*Mathematiker*innen beschäftigen sich gern mit Gleichungen, die zu kompliziert sind, als dass man sie mit herkömmlichen Methoden lösen könnte. Ein möglicher Zugang zu solchen Problemen besteht darin, nach Symmetrien zu suchen, die die Lösung vereinfachen.*

Symmetrien und Singularitäten

Lösungen nichtlinearer Differentialgleichungen

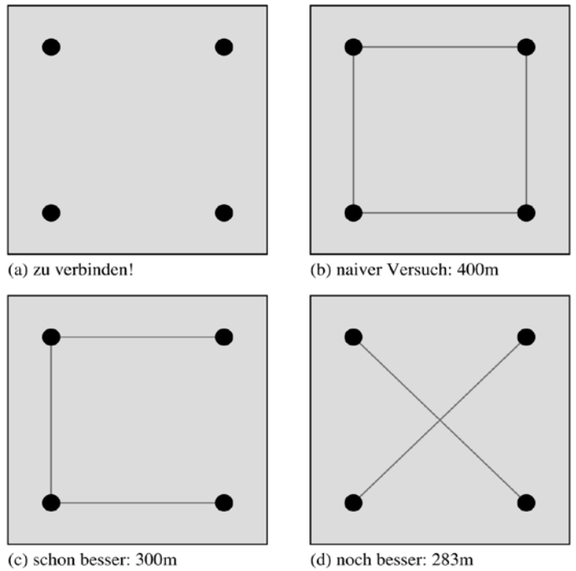
Von Andreas Gastel

Ein elementares geometrisches Problem

Mathematiker*innen beschäftigen sich gern mit Gleichungen, die zu kompliziert sind, als dass man sie mit herkömmlichen Methoden lösen könnte. Ein möglicher Zugang zu solchen Problemen besteht darin, nach Symmetrien zu suchen, die die Lösung vereinfachen. Im Idealfall sind die Lösungen einer mathematischen Gleichung so symmetrisch wie die Gleichung selbst, und weil diese Symmetrie die möglichen Lösungen stark einschränkt, sind sie leichter zu finden.

Spannend wird es bei Gleichungen und geometrischen Problemen, bei denen das nicht der Fall ist. Bei denen also die Lösungen nicht alle Symmetrien haben, die die Aufgabenstellung hat. Dazu wollen wir zunächst ein einfaches geometrisches Beispiel betrachten, zu sehen in Abbildung (1). Gegeben sind vier quadratisch angeordnete Punkte, stellen wir sie uns als sichere Orte in einem Sumpf vor. Diese vier Punkte wollen wir durch ein Netz von Linien, sagen wir Holzbrücken, miteinander verbinden, und dieses Netz soll möglichst kurz sein, um Material zu sparen. Kreuzungen und Abzweigungen sind erlaubt. Solche Netze, die vorgegebene Punkte möglichst sparsam miteinander verbinden, heißen übrigens *Steiner-Netze.*[1]

Andreas Gastel. Foto: Vladimir Unkovic



(1) Erste Versuche, vier Punkte effektiv zu verbinden.
Quelle: eigene Darstellung

Versuchen wir einmal, wie weit wir durch Probieren kommen. Dazu nehmen wir an, dass die Seitenlänge des vorgegebenen Quadrats (a) 100 Meter beträgt. Die Punkte einfach durch das Quadrat miteinander zu verbinden (b), ist dann doch eine Spur zu naiv: Hierzu müssten wir 400 Meter Brücken bauen. Aber wenn man eine der Quadratseiten weglässt (c), ist immer noch alles miteinander verbunden, und 300 Meter Brücken bauen ist doch (meistens) billiger. Aber es geht noch besser: Bauen wir die Brücken statt auf den Seiten des Quadrats auf seinen Diagonalen (d), so kommen wir immer noch von jedem Punkt zu jedem anderen. Und diesmal brauchen wir nur Material für knapp 283 Meter Brücken. Soviel zu den naiven Zugängen, die in Abbildung (1) dargestellt sind. Wer das Problem durch Ausprobieren zu lösen versucht, kommt oft bis hierher und nicht weiter.

Tatsächlich gibt es aber die Chance, noch mehr Material einzusparen. Die materialsparendste Verbindung der vier Punkte ist in Abbildung (2e) dargestellt. Die Winkel, die die Wege an den beiden Abzweigungen zueinander bilden, betragen jeweils exakt 120°. Die Gesamtlänge der hier zu bauenden Brücken ist etwas über 273m. Wer sich noch gut genug an seine Schulmathematik erinnert, wird den exakten Wert ausrechnen können, als kleine Übungsaufgabe für Neugierige.

Warum finden viele diese beste Lösung nicht durch Probieren? Ein Grund ist eine psychologische Hürde, denn *die Lösung ist nicht so symmetrisch wie das Problem!* Die Ausgangskonfiguration (vier quadratisch angeordnete Punkte) kann man um 90° drehen und erhält wieder dieselbe Konfiguration. Dreht man aber die Lösung um 90°, so wird diese *nicht* in sich selbst überführt, wohl aber in eine andere Lösung, siehe Abbildung (2f). Die fehlende Symmetrie der Lösung bewirkt also fast schon automatisch die Existenz einer zweiten Lösung. Darüber kann man sich freuen oder auch nicht: Mehr Lösungen bedeuten mehr Optionen zum Bauen. Mathematiker*innen haben andererseits die Erfahrung gemacht, dass eindeutig lösbare Probleme oft eine bessere Theorie haben als solche mit mehreren Lösungen. Jedenfalls ist die Frage nach Eindeutigkeit von Lösungen oft interessant.

Was sind eigentlich Differentialgleichungen?

In den mathematischen Gleichungen, die die meisten von uns aus der Schule kennen, gibt es eine unbekannte Zahl, oft mit x bezeichnet, nach der die Gleichung aufgelöst werden muss, wie zum Beispiel in $x^2-3x+2=0$ mit den Lösungen $x=1$ und $x=2$. Bei *Differentialgleichungen* geht es nicht um unbekannte Zahlen, sondern um unbekannte Funktionen. Und in der Gleichung darf nicht nur die Funktion selbst stehen, sondern man findet auch die Ableitungen dieser Funktion. Eine typische Differentialgleichung wäre $u''-3u'+2u=0$, mit einer unbekannten Funktion u. Für einfache Differentialgleichungen wie diese gibt es Lösungsverfahren, und wer Lust hat, kann nachrechnen, dass jede Funktion der Form $u(x)=ae^{2x}+be^{x}$ (mit irgendwelchen Zahlen a und b) unsere Gleichung

löst. Die meisten Vorgänge in Physik und Technik werden durch Differentialgleichungen beschrieben, und zum Glück für die Mathematik kommt hier alles vor, was gut und teuer ist. Soll heißen: Von vielen für Anwendungen wichtigen Differentialgleichungen ist nicht klar, wie man sie löst. Oft weiß man noch nicht einmal, ob es Lösungen gibt, und wenn ja, wie viele. Und wie schon gesagt: Manchmal helfen Symmetrien bei der Lösung, und manchmal tragen sie zur Verwirrung bei.

Nun versuchen wir, eine Brücke zum oben genannten Beispiel zu bauen. Was hat das mit Differentialgleichungen zu tun? Dazu muss zunächst gesagt werden, wie Mathematiker*innen eine Kurve in der Ebene beschreiben. Man führt dazu Koordinaten ein, mit denen jeder Punkt der Ebene durch ein Zahlenpaar (x_1,x_2) dargestellt wird. Eine Kurve ist dann eine Funktion $c(t)=(c_1(t),c_2(t))$, wobei wir uns t als Zeit vorstellen und annehmen, dass wir die Kurve mit der Zeit durchlaufen. Dann ist $c(t)$ der Punkt in der Ebene ist, der zum Zeitpunkt t durchlaufen wird. Und es gibt den Vektor $c'(t)$, der den Betrag und die Richtung der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t angibt. Ist nun $c'(t)$ konstant (d.h. für alle t gleich), dann hat die Kurve immer dieselbe Richtung, ist also eine Gerade, oder eine Strecke (Stück einer Geraden).

Eine Funktion ist aber konstant, wenn ihre Ableitung Null ist. Also beschreibt die Funktion $c(t)$ eine Strecke oder Gerade, wenn die Ableitung der Ableitung $c'(t)$ gleich Null ist, das bedeutet $c''(t)=0$. Wir haben also eine Differentialgleichung $c''(t)=0$ gefunden, die charakterisiert, dass $c(t)$ eine (mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufene) Strecke ist. Nun sind aber die Lösungen unseres eingangs erwähnten Problems über kürzeste Verbindungen immer aus Strecken zusammengesetzt. Denn ganz offensichtlich produziert man Umwege, wenn man krummlinige Stücke einbaut. Die optimale Verbindung der gegebenen Punkte benutzt daher nur Strecken, also nur Lösungen der Differentialgleichung $c''=0$.

Aber es gibt auch Punkte in unserer geometrischen Lösung, in denen die Beschreibung durch die Differentialgleichung $c''=0$ keinen Sinn macht: Nie wird man damit das Wesen der Verzweigungspunkte einfangen können, geschweige denn ihre Eigenschaft, dass nur 120°-Winkel vorkommen. Es gibt also (vergleichsweise wenige) Punkte, bei denen die Lösung unseres Problems nicht durch eine Differentialgleichung beschrieben werden. Solche Punkte heißen *Singularitäten* der Lösung.

Eine Zwischenbilanz

Fassen wir einmal zusammen, was wir bisher über die Verbindung von vier Punkten mit einem möglichst kurzen Netz gelernt haben:

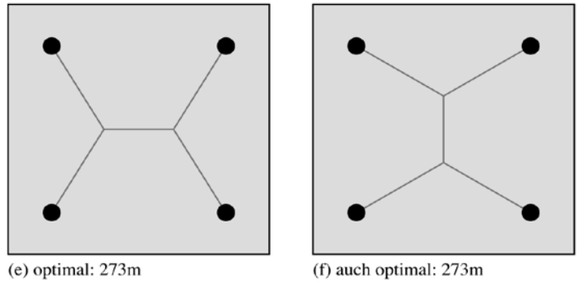
- Die beste Lösung besteht aus Strecken, die entweder an den vorgegebenen Punkten beginnen/enden oder sich an einer Gabelung mit lauter 120°-Winkeln treffen.
- Die bestmögliche Konfiguration muss nicht unbedingt alle Symmetrien haben, die die Ausgangskonfiguration hat.
- Außerhalb der singulären Punkte (welches die Gabelungspunkte sind) und der vorgegebenen Punkte besteht die Lösung aus Kurven, die die Differentialgleichung $c''=0$ erfüllen.

Tatsächlich gelten diese drei Beobachtungen für kürzeste Steiner-Netze sogar unabhängig von den vorgegebenen zu verbindenden Punkten. Wir haben also für Steiner-Netze

- eine Charakterisierung des regulären Teils (Strecken) als Lösungen der Differentialgleichung $c''=0$ und
- eine Charakterisierung des singulären Teils (Gabelungen) durch eine Winkelbedingung.

Das klingt nach einer komplizierten Beschreibung eines einfachen Problems, eine Kunst, für die die Mathematik zu Recht oft gerühmt wird! Insbesondere die Idee, etwas so einfaches wie Strecken durch etwas so kompliziertes wie eine Differentialgleichung zu beschreiben, erscheint etwas gewagt. Aber wir haben das Problem damit in einen abstrakten Rahmen gestellt, der ein wiederkehrendes Muster in vielen Anwendungen der Mathematik auf Probleme der realen Welt widerspiegelt:

- Grundlegende Vorgänge aus Naturwissenschaft und Technik werden durch Differentialgleichungen beschrieben.



(2) Kürzeste Verbindung der vorgegebenen Punkte.
Quelle: eigene Darstellung

• Die Modelle, die zum Aufstellen dieser Differentialgleichungen führen, versagen an Stellen, an denen es interessant wird. Wo die Differentialgleichungen nichts mehr aussagen können, muss man versuchen, die möglichen Singularitäten möglichst gut zu verstehen.

Singularitäten können außer Verzweigungen zum Beispiel auch Risse und Brüche in Materialien modellieren, oder schwarze Löcher, oder jede Art von Verhalten, das räumlich konzentriert ist und von der Beschaffenheit der Lösungen in der Umgebung stark abweicht. Die Gestalt von Singularitäten ist oft mittelbar auch durch die den Rest beschreibende Differentialgleichung bestimmt.

In mathematischen Modellen für Vorgänge, in denen singuläres Verhalten beobachtet wird, muss man sorgfältig solche Differentialgleichungen auswählen, die die beobachteten Singularitäten auch zulassen. Das ist schon allein deshalb nicht so einfach, weil man von vielen Differentialgleichungen gar nicht genau weiß, welche Singularitäten ihre Lösungen überhaupt haben können. Diese Fragestellungen werden innerhalb der Theorie der Differentialgleichungen zum Teilgebiet der *Regularitätstheorie* zusammengefasst und sind ein wichtiger Zweig der aktuellen Forschung.

In der Arbeitsgruppe *Geometrische Analysis* an der UDE geht es unter anderem darum, diese Fragen nach Regularität und Singularitäten unter geometrischen Gesichtspunkten zu studieren. Hierbei spielen unter anderem Symmetrien eine wichtige Rolle, zum Beispiel wenn versucht wird, die möglichen Singularitäten nach ihren Symmetrien zu klassifizieren. Wie man dabei vorgeht, kann man beispielhaft wieder an unserem Spielzeugmodell illustrieren:

Beobachtung 1: Unser Steiner-Netz für die vier vorgegebenen Punkte hat zwei Singularitäten. Die möglichen Singularitäten haben wegen der 120°-Winkel eine dreizählige Symmetrie, das Problem selbst (Quadrat) aber eine vierzählige. Schon deshalb tendiert die optimale Lösung dazu, nicht dieselben Symmetrien zu haben wie das Problem selbst.

(Der ganz aufmerksame Leser mag einwenden, dass man auch mit Dreier-Gabelungen eine vierzählige Symmetrie herstellen kann, wenn man vier Stück davon zur Verfügung hat. Aber die optimale Lösung hat nur zwei.) Und eine vorher schon angedeutete Beobachtung sei hier auch noch einmal explizit formuliert:

Beobachtung 2: Weil die optimale Konfiguration in diesem Beispiel unter der 90°-Drehung nicht invariant ist, die Problemstellung aber sehr wohl, bekommt man durch Anwendung der 90°-Drehung auf die optimale Lösung eine zweite, ebenfalls optimale.

Was nun, wenn wir gar nicht unter allen Netzen zwischen den vier Punkten nach dem kürzesten suchen, sondern von vornherein nur solche zulassen, die so symmetrisch sind wie möglich, also insbesondere durch 90°-Drehungen in sich selbst überführt werden? Dann erweist sich die Kreuzung aus Abbildung (1d) als die optimale Konfiguration (unter den symmetrischen). Man beachte, dass diese eine Singularität hat, die für Minimierer unter *allen* Konfigurationen verboten ist, nämlich eine Kreuzung!

Beobachtung 3: Besteht man auf volle Symmetrie des Netzes, so erhält man eine unter dieser Nebenbedingung optimale Lösung, die erstens länger ist als die wirklich optimale und zweitens eine ansonsten verbotene Singularität hat.

Die hier wiederholt gemachte Behauptung, dass nur die Gabelung mit 120°-Winkeln als Singularität in einer optimalen Konfiguration erlaubt ist, ist übrigens gar nicht so schwer zu beweisen. Da Beweise in der Mathematik wichtig sind, werden im letzten Abschnitt einige geometrische Argumente erklärt, die man dazu braucht. Zunächst erinnern wir aber daran, dass die Steiner-Netze nicht wirklich das Objekt unserer Forschung sind.

Über welche Fragen wird also geforscht?

Natürlich beschäftigen wir uns nicht mit elementarer Geometrie. Das hier diskutierte Problem der Steiner-Netze ist lediglich das einfachste Modell, in dem viele der uns interessierenden Phänomene in anschaulicher Weise vorkommen. In der Arbeitsgruppe Geometrische Analysis geht es um Differentialgleichungen, die gerade nichtlinear genug sind, um interessant für die Weiterentwicklung der Theorie zu sein. Solche *kritisch nichtlineare* Differentialgleichungen spielen in Anwendungen eine gewisse Rolle, wichtiger ist hier aber als erster Schritt das theoretische Verständnis.

Eine Gleichung, die von Mathematiker*innen in diesem Zusammenhang als wichtig erachtet wird, ist die Gleichung für *harmonische Abbildungen*, sie lautet im einfachsten Modell

$$\Delta u + |Du|^2 u = 0.$$

Sie beschreibt die Lösungen eines Problems aus der Differentialgeometrie, welche mit Hilfe der Differentialrechnung krummlinige Aspekte der Geometrie beschreibt. Eine Anwendung dieser Gleichung beschreibt die Ausrichtung von Flüssigkristallen, und auch in der Quantenphysik spielt die Gleichung als *Nichtlineares Sigma-Modell* eine gewisse Rolle. Diese Gleichung wird seit mindestens 40 Jahren studiert und beschäftigt die Forschung immer noch, unter anderem wegen des außerordentlichen Reichtums an Singularitäten, die man bei Lösungen dieser Gleichung beobachten kann. Unter anderem hat der Autor hier systematisch das Zusammenspiel von Symmetrien und Singularitäten studiert und eine Konfiguration angegeben, in der ein exaktes Analogon unserer oben gemachten Beobachtungen 1-3 gültig ist.[2] Es wird also eine in der Problemstellung mögliche Symmetrie durch die Lösungen gebrochen, die weniger symmetrisch sind. Zurückzuführen ist das darauf, dass alle erlaubten Singularitäten diese Symmetrie eben nicht haben.

Innerhalb der Fakultät gibt es einen Anknüpfungspunkt zur Forschung der Arbeitsgruppe von Herrn Prof. Neff, der ein geometrisch nichtlineares Modell zur *Cosserat-Elastizität* vorgeschlagen und studiert hat.[3] Hier konnte der Autor ausnutzen, dass dieses Modell die Kopplung der Gleichung für harmonische Abbildungen mit einer weiteren Gleichung ist. Damit konnten Methoden übertragen werden mit dem Resultat, dass Singularitäten in dem Modell bei geeigneter Wahl der Parameter gar nicht auftauchen können.[4]

Eine weitere Gleichung, die in der Arbeitsgruppe eine große Rolle spielt, ist die *Yang-Mills-Gleichung*

$$d^*dA + \tfrac{1}{2}d^*[A,A] - A\lrcorner\,(dA + \tfrac{1}{2}[A,A]) = 0,$$

die aus der Quantenfeldtheorie motiviert ist, wo sie gewisse Elementarteilchen (Eichbosonen) beschreibt. Das für uns interessante an dieser Gleichung ist, dass sie in gewisser Weise „unendlich viele Symmetrien“ hat, was natürlich ganz gut ins Thema passt. Im physikalischen Modell ist „Symmetriebrechung“ übrigens ein zentraler Punkt: Die Gleichung wird mit einer anderen gekoppelt, für die jede Lösung weniger Symmetrien hat als die Gleichung selbst. Das ist der bekannte Higgs-Mechanismus, der zeigt, dass die Frage nach der Symmetriebrechung keineswegs nur akademisch, sondern sogar essentiell für die Existenz massiver Teilchen ist. Mathematische Zugänge zur Yang-Mills-Theorie sind im Vergleich zur Physik stark vereinfacht, sind aber überraschenderweise recht nützlich für das Verständnis grundlegender geometrischer Fragen.

Wir sprechen hier von Differentialgleichungen, meinen aber oft *Variationsprobleme*. In Variationsproblemen wird nicht nur nach Lösungen einer Differentialgleichung gefragt, sondern speziell nach solchen Lösungen, die eine gewisse Energie (oder Länge oder Flächeninhalt oder…) minimieren. Es gibt physikalisch sinnvolle Energien, die für die hier genannten Fragen dieselbe Rolle spielen wie die Streckenlänge für das Beispiel der Steiner-Netze.

Viele Differentialgleichungen beschreiben eine zeitliche Entwicklung. Zu den hier diskutierten passen recht gut die sogenannten *geometrischen Evolutionsgleichungen*. Diese beschreiben, ausgehend von einem als Startkonfiguration gegebenen geometrischen Objekt, eine Deformation desselben hin zu „immer gleichmäßiger verteilter Krümmung“. Lösungen solcher Gleichungen können in endlicher Zeit Singularitäten entwickeln, auch wenn man mit einem sehr regulären Objekt startet. Dafür bleiben während der Evolution alle Symmetrien des Ausgangsobjekts erhalten, jedenfalls bis sich die erste Singularität bildet. Das schränkt die Gestalt der möglichen Singularitäten ein, die man möglichst vollständig verstehen möchte. Der Autor hat in verschiedenen Situationen Singularitäten gefunden und beschrieben.[5,6] Überraschenderweise findet man hier sogar manchmal nichteindeutige Lösungen, obwohl die Symmetrie nicht gebrochen wird.[7]

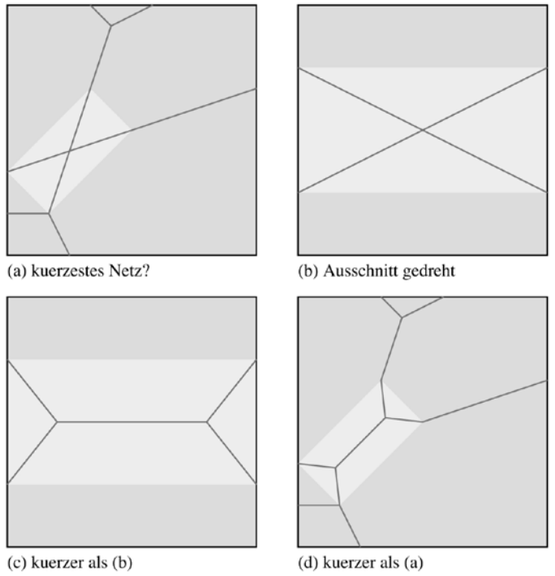
Zusammengefasst sind es die folgenden Fragen, die uns im Zusammenhang mit kritisch nichtlinearen Differentialgleichungen besonders interessieren:

• Können Lösungen Singularitäten haben oder sind sie überall regulär?
• Falls Singularitäten auftreten: Kann man diese klassifizieren, und was sagt das über die Gestalt der Lösungen aus?
• Sind Lösungen genauso symmetrisch wie die Daten es zulassen? Oder wird die Symmetrie gebrochen?
• Falls letzteres passiert: Kann man das Problem geeignet einschränken, um zusätzlich zu den unsymmetrischen Lösungen auch symmetrische zu finden? Haben diese auch bessere Regularitätseigenschaften?
• Kann man Symmetrien ausnutzen, um die Existenz von Lösungen zu beweisen? Wie steht es mit deren Eindeutigkeit?

Und wie beweist man so etwas?

Das ist für Mathematiker*innen die vielleicht wichtigste Frage, auf die es aber keine einfache Antwort gibt. Die schnelle technische Antwort lautet: durch seitenlange Rechnungen mit Ungleichungen. Die etwas tiefer gehende Antwort weist darauf hin, dass solche Ungleichungen nicht vom Himmel fallen und auch oft nicht allein durch formale Überlegungen und Erfahrungen mit Rechentricks gefunden werden. Vielmehr spielt oft (selbst bei höchst abstrakten Fragen) auch eine Art geometrischer Anschauung eine Rolle. Und da wir schon ein Spielzeugmodell zur Hand haben, möchte ich zum Schluss an diesem Beispiel erläutern, wie man etwa zur Klassifikation möglicher Singularitäten kommt.

Dabei kümmern wir uns nur um einen wichtigen Schritt: Wie sieht man, dass in einem minimalen Steiner-Netz (zu irgendeiner Anzahl beliebig vorgegebener Punkte, die verbunden werden müssen) keine Kreuzungen von Strecken vorkommen können? Dazu betrachten wir wieder ein Bild, das in Abbildung (3a) einen Ausschnitt aus einem hypothetischen Steiner-Netz zeigt, worin sich zwei Geraden kreuzen. Der Übersichtlichkeit



(3) Ein kleiner Beweis.
Quelle: eigene Darstellung

halber sehen wir nur einen Ausschnitt, und die zu verbindenden Punkte liegen irgendwo außerhalb.

Wir wollen die Annahme, dass ein Kreuzungspunkt auftritt, zu einem Widerspruch führen. Damit zeigen wir, dass Kreuzungspunkte in minimalen Steiner-Netzen nicht vorkommen können.

Um jeden (hypothetischen) Kreuzungspunkt finden wir einen kleinen rechteckigen Bereich, in dem außer den sich kreuzenden Strecken keine weiteren aus dem Steiner-Netz liegen. Dies ist das helle Rechteck in (3a). In (3b) haben wir diesen Ausschnitt gedreht und vergrößert. Wir behaupten, dass das hier zu sehende Kreuz nicht die optimale Verbindung der vier Eckpunkte des hellen Rechtecks sind. Denn man kann leicht nachrechnen, dass die Konfiguration in (3c) (wieder mit 120°-Winkeln) kürzer ist. Genauer ist, wenn wir die kürzere Seitenlänge des Rechtecks mit A bezeichnen und die längere mit B, die Gesamtlänge in (b) gleich $2\sqrt{(A^2+B^2)}$ und die Gesamtlänge in (3c) gleich $B+\sqrt{3}A$. Drehen wir (3c) zurück in das ursprüngliche Bild und ersetzen also dort die Konfiguration mit den Kreuzungen durch die kürzere mit zwei Gabelungen, dann wissen wir, dass die neue Konfiguration (3d) insgesamt kürzer ist als die ursprünglich in (3a) gegebene. Damit haben wir also die Annahme, dass (3a) optimal ist, zum Widerspruch gebracht.

In diesem Argument spielt es keine Rolle, dass (3d) selbst nicht optimal ist. Das ist es sicher nicht, denn zwei der Linien dort haben einen Knick, machen also einen unnötigen Umweg! Alles was zählt ist, dass (3d) kürzer ist als (3a) und somit (3a) nicht optimal sein kann.

Aus Gründen der Lesbarkeit haben wir nur behauptet, aber nicht bewiesen, dass $B+\sqrt{3}A$ kleiner ist als $2\sqrt{(A^2+B^2)}$. Für die Genießer*innen unter den Lesern*innen hier der Beweis:

$$(B+\sqrt{3}A)^2 = B^2+3A^2+2\sqrt{3}AB \leq B^2+3A^2+\sqrt{3}(A^2+B^2)$$
$$\leq B^2+3A^2+A^2+(2\sqrt{3}-1)B^2 = 4A^2+2\sqrt{3}B^2 < 4(A^2+B^2)$$
$$= (2\sqrt{A^2+B^2})^2.$$

(Soviel zum Thema Rechnen mit Ungleichungen. Es ist schade und schön zugleich, dass die Leser*innen nicht erfahren, welche Art Ungleichungen für die „richtig interessanten“ Probleme nötig sind.)

Mit Argumenten wie diesen beweist man, dass die einzigen Singularitäten, die in minimierenden Steiner-Netzen vorkommen, Gabelungen mit 120°-Winkeln sind. Kurven in Verbindungslinien kommen nicht vor, und Knicke höchstens in den vorgegebenen zu verbindenden Punkten.

Diesem Beweis wurde hier so viel Raum gegeben, weil die grundlegende Strategie für viele der erwähnten Probleme in der Forschung funktioniert. Man kann häufig bestimmte Arten von Singularitäten ausschließen, indem man geschickt Vergleichsobjekte mit kleinerer Länge oder Energie konstruiert. In besonders glücklichen Fällen kann man damit Singularitäten überhaupt

ausschließen oder komplett klassifizieren. Beides sind interessante Ergebnisse, denn ob Singularitäten auftreten können oder nicht ist eine wichtige Eigenschaft, die man einem durch Differentialgleichungen gegebenen Modell leider meist nicht leicht ansieht.

Zusammenfassung

Wir haben an einem einfachen „Spielzeugmodell“ die wesentlichen Effekte diskutiert, um die es hier geht. Dieses Modell koppelt eine ziemlich triviale Differentialgleichung mit der Möglichkeit von Singularitäten, und schon ergeben sich interessante Phänomene. Um so mehr sind solche zu erwarten, wenn es um „interessante“ Differentialgleichungen auf der Höhe der heutigen mathematischen Möglichkeiten geht. Der Versuch, die Klassifikation möglicher Singularitäten über ihre Symmetrien zu verstehen, hilft beim Verständnis einiger der vielen Aspekte der Theorie solcher Differentialgleichungen.

Summary

Solutions of nonlinear differential equations tend to have singularities. At singular points, such solutions may not be smooth enough to solve the equation in a classical sense. Allowing singularities may be an important part of a mathematical model. The interplay between the differential equations of the model and the possible singularities is an important topic to understand when interpreting the solutions. For critically nonlinear differential equations, the study of singularities is also interesting with regard to symmetries. The symmetries of the solution may not be the same as those of the equation, and possible symmetries of singularities may be responsible for such a phenomenon. A discrepancy between symmetries can thus complicate the understanding of solutions to an equation. Meanwhile, symmetries can also be useful for finding solutions by reduction to a simpler problem. The article discusses such aspects of the theory and explains the phenomena in a rather simple geometric model. While it is used for illustration only, the models we are actually concerned with are taken from differential geometry and physics.

Anmerkungen/Literatur

1) Benannt nach Jacob Steiner, 1796–1863.
2) Gastel, Andreas: Regularity theory for minimizing equivariant (p-) harmonic mappings. Calc. Var. Partial Diff. Eq. 6 (1998), 329–367.
3) Neff, Patrizio: Existence of minimizers for a finite-strain micromorphic elastic solid. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 136 (2006), 997–1012.
4) Gastel, Andreas: Regularity issues for Cosserat continua and p-harmonic maps. Preprint (2017).
5) Gastel, Andreas: Singularities of first kind in the harmonic map and Yang-Mills heat flows. Math. Z. 242 (2002), 47–62.
6) Gastel, Andreas and Kronz, Manfred: A family of expanding Ricci solitons. Progr. Nonlinear Differential Equations 59 (2004), 81–93.
7) Gastel, Andreas: Nonuniqueness for the Yang-Mills heat flow. J. Diff. Eq. 187 (2003), 391–411.

Der Autor

Andreas Gastel studierte von 1986 bis 1991 Mathematik und zunächst Physik an der Universität Düsseldorf. 1996 promovierte er in Mathematik an der Universität Düsseldorf und war danach wissenschaftlicher Angestellter in Düsseldorf (und im SS 1999 an der Humboldt-Universität in Berlin). Andreas Gastel habilitierte sich 2003 im Fach Mathematik in Düsseldorf. Von 2003 bis 2005 vertrat er Professuren und Lehrstühle in Erlangen, Düsseldorf und Duisburg. An der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen war Gastel Professor von 2006 bis 2010. Seit 2010 ist Professor an der Universität Duisburg-Essen und war von 2014 bis 2016 Dekan der Fakultät für Mathematik der UDE.

DuEPublico

Duisburg-Essen Publications online

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Offen im Denken

ub | universitäts bibliothek

Dieser Text wird über DuEPublico, dem Dokumenten- und Publikationsserver der Universität Duisburg-Essen, zur Verfügung gestellt. Die hier veröffentlichte Version der E-Publikation kann von einer eventuell ebenfalls veröffentlichten Verlagsversion abweichen.

DOI: 10.17185/duepublico/70313
URN: urn:nbn:de:hbz:464-20190730-144455-9

Erschienen in: UNIKATE 53 (2019), S. 47-54

Alle Rechte vorbehalten.