Christoph Scheven. Foto: Vladimir Unkovic

Der Fluss zur Totalvariation wird für viele Algorithmen aus der modernen Bildverarbeitung verwendet. Vor Kurzem ist nun die Herleitung eines Existenzresultates für das Hindernisproblem zu diesem Fluss gelungen, unter Verwendung von klassischen Konzepten aus der geometrischen Maßtheorie, die über 40 Jahre alt sind.

Der Fluss zur Totalvariation

Nichtlinearität und andere Hindernisse

Von Christoph Scheven

Der Fluss zur Totalvariation hat Anwendungen bei der Rekonstruktion von verrauschten Bildern in der Bildverarbeitung. Solche verrauschten Bilder kennt der*die Hobby-Fotograf*in als misslungene Versuche von Fotos bei schlechten Lichtverhältnissen. Hier ist das Entfernen des Rauschens lediglich ein ästhetisches Problem. Es gibt aber auch ernsthaftere Anwendungen, wie etwa die Rekonstruktion der Bilder eines Computer-Tomographen, die den Mediziner*innen eine verlässliche Grundlage für ihre Diagnose liefert. Eine andere Anwendung liegt in der Kriminalistik. Tatsächlich wurden mit Hilfe von Algorithmen zur Bildrekonstruktion schon Verbrecher*innen überführt, weil es möglich war, sie auf völlig verschwommenen Überwachungsvideos noch kenntlich zu machen. In diesem Artikel geht es zugegebenermaßen nicht um solche spektakulären Anwendungen, dafür aber um die sehr interessante Mathematik, die dahintersteht.

Die Totalvariation einer Funktion misst anschaulich, wie stark die Werte der Funktion auf dem gesamten Definitionsbereich variieren. Bei einer differenzierbaren Funktion lässt sich die „Variation“ in einem Punkt mit Hilfe der Ableitung messen, genauer entspricht die Variation in einem Punkt der Norm der Ableitung an ebendieser Stelle. Die Totalvariation ist in diesem Fall das Integral der punktweisen Variation über den gesamten

Definitionsbereich. Für Anwendungen sind aber auch Funktionen relevant, die nicht differenzierbar sind oder die sogar Sprünge aufweisen. In der Bildverarbeitung kodiert die Funktion etwa die Helligkeitswerte eines Schwarzweiß-Bildes. Ein Farbbild lässt sich mathematisch durch eine Funktion modellieren, die jedem Punkt drei Werte zuordnet, die den Anteilen der Farbkanäle für Rot, Grün und Blau entsprechen. Da in einem typischen Bild immer Flächen verschiedener Helligkeit beziehungsweise verschiedener Farben aneinanderstoßen, führt das in der mathematischen Modellierung zu Funktionen mit Sprüngen. Als einfaches Beispiel würde ein schwarzes Bild mit einem weißen Fleck in der Mitte einer Funktion entsprechen, die innerhalb des Fleckes gleich Eins ist und sonst gleich Null. Entlang des Randes des Fleckes ergibt sich also ein Sprung der Höhe Eins. Daher macht es Sinn, dieser Funktion als Totalvariation den Umfang des Fleckes zuzuordnen. Mit Hilfe von Maßtheorie kann man in noch größerer Allgemeinheit für jede Funktion die Totalvariation definieren, deren Ableitung als ein endliches vektorwertiges Maß existiert. Für die Anwendungen ist hierbei relevant, dass das Hinzufügen von Rauschen zu einem Bild tendenziell die Totalvariation vergrößert, weil viele winzig kleine „Sprünge“ hinzugefügt werden, wo eigentlich keine sind. Daher ist eine mögliche Strategie, zu versuchen die Totalvariation zu verringern ohne dabei zu viel an Bildinformation zu verlieren.

Bei dem Fluss zur Totalvariation handelt es sich nun um eine zeitabhängige Differentialgleichung, bei der man einen Anfangszustand vorgibt und diesen sich mit der Zeit so verändern lässt, dass die Totalvariation möglichst schnell klein wird. Anschaulich verändert man die Funktion immer in die Richtung, in der die Totalvariation am schnellsten abfällt, etwa wie ein*e Skifahrer*in, der*die immer die steilste Abfahrt nimmt, um möglichst schnell im Tal anzukommen. Der Vorteil für die Bildrekonstruktion ist dabei, dass die Totalvariation und das unerwünschte Rauschen verringert wird. Dadurch, dass die Betrachtung der Totalvariation auch Sprünge zulässt, werden solche Sprünge in der Regel beibehalten. Das ist ein Vorteil zu anderen Verfahren, bei denen solche Sprünge sofort geglättet werden, was zu Bildern mit verschwommenen Konturen führt. Der Vorteil der Benutzung der Totalvariation für die Bild-Rekonstruktion ist also grob gesagt, dass das Rauschen verringert wird, aber scharfe Grenzflächen zwischen Teilen verschiedener Farbe oder Helligkeit erhalten bleiben.

So vorteilhaft die Eigenschaften des Flusses zur Totalvariation für die Anwendungen sind, so anspruchsvoll ist aber auch die mathematische Analyse seiner Lösungen. Dies liegt unter anderem daran, dass es sich bei diesem Fluss um eine nichtlineare Differentialgleichung handelt, was dazu führt, dass konstante Vielfache von Lösungen oder Summen von zwei Lösungen nicht auch Lösungen sein müssen. Die Nichtlinearität dieser Differentialgleichung ist tatsächlich so gravierend, dass bereits die formale Definition des Lösungsbegriffes ein Problem darstellt, weil in der formalen Differentialgleichung ein Bruch vorkommt, in dem eventuell durch Null geteilt wird, siehe Formel (1). Der in der Publikation[1] beschrittene Ausweg ist eine Formulierung mit Hilfe von Konzepten aus der Variationsrechnung. Genauer lässt sich eine Lösung zum Fluss zur Totalvariation durch Variationsungleichungen definieren. Diese Herangehensweise geht auf Lichnewsky & Temam[4] zurück, die ein ähnliches Konzept bereits für die Behandlung der zeitabhängigen Minimalflächengleichung benutzt haben. Die grundlegende Idee ist in verkürzter Form in Formel (2) angegeben.

(Formale) Differentialgleichung zum Fluss zur Totalvariation:

$$\partial_t u - \operatorname{div}\left(\tfrac{Du}{|Du|}\right) = 0 \qquad \text{in } \Omega\times(0,T) \tag{1}$$

$u:\Omega\times[0,T]\to R$ heißt variationelle Lösung für den Fluss zur Totalvariation, falls gilt

$$\int_0^T TV(u(t))dt \le \int_0^T \int_\Omega \partial_t\, u(v-u)dxdt + \int_0^T TV(v(t))dt \tag{2}$$

für alle zulässigen Vergleichsabbildungen v mit den gleichen Randwerten wie u.

Falls die Lösung u nicht von der Zeit abhängt, besagt diese Variationsungleichung, dass u die Totalvariation unter allen Vergleichsabbildungen minimiert. In diesem Sinne stellt die Variationsungleichung das zeitabhängige Analogon der Eigenschaft eines Minimierers im Sinne der Variationsrechnung dar. Insofern macht die Formulierung (2) auch eher deutlich, dass der Fluss zur Totalvariation dazu tendiert, die Totalvariation der Lösung zu verkleinern, was an der Differentialgleichung (1) nicht so unmittelbar ersichtlich ist.

Unter einem Hindernisproblem versteht man allgemein das Problem, eine Differentialgleichung unter der zusätzlichen punktweisen Nebenbedingung $u \ge \psi$ zu lösen, wobei ψ eine vorgegebene Hindernisfunktion ist. Ein einfaches Beispiel für eine Hindernisfunktion wäre etwa das schon oben erwähnte schwarze Bild mit einem weißen Fleck in der Mitte, mathematisch formuliert also eine Funktion, die in diesem Fleck gleich Eins ist und ansonsten Null. Im Allgemeinen kann man unter solch einer Hindernisbedingung nur noch erwarten, dass die Differentialgleichung an den Punkten erfüllt ist, an denen die Lösung das Hindernis nicht berührt. Dies lässt sich auch mit der obigen Variationsungleichung (2) formulieren, indem man dort nur Vergleichsabbildungen zulässt, die die gleiche Hindernisbedingung $v \ge \psi$ erfüllen. Insofern ist die Formulierung über obige Variationsungleichung auch für die Formulierung des Hindernisproblems geeignet.

Damit hat man also zumindest einmal eine Formulierung des Problems gefunden, das man gerne lösen würde. Die nächste Frage ist nun aber, ob es überhaupt solche Lösungen gibt. Und hier taucht nun ein Problem auf. Es stellt sich nämlich heraus, dass das Hindernisproblem nicht wohlgestellt ist, das heißt dass es unter Umständen keine Lösungen gibt. Der problematische Fall sind hierbei sogenannte „dünne Hindernisse“, im zweidimensionalen Fall wären das zum Beispiel Hindernisse, die nur auf einer eindimensionalen Kurve vorgegeben sind. Im Gegensatz hierzu wäre ein Beispiel für ein „dickes Hindernis“ eines, das eine Einschränkung auf einer zweidimensionalen Menge darstellt. Dieses Problem der Wohlgestelltheit ist von einem analogen Problem für Minimalflächen bekannt. Der Ausweg wurde in einer Arbeit von De Giorgi, Colombini & Piccinini[3] bereits im Jahr 1972 aufgezeigt. In seiner einfachsten Formulierung lässt sich das klassische Hindernisproblem so beschreiben: Gegeben sei eine Teilmenge $E \subset \Omega$, die in diesem Fall die Rolle des Hindernisses übernimmt. Gesucht ist dann eine Menge B_* mit $E \subset B_* \subset \Omega$, die unter allen Mengen B mit derselben Bedingung $E \subset B \subset \Omega$ den minimalen Umfang hat. Den Rand von B_* kann man dann als Minimalfläche unter einer Hindernisbedingung verstehen. Als anschauliches Beispiel denke man an die Form des Daches des Münchener Olympiastadiums, das der Lösung eines solchen Minimalflächenproblems nachempfunden ist. Hierbei kann man die tragenden Säulen, auf denen das Dach ruht, als das Hindernis E verstehen, das Olympiastadium selbst als die Lösung B_* des Hindernisproblems. Hierdurch stellt sich die bekannte interessante Form des Daches ein, das man also als die Lösung eines Hindernisproblemes für das Minimalflächenproblem interpretieren kann.

Bei der obigen Formulierung des Hindernisproblems für Minimalflächen tritt nun ein Problem auf, wenn ein sogenanntes dünnes Hindernis gegeben ist. Bei einer Grundmenge Ω der Dimension n wäre das etwa eine (n-1)-dimensionale Fläche E. Das einfachste Beispiel für eine zweidimensionale Grundmenge wäre, als Hindernis E einen Strich in der Ebene zu wählen. Sucht man hiervon eine Obermenge B_* mit minimalem Umfang, so legt die Anschauung nahe, den Strich selber zu wählen, also $B_*=E$ zu setzen. Von dieser Menge ist aber der Umfang überhaupt nicht definiert, weil er eben ein „dünnes“ Hindernis ist, also keine Ausdehnung in der Ebene besitzt. An dieser Stelle kommt nun eine Idee des berühmten italienischen Mathematikers Ennio De Giorgi ins Spiel. Seine Idee war, den dünnen Hindernissen ein Maß zuzuweisen, das den Begriff des Umfanges ersetzt. Dieses Maß wird heute nach seinem Erfinder als das De Giorgi-Maß bezeichnet. Bei dem obigen einfachen Beispiel eines Striches E wäre dieses De Giorgi-Maß einfach die zweifache Länge des Striches. Das ist eine sinnvolle Erweiterung des Begriffes des Umfanges, weil eine Verdickung des Striches, also ein sehr dünner Streifen, der den Strich enthält, ungefähr die zweifache Länge des Striches als Umfang hat. Allerdings stellt es sich heraus, das bei komplizierteren Mengen die geeignete Definition des De Giorgi-Maßes nicht unbedingt über die Länge der Menge berechnet werden kann.

Definition des De Giorgi-Maßes

Für eine Menge $E \subset R^n$ ist definiert (3)
$\sigma(E) = \sup_{\varepsilon>0} \sigma_\varepsilon(E)$, mit
$\sigma_\varepsilon(E) = \inf\{\text{Umfang}(B) + {}^1/_\varepsilon \text{Volumen}(B) \mid$
$B \supset E$ offen$\}$, für $\varepsilon > 0$.

Tatsächlich gibt es Gegenbeispiele von fraktalen Mengen, bei denen diese einfache Beschreibung des De Giorgi-Maßes nicht zutrifft. Die genaue Definition des De Giorgi-Maßes ist der Formel (3) zu entnehmen.

Und nun folgt man einer in der Mathematik gängigen Vorgehensweise: Man geht von dem ursprünglichen Problem, das sich ja nun einmal nicht lösen lässt, zu einem neuen, sogenannten relaxierten Problem über. Das mag wie eine Mogelei erscheinen, ist aber durchaus legitim, wenn das neue Problem eine sinnvolle Erweiterung des Ausgangsproblems darstellt. Der Übergang zum relaxierten Problem lässt sich dann so interpretieren, dass lediglich die mathematische Formalisierung des Problems nicht ausreichend war und daher angepasst werden muss. Das Problem liegt also in gewisser Weise bei der mathematischen Modellbildung. Bei dem vorliegenden Hindernisproblem besteht das relaxierte Problem darin, dass man nun auch Mengen B zulässt, die die Hindernisbedingung $B \supset E$ nicht erfüllen, aber diese Verletzung der Hindernisbedingung bestraft, indem man das De Giorgi-Maß $\sigma(E \setminus B)$ des „überstehenden“ Teils des Hindernisses zum Umfang addiert. Minimiert wird also nun nicht mehr nur der Umfang, sondern der Umfang plus den Penalisierungsterm $\sigma(E \setminus B)$. Der Minimierer B_* dieses Problems lässt sich auch auf eine sinnvolle Weise interpretieren. Die Vereinigung $B_* \cup E$ erfüllt dann nämlich die Hindernisbedingung, und dieser Vereinigung kann man mit Hilfe des De Giorgi-Maßes in sinnvoller Weise einen verallgemeinerten Umfang zuordnen, nämlich den Umfang von B_* plus das De Giorgi-Maß $\sigma(E \setminus B_*)$. Dieser verallgemeinerte Begriff des Umfanges wird dann von B_* minimiert. Übrigens führen die Eigenschaften des De Giorgi-Maßes dazu, dass ein solcher Minimierer die Hindernisbedingung nur auf Mengen der Dimension n-1 verletzen kann, es können also höchstens niederdimensionale Teile des Hindernisses aus der Menge B_* herausragen. Insbesondere unterscheidet sich die relaxierte Version des Problems nicht von der ursprünglichen Version, wenn das Hindernis keine solchen niederdimensionalen Teile enthält, wenn also ein „dickes“ Hindernis vorliegt.

Dieses Prinzip der Relaxierung des oben beschriebenen Problems aus der geometrischen Maßtheorie lässt sich nun auch auf das Hindernisproblem zum Fluss zur Totalvariation übertragen. In ähnlicher Weise, in der oben der Umfang einer Menge verallgemeinert wurde, kann man nun nämlich auch die Totalvariation relaxieren, so dass sich auch der Fall von dünnen Hindernissen behandeln lässt. Es stellt sich heraus, dass sich die natürliche Relaxierung der Totalvariation auch mit Hilfe des De Giorgi-Maßes angeben lässt, indem auch hier ein geeigneter Penalisierungsterm zur Totalvariation addiert wird. In diesem Fall besteht der Penalisierungsterm aus einem mit dem De Giorgi-Maß gebildeten Integral, das nur über die Menge berechnet wird, auf der die Hindernisbedingung verletzt wird, siehe Formel (4).

Für ein (dünnes) Hindernis ψ ist die relaxierte Totalvariation definiert als

$$TV_{\psi}(u) = TV(u) + \int_{\Omega}(\psi - u^{+})_{+}\,d\sigma, \qquad (4)$$

mit dem De Giorgi-Maß σ

Auch hier gilt wieder das gleiche Prinzip: Beim relaxierten Problem ist es der Lösung erlaubt, die Hindernisbedingung zu verletzen, aber diese Verletzung hat ihren Preis, weil sie das Funktional vergrößert, das man eigentlich minimieren will. Es ist aber eben trotzdem möglich, dass es die beste Strategie ist, diesen Preis zu bezahlen, weil das Funktional vielleicht für alle Funktionen, die die Hindernisbedingung erfüllen, noch größer wäre.

Und so erweisen sich nun die klassischen Ergebnisse aus der geometrischen Maßtheorie als nützlich für ein Problem, das seine Bekanntheit den Anwendungen in der modernen Bildverarbeitung verdankt. Das zusammen mit meinen Koautor*innen Prof. Dr. Verena Bögelein aus Salzburg und Prof. Dr. Frank Duzaar aus Erlangen neu erzielte Resultat lässt sich vereinfacht so zusammenfassen, dass eine relaxierte Formulierung des Hindernisproblems zum Fluss zur Totalvariation gefunden wurde, das sich für eine große Klasse von Hindernissen lösen lässt, insbesondere auch für „dünne“ Hindernisse, für die das ursprüngliche Problem nicht wohlgestellt war. Die Grundidee bei dieser relaxierten Formulierung ist, dass man auch Funktionen zulässt, die die Hindernisbedingung auf niederdimensionalen Mengen verletzen, aber dafür in der Variationsungleichung (2) die Totalvariation TV jeweils durch ihre relaxierte Version TV_{ψ} ersetzt. Für diesen Lösungsbegriff wurde unter geeigneten technischen Voraussetzungen an das Hindernis, deren Aufzählung an dieser Stelle unterbleiben soll, die Existenz von Lösungen bewiesen. In gewisser Weise lässt sich dieses Resultat als zeitabhängige Variante eines klassischen Problems aus der geometrischen Maßtheorie interpretieren. Allerdings bringt die Zeitabhängigkeit völlig neue technische Herausforderungen mit sich, die nach neuen Lösungsansätzen verlangen. Insofern stellt das erzielte Resultat eine Symbiose von Techniken aus zwei verschiedenen Welten dar, und demonstriert insbesondere, dass die erwähnten Ideen aus der klassischen mathematischen Forschung bis heute nichts an ihrer Aktualität eingebüßt haben.

Summary

We describe a new result on the existence of solutions for an obstacle problem associated to the total variation flow. The total variation flow is famous for its applications in image reconstruction. The treatment of the obstacle problem, with possibly thin obstacles, requires utilization of concepts that were developed by the ingenious mathematician Ennio De Giorgi more than 40 years ago. We briefly describe these concepts and explain how they can be applied to the above-mentioned obstacle problem for the total variation flow. In fact, the usual formulation of this problem might not have a solution if the prescribed obstacle contains “thin” parts of lower dimension. The strategy is to replace the original formulation of the obstacle problem with a relaxed version, using the concept of the De Giorgi measure. Together with his co-authors Prof. Dr. Verena Bögelein from Salzburg and Prof. Dr. Frank Duzaar from Erlangen, the author was able to derive an existence result for this relaxed problem by combining modern techniques for time-dependent partial differential equations with ideas from classical mathematical theory.

Anmerkungen/Literatur

1) V. Bögelein, F. Duzaar, C. Scheven. The obstacle problem for the total variation flow. Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. (4), 49 (2016), no. 5, 1143–1188.
2) M. Carriero, G. Dal Maso, A. Leaci, E. Pascali. Relaxation of the non-parametric Plateau problem with an obstacle. J. Math. Pures Appl. (9), 67 (1988), no. 4, 359–396.
3) E. De Giorgi, F. Colombini, L. Piccinini. Frontiere orientate di misura minima e questioni collegate. Quaderno della Scuola Normale Superiore di Pisa, Pisa, 1972.
4) A. Lichnewsky, R. Temam. Pseudosolutions of the time-dependent minimal surface problem. J. Differential Equations, 30 (1978), no. 3, 340–364.
5) L. Rudin, S. Osher, E. Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. Physica D, 268 (1992), 259–268.

Der Autor

Christoph Scheven studierte Mathematik an der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf. Dort wurde er im Jahr 2004 promoviert. Im Laufe seiner Promotion über die Regularitätstheorie von stationär harmonischen Abbildungen absolvierte er einen einjährigen Forschungsaufenthalt am Courant Institute of Mathematical Sciences in New York. Nach der Promotion war er als PostDoc an der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg tätig, unterbrochen durch eine Lehrstuhlvertretung an der Universität Regensburg. In Erlangen habilitierte er sich 2011 über Existenz- und Regularitätsaussagen zu Hindernisproblemen zu nichtlinearen Differentialgleichungen. Seit September 2012 ist er Professor an der Universität Duisburg-Essen. Sein Forschungsgebiet ist die Analysis von nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen.

DOI: 10.17185/duepublico/70314
URN: urn:nbn:de:hbz:464-20190730-152024-8

Erschienen in: UNIKATE 53 (2019), S. 55-60