Differentialgleichungsrelative von Klassen linearer und nichtlinearer Kontrollsysteme

Vom Fachbereich 11/Mathematik der
Gerhard-Mercator-Universität
Gesamthochschule Duisburg

zur Erlangung des akademischen Grades eines
Dr. rer. nat.
genehmigte Dissertation
von

Axel Sauerland
aus
Soest

Referent: Prof. Dr. H.-J. Arnold

Korreferent: Prof. Dr. H. Wefelscheid

Tag der mündlichen Prüfung: 04.10.1994

Die vorliegende Dissertation wurde von meinem akademischen Lehrer, Herrn Prof. Dr. rer. nat. H.-J. Arnold, angeregt und während der gesamten Zeit ihres Entstehens mit großem Interesse betreut.
Ihm gilt mein besonderer Dank für die einzigartigen Vorlesungen über Grundlagen der Geometrie/Geometrische Algebra, die ich bei ihm hören durfte und für seine menschliche und wissenschaftliche Unterstützung.

Ferner danke ich den Herren Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz, Priv.-Doz. Dr.-Ing. F. Svaricek, Dr. rer. nat. A. Kopp und Dr. rer. nat. R. Soltysiak für ihr Interesse, das sie den Differentialgleichungsrelativen entgegengebracht haben.

Diese Arbeit widme ich meinen Eltern.

Duisburg, im Oktober 1994 Axel Sauerland

Inhalt

Einleitung

Mit den *"affinen Relativen"* gelingt Arnold (1974) in der Arbeit "Der projektive Abschluß affiner Geometrien mit Hilfe relationentheoretischer Methoden" eine einheitliche, eindeutige und algebraische Kennzeichnung aller schwach affinen Geometrien, insbesondere auch der nicht-DESARGUESschen affinen Ebenen, bei denen Koordinatenbereiche zur synonymen Beschreibung nicht herangezogen werden können. Dabei sind die (schwach) affinen Relative $(\mathfrak{P}, \boldsymbol{\mathcal{R}})$ binäre Relative mit $\mathfrak{P}$ als Menge der eigentlichen Punkte und $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ als Menge der Parallelscharen (Fernpunkte oder uneigentliche Punkte) einer (schwach) affinen Geometrie.
Die "direkte" Algebraisierung von schwach affinen Geometrien mittels relationentheoretischer Methoden mündet in dem Ergebnis, daß sich schwach affine Geometrien und schwach affine Relative umkehrbar eindeutig aufeinander beziehen lassen *(synonymer Zusammenhang)*: diese beiden Begriffe sind daher nur zwei verschiedene Sprechweisen für ein und denselben Sachverhalt.
Ein weiterer Vorteil der relationenalgebraischen Sprechweise liegt in ihrer *konstruktiven Erweiterbarkeit*: Ohne die gewählte Sprache der Relationen-Algebra verlassen zu müssen, ist dieser Kalkül geeignet, für reichhaltige geometrische Zusatzaxiome (Schließungssätze) äquivalente <u>einfache</u> und gut handhabbare Rechenregeln anzugeben. Als eine wichtige Regel erweist sich die *zweistufige Homogenitätsregel*, sie ist auf der geometrischen Seite äquivalent zur Konstruierbarkeit parallelähnlicher Dreiecke. Legt man darüber hinaus dreistellige affine Relative zugrunde, so erweisen sich diese ebenfalls als synonym zu den affinen Geometrien - die Hinzunahme der *dreistufigen Homogenitätsregel* findet dann auf der geometrischen Seite ihre Entsprechung in der Gültigkeit des großen affinen Satzes von DESARGUES (Arnold, 1987).
Auch andere sehr allgemeine Klassen von Geometrien können mit den (geometrischen) Relativen beschrieben werden: Bei Vorlage von angeordneten affinen Geometrien werden auf der algebraischen Seite die affinen Richtungsrelative betrachtet, deren binäre Relationen können als "Richtungssinne" in der Geometrie interpretiert werden (Arnold, 1976). Aber auch Fastkörpergeometrien und Liniengeometrien finden ihre synonyme Entsprechung in *"fastaffinen Relativen"* (Soltysiak, 1980) und *"Linienrelativen"* (Kopp, 1986).

In all diesen Geometrien spielt die Zeit noch keine Rolle, doch gelingt auch eine Dynamisierung der Relative durch Einbezug von Zeitstrukturen mit den *"Regel-Relativen"* (Arnold, 1993a, 1993b, 1994). Mit ihnen wird eine neue mathematische Sprache für zeitdiskrete und kontinuierliche Systeme der Regelungstheorie bereitgestellt, denn es gelingt eine relationen-algebraische synonyme Charakterisierung des allgemeinen Systembegriffs von Sontag (1990).

Charakteristisch für diese Regel-Relative ist die eindeutige Zuordnung von über einen längeren Zeitraum konstanten Stellfunktionen zu Systemen binärer Relationen auf dem Bereich der Paare (Zeit, Zustand). Die Spuren der Relationen sind dann die Bahnen, die mit den der Relationen zugehörigen Stellwerten bei den jeweiligen Anfangswerten im Zielgrößen-Bereich entstehen.

Abschließend sei noch bemerkt, daß auch kognitive Aspekte bei der Regelung einfacher dynamischer Systeme mit Hilfe der Relative diskutiert werden können. Die Arbeiten (Arnold, 1990, 1991) sowie (Heineken, Arnold, Kopp, Soltysiak, 1992) zeigen die zur Mathematisierung handlungstheoretischer Konzepte hin geleisteten Untersuchungen.

In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns mit den Strukturen derjenigen Relative, die durch Differentialgleichungen von Beispielklassen linearer, bilinearer und multilinearer Systeme definiert werden. Wir sind einerseits an der Kennzeichnung relationenalgebraischer Merkmale interessiert, dazu zählen die Eigenschaften der (schwach) affinen Relative sowie Zusatzregeln wie Kommutativgesetze und Homogenitätsregeln. Andererseits analysieren wir auch Merkmale der Regel-Relative, hier seien die Erreichbarkeitsrelation, die Zeitinvarianz und das Parallelisierungsaxiom genannt.

Im ersten Kapitel geben wir uns eine inhomogene, lineare Differentialgleichung 1. Ordnung $\frac{\partial}{\partial t}x(t) = ax(t) + bu$ vor. Bei Berücksichtigung der Anordnung der Zeitmenge $\mathcal{T} = \mathbb{R}$ (wir unterscheiden dann in Zukunfts- und Vergangenheitsrelationen) zeigt sich, daß das zugehörige *Differentialgleichungsrelativ* $(\mathfrak{P}, \mathfrak{R})$ bis auf einen Ausnahmefall im Kommutativgesetz und zwei Ausnahmen in der Homogenitätsregel allen Eigenschaften eines affinen Richtungsrelativs genügt. Hier werden erstmals Relative aufgezeigt, bei denen im Kommutativgesetz echte Enthaltenseinsbeziehungen bei den Produkten zweier Relationen auftreten. Es macht also auch bei den von solchen Differentialgleichungen definierten Geometrien Sinn, von der

Konstruierbarkeit parallelähnlicher Dreiecke (Homogenitätsregel) und dem Schließen von Parallelogrammen (Kommutativgesetz) zu sprechen. Führt man ferner den Begriff eines Winkelraumes als Abtragung des Produktes zweier Zukunfts- bzw. Vergangenheitsrelationen von einem Punkt A ein, so zeigen wir, daß dieser Winkelraum auch durch die Abtragung sämtlicher Relationen von A mit den zugehörigen Stellwerten, die zwischen den ursprünglich vorgegeben liegen, gebildet werden kann.

Mit dem Einschrittverfahren von Euler zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen werden im zweiten Kapitel die Zukunfts- und Vergangenheitsrelationen des Differentialgleichungsrelativs $(\mathfrak{P}, \mathfrak{R})$ auf die Relationen des affinen Relativs $(\mathfrak{P}, \mathcal{R})$ des Lösungsraumes $\mathfrak{P} = \mathbb{R}^2$ zurückgeführt. Mit Hilfe zweier zusätzlich auf der Grundmenge $\mathfrak{P}$ operierenden Relative - eines Abstandsrelativs $(\mathfrak{P}, \mathcal{A})$ und eines Steigungsrelativs $(\mathfrak{P}, \mathbf{R})$ - wird dieses Verfahren relationenalgebraisch interpretiert. Eine weitere Betrachtung dieses Kapitels dient der Konstruktion eines zu $(\mathfrak{P}, \mathfrak{R})$ vereinfachten Relativs $(\mathfrak{P}, \boldsymbol{\mathcal{R}})$. Der Grundgedanke dabei ist der, statt der überabzählbar großen Relationenmenge $\{\langle \dot{u} \rangle | u \in \mathbb{R}\} \subset \mathfrak{R}$ durch geeignetes Zusammenfassen nur noch eine abzählbare Relationenmenge $\boldsymbol{\mathcal{R}} = \{\mathcal{B}_i | i \in \mathbb{Z}\} \cup \{\mathcal{B}_i^{-1} | i \in \mathbb{Z}\} \cup \{\mathfrak{e}, [\pm\infty]\}$ zu betrachten. Dieses Relativ erweist sich immerhin noch als einfach graphisch und idempotent.

Die Differentialgleichungsrelative von zweigliedrigen Systemen inhomogener linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten werden im Kapitel drei betrachtet. Sie erweisen sich als schwach affin, sofern die Koeffizientenmatrix nicht nur rein imaginäre Eigenwerte besitzt. Die allgemeinen Lösungskurven dieser Differentialgleichungssysteme sind $\mathfrak{c}$-Kurven, ist darüber hinaus die Determinante der Koeffizientenmatrix ungleich Null, gilt auch das Parallelisierungsaxiom.

Im vierten Kapitel betrachten wir noch einmal die Differentialgleichung $\frac{\partial}{\partial t}x(t) = ax(t) + bu$, allerdings fuzzyfizieren wir jetzt die Relationen des Differentialgleichungsrelativs $(\mathfrak{P}, \mathfrak{R})$. Die Zugehörigkeitsfunktionen werden über Abstandsbetrachtungen im Zustandsraum bzw. im Stellraum ermittelt; wir können dabei zeigen, daß die Betrachtungen in der Menge der Fernpunkte, also auf der Stellachse, einfacher zu handhaben sind. Lassen wir in dem Differentialgleichungsrelativ $(\mathfrak{P}, \mathfrak{R})$ nur ganzzahlige Kontrollen zu, betrachten also das Relativ $(\mathfrak{P}, \mathfrak{R}^{\mathbb{Z}})$, so wird aus diesem mit der Fuzzyfizierung ein zu dem ursprünglichen Relativ vereinfachtes Relativ $(\mathfrak{P}, \boldsymbol{\mathcal{R}})$ konstruiert. Wir erhalten also $(\mathfrak{P}, \mathfrak{R})$ wieder zurück, allerdings mit größeren Relationen.

Im fünften Kapitel beschäftigen wir uns mit allgemeineren Klassen von (nichtlinearen) Systemen. In Anlehnung an (Schwarz, 1991) betrachten wir Sonderformen von eingliedrigen Differentialgleichungen *analytischer Systeme mit linearer Steuerung* (ALS), nämlich die der *bilinearen* (BLS) und *multilinearen* Systeme (MLS). Während die Differentialgleichungsrelative der allgemeinen MLS und BLS nur noch produkttransitiv sind und keine Aussagen über Kommutativität oder Homogenität getroffen werden können, sind die Relative der sogenannten zustandshomogenen und eingangshomogenen BLS isomorph zu dem affinen Relativ $(\mathfrak{P}, \mathcal{R})$ der reellen EUKLIDischen Ebene $\mathfrak{P} = \mathbb{R}^2$, sind also selbst affin.

Bei allen bisherigen Betrachtungen sind Tot- oder Latenzzeiten der Systeme noch nicht berücksichtigt worden. Durch die Einführung dreistelliger Relationen kann das Umschalten von Stellgrößen unter Totzeitbedingungen erfaßt werden. Im sechsten Kapitel geben wir die Bedingungen an, unter denen die Kommutativgesetze und Homogenitätsregeln der linearen Systeme und zustands- bzw. eingangshomogenen BLS dann noch gültig sind.

Kapitel 1

Relative inhomogener linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Analyse des der Differentialgleichung $\dot{x(t)} = ax(t) + bu$ zugeordneten Relativs. Die Untersuchungen werden dabei sowohl Eigenschaften affiner (Richtungs-) Relative überprüfen als auch Eigenschaften der Regel-Relative.

Gegeben sei eine inhomogene, lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten und Anfangsbedingung, also

$$\frac{\partial}{\partial t} x(t) = ax(t) + bu(t)\,, \quad x(t_o) = x^o.$$

Dabei ist vorgegeben:

$$a, b \in \mathbb{R}^{\neq 0},\ t \in \mathbb{R}.$$

Die eindeutig existierende Lösung lautet in der Integraldarstellung:

$$x(t) = x_h(t)\left[x_h^{-1}(t_o)x^o + \int_{t_o}^{t} x_h^{-1}(s)bu(s)\,ds\right],$$

wobei $x_h(t)$ Lösung des homogenen Teils der Differentialgleichung $\dot{x(t)} = ax(t) + bu(t)$ ist:

$$x_h(t) = e^{at}.$$

Das dieser Differentialgleichung zugeordnete (lineare) System $(\mathcal{T}, X, \mathcal{U}, \Phi)$ lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(+) &:= \mathbb{R}(+) \\ X &:= \mathbb{R} \\ \mathcal{U} &:= \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\Phi &:= \{(t', t_o, x^o, u(\cdot) | t', t_o \in \mathcal{T};\ t_o \leq t';\ u(\cdot) \in \mathcal{U}^{[t_o,t')}\} \\ (t', t_o, x^o, u(\cdot))\Phi &:= e^{at'} \left[e^{-at_o} x^o + \int_{t_o}^{t'} e^{-as} bu(s)\, ds \right]. \end{aligned}$$

Im folgenden beschränken wir uns auf diejenigen Stellfunktionen $w = u(\cdot)$, die über den gesamten Zeitraum $\mathcal{T}$ konstant sind:
Gegeben seien $t_o, t' \in \mathcal{T}$ mit $t_o \leq t'$ beliebig, dann

$$w \in \mathcal{U}^{[t_o,t')} \quad :\Leftrightarrow \quad w : \begin{cases} [t_o, t') & \longrightarrow \quad \mathcal{U} \\ \quad t & \longmapsto \quad w(t) := u = const. \end{cases}$$

Der Übergang zum Regel-Relativ $(\mathfrak{P} = \mathcal{T} \times X, \mathcal{R}, \Pi \cdot \mathrm{dt}) = (\mathcal{T}, \mathrm{X}, \mathcal{U}, \Phi)\Gamma$ lautet dann:

$$\mathcal{R} := \{\langle u \rangle | u \in \mathcal{U}\}$$

$$\begin{aligned} (t_o, x^o)\langle u \rangle (t, x) \quad &:\Leftrightarrow \quad (t, t_o, x^o, w_u)\mathit{\Phi} = x \quad \mathit{mit}\ w_u(t) \equiv u \ \ \mathit{f.\ a.}\ t \in [t_o, t') \\ (t_o, x^o)\, \Pi_{t_o}^t \Omega dt\, (t, x) \quad &:\Leftrightarrow \quad \bigvee_{w(\cdot) \in \mathcal{U}^{[t_o,t)}} \Omega(\cdot) = \langle w(\cdot) \rangle \ \wedge\ (t, t_o, x^o, w)\mathit{\Phi} = x. \end{aligned}$$

Die Definition der binären Relationen $\Pi_{t_o}^t \Omega dt$ braucht hier allerdings nicht weiter berücksichtigt werden, denn es gilt:

Bemerkung 1.1

$$\bigwedge_{\Omega \in \mathcal{R}^{[t_o,t)}} \Pi_{t_o}^t \Omega dt = \langle u \rangle \cap (t - t_o) \quad \mathit{f.\ g.}\ u \in \mathcal{U}.$$

Beweis:
Es sei $\Omega \in \mathcal{R}^{[t_o,t)}$ beliebig vorgegeben. Dann existiert ein $w \in \mathcal{U}^{[t_o,t)}$ mit $\Omega = \langle w \rangle$. Also

$$\Omega(t) = \langle w \rangle (t) = \langle w(t) \rangle = \langle u \rangle$$

mit $w(t') = u = \mathit{const.}$ f. a. $t' \in [t_o, t)$.

Wir gehen von obiger Differentialgleichung mit konstanten Stellfunktionen aus, können also wegen $u \in \mathbb{R}$ o. B. d. A. $b := 1$ setzen. Wir definieren für Punktepaare $(A, B) \in (\mathfrak{P} \times \mathfrak{P}) \setminus \mathfrak{e}$ mit $A = (t_A, x^A)$ und $B = (t_B, x^B)$ die Abbildung

$$\begin{cases} (\mathfrak{P} \times \mathfrak{P}) \setminus \mathfrak{e} & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\} \\ A, B & \longmapsto \quad A \cdot B := \begin{cases} -a\,\frac{x^B e^{-at_B} - x^A e^{-at_A}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} & : \quad t_A \neq t_B \\ \infty & : \quad t_A = t_B \wedge x^A < x^B \\ -\infty & : \quad t_A = t_B \wedge x^A > x^B \end{cases} \end{cases} .$$

Jeder Stellgröße $u \in \mathbb{R}$ der Differentialgleichung wird eine binäre Relation $[u]$ des Lösungsraumes $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zugeordnet gemäß der folgenden Vorschrift:

Seien Punkte $A, B \in \mathfrak{P}$ mit $A = (t_A, x^A)$, $B = (t_B, x^B)$ vorgegeben

$$\begin{aligned} A[u]B \quad :\Leftrightarrow \quad & \Delta t := -t_A + t_B \neq 0 \\ \wedge \quad & \bigvee_{x(t)} [\, \dot{x}(t) = ax(t) + u \\ \wedge \quad & A = (t, x(t)) \\ \wedge \quad & B = (t + \Delta t, x(t + \Delta t))\,] \\ \Leftrightarrow \quad & t_B \neq t_A \wedge x^B = e^{a(t_B - t_A)} \left(x^A + \frac{u}{a} \right) - \frac{u}{a}. \end{aligned}$$

Setzt man noch für jedes $\Delta t \in \mathbb{R}^{>0}$die zweistellige Relation (Δt) wie folgt an

$$A(\Delta t)B \quad :\Leftrightarrow \quad -t_A + t_B = \Delta t\,,$$

so erhalten wir für alle $u \in \mathbb{R}$ die **"Zukunftsrelationen"**

$$\langle \dot{u} \rangle := \bigcup_{\Delta t \in \mathbb{R}^{>0}} ([u] \cap \Delta t).$$

Der Zusammenhang zu den Relationen $\langle u \rangle \in \mathcal{R}$ des Regel-Relativs ist dabei

$$\langle \dot{u} \rangle \;=\; \langle u \rangle \setminus \mathfrak{e}.$$

Die inversen Relationen **("Vergangenheitsrelationen")** erhalten wir mit

$$\begin{aligned} \langle \dot{u} \rangle^{-1} \quad & := \left(\bigcup_{\Delta t \in \mathbb{R}^{>0}} ([u] \cap \Delta t) \right)^{-1} \\ & = \bigcup_{\Delta t \in \mathbb{R}^{>0}} ([u] \cap \Delta t)^{-1} \\ & = \bigcup_{\Delta t \in \mathbb{R}^{>0}} ([u] \cap (\Delta t)^{-1}). \end{aligned}$$

Mit der Zusammenfassung

$$\begin{array}{rcl}\boldsymbol{\mathfrak{V}} & := & \{\langle \dot{u}\rangle^{-1} \mid u \in \mathbb{R}\}\\ \boldsymbol{\mathfrak{Z}} & := & \{\langle \dot{u}\rangle \mid u \in \mathbb{R}\}\\ \boldsymbol{\mathfrak{R}} & := & \boldsymbol{\mathfrak{V}} \cup \boldsymbol{\mathfrak{Z}} \cup \{[\infty], [-\infty], \mathfrak{e}\}\end{array}$$

und den Definitionen

$$\begin{array}{rcl}A[\infty]B & :\Leftrightarrow & t_A = t_B \wedge x^A < x^B\\ A[-\infty]B & :\Leftrightarrow & B[\infty]A\end{array}$$

und der Abkürzung $[\pm\infty] := [\infty] \cup [-\infty]$ gilt folgende Aussage:

Definition und Satz 1.2
Das von der Differentialgleichung $\dot{x}(t) = ax(t) + u$ definierte zweistellige Relativ $(\mathfrak{P}, \boldsymbol{\mathfrak{R}})$, im folgenden kurz **"Differentialgleichungsrelativ"** *genannt, ist einfach graphisch.*

Beweis:

1. Scharf einfache Transitivität
   Gegeben seien zwei Punkte $A, B \in \mathfrak{P}$. Ist $t_A = t_B$, so gibt es genau eine Relation $\mathfrak{r} \in \boldsymbol{\mathfrak{R}}$ mit $A\,\mathfrak{r}\,B$:
   Bei $x^A = x^B$ ist es die Gleichheitsrelation $\mathfrak{e}$,
   bei $x^A < x^B$ ist es die Relation $[\infty]$,
   bei $x^A > x^B$ ist es die Relation $[-\infty]$.
   Es sei nun $t_A < t_B$. Wir erhalten folgende äquivalente Schritte:

$$u := -a\,\frac{x^B e^{-at_B} - x^A e^{-at_A}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} = A \cdot B$$

$$e^{-at_B}x^B - e^{-at_A}x^A = \frac{u}{a}(e^{-at_A} - e^{-at_B})$$

$$x^B = e^{at_B}\left[\frac{u}{a}(e^{-at_A} - e^{-at_B}) + x^A e^{-at_A}\right]$$

$$x^B = x(t_B) = e^{a(t_B - t_A)}(x^A + \frac{u}{a}) - \frac{u}{a}$$

$$(t_B, t_A, x^A, w_u)\Phi = x^B \text{ mit } w_u(t) = u \text{ f. a. } t \in [t_A, t_B),$$

   also die Existenz- und Eindeutigkeitsaussage mit $A\langle A \dot{\cdot} B\rangle B$.
   Analog verläuft die Betrachtung für Punkte $A, B \in \mathfrak{P}$ mit $t_A > t_B$, hier gilt

$$A\langle A \dot{\cdot} B\rangle^{-1} B.$$

Wir können daher für alle $A, B \in \mathfrak{P}$ und alle Relationen $\mathfrak{r} \in \mathfrak{R}$ setzen:

$$\mathfrak{r} = AB \quad :\Longleftrightarrow \quad A\mathfrak{r}B.$$

2. Abgeschlossenheit bezüglich Inversenbildung: aus $\mathfrak{r} \in \mathfrak{R}$ folgt sofort $\mathfrak{r}^{-1} \in \mathfrak{R}$.
3. Abgeschlossenheit bezüglich Gleichheitsrelation klar.
4. Linkstotalität der Relationen auch klar.

□

Satz 1.3
Die Relationen in $(\mathfrak{P}, \mathfrak{R})$ *sind idempotent, streng alternierend und (bis auf* $\mathfrak{e}$*) antisymmetrisch.*

Beweis:

1. $\mathfrak{r} \circ \mathfrak{r} = \mathfrak{r}$ f. a. $\mathfrak{r} \in \mathfrak{R}$
   (a) $\mathfrak{r} = \mathfrak{e}$ trivial.
   (b) $\mathfrak{r} = [\infty]$
   Folgende Zeilen sind äquivalent:

$$\begin{aligned} A([\infty] \circ [\infty])B & \\ A[\infty]C \wedge C[\infty]B & \quad \text{f. e.} \quad C = (t_C, x^C) \in \mathfrak{P} \\ x^A < x^C \wedge x^C < x^B \wedge t_A = t_C = t_B & \quad \text{f. e.} \quad C = (t_C, x^C) \in \mathfrak{P} \\ x^A < x^B \wedge t_A = t_B & \\ A[\infty]B. & \end{aligned}$$

   (c) $\mathfrak{r} = [-\infty]$ analog.
   (d) $\mathfrak{r} = \langle \dot{u} \rangle$ f. e. $u \in \mathbb{R}$
   Folgende Zeilen sind äquivalent:

$$\begin{aligned} A(\langle \dot{u} \rangle \circ \langle \dot{u} \rangle)B & \\ A\langle \dot{u} \rangle C \wedge C\langle \dot{u} \rangle B & \quad \text{f. e.} \quad C = (t_C, x^C) \in \mathfrak{P} \\ A([u] \cap \Delta t_1)C \wedge C([u] \cap \Delta t_2)B & \quad \text{f. e.} \quad C = (t_C, x^C) \in \mathfrak{P} \\ & \quad \text{mit} \quad \Delta t_1 = t_C - t_A,\ \Delta t_2 = t_B - t_C \\ A[u]C \wedge C[u]B \wedge t_A < t_C < t_B & \quad \text{f. e.} \quad C = (t_C, x^C) \in \mathfrak{P} \\ A[u]B \wedge t_A < t_B & \\ A\langle \dot{u} \rangle B. & \end{aligned}$$

Die Äquivalenz der drittletzten und vorletzten Zeile folgt aus dem Halbgruppenaxiom und der Eigenschaft (E) für Systeme, insbesondere gilt diese Aussage für alle Zeitpunkte t_C mit $t_A < t_C < t_B$.

(e) $\mathfrak{r} = \langle \dot{u} \rangle^{-1}$ f. e. $u \in \mathbb{R}$ analog.

2. $\mathfrak{r} \circ \mathfrak{r}^{-1} = \mathfrak{r} \cup \mathfrak{r}^{-1} \cup \mathfrak{e}$ f. a. $\mathfrak{r} \in \mathfrak{R}$

(a) $\mathfrak{r} = \mathfrak{e}$
Dann gilt: $\mathfrak{e} \circ \mathfrak{e}^{-1} = \mathfrak{e} \circ \mathfrak{e} = \mathfrak{e} = \mathfrak{e} \cup \mathfrak{e} = \mathfrak{e} \cup \mathfrak{e}^{-1}$.

(b) $\mathfrak{r} = [\infty]$
Es sei $(A, B) \in ([\infty] \circ [\infty]^{-1}) = [\infty] \circ [-\infty]$ vorgegeben. Daraus folgt:

$$\bigvee_{C=(t_C, x^C) \in \mathfrak{P}} A[\infty]C \wedge C[-\infty]B$$

$$\succ x^A < x^C \wedge x^B < x^C \wedge t_A = t_C = t_B \text{ f. e. } C = (t_C, x^C) \in \mathfrak{P}$$

Für $x^A = x^B$ gilt: $A\mathfrak{e}B$,
für $x^A < x^B$ gilt: $A[\infty]B$,
für $x^A > x^B$ gilt: $A[-\infty]B$,
also $(A, B) \in [\infty] \cup [\infty]^{-1} \cup \mathfrak{e}$.
Umgekehrt sei $(A, B) \in [\infty] \cup [-\infty] \cup \mathfrak{e}$ vorgegeben.
Dann gibt es ein $C = (t_C, x^C) \in \mathfrak{P}$ mit $t_C = t_A = t_B$ und $x^A, x^B < x^C$, also $A[\infty]C \wedge C[-\infty]B$, damit $A([\infty] \circ [\infty]^{-1})B$.

(c) $\mathfrak{r} = [\infty]^{-1}$ analog.

(d) $\mathfrak{r} = \langle \dot{u} \rangle$ f. e. $u \in \mathbb{R}$
Folgende Zeilen sind äquivalent:

$$\begin{array}{rll}
A(\langle \dot{u} \rangle \circ \langle \dot{u} \rangle^{-1})B & & \\
A\langle \dot{u} \rangle C \wedge C \langle \dot{u} \rangle^{-1} B & \text{f. e.} & C = (t_C, x^C) \in \mathfrak{P} \\
A([u] \cap (\Delta t_1))C \wedge C([u] \cap \Delta t_2)^{-1})B & \text{f. e.} & C = (t_C, x^C) \in \mathfrak{P} \\
& \text{mit} & \Delta t_1 = t_C - t_A,\ \Delta t_2 = t_C - t_B \\
A[u]C \wedge C[u]B \wedge t_A, t_B < t_C & \text{f. e.} & C = (t_C, x^C) \in \mathfrak{P} \\
A([u] \circ [u])B & & \\
A([u] \cup \mathfrak{e})B & & \\
(A, B) \in \langle \dot{u} \rangle \cup \langle \dot{u} \rangle^{-1} \cup \mathfrak{e}. & &
\end{array}$$

Die Äquivalenz der drittletzten und vorletzten Zeile folgt aus der Idempotenz und Linkstotalität der Relationen $[u]$ und aus der Tatsache $A[u]C \divideontimes C[u]A$.

(e) $\mathfrak{r} = \langle \dot{u} \rangle^{-1}$ f. e. $u \in \mathbb{R}$ analog.

□

Korollar 1.4
Das Relativ $(\mathfrak{P}, \widetilde{\mathfrak{R}})$ *mit*

$$\widetilde{\mathfrak{R}} := \{\langle \dot{u} \rangle \cup \langle \dot{u} \rangle^{-1} | u \in \mathbb{R}\} \cup \{[\infty] \cup [-\infty], \mathfrak{e}\}$$

ist ein schwach affines Relativ.

Satz 1.5 (Kommutativität)

1. *Es seien* $(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2) \in (\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}) \setminus ((\mathcal{V} \times \mathcal{Z}) \cup (\mathcal{Z} \times \mathcal{V}))$ *beliebig gegeben. Dann gilt*

$$\mathfrak{r}_1 \circ \mathfrak{r}_2 = \mathfrak{r}_2 \circ \mathfrak{r}_1 .$$

2. *Für Relationen* $\mathfrak{v} \in \mathcal{V}, \mathfrak{z} \in \mathcal{Z}$ *mit* $\mathfrak{v} = \langle \dot{v} \rangle^{-1}, \mathfrak{z} = \langle \dot{z} \rangle$ $(v, z \in \mathbb{R})$ *gilt*

   (a) $v = z$

$$\mathfrak{v} \circ \mathfrak{z} = \mathfrak{z} \circ \mathfrak{v}.$$

   (b) $v \neq z$

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{v} \circ \mathfrak{z} \subset \mathfrak{z} \circ \mathfrak{v} & \textit{f.} \quad a < 0 \\ \mathfrak{z} \circ \mathfrak{v} \subset \mathfrak{v} \circ \mathfrak{z} & \textit{f.} \quad a > 0 \end{array} .$$

Beweis:

0. Wir betrachten zunächst ein Relationenprodukt $[u] \circ [v]$ mit beliebigen $u \neq v \in \mathbb{R}$ (für $u = v$ ist die Behauptung trivial) und rechnen für ein beliebiges Punktepaar $(A, B) \in \mathfrak{P} \times \mathfrak{P}$ den Ausdruck $A([u] \circ [v])B$ aus:

$$A([u] \circ [v])B$$

$$\divideontimes \bigvee_{C=(t_C, x^C) \in \mathfrak{P}} A[u]C \wedge C[v]B$$

$$\divideontimes \bigvee_{C=(t_C, x^C) \in \mathfrak{P}} x^C = e^{at_C} \left[e^{-at_A} x^A + u \int_{t_A}^{t_C} e^{-as} \, ds \right]$$

$$\wedge \, x^B = e^{at_B} \left[e^{-at_C} x^C + v \int_{t_C}^{t_B} e^{-as} \, ds \right]$$

$$\divideontimes \bigvee_{t_C \in \mathfrak{T}} x^B = e^{at_B}\left[e^{-at_A}x^A + u\int_{t_A}^{t_C} e^{-as}\,ds + v\int_{t_C}^{t_B} e^{-as}\,ds\right]$$

$$\divideontimes \bigvee_{t_C \in \mathfrak{T}} x^B e^{-at_B} - x^A e^{-at_A} = u\int_{t_A}^{t_C} e^{-as}\,ds + v\int_{t_C}^{t_B} e^{-as}\,ds$$

$$= \frac{u}{a}\left(e^{-at_A} - e^{-at_C}\right) + \frac{v}{a}\left(e^{-at_C} - e^{-at_B}\right).$$

1. (a) Es seien $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2 \in \mathfrak{Z}$ vorgegeben mit $\mathfrak{z}_1 = \langle \dot{z}_1 \rangle$ und $\mathfrak{z}_2 = \langle \dot{z}_2 \rangle$ f. g. $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$. Ferner sei gültig für ein Paar $(A, B) \in \mathfrak{P} \times \mathfrak{P}$:

$$A(\mathfrak{z}_1 \circ \mathfrak{z}_2)B$$

$$\divideontimes A(\langle \dot{z}_1 \rangle \circ \langle \dot{z}_2 \rangle)B$$

$$\divideontimes A(([z_1] \cap \Delta t_1) \circ ([z_2] \cap \Delta t_2))B \text{ f. g. } \Delta t_1 > 0, \Delta t_2 > 0$$

$$\divideontimes \bigvee_{C=(t_C, x^C) \in \mathfrak{P}} A(([z_1] \cap \Delta t_1)C \ \wedge\ C([z_2] \cap \Delta t_2))B$$

$$\text{mit } \Delta t_1 = -t_A + t_C > 0, \Delta t_2 = -t_C + t_B > 0, \text{ also } t_A < t_C < t_B$$

$$\divideontimes \bigvee_{t_C \in \mathfrak{T}} A[z_1]C \ \wedge\ C[z_2]B \ \wedge\ t_A < t_C < t_B$$

$$\divideontimes \bigvee_{t_C \in \mathfrak{T}} x^B e^{-at_B} - x^A e^{-at_A} = \frac{z_1}{a}\left(e^{-at_A} - e^{-at_C}\right) + \frac{z_2}{a}\left(e^{-at_C} - e^{-at_B}\right)$$

$$\wedge\, t_A < t_C < t_B.$$

Um daraus $A(\mathfrak{z}_2 \circ \mathfrak{z}_1)B$ zu bekommen, müssen wir demnach die Existenz eines Punktes $D = (t_D, x^D) \in \mathfrak{P}$ nachweisen mit

$$A[z_2]D \ \wedge D[z_1]A \ \wedge\ t_A < t_D < t_B$$

$$\divideontimes\ x^B e^{-at_B} - x^A e^{-at_A} = \frac{z_2}{a}\left(e^{-at_A} - e^{-at_D}\right) + \frac{z_1}{a}\left(e^{-at_D} - e^{-at_B}\right)$$

$$\text{f. g. } t_D \in \mathfrak{T} \text{ mit } t_A < t_D < t_B.$$

Gleichsetzen und Auflösen nach t_D liefert:

$$\frac{z_1}{a}(e^{-at_A} - e^{-at_C}) + \frac{z_2}{a}(e^{-at_C} - e^{-at_B}) = \frac{z_2}{a}(e^{-at_A} - e^{-at_D}) + \frac{z_1}{a}(e^{-at_D} - e^{-at_B})$$

$$\text{f. e. } t_D \in \mathfrak{T} \text{ mit } t_A < t_D < t_B$$

$$\divideontimes\ (z_1 - z_2)e^{-at_D} = (z_1 - z_2)e^{-at_A} - (z_1 - z_2)e^{-at_C} + (z_1 - z_2)e^{-at_B}$$
$$\text{f. e. } t_D \in \mathfrak{T} \text{ mit } t_A < t_D < t_B$$
$$\overset{z_1 \neq z_2}{\divideontimes}\ e^{-at_D} = e^{-at_A} - e^{-at_C} + e^{-at_B} \text{ f. e. } t_D \in \mathfrak{T} \text{ mit } t_A < t_D < t_B.$$

Die Existenz des t_D ist demnach unabhängig von den gewählten Kontrollen $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, bei $z_1 = z_2$ ist die Kommutativität wegen der Gültigkeit der Idempotenz trivial. Wir müssen jetzt noch zeigen:

$$e^{-at_A} - e^{-at_C} + e^{-at_B} \overset{!}{>} 0 \quad \Big(\succ \quad t_D = -\frac{1}{a}\ln\Big(e^{-at_A} - e^{-at_C} + e^{-at_B}\Big)\Big)$$
$$\wedge \quad t_A \overset{!}{<} t_D \overset{!}{<} t_B.$$

Aus der Voraussetzung $t_A < t_C < t_B$ folgt für den Fall $a > 0$:

$$e^{-at_C} < e^{-at_A} < e^{-at_A} + e^{-at_B} \quad \succ \quad e^{-at_A} - e^{-at_C} + e^{-at_B} > 0,$$
$$\text{sowie aus } \ e^{-at_C} > e^{-at_B} \ \wedge \ e^{-at_A} > e^{-at_C}:$$
$$e^{-at_A} > e^{-at_A} + e^{-at_B} - e^{-at_C} > e^{-at_B}$$
$$\divideontimes \quad e^{-at_A} > e^{-at_D} > e^{-at_B}$$
$$\divideontimes \quad -at_A > -at_D > -at_B$$
$$\divideontimes \quad t_A < t_D < t_B.$$

Analog erhalten wir aus $t_A < t_C < t_B$ für den Fall $a < 0$:

$$e^{-at_C} < e^{-at_B} < e^{-at_A} + e^{-at_B} \quad \succ \quad e^{-at_A} - e^{-at_C} + e^{-at_B} > 0,$$
$$\text{sowie aus } \ e^{-at_C} < e^{-at_B} \ \wedge \ e^{-at_A} < e^{-at_C}:$$
$$e^{-at_A} < e^{-at_A} + e^{-at_B} - e^{-at_C} < e^{-at_B}$$
$$\divideontimes \quad e^{-at_A} < e^{-at_D} < e^{-at_B}$$
$$\divideontimes \quad -at_A < -at_D < -at_B$$
$$\divideontimes \quad t_A < t_D < t_B.$$

Aus Symmetriegründen folgt natürlich auch
$(A, B) \in \mathfrak{z}_2 \circ \mathfrak{z}_1 \succ (A, B) \in \mathfrak{z}_1 \circ \mathfrak{z}_2$, insgesamt also:

$$\mathfrak{z}_1 \circ \mathfrak{z}_2 \ = \ \mathfrak{z}_2 \circ \mathfrak{z}_1.$$

(b) Die Kommutativität für Vergangenheitsrelationen folgt direkt aus der der Zukunftsrelationen über Invertierung :
Seien also $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2 \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$ vorgegeben mit $\mathfrak{v}_1 = \langle \dot{v}_1 \rangle^{-1}$ und $\mathfrak{v}_2 = \langle \dot{v}_2 \rangle^{-1}$ f. g. $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{v}_1 \circ \mathfrak{v}_2 &= \langle \dot{v}_1 \rangle^{-1} \circ \langle \dot{v}_2 \rangle^{-1} = (\langle \dot{v}_2 \rangle \circ \langle \dot{v}_1 \rangle)^{-1} \\ &\overset{1.a}{=} (\langle \dot{v}_1 \rangle \circ \langle v_2 \rangle)^{-1} = \langle \dot{v}_2 \rangle^{-1} \circ \langle \dot{v}_1 \rangle^{-1} \\ &= \mathfrak{v}_2 \circ \mathfrak{v}_1 . \end{aligned}$$

(c) Es sei jetzt vorgegeben: $\mathfrak{r} \in \boldsymbol{\mathcal{V}} \cup \boldsymbol{\mathcal{Z}}$, also $\mathfrak{r} = \langle \dot{r} \rangle$ oder $\mathfrak{r} = \langle \dot{r} \rangle^{-1}$ f. e. $r \in \mathbb{R}$ mit

$$A(\mathfrak{r} \circ [\pm\infty])B$$

$$\divideontimes \bigvee_{C=(t_C, x^C) \in \mathfrak{P}} A\,\mathfrak{r}\,C \wedge C[\pm\infty]B$$

$$\succ x^C = e^{a(t_C - t_A)} \left(x^A + \frac{r}{a} \right) - \frac{r}{a} \,\wedge\, x^B \neq x^C \quad \text{f. e. } x^C \in \mathbb{R}\ (t_C = t_B).$$

Gesucht ist dann ein Punkt $D = (t_D, x^D) \in \mathfrak{P}$ mit

$$A[\pm\infty]D \,\wedge\, D\,\mathfrak{r}\,B, \text{ also}$$

$$x^B = e^{a(t_B - t_D)} \left(x^D + \frac{r}{a} \right) - \frac{r}{a} \,\wedge\, x^D \neq x^A \quad \text{f. e. } x^D \in \mathbb{R}\ (t_D = t_A)$$

$$\divideontimes\, x^D = \left(x^B + \frac{r}{a} \right) e^{-a(t_B - t_A)} - \frac{r}{a} \quad \text{f. e. } x^D \in \mathbb{R}.$$

Ist die Unendlichrelation $[\infty]$ vorgegeben, so folgt aus der Voraussetzung

$$\begin{aligned} & x^C < x^B \\ \succ \quad & x^A < \left(x^B + \frac{r}{a} \right) e^{-a(t_B - t_D)} - \frac{r}{a} \\ \succ \quad & x^A < x^D . \end{aligned}$$

Bei Vorgabe von $[-\infty]$ folgt ganz analog:

$$x^C > x^B \quad \succ \quad x^A > x^D \text{ , insgesamt also}$$

$$\mathfrak{r} \circ [\pm\infty] \subset [\pm\infty] \circ \mathfrak{r}.$$

Die andere Inklusion $[\pm\infty] \circ \mathfrak{r} \subset \mathfrak{r} \circ [\pm\infty]$ mit $\mathfrak{r} \in \mathcal{V} \cup \mathcal{Z}$ verläuft völlig analog: Es sei also $(A, B) \in [\pm\infty] \circ \mathfrak{r}$

$$\succ \bigvee_{C=(t_C, x^C) \in \mathfrak{P}} A[\pm\infty]C \wedge C \,\mathfrak{r}\, B$$

$$\succ x^B = e^{a(t_B - t_C)} \left(x^C + \frac{r}{a} \right) - \frac{r}{a} \;\wedge\; x^A \neq x^C \qquad \text{f. e. } \; x^C \in \mathbb{R} \; (t_C = t_A)$$

$$x^C = e^{-a(t_B - t_C)} (x^B + \frac{r}{a}) - \frac{r}{a}.$$

Gesucht ist dann ein Punkt $D = (t_D, x^D) \in \mathfrak{P}$ mit

$$A \,\mathfrak{r}\, D \;\wedge\; D[\pm\infty]B, \text{ also}$$

$$x^D = e^{a(t_D - t_A)} \left(x^A + \frac{r}{a} \right) - \frac{r}{a} \;\wedge\; x^D \neq x^B \qquad \text{f. e. } \; x^D \in \mathbb{R} \; (t_D = t_A).$$

Ist die Unendlichrelation $[\infty]$ vorgegeben, so folgt aus der Voraussetzung

$$x^A < x^C$$

$$\succ \quad e^{a(t_B - t_C)} \left(x^A + \frac{r}{a} \right) - \frac{r}{a} < x^B$$

$$\succ \quad x^D < x^B.$$

Bei Vorgabe von $[-\infty]$ folgt ganz analog:

$$x^A > x^C \quad \succ \quad x^D > x^B, \text{ insgesamt also}$$

$$[\pm\infty] \circ \mathfrak{r} \subset \mathfrak{r} \circ [\pm\infty].$$

(d) Die Kommutativität für $\mathfrak{r}_1 = [\pm\infty], \mathfrak{r}_2 = [\pm\infty]$ ist offensichtlich, ebenso bei Kombination mit der Gleichheitsrelation $\mathfrak{e}$.

2. Der Fall $v = z$ ist richtig wegen der streng alternierenden Relationen, es sei also $v \neq z$.

   (a) $a < 0$
   Es seien seien $\mathfrak{v} \in \mathcal{V}, \mathfrak{z} \in \mathcal{Z}$ vorgegeben mit $\mathfrak{v} = \langle \dot{v} \rangle^{-1}$ und $\mathfrak{z} = \langle \dot{z} \rangle$ f. g. $v, z \in \mathbb{R}$. Ferner sei gültig für ein Paar $(A, B) \in \mathfrak{P} \times \mathfrak{P}$:

$$A(\mathfrak{v} \circ \mathfrak{z})B$$

$$\divideontimes \; A(\langle \dot{v} \rangle^{-1} \circ \langle \dot{z} \rangle)B$$

$$\divideontimes\ A(([v]\cap(\Delta t_1)^{-1})\circ([z]\cap\Delta t_2))B \text{ f. g. } \Delta t_1>0, \Delta t_2>0$$
$$\divideontimes \bigvee_{C=(t_C,x^C)\in\mathfrak{P}} A(([v]\cap(\Delta t_1)^{-1})C \ \wedge\ C([z]\cap\Delta t_2))B$$
$$\text{mit } -\Delta t_1=-t_A+t_C<0, \Delta t_2=-t_C+t_B>0, \text{ also } t_C<t_A,t_B$$
$$\divideontimes \bigvee_{t_C\in\mathfrak{T}} A[v]C \ \wedge\ C[z]B \ \wedge\ t_C<t_A,t_B.$$

Um daraus $A(\mathfrak{z}\circ\mathfrak{v})B$ zu bekommen, müssen wir demnach die Existenz eines Punktes $D=(t_D,x^D)\in\mathfrak{P}$ nachweisen mit

$$A[z]D\ \wedge D[v]A\ \wedge\ t_A,t_B<t_D.$$

Wie im Punkt 2 erhalten wir als bestimmende Gleichung für t_D im Fall $v\neq z$:

$$e^{-at_D}=e^{-at_A}-e^{-at_C}+e^{-at_B}$$
$$\text{f. e. } t_D\in\mathfrak{T} \text{ mit } t_A,t_B<t_D.$$

Es bleibt zu zeigen:

$$e^{-at_A}-e^{-at_C}+e^{-at_B}\overset{!}{>}0\ \Big(\succ\ t_D=-\frac{1}{a}\ln\Big(e^{-at_A}-e^{-at_C}+e^{-at_B}\Big)\Big)$$
$$\wedge\quad t_A,t_B\overset{!}{<}t_D.$$

Aus der Voraussetzung $t_C<t_A,t_B$ folgt

$$e^{-at_C}<e^{-at_A}<e^{-at_A}+e^{-at_B}\quad\succ e^{-at_A}-e^{-at_C}+e^{-at_B}>0$$
$$\text{sowie } e^{-at_C}<e^{-at_B},e^{-at_A}\quad\succ\quad e^{-at_A}+e^{-at_B}-e^{-at_C}>e^{-at_A},e^{-at_B}.$$

Es gilt also:

$$\mathfrak{v}\circ\mathfrak{z}\subset\mathfrak{z}\circ\mathfrak{v}.$$

Die Umkehrung (bei $z\neq v$) gilt aber nicht immer !
Der Nachweis von

$$A(\mathfrak{z}\circ\mathfrak{v})B\succ A(\mathfrak{v}\circ\mathfrak{z})B,$$

also der Nachweis eines $t_D\in\mathfrak{T}$ mit

$$e^{-at_D}=e^{-at_A}-e^{-at_C}+e^{-at_B}$$

kann für die Zeiten $t_A,t_B<t_C$ nicht erfolgen, die der Beziehung

$$e^{-at_A}+e^{-at_B}<e^{-at_C}$$

genügen, in diesem Fall ist

$$e^{-at_A}-e^{-at_C}+e^{-at_B}<0.$$

(b) $a > 0$

Es seien $\mathfrak{v} \in \mathcal{V}, \mathfrak{z} \in \mathcal{Z}$ vorgegeben mit $\mathfrak{v} = \langle \dot{v} \rangle^{-1}$ und $\mathfrak{z} = \langle \dot{z} \rangle$ f. g. $v, z \in \mathbb{R}$. Ferner sei gültig für ein Paar $(A, B) \in \mathfrak{P} \times \mathfrak{P}$:

$$A(\mathfrak{z} \circ \mathfrak{v})B.$$

Mit denselben Bezeichnungen wie im Fall 2. a. gilt

$$\bigvee_{C=(t_C, x^C) \in \mathfrak{P}} A[z]C \ \wedge \ C[v]B \ \wedge \ t_A, t_B < t_C.$$

Um daraus $A(\mathfrak{v} \circ \mathfrak{z})B$ zu bekommen, müssen wir demnach die Existenz eines Punktes $D = (t_D, x^D) \in \mathfrak{P}$ nachweisen mit

$$A[v]D \ \wedge D[z]A \ \wedge \ t_D < t_A, t_B.$$

Wir erhalten wieder für t_D im Fall $v \neq z$

$$e^{-at_D} = e^{-at_A} - e^{-at_C} + e^{-at_B}$$

$$\text{f. e. } t_D \in \mathfrak{T} \text{ mit } t_D < t_A, t_B.$$

Es gilt wegen Voraussetzung $t_A, t_B < t_C$:

$$e^{-at_C} < e^{-at_A} < e^{-at_A} + e^{-at_B} \quad \succ e^{-at_A} - e^{-at_C} + e^{-at_B} > 0$$

$$\text{sowie } e^{-at_A}, e^{-at_B} > e^{-at_C} \quad \succ \quad e^{-at_A} + e^{-at_B} - e^{-at_C} > e^{-at_A}, e^{-at_B}.$$

Es gilt also:

$$\mathfrak{v} \circ \mathfrak{z} \subset \mathfrak{z} \circ \mathfrak{v}.$$

Die Umkehrung (bei $z \neq v$) gilt generell nicht, denn der Nachweis von

$$A(\mathfrak{v} \circ \mathfrak{z})B \succ A(\mathfrak{z} \circ \mathfrak{z})B,$$

also der Nachweis eines $t_D \in \mathfrak{T}$ mit

$$e^{-at_D} = e^{-at_A} - e^{-at_C} + e^{-at_B}$$

kann für die Zeiten $t_A, t_B > t_C$ nicht erfolgen, die der Beziehung

$$e^{-at_A} + e^{-at_B} < e^{-at_C}$$

genügen, in diesem Fall ist

$$e^{-at_A} - e^{-at_C} + e^{-at_B} < 0. \qquad \square$$

Satz 1.6 (Homogenitätsregel)

1. $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2 \in \mathfrak{Z} : A(\mathfrak{z}_1 \circ \mathfrak{z}_2)B \quad \succ \quad AB \subset \mathfrak{z}_1 \circ \mathfrak{z}_2\,.$

2. $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2 \in \mathfrak{V} : A(\mathfrak{v}_1 \circ \mathfrak{v}_2)B \quad \succ \quad AB \subset \mathfrak{v}_1 \circ \mathfrak{v}_2\,.$

3. $\mathfrak{z} = \langle\dot{z}\rangle \in \mathfrak{Z}, \mathfrak{v} = \langle\dot{v}\rangle^{-1} \in \mathfrak{V} : A(\mathfrak{z} \circ \mathfrak{v})B; z, v \in \mathbb{R}$. *Dann folgt:*

$$\begin{array}{ll}
AB \subset \mathfrak{z} \circ \mathfrak{v} & f.\;\; a < 0. \\
AB \subset \mathfrak{z} \circ \mathfrak{v} & f.\;\; a > 0, z = v. \\
AB \subset \mathfrak{z} \circ \mathfrak{v} & f.\;\; a > 0, z \neq v, t_A = t_B \textit{ und} \\
 & 1 > \frac{e^{-at_A} - e^{-at_C}}{e^{-at_A}} \cdot \frac{x^Y - x^X}{x^B - x^A}. \\
AB \subset \mathfrak{z} \circ \mathfrak{v} & f.\;\; a > 0, z \neq v, t_A \neq t_B \textit{ und} \\
 & 1 < \frac{t_W}{t_Y - t_X}, \\
\textit{wobei definiert ist:} & t_W := \frac{1}{a} \ln \frac{e^{-at_A} - e^{-at_C}}{e^{-at_B} - e^{-at_C}}
\end{array}$$

mit den t_C, t_X, t_Y *und* x^X, x^Y *der beteiligten Punkte C,X,Y, für die gilt:*
$A\langle\dot{z}\rangle C,\; C\langle\dot{v}\rangle^{-1}B,\; X\,AB\,Y\,.$

4. $\mathfrak{v} = \langle\dot{v}\rangle^{-1} \in \mathfrak{V}, \mathfrak{z} = \langle\dot{z}\rangle \in \mathfrak{Z} : A(\mathfrak{v} \circ \mathfrak{z})B; v, z \in \mathbb{R}$. *Dann folgt:*

$$\begin{array}{ll}
AB \subset \mathfrak{v} \circ \mathfrak{z} & f.\;\; a > 0. \\
AB \subset \mathfrak{v} \circ \mathfrak{z} & f.\;\; a < 0, z = v. \\
AB \subset \mathfrak{v} \circ \mathfrak{z} & f.\;\; a < 0, z \neq v, t_A = t_B \textit{ und} \\
 & 1 > \frac{e^{-at_A} - e^{-at_C}}{e^{-at_A}} \cdot \frac{x^Y - x^X}{x^B - x^A}. \\
AB \subset \mathfrak{v} \circ \mathfrak{z} & f.\;\; a < 0, z \neq v, t_A \neq t_B \textit{ und} \\
 & 1 < \frac{t_W}{t_Y - t_X}, \\
\textit{wobei definiert ist:} & t_W := \frac{1}{a} \ln \frac{e^{-at_A} - e^{-at_C}}{e^{-at_B} - e^{-at_C}}
\end{array}$$

mit den t_C, t_X, t_Y *und* x^X, x^Y *der beteiligten Punkte C,X,Y, für die gilt:*
$A\langle\dot{v}\rangle^{-1}C,\; C\langle\dot{z}\rangle B,\; X\,AB\,Y\,.$

5. $\mathfrak{r} \in \mathfrak{R} : A([\pm\infty] \circ \mathfrak{r})B \succ AB \subset [\pm\infty] \circ \mathfrak{r}\,.$

6. $\mathfrak{r} \in \mathfrak{R} : A(\mathfrak{r} \circ [\pm\infty])B \succ AB \subset \mathfrak{r} \circ [\pm\infty]\,.$

7. $\mathfrak{r} \in \mathfrak{R} : A(\mathfrak{r} \circ \mathfrak{e})B \succ AB \subset \mathfrak{r} \circ \mathfrak{e}\,.$

8. $\mathfrak{r} \in \mathfrak{R} : A(\mathfrak{e} \circ \mathfrak{r})B \succ AB \subset \mathfrak{e} \circ \mathfrak{r}\,.$

Beweis:

0. Wir lassen zunächst die Anordnung bezüglich $\mathfrak{T}$ außer acht, dann lautet die Aussage in den Punkten 1. bis 4. :

$$A([u] \circ [v])B \quad \succ \quad [A \cdot B] \subset [u] \circ [v] \;\text{ f. } u, v \in \mathbb{R}.$$

Diese Aussage ist für $u = v$ wegen streng alternierender und scharf einfach transitiver Relationen generell richtig, es sei also im folgenden stets $u \neq v$.

(a) $t_A \neq t_B$
Mit Berücksichtigung des Beweisteils 0. von Satz 1.5 gilt

$$A([u] \circ [v])B$$

$$\divideontimes \bigvee_{t_C \in \mathfrak{T}} x^B e^{-at_B} - x^A e^{-at_A} = \frac{u}{a}\left(e^{-at_A} - e^{-at_C}\right) + \frac{v}{a}\left(e^{-at_C} - e^{-at_B}\right)$$

$$\divideontimes \bigvee_{t_C \in \mathfrak{T}} A \cdot B = -a\frac{x^B e^{-at_B} - x^A e^{-at_A}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} = \frac{(u-v)e^{-at_C} - ue^{-at_A} + ve^{-at_B}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}}$$

Die Behauptung kann umgeformt werden zu

$$X[A \cdot B]Y \succ \bigvee_{Z=(t_Z, x^Z) \in \mathfrak{P}} X[u]Z \wedge Z[v]Y$$

$$\divideontimes \quad \Bigg[x^Y e^{-at_Y} - x^X e^{-at_X} = \frac{A \cdot B}{a}(e^{-at_X} - e^{-at_Y})$$

$$\succ \quad \bigvee_{t_Z \in \mathfrak{T}} x^Y e^{-at_Y} - x^X e^{-at_X} = \frac{u}{a}\left(e^{-at_X} - e^{-at_Z}\right) + \frac{v}{a}\left(e^{-at_Z} - e^{-at_Y}\right)\Bigg]$$

$$\divideontimes \quad \bigvee_{t_Z \in \mathfrak{T}} A \cdot B\,(e^{-at_X} - e^{-at_Y}) = u(e^{-at_X} - e^{-at_Z}) + v(e^{-at_Z} - e^{-at_Y})$$

$$\divideontimes \quad \bigvee_{t_Z \in \mathfrak{T}} (v-u)e^{-at_Z} = (A \cdot B - u)e^{-at_X} + (v - A \cdot B)e^{-at_Y}$$

$$\overset{u \neq v}{\divideontimes} \quad \bigvee_{t_Z \in \mathfrak{T}} e^{-at_Z} = \frac{u - A \cdot B}{u - v}e^{-at_X} + \frac{A \cdot B - v}{u - v}e^{-at_Y}.$$

Wir berechnen mit der Voraussetzung

$$\begin{aligned}
A \cdot B - v &= \frac{(u-v)e^{-at_C} - ue^{-at_A} + ve^{-at_B} - ve^{-at_B} + ve^{-at_A}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} \\
&= (u-v)\frac{e^{-at_C} - e^{-at_A}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} \\
u - A \cdot B &= \frac{ue^{-at_B} - ue^{-at_A} - (u-v)e^{-at_C} + ue^{-at_A} - ve^{-at_B}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} \\
&= (u-v)\frac{e^{-at_B} - e^{-at_C}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}}
\end{aligned}$$

und erhalten als Bedingung für den gesuchten Zeitpunkt $t_Z \in \mathcal{T}$:

$$e^{-at_Z} = \frac{e^{-at_B} - e^{-at_C}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} e^{-at_X} + \frac{e^{-at_C} - e^{-at_A}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} e^{-at_Y}.$$

(b) $t_A = t_B$
Die Voraussetzung ist äquivalent zu:

$$\begin{aligned}
x^B e^{-at_B} - x^A e^{-at_A} &= e^{-at_A}(x^B - x^A) \\
&= \frac{u}{a}(e^{-at_A} - e^{-at_C}) + \frac{v}{a}(e^{-at_C} - e^{-at_B}) \\
&= \frac{1}{a}(u-v)(e^{-at_A} - e^{-at_C})
\end{aligned}$$

$$\divideontimes \quad a\frac{e^{-at_A}}{e^{-at_A} - e^{-at_C}}(x^B - x^A) = u - v,$$

die Behauptung analog zu

$$\begin{aligned}
e^{-at_X}(x^Y - x^X) &= \frac{u}{a}(e^{-at_X} - e^{-at_Z}) + \frac{v}{a}(e^{-at_Z} - e^{-at_Y}) \\
&= \frac{1}{a}(u-v)(e^{-at_X} - e^{-at_Z})
\end{aligned}$$

$$\divideontimes \quad a\frac{e^{-at_X}}{e^{-at_X} - e^{-at_Z}}(x^Y - x^X) = u - v \text{ f. e. } t_Z \in \mathcal{T}.$$

Als Bedingung für t_Z ergibt sich durch Gleichsetzen:

$$\frac{e^{-at_X}}{e^{-at_X} - e^{-at_Z}}(x^Y - x^X) = \frac{e^{-at_A}}{e^{-at_A} - e^{-at_C}}(x^B - x^A)$$

$$\divideontimes \quad e^{-at_X} - e^{-at_Z} = \left(\frac{e^{-at_A} - e^{-at_C}}{e^{-at_A}} \cdot \frac{x^Y - x^X}{x^B - x^A}\right) e^{-at_X}$$

$$e^{-at_Z} = e^{-at_X}\left(1 - \frac{e^{-at_A} - e^{-at_C}}{e^{-at_A}} \frac{x^Y - x^X}{x^B - x^A}\right).$$

1. Es seien $\mathfrak{z}_1 = \langle \dot{z}_1 \rangle$, $\mathfrak{z}_2 = \langle \dot{z}_2 \rangle$ f. g. $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$.
   Dann gilt in der Voraussetzung für den Punkt $C = (t_C, x^C)$:

$$t_A < t_C < t_B.$$

   Wir zeigen

$$\frac{e^{-at_B} - e^{-at_C}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} e^{-at_X} + \frac{e^{-at_C} - e^{-at_A}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} e^{-at_Y} \overset{!}{>} 0$$

$$\succ \quad t_Z = -\frac{1}{a} \ln \left(\frac{e^{-at_B} - e^{-at_C}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} e^{-at_X} + \frac{e^{-at_C} - e^{-at_A}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} e^{-at_Y} \right)$$

   und

$$t_X \overset{!}{<} t_Z \overset{!}{<} t_Y.$$

   (a) $a < 0$
   Dann gilt

$$AB = \langle A \vdots B \rangle \in \mathfrak{Z} \quad \succ \quad t_X < t_Y$$

   und mit

$$e^{-at_A} < e^{-at_C} < e^{-at_B}$$

   gelten folgende Umformungen

$$\frac{e^{-at_B} - e^{-at_C}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} > 0 \ \wedge \ \frac{e^{-at_C} - e^{-at_A}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} > 0$$

$$\succ \quad t_Z \text{ existiert.}$$

$$t_X < t_Y$$

$$\divideontimes \quad e^{-at_X} < e^{-at_Y}$$

$$\divideontimes \quad \frac{e^{-at_C} - e^{-at_A}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} e^{-at_X} < \frac{e^{-at_C} - e^{-at_A}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} e^{-at_Y}$$

$$\divideontimes \quad \frac{(e^{-at_B} - e^{-at_A}) e^{-at_X} - (e^{-at_B} - e^{-at_C}) e^{-at_X}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} < \frac{e^{-at_C} - e^{-at_A}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} e^{-at_Y}$$

$$\divideontimes \quad e^{-at_X} < e^{-at_Z}.$$

   Analog erhalten wir die zweite Behauptung

$$t_X < t_Y$$

$$\divideontimes \quad e^{-at_X} < e^{-at_Y}$$

$$\divideontimes \quad \frac{e^{-at_B} - e^{-at_C}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} e^{-t_X} < \frac{e^{-at_B} - e^{-at_C}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} e^{-at_Y}$$

$$\divideontimes \quad \frac{e^{-at_B} - e^{-at_C}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} e^{-at_X} < \frac{(e^{-at_B} - e^{-at_A})e^{-at_Y} - (e^{-at_C} - e^{-at_A})e^{-at_Y}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}}$$

$$\divideontimes \quad e^{-at_Z} < e^{-at_Y}.$$

(b) $a > 0$
Dann gilt

$$AB = \langle A \dot{\cdot} B \rangle \in \mathfrak{Z} \quad \succ \quad t_X < t_Y,$$

und mit

$$e^{-at_A} > e^{-at_C} > e^{-at_B}$$

gelten folgende Umformungen

$$\frac{e^{-at_B} - e^{-at_C}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} > 0 \ \wedge \ \frac{e^{-at_C} - e^{-at_A}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} > 0,$$

$$t_X < t_Y$$

$$\divideontimes \quad e^{-at_X} > e^{-at_Y}$$

$$\divideontimes \quad \frac{e^{-at_C} - e^{-at_A}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} e^{-at_X} > \frac{e^{-at_C} - e^{-at_A}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} e^{-at_Y}$$

$$\divideontimes \quad \frac{(e^{-at_B} - e^{-at_A})e^{-at_X} - (e^{-at_B} - e^{-at_C})e^{-at_X}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} > \frac{e^{-at_C} - e^{-at_A}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} e^{-at_Y}$$

$$\divideontimes \quad e^{-at_X} > e^{-at_Z}.$$

Analog erhalten wir die zweite Behauptung

$$t_X < t_Y$$

$$\divideontimes \quad e^{-at_X} > e^{-at_Y}$$

$$\divideontimes \quad \frac{e^{-at_B} - e^{-at_C}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} e^{-at_X} > \frac{e^{-at_B} - e^{-at_C}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} e^{-at_Y}$$

$$\divideontimes \quad \frac{e^{-at_B} - e^{-at_C}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} e^{-at_X} > \frac{(e^{-at_B} - e^{-at_A})e^{-at_Y} - (e^{-at_C} - e^{-at_A})e^{-at_Y}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}}$$

$$\divideontimes \quad e^{-at_Z} > e^{-at_Y}.$$

2. Die Homogenitätsregel für Vergangenheitsrelationen ergibt sich nun direkt aus der der Zukunftsrelationen:
   Es seien $\mathfrak{v}_1 = \langle \dot{v}_1 \rangle^{-1}$ und $\mathfrak{v}_2 = \langle \dot{v}_2 \rangle^{-1}$ mit $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
& A(\mathfrak{v}_1 \circ \mathfrak{v}_2)B \\
\divideontimes\ & \bigvee_{C \in \mathfrak{P}} A\, \mathfrak{v}_1\, C \ \wedge\ C\, \mathfrak{v}_2\, B \\
\divideontimes\ & \bigvee_{C \in \mathfrak{P}} A \langle \dot{v}_1 \rangle^{-1} C \ \wedge\ C \langle \dot{v}_2 \rangle^{-1} B \\
\divideontimes\ & \bigvee_{C \in \mathfrak{P}} C \langle \dot{v}_1 \rangle A \ \wedge\ B \langle \dot{v}_2 \rangle C \\
\divideontimes\ & B(\langle \dot{v}_2 \rangle \circ \langle \dot{v}_1 \rangle)A \\
\overset{1.}{\succ}\ & BA \subset \langle \dot{v}_2 \rangle \circ \langle \dot{v}_1 \rangle \\
\divideontimes\ & AB = (BA)^{-1} \subset (\langle \dot{v}_2 \rangle \circ \langle \dot{v}_1 \rangle)^{-1} = \langle \dot{v}_1 \rangle^{-1} \circ \langle \dot{v}_2 \rangle^{-2} \\
\divideontimes\ & AB \subset \mathfrak{v}_1 \circ \mathfrak{v}_2 .
\end{aligned}
$$

3. Es sei nun vorgegeben

$$\mathfrak{z} = \langle \dot{z} \rangle, z \in \mathbb{R};\ \mathfrak{v} = \langle \dot{v} \rangle^{-1}, v \in \mathbb{R}.$$

   (a) $a < 0$

      i. $t_A < t_B \ (< t_C)$
         Dann gilt:

$$AB = \langle A \dot{\cdot} B \rangle \in \mathfrak{Z} \succ t_X < t_Y,$$

         und mit

$$e^{-at_A} < e^{-at_B} < e^{-at_C}$$

         gelten folgende Umformungen:

$$
\begin{aligned}
& e^{-at_B} - e^{-at_C} > e^{-at_A} - e^{-at_C} \\
\succ\ & e^{-a(t_X - t_Y)} < 1 < \frac{e^{-at_A} - e^{-at_C}}{e^{-at_B} - e^{-at_C}} \\
\succ\ & e^{-at_X} < -e^{-at_Y} \frac{e^{-at_C} - e^{-at_A}}{e^{-at_B} - e^{-at_C}} = e^{-at_Y} \frac{e^{-at_A} - e^{-at_C}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} \cdot \frac{e^{-at_B} - e^{-at_A}}{e^{-at_B} - e^{-at_C}} \\
\succ\ & e^{-at_X} \frac{e^{-at_B} - e^{-at_C}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} > -e^{-at_Y} \frac{e^{-at_C} - e^{-at_A}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}}, \text{ also}
\end{aligned}
$$

$$t_Z \text{ ex. mit } t_Z = -\frac{1}{a} \ln \left(e^{-at_X} \frac{e^{-at_B} - e^{-at_C}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} + e^{-at_Y} \frac{e^{-at_C} - e^{-at_A}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} \right).$$

Außerdem

$$\begin{aligned} & e^{-at_X} < e^{-at_Y} \\ \succ\ & e^{-at_X} \frac{e^{-at_B} - e^{-at_C}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} > e^{-at_Y} \frac{e^{-at_B} - e^{-at_C}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} \\ \succ\ & e^{-at_X} \frac{e^{-at_B} - e^{-at_C}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} > e^{-at_Y} \frac{e^{-at_B} - e^{-at_A} - e^{-at_C} + e^{-at_A}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} \\ \succ\ & e^{-at_Z} = e^{-at_X} \frac{e^{-at_B} - e^{-at_C}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} + e^{-at_Y} \frac{e^{-at_C} - e^{-at_A}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} > e^{-at_Y} \\ \succ\ & (t_X <)\, t_Y < t_Z. \end{aligned}$$

ii. $t_B < t_A\ (< t_C)$
Dann gilt:

$$AB = \langle A \mathbin{\dot{\cdot}} B \rangle^{-1} \in \boldsymbol{\mathcal{V}} \ \succ t_X > t_Y,$$

und mit

$$e^{-at_B} < e^{-at_A} < e^{-at_C}$$

gelten folgende Umformungen:

$$\begin{aligned} & e^{-at_B} - e^{-at_C} < e^{-at_A} - e^{-at_C} \\ \succ\ & e^{-a(t_X - t_Y)} > 1 > \frac{e^{-at_A} - e^{-at_C}}{e^{-at_B} - e^{-at_C}} > 0 \\ \succ\ & e^{-at_X} > -e^{-at_Y} \frac{e^{-at_C} - e^{-at_A}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} \cdot \frac{e^{-at_B} - e^{-at_A}}{e^{-at_B} - e^{-at_C}} \\ \succ\ & e^{-at_X} \frac{e^{-at_B} - e^{-at_C}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} > -e^{-at_Y} \frac{e^{-at_C} - e^{-at_A}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}}, \text{ also} \end{aligned}$$

$$t_Z \text{ ex. mit } t_Z = -\frac{1}{a} \ln \left(e^{-at_X} \frac{e^{-at_B} - e^{-at_C}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} + e^{-at_Y} \frac{e^{-at_C} - e^{-at_A}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} \right).$$

Außerdem

$$\begin{aligned} & e^{-at_Y} < e^{-at_X} \\ \succ\ & e^{-at_X} \frac{e^{-at_C} - e^{-at_A}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} < e^{-at_Y} \frac{e^{-at_C} - e^{-at_A}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} \\ \succ\ & e^{-at_X} \frac{e^{-at_B} - e^{-at_A} - e^{-at_B} + e^{-at_C}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} < e^{-at_Y} \frac{e^{-at_C} - e^{-at_A}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} \\ \succ\ & e^{-at_X} < e^{-at_X} \frac{e^{-at_B} - e^{-at_C}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} + e^{-at_Y} \frac{e^{-at_C} - e^{-at_A}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} = e^{-at_Z} \\ \succ\ & (t_Y <)\, t_X < t_Z. \end{aligned}$$

iii. $t_A = t_B$
Es sei also $z \neq v$, dann ist $AB = [\pm\infty]$.
Es gilt

$$\frac{e^{-at_A} - e^{-at_C}}{e^{-at_A}} \frac{x^Y - x^X}{x^B - x^A} < 0,$$

denn $t_A < t_C$ und $x^B < x^A \divideontimes x^Y < x^X$ bzw. $x^B > x^A \divideontimes x^Y > x^X$.
Damit existiert

$$\begin{aligned} t_Z &= -\frac{1}{a} \ln\left(e^{-at_X}\left(1 - \frac{e^{-at_A} - e^{-at_C}}{e^{-at_A}} \frac{x^Y - x^X}{x^B - x^A}\right)\right) \\ &= t_X - \frac{1}{a} \ln\left(1 - \frac{e^{-at_A} - e^{-at_C}}{e^{-at_A}} \frac{x^Y - x^X}{x^B - x^A}\right) \end{aligned}$$

und auch

$$e^{-at_X} < e^{-at_X}\left(1 - \frac{e^{-at_A} - e^{-at_C}}{e^{-at_A}} \frac{x^Y - x^X}{x^B - x^A}\right) = e^{-at_Z}$$

$$\divideontimes \quad t_X < t_Z.$$

(b) $a > 0$

i. $t_A < t_B$ $(< t_C)$
Dann gilt

$$AB = \langle A \vdots B \rangle \in \mathfrak{Z} \succ t_X < t_Y$$

und

$$e^{-at_C} < e^{-at_B} < e^{-at_A}.$$

Der Punkt t_Z existiert, wenn

$$e^{-at_X} \frac{e^{-at_B} - e^{-at_C}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} + e^{-at_Y} \frac{e^{-at_C} - e^{-at_A}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} > 0$$

$$\divideontimes \; e^{-a(t_X - t_Y)} < -\frac{e^{-at_C} - e^{-at_A}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} \cdot \frac{e^{-at_B} - e^{-at_A}}{e^{-at_B} - e^{-at_C}} = \frac{e^{-at_A} - e^{-at_C}}{e^{-at_B} - e^{-at_C}}$$

$$\divideontimes \quad 0 < t_Y - t_X < \frac{1}{a} \ln\left(\frac{e^{-at_A} - e^{-at_C}}{e^{-at_B} - e^{-at_C}}\right)$$

$$\divideontimes \quad 1 < \frac{t_W}{t_Y - t_X}.$$

Unter dieser Voraussetzung ist dann aber auch richtig

$$t_X < t_Y$$

$$
\begin{aligned}
&\divideontimes\ e^{-at_X} > e^{-at_Y}\\
&\divideontimes\ e^{-at_X}\frac{e^{-at_B}-e^{-at_C}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}} < e^{-at_Y}\frac{e^{-at_B}-e^{-at_C}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}}\\
&\divideontimes\ e^{-at_X}\frac{e^{-at_B}-e^{-at_C}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}} < e^{-at_Y}\frac{e^{-at_B}-e^{-at_A}-e^{-at_C}+e^{-at_A}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}}\\
&\divideontimes\ e^{-at_Z} = e^{-at_X}\frac{e^{-at_B}-e^{-at_C}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}} + e^{-at_Y}\frac{e^{-at_C}-e^{-at_A}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}} < e^{-at_Y}\\
&\divideontimes\ t_Y < t_Z.
\end{aligned}
$$

ii. $t_B < t_A\,(< t_C)$ Dann gilt

$$AB = \langle A \mathbin{\dot{\cdot}} B\rangle^{-1} \in \boldsymbol{\mathcal{V}} \ \succ\ t_Y < t_X$$

und

$$e^{-at_C} < e^{-at_A} < e^{-at_B}.$$

Der Punkt t_Z existiert, wenn

$$
\begin{aligned}
&e^{-at_X}\frac{e^{-at_B}-e^{-at_C}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}} + e^{-at_Y}\frac{e^{-at_C}-e^{-at_A}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}} > 0\\
&\divideontimes\ e^{-a(t_X-t_Y)} > -\frac{e^{-at_C}-e^{-at_A}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}}\cdot\frac{e^{-at_B}-e^{-at_A}}{e^{-at_B}-e^{-at_C}} = \frac{e^{-at_A}-e^{-at_C}}{e^{-at_B}-e^{-at_C}}\\
&\divideontimes\ -a(t_X-t_Y) > \ln\left(\frac{e^{-at_A}-e^{-at_C}}{e^{-at_B}-e^{-at_C}}\right)\\
&\divideontimes\ 0 > t_Y - t_X > \frac{1}{a}\ln\left(\frac{e^{-at_A}-e^{-at_C}}{e^{-at_B}-e^{-at_C}}\right)\\
&\divideontimes\ 1 < \frac{t_W}{t_Y-t_X}.
\end{aligned}
$$

Unter dieser Voraussetzung ist dann aber auch richtig

$$
\begin{aligned}
&t_Y < t_X\\
&\divideontimes\ e^{-at_X} < e^{-at_Y}\\
&\divideontimes\ e^{-at_X}\frac{e^{-at_C}-e^{-at_A}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}} > e^{-at_Y}\frac{e^{-at_C}-e^{-at_A}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}}\\
&\divideontimes\ e^{-at_X}\frac{e^{-at_B}-e^{-at_A}-e^{-at_B}+e^{-at_C}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}} > e^{-at_Y}\frac{e^{-at_C}-e^{-at_A}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}}\\
&\divideontimes\ e^{-at_X} > e^{-at_X}\frac{e^{-at_B}-e^{-at_C}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}} + e^{-at_Y}\frac{e^{-at_C}-e^{-at_A}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}} = e^{-at_Z}\\
&\divideontimes\ t_X < t_Z.
\end{aligned}
$$

iii. $t_A = t_B\,(< t_C)$
Wie im Fall 3. a) iii. ergibt sich als Bedingung für t_Z:

$$e^{-at_Z} = e^{-at_X}\left(1 - \frac{e^{-at_A} - e^{-at_C}}{e^{-at_A}}\frac{x^Y - x^X}{x^B - x^A}\right).$$

Die rechte Seite kann nur für

$$1 - \frac{e^{-at_A} - e^{-at_C}}{e^{-at_A}} \cdot \frac{x^Y - x^X}{x^B - x^A} > 0$$

erfüllt werden, dann ist aber mit

$$\begin{aligned} t_Z &= -\frac{1}{a}\ln\left(e^{-at_X}\left(1 - \frac{e^{-at_A} - e^{-at_C}}{e^{-at_A}}\frac{x^Y - x^X}{x^B - x^A}\right)\right) \\ &= t_X - \frac{1}{a}\ln\left(1 - \frac{e^{-at_A} - e^{-at_C}}{e^{-at_A}}\frac{x^Y - x^X}{x^B - x^A}\right) \end{aligned}$$

auch richtig

$$0 < \frac{e^{-at_A} - e^{-at_C}}{e^{-at_A}} \cdot \frac{x^Y - x^X}{x^B - x^A}$$

$$\divideontimes\ e^{-at_X} > e^{-at_X}\left(1 - \frac{e^{-at_A} - e^{-at_C}}{e^{-at_A}}\frac{x^Y - x^X}{x^B - x^A}\right) = e^{-at_Z}$$

$$\divideontimes\quad t_X < t_Z.$$

4. Es sei also vorgegeben

$$\mathfrak{v} = \langle \dot{v} \rangle^{-1}, v \in \mathbb{R},\ \mathfrak{z} = \langle \dot{z} \rangle, z \in \mathbb{R}.$$

(a) $a > 0$

i. $t_C < t_A < t_B$
Dann gilt:

$$AB = \langle A \dot{\cdot} B \rangle \in \mathfrak{Z} \succ t_X < t_Y,$$

und mit

$$e^{-at_C} > e^{-at_A} > e^{-at_B}$$

gelten folgende Umformungen

$$e^{-at_B} - e^{-at_C} < e^{-at_A} - e^{-at_C}$$

$$\succ\ e^{-a(t_X-t_Y)} > 1 > \frac{e^{-at_A}-e^{-at_C}}{e^{-at_B}-e^{-at_C}}$$

$$\succ\ e^{-at_X} > -e^{-at_Y}\frac{e^{-at_C}-e^{-at_A}}{e^{-at_B}-e^{-at_C}} =$$

$$-e^{-at_Y}\frac{e^{-at_C}-e^{-at_A}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}}\cdot\frac{e^{-at_B}-e^{-at_A}}{e^{-at_B}-e^{-at_C}}$$

$$\succ\ e^{-at_X}\frac{e^{-at_B}-e^{-at_C}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}} > -e^{-at_Y}\frac{e^{-at_C}-e^{-at_A}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}}\ ,\ \text{also}$$

$$t_Z \text{ ex. mit } t_Z = -\frac{1}{a}\ln\left(e^{-at_X}\frac{e^{-at_B}-e^{-at_C}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}} + e^{-at_Y}\frac{e^{-at_C}-e^{-at_A}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}}\right).$$

Außerdem

$$e^{-at_X} > e^{-at_Y}$$

$$\succ\ e^{-at_X}\frac{e^{-at_C}-e^{-at_A}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}} < e^{-at_Y}\frac{e^{-at_C}-e^{-at_A}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}}$$

$$\succ\ e^{-at_X}\frac{e^{-at_B}-e^{-at_A}-e^{-at_B}+e^{-at_C}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}} < e^{-at_Y}\frac{e^{-at_C}-e^{-at_A}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}}$$

$$\succ\ e^{-at_Z} = e^{-at_X}\frac{e^{-at_B}-e^{-at_C}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}} + e^{-at_Y}\frac{e^{-at_C}-e^{-at_A}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}} > e^{-at_X}$$

$$\succ\ t_Z < t_X\,(< t_Y).$$

ii. $t_C < t_B < t_A$
Dann gilt:

$$AB = \langle A \mathbin{\dot{\cdot}} B\rangle^{-1} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}\ \succ t_Y < t_X,$$

und mit

$$e^{-at_C} > e^{-at_B} > e^{-at_A}$$

gelten folgende Umformungen

$$e^{-at_B}-e^{-at_C} > e^{-at_A}-e^{-at_C}$$

$$\succ\ e^{-a(t_X-t_Y)} < 1 < \frac{e^{-at_A}-e^{-at_C}}{e^{-at_B}-e^{-at_C}}$$

$$\succ\ e^{-at_X} < -e^{-at_Y}\frac{e^{-at_C}-e^{-at_A}}{e^{-at_B}-e^{-at_C}} = e^{-at_Y}\frac{e^{-at_A}-e^{-at_C}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}}\cdot\frac{e^{-at_B}-e^{-at_A}}{e^{-at_B}-e^{-at_C}}$$

$$\succ\ e^{-at_X}\frac{e^{-at_B}-e^{-at_C}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}} > -e^{-at_Y}\frac{e^{-at_C}-e^{-at_A}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}}\ ,\ \text{also}$$

$$t_Z \text{ ex. mit } t_Z = -\frac{1}{a}\ln\left(e^{-at_X}\frac{e^{-at_B}-e^{-at_C}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}} + e^{-at_Y}\frac{e^{-at_C}-e^{-at_A}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}}\right).$$

Außerdem

$$e^{-at_X} < e^{-at_Y}$$

$$\succ \; e^{-at_X}\frac{e^{-at_B}-e^{-at_C}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}} > e^{-at_Y}\frac{e^{-at_B}-e^{-at_C}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}}$$

$$\succ \; e^{-at_X}\frac{e^{-at_B}-e^{-at_C}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}} > e^{-at_Y}\frac{e^{-at_B}-e^{-at_A}-e^{-at_C}+e^{-at_A}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}}$$

$$\succ \; e^{-at_Z} = e^{-at_X}\frac{e^{-at_B}-e^{-at_C}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}} + e^{-at_Y}\frac{e^{-at_C}-e^{-at_A}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}} > e^{-at_Y}$$

$$\succ \; t_Z < t_Y \; (< t_X).$$

iii. $t_C < t_A = t_B$
Es sei $z \neq v$ und $AB = [\pm\infty]$.
Es gilt

$$\frac{e^{-at_A}-e^{-at_C}}{e^{-at_A}}\,\frac{x^Y-x^X}{x^B-x^A} < 0,$$

denn $t_C < t_A$ und $x^B < x^A \divideontimes x^Y < x^X$ bzw. $x^B > x^A \divideontimes x^Y > x^X$.
Damit existiert

$$\begin{aligned} t_Z &= -\frac{1}{a}\ln\left(e^{-at_X}\left(1-\frac{e^{-at_A}-e^{-at_C}}{e^{-at_A}}\,\frac{x^Y-x^X}{x^B-x^A}\right)\right)\\ &= t_X - \frac{1}{a}\ln\left(1-\frac{e^{-at_A}-e^{-at_C}}{e^{-at_A}}\,\frac{x^Y-x^X}{x^B-x^A}\right), \end{aligned}$$

und es ist richtig

$$e^{-at_X} < e^{-at_X}\left(1-\frac{e^{-at_A}-e^{-at_C}}{e^{-at_A}}\,\frac{x^Y-x^X}{x^B-x^A}\right) = e^{-at_Z}$$

$$\divideontimes \quad t_X > t_Z.$$

(b) $a < 0$

i. $t_C < t_A < t_B$
Dann gilt

$$AB = \langle A \vdots B\rangle \in \mathfrak{Z} \; \succ \; t_X < t_Y$$

und

$$e^{-at_C} < e^{-at_A} < e^{-at_B}.$$

Der Punkt t_Z existiert, wenn

$$e^{-at_X}\frac{e^{-at_B}-e^{-at_C}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}}+e^{-at_Y}\frac{e^{-at_C}-e^{-at_A}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}}>0$$

$$\divideontimes \quad e^{-a(t_X-t_Y)}>-\frac{e^{-at_C}-e^{-at_A}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}}\cdot\frac{e^{-at_B}-e^{-at_A}}{e^{-at_B}-e^{-at_C}}=\frac{e^{-at_A}-e^{-at_C}}{e^{-at_B}-e^{-at_C}}$$

$$\divideontimes \quad 0<t_Y-t_X<\frac{1}{a}\ln\left(\frac{e^{-at_A}-e^{-at_C}}{e^{-at_B}-e^{-at_C}}\right)$$

$$\divideontimes \quad 1<\frac{t_W}{t_Y-t_X}.$$

Unter dieser Voraussetzung ist dann aber auch richtig

$$t_X<t_Y$$

$$\divideontimes \quad e^{-at_X}<e^{-at_Y}$$

$$\divideontimes \quad e^{-at_X}\frac{e^{-at_C}-e^{-at_A}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}}>e^{-at_Y}\frac{e^{-at_C}-e^{-at_A}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}}$$

$$\divideontimes \quad e^{-at_X}\frac{e^{-at_B}-e^{-at_A}-e^{-at_B}+e^{-at_C}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}}>e^{-at_Y}\frac{e^{-at_C}-e^{-at_A}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}}$$

$$\divideontimes \quad e^{-at_Z}=e^{-at_X}\frac{e^{-at_B}-e^{-at_C}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}}+e^{-at_Y}\frac{e^{-at_C}-e^{-at_A}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}}<e^{-at_X}$$

$$\divideontimes \quad t_Z<t_X.$$

ii. $t_C<t_B<t_A$
Dann gilt

$$AB=\langle A\,\dot{\cdot}\,B\rangle^{-1}\in\boldsymbol{\mathcal{V}}\ \succ\ t_Y<t_X$$

und

$$e^{-at_C}<e^{-at_B}<e^{-at_A}.$$

Der Punkt t_Z existiert, wenn

$$e^{-at_X}\frac{e^{-at_B}-e^{-at_C}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}}+e^{-at_Y}\frac{e^{-at_C}-e^{-at_A}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}}>0$$

$$\divideontimes \quad e^{-a(t_X-t_Y)}<-\frac{e^{-at_C}-e^{-at_A}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}}\cdot\frac{e^{-at_B}-e^{-at_A}}{e^{-at_B}-e^{-at_C}}=\frac{e^{-at_A}-e^{-at_C}}{e^{-at_B}-e^{-at_C}}$$

$$\divideontimes \quad -a(t_X-t_Y)<\ln\left(\frac{e^{-at_A}-e^{-at_C}}{e^{-at_B}-e^{-at_C}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 > t_Y - t_X > \frac{1}{a} \ln \left(\frac{e^{-at_A} - e^{-at_C}}{e^{-at_B} - e^{-at_C}} \right)$$

$$1 < \frac{t_W}{t_Y - t_X}.$$

Unter dieser Voraussetzung ist dann aber auch richtig

$$\begin{aligned}
& t_Y < t_X \\
\Leftrightarrow \quad & e^{-at_X} > e^{-at_Y} \\
\Leftrightarrow \quad & e^{-at_X} \frac{e^{-at_B} - e^{-at_C}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} < e^{-at_Y} \frac{e^{-at_B} - e^{-at_C}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} \\
\Leftrightarrow \quad & e^{-at_X} \frac{e^{-at_B} - e^{-at_C}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} < e^{-at_Y} \frac{e^{-at_B} - e^{-at_A} - e^{-at_C} + e^{-at_A}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} \\
\Leftrightarrow \quad & e^{-at_Y} > e^{-at_X} \frac{e^{-at_B} - e^{-at_C}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} + e^{-at_Y} \frac{e^{-at_C} - e^{-at_A}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} = e^{-at_Z} \\
\Leftrightarrow \quad & t_Z < t_Y.
\end{aligned}$$

iii. $t_C < t_A = t_B$

Wie im Fall 3. a) iii. ergibt sich als Bedingung für t_Z:

$$e^{-at_Z} = e^{-at_X} \left(1 - \frac{e^{-at_A} - e^{-at_C}}{e^{-at_A}} \frac{x^Y - x^X}{x^B - x^A} \right).$$

Die rechte Seite kann nur für

$$1 - \frac{e^{-at_A} - e^{-at_C}}{e^{-at_A}} \cdot \frac{x^Y - x^X}{x^B - x^A} > 0$$

erfüllt werden, dann ist aber mit

$$\begin{aligned}
t_Z &= -\frac{1}{a} \ln \left(e^{-at_X} \left(1 - \frac{e^{-at_A} - e^{-at_C}}{e^{-at_A}} \frac{x^Y - x^X}{x^B - x^A} \right) \right) \\
&= t_X - \frac{1}{a} \ln \left(1 - \frac{e^{-at_A} - e^{-at_C}}{e^{-at_A}} \frac{x^Y - x^X}{x^B - x^A} \right)
\end{aligned}$$

auch richtig

$$\begin{aligned}
& 1 - \frac{e^{-at_A} - e^{-at_C}}{e^{-at_A}} \cdot \frac{x^Y - x^X}{x^B - x^A} < 1 \\
\Leftrightarrow \quad & e^{-at_X} > e^{-at_X} \left(1 - \frac{e^{-at_A} - e^{-at_C}}{e^{-at_A}} \frac{x^Y - x^X}{x^B - x^A} \right) = e^{-at_Z} \\
\Leftrightarrow \quad & t_X > t_Z.
\end{aligned}$$

5. Die Behauptung ist klar für den Fall $\mathfrak{r} \in \{[\infty], [-\infty], \mathfrak{e}\}$ Daher sei $\mathfrak{r} = \dot{\langle r \rangle}$ oder $\mathfrak{r} = \dot{\langle r \rangle}^{-1}$ f. e. $r \in \mathbb{R}$. Wir betrachten zunächst die Behauptung ohne Berücksichtigung der Anordnung von $\mathcal{T}$.
Es seien also $(A, B) \in [\pm\infty] \circ [r]$ und $X[A \cdot B]Y$ vorgegeben, also

$$\bigvee_{C=(t_C, x^C) \in \mathfrak{P}} A[\pm\infty]C \wedge C[r]B$$

$$\divideontimes \qquad \bigvee_{C=(t_C, x^C) \in \mathfrak{P}} t_A = t_C \wedge x^A \neq x^C \wedge \frac{r}{a} = -\frac{x^C e^{-at_A} - x^B e^{-at_B}}{e^{-at_A} - e^{-at_B}}$$

$$X[A \cdot B]Y$$

$$\divideontimes\ x^Y = e^{a(t_Y - t_X)} \left(x^X + \frac{A \cdot B}{a} \right) - \frac{A \cdot B}{a}$$

$$\text{mit} \quad \frac{A \cdot B}{a} = -\frac{x^B e^{-at_B} - x^A e^{-at_A}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}}.$$

Gesucht ist ein $Z = (t_Z, x^Z) \in \mathfrak{P}$ mit

$$X[\pm\infty]Z \wedge Z[r]Y$$

$$\divideontimes \qquad x^Z = e^{a(t_X - t_Y)} \left(x^Y + \frac{r}{a} \right) - \frac{r}{a} \wedge t_X = t_Z \wedge x^X \neq x^Z.$$

Die Voraussetzungen werden jetzt in diese bestimmende Gleichung eingesetzt:

$$\begin{aligned}
x^Z e^{-at_X} &= e^{-at_Y} x^Y + \frac{r}{a} \left(e^{-at_Y} - e^{-at_X} \right) \\
&= e^{-at_Y} x^Y - \frac{x^C e^{-at_A} - x^B e^{-at_B}}{e^{-at_A} - e^{-at_B}} \cdot \left(e^{-at_Y} - e^{-at_X} \right) \\
&= e^{-at_X} \left(x^X + \frac{A \cdot B}{a} \right) - e^{-at_Y} \frac{A \cdot B}{a} - \frac{x^C e^{-at_A} - x^B e^{-at_B}}{e^{-at_A} - e^{-at_B}} \left(e^{-at_Y} - e^{-at_X} \right) \\
&= e^{-at_X} x^X + \frac{A \cdot B}{a} \left(e^{-at_X} - e^{-at_Y} \right) - \frac{x^C e^{-at_A} - x^B e^{-at_B}}{e^{-at_A} - e^{-at_B}} \cdot \left(e^{-at_Y} - e^{-at_X} \right) \\
&= e^{-at_X} x^X - \frac{x^B e^{-at_B} - x^A e^{-at_A}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} \left(e^{-at_X} - e^{-at_Y} \right) \\
&\quad - \frac{x^C e^{-at_A} - x^B e^{-at_B}}{e^{-at_A} - e^{-at_B}} \cdot \left(e^{-at_Y} - e^{-at_X} \right) \\
&= e^{-at_X} x^X + \frac{e^{-at_X} - e^{-at_Y}}{e^{-at_A} - e^{-at_B}} \left(e^{-at_A} x^C - e^{-at_A} x^A \right)
\end{aligned}$$

$$\succ \qquad x^Z = x^X + e^{-a(t_A - t_X)} (x^C - x^A) \tfrac{e^{-at_X} - e^{-at_Y}}{e^{-at_A} - e^{-at_B}}.$$

(a) Es sei in der Voraussetzung vorgegeben: $A([\infty] \circ \mathfrak{r})B$.
Damit gilt $x^A < x^C$ und bei $t_A < t_B$ folgt $t_X < t_Y$,

$$0 < e^{-a(t_A - t_X)}(x^C - x^A)\frac{e^{-at_X} - e^{-at_Y}}{e^{-at_A} - e^{-at_B}}$$

$$\succ \quad x^X < x^Z$$

bzw. bei $t_A > t_B \succ t_X > t_Y$ auch

$$0 < e^{-a(t_A - t_X)}(x^C - x^A)\frac{e^{-at_X} - e^{-at_Y}}{e^{-at_A} - e^{-at_B}}$$

$$\succ \quad x^X < x^Z,$$

insgesamt also

$$AB \subset [\infty] \circ \mathfrak{r}.$$

(b) In dem anderen Fall $A([-\infty] \circ \mathfrak{r})B$ gilt
$x^A > x^C$, und bei $t_A < t_B$ folgt $t_X < t_Y$

$$0 > e^{-a(t_A - t_X)}(x^C - x^A)\frac{e^{-at_X} - e^{-at_Y}}{e^{-at_A} - e^{-at_B}}$$

$$\succ \quad x^X > x^Z.$$

Analog bei $t_A > t_B$, also

$$AB \subset [-\infty] \circ \mathfrak{r}.$$

6. Diese Behauptung ergibt sich sofort aus der Kommutativität.

7. Die Gleichheitsrelation ist neutrales Element in der Halbgruppe $(\boldsymbol{\mathfrak{R}}, \circ)$ der Relationen auf $\mathfrak{P} \times \mathfrak{P}$. Daher gilt diese Behauptung wegen scharf einfacher Transitivität.

8. Analog.

$\square$

Bemerkung 1.7
Bis auf die Ausnahmen bei der Kombination von Zukunfts- und Vergangenheitsrelationen in dem Kommutativgesetz und in der Homogenitätsregel liegen alle Eigenschaften eines "affinen Richtungsrelativs" vor.

Betrachtet man daher nur eine Art dieser Relationen, so gilt für

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &:= \mathcal{V} \cup \{[\pm\infty], \mathfrak{e}\} \quad \text{bzw.} \\ \mathbf{R} &:= \mathcal{Z} \cup \{[\pm\infty], \mathfrak{e}\} \quad \text{die} \end{aligned}$$

Bemerkung 1.8
Das Relativ $(\mathfrak{P}, \mathbf{R})$ genügt folgenden Eigenschaften:

1. *Abgeschlossenheit bezüglich Gleichheitsrelation*
2. *Linkstotalität der Relationen*
3. *Idempotenz*
4. *Kommutativität*
5. *Homogenität*
6. $\bigwedge_{A,B\in\mathfrak{P}} : \ |\{\mathrm{r} \in \mathbf{R} | \mathrm{A\,r\,B}\}| \leq 1$

Satz 1.9
Es ist auch kein affines Richtungsrelativ $(\mathfrak{P}, \mathfrak{R}_{\text{aff.RR}})$ als Teilmenge von $(\mathfrak{P}, \mathfrak{R})$ enthalten, denn das Zentrum $\boldsymbol{Z}$ von $(\mathcal{V} \times \mathcal{Z}) \cup (\mathcal{Z} \times \mathcal{V}) \subset \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$ ist leer:

$$\boldsymbol{Z} := \{(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2) \in (\mathcal{V} \times \mathcal{Z}) \cup (\mathcal{Z} \times \mathcal{V}) | \mathfrak{r}_1 \circ \mathfrak{r}_2 = \mathfrak{r}_2 \circ \mathfrak{r}_1 \wedge r_1 \neq r_2\} = \emptyset.$$

Beweis:
Siehe die Beweisteile 2.(a) und 2.(b) von Satz 1.5.

$\square$

Satz 1.10
Es seien zwei verschiedene Kontrollen $u, v \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann gilt folgende Äquivalenz:

$$uv < 0 \quad \divideontimes \quad \langle u \dot{+} v\rangle \subset \langle \dot{u}\rangle \circ \langle \dot{v}\rangle.$$

Beweis:

0. Wir lassen zunächst die Anordnung bezüglich $\mathcal{T}$ außer acht und berechnen für beliebige Punkte $(A, B) \in \mathfrak{P} \times \mathfrak{P}$ den Ausdruck

$$A[u+v]B \quad \succ \quad A([u] \circ [v])B$$

$$\divideontimes \left[\begin{array}{rcl} x^B e^{-at_B} - x^A e^{-at_A} & = & -\frac{u+v}{a}(e^{-at_B} - e^{-at_A}) \\ \succ \quad \bigvee_{C \in \mathfrak{P}} x^B e^{-at_B} - x^A e^{-at_A} & = & \frac{v-u}{a} e^{-at_C} + \frac{u}{a} e^{-at_A} - \frac{v}{a} e^{-at_B} \end{array} \right]$$

$$\divideontimes \quad \bigvee_{t_C \in \mathcal{T}} (v-u)e^{-at_C} = ve^{-at_B} - ue^{-at_A} - (u+v)e^{-at_B} + (u+v)e^{-at_A}$$

$$\overset{u \neq v}{\divideontimes} \quad \bigvee_{t_C \in \mathcal{T}} e^{-at_C} = \frac{ue^{-at_B} - ve^{-at_A}}{u-v}.$$

1. $\overset{!}{\succ}$
   Es seien $A\langle u \dot{+} v\rangle B$ vorgegeben.

   (a) $v < 0 < u$

   i. $a < 0$
   Dann ist $u - v > 0$, und mit $v < u$ gilt

$$ve^{-at_A} < ue^{-at_A} < ue^{-at_B} \succ ue^{-at_B} - ve^{-at_A} > 0.$$

   Also existiert ein $t_C = -\frac{1}{a} \ln \frac{ue^{-at_B} - ve^{-at_A}}{u-v}$ mit $t_A < t_C < t_B$, denn

$$\begin{array}{rc} & t_A < t_B \\ \divideontimes & ue^{-at_A} - ve^{-at_A} < ue^{-at_B} - ve^{-at_A} \\ \divideontimes & e^{-at_A} < e^{-at_C} \end{array}$$

   und

$$\begin{array}{rc} & t_A < t_B \\ \divideontimes & ue^{-at_B} - ve^{-at_A} < ue^{-at_B} - ve^{-at_B} \\ \divideontimes & e^{-at_C} < e^{-at_B}. \end{array}$$

ii. $a > 0$
Dann ist $u - v > 0$ und mit $v < u$ gilt

$$ve^{-at_A} < ve^{-at_B} < ue^{-at_B} \succ ue^{-at_B} - ve^{-at_A} > 0.$$

Also existiert ein $t_C = -\frac{1}{a} \ln \frac{ue^{-at_B} - ve^{-at_A}}{u-v}$ mit $t_A < t_C < t_B$, denn

$$\begin{aligned} & t_A < t_B \\ \divideontimes \quad & ue^{-at_B} - ve^{-at_A} < ue^{-at_A} - ve^{-at_A} \\ \divideontimes \quad & e^{-at_C} < e^{-at_A} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & t_A < t_B \\ \divideontimes \quad & ue^{-at_B} - ve^{-at_B} < ue^{-at_B} - ve^{-at_A} \\ \divideontimes \quad & e^{-at_B} < e^{-at_C}. \end{aligned}$$

Also gilt auch $A(\langle \dot{u} \rangle \circ \langle \dot{v} \rangle)B$.

(b) $u < 0 < v$
Dieser Fall wird aus dem vorherigen durch Anwendung des Kommutativgesetzes gefolgert:

$$\langle u \dot{+} v \rangle = \langle v \dot{+} u \rangle \subset \langle \dot{v} \rangle \circ \langle \dot{u} \rangle = \langle \dot{u} \rangle \circ \langle \dot{v} \rangle.$$

2. $\overset{!}{\prec}$
Es gibt also einen Punkt $C = (t_C, x^C) \in \mathfrak{P}$ mit

$$\begin{aligned} A\langle u \dot{+} v \rangle B \quad & \succ \quad A\langle \dot{u} \rangle C \ \wedge \ C\langle \dot{v} \rangle B \\ & \succ \quad e^{-at_C} = \frac{ue^{-at_B} - ve^{-at_A}}{u - v}. \end{aligned}$$

Wir führen die Annahme $uv \geq 0$ zum Widerspruch.

(a) Annahme $uv = 0$
Es sei o. B. d. A. $u = 0, v \neq 0$, und es gelte

$$\langle \dot{v} \rangle \subset \langle \dot{u} \rangle \circ \langle \dot{v} \rangle,$$

also

$$e^{-at_C} = \frac{-ve^{-at_A}}{-v} = e^{-at_A}.$$

Das ist ein Widerspruch zu $t_A < t_C$.

(b) Annahme $uv > 0$

i. $0 < u < v$
Dann gilt für $a < 0$ nach Voraussetzung:

$$e^{-at_A} < e^{-at_C}$$

$$\divideontimes \quad ue^{-at_A} - ve^{-at_A} > ue^{-at_B} - ve^{-at_A}$$

$$\divideontimes \quad t_A > t_B \qquad \sharp$$

und für $a > 0$ analog

$$e^{-at_A} > e^{-at_C}$$

$$\divideontimes \quad ue^{-at_A} - ve^{-at_A} < ue^{-at_B} - ve^{-at_A}$$

$$\divideontimes \quad t_A > t_B. \qquad \sharp$$

ii. $0 < v < u$
Hier wird der Widerspruch auf den vorherigen zurückgeführt:

$$\langle u \dotplus v\rangle = \langle v \dotplus u\rangle \subset \langle \dot{v}\rangle \circ \langle \dot{u}\rangle = \langle \dot{u}\rangle \circ \langle \dot{v}\rangle$$

$$\succ \quad 0 < v < u \text{ ist falsch.}$$

iii. $u < v < 0$
Dann gilt für $a < 0$ nach Voraussetzung:

$$e^{-at_C} < e^{-at_B}$$

$$\divideontimes \quad ue^{-at_B} - ve^{-at_A} > ue^{-at_B} - ve^{-at_B}$$

$$\divideontimes \quad t_A > t_B \qquad \sharp$$

und für $a > 0$ analog

$$e^{-at_C} > e^{-at_B}$$

$$\divideontimes \quad ue^{-at_B} - ve^{-at_A} < ue^{-at_B} - ve^{-at_B}$$

$$\divideontimes \quad t_A > t_B. \qquad \sharp$$

iv. $v < u < 0$
Analog Unterfall ii.

$\square$

Korollar 1.11
Es seien zwei verschiedene Kontrollen $u, v \in \mathbb{R}$ mit $uv < 0$ gegeben. Dann gibt es einen Mittelwert w von u und v, d. h.

$$\min(u,v) < w < \max(u,v) \textit{ mit}$$

$$\langle\dot{w}\rangle \subset \langle\dot{u}\rangle \circ \langle\dot{v}\rangle,$$

nämlich $w := u + v$.

Eine weitergehende Aussage macht der folgende Satz:

Satz 1.12
Es seien zwei verschiedene Kontrollen $u, v \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann gilt für beliebige positive Gewichte $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$

$$\min(u,v) < w := \frac{p_1 u + p_2 v}{p_1 + p_2} < \max(u,v)$$

und für die durch u,v,w erzeugten Zukunftsrelationen

$$\langle\dot{w}\rangle \subset \langle\dot{u}\rangle \circ \langle\dot{v}\rangle.$$

Beweis:
Gegeben seien Punkte $A, B \in \mathfrak{P}$ mit $A\langle\dot{w}\rangle B$. Als Bedingung für einen Punkt $C = (t_C, x^C) \in \mathfrak{P}$ mit $A\langle\dot{u}\rangle C \wedge C\langle\dot{v}\rangle B$ erhalten wir:

$$x^B e^{-at_B} - x^A e^{-at_A} = \frac{v-u}{a} e^{-at_C} + \frac{u}{a} e^{-at_A} - \frac{v}{a} e^{-at_B} = -\frac{w}{a}(e^{-at_B} - e^{-at_A})$$

$$\divideontimes \quad v(e^{-at_C} - e^{-at_B}) + u(e^{-at_A} - e^{-at_C}) = w(e^{-at_A} - e^{-at_B})$$

$$\divideontimes \quad (p_1v+p_2v)(e^{-at_C}-e^{-at_B})+(p_1u+p_2u)(e^{-at_A}-e^{-at_C}) = (p_1u+p_2v)(e^{-at_A}-e^{-at_B})$$

$$\divideontimes \quad p_1 v e^{-at_C} + p_2 v e^{-at_C} - p_1 u e^{-at_C} - p_2 u e^{-at_C} =$$

$$p_2 v e^{-at_A} - p_2 u e^{-at_A} + p_1 v e^{-at_B} - p_1 u e^{-at_B}$$

$$\divideontimes \quad e^{-at_C} = \frac{p_2 e^{-at_A} + p_1 e^{-at_B}}{p_1 + p_2} > 0$$

$$\divideontimes \quad t_C = -\frac{1}{a} \ln \frac{p_2 e^{-at_A} + p_1 e^{-at_B}}{p_1 + p_2}.$$

Es ist auch $t_A < t_C < t_B$, denn es gilt im Fall

1. $a < 0$

$$\begin{aligned} & t_A < t_B \\ \divideontimes\quad & p_1 e^{-at_A} + p_2 e^{-at_A} < p_2 e^{-at_A} + p_1 e^{-at_B} < p_1 e^{-at_B} + p_2 e^{-at_B} \\ \divideontimes\quad & e^{-at_A} < e^{-at_C} < e^{-at_B}. \end{aligned}$$

2. $a > 0$

$$\begin{aligned} & e^{-at_B} < e^{-at_A} \\ \divideontimes\quad & p_1 e^{-at_B} + p_2 e^{-at_B} < p_2 e^{-at_A} + p_1 e^{-at_B} < p_1 e^{-at_A} + p_2 e^{-at_A} \\ \divideontimes\quad & e^{-at_B} < e^{-at_C} < e^{-at_A}. \end{aligned}$$

□

Es gilt auch die Umkehrung:

Satz 1.13
Es seien zwei verschiedene Kontrollen $u, v \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann gibt es geeignete positive Gewichte $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$, so daß für

$$w := \frac{p_1 u + p_2 v}{p_1 + p_2}$$

gilt:

$$\langle \dot{u} \rangle \circ \langle \dot{v} \rangle \subset \langle \dot{w} \rangle.$$

Beweis:
Es seien beliebige Punkte $A, B \in \mathfrak{P}$ vorgegeben mit

$$A(\langle \dot{u} \rangle \circ \langle \dot{v} \rangle)B$$

$$\divideontimes \quad \bigvee_{C=(t_C, x^C) \in \mathfrak{P}} A\langle \dot{u} \rangle C \wedge C \langle \dot{v} \rangle B$$

$$\divideontimes \quad x^B e^{-at_B} - x^A e^{-at_A} = \frac{v-u}{a} e^{-at_C} + \frac{u}{a} e^{-at_A} - \frac{v}{a} e^{-at_B}$$

$$\divideontimes \quad A \cdot B = -a \frac{x^B e^{-at_B} - x^A e^{-at_A}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} = u \frac{e^{-at_C} - e^{-at_A}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} + v \frac{e^{-at_B} - e^{-at_C}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}}.$$

Für den Nachweis der Behauptung $A \langle \dot{w} \rangle B$ muß gezeigt werden:

$$A \cdot B \stackrel{!}{=} \frac{p_1 u + p_2 v}{p_1 + p_2} \quad \text{f. g. } p_1, p_2 \in \mathbb{R}^{>0}.$$

Also weisen wir geeignete $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^{>0}$ nach mit

$$p_1 \left(u \frac{e^{-at_C} - e^{-at_A}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} + v \frac{e^{-at_B} - e^{-at_C}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} - u \right) +$$
$$p_2 \left(u \frac{e^{-at_C} - e^{-at_A}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} + v \frac{e^{-at_B} - e^{-at_C}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} - v \right) = 0$$

$$\divideontimes \quad p_1 \left((u - v) \frac{e^{-at_C} - e^{-at_B}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} \right) + p_2 \left((u - v) \frac{e^{-at_C} - e^{-at_A}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} \right) = 0$$

$$\divideontimes \quad p_2 = \frac{e^{-at_B} - e^{-at_C}}{e^{-at_C} - e^{-at_A}} \, p_1 .$$

Also gibt es für jedes vorgegebene $p_1 > 0$ genau ein $p_2 > 0$ (denn der Quotient ist für alle $t_A < t_C < t_B$ immer größer Null) derart, daß gilt:

$$A \cdot B = \frac{p_1 u + p_2 v}{p_1 + p_2}$$

$$\divideontimes \quad A \overset{\cdot}{\left\langle \frac{p_1 u + p_2 v}{p_1 + p_2} \right\rangle} B.$$

□

Korollar 1.14
Es seien zwei verschiedene Kontrollen $u, v \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann gilt

1.

$$\overset{\cdot}{\langle u \rangle} \circ \overset{\cdot}{\langle v \rangle} \;=\; \bigcup_{\substack{\overset{\cdot}{\langle w \rangle} \subset \overset{\cdot}{\langle u \rangle} \circ \overset{\cdot}{\langle v \rangle} \\ \overset{\cdot}{\langle w \rangle} \in \mathfrak{Z}}} \overset{\cdot}{\langle w \rangle} \;=\; \bigcup_{p_1, p_2 > 0} \overset{\cdot}{\left\langle \tfrac{p_1 u + p_2 v}{p_1 + p_2} \right\rangle}$$

2.

$$\overset{\cdot}{\langle u \rangle}^{-1} \circ \overset{\cdot}{\langle v \rangle}^{-1} \;=\; \bigcup_{\substack{\overset{\cdot}{\langle w \rangle}^{-1} \subset \overset{\cdot}{\langle u \rangle}^{-1} \circ \overset{\cdot}{\langle v \rangle}^{-1} \\ \overset{\cdot}{\langle w \rangle}^{-1} \in \mathfrak{V}}} \overset{\cdot}{\langle w \rangle}^{-1} \;=\; \bigcup_{p_1, p_2 > 0} \overset{\cdot}{\left\langle \tfrac{p_1 u + p_2 v}{p_1 + p_2} \right\rangle}^{-1} .$$

Beweis:
Die erste Gleichung folgt aus der Homogenitätsregel und aus den Sätzen 1.12 und 1.13, die zweite ergibt sich durch Invertieren der ersten.

□

Definition und Satz 1.15
Die von einem Punkt $A \in \mathfrak{P}$ abgetragenen **"Winkelräume"**

$$\begin{aligned} A(\langle \dot{u} \rangle \circ \langle \dot{v} \rangle) &= (A\langle \dot{u} \rangle)\langle \dot{v} \rangle \\ A(\langle \dot{u} \rangle^{-1} \circ \langle \dot{v} \rangle^{-1}) &= (A\langle \dot{u} \rangle^{-1})\langle \dot{v} \rangle^{-1} \end{aligned}$$

für $(u \neq v)$ können auch dargestellt werden durch die Abtragung sämtlicher Relationen $\langle \dot{w} \rangle$ bzw. $\langle \dot{w} \rangle^{-1}$ von A, deren Stellwerte w zwischen u und v liegen.

Definition 1.16
Unter der **"Erreichbarkeitsrelation"** $\mathbf{P}$ *eines beliebigen Differentialgleichungsrelativs $(\mathfrak{P}, \mathfrak{R})$ verstehen wir folgende Menge:*

$$\mathbf{P} := \{(A, B) \in \mathfrak{P} \times \mathfrak{P} | \bigvee_{\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}} A\, \mathfrak{z}\, B\},$$

sowie als **"erreichbare Menge"** $A\mathfrak{Z}$ *eines Punktes $A \in \mathfrak{P}$:*

$$A\mathfrak{Z} := \bigcup_{\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}} A\mathfrak{z}.$$

Davon abgeleitet können wir auch die erreichbare Menge einer Teilmenge $\mathfrak{P}' \subset \mathfrak{P}$ definieren:

$$\mathfrak{P}'\, \mathbf{P} := \bigcup_{A \in \mathfrak{P}'} A\mathbf{P} = \bigcup_{A \in \mathfrak{P}'} A\mathfrak{Z}.$$

($\mathfrak{Z}$ bezeichne wieder die Menge der Zukunftsrelationen.)

Bemerkung 1.17
Die erreichbare Menge eines Punktes $A \in \mathfrak{P}$ ist der Nachbereich der Erreichbarkeitsrelation $\mathbf{P}$ von A :

$$\bigwedge_{A \in \mathfrak{P}} : A\mathbf{P} = A\mathfrak{Z}.$$

Definition 1.18 (Arnold, 1993a)
Gegeben sei ein Regel-Relativ $(\mathfrak{P}, \mathcal{R})$. Wir nennen eine Funktion

$$t \longmapsto A(t) = (t, x(t)$$

eine $\mathfrak{c}$ **- Funktion** *mit dem Anfangspunkt $A(t_0)$, wenn für alle $\Delta t > 0, t > t_0$ gilt:*

$$A(t)\, \mathfrak{c} \Delta t = A(t + \Delta t).$$

Bezogen auf das zur Differentialgleichung $\dot{x}(t) = ax(t) + u$ gehörende Regel-Relativ $(\mathfrak{P}, \mathcal{R})$, gelten die Sätze 1.19 - 1.21 (Arnold, 1993a):

Satz 1.19

$$\bigwedge_{A \in \mathfrak{P}} : \; A(\mathbf{P} \cup \mathbf{P}^{-1} \cup [\pm\infty] \cup \mathfrak{e}) = \mathfrak{P}.$$

Satz 1.20
Das Relativ $(\mathfrak{P}, \mathcal{R})$ ist zeitinvariant:
Für alle $A, B \in \mathfrak{P}, \mathfrak{r} \in \mathcal{R}$ und alle $\Delta t > 0$ gilt

$$x^A = x^B \quad \succ \quad x(A\,\mathfrak{r}\Delta t) = x(B\,\mathfrak{r}\Delta t).$$

Beweis:
Es sei $\mathfrak{r} = \langle r \rangle \in \mathcal{R}$ f. e. $r \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned} x(A\,\mathfrak{r}\Delta t) &= e^{a\Delta t}\left(x^A + \frac{r}{a}\right) - \frac{r}{a} \\ &= e^{a\Delta t}\left(x^B + \frac{r}{a}\right) - \frac{r}{a} \\ &= x(B\,\mathfrak{r}\Delta t). \end{aligned}$$

□

Damit haben wir die erforderliche Kompatibilität für die Definition von

$$(x(A))\,\langle u \rangle \Delta t := x(A\,\langle u \rangle \Delta t).$$

Wir setzen daher

$$x\,\langle u \rangle \Delta t := x(A\,\langle u \rangle \Delta t) \text{ f. e. bel. } A \text{ mit } x(A) = x.$$

Dann gilt auch

Satz 1.21
Die allgemeinen Lösungen von $\dot{x}(t) = ax(t) + u$ sind $\mathfrak{c}$ -Kurven.

Beweis:
Wir zeigen für $x(t) = Ce^{at} + \frac{u}{a}$; $C, t \in \mathbb{R}$ und damit $\mathfrak{c} = \langle u \rangle \in \mathcal{R}$:

$$x(t)\,\langle u \rangle \Delta t \stackrel{!}{=} x(t + \Delta t).$$

Es ist

$$\begin{aligned}
x(t)\,\langle u\rangle\Delta t &= x\left[(t, x(t))\,\langle u\rangle\Delta t\right] \\
&= x\left[\left(t, Ce^{at} - \frac{u}{a})\right)\,\langle u\rangle\Delta t\right] \\
&= x\left[\left(t+\Delta t, e^{a\Delta t}\left(Ce^{at} - \frac{u}{a} + \frac{u}{a}\right) - \frac{u}{a}\right)\right] \\
&= x\left(t+\Delta t, Ce^{a(t+\Delta t)} - \frac{u}{a}\right) \\
&= Ce^{a(t+\Delta t)} - \frac{u}{a} \\
&= x(t+\Delta t).
\end{aligned}$$

□

Definition und Satz 1.22 (Parallelisierungsaxiom)
Beschreibt $x(t)$ eine $\mathfrak{c}$ -Kurve, so gibt es zu jedem $c \in \mathbb{R}$ ein $\mathfrak{c}^c \in \mathcal{R}$ derart, daß

$$x(t) + c$$

eine $\mathfrak{c}^c$ -Kurve darstellt.

Beweis:
Ist $x(t)$ eine $\langle u\rangle$ -Kurve, so ist $x(t) + c$ eine $\langle u - ac\rangle$ -Kurve, d. h. es gilt

$$\langle u\rangle^c = \langle u - ac\rangle,$$

denn

$$x(t) + c = Ce^{at} - \frac{u}{a} + c = Ce^{at} - \frac{u - ac}{a}\ .$$

□

Kapitel 2

Vereinfachte Relative und Darstellung der Zukunftsrelationen

Mit der Einteilung des Lösungsraumes der Differentialgleichung $\dot{x}(t) = ax(t) + u$ in disjunkte Zonen und Einteilung der Kontrollachse $\mathcal{U}$ in Skalen gewinnen wir ein zum Differentialgleichungsrelativ $(\mathfrak{P}, \mathfrak{R})$ vereinfachtes Relativ $(\mathfrak{P}, \boldsymbol{\mathcal{R}})$.
In den weiteren Ausführungen werden wir die Zukunftsrelationen (und damit auch die Vergangenheitsrelationen) des Relativs $(\mathfrak{P}, \boldsymbol{\mathcal{R}})$ mit dem Einschrittverfahren von Euler-Cauchy zurückführen auf die affinen Relationen der euklidischen Ebene.

Wir betrachten erneut die inhomogene, lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten $a \in \mathbb{R}^{\neq 0}, u \in \mathcal{U} = \mathbb{R}$ und Anfangsbedingung, also

$$\frac{\partial}{\partial t} x(t) = ax(t) + u\,, \qquad x(t_0) = x^0,$$

sowie das zugehörige Differentialgleichungsrelativ $(\mathfrak{P}, \mathfrak{R})$ mit

$$\mathfrak{R} := \mathfrak{Z} \cup \boldsymbol{\mathcal{V}} \cup \{[\pm\infty], \mathfrak{e}\}.$$

Definition 2.1
Gegeben sei ein beliebiges $s \in \mathbb{R}$, sowie ein $\alpha > 0$. Wir unterteilen den Zielraum $\mathcal{T} \times \mathbb{R}$ *disjunkt in Zonen $Z_i, i \in \mathbb{Z}$, die wie folgt mit $n \in \mathbb{N}$ definiert seien:*

$$\begin{aligned} Z_0 &:= Zone_0 := \{(t,x) \in \mathcal{T} \times \mathbb{R} \mid s - \alpha \leq x < s + \alpha\} \\ Z_n &:= Zone_n := \{(t,x) \in \mathcal{T} \times \mathbb{R} \mid s + n\alpha \leq x < s + (n+1)\alpha\} \\ Z_{-n} &:= Zone_{-n} := \{(t,x) \in \mathcal{T} \times \mathbb{R} \mid s - (n+1)\alpha \leq x < s - n\alpha\} \end{aligned}$$

Definition 2.2
Unter dem **"Beharrungswert"** *einer beliebigen Zukunftsrelation* $\langle \dot{u} \rangle \in \mathfrak{Z}$*, in Zeichen* $BW(\langle \dot{u} \rangle)$*, verstehen wir den reellwertigen Grenzwert von* $\dot{x}(t) = ax(t) + u$ *für* $t \to \pm\infty$*, also*

$$BW(\langle \dot{u} \rangle) := -\frac{u}{a} = \begin{cases} \lim_{t\to\infty} Ce^{at} - \frac{u}{a} & f.\ \ a < 0 \\ \lim_{t\to-\infty} Ce^{at} - \frac{u}{a} & f.\ \ a > 0 \end{cases} \quad ; \quad C \in \mathbb{R}.$$

Davon ausgehend definieren wir **"Skalen"** *der Relationen* $\langle \dot{u} \rangle \in \mathfrak{Z}$ *gemäß*

$$f : \begin{cases} \mathfrak{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \langle \dot{u} \rangle & \longmapsto & f(\langle \dot{u} \rangle) := i \quad :\Leftrightarrow \quad (t, BW(\langle \dot{u} \rangle)) \in Z_i \ \ f.\ e.\ t \in \mathcal{T}. \end{cases}$$

Damit haben wir bei Vorgabe eines Wertes $s \in \mathbb{R}$ und Grenze $\alpha > 0$ eine disjunkte Überdeckung des Zielraums und Einteilung der Stellachse im *Stellraum*.
Mit dieser Einteilung definieren wir neue binäre Relationen

$$\mathcal{B}_i := \bigcup_{f(\langle \dot{u} \rangle)=i} \langle \dot{u} \rangle \qquad \text{f. a. } i \in \mathbb{Z},$$

sowie die dazugehörigen Inversen

$$\mathcal{B}_i^{-1} \qquad \text{f. a. } i \in \mathbb{Z},$$

die alle in der Menge

$$\boldsymbol{\mathcal{R}} := \{\mathcal{B}_i | i \in \mathbb{Z}\} \cup \{\mathcal{B}_i^{-1} | i \in \mathbb{Z}\} \cup \{[\infty], [-\infty], \mathfrak{e}\}$$

zusammengefaßt werden. Es gilt:

Satz 2.3
Das Relativ $(\mathfrak{P}, \boldsymbol{\mathcal{R}})$ *ist einfach graphisch.*

Beweis:

1. Scharf einfache Transitivität
   Seien $A = (t_A, x^A)$, $B = (t_B, x^B) \in \mathfrak{P}$ vorgegeben.

   (a) $t_A < t_B$
   Es existiert in $(\mathfrak{P}, \mathfrak{R})$ genau ein $\langle \dot{u} \rangle$ mit $A\langle \dot{u} \rangle B$. Diese Relation $\langle \dot{u} \rangle$ definiert genau einen Beharrungswert, nämlich $-\frac{u}{a}$, der in genau einer Zone Z_i liegt. Also gibt es auch genau eine Relation $\mathcal{B}_i \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ mit $A\, \mathcal{B}_i\, B$.

(b) $t_A > t_B$
Bedeutet $t_B < t_A$ und mit Fall a): $B\langle\dot{u}\rangle A$ für genau ein $\langle\dot{u}\rangle \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}$, also $A\langle\dot{u}\rangle^{-1} B$ und damit $A\,\mathcal{B}_i^{-1}\,B$ für genau ein $\mathcal{B}_i^{-1} \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$.

(c) $t_A = t_B$
Klar mit den Relationen $[\infty], [-\infty], \mathfrak{e} \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$.

Wir können also definieren:

$$\begin{aligned} AB_{\boldsymbol{\mathcal{R}}} &= \mathcal{B}_i &&:\Leftrightarrow && (A,B) \in \mathcal{B}_i \ \ f.\ t_A < t_B \\ AB_{\boldsymbol{\mathcal{R}}} &= \mathcal{B}_i^{-1} &&:\Leftrightarrow && (A,B) \in \mathcal{B}_i^{-1} \ \ f.\ t_A > t_B \\ AB_{\boldsymbol{\mathcal{R}}} &= [\infty] &&:\Leftrightarrow && t_A = t_B \wedge x^A < x^B \\ AB_{\boldsymbol{\mathcal{R}}} &= [-\infty] &&:\Leftrightarrow && t_A = t_B \wedge x^A > x^B \\ AB_{\boldsymbol{\mathcal{R}}} &= \mathfrak{e} &&:\Leftrightarrow && A = B. \end{aligned}$$

2. Abgeschlossenheit bezüglich Inversenbildung nach Definition klar.

3. $\mathfrak{e} \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$.

4. Linkstotalität der Relationen auch klar.

□

Definition 2.4
Gegeben seien auf einer Grundmenge $\mathfrak{P}$ zwei Relative $(\mathfrak{P}, \mathcal{R}_1)$ und $(\mathfrak{P}, \mathcal{R}_2)$ mit (mindestens) scharf einfacher Transitivität.
Dann heißt $(\mathfrak{P}, \mathcal{R}_2)$ **"vereinfacht"** *zu $(\mathfrak{P}, \mathcal{R}_1)$, wenn gilt*

$$\bigwedge_{A,B\in\mathfrak{P}} :\ AB_{\mathcal{R}_1} \subset AB_{\mathcal{R}_2}.$$

Satz 2.5
$(\mathfrak{P}, \boldsymbol{\mathcal{R}})$ *ist vereinfacht zum Relativ* $(\mathfrak{P}, \mathfrak{R})$.

Beweis:
Es seien $A, B \in \mathfrak{P}$ vorgegeben.

1. $t_A < t_B$
$$AB_{\mathfrak{R}} = \langle\dot{u}\rangle \subset \bigcup_{f(\langle\dot{u}\rangle)=i} \langle\dot{u}\rangle = AB_{\boldsymbol{\mathcal{R}}}.$$

2. $t_A > t_B$ analog.

In den anderen möglichen Fällen ist trivialerweise $AB_{\mathfrak{R}} = AB_{\boldsymbol{\mathcal{R}}}$.

□

Satz 2.6
Die Relationen in $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ sind idempotent und (ausgenommen $\mathfrak{e}$) antisymmetrisch.

Beweis:

1. Idempotenz
   Es sei ein $\mathcal{B}_i \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ f. e. i $\in \mathbb{Z}$ beliebig vorgegeben sowie Punkte

   $$A, B \in \mathfrak{P}$$

   mit

   $$(A, B) \in \mathcal{B}_i \circ \mathcal{B}_i$$

   $$\succ \quad \bigvee_{C \in \mathfrak{P}} \; \bigvee_{\langle \dot{u}\rangle \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}} \; \bigvee_{\langle \dot{v}\rangle \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}} f(\langle \dot{u}\rangle) = f(\langle \dot{v}\rangle) = i \wedge A\langle \dot{u}\rangle C \wedge C\langle \dot{v}\rangle B$$

   $$\succ \quad \bigvee_{\langle \dot{u}\rangle \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}} \; \bigvee_{\langle \dot{v}\rangle \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}} (A, B) \in \langle \dot{u}\rangle \circ \langle \dot{v}\rangle = \bigcup_{p_1, p_2 > 0} \left\langle \frac{p_1 u \dot{+} p_2 v}{p_1 + p_2} \right\rangle \quad \text{Korollar 1.14}$$

   $$\text{mit } \min\{-\tfrac{u}{a}, -\tfrac{v}{a}\} \leq -\tfrac{1}{a}\tfrac{p_1u+p_2v}{p_1+p_2} \leq \max\{-\tfrac{u}{a}, -\tfrac{v}{a}\}$$

   $$\succ \quad (A, B) \in \langle \tfrac{p_1 u \dot{+} p_2 v}{p_1 + p_2} \rangle \text{ f. g. } p_1,\, p_2 > 0 \wedge f\left(\left\langle \tfrac{p_1 u \dot{+} p_2 v}{p_1 + p_2} \right\rangle\right) = i$$

   $$\succ \quad (A, B) \in \mathcal{B}_i.$$

   Die andere Inklusion ist trivialerweise erfüllt.
   Der Fall $\overline{\mathcal{B}_i} \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ verläuft analog, bei den übrigen Relationen $[\infty], [-\infty], \mathfrak{e} \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ ist die Behauptung trivial.

2. Antisymmetrie per Definition erfüllt.

□

Satz 2.7
Die Relationen $\mathcal{B}_i$ (und damit auch $\mathcal{B}_i^{-1}$) sind nicht *alternierend.*

Beweis:
Wir betrachten Relationen $\langle \dot{u}\rangle, \langle \dot{v}\rangle; u, v \in \mathbb{R}$ mit

$$f(\langle \dot{u}\rangle) = f(\langle \dot{v}\rangle) = n \quad \text{ f. e. } n \in \mathbb{N}$$

und

$$\begin{aligned} u > v &\quad \text{falls} \quad a < 0 \\ u < v &\quad \text{falls} \quad a > 0. \end{aligned}$$

Ferner wählen wir Punkte $A = (t_A, x^A), B = (t_B, x^B) \in \mathfrak{P}$ unter folgenden Restriktionen:

$$\begin{aligned} a < 0 \ &: \ t_A > t_B \quad \divideontimes \quad e^{-at_A} - e^{-at_B} > 0 \\ a > 0 \ &: \ t_A < t_B \quad \divideontimes \quad e^{-at_A} - e^{-at_B} > 0. \end{aligned}$$

$$-\frac{A \cdot B}{a} = \frac{x^A e^{-at_A} - x^B e^{-at_B}}{e^{-at_A} - e^{-at_B}} < s + n\alpha \quad \divideontimes \quad f(\langle A \dot{\cdot} B\rangle \neq n.$$

Dann gilt für den Punkt $C = (t_C, x^C) \in \mathfrak{P}$ mit

$$\begin{aligned} t_C &:= \frac{1}{a} \ln \frac{u - v}{e^{-at_A}(ax^A + u) - e^{-at_B}(ax^B + v)} \\ x^C &:= e^{a(t_C - t_A)} \left(x^A + \frac{u}{a} \right) - \frac{u}{a} \\ &= e^{a(t_C - t_A)} \left(x^B + \frac{v}{a} \right) - \frac{v}{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &A\langle\dot{u}\rangle C \quad \wedge \quad C\langle\dot{v}\rangle^{-1} B \quad \wedge \quad f(\langle A \dot{\cdot} B\rangle) \neq n \\ \succ \quad &(A, B) \in \mathcal{B}_n \circ \mathcal{B}_n^{-1}, \quad (A, B) \notin \mathcal{B}_n \cup \mathcal{B}_n^{-1} \cup \mathfrak{e}, \end{aligned}$$

sofern der Nenner des Logarithmus positiv ist.

1. $a < 0$
   Nach Wahl der Punkte A und B gilt

$$-\frac{A \cdot B}{a} = \frac{x^A e^{-at_A} - x^B e^{-at_B}}{e^{-at_A} - e^{-at_B}} < s + n\alpha \leq -\frac{v}{a} < -\frac{u}{a}$$

$$\succ \quad x^A e^{-at_A} - x^B e^{-at_B} < \frac{v}{a}(e^{-at_B} - e^{-at_A}) < \frac{v}{a} e^{-at_B} - \frac{u}{a} e^{-at_A}.$$

   Wegen diesen Ungleichungen ist zunächst t_C definiert, denn

$$\begin{aligned} &x^A e^{-at_A} + \frac{u}{a} e^{-at_A} - x^B e^{-at_B} - \frac{v}{a} e^{-at_B} < 0 \\ \divideontimes \quad &e^{-at_A}(ax^A + u) - e^{-at_B}(ax^B + v) > 0, \end{aligned}$$

   und es ist $t_A < t_C$, denn

$$\frac{x^A e^{-at_A} - x^B e^{-at_B}}{e^{-at_A} - e^{-at_B}} < -\frac{v}{a}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad x^A e^{-at_A} - x^B e^{-at_B} < -(e^{-at_A} - e^{-at_B})\frac{v}{a} \\
&\Leftrightarrow \quad e^{-at_A}\left(x^A + \frac{v}{a}\right) - e^{-at_B}\left(x^B + \frac{v}{a}\right) < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x^A + \frac{v}{a} - e^{a(t_A - t_B)}\left(x^B + \frac{v}{a}\right) < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad ax^A + u - e^{a(t_A - t_B)}(ax^B + v) > u - v \\
&\Leftrightarrow \quad e^{at_A} > \frac{u - v}{e^{-at_A}(ax^A + u) - e^{-at_B}(ax^B + v)} = e^{at_C}.
\end{aligned}$$

2. $a > 0$
   Nach der Wahl der Punkte A und B gilt

$$\frac{x^A e^{-at_A} - x^B e^{-at_B}}{e^{-at_A} - e^{-at_B}} < -\frac{v}{a} < -\frac{u}{a}$$

$$\Rightarrow \quad x^A e^{-at_A} - x^B e^{-at_B} < \frac{u}{a}(e^{-at_B} - e^{-at_A}) < \frac{v}{a}e^{-at_B} - \frac{u}{a}e^{-at_A}.$$

   Wegen diesen Ungleichungen ist zunächst t_C definiert, denn

$$\begin{aligned}
&x^A e^{-at_A} + \frac{u}{a}e^{-at_A} - x^B e^{-at_B} - \frac{v}{a}e^{-at_B} < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad e^{-at_A}(ax^A + u) - e^{-at_B}(ax^B + v) < 0,
\end{aligned}$$

   und es ist $t_B < t_C$, denn

$$\frac{x^A e^{-at_A} - x^B e^{-at_B}}{e^{-at_A} - e^{-at_B}} < -\frac{u}{a}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad x^A e^{-at_A} - x^B e^{-at_B} < -(e^{-at_A} - e^{-at_B})\frac{u}{a} \\
&\Leftrightarrow \quad e^{-at_A}\left(x^A + \frac{u}{a}\right) - e^{-at_B}\left(x^B + \frac{u}{a}\right) < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad e^{a(t_B - t_A)}\left(x^A + \frac{u}{a}\right) - (x^B + \frac{u}{a}) < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad e^{a(t_B - t_A)}(ax^A + u) - (ax^B + v) < u - v \\
&\Leftrightarrow \quad e^{at_B} < \frac{u - v}{e^{-at_A}(ax^A + u) - e^{-at_B}(ax^B + v)} = e^{at_C}.
\end{aligned}$$

$\square$

Wir wollen im folgenden das Polygonzugverfahren von EULER-CAUCHY für die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = ax(t) + u$ relationentheoretisch beschreiben und werden dadurch eine Darstellung der Zukunftsrelationen erhalten.

Der zugrundeliegende Lösungsraum $\mathcal{T} \times \mathbb{R}$ der DGL, der eine reelle affine Ebene $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \in, \|)$ ist, wird durch ein affines Relativ $(\mathfrak{P}, \mathcal{R})$ synonym beschrieben (Arnold, 1987): Dabei ist mit

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} &:= \mathcal{T} \times \mathbb{R} \\ \mathfrak{G} &:= \mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2 \\ &:= \{\ \{(t,x) | x = mt + b, t \in \mathcal{T}\} \,|\, m, b \in \mathbb{R}\ \} \cup \\ &\quad\ \{\ \{(c,x) | x \in \mathbb{R}\} \,|\, c \in \mathbb{R}\ \} \\ g \| h &:\divideontimes\ g = h \vee g \cap h = \emptyset \end{aligned}$$

das Übergangsverfahren

$$\mathfrak{G} \ni \mathrm{g} \longmapsto \langle \mathrm{g} \rangle \in \mathcal{R} \subset \mathrm{Pot}(\mathfrak{P} \times \mathfrak{P})$$

$$A \langle g \rangle B :\divideontimes g_{AB} \parallel g \ \ (A \neq B)$$

$$A \mathfrak{e} B :\divideontimes A = B$$

wie folgt erklärt:

1. $g \in \mathfrak{G}_1 \ \divideontimes\ g = \{(t,x) | x = m_g t + b_g, t \in \mathbb{R}\}$ f. g. $m_g, b_g \in \mathbb{R}$

$$g_{AB} \| g \quad \divideontimes \quad m_g = \frac{x^B - x^A}{t_B - t_A} \quad (t_B \neq t_A).$$

2. $g \in \mathfrak{G}_2 \ \divideontimes\ g = \{(c,x) | x \in \mathbb{R}\}$ f. g. $c \in \mathbb{R}$

$$g_{AB} \| g \quad \divideontimes \quad g_{AB} = \{(t_A, x) | x \in \mathbb{R}\} \quad \divideontimes \quad (t_B = t_A \wedge x^B \neq x^A).$$

Das der reellen euklidischen Ebene $(\mathcal{T} \times \mathbb{R}, \mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2, \in, \|)$ zugeordnete synonyme Relativ $(\mathfrak{P}, \mathcal{R})$ kann auch durch ein Relativ $(\mathfrak{P}, \mathcal{R}')$ mit

$$\mathcal{R}' := \{(m) \subset \mathfrak{P} \times \mathfrak{P} \,|\, m \in \mathbb{R}\} \cup \{(\infty), \mathfrak{e}\}$$

und den Definitionen

$$\begin{aligned} A(m)B &:\divideontimes\ t_A \neq t_B,\ g_{AB} \text{ hat } \textit{Steigungsfaktor } m \quad \divideontimes \quad m = \frac{x^A - x^B}{t_A - t_B} \\ A(\infty)B &:\divideontimes\ t_A = t_B,\ x^A \neq x^B \\ A\mathfrak{e}B &:\divideontimes\ A = B \end{aligned}$$

beschrieben werden. Der Zusammenhang zwischen $\mathcal{R}$ und $\mathcal{R}'$ lautet mittels zweier Bijektionen φ und ψ :

$$\psi : \begin{cases} \mathcal{R}\backslash\{\mathfrak{e}\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\cup\{\infty\} \\ \langle g\rangle & \longmapsto & \psi(\langle g\rangle) = \begin{cases} m_g & \text{falls } g \in \mathfrak{G}_1 \\ \infty & \text{falls } g \in \mathfrak{G}_2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}\cup\{\infty\} & \longrightarrow & \mathcal{R}'\backslash\{\mathfrak{e}\} \\ m & \longmapsto & \varphi(m) := (m) \subset \mathfrak{P}\times\mathfrak{P}. \end{cases}$$

Die Wohldefiniertheit und Injektivität der Abbildung ψ ergibt sich im Fall $g, h \in \mathfrak{G}_1$ aus folgender Äquivalenz:

$$\begin{array}{ll} & \langle g\rangle = \langle h\rangle \\ \Leftrightarrow & g\|h \\ \Leftrightarrow & m_g = m_h. \end{array}$$

Für $g, h \in \mathfrak{G}_2$ ist dieses trivial, ebenso die Surjektivität von ψ.
Die Bijektivität von φ ist ebenso trivial.

Insgesamt also

$$\begin{cases} \mathcal{R}\backslash\{\mathfrak{e}\} & \longrightarrow & \mathcal{R}'\backslash\{\mathfrak{e}\} \\ \langle g\rangle & \longmapsto & (\psi\circ\varphi)(\langle g\rangle) := \varphi(\psi(\langle g\rangle)) := (m_g). \end{cases}$$

Weiter geben wir für ein beliebig vorgegebenes $u \in \mathbb{R}$ eine surjektive Abbildung δ_u an:

$$\delta_u : \begin{cases} \mathfrak{P} = \mathfrak{T}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A = (t_A, x^A) & \longmapsto & \delta_u(A) := ax^A + u. \end{cases}$$

Dann ist natürlich auch richtig:

$$\delta_u\circ\varphi : \begin{cases} \mathfrak{P} = \mathfrak{T}\times\mathbb{R} & \xrightarrow{\text{surj.}} & \mathcal{R}'\backslash\{(\infty), \mathfrak{e}\} \\ A = (t_A, x^A) & \longmapsto & (A)(\delta_u\circ\varphi) := \varphi(\delta_u(A)) = (ax^A + u). \end{cases}$$

Also ist $(.)(\delta_u\circ\varphi) \in \mathcal{R}'$. Von diesen $(.)(\delta_u\circ\varphi) \in \mathcal{R}'$ werden binäre Relationen

$(\widetilde{\delta_u \circ \varphi})$ abgeleitet gemäß:

$$\begin{array}{rl} & A(\widetilde{\delta_u \circ \varphi})B \\ :\Leftrightarrow & A(A)(\delta_u \circ \varphi)B \\ \Leftrightarrow & A(A)(\delta_u \circ \varphi) \ni B \\ \Leftrightarrow & A(ax^A + u) \ni B \\ \Leftrightarrow & (A, B) \in (ax^A + u). \end{array}$$

Definition und Satz 2.8
Wir definieren das **Steigungsrelativ** $(\mathfrak{P}, \mathbf{R})$ *mit*

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{P} & := & \mathcal{T} \times \mathbb{R} \\ \mathbf{R} & := & \{\widetilde{\delta_u \circ \varphi} | u \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathfrak{e}, (\infty)\}. \end{array}$$

Das Relativ $(\mathfrak{P}, \mathbf{R})$ *ist scharf einfach transitiv.*

Beweis:

1. Scharf einfache Transitivität
   Es seien $A, B \in \mathfrak{P}$ beliebig vorgegeben. Ist $t_A = t_B$, so gilt

   $$\begin{array}{rl} A\mathfrak{e}B & \text{falls} \quad x^A = x^B, \\ A(\infty)B & \text{falls} \quad x^A \neq x^B. \end{array}$$

   Es sei also $t_A \neq t_B$. Dann gibt es genau ein $u \in \mathbb{R}$ mit $A(\widetilde{\delta_u \circ \varphi})B$, denn

   $$\begin{array}{rl} & A(\widetilde{\delta_u \circ \varphi})B \\ \Leftrightarrow & A(ax^A + u)B \\ \Leftrightarrow & \dfrac{x^A - x^B}{t_A - t_B} = ax^A + u \\ \Leftrightarrow & u = \dfrac{x^A[1 - a(t_A - t_B)] - x^B}{t_A - t_B}. \end{array}$$

   Wir setzen für alle $A, B \in \mathfrak{P}$ und alle $\mathfrak{r} \in \mathbf{R}$:

   $$\widetilde{AB} := \mathfrak{r} \quad :\Leftrightarrow \quad A\mathfrak{r}B\,.$$

   Damit ist

   $$\begin{array}{rll} \widetilde{AB} = \mathfrak{e} & \text{falls} & A = B, \\ \widetilde{AB} = (\infty) & \text{falls} & t_A = t_B \wedge x^A \neq x^B, \\ \widetilde{AB} = \widetilde{\delta_{\frac{x^A[1-a(t_A-t_B)]-x^B}{t_A-t_B}} \circ \varphi} & & \text{sonst.} \end{array}$$

   $\square$

Satz 2.9
Das Relativ $(\mathfrak{P}, \mathbf{R})$ *ist* nicht *abgeschlossen bezüglich Inversen, d. h. es gilt* nicht

$$\left(\widetilde{\delta_u \circ \varphi}\right)^{-1} = \widetilde{\delta_v \circ \varphi} \;\; f.\ e.\ v \in \mathbb{R}.$$

Beweis:
Wir zeigen

$$(B, A) \in \left(\widetilde{\delta_u \circ \varphi}\right)^{-1} \quad \overset{!}{\Leftrightarrow} \quad (B, A) \in \widetilde{\delta_{a(x^A - x^B)+u} \circ \varphi}.$$

$$\begin{aligned}
& (B, A) \in \left(\widetilde{\delta_u \circ \varphi}\right)^{-1} \\
\Leftrightarrow \quad & (A, B) \in \widetilde{\delta_u \circ \varphi} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{x^A - x^B}{t_A - t_B} = \frac{x^B - x^A}{t_B - t_A} = ax^A + u = ax^B + (ax^A - ax^B + u) \\
\Leftrightarrow \quad & (B, A) \in \widetilde{\delta_{a(x^A - x^B)+u} \circ \varphi}.
\end{aligned}$$

Das o. g. $v \in \mathbb{R}$ ist also jeweils abhängig von den Paaren $(A, B) \in \widetilde{\delta_u \circ \varphi}$.

Definition und Satz 2.10
Wir definieren weiter ein **Abstandsrelativ** $(\mathfrak{P}, \mathcal{A})$ *gemäß*

$$\begin{cases} \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \operatorname{Pot}(\mathfrak{P} \times \mathfrak{P}) \\ h & \longmapsto & \langle h \rangle \subset \mathfrak{P} \times \mathfrak{P}. \end{cases}$$

$A = (t_A, x^A), B = (t_B, x^B) \in \mathfrak{P}$ *seien gegeben, dann gilt*

$$\begin{aligned}
A\langle h \rangle B \quad & :\Leftrightarrow \quad t_A + h = t_B \;\; , h > 0 \\
A\langle h \rangle^{-1} B \quad & :\Leftrightarrow \quad B\langle h \rangle A \\
A\langle 0 \rangle B \quad & :\Leftrightarrow \quad t_A = t_B \wedge x^A \neq x^B \\
A\mathfrak{e}B \quad & :\Leftrightarrow \quad A = B \\
\mathcal{A} \quad & := \quad \{\, \langle h \rangle \mid h \in \mathbb{R}^{>0} \} \cup \{\, \langle h \rangle^{-1} \mid h \in \mathbb{R}^{>0} \} \cup \{ \mathfrak{e}, \langle 0 \rangle \}.
\end{aligned}$$

Das Abstandsrelativ $(\mathfrak{P}, \mathcal{A})$ *ist einfach graphisch.*

Beweis:

1. Scharf einfache Transitivität
   Es seien Punkte $A, B \in \mathfrak{P}$ vorgegeben.

   (a) $t_A < t_B$. Dann gilt:

   $$\bigvee_{h \in \mathbb{R}^{>0}}^{1} A\langle h\rangle B, \quad h := t_B - t_A.$$

   (b) $t_A > t_B$. Dann gilt:

   $$\bigvee_{h \in \mathbb{R}^{>0}}^{1} A\langle h\rangle^{-1} B, \quad h := t_A - t_B.$$

   (c) $t_A = t_B, x^A \neq x^B$

   $$(A, B) \in \langle 0\rangle.$$

   (d) $t_A = t_B, x^A = x^B$

   $$(A, B) \in \mathfrak{e}.$$

   Wir setzen für alle $A, B \in \mathfrak{P}$ und $\mathfrak{a} \in \mathcal{A}$:

   $$\overline{AB} = \mathfrak{a} \quad :\Leftrightarrow \quad A\mathfrak{a}B\,.$$

2. Abgeschlossenheit bezüglich Gleichheitsrelation und Inversen klar.

3. Linkstotalität der Relationen auch klar.

□

Bemerkung 2.11
Die Relationen aus $\mathcal{A} \setminus \{\mathfrak{e}, \langle 0\rangle\}$ sind weder symmetrisch noch alternierend.

Beweis:
Es gilt für alle $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$\langle h\rangle \neq \langle h\rangle^{-1}$$

$$\langle h\rangle \circ \langle h\rangle^{-1} = \langle 0\rangle \cup \mathfrak{e}.$$

□

Satz 2.12
Es gilt die Homogenitätsregel für alle Punkte $A, B, C \in \mathfrak{P}$:

$$(H_2^A): \qquad \overline{AB} \subset \overline{AC} \circ \overline{CB}.$$

Beweis:
Für Punkte $A \neq B$ gilt

$$(X,Y) \in \overline{AB} \quad \divideontimes \quad \begin{cases} t_X + (t_B - t_A) = t_Y & : \quad t_A \neq t_B \\ t_X + (t_B - t_A) = t_Y \wedge x^X \neq x^Y & : \quad t_A = t_B \end{cases} .$$

Für $t_A < t_B$ ist dieses mit Definition klar.
Es sei $t_A > t_B$. Dann ist

$$\begin{aligned} & (X,Y) \in \langle t_A - t_B \rangle^{-1} \\ \divideontimes \quad & (Y,X) \in \langle t_A - t_B \rangle \\ \divideontimes \quad & t_Y + (t_A - t_B) = t_X \\ \divideontimes \quad & t_X + (t_B - t_A) = t_Y. \end{aligned}$$

Im Fall $t_A = t_B, x^A \neq x^B$ gilt

$$t_X = t_Y = t_X + (t_B - t_A) \wedge x^X \neq x^Y.$$

Die Homogenitätsregel ist für $A = B \vee A = C \vee C = B$ trivial:

1. $A = B$
$$\overline{AA} = \mathfrak{e} \subset \overline{AC} \circ \overline{CA} = \overline{AC} \circ \overline{AC}^{-1}.$$

2. $A = C$
$$\overline{AB} = \mathfrak{e} \circ \overline{AB} = \overline{AA} \circ \overline{AB}.$$

3. $C = B$
$$\overline{AB} = \overline{AB} \circ \mathfrak{e} = \overline{AB} \circ \overline{CB}.$$

Es sei also $A \neq B \neq C \neq A$.
Die Voraussetzung lautet

$$X\overline{AB}Y \quad \succ \quad t_Y = t_X + (t_B - t_A).$$

Wir definieren einen Punkt $Z = (t_Z, x^Z)$ gemäß

$$\begin{aligned} t_Z &:= t_X + (t_C - t_A) \\ &= t_X + (t_B - t_A) + (t_C - t_B) \\ &= t_Y + (t_C - t_B) \\ x^Z &\neq x^X, x^Y. \end{aligned}$$

Damit gilt aber

$$X\,\overline{AC}\,Z \quad \wedge \quad Z\,\overline{CB}\,Y.$$

□

Mit dem sogenannten Polygonzugverfahren wird bei Vorgabe eines beliebigen Anfangswertes $A = (t_A, x^A) \in \mathfrak{P}$ der Differentialgleichung $\dot{x}(t) = ax(t) + u$ und eines weiteren Abszissenwertes $t_B > t_A$ der dazugehörige Ordinatenwert x^B iterativ berechnet, im 1. Schritt erhält man ein x_1 mit

$$\begin{aligned}
x_1(1) &:= x^A + \tfrac{\partial}{\partial t}x(t)|_{t_A} \cdot h \\
&= x^A + (ax^A + u)h \\
x_1 &:= x_1(1) \;=\; x^A(1 + ah) + uh \\
h &:= t_B - t_A,
\end{aligned}$$

dann im 2. Schritt ein x_2 mit

$$\begin{aligned}
x_1(2) &:= x^A + \tfrac{\partial}{\partial t}x(t)|_{t_A} \cdot \tfrac{h}{2} \\
&= x^A + \left(ax^A + u\right)\frac{h}{2} \\
&= x^A\left(1 + a\frac{h}{2}\right) + u\frac{h}{2} \\
x_2(2) &:= x_1(2) + \tfrac{\partial}{\partial t}x(t)|_{t_1} \cdot \tfrac{h}{2} \\
&= x_1(2) + \left(ax_1(2) + u\right)\frac{h}{2} \\
&= x_1(2)\left(1 + a\frac{h}{2}\right) + u\frac{h}{2} \\
x_2 &:= x_2(2) \;=\; x^A\left(1 + a\frac{h}{2}\right)^2 + u\frac{h}{2}\left(1 + \left(1 + a\frac{h}{2}\right)\right) \\
t_1 &:= t_A + \frac{h}{2}.
\end{aligned}$$

Die Zahlen in den Klammern geben den jeweiligen Schritt an.
Im n-ten Schritt ergibt sich der letzte zu berechnende Wert x_n rekursiv aus der Folge der $(x_k(n))_{0 \le k \le n-1}$

$$x_n := x_n(n) := x_{n-1}(n) + \left(ax_{n-1}(n) + u\right)\frac{h}{n}$$

$$x_0(n) := x^A.$$

Natürlich ist dieses Verfahren konvergent, einen allgemeinen Beweis für Einschrittverfahren findet man z. B. in (Stoer, Bulirsch, 1978). Es bereitet daher keine Schwierigkeit, die Konvergenz des Polygonzugverfahrens für die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = ax(t) + u$ direkt nachzuweisen:
Wir betrachten zunächst die rekursiv definierte Folge $(P_n)_{n\geq 1}$

$$P_n(z) := P_{n-1}(z)\left(1 + a\frac{h}{z}\right) + u\frac{h}{z}$$

$$z \neq 0 \text{ beliebig}\ ,\ n \geq 1\ ,\ P_0(z) := P_0$$

und zeigen mit vollständiger Induktion:

$$P_n(z) \stackrel{!}{=} P_0\left(1 + a\frac{h}{z}\right)^n + u\frac{h}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1}\left(1 + a\frac{h}{z}\right)^\nu \qquad \text{f. a. } n \in \mathbb{N}.$$

Für $n = 1$ gilt:

$$\begin{aligned} P_1(z) &\stackrel{\text{Def.}}{=} P_0(z)\left(1 + a\frac{h}{z}\right) + u\frac{h}{z} \\ &= P_0\left(1 + a\frac{h}{z}\right)^n + u\frac{h}{n}\sum_{\nu=0}^{0}\left(1 + a\frac{h}{z}\right)^\nu . \end{aligned}$$

Im Induktionsschluß von $n \to n+1$ gilt:

$$\begin{aligned} P_{n+1}(z) &\stackrel{\text{Def.}}{=} P_n(z)\left(1 + a\frac{h}{z}\right) + u\frac{h}{z} \\ &\stackrel{\text{I.V.}}{=} \left[P_0\left(1 + a\frac{h}{z}\right)^n + u\frac{h}{z}\sum_{\nu=0}^{n-1}\left(1 + a\frac{h}{z}\right)^\nu\right]\left(1 - a\frac{h}{z}\right) + u\frac{h}{z} \\ &= P_0\left(1 + a\frac{h}{z}\right)^{n+1} + u\frac{h}{z}\sum_{\nu=0}^{n}\left(1 + a\frac{h}{z}\right)^\nu . \end{aligned}$$

In unserem Fall ergibt sich mit den Definitionen

$$P_n(z) := x_n(z)\ ,\ z := n\ ,\ P_0 := x^A\ :$$

$$x_n := x^A\left(1 + \frac{ah}{n}\right)^n + \frac{uh}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1}\left(1 + \frac{ah}{n}\right)^\nu .$$

Mit der Vereinbarung $q := 1 + \frac{ah}{n}$ wird

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\left(1+\frac{ah}{n}\right)^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{n-1} q^{\nu} = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1-q^n}{-\frac{ah}{n}}$$

und damit

$$\begin{aligned}
x_n &= x^A\left(1+\frac{ah}{n}\right)^n + \frac{uh}{n}\cdot\frac{1-q^n}{-\frac{ah}{n}}\\
&= x^A\left(1+\frac{ah}{n}\right)^n - \frac{u}{a}\left(1-\left(1+\frac{ah}{n}\right)^n\right)\\
&= \left(x^A+\frac{u}{a}\right)\left(1+\frac{ah}{n}\right)^n - \frac{u}{a}\\
&= \left(x^A+\frac{u}{a}\right)\left(1+\frac{a(t_B-t_A)}{n}\right)^n - \frac{u}{a}\\
\succ \quad \lim_{n\to\infty} x_n &= \left(x^A+\frac{u}{a}\right)e^{a(t_B-t_A)} - \frac{u}{a}\\
&= x^B.
\end{aligned}$$

Mit diesen Vorbereitungen formulieren wir nun

Satz 2.13
Gegeben sei das Differentialgleichungsrelativ $(\mathfrak{P}, \mathfrak{R})$. Mit den auch auf der Grundmenge $\mathfrak{P}$ operierenden Relativen $(\mathfrak{P}, \mathbf{R})$ und $(\mathfrak{P}, \mathcal{A})$ gilt (f. a. $u \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned}
\langle \dot{u}\rangle &= \bigcup_{h\in\mathbb{R}^+}\lim_{n\to\infty} \bigcirc_{k=1}^{n}\left(\widetilde{\delta_u\circ\varphi}\cap\left\langle\tfrac{h}{n}\right\rangle\right)\\
\langle \dot{u}\rangle^{-1} &= \bigcup_{h\in\mathbb{R}^+}\lim_{n\to\infty} \bigcirc_{k=1}^{n}\left(\widetilde{\delta_u\circ\varphi}\cap\left\langle\tfrac{h}{n}\right\rangle^{-1}\right)
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\langle \dot{u}\rangle &\in \mathfrak{Z}\\
\langle \dot{u}\rangle^{-1} &\in \mathfrak{V}\\
\widetilde{\delta_u\circ\varphi} &\in \mathbf{R}\\
\left\langle\tfrac{h}{n}\right\rangle, \left\langle\tfrac{h}{n}\right\rangle^{-1} &\in \mathcal{A} \quad .
\end{aligned}$$

Beweis:
Für ein beliebig, aber fest vorgegebenes $h \in \mathbb{R}^+$ konvergiert die Funktionenfolge

$$f_n : \begin{cases} \mathcal{T} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{T} \times \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & f_n(A) \end{cases}$$

mit

$$f_n := \left[\widetilde{\delta_u \circ} \varphi \cap \left\langle \tfrac{h}{n} \right\rangle\right]^n := \bigcirc_{k=1}^n \left(\widetilde{\delta_u \circ} \varphi \cap \left\langle \tfrac{h}{n} \right\rangle\right) \quad \text{(n-faches Relationenprodukt)}$$

punktweise gegen die Grenzfunktion

$$f : \begin{cases} \mathcal{T} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{T} \times \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & \begin{array}{c} f(A) := B = (t_B, x^B) \ \text{ mit} \\ t_B := t_A + h, x^B := e^{a(t_B - t_A)} \left(x^A + \frac{u}{a}\right) - \frac{u}{a} \ , \end{array} \end{cases}$$

denn f_n ist gerade das Polygonzugverfahren von EULER - CAUCHY.
Der Beweis für die Vergangenheitsrelationen $\langle \dot{u} \rangle^{-1}$ verläuft ganz analog.

$\square$

Kapitel 3

Relative zweigliedriger Systeme inhomogener linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung

Wir betrachten nun das zweigliedrige System inhomogener linearer Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten, in Vektorschreibweise also

$$\dot{\mathfrak{x}}(t) = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}(t) + \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{u},$$

wobei wir generell setzen:

$$\mathfrak{B} := E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(Einheitsmatrix).}$$

Wir erhalten demnach

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \qquad \text{mit}$$

$$a, b, c, d, u, v \in \mathbb{R}\,,\ t \in \mathbb{R}\,.$$

Analog der Situation im eingliedrigen Fall werden wir diesem Differentialgleichungssystem es beschreibende binäre Relative $(\mathfrak{P}, \mathcal{R})$ zuordnen, jede Stellgröße $\mathfrak{u}$ (hier als Stell*vektor*) definiert eine binäre Relation $[\mathfrak{u}] \in \mathcal{R}$ auf dem Lösungsraum

$\mathfrak{P} = \mathcal{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathcal{T} := \mathbb{R}$. Jetzt ist die Situation allerdings nicht mehr so übersichtlich, da die Lösungskurven von $\dot{\mathfrak{x}} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} + \mathfrak{u}$ je nach Lage der zu der Koeffizientenmatrix $\mathfrak{A}$ gehörenden Eigenwerte und auch in Abhängigkeit von einzelnen Koeffizienten ganz unterschiedliche Gestalt annehmen können. Die zugehörigen Differentialgleichungsrelative sind allerdings bis auf den Fall, daß die Koeffizientenmatrix rein imaginäre Eigenwerte besitzt, schwach affin.

Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz besitzt das Anfangswertproblem

$$\dot{\mathfrak{x}(t)} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}(t) + \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{u}, \quad \mathfrak{x}(t_0) = \mathfrak{x}^0$$

für beliebiges $t_0 \in \mathbb{R}$ und $\mathfrak{x}^0 \in \mathbb{R}^2$ eine eindeutig bestimmte und auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung $\mathfrak{x}(t)$ in der Form

$$\mathfrak{x}(t) = \mathfrak{x}_h(t) + \mathfrak{x}_p(t),$$

wobei $\mathfrak{x}_h(t)$ alle Lösungen des homogenen Systems durchläuft und $\mathfrak{x}_p(t)$ eine beliebige *partikuläre* Lösung darstellt. (Walter, 1990). Diese wird durch Anwendung der Methode der *Variation der Konstanten* auf ein Hauptsystem $\mathfrak{X}(t)$ von zwei linear unabhängigen Lösungen $\mathfrak{x}_1(t), \mathfrak{x}_2(t)$ gewonnen, man erhält dann als Lösung (Heuser, 1989)

$$\mathfrak{x}(t) = \mathfrak{X}(t)\mathfrak{C} + \mathfrak{X}(t) \int \mathfrak{X}^{-1}(t)dt \cdot \mathfrak{u}, \quad \mathfrak{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \text{ konst. } (\in \mathbb{R}^2)$$

bzw. für das Anfangswertproblem

$$\mathfrak{x}(t) = \mathfrak{X}(t)\mathfrak{X}^{-1}(t_0)\mathfrak{x}^0 + \mathfrak{X}(t) \int_{t_0}^{t} \mathfrak{X}^{-1}(s)ds \cdot \mathfrak{u}\,.$$

Das Hauptsystem $\mathfrak{X}(t)$ kann man über den Exponentialansatz

$$\mathfrak{x}(t) = e^{\lambda t}\mathfrak{u}$$

berechnen, der genau dann eine Lösung ist, wenn $\lambda\mathfrak{u} = \mathfrak{A}\mathfrak{u}$ gilt, d. h. wenn $\mathfrak{u}$ Eigenvektor und λ Eigenwert von $\mathfrak{A}$ ist. Durch die Berechnung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\det(\mathfrak{A} - \lambda E)$ erhält man im günstigsten Fall zwei verschiedene reelle Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ und damit zwei linear unabhängige Eigenvektoren $\mathfrak{u}_{1,2}$, die damit eine Basis des Lösungsraumes der homogenen Gleichung in der Form $\{e^{\lambda_1 t}\mathfrak{u}_1, e^{\lambda_2 t}\mathfrak{u}_2\}$ liefern. Erhält man nur einen reellen Eigenvektor $\mathfrak{u}$ und damit einen Basisvektor $e^{\lambda t}\mathfrak{u}$, so wird ein zweiter dazu linear unabhängiger Vektor $\mathfrak{v}$ durch die Gleichung $(\mathfrak{A} - \lambda\mathfrak{E})^2\mathfrak{v} = 0$, $(\mathfrak{A} - \lambda\mathfrak{E})\mathfrak{v} \neq 0$ bestimmt, dabei ist $e^{\lambda t}[\mathfrak{v} + t(\mathfrak{A} - \lambda\mathfrak{E})\mathfrak{v}]$

eine weitere Lösung. Liegt ein komplexer Eigenwert $\lambda = \alpha + i\beta$ mit einem zugehörigen komplexen Eigenvektor $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}^1 + i\mathfrak{v}^2$ vor, so enstehen aus der komplexen Lösung $\mathfrak{x}(t) = e^{\lambda t}\mathfrak{v}$ zwei linear unabhängige reellwertige Lösungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_1(t) &= e^{\alpha t}\left[\mathfrak{v}^1 \cos\beta t - \mathfrak{v}^2 \sin\beta t\right] \\ \mathfrak{x}_2(t) &= e^{\alpha t}\left[\mathfrak{v}^1 \sin\beta t + \mathfrak{v}^2 \cos\beta t\right] \quad . \end{aligned}$$

In der Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

berechnen sich die zugehörigen Eigenwerte zu

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{a + d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2} \\ &= \frac{a + d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2} \,, \end{aligned}$$

die zugehörigen Eigenvektoren seien mit $\mathfrak{u}_i,\ i \in \{1,2\}$ bzw. mit $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ bezeichnet. Es gilt generell:

$$\lambda_1 \lambda_2 = ad - bc\,.$$

Die homogenen und partikulären Lösungen sind dann auf den folgenden Seiten angegeben, zugrundegelegt wurde dabei die Einteilung nach Kamke (1977).

Lösungen der homogenen Gleichung $\dot{\mathfrak{x}} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}$

1. $ad - bc \neq 0$

   (a) $(a-d)^2 + 4bc > 0$

   $$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t}\mathfrak{u}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}\mathfrak{u}_2\,.$$

   i. $b = 0$

   $$\lambda_1 = a,\ \lambda_2 = d,\ \mathfrak{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{c}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{pmatrix},\ \mathfrak{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

   $$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{at}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{c}{a-d} \end{pmatrix} + C_2 e^{dt}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ii. $b \neq 0$

$$\lambda_1 = \frac{a+d+\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2}\,,\ \lambda_2 = \frac{a+d-\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2}\,,$$

$$\mathfrak{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_1-a}{b} \end{pmatrix},\ \mathfrak{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_2-a}{b} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_1-a}{b} \end{pmatrix} + C_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_2-a}{b} \end{pmatrix}.$$

(b) $(a-d)^2+4bc<0$

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{a+d}{2} \pm \frac{\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2} = \frac{a+d}{2} \pm i\frac{\sqrt{-(a-d)^2-4bc}}{2} \\ &=: \sigma \pm i\tau\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= C_1 e^{\sigma t} \begin{pmatrix} b \sin \tau t \\ (\sigma-a)\sin \tau t + \tau \cos \tau t \end{pmatrix} \\ &\quad + C_2 e^{\sigma t} \begin{pmatrix} b \cos \tau t \\ (\sigma-a)\cos \tau t - \tau \sin \tau t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(c) $(a-d)^2+4bc=0$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\lambda t}[C_2\mathfrak{u} + C_1\mathfrak{v} + kC_2 t\mathfrak{v}]\,.$$

i. $a \neq d$

$$\lambda := \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{a+d}{2},\ \mathfrak{u} = \begin{pmatrix} \frac{2b}{a-d} \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathfrak{v} = \begin{pmatrix} 2b \\ d-a \end{pmatrix},\ k=1\,,$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\frac{a+d}{2}t}\left[C_2\begin{pmatrix} \frac{2b}{a-d} \\ 1 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 2b \\ d-a \end{pmatrix} + C_2 t \begin{pmatrix} 2b \\ d-a \end{pmatrix}\right].$$

ii. $(a=d) \neq 0$

$$\lambda := \lambda_1 = \lambda_2 = a\,.$$

A. $b = 0$

$$\mathfrak{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathfrak{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ k = c\,,$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{at}\left[C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + cC_2t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right].$$

B. $b \neq 0$

$$\mathfrak{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathfrak{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ k = b\,,$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{at}\left[C_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + bC_2t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right].$$

2. $ad - bc = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \frac{\sqrt{(a+d)^2}}{2}\,.$$

(a) $a^2 + b^2 > 0$

i. $b = 0$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= C_1e^{\lambda_1 t}\mathfrak{u}_1 + C_2e^{\lambda_2 t}\mathfrak{u}_2 \\
&\qquad \lambda_1 = a,\ \lambda_2 = 0,\ \mathfrak{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{c}{a} \end{pmatrix},\ \mathfrak{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= C_1e^{at}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{c}{a} \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

ii. $b \neq 0$

A. $a \neq -d$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= C_1e^{\lambda_1 t}\mathfrak{u}_1 + C_2e^{\lambda_2 t}\mathfrak{u}_2 \\
&\qquad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = a+d,\ \mathfrak{u}_1 = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix},\ \mathfrak{u}_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \\
&= C_1\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} + C_2e^{(a+d)t}\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

B. $a = -d$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= e^{\lambda t}\left[C_2\mathfrak{u} + C_1\mathfrak{v} + kC_2t\mathfrak{v}\right] \\ &\qquad \lambda := \lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \mathfrak{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathfrak{v} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix},\ k = 1 \\ &= C_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_1\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} + C_2t\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(b) $a^2 + b^2 = 0$

i. $d \neq 0$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= C_1e^{\lambda_1 t}\mathfrak{u}_1 + C_2e^{\lambda_2 t}\mathfrak{u}_2 \\ &\qquad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = d,\ \mathfrak{u}_1 = \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix},\ \mathfrak{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= C_1\begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} + C_2e^{dt}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

ii. $d = 0$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= e^{\lambda t}[C_2\mathfrak{u} + C_1\mathfrak{v} + kC_2t\mathfrak{v}] \\ &\qquad \lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \mathfrak{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathfrak{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ k = c \\ &= C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + cC_2t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Partikuläre Lösungen

In dem Oberfall 1. $ad - bc \neq 0$ lautet eine Lösung

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix},$$

wobei A und B Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} aA + bB + u &= 0 \\ cA + dB + v &= 0 \end{aligned}$$

sind, also

$$\begin{aligned} A &= -\frac{ud-bv}{ad-bc} = \frac{bv-ud}{\lambda_1\lambda_2} = \frac{-d}{\lambda_1\lambda_2}u + \frac{b}{\lambda_1\lambda_2}v, \\ B &= -\frac{av-uc}{ad-bc} = \frac{uc-av}{\lambda_1\lambda_2} = \frac{c}{\lambda_1\lambda_2}u + \frac{-a}{\lambda_1\lambda_2}v. \end{aligned}$$

Im Fall 2. (a) i. $ad - bc = 0,\ a^2 + b^2 > 0,\ b = 0$ heißt eine partikuläre Lösung:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{u}{a} \\ (v - \frac{cu}{a})t - \frac{cu}{a^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a}u \\ -\frac{c}{a^2}(1+at)u + tv \end{pmatrix},$$

im Fall 2. (a) ii. $ad - bc = 0,\ a^2 + b^2 > 0,\ b \neq 0$ definieren wir zunächst die Abkürzungen

$$\eta := \frac{d}{b},\ r := a + \eta b = a + d$$

und erhalten dann im Fall A $(a \neq -d)$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b}{r}(u\eta - v)t - \frac{1}{r^2}(au+bv) \\ \eta x(t) + (v - \eta u)t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{drt-a}{r^2}u - b\frac{rt+1}{r^2}v \\ -a\eta\frac{rt+1}{r^2}u + \frac{rta-d}{r^2}v \end{pmatrix}$$

sowie im Fall B $(a = -d)$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}b(v - \eta u)t^2 + ut \\ \eta x(t) + (v - \eta u)t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t(1 - \frac{d}{2}t)u + \frac{b}{2}t^2 v \\ -\frac{d^2}{2b}t^2 u + t(\frac{d}{2}t + 1)v \end{pmatrix}.$$

Für den Fall 2. (b) i. $ad - bc = 0,\ a^2 + b^2 = 0,\ d \neq 0$ ergibt sich

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ut \\ -\frac{cu+dv}{d^2} - \frac{cu}{d}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ut \\ -\frac{1}{d}(ct + \frac{c}{d})u - \frac{1}{d}v \end{pmatrix},$$

im anderen Fall 2. (b) ii. $ad - bc = 0,\ a^2 + b^2 = 0,\ d = 0$ haben wir

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ut \\ \frac{1}{2}ct^2 u + tv \end{pmatrix}.$$

Definition 3.1
In dem zweigliedrigen Differentialgleichungssystem mit konstanter Koeffizientenmatrix $\mathfrak{A}$

$$\dot{\mathfrak{x}}(t) = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}(t) + \mathfrak{u}(t)$$

und zugehörigem (linearen) System $(\mathcal{T}, X, \mathcal{U}, \Phi)$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(+) &:= \mathbb{R} \\ X &:= \mathbb{R}^2 \\ \mathcal{U} &:= \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\Phi &:= \{(t', t_0, \mathfrak{x}^0, \mathfrak{u}(\cdot)) | t', t^0 \in \mathcal{T};\ t_0 \leq t';\ \mathfrak{u}(\cdot) \in \mathcal{U}^{[t_0, t')}\} \\ (t', t_0, \mathfrak{x}^0, \mathfrak{u}(\cdot))\Phi &:= \mathfrak{X}(t) \left[\mathfrak{X}^{-1}(t_0)\mathfrak{x}^0 + \int_{t_0}^{t} \mathfrak{X}^{-1}(s)\, \mathfrak{u}\, ds \right] \end{aligned}$$

mit Regel-Relativ $(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot \mathrm{dt}) = (\mathcal{T}, \mathrm{X}, \mathcal{U}, \Phi)\Gamma$ *betrachten wir nur diejenigen Stellfunktionen* $w = \mathfrak{u}(\cdot)$*, die über den gesamten Zeitraum* $\mathcal{T}$ *konstant sind.*
Wir erhalten damit das **Differentialgleichungsrelativ**

$$(\mathfrak{P}, \boldsymbol{\mathcal{R}})$$

mit dem Ansatz

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &:= \mathbb{R} \\ \mathfrak{Y} &:= \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ \mathfrak{P} &:= \mathcal{T} \times \mathfrak{Y} \\ \boldsymbol{\mathcal{R}} &:= \left\{ \left[\tbinom{u}{v} \right] \mid \tbinom{u}{v} \in \mathbb{R}^2 \right\} \cup \{\mathfrak{e}, [\infty]\} \\ A \left[\tbinom{u}{v} \right] B &:\!\!\divideontimes\ \ \Delta t := -t_A + t_B \neq 0 \\ &\qquad \bigvee\nolimits_{\mathfrak{x}(t)} [\, \dot{\mathfrak{x}}(t) = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}(t) + \mathfrak{u} \\ &\qquad A = (t, \mathfrak{x}(t)) \wedge B = (t + \Delta t, \mathfrak{x}(t + \Delta t)) \,] \\ A[\infty]B &:\!\!\divideontimes\ \ t_A = t_B \wedge \mathfrak{x}^A \neq \mathfrak{x}^B \\ A\mathfrak{e}B &\ \divideontimes\ \ A = B. \end{aligned}$$

Satz 3.2
Für die beliebig wählbaren Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *der Matrix* $\mathfrak{A}$ *sei vorausgesetzt, daß die aus der charakteristischen Gleichung bestimmten Eigenwerte im komplexwertigen Fall einen nichtverschwindenden Realteil besitzen, daß also gilt:*

$$(a - d)^2 + 4bc < 0 \ \succ\ a \neq -d\,. \quad (*)$$

Dann ist das Differentialgleichungsrelativ $(\mathfrak{P}, \boldsymbol{\mathcal{R}})$ *schwach affin.*

Beweis:

1. **Scharf einfache Transitivität**
   Zur Vorgabe von zwei Punkten $A = (t_A, x^A, y^A)$, $B = (t_B, x^B, y^B) \in \mathfrak{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $t_A \neq t_B$ werden in der Gesamtlösung $\mathfrak{x}(t)$ Konstanten $C_1, C_2, u, v \in \mathbb{R}$ gesucht, so daß gilt:

$$\begin{aligned} & \mathfrak{x}(t_A) = \mathfrak{x}^A \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x(t_A) \\ y(t_A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^A \\ y^A \end{pmatrix} \\ \wedge \ & \mathfrak{x}(t_B) = \mathfrak{x}^B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x(t_B) \\ y(t_B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^B \\ y^B \end{pmatrix} \quad . \end{aligned}$$

   Es handelt sich generell um die Betrachtung von linearen Gleichungssystemen in vier Gleichungen mit vier Unbekannten der Form

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{x}(t_A) \\ \mathfrak{x}(t_B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{x}^A \\ \mathfrak{x}^B \end{pmatrix}_{(4\times 1)} = \begin{pmatrix} \mathfrak{L}(t_A, x, y)_{(2\times 4)} \\ \mathfrak{L}(t_B, x, y)_{(2\times 4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ u \\ v \end{pmatrix} , \quad \text{kurz}$$

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{x}(t_A) \\ \mathfrak{x}(t_B) \end{pmatrix} =: \mathfrak{b} = \mathfrak{L} \begin{pmatrix} \mathfrak{C} \\ \mathfrak{u} \end{pmatrix} .$$

   Die Matrix $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(t, x(t), y(t)$ beinhaltet die Anteile der homogenen und partikulären Lösungen. Die auf den folgenden Seiten durchgeführten Untersuchungen der Hauptdeterminante $det\, \mathfrak{L} =: D$ des o. g. linearen Gleichungssystems zeigen, daß ihr Wert bei Vorgabe von Punkten $A, B \in \mathfrak{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $t_A \neq t_B$ bis auf einen einzigen Ausnahmefall immer ungleich Null ist. Dieser Fall tritt ein bei der Vorlage von komplexen Eigenwerten mit verschwindendem Realteil. In Anwendung der Cramerschen Regel bedeutet dies, daß es für die Vorgabe von Punkten A, B mit $t_A \neq t_B$ genau eine Lösung in C_1, C_2, u, v gibt, also genau einen Stellvektor $\binom{u}{v}$, so daß die Punkte A und B durch genau eine Lösungskurve miteinander verbunden werden können.
   Daher gibt es dann genau eine Relation $\mathfrak{r} \in \mathfrak{R}$ mit $A\mathfrak{r}B$. Wir setzen daher für alle $A, B \in \mathfrak{P}$ und alle $\mathfrak{r} \in \mathfrak{R}$:

$$AB = \mathfrak{r} \quad :\Leftrightarrow \quad A\mathfrak{r}B.$$

Der Fall 1. (a) i. : $ad - bc \neq 0,\ (a-d)^2 + 4bc > 0,\ b = 0$

$$D = \begin{vmatrix} e^{at_A} & 0 & \frac{-1}{a} & 0 \\ e^{at_B} & 0 & \frac{-1}{a} & 0 \\ e^{at_A}\frac{c}{a-d} & e^{dt_A} & \frac{c}{ad} & \frac{-1}{d} \\ e^{at_B}\frac{c}{a-d} & e^{dt_B} & \frac{c}{ad} & \frac{-1}{d} \end{vmatrix}$$

$$= e^{at_A}\begin{vmatrix} 0 & \frac{-1}{a} & 0 \\ e^{dt_A} & \frac{c}{ad} & \frac{-1}{d} \\ e^{dt_B} & \frac{c}{ad} & \frac{-1}{d} \end{vmatrix} - \frac{1}{a}\begin{vmatrix} e^{at_B} & 0 & 0 \\ e^{at_A}\frac{c}{a-d} & e^{dt_A} & \frac{-1}{d} \\ e^{at_B}\frac{c}{a-d} & e^{dt_B} & \frac{-1}{d} \end{vmatrix}$$

$$= e^{at_A}\frac{1}{a}\left[e^{dt_A}\frac{-1}{d} - e^{dt_B}\frac{-1}{d}\right] - e^{at_B}\frac{1}{a}\left[e^{dt_A}\frac{-1}{d} - e^{dt_B}\frac{-1}{d}\right]$$

$$= -\frac{1}{ad}(e^{at_A} - e^{at_B})(e^{dt_A} - e^{dt_B}) \neq 0\,.$$

Der Fall 1. (a) ii. : $ad - bc \neq 0,\ (a-d)^2 + 4bc > 0,\ b \neq 0$

$$D = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t_A} & e^{\lambda_2 t_A} & \frac{-d}{\lambda_1\lambda_2} & \frac{b}{\lambda_1\lambda_2} \\ e^{\lambda_1 t_B} & e^{\lambda_2 t_B} & \frac{-d}{\lambda_1\lambda_2} & \frac{b}{\lambda_1\lambda_2} \\ e^{\lambda_1 t_A}\frac{\lambda_1-a}{b} & e^{\lambda_2 t_A}\frac{\lambda_2-a}{b} & \frac{c}{\lambda_1\lambda_2} & \frac{-a}{\lambda_1\lambda_2} \\ e^{\lambda_1 t_B}\frac{\lambda_1-a}{b} & e^{\lambda_2 t_B}\frac{\lambda_2-a}{b} & \frac{c}{\lambda_1\lambda_2} & \frac{-a}{\lambda_1\lambda_2} \end{vmatrix}$$

Von der zweiten bzw. vierten Zeile werden die erste bzw. dritte Zeile subtrahiert.

$$= \frac{1}{(\lambda_1\lambda_2)^2}\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t_A} & e^{\lambda_2 t_A} & -d & b \\ -e^{\lambda_1 t_A} + e^{\lambda_1 t_B} & -e^{\lambda_2 t_A} + e^{\lambda_2 t_B} & 0 & 0 \\ e^{\lambda_1 t_A}\frac{\lambda_1-a}{b} & e^{\lambda_2 t_A}\frac{\lambda_2-a}{b} & c & -a \\ (e^{\lambda_1 t_B} - e^{\lambda_1 t_A})\frac{\lambda_1-a}{b} & (e^{\lambda_2 t_B} - e^{\lambda_2 t_A})\frac{\lambda_2-a}{b} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach der zweiten Zeile der so umgerechneten Hauptdeterminante und anschließende Entwicklung nach den dritten Zeilen der Unterdeterminanten ergibt:

$$= -\frac{e^{\lambda_1 t_B} - e^{\lambda_1 t_A}}{(\lambda_1\lambda_2)^2}\begin{vmatrix} e^{\lambda_2 t_A} & -d & b \\ e^{\lambda_2 t_A}\frac{\lambda_2 - a}{b} & c & -a \\ (e^{\lambda_2 t_B} - e^{\lambda_2 t_A})\frac{\lambda_2 - a}{b} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+\frac{e^{\lambda_2 t_B} - e^{\lambda_2 t_A}}{(\lambda_1\lambda_2)^2}\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t_A} & -d & b \\ e^{\lambda_1 t_A}\frac{\lambda_1 - a}{b} & c & -a \\ (e^{\lambda_1 t_B} - e^{\lambda_1 t_A})\frac{\lambda_1 - a}{b} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (e^{\lambda_1 t_A} - e^{\lambda_1 t_B}) \cdot (e^{\lambda_2 t_B} - e^{\lambda_2 t_A})\frac{\lambda_2 - a}{b} \cdot \frac{ad - bc}{(\lambda_1\lambda_2)^2}$$

$$+ (e^{\lambda_2 t_B} - e^{\lambda_2 t_A}) \cdot (e^{\lambda_1 t_B} - e^{\lambda_1 t_A})\frac{\lambda_1 - a}{b} \cdot \frac{ad - bc}{(\lambda_1\lambda_2)^2}$$

$$= (e^{\lambda_1 t_B} - e^{\lambda_1 t_A})(e^{\lambda_2 t_B} - e^{\lambda_2 t_A})\left[\frac{\lambda_1 - a}{b}\frac{1}{ad - bc} - \frac{\lambda_2 - a}{b}\frac{1}{ad - bc}\right]$$

$$= \frac{1}{b}(e^{\lambda_1 t_B} - e^{\lambda_1 t_A})(e^{\lambda_2 t_B} - e^{\lambda_2 t_A})\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{ad - bc} \neq 0\,.$$

Der Fall 1. (b) : $ad - bc \neq 0$, $(a - d)^2 + 4bc < 0$

$$D = \begin{vmatrix} e^{\sigma t_A} b \sin\tau t_A & e^{\sigma t_A} b \cos\tau t_A & \frac{-d}{\lambda_1\lambda_2} & \frac{b}{\lambda_1\lambda_2} \\ e^{\sigma t_B} b \sin\tau t_B & e^{\sigma t_B} b \cos\tau t_B & \frac{-d}{\lambda_1\lambda_2} & \frac{b}{\lambda_1\lambda_2} \\ e^{\sigma t_A}[(\sigma - a)\sin\tau t_A + \tau\cos\tau t_A] & e^{\sigma t_A}[(\sigma - a)\cos\tau t_A - \tau\sin\tau t_A] & \frac{c}{\lambda_1\lambda_2} & \frac{-a}{\lambda_1\lambda_2} \\ e^{\sigma t_B}[(\sigma - a)\sin\tau t_B + \tau\cos\tau t_B] & e^{\sigma t_B}[(\sigma - a)\cos\tau t_B - \tau\sin\tau t_B] & \frac{c}{\lambda_1\lambda_2} & \frac{-a}{\lambda_1\lambda_2} \end{vmatrix}$$

Von der zweiten bzw. vierten Zeile werden die erste bzw. dritte Zeile subtrahiert.

$$\frac{1}{(\lambda_1\lambda_2)^2}\begin{vmatrix} e^{\sigma t_A} b \sin\tau t_A & e^{\sigma t_A} b \cos\tau t_A & -d & b \\ b(e^{\sigma t_B}\sin\tau t_B - e^{\sigma t_A}\sin\tau t_A) & b(e^{\sigma t_B}\cos\tau t_B - e^{\sigma t_A}\cos\tau t_A) & 0 & 0 \\ e^{\sigma t_A}[(\sigma - a)\sin\tau t_A + \tau\cos\tau t_A] & e^{\sigma t_A}[(\sigma - a)\cos\tau t_A - \tau\sin\tau t_A] & c & -a \\ a_{14} & a_{24} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

mit $a_{14} := e^{\sigma t_B}[(\sigma - a)\sin\tau t_B + \tau\cos\tau t_B] - e^{\sigma t_A}[(\sigma - a)\sin\tau t_A + \tau\cos\tau t_A]$

und $a_{24} := e^{\sigma t_B}[(\sigma - a)\cos\tau t_B - \tau\sin\tau t_B] - e^{\sigma t_A}[(\sigma - a)\cos\tau t_A - \tau\sin\tau t_A]$

Entwicklung nach der zweiten Zeile der so umgerechneten Hauptdeterminante und anschließende Entwicklung nach den dritten Zeilen der Unterdeterminanten ergibt:

$$D = \frac{b(e^{\sigma t_A}\sin\tau t_A - e^{\sigma t_B}\sin\tau t_B)}{(\lambda_1\lambda_2)^2}\begin{vmatrix} e^{\sigma t_A} b\cos\tau t_A & -d & b \\ e^{\sigma t_A}[(\sigma - a)\cos\tau t_A - \tau\sin\tau t_A] & c & -a \\ a_{24} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+\frac{b(e^{\sigma t_B}\cos\tau t_B - e^{\sigma t_A}\cos\tau t_A)}{(\lambda_1\lambda_2)^2}\cdot\begin{vmatrix} e^{\sigma t_A} b\sin\tau t_A & -d & b \\ e^{\sigma t_A}[(\sigma - a)\sin\tau t_A + \tau\cos\tau t_A] & c & -a \\ a_{14} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -b(e^{\sigma t_B}\sin\tau t_B - e^{\sigma t_A}\sin\tau t_A)\cdot$$

$$=\Big\{e^{\sigma t_B}[(\sigma - a)\cos\tau t_B - \tau\sin\tau t_B] - e^{\sigma t_A}[(\sigma - a)\cos\tau t_A - \tau\sin\tau t_A]\Big\}\frac{ad - bc}{(\lambda_1\lambda_2)^2}$$

$$+\, b(e^{\sigma t_B}\cos\tau t_B - e^{\sigma t_A}\cos\tau t_A)\cdot$$

$$\Big\{e^{\sigma t_B}[(\sigma - a)\sin\tau t_B + \tau\cos\tau t_B] - e^{\sigma t_A}[(\sigma - a)\sin\tau t_A + \tau\cos\tau t_A]\Big\}\frac{ad - bc}{(\lambda_1\lambda_2)^2}$$

$$= \frac{1}{\lambda_1\lambda_2}b\cdot$$

$$\Big\langle(e^{\sigma t_B}\cos\tau t_B - e^{\sigma t_A}\cos\tau t_A)\cdot$$

$$\Big\{e^{\sigma t_B}(\sigma - a)\sin\tau t_B + \tau e^{\sigma t_B}\cos\tau t_B - e^{\sigma t_A}(\sigma - a)\sin\tau t_A - \tau e^{\sigma t_A}\cos\tau t_A\Big\}$$

$$-\,(e^{\sigma t_B}\sin\tau t_B - e^{\sigma t_A}\sin\tau t_A)\cdot$$

$$\Big\{e^{\sigma t_B}(\sigma - a)\cos\tau t_B - \tau e^{\sigma t_B}\sin\tau t_B - e^{\sigma t_A}(\sigma - a)\cos\tau t_A + \tau e^{\sigma t_A}\sin\tau t_A\Big\}\Big\rangle$$

$$= \frac{1}{\lambda_1\lambda_2}b\cdot$$

$$\Big\langle(e^{\sigma t_B}\cos\tau t_B - e^{\sigma t_A}\cos\tau t_A)\cdot$$

$$\Big\{(\sigma - a)(e^{\sigma t_B}\sin\tau t_B - e^{\sigma t_A}\sin\tau t_A) + \tau(e^{\sigma t_B}\cos\tau t_B - e^{\sigma t_A}\cos\tau t_A)\Big\}$$

$$
\begin{gathered}
-\,(e^{\sigma t_B}\sin\tau t_B - e^{\sigma t_A}\sin\tau t_A)\,\cdot \\
\Big\{(\sigma-a)(e^{\sigma t_B}\cos\tau t_B - e^{\sigma t_A}\cos\tau t_A) - \tau(e^{\sigma t_B}\sin\tau t_B - e^{\sigma t_A}\sin\tau t_A)\Big\}\,\Big\rangle
\end{gathered}
$$

Mit den Abkürzungen

$$
S := e^{\sigma t_B}\cos\tau t_B - e^{\sigma t_A}\cos\tau t_A\,,\; T := e^{\sigma t_B}\sin\tau t_B - e^{\sigma t_A}\sin\tau t_A
$$

folgt:

$$
\begin{aligned}
D \;=\; & \frac{1}{\lambda_1\lambda_2} b\,\cdot\,\Big\langle S\,\cdot\,\{(\sigma-a)\cdot T + \tau\cdot S\}\,-\,T\,\cdot\,\{(\sigma-a)\cdot S - \tau\cdot T\}\Big\rangle \\
=\; & \frac{1}{\lambda_1\lambda_2} b\,\cdot\,\Big\langle ST(\sigma-a) + \tau SS - ST(\sigma-a) + \tau TT\Big\rangle \\
=\; & \frac{1}{\lambda_1\lambda_2} b\,\cdot\,\tau(S^2+T^2)\,.
\end{aligned}
$$

Dabei ist

$$
\begin{aligned}
S^2+T^2 \;&=\; (e^{\sigma t_B})^2(\cos\tau t_B)^2 - 2e^{\sigma t_A}e^{\sigma t_B}\cos\tau t_A\cos\tau t_B + (e^{\sigma t_A})^2(\cos\tau t_A)^2 + \\
&\;\; (e^{\sigma t_B})^2(\sin\tau t_B)^2 - 2e^{\sigma t_A}e^{\sigma t_B}\sin\tau t_A\sin\tau t_B + (e^{\sigma t_A})^2(\sin\tau t_A)^2 \\
&=\; (e^{\sigma t_B})^2\cdot 1 + (e^{\sigma t_A})^2\cdot 1 \\
&\;\; -2e^{\sigma t_A}e^{\sigma t_B}(\cos\tau t_A\cos\tau t_B + \sin\tau t_A\sin\tau t_B) \\
&=\; (e^{\sigma t_B})^2 + (e^{\sigma t_A})^2 - 2e^{\sigma t_A}e^{\sigma t_B}\cos(\tau(t_A-t_B)) \\
&\geq\; (e^{\sigma t_B} - e^{\sigma t_A})^2 \;\geq\; 0
\end{aligned}
$$

Ist $\sigma \neq 0$, so ist S^2+T^2 für $t_A \neq t_B$ echt größer Null, die Hauptdeterminante insbesondere ungleich Null und damit das lineare Gleichungssystem in den Unbekannten $u, v \in \mathbb{R}$ eindeutig lösbar.
Ist $\sigma = 0$ $\divideontimes$ $(*)$ gilt nicht, liegen also rein imaginäre Eigenwerte vor, so ergibt sich als Wert der Hauptdeterminante:

$$
D = \frac{\tau b}{\lambda_1\lambda_2}(S^2+T^2) = \frac{2b\tau}{\lambda_1\lambda_2}(1-\cos(\tau(t_A-t_B))),
$$

und damit

$$
\begin{array}{llllll}
D\neq 0 & f. & t_A - t_B \neq \frac{2k}{\tau}\pi & \text{f. a.} & k\in\mathbb{Z} & \\
D = 0 & f. & t_A - t_B = \frac{2k}{\tau}\pi & \text{f. e.} & k\in\mathbb{Z} & .
\end{array}
$$

Der Fall 1. (c) i. : $ad - bc \neq 0$, $(a-d)^2 + 4bc = 0$, $a \neq d$

$$D = \begin{vmatrix} 2be^{\lambda t_A} & (2bt_A + \frac{2b}{a-d})e^{\lambda t_A} & \frac{-d}{\lambda^2} & \frac{b}{\lambda^2} \\ 2be^{\lambda t_B} & (2bt_B + \frac{2b}{a-d})e^{\lambda t_B} & \frac{-d}{\lambda^2} & \frac{b}{\lambda^2} \\ (d-a)e^{\lambda t_A} & [(d-a)t_A + 1]e^{\lambda t_A} & \frac{c}{\lambda^2} & \frac{-a}{\lambda^2} \\ (d-a)e^{\lambda t_B} & [(d-a)t_B + 1]e^{\lambda t_B} & \frac{c}{\lambda^2} & \frac{-a}{\lambda^2} \end{vmatrix}$$

Von der zweiten bzw. vierten Zeile werden die erste bzw. dritte Zeile subtrahiert.

$$= \frac{1}{\lambda^4} \begin{vmatrix} 2be^{\lambda t_A} & (2bt_A + \frac{2b}{a-d})e^{\lambda t_A} & -d & b \\ 2b(e^{\lambda t_B} - e^{\lambda t_A}) & 2b(t_B e^{\lambda t_B} - t_A e^{\lambda t_A} + \frac{e^{\lambda t_B}}{a-d} - \frac{e^{\lambda t_A}}{a-d}) & 0 & 0 \\ (d-a)e^{\lambda t_A} & [(d-a)t_A + 1]e^{\lambda t_A} & c & -a \\ (d-a)(e^{\lambda t_B} - e^{\lambda t_A}) & (d-a)(t_B e^{\lambda t_B} - t_A e^{\lambda t_A}) + e^{\lambda t_B} - e^{\lambda t_A} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{2b(d-a)}{\lambda^4} \begin{vmatrix} 2be^{\lambda t_A} & (2bt_A + \frac{2b}{a-d})e^{\lambda t_A} & -d & b \\ e^{\lambda t_B} - e^{\lambda t_A} & t_B e^{\lambda t_B} - t_A e^{\lambda t_A} + \frac{e^{\lambda t_B}}{a-d} - \frac{e^{\lambda t_A}}{a-d} & 0 & 0 \\ (d-a)e^{\lambda t_A} & [(d-a)t_A + 1]e^{\lambda t_A} & c & -a \\ e^{\lambda t_B} - e^{\lambda t_A} & t_B e^{\lambda t_B} - t_A e^{\lambda t_A} + \frac{e^{\lambda t_B}}{d-a} - \frac{e^{\lambda t_A}}{d-a} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Subtraktion der zweiten von der vierten Zeile ergibt:

$$= \frac{2b(d-a)}{\lambda^4} \begin{vmatrix} 2be^{\lambda t_A} & (2bt_A + \frac{2b}{a-d})e^{\lambda t_A} & -d & b \\ e^{\lambda t_B} - e^{\lambda t_A} & t_B e^{\lambda t_B} - t_A e^{\lambda t_A} + \frac{e^{\lambda t_B}}{a-d} - \frac{e^{\lambda t_A}}{a-d} & 0 & 0 \\ (d-a)e^{\lambda t_A} & [(d-a)t_A + 1]e^{\lambda t_A} & c & -a \\ 0 & \frac{-2(e^{\lambda t_A} - e^{\lambda t_B})}{d-a} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach der vierten Zeile der so enstandenen Hauptdeterminante und Entwicklung nach der zweiten Zeile der Unterdeterminante:

$$= \frac{2b(d-a)}{\lambda^4} \cdot \frac{-2(e^{\lambda t_A} - e^{\lambda t_B})}{d-a} \cdot (-(e^{\lambda t_B} - e^{\lambda t_A}))(ad - bc)$$

$$= -\frac{4b}{\lambda^2}(e^{\lambda t_A} - e^{\lambda t_B})^2 \neq 0\,.$$

Der Fall 1. (c) ii. A : $ad - bc \neq 0$, $(a-d)^2 + 4bc = 0$, $(a = d) \neq 0$, $b = 0$

$$D = \begin{vmatrix} 0 & e^{at_A} & -\frac{1}{a} & 0 \\ 0 & e^{at_B} & -\frac{1}{a} & 0 \\ e^{at_A} & ct_A e^{at_A} & \frac{c}{a^2} & -\frac{1}{a} \\ e^{at_B} & ct_B e^{at_B} & \frac{c}{a^2} & -\frac{1}{a} \end{vmatrix}$$

Von der zweiten bzw. vierten Zeile werden die erste bzw. dritte Zeile subtrahiert.

$$= \begin{vmatrix} 0 & e^{at_A} & -\frac{1}{a} & 0 \\ 0 & e^{at_B} - e^{at_A} & 0 & 0 \\ e^{at_A} & ct_A e^{at_A} & \frac{c}{a^2} & -\frac{1}{a} \\ e^{at_B} - e^{at_A} & c(t_B e^{at_B} - t_A e^{at_A}) & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach der zweiten Zeile der Hauptdeterminante und anschließende Entwicklung nach der ersten Zeile der Unterdeterminante:

$$= (e^{at_B} - e^{at_A}) \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a}(e^{at_B} - e^{at_A})$$

$$= \frac{1}{a^2}(e^{at_B} - e^{at_A})^2 \neq 0\,.$$

Der Fall 1. (c) ii. B : $ad - bc \neq 0$, $(a-d)^2 + 4bc = 0$, $(a = d) \neq 0$, $b \neq 0$

$$D = \begin{vmatrix} e^{at_A} & bt_A e^{at_A} & -\frac{1}{a} & \frac{b}{a^2} \\ e^{at_B} & bt_B e^{at_B} & -\frac{1}{a} & \frac{b}{a^2} \\ 0 & e^{at_A} & 0 & -\frac{1}{a} \\ 0 & e^{at_B} & 0 & -\frac{1}{a} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} e^{at_A} & bt_A e^{at_A} & -\frac{1}{a} & \frac{b}{a^2} \\ e^{at_B} - e^{at_A} & b(t_B e^{at_B} - t_A e^{at_A}) & 0 & 0 \\ 0 & e^{at_A} & 0 & -\frac{1}{a} \\ 0 & e^{at_B} - e^{at_A} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach der vierten Zeile der Hauptdeterminante und anschließende Entwicklung nach der zweiten Zeile der Unterdeterminante:

$$\begin{aligned}&= (e^{at_B} - e^{at_A}) \cdot (-(e^{at_B} - e^{at_A})) \cdot \frac{1}{a^2} \\ &= -\frac{1}{a^2}(e^{at_B} - e^{at_A})^2 \neq 0\,.\end{aligned}$$

Der Fall 2. (a) i. : $ad - bc = 0,\ a^2 + b^2 > 0,\ b = 0$

$$D = \begin{vmatrix} e^{at_A} & 0 & -\frac{1}{a} & 0 \\ e^{at_B} & 0 & -\frac{1}{a} & 0 \\ \frac{c}{a}e^{at_A} & 1 & -\frac{c}{a}(\frac{1}{a} + t_A) & t_A \\ \frac{c}{a}e^{at_B} & 1 & -\frac{c}{a}(\frac{1}{a} + t_B) & t_B \end{vmatrix}$$

Subtraktion der ersten bzw. dritten Zeile von der zweiten bzw. der vierten Zeile:

$$= \begin{vmatrix} e^{at_A} & 0 & -\frac{1}{a} & 0 \\ e^{at_B} - e^{at_A} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{c}{a}e^{at_A} & 1 & -\frac{c}{a}(\frac{1}{a} + t_A) & t_A \\ \frac{c}{a}(e^{at_B} - e^{at_A}) & 0 & -\frac{c}{a}(t_B - t_A) & t_B - t_A \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach der zweiten Zeile der Hauptdeterminante und anschließend nach der ersten Zeile der Unterdeterminante:

$$= -(e^{at_B} - e^{at_A})\frac{1}{a}(t_B - t_A) \neq 0\,.$$

Der Fall 2. (a) ii. A : $ad - bc = 0,\ a^2 + b^2 > 0,\ b \neq 0$

$$\eta := \frac{d}{b}, r := a + \eta b = a + d \neq 0$$

$$D = \begin{vmatrix} b & be^{rt_A} & \frac{rdt_A - a}{r^2} & -b\frac{rt_A + 1}{r^2} \\ b & be^{rt_B} & \frac{rdt_B - a}{r^2} & -b\frac{rt_B + 1}{r^2} \\ -a & de^{rt_A} & -\eta\frac{art_A + a}{r^2} & \frac{art_A - d}{r^2} \\ -a & de^{rt_B} & -\eta\frac{art_B + a}{r^2} & \frac{art_B - d}{r^2} \end{vmatrix}$$

Von der zweiten bzw. vierten Zeile werden die erste bzw. dritte Zeile subtrahiert.

$$= \frac{1}{r^4} \begin{vmatrix} b & be^{rt_A} & rdt_A - a & -b(rt_A+1) \\ 0 & b(e^{rt_B} - e^{rt_A}) & rd(t_B - t_A) & br(t_A - t_B) \\ -a & de^{rt_A} & -a\eta(rt_A+1) & art_A - d \\ 0 & d(e^{rt_B} - e^{rt_A}) & ar\eta(t_A - t_B) & ar(t_B - t_A) \end{vmatrix}$$

Multiplikation der vierten Zeile mit b, Addition des a-fachen der ersten Zeile zum b-fachen der dritten Zeile (unter der Voraussetzung $a \neq 0$, ansonsten siehe Sonderfall), dabei gilt:

$$ardt_A - a^2 - ab\eta rt_A - ab\eta = ardt_A - a^2 - adrt_A - ad = -a(a+d) = -ar$$

$$-abrt_A - ab + abrt_A - bd = -b(a+d) = -br$$

$$= \frac{1}{b^2r^4} \begin{vmatrix} b & be^{rt_A} & rdt_A - a & -b(rt_A+1) \\ 0 & b(e^{rt_B} - e^{rt_A}) & rd(t_B - t_A) & br(t_A - t_B) \\ 0 & bre^{rt_A} & -ra & -rb \\ 0 & bd(e^{rt_B} - e^{rt_A}) & ard(t_A - t_B) & arb(t_B - t_A) \end{vmatrix}$$

Subtraktion des d-fachen der zweiten Zeile von der vierten Zeile (unter der Voraussetzung $d \neq 0$, ansonsten siehe Sonderfall) :

$$= \frac{1}{b^2r^4} \begin{vmatrix} b & be^{rt_A} & rdt_A - a & -b(rt_A+1) \\ 0 & b(e^{rt_B} - e^{rt_A}) & rd(t_B - t_A) & br(t_A - t_B) \\ 0 & bre^{rt_A} & -ra & -rb \\ 0 & 0 & r^2d(t_A - t_B) & r^2b(t_B - t_A) \end{vmatrix}$$

Addition des r-fachen der zweiten Zeile zur vierten:

$$= \frac{1}{b^2r^4} \begin{vmatrix} b & be^{rt_A} & rdt_A - a & -b(rt_A+1) \\ 0 & b(e^{rt_B} - e^{rt_A}) & rd(t_B - t_A) & br(t_A - t_B) \\ 0 & bre^{rt_A} & -ra & -rb \\ 0 & br(e^{rt_B} - e^{rt_A}) & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach der ersten Spalte und dann Entwicklung nach der dritten Zeile der Unterdeterminante:

$$= \frac{1}{b^2r^4} \cdot b \cdot br(e^{rt_B} - e^{rt_A}) \cdot [-bdr^2(t_B - t_A) + abr^2(t_A - t_B)]$$

$$= \frac{1}{r^3}(e^{rt_B} - e^{rt_A})[(t_A - t_B)br^2(a+d)]$$
$$= b(t_A - t_B)({}^{rt_B} - e^{rt_A}) \neq 0\,.$$

Sonderfälle $a = 0$ oder $d = 0$:

1. $a = 0,\ d \neq 0,\ r = a + d = d$

$$D = \frac{1}{d^4}\begin{vmatrix} b & be^{dt_A} & d^2 t_A & -b(dt_A + 1) \\ 0 & b(e^{dt_B} - e^{dt_A}) & d^2(t_B - t_A) & bd(t_A - t_B) \\ 0 & de^{dt_A} & 0 & -d \\ 0 & d(e^{dt_B} - e^{dt_A}) & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{d^4} \cdot b \cdot d(e^{dt_B} - e^{dt_A}) \cdot d^3(t_A - t_B)$$
$$= b(e^{dt_B} - e^{dt_A})(t_A - t_B) \neq 0\,.$$

2. $a \neq 0,\ d = 0,\ r := a + d = a$

$$D = \frac{1}{b^2 a^4}\begin{vmatrix} b & be^{at_A} & -a & -b(at_A + 1) \\ 0 & b(e^{at_B} - e^{at_A}) & 0 & ba(t_A - t_B) \\ 0 & abe^{at_A} & -a^2 & -ab \\ 0 & 0 & 0 & a^2 b(t_B - t_A) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{b^2 a^4} \cdot b \cdot a^2 b(t_B - t_A) \cdot a^2 b(e^{at_A} - e^{at_B})$$
$$= b(e^{at_A} - e^{at_B})(t_B - t_A) \neq 0\,.$$

(Der Fall $a = 0$ und $d = 0$ kann wegen $a \neq -d$ nicht auftreten.)

Der Fall 2. (a) ii. B : $ad - bc = 0,\ a^2 + b^2 > 0,\ b \neq 0,\ a = -d$

$$D = \begin{vmatrix} b & bt_A & t_A(1 - \frac{d}{2}t_A) & \frac{b}{2}t_A^2 \\ b & bt_B & t_B(1 - \frac{d}{2}t_B) & \frac{b}{2}t_B^2 \\ -a & 1 - at_A & -\frac{d^2}{2b}t_A^2 & t_A(\frac{d}{2}t_A + 1) \\ -a & 1 - at_B & -\frac{d^2}{2b}t_B^2 & t_B(\frac{d}{2}t_B + 1) \end{vmatrix}$$

Subtraktion der ersten bzw. der dritten Zeile von der zweiten bzw. vierten Zeile:

$$= \begin{vmatrix} b & bt_A & t_A(1-\frac{d}{2}t_A) & \frac{b}{2}t_A^2 \\ 0 & b(t_B-t_A) & (t_B-t_A)(1-\frac{d}{2}(t_B+t_A)) & \frac{b}{2}(t_B-t_A)(t_B+t_A) \\ -a & 1-at_A & -\frac{d^2}{2b}t_A^2 & t_A(\frac{d}{2}t_A+1) \\ 0 & a(t_A-t_B) & -\frac{d^2}{2b}(t_B-t_A)(t_B+t_A) & (t_B-t_A)(1+\frac{d}{2}(t_B+t_A)) \end{vmatrix}$$

Herausziehen des gemeinsamen Faktors $(t_B - t_A)$ aus der zweiten und vierten Zeile sowie Multiplikation der dritten und vierten Zeile mit b ergibt:

$$= (t_B-t_A)^2 \frac{1}{b^2} \begin{vmatrix} b & bt_A & t_A(1-\frac{d}{2}t_A) & \frac{b}{2}t_A^2 \\ 0 & b & 1-\frac{d}{2}(t_A+t_B) & \frac{b}{2}(t_B+t_A) \\ -ab & b(1-at_A) & -\frac{d^2}{2}t_A^2 & bt_A(\frac{d}{2}t_A+1) \\ 0 & -ab & -\frac{d^2}{2}(t_A+t_B) & b(1+\frac{d}{2}(t_B+t_A)) \end{vmatrix}$$

Addition des a-fachen der ersten bzw. zweiten Zeile zur dritten bzw. vierten Zeile (der Fall $a = 0$ wird unten seperat behandelt):

$$= (t_B-t_A)^2 \frac{1}{b^2} \begin{vmatrix} b & bt_A & t_A(1-\frac{d}{2}t_A) & \frac{b}{2}t_A^2 \\ 0 & b & 1-\frac{d}{2}(t_A+t_B) & \frac{b}{2}(t_B+t_A) \\ 0 & b & at_A & bt_A \\ 0 & 0 & a & b \end{vmatrix}$$

Subtraktion der zweiten von der dritten Zeile ergibt:

$$= (t_B-t_A)^2 \frac{1}{b^2} \begin{vmatrix} b & bt_A & t_A(1-\frac{d}{2}t_A) & \frac{b}{2}t_A^2 \\ 0 & b & 1-\frac{d}{2}(t_A+t_B) & \frac{b}{2}(t_B+t_A) \\ 0 & 0 & \frac{a(t_A-t_B)-2}{2} & \frac{b(t_A-t_B)}{2} \\ 0 & 0 & a & b \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach der ersten Spalte der Hauptdeterminante und nach der ersten Spalte der Unterdeterminante:

$$= (t_B-t_A)^2 \frac{1}{b^2} \cdot b \cdot b \left\{ \frac{a(t_A-t_B)-2}{2} b - a\frac{b(t_A-t_B)}{2} \right\}$$

$$= -b(t_B-t_A)^2 \neq 0\,.$$

Bei $0 = a = -d$ ergibt sich folgendes:

$$D = \frac{(t_B - t_A)^2}{b^2} \begin{vmatrix} b & bt_A & t_A & \frac{b}{2}t_A^2 \\ 0 & b & 1 & \frac{b}{2}(t_B + t_A) \\ 0 & b & 0 & bt_A \\ 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(t_B - t_A)^2}{b^2} \cdot b \cdot b \cdot (-b)$$

$$= -b(t_B - t_A)^2 \neq 0\,.$$

Der Fall 2. (b) i. : $ad - bc = 0,\ a^2 + b^2 = 0,\ d \neq 0$

$$D = \begin{vmatrix} d & 0 & t_A & 0 \\ d & 0 & t_B & 0 \\ -c & e^{dt_A} & -\frac{1}{d}(ct_A + \frac{c}{d}) & -\frac{1}{d} \\ -c & e^{dt_B} & -\frac{1}{d}(ct_B + \frac{c}{d}) & -\frac{1}{d} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} d & 0 & t_A & 0 \\ 0 & 0 & t_B - t_A & 0 \\ -c & e^{dt_A} & -\frac{1}{d}(ct_A + \frac{c}{d}) & -\frac{1}{d} \\ 0 & e^{dt_B} - e^{dt_A} & \frac{c}{d}(t_A - t_B) & 0 \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach der zweiten Zeile der Hauptdeterminante und nach der ersten Zeile der Streichungsdeterminanten:

$$= -(t_B - t_A) \cdot d \cdot \frac{1}{d}(e^{dt_B} - e^{dt_A})$$

$$= (e^{dt_B} - e^{dt_A})(t_A - t_B) \neq 0\,.$$

Der Fall 2. (b) ii. : $ad - bc = 0$, $a^2 + b^2 = 0$, $d = 0$

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & t_A & 0 \\ 0 & 1 & t_B & 0 \\ 1 & ct_A & \frac{1}{2}ct_A^2 & t_A \\ 1 & ct_B & \frac{1}{2}ct_B^2 & t_B \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & t_A & 0 \\ 0 & 0 & t_B - t_A & 0 \\ 1 & ct_A & \frac{1}{2}ct_A^2 & t_A \\ 0 & c(t_B - t_A) & \frac{1}{2}(ct_B^2 - ct_A^2) & t_B - t_A \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach der zweiten Zeile der Hauptdeterminante und nach der ersten Zeile der Unterdeterminante:

$$= -(t_B - t_A) \cdot (-1) \cdot 1(t_B - t_A)$$

$$= (t_B - t_A)^2 \neq 0\,.$$

2. **Linkstotalität** der Relationen klar.
3. **Symmetrie** der Relationen klar.
4. **Alternierende Relationen** klar.
5. **Abgeschlossenheit bezüglich Gleichheitsrelation** klar.

□

Korollar 3.3
Gilt (∗) für die Koeffizientenmatrix $\mathfrak{A}$, so ist richtig für alle $A \in \mathfrak{P}$:

$$A(\mathbf{P} \cup \mathbf{P}^{-1} \cup [\infty] \cup \mathfrak{e}) = \mathfrak{P}\,.$$

Satz 3.4
Das Differentialgleichungsrelativ $(\mathfrak{P}, \mathfrak{R})$ *(mit ∗) ist* nicht *affin.*

Beweis:
Wir betrachten ein Gegenbeispiel im Fall 1.(a)ii. und zeigen, daß das Kommutativgesetz nicht generell gültig ist (und damit auch nicht die Homogenitätsregel).
Wir betrachten dazu drei Punkte $A = (t_A, x^A, y^A), B = (t_B, x^B, y^B), C = (t_C, x^C, y^C)$ mit $t_A < t_C < t_B$, für die gelten soll:

$$A\left[\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right] \ni C \,\wedge\, C\left[\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right] \ni B$$

$$\divideontimes \begin{pmatrix} x(t_B) \\ y(t_B) \end{pmatrix} = \mathfrak{X}(t_B)\left[\mathfrak{X}^{-1}(t_A)\begin{pmatrix} x^A \\ y^A \end{pmatrix} + \int_{t_A}^{t_C} \mathfrak{X}^{-1}(s)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} ds + \int_{t_C}^{t_B} \mathfrak{X}^{-1}(s)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} ds\right]$$

Für einen Punkt $D = (t_D, x^D, y^D)$ mit $t_A < t_D < t_B$ und

$$A\left[\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right] \ni D \,\wedge\, D\left[\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right] \ni B \quad \text{ist richtig}$$

$$\divideontimes \begin{pmatrix} x(t_B) \\ y(t_B) \end{pmatrix} = \mathfrak{X}(t_B)\left[\mathfrak{X}^{-1}(t_A)\begin{pmatrix} x^A \\ y^A \end{pmatrix} + \int_{t_A}^{t_D} \mathfrak{X}^{-1}(s)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} ds + \int_{t_D}^{t_B} \mathfrak{X}^{-1}(s)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} ds\right]$$

Beide Gleichungen zusammengefaßt ergeben

$$\begin{aligned} &\int_{t_A}^{t_C} \mathfrak{X}^{-1}(s)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} ds + \int_{t_C}^{t_B} \mathfrak{X}^{-1}(s)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} ds \\ = &\int_{t_A}^{t_D} \mathfrak{X}^{-1}(s)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} ds + \int_{t_D}^{t_B} \mathfrak{X}^{-1}(s)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} ds\,. \end{aligned}$$

Mit den zugehörigen Matrizen

$$\mathfrak{X}(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \frac{\lambda_1 - a}{b} e^{\lambda_1 t} & \frac{\lambda_2 - a}{b} e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{X}^{-1}(t) = \frac{b}{(\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_2+\lambda_1)t}} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_2 - a}{b} e^{\lambda_2 t} & -e^{\lambda_2 t} \\ -\frac{\lambda_1 - a}{b} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{F}(t) := \int \mathfrak{X}^{-1}(t)\,dt = \frac{b}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_2 - a}{b\lambda_1} e^{-\lambda_1 t} & \frac{1}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 t} \\ \frac{\lambda_1 - a}{b\lambda_2} e^{-\lambda_2 t} & -\frac{1}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

ergäbe sich als Bedingung für den gesuchten Punkt $D = (t_D, x^D, y^D)$:

$$[F(t_C) - F(t_A) - F(t_B) + F(t_D)] \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \divideontimes \quad \left[e^{-\lambda_1 t_C} - e^{-\lambda_1 t_A} - e^{-\lambda_1 t_B} + e^{-\lambda_1 t_D}\right] (b(u_2 - v_2) - (\lambda_2 - a)(u_1 - v_1)) &= 0 \quad \wedge \\ \left[e^{-\lambda_2 t_C} - e^{-\lambda_2 t_A} - e^{-\lambda_2 t_B} + e^{-\lambda_2 t_D}\right] (-b(u_2 - v_2) + (\lambda_1 - a)(u_1 - v_1)) &= 0 \end{aligned}$$

Wenn die Koeffizienten $a, b, c, d, u_1, u_2, v_1, v_2$ so gewählt sind, daß die Ausdrücke in den runden Klammern ungleich Null sind, müßte für die Gültigkeit des Kommutativgesetzes für beliebig vorgegebene Punkte $A, B, C \in \mathfrak{P}$ (mit $A\mathfrak{u} \ni C \wedge C\mathfrak{v} \ni B$) gelten:

$$\begin{aligned} t_D &= -\frac{1}{\lambda_1} \ln(e^{-\lambda_1 t_A} + e^{-\lambda_1 t_B} - e^{-\lambda_1 t_C}) \\ &= -\frac{1}{\lambda_2} \ln(e^{-\lambda_2 t_A} + e^{-\lambda_2 t_B} - e^{-\lambda_2 t_C}) \end{aligned}$$

$$\succ \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \text{const.} = \frac{\ln(e^{-\lambda_2 t_A} + e^{-\lambda_2 t_B} - e^{-\lambda_2 t_C})}{\ln(e^{-\lambda_1 t_A} + e^{-\lambda_1 t_B} - e^{-\lambda_1 t_C})} . \qquad \sharp$$

Satz 3.5
Das Relativ $(\mathfrak{P}, \mathfrak{R})$ *ist zeitinvariant.*

Beweis:
$(t, t_0, \mathfrak{x}^0, \mathfrak{u}(\cdot))\Phi$ ist zeitinvariant nach (Knobloch, Kwakernaak, 1985).

□

Damit haben wir die erforderliche Kompatibilität für die Definition

$$x(A) \left[\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right] \Delta t := x \left(A \left[\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right] \Delta t \right) .$$

Wir setzen daher

$$\mathfrak{x} \left[\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right] \Delta t := x \left(A \left[\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right] \Delta t \right)$$

für ein beliebiges $A \in \mathfrak{P}$ mit $x(A) = \mathfrak{x}$. Dann gilt auch

Satz 3.6
Die $\mathfrak{x}(t) = \binom{x(t)}{y(t)}$ *Komponenten der Lösungskurven von* $\dot{\mathfrak{x}} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} + \mathfrak{u}$ *sind* $\left[\binom{u}{v}\right]$ *-Kurven.*

Beweis:
Für die Lösungskurven

$$\mathfrak{x}(t) = \mathfrak{X}(t)\mathfrak{C} + \mathfrak{x}_p(t,u,v), \quad \mathfrak{C} = \text{ konstant } \quad (\in \mathbb{R}^2)$$

mit

$$\mathfrak{x}_p(t,u,v) = \mathfrak{X}(t) \int \mathfrak{X}^{-1}(t)dt \cdot \mathfrak{u}$$

ist zu zeigen

$$\mathfrak{x}(t) \left[\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right] \Delta t \stackrel{!}{=} \mathfrak{x}(t+\Delta t).$$

Wir betrachten auf der linken Seite $(t, \mathfrak{x}(t)$ als beliebig, aber fest vorgegebene Anfangsbedingung und setzen $\mathfrak{x}^* := \mathfrak{x}(t)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{x}(t) \left[\binom{u}{v}\right] \Delta t \stackrel{\text{Def.}}{=} \\
&\quad = \quad x\left[(t,\mathfrak{x}(t)) \left[\binom{u}{v}\right] \Delta t\right] \\
&\quad = \quad \mathfrak{X}(t+\Delta t) \left[\mathfrak{X}^{-1}(t)\mathfrak{x}^* + \int_t^{t+\Delta t} \mathfrak{X}^{-1}(s)ds \cdot \mathfrak{u}\right] \\
&\quad = \quad \mathfrak{X}(t+\Delta t) \left[\mathfrak{X}^{-1}(t)\left\{\mathfrak{X}(t)\mathfrak{C} + \mathfrak{x}_p(t,u,v)\right\} + \int_t^{t+\Delta t} \mathfrak{X}^{-1}(s)ds \cdot \mathfrak{u}\right] \\
&\quad = \quad \mathfrak{X}(t+\Delta t) \left[\mathfrak{C} + \mathfrak{X}^{-1}(t)\mathfrak{x}_p(t,u,v) + \int_t^{t+\Delta t} \mathfrak{X}^{-1}(s)ds \cdot \mathfrak{u}\right] \\
&\quad = \quad \mathfrak{X}(t+\Delta t)\mathfrak{C} + \mathfrak{X}(t+\Delta t)\mathfrak{X}^{-1}(t)\mathfrak{x}_p(t,u,v) + \mathfrak{X}(t+\Delta t)\int_t^{t+\Delta t} \mathfrak{X}^{-1}(s)ds \cdot \mathfrak{u}\,.
\end{aligned}$$

Die rechte Seite berechnet sich zu

$$\mathfrak{x}(t+\Delta t) = \mathfrak{X}(t+\Delta t)\mathfrak{C} + \mathfrak{x}_p(t+\Delta t,u,v).$$

Es gilt aber

$$\mathfrak{X}^{-1}(t)\mathfrak{x}_p(t,u,v) + \int_t^{t+\Delta t} \mathfrak{X}^{-1}(s)ds \cdot \mathfrak{u} = \mathfrak{X}^{-1}(t+\Delta t)\mathfrak{x}_p(t+\Delta t,u,v)$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_t^{t+\Delta t} \mathfrak{X}^{-1}(s)ds \cdot \mathfrak{u} = \mathfrak{X}^{-1}(t+\Delta t)\mathfrak{x}_p(t+\Delta t,u,v) - \mathfrak{X}^{-1}(t)\mathfrak{x}_p(t,u,v).$$

□

Satz 3.7
Ist die Determinante der Koeffizientenmatrix $\mathfrak{A}$ *ungleich Null, so gilt das*
Parallelisierungs-Axiom:
$\mathfrak{x}(t)$ *beschreibe eine* $\left[\binom{u}{v}\right]$*-Kurve. Dann gilt:*

$$\bigwedge_{\binom{m}{n}\in\mathfrak{Y}} \quad \bigvee_{\left[\binom{u}{v}\right]^{\binom{m}{n}}\in\mathcal{R}} \quad \mathfrak{x}(t)+\binom{m}{n} \text{ ist eine } \left[\binom{u}{v}\right]^{\binom{m}{n}} \text{-Kurve.}$$

Beweis:
Es sei $\mathfrak{x}(t)$ eine $\left[\binom{u}{v}\right]$-Kurve, d. h.

$$\mathfrak{x}(t)=\mathfrak{X}(t)\mathfrak{C}+\mathfrak{x}_p(\mathfrak{A})\binom{u}{v}$$

$$\text{mit } \mathfrak{x}_p(\mathfrak{A})=\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}\begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{C}=\binom{C_1}{C_2}.$$

Es sei weiter $\binom{m}{n}\in\mathfrak{Y}=\mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$\mathfrak{x}(t)+\binom{m}{n}=\mathfrak{X}(t)\mathfrak{C}+\mathfrak{x}_p(\mathfrak{A})\binom{u}{v}+\binom{m}{n}\overset{!}{=}\mathfrak{X}(t)\mathfrak{C}+\mathfrak{x}_p(\mathfrak{A})\binom{x}{y} \quad \text{f .g. } x,y$$

$$\begin{aligned} \divideontimes \quad \binom{x}{y} &= \binom{u}{v}+\mathfrak{x}_p(\mathfrak{A})^{-1}\binom{m}{n} \\ &= \binom{u}{v}+\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}\binom{m}{n} \\ &= \binom{u}{v}+\binom{-am-bn}{-cm-dn}. \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\left[\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right]^{\binom{m}{n}}=\left[\begin{pmatrix} u-am-bn \\ v-cm-dn \end{pmatrix}\right].$$

$\square$

Kapitel 4

Fuzzy-Differentialgleichungsrelative

Gegeben sei $\frac{\partial}{\partial t}x(t) = ax(t) + u$ mit $a \in \mathbb{R}^{\neq 0}$, $t \in \mathcal{T} := \mathbb{R}$, $u = const.$ und zugehöriges Differentialgleichungsrelativ

$$(\mathfrak{P}, \boldsymbol{\mathfrak{R}})$$

mit

$$\begin{array}{rcl}
\mathfrak{P} & := & \mathcal{T} \times \mathbb{R} = \{A \mid A = (t_A, x^A)\,;\ t_A \in \mathcal{T}, x^A \in \mathbb{R}\} \\
\boldsymbol{\mathfrak{R}} & := & \{\,[u] \in \mathrm{Pot}(\mathfrak{P} \times \mathfrak{P}) \ \mid\ u \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathfrak{e}, [\infty]\} \\
A[u]B & :\divideontimes & \Delta t := -t_A + t_B \neq 0 \\
 & \wedge & \bigvee\limits_{x(t)} [\,\dot{x}(t) = ax(t) + u \\
 & \wedge & A = (t, x(t)) \wedge B = (t + \Delta t, x(t + \Delta t))\,] \\
A[\infty]B & :\divideontimes & t_A = t_B \wedge x^A \neq x^B \\
A\mathfrak{e}B & :\divideontimes & A = B.
\end{array}$$

Wir betrachten hier die Relationen ohne die Anordnung von $\mathcal{T} = \mathbb{R}$, unterscheiden demnach nicht in *Vergangenheits-* und *Zukunftsrelationen.*
In den folgenden Ausführungen werden wir die Relationen $\mathfrak{r} \in \boldsymbol{\mathfrak{R}}$ fuzzyfizieren, d. h. wir werden die Relationen $[u]$ aus $\boldsymbol{\mathfrak{R}} \backslash \{\mathfrak{e}, [\infty]\}$ sowie $\mathfrak{e}$ mit Zugehörigkeitsfunktionen ausstatten und dann Eigenschaften dieser Fuzzy-Relationen herausarbeiten.
Im zweiten Abschnitt dieses Kapitels betrachten wir das Relativ $(\mathfrak{P}, \boldsymbol{\mathfrak{R}}^{\mathbb{Z}})$ mit $\boldsymbol{\mathfrak{R}}^{\mathbb{Z}} := \{[u] \in \boldsymbol{\mathfrak{R}} \mid u \in \mathbb{Z}\} \cup \{\mathfrak{e}\}$, das bezüglich der Relationenmenge eine Teilmenge des Relativs $(\mathfrak{P}, \boldsymbol{\mathfrak{R}})$ ist, da nur noch ganzzahlige Kontrollen $u \in \mathcal{U}$ zugelassen sind.

Trotzdem kann mit der Fuzzyfizierung ein zu $(\mathfrak{P}, \mathfrak{R})$ vereinfachtes Relativ konstruiert werden, wir erhalten also das ursprüngliche Relativ (allerdings mit größeren Relationen) zurück.
Wir fuzzyfizieren die Relationen $[u]$ aus $\mathfrak{R}\backslash\{\mathfrak{e}, [\infty]\}$ durch zwei verschiedene Zugehörigkeitsfunktionen, die Gleichheitsrelation $\mathfrak{e}$ wird nur durch eine Zugehörigkeitsfunktion ausgestattet. Dabei wird der Grad der Zugehörigkeit eines Punktepaares $(A, B) \in \mathfrak{P}^2$ zu der Fuzzy-Relation $\widetilde{[u]}$ über Abstandsbetrachtungen im Zielraum - der dem affinen Urbildraum entspricht - bzw. im Stellraum - der dem Fernraum als Menge der Fernpunkte entspricht - ermittelt. Wir erhalten demnach je nach Zugehörigkeitsfunktion zwei (verschiedene) *Fuzzy-Relative*, die auch im folgenden (zunächst) getrennt betrachtet werden.

1. Abstandsmessen im Zielraum

$$\mathfrak{R} \ni [u] \longrightarrow \widetilde{[u]} := \{((A, B), \mu^Z_{\widetilde{[u]}}(A, B)) \mid A, B \in \mathfrak{P}\}$$

mit

$$\mu^Z_{\widetilde{[u]}}(A, B) := \begin{cases} 0 & f. \quad t_A = t_B \\ \frac{1}{e^{d\,(B', B)}} & f. \quad t_A \neq t_B \end{cases} .$$

(Der Index Z steht für die Betrachtungen im Zielraum.)
B' ist die Projektion des Punktes B auf $A[u]$ bei Festhalten der t-Komponente und $d(B', B)$ das Abstandsquadrat:

$$B' := (t_B, x^{B'}), \quad x^{B'} := e^{a(t_B - t_A)}(x^A + \frac{u}{a}) - \frac{u}{a},$$

$$d(B', B) := (x^{B'} - x^B)^2 \; = \; \left[e^{at_B}\left(e^{-at_A}(x^A + \frac{u}{a}) - a^{-at_B}(x^B + \frac{u}{a})\right)\right]^2 .$$

Natürlich gilt:

$$d(B', B) \geq 0 \;\divideontimes\; 0 < \frac{1}{e^{d(B', B)}} \leq 1 \quad \text{und} \quad d(B', B) = 0 \;\divideontimes\; B \in A[u].$$

2. Abstandsmessen in der Menge der Fernpunkte

$$\mathfrak{R} \ni [u] \longrightarrow \widetilde{[u]} := \{((A, B), \mu^F_{\widetilde{[u]}}(A, B)) \mid A, B \in \mathfrak{P}\}$$

mit

$$\mu^F_{\widetilde{[u]}}(A, B) := \begin{cases} 0 & f. \quad t_A = t_B \\ \frac{1}{e^{d\,(u, A \cdot B)}} & f. \quad t_A \neq t_B \end{cases} .$$

(Der Index F steht für die Betrachtungen in der Menge der Fernpunkte.)

$d(u, A\cdot B)$ ist das Abstandsquadrat der zu den Stellgrößen u und $A\cdot B$ gehörenden Grenzwerte (Beharrungswerte) $-\frac{u}{a}$ und $-\frac{A\cdot B}{a}$, also

$$A\cdot B = -a\frac{x^B e^{-at_B} - x^A e^{-at_A}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}},$$

$$\begin{aligned} d(u, A\cdot B) &:= \left(-\frac{u}{a} - \frac{A\cdot B}{-a}\right)^2 \\ &= \left(\frac{u}{a} - \frac{A\cdot B}{a}\right)^2 \\ &= \left(\frac{u}{a} + \frac{x^B e^{-at_B} - x^A e^{-at_A}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}}\right)^2. \end{aligned}$$

Natürlich gilt:

$$0 < \frac{1}{e^{d(u,A\cdot B)}} \leq 1 \quad \text{und} \quad d(u, A\cdot B) = 0 \;\Leftrightarrow\; B \in A[u].$$

3. Die Zugehörigkeitsfunktion der Gleichheitsrelation $\mathfrak{e}$

$$\mathfrak{R} \ni \mathfrak{e} \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{e}} := \{((A,B), \mu_{\widetilde{\mathfrak{e}}}(A,B)) \mid A, B \in \mathfrak{P}\}$$

mit

$$\mu_{\widetilde{\mathfrak{e}}}(A,B) := \frac{1}{e^{(t_A - t_B)^2 + (x^A - x^B)^2}}.$$

Auch hier gilt: $0 < \mu_{\widetilde{\mathfrak{e}}}(A,B)) \leq 1$ und $\mu_{\widetilde{\mathfrak{e}}}(A,B)) = 1 \Leftrightarrow A = B$.

Definition 4.1
Unter den **"Fuzzy- Differentialgleichungsrelativen"**

$$(\mathfrak{P}, \widetilde{\mathfrak{R}^Z}) \quad \textit{und} \quad (\mathfrak{P}, \widetilde{\mathfrak{R}^F})$$

verstehen wir im folgenden die auf der Grundmenge $\mathfrak{P}$ *operierenden Relationenmengen*

$$\widetilde{\mathfrak{R}} := \left\{\widetilde{[u]} \mid u \in \mathbb{R}\right\} \cup \{\widetilde{\mathfrak{e}}\},$$

deren binäre Relationen mit den jeweiligen Bewertungsfunktionen

$$\mu^Z_{\widetilde{[u]}},\ \mu^F_{\widetilde{[u]}}$$

ausgestattet seien und die durch ein "Fuzzy-Relationenprodukt" miteinander verknüpft werden.
Als Zugehörigkeitsfunktion für das Relationenprodukt definieren wir (in Abwandlung der sonst üblichen Definition über Maximumbetrachtungen ("Maximum-Produkt-Komposition") (Kandel, 1986)) für

$$\widetilde{\mathfrak{r}}_1, \widetilde{\mathfrak{r}}_2 \in \widetilde{\mathfrak{R}^i} \quad (i \in \{F, Z\} \textit{ fest}):$$

$$\mu_{\widetilde{\mathfrak{r}}_1 \circ \widetilde{\mathfrak{r}}_2}(A, C) := \sup_{B \in \mathfrak{P}} \left\{ \mu_{\widetilde{\mathfrak{r}}_1}(A, B) \cdot \mu_{\widetilde{\mathfrak{r}}_2}(B, C) \right\},$$

also

$$\widetilde{\mathfrak{r}}_1 \circ \widetilde{\mathfrak{r}}_2 = \left\{ ((A, C), \mu_{\widetilde{\mathfrak{r}}_1 \circ \widetilde{\mathfrak{r}}_2}(A, C)) \mid A, C \in \mathfrak{P} \right\}.$$

Das Fuzzy-Differentialgleichungsrelativ $(\mathfrak{P}, \widetilde{\mathfrak{R}^Z})$

Satz 4.2
Jede Fuzzy-Relation $\widetilde{\mathfrak{r}} \in \widetilde{\mathfrak{R}^Z}$ ist linkstotal.

Beweis:
Die Stützmenge S des Vorbereichs $V_{\widetilde{\mathfrak{r}}}$ ist gleich der Quellmenge $\mathfrak{P}$.

1. $\widetilde{\mathfrak{e}} \in \widetilde{\mathfrak{R}^Z}$

$$\begin{aligned} V_{\widetilde{\mathfrak{e}}} &:= \left\{ (A, \mu_{V_{\widetilde{\mathfrak{e}}}}(A)) \mid A \in \mathfrak{P};\ \mu_{V_{\widetilde{\mathfrak{e}}}}(A) := \max_{B \in \mathfrak{P}} \mu_{\widetilde{\mathfrak{e}}}(A, B) \right\} \\ &= \{(A, 1) \mid A \in \mathfrak{P}\}. \\ S(V)_{\widetilde{\mathfrak{e}}} &:= \{A \in \mathfrak{P} \mid \mu_{V_{\widetilde{\mathfrak{e}}}}(A) > 0\} = \mathfrak{P}. \end{aligned}$$

2. $\widetilde{[u]} \in \widetilde{\mathfrak{R}^Z}$

$$\begin{aligned} V_{\widetilde{[u]}} &:= \left\{ (A, \mu_{V_{\widetilde{[u]}}}(A)) \mid A \in \mathfrak{P};\ \mu_{V_{\widetilde{[u]}}}(A) := \max_{B \in \mathfrak{P}} \mu_{\widetilde{[u]}}(A, B) \right\} \\ &= \{(A, 1) \mid A \in \mathfrak{P}\}. \\ S(V)_{\widetilde{[u]}} &:= \{A \in \mathfrak{P} \mid \mu_{V_{\widetilde{[u]}}}(A) > 0\} = \mathfrak{P}. \end{aligned}$$

□

Satz 4.3
Die Relationen $\widetilde{[u]}$ *sind* nicht *symmetrisch, es gilt nämlich:*

$$\begin{array}{ll}\mu_{\widetilde{[u]}}(A,B) = \mu_{\widetilde{[u]}}(B,A) = 0 & \textit{oder} \\ \mu_{\widetilde{[u]}}(A,B) = \mu_{\widetilde{[u]}}(B,A) = 1 & \textit{oder} \\ \mu_{\widetilde{[u]}}(A,B) \neq \mu_{\widetilde{[u]}}(B,A). & \end{array}$$

Wir beweisen zunächst einen Hilfssatz:

Hilfssatz 4.4
Für Punkte $A, B \in \mathfrak{P}$ *gilt:*

$$\mu_{\widetilde{[u]}}(A,B) = \mu_{\widetilde{[u]}}(B,A) \quad \divideontimes \quad t_A = t_B \vee B \in A[u].$$

Beweis:

$$\begin{array}{c} \mu_{\widetilde{[u]}}(A,B) = \mu_{\widetilde{[u]}}(B,A) \\ \divideontimes \quad \frac{1}{e^{d(B',B)}} = \frac{1}{e^{d(A',A)}} \quad \dot\vee \quad t_A = t_B \\ \text{mit } B' = (t_B, x^{B'}) \wedge B' \in A[u];\ A' = (t_A, x^{A'}) \wedge A' \in B[u] \\ \divideontimes \quad d(B',B) = d(A',A) \quad \dot\vee \quad t_A = t_B \\ \divideontimes \quad \left(e^{a(t_B - t_A)}(x^A + \frac{u}{a}) - \frac{u}{a} - x^B\right)^2 = \\ \left(e^{a(t_A - t_B)}(x^B + \frac{u}{a}) - \frac{u}{a} - x^A\right)^2 \quad \dot\vee \quad t_A = t_B \\ \overset{!}{\divideontimes} \quad [B \in A[u] \wedge t_A \neq t_B] \quad \dot\vee \quad t_A = t_B \end{array}$$

1. $\overset{!}{\prec}$

   (a) $t_A = t_B$
   $\succ \quad \mu_{\widetilde{[u]}}(A,B) = 0 = \mu_{\widetilde{[u]}}(B,A).$

   (b) $B \in A[u]$

$$\begin{array}{rrcl} \succ & x^B & = & e^{a(t_B - t_A)}(x^A + \dfrac{u}{a}) - \dfrac{u}{a} \\ \succ & 0 & = & e^{a(t_B - t_A)}\left(x^A + \dfrac{u}{a}\right) - \dfrac{u}{a} - x^B = d(B',B) \\ \succ & 0 & = & \left(x^A + \dfrac{u}{a}\right) + e^{-a(t_B - t_A)}\left(-\dfrac{u}{a} - x^B\right) \\ & & = & e^{a(t_A - t_B)}\left(x^B + \dfrac{u}{a}\right) - \dfrac{u}{a} - x^A \\ \succ & & & d(B',B) = d(A',A). \end{array}$$

2. $\overset{!}{\succ}$

   (a) Ein Quadrat wird beim Auflösen mit Vorzeichen versehen

$$e^{a(t_B-t_A)}\left(x^A+\frac{u}{a}\right)-\frac{u}{a}-x^B=-e^{a(t_A-t_B)}\left(x^B+\frac{u}{a}\right)+\frac{u}{a}+x^A$$

$$\begin{aligned}
\divideontimes\quad & 0=\left(x^A+\frac{u}{a}\right)(e^{a(t_B-t_A)}-1)+\left(x^B+\frac{u}{a}\right)(e^{a(t_A-t_B)}-1)\\
\divideontimes\quad & 0=\left(x^A+\frac{u}{a}\right)e^{-at_A}(e^{at_B}-e^{at_A})-\left(x^B+\frac{u}{a}\right)e^{-at_B}(e^{at_B}-e^{at_A})\\
\divideontimes\quad & 0=(e^{at_B}-e^{at_A})\left[e^{-at_A}\left(x^A+\frac{u}{a}\right)-e^{-at_B}\left(x^B+\frac{u}{a}\right)\right]\\
\divideontimes\quad & t_A=t_B\ \vee\ \left[-a\frac{e^{-at_A}x^A-e^{-at_B}x^B}{e^{-at_A}-e^{-at_B}}=u=A\cdot B\wedge t_A\neq t_B\right].
\end{aligned}$$

   (b) Kein Vorzeichenwechsel

$$e^{a(t_B-t_A)}\left(x^A+\frac{u}{a}\right)-\frac{u}{a}-x^B=e^{a(t_A-t_B)}\left(x^B+\frac{u}{a}\right)-\frac{u}{a}-x^A$$

$$\begin{aligned}
\divideontimes\quad 0 &= \left(x^A+\frac{u}{a}\right)(e^{a(t_B-t_A)}+1)-\left(x^B+\frac{u}{a}\right)(e^{a(t_A-t_B)}+1)\\
\divideontimes\quad 0 &= \left(x^A+\frac{u}{a}\right)e^{-at_A}(e^{at_A}+e^{at_B})-\left(x^B+\frac{u}{a}\right)e^{-at_B}(e^{at_A}+e^{at_B})\\
\divideontimes\quad 0 &= (e^{at_A}+e^{at_B})\left[e^{-at_A}\left(x^A+\frac{u}{a}\right)-e^{-at_B}\left(x^B+\frac{u}{a}\right)\right]\\
\divideontimes\quad & -a\frac{e^{-at_A}x^A-e^{-at_B}x^B}{e^{-at_A}-e^{-at_B}}=u=A\cdot B\wedge t_A\neq t_B.
\end{aligned}$$

$\square$

Nun zum Beweis des Satzes 4.3. Es seien $A,B\in\mathfrak{P}$ vorgegeben.

1. $t_A=t_B$

$$\mu_{\widetilde{[u]}}(A,B)=0=\mu_{\widetilde{[u]}}(B,A).$$

2. $t_A\neq t_B$

   (a) $A\in B[u]\quad\divideontimes\quad B\in A[u]$

$$\begin{aligned}
&\succ\quad d(B',B)=d(A',A)=0\\
&\succ\quad \mu_{\widetilde{[u]}}(A,B)=\mu_{\widetilde{[u]}}(B,A)=1.
\end{aligned}$$

(b) $A \notin B[u] \quad \nLeftrightarrow \quad B \notin A[u]$
Dann folgt mit Hilfssatz 4.4:

$$\mu_{\widetilde{[u]}}(A,B) \neq \mu_{\widetilde{[u]}}(B,A).$$

$\square$

Satz 4.5
Für alle $\widetilde{[u]} \in \widetilde{\mathfrak{R}^Z}$ *gilt:*

$$\widetilde{[u]}^{-1} \circ \widetilde{[u]}^{-1} = \widetilde{[u]} \circ \widetilde{[u]}^{-1} = \widetilde{[u]}^{-1} \circ \widetilde{[u]} = \widetilde{[u]} \circ \widetilde{[u]} = \mathfrak{P} \times \mathfrak{P} \qquad \textit{(Allrelation)}.$$

Beweis:

1. $\widetilde{[u]} \circ \widetilde{[u]} = \mathfrak{P} \times \mathfrak{P}$

$$\begin{aligned} \mu_{\widetilde{[u]} \circ \widetilde{[u]}}(A,B) &= \sup_{C \in \mathfrak{P}} \Big(\mu_{\widetilde{[u]}}(A,C) \cdot \mu_{\widetilde{[u]}}(C,B)\Big) = \sup_{C \in \mathfrak{P}} \left(\frac{1}{e^{d(C',C)}} \cdot \frac{1}{e^{d(B',B)}}\right) \\ &=: \sup_{C \in \mathfrak{P}} F(t_C, x^C) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} C' &:= (t_C, x^{C'}),\ x^{C'} := e^{a(t_C - t_A)}(x^A + \frac{u}{a}) - \frac{u}{a} \\ B' &:= (t_B, x^{B'}),\ x^{B'} := e^{a(t_B - t_C)}(x^C + \frac{u}{a}) - \frac{u}{a} \\ F(t_C, x^C) &:= \frac{1}{e^{P(t_C, x^C)}} \qquad \text{und} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(t_C, x^C) &:= d(C',C) + d(B',B) \\ &= \left(e^{a(t_C - t_A)}(x^A + \frac{u}{a}) - \frac{u}{a} - x^C\right)^2 + \left(e^{a(t_B - t_C)}(x^C + \frac{u}{a}) - \frac{u}{a} - x^B\right)^2. \end{aligned}$$

Die Behauptung ist äquivalent mit

$$\sup\{F(t_C, x^C) \mid C \in \mathfrak{P}\} \stackrel{!}{=} 1.$$

Klar ist $F(t_C, x^C) \leq 1$ f. a. $C \in \mathfrak{P}$.
Sei weiter ein $\epsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann gibt es ein $C_0 = (t_{C_0}, x^{C_0}) \in \mathfrak{P}$ mit:

$$1 - \epsilon < F(t_{C_0}, x^{C_0}).$$

Wähle zunächst ein $C_0 \in B[u]$. Dann ist $d(B', B) = 0$, und damit gilt:

$$
\begin{aligned}
& 1-\epsilon < F(t_{C_0}, x^{C_0}) = \frac{1}{e^{d(C_0', C_0)}} \\
\Leftrightarrow\quad & d(C_0', C_0) < -\ln(1-\epsilon) \\
\Leftrightarrow\quad & \left[e^{a(t_{C_0}-t_A)}\left(x^A+\frac{u}{a}\right)-\frac{u}{a}-x^{C_0}\right]^2 < -\ln(1-\epsilon) \\
\Leftrightarrow\quad & \left[e^{a(t_{C_0}-t_A)}\left(x^A+\frac{u}{a}\right)-\frac{u}{a}-e^{a(t_{C_0}-t_B)}\left(x^B+\frac{u}{a}\right)+\frac{u}{a}\right]^2 < -\ln(1-\epsilon) \\
\Leftrightarrow\quad & (e^{at_{C_0}})^2\left[e^{-at_A}\left(x^A+\frac{u}{a}\right)-e^{-at_B}\left(x^B+\frac{u}{a}\right)\right]^2 < -\ln(1-\epsilon).
\end{aligned}
$$

(a) $A \in B[u]$
Dann ist die Behauptung trivialerweise erfüllt, denn es gilt

$$
A\cdot B = u = -a\frac{x^B e^{-at_B} - x^A e^{-at_A}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}}
$$

$$
\Leftrightarrow\quad e^{-at_A}\left(x^A+\frac{u}{a}\right)-e^{-at_B}\left(x^B+\frac{u}{a}\right) = 0.
$$

(b) $A \notin B[u]$

i. $a > 0$

$$
e^{at_{C_0}} < \sqrt{\frac{-\ln(1-\epsilon)}{\left(e^{-at_A}(x^A+\frac{u}{a})-e^{-at_B}(x^B+\frac{u}{a})\right)^2}} =: t_0
$$

$$
\Leftrightarrow\quad t_{C_0} < \frac{1}{a}\ln t_0.
$$

ii. $a < 0$

$$
e^{at_{C_0}} < \sqrt{\frac{-\ln(1-\epsilon)}{\left(e^{-at_A}(x^A+\frac{u}{a})-e^{-at_B}(x^B+\frac{u}{a})\right)^2}} =: t_0
$$

$$
\Leftrightarrow\quad t_{C_0} > \frac{1}{a}\ln t_0.
$$

Die Nenner der Quotienten unter den Wurzeln sind für $A \notin B[u]$ ungleich Null, die Behauptung ist also für $C_0 \in B[u]$ mit $t_{C_0} < \frac{1}{a}\ln t_0$ $(a > 0)$ bzw. $t_{C_0} > \frac{1}{a}\ln t_0$ $(a < 0)$ bewiesen.

2. $\widetilde{[u]} \circ \widetilde{[u]}^{-1} = \mathfrak{P} \times \mathfrak{P}$

$$\begin{aligned}\mu_{\widetilde{[u]}\circ\widetilde{[u]}^{-1}}(A,B) &= \sup_{C\in\mathfrak{P}} \Big(\mu_{\widetilde{[u]}}(A,C)\cdot\mu_{\widetilde{[u]}}(B,C)\Big) = \sup_{C\in\mathfrak{P}} \left(\frac{1}{e^{d^A(C',C)}}\frac{1}{e^{d^B(B',B)}}\right) \\ &=: \sup_{C\in\mathfrak{P}} F(t_C, x^C).\end{aligned}$$

Die Behauptung lautet:

$$\sup_{C\in\mathfrak{P}} (F(t_C, x^C) = 1.$$

Mit der Wahl eines $C_0 \in B[u]$ gilt

$$\mu_{\widetilde{[u]}}(B, C_0) = 1$$

und damit wieder

$$\sup_{C_0\in B[u]} \Big(\mu_{\widetilde{[u]}}(A, C_0)\Big) \stackrel{!}{=} 1.$$

Mit den gleichen Schlüssen wie im Fall a) wird dieses bewiesen.

3. Die beiden letzten Gleichungen werden ganz analog bewiesen.

$\square$

Das Fuzzy-Differentialgleichungsrelativ $(\mathfrak{P}, \widetilde{\mathfrak{R}^F})$

Satz 4.6
Jede Fuzzy-Relation $\tilde{\mathfrak{r}} \in \widetilde{\mathfrak{R}^F}$ ist linkstotal.

Beweis:
Analog zum Satz 4.2.

Satz 4.7
Die Relationen $\widetilde{[u]} \in \widetilde{\mathfrak{R}^F}$ sind symmetrisch.

Beweis:

$$\begin{aligned}\mu_{\widetilde{[u]}}(A,B) &= \left[e^{\left(-\frac{u}{a}-\frac{x^B e^{-at_B}-x^A e^{-at_A}}{e^{-at_B}-e^{-at_A}}\right)^2}\right]^{-1} \\ &= \left[e^{\left(-\frac{u}{a}-\frac{x^A e^{-at_A}-x^B e^{-at_B}}{e^{-at_A}-e^{-at_B}}\right)^2}\right]^{-1} = \mu_{\widetilde{[u]}}(B,A).\end{aligned}$$

$\square$

Satz 4.8
Für alle $\widetilde{[u]} \in \widetilde{\mathfrak{R}^F}$ *gilt:*

$$\widetilde{[u]}^{-1} \circ \widetilde{[u]}^{-1} = \widetilde{[u]} \circ \widetilde{[u]}^{-1} = \widetilde{[u]}^{-1} \circ \widetilde{[u]} = \widetilde{[u]} \circ \widetilde{[u]} = \mathfrak{P} \times \mathfrak{P} \qquad (\textit{Allrelation}).$$

Beweis:
Wir beweisen die letzte Gleichung, die anderen gelten wegen der Symmetrie der Relationen.
Definiere für $t_A \neq t_C \neq t_B$:

$$\begin{aligned} F(t_C, x^C) &:= \frac{1}{e^{P(t_C,x^C)}} := \mu_{\widetilde{[u]}}(A,C)\mu_{\widetilde{[u]}}(C,B) \\ &= \frac{1}{e^{d(u,A\cdot C)}}\frac{1}{e^{d(u,C\cdot B)}} = \left[e^{\left(\frac{u}{a}+\frac{x^C e^{-at_C}-x^A e^{-at_A}}{e^{-at_C}-e^{-at_A}}\right)^2+\left(\frac{u}{a}+\frac{x^C e^{-at_C}-x^B e^{-at_B}}{e^{-at_C}-e^{-at_B}}\right)^2}\right]^{-1} \end{aligned}$$

Die Behauptung ist äquivalent mit

$$\sup\{F(t_C, x^C) \mid C \in \mathfrak{P}\} \stackrel{!}{=} 1.$$

Es ist $F(t_C, x^C) \leq 1$ f. a. $C \in \mathfrak{P}$.
Sei weiter ein $\epsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann gibt es ein $C_0 = (t_{C_0}, x^{C_0}) \in \mathfrak{P}$ mit:

$$1 - \epsilon < F(t_{C_0}, x^{C_0})$$

$$\Leftrightarrow P(t_{C_0}, x^{C_0}) < -\ln(1-\epsilon) =: \epsilon'.$$

Wähle $x^{C_0} := -\frac{u}{a}$. Dann ist

$$\begin{aligned} P(t_{C_0}, x^{C_0}) &= \left[\frac{u}{a} + \frac{x^{C_0}e^{-at_{C_0}} - x^A e^{-at_A}}{e^{-at_{C_0}} - e^{-at_A}}\right]^2 + \left[\frac{u}{a} + \frac{x^{C_0}e^{-at_{C_0}} - x^B e^{-at_B}}{e^{-at_{C_0}} - e^{-at_B}}\right]^2 \\ &= \left[\frac{u(e^{-at_{C_0}} - e^{-at_A}) + a(e^{-at_{C_0}}x^{C_0} - e^{-at_A}x^A)}{a(e^{-at_{C_0}} - e^{-at_A})}\right]^2 \\ &\quad + \left[\frac{u(e^{-at_{C_0}} - e^{-at_B}) + a(e^{-at_{C_0}}x^{C_0} - e^{-at_B}x^B)}{a(e^{-at_{C_0}} - e^{-at_B})}\right]^2 \\ &= \left[\frac{ae^{-at_A}(-x^A - \frac{u}{a})}{a(e^{-at_{C_0}} - e^{-at_A})}\right]^2 + \left[\frac{ae^{-at_B}(-x^B - \frac{u}{a})}{a(e^{-at_{C_0}} - e^{-at_B})}\right]^2 \\ &= \left[\frac{e^{-at_A}(x^A + \frac{u}{a})}{e^{-at_{C_0}} - e^{-at_A}}\right]^2 + \left[\frac{e^{-at_B}(x^B + \frac{u}{a})}{e^{-at_{C_0}} - e^{-at_B}}\right]^2 \\ &\to \begin{cases} 0 & \text{für} \quad a < 0 \text{ mit } t_{C_0} \to \infty \\ 0 & \text{für} \quad a > 0 \text{ mit } t_{C_0} \to -\infty. \end{cases} \end{aligned}$$

□

Satz 4.9
Für die Gleichheitsrelation $\widetilde{\mathfrak{e}}$ gilt:

$$\widetilde{\mathfrak{e}} \circ \widetilde{\mathfrak{e}} \supseteq \widetilde{\mathfrak{e}}.$$

Beweis:

$$\widetilde{\mathfrak{e}} \circ \widetilde{\mathfrak{e}} = \{((A,B), \mu_{\widetilde{\mathfrak{e}}\circ\widetilde{\mathfrak{e}}}(A,B)) \mid A,B \in \mathfrak{P}\} \quad \text{mit}$$
$$\mu_{\widetilde{\mathfrak{e}}\circ\widetilde{\mathfrak{e}}}(A,B) := \sup_{C\in\mathfrak{P}} \left(\mu_{\widetilde{\mathfrak{e}}}(A,C)\mu_{\widetilde{\mathfrak{e}}}(C,B)\right)$$
$$= \sup_{C\in\mathfrak{P}} \left(e^{(t_A-t_C)^2+(x^A-x^C)^2+(t_B-t_C)^2+(x^B-x^C)^2}\right)^{-1}$$

ist die bekannte Minimierungsaufgabe der Analysis: Zu zwei gegebenen Punkten $A, B \in \mathfrak{P}$ ist ein Punkt $C \in \mathfrak{P}$ gesucht, der bezüglich der quadratischen Abstandsmetrik $d(A,B) := (x^A - x^B)^2 + (t_A - t_B)^2$ den geringsten Abstand von A und B hat. Es ist

$$C = (t_C, x^C) = \left(\frac{t_A + t_B}{2}, \frac{x^A + x^B}{2}\right), \quad \text{also}$$

$$\mu_{\widetilde{\mathfrak{e}}\circ\widetilde{\mathfrak{e}}}(A,B) = \left[e^{\frac{(t_A-t_B)^2+(x^A-x^B)^2}{2}}\right]^{-1} \geq \left[e^{(t_A-t_B)^2+(x^A-x^B)^2}\right]^{-1}$$
$$\divideontimes \quad \mu_{\widetilde{\mathfrak{e}}\circ\widetilde{\mathfrak{e}}}(A,B) \geq \mu_{\widetilde{\mathfrak{e}}}(A,B) \quad \textit{f. a.} \quad A,B \in \mathfrak{P}.$$

□

Satz 4.10
Die transitive Hülle $\widehat{\widetilde{\mathfrak{e}}}$ der Gleichheitsrelation $\widetilde{\mathfrak{e}}$ ist die Allrelation $\mathfrak{P} \times \mathfrak{P}$:

$$\widehat{\widetilde{\mathfrak{e}}} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcirc_{k=1}^{n} \widetilde{\mathfrak{e}}\right) = \widetilde{\mathfrak{e}} \cup \widetilde{\mathfrak{e}}^2 \cup \widetilde{\mathfrak{e}}^3 \cup \cdots = \mathfrak{P} \times \mathfrak{P}.$$

Beweis:
Mit vollständiger Induktion zeigt man:

$$\widetilde{\mathfrak{e}}^n = \left\{\left((A,B), \left(e^{\frac{(t_A-t_B)^2+(x^A-x^B)^2}{n}}\right)^{-1}\right) \mid A,B \in \mathfrak{P}\right\}$$

$$\text{und für} \quad k \leq l: \quad \widetilde{\mathfrak{e}}^k \subseteq \widetilde{\mathfrak{e}}^l$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \widetilde{\mathfrak{e}}^n &= \left\{\left((A,B), \lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{(t_A-t_B)^2+(x^A-x^B)^2}{n}}\right)^{-1}\right) \mid A,B \in \mathfrak{P}\right\} \\
&= \{((A,B),1) \mid A,B \in \mathfrak{P}\} = \mathfrak{P} \times \mathfrak{P}.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.11
Während das Fuzzy-Relationenprodukt $\widetilde{[u]} \circ \widetilde{[u]}$ *(f. a.* $u \in \mathbb{R}$*) schon die Allrelation ergibt, muß bei der Gleichheitsrelation* $\widetilde{\mathfrak{e}}$ *über alle möglichen Produkte vereinigt werden, um* $\mathfrak{P} \times \mathfrak{P}$ *zu erhalten.*

Definition 4.12 (Arnold, Arb.)
Wir betrachten im folgenden die Teilmenge $\mathfrak{R}^{\mathbb{Z}}$ *des Differentialgleichungsrelativs* $(\mathfrak{P}, \mathfrak{R})$*:*

$$\mathfrak{R}^{\mathbb{Z}} := \{[u] \in \mathfrak{R} \mid u \in \mathbb{Z}\}$$

und definieren die Abbildungen

$$\begin{cases} \mathfrak{P} \times \mathfrak{R}^{\mathbb{Z}} \times \mathfrak{P} & \longrightarrow & [0,1] \\ (A, [u], B) & \longmapsto & A[u]^i B := \mu^i_{\widetilde{[u]}}(A, B) = \begin{cases} 0 & f. \quad t_A = t_B \\ \frac{1}{e^{d(B', B)}} & f. \quad t_A \neq t_B,\ i = Z \\ \frac{1}{e^{(\frac{u}{a} - \frac{A \cdot B}{a})^2}} & f. \quad t_A \neq t_B,\ i = F \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathfrak{P} \times \mathfrak{P} & \longrightarrow & [0,1] \\ (A, B) & \longmapsto & |AB| := \begin{cases} 0 & f. \quad t_A = t_B \\ \max_{[u] \in \mathfrak{R}^{\mathbb{Z}}} A[u]B & f. \quad t_A \neq t_B \end{cases} \end{cases} .$$

Hier gilt natürlich

$$\{B \in \mathfrak{P} \mid A[u]^i B = 1\} = A[u].$$

Wir beschränken uns im folgenden auf die Abstandsbetrachtungen in der Menge der Fernpunkte, es ist also generell $i = F$ festgesetzt.
Mit der Berechnung

$$\begin{aligned} & \max_{[u] \in \mathfrak{R}^{\mathbb{Z}}} A[u]B \\ = \ & \max\left\{\mu_{\widetilde{[u]}}(A, B) \mid u \in \mathbb{Z}\right\} \\ = \ & \max\left\{\frac{1}{e^{\frac{1}{a^2}(u - A \cdot B)^2}} \mid u \in \mathbb{Z}\right\} \\ = \ & \frac{1}{a^2} \min\{(u - A \cdot B)^2 \mid u \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

ergibt sich ein relationaler Zusammenhang zwischen $A \cdot B \in \mathbb{R}$ $(t_A \neq t_B)$ und $u \in \mathbb{Z}$:

Satz 4.13
Ist $A \cdot B = z + 0.5\ , z \in \mathbb{Z}$, so gibt es genau zwei $u \in \mathbb{Z}$, die das Minimum bilden:

$$u_1 := z = A \cdot B - 0.5\ , \quad u_2 := z + 1 = A \cdot B + 0.5\ .$$

In allen anderen Fällen ist das minimale $u_{\min} \in \mathbb{Z}$ eindeutig, es berechnet sich als

$$u_{\min} = G(A \cdot B + 0.5),$$

wobei mit G(x) die Gauss*-Klammerfunktion gemeint ist.*

Beweis:

1. $A \cdot B = z + 0.5$ f. e. $z \in \mathbb{Z}$
   Mit der Definition

   $$\widetilde{u_1} := u_1 - k, k \in \mathbb{N}\,; \quad \widetilde{u_2} := u_2 + l, l \in \mathbb{N}$$

   gilt

   $$\begin{aligned} (\widetilde{u_1} - A \cdot B)^2 = (-0.5 - k)^2 = (k + 0.5)^2 > (-0.5)^2 = (u_1 - A \cdot B)^2 \quad \wedge \\ (\widetilde{u_2} - A \cdot B)^2 = (l + 0.5)^2 > 0.5^2 = (u_2 - A \cdot B)^2 \quad . \end{aligned}$$

   Also sind die angegebenen u_1, u_2 minimal.

2. $A \cdot B \neq z + 0.5$ f. a. $z \in \mathbb{Z}$

   (a) $A \cdot B = k$ f. e. $k \in \mathbb{Z}$
   Dann ist natürlich richtig:

   $$u_{\min} = A \cdot B.$$

   (b) $k < A \cdot B < k + 0.5$ f. e. $k \in \mathbb{Z}$
   Wir zeigen:

   $$u_{\min} \stackrel{!}{=} k.$$

   Betrachte $u_1 := k - n, n \in \mathbb{N}$.
   Damit ist richtig wegen der Voraussetzung

   $$\begin{aligned} & (u_1 - A \cdot B)^2 > (u_{\min} - A \cdot B)^2 \\ \Leftrightarrow\quad & ((k - n) - A \cdot B)^2 > (k - A \cdot B)^2 \\ \Leftrightarrow\quad & k^2 - 2kn + n^2 - 2k\,A \cdot B + 2n\,A \cdot B > k^2 - 2k\,A \cdot B \\ \Leftrightarrow\quad & -2kn + n^2 + 2n\,A \cdot B > 0 \\ \Leftrightarrow\quad & A \cdot B > k - \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Betrachte $u_2 := k + l, l \in \mathbb{N}$.
Damit ist richtig wegen der Voraussetzung

$$\begin{aligned}
& (u_2 - A \cdot B)^2 > (u_{\min} - A \cdot B)^2 \\
\divideontimes\quad & ((k + l) - A \cdot B)^2 > (k - A \cdot B)^2 \\
\divideontimes\quad & k^2 + 2kl + l^2 - 2k\, A \cdot B - 2l\, A \cdot B > k^2 - 2k\, A \cdot B \\
\divideontimes\quad & 2kl + l^2 - 2l\, A \cdot B > 0 \\
\divideontimes\quad & k + \frac{l}{2} > A \cdot B.
\end{aligned}$$

(c) $k + 0.5 < A \cdot B < k + 1$ f. e. $k \in \mathbb{Z}$
Wir zeigen:

$$u_{\min} \overset{!}{=} k + 1.$$

Betrachte $u_1 := k + 1 - n, n \in \mathbb{N}$.
Damit ist richtig wegen der Voraussetzung

$$\begin{aligned}
& (u_1 - A \cdot B)^2 > (u_{\min} - A \cdot B)^2 \\
\divideontimes\quad & ((k + 1) - (A \cdot B + n))^2 > ((k + 1) - A \cdot B)^2 \\
\divideontimes\quad & -2(k + 1)(A \cdot B + n) + (A \cdot B)^2 + 2n\, A \cdot B + n^2 \quad > \\
& \qquad -2(k + 1)\, A \cdot B + (A \cdot B)^2 \\
\divideontimes\quad & -2n(k + 1) + 2n\, A \cdot B + n^2 > 0 \\
\divideontimes\quad & A \cdot B > k + 1 - \frac{n}{2}.
\end{aligned}$$

Betrachte $u_2 := k + 1 + l, l \in \mathbb{N}$.
Damit ist richtig wegen der Voraussetzung

$$\begin{aligned}
& (u_2 - A \cdot B)^2 > (u_{\min} - A \cdot B)^2 \\
\divideontimes\quad & ((k + 1) - (A \cdot B - l))^2 > ((k + 1) - A \cdot B)^2 \\
\divideontimes\quad & -2(k + 1)(A \cdot B - l) + (A \cdot B)^2 - 2l\, A \cdot B + l^2 \quad > \\
& \qquad -2(k + 1)\, A \cdot B + (A \cdot B)^2 \\
\divideontimes\quad & 2l(k + 1) - 2l\, A \cdot B + l^2 > 0 \\
\divideontimes\quad & k + 1 + \frac{l}{2} > A \cdot B.
\end{aligned}$$

Also erfüllen auch die in den Fällen 2)b und 2)c angegebenen $u_{\min}$ die Minimalitätsbedingung.

Der Zusammenhang zur GAUSS-Klammerfunktion $G(x)$

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ x & \longmapsto & G(x) := z,\ z \leq x < z+1 \end{cases}$$

ergibt sich nun wie folgt:

(a) $A \cdot B = k$ f. e. $k \in \mathbb{Z}$

$$\succ \quad u_{\min} = k = A \cdot B = G(A \cdot B) = G(A \cdot B + 0.5).$$

(b) $k < A \cdot B < k + 0.5$ f. e. $k \in \mathbb{Z}$

$$\succ \quad k < k + 0.5 < A \cdot B + 0.5 < k + 1$$
$$\succ \quad u_{\min} = k = G(A \cdot B + 0.5).$$

(c) $k + 0.5 < A \cdot B < k + 1$ f. e. $k \in \mathbb{Z}$

$$\succ \quad k + 1 < A \cdot B + 0.5 < k + 1 + 0.5$$
$$\succ \quad u_{\min} = k + 1 = G(A \cdot B + 0.5).$$

□

Definition 4.14
Mit der Menge

$$\overline{AB} := \{[u] \in \mathfrak{R}^{\mathbb{Z}} \mid A[u]B = |AB|\}$$

und der Multiplikation *der Bewertungszahl* γ *mit der Relation* $[u] \in \mathfrak{R}^{\mathbb{Z}}$

$$\begin{cases} [0,1] \times \mathfrak{R}^{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & \mathrm{Pot}(\mathfrak{P} \times \mathfrak{P}) \\ \gamma, [u] & \longmapsto & \gamma[u] := \{(A,B) \in \mathfrak{P} \times \mathfrak{P} \mid \mu_{\widetilde{[u]}}(A,B) = \gamma\} \end{cases}$$

definieren wir neue binäre Relationen aus gegebenen Punkten $A, B \in \mathfrak{P}$*:*

$$\begin{cases} \mathfrak{P} \times \mathfrak{P} & \longrightarrow & \mathrm{Pot}(\mathfrak{P} \times \mathfrak{P}) \\ A, B & \longmapsto & AB := \begin{cases} \bigcap\limits_{\mathfrak{r} \in \overline{AB}} |AB|\, \mathfrak{r} & t_A \neq t_B \\ [\infty] & t_A = t_B,\ x^A \neq x^B \\ \mathfrak{e} & t_A = t_B,\ x^A = x^B \end{cases} \end{cases} .$$

Wir wollen $X(AB)Y$ für $t_A \neq t_B$ bestimmen.
Zunächst gilt für

1. $A \cdot B = z + 0.5$ f. e. $z \in \mathbb{Z}$:
$$\overline{AB} = \{[A \cdot B - 0.5]\,, [A \cdot B + 0.5]\}\,.$$
2. $A \cdot B \neq z + 0.5$ f. a. $z \in \mathbb{Z}$:
$$\overline{AB} = \{[u_0]\}, \quad u_0 = G(A \cdot B + 0.5).$$

Damit ist richtig für:

1. $A \cdot B \neq z + 0.5$ f. a. $z \in Z$
$$\begin{aligned} & (X,Y) \in AB \\ \divideontimes\quad & X(|AB|\overline{AB})Y \\ \divideontimes\quad & \mu_{\widetilde{[u_0]}}(X,Y) = |AB| = A[u_0]B = \mu_{\widetilde{[u_0]}}(A,B) \\ & \text{mit } u_0 = G(A \cdot B + 0.5) \\ \divideontimes\quad & \left(\frac{u_0}{a} - \frac{X \cdot Y}{a}\right)^2 = \left(\frac{u_0}{a} - \frac{A \cdot B}{a}\right)^2 \\ \divideontimes\quad & X \cdot Y = A \cdot B \;\vee\; X \cdot Y = 2u_0 - A \cdot B. \end{aligned}$$
2. $A \cdot B = z + 0.5$ f. e. $z \in Z$
$$\begin{aligned} & (X,Y) \in AB \\ \divideontimes\quad & X(|AB|[u_1] \cap |AB|[u_2])Y \\ & \text{mit } u_1 = z = A \cdot B - 0.5, \quad u_2 = z + 1 = A \cdot B + 0.5 \\ \divideontimes\quad & \mu_{\widetilde{[u_1]}}(X,Y) = |AB| = \mu_{\widetilde{[u_2]}}(X,Y) \\ \divideontimes\quad & (u_1 - X \cdot Y)^2 = (u_1 - A \cdot B)^2 = 0.5^2 = (u_2 - A \cdot B)^2 = (u_2 - X \cdot Y)^2 \\ \divideontimes\quad & (A \cdot B - X \cdot Y - 0.5)^2 = \frac{1}{4} = (A \cdot B - X \cdot Y + 0.5)^2 \\ \divideontimes\quad & -(A \cdot B - X \cdot Y) = 0 = A \cdot B - X \cdot Y \\ \divideontimes\quad & A \cdot B = X \cdot Y. \end{aligned}$$

Wir beschreiben nun mit diesen Ergebnissen den Nachbereich $A(AB)$.

Satz 4.15
Gegeben seien $A, B \in \mathfrak{P}$ mit $t_A \neq t_B$. Dann ist
$$A(AB) = \begin{cases} \{C \in \mathfrak{P} \mid (A,C) \in [A \cdot B]\} \\ \qquad \textit{f. } A \cdot B = z \;\vee\; A \cdot B = z + 0.5 \textit{ f. e. } z \in \mathbb{Z} \\ \\ \{C \in \mathfrak{P} \mid (A,C) \in [A \cdot B]\} \\ \qquad \dot{\cup} \quad \{C \in \mathfrak{P} \mid (A,C) \in [2G(A \cdot B + 0.5) - A \cdot B]\} \\ \qquad \textit{sonst.} \end{cases}$$

Im ersten Fall ergibt sich eine eindeutig bestimmte Kurve durch A; diese ist identisch mit der Kurve $A[A \cdot B]$. Im zweiten Fall ergeben sich als Abtragung zwei (verschiedene) Kurven durch A, dabei gilt aber immerhin, daß ein Strahl die ursprüngliche Relation $[A \cdot B] \in \mathfrak{R}$, die nicht notwendig zu $\mathfrak{R}^{\mathbb{Z}}$ gehören muß, enthält.

Beweis:
Für den Fall $A \cdot B = z$ f. e. $z \in \mathbb{Z}$ gilt

$$A \cdot C = A \cdot B \ \vee \ A \cdot C = 2G(A \cdot B + 0.5) - A \cdot B,$$

aber diese beiden Unterscheidungen fallen zusammen, denn es ist

$$A \cdot B = G(A \cdot B + 0.5).$$

□

Hilfssatz 4.16
Für Punkte $X, Y \in \mathfrak{P}$ mit $t_X \neq t_Y$ gilt:

$$(A, B) \in XY \quad \succ \quad G(A \cdot B + 0.5) = G(X \cdot Y + 0.5).$$

Beweis:

1. $X \cdot Y \neq z + 0.5$ f. a. $z \in \mathbb{Z}$

   (a) $X \cdot Y = z$ f. e. $z \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

   $$(A, B) \in XY \quad \divideontimes \quad A \cdot B = X \cdot Y \quad \divideontimes \quad G(A \cdot B) = G(X \cdot Y) \quad \succ \quad \text{Beh.}$$

   (b) $X \cdot Y \neq z$ f. e. $z \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

   $$(A, B) \in XY \quad \divideontimes \quad A \cdot B = X \cdot Y \vee A \cdot B = 2G(X \cdot Y + 0.5) - X \cdot Y.$$

   Bei der ersten Möglichkeit ist die Behauptung klar, wir betrachten die zweite:
   Aufgrund der Fallvoraussetzung gilt:

   $$k < X \cdot Y + 0.5 < k + 1 \text{ f. e. g. } k \in \mathbb{Z} \quad \succ \quad G(X \cdot Y + 0.5) = k.$$

   Dann gilt
   i.

   $$\begin{aligned} & X \cdot Y + 0.5 < k + 1 \\ \divideontimes \quad & X \cdot Y < G(X \cdot Y + 0.5) + 0.5 \\ \divideontimes \quad & G(X \cdot Y + 0.5) < 2G(X \cdot Y + 0.5) - X \cdot Y + 0.5 \\ \divideontimes \quad & k < A \cdot B + 0.5. \end{aligned}$$

ii.

$$
\begin{aligned}
& k < X \cdot Y + 0.5 \\
\divideontimes \quad & G(X \cdot Y + 0.5) - 0.5 < X \cdot Y \\
\divideontimes \quad & 2G(X \cdot Y + 0.5) - X \cdot Y < k + 0.5 \\
\divideontimes \quad & A \cdot B + 0.5 < k + 1.
\end{aligned}
$$

Insgesamt also f. e. $k \in \mathbb{Z}$:

$$k < A \cdot B + 0.5 < k + 1 \quad \text{und daraus}$$

$$G(A \cdot B + 0.5) = k = G(X \cdot Y + 0.5).$$

2. $X \cdot Y = z + 0.5$ f. e. $z \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$(A, B) \in XY \quad \divideontimes \quad A \cdot B = X \cdot Y \quad \succ \text{ Beh.}$$

$\square$

Hilfssatz 4.17
Es seien Punkte $A, B, X, Y \in \mathfrak{P}$ $(t_X \neq t_Y)$ vorgegeben mit $(A, B) \in XY$. Dann gilt

$$X \cdot Y \neq z + 0.5 \quad \divideontimes \quad A \cdot B \neq z' + 0.5 \quad (z, z' \in \mathbb{Z}).$$

Beweis:

1. $\overset{!}{\succ}$
   Mit der Voraussetzung erhalten wir:

   $$(A, B) \in XY \quad \divideontimes \quad X \cdot Y = A \cdot B \,\vee\, A \cdot B = 2G(X \cdot Y + 0.5) - X \cdot Y.$$

   Wenn der erste Fall eintritt, ist die Behauptung klar. Wir betrachten daher den zweiten Fall und nehmen an:

   $$A \cdot B = 2G(X \cdot Y + 0.5) - X \cdot Y = 2G(A \cdot B + 0.5) - X \cdot Y = z' + 0.5 \text{ f. e. g. } z' \in \mathbb{Z}$$

   $$\divideontimes \quad z'' := 2G(A \cdot B + 0.5) - z' = X \cdot Y + 0.5 \text{ f. g. } z', z'' \in \mathbb{Z}.$$

   Damit wäre $X \cdot Y = (z'' - 1) + 0.5$ f. e. $z'' \in \mathbb{Z}$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

2. $\overset{!}{\prec}$
   Wird durch Kontraposition bewiesen. Es sei $X \cdot Y = z + 0.5$ f. e. $z \in \mathbb{Z}$. Dann ist natürlich richtig:
   $$(A, B) \in X \cdot Y \quad \succ \quad A \cdot B = X \cdot Y = z + 0.5.$$

$\square$

Wir betrachten nun

Definition 4.18

$$\boldsymbol{\mathcal{R}} := \{AB \in \mathrm{Pot}(\mathfrak{P} \times \mathfrak{P}) \mid A, B \in \mathfrak{P}\}$$

und zeigen

Satz 4.19
Das Relativ $(\mathfrak{P}, \boldsymbol{\mathcal{R}})$ *ist einfach graphisch und vereinfacht zum Relativ* $(\mathfrak{P}, \mathfrak{R})$.

Beweis:

1. Scharf einfache Transitivität
   Diese wird bewiesen für Punkte $A, B, X, Y \in \mathfrak{P}$ durch den Nachweis folgender Äquivalenz:
   $$(A, B) \in XY \quad \overset{!}{\prec\!\!\!\succ} \quad AB = XY.$$
   Die Folgerung $\prec$ ist trivial, denn es ist immer richtig $(A, B) \in AB$.
   Es sei also vorgegeben: $(A, B) \in XY$. Im Fall $XY = \mathfrak{e}$ oder $XY = [\infty]$ ist die Behauptung trivial, wir beschränken uns daher auf $t_A \neq t_B$.

   (a) $X \cdot Y \neq z + 0.5 \quad$ f. a. $z \in \mathbb{Z}$
   Es ist wegen Hilfssatz 4.17 auch richtig $A \cdot B \neq z + 0.5$ f. a. $z \in \mathbb{Z}$. Aus der Voraussetzung $(A, B) \in XY$ ergibt sich mit
   $$u_1 := G(X \cdot Y + 0.5) = G(A \cdot B + 0.5) \ :$$
   $$(u_1 - A \cdot B)^2 = (u_1 - X \cdot Y)^2.$$
   Wir geben beliebige Punkte $A', B' \in \mathfrak{P}$ vor. Es gelten dann folgende äquivalente Umformungen:
   $$(A', B') \in XY$$
   $$(u_1 - X \cdot Y)^2 = (u_1 - A' \cdot B')^2 \ \wedge \ u_1 = G(X \cdot Y + 0.5) = G(A \cdot B + 0.5)$$
   $$(u_1 - A \cdot B)^2 = (u_1 - A' \cdot B')^2$$
   $$(u_2 - A \cdot B)^2 = (u_2 - A' \cdot B')^2 \ \wedge \ u_2 := G(A \cdot B + 0.5) = u_1$$
   $$(A', B') \in AB.$$

(b) $X \cdot Y = z + 0.5 \quad$ f. e. $z \in \mathbb{Z}$
Aus der Voraussetzung erhalten wir

$$A \cdot B = X \cdot Y = z + 0.5.$$

In der Behauptung gelten folgende äquivalente Schritte:

$$(A', B') \in AB \quad \Leftrightarrow \quad A' \cdot B' = A \cdot B = X \cdot Y \quad \Leftrightarrow \quad (A', B') \in X \cdot Y.$$

Wir setzen daher für alle $A, B \in \mathfrak{P}$ und alle $\mathfrak{r} \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$:

$$AB_{\boldsymbol{\mathcal{R}}} = \mathfrak{r} \quad :\Leftrightarrow \quad A\,\mathfrak{r}\,B.$$

2. Linkstotalität der Relationen, Abgeschlossenheit bezüglich Gleichheitsrelation klar.

3. Symmetrie der Relationen
Es sei $AB \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ vorgegeben. Die Fälle $AB = \mathfrak{e}$ oder $AB = [\infty]$ sind klar.
Es sei also $t_A \neq t_B$. Dann ergibt sich die Symmetrie von AB sofort aus der Definition: Die Multiplikation Bewertungszahl $|AB|$ mit den Relationen $\mathfrak{r} \in \overline{AB}$ ist symmetrisch, da die Relationen $\widetilde{[u]} \in \mathcal{R}$ symmetrisch sind.

4. Es gilt für alle Punkte $A, B \in \mathfrak{P}$:

$$AB_{\boldsymbol{\mathfrak{R}}} \; = \; [A \cdot B] \; \subset \; AB_{\boldsymbol{\mathcal{R}}}.$$

$\square$

Wir wollen jetzt noch den Zusammenhang zwischen den Relativen

$$(\mathfrak{P}, \widetilde{\mathfrak{R}^Z}) \quad \text{und} \quad (\mathfrak{P}, \widetilde{\mathfrak{R}^F})$$

herstellen. Für beliebige Punkte $A = (t_A, x^A), B = (t_B, x^B) \in \mathfrak{P}$ mit $t_A \neq t_B$ und $u \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}
d(u, A \cdot B) &= \left(\frac{u}{a} + \frac{x^B e^{-at_B} - x^A e^{-at_A}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}}\right)^2 \\
&= \left(\frac{e^{-at_B}(x^B + \frac{u}{a}) - e^{-at_A}(x^A + \frac{u}{a})}{e^{-at_B} - e^{-at_A}}\right)^2 \\
&= \left(\frac{e^{-at_B}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}}\right)^2 \left[e^{at_B}\left(e^{-at_A}(x^A + \frac{u}{a}) - e^{-at_B}(x^B + \frac{u}{a})\right)\right]^2 \\
&= \left(\frac{e^{-at_B}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}}\right)^2 d(B, B')
\end{aligned}$$

und daraus

$$\begin{aligned}
&\mu^F_{\widetilde{[u]}}(A, B) \\
= \; & \frac{1}{e^{d(u, A\cdot B)}} \\
= \; & \frac{1}{e^{d(B',B)\left(\frac{e^{-at_B}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}}\right)^2}} \\
= \; & \frac{1}{\left(e^{d(B',B)}\right)^{\left(\frac{e^{-at_B}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}}\right)^2}} \\
= \; & \left(\frac{1}{e^{d(B',B)}}\right)^{\left(\frac{e^{-at_B}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}}\right)^2} \\
= \; & \left(\mu^Z_{\widetilde{[u]}}(A, B)\right)^{\left(\frac{e^{-at_B}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}}\right)^2} .
\end{aligned}$$

Es wäre auch eine Definition

$$|AB| := \begin{cases} 0 & \text{f. } \; t_A = t_B \\ \max_{[u] \in \mathfrak{R}^{\mathbb{Z}}} A[u]^Z B & \text{f. } \; t_A \neq t_B \end{cases}$$

mit

$$\max_{[u] \in \mathfrak{R}^{\mathbb{Z}}} A[u]^Z B$$

$$
\begin{aligned}
&= \max\left\{\mu^{Z}_{\widetilde{[u]}}(A,B) \mid u \in \mathbb{Z}\right\} \\
&= \max\left\{\frac{1}{e^{d(B',B)}} \mid u \in \mathbb{Z}\right\} \\
&= \min\{d(B',B) \mid u \in \mathbb{Z}\} \\
&= \min\left\{\left(\frac{e^{-at_B}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}}\right)^{-2} d(u, A \cdot B) \mid u \in \mathbb{Z}\right\} \\
&= \frac{1}{a^2}\left(\frac{e^{-at_B} - e^{-at_A}}{e^{-at_B}}\right)^{2} \min\{(u - A \cdot B)^2 \mid u \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}
$$

und

$$\overline{AB} := \{[u] \in \mathfrak{R}^{\mathbb{Z}} \mid A[u]^{Z}B = |AB|\}$$

$$\overline{AB} = \begin{cases} \{[A \cdot B + 0.5], [A \cdot B - 0.5]\} & f.\quad A \cdot B = z + 0.5 \text{ f. e. } z \in \mathbb{Z} \\ \{[G(A \cdot B + 0.5)] & f.\quad A \cdot B = z + 0.5 \text{ f. a. } z \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

möglich, der Übergang zu der dazugehörenden binären Relation AB

$$AB := \bigcap_{\mathfrak{r} \in \overline{AB}} |AB|\,\mathfrak{r}$$

ist allerdings nicht mehr so einfach:

Bemerkung 4.20
Es sei $A \cdot B \neq z + 0.5$ f. a. $z \in \mathbb{Z}$.

$$(X,Y) \in AB$$

$$\divideontimes \quad \mu^{Z}_{\widetilde{[u_0]}}(X,Y) = |AB| = \max_{u \in \mathbb{Z}} A[u]^{Z}B = \max_{u \in \mathbb{Z}} \mu^{Z}_{\widetilde{[u]}}(A,B) = \mu^{Z}_{\widetilde{[u_0]}}(A,B)$$

$$\textit{mit } u_0 = G(A \cdot B + 0.5)$$

$$\divideontimes \quad d(u_0, X \cdot Y)\left(\frac{e^{-at_Y} - e^{-at_X}}{e^{-at_Y}}\right)^2 = d(u_0, A \cdot B)\left(\frac{e^{-at_B} - e^{-at_A}}{e^{-at_B}}\right)^2$$

$$\divideontimes \quad (u_0 - X \cdot Y)^2\left(\frac{e^{-at_Y} - e^{-at_X}}{e^{-at_Y}}\right)^2 = (u_0 - A \cdot B)^2\left(\frac{e^{-at_B} - e^{-at_A}}{e^{-at_B}}\right)^2.$$

Die Betrachtungen "via Fernraum" (also das Abstandsmessen) sind also auch bei unseren Fuzzyfizierungen durchweg einfacher zu handhaben.

Kapitel 5

Relative von Beispielklassen eingliedriger analytischer Systeme mit linearer Steuerung (ALS)

In diesem Kapitel legen wir dem Konzept der "Regel-Relative" Differentialgleichungen allgemeinerer Klassen von (nichtlinearen) Systemen zugrunde. In Anlehnung an Schwarz (1991) betrachten wir Spezialfälle derjenigen eingliedrigen Differentialgleichungen, die die sogenannten *analytischen Systeme mit linearer Steuerung (ALS)*

$$\dot{x(t)} = p(x(t)) + \sum_{i=1}^{m} q_i(x(t))u_i(t)$$

$$x(t), u_i(t) \in \mathbb{R};\ t \in \mathbb{R}$$

$$p(x), q_i(x) \text{ sind analytisch in x}$$

beschreiben. Wir beschränken uns auf den Fall $m = 1$ und setzen

$$u_1(t) := u = const. \in \mathbb{R};\ q(x) := q_1(x).$$

Wir erhalten damit als Oberklasse der von uns im folgenden betrachteten bilinearen Systeme und Multilinearsysteme die ALS in der Form

$$\sum\nolimits_{ALS} :\ \dot{x(t)} = p(x(t)) + q(x(t)) \cdot u\,.$$

Die *bilinearen Systeme (BLS)* bekommen wir durch die Setzung $p(x) := ax$, $q(x) := mx + b\,;\ a, m, b \in \mathbb{R}$, also

$$\sum\nolimits_{BLS} :\ \dot{x(t)} = ax(t) + [mx(t) + b]\,u\,.$$

Die beliebig, aber fest vorgegebenen Koeffizienten a, m, b können auch gleich Null gesetzt werden, dabei ergeben sich folgende Sonderformen (Schwarz, 1987):
Für $b = 0$ die *bezüglich des Zustands homogenen BLS*, kurz "zustandshomogene BLS"

$$\sum\nolimits_{zBLS} :\ \dot{x(t)} = (a + mu)x(t)\ ,$$

für $a = 0$ die *bezüglich des Eingangs homogenen BLS*, kurz "eingangshomogene BLS"

$$\sum\nolimits_{eBLS} :\ \dot{x(t)} = (mx(t) + b)\,u$$

und für $a = 0 \wedge b = 0$ die *strikt bilinearen Systeme*

$$\sum\nolimits_{sBLS} :\ \dot{x(t)} = mx(t)\,u\,.$$

Ist darüber hinaus in den BLS $m = 0$, erhalten wir als Unterklasse die *linearen Systeme (LS)*,

$$\sum\nolimits_{LS} :\ \dot{x(t)} = ax(t) + bu\,,$$

die ihrerseits für $a = 0$ die reelle (angeordnete) affine Ebene $\mathbb{R}^2$ definieren:

$$\sum\nolimits_{\mathbb{R}^2} :\ \dot{x(t)} = bu\,.$$

Eine weitere wichtige Klasse von nichtlinearen Systemen sind die sogenannten *multilinearen Systeme (MLS)*, (nur) in unserer Einschränkung auf $m = 1$ in den ALS erweisen sie sich als Unterklasse davon durch die Setzung $p(x) := nx^2 + ax$, $q(x) := mx\,,\ a \in \mathbb{R},\ n, m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$\sum\nolimits_{MLS} :\ \dot{x(t)} = ax(t) + nx(t)^2 + mx(t)\,u\,.$$

(Das Kroneckerprodukt von Matrizen in der allgemeinen Tensorproduktschreibweise für MLS reduziert sich bei Vorgabe nur einer Differentialgleichung auf die gewöhnliche Multiplikation reeller Koeffizienten).
Das der reellen (angeordneten) affinen Ebene $\sum_{\mathbb{R}^2}$ zugeordnete Relativ ist als *affines (Anordnungs-) Relativ* bekannt (Arnold, 1974, 1976 u. 1987), das zu dem

linearen System $\sum_{LS}$ zugehörige ist in Kapitel 1 untersucht worden. Die nun folgenden Betrachtungen der von den zustands- und eingangshomogenen BLS definierten Differentialgleichungsrelative zeigen, daß diese isomorph zu dem affinen Relativ der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$ sind.
Die Relative der strikten BLS liefern keine neue Situation, da sie Spezialfälle der eingangs- bzw. zustandshomogenen BLS sind. Bei den allgemeinen MLS und BLS können allerdings (aufgrund der unübersichtlich werdenden Lösungskurven der definierenden Differentialgleichungen) keine Aussagen mehr über Kommutativität und Homogenität getroffen werden; hier werden wir Eigenschaften der zugehörigen Regel-Relative analysieren.

Zustandshomogene Bilinearsysteme

Wir gehen von der Differentialgleichung

$$\dot{x(t)} = (a + mu)x(t)\ , \quad a, m \neq 0;\ t \in \mathbb{R}$$

aus, deren allgemeine Lösung

$$x(t) = Ce^{(a+mu)t}\ , \quad C \in \mathbb{R}$$

lautet bzw. bei dem zugehörigen Anfangswertproblem $x(t_A) = x^A$:

$$x(t) = e^{(a+mu)(t-t_A)}x^A.$$

Da der Lösungsraum der Differentialgleichung entweder die Halbebene oberhalb der $\mathfrak{T}-$Achse, die $\mathfrak{T}-$Achse selbst oder die Halbebene unterhalb der $\mathfrak{T}-$Achse ist, definieren wir die folgenden Teilmengen von $\mathfrak{P} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{P}^+ & := & \{A \in \mathfrak{P} | x^A > 0\} \\ \mathfrak{P}^0 & := & \{A \in \mathfrak{P} | x^A = 0\} \\ \mathfrak{P}^- & := & \{A \in \mathfrak{P} | x^A < 0\}. \end{array}$$

Jeder Stellgröße $u \in \mathbb{R}$ der Differentialgleichung wird eine binäre Relation $[u]$ des Lösungsraumes $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zugeordnet gemäß der folgenden Vorschrift:

Sei ein Punktepaar $(A, B) \in \mathfrak{P} \times \mathfrak{P}$ mit $A = (t_A, x^A)$, $B = (t_B, x^B)$ vorgegeben

$$\begin{array}{rcl} A[u]B & :\divideontimes & \Delta t := -t_A + t_B \neq 0 \\ & \wedge & \bigvee\limits_{x(t)} [\, \dot{x}(t) = ax(t) + umx(t) \\ & \wedge & A = (t, x(t)) \\ & \wedge & B = (t + \Delta t, x(t + \Delta t))\,] \\ & \divideontimes & x^B = e^{(a+mu)\Delta t} x^A. \end{array}$$

Weiter haben wir wieder

$$\begin{array}{rcl} A[\pm\infty]B & :\divideontimes & t_A = t_B \wedge x^A \neq x^B \\ A\mathfrak{e}B & :\divideontimes & A = B \end{array}$$

und fassen diese Relationen zusammen:

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{R}^* & := & \{[u] \subset \mathfrak{P} \times \mathfrak{P} | u \in \mathbb{R}\} \\ \mathfrak{R} & := & \mathfrak{R}^* \cup \{[\pm\infty], \mathfrak{e}\}. \end{array}$$

Definition und Satz 5.1
Für die von dem zustandshomogenen BLS in der o. g. Weise definierten **Differentialgleichungsrelative** $(\mathfrak{P}^+, \mathfrak{R})$ *und* $(\mathfrak{P}^-, \mathfrak{R})$ *gilt "scharf einfache Transitivität".*

$$\bigwedge_{A,B\in\mathfrak{P}^+} \bigvee_{\mathfrak{r}\in\mathcal{R}}^{1} A\mathfrak{r}B$$

$$\bigwedge_{A,B\in\mathfrak{P}^-} \bigvee_{\mathfrak{r}\in\mathcal{R}}^{1} A\mathfrak{r}B.$$

Beweis:
Es seien Punkte $A, B \in \mathfrak{P}^+$ (o. B. d. A.) beliebig vorgegeben. Für $t_A = t_B$ gilt $A[\pm\infty]B$ bzw. $A\mathfrak{e}B$. Es sei also $t_A \neq t_B$. Dann kann die Gleichung

$$x^B = e^{(a+mu)(t_B - t_A)} x^A$$

nach $u \in \mathbb{R}$ eindeutig aufgelöst werden:

$$u = \frac{\ln|x^B| - \ln|x^A|}{m(t_B - t_A)} - \frac{a}{m}.$$

Wir definieren daher

$$A * B = \mathfrak{r} \quad :\divideontimes \quad A\mathfrak{r}B.$$

□

Bemerkung 5.2
Die Grundmenge $\mathfrak{P}^0$ wird hier nicht weiter betrachtet, da für alle $u \in \mathbb{R}$ gilt:

$$A[u]B, \quad (A,B) \in (\mathfrak{P}^0 \times \mathfrak{P}^0) \setminus \mathfrak{e}.$$

Wir definieren die Abbildung

$$\begin{cases} (\mathfrak{P}^+ \times \mathfrak{P}^+ \mathbin{\dot\cup} \mathfrak{P}^- \times \mathfrak{P}^-) \setminus ([\pm\infty] \cup \mathfrak{e}) & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ (A,B) & \longmapsto \quad A \cdot B := \frac{\ln|x^B| - \ln|x^A|}{m(t_B - t_A)} - \frac{a}{m}, \end{cases}$$

die jedem Punktepaar (A,B) das eindeutige $u \in \mathbb{R}$ zuordnet, für das gilt:

$$A[u]B \;\;\divideontimes\;\; -t_A + t_B =: \Delta t \neq 0 \;\wedge$$

$$\bigvee_{x(t)} [\dot{x(t)} = (a+mu)x(t) \wedge A = (t, x(t)) \wedge B = (t + \Delta t, x(t + \Delta t))].$$

Es ergibt sich hier aber keine neue Situation, denn es gilt

Satz 5.3
Die Relative $(\mathfrak{P}^+, \mathfrak{R})$ und $(\mathfrak{P}^-, \mathfrak{R})$ sind jeweils isomorph zu dem affinen Relativ $(\mathfrak{P}, \mathcal{R}'_{\text{aff.}})$ der reellen EUKLID*ischen Ebene $\mathfrak{P} = \mathbb{R}^2$, sind also selbst affin.*

Beweis:
Es gilt (siehe auch Kapitel 2)

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{P} & = & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ \mathcal{R}^*_{\text{aff.}} & = & \{(m) \subset \mathfrak{P} \times \mathfrak{P} | m \in \mathbb{R}\} \\ \mathcal{R}'_{\text{aff.}} & = & \mathcal{R}^*_{\text{aff.}} \cup \{(\pm\infty), \mathfrak{e}\} \\ A(m)B & \divideontimes & m = \dfrac{x^A - x^B}{t_B - t_A} \wedge t_A \neq t_B \\ A(\pm\infty)B & \divideontimes & t_A = t_B \wedge x^A \neq x^B \\ A\mathfrak{e}B & \divideontimes & A = B. \end{array}$$

Es gibt Bijektionen

$$f : \begin{cases} \mathfrak{P}^+ & \longrightarrow \quad \mathfrak{P} \\ A = (t_A, x^A) & \longmapsto \quad f(A) = f(t_A, x^A) := (t_A, \ln|x^A|) = (t_A, \ln x^A) \end{cases}$$

bzw.

$$f : \begin{cases} \mathfrak{P}^- & \longrightarrow \quad \mathfrak{P} \\ A = (t_A, x^A) & \longmapsto \quad f(A) = f(t_A, x^A) = (t_A, \ln|x^A|) \end{cases}$$

und

$$g : \begin{cases} \boldsymbol{\mathfrak{R}}^* & \longrightarrow \quad \mathcal{R}^*_{\text{aff.}} \\ [u] & \longmapsto \quad g([u]) := (mu + a). \end{cases}$$

Dabei gilt

$$A[u]B \quad \divideontimes \quad f(A)g([u])f(B).$$

Die Bijektivität der Abbildungen f und g ist klar.
Es seien Punkte $A, B \in \mathfrak{P}^+$ (o. B. d. A.) vorgegeben mit $t_A \neq t_B$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathfrak{R}}^* \ni A * B = [u] \quad & \divideontimes \quad A[u]B \\
& \divideontimes \quad \frac{\ln|x^B| - \ln|x^A|}{m(t_B - t_A)} - \frac{a}{m} = u = A \cdot B \\
& \divideontimes \quad \frac{\ln|x^B| - \ln|x^A|}{(t_B - t_A)} = mu + a \\
& \divideontimes \quad f(A)(mu + a)f(B) \\
& \divideontimes \quad f(A)g([u])f(B) \\
& \divideontimes \quad f(A)f(B) = g([u]) \in \mathcal{R}^*_{\text{aff.}}.
\end{aligned}$$

Für $t_A = t_B$ gilt trivialerweise

$$\boldsymbol{\mathfrak{R}} \ni A * B = f(A)f(B) \in \mathcal{R}'_{\text{aff.}}.$$

$\square$

Bemerkung 5.4
Für die Erreichbarkeitsrelation $\mathbf{P}$ *gilt:*

$$\mathfrak{P}\mathbf{P} = \mathfrak{P}^+ \,\dot{\cup}\, \mathfrak{P}^0 \,\dot{\cup}\, \mathfrak{P}^-.$$

Satz 5.5
Die Differentialgleichungsrelative $(\mathfrak{P}^+, \boldsymbol{\mathfrak{R}})$ *und* $(\mathfrak{P}^-, \boldsymbol{\mathfrak{R}})$ *sind zeitinvariant.*

Beweis:
Wegen der Darstellung der Lösungskurven gilt für alle $A, B \in \mathfrak{P}^+$ (o. B. d. A.), $\mathfrak{r} \in \boldsymbol{\mathfrak{R}}^*$ und alle $\Delta t > 0$

$$x^A = x^B \quad \succ \quad x(A\,\mathfrak{r}\Delta t) = x(B\,\mathfrak{r}\Delta t).$$

$\square$

Damit haben wir die erforderliche Kompatibilität für die Definition von

$$(x(A))\,[u]\Delta t := x(A\,[u]\Delta)t$$

und setzen für $x \neq 0$ und auch für $x = 0$:

$$x\,[u]\Delta t := x(A\,[u]\Delta t) \text{ f. e. bel. } A \text{ mit } x(A) = x.$$

Dann gilt

Satz 5.6
Die allgemeinen Lösungen von $\dot{x}(t) = (a + mu)x(t)$ sind $\mathfrak{c}$ -Kurven.

Beweis:
Wir zeigen für $x(t) = Ce^{(a+mut)}$; $C, t \in \mathbb{R}$ und $\mathfrak{c} = [u] \in \mathfrak{R}^*$:

$$x(t)\,[u]\Delta t \stackrel{!}{=} x(t + \Delta t).$$

Es ist richtig für $C \neq 0$ und für $C = 0$:

$$\begin{aligned}
x(t)\,[u]\Delta t &= x\,[(t, x(t))\,[u]\Delta t] \\
&= x\left[\left(t, Ce^{(a+mu)t}\right)\,[u]\Delta t\right] \\
&= x\left[\left(t + \Delta t, e^{(a+mu)\Delta t}\left(Ce^{(a+mu)t}\right)\right)\right] \\
&= x\left[\left(t + \Delta t, Ce^{(a+mu)(t+\Delta t)}\right)\right] \\
&= Ce^{(a+mu)(t+\Delta t)} \\
&= x(t + \Delta t).
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 5.7
Das Parallelisierungsaxiom gilt nicht, da die Kontrollen $u \in \mathbb{R}$, die die Relationen definieren, als Potenzen in der Exponentialfunktion (abhängig von t) enthalten sind.

Eingangshomogene Bilinearsysteme

Wir gehen von der Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= mux(t) + bu \\
&= (mx(t) + b)\,u\,, \quad b, m \neq 0;\ t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

aus, deren allgemeine Lösung

$$x(t) = Ce^{umt} - \frac{b}{m}\,, \quad C \in \mathbb{R}$$

lautet bzw. bei dem zugehörigen Anfangswertproblem $x(t_A) = x^A$:

$$x(t) = e^{mu(t-t_A)}\left(x^A + \frac{b}{m}\right) - \frac{b}{m}.$$

Mit analoger Begründung wie bei den zustandshomogenen BLS definieren wir die folgenden Teilmengen von $\mathfrak{P} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{P}^+ &:= \{A \in \mathfrak{P} | x^A > -\frac{b}{m}\} \\
\mathfrak{P}^0 &:= \{A \in \mathfrak{P} | x^A = -\frac{b}{m}\} \\
\mathfrak{P}^- &:= \{A \in \mathfrak{P} | x^A < -\frac{b}{m}\}.
\end{aligned}$$

Jeder Stellgröße $u \in \mathbb{R}$ der Differentialgleichung wird eine binäre Relation $[u]$ des Lösungsraumes $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zugeordnet gemäß der folgenden Vorschrift:

Sei ein Punktepaar $(A, B) \in \mathfrak{P} \times \mathfrak{P}$ mit $A = (t_A, x^A)$, $B = (t_B, x^B)$ vorgegeben .

$$\begin{aligned}
A[u]B \quad :\divideontimes \quad & \Delta t := -t_A + t_B \neq 0 \\
\wedge \quad & \bigvee_{x(t)} [\, \dot{x}(t) = mux(t) + bu \\
\wedge \quad & A = (t, x(t)) \\
\wedge \quad & B = (t + \Delta t, x(t + \Delta t))\,] \\
\divideontimes \quad & x^B = e^{mu\Delta t}\left(x^A + \frac{b}{m}\right) - \frac{b}{m}.
\end{aligned}$$

Weiter haben wir wieder

$$\begin{aligned}
A[\pm\infty]B &:\divideontimes \quad t_A = t_B \wedge x^A \neq x^B \\
A\mathfrak{e}B &:\divideontimes \quad A = B
\end{aligned}$$

und fassen diese Relationen zusammen:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathfrak{R}}^* &:= \{[u] \subset \mathfrak{P} \times \mathfrak{P} | u \in \mathbb{R}\} \\
\boldsymbol{\mathfrak{R}} &:= \boldsymbol{\mathfrak{R}}^* \cup \{[\pm\infty], \mathfrak{e}\}.
\end{aligned}$$

Definition und Satz 5.8

Für die von dem eingangshomogenen BLS in der o. g. Weise definierten **Differentialgleichungsrelative** $(\mathfrak{P}^+, \boldsymbol{\mathfrak{R}})$ *und* $(\mathfrak{P}^-, \boldsymbol{\mathfrak{R}})$ *gilt "scharf einfache Transitivität".*

$$\bigwedge_{A,B \in \mathfrak{P}^+} \overset{1}{\bigvee_{\mathfrak{r} \in \mathcal{R}}} A\mathfrak{r}B$$

$$\bigwedge_{A,B\in\mathfrak{P}^-} \bigvee_{\mathfrak{r}\in\mathcal{R}}^{1} A\mathfrak{r}B.$$

Beweis:
Es seien Punkte $A, B \in \mathfrak{P}^+$ (o. B. d. A) beliebig vorgegeben. Für $t_A = t_B$ gilt $A[\pm\infty]B$ bzw. $A\mathfrak{e}B$. Es sei also $t_A \neq t_B$. Dann kann die Gleichung

$$x^B = e^{mu(t_B - t_A)}\left(x^A + \frac{b}{m}\right) - \frac{b}{m}$$

nach $u \in \mathbb{R}$ eindeutig aufgelöst werden:

$$u = \frac{\ln|x^B + \frac{b}{m}| - \ln|x^A + \frac{b}{m}|}{m(t_B - t_A)}.$$

Wir definieren daher

$$A * B = \mathfrak{r} \quad :\!\Longleftrightarrow \quad A\mathfrak{r}B.$$

□

Bemerkung 5.9
Die Grundmenge $\mathfrak{P}^0$ wird hier nicht weiter betrachtet, da für alle $u \in \mathbb{R}$ gilt:

$$A[u]B, \quad (A,B) \in (\mathfrak{P}^0 \times \mathfrak{P}^0) \setminus \mathfrak{e}.$$

Wir definieren die Abbildung

$$\begin{cases} (\mathfrak{P}^+ \times \mathfrak{P}^+ \,\dot\cup\, \mathfrak{P}^- \times \mathfrak{P}^-) \setminus ([\pm\infty] \cup \mathfrak{e}) & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ (A,B) & \longmapsto \quad A \cdot B := \frac{\ln|x^B + \frac{b}{m}| - \ln|x^A + \frac{b}{m}|}{m(t_B - t_A)}, \end{cases}$$

die jedem Punktepaar (A, B) das eindeutige $u \in \mathbb{R}$ zuordnet, für das gilt:

$$A[u]B \;\Longleftrightarrow\; -t_A + t_B =: \Delta t \neq 0 \;\wedge$$

$$\bigvee_{x(t)} [\dot{x}(t) = (a + mu)x(t) \wedge A = (t, x(t)) \wedge B = (t + \Delta t, x(t + \Delta t))].$$

Auch hier ergibt sich keine neue Situation, denn

Satz 5.10
Die Relative $(\mathfrak{P}^+, \mathfrak{R})$ und $(\mathfrak{P}^-, \mathfrak{R})$ sind isomorph zu dem affinen Relativ $(\mathfrak{P}, \mathcal{R}'_{\text{aff.}})$ der reellen EUKLID*ischen Ebene $\mathfrak{P} = \mathbb{R}^2$, sind also selbst auch affin.*

Beweis:
Es gibt Bijektionen

$$f : \begin{cases} \mathfrak{P}^+ & \longrightarrow \quad \mathfrak{P} \\ A = (t_A, x^A) & \longmapsto \quad f(A) = f(t_A, x^A) := (t_A, \ln |x^A + \frac{b}{m}|) = (t_A, \ln(x^A + \frac{b}{m})) \end{cases}$$

bzw.

$$f : \begin{cases} \mathfrak{P}^- & \longrightarrow \quad \mathfrak{P} \\ A = (t_A, x^A) & \longmapsto \quad f(A) = f(t_A, x^A) = (t_A, \ln |x^A + \frac{b}{m}|) \end{cases}$$

und

$$g : \begin{cases} \boldsymbol{\mathfrak{R}}^* & \longrightarrow \quad \mathcal{R}^*_{\text{aff.}} \\ [u] & \longmapsto \quad g([u]) := (mu). \end{cases}$$

Dabei gilt

$$A[u]B \quad \divideontimes \quad f(A)g([u])f(B).$$

Die Bijektivität der Abbildungen f und g ist klar.
Es seien Punkte A, B vorgegeben mit $t_A \neq t_B$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathfrak{R}}^* \ni A * B = [u] \quad & \divideontimes \quad A[u]B \\ & \divideontimes \quad \frac{\ln |x^B + \frac{b}{m}| - \ln |x^A + \frac{b}{m}|}{m(t_B - t_A)} = u = A \cdot B \\ & \divideontimes \quad \frac{\ln |x^B + \frac{b}{m}| - \ln |x^A + \frac{b}{m}|}{t_B - t_A} = mu \\ & \divideontimes \quad f(A)(mu)f(B) \\ & \divideontimes \quad f(A)g([u])f(B) \\ & \divideontimes \quad f(A)f(B) = g([u]) \in \mathcal{R}^*_{\text{aff.}}. \end{aligned}$$

Für $t_A = t_B$ gilt trivialerweise

$$\boldsymbol{\mathfrak{R}} \ni A * B = f(A)f(B) \in \mathcal{R}'_{\text{aff.}}.$$

$\square$

Bemerkung 5.11
Für die Erreichbarkeitsrelation $\mathbf{P}$ *gilt:*

$$\mathfrak{P}\mathbf{P} = \mathfrak{P}^+ \dot{\cup} \mathfrak{P}^0 \dot{\cup} \mathfrak{P}^-.$$

Satz 5.12
Die Differentialgleichungsrelative $(\mathfrak{P}^+, \boldsymbol{\mathfrak{R}})$ *und* $(\mathfrak{P}^-, \boldsymbol{\mathfrak{R}})$ *sind zeitinvariant.*

Beweis:
Wegen der Darstellung der Lösungskurven gilt für alle $A, B \in \mathfrak{P}^+$ (o. B. d. A.), $\mathfrak{r} \in \mathfrak{R}^*$ und alle $\Delta t > 0$

$$x^A = x^B \quad \succ \quad x(A\,\mathfrak{r}\Delta t) = x(B\,\mathfrak{r}\Delta t).$$

□

Damit haben wir die erforderliche Kompatibilität für die Definition von

$$(x(A))\,[u]\Delta t := x(A\,[u]\Delta)t$$

und setzen für $x \neq -\frac{b}{m}$ und auch für $x = -\frac{b}{m}$:

$$x\,[u]\Delta t := x(A\,[u]\Delta t) \text{ f. e. bel. } A \text{ mit } x(A) = x.$$

Dann gilt

Satz 5.13
Die allgemeinen Lösungen von $\dot{x}(t) = mux(t) + bu$ sind $\mathfrak{c}$ -Kurven.

Beweis:
Wir zeigen für $x(t) = Ce^{mut} - \frac{b}{m}$; $C, t \in \mathbb{R}$ und $\mathfrak{c} = [u] \in \mathfrak{R}^*$:

$$x(t)\,[u]\Delta t \stackrel{!}{=} x(t + \Delta t).$$

Es ist richtig für $C \neq 0$ und $C = 0$:

$$\begin{aligned}
x(t)\,[u]\Delta t &= x\,[(t, x(t))\,[u]\Delta t] \\
&= x\left[\left(t, Ce^{mut} - \frac{b}{m}\right)\,[u]\Delta t\right] \\
&= x\left[\left(t + \Delta t, e^{mu\Delta t}\left(Ce^{mut} - \frac{b}{m} + \frac{b}{m}\right) - \frac{b}{m}\right)\right] \\
&= x\left[\left(t + \Delta t, Ce^{mu(t+\Delta t)} - \frac{b}{m}\right)\right] \\
&= Ce^{mu(t+\Delta t)} - \frac{b}{m} \\
&= x(t + \Delta t).
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 5.14
Das Parallelisierungsaxiom gilt nicht, da die Kontrollen $u \in \mathbb{R}$, die die Relationen definieren, als Potenzen in der Exponentialfunktion (abhänging von t) enthalten sind.

Natürlich sind dann auch die den eingangshomogenen und zustandshomogenen BLS zugeordneten Relative untereinander isomorph. Zur Unterscheidung versehen wir sie mit dem Index $eBLS$ und $zBLS$.

Satz 5.15

$$\begin{array}{rcl} (\mathfrak{P}^+_{\text{zBLS}}, \boldsymbol{\mathcal{R}}_{\text{zBLS}}) & \cong & (\mathfrak{P}^+_{\text{eBLS}}, \boldsymbol{\mathcal{R}}_{\text{eBLS}}) \\ (\mathfrak{P}^-_{\text{zBLS}}, \boldsymbol{\mathcal{R}}_{\text{zBLS}}) & \cong & (\mathfrak{P}^-_{\text{eBLS}}, \boldsymbol{\mathcal{R}}_{\text{eBLS}}) \end{array}$$

Beweis:
Wir betrachten die Bijektionen (o. B. d. A.)

$$f : \begin{cases} \mathfrak{P}^+_{\text{eBLS}} & \longrightarrow & \mathfrak{P}^+_{\text{zBLS}} \\ A = (t_A, x^A) & \longmapsto & f(A) = f(t_A, x^A) := A' := (t_A, x^A + \frac{b}{m}) \end{cases}$$

$$k : \begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{R}}^*_{\text{eBLS}} & \longrightarrow & \boldsymbol{\mathcal{R}}^*_{\text{zBLS}} \\ [u] & \longmapsto & k([u]) := [u - \frac{a}{m}]. \end{cases}$$

Dann gilt für Punkte $A, B \in \mathfrak{P}^+$ mit $t_A \neq t_B$:

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{\mathcal{R}}^*_{\text{eBLS}} \ni A * B = [u] & \Leftrightarrow & \dfrac{\ln|x^B + \frac{b}{m}| - \ln|x^A + \frac{b}{m}|}{m(t_B - t_A)} = u \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{\ln|x^{B'}| - \ln|x^{A'}|}{m(t_{B'} - t_{A'})} - \dfrac{a}{m} = u - \dfrac{a}{m} \\ & \Leftrightarrow & A'[u - \dfrac{a}{m}]B' \\ & \Leftrightarrow & f(A) * f(B) = k([u]) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}^*_{\text{zBLS}}. \end{array}$$

Für $t_A = t_B$ gilt trivialerweise

$$\boldsymbol{\mathcal{R}}_{\text{eBLS}} \ni A * B = A * B \in \boldsymbol{\mathcal{R}}_{\text{zBLS}}.$$

$\square$

Bilinearsysteme

Wir gehen von der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ax(t) + (mx(t) + b)\,u \\ &= (a + mu)x(t) + b\,u\;, \quad a, b, m \neq 0; t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

aus, die durch Zurückführung auf den linearen Fall gelöst wird:

$$\dot{x}(t) := \alpha x(t) + \beta\,; \quad \alpha := a + mu, \beta := bu$$

$$\rightsquigarrow x(t) = \begin{cases} Ce^{\alpha t} - \frac{\beta}{\alpha} & f. \quad \alpha \neq 0 \\ \beta t + C & f. \quad \alpha = 0 \end{cases}, \; C \in \mathbb{R}.$$

Daher erhalten wir als allgemeine Lösung

$$x(t) = \begin{cases} Ce^{(a+mu)t} - \frac{bu}{a+mu} & f. \quad u \neq -\frac{a}{m} \\ but + C & f. \quad u = -\frac{a}{m} \end{cases}, C \in \mathbb{R}$$

bzw. bei dem zugehörigen Anfangswertproblem $x(t_A) = x^A$

$$x(t) = \begin{cases} e^{(a+mu)(t-t_A)}(x^A + \frac{bu}{a+mu}) - \frac{bu}{a+mu} & f. \quad u \neq -\frac{a}{m} \\ -\frac{ab}{m}(t - t_A) + x^A & f. \quad u = -\frac{a}{m}. \end{cases}$$

Die Definition $x(t)$ für $u = -\frac{a}{m}$ ist gerade die Lösungskurve für $\dot{x}(t) = 0 \cdot x(t) + bu$.

Die Untersuchung der erreichbaren Menge von einem Punkt $A = (t_A, x^A) \in \mathbb{R}^2$ führt zu der Frage, welche x^B bei gegebenem $\Delta t := t - t_A = const. > 0$ mit der Funktion $x(u,t)_{t=const.}$ ($u \in \mathbb{R}$) erreicht werden. Daher betrachten wir folgende Funktion $x(u) := x(u, \Delta t)_{\Delta t = const. > 0}$:

$$\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ u \longmapsto x(u) := \begin{cases} e^{(a+mu)\Delta t}(x^A + \frac{bu}{a+mu}) - \frac{bu}{a+mu} & f. \quad u \neq -\frac{a}{m} \\ -\frac{ab}{m}\Delta t + x^A & f. \quad u = -\frac{a}{m}. \end{cases} \end{cases}$$

Die Funktion $x(u)$ ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$, denn es gilt mit der Regel von DE L'HOSPITAL:

$$\begin{aligned} \lim_{u \to -\frac{a}{m}} x(u) &= x^A + \lim_{u \to -\frac{a}{m}} \left[\frac{bu}{a + mu} \left(e^{(a+mu)\Delta t} - 1 \right) \right] \\ &= x^A + \frac{-\frac{ab}{m} \lim_{u \to -\frac{a}{m}} (e^{(a+mu)\Delta t} - 1)}{\lim_{u \to -\frac{a}{m}} (a + mu)} \end{aligned}$$

$$= \quad x^A - \frac{ab}{m} \frac{\lim_{u \to -\frac{a}{m}} (m\, \Delta t\, e^{(a+mu)\Delta t})}{\lim_{u \to -\frac{a}{m}} m}$$
$$= \quad x^A - \frac{ab}{m} \Delta t = x(-\frac{a}{m}, \Delta t)_{\Delta t = const.}.$$

Hilfssatz 5.16
Kurvendiskussionen für die Funktion $x(u)$ liefern folgende Ergebnisse:

1. $x^A > -\frac{b}{m}$

   (a) $m > 0$

   $$\lim_{u \to \infty} x(u) = \infty, \quad \lim_{u \to -\infty} x(u) = -\frac{b}{m}.$$

   i. $ab > 0$

   $$u < \min\{-\frac{a}{m}, u^*\} \succ x(u) < -\frac{b}{m}$$

   $$\textit{f. e. } u^* \textit{ mit: } 1 - \frac{mx^A + b}{ab}(a + mu^*) = e^{-\Delta t(a+mu^*)}.$$

   ii. $ab < 0$

   $$x(u) > -\frac{b}{m} \textit{ f. a. } u \in \mathbb{R}.$$

   (b) $m < 0$

   $$\lim_{u \to \infty} x(u) = -\frac{b}{m}, \quad \lim_{u \to -\infty} x(u) = \infty.$$

   i. $ab < 0$

   $$u > \max\{-\frac{a}{m}, u^*\} \succ x(u) < -\frac{b}{m}$$

   $$\textit{f. e. } u^* \textit{ mit: } 1 - \frac{mx^A + b}{ab}(a + mu^*) = e^{-\Delta t(a+mu^*)}.$$

   ii. $ab > 0$

   $$x(u) > -\frac{b}{m} \textit{ f. a. } u \in \mathbb{R}.$$

2. $x^A < -\frac{b}{m}$

   (a) $m > 0$

   $$\lim_{u \to \infty} x(u) = -\infty, \quad \lim_{u \to -\infty} x(u) = -\frac{b}{m}.$$

i. $ab < 0$

$$u < \min\{-\frac{a}{m}, u^*\} \succ x(u) > -\frac{b}{m}$$

$$f.\ e.\ u^*\ mit{:}\ 1 - \frac{mx^A + b}{ab}(a + mu^*) = e^{-\Delta t(a+mu^*)}.$$

ii. $ab > 0$

$$x(u) < -\frac{b}{m}\ f.\ a.\ u \in \mathbb{R}.$$

(b) $m < 0$

$$\lim_{u\to\infty} x(u) = -\frac{b}{m}, \quad \lim_{u\to-\infty} x(u) = -\infty.$$

i. $ab > 0$

$$u > \max\{-\frac{a}{m}, u^*\} \succ x(u) > -\frac{b}{m}$$

$$f.\ e.\ u^*\ mit{:}\ 1 - \frac{mx^A + b}{ab}(a + mu^*) = e^{-\Delta t(a+mu^*)}.$$

ii. $ab < 0$

$$x(u) < -\frac{b}{m}\ f.\ a.\ u \in \mathbb{R}.$$

3. $x^A = -\frac{b}{m}$

(a) $m > 0$

$$\lim_{u\to\infty} x(u) = \begin{cases} \infty & f.\ \ ab < 0 \\ -\infty & f.\ \ ab > 0 \end{cases}.$$

$$\lim_{u\to-\infty} x(u) = -\frac{b}{m}.$$

$$x(u) \begin{cases} > -\frac{b}{m} & f.\ \ ab < 0 \\ < -\frac{b}{m} & f.\ \ ab > 0 \end{cases} \ f.\ a.\ u \in \mathbb{R}.$$

(b) $m < 0$

$$\lim_{u\to\infty} x(u) = -\frac{b}{m}.$$

$$\lim_{u\to-\infty} x(u) = \begin{cases} \infty & f.\ \ ab > 0 \\ -\infty & f.\ \ ab < 0 \end{cases}.$$

$$x(u) \begin{cases} > -\frac{b}{m} & f.\ \ ab > 0 \\ < -\frac{b}{m} & f.\ \ ab < 0 \end{cases} \ f.\ a.\ u \in \mathbb{R}.$$

Beweis:

0. Vorbereitungen:
   In den Fällen 1. und 2. ist $x^A = -\frac{b}{m} + k$ f. e. $k \neq 0$.
   In den Behauptungen der Fälle *i.* und *ii.* ist jeweils $x(u) \lesseqgtr -\frac{b}{m}$ zu betrachten. Wir addieren auf beiden Seiten $\frac{bu}{a+mu}$ und dividieren dann auf der linken Seite durch $x^A + \frac{bu}{a+mu}$ (Dabei ist später natürlich auf das Vorzeichen zu achten). Das ergibt:

$$\begin{aligned}\frac{\frac{bu}{a+mu} - \frac{b}{m}}{x^A + \frac{bu}{a+mu}} &= \frac{\frac{bum-b(a+mu)}{m(a+mu)}}{\frac{-b(a+mu)+km(a+mu)+bum}{m(a+mu)}} = \frac{-ab}{-ab+mk(a+mu)} \\ &= \frac{1}{1-\frac{mk}{ab}(a+mu)} =: \frac{1}{1-\gamma(a+mu)}.\end{aligned}$$

   Es ist ferner

$$x^A + \frac{bu}{a+mu} = k - \frac{b}{m} + \frac{bu}{a+mu} = k - \frac{ab}{m(a+mu)} = \frac{m^2uk + mak - ab}{m(a+mu)}.$$

   Das Bild der linearen gebrochenrationalen Funktion $f(u) = \frac{bu}{a+mu}$ ist eine gleichseitige Hyperbel, deren Äste symmetrisch zum Punkt $(-\frac{a}{m}, \frac{b}{m})$ liegen. Es gilt:

$$\lim_{u\to\pm\infty}(x^A + f(u)) = \lim_{u\to\pm\infty}\left(x^A + \frac{bu}{a+mu}\right) = x^A + \frac{b}{m}$$

   und ferner:

$$\begin{aligned} ab < 0 \quad &: \quad \begin{cases} f(u) \in \left(-\infty, \frac{b}{m}\right) & f. \quad u \in \left(-\infty, -\frac{a}{m}\right) \\ f(u) \in \left(\frac{b}{m}, \infty\right) & f. \quad u \in \left(-\frac{a}{m}, \infty\right) \end{cases} \\ ab > 0 \quad &: \quad \begin{cases} f(u) \in \left(\frac{b}{m}, \infty\right) & f. \quad u \in \left(-\infty, -\frac{a}{m}\right) \\ f(u) \in \left(-\infty, \frac{b}{m}\right) & f. \quad u \in \left(-\frac{a}{m}, \infty\right). \end{cases}\end{aligned}$$

1. $x^A > -\frac{b}{m}$

   (a) $m > 0$

$$\lim_{u\to\infty} x(u) = \lim_{u\to\infty} e^{(a+mu)\Delta t} \cdot \left(x^A + \frac{b}{m}\right) - \frac{b}{m} = \infty$$

$$\lim_{u\to-\infty} x(u) = \lim_{u\to-\infty} e^{(a+mu)\Delta t} \cdot \left(x^A + \frac{b}{m}\right) - \frac{b}{m} = -\frac{b}{m}.$$

i. $ab > 0$
Für $u < -\frac{a}{m}$ ist $x^A + \frac{bu}{a+mu} > 0$, also ist zu zeigen:

$$e^{(a+mu)\Delta t} < \frac{1}{1-\gamma(a+mu)}, \quad \gamma > 0,\, a+mu < 0$$

$$\divideontimes \quad 1-\gamma(a+mu) < e^{-\Delta t(a+mu)}.$$

Es gibt mindestens einen Punkt u_0 mit $1-\gamma(a+mu_0) = e^{-\Delta t(a+mu_0)}$, nämlich $u_0 = -\frac{a}{m}$. Für alle $u < \min\{-\frac{a}{m}, u^*\}$ (mit u^* erfüllt auch diese Gleichung) gilt dann $e^{(a+mu)\Delta t} < \frac{1}{1-\gamma(a+mu)}$, denn die Exponentialfunktion $e^{-\Delta t(a+mu)}$ wächst für $a+mu \to -\infty$ und damit für $u \to -\infty$ stärker gegen "Unendlich", als $1-\gamma(a+mu)$.

ii. $ab < 0$
Im Fall $u > -\frac{a}{m}$ folgt

$$\begin{array}{lcl} x^A + \frac{bu}{a+mu} & > & -\frac{b}{m} + \frac{bu}{a+mu} \quad > \quad 0 \text{ und} \\ e^{(a+mu)\Delta t} & > & 1 \end{array}$$

$$\succ \quad e^{(a+mu)\Delta t}\left(x^A + \frac{bu}{a+mu}\right) > \frac{bu}{a+mu} - \frac{b}{m}.$$

Im Fall $u = -\frac{a}{m}$ gilt

$$-\frac{ab}{m}\Delta t + x^A > x^A > -\frac{b}{m}.$$

Im Fall $\frac{a(b-mk)}{m^2k} < u < -\frac{a}{m}$ ist

$$ab - mak - m^2uk < 0 \quad \divideontimes \quad ab < mk(a+mu) \quad \divideontimes \quad \frac{ab}{m(a+mu)} > k$$

$$\divideontimes \quad x^A + \frac{bu}{a+mu} < 0;$$

dann gilt aber die Behauptung, denn

$$e^{(a+mu)\Delta t} < 1 \stackrel{!}{<} \frac{ab}{ab - mk(a+mu)}$$

$$\divideontimes \quad ab - mk(a+mu) > ab \quad \divideontimes \quad -mk < 0.$$

Im Fall $\frac{a(b-mk)}{m^2k} \geq u$ ist dann $x^A + \frac{bu}{a+mu} \geq 0$, also

$$e^{(a+mu)\Delta t}\left(x^A + \frac{bu}{a+mu}\right) \geq 0 > \frac{bu}{a+mu} - \frac{b}{m}.$$

(b) $m < 0$

$$\lim_{u\to\infty} x(u) = \lim_{u\to\infty} e^{(a+mu)\Delta t} \cdot (x^A + \frac{b}{m}) - \frac{b}{m} = -\frac{b}{m}$$

$$\lim_{u\to-\infty} x(u) = \lim_{u\to-\infty} e^{(a+mu)\Delta t} \cdot (x^A + \frac{b}{m}) - \frac{b}{m} = \infty.$$

i. $ab < 0$
Für $u > -\frac{a}{m}$ ist $x^A + \frac{bu}{a+mu} > 0$, also ist zu zeigen:

$$e^{(a+mu)\Delta t} < \frac{1}{1-\gamma(a+mu)}, \qquad \gamma > 0,\ a+mu < 0$$

$$\divideontimes \quad 1-\gamma(a+mu) < e^{-\Delta t(a+mu)}.$$

Es gibt mindestens einen Punkt u_0 mit $1-\gamma(a+mu_0) = e^{-\Delta t(a+mu_0)}$, nämlich $u_0 = -\frac{a}{m}$. Für alle $a+mu < \min\{0, a+mu^*\}$ (mit $a+mu^*$ erfüllt auch diese Gleichung) gilt dann wieder $e^{(a+mu)\Delta t} < \frac{1}{1-\gamma(a+mu)}$. Da $m < 0$, heißt das

$$u > \max\{-\frac{a}{m}, u^*\} \quad \succ \quad x(u) < -\frac{b}{m}.$$

ii. $ab > 0$
Im Fall $u < -\frac{a}{m}$ folgt

$$\begin{array}{lcl} x^A + \frac{bu}{a+mu} & > & -\frac{b}{m} + \frac{bu}{a+mu} \quad > \quad 0 \text{ und} \\ e^{(a+mu)\Delta t} & > & 1 \end{array}$$

$$\succ \quad e^{(a+mu)\Delta t}\left(x^A + \frac{bu}{a+mu}\right) > \frac{bu}{a+mu} - \frac{b}{m}.$$

Im Fall $u = -\frac{a}{m}$ gilt

$$-\frac{ab}{m}\Delta t + x^A > x^A > -\frac{b}{m}.$$

Im Fall $-\frac{a}{m} < u < \frac{a(b-mk)}{m^2k}$ ist

$$ab - mak - m^2uk > 0 \quad \divideontimes \quad ab > mk(a+mu) \quad \divideontimes \quad \frac{ab}{m(a+mu)} > k$$

$$\divideontimes \quad x^A + \frac{bu}{a+mu} < 0;$$

dann gilt aber die Behauptung, denn

$$e^{(a+mu)\Delta t} < 1 \overset{!}{<} \frac{ab}{ab - mk(a+mu)}$$

$$\divideontimes \quad ab - mk(a+mu) < ab \quad \divideontimes \quad -mk > 0.$$

Im Fall $u \geq \frac{a(b-mk)}{m^2k}$ ist dann $x^A + \frac{bu}{a+mu} \geq 0$, also

$$e^{(a+mu)\Delta t}\left(x^A + \frac{bu}{a+mu}\right) \geq 0 > \frac{bu}{a+mu} - \frac{b}{m}.$$

2. $x^A < -\frac{b}{m}$
   Völlig analog.

3. $x^A = -\frac{b}{m}$

   (a) $m > 0$

$$\lim_{u\to-\infty} x(u) = \lim_{u\to-\infty} e^{(a+mu)\Delta t} \cdot 0 - \frac{b}{m} = -\frac{b}{m}.$$

Weiter gilt mit der Regel von DE L'HOSPITAL:

$$\lim_{u\to\infty} e^{(a+mu)\Delta t}\left(x^A + \frac{bu}{a+mu}\right) = \lim_{u\to\infty} e^{(a+mu)\Delta t}\left(-\frac{b}{m} + \frac{bu}{a+mu}\right)$$

$$= \lim_{u\to\infty} \frac{e^{(a+mu)\Delta t}}{-\frac{m(a+mu)}{ab}} = -\frac{ab}{m}\lim_{u\to\infty}\frac{e^{(a+mu)\Delta t}}{a+mu} = \begin{cases} \infty & f.\ \ ab < 0 \\ -\infty & f.\ \ ab > 0 \end{cases},$$

daraus folgt die Behauptung.
Es sei nun $ab < 0$. Wir zeigen f. a. $u \in \mathbb{R}$:

$$x(u) > -\frac{b}{m} \quad \divideontimes \quad e^{(a+mu)\Delta t}\frac{-ab}{(a+mu)m} > \frac{-ab}{(a+mu)m}$$

$$\divideontimes \; -\frac{ab}{(a+mu)m}\left(e^{(a+mu)\Delta t} - 1\right) > 0.$$

Das ist offensichtlich richtig für $u > -\frac{a}{m}$ bzw. für $u < -\frac{a}{m}$. Für $u = -\frac{a}{m}$ ist

$$x(u) = -\frac{ab}{m}\Delta t - \frac{b}{m} > -\frac{b}{m}.$$

Im Fall $ab > 0$ völlig analog.

(b) $m < 0$
Analog.

$\square$

Zunächst lassen wir die Anordnung von $\mathfrak{T}$ außer acht, wir erhalten

Definition 5.17
Das dem Bilinearssystem $\dot{x}(t) = (a + mu)x(t) + bu$ zugeordnete **Differentialgleichungsrelativ** $(\mathfrak{P}, \mathcal{R})$ *wird definiert mit*

1. $\mathfrak{P} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *als Punktmenge.*

2. $\mathcal{R}^* := \{[u] \subset \mathfrak{P} \times \mathfrak{P} | u \in \mathbb{R}\}$ *als Relationenmenge, wobei die Relationen* [u] *wie folgt definiert seien:*

$$\begin{array}{rcl} A[u]B & :\Leftrightarrow & -t_A + t_B =: \Delta t \neq 0 \\ & \wedge & \bigvee_{x(t)} [\dot{x}(t) = ax(t) + (mx(t) + b)\, u \\ & \wedge & A = (t, x(t)) \wedge B = (t + \Delta t, x(t + \Delta t))]. \end{array}$$

3. $\mathcal{R} := \mathcal{R}^* \cup \{[\pm\infty], \mathfrak{e}\}$.

Es gelten dann (bis auf die scharf einfache Transitivität) folgende Eigenschaften eines schwach affinen Relativs:

Satz 5.18

1. *Linkstotalität der Relationen.*

2. *Symmetrie der Relationen.*

3. *Abgeschlossenheit bezüglich Gleichheitsrelation.*

4. *Abgeschlossenheit bezüglich Inversen.*

5. *Die Relationen sind alternierend.*

Beweis:
Die Punkte 1. bis 4. sind trivial.
Zum Punkt 5:
Es sei vorgegeben für ein $[u] \in \mathcal{R}^*$:

$$A[u]C \;\wedge\; C[u]B$$

$$\begin{array}{rl} \divideontimes & x^C = e^{(a+mu)(t_C-t_A)}\left(x^A + \frac{bu}{a+mu}\right) - \frac{bu}{a+mu} \quad \wedge \\ & x^B = e^{(a+mu)(t_B-t_C)}\left(x^C + \frac{bu}{a+mu}\right) - \frac{bu}{a+mu} \end{array}$$

$$\succ \quad x^B = e^{(a+mu)(t_B-t_C)+(a+mu)(t_C-t_A)}\left(x^A + \frac{bu}{a+mu}\right) - \frac{bu}{a+mu} =$$

$$e^{(a+mu)(t_B-t_A)}\left(x^A + \frac{bu}{a+mu}\right) - \frac{bu}{a+mu}$$

$$\divideontimes \quad A\left([u] \cup \mathfrak{e}\right) B.$$

Die Punkte 1. (a) i. bzw. 1. (b) i. zeigen, daß mit dem obigen Ansatz die Relationen nicht mehr scharf einfach transitiv sind.
Betrachten wir einmal den Fall 1. (b) i. ($m < 0, ab < 0$). Die Kurve $x(u)$ kommt für beliebiges $x^A > -\frac{b}{m}, \Delta t := t - t_A = const. > 0$ aus dem Unendlichen, schneidet in irgendeinem Punkt $u_0 \leq \max\{-\frac{a}{m}, u^*\}$ die Parallele zur u-Achse $x = -\frac{b}{m}$, wird dann kleiner als $-\frac{b}{m}$, geht durch ihr (nicht näher zu bestimmendes) Minimum $(u_{Min}, x(u_{Min})$ und konvergiert dann für $u \to \infty$ gegen den Grenzwert $-\frac{b}{m}$. Daher gibt es dann für alle $B = (t_B, x^B)$ mit $x^B < -\frac{b}{m}$ zwei verschiedene $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$A(u_1)B \text{ und } A(u_2)B\,, \quad u_1 \neq u_2.$$

Analoge Überlegungen gibt es auch für die Fälle 1. (a) i. und 2. .
Mit dem Einbezug der Anordnung von $\mathfrak{T}$ definieren wir wieder die Zukunfts- und Vergangenheitsrelationen:

$$\begin{aligned} \langle \dot{u} \rangle &:= \bigcup_{\Delta t \in \mathbb{R}^{>0}} ([u] \cap \Delta t) \\ \langle \dot{u} \rangle^{-1} &:= \left(\bigcup_{\Delta t \in \mathbb{R}^{>0}} ([u] \cap \Delta t) \right)^{-1} \\ &= \bigcup_{\Delta t \in \mathbb{R}^{>0}} ([u] \cap \Delta t)^{-1} \\ &= \bigcup_{\Delta t \in \mathbb{R}^{>0}} ([u] \cap (\Delta t)^{-1}). \end{aligned}$$

Wir fassen diese zusammen

$$\begin{aligned} \mathfrak{V} &:= \{\langle \dot{u} \rangle^{-1} \mid u \in \mathbb{R}\} \\ \mathfrak{Z} &:= \{\langle \dot{u} \rangle \mid u \in \mathbb{R}\} \\ \mathfrak{R} &:= \mathfrak{V} \cup \mathfrak{Z} \cup \{[\pm\infty], \mathfrak{e}\}. \end{aligned}$$

Mit den Definitionen

$$\begin{aligned}
\mathfrak{P}^{+} &:= \{A \in \mathfrak{P} | x^{A} > -\frac{b}{m}\} \\
\mathfrak{P}^{0} &:= \{A \in \mathfrak{P} | x^{A} = -\frac{b}{m}\} \\
\mathfrak{P}^{-} &:= \{A \in \mathfrak{P} | x^{A} < -\frac{b}{m}\}
\end{aligned}$$

gilt wegen Hilfssatz 5.16 unabhängig von der Wahl der Koeffizienten a, b, m die

Bemerkung 5.19

$$\begin{aligned}
\mathfrak{P}^{+}\mathbf{P} &\supset \mathfrak{P}^{+} \\
\mathfrak{P}^{0}\mathbf{P} &= \{B \in \mathfrak{P} | (ab)m\,(x^{B} + \frac{b}{m}) < 0\} \\
\mathfrak{P}^{-}\mathbf{P} &\supset \mathfrak{P}^{-}.
\end{aligned}$$

Obwohl die (scharf) einfache Transitivität des Relativs $(\mathfrak{P}, \mathcal{R})$ nicht gilt, können wir eine schwächere Form beweisen; dazu zunächst eine Definition.

Definition 5.20
Wir nennen ein Relativ $(\mathfrak{P}, \mathcal{R})$ **"produkttransitiv"**, *wenn gilt:*

$$\mathfrak{P} \times \mathfrak{P} = \bigcup_{\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{R}} \mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}.$$

Bemerkung 5.21
Aus scharf einfacher Transitivität (SET) eines beliebigen Relativs $(\mathfrak{P}, \mathcal{R})$ *folgt einfache Transitivität (ET) und daraus die Produkttransitivität (PT).*

$$\begin{aligned}
&\textit{(SET)} \qquad \mathfrak{P} \times \mathfrak{P} = \dot{\bigcup_{\mathfrak{A} \in \mathcal{R}}} \mathfrak{A} \\
&\textit{(ET)} \qquad \mathfrak{P} \times \mathfrak{P} = \bigcup_{\mathfrak{A} \in \mathcal{R}} \mathfrak{A} \\
&\textit{(PT)} \qquad \mathfrak{P} \times \mathfrak{P} = \bigcup_{\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{R}} \mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}
\end{aligned}$$

Satz 5.22
Das Differentialgleichungsrelativ $(\mathfrak{P}, \mathfrak{R})$ *ist produkttransitiv, wir zeigen*

$$\mathfrak{P} \times \mathfrak{P} \overset{!}{\subset} \bigcup_{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2 \in \mathfrak{R}} \mathfrak{r}_1 \circ \mathfrak{r}_2.$$

Beweis:
Es sei $(A, B) \in \mathfrak{P} \times \mathfrak{P}$ beliebig vorgegeben. Für $t_A = t_B$ ist die Behauptung mit $A[\pm\infty]B$ oder $A\mathfrak{e}B$ klar, es sei also $t_A \neq t_B$.
Wir beweisen die Aussage für $m > 0, ab > 0$, die anderen Fälle verlaufen analog.

1. $x^A > -\frac{b}{m}, x^B > -\frac{b}{m}$
   Dann gibt es ein $u \in \mathbb{R}$ mit $A\langle\dot{u}\rangle B$ bzw. $A\langle\dot{u}\rangle^{-1}B$. Setze also
   $$\begin{aligned} \mathfrak{r}_1 &:= \langle\dot{u}\rangle && \text{f.} \quad t_A < t_B \\ \mathfrak{r}_1 &:= \langle\dot{u}\rangle^{-1} && \text{f.} \quad t_A > t_B \\ \mathfrak{r}_2 &:= \mathfrak{e}. \end{aligned}$$

2. $x^A > -\frac{b}{m}, x^B = -\frac{b}{m}$
   Falls $t_A < t_B$, siehe Fall 1. Es sei also $t_A > t_B$. Es gibt ein $C = (t_C, x^C) \in \mathfrak{P}$ mit $x^C < -\frac{b}{m}$ und $A\langle\dot{u_1}\rangle C$ f. e. $u_1 \in \mathbb{R}$ sowie ein $u_2 \in \mathbb{R}$ mit $B\langle\dot{u_2}\rangle C$, $(t_B < t_A < t_C)$. Setze also
   $$\begin{aligned} \mathfrak{r}_1 &:= \langle\dot{u_1}\rangle \\ \mathfrak{r}_2 &:= \langle\dot{u_2}\rangle^{-1}. \end{aligned}$$

3. $x^A > -\frac{b}{m}, x^B < -\frac{b}{m}$
   (a) $t_A < t_B$
   Es gibt ein $C = (t_C, -\frac{b}{m}) \in \mathfrak{P}$ mit $A\langle\dot{u_1}\rangle C$ f. e. g. $u_1 \in \mathbb{R}$ und dann ein $u_2 \in \mathbb{R}$ mit $C\langle\dot{u_2}\rangle B$. Setze also
   $$\begin{aligned} \mathfrak{r}_1 &:= \langle\dot{u_1}\rangle \\ \mathfrak{r}_2 &:= \langle\dot{u_2}\rangle. \end{aligned}$$
   (b) $t_A > t_B$
   Analog Fall 2.

4. $x^A = -\frac{b}{m}, x^B \geq -\frac{b}{m}$
   (a) $t_A < t_B$
   Wegen des Verlaufs der Kurven $x(u)$ gibt es ein $u_1 \in \mathbb{R}$ und ein $C = (t_C, x^C) \in \mathfrak{P}$ mit $x^C < -\frac{b}{m}$ und $A\langle\dot{u_1}\rangle C$, $(t_A < t_B < t_C)$ sowie auch ein $u_2 \in \mathbb{R}$ mit $B\langle\dot{u_2}\rangle C$, $(t_B < t_C)$. Setze also
   $$\begin{aligned} \mathfrak{r}_1 &:= \langle\dot{u_1}\rangle \\ \mathfrak{r}_2 &:= \langle\dot{u_2}\rangle^{-1}. \end{aligned}$$

(b) $t_A > t_B$

i. $x^B > -\frac{b}{m}$
Es existiert ein $u \in \mathbb{R}$ mit $B\langle \dot{u} \rangle A$. Setze

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}_1 &:= \langle \dot{u} \rangle^{-1} \\ \mathfrak{r}_2 &:= \mathfrak{e}. \end{aligned}$$

ii. $x^B = -\frac{b}{m}$
Wegen des Verlaufs der Kurven $x(u)$ gibt es zunächst ein $u_1 \in \mathbb{R}$ und ein $C = (t_C, x^C) \in \mathfrak{P}$ mit $x^C > -\frac{b}{m}$ und $C\langle \dot{u_1} \rangle A$, $(t_C < t_B < t_A)$. Für diesen Punkt C gibt es andererseits aber auch ein $u_2 \in \mathbb{R}$ mit $C\langle \dot{u_2} \rangle B$, $(t_C < t_B)$. Setze also

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}_1 &:= \langle \dot{u_1} \rangle^{-1} \\ \mathfrak{r}_2 &:= \langle \dot{u_2} \rangle. \end{aligned}$$

5. $x^A = -\frac{b}{m}, x^B < -\frac{b}{m}$

(a) $t_A < t_B$
Dann gibt es ein $u \in \mathbb{R}$ mit $A\langle \dot{u} \rangle B$. Setze also

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}_1 &:= \langle \dot{u} \rangle \\ \mathfrak{r}_2 &:= \mathfrak{e}. \end{aligned}$$

(b) $t_A > t_B$
Es gibt ein $C = (t_C, x^C) \in \mathfrak{P}$ mit $x^C < -\frac{b}{m}$ und $A\langle \dot{u_1} \rangle C$ f. e. $u_1 \in \mathbb{R}$ sowie ein $u_2 \in \mathbb{R}$ mit $B\langle \dot{u_2} \rangle C$, $(t_B < t_A < t_C)$. Setze also

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}_1 &:= \langle \dot{u_1} \rangle \\ \mathfrak{r}_2 &:= \langle \dot{u_2} \rangle^{-1}. \end{aligned}$$

6. $x^A < -\frac{b}{m}, x^B \geq -\frac{b}{m}$

(a) $t_A < t_B$
Wegen des Verlaufs der Kurven $x(u)$ gibt es zunächst ein $u_2 \in \mathbb{R}$ und ein $C = (t_C, x^C) \in \mathfrak{P}$ mit $x^C < -\frac{b}{m}$ und $B\langle \dot{u_2} \rangle C$, $(t_A < t_B < t_C)$. Für

diesen Punkt C gibt es andererseits aber auch ein $u_1 \in \mathbb{R}$ mit $A\langle \dot{u_1}\rangle C$, $(t_A < t_C)$. Setze also

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}_1 &:= \langle \dot{u_1}\rangle \\ \mathfrak{r}_2 &:= \langle \dot{u_2}\rangle^{-1}. \end{aligned}$$

(b) $t_B < t_A$
Es gibt ein $u_2 \in \mathbb{R}$ und ein $C = (t_C, x^C) \in \mathfrak{P}$ mit $x^C < -\frac{b}{m}$ und $B\langle \dot{u_2}\rangle C$, $(t_B < t_C < t_A)$. Für diesen Punkt C gibt es aber auch ein $u_1 \in \mathbb{R}$ mit $C\langle \dot{u_1}\rangle A$, $(t_C < t_A)$. Setze

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}_1 &:= \langle \dot{u_1}\rangle^{-1} \\ \mathfrak{r}_2 &:= \langle \dot{u_2}\rangle^{-1}. \end{aligned}$$

7. $x^A, x^B < -\frac{b}{m}$
Es gibt ein $u \in \mathbb{R}$ mit $A\langle \dot{u}\rangle B$ bzw. $A\langle \dot{u}\rangle^{-1} B$. Setze also

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}_1 &:= \langle \dot{u}\rangle & \text{f.} \quad & t_A < t_B \\ \mathfrak{r}_1 &:= \langle \dot{u}\rangle^{-1} & \text{f.} \quad & t_A > t_B \\ \mathfrak{r}_2 &:= \mathfrak{e}. \end{aligned}$$

□

Satz 5.23
Das Differentialgleichungsrelativ $(\mathfrak{P}, \mathcal{R})$ *ist zeitinvariant:*
Für alle $A, B \in \mathfrak{P}, \mathfrak{r} \in \mathcal{R}$ *und alle* $\Delta t > 0$ *gilt*

$$x^A = x^B \quad \succ \quad x(A\,\mathfrak{r}\Delta t) = x(B\,\mathfrak{r}\Delta t).$$

Beweis:
Es sei $\mathfrak{r} = [r] \in \mathcal{R}$ f. e. $r \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned} x(A\,\mathfrak{r}\Delta t) &= e^{(a+mr)\Delta t}\left(x^A + \frac{br}{a+mr}\right) - \frac{br}{a+mr} \\ &= e^{(a+mr)\Delta t}\left(x^B + \frac{br}{a+mr}\right) - \frac{br}{a+mr} \\ &= x(B\,\mathfrak{r}\Delta t). \end{aligned}$$

□

Damit haben wir die erforderliche Kompatibilität für die Definition von

$$(x(A))\,[u]\Delta t := x(A\,[u]\Delta)t.$$

Wir setzen daher

$$x\,[u]\Delta t := x(A\,[u]\Delta t) \text{ f. e. bel. } A \text{ mit } x(A) = x.$$

Dann gilt

Satz 5.24
Die allgemeinen Lösungen von $\dot{x}(t) = (a + mu)x(t) + bu$ sind $\mathfrak{c}$ -Kurven.

Beweis:
Wir zeigen für $x(t) = Ce^{(a+mut)} - \frac{bu}{a+mu}$; $C, t \in \mathbb{R}$ und $\mathfrak{c} = [u] \in \mathcal{R}$:

$$x(t)\,[u]\Delta t \stackrel{!}{=} x(t + \Delta t).$$

Es ist

$$\begin{aligned}
x(t)\,[u]\Delta t &= x\,[(t, x(t))\,[u]\Delta t] \\
&= x\left[\left(t, Ce^{(a+mu)t} - \frac{bu}{a+mu})\right)\,[u]\Delta t\right] \\
&= x\left[\left(t + \Delta t, e^{(a+mu)\Delta t}\left(Ce^{(a+mu)t} - \frac{bu}{a+mu} + \frac{bu}{a+mu}\right) - \frac{bu}{a+mu}\right)\right] \\
&= x\left(t + \Delta t, Ce^{(a+mu)(t+\Delta t)} - \frac{bu}{a+mu}\right) \\
&= Ce^{(a+mu)(t+\Delta t)} - \frac{bu}{a+mu} \\
&= x(t + \Delta t).
\end{aligned}$$

$\square$

Multilinearsysteme

Wir gehen von der Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= nx(t)^2 + (a + m\,u)x(t) =: g(x) \\ &= ax(t) + nx(t)^2 + mx(t)\,u\,, \quad n, m \in \mathbb{R}^{\neq 0},\, a \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

aus. (Für $n = 0$ liegt ein zustandshomogenes BLS vor, bei $m = 0$ gibt es keine Einwirkungsmöglichkeiten für $u \in \mathbb{R}$.)
Mit den Definitionen $N := n, S := a + mu$ ist das vorgegebene eingliedrige Multilinearsystem

$$\dot{x}(t) = Nx(t)^2 + Sx(t)$$

ein Spezialfall der BERNOULLIschen Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = \alpha(t)x(t) + \beta(t)x(t)^\rho \quad (\rho > 1)$$

und auch Spezialfall der RICCATIschen Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = \alpha(t)x(t)^2 + \beta(t)x(t) + \gamma(t).$$

Man nennt Differentialgleichungen der Form

$$\dot{x}(t) = \gamma x(t) - \tau x(t)^2 \quad (\gamma, \tau > 0)$$

auch *logistische* Differentialgleichungen.
Wegen $m \neq 0$ werden wir die gesamten weiteren Betrachtungen der Einfachheit halber statt mit u über $S := a + mu$ führen, denn die Abbildung

$$\mathbb{R} \ni u \longmapsto a + mu \in \mathbb{R}$$

ist eine Bijektion. Wir geben zunächst die Lösungen von

$$\dot{x}(t) = g(x) := Nx(t)^2 + Sx(t)$$

an (Heuser, 1989).

1. Es sei zunächst $g(x) \neq 0$ f. a. $x(t), t \in \mathbb{R}$, d. h. $x(t) \neq 0, -\frac{S}{N}$ f. a. $t \in \mathbb{R}$. Dann ergibt sich als allgemeine Lösung

$$x(t) = \begin{cases} \frac{C}{N}\frac{Se^{St}}{1-Ce^{St}} & f. \quad S \neq 0 \\ -\frac{1}{Nt+C} & f. \quad S = 0 \end{cases}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

   Unter den o. g. Voraussetzungen kann dann ein Anfangswert
   $x(t_A) = x^A$ ($\neq 0, -\frac{S}{N}$) einbezogen werden.

(a) $S \neq 0$

$$\begin{aligned}
x(t_A) = \;& x^A = \frac{C}{N}\frac{Se^{St_A}}{1 - Ce^{St_A}} \\
\Leftrightarrow \;& Nx^A - CNx^Ae^{St_A} = CSe^{St_A} \\
\Leftrightarrow \;& C = \frac{Nx^A}{e^{St_A}(Nx^A + S)} \\
\leadsto \quad x(t) = \;& \frac{x^A}{e^{St_A}(Nx^A + S)} \frac{Se^{St}}{\frac{e^{St_A}(Nx^A+S) - Nx^Ae^{St}}{e^{St_A}(Nx^A+S)}} \\
\Leftrightarrow \;& x(t) = \frac{Sx^A}{e^{-S(t-t_A)}(Nx^A + S) - Nx^A}.
\end{aligned}$$

(b) $S = 0$

$$\begin{aligned}
x(t_A) = \;& x^A = -\frac{1}{Nt_A + C} \\
\Leftrightarrow \;& Nt_Ax^A + Cx^A = -1 \\
\Leftrightarrow \;& C = -\frac{1 + Nt_Ax^A}{x^A} \\
\leadsto \quad x(t) = \;& -\frac{1}{Nt - \frac{1+Nt_Ax^A}{x^A}} = \frac{x^A}{1 - Nx^A(t - t_A)}.
\end{aligned}$$

2. Es sei nun $g(x) = 0$ f. e. $t \in \mathbb{R}$, d. h. $x(t) = 0$ f. e. t oder $x(t) = -\frac{S}{N}$ f. e. t. Dann erhalten wir als allgemeine Lösungen

$$x(t) = C \text{ f. a. } t \in \mathbb{R}, C = \textit{const.}.$$

Der Einbezug der entsprechenden Anfangsbedingung $x(t_A) = x^A$ liefert:

(a) $S = 0$

$$x(t) = 0 \text{ f. a. } t \in \mathbb{R}, \quad x(t_A) = 0.$$

(b) $S \neq 0$

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{f. a.} \quad t \in \mathbb{R}, \quad x(t_A) = 0 \\ -\frac{S}{N} & \text{f. a.} \quad t \in \mathbb{R}, \quad x(t_A) = -\frac{S}{N}. \end{cases}$$

Der Fall 2. kann unter dem ersten mitgeführt werden, denn dort gilt für $S = 0$ und $x^A = 0$

$$x(t) = \frac{0}{1 - 0 \cdot N(t - t_A)} = 0 \quad \text{ f. a. } t \in \mathbb{R},$$

und für $S \neq 0$ gilt sowohl für $x^A = 0$

$$x(t) = \frac{S \cdot 0}{e^{-S(t-t_A)}S} = 0 \quad \text{f. a. } t \in \mathbb{R}$$

als auch für $x^A = -\frac{S}{N}$

$$x(t) = \frac{-\frac{S^2}{N}}{e^{-S(t-t_A)} \cdot 0 + S} = -\frac{S}{N} \quad \text{f. a. } t \in \mathbb{R}.$$

Wir haben demnach als Lösung des Anfangswertproblems
$\dot{x}(t) = Nx(t)^2 + Sx(t),\ x(t_A) = x^A$ erhalten:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{Sx^A}{e^{-S(t-t_A)}(Nx^A+S)-Nx^A} & f. \quad S \neq 0 \\ \frac{x^A}{1-Nx^A(t-t_A)} & f. \quad S = 0. \end{cases}$$

Die Analyse der erreichbaren Menge eines Punktes $A = (t_A, x^A)$ führt zu der Frage, welche x^B durch Variation mit $S \in \mathbb{R}$ und damit mit $u \in \mathbb{R}$ mit der Lösungskurve $x(S, \Delta t)|_{\Delta t = const. > 0}$ erreicht werden. Daher betrachten wir die Funktion $x(S) := x(S, \Delta t)|_{\Delta t = const. > 0}$:

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ S & \longmapsto & x(S) := \begin{cases} \frac{Sx^A}{e^{-S(t-t_A)}(Nx^A+S)-Nx^A} & f. \quad S \neq 0 \\ \frac{x^A}{1-Nx^A(t-t_A)} & f. \quad S = 0. \end{cases} \end{cases}$$

Der Übergang an der Stelle $S = 0$ ist stetig im Fall $1 - Nx^A\Delta t \neq 0$, (der Fall $1 - Nx^A\Delta t = 0$ wird in Bemerkung 5.28 behandelt), denn es gilt mit Anwendung der Regel von DE L'HOSPITAL ($\Delta t := t - t_A > 0$) :

$$\begin{aligned} \lim_{S \to 0} x(S, \Delta t)|_{\Delta t = const.} &= \lim_{S \to 0} \frac{x^A}{-\Delta t e^{-S\Delta t}(Nx^A + S) + e^{-S\Delta t}} \\ &= \frac{x^A}{1 - Nx^A\Delta t} = x(S, \Delta t)|_{S=0}. \end{aligned}$$

Weiter gilt:

1. $x^A \neq 0$
   $x(S)$ hat keine Nullstellen (im Zähler)

$$\lim_{S \to \infty} x(S, \Delta t)|_{\Delta t = const.} = \lim_{S \to \infty} x^A \frac{S}{Nx^A(e^{-S\Delta t} - 1) + Se^{-S\Delta t}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{cases} \infty & f.\quad N<0 \\ -\infty & f.\quad N>0 \end{cases} \\
\lim_{S\to-\infty} x(S,\Delta t)|_{\Delta t=const.} &= \lim_{S\to-\infty} \frac{x^A}{e^{-S\Delta t}[-\Delta t(Nx^A+S)+1]} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

2. $x^A = 0$

$$x(t) = 0 \text{ f. a. } S \in \mathbb{R}.$$

Die Funktion $x(S,t)|_{t=const.}$ kann aber auch durch Nullstellen im Nenner Pole mit Vorzeichenwechsel ausweisen, daher wird zunächst eine Kurvendiskussion für

$$f(S) := e^{-\Delta t S}(Nx^A + S) - Nx^A\,, \quad \Delta t := t - t_A > 0; N, x^A \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

durchgeführt.

Hilfssatz 5.25

1. *Die Funktion f ist stetig und besitzt eine Nullstelle an $S_0 = 0$.*
2. $\lim_{S\to\infty} f(S) = -Nx^A$.
3. $\lim_{S\to-\infty} f(S) = -\infty$.
4. *f hat ein Maximum an $S_M = \frac{1}{\Delta t} - Nx^A$ mit*

$$f(S_M) = e^{Nx^A\Delta t - 1}\frac{1}{\Delta t} - Nx^A = \begin{cases} = 0 & f.\quad S_M = 0 \\ > 0 & f.\quad S_M \neq 0 \end{cases}.$$

5. $f(S_M) > -Nx^A$.

Beweis:

1. Klar.
2. $\lim_{S\to\infty} f(S) = \lim_{S\to\infty}(Se^{-\Delta t S} + Nx^A(e^{-\Delta t S} - 1)) = -Nx^A$.
3. Klar.
4. Es ist

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial S} f(S) &= e^{-\Delta t S}[1 - \Delta t(Nx^A + S)] \\
\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial}{\partial S} f(S)\right) &= -\Delta t e^{-\Delta t S}[2 - \Delta t(Nx^A + S)].
\end{aligned}
$$

$$\frac{\partial}{\partial S} f(S_M) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S_M = \frac{1}{\Delta t} - Nx^A$$
$$\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial}{\partial S} f\left(\tfrac{1}{\Delta t} - Nx^A\right)\right) = -\Delta t e^{-\Delta t S_M} < 0.$$
$$f\left(\tfrac{1}{\Delta t} - Nx^A\right) = e^{-\Delta t(\frac{1}{\Delta t} - Nx^A)} \frac{1}{\Delta t} - Nx^A \geq 0 \text{ stimmt, denn}$$

$$e^{Nx^A \Delta t - 1} > Nx^A \Delta t \quad \text{f. a.} \quad Nx^A \Delta t \neq 1$$
$$e^{Nx^A \Delta t - 1} = Nx^A \Delta t \quad \text{falls} \quad Nx^A \Delta t = 1.$$

5. $f(\frac{1}{\Delta t} - Nx^A) = e^{-\Delta t(\frac{1}{\Delta t} - Nx^A)} \frac{1}{\Delta t} - Nx^A > -Nx^A$.

□

Die Anzahl der möglichen Nullstellen von $f(S)$ benennt

Hilfssatz 5.26

1. $Nx^A < 0$
$$S_M = \frac{1}{\Delta t} - Nx^A > 0 \wedge f(S_M) > 0,$$
also gibt es keine weitere Nullstelle (außer für $S_0 = 0$).

2. $Nx^A > 0$

   (a) $S_M > 0$*: Es gibt eine weitere Nullstelle* S_P *mit* $S_P > S_M > S_0$.

   (b) $S_M < 0$*: Es gibt eine weitere Nullstelle* S_P *mit* $S_P < S_M < S_0$.

   (c) $S_M = 0$*: Es gibt nur die Nullstelle* $S_0 = S_M$.

Beweis:

1. $Nx^A < 0$
   Gäbe es eine weitere Nullstelle $S_0 < 0$, so müßte es auch ein weiteres Maximum $S_M < 0$ geben. Gäbe es eine weitere Nullstelle $S_0 > 0$, so müßte es auch ein Minimum geben, da der Grenzwert von $f(S)$ für $S \to \infty$ positiv ist.

2. $Nx^A > 0$

   (a) $S_M > 0$
   Der Graph der Funktion $f(S)$ kommt aus $-\infty$, geht durch den Ursprung, hat in $S_M = \frac{1}{\Delta t} - Nx^A$ sein Maximum mit $f(S_M) > 0$, muß dann aber wieder die S-Achse in einem Punkt $S_P > S_M > S_0$ schneiden, da der Grenzwert für $S \to \infty$ mit $-Nx^A$ kleiner als Null ist. Weitere Nullstellen kann es nicht geben, sonst lägen weitere Maxima oder Minima vor.

(b) $S_M < 0$
Der Graph der Funktion $f(S)$ kommt aus $-\infty$, schneidet die S-Achse im Punkt $S_P < 0$, hat dann in $S_M < 0$ sein Maximum mit $f(S_M) > 0$, schneidet dann wieder die x-Achse im Nullpunkt S_0 und konvergiert für $S \to \infty$ gegen $-Nx^A < 0$. Es gibt wieder keine weiteren Nullstellen.

(c) $S_M = 0$
Ist also $Nx^A \Delta t = 1 \;\;\divideontimes\;\; S_M = 0 = S_0$, so fällt das Maximum S_M mit der Nullstelle zusammen, die Funktion $f(S)$ verläuft dann bis auf den Punkt $(0,0)$ im Negativen, hat also insbesondere keine weiteren Nullstellen.

$\square$

Mit Anwendung dieser Ergebnisse auf $x(S) := x(S, \Delta t)|_{\Delta t = const. > 0}$ können wir die erreichbaren Mengen angeben:

Hilfssatz 5.27

1. $N > 0$

(a) $Nx^A < 0$

$$\{x(S, \Delta t)_{\Delta t = const.} | S \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^{<0}.$$

(b) $Nx^A > 0$

$$\bigvee_{S_{\max} > S_P} x(S_{\max}) < 0 \wedge \{x(S, \Delta t)_{\Delta t = const.} | S \in \mathbb{R}^{\neq S_P}\} = (-\infty, x(S_{\max})] \cup \mathbb{R}^{>0}$$

2. $N < 0$

(a) $Nx^A < 0$

$$\{x(S, \Delta t)_{\Delta t = const.} | S \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^{>0}.$$

(b) $Nx^A > 0$

$$\bigvee_{S_{\min} > S_P} x(S_{\min}) > 0 \wedge \{x(S, \Delta t)_{\Delta t = const.} | S \in \mathbb{R}^{\neq S_P}\} = \mathbb{R}^{<0} \cup [x(S_{\min}), \infty).$$

3. $Nx^A = 0 \quad \divideontimes \quad x^A = 0$

$$\{x(S, \Delta t)_{\Delta t = const.} | S \in \mathbb{R}\} = \{0\}.$$

Beweis:

1. $N > 0$

   (a) $Nx^A < 0$
   Dann ist $x(S, \Delta t)|_{\Delta t = const.} = \frac{Sx^A}{f(S)}$ stetig für alle $S \in \mathbb{R}$, insbesondere auch an $S = 0$ f. a. $x^A < 0$.
   Für $S < 0$ ist $f(S) < 0$ und $Sx^A > 0$, also $x(S) < 0$.
   Für $S = 0$ ist $x(S) = \frac{x^A}{1 - Nx^A \Delta t} < 0$, denn $1 - Nx^A \Delta t > 1$.
   Für $S > 0$ ist $f(S) > 0$ und $Sx^A < 0$, also $x(S) < 0$,
   insgesamt also $x(S) < 0 \wedge x(S) \neq 0$ f. a. $S \in \mathbb{R}$.

   (b) $Nx^A > 0$

      i. $S_M = \frac{1}{\Delta t} - Nx^A \neq 0$
      Dann hat $x(S, \Delta t)|_{\Delta t = const.}$ an der Nullstelle $S_P \, (\neq 0)$ von $f(S)$ einen Pol mit Vorzeichenwechsel:

$$\begin{array}{lcl} \lim_{S \to -\infty} x(S) = 0 & , & \lim_{S \to \infty} x(S) = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{S \to S_P \\ S < S_P}} x(S) = \infty & , & \lim\limits_{\substack{S \to S_P \\ S > S_P}} x(S) = -\infty \\ x(S) < 0 \text{ f. a. } S > S_P. & & \end{array}$$

      Der Beweis für diese Zeilen wird über die Betrachtungen mit $f(S)$ geführt.

      A. $S_M > 0$
      Dann ist $S_P > S_M > S_0 = 0$, damit $Sx^A > 0$ und $f(S) > 0$ für $0 < S < S_P$ bzw. $f(S) < 0$ für $S > S_P$.

      B. $S_M < 0$
      Dann ist $S_P < S_M < S_0 = 0$, damit $Sx^A < 0$ und $f(S) < 0$ für $S < S_P$ bzw. $f(S) > 0$ für $0 > S > S_P$.

      Wegen Stetigkeit und Nichtvorhandensein von Nullstellen der Funktion $x(S)$ gilt demnach $x(S) < 0$ für $S > S_P$. Dann gibt es aber auch das angegebene Maximum im Bereich (S_P, ∞).

      ii. $S_M = 0$
      Dann hat $f(S)$ nur die Nullstelle $S_M = S_0 = 0$. Allerdings liegt dann auch hier ein Pol mit Vorzeichenwechsel vor:

$$\begin{array}{lcl} \lim_{S \to -\infty} x(S) = 0 & , & \lim_{S \to \infty} x(S) = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{S \to 0 \\ S < 0}} x(S) = \infty & , & \lim\limits_{\substack{S \to 0 \\ S > 0}} x(S) = -\infty \\ x(S) < 0 \text{ f. a. } S > S_P. & & \end{array}$$

Wir betrachten mit Anwendung der Regel von DE L'HOSPITAL

$$\begin{aligned}\lim_{S\to 0} x(S) &= \lim_{S\to 0} \frac{x^A}{-\Delta t e^{-S\Delta t}(Nx^A + S) + e^{-S\Delta t}} \\ &= \lim_{S\to 0} \frac{x^A}{e^{-S\Delta t}[-Nx^A\Delta t - S\Delta t + 1]} \\ &= -\frac{x^A}{\Delta t} \lim_{S\to 0} \frac{1}{Se^{-S\Delta t}} = \begin{cases} -\infty & \text{f. } S > 0 \\ +\infty & \text{f. } S < 0 \end{cases} .\end{aligned}$$

Klar ist dann auch wegen $x(S) < 0$ f. a. $S > 0$ die Existenz des Maximums im Bereich $(0, \infty)$.

2. $N < 0$
   Hier kann analog wie im Fall $N > 0$ argumentiert werden.
   (a) $Nx^A < 0$
   $x(S, \Delta t)|_{\Delta t = const.} = \frac{Sx^A}{f(S)}$ ist stetig für alle $S \in \mathbb{R}$, insbesondere auch an $S = 0$ f. a. $x^A > 0$, also $x(S) > 0 \wedge x(S) \neq 0$ f. a. $S \in \mathbb{R}$.
   (b) $Nx^A > 0$
   i. $S_M = \frac{1}{\Delta t} - Nx^A \neq 0$
   Dann hat $x(S, \Delta t)|_{\Delta t = const.}$ an der Nullstelle $S_P\,(\neq 0)$ von $f(S)$ einen Pol mit Vorzeichenwechsel:

$$\begin{array}{lcl} \lim_{S\to -\infty} x(S) = 0 & , & \lim_{S\to\infty} x(S) = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{S\to S_P \\ S<S_P}} x(S) = -\infty & , & \lim\limits_{\substack{S\to S_P \\ S>S_P}} x(S) = +\infty \\ x(S) > 0 \text{ f. a. } S > S_P. & & \end{array}$$

   ii. $S_M = 0$

$$\begin{array}{lcl} \lim_{S\to -\infty} x(S) = 0 & , & \lim_{S\to\infty} x(S) = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{S\to 0 \\ S<0}} x(S) = -\infty & , & \lim\limits_{\substack{S\to 0 \\ S>0}} x(S) = +\infty \\ x(S) > 0 \text{ f. a. } S > S_P. & & \end{array}$$

3. $Nx^A = 0 \quad \not\Leftarrow \quad x^A = 0$
   Klar.

$\square$

Bemerkung 5.28

1. *Die in Hilfssatz 5.27 angegeben* $S_{\max}$ *und* $S_{\min}$ *sind jeweils abhängig von* Δt *und dem Anfangswert. Wir benötigen daher für den Satz 5.32 die ausführlichere Schreibweise* $S_{\max}(\Delta t, A)$.

2. *Ist* $S_M = \frac{1}{\Delta t} - Nx^A = 0$, *also* $1 = Nx^A \Delta t$, *so gibt es keine Lösung des Anfangswertproblems* $\dot{x}(t) = Nx(t)^2$, $x(t_A) = x^A$ *zur Zeit* $t_B = t_A + \Delta t$.
Auch gibt es keine Lösungen im Fall $Nx^A > 0$ *für das Anfangswertproblem* $\dot{x}(t) = Nx(t)^2 + Sx(t)$, $x(t_A) = x^A$ *zur Zeit* $t_B = t_A + \Delta t$, *wenn gerade* $S = S_P(\Delta t, A)$ *ist.*

3. *Die Beweise zu Hilfssatz 5.27 zeigen, daß es bei der Vorgabe zweier Punkte* $A, B \in \mathfrak{P}$ *im Fall* $Nx^A > 0$ *und* x^A, x^B *passend gewählt es (mindestens) zwei Größen* $S_1 \neq S_2$ *gibt mit* $x^B = x(t_B, S_i)|_{x(t_A)=x^A}$, $i = 1, 2$.

Definition 5.29
Das dem Multilinearsystem $\dot{x}(t) = Nx(t)^2 + Sx(t)$ *zugeordnete* **Differentialgleichungsrelativ** $(\mathfrak{P}, \mathcal{R})$ *wird definiert mit*

1. $\mathfrak{P} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *als Punktmenge,*

2. $\mathcal{R}^* := \{[S] \subset \mathfrak{P} \times \mathfrak{P} | S \in \mathbb{R}\}$ *als Relationenmenge, wobei die Relationen* [S] *wie folgt definiert seien:*

$$\begin{aligned} A[S]B \quad :\Leftrightarrow \quad & -t_A + t_B =: \Delta t \neq 0 \\ \wedge \quad & \bigvee_{x(t)} [\dot{x}(t) = Nx(t)^2 + Sx(t) \\ \wedge \quad & A = (t, x(t)) \wedge B = (t + \Delta t, x(t + \Delta t))] \, , \end{aligned}$$

3. $\mathcal{R} := \mathcal{R}^* \cup \{[\pm\infty], \mathfrak{e}\}$.

Es gelten dann (bis auf scharf einfache Transitivität) folgende Eigenschaften eines schwach affinen Relativs:

Satz 5.30

1. *Linkstotalität der Relationen.*

2. *Abgeschlossenheit bezüglich Gleichheitsrelation.*

3. *Abgeschlossenheit bezüglich Inversen.*

4. *Symmetrie der Relationen.*

5. *Die Relationen sind alternierend.*

Beweis:
Die Punkte 1. bis 3. sind klar.

4. Folgende Umformungen sind für ein Paar $(A, B) \in \mathfrak{P}$ und ein $[S] \in \mathcal{R}^*$ äquivalent:

$$\begin{aligned} & A[S]B \\ x^B &= \frac{Sx^A}{e^{-S(t_B - t_A)}(Nx^A + S) - Nx^A} \\ Sx^A &= (e^{-S(t_B - t_A)}(Nx^A + S) - Nx^A)x^B \\ Sx^A e^{S(t_B - t_A)} &= Nx^A x^B + Sx^B - Nx^A x^B e^{S(t_B - t_A)} \\ Sx^B &= e^{-S(t_A - t_B)} Nx^A x^B + Sx^A e^{-S(t_A - t_B)} - Nx^A x^B \\ & B[S]A. \end{aligned}$$

5. Es sei vorgegeben für ein $[S] \in \mathcal{R}^*$:

$$A[S]C \ \wedge \ C[S]B \ , \qquad \text{also}$$

$$\begin{aligned} x^C &= \frac{Sx^A}{e^{-S(t_C - t_A)}(Nx^A + S) - Nx^A} \ \wedge \\ x^B &= \frac{Sx^C}{e^{-S(t_B - t_C)}(Nx^C + S) - Nx^C} \ . \end{aligned}$$

(a)

$$\begin{aligned} & Nx^C + S \\ &= \frac{SNx^A}{e^{-S(t_C - t_A)}(Nx^A + S) - Nx^A} + \frac{S[e^{-S(t_C - t_A)}(Nx^A + S) - Nx^A]}{e^{-S(t_C - t_A)}(Nx^A + S) - Nx^A} \\ &= \frac{S(Nx^A + S)e^{-S(t_C - t_A)}}{e^{-S(t_C - t_A)}(Nx^A + S) - Nx^A}. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
&(Nx^C + S)e^{-S(t_B - t_C)} - Nx^C \\
&= \frac{S(Nx^A + S)e^{-S(t_B - t_A)}}{e^{-S(t_C - t_A)}(Nx^A + S) - Nx^A} - \frac{SNx^A}{e^{-S(t_C - t_A)}(Nx^A + S) - Nx^A} \\
&= \frac{S[e^{-S(t_B - t_A)}(Nx^A + S) - Nx^A]}{e^{-S(t_C - t_A)}(Nx^A + S) - Nx^A}.
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
x^B &= \frac{Sx^C}{e^{-S(t_B - t_C)}(Nx^C + S) - Nx^C} \\
&= \frac{S^2 x^A}{e^{-S(t_C - t_A)}(Nx^A + S) - Nx^A} \cdot \frac{e^{-S(t_C - t_A)}(Nx^A + S) - Nx^A}{S[e^{-S(t_B - t_A)}(Nx^A + S) - Nx^A]} \\
&= \frac{Sx^A}{e^{-S(t_B - t_A)}(Nx^A + S) - Nx^A}.
\end{aligned}$$

Also gilt $(A, B) \in [S] \cup \mathfrak{e}$.

Für $[\pm\infty]$ bzw. $\mathfrak{e}$ sind die Behauptungen klar.

□

Mit Einbezug der Anordnung von $\mathfrak{T}$ definieren wir wieder die Zukunfts- und Vergangenheitsrelationen

$$\begin{aligned}
\langle\dot{S}\rangle &:= \bigcup_{\Delta t \in \mathbb{R}^{>0}} ([S] \cap \Delta t) \\
\langle\dot{S}\rangle^{-1} &:= \left(\bigcup_{\Delta t \in \mathbb{R}^{>0}} ([S] \cap \Delta t) \right)^{-1} \\
&= \bigcup_{\Delta t \in \mathbb{R}^{>0}} ([S] \cap \Delta t)^{-1} \\
&= \bigcup_{\Delta t \in \mathbb{R}^{>0}} ([S] \cap (\Delta t)^{-1}).
\end{aligned}$$

Wir fassen diese zusammen

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathfrak{V}} &:= \{\langle\dot{S}\rangle^{-1} \mid S \in \mathbb{R}\} \\
\boldsymbol{\mathfrak{Z}} &:= \{\langle\dot{S}\rangle \mid S \in \mathbb{R}\} \\
\boldsymbol{\mathfrak{R}} &:= \boldsymbol{\mathfrak{V}} \cup \boldsymbol{\mathfrak{Z}} \cup \{[\pm\infty], \mathfrak{e}\}.
\end{aligned}$$

Mit den Definitionen

$$\begin{aligned}
\mathfrak{P}^+ &:= \{A \in \mathfrak{P} | x^A > 0\} \\
\mathfrak{P}^0 &:= \{A \in \mathfrak{P} | x^A = 0\} \\
\mathfrak{P}^- &:= \{A \in \mathfrak{P} | x^A < 0\} \\
\mathfrak{P}^* &:= \{A \in \mathfrak{P} | x^A \neq 0\}
\end{aligned}$$

gilt wegen Hilfssatz 5.27 unabhängig von $N \neq 0$ die

Bemerkung 5.31

$$\begin{aligned}
\mathfrak{P}^+\mathbf{P} &\supset \mathfrak{P}^+ \\
\mathfrak{P}^0\mathbf{P} &= \mathfrak{P}^0 \\
\mathfrak{P}^-\mathbf{P} &\supset \mathfrak{P}^-.
\end{aligned}$$

Obwohl die (scharf) einfache Transitivität des Relativs $(\mathfrak{P}, \mathfrak{R})$ nicht gilt, können wir eine schwächere Form beweisen:

Satz 5.32
Das Differentialgleichungsrelativ $(\mathfrak{P}^* \times \mathfrak{P}^* \ \cup \ \mathfrak{P}^0 \times \mathfrak{P}^0, \mathfrak{R})$ *ist produkttransitiv.*

Beweis:
Zu zeigen ist also:

$$\mathfrak{P}^* \times \mathfrak{P}^* \ \cup \ \mathfrak{P}^0 \times \mathfrak{P}^0 \overset{!}{\subset} \bigcup_{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2 \in \mathfrak{R}} \mathfrak{r}_1 \circ \mathfrak{r}_2.$$

Es seien $(A, B) \in \mathfrak{P}^* \times \mathfrak{P}^*$ beliebig vorgegeben. Für $t_A = t_B$ ist die Behauptung mit $A[\pm\infty]B$ oder $A\mathfrak{e}B$ klar, es sei also $t_A \neq t_B$.
Wir beweisen die Aussage für $N > 0$, $N < 0$ verläuft völlig analog.

1. $x^A > 0, x^B > 0$
   Dann gibt es ein $S \in \mathbb{R}$ mit $A\langle \dot{S} \rangle B$ bzw. $A\langle \dot{S} \rangle^{-1} B$. Setze also

$$\begin{aligned}
\mathfrak{r}_1 &:= \langle \dot{S} \rangle && \text{f.} \quad t_A < t_B \\
\mathfrak{r}_1 &:= \langle \dot{S} \rangle^{-1} && \text{f.} \quad t_A > t_B \\
\mathfrak{r}_2 &:= \mathfrak{e}.
\end{aligned}$$

2. $x^A > 0, x^B < 0$

(a) $t_A < t_B$
Ist $x^B \leq x(S_{\max}(t_B - t_A, A))$, so gibt es ein $S \in \mathbb{R}$ mit $A\langle\dot{S}\rangle B$. Es sei also $0 > x^B > x(S_{\max}(t_B - t_A, A))$.
Wähle ein t_C mit $t_A < t_C < t_B$ beliebig. Dann gibt es für ein $x^C < x(S_{\max}(t_B - t_A, A))$ ein geeignetes $S_1 \in \mathbb{R}$ mit

$$A\langle\dot{S}_1\rangle C, \quad C = (t_C, x^C)$$

und ferner ein geeignetes $S_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$C\langle\dot{S}_2\rangle B.$$

Setze also

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}_1 &:= \langle\dot{S}_1\rangle \\ \mathfrak{r}_2 &:= \langle\dot{S}_2\rangle. \end{aligned}$$

(b) $t_A > t_B$
Wähle ein t_C mit $t_B < t_A < t_C$ beliebig. Dann gibt es für $x^C < x(S_{\max}(t_C - t_A, A))$ ein geeignetes $S_1 \in \mathbb{R}$ mit

$$A\langle\dot{S}_1\rangle C, \quad C = (t_C, x^C).$$

Für diesen Punkt C gibt es aber auch ein $S_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$B\langle\dot{S}_2\rangle C.$$

Setze also

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}_1 &:= \langle\dot{S}_1\rangle \\ \mathfrak{r}_2 &:= \langle\dot{S}_2\rangle^{-1}. \end{aligned}$$

3. $x^A < 0, x^B > 0$

(a) $t_A < t_B$
Wähle ein t_C mit $t_A < t_B < t_C$ beliebig. Dann gibt es für ein $x^C < x(S_{\max}(t_C - t_B, B))$ ein geeignetes $S_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$B\langle\dot{S}_2\rangle C, \quad C = (t_C, x^C)$$

und ferner ein geeignetes $S_1 \in \mathbb{R}$ mit

$$A\langle\dot{S}_1\rangle C.$$

Setze also

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{r}_1 & := & \langle \dot{S_1} \rangle \\ \mathfrak{r}_2 & := & \langle \dot{S_2} \rangle^{-1}. \end{array}$$

(b) $t_A > t_B$
Ist $x^A \leq x(S_{\max}(t_A - t_B, B))$, so gibt es ein $S \in \mathbb{R}$ mit $A\langle \dot{S} \rangle^{-1} B$. Es sei also $0 > x^A > x(S_{\max}(t_A - t_B, B))$.
Wähle ein t_C mit $t_B < t_C < t_A$ beliebig. Dann gibt es für ein $x^C < x(S_{\max}(t_A - t_B, B))$ ein geeignetes $S_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$B\langle \dot{S_2} \rangle C, \quad C = (t_C, x^C)$$

und ferner ein geeignetes $S_1 \in \mathbb{R}$ mit

$$C\langle \dot{S_1} \rangle A.$$

Setze also

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{r}_1 & := & \langle \dot{S_1} \rangle^{-1} \\ \mathfrak{r}_2 & := & \langle \dot{S_2} \rangle^{-1}. \end{array}$$

4. $x^A, x^B < 0$
Es gibt ein $S \in \mathbb{R}$ mit $A\langle \dot{S} \rangle B$ bzw. $A\langle \dot{S} \rangle^{-1} B$. Setze also

$$\begin{array}{rclll} \mathfrak{r}_1 & := & \langle \dot{S} \rangle & \text{f.} & t_A < t_B \\ \mathfrak{r}_1 & := & \langle \dot{S} \rangle^{-1} & \text{f.} & t_A > t_B \\ \mathfrak{r}_2 & := & \mathfrak{e}. & & \end{array}$$

Für $(A, B) \in \mathfrak{P}^0 \times \mathfrak{P}^0$ ist die Behauptung klar.

□

Bemerkung 5.33
Wir können bei dem Relativ $(\mathfrak{P}, \mathfrak{R})$ weder von Zeitinvarianz noch von $\mathfrak{c}$-Kurven (im Sinne der Definitionen 1.20 und 1.21) sprechen, denn durch die Vorgabe ganz beliebiger $A, B \in \mathfrak{P}; S \in \mathbb{R}$ und $\Delta t > 0$ kann die Wahl auf Pole S_P fallen bzw. auf solche Δt, bei denen es dann zu Nullstellen in den Nennern der Lösungsfunktionen kommt.

Kapitel 6

Relationentheoretische Beschreibung von Totzeiten

Wir gehen nun von den eingliedrigen Differentialgleichungen der linearen Systeme und der eingangshomogenen und zustandshomogenen Bilinearsysteme aus, also von

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= ax(t) + u \\
\dot{x}(t) &= (a + mu)x(t) \\
\dot{x}(t) &= (mx(t) + b)\,u \\
\text{kurz} & \\
\dot{x}(t) &= f(x, t, u).
\end{aligned}$$

Dabei sind a, m, b die Systemkonstanten und die $u \in \mathbb{R}$ die Stellgrößen, die die (Zukunfts-) Relationen $\langle \dot{u} \rangle$ der zugehörigen Differentialgleichungsrelative nach Def. 1.2, 5.1, 5.8 definieren:

$$\begin{aligned}
A\langle \dot{u} \rangle B \quad &:\Leftrightarrow \quad \bigvee_{\Delta t > 0} A([u] \cap \Delta t)B \\
&:\Leftrightarrow \quad \Delta t = t_B - t_A > 0 \\
&\quad\;\wedge \quad \bigvee_{x(t)} \Big[\, \dot{x}(t) = f(x, t, u) \\
&\quad\;\wedge \quad A = (t_A, x(t_A)) \\
&\quad\;\wedge \quad B = (t_A + \Delta t, x(t_A + \Delta t)\,\Big]\,.
\end{aligned}$$

Bei dem Hintereinanderausführen von $\langle \dot{u} \rangle$ und $\langle \dot{v} \rangle$, systemtheoretisch gesprochen bei dem Umschalten von einer Stellgröße u auf eine Größe v, haben wir noch keine Totzeiten der Systeme berücksichtigt:

Sei etwa die Stellgröße u vom Punkt $A = (t_A, x^A)$ aus wirksam, und es werde in einem Punkt $C = (t_C, x^C)$ auf v umgeschaltet. Das bedeutet, daß ein Punkt $B = (t_B, x^B)$ wie folgt erreicht werden kann:

$$\begin{aligned} & (A,B) \in \langle \dot{u} \rangle \circ \langle \dot{v} \rangle \\ \divideontimes \quad & A(\langle \dot{u} \rangle \circ \langle \dot{v} \rangle) \ni B \\ \divideontimes \quad & \bigvee_{C \in \mathfrak{P}} A\langle \dot{u} \rangle \ni C \ \wedge C\langle \dot{v} \rangle \ni B. \end{aligned}$$

Das Einbeziehen einer Totzeit $\delta t > 0$ bedeutet, daß die durch $u \in \mathbb{R}$ definierte und von A abgetragene Kurve $A\langle \dot{u} \rangle$ beim Umschalten in einem Punkt C erst noch bis zu einem Punkt $\tilde{C}$ weiterverläuft, bis dann die Schaltung auf $v \in \mathbb{R}$ wirksam wird. Die Koordinaten des Punktes $\tilde{C}$ sind dann durch u und C bestimmt:

$$\tilde{C} = (t_{\tilde{C}}, x^{\tilde{C}}) \quad \wedge \quad t_{\tilde{C}} = t_C + \delta t,\ C\langle \dot{u} \rangle \ni \tilde{C}.$$

Diesen Sachverhalt können wir durch die Definition dreistelliger Relationen auf der Grundmenge $\mathfrak{P} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ erfassen:

$$\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{Pot}(\mathfrak{P} \times \mathfrak{P} \times \mathfrak{P}) \\ u \longmapsto (u) \ \text{ mit} \\ \qquad (A, C, \tilde{C}) \in (u) \ :\divideontimes \ (A, C) \in \langle \dot{u} \rangle \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \wedge \ (C, \tilde{C}) \in \langle \dot{u} \rangle \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \wedge \ t_{\tilde{C}} = t_C + \delta t. \end{cases}$$

Mit diesen Relationen kann dann auch das Umschalten von u auf v unter Totzeitbedingungen erfaßt werden, dabei werden zwei Begriffe der höherstelligen Relationenalgebra aus (Arnold, 1987, Arb.) benötigt: das Verkettungsprodukt $\Diamond$ und der Projektionsfunktor $\boldsymbol{\mathcal{F}}$.

Es sei also ein Punkt B von einem Anfangswert A durch einmaliges Umschalten von $u \in \mathbb{R}$ auf $v \in \mathbb{R}$ erreicht worden, ein weiterer Punkt $\tilde{B}$ wird durch das Totzeitverhalten definiert. Das heißt:

$$\begin{aligned} & \bigvee_{C, \tilde{C} \in \mathfrak{P}} A(u) \ni (C, \tilde{C}) \ \wedge \ \tilde{C}(v) \ni (B, \tilde{B}) \\ \divideontimes \quad & \bigvee_{C, \tilde{C} \in \mathfrak{P}} (A, C, \tilde{C}, B, \tilde{B}) \in (u) \underset{1}{\Diamond} (v) \\ \divideontimes \quad & (A, B, \tilde{B}) \in ((u) \underset{1}{\Diamond} (v)) \boldsymbol{\mathcal{F}}_{1,4,5}. \end{aligned}$$

Wir definieren noch abkürzend

$$(u) \bigtriangleup (v) := ((u) \underset{1}{\diamond} (v))\boldsymbol{\mathcal{F}}_{1,4}.$$

Wir werden im folgenden untersuchen, inwieweit die Kommutativgesetze und die Homogenitätsregeln in den zugehörigen Differentialgleichungsrelativen gültig bleiben, wenn Totzeitverhalten berücksichtigt wird. Wir fragen uns also nach der Güligkeit von

$$\begin{aligned} (u) \bigtriangleup (v) &= (v) \bigtriangleup (u) \\ A((u) \bigtriangleup (v))B &\succ AB \subset (u) \bigtriangleup (v). \end{aligned}$$

Generell sei $u \neq v$ vorausgesetzt, denn für $u = v$ sind diese Regeln trivialerweise erfüllt.

Lineare Systeme

Satz 6.1
Es seien Punkte $A = (t_A, x^A), B = (t_B, x^B) \in \mathfrak{P}$ gegeben mit

$$A((u) \bigtriangleup (v))B\,, \quad \textit{also}$$

$$\bigvee_{C=(t_C,x^C)\in\mathfrak{P}} (A, C, B) \in ((u) \underset{1}{\diamond} (v))\boldsymbol{\mathcal{F}}_{1,2,4}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} &A((v) \bigtriangleup (u))B \\ \divideontimes \quad &\bigvee_{D=(t_D,x^D)\in\mathfrak{P}} (A, D, B) \in ((v) \underset{1}{\diamond} (u))\boldsymbol{\mathcal{F}}_{1,2,4}\,, \end{aligned}$$

wenn für die Zeitkoordinaten der vorgelegten Punkte A, B, C nicht nur definitionsgemäß

$$t_A < t_C < t_C + \delta t < t_B$$

richtig ist, sondern darüber hinaus auch noch

$$t_B > -\frac{1}{a} \ln[e^{-a(t_C+\delta t)} - e^{-at_A}(1 - e^{-a\delta t})] \quad (> t_C + \delta t).$$

Beweis:
Für die Gültigkeit des Kommutativgesetzes ohne Einfluß von Totzeitbedingungen hatten wir im Satz 1.5 als Bedingung für den Punkt $D = (t_D, x^D)$ erhalten:

$$e^{-at_D} = e^{-at_A} + e^{-at_B} - e^{-at_C},$$

wobei die Umschaltung natürlich sofort in t_C und t_D wirksam wird.
Unter Totzeitbedingungen ist demnach ein Zeitpunkt t_D gesucht, so daß bei Wirksamwerden der Umschaltungen in $t_C + \delta t$ und $t_D + \delta t$ gilt:

$$\begin{aligned}
& e^{-a(t_D+\delta t)} &&= e^{-at_A} + e^{-at_B} - e^{-a(t_C+\delta t)} \\
\Leftrightarrow\quad & e^{-at_D} &&= e^{-a(t_A-\delta t)} + e^{-a(t_B-\delta t)} - e^{-at_C} \\
\Leftrightarrow\quad & t_D &&= -\tfrac{1}{a} \ln \left[e^{-a(t_A-\delta t)} + e^{-a(t_B-\delta t)} - e^{-at_C} \right].
\end{aligned}$$

Wir nehmen im folgenden $a < 0$ an, für $a > 0$ verlaufen die Beweise ganz analog. Der Logarithmus ist definiert, denn es gilt :

$$\begin{aligned}
& t_B - \delta t > t_C \\
\Leftrightarrow\quad & e^{-a(t_B-\delta t)} > e^{-at_C} \\
\Leftrightarrow\quad & e^{-a(t_A-\delta t)} + e^{-a(t_B-\delta t)} - e^{-at_C} > 0.
\end{aligned}$$

Generell gültig ist auch $t_D + \delta t < t_B$, denn es gilt

$$\begin{aligned}
& e^{-at_A} < e^{-a(t_C+\delta t)} \\
\Leftrightarrow\quad & e^{-at_A} + e^{-at_B} - e^{-a(t_C+\delta t)} < e^{-at_B} \\
\Leftrightarrow\quad & t_D + \delta t < t_B.
\end{aligned}$$

Die Bedingung $t_A < t_D$ formen wir äquivalent um

$$\begin{aligned}
& e^{-at_A} < e^{-at_D} \\
\Leftrightarrow\quad & e^{-at_A}(1 - e^{a\delta t}) + e^{-at_C} < e^{-at_B} e^{a\delta t} \\
\Leftrightarrow\quad & e^{-a(t_C+\delta t)} - e^{-at_A}(1 - e^{-a\delta t}) < e^{-at_B} \\
\Leftrightarrow\quad & t_B > -\frac{1}{a} \ln \left[e^{-a(t_C+\delta t)} - e^{-at_A}(1 - e^{-a\delta t}) \right].
\end{aligned}$$

□

Im Fall $a < 0$ können wir die im Satz 6.1 angegebene Bedingung für die Gültigkeit des Kommutativgesetzes noch abschwächen; diese Bedingung bleibt allerdings für $a > 0$ nicht richtig:

Korollar 6.2
Die Kommutativität gilt im Fall $a < 0$ schon dann, wenn für den Zeitpunkt t_B richtig ist:

$$t_B > (t_C + \delta t) - \frac{1}{a}.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{a} \ln \left[e^{-a(t_C+\delta t)} - e^{-at_A}(1 - e^{-a\delta t}) \right] \\
&= \quad -\frac{1}{a} \ln \left[e^{-a(t_C+\delta t)} + e^{-a(t_A+\delta t)} - e^{-at_A} \right] \\
&< \quad -\frac{1}{a} \ln \left[e^{-a\delta t}(e^{-at_C} + e^{-at_A}) \right] \\
&< \quad -\frac{1}{a} \ln \left[e^{-a\delta t}(e^{-at_C} + e^{-at_C}) \right] \\
&< \quad -\frac{1}{a} \ln \left[e^{-a\delta t} e e^{-at_C} \right] \\
&= \quad -\frac{1}{a} \left[\ln e^{-a\delta t} + \ln e + \ln e^{-at_C} \right] \\
&= \quad \delta t + t_C - \frac{1}{a}.
\end{aligned}$$

□

Satz 6.3
Es seien Punkte $A = (t_A, x^A), B = (t_B, x^B) \in \mathfrak{P}$ gegeben mit

$$A((u) \bigtriangleup (v))B\,, \quad \textit{also}$$

$$\bigvee_{C=(t_C,x^C)\in\mathfrak{P}} (A, C, B) \in ((u) \underset{1}{\davidsstar} (v))\boldsymbol{\mathcal{F}}_{1,2,4}.$$

Seien weiter Punkte $X = (t_X, x^X), Y = (t_Y, x^Y) \in \mathfrak{P}$ gegeben mit

$$X\,AB\,Y,$$

so folgt

$$X((u) \bigtriangleup (v))Y,$$

wenn für die Zeitkoordinaten gilt:

$$e^{-at_B}(e^{-a(t_X+\delta t)} - e^{-at_X}) + e^{-at_C}(e^{-a(t_X+\delta t)} - e^{-a(t_Y+\delta t)}) - e^{-at_A}(e^{-a(t_X+\delta t)} - e^{-at_Y}) < 0.$$

Beweis:
Auch hier sei o. B. d. A. generell $a < 0$ vorausgesetzt.
Mit Satz 1.6 erhalten wir als Bedingung für den Punkt $Z = (t_Z, x^Z)$ mit

$$(X, Z, Y) \in ((u) \underset{1}{\bowtie} (v))\boldsymbol{\mathcal{F}}_{1,2,4}$$

$$\begin{aligned}
& e^{-a(t_Z+\delta t)} = e^{-at_X} \frac{e^{-at_B} - e^{-a(t_C+\delta t)}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} + e^{-at_Y} \frac{e^{-a(t_C+\delta t)} - e^{-at_A}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} \\
\Leftrightarrow \quad & t_Z = -\frac{1}{a} \ln \left[e^{-at_X} \frac{e^{-at_B} - e^{-a(t_C+\delta t)}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} + e^{-at_Y} \frac{e^{-a(t_C+\delta t)} - e^{-at_A}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} \right] - \delta t.
\end{aligned}$$

Der Logarithmus ist definiert, denn die Quotienten sind wegen der Voraussetzung $t_A < t_C < t_C + \delta t < t_B$ immer positiv.
Wir müssen nun noch zeigen:

$$t_X \overset{!}{<} t_Z < t_Z + \delta t \overset{!}{<} t_Y.$$

Die zweite Ungleichung gilt immer, denn

$$\begin{aligned}
& e^{-at_X} < e^{-at_Y} \\
\Leftrightarrow \quad & e^{-at_X} \frac{e^{-at_B} - e^{-a(t_C+\delta t)}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} < e^{-at_Y} \frac{e^{-at_B} - e^{-at_A} + e^{-at_A} - e^{-a(t_C+\delta t)}}{e^{-at_B} - e^{-at_A}} \\
\Leftrightarrow \quad & e^{-a(t_Z+\delta t)} < e^{-at_Y}.
\end{aligned}$$

Die Bedingung $t_X < t_Z$ formen wir um:

$$\begin{aligned}
& e^{-a(t_X+\delta t)} < e^{-a(t_Z+\delta t)} \\
\Leftrightarrow \quad & \big(e^{-at_B} - e^{-at_A}\big) e^{-a(t_X+\delta t)} \\
& \qquad < e^{-at_X}\big(e^{-at_B} - e^{-a(t_C+\delta t)}\big) + e^{-at_Y}\big(e^{-a(t_C+\delta t)} - e^{-at_A}\big) \\
\Leftrightarrow \quad & e^{-at_B}\big(e^{-a(t_X+\delta t)} - e^{-at_X}\big) + e^{-at_C}\big(e^{-a(t_X+\delta t)} - e^{-a(t_Y+\delta t)}\big) \\
& \qquad - e^{-at_A}\big(e^{-a(t_X+\delta t)} - e^{-at_Y}\big) < 0.
\end{aligned}$$

□

Zustandshomogene Bilinearsysteme

Satz 6.4
Es sei ein Paar $(A, B) \in \mathfrak{P}^+ \times \mathfrak{P}^+ \cup \mathfrak{P}^- \times \mathfrak{P}^-$ *gegeben mit*

$$A((u) \bigtriangleup (v))B\,, \quad \textit{also}$$

$$\bigvee_{C=(t_C, x^C) \in \mathfrak{P}} (A, C, B) \in ((u) \underset{1}{\davidsstar} (v))\boldsymbol{\mathcal{F}}_{1,2,4}.$$

Dann gilt

$$A((v) \bigtriangleup (u))B$$

$$\Leftrightarrow \quad \bigvee_{D=(t_D, x^D) \in \mathfrak{P}} (A, D, B) \in ((v) \underset{1}{\davidsstar} (u))\boldsymbol{\mathcal{F}}_{1,2,4}\,,$$

wenn für die Zeitkoordinaten der vorgelegten Punkte A, B, C *nicht nur definitionsgemäß*

$$t_A < t_C < t_C + \delta t < t_B$$

richtig ist, sondern darüber hinaus auch noch

$$t_C + 2\delta t < t_B.$$

Beweis:
Für die Gültigkeit des Kommutativgesetzes ohne Einfluß von Totzeitbedingungen gilt als Bedingung für den Punkt $D = (t_D, x^D)$

$$t_D = t_A + t_B - t_C.$$

Dieses kann elementargeometrisch geschlossen werden, da das Relativ $(\mathfrak{P}, \mathfrak{R})$ isomorph zum affinen Relativ $(\mathfrak{P}, \mathcal{R}'_{\text{aff.}})$ ist oder direkt nachgerechnet werden:

$$\begin{aligned}
& A([u] \circ [v])B \\
\Leftrightarrow \quad & \bigvee_{C=(t_C, x^C) \in \mathfrak{P}} A[u]C \wedge C[v]B \\
\Leftrightarrow \quad & \bigvee_{C=(t_C, x^C) \in \mathfrak{P}} x^C = e^{(a+mu)(t_C - t_A)} x^A \wedge x^B = e^{(a+mv)(t_B - t_C)} x^C \\
\Leftrightarrow \quad & \bigvee_{t_C \in \mathfrak{T}} x^B = e^{(a+mv)(t_B - t_C)} e^{(a+mu)(t_C - t_A)} x^A.
\end{aligned}$$

Analog folgt

$$\begin{aligned} & A([v]\circ[u])B \\ \divideontimes\quad & \bigvee_{t_D\in\mathcal{T}} x^B = e^{(a+mu)(t_B-t_D)}e^{(a+mv)(t_D-t_A)}x^A. \end{aligned}$$

Gleichsetzen und Auflösen nach t_D liefert:

$$\begin{aligned} & (a+mv)(t_B-t_C)+(a+mu)(t_C-t_A) = \\ & \qquad (a+mu)(t_B-t_D)+(a+mv)(t_D-t_A) \\ \divideontimes\quad & a(t_B-t_C)+mv(t_B-t_C)+a(t_C-t_A)+mu(t_C-t_A) \\ & \qquad -(a+mu)t_B+(a+mv)t_A = m(v-u)t_D \\ \divideontimes\quad & mv(t_B-t_C)+mu(t_C-t_A)-mut_B+mvt_A = m(v-u)t_D \\ \divideontimes\quad & t_B(v-u)+t_A(v-u)-t_C(v-u) = t_D(v-u) \\ \overset{u\neq v}{\divideontimes}\quad & t_D = t_A+t_B-t_C. \end{aligned}$$

Unter Totzeitbedingungen muß demnach für Zeitpunkt t_D gelten

$$\begin{aligned} & t_D+\delta t = t_A+t_B-(t_C+\delta t) \\ \divideontimes\quad & t_D = t_A+t_B-t_C-2\delta t \\ \wedge\quad & t_A < t_D < t_D+\delta t < t_B. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist immer erfüllt, denn

$$\begin{aligned} & t_A < t_C+\delta t \\ \divideontimes\quad & t_A+t_B-(t_C+\delta t) < t_B. \end{aligned}$$

Für die erste muß gelten:

$$\begin{aligned} & 0 < t_B-t_C-2\delta t \\ \divideontimes\quad & t_C+2\delta t < t_B. \end{aligned}$$

$\square$

Satz 6.5
Es sei ein Paar $(A, B) \in \mathfrak{P}^+ \times \mathfrak{P}^+ \cup \mathfrak{P}^- \times \mathfrak{P}^-$ *gegeben mit*

$$A((u) \triangle (v))B\,, \quad \textit{also}$$

$$\bigvee_{C=(t_C, x^C) \in \mathfrak{P}} (A, C, B) \in ((u) \underset{1}{\davidsstar} (v))\boldsymbol{\mathcal{F}}_{1,2,4}.$$

Sei weiter ein Paar $(X, Y) \in \mathfrak{P}^+ \times \mathfrak{P}^+ \cup \mathfrak{P}^- \times \mathfrak{P}^-$ *gegeben mit*

$$X\, AB\, Y,$$

so folgt

$$X((u) \triangle (v))Y\,,$$

wenn für die Zeitkoordinaten gilt:

$$\delta t \cdot (t_B - t_A + t_X - t_Y) < (t_Y - t_X)(t_C - t_A).$$

Beweis:
Wir verzichten auch hier auf eine elementargeometrische Begründung und berechnen direkt den Punkt $Z = (t_Z, x^Z)$ mit

$$X[A \cdot B]Y \quad \succ \quad \bigvee_{Z=(t_Z, x^Z) \in \mathfrak{P}} X[u]Z \;\wedge\; Z[v]Y$$

unter der Vorausetzung

$$A[u]C \;\wedge\; C[v]B \qquad \text{f. e. C.}$$

$$\begin{aligned}
& A([u] \circ [v])B \\
\divideontimes \quad & \bigvee_{t_C \in \mathfrak{T}} x^B = e^{(a+mv)(t_B - t_C)} e^{(a+mu)(t_C - t_A)} x^A \\
\divideontimes \quad & \bigvee_{t_C \in \mathfrak{T}} \ln|x^B| - \ln|x^A| = (a+mv)(t_B - t_C) + (a+mu)(t_C - t_A) \\
& \qquad = \; a(t_B - t_A) + mv(t_B - t_C) + mu(t_C - t_A) \\
\divideontimes \quad & \bigvee_{t_C \in \mathfrak{T}} A \cdot B = \frac{\ln|x^B| - \ln|x^A|}{m(t_B - t_A)} - \frac{a}{m} = v\frac{t_B - t_C}{t_B - t_A} + u\frac{t_C - t_A}{t_B - t_A}.
\end{aligned}$$

Die Behauptung kann umgeformt werden zu

$$
\begin{array}{cl}
 & X[A \cdot B]Y \succ \bigvee_{Z=(t_Z,x^Z)\in\mathfrak{P}} X[u]Z \wedge Z[v]Y \\
\mathrel{\succ\!\!\!\prec} & \Big[x^Y = e^{(a+m\,A\cdot B)(t_Y - t_X)} x^X \\
\succ & \bigvee_{t_Z\in\mathfrak{T}} x^Y = e^{(a+mv)(t_Y-t_Z)} e^{(a+mu)(t_Z-t_X)} x^X \Big] \\
\mathrel{\succ\!\!\!\prec} & \bigvee_{t_Z\in\mathfrak{T}} (a+m\,A\cdot B)(t_Y - t_X) = (a+mv)(t_Y - t_Z) + (a+mu)(t_Z - t_X) \\
\mathrel{\succ\!\!\!\prec} & \bigvee_{t_Z\in\mathfrak{T}} (u-v)t_Z = (A\cdot B - v)t_Y + (u - A\cdot B)t_X \\
\overset{u\neq v}{\mathrel{\succ\!\!\!\prec}} & \bigvee_{t_Z\in\mathfrak{T}} t_Z = t_Y \dfrac{A\cdot B - v}{u-v} - t_X \dfrac{A\cdot B - u}{u-v}.
\end{array}
$$

Wir berechnen mit der Voraussetzung

$$
\begin{aligned}
\frac{A\cdot B - v}{u-v} &= \frac{1}{u-v}\,\frac{v(t_B - t_C) + u(t_C - t_A) - v(t_B - t_A)}{t_B - t_A} \\
&= \frac{t_C - t_A}{t_B - t_A} \\
A\cdot B - u &= \frac{1}{u-v}\,\frac{v(t_B - t_C) + u(t_C - t_A) - u(t_B - t_A)}{t_B - t_A} \\
&= \frac{t_C - t_B}{t_B - t_A}
\end{aligned}
$$

und erhalten als Bedingung für den gesuchten Zeitpunkt $t_Z \in \mathfrak{T}$:

$$
t_Z = t_Y \frac{t_C - t_A}{t_B - t_A} - t_X \frac{t_C - t_B}{t_B - t_A}.
$$

Bei Einbezug einer Totzeit δt erhalten wir als Bedingung für den Punkt $Z = (t_Z, x^Z)$ mit

$$
\begin{gathered}
(X, Z, Y) \in ((u) \underset{1}{\davidsstar} (v))\boldsymbol{\mathcal{F}}_{1,2,4} : \\
t_Z + \delta t = t_Y \frac{t_C + \delta t - t_A}{t_B - t_A} - t_X \frac{t_C + \delta t - t_B}{t_B - t_A} \\
\wedge \quad t_X < t_Z < t_Z + \delta t < t_Y.
\end{gathered}
$$

1. $t_X < t_Z$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad t_X < t_Y \frac{t_C + \delta t - t_A}{t_B - t_A} - t_X \frac{t_C + \delta t - t_B}{t_B - t_A} - \delta t \\
&\Leftrightarrow \quad t_X \frac{t_C + \delta t - t_A}{t_B - t_A} < t_Y \frac{t_C + \delta t - t_A}{t_B - t_A} - \delta t \\
&\Leftrightarrow \quad \delta t < (t_Y - t_X) \frac{t_C + \delta t - t_A}{t_B - t_A} \\
&\Leftrightarrow \quad \delta t \frac{t_B - t_A - t_Y + t_X}{t_B - t_A} < \frac{t_Y - t_X}{t_B - t_A} (t_C - t_A) \\
&\Leftrightarrow \quad \delta t (t_B - t_A + t_X - t_Y) < (t_Y - t_X)(t_C - t_A).
\end{aligned}
$$

2. $t_Z + \delta t < t_Y$ gilt immer, denn

$$
\begin{aligned}
& \frac{t_C + \delta t - t_B}{t_B - t_A} < 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (t_Y - t_X) \frac{t_C + \delta t - t_B}{t_B - t_A} < 0 \\
\Leftrightarrow \quad & t_Y \frac{t_C + \delta t - t_B}{t_B - t_A} < t_X \frac{t_C + \delta t - t_B}{t_B - t_A} \\
\Leftrightarrow \quad & t_Y \frac{t_C + \delta t - t_A}{t_B - t_A} - t_X \frac{t_C + \delta t - t_B}{t_B - t_A} < t_Y .
\end{aligned}
$$

□

Eingangshomogene Bilinearsysteme

Satz 6.6
Es sei ein Paar $(A, B) \in \mathfrak{P}^+ \times \mathfrak{P}^+ \cup \mathfrak{P}^- \times \mathfrak{P}^-$ *gegeben mit*

$$A((u) \bigtriangleup (v))B \,, \quad \textit{also}$$

$$\bigvee_{C=(t_C, x^C) \in \mathfrak{P}} (A, C, B) \in ((u) \underset{1}{\davidsstar} (v)) \boldsymbol{\mathcal{F}}_{1,2,4} \,.$$

Dann gilt

$$A((v) \bigtriangleup (u))B$$

$$\Leftarrow\!\!\!\!\!\Rightarrow \quad \bigvee_{D=(t_D,x^D)\in\mathfrak{P}} (A,D,B) \in ((v) \underset{1}{\davidsstar} (u))\boldsymbol{\mathcal{F}}_{1,2,4}\,,$$

wenn für die Zeitkoordinaten der vorgelegten Punkte A, B, C nicht nur definitionsgemäß

$$t_A < t_C < t_C + \delta t < t_B$$

richtig ist, sondern darüber hinaus auch noch

$$t_C + 2\delta t < t_B.$$

Beweis:
Aufgrund der Isomorphie des zugehörigen Relativs zum Relativ des zustandshomogenen Bilinearsystems gilt dieselbe Bedingung.
Die Voraussetzung des Kommutativgesetzes ohne Totzeit für eingangshomogene BLS lautet:
Es seien $A, B, C \in \mathfrak{P} \setminus \mathfrak{P}^0$, $u \neq v$ beliebig vorgegeben mit

$$\begin{aligned} & A[u]C \;\wedge\; C[v]B \\ \succ\;\; & f(A)k([u])f(C) \;\wedge\; f(C)k([v])f(B). \end{aligned}$$

Mit Berücksichtigung der Bijektionen f und k aus Satz 5.15 gilt dann in dem zustandshomogenen BLS:

$$\begin{aligned} & \bigvee_{f(D)\in\mathfrak{P}\setminus\mathfrak{P}^0} f(A)k([v])f(D) \;\wedge\; f(D)k([u])f(B) \\ \wedge\;\; & t_{f(D)} = t_D = t_{f(A)} + t_{f(B)} - t_{f(C)} = t_A + t_B - t_C. \end{aligned}$$

Also ist richtig im eingangshomogenen BLS:

$$\begin{aligned} & \bigvee_{D\in\mathfrak{P}\setminus\mathfrak{P}^0} A[v]D \;\wedge\; D[u]B \\ \wedge\;\; & t_D = t_A + t_B - t_C. \end{aligned}$$

Es werden dann dieselben Schlüsse wie im Satz 6.4 durchgeführt.

$\square$

Satz 6.7
Es sei ein Paar $(A, B) \in \mathfrak{P}^+ \times \mathfrak{P}^+ \cup \mathfrak{P}^- \times \mathfrak{P}^-$ *gegeben mit*

$$A((u) \bigtriangleup (v))B\,, \quad \textit{also}$$

$$\bigvee_{C=(t_C, x^C) \in \mathfrak{P}} (A, C, B) \in ((u) \underset{1}{\davidsstar} (v))\boldsymbol{\mathcal{F}}_{1,2,4}\,.$$

Sei weiter ein Paar $(X, Y) \in \mathfrak{P}^+ \times \mathfrak{P}^+ \cup \mathfrak{P}^- \times \mathfrak{P}^-$ *gegeben mit*

$$X\,AB\,Y,$$

so folgt

$$X((u) \bigtriangleup (v))Y,$$

wenn für die Zeitkoordinaten gilt:

$$\delta t \cdot (t_B - t_A + t_X - t_Y) < (t_Y - t_X)(t_C - t_A).$$

Beweis:
Auch hier gilt wegen der Isomorphie wieder dieselbe Bedingung wie bei dem Relativ des zustandshomogenen Bilinearsystems.

□

Bemerkung 6.8 Systemtheoretische Interpretation des Kommutativgesetzes und der Homogenitätsregel
Gegeben seien die zu den eingliedrigen linearen Systemen und zustandshomogenen bzw. eingangshomogenen Bilinearsystemen gehörenden Differentialgleichungsrelative.
Wir betrachten Punkte in den Zielräumen $\mathfrak{P}$ *bzw.* $\mathfrak{P} \setminus \mathfrak{P}^0$.

1. *Unter Totzeitbedingungen sei ein Punkt* B *von einem Startwert* A *durch einmaliges Umschalten im Punkt* C *von der Stellgröße* u *auf die Stellgröße* v *erreicht worden. Dann kann auch durch Umschalten von* v *nach* u *in einem geeigneten Punkt* D *der Endwert* B *von* A *erreicht werden, falls die zugehörigen Zeitkoordinaten* t_B, t_C *genügend weit auseinanderliegen, genauer, daß die in den Sätzen 6.1, (6.2) und 6.4 angegebenen Bedingungen gelten.*

2. *Unter Totzeitbedingungen sei ein Punkt* B *von einem Startwert* A *durch einmaliges Umschalten im Punkt* C *von der Stellgröße* u *auf die Stellgröße* v *erreicht worden:*
$$(A, B) \in (u) \bigtriangleup (v).$$

Dann können auch vorgegebene Punkte X und Y mit

$$X\,AB\,Y,$$

d. h. Y wird durch dieselbe Stellgröße von X erreicht wie B von A, durch Schalten von u auf v in einem geeigneten Punkt Z miteinander gekoppelt werden

$$(X, Z, Y) \in ((u) \mathop{\davidsstar}\limits_{1} (v))\boldsymbol{\mathcal{F}}_{1,2,4} \qquad f.\ g.\ Z,$$

aber nur dann, wenn für die Zeitkoordinaten der beteiligten Punkte die in den Sätzen 6.3 und 6.5 gemachten Einschränkungen gelten.

Anhang

Wir zitieren hier einige Definitionen und Ergebnisse der Geometrischen Relationen-Algebra und der relationen-algebraischen Beschreibung der Systeme aus den Arbeiten (Arnold, 1976, 1987, 1993a, 1994, Arb.).

Definition 1
Wir sprechen von einem **"System"**

$$(\mathcal{T}, \mathrm{X}, \mathcal{U}, \Phi)\,,$$

im Sinne von E.-D. Sontag (1990), wenn vorgegeben werden

- *als "Zeitmenge" eine Untergruppe* $\mathcal{T}(+) < \mathbb{R}(+)$*;*

- *eine nicht leere Menge* X*, deren Elemente "Zustände" heißen;*

- *eine nicht leere Menge* $\mathcal{U}$*, deren Elemente "Stellwerte" heißen;*

- *eine Funktion*

  $$\Phi : \mathcal{D}_\Phi \longrightarrow \mathrm{X},$$

  wobei $\mathcal{D}_\Phi$ *eine Teilmenge ist von*

  $$\{(\tau, \sigma, \mathrm{x}, w) | \sigma, \tau \in \mathcal{T}; \sigma \leq \tau; \mathrm{x} \in \mathrm{X}; w \in \mathcal{U}^{[\sigma,\tau)}\}$$

und wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- *Nicht-Trivialität*
  Zu jedem Zustand $\mathrm{x}_0 \in \mathrm{X}$ *gibt es mindestens ein Paar* $\sigma < \tau$ *in* $\mathcal{T}$ *und ein* $w \in \mathcal{U}^{[\sigma,\tau)}$ *derart, daß "*w *auf* x_0 *anwendbar" ist, d. h. derart, daß* $(\tau, \sigma, \mathrm{x}_0, w) \in \mathcal{D}_\Phi$*.*

- *Restriktion*
  Ist $w \in U^{[\sigma,\tau)}$ *anwendbar auf* x*, so ist auch für jedes* $\mu \in [\sigma, \tau)$ *die Restriktion* $w_1 = w|_{[\sigma,\mu)} \in U^{[\sigma,\mu)}$ *auf* x *anwendbar und die Restriktion* $w_2 = w|_{[\mu,\tau)} \in U^{[\mu,\tau)}$ *ist anwendbar auf* $x(\mu) = (\mu, \sigma, \mathrm{x}, w_1)\Phi$*.*

- *Halbgruppe*
  Sind σ, μ, τ *drei reelle Zahlen mit* $\sigma < \mu < \tau$*, ist* $w_1 \in \mathfrak{U}^{[\sigma,\mu)}$ *und* $w_2 \in \mathfrak{U}^{[\mu,\tau)}$ *und ist* x *ein Zustand mit*

$$(\mu, \sigma, \mathrm{x}, w_1)\Phi = \mathrm{x}_1 \;\wedge\; (\tau, \mu, \mathrm{x}_1, w_2)\Phi = \mathrm{x}_2,$$

  dann ist die Verkettung $w = w_1 \dot{\vee} w_2 \in \mathfrak{U}^{[\sigma,\tau)}$ *auf* x *anwendbar, und es gilt*

$$(\tau, \sigma, \mathrm{x}, w)\Phi = \mathrm{x}_2.$$

- *Identität*
  Für jedes $\sigma \in \mathfrak{T}$ *und jedes* $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$ *ist die leere Abbildung*

$$\diamond \in \mathfrak{U}^{[\sigma,\sigma)}$$

  auf x *anwendbar, und es gilt*

$$(\sigma, \sigma, \mathrm{x}, \diamond)\Phi = \mathrm{x}.$$

Für eine synonyme Charakterisierung des obigen System-Begriffes durch Regel-Relative erweist sich ein Zusatz-Axiom als wichtig.

- *Reduktion*
  Es seien $u_1, u_2 \in \mathfrak{U}$*, und es gelte*

$$\bigwedge_{\sigma\in\mathfrak{T}} \bigwedge_{\tau\in\mathfrak{T}} \bigwedge_{\mathrm{x}\in\mathrm{X}} (\tau, \sigma, \mathrm{x}, w_{u_1})\Phi = (\tau, \sigma, \mathrm{x}, w_{u_2})\Phi,$$

  wobei

$$w_{u_i}(t) \equiv u_i \qquad \text{f. a. } t \in [\sigma, \tau)$$

  gesetzt sei, so folgt

$$u_1 = u_2.$$

  [Die Prämisse des Reduktionsaxioms umfaßt

$$\bigwedge_{\sigma\in\mathfrak{T}} \bigwedge_{\tau\in\mathfrak{T}} \bigwedge_{\mathrm{x}\in\mathrm{X}} (\tau, \sigma, \mathrm{x}, w_{u_1}) \in \mathcal{D}_\Phi \;\Leftrightarrow\; (\tau, \sigma, \mathrm{x}, w_{u_2}) \in \mathcal{D}_\Phi. \quad]$$

Wir gebrauchen den Begriff "System" stets in dem Sinne, daß das Zusatzaxiom "Reduktion" als gültig vorausgesetzt wird.

Definition 2
Wir sprechen von einem **"Regel-Relativ"**

$$(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot \mathrm{dt}),$$

wenn vorgegeben werden:

- *als "Zeitmenge" eine Untergruppe* $\mathfrak{T}(+) < \mathbb{R}(+)$*;*

- *eine nicht leere Menge* X*, deren Elemente "Zustände" heißen;*

- *eine nicht leere Menge* $\mathcal{R}$ *von binären Relationen auf der Grundmenge* $\mathfrak{P} = \mathfrak{T} \times \mathrm{X}$*:*
$$\mathcal{R} \subset \mathrm{Pot}(\mathfrak{P} \times \mathfrak{P});$$

- *eine Abbildungsschar* $\Pi \cdot dt$*, in der zu jedem Paar* $\sigma, \tau \in \mathfrak{T}$ *mit* $\sigma \leq \tau$ *eine Abbildung*
$$\Pi_\sigma^\tau \cdot dt \, : \begin{cases} \mathcal{R}^{[\sigma,\tau)} \longrightarrow Pot(\mathfrak{P} \times \mathfrak{P}) \\ \qquad \Omega \longmapsto \Pi_\sigma^\tau \, \Omega \, dt \end{cases}$$
existiert

und wenn die folgenden Axiome gelten:

1. $\bigwedge_{\mathrm{x}\in\mathrm{X}} \bigvee_{\sigma<\tau} \bigvee_{\Omega\in\mathcal{R}^{[\sigma,\tau)}} (\sigma, \mathrm{x}) \Pi_\sigma^\tau \, \Omega \, \mathrm{dt} \neq \emptyset$.

2. $(\sigma, \mathrm{x}) \Pi_\sigma^\tau \, \Omega \, \mathrm{dt}(\tau, \mathrm{y}_1) \ \wedge \ (\sigma, \mathrm{x}) \Pi_\sigma^\tau \, \Omega \, \mathrm{dt}(\tau, \mathrm{y}_2) \ \succ \ \mathrm{y}_1 = \mathrm{y}_2$.

3. $\Pi_\sigma^\mu \Omega_1 dt \circ \Pi_\mu^\tau \Omega_2 dt = \Pi_\sigma^\tau (\Omega_1 \dot{\vee} \Omega_2) dt$.

4. $\bigwedge_{\mathfrak{c}\in\mathcal{R}} \Pi_\sigma^\tau \mathfrak{c} \mathrm{dt} = \mathfrak{c} \cap (\tau - \sigma)$,
   wobei $(\tau - \sigma)$ *die gemäß*
   $(\sigma', \mathrm{x})(\tau - \sigma)(\tau', \mathrm{y}) \quad :\!\!\Leftrightarrow \quad \tau' = \tau \wedge \sigma' = \sigma$
   erklärte Relation ist und $\Pi_\sigma^\tau \mathfrak{c} \, dt = \Pi_\sigma^\tau \Omega_{\mathfrak{c}} \, dt$ *zu setzen ist für* $\Omega_{\mathfrak{c}}(t) \equiv \mathfrak{c}$ *f. a.* $t \in [\sigma, \tau)$.

5. $\bigwedge_{\sigma\in\mathfrak{T}} \bigwedge_{\mathrm{x}\in\mathrm{X}} (\sigma, \mathrm{x}) \Pi_\sigma^\sigma \Diamond \mathrm{dt}(\sigma, \mathrm{x})$
   gilt für die leere Abbildung $\Diamond \in \mathcal{R}^{[\sigma,\sigma)}$.

Satz 3
Aus einem System $(\mathcal{T}, \mathrm{X}, \mathcal{U}, \Phi)$ *entsteht durch Anwendung des folgenden Verfahrens* Γ *ein Regel-Relativ* $(\mathfrak{P} = \mathcal{T} \times \mathrm{X}, \mathcal{R}, \Pi \cdot \mathrm{dt}) = (\mathcal{T}, \mathrm{X}, \mathcal{U}, \Phi)\Gamma$:

$$(1) \quad \begin{cases} \mathcal{R} \ := \{\langle u \rangle | u \in \mathcal{U}\} \quad \textit{mit} \\ \quad (\sigma, \mathrm{x})\langle \mathrm{u} \rangle(\tau, \mathrm{y}) \quad :\!\divideontimes \quad (\tau, \sigma, \mathrm{x}, w_u)\Phi = \mathrm{y} \\ \quad (\textit{ wobei } w_u(t) \equiv u \textit{ f. a. } t \in [\sigma, \tau)) \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} (\sigma, \mathrm{x})\Pi_\sigma^\tau \Omega \mathrm{dt}(\tau, \mathrm{y}) \quad :\!\divideontimes \\ \bigvee_{w(\cdot) \in \mathcal{U}^{[\sigma,\tau)}} \Omega(\cdot) = \langle w(\cdot) \rangle \ \wedge \ (\tau, \sigma, \mathrm{x}, w)\Phi = \mathrm{y} \end{cases}$$

Dabei bedeutet $\Omega(\cdot) = \langle w(\cdot) \rangle$ *soviel wie*

$$\Omega(t) = \langle w(t) \rangle \quad \textit{f. a. } t \in [\sigma, \tau).$$

Satz 4
Aus einem Regel-Relativ $(\mathfrak{P} = \mathcal{T} \times \mathrm{X}, \mathcal{R}, \Pi \cdot \mathrm{dt})$ *ensteht durch Anwendung des Verfahrens* Σ *ein System* $(\mathcal{T}, \mathrm{X}, \mathcal{U}, \Phi) = (\mathfrak{P} = \mathcal{T} \times \mathrm{X}, \mathcal{R}, \Pi \cdot \mathrm{dt})\Sigma$:

Aus $\mathfrak{P} = \mathcal{T} \times \mathrm{X}$ *entnehmen wir die ersten beiden Komponenten des zu definierenden Quadrupels* $(\mathcal{T}, \mathrm{X}, \mathcal{U}, \Phi)$;

$$\mathcal{U} := \mathcal{R};$$

$$\mathcal{D}_\Phi := \{(\tau, \sigma, \mathrm{x}, \Omega) | \sigma \leq \tau, \mathrm{x} \in \mathrm{X}, \Omega \in \mathcal{R}^{[\sigma,\tau)}, (\sigma, \mathrm{x})\Pi_\sigma^\tau \Omega \mathrm{dt} \neq \emptyset\};$$

$$(\tau, \sigma, \mathrm{x}, \Omega)\Phi = \mathrm{y} \quad :\!\divideontimes \quad (\sigma, \mathrm{x})\Pi_\sigma^\tau \Omega \mathrm{dt}(\tau, \mathrm{y}).$$

Satz 5
Für alle Regel-Relative $(\mathfrak{P} = \mathcal{T} \times \mathrm{X}, \mathcal{R}, \Pi \cdot \mathrm{dt})$ *und alle Systeme* $(\mathcal{T}, \mathrm{X}, \mathcal{U}, \Phi)$ *gilt:*

$$(\mathfrak{P} = \mathcal{T} \times \mathrm{X}, \mathcal{R}, \Pi \cdot \mathrm{dt})\Sigma\Gamma \ = \ (\mathfrak{P} = \mathcal{T} \times \mathrm{X}, \mathcal{R}, \Pi \cdot \mathrm{dt}).$$

$$(\mathcal{T}, \mathrm{X}, \mathcal{U}, \Phi)\Gamma\Sigma \ \cong \ (\mathcal{T}, \mathrm{X}, \mathcal{U}, \Phi).$$

Regel-Relative und Systeme sind synonym, denn die Verfahren Γ *und* Σ *kehren einander um.*

Definition 6
Wir sprechen von einem **"n-stelligen Relativ"** $(\mathfrak{P}, \mathfrak{R}^{(n)})$ *mit* $n \geq 2$*, wenn gegeben sind:*

1. *eine Menge von Punkten* $\mathfrak{P} = \{A, B, C, \ldots\} \neq \emptyset$.
2. *eine Menge* $\mathfrak{R}^{(n)} = \{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots\} \subset \mathrm{Pot}\,\mathfrak{P}^{(n)} \setminus \{\emptyset\}$ *von n-stelligen Relationen auf der Grundmenge* $\mathfrak{P}$.

Definition 7
Ist $m \leq n$ *und sind* $i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leq n$ *vorgegeben, so setzen wir eine Abbildung* $\mathcal{F}_{i_1 \ldots i_m}$ *von* $\mathrm{Pot}\,(P^n) \setminus \{\emptyset\}$ *auf* $\mathrm{Pot}\,(P^m) \setminus \{\emptyset\}$

$$\mathcal{F}_{i_1 \ldots i_m} \ : \begin{cases} \mathrm{Pot}\,\mathfrak{P}^{(n)} \setminus \{\emptyset\} & \longrightarrow \quad \mathrm{Pot}\,\mathfrak{P}^{(m)} \setminus \{\emptyset\} \\ \qquad \mathfrak{A} & \longmapsto \quad \mathfrak{A}\mathcal{F}_{i_1 \ldots i_m} \end{cases}$$

an, indem wir setzen:

$$\begin{aligned} &(B_1, \ldots, B_m) \in \mathfrak{A}\mathcal{F}_{i_1 \ldots i_m} \quad :\Leftrightarrow \\ &(A_1, \ldots, A_n) \in \mathfrak{A} \quad \textit{mit} \quad A_{i_\mu} := B_\mu \quad (\mu = 1, \ldots, m) \\ &\textit{und geeigneten } A_j \in \mathfrak{P} \textit{ für } j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_m\}. \end{aligned}$$

$\mathfrak{A}\mathcal{F}_{i_1 \ldots i_m}$ *heißt* **"Projektion"** *von* $\mathfrak{A}$ *auf die Stellen* $i_1 \ldots i_m$.

Definition 8
Es seien

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \in \mathrm{Pot}(\mathfrak{P}^n) \setminus \{\emptyset\} \quad &=: \quad \mathbf{P}^n \\ \mathfrak{B} \in \mathrm{Pot}(\mathfrak{P}^m) \setminus \{\emptyset\} \quad &=: \quad \mathbf{P}^m \end{aligned}$$

mit $n, m \geq 2$ *vorgegeben sowie ein* $s \in \mathbb{N}$ *mit* $1 \leq s < \min\{n, m\}$*:*

1. *Wir definieren das* **"Verkettungsprodukt"** $\underset{s}{\Diamond}$ *gemäß folgender Vorschrift:*

$$\underset{s}{\Diamond} : \begin{cases} \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^m & \longrightarrow \quad \mathrm{Pot}\mathfrak{P}^{n+m-s} \\ \mathfrak{A}, \mathfrak{B} & \longmapsto \quad \mathfrak{A} \underset{s}{\Diamond} \mathfrak{B} \quad \textit{gemäß} \end{cases}$$

$$(A_1, \ldots, A_{n-s}, X_1, \ldots, X_s, B_{s+1}, \ldots, B_m) \in \mathfrak{A} \underset{s}{\Diamond} \mathfrak{B} \quad :\Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{lll} (A_1, \ldots, A_{n-s}, X_1, \ldots, X_s) & \in \mathfrak{A} & \wedge \\ \qquad (X_1, \ldots, X_s, B_{s+1}, \ldots, B_m) & \in \mathfrak{B} & \end{array}$$

2. *Wir definieren das* **"innere Produkt"** $\underset{s}{\Phi}$ *gemäß folgender Vorschrift:*

$$\underset{s}{\Phi} : \begin{cases} \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^m & \longrightarrow \quad \mathrm{Pot}\mathfrak{P}^{n+m-2s} \\ \mathfrak{A}, \mathfrak{B} & \longmapsto \quad \mathfrak{A} \underset{s}{\Phi} \mathfrak{B} := (\mathfrak{A} \underset{s}{\Diamond} \mathfrak{B})\mathcal{F}_{(1,\ldots,n-s,n+1,\ldots,n+m-s)}. \end{cases}$$

Bemerkung 9
Für $n = m = 2$ und $s = 1$ erhalten wir im inneren Produkt das "normale" Relationenprodukt binärer (zweistelliger) Relationen:

$$\mathfrak{A} \underset{1}{\Phi} \mathfrak{B} \;=\; (\mathfrak{A} \underset{1}{\Diamond} \mathfrak{B})\mathcal{F}_{1,3} \;=\; \mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}.$$

Definition 10
Ein zweistelliges Relativ $(\mathfrak{P}, \mathfrak{R})$ heißt **"einfach graphisch"**, *wenn es die folgenden Axiome erfüllt:*

- *Scharf einfache Transitivität*

$$\bigwedge_{A,B \in \mathfrak{P}} \; \overset{1}{\bigvee_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{R}}} : \; A\mathfrak{D}B.$$

Wir setzen für alle $A, B \in \mathfrak{P}$ und alle $\mathfrak{D} \in \mathfrak{R}$:

$$\mathfrak{D} = AB \;:\Leftrightarrow\; A\mathfrak{D}B.$$

- *Abgeschlossenheit bezüglich Gleichheitsrelation*

$$\bigwedge_{A,B\in\mathfrak{P}} : A(BB)C \Leftrightarrow A = C.$$

- *Abgeschlossenheit bezüglich Inversen*

$$\bigwedge_{A,B\in\mathfrak{P}} : AB^{-1} = BA.$$

- *Linkstotalität*

$$\bigwedge_{A\in\mathfrak{P}} \bigwedge_{\mathfrak{D}\in\mathfrak{R}} \bigvee_{B\in\mathfrak{P}} : A\mathfrak{D}B.$$

Definition 11
Ein zweistelliges, einfach graphisches Relativ $(\mathfrak{P},\mathfrak{R})$ *heißt* **"homogen"**, *wenn gilt:*

$$(H_2) \qquad \bigwedge_{A,B\in\mathfrak{P}} \bigwedge_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\in\mathfrak{R}} : A(\mathfrak{A}\circ\mathfrak{B})B \;\Rightarrow\; AB \subset \mathfrak{A}\circ\mathfrak{B}.$$

Diese Formel nennen wir zweistufige **"Homogenitätsregel"**, *sie ist äquivalent zu folgendem Ausdruck:*

$$(H_2) \qquad \bigwedge_{A,B,C\in\mathfrak{P}} : AB \subset AC \circ CB.$$

Definition 12
Ein zweistelliges, einfach graphisches und homogenes Relativ $(\mathfrak{P},\mathfrak{R})$ *heißt* **"affines Richtungsrelativ"**, *wenn die Relationen folgenden Eigenschaften genügen:*

- *Streng alternierende Relationen*

$$\bigwedge_{\mathfrak{A}\in\mathfrak{R}} : \mathfrak{A}\circ\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{A}\cup\mathfrak{A}^{-1}\cup\mathfrak{E}.$$

- *Idempotente Relationen*

$$\bigwedge_{\mathfrak{A}\in\mathfrak{R}} : \mathfrak{A}\circ\mathfrak{A} = \mathfrak{A}.$$

- *Antisymmetrische Relationen*

$$\bigwedge_{\mathfrak{A}\in\mathfrak{R}\setminus\{\mathfrak{E}\}} : \mathfrak{A}\cap\mathfrak{A}^{-1} = \emptyset.$$

- *Kommutierende Relationen*

$$\bigwedge_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\in\mathfrak{R}} : \mathfrak{A}\circ\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\circ\mathfrak{A}.$$

Definition 13
Wir sprechen von einem **"affinen Relativ"** $(\mathfrak{P},\mathfrak{R})$*, wenn das Relativ einfach graphisch und homogen ist und die Relationen in* $\mathfrak{R}$ *symmetrisch alterniernd sind, d. h.:*

- *Symmetrie*

$$\bigwedge_{\mathfrak{A}\in\mathfrak{R}} : \mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{-1}.$$

- *Alternierende Relationen*

$$\bigwedge_{\mathfrak{A}\in\mathfrak{R}} : \mathfrak{A}\circ\mathfrak{A}^{-1} \subset \mathfrak{A}\cup\mathfrak{E}.$$

Bemerkung 14
Jedes affine Richtungsrelativ $(\mathfrak{P},\mathfrak{R})$ *stiftet ein affines Relativ* $(\mathfrak{P},\widetilde{\mathfrak{R}})$*, wenn man setzt:*

$$\widetilde{\mathfrak{R}} := \{\mathfrak{A}\cup\mathfrak{A}^{-1}|\mathfrak{A}\in\mathfrak{R}\}.$$

Definition 15
Wir sprechen von einer **"affinen Geometrie"** $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \in, \|)$, *wenn uns gegeben sind:*

1. *eine Menge von Punkten* $\mathfrak{P} = \{A, B, C, \ldots\} \neq \emptyset$,
2. *eine Menge von Geraden* $\mathfrak{G} = \{g, h, k, \ldots\} \subset \operatorname{Pot}\mathfrak{P}$,
3. *die mengentheoretische Elementbeziehung* $\in$ *als Inzidenzrelation,*
4. *eine Parallelenrelation* $\| \subset \operatorname{Pot}(\mathfrak{G} \times \mathfrak{G})$

und wenn die folgenden Axiome gelten:

- *Existenz und Eindeutigkeit der Verbindungsgeraden*

$$\bigwedge_{A,B\in\mathfrak{P}} : A \neq B \Rightarrow \overset{1}{\bigvee_{g\in\mathfrak{G}}} : A, B \in g.$$

  (Wir setzen für diese zu $A \neq B$ *eindeutig bestimmte Verbindungsgerade* g *auch* g_{AB}*).*

- *Geraden sind Verbindungsgeraden*

$$\bigwedge_{g\in\mathfrak{G}} \bigvee_{A,B\in\mathfrak{P}} : A \neq B \wedge A \in g \wedge B \in g.$$

- *Die Parallelenrelation ist eine Äquivalenzrelation.*
- EUKLID*isches Parallelenpostulat*

$$\bigwedge_{A\in\mathfrak{P}} \bigwedge_{g\in\mathfrak{G}} \overset{1}{\bigvee_{h\in\mathfrak{G}}} : A \in g \wedge h \parallel g.$$

- *Konstruierbarkeit parallelähnlicher Dreiecke*

$$\bigwedge_{A,B,C,A',B'\in\mathfrak{P}} : A \neq B \neq C \neq A \wedge A' \neq B' \wedge g_{A,B} \parallel g_{A',B'}$$

$$\Rightarrow \bigvee_{C'\in\mathfrak{P}} : g_{A,C} \parallel g_{A',C'} \wedge g_{C,B} \parallel g_{C',B'} .$$

Satz 16 Affiner Kennzeichnungssatz

1. *Aus einem affinen Relativ* $(\mathfrak{P}, \mathfrak{R})$ *entsteht durch Anwendung des folgenden Verfahrens* γ *eine affine Geometrie* $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \in, \|) = (\mathfrak{P}, \mathfrak{R})\gamma$:

$$\mathfrak{G} := \{A(\mathfrak{B} \cup \mathfrak{E}) | A \in \mathfrak{P} \wedge \mathfrak{B} \in \mathfrak{R} \setminus \{\mathfrak{E}\}\}$$

$$A(\mathfrak{B} \cup \mathfrak{E}) \parallel A'(\mathfrak{B}' \cup \mathfrak{E}) \quad :\Leftrightarrow \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{B}'.$$

2. *Aus einer affinen Geometrie* $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \in, \|)$ *entsteht durch Anwendung des Verfahrens* α *ein affines Relativ* $(\mathfrak{P}, \mathfrak{R}) = (\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \in, \|)\alpha$:

$$\mathfrak{R} := \{\langle g \rangle \subset \mathfrak{P}^2 | g \in \mathfrak{G}\} \cup \{\mathfrak{E}\}$$

$$A\langle g \rangle B \quad :\Leftrightarrow \quad A \neq B \wedge g_{A,B} \parallel g.$$

3. *Für alle affinen Relative* $(\mathfrak{P}, \mathfrak{R})$ *und alle affinen Geometrien* $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \in, \|)$ *gilt:*

$$(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \in, \|)\alpha\gamma = (\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \in, \|).$$

$$(\mathfrak{P}, \mathfrak{R})\gamma\alpha = (\mathfrak{P}, \mathfrak{R}).$$

Affine Relative und affine Geometrien sind synonym zueinander, der Homogenitätsregel auf der algebraischen Seite entspricht die Konstruierbarkeit parallelähnlicher Dreicke auf der geometrischen Seite.

Satz 17 Affiner Kennzeichnungssatz

Ist eine affine Geometrie $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \in, \|)$ *zusätzlich mit einer dreistelligen Zwischenrelation* $\mathfrak{Z}$ *auf* $\mathfrak{P}$ *ausgestattet, die dem* Hilbert*schen Anordnungsaxiom und dem Axiom von* Pasch *genügt, so wird diese* **angeordnete Geometrie** *synonym beschrieben durch ein affines Richtungsrelativ* $(\mathfrak{P}, \mathfrak{R})$.

Literaturverzeichnis

Arnold, H.-J. 1974. *Der projektive Abschluß affiner Geometrien mit Hilfe relationentheoretischer Methoden.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, Bd. 40.

Arnold, H.-J. 1976. *Eine relationentheoretische Algebraisierung angeordneter affiner und projektiver Geometrien.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 45.

Arnold, H.-J. 1987. *Affine Relative.* Results in Mathematics, Vol. 12. Basel: Birkhäuser.

Arnold, H.-J. 1990. *Zur mathematischen Beschreibung zielgerichteter Handlungen des Menschen an technischen Systemen.* Schriftenreihe des Fachbereichs Mathematik, Universität-GH-Duisburg, SM-DU-173.

Arnold, H.-J. 1991. *Zur Genese des Mathematisierens in geeigneten Handlungsfeldern.* Schriftenreihe des Fachbereichs Mathematik, Universität-GH-Duisburg, SM-DU-196.

Arnold, H.-J. 1993a. *Regel-Relative.* Schriftenreihe des Fachbereichs Mathematik, Universität-GH-Duisburg, SM-DU-218.

Arnold, H.-J. 1993b. *Zeitdiskrete Regel-Relative.* Forschungsbericht. Universität-GH-Duisburg.

Arnold, H.-J. 1994. *Regel-Relative.* Schriftenreihe des Fachbereichs Mathematik, Universität-GH-Duisburg, SM-DU-246.

Arnold, H.-J. (Arb.) *Arbeitspapiere.* Unveröffentlichtes Arbeitsmaterial und Manuskripte.

Heineken, E.; Arnold, H.-J.; Kopp, A.; Soltysiak, R. 1992. *Strategien des Denkens bei der Regelung eines einfachen dynamischen Systems unter verschiedenen Totzeitbedingungen.* Sprache und Kognition, 11, Heft 3. Bern, Stuttgart: Huber.

Heuser, H. 1989. *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Stuttgart: Teubner.

Kamke, E. 1977. *Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen.* Band I (9. Auflage). Stuttgart: Teubner.

Kandel, A. 1986. *Fuzzy mathematical techniques with applications.* Addison-Wesley.

Knobloch, H. W. ; Kwakernaak, H. 1985. *Lineare Kontrolltheorie.* Berlin [u. a.]: Springer.

Kopp, A. 1986. *Entwicklung relationentheoretischer Hilfsmittel zur Algebraisierung und Konstruktion allgemeiner affiner Strukturen.* Dissertation, Universität-GH-Duisburg.

Schwarz, H. 1987. *Homogene bilineare Systeme.* Automatisierungstechnik at, 35. Jahrg., Heft 7.

Schwarz, H. 1991. *Nichtlineare Regelungssysteme - systemtheoretische Grundlagen.* München [u. a.]: Oldenbourg.

Soltysiak, R. 1980. *Die Projektion affiner Strukturen über Fastkörpern mit Hilfe relationentheoretischer Methoden.* Dissertation, Universität-GH-Duisburg.

Sontag, E. D. 1990. *Mathematical control theory: deterministic finite dimensional systems.* New York [u. a.]: Springer.

Stoer, J.; Bulirsch, R. 1978. *Einführung in die Numerische Mathematik II.* Berlin, Heidelberg, New York; 2. Auflage.

Walter, W. 1990. *Gewöhnliche Differentialgleichungen: eine Einführung.* (4. Auflage). Berlin [u. a.]: Springer.

Stichwortverzeichnis

Symbolverzeichnis

$AB, A \cdot B, A * B, \widetilde{AB}, \overline{AB}, AB_{\mathcal{R}}, AB_{\mathfrak{R}}$	die zu zwei Punkten A, B eindeutig existierende Verbindungsrelation
$BW(\langle \dot{u} \rangle)$	Beharrungswert einer Zukunftsrelation
$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{X}(t), \mathfrak{F}(t)$	Matrizen und Matrizenfunktionen
δt	Totzeit
(Δt)	binäre Relation auf dem Bereich $\mathfrak{P} = \mathfrak{T} \times \mathfrak{Y}$, restringiert auf $\mathfrak{T}$
$\triangle$	abkürzend für $(\cdot \underset{1}{\ast} \cdot)\boldsymbol{\mathcal{F}}_{1,4}$
$\mathfrak{e}$	Gleichheitsrelation
e^t	Exponentialfunktion
$\mathcal{F}_{i_1 \ldots i_m}$	Projektionsfunktor
$G(x)$	GAUSS-Klammerfunktion
i	imaginäre Einheit
$\cong$	isomorph
λ	Eigenwert
$\underset{s}{\bigoplus}$	inneres Produkt
$\circ, \bigcirc_{i=1}^{n}$	Relationenprodukt, n-faches Relationenprodukt
$\mathbf{P}$	Erreichbarkeitsrelation
$\Pi_{t_0}^{t} \Omega \, \mathrm{dt}$	binäre Relation eines Regel-Relativs
$(\mathfrak{P}, \mathcal{R}), (\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot \mathrm{dt})$	Regel-Relativ
$(\mathfrak{P}, \mathfrak{R})$	(DGL-)Relativ
$(\mathfrak{P}, \mathbf{R})$	Steigungsrelativ
$(\mathfrak{P}, \mathcal{A})$	Abstandsrelativ
$(\mathfrak{P}, \widetilde{\mathfrak{R}})$	Fuzzy-Differentialgleichungsrelativ

$\widetilde{\mathfrak{r}}$	Fuzzy-Relation
$\mathfrak{r}^{-1}$	inverse Relation
$\mathcal{T}$	Zeitmenge
$\mathcal{U}$	Kontrollmenge
$\langle u \rangle$	binäre Relation eines Regel-Relativs
$\langle \dot{u} \rangle$	Zukunftsrelation
$\langle \dot{u} \rangle^{-1}$	Vergangenheitsrelation
$\mu_{\widetilde{[\dot{u}]}}(A, B)$	Zugehörigkeitsfunktion
$[\infty], [\pm\infty], (\infty)$	Unendlichrelationen
$\mathfrak{u}, \binom{u}{v}, \mathfrak{u}(t), \mathfrak{x}(t)$	Vektoren und Vektorfunktionen
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	Menge der Vergangenheitsrelationen
$\underset{s}{\diamond}$	Verkettungsprodukt
X	Zustandsmenge
$\mathfrak{Z}$	Menge der Zukunftsrelationen