sie die analytisch lösbaren Grenzfälle für die unendlich breite und die unendlich schmale Baugrube enthalten und in Bezug auf die Modellparameter analytisch differenzierbar sind. Darüber hinaus lassen sie sich nach den Koordinaten analytisch differenzieren und geschlossen integrieren. Durch die systematische Anwendung von mathematischen Verfahren wie z.B. der Dimensionsanalyse konnten analytisch formulierte Näherungslösungen entwickelt werden, welche zwar das zu lösende Randwertproblem mathematisch nicht exakt lösen, jedoch die Abhängigkeiten in Bezug auf die Modellparameter physikalisch richtig wiedergeben. Die Näherungslösungen nach Perau und Meteling (2017) bilden für die nachfolgenden Untersuchungen die Grundlage.

1.5 Aufbau der Arbeit

Die vorliegende Dissertation umfasst insgesamt *sieben* Kapitel, wobei der Inhalt der jeweiligen Einzelkapitel nachfolgend kurz vorgestellt wird.

Das *erste* Kapitel dient zur Einführung in das Themenfeld der Parameteridentifikation. In diesem Kontext werden konkrete Anwendungsbereiche sowohl in der Naturwissenschaft und Technik als auch in der Geotechnik präsentiert. Abschließend wird auf die Zielsetzung des Forschungsvorhabens eingegangen und die Methodik sowie der Aufbau der Arbeit erläutert.

Das *zweite* Kapitel gibt einen Einblick in die mathematischen Grundlagen der Parameteridentifikation. Die im Rahmen der Zielsetzung formulierten mathematischen Fragestellungen z.B. hinsichtlich der Bedingungen für eine optimale Lösung oder etablierter Optimierungsverfahren werden mit Blick auf die eigenen Untersuchungen beantwortet, sodass die gewonnenen Erkenntnisse auf unterschiedliche Identifikationsprobleme für eine Baugrube im Grundwasser angewendet werden können (vgl. Abb. 1.2). Dieses Kapitel enthält die wesentlichen Grundlagen, auf die in den folgenden Kapiteln zurückgegriffen wird.

Im *dritten* Kapitel werden die physikalischen Grundlagen zur Beschreibung der Grundwasserströmung bei Baugruben und die damit verbundenen notwendigen Nachweise erläutert. Hierbei stehen die Erläuterung der strömungsmechanischen Grundgleichungen und die praxisüblichen Lösungsansätze für das spezielle Randwertproblem im Fokus. Vor dem Hintergrund der zu lösenden Identifikationsprobleme werden abschließend noch die Näherungslösungen nach Perau und Meteling (2017) vorgestellt, da diese in den folgenden Kapiteln als Grundlage für die direkte Problemstellung dienen.

Anhand eines exemplarischen Randwertproblems – einer Baugrube mit Restwasserhaltung – wird im *vierten* Kapitel zunächst eine Lösungsstrategie für unterschiedliche Identifikationsprobleme entwickelt, mit dem Ziel dieses grundsätzlich auf ähnliche Problemstellungen übertragen zu können. Vor diesem Hintergrund sowie in Bezug auf die mathematischen und geotechnischen Fragestellungen wird das spezielle Strömungsproblem zunächst hinsichtlich der Modellparameter analysiert und für die exemplarischen Anwendungen im *fünften* Kapitel aufbereitet. Im Fokus stehen hierbei zunächst die Analyse der direkten Problemstellung hinsichtlich der Modellparameter mittels einer Sensitivitätsanalyse sowie die Konzeption eines synthetischen Messprogramms. Am Ende dieses Kapitels wird näher auf die Erzeugung der synthetischen Messdaten eingegangen und die MATLAB-Routine zur mathematischen Optimierung vorgestellt.

Im *fünften* Kapitel kann das zuvor erarbeitete Konzept zur Parameteridentifikation auf verschiedene exemplarische Anwendungen auf eine Baugrube mit Restwasserhaltung angewendet und erprobt werden. Die exemplarischen Anwendungen zur Parameteridentifikation befassen sich

beispielsweise mit der Rückrechnung der Durchlässigkeitsbeiwerte oder der Einbindetiefe auf Basis der künstlich erzeugten in-situ-Messdaten aus dem *vierten* Kapitel. Zudem erfolgen weitere Untersuchungen in Bezug auf Ungenauigkeiten und Unsicherheiten des synthetischen Messprogramms wie z.B. die Identifikation von falsch arbeitenden Messgebern.

Das *sechste* Kapitel fasst die wesentlichen Erkenntnisse sowie Ergebnisse der durchgeführten Untersuchungen zusammen und gibt einen Ausblick auf weiteren Forschungsbedarf.

Im *siebten* Kapitel werden die in der Arbeit verwendeten Formate, Bezeichnungen, Indizes, Rechenvorschriften sowie das Literaturverzeichnis aufgeführt.

Im *Anhang* der vorliegenden Arbeit sind sowohl die analytisch formulierten Näherungsgleichungen nach Perau und Meteling (2017) als auch die wesentlichen Bausteine der MATLAB-Routine zur Lösung der Identifikationsprobleme mit den jeweiligen Unterprogrammen aufgeführt.

2 Mathematische Grundlagen der Parameteridentifikation

In diesem Kapitel wird auf inverse Problemstellungen im Allgemeinen und auf die Grundlagen der Parameteridentifikation im Speziellen eingegangen. Es werden hierbei lediglich die wesentlichen Grundlagen für die zu lösende Problemstellung behandelt, sodass keine vollumfängliche Beschreibung und Diskussion der theoretischen Grundlagen inverser Problemstellungen erfolgen kann. Für das vertiefte Studium wird auf die umfangreiche Fachliteratur wie z.B. Jackson (1978), Louis (1989), Groetsch (1993), Hofmann (1999), Tarantola (2005), Aster et al. (2012), Richter (2015) oder Braun (2015) verwiesen.

2.1 Beschreibung der direkten und inversen Problemstellung

Die direkte Problemstellung kann unter Verwendung des Operators der direkten Problemstellung \mathcal{F} und Verwendung der Eingangsgrößen κ mathematisch allgemein wie folgt definiert werden:

$$y = \mathcal{F} \kappa \quad (2.1)$$

Hierbei beschreibt die Gl. (2.1) den Ursache-Wirkungs-Zusammenhang (Hofmann, 1999). Die Lösung der direkten Problemstellung in Gl. (2.1), also die Bestimmung der Wirkungen (z.B. Ergebnisse eines Laborversuchs) $y \in Y$, können unter Verwendung der Ursachen (z.B. Parameter eines Laborversuchs) $\kappa \subseteq K$ eindeutig gelöst werden, wenn der Operator \mathcal{F} als stetig im gesamten Definitionsbereich K anzusehen ist (Charton, 2004). Dies bedeutet, dass kleine Störungen in den Eingangsgrößen κ die Lösung der direkten Problemstellung in Gl. (2.1) nur geringfügig beeinflussen (Hofmann, 1999). Der Operator \mathcal{F} der direkten Problemstellung kann sowohl linear als auch nichtlinear sein.

Die abstrakte Beschreibung der direkten Problemstellung in Gl. (2.1) kann auch auf physikalische Zusammenhänge übertragen werden. Bei der mathematischen Beschreibung müssen ein zusammenhängendes Modellgebiet und ein System S definiert werden, welches die Erhaltungssätze und die konstitutiven Gleichungen mit den jeweiligen Materialparametern enthält (Perau, 2001; Perau und Potthoff, 2003). Darüber hinaus sind zur Lösung noch Anfangs- und Randbedingungen vorzugeben. Die Feldvariablen $y_i(\mathbf{x}, t)$ hängen vom Ort \mathbf{x} , der Zeit t und den Parametern κ_i ab und können folgendermaßen definiert werden (Perau und Potthoff, 2003):

$$y_i(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}(S(\kappa_i), \mathbf{R}) + e_i \quad (2.2)$$

Mit \mathcal{F} ist die Zuordnungsvorschrift bezeichnet, welche unter Vorgabe der Parameter und der Randbedingungen die eindeutige Berechnung der Feldvariablen y_i ermöglicht. Da das Modell

die Realität nicht exakt abbilden kann, stellt e_i eine entsprechende Modellabweichung in Gl. (2.2) dar (Kinzler, 2011).

Abgesehen von der Modellierung von chaotischen Prozessen sind die gutartigen Eigenschaften der direkten Problemstellung hinsichtlich dem festen Kausalzusammenhang und der Eindeutigkeit in Abb. 2.1 nochmals dargestellt (Hofmann, 1999).

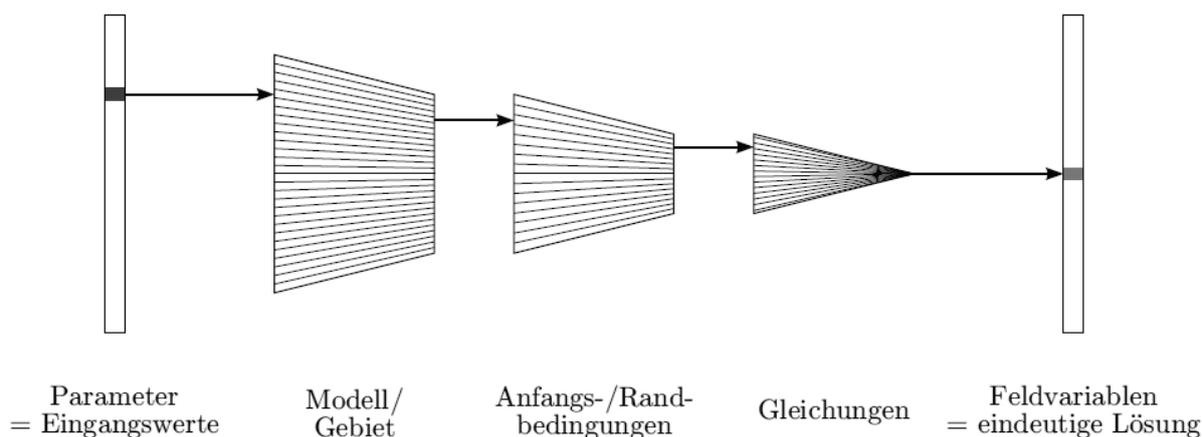


Abbildung 2.1: Eindeutige Lösung der direkten Problemstellung nach Perau und Potthoff (2003)

Das inverse Problem kann als Umkehrung der Ursache-Wirkungsabbildung in Gl. (2.1) verstanden werden. Bei dem Identifikationsproblem bilden indirekte Messungen die Datengrundlage zur Bestimmung der unbekannt Parameter (Laermann, 1998). Als Beispiel für eine solche inverse Problemstellung können z.B. Verformungen und Dehnungen eines Bauteils gemessen werden und anhand dieser Messungen lassen sich beispielsweise die äußeren Lasten und die inneren Parameter wie der E-Modul oder die Querdehnzahl rückrechnen (Laermann, 1998). Da eine direkte Messung dieser Parameter nicht möglich ist, können diese für das entsprechende Modell gemäß Gl. (2.2) auf Basis der Messdaten bestimmt werden (Argoul, 2012).

Mathematisch lässt sich das inverse Problem analog zu Gl. (2.1) folgendermaßen definieren:

$$\bar{\kappa} = \mathcal{F}^{-1}\bar{y} \quad (2.3)$$

Bei gegebenem \bar{y} muss die Gl. (2.3) dann nach der Unbekannten $\bar{\kappa}$ aufgelöst werden, unter der Voraussetzung, dass diese Operation mathematisch überhaupt möglich ist. Die in Gl. (2.1) definierte Operatorgleichung für das Identifikationsproblem geht davon aus, dass die Modellgleichung der direkten Problemstellung die Messdaten exakt abbildet. Somit könnten die Parameter direkt mit der Umkehrfunktion \mathcal{F}^{-1} bestimmt werden, falls die mathematische Struktur eine derartige Lösung des Problems überhaupt zulässt (Kirchgraber et al., 2001).

Jedoch ist die Annahme einer exakten Datengrundlage für reale Messdaten nicht tragbar, da diese stets mit unvermeidlichen Modellabweichungen überlagert sind (Mahnken, 1998). Aus diesem Grund wird für \bar{y} eine durch Messung bestimmte Näherung \tilde{y} eingeführt, sodass sich aus der Gl. (2.3) folgender mathematische Zusammenhang ergibt (Kirchgraber et al., 2001):

$$\tilde{\kappa} = \mathcal{F}^{-1}\tilde{y} \quad (2.4)$$

Es wird nun auf Grundlage der verrauschten Messdaten versucht, einen Schätzwert $\tilde{\kappa}$ für die Parameter zu bestimmen. Dabei stellt sich die Frage, inwiefern die Messabweichungen in \tilde{y} die Parameterschätzung $\tilde{\kappa}$ beeinflussen (Kirchgraber et al., 2001). Oftmals sind inverse Problemstellungen schlecht gestellt, was bedeutet, dass die Lösung sowohl instabil als auch mehrdeutig sein kann. Somit würden verschiedene Ursachen die gleiche Wirkung erzeugen. Jedoch gibt es nur einen Satz von Parametern, welcher die Ursache für eine reale Problemstellung darstellt. Für derartige Problemstellungen können gestörte Messdaten dazu führen, dass der Rekonstruktionsfehler der zu bestimmenden Parameter entartet (Kirchgraber et al., 2001).

Nach Hadamard (1923) kann eine Lösung für eine Problemstellung als korrekt gestellt angesehen werden, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

1. *Existenz*
2. *Eindeutigkeit*
3. *Stabilität*

Zunächst muss geprüft werden, ob zu dem vorliegenden inversen Problem überhaupt eine Lösung existiert und wenn ja, ob diese sowohl eindeutig als auch stetig von den Daten abhängt. Wenn einer der drei Bedingungen nicht erfüllt ist, liegt ein schlecht gestelltes Problem vor. Bei praktischen Fragestellungen ist zumeist die dritte Bedingung nicht erfüllt, sodass die Bestimmung einer Lösung erheblich erschwert wird oder gar nicht möglich ist. Ein Beispiel für ein schlecht gestelltes Problem ist beispielsweise die numerische Ableitung mittels Differenzenquotienten (Charton, 2004).

Oftmals sind inverse Probleme schlecht gestellt, was mit Blick auf die Parameteridentifikation bedeutet, dass die Parameterschätzung sehr sensibel auf Abweichungen in den Messdaten reagiert (Dahmen und Reusken, 2006). Diese Inkorrektheit ist aber nicht auf eine mangelhafte Modellierung der Problemstellung zurückzuführen, sondern kann als eine immanente Eigenschaft des inversen Problems angesehen werden (Hofmann, 1999). Ob ein inverses Problem schlecht gestellt ist, kann a priori nur schwer abgeschätzt werden, da sowohl die Struktur der Modellgleichungen als auch die vorhandenen Daten in derartige Betrachtungen eingehen (Finstlerle, 1993).

Bei praktischen Problemstellungen spielt die Frage nach der Identifizierbarkeit der Parameter eine große Rolle. Eine eindeutige Identifizierbarkeit ist beispielsweise nicht gegeben, wenn mehrere unterschiedliche Schätzwerte für die Parameter dieselbe Systemantwort liefern (Nützmann und Moser, 2016). Zudem kann ein unzureichender Messdatensatz vorliegen, sodass die gesuchten Parameter bei der Rückrechnung nicht in einem ausreichenden Maße aktiviert werden. Aus diesem Umstand ist es evident, dass eine mathematische Analyse der inversen Problemstellung ggfs. eine Antwort liefern kann, welche Messdaten überhaupt notwendig sind, um eine eindeutige Identifizierbarkeit der Parameter zu ermöglichen (Nützmann und Moser, 2016).

Bei der physikalischen Problemstellung in Gl. (2.2) werden im Rahmen der Parameteridentifikation die Parameter κ_i unter Verwendung der Feldvariablen $y_i(\mathbf{x}, t)$ gesucht. Jedoch ist oftmals nicht klar, ob der gefundene Parametersatz der einzige ist, der die Messdaten optimal approximiert oder mehrere Lösungen im Sinne der Mehrdeutigkeit vorliegen. Dieser Gedanke ist in Abb. 2.2 durch den – im Gegensatz zu Abb. 2.1 – umgedrehten Trichter graphisch illustriert. Eine mathematische Umstellung der Gl. (2.2) nach den Parametern im Sinne von $\kappa_i = \dots$ wäre unter den zuvor genannten Aspekten unsachgemäß und nicht empfehlenswert (Perau und Potthoff, 2002, 2003). Für weitere detaillierte Beschreibungen hinsichtlich der direkten und inversen Problemstellung wird an dieser Stelle auf entsprechende Fachliteratur wie Beck und Arnold (1977), Jackson (1978), McLaughlin und Townley (1996), Aster et al. (2012), Richter (2015) verwiesen.

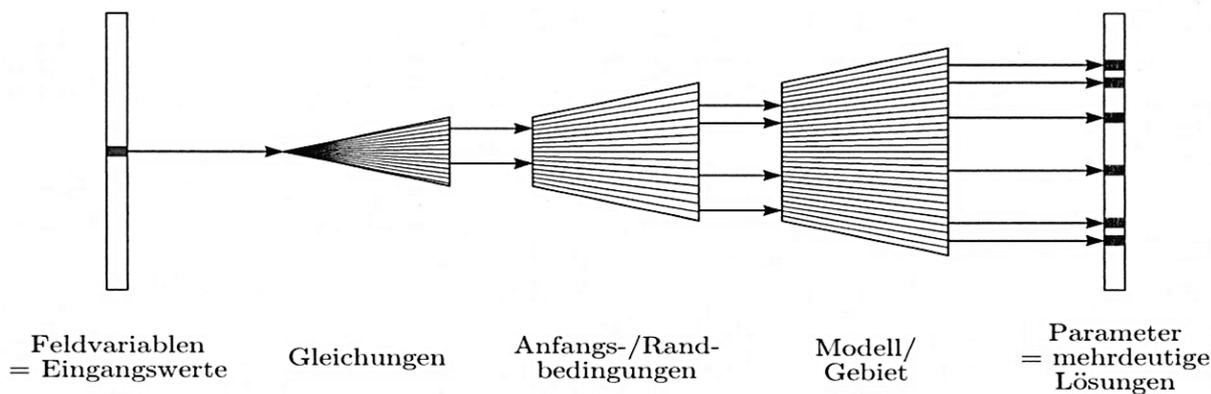


Abbildung 2.2: Mehrdeutige Lösung der Parameteridentifikation nach Perau und Potthoff (2003)

2.2 Messdaten – Analyse und Unsicherheiten

Bei praktischen Fragestellungen stellt sich oftmals die Frage, inwieweit Messergebnisse aufbereitet, analysiert und interpretiert werden können. Insbesondere im Ingenieurwesen bildet die messtechnisch erfasste Systemantwort eine wichtige und äußerst wertvolle Entscheidungsgrundlage zur Lösung von unterschiedlichen Problemstellungen (Kovári und Amstad, 1998). Die Erfassung von Messdaten lässt eine quantitative Aussage über physikalische Größen zu und ermöglicht eine objektive sowie systematische Beschreibung der Natur.

Demgemäß sind die Anforderungen an die Messdaten hinsichtlich Genauigkeit und Aussagekraft sehr hoch. Auch wenn die Genauigkeit der Messungen und die Verbesserung der Messmethoden immer weiter voranschreiten, steht außer Frage, dass moderne Messmethoden stets mit hohem Aufwand und Kosten verbunden sind. Aus diesem Grund sollte die Planung und Auswertung von Messdaten immer systematisch und auf Basis von wissenschaftlichen Methoden erfolgen, um Schädigungsrisiken frühzeitig zu erkennen und alle notwendigen Informationen aus den Messdaten ableiten zu können (Smolczyk, 1999; Nagel et al., 2012).

Messdaten sind stets mit Unsicherheiten behaftet, da der Informationsgehalt einer Messgröße im Regelfall immer einen gewissen Grad der Unvollständigkeit aufweist (Mahnken, 1998). Unsicherheiten bezüglich der Messdaten können nach Mahnken (1998) in *Rauschen*, *Streuen* und *Unvollständigkeit* unterteilt werden.

Ein Rauschen der Messdaten durch Messabweichungen ist unvermeidlich und bei der Auswertung und Analyse stets zu berücksichtigen. Die Ursache für Messabweichungen kann u.a. die Folge von Erschütterungen, Temperatureinflüsse oder technischen Unzulänglichkeiten sein. Messabweichungen können als Diskrepanz zwischen dem “wahren“ und verrauschten Messwert der Messgröße ausgedrückt werden. Dahingegen sind grobe Fehler z.B. auf eine falsche Kalibrierung der Messgeräte oder den Einsatz einer defekten Messapparatur zurückzuführen (vgl. z.B. Mühl, 2006).

Wenn für einen identischen Versuchsaufbau anhand von verschiedenen Materialproben Versuche durchgeführt werden, können die Versuchsergebnisse infolge unterschiedlicher Herstellungsbedingungen oder einer Inhomogenität des eingebauten Materials mehr oder minder stark streuen (Mahnken, 1998).

Nach Mahnken (1998) sind die erfassten Messdaten immer unvollständig. Was hierbei jedoch entscheidend ist, in welchem Umfang diese Unvollständigkeit vorliegt. Besonders problematisch ist die Unvollständigkeit, wenn im Rahmen einer Parameteridentifikation die Messdaten in dem Maße unvollständig sind, dass gewisse Effekte im mathematischen Modell nicht aktiviert werden (Mahnken, 1998). Dadurch lassen sich Parameter dann gar nicht mehr oder nicht eindeutig identifizieren (Nützmann und Moser, 2016).

Die Messwerte können gemäß Gl. (2.5a) zu einem Messdatenvektor zusammengefasst werden, wobei der “wahre“ Wert der Messgröße mit *systematischen* und *zufälligen* Messabweichungen gemäß Gl. (2.5b) überlagert ist:

$$\tilde{y}^{\text{meas}} = \bar{y} + e^{\text{meas}} \quad (2.5a)$$

mit:

$$e^{\text{meas}} = e^{\text{sys}} + e^{\text{rand}} \quad (2.5b)$$

Mit Blick auf Gl. (2.5a) stellen die Messabweichungen in Gl. (2.5b) die Differenz des wahren und des verrauschten Wertes der jeweiligen Messgröße dar (Finsterle, 1993). In Abb. 2.3 sind unterschiedliche Größenordnungen für die zufälligen und systematischen Messabweichungen schematisch als Zielscheibenmodell gemäß Gl. (2.5a) dargestellt, wobei die Mitte der konzentrischen Kreise den “wahren“ Wert \bar{y} für die entsprechende Messung kennzeichnet (Czichos, 2015).

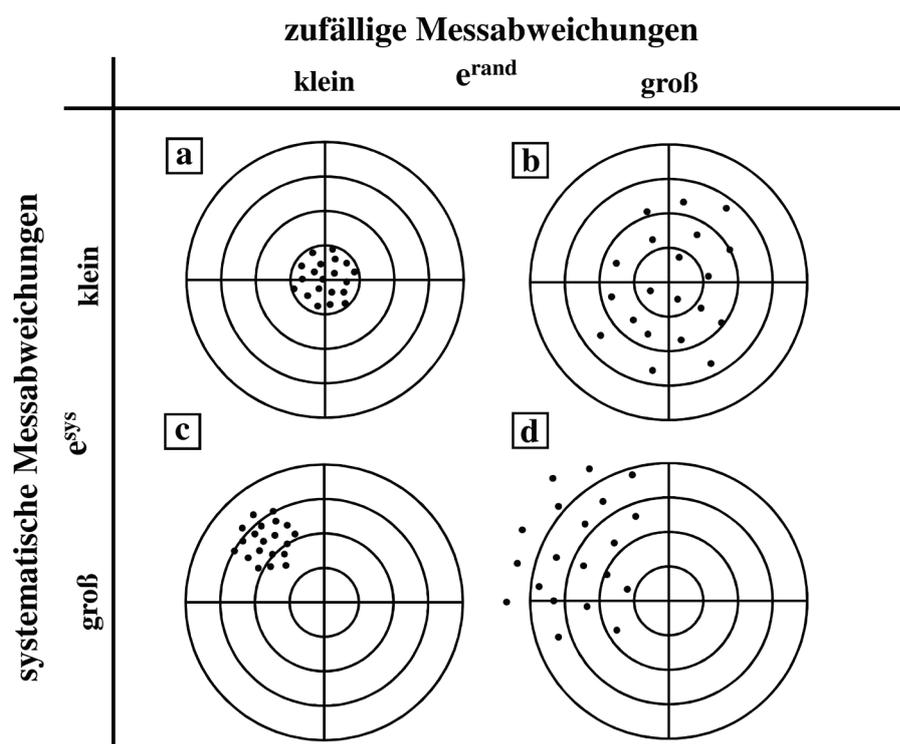


Abbildung 2.3: Zufällige und systematische Messabweichungen anhand einer schematischen Darstellung des Zielscheibenmodells nach Czichos (2015)

Zufällige Messabweichungen e^{rand} sind stets vorhanden und führen dazu, dass die Einzelmesswerte mit einer entsprechenden Standardabweichung um den Mittelwert der Messgröße

schwanken. Der Einfluss der zufälligen Messabweichungen kann durch wiederholtes Messen statistisch erfasst und ggfs. vermindert werden (Finsterle, 1993).

Dagegen ist der Einfluss der systematischen Messabweichungen e^{sys} nicht statistischer Natur, sondern beeinflusst alle Messwerte in der gleichen Art und Weise (vgl. Abb. 2.3). Wenn die systematischen Messabweichungen bekannt sind, können die Messwerte entsprechend korrigiert werden. Falls die systematischen Messabweichungen unbekannt sind, können auch mehrfach wiederholte Messungen den Einfluss der systematischen Messabweichungen nicht vermindern (Mahnken, 1998).

In Bezug auf Abb. 2.3 stellt der Fall a) mit kleinen zufälligen sowie systematischen Abweichungen für eine inverse Problemstellung das ‐günstigste‐ Szenario mit Idealbedingungen dar, da sich die Messdaten sehr nahe um den ‐wahren‐ Wert bewegen. Der Fall d) hingegen mit großen zufälligen sowie systematischen Abweichungen kann stellvertretend als das ungünstigste Szenario interpretiert werden, weil die Messdaten derart verfälscht sind, dass eine Rückrechnung der Parameter nicht mehr möglich ist. Für die Fälle b) und c) gilt es zu untersuchen, ob hierbei anhand der Messdaten noch eine akzeptable Schätzung unter Verwendung von geeigneten Stabilisierungs- bzw. Regularisierungsmethoden möglich ist (Kirchgraber et al., 2001).

An dieser Stelle sei zudem angemerkt, dass ein Modell immer ein unvollständiges Abbild eines natürlichen Prozesses ist (Finsterle, 1993). Demnach ist eine Berücksichtigung eines Modellfehlers bzw. Approximationsfehlers notwendig, der in Abhängigkeit der Modellgleichung sowie den Parametern als Differenz zwischen dem ‐wahren‐ und dem berechneten Wert folgendermaßen definiert werden kann:

$$\mathbf{y}^{\text{calc}}(\boldsymbol{\kappa}) = \bar{\mathbf{y}} + \mathbf{e}^{\text{mod}}(\boldsymbol{\kappa}) \quad (2.6)$$

Da dem Modell stets vereinfachende Annahmen zugrunde liegen, kann auch unter Verwendung nahezu fehlerfrei bestimmter Parameter der Modellfehler nicht zu Null reduziert werden (Ahrendts und Baehr, 1979b; Mahnken, 1998). Der ‐wahre‐ Wert der Messgröße kann somit auch nicht durch eine Verbesserung bzw. Erweiterung des Modells durch weitere Parameter bestimmt werden, sodass im Rahmen einer Simulation immer ein Modellfehler vorhanden sein wird (Finsterle, 1993). Die quantitative Abschätzung des Modellfehlers erscheint bei unbekanntem Einflussgrößen nahezu unmöglich (Überhuber, 1995). Eine ausführliche Übersicht zu den unterschiedlichen Arten von Messabweichungen ist z.B. in Finsterle (1993) zu finden.

2.3 Zielfunktion

Um bei einem Identifikationsproblem ein Maß für die Güte der Parameterschätzung zu erhalten, wird die Übereinstimmung zwischen den gemessenen und simulierten Daten mittels einer Zielfunktion bewertet (vgl. z.B. Meier, 2009). Ein erster intuitiver Ansatz könnte darin bestehen, die Differenz zwischen den Mess- und Simulationsdaten zu bilden und die Modellparameter so lange zu variieren, bis der Abstand zwischen den beiden Datensätzen minimal wird. Der Aufwand dieser Trial-and-Error-Methode ist vor allem bei einer Vielzahl von Modellparametern sehr hoch und die Erfolgchancen, die optimalen Modellparameter zu finden, sehr gering.

Um diese intuitive Vorgehensweise zu umgehen, ist es sinnvoll, auf bewährte Lösungsansätze der angewandten Mathematik zurückzugreifen. Der erste Schritt zur Lösung der inversen Problemstellung der Parameteridentifikation liegt in der Wahl einer geeigneten Zielfunktion. Eine Übersicht zu unterschiedlichen Zielfunktionen ist z.B. in Meier (2009) zu finden. Die Komplexität einer Zielfunktion hängt u.a. von der Anzahl der gesuchten Parameter, der Topologie der Zielfunktion und den Nebenbedingungen ab.

Da bei einem Identifikationsproblem oftmals ein überbestimmtes Problem vorliegt, stellt die Minimierung der Summe der Fehlerquadrate nach GAUß eine geeignete und in der Wissenschaft etablierte Zielfunktion dar (Hofmann, 1999). In diesen Ansatz geht sowohl die Modellgleichung mit n -unbekannten Parametern als auch ein Datensatz von m -bekannten Messungen ein.

Die Abweichung zwischen der Modellvorhersage und den Messwerten für den j -ten Beobachtungspunkt kann durch das Residuum r_j , also der Differenz zwischen Messwert und Modellwert, in Gl. (2.7) definiert werden:

$$r_j(\mathbf{\kappa}) = \tilde{y}_j^{\text{meas}} - y_j^{\text{calc}}(\mathbf{\kappa}) \quad (2.7)$$

Durch das Residuum kann der Abstand zwischen dem Messwert und der Modellvorhersage quantifiziert werden. Sind die Residuen in Gl. (2.7) exakt Null, erfüllt das Modell die Daten genau. Bei kleinen Residuen erfüllt das Modell die Daten gut und bei sehr großen Residuen schlecht. Unter Berücksichtigung der Gl. (2.5) u. (2.6) kann das Residuum in Gl. (2.9) auch als eine Überlagerung von Messabweichungen und Modellfehlern interpretiert werden (Finsterle, 1993; Mahnken, 1998).

Die einzelnen Residuen aus Gl. (2.7) lassen sich im Sinne der kleinsten Summe der Abstandsquadrate zu einer Zielfunktion zusammenfassen:

$$f(\mathbf{\kappa}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m [r_j(\mathbf{\kappa})]^2 = \frac{1}{2} \mathbf{r}(\mathbf{\kappa})^T \mathbf{r}(\mathbf{\kappa}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{r}(\mathbf{\kappa})\|_2^2 \rightarrow \min_{\mathbf{\kappa} \in \mathcal{K}} \quad (2.8)$$

Wie aus Gl. (2.8) hervorgeht, kann das Problem auch als Minimierung der L2-Norm bzw. der Euklidischen Norm des Vektors der Residuen verstanden werden (Mautz, 2001). Der gesuchte Parametervektor $\boldsymbol{\kappa}^*$ stellt den optimale Schätzwert für die Modellparameter dar und soll so bestimmt werden, dass die Messdaten optimal angepasst werden bzw. die Fehlerquadratsumme in Gl. (2.8) minimiert wird.

Für den Fall, dass die Zielfunktion linear von den Parameter abhängt, entsteht ein System von linearen Normalgleichungen, welches mit linearen Regressionsverfahren bestimmt werden kann (Ahrendts und Baehr, 1979a). Hängt die Zielfunktion jedoch nichtlinear von den Parametern ab, liegt ein nichtlineares Regressionsproblem vor, was erheblich aufwendiger zu lösen ist als mit den Verfahren der linearen Algebra (Ahrendts und Baehr, 1979a).

Wenn ein Minimum für die Gl. (2.8) gefunden werden konnte, ist der Zielfunktionswert im Regelfall ungleich Null, da die Messdaten mit Messabweichungen und die Simulation mit Approximationsfehlern überlagert sind (Mahnken, 1998). Ein Modellfehler wird stets die Schätzung der Modellparameter beeinflussen, kann aber oftmals gegenüber den Messabweichungen als vernachlässigbar klein angesehen werden (Ahrendts und Baehr, 1979b). Der Zielfunktionsansatz in Gl. (2.8) gilt nur unter der Voraussetzung, dass die Residuen unabhängig und normalverteilt sind (Fensterle, 1993).

Oftmals werden bei einer Vielzahl von großflächigen Feldmessungen mit räumlich verteilten Parametern statistische Verfahren zur Parameterschätzung verwendet (Neuman, 1980; McLaughlin und Townley, 1996). Die in diesem Zusammenhang verwendeten Schätzverfahren sind z.B. das BAYESSCHE und das MAXIMUM-LIKELIHOOD-Verfahren (Fensterle, 1993; Odenwald, 1994; Bourier, 2018).

Bei dem BAYESSCHEN Schätzverfahren werden Unsicherheiten in der Modellstruktur, den Messdaten und dem Algorithmus zur Parameteridentifikation in einer kumulativen Zufallsverteilung berücksichtigt (Odenwald, 1994; Mahnken, 1998). Bei dem MAXIMUM-LIKELIHOOD-Verfahren werden die gemessenen Daten als bekannt und die Parameter als deterministisch vorausgesetzt. Der optimale Schätzwert für die Parameter ist der Wert, welcher die Likelihood-Funktion maximiert, also die maximale Wahrscheinlichkeit aufweist, dass die Schätzung das Minimum der Quadratsumme der Residuen darstellt.

Die Zielfunktion in Gl. (2.8) kann zusätzlich durch Normierungsfaktoren η und Wichtungsfaktoren w_j ergänzt werden, sodass es durch diese Faktoren möglich ist, die Zielfunktion nach Bedarf zu modifizieren (Meier, 2009):

$$f(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{\eta}{2} \sum_{j=1}^m w_j \left[r_j(\boldsymbol{\kappa}) \right]^2 = \frac{\eta}{2} \mathbf{r}(\boldsymbol{\kappa})^T \mathbf{W} \mathbf{r}(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{\eta}{2} \|\mathbf{W} \mathbf{r}(\boldsymbol{\kappa})\|_2^2 \rightarrow \min_{\boldsymbol{\kappa} \in \mathcal{K}} \quad (2.9)$$

Meier (2009) schlägt für den skalaren Normierungsfaktor η beispielsweise vor, den reziproken Wert der Anzahl der Stützstellen $1/m$ zu verwenden, um dadurch die Abweichungen in Gl. (2.9) unabhängig von der Anzahl der verwendeten Stützstellen zu gestalten. Die Topologie der Zielfunktion ändert sich durch die Einführung des Normierungsfaktors nicht.

Die Zielfunktion $f(\boldsymbol{\kappa})$ in Gl. (2.9) kann verschiedene Messgrößen mit unterschiedlichen Maßeinheiten enthalten, sodass hierbei auf eine Skalierung der jeweiligen Residuen zurückgegriffen wird (Ahrendts und Baehr, 1979b; Mahnken, 1998; Finsterle, 1993; Meier, 2009). Durch die Wahl von entsprechenden Wichtungsfaktoren in Gl. (2.9) wird die Zielfunktion in eine dimensionslose Form überführt und ermöglicht es, unterschiedliche Messgrößen in einem Ansatz zu untersuchen. In diesem Zusammenhang wurde in Müthing et al. (2018) als Wichtungsfaktor beispielsweise der Kehrwert des jeweiligen Messwertes verwendet.

Darüber hinaus weisen die Messdaten in den Beobachtungspunkten im Regelfall uneinheitliche Messabweichungen auf, sodass es sinnvoll erscheint, Messreihen mit einer höheren Genauigkeit stärker zu gewichten (Meier, 2009). Die Wahl der Wichtungsfaktoren erfordert überdies ein hohes Maß an Erfahrung, da diesbezüglich keine einheitliche Theorie vorliegt. In der entsprechenden Fachliteratur liegen demgemäß nur erfahrungsbasierte Handlungsempfehlungen zur Wahl der Wichtungsfaktoren vor.

Häufig wird bei einer Zielfunktion im Sinne der kleinsten Abstandsquadrate der reziproke Wert der Varianz der entsprechenden Messdatenreihe als Wichtungsfaktor verwendet (Hill und Tiedeman, 2007). Die Wichtungsmatrix \mathbf{W} in Gl. (2.9) besteht in diesem Fall aus einer Diagonalmatrix, wobei die Einträge äquivalent zu dem Kehrwert der Varianzen sind (Ahrendts und Baehr, 1979b; Hill und Tiedeman, 2007). Wenn der Normierungsfaktor η und die Wichtungsfaktoren w_j gleich eins gesetzt werden, resultiert daraus ein wichtungsneutraler Ansatz wie in Gl. (2.8) (Meier, 2009).

Im Rahmen der mathematischen Optimierung werden zur späteren Verwendung die erste und zweite Ableitung der Zielfunktion $f(\boldsymbol{\kappa})$ in Gl. (2.9) benötigt. Es wird dabei vorausgesetzt, dass die Zielfunktion zweimal stetig differenzierbar nach den Parametern $\boldsymbol{\kappa}$ ist. Der Gradient der Zielfunktion kann dann folgendermaßen formuliert werden (Finsterle, 1993):

$$\nabla f(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{\partial f(\boldsymbol{\kappa})}{\partial \kappa_i} = \eta \cdot \sum_{j=1}^m w_j r_j(\boldsymbol{\kappa}) \frac{\partial r_j}{\partial \kappa_i} = \eta \mathbf{J}_r(\boldsymbol{\kappa})^T \mathbf{W} \mathbf{r}(\boldsymbol{\kappa}) \quad (2.10)$$

Hierbei enthält die Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_r(\boldsymbol{\kappa})$ in Gl. (2.10) die partiellen Ableitungen der Residuen in Gl. (2.7) nach den Parametern. Insbesondere wenn die Lösung der Modellgleichung in Gl. (2.7) über die FEM erfolgt, kann die Bestimmung der partiellen Ableitungen über finite Differenzen

sehr aufwendig werden, da hierbei die Modellgleichung mehrfach ausgewertet werden muss (Harzheim, 2014).

Manche Optimierungsverfahren benötigen zusätzlich zum Gradienten der Zielfunktion in Gl. (2.9) die Hesse-Matrix, welche die zweiten Ableitungen der Zielfunktion enthält und folgendermaßen definiert werden kann (Finsterle, 1993):

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{\kappa}) = \eta \left[\mathbf{J}_r(\boldsymbol{\kappa})^T \mathbf{W} \mathbf{J}_r(\boldsymbol{\kappa}) + \mathbf{S}(\boldsymbol{\kappa}) \right] \quad (2.11a)$$

mit:

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\kappa}) = \sum_{j=1}^m w_j r_j(\boldsymbol{\kappa}) \nabla^2 r_j(\boldsymbol{\kappa}) \quad (2.11b)$$

Die Hesse-Matrix der Zielfunktion lässt sich kompakt anhand der Summe zweier Terme in Gl. (2.11a) darstellen. Der erste Term besteht lediglich aus der Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_r(\boldsymbol{\kappa})$ der Residuen und kann anhand der partiellen Ableitung der Modellgleichung – analog zum Gradienten in Gl. (2.10) – bestimmt werden.

Der zweite Term in Gl. (2.11b) ist numerisch häufig schwer zu bestimmen und erfordert demzufolge einen großen Rechenaufwand. Oftmals sind die Messabweichungen und der Modellfehler relativ gering, sodass es sinnvoll ist, die Hesse-Matrix lediglich durch den ersten Term in Gl. (2.11a) zu approximieren und den zweiten Term $\mathbf{S}(\boldsymbol{\kappa})$ der Hesse-Matrix in Gl. (2.11b) zu vernachlässigen (Finsterle, 1993; Nocedal und Wright, 1999).

Für die Wahl des Optimierungsverfahrens ist es letztendlich entscheidend, die Struktur der Zielfunktion zu analysieren, um im Einzelfall bewerten zu können, ob z.B. die Approximation der Hesse-Matrix mit der Jacobi-Matrix im ersten Term gemäß Gl. 2.11b für das vorliegende Problem überhaupt zulässig ist (Mahnken, 1998). Das nachfolgende Kapitel beschäftigt sich mit den Methoden der mathematischen Optimierung. Die Verfahren der mathematischen Optimierung werden häufig zur Lösung einer Minimierungsaufgabe wie in Gl. (2.9) verwendet (vgl. z.B. Finsterle, 1993; Meier, 2009).

2.4 Mathematische Optimierung

Im vorherigen Kapitel wurde eine Zielfunktion $f(\boldsymbol{\kappa})$ definiert, welche mithilfe der mathematischen Optimierung zu minimieren ist. Die grundlegende Aufgabenstellung der mathematischen Optimierung besteht darin, ein Optimum bzw. Extremum einer Funktion zu bestimmen. Oftmals wird unter dem Begriff Optimierung in den Ingenieurwissenschaften irrtümlicherweise lediglich eine wie auch immer geartete Verbesserung eines Systems verstanden. Die mathematische Optimierung besteht jedoch darin, für eine Optimierungsaufgabe aus mathematischer Sicht die bestmögliche Lösung zu bestimmen (Pieper, 2017).

Da die Optimierungsaufgaben oftmals auf konkrete physikalische Probleme angewandt werden, können für die Variablen Beschränkungen vorliegen, die in Form von Gleichungen oder Ungleichungen vorliegen. Es hat sich bewährt eine Standardform für die Optimierungsaufgabe zu formulieren, auf die die Lösungsmethoden bzw. Optimierungsalgorithmen stets angewendet werden können:

$$\min_{\boldsymbol{\kappa} \in \mathcal{K}} f(\boldsymbol{\kappa}) \quad (2.12)$$

Mit $\boldsymbol{\kappa}$ wird ein n -dimensionaler Parametervektor und mit \mathcal{K} der zulässige Bereich für die Parameter bezeichnet. Nachfolgend wird unterstellt, dass stets eine skalare Zielfunktion $f(\boldsymbol{\kappa})$ vorliegt. Natürlich können in Bezug auf eine Mehrziel- bzw. Vektoroptimierung auch mehrere Zielfunktionen formuliert und gleichzeitig optimiert werden.

Das Ziel besteht nun darin, eine optimale Schätzung $\boldsymbol{\kappa}^* \in \mathcal{K}$ der Zielfunktion $f(\boldsymbol{\kappa})$ mittels der mathematischen Optimierung zu bestimmen. Aus mathematischer Sicht können grundsätzlich alle reellen Zahlen $\boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{R}^n$ für den Parametervektor $\boldsymbol{\kappa}$ zugelassen werden. Für praktische Problemstellungen ist der zulässige Bereich \mathcal{K} im Regelfall beschränkt, sodass durch die Formulierung von Nebenbedingungen $\boldsymbol{\kappa} \in \mathcal{K}$ zulässige Punkte definiert werden können. Lässt man alle reellen Zahlen ohne Einschränkungen zu, sodass $\mathcal{K} = \mathbb{R}^n$ gilt, liegt ein *unrestringiertes* Optimierungsproblem vor. Gilt jedoch $\mathcal{K} \neq \mathbb{R}^n$, wird der zulässige Bereich durch Nebenbedingungen eingeschränkt und es liegt ein *restringiertes Optimierungsproblem* vor (Ulbrich, 2006).

Diese Unterscheidung ist insbesondere für die Wahl der Optimierungsverfahren wichtig. Auch die Restriktionen für den zulässigen Bereich können in Form von Gleichungen und Ungleichungen auf eine Standardform zurückgeführt werden (vgl. z.B. Schumacher, 2013):

$$g_j(\boldsymbol{\kappa}) \leq 0 \quad \text{mit } j = 1, n_g \quad (2.13a)$$

$$h_k(\boldsymbol{\kappa}) = 0 \quad \text{mit } k = 1, n_h \quad (2.13b)$$

$$\kappa_i^l \leq \kappa_i \leq \kappa_i^u \quad \text{mit } i = 1, n \quad (2.13c)$$

Neben den n_g -Ungleichheitsrestriktionen und den n_h -Gleichheitsrestriktionen können sogenannte explizite Restriktionen definiert werden, welche untere $\boldsymbol{\kappa}^l$ und obere $\boldsymbol{\kappa}^u$ Grenzen für den Parametervektor beinhalten. Die Gleichheitsrestriktionen in Gl. (2.13b) sind für die praktische Anwendung nach Harzheim (2014) im Gegensatz zu den Ungleichheitsrestriktionen in Gl. (2.13a) nicht so bedeutend, da oftmals nur obere und untere Grenzen definiert werden und nicht die exakte Einhaltung eines Zielfunktionswerts gefordert ist. In kompakter Schreibweise ergibt sich nach Schumacher (2013) die formalisierte Optimierungsaufgabe:

$$f(\boldsymbol{\kappa}^*) = \min \{f(\boldsymbol{\kappa}) \mid \boldsymbol{\kappa} \in \mathcal{K}\} \quad \text{mit} \quad \mathcal{K} = \{\boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{g}(\boldsymbol{\kappa}) \leq 0, \mathbf{h}(\boldsymbol{\kappa}) = 0\} \quad (2.14)$$

Wie in Benker (2003) ausgeführt wird, müssen im Rahmen der mathematischen Optimierung u.a. die folgenden Punkte berücksichtigt werden:

1. „Existenz einer Lösung, d.h. Existenz eines Minimums oder Maximums.
2. Eindeutigkeit der Lösung, d.h., gibt es genau einen Punkt, in dem die Zielfunktion ein Minimum oder Maximum annimmt.
3. Aufstellung von Optimalitätsbedingungen, d.h. notwendige bzw. hinreichende Bedingungen für die Optimalität eines Punktes.
4. Entwicklung von Lösungsmethoden.
5. Untersuchung der optimalen Lösung einer Optimierungsaufgabe auf Reaktionen gegenüber Änderungen in Zielfunktion und/oder Nebenbedingungen. Dies bezeichnet man als Stabilitätsbetrachtung bzw. Sensitivitätsanalyse.“ (Benker, 2003, S. 116)

Grundsätzlich stellt sich als erstes die Frage, ob die zu behandelnde Optimierungsaufgabe überhaupt ein Optimum besitzt und wenn ja, ob die gefundene Lösung eindeutig ist. Wenn nachweislich kein Optimum für die Zielfunktion vorliegt, sind weitere Untersuchungen der Optimierungsaufgabe überflüssig. Der Nachweis der Eindeutigkeit der optimalen Lösung ist im Allgemeinen nur unter bestimmten Voraussetzungen, wie strenger Konvexität der Zielfunktion über einem konvexen Gebiet, zu erbringen (Harzheim, 2014).

Eine weitere Problematik der mathematischen Optimierung besteht darin, dass bisher keine Optimierungsalgorithmen vorliegen, welche die Bestimmung eines globalen Minimums garantieren (Mahnken, 1998; Schumacher, 2013; Harzheim, 2014). Die Optimierungsverfahren liefern in der Regel immer nur lokale Minima und es ist nie ganz klar, ob im zulässigen Bereich noch weitere lokale Minima mit kleineren Zielfunktionswerten vorliegen. Oftmals hängt die Lösung dann von dem Startwert der mathematischen Optimierung ab. In Abb. 2.4 sind schematisch zwei Zielfunktionen $f(\boldsymbol{\kappa})$ mit den expliziten Restriktionen in Gl. (2.13c) dargestellt, wobei die eine konvex und die andere nicht konvex ist (Harzheim, 2014; Wünsch, 2017).

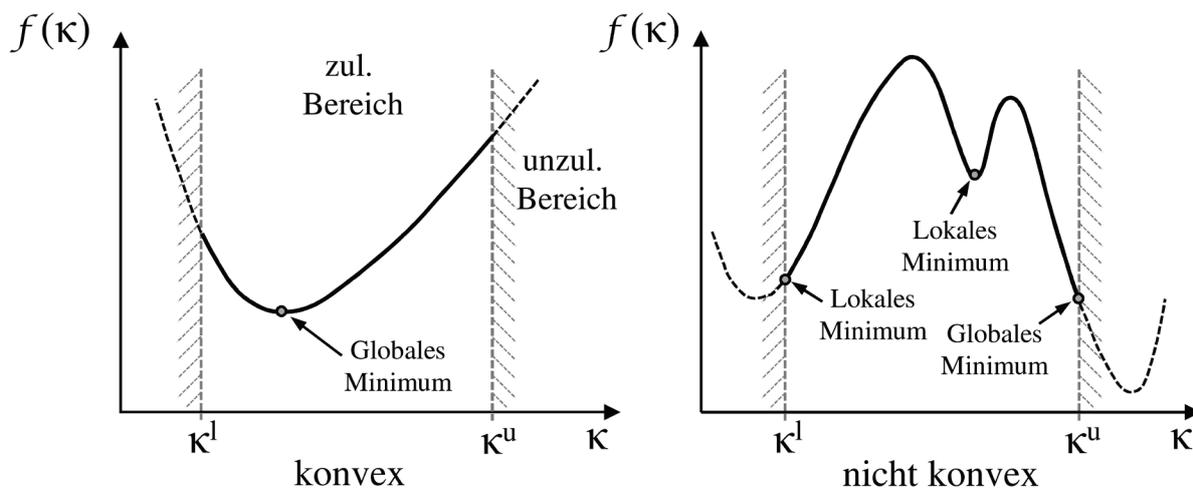


Abbildung 2.4: Definition lokales und globales Minimum bearbeitet nach Harzheim (2014) und Wunsch (2017)

An der Abb. 2.4 ist ein wesentlicher Aspekt der konvexen Funktionen zu erkennen. Wenn bei einer konvexen Funktion im zulässigen Bereich ein lokales Minimum existiert, ist dies äquivalent zu dem globalen Minimum (Harzheim, 2014). Ein Kriterium für die Konvexität kann mittels Gl. (2.15) angegeben werden (vgl. z.B. Wunsch, 2017):

$$f(\Theta \cdot \kappa_A + (1-\Theta) \cdot \kappa_B) \leq \Theta \cdot f(\kappa_A) + (1-\Theta) \cdot f(\kappa_B) \tag{2.15}$$

Die Gl. (2.15) gilt für alle Punkte $\kappa_A, \kappa_B \in [\kappa^l, \kappa^u]$, welche im zulässigen Bereich liegen mit der Laufvariablen $\Theta \in [0, 1]$. In Abb. 2.5 ist das Kriterium gemäß Gl. (2.15) für eine eindimensionale Funktion hinsichtlich der zwei Punkte κ_A und κ_B dargestellt.

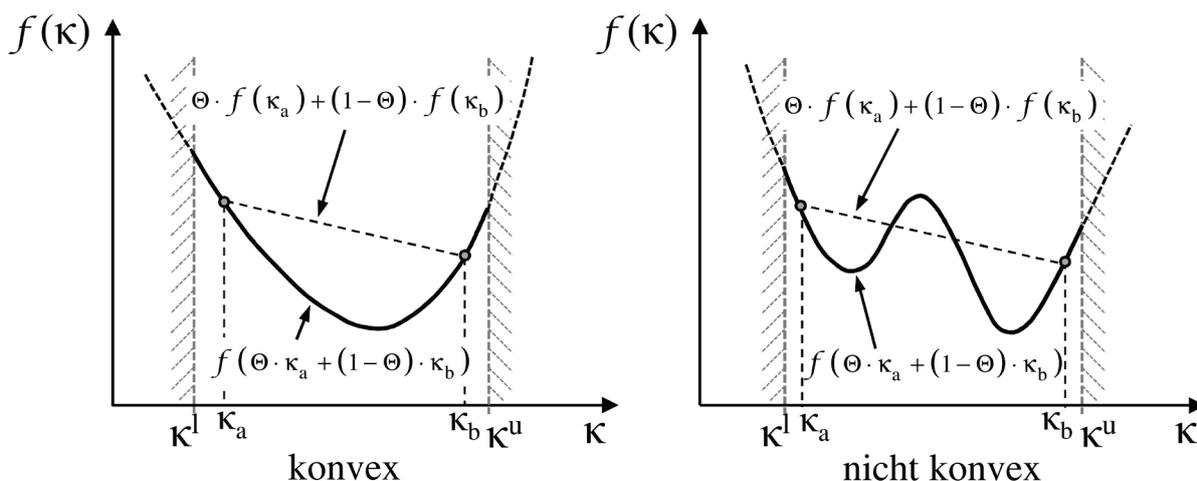


Abbildung 2.5: Darstellung einer konvexen und nichtkonvexen Funktion nebst Kriterium gemäß Gl. (2.15) bearbeitet nach Harzheim (2014) und Wunsch (2017)

Die Visualisierung der Gl. (2.15) für die eindimensionalen Funktionen in Abb. 2.5 zeigt, dass die Verbindungsstrecke zwischen den beiden Punkten κ_A und κ_B die Funktion $f(\kappa)$ nicht schneiden darf (Schumacher, 2013). Die Gl. (2.15) gilt auch für mehrdimensionale Funktionen (Harzheim, 2014).

Für den allgemeinen Fall einer restringierten Optimierung muss neben der Konvexität zudem der zulässige Bereich für die Parameter konvex sein, um zu gewährleisten, dass nur ein globales Minimum für das Optimierungsproblem in Gl. (2.12) vorliegt (Kinzler, 2011; Schumacher, 2013; Harzheim, 2014). Bei dem zuvor definierten zulässigen Bereich handelt es sich mathematisch um eine Menge. Für eine Menge \mathcal{K} kann die Konvexität mit dem folgenden Kriterium nachgewiesen werden (vgl. z.B. Wünsch, 2017):

$$\mathbf{y} = \Theta \cdot \kappa_A + (1 - \Theta) \cdot \kappa_B \in \mathcal{K} \quad \text{mit} \quad \kappa_A, \kappa_B \in \mathcal{K}; \Theta \in [0, 1] \quad (2.16)$$

Eine Optimierungsaufgabe ist als konvex zu bezeichnen, wenn sowohl die Zielfunktion als auch die Restriktionen konvex sind (Harzheim, 2014). Bei realen Problemstellungen ist zumeist nicht bekannt, ob eine konvexe oder nicht-konvexe Optimierungsaufgabe vorliegt, da die Topologie der Zielfunktion nur in Ausnahmefällen vollends bekannt und darstellbar ist (Schumacher, 2013; Harzheim, 2014). Somit ist das globale Minimum in den allermeisten Fällen nicht mit absoluter Sicherheit zu bestimmen. Eine Möglichkeit sich dem globalen Minimum zu nähern, kann anhand der Erkenntnis abgeleitet werden, dass das globale Minimum gleichzeitig auch ein lokales Minimum ist. Durch die Wahl von unterschiedlichen Startwerten im zulässigen Bereich ist es im Rahmen der Optimierung ggfs. möglich, sich dem globalen Minimum schrittweise über die Bestimmung von lokalen Minima zu nähern (Schumacher, 2013; Harzheim, 2014).

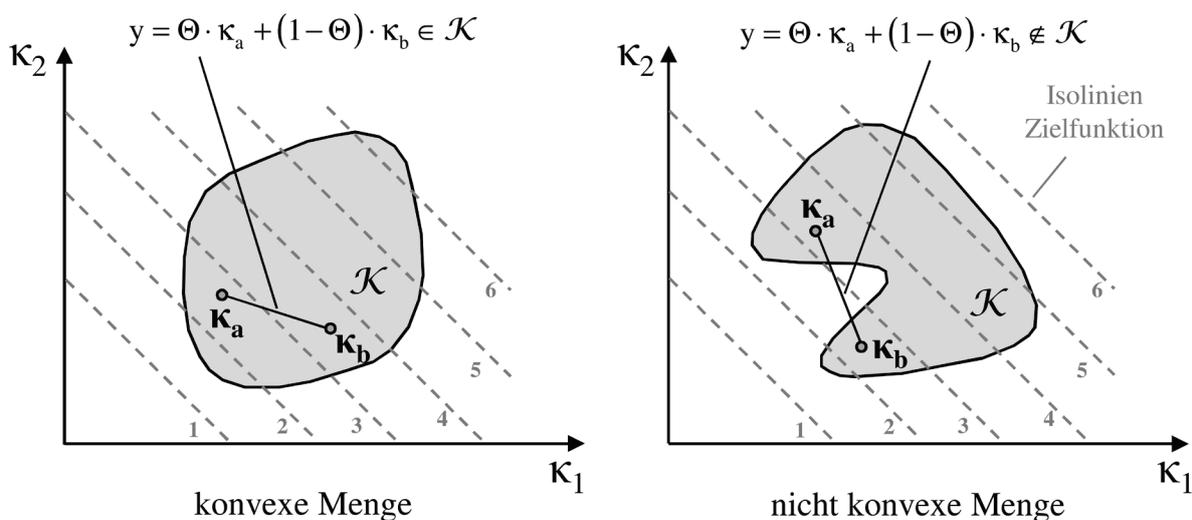


Abbildung 2.6: Konvexe und nicht konvexe Menge nebst Kriterium nach Gl. (2.16) bearbeitet nach Harzheim (2014) und Wünsch (2017)

2.5 Optimalitätsbedingungen

Es werden nun sowohl *notwendige* als auch *hinreichende* Optimalitätsbedingungen für das zuvor aufgestellte Optimierungsproblem in Gl. (2.12) formuliert. Für die optimale Schätzung $\boldsymbol{\kappa}^*$ liegt somit eine objektive Bedingung vor, anhand derer feststellbar ist, ob ein extremwertverdächtiger bzw. stationärer Punkt existiert und welche Art von Extremwert in diesem Punkt vorliegt. Zunächst wird dargelegt, wie ein lokales und globales Minimum allgemein definiert ist.

Die Funktion $f(\boldsymbol{\kappa})$ hat ein globales Minimum im Punkt $\boldsymbol{\kappa}^* \in \mathbb{R}^n$, wenn

$$f(\boldsymbol{\kappa}^*) \leq f(\boldsymbol{\kappa}) \quad \forall \quad \boldsymbol{\kappa} \in \mathcal{K} \quad (2.17)$$

gilt. Gilt die Bedingung in Gl. (2.17) lediglich in einer bestimmten Umgebung $U \subset \mathcal{K}$ von $\boldsymbol{\kappa}^*$, liegt ein lokales Minimum vor (Kinzler, 2011). Die Unterscheidung zwischen lokalem und globalem Minimum ist für praktische Fragestellungen wichtig, da die Lösung der Parameteridentifikation stets mit der Bestimmung des globalen Minimums einhergeht (vgl. Abb. 2.4). Nach der Definition ist jedes globale Minimum gleichzeitig auch ein lokales, wobei der Umkehrschluss in der Regel nicht gilt (Benker, 2003).

Die notwendige Bedingung für ein unrestringiertes Optimierungsproblem ($\mathcal{K} = \mathbb{R}^n$) kann anhand des Gradienten der Zielfunktion angegeben werden:

$$\nabla f(\boldsymbol{\kappa}^*) = \mathbf{0} \quad (2.18)$$

Gemäß Gl. (2.18) liegt ein extremwertverdächtiger Punkt vor, wenn der Gradient der Zielfunktion verschwindet und somit gleich dem Nullvektor ist (Schumacher, 2013; Pieper, 2017). Wenn eine Lösung $\boldsymbol{\kappa}^*$ für die Optimierungsaufgabe existiert, in der alle Komponenten des Gradienten gleich Null sind, wird diese optimale Schätzung häufig als stationärer Punkt bezeichnet (Haftmann, 2009). Geometrisch lässt sich die Gl. (2.18) in einem stationären Punkt für eine eindimensionale Zielfunktion durch eine horizontale Tangente und für eine zweidimensionale Zielfunktion durch eine waagerechte Tangentialebene (parallel zur κ_1, κ_2 -Ebene) darstellen (Haftmann, 2009).

An der notwendigen Bedingung in Gl. (2.18) ist nicht nachweisbar, ob es sich in diesem Punkt um einen Extremwert handelt, sodass zusätzlich noch eine hinreichende Bedingung formuliert werden muss (Haftmann, 2009). Ist die notwendige Bedingung in Gl. (2.18) erfüllt, kann für den stationären Punkt $\boldsymbol{\kappa}^*$ eine hinreichende Bedingung unter Verwendung der Hesse-Matrix $\mathbf{H}_f(\boldsymbol{\kappa}) = \boldsymbol{\kappa}$ definiert werden. Die Berechnung der Hesse-Matrix geht sehr häufig mit einem stark erhöhten Rechenaufwand einher, insbesondere wenn die Modellgleichung lediglich mit der FEM berechnet werden kann (Finsterle, 1993; Mahnken, 1998).

Die Hesse-Matrix ist gemäß dem Satz von SCHWARZ eine symmetrische Matrix. Über die Definitheit der Hesse-Matrix lässt sich das hinreichende Kriterium definieren (Haftmann, 2009; Ulbrich und Ulbrich, 2012).

Drei häufig vorkommende Fälle (A: Minimum, B: Maximum, C: Sattelpunkt) sind in Abb. 2.7 mit der Kennzeichnung der jeweiligen Definitheit der Hesse-Matrix dargestellt.

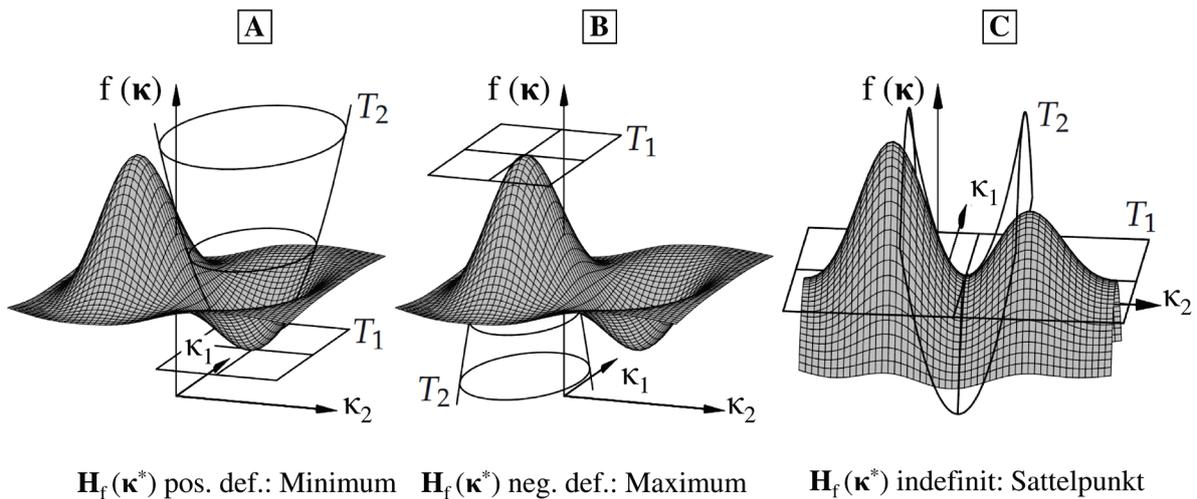


Abbildung 2.7: Darstellung von Minimum, Maximum und Sattelpunkt mit Zuordnung der Definitheit der Hesse-Matrix für zwei Parameter bearbeitet nach Haftmann (2009)

In Abb. 2.7 sind zusätzlich die notwendige (T_1) und die hinreichende Optimalitätsbedingung (T_2) für den stationären Punkt der Funktion dargestellt. Die Definitheit lässt sich über das Kriterium von SYLVESTER (auch: Kriterium von HURWITZ) bzw. die Eigenwertmethode bestimmen (vgl. z.B. Pieper, 2017).

Für das Optimierungsproblem in Gl. (2.12) wird ein lokales Minimum (Fall A, vgl. Abb. 2.7) für die Zielfunktion gesucht, sodass die Hesse-Matrix in Gl. (2.19) für diesen Fall positiv definit sein muss (Ulbrich, 2006):

$$\mathbf{H}_f(\boldsymbol{\kappa}^*) = \nabla^2 f(\boldsymbol{\kappa}^*) \rightarrow \text{positiv definit} \quad (2.19)$$

Wenn alle Eigenwerte der Hesse-Matrix positiv sind, liegt eine positiv definite Matrix vor, was bedeutet, dass die Funktion im stationären Punkt in alle Richtungen eine positive Krümmung aufweist (Harzheim, 2014). Ist mindestens ein Eigenwert der Hesse-Matrix gleich Null, ist nicht mehr eindeutig zu entscheiden, ob im stationären Punkt ein Extremwert (Minimum/Maximum) oder ein Sattelpunkt vorliegt (Haftmann, 2009).

Für das *restringierte* Optimierungsproblem gelten im Gegensatz zum *unrestringierten* Optimierungsproblem andere Optimalitätsbedingungen. Die Grundgedanken der Optimalitätsbedingungen für das *restringierte* Optimierungsproblem werden nun kurz zusammengefasst.

Zunächst wird die Optimierungsaufgabe unter Verwendung der LAGRANGE-Funktion umformuliert, sodass die Zielfunktion und die Nebenbedingungen gemäß Gl. (2.14) in einer Gleichung zusammengefasst werden können:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f(\boldsymbol{\kappa}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}(\boldsymbol{\kappa}) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{h}(\boldsymbol{\kappa}), \quad (\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_g} \times \mathbb{R}^{n_h} \quad (2.20)$$

Die Idee der Verwendung der LAGRANGE-Funktion ist dabei die Zielfunktion $f(\boldsymbol{\kappa})$ unter Verwendung der Nebenbedingungen zu erweitern, indem jede der Nebenbedingungen mit einer Variablen (λ_j, μ_k) multipliziert und zu der ursprünglichen Zielfunktion addiert wird.

Danach wird ein stationärer Punkt $(\boldsymbol{\kappa}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ des Ersatzproblems in Gl. (2.20) anhand der **KARUSH-KUHN-TUCKER**-(KKT)-Bedingung bestimmt (Kinzler, 2011). Die KKT-Bedingung stellt die notwendige Bedingung erster Ordnung für einen Extremwert der Gl. (2.20) dar:

$$\nabla \mathcal{L}(\boldsymbol{\kappa}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) = \nabla f(\boldsymbol{\kappa}^*) + \boldsymbol{\lambda}^{*T} \nabla \mathbf{g}(\boldsymbol{\kappa}^*) + \boldsymbol{\mu}^{*T} \nabla \mathbf{h}(\boldsymbol{\kappa}^*) = 0 \quad (2.21)$$

Zur praktischen Anwendung werden die Ungleichheits- und Gleichheitsbedingung durch einfache mathematische Operationen in eine Standardform $\mathbf{h}(\boldsymbol{\kappa}^*) = 0$ bzw. $\mathbf{g}(\boldsymbol{\kappa}^*) \leq 0$ überführt. Zudem gelten noch weitere Bedingungen wie die Nichtnegativitätsbedingung $\boldsymbol{\mu}^* \geq 0$ und die Komplementaritätsbedingung $\boldsymbol{\mu}^* \mathbf{g}(\boldsymbol{\kappa}^*) \geq 0$, auf die an dieser Stelle nicht im Detail eingegangen wird (Kinzler, 2011; Ulbrich, 2006).

Im Allgemeinen sind die KKT-Bedingungen in Gl. (2.21) nur notwendige und keine hinreichenden Bedingungen. Lediglich für konvexe Funktionen $f(\boldsymbol{\kappa})$ sind die KKT-Bedingungen hinreichende Bedingung, da wie zuvor jedes lokale gleichzeitig auch ein globales Optimum ist (Dobmann, 2018).

Als hinreichende Bedingung zur Bestimmung eines Minimums dient die zweifache Ableitung der LAGRANGE-Funktion (Dobmann, 2018):

$$\nabla^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\kappa}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) \rightarrow \text{positiv definit} \quad (2.22)$$

Für weiterführende Ausführungen wird auf die umfangreiche Fachliteratur verwiesen wie z.B. Bialy und Ulbrich (1975), Alt (2002), Geiger und Kanzow (2002), Ulbrich und Ulbrich (2012), Schwenkert und Stry (2015) oder Sioshansi und Conejo (2017). Eine kompakte Zusammenfassung zur mathematischen Optimierung ist aus ingenieurwissenschaftlicher Sicht z.B. in Braun (2015) zu finden.

2.6 Optimierungsverfahren

Nachdem die Bedingungen für Optimalität im vorherigen Kapitel kurz beschrieben wurden, stellt sich nun die Frage, welche Verfahren seitens der angewandten Mathematik zur Verfügung gestellt werden, um die Minimierungsaufgabe zu lösen. Bevor ein Optimierungsverfahren ausgewählt werden kann, sind zunächst einige wesentliche Eigenschaften der Optimierungsaufgabe zu analysieren.

Nach Benker (2003) lassen sich die Lösungsmethoden zur Berechnung von Extrema grob in drei Kategorien einteilen:

- a) *exakte Lösung*
- b) *Näherungslösung (numerische Methoden)*
- c) *grafische Lösung*

Unter a) wird versucht die exakte Lösung der Gleichungen der Optimalitätsbedingungen zu bestimmen, was jedoch oftmals nicht möglich ist, da sich die Gleichungen durch die nichtlineare Abhängigkeit der Zielfunktion von den Parametern nicht exakt lösen lassen, da hierbei ein nichtlineares Gleichungssystem zu lösen ist. Eine numerische Lösung der Optimalitätsbedingungen (indirekte Methode) ist aufgrund der Ineffektivität der Algorithmen nicht empfehlenswert (Benker, 2003).

Die am häufigsten angewendete Methode für praktische Optimierungsaufgaben ist die unter b) aufgeführte numerische Methode, welche es ermöglicht, Näherungslösungen der Optimierungsaufgabe zu bestimmen, ohne die Optimalitätsbedingungen exakt zu lösen (Benker, 2003). Zur Anwendung dieser Methode bietet beispielsweise MATLAB eine OPTIMIZATION Toolbox an, die ein Vielzahl von Optimierungsverfahren für unterschiedliche Optimierungsprobleme bereithält (Angermann, 2014).

Eine Lösung anhand der grafischen Methode unter c) ist nur für Sonderfälle möglich und kann lediglich für maximal drei unabhängige Veränderliche gelingen (Benker, 2003). Für die praktische Anwendung empfiehlt sich diese Methode aufgrund der nachvollziehbaren Limitierung hinsichtlich der Anzahl der Variablen und der Darstellungsmöglichkeiten im Regelfall nicht.

Der Fokus liegt demnach auf Optimierungsverfahren, die Optimierungsprobleme anhand von numerischen Verfahren lösen. Die Anzahl der zur Verfügung stehenden Optimierungsverfahren ist sehr groß und die Neuentwicklung sowie die Weiterentwicklung von bestehenden Algorithmen ist weiterhin ein aktueller Forschungszweig der angewandten Mathematik (Wendland, 2011). Bei der Vielzahl von Optimierungsverfahren gilt es jedoch zu bedenken, dass es nicht den *einen* optimalen Algorithmus gibt, der auf *alle* Optimierungsprobleme erfolgreich angewendet werden kann. Es muss daher für jede Optimierungsaufgabe zuvor analysiert werden, welches Optimierungsverfahren die entsprechende Problemstellung effizient und möglichst

stabil löst. Für die Wahl eines geeigneten Optimierungsverfahrens gilt es zunächst zu klären, welche Art von Optimierungsproblem zu lösen ist:

- *Lineares* bzw. *nichtlineares* Optimierungsproblem?
- *Unrestringiertes* bzw. *restringiertes* Optimierungsproblem?

Diese grobe Einordnung bedarf naturgemäß weiteren Anpassungen und Verfeinerungen, sodass es im besten Fall möglich ist, ein effizientes und stabiles Optimierungsverfahren vorzuhalten. Grundsätzlich könnte ein erster Ansatz zur Bestimmung eines lokalen/globalen Minimums darin bestehen, den ganzen Parameterraum unter Verwendung der Zielfunktion nach möglichen Parameterkombinationen abzusuchen. Der Aufwand wäre bei diesem Ansatz jedoch viel zu hoch, sodass Optimierungsverfahren zu verwenden sind, die eine möglichst geringe Anzahl an Modellauswertungen benötigen (Harzheim, 2014).

Da oftmals ein nichtlineares Optimierungsproblem zu lösen ist, erfolgt die Lösung anhand von iterativen Verfahren. Die Grundidee besteht darin, eine Folge von κ_k mit $k \in \mathbb{N}$ zu erzeugen und sich approximativ dem lokalen bzw. globalen Minimum $\kappa_k \rightarrow \kappa^*$ anzunähern. Dabei wird zwischen deterministischen und stochastischen Verfahren unterschieden (Wünsch, 2017). Bei den deterministischen Verfahren wird in jeder Iterationsschleife mit identischem Startwert dieselbe Iterationsfolge durchlaufen, wobei die stochastischen Verfahren zufällig und somit nicht reproduzierbar sind (Mahnken, 1998).

Es stellt sich in diesem Zusammenhang weiter die Frage, ob Ableitungsinformationen (Gradienten-freie/Gradienten-basierte Verfahren) genutzt und ob eine lokale oder globale Optimierung durchgeführt werden soll. Gradienten-freie Verfahren bestimmen das Optimum einzig und allein anhand des Zielfunktionswertes, ohne entsprechende Ableitungsinformationen zu nutzen (vgl. z.B. Benker, 2003). Diese Verfahren eignen sich besonders, wenn die Zielfunktion nicht stetig oder nicht differenzierbar ist. Deterministische Verfahren finden zumeist nur lokale Lösungen, wobei stochastische Verfahren dieses Problem überwinden können und oft zu diesem Zweck eingesetzt werden (Mahnken, 1998). Auch gemischte Verfahren unter Verwendung von deterministischen sowie stochastischen Verfahren kommen in der mathematischen Optimierung ebenfalls zum Einsatz.

Für die nachfolgenden Untersuchungen ist es zweckmäßig, nur die Optimierungsverfahren näher zu erläutern, welche bei der eigens behandelten Problemstellung – der Minimierung einer nichtlinearen Fehlerquadratsumme wie in Gl. (2.9) – verwendet werden.

Demgemäß wird genauer auf deterministische Optimierungsverfahren für unrestringierte und restringierte nichtlineare Problemstellungen eingegangen. Als Lösungsmethode für ein unrestringiertes Optimierungsproblem im Sinne der kleinsten Abstandsquadrate bietet sich z.B. das Newton-Verfahren an.

Das Newton-Verfahren ist eine iterative Methode zur Lösung von nichtlinearen Gleichungssystemen, welches ebenfalls zur Berechnung von Nullstellen verwendet wird. Angewandt auf das Nullstellenproblem in Gl. (2.18) kann für einen Startwert $\boldsymbol{\kappa}_0 \in \mathbb{R}^n$ iterativ eine verbesserte k -te Näherung $\boldsymbol{\kappa}_k$ bestimmt werden, indem die Funktion für den Gradienten in Gl. (2.19) durch ein Taylor-Polynom ersten Grades um den Punkt $\boldsymbol{\kappa}_k$ ersetzt wird (vgl. z.B. Reinhardt et al., 2013):

$$\nabla f(\boldsymbol{\kappa}_k) + \mathbf{H}_f(\boldsymbol{\kappa}_k)(\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}_k) = 0 \quad (2.23a)$$

Der neue Parametervektor $\boldsymbol{\kappa}_{k+1}$ ergibt sich dann durch Umstellung der Gl. (2.23a) zu:

$$\boldsymbol{\kappa}_{k+1} = \boldsymbol{\kappa}_k - [\mathbf{H}_f(\boldsymbol{\kappa}_k)]^{-1} \nabla f(\boldsymbol{\kappa}_k) \quad (2.23b)$$

In Gl. (2.23b) wird vorausgesetzt, dass die Hesse-Matrix nicht singulär ist und somit die Inverse der Hesse-Matrix gebildet werden kann. Die Lösung in Gl. (2.23b) entspricht noch nicht dem Lösungsvektor, der das gesuchte Minimum der Optimierungsaufgabe darstellt, sondern die Lösung muss durch einen Iterationsprozess iterativ angenähert werden (Reinhardt et al., 2013).

Der Iterationsprozess – wie in dem Programmcode 1 (unten) dargestellt – muss durch sinnvolle Abbruchkriterien eingeschränkt werden, was jedoch Erfahrungen im Umgang mit den Optimierungsverfahren voraussetzt (Benker, 2003). Durch Anwendung des Newton-Verfahrens auf das Optimierungsproblem wird ein System von nichtlinearen Gleichungen auf eine Folge von linearen Gleichungssystemen reduziert (Ahrendts und Baehr, 1979a).

Programmcode 1: Newton-Verfahren für Optimierungsprobleme (Pseudo-Code)

```

Gegeben: Startwert  $\boldsymbol{\kappa}_0 \in \mathbb{R}^n$ 
for  $k = 0, 1, 2, \dots$  do
  if  $\nabla f(\boldsymbol{\kappa}_k) = \mathbf{0}$  then
    STOP
  else
     $\boldsymbol{\kappa}_{k+1} = \boldsymbol{\kappa}_k - [\mathbf{H}_f(\boldsymbol{\kappa}_k)]^{-1} \nabla f(\boldsymbol{\kappa}_k)$ 
  end if
end for
return  $\boldsymbol{\kappa}_0, \boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2$ 

```

Die quadratische Approximation durch Verwendung von Ableitungen zweiter Ordnung im betrachteten Punkt führt zu einer raschen lokalen Konvergenz des Newton-Verfahrens, wenn sich der Startpunkt $\boldsymbol{\kappa}_0$ im näheren Umfeld des Optimums befindet. Die Konvergenz ist somit nur gewährleistet, wenn der Startpunkt nahe vom gesuchten Optimum gewählt wird. Dies kann insbesondere für praktische Fragestellungen zu Problemen führen, da sich die Startwerte für den iterativen Prozess zumeist nur sehr ungenau abschätzen lassen (Besdo und Ihlemann, 2003). Bei unzureichend bestimmten Startwerten ist die Hesse-Matrix in ungünstigen Fällen nicht mehr positiv definit, sodass die Korrektur der k -ten Näherung in Gl. (2.23b) keine Abstiegsrichtung mehr darstellt.

Besonders die Bestimmung der Hesse-Matrix und deren Inversion in Gl. (2.23b) sind für die praktische Anwendung zumeist sehr aufwendig, vor allem wenn die Hesse-Matrix schlecht konditioniert ist (Finsterle, 1993; Mahnken, 1998). Um dieses Problem zu überwinden, gibt es jedoch mit dem Gauß-Newton-Verfahren und dem Levenberg-Marquardt-Verfahren zwei populäre Algorithmen, die die Hesse-Matrix lediglich approximieren und somit nicht mehr die aufwendig zu beschaffenden Ableitungen zweiter Ordnung benötigt werden (Finsterle, 1993).

Bei dem Gauß-Newton-Verfahren wird die Hesse-Matrix durch die Jacobimatrix der Zielfunktion $f(\boldsymbol{\kappa})$ – also mit Ableitungen erster Ordnung – angenähert (Mahnken, 1998):

$$\mathbf{H}_f^{\text{GN}}(\boldsymbol{\kappa}_k) \approx \mathbf{J}(\boldsymbol{\kappa}_k)^T \mathbf{J}(\boldsymbol{\kappa}_k) \quad (2.24)$$

Durch die Anwendung des Gauß-Newton-Verfahrens werden nicht mehr die Ableitungen zweiter Ordnung benötigt und die Bestimmung der approximierten Hesse-Matrix ist dadurch deutlich einfacher (Besdo und Ihlemann, 2003). Hinsichtlich der Konvergenz ist eine Approximation getreu dem Gauß-Newton-Verfahren jedoch nur unter Verwendung von Startwerten in der Nähe des Optimums empfehlenswert.

Um das Problem des Auffindens eines geeigneten Startwerts zu überwinden, führt das Levenberg-Marquardt-Verfahren im Gegensatz zu Gl. (2.24) einen zusätzlichen Term ein, bestehend aus dem Regelungsparameter bzw. Dämpfungsparameter $\lambda^{\text{LM}} > 0$ und der Identitätsmatrix \mathbf{I} :

$$\mathbf{H}_f^{\text{LM}}(\boldsymbol{\kappa}_k) \approx \mathbf{J}(\boldsymbol{\kappa}_k)^T \mathbf{J}(\boldsymbol{\kappa}_k) + \lambda^{\text{LM}} \mathbf{I} \quad (2.25)$$

Durch Einführung dieser Erweiterung ist das Levenberg-Marquardt-Verfahren in Gl. (2.25) deutlich robuster und stabiler gegenüber der Wahl des Startwertes. Durch die Einführung des Dämpfungsparameters lässt sich die Konvergenz zu einem Minimum von $f(\boldsymbol{\kappa})$ forcieren (Ahrendts und Baehr, 1979a).

Der Dämpfungsparameter λ^{LM} muss geeignet gewählt werden und unterliegt entsprechenden Beschränkungen wie beispielsweise der Konvergenzgeschwindigkeit, sodass dieser weder zu klein noch zu groß angesetzt werden darf (Ahrendts und Baehr, 1979a; Mahnken, 1998). Viele deterministische Optimierungsverfahren funktionieren auf die zuvor beschriebene Weise und werden entsprechend der zu lösenden Optimierungsaufgaben angepasst.

Wünsch (2017) bietet eine ausführliche Übersicht sowie eine Bewertung hinsichtlich der Kriterien Einfachheit, Zuverlässigkeit und Effizienz gängiger deterministischer und stochastischer Optimierungsverfahren. Für weitergehende Details sind die folgenden wissenschaftlichen Veröffentlichungen wie z.B. Nocedal und Wright (1999), Geiger und Kanzow (1999), Meier (2009), Schumacher (2013), Stein (2018) oder Yin et al. (2018) zu empfehlen.

Zur Lösung eines *restringierten* Optimierungsproblems sind Optimierungsverfahren notwendig, welche den Einbezug der Nebenbedingungen ermöglichen und die Optimierungsaufgabe möglichst effizient lösen. Es gibt zur Lösung von restringierten Optimierungsproblemen eine Vielzahl von unterschiedlichen Optimierungsverfahren wie z.B. das Innere Punkte Verfahren, das Penalty- und Barriere Verfahren sowie das SQP Verfahren (vgl. z.B. Jarre und Stoer, 2004).

Das zurzeit populärste und effizienteste Optimierungsverfahren zur numerischen Lösung von nichtlinearen Optimierungsproblemen mit Nebenbedingungen ist das *SQP*-Verfahren (engl. *Sequential Quadratic Programming*) (Reinhardt et al., 2013; Ulbrich und Ulbrich, 2012). Dieses Verfahren wird in dieser Arbeit zur Optimierung eingesetzt und wurde bereits bei Kinzler (2011) erfolgreich auf Optimierungsprobleme angewendet. Das SQP-Verfahren gehört zu der Klasse der Newton-Verfahren, wobei hierbei das Newton-Lagrange-Verfahren den Ausgangspunkt bildet (Reinhardt et al., 2013). Die grundlegende Idee bei diesem Verfahren liegt in der quadratischen Annäherung der Lagrange-Funktion und der Linearisierung der Nebenbedingungen. Das Minimum wird dann lokal unter Ansatz einer Schätzung der Startwerte iterativ bestimmt. Ausführliche mathematische Herleitungen und weitere Details zu diesem Verfahren sind u.a. in Jarre und Stoer (2004), Ulbrich und Ulbrich (2012) oder Geffken (2017) zu finden.

2.7 Umgang mit mehrdeutigen und instabilen Lösungen

In Abhängigkeit der Topologie der Zielfunktion besteht die Möglichkeit, dass im Untersuchungsbereich mehrere lokale Minima existieren (vgl. z.B. Pieper, 2017). In Abb. 2.8 sind schematisch unterschiedliche Konstellationen für mehrere lokale Minima hinsichtlich einer eindimensionalen Zielfunktion exemplarisch dargestellt.

Der optimale Schätzwert der Parameter ist gleichbedeutend mit dem globalen Minimum der Zielfunktion (vgl. Punkt d in Abb. 2.8i). Bei den zuvor vorgestellten deterministischen Optimierungsverfahren ist nie sichergestellt, ob die Lösung für die Minimierungsaufgabe einem globalen oder doch nur einem lokalen Minimum entspricht, da die vorgestellten Optimierungsverfahren nur zur Bestimmung von lokalen Minima geeignet sind (Wünsch, 2017).

In Bezug auf Abb. 2.8i bedeutet dies, dass je nach Startwert z.B. links oder rechts vom Punkt b unter Verwendung eines deterministischen Optimierungsverfahrens unterschiedliche lokale Minima im Punkt a und c bestimmt werden. Die beiden Lösungen entsprechen dann jedoch nur einem lokalen Minimum, da sich das globale Minimum im Punkt d befindet.

Aus diesem Befund lässt sich eine heuristische Strategie ableiten, um für eine Zielfunktion wie in Abb. 2.8i das globale Minimum zu bestimmen. Unter Variation der Startwerte für das deterministische Optimierungsverfahren besteht das Ziel darin, solange verschiedene lokale Minima zu ermitteln, bis das globale Minimum vorliegt (Mahnken, 1998).

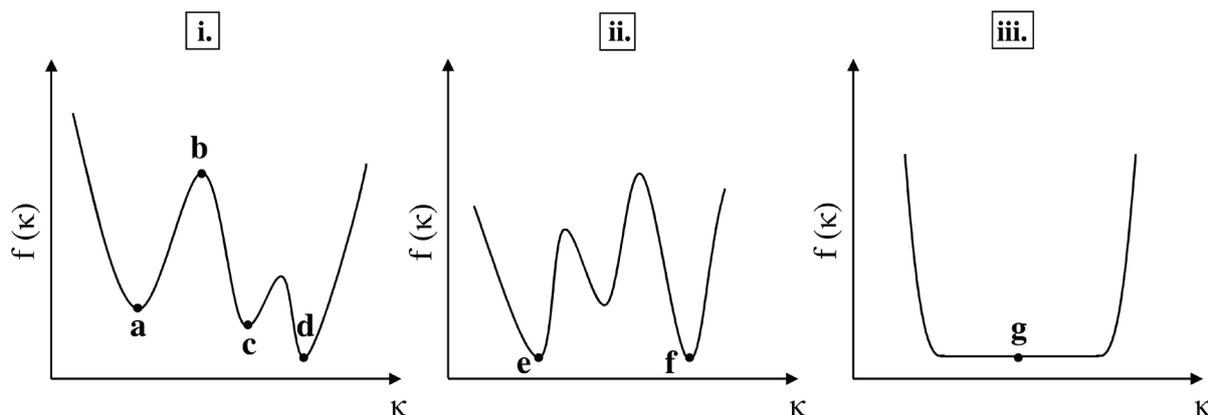


Abbildung 2.8: Schematische Darstellung mehrere lokale Minima: eindeutiges globales Minimum (Punkt d), mehrere globale Minima (Punkt e/f) und nichtstrenge globale Minima

Optimierungsverfahren zur Bestimmung des globalen Minimums – vor allem für komplexe Modelle – sind sehr aufwendig, da damit eine sehr große Anzahl an Modellauswertungen einhergeht, um mit Sicherheit ein globales Minimum zu finden. Die Bereitstellung von Optimierungsverfahren zum Auffinden von globalen Minima ist nach wie vor ein großes Problem der mathematischen Optimierung, da sich die dazu benötigte Theorie als auch die numerische Umsetzung als sehr komplex erweisen.

Bei einer deterministischen globalen Suche hätte man bei n -Parametern und einer vorgegebenen Genauigkeit von k in den Parametern 10^{kn} Gitterpunkte, welche auf ein globales Minimum hin untersucht werden müssten. Demzufolge ergibt sich z.B. für fünf unbekannte Parameter mit $n = 5$ und einer Genauigkeit von $k = 1\%$ eine Anzahl von 10^{10} Modellauswertungen. Von diesem Standpunkt betrachtet, ist eine deterministische globale Suche ohne weitere Maßnahmen nicht zu empfehlen.

Um dieses Problem zu überwinden, werden oftmals stochastische oder hybride Verfahren eingesetzt. Aber auch hier ist der Rechenaufwand infolge der hohen Anzahl an Modellauswertungen besonders bei komplexen Modellen als sehr hoch einzustufen (Mahnken, 1998). Es bleibt an dieser Stelle festzuhalten, dass bei der Modellierung der Optimierungsaufgabe immer genau abzuwägen ist, ob das jeweilige Verfahren in Bezug auf die Verlässlichkeit der Lösung und den Rechenaufwand als sinnvoll einzustufen ist.

Ein weiteres Problem zur Lösung der Optimierungsaufgabe ist die Mehrdeutigkeit einer Lösung. In Bezug auf eine eindimensionale Zielfunktion sind denkbare Konstellationen in der Abb. 2.8ii u. Abb. 2.8iii in den Punkte e, f und g dargestellt ist. Hierbei existieren für unterschiedliche Lösungen der Minimierungsaufgabe globale Minima.

Im Punkt g liegen nicht nur zwei globale Minima vor, wie in den Punkten e und f, sondern eine große Anzahl an zusammenhängenden Minima mit demselben Zielfunktionswert. Diese zwei exemplarischen Fälle zeigen, dass es auch Zielfunktionen gibt, die eine mehrdeutige Lösung aufweisen. Gemäß Abb. 2.9 kann eine Unterscheidung zwischen einer *stabilen*, *instabilen* und *mehrdeutigen* Lösung erfolgen. Zur Veranschaulichung der drei Fälle sind in Abb. 2.9 zwei unterschiedliche Punkte im Bereich des Minimums und rechts davon dargestellt. Bei der stabilen Lösung ist der Funktionswert $f(\kappa_2^*)$ größer als der Funktionswert $f(\kappa_1^*)$ im Minimum.

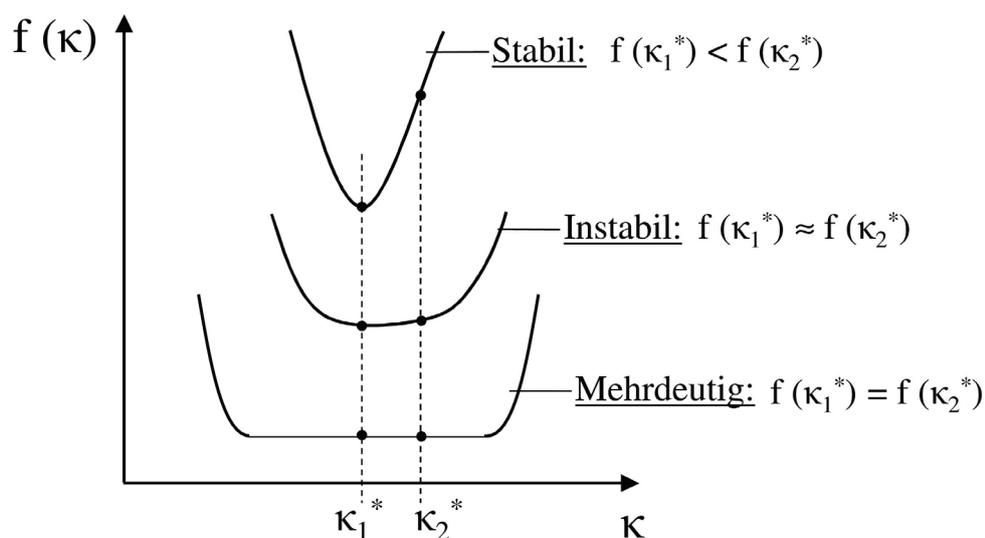


Abbildung 2.9: Schematische Darstellung stabile, instabile und mehrdeutige Lösung nach Mahnken (1998)

Dahingegen sind die Funktionswerte bei einer instabilen Funktion näherungsweise identisch und unterscheiden sich nur geringfügig. Für eine instabile Funktion ist es anhand der zuvor beschriebenen Optimierungsverfahren ggfs. schwer in diesem flachen Bereich bis zu dem Minimum im Punkt κ_1^* zu gelangen. In diesem Fall sind robuste Optimierungsverfahren notwendig, die es trotz der flachen Zielfunktionstopologie ermöglichen, das Optimum zu bestimmen.

Die Ursache für eine solche instabile Zielfunktion kann beispielsweise eine schwache Abhängigkeit der Zielfunktion von den Parametern in Kombination mit einer großen Messabweichung sein. Ein Beispiel für einen gestörten bzw. ungestörten Zielfunktionsverlauf ist in Abb. 2.10 dargestellt (vgl. Wendland, 2011). Infolge von Messabweichungen entwickelt sich die stabile Zielfunktionstopologie in Abb. 2.10a mit einem Minimum, in eine Zielfunktionstopologie mit mehreren lokalen Minima in Abb. 2.10b. Grundsätzlich gilt in diesem Zusammenhang, dass stabile Zielfunktionen hinsichtlich der numerischen Optimierung deutlich günstiger sind als instabile Zielfunktionen. Ob eine Zielfunktion stabil oder instabil ist, lässt sich meistens für nichtlineare Abhängigkeiten mathematisch schwer nachweisen (Mahnken, 1998).

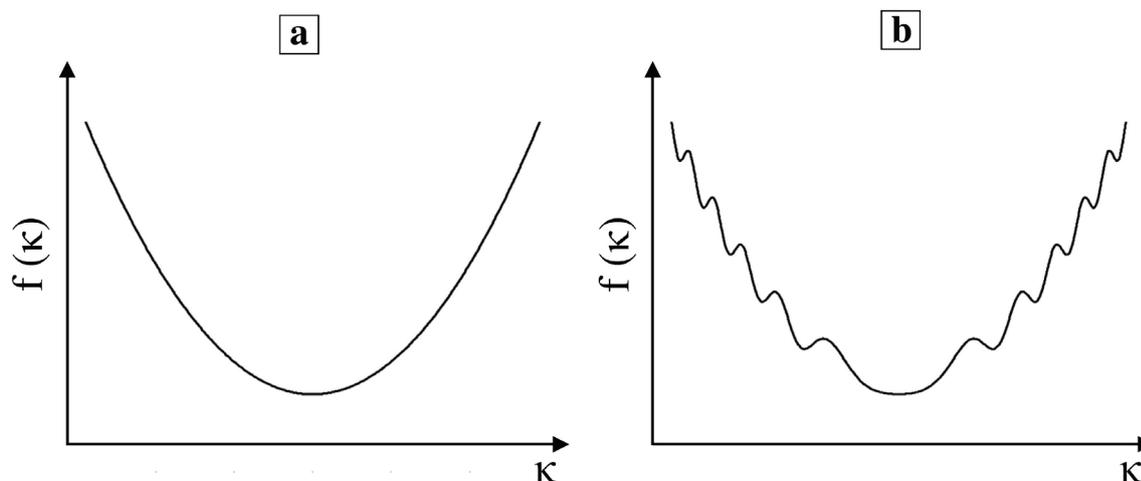


Abbildung 2.10: Ursprünglicher und gestörter Funktionsverlauf einer eindimensionalen Zielfunktion $f(\kappa)$ nach Wendland (2011)

Es besteht jedoch die Möglichkeit die Stabilität der Lösung zu untersuchen, indem die Messdaten mit einem künstlichen Rauschen überlagert werden und der Einfluss auf die Lösung untersucht wird (Mahnken, 1998; Perau und Potthoff, 2002; Dahmen und Reusken, 2006). Oftmals eignet sich in diesem Zusammenhang auch die Untersuchung anhand einer Sensitivitätsanalyse (Benker, 2003). Zudem kann eine Analyse der Eigenwerte bzw. Konditionszahl der Hesse-Matrix – oder infolge des geringeren Berechnungsaufwands anhand der Gauss-Newton-Matrix – Aufschluss über die Stabilität geben (Mahnken, 1998). Wenn die Hesse-Matrix schlecht konditioniert ist, sind die Lösungen oft instabil (Mahnken, 1998). Zudem kann eine Messabweichung dazu führen, dass sich eine gutartige Funktion wie in Abb. 2.10a zu einer Funktion mit mehreren Minima in Abb. 2.10b entwickelt (Wendland, 2011). Hierbei bieten sich zur Lösung auch Regularisierungsmethoden an (Mahnken, 1998; Hofmann, 1999).

Eine mehrdeutige Lösung bedeutet, dass ein zusammenhängendes Minimum für die beiden Punkte vorliegt, sodass die Funktionswerte in beiden Punkten identisch sind und $f(\kappa_1^*) = f(\kappa_2^*)$ gilt. Für die beiden Punkte wird die Zielfunktion minimal, was in Bezug auf eine Parameterschätzung zu einem Widerspruch führen würde. Eine Ursache für eine mehrdeutige Lösung ist z.B. die Unvollständigkeit der Messdaten in Bezug auf die gesuchten Parameter (Mahnken, 1998). Für eine eindeutige Bestimmung der Parameter wären dann beispielsweise noch weitere Messungen unterschiedlicher Feldgrößen notwendig.

2.8 Sensitivitätsanalyse

Wie zuvor erwähnt werden bei den zuvor vorgestellten Optimierungsverfahren die Ableitungen der Zielfunktion $f(\boldsymbol{\kappa})$ nach den Parametern $\boldsymbol{\kappa}$ benötigt. Hierbei wird untersucht, inwiefern sich die Zielfunktion unter einer infinitesimalen Änderung der Parameter verändert. Diese mathematische Operation wird auch als Sensitivitätsanalyse bezeichnet (vgl. z.B. Schwarz, 2001).

Durch die Sensitivitätsanalyse kann die Parameterempfindlichkeit einer Funktion untersucht werden. Dies kann u.a. dazu dienen, das Verständnis des Einflusses der Parameter auf die Modellantwort zu schärfen. Somit ist eine quantitative und qualitative Aussage über die Veränderung der Modellantwort möglich und es können Parameter identifiziert werden, welche im Vorfeld möglichst genau zu bestimmen sind. Nach Benker (2003) ist die Sensitivitätsanalyse Teil der Stabilitätsbetrachtungen der mathematischen Optimierung. Die optimale Lösung der Optimierungsaufgabe wird im Rahmen der Sensitivitätsanalyse auf Störungen (z.B. Messabweichungen oder Modellfehler) der Zielfunktion sowie ggfs. der Nebenbedingungen untersucht.

Die Sensitivitätsanalyse beansprucht einen Großteil der Rechenzeit, sodass Schwarz (2001) in diesem Zusammenhang empfiehlt, möglichst exakte und effiziente Methoden zu verwenden. Dabei ist die Rechenzeit zudem abhängig von der Anzahl der Parameter und der auszuwertenden Funktionen. Somit stellt sich oftmals die Frage, ob eine Optimierungsaufgabe überhaupt in einer vertretbaren Zeitspanne zu einer Lösung gelangt.

Es liegen eine Vielzahl von unterschiedlichen Methoden zur Sensitivitätsanalyse vor, welche u.a. ausführlich in Schwarz (2001), Saltelli (2007), Hill und Tiedeman (2007), Schanz und Meier (2008), Siebertz et al. (2010) oder Harzheim (2014) vorgestellt werden. Grundsätzlich wird bei den Verfahren zwischen einer lokalen und globalen Sensitivitätsanalyse unterschieden.

Bei der lokalen Sensitivitätsanalyse wird lediglich ein Parameter variiert und die Auswirkung auf den Modelloutput untersucht. Alle anderen Parameter sind im Zuge der lokalen Sensitivitätsanalyse fixiert, sodass diese Prozedur für alle Parameter separat durchgeführt werden muss. Diese Methode ist relativ einfach durchzuführen, jedoch relativ aufwendig und die Interaktion zwischen den einzelnen Parametern kann damit nicht quantifiziert werden (Harzheim, 2014).

Mit der globalen Sensitivitätsanalyse ist es dahingegen möglich, die Parameterinteraktion zu bestimmen, indem alle Parameter gleichzeitig variiert werden und der Modelloutput entsprechend ausgewertet wird. Es sind z.B. mit einer Monte-Carlo Simulation eine Vielzahl von unterschiedlichen Parameterkonstellationen untersuchbar, sodass im Gegensatz zur lokalen Sensitivitätsanalyse der Einfluss und die Wechselwirkungen zwischen den jeweiligen Parametern genauer abgeschätzt werden kann. Jedoch ist dabei zu berücksichtigen, dass der Aufwand einer globalen Sensitivitätsanalyse um ein Vielfaches höher ist als bei der lokalen Betrachtung (vgl. z.B. Saltelli, 2007).

Wenn analytische Gleichungen vorliegen, welche mindestens einmal stetig differenzierbar sind, können die Ableitungen einfach analytisch bestimmt werden. Ist die numerische Lösung des Optimierungsproblems lediglich mittels der Finite-Elemente-Methode möglich, müssen die Ableitungen anhand von Näherungsverfahren wie z.B. die Approximation der Ableitung anhand von Finiten Differenzen zurückgegriffen werden. Einen Überblick zu verschiedenen Lösungsansätzen ist z.B. in Schwarz (2001) oder Harzheim (2014) zu finden.

Die Grundidee der numerischen Ableitung einer stetig differenzierbaren Funktion $f(\kappa)$ in einem Punkt κ ist es, die Ableitung über finite Differenzen mit $\Delta\kappa > 0$ zu approximieren:

$$\frac{\partial f(\kappa)}{\partial \kappa} = \lim_{\Delta\kappa \rightarrow 0} \frac{f(\kappa + \Delta\kappa) - f(\kappa)}{\Delta\kappa} \approx \frac{\Delta f(\kappa)}{\Delta\kappa} \quad (2.26)$$

Für $\Delta\kappa = 0$ geht die numerische Ableitung in Gl. (2.26) – unter Vernachlässigung von Rundungsfehlern – in die exakte Ableitung über. Im Gegensatz zur analytischen Ableitung liegt hierbei nur die Ableitung in einem vorgegebenen Punkt κ vor und keine Funktion der Ableitung in Abhängigkeit von κ . Dabei kann die numerische Ableitung über die Vorwärts- bzw. Rückwärtsdifferenz und die zentrale Differenzenformel bestimmt werden. In der OPTIMIZATION Toolbox von MATLAB ist die Auswahl der Vorwärtsdifferenz und der zentralen Differenz möglich, sodass diese beiden Ansätze kurz vorgestellt werden (Angermann, 2014).

Für die Vorwärtsdifferenz kann die folgende Differenzenformel definiert werden:

$$\frac{\Delta f(\kappa)}{\Delta\kappa} = \frac{f(\kappa + \Delta\kappa) - f(\kappa)}{\Delta\kappa} \quad (2.27)$$

Mit dieser Näherung wird die Ableitung von Polynomen vom Grade eins exakt approximiert. Wenn eine exaktere Approximation erforderlich ist, können mittels der zentralen Differenzenformel Polynome bis zum Grad zwei exakt differenziert werden (Munz und Westermann, 2006):

$$\frac{\Delta f(\kappa)}{\Delta\kappa} = \frac{1}{2} \frac{f(\kappa + \Delta\kappa) - f(\kappa - \Delta\kappa)}{\Delta\kappa} \quad (2.28)$$

Da die Auswertung einer FEM Berechnung sehr rechenintensiv ist, werden die numerischen Ableitungen zumeist mit der Vorwärtsdifferenz berechnet, da nur eine weitere Funktionsauswertung an der Stelle $\kappa + \Delta\kappa$ durchgeführt werden muss und nicht zwei zusätzliche wie bei dem zentralen Differenzenquotienten (Harzheim, 2014).

Anhand der Differenzenformeln ist ersichtlich, dass zur Bestimmung der numerischen Ableitung lediglich die Funktion an vorgegebenen Stellen auszuwerten ist. Der numerische Aufwand hängt somit unmittelbar von der Anzahl der Parameter ab (Schwarz, 2001). Es werden neben

der Funktionsauswertung im Punkt κ noch weitere n Funktionsauswertungen notwendig, sodass insgesamt $n+1$ Funktionsauswertungen (FEM-Berechnungen) durchgeführt werden müssen.

Wenn ein Optimierungsproblem mit vier Parametern vorliegt, welches in 20 Iterationsschritten numerisch gelöst werden kann, bedeutet dies, dass insgesamt 100 Funktionsauswertungen mit der FEM notwendig sind, um das Optimierungsproblem zu lösen (Harzheim, 2014). Je nachdem wie komplex die numerische Simulation ist, kann der Berechnungsaufwand demgemäß unverhältnismäßig groß werden.

Ein weiteres Problem bei der numerischen Ableitung ist die Wahl der Schrittweite $\Delta\kappa$, da bei einer ungeschickten Wahl die Approximation unbrauchbar werden kann. Dieses numerische Problem wird daher als *Schrittweitendilemma* bezeichnet, da keine allgemeingültige Theorie für die zutreffende Wahl der Schrittweite vorliegt (Schwarz, 2001). Zudem ist zu beachten, dass die numerische Ableitung bei stark oszillierenden Systemantworten ebenfalls zu sehr ungenauen Ergebnissen führen kann (Harzheim, 2014).

Aus den zuvor genannten Schwierigkeiten empfiehlt Harzheim (2014) die numerische Differentiation nur anzuwenden, wenn analytische oder semi-analytische Verfahren nicht möglich sind. Auch wenn die numerischen Verfahren durchaus qualitativ befriedigende Ergebnisse liefern, sollten aufgrund des numerischen Aufwands analytische Verfahren vorgezogen werden (Schwarz, 2001; Braun, 2015).

3 Grundwasserströmung bei Baugruben

3.1 Beschreibung der Problemstellung und erforderliche Nachweise

Für eine Baugrube, die tief ins Grundwasser einbindet, muss die Wirkung des Grundwassers auf die Verbauwände und den Baugrund berücksichtigt werden (vgl. z.B. Kolymbas, 2016). Wie in Abb. 3.1 dargestellt, gibt es unterschiedliche Möglichkeiten der Wasserhaltung, um das Grundwasser während der Bautätigkeiten aus der Baugrube fernzuhalten. Eine Grundwasserhaltung führt zu erheblichen Mehrkosten und zusätzlichen Risiken, welche im Rahmen der Planung zu berücksichtigen sind (Schmidt, 1996).

In Abhängigkeit der gewählten Maßnahme zur Wasserhaltung (vgl. Abb. 3.1) führt dies jeweils zu einer unterschiedlichen Belastung der Verbaukonstruktion und des Baugrunds (vgl. z.B. EAB, 2012). Drei verschiedene Maßnahmen zur Wasserhaltung sind in Abb. 3.1 gemäß EAB (2012) dargestellt. Es besteht die Möglichkeit das Grundwasser im Umfeld der Baugrube großflächig abzusenken (Abb. 3.1a), die Verbauwände in eine schwächer durchlässige Schicht einzubinden (Abb. 3.1b) oder das Grundwasser durch eine dichte Schicht unterhalb der Baugrubensohle am Strömen zu hindern (Abb. 3.1c).

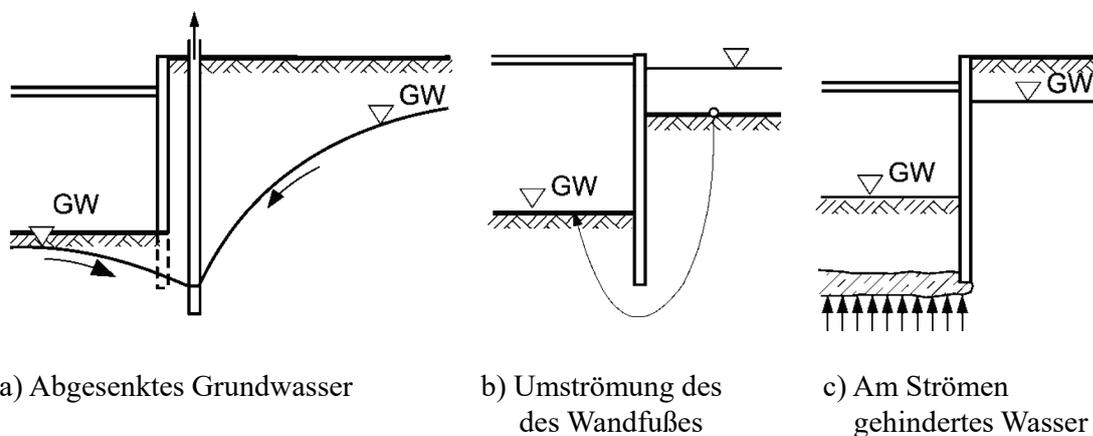


Abbildung 3.1: Wirkungen des Wassers auf Baugrubenkonstruktionen nach EAB (2012)

Im Rahmen dieser Arbeit liegt der Fokus auf Baugruben, wo es wie in Abb. 3.1b infolge der Einbindung der Verbauwände in eine schwächer durchlässige Schicht zu einer Umströmung des Wandfußes kommt. Die Maßnahme wird zum Beispiel angewendet, wenn stark durchlässige Kiese und Sande des Quartärs von schwachdurchlässigen Feinsanden des Tertiärs unterlagert werden (Voigt, 2014; Katzenbach et al., 2011). Sie wird auch als Restwasserhaltung bezeichnet, da die schwächer durchlässige Schicht den Grundwasserzufluss erheblich reduziert und lediglich das anfallende Restwasser mittels Pumpen aus den quartären Kiesen und Sanden innerhalb der Baugrube abgeführt wird (Katzenbach et al., 2011).

Aufgrund der unterschiedlichen Standrohrspiegelhöhen inner- und außerhalb der Baugrube in Abb. 3.1b findet ein Potenzialabbau statt, sodass neben dem Auftrieb zusätzliche Strömungskräfte auf das Korngerüst wirken (Gudehus, 1981). Insbesondere bei der Umströmung der Verbauwände sind nach oben gerichtete Strömungskräfte zu berücksichtigen (EAB, 2012). Da diese Strömungskräfte unmittelbar auf das Korngerüst einwirken, müssen Nachweise der Sicherheit gegen hydraulisch verursachtes Versagen geführt werden (vgl. z.B. Perau und Meteling, 2017). In Tab. 3.1 sind die in diesem Zusammenhang erforderlichen Nachweise und Berechnungen für eine Baugrube wie in Abb. 3.1b zusammengefasst.

Tabelle 3.1: Erforderliche Nachweise und Berechnungen für eine Baugrube mit Restwasserhaltung tabellarisch aufgeführt nach Perau und Meteling (2017)

	Erforderlicher Nachweis bzw. Berechnung
1.	Nachweis gegen hydraulischen Grundbruch
2.	Ermittlung der geohydraulisch erforderlichen Einbindetiefe einer Wand
3.	Berechnung der Erddruckbelastung (durch Vergrößerung der Wichte gemäß EAB (2012))
4.	Berechnung des Erdwiderstands beim Nachweis gegen Versagen des Erdwiderlagers gemäß EAB (2012)
5.	Hydraulischer Gradient im Bereich des Schichtwechsels zur Untersuchung des hydraulischen Kriteriums gegen innere Erosion gemäß BAW (2011)
6.	Berechnung des Wasserzuflusses in die Baugrube

Auf die einzelnen Punkte in Tab. 3.1 wird nachfolgend nicht genauer eingegangen. In diesem Kontext sind die Grundlagen zur Berechnung und Nachweisführung z.B. in Odenwald und Her-ten (2008) oder Ziegler (2013) dargelegt. Um die Nachweise und Berechnungen in Tab. 3.1 durchführen zu können, müssen hydraulische Gradienten, Strömungskräfte und Wasserdrücke sowohl im Bereich der Verbauwand als auch im näheren Umfeld der Baugrubensohle bestimmt werden. Die Grundlage für all diese Berechnungsgrößen bildet die Lösung des Randwertproblems für die Grundwasserströmung. Nachfolgend wird demgemäß genauer auf die erforderlichen strömungsmechanischen Grundgleichungen, das spezielle Randwertproblem der Strömungsaufgabe und auf die damit verbundenen Lösungsansätze eingegangen.

3.2 Strömungsmechanische Grundgleichungen

Um eine Grundwasserströmung mathematisch beschreiben zu können, werden die folgenden zwei strömungsmechanischen Grundgleichungen benötigt (vgl. z.B. David, 1998):

- DARCY-Gesetz – Bewegungsgleichung (Erhaltung des Impulses)
- Kontinuitätsgleichung – Bilanzgleichung (Erhaltung der Masse)

Wenn zwischen zwei verschiedenen Punkten im Strömungsgebiet eine Potenzialdifferenz vorliegt, strömt das Grundwasser durch die Hohlräume von Locker- und Festgesteinen. Dabei wird zwischen einer *stationären* und *instationären* Grundwasserströmung unterschieden (vgl. z.B. Odenwald et al., 2017).

Bei der *stationären* Grundwasserströmung hängen die Strömungsverhältnisse nur vom Ort nicht von der Zeit ab. Eine Vielzahl von Strömungsproblemen wird in der Praxis unter der Annahme einer stationären Grundwasserströmung behandelt (Odenwald et al., 2017). In Bezug auf die *instationäre* Grundwasserströmung fließt sowohl die Abhängigkeit des Ortes als auch die der Zeit mit ein. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit erfolgt die mathematische Beschreibung der Strömungsvorgänge lediglich auf Basis der *stationären* Grundwasserströmung.

Zur allgemeinen Beschreibung der Grundwasserströmung wird sowohl die Standrohrspiegelhöhe Φ als auch die Filtergeschwindigkeit \mathbf{v} verwendet. Aus physikalischer Sicht entspricht Φ einem Potenzial und \mathbf{v} einem Fluss (Strang, 2010). Im Zusammenhang mit der Grundwasserströmung lassen sich anhand dieser beiden physikalischen Größen alle anderen Feldgrößen unter Verwendung des Potentials Φ bestimmen, wie z.B. hydraulische Gradienten, Porenwasserdrücke und Wasserzuflüsse (Perau und Meteling, 2015).

Das Gesetz von DARCY geht auf den französischen Ingenieur Henry DARCY zurück, welcher im Jahre 1856 eine empirisch ermittelte Gesetzmäßigkeit der Strömungsmechanik anhand von Versuchen ableitete. DARCY fand anhand von Versuchen an Mittel- und Grobsanden heraus, dass die Filtergeschwindigkeit \mathbf{v} in Gl. (3.1a) proportional zu dem hydraulischen Gradienten \mathbf{i} ist, welcher die partiellen Ableitungen des Potentials nach den kartesischen Koordinaten enthält. Das negative Vorzeichen beim hydraulischen Gradienten \mathbf{i} deutet an, dass es sich hierbei um ein hydraulisches Gefälle handelt (vgl. z.B. Odenwald et al., 2017).

Um eine Grundwasserströmung mathematisch zu beschreiben, ist es zweckmäßig, das DARCY-Gesetz für den dreidimensionalen Strömungszustand zu formulieren, um die realen Strömungsverhältnisse näherungsweise abzubilden (Odenwald et al., 2017). Für den dreidimensionalen Fall ergibt sich für das DARCY-Gesetz folgende mathematische Beschreibung:

$$\mathbf{v} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{i} \quad (3.1a)$$

mit:

$$\mathbf{i} = -\text{grad } \Phi \quad (3.1b)$$

Sowohl die Filtergeschwindigkeit \mathbf{v} als auch der hydraulische Gradient \mathbf{i} in Gl. (3.1b) sind jeweils gerichtete Größen. Die Durchlässigkeit \mathbf{K} wird über einen symmetrischen Tensor 2. Stufe beschrieben und dessen Einträge geben die Eigenschaften des porösen Mediums in Bezug auf die Durchlässigkeit eines Bodens gegenüber Wasser wieder (Perau und Meteling, 2015).

Die Filtergeschwindigkeit in Gl. (3.1a) ist nicht mit der realen Geschwindigkeit des Wassers im Porenraum gleichzusetzen, da diese für reale Strömungsvorgänge deutlich höher ist (Odenwald et al., 2017). Die lineare Bewegungsgleichung in Gl. (3.1a) ist nur für laminare Strömungen gültig und somit auf bestimmte Lockergesteine begrenzt (Busch et al., 1993). Für sehr grobkörnige oder sehr feinkörnige Lockergesteine gilt der lineare Zusammenhang zwischen der Filtergeschwindigkeit und dem Potenzialgefälle nicht mehr, da die zuvor unterstellte laminare Strömung bei großen Filtergeschwindigkeiten in eine turbulente Strömung übergeht (Odenwald et al., 2017; David, 1998). Mit ausreichender Genauigkeit kann jedoch für eine Vielzahl von geotechnischen Problemstellungen die Gültigkeit der Gl. (3.1a) unterstellt werden.

Die Kontinuitätsgleichung für inkompressible Fluide basiert auf dem physikalischen Gesetz der Massenerhaltung und bilanziert die Massen an einem infinitesimalen Volumenelement. Unter Verwendung der Filtergeschwindigkeit \mathbf{v} gemäß Gl. (3.1a) kann die Kontinuitätsgleichung für ein quellenfreies Problem und eine konstante Dichte des Grundwassers folgendermaßen formuliert werden:

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0 \quad (3.2)$$

Gemäß Gl. (3.2) muss für ein inkompressibles Fluid die Divergenz eines Geschwindigkeitsfeldes \mathbf{v} an jedem Ort gleich Null sein. Somit steht die einfließende Wassermenge in dem infinitesimalen Kontrollvolumen mit der ausfließenden Wassermenge im Gleichgewicht.

3.3 Formulierung der Strömungsaufgabe als Randwertproblem

Um die stationäre Strömungsgleichung bzw. die Potenzialströmung zu beschreiben, wird das DARCY-Gesetz in Gl. (3.1a) mit der Kontinuitätsgleichung Gl. (3.2) verknüpft und es ergibt sich für die Standrohrspiegelhöhe Φ die folgende partielle Differentialgleichung:

$$\operatorname{div}(\mathbf{K} \cdot \operatorname{grad} \Phi) = 0 \quad (3.3)$$

Zum besseren Verständnis des Randwertproblems in Gl. (3.3) wurde in Perau und Meteling (2015) die Gl. (3.3) unter Anwendung der Produktregel für die Ableitungen in Komponentenschreibweise umformuliert:

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial k_{ij}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(k_{ij} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) \right) = 0 \quad (3.4)$$

Der erste Term der beiden Doppelsummen in Gl. (3.4) beschreibt eine örtlich veränderliche Durchlässigkeit, welche in der Geotechnik zumeist vernachlässigt wird, sodass die erste Doppelsumme somit gleich null ist und entfällt. Wenn die Durchlässigkeitshauptachsen an den Ach-

sen des Koordinatensystems ausgerichtet sind, weist der Durchlässigkeitstensor \mathbf{K} eine Diagonalstruktur auf, wobei für diesen Fall nur die Hauptdiagonalen in \mathbf{K} besetzt sind und für $i \neq j$ dann $k_{ij} = 0$ gilt (Perau und Meteling, 2015; Haque, 2015). Nachfolgend wird vorausgesetzt, dass die Durchlässigkeitshauptachsen an den Achsen des Koordinatensystems ausgerichtet sind.

In Hinblick auf eine ebene Strömung in der x_2 - x_3 -Ebene kann unter Verwendung der folgenden Bezeichnungen für die horizontale und vertikale Durchlässigkeit $k_{11} = k_{22} = k_h$ sowie $k_{33} = k_v$ als Spezialfall die folgende quasi-harmonische DGL formuliert werden:

$$k_h \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + k_v \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} = 0 \quad (3.5)$$

Die Gl. (3.5) entspricht einer homogenen linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Lösung die Standrohrspiegelhöhe Φ in einem definierten Strömungsgebiet ohne freie Oberfläche beschreibt (vgl. z.B. Perau und Meteling, 2015). Für den Sonderfall einer Isotropie der Durchlässigkeit, in der $k_h = k_v$ gilt, resultiert aus dem Randwertproblem in Gl. (3.5) die bekannte LAPLACE'sche DGL mit der in der Physik u.a. auch Problemstellungen der Wärmeleitung berechnet werden (Schmidt et al., 2014; Perau und Meteling, 2015; Kolymbas, 2016). Die Beschreibung der ebenen Grundwasserströmung setzt die Inkompressibilität des Wassers, ein starres Korngefüge und ein quellen- und senkenfreies Strömungsgebiet voraus.

Die elliptische partielle DGL in Gl. (3.5) kann unter Vorgabe eines Modellgebiets mit entsprechenden Randbedingungen und Kenngrößen eindeutig gelöst werden (Perau und Meteling, 2015). Zur Lösung des Randwertproblems in Gl. (3.5) müssen auf den Modellrändern Randbedingungen vorgegeben werden. Für Baugruben im Grundwasser sind im Regelfall die folgenden zwei Arten von Randbedingungen maßgeblich (vgl. z.B. Odenwald et al., 2017):

- DIRICHLET-Randbedingung, z.B. Vorgabe eines Potentials mit $\Phi = \text{const}$.
- NEUMANN-Randbedingung, z.B. Zufluss bzw. Abfluss senkrecht zum Modellrand

Für das zugrunde gelegte geohydraulische Modell für Baugruben mit Restwasserhaltung wird der äußere Modellrand unter Ansatz einer NEUMANN-Randbedingung zumeist als undurchlässig mit $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ modelliert, sodass im Gegensatz zu den realen Verhältnissen vom äußeren Rand kein Zufluss erfolgt. Aus den Untersuchungen von Perau und Meteling (2015) geht hervor, dass das Modellgebiet zur Lösung von Gl. (3.5) hinreichend groß zu wählen ist. Dadurch soll ein Einfluss der gewählten Randbedingungen auf die Lösung minimiert werden. Ausführliche Darlegungen hinsichtlich der Randbedingungen sind z.B. in David (1998) oder Odenwald et al. (2017) zu finden.

3.4 Kenngrößen

Neben dem Modellgebiet und den Randbedingungen müssen gemäß Gl. 3.5 zusätzlich die Durchlässigkeitsbeiwerte des Baugrunds bekannt sein. In Tab. 3.2 sind Erfahrungswerte zur Abschätzung der Durchlässigkeitsbeiwerte in Abhängigkeit der jeweiligen Bodenart dargestellt (Kolymbas, 2016). Wie der Tab. 3.2 zu entnehmen ist, weisen die Durchlässigkeitsbeiwerte je Bodenart einen sehr großen Schwankungsbereich auf (Lang et al., 2011).

Tabelle 3.2: Erfahrungswerte zur groben Abschätzung der Durchlässigkeitsbeiwerte für verschiedene Bodenarten nach Kolymbas (2016)

Bodenart	k [m/s]	Bereich
Ton, Lehm	$< 10^{-8}$	sehr schwach durchlässig
Schluff; Sand lehmig, schluffig	$10^{-8} - 10^{-6}$	schwach durchlässig
Feinsand, Mittelsand	$10^{-6} - 10^{-4}$	durchlässig
Grobsand, Mittelkies, Feinkies	$10^{-4} - 10^{-2}$	stark durchlässig
Grobkies	$> 10^{-2}$	sehr stark durchlässig

Auch der Feinkornbestand des Grundwasserleiters hat einen entscheidenden Einfluss auf die Durchlässigkeit. Ein weiteres Grundmerkmal ist, dass die Durchlässigkeit sowohl orts- als auch richtungsabhängig sein kann. Oftmals liegt bei natürlichen Grundwasserleitern eine anisotrope Durchlässigkeit vor, wobei die horizontale Durchlässigkeit um den Faktor 2-10 größer als die vertikale Durchlässigkeit ist (Busch et al., 1993; Dörner Fernández, 2005). In Kolymbas (2016) wird für die Anisotropie eine quantitative Größenordnung von 1 bis 100 angegeben.

Zur Bestimmung der Durchlässigkeit werden in der EANG (2014) Felduntersuchungen wie z.B. Probeabsenkungen oder Pumpversuche und/oder Laborversuche empfohlen. Bei den Laborversuchen ist zu beachten, dass die Bodenproben infolge der Entnahme im Feld nicht exakt den natürlichen Bodenzustand sowie die realen geohydraulischen Randbedingungen wiedergeben, sodass sich die im Labor bestimmten Durchlässigkeitsbeiwerte deutlich von der realen Durchlässigkeit des Baugrunds unterscheiden können (EANG, 2014). Wenn Felduntersuchungen oder Laborversuche nicht durchgeführt werden können, ist es zweckmäßig auf Erfahrungswerte oder empirische Gleichungen zurückzugreifen. Eine detaillierte Übersicht zu den unterschiedlichen Verfahren und Methoden zur Bestimmung der Durchlässigkeitsbeiwerte ist z.B. in Schultze und Muhs (1967) oder Odenwald et al. (2017) einzusehen.

3.5 Lösungsansätze

Das Ziel besteht nun darin, an neuralgischen Punkten im Strömungsgebiet das Potenzial Φ und die Filtergeschwindigkeit \mathbf{v} anhand der partiellen Differentialgleichung in Gl. (3.5) zu bestimmen. Für eine Baugrube dessen Verbauwände umströmt werden, erfolgt eine Unterscheidung zwischen *analytischen*, *numerischen* oder *zeichnerischen* Lösungsmethoden (David, 1998; Odenwald et al., 2017). Für spezielle geohydraulische Modelle und Fragestellungen können auch Näherungslösungen in Form von Gleichungen oder Nomogrammen verwendet werden (Schmitz, 1989; Aulbach, 2016; Perau und Meteling, 2016, 2017).

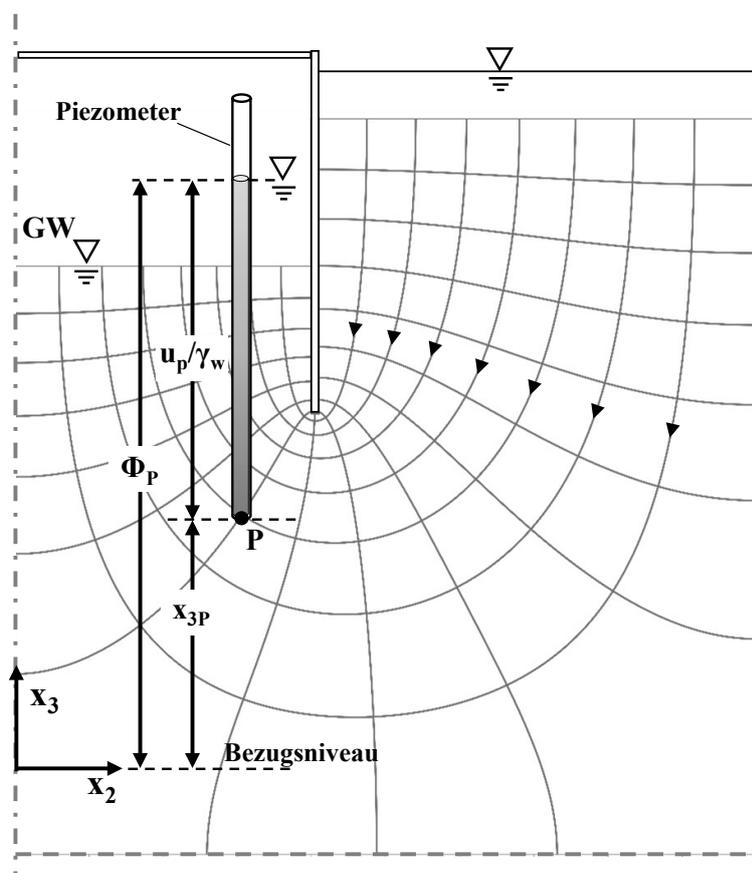


Abbildung 3.2: Strömungsnetz für eine ebene Strömung für das System in Abb. 3.1b unter Annahme einer isotropen Durchlässigkeit ($k_h=k_v$) und Definition der Standrohrspiegelhöhe

Für ein ebenes Strömungsproblem bei einer isotropen Durchlässigkeit ($k_h=k_v$) des Baugrunds lässt sich eine zeichnerische Lösung für das Randwertproblem bekanntermaßen durch eine Kurvenschar von Strömungs- und Potenziellinien wie in Abb. 3.2 konstruieren. Die Potenziellinien stellen Kurven gleicher Standrohrspiegelhöhe dar. Dagegen entsprechen die Stromlinien dem idealisierten Pfad der Wasserteilchen und geben die Flussrichtung – Pfeile in Abb. 3.2 – wieder.

Um ein auswertbares Strömungsnetz aus den Strömungs- und Potenziellinien zu erhalten, ist es erforderlich, dass sich diese unter einem rechten Winkel schneiden und die daraus resultierenden krummlinigen Maschen in guter Näherung einem Quadrat ähneln (Gudehus, 1981). Für die Ränder des Strömungsgebiets in Abb. 3.2 muss zusätzlich angegeben werden, ob es sich hierbei um eine Potenzial- oder Randstromlinie bzw. DIRICHLET- oder NEUMANN-Randbedingung handelt. In Abb. 3.2 sind die oberen Ränder des Bodens Potenziellinien. Alle anderen Ränder, inklusive der Verbauwand, wurden als Randstromlinien idealisiert.

Das Ergebnis einer analytischen Lösung der partiellen DGL besteht aus einer geschlossenen Lösungsfunktion für das Potenzial in einem Punkt im Strömungsgebiet oder den Wasserzufluss zur Baugrube. Eine analytische Lösung der partiellen DGL in Gl. (3.5) für eine umströmte Verbauwand ist für eine "unendlich" große Baugrube mit einer infinitesimalen Wanddicke sowie einem unendlich ausgedehnten Modellgebiet z.B. in Dachler (1936), Polubarinova-Kochina (1962), Knaupe (1968), Verruijt (1970), Harr (1993), David (1998) oder Perau und Meteling (2017) dargestellt.

Da analytische Lösungen, bedingt durch die komplexe mathematische Struktur der Problemstellung, lediglich für stark vereinfachte Sonderfälle möglich sind, greift man in der Praxis auf eine approximative Lösung z.B. mittels der Finite-Elemente Methode (FEM) oder der Finite-Differenzen-Methode (FDM) zurück, die für praktische Anwendungen eine hinreichend genaue Approximation liefert. Aufgrund der hohen Flexibilität der numerischen Lösungsmethoden hinsichtlich der Modellierung komplexer Geometrien, werden diese Methoden derzeit zur Lösung von Strömungsproblemen verwendet (Kuntsche, 2016; Meteling und Perau, 2019; Odenwald et al., 2017).

Näherungslösungen zur Bestimmung der erforderlichen Einbindetiefe der Verbauwände zum Nachweis gegen hydraulischen Grundbruch oder zur Abschätzung des Wasserzuflusses zur Baugrube finden gemäß Odenwald et al. (2017) für unterschiedliche Modellannahmen und Baugrubengeometrien ihre Anwendung. Die Basis solcher Näherungslösungen impliziert immer die mehrfache Lösung des Strömungsproblems und die Aufbereitung der Ergebnisse in Form von Nomogrammen oder Näherungsgleichungen, sodass dem Anwender aufwendige numerische Simulationen für Standardfälle erspart bleiben (Perau und Meteling, 2017).

Zu diesem Zweck liegen unterschiedliche Näherungslösungen vor, wobei z.B. in Meteling und Perau (2019) diesbezüglich unterschiedliche Näherungslösungen diskutiert und miteinander verglichen wurden. Bei dem Vergleich in Meteling und Perau (2019) hat sich herausgestellt, dass insbesondere das Konzept einen großen Einfluss auf die Anzahl der Parameter und die Transparenz hinsichtlich des Einflusses der Parameter hat. Der Nachteil der Näherungsgleichungen ist ähnlich wie bei der analytischen Lösung, dass diese nur für Standardfälle formuliert

werden, was zur Folge hat, dass bei einer variantenreichen Baugrubengeometrie die Näherungslösungen nicht mehr gültig sind (Meteling und Perau, 2019).

Da bei einer Parameteridentifikation die direkte Problemstellung mehrfach gelöst werden muss, bieten Näherungslösungen in Form von analytischen Näherungsfunktionen im Gegensatz zu numerischen Lösungsmethoden einen großen Vorteil, da der Berechnungsaufwand deutlich geringer ist. Dabei gilt es jedoch zu beachten, dass die Näherungslösungen die Abhängigkeiten hinsichtlich der gesuchten Parameter mathematisch nicht exakt aber physikalisch richtig wiedergeben müssen.

Oftmals werden zur Herleitung von Näherungsfunktionen Curve-Fitting Methoden angewandt, welche bei einem defizitären Konzept nur einen erschwerten und intransparenten Einblick in den Einfluss der einzelnen Parameter gestatten oder eine unnötig hohe Anzahl an Parametern aufweisen (Perau und Meteling, 2017; Meteling und Perau, 2017, 2019). Darüber hinaus wurde im vorherigen Kapitel erläutert, dass eine Vielzahl von Optimierungsverfahren die partiellen Ableitungen der Zielfunktion nach den einzelnen Parametern erfordern. Dies bedeutet im Umkehrschluss, dass es für den gewählten Näherungsansatz erstrebenswert ist, wenn die stetige Differenzierbarkeit bezüglich der Parameter gewährleistet wird.

Zur späteren Verwendung ist in Abb. 3.2 die Definition der Standrohrspiegelhöhe Φ_P in einem Punkt P beispielhaft für ein ebenes System dargestellt. Das Grundwasserpotenzial Φ_P setzt sich gemäß der Bernoulli-Gleichung – unter Vernachlässigung der Geschwindigkeitshöhe – in einem Punkt P aus der geodätischen Höhe x_{3P} und der Druckhöhe $h_D = u_P / \gamma_w$ zusammen:

$$\Phi_P = x_{3P} + \frac{u_P}{\gamma_w} \quad (3.6)$$

Die Standrohrspiegelhöhe ist keine absolute Größe, da das Bezugsniveau x_{3P} frei gewählt werden kann und für alle Betrachtungspunkte im Strömungsgebiet identisch sein muss. Um eine absolute Größe unabhängig vom gewählten Bezugsniveau zu erhalten, kann die Gl. (3.6) einfach nach dem Porenwasserdruck u_P umgestellt werden.

3.6 Analytisch formulierte Näherungslösungen

In Anbetracht der notwendigen erdstatischen und geohydraulischen Nachweise sowie der Prognose des Wasserzuflusses in die Baugrube gemäß Tab. 3.1 stellt sich häufig die Frage, mit welchem Berechnungsverfahren derartige Fragestellungen zu bearbeiten sind. Oftmals werden zur Lösung des Strömungsproblems in Gl. (3.5) numerische Verfahren wie die FEM verwendet. Sowohl komplexe Geometrien des geohydraulischen Modells, als auch die unvermeidliche Streuung von Durchlässigkeitsbeiwerten der anstehenden Böden können den Aufwand von FEM-Berechnungen deutlich erhöhen.

Die Durchführung solcher komplexen FEM-Berechnungen erfordert eine entsprechende Erfahrung und eine hohe Fachkompetenz hinsichtlich der Interpretation der numerischen Berechnungsergebnisse. Problematisch ist zudem, dass die Einbindetiefe der Verbauwand in die schwächer durchlässige Schicht im Regelfall nicht determiniert ist und somit iterativ bestimmt werden muss, was den Aufwand von numerischen Simulationen mit der FEM zusätzlich erhöht (Perau und Meteling, 2019).

Die zuvor genannten Punkte sind die Ursache dafür, dass u.a. zur Ermittlung der geohydraulisch erforderlichen Einbindetiefe – vgl. Punkt 2 in Tab. 3.1 –, Näherungslösungen in Form von Nennogrammen oder Gleichungen entwickelt wurden, auf die je nach Stadium des Projekts zurückgegriffen werden kann (Schmitz, 1989; Aulbach, 2016; Perau und Meteling, 2016). Auf Basis solcher Näherungslösungen lassen sich Vorbemessungen relativ leicht durchführen und FEM Berechnungen überprüfen. Darüber hinaus ist es möglich, systematische Parameterstudien zur Abschätzung des Einflusses einzelner Parameter auf die direkte Problemstellung unter vertretbarem Aufwand durchzuführen. Dem steht entgegen, dass diese Näherungslösungen im Gegensatz zur FEM nur für spezielle Systeme sowie Parameterkonstellationen gelten und an entsprechende Entwicklungskonzepte gebunden sind.

Das Konzept und die wesentlichen Grundgedanken und Gleichungen der Näherungslösungen nach Perau und Meteling (2015, 2016, 2017) werden nachfolgend vorgestellt. Für eine umfangreiche Beschreibung und Herleitung der einzelnen Näherungsfunktionen sei an dieser Stelle auf die vorab veröffentlichten wissenschaftlichen Publikationen verwiesen (Perau und Meteling, 2015, 2016, 2017; Perau et al., 2018; Meteling und Perau, 2017, 2019). Eine vorausgegangene Analyse von vergleichbaren Näherungsformeln und Diagrammen hat gezeigt, dass diese lediglich für sehr spezielle Fragestellungen – wie zur Ermittlung der erforderlichen Einbindetiefe – konzipiert wurden und somit unweigerlich an bestimmte Nachweiskonzepte und Teilsicherheitsbeiwerte gebunden sind (vgl. z.B. Schmitz, 1989; Aulbach, 2016). Es sollte an dieser Stelle auch nicht unerwähnt bleiben, dass diese Näherungslösungen von vielen Parametern abhängen, wobei der Einfluss dieser Parameter anhand der entsprechenden Gleichungen und Diagrammen nur eingeschränkt nachvollziehbar ist.

In Perau und Meteling (2015) konnte ein Einfluss der Größe des Modellgebiets (b_m bzw. t_m) auf die Lösung des Strömungsproblems nachgewiesen werden. Um die Näherungslösung unabhängig von diesen Einflüssen zu entwickeln, wurde das Modellgebiet als “unendlich“ groß idealisiert (Perau und Meteling, 2017). Hinsichtlich einer Anisotropie der schwächer durchlässigen Bodenschicht wurde ferner angenommen, dass die Durchlässigkeitshauptachsen am Koordinatensystem ausgerichtet sind. Zur Lösung des Strömungsproblems ist unter Berücksichtigung der geschilderten Annahmen ein äquivalentes geohydraulisches Randwertproblem wie in Abb. 3.4 zu definieren.

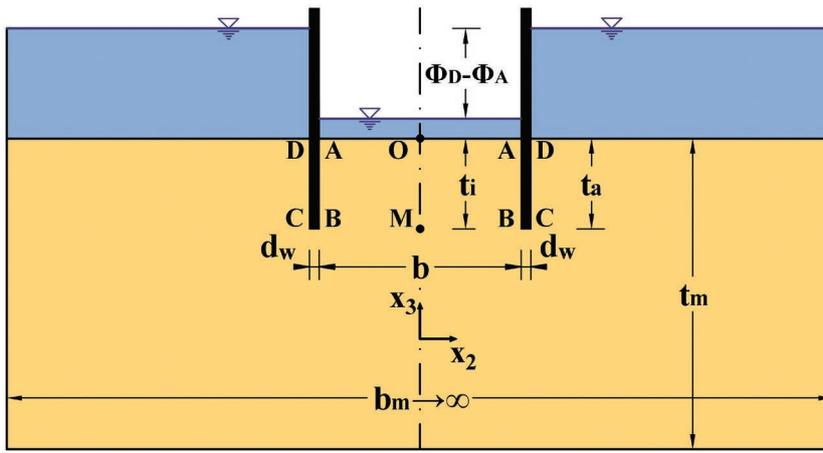


Abbildung 3.4: Geohydraulisches Randwertproblem nach Perau und Meteling (2017)

Für die Standrohrspiegelhöhe bzw. das Potenzial in einem Punkt P im Strömungsgebiet lässt sich ein funktionaler Zusammenhang in Abhängigkeit der folgenden Modellparameter formulieren:

$$\Phi_P = \Phi(x_{2P}, x_{3P}) = f_P(x_{2P}, x_{3P}, t_i, b, \Phi_A, \Phi_D, k_h, k_v) \quad (3.7)$$

Das Potenzial hängt, neben den lokalen Koordinaten des Punktes x_{2P} und x_{3P} , von den Geometrieparametern (t_i , b), den Potenzialrandbedingungen (Φ_D , Φ_A) und den Durchlässigkeitsbeiwerten (k_h , k_v) ab.

Wie in Perau und Meteling (2016, 2017) gezeigt werden konnte, kann der mathematische Zusammenhang in Gl. (3.7) unter Anwendung von mathematischen und physikalischen Eigenschaften des Randwertproblems wie der Dimensionsanalyse (Kobus, 1974; Perau, 1995), der Linearität der Differentialgleichung sowie der Koordinatentransformation zur Behandlung der Anisotropie umformuliert und folgendermaßen vereinfacht werden:

$$\Phi(x_{2P}, x_{3P}) = \Phi_A + (\Phi_D - \Phi_A) \cdot \phi_P \left(\frac{x_{2P}}{b}, \frac{x_{3P}}{t_i}, \sqrt{\frac{k_h}{k_v}} \cdot \frac{t_i}{b} \right) \quad (3.8)$$

In Gl. (3.8) war es möglich, die Randpotenziale als lineare Summanden bzw. Faktoren vor die dimensionslose Funktion ϕ_P zu ziehen. Die dimensionslose Potenzialfunktion ϕ_P ist abhängig von den dimensionslosen Koordinaten x_{2P}/b und x_{3P}/t_i sowie von einem Systemparameter t^* , welcher gemäß Perau und Meteling (2016, 2017) als geohydraulische Schlankheit definiert wurde:

$$t^* = \sqrt{\frac{k_h}{k_v}} \cdot \frac{t_i}{b} = \sqrt{\alpha_k} \cdot \frac{t_i}{b} \quad (3.9)$$

Der dimensionslose Systemparameter t^* in Gl. (3.9) enthält sowohl den Grad der Anisotropie α_k der schwächer durchlässigen Bodenschicht, als auch das Verhältnis der Einbindetiefe zur Baugrubenbreite. Für eine numerische Parameterstudie musste dann vom Ausgangspunkt in Gl. (3.7) mit sechs Parametern nach der Ausnutzung der Eigenschaften des Randwertproblems lediglich der eine Systemparameter t^* variiert werden. In einem nächsten Schritt wurde das in Abb. 3.5 dargestellte lokale normierte Koordinatensystem definiert.

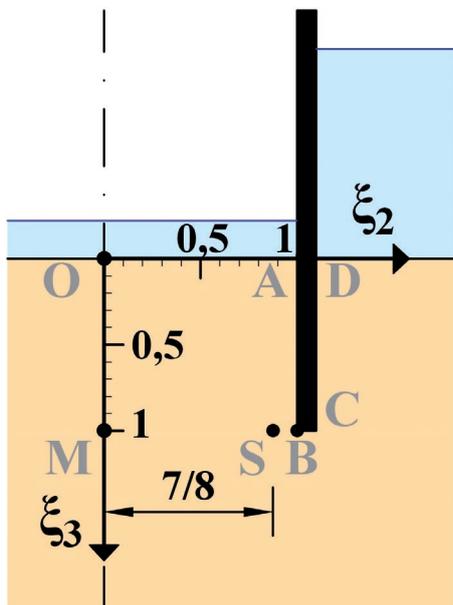


Abbildung 3.5: Lokal normiertes Koordinatensystem nach Perau und Meteling (2017)

Die dimensionslosen Koordinaten ξ_2 und ξ_3 in Abb. 3.5 sind folgendermaßen definiert:

$$\xi_2 = \frac{x_2}{b} \quad (3.10a)$$

$$\xi_3 = \frac{X_{3A}}{t_i} - \frac{X_3}{t_i} \quad (3.10b)$$

Unter der Verwendung des in Gl. (3.8) definierten funktionalen Zusammenhangs und den dimensionslosen Koordinaten in Gl. (3.10a) und Gl. (3.10b) konnte eine dimensionslose Funktion für das Potenzial in einem Punkt P formuliert werden:

$$\phi_P = \phi_P(\xi_2, \xi_3, t^*) \quad (3.11)$$

Im Rahmen der numerischen Parameterstudie wurde in Perau und Meteling (2016, 2017) dargestellt, dass an bestimmten Punkten und Strecken im Strömungsgebiet einzig und allein die dimensionslose Funktion für das Potenzial in Gl. (3.11) bestimmt werden musste. Der Wertebereich der dimensionslosen Koordinaten liegt zwischen den beiden Verbauwänden bei $-1 \leq \xi_2 \leq +1$ und von der Höhe des Schichtwechsels bis zur Wandunterkante zwischen $0 \leq \xi_3 \leq +1$. Für die geohydraulische Schlankheit t^* liegt der Wertebereich zwischen $0 \leq t^* < \infty$ mit den definierten Grenzfällen $t^*=0$ für die unendlich breite Baugrube und $t^* \rightarrow \infty$ für die unendlich schmale Baugrube. Die beiden genannten analytischen Grenzfälle sind fester Bestandteil der Näherungslösung.

Um im Rahmen der durchgeführten numerischen Parameterstudie mit der FEM eine geschlossene Näherungsfunktion für das Potenzial auf Höhe der Wandunterkante zu formulieren, wurden für diesen Ansatz die folgenden Stützpunkte analog zu Abb. 3.5 formuliert:

- Punkt M ($\xi_2=0, \xi_3=1$), Baugrubenmitte
- Punkt S ($\xi_2=7/8, \xi_3=1$), 7/8 Punkt zwischen Baugrubenmitte u. Fußpunkt Verbauwand
- Punkt B ($\xi_2=1, \xi_3=1$), Fußpunkt der Verbauwand

Sowohl für eine *ebene* als auch eine *rotationssymmetrische* Anströmung wurde ein einheitlicher Funktionsansatz für die drei Stützstellen $\phi_P(t^*)$ definiert:

$$\phi_P(t^*) = 1 - \left(\beta_4 \cdot (t^*)^4 + \beta_3 \cdot (t^*)^2 + \beta_2 \cdot (t^*) + \beta_1 \right)^{-\beta_e} \quad (3.12)$$

Die Bestimmung der β -Werte in der Funktion in Gl. (3.12) erfolgte anhand einer numerischen Parameterstudie (Perau und Meteling, 2017). Im *Anhang A1* sind die entsprechenden β -Werte für die einzelnen Stützstellen und für die jeweilige Art der Anströmung zusammengefasst.

Die gute Übereinstimmung zwischen dem gewählten Ansatz für $\phi_P(t^*)$ in Gl. (3.12) und den FEM Berechnungsergebnissen ist in Abb. 3.6 exemplarisch für die langgestreckte Baugrube dargestellt. Wie zuvor erwähnt, sind die analytischen Grenzfälle in Abb. 3.6 ebenfalls in dem Ansatz in Gl. (3.12) berücksichtigt. Alle drei Funktionen $\phi_P(t^*)$ in Abb. 3.6 laufen für eine

geohydraulisch schmale Baugrube $t^* \rightarrow \infty$ gegen 1, da sich der Potenzialabbau dann vollständig zwischen die Verbauwände verlagert. Bei der „unendlich“ breiten Baugrube mit einem geohydraulischen Schlankheitsgrad von $t^* = 0$ wird ein Großteil des Potenzials direkt am Verbauwandfußpunkt abgebaut, sodass die Näherungsfunktion für das dimensionslose Potenzial im Punkt B gegen 1/2 läuft (Perau und Meteling, 2017). Hinsichtlich des zuvor genannten Grenzfalles läuft die dimensionslose Näherungsfunktion für das Potenzial in den Punkten M und S gegen Null.

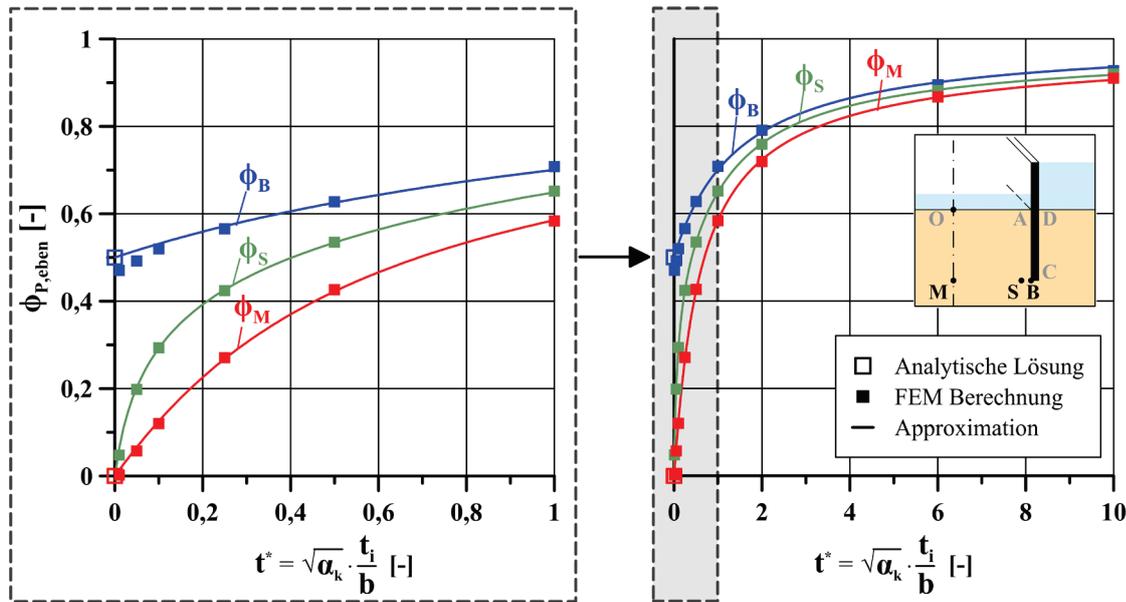


Abbildung 3.6: Näherungsfunktion in den Stützstellen für den ebenen Fall (Perau und Meteling, 2017)

Die Hilfsfunktionen gemäß Gl. (3.12) bilden die Grundlage für die benötigte Potenzialverteilung in der Höhe der Wandunterkante, in der Baugrubenmitte sowie an der Wandinnen- und Wandaußenseite. Anhand der drei Stützstellen $P=[M, S, B]$ kann das Potenzial in Höhe der Wandunterkante $\phi_{UK_Wand}(\xi_2, \xi_3=1)$ folgendermaßen formuliert werden:

$$\phi_{UK_Wand}(\xi_2) = \alpha_3 + \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2 \cdot \xi_2^2} \tag{3.13}$$

Die Parameter α_i der Hyperbelfunktion in Gl. (3.13) sind folgendermaßen zu berechnen:

$$\alpha_1 = \frac{\left(\frac{7}{8}\right)^2 \cdot (\phi_B - \phi_M) - (\phi_S - \phi_M)}{\left(1 - \left(\frac{7}{8}\right)^2\right) \cdot (\phi_B - \phi_M) \cdot (\phi_S - \phi_M)} \tag{3.14a}$$

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1^2 \cdot (\phi_B - \phi_M)}{1 + \alpha_1 \cdot (\phi_B - \phi_M)} \quad (3.14b)$$

$$\alpha_3 = \phi_M - 1 / \alpha_1 \quad (3.14c)$$

Die unterschiedlichen α_i hängen von den dimensionslosen Näherungsfunktionen $\phi_P(t^*)$ gemäß Gl. 3.12 in den Stützstellen ab. Für die Hyperbelfunktion $\phi_{UK_Wand}(\xi_2, \xi_3=1)$ gilt, dass diese in den Stützstellen exakt den Werten der entsprechenden Näherungsfunktionen gemäß Gl. (3.12) entspricht. Um zu verhindern, dass die Hyperbelfunktion entartet, muss für die Stützstellen stets die folgende Abhängigkeit mit $\phi_M < \phi_S < \phi_B$ eingehalten werden.

In Abb. 3.7a ist die Näherungsfunktion für die Wandunterkante und eine entsprechende Auswertung einer FEM Berechnung bei ebener Anströmung für unterschiedliche t^* abgebildet. Es konnte eine sehr gute Übereinstimmung zwischen der Approximation in Gl. (3.13) und den FEM Ergebnissen erzielt werden. Die analytischen Grenzfälle sind ebenfalls in der Darstellung berücksichtigt. Bei einer sehr schmalen Baugrube baut sich das Potenzial demgemäß ausschließlich innerhalb der Baugrube ab. Dahingegen findet der Potenzialabbau bei der sehr breiten Baugrube größtenteils am Verbauwandfußpunkt statt.

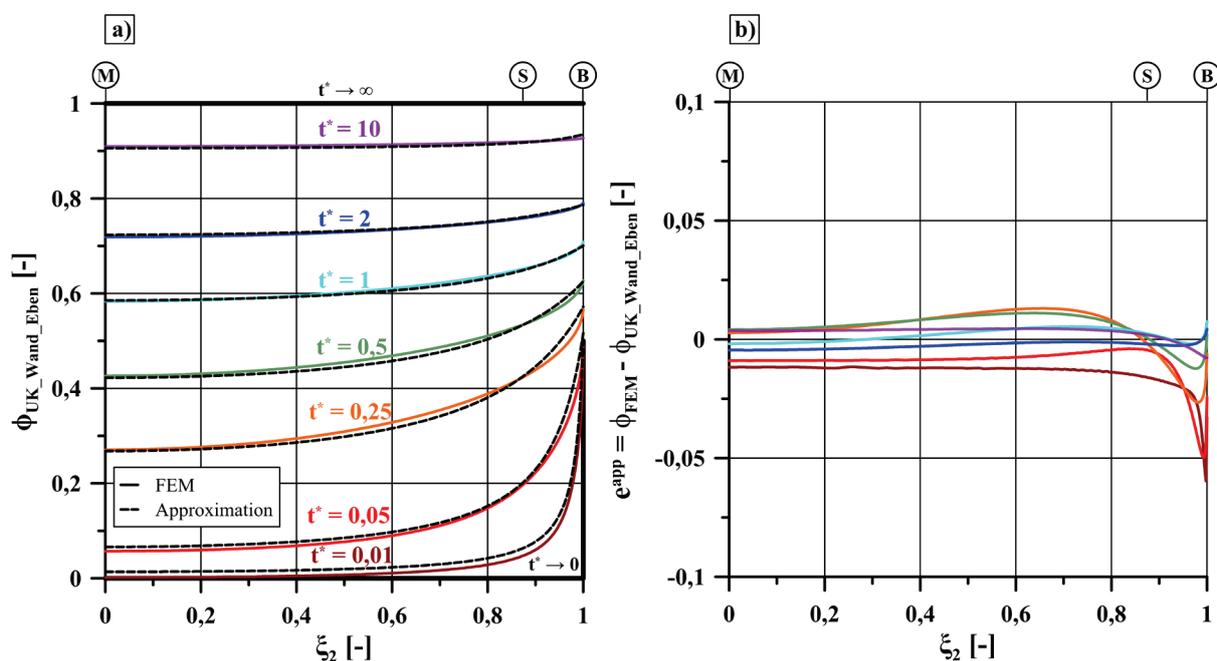


Abbildung 3.7: Potenzialfunktion in Höhe Wandunterkante Wand (ebene Strömung); a) FEM und Approximation nach Gl. (3.13) u. Gl. (3.14) vgl. Perau und Meteling (2017), b) Approximationsfehler der analytischen Näherungslösung

Da die analytisch formulierten Näherungsfunktionen in Abb. 3.7a die FEM Lösung nicht exakt abbilden, liegt demzufolge ein Approximationsfehler e^{app} vor. Dieser Approximationsfehler ist

exemplarisch für die Potenzialfunktion auf der Höhe der Wandunterkante in Abb. 3.7b dargestellt und entspricht der Differenz zwischen der FEM Lösung und den Ergebnissen der Näherungsfunktion gemäß Gl. (3.13) u. Gl. (3.14). Anhand von Abb. 3.7b ist zu erkennen, dass sich die Approximationsfehler für die unterschiedlichen geohydraulischen Schlankheitsgrade t^* sowie in Abhängigkeit der dimensionslosen Koordinate ξ_2 betragsmäßig unterscheiden, jedoch insgesamt für alle untersuchten t^* -Verhältnisse als sehr gering angesehen werden können.

Im Bereich der Stützstellen ist der absolute Approximationsfehler für ϕ – abgesehen von der sehr breiten Baugrube mit $t^*=0,01$ – sehr gering, wobei die geohydraulisch schlanken Baugruben insgesamt einen geringeren Approximationsfehler aufweisen. Für die sehr breite Baugrube ist der absolute Approximationsfehler für ϕ zwischen den Stützpunkten S und B mit $e^{app} \approx -0,06$ betragsmäßig am größten.

Für die Berechnung des Wasserdrucks auf die Verbauwand als auch für die näherungsweise Bestimmung von Erddruck und Erdwiderstand gemäß Tab. 3.1 wird zudem die Potenzialverteilung entlang der Wandinnen- und Wandaußenseite benötigt. Daneben muss der maximale hydraulische Gradient an der Grenze zwischen der geringer durchlässigen Schicht und der durchlässigeren Schicht bestimmt werden, um die Filterstabilität gemäß Tab. 3.1 nachzuweisen (Perau und Meteling, 2016, 2017).

Unter Berücksichtigung der analytischen Grenzfälle und der numerischen Berechnungen mit der FEM konnte für die Baugrubenmitte die Potenzialverteilung näherungsweise mit einer linearen Funktion in Abhängigkeit der dimensionslosen Koordinate ξ_3 sowie der Näherungsfunktion in dem Punkt M gemäß Gl. (3.12) in guter Näherung formuliert werden (Perau und Meteling, 2017):

$$\phi_{\text{Mitte}}(\xi_3, t^*) = \xi_3 \cdot \phi_M(t^*) \quad (3.15)$$

Auch für den Vertikalschnitt an der Wandinnen- und Wandaußenseite ließ sich eine Näherungsfunktion in guter Übereinstimmung mit den FEM Ergebnissen formulieren. Für die Wandinnenseite wurde unter Rückgriff auf die Gl. (3.12) und den β -Werten für den Punkt B folgende Näherungsfunktion aufgestellt (Perau und Meteling, 2017):

$$\phi_{\text{Wand}_i}(\xi_3) = (2 \cdot \phi_B - 1) \cdot \xi_3 + 2(1 - \phi_B) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \cdot \arccos \xi_3 \right) \quad (3.16)$$

Für den Grenzfall einer sehr schmalen Baugrube mit $\phi_B(t^* \rightarrow \infty) = 1$ entfällt der Einfluss der Arkuscosinus-Funktion in Gl. (3.16) und der Potenzialabbau folgt einer linearen Funktion in Abhängigkeit von ϕ_B sowie der dimensionslosen Laufvariablen ξ_3 . Dahingegen nimmt der Potenzialabbau für sehr breite Baugruben mit $\phi_B(t^* \rightarrow 0) = 1/2$ die Form der Arkuscosinus-Funktion an und ein Großteil des Potenzials wird im unteren Bereich der Wand abgebaut.

Für die Außenseite der Verbauwand konnte ebenfalls unter Rückgriff auf die numerischen Berechnungen und die analytischen Grenzfälle eine Näherungslösung für die Potenzialverteilung formuliert werden (Perau und Meteling, 2017):

$$\phi_{\text{Wand}_a}(\xi_3) = (2 \cdot \phi_B - 1) \cdot 1 + 2(1 - \phi_B) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \arccos \xi_3 \right) \quad (3.17)$$

Die Gl. (3.17) basiert auf der Tatsache, dass für sehr schmale Verbauwände entlang der Strecke B-C der Potenzialabbau in guter Näherung vernachlässigbar gering ausfällt und $\phi_B \approx \phi_C$ gilt (Perau und Meteling, 2017).

Die zuvor präsentierten Näherungsgleichungen zur Approximation der Potenzialverteilung entlang spezieller Strecken im Strömungsgebiet, lassen sich für unterschiedliche Anwendungen wie den Nachweis gegen hydraulischen Grundbruch oder zur Bestimmung des Wasserzuflusses in die Baugrube auswerten (Perau und Meteling, 2016, 2017).

In Perau und Meteling (2017) wurde gezeigt, dass der Wasserzufluss über die Integration der Normalkomponente der Filtergeschwindigkeit mit $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ über einen geschlossenen Horizontalschnitt über die Grundfläche der Baugrube zu bestimmen ist. Die vertikale Komponente des hydraulischen Gradienten i_3 in der Sohle wird dabei näherungsweise mit dem Differenzenquotienten unter Verwendung der Potenzialverteilung auf der Höhe der Wandunterkante und dem Randpotenzial in der Sohle über die Einbindetiefe t_i gebildet (Perau und Meteling, 2017):

$$\begin{aligned} v_3 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} &= k_v \cdot i_3 = k_v \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right) \\ &\approx k_v \cdot \frac{\Phi_{\text{UK_Wand}} - \Phi_A}{t_i} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Die Filtergeschwindigkeit v_3 in vertikaler Richtung sowie die Potenzialverteilung auf der Höhe der Wandunterkante $\Phi_{\text{UK_Wand}}$ gemäß Gl. (3.13) sind über die Baugrubenfläche als veränderlich anzusehen. Der Grundwasserzufluss wurde dann über die Integration der Filtergeschwindigkeit in Gl. (3.18) $q = \int v_3 \, dA$ über die Baugrubenfläche (A) bestimmt und wurde nach einfachen mathematischen Operationen für eine ebene Anströmung wie folgt formuliert (Perau und Meteling, 2017):

$$q_{\text{eben}} = k_v \cdot A \cdot \frac{\Phi_D - \Phi_A}{t_i} \cdot q_{\text{eben}}^* \quad (3.19)$$

In Gl. (3.19) geht der vertikale Durchlässigkeitsbeiwert k_v , die Baugrubenfläche (A), die Differenz der Randpotenziale ($\Phi_D - \Phi_A$) sowie die Einbindetiefe t_i und eine dimensionslose Funktion q_{eben}^* ein.

Die dimensionslose Funktion q_{eben}^* ist eine Funktion, welche sich unter Verwendung der Faktoren α_i in Gl. (3.14) ausdrücken lässt und somit lediglich von dem geohydraulischen Systemparameter t^* abhängt (Perau und Meteling, 2017):

$$q_{\text{eben}}^* = \alpha_3 + \frac{1}{\sqrt{\alpha_1 \cdot \alpha_2}} \cdot \operatorname{artanh} \left(\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \right) \quad (3.20)$$

Abschließend wurden die Näherungsgleichungen in Abb. 3.8 mit den numerischen Berechnungen mit der FEM und den analytischen Lösungen nach Harr (1993) sowie Polubarinova-Kochina (1962) verglichen. Dabei konnte insgesamt für den Bereich $t^* > 0,05$ eine sehr gute Übereinstimmung erzielt werden.

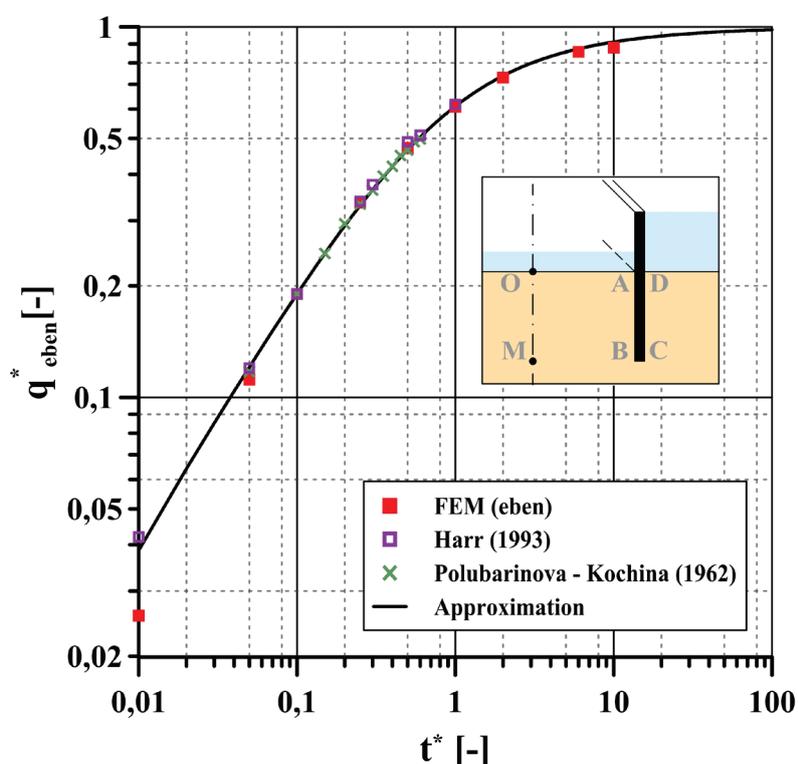


Abbildung 3.8: Dimensionslose Funktionen q_{eben}^* zur Bestimmung des Wasserzuflusses zu einer Baugrube bei ebener Strömung nach Perau und Meteling (2017)

Die analytisch formulierten Näherungsgleichungen können in der Ingenieurpraxis als vielfältig einsetzbare Hilfestellung dienen. Sie liefern zwar keine exakte Lösung der Problemstellung, jedoch eine gute Näherung. Bei der Entwicklung der Ansätze wurde besonderer Wert auf Transparenz, Anwenderfreundlichkeit sowie die Einbeziehung analytischer Grenzfälle gelegt, sodass der Definitionsbereich der Gleichungen über baupraktisch erforderliche Bereiche hinausgeht und demzufolge für eine Parameteridentifikation grundsätzlich infrage kommt. Auch die Formulierung der Näherungslösung in Form von analytischen Gleichungen, welche geschlossen

integrierbar und differenzierbar sind, verringert absehbar den Berechnungsaufwand für eine Parameteridentifikation deutlich.

Jede Näherungslösung unterliegt entsprechenden Anwendungsgrenzen, welche für die zuvor vorgestellten Gleichungen in Tab. 3.3 zusammengestellt sind. Für alle Näherungsgleichungen wird vorausgesetzt, dass kein Einschnitt in die tertiäre Bodenschicht erfolgt und somit $t_i=t_a$ gilt.

Tabelle 3.3: Anwendungsbereiche und -grenzen für die Näherungsgleichungen

Parameter	Anwendungsbereiche und -grenzen
Modelltiefe t_m	$t_m \rightarrow \infty$
Modellbreite b_m	$b_m \rightarrow \infty$
Wanddicke d_w	$d_w/b=0,005 - 0,02$
Systemparameter t^*	$0 \leq t^* \leq 800$

Bei dem Modellgebiet ist zu berücksichtigen, dass die analytischen Gleichungen nur für ein unendlich großes Modellgebiet gelten ($t_m \rightarrow \infty$, $b_m \rightarrow \infty$). Die Berücksichtigung einer variablen Tiefe von t_m ist noch nicht möglich und führt, insbesondere bei kleinem t_m also einem geringen Abstand zwischen Verbauwandfußpunkt und dem dichten Rand, zu einem veränderten Potenzialabbau. In diesem Zusammenhang hat auch die Verbauwanddicke d_w einen maßgeblichen Einfluss (Perau und Meteling, 2017).

Die Näherungsgleichungen sind gültig für ein Verhältnis der Verbauwanddicke d_w zur Baugrubenbreite b zwischen $d_w/b=0,005 - 0,02$. Somit können mit der Näherungslösung streng genommen nur sehr dünne Verbauwände abgebildet werden (Perau und Meteling, 2017). Bei schmalen Baugruben oder bei starker Anisotropie, wobei der Potenzialabbau vornehmlich innerhalb der Baugrube stattfindet, gelten die Gleichungen somit auch für eine größere Verbauwanddicke. Bei geringen Einbindetiefen, sehr breiten Baugruben und einer vergleichsweise breiten Verbauwand liegen die Gleichungen zwar auf der sicheren Seite, liefern jedoch eine unwirtschaftliche Lösung. Eine Untersuchung des Einflusses der Verbauwanddicke auf die geohydraulische Berechnung der Grundwasserströmung ist z.B. in Aulbach (2016) zu finden.

4 Parameteridentifikation bei Grundwasserströmung

4.1 Lösungsstrategie

Nachfolgend wird der Rahmen der eigenen Untersuchungen abgesteckt und die methodische Vorgehensweise erläutert, auf deren Grundlage unterschiedliche Identifikationsprobleme für ein "einfaches" Randwertproblem der Geotechnik – einer Baugrube im Grundwasser – zu untersuchen sind. Zu diesem Zweck hat sich die folgende methodische Vorgehensweise als sinnvoll erwiesen:

- 1) Entwicklung einer *Lösungsstrategie* bzw. eines *Untersuchungskonzepts* zur Anwendung auf unterschiedliche Fragestellungen der Parameteridentifikation.
- 2) *Anwendung und Erprobung* des unter 1) erarbeiteten *Untersuchungskonzepts* auf ein spezielles Randwertproblem der Geotechnik – *einer Baugrube im Grundwasser* –.
- 3) Zusammenfassung der wesentlichen *Erkenntnisse* und Ableitung von *Empfehlungen* für das unter 2) behandelte spezielle Randwertproblem.

Die Zielsetzung besteht zunächst darin, ein Untersuchungskonzept zur Parameteridentifikation zu entwickeln. Dabei fließen die eingangs formulierten Leitfragen aus dem *ersten* Unterkapitel – *1.3 Motivation und Zielsetzung* –, die theoretischen Grundlagen zur Parameteridentifikation und die Erkenntnisse/Anregungen aus den wissenschaftlichen Fachbeiträgen von Schanz und Meier (2008) sowie Zimmerer et al. (2009) ein und werden zu einem übergeordneten Strategiepapier bzw. Leitfaden für unterschiedlichste Identifikationsprobleme vereinigt.

Auch wenn in Bezug auf die exemplarischen Anwendungen zur Parameteridentifikation ein spezielles Strömungsproblem behandelt wird, liegt der Fokus auf der Entwicklung eines Untersuchungskonzepts, was sich zwar nicht in allen Einzelheiten aber zumindest grundsätzlich auf andere ingenieurwissenschaftlichen Fragestellungen der Parameteridentifikation übertragen lässt.

Das systematische Untersuchungskonzept unter 1) wird anschließend auf ein spezielles Randwertproblem der Geotechnik – einer Baugrube im Grundwasser – angewendet und erprobt. Die Wahl eines Anwendungsbeispiels mit einer im Vergleich zu diversen anderen geotechnischen Problemstellungen geringen Anzahl von Modellparametern, infolge einfacher Geometrieverhältnisse sowie Randbedingungen und einem überschaubaren Stoffgesetz war insofern erstrebenswert, als dass sich Lösungen für unterschiedlich komplexe Identifikationsprobleme relativ leicht auf Plausibilität prüfen ließen.

Die exemplarischen Anwendungen zur Parameteridentifikation für das spezielle Randwertproblem ermöglichen zudem die Anwendung der analytischen Näherungslösungen aus dem *dritten* Kapitel, sodass die komplexen Zusammenhänge zwischen den einzelnen Modellparametern – im Gegensatz zur Lösung im FEM-Umfeld – nicht im Verborgenen bleiben, sondern anhand der geschlossenen Näherungslösung transparent aufgezeigt werden können.

Da die Formulierung der analytischen Näherungslösungen auf Basis von speziellen mathematischen Funktionsansätzen erfolgte, wird nachfolgend im Rahmen der Parameteridentifikation eine stichprobenhafte Überprüfung der Lösung mit der FEM durchgeführt. Mit dieser Verifizierung gilt es zu vermeiden, dass eine Lösbarkeit oder Nichtlösbarkeit einer Fragestellung zur Parameteridentifikation auf die gewählten mathematischen Funktionsansätze für die Näherungslösungen zurückzuführen ist.

Abschließend werden unter Punkt 3) die Erkenntnisse aus den Ergebnissen der unterschiedlichen Anwendungen zur Parameteridentifikation unter Punkt 2) für die Baugrube im Grundwasser zusammengefasst und Empfehlungen hinsichtlich der notwendigen räumlichen Verteilung von Messpunkten oder einer damit verbundenen möglichen Optimierung eines Messprogrammes ausgesprochen. Zusammenfassend wird an dieser Stelle der Bezug zu den in der Einleitung formulierten geotechnischen und mathematischen Leitfragen für das exemplarische Berechnungsbeispiel hergestellt.

Es stellt sich weiter die Frage, ob und inwiefern sich die Erkenntnisse und Empfehlungen für das behandelte Anwendungsbeispiel auf ähnliche Problemstellungen übertragen lassen. Da die Näherungslösung nach Perau und Meteling (2017) die Abhängigkeit der Modellantwort von den Parametern für ebene als auch rotationssymmetrische Baugruben physikalisch richtig erfasst, lassen sich die Erkenntnisse für das stellvertretende Anwendungsbeispiel zwar nicht im Detail jedoch grundsätzlich auf eine Vielzahl von ähnlichen Problemstellungen mit abweichender Geometrie übertragen.

Das bedeutet für das spezielle Randwertproblem konkret: Kann gezeigt werden, dass sich beispielsweise der Grad der Anisotropie unter gewissen Voraussetzungen eindeutig bestimmen lässt, gilt dies nicht nur für das zugrunde gelegte Berechnungsbeispiel, sondern lässt sich infolge der grundlegenden Analyse der mathematischen bzw. physikalischen Struktur des Randwertproblems (siehe Kapitel 3) auf eine Vielzahl von ähnlichen Baugruben übertragen.

4.2 Untersuchungskonzept

Das systematische Untersuchungskonzept gemäß 1) kann in die drei übergeordneten Gliederungspunkte *A) Vorabanalyse*, *B) Parameteridentifikation unter realen Bedingungen* und *C) Erkenntnisse und Empfehlungen* eingeteilt werden:

A. Vorabanalyse

A1. Problemstellung und Vorüberlegungen

- Allgemeine Beschreibung der geotechnischen Problemstellung und des mathematischen Modells zur Lösung des Randwertproblems.
- Aufstellung der *messbaren Größen*. Welche Modellparameter können *direkt* und welche müssen *indirekt* durch eine Parameteridentifikation bestimmt werden?
- *Lösungsansatz* für das mathematische Modell festlegen (FEM, Näherungslösung, Analytische Lösung, ...), welche Probleme treten dabei ggfs. auf? Sind Plausibilitätskontrollen im Vorfeld erforderlich? Wie groß ist der Berechnungsaufwand?
- Messbarkeit von Zustands- und Ausgangsgrößen. Welche *physikalischen Größen* sollen zur Parameteridentifikation gemessen werden?
- Welche *Bedingungen* müssen hinsichtlich der unbekanntem Modellparameter erfüllt sein?

A2. Analyse der direkten Problemstellung

- Analyse des Zusammenhangs zwischen der Simulation und den unbekanntem Modellparametern z.B. anhand einer *Sensitivitätsanalyse* (Hill und Tiedeman, 2007).
- Quantifizierung des *Einflusses der Modellparameter*, Modellparameter die einen geringen oder keinen Einfluss haben, können durch eine Parameteridentifikation nur unzureichend bzw. gar nicht bestimmt werden, ggfs. Reduzierung möglich.

A3. Parameteridentifikation unter idealen Bedingungen

- Entwicklung eines Messprogramms und Erzeugung von *synthetischen Messdaten* unter Vorgabe von „realitätsnahen“ Modellparametern (Schanz und Meier, 2008)
- Aufstellen der *Zielfunktion* vgl. z.B. (Hill und Tiedeman, 2007; Meier, 2009)
- Verwendung von *exakten synthetischen Messdaten ohne Messabweichungen*, welche anhand der direkten Problemstellung unter Vorgabe von geschätzten bzw. erfahrungsbasierten Modellparametern erstellt wurden.
- Festlegung von *Wichtungsfaktoren* zur Steuerung des Einflusses der Messreihen oder zur Umrechnung von unterschiedlichen Einheiten (Hill und Tiedeman, 2007)
- Falls möglich Darstellung der Zielfunktion und Überprüfung der *Oberflächenbeschaffenheit* (Zimmerer et al., 2009).
- Vorgabe von *Startwerten* und ggfs. untere/obere Grenzwerte für die Modellparameter unter Rückgriff auf Erfahrungswerte.

- Auswahl und Test unterschiedlicher *Optimierungsalgorithmen* zur numerischen Lösung der mathematischen Optimierungsaufgabe.
- Empfehlungen hinsichtlich problemspezifischer *Optimierungsverfahren* und ggfs. Anwendung von kommerziellen Toolboxen zur mathematischen Optimierung.
- Zur Untersuchung der Stabilität bzw. der Rauschempfindlichkeit können *synthetisch gestörte Messdaten* verwendet werden (Dahmen und Reusken, 2006).
- Überprüfung der Lösung hinsichtlich *Eindeutigkeit, Stabilität und Plausibilität*. Treten numerischen Schwierigkeiten auf? Ist der Einsatz anderer Optimierungsverfahren zweckmäßig?

A4. Optimierung Messprogramm

- Bei einer mehrdeutigen Lösung infolge eines *unvollständigen Messprogramms* ggfs. Messung weiterer unabhängiger/unterschiedlicher Messgrößen.
- *Optimierung* z.B. bezüglich räumlicher Verteilung oder Häufigkeit der Ablesungen über die Zeit, Vorhalten einer Redundanz (Bucher, 1993; Schanz und Meier, 2008).
- Vermeidung einer verlangsamten Auswertung durch „*Datenfriedhof*“ (Smolczyk, 1999), Kosteneinsparung für den Ausbau und Unterhaltung eines Messprogramms durch effiziente vorgeschaltete Planung und Auswertung, besser verteilte sowie häufigere Messungen ggfs. Verkleinerung des Schätzfehlers der Modellparameter.

B. Parameteridentifikation unter realen Bedingungen

- *Visualisierung der Messdaten* und ggfs. Analyse von etwaigen Fehlerquellen.
- Aufstellen der *Zielfunktion* und Verwendung von *realen Messdaten* aus Labor- oder Feldmessungen.
- Festlegung von *Wichtungsfaktoren* zur Steuerung des Einflusses der Messreihen oder zur Umrechnung von unterschiedlichen Einheiten (Hill und Tiedeman, 2007).
- Überprüfung der *Oberflächenbeschaffenheit* der Zielfunktion.
- Vorgabe von *Startwerten* und ggfs. untere/obere Grenzwerte für die gesuchten Modellparameter unter Rückgriff auf Erfahrungswerte.
- Mathematische *Optimierung der Zielfunktion* unter Verwendung der Algorithmen, welche unter A3) bereits erfolgreich zur Lösung eingesetzt wurden.
- Überprüfung der Lösung hinsichtlich *Eindeutigkeit, Stabilität und Plausibilität*. Treten numerischen Schwierigkeiten auf? Ist der Einsatz anderer *Optimierungsverfahren* zweckmäßig?

C. Erkenntnisse und Empfehlungen

- Prüfung der *Übertragbarkeit* auf ähnliche Fragestellungen, Empfehlungen zur Planung vergleichbarer Messprogramme.
- Abschätzung des Einflusses von *Fehlerquellen* wie Modellfehler, defekte Messsensoren, Materialermüdung, ...

Weitere detaillierte Ausführungen und Anwendungsbeispiele zu den einzelnen Untersuchungspunkten sind u.a. in Schanz und Meier (2008) sowie Zimmerer et al. (2009) zu finden. Auch wenn das entwickelte Konzept aufgrund der großen Bandbreite von Lösungszugängen nicht als vollständig zu betrachten ist, liefert es jedoch einen ersten Überblick zur Herangehensweise bzw. eine Lösungsstrategie für unterschiedliche Identifikationsprobleme.

Bei praktischen Fragestellungen müssen oftmals Ad-hoc-Entscheidungen getroffen werden und somit liegt der Fokus oftmals aus Zeit- und Kostengründen lediglich auf der Parameteridentifikation unter realen Bedingungen wie unter B) (vgl. Bucher, 1993). Eine aufwendige Vorabanalyse und eine detaillierte Aufbereitung der Ergebnisse entfallen zumeist, sodass das große Auswertungspotenzial der Untersuchungspunkte A) und C) nicht vollends ausgeschöpft wird. Enthält die systematische Vorabanalyse Fehler oder wird gar übergangen, kann dies zu einem schlecht konzipierten Messprogramm und zuletzt zur Unmöglichkeit führen, anhand der inversen Analyse aus den realen Messdaten die Parameter zu bestimmen.

In Bezug auf das Messprogramm stellt sich vorab die Frage, in welcher räumlichen Verteilung die Messgeber anzuordnen sind und wie häufig die Ablesungen über die Zeit vollzogen werden müssen. Die Konzeption von Messprogrammen erfolgt häufig intuitiv oder auf Basis von Erfahrungswerten, wobei die Gefahr besteht, dass letztendlich eine zu geringe Anzahl von Messpunkten vorliegt, um das entsprechende Identifikationsproblem eindeutig zu lösen (Bucher, 1993). Zudem kann eine Fülle an Messdaten dazu führen, dass eine eindeutige Bestimmung der Modellparameter fehlschlägt oder Phantomlösungen erzeugt werden, welche mit den wahren Systemparametern nicht übereinstimmen (Smolczyk, 1999).

Für die nachfolgenden Untersuchungen besteht die Aufgabe darin, genauer auf die Punkte A) u. C) einzugehen. Es lässt sich zeigen, dass ein Großteil der im *ersten* Kapitel aufgestellten mathematischen und geotechnischen Forschungsfragen anhand der Vorabanalyse gemäß A) beantwortet werden können. Der Mehrwert dieser Vorabanalyse ist dadurch zu begründen, dass eine aufwendige und kostenintensive Analyse mit realen Messdaten gemäß B) entbehrlich ist, wenn für ein Identifikationsproblem unter idealen Bedingung keine eindeutige Lösung existiert und somit eine Lösung der inversen Problemstellung unerreichbar wäre.

Darüber hinaus muss das Messprogramm vor der eigentlichen Parameteridentifikation mit realen Messdaten feststehen, sodass die ausführlichen Vorüberlegungen und Vorabanalysen für eine erfolgsversprechende inverse Analyse gerechtfertigt sind und zweckmäßig erscheinen (Schanz und Meier, 2008). In diesem Zusammenhang ergibt sich durch eine systematische Herangehensweise die Möglichkeit, ein Messprogramm im Vorfeld mittels wissenschaftlichen Methoden optimal und effizient zu konzipieren (Hölter et al., 2016; Hölter et al., 2018). Bei der Optimierung des Messprogramms gemäß Punkt C) muss eine ausreichende Redundanz erhalten

bleiben um z.B. den möglichen Ausfall von Messgebern auszugleichen (vgl. z.B. Schanz und Meier, 2008).

Unter A1) und A2) wird eingangs die geotechnische Problemstellung definiert und der Einfluss der Modellparameter auf das Berechnungsmodell mit mathematischen Methoden wie der Sensitivitätsanalyse analysiert. Unter A3) folgt dann die Parameteridentifikation anhand von *idealen* Messdaten. Mit *ideal* ist in diesem Fall gemeint, dass die künstlich erzeugten Messdaten für die Parameteridentifikation anhand der direkten Problemstellung unter der Vorgabe von konkreten Modellparametern erzeugt werden. Auch wenn diese Herangehensweise auf den ersten Blick trivial erscheinen mag, können Untersuchungen mit synthetischen Messdaten wertvolle Ergebnisse liefern (Schanz und Meier, 2008; Perau und Potthoff, 2002). Der Parametersatz für die synthetischen Messdaten sollte anhand von Erfahrungswerten so gewählt werden, dass dieser näherungsweise den zu erwartenden Kennwerten für die reale Problemstellung entspricht (Schanz und Meier, 2008). Wenn die Parameteridentifikation mit den synthetischen Messdaten unter idealen Bedingungen erfolgreich war, werden diese in einem nächsten Schritt zur Untersuchung der Rauschempfindlichkeit respektive der Stabilität beispielsweise mit einer normalverteilten zufälligen Messabweichung überlagert. Im Rahmen der Parameteridentifikation stellt sich dann die Frage, ob eine Rückrechnung der Parameter an gestörten Messdaten überhaupt möglich ist und wenn ja, wie sich die Messabweichungen auf die Schätzung der Modellparameter auswirken. Es wird somit die Stabilität der Lösung gegenüber kleinen Messabweichungen der synthetischen Messdaten untersucht (Mahnken, 1998).

Eine Vielzahl von inversen Problemstellungen ist nach der Definition von Hadamard (1923) schlecht gestellt. Das bedeutet in Bezug auf ein Identifikationsproblem, dass eine geringfügige Störung der Messdaten eine massive Veränderung der Lösung zur Folge hat (Kirchgraber et al., 2001). In diesem Fall ist es ohne weitere Maßnahmen nicht zweckmäßig, die Problemstellung anhand von realen Messdaten zu lösen, da die Probleme z.B. in einem unzureichenden Messprogramm oder einem falsch ausgewählten Optimierungsalgorithmus begründet liegen können. Zur Überwindung dieser Problematik können unterschiedliche Maßnahmen zum Einsatz kommen. In diesem Zusammenhang ist sowohl eine Erweiterung des Messprogrammes durch weitere Messgrößen als auch die Wahl eines robusteren Optimierungsalgorithmus denkbar, der durch den Einsatz von speziellen mathematische Methoden wie der *Regularisierung* eventuell einen verbesserten Lösungszugang ermöglicht (Kuntz, 1994).

In den nachfolgenden Unterkapiteln wird in Bezug auf das exemplarische Randwertproblem ausführlicher auf unterschiedliche Teilaspekte der Untersuchungspunkte A1) - A2) eingegangen. Darauf aufbauend werden dann im *fünften* Kapitel unterschiedliche Anwendungen zur Parameteridentifikation unter Verwendung von synthetischen Messdaten vorgestellt, sodass diesbezüglich der Schwerpunkt auf den Untersuchungspunkten A3) u. A4) liegt.

4.3 Exemplarisches Randwertproblem

Als Berechnungsmodell für die Anwendungen zur Parameteridentifikation im *fünften* Kapitel dient die in Abb. 4.1 dargestellte langgestreckte Baugrube, welche bereits in Perau und Meteling (2016) als Anwendungsbeispiel für die direkte Problemstellung einer Baugrube mit Restwasserhaltung verwendet wurde. Ausführungsbeispiele für Baugruben dieser Art sind z.B. in Placzek und König (2010), Pähler und Danieli (2010), Katzenbach et al. (2011), Voigt (2014) oder Mayer et al. (2004) zu finden.

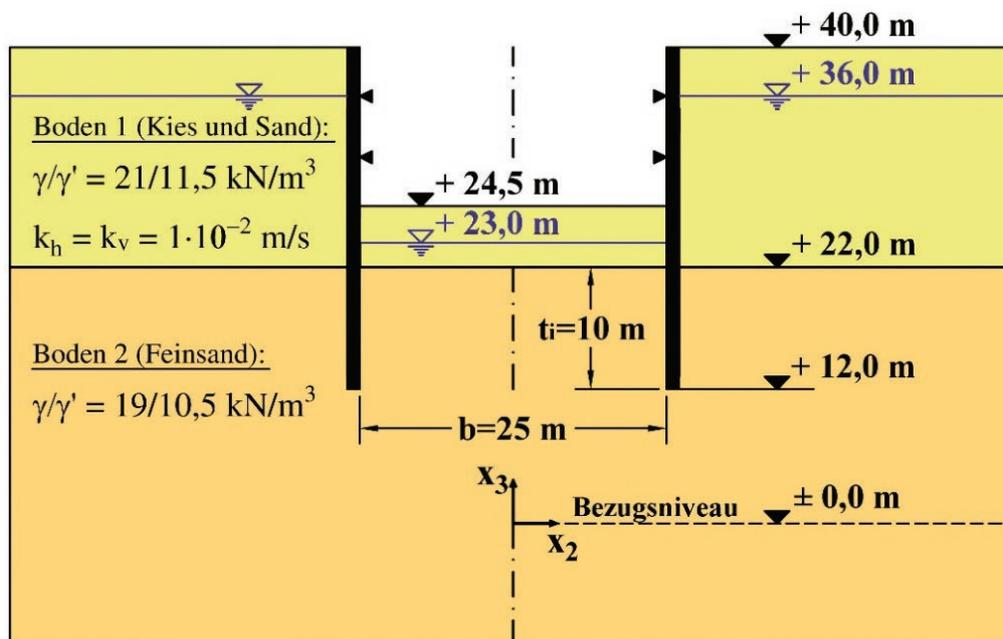


Abbildung 4.1: Berechnungsbeispiel einer langgestreckten Baugrube nach Perau und Meteling (2016)

Im Folgenden wird genauer auf den Punkt A1) des Untersuchungskonzeptes eingegangen. Der in Abb. 4.1 dargestellte Untergrund besteht aus einer quartären Schichtenfolge aus Kies und Sand und wird von einer tertiären Bodenschicht aus Feinsand unterlagert, wobei die Geländeoberfläche analog zu dem gewählten Bezugsniveau bei + 40,0 m liegt. Der Übergang zwischen der quartären und tertiären Schicht liegt in einer Tiefe von + 22,0 m unterhalb der Geländeoberfläche. Im Vergleich zu der quartären Schicht ist die Durchlässigkeit der tertiären Schicht deutlich geringer, sodass für den Abbau des Potenzialunterschieds infolge der unterschiedlichen Grundwasserstände inner- und außerhalb der Baugrube, lediglich die tertiäre Schicht zu berücksichtigen ist (Perau und Meteling, 2016, 2017).

Die Einbindelänge der Verbauwände in die schwächer durchlässige tertiäre Schicht beträgt $t_i=10$ m. Durch das Einbringen der Verbauwände in die schwächer durchlässige Schicht wird

der Wasserzufluss zur Baugrube vermindert, sodass sich die Wasserhaltung auf die folgenden Maßnahmen beschränkt:

- i. Das Absenken des Grundwassers innerhalb der Baugrube.
- ii. Das Abführen des Restwassers, bestehend aus ...
 - dem Wasserzufluss aus dem schwächer durchlässigen Feinsand,
 - dem Niederschlagswasser
 - und dem Wasserzutritt infolge der Systemdurchlässigkeit (Kluckert, 2016).

Das Absenken des Grundwassers innerhalb der Baugrube erfolgt in vier Absenkschritten, wobei der Innenpegel von + 36,0 m auf + 23,0 m abgesenkt wird. Das Restwasser kann über Pumpen aus den quartären Sanden und Kiesen abgepumpt werden. Für eine sehr lange Baugrube – wie in Abb. 4.1 – ist es ggfs. aus bauverfahrenstechnischer Sicht sinnvoll, eine abschnittsweise Unterteilung in verschiedene Baudocks vorzunehmen. Bei dem hier vorliegenden Berechnungsmodell beträgt die Gesamtlänge der Baugrube 1,2 km. Es werden vier Baudocks mit einer Gesamtlänge von 300 m simuliert, welche ähnlich wie bei Voigt (2014) nochmals durch zusätzliche Querschotte mit einer Länge von $L=100$ m unterteilt sind. Der Wasserzufluss zur Baugrube nach Gl. (3.19) wird unter Berücksichtigung der Querschotte dann für eine Strecke von $L=100$ m berechnet.

Die in Abb. 4.1 dargestellte langgestreckte Baugrube wird als ebenes System betrachtet, sodass die Berechnung der *stationären* Grundwasserströmung unter den zuvor erläuterten Modellannahmen für die weiteren Untersuchungen mit den analytischen Gleichungen nach Perau und Meteling (2017) erfolgen kann. Naturgemäß sind die analytischen Näherungsgleichungen nur unter speziellen Modellannahmen anwendbar und unterliegen entsprechenden Anwendungsgrenzen (vgl. Tab. 3.3). Es wird weiter toleriert, dass die Näherungslösungen das Randwertproblem mathematisch nicht exakt lösen. Dennoch kann durch die Anwendung der analytischen Gleichungen bei der Parameteridentifikation sichergestellt werden, dass das Ergebnis nicht durch unzureichende Annahmen hinsichtlich der Schrittweiten für die numerischen Ableitungen oder der unzutreffenden Wahl der Gebietsgröße im FEM-Umfeld verfälscht wird. Für Plausibilitätskontrollen wird zudem auf ein selbst erstelltes MATLAB Programm zurückgegriffen, das eine Berechnung der ebenen Anströmung auf Basis der FEM ermöglicht (vgl. Anhang B).

Um die inverse Problemstellung der Parameteridentifikation bearbeiten zu können, bietet sich für gewöhnlich die folgende Vorgehensweise an:

1. Messgröße y^{meas} festlegen.
2. Parameter κ_i identifizieren, welche die Messgröße beeinflussen.
3. Mathematisches Modell für die Messgröße $y^{\text{calc}} = f(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n)$ aufstellen.
4. Einfluss der jeweiligen Parameter κ_i quantifizieren und bewerten.

Als Messgrößen für die Baugrube in Abb. 4.1 zur Parameteridentifikation werden nachfolgend Standrohrspiegelhöhen, Porenwasserdrücke sowie Förderraten verwendet (Katzenbach et al., 2011). Nach der gründlichen und systematischen Analyse der direkten Problemstellung in Perau und Meteling (2017) lassen sich das Potenzial/die Standrohrspiegelhöhe, der Porenwasserdruck und der Wasserzufluss mathematisch als Modellfunktion $f(\boldsymbol{\kappa})$ in Abhängigkeit der jeweiligen Modellparameter $\boldsymbol{\kappa}$ folgendermaßen darstellen:

$$\begin{pmatrix} \Phi_P^{\text{calc}}(\boldsymbol{\kappa}) \\ u_P^{\text{calc}}(\boldsymbol{\kappa}) \\ q^{\text{calc}}(\boldsymbol{\kappa}) \end{pmatrix} = f \left(\begin{matrix} x_{2P}, x_{3P}, t_i, b, \Phi_A, \Phi_D, k_h, k_v \\ x_{2P}, x_{3P}, t_i, b, \Phi_A, \Phi_D, k_h, k_v, \gamma_w \\ t_i, b, L, \Phi_A, \Phi_D, k_h, k_v \end{matrix} \right) \quad (4.1)$$

Die Modellparameter $\boldsymbol{\kappa}_i$ in Gl. (4.1) sind, abstrakt betrachtet, die Argumente der analytischen Näherungsgleichungen zur Berechnung der Standrohrspiegelhöhe bzw. Porenwasserdrucks nach Gl. (3.6) u. Gl. (3.8) sowie für den Wasserzufluss in die Baugrube nach Gl. (3.19). Anhand von Gl. (4.1) ist erkennbar, dass sich der Satz an Modellparametern $\boldsymbol{\kappa}$ zwar für die jeweiligen physikalischen Größen unterscheidet, jedoch setzt sich dieser allgemein aus der Geometrie, den Randbedingungen und den unterschiedlichen Materialparametern zusammen. In der Planungsphase müssen alle Parameter in Gl. (4.1) bekannt sein, um die geforderten Nachweise und Berechnungen gemäß Tab. 3.1 für die Baugrube in Abb. 4.1 im Vorfeld durchführen zu können.

Die Geometrieparameter sind in der Regel bekannt, da sich diese aus der Planung sowie in Abhängigkeit der Nachweise in Tab. 3.1 ergeben und im Zweifelsfall relativ einfach über eine Messung bestimmbar sind. Demgemäß wird z.B. die geohydraulisch erforderliche Einbindetiefe t_i iterativ auf Grundlage des Nachweises gegen hydraulischen Grundbruch bestimmt (Odenwald und Herten, 2008; Perau und Meteling, 2016). Die Bestimmung der Randbedingungen (Φ_A, Φ_D) zur Berechnung der direkten Problemstellung erfolgt in der Regel durch eine in-situ-Messung des jeweiligen Grundwasserspiegels innerhalb und außerhalb der Baugrube. Da der Grundwasserstand nicht direkt beobachtet werden kann, sind Grundwassermessstellen erforderlich, wobei in einem verrohrten Bohrloch die Höhe des Wasserspiegels im Steigrohr mit einer elektrischen Sonde gemessen wird (Bucher, 1993).

Im Gegensatz zu anderen Baustoffen wie z.B. Beton oder Stahl sind die Materialparameter in der Geotechnik in der Regel zunächst als unbekannt vorauszusetzen. Insbesondere bei geotechnischen Fragestellungen ist die Bestimmung der Materialparameter als problematisch anzusehen, da aufgrund der natürlichen Heterogenität des Baugrundes und der begrenzten Anzahl von geologischen Erkundungen die Materialparameter zumeist nur unvollständig abgebildet werden können (Nagel et al., 2012). Zudem kann eine Vielzahl von Materialparametern auch nur indirekt bestimmt werden, da eine direkte Messung nicht möglich ist. Da für den Potenzialabbau vereinfachend nur die tertiäre Bodenschicht (Boden 2, vgl. Abb. 4.1) angesetzt wird, müssen

lediglich die Materialparameter für den Feinsand ermittelt werden. Demgemäß sind in Bezug auf Gl. (4.1) die Durchlässigkeitsbeiwerte (k_h , k_v) und eine etwaige Anisotropie als Quotient der jeweiligen Durchlässigkeitsbeiwerte ($\alpha_k = k_h/k_v$) für den Feinsand zu bestimmen. Sowohl die Durchlässigkeitsbeiwerte als auch die Anisotropie sind nur indirekt z.B. über Labor- oder Feldversuche bestimmbar. Die Wichte des Wassers γ_w in Gl. (4.1) ist bekannt.

Für die konkreten Anwendungsbeispiele im *fünften* Kapitel stellt sich für ein System wie in Abb. 4.1 auf den ersten Blick die Frage, welche Art von Identifikationsproblemen dort prinzipiell auftreten kann, vor allem wenn die Modellparameter κ bereits in der Planungsphase festzulegen sind und die Messdaten erst im Verlauf der Bauphase vorliegen (Henke, 2009). In aller Regel ist es sinnvoll, die Berechnungsannahmen durch eine Parameteridentifikation zu überprüfen und diese ggfs. sogar für die weiteren Bauabschnitte anzupassen. Wenn bei einer Baugrube im Grundwasser eine Anisotropie vorliegt, verlagert sich der Potenzialabbau auf den Bereich innerhalb der Baugrube, sodass sich das Potenzial vornehmlich zwischen Wandfuß und Baugrubensohle abbaut (Aulbach, 2016; Peraus und Meteling, 2017; Hettler et al., 2018).

Um diesen Aspekt zu veranschaulichen, wurde für das System in Abb. 4.1 die erforderliche Einbindelänge der Verbauwände in den Feinsand für den Untersuchungsbereich nach TERZAGHI mit $b_t = t_i/2$ und einer Auflastspannung aus dem Quartär von $p = 43 \text{ kN/m}^2$ berechnet.

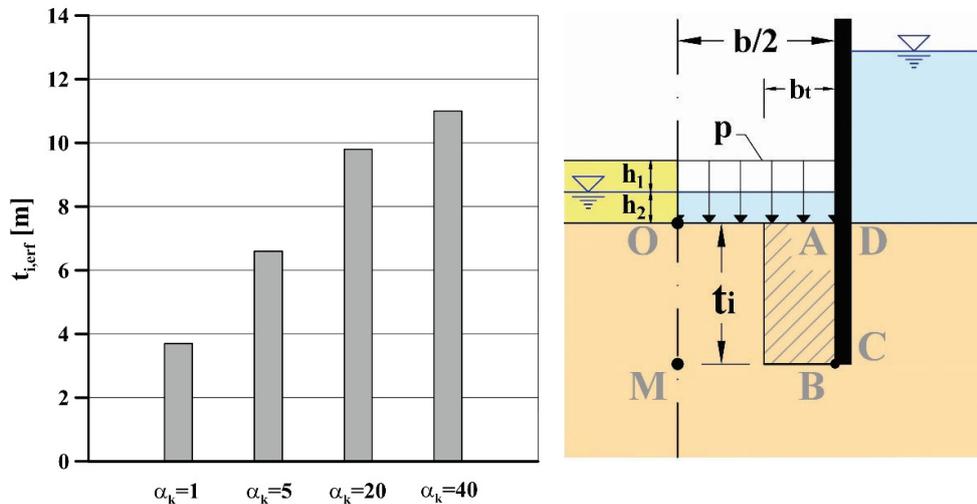


Abbildung 4.2: Einfluss des Grades der Anisotropie auf die geohydraulisch erforderliche Einbindelänge der Verbauwand in Abb. 4.1 für den Untersuchungsbereich nach TERZAGHI, BS-T für einen „günstigen“ Baugrund mit $\gamma_H = 1,45$ und $\gamma_{G,stab} = 0,95$ vgl. Peraus und Meteling (2016)

Zur Abschätzung des Einflusses der Anisotropie erfolgte die Bestimmung der geohydraulisch erforderlichen Einbindelänge in Abb. 4.2 für unterschiedliche Verhältnisse des Grades der Anisotropie. An Abb. 4.2 ist zu erkennen, dass der Grad der Anisotropie die erforderliche Einbindelänge maßgeblich beeinflusst und dass demgemäß eine möglichst genaue Bestimmung der

Anisotropie durch eine Parameteridentifikation für den ersten Bauabschnitt ggfs. zu einer Optimierung der Einbindelänge für die weiteren Bauabschnitte führen kann. Auch wenn die Bestimmung der Anisotropie anhand einer Parameteridentifikation nicht exakte Lösungen liefern wird, sowie durch weitere Probleme wie unentdeckte Feinschichtungen oder stark veränderliche Baugrundverhältnisse verfälscht werden kann, ist eine Optimierung der Einbindelänge sowohl aus sicherheitstechnischen als auch aus ökonomischen Gründen erstrebenswert.

Insbesondere wenn sich für das hier vorliegende Beispiel mit 300 m langen Baudocks gemäß Abb. 4.2 herausstellt, dass sich anstelle einer ungünstig angesetzten Anisotropie von $\alpha_k=20$ in der Planungsphase lediglich ein Grad der Anisotropie von z.B. $\alpha_k=5$ anhand der Messdaten nachweisen lässt. In diesem Fall könnte die Einbindelänge für die weiteren Bauabschnitte aus geohydraulischer Sicht um ca. 3 m verringert werden. Somit bietet die Anwendung der Parameteridentifikation die Möglichkeit, fehlerhafte Annahmen nach der Fertigstellung eines Bauabschnitts festzustellen und im Nachlauf ggfs. anzupassen.

Darüber hinaus können anhand einer Parameteridentifikation Messwerte anderer Messsysteme überprüft werden, wie z.B. die Überprüfung der Standrohrspiegelhöhe des Innenpegels durch eine Porenwasserdruckmessung im Feinsand. Auch ein Ausfall eines Messgebers oder ein falsch kalibriertes Messgerät lassen sich ggfs. mit den Methoden der inversen Analyse detektieren.

Eine Kontrolle der Bauausführung erscheint ebenfalls möglich, sodass eine starke Veränderung der Förderrate, wie z.B. eine plötzliche Vergrößerung der Förderrate in einem sehr kurzen Zeitintervall, auf Leckagen bzw. Risse in den Verbauwänden hinweisen kann (vgl. Becker et al. (2017)). Eine stark erhöhte Förderrate kann jedoch, neben Fehlern in der Bauausführung, auch ein Hinweis dafür sein, dass in der Ausschreibung die Durchlässigkeitsbeiwerte – vgl. den Feinsand in Abb. 4.1 – um einen beträchtlichen Faktor zu klein abgeschätzt wurden (siehe z.B. Katzenbach et al. (2011)).

Für die Anwendungsbeispiele im *fünften* Kapitel werden analog zu Gl. (4.1) sowie den zuvor skizzierten Fragestellungen unterschiedliche Identifikationsprobleme in Abhängigkeit von κ und unter Verwendung von synthetischen Messdaten für unterschiedliche geohydraulische Kenngrößen ausführlich analysiert.

4.4 Analyse der direkten Problemstellung

Nach Untersuchungspunkt A2) ist es zweckmäßig, die direkte Problemstellung in Bezug auf den Einfluss der einzelnen Modellparameter in Gl. (4.1) zu analysieren. Eine wichtige Erkenntnis aus den Vorarbeiten von Perau und Meteling (2017) ist, dass sich die Gl. (4.1) in Bezug auf die Materialparameter (k_h, k_v) in Gl. (4.2) auch anderweitig formulieren lässt:

$$\begin{pmatrix} \Phi_P^{\text{calc}}(\boldsymbol{\kappa}) \\ u_P^{\text{calc}}(\boldsymbol{\kappa}) \\ q^{\text{calc}}(\boldsymbol{\kappa}) \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x_{2P}, x_{3P}, t_i, b, \Phi_A, \Phi_D, \alpha_k \\ x_{2P}, x_{3P}, t_i, b, \Phi_A, \Phi_D, \alpha_k, \gamma_w \\ t_i, b, L, \Phi_A, \Phi_D, \alpha_k, k_v \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Anhand dieser analytischen Näherungsgleichungen wurde belegt, dass das Potenzial respektive der Porenwasserdruck gemäß Gl. (3.8) lediglich von dem Verhältnis der Durchlässigkeitsbeiwerte, also dem Grad der Anisotropie $\alpha_k = k_h/k_v$, abhängt. Für die Parameteridentifikation bedeutet dies, dass gemäß Gl. (4.2) auf Grundlage von Messungen der Standrohrspiegelhöhe/des Porenwasserdrucks nur auf den Grad der Anisotropie (α_k) zurückgeschlossen werden kann und nicht auf die einzelnen Durchlässigkeitsbeiwerte (k_h, k_v) in horizontaler als auch vertikaler Richtung. Diese Erkenntnis folgt aus der umfassenden Analyse der direkten Problemstellung im *dritten* Kapitel und die daraus entwickelten Näherungsgleichungen, sodass der Punkt A2) zwar aufwendig ist, jedoch nicht als trivial angesehen werden sollte.

Zur Abschätzung des Wasserzuflusses in die Baugrube und die damit verbundene Dimensionierung der Pumpleistung wäre es dennoch erstrebenswert, die jeweiligen Durchlässigkeitsbeiwerte möglichst realistisch abzubilden. Die analytischen Näherungsgleichungen zur Bestimmung der Wassermenge in Gl. (4.2) hängen analog zu Gl. (3.19) sowohl vom Grad der Anisotropie α_k als auch von dem vertikalen Durchlässigkeitsbeiwert k_v ab. Um dieses Identifikationsproblem zu lösen müssen gemäß Gl. (4.2) sowohl Messdaten für den Porenwasserdruck/die Standrohrspiegelhöhe als auch für den Wasserzufluss zur Baugrube bekannt sein.

Falls nur die Messdaten für den Wasserzufluss vorliegen, können aufgrund der Anzahl der unbekanntenen Modellparameter – α_k und k_v in Gl. (4.2) – weder der Grad der Anisotropie (α_k) noch die entsprechenden Durchlässigkeitsbeiwerte (k_h, k_v) bestimmt werden. Wenn z.B. für das Berechnungsbeispiel in Abb. 4.1 während der Bauzeit des ersten Baudocks eine wesentlich höhere Wassermenge gefördert wird, könnte dies ein Hinweis darauf sein, dass die vorab angesetzten Durchlässigkeitsbeiwerte im Zuge der Planungsphase unzutreffend waren oder aber ein wesentlich höherer Grad der Anisotropie vorliegt.

4.5 Sensitivitätsanalyse

Bevor ein Messprogramm mit Blick auf Untersuchungspunkt A3) konzipiert wird, ist zunächst zu überprüfen, an welchen Stellen im Strömungsgebiet Porenwasserdruckmessgeber für eine Parameteridentifikation vorzugsweise zu applizieren sind. In Bezug auf das System in Abb. 4.1 stellt sich für die Porenwasserdruckmessgeber die Frage, in welchen Bereichen der tertiären Schicht Messgeber anzuordnen sind:

- Inner- oder außerhalb der Baugrube?
- In der Baugrubenmitte, am Verbauwandfußpunkt oder im Zwischenbereich?
- Im Bereich des Schichtwechsels, auf Höhe der Wandunterkante oder unterhalb der Wandunterkante?

Die Vorüberlegungen im vorherigen Unterkapitel haben bereits verdeutlicht, wie hilfreich es für die Lösung der Parameteridentifikation ist, den Einfluss der Modellparameter auf die direkte Problemstellung vorab zu analysieren und zu verstehen. Für eine weitergehende Analyse wird eine lokale Sensitivitätsanalyse wie in Gl. (2.26) für unterschiedliche Punkte im Strömungsgebiet durchgeführt. Ziel ist es zu quantifizieren, inwieweit eine Änderung der Modellparameter κ das Simulationsergebnis in Abhängigkeit der Lage im Strömungsgebiet beeinflusst. Zur Berechnung der lokalen Sensitivitäten ergeben sich unter der Verwendung der analytischen Näherungsgleichungen folgende Vorteile:

- Geschlossene Ableitungsfunktion, Einfluss aller Modellparameter κ bekannt.
- Aussagen hinsichtlich Übertragbarkeit sind möglich, Einbezug von theoretischen Grenzfällen.
- Keine aufwendigen Berechnungen zur Bestimmung der Ableitungen im FEM-Umfeld, wie z.B. in Gl. (2.28).

Im Gegensatz zu einer FEM-Lösung unterliegen die Näherungsgleichungen den zuvor genannten Anwendungsgrenzen in Tab. 3.3. Dennoch ermöglichen diese einen Einblick in die Struktur des Problems und die Ergebnisse lassen sich ggfs. auf ähnliche Fragestellungen übertragen. Bei der Bewertung sind Orte mit einer hohen Sensitivität grundsätzlich günstiger für eine Parameteridentifikation als Orte mit einer geringeren Sensitivität, da in diesem Fall die Lösung nur schwach von den Modellparametern abhängt. Wenn sich die Sensitivität zu Null ergibt, hängt die direkte Problemstellung bzw. die Zielfunktion nicht von diesem Modellparameter ab und eine Rückrechnung ist aus Messungen in diesem Punkt nicht möglich.

Es wird an dem in Abb. 4.1 dargestellten Beispiel gezeigt, wie sich die Sensitivitäten für unterschiedliche Punkte im Strömungsgebiet mit Blick auf ausgewählte Modellparameter verhalten. Zur Wahrung der Übersichtlichkeit werden die Ableitungen der direkten Problemstellung für den Porenwasserdruck lediglich bezüglich der Randpotenziale (Φ_D , Φ_A) und des Grades der

Anisotropie (α_k) im Gültigkeitsbereich der Näherungsgleichungen gebildet. Für die anderen Modellparameter in Gl. (4.1) u. (4.2) kann entsprechend der nachfolgenden Ausführungen gleichermaßen vorgegangen werden. Um den Porenwasserdruck anhand der Näherungsgleichungen zu bestimmen, werden die Potentiale gemäß Gl. (3.8) mit der einfachen Rechenoperation in Gl. (3.6) unter Berücksichtigung der geodätischen Höhe x_{3P} und der Wichte des Wassers γ_w umgerechnet. Unter Verwendung der Gl. (3.6) u. (3.8) ergibt sich die lokale Sensitivität des Porenwasserdrucks hinsichtlich der Randpotentiale:

$$\frac{\partial u_P^{\text{calc}}}{\partial \Phi_D} = \gamma_w \cdot \phi_P(\xi_2, \xi_3, t^*) \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial u_P^{\text{calc}}}{\partial \Phi_A} = \gamma_w \cdot (1 - \phi_P(\xi_2, \xi_3, t^*)) \quad (4.4)$$

Wie bereits zuvor erläutert, gehen die Randpotentiale linear in die Berechnung des Porenwasserdrucks ein. Die Sensitivitäten in Gl. (4.3) und Gl. (4.4) sind geschlossene Funktionen in Abhängigkeit der Wichte des Wassers γ_w und der dimensionslosen Funktion des Potentials $\phi_P(\xi_2, \xi_3, t^*)$, welche von den dimensionslosen Koordinaten ξ_2 bzw. ξ_3 und dem geohydraulischen Schlankheitsgrad t^* abhängen. Auf der Höhe des Schichtwechsels innerhalb der Baugrube gilt für das dimensionslose Potenzial $\phi_P = \phi_A = 0$ und außerhalb der Baugrube $\phi_P = \phi_D = 1$. Somit ist die Sensitivität unter Berücksichtigung der Gl. (4.3) u. (4.4) hinsichtlich der Randbedingungen auf den Modellrändern am größten und nimmt von dort aus in Richtung Wandunterkante ab. Jedoch ist zu beachten, dass die Sensitivität auch von dem geohydraulischen Schlankheitsgrad t^* abhängt. Für eine sehr schmale Baugrube entspricht die Sensitivität gemäß Gl. (4.3) hinsichtlich Φ_D auf der Höhe der Wandunterkante nahezu der auf dem Modellrand D, da sich der Potenzialabbau für derartige Baugruben dann größtenteils innerhalb der Baugrube vollzieht (Perau und Meteling, 2017).

Die Sensitivität des Porenwasserdrucks hinsichtlich des Materialparameters α_k ergibt sich unter Verwendung von Gl. (3.6) für die Stützstellen $P = [M, S, B]$ zu:

$$\frac{\partial u_P^{\text{calc}}}{\partial \alpha_k} = \gamma_w \cdot (\Phi_D - \Phi_A) \cdot \frac{\partial \phi_P}{\partial \alpha_k} \quad (4.5)$$

mit:

$$\frac{\partial \phi_P}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial \phi_P}{\partial t^*} \cdot \frac{\partial t^*}{\partial \alpha_k} = \frac{\beta_e \cdot (4 \cdot \beta_4 \cdot (t^*)^3 + 2 \cdot \beta_3 \cdot (t^*)^2 + \beta_2)}{(\beta_4 \cdot (t^*)^4 + \beta_3 \cdot (t^*)^2 + \beta_2 \cdot (t^*) + \beta_1)^{1+\beta_e}} \cdot \frac{t_i}{b \cdot 2 \cdot \sqrt{\alpha_k}} \quad (4.5a)$$

Für die Ableitung des Porenwasserdrucks bedarf es gemäß Gl. (4.5) lediglich der Ableitung des dimensionslosen Potentials in Gl. (4.5a). Die Sensitivität hinsichtlich der Anisotropie der Durchlässigkeitsbeiwerte hängt gemäß Gl. (4.5) und (4.5a) von den folgenden Parametern ab:

- Wichte des Wassers γ_w
- Differenz der Randpotenziale ($\Phi_D - \Phi_A$)
- Funktionsbeiwerte β für die Stützstellen M, S und B auf der Höhe der Wandunterkante
- Einbindetiefe t_i und Baugrubenbreite b
- Grad der Anisotropie α_k

Die Sensitivität in Gl. (4.5) setzt sich zusammen aus der Wichte des Wassers, der Differenz der Randpotenziale und der partiellen Ableitung $\partial\phi_p/\partial\alpha_k$ des dimensionslosen Potentials nach dem Grad der Anisotropie. Gemäß Gl. (4.5a) hängt der Porenwasserdruck nichtlinear von dem Grad der Anisotropie ab. Wenn unterschiedliche Absenkphasen zu berücksichtigen sind, ist zu beachten, dass sich je nach Differenz der Randpotenziale unterschiedliche Sensitivitäten ergeben. Dieser Umstand ist auch insoweit plausibel, als dass durch eine größere Differenz der Randpotenziale die entsprechenden Bodenparameter „aktiviert“ werden und demgemäß einen größeren Einfluss auf die Lösung ausüben.

Naturgemäß weisen die Sensitivitäten, wie z.B. in Gl. (4.3) und (4.5), unterschiedliche Einheiten auf und sind demnach untereinander schwer zu vergleichen (Hill und Tiedeman, 2007). Um dennoch einen Vergleich der einzelnen Sensitivitäten zu ermöglichen, werden in Schanz und Meier (2008) oder Zimmerer et al. (2009) Möglichkeiten sowie Strategien, wie eine Überführung der Sensitivitäten in eine dimensionslose Form, diskutiert. Das Produkt aus der Wichte des Wassers und der Differenz der Randpotenziale in Gl. (4.5) gibt Aufschluss über die Einheit der Ableitung, da die partielle Ableitung der dimensionslosen Potentialfunktion $\partial\phi_p/\partial\alpha_k$ dimensionslos ist. Entscheidend für die ortsabhängige lokale Sensitivität im Strömungsgebiet dürfte der dimensionslose Term $\partial\phi_p/\partial\alpha_k$ in der Klammer sein, da die Vorfaktoren nicht Teil der dimensionslosen Funktion für das Potential sind.

Anhand der Gl. (4.5) wird nicht deutlich, wie sich die Sensitivitäten in den einzelnen Stützstellen $P = [M, S, B]$ im zu untersuchenden Strömungsgebiet quantitativ unterscheiden. Um dennoch den Einfluss der Modellparameter auf die Sensitivitäten zu veranschaulichen, werden für das Beispiel in Abb. 4.1 und die berechneten Ableitungsfunktionen folgende Modellparameter für die Geometrie, die Randpotenziale und die Materialparameter angesetzt:

- Geometrie: $t_i=10$ m, $b=25$ m
- Randpotenziale: $\Phi_D=36$ m, $\Phi_A=23$ m
- Materialparameter: $\gamma_w=10$ kN/m³; Feinsand: $\alpha_k=1$; $\alpha_k=5$; $\alpha_k=20$

Dabei wird für den Feinsand in Abb. 4.1 angenommen, dass der Grad der Anisotropie in jedem Fall größer oder gleich 1 ist, sodass bei vorgegebener Geometrie mit $t_i/b = 0,4$ neben der Isotropie mit $\alpha_k=1$ ($t^*=0,4$) zusätzlich noch die Anisotropie mit $\alpha_k=5$ ($t^*\approx 0,9$) sowie $\alpha_k=20$ ($t^*\approx 1,8$) berücksichtigt werden. Somit ist sichergestellt, dass sowohl der Fall einer geohydraulisch breiten Baugrube $t^*=0,4$ als auch einer geohydraulisch schlanken Baugrube ($t^*\approx 1,8$) in den nachfolgenden Untersuchungen zur Sensitivität berücksichtigt werden.

Auch wenn sich die jeweiligen Sensitivitäten unterscheiden, lassen sich anhand dieser beispielhaften Berechnungen grundsätzliche Aussagen über den Betrag der Sensitivität in Abhängigkeit des jeweiligen Ortes ableiten. Um zu überprüfen, ob die Sensitivitäten nicht Produkt der gewählten Ansätze für die Näherungsfunktionen sind, wird zusätzlich noch eine Überprüfung der Ableitungen mittels der FEM für die o.g. Modellparameter und dem System in Abb. 4.1 durchgeführt. Bei der FEM-Lösung werden die numerischen Ableitungen nach dem finiten Differenzenverfahren gemäß Gl. (2.27) stichprobenhaft an bestimmten Stellen im Strömungsgebiet berechnet.

In Abb. 4.3 ist die Auswertung der partiellen Ableitungen der dimensionslosen Potenzialfunktion nach dem Grad der Anisotropie $\partial\phi_{UK_Wand}/\partial\alpha_k$ unter Verwendung der exemplarischen Modellparameter auf der Höhe der Wandunterkante zwischen den Punkten M und B dargestellt. Zusätzlich wurden für zuvor genannten Modellparameter jeweils in den Stützpunkten M, S und B die Ableitungen $\partial\phi_p/\partial\alpha_k$ mittels der FEM mithilfe der zentralen Differenzenformel gemäß Gl. (2.28) berechnet und in Abb. 4.3 vergleichend zu denen der analytischen Näherungsgleichungen illustriert. Der Vergleich der Sensitivitäten in Abb. 4.3 zeigt eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den Sensitivitäten der analytischen Näherungsfunktion und der FEM-Lösung. Der Vorteil der analytischen Näherungsgleichungen wird in Abb. 4.3 offenkundig, da im Gegensatz zur FEM die Ableitungen nicht nur punktuell, sondern als geschlossene Funktion $\partial\phi_{UK_Wand}/\partial\alpha_k$ in Abhängigkeit von α_k vorliegen und sich somit leicht für die angesetzten Modellparameter auswerten lassen.

Für alle drei untersuchten Fälle $\alpha_k = [1, 5, 20]$ kann die betragsmäßig größte Sensitivität hinsichtlich des Grades der Anisotropie in der Mitte der Baugrube (M) festgestellt werden. Die Sensitivität fällt von der Baugrubenmitte (M) zum Fußpunkt der Verbauwand (B) nichtlinear ab. Bis zur Hälfte der Strecke zwischen Punkt M und B ($\xi_2=0,5$) ist die Sensitivität nahezu konstant und nimmt bis zum Fußpunkt ab. Der Vergleich der Kurven in Abb. 4.3 zeigt, dass sich die Sensitivität vom Mittelpunkt der Baugrube bis zum Fußpunkt verringert und dass mit einem steigenden Anisotropieverhältnis die Ableitungsfunktion $\partial\phi_{UK_Wand}/\partial\alpha_k$ flacher wird. Dies liegt darin begründet, dass die Potenzialfunktion ϕ_{UK_Wand} für ein steigendes t^* , also einem höheren Grad der Anisotropie bei gleichbleibenden Geometrieverhältnissen, zu einer Geraden mit Steigung Null entartet (vgl. Abb. 3.7a).

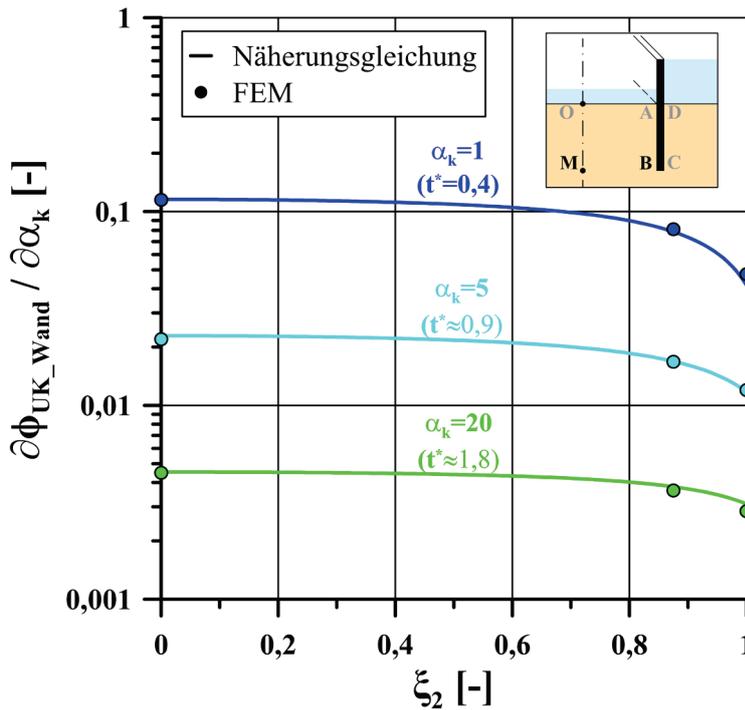


Abbildung 4.3: Ableitung $\partial \phi_{UK_Wand} / \partial \alpha_k$ ausgewertet für unterschiedliche α_k -Werte im Vergleich zur Ableitung im FEM-Umfeld in den Stützpunkten M, S, B (y-Achse logarithmische skaliert)

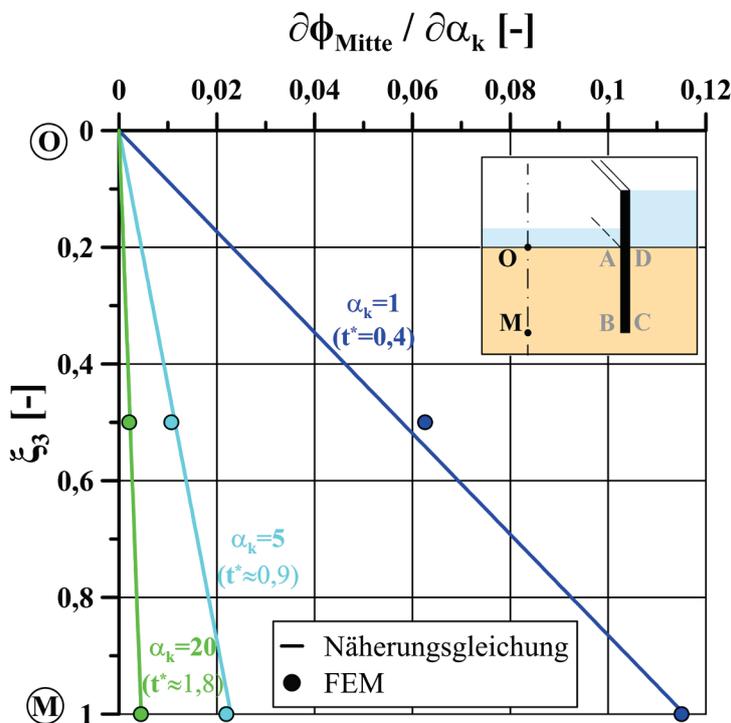


Abbildung 4.4: Ableitung $\partial \phi_{Mitte} / \partial \alpha_k$ ausgewertet für unterschiedliche α_k -Werte im Vergleich zur Ableitung im FEM-Umfeld für $\xi_3=0,5$ und $\xi_3=1$

Anhand der zuvor dargestellten Berechnungsergebnisse entlang der Wandunterkante stellt sich die Frage, wie sich die Sensitivität entlang der Strecke OM, also zwischen dem Schichtwechsel und der Wandunterkante in Baugrubenmitte, verhält. Die Ableitung für die Baugrubenmitte in Gl. (4.6) ergibt sich aus dem Produkt der Wichte des Wassers und der Differenz der Randpotenziale sowie der partiellen Ableitung des dimensionslosen Potentials gemäß Gl. (3.15) nach dem Grad der Anisotropie $\partial\phi_{\text{Mitte}}/\partial\alpha_k$ in Gl. (4.6a) multipliziert mit der dimensionslosen Koordinate ξ_3 :

$$\frac{\partial u_{\text{Mitte}}^{\text{calc}}}{\partial \alpha_k} = \gamma_w \cdot (\Phi_D - \Phi_A) \cdot \frac{\partial \phi_{\text{Mitte}}}{\partial \alpha_k} \quad (4.6)$$

mit:

$$\frac{\partial \phi_{\text{Mitte}}}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial \phi_{\text{Mitte}}}{\partial t^*} \cdot \frac{\partial t^*}{\partial \alpha_k} = \frac{\beta_e \cdot \left(4 \cdot \beta_4 \cdot (t^*)^3 + 2 \cdot \beta_3 \cdot (t^*)^2 + \beta_2 \right)}{\left(\beta_4 \cdot (t^*)^4 + \beta_3 \cdot (t^*)^2 + \beta_2 \cdot (t^*) + \beta_1 \right)^{1+\beta_e}} \cdot \frac{t_i}{b \cdot 2 \cdot \sqrt{\alpha_k}} \cdot \xi_3 \quad (4.6a)$$

Aus Gl. (4.6a) wird ersichtlich, dass die Sensitivität von der Wandunterkante bis zum Schichtwechsel näherungsweise linear abnimmt. In Abb. 4.4 ist die Auswertung der partiellen Ableitung $\partial\phi_{\text{Mitte}}/\partial\alpha_k$ der dimensionslosen Näherungsfunktion gemäß Gl. (4.6a) für die zuvor gewählten Modellparameter dargestellt. An dieser Auswertung ist erkennbar, dass die Sensitivität – wie zuvor an Gl. (4.6a) gezeigt – linear vom Schichtwechsel von Null bis auf die Höhe der Wandunterkante in der Baugrubenmitte ansteigt. Die berechneten Sensitivitäten unter Verwendung der Näherungsgleichungen und der FEM zeigen in Abb. 4.4 eine gute Übereinstimmung.

Die partiellen Ableitungen der dimensionslosen Potenzialfunktion an der Wandinnenseite $\partial\phi_{\text{Wand}_i}/\partial\alpha_k$ gemäß Gl. (3.16) sowie Wandaußenseite $\partial\phi_{\text{Wand}_a}/\partial\alpha_k$ gemäß Gl. (3.17) nach dem Grad der Anisotropie können in derselben Art und Weise wie in Gl. (4.6) berechnet werden. Lediglich der Verlauf der Sensitivität ist über ξ_3 im Gegensatz zu Gl. (4.6) der Arkuskosinus Funktion folgend nichtlinear. In Abb. 4.5 sind jeweils die partiellen Ableitungen der dimensionslosen Potenzialfunktion nach dem Grad der Anisotropie für die Wandinnenseite und Wandaußenseite dargestellt. Anhand der Auswertung ist zu erkennen, dass die Sensitivität $\partial\phi_{\text{Wand}_a}/\partial\alpha_k$ außerhalb der Baugrube geringer ist als innerhalb. Bei geohydraulisch schlanken Baugruben ist die Sensitivität außerhalb nahezu Null, da der Potenzialabbau vornehmlich innerhalb der Baugrube stattfindet. Für beide gilt dasselbe wie für die Baugrubenmitte, sodass die Sensitivität vom Schichtwechsel von Null bis zur Wandunterkante zunimmt.

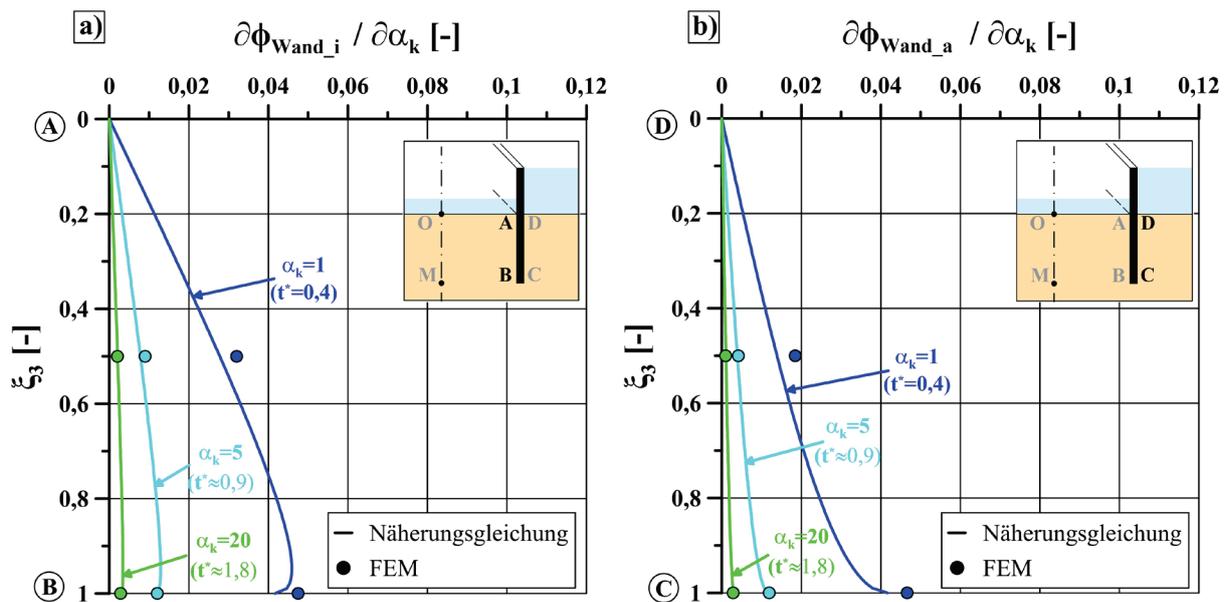


Abbildung 4.5: Ableitung der dimensionslosen Näherungsgleichung a) ϕ_{Wand_i} und b) ϕ_{Wand_a} ausgewertet für unterschiedliche α_k -Werte im Vergleich zur Ableitung im FEM-Umfeld für $\xi_3=0,5$ und $\xi_3=1$

Zusammenfassend lassen sich in Bezug auf die Sensitivität des Porenwasserdrucks in Bezug auf den Grad der Anisotropie folgende Aussagen ableiten:

Die Sensitivität ist:

- in Baugrubenmitte auf der Höhe der Wandunterkante am größten und fällt in Richtung Verbauwandfußpunkt ab.
- innerhalb der Baugrube größer als außerhalb.
- im Schichtwechsel gleich Null und steigt bis auf Höhe der Wandunterkante an.
- abhängig von der Differenz der Randpotenziale.
- abhängig von den Geometrie- und Materialparametern.

Da die analytischen Näherungsgleichungen lediglich an bestimmten Stellen im Strömungsgebiet Gültigkeit besitzen, können anhand der vorgestellten Untersuchungen beispielsweise keine Aussagen über die Entwicklung der Sensitivität im Bereich unterhalb der Wandunterkante getroffen werden.

Um dieser Fragestellung dennoch nachgehen zu können, wurden in Abb. 4.6 anhand der zuvor durchgeführten FEM-Berechnungen die partiellen Ableitungen $\partial\phi_p/\partial\alpha_k$ mit einem Grad der Anisotropie von $\alpha_k=5$ für das gesamte Strömungsgebiet ausgewertet und graphisch dargestellt. Die partiellen Ableitungen $\partial\phi_p/\partial\alpha_k$ im FEM-Umfeld konnten anhand von finiten Differenzen bestimmt werden.

An der Darstellung in Abb. 4.6 lassen sich ein Teil der zuvor aufgestellten Aussagen hinsichtlich der Sensitivität verifizieren. Anhand der Auswertung in Abb. 4.6 ist zu erkennen, dass die Sensitivität örtlich veränderlich ist, was bedeutet, dass an unterschiedlichen Stellen im Strömungsgebiet die Lösung für den Porenwasserdruck stärker bzw. schwächer vom Grad der Anisotropie abhängt.

Es lässt sich auf Grundlage der Abb. 4.6 für das Berechnungsbeispiel zeigen, dass die Sensitivität in der Baugrubenmitte, ca. 2-3 m unterhalb der Wandunterkante, ihr Maximum erreicht. Von der maximalen Sensitivität in der Baugrubenmitte bis zur Verbauwand sowie in Richtung Baugrubensohle bzw. unterer Modellrand nimmt die Sensitivität analog zu den zuvor getroffenen Aussagen ab. Weiter lässt sich zeigen, dass in einem Bereich von ca. 4 m unterhalb des Schichtwechsels eine sehr geringe Sensitivität vorliegt. Auch wenn die Sensitivitätsanalyse hinsichtlich der Anisotropie in Bezug auf die Berechnung des Porenwasserdrucks durchgeführt wurde, lassen sich diese Erkenntnisse z.B. gemäß Gl. (4.5) auf die Berechnung von Standrohrspiegelhöhen gleichermaßen übertragen, da die Sensitivität für die beiden physikalischen Größen in unterschiedlichen Punkten im Strömungsgebiet lediglich von $\partial\phi_P/\partial\alpha_k$ abhängt.

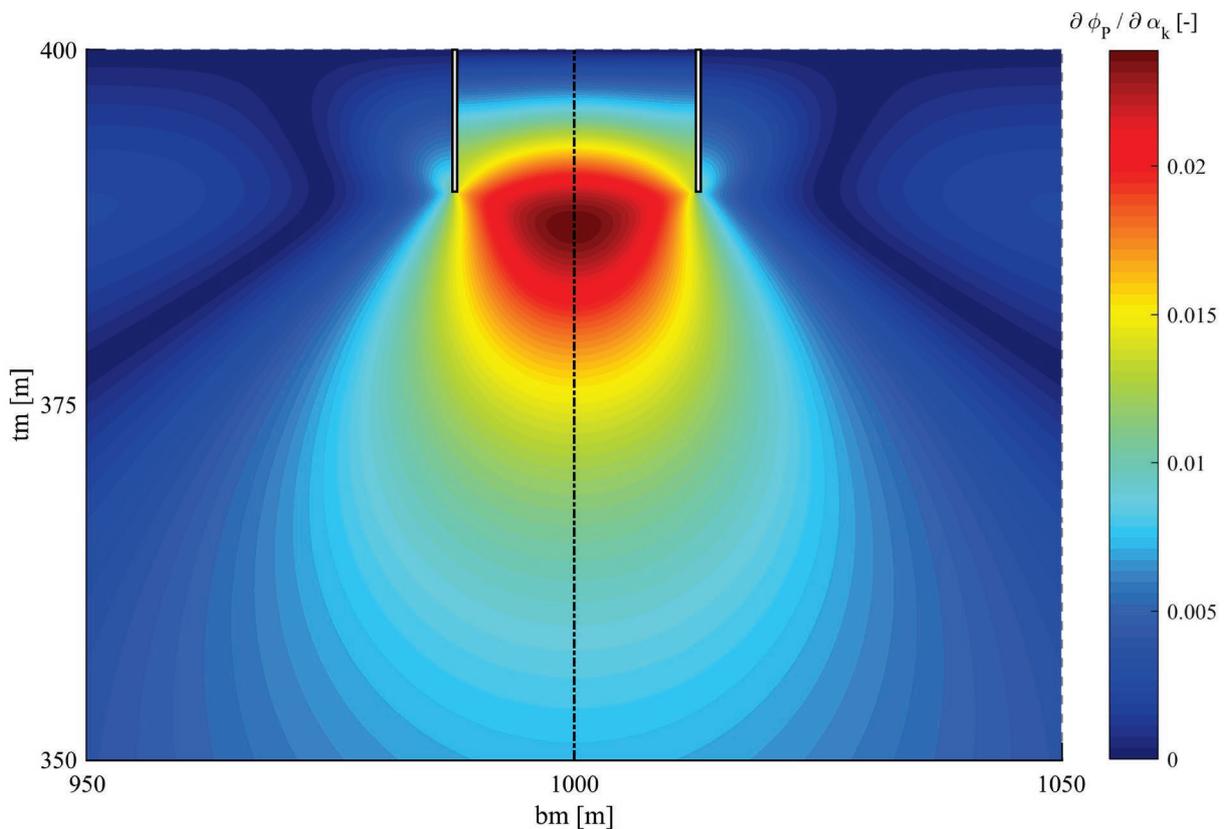


Abbildung 4.6: Berechnungsausschnitt einer FEM-Berechnung für das Modell in Abb. 4.1 - Ergebnis der partiellen Ableitung $\partial\phi_P/\partial\alpha_k$ ausgewertet für $\alpha_k=5$

4.6 Konzeption eines synthetischen Messprogramms

Um die Anwendungen zur Parameteridentifikation im *fünften* Kapitel möglichst übersichtlich zu gestalten, werden in den nachfolgenden Unterkapiteln die Grundlagen für den Untersuchungspunkt A3) erarbeitet. Auf Basis der zuvor durchgeführten Sensitivitätsanalyse liegt eine objektive Entscheidungsgrundlage vor, anhand derer ein Messprogramm für die exemplarischen Anwendungen zur Parameteridentifikation zu konzipieren ist. In Bezug auf exemplarischen Anwendungen zur Parameteridentifikation bildet das nachfolgend vorgestellte synthetische Messprogramm die Grundlage. Für das Messprogramm kommen die folgenden in-situ-Messungen im Strömungsgebiet infrage:

- Punktuelle Messwerterfassung von *Standrohrspiegelhöhen* $\tilde{\Phi}_p^{\text{meas}}$
- Punktuelle Messwerterfassung von *Porenwasserdrücken* $\tilde{u}_p^{\text{meas}}$
- *Wasserzufluss* \tilde{q}^{meas} in die Baugrube

Für die Konzeption eines Messprogramms können aufgrund der Erkenntnisse aus der Sensitivitätsanalyse hinsichtlich der Anisotropie der Durchlässigkeit und in Bezug auf das System in Abb. 4.1 folgende Empfehlungen abgeleitet werden:

- Messpunkte sollten vorzugsweise *innerhalb der Baugrube* angeordnet werden.
- Der optimale Messpunkt liegt *in Baugrubenmitte auf Höhe der Wandunterkante* und gemäß Abb. 4.6 ggfs. *weiter unterhalb*.
- Messpunkte im *Schichtwechsel* führen im Rahmen einer Parameteridentifikation aufgrund der nicht vorhandenen Sensitivität *zu keiner Lösung*.
- Messpunkte im *unmittelbaren Bereich des Schichtwechsels* sind aufgrund der sehr geringen Sensitivität *nicht zu empfehlen*.
- Messpunkte im *näheren Umfeld der Baugrubenmitte* sowie in vertikaler Richtung im unmittelbaren Bereich der Wandunterkante *sind zu empfehlen*.

Zur Bestimmung der Randpotenziale, also dem Innen- und Außenpegel, empfiehlt es sich jeweils unmittelbar im Bereich des Schichtwechsels eine Piezometermessung anzuordnen (Huder, 1988). Da aus einer Messung im Schichtwechsel eine Rückrechnung des Materialparameters α_k nicht möglich ist, werden gemäß Abb. 4.7 zusätzlich zu den zwei Piezometermessungen zur Messung der Randpotenziale folglich weitere Porenwasserdruckmessgeber im Feinsand eingepplant. Falls auch die Randpotenziale aus den Messdaten des Porenwasserdruckes zurückgerechnet werden sollen, empfiehlt es sich nach der Sensitivitätsanalyse, die Messgeber für dieses Identifikationsproblem im Gegensatz zur Rückrechnung der Anisotropie in der Nähe des Schichtwechsels innerhalb bzw. außerhalb der Baugrube anzuordnen.

Für das Messprogramm zur Parameteridentifikation werden insgesamt *fünf* Porenwasserdruckmessungen innerhalb der Baugrube gemäß Abb. 4.7 angeordnet. In Abb. 4.7 sind zusätzlich zur graphischen Darstellung der jeweiligen Messgeber die dimensionsbehafteten und die dimensionslosen Koordinaten analog zu Abb. 3.5 tabellarisch aufgeführt.

Die direkte Problemstellung wird für die Anwendungsbeispiele mit den analytisch formulierten Näherungsgleichungen nach Perau und Meteling (2016, 2017) berechnet, sodass die Messpunkte in Abb. 4.7 demgemäß auch nur im Gültigkeitsbereich der Näherungsgleichungen zu definieren sind. Um im Rahmen der Anwendungsbeispiele zur Parameteridentifikation unterschiedliche Szenarien z.B. in Bezug auf den Grad der Anisotropie berechnen und vergleichen zu können, werden in dem Messprogramm in Abb. 4.7 sowohl *günstige* Messpunkte – wie in Baugrubenmitte – als auch *ungünstige* Messpunkte – wie am Verbauwandfußpunkt – in das Messprogramm aufgenommen.

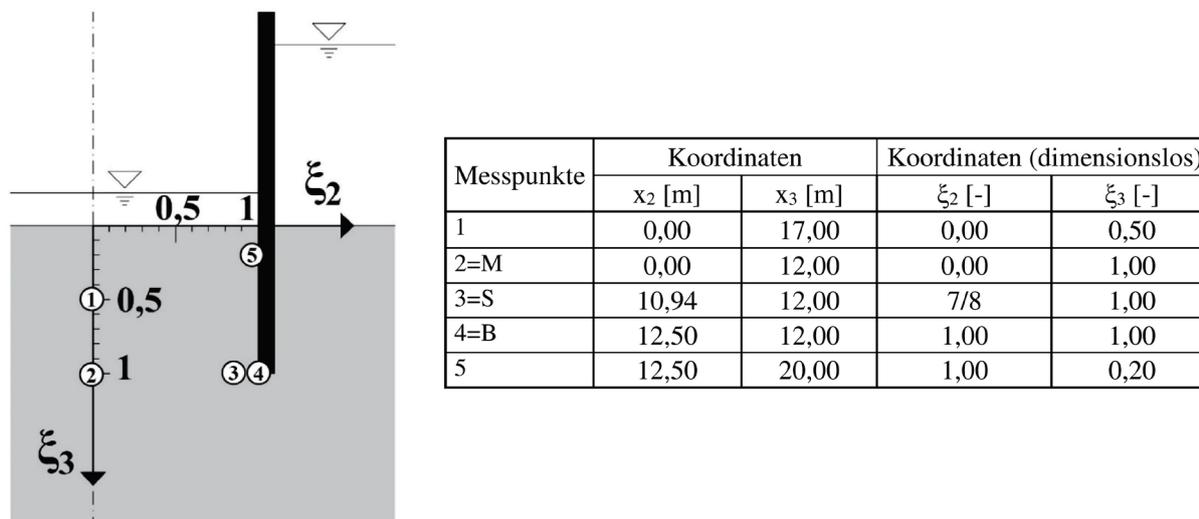


Abbildung 4.7: Porenwasserdruckmesspunkte im Strömungsgebiet mit den gewählten Bezeichnungen und den dimensionsbehafteten/dimensionslosen Koordinaten der Messgeber

Nach Smolczyk (1999) besteht bei der Konzeption eines Messprogramms die Gefahr, zu wenig oder nicht häufig genug zu messen, sodass die erfassten Messdaten keine gesicherte Entscheidungsgrundlage ermöglichen. Eine Vielzahl von Messungen kann einen Berg von Messdaten erzeugen, welcher von Smolczyk (1999) als "Datenfriedhof" bezeichnet wird, auf dem ggfs. die entscheidenden Daten "mit begraben" werden.

Demzufolge lässt sich das Messkonzept in Abb. 4.7 für die einzelnen Problemstellungen im *fünften* Kapitel sicherlich noch weiter optimieren. Auf weitere Fragestellungen wie die Häufigkeit der Ablesungen oder auf den Umfang einer vorzuhaltenden Redundanz wird im weiteren Verlauf noch genauer eingegangen.

4.7 Erzeugung der synthetischen Messdaten

Zur Lösung der Parameteridentifikation unter idealen Bedingungen gemäß Untersuchungspunkt A3) werden anhand der Näherungsgleichungen und der Vorgabe von konkreten Modellparametern zunächst synthetische Messdaten für ...

- die Standrohrspiegelhöhen $\tilde{\Phi}_P^{\text{meas}} \approx \tilde{\Phi}_P^{\text{syn}}$,
- die Porenwasserdrücke $\tilde{u}_P^{\text{meas}} \approx \tilde{u}_P^{\text{syn}}$,
- und den Wasserzufluss $\tilde{q}_i^{\text{meas}} \approx \tilde{q}_i^{\text{syn}}$ erzeugt (Dahmen und Reusken, 2006).

Die Erzeugung der „*exakten*“ als auch der „*gestörten*“ synthetischen Messdaten in Gl. (4.7) erfolgt anhand der direkten Problemstellung, also den analytisch formulierten Näherungsgleichungen in Abhängigkeit von konkreten Modellparametern $\boldsymbol{\kappa}$ analog zu Gl. (4.1) für die jeweiligen geohydraulischen Feldgrößen:

$$\tilde{\Phi}_{P,i}^{\text{syn}} = \Phi_{P,i}^{\text{calc}}(\boldsymbol{\kappa}) + e_i^{\text{syn},\Phi_P} \quad (4.7a)$$

$$\tilde{u}_{P,i}^{\text{syn}} = u_{P,i}^{\text{calc}}(\boldsymbol{\kappa}) + e_i^{\text{syn},u_P} \quad (4.7b)$$

$$\tilde{q}_i^{\text{syn}} = q^{\text{calc}}(\boldsymbol{\kappa}) + e_i^{\text{syn},q} \quad (4.7c)$$

Für die Randpotenziale in den Punkten $P = [A, D]$, die fünf Porenwasserdrücke in den Punkten $P = [1, \dots, 5]$ und den Wasserzufluss kann gemäß Gl. (4.7) jeder einzelne Messwert über $i = [1, \dots, T]$ mit einer unabhängigen Messabweichung künstlich gestört werden. Es werden gemäß den Gleichungen (4.7a-c) für die entsprechenden geohydraulischen Feldgrößen jeweils zwei unterschiedliche synthetische Datensätze erzeugt:

- „*exakte*“ synthetische Messdaten ohne Messabweichungen, $e_i^{\text{syn},\Phi_P} = e_i^{\text{syn},u_P} = e_i^{\text{syn},q} = 0$
 - $\bar{\Phi}_{P,i}^{\text{syn}}; \bar{u}_{j,i}^{\text{syn}}; \bar{q}_i^{\text{syn}}$
- „*gestörte*“ synthetische Messdaten mit Messabweichungen, $e_i^{\text{syn},\Phi_P} = e_i^{\text{syn},u_P} = e_i^{\text{syn},q} \neq 0$
 - $\tilde{\Phi}_{P,i}^{\text{syn}}; \tilde{u}_{P,i}^{\text{syn}}; \tilde{q}_i^{\text{syn}}$

Für die „*exakten*“ synthetischen Messdaten wird die direkte Problemstellung ohne Messabweichung simuliert. Um die Stabilität der inversen Problemstellung der Parameteridentifikation zu untersuchen, können in Bezug auf die „*gestörte*“ Messdatenreihe sowohl *zufällige* als auch *systematische* Messabweichungen für jeden Messwert vorgegeben werden. Die zufälligen Messabweichungen werden dabei durch eine GAUSS'sche Normalverteilung simuliert.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass diese vereinfachte Annahme nach Finsterle (1993) kritisch zu betrachten ist, da bei realen Messdaten die Fehlerstruktur oftmals einer POISSON-Verteilung gehorcht und aufgrund der Unvollständigkeit der Daten nicht durch eine GAUSS'sche Normalverteilung approximiert werden sollte.

In Tab. 4.1 sind die Modellparameter zusammengefasst, welche zur Erzeugung der synthetischen Messdaten verwendet werden. Die Absenkung des Grundwassers innerhalb der Baugrube erfolgt anhand von vier Absenkschritten von +36,0 m auf die geplante Höhe von +23,0 m (vgl. Abb. 4.8 und Tab. 4.1). Anhand von $\bar{\Phi}_A^{\text{syn}}$ in Tab. 4.1 sind die einzelnen Absenkschritte ohne Messabweichungen kenntlich gemacht.

Tabelle 4.1: Modellparameter zur Erzeugung der synthetischen Messdaten, angelehnt an: Perau und Meteling (2016)

Variable	Wert
Geometrie	
b	25,0 m
t _i	10,0 m
Durchlässigkeitsbeiwerte für die Feinsandschicht	
k _h	5,1 · 10 ⁻⁵ m/s
k _v	1,0 · 10 ⁻⁵ m/s
Randpotenziale	
$\bar{\Phi}_D^{\text{syn}}$	36,0 m
$\bar{\Phi}_A^{\text{syn}}$	32,0; 29,0; 26,0; 23,0 m

In der Abb. 4.8 sind sowohl die exakten als auch die gestörten synthetischen Messdaten der Randpotenziale über die fiktiven Ablesezeitpunkte τ gemäß Gl. (4.7a) dargestellt. Die einzelnen Zeitschritte τ stehen dabei stellvertretend für eine tägliche Messung des Außen- und Innenpegels bei einer angenommenen Bauzeit von ca. 4 Monaten ($T \approx 120$ Tage). Die Zeitschritte τ sind gleichzusetzen mit der angesetzten Ablesehäufigkeit der geohydraulischen Feldgrößen. Die zufälligen Messabweichungen in Abb. 4.9 werden mit einem selbst erstellten MATLAB Programm unter der vereinfachten Annahme einer GAUSS-Verteilung modelliert (vgl. Anhang B3). Zu diesem Zweck ist in Abb. 4.10 exemplarisch der MATLAB Code zur Erstellung der synthetischen Messdaten für das Randpotenzial $\tilde{\Phi}_D^{\text{syn}}$ dargestellt. Über die MATLAB function *randn(...)* können Zufallsdaten mit dem Mittelwert null und der Standardabweichung eins erzeugt werden. Durch die Umrechnung in Zeile 9 des MATLAB Codes in Abb. 4.9 ist es zudem möglich durch Vorgabe eines Mittelwerts μ_{Gauss} und einer Standardabweichung σ_{Gauss} die Normalverteilung nach Bedarf anzupassen.

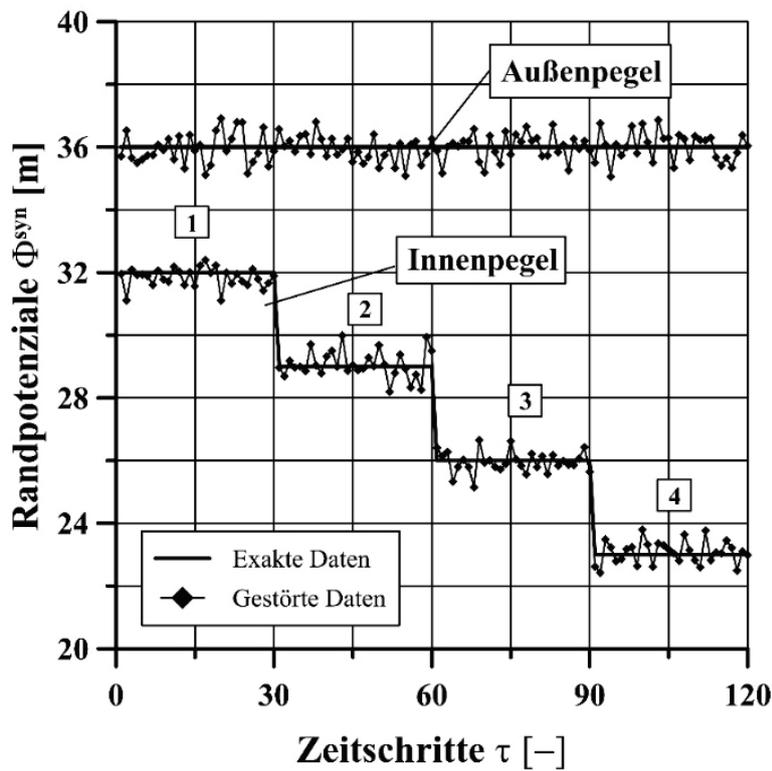


Abbildung 4.8: Darstellung der exakten und gestörten synthetischen Messdaten für die Randpotenziale (Innen- und Außenpegel) über die Zeitschritte τ in Abhängigkeit der vier Absenckphasen

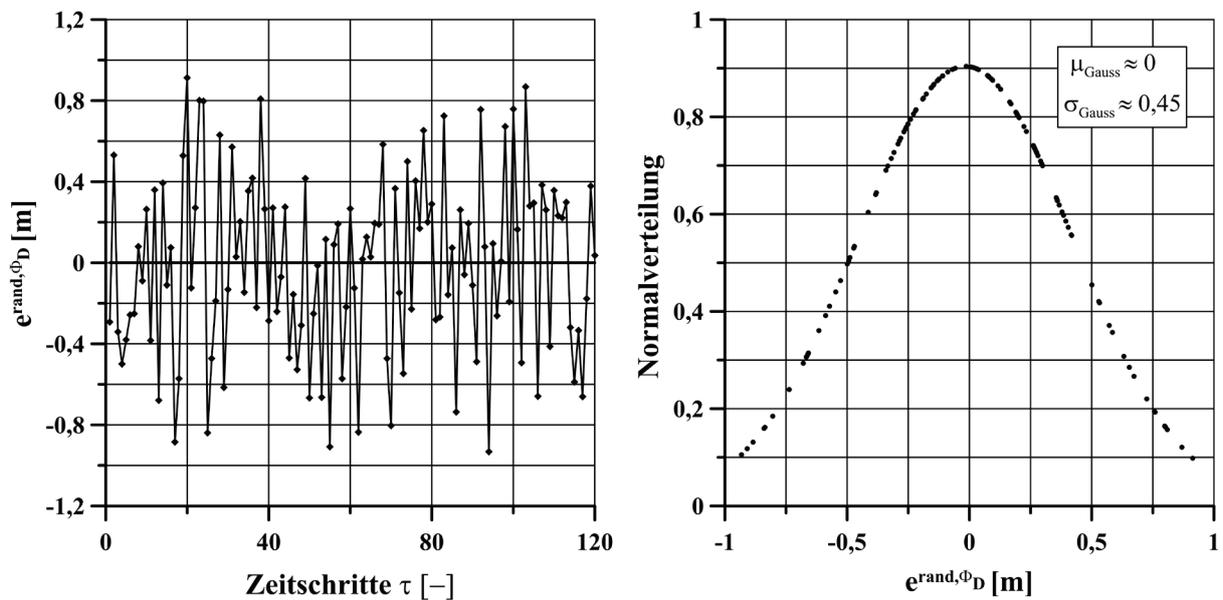


Abbildung 4.9: Exemplarische Darstellung der simulierten synthetischen zufälligen Messabweichungen für den Außenpegel über τ gemäß Abb. 4.8 sowie die zugehörige Normalverteilung

Die Vorgabe des Mittelwerts bzw. der Standardabweichung erfolgt für die weiteren Untersuchungen im Rahmen der zu erwartenden Schwankungsbreiten der Messgrößen. Um die Reproduzierbarkeit der Zufallsdaten zu gewährleisten, kann über die MATLAB function *rng(...)* in Zeile 3 sichergestellt werden, dass bei erneuter Ausführung des Codes in Abb. 4.10 die künstlich erzeugte Zufallsverteilung identisch bleibt.

```

1  % Erstellung synthetischer Messdaten (Randpotenziale)
2
3  rng(1);           % Reproduzierbarkeit
4  mue_syn=0;       % Mittelwert
5  sigma_syn=0.45;  % Standardabweichung [m]
6  anz_m=120;      % Gesamtanzahl der Zeitschritte
7
8  % Normalverteilte Messabweichung e_rand
9
10 e_rand_Phi_D=mue_syn+sigma_syn*randn(anz_m,1);
11
12 % Systematischer Messabweichung e_sys
13
14 e_sys_Phi_D=0;
15
16 % Randpotenzial überlagert mit Abweichungen (e_rand+e_sys)
17
18 Phi_D_syn_m_A=Phi_D_syn_o_A+e_rand_Phi_D'+e_sys_Phi_D;

```

Abbildung 4.10: MATLAB Code zur Erzeugung der synthetischen Messdaten für die Randpotenziale

Die zufälligen normalverteilten Messabweichungen $\mathbf{e}^{\text{syn},\Phi_D}$ für das äußere Randpotenzial $\tilde{\Phi}_D^{\text{syn}}$ sind über die Zeitschritte τ in der Abb. 4.9 graphisch illustriert. Bei der Erstellung der synthetischen Zufallsdaten ist zu beachten, dass eine ausreichend große Anzahl (*anz_m*, Zeile 6) an Zufallsdaten vorliegen muss, um den zuvor angegebenen Mittelwert μ_{Gauss} in Zeile 4 bzw. die Standardabweichung σ_{Gauss} in Zeile 5 zu erhalten.

Die synthetischen Messdaten des Porenwasserdrucks sind analog zu Abb. 4.7 bzw. Gl. (4.7b) über die Zeitschritte τ für die exakten und gestörten synthetischen Datensätze in Abb. 4.11 dargestellt. Die zufälligen Messabweichungen werden dabei analog zu der zuvor beschriebenen Vorgehensweise bestimmt, jedoch mit einer unterschiedlichen Standardabweichung σ_{Gauss} .

In Abb. 4.12 ist der dazu verwendete MATLAB Code exemplarisch aufgeführt. Für alle *j*-Messpunkte wird eine unabhängige Zufallsverteilung für die Messabweichungen $\mathbf{e}^{\text{syn},u_j}$ generiert. In der Zeile 18 in Abb. 4.12 wird das Potenzial für die Punkte $P=j$ unter Verwendung der Modellparameter gemäß Tab. 4.1 berechnet. In der function *phi_analytisch(...)* sind die analytischen Näherungsgleichungen hinterlegt. Das in Zeile 18 bestimmte Potenzial wird in Zeile 22 in Abb. 4.12 unter Verwendung der geodätischen Höhe x_3 und der Wichte des Wassers γ_w über die function *Pressure(...)* in einen Porenwasserdruck analog zu Gl. (3.6) umgerechnet.

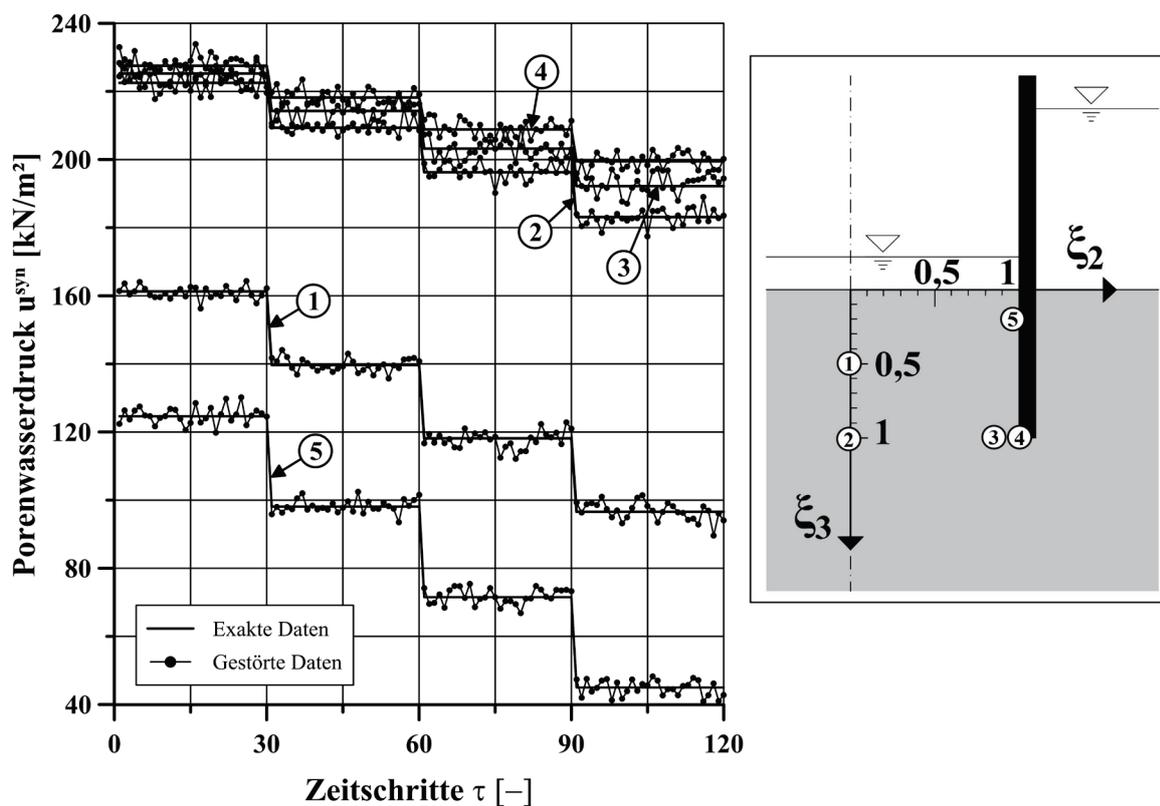


Abbildung 4.11: Synthetische Messdaten für das numerische Experiment: exakte und gestörte Messdaten für den Porenwasserdruck in den Messstellen 1-5

```

1  % Erstellung synthetischer Messdaten (Porenwasserdruck)
2
3  rng(1);           % Reproduzierbarkeit
4  mue_syn=0;       % Mittelwert
5  sigma_syn=2.5;   % Standardabweichung [kN/m²]
6  anz_m=120;      % Gesamtanzahl der Zeitschritte
7
8  % Normalverteilter Fehler e_rand
9
10 e_rand_U_P=mue_syn+sigma_syn*randn(anz_m,1);
11
12 % Systematischer Fehler e_sys
13
14 e_sys_U_P=0;
15
16 % Berechnung Potenzial [m] im Punkt P mit den Näherungsgleichungen
17
18 Phi_P_calc=phi_analytisch(kh,kv,Phi_D,Phi_A,ti,b,x2,x3,x3A,Modell);
19
20 % Umrechnung Potenzial --> Porenwasserdruck [kN/m²] im Punkt P
21
22 U_P_calc=Pressure(Phi_P_calc,x3,10);
23
24 % Porenwasserdruck überlagert mit Fehlern (e_rand+e_sys)
25
26 U_syn=U_calc+e_rand_U_P+e_sys_U_P;

```

Abbildung 4.12: MATLAB Code zur Erzeugung der synthetischen Messdaten für den Porenwasserdruck

Der MATLAB Code für den gesamten synthetischen Messdatensatz sowie die jeweiligen Unterfunktionen können im Anhang eingesehen werden. Hinsichtlich der vorgegebenen Standardabweichungen wurde eine Annahme getroffen, welche die Untersuchungen hinsichtlich der Stabilität der inversen Problemstellung grundsätzlich ermöglicht. Natürlich können zu einem späteren Zeitpunkt diesbezüglich, anhand der entwickelten MATLAB Routine, zahlreiche weitere Parameterstudien mit unterschiedlichen Standardabweichungen durchgeführt und verglichen werden. Jedoch wird im Rahmen der eigenen Untersuchungen eine Variation von unterschiedlichen Standardabweichungen nicht weiterverfolgt.

Darüber hinaus wird zusätzlich die Förderrate bzw. der Wasserzufluss zur Baugrube \tilde{q}^{syn} wie in Gl. (4.7c) simuliert. In Abb. 4.13 sind sowohl die exakten als auch die gestörten synthetischen Messdaten für den Wasserzufluss dargestellt. Die synthetisch erzeugten Messdaten können analog zu dem MATLAB Code in Abb. 4.12 bestimmt werden, nur mit dem Unterschied, dass in Zeile 18 (vgl. Abb. 4.12) die Berechnung des Wasserzuflusses mit der direkten Problemstellung über die function $q_analytisch(\dots)$ erfolgt. Im *Anhang B3* ist der entsprechende MATLAB Code mit der gewählten Standardabweichung für $e^{\text{syn},q}$ dargestellt. An Abb. 4.13 ist zudem zu erkennen, dass der Wasserzufluss je Zeiteinheit mit steigender Spiegeldifferenz infolge der Absenkung betragsmäßig ansteigt.

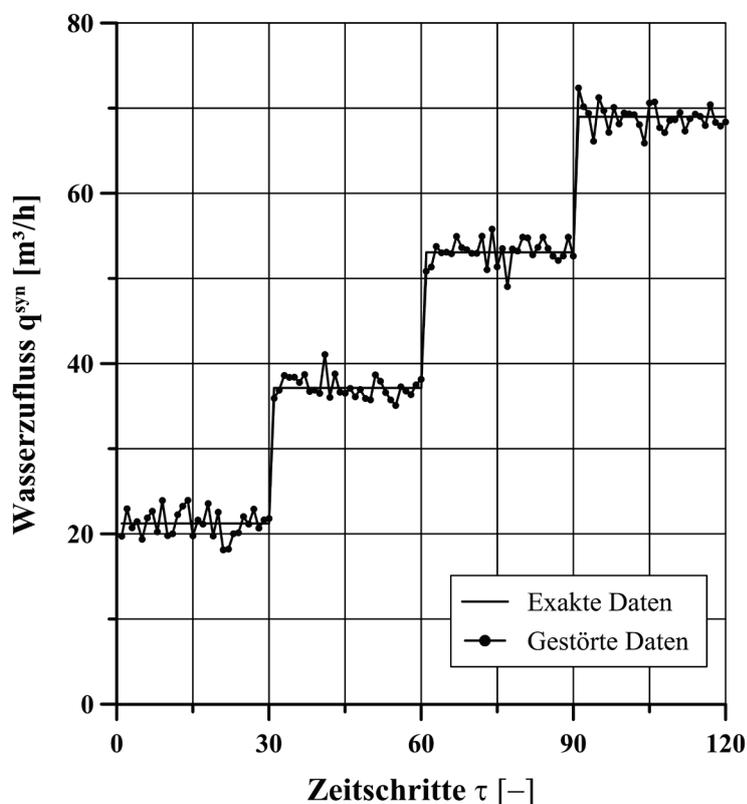


Abbildung 4.13: Synthetische Messdaten für die exakten und gestörten synthetischen Daten für den gesamten Wasserzufluss zur Baugrube

Die synthetischen Messdaten werden in einer Excel-Tabelle zusammengefasst, sodass diese mit einer MATLAB Routine einlesbar und für die entsprechenden Anwendungsbeispiele im *fünften* Kapitel zu verwenden sind, vgl. Tab.4.2.

Tabelle 4.2: Auszug aus den synthetischen Messdaten (hier exemplarisch für den gestörten Datensatz) einer Excel-Datei zur Übergabe an das MATLAB Programm zur weiteren Verwendung für die mathematischen Optimierung

τ_i	$\tilde{\Phi}_{D,i}^{\text{syn}}$	$\tilde{\Phi}_{A,i}^{\text{syn}}$	\tilde{q}_i^{syn}	$\tilde{u}_{1,i}^{\text{syn}}$	$\tilde{u}_{2,i}^{\text{syn}}$	$\tilde{u}_{3,i}^{\text{syn}}$	$\tilde{u}_{4,i}^{\text{syn}}$	$\tilde{u}_{5,i}^{\text{syn}}$
[-]	[m]	[m]	[m ³ /h]	[kN/m ²]				
i=1	35,71	31,96	19,72	161,42	228,36	224,42	233,02	122,37
2	36,53	31,11	22,95	163,63	222,72	229,45	226,68	126,33
3	35,66	32,10	20,71	160,39	228,02	223,37	228,58	123,64
4	35,50	31,93	21,42	161,34	224,36	231,87	224,53	126,25
...
m=120	36,04	22,99	68,38	94,05	183,55	194,45	200,21	42,76

4.8 Zielfunktion und Programmcode zur Optimierung

In Abb. 4.14 ist ein schematischer Programmablaufplan der MATLAB Routine zur Lösung der Optimierungsaufgabe dargestellt. Das gesamte MATLAB Programm ist im *Anhang B4* einzusehen. Zunächst werden die Eingangsparameter an das Programm übergeben wie etwa die Geometrieparameter oder die Randbedingungen (vgl. Tab. 4.1). Danach können die jeweiligen unbekannt Parameter in dem Modellparametervektor κ zusammengefasst werden. Die Übergabe der synthetischen Messdaten an das MATLAB Programm erfolgt über das Einlesen einer Excel-Datei analog zu Tab. 4.2 im XLS-Format. Unter Verwendung der Messdaten und der Näherungsgleichungen nach Peraus und Meteling (2017) wird dann eine Zielfunktion $f(\kappa)$ wie in Gl. (2.9) formuliert und an die OPTIMIZATION Toolbox übergeben.

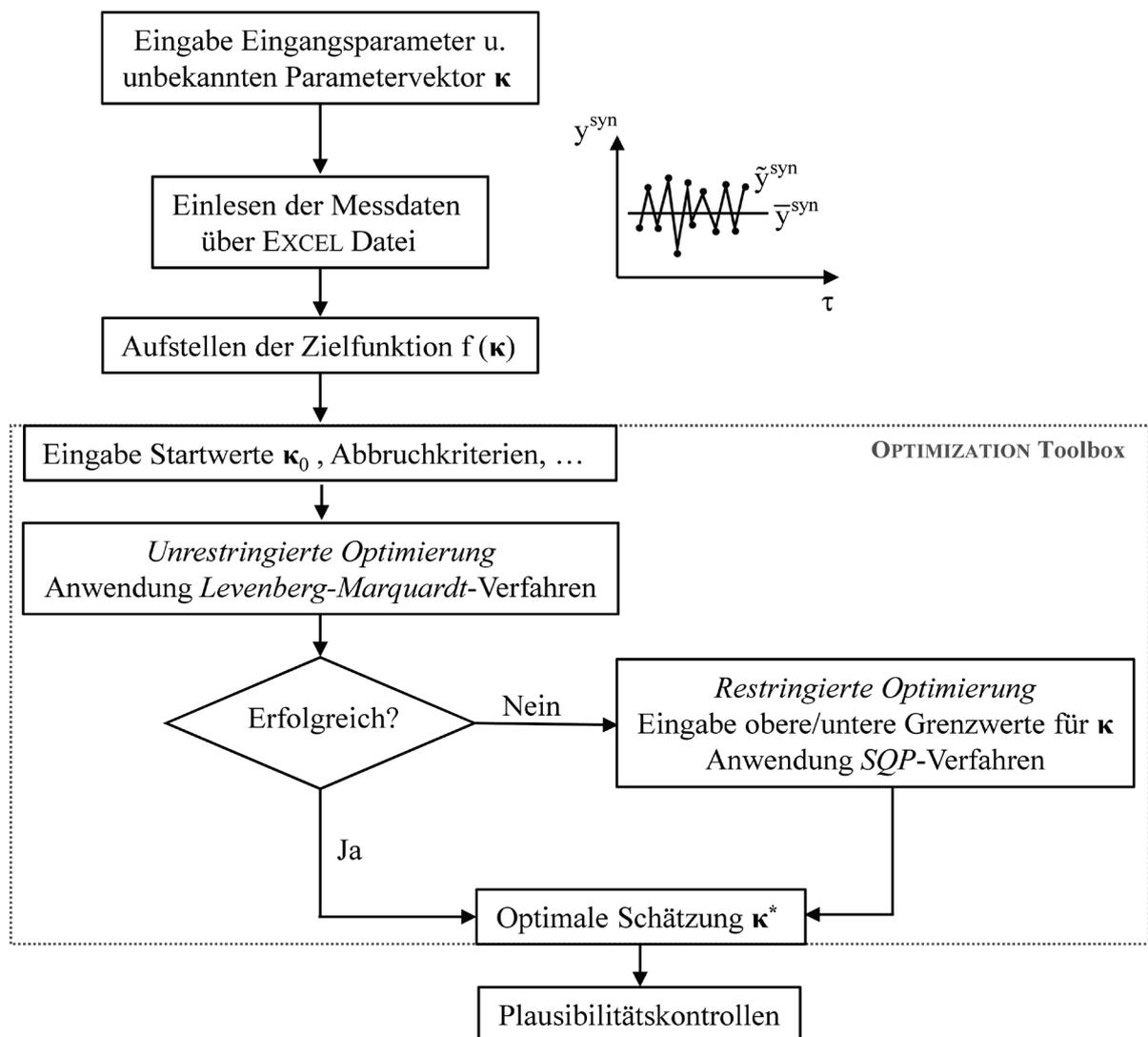


Abbildung 4.14: Schematischer Programmablaufplan für die mathematische Optimierung der Zielfunktion

Die numerische Optimierung der Zielfunktion erfolgt unter der Verwendung von zwei unterschiedlichen Optimierungsverfahren. Die nachfolgenden Untersuchungen werden sowohl anhand einer *unrestringierten* als auch einer *restringierten* Optimierung durchgeführt. Zu diesem Zweck wird auf die OPTIMIZATION Toolbox von MATLAB zurückgegriffen. In dieser Toolbox wird eine Vielzahl von unterschiedlichen Optimierungsverfahren zur Verfügung gestellt. Eine sehr gute Übersicht zu den unterschiedlichen Funktionen und Anwendungsgebieten der Toolbox ist z.B. in Angermann (2014) zu finden.

In einem ersten Schritt wird versucht das Optimierungsproblem mit dem *unrestringierten* Optimierungsverfahren zu lösen (vgl. Abb. 4.14). Wenn diese Optimierung erfolgreich war, liegt eine optimale Schätzung κ^* für den unbekanntem Modellparametervektor vor und ist anschließend im Rahmen einer Plausibilitätsprüfung zu bewerten. Die Plausibilitätskontrolle ist sehr wichtig, denn es können zwar sehr ansprechende, aber oftmals auch falsche Ergebnisse oder Phantomlösungen aus der mathematischen Optimierung resultieren, sodass die Lösungen im Anschluss immer sorgfältig zu hinterfragen und mit ingenieurmäßigen Erfahrungswerten abzugleichen sind.

Falls das Optimierungsverfahren mit dem *unrestringierten* Verfahren nicht erfolgreich war, wird versucht das Minimum der Zielfunktion mit einem *restringierten* Optimierungsverfahren unter Verwendung von unteren und oberen Schranken für den Parametervektor zu bestimmen. Dadurch kann die Suche für ein Minimum in einem gewissen Bereich eingeschränkt werden, sodass unzulässige Lösungen wie z.B. negative Durchlässigkeitsbeiwerte vermeidbar sind.

Für die *unrestringierte* Optimierung kommt das Levenberg-Marquardt Verfahren zum Einsatz. Die Funktion *lsqnonlin* löst das Optimierungsproblem unter Verwendung der nichtlinearen Methode der kleinsten Abstandsquadrate, wobei eine vektorwertige Zielfunktion als *function* übergeben wird. Über die *options* in Zeile 220ff in Abb. 4.15 können weitere Einstellungen hinsichtlich der spezifischen Optimierungsalgorithmen vorgenommen werden, wie z.B. die Wahl des Optimierungsverfahrens oder das Adjustieren der Abbruchkriterien (z.B. maximale Anzahl an Iterationen, etc.).

Eine Vielzahl von unterschiedlichen Einstellungsmöglichkeiten ist z.B. in Angermann (2014) zu finden. Die Residuen werden im M-File-Format oder in Form einer *anonymous function* an *lsqnonlin* übergeben und im Sinne der Methode der Summe der kleinsten Abstandsquadrate minimiert. Der Gradient der Zielfunktion wird standardmäßig in jedem Iterationsschritt numerisch mit dem Differenzenverfahren bestimmt (Angermann, 2014). Es besteht jedoch auch die Möglichkeit den Gradienten in analytischer Form an die OPTIMIZATION Toolbox zu übergeben. Da diese bei der behandelten Problemstellung in Form von analytischen Gleichungen vorliegen, wird diese Möglichkeit nachfolgend genutzt. Der Vorteil hierbei ist, dass dadurch im Rahmen

der numerischen Iterationen weniger Funktionsauswertungen der Zielfunktion notwendig sind (Angermann, 2014).

```

197 %-----
198 % 4.Schritt: Suche Minimum von f(x) mit lsqnonlin (unrestringiert)
199 %-----
200
201 % Optimization options
202
203 maxIter=400;      % Maximale Anzahl an Iterationen
204                  % default=200*Anzahl Variablen
205 maxFunEvals=400; % Maximale Anzahl an Funktionsauswertungen
206                  % default=200*Anzahl Variablen
207 TolFun=1e-8;     % Aenderung Funktionswert Abbruchkriterium
208                  % default=1e-4
209 TolX=1e-8;       % Aenderung Schaetzwert Variablen Abbruchkriterium
210                  % default=1e-4
211
212 tic
213
214 % Startwerte
215
216 x0=[...];
217
218 % Optimierungsverfahren = Levenberg-Marquardt
219
220 options=optimoptions(@lsqnonlin,'SpecifyObjectiveGradient',true,...
221                      'Algorithm','...
222                      'levenberg-marquardt','Display','iter',...
223                      'Diagnostics','on',...
224                      'FunValCheck','on',...
225                      'TolX',TolX,'TolFun',TolFun,...
226                      'MaxFunEvals', maxFunEvals,...
227                      'MaxIter',maxIter );
228
229 [x_LM,resnorm,res,exit] = lsqnonlin(@lmfun,x0,[],[],options);
230
231 t_lm=toc./60;

```

Abbildung 4.15: MATLAB Code – Anwendung des Optimierungsverfahrens (unrestringiert), Ausschnitt aus der MATLAB Routine zur Parameteridentifikation

Für das *restringierte* Optimierungsproblem wird das SQP-Verfahren verwendet (vgl. z.B. Braun, 2015). Im Gegensatz zum vorherigen Optimierungsverfahren müssen hier neben den Startwerten auch Nebenbedingungen in Form von linearen/nichtlinearen Funktionen bzw. obere/untere Grenzen für den Ergebnisvektor $\mathbf{\kappa}$ vorgegeben werden.

In Abb. 4.16 ist der MATLAB Code für das *restringierte* Optimierungsproblem dargestellt. Für die weiteren Untersuchungen werden lediglich untere und obere Grenzen für den Ergebnisvektor $\mathbf{\kappa}$ angegeben. Die Zielfunktion wird über die *function OBJFUN* an *fmincon* übergeben und optimiert. Die *function OBJFUN* enthält sowohl die Zielfunktion als auch den analytisch berechneten Gradienten der Zielfunktion. Bei den *options* in Zeile 254ff gibt es auch ebenfalls mehrere Möglichkeiten den Algorithmus auf die jeweilige Problemstellung hinsichtlich des Optimierungsverfahrens bzw. der Abbruchkriterien anzupassen (Angermann, 2014).

```
232 %-----
233 % 5.Schritt: Suche Minimum von f(x) mit fmincon (restringiert)
234 %-----
235 tic
236
237 % Zielfunktion zur Übergabe an Optimization Toolbox
238
239 OBJFUN=@objfungradient;
240
241 % Startwerte
242
243     x0=[...];
244
245 % Obere und untere Grenze für die Parameter
246
247     lb=[...];           % untere Grenze
248     ub=[...];           % obere Grenze
249
250 % Optimierungsverfahren = Lokale SQP-Verfahren
251
252 % Anwendung des Optimierungsverfahrens mit function fmincon
253
254 options=optimoptions(@fmincon,'SpecifyObjectiveGradient',true,...
255                       'Algorithm','sqp','Display','iter',...
256                       'TolX',TolX,'TolFun',TolFun);
257
258 [x_SQP,fval,exitflag,output,lambda]=fmincon(OBJFUN,x0,[],[],[],[],lb,
259 ub,[],options);
260
261 t_SQP=toc./60;
```

Abbildung 4.16: MATLAB Code – Anwendung des Optimierungsverfahrens (restringiert)

Für beide Algorithmen gilt, dass sowohl die Funktionen als auch die Nebenbedingungen stetig sein müssen. Abhängig von den gewählten Startwerten liefern beide Algorithmen nur lokale Minima (Angermann, 2014). Für die exemplarischen Anwendungen zur Parameteridentifikation im *fünften* Kapitel werden beide Verfahren verwendet, sodass die jeweiligen Lösungen für die Schätzung κ^* anhand von zwei Optimierungsverfahren verifiziert werden können. Der modulare Aufbau des Programmcodes ermöglicht es, dass dieser auch zur Auswertung von ähnlichen Systemen wie in Abb. 4.1 herangezogen werden kann. Zudem steht einer Weiterentwicklung des Programmcodes durch die modulare Programmstruktur nichts im Wege.

5 Exemplarische Anwendungen

In diesem Kapitel werden konkrete Anwendungen zur Parameteridentifikation für die Baugrube im Grundwasser gemäß Abb. 4.1 mit den zuvor erarbeiteten Grundlagen formuliert und gelöst. Die unterschiedlichen Fragestellungen greifen auf die synthetisch erzeugten Messdaten aus dem *vierten* Kapitel zurück. Die Berechnungen zur mathematischen Optimierung erfolgen anhand der zuvor vorgestellten MATLAB Routine (vgl. Abb. 4.14).

Im Fokus der nachfolgenden Untersuchungen stehen aus dem zuvor vorgestellten Untersuchungskonzept (vgl. Kapitel 4.2) die beiden folgenden Punkte:

- *Parameteridentifikation unter idealen Bedingungen* nach Untersuchungspunkt A3)
- *Optimierung des synthetischen Messprogramms* nach Untersuchungspunkt A4)

Es werden die in Tab.5.1 aufgeführten Identifikationsprobleme lediglich unter idealen Bedingungen gelöst. Unter Berücksichtigung der zuvor erläuterten Grundlagen geht es um die konkrete Umsetzung der Lösungsstrategie, sodass das Ziel darin besteht, eine *optimale Lösung* für die gesuchten Modellparameter κ_i^* in Tab. 5.1 unter Verwendung einer Zielfunktion im Sinne der Summe der *kleinsten Abstandsquadrate* zu bestimmen.

Tabelle 5.1: Untersuchungsprogramm zur Parameteridentifikation

Nr.	Identifikationsproblem	Modellparameter
(1)	Grad der Anisotropie (α_k)	$\kappa^* = \alpha_k$
(2)	Grad der Anisotropie (α_k) Innenpegel (Randpotenzial Φ_A)	$\kappa^* = [\alpha_k, \Phi_A]^T$
(3)	Grad der Anisotropie (α_k) Einbindetiefe (t_i)	$\kappa^* = [\alpha_k, t_i]^T$
(4)	Durchlässigkeitsbeiwerte (k_h, k_v)	$\kappa^* = [k_h, k_v]^T$

Auch wenn die Modellparameter in Tab. 5.1 in der Planungsphase bereits festzulegen sind, wird in der Folge kurz skizziert, für welche baupraktischen Fragestellungen sich eine inverse Analyse zur Parameteridentifikation anbietet. Im Rahmen des Identifikationsproblems Nr. (1) gemäß Tab. 5.1 wird der Grad der Anisotropie aus den zuvor erzeugten synthetischen Messdaten zurückgerechnet. Wie bereits im vorherigen Kapitel motiviert, ist eine hinreichend genaue Bestimmung der Anisotropie sowohl aus sicherheitstechnischen als auch wirtschaftlichen Gründen sinnvoll.

Problematisch ist jedoch, dass der Grad der Anisotropie für praktische Fragestellungen schwer zu bestimmen ist. Hettler et al. (2018) erläutern dazu:

„Aufgrund von Streuungen in der Kornverteilung und Feinschichtung wird es kaum gelingen, z.B. durch Laborversuche an Proben mit unterschiedlicher Durchströmungsrichtung einen Anisotropiefaktor zu ermitteln. In der Regel wird man auf numerische Simulationen und Parameterstudien angewiesen sein, eventuell in Verbindung mit einer messtechnischen Überwachung während der Bauausführung. Reagiert das System empfindlich auf unterschiedliche Durchlässigkeitsverhältnisse, wird man im Einzelfall die Konstruktion entsprechend sicherer ausführen müssen, z.B. durch Verlängerung der Einbindetiefen.“ (Hettler et al., 2018, S. 259)

Aus diesem Zitat wird ersichtlich, dass insbesondere die Bestimmung der Durchlässigkeitsbeiwerte und einer damit verbundenen Anisotropie mit herkömmlichen Methoden kritisch zu betrachten ist und den Anlass gibt, diese anhand einer Parameteridentifikation zu ermitteln. Zudem lässt sich die Baumaßnahme durch verbesserte Baugrundinformationen optimieren, sodass beispielsweise die Einbindelänge der Verbauwände – wie in Abb. 4.2 – für die einzelnen Bauabschnitte angepasst werden kann.

Für das Identifikationsproblem Nr. (2) nach Tab. 5.1 wird anhand der in-situ-Messdaten sowohl die Anisotropie der Feinsandschicht als auch das Randpotenzial Φ_A – der Innenpegel innerhalb der Baugrube – invers bestimmt. Da das Randpotenzial zur Lösung des Randwertproblems in der Planungsphase bekannt sein muss, wird die entsprechende Standrohrspiegelhöhe gewöhnlich über eine Piezometermessung bestimmt (Huder, 1988). Falls die Messung des Innenpegels fehlerhafte Messwerte liefert oder während der Baumaßnahme ausfällt, ist es anhand einer Parameteridentifikation möglich die fehlerhaften Messwerte zu detektieren oder im Falle eines Ausfalls sogar zu ersetzen.

Darüber hinaus lässt sich in Bezug auf das Identifikationsproblem Nr. (3) womöglich sogar die Bauausführung überprüfen (vgl. Tab. 5.1). Zu diesem Zweck wird zusätzlich zur Rückrechnung der Anisotropie überprüft, ob anhand von den synthetischen in-situ-Messdaten die vorhandene Einbindelänge der Verbauwände zu bestimmen ist. Somit wäre es im Rahmen der Bauausführung ggfs. möglich, die Rammtiefe einer Spundwand zu überprüfen oder Hinweise auf etwaige Schlosssprengungen – wie in Osthoff und Grabe (2016) – zu erhalten.

Die unbekanntenen Modellparameter für das Identifikationsproblem Nr. (4) gemäß Tab. 5.1 bilden die Durchlässigkeitsbeiwerte der tertiären Schicht in horizontaler und vertikaler Richtung. Falls während der Bauausführung ein wesentlich höherer Wasserzufluss in die Baugrube festgestellt wird, als in der Planungsphase vorab simuliert wurde, kann dies ein Hinweis darauf sein, dass die Berechnungsannahmen für die Durchlässigkeitsbeiwerte in der Ausschreibung fehlerhaft waren oder unerkannte Schichtbänder die Menge des Wasserzuflusses beeinflussen (vgl. z.B. Voigt, 2014).

Zudem ist es wie bei dem Anisotropiefaktor möglich, die Berechnungsannahmen für weitere Bauabschnitte anzupassen und demzufolge sowohl eine sichere als auch wirtschaftliche Konstruktion zu gewährleisten.

Abgerundet werden die Untersuchungen mit den folgenden zwei speziellen Fragestellungen, die sich mit der Möglichkeit der Detektion von Messfehlern befassen:

- (a) Detektion eines **fehlerhaft arbeitenden Messgebers**.
- (b) Detektion eines einheitlichen **Kalibrierungsfehlers**.

Da die Schätzung der Modellparameter in der Regel stark von der Qualität der Messdaten abhängt, ist es zudem empfehlenswert, den Einfluss unterschiedlicher Fehlerquellen – wie unter (a) und (b) aufgelistet – zu untersuchen. Ein fehlerhaft arbeitender Messgeber wie unter (a) kann z.B. die Folge einer Beschädigung beim Einbau oder einer Verschmutzung sein. Abschließend wird unter Punkt (b) der Einfluss eines Kalibrierungsfehlers auf die Parameteridentifikation überprüft.

Um eine Untersuchung dieser Fehlerquellen zu ermöglichen, werden die synthetischen Messdaten für den Porenwasserdruck mit entsprechenden systematischen Messabweichungen überlagert. Für die beiden Fragestellungen unter (a) und (b) besteht das Ziel darin, eine heuristische Strategie zu erarbeiten, welche es ermöglicht, die beiden Fehlerquellen im Rahmen einer Parameteridentifikation zu detektieren.

An dieser Stelle sei noch einmal hervorgehoben, dass die nachfolgenden Untersuchungen unter *idealen* Bedingungen erfolgen. Natürlich kann die Anwendung der vorgestellten Methodik auf reale Messdaten gemäß B) zu weiteren Problemen führen, die in einer Vorabanalyse gar nicht oder nur sehr schwer abgeschätzt bzw. simuliert werden können. In diesem Zusammenhang wären beispielsweise ein stark heterogener Baugrund in Bezug auf die Materialparameter oder Beschädigungen im Bereich der Verbauwände zu nennen. Dennoch können die nachfolgend vorgestellten Untersuchungen unter idealen Bedingungen wertvolle Erkenntnisse für praktische Anwendungen liefern.

5.1 Lösungsansatz

Für die exemplarischen Anwendungen zur Parameteridentifikation wird nachfolgend für alle Fragestellungen ein einheitlicher Ansatz für die Zielfunktion verwendet. Wie bereits im *zweiten* Kapitel dargelegt, lässt sich das inverse Problem der Parameteridentifikation auf ein Optimierungsproblem wie in Gl. (5.1) zurückführen. Zu diesem Zweck wird die allgemeine Form der Zielfunktion $f(\boldsymbol{\kappa})$ gemäß Gl. (2.9) in Abhängigkeit der gesuchten Parameter $\boldsymbol{\kappa}$ definiert, welche im Sinne der *Methode der kleinsten Abstandsquadrate* die synthetischen Messdaten und die direkte Problemstellung in einer Zielfunktion vereinigt:

$$f(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{\eta}{2} \cdot \sum_{j=1}^m \left(w_j \cdot \sum_{i=1}^T \omega_i \cdot [r_{i,j}(\boldsymbol{\kappa})]^2 \right) \rightarrow \min_{\boldsymbol{\kappa}} \quad (5.1a)$$

mit:

- η : Normierungsfaktor
- m : Anzahl der Messstellen
- n : Anzahl der unbekannt Parameter
- w_j : Wichtungsfaktor für die j -te Messstelle
- T : Anzahl der Messzeitpunkte τ_i
- ω_i : Wichtungsfaktor für den i -ten Messzeitpunkt
- $r_{i,j}(\boldsymbol{\kappa})$: Residuum, $y_{j,i}^{\text{syn}} - y_{j,i}^{\text{calc}}(\boldsymbol{\kappa})$
- $\boldsymbol{\kappa}$: n -stufiger Parametervektor

Auf einen Normierungsfaktor in Gl. (5.1a) wird nachfolgend verzichtet, sodass stets $\eta=1$ gilt. Das Residuum $r_{i,j}(\boldsymbol{\kappa})$ in Gl. (5.1a) besteht aus der Differenz der synthetischen Messdaten und der Simulation in der j -ten Messstelle unter Ansatz der analytischen Näherungsgleichungen nach Perau und Meteling (2017). Zu Vergleichszwecken und stichprobenhaften Überprüfung werden numerische Berechnungen mit der FEM für y^{calc} durchgeführt, um die Lösung der Optimierungsaufgabe in Gl. (5.1a) zu verifizieren. Die erste Summe in der Funktion $f(\boldsymbol{\kappa})$ beinhaltet eine Anzahl von m – Messstellen. Um nicht für jeden Messpunkt jeweils eine einzelne Zielfunktion aufzustellen, werden alle Messpunkte über eine gewichtete Doppelsumme mit dem Wichtungsfaktor w_j in einer skalaren Zielfunktion zusammengefasst. Da die Feldmessungen über eine endliche Anzahl von Messzeitpunkten τ_i gemessen werden, läuft die zweite Summe von $i=1$ bis T . Über den Wichtungsfaktor ω_i können dann die einzelnen Messzeitpunkte τ_i innerhalb der Summe angesteuert und nach Bedarf gewichtet werden. Wenn die Messdaten der physikalischen Größen in Gl. (5.1) unterschiedliche Einheiten aufweisen, müssen diese durch eine Skalierung – z.B. mit dem Kehrwert der jeweiligen Messung – in eine dimensionslose

Form überführt werden (Mahnken, 1998; Müthing et al., 2018). Am Rande sei erwähnt, dass für die Wahl der Wichtungsfaktoren keine einheitliche und allgemeingültige Theorie vorliegt, welche zu jeder Problemstellung eine passende Wahl ermöglicht. Es liegen bestenfalls Vorschläge zur Wahl der unterschiedlichen Wichtungsfaktoren vor, wie beispielsweise die Wichtung mit dem reziproken Wert der Varianz der jeweiligen Messreihe (Hill und Tiedeman, 2007). Durch diesen Ansatz kann der Einfluss von Messreihen mit einer großen Varianz auf die Schätzung in Gl. (5.1) vermindert wird.

Durch die Rückführung der inversen Problemstellung auf eine Zielfunktion im Sinne der kleinsten Abstandsquadrate in Gl. (5.1), können die unbekanntes Modellparameter in Tab. 5.1 über eine mathematische Optimierung identifiziert werden, sodass sich unter der Verwendung der Zielfunktion $f(\boldsymbol{\kappa})$ eine Optimierungsaufgabe der Form $\min f(\boldsymbol{\kappa})$ ergibt. Grundsätzlich bietet es sich gemäß A3) an, die Anwendungsbeispiele zur Parameteridentifikation methodisch nach dem folgenden Ansatz zu untersuchen:

(I.) Parameteridentifikation – exakte *synthetische* Messdaten:

$$\bar{f}(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^m \left(w_j \cdot \sum_{i=1}^T \omega_i \cdot \left[\bar{r}_{i,j}(\boldsymbol{\kappa}) \right]^2 \right) \rightarrow \min_{\boldsymbol{\kappa}} \quad (5.1b)$$

(II.) Parameteridentifikation – gestörte *synthetische* Messdaten:

$$\tilde{f}(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^m \left(w_j \cdot \sum_{i=1}^T \omega_i \cdot \left[\tilde{r}_{i,j}(\boldsymbol{\kappa}) \right]^2 \right) \rightarrow \min_{\boldsymbol{\kappa}} \quad (5.1c)$$

Wenn nachfolgend der Begriff Messdaten verwendet wird, sind damit stets die *synthetisch* erzeugten Messdaten gemeint. Unter (I.) wird das Optimierungsproblem zunächst unter Verwendung der *exakten* Messdaten gelöst. Wenn das Optimierungsproblem in Gl. (5.1b) nicht eindeutig lösbar ist, muss das Messprogramm eventuell angepasst oder die Optimierungsstrategie geändert werden. Falls eine eindeutige Lösung für den exakten Messdatensatz vorliegt, ist es sinnvoll die Stabilität der Lösung unter (II.) anhand der *gestörten* Messdaten in Gl. (5.1c) zu untersuchen. Dadurch ist eine Abschätzung möglich, inwiefern die künstlich erzeugten zufälligen Abweichungen in den Messdaten den optimalen Schätzwert $\boldsymbol{\kappa}^*$ für die Modellparameter beeinflussen. Um die exemplarischen Fragestellungen zur Parameteridentifikation unter Anwendung der mathematischen Optimierung zu lösen, wird die zuvor erläuterte Untersuchungsmethodik auf die einzelnen Anwendungsbeispiele angewendet. Die mathematische Optimierung erfolgt analog zu dem Programmablaufplan, der in Abb. 4.14 schematisch skizziert ist. Anhand der Ergebnisse können weitere Empfehlungen für das Messprogramm gemäß A4) z.B. hinsichtlich der Redundanz oder der Ablesehäufigkeit gegeben werden.

5.2 Grad der Anisotropie

Für das Identifikationsproblem Nr. (1) gemäß Tab. 5.1 besteht das Ziel darin, mittels der inversen Analyse den Grad der Anisotropie der tertiären Bodenschicht in Abb. 4.1 zu bestimmen. Wie aus der Analyse der direkten Problemstellung in Gl. (4.2) hervorgeht, hängt das mathematische Modell für die Messgröße der Standrohrspiegelhöhe bzw. des Porenwasserdrucks in Bezug auf die Materialparameter neben der vorgegebenen Geometrie lediglich vom Grad der Anisotropie α_k , also dem Verhältnis der beiden Durchlässigkeitsbeiwerte, ab. Die Anisotropie ist für das zu lösende Randwertproblem der maßgebliche Bodenparameter und hat demnach einen großen Einfluss auf die geohydraulischen Berechnungen (vgl. Abb. 4.2).

Wie bereits zuvor ausgeführt, ist der Grad der Anisotropie nicht direkt messbar und somit vorab auf Basis von Erfahrungswerten schwer abzuschätzen, sodass sich für ein komplexes Strömungsproblem im Gegensatz zu den herkömmlichen Bestimmungsmethoden eine Parameteridentifikation mit numerischen Methoden empfiehlt (Hettler et al., 2018). Im Gegensatz zu den anderen exemplarischen Anwendungen zur Parameteridentifikation wird für dieses relativ "einfache" Optimierungsproblem mit einer Unbekannten zunächst etwas ausführlicher auf die mathematischen Hintergründe der Optimierung eingegangen, um das Verständnis für die verwendeten Lösungsansätze zu schärfen.

(Ia.) Parameteridentifikation – exakte *synthetische* Messdaten ($m=1$)

Die Zielfunktion für die exakten Messdaten in Bezug auf den Porenwasserdruck und die Randpotenziale kann gemäß Gl. (5.1b) folgendermaßen formuliert werden:

$$\bar{f}(\alpha_k) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^m \left(w_j \cdot \sum_{i=1}^T \omega_i \cdot \left[\bar{r}_{i,j}(\alpha_k) \right]^2 \right) \rightarrow \min_{\alpha_k} \quad (5.2)$$

Das Residuum in Gl. (5.2) ist eine Funktion in Abhängigkeit der unbekanntes Anisotropie $\kappa = [\alpha_k]$ und besteht aus der Differenz der Messdaten und der Simulation für den Porenwasserdruck $\bar{r}_{i,j} = \bar{u}_{P=j,i}^{\text{syn}} - u_{P=j,i}^{\text{calc}}(\alpha_k)$. Für die beiden Wichtungsfaktoren in Gl. (5.2) gilt $w_j=1$ und $\omega_i=1$, so dass die einzelnen Messreihen ohne eine Wichtung in die Schätzung eingehen. Das Ziel besteht nun darin, anhand der exakten *synthetischen* Messdaten für den Porenwasserdruck und die Randpotenziale einen optimalen Schätzwert für die Unbekannte $\kappa^* = [\alpha_k]$ anhand der Zielfunktion in Gl. (5.2) zu bestimmen. Somit werden alle weiteren Modellparameter gemäß Gl. (4.2) – bis auf den Grad der Anisotropie – als bekannt vorausgesetzt.

Um einen Eindruck von der Topologie der Zielfunktion in Gl. (5.2) zu bekommen, wird diese in Abb. 5.1 zunächst lediglich für eine Messstelle ($m=1$) am Verbauwandfußpunkt – also dem Punkt 4 in Bezug auf das Messprogramm – für unterschiedliche α_k ausgewertet und dargestellt.

Eine Darstellung wie in Abb. 5.1 ist für eine Zielfunktion mit einer Unbekannten vergleichsweise leicht möglich und lässt eine visuelle Prüfung hinsichtlich der Extremwerte der Zielfunktion zu. Zusätzlich zur Darstellung der Zielfunktion in Abb. 5.1 ist rechts ein Ausschnitt aus dem geohydraulischen Modell mit den für die Auswertung verwendeten Porenwasserdruckmesspunkt (Lage der Messstelle) analog zu Abb. 4.7 illustriert.

Die Auswertung von Gl. (5.2) erfolgt zunächst vereinfachend nur für den Messzeitpunkt $\tau=1$ gemäß Abb. 4.8 bzw. Abb. 4.11. Demgemäß ist die Laufvariable der zweiten Summe von dem Startwert $i = 1$ bis zum Endwert $T = 1$ definiert. Bevor alle Messdaten in die Zielfunktion einfließen, ist vorab zunächst die eindeutige Lösbarkeit für lediglich *eine* Porenwasserdruckmessstelle mit $m=1$ nachzuweisen.

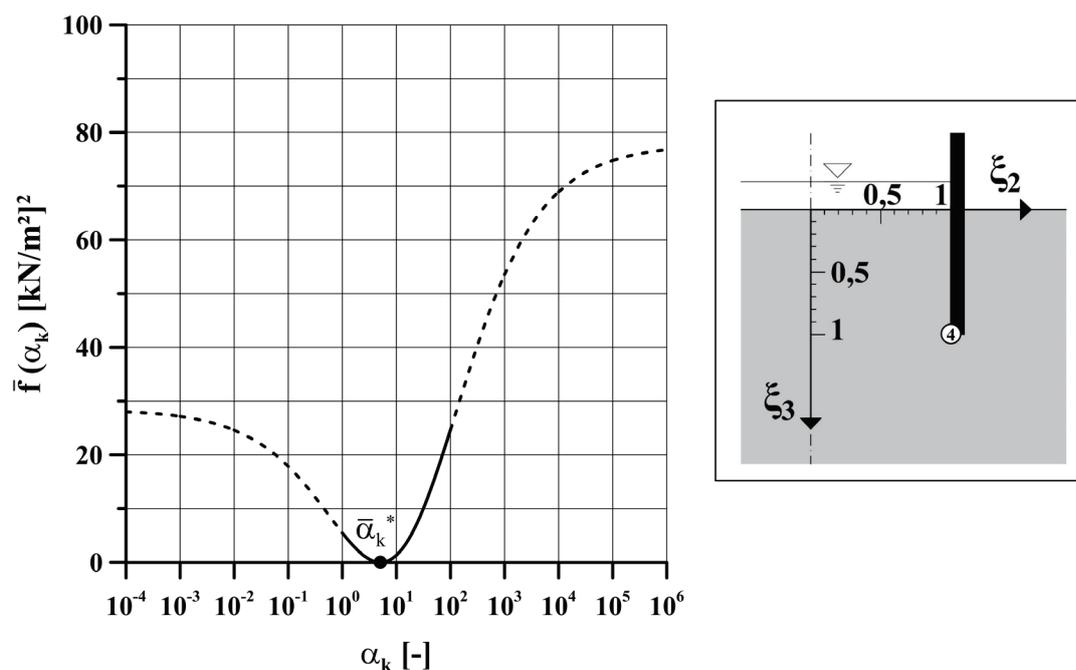


Abbildung 5.1: Darstellung der Zielfunktion für die exakten Messdaten der Randpotenziale und des Porenwasserdrucks (Pkt.4) für $\tau=1$ (x-Achse-logarithmisch skaliert)

In Abb. 5.1 stellt die durchgezogene Linie den durch Erfahrungswerte bestimmten Definitionsbereich der Zielfunktion zwischen $\alpha_k=1$ und $\alpha_k=100$ dar (Kolymbas, 2016). In diesem Bereich befindet sich ein eindeutiges Minimum und der Funktionsverlauf kann nach der Definition in Abb. 2.5 als konvex eingestuft werden.

Um zu überprüfen, ob die Zielfunktion noch weitere Extremstellen aufweist, umfasst der Darstellungsbereich ein sehr großes Intervall von $\alpha_k = [10^{-4}, 10^6]$. Somit ist für die Darstellung

gewährleistet, dass darin sowohl die Grenzfälle für eine geohydraulisch breite Baugrube mit $t^*=0,004$ als auch für eine geohydraulisch schmale Baugrube mit $t^*=400$ berücksichtigt werden können. Der gestrichelte Bereich der Zielfunktion in der Abb. 5.1 ist für praktische Fragestellungen in der Regel nicht relevant, jedoch zum mathematischen Verständnis der Zielfunktion zwingend erforderlich.

Erkennbar ist, dass die Zielfunktion jeweils links und rechts von dem Minimum mit abnehmenden bzw. zunehmenden α_k ansteigt. Jedoch steigt die Zielfunktion in Richtung der Randbereiche nicht unbeschränkt an, sondern konvergiert an den beiden Intervallgrenzen gegen einen Grenzwert. In Perau und Meteling (2016, 2017) wurde gezeigt, dass für die Näherungsfunktionen der Definitionsbereich durch analytische Grenzfälle beschränkt ist (vgl. Abb. 3.6 die Kurve für ϕ_B). Demgemäß gehen diese Grenzfälle auch unmittelbar in die Zielfunktion in Gl. (5.2) ein, sodass an den äußeren Intervallgrenzen die Zielfunktion für $t^*=0,004$ und $t^*=400$ näherungsweise gegen einen festen Grenzwert konvergiert (vgl. Abb. 5.1).

Für die exemplarische Auswertung und Darstellung in Abb. 5.1 könnte das Minimum $\bar{\alpha}_k^*$ mit ausreichender Genauigkeit auch graphisch bestimmt werden (vgl. auch Harzheim, 2014). An dieser Stelle sei nochmal hervorgehoben, dass die Darstellung der Zielfunktion für praktische Fragestellungen oftmals nicht möglich ist, da diese bei komplexen Problemen relativ aufwendig oder aufgrund der großen Anzahl an Modellparametern überhaupt nicht darstellbar ist.

Unabhängig von der Möglichkeit der graphischen Darstellung, lässt sich das Minimum auch mit entsprechenden mathematischen Methoden der Optimierung bestimmen. Zu diesem Zweck wird für das Intervall $\alpha_k = [1, 100]$ die notwendige und hinreichende Bedingung für die Zielfunktion in Abb. 5.2a u. 5.2b dargestellt. Da die Zielfunktion in diesem Bereich konvex ist und somit nur ein Minimum vorliegt, ist lediglich der Schnittpunkt des Gradienten mit der x-Achse gemäß Abb. 5.2a zu bestimmen. Aus mathematischer Sicht wird somit ein Punkt der Zielfunktion gesucht, in dem eine horizontale Tangente vorliegt. Dieser stationäre Punkt minimiert die Zielfunktion in Gl. (5.2) und entspricht dem optimalen Schätzwert, da die zweite Ableitung gemäß Abb. 5.2b in diesem Punkt größer Null ist und somit die hinreichende Bedingung für ein lokales Minimum als erfüllt angesehen werden kann.

In Bezug auf die erste Ableitung ist erkennbar, dass die Ableitung links von dem Schnittpunkt mit der x-Achse betragsmäßig deutlich größer ist als rechts davon. Weiter ist der Abb. 5.2a zu entnehmen, dass zwischen $\alpha_k=10$ und $\alpha_k=20$ ein Wendepunkt vorliegt, was bedeutet, dass die Funktion der zweiten Ableitung in Abb. 5.2b die x-Achse schneidet. Ab diesem Punkt läuft die erste Ableitung gegen Null. Die Frage, die es für die vorliegende Problemstellung nun zu beantworten gilt ist, wie der optimale Schätzwert für die Anisotropie – also der Schnittpunkt der ersten Ableitung mit der x-Achse – mathematisch zu bestimmen ist.

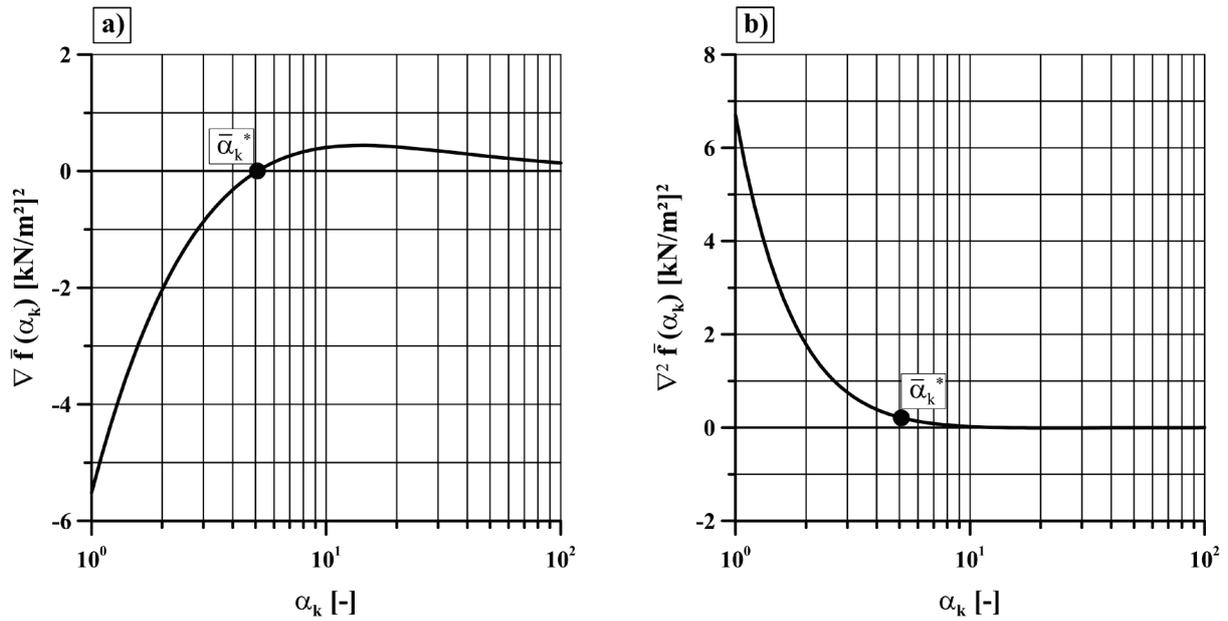


Abbildung 5.2: a) notwendige und b) hinreichende Bedingung für das Minimum der Zielfunktion in Abb. 5.1 (x-Achse-logarithmisch skaliert)

Die vorläufige Lösung des Identifikationsproblems unter Verwendung der Messdaten am Verbauwandfußpunkt ist strategisch insofern sinnvoll, als dass der optimale Schätzwert für diesen Sonderfall analytisch bestimmt werden kann. Zu diesem Zweck wird die Ableitung der Zielfunktion in Gl. (5.2) gebildet und gleich Null gesetzt:

$$\nabla \bar{f}(\alpha_k) = 0 \quad (5.3)$$

Das Optimierungsproblem in Bezug auf die Zielfunktion wird durch die Verwendung der notwendigen Bedingung für die Existenz eines Extremwertes auf ein Nullstellenproblem in Gl. (5.3) zurückgeführt. Hinsichtlich der Darstellung in Abb. 5.2a besteht das Ziel in der Bestimmung des Nulldurchganges der dort abgebildeten Ableitungsfunktion.

Die Lösung für die Gl. (5.3) kann durch elementare mathematische Umformungen geschlossen als analytische Lösung bestimmt werden. Für den optimalen Schätzwert für den Grad der Anisotropie ergibt sich die Lösung zu:

$$\bar{\alpha}_k^* = \left(\frac{t_i}{b} \right)^{-2} \cdot (\beta_2)^{-2} \cdot \left[\left(1 - \bar{\Phi}_4^{\text{syn}} \right)^{-1} - \beta_1 \right]^2 \quad (5.4a)$$

$$\bar{\Phi}_4^{\text{syn}} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \frac{\left(\frac{\bar{u}_{4,i}^{\text{syn}}}{\gamma_w} + X_{3,P=4} \right) - \bar{\Phi}_{A,i}^{\text{syn}}}{\bar{\Phi}_{D,i}^{\text{syn}} - \bar{\Phi}_{A,i}^{\text{syn}}} \quad (5.4b)$$

Die Lösung in Gl. (5.4) hängt von den folgenden Größen ab:

- Einbindetiefe t_i und Baugrubenbreite b
- Funktionsbeiwerte β für den Verbauwandfußpunkt
- Wichte γ_w und geodätische Höhe x_{3P}
- Messdaten für den Porenwasserdruck $\bar{u}_{4,i}^{\text{syn}}$ und die Randpotenziale $\bar{\Phi}_{D,i}^{\text{syn}}, \bar{\Phi}_{A,i}^{\text{syn}}$

Alle Parameter gehen nichtlinear ein, sodass ein Fehler in den Eingangsgrößen zwangsläufig auch den optimalen Schätzwert für den Grad der Anisotropie beeinflussen wird. Wenn die Angaben für die geodätische Höhe oder die Einbindetiefe fehlerhaft sind, hat dies ebenfalls einen unmittelbaren Einfluss auf das Ergebnis der Parameteridentifikation. In Gl. (5.4b) wird der Porenwasserdruck zunächst analog zu den Funktionsansätzen für die Näherungslösungen in ein Potenzial umgerechnet und in die dimensionslose Größe $\bar{\phi}_4^{\text{syn}}$ überführt. Anhand der Gl. (5.4a) wird deutlich, dass bei exakten Daten für den Grad der Anisotropie lediglich eine Porenwasserdruckmessung ($m=1$) vorliegen muss, um das Problem mit einer Unbekannten ($n=1$) eindeutig in dem betrachteten Intervall zu lösen. Darüber hinaus zeigt die Gl. (5.4b), dass bei exakten Messdaten die Auswertung von nur einem Messzeitpunkt $\tau=1$ zu einer eindeutigen Lösung führt.

Für praktische Fragestellungen liegen diese idealen Bedingungen in den allermeisten Fällen nicht vor, da Messabweichungen stets unvermeidbar sind, sodass die Häufigkeit der Ablesungen der Messdaten über die Zeit deutlich größer sein sollte, um den Einfluss der zufälligen Messabweichungen statistisch erfassen zu können. Darüber hinaus wird alleine aus Gründen der Redundanz mehr als eine Messstelle notwendig sein, sodass überbestimmte ($m>n$) lineare/nichtlineare Gleichungssysteme für Gl. (5.3) eine geschlossene analytische Lösung nicht ermöglichen bzw. zweckmäßig erscheinen lassen, insbesondere wenn alle zuvor gewählten Messstellen gemäß Abb. 4.7 bzw. Abb. 4.11 berücksichtigt werden (Perau und Potthoff, 2003).

Aus diesem Grund wird versucht, das zuvor analytisch gelöste Identifikationsproblem in Gl. (5.2) numerisch mit dem Levenberg-Marquardt-Verfahren zu lösen. Ziel ist es, das Optimierungsproblem mit dem zuvor beschriebenen Programmcode zu lösen und diese Lösung anhand der exakten Lösung in Gl. (5.4a) zu verifizieren. In Abb. 5.3 ist die Entwicklung der optimalen Schätzung über die Anzahl der Iterationsschritte dargestellt. Aus dieser Darstellung geht hervor, dass bei einem sinnvoll gewählten Startwert das Levenberg-Marquardt-Verfahren zu einem lokalen Minimum führt, was gemäß Abb. 5.1 zugleich auch dem globalen Minimum entspricht.

Um zu überprüfen, ob die Lösung des Optimierungsproblems in Abb. 5.3a nicht Produkt der analytisch formulierten Näherungslösungen nach Perau und Meteling (2016, 2017) ist, wird das

Optimierungsproblem zusätzlich unter Rückgriff auf die FEM gelöst. Hierbei wird die direkte Problemstellung $u_{p,i}^{\text{calc},j}(\boldsymbol{\kappa})$ in Gl. (5.2) nicht anhand der Näherungslösungen, sondern im FEM-Umfeld gelöst.

In Abb. 5.3 ist der iterative Lösungsprozess zur Lösung der Optimierungsaufgabe in Gl. (5.2) sowohl unter Ansatz der Näherungslösung als auch der FEM für unterschiedliche Startwerte dargestellt. Die durchgezogene Linie stellt die analytische Lösung gemäß Gl. (5.4a) für die synthetischen Messdaten am Verbauwandfußpunkt zum Messzeitpunkt $\tau=1$ und den bekannten Modellparametern gemäß Tab. 4.1 dar.

Die Abb. 5.3 zeigt weiter, dass für die jeweiligen Startwerte $\alpha_{k,0} = [2,20]$ beide Lösungsverfahren gegen eine eindeutige Lösung für den Grad der Anisotropie konvergieren. Bereits nach drei bis vier Iterationsschritten ist eine näherungsweise Übereinstimmung für die Schätzwerte in Abhängigkeit der beiden Startwerte erreicht.

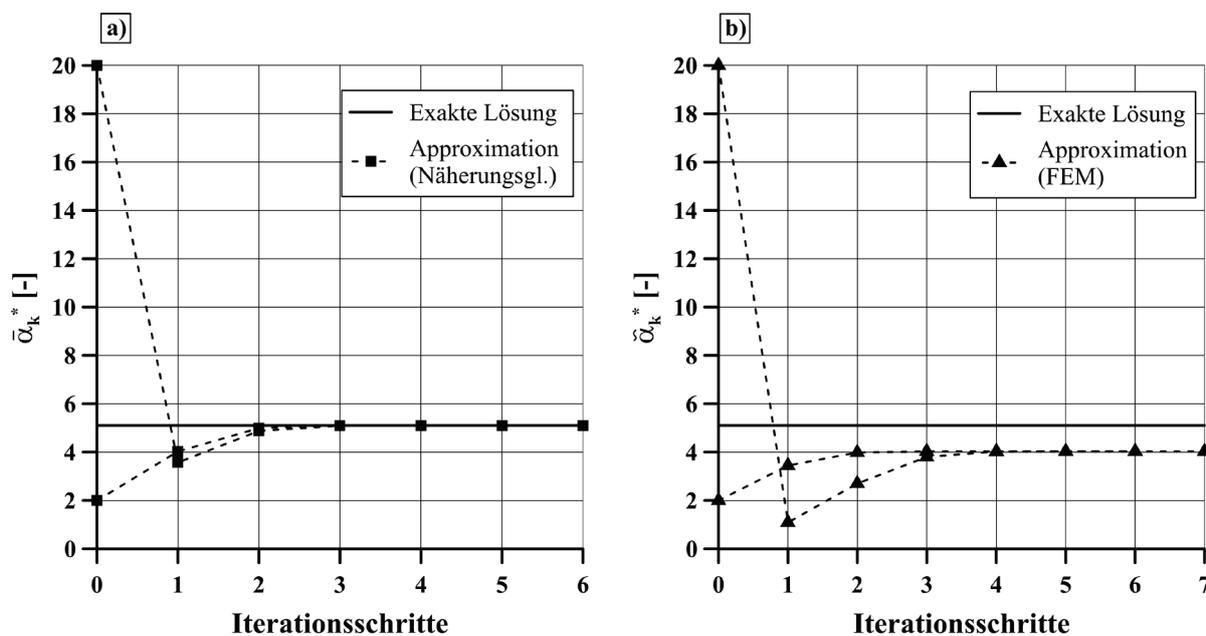


Abbildung 5.3: Anwendung des Levenberg-Marquardt-Verfahrens für unterschiedliche Startwerte $\alpha_{k,0}=[2,20]$ für die Zielfunktion in Abb. 5.1, Berechnung u_p^{calc} mit: a) Näherungsgleichungen, b) FEM

Unter Ansatz der Näherungslösung für die direkte Problemstellung u_p^{calc} konvergiert das Levenberg-Marquardt-Verfahren gegen die analytische Lösung, welche den vorgegebenen Grad der Anisotropie in Tab. 4.1 entspricht.

Bei der FEM Lösung für u_p^{calc} ist zu erkennen, dass diese zwar für beide Startwerte eine eindeutige Lösung gemäß Abb. 5.3b aufweist, jedoch den Grad der Anisotropie im Vergleich zur

exakten Lösung in Tab. 4.1 unterschätzt. Dies ist kein überraschendes Ergebnis, da die Messdaten anhand der analytischen Näherungslösungen erstellt wurden und die direkte Problemstellung nicht exakt der FEM-Lösung entspricht, sodass diese einen Approximationsfehler e^{app} – wie in Abb. 3.7b dargestellt – aufweist.

Bei dem hier vorliegenden Approximationsfehler von $e^{\text{app}} \approx 0,6 \text{ kN/m}^2$ bedeutet dies, dass die Schätzung mit der FEM in Abb. 5.3b zu einem um den Faktor $\approx 1,3$ kleineren Grad der Anisotropie führt. Durch diesen Approximationsfehler wird das Ergebnis der Schätzung naturgemäß beeinflusst (Mahnken, 1998).

Die Tab. 5.2 fasst die Ergebnisse für die numerische Optimierung in Abhängigkeit des Lösungsverfahrens der direkten Problemstellung und der gewählten Startwerte für die in Abb. 5.1 dargestellte Zielfunktion zusammen. Neben der optimalen Lösung für die Anisotropie wurden zusätzlich die Anzahl der Funktionsauswertungen, die Anzahl der Iterationen sowie die Berechnungszeit für die numerische Optimierung ausgewertet.

Tabelle 5.2: Ergebnisse anhand des Levenberg-Marquardt-Verfahrens für die Zielfunktion in Abb. 5.1; Berechnungsgrundlage u_p^{calc} : Näherungsgleichungen und FEM

direkte Problemstellung	Startwert	Schätzung	Funktionsauswertungen	Anzahl Iterationen	Zeit
u_p^{calc}	[-]	[-]	[-]	[-]	[min]
Näherungsgl.	2	$\approx 5,1$	6	6	0,03
Näherungsgl.	20	$\approx 5,1$	7	7	0,03
FEM	2	$\approx 4,0$	14	7	7,74
FEM	20	$\approx 4,0$	16	8	8,55

Anhand der Berechnungszeiten für die numerische Optimierung ist zu erkennen, dass die FEM Lösung deutlich zeitaufwendiger ist, da hierbei im Gegensatz zu den analytischen Näherungsgleichungen ein Vielfaches an Zeit zur Lösung benötigt wird. Der Grund dafür ist u.a., dass für die FEM-Lösung gemäß Tab. 5.2 nahezu die doppelte Anzahl an Funktionsauswertungen notwendig sind, da die benötigten Ableitungen nur numerisch – wie in Gl. (2.28) – bestimmt werden können. Demzufolge sind insgesamt je nach Startwert ca. 14-16 FEM Berechnungen notwendig, um eine Lösung unter den vorgegebenen Abbruchkriterien zu erhalten.

Im Gegensatz zu der FEM ist es bei den Näherungsgleichungen möglich, die Ableitungen analytisch zu berechnen, sodass hierbei lediglich sechs Funktionsauswertungen notwendig sind, was die Berechnungszeit gemäß Tab. 5.2 drastisch verringert. Für die Auswertung von einem Messzeitpunkt mit $\tau=1$ und einer Unbekannten $n=1$ dauert die Optimierung mit der FEM knapp acht Minuten. Je nach Wahl des Startwertes können die Berechnungszeiten für die vorliegende Problemstellung logischerweise noch weiter ansteigen. Auch eine Berechnung des Minimums

der Zielfunktion in Abb. 5.1 mit dem restringierten Optimierungsverfahren (SQP-Verfahren) führte mit einer gewählten unteren Grenze von $\alpha_k^l=1$ sowie einer oberen Grenze von $\alpha_k^u=100$ zu identischen Ergebnissen wie in Tab. 5.2, sodass beide Verfahren für die weiteren Fragestellungen grundsätzlich verwendet werden können.

Für das Optimierungsproblem in Abb. 5.1 konnte somit nachgewiesen werden, dass eine eindeutige Lösung vorliegt und diese anhand der erfolgreich eingesetzten Optimierungsverfahren bestimmt werden kann. Darüber hinaus lässt sich anhand der Vergleichsrechnung mit der FEM zeigen, dass die eindeutige Lösbarkeit der Problemstellung nicht ein Produkt der gewählten Funktionsansätze der analytisch formulierten Näherungsfunktionen ist.

(Ib.) Parameteridentifikation – exakte *synthetische* Messdaten ($m=5$)

Es stellt sich nun die Frage, ob auch unter Berücksichtigung aller fünf Messpunkte ($m=5$) gemäß Abb. 4.11 ein eindeutiger Schätzwert für den Grad der Anisotropie berechnet werden kann. Eine geschlossene analytische Lösung wie in Gl. (5.4a) ist nicht mehr möglich, da die Zielfunktion in Gl. (5.2) und die notwendige Bedingung in Gl. (5.3) nun eine Summe von nichtlinearen Funktionen sind. Zur Lösung der nichtlinearen Optimierungsaufgabe ist somit ein indirektes Verfahren unter der Verwendung von numerischen Optimierungsverfahren notwendig (vgl. Benker, 2003).

Zu diesem Zweck wird in Abb. 5.4 zunächst die Zielfunktion in Gl. (5.2) unter Verwendung aller Messdaten für den Porenwasserdruck gemäß Abb. 4.7 für einen Messzeitpunkt $\tau=1$ ausgewertet und dargestellt.

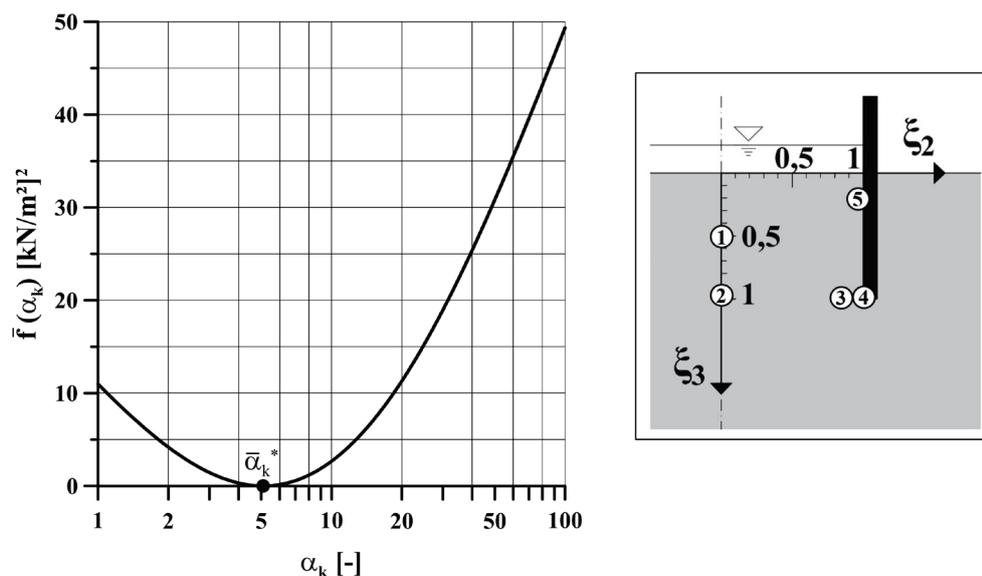


Abbildung 5.4: Darstellung der Zielfunktion für die exakten Messdaten (Pkt.1-5) für $\tau=1$, (x-Achse-logarithmisch skaliert)

Anhand der Darstellung der Zielfunktion ist zu erkennen, dass in einem vorgegebenen Intervall von $\alpha_k = [1, 100]$ ein eindeutiges Minimum vorliegt. Das Minimum der Zielfunktion in Abb. 5.4 stellt die optimale Schätzung für den Grad der Anisotropie in Bezug auf die gesamten synthetischen Messdaten für den Porenwasserdruck dar. Die entsprechende Lösung der Optimierungsaufgabe kann anhand von Abb. 5.4 alternativ auch graphisch erfolgen.

In der Abb. 5.5 ist die Entwicklung des Schätzwerts für die Anisotropie über die jeweiligen Iterationsschritte für die Zielfunktion gemäß Abb. 5.4 dargestellt. Unter Anwendung des Levenberg-Marquardt-Verfahrens lässt sich somit der optimale Schätzwert für zwei unterschiedliche Startwerte $\alpha_{k,0} = [2, 20]$ erfolgreich bestimmen.

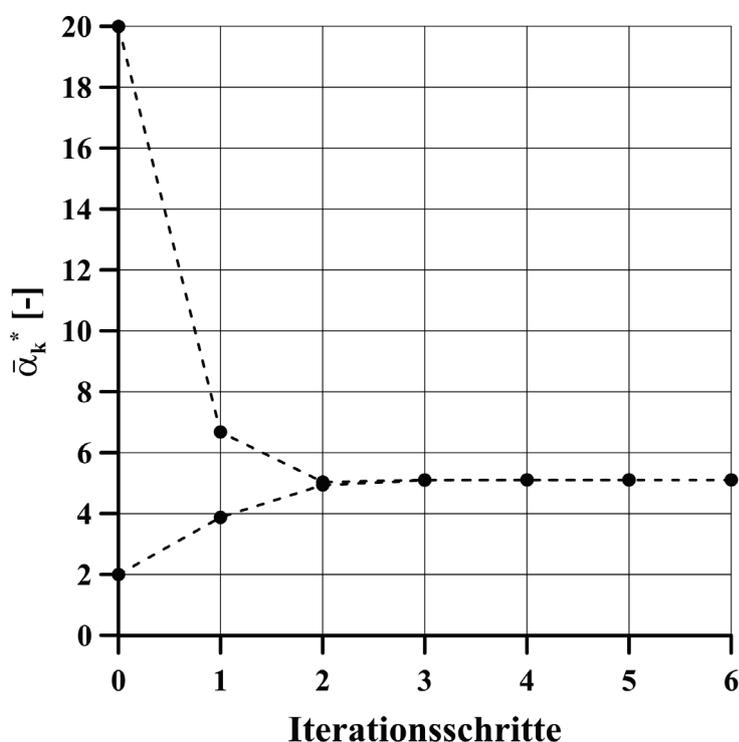


Abbildung 5.5: Anwendung des Levenberg-Marquardt-Verfahrens für unterschiedliche Startwerte $\alpha_{k,0} = [2, 20]$ auf die Zielfunktion in Abb. 5.4

Die Berechnungsergebnisse zeigen, dass der optimale Schätzwert für die beiden gewählten Startwerte $\alpha_{k,0} = [2, 20]$ bereits nach zwei Iterationsschritten gegen die exakte Lösung konvergiert. Anhand der Vorstudie an den exakten Messdaten konnte belegt werden, dass für das konzipierte Messprogramm unter Ansatz einer Zielfunktion im Sinne der kleinsten Abstandsquadrate sowie unter Verwendung der vorgestellten Optimierungsverfahren eine eindeutige Lösung für den Grad der Anisotropie existiert.

(IIa.) Parameteridentifikation – gestörte *synthetische* Messdaten ($m=1$)

Bevor die Zielfunktion unter Berücksichtigung der gestörten Messdaten behandelt wird, ist es zweckmäßig, den Einfluss einer Messabweichung auf die optimale Parameterschätzung im Rahmen einer Vorstudie zu illustrieren. Ein Rückblick auf die analytische Lösung in Gl. (5.4) zeigt, dass Abweichungen in den Modellparametern und den Messdaten nichtlinear in die optimale Schätzung für den Grad der Anisotropie eingehen und somit das Ergebnis mehr oder minder stark beeinflussen.

An der Gl. (5.4) lässt sich weiter zeigen, dass eine einheitliche systematische Abweichung z.B. in Bezug auf die geodätische Höhe x_{3P} der Porenwasserdruckmessung und die Randpotenziale das Ergebnis der Parameteridentifikation nicht beeinflusst, da sich diese Messabweichungen unter der Voraussetzung eines identischen Vorzeichens jeweils durch die Subtraktion im Zähler und Nenner aufheben würden.

Eine einheitliche systematische Messabweichung in Bezug auf die gesamten Messdaten würde beispielsweise durch eine fehlerhafte Kalibrierung entstehen. Im Rahmen einer Parameteridentifikation hätte eine einheitliche systematische Messabweichung z.B. auf die geodätische Höhe keine Auswirkung auf die Lösung in Gl. (5.4), da sich diese Art von Abweichung analog zu einer Verschiebung des Bezugssystems verhält. Infolge der Unabhängigkeit des Potentials vom gewählten Bezugsniveau hätte diese einheitliche Verschiebung des Bezugssystems keinen Einfluss auf die Lösung.

Um den unterschiedlichen Einfluss einer Messabweichung auf unterschiedliche Messpunkte im Strömungsgebiet darzustellen, wird auf den exakten Messwert zum Zeitpunkt $\tau=1$ bzw. $T=1$ in der Baugrubenmitte und am Verbauwandfußpunkt eine synthetische Messabweichung in einem Intervall von $e^{\text{syn}} = [-5,5]$ kN/m² auf die exakten Messdaten für den Porenwasserdruck addiert. Anschließend wird für die gestörten Messdaten der optimale Schätzwert für den Grad der Anisotropie mit dem Levenberg-Marquardt-Verfahren bestimmt. In Abb. 5.6 ist der Einfluss der Messabweichungen e^{syn} auf den optimalen Schätzwert für die beiden Messpunkte dargestellt.

Für den Messpunkt am Verbauwandfußpunkt ist in Abb. 5.6b zu erkennen, dass sich der optimale Schätzwert für den Grad der Anisotropie nichtlinear mit fallender bzw. steigender Messabweichung verändert. Bei einer negativen Messabweichung wird der optimale Schätzwert kleiner und bei einer positiven Messabweichung entsprechend größer. Jedoch ändert sich die Schätzung betragsmäßig deutlich stärker bei einer positiven als bei einer negativen Messabweichung. Wie zuvor anhand von Gl. (5.4) erläutert, belegt auch die Auswertung in Abb. 5.4, dass eine Messabweichung in Bezug auf die Porenwasserdruckmessung nichtlinear in die Schätzung eingeht.

Für die Auswertung in der Baugrubenmitte gemäß Abb. 5.6a ist zu erkennen, dass der Verlauf der Kurve für die Schätzung der Anisotropie im Vergleich zu Abb. 5.6b zwar ähnlich ist, sich jedoch wesentlich flacher gestaltet. Demgemäß reagiert das Optimierungsverfahren für den Messpunkt in der Baugrubenmitte stabiler auf Messabweichungen als der Messpunkt am Verbauwandfußpunkt. Eine mögliche Erklärung kann darin begründet liegen, dass die Sensitivität bezüglich gestörter Messdaten in Baugrubenmitte geringer ist als am Verbauwandfußpunkt.

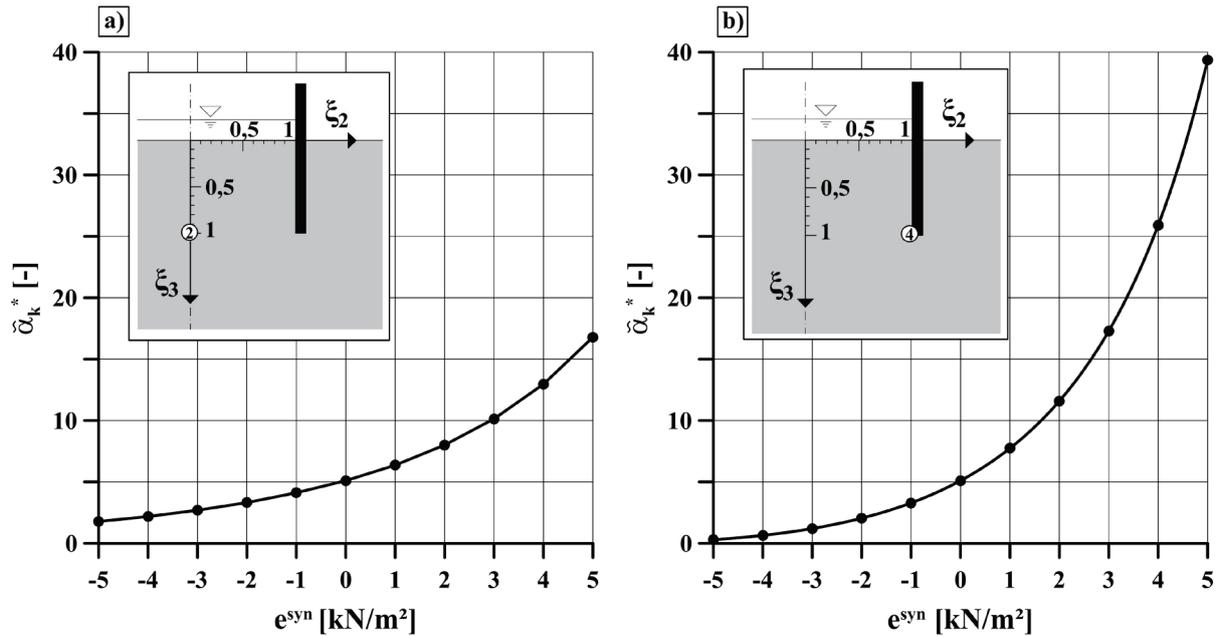


Abbildung 5.6: Auswirkungen einer synthetischen Messabweichung auf die Messpunkte a) in Baugrubenmitte und b) am Verbauwandfußpunkt auf das Identifikationsproblem für den Grad der Anisotropie für exakte Eingangsgrößen zum Zeitpunkt $\tau=1$

(IIb.) Parameteridentifikation – gestörte synthetische Messdaten (m=5)

Nach den umfassenden Vorstudien folgen abschließend die Untersuchungen anhand der gestörten Messdaten. Wie in Gl. (5.1c) wird eine Zielfunktion aufgestellt, die unter Berücksichtigung der gestörten Messdaten für die Randpotenziale und die fünf Porenwasserdruckmessungen (m=5) formuliert wird:

$$\tilde{f}(\alpha_k) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{m=5} \left(w_j \cdot \sum_{i=1}^T \omega_i \cdot \left[\tilde{r}_{i,j}(\alpha_k) \right]^2 \right) \rightarrow \min_{\alpha_k} \quad (5.5)$$

Für die beiden Wichtungsfaktoren in Gl. (5.5) gilt $w_j=1$ und $\omega_i=1$, sodass die einzelnen Messreihen ohne eine Wichtung in die Schätzung eingehen. Die Definition des Residuums

$\tilde{r}_{i,j} = \tilde{u}_{p=j,i}^{\text{syn}} - u_{p=j,i}^{\text{calc}}(\alpha_k)$ in Gl. (5.5) ist ähnlich zu der in Gl. (5.2), wobei die synthetischen Messdaten nun mit zufälligen Messabweichungen überlagert sind. Das Minimum der Zielfunktion in Gl. (5.5) wird für eine unterschiedliche Anzahl von Messzeitpunkten bestimmt.

Bei Betrachtung der Ausgangsproblemstellung stellt sich abschließend die Frage, wie die gesamten synthetischen Messdaten für die Zeitschritte $\tau=1$ bis $\tau=120$ auszuwerten sind. Für den exakten Datensatz konnte zuvor gezeigt werden, dass die Parameteridentifikation unter Berücksichtigung aller Messpunkte zu einer eindeutigen Lösung führt. Unter Verwendung der gesamten gestörten Messdaten für den Porenwasserdruck und die Randpotenziale können in Tab. 5.3 die optimalen Schätzwerte für eine unterschiedliche Anzahl an Zeitschritten ausgewertet und zusammengefasst werden.

Tabelle 5.3: Auswertung der gestörten Messdaten zur Parameteridentifikation

Anzahl Zeitschritte	Startwert	Schätzung	Gradient	Schätzfehler
T	$\alpha_{k,0}$	$\tilde{\alpha}_k^*$	$\nabla \tilde{f}(\tilde{\alpha}_k^*)$	$ \tilde{\alpha}_k^* - \bar{\alpha}_k^* $
[-]	[-]	[-]	[kN/m ²]	[-]
1	2,0	25,1	1,6E-08	20,0
2	25,1	12,9	3,0E-08	7,8
3	12,9	13,0	6,2E-09	7,9
4	13,0	15,2	8,0E-09	10,1
5	15,2	14,3	5,0E-08	9,2
10	14,3	8,7	3,7E-10	3,6
15	8,7	8,0	4,0E-09	2,9
...

Da die gesamten Messdaten für $\tau=1$ bis $\tau=120$ während der Bauzeit nicht zur Verfügung stehen, bietet es sich an, die Messdaten in diskreten zeitlichen Intervallen sukzessive in die Parameteridentifikation mit einfließen zu lassen, wie in Tab. 5.3 exemplarisch dargestellt. Die empfohlene Vorgehensweise sieht so aus, dass zunächst für einen Zeitschritt τ_1 ein Startwert $\alpha_{k,0}$ vorgegeben wird. Für diese Zielfunktion mit dem Endwert der zweiten Summe in Gl. (5.5) mit $T=1$ wird in Bezug auf Gl. (5.5) eine numerische Optimierung zur Bestimmung des Minimums mit den zuvor erarbeiteten Optimierungsverfahren durchgeführt, bis die notwendige Bedingung für das lokale Minimum in guter Näherung erfüllt ist.

Anschließend wird der nächste Messwert an die Zielfunktion in Gl. (5.5) übergeben und der zuvor bestimmte Schätzwert kann als verbesserter Startwert $\alpha_{k,0}$ für die Optimierung der Zeitschritte τ_1 bis τ_2 angenommen werden. Durch die direkte Auswertung der Messdaten können ggfs. schon während der Bauzeit fehlerhafte Messgeber oder falsche Annahmen bezüglich der Bodenparameter detektiert werden.

In der Abb. 5.7 sind die Ergebnisse aus der Tab. 5.3 graphisch dargestellt. An der Darstellung lässt sich zeigen, dass bei einem gestörten Datensatz hinreichend viele Zeitschritte ausgewertet werden müssen, um einen optimalen Schätzwert nahe der exakten Lösung für den Grad der Anisotropie zu bestimmen. Bei der Auswertung eines Zeitschrittes ist die Schätzung noch weit von dem tatsächlichen Wert der Anisotropie entfernt und reagiert somit sehr empfindlich auf die Störung. Erst nachdem ein größerer Datensatz über die Zeitschritte τ_i berücksichtigt wird, stellt sich eine zufriedenstellende Lösung ein. Die gestrichelten Linien in Abb. 5.7 stellen die unterschiedlichen Absenckphasen dar. Nach der ersten Absenckphase mit τ_1 - τ_{30} ist bereits eine zufriedenstellende Lösung erreicht. Mit einer größeren Anzahl von betrachteten Zeitschritten nähert sich die Schätzung immer mehr dem tatsächlichen Grad der Anisotropie an.

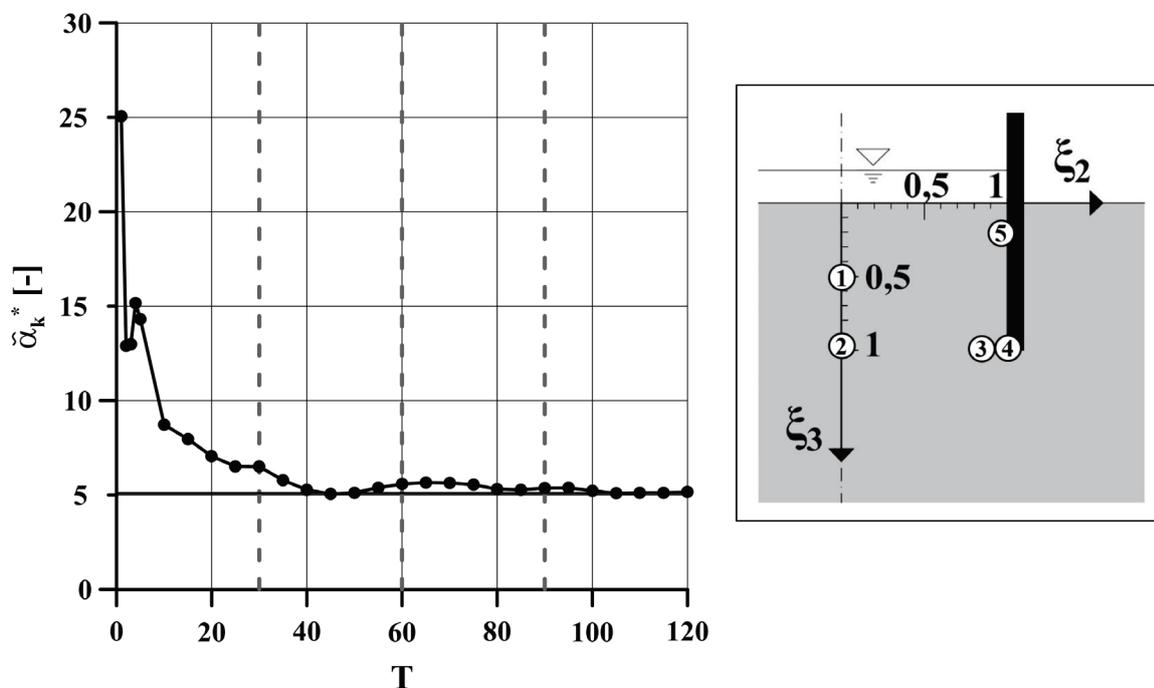


Abbildung 5.7: Parameteridentifikation für den gestörten Datensatz der Porenwasserdruckmessungen und der Randpotenziale

Problematisch an dieser Art der Auswertung ist, dass durch stark gestörte Datensätze ein Startwert aus der numerischen Optimierung resultieren kann, welcher unter Weitergabe der Schätzung des vorherigen Zeitschrittes bei der iterativen Lösung des Optimierungsproblems zu langen Berechnungszeiten führt. Je nachdem, wie stark die Messdaten gestört sind, stellt sich demzufolge ein anderes Ergebnis als in Abb. 5.7 ein. Jedoch konnte an den durchgeführten Untersuchungen gezeigt werden, dass auch ein gestörter Datensatz unter Berücksichtigung einer ausreichenden Anzahl an Zeitschritten zu einer annehmbaren Lösung führt.

(III.) Schlussfolgerungen

Nachfolgend werden die wesentlichen Ergebnisse und Erkenntnisse der durchgeführten Untersuchungen für das Identifikationsproblem bezüglich der Anisotropie getrennt für die jeweiligen Datensätze in einer kompakten Übersicht zusammengetragen:

Parameteridentifikation – exakte synthetische Messdaten:

- Für eine Zielfunktion im Sinne der kleinsten Abstandsquadrate kann unter Anwendung des Levenberg-Marquardt-Verfahrens und des SQP-Verfahrens eine eindeutige Lösung bestimmt werden.
- Eine eindeutige Lösung für die Minimalkonfiguration ($m=n$) ist möglich, sodass eine Messung der Standrohrspiegelhöhen bzw. des Porenwasserdrucks in der tertiären Schicht aus mathematischer Sicht ausreicht.
- Die Güte der optimalen Schätzung hängt stark von den weiteren Modellparametern wie der Einbindetiefe oder der geodätischen Höhe gemäß Gl. (4.1) ab.
- Eine Berechnung der direkten Problemstellung auf Grundlage der FEM ist deutlich aufwendiger als mit den analytisch formulierten Näherungsgleichungen, wobei Berechnungen mit der FEM im Vergleich zu den Näherungslösungen ggfs. genauer sind.

Parameteridentifikation – gestörte synthetische Messdaten:

- Die unter I) verwendete Zielfunktion und die dabei eingesetzten Optimierungsverfahren lassen sich ebenfalls erfolgreich auf die gestörten Messdaten anwenden.
- Die Messabweichungen gehen nichtlinear in die Schätzung der Parameter ein.
- Einfluss der Messabweichungen auf den optimalen Schätzwert ist lokal verschieden und hängt vom Ort der Messung ab (Baugrubenmitte günstiger als Verbauwandfußpunkt).
- Messpunkte mit einer hohen Sensitivität bezüglich der Anisotropie reagieren weniger empfindlich auf Messabweichungen.
- Aufgrund unterschiedlich stark streuender Messreihen sollten stets mehr Messwerte als Unbekannte vorliegen, sodass $m>n$ gilt.
- Zusätzlich bietet es sich an, den Einfluss von stark oszillierenden Messreihen mit Wichtungsfaktoren zu vermindern (vgl. z.B. Meier, 2009).
- Für eine stabile Lösung muss eine ausreichende Anzahl an Messwerten über die Zeit vorliegen (Ablesehäufigkeit).

Grundsätzlich lassen sich die Erkenntnisse auf ähnliche Problemstellungen übertragen. Angenommen die Untersuchungen sollen ebenfalls an einer Baugrube mit einer kreisrunden Baugrubenfläche durchgeführt werden, lässt sich anhand der analytischen Näherungslösungen zeigen,

dass sich die Erkenntnisse nicht hinsichtlich der Werte aber in den wesentlichen Grundzügen auch auf dieses Problem übertragen lassen. Somit kann für eine kreisrunde Baugrube ohne weitere Untersuchungen bzw. Berechnungen bereits festgestellt werden, dass der Grad der Anisotropie hierfür ebenfalls eindeutig zu bestimmen ist.

Abschließend können anhand der Erkenntnisse dieser Studie noch weitere Empfehlungen hinsichtlich der Optimierung des Messprogramms gemäß Untersuchungspunkt A4) gegeben werden:

- Im Gegensatz zur Minimalkonfiguration ($m=n$) ist es erforderlich, *mindestens drei* Messpunkte ($m=3$) für die Standrohrspiegelhöhe bzw. den Porenwasserdruck in der tertiären Bodenschicht anzuordnen. Durch Mehrheitsentscheid ist es möglich, eine Messreihe mit fehlerhaften Messdaten zu detektieren.
- Falls ein Messgeber ausfällt, sollten zur Gewährleistung einer notwendigen Redundanz optimal *mehr als drei* Messpunkte ($m>3$) für die Standrohrspiegelhöhe bzw. den Porenwasserdruck in der tertiären Bodenschicht angeordnet werden.
- Messpunkte sollten bevorzugt innerhalb der Baugrube und bestenfalls im näheren Bereich der Baugrubenmitte sowie auf der Höhe der Wandunterkante angeordnet werden.

Das zuvor konzipierte Messprogramm gemäß Abb. 4.7 wäre zur Rückrechnung der Anisotropie demnach geeignet, da mehr Messpunkte als Unbekannte vorliegen. Jedoch könnte es zweckmäßig sein, die Lage der Messpunkte entsprechend der zuvor ausgesprochenen Empfehlungen zu optimieren. Die Messpunkte entlang der Verbauwand sollten demzufolge mehr in Richtung Baugrubenmitte sowie in Richtung Wandunterkante oder darüber hinaus verschoben werden. Die Empfehlungen gelten lediglich für die Parameteridentifikation, sodass weitere Aspekte, wie die baupraktische Durchführung der Messungen oder die Kosten für den Betrieb des Messprogramms, stets zu beachten sind.

5.3 Grad der Anisotropie und Randpotenzial

Nach der ausführlichen Vorstudie zur Rückrechnung der Anisotropie, wird diese Fragestellung um einen weiteren zu bestimmenden Parameter erweitert. Neben der Bestimmung der Anisotropie besteht die Aufgabe nun darin, zusätzlich das Randpotenzial bzw. den Innenpegel für das System in Abb. 4.1 zurückzurechnen. Aus baupraktischer Sicht kann die Lösung dieser Problemstellung sinnvoll sein, um die in-situ-Piezometermessdaten für den Innenpegel durch die Parameteridentifikation in unabhängiger Art und Weise zu überprüfen. Zudem wäre eine Rückrechnung der Anisotropie weiterhin möglich, falls sich die Messdaten des Innenpegels als stark verfälscht herausstellen oder die Messwerterfassung während der Bauausführung ausfällt.

Das Ziel der nachfolgenden Untersuchungen lautet nun, einen optimalen Schätzwert $\kappa^* = [\alpha_k, \Phi_A]^T$ mit der zuvor vorgestellten methodischen Vorgehensweise zu bestimmen. Die Analyse der direkten Problemstellung gemäß Gl. (4.2) hat gezeigt, dass die Messgröße des Porenwasserdrucks von den beiden gesuchten Parametern abhängt, sodass die Datengrundlage wie zuvor aus den synthetischen Messdaten für den Porenwasserdruck und dem äußeren Randpotenzial besteht.

(I.) Parameteridentifikation – exakte synthetische Messdaten

Für die exakten Daten ergibt sich die Zielfunktion in Abhängigkeit der gesuchten Parameter analog zu Gl. (5.1b):

$$\bar{f}(\alpha_k, \Phi_A) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^m \left(w_j \cdot \sum_{i=1}^T \omega_i \cdot [\bar{r}_{i,j}(\alpha_k, \Phi_A)]^2 \right) \rightarrow \min_{\alpha_k, \Phi_A} \quad (5.6)$$

Für die Wichtungsfaktoren in Gl. (5.6) gilt vereinfachend $w_j=1$ und $\omega_i=1$. Das Residuum $\bar{r}_{i,j} = \bar{u}_{P=j,i}^{\text{syn}} - u_{P=j,i}^{\text{calc}}(\alpha_k, \Phi_A)$ in Gl. (5.6) hängt sowohl vom Grad der Anisotropie als auch von dem Innenpegel ab. Das Ziel ist es, die Zielfunktion in Gl. (5.6) hinsichtlich α_k und Φ_A unter Verwendung der MATLAB Routine in Abb. 4.14 zu minimieren. Der Punkt, welcher die Zielfunktion minimiert, ist dann gleich der optimalen Lösung für $\bar{\alpha}_k^*$ bzw. $\bar{\Phi}_A^*$.

Im Gegensatz zur vorherigen Problemstellung hängt die Zielfunktion in Gl. (5.6) nun von zwei unbekanntem Parametern ($n=2$) ab, sodass sich als Lösung für die Minimierungsaufgabe ein Parametervektor ergibt. Eine Messung für den Porenwasserdruck ($m=1$) reicht in diesem Fall nicht mehr aus, um das Problem mit zwei Variablen ($n=2$) eindeutig zu lösen, da nun ein unterbestimmtes Problem mit $m < n$ vorliegt. Es müssen demzufolge mindestens zwei unterschiedliche Messpunkte für den Porenwasserdruck in der tertiären Bodenschicht vorliegen, um eine eindeutige Lösung der Optimierungsaufgabe in Gl. (5.6) zu ermöglichen.

Für den Fall $m < n$ liegt im Regelfall eine mehrdeutige Lösung vor, welche somit die notwendige Bedingung in Gl. (2.19) im Lösungspunkt erfüllt (Schek und Eggenesperger, 1977). Prinzipiell ist es auch möglich eine unterbestimmte Optimierungsaufgabe durch zusätzliche Forderungen zur Eindeutigkeit zu zwingen, was an dieser Stelle jedoch nicht weiter untersucht wird (Schek und Eggenesperger, 1977).

An dieser Stelle sei auch angemerkt, dass wenn ein unterbestimmtes Problem vorliegt, es auch nicht möglich ist, dieses Problem durch mehrere Messungen derselben Messgröße in Zeitrichtung τ_i zu lösen, da dadurch keine unabhängigen Informationen über die gesuchten Parameter einfließen. Lediglich durch eine weitere unabhängige Messstelle im Strömungsgebiet lässt sich das Problem ggfs. eindeutig lösen. Eine analytische Lösung des Nullstellenproblems wie in Gl. (5.3), ist unter diesen Umständen nur schwer zugänglich, da für mehr als einen Messpunkt eine Summe von nichtlinearen Gleichungen gelöst werden muss.

Um diese Vorabanalyse mit einer entsprechenden numerischen Auswertung zu untermauern, sind in Tab. 5.6 die verwendeten Startwerte für das *Levenberg-Marquardt-Verfahren* und die optimalen Schätzwerte in Bezug auf das Optimierungsproblem in Gl. (5.6) für verschiedene Konstellationen tabellarisch dargestellt. Ähnlich wie zuvor erfolgten die Berechnungen zunächst vereinfachend für den Messzeitpunkt $\tau=1$ bzw. $T=1$ sowie für eine unterschiedliche Anzahl an Messstellen. Das Ziel bestand darin, die optimalen Schätzwerte für den unterbestimmten Fall mit $m < n$, für die Minimalkonfiguration mit $m=n$ sowie für den überbestimmten Fall mit $m > n$ zu berechnen und sowohl die notwendige als auch die hinreichende Bedingung für diese unterschiedlichen Konfigurationen zu vergleichen.

Tabelle 5.4: Auswertung der exakten Messdaten zur Parameteridentifikation für eine unterschiedliche Anzahl an Messstellen

Anzahl Zeitschritte	verwendete Messpunkte	Startwert		Schätzung		Gradient		Hesse-Matrix
		$\alpha_{k,0}$	$\Phi_{A,0}$	α_k^*	Φ_A^*	$\nabla f(\alpha_k^*, \Phi_A^*)$	Eigenwerte	
T		-	[m]	-	[m]	$[\text{kN/m}^2]^2$	$[\text{kN/m}^2]^2/\text{m}$	
1	4	2,0	30,0	2,9	32,4	≈ 0	≈ 0	0/+
1	4	20,0	33,0	19,9	30,5	≈ 0	≈ 0	0/+
1	1,4	2,0	30,0	5,1	32,0	≈ 0	≈ 0	+/+
1	1,4	20,0	33,0	5,1	32,0	≈ 0	≈ 0	+/+
1	1,2,3,4,5	2,0	30,0	5,1	32,0	≈ 0	≈ 0	+/+
1	1,2,3,4,5	20,0	33,0	5,1	32,0	≈ 0	≈ 0	+/+

Für die Verwendung von lediglich einer Messstelle am Verbauwandfußpunkt konnte infolge der Unbestimmtheit erwartungsgemäß keine eindeutige Lösung gefunden werden. Für die bei-

den unterschiedlichen Startwerte erhält man zwar eine Lösung, jedoch sind diese nicht identisch, sodass für diesen Fall eine mehrdeutige Lösung – wie in Abb. 2.9 schematisch dargestellt – vorliegt. Die notwendige Bedingung für den Gradienten ist zwar erfüllt, jedoch ist an den Eigenwerten der Hessematrix in den jeweiligen Punkten zu erkennen, dass ein Eigenwert gleich Null ist und somit die Determinante der Hessematrix Null ist.

Für diesen Fall ist nicht eindeutig zu klären, ob ein lokales Maximum bzw. Minimum oder ein Sattelpunkt vorliegt, da die Hesse-Matrix weder definit noch indefinit ist (Furlan, 1995; Haftmann, 2009). Die Hesse-Matrix ist mit den analytischen Näherungsgleichungen relativ leicht zu bestimmen, sodass das hinreichende Kriterium im Gegensatz zu einer Lösung mit der FEM ohne großen Aufwand bestimmt werden kann.

Anhand der Ergebnisse in Tab. 5.4 lässt sich weiter zeigen, dass für zwei Messpunkte in der Baugrubenmitte und am Verbauwandfußpunkt sowie für die gesamte Anzahl an vorhandenen Messpunkten eine eindeutige Lösung möglich ist, da sowohl die notwendige als auch die hinreichende Optimalitätsbedingung für ein lokales Minimum erfüllt ist. Im Gegensatz zu einem Messpunkt sind die Eigenwerte im stationären Punkt beide positiv, was bedeutet, dass hier ein lokales Minimum vorliegt.

Die beiden gewählten Startwerte in Tab. 5.4 führen jeweils zu derselben Lösung, sodass in der näheren Umgebung keine weiteren Extremwerte zu erwarten sind. Auch Startwerte wie z.B. $[\alpha_{k,0}=1, \Phi_{A,0}=20]$ oder $[\alpha_{k,0}=100, \Phi_{A,0}=36]$ führen zu identischen Lösungen wie in Tab. 5.4. Im Gegensatz zum Grad der Anisotropie lassen sich die Startwerte für das Randpotenzial relativ genau im Vorfeld abschätzen, sodass die Schwierigkeit wie zuvor darin bestehen wird, einen zutreffenden Startwert für die Anisotropie zu finden.

Für den überbestimmten Fall – vgl. die letzten beiden Zeilen in Tab. 5.4 – erfolgte eine Auswertung und Darstellung der Zielfunktion gemäß Gl. (5.6) anhand einer dreidimensionalen Darstellung in Abb. 5.8a sowie einer zweidimensionalen Konturdarstellung in Abb. 5.8b. Die Zielfunktion weist im Bereich des Minimums ein flach geformtes Tal auf, welches jeweils zu den Seiten ungleichmäßig steil ansteigt. Für den Optimierungsalgorithmus kommen zur Bestimmung des Minimums demgemäß vorzugsweise robuste Verfahren infrage wie z.B. das Levenberg-Marquardt-Verfahren oder das SQP-Verfahren (Mahnken, 1998; Kinzler, 2011).

Nach Mahnken (1998) liegt ein schlecht konditioniertes Problem vor, wenn das Verhältnis zwischen dem minimalen und maximalen Eigenwert $\varepsilon_{\min}/\varepsilon_{\max}$ der Hesse-Matrix im stationären Punkt bzw. für den optimalen Schätzwert klein ist, was zu einer langsamen Konvergenz führt und die Anwendung von robusten Schätzverfahren wie das Levenberg-Marquardt oder das SQP-Verfahren erforderlich macht. Für die Zielfunktion in Abb. 5.8 beträgt das Verhältnis zwischen den beiden Eigenwerten der Hesse-Matrix im Lösungspunkt $\varepsilon_{\min}/\varepsilon_{\max} \approx 0$, sodass hier ein

schlecht konditioniertes Problem vorliegt, was robuste Verfahren erfordert, sodass andere Verfahren wie das Gauß-Newton-Verfahren hierbei eine schlechte Konvergenzrate aufweisen.

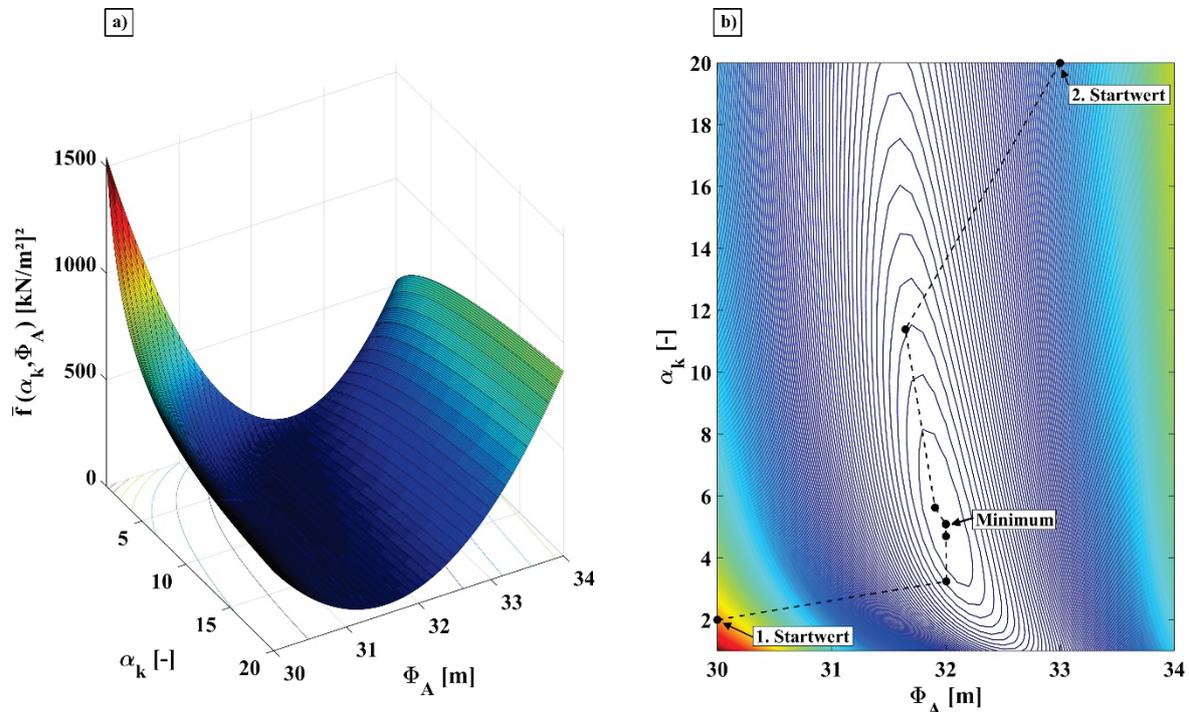


Abbildung 5.8: Darstellung der Zielfunktion in der ersten Absenkphase für die exakten synthetischen Messdaten und exakte Eingangsgrößen für $T=1$. a) Dreidimensionale Darstellung Zielfunktion und b) Zweidimensionale Konturdarstellung der Funktionswerte sowie Iteration für unterschiedliche Startwerte

In der zweidimensionalen Konturdarstellung in Abb. 5.8b ist zudem die numerische Iteration zur Bestimmung des lokalen Minimums der Zielfunktion für unterschiedliche Startwerte abgebildet. Wie aus der Abb. 5.8b hervorgeht, ist im Rahmen der numerischen Optimierung für die beiden gewählten Startwerte nur eine geringe Anzahl von Iterationen notwendig.

Im Bereich rund um das Minimum sind die Abstände der Konturlinien größer als an den Rändern des Darstellungsbereichs, sodass sich in diesem Bereich die Zielfunktionswerte vergleichsweise gering ändern. In diesem Bereich liegt entsprechend eine flache Topologie der Zielfunktion vor. Die Vorabanalyse der exakten synthetischen Messdaten zeigt jedoch, dass die Anwendung des robusten Levenberg-Marquardt Verfahrens auf das Optimierungsproblem in Gl. (5.6) für unterschiedliche Startwerte und einer Minimalkonfiguration mit $m=n$ zu einer eindeutigen Lösung führt.

(II.) Parameteridentifikation – gestörte *synthetische* Messdaten

Für die künstlich gestörten Messdaten wird untersucht, inwieweit sich diese auf die Stabilität der optimalen Lösung auswirken. Die Optimierungsaufgabe lässt sich dann analog zur Gl. (5.6) wie folgt formulieren:

$$\tilde{f}(\alpha_k, \Phi_A) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{m=5} \left(w_j \cdot \sum_{i=1}^T \omega_i \cdot \left[\tilde{r}_{i,j}(\alpha_k, \Phi_A) \right]^2 \right) \rightarrow \min_{\alpha_k, \Phi_A} \quad (5.7)$$

Für die beiden Wichtungsfaktoren in Gl. (5.7) gilt $w_j=1$ und $\omega_i=1$, sodass die einzelnen Messreihen ohne eine Wichtung in die Schätzung eingehen. Die Definition des Residuums $\tilde{r}_{i,j} = \tilde{u}_{P=j,i}^{\text{syn}} - u_{P=j,i}^{\text{calc}}(\alpha_k, \Phi_A)$ in Gl. (5.7) ist ähnlich zu der in Gl. (5.6), wobei die synthetischen Messdaten nun mit zufälligen Messabweichungen überlagert sind.

Was die Lösung der Optimierungsaufgabe in Gl. (5.7) im Gegensatz zu den Untersuchungen für den Grad der Anisotropie erschwert, ist der Umstand, dass das Randpotenzial Φ_A durch die unterschiedlichen Absenkphasen als veränderlich angesehen werden muss. Demgemäß wird die Optimierungsaufgabe in Gl. (5.7) vereinfachend für jeden Absenkschritt separat durchgeführt, sodass die zweite Summe lediglich eine maximale Gesamtanzahl von Zeitschritten mit $T=30$ aufweist. Die optimalen Schätzwerte sind somit in Abhängigkeit der jeweiligen Absenkphasen zu bestimmen.

In der Abb. 5.9a bzw. Abb. 5.9b sind jeweils die optimalen Schätzwerte für den Grad der Anisotropie und für den Innenpegel in Abhängigkeit der jeweiligen Absenkphase (T_1 bis T_4) übersichtlich in einem Diagramm dargestellt. Die einzelnen Absenkphasen sind jeweils durch eine gestrichelte Linie getrennt. Für die erste Absenkphase bedeutet dies, dass die Lösung des Optimierungsproblems in Gl. (5.7) anhand der Zeitschritte τ_1 - τ_{30} erfolgt und somit den optimalen Schätzwert für den Grad der Anisotropie und den Innenpegel in der ersten Absenkphase liefert. Für den Zeitschritt τ_1 ist für beide Parameter zu erkennen, dass die Schätzung noch weit vom tatsächlichen Wert entfernt ist. Jedoch ist die Schätzung für das Randpotenzial für τ_1 in Abb. 5.9b deutlich näher an dem tatsächlichen Wert und somit im Gegensatz zur Schätzung für den Grad der Anisotropie als stabiler gegenüber Messabweichungen anzusehen.

Da während der Bauausführung die gesamten Messdaten nicht vorliegen, wird die Parameteridentifikation mit einer Schrittweite von $\Delta\tau=5$ bis zum Ende der jeweiligen Absenkphase durchgeführt. Bei Betrachtung der ersten Absenkphase fällt auf, dass sich mit steigender Anzahl an Messdaten in Zeitrichtung die Schätzung stabilisiert, da die einzelnen Messabweichungen der jeweiligen Messgrößen nur einen schwachen Einfluss auf die Schätzung haben. Insgesamt reagiert das Optimierungsproblem relativ stabil auf die Messabweichungen und liefert bereits nach

wenigen Zeitschritten brauchbare Schätzwerte für die Parameter. Dies gilt für jede der einzelnen Absenkphasen.

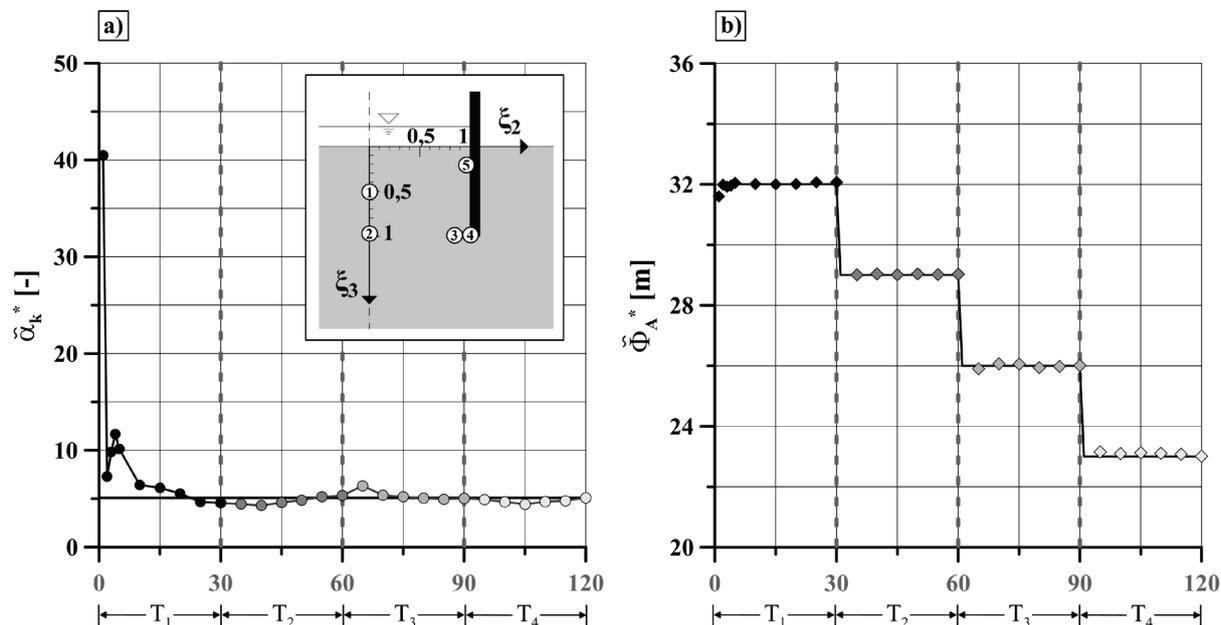


Abbildung 5.9: Parameteridentifikation für den gestörten Datensatz a) Entwicklung des Schätzwerts für den Grad der Anisotropie; b) Entwicklung des Schätzwerts für den Innenpegel jeweils getrennt für die einzelnen Absenkphasen

(III.) Schlussfolgerungen

Insgesamt ließ sich die Untersuchungsmethodik auch auf das *zweite* Identifikationsproblem erfolgreich übertragen. Die wesentlichen Erkenntnisse und Ergebnisse werden nachfolgend getrennt für die beiden Messdatensätze zusammengetragen:

Parameteridentifikation – exakte synthetische Messdaten:

- Für eine Zielfunktion im Sinne der kleinsten Abstandsquadrate kann unter Anwendung des Levenberg-Marquardt Verfahrens und des SQP-Verfahrens eine eindeutige Lösung bestimmt werden.
- Die Analyse der Hesse-Matrix hat ergeben, dass diese schlecht konditioniert ist und folglich robuste Optimierungsverfahren erforderlich sind.
- Eine eindeutige Lösung für die Minimalkonfiguration ($m=n$) ist möglich, sodass zwei unabhängige Messungen für die Standrohrspiegelhöhe bzw. den Porenwasserdruck in der tertiären Schicht aus mathematischer Sicht ausreichen.

Parameteridentifikation – gestörte synthetische Messdaten:

- Die unter I) verwendete Zielfunktion und die dabei eingesetzten Optimierungsverfahren lassen sich ebenfalls erfolgreich auf die gestörten Messdaten anwenden.
- Die Einflüsse der Messabweichungen auf den optimalen Schätzwert sind lokal verschieden und hängen somit vom Ort der Messung ab (Innenpegel: Optimal in der Nähe des Schichtwechsels, Grad der Anisotropie: Vorzugsweise in der Baugrubenmitte).
- Da die Messwerte im Regelfall unterschiedlich stark streuen, sollten stets mehr Messwerte als Unbekannte vorliegen, sodass $m > n$ gilt.
- Zusätzlich bietet es sich an, den Einfluss von stark oszillierenden Messreihen mit entsprechenden Wichtungsfaktoren zu vermindern.
- Für eine stabile Lösung muss eine ausreichende Anzahl an Messwerten über die Zeit vorliegen (Ablesehäufigkeit).

Für Empfehlungen bzw. Optimierungsbedarf hinsichtlich des Messprogramms gemäß Untersuchungspunkt A4) können die folgenden Punkte aus den Untersuchungen abgeleitet werden:

- Im Gegensatz zur Minimalkonfiguration ($m=n$) ist es sinnvoll mindestens drei Messpunkte ($m=3$) für die Standrohrspiegelhöhe bzw. den Porenwasserdruck in der tertiären Bodenschicht anzuordnen. Durch Mehrheitsentscheid ist es demgemäß möglich, eine Messreihe mit fehlerhaften Messdaten zu detektieren.
- Falls ein Messgeber ausfällt, sollten zur Gewährleistung einer notwendigen Redundanz vorzugsweise mehr als drei Messpunkte ($m > 3$) für die Standrohrspiegelhöhe bzw. den Porenwasserdruck in der tertiären Bodenschicht angeordnet werden.
- Messpunkte sollten bevorzugt innerhalb der Baugrube und optimal im näheren Bereich der Baugrubenmitte, auf der Höhe der Wandunterkante sowie im Bereich des Schichtwechsels angeordnet werden.

Das zuvor konzipierte Messprogramm gemäß Abb. 4.7 ist zur Rückrechnung der beiden Modellparameter demnach gut geeignet, da mehr Messpunkte als Unbekannte vorliegen. Jedoch könnte es zweckmäßig sein, die Lage der Messpunkte entsprechend der o.g. Empfehlungen zu hinterfragen und ggfs. zu optimieren. Die Empfehlungen gelten lediglich für die Parameteridentifikation, sodass weitere Aspekte, wie die baupraktische Durchführung der Messungen oder die Kosten für den Betrieb des Messprogramms, stets zu beachten sind.

5.4 Grad der Anisotropie und Einbindetiefe

Eine weitere interessante Fragestellung ist, ob es im Rahmen einer Parameteridentifikation möglich ist, die Bauausführung im Nachhinein zu kontrollieren. In diesem Zusammenhang wird das Identifikationsproblem (1) nach Tab. 5.1 um eine weitere Unbekannte ergänzt. Das Ziel besteht darin, optimale Schätzwerte $\kappa^* = [\alpha_k, t_i]^T$ für den Grad der Anisotropie und für die Einbindetiefe anhand der zuvor vorgestellten methodischen Vorgehensweise zu bestimmen. Die Analyse der direkten Problemstellung gemäß Gl. (4.2) hat ergeben, dass die Messgröße des Porenwasserdrucks von den beiden unbekannt Parametern abhängt, sodass die Datengrundlage wie zuvor aus den synthetischen Messdaten für den Porenwasserdruck und den äußeren Randpotenzialen besteht. Jedoch wird zur Lösung dieser Problemstellung angenommen, dass die synthetischen Messdaten für den Porenwasserdruck gemäß Abb. 5.10 nur aus den Messwerten der beiden Messpunkte *eins* und *fünf* bestehen, da für die Messpunkte auf Höhe der Wandunterkante die Einbindelänge bekannt sein muss.

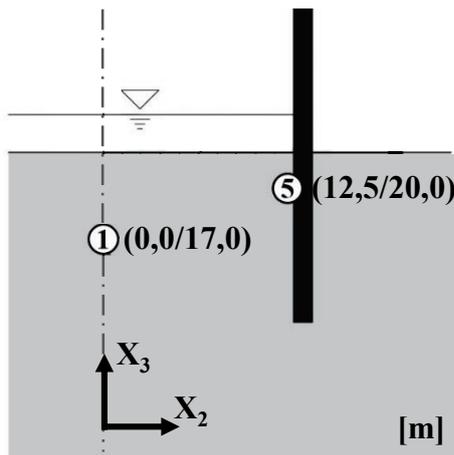


Abbildung 5.10: Absolute Lage der Porenwasserdruckmesspunkte (x_2 -Wert / x_3 -Wert) [m] zur Parameteridentifikation der Anisotropie und der Einbindetiefe, vgl. Abb. 4.7

(I.) Parameteridentifikation – exakte synthetische Messdaten

Die Zielfunktion kann mit den beiden Unbekannten α_k und t_i folgendermaßen gemäß Gl. (5.1b) definiert werden:

$$\bar{f}(\alpha_k, t_i) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^m \left(w_j \cdot \sum_{i=1}^T \omega_i \cdot \left[\bar{r}_{i,j}(\alpha_k, t_i) \right]^2 \right) \rightarrow \min_{\alpha_k, t_i} \quad (5.8)$$

Für die Wichtungsfaktoren in Gl. (5.8) gilt vereinfachend $w_j = \omega_i = 1$. Das Residuum in Gl. (5.8) $\bar{r}_{i,j} = \bar{u}_{p=j,i}^{\text{syn}} - u_{p=j,i}^{\text{calc}}(\alpha_k, t_i)$ hängt sowohl vom Grad der Anisotropie als auch von der Einbindetiefe ab. Es liegen unter der zuvor getroffenen Annahme somit zwei Messpunkte für

den Porenwasserdruck und zwei Unbekannte vor, sodass für das Optimierungsproblem in Gl. (5.8) eine Minimalkonfiguration mit $m=n$ vorliegt. Wie bereits zuvor gezeigt, ist eine Lösung des Identifikationsproblems unter der Minimalkonfiguration möglich, lässt aber keine Schlüsse hinsichtlich der Zuverlässigkeit der Ergebnisse zu. Eine Auswertung der Zielfunktion in Gl. (5.8) für unterschiedliche Werte α_k und t_i sowie den exakten synthetischen Messdaten für die beiden Messpunkte gemäß Abb. 5.10 ist in Abb. 5.11 abgebildet. Im Bereich des Minimums ist ein flaches Tal zu erkennen, welches seitwärts nur geringfügig ansteigt. Nur in dem Wertebereich $\alpha_k > 10$ und $t_i < 10$ steigt die Zielfunktion stark an.

In Abb. 5.11b ist die zweidimensionale Konturdarstellung der Zielfunktion und die numerische Optimierung mit dem Levenberg-Marquardt-Verfahren für zwei unterschiedliche Startwerte in Bezug auf das Optimierungsproblem in Gl. (5.8) dargestellt. Für den ersten Startwert $[\alpha_{k,0}=1, t_{i,0}=5]$ ist nach sieben Iterationen der optimale Parametervektor bestimmt. Im Gegensatz dazu werden für den zweiten Startwert $[\alpha_{k,0}=15, t_{i,0}=15]$ insgesamt 16 Iterationen benötigt. Die vergleichsweise langsame Konvergenz für den zweiten Startwert ist auch in Abb. 5.11b zu erkennen.

In dem flachen Tal werden unter der Verwendung von Ableitungsinformationen somit mehrere Iterationen benötigt, um den optimalen Schätzwert für den Parametervektor zu bestimmen, da die Zielfunktion in diesem Bereich in Bezug auf die Parameter nur schwach in Richtung des Minimums abfällt. Für beide Startwerte in Abb. 5.11b liegt eine positiv definite Hesse-Matrix vor, was bedeutet, dass es sich hierbei um ein lokales Minimum handelt. Für das Verhältnis der beiden Eigenwerte der Hesse-Matrix im Lösungspunkt gilt $\varepsilon_{\min}/\varepsilon_{\max} \approx 0$, sodass hier nach Mahnen (1998) eine schlecht konditioniertes Problem vorliegt. Mit Blick auf die Optimierungsverfahren sind für die flache Zielfunktionstopologie im Bereich des Minimums lediglich robuste Verfahren zu empfehlen.

In Tab. 5.5 sind die Ergebnisse der numerischen Optimierung mit dem Levenberg-Marquardt-Verfahren für unterschiedliche Startwerte zusammengefasst. Zur Überprüfung der Abhängigkeit der Lösung von den gewählten Startwerten wurde eine Optimierung von Gl. (5.8) für zwei weitere Startwerte $[\alpha_{k,0}=20, t_{i,0}=15]$ und $[\alpha_{k,0}=100, t_{i,0}=20]$ durchgeführt. Für diese zwei Startwerte ist zu erkennen, dass zwar eine Lösung existiert, diese aber nicht zu den vorgegebenen Modellparametern in Tab. 4.1 führt und es sich hierbei um eine Phantomlösung handelt (Sünkel, 2007).

Zudem weisen die Eigenwerte der Hesse-Matrix darauf hin, dass anhand der gefundenen Lösung nicht eindeutig entschieden werden kann, ob überhaupt ein Extremwert vorliegt (Haftmann, 2009). Der Schätzwert für die Einbindetiefe ist dabei im Gegensatz zum Schätzwert für den Grad der Anisotropie noch als realistische Schätzung einzuordnen. Der Schätzwert für

den Grad der Anisotropie ist gemäß den Erfahrungswerten als unrealistisch einzuordnen und kann somit als unzureichende Schätzung interpretiert werden.

Auch eine Berechnung mit dem SQP-Verfahren mit dem Ansatz von oberen und unteren Grenzen für die Parameter führt für die beiden Startwerte in den letzten beiden Zeilen (Tab. 5.5) bei der vorliegenden Zielfunktionsstopologie zu keiner physikalisch sinnvollen Lösung. Dieses einfache Beispiel zeigt, wie empfindlich die verwendeten Optimierungsverfahren auf eine unzureichende Wahl der Startwerte reagieren. Für Startwerte die in der Nähe des Minimums liegen, kann jedoch mit dem Levenberg-Marquardt- und dem SQP-Verfahren eine eindeutige und physikalisch sinnvolle Lösung erzielt werden.

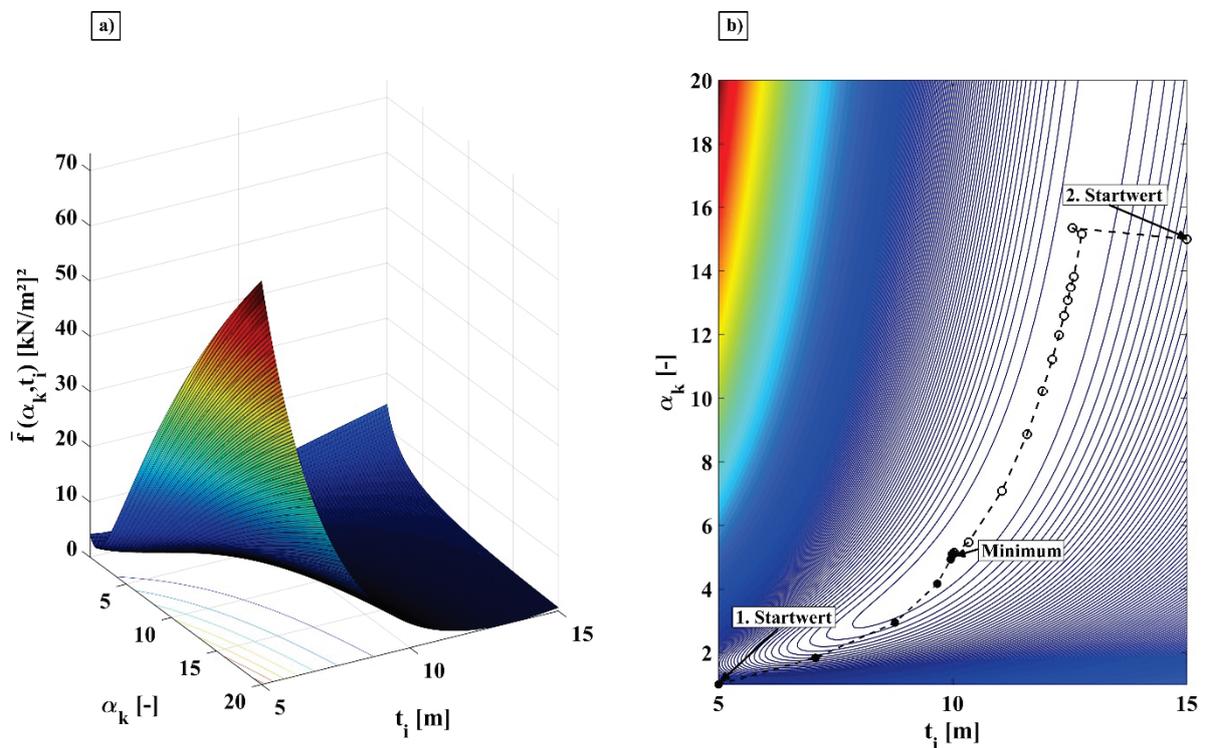


Abbildung 5.11: a) Dreidimensionale Darstellung b) Zweidimensionale Konturdarstellung der Zielfunktion für $\tau=1$ und Iteration für unterschiedliche Startwerte

Tabelle 5.5: Auswertung der exakten Messdaten $\tau=1$ zur Parameteridentifikation für unterschiedliche Startwerte

Anzahl Zeitschritte	verwendete Messpunkte	Startwert		Schätzung		Gradient		Hesse-Matrix <i>Eigenwerte</i>
		$\alpha_{k,0}$	$t_{i,0}$	α_k^*	t_i^*	$\nabla f(\alpha_k^*, t_i^*)$		
		[-]	[m]	[-]	[m]	$[\text{kN/m}^2]^2$	$[\text{kN/m}^2]^2/\text{m}$	
1	1,5	1,0	5,0	5,1	10,0	≈ 0	≈ 0	+/+
1	1,5	15,0	15,0	5,1	10,0	≈ 0	≈ 0	+/+
1	1,5	20,0	15,0	1713,2	16,9	≈ 0	≈ 0	0/+
1	1,5	100,0	20,0	1713,2	16,9	≈ 0	≈ 0	0/+

(II.) Parameteridentifikation – gestörte *synthetische* Messdaten

Weiterhin wird untersucht, wie sich die synthetischen Messabweichungen auf die Schätzung der Parameter auswirken. Die Zielfunktion kann wie folgt formuliert werden:

$$\tilde{f}(\alpha_k, t_i) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{m=2} \left(w_j \cdot \sum_{i=1}^T \omega_i \cdot \left[\tilde{r}_{i,j}(\alpha_k, t_i) \right]^2 \right) \rightarrow \min_{\alpha_k, t_i} \quad (5.9)$$

Für die Wichtungsfaktoren in Gl. (5.9) gilt vereinfachend $w_j=1$ und $\omega_i=1$. Die Definition des Residuums $\tilde{r}_{i,j} = \tilde{u}_{P=j,i}^{\text{syn}} - u_{P=j,i}^{\text{calc}}(\alpha_k, t_i)$ in Gl. (5.9) ist ähnlich zu der in Gl. (5.8), wobei die synthetischen Messdaten nun mit zufälligen Messabweichungen überlagert sind.

Die Berechnungsergebnisse der optimalen Schätzwerte in Bezug auf das Optimierungsproblem in Gl. (5.9) für den Grad der Anisotropie sowie die Einbindetiefe sind jeweils in der Abb. 5.12 dargestellt. Als Optimierungsverfahren für die Minimierungsaufgabe in Gl. (5.9) wird das Levenberg-Marquardt Verfahren eingesetzt. Die jeweiligen Absenkphasen sind wie zuvor mit gestrichelten Linien in Abb. 5.12 getrennt. Bei dem Grad der Anisotropie in Abb. 5.12a wird erst am Ende der letzten Absenkphase der tatsächliche Wert für α_k näherungsweise erreicht. Ansonsten ist der Schätzwert für den Grad der Anisotropie – bis auf die erste Absenkphase – nahezu konstant mit kleineren Ausschlägen nach oben und unten.

Die Abweichungen zwischen der Schätzung der Einbindetiefe in Abb. 5.12b und dem tatsächlichen Wert der Einbindetiefe gemäß Tab. 4.1 weichen dagegen deutlicher ab. In der ersten Absenkphase ist der Einfluss der zufälligen Messabweichung am prägnantesten zu erkennen. Die Schätzung verfehlt die tatsächliche Einbindetiefe um knapp 50 %, sodass eine Interpretation der Schätzung auf der Datengrundlage der ersten Absenkphase zu Fehlinterpretationen führen kann. Am Ende der zweiten Absenkphase respektive ab Anfang der dritten Absenkphase ist der Schätzwert nahe dem tatsächlichen Wert und erreicht den besten Schätzwert am Ende der letzten Absenkphase. Insgesamt ist der Einfluss der zufälligen Messabweichung auf die Schätzung der Einbindetiefe wesentlich größer, als auf die Schätzung der Anisotropie.

Im Gegensatz zu den vorherigen Untersuchungen ist festzustellen, dass die tatsächlichen Parameter, welche bei den synthetischen Daten vorgegeben wurden, nur näherungsweise abgebildet werden können, da das Optimierungsproblem in Gl. (5.9) vergleichsweise empfindlich auf Messabweichungen reagiert. Auch wenn die Schätzwerte für die Modellparameter nicht sehr genau sind, führt das Optimierungsproblem in den letzten beiden Absenkphasen zumindest auf eine Lösung im näheren Umfeld der tatsächlichen Werte. Um die Schätzwerte zu verbessern bzw. die Schätzung zu stabilisieren, wäre das Messkonzept u.a. um weitere Messstellen im Feld zu erweitern. Grundsätzlich stellt sich jedoch die Frage, wie sich die Schätzung verhält, wenn

zusätzlich zu der zufälligen noch eine systematische Messabweichung infolge eines fehlerhaften Messgebers einget. Dieses Szenario würde mit hoher Wahrscheinlichkeit zu einer unbrauchbaren Schätzung führen.

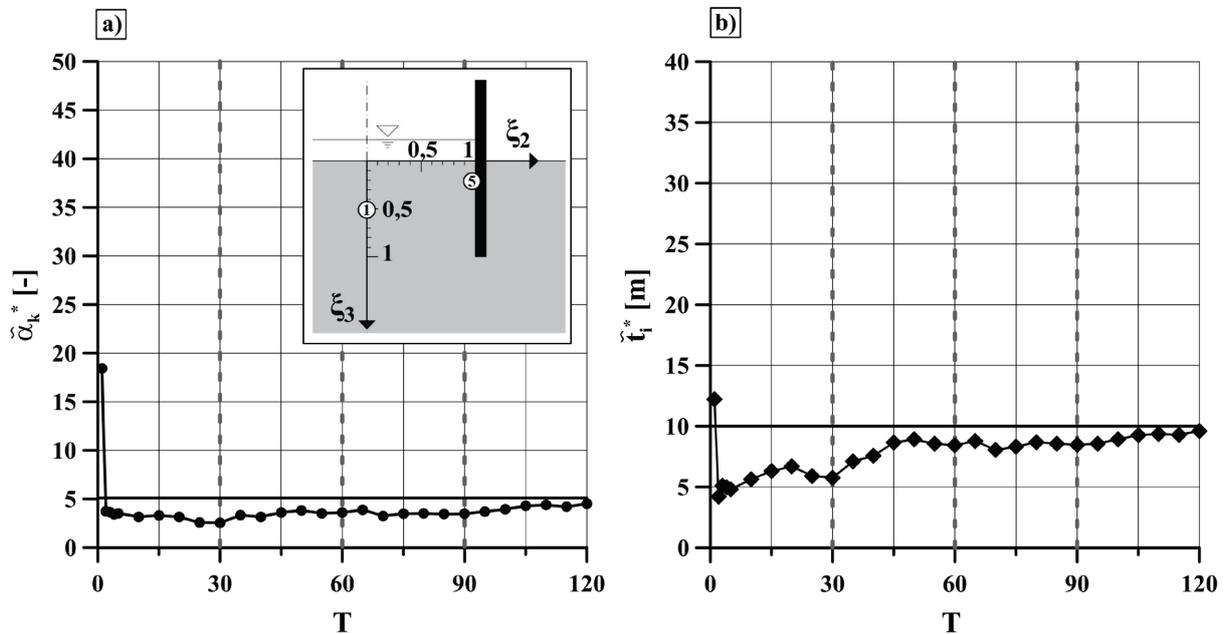


Abbildung 5.12: Parameteridentifikation für den gestörten Messdatensatz a) Entwicklung des Schätzwerts für den Grad der Anisotropie; b) Entwicklung des Schätzwerts für die Einbindetiefe

(III.) Schlussfolgerungen

Insgesamt ließ sich die Untersuchungsmethodik auch auf das dritte Identifikationsproblem übertragen. Die wesentlichen Erkenntnisse und Ergebnisse werden nachfolgend getrennt für die beiden Messdatensätze zusammengetragen:

Parameteridentifikation – exakte synthetische Messdaten:

- Für eine Zielfunktion im Sinne der kleinsten Abstandsquadrate kann unter Anwendung des Levenberg-Marquardt Verfahrens und des SQP-Verfahrens eine eindeutige Lösung bestimmt werden. Die Optimierungsverfahren reagieren sehr empfindlich auf unzureichende Startwerte und führen zu langsamen Konvergenzraten.
- Die Analyse der Hesse-Matrix hat ergeben, dass diese schlecht konditioniert ist und folglich robuste Optimierungsverfahren erforderlich sind.
- Eine eindeutige Lösung für die Minimalkonfiguration ($m=n$) ist möglich, sodass zwei unabhängige Messungen für die Standrohrspiegelhöhe bzw. den Porenwasserdruck in der tertiären Schicht aus mathematischer Sicht ausreichen.

Parameteridentifikation – gestörte synthetische Messdaten:

- Die unter I) verwendete Zielfunktion als auch die entsprechenden Optimierungsverfahren lassen sich ebenfalls erfolgreich auf die gestörten Messdaten anwenden.
- Die optimalen Schätzwerte reagieren sehr empfindlich auf die synthetischen Messabweichungen.
- Da die Messwerte im Regelfall unterschiedlich stark streuen, sollten stets mehr Messwerte als Unbekannte vorliegen, sodass $m > n$ gilt.
- Zusätzlich bietet es sich an, den Einfluss von stark oszillierenden Messreihen mit entsprechenden Wichtungsfaktoren zu vermindern.
- Für eine stabile Lösung muss eine ausreichende Anzahl an Messwerten über die Zeit vorliegen (Ablesehäufigkeit).

Für Empfehlungen bzw. Optimierungsbedarf hinsichtlich des Messprogramms gemäß Untersuchungspunkt A4) können die folgenden Punkte aus den Untersuchungen abgeleitet werden:

- Im Gegensatz zur Minimalkonfiguration ($m=n$) ist es sinnvoll mindestens drei Messpunkte ($m=3$) für die Standrohrspiegelhöhe bzw. den Porenwasserdruck in der tertiären Bodenschicht anzuordnen. Durch Mehrheitsentscheid ist es demgemäß möglich, eine Messreihe mit fehlerhaften Messdaten zu detektieren.
- Falls ein Messgeber ausfällt, sollten zur Gewährleistung einer notwendigen Redundanz optimal mehr als drei Messpunkte ($m > 3$) für die Standrohrspiegelhöhe bzw. den Porenwasserdruck in der tertiären Bodenschicht angeordnet werden.
- Messpunkte sollten bevorzugt innerhalb der Baugrube und optimal im näheren Bereich der Baugrubenmitte und auf der zu erwartenden Höhe der Wandunterkante angeordnet werden.

Das zugrunde gelegte Messprogramm gemäß Abb. 5.10 wäre zur Rückrechnung der beiden Modellparameter demnach nicht empfehlenswert, da genauso viele Messpunkte wie Unbekannte vorliegen. Die unzureichenden Schätzwerte in den ersten beiden Absenkphasen würden ggfs. zu einer falschen Entscheidungsgrundlage und zu entsprechenden Fehldiagnosen führen.

Um verbesserte Schätzwerte für die Modellparameter zu bestimmen und ein redundantes Messprogramm vorzuhalten, müssen weitere Messgeber in der tertiären Schicht appliziert werden. Ferner könnte es zweckmäßig sein, die weiteren Messpunkte vorzugsweise an optimalen Stellen anzuordnen, wie z.B. im Bereich der Baugrubenmitte. Die Empfehlungen gelten lediglich für die Parameteridentifikation, sodass naturgemäß ergänzende Aspekte wie die baupraktische Durchführung der Messungen oder die Kosten für den Betrieb des Messprogramms beachtet werden müssen.

5.5 Durchlässigkeitsbeiwerte

Zur Dimensionierung der Restwasserhaltung ist es in der Planungsphase vorab notwendig, den Wasserzufluss in die Baugrube mit einer Simulation abzuschätzen. Zur Berechnung des Wasserzuflusses müssen die Durchlässigkeitsbeiwerte in horizontaler (k_h) und vertikaler Richtung (k_v) möglichst exakt bestimmt werden. Im Regelfall werden die Durchlässigkeitsbeiwerte des Bodens auf der Basis von Feldversuchen (z.B. Probeabsenkung oder Pumpversuch) und Laborversuchen abgeleitet. Wenn eine Abschätzung auf Basis der zuvor genannten Methoden nicht möglich ist, besteht zudem die Möglichkeit, die Durchlässigkeitsbeiwerte für den Baugrund unter Zuhilfenahme von Erfahrungswerten zu bestimmen.

Es wird nun überprüft, ob die Durchlässigkeitsbeiwerte durch eine Parameteridentifikation invers zu bestimmen sind. Die konkrete Zielsetzung der nachfolgenden Untersuchungen besteht darin, einen optimalen Schätzwert $\kappa^* = [k_h, k_v]^T$ mit der zuvor vorgestellten methodischen Vorgehensweise zu bestimmen. Die Analyse der direkten Problemstellung in Gl. (4.2) hat ergeben, dass der Porenwasserdruck lediglich vom Verhältnis der beiden Durchlässigkeitsbeiwerte – also dem Grad der Anisotropie – abhängt. Dahingegen fließen in die Berechnung des Wasserzuflusses sowohl der Grad der Anisotropie als auch der Durchlässigkeitsbeiwert in vertikaler Richtung ein.

Auch wenn die Analyse der direkten Problemstellung in Gl. (4.2) zeigt, dass sowohl die synthetischen Messdaten für den Porenwasserdruck als auch für den Wasserzufluss zur Lösung der vorliegenden Fragestellung notwendig sind, wird dieses Erkenntnis zunächst durch eine Vorstudie mit der mathematischen Optimierung belegt. Die im Rahmen der Vorstudie vorgestellte Strategie eignet sich insbesondere, wenn eine Analyse der direkten Problemstellung wie in Gl. (4.2) nicht vorliegt oder unvollständig ist.

(I.) Parameteridentifikation – exakte *synthetische* Messdaten

In einem ersten Schritt wird die Zielfunktion wie zuvor unter Verwendung der synthetischen Messdaten für den Porenwasserdruck und die Randpotenziale gemäß Gl. (5.1b) formuliert:

$$\bar{f}_u(k_h, k_v) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^m \left(w_j \cdot \sum_{i=1}^T \omega_i \cdot \left[\bar{r}_{u,i,j}(k_h, k_v) \right]^2 \right) \rightarrow \min_{k_h, k_v} \quad (5.10)$$

Für die beiden Wichtungsfaktoren in Gl. (5.10) gilt $w_j=1$ und $\omega_i=1$. Das Residuum in Gl. (5.10) $\bar{r}_{u,i,j} = \bar{u}_{p=j,i}^{\text{syn}} - u_{p=j,i}^{\text{calc}}(k_h, k_v)$ hängt von den beiden Durchlässigkeitsbeiwerten in horizontaler und vertikaler Richtung ab. Nun stellt sich in Bezug zu den vorherigen Beispielen die Frage, welche Lösung aus einer numerischen Optimierung der Zielfunktion in Gl. (5.10) resultiert.

Zu diesem Zweck sind in der Tab. 5.6 die Ergebnisse der mathematischen Optimierung unter Verwendung des Levenberg-Marquardt-Verfahrens vereinfachend für den Zeitschritt τ_1 zusammengefasst. Da zwei unbekannte Modellparameter gesucht sind, müssen mindestens zwei unterschiedliche Messpunkte für den Porenwasserdruck ausgewertet werden.

Demgemäß erfolgt die Auswertung zunächst für zwei Messpunkte in der Baugrubenmitte und am Verbauwandfußpunkt, sodass die Minimalkonfiguration ($m=n$) für das Optimierungsproblem in Gl. (5.10) erfüllt ist. Für die Problemstellung mit zwei Messpunkten konnte zwar ein optimaler Schätzwert gefunden werden, jedoch kann über die Eigenwerte der Hesse-Matrix in Tab. 5.6 nicht entschieden werden, um welche Art von Extremstelle es sich hierbei handelt oder anders ausgedrückt, wie sich die Zielfunktion an die Tangentialebene anschmiegt. Auch für den überbestimmten Fall mit $m>n$ unter Berücksichtigung aller Messpunkte, konnte *keine eindeutige Lösung* für das Problem in Gl. (5.8) gefunden werden.

Tabelle 5.6: Auswertung der exakten Daten für den Porenwasserdruck, die Randpotenziale und $\tau=1$ zur Parameteridentifikation

Anzahl Zeitschritte	verwendete Messpunkte	Startwert		Schätzung		Gradient		Hesse- Matrix
		$k_{h,0}$	$k_{v,0}$	k_h^*	k_v^*	$\nabla f(k_v^*, k_h^*)$	Eigenwerte	
T		[m/s]	[m/s]	[m/s]	[m/s]	[kN/m ² /(m/s)]	[kN/m ² /(m/s)]	
1	1,4	$1,0e^{-6}$	$1,0e^{-6}$	$1,84e^{-6}$	$3,61e^{-7}$	≈ 0	≈ 0	0/+
1	1,2,3,4,5	$1,0e^{-6}$	$1,0e^{-6}$	$1,84e^{-6}$	$3,61e^{-7}$	≈ 0	≈ 0	0/+

Zusätzlich zu der Tab. 5.6 ist die Zielfunktion in Gl. (5.10) für alle Porenwasserdruckmesspunkte und für unterschiedliche Durchlässigkeitsbeiwerte in Abb. 5.12 dargestellt. Anhand der graphischen Darstellung ist zu erkennen, dass sich ein flaches Tal mit identischen Funktionswerten ausbildet, welches entlang der umgebenen Ränder stark ansteigt. Neben der Konturdarstellung der Zielfunktion sind in Abb. 5.13b noch die optimalen Schätzwerte für vier unterschiedliche Startwerte abgebildet. Die Optimierung der Zielfunktion in Gl. (5.10) für die vier unterschiedlichen Startwerte führt zu vier unterschiedlichen Lösungen. Dieses Ergebnis kann ein Hinweis auf eine mehrdeutige Lösung sein.

Bei der Betrachtung der vier optimalen Lösungen in Abb. 5.13b fällt auf, dass das Verhältnis der Durchlässigkeitsbeiwerte stets $k_h/k_v \approx 5,1$ beträgt. Somit minimiert jedes Verhältnis der Durchlässigkeitsbeiwerte mit $k_h/k_v \approx 5,1$ die Zielfunktion in Gl. (5.10) und es liegt demzufolge eine mehrdeutige Lösung vor. Die Lösung ist somit analog zu der mehrdeutigen Lösung im Punkt g in Abb. 2.8 zu sehen. Anhand der numerischen Optimierung der Zielfunktion in Gl. (5.10) konnte gleichermaßen belegt werden, was bereits aus der Analyse der direkten Problemstellung in Gl. (4.2) hervorgegangen war.

Aus einer Messung der Standrohrspiegelhöhe bzw. des Porenwasserdrucks kann lediglich das Verhältnis der beiden Durchlässigkeitsbeiwerte ermittelt werden. Auch weitere Messungen in der tertiären Schicht würden zu keiner eindeutigen Lösung der Problemstellung führen. Es zeigt sich weiter, welchen wertvollen Beitrag eine grundlegende Analyse der direkten Problemstellung – wie in Gl. (4.2) – zur Lösung von Identifikationsproblemen liefert.

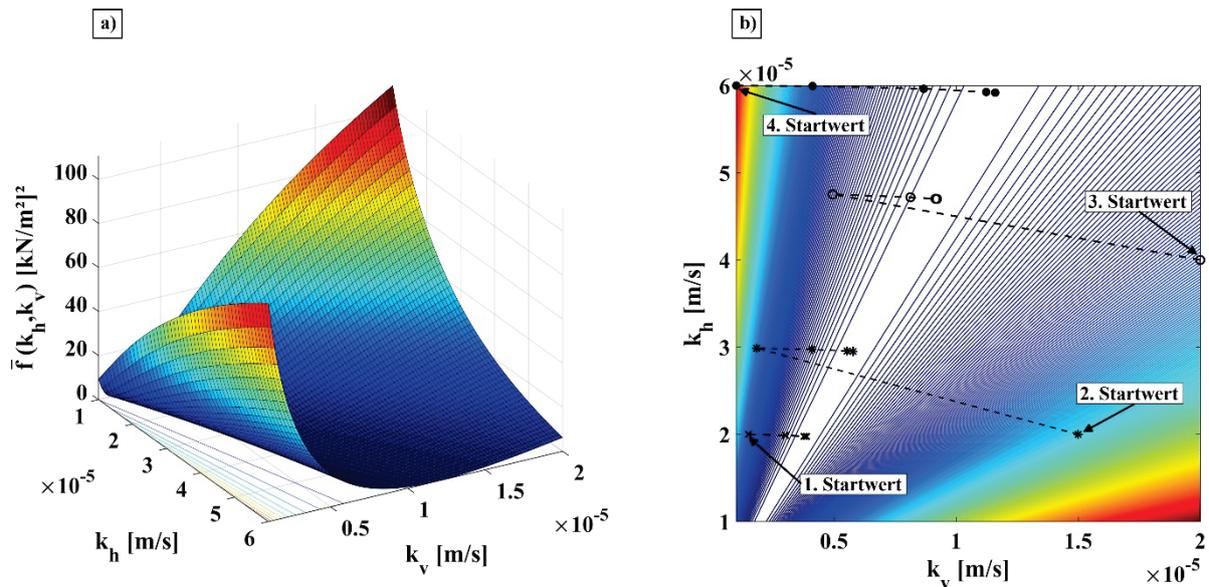


Abbildung 5.13: Darstellung der Zielfunktion für die exakten synthetischen Messdaten und $\tau=1$. a) Dreidimensionale Darstellung der Zielfunktion und b) Zweidimensionale Konturdarstellung der Funktionswerte sowie Iteration für unterschiedliche Startwerte

Wenn die geschilderten Erkenntnisse bei einer Parameteridentifikation nicht berücksichtigt werden, führt dies zu falschen Schlussfolgerungen, denn die in Gl. (5.10) zugrunde gelegten synthetischen Messdaten sind gemäß Mahnen (1998) unvollständig, da alleine mit den Messdaten für den Porenwasserdruck das Parameteridentifikationsproblem hinsichtlich der Durchlässigkeitsbeiwerte nicht eindeutig lösbar ist. Um das Identifikationsproblem für die Durchlässigkeitsbeiwerte dennoch zu lösen, müssen weitere unabhängige physikalische Größe gemessen werden. Aus der Gl. (4.2) geht hervor, dass die Näherungslösung für den Wasserzufluss sowohl vom Grad der Anisotropie als auch von dem Durchlässigkeitsbeiwert k_v in vertikaler Richtung abhängt.

Anders als in Gl. (5.10) wird nun eine aus zwei unterschiedlichen Messgrößen bestehende Zielfunktion in Gl. (5.11) formuliert, die eine Zielfunktion für die Porenwasserdruckmessungen wie in Gl. (5.10) und eine Zielfunktion für die Messdaten des Wasserzuflusses enthält:

$$\bar{f}(k_h, k_v) = \bar{f}_u(\alpha_k) + \bar{f}_q(\alpha_k, k_v) \rightarrow \min_{k_h, k_v} \quad (5.11)$$

Die Zielfunktion in Gl. (5.11) besteht somit aus einer Summe von zwei Unterfunktionen für den Porenwasserdruck und den Wasserzufluss in die Baugrube. Das zuvor formulierte, nichtlineare Ausgleichsproblem wird – wie in Hill und Tiedeman (2007) – um eine weitere quadrierte Summe für den Wasserzufluss erweitert:

$$\begin{aligned} \bar{f}(k_h, k_v) = & \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{m_u} \left(w_{u,j} \cdot \sum_{i=1}^T \omega_{u,i} \cdot \left[\frac{\bar{r}_{u,i,j}(\alpha_k)}{\bar{u}_{p=j,i}^{\text{syn}}} \right]^2 \right) \\ & + \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{m_q} \left(w_{q,j} \cdot \sum_{i=1}^T \omega_{q,i} \cdot \left[\frac{\bar{r}_{q,i,j}(k_h, k_v)}{\bar{q}_{i,j}^{\text{syn}}} \right]^2 \right) \rightarrow \min_{k_h, k_v} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Hinsichtlich der Wichtungsfaktoren in Gl. (5.12) gilt vereinfachend $w_{u,j}=1$, $\omega_{u,i}=1$ und $w_{q,j}=1$, $\omega_{q,i}=1$. Das zusätzliche Residuum für den Wasserzufluss $\bar{r}_{q,i,j} = \bar{q}_{j,i}^{\text{syn}} - q_{j,i}^{\text{calc}}(k_h, k_v)$ kann gleichermaßen wie in Gl. (5.10) formuliert werden. Ein weiterer Unterschied zu den vorherigen Zielfunktionen ist nun, dass in Gl. (5.12) zwei physikalische Größen mit unterschiedlichen Einheiten vorliegen.

Um dennoch beide Messgrößen in einer Zielfunktion zu vereinigen, werden die beiden Residuen in Gl. (5.12) vereinfachend mit dem jeweiligen reziproken Messwert skaliert (Mahnken, 1998; Müthing et al., 2018). Diese mathematische Operation hätte gleichermaßen auch über die Definition eines entsprechenden Wichtungsfaktors vollzogen werden können. Ziel ist es nun, die mathematische Optimierung für die zusammengesetzte Zielfunktion in Gl. (5.12) zur Bestimmung der optimalen Schätzwerte durchzuführen. Grundsätzlich muss für den gewählten Ansatz mit den skalierten Residuen gewährleistet sein, dass die Messwerte stets verschieden zu Null sind und ein einheitliches Vorzeichen aufweisen. Diese Bedingungen sind für die nachfolgenden Untersuchungen stets erfüllt.

Bevor die Zielfunktion in Gl. (5.12) minimiert wird, ist noch zu klären, inwiefern die zusätzliche Messgröße die Lösung beeinflusst. Eine Optimierung für die jeweiligen Unterfunktionen in Gl. (5.11) führt stets zu unendlich vielen Lösungen für die beiden Durchlässigkeitsbeiwerte. Dieser Zusammenhang ist in Abb. 5.14 graphisch illustriert. Die beiden Kurven repräsentieren jeweils die optimalen Lösungen für die jeweiligen Unterfunktionen gemäß Gl. (5.11).

Der optimale Schätzwert für das Optimierungsproblem in Gl. (5.12) ist der Schnittpunkt der beiden Kurven in Abb. 5.14. Dieser Schnittpunkt liefert für die vorliegenden Messdaten die optimale Schätzung für die Durchlässigkeitsbeiwerte. Eine eindeutige Lösung kann bestimmt werden, wenn mindestens eine Messung des Porenwasserdrucks in der tertiären Schicht und eine Messung des gesamten Wasserzuflusses zur Baugrube vorliegen.

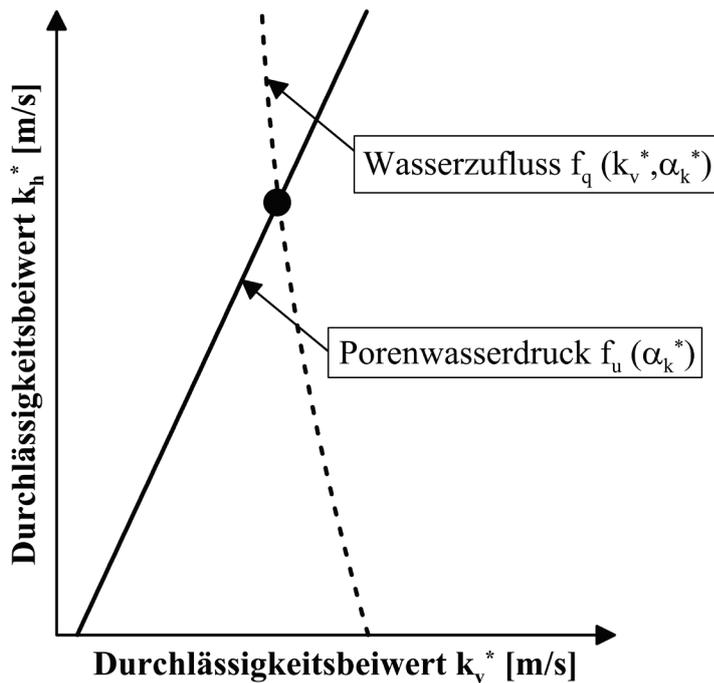


Abbildung 5.14: Schematische Darstellung der Lösungen für die einzelnen Unterfunktionen der Zielfunktion in Gl. (5.11) sowie deren Schnittpunkt als Lösung der gesamten Zielfunktion für Gl. (5.12)

In Abb. 5.15 ist die Zielfunktion gemäß Gl. (5.12) für unterschiedliche Durchlässigkeitsbeiwerte vereinfachend zum Zeitpunkt τ_1 dargestellt. Im Bereich des Minimums ist ein langgezogenes flaches Tal mit steilen Hängen zu erkennen. Die Wahl der Startwerte dürfte bei der vorliegenden Zielfunktionstopologie einen großen Einfluss auf die Konvergenzrate haben. Anders als in Abb. 5.13 führen alle vier Startwerte für $k_{h,0}$ und $k_{v,0}$ zu ein und demselben Schätzwert, der den vorgegebenen Durchlässigkeitsbeiwerten in Tab. 4.1 entspricht. Für den vierten Startwert konnten nicht alle Iterationsschritte dargestellt werden, da die Iterationsschritte zum Teil außerhalb des gewählten Darstellungsbereichs der Zielfunktion in Abb. 5.29 lagen.

Für alle Startwerte lässt sich weiter nachweisen, dass im Lösungspunkt die Hesse-Matrix positiv definit ist, sodass die beiden Eigenwerte der Hesse-Matrix größer Null sind und ein lokales Minimum vorliegt. Für die Zielfunktion in Abb. 5.15 beträgt das Verhältnis zwischen den beiden Eigenwerten der Hesse-Matrix im Lösungspunkt $\varepsilon_{\min}/\varepsilon_{\max} \approx 0$, sodass hier wie bei den vorherigen Problemstellungen ein schlecht konditioniertes Problem vorliegt, was die Anwendung von robusten Optimierungsverfahren wie das zugrunde gelegte Levenberg-Marquardt-Verfahren erforderlich macht. Zudem ist an der Abb. 5.15b zu erkennen, dass für alle vier Startwerte bereits nach 2-3 Iterationen die Schätzung für den vertikalen Durchlässigkeitsbeiwert nahe dem vorgegebenen Wert für k_v liegt. Im Gegensatz dazu werden zur Bestimmung der horizontalen Durchlässigkeit in Abhängigkeit des Startwerts aufgrund der geringeren Sensitivität mehr als drei Iterationen benötigt.

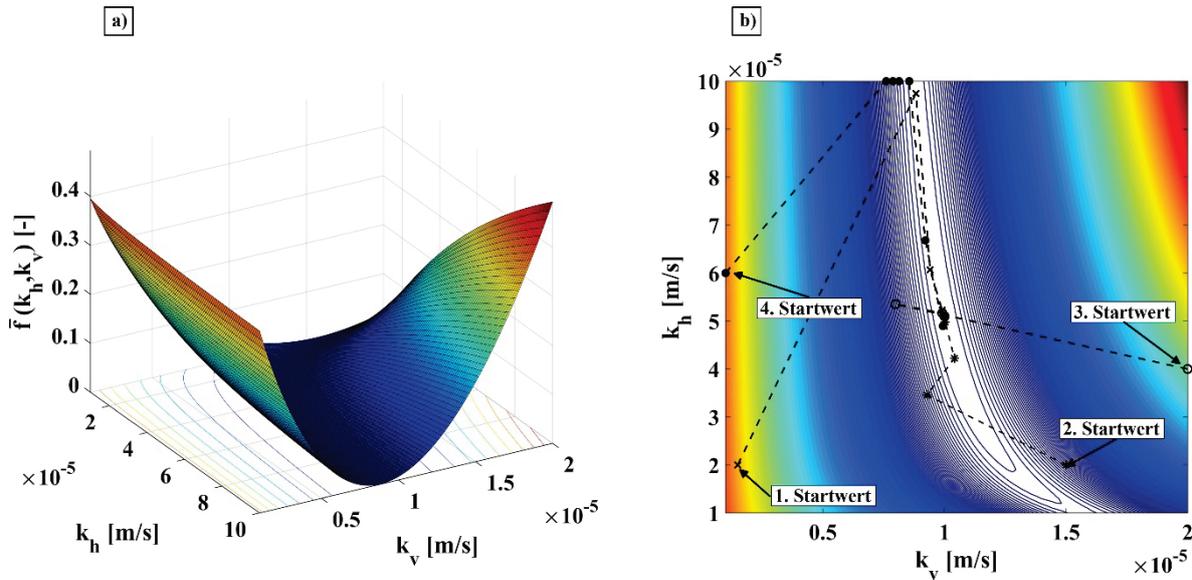


Abbildung 5.15: Darstellung der Zielfunktion in Gl. (5.12) für $\tau=1$ a) Dreidimensionale Darstellung der Zielfunktion und b) Zweidimensionale Konturdarstellung sowie Iterationsschritte für unterschiedliche Startwerte

(II.) Parameteridentifikation – gestörte synthetische Messdaten

Nach den umfassenden Vorstudien folgen nun die Untersuchungen mit den gestörten Messdaten. Wie in Gl. (5.12) wird eine Zielfunktion zur Bestimmung der Durchlässigkeitsbeiwerte formuliert:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(k_h, k_v) = & \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{m_u=5} \left(w_{u,j} \cdot \sum_{i=1}^T \omega_{u,i} \cdot \left[\frac{\tilde{r}_{u,i,j}(\alpha_k)}{\tilde{u}_{p=j,i}^{\text{syn}}} \right]^2 \right) \\ & + \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{m_q=1} \left(w_{q,j} \cdot \sum_{i=1}^T \omega_{q,i} \cdot \left[\frac{\tilde{r}_{q,i,j}(k_h, k_v)}{\tilde{q}_{i,j}^{\text{syn}}} \right]^2 \right) \rightarrow \min_{k_h, k_v} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Für die Wichtungsfaktoren in Gl. (5.13) gilt vereinfachend $w_{u,j}=1$, $\omega_{u,i}=1$ und $w_{q,j}=1$, $\omega_{q,i}=1$. Die Residuen in Gl. (5.13) ergeben sich zu $\tilde{r}_{u,i,j} = \tilde{u}_{p=j,i}^{\text{syn}} - u_{p=j,i}^{\text{calc}}(\alpha_k)$ und $\tilde{r}_{q,i,j} = \tilde{q}_{j,i}^{\text{syn}} - q_{j,i}^{\text{calc}}(k_h, k_v)$. Ziel ist es, die optimalen Schätzwerte für das Optimierungsproblem in Gl. (5.13) unter Verwendung der gestörten synthetischen Messdaten zu bestimmen.

Die Ergebnisse der Parameteridentifikation für eine steigende Anzahl an Zeitschritten τ_i sind für den horizontalen Durchlässigkeitsbeiwert und den vertikalen Durchlässigkeitsbeiwert getrennt in Abb. 5.16 dargestellt. Es lässt sich zeigen, dass für das Optimierungsproblem in

Gl. (5.13) eine eindeutige Lösung mit der zuvor vorgestellten Untersuchungsmethodik bestimmt werden kann. Nach der Auswertung von einer Anzahl von ca. 20 Zeitschritten ist die Schätzung für den vertikalen Durchlässigkeitsbeiwert schon sehr nahe an dem Durchlässigkeitsbeiwert k_v gemäß Tab. 4.1, welcher für die Erstellung der synthetischen Messdaten verwendet wurde.

Für den horizontalen Durchlässigkeitsbeiwert hingegen werden bezüglich der notwendigen Anzahl in etwa doppelt so viele Zeitschritte benötigt, bis eine zufriedenstellende Übereinstimmung mit den vorgegebenen Durchlässigkeitsbeiwerten erreicht ist. Die Ergebnisse sind natürlich stark davon abhängig, wie sehr die jeweiligen Messwerte streuen und wie empfindlich das Optimierungsproblem auf Störungen reagiert. Jedoch kann anhand der Auswertung festgestellt werden, dass die Schätzung für den vertikalen Durchlässigkeitsbeiwert deutlich stabiler hinsichtlich zufälliger Messabweichungen ist. Insgesamt gesehen können die Schätzungen unter Verwendung von gestörten Messdaten als relativ stabil angesehen werden, da bereits für ca. 30 Zeitschritte die tatsächlichen Durchlässigkeitsbeiwerte gemäß Tab. 4.1 hinreichend genau angenähert werden können.

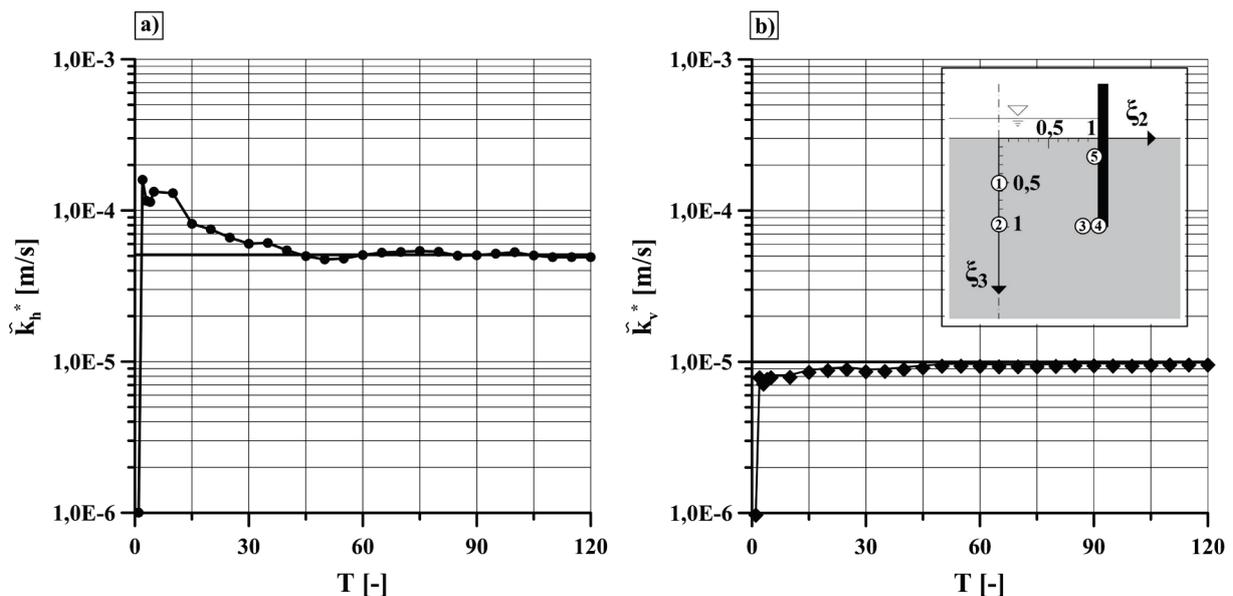


Abbildung 5.16: Parameteridentifikation für den gestörten Datensatz und der Randpotenziale
 a) Entwicklung des Schätzwerts für den horizontalen Durchlässigkeitsbeiwert; b) Entwicklung des Schätzwerts für den vertikalen Durchlässigkeitsbeiwert; (y-Achse logarithmisch skaliert)

(III.) Schlussfolgerungen

Insgesamt ließ sich die Untersuchungsmethodik auch auf die Bestimmung der Durchlässigkeitsbeiwerte – das Identifikationsproblem (4) nach Tab. 5.1 – erfolgreich übertragen. Die wesentlichen Erkenntnisse und Ergebnisse werden nachfolgend getrennt für die beiden Messdatensätze (exakt/gestört) zusammengetragen:

Parameteridentifikation – exakte synthetische Messdaten:

- Eine eindeutige Lösung für die Minimalkonfiguration ($m=n$) ist aus mathematischer Sicht nur möglich, wenn jeweils eine Messung für die *Standrohrspiegelhöhe bzw. den Porenwasserdruck* in der tertiären Schicht und für *den Wasserzufluss in die Baugrube* vorliegen.
- Für eine Zielfunktion im Sinne der kleinsten Abstandsquadrate kann unter Anwendung des Levenberg-Marquardt Verfahrens und des SQP-Verfahrens eine eindeutige Lösung bestimmt werden.
- Die zusammengesetzte Zielfunktion aus zwei unterschiedlichen Messgrößen muss durch eine Wichtung oder Skalierung in eine dimensionslose Form überführt werden.
- Die Analyse der Hesse-Matrix hat ergeben, dass diese schlecht konditioniert ist und folglich robuste Optimierungsverfahren wie die o.g. erforderlich sind

Parameteridentifikation – gestörte synthetische Messdaten:

- Die unter I) verwendete Zielfunktion und die dabei eingesetzten Optimierungsverfahren lassen sich ebenfalls erfolgreich auf die gestörten Messdaten anwenden.
- Da die Messwerte im Regelfall unterschiedlich stark streuen, sollten stets mehr Messwerte als Unbekannte vorliegen, sodass $m>n$ gilt.
- Zusätzlich bietet es sich an, den Einfluss von stark oszillierenden Messreihen mit entsprechenden Wichtungsfaktoren zu vermindern.
- Für eine stabile Lösung muss eine ausreichende Anzahl an Messwerten über die Zeit vorliegen (Ablesehäufigkeit).

Für Empfehlungen bzw. Optimierungsbedarf hinsichtlich des Messprogramms gemäß Untersuchungspunkt A4) können die folgenden Punkte aus den Untersuchungen abgeleitet werden:

- Im Gegensatz zur Minimalkonfiguration ($m=n$) ist es sinnvoll mindestens drei Messpunkte ($m=3$) für die Standrohrspiegelhöhe bzw. den Porenwasserdruck in der tertiären Bodenschicht anzuordnen. Durch Mehrheitsentscheid ist es demgemäß möglich, eine Messreihe mit fehlerhaften Messdaten zu detektieren.

- Falls ein Messgeber ausfällt, sollten zur Gewährleistung einer notwendigen Redundanz optimal *mehr als drei* Messpunkte ($m > 3$) für die Standrohrspiegelhöhe bzw. den Porenwasserdruck in der tertiären Bodenschicht angeordnet werden.
- Messpunkte für den Porenwasserdruck/Standrohrspiegelhöhe sollten bevorzugt innerhalb der Baugrube und optimal im näheren Bereich der Baugrubenmitte sowie auf der Höhe der Wandunterkante angeordnet werden

Das zugrunde gelegte Messprogramm wäre zur Rückrechnung der beiden Modellparameter demnach geeignet, da hinsichtlich des Porenwasserdrucks mehr Messpunkte als Unbekannte vorliegen. Die Messgeber an der Verbauwand und im Bereich des Schichtwechsels sind als nicht optimal zu bewerten. Es wäre sinnvoller diese Messpunkte im näheren Umfeld der Baugrubenmitte und im Bereich der Wandunterkante anzuordnen. Die Empfehlungen gelten lediglich für die Parameteridentifikation, sodass naturgemäß weitere Aspekte wie die baupraktische Durchführung der Messungen oder die Kosten für den Betrieb des Messprogramms beachtet werden müssen.

5.6 Detektion von Messfehlern

Die vorherigen Untersuchungen haben gezeigt, dass die Schätzung der Modellparameter unweigerlich von den Messabweichungen der vorliegenden Messdaten beeinflusst wird. Die Grundlage der zuvor behandelten exemplarischen Anwendungen zur Parameteridentifikation bestand aus synthetischen Messdaten, die mit zufälligen Messabweichungen überlagert waren.

Es stellt sich nun die Frage, wie sich unterschiedliche Arten von Messfehlern auf die Schätzung der Modellparameter auswirken. Durch den Begriff des Messfehlers wird an dieser Stelle dokumentiert, dass es sich hierbei nicht um Messabweichungen infolge von unvermeidlichen äußeren Störeinflüssen handelt, sondern um defekte Messgeräte, falsche Einbaulage der Messgeber oder Kalibrierungsfehler handelt (Mühl, 2006). Beispielhaft können u.a. die folgenden weiteren Ursachen für fehlerhaften Messinformationen eines Porenwasserdruckmessgebers angeführt werden:

- Beschädigung oder Zerstörung beim Einbau oder während der Bauausführung
- Ausfall durch Kurzschluss (z.B. Überspannung durch Blitzschlag)
- Verlust der Kabelmarkierung
- Materialermüdung
- Verschmutzung

An dieser Stelle sei auch erwähnt, dass die Empfindlichkeit der Messgeber gegenüber den zuvor genannten Einflüssen ebenfalls stark von den gewählten Messsystemen für die Druckgeber abhängt (Becker et al., 2017). In diesem Zusammenhang ist es für jede Art von Messprogramm notwendig, die gewonnenen Messdaten stets kritisch zu hinterfragen und durch entsprechende Maßnahmen zu überprüfen.

Um den Einfluss der zuvor genannten Messfehler zu simulieren, dient das vergleichsweise einfache Identifikationsproblem gemäß Tab. 5.1 – die Rückrechnung der Anisotropie – nachfolgend als Berechnungsgrundlage. Die Konfiguration des Optimierungsproblems ist somit identisch zu dem in Gl. (5.5) nur mit dem Unterschied, dass einzelne Messwerte für den Porenwasserdruck neben den zufälligen Messabweichungen durch zusätzliche systematische Messfehler künstlich verfälscht werden. Die systematischen Messfehler können dann stellvertretend für die Simulation der folgenden zwei Szenarien dienen:

- (a) Detektion eines **fehlerhaft arbeitenden Messgebers**.
- (b) Detektion eines einheitlichen **Kalibrierungsfehlers**.

Das Ziel besteht nun darin, die fehlerhaften Messgeber mithilfe der Untersuchungsmethodik zur Parameteridentifikation zu detektieren und deren Einfluss auf die Parameterschätzung abzuschätzen.

(a) Detektion eines fehlerhaft arbeitenden Messgebers

Um einen fehlerhaft arbeitenden Messgeber nachbilden zu können, werden die Messwerte des Porenwasserdruckgebers in Messpunkt 3 gemäß Abb. 4.11 zusätzlich zu den zufälligen Messabweichungen mit einem zeitlich veränderlichen systematischen Messfehler überlagert. Eine Ursache für einen derartigen Messfehler könnte z.B. eine Materialermüdung oder eine kontinuierlich zunehmende Verschmutzung des Druckgebers sein. Die synthetischen Messdaten für den Porenwasserdruckmesspunkt 3' ergeben sich dann zu:

$$\tilde{u}_{3,i}^{\text{syn}} = \tilde{u}_{3,i}^{\text{syn}} + \text{erf}(\tau) \quad (5.14a)$$

mit:

$$\text{erf}(\tau) = -0,2 \cdot \tau \quad (5.14b)$$

Über eine lineare Fehlerfunktion $\text{erf}(\tau)$ in Gl. (5.14b) erfolgt die Simulation des systematischen Messfehlers. In Abb. 5.17a sind sowohl die ursprünglichen als auch die nach Gl. (5.14a) zusätzlich verfälschten Messdaten für den betrachteten Messpunkt drei dargestellt. Zusätzlich ist die Fehlerfunktion gemäß (5.14b) in Abb. 5.17b dargestellt. Über die Zeitschritte τ steigt der systematische Messfehler betragsmäßig an und erreicht am Ende der letzten Absenkephase seinen Maximalwert von $\text{erf}(\tau=120) = -24 \text{ kN/m}^2$.

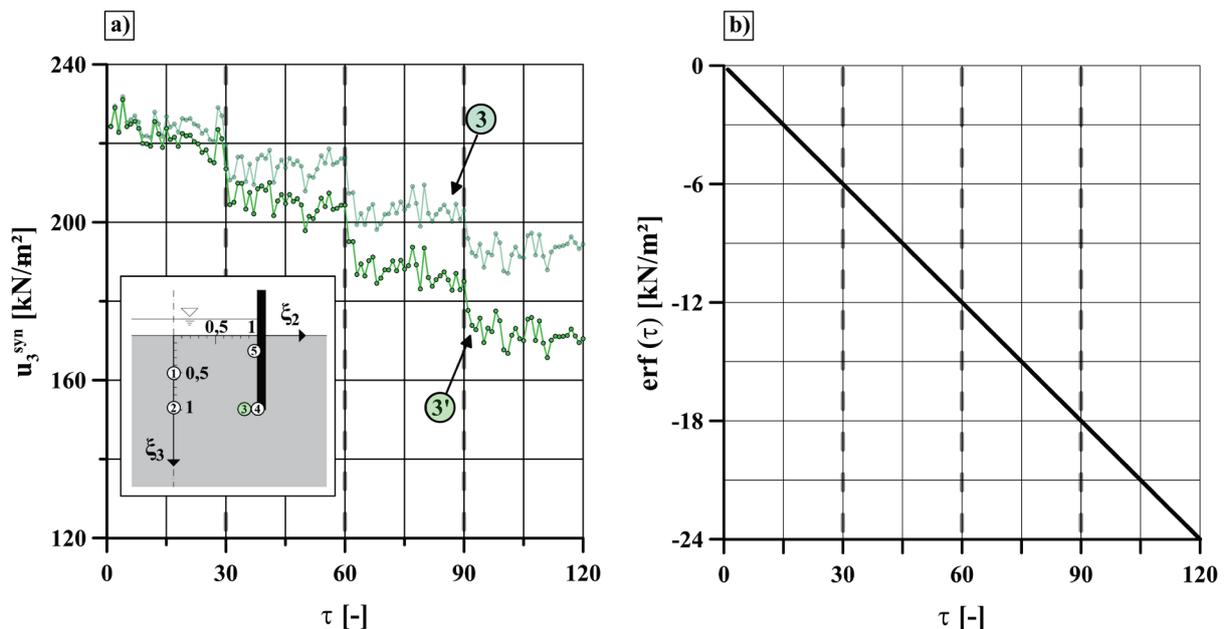


Abbildung 5.17: Simulation eines fehlerhaft arbeitenden Messgebers anhand einer zeitlich veränderlichen linearen systematischen Messabweichung im Porenwasserdruckmesspunkt 3

Da bei realen Messdaten gemäß Abb. 5.17a lediglich die Darstellung der Messwerte für den Messpunkt 3' vorliegt, ist der systematische Messfehler anhand der graphischen Darstellung für den einzelnen Messpunkt auf Anhieb nicht erkennbar. Eine erste Möglichkeit der Detektion kann z.B. durch Plausibilitätskontrollen erfolgen. In der Abb. 5.18 sind die synthetischen Messdaten für die drei Porenwasserdruckmesspunkte 2, 3' und 4 dargestellt.

In Bezug auf die dargestellten Messdaten für den Porenwasserdruck in Abb. 5.18 gilt analog zu Abb. 3.6 für alle Absenkphasen $u_2 < u_3 < u_4$. Für den Druckgeber in Messpunkt 3 ist zu erkennen, dass die Messwerte am Anfang der ersten Absenkphase infolge des geringen Messfehlers gemäß Gl. (5.14b) die zuvor aufgestellten Verhältnisse zwischen den einzelnen Druckgebern näherungsweise erfüllen. Jedoch wird der Abstand zwischen den Messwerten des zweiten Druckgebers im Vergleich zum dritten über die Zeit immer größer.

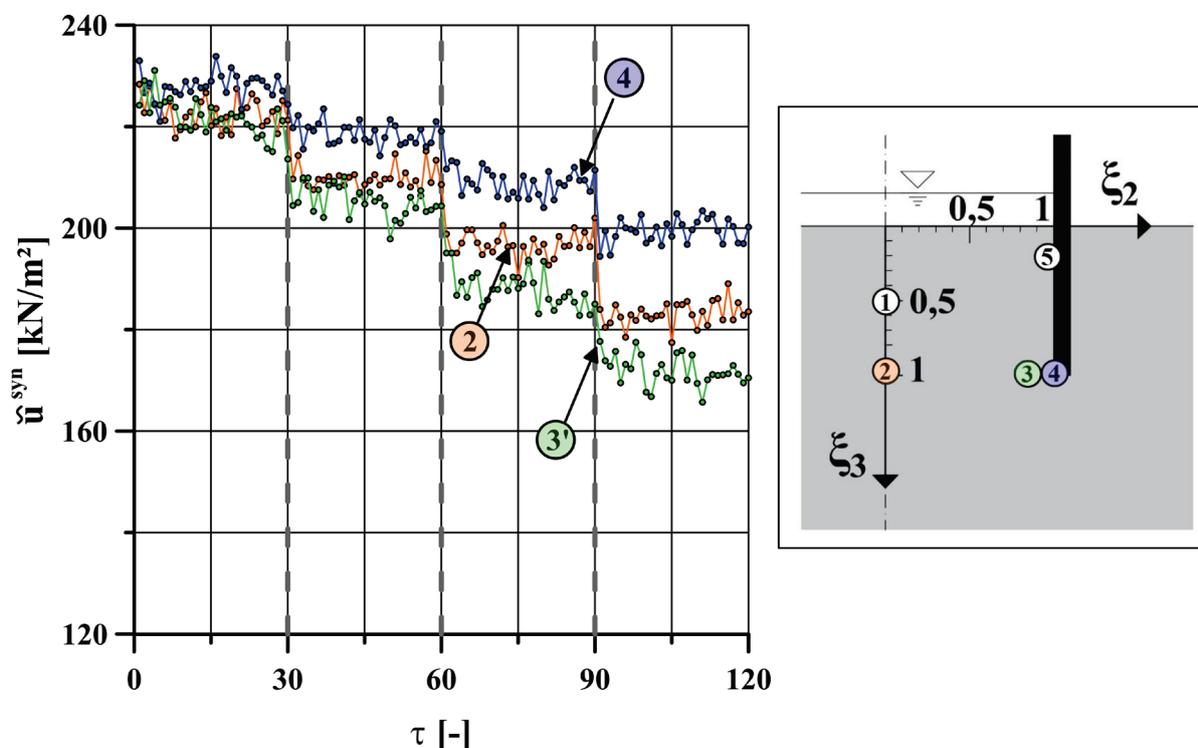


Abbildung 5.18: Plausibilitätskontrolle der synthetischen Messdaten für die drei Porenwasserdruckmesspunkte

Anhand der Darstellung in Abb. 5.18 wird deutlich, dass bereits im Rahmen einer einfachen Plausibilitätskontrolle der systematische Messfehler detektiert werden kann. Wie unter Punkt B) des Untersuchungskonzepts aufgeführt, bietet sich stets die Aufbereitung und die graphische Darstellung der Messwerte zur Analyse von Fehlerquellen an. Für das übersichtliche Beispiel in Abb. 5.18 ist die Plausibilitätskontrolle mit entsprechender Erfahrung sicherlich leicht möglich. Liegt jedoch eine große Anzahl von Messdaten vor, könnte es schwierig sein, diese so übersichtlich darzustellen, um die oben beschriebenen Effekte auf Anhieb zu erkennen.

Aus diesem Grund kann neben der Plausibilitätskontrolle eine andere Möglichkeit darin bestehen, den fehlerhaft arbeitenden Messgeber im Rahmen einer Parameteridentifikation zu identifizieren. Zu diesem Zweck wird das Optimierungsproblem analog zu Gl. (5.5) gelöst, mit dem Unterschied, dass für den Porenwasserdruckmesspunkt die Messwerte gemäß Gl. (5.14) in die Zielfunktion einfließen.

In Abb. 5.19a sind sowohl die optimalen Schätzwerte für das ursprüngliche Optimierungsproblem gemäß Gl. (5.5) – gekennzeichnet mit der grauen Linie – als auch unter Berücksichtigung des verfälschten Messgebers gemäß Gl. (5.14a) – gekennzeichnet mit der schwarzen Linie – über die in Gl. (5.2) einfließenden Anzahl an Zeitschritten T dargestellt. Aufgrund des geringen Messfehlers in der ersten Absenkphase sind die Schätzungen in diesem Bereich noch nahezu identisch. Mit steigender Anzahl divergieren die Schätzwerte jedoch infolge des stetig zunehmenden Messfehlers über die Zeitschritte. Insgesamt ist zu erkennen, dass der Schätzwert der Anisotropie aufgrund des negativen Messfehlers gemäß Gl. (5.14a) in den letzten beiden Absenkphasen einen relativen Fehler von ca. 35% aufweist. Die Darstellung in Abb. 5.19b ist naturgemäß ein Ergebnis der idealen Untersuchungsbedingungen aufgrund der Verwendung von synthetischen Messdaten.

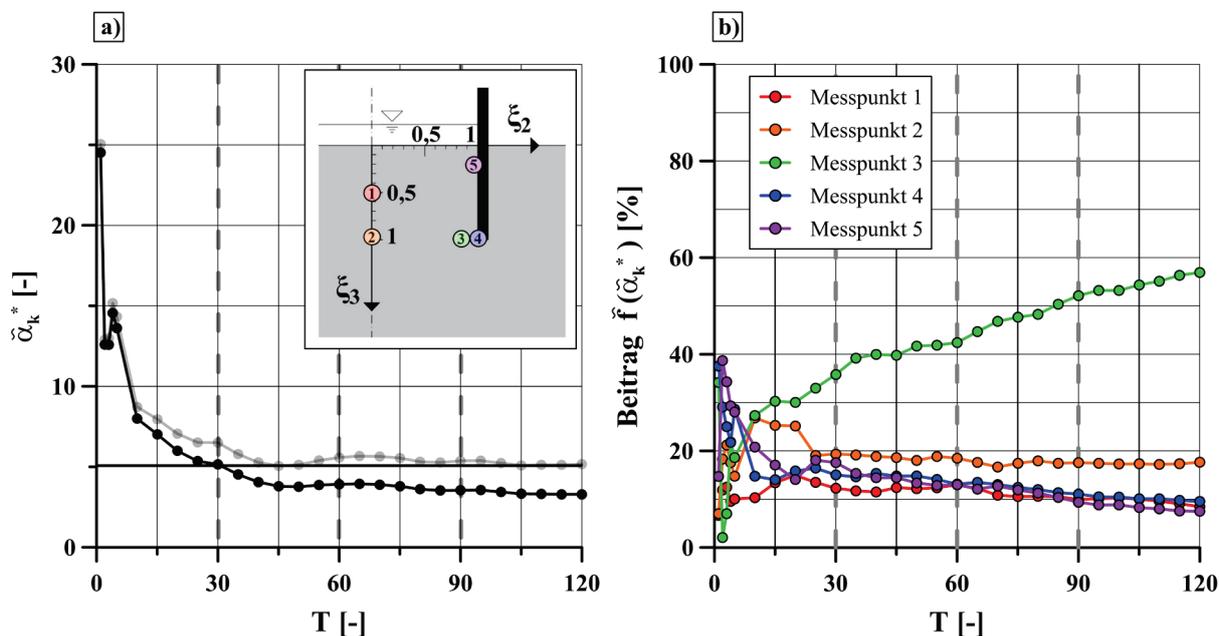


Abbildung 5.19: Parameteridentifikation für den gestörten Datensatz sowie Simulation eines fehlerhaften Messgebers im Punkt 3 a) Entwicklung des Schätzwerts für den Grad der Anisotropie; b) Beitrag der einzelnen Messpunkte zum gesamten Zielfunktionswert in der Extremstelle

Die Darstellung der optimalen Schätzwerte in Abb. 5.19a ermöglicht es jedoch nicht, den systematischen Messfehler zu erkennen. Eine Möglichkeit zur Identifizierung des fehlerhaft arbeitenden Messgebers stellt die Auswertung in Abb. 5.19b dar. Hier wurde für jeden optimalen

Schätzwert der Beitrag des jeweiligen Messpunktes in Bezug auf den Wert der Zielfunktion an dieser Stelle in Prozent dargestellt. Für den Idealfall von identischen Messabweichungen sowie gleicher Sensitivität hätten alle fünf Druckgeber denselben Beitrag zur Zielfunktion, sodass die Auswertung im Gegensatz zu Abb. 5.19b für alle Punkte eine gerade Linie mit einem konstanten Wert von 20% ergeben würde. An der Darstellung wird schon ab Mitte/Ende der ersten Absenkhase deutlich, dass der Beitrag von dem Porenwasserdruckmessgeber im Punkt 3 stetig ansteigt und deutlich größer ist als der Beitrag der übrigen Druckgeber. Dieser Trend tritt umso deutlicher in den nachfolgenden Absenkhassen hervor, sodass der fehlerhafte Messgeber identifiziert werden kann.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass auch bei einem fehlerhaften arbeitenden Messgeber grundsätzlich die Möglichkeit besteht, diesen mit einfachen Plausibilitätskontrollen oder den Methoden der Parameteridentifikation zu detektieren. Es stellt sich an dieser Stelle die Frage, wie sich die vorgeführte Methodik für dieses einfache Beispiel auf komplexere Probleme übertragen lässt. Darüber hinaus ist es fraglich, ob die Anwendung der vorgestellten Optimierungsverfahren überhaupt auf Optimierungsprobleme mit großen Residuen infolge des systematischen Messfehlers in Gl. (5.14a) angemessen ist oder anders gefragt, ob andere Zielfunktionen und damit verbundene Lösungsalgorithmen ggfs. sogar bessere Eigenschaften bieten.

Die Ergebnisse in Abb. 5.19 sind zudem ein Beleg dafür, dass ein redundantes Messprogramm, trotz eines falsch arbeitenden Messgebers zu einer annehmbaren Schätzung führen kann. Letztendlich lässt sich insgesamt zeigen, dass die mathematischen Verfahren zur Parameteridentifikation weit über die alleinige Bestimmung der Modellparameter hinausgehen und sich auf eine Vielzahl von weiteren Fragestellungen anwenden lassen.

(b) Detektion eines einheitlichen Kalibrierungsfehlers

Bei der Einrichtung eines Messprogramms ist es denkbar, dass die eingebauten Messgeber bzw. die Messgeräte im Vorfeld falsch kalibriert wurden, sodass alle Messwerte einen einheitlichen systematischen Messfehler infolge der fehlerhaften Kalibrierung aufweisen. Auf die vorherige Problemstellung bezogen würde dies bedeuten, dass alle synthetischen Porenwasserdruckmessungen in Abb. 4.8 mit einem einheitlichen systematischen Messfehler überlagert sind. Um einen derartigen Messfehler nachzubilden und im Rahmen der Parameteridentifikation zu simulieren, werden alle synthetischen Messwerte für den Porenwasserdruck mit einem einheitlichen systematischen Messfehler folgendermaßen gestört:

$$\tilde{u}_{j,i}^{\text{syn,cal}} = \tilde{u}_{j,i}^{\text{syn}}(\mathbf{x}) + e_i^{\text{cal}} \quad (5.15)$$

Für die Simulation dieser exemplarischen Anwendung wird der Kalibrierungsfehler in Gl. (5.15) mit $e^{\text{cal}} = +5 \text{ kN/m}^2$ angesetzt. In Abb. 5.20 sind die optimalen Schätzwerte der

Anisotropie für das Optimierungsproblem in Gl. (5.5) sowohl für den Fall ohne Kalibrierungsfehler $e^{\text{cal}} = 0 \text{ kN/m}^2$ als auch mit einem Kalibrierungsfehler von $e^{\text{cal}} = +5 \text{ kN/m}^2$ dargestellt.

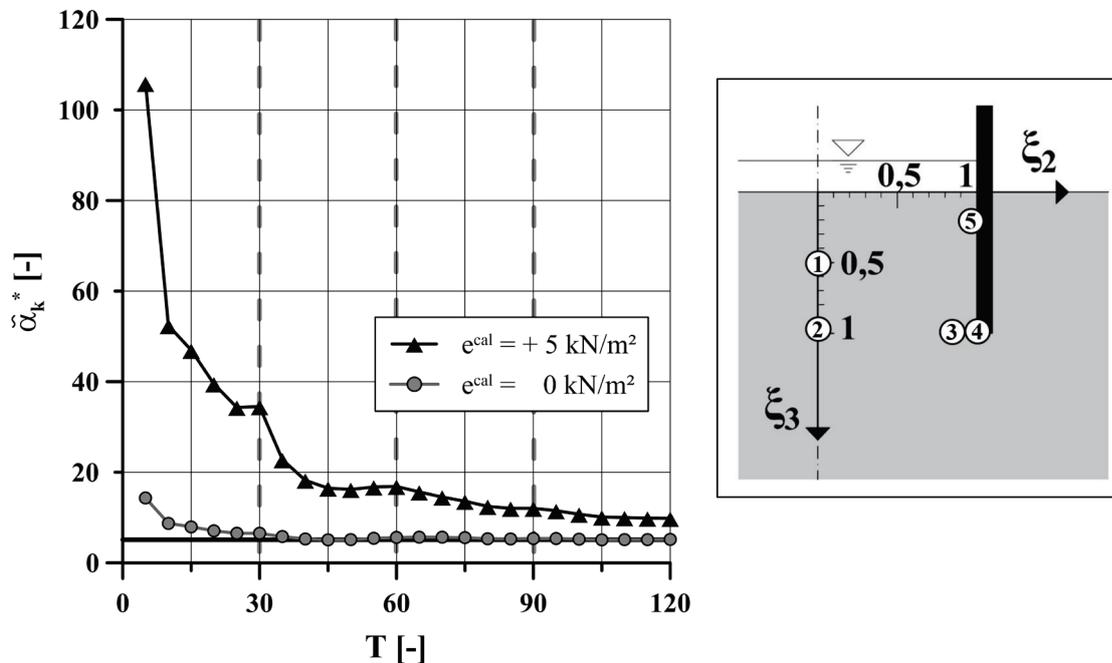


Abbildung 5.20: Parameteridentifikation für den gestörten Messdatensatz sowohl mit als auch ohne Kalibrierungsfehler gemäß Gl. (5.15)

Der Vergleich mit der ursprünglichen Schätzung ohne den Kalibrierungsfehler zeigt, dass der Grad der Anisotropie in der letzten Absenkphase näherungsweise um den Faktor 2 überschätzt wird. Im Gegensatz zu der vorherigen Auswertung ist erkennbar, dass ein positiver systematischer Messfehler zu einer Überschätzung der Anisotropie führt, da in diesem Fall die synthetischen Messdaten des Porenwasserdrucks eher zu einer geohydraulischen schlankeren Baugruben passen. Bei einer realen Problemstellung ist ein Kalibrierungsfehler im Regelfall unbekannt und die verfälschten Messdaten führen in der Folge dann ggfs. zu einer falschen Entscheidungsgrundlage.

Insbesondere in den ersten beiden Absenkphasen wird die Anisotropie deutlich überschätzt, sodass auf dieser Grundlage die Kennwerte für den Feinsand falsch wiedergegeben werden. An diesem einfachen Beispiel lässt sich belegen, wie ein Kalibrierungsfehler zu einer unzureichenden Schätzung der Bodenparameter führen kann. Der Schätzfehler der Parameter hängt in diesem Fall auch stark von der Größe des systematischen Messfehlers in Gl. (5.15) ab. Falls der Kalibrierungsfehler im Rahmen der Messwerterfassung oder der Messwertanalyse detektiert wird, kann eine entsprechende Korrektur der Messdaten erfolgen (Geiger und Kotte, 2008; Partier, 2008). In Bezug auf das vorliegende Beispiel müsste dann im Sinne einer Korrektur von

allen Messwerten für den Porenwasserdruck der Kalibrierungsfehler von $e^{\text{cal}} = +5 \text{ kN/m}^2$ abgezogen werden.

Parameteridentifikation – gestörte *synthetische* Messdaten

Es wird nachfolgend angenommen, dass der Kalibrierungsfehler unbekannt ist. In diesem Zusammenhang stellt sich grundsätzlich die Frage, welche Möglichkeiten es gibt, diese falsche Kalibrierung zu detektieren. Zunächst könnten weitere in-situ-Messungen im Strömungsgebiet durchgeführt und mit den Messwerten für den Porenwasserdruck verglichen werden. So wäre es in dem hier vorliegenden konkreten Fall empfehlenswert, zusätzlich zu den Porenwasserdruckmessungen entsprechende Standrohrspiegelhöhen zu messen. Bei einer hinreichend großen Anzahl an Vergleichsmessungen wäre es möglich, die systematischen Messfehler in den Porenwasserdruckmesswerten zu detektieren.

Wenn der Mehraufwand hinsichtlich der Kosten und Bauabläufe zusätzliche Messungen verhindert, ist zu überprüfen, ob der systematische Messfehler e^{cal} im Rahmen einer Parameteridentifikation bestimmt werden kann. Zu diesem Zweck wird die Zielfunktion zur Bestimmung der Anisotropie, um eine weitere Variable e^{cal} ergänzt:

$$\tilde{f}(\alpha_k, e^{\text{cal}}) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{m=5} \left(w_j \cdot \sum_{i=1}^T \omega_i \cdot \left[\tilde{r}_{i,j}(\alpha_k, e^{\text{cal}}) \right]^2 \right) \rightarrow \min_{\alpha_k, e^{\text{cal}}} \quad (5.16)$$

Die Wichtungsfaktoren in Gl. (5.16) werden mit $w_j=1$ und $\omega_i=1$ angenommen. Die Definition des Residuums $\tilde{r}_{i,j} = \tilde{u}_{p=j,i}^{\text{syn,cal}} - u_{p=j,i}^{\text{calc}}(\alpha_k, e^{\text{cal}})$ in Gl. (5.16) ist ähnlich zu der in Gl. (5.5), wobei die synthetischen Messdaten mit dem Kalibrierungsfehler gemäß Gl. (5.14) überlagert sind und das Residuum neben der Anisotropie zusätzlich von dem unbekanntem systematischen Messfehler abhängt.

Die konkrete Zielsetzung der nachfolgenden Untersuchungen besteht nun darin, einen optimalen Schätzwert $\kappa^* = [\alpha_k, e^{\text{cal}}]^T$ mit der zuvor vorgestellten methodischen Vorgehensweise zu bestimmen. Unter Verwendung der exakten synthetischen Messdaten in Gl. (5.16) lässt sich zeigen, dass sich diese Optimierungsaufgabe eindeutig lösen lässt, jedoch wird an dieser Stelle auf ausführliche Darstellungen verzichtet.

Für die gestörten synthetischen Datensätze gemäß Gl. (5.14) sind in Abb. 5.21 die optimalen Schätzwerte für das Optimierungsproblem in Gl. (5.16) grafisch dargestellt. Im Vergleich zu den Ergebnissen in Abb. 5.20 ist erkennbar, dass sich die Schätzung für den Grad der Anisotropie in allen Absenckphasen deutlich verbessert hat. Eine stabile Lösung kann für die beiden Schätzwerte nach einer Anzahl von ca. $T=60$ Messwerten nachgewiesen werden.

Durch die zufälligen Messabweichungen in den synthetischen Messdaten sind die „exakten“ Parameterwerte für den systematischen Messfehler erwartungsgemäß nicht bestimmbar, werden aber dennoch gut approximiert, sodass zumindest anhand der Ergebnisse in Abb. 5.21b auf einen systematischen Fehler geschlossen werden kann. In den letzten beiden Absenkenphasen wird der für die synthetischen Messdaten vorgegebene Grad der Anisotropie sehr gut durch die Lösung der Optimierungsaufgabe in Gl. (5.16) angenähert.

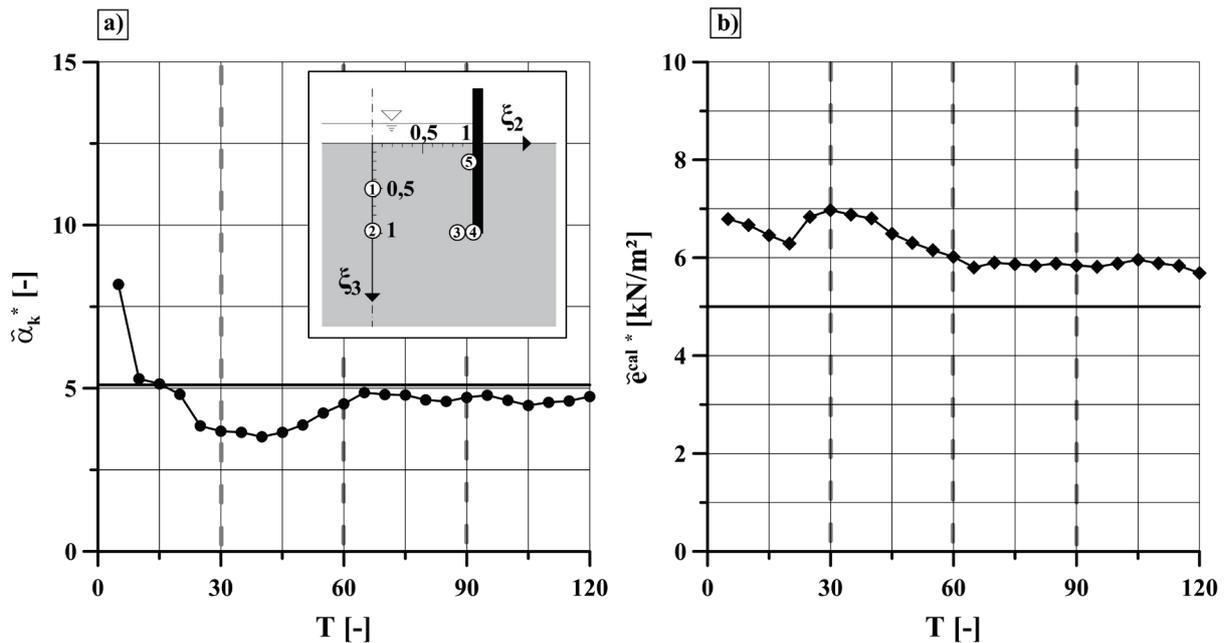


Abbildung 5.21: Lösung für den gestörten Datensatz nebst Kalibrierungsfehler a) Grad der Anisotropie; b) Kalibrierungsfehler

Die zuvor erarbeiteten und erprobten Lösungsalgorithmen konnten erfolgreich auf das Optimierungsproblem in Gl. (5.16) angewendet werden. Mit Blick auf das Messprogramm gelten dieselben Empfehlungen wie bei den vorherigen exemplarischen Anwendungen zur Parameteridentifikation mit zwei Unbekannten. Das zugrunde gelegte synthetische Messprogramm ist für diese Problemstellung geeignet und könnte ggfs. durch weitere Untersuchungen hinsichtlich der optimalen Lage der Messgeber angepasst werden.

Ohne a priori Wissen oder weitere Informationen ist die spezifische Ursache des Kalibrierungsfehlers alleine an den Ergebnissen der Parameteridentifikation in Abb. 5.20 nicht eindeutig festzustellen. Für das einfache Beispiel konnte der Nachweis erbracht werden, dass die Parameteridentifikation als mögliche Hilfestellung dienen kann und zur Detektion eines Kalibrierungsfehlers grundsätzlich geeignet ist. Ob sich diese Strategie auf komplexe Problemstellungen übertragen lässt und inwiefern weitere Faktoren die Lösung beeinflussen, muss im Einzelfall überprüft werden.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Für ein spezielles Randwertproblem der Geotechnik – einer Baugrube mit Restwasserhaltung – wurden in der vorliegenden Arbeit verschiedene Fragestellungen zur Parameteridentifikation formuliert und anhand von synthetischen Messdaten die zugehörigen Lösungswege präsentiert. Als Messgrößen für die synthetischen Messdaten dienen sowohl punktuelle Standrohrspiegelhöhen und Porenwasserdrücke als auch der Wasserzufluss in die Baugrube. Die im Rahmen der Zielsetzung formulierten mathematischen Fragestellungen wie beispielsweise nach der Wahl einer geeigneten Zielfunktion sowie Verfahren zur Lösung der damit verbundenen Minimierungsaufgabe, konnten im Wesentlichen durch Rückgriff auf bewährte Erkenntnisse der Mathematik und der in großem Umfang vorliegenden Untersuchungsmethoden für die eigenen Fragestellungen beantwortet werden.

Die in Praxis und Forschung im Regelfall verwendete numerische Lösung der direkten Problemstellung einer Baugrube im Grundwasser mit der FEM wurde in einer vorangegangenen Forschungsarbeit durch die Entwicklung einer analytisch formulierten Näherungslösung ersetzt. Die Formulierung und Ausnutzung der mathematischen Eigenschaften des zugrundeliegenden speziellen Randwertproblems ermöglichte es, analytische Näherungslösungen zu formulieren, die sowohl geschlossen ableitbar als auch differenzierbar sind und den Einfluss der Modellparameter auf die Lösung vollständig beschreiben. Mit Blick auf die Parameteridentifikation haben sich die speziellen Eigenschaften der analytisch formulierten Näherungslösung als äußerst wertvoll erwiesen, da die Abhängigkeit der Zielfunktion von den Modellparametern transparent und vollständig erfasst werden konnte. Zudem war es im Rahmen der mathematischen Optimierung möglich, die Berechnungszeiten deutlich zu verringern, da aufwendige numerische Verfahren für die Ableitungen der Zielfunktion nach den Parametern entfallen konnten.

Im Hinblick auf die zuvor formulierten mathematischen und geotechnischen Fragestellungen wird zunächst eine übergeordnete Lösungsstrategie bzw. ein Untersuchungskonzept für unterschiedliche Identifikationsprobleme erarbeitet und anschließend auf verschiedene Fragestellungen zur Parameteridentifikation für das spezielle Randwertproblem angewendet. Dieses Untersuchungskonzept lässt sich zwar nicht im Detail aber grundsätzlich auf andere Fragestellungen der Parameteridentifikation übertragen, sodass die vorgestellte Lösungsstrategie eine Hilfestellung für praktische Anwendungsfälle bieten kann.

Im Rahmen der exemplarischen Anwendungen zur Parameteridentifikation hat sich als Zielfunktion eine Fehlerquadratsumme im Sinne der Methode der kleinsten Abstandsquadrate als sinnvoll erwiesen. Die Lösung der Minimierungsaufgabe erfolgte auf Basis eines modular aufgebauten Programmsystems, welches unter MATLAB programmiert wurde. Als mögliche

Optimierungsverfahren zur Minimierung der Zielfunktion haben sich sowohl das Levenberg-Marquardt-Verfahren als auch das SQP-Verfahren erfolgreich anwenden lassen.

Die wichtigsten Aussagen in Bezug auf die exemplarischen Anwendungen zur Parameteridentifikation mittels synthetischer Messdaten für das spezielle Randwertproblem einer Baugrube mit Restwasserhaltung werden nachfolgend zusammengefasst.

Um das Strömungsproblem zu lösen, müssen neben der Geometrie und den Randbedingungen die Materialparameter bestehend aus den Durchlässigkeitsbeiwerten und dem damit verbundenen Grad der Anisotropie hinreichend genau bestimmt werden. Diese Parameter lassen sich nur indirekt bestimmen. Auf der Grundlage der durchgeführten Berechnungen zur Parameteridentifikation lässt sich zeigen, dass für die Rückrechnung der Anisotropie aus mathematischer Sicht lediglich ein Messpunkt für die Standrohrspiegelhöhe oder den Porenwasserdruck im Strömungsgebiet vorliegen muss. Hierbei sind für eine hinreichende Redundanz mindestens drei Messpunkte vorzusehen. Um die Durchlässigkeitsbeiwerte eindeutig zu bestimmen, muss neben den Messwerten für die Standrohrspiegelhöhe oder den Porenwasserdruck zusätzlich auch der Wasserzufluss in die Baugrube bekannt sein. Mit einer ausreichend großen Ablesehäufigkeit der Messgrößen über die Zeit ist eine stabile Lösung nachweisbar.

Neben der Rückrechnung der Materialparameter aus den indirekten synthetischen Messdaten des Porenwasserdrucks und Wasserzuflusses wird zudem der Versuch unternommen, im Rahmen der Bauausführung Geometrieparameter wie die Einbindetiefe oder den Grundwasserspiegel innerhalb der Baugrube indirekt zu bestimmen. Beide Fragestellungen führen auf Grundlage von Messdaten für die Standrohrspiegelhöhe bzw. den Porenwasserdruck zu einer eindeutigen Lösung, wobei die Stabilität der Lösung empfindlich von der Güte der Messdaten abhängt. Grundsätzlich müssen für die eindeutige Lösbarkeit mindestens zwei Messpunkte für die Standrohrspiegelhöhe bzw. den Porenwasserdruck im Strömungsgebiet vorliegen, wobei aus Gründen der Redundanz vorzugsweise mehr als drei Messpunkte angeordnet werden sollten.

Auch eine weitere Optimierung des synthetischen Messprogramms für die jeweiligen Fragestellungen ist anhand der Erkenntnisse hinsichtlich der Parameteridentifikation möglich. In Bezug auf weitere Fragestellungen wie z.B. die Detektion eines defekten Messgebers und dessen Einfluss auf die Parameterschätzung können unterschiedliche Lösungsstrategien auf Basis der inversen Analyse erarbeitet werden.

Die dabei erzielten Erkenntnisse gelten jedoch nicht nur für die behandelten exemplarischen Anwendungen, sondern lassen sich auf andere Baugruben im Grundwasser mit einer Restwasserhaltung übertragen. Somit ist beispielsweise eine Übertragung auf Baugruben mit einer rechteckigen, polygonalen oder kreisförmigen Grundrissform möglich, da hierbei lediglich das Strömungsproblem durch weitere Modellparameter ergänzt wird und die Parameteridentifikation zwar nicht im Detail aber auf ähnliche Art und Weise anwendbar ist.

Falls eine Parameteridentifikation mit der FEM durchgeführt werden soll, kann eine Vorabschätzung der Modellparameter mittels der analytischen Näherungslösung als ein guter Startpunkt für die numerischen Untersuchungen der inversen Problemstellung angesehen werden. Wenn zur Bestimmung der optimalen Schätzwerte der Modellparameter ein ableitungsbasiertes Optimierungsverfahren verwendet wird, lassen sich numerische Ableitungen auf Basis der FEM mit den analytischen Ableitungen der Näherungsgleichungen auf Plausibilität überprüfen.

Grundsätzlich lässt sich noch eine Vielzahl von weiteren Identifikationsproblemen formulieren, welche jedoch unter Verwendung der vorgestellten Lösungsstrategien und MATLAB Routinen gleichermaßen gelöst werden können. Als viel dringlicher erscheint jedoch, dass zum einen die Näherungslösungen um einige wenige weitere Parameter ergänzt werden, sodass die Anwendungsmöglichkeiten der Gleichungen in der Praxis weiter gesteigert werden können.

Zudem empfiehlt es sich, in Bezug auf die Parameteridentifikation unterschiedlich gestörte Messdatensätze (z.B. Vergrößerung der Standardabweichung) zu untersuchen, um festzustellen, wie groß eine mögliche Messabweichung sein darf, um daraus ableiten zu können, wie genau die Messdaten schlussendlich sein müssen. Durch die Erweiterungen der Näherungslösungen besteht dann abschließend die Möglichkeit, die vorgestellte Methodik zur Parameteridentifikation auf eine Baugrube mit realen Messdaten anzuwenden. Damit verbunden wäre dann die Erprobung von weiteren Lösungsansätzen zur mathematischen Optimierung zur Lösung von unterschiedlichen Identifikationsproblemen.

7 Verzeichnisse

7.1 Formate

Bezeichnung	Format	Beispiele
Skalare	Standard Textformat	k, Φ
Vektoren	Standard Textformat, Kleinbuchstaben in Fettschrift	$\mathbf{v}, \mathbf{\kappa}$
Tensoren	Standard Textformat, Großbuchstaben in Fettschrift	\mathbf{H}_f, \mathbf{K}

7.2 Mathematische Bezeichnungen

Variable	Bedeutung
\mathcal{F}	Operator der direkten Problemstellung
\mathcal{F}^{-1}	Operator der inversen Problemstellung
κ_i	Platzhalter für unbekannte Modellparameter
κ_i^*	Optimaler Schätzwert für den Modellparameter
y_j	Feldvariable
f	skalarwertige Zielfunktion
e_j	Messabweichung
e_{κ}	Rekonstruktionsfehler der geschätzten Modellparameter
$\bar{\mathbf{y}}$	Messgröße <i>ohne</i> Messabweichungen
$\tilde{\mathbf{y}}$	Messgröße <i>mit</i> Messabweichungen
\mathbf{e}^{sys}	Systematische Messabweichungen
\mathbf{e}^{rand}	Zufällige Messabweichungen
\mathbf{e}^{mod}	Modellfehler
y_j^{calc}	Modellvorhersage
y_j^{meas}	Messwert
τ_j	Beobachtungszeitpunkt
r_j	Residuum aus Differenz zwischen Messwert und Modellvorhersage
η	Normierungsfaktor für die Zielfunktion
w_j	Wichtungsfaktor für den j-ten Messwert
\mathbf{W}	Wichtungsmatrix
\mathcal{K}	Menge der zulässigen Lösungen für die Materialparameter
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
n	Anzahl der Modellparameter
m	Anzahl der Messwerte
g	Ungleichungsnebenbedingungen

Fortsetzung der Tabelle mit den mathematischen Variablen:

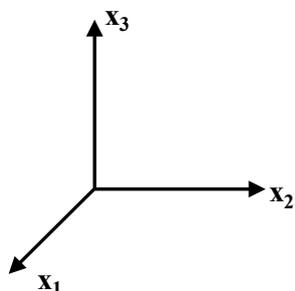
Variable	Bedeutung
h	Gleichungsnebenbedingungen
λ, μ	Lagrange-Multiplikatoren
\mathcal{L}	Lagrange-Funktion
$\mathbf{\kappa}_0$	Startwerte der Modellparameter für mathematische Optimierung
i, j, k	Laufindizes
λ^{LM}	Dämpfungsparameter Levenberg-Marquardt-Verfahren
\mathbf{I}	Identitätsmatrix
f	skalarwertige Funktion
ω_i	Wichtungsfaktor für den i -ten Messwert

7.3 Rechenvorschriften

Vorschrift	Bedeutung
∂	partielle Ableitung
$\nabla f = \text{grad } f$	Gradient eines Skalars f , Vektor der partiellen Ableitungen <i>erster</i> Ordnung
\mathbf{J}	Jacobi-Matrix, Matrix der partiellen Ableitungen <i>erster</i> Ordnung
$\nabla^2 f = \mathbf{H}_f$	Hesse-Matrix, Matrix der partiellen Ableitungen <i>zweiter</i> Ordnung
$\text{div } \mathbf{v}$	Divergenz eines Vektors \mathbf{v}
$\ \cdot \ $	Norm einer Funktion
\min	minimal

7.4 Physikalische Bezeichnungen

Kartesisches Koordinatensystem für das geohydraulische Modell:



Variable	Einheit	Bedeutung
i	-	Hydraulischer Gradient
Φ	m	Standrohrspiegelhöhe (Potenzialhöhe)
u	kN/m ²	Porenwasserdruck
v	m/s	Filtergeschwindigkeit
\mathbf{K}	m/s	Durchlässigkeitstensor 2.Stufe
k_h	m/s	Durchlässigkeitsbeiwert in horizontaler Richtung
k_v	m/s	Durchlässigkeitsbeiwert in vertikaler Richtung
γ_w	kN/m ³	Wichte des Wassers
x_1, x_2, x_3	m	Raumkoordinaten
t_i	m	Einbindetiefe
b	m	Baugrubenbreite
d_w	m	Dicke der Verbauwand
Φ_D, Φ_A	m	Potenzialrandbedingungen
ξ_2, ξ_3	-	Dimensionslose Koordinaten
ϕ_P	-	Dimensionsloses Potenzial
β_i	-	Funktionsbeiwerte dimensionsloses Potenzial $i = [1,2,3,4,e]$
α_j	-	Funktionsbeiwerte Hyperbelfunktion, $j = [1,2,3]$
e^{app}	-	Approximationsfehler dimensionsloses Potenzial
A	m ²	Baugrubengrundfläche
q_{eben}^*	-	Dimensionslose Funktion zur Berechnung des Wasserzuflusses
q_{eben}	m ³ /h	Wasserzuflussrate
α_k	-	Grad der Anisotropie, Verhältnis $\alpha_k = k_h/k_v$
t^*	-	Geohydraulischer Schlankheitsgrad
Φ_P	m	Standrohrspiegelhöhe im Punkt P
u_P	kN/m ²	Porenwasserdruck im Punkt P
q	m ³ /h	Wasserzuflussrate

7.5 Indizes

Index	Bedeutung
calc	engl. calculated, berechnet
meas	engl. measured, gemessen
syn	engl. synthetic, synthetisch bzw. künstlich
l	engl. lower, untere
u	engl. upper, obere
min	minimal
LM	Levenberg-Marquardt
T	Transponiert
P	Punkt
UK_Wand	Unterkante Verbauwand
Wand_a	Verbauwand außen
Wand_i	Verbauwand innen
rand	engl. random, zufällig
sys	engl. systematic, systematisch
cal	engl. calibration, Kalibrierung
eben	ebener Strömungszustand
rot	rotationssymmetrischer Zustand

7.6 Literaturverzeichnis

- Ahrendts, J.; Baehr, H. D. (1979a): Die Anwendung nichtlinearer Regressionsverfahren bei der Aufstellung thermodynamischer Zustandsgleichungen. *Forschung im Ingenieurwesen* 45 (2), S. 51–56.
- Ahrendts, J.; Baehr, H. D. (1979b): Die direkte Verwendung von Meßwerten beliebiger thermodynamischer Zustandsgrößen zur Bestimmung kanonischer Zustandsgleichungen. *Forschung im Ingenieurwesen* 45 (1), S. 1–11.
- Alt, W. (2002): *Nichtlineare Optimierung, Eine Einführung in Theorie, Verfahren und Anwendungen*, Braunschweig: Vieweg+Teubner.
- Al-Zoukra, K. (2011): *Methoden der Parameterbestimmung in gewöhnlichen Differentialgleichungen - Ausgleichsprobleme als Aufgaben der optimalen Steuerung*, Greifswald: Dissertation, Veröffentlichungen des Instituts für Mathematik und Informatik.
- Angermann, A. (2014): *Matlab-Simulink-Stateflow, Grundlagen, Toolboxen, Beispiele*, 8. Auflage, München: De Gruyter Oldenbourg.
- Argoul, P. (2012): Overview of Inverse Problems. DEA. Parameter Identification in Civil Engineering, Ecole Nationale des Ponts et chaussées, pp.13.
- Aster, R. C., Borchers, B., Thurber, C. H. (2012): *Parameter Estimation and Inverse Problems*, 2nd Edition, Amsterdam: Elsevier-Academic Press.
- Aulbach, B. (2016): *Hydraulischer Grundbruch: zur erforderlichen Einbindetiefe bei Baugruben in nichtbindigem Baugrund*, Aachen: Dissertation, RWTH Aachen, Lehrstuhl für Geotechnik im Bauwesen und Institut für Grundbau, Bodenmechanik, Felsmechanik und Verkehrswasserbau, Hrsg.: M. Ziegler, Heft 11.
- Bailey, K. R.; Fitzpatrick, B. G. (1997): Estimation of groundwater flow parameters using least squares. *Mathematical and Computer Modelling* 26 (11), S. 117–127.
- BAW (2011): *Standicherheit von Dämmen an Bundeswasserstraßen (MSD)*. Karlsruhe: Hrsg. Bundesanstalt für Wasserbau (BAW).
- Beck, J. v., Arnold, K. J. (1977): *Parameter estimation in engineering and science*, New York: J. Wiley & Sons.
- Becker, H. J.; Hubrig, M.; Stolz, M.; Thut, A.; Wörsching, H. (2017): *Instrumentierung und Monitoring in der Geotechnik*. In: *Grundbau-Taschenbuch*, 8. Auflage. Hrsg: K. Witt, Ernst & Sohn, Berlin, S. 867–967.

- Benker, H. (2003): Mathematische Optimierung mit Computeralgebrasystemen, Einführung für Ingenieure, Naturwissenschaftler und Wirtschaftswissenschaftler unter Anwendung von Mathematika, Maple, Mathcad, Matlab und Excel, Berlin: Springer Verlag.
- Besdo, D.; Ihlemann, J. (2003): Effiziente Parameteridentifikation bei Stoffgesetzen für inelastische technische Gummimaterialien. PAMM 3 (1), S. 324–325.
- Bialy, H., Olbrich, M. (1975): Optimierung, Eine Einführung mit Anwendungsbeispielen, Leipzig: Fachbuchverlag, VEB.
- Boley, C., Adam, D. (2012): Handbuch Geotechnik, Grundlagen - Anwendungen - Praxiserfahrungen, Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag.
- Bourier, G. (2018): Wahrscheinlichkeitsrechnung und schließende Statistik, Praxisorientierte Einführung - Mit Aufgaben und Lösungen, 9. Auflage, Wiesbaden: Springer.
- Brandstätter, B. (2007): Anwendungsgebiete für inverse Probleme. Elektrotechnik & Informationstechnik 124 (7-8), S. 222.
- Braun, B. (2015): Strukturentwicklung im Leichtbau - Integrierte CAE-Prozesse. In: Stahlbau Kalender 2015, Eurocode 3 - Grundnorm Leichtbau. Hrsg: U. Kuhlmann, Wiley-VCH Verlag, Berlin, S. 567–606.
- Bucher, B. (1993): Anwendung von Kriging-Verfahren zur Analyse und Optimierung von Grundwasser-Meßnetzen, Freiburg: Dissertation, Freiburger Schriften zur Hydrologie, Hrsg. Ch. Leibundgut & S. Demuth, Professur für Hydrologie, Band 3.
- Busch, K.-F., Luckner, L., Tiemer, K. (1993): Geohydraulik, Berlin: Gebrüder Borntraeger.
- Calvello, M.; Cuomo, S.; Ghasemi, P. (2017): The role of observations in the inverse analysis of landslide propagation. Computers and Geotechnics 92, S. 11–21.
- Charton, J. M. (2004): Eine Linienmethode zur approximativen Lösung inverser Probleme für elliptische Differentialgleichungen, Berlin: Dissertation, Veröffentlichungen der Universität Siegen, Fachbereich 6 Mathematik, Berlin: Logos Verlag.
- Czichos, H. (2015): Tribologie-Handbuch, Tribometrie, Tribomaterialien, Tribotechnik; 4. Auflage, Wiesbaden: Springer Vieweg Verlag.
- Dachler, R. (1936): Grundwasserströmung, Wien: Springer Verlag.
- Dahmen, W., Reusken, A. (2006): Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Berlin: Springer Verlag.
- David, I. (1998): Grundwasserhydraulik, Strömungs- und Transportvorgänge, Braunschweig: Vieweg Verlag.

- Dobmann, M. (2018): Kostenoptimale Auslegung von thermischen Eigenschaften in Elektrofahrzeugen, AutoUni – Schriftenreihe, Band 131, Wiesbaden: Springer Verlag.
- Dörner Fernández, J. M. (2005): Anisotropie von Bodenstrukturen und Porenfunktionen in Böden und deren Auswirkungen auf Transportprozesse im gesättigten und ungesättigten Zustand, Kiel: Dissertation, Veröffentlichungen des Instituts für Pflanzenernährung und Bodenkunde, Band 68.
- EAB (2012): Empfehlungen des Arbeitskreises "Baugruben" EAB, Deutsche Gesellschaft für Geotechnik e.V. (Hrsg.), 5. Auflage, Berlin: Ernst & Sohn Verlag.
- EANG (2014): Empfehlungen des Arbeitskreises Numerik in der Geotechnik - EANG, Deutsche Gesellschaft für Geotechnik e.V. (Hrsg.), Berlin: Ernst & Sohn.
- Finno, R. J.; Calvello, M. (2005): Supported Excavations, Observational Method and Inverse Modeling. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering* 131 (7), S. 826–836.
- Finsterle, S. (1993): Inverse Modellierung zur Bestimmung hydrogeologischer Parameter eines Zweiphasensystems, Zürich: Veröffentlichungen der Versuchsanstalt für Wasserbau, Hydrologie und Glaziologie der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich, Hrsg: D. Vischer, Heft 121.
- Finsterle, S. (1998): Multiphase Inverse Modeling: An Overview, DOE Geothermal Program Review XVI, Berkeley, CA, April 1-2, p. 3-3 – 3-9.
- Finsterle, S. (2006): Demonstration of optimization techniques for groundwater plume remediation using iTOUGH2. *Environmental Modelling & Software* 21 (5), S. 665–680.
- Furlan, P. (1995): Das Gelbe Rechenbuch für Ingenieure, Naturwissenschaftler und Mathematiker, Integralrechnung, mehrdimensionale Differentialrechnung, mehrdimensionale Integralrechnung, Band 2, Dortmund: Martina Furlan Verlag.
- Geffken, S. (2017): Effizienzsteigerung numerischer Verfahren der nichtlinearen Optimierung, Dissertationsschrift, Universität Bremen.
- Geiger, C., Kanzow, C. (1999): Numerische Verfahren zur Lösung unrestringierter Optimierungsaufgaben, Berlin: Springer Verlag.
- Geiger, C., Kanzow, C. (2002): Theorie und Numerik restringierter Optimierungsaufgaben, Berlin: Springer Verlag.
- Geiger, W., Kotte, W. (2008): Handbuch Qualität, Grundlagen und Elemente des Qualitätsmanagements: Systeme - Perspektiven, 5. Auflage, Wiesbaden: Vieweg Verlag.

- Grabe, J. (1993): Fortlaufend inverse Berechnung der Bodensteifigkeit aus dem Schwingungsverhalten einer fahrenden Vibrationswalze, *Archive of Applied Mechanics*, 63: pp 472-478.
- Grabe, J. (2006): Optimierung in der Geotechnik, Strategien und Fallbeispiele ; Workshop Optimierung in der Geotechnik - Strategien und Fallbeispiele - am 10. Oktober 2006 in Hamburg, Hamburg: Techn. Univ. Hamburg-Harburg.
- Grabe, J.; Mahutka, K.-P.; Dührkop, J.; Henke, S. (2006): Inverse Bestimmung der horizontalen Bettung von Pfählen aus dem Schwingungsverhalten, VDI-Fachtagung Baudynamik, Kassel, VDI-Berichte Nr. 1941, VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf, S. 511-520.
- Groetsch, C. W. (1993): *Inverse problems in the mathematical sciences*, Braunschweig: Vieweg Verlag.
- Gudehus, G. (1981): *Bodenmechanik*, Stuttgart: Enke/Thieme Verlag.
- Hadamard, J. (1923): *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*, New Haven: Yale Univ. Press.
- Häfner, F. (1992): *Wärme- und Stofftransport*, Berlin: Springer Verlag.
- Haftmann, R. (2009): *Eagle-Guide Differenzialrechnung, Vom Ein- zum Mehrdimensionalen*. Hrsg. Bernd Luderer, Leipzig: Edition am Gutenbergplatz Leipzig (EAGLE) Verlag.
- Haque, M. I. (2015): *Mechanics of Groundwater in Porous Media*, Hoboken: CRC Press.
- Harr, M. E. (1993): *Groundwater and seepage*, New York: Dover.
- Harzheim, L. (2014): *Strukturoptimierung, Grundlagen und Anwendungen*, 2. Auflage: Europa-Lehrmittel Verlag.
- Hauser, C. (2005): *Boden-Bauwerk-Interaktion bei parallel-wandigen Verbundsystemen, Bodenmechanische Modellversuche unter Anwendung innovativer Auswerteverfahren*, Wuppertal: Dissertation Berichte des Lehr- und Forschungsgebietes Geotechnik, Hrsg. M. Pulsfort, Heft 29.
- Hauser, C.; Mainçon, P.; Walz, B. (2006): Ermittlung von Erddruckverteilungen aus Dehnungsmessungen mit der inversen FE-Methode (iFEM). *Bautechnik* 83 (9), S. 597–603.
- Heibaum, M.; Herten, M. (2007): Finite-Elemente-Methode für geotechnische Nachweise nach neuer Normung? *Bautechnik* 84 (9), S. 627–635.
- Henke, S. (2009): *Herstellungseinflüsse aus Pfahlrammung im Kaimauerbau*, Hamburg: Dissertation, Veröffentlichungen des Instituts für Geotechnik und Baubetrieb der Technischen Universität Hamburg, Hrsg. J. Grabe, Heft 18.

- Hettler, A., Triantafyllidis, T., Weißenbach, A. (2018): Baugruben, Berlin: Ernst & Sohn Verlag.
- Hill, M. C., Tiedeman, C. R. (2007): Effective groundwater model calibration, With analysis of data sensitivities predictions and uncertainty, Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons.
- Hofmann, B. (1999): Mathematik inverser Probleme, Stuttgart: Teubner Verlag.
- Hölter, R.; Barciaga, T.; Schanz, T. (2016): Optimiertes Monitoring geotechnischer Bauwerke und Bauabläufe bei Berücksichtigung von unscharfen Baugrundeigenschaften. In: Beiträge zum 7. RuhrGeo Tag 2016 – Qualitätssicherung und Schadensprävention im Grund- und Tunnelbau. Hrsg: M. Pulsfort, S. 47–61.
- Hölter, R.; Zhao, C.; Mahmoudi, E.; Lavasan, A. A.; Datcheva, M.; König, M.; Schanz, T. (2018): Optimal measurement design for parameter identification in mechanized tunneling. *Underground Space* 3 (1), S. 34–44.
- Hong, J.-M.; Chen, Y.-F; Liu, M.-M; Zhou, C.-B. (2017): Inverse modelling of groundwater flow around a large-scale underground cavern system considering the excavation-induced hydraulic conductivity variation. *Computers and Geotechnics* 81, S. 346–359.
- Huder, J. (1988): Piezometer-Geber für Grundwassermessungen, Schweizer Ingenieur und Architekt, Band 106, Heft 18.
- Jackson, D. D. (1978): Linear inverse theory with a priori data. In: *Applied Inverse Problems, Lectures presented at the RCP 264 “Etude Interdisciplinaire des Problèmes Inverses”*, sponsored by the Centre National de la Recherche Scientifique. Hrsg: P. Sabatier, Springer, Berlin, Heidelberg, S. 83–102.
- Jarre, F., Stoer, J. (2004): Optimierung, Berlin: Springer Verlag.
- Katzenbach, R.; Vogler, M.; Weidle, A. (2011): Komplexe Baugrund- und Grundwasserverhältnisse beim Stadtarchiv Köln, 25. Fortbildungsseminar Tragwerksplanung am 27.09.2011 in Friedberg (Hessen).
- Kinzler, S. (2011): Zur Parameteridentifikation, Entwurfs- und Strukturoptimierung in der Geotechnik mittels numerischer Verfahren, Hamburg: Dissertation, Veröffentlichungen des Instituts für Geotechnik und Baubetrieb der Technischen Universität Hamburg, Hrsg: J. Grabe, Heft 23.
- Kirchgraber, U.; Stoffer, D.; Kirsch, A. (2001): Schlecht gestellte Probleme- Oder wenn das Ungenaue genauer ist. In: 12. Schweizerischen Tag über Mathematik und Unterricht. Hrsg: Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, S. 1–33.

- Kluckert, K. D. (2016): Spezialtiefbau 2.0, Durch Schaden wird man klug, Berlin: Ernst & Sohn Verlag.
- Knaupe, W. (1968): Hydraulischer Grundbruch an Baugrubenumschließungen in kohäsionslosen Erdarten, Berlin: Deutsche Bauakademie.
- Kobus, H. (1974): Anwendung der Dimensionsanalyse in der experimentellen Forschung des Bauingenieurwesens, Bautechnik 51 (1974), Heft 3, S.88-94.
- Kolymbas, D. (2016): Geotechnik, Bodenmechanik, Grundbau und Tunnelbau, 4. Auflage, Berlin: Springer Verlag.
- Kovári, K.; Amstad, C. (1998): Feldmessungen in der Geotechnik, Messen in der Geotechnik 98. In: Mitteilung des Instituts für Grundbau und Bodenmechanik Technische Universität Braunschweig, S. 1-15, Heft 55.
- Kuhlmann, U. (1992): Inverse Modellierung in geklüfteten Grundwasserträgern, Zürich: Dissertation, Veröffentlichungen der Versuchsanstalt für Wasserbau, Hydrologie und Glazialogie der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich, Hrsg: D. Vischer, Heft 120.
- Kuntsche, K. (2016): Geotechnik, Erkunden - Untersuchen - Berechnen - Ausführen - Messen, Wiesbaden: Springer-Verlag.
- Kuntz, M. (1994): Inversion schlecht gestellter Probleme am Beispiel der bodengebundenen, passiven Millimeterwellenradiometrie, Karlsruhe: Kernforschungszentrum Karlsruhe, Institut für Meteorologie und Klimaforschung (IMK), Forschungsbericht, KfK-Bericht 5421.
- Laermann, K.-H. (1998): Über das inverse Problem der Bestimmung des aktuellen Zustands von Tragwerken aus Verformungsmessungen. Technische Mechanik Band 18 (1), S. 25–30.
- Lang, H.-J., Huder, J., Amann, P., Puzrin, A. M. (2011): Bodenmechanik und Grundbau, Das Verhalten von Böden und Fels und die wichtigsten grundbaulichen Konzepte, Berlin: Springer-Verlag.
- Ledesma, A; Gens, A. (1997): Inverse Analysis of a Tunnel Excavation Problem from Displacement and Pore Water Pressure Measurements. In: Material Identification Using Mixed Numerical Experimental Methods. Hrsg: H. Sol, C. Oomens, Springer Science+Business Media B.V, Dordrecht, S. 163–172.
- Louis, A. K. (1989): Inverse und schlecht gestellte Probleme, Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag.

- Lubasch, P. (2009): Identifikation von Verkehrslasten unter Einsatz von Methoden des soft computing, Essen: Dissertation, Schriftenreihe aus dem Institut für Massivbau, Universität Duisburg-Essen, Hrsg.: M. Schnellenbach-Held, Heft 4.
- Lubasch, P.; Schnellenbach-Held, M.; Buschmeyer, W. (2011): Computergestützte Identifikation von Verkehrslasten - Ergänztes Bauwerksmonitoring. Bauingenieur, Band 86, S. 433-442.
- Mahnken, R. (1998): Theoretische und numerische Aspekte zur Parameteridentifikation und Modellierung bei metallischen Werkstoffen, Hannover: Habilitationsschrift, Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Hrsg.: E. Stein.
- Mautz, R. (2001): Zur Lösung nichtlinearer Ausgleichungsprobleme bei der Bestimmung von Frequenzen in Zeitreihen, Berlin: Dissertation, Technische Universität Berlin, ehemalige Fakultät VI - Bauingenieurwesen und Angewandte Geowissenschaften, Hrsg.: D. Lelgemann, Heft 532.
- Mayer, P.-M; Schwab, C.; Voigt, T. (2004): Dimensionierung von Vakuumwasserhaltungen im tertiären Feinsand. Bautechnik 81 (7), S. 523–536.
- McLaughlin, D; Townley, L. R. (1996): A Reassessment of the Groundwater Inverse Problem. Water Resources Research 32 (5), S. 1131–1161.
- McNamee, J. (1949): Seepage into a Sheeted Excavation, Géotechnique H.4, S.229-241.
- Meier, J. (2009): Parameterbestimmung mittels inverser Verfahren für geotechnische Problemstellungen, Weimar: Dissertation, Bauhaus-Universität Weimar, Schriftenreihe Geotechnik, Hrsg.: T. Schanz u. K. J. Witt, Heft 19.
- Meteling, N.; Perau, E. (2017): Entwicklung einer analytischen Näherung für ein parameterisiertes Randwertproblem der Geotechnik. In: Fachsektionstage Geotechnik, Interdisziplinäres Forum, Würzburg, S. 424–429.
- Meteling, N.; Perau, E. (2019): Näherungslösungen für geohydraulische Nachweise bei Baugruben – ein Vergleich verschiedener Verfahren. In: Beiträge zum 10. RuhrGeo Tag 2019 - Neue Erkenntnisse und Bauverfahren in der Geotechnik. Hrsg: M. Pulsfort, S. 1–18.
- Montenegro, H. (1995): Parameterbestimmung und Modellierung der Wasserbewegung in heterogenen Böden, Düsseldorf: Dissertation, Institut für Hydromechanik der Universität Karlsruhe (TH), Fortschritt-Berichte VDI Reihe 15, Nr. 134.
- Mühl, T. (2006): Einführung in die elektrische Messtechnik, Grundlagen, Messverfahren, Geräte. 2. Auflage, Wiesbaden: Teubner Verlag.

- Munz, C.-D., Westermann, T. (2006): Numerische Behandlung gewöhnlicher und partieller Differenzialgleichungen, Berlin/Heidelberg: Springer Verlag.
- Müthing, N.; Zhao, C.; Hölter, R.; Schanz, T. (2018): Settlement prediction for an embankment on soft clay. *Computers and Geotechnics* 93, S. 87–103.
- Nagel, F.; Spohr, I.; Speier, L. (2012): Beobachtungsmethode in der Geotechnik – Verknüpfung von Messung und Simulation. *Tunnel* (3), S. 40–47.
- Neuman, S. P. (1980): A statistical approach to the inverse problem of aquifer hydrology: 3. Improved solution method and added perspective. *Water Resources Research* 16 (2), S. 331–346.
- Nocedal, J., Wright, S. J. (1999): Numerical optimization, New York: Springer.
- Nützmann, G., Moser, H. (2016): Elemente einer analytischen Hydrologie, Prozesse - Wechselwirkungen - Modelle, Wiesbaden: Springer Verlag.
- Odenwald, B. (1994): Parameteridentifizierung bei numerischen Grundwasserströmungsmodellen, Düsseldorf: Dissertation, Institut für Hydromechanik der Universität Karlsruhe (TH), Fortschritt-Berichte VDI Reihe 15, Nr. 125.
- Odenwald, B.; Hekel, U.; Thormann, H. (2017): Geotechnische Verfahren, Grundwasserströmung – Grundwasserhaltung. In: *Grundbau-Taschenbuch*, 8. Auflage. Hrsg: K. Witt, Ernst & Sohn, Berlin, S. 635–819.
- Odenwald, B.; Herten, M. (2008): Hydraulischer Grundbruch: neue Erkenntnisse. *Bautechnik* 85 (9), S. 585–595.
- Osthoff, D.; Grabe, J. (2016): Untersuchung von Schlosssprengungen an ausgeführten Ufereinfassungen mit kombinierten Spundwänden. *Bautechnik* 93 (12), S. 912–924.
- Pähler, I.; Danieli, S. (2010): Wehrhahn-Linie in Düsseldorf: Planung Architektur und Ausführung. *Tunnel* (4), S. 53–69.
- Parthier, R. (2008): Messtechnik, Grundlagen und Anwendungen der elektrischen Messtechnik für alle technischen Fachrichtungen und Wirtschaftsingenieure mit 30 Tabellen. 4. Auflage, Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn Verlag.
- Perau, E. (1995): Ein systematischer Ansatz zur Berechnung des Grundbruchwiderstands von Fundamenten, Essen: Dissertation, Universität - Gesamthochschule Essen, Mitteilungen aus dem Fachgebiet Grundbau und Bodenmechanik, Hrsg.: W. Richwien, Heft 19.

- Perau, E. (2001): Die Phasen des Bodens und ihre mechanischen Wechselwirkungen, Ein Konzept zur Mechanik teilgesättigter Böden, Essen: Habilitationsschrift, Universität Essen, Mitteilungen aus dem Fachgebiet Grundbau und Bodenmechanik, Hrsg.: W. Richwien, Heft 28.
- Perau, E. (2013): Einführung zum 4. RuhrGeo Tag "Baugruben und Grundwasser" 2013 an der Universität Duisburg-Essen, In: Baugruben und Grundwasser, Tagungsband zum 4. RuhrGeo Tag am 21.03.2013 in Essen; Universität Duisburg-Essen, Report Geotechnik, Heft 41; Hrsg.: E. Perau; S. 5-10, VGE-Verlag Essen.
- Perau, E.; Meteling, N. (2015): Modellgröße und Randbedingungen bei der geohydraulischen Berechnung einer Restwasserhaltung mit der FEM. Geotechnik 38 (1), S. 46–55.
- Perau, E.; Meteling, N. (2016): Anwendungen einer Näherungslösung für die Grundwasserströmung bei Restwasserhaltung. Bautechnik 93 (9), S. 636–646.
- Perau, E.; Meteling, N. (2017): Analytisch formulierte Näherungslösungen zur Grundwasserströmung bei einer Restwasserhaltung. Geotechnik 40 (1), S. 2–14.
- Perau, E.; Meteling, N.; Askamp, T. (2018): Grundwasserströmungen und geohydraulische Nachweise, Theorie für die Praxis. In: Schriftenreihe der Technischen Universität München, Zentrum Geotechnik, Heft 64, Hrsg.: R. Cudmani, Beiträge zum 17. Geotechnik-Tag in München, München, S. 65–79.
- Perau, E.; Potthoff, S. (2002): Parameteridentifikation bei Zweiphasen-Strömungen: Theorie und Numerik. In: Beiträge zum 4. Workshop "Teilgesättigte Böden", Weimar 2002 Schriftreihe Geotechnik - Bauhaus Universität Weimar, Heft 08, Hrsg.: T. Schanz u. K. J. Witt, S. 33-42.
- Perau, E.; Potthoff, S. (2003): Parameterbestimmung in der Geotechnik mit Hilfe Inverser Problemstellungen. Bauingenieur Jg. 78 (Heft 2), S. 98–106.
- Pieper, M. (2017): Mathematische Optimierung, Eine Einführung in die kontinuierliche Optimierung mit Beispielen, Wiesbaden: Springer Verlag.
- Pitteloud, L.; Meier, J. (2009): Kennwerte weicher Böden für geotechnische Verformungsprognosen, Mitteilungen der Schweizerischen Gesellschaft für Boden- und Felsmechanik, Herbsttagung, 6. November 2009, Lausanne, S. 69–82.
- Placzek, D.; König, L. (2010): Geotechnische Grundlagen für die Planung und Ausführung des Abwasserkanals Emscher. In: Geotechnische Herausforderungen beim Umbau des Emscher-Systems. Hrsg: T. Schanz, S. 20–36.

- Poeter, E. P.; Hill, M. C. (1997): Inverse Models: A Necessary Next Step in Ground-Water Modeling. *Ground Water* 35 (2), S. 250–260.
- Polubarinova-Kochina, P.Y.A. (1962): *Theory of Groundwater Movement*, Princeton: Princeton University Press.
- Rechea, C.; Levasseur, S.; Finno, R. (2008): Inverse analysis techniques for parameter identification in simulation of excavation support systems. *Computers and Geotechnics* 35 (3), S. 331–345.
- Reichling, K.; Asgharzadeh, A.; Raupach, M. (2014): Neuer Ansatz zur Bestimmung des elektrischen Betonwiderstands bei vorhandener Bewehrung. *Bautechnik* 91 (11), S. 822–827.
- Reinhardt, R., Hoffmann, A., Gerlach, T. (2013): *Nichtlineare Optimierung, Theorie, Numerik und Experimente*, Berlin/Heidelberg: Springer Verlag.
- Richter, M. (2015): *Inverse Probleme, Grundlagen, Theorie und Anwendungsbeispiele*, Berlin/Heidelberg: Springer Verlag.
- Rieger, A. (2005): *Zur Parameteridentifikation komplexer Materialmodelle auf der Basis realer und virtueller Testdaten*, Stuttgart: Dissertation, Universität Stuttgart, Forschungsberichte des Instituts für Mechanik (Bauwesen), Nr. I-14.
- Saltelli, A. (2007): *Sensitivity analysis in practice, A guide to assessing scientific models*, Hoboken, NJ: Wiley.
- Schanz, T.; Meier, J. (2008): Gestaltung, Validierung und Optimierung von Messprogrammen für geotechnische Aufgabenstellungen. *Bautechnik* 85 (5), S. 307–316.
- Schek, H.-J.; Eggensperger, R. (1977): Least-Squares-Lösungen und Dämpfung bei unterbestimmten nichtlinearen Gleichungssystemen. *Computing* 19 (2), S. 157–170.
- Schmidt, H.-H. (1996): *Grundlagen der Geotechnik, Bodenmechanik - Grundbau - Erdbau*, Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag.
- Schmidt, H.-H., Buchmaier, R. F., Vogt-Breyer, C. (2014): *Grundlagen der Geotechnik, Geotechnik nach Eurocode. 4. Auflage*, Wiesbaden: Springer Verlag.
- Schmitz, S. (1989): *Hydraulische Grundbruchsicherheit bei räumlicher Anströmung*, Essen: Dissertation, Gesamthochschule Essen, Mitteilungen aus dem Fachgebiet Grundbau und Bodenmechanik, Hrsg. H. Nendza, Heft 16.
- Schroeder, K. (2004): *Beiträge der Parameteridentifikation zur Fahrdynamikanalyse*, Düsseldorf: Dissertation, Fakultät für Maschinenwesen, Technische Universität München.

- Schultze, E., Muhs, H. (1967): Bodenuntersuchungen für Ingenieurbauten. 2. Auflage, Berlin/Heidelberg: Springer Verlag.
- Schumacher, A. (2013): Optimierung mechanischer Strukturen, Grundlagen und industrielle Anwendungen. 2. Auflage, Berlin: Springer Verlag.
- Schwarz, S. (2001): Sensitivitätsanalyse und Optimierung bei nichtlinearem Strukturverhalten, Stuttgart: Dissertation, Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart, Heft 34.
- Schwenkert, R., Stry, Y. (2015): Operations Research kompakt, Eine an Beispielen orientierte Einführung, Berlin/Heidelberg: Springer Gabler Verlag.
- Sennewald, R. (2011): Einsturz des Stadtarchivs Köln-Stadtbahn-Bauwerk Waidmarkt, Erkenntnisse des Prüflingenieurs. In: Beiträge zum 10. Geotechnik-Tag in München, Wasser und Boden. Hrsg: N. Vogt, München, S. 151–165.
- Siebertz, K., van Bebber, D., Hochkirchen, T. (2010): Statistische Versuchsplanung, Design of Experiments (DoE), Heidelberg: Springer Verlag.
- Siemers, M. (1998): Klassifizierung von Brettschichtholzbalken mit Hilfe der Parameteridentifikation, Kassel: Dissertation, Universität Gesamthochschule Kassel.
- Sioshansi, R., Conejo, A. J. (2017): Optimization in engineering, Models and algorithms, Cham: Springer International Publishing.
- Smolczyk, U. (1999): Beobachten-aber methodisch richtig. In: Die Beobachtungsmethode in der Geotechnik-Konzeption und ausgewählte Beispiele, Beiträge zum 14. Christian Veder Kolloquium. Hrsg: G. Riedmüller, et al., S. 1–12.
- Stein, O. (2018): Grundzüge der Nichtlinearen Optimierung, Berlin: Springer Verlag.
- Strang, G. (2010): Wissenschaftliches Rechnen, Berlin/Heidelberg: Springer Verlag.
- Sun, N.-Z; Yeh, W. W.-G. (1990): Coupled inverse problems in groundwater modeling: 2. Identifiability and experimental design. *Water Resources Research* 26 (10), S. 2527–2540.
- Sun, N.-Z; Yeh, W. W.-G. (2007): Development of objective-oriented groundwater models: 1. Robust parameter identification. *Water Resources Research* 43 (2), S. 1717.
- Sünkel, H. (2007): Inverse Probleme. *Elektrotechnik & Informationstechnik* 124 (7-8), S. 221.
- Tang, Y.-G; Kung, G. T.-C. (2009): Application of nonlinear optimization technique to back analyses of deep excavation. *Computers and Geotechnics* 36 (1-2), S. 276–290.

- Tarantola, A. (2005): Inverse problem theory and methods for model parameter estimation, Philadelphia: SIAM.
- Überhuber, C. (1995): Computer-Numerik 1, Berlin/Heidelberg: Springer Verlag.
- Ulbrich, M. (2006): Methoden der mathematischen Optimierung. In: Optimierung in der Geotechnik, Strategien und Fallbeispiele ; Workshop Optimierung in der Geotechnik - Strategien und Fallbeispiele - am 10. Oktober 2006 in Hamburg. Hrsg: J. Grabe, Techn. Univ. Hamburg-Harburg, Hamburg, S. 3–43.
- Ulbrich, M., Ulbrich, S. (2012): Nichtlineare Optimierung, Basel: Birkhäuser Verlag.
- Vahdati, P.; Levasseur, S.; Mattsson, H.; Knutsson, S. (2014): Inverse Hardening soil parameter identification of an earth and rockfill dam by genetic algorithm optimization., Electronic Journal of Geotechnical Engineering 19 (N), 3327-3349.
- Verruijt, A. (1970): Theory of Groundwater Flow, London: Macmillan Education UK.
- Villmann, B.; Bretschneider, N.; Slowik, V.; Michel, A. (2006): Bestimmung von Materialeigenschaften zementgebundener Werkstoffe mittels inverser Analyse. Bautechnik 83 (11), S. 747–753.
- Voigt, T. (2014): Bau der Rheinquerung A44 in Ilverich. In: Beiträge zum 3. Geotechnik-Tag in München, Tunnel in offener Bauweise / spezielle Baugruben. Hrsg: N. Vogt, München, S. 59–74.
- Vollenweider, U. (1988): Baugrubenerstellung, Schweizer Ingenieur und Architekt Nr. 29, S. 863–867.
- Wang, D.; Liu, P.; Otto, F.; Oeser, M.; Balck, H. (2017): Zerstörungsfreie Bewertung der strukturellen Substanz der Asphaltbefestigung mit Geofonen. Bautechnik 94 (10), S. 697–709.
- Watzenig, D.; Steiner, G. (2007): Inverse Probleme in der Elektrotechnik. Elektrotechnik & Informationstechnik 124 (7-8), S. 223.
- Wendland, K. (2011): Facettenreiche Mathematik, Einblicke in die moderne mathematische Forschung für alle, die mehr von Mathematik verstehen wollen, Wiesbaden: Vieweg Verlag.
- Witzenhausen, H. (2017): Elektrische Batteriespeichermodelle, Modellbildung, Parameteridentifikation und Modellreduktion, Aachen: Dissertation, Beiträge des Instituts für Stromrichtertechnik und Elektrische Antriebe der RWTH Aachen (ISEA), Hrsg.: R.D. Doncker, Band 90.

- Wolf, J. (2006): Räumlich differenzierte Modellierung der Grundwasserströmung alluvialer Aquifere für mesoskalige Einzugsgebiete, Stuttgart: Dissertation, Mitteilungen des Instituts für Wasser- und Umweltsystemmodellierung, Universität Stuttgart, Heft 148.
- Wolff, T. (2010): Ein methodischer Bemessungsansatz zur Abschätzung des Tragverhalten von Pfahlgründungen in weichem kalkigem Sedimentgestein, Weimar: Dissertation, Bauhaus-Universität Weimar, Schriftenreihe Geotechnik, Hrsg.: K. J. Witt, Heft 22.
- Wünsch, A. (2017): Effizienter Einsatz von Optimierungsmethoden in der Produktentwicklung durch dynamische Parallelisierung, Magdeburg: Dissertation, Otto-von-Guericke-Universität, Lehrstuhl für Maschinenbauinformatik, Hrsg.: S. Vajna, Band 20.
- Yeh, W. W.-G. (1986): Review of Parameter Identification Procedures in Groundwater Hydrology: The Inverse Problem. *Water resources research: a journal of the sciences of water* 1986 (Volume 22, Issue 2), S. 95–108.
- Yin, Z.-Y; Jin, Y.-F; Shen, J. S; Hicher, P.-Y. (2018): Optimization techniques for identifying soil parameters in geotechnical engineering: Comparative study and enhancement. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 42 (1), S. 70–94.
- Zhao, C; Lavasan, A. A; Barciaga, T; Zarev, V; Datcheva, M; Schanz, T. (2015): Model validation and calibration via back analysis for mechanized tunnel simulations – The Western Scheldt tunnel case. *Computers and Geotechnics* 69, S. 601–614.
- Ziegler, M. (2013): Geotechnische Nachweise nach EC 7 und DIN 1054, Einführung mit Beispielen. 3. Auflage, Berlin: Ernst & Sohn Verlag.
- Zimmerer, M.; Kauther, R.; Herten, M.; Schwab, R.; Schanz, T. (2009): Anwendung von Optimierungsverfahren bei der Auswertung von Labor und Feldversuchen für Schleusenbauten. In: 3. Workshop des DGGT Arbeitskreises 1.6 Numerik in der Geotechnik, Aktuelle Entwicklungen bei der Anwendung numerischer Verfahren in der Geotechnik. Hrsg: Bundesanstalt für Wasserbau (BAW), S. 11–30.

Anhang

A Näherungsgleichungen

A1. Potenziale in den Stützstellen

Die Näherungsgleichung für das dimensionslose Potenzial in den Stützstellen (vgl. Abb. 3.5 und Abb. 3.6) kann mit folgender Gleichung bestimmt werden (vgl. Peraus und Meteling, 2017):

$$\Phi(x_{2P}, x_{3P}) = \Phi_A + (\Phi_D - \Phi_A) \cdot \phi_P \left(\frac{x_{2P}}{b}, \frac{x_{3P}}{t_i}, \sqrt{\frac{k_h}{k_v} \cdot \frac{t_i}{b}} \right) \quad (\text{A.1})$$

mit:

$$\phi_P(t^*) = 1 - \left(\beta_4 \cdot (t^*)^4 + \beta_3 \cdot (t^*)^2 + \beta_2 \cdot (t^*) + \beta_1 \right)^{-\beta_e} \quad (\text{A.2})$$

Die in Gl. (A.2) benötigten β -Werte sind für die ebene und rotationssymmetrische Strömung sind jeweils in Tab. A.1 und Tab. A.2 zusammengefasst:

Tabelle A.1: β_{eben} -Werte für die Näherungsgleichung der Stützstellen (eben)

β_{eben} Punkt	$\beta_{4,\text{eben}}$	$\beta_{3,\text{eben}}$	$\beta_{2,\text{eben}}$	$\beta_{1,\text{eben}}$	$\beta_{e,\text{eben}}$
P=M	0	6,649	3,839	1	0,3606
P=S	201,9	197,2	44,87	1	0,1718
P=B	0	0	1,339	2	1

Tabelle A.2: β_{rot} -Werte für die Näherungsgleichung der Stützstellen (rotationssymmetrisch)

β_{rot} Punkt	$\beta_{4,\text{rot}}$	$\beta_{3,\text{rot}}$	$\beta_{2,\text{rot}}$	$\beta_{1,\text{rot}}$	$\beta_{e,\text{rot}}$
P=M	0	15,19	4,582	1	0,4483
P=S	1040	398,9	31,86	1	0,2201
P=B	0	0	4,561	2	1

A2. Potenzialverteilung entlang der Wand, Baugrubenmitte und Wandunterkante

Nachfolgend werden die Näherungsgleichungen zur Berechnung der Potenzialverteilung für unterschiedliche Strecken im Strömungsgebiet aufgeführt:

- Strecke MB Unterkante Wand, von Baugrubenmitte bis zum Verbauwandfußpunkt:

$$\phi_{\text{UK_Wand}}(\xi_2) = \alpha_3 + \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2 \cdot \xi_2^2} \quad (\text{A.3})$$

mit:

$$\alpha_1 = \frac{\left(\frac{7}{8}\right)^2 \cdot (\phi_B - \phi_M) - (\phi_S - \phi_M)}{\left(1 - \left(\frac{7}{8}\right)^2\right) \cdot (\phi_B - \phi_M) \cdot (\phi_S - \phi_M)} \quad (\text{A.4})$$

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1^2 \cdot (\phi_B - \phi_M)}{1 + \alpha_1 \cdot (\phi_B - \phi_M)} \quad (\text{A.5})$$

$$\alpha_3 = \phi_M - 1/\alpha_1 \quad (\text{A.6})$$

- Strecke OM Vertikalschnitt in Baugrubenmitte:

$$\phi_{\text{Mitte}}(\xi_3, t^*) = \xi_3 \cdot \phi_M(t^*) \quad (\text{A.7})$$

- Strecke AB Vertikalschnitt an der Innenseite der Verbauwand:

$$\phi_{\text{Wand_i}}(\xi_3) = (2 \cdot \phi_B - 1) \cdot \xi_3 + 2(1 - \phi_B) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \cdot \arccos \xi_3\right) \quad (\text{A.8})$$

- Strecke DC Vertikalschnitt an der Außenseite der Verbauwand:

$$\phi_{\text{Wand_a}}(\xi_3) = (2 \cdot \phi_B - 1) \cdot 1 + 2(1 - \phi_B) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \arccos \xi_3\right) \quad (\text{A.9})$$

Hinweise zu den Gleichungen:

- Alle o.g. Gleichungen gelten bei ebener und rotationssymmetrischer Strömung
- Die Gl. (A.9) gilt unter der Annahme, dass $\phi_C \approx \phi_B$

A3. Berechnung Wasserzufluss

Die Näherungsgleichungen zur Berechnung des Wasserzuflusses in die Baugrube bei ebener und rotationssymmetrischer Strömung lauten:

- Eben:

$$q_{\text{eben}} = k_v \cdot A \cdot \frac{\Phi_D - \Phi_A}{t_i} \cdot q_{\text{eben}}^* \quad (\text{A.10})$$

mit:

$$q_{\text{eben}}^* = \alpha_3 + \frac{1}{\sqrt{\alpha_1 \cdot \alpha_2}} \cdot \operatorname{artanh} \left(\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \right) \quad (\text{A.11})$$

- Rotationssymmetrisch:

$$q_{\text{rot}} = k_v \cdot A \cdot \frac{\Phi_D - \Phi_A}{t_i} \cdot q_{\text{rot}}^* \quad (\text{A.12})$$

mit:

$$q_{\text{rot}}^* = \alpha_3 - \frac{1}{\alpha_2} \cdot \left(\ln \left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \right) \quad (\text{A.13})$$

B Programmcode MATLAB

B1. Unterprogramme

Unterprogramm *betaval* zur Bestimmung der β -Werte für die Näherungsgleichungen:

```
1 % © N.Meteling 03.04.2019
2 % FG Geotechnik Uni DUE (Prof. Perau)
3 % Erstellt mit MATLAB R2017a
4
5 % Bestimmung der Beta-Werte für die analytischen Näherungsgleichungen
6 % nach Perau u. Meteling (2016,2017)
7
8 % In der Function sind die Beta-Werte für die drei Stuetzstellen
9 % M,S,B hinterlegt fuer das ebene und das rotationssymmetrische Modell
10
11 function [beta]=betaval(a,b)
12
13 modell=a; % a=1=Eben, a=2=Rotationssymmetrisch
14 punkt=b; % b=1=Punkt B, b=2=Punkt S, b=3=Punkt M
15
16 % beta=[beta_4,beta_3,beta_2,beta_1,beta_e]
17
18 % Modell = Eben
19
20 if modell==1
21
22     if punkt==1 % Punkt B
23
24         beta= [0 0 1.339 2 1];
25
26     elseif punkt==2 % Punkt S
27
28         beta= [201.9 197.2 44.87 1 0.1718];
29
30     elseif punkt==3 % Punkt M
31
32         beta= [0 6.649 3.839 1 0.3606];
33
34     end
35
36 % Modell = Rotationssymmetrisch
37
38     elseif modell==2
39
40         if punkt==1 % Punkt B
41
42             beta= [0 0 4.561 2 1];
43
44         elseif punkt==2 % Punkt S
45
46             beta= [1040 398.9 31.86 1 0.2201];
47
48         elseif punkt==3 % Punkt M
49
50             beta= [0 15.19 4.582 1 0.4483];
51
52         end
53     end
54
55 end
```

Unterprogramm *phi_analytisch* zur Bestimmung der Potenziale mit den Näherungsgleichungen:

```

1  % © N.Meteling 03.04.2019
2  % FG Geotechnik Uni DUE (Prof. Perau)
3  % Erstellt mit MATLAB R2017a
4
5  % Berechnung der Potenziale anhand der Näherungsgleichungen
6  % nach Perau u.Meteling (2016,2017)
7
8  % Verwendete Functions:
9  % betaval(...) zur Bestimmung der Beta-Werte
10
11 function Phi=phi_analytisch(kh,kv,Phi_D,Phi_A,ti,ta,b,x2,x3,x3A,modell)
12
13 % Einlesen der notwendigen Variablen aus dem Workspace
14
15     a_k=evalin('base','a_k');
16     a_ti=evalin('base','a_ti');
17     innen=evalin('base','innen');
18
19 % Programminterne Abfrage
20
21     if a_k==1
22         syms alpha_k
23         ts=sqrt(alpha_k).*ti./b;
24     else
25         ts=sqrt(kh/kv).*ti./b;
26     end
27
28     if x2==0 % Näherungsgleichung Baugrubenmitte (OM)
29
30         % Einlesen der Beta-Werte
31
32         punkt=3;
33         beta=betaval(modell,punkt);
34
35         % Dimensionsloses Potenzial --> Stuetzpunkt M
36
37         phi_calc_M =(1-(beta(1,1).*ts.^4+beta(1,2).*...
38             ts.^2+beta(1,3).*ts+beta(1,4)).^(-beta(1,5)));
39
40         % Dimensionsloses Potenzial --> Strecke OM
41
42         phi_calc_M = phi_calc_M.*(x3A./ti-x3./ti);
43
44     % Dimensionsbehaftetes Potenzial im Punkt M
45
46     Phi=(Phi_A+(Phi_D-Phi_A).*phi_calc_M);
47
48     elseif x2==b/2 % Näherungsgleichungen Wand Außen/Innen
49
50         % Einlesen der Beta-Werte
51         punkt=1;
52         beta=betaval(modell,punkt);
53
54         % Dimensionsloses Potenzial --> Stuetzpunkt B
55
56         phi_calc_B =(1-(beta(1,1).*ts.^4+beta(1,2).*...
57             ts.^2+beta(1,3).*ts+beta(1,4)).^(-beta(1,5)));
58

```

```

59  %-----
60  % Fortsetzung function phi_analytisch(...)
61  %-----
62
63      % Programminterne Abfrage
64
65          if a_ti==0
66              xi3=x3A./ti-x3./ti;
67              if xi3>1
68                  xi3=1;
69              end
70          else
71              xi3=x3A./ti-x3./ti;
72          end
73
74      % Abfrage Näherungsgleichungen Wand Außen/Innen?
75
76      if innen==1
77          % Wandinnenseite
78
79          phi_calc_B_x3=(2*phi_calc_B-1)*(xi3)+...
80              2*(1-phi_calc_B)*(1/2-1/pi*acos(xi3));
81      else
82          % Wandaußenseite
83
84          phi_calc_B_x3=(2*phi_calc_B-1)*(1)+...
85              2*(1-phi_calc_B)*(1/2+1/pi*acos(xi3));
86      end
87
88      % Dimensionsbehaftetes Potenzial:
89
90      Phi=(Phi_A+(Phi_D-Phi_A).*phi_calc_B_x3);
91
92  else
93
94      % Einlesen der Beta-Werte
95
96      beta_B=betaval(modell,1); % Stuetzpunkt B
97
98      beta_S=betaval(modell,2); % Stuetzpunkt S
99
100     beta_M=betaval(modell,3); % Stuetzpunkt M
101
102     % Dimensionslose Potenziale in den Stuetzpunkten:
103
104     phiBA=1-(beta_B(1,1).*ts.^4+beta_B(1,2).*...
105         ts.^2+beta_B(1,3).*ts+beta_B(1,4)).^(-beta_B(1,5));
106
107     phiSA=1-(beta_S(1,1).*ts.^4+beta_S(1,2).*...
108         ts.^2+beta_S(1,3).*ts+beta_S(1,4)).^(-beta_S(1,5));
109
110     phiMA=1-(beta_M(1,1).*ts.^4+beta_M(1,2).*...
111         ts.^2+beta_M(1,3).*ts+beta_M(1,4)).^(-beta_M(1,5));
112
113     % Berechnung der Beiwerte fuer die Hyperbelfunktion:
114
115     a1 = ((7/8).^2*(phiBA-phiMA)-(phiSA-phiMA))./...
116         ((1-(7/8).^2)*(phiSA-phiMA).*(phiBA-phiMA));
117
118     a2 = (a1.^2*(phiBA-phiMA))./(1+(phiBA-phiMA)*a1);

```

```

119 %-----
120 % Fortsetzung function phi_analytisch(...)
121 %-----
122
123         % Dimensionslose Potenzial entlang der Wandunterkante:
124
125         pUk = a3+(a1-a2*(x2./(b/2)).^(2)).^(-1);
126
127         % Dimensionsbehaftetes Potenzial:
128
129         Phi = (Phi_A+pUk.*(Phi_D-Phi_A));
130
131     end
132
133     assignin('base','Phi',Phi)
134
135 end

```

Unterprogramm *Pressure* zur Umrechnung eines Potentials in einen Porenwasserdruck:

```

1   % © N.Meteling 03.04.2019
2   % FG Geotechnik Uni DUE (Prof. Perau)
3   % Erstellt mit MATLAB R2017a
4
5   % Umrechnung Potenzial in Standrohrspiegelhoehe unter Verwendung der
6   % Wichte des Wassers und der geodaetischen Höhe des Messpunktes
7
8   function [up]=Pressure(Phi_p,x3p,gamma_w)
9
10  up=(Phi_p-x3p)*gamma_w;
11
12  % Mit:
13  %     x3P=geodaetische Hoehe
14  %     Phi_p=Potential im Punkt P
15  %     gamma_w= Wichte Wasser
16
17  end

```

Unterprogramm *Absenk* zur Simulation einer Absenkung des Grundwasserspiegels innerhalb der Baugrube:

```
1  % © N.Meteling 03.04.2019
2  % FG Geotechnik Uni DUE (Prof. Perau)
3  % Erstellt mit MATLAB R2017a
4
5  % Simulierte Absenkung innerhalb der Baugrube
6
7  function absenk=Absenk(anz_m,t_a,t_e,value_s)
8
9  % anz_m = Gesamtanzahl der Zeitschritte
10 % t_a = Anfang Absenkschritt
11 % t_e = Ende Absenkschritt
12 % value_s = Absenkmaß
13
14 absenk_s=zeros(anz_m,1);
15
16 for i=t_a:t_e
17
18 absenk_s(i)=value_s;
19
20 end
21
22 absenk=absenk_s;
23
24 end
```

Unterprogramm *q_analytisch* zur Berechnung des Wasserzufflusses anhand der Näherungsgleichungen:

```

1  % © N.Meteling 03.04.2019
2  % FG Geotechnik Uni DUE (Prof. Perau)
3  % Erstellt mit MATLAB R2017a
4
5  % Berechnung Wasserzuffluss anhand der analytischen
6  % Näherungsgleichungen nach Perau u.Meteling (2016,2017)
7
8  % Verwendete Functions:
9  % betaval(...) zur Bestimmung der Beta-Werte
10
11 function[q]=q_analytisch(kh,kv,Phi_D,Phi_A,ti,ta,b,modell)
12
13 % Beta-Werte für das Modell
14
15     beta_B=betaval(modell,1); % Stuetzpunkt B
16     beta_S=betaval(modell,2); % Stuetzpunkt S
17     beta_M=betaval(modell,3); % Stuetzpunkt M
18
19 % Synthetische Messwerte für das Potenzial generieren
20
21     ts=sqrt(kh/kv).*ti./b;
22
23 % Dimensionslose Potenziale in den Stuetzpunkten:
24
25     phiBA=1-(beta_B(1,1).*ts.^4+beta_B(1,2).*...
26         ts.^2+beta_B(1,3).*ts+beta_B(1,4)).^(-beta_B(1,5));
27
28     phiSA=1-(beta_S(1,1).*ts.^4+beta_S(1,2).*...
29         ts.^2+beta_S(1,3).*ts+beta_S(1,4)).^(-beta_S(1,5));
30
31     phiMA=1-(beta_M(1,1).*ts.^4+beta_M(1,2).*...
32         ts.^2+beta_M(1,3).*ts+beta_M(1,4)).^(-beta_M(1,5));
33
34 % Berechnung der Beiwerte fuer die Hyperbelfunktion:
35
36     a1 = ((7/8).^2*(phiBA-phiMA)-(phiSA-phiMA))./...
37         ((1-(7/8).^2)*(phiSA-phiMA).*(phiBA-phiMA));
38
39     a2 = (a1.^2*(phiBA-phiMA))./(1+(phiBA-phiMA)*a1);
40
41     a3 = phiMA-1./a1;
42
43 % Wasserzuffluss fuer eben und rotationssymmetrisch
44
45     if modell==1 % eben
46
47         qs = a3+(a1*a2).^(-1/2).*atanh((a2/a1).^(1/2));
48         A = b;
49         q = kv.*A.*((Phi_D-Phi_A)./ti).*qs; % [m³/s/m]
50
51     else % rotationssymmetrisch
52
53         qs =a3-(1/a2).*(log(1-a2/a1));
54         A = pi*b.^2/4;
55         q = kv.*A.*((Phi_D-Phi_A)./ti).*qs; % [m³/s]
56
57     end
58
59 end

```

Unterprogramm *phi_q_FEM* zur Berechnung der Grundwasserströmung mit der FEM:

```

1   % © N.Meteling 03.04.2019
2   % FG Geotechnik Uni DUE (Prof. Perau)
3   % Erstellt mit MATLAB R2017a
4
5   % Berechnung der Grundwasserströmung mit der FEM-Methode
6   % Rueckgriff auf die MATLAB PDEToolbox
7
8   function
9   [Phi_FEM,q_FEM]=phi_q_FEM(ti,b_g,dw,bm,tm,ta,Phi_D,Phi_A,kh,kv,Px,Py,
10  GSoHS,F_Umrechnung)
11
12  % Halbe Breite der Baugrube
13
14  B=0.5*b_g;
15
16  %-----
17  % FE Berechnung der GW Stroemung
18  %-----
19  % Erstellung PDE Modell
20
21  numberOfPDE = 1; % Vorgabe der zu lösenden Partielle DGL
22
23  pdem = createpde(numberOfPDE);
24
25  % Geometrie
26
27  n=ta-ti;
28
29  % Geometriepunkte für gesamtes oder halbes Modell
30
31  if GSoHS==1 % Gesamte Baugrube GSoHS = 1
32
33      g = decsg([3 12 0 bm/2-B-dw bm/2-B-dw bm/2-B bm/2-B bm/2+B
34                bm/2+B bm/2+B+dw bm/2+B+dw bm bm 0 ...
35                tm+n tm+n tm-ti tm-ti tm tm tm-ti tm-ti ...
36                tm+n tm+n 0 0]');
37
38  else % Gesamte Baugrube GSoHS = 0
39
40      g = decsg([3 8 0 B B B+dw B+dw bm bm 0 ...
41                tm tm tm-ti tm-ti tm+n tm+n 0 0]');
42
43  end
44
45  % Verbinden der Geometriepunkte
46
47  geometryFromEdges(pdem, g);
48
49  % Erstellung FE-Netz
50
51  [p,e,t] =
52  initmesh(g,'Hgrad',1.3,'Jiggle','on','MesherVersion','R2013a');
53
54  % Netz Verfeinerung
55
56  [p,e,t] = refinemesh(g,p,e,t,'regular');
57  [p,e,t] = refinemesh(g,p,e,t,'regular');
58  [p,e,t] = refinemesh(g,p,e,t,'regular');
59  [p,e,t] = refinemesh(g,p,e,t,'regular');
60  p = jigglemesh(p,e,t,'opt','mean');

```

```

61 %-----
62 % Fortsetzung function [Phi_FEM,q_FEM]=(...)
63 %-----
64
65 % Definition Randbedingungen Boundary_Matrix
66
67     if GSoHS==1
68
69         % Neumann RB (Inferior) gesamte System
70
71         b_inf=[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1;
72              0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1;
73              1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1;
74              1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1;
75              48 48 48 48 48 48 48 48 48 1 1 1;
76              48 48 48 48 48 48 48 48 48 1 1 1;
77              48 48 48 48 48 48 48 48 48 48 48 48;
78              48 48 48 48 48 48 48 48 48 48 48 48;
79              49 49 49 49 49 49 49 49 49 49 49 49;
80              49 48 48 48 48 48 48 48 48 49 49 48 49];
81
82         % Dirichlet RB (Superior) gesamte System
83
84         b_sup=[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1;
85              0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 1 1;
86              1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1;
87              1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1;
88              48 48 48 48 1 48 1 48 48 1 1 1;
89              48 48 48 48 1 48 1 48 48 1 1 1;
90              48 48 48 48 48 48 48 48 48 48 48 48;
91              48 48 48 48 48 48 48 48 48 48 48 48;
92              49 49 49 49 49 49 49 49 49 49 49 49;
93              49 48 48 48 49 48 49 48 49 49 48 49];
94     else
95
96         % Neumann RB (Inferior) gesamte System
97
98         b_inf=[1 1 1 1 1 1 1 1;
99              0 0 0 0 0 0 1 1;
100              1 1 1 1 1 1 1 1;
101              1 1 1 1 1 1 1 1;
102              48 48 48 48 48 48 1 1;
103              48 48 48 48 48 48 1 1;
104              48 48 48 48 48 48 48 48;
105              48 48 48 48 48 48 48 48;
106              49 49 49 49 49 49 49 49;
107              48 48 48 48 48 48 48 49];
108
109         % Dirichlet RB (Superior) gesamte System
110
111         b_sup=[1 1 1 1 1 1 1 1;
112              0 0 0 1 0 0 1 1;
113              1 1 1 1 1 1 1 1;
114              1 1 1 1 1 1 1 1;
115              48 48 48 1 48 48 1 1;
116              48 48 48 1 48 48 1 1;
117              48 48 48 48 48 48 48 48;
118              48 48 48 48 48 48 48 48;
119              49 49 49 49 49 49 49 49;
120              48 48 48 49 48 48 48 49];
121     end

```

```
122 %-----
123 % Fortsetzung function [Phi_FEM,q_FEM]=(...)
124 %-----
125
126 % Vorgabe der PDE Koeffizienten
127
128 a = 0;
129 f = 0;
130
131 % Speichern der Ergebnisse im Workspace
132
133 assignin('base','a',a);
134 assignin('base','f',f);
135 assignin('base','p',p);
136 assignin('base','e',e);
137 assignin('base','t',t);
138 assignin('base','B',B);
139 assignin('base','b_sup',b_sup);
140 assignin('base','b_inf',b_inf);
141
142 % Materialparameter
143
144 c = [kh;0;kv];
145
146 % Assemblierung
147
148 u_sup_g = assempde(b_sup,p,e,t,c,a,f); % Superior (Dirichlet)
149 u_inf_g=assempde(b_inf,p,e,t,c,a,f); % Inferior (Neumann)
150
151 % Speichern der Ergebnisse im Workspace
152
153 assignin('base','u_sup_g',u_sup_g);
154 assignin('base','u_inf_g',u_inf_g);
155
156 % Auswertung Potenzial in einem Punkt im Stroemungsgebiet
157 % Potenzial WUK
158 % x-Koordinate des Punktes, wo das Potenzial ausgewertet wird
159
160 xs = Px;
161
162 % y-Koordinate des Punktes, wo das Potenzial ausgewertet wird
163
164 ys = Py;
165
166 Fs = TriScatteredInterp(p(1,:)', p(2,:)', u_sup_g);
167
168 % Potenzial mit Dirichlet RB am seitlichen Rand
169
170 u_sup = Fs(xs,ys);
171
172 assignin('base','u_sup',u_sup);
173
174 Fs = TriScatteredInterp(p(1,:)', p(2,:)', u_inf_g);
175
176 % Potenzial mit Neumann RB am seitlichen Rand
177
178 u_inf = Fs(xs,ys);
179
180 % Programminterne Abfrage, ob Modellgebiet groß genug
181
182 diff_u_sup_inf=u_sup-u_inf;
```

```

183 %-----
184 % Fortsetzung function [Phi_FEM,q_FEM]=(...)
185 %-----
186
187 assignin('base','diff_u_sup_inf',diff_u_sup_inf);
188
189     if diff_u_sup_inf>0.001
190         warning('Modellgebiet zu klein, bitte bm/tm vergrößern!');
191     end
192
193 % Berechnung dimensionsbehaftetes Potenzial
194
195 % Im vorgegebenen Punkt
196
197 Phi_FEM= Phi_A+(Phi_D-Phi_A).*u_sup;
198
199 % Im gesamten Stroemungsgebiet
200
201 Phi_Q= Phi_A+(Phi_D-Phi_A).*u_sup_g;
202
203 % Berechnung Wasserzufluss in den Knotenpunkten
204
205 [qx, qy]=pdecgrad(p,t,c,Phi_Q);
206
207     qxn = pdeprtni(p,t,qx);
208
209     qyn = pdeprtni(p,t,qy);
210
211 % Angabe der Punkte für Auswertung in einem beliebigen Schnitt
212
213 xi3=0;
214
215     if GSoHS==1
216
217         P1x = bm/2-B; P1y = tm-ti*xi3;
218
219         P2x = bm/2+B; P2y = tm-ti*xi3;
220
221     else
222         P1x = 0; P1y = tm-ti*xi3;
223
224         P2x = B; P2y = tm-ti*xi3;
225
226     end
227
228 % Auswertung Wasserzufluss
229
230 qxs = linspace(P1x,P2x,1000);
231 qys = linspace(P1y,P2y,1000);
232
233 Qs = TriScatteredInterp(p(1,:)', p(2,:)', qyn);
234 qs = Qs(qxs,qys);
235
236 % Integration des Wasserzuflusses über xs
237
238     if GSoHS==1
239         q_FEM = F_Umrechnung.*-1.*trapz(qxs,qs);
240     else
241         q_FEM = 2*F_Umrechnung.*-1.*trapz(qxs,qs);
242     end
243 end

```

B2. Sensitivitätsanalyse der direkten Problemstellung

Näherungslösungen:

```

1  % © N.Meteling 07.04.2019
2  % FG Geotechnik Uni DUE (Prof. Perau)
3  % Erstellt mit MATLAB R2017a
4
5  % Berechnung der Sensitivität der direkten Problemstellung
6  % (Grad der Anisotropie) mit den Näherungsgleichungen
7
8  % Symbolische Variabeln nach denen abgeleitet werden soll
9
10 syms alpha_k
11
12 variables=[alpha_k];
13
14 % Berechnung der lokalen Sensitivitäten
15
16 d_Phi(variables)=jacobian(phi_analytisch(kh,kv,Phi_D,Phi_A,ti,ta,b_g,
17                                     x2,x3,x3A,modell),[variables]);
18
19 s(variables)=Pressure(d_Phi,x3,gamma_w);

```

FEM:

```

1  % © N.Meteling 07.04.2019
2  % FG Geotechnik Uni DUE (Prof. Perau)
3  % Erstellt mit MATLAB R2017a
4
5  % Berechnung der Sensitivität der direkten Problemstellung
6  % (Grad der Anisotropie) mit der FEM-Methode
7
8  % Schrittweise numerische Ableitung
9
10 delta_h=1e-5;
11
12 delta_h_nenner=[delta_h];
13
14 % Berechnung der lokalen Sensitivitäten
15
16 % rechtsseitige Lösung
17
18
19 [Phi_FEM_rechts,~]=phi_q_FEM(ti,b_g,dw,bm,tm,ta,Phi_D,Phi_A,kh+delta_h
20 kv,Px,Py,GSoHS,F_Umrechnung);
21
22     u_numerical_u_rechts=Pressure(Phi_FEM_rechts,x3u,10);
23
24     u_numerical_u_rechts_ges=u_sup_g;
25
26 % linksseitige Lösung
27
28     [Phi_FEM_links,~]=phi_q_FEM(ti,b_g,dw,bm,tm,ta,Phi_D,Phi_A,kh-
29 delta_h,kv,Px,Py,GSoHS,F_Umrechnung);
30
31     u_numerical_u_links=Pressure(Phi_FEM_links,x3u,10);
32
33     u_numerical_u_links_ges=u_sup_g;
34
35 % Zentrale Differenzenformel
36
37     s=0.5*(u_numerical_u_rechts-u_numerical_u_links)./delta_h_nenner;

```

B3. Synthetische Messdaten

Berechnung der synthetischen Messdaten anhand der Näherungsgleichungen:

```

1  % © N.Meteling 03.04.2019
2  % FG Geotechnik Uni DUE (Prof. Perau)
3  % Erstellt mit MATLAB R2017a
4
5  % Berechnung synthetische Messdaten anhand der analytischen
6  % Näherungsgleichungen nach Perau u.Meteling (2016,2017)
7
8  % Verwendete Functions:
9  % betaval(...) zur Bestimmung der Beta-Werte
10 % phi_analytisch (...) Naehrungsgl. Potenzial
11 % q_analytisch (...) Naehrungsgl. Wasserzufluss
12 % Pressure(...) Umrechnung Potenzial in Porenwasserdruck
13 % Absenk(...) Simulierte GW-Absenkung innerhalb der Baugrube
14
15 % Eingangsdaten für die direkte Problemstellung zur Erzeugung der
16 % synthetischen Messdaten nach Perau/Meteling (2016)
17
18 % Lage normiertes KO_System für die Gl. nach Perau/Meteling (2016)
19
20 x3A=22;
21
22 % Modell (Eben/Rotationssymmetrisch)
23
24 modell=1;          % Eben (1)
25
26 % Eingangsgroößen
27
28 ti=10;            % Einbindelänge
29 ta=10;            % Einschnitt ins Tertiär beruecksichtigen?
30 b=25;             % Breite der Baugrube
31 L=100;            % Länge der Baugrube
32 Phi_D=36;         % Randpotenzial Außen
33 Phi_A=23;         % Randpotenzial Innen
34
35 % Materialparameter
36
37 kh=5.1e-5;        % Durchlaessigkeitsbeiwert (Horizontal)
38 kv=1.0e-5;        % Durchlaessigkeitsbeiwert (Vertikal)
39
40 % Platzhalter fuer spaetere Berechnungen
41 a_k=0;
42 a_ti=0;
43 innen=0;
44
45 anz_m=120;        % Gesamte Anzahl der Zeitschritte
46
47 % Randpotenziale Außen ohne Messabweichung
48
49 Phi_D_syn_o_A=Phi_D*ones(anz_m,1);
50
51 % Vorgabe der Absenkschritte innerhalb der Baugrube
52
53 absenk_1=Absenk(anz_m,1,30,4);          % Absenkschritt 1
54 absenk_2=Absenk(anz_m,31,60,7);         % Absenkschritt 2
55 absenk_3=Absenk(anz_m,61,90,10);        % Absenkschritt 3
56 absenk_4=Absenk(anz_m,91,120,Phi_D-Phi_A); % Absenkschritt 4
57
58 % Randpotenziale Innen ohne Messabweichung
59
60 Phi_A_syn_o_A=Phi_D_syn_o_A-(absenk_1+absenk_2+absenk_3+absenk_4);

```

Fortsetzung Programm für synthetische Messdaten:

```

61 % Randpotenziale mit Messabweichung
62
61 % Normalverteilte Messabweichung
62     randn(...)
63
64 for i=1:2
65     rng(i); % Reproduzierbarkeit
66     std_syn=[0.45,0.35]; % Standardabweichung
67     mue_syn=0; % Mittelwert
68     e_rand_RP(i,:)=std_syn(1,i)*randn(anz_m,1)... % Zufällige Abw.
69                 +mue_syn;
70 end
71
72 Phi_D_syn_m_A=Phi_D_syn_o_A+e_rand_RP(1,:);
73 Phi_A_syn_m_A=Phi_A_syn_o_A+e_rand_RP(2,:);
74
75 % Messpunkte zur Bestimmung des Porenwasserdrucks
76
77 x2=[0,0,10.9375,12.5,12.5];
78 x3=[17,12,12,12,20];
79
80 % Berechnung der synthetischen Messdaten der Porenwasserdrücke
81 % (Ohne Abweichung)
82
83 for j=1:length(x2)
84     for i=1:anz_m
85         Phi_syn_o_A(i,j)=phi_analytisch(kh,kv,Phi_D_syn_o_A(i,1),...
86
87         Phi_A_syn_o_A(i,1),ti,ta,b,x2(1,j),x3(1,j),x3A,modell);
88         U_syn_o_A(i,j)=Pressure(Phi_syn_o_A(i,j),x3(1,j),10);
89     end
90 end
91
92 % Berechnung der synthetischen Messdaten der Porenwasserdrücke
93 % (Mit Abweichung)
94
95 for i=1:length(x2)
96     rng(i+2); % Reproduzierbarkeit
97     std_syn_u=[2.5]; % Standardabweichung
98     mue_syn_u=0; % Mittelwert
99     eps_syn_u(i,:)=std_syn_u*randn(anz_m,1)+... % Zufälliger Abw.
100                 mue_syn_u;
101 end
102
103 U_syn_m_A=U_syn_o_A+eps_syn_u';
104
105 % Wasserzufluss ohne Messfehler
106
107 F_Umrechnung=60*60; % Umrechnung m³/s in m³/h
108
109     if modell==1
110         L=L;
111     else
112         L=1;
113     end
114
115 for i=1:anz_m
116
117 % Wasserzuflussrate in m³/s/m
118 q_syn_o_A(i,1)=q_analytisch(kh,kv,Phi_D_syn_o_A(i,1),...
119                             Phi_A_syn_o_A(i,1),ti,ta,b,modell);
120 end

```

Fortsetzung Programm für synthetische Messdaten:

```
121 % Umrechnung gesamter Wasserzufluss in m³/h
122
123 Q_syn_o_A=q_syn_o_A.*F_Umrechnung.*L;
124
125 % Wasserzufluss mit Messabweichung
126
127 for i=1:length(x2)
128     rng(i+2+length(x2));           % Reproduzierbarkeit
129     std_syn_q=[1.5];              % Standardabweichung
130     mue_syn_q=0;                  % Mittelwert
131     eps_syn_q=std_syn_q*randn(anz_m,1)+... % Zufällige Abw.
132         mue_syn_q;
133 end
134
135 Q_syn_m_A=Q_syn_o_A+eps_syn_q;
```

Unterprogramm (unrestringierte Optimierung) $lmfun(x)$ zur Übergabe der Zielfunktion und des Gradienten der Zielfunktion an die OPTIMIZATION Toolbox:

```

1  function [F,J] = lmfun(x)
2
3  % Einlesen der Wichtungsfaktoren
4
5      w_j=evalin('base','w_j');
6
7  % Einlesen der Residuen
8
9      r_u_1=evalin('base','r_u_1');
10     r_u_2=evalin('base','r_u_2');
11     r_u_3=evalin('base','r_u_3');
12     r_u_4=evalin('base','r_u_4');
13     r_u_5=evalin('base','r_u_5');
14     r_q=evalin('base','r_q');
15
16 % Einlesen der Ableitungen der Residuen
17
18     J_r_1=evalin('base','J_r_1');
19     J_r_2=evalin('base','J_r_2');
20     J_r_3=evalin('base','J_r_3');
21     J_r_4=evalin('base','J_r_4');
22     J_r_5=evalin('base','J_r_5');
23     J_q=evalin('base','J_q');
24
25 % Übergabe der Residuen an den Optimierungsalgorithmus
26
27     F=[w_j(1,1).*double(r_u_1(x(1),x(2)));
28        w_j(1,2).*double(r_u_2(x(1),x(2)));
29        w_j(1,3).*double(r_u_3(x(1),x(2)));
30        w_j(1,4).*double(r_u_4(x(1),x(2)));
31        w_j(1,5).*double(r_u_5(x(1),x(2)));
32        w_j(1,6).*double(r_q(x(1),x(2)))];
33
34 % Übergabe der Ableitungen an den Optimierungsalgorithmus
35
36     if nargin > 1
37
38         J=[w_j(1,1).*double(J_r_1(x(1),x(2)));
39            w_j(1,2).*double(J_r_2(x(1),x(2)));
40            w_j(1,3).*double(J_r_3(x(1),x(2)));
41            w_j(1,4).*double(J_r_4(x(1),x(2)));
42            w_j(1,5).*double(J_r_5(x(1),x(2)));
43            w_j(1,6).*double(J_q(x(1),x(2)))];
44
45     end
46
47 end

```

Unterprogramm (restringierte Optimierung) *objfungradient(x)* zur Übergabe der Zielfunktion und des Gradienten der Zielfunktion an die OPTIMIZATION Toolbox:

```
1  function [f,gradf,He]=objfungradient(x)
2
3  % Einlesen der Zielfunktion nebst Gradient u. HM
4
5  f=evalin('base','f');
6  G=evalin('base','G');
7  H=evalin('base','H');
8
9  % Übergabe Zielfunktion an Optimierungsalgorithmus
10
11  f=double(f(x(1),x(2)));
12
13  % Übergabe Gradient an Optimierungsalgorithmus
14
15  if nargin > 1
16
17      gradf=double(G(x(1),x(2)));
18
19  % Übergabe HM an Optimierungsalgorithmus
20
21      if nargin>2
22
23          He=double(H(x(1),x(2)));
24
25      end
26  end
27
28  end
```

B4. Parameteridentifikation

```
1 % Problemstellung-Parameteridentifikation Baugrube
2 % © N.Meteling 09.06.2019
3 % FG Geotechnik Uni DUE (Prof. Perau)
4 % Erstellt mit MATLAB R2017a
5
6 % Anhand von synthetischen Messdaten Porenwasserdruck/Wasserzufluss
7 % Rückrechnung von Parametern unter Verwendung der Gl. Nach Pe/Me
8 % (2016,2017,2018)
9 % Problem: Parameteridentifikation
10
11 % Bekannt:          ti,b,kh,kv,alpha_k,Phi_D,Phi_A
12 % Unbekannt:       [...]
13
14 % Datengrundlage:  Synthetische Messdaten
15
16 % 1.Schritt: Eingabe Eingangsgrößen und Definieren der Unbekannten
17 % 2.Schritt: Einlesen der Messdaten aus Excel-Datei
18 % 3.Schritt: Aufstellen der Zielfunktion f(x)
19 % 4.Schritt: Suche Minimum von f(x) mit lsqnonlin (unrestringiert)
20 % Wenn Schritt 4 nicht erfolgreich dann:
21 % 5.Schritt: Suche Minimum von f(x) mit fmincon (restringiert)
22
23 % Löschen Workspace und Command Window
24
25 clc
26
27 clear all
28
29 %-----
30 % 1. Schritt: Eingabe Eingangsgrößen und Definieren der Unbekannten
31 %-----
32
33 % Geometrie Baugrube
34
35 ti=[...]; % Einbindetiefe gem. Definition Perau/Meteling (2016)
36 ta=[...]; % ta=ti (Erweiterung für ti ungleich ta folgt spaeter
37 b=[...]; % Breite der Baugrube
38 x3A=[...]; % Lage normiertes KO_System für die Gl.
39 % nach Perau/Meteling (2016,2017,2018)
40
41 % Modell (Eben/Rotationssymmetrisch)
42
43 Modell=[...]; % Eben (1), Rotationssymmetrisch (2)
44
45 L=[...]; % Länge der Baugrube
46
47 kh=1; % Platzhalter für spätere Berechnung
48 kv=1; % Platzhalter für spätere Berechnung
49 a_k=1; % Platzhalter für spätere Berechnung
50 a_ti=0; % Platzhalter für spätere Berechnung
51 innen=1; % Platzhalter für spätere Berechnung
52
53 % Unbekannte als symbolische Variable definieren
54
55 syms [...]
56
57 x_var=[...]; % Unbekannter Parametervektor
```

Fortsetzung Programm zur Parameteridentifikation:

```
58  %-----
59  % 2.Schritt: Einlesen der Messdaten aus Excel-Datei
60  %-----
61
62  % Einlesen der Synthetische Messdaten:
63
64  % Dateiname der Excel-Datei mit den synthetischen Messdaten eingeben
65
66  txt=' [...]';
67
68  [x2_u,x3_u,Phi_D_syn,Phi_A_syn,q_syn,u_syn_1,u_syn_2,u_syn_3,u_syn_4,
69  u_syn_5]=excelread(txt,8,127);
70
71  % Koordinaten der Messpunkte
72
73  x2=x2_u';
74  x3=x3_u';
75
76  % Welche Messdaten sollen berücksichtigt werden?
77
78  T0=[...];      % Startpunkt (Zeitschritt t_0)
79  TE=[...];     % Endpunkt (Zeitschritt t_e)
80
81  asp=T0:TE;
82
83  % Messdaten Randpotenziale
84
85  Phi_D=Phi_D_syn(asp,1);
86  Phi_A=Phi_A_syn(asp,1);
87
88  % Messdatensatz Porenwasserdruck
89
90  U_syn=[u_syn_1(asp,1),u_syn_2(asp,1),u_syn_3(asp,1),u_syn_4(asp,1),...
91         u_syn_5(asp,1)];
92
93  % Messdatensatz Wasserzufluss
94
95  Q_syn=[q_syn(asp,1)];
96
```

Fortsetzung Programm zur Parameteridentifikation:

```

97  %-----
98  % 3.Schritt: Aufstellen der Zielfunktion f(x)
99  %-----
100
101  % Direkte Problemstellung anhand Gleichungen nach Perau/Meteling
102  (2016,2017,2018)
103
104  % Potenzial
105
106  Phi_calc_1(x_var)=phi_analytisch(kh,kv,Phi_D,Phi_A,ti,ta,b,x2(1,1),
107                                x3(1,1),x3A,Modell);
108
109  Phi_calc_2(x_var)=phi_analytisch(kh,kv,Phi_D,Phi_A,ti,ta,b,x2(1,2),
110                                x3(1,2),x3A,Modell);
111
112  Phi_calc_3(x_var)=phi_analytisch(kh,kv,Phi_D,Phi_A,ti,ta,b,x2(1,3),
113                                x3(1,3),x3A,Modell);
114
115  Phi_calc_4(x_var)=phi_analytisch(kh,kv,Phi_D,Phi_A,ti,ta,b,x2(1,4),
116                                x3(1,4),x3A,Modell);
117
118  Phi_calc_5(x_var)=phi_analytisch(kh,kv,Phi_D,Phi_A,ti,ta,b,x2(1,5),
119                                x3(1,5),x3A,Modell);
120
121  % Wasserzufluss
122
123  Q_calc(x_var)=q_analytisch(kh,kv,Phi_D,Phi_A,ti,ta,b,Modell)
124                    .*time_s_h.*L;
125
126  % Umrechnung Potenzial --> Porenwasserdruck
127
128  U_calc_1(x_var)=Pressure(Phi_calc_1,x3(1,1),10);
129  U_calc_2(x_var)=Pressure(Phi_calc_2,x3(1,2),10);
130  U_calc_3(x_var)=Pressure(Phi_calc_3,x3(1,3),10);
131  U_calc_4(x_var)=Pressure(Phi_calc_4,x3(1,4),10);
132  U_calc_5(x_var)=Pressure(Phi_calc_5,x3(1,5),10);
133
134  % Aufstellen der Residuen
135
136  % Porenwasserdruck
137
138  r_u_1(x_var)=(U_syn(:,1)-U_calc_1);
139  r_u_2(x_var)=(U_syn(:,2)-U_calc_2);
140  r_u_3(x_var)=(U_syn(:,3)-U_calc_3);
141  r_u_4(x_var)=(U_syn(:,4)-U_calc_4);
142  r_u_5(x_var)=(U_syn(:,5)-U_calc_5);
143
144  % Wasserzufluss
145
146  r_q(x_var)=Q_syn-Q_calc;
147
148  % Aufstellen der Zielfunktion
149
150  % Porenwasserdruck
151
152  eta=1/2;      % Normierungsfaktor
153
154  f_u_1(x_var)=eta.*transpose(r_u_1)*r_u_1;
155  f_u_2(x_var)=eta.*transpose(r_u_2)*r_u_2;
156  f_u_3(x_var)=eta.*transpose(r_u_3)*r_u_3;
157  f_u_4(x_var)=eta.*transpose(r_u_4)*r_u_4;
158  f_u_5(x_var)=eta.*transpose(r_u_5)*r_u_5;

```

Fortsetzung Programm zur Parameteridentifikation:

```
159 % Wasserzufluss
160
161 f_q(x_var)=eta.*transpose(r_q)*r_q;
162
163 % Wichtungsfaktoren zur Berücksichtigung unterschiedlicher Messwerte
164 % Beruecksichtigen? j/n (1/0)
165
166     w_j=[1,1,1,1,1,1]; %[wu1,wu2,wu3,wu4,wu5,wq]
167
168 % Gesamte Zielfunktion
169
170     f(x_var)=w_j(1,1).*f_u_1...
171             +w_j(1,2).*f_u_2...
172             +w_j(1,3).*f_u_3...
173             +w_j(1,4).*f_u_4...
174             +w_j(1,5).*f_u_5;...
175             +w_j(1,6).*f_q;...
176
177 % Gradient der Zielfunktion
178
179     G(x_var)=jacobian(f,[x_var])';
180
181 % Hesse-Matrix der Zielfunktion
182
183     H(x_var)=hessian(f,[x_var]);
184
185 % Ableitung der Residuen
186
187 % Porenwasserdruck
188
189     J_r_1(x_var)=jacobian(r_u_1,x_var);
190     J_r_2(x_var)=jacobian(r_u_2,x_var);
191     J_r_3(x_var)=jacobian(r_u_3,x_var);
192     J_r_4(x_var)=jacobian(r_u_4,x_var);
193     J_r_5(x_var)=jacobian(r_u_5,x_var);
194
195 % Wasserzufluss
196
197     J_q(x_var)=jacobian(r_q,[x_var]);
```

Fortsetzung Programm zur Parameteridentifikation:

```

197 %-----
198 % 4.Schritt: Suche Minimum von f(x) mit lsqnonlin (unrestringiert)
199 %-----
200
201 % Optimization options
202
203 maxIter=400;      % Maximale Anzahl an Iterationen
204                  % default=200*Anzahl Variablen
205 maxFunEvals=400; % Maximale Anzahl an Funktionsauswertungen
206                  % default=200*Anzahl Variablen
207 TolFun=1e-8;     % Aenderung Funktionswert Abbruchkriterium
208                  % default=1e-4
209 TolX=1e-8;       % Aenderung Schaetzwert Variablen Abbruchkriterium
210                  % default=1e-4
211
212 tic
213
214 % Startwerte
215
216 x0=[...];
217
218 % Optimierungsverfahren = Levenberg-Marquardt
219
220 options=optimoptions(@lsqnonlin,'SpecifyObjectiveGradient',true,...
221                      'Algorithm','...
222                      'levenberg-marquardt','Display','iter',...
223                      'Diagnostics','on',...
224                      'FunValCheck','on',...
225                      'TolX',TolX,'TolFun',TolFun,...
226                      'MaxFunEvals', maxFunEvals,...
227                      'MaxIter',maxIter );
228
229 [x_LM,resnorm,res,exit] = lsqnonlin(@lmfun,x0,[],[],options);
230
231 t_lm=toc./60;
232 %-----
233 % 5.Schritt: Suche Minimum von f(x) mit fmincon (restringiert)
234 %-----
235 tic
236
237 % Zielfunktion zur Übergabe an Optimization Toolbox
238
239 OBJFUN=@objfungradient;
240
241 % Startwerte
242
243     x0=[...];
244
245 % Obere und untere Grenze für die Parameter
246
247     lb=[...];           % untere Grenze
248     ub=[...];           % obere Grenze
249
250 % Optimierungsverfahren = Lokale SQP-Verfahren
251
252 % Anwendung des Optimierungsverfahrens mit function fmincon
253
254 options=optimoptions(@fmincon,'SpecifyObjectiveGradient',true,...
255                      'Algorithm','sqp','Display','iter',...
256                      'TolX',TolX,'TolFun',TolFun);
257
258 [x_SQP,fval,exitflag,output,lambda]=fmincon(OBJFUN,x0,[],[],[],[],lb,
259 ub,[],options);
260
261 t_SQP=toc./60;

```


In der Schriftenreihe sind bisher folgende Hefte erschienen:

Forschungsberichte aus dem Fachbereich Bauwesen, Universität Essen Gesamthochschule, Herausgegeben vom Dekan des Fachbereiches 10 - Bauwesen, (in dieser Reihe erschienen als Heft 4)

Heft 1 von H. Nendza und anderen (1978):

Grundbau und Bodenmechanik an der Universität Essen - GHS. Ein Überblick zu Lehre, Forschung und praktischer Anwendung

(enthält Beiträge von: H. Nendza, H. G. Gabener, D. Placzek, D. Rollberg, J. Kramer u. R. Hütz, H. Nendza u. G. Lehmann, K. R. Ulrichs, M. Donel, G. Ehl, J. Kramer, G. Reuter, K. W. John, H.-G. Pühl) *(beim Fachgebiet vergriffen)*

**ohne Angabe über die Schriftenreihe und den Herausgeber,
Druck: Fotodruck J. Mainz, Aachen**

Heft 2 von Karl R. Ulrichs (1980):

Untersuchungen über das Trag- und Verformungsverhalten verankerter Schlitzwände in rolligen Böden, (Dissertation) *(beim Fachgebiet vergriffen)*

**Mitteilungen aus dem Fachgebiet Grundbau und Bodenmechanik,
Universität Essen - GHS, Herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. H. Nendza**

Heft 3 von Dietmar Placzek (1982):

Untersuchungen über das Schwindverhalten bindiger Böden bei der Trocknung unter natürlichen Randbedingungen (Dissertation) *(beim Fachgebiet vergriffen)*

Heft 4 mit Beiträgen verschiedener Autoren (1982):

Grundbau-Seminar 1982, Vorträge, enthält Beiträge von: H. Nendza, K. R. Ulrichs, J. Kramer, N. Veith, H.-G. Pühl, R. M. Spang, M. Donel, G. Reuter, R.H. Rübener, D. Placzek, H.-G. Gabener *(beim Fachgebiet vergriffen)*

Heft 5 von Helmut Nendza, Georg Foik (1982):

Vergleichende Untersuchungen über den Einsatz eines Messerschildes im oberflächennahen Tunnelbau

**Mitteilungen aus dem Fachgebiet Grundbau und Bodenmechanik, Universität -
Gesamthochschule - Essen, Herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. H. Nendza**

Heft 6 von Hans-Günter Gabener (1983):

Untersuchungen über die Anfangsgradienten und Filtergesetze bei bindigen Böden, (Dissertation) *(beim Fachgebiet vergriffen)*

Heft 7 von Helmut Nendza, Claus Nacke (1984):

Das Gebirgsverhalten beim Auffahren dicht beieinander liegender Tunnel im Bielefelder Juratonstein *(beim Fachgebiet vergriffen)*

Heft 8 von Georg Foik (1984):

Die Tragfähigkeit überwiegend horizontal Beanspruchter Fundamente auf dicht gelager-tem Sand, (Dissertation)

Heft 9 von Christoph Heckötter (1985):

Untersuchung zur Abschätzung des Steifemoduls von Grobschluffschüttungen mit Hilfe einfacher, bodenmechanischer Kennwerte, (Dissertation)

Heft 10 mit Beiträgen verschiedener Autoren (1985):

2. Grundbau-Seminar, Vorträge, mit Beiträgen von: H. Nendza, G. Foik, G. Ehl, K. R. Ulrichs, M. Donel, H.G. Gabener, J. Kramer, N. Veith, W. Göb, G. Lehmann, Ch. Heckötter

Forschungsberichte aus dem Fachbereich Bauwesen, Universität Gesamthochschule Essen, Herausgegeben vom Dekan des Fachbereiches 10 - Bauwesen, (in dieser Reihe erschienen als Heft 35)

Heft 11 von Helmut Nendza, Christoph Heckötter (1985):

Die Verwendung von aufbereitetem Bauschutt im Erd- und Straßenbau
(beim Fachgebiet vergriffen)

Mitteilungen aus dem Fachgebiet Grundbau und Bodenmechanik, Universität - Gesamthochschule - Essen, Herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. H. Nendza

Heft 12 von Helmut Nendza, Claus Nacke (1986):

Der Einfluss der Lagerungsdichte auf die Tragfähigkeit überwiegend horizontal beanspruchter und auf Sand gegründeter Fundamente

Heft 13 von Klaus Schulte (1988):

Wasserbewegung in ungesättigten feinkörnigen Böden, (Dissertation)

Mitteilungen aus dem Fachgebiet Grundbau und Bodenmechanik, Universität - Gesamthochschule - Essen, Herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. H. Nendza, Verlag Glückauf

Heft 14 von Claus Nacke (1988):

Horizontal belastete Fundamente mit geneigter Sohlfläche, (Dissertation)

Heft 15 mit Beiträgen verschiedener Autoren (1988):

3. Grundbau-Seminar 1988, Vorträge, mit Beiträgen von: H. Schnettler u. G. Fluck, J. Kramer, H. J. Gräfer, H. Nendza, K. R. Ulrichs, W. Sondermann, Chr. Heckötter, K. Schulte, D. Placzek

Heft 16 von Stefan Schmitz (1989):

Hydraulische Grundbruchsicherheit bei räumlicher Anströmung, (Dissertation)

Heft 17 von Fahran Al. Akhras (1992):

Tragfähigkeit schrägbelasteter Streifenfundamente mit vertikalem Sporn auf dicht gelagertem Sand, (Dissertation)

Heft 18 von Klaus Haubrichs (1993):

Widerstand eines dicht gelagerten Sandes gegen Beanspruchung infolge ausmittigschräg oder exzentrisch belasteter starrer Einzelfundamente, (Dissertation)

Mitteilungen aus dem Fachgebiet Grundbau und Bodenmechanik, Universität - Gesamthochschule Essen, Herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. W. Richwien, Verlag Glückauf

Heft 19 von Eugen W. Perau (1995):

Ein systematischer Ansatz zur Berechnung des Grundbruchwiderstands von Fundamenten, (Dissertation) *(beim Fachgebiet vergriffen)*

Heft 20 von Frank Könemann (1995):

Beeinflussung des Grundwasserspiegels durch unterirdische Bauwerke, (Dissertation) *(beim Fachgebiet vergriffen)*

Heft 21 von Lothar Maßmeier (1995):

Bemessungsgrundlagen der stationären Infiltration von Grundwasser - Untersuchungen an Sanden, (Dissertation)

Heft 22 von Hans-Gerd Schoen (1996):

Untersuchungen zur Gasdurchlässigkeit trockener und teilgesättigter Sande, (Dissertation)

Heft 23 mit Beiträgen verschiedener Autoren (1998):

Beiträge zur aktuellen Forschung in Grundbau und Bodenmechanik, mit Beiträgen von: W. Richwien u. E. Perau, H.-G. Schoen, E. Perau u. K. Golücke u. W. Richwien, E. Perau

Mitteilungen aus dem Fachgebiet Grundbau und Bodenmechanik, Universität Essen, Herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. W. Richwien und Prof. Dr.-Ing. M. Achmus, Verlag Glückauf

Heft 24 von Jörg Malkus (2000):

Untersuchung des Bodenverhaltens im Kontaktbereich von zyklisch axial belasteten Pfählen und Ankern, (Dissertation)

Heft 25 von Zhenggui Wang (2000):

Behaviour of soils and foundation structures under cyclic loads, (Dissertation)

Heft 26 von Jörg Mangels (2000):

Beschreibung von Strömungen im ungesättigten Boden, (Dissertation)

Mitteilungen aus dem Fachgebiet Grundbau und Bodenmechanik, Universität Essen, Herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. W. Richwien, Verlag Glückauf

Heft 27 von Kerstin Lesny (2001):

Entwicklung eines konsistenten Versagensmodells zum Nachweis der Standsicherheit flachgegründeter Fundamente, (Dissertation)

Heft 28 von Eugen Perau (2001):

Die Phasen des Bodens und ihre mechanischen Wechselwirkungen - Ein Konzept zur Mechanik teilgesättigter Böden, (Habilitationsschrift)

Heft 29 von Jens Wiemann, Kerstin Lesny, Werner Richwien (2002):

Gründung von Offshore-Windenergieanlagen Gründungskonzepte und geotechnische Grundlagen

Mitteilungen aus dem Fachgebiet Grundbau und Bodenmechanik, Universität Duisburg-Essen, Herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. W. Richwien, Verlag Glückauf

Heft 30 von Roland Weißmann (2003):

Die Widerstandsfähigkeit von Seedeichbinnenböschungen gegenüber ablaufendem Wasser, (Dissertation)

Heft 31 von Susanne Potthoff (2003):

Simulation von Zweiphasen-Strömungen im Boden Ein Programmsystem auf Basis der Gemischten Finite-Elemente-Methode, (Dissertation)

Heft 32 von Magnus Geduhn (2006):

Geokunststoffummantelte Vakuum-Säulen Ein Gründungsverfahren für sehr weiche bindige Böden, (Dissertation) *(beim Fachgebiet vergriffen)*

Mitteilungen aus dem Fachgebiet Grundbau und Bodenmechanik, Universität Duisburg-Essen, Herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. W. Richwien, VGE Verlag

Heft 33 von Jens Wiemann (2007):

Bemessungsverfahren für horizontal belastete Pfähle Untersuchungen zur Anwendbarkeit der p-y Methode, (Dissertation)

Heft 34 von Aloys Kisse (2008):

Entwicklung eines Systemgesetzes zur Beschreibung der Boden-Bauwerk-Interaktion flachgegründeter Fundamente auf Sand, (Dissertation)

Heft 35 von Patrik Lammertz (2008):

Ermittlung der Tragfähigkeit vibrierter Stahlrohrpfähle in nichtbindigen Böden, (Dissertation)

Heft 36 von Kerstin Lesny (2008):

Gründung von Offshore-Windenergieanlagen – Werkzeuge für Planung und Bemessung, (Habilitationsschrift)

Heft 37 von Peter Hinz (2009):

Beurteilung des Langzeitverhaltens zyklisch horizontal belasteter Monopile-Gründungen, (Dissertation)

**Report Geotechnik, Universität Duisburg-Essen,
Herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. E. Perau, VGE Verlag**

Heft 38 von Carsten Pohl (2010):

Witterungsbedingte Gefügebildung bei See- und Ästuardeichen und ihr Einfluss auf die Deichsicherheit, (Dissertation)

(Bestellung über www.uni-due.de/geotechnik)

Heft 39 von Lars Vavrina (2011):

Bewertung der Schutzfunktion bewachsener Deichbinnenböschungen gegen Erosion, (Dissertation)

(Bestellung über www.uni-due.de/geotechnik)

Heft 40 mit Beiträgen verschiedener Autoren (2013):

Untertage-Pumpspeicherwerke in Anlagen des Berg- und Tagebaus

mit Beiträgen von: E. Perau, U. Schreiber, A. Niemann, H.-J. Wagner, M. K. Koch u. P. Mark; A. J. Daou Pulido, V. Koppers, J. Lohmann, H.-J. Wagner u. M. K. Koch; A. Niemann, R. Alvarado Montero u. T. Wortberg; E. Perau, U. Schreiber u. H. Luick; U. Schreiber, H. Luick u. E. Perau; E. Perau u. S. Korn; D. Sanio u. P. Mark

(vergriffen)

Heft 41 mit Beiträgen verschiedener Autoren (2013):

Baugruben und Grundwasser, Tagungsband zum 4. RuhrGeo Tag am 21.03.2013 in Essen, mit Beiträgen von: E. Perau; B. Schuppener; A. Hettler; K. Borchert u. F. Köne-
mann;

A. Slotta u. E. Perau; L. Röchter u. T. Schanz; C. Heitz, A. Jechorek, u. A. Verhoeks;

B. Odenwald, H. Montenegro, R. Kauther u. M. Herten; D. Placzek, L. König u.

B. Bauckhage; G. Lottritz, M. Pulsfort u. P. Waldhoff; B. Böhle, F. Ludwig u.

R. Otterbein

(Bestellung über www.uni-due.de/geotechnik)

**Report Geotechnik, Universität Duisburg-Essen,
Herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. E. Perau, Shaker Verlag**

(Bestellung über www.shaker.de)

Heft 42 mit Beiträgen verschiedener Autoren (2017):

Wechselwirkung Baugrund – Bauwerk, Tagungsband zum 8. RuhrGeo Tag am 30.03.2017 in Essen, mit Beiträgen von: E. Perau; St. Kinzler, F. Sattler, E. Tafur u. Prof. M. Ziegler; C. Pohl u. D. Placzek; F. Könemann, St. Gutjahr u. B. Kosmann; A. Hettler; E. Perau u. A. Zillmann; B. Odenwald, K. Ratz u. H. Günther; D. König u. T. Schröder; C. Schmüdderich, D. König, P. Gußmann u. T. Schanz; L. Speier, K. van der Smissen u. F. Grübl; J. Schreiber u. A. Verhoeks; M. Stahl, N. Veith u. P. Knopf

Heft 43 von Randa Adel Mahmoud Arafa (2017):

Experimental Analysis of Impact Loading during Installation of Jack-up Units, (Dissertation)

Heft 44 mit Beiträgen verschiedener Autoren (2020):

Geotechnik und Wasser – Planung, Berechnung und Ausführung, Tagungsband zum 11. RuhrGeo Tag am 26.03.2020 in Essen, mit Beiträgen von: E. Perau; A. Schlenkhoff; N. Meteling; S. Keßler u. R. Jagow-Klaff; W. Baille, K. Reinhardt, K. Sommer; L. Vollmert u. K. von Maubeuge; J. Overmans u. U. Estermann; B. Odenwald; C. Fierenkothen, M. Herten u. M. Pulsfort

**Report Geotechnik, Universität Duisburg-Essen,
Herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. Eugen Perau**

als Open Access verfügbar über DuEPublico:

<https://duepublico2.uni-due.de/go/geotech>

ISSN: 2700-4848

Heft 45 von Nils Jasper Meteling (2020):

Parameteridentifikation bei Grundwasserströmung auf Basis analytisch formulierter Näherungslösungen, (Dissertation)

DOI: 10.17185/dupublico/71697

URN: urn:nbn:de:hbz:464-20200429-091836-4

Außerhalb der Reihe ist im Shaker-Verlag erschienen:

Lesny, K., Perau, E. (2015): Bodenmechanisches Praktikum, 13. Auflage, Shaker Verlag,
(Bestellung über www.shaker.de)

Parameteridentifikation bei Grundwasserströmung auf Basis analytisch formulierter Näherungslösungen

Für Baugruben, die tief in das Grundwasser einbinden, muss die Wirkung des Grundwassers auf die Verbauwände und den Baugrund berücksichtigt werden. Wenn in erreichbarer Tiefe eine schwächer durchlässige Schicht ansteht, empfiehlt es sich, die Verbauwände bis in diese Schicht zu führen und eine Restwasserhaltung zu betreiben.

Die Lösung des damit verknüpften Randwertproblems erfolgt mit analytisch formulierten Näherungslösungen. Diese ermöglichen es, an bestimmten Stellen im Strömungsgebiet geohydraulische Feldgrößen zu berechnen. Die Qualität der Lösung des Strömungsproblems hängt von der Güte der Modellparameter ab. Wenn diese nicht direkt über eine Messung bestimmt werden können, müssen sie über eine Parameteridentifikation ermittelt werden.

Aus mathematischer Sicht stellt die Parameteridentifikation eine inverse Problemstellung dar. In dieser Arbeit werden unterschiedliche Anwendungen der Parameteridentifikation am Beispiel einer Baugrube mit Restwasserhaltung analysiert und gelöst. Im Fokus der inversen Analyse stehen Fragestellungen wie z.B. die Rückrechnung der Durchlässigkeitsbeiwerte oder einer damit verbundenen Anisotropie unter Rückgriff auf synthetische in-situ-Messdaten. Aus den Untersuchungen für das spezielle Randwertproblem wird ein grundsätzliches Konzept zur Lösung von Identifikationsproblemen entwickelt.

Zudem wird eine Analyse und Optimierung des zu planenden Messprogramms für eine Baugrube mit Restwasserhaltung durchgeführt. Auf Basis dieser Untersuchungen werden Handlungsempfehlungen hinsichtlich der räumlichen Verteilung, der notwendigen Anzahl und der optimalen Lage der Messpunkte für unterschiedliche Feldgrößen erarbeitet.

- ▶ Baugrube, Restwasserhaltung, Grundwasserströmung, Messprogramm
- ▶ Parameteridentifikation, Inverse Problemstellung, synthetische Messdaten
- ▶ Finite-Elemente-Methode, Näherungslösung, Optimierung, Sensitivität