

# Online-Optimierung von Geschwindigkeitsprofilen entlang vorgegebener Bahnen unter Berücksichtigung von Achsruckbeschränkungen

## Online-optimization of path-restricted feedrate profiles under consideration of axis jerk restrictions

Justus Kopp, Bosch Rexroth AG, Priv. Univ. UMIT (Hall/Tirol), justus.kopp@boschrexroth.de

Dr. Bertold Bader, Bosch Rexroth AG, bertold.bader@boschrexroth.de

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Frank Woittennek, Priv. Univ. UMIT (Hall/Tirol), frank.woittennek@umit.at

### Kurzfassung

Der vorliegende Beitrag präsentiert einen Algorithmus zur Berechnung eines näherungsweise zeitoptimalen Geschwindigkeitsprofils entlang einer vorgegebenen Bahn. Es werden Beschränkungen der Geschwindigkeit entlang der Bahn und Beschränkungen der an der Bewegung beteiligten Achsen bis zur dritten Ableitung, dem Ruck, betrachtet. Der Algorithmus baut auf der Struktur einer Werkzeug- oder Handlingmaschinensteuerung auf, die eine Werkzeugspitze entlang einer vorgegeben oder auch intern modifizierten Bahn verfährt. Dabei verwendet der Algorithmus die intern berechneten Zusammenhänge zwischen Achs- und Bahnkoordinaten. Die Anzahl der Maschinenachsen, die an der Bewegung beteiligt sind, ist theoretisch beliebig.

Für eine schnelle, näherungsweise zeitoptimale Berechnung des Profils wird die vorgegebene Raumkurve gezielt in mehrere Teilabschnitte zerlegt, die Übergangsbedingungen gewählt und in jedem dieser Abschnitte ein Geschwindigkeitsprofil mittels einer Vorwärts-/Rückwärtsrechnung konstruiert. Dabei erweitert der Beitrag den Lösungsansatz aus [8]. Im Mittelpunkt stehen die Definition des Geschwindigkeitsprofils, als einmal stetig differenzierbarer Spline mit stückweise konstantem Ruck, die Aufteilung der Bahn in einzelne Berechnungsabschnitte und die Simulationsergebnisse mit Daten einer Fünfachsbearbeitung. Ein Nachweis zur Optimalität und online-Einsetzbarkeit der Lösung wird nicht angegeben.

### Abstract

This paper presents an algorithm for the calculation of an approximately time-optimal velocity profile along a given path. Restrictions of the velocity along this path and restrictions of the axes involved in the motion up to the third derivative, the jerk, are considered. The algorithm is based on the structure of a tool or handling machine control with a theoretically arbitrary number of machine axes, which moves a tool tip along a given or internally modified path. The algorithm uses their internally calculated relationships between axis and path coordinates. For a fast and approximately time-optimal calculation of the profile, the given path is specifically divided into several sub-sections, transition conditions are selected and a velocity profile is constructed in each of these sections by means of a forward/backward calculation. The contribution extends the solution approach from [8]. In focus is the definition of the velocity profile, as  $C^1$  spline with piecewise constant jerk, the splitting into parts for the calculation and the simulation results with data of a five-axis machining. A proof of the optimality and online usability of the solution is not given.

## 1 Einleitung

Im Bereich der Werkzeug- und Handlingmaschinen wird das Trio aus Geschwindigkeit, Genauigkeit und Flexibilität immer wichtiger. So muss auf Grund von geforderten minimalen Taktzeiten die größtmögliche Bearbeitungsgeschwindigkeit gefahren werden, ohne dabei die Oberflächengüte des Werkstücks zu verschlechtern. Weiterhin kommt hinzu, dass Maschinen gleicher Größe immer leichter und weniger starr konstruiert werden. Durch die niedrigeren Eigenfrequenzen ist es deshalb auch eine zunehmende Herausforderung die Maschine stabil und Schwingungsarm zu bewegen. Aus diesen Gründen ist die Berücksichtigung des Achsruckes, der zeitlichen Ableitung der Achsbeschleunigung, bei der Berechnung von Verfahrgeschwindigkeiten bereits Stand der Technik. Dies führt zu längeren Taktzeiten, verringert jedoch die Schwingungen im System. Da teilweise die Achsbeschleunigungen somit

weniger stark beschränkt werden müssen, führt dies sogar zu kürzeren Taktzeiten. Weiterhin darf die Variabilität nicht vernachlässigt werden. So ist es weiterhin wichtig, die Bahngeschwindigkeit online und während der Bewegung zu berechnen, um auf unvorhersehbare Stelleingriffe aus der SPS oder vom Bediener reagieren zu können.

Die Literatur zeigt bereits eine Reihe von Lösungsvorschlägen für die Problemklasse auf. Anfänglich wurden Lösungsvorschläge geliefert, die lediglich Nebenbedingen bis hin zur Beschleunigung betrachten [4, 5, 9]. Wie oben beschrieben, wird zunehmend auch die Betrachtung von Ruckbeschränkungen der Achsen gefordert. Diese verändern zwar kaum die Problemstellung, erschweren jedoch die Berechnung der Bahngeschwindigkeit um ein Vielfaches. Die Literatur [2, 6, 8, 11] liefert trotzdem vielversprechende Ansätze. In der Industrie finden diese Verfahren bisher eher selten Anwendung, da sie entweder von vornherein für eine offline-Berechnung ausgelegt [11] oder zu-

mindest zu aufwändig für die online-Berechnung in einer mehrkanaligen Werkzeugmaschinensteuerung (CNC) sind [3]. Lösungen, die sich nur auf ein bestimmtes mechanisches System beziehen [7], scheiden für den allgemeinen Einsatz in einer CNC ebenfalls aus.

Der Beitrag greift die genannte Herausforderung auf und zeigt eine Lösung für beliebige Maschinenkinematiken und umgeht die Nachteile, etwa den hohen Berechnungsaufwand, bisheriger Verfahren. Dabei liegt der Fokus vorrangig auf der Berechnung eines näherungsweise zeitoptimalen Geschwindigkeitsprofils entlang einer fest definierten, beliebigen Raumkurve. Der Algorithmus des Beitrags ist so entworfen, dass er online, in der Bahnvorbereitung einer CNC, das Geschwindigkeitsprofil der nahen Zukunft berechnet, welches im Interpolatortakt der CNC nur noch abgefahren wird.

Der Aufbau des Beitrags ist wie folgt: Im zweiten Abschnitt werden u. a. die Aufgabenstellung, die Bahn, die Nebenbedingungen und das Geschwindigkeitsprofil näher definiert. Darauf aufbauend, beschreibt Abschnitt drei den eigentlichen Algorithmus zur Bestimmung des Geschwindigkeitsprofils. Abschnitt vier liefert die Ergebnisse des Algorithmus für ein Beispielpogramm aus einer CNC.

## 2 Problembeschreibung

Das Problem der zeitminimalen Optimierung der Vorschubgeschwindigkeit oder auch Bahngeschwindigkeit wird häufig in der Literatur diskutiert. Das Ziel dabei ist es, die Spitze einer Werkzeug- oder Handlingmaschine auf einer festen Bahn möglichst schnell zu verfahren. Die zeitoptimale Trajektorie, das Geschwindigkeitsprofil, muss dabei so berechnet werden, dass sie keine der definierten Systembeschränkungen verletzt. Eine Reihe an Nebenbedingungen, die sowohl die Bahn, als auch die beteiligten Achsen beschränken sind in [5] beschrieben.

Nachfolgend wird eine allgemeine Werkzeug- oder Handlingmaschine mit einer beliebigen Anzahl an Achsen  $A_n$   $n \in \mathbb{N}$  betrachtet. Eine beliebige Kinematik spannt dabei einen Raum mit maximal sechs Koordinaten auf: drei Raumkoordinaten  $x$ ,  $y$ ,  $z$  und drei Orientierungskordinaten  $\varphi$ ,  $\vartheta$ ,  $\psi$ . Bei modernen Werkzeugmaschinen wird häufig eine Fünfachsbearbeitung verwendet, mit den fünf beliebigen Achsen  $\mathbf{A} = (A_1 \ A_2 \ A_3 \ A_4 \ A_5)^T$  und einem rotationssymmetrischen Werkzeug, das sich relativ zum Werkstück durch fünf Koordinaten  $\mathbf{P} = (x \ y \ z \ \varphi \ \vartheta)^T$  beschreiben lässt. Im Abschnitt 4 wird ein Beispiel einer solchen Fünfachsbearbeitung vorgestellt.

In dem Beitrag werden sowohl Beschränkungen der Bahn als auch der Achsdynamik berücksichtigt. Beschränkungen, die sich aus den Fertigungsprozessen ergeben oder von einem Bediener online vorgegeben werden ( $F_{\text{prog}}$ ), beziehen sich häufig auf die Geschwindigkeit der Bahn  $v(s)$  selbst und werden von allen gängigen CNCs berücksichtigt. Anders stellt es sich bei den Beschränkungen der Achsen dar. Da der Zusammenhang zwischen Achs- und Raumkoordinaten als nahezu beliebig und nichtlinear anzunehmen ist, werden diese in vielen CNCs lediglich ap-

proximativ in Bahnbeschränkungen überführt. Diese Abschätzungen führen teilweise zu einer Verletzung der Achsbeschränkungen oder zu einem unnötigen Absenken der Bahngeschwindigkeit. Für die exakte Betrachtung dieser Beschränkungen wird im Folgenden zuerst der schon häufig verwendete Begriff der Bahn näher definiert.

### 2.1 Bahndefinition und Beschränkungen

Für Werkzeugmaschinen werden häufig durch den Bediener fest definierte geometrische Bahnen  $t \mapsto \mathbf{P}(s)$  im Raum mit dem Bahnparameter  $s$  verwendet. Teilweise kann dieser Parameter als Bogenlänge  $s \in [0, S]$  interpretiert werden.  $S$  entspricht dabei der Gesamtlänge der Bahn. Auch in der Robotik/Handling existiert ein solcher Bahnbeff. Anders als bei der Werkzeugbearbeitung, spielt die exakte Einhaltung der Bahn dort jedoch eher eine untergeordnete Rolle.

Ziel des Beitrags ist es, die zeitliche Ableitung des Bahnparameters  $s$ , die Bahngeschwindigkeit  $t \mapsto \dot{s}(t) = v(t)$ , unter Berücksichtigung der Bahnbeschleunigung  $\ddot{s}(t) = a(t)$  und des Bahnruckes  $\ddot{s}(t) = j(t)$  zu berechnen. Dabei sollen die drei Ableitungen nicht durch die Zeit  $t$ , sondern durch den Bahnparameter  $s$  selbst parametrisiert sein  $t \mapsto s(t) \mapsto \{v(s), a(s), j(s)\}$ .

Die CNC berechnet aus dem aktuellen Bahnparameter und dem aktuell geltenden Geometrieelement<sup>1</sup> eine Raumkoordinate  $\mathbf{P}$  (Position und Orientierung im Raum). Aus dieser Koordinate werden anschließend, abhängig von der Kinematik der Werkzeug- oder Handlingmaschine, die Positionen der beteiligten  $n$  Achsen<sup>2</sup>  $\mathbf{A} = \{A_1, \dots, A_k, \dots, A_n\}$  berechnet. Typischerweise werden bei Werkzeugmaschinen für die Achsen nur konstante Beschränkungen für Position  $\{A_k^{\min}, A_k^{\max}\}$ , Geschwindigkeit  $\{A_k^{\max}\}$ , Beschleunigung  $\{A_k^{\min}, A_k^{\max}\}$ <sup>3</sup> und Ruck  $\{A_k^{\max}\}$  parametrisiert. In der Praxis werden die Achsruckbeschränkungen häufig nur empirisch bestimmt, weshalb eine exakte Einhaltung dieser Beschränkungen nicht immer erforderlich ist.

Bei der Berechnung des Geschwindigkeitsprofils im nächsten Abschnitt werden diese Achsbeschränkungen berücksichtigt. Dafür wird ein Zusammenhang zwischen den Bahn- und Achskoordinaten  $\mathbf{A}(s(t))$  bis zur dritten Ableitung, dem Achsruck  $\ddot{\mathbf{A}}(s(t))$ , benötigt. Durch Ableiten der Achskoordinaten nach der Zeit  $t$  und Anwenden der Kettenregel ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}(s(t))}{dt} &= \frac{d\mathbf{A}}{ds} \frac{ds}{dt} \\ \frac{d^2\mathbf{A}(s(t))}{dt^2} &= \frac{d^2\mathbf{A}}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d\mathbf{A}}{ds} \frac{d^2s}{dt^2} \\ \frac{d^3\mathbf{A}(s(t))}{dt^3} &= \frac{d^3\mathbf{A}}{ds^3} \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 + 3 \frac{d^2\mathbf{A}}{ds^2} \frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d\mathbf{A}}{ds} \frac{d^3s}{dt^3}. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Bei der Werkzeugbearbeitung sind gängige Geometrielemente Gerade, Helix und Spline.

<sup>2</sup>Linear- oder rotatorische Achsen

<sup>3</sup>In der Regel gilt:  $\ddot{A}_k^{\min} = -\ddot{A}_k^{\max}$

Vereinfachte Darstellung:

$$\dot{\mathbf{A}}(s(t)) = \mathbf{A}'(s) v(s) \quad (1a)$$

$$\ddot{\mathbf{A}}(s(t)) = \mathbf{A}''(s) v(s)^2 + \mathbf{A}'(s) a(s) \quad (1b)$$

$$\dddot{\mathbf{A}}(s(t)) = \mathbf{A}'''(s) v(s)^3 + 3\mathbf{A}''(s) v(s) a(s) + \mathbf{A}'(s) j(s) \quad (1c)$$

Die Ableitungen der Achskoordinaten nach dem Bahnparameter  $s$  sind von der geometrischen und kinematischen Kette zwischen  $s$  und  $\mathbf{A}$  abhängig und werden für die folgenden Betrachtungen als beliebig und nichtlinear angenommen.

## 2.2 Abtastung der Bahn

Für die späteren Berechnungen wird die Bahn  $t \mapsto s(t)$  an diskreten Punkten  $s_i$  ausgewertet. Dabei ist eine konstante Schrittweite nicht sinnvoll. Bei starker Krümmung wird die Bahn feiner abgetastet, siehe Abb. 1. Die Orientierung, die ebenfalls Auswirkungen auf die Abtastung haben kann, ist in Abb. 1 nicht aufgetragen.

An jedem Stützpunkt  $s_i$  werden die benötigten Ableitungen der Achskoordinaten  $\mathbf{A}'(s_i)$ , usw. von der Maschinensteuerung bereitgestellt.

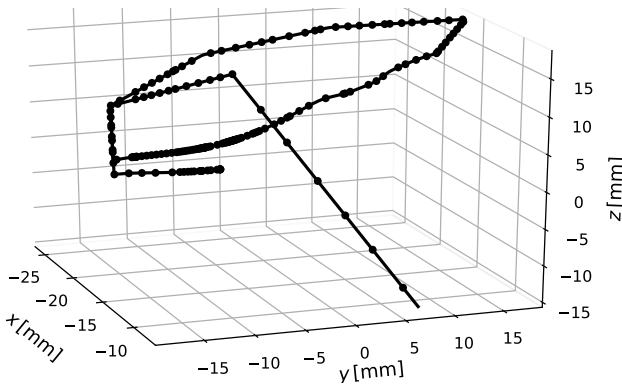


Abbildung 1 Beispiel einer beliebigen Abtastung der Schrittweite entlang der Bahn im Raum

## 2.3 Definition der Bahngeschwindigkeit

Die Bahngeschwindigkeit ist bisher nur an den Stützstellen  $s_i$  definiert. Für das Abfahren der Bahn werden auch Zwi-

schwerte der Bahngeschwindigkeit benötigt, die das sogenannte Bahngeschwindigkeitsprofil ergeben. Dieses Profil ist über den Bahnparameter  $s$  oder über der Zeit  $t$  parametrisiert und als einmal stetig differenzierbarer ( $C^1$ ) Spline in den Gleichungen (2) definiert. Der Ruck  $j$  ist zwischen zwei Stützpunkten  $s_i, s_{i+1}$  konstant. Die weiteren Größen resultieren aus dessen Integration über der Zeit  $t$ . Bei einer Parametrisierung über  $s$  muss bei jeder Auswertung ein kubisches Gleichungssystem gelöst werden, um die aktuelle Zeit  $T$  zu berechnen.

$$\begin{aligned} j(s) &= j_i \\ a(s) &= a_i + j_i \cdot T \\ v(s) &= v_i + a_i \cdot T + \frac{1}{2} \cdot j_i \cdot T^2 \\ t(s) &= t_i + T \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{mit } \begin{cases} 0 = (s - s_i) - v_i \cdot T - \frac{1}{2} \cdot a_i \cdot T^2 - \frac{1}{6} \cdot j_i \cdot T^3 \\ \forall s \in (s_i, s_{i+1}] \end{cases}$$

Für die spätere Berechnung des Geschwindigkeitsprofils muss die Bahnbeschleunigung  $a_{i+1}$  und der Bahnruck  $j_i$  bei gegebenen  $s_i, s_{i+1}, v_i, a_i$  durch die Bahngeschwindigkeit  $v_{i+1}$  parametrisiert werden. Die Gln. (3) zeigen die Parametrisierung unter der Voraussicht, dass Werte der vorherigen Stützstelle bekannt sind, dann gilt:  $p = i, p_+ = i + 1$  (Vorzeichen in den Gln. + bei  $\pm$ ). Sind hingegen die Werte der darauffolgenden Stützstelle bekannt, gibt  $p = i + 1, p_+ = i$  (Vorzeichen in den Gln. - bei  $\pm$ ).

$$\begin{aligned} T_p(v_{p_+}) &= \frac{\mp(2v_p + v_{p_+}) \pm \sqrt{(2v_p + v_{p_+})^2 + 6a_p(s_{p_+} - s_p)}}{a_p} \\ j_p(v_{p_+}) &= 2 \frac{(v_{p_+} - v_p) \mp a_p T_p(v_{p_+})}{T_p^2(v_{p_+})} \\ a_{p_+}(v_{p_+}) &= a_p \pm j_p(v_{p_+}) T_p(v_{p_+}) \end{aligned} \quad (3)$$

Diese Definition unterscheidet sich von den üblichen Lösungsansätzen der Literatur und hat zwei entscheidende Vorteile. Einerseits resultiert ein stetiger Verlauf der Achsbeschleunigungen aus beschränkten Achsruckwerten. Andererseits lässt sich das zeitparametrisierte Geschwindigkeitsprofil sehr gut in dem Interpolatortakt einer CNC verwenden. Ein großer Nachteil dieser Definition ist, dass das Profil nicht lokal definiert ist, sondern von allen Stützpunkten der Vergangenheit abhängt. Dies äußert sich vor allem bei der numerischen Optimierung, muss aber auch bei

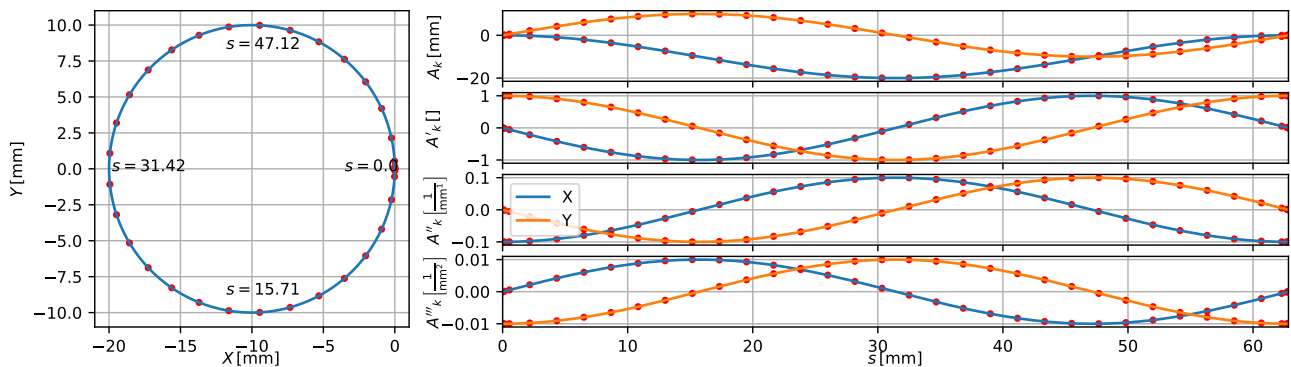


Abbildung 2 Bahn und Geometriedefinition an dem analytischen Beispiel „Kreis in der x-y-Ebene“.

dem später beschriebenen Zusammenfügen des Vorwärts-/Rückwärtszweiges berücksichtigt werden.

## 2.4 Anwendung am Beispiel Kreis

Die Definitionen werden zunächst an einem einfachen Beispiel erläutert. In diesem spannen zwei orthogonal angeordnete Linearachsen  $\mathbf{A} = (X, Y)^T$  eine Ebene mit den orthogonalen Koordinaten  $x$  und  $y$  auf. Bei dieser Konstellation ist keine geometrische oder kinematische Transformation aktiv, sodass die Linearachsen  $X, Y$  mit den Koordinaten der Ebene  $x, y$  gleichgesetzt werden können. In dieser Ebene wird jetzt ausgehend von Nullpunkt  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$  ein Kreis im mathematisch negativen Sinn mit einem Radius  $R = 10$  mm abgefahren. Der Zusammenhang zwischen Bahn und Achskoordinaten lässt sich geschlossen angeben und lautet:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(s) &= (R(\cos(s/R) - 1) \quad -R \sin(s/R))^T \\ \mathbf{A}'(s) &= (-\sin(s/R) \quad -\cos(s/R))^T \\ \mathbf{A}''(s) &= (-1/R \cos(s/R) \quad 1/R \sin(s/R))^T \\ \mathbf{A}'''(s) &= (1/R^2 \sin(s/R) \quad 1/R^2 \cos(s/R))^T \end{aligned} \quad (4)$$

Die Bahn und der Zusammenhang zwischen dem Bahnparameter  $s$  und den Achskoordinaten  $\mathbf{A}$  aus den Gln. (4) ist in der Abb. 2 dargestellt. Bis auf den Anfangs- und Endbereich wird hier mit einer konstanten Schrittweite auf der Bahn abgetastet.

## 3 Berechnung des Geschwindigkeitsprofils

Algorithmen für die näherungsweise zeitoptimale Berechnung des Geschwindigkeitsprofils in der Literatur [2, 4] nutzen sehr ähnliche Herangehensweisen. Diese berechnen, ausgehend von einem gültigen Startpunkt die Geschwindigkeit auf der nächsten Stützstelle unter Beachtung der Achsbeschränkungen und Gl. (1). Je nach Verfahren wird dabei teilweise in die Zukunft geschaut oder Beschränkungen anfangs ignoriert, um nicht in Sackgassen zu laufen.

Der Algorithmus des Beitrags ähnelt denen der Literatur. Er basiert hauptsächlich auf der schrittweise/iterativen Berechnung aus [8]. Dies bedeutet, es werden auf der Bahn markante Punkte gesucht, an denen die Bahngeschwindigkeit vorgegeben werden kann. Darauf aufbauend wird ein Zweig vorwärts von einem bekannten Punkt  $s_i$  (Startpunkt) und ein zweiter Zweig rückwärts von dem nächsten bekannten Punkt  $s_p$  (Endpunkt) mit  $p > i$  berechnet. Sobald beide Zweige zusammenstoßen, werden sie verbunden: der Endpunkt wird zum Startpunkt und der nächste bekannte Punkt zum neuen Endpunkt. Von diesen Punkten wird wieder ein Vorwärts- und ein Rückwärtszweig berechnet, usw.. Der genaue Algorithmus zur Berechnung des Geschwindigkeitsprofils wird durch den Programmablaufplan in Abb. 3 beschrieben. Die Variablen  $i_{fwd}$  und  $i_{bwd}$  beschreiben den aktuellen Index im Vorwärts- (fwd) bzw. Rückwärtszweig (bwd). Der Index  $i_+$  beschreibt die aktuell zu untersuchende Stützstelle und  $i$  die vorherige, abhängig davon, ob man sich aktuell im Vorwärts- oder Rückwärts-

zweig befindet. Alle Indizes beschreiben eine Stützstelle aus der Menge wie in Abschnitt 2.2 definiert. Es werden keine Stützstellen eingefügt oder bestehende gelöscht.

Der Parameter  $\alpha \in [0, 1]$  beschreibt wie sich die Bahngeschwindigkeit  $v_i$  an der Stützstelle  $i$  aus dem berechneten Geschwindigkeitsintervall  $[v_i^{\min}, v_i^{\max}]$  zusammensetzt. Da bei  $\alpha \in \{0, 1\}$  teilweise nur ein Springen zwischen maximalem und minimalem Ruck erkennbar ist, bietet es sich vor allem bei einer großen Schrittweite an die Definitionsmenge von  $\alpha$  feiner zu unterteilen. Muss auf einem Berechnungszweig jedoch zurückgegangen werden (Ablaufplan: *Gehe zurück...*), können die Iterationen exponentiell von der Anzahl der Unterteilungen abhängen. Im Abschnitt 4 gilt:  $\alpha \in \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$ .

Die grau hinterlegten Blöcke von Abb. 3 werden in den folgenden Abschnitten noch einmal näher erläutert.

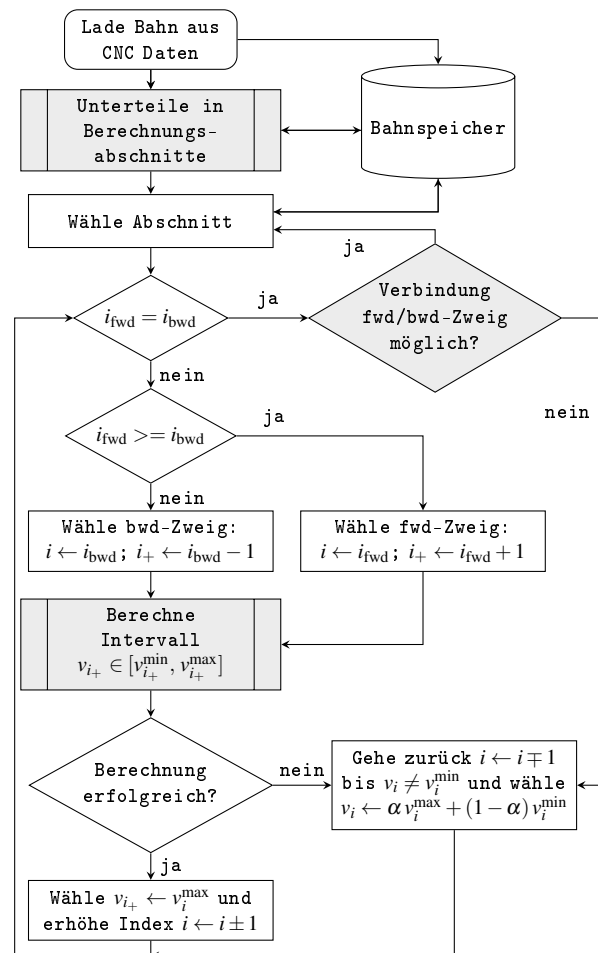


Abbildung 3 Ablaufplan des Algorithmus

### 3.1 Unterteilung in Abschnitte

Für die Berechnung des Geschwindigkeitsprofils mittels des Vorwärts-/Rückwärts-Algorithmus wird nachfolgend eine obere Grenze für die Bahngeschwindigkeit aus den Modellgleichungen (1) und Achsbeschränkungen geschätzt. Der Ansatz ist ebenfalls in [1] beschrieben und wird in Folgenden erweitert. Bei verschwindender Bahnbeschleunigung  $a$  und Vernachlässigung des Bahnruckes  $j$

vereinfachen sich die Modellgleichungen aus (1) zu:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{A}}(s(t)) &= \mathbf{A}'(s)v(t) \in [\dot{\mathbf{A}}_{min}, \dot{\mathbf{A}}_{max}] \\ \ddot{\mathbf{A}}(s(t)) &= \mathbf{A}''(s)v^2(t) \in [\ddot{\mathbf{A}}_{min}, \ddot{\mathbf{A}}_{max}] \\ \dddot{\mathbf{A}}(s(t)) &= \mathbf{A}'''(s)v^3(t) \in [\dddot{\mathbf{A}}_{min}, \dddot{\mathbf{A}}_{max}].\end{aligned}\quad (5)$$

Die obere Grenze für die Bahngeschwindigkeit  $s \mapsto \bar{v}(s)$  lautet somit:

$$\bar{v}(s) = \min \left\{ F_{\text{prog}}(s), \frac{|\mathbf{A}'(s)|}{\dot{\mathbf{A}}_{max}}, \sqrt{\frac{|\mathbf{A}''(s)|}{\ddot{\mathbf{A}}_{max}}}, \sqrt[3]{\frac{|\mathbf{A}'''(s)|}{\dddot{\mathbf{A}}_{max}}} \right\} \quad (6)$$

Nach den Gln. (1) ist es theoretisch möglich, dass die Bahngeschwindigkeit bei einer Bahnbeschleunigung  $a > 0$  auch größer als diese obere Grenze werden kann, ohne die Achsbeschränkungen zu verletzen. In dem Fall, wo die Bahngeschwindigkeit oberhalb dieser Grenze wieder verringert werden muss, durchfährt die Beschleunigung einen Nulldurchgang. Dies hätte dann wiederum die Folge der Verletzung einer Achsbeschränkung, da dort  $v > \bar{v}$  und  $a = 0$ . Demzufolge ist die Annahme einer verschwindenden Bahnbeschleunigung  $a$  in den Gln. (5) zulässig.

Die Vernachlässigung des Bahnruckes an der oberen Grenze ist nicht ohne Einschränkungen zulässig. Bei einer Bahngeschwindigkeit  $v = \bar{v}$  und Bahnbeschleunigung  $a = 0$  muss der Bahnruck auf einen Wert ungleich Null springen, was eine Verletzung des Achsruckes zur Folge hat. Ein Bahnruck  $j = 0$  ist nur an Minima der oberen Grenze zulässig, da eine konstante Bahngeschwindigkeit links und rechts des Minimums bereits unterhalb der oberen Grenze liegt. In allen anderen Fällen verletzt eine konstante Bahngeschwindigkeit zu einer Seite hin eine oder mehrere Achsbeschränkungen. Deshalb wird dort bei  $v = \bar{v}$  eine Verletzung des Achsruckes akzeptiert oder es muss gelten  $v < \bar{v}$ . Unter der Annahme einer leichten Verletzung des Achsruckes und unter der Voraussicht, dass die obere Grenze im Späteren weiter eingeschränkt wird, lautet das Lösungsgebiet der Bahngeschwindigkeit an jedem Stützpunkt  $s_i$ :  $v_i \in [0, \bar{v}(s_i)] = [v_i^{\min}, v_i^{\max}]$ . Die schwarze Kurve im Diagramm (rechts oben) in Abb. 4 zeigt diese obere Begrenzung für das Beispiel Kreis.

An den lokalen Minima der oberen Grenze der Bahngeschwindigkeit  $\bar{v}(s_i)$  wird die Bahn in Berechnungsabschnitte unterteilt. Somit wird sichergestellt, dass bei der Vorwärts-/Rückwärtsberechnung der Vorwärtszweig ausschließlich Bahnbeschleunigungen  $a_{i\text{fwd}} \geq 0$  und der Rückwärtszweig  $a_{i\text{bwd}} \leq 0$  enthält. Startet die Berechnung eines Vorwärts- oder Rückwärtszweiges auf diesem Minimum, ist bei  $v = \bar{v}$  und  $a = 0$  ein Bahnruck  $j = 0$  zulässig.

### 3.2 Berechnung eines Schrittes im Vorwärts- oder Rückwärtszweig

Nach dem Algorithmus in Abb. 3 wird in jedem Iterationsschritt entschieden, ob diese nächste Berechnung im Vorwärts- oder Rückwärtszweig berechnet wird. Dabei wird eine aktuelle Stützstelle  $i_+$  und die dazu gehörende vorherige Stelle  $i$  bestimmt. Abhängig davon wird das In-

itialintervall  $v_{i_+} \in [0, v_{\max}(s_{i_+})]$  solange eingeschränkt, bis es allen Nebenbedingungen (7) genügt. Da die Beschränkungen (7a), (7b) bereits bei der Berechnung von  $\bar{v}$  vollständig betrachtet und in dem Initialintervall berücksichtigt sind, müssen diese nicht mehr explizit überprüft werden. Da der Bahnruck über das gesamte Intervall  $[s_i, s_{i_+}]$  konstant ist, wird in Gl. (7d) der Bahnruck  $j_i$  verwendet.

$$v_{i_+} \in [0, F_{\text{prog}}] \quad (7a)$$

$$|A'_k v_{i_+}| = |\dot{A}_k| \in [0, \dot{A}_k^{\max}] \quad (7b)$$

$$A''_k v_{i_+}^2 + A'_k a_{i_+} = \ddot{A}_k \in [\ddot{A}_k^{\min}, \ddot{A}_k^{\max}] \quad (7c)$$

$$|A'''_k v_{i_+}^3 + 3A''_k v_{i_+} a_{i_+} + A'_k j_i| = |\dddot{A}_k| \in [0, \dddot{A}_k^{\max}] \quad (7d)$$

Je nachdem, in welcher Reihenfolge die Nebenbedingungen (7c) und (7d) betrachtet werden, muss das Intervall unterschiedlich oft neu berechnet werden. Auch bietet es sich an nur verletzte Nebenbedingungen zu betrachten. Da der Ruck das Geschwindigkeitsprofil am ehesten beschränkt, werden zuerst alle Bedingungen des Ruckes (7d) überprüft. Die verletzte Beschränkung mit dem größten Betrag bestimmt das neue Intervall.

Dafür muss die Bahnbeschleunigung  $a_{i_+}$  und der Bahnruck  $j_i$  in der Gl. (7d) mit Hilfe der Gln. (3) aus  $v_{i_+}$  berechnet werden. Dabei ist zu beachten, dass im Vorwärtszweig (+) bzw. Rückwärtszweig (-) bei ( $\pm$ ) in den Gln. (3) steht. Unter Verwendung von Gl. (7d) und (3) ist der Achsruck  $\ddot{A}_k(v_{i_+})$  somit nur noch von der gesuchten Geschwindigkeit abhängig. Für die verletzte Beschränkung wird die Gleichung beispielsweise mit dem Newton-Verfahren gelöst und ein kleineres Intervall bestimmt. Mit dem neuen Intervall werden erneut die restlichen Ruckbeschränkungen überprüft und, falls weiterhin Nebenbedingungen verletzt bleiben, die beschriebenen Schritte wiederholt.

Nachdem keine Ruckbeschränkung mehr verletzt ist, wird mit dem bereits eingeschränkten Intervall dieselbe Herangehensweise auch bei den Beschleunigungsbeschränkungen angewendet.

Mit dieser Methode muss in vielen Fällen das Intervall der Geschwindigkeit  $v_{i_+}$  nur zweimal neu berechnet werden: einmal für die obere und einmal für die untere Schranke. Letztendlich liefert das Verfahren ein Intervall für die Geschwindigkeit  $v_{i_+} \in [v_{i_+}, \bar{v}_{i_+}]$ , durch das keine Nebenbedingung verletzt wird.

### 3.3 Verbindung von Vorwärts- und Rückwärtszweig

Treffen der Vorwärts- und der Rückwärtszweig nach dem Programmablaufplan in Abb. 3 aufeinander, muss die Übergangsstelle oft noch einmal nachberechnet werden. Durch die Auswahl des Zweiges mit der jeweils geringeren Geschwindigkeit während der Fwd/Bwd-Berechnung, wird eine Verletzung der Beschleunigung beim Übergang vom Vorwärts- zum Rückwärtszweig umgangen. Jedoch tritt hierbei häufig eine starke Ruckverletzung auf. Um diese Verletzung aufzulösen, wird das Geschwindigkeitsprofil lokal um diese Stelle abgesenkt. Dabei wird bei dem Zweig

mit der größeren Geschwindigkeit vorgetäuscht, dass am Übergangspunkt die Berechnung des Intervalls nicht erfolgreich war, was zu einem Absenken des Zweiges führt. Ist dieser Zweig dann erneut bis zur Übergangsstelle berechnet, wird der Ruck überprüft und ggf. wiederum ein Zweig abgesenkt.

Tatsächlich ist die Verbindung der beiden Zweige häufig aufwändiger als die Berechnung der Zweige selbst und lässt sich durch Sonderbetrachtungen stark beschleunigen. Wenn einer der beiden Zweige sehr geringe Beschleunigungen in den letzten Punkten vor der Übergangsstelle aufweist, z.B. weil dort eine Achs- oder Bahngeschwindigkeitsbegrenzung wirkt, ist es sinnvoll, den anderen Zweig über die Übergangsstelle hinauslaufen zu lassen und bereits berechnete Punkte zu überschreiben. Wird der Zweig dann ebenfalls durch die selbe Achs- oder Bahngeschwindigkeitsbegrenzung begrenzt, tritt keine Ruckverletzung an der verschobenen Übergangsstelle mehr auf.

Da das Absenken eines Zweiges sehr viele Iterationen beinhalten kann, ist es teilweise sinnvoll, vorher abzuschätzen, wie viele Stützstellen zurückgegangen werden muss. Diese Abschätzung lässt sich aus der Höhe der Ruckverletzung an der Übergangsstelle ableiten.

Letztendlich kann man hierbei auch beachten, dass eine strikte Einhaltung der Achsruckbeschränkungen nicht immer unbedingt notwendig ist, da die Beschränkungen in der Praxis häufig nur grobe Schätzungen sind.

### 3.4 Anwendung am Beispiel Kreis

Der vorgestellte Algorithmus wird zunächst auf das in Abschnitt 2.4 vorgestellten Beispiel angewandt. Dabei zeigt sich, dass sich das Geschwindigkeitsprofil ohne Betrachtung von Sonderfällen einfach lösen lässt. Abb. 4 zeigt die Ergebnisse des Beispiels. Es ist das Geschwindigkeitsprofil (rot), die Bahnbeschleunigung (blau) und der Bahnrick (grün) sowohl über der Zeit  $t$  (links unten) als auch über dem Bahnparameter  $s$  (rechts oben) aufgetragen. Weiterhin lässt sich aus der Abbildung noch die Bahn in der  $x$ -

$y$ -Ebene (links oben), die Geschwindigkeit, die Beschleunigung und der Ruck (rechts unten) der beiden Linearachsen  $X$  und  $Y$  ablesen. Die Bahn ist in vier Berechnungsabschnitte unterteilt. Die lokalen Minima der oberen Grenze der Bahngeschwindigkeit (schwarze Kurve im Diagramm links oben) treten auf dem Kreis bei  $s/R = \{\pi/2, \pi, 3\pi/2\}$  auf, wo nur eine Achse die gesamte Bahngeschwindigkeit übernimmt. Die Beschränkungen der Achsen können den horizontalen Linien in den drei Diagrammen (rechts unten) entnommen werden. Die maximale Achsgeschwindigkeit und -beschleunigung wird in den Diagrammen nicht überschritten. Die geringe Verletzung im Achsruck tritt vor allem an den Übergangsstellen zwischen Vorwärts- und Rückwärtszweig auf.

## 4 Ergebnisse einer Fünfachsbe- wegung

Das im vorherigen Abschnitt vorgestellte Verfahren der approximativen Geschwindigkeitsoptimierung wird im Folgenden auf eine Fünfachsbe-  
wegung angewendet. Die Achsen der betreffenden Maschine setzen sich aus drei Linearachsen  $X, Y$  und  $Z$  und zwei Rundachsen  $A$  und  $B$  zusammen,  $A_k \in \{X, Y, Z, A, B\}$ . Die Bahn und der Zusammenhang zwischen dem Bahnparameter  $s$  und den fünf Maschinenachsen  $A_k$ , der in den Gln. (4) für den Kreis geschlossen angegeben werden konnte, ist für dieses Beispiel lediglich als Datentabelle verfügbar. Eine Zeile der Tabelle enthält für einen Bahnparameter  $s_i$  die dazugehörigen Positionen und Ableitungen der Achsen  $A_k(s_i)$  bis  $A_k'''(s_i)$ . Die CNC speichert diese Daten während der Abarbeitung des Programms. Auch die Beschränkungen der Maschinenachsen sind daraus bekannt. Abb. 5 zeigt die Ergebnisse der Berechnung in der gleichen Darstellung wie auch schon bei dem Beispiel der Kreisbahn. Dabei ist die Abbildung in drei wesentliche Teile untergliedert.

In dem Diagramm (links oben) ist die Abbildung der Bahn im Raum mit dem Verlauf des Orientierungsvektors dar-

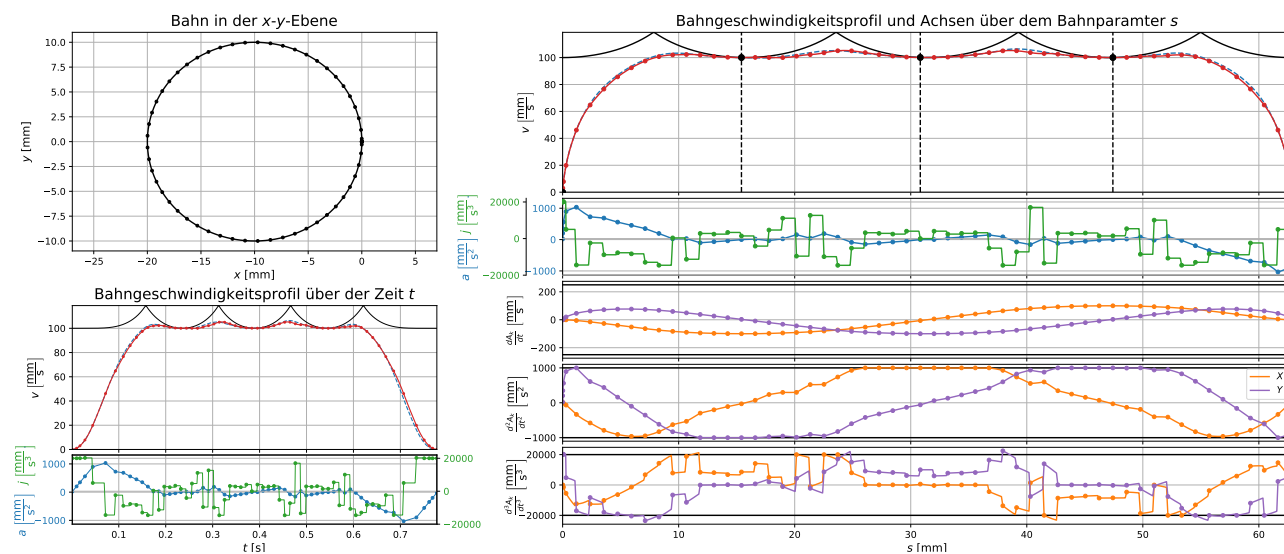


Abbildung 4 Ergebnisse der Geschwindigkeitsoptimierung an dem analytischen Beispiel Kreis in der  $x$ - $y$ -Ebene

gestellt. Diesen Orientierungsvektor kann man sich als ein Werkzeug vorstellen, das auf der Bahn entlangfährt. Im ersten Teil der Bewegung  $s < 408\text{ mm}$  sind vor allem große Bewegungen erkennbar, wobei es sich um Zustellbewegungen zum Werkstück der Bearbeitung handelt. Das Werkstück wird im zweiten Teil der Bahn bearbeitet, was kleinere Bewegungen mit abrupten Wechsels der Richtung und des Orientierungsvektors zur Folge hat.

In den Diagrammen (rechts) sind sowohl die Bahn- als auch die Achsparameter über dem Bahnparameter  $s$  aufgetragen. Im oberen Diagramm zeigt die schwarze Kurve die obere Grenze der Bahngeschwindigkeit nach Gl. (6) aus Abschnitt 3.1. Die vertikalen Markierungen teilen die Bahn in Berechnungsabschnitte und die schwarzen Punkte zeigen die anfänglich berechneten Übergangsgeschwindigkeiten. Die Übergangsgeschwindigkeit bei  $s \approx 408\text{ mm}$  resultiert aus einer Unstetigkeit der ersten Ableitung in der Geometrie (Ecke), auf die hier nicht weiter eingegangen wurde. Ausgehend von den Beschränkungen und Unterteilungen wurde das Bahngeschwindigkeitsprofil, dargestellt als rote Kurve, berechnet.

Die blau gestrichene Kurve im oberen Diagramm zeigt die optimale Lösung, also das zeitminimale optimale Geschwindigkeitsprofil. Deren Berechnung ist z.B. in [11] beschrieben. Um sie mit den Ergebnissen des Beitrags vergleichen zu können, ist das Geschwindigkeitsprofil nicht wie in [11] beschrieben als B-Spline definiert, sondern nach den Gleichungen (2). Für die Berechnung der optimalen Lösung wurde *pyOpt* [10] mit dem nichtlinearen Optimierer *Ipopt* [12] verwendet.

Das zweite Diagramm auf der rechten Seite bildet die

Bahnbeschleunigung (blau) und den Bahnruck (grün) ab. In den unteren drei Diagrammen ist je die Achsgeschwindigkeit, -beschleunigung und der -ruck für die drei Linearachsen  $X$ ,  $Y$  und  $Z$  und die beiden Rundachsen  $A$  und  $B$  aufgetragen. Die schwarzen waagerechten Linien symbolisieren wieder deren Beschränkungen.

Der dritte Abschnitt von Abb. 5 (links unten) zeigt ebenfalls die Bahngeschwindigkeit, -beschleunigung und den -ruck, sowohl die zeitoptimale Lösung, diesmal über der Zeit  $t$  aufgetragen.

Anhand der Simulation lässt sich feststellen, dass die Berechnung des Geschwindigkeitsprofils einen deutlich höheren Aufwand zur Folge hat. Einerseits resultiert dies aufgrund der höheren Anzahl an Achsen. Hauptsächlich ist der Aufwand jedoch der deutlich komplexeren Geometrie der Bahn geschuldet. So müssen bedeutend mehr Sonderfälle abgehandelt werden, die bei der Berechnung des Kreises nicht notwendig waren. Einige davon sind in Abschnitt 3.3 beschreiben. Der vorgestellte Algorithmus ist unter Python 3.5 implementiert und wurde auf einem *Intel(R) Core(TM) i7-6820HQ @ 2.70 GHz* berechnet. Die Eckdaten der Berechnung, d. h. die Aufteilung in Berechnungsabschnitte, deren Anzahl an Stützstellen, die benötigen Iterationen/Aufrufe des Algorithmus aus 3.2 pro Abschnitt und die Berechnungszeit sind in Tabelle 1 gegenübergestellt. Die Anzahl der Iterationen bis das erste Mal der Vorwärts- und der Rückwärtszweig aneinandergestoßen sind und eine Verbindung der beiden Zweige überprüft wurde, ist in Klammern () angegeben. Vor allem für  $s > 408\text{ mm}$  wird ein erschreckend großer Anteil für die Verbindung der Zweige benötigt.

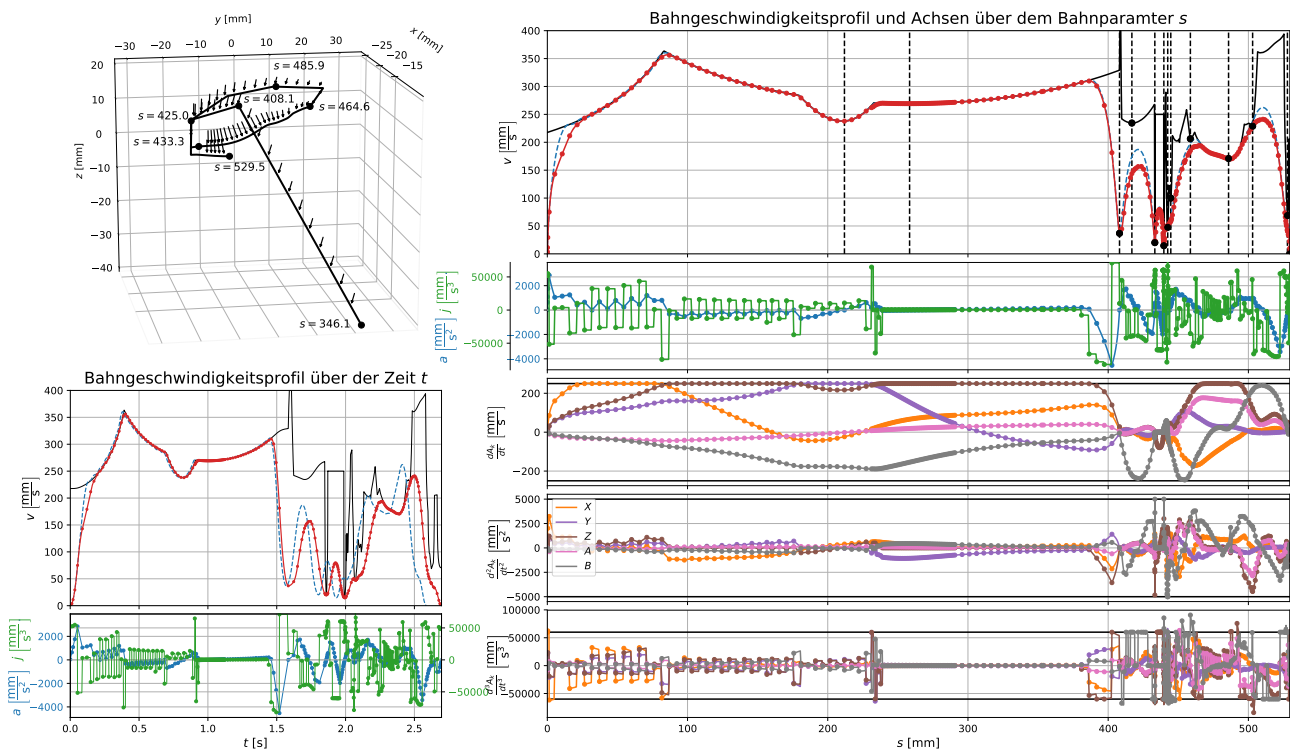


Abbildung 5 Ergebnisse der Geschwindigkeitsoptimierung an dem praktischen Beispiel der 5-Achs-Bewegung im Raum

**Tabelle 1** Eckdaten und Zeiten der Berechnung des Geschwindigkeitsprofils aus Abb. 5

Abschnitt	1	2	3	4/5	6	7	8/9/10	11/12/13
Bahnintervall in [mm]	[0, 211.9]	[211.9, 258.4]	[258.4, 408.1]	[408.1, 433.3]	[433.3, 439.7]	[439.7, 442.5]	[442.5, 485.9]	[485.9, 529.5]
Stützstellen	44	25	48	21	32	21	53	48
Iterationen	54 (52)	51 (27)	54 (50)	3429 (76)	7074 (31)	513 (20)	976 (232)	2905 (191)
Berechnungszeit in [s]	0.570	0.679	0.617	60.46	72.22	10.56	16.29	66.45

Aufgrund der Unterteilung in Berechnungsabschnitte ist eine parallele Berechnung auf mehreren Prozessoren einfach möglich. Da in einigen Fällen die Übergangsgeschwindigkeit nicht erreicht wird, müssen dann Abschnitte mehrfach ausgewertet werden.

## 5 Zusammenfassung

In dem Beitrag wurde eine Erweiterung der schrittweise/iterativen Verfahren für die Berechnung eines näherungsweise zeitoptimalen Geschwindigkeitsprofils vorgestellt. Zum einen unterscheidet sich die Definition der Bahngeschwindigkeit als  $C^1$  Spline mit stückweise konstantem Ruck. Die größten Vorteile liegen in der Parametrisierung nach  $t$  für die Abarbeitung in einer CNC und der geschlossenen Lösbarkeit von  $a(v_{p+})$  und  $j(v_{p+})$  bei einer Parametrisierung nach  $v_{p+}$ , vgl. Gl. (3). Für ein numerisches Optimierungsverfahren erweist sich diese Definition jedoch als weniger geeignet, da bei ungeeigneter Wahl von  $v_{p+}$  die Größen  $T$ ,  $a$  und  $j$  aus den Gl. (3) unbestimmt sein können. Zusätzlich ist die Definition nicht lokal, sondern hängt von allen vorherigen Stützpunkten ab.

Weiterhin wurde eine Methode zur Unterteilung der Bahn in Berechnungsabschnitte vorgestellt. Diese hat bei den vorgestellten Beispielen sehr gute Ergebnisse erzielt. Sie lässt sich sowohl für die schrittweise/iterativen Verfahren, als auch für eine abschnittsweise numerische Optimierung verwenden.

Die geringen Unterschiede des Geschwindigkeitsprofils zwischen dem hier vorgestellten Verfahren und der numerischen Optimierung resultieren voranging aus dem Zusammenfügen der Berechnungszweige. Der deutlich geringere Berechnungsaufwand spricht für die schrittweise/iterativen Verfahren mit den hier vorgestellten Erweiterungen. Trotzdem ist die Berechnungszeit für die Abschnitte vier bis dreizehn in Tabelle 1 deutlich zu hoch. Da auch dies auf das Zusammenfügen der Berechnungszweige zurückzuführen ist, sollte die Verbesserung dieser Methode Gegenstand weiterführender Untersuchungen sein.

## 6 Literatur

- [1] Beudaert, X.; Pechard, P.; Tournier, C.: *5-Axis tool path smoothing based on drive constraints*. Elsevier, International Journal of Machine Tools and Manufacture. (2011) 51, S. 958–965.
- [2] Beudaert, X.; Lavernhe, S.; Tournier, C.: *Feedrate interpolation with axis jerk constraints on 5-axis NURBS and G1 tool path*. Elsevier, International Journal of Machine Tools and Manufacture. (2012) 57, S. 73–82.
- [3] Bharathi, A.; Dong, J.: *Feedrate optimization for smooth minimum-time trajectory generation with higher order constraints*. Springer, The International Journal of Advanced Manufacturing Technology. (2016) 82, S. 1029–1040.
- [4] Bobrow, J.; Dubowsky, S.; Gibson, J.: *Time-optimal control of robotic manipulators along specified paths*. Sage Publications Sage CA: Thousand Oaks, CA, The international journal of robotics research. (1985) 4, S. 3–17.
- [5] Dong, J.; Stori, J.: *A generalized time-optimal bi-directional scan algorithm for constrained feed-rate optimization*. American Society of Mechanical Engineers, Journal of dynamic systems, measurement, and control. (2006) 128, S. 379–390.
- [6] Dong, J.; Ferreira, P.; Stori, J.: *Feed-rate optimization with jerk constraints for generating minimum-time trajectories*. Elsevier, International Journal of Machine Tools and Manufacture. (2007) 47, S. 1941–1955.
- [7] Herzog, R.; Blanc, P.: *Time-optimal trajectory planning in CNC machining including vibrational behaviour*. IEEE, Control Conference (ECC). (2015), S. 1950–1954.
- [8] Mattmüller, J.; Gisler, D.: *Calculating a near time-optimal jerk-constrained trajectory along a specified smooth path*. Springer, The International Journal of Advanced Manufacturing Technology. (2009) 45, S. 1007.
- [9] Pardo-castellote, G.; Cannon, R.: *Proximate time-optimal algorithm for on-line path parameterization and modification*.
- [10] Perez, R.; Jansen, P.; Martins, J.: *pyOpt: a Python-based object-oriented framework for nonlinear constrained optimization*. Springer, Structural and Multidisciplinary Optimization. (2012) 45, S. 101–118.
- [11] Sencer, B.; Altintas, Y.; Croft, E.: *Feed optimization for five-axis CNC machine tools with drive constraints*. Elsevier, International Journal of Machine Tools and Manufacture. (2008) 48, S. 733–745.
- [12] Wächter, A.; Biegler, L.: *On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming*. Springer, Mathematical programming. (2006) 106, S. 25–57.



## **Online-Optimierung von Geschwindigkeitsprofilen entlang vorgegebener Bahnen unter Berücksichtigung von Achsruckbeschränkungen**

Kopp, Justus; Bader, Bertold; Woittennek, Frank

In: IFToMM D-A-CH Konferenz / Fünfte IFToMM D-A-CH Konferenz 2019

Dieser Text wird über DuEPublico, dem Dokumenten- und Publikationsserver der Universität Duisburg-Essen, zur Verfügung gestellt.

Die hier veröffentlichte Version der E-Publikation kann von einer eventuell ebenfalls veröffentlichten Verlagsversion abweichen.

DOI: <https://doi.org/10.17185/duepublico/48195>

URN: <urn:nbn:de:hbz:464-20190221-183635-1>

Link: <https://duepublico.uni-duisburg-essen.de:443/servlets/DocumentServlet?id=48195>

Lizenz:

Sofern nicht im Inhalt ausdrücklich anders gekennzeichnet, liegen alle Nutzungsrechte bei den Urhebern bzw. Herausgebern. Nutzung - ausgenommen anwendbare Schrankenregelungen des Urheberrechts - nur mit deren Genehmigung.