Bartkowiak, René:

Der harmonisch getriebene Rayleigh-van der Pol Oszillator

In: IFToMM D-A-CH Konferenz / Dritte IFToMM D-A-CH Konferenz 2017

DOI: http://dx.doi.org/10.17185/duepublico/43396

URN: urn:nbn:de:hbz:464-20170213-110918-7

Link: http://duepublico.uni-duisburg-essen.de/servlets/DocumentServlet?id=43396

Der harmonisch getriebene Rayleigh-van der Pol Oszillator

Dr.-Ing. René Bartkowiak, Universität Rostock, Lehrstuhl Technische Mechanik/ Dynamik, 18051 Rostock, Deutschland, rene.bartkowiak@uni-rostock.de

Kurzfassung

Die nachfolgenden Herleitungen liefern eine Grundlage zur Untersuchung, ob das Phänomen der Synchronisation zur aktiven Schwingungstilgung mit Hilfe geregelter selbsterregter Oszillatoren genutzt werden kann. Das Treiben eines selbsterregten Oszillators, also die Reaktion auf eine externe Erregerkraft, kann als der einfachste Fall von Synchronisation angesehen werden [1]. Für die aktive Schwingungstilgung von Systemen mit harmonischem Schwingungsverhalten ist es notwendig, dass das aktive Element unter Einwirkung einer harmonischen Erregerkraft ebenfalls harmonische Schwingungen ausführt. Die meisten bekannten Oszillatoren mit stabilem Grenzzyklus weisen jedoch eine nichtharmonische periodische Lösung auf. Im Folgenden werden die Parameter des Rayleigh-van der Pol (RvdP) Oszillators so an eine gegebene harmonische Erregerkraft angepasst, dass die synchronisierte Bewegung ebenfalls harmonisch ist.

Im ersten Schritt wird der freie selbsterregte Oszillator mit asymptotisch stabilem Grenzzyklus hergeleitet. Ausgangspunkt ist ein Feder-Masse System (Masse m, Steifigkeit c) mit einem geregeltem Kraftelement $F_1(x,\dot{x})$ und einer äußeren Erregung $F_2(t) = \hat{F}\sin\Omega t$, siehe Bild 1.

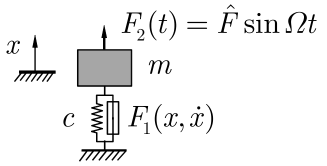

Bild 1 Feder-Masse System mit einem geregeltem Kraftelement und einer äußeren Erregung.

Die Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F_1(x,\dot{x})}{m} + \frac{\hat{F}}{m}\sin\Omega t, \quad \omega^2 = \frac{c}{m}. \tag{1}$$

Für asymptotisch stabile periodische Bewegungen des freien Systems, also $\hat{F} = 0$, wird ein Regelgesetz für das Kraftelement basierend auf der Speed-Gradient Methode [2] entworfen. Durch Definition der Zielfunktion

$$Q = \frac{1}{2}(H(x,\dot{x}) - H_0)^2 \tag{2}$$

mit der Gesamtenergie des Systems $H = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}cx^2$ und der konstanten Sollenergie $H_0 > 0$ wird das Regelgesetz

$$F_1 = -\gamma\frac{\partial\dot{Q}}{\partial F_1} = -\gamma(H(x) - H_0)\dot{x} = -\frac{\gamma}{2}(m\dot{x}^2 + cx^2 - 2H_0)\dot{x} \tag{3}$$

mit dem Proportionalitätsfaktor $\gamma > 0$ erhalten. Einsetzen der geregelten Kraft (3) in die Bewegungsgleichung (1) unter Berücksichtigung von $\hat{F} = 0$ und Umstellen liefert die Differentialgleichung eines selbsterregten Oszillators,

$$\ddot{x} + \frac{\gamma}{2}\left(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2 - \frac{2H_0}{m}\right)\dot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{4}$$

Durch Einführung der dimensionslosen Zeit $\tau = \omega t$ mit $' \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{\omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ sowie der dimensionslosen Auslenkung $q = \frac{x}{\ell}$ mit $\ell^2 = \frac{2H_0}{m\omega^2}$ wird die Standardform von Gleichung (4) erhalten

$$q'' + \varepsilon\left(q'^2 + q^2 - 1\right)q' + q = 0, \quad \varepsilon = \frac{\gamma H_0}{m\omega}. \tag{5}$$

Die Differentialgleichung (5) mit der exakten stationären Lösung $q(\tau) = \sin(\tau - \tau_0)$ entsprechend [3] ist ein Spezialfall des allgemeinen nichtharmonischen Rayleigh-van der Pol Oszillators, siehe auch [4],

$$q'' + \varepsilon\left(\mu q'^2 + \nu q^2 - 1\right)q' + q = 0, \quad \mu + \nu > 0. \tag{6}$$

Jetzt wird das Verhalten des Feder-Masse Systems aus Bild 1 unter Einwirkung der harmonischen Krafterregung $F_2(t) = \hat{F}\sin\Omega t$ mit $\Omega = \eta\omega$ untersucht. Die aus (5) erhaltene inhomogene Bewegungsgleichung

$$q'' + \varepsilon\left(q'^2 + q^2 - 1\right)q' + q = \bar{\hat{F}}\sin\eta\tau, \quad \bar{\hat{F}} = \frac{\hat{F}}{m\ell\omega^2} \tag{7}$$

stellt einen getriebenen harmonischen RvdP Oszillator dar. Die Grundkreisfrequenz eines getriebenen Oszillators kann ein rationales Vielfaches der Erregerkreisfrequenz sein, $k/p\,\Omega$, mit den Windungszahlen k, p, auch genannt Synchronisation der Ordnung k/p. Hier wird ausschließlich die Synchronisation der Ordnung $1/1$ betrachtet. In diesem Fall sind die stationären Lösungen von (7) im Allgemeinen nichtharmonisch.
Im Folgenden werden die Eigenschaften des freien harmonischen RvdP Oszillators (5) genutzt, um die Parameter des getriebenen nichtharmonischen Oszillators (6) in Abhängigkeit der Erregeramplitude $\hat{F}$ und der Erregerkreisfrequenz Ω so anzupassen, dass die stationäre Lösung harmonisch ist. Ausgangspunkt ist der Oszillator (5), bei dem die Parameter so angepasst sind, dass die stationäre Lösung $q(\tau) = n\sin\eta\tau$ lautet,

$$q'' + \varepsilon\left(q'^2 + \eta^2 q^2 - \eta^2 n^2\right)q' + \eta^2 q = 0, \quad \varepsilon(\eta) = \frac{\gamma H_0 \eta}{m\Omega}. \tag{8}$$

Partitionieren von (8) liefert

$$q'' + \varepsilon\left(q'^2 + \eta^2 q^2 + \left(\frac{(n+1)}{n\eta\bar{\ell}^3} - \eta^2 n^2\right)\right)q' + \left(\eta^2 + \frac{\eta(\eta+1)}{n\bar{\ell}}\right)q = \frac{\eta(\eta+1)}{n\bar{\ell}}q + \frac{\varepsilon(n+1)}{n\eta\bar{\ell}^3}q', \quad \bar{\ell} = \frac{\ell}{\eta}. \tag{9}$$

Einsetzen der harmonischen Lösung $q(\tau) = n\sin\eta\tau$ in die rechte Seite von (9) liefert die harmonische Erregerkraft

$$\bar{\bar{\hat{F}}}\eta\sin(\eta\tau + \alpha) = \frac{\eta}{\bar{\ell}}\sqrt{(\eta+1)^2 + \frac{\bar{\varepsilon}^2}{\bar{\ell}^4}(n+1)^2}\sin(\eta\tau + \alpha), \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\eta}, \quad \bar{\bar{\hat{F}}} \equiv \frac{\hat{F}}{m\bar{\ell}\Omega^2}, \tag{10}$$

wobei für den Phasenwinkel α gilt

$$\tan\alpha = \frac{\bar{\varepsilon}(n^* + 1)}{\bar{\ell}^2(\eta^* + 1)}. \tag{11}$$

Die Stabilitätsanalyse für den mit der Erregerkraft (10) getriebenen Oszillator auf der linken Seite von (9) zeigt, dass die Synchronisation der Ordnung $1/1$ asymptotisch stabil ist für alle n und η, für welche gilt

$$\frac{\bar{\varepsilon}\,(n+1)}{\bar{\ell}^3\,n} - 2\,\bar{\varepsilon}\,\eta^3 n^2 < 0. \tag{12}$$

Im nächsten Schritt werden die Parameter n und η des Oszillators auf der linken Seite von (9) in Abhängigkeit von einer beliebig vorgegebenen Erregerkraft $F_2(t) = \hat{F}\sin(\Omega t + \alpha^*)$ und einem definierten Phasenwinkel α^* ausgedrückt. Umstellen der Amplitudenbedingung in (10) und der Phasenbedingung in (11) liefert

$$\eta^* = \bar{\bar{\hat{F}}}\bar{\ell}\cos\alpha^* - 1, \quad n^* = \frac{\bar{\bar{\hat{F}}}\bar{\ell}^3}{\bar{\varepsilon}}\sin\alpha^* - 1. \tag{13}$$

Rücksubstitution auf die ursprünglichen Koordinaten des Systems (1) liefert die geregelte Kraft des Kraftelementes

$$F_1(x,\dot{x}) = -\frac{\gamma}{2}\left(m\dot{x}^2 + m\Omega^2 x^2 - \left(\frac{(n^*+1)}{n^*\eta^*\bar{\ell}^3} - \eta^{*2}n^{*2}\right)2H_0\right)\dot{x} - m\left(\Omega^2 + \frac{\Omega(\eta^*+1)}{n^*\bar{\ell}} - \omega^2\right)x. \tag{14}$$

Durch das Regelgesetz (14) ist die stationäre Lösung des Systems (1) aufgrund einer Erregerkraft $\hat{F}\sin\Omega t$ gegeben durch $x(t) = n^*\eta^*\bar{\ell}\sin(\Omega t - \alpha^*)$ wenn die Stabilitätsbedingung (12) erfüllt ist. Eine gewünschte Amplitude der stationären Lösung $\hat{x}_{\mathrm{soll}}$ kann über die Sollenergie vorgegeben werden durch

$$H_0 = \frac{\Omega^2\,m\hat{x}_{\mathrm{soll}}^2}{2\left(\frac{2\hat{F}\,\sin\alpha^*}{\Omega^3\,\gamma m} - 1\right)^2\left(\frac{\hat{F}\,\cos\alpha^*}{\Omega^2\,m} - 1\right)^2}. \tag{15}$$

Das Regelgesetz (14) kann jetzt auf Anwendbarkeit zur aktiven Schwingungstilgung hin untersucht werden.

Literatur

[1] Pikovsky A., Rosenblum M. , and Kurths J., *Synchronization A Universal Concept in Nonlinear Sciences*, Cambridge University Press, 2001.

[2] Fradkov, A.L., Miroshnik, I.V., Nikiforov, V.O., *Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems*, Springer-Science+Business Media, B.V., 1999.

[3] McLachlan, N. W. (1956) Non-Linear Differential equations in Engineering and Physical Science. Oxford, *Clarendon Press*.

[4] Nathan, A. (1979) The Rayleigh-van der Pol harmonic oscillator. *International Journal of Electronics* , 46:6, 645-647