Bei vielen Dingen des täglichen Lebens, bei technologischen Prozessen oder auch in der Wirtschaft will man ein Optimum finden. Das betrifft etwa den minimalen Energieverbrauch bei der Herstellung eines Produkts, die kürzeste Zeit um von einem Punkt zu einem anderen zu gelangen oder die Gewinnmaximierung in einem Unternehmen. Bei vielen dieser Optimierungsaufgaben spielt Mathematik eine große Rolle.

Optimierungsprobleme

Verschwundene Minima in der nichtlinearen Optimierung

Von Arnd Rösch

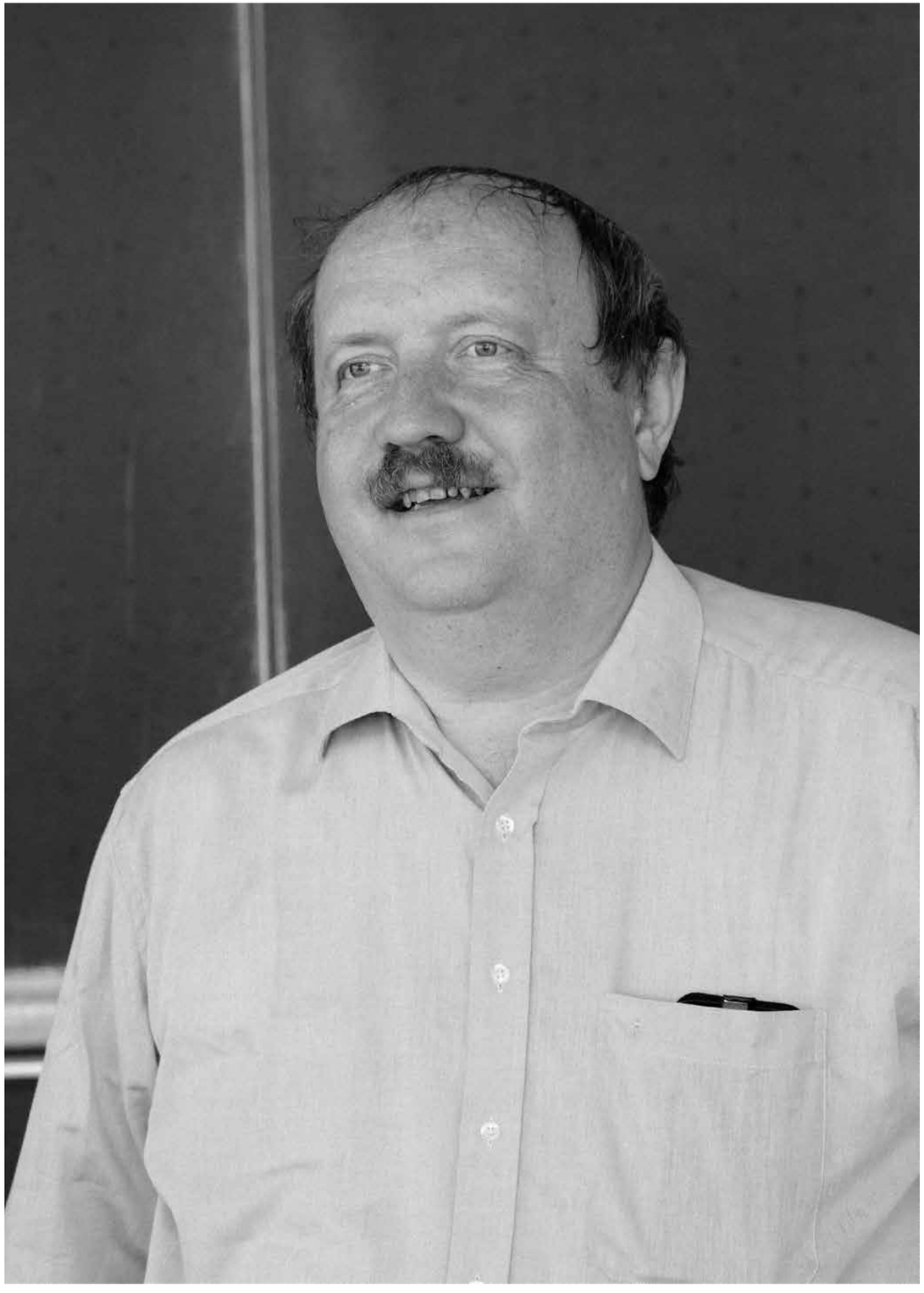
Bei vielen Dingen des täglichen Lebens, bei technologischen Prozessen oder auch in der Wirtschaft will man ein Optimum finden. Das betrifft etwa den minimalen Energieverbrauch bei der Herstellung eines Produkts, die kürzeste Zeit um von einem Punkt zu einem anderen zu gelangen oder die Gewinnmaximierung in einem Unternehmen. Bei vielen dieser Optimierungsaufgaben spielt Mathematik eine große Rolle. Dies wird häufig gar nicht so wahrgenommen. Wer denkt zum Beispiel beim Einsatz eines Navigationsgerätes an Mathematik?

Bei vielen Anwendungen der nichtlinearen Optimierung ist die Anzahl der Variablen sehr hoch – sie reicht von einigen Hunderten bis in den Milliardenbereich. Wir wollen uns hier mit wesentlich einfacheren Effekten beschäftigen und betrachten nur Aufgaben mit zwei Optimierungsvariablen.

Verschwundene Minima (Optima) sind für praktische Probleme der unangenehmste Effekt. Treten bei der Berechnung zusätzlich Punkte auf – die vielleicht Sattelpunkte oder Wendepunkte sind, oder möglicherweise gar keine Bedeutung besitzen – dann ist das nicht sonderlich schlimm. Durch Überprüfung zusätzlicher Bedingungen kann man diese Punkte später verwerfen. Sind aber Minima einmal verloren gegangen, ist die optimale Lösung unwiderruflich verloren.

Wir beginnen mit einem einfachen Beispiel. Wir betrachten dazu die Funktion
$f(x)=3x^4-16x^3+18x^2$. Als erste Ableitung ergibt sich
$f'(x)=12x^3-48x^2+36x$.
Setzen wir $f'(x)=0$ dann ergeben sich drei kritische Punkte $x_1=0$, $x_2=1$ und $x_3=3$.

Für die zweite Ableitung finden wir
$f''(x)=36x^2-96x+36$. Dieser Ausdruck ist für x_1 und x_3



Arnd Rösch. Foto: Vladimir Unkovic

positiv und für x_2 negativ. Daher sind x_1 und x_3 lokale Minima und x_2 ein lokales Maximum. Hier gibt es also keinerlei Schwierigkeiten.

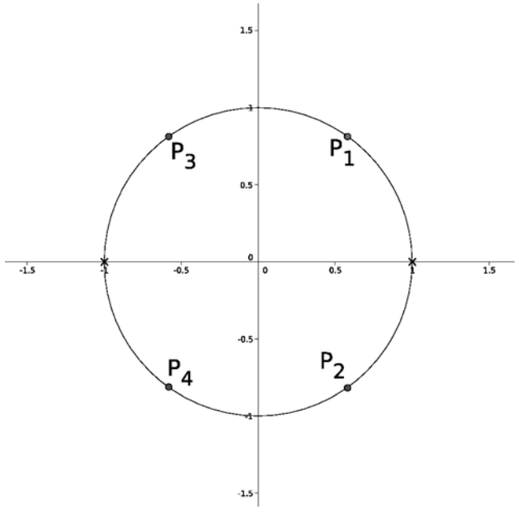
Einsetz- oder Eliminationsmethode

Diese recht einfache Methode möchte man auch für kompliziere Aufgabenstellungen nutzen. Wir betrachten die Funktion $f(x,y)=x^2+xy^2+y^2$ unter der zusätzlichen Nebenbedingung $x^2+y^2=1$, das heißt, dass nur die Punkte (x,y) zulässig sind, die auf dem Einheitskreis liegen. Naheliegend ist die Variable y zu eliminieren, da in der Funktion f(x,y) immer y^2 vorkommt.

Das führt auf die Minimierung der Funktion $g(x)=x^2+x(1-x^2)+1-x^2=-x^3+x+1$.

Als erste Ableitung finden wir $g'(x) = -3x^2+1$. Nullstellen sind dabei $x_1 = 1/\sqrt{3}$ und $x_2 = -1/\sqrt{3}$.
Zu beiden Werten gehören jeweils zwei y-Werte nämlich $y_1 = \sqrt{2/3}$ und $y_2 = -\sqrt{2/3}$
Es gilt $g''(x)=-6x$. Damit sind die zwei Punkte $P_1=(1/\sqrt{3},\sqrt{2/3})$ und $P_2=(1/\sqrt{3},-\sqrt{2/3})$ lokale Maxima und $P_3=(-1/\sqrt{3},\sqrt{2/3})$ und $P_4=(-1/\sqrt{3},-\sqrt{2/3})$ lokale Minima.

Wenn man sich den Einheitskreis aufzeichnet und die lokalen Minima und Maxima einzeichnet (siehe Abb. 1), dann merkt man schnell, dass etwas nicht stimmen kann. Die lokalen Maxima P_1 und P_2 sind benachbart genauso wie die lokalen Minima P_3 und P_4. Zwischen zwei lokalen Minima sollte es aber ein lokales Maximum geben und zwischen zwei lokalen Maxima ein lokales Minimum (s. Abb. 2). Wir wollen uns jetzt auf die Suche nach den zwei verlorenen Extremalpunkten begeben.



(1) Einheitskreis.
Quelle: eigene Darstellung

Lagrangemethode

Dazu bedienen wir uns dieses Mal der Lagrangefunktion, um die Extrema zu bestimmen. Diese beinhaltet einen Lagrangeschen Multiplikator λ und lautet in unserem Beispiel $L(x,y,\lambda)=x^2+xy^2+y^2+\lambda(x^2+y^2-1)$.
Diese Funktion leiten wir jetzt nach x und y ab:
$L_x(x,y,\lambda)=2x+y^2+2x\lambda = 0$ und
$L_y(x,y,\lambda)=2xy+2y+2y\lambda = 0$

Zusätzlich haben wir noch die Bedingung $x^2+y^2=1$. Wir lösen dieses Gleichungssystem, indem wir die zweite Gleichung in der Form $2y(x+1+\lambda)=0$ schreiben.

Es muss also y=0 oder $x+1+\lambda=0$ gelten. Aus y=0 folgt wegen $x^2+y^2=1$ sofort x=1 oder x=-1. Das sind unsere fehlenden zwei Extremalpunkte. Die Beziehung $x+1+\lambda=0$ liefert wieder die vier Punkte P_1 bis P_4. Der Punkt (-1,0) ist ein lokales Maximum und (1,0) ein lokales Minimum.

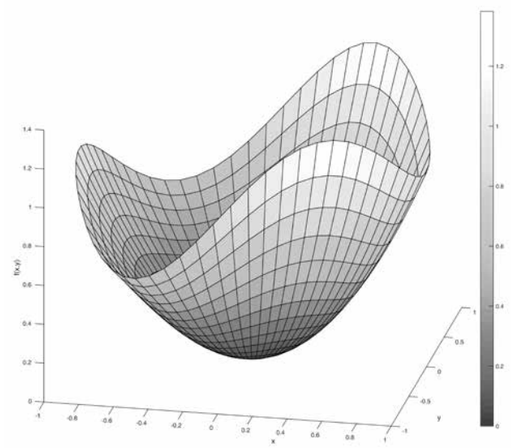
Wir haben also unsere fehlenden Extremalpunkte gefunden. Aber warum haben wir beim Einsetzen diese Punkte nicht gefunden? Wir haben in der ersten Rechnung die y durch x ersetzt, d.h. y=y(x). Damit dieses Einsetzen korrekt ist muss y(x) eine ordentlich erklärte Funktion in einer Nachbarschaft unseres kritischen Punktes sein. Das ist in den Punkten P_1 bis P_4 der Fall. Bei den anderen beiden Punkten ist das aber nicht so. Nehmen wir den Punkt (-1,0). Für x<-1 gibt es keinen zugehörigen y-Wert und für x>-1 sogar zwei. Die Verletzung dieser lokalen Auflösbarkeit ist der Grund für das Verschwinden der beiden Extremalpunkte.

Unser Beispiel legt nahe, die Lagrangemethode zu favorisieren, wenn man lokale Extrempunkte berechnen möchte. Allerdings können auch bei dieser Methode Minima verloren gehen. Wir betrachten zunächst die Minimierung von $f(x)=x^2+y^2$ unter der Nebenbedingung $x+y-1=0$.

Als Lagrangefunktion erhalten wir
$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x+y-1)$.
Diese Funktion leiten wir jetzt nach x und y ab:
$L_x(x,y,\lambda)=2x+\lambda=0$ und
$L_y(x,y,\lambda)=2y+\lambda=0$. Daraus ergibt sich sofort x=y. Zusammen mit x+y=1 finden wir das Minimum x=1/2, y=1/2 mit zugehörigem λ=-1. Hier hat also die Lagrangemethode funktioniert.

Wir ändern jetzt das Problem minimal ab:
Statt x+y=1 verwenden wir die äquivalente Bedingung $(x+y-1)^3=0$. Die neue Lagrangefunktion lautet $L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x+y-1)^3$. Ableiten nach x und y ergibt
$L_x(x,y,\lambda)=2x+3\lambda(x+y-1)^2=0$ und
$L_y(x,y,\lambda)=2y+3\lambda(x+y-1)^2=0$. Scheinbar ist alles wie gehabt. Es ergibt sich wieder x=y. Zusammen mit x+y=1 finden wir das Minimum x=1/2, y=1/2. Allerdings finden wir kein λ, das dieses Gleichungssystem löst, da der Ausdruck $3\lambda(x+y-1)^2$ für x=1/2, y=1/2 immer Null ist.

Die mathematische Ursache für dieses Verhalten ist die Regularität der Nebenbedingung g(x)=x+y-1 bzw.



(2) Funktion der Minimal und Maxima.
Quelle: eigene Darstellung

$g(x)=(x+y-1)^3$ im Punkt x=1/2, y=1/2. Hinreichend für die Regularität eines Punktes ist die lineare Unabhängigkeit der Gradienten der aktiven Gleichungs- und Ungleichungsnebenbedingungen. In unserem Fall haben wir nur eine Nebenbedingung. Lineare Abhängigkeit ist daher nur gegeben, falls der Gradient im Punkt x=1/2, y=1/2 gerade Null ist. Für die erste Variante finden wir $\nabla g(1/2,1/2)=(1,1)^T$ und für die zweite Variante dagegen $\nabla g(1/2,1/2)=(0,0)^T$. Dies ist die Ursache für die unterschiedlichen Ergebnisse, die wir erhalten haben.

Wie wichtig ist dieses Thema für praktische Anwendungen? Liegt das Verschwinden von Minima, wie in unserem Beispiel, immer an der schlechten mathematischen Formulierung? Das ist leider nicht der Fall. Es gibt eine relativ große Klasse von Optimierungsaufgaben, die generisch zu Problemen bei einem naiven Lagrangeansatz führen. Das ist zum Beispiel der Fall bei zweistufigen Optimierungsprozessen, wenn Ungleichungsnebenbedingungen auftreten. Solche Probleme treten in der Wirtschaftsmathematik etwa als "Leader-Follower-Probleme" auf: Der Leader (z.B. eine Netzbehörde zur Marktregulierung) trifft eine Entscheidung. Die Follower (also z.B. Telekommunikations- oder Energieunternehmen) treffen danach ihre Entscheidung und wollen ihre Gewinne maximieren. Während das Optimierungsproblem des Followers keine schwierigen mathematischen Fragen aufwirft, ist das Optimierungsproblem des Leaders mit einer Reihe komplizierter mathematischer Fragestellungen verbunden. So gibt es zum Beispiel mindestens sechs verschiedene Optimalitätsbedingungen erster Ordnung.

Gleichartige mathematische Schwierigkeiten treten auch bei Optimierungsproblemen in Verbindung mit Variationsungleichungen auf, zum Beispiel in der Mechanik von Schädigungsprozessen, Plastizität oder Problemen mit Kontakt oder auch Reibung. Diese Problematik wird von der DFG als so fundamental eingeschätzt, dass sie dafür das Schwerpunktprogramm 1962 „Nichtglatte Systeme und Komplementaritätsprobleme mit verteilten Parametern: Simulation und mehrstufige Optimierung" eingerichtet hat, an dem auch vier Arbeitsgruppen der Fakultät für Mathematik unserer Universität beteiligt sind.

Summary

Optimization is part of our daily lives. We aim to minimize the time it takes to reach a desired location or maximize a company's profit. The number of optimization variables is quite high in many applications – it may range from several hundreds to billions. However, here we only discuss settings with two variables. Optimality conditions are used to compute critical points, some of which may be saddle points or have no meaning at all. This is not a problem – we can check additional conditions to reject these points. However, if we lose a minimizer, the optimal point is lost forever. Two simple examples illustrate the loss of solutions of two standard optimization methods (elimination and Lagrange). This knowledge is important for applications, as there are several classes of optimization problems (including Stackelberg games, optimization problems governed by variational inequalities) that generically possess such undesired properties.

Der Autor

Arnd Rösch studierte Mathematik an der Technischen Universität Karl-Marx-Stadt (jetzt Chemnitz). Er promovierte 1995 über die Identifikation nichtlinearer Wärmeübergangsgesetze an der Technischen Universität Chemnitz. Er habilitierte sich 2001 an der Technischen Universität Berlin über die Analysis schneller und stabiler Verfahren zur optimalen Steuerung partieller Differentialgleichungen. Nach einer Tätigkeit als Oberassistent an der Technischen Universität Berlin ging Arnd Rösch an das damals neugegründete Johann-Radon Institut für angewandte Mathematik (RICAM) der Österreichischen Akademie der Wissenschaften nach Linz. Dort war er als Senior Postdoc tätig. Diese Tätigkeit wurde 2004 durch eine Lehrstuhlvertretung an der Technischen Universität Chemnitz unterbrochen. Im September 2006 erhielt er den Ruf auf eine Professur für nichtlineare Optimierung an der Universität Duisburg-Essen. Dort ist er seit April 2007 tätig. Arnd Rösch arbeitet auf dem Gebiet der optimalen Steuerung partieller Differentialgleichungen zusammen mit nationalen und internationalen Partnern. Die wissenschaftliche Anerkennung seiner Leistungen drückt sich in einer Reihe von Drittmittelprojekten aus. Er ist beteiligt am DFG-Schwerpunktprogramm 1962 „Nichtglatte Systeme und Komplementaritätsprobleme mit verteilten Parametern: Simulation und mehrstufige Optimierung".

DuEPublico

Duisburg-Essen Publications online

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Offen im Denken

ub | universitäts bibliothek

Dieser Text wird über DuEPublico, dem Dokumenten- und Publikationsserver der Universität Duisburg-Essen, zur Verfügung gestellt. Die hier veröffentlichte Version der E-Publikation kann von einer eventuell ebenfalls veröffentlichten Verlagsversion abweichen.

DOI: 10.17185/duepublico/70316
URN: urn:nbn:de:hbz:464-20190731-103133-7

Erschienen in: UNIKATE 53 (2019), S. 69-72

Alle Rechte vorbehalten.