Äquivariante biharmonische Abbildungen

Von der Fakultät für Mathematik der Universität Duisburg-Essen
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
genehmigte Dissertation

von

Felix Zorn

aus Amberg

Referent:	Prof. Dr. Andreas Gastel
Korreferent:	Prof. Dr. Christoph Scheven
Datum der mündlichen Prüfung:	06.03.2013

Danksagung

Ich bedanke mich bei Herrn Prof. Dr. Andreas Gastel für die Betreuung dieser Arbeit. Außerdem bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr. Christoph Scheven für deren Begutachtung.

Meinen Bürokollegen Herrn Dr. Andreas Nerf und Frau Laura Anderle danke ich für die angenehme berufliche Zusammenarbeit und für ihre Freundschaft in allen Lebenslagen.

Allen Erlanger und Duisburger Kaffeepausenkollegen danke ich für die herzliche Aufnahme und für die angnehme Arbeitsatmosphäre.

Frau Dr. Miriam Dieter danke ich zusätzlich für so manche Hilfestellung in organisatorischen und lebenspraktischen Belangen.

Den Sekretärinnen danke ich für die angenehme Zusammenarbeit und die bereitwillige Unterstützung, insbesondere bei der Organisation und Durchführung meiner Promotionsfeier. Mein ganz herzlicher Dank gilt Paule und Elsa.

Und natürlich bedanke ich mich bei meiner Familie dafür, dass sie mir Studium und Promotion ermöglicht hat und dass sie immer für mich da ist.

Zusammenfassung

Eine Abbildung $u \in W^{2,2}(M,N)$ heißt *biharmonisch*, wenn sie ein kritischer Punkt der *Bienergie*

$$E(u) = \int_M |\Delta_{\mathbf{g}} u|^2 \, \mathrm{dvol}_{\mathbf{g}}$$

ist. Dabei ist $(M, \mathbf{g})$ eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension m und $N \subset \mathbb{R}^L$ eine kompakte Untermannigfaltigkeit. Eine kompakte Lie-Gruppe G operiere isometrisch auf M und orthogonal auf $\mathbb{R}^L$. Es sei $N \subset \mathbb{R}^L$ eine G-invariante Teilmenge. Eine Abbildung $u \in W^{2,2}(M,N)$ heißt *G-äquivariant*, wenn für einen ihrer Repräsentanten

$$u(gx) = gu(x) \text{ für alle } x \in M, \ g \in G$$

gilt. Die Abbildung u heißt ein *G-Minimierer der Bienergie*, wenn

$$E(u) \leq E(v) \text{ für alle } G\text{-äquivarianten } v \in W^{2,2}(M,N)$$

gilt. Durch Anwendung der Direkten Methode der Variationsrechnung erhalten wir die Existenz eines G-Minimierers der Bienergie. Wir beweisen, dass jeder G-Minimierer der Bienergie eine stationär-biharmonische Abbildung ist („Symmetrische Stationarität"). Nach bekannten Ergebnissen über stationär-biharmonische Abbildungen wissen wir, dass jeder G-Minimierer der Bienergie u auf $M \setminus \Sigma_u$ glatt ist, wobei die *Singuläre Menge* Σ_u verschwindendes $(m-4)$-dimensionales Hausdorff-Maß hat. Unter bestimmten Bedingungen an die Transformationsgruppe $[M, G]$ (neben anderen, dass die Kohomogenität ≤ 4 ist) stellen wir hinreichende Kriterien dafür auf, dass stärkere Abschätzungen für die Hausdorff-Dimension von Σ_u gelten: Sei ein $s \in [5, m]$ gegeben. Aus der Operation von G auf M leiten wir eine Familie von orthogonalen Darstellungen $[\mathbb{R}^\ell, H]$ ab. Wenn es für keine dieser Darstellungen mit $\ell \leq s$ einen glatten, nichtkonstanten H-Minimierer der euklidischen Bienergie $\psi \in W^{2,2}(B^\ell \setminus \{0\}, N)$ gibt, der nullhomogen ist, dann wird die Hausdorff-Dimension von Σ_u nach oben durch $m - s - 1$ begrenzt. Im Fall $s = m-1$ ist die singuläre Menge Σ_u diskret. Im Fall $s = m$ ist die Abbildung u glatt.

Der Hauptschritt im Beweis ist ein *Kompaktheitssatz*. Dieser besagt insbesondere, dass der Grenzwert einer schwach konvergenten Folge von lokalen G-Minimierern $u_i \in W^{2,2}(B^m, \mathbb{R}^L)$ der euklidischen Bienergie wiederum ein lokaler G-Minimierer der euklidischen Bienergie ist und dass die Konvergenz stark in $W^{2,2}_{loc}(B^m_{\frac{1}{2}}, \mathbb{R}^L)$ ist.

Abstract

A map $u \in W^{2,2}(M, N)$ is called *biharmonic* if it is a critical point of the *bienergy*

$$E(u) = \int_M |\Delta_{\mathbf{g}} u|^2 \,\mathrm{dvol}_{\mathbf{g}}.$$

Here $(M, \mathbf{g})$ is a compact Riemannian manifold of dimension m and $N \subset \mathbb{R}^L$ is a compact submanifold. Let a compact Lie-group G act isometrically on M and orthogonally on $\mathbb{R}^L$. Suppose that $N \subset \mathbb{R}^L$ is a G-invariant subset. A map $u \in W^{2,2}(M, N)$ is called *G-equivariant* if for one of its representatives there holds

$$u(gx) = gu(x) \text{ for every } x \in M,\ g \in G.$$

The map u is called a *G-minimizer of the bienergy* if

$$E(u) \leq E(v) \text{ for every } G\text{-equivariant } v \in W^{2,2}(M, N).$$

Applying the direct method of the calculus of variations we get the existence of a G-minimizer of the bienergy. We prove that every G-minimizer of the bienergy is a stationary biharmonic map ("symmetric criticallity"). From some well known results about stationary biharmonic maps we know that every G-minimizer of the bienergy u is smooth on $M \setminus \Sigma_u$, where the *singular set* Σ_u has vanishing $(m-4)$-dimensional Hausdorff measure. Assuming certain properties of the transformation group $[M, G]$ (amongst others that the cohomogeneity is ≤ 4) we establish sufficient conditions ensuring stronger estimates for the Hausdorff-dimension of Σ_u. Let some $s \in [5, m-1]$ be given. From the action of G on M we derive a family of orthogonal representations $[\mathbb{R}^\ell, H]$. If for every such representation with $\ell \leq s$ there is no smooth, nonconstant H-minimizer $\psi \in W^{2,2}(B^\ell \setminus \{0\}, N)$ of the Euclidean bienergy, which is homogeneous of degree zero, then the Hausdorff-dimension of Σ_u does not exceed $m - s - 1$. In the case $s = m - 1$ the singular set Σ_u is discrete. In the case $s = m$ the map u is smooth.
The main step in the proof is a *compactness theorem*. It states in particular, that the limit of a weakly convergent sequence of local G-minimizers of the Euclidean bienergy $u_i \in W^{2,2}(B^m, \mathbb{R}^L)$ is also a local G-minimizer of the Euclidean bienergy and that the convergence is strong in $W^{2,2}_{loc}(B^m_{\frac{1}{2}}, \mathbb{R}^L)$.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

1.1 *Was* wir tun: ein erster Überblick

Die (extrinsische) *Bienergie* einer Abbildung

$$u \in W^{2,2}(M,N) := \left\{u \in W^{2,2}\left(M,\mathbb{R}^L\right) \;:\; u(x) \in N \text{ fast überall}\right\}$$

zwischen einer kompakten riemannschen Mannigfaltigkeit $(M,\mathbf{g})$ der Dimension m und einer kompakten Untermannigfaltigkeit $N \subset \mathbb{R}^L$ ist

$$E(u) := \int_M |\Delta_{\mathbf{g}} u|^2 \,\mathrm{dvol}_{\mathbf{g}}.$$

Dabei ist $\Delta_{\mathbf{g}}$ der Laplace-Beltrami-Operator und $\mathrm{dvol}_{\mathbf{g}}$ die Volumenform von $(M,\mathbf{g})$. Kritische Punkte von E, d.h. Abbildungen $u \in W^{2,2}(M,N)$ mit

$$\delta E(u;\varphi) := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} E\left(\Pi_N(u+t\varphi)\right) = 0 \text{ für alle } \varphi \in C^\infty(M,\mathbb{R}^L),$$

wobei Π_N die Nächste-Punkt-Projektion von N ist, heißen *schwach biharmonische Abbildungen*. Liegt eine schwach biharmonische Abbildung in C^4, so heißt sie eine *biharmonische Abbildung*. Biharmonische Abbildungen sind dadurch charakterisiert, dass sie die Gleichung

$$\left(\Delta_{\mathbf{g}}^2 u\right)^\top = 0$$

lösen. Hierbei ist $\left(\Delta_{\mathbf{g}}^2 u(x)\right)^\top$ für jedes $x \in M$ die orthogonale Projektion des Vektors $\Delta_{\mathbf{g}}^2 u(x) \in \mathbb{R}^L$ auf den Unterraum $T_{u(x)}N \subset \mathbb{R}^L$. Diese Gleichung ist eine nichtlineare elliptische partielle Differentialgleichung vierter Ordnung.

Sei nun eine kompakte Lie-Gruppe G gegeben, die auf M und $\mathbb{R}^L$ operiert. Für jedes $g \in G$ sei die Abbildung

$$M \ni x \mapsto gx \in M$$

eine Isometrie und die Abbildung

$$\mathbb{R}^L \ni v \mapsto gv \in \mathbb{R}^L$$

orthogonal. Weiterhin sei die Untermannigfaltigkeit N eine G-invariante Teilmenge von $\mathbb{R}^L$, d.h. $gx \in N$ für jedes $g \in G$ und jedes $x \in M$. Eine Abbildung $u : M \to N$ heißt *G-äquivariant*, wenn

$$u(gx) = gu(x) \text{ für alle } x \in M \text{ und alle } g \in G.$$

Die Menge aller Abbildungen aus $W^{2,2}(M,N)$, die einen G-äquivarianten Repräsentanten haben, bezeichnen wir mit $W^{2,2}_G(M,N)$.

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit *G-Minimierern der Bienergie*. Das sind Abbildungen $u \in W^{2,2}_G(M,N)$ mit der Eigenschaft

$$E(u) \leq E(v) \text{ für alle } v \in W^{2,2}_G(M,N).$$

Die Existenz eines solchen G-Minimierers folgt ohne weitere Voraussetzungen mit Hilfe der Direkten Methode der Variationsrechnung (Satz 2). Daraufhin werden wir die sogenannte *Symmetrische Stationarität* (Satz 3) beweisen. Insbesondere wird dadurch gesagt, dass jeder G-Minimierer der Bienergie eine schwach biharmonische Abbildung ist. Dies bedeutet, dass unser äquivarianter Ansatz geeignet ist, um die Existenz gewisser schwach biharmonischer Abbildungen nachzuweisen. Daraufhin fragen wir nach den Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften eines G-Minimierers u der Bienergie. Insbesondere sind wir daran interessiert, unter welchen Bedingungen u biharmonisch ist und nicht nur *schwach* biharmonisch. Unser Ausgangspunkt für die Behandlung solcher Regularitätsfragen ist die folgende Aussage, welche wir für jeden G-Minimierer $u \in W^{2,2}_G(M,N)$ der Bienergie voraussetzen:

$$u \in C^\infty(M \setminus \Sigma_u, \mathbb{R}^L),$$

wobei die *singuläre Menge* $\Sigma_u \subset M$ abgeschlossen ist mit

$$\mathscr{H}^{m-4}(\Sigma_u) = 0$$

($\mathscr{H}^{m-4}$ bezeichnet das $(m-4)$-dimensionale Hausdorff-Maß). Von dieser Aussage ausgehend sind wir an hinreichenden Kriterien dafür interessiert, dass für ein $s \in (4,m]$ darüber hinaus

$$\mathscr{H}\text{-}\dim(\Sigma_u) \leq m - s$$

gilt ($\mathscr{H}$-dim bezeichnet die Hausdorff-Dimension).
Wir werden dabei die folgenden beiden starken Voraussetzungen an die Operation der Gruppe G auf M stellen:

- Die Operation von G auf M hat *Kohomogenität* ≤ 4, d.h.

$$m_G := m - \sup_{x\in M} \dim(Gx) \leq 4,$$

wobei $Gx := \{gx \ : \ g \in G\}$ der *Orbit* von x ist.

- Die Vereinigung aller Orbits Gx mit $\dim(Gx) < m - 4$ hat Hausdorff-Dimension $\leq m - 5$, d.h.

$$\mathscr{H}\text{-}\dim(\{x \in M \ : \ m_x > 4\}) \leq m - 5 \tag{1.1}$$

Dabei ist $m_x := m - \dim(Gx)$ die Kodimension des Orbits Gx.

Dass die Operation von G auf M Kohomogenität ≤ 4 hat, bedeutet insbesondere, dass es Orbits Gx ($x \in M$) mit $\dim(Gx) \geq m-4$ gibt und dass die Menge dieser Orbits

$$\{x \in M \ : \ m_x \leq 4\}$$

offen und dicht in M ist (siehe Abschnitt 2.2). (1.1) stellt eine Bedingung an die Größe von deren Komplement $\{x \in M \ : \ m_x > 4\}$: es muss Hausdorff-Dimension $\leq m - 5$ haben. In Abschnitt 1.4. in dieser Einleitung werden wir diese beiden Voraussetzung ausführlicher kommentieren. Unser Hauptergebnis wird unter diesen Voraussetzungen wie folgt lauten:
*Es gibt eine Menge $\mathcal{T}_{[M,G]}$ von orthogonalen Darstellungen $[\mathbb{R}^\ell, H]$ für verschiedene $5 \leq \ell \leq m$ und verschiedene Lie-Untergruppen H von G (*orthogonale Darstellung *bedeutet, dass die Gruppe H auf $\mathbb{R}^\ell$ operiert und für jedes $h \in H$ die Abbildung $\mathbb{R}^\ell \ni v \mapsto gv \in \mathbb{R}^\ell$ orthogonal ist), so dass gilt:*
Sei $s \in [5, m] \cap \mathbb{N}$. Angenommen, für keine *Darstellung $[H, \mathbb{R}^\ell] \in \mathcal{T}_{[M,G]}$ mit $5 \leq \ell \leq s$ gibt es einen glatten, nicht-konstanten, nullhomogenen H-Minimierer $\varphi : B^\ell \setminus \{0\} \to N$ der euklidischen Bienergie, so gilt*

$$\mathscr{H}\text{-}\mathit{dim}(\Sigma_u) \leq m - s - 1.$$

Im Fall $s = m - 1$ ist Σ_u diskret. Im Fall $s = m$ ist u glatt.
Kurz ausgedrückt: *Die Nicht-Existenz gewisser Abbildungen $u : B^\ell \to N$ garantiert zusätzliche Regularität eines jeden G-Minimierers $u : M \to N$ der Bienergie.*
Die notwendigen Bedingungen, welche zusätzliche Regularitätseigenschaften garantieren, beziehen sich also ausschließlich auf M, N und die Operation von G auf diesen beiden Mannigfaltigkeiten, nicht jedoch auf den betrachteten G-Minimierer u. Aussagen wie diese sind aus verschiedenen anderen Situationen unter der Bezeichnung *Dimensionsreduktion der singulären Menge* bekannt.
Um die soeben angedeutete Hauptaussage dieser Arbeit zu präzisieren, muss die Menge $\mathcal{T}_{[M,G]}$ definiert werden. Dies geschieht in Abschnitt 1.4 dieser Einleitung. Zuvor werden wir die Aufgabenstellung motivieren und in die Forschungslandschaft einordnen, sowie unsere Vorgehensweise skizzieren.

1.2 *Warum* wir es tun

Um den Textfluss nicht zu stören, verweisen wir für die Erläuterung der verwendeten geometrischen und analytischen Begriffe auf Kapitel 2 „Grundlagen“.

1.2.1 Warum biharmonische Abbildungen?

Sei eine kompakte riemannsche Mannigfaltigkeiten $(M, \mathbf{g})$ (mit oder ohne Rand) von Dimension m und eine kompakte Untermannigaltigkeit $N \subset \mathbb{R}^L$ von Dimension n gegeben.

Die *Energie* von $u \in W^{1,2}(M, N)$ ist

$$E(u) := \int_M |du|^2_{\mathbf{g}} \,\mathrm{dvol}_{\mathbf{g}}.$$

Die dazugehörige Euler-Lagrange-Gleichung ist

$$\tau(u) := (\Delta_{\mathbf{g}} u)^{\top} = 0, \tag{1.2}$$

$\tau(u)$ heißt das *Spannungsfeld* von u. (Genau genommen ist (1.2) *äquivalent* zur Euler-Lagrange-Gleichung der Energie. Es ist nicht unmittelbar ersichtlich, dass es sich bei (1.2) um eine *Differential*gleichung handelt, und auch nicht, ob bzw. wie sie im schwachen Sinne interpretierbar ist. Auf solche Fragen gehen wir, auch im Fall biharmonischer Abbildungen, in dieser Arbeit nicht ein.) Kritische Punkte der Energie E - d.h. schwache Lösungen der Gleichung $\tau(u) = 0$ - heißen *schwach harmonische Abbildungen.* Liegt eine solche außerdem in C^2, löst sie also die Euler-Lagrange-Gleichung nicht nur im schwachen, sondern auch im klassischen Sinn, so heißt sie eine *harmonische Abbildung.*

Die Euler-Lagrange-Gleichung der Energie E ist eine nichtlineare elliptische partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung. Wie bei vielen geometrisch motovierten Differentialgleichungen ist die Nichtlinearität hierbei „von kritischem Wachstum“[1] . Wir wollen hier nicht erörtern, was darunter zu verstehen ist, stattdessen geben wir eine Folgerung daraus an: Für schwache Lösungen $f \in W^{1,2}$ dieser Differentialgleichung kann wegen des „kritischen Wachstums“ sofort $\Delta_{\mathbf{g}} f \in L^1$ geschlussfolgert werden. Dies reicht jedoch nicht, um die gängigen Methoden der Potentialtheorie bzw. L^p-Theorie (siehe [21]) anwenden zu können, denn dafür müsste $\Delta_{\mathbf{g}} u \in L^p$ für ein $p > 1$ gelten, was im Allgemeinen bei schwach harmonischen Abbildungen nicht der Fall ist. Es werden hier also subtilere und aufwändigere Methoden der Potentialtheorie benötigt, dies wird in [24] ausführlich dargestellt.

[1]Begriffe in Anführungszeichen führen wir nicht formal ein, sondern verwenden sie eher intuitiv. In den meisten Fällen ist dies durch die Konvention gerechtfertigt

Seit den 1960er Jahren bilden harmonische Abbildungen ein viel bearbeitetes Forschungsgebiet innerhalb der Geometrischen Analysis. Als Beginn dieser Entwicklung kann die Arbeit [8] von Eells und Sampson angesehen werden. In ihr werden weitreichende Existenzaussagen für harmonische Abbildungen für den Fall getroffen, in dem die Zielmannigfaltigkeit N nichtnegative Schnittkrümmungen hat. Eine recht aktuelle Einführung in verschiedene Aspekte dieses Forschungsgebiets bieten die Übersichtsartikel [25] und [27]. Wir besprechen nun die wichtigen Fragen nach der *Existenz* und der *Regularität* (schwach) harmonischer Abbildungen.

Existenz. Die Existenz schwach harmonischer Abbildungen kann mit Hilfe der Direkten Methode der Variationsrechnung gezeigt werden (auf andere Methoden für Existenzbeweise gehen wir nicht ein, da sie in dieser Arbeit nicht von Belang sind). Hierbei wählt man eine geeignete Menge $V \subset W^{2,2}(M,N)$ und betrachtet eine *minimierende Folge* $u_i \in V\ (i \in \mathbb{N})$, für die also gilt:

$$\lim_{i\to\infty} E(u_i) = \inf_{v\in V} E(v).$$

Für die Wahl von V haben sich die folgenden Möglichkeiten etabliert:

- Im Fall $\partial M \neq 0$ wählt man üblicherweise

  $$V = \{u \in W^{2,2}(M,N)\ :\ u|_{\partial M} = \varphi|_{\partial M}\}$$

  für ein geeignet gewähltes $\varphi \in W^{2,2}(M,N)$. Man legt also die Randwerte der betrachteten Abbildungen fest, die Randwerte sind dabei im Spursinn zu verstehen.

- Im Fall $\partial M = \emptyset$ kann man z.B. $V \in \pi(M,N)$ als eine Homotopieklasse von Abbildungen zwischen M und N wählen.

- Eine weitere Möglichkeit ist es, $V = W^{1,2}_G(M,N)$ als die Menge aller *äquivarianten* $W^{1,2}$-Abbildungen $u : M \to N$ zu wählen, vorausgesetzt, dass auf M und N eine Lie-Gruppe G operiert.

In allen drei Fällen konvergiert die minimierende Folge $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ schwach in $W^{1,2}$ gegen eine Abbildung $u \in W^{1,2}(M,N)$ (dies folgt aus der *Koerzivität* der Energie), diese ist eine schwach harmonische Abbildung (im dritten Fall folgt dies aus dem sogenannten *Prinzip der symmetrischen Stationarität*). Im ersten und im dritten Fall gilt $u \in V$ und deswegen $E(u) = \inf_{v\in V} E(v)$. Im zweiten Fall braucht $u \in V$ *nicht* zu gelten („Der Grenzwert fällt aus der Homotopieklasse heraus.“). Wir können also ohne Zusatzwissen nicht ausschließen, dass mit u eine triviale (z.B. konstante) schwach harmonische Abbildung vorliegt. In den Fällen festgelegter Randwerte bzw. äquivarianter Abbildungessn kann dieses Problem nicht auftreten (solange φ bzw. die Operationen von G nicht trivial gewählt sind).

Regularität. Wir listen einige der bekanntesten Aussgen bezüglich der Regularität schwach harmonischer Abbildungen auf.

- *Es gibt eine schwach harmonische Abbildung* $u \in W^{1,2}(B^3, S^2)$, *die nirgends stetig ist [46].*

- *Jede stetige harmonische Abbildung* $u \in W^{1,2}(M, N)$ *ist glatt [24].*
  (Die Monographie [40] von Moser liefert den euklidischen Fall. Der riemannsche Fall ist in der Monographie [26] von Jost zu finden, wo das Ergebnis für allgemeinere Variationsprobleme bewiesen wird).

- *In Fall* $m = 2$ *ist jede harmonische Abbildung* $u \in W^{1,2}(M, N)$ *stetig (und deshalb glatt) [24].*

Nach der ersten Aussage können im Fall $m \geq 3$ keinerlei allgemeine Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsaussagen über schwach harmonische Abbildungen getroffen werden. Hierzu muss man zusätzliche Bedingungen an die betrachtete harmonische Abbildung oder an die Mannigfaltigkeiten M und N stellen. Es hat sich als geeignet herausgestellt, die schwach harmonische Abbildung u als *stationär* vorauszusetzen, was bedeutet:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} E(u \circ \Phi_t) = 0$$

für alle 1-Parameter-Familien von Diffeomorphismen $\Phi_t : M \to M$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ für ein beliebiges $\epsilon > 0$, mit $\Phi_0 = Id$ und $\Phi_t|\partial M = Id$ für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Es folgen nun die bekanntesten Regularitätsergebnisse über stationär harmonische Abbildungen.

- *Jede stationär harmonische Abbildung* $u \in W^{1,2}(M, N)$ *ist außerhalb einer abgeschlossenen Menge* $\Sigma_u \subset M$ *mit* $\mathscr{H}^{m-2}(\Sigma_u) = 0$ *glatt.*
  (In der Originalarbeit [3] von Bethuel, sowie in den Monographien [24] von Hélein und [40] von Moser wird das für den Fall bewiesen, in dem M ein euklidisches Gebiet ist. Eine Ausarbeitung des Falls riemannscher Mannigfaltigkeiten ist uns nicht bekannt. Dieser allgemeine Fall wird wird häufig mit einem kurzen Verweis auf „geringfügige Änderungen im Beweis“ als bewiesen angesehen.)

- *Jeder Minimierer* $u \in W^{1,2}(M, N)$ *der Energie ist außerhalb einer abgeschlossenen Menge* Σ_u *mit* $\mathscr{H}$*-dim*$(\Sigma_u) \leq m - 3$ *stetig (und deshalb glatt).*
  (Die Originalarbeit [55] von Schoen und Uhlenbeck deckt den riemannschen Fall ab. In der Monographie [50] von Simon, wo ein einfacherer Beweis vorliegt, wird der euklidischen Fall durchgeführt, die Beweisänderungen im Riemannschen Fall werden im Anhang erläutert.)

- *Sei $m \geq 3$ und sei $\ell \in [3, m-1] \cap \mathbb{N}$. Wenn es für* kein $3 \leq \kappa \leq \ell$ *eine nicht-konstante, nullhomogene harmonische Abbildung (bzw. einen glatten, nicht-konstanten, nullhomogenen Minimierer der Energie) $f : B^\kappa \backslash \{0\} \to N$ gibt, so ist jede stationär-harmonische Abbildung (bzw. jeder Minimierer der Energie) $u \in W^{1,2}(M, N)$ außerhalb einer abgeschlossenen Menge Σ_u mit $\mathscr{H}$-dim$(\Sigma_u) \leq m - \ell - 1$ stetig (und deshalb glatt). Im Fall $\ell = m-1$ ist Σ_u diskret.*
  (Die Originalarbeit [36] von Lin behandelt wiederum den euklidischen Fall. Die Verallgemeinerung auf riemannsche Mannigfaltigkeiten findet man in der Diplomarbeit von Scheven [49]. Uns ist keine allgemein zugängliche Quelle für diese Verallgemeinerung bekannt.)

Alle diese Aussagen sind optimal in dem Sinne, dass keine stärkeren Aussagen getroffen werden können, ohne dass zusätzliche Bedingungen an die betrachtete harmonische Abbildung u, oder an die Mannigfaltigkeiten M und N gestellt werden.

Man kann an diesen Ergebnissen sehen, dass die Dimension m des Definitionsbereichs M eine wichtige Rolle spielt. Man unterscheidet die drei Fälle $m < 2$, $m = 2$ und $m > 2$:
Im „subkritischen Fall“ $m < 2$ folgt Glattheit aller schwach harmonischen Abbildungen sofort mit der Sobolev-Morrey-Einbettung.
Dass im „kritischen Fall“ Fall $m = 2$ alle schwach harmonischen Abbildungen glatt sind, ist ein starke Aussage: Für Lösungen ähnlicher elliptischer partieller Differentialgleichungen, deren Nichtlinearität „kritisches Wachstum“ hat, braucht Glattheit im Allgemeinen nämlich nicht zu gelten. Man kann grob sagen, dass hier an entscheidender Stelle eingeht, dass bei harmonischen Abbildungen die Nichtlinearität aus der Geometrie herrührt, in diesem Fall: Die Nichtlinearität der Euler-Lagrange-Gleichung rührt von der Krümmung der Zielmannigfaltigkeit N her.
Im „superkritischen Fall“ $m > 2$ gibt es nichtstetige stationär biharmonische Abbildungen. Es können also nur *partielle* Regularitätsergebnisse erzielt werden.

sssIrgendwann stellte sich die Frage nach Energiefunktionalen *höherer Ordnung*. Ein erster Vorschlag stammt nach unserem Kenntnisstand aus dem 1988 von Eells und Lamaire verfassten, oft zitierten Übersichtsartikel [6] (welcher den Forschungsstand bzgl. harmonischer Abbildungen Ende der der 1980er Jahre zusammenfast). Hier wird das Funktional

$$u \mapsto \int_M |(d + \delta_{\mathbf{g}})^k u|^2 \,\mathrm{dvol}_{\mathbf{g}}$$

als Energiefunktional k-ter Ordnung zur Untersuchung vorgeschlagen, $\delta_{\mathbf{g}}$ ist dabei der zu d (bzgl. des metrischen Tensors $\mathbf{g}$) konjugierte Operator.

Die Beschäftigung mit Energiefunktionalen höherer Ordnung kam in Gang, als 1999 in der Arbeit [5] von Chang, L. Wang und Yang, sowie in den Folgenjahren in den beiden Arbeiten [56], [57] von C.Wang die *extrinsische Bienergie* und die *intrinsische Bienergie* eingeführt wurden, sowie die Regularitätstheorie für deren kritische bzw. stationäre Punkt angegangen wurde.

Sei $u \in W^{2,2}(M, N)$. Die *extrinsische Bienergie* von u ist

$$E_2^e(u) := \int_M |\Delta_{\mathbf{g}} u|^2 \, \mathrm{dvol}_{\mathbf{g}},$$

die *intrinsische Bienergie* von u ist

$$E_2^i(u) := \int_M |\tau(u)|^2 \, \mathrm{dvol}_{\mathbf{g}}.$$

Die kritischen Punkte heißen *schwach extrinsisch* bzw. *schwach intrinsisch biharmonische Abbildungen.*

Man sieht, dass es kein *eindeutiges* Analogon zweiter Ordnung der Energie E gibt. Es kommt darauf an, ob wir das Problem *intrinsisch* oder *extrinsisch* angehen. Im *intrinsischen* Fall betrachten wir N als eine abstrakte Mannigfaltigkeit, nicht als eine Untermannigfaltigkeit $N \subset \mathbb{R}^L$. Ein Ausdruck wie $\Delta_{\mathbf{g}} u$ ist für eine Abbildung $u : M \to N$ folglich sinnlos. Der Ausdruck $\Delta_{\mathbf{g}} u$ ist nur dann sinnvoll, wenn wir N als eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^L$ auffassen, wir reden dann vom *extrinsischen* Fall. Die konkrete Formel, durch welche wir die intrinsische Bienergie definieren, nimmt zwar Bezug auf die Einbettung $N \subset \mathbb{R}^L$ (durch Verwendung der Projektion $(...)^\top$ in der Definition von $\tau(u)$), es ist jedoch eine (weniger anschauliche) intrinsische Definition möglich. Dass wir N dabei als Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^L$, nicht als abstrakte riemannsche Mannigfaltigkeit auffassen, ist keine Einschränkung an N. Dies besagt der berühmte *Satz von Nash: Jede riemannsche Mannigfaltigkeit lässt sich isometrisch in einen* $\mathbb{R}^K$ *einbetten.* Man muss dann noch zeigen, dass verschiedene Einbettungen zum selben intrinsischen Funktional führen. Da wir mit extrinsischen Funktionalen arbeiten und deshalb N stets als Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^L$ betrachten, sind solche Fragen für uns nicht von Belang. Aus geometrischer Sicht scheint nach alldem die intrinsiche Bienergie viel stärker als die extrinsische Bienergie gerechtfertigt zu sein. Aus Sicht der Variationsrechnung ist es jedoch umgekehrt: Die intrinsische Bienergie ist - im Gegenteil zur extrinsischen - nicht *koerziv*, weshalb die Direkte Methode der Variationsrechnung nicht anwendbar ist. Hinzu kommt, dass sich für kritische bzw. stationäre Punkte der intrinsischen Bienergie bisher keine nennenswerten Regularitätsresultate aufstellen ließen (gegenteilige Behauptungen in [56] und [57] haben sich als falsch herausgestellt, siehe [41]).

Als ein analytisch handhabbares intrinsisches Energie-Funktional 2. Ordnung führte R. Moser in [41] die *intrinsische* 2*-Polyenergie* von u ein:

$$\mathscr{F}_2^e(u) := \int_M |\nabla_{u,\mathbf{g}} du|_{\mathbf{g}}^2 \, \mathrm{dvol}_{\mathbf{g}}.$$

Dabei bezeichnet $\nabla_{u,\mathbf{g}}$ die *kovariante Ableitung entlang* u, d.h. $\nabla_{u,\mathbf{g}} du = (D_{\mathbf{g}} du)^\top$ ist die Komponente von $D_{\mathbf{g}} du$ tangential zu N (Details zu dieser Definition folgen in Kapitel 2). Für dieses Energiefunktional konnten von R. Moser Existenz- und Regularitätsaussagen erzielt werden, worauf wir hier jedoch nicht eingehen werden. An dieser Stelle ist es auch naheliegend, die *extrinsische* 2*-Polyenergie*

$$\mathscr{F}_2^e(u) := \int_M |D_{\mathbf{g}} du|_{\mathbf{g}}^2 \,\mathrm{dvol}_{\mathbf{g}}.$$

einzuführen. Die extrinsische Bienergie und die extrinsische 2-Polyenergie unterscheiden sich im Fall $\partial M = \emptyset$ nur um einen Integranden 1. Ordnung, wie man mit partieller Integration sehen kann. Im euklidischen Fall unterscheiden sich beide Funktionale für verschiedene Abbildungen mit gleichen Randwerten nur um eine additive Konstante. Deswegen ist nicht zu erwarten, dass sich nennenswerte Unterschiede bei der Betrachtung dieser beiden Funktionale ergeben.

Wir halten fest:
Es gibt verschiedene Funktionale, welche berechtigterweise als Analogon zweiter Ordnung der Energie E angesehen werden können. Jedes hat seine Vor- und Nachteile. Mit welchem Funktional man konkret arbeitet, hängt vom eigenen Blickwinkel (eher geometrisch oder eher analytisch), sowie von den Methoden ab, mit denen man arbeiten will.
Wir arbeiten hier ausschließlich mit der extrinsischen Bienergie

$$E_2^e(u) := \int_M |\Delta_{\mathbf{g}} u|^2 \,\mathrm{dvol}_{\mathbf{g}}.$$

Da wir in erster Linie den Standpunkt der Variationsrechnung, weniger den der Differentialgeometrie einnehmen, liegt die Verwendung eines *extrinsischen* Funktionals nahe. Dass wir nun gerade mit der extrinsischen Bienergie und nicht mit der extrinsischen 2-Polyenergie arbeiten, lässt sich kaum inhaltlich begründen, es liegt wohl vor allem an der Konvention: Lange Zeit war die extrinsische Bienergie das „übliche“ Funktional dieser Art. Von nun an gilt unser Hauptaugenmerk der extrinsischen Bienergie bzw. den (schwach) extrinsisch biharmonischen Abbildungen. Die Euler-Lagrange Gleichung lautet

$$\left(\Delta_{\mathbf{g}}^2 u\right)^\top = 0.$$

Dies ist eine nichtlineare elliptische partielle Differentialgleichung vierter Ordnung. Die Nichtlinearität ist von „kritischem Wachtum“ , die Konsequenzen hieraus können analog zum Fall harmonischer Abbildungen übernommen werden. Die Direkte Methode der Variationsrechnung kann auf die extrinsische Bienergie in gleicher Weise angewendet werden, wie es bereits für die Energie beschrieben worden ist. An Regularitätsergebnissen sind u.a. die folgenden bekannt. Wiederum ist der Begriff der Stationarität von Bedeutung. Alle folgenden Resultate wurden für den Fall bewiesen, in dem M ein beschränktes euklidisches Gebiet ist. Verallgemeinerungen auf den riemannschen Fall sind uns nicht bekannt.

- Jede stetige (extrinsisch) biharmonische Abbildung $u \in W^{2,2}(M,N)$ ist glatt [57].
- In Fall $m = 4$ ist jede (extrinsisch) biharmonische Abbildung $u \in W^{2,2}(M,N)$ stetig [56].
- Jede stationär extrinsisch biharmonische Abbildung $u \in W^{1,2}(M,N)$ der Energie ist außerhalb einer abgeschlossenen Menge Σ_u mit $\mathscr{H}^{m-4}(\Sigma_u) = 0$ stetig (und deshalb glatt) [57], vervollständigt in [2].
- Jeder Minimierer $u \in W^{1,2}(M,N)$ der extrinsischen Bienergie ist außerhalb einer abgeschlossenen Menge Σ_u mit $\mathscr{H}\text{-}\dim(\Sigma_u) \leq m-5$ stetig (und deshalb glatt) [24] [48].
- Sei $m \geq 4$ und sei $\ell \in [5, m-1] \cap \mathbb{N}$. Wenn es für kein $5 \leq k \leq \ell$ eine glatte, nicht-konstante, nullhomogene biharmonische Abbildung (bzw. einen glatten, nicht-konstanten, nullhomogenen Minimierer der Bienergie) $f : B^k \setminus \{0\} \to N$ gibt, so ist jede stationär-biharmonische Abbildung (bzw. jeder Minimierer der extrinsischen Bienergie) $u \in W^{1,2}(M,N)$ außerhalb einer abgeschlossenen Menge Σ_u mit $\mathscr{H}\text{-}\dim(\Sigma_u) \leq m - \ell - 1$ stetig (und deshalb glatt). Im Fall $\ell = m-1$ ist $\Sigma_u \cap K$ für jede kompakte Menge $K \subset M$ diskret [48].

Wie auch bei harmonischen Abbildungen ist hier die Dimension m des Definitionsbereichs M wichtig. Völlig analog dazu unterscheiden wir den subkritische Fall $m < 4$, den kritischen Fall $m = 4$ und den superkritischen Fall $m > 4$.

Seit einigen Jahren werden neben Energiefunktionalen zweiter Ordnung auch solche k-ter Ordnung für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$ betrachtet: Die *extrinsische k-Polyenergie*

$$\mathscr{F}_k^e(u) := \int_M \left| D_{\mathbf{g}}^{k-1} du \right|_{\mathbf{g}}^2 \, \mathrm{dvol}_{\mathbf{g}}$$

sowie die *intrinsische k-Polyenergie*

$$\mathscr{F}_k^e(u) := \int_M \left| \nabla_{u,\mathbf{g}}^{k-1} du \right|_{\mathbf{g}}^2 \, \mathrm{dvol}_{\mathbf{g}}.$$

An Regularitätsresultaten für die extrinsische k-Polyenergie sind uns die folgenden bekannt, wiederum für den euklidischen Fall:

- *Jeder stetige kritische Punkt $u \in W^{k,2}(M,N)$ der extrinsischen k-Polyenergie ist glatt [19].*
- *In Fall $m = 2k$ ist jeder kritische Punkt $u \in W^{k,2}(M,N)$ der extrinsischen k-Polyenergie stetig (und somit glatt) [19].*

Man sieht: Der kritische Fall $m = 2k$ konnte völlig analog zu harmonischen und extrinsisch biharmonischen Abbildungen abgehandelt werden. Ein partielles Regularitätsergebnis für den supkritischen Fall $m > 2k$ konnte jedoch nach unserem Kenntnisstand noch nicht erzielt werden. Der Grund dafür ist, dass eine *Monotonieformel*, wie sie für die Energie ([24], [40]) sowie für die extrinsische Bienergie ([2]) gilt, für die extrinsische k-Polyenergie im Fall $k \geq 3$ noch nicht bewiesen werden konnte. Und um bei dieser Gelegenheit auf früher gesagtes zurückzugreifen: dass für die intrinsische Bienergie keine aussagekräftigen Regularitätsresultate erzielt werden konnten, liegt ebenfalls am Fehlen einer Monotonieformel. Da R. Moser für die intrinsische 2-Polyenergie eine Monotonieformel aufstellen konnte, konnte er hierfür auch Regularitätsergebnisse erzielen. Die Rolle der Monotonieformel erläutern wir an einer späteren Stelle in dieser Einleitung. Hier nur so viel: Für viele Methoden der Regularitätstheorie, insbesondere für die von uns durchgeführten „Dimensionsreduktionsargumente“ ist sie von entscheidender Bedeutung. Das Fehlen einer Monotonieformel für 3.,4.,5. ... Ordnung ist der einzige Grund, warum wir in dieser Arbeit mit einem extrinsischen Energiefunktional 2. Ordnung und nicht allgemein k-ter Ordnung arbeiten.

Zum Schluss dieses Abschnitts deuten wir noch ohne Anspruch auf Vollständigkeit auf weitere Forschungsrichtungen mit Bezug auf bi- und polyharmonische Abbildungen hin:
Der Frage nach der Randregularität von Minimierern der extrinsischen Bienergie in beliebigen Dimensionen wurde von Lamm, Gong und C.Wang [33] nachgegangen. Die Randregularität sowohl für intrinsisch als auch für extrinsisch polyharmonische Abbildungen in der kritischen Dimension haben Lamm und C. Wang [35] untersucht.

Arbeitet man mit der extrinsischen Bienergie, so liegt natürlich die Untersuchung des dazugehörigen Gradientenflusses nahe, des sogenannten *biharmonischen Wärmeflusses*: Dieser wird durch die parabolische partielle Differentialgleichung vierter Ordnung

$$\partial_t u(x,t) = -\left(\Delta_{\mathbf{g}}^2 u(x,t)\right)^\top$$

beschrieben. Hierfür verweisen wir auf Arbeiten von Lamm [30], [31]. Eine ausführliche Motivation und Einordnung der Fragestellung findet man im einleitenden Kapitel von Lamms Doktorarbeit [32].
Der extrinsische polyharmonische Wärmefluss wurde von Gastel [16] untersucht. Im Jahr 2006 wurden beginnend mit der Arbeit [47] von Rivière harmonische Abbildungen und verwandte Variationsprobleme unter einem völlig neuen Blickwinkel betrachtet (Stichwort: Erhaltungssätze). Die Euler-Lagrange-Gleichung wurde in eine zuvor nicht erkannte Form gebracht, was sowohl elegantere Beweise bisheriger Ergebnisse als auch neue Resultate bewirkt hat. Dies hat große Forschungsanstrengungen und viele Veröffentlichungen nach sich gezogen. Zum Beispiel wurde auch die Euler-Lagrange-Gleichung der extrinsischen Bienergie unter

diesem neuen Blickwinkel betrachtet, nämlich in den Arbeiten [34] von Lamm und Rivière, sowie [54] von Struwe. Bei Interesse an diesem neuen Blickwinkel lese man die ztierten Arbeiten.

1.2.2 Warum äquivariante Abbildungen?

Bei all den vielen theoretischen Resultaten über harmonische und biharmonische Abbildungen muss man feststellen: *Es ist nicht leicht, interessante Beispiele für (bi-)harmonische Abbildungen zu finden!* Und ohne einen ausreichenden Vorrat an Beispielen droht jede Theorie inhaltsleer in der Luft zu hängen. In dem Fall, in dem die Zielmannigfaltigkeit N nicht-positive Schnittkrümmungen hat, besitzt jede Homotopieklasse $\alpha \in \pi(M, N)$ von stetigen Abbildungen zwischen M und N einen *harmonischen Repräsentanten*, d.h. ein Element, das eine harmonische Abbildung ist. Dies haben Eells und Sampson in [8] bewiesen. In dem Fall, in dem N mindestens eine positive Schnittkrümmung hat, wie es z.B. bei Sphären der Fall ist, sind uns keine derart allgemeinen Aussagen bekannt. Hier wurden interessante Beispiele harmonischer Abbildungen mit Symmetrieansätzen gefunden: Eine Lie-Gruppe operiere auf M und N. Jeder G-äquivarianten Abbildung kann auf eineindeutige Weise eine Projektion $\overline{f} : M/G \to N/G$ zwischen den Orbiträumen zugeordnet werden. Die Idee ist nun: Anstelle eine Differentialgleichung für Abbildungen $f : M \to N$ zu lösen, löst man ein gewisses Randwertproblem für Abbildungen $\overline{f} : M/G \to N/G$. Genauer:
Eine G-äquivariante Abbildung $u : M \to N$ löst genau dann die Euler-Lagrange-Gleichung $\tau(u) = 0$, wenn die Projektion $\overline{f} : M/G \to N/G$ eine gewisse Differentialgleichung nebst Randbedingungen erfüllt.
Der Orbbitraum M/G ist eine k-dimensionale Menge (genauer: eine „stratifizierbare Mannigfaltigkeit“) für ein $k < m$. Man nennt k die *Kohomogenität* der Operation von G auf M. Die Menge M/G hat nur in ihrem (k-dimensionalen) Inneren die Struktur einer Mannigfaltigkeit, ihr Rand besteht aus Ecken und Kanten (ggf. jeder Dimension zwischen 1 und $k-2$).
Diese Methode bringt uns einen großen Vorteil: Wir haben bereits gesehen, dass bei Regularitätsuntersuchungen die Dimension von M eine große Rolle spielt. Nun kommt es im äquivarianten Fall jedoch effektiv weniger auf die Dimension m, sondern vielmehr auf die Kodimension k an, d.h. auf die Dimension des Orbitraums M/G. Es liegt nicht bei $m = 2$, sondern bei $k = 2$ der „kritische“ Fall vor. Man kann in beliebigen Dimensionen m arbeiten, ohne dabei in den „superkritischen“ Fall hineinzugeraten. Dazu genügt es, dass für die Kohomogenität $k \leq 2$ gilt.
Die Schwierigkeit liegt hierbei an den schlecht gestellten Randbedingungen an die Funktion $\overline{u} : M/G \to N/G$. Findet man z.B. einen G-Minimierer $u : M \to N$ wie bereits beschrieben mit der Direkten Methode der Variationsrechnung, so wird dieser die geforderten Randwertbedingungen im allgemeinen nicht erfüllen. Dar-

um heißt es, hinreichende Bedingungen für die Erfüllung dieser Randbedingungen zu finden.
Die Untersuchung solcher Ansätze hat mit der Arbeit [52] von Smith begonnen, viele weitere Beispiele sind in den Büchern [9] von Eells und Ratto und [58] von Xin zusammengetragen. (Es werden dabei auch Symmetrieansätze betrachtet, die nicht von der Operation einer Lie-Gruppe herrühren.) In vielen Fällen ist die Kohomogenität $k = 1$. Dann reduziert sich die Gleichung $\tau(u) = 0$ für Abbildungen $u : M \to N$ zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung für $\overline{u} : [0, 1] \to [0, 1]$, einhergehend mit schlechtgestellten Randwertbedingungen.

Bei den bisher beschriebenen Ansätzen wurde mit der Gleichung $\tau(u) = 0$ gearbeitet, welche zu einer Differentialgleichung auf einem niederdimensionalen Raum nebst vorgeschriebenen Randwerten reduziert wurde. Bei anderen Symmetrie-Ansätzen werden vor allem die Aspekte der Variationsrechnung betont. Das Prinzip der Symmetrischen Stationarität besagt hier insbesondere:
Eine Abbildung $u \in W^{1,2}_G(M, N)$ erfülle

$$E(u) \leq E(v) \text{ für alle } v \in W^{1,2}_G(M, N)$$

Dann ist u eine stationär harmonische Abbildung.
Ein Vorteil dieses Variationsansatzes ist es, dass darauf verzichtet werden kann auf dem Orbitraum M/G zu arbeiten, so dass man nicht mit ungünstig gestellten Randwertproblemen zu tun bekommt: Wir arbeiten nicht am (möglicherweise viele ungünstige Eigenschaften aufweisenden) Rand des Orbitraums M/G. Stattdessen arbeiten wir auf M in kleinen Umgebungen von *singulären Orbits* - das sind Orbits, die zu Randpunkten in M/G gehören. Es stellt sich heraus, dass sich das Problem auf diese Weise recht handhabbar formulieren lässt.

Sei $\alpha \in \pi(M, N)$ eine Homotopieklasse von Abbildungen $u \in C(M, N)$. Wir haben bereits angemerkt, dass die Direkte Methode der Variationsrechnung *nicht* dafür geeignet ist, die Existenz eines harmonischen Repräsentanten von α, d.h. einer harmonischen Abbildung $u : M \to N$ mit $u \in \alpha$ zu zeigen. Man kann versuchen, dem mit einem Symmetrieansatz wie folgt zu begegnen: Sei $A \subset \pi(M, N)$ eine Menge von *nicht-trivialen* Homotopieklassen (d.h. $[id] \notin A$). Wir gehen nun davon aus, dass G derart auf M und N operiert, dass jede äquivariante stetige Abbildung zwischen M und N in einer Homotopieklasse aus A liegt. Wenn wir eine Lösung des entsprechenden Randwertproblemes für Abbildungen $\overline{f} : M/G \to N/G$ finden, so wissen wir, dass es eine Homotopieklasse $\alpha \in A$ gibt, für die wir einen harmonischen Repräsentanten von α gefunden haben. (Die Frage, für *welche* Homotopieklasse aus A wir einen harmonischen Repräsentanten gefunden haben, ist damit noch nicht beantwortet!) Wollen wir die Frage nach der Existenz eines harmonischen Repräsentanten einer Homotopieklasse aus A angehen, so können wir sie auch auf ein Regularitätsproblem zurückführen: Mit

der Direkten Methode der Variationsrechnung und der Symmetrischen Stationarität erhalten wir eine schwach harmonische Abbildung $u \in W^{1,2}_G(M,N)$, von der wir wissen: Ist u stetig, so liegt u in einer Homotopieklasse aus A.
Es interessieren uns natürlich notwendige und hinreichende Kriterien dafür, dass eine Homotopieklasse einen harmonischen Repräsentanten hat. Über konkrete Beispiele hinaus wurden nach unserem Kenntnisstand im Fall von Zielmannigfaltigkeiten mit mindestens einer positiven Schnittkrümmung keine allgemeinen Ergebnisse diesbezüglich bewiesen (der Fall nichtpositiver Schnittkrümmungen wurde in der oben erwähnten Arbeit [8] von Eells und Sampson diesbezüglich vollständig abgehandelt). Viele dieser Beispiele findet man in den bereits zitierten Büchern [9] von Eells und Ratto und [58] von Xin.

Allgemeine Aussgen über äquivariante harmonische Abbildungen wurden von Gastel aufgestellt. In [13] beweist er die folgenden Regularitätsergebnisse:

- *Ein G-Minimierer $u \in W^{1,2}(M,N)$ der Energie ist außerhalb einer abgeschlossenen Menge Σ_u mit $\mathscr{H}\text{-}\dim(\Sigma_u) \leq m-3$ stetig (und deshalb glatt).*

- *Sei $2 \leq d \leq m-1$. Angenommen, für* keine *Darstellung $[H,\mathbb{R}^q] \in \mathcal{T}_{[M,G]}$ mit $3 \leq q \leq d$ gibt es einen* nichtkonstanten*, glatten, nullhomogenen H-Minimierer $\varphi : B^q \setminus \{0\} \to N$ der Energie. Dann gilt $\mathscr{H}$-dim$(\Sigma_u) \leq m - d - 1$. Im Fall $d = m-1$ ist Σ_u diskret.*

Die Menge $\mathcal{T}_{[M,G]}$ ist dabei dieselbe, die wir zu Beginn dieser Einleitung bei der Andeutung unseres Hauptergebnisses erwähnt haben, und die später in dieser Einleitung definiert werden wird. Weiterhin konnte Gastel mit Hilfe dieser Ergebnisse interessante Beispiele von harmonischen Abbildungen in nicht-trivialen Homotopieklassen herleiten, was in der Arbeit [15] fortgesetzt wurde.

Man kann natürlich auch alle oben genannten *intrinsischen* Funktionale mit einem äquivarianten Ansatz untersuchen. Dann müssen wir die Zielmannigfaltigkeit N nicht mehr als G-invariante Teilmenge von $\mathbb{R}^L$ betrachten, sondern als eine abstrakte riemannsche Transformationsgruppe $[N,G]$. Um zu begründen, dass die intrinsischen Funktionale, so wie wir sie definiert haben, auch dann wohldefiniert sind, haben wir uns oben auf den berühmten Satz von Nash bezogen. Die analogen Argumente funktionieren auch im äquivarianten Fall dank der folgenden *äquivariante Version des Satzes von Nash* (siehe [39]):

Sei $[N,G]$ eine riemannsche Transformationsgruppe. Dann gibt es ein $L > m$, eine orthogonale Darstellung $[\mathbb{R}^L, G]$ und eine äquivariante isometrische Einbettung $M \hookrightarrow \mathbb{R}^L$.

1.2.3 Die Ausgangslage

In meiner Diplomarbeit [60] wurden hinreichende Bedingungen für die Existenz Paneitz-biharmonischer Abbildungen $S^{m-1} \to S^{n-1}$ unter konkret gestellten Sym-

metriebedingungen bewiesen. (Die *Paneitz-Bienergie* ist ein weiteres extrinsischen Energiefunktional zweiter Ordnung. Es unterscheidet sich von der extrinsischen Bienergie durch gewisse Terme von niederer Ordnung.). In der daraus entstandenen und darauf aufbauenden gemeinsam mit meinem Betreuer Andreas Gastel erarbeiteten Veröffentlichung [18] wurde daraus die Existenz von extrinsisch biharmonischen Abbildungen in einigen Homotopieklassen von Abbildungen zwischen Sphären bewiesen.
Nun lag es nahe, allgemeinere Klassen äquivarianter biharmonischer Abbildungen $u : M \to N$ zu betrachten. Dabei sollten Methoden der Variationsrechnung angewendet werden. Denn das entsprechende Randwertproblem für Abbildungen $\overline{u} : M/G \to N/G$ zwischen den Orbiträumen ist sehr unübersichtlich.
Wie oben für harmonische Abbildungen geschildert, führen die Überlegungen schnell auf Regularitätsfragen von G-Minimierern der Bienergie. Diesen soll in dieser Arbeit nachgegangen werden.

1.3 *Wie* wir es tun

Die *extrinsische Bienergie* sei von nun an der Kürze wegen *Bienergie* genannt, anstelle von E_2^e bezeichnen wir sie mit E. Ebenfalls heißen *extrinsisch biharmonische Abbildungen* von nun an *biharmonische Abbildungen.*

1. Schritt: Existenz eines G-Minimierers. Die Existenz eines G-Minimierers $u \in W^{2,2}(M, N)$ der Bienergie zeigen wir mit der Direkten Methode der Variationsrechnung: Es sei $\varphi_i \in W_G^{2,2}(M, N)$ eine Folge mit

$$\lim_{i\to\infty} E(\varphi_i) = \inf_{\psi \in W_G^{2,2}(M,N)} E(\psi).$$

Man kann zeigen (Stichwort: *Koerzivität* der Bienergie), dass die Folge φ_i in der $W^{2,2}$-Norm beschränkt ist, und folglich nach Übergang zu einer Teilfolge schwach in $W^{2,2}$ gegen ein $u \in W^{2,2}(M, N)$ konvergiert. Da die Bienergie bzgl. der schwachen $W^{2,2}$-Folgenkonvergenz unterhalbstetig ist, folgt

$$E(u) \leq \lim_{i\to\infty} E(\varphi_i).$$

Wir werden zeigen, dass u in $W_G^{2,2}(M, N)$ liegt, damit folgt dann

$$E(u) = \inf_{\psi \in W_G^{2,2}(M,N)} E(\psi).$$

Somit ist u ein G-Minimierer der Bienergie.

2. Schritt: Symmetrische Stationarität. Ist $u \in W_G^{2,2}(M, N)$ ein G-Minimierer der Bienergie, so gilt

$$\delta E(u; \varphi) = 0 \quad \text{für alle } G\text{-äquivarianten } \varphi \in C^\infty(M, \mathbb{R}^L).$$

Um zu zeigen, dass u schwach biharmonisch ist, müssen wir zeigen:

$$\delta E(u;\varphi) = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C^\infty(M, \mathbb{R}^L).$$

Durch eine geeignete Symmetrisierungsprozedur (Stichwort: *Integration entlang der Orbits*) führen wir eine Operation

$$C^\infty(M, \mathbb{R}^L) \mapsto C^\infty_G(M, \mathbb{R}^L),\ \varphi \mapsto \overline{\varphi},$$

ein, so dass gilt für alle $\varphi \in C^\infty(M, \mathbb{R}^L)$ gilt:

$$\delta E(u, \varphi) = \delta E(u, \overline{\varphi}).$$

Damit ist dann offenkundig bewiesen, dass jeder G-Minimierer eine schwach biharmonische Abbildung ist. Darüber hinaus werden wir zeigen, dass jeder G-Minimierer eine *stationär*-biharmonische Abbildung ist. Der Begriff der Stationarität ist analog zum Fall harmonischer Abbildungen definiert.

3. Schritt: Lokalisieren. Wenn wir uns dafür interessieren, ob eine Abbildung $u \in W^{2,2}(M, N)$ in einem gegebenen Punkt $x \in M$ stetig, differenzierbar oder glatt ist, können wir u bei x *lokalisieren* und dann die lokalisierte Abbildung untersuchen.
Im *nicht-äquivarianten Fall* verstehen wir darunter folgendes: Für ein hinreichend kleines $r > 0$ betrachten wir die eingeschränkte Abbildung $u|_{\mathscr{B}_r(x)}$, wobei $\mathscr{B}_r(x)$ der geodätische Ball um x mit Radius r ist. Nach Einführung von Koordinaten haben wir eine Abbildung in $W^{2,2}(B^m_r, N)$ vorliegen. Ist $u : M \to N$ (schwach) biharmonisch (bzw. ein Minimierer der Bienergie), so ist die bei x lokalisierte Abbildung $u : B^m_r \to N$ (schwach) biharmonisch (bzw. ein Minimierer der Bienergie) bzgl. eines bestimmten riemannschen Tensors $\mathbf{g}$ auf B^m_r.
Das *äquivariante* Analogon zum Lokalisieren sieht wie folgt aus: Wir schränken u nicht auf den geodätischen Ball

$$\mathscr{B}_r(x) := \exp_x\left(T^r_x M\right),$$

sondern auf die *Scheibe*

$$\mathcal{S}_r(x) := \exp_x\left(\nu^r_x(Gx)\right)$$

ein. Dass letztere Definition eine Verallgemeinerung der ersteren ist, sieht man wie folgt: Der nicht-äquivariante Fall ist ein Spezialfall des äquivarianten Falls. Nämlich der, in dem G trivial auf M operiert. Dann ist $Gx = \{x\}$ und folglich $T^r_x M = \nu^r_x(Gx)$. Durch Einführung von Koordinaten auf $\mathcal{S}_r(x)$ erhalten wir also eine Abbildung

$$u : B^{m_x}_r \to N$$

mit $m_x = \dim(\mathcal{S}_r(x))$. Wie im Kapitel über Transformationsgruppen ausgeführt werden wird, gibt es eine Lie-Untergruppe $G_x < G$, die orthogonal auf $\mathbb{R}^{m_x}$ operiert, so dass u eine G_x-äquivariante Abbildung ist. Man spricht von einer *Scheibendarstellung* von G_x auf $\mathbb{R}^{m_x}$. Ist $u : M \to N$ ein G-Minimierer der Bienergie, so ist $u : B_r^{m_x} \to N$ im Allgemeinen *kein* G-Minimierer der Bienergie (bzgl. eines metrischen Tensors $\mathbf{g}$ auf $B_r^{m_x}$). Stattdessen ist u ein G-Minimierer einer *gestörten Bienergie*

$$E_V(u) = \int_{B_r^m} \left(|\Delta u|^2 + V(\cdot, u, Du, D^2 u)\right)\, dx$$

mit einem geeigneten (von x abhängenden!) Integranden V. Dass dieser von *niederer Ordnung* ist (im Vergleich zum führenden Term $\int_{B_r^m} |\Delta u|^2\, dx$), wird durch die Abschätzung

$$V(x,z,p,q) \leq C\left(|x|\,|q|^2 + |q|^{\frac{3}{2}} + |p|^3 + |z|^3 + 1\right)$$

verdeutlicht, wobei $C > 0$ eine geeignete, nicht von u abhängende Konstante ist.

4. Schritt: Dimensionsreduktion der singulären Menge. Wir tragen zunächst zwei Aussagen zusammen, welche wir für jede stationär biharmonische Abbildung $f \in W^{2,2}(M,N)$ voraussetzen, und welche den Ausgangspunkt für die von uns verwendeten Dimensionsreduktionsmethoden bilden:

- $$f \in C^\infty(M \setminus \Sigma_f, N),$$

  wobei für die singuläre Menge Σ_f

  $$\mathscr{H}^{m-4}(\Sigma_f) = 0. \tag{1.3}$$

  gilt.

- *Es gibt ein $\epsilon > 0$ (das von M und N, aber nicht von f abhängt!), so dass für alle $x \in M$ und alle hinreichend kleinen $r > 0$ gilt:*

  $$r^{4-m}\int_{\mathscr{B}_r(x)} \left(|D_{\boldsymbol{g}} df|^2 + |df|_{\boldsymbol{g}}^4\right)\, dvol_{\boldsymbol{g}} \leq \epsilon \quad \Longrightarrow \quad \Sigma_f \cap \mathscr{B}_{\frac{r}{3}}(x) = \emptyset. \tag{1.4}$$

(Tatsächlich ist (1.4) der entscheidende Schritt zum Beweis von (1.3)). Diese beiden Aussagen wurden für stationär biharmonische Abbildung in dem Fall bewiesen, in dem M ein euklidisches Gebiet ist (in [57] bzw. in [54]). Uns ist kein Beweis für den allgemeinen riemannschen Fall bekannt. Es ist im Kontext geometrischer Variationsprobleme durchaus üblich, Sätze im euklidischen Fall zu beweisen und den riemannschen Fall damit schon als bewiesen anzusehen. Dies

wird üblicherweise mit der Anmerkung gerechtfertigt, dass der Beweis im riemannschen Fall im Wesentlichen derselbe ist wie im euklidischen Fall und nur einen technischen Mehraufwand erfordert. Unter Berufung auf diese Konvention setzen wir die beiden oben genannten Aussagen als bewiesen voraus.
Sei nun $u \in W^{2,2}_G(M,N)$ ein G-Minimierer der Bienergie. Da u *stationär* biharmonisch ist, können wir

$$u \in C^\infty(M \setminus \Sigma_u, N),$$

mit

$$\mathscr{H}^{m-4}(\Sigma_u) = 0$$

voraussetzen. Sei $\kappa \in (4, m]$. Unter der Voraussetzung

$$\mathscr{H}^{m-\kappa}(\Sigma_u) > 0$$

können wir zeigen:
Es gibt eine Darstellung $[\mathbb{R}^\ell, K]$ aus $\mathcal{T}_{[M,G]}$ mit $\ell \leq \kappa$ und einen glatten, nichtkonstanten, nullhomogenen K-Minimierer $\psi : B^\ell \setminus \{0\} \to N$ der Bienergie.
Nach den Voraussetzungen des Hauptsatzes gilt $\ell > s$. Weil ℓ und s ganze Zahlen sind, folgt $\ell \geq s+1$ und damit $\kappa \geq s+1$. Also:

$$\mathscr{H}^{m-\kappa}(\Sigma_u) > 0 \implies m - \kappa \leq m - s - 1.$$

Daraus folgt

$$\mathscr{H}\text{-}\dim(\Sigma_u) \leq m - s - 1.$$

Im Fall $\kappa = m$ kann man zusätzlich zeigen:
Hat Σ_u einen Häufungspunkt, so gilt $\mathscr{H}^1(\Sigma_\psi) > 0$.
Wir wissen aber bereits, dass $\mathscr{H}^0(\Sigma_\psi) = 0$ gilt. Aufgrund dieses Widerspruchs kann Σ_u keinen Häufungspunkt haben und muss deshalb diskret sein.

Den meisten Aufwand in dieser Arbeit wenden wir dafür auf, die Existenz der soeben beschriebenen Abbildung ψ zu beweisen. Wichtig ist hierbei der Begriff der *Tangentialabbildung* von u in $x \in M$. Dazu lokalisieren wir u in x, wie im vorangegangenen Absatz beschrieben und erhalten für ein $r > 0$ eine Abbildung $u : B^{m_x}_r \to N$. Gegeben sei nun eine Nullfolge $r_i \in (0, r)$. Wir betrachten die Folge der reskalierten Abbildungen

$$u_i : B^{m_x} \to N, \quad u(x) = u(r_i x). \tag{1.5}$$

Es lässt sich zeigen, dass die Folge u_i schwach in $W^{2,2}$ und stark in $W^{2,2}_{loc}(B^m_{\frac{1}{2}}, N)$ gegen eine Abbildung $u_\infty \in W^{2,2}_{G_x}(B^{m_x}, N)$ konvergiert, welche ein Minimierer der *euklidischen* Bienergie ist und außerdem nullhomogen auf $B^m_{\frac{1}{2}}$ ist, d.h.

$$u_\infty(r\omega) = u(\omega) \quad \text{für fast alle } r \in \left(0, \frac{1}{2}\right], \ \omega \in S^{m-1}.$$

Wir nennen die Abbildung

$$v \in W^{2,2}_{G_x}(B^{m_x}, N),\ v(x) := u_\infty\left(\frac{x}{2}\right)$$

eine *Tangentialabbildung* von u in x.
Um die gewünschte Abbildung φ zu erhalten, iterieren wir das Bilden von Tangentialabbildungen: Es gibt eine Tangentialabbildung $u_0 \in W^{2,2}\left(B^{k_0}, N\right)$ von u in $x_0 \in M$, eine Tangentialabbildung $u_1 \in W^{2,2}\left(B^{k_1}, N\right)$ von u_0 in $x_1 \in B^{k_0}$, usw. Wir können diese Prozedur so durchführen, dass wir nach endlich vielen Schritten eine Tangentialabbildung $u_n \in W^{2,2}\left(B^{k_n}, N\right)$ von u_{n-1} in $x_n \in B^{k_{n-1}}$ erhalten, von der zusätzlich gilt:

$$\Sigma_{u_n} = (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \cap B^{k_n}$$

(dabei ist sichergestellt, dass $n < k_n$ gilt). Die gesuchte Abbildung ist dann die Einschränkung

$$\psi : B^{k_n - n} \to N,\ \psi := u_n|_{(\{0\}\times B^{k_n-n})\setminus\{0\}}.$$

Sei $\ell := k_n - n$. Für eine bestimmte Darstellung $[\mathbb{R}^\ell, K]$ aus $\mathcal{T}_{[M,G]}$ ist

$$\varphi \in W^{2,2}_K(B^\ell \setminus \{0\}, N)$$

ein glatter, nicht-konstanter, nullhomogener K-Minimierer der euklidischen Bienergie.

Wo es knifflig wird. Das technische Hauptstück dieser Arbeit wird der Beweis sein, dass es unter den bereits genannten Voraussetzungen für jeden G-Minimierer $u \in W^{2,2}_G(M, N)$ der Bienergie und jedes $x \in M$ eine Tangentialabbildung $\varphi : B^{m_x} \to N$ von u in x gibt und dass diese auf $B^{m_x}_{\frac{1}{2}}$ nullhomogen ist. Ein wichtiger Schritt in diese Richtung wird ein *Kompaktheitssatz* (Hauptssatz 2) sein. Es sei eine in der $W^{2,2}$-Norm beschränkte Folge $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ gegeben. Weiterhin sei jedes u_i ein G-Minimierer einer *gestörten Bienergie*

$$E_V(u) := \int_{B^m} \left(|\Delta u|^2 + V_i(\cdot, u, Du, D^2u)\right)\, dx.$$

Dabei sei V ein *Integrand niederer Ordnung.* Die genaue Definition dieses Begriffs folgt zu Beginn von Kapitel 4. Wir sind an den Konvergenzeigenschaften der Folge $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ interessiert. Nach Übergang zu einer Teilfolge konvergieren die u_i schwach in $W^{2,2}$ gegen ein $u_\infty \in W^{2,2}_G(B^m, N)$. Ein entscheidender und der aufwändigste Schritt in dieser Arbeit ist, dass die folgende Aussage unter gewissen Zusatzvoraussetzungen, welche in den von uns betrachteten Situationen erfüllt sind, gültig ist:
Die u_i konvergieren stark in $W^{2,2}_{loc}(B^m_{\frac{1}{2}}, N)$ gegen u_∞.

Wichtig ist es hierbei, für jedes beliebig nahe an 1 gelegene $R \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ geeignete Verklebeabbildungen $v_i \in W_G^{2,2}(B^m, N)$ zu konstruieren, für die gilt:

- $v_i \equiv u_i$ auf $B^m \setminus B_R^m$,
- $\lim_{i \to \infty} ||v_i - u_\infty||_{W^{2,2}(B_R^m, \mathbb{R}^L)} = 0.$

Die Existenz einer solcher Abbildungen v_i wird aus unserem *Interpolationslemma* (Lemma 10) folgen. Das Interpolationslemma erfordert den mit Abstand aufwändigsten Beweis in dieser Arbeit. Die Abbildungen v_i benötigen wir aus dem fogenden Grund: Aus der Minimierereigenschaft von u_i folgt nämlich im Allgemeinen *nicht* $E_{V_i}(u_i) \leq E_{V_i}(u_\infty)$, da u_i und u_∞ unterschiedliche Randwerte annehmen können. Es gilt jedoch $E_{V_i}(u_i) \leq E_{V_i}(v_i)$, da u_i und v_i dieselben Randwerte annehmen. Weiterhin liegt $E_V(v_i)$ für hinreichend große i beliebig nahe an $E(u_\infty)$. Dies geht entscheidend im Beweis des Kompaktheitssatzes ein. Wie häufig in der Regularitätstheorie ist der Übergang von schwacher zu starker Konvergenz ein langwieriger, technischer und entscheidender Schritt.

Mit Hilfe des Kompaktheitssatzes wollen wir die Existenz von Tangentialabbildungen zeigen. Dazu müssen wir sicherstellen, dass die Folge der reskalierten Abbildungen $u_i : B^{m_x} \to N$ aus (1.5) in der $W^{2,2}$-Norm beschränkt ist. Dies ist als Korollar aus einer *Monotonieformel* (Satz 6) herleitbar, ebenso wie die Tatsache, dass deren Grenzwerte auf $B^m_{\frac{1}{2}}$ nullhomogen sind.

1.4 *Was* wir tun: Die Ergebnisse

Wir definieren nun die Menge $\mathcal{T}_{[M,G]}$. Der Begriff „Scheibendarstellung“ wird in Abschnitt 2.2 „Transformationsgruppen“ definiert. Angedeutet wurde dieser Begriff bereits in Abschnitt 1.3 dieser Einleitung bei der Beschreibung des Lokalisierens biharmonischer Abbildungen.
$\mathcal{T}^0_{[M,G]}$ sei die Menge aller Scheibendarstellungen $[\mathbb{R}^{m_x}, G_x]$ $(x \in M)$. Sukzessive definieren wir nun $\mathcal{T}^k_{[M,G]}$ wie folgt:
Es gebe eine Darstellung $[\mathbb{R}^p, K] \in \mathcal{T}^{k-1}_{[M,G]}$ und ein $x \in \mathbb{R}^p$, so dass $[\mathbb{R}^{\ell+1}, H]$ eine Scheibendarstellung von $[\mathbb{R}^p, K]$ in x ist. Es sei $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{\ell+1}$ ein H-invarianter Unterraum und H operiere auf diesem trivial. Folglich muss auch $\{0\} \times \mathbb{R}^\ell \cong \mathbb{R}^\ell$ ein H-invarianter Unterraum von $\mathbb{R}^{\ell+1}$ sein. Die darauf eingeschränkte Darstellung $[\mathbb{R}^\ell, H]$ ist dann in $\mathcal{T}^k_{[M,G]}$. *Jede* Darstellung dieser Art ist in $\mathcal{T}^k_{[M,G]}$ und *nur* Darstellungen dieser Art sind in $\mathcal{T}^k_{[M,G]}$. Wir setzen $\mathcal{T}_{[M,G]} := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{T}^k_{[M,G]}$. Man bedenke, dass $\mathcal{T}^\ell_{[M,G]} = \emptyset$ für alle hinreichend großen ℓ gilt.
Nun können wir die Ergebnisse dieser Arbeit formulieren. Das Ziel aller Anstrengungen ist der folgende Hauptsatz.

Hauptsatz 1. *Sei $[M,G]$ eine kompakte riemannsche Transformationsgruppe mit Kohomogenität ≤ 4 und mit*

$$\mathscr{H}\text{-}\dim\left(\{x \in M \ : \ m_x > 4\}\right) \leq m-5.$$

Sei $[\mathbb{R}^L, G]$ eine orthogonale Darstellung und sei $N \subset \mathbb{R}^L$ eine kompakte, G-invariante Untermannigfaltigkeit.
Es gibt einen G-Minimierer $u \in W_G^{2,2}(M,N)$ der Bienergie. Dieser ist eine stationär-biharmonische Abbildung. Sei $s \in [5, m-1] \cap \mathbb{N}$. Angenommen, für keine Darstellung $[\mathbb{R}^\kappa, H]$ aus $\mathcal{T}_{[M,G]}$ mit $1 \leq \kappa \leq s$ gibt es einen glatten, nichtkonstanten, nullhomogenen H-Minimierer $\psi : B^\kappa \setminus \{0\} \to N$ der euklidischen Bienergie, so gilt

$$\mathscr{H}\text{-}\dim(\Sigma_u) \leq m-s-1.$$

Im Fall $s = m-1$ ist Σ_u diskret. Im Fall $s = m$ ist u glatt.

Wie bereits erwähnt, setzen wir $\mathscr{H}^{m-4}(\Sigma_u) = 0$ voraus. Deswegen gilt für jeden Orbit Gx ($x \in M$) mit $\dim(Gx) \geq m-4$, dass u auf Gx glatt ist. Wir müssen also die Regularitätseigenschaften von u nur noch auf allen Orbits Gx mit $\dim(Gx) \leq m-5$ untersuchen, also auf der Menge

$$\{x \in M \ : \ m_x > 4\}.$$

Die Bedingung, dass $[M,G]$ Kohomogenität ≤ 4 hat, besagt, dass wir im „kritischen Fall" (siehe Abschnitt 1.2.2) arbeiten. Insbesondere folgt daraus, dass

$$\{x \in M \ : \ m_x \leq 4\}$$

eine offene, dichte Teilmenge von M ist. Also wissen wir bereits, dass $M \setminus \Sigma_u$ offen und dicht in M ist. Wenn $[M,G]$ Kodimension > 4 hat (dann liegt der „superkritische Fall" vor), lässt sich dies nicht ohne weitere Voraussetzungen schlussfolgern. Die Bedingung

$$\mathscr{H}\text{-}\dim\left(\{x \in M \ : \ m_x > 4\}\right) \leq m-5$$

besagt, dass die mögliche singuläre Menge klein genug ist, um einer wichtigen Konstruktion in dieser Arbeit (siehe Satz 12) nicht im Wege zu stehen. Zum Beispiel bedeutet diese Bedingung: Es kann Orbits Gx mit $\dim(Gx) = m-5$ geben. Aber die Menge all dieser Orbits muss Hausdorff-Dimension $\leq m-5$ haben. Es kann also nur „wenige" dieser Orbits geben, genauer: Im Orbitraum M/G hat die Menge dieser Orbits Hausdorff-Dimension 0 (woraus man mit einigen Kenntnissen über kompakte Transformationsgruppen schließen kann, dass sie endlich ist).

Wir erläutern hier nochmals unter einem anderen Blickwinkel, was unter dem „kritischen Fall" zu verstehen ist. Die Kohomogenität von $[M,G]$ sei s. Sei $f \in W_G^{2,2}(M, \mathbb{R}^L)$ gegeben. Auf jedem geodätischen Ball

$$\mathscr{B}_r(z) \subset \{x \in M \ : \ m_x \leq 4\}$$

liegt die eingeschränkt Abbildung $f_{z,r} := f|_{\mathscr{B}_r(z)}$ im Sobolev-Morrey-Raum $W^{2,2}_s$ (dieser Raum wird in Abschnitt 4.1.1 definiert). Im Fall $s < 4$, also im „subkritischen Fall“, gilt die Sobolev-Morrey-Einbettung

$$W^{2,2}_s \hookrightarrow C^{0,\alpha}$$

für ein geeignetes $0 < \alpha < 1$. Also ist f auf der Menge $\{x \in M \ : \ m_x \leq 4\}$ Hölder-stetig. Im Fall $s = 4$, also im „kritischen Fall“ gilt die Sobolev-Morrey-Einbettung

$$W^{2,2}_s \hookrightarrow L^q$$

für alle $1 \leq q < \infty$, im allgemeinen jedoch nicht für $q = \infty$. Dies genügt nicht, um die Stetigkeit von $f_{z,r}$ schlussfolgern zu können. Die Kohomogenität $s = 4$ ist also die kleinste Kohomogenität, unter der wir die Abbildung f nicht mehr auf der offenen, dichten Teilmenge

$$\{x \in M \ : \ m_x \leq 4\}$$

von M als stetig annehmen können. Im Fall $G = \{1\}$ ist $s = m$ und $m_x = m$ für jedes $x \in M$. Deswegen liegen die bekannten Sobolev-Morrey-Einbettungen für Abbildungen $g \in W^{2,2}(M, \mathbb{R}^L)$ vor: Im „subkritischen Fall“ Fall $m < 4$ gilt

$$W^{2,2}(M, \mathbb{R}^L) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(M, \mathbb{R}^L)$$

für ein geeignetes $0 < \alpha < 1$. Im Fall $m = 4$, also im „kritischen Fall“ gilt

$$W^{2,2}(M, \mathbb{R}^L) \hookrightarrow L^q(M, \mathbb{R}^L)$$

für alle $1 \leq q < \infty$, im allgemeinen jedoch nicht für $q = \infty$. Wichtig: Hier gelten die Einbettungen auf ganz M und nicht nur lokal in einer offenen, dichten Teilmenge von M (was trivialerweise aus $M = \{x \in M \ : \ m_x \leq 4\}$ im Fall $s = m \leq 4$ folgt).
Unter Verwendung des Resultats $\mathscr{H}^{m-4}(\Sigma_u) = 0$ für alle stationär-biharmonischen Abbildungen $u \in W^{2,2}(M, N)$ sieht man im kritischen Fall:

- Sei $m \leq 4$ und sei $f \in W^{2,2}(M, N)$ eine stationär-biharmonische Abbildung. Dann ist f glatt.

- Sei m beliebig, sei $s \leq 4$ und sei $f \in W^{2,2}_G(M, N)$ eine stationär-biharmonische Abbildung: Dann ist u glatt auf $\{x \in M \ : \ m_x \leq 4\} \neq M$ („$\neq$“ gilt *nicht* in manchen Spezialfällen, auf die es hier aber nicht ankommt).

Man sieht also: Im Fall einer allgemeinen Transformationsgruppe $[M, G]$ ist der kritische Fall vielschichtiger als im herkömmlichen Fall $G = \{1\}$. Die Menge

$$\{x \in M \ : \ m_x > 4\}$$

muss gesondert behandelt werden, wenn es um die Regularität einer G-äquivarianten Abbildung f geht. Und genau darum geht es in dieser Arbeit.

Die Menge $\mathcal{T}_{[M,G]}$ enthält *unendlich viele* Darstellungen. Zwei orthogonale Darstellungen $[\mathbb{R}^\ell, G]$ und $[\mathbb{R}^\ell, H]$ seien äquivalent, wenn G und H konjugiert sind, d.h. wenn es ein $v \in O(\ell)$ gibt mit $G = v^{-1}Hv$. Die Menge $\mathcal{T}_{[M,G]}/\sim$, also $\mathcal{T}_{[M,G]}$ modulo diese Äquivalenzrelation, ist *endlich* (weil es nur endlich viele Isotropietypen gibt, siehe hierfür Abschnitt 2.2 über Transformationsgruppen). Noch dazu ist eine Abbildung $f \in W^{2,2}(B^\ell, \mathbb{R}^L)$ genau dann G-äquivariant, wenn die Abbildung $x \mapsto vf(v^{-1}x)$ H-äquivariant ist. Daraus folgt, dass man die Bedingung aus Hauptsatz 1 - die Nicht-Existenz gewisser G-Minimierer der euklidischen Bienergie $f \in W^{2,2}(B^\ell, \mathbb{R}^L)$ - nicht für *alle* Darstellungen $[\mathbb{R}^\ell, G] \in \mathcal{T}_{[M,G]}$ nachprüfen muss, sondern nur für *endlich viele* Darstellungen aus $\mathcal{T}_{[M,G]}$. Nämlich in jeder Konjugationsklasse nur für *eine* Darstellung. Dieser Sachverhalt sorgt für die praktische Anwendbarkeit von Hauptsatz 1 in konkret gegebenen Situationen.

Der wichtigste Schritt im Beweis dieses Hauptresultates ist wie bereits erwähnt der sogenannte *Kompaktheitssatz*. Er ist unser zweites Hauptergebnis.

Hauptsatz 2 (Kompaktheitssatz) *Sei $[B^m, G]$ eine orthogonale Darstellung von Kohomogenität ≤ 4 und mit*

$$\mathscr{H}\text{-}\dim\left(\{x \in M_{sing} \ : \ m_x > 4\}\right) \leq m - 5.$$

Sei $[\mathbb{R}^L, G]$ eine orthogonale Darstellung und für jedes $i \in \mathbb{N}$ sei $N_i \subset \mathbb{R}^L$ eine kompakte, G-invariante Untermannigfaltigkeit. Sei $N_\infty \subset \mathbb{R}^L$ eine weitere, nicht notwendigerweise kompakte G-invariante Untermannigfaltigkeit, so dass sich jede Abbildung $f \in W^{2,2}(B^m, N_\infty)$ als starker $W^{2,2}$-Grenzwert von Abbildungen $f_i \in W^{2,2}(B^m, N_i)$ darstellen lässt. Gegeben seien Integranden von niederer Ordnung

$$V_i : B^m \times \mathbb{R}^L \times \mathbb{R}^{m\times L} \times \mathbb{R}^{m\times m\times L} \to \mathbb{R}$$

mit

$$|V_i(x, z, p, q)| \leq \alpha_i \left(|x|\,|q|^2 + |q|\,|p| + |q|\,|z| + |p|^2 + |z|^2\right)$$

für eine Nullfolge $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}_{>0}$.
Gegeben sei für jedes $i \in \mathbb{N}$ ein lokaler G-Minimierer $u_i \in W^{2,2}_G(B^m, N_i)$ von E_{V_i}. Angenommen, die u_i konvergieren schwach in $W^{2,2}(B^m, \mathbb{R}^L)$ gegen ein $u \in W^{2,2}_G(B^m, N_\infty)$. Dann konvergieren die u_i auch stark in $W^{2,2}_{loc}(B^m_{\frac{1}{2}}, \mathbb{R}^L)$ gegen u und u ist ein lokaler G-Minimierer der euklidischen Bienergie.

Stark vereinfacht kann man sagen: *Der Grenzwert einer schwach konvergenten Folge von lokalen G-Minimierern ist ein lokaler G-Minimierer.*
Für den Begriff „Integrand von niederer Ordnung“ konsultiere man den Beginn von Kapitel 4. Mit E_{V_i} ist das Funktional

$$E_{V_i}(u) = \int_{B^m} \left(|\Delta u|^2 + V_i[u]\right)\,dx$$

gemeint. Es wird im Kompaktheitssatz *nicht* vorausgesetzt, dass alle u_i dieselben Randwerte haben, es kann also $u_i \notin W^{2,2}_{u_j}(B^m, N)$ für $i \neq j$ gelten.
Wir brauchen den Kompaktheitssatz nur im Fall $N_i = N_\infty$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Die vorliegende allgemeinere Version erarbeiten wir für eventuellen späteren Gebrauch. In dieser Arbeit wenden wir den Kompaktheitssatz auf reskalierte Folgen $u_i(x) = u(r_i x)$ mit einer Nullfolge $\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ an. Das heißt, wir skalieren *im Definitionsbereich* von u. Will man die von uns für stationär-bihamonische Abbildungen $u \in W^{2,2}(M, N)$ verwendeten Regularitätsergebnisse ($u \in C^\infty(M \setminus \Sigma_u, N)$ mit $\mathscr{H}^{m-4}(\Sigma_u) = 0$) auch im riemannschen Fall beweisen (wie bereits erläutert, wurden sie im euklidischen Fall bewiesen und werden von uns für den riemannschen Fall vorausgesetzt), so wird man nicht nur im Definitionsbereich, sondern auch im Wertebereich skalieren: Man arbeitet mit den Abbildungen $u_i(x) = \frac{1}{\alpha_i}(u(r_i x) - y_i)$ mit einer geeigneten Folge $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^L$ und einer geeigneten Folge $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}_{>0}$. Hat die Abbildung u ihr Bild in $N \subset \mathbb{R}^L$, so hat u_i ihr Bild in $N_i := \frac{1}{\alpha_i}(N - y_i)$. Die α_i und y_i sind dabei so gewählt, dass die Mannigfaltigkeit $N_\infty \subset \mathbb{R}^L$ ein linearer Unterraum von $\mathbb{R}^L$ ist.

Zwei weitere Sätze aus dieser Arbeit sind unabhängig von ihrer Rolle als Beweismittel von Hauptsatz 1 von Interesse: Die *Monotonieformel* (Satz 6) und der *Satz von der Existenz von Tangentialabbildungen* (Satz 8). Wir formulieren diese hier nicht, da ihre Formulierung aufwändig ist oder die verwendeten Begriffe zum Teil noch nicht bereitgestellt wurden.

1.5 Ausblick

Basierend auf unserem Hauptergebnis kann man in der folgenden Richtung weiterarbeiten:

Man kann versuchen, Beispiele biharmonischer Abbildungen in nicht-trivialen Homotopieklassen zu finden. Bisher stehen den vielen theoretischen Aussagen über biharmonische Abbildungen kaum Beispiele gegenüber. Dazu wähle eine Operation von G auf M und $\mathbb{R}^L$ derart, dass alle äquivarianten, stetigen Abbildungen $u : M \to N$ in einer bestimmten Menge von nicht-trivialen Homotopieklasse $A \subset \pi(M, N)$ liegen. Um mit Hilfe unseres Hauptergebnisses die Existenz eines biharmonischen Repräsentanten irgendeines $\alpha \in A$, d.h. einer biharmonischen Abbildung $u \in C^\infty(M, N)$ mit $u \in \alpha \in A$ zu zeigen, muss man sicher stellen, dass es gewisse nicht-konstante, nullhomogene, äquivariante Minimierer $\psi : B^\kappa \setminus \{0\} \to N$ der Bienergie nicht gibt. Hier empfiehlt sich das folgende Vorgehen: Eine solche Abbildung ψ muss *G-stabil* sein, wie man leicht einsehen kann, d.h.

$$\delta^2 E(u; \varphi) := \frac{d^2}{dt^2}\bigg|_{t=0} E\left(\Pi_N(u + t\varphi)\right) = 0$$
$$\text{für alle } G\text{-äquivarianten } \varphi \in C^\infty(M, \mathbb{R}^L).$$

Wenn unsere Gruppenoperationen von G auf M und $\mathbb{R}^L$ nun so gewählt sind, dass alle zu betarchtenden Abbildungen $\psi : S^{\kappa-1} \to N$ nur dann G-stabil sind, wenn sie *konstant* sind, so wissen wir, dass ein G-Minimierer $u : M \to N$ der Bienergie glatt ist.
Es bieten sich Symmetrievoraussetzungen der folgenden Art an: $M = S^{m-1}$, $N = S^{n-1}$, G sei eine Untergruppe der orthogonalen Gruppe $O(m)$, und G operiere auf $\mathbb{R}^L$ durch $gv \mapsto \Psi(g)v$, wobei $\Psi : O(m) \to O(n)$ ein Lie-Gruppenhomomorphismus ist. Dies lässt sich nämlich so einrichten, dass alle G-äquivarianten Abbildungen $u : S^{m-1} \to S^{n-1}$ in nichttrivialen Homotopieklassen liegen. Beispiele für solche Symmetriebedingungen findet man in der weiter oben zitierten Literatur für äquivariante harmonische Abbildungen. In meiner Diplomarbeit und in [18] wurde dieses Vorgehen an einem Beispiel bereits durchgeführt.

Es folgt nun ein Beispiel für eine geeignete Symmetrievoraussetzung: Sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Für jedes $i \in \{1, ..., k\}$ seien m_i, $n_i \in \mathbb{N}$ und sei $\Psi_i : SO(m_i) \to SO(n_i)$ ein Lie-Gruppen-Homomorphismus. Es sei

$$G := SO(m_1) \times ... \times SO(m_k).$$

Die Gruppe G operiere auf $\mathbb{R}^{m_1+...+m_k}$ als Untergruppe von $SO(m_1 + ... + m_k)$ und auf $\mathbb{R}^{n_1+...+n_k}$ durch

$$gv := (\Phi_1 \times ... \times \Phi_k)(g)\, v,$$

wobei die Gruppe $(\Phi_1 \times ... \times \Phi_k)(G)$ als Untergruppe von $SO(n_1 + ... + n_k)$ auf $\mathbb{R}^{n_1+...+n_k}$ operiert. Die regulären Orbits haben Isotropietyp

$$(SO(m_1 - 1) \times ... \times SO(m_k - 1))$$

und sind diffeomorph zu

$$S^{m_1-1} \times ... \times S^{m_k-1}.$$

Die singulären Orbits von Isotropietyp

$$(SO(m_1) \times SO(m_2 - 1) \times ... \times SO(m_k - 1))$$

sind diffeomorph zu

$$S^{m_2-1} \times ... \times S^{m_k-1},$$

die dazugehörigen Scheibendarstellungen sind konjugiert zu

$$[\mathbb{R}^{k-2} \times \mathbb{R}^{m_1}, SO(m_1) \times SO(m_2 - 1) \times ... \times SO(m_k - 1)],$$

wobei die Gruppenoperation durch

$$\begin{aligned}(g_1, ..., g_k)(v_1, v_2) = (v_1, g_1 v_2) \quad \text{für alle } (v_1, v_1) \in \mathbb{R}^{k-2} \times \mathbb{R}^{m_1}, \\ (g_1, ..., g_k) \in SO(m_1) \times SO(m_2 - 1) \times ... \times SO(m_k - 1)\end{aligned}$$

gegeben ist. Die Orbits von Isotropietyp

$$(SO(m_1) \times SO(m_2) \times SO(m_3 - 1) ... \times O(m_k - 1))$$

sind diffeomorph zu

$$S^{m_3-1} \times ... \times S^{m_k-1},$$

die dazugehörigen Scheibendarstellungen sind konjugiert zu

$$[\mathbb{R}^{k-3} \times \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}, SO(m_1) \times SO(m_2) \times SO(m_3 - 1) \times ... \times SO(m_k - 1)],$$

wobei die Gruppenoperation durch

$$(g_1, ..., g_k)(v_1, v_2, v_3) = (v_1, g_1 v_2, g_2 v_3) \quad \text{für alle } (v_1, v_1, v_3) \in \mathbb{R}^{k-3} \times \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2},$$
$$(g_1, ..., g_k) \in SO(m_1) \times SO(m_2) \times SO(m_3 - 1) \times ... \times SO(m_k - 1)$$

gegeben ist. Fährt man auf diese Weise fort und nimmt man noch dazu beliebige Umnummerierungen der m_i vor, so erhält man bis auf Diffeomorphie alle Orbits und bis auf Konjugation alle Scheibendarstellungen. Im Fall $k = 2$ besteht die Menge $\mathcal{T}_{[S^{m_1+m_2-1}, G]}$ bis auf Konjugation aus den beiden Darstellungen

$$[\mathbb{R}^{m_1}, SO(m_1) \times SO(m_2 - 1)], \ [\mathbb{R}^{m_2}, SO(m_1 - 1) \times SO(m_2)].$$

Wie diese aus den Scheibendarstellungen hervorgehen, sollte bei genauer Betrachtung der Definition von $\mathcal{T}_{[S^{m_1+m_2-1}, G]}$ offensichtlich sein.
Um unseren Hauptsatz 1 anwenden zu können, muss die $[S^{m_1+...+m_k-1}, G]$ Kohomogenität ≤ 4 haben. Dies ist gleichbedeutend mit $k \leq 5$. Weiterhin muss für alle nichtleeren, echten Teilmenge A von $\{1, ..., k\}$ gelten:

$$\sum_{j \in A} (m_j - 1) < m_1 + ... + m_k - 5 \implies \left(\sum_{j \in A} m_j \right) - 1 \leq m_1 + ... + m_k - 5.$$

Wir schauen uns nun den *trivialen* Fall $k = 3$, $m_1 = m_2 = m_3 = 2$ an: Die Isotropietypen sind:

- $(SO(1) \times SO(1) \times SO(1))$, der der minimale Isotropietyp. Die Orbist von diesem Isotropietyp sind diffeomorph zu $S^1 \times S^1 \times S^1$.
- $(SO(2) \times SO(1) \times SO(1))$, $(SO(1) \times SO(2) \times SO(1))$, $(SO(1) \times SO(1) \times SO(2))$. Die Orbits von diesen Isotropietypen sind diffeomorph zu $S^1 \times S^1$.
- $(SO(2) \times SO(2) \times SO(1))$, $(SO(2) \times SO(1) \times SO(2))$, $(SO(1) \times SO(2) \times SO(2))$. Die Orbits von diesen Isotropietypen sind diffeomorph zu S^1.

Die regulären Orbits haben Dimension 3, die singulären Orbits haben Dimension 2 oder 1. Es haben also *alle* Orbits von $[S^5, G]$ Kodimesnion ≤ 4. Wegen $\mathscr{H}^{m-4}(\Sigma_u) = 0$ gilt also:
Es gibt einen G-Minimierer $u \in W^{2,2}_G(S^5, S^{n_1+n_2+n_3-1})$. *Dieser ist glatt.*
Wenn k, m_i und n_i so gewählt sind, dass es Orbits von Kodimension ≥ 4 gibt, dann muss man die Kriterien von Hauptsatz 1 (die Nichtexistenz gewisser nullhomogener äquivarianter Minimierer der euklidischen Bienergie) in oben beschriebener Weise nachprüfen. Dies anzugehen liegt im Anschluss an diese Arbeit nahe.

1.6 Gliederung der Arbeit

Kapitel 2: Grundlagen. Wir tragen zusammen, was wir an Grundlagen über Transformationsgruppen und Variationsrechnung für unsere Arbeit benötigen.
Kapitel 3: Äquivariante biharmonische Abbildungen. Wir beweisen die *Symmetrische Stationarität* und beschreiben, wie man einen G-Minimierer $u : M \to N$ um ein $x \in M$ lokalisiert.
Kapitel 4: Lokale Konvergenzsätze. Wir untersuchen das Konvergenzverhalten gewisser Folgen $\{u_i\} \subset W_G^{2,2}(B^m, N)$. Der größte Teil des Aufwandes dieser Arbeit steckt in diesem Kapitel. Insbesondere wird der *Kompaktheitssatz* (Hauptsatz 2) bewiesen.
Kapitel 5: Dimensionsreduktion der singulären Menge. Basierend auf den Ergebnissen aus den Kapiteln 3 und 4 wird der Hauptsatz 1 bewiesen.

1.7 Häufig zitierte Arbeiten

Von den vielen Arbeiten, die wir zitieren werden, seien hier die folgenden besonders hervorgehoben. An ihnen orientieren wir unser Vorgehen an entscheidenden Stellen. Wir nennen sie in alphabetischer Reihenfolge.

G. Angelsberg: *A monotonicity formula for stationary biharmonic maps* [2]. Unsere Monotonieformel ist eine allgemeinere als diejenige von Angelsberg.

A. Gastel: *Regularity theory for minimizing* (p)*-harmonic mappings* [13]. Unser Hauptergebnis ist an das entsprechende Resultat aus dieser Arbeit für äquivariante *harmonische* Abbildungen angeleht. Die dort entwickelten Methoden dienen uns vielfach als Vorlage für unseren biharmonischen Fall.

A. Gastel und A.J. Nerf: *Density of smooth maps in* $W^{k,p}(M,N)$ *for a close to critical domain dimension* [17]. Unser wichtiger und aufwändig zu beweisende Interpolationssatz (Satz 10) verwendet eine „Verklebekonstruktion“ aus dieser Arbeit und entnimmt die Idee für eine geeignete Form von nullhomogenen Fortsetzungen aus ihr.

Ch. Scheven: *Dimension reduction for the singular set of biharmonic maps* [48]. Aus dieser Arbeit zitieren wir wichtige Aussagen über biharmonische Abbildungen, von anderen Aussagen daraus beweisen wir äquivariante Versionen.

Kapitel 2

Grundlagen

2.1 Differentialgeometrie

Alle Mannigfaltigkeiten sind für uns glatt, solange nichts anderes angegeben wird. Sei $(M, \mathbf{g})$ eine riemannsche Mannigfaltigkeit von Dimension m, evtl. mit Rand, und sei $N \subset \mathbb{R}^L$ eine Untermannigaltigkeit ohne Rand von Dimension n. Für jedes $y \in N$ fassen wir den Tangentialraum $T_y N$ auf die übliche Weise als Unterraum von $\mathbb{R}^L$ auf. Wir verwenden die folgenden Notationen:

- $D_{\mathbf{g}}$: die von $\mathbf{g}$ abstammende kovariante Ableitung auf dem Tangentialbündel TM und allen dazu assoziierten Tensorbündeln.
- Δ_M bzw. $\Delta_{\mathbf{g}}$: Der Laplace-Beltrami-Operator von $(M, \mathbf{g})$,
- dvol_M bzw. $\mathrm{dvol}_{\mathbf{g}}$: Die Volumenform von $(M, \mathbf{g})$,
- dist_M bzw. $\mathrm{dist}_{\mathbf{g}}$: die zu $\mathbf{g}$ gehörende Metrik auf M,
- $\mathrm{diam}_M(A)$ bzw. $\mathrm{diam}_{\mathbf{g}}(A)$: der Durchmesser einer Menge $A \subset M$ bzgl. dieser Metrik,
- inj_M bzw. $\mathrm{inj}_{\mathbf{g}}$: Der Injektivitätsradius von M bzgl. $\mathbf{g}$,
- $\delta_{\mathbf{g}}$: der zur äußeren Ableitung d adjungierte Operator, der also durch die folgende Eigenschaft wohldefiniert ist: $\langle \delta_{\mathbf{g}} \omega, f \rangle = \langle \omega, df \rangle$ für alle glatten 1-Formen ω auf M und alle glatten Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$.
- $\mathscr{B}_r(x)$: der geodätische Ball um $x \in M$ mit Radius $r > 0$,
- νK das Normalenbündel einer Untermannigfaltigkeit $K \subset M$,
- $\nu^r K$ das dazugehörige Ballbündel mit Radius $r > 0$, faserweise gegeben durch $\nu_x^r K = \{v \in \nu_x K \ : \ |v| < r\}$,
- $T^r M$ das zum Tangentialbündel TM gehörende Ballbündel mit Radius $r > 0$, faserweise gegeben durch $T_x^r M = \{v \in T_x M \ : \ |v| < r\}$,

- $\mathcal{U}_r(K) = \exp(\nu^r K)$: die Schlauchumgebung von K mit Radius r (wobei $r > 0$ hinreichend klein gewählt ist, so dass $\exp|_{\nu^r K}$ injektiv ist)
- u^*TN: das mit einer Abbildung $u : M \to N$ zurückgezogene Tangentialbündel TN (dabei ist N eine weitere Mannigfaltigkeit).

Sei $u : M \to N$ eine (für alle im folgenden durchgeführten Operationen hinreichend reguläre) Abbildung. Das Differential du ist ein Schnitt des Bündels $T^*M \otimes u^*TN$, also eine 1-*Form entlang* u. Wir haben zwei Möglichkeiten, die zweite Ableitung von u zu bilden:

Die *extrinsische* zweite Ableitung von u ist $D_{\mathbf{g}}du$. Hierbei fassen wir u als Abbildung $u : M \to \mathbb{R}^L$ auf und bilden komponentenweise für $1 \leq i \leq N$ die kovarianten Ableitungen der 1-Formen du^i. $D_{\mathbf{g}}du$ ist ein Schnitt des Bündels $T^*M \otimes T^*M \otimes \mathbb{R}^L$, also ein $\mathbb{R}^L$-*wertiger kovarianter* 2-*Tensor*.

Bei der *intrinsischen* zweiten Ableitung fassen wir u als Abbildung $u : M \to N$ auf. Es ist $\nabla_{u,\mathbf{g}}du := (\mathcal{T}_N \circ u)(D_{\mathbf{g}}du)$. Dabei ist $\mathcal{T}_N(z)$ für jedes $z \in N$ die orthogonale Projektion $\mathbb{R}^L \to T_zN$. Die intrinsische zweite Ableitung $\nabla_{u,\mathbf{g}}du$ ist ein Schnitt im Vektorbündel $T^*M \otimes T^*M \otimes u^*TN$, also ein *kovarianter 2-Tensor entlang u*.

Auf analoge Weise erhalten wir für jedes $k \in \mathbb{N}$. die extrinsische Ableitung $D_{\mathbf{g}}^{k-1}du$ und die intrinsische Ableitung $\nabla_{\mathbf{g},u}^{k-1}du$ k-ter Ordnung.

All dies lässt sich in der Theorie der Bündel und Zusammenhänge prägnant ausdrücken: Durch die gegebenen kovarianten Ableitungen auf den Bündeln TM und TN werden auf kanonische Weise kovariante Ableitungen auf den assoziierten Bündeln $\big(\otimes^k T^*M\big) \otimes u^*TN$ und $\big(\otimes^k T^*M\big) \otimes \mathbb{R}^L$ induziert.
Ebenso wurden durch die metrische Tensoren auf M und N metrische Tensoren auf diesen assoziierten Bündeln induziert, insofern sind Bezeichnungen wie $|D_{\mathbf{g}}^{k-1}du|$ und $|\nabla_{u,\mathbf{g}}^{k-1}du|$ wohldefiniert.

Der Laplace-Beltrami-Operator von $(M, \mathbf{g})$ ist definiert durch

$$\Delta_{\mathbf{g}}u = -\delta_{\mathbf{g}}du$$

für (hinreichend reguläre) Abbildungen $u : M \to \mathbb{R}^L$. Wir geben zwei lokale Darstellungen des Laplace-Beltrami-Operators an:

In lokalen Koordinaten ist die folgendeDarstellung bekannt:

$$\Delta_{\mathbf{g}}u = -\mathbf{g}^{ij}\left(u_{ij} - \Gamma_{ij}^k u_k\right)$$

mit den üblichen Bezeichnungen der Differentialgeometrie. (Man beachte die Vorzeichenkonvention! Oft wird $\Delta_{\mathbf{g}}u$ lokal als das *Negative* dieses Ausdrucks definiert.)

Ist $\{E^i\}_{i=1}^m$ ein orthogonaler Rahmen auf einem geodätischen Ball $\mathscr{B}_r(x)$, so gilt

$$(\Delta_{\mathbf{g}}u)|_{\mathscr{B}_r(x)} = -(D_{\mathbf{g}}d)_{E^iE^i}(u|_{\mathscr{B}_r(x)}).$$

Hier verwenden wir wie in der gesamten Arbeit die Summenkomvention: Wenn wir in lokalen Koordinaten oder mit lokalen Orthonormalrahmen rechnen, so summieren wir doppelt auftretende Indizes über den jeweiligen Geltungsbereich.

Wenn wir auf euklidischen Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rechnen, dann bezeichne

$$\Delta f = -\partial^2_{ii} f$$

den (bis auf das Vorzeichen) üblichen euklidischen Laplace-Operator. Die totalen Ableitungen bezeichnen wir wie üblich Df, D^2f,... .

Das ℓ-dimensionale Hausdorff-Maß $\mathscr{H}^\ell$ auf M ist wie folgt definiert: Für $A \subset M$ und $\delta \in (1, \infty]$ sei

$$\mathscr{H}^\ell_\delta(A) := \inf \left\{ \alpha(\ell) \sum_{i=1}^{k} \rho_j^\ell \ : \ A \subset \bigcup_{i=1}^{k} \mathscr{B}_{\rho_j}(x_j), \ \rho_j < \delta \right\}$$

mit $\alpha(\ell) := \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^\ell}{\Gamma\left(1+\frac{\ell}{2}\right)}$ und

$$\mathscr{H}^\ell(A) := \lim_{\delta \downarrow 0} \mathscr{H}^\ell_\delta(A).$$

Die *Hausdorff-Dimension* einer Menge $A \subset M$ ist

$$\mathscr{H}\text{-}\dim(A) := \inf\{\ell \in [0, m] \ : \ \mathscr{H}^\ell(A) = 0\}.$$

Wir werden oft in lokalen Koordinaten rechnen, d.h. auf einem Ball B^m, versehen mit einem metrischen Tensor $\mathbf{g}$. Wenn wir dann das Hausdorff-Maß verwenden, dann stets bzgl. der euklidischen Metrik und nicht bzgl der zu $\mathbf{g}$ gehörenden Metrik. Wir begründen nun, warum das in unserem Fall gerechtfertigt ist. Sei $\mathscr{H}^\ell$ das ℓ-dimensionale Hausdorff-Maß bzgl. der euklidischen Metrik und sei $\mathscr{H}^\ell_{\mathbf{g}}$ das zu $\mathbf{g}$ gehörende ℓ-dimensionale Hausdorff-Maß. Im Allgemeinen gilt *nicht* $\mathscr{H}^\ell(A) = \mathscr{H}^\ell_{\mathbf{g}}(A)$. Aber für alle $A \subset B^m$ gilt:

$$\mathscr{H}^\ell(A) = 0 \iff \mathscr{H}^\ell_{\mathbf{g}}(A) = 0, \quad \mathscr{H}^\ell(A) > 0 \iff \mathscr{H}^\ell_{\mathbf{g}}(A) > 0.$$

Denn die Maße $\mathscr{H}^\ell$ und $\mathscr{H}^\ell_{\mathbf{g}}$ sind äquivalent, d.h. sie haben dieselben Nullmengen. Insbesondere ist die Hausdorff-Dimension dieselbe, egal bzgl. welcher Metrik wir sie berechnen. Wir sind in dieser Arbeit nie an dem exakten Wert von $\mathscr{H}^\ell(A)$ interessiert. Uns interessiert nur, ob $\mathscr{H}^\ell(A) = 0$ oder ob $\mathscr{H}^\ell(A) > 0$ gilt. Deswegen können wir ohne weiteres beim Rechnen in Koordinaten stets das übliche euklidische Hausdorff-Maß verwenden.

2.2 Transformationsgruppen

Es gibt viele Bücher über Transformationsgruppen, die meisten haben den Schwerpunkt auf deren topologischen und algebraischen Eigenschaften. Wir betrachten Transformationsguppen aus dem Blickwinkel der riemannschen Geometrie. Hier empfehlen wir die beiden Bücher [29] von Kobayashi und [44] von Palais und Terng. Alle in diesem Abschnitt aufgelisteten Resultate, für die keine Quellen genannt werden, sind Standardresultate in der Theorie der Transformationsgruppen.

Eine *Transformationsgruppe* $[M, G]$ besteht aus einer glatten Mannigfaltigkeit M (evtl. mit Rand), einer Lie-Gruppe G und einer glatten Abbildung

$$\begin{cases} G \times M \to M \\ (g, x) \mapsto gx \end{cases}$$

mit $h(gx) = (hg)x$ für alle $x \in M$ und alle g, $h \in G$.

Für jedes $g \in G$ definieren wir die Abbildung

$$L_g : \begin{cases} M \to M \\ x \mapsto gx \end{cases},$$

die sogenannte *Operation von g auf M*.

Ist M eine riemannsche Mannigfaltigkeit, so sagt man, die Gruppe G operiere durch Isometrien auf M, wenn L_g für jedes $g \in G$ eine Isometrie ist. Wir nennen $[M, G]$ dann eine *riemannsche Transformationsgruppe*.

Wir nennen $[M, G]$ eine *kompakte Transformationsgruppe*, wenn sowohl G als auch M kompakt sind.

Sei V ein Vektorraum. Eine Transformationsgruppe $[V, G]$ heißt *Darstellung* von G auf V, wenn für jedes $g \in G$ die Abbildung $L_g : V \to V$ linear ist. Ist V mit einem Skalarprodukt versehen und sind alle Abbildungen L_g zusätzlich orthogonal, so sprechen wir von einer *orthogonalen Darstellung*.

Der *Orbit* von $x \in M$ ist

$$Gx := \{gx \ : \ g \in G\}.$$

Die *Isotropiegruppe* von $x \in M$ ist

$$G_x := \{g \in G \ : \ gx = x\}.$$

Jede Isotorpie-Gruppe G_x ist eine Lie-Untergruppe von G. Jeder Orbit Gx ist eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von M und diffeomorph zu G/G_x, also ein homogener Raum. Ist G kompakt, so ist auch Gx kompakt.

Für eine Lie-Untergruppe H von G bezeichne (H) die Menge aller Lie-Untergruppen von G, die zu H konjugiert sind, d.h.

$$(H) := \{K \leq G \ : \ K = g^{-1}Hg \ \text{ für ein } g \in G\}.$$

Wir sagen, *x ist vom Isotropietyp* (H), wenn $(G_x) = (H)$.

Sei $\circ$ eine der Relationen $<, \leq, >, \geq$ (im Sinne der Lie-Untergruppen-Relationen verstanden). Für Isotropietypen (H), (K) bedeutet $(H) \circ (K)$: Es gibt ein $g \in G$ mit $g^{-1}Hg \circ K$.

Für eine Lie-Untergruppe H von G definieren wir

$$\begin{aligned} M(\circ H) &:= \{x \in M \ : \ (G_x) \circ (H)\}, \\ M(H) &:= M(= H). \end{aligned}$$

Wir definieren die Funktion

$$m_G : \begin{cases} M \to \mathbb{N}_0 \\ x \mapsto m - \dim Gx \end{cases}.$$

m_G ist konstant auf den Mengen $M(G_x)$. Wenn keine Verwechslung bzgl. der Gruppe G droht, schreiben wir auch m_x anstelle von $m_G(x)$.

Sei nun eine weitere Transformationsgruppe $[N, G]$ gegeben. Die Operation von $g \in G$ auf N sei mit λ_g bezeichnet. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt G-äquivariant, wenn für alle $g \in G$ gilt:

$$f \circ L_g = \lambda_g \circ f.$$

Dies ist äquivalent zu

$$f(gx) = gf(x) \ \text{ für alle } g \in G \text{ und alle } x \in M.$$

Solange nichts anderes angegeben ist, soll für den Rest des Abschnittes $[M, G]$ eine kompakte riemannsche Transformationsgruppe ohne Rand sein.

Für alle $x \in M$, alle $g \in G_x$ und alle $v \in \nu_x Gx$ gilt $d_x L_g(v) \in \nu_x Gx$. Deswegen erhalten wir eine orthogonale Darstellung

$$G_x \times \nu_x Gx \to \nu_x Gx, \ (g, v) \mapsto d_x L_g(v) =: gv, \tag{2.1}$$

die sogenannte *Scheibendarstellung* von G_x. Eine Darstellung $G \times \mathbb{R}^{m_x} \to \mathbb{R}^{m_x}$ nennen wir *eine* Scheibendarstellung von G_x in x, wenn sie aus (2.1) durch Einführung von Koordinaten aus $\nu_x Gx$ hervorgeht.

Sei $r > 0$ hinreichend klein, so dass die Einschränkung der Exponentialabbildung $\exp_x : T_x^r M \to M$ ein Diffeomorphismus ist. Die *Scheibe* um x mit Radius r ist

$$\mathcal{S}_r(x) := \exp(\nu_x^r Gx).$$

Dies ist eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von M der Dimension m_x. Außerdem ist jede Scheibe eine total-geodätische Untermannigfaltigkeit.

Für jedes $g \in G$ und jedes $x \in \mathcal{U}_r(Gx)$ gilt $gy \in \mathcal{U}_x(Gx)$. Wir haben also eine Transformationsgruppe $[\mathcal{U}_r(Gx), G]$. Für jedes $g \in G_x$ und jedes $y \in \mathcal{S}_r(x)$ gilt $gy \in \mathcal{S}_r(x)$. Es liegt also eine Transformationsgruppe $[\mathcal{S}_r(x), G_x]$ vor.

Eine entscheidende Rolle bei unserer Verwendung von Transformationsgruppen nimmt der folgende *Scheibensatz* ein:

Satz 1 (Scheibensatz) *Sei $[M, G]$ eine kompakte riemannsche Transformationsgruppe und sei $x \in M$. Für jedes hinreichend kleine $r > 0$ gilt:*

1. *Die Abbildung* $\exp : \nu^r Gx \to \mathcal{U}_r(Gx)$ *ist ein G-äquivarianter Diffeomorphismus.*

2. *Die Abbildung* $\exp : \nu^r_x Gx \to \mathcal{S}^r(x)$ *ist ein G_x-äquivarianter Diffeomorphismus.*

Mit Hilfe des Scheibensatzes kann man die folgenden wichtigen Aussagen beweisen:

Korollar 1 *Sei $[M, G]$ eine kompakte riemannsche Transformationsgruppe.*

1. *Die Menge aller Isotropietypen ist endlich. Es gibt genau einen Isotropietyp $(G_{\min})$ mit $(G_{\min}) \leq (H)$ für alle Isotropietypen (H). Wir nennen $(G_{\min})$ den* minimalen Isotropietyp *von M.*

2. *Die Menge $M(G_{\min}) := M((G_{\min}))$ ist offen und dicht in M.*

3. *Die Funktion m_G ist oberhalbstetig.*

4. *Für alle $x \in M$ gibt es ein $r > 0$ mit $(G_x) \leq (G_y)$ für alle y mit $dist_M(x, y) < r$. Folglich ist G_x der minimale Isotropietyp der Operation von G_x auf $\mathcal{S}_r(x)$ und ebenfalls der minimale Isotropietyp der Scheibendarstellung von G_x auf $\nu^r_x Gx$.*

Die Funktion m_G ist auf $M(G_{\min})$ konstant und nimmt dort ihr Miminum an. Dieses Minimum bezeichnen wir mit $\widetilde{m_G}$. $m = \dim M$ heißt die *Dimension* und $\widetilde{m_G}$ heißt die *Kohomogenität* der Transformationsgruppe $[M, G]$.

Für $x \in M$ heißt Gx ein

- *regulärer Orbit*, wenn $(G_x) = (G_{\min})$,
- *singulärer Orbit* wenn $(G_x) > (G_{\min})$ und $m_G(x) > \widetilde{m_G}$,
- *exzeptioneller Orbit*, wenn $(G_x) > (G_{\min})$ und $m_G(x) = \widetilde{m_G}$.

Die Vereinigung aller regulären (bzw. singulären, exzeptionellen) Orbits bezeichnen wir mit M_{reg} (bzw. M_{sing}, M_{ex}).

Das folgende Lemma schätzt ab, wie groß wir den Radius einer Scheibe mindestens annehmen können. Dieses Lemma ist nicht in der Standard-Literatur zu finden, den aufwändigen Beweis findet man in [13] (dort Satz 1.7)

Lemma 1 *Sei $[M,G]$ eine kompakte riemannsche Transformationsgruppe. Es gibt eine Konstante $0 < \mathcal{C}_{[M,G]} \leq 1$, so dass für alle $\epsilon \in (0,1]$, alle $x \in M$ und alle $r < \epsilon\, dist(x, M(> G_x))\, \mathcal{C}_{[M,G]}$ die Abbildung*

$$\exp : \nu^r(Gx) \to \mathcal{U}_r(Gx)$$

ein G-äquivarianter Diffeomorphismus mit lokaler Bi-Lipschitz-Konstatne $1+\epsilon$ ist.

Wir werden $\mathcal{C}_{[M,G]}$ künftig als *die* Konstante aus Lemma 1 bezeichnen. Wir werden also das Zeichen $\mathcal{C}_{[M,G]}$ wie einen wohldefinierten Ausdruck verwenden. Dies ist strenggenommen nicht korrekt, da es viele solche Konstanten gibt. Da es nie auf die genaue Wahl von $\mathcal{C}_{[M,G]}$ ankommt, leisten wir uns diese Ungenauigkeit. Ansonsten müssten wir den Text an vielen Stellen mit Nebensächlichkeiten aufblähen.

Sei $[M,G]$ eine riemannsche Transformationsgruppe, sei $x \in M$. Es gilt

$$\nu_x(M(G_x)) \subset \nu_x(Gx),$$

deswegen gibt es die orthogonale Zerlegung

$$\nu_x(Gx) = (T_x(M(G_x)) \cap \nu_x(Gx)) \oplus \nu_x(M(G_x)).$$

Die Scheibendarstellung eingeschränkt auf $T_xM(G_x) \cap \nu_x Gx$ ist trivial, d.h. $gv = v$ für alle $v \in T_xM(G_x) \cap \nu_x Gx$, $g \in G_x$. Daraus folgt, dass $\nu_x(M(G_x))$ ein invarianter Unterraum der Scheibendarstellung ist, d.h. $gv \in \nu_x M(G_x)$ für alle $v \in \nu_x M(G_x)$, $g \in G_x$. Deswegen haben wir eine Darstellung

$$G_x \times \nu_x M(G_x) \to \nu_x M(G_x).$$

Damit und mit Lemma 1 schließen wir:

Korollar 2 *Sei $[M,G]$ eine kompakte riemannsche Transformationsgruppe, sei $x \in M$, sei V eine offene Teilmenge von $M(G_x)$ und sei $r < \mathcal{C}_{[M,G]}\, dist(V, M(> G_x))$. Dann ist die eingeschränkte Exponentialabbildung*

$$\exp : \nu^{\mathcal{C}_{[M,G]} r} V \to \exp(\nu^{\mathcal{C}_{[M,G]} r} V)$$

ein Bi-Lipschitz-Diffeomorphismus. Für jedes $y \in V$ ist

$$\exp_y : \nu_y^r V \to \exp_y(\nu_y^r V)$$

ein G_y-äquivarianter Bi-Lipschitz-Diffeomorphismus. Weiterhin gilt

$$\exp(\nu^{\mathcal{C}_{[M,G]}r}V) \subset M(\leq G_y)$$

und für alle $\rho < \mathcal{C}_{[M,G]}r$

$$\exp(\nu^{\mathcal{C}_{[M,G]}r}V \setminus \nu^{\rho}V) \subset M(< G_y).$$

2.3 Variationsrechnung

Es sei $(M, \mathbf{g})$ eine kompakte riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension m, evtl. mit Rand, und sei $N \subset \mathbb{R}^L$ eine kompakte Untermannigaltigkeit ohne Rand.
Die in diesem Abschnitt aufgelisteten Definitionen und Resultate findet man für den Fall $k = 1$ und für den Fall, in dem M ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^m$ ist, in allen gängigen Lehrbüchern zur Variationsrechnung, z.B. [28]. Wir passen diese klassischen Definitionen und Resultate dem Fall höherer Ordnung (d.h. $k > 1$) und riemannscher Mannigfaltigkeiten M an.

Für $k \in \mathbb{N}$, $p \in (0, \infty)$ sei der folgende nicht-lineare Sobolev-Raum für Abbildungen zwischen M und N gegeben:

$$W^{k,p}(M, N) := \left\{ f \in W^{k,p}\left(M, \mathbb{R}^L\right) \ : \ f(x) \in N \text{ für fast alle } x \in M \right\}.$$

Falls M nicht-leeren Rand hat, definieren wir für eine vorgegebene Abbildung $\varphi \in W^{k,p}(M, N)$ den Raum $W^{k,p}_{\varphi}(M, N)$ als die Menge aller $f \in W^{k,p}(M, N)$ mit

$$D^{l-1}_{\mathbf{g}} df|_{\partial M} = D^{l-1}_{\mathbf{g}} d\varphi|_{\partial M}$$

für alle $1 \leq l \leq k$. Die Einschränkungen auf den Rand ∂M sind dabei im Spursinn zu verstehen.

Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir die Mengen

$$\begin{aligned}\mathscr{A}^k(M, N) := \{ & (x, y, p, q_1, ..., q_{k-1}) \ : \\ & x \in M,\ y \in N,\ p \in T^*_x M \otimes \mathbb{R}^L,\ q_i \in \left(\otimes^{i+1} T^*_x M\right) \otimes \mathbb{R}^L \right\}.\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mathscr{A}^k_i(M, N) := \{ & (x, y, p, q_1, ..., q_{k-1}) \ : \\ & x \in M,\ y \in N,\ p \in T^*_x M \otimes T_z N,\ q_i \in \left(\otimes^{i+1} T^*_x M\right) \otimes T_z N \right\}.\end{aligned}$$

Unter einem *extrinsischen* bzw. einem *intrinsischen Integranden von Ordnung k* verstehen wir eine Abbildung

$$V : \mathscr{A}^k(M, N) \to \mathbb{R} \text{ bzw. } V : \mathscr{A}^k_i(M, N) \to \mathbb{R}.$$

Für jedes (hinreichend reguläre) $u : M \to N$ setzen wir im extrinsischen Fall

$$V[u] := V\left(\cdot, u, du, D_{\mathbf{g}}du, ..., D_{\mathbf{g}}^{k-1}du\right)$$

und im intrinsischen Fall

$$V[u] := V\left(\cdot, u, du, \nabla_{u,\mathbf{g}}du, ..., \nabla_{u,\mathbf{g}}^{k-1}du\right).$$

Unter einem *extrinsischen* bzw. *intrinsischen Funktional von Ordnung* k verstehen wir eine Funktion $F : W^{k,p}(M,N) \to \mathbb{R}$ vom Typ

$$F(u) = F_V(u) := \int_M V[u]\,\mathrm{dvol}_{\mathbf{g}}$$

für ein $1 \leq p < \infty$ und einen extrinsischen bzw. intrinsischen Integranden V von Ordnung k. Hier setzen wir als Bedingung an V voraus, dass $V[u]$ für alle $u \in W^{k,p}(M,N)$ integrierbar ist.

Im Fall $k = 2$ bezeichnen wir die Elemente von $\mathscr{A}^2(M,\mathbb{R}^L)$ mit (x,z,p,q). Die jeweiligen partiellen Ableitungen von V bezeichnen wir mit V_x, V_y, V_p, V_q.

Sei $F : W^{k,p}(M,N) \to \mathbb{R}$ ein extrinsisches oder ein intrinsisches Funktional der Ordnung k.

Eine Abbildung $u \in W^{k,p}(M,N)$ heißt *kritischer Punkt* von F, wenn gilt:

$$\delta F(u,\varphi) := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F\left(\Pi_N\left(u + t\varphi\right)\right) = 0 \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(M,\mathbb{R}^L).$$

Dies ist äquivalent damit, dass u im schwachen Sinne die *Euler-Lagrange-Gleichung* von F löst, welche eine partielle Differentialgleichung von Ordnung $2k$ ist. Anstatt eine allgemeinen Formel für die Euler-Lagrange anzugeben, verweisen wir auf die in der Einleitung angegebenen Beispiele.

Eine Abbildung $u \in W^{k,p}(M,N)$ heißt ein *stationärer Punkt* von F, wenn

$$DF(u,\phi) := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F\left(u \circ \phi_t\right) = 0 \tag{2.2}$$

für alle Abbildungen $\phi : (-d,d) \times M \to M$ für ein $d > 0$, für die gilt: $\varphi_t := \phi(t,\cdot)$ ist für jedes $t \in (-d,d)$ ein Diffeomorphismus mit $\varphi_t|\partial M = Id$ und $\phi_0 = Id$.

Im Fall $M = B_r^m(x)$ ($x \in \mathbb{R}^m$) ist dies äquivalent zu

$$DF(u,\varphi) := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F\left(u \circ \varphi_t\right) = 0 \tag{2.3}$$

für alle Diffeomorphismen $\varphi : B_r^m(x) \to B_r^m(x)$ und mit $\varphi_t(x) := x + t\varphi(x)$.

Im Fall $\partial M \neq \emptyset$ heißt $u \in W^{k,p}(M,N)$ ein *Minimierer*, wenn gilt:

$$F(u) \leq F(v) \text{ für alle } v \in W_u^{k,p}.$$

Man sieht leicht, dass Minimierer sowohl kritische Punkte als auch stationär sind. Die Abbildung $u \in W^{k,p}(M,N)$ heißt ein *lokaler Minimierer*, wenn gilt:

$$F(u) \leq F(v) \text{ für alle } v \in W^{k,p}, \text{ die außerhalb einer kompakten Teilmenge von } M \text{ mit } u \text{ übereinstimmen.}$$

Eine wichtige Herangehensweise, um die Existenz von Minimierern zu zeigen, ist die *Direkte Methode der Variationsrechnung*:

F heißt *nach unten beschränkt*, wenn es eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $u \in W^{k,p}(M,N)$ gilt:

$$F(u) \geq C.$$

F heißt *koerziv*, wenn es Konstanten C_1, $C_2 > 0$ gibt, so dass für alle $u \in W^{k,p}(M,N)$ gilt:

$$F(u) \geq C_1 ||u||_{W^{k,p}} - C_2.$$

F heißt *schwach folgen-unterhalbstetig*, wenn für jede Folge $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $W^{k,p}(M,N)$, die schwach gegen ein $u \in W^{k,p}(M,N)$ konvergiert, gilt:

$$F(u) \leq \liminf_{i\to\infty} F(u_i)$$

Sei $A \subset W^{k,p}(M,N)$ eine beliebige nichtleere Teilmenge. Eine Folge $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $W^{k,p}(M,N)$ heißt *Minimalfolge in A* (bzgl. F), wenn

$$\liminf_{i\to\infty} F(u_i) = \inf \{F(u) \ : \ u \in A\}$$

Eine Abbildung $u \in A$ heißt *Minimierer in A*, wenn gilt:

$$F(u) = \inf \{F(v) \ : \ v \in A\}$$

Direkte Methode der Variationsrechnung: *Sei $F : W^{k,p}(M,\mathbb{R}^L) \to \mathbb{R}$ ein Funktional der Ordnung k. F sei nach unten beschränkt, koerziv und schwach folgen-unterhalbstetig. Sei $A \subset W^{k,p}(M,N)$ eine beliebige nichtleere Teilmenge. Sei $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Minimalfolge in A. Dann konvergiert $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ nach Übergang zu einer Teilfolge schwach in $W^{k,p}$ gegen eine Abbildung $u \in W^{k,p}(M,N)$, für die gilt: $F(u) \leq \inf \{F(v) \ : \ v \in A\}$. Ist A schwach-folgenabgeschlossen, so ist u ein Minimierer in A.*

Wichtig: Ein Minimierer in einer Menge A ist im Allgemeinen kein kritischer Punkt! In der Einleitung wurden bereits für den Fall harmonischer und biharmonischer Abbildungen Möglichkeiten genannt, die Menge A so zu wählen, dass ein Minimierer in A ein kritischer Punkt ist.

2.4 Äquivariante Variationsrechnung

Nun sei $[M, G]$ eine kompakte riemannsche Transformationsgruppe, evtl. mit Rand, $[\mathbb{R}^L, G]$ eine orthogonale Darstellung und $N \subset \mathbb{R}^L$ eine kompakte G-invariante Untermannigfaltigkeit. Die Räume $W^{k,p}_G(M, N)$ bzw. $W^{k,p}_{G,\varphi}(M, N)$ bestehen aus genau den Abbildungen aus $W^{k,p}(M, N)$ bzw. $W^{k,p}_\varphi(M, N)$, welche einen G-äquivarianten Repräsentanten haben.

Lemma 2 *Die Menge $W^{k,p}_G(M, N)$ und $W^{k,p}_{G,\varphi}(M, N)$ sind abgeschlossene Teilmengen von $W^{k,p}(M, \mathbb{R}^L)$ bzgl. der starken (und folglich auch bezüglich der schwachen) Folgenkonvergenz.*

Dies hat insbesondere zur Folge: Konvergiert eine Folge aus $W^{k,p}_G(M, \mathbb{R}^L)$ stark oder schwach gegen $u \in W^{k,p}(M, \mathbb{R}^L)$, so liegt auch u in $W^{k,p}_G(M, \mathbb{R}^L)$.

Beweis: Sei $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine schwach konvergente Folge in $W^{k,p}_G(M, N)$ mit Grenzwert $u \in W^{k,p}(M, N)$. Die Folge konvergiert insbesondere stark in L^p. Deswegen liegt nach dem Lemma von Fatou fast überall punktweise Konvergenz vor:

$$\int_M \liminf_{k\to\infty} |u_k - u|^p \,\mathrm{dvol}_{\mathbf{g}} \le \lim_{k\to\infty} \int_M |u_k - u|^p \,\mathrm{dvol}_{\mathbf{g}} = 0.$$

Es gibt also eine Teilfolge $\{u_{k_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ von $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, die fast überall gegen u konvergiert Sei $g \in G$. Für fast alle $x \in M$ - genauer: für diejenigen x, bei denen u sowohl bei x als auch bei gx punktweise Konvergenz der u_{k_i} gegen u vorliegt - gilt

$$u(gx) = \lim_{i\to\infty} u_{k_i}(gx) = g^{-1} \lim_{i\to\infty} u_{k_i}(x) = g^{-1}u(x).$$

Deswegen ist u G-äquivariant und liegt folglich in $W^{k,p}_G(M, N)$. □

Sei ein Funktional $F : W^{k,p}(M, N) \to \mathbb{R}$ und eine Abbildung $u \in W^{k,p}_G(M, N)$ gegeben.

u heißt *G-kritischer Punkt*, wenn

$$\delta E(u, \varphi) = 0 \text{ für alle } G\text{-äquivarianten } \varphi \in C^\infty_0(M, N).$$

u heißt *G-stationär*, wenn

$$DF(u, \phi) = 0$$

für alle Abbildungen $\phi : (-d, d) \times M \to M$ für ein $d > 0$, so dass $\phi_t := \varphi(t, \cdot)$ für jedes $t \in (-d, d)$ ein G-äquivarianter Diffeomorphismus mit $\varphi_t|\partial M = Id$ und $\phi_0 = Id$.

Im Fall $M = B^m_r(x)$ $(x \in \mathbb{R}^m)$ ist dies äquivalent zu

$$DF(u, \phi) := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F\left(u \circ \varphi_t\right) = 0$$

für alle G-äquivarianten Diffeomorphismen $\varphi : B_r^m(x) \to B_r^m(x)$ und mit $\varphi_t(x) := x + t\varphi(x)$.

u heißt ein *G-Minimierer*, wenn gilt:

$$F(u) \leq F(v) \text{ für alle } v \in W_G^{k,p}(M,N) \text{ (bzw. } v \in W_{G,u}^{k,p}(M,N) \text{ falls } \partial M \neq 0).$$

Man sieht leicht, dass ein G-Minimierer sowohl ein G-kritischer Punkt als auch G-stationär ist. Die Abbildung $u \in W_G^{k,p}(M,N)$ heißt ein *lokaler G-Minimierer*, wenn gilt:

$$F(u) \leq F(v) \text{ für alle } v \in W_G^{k,p}, \text{ die außerhalb einer kompakten Teilmenge von } M \text{ mit } u \text{ übereinstimmen.}$$

Ob ein G-Minimierer ein kritischer Punkt ist, hängt vom Funktional F ab. Bei der extrinsischen Bienergie, mit der wir es in dieser Arbeit zu tun haben, ist dies der Fall, was wir mit Satz 3 beweisen werden.

Kapitel 3

Äquivariante biharmonische Abbildungen

In diesem Kapitel sind fest gegeben: Eine kompakte riemannsche Transformationsgruppe $[M, G]$ der Dimension m - solange nichts anderes angegeben ist, sei diese kompakt und mit leerem Rand -, eine orthogonale Darstellung $[\mathbb{R}^L, G]$, sowie eine kompakte G-invariante Untermannigfaltigkeit $N \subset \mathbb{R}^L$.

3.1 Die Existenz von G-Minimierern

In diesem Abschnitt werden wir den folgenden Satz beweisen:

Satz 2 *Es gibt einen G-Minimierer $u \in W_G^{2,2}(M, N)$ der Bienergie.*

Beweis: Dies ist eine Anwendung der direkten Methode der Variationsrechnung, wie sie in Abschnitt 2.1 beschrieben worden ist. Da die Bienergie offensichtlich nichtnegativ ist, genügt nach Lemma 2 zu zeigen:

(i) Die Bienergie ist koerziv;

(ii) Die Bienergie ist schwach-folgenunterhalbstetig in $W^{2,2}(M, N)$.

Beweis:
zu (i): Im folgenden rechnen wir mit $\mathbb{R}^L$-wertigen (kovarianten) k-Tensoren auf M, d.h. mit Schnitten des Vektorbündels $\bigotimes_{l=1}^k T^*M \otimes \mathbb{R}^L$. Für einen solchen k-Tensor ist der Laplace-Operater $\Delta_{\mathbf{g}}\omega$ definiert als

$$\Delta_{\mathbf{g}}\omega = -D_{\mathbf{g}}^* D_{\mathbf{g}}\omega.$$

Dabei ist $D_{\mathbf{g}}^*$ der zur kovarianten Ableitung $D_{\mathbf{g}}$ adjungierte Operator. (Man verwechsle nicht $\delta_{\mathbf{g}}$ mit $D_{\mathbf{g}}^*$!) Im Fall $k = 0$, das heißt im Fall von Abbildungen $u : M \to \mathbb{R}^L$, ergibt dies die bekannte Formel

$$\Delta_{\mathbf{g}} f = -\delta_{\mathbf{g}} df.$$

Daraus folgt für alle $f \in W^{2,2}(M, \mathbb{R}^L)$ mit der Young-Ungleichung

$$\begin{aligned}\int_M |df|^2 \, dvol_M &= \int_M df \cdot df \, dvol_{\mathbf{g}} \\ &= \int_M f \cdot D^*_{\mathbf{g}} df \, dvol_{\mathbf{g}} \\ &= \int_M f \cdot (-\Delta_{\mathbf{g}} f) \, dvol_{\mathbf{g}} \\ &\leq \frac{1}{2} \int_M |f|^2 \, dvol_{\mathbf{g}} + \frac{1}{2} \int_M |\Delta_{\mathbf{g}} f|^2 \, dvol_{\mathbf{g}}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Mit zweimaliger partieller Integration folgt für alle $f \in C^\infty(M, \mathbb{R}^L)$

$$\begin{aligned}\int_M |\Delta_{\mathbf{g}} f|^2 \, \mathrm{dvol}_{\mathbf{g}} &= \int_M \Delta_{\mathbf{g}} f \cdot \Delta_{\mathbf{g}} f \, \mathrm{dvol}_{\mathbf{g}} \\ &= \int_M D^*_{\mathbf{g}} df \cdot D^*_{\mathbf{g}} df \, \mathrm{dvol}_{\mathbf{g}} \\ &= \int_M df \cdot d D^*_{\mathbf{g}} df \, \mathrm{dvol}_{\mathbf{g}} \\ &= \int_M df \cdot D^*_{\mathbf{g}} D_{\mathbf{g}} df \, \mathrm{dvol}_{\mathbf{g}} + \int_M df \cdot \big(d D^*_{\mathbf{g}} df - D^*_{\mathbf{g}} D_{\mathbf{g}} df \big) \, \mathrm{dvol}_{\mathbf{g}} \\ &= \int_M D_{\mathbf{g}} df \cdot D_{\mathbf{g}} df \, \mathrm{dvol}_{\mathbf{g}} - \int_M df \cdot (d \Delta_{\mathbf{g}} f - \Delta_{\mathbf{g}} df) \, \mathrm{dvol}_{\mathbf{g}} \\ &= \int_M |D_{\mathbf{g}} df|^2 \, \mathrm{dvol}_{\mathbf{g}} - \int_M df \cdot (d \Delta_{\mathbf{g}} f - \Delta_{\mathbf{g}} df) \, \mathrm{dvol}_{\mathbf{g}}. \end{aligned}$$

Weiter unten zeigen wir die Abschätzung

$$|df \cdot (d \Delta_{\mathbf{g}} f - \Delta_{\mathbf{g}} df)| \leq c |df|^2 \tag{3.2}$$

mit einer Konstanten $c \geq 0$, die von M, nicht aber von f abhängt. Damit erhalten wir

$$\int_M |D_{\mathbf{g}} df|^2 \, \mathrm{dvol}_{\mathbf{g}} \leq \int_M |\Delta_{\mathbf{g}} f|^2 \, \mathrm{dvol}_{\mathbf{g}} + c \int_M |df|^2 \, \mathrm{dvol}_{\mathbf{g}}. \tag{3.3}$$

Nach einem Approximationsargument gilt diese Abschätzung für alle $f \in W^{2,2}(M, \mathbb{R}^L)$. (3.1) und (3.3) und ergeben

$$\begin{aligned}||f||^2_{W^{2,2}(M,\mathbb{R}^L)} &= \int_M |f|^2 \, \mathrm{dvol}_{\mathbf{g}} + \int_M |df|^2 \, \mathrm{dvol}_{\mathbf{g}} + \int_M |D_{\mathbf{g}} df|^2 \, \mathrm{dvol}_{\mathbf{g}} \\ &\leq \frac{3+c}{2} \int_M |\Delta_{\mathbf{g}} f|^2 \, \mathrm{dvol}_{\mathbf{g}} + \frac{1+c}{2} ||f||_\infty \int_M \mathrm{dvol}_{\mathbf{g}}. \end{aligned}$$

Da N und M kompakt sind, gibt es also eine von M und N, nicht aber von $f \in W^{2,2}(M, N)$ abhängende Konstante $C > 0$ mit

$$||f||^2_{W^{2,2}(M,\mathbb{R}^L)} \leq C(E(f) + 1),$$

woraus die Koerzivitat der Bienergie E folgt.
Nun müssen wir noch die Abschätzung (3.2) beweisen. Wir setzen $D = D_{\mathbf{g}}$ und führen den Krümmungsoperator

$$R(X,Y) := D^2_{X,Y} - D^2_{Y,X}$$

ein. In einer längeren Rechnung zeigt man für jede 1-Form ω

$$[R(X,Y)\omega](Z) = \omega(R(X,Y)Z).$$

In einer weiteren länglichen Rechnnung zeigt man

$$(d\Delta_{\mathbf{g}} f - \Delta_{\mathbf{g}} df)(X) = (R(e^i, X)df)(e^i),$$

wobei $\{e^i\}_{i=1}^m$ ein lokaler Orthonormalrahmen ist und die Summenkonvention verwendet wird. Diese beiden Identitäten ergeben

$$(d\Delta_{\mathbf{g}} f - \Delta_{\mathbf{g}} df)(X) = df(R(e^i, X)e^i)$$

und somit erhalten wir das lokale Ergebnis

$$df \cdot (d\Delta_{\mathbf{g}} f - \Delta_{\mathbf{g}} df) = df(e^j) \cdot df(R(e^i, e^j)e^i).$$

Daraus lässt sich leicht die globale Ungleichung

$$|df \cdot (d\Delta_{\mathbf{g}} f - \Delta_{\mathbf{g}} df)| = c|df|^2$$

schlussfolgern, wobei die Konstante c nicht von f abhängt. (Denn alle den Krümmungstensor R beinhaltenden Terme lassen sich durch eine nur von M abhängende Konstante abschätzen.)

zu (ii): Sei $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $W^{2,2}(M,N)$, die schwach gegen ein $u \in W^{2,2}(M,N)$ konvergiert. Aus der Konvexität der Abbildung $\mathbb{R}^m \ni z \mapsto |z|$ folgt $|x|^2 \geq |y|^2 + 2y \cdot (x-y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^m$ und daraus

$$|\Delta_{\mathbf{g}} u_k|^2 \geq |\Delta_{\mathbf{g}} u|^2 + 2\Delta_{\mathbf{g}} u \cdot (\Delta_{\mathbf{g}} u_k - \Delta_{\mathbf{g}} u).$$

Weil $\Delta_{\mathbf{g}} u_k$ schwach in L^2 gegen $\Delta_{\mathbf{g}} u$ konvergiert, gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int_M \Delta_{\mathbf{g}} u \cdot (\Delta_{\mathbf{g}} u_k - \Delta_{\mathbf{g}} u) \,\mathrm{dvol}_{\mathbf{g}} = 0.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\liminf_{k\to\infty} E(u_k) &= \liminf_{k\to\infty} \int_M |\Delta_{\mathbf{g}} u_k|^2 \,\mathrm{dvol}_{\mathbf{g}} \\
&\geq \int_M |\Delta_{\mathbf{g}} u|^2 + 2 \liminf_{k\to\infty} \int_M \Delta_{\mathbf{g}} u \cdot (\Delta_{\mathbf{g}} u_k - \Delta_{\mathbf{g}} u) \,\mathrm{dvol}_{\mathbf{g}} \\
&= \int_M |\Delta_{\mathbf{g}} u|^2 \\
&= E(u).
\end{aligned}$$

Also ist die Bienergie E schwach-folgenunterhalbstetig in $W^{2,2}(M,N)$. □

3.2 Symmetrische Stationarität

In diesem Abschnitt kann M nichtleeren Rand haben. Wir werden den folgenden Satz beweisen:

Satz 3 (Symmetrische Stationarität) *Sei $u \in W^{2,2}_G(M,N)$.*

(i) Gilt

$$\delta E(u,\varphi) = 0 \text{ für alle } G\text{-äquivarianten } \varphi \in C_0^\infty(M,\mathbb{R}^L),$$

so ist u eine schwach biharmonische Abbildung, d.h. es gilt

$$\delta E(u,\varphi) = 0 \text{ für alle } \ \varphi \in C_0^\infty(M,\mathbb{R}^L).$$

(ii) Gilt

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} E(u \circ \Phi_t) = 0$$

für alle 1-Parameterfamilien von G-äquivarianten Diffeomorphismen $\Phi_t : M \to M$, mit $\Phi_0 = id$ und $\Phi_t|_{\partial M} = 0$ für alle t in einer beliebig kleinen Umgebung von 0, so ist u eine stationär biharmonische Abbildung.

Eine Abbildung $u \in W^{2,2}_G(M,N)$ ist also genau dann biharmonisch, wenn sie ein G-kritischer Punkt ist; sie ist genau dann stationär, wenn sie G-stationär ist. Insbesondere folgt daraus:
Jeder G-Minimierer der Bienergie ist eine stationär biharmonische Abbildungen.

Beweis:
Zu (i): Sei $\phi \in C_0^\infty(M,\mathbb{R}^L)$. Wir definieren $\overline{\phi} \in C_0^\infty(M,\mathbb{R}^L)$ wie folgt:

$$\overline{\varphi}(x) := \int_G g^{-1}\varphi(gx)dh_G(g).$$

Dabei ist h_G das normierte Haar-Maß auf G (normiert heißt hier $h_G(G) = 1$). Offensichtlich ist $\overline{\varphi}$ G-äquivariant. Satz 3 folgt unmittelbar aus dem folgenden Lemma:

Lemma 3 *Für alle $u \in W^{2,2}_G(M,N)$ und alle $\varphi \in C_0^\infty(M,\mathbb{R}^L)$ gilt*

$$\delta E(u,\varphi) = \delta E(u,\overline{\varphi}).$$

Dazu beweisen wir zunächst das folgende Lemma:

Lemma 4 *Sei $(M,\boldsymbol{g})$ eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei $\phi : M \to M$ ein Diffeomorphismus. Dann gilt:*

$$\Delta_{\phi^*\boldsymbol{g}}(u \circ \phi) = (\Delta_{\boldsymbol{g}} u) \circ \phi.$$

Beweis: Wir können dieses Lemma in Koordinaten beweisen. Seien Ω_1 und Ω_2 offene Teilmengen des $\mathbb{R}^m$. $\phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ sei ein Diffeomorphismus. Die Koeffizientenfunktionen des metrische Tensor $\mathbf{g}$ auf Ω_2 seien in den gewählten Koordinaten mit $\mathbf{g}_{ij}$ bezeichnt, $\mathbf{g}^{ij}$ sei punktweise die inverse Matrix zu $\mathbf{g}_{ij}$. Der Laplace-Beltrami-Operator $\Delta_{\mathbf{g}}$ ist wie folgt gegeben:

$$\Delta_{\mathbf{g}} f = -\mathbf{g}^{ij}\left(f_{ij} - \Gamma_{ij}^k f_k\right).$$

Wir bezeichnen mit $\widetilde{g}_{\alpha\beta}$ die Koeffizientenfunktionen des zurückgezogenen metrischen Tensors $\varphi^*\mathbf{g}$ auf Ω_2 und mit $\widetilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma}$ die Christoffel-Symbole auf Ω_2 zur Metrik $\widetilde{\mathbf{g}}_{ij}$. Wir verwenden folgende Abkürzungen:

$$\phi_\alpha^i = \frac{\partial \phi^i}{\partial x^\alpha},\ x_i^\alpha := \frac{\partial x^\alpha}{\partial \phi^i},\ u_i := \frac{\partial u}{\partial x^i}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\phi_\alpha^i x_j^\alpha &= \delta_j^i, \\
\widetilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma} &= \left(\Gamma_{ij}^k \circ \varphi\right)\phi_\alpha^i \phi_\beta^j x_k^\gamma + \phi_{\alpha\beta}^k x_k^\gamma, \\
(u \circ \phi)_\gamma &= (u_i \circ \phi)\phi_\gamma^i, \\
(u \circ \phi)_{\alpha\beta} &= (u_{ij} \circ \phi)\phi_\alpha^i \phi_\beta^j + (u_j \circ \phi)\phi_{\alpha\beta}^j.
\end{aligned}$$

In der folgenden Rechnung verwenden wir $x_i^\alpha \phi_\alpha^i = 1$

$$\begin{aligned}
\Delta_{\widetilde{\mathbf{g}}}(u \circ \phi) &= -\widetilde{\mathbf{g}}^{\alpha\beta}\Big((u \circ \phi)_{\alpha\beta} - \widetilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma}(u \circ \phi)_\gamma\Big) \\
&= -(\mathbf{g}^{ij} \circ \phi) x_i^\alpha x_j^\beta \left[(u_{ab} \circ \phi)\phi_\alpha^a \phi_\beta^b + (u_k \circ \phi)\phi_{\alpha\beta}^k\right. \\
&\quad \left. -(\Gamma_{ab}^k \circ \phi)\phi_\alpha^a \phi_\beta^b x_k^\gamma (u_c \circ \phi)\phi_\gamma^c - \phi_{\alpha\beta}^k x_k^\gamma (u_a \circ \phi)\phi_\gamma^a\right] \\
&= -\left[\mathbf{g}^{ij}\left(u_{ij} - \Gamma_{ij}^k u_k\right)\right] \circ \phi \\
&= (\Delta_{\mathbf{g}} u) \circ \phi.
\end{aligned}$$

Dies ist die Behauptung. $\square$

Nun zum Beweis von Lemma 3. Zunächst berechnen wir

$$\begin{aligned}
\delta E(u,\varphi) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_M \Delta_{\mathbf{g}}(\Pi_N(u + t\varphi)) \cdot \Delta_{\mathbf{g}}(\Pi_N(u + t\varphi))\,\mathrm{dvol}_{\mathbf{g}} \\
&= 2\int_M \Delta_{\mathbf{g}} u \cdot \Delta_{\mathbf{g}} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\Pi_N(u + t\varphi))\,\mathrm{dvol}_{\mathbf{g}}
\end{aligned}$$

Weil $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(\Pi_n(u(x) + t\varphi(x)))$ die orthogonale Projketion des Vektors $\varphi(u(x))$ in den Raum $T_{u(x)}N$ ist, folgt nun:

$$\begin{aligned}
&\delta E(u,\varphi) = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(M, \mathbb{R}^L) \\
\Longleftrightarrow &\int_M \Delta_{\mathbf{g}} u \cdot \Delta_{\mathbf{g}} \varphi = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(M, \mathbb{R}^L) \text{ mit } \varphi(x) \in T_{u(x)}N\ (x \in M)
\end{aligned}$$

Weil Π_N eine G-äquivariante Abbildung ist, gilt

$$\begin{aligned}
&\delta E(u,\varphi) = 0 \quad \text{für alle } G\text{-äquivarianten } \varphi \in C_0^\infty(M,\mathbb{R}^L) \\
\Longleftrightarrow &\int_M \Delta_{\mathbf{g}} u \cdot \Delta_{\mathbf{g}} \varphi = 0 \quad \text{für alle } G\text{-äquivarianten } \varphi \in C_0^\infty(M,\mathbb{R}^L) \\
&\text{mit } \nabla\varphi(x) \in T_{u(x)}N \ (x \in M)
\end{aligned}$$

In der folgenden Rechnung verwenden wir, dass für alle $a \in G$ und alle $f, h : M \to \mathbb{R}^L$ gilt:

- $L_a^*\mathbf{g} = \mathbf{g}$.
- $(\lambda_a \circ f) \cdot (\lambda_a \circ h) = f \cdot g$.
- $\lambda_a \circ (\Delta_{\mathbf{g}} f) = \Delta_{\mathbf{g}}(\lambda_a \circ f)$.

Die ersten beiden Aussagen folgen daraus, dass L_a bzw. λ_a Isometrien sind. Die dritte Aussage folgt daraus, dass λ_a linear ist.
Zunächst merken wir noch an: Aus diesen drei Aussagen folgt zusammen mit Lemma 4, dass mit f auf $\Delta_{\mathbf{g}} f$ G-äquivariant ist:

$$(\Delta_{\mathbf{g}} f) \circ L_a = \Delta_{L_a^*\mathbf{g}}(f \circ L_a) = \Delta_{\mathbf{g}}(\lambda_a \circ f) = \lambda_a \circ \Delta_{\mathbf{g}} f. \tag{3.4}$$

Wir berechnen also:

$$\begin{aligned}
&\int_M \Delta_{\mathbf{g}} u \cdot \Delta_{\mathbf{g}} \varphi \,\mathrm{dvol}_{\mathbf{g}} \\
=& \int_M \int_G [(\Delta_{\mathbf{g}} u) \circ L_a] \cdot [(\Delta_{\mathbf{g}} \varphi) \circ L_a] \, dh_G(a) \mathrm{dvol}_{L_a^\star \mathbf{g}} \\
=& \int_M \int_G \Delta_{L_a^\star \mathbf{g}}(u \circ L_a) \cdot \Delta_{L_a^\star \mathbf{g}}(\varphi \circ L_a) \, dh_G(a) \mathrm{dvol}_{L_a^\star \mathbf{g}} \\
=& \int_M \int_G \Delta_{\mathbf{g}}(u \circ L_a) \cdot \Delta_{\mathbf{g}}(\varphi \circ L_a) \, dh_G(a) \mathrm{dvol}_{\mathbf{g}} \\
=& \int_M \int_G \lambda_{a^{-1}} \circ \Delta_{\mathbf{g}}(u \circ L_a) \cdot \lambda_{a^{-1}} \circ \Delta_{\mathbf{g}}(\varphi \circ L_a) \, dh_G(a) \mathrm{dvol}_{\mathbf{g}} \\
=& \int_M \int_G \Delta_{\mathbf{g}}(\lambda_{a^{-1}} \circ u \circ L_a) \cdot \Delta_{\mathbf{g}}(\lambda_{a^{-1}} \circ \varphi \circ L_a) \, dh_G(a) \mathrm{dvol}_{\mathbf{g}} \\
=& \int_M \int_G \Delta_{\mathbf{g}} u \cdot \Delta_{\mathbf{g}}(\lambda_{a^{-1}} \circ \varphi \circ L_a) \, dh_G(a) \mathrm{dvol}_{\mathbf{g}} \\
=& \int_M \Delta_{\mathbf{g}} u \cdot \Delta_{\mathbf{g}}(\int_G \lambda_{a^{-1}} \circ \varphi \circ L_a \, dh_G(a)) \, dh_G(a) \mathrm{dvol}_{\mathbf{g}} \\
=& \int_M \Delta_{\mathbf{g}} u \cdot \Delta_{\mathbf{g}}(\int_G \lambda_{a^{-1}} \circ \varphi \circ L_a \, dh_G(a)) \, \mathrm{dvol}_{\mathbf{g}} \\
=& \int_M \Delta_{\mathbf{g}} u \cdot \Delta_{\mathbf{g}} \overline{\varphi} \, \mathrm{dvol}_{\mathbf{g}}
\end{aligned}$$

Damit ist Lemma 3 und damit auch Teil (i) des Satzes bewiesen.

Zu (ii): Ein Diffeomorphismus $\Psi : M \to M$ ist genau dann äquivariant, wenn für jede G-äquivariante Abbildung $f : M \to \mathbb{R}^L$ auch $f \circ \Psi$ G-äquivariant ist. Sei nun $\Psi : M \to M$ ein *beliebiger* Diffeomorphismus. Es gibt einen eindeutig bestimmten *äquivarianten* Diffeomorphismus $\widetilde{\Psi}$, so dass für alle G-äquivarianten Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\overline{f \circ \Psi} = f \circ \widetilde{\Psi},$$

was ausführlicher bedeutet:

$$\int_G \lambda_{a^{-1}} \circ f \circ \Psi \circ L_a \, dh_G(a) = f \circ \widetilde{\Psi}.$$

Wir zeigen nun, dass für jede äquivariante Abbildung $u : M \to \mathbb{R}^L$ und jede 1-Parameterfamilie von Diffeomorphismen $\Psi_t : M \to M$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ für ein beliebiges $\epsilon > 0$, mit $\Psi_0 = id$ und $\psi_t|_{\partial M} = id$ für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ gilt:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} E(u \circ \Psi_t) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} E(u \circ \widetilde{\Psi_t}).$$

Damit ist dann Teil (ii) des Satzes offenkundig bewiesen. Im vierten Schritt der folgenden Rechnung verwenden wir die G-Äquivarianz von $\Delta_{\mathbf{g}} u$ und die Isometrieeigenschaft $(L_a^{-1})^* \mathbf{g} = \mathbf{g}$.

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} E(u \circ \Psi_t) = \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_M \Delta_{\mathbf{g}}(u \circ \Psi_t) \cdot \Delta_{\mathbf{g}}(u \circ \Psi_t) \, \mathrm{dvol}_M \\
&= 2 \int_M \Delta_{\mathbf{g}} u \cdot \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Delta_{\mathbf{g}}(u \circ \Psi_t) \, \mathrm{dvol}_M \\
&= 2 \int_G \int_M [\lambda_{a^{-1}} \circ \Delta_{\mathbf{g}} u \circ L_a] \cdot \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\lambda_{a^{-1}} \circ [\Delta_{\mathbf{g}}(u \circ \Psi_t)] \circ L_a) \, dh_G(a) \, \mathrm{dvol}_M \\
&= 2 \int_G \int_M \Delta_{\mathbf{g}} u \cdot \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Delta_{\mathbf{g}}(\lambda_{a^{-1}} \circ u \circ \Psi_t \circ L_a) \, dh_G(a) \, \mathrm{dvol}_M \\
&= 2 \int_M \Delta_{\mathbf{g}} u \cdot \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Delta_{\mathbf{g}} \int_G (\lambda_{a^{-1}} \circ u \circ \Psi_t \circ L_a) \, dh_G(a) \, \mathrm{dvol}_M \\
&= 2 \int_M \Delta_{\mathbf{g}} u \cdot \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Delta_{\mathbf{g}}(u \circ \widetilde{\Psi_t}) \, \mathrm{dvol}_M \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_M \Delta_{\mathbf{g}}(u \circ \widetilde{\Psi_t}) \cdot \Delta_{\mathbf{g}}(u \circ \widetilde{\Psi_t}) \, \mathrm{dvol}_M \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} E(u \circ \widetilde{\Psi_t}).
\end{aligned}$$

$\square$

3.3 Lokalisierung der Bienergie

In diesem Abschnitt ist G kompakt, M braucht jedoch nicht kompakt zu sein. Wir fordern $M \cap \partial M = \emptyset$.
Für jedes $x \in M$ sei

$$\delta_x := \mathcal{C}_{[M,G]} \mathrm{dist}\,(x, M(> G_x))\,.$$

Nun sei ein $a \in M$ gegeben. Auf der Scheibe $\mathcal{S}_{\delta_a}(a)$ führen wir Normalkoordinaten ein, d.h. $\mathcal{S}_{\delta_a}(a)$ ist isometrisch mit $B^{m_a}_{\delta_a}$, versehen mit einem geeigneten metrischen Tensor $\mathbf{g}_{ij}$, identifiziert. Die Verwendung von *Normal*koordinaten garantiert, dass dadurch für jedes $0 < r < \delta_a$ die Scheibe $\mathcal{S}_r(a)$ mit $B^{m_a}_r$ identifiziert ist. Für jede Abbildung $f : M \to A$ (mit einer beliebigen Menge A) bezeichnen wir die Einschränkung auf $\mathcal{S}_{\delta_a}(a) \cong B^{m_a}_{\delta_a}$ mit $f^{[a]}$. Man beachte den Unterschied zwischen $Df^{[a]}$ und $(df)^{[a]}$ bzw. zwischen $D^2f^{[a]}$ und $(D_{\mathbf{g}}df)^{[a]}$! Zur weiteren Verdeutlichung: Mit $Df^{[a]}$ bzw. $D^2f^{[a]}$ meinen wir $D(f^{[a]})$ bzw. $D^2(f^{[a]})$. Wir beweisen den folgenden Satz:

Satz 4 (Lokalisierungssatz) *Es gibt einen glatten, G_a-invarianten Integranden*

$$V^{[a]} : B^{m_a}_{\delta_a} \times \mathbb{R}^L \times \mathbb{R}^{m_a \times L} \times \mathbb{R}^{m_a \times m_a \times L} \to \mathbb{R},$$

so dass für jede Abbildung $f \in W^{2,2}_G(\mathcal{U}_{\delta_a}(Ga), \mathbb{R}^L)$ und jede Teilmenge $A \subset \mathcal{S}_{\delta_a}(a)$ $(\cong B^{m_a}_{\delta_a})$ gilt:

$$\int_{GA} |\Delta_M f|^2\, dvol_M = \mathscr{H}^{m-m_a}(Ga) \int_{G_a A} \left(|\Delta f^{[a]}|^2 + V^{[a]}(\cdot, f^{[a]}, Df^{[a]}, D^2 f^{[a]})\right) dx.$$

Für diesen gilt

$$\begin{aligned}
|V^{[a]}(x,z,p,q)| &\le C_a \left(|x|\,|q|^2 + |q|\,|p| + |q|\,|z| + |p|^2 + |z|^2\right),\\
&\le C_a \left(|x|\,|q|^2 + |q|^{\frac{3}{2}} + |p|^3 + |z|^3 + 1\right),\\
|V^{[a]}_x(x,z,p,q)| &\le C_a \left(|q|^2 + |p|^2 + |z|^2\right),\\
|V^{[a]}_p(x,z,p,q)| &\le C_a \left(|q| + |p| + |z|\right),\\
|V^{[a]}_q(x,z,p,q)| &\le C_a \left(|x|\,|q| + |p| + |z|\right)
\end{aligned}$$

mit einer Konstanten $C_a > 0$, die von a, nicht aber von (x, z, p, q) abhängt.

Es liegt nahe, dass die Konstante C_a unabhängig von a gewählt werden kann. In analogen Aussagen für äquivariante harmonische Abbildungen ist das nämlich der Fall, siehe [13]. Dem gehen wir jedoch in dieser Arbeit nicht nach.

Wir definieren zwei Untervektorbündel $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ von $T\mathcal{U}_{\delta_a}(Ga)$ faserweise wie folgt: Für jedes $x \in \mathcal{U}_{\delta_a}(Ga)$ sei

$$\mathscr{A}_x := T_x \mathcal{S}_r(\pi \circ \exp^{-1}(x)),$$

(dabei ist $\pi : \nu(Ga) \to Ga$ die Bündel-Projektion; die Definition von $\mathscr{A}_x$ hängt nicht von der Wahl eines hinreichend kleinen $r > 0$ ab). Man mache sich klar, dass $x \in \mathcal{S}_{\pi \circ \exp^{-1}(x)}$ gilt! $\mathscr{B}_x$ sei das orthogonale Komplement von $\mathscr{A}_x \cap T_x(Gx)$ in $T_x(Gx)$, d.h.

$$T_x(Gx) = (T_x(Gx) \cap \mathscr{A}_x) \oplus \mathscr{B}_x.$$

Es gilt

$$\mathscr{B}_y = T_y(Ga), \text{ und } \mathscr{A}_y = \nu_y(Ga) \text{ für alle } y \in Ga, \tag{3.5}$$

da $T_xM = T_x(Gx) \oplus \nu_x(Gx)$ und $T_x\mathcal{S}_{\delta_a}(x) = \nu_x(Gx)$ für alle $x \in M$. (3.5) braucht jedoch *nicht* für alle $y \in \mathcal{U}_{\delta_a}(Ga)$ zu gelten.

Es seien Vektorfelder $E^1, ..., E^m$ sowie $F^{m_z+1}, ..., F^m$ auf $\mathscr{B}_{\delta_a}(z)$ wie folgt gegeben: Für jedes $x \in \mathscr{B}_{\delta_a}(a)$ sei

- $E^1(x), ..., E^m(x)$ ist eine Orthonormalbasis von T_xM,
- $E^1(x), ..., E^{m_z}(x)$ eine Orthonormalbasis von $\mathscr{A}_x$ und
- $F^{m_z+1}(x), ..., F^m(x)$ eine Orthonormalbasis von $\mathscr{B}_x$.

Außerdem gelte

- $F^{m_z+1}(y) = E^{m_z+1}(y)$, ... , $F^m(y) = E^m(y)$ für jedes $y \in Ga \cap \mathscr{B}_{\delta_a}(a)$.

Wir bemerken, dass $E^1(x), ..., E^{m_z}(x), F^{m_z+1}(x), ...F^m(x)$ für jedes $x \in \mathscr{B}_{\delta_a}(a)$ eine Normalbasis, im Allgemeinen jedoch *keine Orthonormalbasis* von T_xM bilden. Dies liegt an folgendem Sachverhalt: Für jedes $x \in M$ schneiden sich der Orbit Gx und die Scheibe $\mathcal{S}_r(x)$ senkrecht, d.h. T_xGx ist das orthogonale Komplement von $T_x\mathcal{S}_r(x)$ in T_xM. Für ein $y \in \mathcal{S}_r(x) \setminus \{x\}$ brauchen sich Gy und $\mathcal{S}_r(x)$ nicht senkrecht zu schneiden. Zwar spannen $T_y\mathcal{S}_r(x)$ und T_yGy den Raum T_yM auf, jedoch braucht T_yGy nicht das orthogonale Komplement von $T_y\mathcal{S}_r(x)$ in T_yM zu sein. Kurz ausgedrückt: *Scheiben und Orbits brauchen nicht senkrecht aufeinander zu stehen.* Transformationsgruppen, in denen Scheiben und Orbits stets senkrecht aufeinander stehen, heißen *polare* Transformationsgruppen, für diese liegen interessante Klassifizierungsresultate vor (siehe das Buch [44] von Palais und Terng).

Sei die lineare Abbildung $P_x : T_xM \to T_xM$ gegeben durch

$$P_x\left(E^i(x)\right) = E^i(x) \text{ für } 1 \leq i \leq m_a,$$
$$P_x\left(E^i(x)\right) = F^i(x) \text{ für } m_a + 1 \leq i \leq m.$$

Es gilt:

- Die Einschränkung von P_x auf das orthogonale Komplement von $\mathscr{A}_x$ in T_xM ist eine Orthogonalprojektion mit Bild $\mathscr{B}_x$.

Wir arbeiten im Folgenden mit drei unterschiedlichen Arten von Indizes, deren Geltungsbereiche wir nun angeben:

$$\begin{aligned} 1 &\leq i,j,k \leq m, \\ 1 &\leq \alpha,\beta,\gamma \leq m_z, \\ m_z+1 &\leq A,B,C \leq m. \end{aligned}$$

Es gelte die Summenkonvention, d.h. doppelt auftretende Indizes werden über den jeweiligen Geltungsbereich summiert.

Lemma 5 (Zerlegung des Laplace-Operators) *Es gibt glatte Abbildungen*

$$\lambda^{[a,1]}_{\alpha\beta},\ \lambda^{[a,2]}_{\gamma},\ \lambda^{[a,3]} : B^{m_a}_{\delta_a} \to \mathbb{R}^{L\times L}$$

mit

$$(\Delta_M f)^{[a]} = \Delta f^{[a]} + \lambda^{[a,1]}_{\alpha\beta}\cdot f^{[a]}_{\alpha\beta} + \lambda^{[a,2]}_{\gamma}\cdot f^{[a]}_{\gamma} + \lambda^{[a,3]}\cdot f^{[a]}.$$

für alle (hinreichend regulären) G-äquivarianten Abbildungen $f : \mathcal{U}_{\delta_a}(Ga) \to \mathbb{R}^L$.

Beweis: Da wir mit einem fest gewählten $a \in M$ arbeiten, schreiben wir $\lambda^{[1]}_{\alpha\beta},\ \lambda^{[2]}_{\gamma},\ \lambda^{[3]}$ anstelle von $\lambda^{[a,1]}_{\alpha\beta},\ \lambda^{[a,2]}_{\gamma},\ \lambda^{[a,3]}$ und $\overline{f}$ anstelle von $f^{[a]}$.

Behauptung 1: *Es gibt glatte Abbildungen*

$$\xi^{[1]}_A,\ \xi^{[2]}_{AB},\ \xi^{[3]}_{AB\alpha},\ \xi^{[4]}_{\alpha A},\ \xi^{[5]}_{\alpha} : \mathscr{B}_r(a) \to \mathbb{R}^{L\times L}$$

mit

$$\begin{aligned} d_{F^A} f &= \xi^{[1]}_A \cdot f, \\ (Dd)_{F^A F^B} f &= \xi^{[2]}_{AB}\cdot f + \xi^{[3]}_{AB\alpha}\cdot d_{E^\alpha} f, \\ (Dd)_{E^\alpha F^A} f &= \xi^{[4]}_{\alpha A}\cdot f + \xi^{[5]}_{\alpha A\beta}\cdot d_{E^\beta} f \end{aligned} \tag{3.6}$$

auf $\mathscr{B}_r(z)$ für alle (hinreichend regulären) G-äquivarianten Abbildungen $f : M \to \mathbb{R}^L$.

Beweis von Behauptung 1: Für $x \in \mathcal{U}_r(Ga)$ sei $D^{[x]}$ die kovariante Ableitung der riemannschen Untermannigfaltigkeit $Gx \subset M$. Das Vektorfeld $\left(D_{F^A}F^B\right)^\top$ (bzw. $\left(D_{F^A}F^B\right)^\perp$) sei die Komponente von $D_{F^A}F^B$ tangential (bzw. senkrecht) zu den Orbits, d.h. für alle $x \in \mathscr{B}_r(z)$ ist $\left(D_{F^A}F^B\right)^\top(x)$ (bzw. $\left(D_{F^A}F^B\right)^\perp(x)$) die orthogonale Projektion des Vektors $D_{F^A}F^B(x) \in T_xM$ auf den Raum $T_x(Gx)$ (bzw. $\nu_x(Gx)$). Es gilt:

$$(D^{[x]}d)_{F^A F^B} = d_{F^A}d_{F^B} - d_{(D_{F^A}F^B)^\top}$$

und deshalb

$$\begin{aligned}(Dd)_{F^A F^B} &= d_{F^A} d_{F^B} - d_{D_{F^A} F^B} \\ &= d_{F^A} d_{F^B} - d_{(D_{F^A} F^B)^\top} - d_{(D_{F^A} F^B)^\perp} \\ &= (D^{[x]} d)_{F^A F^B} - d_{(D_{F^A} F^B)^\perp}. \qquad (3.7)\end{aligned}$$

Sei $(x, y) \in \mathscr{B}_r(a) \times \mathbb{R}^L$ mit $G_x \leq G_y$. Dann gibt es eine eindeutige, glatte, G-äquivariante Abbildung $\theta_{x,y} : Gx \to Gy \subset \mathbb{R}^L$ mit $\theta_{x,y}(x) = y$. Wir definieren

$$\begin{aligned}\Phi_A &: \left\{(a, b) \in \mathscr{B}_r(z) \times \mathbb{R}^L \ : \ G_a \leq G_b\right\} \to \mathbb{R}^L,\ \Phi_A(x, y) := d_{F^A} \theta_{x,y}(x), \\ \Psi_{AB} &: \left\{(a, b) \in \mathscr{B}_r(z) \times \mathbb{R}^L \ : \ G_a \leq G_b\right\} \to \mathbb{R}^L,\ \Psi_{AB}(x, y) := (D^{[x]} d)_{F^A F^B} \theta_{x,y}(x).\end{aligned}$$

Für jedes $x \in \mathscr{B}_r(a)$ ist die Menge

$$\left\{v \in \mathbb{R}^L \ : \ G_x \leq G_v\right\}$$

ein linearer Unterraum von $\mathbb{R}^L$: Denn seien w_1, w_2 in dieser Menge, seien $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}$ und sei $g \in G_x$. Da G *linear* auf $\mathbb{R}^L$ operiert, gilt

$$g \cdot (\mathbf{a} w_1 + \mathbf{b} w_2) = \mathbf{a}(g \cdot w_1) + \mathbf{b}(g \cdot w_2) = \mathbf{a} w_1 + \mathbf{b} w_2$$

und folglich

$$G_x \leq G_{\mathbf{a} w_1 + \mathbf{b} w_2}.$$

Aus der Linearität der Operation von G auf $\mathbb{R}^L$ folgt außerdem

$$\theta_{x, \mathbf{a} y_1 + \mathbf{b} y_2} = \mathbf{a} \theta_{x, y_1} + \mathbf{b} \theta_{x, y_2}$$

für alle $x \in \mathscr{B}_r(a)$, alle $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}$ und alle $y_1, y_2 \in \left\{v \in \mathbb{R}^L \ : \ G_x \leq G_v\right\}$. Daraus folgt für jedes $x \in \mathscr{B}_r(z)$ die Linearität der Abbildungen

$$\begin{aligned}\{v \in \mathbb{R}^L \ : \ G_x \leq G_v\} \ni y \mapsto \Phi_A(x, y) \in \mathbb{R}^L, \\ \{v \in \mathbb{R}^L \ : \ G_x \leq G_v\} \ni y \mapsto \Psi_{AB}(x, y) \in \mathbb{R}^L.\end{aligned}$$

Wir erweitern diese zu linearen Abbildungen

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^L \ni y \mapsto \Phi_A(x, y) \in \mathbb{R}^L, \\ \mathbb{R}^L \ni y \mapsto \Psi_{AB}(x, y) \in \mathbb{R}^L,\end{aligned}$$

indem wir, falls y aus dem orthogonalen Komplement von $\{v \in \mathbb{R}^L \ : \ G_x \leq G_v\}$ stammt, $\Phi_A(x, y) = \Psi_{AB}(x, y) = 0$ setzen. Deswegen gibt es matrixwertige Funktionen

$$\varphi_A,\ \psi_{AB} : \mathscr{B}_r(z) \to \mathbb{R}^{L \times L}$$

mit

$$\begin{aligned}\Phi_A(x, y) &= \phi_A(x) \cdot y, \\ \Psi_{AB}(x, y) &= \psi_{AB}(x) \cdot y.\end{aligned}$$

Die Abbildungen ϕ_A und ψ_{AB} sind glatt und beschränkt, da die Operationen von G auf M und $\mathbb{R}^L$ glatt sind. Nun folgt für alle (hinreichend regulären) G-äquivarianten $f : M \to \mathbb{R}^L$

$$\begin{aligned} d_{F^A} f &= \Phi_A(\cdot, f) = \phi_A \cdot f, \\ (D^{[x]}d)_{F^A F^B} f &= \Psi_{AB}(\cdot, f) = \psi_{AB} \cdot f \end{aligned} \tag{3.8}$$

auf $\mathscr{B}_r(a)$. (Bedenke hierbei zum einen $u(x) = \theta_{x,u(x)}(x)$ und zum anderen, dass wegen der Äquivarianz stets $G_x \le G_{u(x)}$ gilt!)

Da das Vektorfeld $(D_{F^A} F^B)^\perp$ als Linearkombination der E^α und F^C dargestellt werden kann, gibt es glatte, beschränkte Koeffizientanfunktionen

$$\kappa^{[1]}_{AB\alpha},\ \kappa^{[2]}_{ABC} : \mathscr{B}_r(a) \to \mathbb{R}$$

mit

$$\begin{aligned} d_{(D_{F^A} F^B)^\perp} &= \kappa^{[1]}_{AB\alpha} d_{E^\alpha} + \kappa^{[2]}_{ABC} d_{F^C} \\ &= \kappa^{[1]}_{AB\alpha} d_{E^\alpha} + \kappa^{[2]}_{ABC} \phi_C \cdot f. \end{aligned}$$

Daraus folgt mit (3.7) und (3.8)

$$(Dd)_{F^A F^B} f = -\kappa^{[1]}_{AB\alpha} d_{E^\alpha} f + \Big(\psi_{AB} - \kappa^{[2]}_{ABC} \phi_C\Big) \cdot f.$$

Ebenso gibt es Funktionen

$$\kappa^{[3]}_{\alpha A\beta},\ \kappa^{[4]}_{\alpha AB} : \mathscr{B}_r(a) \to \mathbb{R}$$

mit

$$\begin{aligned} d_{D_{E^\alpha} F^A} f &= \kappa^{[3]}_{\alpha A\beta} d_{E^\beta} f + \kappa^{[4]}_{\alpha AB} d_{F^B} f \\ &= \kappa^{[3]}_{\alpha A\beta} d_{E^\beta} f + \kappa^{[4]}_{\alpha AB} \phi_B \cdot f. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} (Dd)_{E^\alpha F^A} f &= d_{E^\alpha} d_{F^A} f - d_{D_{E^\alpha} F^A} f \\ &= d_{E^\alpha}(\phi_A \cdot f) - \kappa^{[3]}_{\alpha A\beta} d_{E^\beta} f - \kappa^{[4]}_{\alpha AB} \phi_B \cdot f \\ &= \Big(\delta_{\alpha\beta}\phi_A - \kappa^{[3]}_{\alpha A\beta} \mathbb{1}_L\Big) \cdot d_{E^\beta} f + \Big(d_{E^\alpha}\phi_A - \kappa^{[4]}_{\alpha AB} \varphi_B\Big) \cdot f, \end{aligned}$$

wobei $\mathbb{1}_L$ die L-dimensionale Einheitsmatrix und $\delta_{\alpha\beta}$ das Kronecker-Delta ist. Nun setzen wir

$$\begin{aligned} \xi^{[1]}_A &:= \phi_A, \\ \xi^{[2]}_{AB} &:= \Big(\psi_{AB} - \kappa^{[2]}_{ABC}\phi_C\Big), \\ \xi^{[3]}_{AB\alpha} &:= -\kappa^{[1]}_{AB\alpha}, \\ \eta^{[4]}_{\alpha A} &:= \Big(d_{E^\alpha}\phi_A - \kappa^{[4]}_{\alpha AB}\phi_B\Big), \\ \eta^{[5]}_{\alpha A\beta} &:= \Big(\varphi_A \delta_{\alpha\beta} - \kappa^{[3]}_{\alpha A\beta} \mathbb{1}_L\Big). \end{aligned}$$

Damit ist Behauptung 1 bewiesen.

Behauptung 2: *Es gibt glatte, beschränkte Abbildungen*

$$\eta^{[1]}_{\alpha\beta} : \mathscr{B}_r(a) \to \mathbb{R},\ \eta^{[2]}_{\alpha} : \mathscr{B}_r(a) \to \mathbb{R}^{L\times L},\ \eta^{[3]} : \mathscr{B}_r(a) \to \mathbb{R}^{L\times L}$$

mit

$$(Dd)_{E^A E^A} f = \eta^{[1]}_{\alpha\beta}(Dd)_{E^\alpha E^\beta} f + \eta^{[2]}_{\alpha} \cdot d_{E^\alpha} f + \eta^{[3]} \cdot f \tag{3.9}$$

auf $\mathscr{B}_r(a)$ für alle (hinreichend regulären) G-äquivarianten Abbildungen $f : M \to \mathbb{R}^L$. Dabei gilt

$$|\eta^{[1]}_{\alpha\beta}(a)| = 0.$$

Beweis von Behauptung 2: Da jedes Vektorfeld E^A auf $x \in \mathscr{B}_{\delta_a}(a)$ als Linearkombination der $E^1(x), ..., E^{m_z}(x)$, $F^{m_z+1}(x), ..., F^m(x)$ dargestellt werden kann, gibt es glatte, beschränkte Koeffizientenfunktionen $\Theta^A_i : \mathscr{B}_{\delta_a}(a) \to \mathbb{R}$ mit

$$E^A = \Theta^A_\gamma E^\gamma + \Theta^A_C F^C.$$

Wegen $F^A(a) = E^A(a)$ gilt offensichtlich

$$\Theta^A_\gamma(a) = 0. \tag{3.10}$$

Nun folgt

$$d_{E^A} = \Theta^A_\gamma d_{E^\gamma} + \Theta^A_C d_{F^C},$$

sowie

$$\begin{aligned}(Dd)_{E^A E^A} = \ & \Theta^A_\alpha \Theta^B_\beta (Dd)_{E^\alpha E^\beta} + \zeta^{[1]}_{CK}(Dd)_{F^C F^K} \\ & + \zeta^{[2]}_{\alpha C}(Dd)_{E^\alpha F^C} + \zeta^{[3]}_{\gamma} d_{E^\gamma} + \zeta^{[4]}_{C} d_{F^C}\end{aligned}$$

mit glatten, beschränkten Funktionen

$$\zeta^{[1]}_{CK},\ \zeta^{[2]}_{\alpha C},\ \zeta^{[3]}_{\gamma},\ \zeta^{[4]}_{C} : \mathscr{B}_r(z) \to \mathbb{R}$$

(die von den Funktionen Θ^A_i und $d\Theta^A_i$ abhängen). Setzen wir hierin (3.6) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}(Dd)_{E^A E^A} f = \ & \Theta^A_\alpha \Theta^A_\beta (Dd)_{E^\alpha E^\beta} f \\ & + \eta^{[2]}_{\alpha} \cdot d_{E^\alpha} f + \eta^{[3]} \cdot f\end{aligned}$$

für glatte, beschränkte Funktionen

$$\eta^{[2]}_{\alpha},\ \eta^{[3]} : \mathscr{B}_r(z) \to \mathbb{R}^{L\times L}.$$

Weiterhin setzen wir

$$\eta^{[1]}_{\alpha\beta} = \Theta^A_\alpha \Theta^A_\beta.$$

Wegen (3.10) gilt offenkundig

$$\eta^{[1]}_{\alpha\beta}(z) = 0.$$

Damit ist Behauptung 2 bewiesen.

Bekanntlich hat der Laplace-Beltrami-Operator von M eingeschränkt auf $\mathscr{B}_r(z)$ die Darstellung

$$\Delta_M = -(Dd)_{E^iE^i} = -(Dd)_{E^\alpha E^\alpha} - (Dd)_{E^C E^C}.$$

Die E^α bilden einen Orthonormalrahmen von $\mathcal{S}_r(z)$. Außerdem ist $\mathcal{S}_r(z)$ eine total-geodätische Untermannigfaltigkeit von M. Deswegen gilt für alle (hinreichend regulären) $f : M \to \mathbb{R}^L$ und alle $x \in \mathcal{S}_{\delta_a}(a)$

$$\Delta_{\mathcal{S}_r(z)} f(x) = -(Dd)_{E^\alpha E^\alpha} f(x).$$

Somit erhalten wir unter Verwendung von (3.9)

$$\Delta_M f(x) = \Delta_{\mathcal{S}_r(z)} f(x) - \eta^{[1]}_{\alpha\beta}(Dd)_{E^\alpha E^\beta} f(x) - \eta^{[2]}_\alpha \cdot d_{E^\alpha} f(x) - \eta^{[3]} \cdot f(x). \quad (3.11)$$

Nun verwenden wir die Identifizierung von $\mathcal{S}_{\delta_a}(a)$ mit $B^{m_a}_{\delta_a}$. Setzen wir

$$\begin{aligned} \overline{\Delta_{\mathcal{S}_{\delta_a}(a)} f} =& \Delta_{\mathbf{g}} \overline{f} \\ =& -\mathbf{g}^{\alpha\beta}(\overline{f}_{\alpha\beta} - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\overline{f}_\gamma) \\ =& \Delta\overline{f} - (\mathbf{g}^{\alpha\beta} - \delta^{\alpha\beta})\overline{f}_{\alpha\beta} + \mathbf{g}^{\alpha\beta}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\overline{f}_\gamma \end{aligned} \quad (3.12)$$

und

$$\overline{(Dd)_{XY} f} = \overline{f}_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta - (Y^\gamma_\kappa X^\kappa - \Gamma^\gamma_{\eta\kappa} X^\eta Y^\kappa)\overline{f}_\gamma$$

in (3.11) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \overline{\Delta_M f} &= \Delta_{\mathbf{g}}\overline{f} - \overline{(\eta^{[1]}_{\alpha\beta}(Dd)_{E^\alpha E^\beta} f + \eta^{[2]}_\alpha \cdot d_{E^\alpha} f + \eta^{[3]} \cdot f)} \\ &= \Delta\overline{f} - \left(\mathbf{g}^{\alpha\beta} - \delta^{\alpha\beta} + \overline{\eta^{[1]}_{\alpha\beta}}\right)\overline{f}_{\alpha\beta} + \lambda^{[2]}_\gamma \cdot \overline{f}_\gamma + \lambda^{[3]} \cdot \overline{f} \end{aligned}$$

mit glatten Funktionen $\lambda^{[2]}_\gamma$, $\lambda^{[3]}$. Wir setzen

$$\lambda^{[1]}_{\alpha\beta} := -\left(\mathbf{g}^{\alpha\beta} - \delta^{\alpha\beta} + \overline{\eta^{[1]}_{\alpha\beta}}\right).$$

Da wir nach Voraussetzung in Normalkoordinaten arbeiten, gilt $\mathbf{g}^{\alpha\beta}(0) - \delta^{\alpha\beta} = 0$. Aus $\eta^{[1]}_{\alpha\beta}(a) = 0$ folgt $\overline{\eta^{[1]}_{\alpha\beta}}(a) = 0$ und damit

$$\lambda^{[1]}_{\alpha\beta}(0) = 0.$$

Damit ist Lemma 5 bewiesen. □

Das folgende Lemma zitieren wir aus der Arbeit [13] von Gastel (dort Lemma 5.1 zusammen mit den voranstehenden Bemerkungen, sowie Lemma 5.3 (i)):

Lemma 6 *Sei $a \in M$. Es gibt eine glatte, beschränkte Funktion $\gamma^{[a]} : B^{m_a}_{\delta_a} \to \mathbb{R}$, so dass für alle G-invarianten Funktionen $f : M \to \mathbb{R}^L$ und alle messbaren Teilmengen $A \subset \mathcal{S}_{\delta_a}(a)$ gilt:*

$$\int_{GA} f \, dvol_M = \int_{G_a A} f^{[a]} \gamma^{[a]} \, dx \tag{3.13}$$

und $\gamma^{[a]}(0) = \mathscr{H}^{m-m_a}(Ga)$.

Da wir mit einem fest gewählten a arbeiten, setzen wir $\gamma = \gamma^{[a]}$.
Beweis von Satz 4: Als Abkürzung führen wir die Funktion

$$\begin{aligned}
&\Lambda : B^{m_z}_r \times \mathbb{R}^L \times \mathbb{R}^{m_z \times L} \times \mathbb{R}^{m_z \times m_z \times L} \to \mathbb{R}^L, \\
&\Lambda(x,z,p,q) := \lambda^{[1]}_{\alpha\beta}(x) q_{\alpha\beta} + \lambda^{[2]}_{\gamma}(x) \cdot p_\gamma + \lambda^{[3]} \cdot z
\end{aligned}$$

ein. Wir setzen $V = V^{[a]}$ und $\gamma = \gamma^{[a]}$. Mit den Bezeichnungen aus Lemma 5 und Lemma 6 definieren wir

$$V(x,y,p,q) := |q_{\alpha\alpha}|^2(\gamma - \mathscr{H}^{m-m_a}(Ga)) + |\Lambda(x,z,p,q)|^2 \gamma + 2\gamma\Lambda(x,z,p,q) \cdot q_{\alpha\alpha}.$$

Dann gilt

$$\overline{(|\Delta_M f|^2)}\gamma = |\overline{(\Delta_M f)}|^2\gamma = \Delta\overline{f} + V(\cdot, \overline{f}_a, D\overline{f}_a, D^2\overline{f}_a)$$

und daraus folgt mit Lemma 4 für jede Teilmenge $A \subset \mathcal{S}_{\delta_a}(a)$ ($\cong B^{m_a}_{\delta_a}$)

$$\int_{GA} |\Delta_M f|^2 \, \mathrm{dvol}_M = \mathscr{H}^{m-m_a}(Ga) \int_{G_a A} \left(|\Delta\overline{f}|^2 + V(\cdot, \overline{f}, D\overline{f}, D^2\overline{f}) \right) dx.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
V_{x_\alpha}(x,z,p,q) = {} & \left(|q_{\alpha\alpha}|^2 + |\Lambda(x,z,p,q)|^2 + 2\Lambda(x,z,p,q) \cdot q_{\alpha\alpha}\right)\gamma_\alpha \\
& + 2\gamma\Lambda(x,z,p,q) \cdot \left[\left(\partial_{x_\alpha}\lambda^{[1]}_{\alpha\beta}(x)\right) q_{\alpha\beta} + \left(\partial_{x_\alpha}\lambda^{[2]}_{\gamma}(x)\right) \cdot p_\gamma + \left(\partial_{x_\alpha}\lambda^{[3]}\right) \cdot z \right], \\
V_{p_\alpha}(x,z,p,q) = {} & 2\gamma\lambda^{[2]}_{\alpha}(x) \cdot \Lambda(x,z,p,q) + 2\gamma\lambda^{[2]}_{\alpha}(x) \cdot q_{\gamma\gamma}, \\
V_{q_{\alpha\beta}}(x,z,p,q) = {} & 2(\gamma - \mathscr{H}^{m-m_a}(Ga))\delta_{\alpha\beta} q_{\gamma\gamma} + 2\gamma(\delta_{\alpha\beta} + \lambda^{[1]}_{\alpha\beta}(x))\Lambda(x,z,p,q) \\
& + 2\gamma\lambda^{[1]}_{\alpha\beta}(x) q_{\gamma\gamma}.
\end{aligned}$$

Mit
$$|\gamma(x)| \leq C \text{ und } |\gamma(x) - \mathscr{H}^{m-m_a}(Ga)| \leq C|x|.$$
(letzteres folgt aus dem Schrankensatz) folgen die Abschätzungen
$$\begin{aligned}
|V\,(x,z,p,q)| \leq& c\left[|x|\,|q|^2 + |\Lambda(x,z,p,q)|^2 + |\Lambda(x,z,p,q)|\;|q|\right],\\
|V_x(x,z,p,q)| \leq& c\left[|q|^2 + |\Lambda(x,z,p,q)|^2 + |\Lambda(x,z,p,q)|\,(|q|+|p|+|z|))\right]\\
|V_p(x,z,p,q)| \leq& c\,[|q| + |\Lambda(x,z,p,q)|],\\
|V_q(x,z,p,q)| \leq& c\,[|x|\,|q| + |\Lambda(x,z,p,q)|]
\end{aligned}$$
für eine Konstante $c > 0$. In allen folgenden Schritten werden wir die Konstante c bei Bedarf vergrößern. Mit der Abschätzung
$$|\lambda^{[1]}_{\alpha\beta}(x)| \leq c|x|$$
aus Lemma 5 erhalten wir
$$|\Lambda(x,z,p,q)| \leq c\,[|x|\,|q| + |p| + |z|]$$
Mit der Young-Ungleichung (hier in den Formen $ab \leq c(a^2+b^2)$ und $ab \leq c(a^3 + b^{\frac{3}{2}})$) folgt dann für ein $c > 0$
$$\begin{aligned}
|V\,(x,z,p,q)| \leq& c\left(|x|\,|q|^2 + |q|\,|p| + |q|\,|z| + |p|^2 + |z|^2\right)\\
\leq& c\left(|x|\,|q|^2 + |q|^{\frac{3}{2}} + |p|^3 + |z|^3 + 1\right),\\
|V_x(x,z,p,q)| \leq& c\left(|q|^2 + |p|^2 + |z|^2\right),\\
|V_p(x,z,p,q)| \leq& c\,(|q| + |p| + |z|),\\
|V_q(x,z,p,q)| \leq& c\,(|x|\,|q| + |p| + |z|).
\end{aligned}$$
Mit $V^{[a]} = V$ und $C_a = c$ ist der Satz bewiesen. □

Wir werden einige Varianten dieses Lokalisierungssatzes benötigen. Die Beweise gehen völlig analog, nur mit geringen und offensichtlichen Änderungen. Zum einen gibt es einen Integranden
$$\Lambda^{[a]} : B^{m_a}_{\delta_a} \times \mathbb{R}^L \times \mathbb{R}^{m_a\times L} \times \mathbb{R}^{m_a\times m_a\times L} \to \mathbb{R},$$
so dass für jedes jede Abbildung $f \in W^{2,2}_G(\mathcal{U}_{\delta_a}(Ga),\mathbb{R}^L)$ und jede Teilmenge $A \subset \mathcal{S}_{\delta_a}(a)$ ($\cong B^{m_a}_{\delta_a}$) gilt:
$$\begin{aligned}
&\int_{GA} \left(|D_{\mathbf{g}}df|^2 + |df|^4\right)\,\mathrm{dvol}_M\\
=&\mathscr{H}^{m-m_a}(Ga)\int_{G_aA}\left(|D^2f^{[a]}|^2 + |Df^{[a]}|^4 + \Lambda^{[a]}(\cdot, f^{[a]}, Df^{[a]}, D^2f^{[a]})\right)\,dx.
\end{aligned}$$
Sei nun ein ein $b \in B^{m_a}_{\delta_a} \cong \mathcal{S}_{\delta_a}(a)$ gegeben. Wir wollen die Abbildung f_a in b lokalisieren. Es sei $m_{a,b} := m_a - \dim(G_ab)$ und es sei $G_{a,b}$ die Isotropiegruppe

von G_a in B^{m_a}. Für $0 < \rho < \delta_b$ sei $\mathcal{S}_\rho(a,b)$ die Scheibe um b in B^{m_a} (nicht in M!). (Man überlege sich hierzu, dass $\delta_b = \mathcal{C}_{B^{m_a},G_a}\mathrm{dist}(b, B^{m_a}(> G_{a,b})$ gilt.) Es sei $f^{[a,b]} := f^{[a]}|_{\mathcal{S}_{\delta_b}(a,b)}$. Wir identifizieren $\mathcal{S}_{\delta_b}(a,b)$ durch beliebige Normalkoordinaten mit $[B^{m_{a,b}}, G_{a,b}]$. Es gibt glatte, $G_{a,b}$-invariante Integranden

$$W^{[a,b]},\ \Gamma^{[a,b]} : B^{m_{a,b}}_{\delta_b} \times \mathbb{R}^L \times \mathbb{R}^{m_{a,b}\times L} \times \mathbb{R}^{m_{a,b}\times m_{a,b}\times L} \to \mathbb{R}$$

mit

$$\begin{aligned}&\int_{G_aA} \left(|\Delta f^{[a]}|^2 + V^{[a]}(\cdot, f^{[a]}, Df^{[a]}, D^2f^{[a]})\right)\, dx\\ = \mathscr{H}^{m_a - m_{a,b}}(G_a b) &\int_{G_{a,b}A} \left(|\Delta f^{[a,b]}|^2 + W^{[a,b]}(\cdot, f^{[a,b]}, Df^{[a,b]}, D^2f^{[a,b]})\right)\, dx\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&\int_{G_aA} \left(|D^2f^{[a]}|^2 + |Df^{[a]}|^4 + \Lambda^{[a]}(\cdot, f^{[a]}, Df^{[a]}, D^2f^{[a]})\right)\, dx\\ = \mathscr{H}^{m_a - m_{a,b}}(G_a b) &\int_{G_{a,b}A} \left(|D^2f^{[a,b]}|^2 + |D^{[a,b]}|^4 + \Gamma^{[a,b]}(\cdot, f^{[a,b]}, Df^{[a,b]}, D^2f^{[a,b]})\right)\, dx\end{aligned}$$

für alle $f \in W^{2,2}_G(M, \mathbb{R}^L)$ und alle $A \subset \mathcal{S}_{\delta_b}(a,b)$.
Für $W^{[a,b]}$ werden wir die wichtigen Teile des Beweises skizzieren:
$\mathcal{S}_{\delta_b}(a,b)$ ist ein Ball in einem affinen Unterraum von $\mathbb{R}^{m_a}$. Nach einer geeigneten Drehung der Koordinaten können wir davon ausgehen, dass

$$\mathcal{S}_{\delta_b}(a,b) = \left\{ b + (x, 0, ..., 0)\ :\ x \in B^{m_{a,b}}_{\delta_b} \right\}.$$

Im Folgenden gelten für lateinische und griechische Indizes die folgenden Geltungsbereiche:

$$1 \le \alpha, \beta, \gamma ... \le m_{a,b},\ m_{a,b} + 1 \le i, j, k ... \le m_a.$$

Wie im Beweis des Lokalisierungssatzes (Satz 4) erhalten wir Abbildungen

$$\alpha_i,\ \beta_{ij},\ \gamma_{i\alpha} : \mathcal{S}_{\delta_{a,b}}(a,b) \to \mathbb{R}^{L\times L},$$

so dass für alle (hinreichend regulären) $u : B^{m_a} \to \mathbb{R}^L$ gilt:

$$\begin{aligned} u_i &= \alpha_i \cdot u,\\ u_{ij} &= \beta^{[1]}_{ij} \cdot u + \beta^{[2]}_{ij\alpha} \cdot u_\alpha,\\ u_{i\alpha} &= \gamma^{[1]}_{i\alpha} \cdot u + \gamma^{[2]}_{i\alpha\beta} \cdot u_\beta. \end{aligned}$$

Mit Lemma 6 erhalten wir eine Funktion $\omega : \mathcal{S}_{\delta_b}(a,b) \to \mathbb{R}$ mit

$$\int_{G_aA} u\, dx = \int_{G_{a,b}A} u\, \omega\, dx.$$

für alle G_a-äquivarianten integrierbaren Abbildungen $u : B^{m_a} \to \mathbb{R}^L$ und alle $A \subset B^{m_{a,b}}_{\delta_b} \cong \mathcal{S}_{\delta_{a,b}}(a,b)$. Dann ist der Integrand $W^{[a,b]}$ wegen

$$\Delta u = u_{\alpha\alpha} + \beta^{[2]}_{ii\alpha} \cdot u_\alpha + \beta^{[1]}_{ii} \cdot u$$

gegeben durch

$$\begin{aligned} W^{[a,b]}(x,z,p,q) =& u_{\alpha\alpha} \left(\omega(x) - \mathscr{H}^{\dim(G_a b)}(G_a b)\right) + \left(\beta^{[2]}_{ii\alpha} \cdot u_\alpha + \beta^{[1]}_{ii} \cdot u\right) \omega \\ &+ V^{[a]} \left(x, z, \ell^{[1]}(x,z,p,q), \ell^{[2]}(x,z,p,q)\right) \omega. \end{aligned}$$

Für gegebene x, z, $p = (p_\alpha)$ und $q = (q_{\alpha\beta})$ sind dabei $\ell^{[1]}(x,z,p,q) \in \mathbb{R}^{k\times L}$ und $\ell^{[2]}(x,z,p,q) \in \mathbb{R}^{k\times k\times L}$ komponentenweise wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} \ell^{[1]}(x,z,p,q)_\alpha &= p_\alpha, \\ \ell^{[1]}(x,z,p,q)_i &= \alpha_i(x) \cdot z, \\ \ell^{[2]}(x,z,p,q)_{\alpha\beta} &= q_{\alpha\beta}, \\ \ell^{[2]}(x,z,p,q)_{ij} &= \beta^{[1]}_{ij}(x) \cdot z + \beta^{[2]}_{ij\alpha}(x) \cdot p_\alpha, \\ \ell^{[2]}(x,z,p,q)_{i\alpha} = \ell^{[2]}(x,z,p,q)_{\alpha i} &= \gamma^{[1]}_{i\alpha}(x) \cdot z + \gamma^{[2]}_{i\alpha\beta}(x) \cdot p_\beta. \end{aligned}$$

Der Rest des Beweises geht völlig analog zu dem des ersten Lokalisierungssatzes (Satz 4).
Genau wie im Lokalisierungssatz sieht man, dass für $\Lambda^{[a]}$, $W^{[a,b]}$ und $\Gamma^{[a,b]}$ Abschätzungen völlig analog zu denen von V gelten. Wir zitieren diejenigen, die wir im Verlauf des Beweises benötigen werden: Es gibt eine Konstante $C_a > 0$, die von a, nicht aber von x, z, p, q abhängt, mit

$$\begin{aligned} \left|\Lambda^{[a]}(x,z,p,q)\right| \leq& C_a \left(|x|\,|q|^2 + |q|\,|p| + |q|\,|z| + |p|^2 + |z|^2\right) \\ \leq& C_a \left(|x|\,|q|^2 + |q|^{\frac{3}{2}} + |p|^3 + |z|^3 + 1\right) \\ \left|W^{[a,b]}(x,z,p,q)\right| \leq& C_a \left(|x|\,|q|^2 + |q|\,|p| + |q|\,|z| + |p|^2 + |z|^2\right) \\ \leq& C_a \left(|x|\,|q|^2 + |q|^{\frac{3}{2}} + |p|^3 + |z|^3 + 1\right), \\ \left|\Gamma^{[a,b]}(x,z,p,q)\right| \leq& C_a \left(|x|\,|q|^2 + |q|\,|p| + |q|\,|z| + |p|^2 + |z|^2\right) \\ \leq& C_a \left(|x|\,|q|^2 + |q|^{\frac{3}{2}} + |p|^3 + |z|^3 + 1\right). \end{aligned}$$

Kapitel 4

Lokale Konvergenzsätze

In diesem Kapitel sind vorgegeben:

- Zwei orthogonale Darstellungen $[\mathbb{R}^m, G]$ und $[\mathbb{R}^L, G]$, wobei die Kohomogenität der ersteren mit d bezeichnet wird.
- Kompakte G-invariante Untermannigfaltigkeiten $N_i \subset \mathbb{R}^L$ sowie eine (nicht notwendigerweise kompakte) G-invariante Untermannigfaltigkeit $N_\infty \subset \mathbb{R}^L$ mit den folgenden beiden Eigenschaften:
  - Für jede Abbildung $f \in W_G^{2,2}(B^m, N_\infty)$ gibt es eine Folge $f_i \in W_G^{2,2}(B^m, N_i)$, die stark in $W^{2,2}(B^m, \mathbb{R}^L)$ gegen f konvergiert,
  - Die Nächste-Punkt-Projektionen Π_{N_i} sind in folgendem Sinne gleichmäßig beschränkt: Es gibt ein $\delta > 0$ und ein $\mu > 0$, so dass für alle $i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und alle $f \in W^{2,2}(B^m, \mathcal{U}_\delta(N_i))$ gilt:

    $$||\Pi_{N_i} \circ f||_{W^{2,2}(B^m,\mathbb{R}^L)} \leq \mu ||f||_{W^{2,2}(B^m,\mathbb{R}^L)}. \tag{4.1}$$

    (Wichtig ist hierbei, dass μ nicht von i abhängt!)
- Für jedes $i \in \mathbb{N}$ ein Integrand von niederer Ornung V_i.
- Eine weitere kompakte G-invariante Untermannigfaltigkeit $N \subset \mathbb{R}^L$ und ein weiterer Integrand von niederer Ordnung V.

Der Begriff des „Integranden von niederer Ordnung“ muss hierbei noch erläutert werden: Eine *gestörte Bienergie* nennen wir ein Funktional

$$E_V(u) := \int_{B^m} \left(|\Delta u|^2 + V[u]\right) \, dx \tag{4.2}$$

für Abbildungen $u \in W^{2,2}(B^m, \mathbb{R}^L)$ mit einem *Integranden von nierderer Ordnung* V. So nennen wir einen C^2-Integranden

$$V : B^m \times \mathbb{R}^L \times \mathbb{R}^{m\times L} \times \mathbb{R}^{m\times m\times L} \to \mathbb{R},$$

wenn er die folgenden Eigenschaften hat:

- Für jede Abbildung $u \in W^{2,2}(M, \mathbb{R}^L)$ ist $V[u]$ integrierbar.
- V ist G-invariant, d.h.

$$V(x, z, p, q) = V(gx, gz, gp, gq)$$

(Operationen von G auf der p- und der q-Komponente wird in natürlicher Weise durch die Operationen auf der x- und der z-Komponente induziert).

- Es gelten die Abschätzungen

$$\left.\begin{aligned}
|V(x,z,p,q)| &\le C\left(|x|\,|q|^2 + |q|\,|p| + |q|\,|z| + |p|^2 + |z|^2\right), \\
&\le C\left(|x|\,|q|^2 + |q|^{\frac{3}{2}} + |p|^3 + |z|^3 + 1\right), \\
|V_x(x,z,p,q)| &\le C\left(|q|^2 + |p|^2 + |z|^2 + 1\right), \\
|V_p(x,z,p,q)| &\le C\left(|q| + |p| + |z| + 1\right), \\
|V_q(x,z,p,q)| &\le C\left(|x|\,|q| + |p| + |z| + 1\right)
\end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

für eine Konstante $C > 0$, die nicht von (x, z, p, q) abhängt.

- Jeder G-Minimierer von E_V ist stationär bzgl. E_V.

Mit E bezeichnen wir in diesem Kapitel stets die *euklidische* Bienergie, d.h.

$$E(u) = \int_{B^m} |\Delta u|^2 \, dx$$

In diesem Kapitel untersuchen wir das Konvergenzverhalten von gewissen Folgen $u_i \in W_G^{2,2}(B^m, N_i)$ $(i \in \mathbb{N})$. Das erste Haupergebnis ist der folgende Kompaktheitssatz:

Hauptsatz 2 (Kompaktheitssatz)*Es sei $d \le 4$ und*

$$\mathscr{H}\text{-}\dim\left(\{x \in M \ : \ m_x > 4\}\right) \le m - 5$$

und es gelten die oben gestellten Bedingungen an die N_i und V_i.
Es gebe eine Nullfolge $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit

$$|V_i(x,z,p,q)| \le \alpha_i \left(|x|\,|q|^2 + |q|\,|p| + |q|\,|z| + |p|^2 + |z|^2\right) \tag{4.4}$$

für alle $i \in \mathbb{N}$.
Gegeben sei für jedes $i \in \mathbb{N}$ ein lokaler G-Minimierer $u_i \in W_G^{2,2}(B^m, N_i)$ von E_{V_i}.
Angenommen, die u_i konvergieren schwach in $W^{2,2}$ gegen ein $u \in W_G^{2,2}(B^m, N_\infty)$. Dann konvergieren die u_i auch stark in $W_{loc}^{2,2}(B_{\frac{1}{2}}^m, \mathbb{R}^L)$ gegen u und u ist ein lokaler G-Minimierer der euklidischen Bienergie.

Sei $u : B^m \to \mathbb{R}^L$ und sei $r \in (0, 1]$. Dann ist die skalierte Abbildung $u_r : B^m \to \mathbb{R}^L$ durch $u_r(x) := u(rx)$ gegeben. Sei ein $u \in W_G^{2,2}(B^m, N)$ gegeben mit

$E_V(u) \leq E_V(w)$ für eine gestörte Bienergie E_V und alle $w \in W^{2,2}(B^m, N)$, welche in einer Umgebung von S^{m-1} mit u übereinstimmen. Weiterhin sei eine Nullfolge $r_i \in (0,1]$ gegeben. Wir sind am Konvergenzverhalten der Folge der $u_i := u_{r_i}$ interessiert. Wir werden in diesem Kapitel als eine sogenannte *Monotonieformel* (Satz 4.53) beweisen und aus dieser folgern, dass die Folge $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ in der $W^{2,2}$-Norm beschränkt ist. Zusammen mit dem Kompaktheitssatz gibt uns diese den folgenden wichtigen Skalierungssatz.

Satz 5 (Skalierungssatz) *Es gelte $d \leq 4$ und*

$$\mathscr{H}\text{-}\dim\left(\{x \in M \ : \ m_x > 4\}\right) \leq m - 5.$$

Sei $u \in W^{2,2}_G(B^m, N)$ ein lokaler G-Minimierer von E_V und sei $r_i \in (0,1]$ eine Nullfolge.
Dann konvergieren die u_{r_i} nach Übergang zu einer Teilfolge schwach in $W^{2,2}(B^m, \mathbb{R}^L)$ und stark in $W^{2,2}_{loc}(B^m_{\frac{1}{2}}, \mathbb{R}^L)$ gegen eine Abbildung $\varphi \in W^{2,2}(B^m, N)$.
Die Abbildung φ ist ein lokaler G-Minimierer der euklidischen Bienergie und nullhomogen, d.h. $\varphi(r\omega) = \varphi(\omega)$ für fast alle $\omega \in S^{m-1}$ und fast alle $r \in (0,1]$.

Dieses Kapitel ist in fünf Abschnitte untergliedert:

Abschnitt 4.1: Wir stellen einige Ungleichungen zur Verfügung, die im Rest des Kapitels benötigt werden, insbesondere eine Ungleichung vom Sobolev-Morrey-Typ für äquivariante Abbildungen.

Abschnitt 4.2: Wir beweisen das *Interpolationslemma* (Lemma 10). Auf ihm beruht im wesentlichen der Beweis des Kompaktheitssatzes. Wegen des hohen Aufwands, den sein Beweis erfordert, ist es ein technisches Hauptstück dieser Arbeit.

Abschnitt 4.3: Beweis des *Kompaktheitssatzes* (Hauptsatz 2).

Abschnitt 4.4: Beweis einer *Monotonieformel* (Satz 6), welche ein weiteres technisches Hauptstück dieser Arbeit ist.

Abschnitt 4.5: Beweis des *Skalierungssatzes* (Satz 5) mit Hilfe des Kompaktheitssatzes und der Monotonieformel.

4.1 Ungleichungen

4.1.1 Eine äquivariante Sobolev-Morrey-Ungleichung

Sei A eine beliebige Menge. Die *Oszillation* eine Abbildung $f : A \to \mathbb{R}$ über einer Menge $\Omega \subset A$ ist

$$\operatorname{osc}_\Omega f := \sup_\Omega f - \inf_\Omega f.$$

Wir erinnern an die Definition der Morrey-Normen. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ein beschränktes Gebiet. Dann ist für $f : \Omega \to \mathbb{R}^L$, $p \geq 1$ und $0 < d < m$

$$||f||_{L^p_d(\Omega,\mathbb{R}^L)} := \left(\sup_{x\in\Omega,\, r>0} r^{d-m} \int_{B^m_r(x)\cap\Omega} |f|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Ist allgemeiner $\Omega \subset M$ ein beschränktes Gebiet in einer riemannschen Mannigfaltigkeit M, so ist

$$||f||_{L^p_d(\Omega,\mathbb{R}^L)} := \left(\sup_{x\in\Omega,\, r>0} r^{d-m} \int_{\mathscr{B}_r(x)\cap\Omega} |f|^p \, \mathrm{dvol}_M \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ist außerdem $k \in \mathbb{N}_0$, so ist in beiden Fällen (sowohl $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ als auch $\Omega \subset M$)

$$||f||_{W^{k,p}_d(\Omega,\mathbb{R}^L)} := \left(\sum_{0\leq\alpha\leq k} ||D^\alpha f||^p_{L^p_d(\Omega,\mathbb{R}^L)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Zur Erinnerung: Die Kohomogenität der Transformationsgruppe $[M,G]$ bezeichnen wir mit d, M_{sing} ist die Vereinigung aller singulären Orbits. Für $\epsilon > 0$ definieren wir

$$M_\epsilon := \{x \in M \ : \ \mathrm{dist}(x, \{z \in M \ : \ m_z \leq 4\}) > \epsilon\}.$$

In diesem Abschnitt beweisen wir den folgenden Satz sowie ein daraus folgendes Korollar.

Lemma 7 (Äquivariante Sobolev-Morrey-Ungleichung) *Sei $\Omega \subset M_\epsilon$ ein Gebiet. Für $k \in \mathbb{N}_0$, $1 \leq p < \infty$, und $f \in W^{k,p}_G(M,\mathbb{R}^L)$ gilt*

$$||f||_{W^{k,p}_d(\Omega,\mathbb{R}^L)} \leq C\epsilon^{\frac{d-m}{p}} ||f||_{W^{k,p}(M,\mathbb{R}^L)}, \tag{4.5}$$

wobei die Konstante $C > 0$ von $(M, \boldsymbol{g})$, d und p abhängt, nicht aber von f und ϵ.

Korollar 3 (Oszillations-Abschätzung) *Sei $\Omega \subset M_\epsilon$ ein Gebiet mit C^2-Rand. Es gelte $d \leq 3$. Für $\gamma \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ und $f \in W^{2,2}_G(M, \mathbb{R}^L)$ gilt*

$$\mathrm{osc}_\Omega |f| \leq C ||Df||^\gamma_{W^{1,2}(M,\mathbb{R}^L)} ||f||^{1-\gamma}_{W^{1,2}(M,\mathbb{R}^L)}, \tag{4.6}$$

wobei die Konstante $C > 0$ von $(M, \boldsymbol{g})$, d und ϵ abhängt, nicht aber von f.

Satz 7 verallgemeinert eine ähnliche Aussge in der Arbeit [45] von Råde. Dort wird der Fall behandelt, in dem *alle* Orbits Kodimension $\leq d$ haben, und nicht nur wie bei uns die regulären Orbits. Bei Råde lautet die Ungleichung $||f||^p_{W^{k,p}_d(M,\mathbb{R}^L)} \leq C||f||^p_{W^{k,p}(M,\mathbb{R}^L)}$ (wobei [45] eine von der unsrigen abweichende Definition der Morrey-Normen verwendet, was aber keine ernstzunehmenden Auswirkungen hat). Wir orientieren uns an Rådes Beweis und verallgemeinern diesen.

Beweis von Satz 7. Es genügt offensichtlich, den Satz für den Fall $\Omega = M_\epsilon$ und $k = 0$ zu beweisen. Wir müssen also die Ungleichung

$$||f||_{L^p_d(M_\epsilon)} \leq C\epsilon^{\frac{d-m}{p}} ||f||_{L^p(M)}$$

zeigen. Dabei können wir voraussetzen, dass $f : M \to \mathbb{R}$ eine G-*in*variante Funktion ist. Der allgemeine Fall einer G-*äqui*varianten Abbildung $f : M \to \mathbb{R}^L$ folgt dann aus der offensichtlichen Tatsache, dass f genau dann die zu beweisende Ungleichung erfüllt, wenn diese auch von der G-*in*varianten Funktion $|f|$ erfüllt wird.

Wir werden zunächst eine geeignete Ungleichung für euklidische Gebiete herleiten und diese dann über Karten auf die Mannigfaltigkeit M übertragen. Dabei wird sich folgendes Problem ergeben: Sei $\varphi : U \to V$ eine Karte (d.h. ein Diffeomorphismus) mit beschränkten Gebieten $U \subset M$, $V \subset \mathbb{R}^m$, sei ω die Jacobische Determinante des zurückgezogenen metrischen Tensors $(\varphi^{-1})^*\mathbf{g}$. Wir wollen die L^p_d-Normen von $f : U \to \mathbb{R}^L$ und $f \circ (\varphi^{-1}) : V \to \mathbb{R}^L$ vergleichen.

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in U}\sup_{r>0} r^{d-m} \int_{\mathscr{B}_r(x)\cap U} |f|^p \, dvol_M \\
=& \sup_{z\in V}\sup_{r>0} r^{d-m} \int_{\varphi[\mathscr{B}_r(\varphi^{-1}(z))\cap U]} |f \circ (\varphi^{-1})|^p \omega \, dx \\
\leq& ||\omega||_\infty \sup_{z\in V}\sup_{r>0} r^{d-m} \int_{\varphi[\mathscr{B}_r(\varphi^{-1}(z))\cap U]} |f \circ (\varphi^{-1})|^p \, dx.
\end{aligned}$$

Das Problem besteht darin, dass im Allgemeinen *nicht* $\varphi\left[\mathscr{B}_r(\varphi^{-1}(z)) \cap U\right] = B^m_r(z) \cap V$ gilt, und dass wir deswegen *nicht*

$$\int_{\varphi[\mathscr{B}_r(\varphi^{-1}(z))\cap U]} |f \circ (\varphi^{-1})|^p \, dx = \int_{B^m_r(z)\cap V} |f \circ (\varphi^{-1})|^p \, dx$$

voraussetzen können. Dieses Problem lösen wir wie folgt: Sei $\rho_{z,r}$ ein Radius mit $B^m_{\rho_{z,r}}(z) \subset \varphi\left[\mathscr{B}_r(\varphi^{-1}(z))\right]$ und sei $R_{z,r}$ ein Radius mit $R_{z,r} \geq \rho_{z,r}$ und $\varphi\left[\mathscr{B}_r(\varphi^{-1}(z))\right] \subset B^m_{R_{z,r}}(z)$. Die Radien $\rho_{z,r}$ und $R_{z,r}$ können so gewählt werden, dass

$$\sup_{z\in V, r>0} \frac{R_{z,r}}{\rho_{z,r}} \leq \gamma_M$$

für ein $\gamma_M \in (0,\infty)$, das nur von der riemannschen Mannigfaltigkeit M abhängt. Ansonsten könnte man mit etwas Differentialgeometrie sofort einen Widerspruch zur Kompaktheit von M herleiten. Nun können wir also

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in U\, r>0} r^{d-m} \int_{\mathscr{B}_r(x)\cap U} |f|^p\,dx \\
\leq &||\omega||_\infty \sup_{z\in V,\, r>0} r^{d-m} \int_{\varphi[\mathscr{B}_r(\varphi^{-1}(z))\cap U]} |f\circ(\varphi^{-1})|^p\,dx \\
\leq &||\omega||_\infty\, \gamma_M^{m-d} \sup_{z\in V,\, r>0} R_{z,r}^{d-m} \int_{B^m_{R_{z,r}}(z)\cap U} |f\circ(\varphi^{-1})|^p\,dx \\
\leq &||\omega||_\infty\, \gamma_M^{m-d} \sup_{z\in V,\, r>0} \int_{B^m_r(z)\cap V} |f\circ(\varphi^{-1})|^p\,dx
\end{aligned} \tag{4.7}$$

schlussfolgern.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ein Gebiet, sei $m \geq d \in \mathbb{N}$. Wir sagen, eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ habe die (m,d)-*Faktorisierungseigenschaft*, wenn es eine Funktion

$$f_0 : \{(x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d \;:\; (x_1, \ldots, x_m) \in \Omega\} \to \mathbb{R}$$

gibt mit $f(x_1, ..., x_m) = f_0(x_1, ..., x_d)$ für alle $(x_1, ..., x_m) \in \Omega$. Für jedes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ sei $\Omega_\epsilon := \{x \in \Omega \;:\; \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \epsilon\}$.

Sei $x \in \Omega_\epsilon$. Dann gilt $B^m_\epsilon(x) \subset \Omega$. Deswegen liegt der m-dimensionale Würfel mit Zentrum x, Kanten parallel zu den Koordinatenachsen mit Kantenlänge $\frac{2\epsilon}{\sqrt{m}}$ in Ω. Für jedes $0 < \rho \leq \epsilon$ gibt es in diesem Würfel mindestens $\lfloor \left(\frac{\epsilon}{2\sqrt{m}\rho}\right)^{m-d} \rfloor := \alpha_\epsilon$ paarweise disjunkte Kugeln $B^m_\rho(y^k)$ mit Mittelpunkten y^k $(1 \leq k \leq \alpha_{\rho_x})$, für die gilt: $y^k_i = x_i$ für $1 \leq i \leq d$. Für alle diese Kugeln gilt wegen der (m,d)-Faktorisierungseigenschaft der Funktion f

$$\int_{B^m_\rho(y^k)} |f|^p\,dx = \int_{B^m_\rho(x)} |f|^p\,dx$$

Wegen der Disjunktheit der Kugeln $B^m_\rho(y^k)$ folgt

$$\alpha_\epsilon \int_{B_\rho(x)} |f|^p\,dx = \sum_{k=1}^{\alpha_\epsilon} \int_{B^m_\rho(y^k)} |f|^p\,dx \leq \int_\Omega |f|^p\,dx,$$

daraus

$$\rho^{d-m}\int_{B_\rho(x)}|f|^p\,dx \le \left(\frac{2\sqrt{m}}{\epsilon}\right)^{m-d}\int_\Omega |f|^p\,dx$$

für jedes $x\in\Omega_\epsilon$ und jedes $0<\rho\le\epsilon$, d.h.

$$\sup_{x\in\Omega_\epsilon,\,0<\rho\le\epsilon}\rho^{d-m}\int_{B_\rho(x)}|f|^p\,dx \le (2\sqrt{m})^{m-d}\epsilon^{d-m}\int_\Omega |f|^p\,dx$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in\Omega_\epsilon,\,0<\rho\le\infty}\rho^{d-m}\int_{B_\rho(x)}|f|^p\,dx\\
&\le \epsilon^{d-m}\int_\Omega |f|^p\,dx + \sup_{x\in\Omega_\epsilon,\,0<\rho\le\epsilon}\rho^{d-m}\int_{B_\rho(x)}|f|^p\,dx\\
&\le \left[1+(2\sqrt{m})^{m-d}\right]\epsilon^{d-m}\int_\Omega |f|^p\,dx. \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

Nun sei eine kompakte Transformationsgruppe $[M,G]$ und eine G-invariante Funktion $f\in W^{1,2}_G(M,\mathbb{R})$ gegeben. Wir wählen Karten von M, die auf die folgende Weise mit der Transformationsgruppenstruktur von M kompatibel sind. Sei $\epsilon>0$ gegeben. Wir wählen ein $N\in\mathbb{N}$ sowie Karten (d.h. Diffeomorphismen) $\varphi: U_i\to V_i$ $(i=1,...,N)$ mit beschränkten Gebieten $U_i\subset M$, $V_i\subset\mathbb{R}^m$. Es sei $U_i^\epsilon := \{x\in U_i \;:\; \mathrm{dist}(x,\partial U_i)>\epsilon\}$, V_i^ϵ sei analog dazu definiert. Es seien dabei die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- $U_i^\epsilon\neq\emptyset\neq V_i^\epsilon$,
- $U_i\subset\{z\in M \;:\; m_z\le 4\}$,
- $\overline{M_\epsilon}\subset\bigcup_{i=1}^N U_i^\epsilon$

Die Existenz einer solchen endlichen Überdeckung folgt aus Kompaktheitsgründen. Weiterhin geben wir uns eine dieser Überdeckung von M_ϵ untergeordnete Partition der 1 vor, d.h. Funktionen $\alpha_i\in C_0^\infty(M,[0,1])$ mit $supp(\alpha_i)\subset U_i$, $\sum_{i=1}^N\alpha_i(x)=1$ für alle $x\in M_\epsilon$. Von diesen Funktionen verlangen wir:

- Es gibt eine G-invariante Funktion $\overline{\alpha_i}: GU_i\to[0,1]$ mit $\overline{\alpha_i}|U_i\equiv\alpha_i$.

Durch eine Symmetrisierungsprozedur (Schlagwort: Integration entlang der Orbits) lassen sich aus beliebigen wie oben beschriebenen Funktionen α_i stets solche mit der geforderten Eigenschaft herstellen. Indem wir gegebenenfalls eine Koordinatentransformation in $\mathbb{R}^m$ vornehmen, können wir außerdem folgendes erreichen:

- Für alle $x=(x_1,...,x_m),\ y=(y_1,...,y_m)\in V_i$ mit $x_k=y_k$ für alle $d+1\le k\le m$ sind $\varphi_i^{-1}(x)$ und $\varphi_i^{-1}(y)$ im selben Orbit, d.h. $G\varphi^{-1}(x)=G\varphi^{-1}(y)$.

Dass dies möglich ist folgt daraus, dass die Zerlegung von M in Orbits Gx ($x \in M$) eine *singuläre Blätterung* von M_{reg} bildet. Die dazugehörige integrable singuläre Distribution besteht aus den vertikalen Räumen $\mathcal{V}_x \subset T_x M$. Zur Erläuterung: Die Einschränkung auf M_{reg} liefert eine Blätterung. Ebenso liefert die Einschränkung auf jede Menge $M(G_{x_i})$ eine Blätterung. *Singuläre Blätterung* bedeutet, dass all diese Blätterungen in bestimmter (genauer: *stratifizierter*) Weise zusammenhängen. All dies findet man in Molinos Buch *Riemannian foliations* [38] (dort werden in Kapitel 5 *singuläre* Blätterungen behandelt). Hat man sich dort ein wenig eingelesen, so ist die Existenz von Karten wie oben beschrieben offensichtlich. Für die letzte der aufgeführten Eigenschaften dieser Karten ist dabei entscheidend, dass alle Blätter aus $\{z \in M \ : \ m_z \leq 4\}$ - d.h. alle Orbits Gx mit $x \in \{z \in M \ : \ m_z \leq 4\}$ - Kodimension ≤ 4 haben und dass $d \leq 3$ gilt. Damit sieht man dann auch schnell die folgende Konsequenz daraus:

- Sei $f : M \to \mathbb{R}$ G-invariant. Dann erfüllen die Funktionen

$$(\alpha_i f) \circ (\varphi_i^{-1}) : V_i \to \mathbb{R}$$

  die (m, d)-Faktorisierungseigenschaft.

(Man bedenke hierbei, dass der Träger von $\alpha_i f$ in $\mathrm{dist}(x, \{z \in M \ : \ m_z \leq 4\})$ liegt und dass $d \leq 4$ gilt.) Sei $\mathbf{g}$ der metrische Tensor auf M. Die Jacobische Determinante des zurückgezogenen metrischen Tensors $(\varphi_i^{-1})^* \mathbf{g}$ auf V_i bezeichnen wir mit ω_i. Wir können U_i, V_i und φ_i zusätzlich so wählen, dass

- $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{2}} \leq \omega_i \leq 2^{\frac{m}{2}}$

gilt. Denn die V_i können beliebig kleinen Durchmesser haben, wenn wir dafür N hinreichend groß wählen. Nach der Definition des Integrals über M gilt für jede integrierbare Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ und jede Menge $A \subset M_\epsilon$

$$\int_A f \, d\mathrm{vol}_M = \sum_{i=1}^{N} \int_{V_i^\epsilon \cap \varphi_i(A)} (\alpha_i f) \circ (\varphi_i^{-1}) \, \omega_i \, dx. \tag{4.9}$$

Nun können wir den Beweis des Satzes führen. Dieser beruht entscheidend darauf, dass mit (4.8) für jedes $1 \leq i \leq N$

$$\begin{aligned} &\sup_{z \in V_i^\epsilon, \, 0 < \rho \leq \infty} \rho^{d-m} \int_{B_\rho(x) \cap V_i^\epsilon} |(\alpha^{\frac{1}{p}} f) \circ (\varphi_i^{-1})|^p \, dx \\ &\leq \left[1 + (2\sqrt{m})^{m-d}\right] \epsilon^{d-m} \int_{V_i} |(\alpha^{\frac{1}{p}} f) \circ (\varphi_i^{-1})|^p \, dx \end{aligned}$$

gilt. Desweiteren verwenden wir in der folgenden Rechnung (4.7) und (4.9).

$$\begin{aligned}
||f||^p_{L^p_d(M_\epsilon)} &= \sup_{x\in M_\epsilon, r>0} r^{d-m} \int_{\mathscr{B}_r(x)\cap M_\epsilon} |f|^p \,\mathrm{dvol}_M \\
&= \sup_{x\in M_\epsilon, r>0} r^{d-m} \sum_{i=1}^N \int_{V_i^\epsilon \cap \varphi_i[\mathscr{B}_r(x)\cap M_\epsilon]} (\alpha_i |f|^p)\circ(\varphi_i^{-1})\,\omega_i\,dx \\
&\leq 2^{\frac{m}{2}} \gamma_M^{m-d} \sum_{i=1}^N \sup_{z\in V_i^\epsilon, r>0} r^{d-m} \int_{V_i^\epsilon \cap B_r^m(z)} |(\alpha_i^{\frac{1}{p}} f)\circ(\varphi_i^{-1})|^p\,dx \\
&\leq 2^{\frac{m}{2}} \gamma_M^{m-d} \left[1+(2\sqrt{m})^{m-d}\right] \epsilon^{d-m} \sum_{i=1}^N \int_{V_i} |(\alpha_i^{\frac{1}{p}} f)\circ(\varphi_i^{-1})|^p\,dx \\
&\leq 2^{m} \gamma_M^{m-d} \left[1+(2\sqrt{m})^{m-d}\right] \epsilon^{d-m} \sum_{i=1}^N \int_{V_i} (\alpha_i |f|^p)\circ(\varphi_i^{-1})\,\omega_i\,dx \\
&= 2^{m} \gamma_M^{m-d} \left[1+(2\sqrt{m})^{m-d}\right] \epsilon^{d-m} \sum_{i=1}^N \int_{U_i} \alpha_i |f|^p \,\mathrm{dvol}_M \\
&= 2^{m} \gamma_M^{m-d} \left[1+(2\sqrt{m})^{m-d}\right] \epsilon^{d-m} \int_M \sum_{i=1}^N \alpha_i |f|^p \,\mathrm{dvol}_M \\
&\leq 2^{m} \gamma_M^{m-d} \left[1+(2\sqrt{m})^{m-d}\right] \epsilon^{d-m} \int_M |f|^p \,\mathrm{dvol}_M .
\end{aligned}$$

Mi $C = 2^m \gamma_M^{m-d}\left[1+(2\sqrt{m})^{m-d}\right]^{\frac{1}{p}}$ ist der Satz demnach bewiesen. □

Beweis von Korollar 3: Wir setzen $\widetilde{f} := |f| - \inf|f|$. Dann gilt $\inf \widetilde{f} = 0$ und $\mathrm{osc}_\Omega \widetilde{f} = \sup_{x\in\Omega} |\widetilde{f}(x)|$. Sei $\gamma \in (\frac{1}{2}, 1)$ und sei $q \geq 6$. Es gelten die folgenen Ungleichungen:

- die bekannte Sobolev-Morrey-Einbettung in der Form
$$\sup_{x\in\Omega} |f(x)| \leq C(d,\gamma,q,m,|\Omega|)||df||_{L_d^{\gamma q}(\Omega,\mathbb{R}^L)}$$
(dies folgt aus $\gamma q > d$, wir sind also im „subkritischen Fall“), wobei $|\Omega|$ das Volumen von Ω ist,

- die mit der Hölder-Ungleichung mit den Exponenten $\frac{1}{\gamma}$ und $\frac{1}{1-\gamma}$ leicht zu zeigende Ungleichung
$$\begin{aligned}
||fg||_{L_d^{\gamma q}(\Omega)} &\leq \left(||f^{\gamma q}||_{L_d^{\frac{1}{\gamma}}(\Omega)} ||g^{\gamma q}||_{L_d^{\frac{1}{1-\gamma}}(\Omega)} \right)^{\frac{1}{\gamma q}} \\
&\leq \left(||f||^{\gamma q}_{L^q_d(\Omega)} ||g^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}||^{(1-\gamma)q}_{L^q_d(\Omega)} \right)^{\frac{1}{\gamma q}} \\
&\leq ||f||_{L^q_d(\Omega)} ||g^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}||^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}_{L^q_d(\Omega)};
\end{aligned}$$

- die Sobolev-Morrey-Einbettung in der Form

$$||f||_{L^q_d(\Omega,\mathbb{R}^L)} \leq C(d,m,\epsilon)||f||_{W^{1,2}_d(\Omega,\mathbb{R}^L)}$$

- und Ungleichung (4.5) aus Satz 7 in der Form

$$||f||_{W^{1,2}_d(\Omega,\mathbb{R}^L)} \leq C(d,m,\epsilon)||f||_{W^{1,2}(M,\mathbb{R}^L)}.$$

Bei der ersten und dritten dieser Ungleichungen geht die Voraussetzung ein, dass Ω einen C^2-Rand hat. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{osc}_\Omega\left(\widetilde{f}^{\frac{1}{\gamma}}\right) &= \sup_{x\in\Omega}\left|\widetilde{f}^{\frac{1}{\gamma}}\right| \\
&\leq C(d,\gamma,q,m,\epsilon)||d(\widetilde{f}^{\frac{1}{\gamma}})||_{L^{\gamma q}_d(\Omega,\mathbb{R}^L)} \\
&= C(d,\gamma,q,m,\epsilon)||\frac{1}{\gamma}\widetilde{f}^{\frac{1}{\gamma}-1}d\widetilde{f}||_{L^{\gamma q}_d(\Omega,\mathbb{R}^L)} \\
&\leq C(d,\gamma,q,m,\epsilon)||d\widetilde{f}||_{L^q(\Omega,\mathbb{R}^L)}||\widetilde{f}||^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}_{L^q(\Omega,\mathbb{R}^L)} \\
&\leq C(d,\gamma,q,m,\epsilon)||d\widetilde{f}||_{W^{1,2}_d(\Omega,\mathbb{R}^L)}\,||\widetilde{f}||^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}_{W^{1,2}_d(\Omega,\mathbb{R}^L)} \\
&\leq C(d,\gamma,q,m,\epsilon)||d\widetilde{f}||_{W^{1,2}(M,\mathbb{R}^L)}\,||\widetilde{f}||^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}_{W^{1,2}(M,\mathbb{R}^L)}.
\end{aligned}$$

Nun folgt das Lemma wegen

$$\mathrm{osc}_\Omega|f| = \left(\mathrm{osc}_\Omega\widetilde{f}^{\frac{1}{\gamma}}\right)^\gamma$$

nach beidseitigem Potenzieren mit γ. □

4.1.2 Projektionen von $W^{2,2}$-Abbildungen in eine Mannigfaltigkeit

Sei $N \subset \mathbb{R}^L$ eine kompakte Untermannigfaltigkeit ohne Rand. Zur Erinnerung: Für $\delta > 0$ ist $\mathcal{U}_\delta(N) := \{x \in \mathbb{R}^L \ : \ \mathrm{dist}(x,N) < \delta\}$ die δ-Umgebung von N. Es ist bekannt, dass es ein $\delta_N > 0$ gibt, so dass die Nächste-Punkt-Projektion

$$\Pi_N : \mathcal{U}_{\delta_N}(N) \to N$$

wohldefiniert und glatt ist. Für ein $x \in \mathcal{U}_{\delta_N}(N)$ ist dabei ist $\Pi_N(x)$ das eindeutig bestimmte $z \in N$ mit $\mathrm{dist}(x,z) = \inf\{\mathrm{dist}(x,y) \ : \ y \in N\}$.

Lemma 8 (Projektionslemma) *Sei M eine riemannsche Mannigfaltigkeit und sei $N \subset \mathbb{R}^L$ eine kompakte Untermannigfaltigkeit. Es gibt eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $f \in W^{2,2}(M,\mathcal{U}_{\delta_N}(N))$ gilt:*

$$||\Pi_N \circ f||_{W^{2,2}(M,\mathbb{R}^L)} \leq C||f||_{W^{2,2}(M,\mathbb{R}^L)}.$$

Den Beweis findet man in Kapitel A.3 der Dissertation von A.J. Nerf [42].

4.1.3 Weitere Ungleichungen

Lemma 9 *Es gibt eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $u \in W^{2,2}(B_r^m, N)$ gilt:*

(i)

$$\int_{B_r^m} \left(|D^2u|^2 + |Du|^4\right)\, dx \leq C \int_{B_{2r}^m} |\Delta u|^2\, dx + Cr^{m-4}. \tag{4.10}$$

(ii)

$$\int_{B_r^m} |D^2u|^2\, dx \leq C \int_{B_{2r}^m} |\Delta u|^2\, dx + Cr^{-2} \int_{B_{2r}^m} |Du|^2\, dx. \tag{4.11}$$

Beweis: Zu (i): Für alle $s, t \in [r, 2r]$ mit $r < s < t < 2r < 2$ wählen wir eine Abschneidefunktion $\varphi \in C_0^\infty(B_r^m, [0,1])$ mit $\varphi|_{B_s^m} \equiv 1$ und $\varphi|_{B_{2r}^m \setminus B_t^m} \equiv 0$ und $|D\varphi| \leq \frac{c}{t-s}$ für ein $c > 0$, das nicht von s und t abhängt.

$$\begin{aligned}
\int_{B_s^m} |D^2u|^2\, dx &\leq \int_{B_t^m} |D^2(\varphi u)|^2\, dx \\
&= \int_{B_t^m} |\Delta(\varphi u)|^2\, dx \\
&= \int_{B_t^m} |\Delta u|^2\, dx + \int_{B_t \setminus B_s} |D\varphi|^2\, |Du|^2\, dx + \int_{B_t \setminus B_s} |u|\, |\Delta\varphi|\, dx \\
&\leq \int_{B_t^m} |\Delta u|^2\, dx + C \int_{B_t \setminus B_s} (t-s)^{-2} |Du|^2\, dx \qquad (4.12) \\
&\quad + C\mathscr{H}^m(B_{2r}^m)(t-s)^{-2} \\
&\leq \int_{B_t^m} |\Delta u|^2\, dx + 2C\mathscr{H}^m(B_{2r}^m)(t-s)^{-4} + C \int_{B_t \setminus B_s} |Du|^4\, dx \\
&\leq \int_{B_{2r}^m} |\Delta u|^2\, dx + 2C\mathscr{H}^m(B_2^m)(t-s)^{m-4} + C \int_{B_t \setminus B_s} |Du|^4\, dx.
\end{aligned}$$
$$(4.13)$$

Zur Erläuterung dieser Abschätzung: Den zweiten Schritt erhält man durch zweimalige partielle Integration. Im vierten Schritt verwenden wir, dass N kompakt und somit beschränkt ist (weswegen alle $u \in W^{2,2}(B_{2r}^m, N)$ gleichmäßig beschränkt sind). Im fünften Schritt verwenden wir $(t-s)^{-2} \leq (t-s)^{-4}$. Im sechsten Schritt verwenden wir $(t-s) \leq r$.

In der folgenden Abschätzung verwenden wir die Gagliardo-Nirenberg-Ungleichung in der folgenden Form:

$$\int_{B_\rho^m} |Df|^4\, dx \leq C||f||_\infty \int_{B_s^m} |D^2 f|^2\, dx$$

für alle $f \in W_0^{2,2}(B_\rho^m)$ (hier ist $f|_{S^{m-1}} \equiv 0$ (im Spursinn verstanden) wichtig!) mit einer Konstanten, die nicht von f und ρ abhängt. Siehe [43]. Zusammen mit der Kompaktheit von N ergibt das

$$\int_{B_s^m} |Du|^4 \leq \int_{B_t^m} |D(\varphi u)|^4 \leq C \int_{B_t^m} |D^2(\varphi u)|^2$$

mit einer Konstanten $C > 0$, die von N, nicht aber von f, s und t abhängt. Zusammen mit (4.12) erhalten wir mit einer neuen, von f, s und t unabhängigen Konstanetn $C > 0$

$$\begin{aligned}\int_{B_s^m} \left(|D^2u|^2 + |Du|^4\right) dx \leq & C \int_{B_{2r}^m} |\Delta u|^2 \, dx + C(t-s)^{m-4} \\ & + C \int_{B_t^m \setminus B_s^m} \left(|D^2u|^2 + |Du|^4\right) dx.\end{aligned}$$

Nun wenden wir ein sogenanntes *hole filling* Argument an: Wir addieren auf beiden Seiten $C\int_{B_s} (|D^2u|^2 + |Du|^4)\, dx$ und dividieren dann durch $(1 + C)$. So erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{B_s^m} \left(|D^2u|^2 + |Du|^4\right) dx \leq & \frac{C}{1+C} \int_{B_{2r}^m} |\Delta u|^2 \, dx + \frac{C}{1+C}(t-s)^{m-4} \\ & + \frac{C}{1+C} \int_{B_t^m} \left(|D^2u|^2 + |Du|^4\right) dx.\end{aligned}$$

Darauf wenden wir nun die folgende Aussage an (siehe Lemma 3.2 in [12]):
Sei $r > 0$, sei $h : [r, 2r] \to (0, \infty)$ beschränkt, seien $A, B > 0$, sei $0 < \theta < 1$ und sei $p \geq 2$. Gilt

$$h(s) \leq \theta h(t) + A(t-s)^{-p} + B$$

für alle $s, t \in [r, 2r]$ mit $s < t$, so folgt

$$h(s) \leq C(As^{-p} + B)$$

für alle $s \in [r, 2r]$ mit einer Konstante $C > 0$, die von θ und p, nicht aber von s und r abhängt.
Mit dieser Aussage erhalten wir:

$$\int_{B_r^m} \left(|D^2u|^2 + |Du|^4\right) dx \leq C \int_{B_{2r}^m} |\Delta u|^2 \, dx + Cr^{m-4}$$

mit einer Konstanten $C > 0$, die nicht von f und r abhängt. Damit ist Teil (i) das Lemma bewiesen.

Zu (ii): Wir entnehmen den Beweis Schevens Arbeit [48] (dort Lemma A.1), schreiben ihn nur etwas ausführlicher hin. Wir nehmen an, dass u glatt ist. Das Lemma folgt dann mit einem Approximationsargument ($C^\infty(B_{2r}^m, \mathbb{R}^L)$ ist dicht in $W^{2,2}(B^m_{2r},\mathbb{R}^L)$). Sei $\eta \in C^\infty(B^m_{2r},[0,1])$ eine Abschneide-Funktion mit $\eta \equiv 1$ auf B^m_r und $|D\eta| \leq \frac{C}{r}$ für eine Konstante $C > 0$. Wir führen zwei partielle Integrationen durch und wenden die Young-Ungleichung an (und setzen dabei für den Verlauf dieser Rechnung $\int (...)\, dx := \int_{B^m_{2r}} (...)\, dx$):

$$\begin{aligned}
\int \eta^4 |D^2u|^2 &= \int \eta^4 u_{ik} u_{ik}\, dx \\
&= \int \eta^4 u_{ik} u_{ik}\, dx + 4 \int \eta^3 \eta_k \left[u_i u_{ik} - u_k u_{ii}\right] dx \\
&\leq \int \eta^4 |\Delta u|^2\, dx + 8 \int \eta^3 |D\eta|\, |Du|\, |D^2u|\, dx \\
&\leq \int \eta^4 |\Delta u|^2\, dx + \frac{1}{2} \int \eta^4 |D^2u|^2\, dx + 32 \int \eta^2 |D\eta|^2\, |Du|^2\, dx \\
&\leq \int \eta^4 |\Delta u|^2\, dx + \frac{1}{2} \int \eta^4 |D^2u|^2\, dx + \frac{C}{r^2} \int \eta^2 |Du|^2\, dx.
\end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned}
\int_{B^m_r} |D^2u|^2\, dx \leq \int \eta^4 |D^2u|^2\, dx \\
&\leq 2 \int \eta^4 |\Delta u|^2\, dx + \frac{C}{r^2} \int \eta^2 |Du|^2 \\
&\leq 2 \int_{B^m_{2r}} |\Delta u|^2\, dx + \frac{C}{r^2} \int_{B^m_{2r}} |Du|^2.
\end{aligned}$$

Damit ist das Lemma bewiesen. $\square$

4.2 Ein Interpolationslemma

Zur Erinnerung: d ist die Kohomogenität von $[\mathbb{R}^m, G]$.

Lemma 10 (Interpolationslemma) *Es gelte $d \leq 4$ und*

$$\mathscr{H}\text{-}\dim\left(\{x \in \mathbb{R}^m \; : \; m_x > 4\}\right) \leq m - 5.$$

Gegeben seien Abbildungen

$$u_i, v_i \in W^{2,2}_G(B^m, N_i), \quad u, v \in W^{2,2}_G(B^m, N_\infty)$$

mit

$$u_i \to u, \; v_i \to v \textit{ schwach in } W^{2,2}$$

und

$$v \equiv u \textit{ auf } B^m \setminus B^m_\eta$$

für ein $\eta \in (0,1)$. Für ein $R \in (\eta, 1)$, das beliebig nahe bei 1 gewählt werden kann, gibt es ein $\rho \in (0, R)$ und Abbildungen

$$h_i \in W^{2,2}_G(B^m, N_i)$$

mit

$$h_i \equiv u_i \textit{ auf } B^m \setminus B^m_R, \quad h_i \equiv v_i \textit{ auf } B^m_\rho \textit{ für alle } i \in \mathbb{N}$$

und

$$\lim_{i\to\infty} ||h_i - v_i||_{W^{2,2}(B^m_R, \mathbb{R}^L)} = 0.$$

Bemerkung: Die Abbildungen h_i hängen von dem gewählten Radius R ab!

In den folgenden drei Abschnitten stellen wir Aussagen bereit, auf denen der Beweis des Interpolationssatzes beruht. Im vierten Abschnitt werden wir dann den Interpolationssatz beweisen.

4.2.1 Ein Fortsetzungslemma

Zur Erinnerung: $M_\epsilon := \{x \in M \ : \ \mathrm{dist}(x, \{z \in M \ : \ m_z \leq 4\}) > \epsilon\}$.

Lemma 11 *Es gelte $d \leq 4$. Gegeben seien $\epsilon > 0$, $0 < \lambda < \epsilon$, $\frac{1}{2} < \gamma < 1$, $K > 0$ und Abbildungen*

$$\begin{aligned} f_0,\ g_0 &\in W^{2,2}_G(S^{m-1}, N), \\ f_1,\ g_1 &\in W^{1,2}_G(S^{m-1}, \mathbb{R}^L) \end{aligned}$$

mit

$$\left.\begin{array}{rl} \int_{S^{m-1}}(|Df_0|^2 + |Dg_0|^2)\, d\mathscr{H}^{m-1} & \leq K^2, \\ \int_{S^{m-1}}(|D^2 f_0|^2 + |D^2 g_0|^2)\, d\mathscr{H}^{m-1} & \leq K^2, \\ \int_{S^{m-1}}(|Df_1|^2 + |Dg_1|^2)\, d\mathscr{H}^{m-1} & \leq K^2, \\ \int_{S^{m-1}} |g_0 - f_0|^2 \ d\mathscr{H}^{m-1} & \leq \lambda^2 K^2, \\ \int_{S^{m-1}} |g_1 - f_1|^2 \ d\mathscr{H}^{m-1} & \leq \lambda^2 K^2, \\ \int_{S^{m-1}} |Dg_0 - Df_0|^2 \ d\mathscr{H}^{m-1} & \leq \lambda^2 K^2, \\ \int_{S^{m-1}} |g_0 - f_0 - \lambda f_1|^2 \ d\mathscr{H}^{m-1} & \leq \lambda^4 K^2. \end{array}\right\} \tag{4.14}$$

Dann gibt es eine Abbildung

$$h \in W^{2,2}_G \cap C^0\left([0,\lambda] \times S^{m-1}, \mathbb{R}^L\right)$$

mit

$$\begin{aligned} h(0,x) = f_0(x),\ & h(\lambda, x) = g_0(x), \\ \frac{d}{dt} h(0,x) = f_1(x),\ & \frac{d}{dt} h(\lambda, x) = g_1(x) \end{aligned} \tag{4.15}$$

für fast alle $x \in S^{m-1}$,

$$||Dh||_{W^{1,2}} \leq C_2 K \lambda^{\frac{1}{2}} \tag{4.16}$$

und

$$\mathit{dist}\,(h(t,x), N) \leq C_2 K \lambda^{1-\gamma} \ \textit{für fast alle } x \in (S^{m-1})_\epsilon,\ t \in [0,\lambda]. \tag{4.17}$$

Die Konstanten $C_1, C_2 > 0$ hängt in beiden Fällen nicht *von λ, γ, K, f_0, f_1, g_0 und g_1 ab.*

Die Gruppe G operiere hierbei auf $\mathbb{R} \times S^{m-1}$ durch $g(x,\omega) = (x, g\omega)$ für alle $g \in G$, $(x,\omega) \in \mathbb{R} \times S^{m-1}$.
Dieser Satz wurde dür den Fall nicht-äquivarianter Abbildungen von Gastel und Nerf in [17] bewiesen (dort wird das entsprechende Ergebnis für $W^{k,p}$-Abbildungen bewiesen; wenn wir uns im folgenden auf diese Arbeit beziehen, dann nur auf deren Spezialfall $k = p = 2$). Dort wird an die Dimension von S^{m-1} die Bedingung $m - 1 = 3$ gestellt. In unserem Fall tritt an deren Stelle die Bedingung $d - 1 \leq 3$

an die Kohomogenität der Transformationsgruppe $[S^{m-1}, G]$. Das Ergebnis von Gastel und Nerf ist in gewisser Hinsicht eine Höhere-Ordnung-Version des bekannten Lemmas von Luckhaus [37] für $W^{1,p}$-Abbildung. Luckhaus muss keine Einschränkung an der Dimension $m-1$ voraussetzen. Da für einige seiner Konstruktionen bislang jedoch keine Höhere-Ordnung-Analoga gefunden werden konnten, wurde im Fall Höherer Ordnung bisher nur der „subkritische" Fall $m-1=3$ abgehandelt. Das Lemma von Luckhaus wurde von Gastel [13] auf den Fall äquivarianter $W^{1,p}$-Abbildungen verallgemeinert. Unser Interpolationssatz kann nun als eine Höhere-Ordnung-Version dieses Ergebnisses angesehen werden. Wiederum müssen wir uns jedoch auf den „subkritischen" Fall beschränken, d.h. wir müssen $d-1 \leq 3$ voraussetzen.

Die Konstruktion der interpolierenden Abbildung h werden wir aus [17] übernehmen. Die Normabschätzung (4.16) brauchen wir nicht zu beweisen, sondern können sie aus [17] zitieren. Dies liegt daran, dass dort die Bedingung $m-1=3$ im Beweis der Normabschätzung *nicht* eingeht. Die Distanzabschätzung (4.17) können wir jedoch nicht von Gastel und Nerf übernehmen. Im nicht-äquivarianten Fall gilt wegen $M_{sing} = \emptyset$ für alle $\epsilon > 0$ $(S^{m-1})_\epsilon = S^{m-1}$, deswegen hat (4.17) dann die Form

$$\text{dist}\,(h(t,x), N) \leq cK\lambda^{1-\gamma} \quad \text{für fast alle} \quad x \in S^{m-1},\ t \in [0,\lambda]. \tag{4.18}$$

Der Beweis dieser Distanzabschätzung beruht auf der Sobolev-Morrey-Ungleichung

$$\text{osc}_{S^{m-1}}|f| \leq C||Df||^{\gamma}_{W^{1,2}}||f||^{1-\gamma}_{W^{1,2}}, \tag{4.19}$$

welche unter der Voraussetzung $m-1 \leq 3$ gültig ist. In unserem Fall - m beliebig, $d-1 \leq 3$ - verwenden wir stattdessen die Sobolev-Morrey-Abschätzung aus Korollar 3

$$\text{osc}_{(S^{m-1})_\epsilon}|f| \leq C||Df||^{\gamma}_{W^{1,2}}||f||^{1-\gamma}_{W^{1,2}} \tag{4.20}$$

und werden damit unsere Distanzabschätzung (4.17).

$$\text{dist}\,(h(t,x), N) \leq c\epsilon^{d-m}K\lambda^{1-\gamma} \quad \text{für fast alle} \quad x \in (S^{m-1})_\epsilon,\ t \in [0,\lambda]$$

beweisen. Ein wichtiger Punkt hierbei ist, dass die Abschätzung nicht für fast alle $x \in S^{m-1}$, sondern nur für fast alle $x \in (S^{m-1})_\epsilon$ gilt. Diesen Mangel auszugleichen wird uns im sogenannten *Modifikationslemma* (Lemma 12) noch viel Aufwand abfordern.

Wie bereits angemerkt, übernehmen wir die Konstruktion von h aus der Arbeit [17] von Gastel und Nerf. Es handelt sich um eine Art kubischer Interpolation. Für eine nähere Motivation des Vorgehens verweisen wir auf diese Arbeit.

Seien P_0, P_1, Q_1 und Q_2 die eindeutig bestimmten Polynome vom Grad 3 mit

$$\begin{aligned}
P_0(0) = 1,\ P_0'(0) = 0,\ P_0(\lambda) = 0,\ P_0'(\lambda) = 0,\\
P_1(0) = 0,\ P_1'(0) = 1,\ P_1(\lambda) = 0,\ P_1'(\lambda) = 0,\\
Q_0(0) = 0,\ Q_0'(0) = 0,\ Q_0(\lambda) = 1,\ Q_0'(\lambda) = 0,\\
Q_1(0) = 0,\ Q_1'(0) = 0,\ Q_1(\lambda) = 0,\ Q_1'(\lambda) = 1.
\end{aligned}$$

Sei ein $\varphi \in C_0^\infty(B_1^m(0))$ mit $\int_{B_1^m(0)} \varphi\, dx = 1$ gegeben. Weiterhin sei φ so gewählt, dass für alle Polynome T vom Grad ≤ 2 gilt: $\varphi_\epsilon \star T = T$, wobei wir die üblichen Bezeichnungen $\varphi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^m}\varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ und $f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(y)g(x-y)\, dx$ verwenden. Die Existenz eines solchen φ ist durch das Lemma 3.5.6 aus Ziemers Buch [59] gesichert. Es sei

$$a(t) := \frac{t(\lambda - t)}{\lambda}$$

für $0 \leq t \leq \lambda$. Wir definieren

$$\begin{aligned}
U_j(t,x) &:= \frac{1}{a(t)^m} \int_{B_1^m(0)} \varphi\left(\frac{y}{a(t)}\right) u_j\left(\frac{x-y}{|x-y|}\right) dy,\\
V_j(t,x) &:= \frac{1}{a(t)^m} \int_{B_1^m(0)} \varphi\left(\frac{y}{a(t)}\right) v_j\left(\frac{x-y}{|x-y|}\right) dy.
\end{aligned}$$

Die Abbildung w führen wir wie folgt ein:

$$w(t,x) := \sum_{k=0}^{1} \left[P_j(t)U_j(t,x) + Q_j(t)V_j(t,x)\right].$$

(Bemerkung: Auf den ersten Blick mag die Konstruktion

$$w(t,x) \overset{?}{:=} \sum_{k=0}^{1} \left[P_j(t)u_j(x) + Q_j(t)v_j(v,x)\right].$$

naheliegend erscheinen. Man sieht aber leicht, dass diese Abbildung nicht in $W^{2,2}$ zu liegen braucht.)

Gastel und Nerf beweisen nun die Normabschätzung (4.16):

$$||Dh||_{W^{1,2}} \leq CK\lambda^{\frac{1}{2}}.$$

Wir erwähnen nochmals: Gastel und Nerf setzen bei ihrem Satz $m-1 = 3$ voraus. Diese Voraussetzung geht in den Beweis dieser Normabschätzung jedoch *nicht* ein. Deswegen können wir sie ohne erneuten Beweis zitieren. Deswegen müssen wir nur noch die Distanzabschätzung (4.17) zeigen.

Von Gastel und Nerf übernehmen wir (Gleichung (30) in [17])

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(w(t,x),N) \leq& |U_0(t,x)-u_0(x)| + |Q_0(t)(V_0(t,x)-U_0(t,x))|\\ &+ |P_1(t)U_1(t,x)+Q_1(t)V_1(t,x)|\\ :=& I + II + III.\end{aligned}$$

Bei der Abschätzung der Terme I, II, III halten wir uns eng an die Arbeit von Gastel und Nerf. Unsere Modifikationen an deren Vorgehen kann man in etwa wie folgt beschreiben: Wo dort L^p-Normen auftreten, ersetzen wir diese durch L^p_d-Normen.

Wir verwenden die Sobolev-Morrey-Ungleichung

$$W^{1,2}_3 \hookrightarrow L^6_3$$

Diese wurde auf $\mathbb{R}^n$ für beliebiges n von Adams [1] bewiesen. Die Übertragung auf Gebiete mit hinreichend regulärem Rand (z.B. C^2-Rand) in $\mathbb{R}^n$ bzw. in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit sollte einigen Aufwand, aber keine inhaltlichen Probleme bereiten. Zusammen mit Satz 7 ergibt dies

$$||\alpha||_{L^6_3(\Omega_\epsilon,\mathbb{R}^L)} \leq C(\epsilon,m)||\alpha||_{W^{1,2}(S^{m-1},\mathbb{R}^L)}.$$

Damit erhalten wir die folgende Ungleichung im Fall $B^m_r(x)\cap S^{m-1}\subset (S^{m-1})_{\frac{\epsilon}{2}}$, die uns für die Abschätzung von I und III behilflich sein wird:

$$\begin{aligned}& r^{1-m}\int_{S^{m-1}\cap B^m_r(x)} |\alpha|\, d\mathscr{H}^{m-1}\\ \leq& r^{1-m}\mathscr{H}^{m-1}(S^{m-1}\cap B^m_r(x))^{\frac{5}{6}}\left(\int_{S^{m-1}\cap B^m_r(x)}|\alpha|^6\, d\mathscr{H}^{m-1}\right)^{\frac{1}{6}}\\ =& r^{\frac{1}{6}(1-m)}r^{\frac{1}{6}(m-3)}\left(r^{3-m}\int_{S^{m-1}\cap B^m_r(x)}|\alpha|^6\, d\mathscr{H}^{m-1}\right)^{\frac{1}{6}}\\ \leq& c(m)r^{-\frac{1}{3}}||\alpha||_{L^6_3(S^{m-1}\cap B^m_r(x),\mathbb{R}^L)}\\ \leq& C(\epsilon,m)\, r^{-\frac{1}{3}}||\alpha||_{W^{1,2}(S^{m-1},\mathbb{R}^L)}.\end{aligned} \tag{4.21}$$

Sei $(x,t)\in(S^{m-1})_\epsilon\times[0,\lambda]$. Wegen der Bedingung $\lambda<\epsilon$ gilt $\sup_{t\in[0,\lambda]}a(t)\leq\frac{\epsilon}{4}$, daraus folgt $S^{m-1}\cap B^m_{2a(t)}(x)\subset(S^{m-1})_{\frac{\epsilon}{2}}$. Deswegen können wir für die Abschätzung von I (4.21) mit $\alpha=u_1$ und $\alpha=v_1$ anwenden:

$$\begin{aligned}|U_1(t,x)| \leq& a(t)^{-m}\int_{B^m_{a(t)}}\varphi\left(\frac{y}{a(t)}\right)\left|u_1\left(\frac{x-y}{|x-y|}\right)\right|dy\\ =& a(t)^{-m}\int_{B^m_{a(t)}(x)}\varphi\left(\frac{x-y}{a(t)}\right)\left|u_1\left(\frac{y}{|y|}\right)\right|dy\\ \leq& c\, a(t)^{1-m}\int_{S^{m-1}\cap B^m_{2a(t)}(x)}|u_1|\, d\mathscr{H}^{m-1}\\ \leq& C(\epsilon,m)\, a(t)^{-\frac{1}{3}}||u_1||_{W^{1,2}(S^{m-1},\mathbb{R}^L)}\\ \leq& C(\epsilon,m)\, a(t)^{-\frac{1}{3}}K.\end{aligned}$$

(*Bemerkung: In der Arbeit [17] von Gastel und Nerf steht in der entsprechenden Rechnung* $S^{m-1} \cap B^m_{a(t)}(x)$ *anstelle von* $S^{m-1} \cap B^m_{2a(t)}(x)$. *Dies ist falsch und wurde in der Dissertation von Nerf [42] korrigiert.*)
Das Polynom P_1 erfüllt die Wachstumsbedingung

$$P_1(t) \leq c\frac{t(\lambda - t)^2}{\lambda^2} = c\,a(t)^2.$$

Also gilt

$$|P_1(t)U_1(t,x)| \leq C(\epsilon, m)\,a(t)^{\frac{5}{3}}K \leq C(\epsilon, m)\lambda^{\frac{5}{3}}K.$$

Analog erhalten wir

$$|Q_1(t)V_1(t,x)| \leq C(\epsilon, m)\lambda^{\frac{5}{3}}K$$

und somit

$$III \leq C(\epsilon, m)\,\lambda^{\frac{5}{3}}K. \tag{4.22}$$

Nun schätzen wir den Term I ab. Dafür benötigen wir die folgende $W^{k,p}$-Version des Satzes von Taylor, der sich in dem bekannten Buch von Ziemer findet ([59], Satz 3.4.1):

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $1 \leq \kappa \leq k$ *und* $(k-\kappa)p < m$. *Sei* $u \in W^{k,p}(\Omega)$ *Wir definieren das Taylor-Polynom*

$$T_x^{\kappa-1}u(y) := \sum_{0 \leq |\gamma| \leq \kappa - 1} \frac{1}{\gamma!} D^\gamma u(x)(y-x)^\gamma.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\left[\int_{B_r^m(x)} |u(y) - T_x^{\kappa-1}u(y)|^p\,dy\right]^{\frac{1}{p}} \\
\leq & t^\kappa \sum_{|\gamma|=k} \frac{\kappa}{\gamma!} \int_0^1 (1-s)^{\kappa-1} \left[s^{-m} \int_{B_{st}^m(x)} |D^\gamma u(y)|^p\,dy\right]^{\frac{1}{p}} ds
\end{aligned}$$

für fast alle $x \in \Omega$ *und* $t > 0$, *so dass* $B_t^m(x) \subset \Omega$.

Diesen wenden wir zusammen mit (4.21) mit $\alpha = Du_0$ an:

$$\begin{aligned}
&|U_0(t,x) - u_0(x)| \leq \\
\leq & a(t)^{-m} \int_{B^m_{a(t)}} \left| \varphi\left(\frac{y}{a(t)}\right) \left(u_0\left(\frac{x-y}{|x-y|}\right) - u_0\left(\frac{x-0}{|x-0|}\right)\right)\right| dy \\
\leq & a(t)^{1-m} \int_0^1 s^{-m} \int_{B^m_{sa(t)}} \left| D_y \left[u_0\left(\frac{x-y}{|x-y|}\right)\right]\right| dy\, ds \\
\leq & ca(t) \int_0^1 (sa(t))^{1-m} \int_{S^{m-1}\cap B^m_{2sa(t)}(x)} |Du_0|\, d\mathscr{H}^{m-1}\, ds \\
\leq & C(\epsilon, m)\, a(t) \int_0^1 (sa(t))^{-\frac{1}{3}} ||\alpha||_{W^{1,2}(S^{m-1},\mathbb{R}^L)}\, ds \\
\leq & C(\epsilon, m)\, a(t)^{\frac{2}{3}} K \\
\leq & C(\epsilon, m)\, \lambda^{\frac{2}{3}} K.
\end{aligned}$$

(*Bemerkung: Auch hier steht in der Arbeit [17] von Gastel und Nerf in der entsprechenden Rechnung* $S^{m-1}\cap B^m_{a(t)}(x)$ *anstelle von* $S^{m-1}\cap B^m_{2a(t)}(x)$*, was wiederum in der Dissertation von Nerf [42] korrigiert wurde.*)
Also:

$$I \leq C(\epsilon, m)\lambda^{\frac{2}{3}} K. \tag{4.23}$$

Für die Abschätzung von II verwenden wir die Oszillationsabschätzung aus Korollar 3. Sei $\Omega_\epsilon \subset S^{m-1}$ ein Gebiet mit C^2-Rand mit $(S^{m-1})_\epsilon \subset \Omega_\epsilon \subset (S^{m-1})_{\frac{\epsilon}{2}}$. Für $x \in \Omega_\epsilon$ gilt dann

$$\begin{aligned}
|v_0(x) - u_0(x)| &\leq \inf_{S^{m-1}} |v_0 - u_0| + \operatorname{osc}_{\Omega_\epsilon}|v_0 - u_0| \\
&\leq \quad C(m)||v_0 - u_0||_{L^2(S^{m-1})} \\
&\quad + C(d,\gamma,m,\epsilon)||D(v_0-u_0)||^{\gamma}_{W^{1,2}(M,\mathbb{R}^L)}||v_0-u_0||^{1-\gamma}_{W^{1,2}(M,\mathbb{R}^L)} \\
&\leq C(m)K\lambda + C(d,\gamma,m,\epsilon)\epsilon^{d-m}K\lambda^{1-\gamma}.
\end{aligned}$$

Da Q_0 und φ beschränkt sind, folgert man daraus leicht

$$II \leq C(d,\gamma,m,\epsilon) \tag{4.24}$$

Aus (4.22), (4.23) und (4.24) folgt nun die Behauptung:

$$\operatorname{dist}(h(t,x), N) \leq C(d,\gamma,m,\epsilon)K\lambda^{1-\gamma} \text{ für fast alle } x \in (S^{m-1})_\epsilon,\ t \in [0,\lambda].$$

$\square$

4.2.2 Ein Modifikationslemma

Zur Erinnerung: $M_\epsilon := \{x \in M \ : \ \text{dist}(x, \{z \in M \ : \ m_z \leq 4\}) > \epsilon\}$.
Allein an dem folgenden Satz liegt es, dass einem in dieser Arbeit immer wieder die zunächst etwas unnatürlich wirkende Bedingung

$$\mathscr{H}\text{-}\dim(\{x \in M \ : \ m_x > 4\}) \leq m - 5$$

begegnet.

Lemma 12 *Es gelte*

$$\mathscr{H}\text{-}\dim(\{x \in M \ : \ m_x > 4\}) \leq m - 4 \quad (sic!).$$

Seien $0 < a < b < 2$, sei $\epsilon > 0$ hinreichend klein und sei $K > 0$. Gegeben sei eine Abbildung

$$g \in W^{2,2}_G(M \times [-b, b], \mathbb{R}^L)$$

mit

$$\begin{aligned} &dist(g(x), N) \leq K \\ &\text{für fast alle } x \in M_\epsilon \times [-b, b] \text{ und fast alle } x \in M \times ([-b, -a] \cup [a, b]). \end{aligned}$$

Dann gibt es eine Modifikation

$$\overline{g} \in W^{2,2}_G(M \times [-b, b], \mathbb{R}^L)$$

von g in dem Sinne, dass gilt:

$$g \equiv \overline{g} \text{ in einer Umgebung von } M \times \{-b, b\} \text{ sowie auf } M_{\epsilon'} \times [-b, b] \tag{4.25}$$

für ein $\epsilon' > \epsilon$,

$$||\overline{g}||_{W^{2,2}} \leq C||g||_{W^{2,2}}, \tag{4.26}$$

wobei die Konstante $C > 0$ nicht von a, b und g abhängt, und mit

$$dist(g(x), N) \leq K \text{ für fast alle } x \in M \times [-b, b]. \tag{4.27}$$

Bemerkung: Es ist *richtig*, dass in diesem Satz $\mathscr{H}\text{-}\dim(...) \leq m-4$ vorausgesetzt wird, und nicht wie in vielen anderen Sätzen $\mathscr{H}\text{-}\dim(...) \leq m - 5$.

Qualitative Beschreibung des Beweises. Wir konstruieren Paare offener Mengen

$$\mathscr{P}^i \subset \mathscr{M}^i \subset M$$

$(i = 1, ..., \ell \in \mathbb{N})$ mit

$$M = M_\epsilon \cup \bigcup_{1 \leq i \leq \ell} \mathscr{M}^i \tag{4.28}$$

und

$$\mathscr{M}^i \setminus \mathscr{P}^i \subset M_\epsilon \cup \bigcup_{j=i+1}^{\ell} \mathscr{M}^i \text{ für alle } 1 \leq i \leq \ell \tag{4.29}$$

(mit $\bigcup_{i=\ell+1}^{\ell} \mathscr{M}^i = \emptyset$). Dann setzen wir für $i \in \{1, ..., \ell\}$

$$\mathscr{K}_i := \{(\mathscr{M}_i \setminus \mathscr{P}_i) \times [-b, b]\} \cup \{\mathscr{M}_i \times ([-b, -a] \cup [a, b])\}$$

und

$$\widetilde{\mathscr{K}_i} := \mathscr{M}_i \times [-b, b]$$

und außerdem

$$\widetilde{\mathscr{K}_{\ell+1}} := M_\epsilon \times [-b, b].$$

Wegen (4.29) gilt für alle $1 \leq i \leq \ell$

$$\mathscr{K}_i \subset M \times \{[-b, -a) \cup (a, b]\} \cup \bigcup_{l=i+1}^{\ell+1} \widetilde{\mathscr{K}_i}. \tag{4.30}$$

Außerdem gilt

$$M \times [-b, b] = \bigcup_{l=1}^{\ell+1} \widetilde{\mathscr{K}_i}.$$

Die Abbildung $\overline{g}$ konstruieren wir induktiv: Sei

$$h^{[\ell+1]} : M \times \{[-b, -a) \cup (a, b]\} \cup \widetilde{\mathscr{K}_{\ell+1}} \to \mathbb{R}^L$$

als Einschränkung von g gegeben. Für jedes $1 \leq i \leq \ell$ konstruieren wir aus der $W^{2,2}$-Abbildung

$$h^{[i+1]} : M \times \{[-b, -a) \cup (a, b]\} \cup \bigcup_{l=i+1}^{\ell+1} \widetilde{\mathscr{K}_l} \to \mathbb{R}^L$$

eine neue $W^{2,2}$-Abbildung

$$h^{[i]} : M \times \{[-b, -a) \cup (a, b]\} \cup \bigcup_{l=i}^{\ell+1} \widetilde{\mathscr{K}_l} \to \mathbb{R}^L.$$

mit

$$Im(h^{[i]}) \subset Im(h^{[i+1]}). \tag{4.31}$$

Wegen (4.30) können wir dabei so vorgehen, dass wir aus der eingeschränkten $W^{2,2}$-Abbildung

$$h^{[i+1]} : \mathscr{K}_i \to \mathbb{R}^L$$

eine neue $W^{2,2}$-Abbildung

$$\beta_i : \widetilde{\mathscr{K}_i} \to \mathbb{R}^L$$

mit

$$Im(\beta_i) \subset Im(h^{[i+1]})$$

und

$$\beta_i \equiv h^{[i+1]} \quad \text{in einer Umgebung von } \partial\widetilde{\mathscr{K}_i} \cap \mathscr{K}_i$$

konstruieren. Wir setzen dann

$$h^{[i]}(z) := \begin{cases} h^{[i+1]}(z) & \text{für } z \notin \widetilde{\mathscr{K}_i} \\ \beta_i(z) & \text{für } z \in \widetilde{\mathscr{K}_i} \end{cases}.$$

Die Eigenschaften (4.31) wird von dieser Abbildung erfüllt. Schließlich erhalten wir mit

$$\overline{g} := h^{[1]} : M \times [-b, b] \to \mathbb{R}^L$$

unsere gesuchte Modifikation von g. Wegen $Im(\overline{g}) \subset Im(h^{[\ell+1]})$ erfüllt diese offensichtlich die Distanzabschätzung (4.27). Dass die geforderte Eigenschaft

$$\overline{g} \equiv g \quad \text{in einer Umgebung von} \quad M \times [\{-b\} \cup \{b\}]. \tag{4.32}$$

erfüllt, ist bei genauer Betrachtung der folgenden Konstruktion offensichtlich. Weiterhin muss bei diesem Vorgehen sichergestellt werden, dass $\overline{g}$ äquivariant ist.

Nun werden wir die Mengenpaare $\mathscr{P}^i \subset \mathscr{M}^i$ und die Konstruktion der Abbildungen β_i etwas genauer beschreiben.
Mit $\mathcal{C}_{[M,G]}$ ist im folgenden stets die Konstante aus Lemma 1 gemeint.
Für $x \in M_{sing}$, $r < \text{dist}(x, M(> G_x))$ und $R < \mathcal{C}_{[M,G]} r$ definieren wir

$$\Lambda(x, r, R) := \exp\left(\nu^R \left\{ y \in M(G_x) \ : \ \text{dist}_{M(G_x)}(y, x) < r \right\}\right).$$

Dies ist ein Scheibenbündel über einem geodätischen Ball in $M(G_x)$. Dabei ist $\text{dist}_{M(G_x)}$ die Abstandsfunktion der riemannschen Mannigfaltigkeit $M(G_x)$. Die Faser dieses Bündels über $z \in \left\{ y \in M(G_x) \ : \ \text{dist}_{M(G_x)}(y, x) < r \right\}$ ist

$$\Lambda_z(x, r, R) := \exp_z\left(\nu_z^R \left\{ y \in M(G_x) \ : \ \text{dist}_{M(G_x)}(y, x) < r \right\}\right). \tag{4.33}$$

Für die Mengen $\mathscr{P}^i, \mathscr{M}^i$ gilt

$$\mathscr{M}^i = \Lambda(x_i, r_i, R_i), \ \mathscr{P}^i = \Lambda(x_i, r_i, \rho_i)$$

für noch zu bestimmende $x_i \in M_{sing}$, sowie Radien $r_i > 0$, $0 < R_i < \mathcal{C}_{[M,G]} r_i$, $0 < \rho_i < R_i$. Sei $G_i := G_{x_i}$. Wegen Korollar 2 gilt

- $\mathscr{M}^i \subset M(\leq G_i)$ und $\mathscr{M}^i \setminus \mathscr{P}^i \subset M(< G_i)$.

In Lemma 13 werden wir zeigen, dass es für alle hinreichend kleinen $\epsilon > 0$ solche x_i, r_i, R_i und ρ_i gibt, so dass (4.28) und (4.29) erfüllt sind. Außerdem besagt dieses Lemma, dass wir von Folgendem ausgehen können:

- Es gilt die Implikation
$$i < j \implies (G_i) \geq (G_j)$$
(die Umkehrung davon braucht nicht zu gelten).
- Die Menge $\{(G_1), ..., (G_\ell)\}$ umfasst alle Isotropietypen von $[M, G]$ mit Ausnahme des minimalen Isotropietyps.

Deswegen können wir über die iterative Konstruktion von $\overline{g}$ sagen: *Wir arbeiten uns von der Menge der regulären Orbits Schritt für Schritt zu immer „singuläreren“ Orbitmengen vor.*
Weiterhin werden wir nach Lemma 13 voraussetzen können:

- Es gibt einen Diffeomorphismus
$$\psi_i : \widetilde{\mathscr{K}_i} \to B_1^{\dim M(G_i)} \times B_2^{m-\dim M(G_i)} \times [-2, 2]$$
mit
$$\psi_i(\mathscr{K}_i) = B^{\dim M(G_i)} \times \Big\{ B_2^{m-\dim M(G_i)} \times ([-2,-1] \cup [1, 2]) \\ \cup \Big(B_2^{m-\dim M(G_i)} \setminus B_1^{m-\dim M(G_i)} \Big) \times [-2, 2] \Big\}.$$

Wir können nun die Konstruktion der Abbildung β_i auf das folgende Problem zurückführen:
Finde für jede $W^{2,2}$-Abbildung
$$f : \psi_i(\mathscr{K}_i) \to \mathbb{R}^L$$
eine neue $W^{2,2}$- Abbildung
$$\overline{f} : \psi_i(\widetilde{\mathscr{K}_i}) \to \mathbb{R}^L,$$
für die
$$Im(\overline{f}) \subset Im(f),$$
und
$$f \equiv \overline{f} \text{ in einer Umgebung von } B^{\dim M(G_i)} \times \partial \Big(B_2^{m-\dim M(G_i)} \times [-2, 2] \Big)$$
gilt.
Dann erhalten wir β_i wie folgt:
$$\beta_i := \overline{h^{[i+1]} \circ (\psi_i^{-1})} \circ \psi_i.$$

Dies bewerkstelligen wir durch eine Art *scheibenweise homogene Fortsetzung*:

$$\begin{aligned}\overline{f}(\omega,x,y) =f \Bigg(&\omega,\ \Psi\left(\sup\{(|x|,|y|)\}\right) \frac{x}{\sup\{(|x|,|y|)\}},\\ &\Psi\left(\sup\{(|x|,|y|)\}\right) \frac{y}{\sup\{(|x|,|y|)\}}\Bigg)\end{aligned} \tag{4.34}$$

$((\omega,x,y) \in B_1^{\dim M(G_{x_i})} \times B_2^{m-\dim M(G_{x_i})} \times [-2,2])$. Dabei ist $\psi : [0,2] \to [1,2]$ eine geeignet gewählte monotone C^2-Abbildung mit $\psi(t) = t$ in einer Umgebung von $\{2\}$, die in einer Umgebung auf $[0,1]$ konstant ist. Bei dieser Art „homogener Fortsetzung“ orientieren wir uns an einer ähnlichen Konstruktion in der Arbeit [17] von Gastel und Nerf. Es gilt offensichtlich $Im(\overline{\alpha}) \subset Im(\alpha)$. Daraus folgt sofort Aussage (4.26) des Satzes:

$$Im(\overline{g}) \subset Im(g).$$

Bei diesem Schritt ist die Bedingung

$$\mathscr{H}\text{-}\dim\left(\{x \in M \ : \ m_x > 4\}\right) \leq m-4$$

wichtig. Denn daraus folgt $m - \dim M(G_i) + 1 \geq 5$. Dies müssen wir voraussetzen können, da im Fall $m - \dim(G_i) + 1 < 5$ die $W^{2,2}$-Norm von $\overline{\alpha}$ nicht notwendigerweise endlich zu sein braucht.

Nach dieser qualitativen Beschreibung des Beweises von Satz 12 müssen nun folgende Schritte durchgeführt werden:

1. Schritt: Existenzbeweis für geeignete Mengen $\mathscr{M}^i$, $\mathscr{P}^i$: Lemma 13.
2. Schritt: Durchführung der Fortsetzung $f \to \overline{f}$.
3. Schritt: Zusammenfügen dieser Ergebnisse zur Konstruktion von $\overline{g}$.

1. Schritt.

Lemma 13 (Überdeckungslemma) *Sei $[M, G]$ eine kompakte riemannsche Transformationsgruppe. Es gibt ein $\Gamma > 0$, so dass für alle $0 < \epsilon < \Gamma$ gilt:*

1. *Es gibt ein $\ell \in \mathbb{N}$ mit: Für jedes $i \in \{1, ..., \ell\}$ gibt es ein $x_i \in M_{sing}$ sowie Radien $0 < r_i < dist(x, M(> G_{x_i}))$, $0 < R_i < \mathcal{C}_{[M,G]} r_i$ und $0 < \rho_i < R_i$, so dass gilt:*

$$M = M_\epsilon \cup \bigcup_{i=1}^{\ell} \Lambda(x_i, r_i, R_i), \tag{4.35}$$

$$\Lambda(x_i, r_i, R_i) \setminus \Lambda(x_i, r_i, \rho_i) \subset M_\epsilon \cup \bigcup_{j=i+1}^{\ell} \Lambda(x_j, r_j, R_j) \text{ für } i \in \{1, ..., \ell\} \tag{4.36}$$

(mit $\bigcup_{j=\ell+1}^{\ell} \Lambda(x_j, r_j, R_j) = \emptyset$).

2. *Für $i \in \{1, ..., \ell\}$ gibt es einen Diffeomorphismus*

$$\phi_i : \Lambda(x_i, r_i, R_i) \to B_1^{\dim M(G_{x_i})} \times B_2^{m - \dim M(G_{x_i})}.$$

Dieser kann so gewählt werden, dass

$$\begin{aligned} &\phi_i \left(\Lambda(x_i, r_i, R_i) \setminus \Lambda(x_i, r_i, \rho_i)\right) = \\ &= B_1^{\dim M(G_{x_i})} \times \left(B_2^{m - \dim M(G_{x_i})} \setminus B_1^{m - \dim M(G_{x_i})}\right) \end{aligned}$$

und dass für jedes

$$z \in \{y \in M(G_{x_i}) \ : \ dist(y, M(> G_{x_i})) > r_i\}$$

die Einschränkung

$$\phi_{z,i} : \Lambda_z(x_i, r_i, R_i) \to B_2^{m - \dim M(G_{x_i})}$$

G_z-äquivariant ist bzgl. jeder Scheibendarstellung von G_z auf $\mathbb{R}^{m - \dim M(G_{x_i})}$.

Beweis:
zu (1). Seien $\alpha_1, ..., \alpha_\nu$ für ein $\nu \in \mathbb{N}$ die Isotropietypen von $[M, G]$. Diese seien so angeordnet, dass gilt:

$$\alpha_i \leq \alpha_j \implies i \geq j$$

für alle $1 \leq i, j \leq \nu$. Die Umkehrung davon braucht nicht zu gelten. Insbesondere ist α_ν der minimale Isotropietyp.
In der nun folgenden Behauptung setzen wir $\bigcup_{i=1}^{0} A_i = \emptyset$.

Behauptung: *Es gibt ein $0 < \Gamma < inj_M$, für jedes $i \in \{1, ..., \nu - 1\}$ gibt es ein $m_i \in \mathbb{N}$ und ein $0 < \widetilde{\rho}_i < inj_M$, für jedes $(i, k) \in \{1, ..., \ell\} \times \{1, ..., m_i\}$ gibt es ein $x_{i,k} \in M(\alpha_i)$, ein $r_{i,k} < dist(x_i, M(> \alpha_i))$ und ein $R_{i,k} < \mathcal{C}_{[M,G]} r_{i,k}$, so dass gilt:*

$$M(\alpha_i) \setminus \bigcup_{l=1}^{i-1} \exp\left(\nu^{\widetilde{\rho}_l} M(\alpha_l)\right) \subset \bigcup_{k=1}^{m_i} \Lambda(x_{i,k}, r_{i,k}, R_{i,k}) \text{ für } i \in \{1, ..., \nu - 1\},$$

$$\exp(\nu^{\widetilde{\rho}_i} M(\alpha_i)) \subset \bigcup_{j=1}^{i} \bigcup_{k=1}^{m_j} \Lambda(x_{j,k}, r_{j,k}, R_{j,k})$$

und

$$M_{reg} \setminus \bigcup_{l=1}^{\nu-1} \exp\left(\nu^{\rho_l} M(\alpha_l)\right) \subset M_\Gamma.$$

Mit dieser Behauptung kann man Teil (i) des Lemmas wie folgt beweisen: Sei $\gamma : \{(i, j) \ : \ 1 \le i \le \nu - 1, \ 1 \le j \le m_i\} \to \{1, ..., \ell := m_1 + ... + m_{\nu-1}\}$ eine Bijektion mit

$$k < l \implies \gamma(k, i) < \gamma(k, j) \text{ für alle } 1 \le i \le m_k, \ 1 \le j \le m_l.$$

Wir setzen $\Gamma := \min_{1 \le i \le \nu-1} \widetilde{\rho}_i$, $x_i := x_{\gamma^{-1}(i)}$, $r_i := r_{\gamma^{-1}(i)}$, $R_i := R_{\gamma^{-1}(i)}$. Weiterhin setzen wir $\rho'_{i,k} := \widetilde{\rho}_i$ für alle $1 \le k \le m_i$ und $\rho_i := \rho'_{\gamma^{-1}(i)}$. Dann werden die Bedingungen aus Teil (1) des Lemmas offenkundig erfüllt.
Zum Beweis der Behauptung:
Induktionsanfang: $i = 1$. Es gilt $M(> \alpha_1) = \emptyset$. Deswegen können wir $M(\alpha_1)$ mit offenen Mengen vom Typ $\Lambda(x, r, R)$ mit $x \in M(\alpha_1)$, $r > 0$, $R < \mathcal{C}_M r_i$ und $\Lambda(x, r, R) \subset M(\ge \alpha_1)$ überdecken. Da $M(\alpha_1)$ kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung. Somit erhalten wir ein m_1, sowie $x_{1,j}$, $r_{1,j}$, $R_{1,j}$ $(1 \le j \le m_1)$ mit

$$M(\alpha_1) = \bigcup_{k=1}^{m_1} \Lambda(x_{1,k}, r_{1,k}, R_{1,k}).$$

Wir wählen ein $0 < \widetilde{\rho}_1 < \mathrm{inj}_M$ so, dass

$$\exp(\nu^{\widetilde{\rho}_1} M(\alpha_1)) \subset \bigcup_{k=1}^{m_1} \Lambda(x_{1,k}, r_{1,k}, R_{1,k})$$

gilt.
Induktionsschritt: $i - 1 \to i$. Die Menge

$$M(\alpha_i) \setminus \bigcup_{l=1}^{i-1} \exp\left(\nu^{\rho_l} M(\alpha_l)\right)$$

kann von offenen Mengen vom Typ $\Lambda(x, r, R)$ mit $x \in M(\alpha_i)$, $r < \mathrm{dist}(x, M(> \alpha_i)$, $R_i < \mathcal{C}_M r_i$ und $\Lambda(x, r, R) \subset M(\leq \alpha_i)$ überdeckt werden. Aus Kompaktheitsgründen gibt es eine endliche Teilüberdeckung. Somit erhalten wir ein $m_i \in \mathbb{N}$, sowie $x_{i,j}$, $r_{i,j}$, $R_{i,j}$ $(1 \leq j \leq m_i)$ mit

$$M(\alpha_i) = \bigcup_{k=1}^{m_i} \Lambda(x_{i,k}, r_{i,k}, R_{i,k}).$$

Wir wählen ein $0 < \widetilde{\rho}_i < \widetilde{\rho}_{i-1}$ so, dass

$$\exp(\nu^{\widetilde{\rho}_i} M(\alpha_i)) \subset \bigcup_{j=1}^{i} \bigcup_{k=1}^{m_j} \Lambda(x_{j,k}, r_{j,k}, R_{j,k})$$

gilt.
Zuletzt setzen wir $\Gamma := \inf_{1 \leq i \leq \nu} \widetilde{\rho}_i$.
Damit ist die obige Behauptung, und somit Aussage *(1)* des Lemmas bewiesen. Die Induktion wird in diesem Beweis nur für die geeignete Wahl der Radien ρ_i bebraucht!

zu (2). Dies folgt sofort, wenn man einige Grundkenntnisse über Normalkoordinaten und Vektorbündel zugrundelegt: Auf dem geodätischen Ball $\{z \in M(\alpha_i) \ : \ \mathrm{dist}(z, M(> \alpha_i))\}$ führen wir Normalkoordinaten ein und erweitern diese zu einer geeigneten äquivarianten Bündelkarte. □

2. Schritt. Sei $k \in \mathbb{N}$, sei $4 \leq \ell \in \mathbb{N}$ und sei eine beliebige Abbildung

$$f \in W^{2,2}\left(B^k \times \left[(B_2^\ell \setminus B_1^\ell) \times [-2,2] \cup B_2^\ell \times ([-2,-1] \cup [1,2])\right], \mathbb{R}^L\right)$$

gegeben. Wir werden nun eine unseren Ansprüchen genügende Fortsetzung

$$\overline{f} \in W^{2,2}\left(B^k \times B_2^\ell \times [-2,2], \mathbb{R}^L\right).$$

konstruieren. Sei hierzu $\Phi : \mathbb{R} \to [0,1]$ eine C^2-Funktion mit $\Phi \equiv 0$ auf $(-\infty, 0]$, $\Phi \equiv 1$ auf $[\frac{1}{4}, \infty)$, die auf $(0, \frac{1}{4})$ streng monoton wachsend ist. Außerdem gelte $\lim_{s \to 0} \frac{\Phi(s)}{s^2} = 0$. Für jedes $r \in [1, \frac{5}{2})$ definieren wir die Funktion

$$\Psi_r : [0,2] \to [r,2], \ \Psi_r(s) := r + \Phi(s-r)(s-r).$$

Für ein noch zu wählendes $R \in [1, \frac{5}{4})$ definieren wir

$$\overline{f}(\omega, x, y) := f\left(\omega, \Psi_R(\sup\{|x|,|y|\}) \frac{x}{\sup\{|x|,|y|\}}, \Psi_R(\sup\{|x|,|y|\}) \frac{y}{\sup\{|x|,|y|\}}\right).$$

Nun werden wir die $W^{2,2}$-Norm von $\overline{f}$ abschätzen. Wie bereits erwähnt ist hier die Bedingung $\ell \geq 4$ unverzichtbar.

Für jedes $I \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ sei

$$A_I := \{(x,y) \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R} \ : \ \sup\{|x|,|y|\} \in I\}.$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} A &:= A_{[0,2]} = B_2^\ell \times [-2,2], \\ A_t &:= A_{\{t\}} \text{ für } t \in [0,2]. \end{aligned}$$

Es gilt

$$A_{[1,2]} = (B_2^\ell \setminus B_1^\ell) \times [-2,2] \cup B_2^\ell \times ([-2,-1] \cup [1,2]).$$

Wir definieren

$$K := \sum_{j=0}^{2} \int_{\Omega \times A_{[1,2)}} |D^j f|^2 \, d\mathscr{H}^{k+\ell+1}$$

sowie die Funktionen

$$\begin{aligned} &\alpha, \beta : [0,2] \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \\ &\alpha(r) := \sum_{j=0}^{2} \int_{\Omega \times A_r} |D^j f|^2 \, d\mathscr{H}^{k+\ell} \\ &\beta(r) := \sum_{j=0}^{2} \int_{\Omega \times A_{[r,2)}} \left| (D^j f) \left(\Psi_r(\sup\{|x|,|y|\}) \frac{x}{\sup\{|x|,|y|\}}, \right.\right. \\ &\qquad\qquad\qquad \left.\left. \Psi_r(\sup\{|x|,|y|\}) \frac{y}{\sup\{|x|,|y|\}} \right) \right|^2 d\mathscr{H}^{k+\ell+1}. \end{aligned}$$

Wir werden $R \in [1, \frac{5}{4}]$ so wählen, dass gilt:

$$\alpha(R) + \beta(R) \leq CK \tag{4.37}$$

mit einer Konstante $C > 0$, die nicht von f abhängt. Wir werden nun begründen, dass α und β wohldefiniert sind, sowie dass eine solche Wahl von R möglich ist. Für jedes $r \in [1, \frac{5}{4}]$ ist die eingeschränkte Funktion $\Psi_r|[r,2]$ streng monoton wachsend, also invertierbar. Für die Umkehrfunktion gilt

$$(\Psi_r^{-1})'(t) \leq c(t-r)^{-\frac{2}{3}}$$

mit einer Konstante $c > 0$, die nicht von r abhängt. Damit berechnen wir:

$$\begin{aligned}
\int_1^{\frac{5}{4}} \int_r^2 \alpha(\Psi_r(s))\, ds\, dr &= \int_1^{\frac{5}{4}} \int_r^2 \alpha(t)(\Psi_r^{-1})'(t)\, dt\, dr \\
&= \int_1^2 \alpha(t) \int_1^{\min[t,\frac{5}{4}]} (\Psi_r^{-1})'(t)\, dr\, dt \\
&\leq \int_1^2 \alpha(t) \int_1^t (\Psi_r^{-1})'(t)\, dr\, dt \\
&\leq c \int_1^2 \alpha(t) \int_1^t (t-r)^{-\frac{2}{3}}\, dr\, dt \\
&= c \int_1^2 \alpha(t)\, dt.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\int_1^{\frac{5}{4}} \left(\alpha(t) + \int_t^2 \alpha(\Psi_t(s)) ds \right) dt \leq (1+c) \int_1^2 \alpha(t)\, dt$$

Insbesondere ist die Funktion $t \mapsto \alpha(t) + \int_t^2 \alpha(\Psi_t(s))\, ds$ fast überall wohldefiniert und es gibt ein $R \in [1, \frac{5}{4}]$ mit

$$\alpha(R) + \int_R^2 \alpha(\Psi_R(s))\, ds \leq 4(1+c) \int_1^2 \alpha(t)\, dt \leq 4(1+c)K.$$

Durch eine Koordinatentransformation (deren Jacobi-Determinante nach unten durch eine Konstante c_2 abgeschätzt werden kann, die nicht von R abhängt) erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\int_R^2 \alpha(\Psi_R(s))\, ds = \int_R^2 \sum_{j=0}^2 \int_{\Omega\times A_{\Psi_R(s)}} |D^j f|^2\, d\mathscr{H}^{k+\ell}\, ds \\
\geq &c_2 \int_R^2 \sum_{j=0}^2 \int_{\Omega\times A_s} \Bigg| (D^j g) \Bigg(\omega, \Psi_r(\sup\{|x|,|y|\}) \frac{x}{\sup\{|x|,|y|\}}, \\
&\qquad\qquad \Psi_r(\sup\{|x|,|y|\}) \frac{y}{\sup\{|x|,|y|\}} \Bigg) \Bigg|^2\, d\mathscr{H}^{k+\ell}(\omega,x,y) \\
= &c_2 \beta(R).
\end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$\alpha(R) + c_2\beta(R) \leq 4(1+c)K,$$

womit sich leicht (4.37) mit $C = 4(1+c)$ folgern lässt.

Nun werden wir die $W^{2,2}$-Norm von $\overline{g}$ abschätzen. Mit der Kettenregel erhalten wir mit einer Konstante $c > 0$, die nicht von R abhängt, mit

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{2} \int_{\Omega \times A_{[R,2)}} \Bigg| (D^j f) \Bigg(\omega, \Psi_r(\sup\{|x|,|y|\}) \frac{x}{\sup\{|x|,|y|\}}, \\
&\qquad\qquad \Psi_r(\sup\{|x|,|y|\}) \frac{y}{\sup\{|x|,|y|\}} \Bigg) \Bigg|^2 \, d\mathscr{H}^{k+\ell+1}(\omega,x,y) \\
\leq & c \sum_{j=0}^{2} \int_{\Omega \times A_{[R,2)}} \Bigg| D^j \Bigg(f \Bigg(\omega, \Psi_r(\sup\{|x|,|y|\}) \frac{x}{\sup\{|x|,|y|\}}, \\
&\qquad\qquad \Psi_r(|(x,y)|_\infty) \frac{y}{\sup\{|x|,|y|\}} \Bigg) \Bigg) \Bigg|^2 \, d\mathscr{H}^{k+\ell+1}(\omega,x,y) \\
= & c \sum_{j=0}^{2} \int_{\Omega \times A_{[R,2)}} \left| D^j \overline{f} \right|^2 \, d\mathscr{H}^{k+\ell+1}.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Auf $A_{[0,R)}$ gilt

$$\overline{f}(\omega,x,y) = f \left(\omega, R \frac{x}{\sup\{|x|,|y|\}}, R \frac{y}{\sup\{|x|,|y|\}} \right)$$

und folglich für $s \in (0,R)$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega \times A_s} \left| D^j \overline{f} \right|^2 \, d\mathscr{H}^{k+\ell} &= \left(\frac{s}{R} \right)^{\ell - 2j} \int_{\Omega \times A_R} \left| D^j \overline{f} \right|^2 \, d\mathscr{H}^{k+\ell} \\
&= \left(\frac{s}{R} \right)^{\ell - 2j} \int_{\Omega \times A_R} \left| D^j f \right|^2 \, d\mathscr{H}^{k+\ell}.
\end{aligned}$$

Damit berechnen wir

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{2} \int_{\Omega \times A_{[0,R)}} \left| D^j \overline{f} \right|^2 \, d\mathscr{H}^{k+\ell+1} \\
= & \sum_{j=0}^{2} \int_0^R \int_{\Omega \times A_s} \left| D^j \overline{f} \right|^2 \, d\mathscr{H}^{k+\ell} \, ds \\
= & \sum_{j=0}^{2} \int_0^R \left(\frac{s}{R} \right)^{\ell - 2j} \int_{\Omega \times A_R} \left| D^j f \right|^2 \, d\mathscr{H}^{k+\ell} ds \\
= & \sum_{j=0}^{2} \frac{R}{\ell + 1 - 2j} \int_{\Omega \times A_R} \left| D^j f \right|^2 \, d\mathscr{H}^{k+\ell} \\
\leq & \alpha(R) \leq cK.
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Hier geht nun die wichtige Voraussetzung $\ell \geq 4$ ein. (4.38) und (4.39) ergeben zusammen

$$\sum_{j=0}^{2} \int_{\Omega \times A} |D^j \overline{f}|^2 d\mathscr{H}^{k+\ell+1} \leq CK$$

mit einer Konstanten $C > 0$, die nicht von f, $\overline{f}$ und Ω abhängt. Nun ist ersichtlich, dass die Abbildung $\overline{f}$ die folgenden drei Eigenschaften hat:

$$f \equiv \overline{f} \text{ in einer Umgebung von } B^k \times \partial(B_2^\ell \times [-2,2]), \tag{4.40}$$

$$Im(\overline{f}) \subset Im(f) \tag{4.41}$$

und

$$\|\overline{f}\|_{W^{2,2}} \leq C\|f\|_{W^{2,2}}. \tag{4.42}$$

Die Konstante $C > 0$ hängt dabei nicht von f ab.

3. Schritt. Sei ein hinreichend kleines $\epsilon > 0$ gegeben. Die Mengen $\mathscr{M}_i := \Lambda(x_i, r_i, R_i)$, $\mathscr{P}_i := \Lambda(x_i, r_i, \rho_i)$ $(i \in \{1, ..., \ell\})$ wählen wir wie in Lemma 13. Wie in obiger Beschreibung des Beweises setzen wir für $i \in \{1, ..., \ell\}$

$$\mathscr{K}_i := ([\Lambda(x_i, r_i, R_i) \setminus \Lambda(x_i, r_i, \rho_i)] \times [-b, b]) \cup (\Lambda(x_i, r_i, R_i) \times ([-b, -a] \cup [a, b]))$$

und

$$\widetilde{\mathscr{K}_i} := \Lambda(x_i, r_i, R_i) \times [-b, b],$$

sowie

$$\widetilde{\mathscr{K}_{\ell+1}} := \{M \times ([-b, -a] \cup [a, b])\} \cup \{M_\epsilon \times [-b, b]\}.$$

Zunächst führen wir C^2-Diffeomorphismen

$$\psi_i : \widetilde{\mathscr{K}_i} \to B^{\dim M(G_{x_i})} \times B_2^{m - \dim M(G_{x_i})} \times [-2, 2]$$

ein. Diese seien gegeben als das kartesische Produkt

$$\psi_i := \phi_i \times \eta,$$

wobei $\phi_i : \mathscr{M}_i \to B^{dimM(G_{x_i})} \times B_2^{m-dimM(G_{x_i})}$ der Diffeomorphismus aus Lemma 13 ist, und wobei

$$\eta : [-b, b] \to [-2, 2]$$

ein geeigneter C^2-Diffeomorphismus ist mit $\eta(-a) = -1$ und $\eta(a) = 1$ ist. Man kann η so wählen, dass es Konstanten c und γ gibt, wobei c nicht von a und b abhängt, γ jedoch schon, so dass gilt:

$$\begin{aligned}
||\alpha||^2_{L^2([-b,b])} &\leq c\gamma||\alpha \circ (\eta^{-1})||^2_{L^2([-2,2])},\\
||\alpha \circ (\eta^{-1})||^2_{L^2([-2,2])} &\leq c\gamma^{-1}||\alpha||^2_{L^2([-b,b])},\\
||\alpha'||^2_{L^2([-b,b])} &\leq c\gamma^2||(\alpha \circ (\eta^{-1}))'||^2_{L^2([-2,2])},\\
||(\alpha \circ (\eta^{-1}))'||^2_{L^2([-2,2])} &\leq c\gamma^{-2}||\alpha'||^2_{L^2([-b,b])},\\
||\alpha''||^2_{L^2([-b,b])} &\leq c\gamma^3||(\alpha \circ (\eta^{-1}))''||^2_{L^2([-2,2])},\\
||(\alpha \circ (\eta^{-1}))''||^2_{L^2([-2,2])} &\leq c\gamma^{-3}||\alpha''||^2_{L^2([-b,b])}.
\end{aligned}$$

Danach folgen unter Anpassung der Konstanten c für alle messbaren Mengen $\Omega \subset \widetilde{\mathscr{K}_i}$ und für alle hinreichend regulären $u : \Omega \to \mathbb{R}^L$, $v : \psi_i : \Omega \to \mathbb{R}^L$ die nun folgenden Ungleichungen. Babei ist D_y in $\widetilde{\mathscr{K}_i}$ die Ableitung in Richtung der zweiten Komponente (der $[-b, b]$-Komponente) und in $\psi_i(\widetilde{\mathscr{K}_i})$ die Ableitung nach der dritten Komponente (der $[-2, 2]$-Komponente). Es sei D_z in $\widetilde{\mathscr{K}_i}$ die totale Ableitung in Richtung der ersten Komponente (der $\Lambda(x_i, r_i, R_i)$-Komponente). Es sei $D_{\omega,x}$ in $\psi_i(\widetilde{\mathscr{K}_i})$ die totale Ableitung in Richtung der ersten und der zweiten Komponente (also der $B^{\dim M(G_{x_i})} \times B_2^{m-\dim M(G_{x_i})}$-Komponenten)

$$\begin{aligned}
||D_z^i u||^2_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^L)} &\leq c\gamma ||D^j_{\omega,x}(u \circ (\psi_i^{-1}))||^2_{L^2(\psi_i(\Omega),\mathbb{R}^L)}, \ j \in \{0,1,2\} \\
||D^j_{\omega,x} v||^2_{L^2(\psi_i(\Omega),\mathbb{R}^L)} &\leq c\gamma^{-1} ||D_z^j(v \circ \psi_i)||^2_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^L)}, \ j \in \{0,1,2\} \\
||D_z^j \partial_y u||^2_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^L)} &\leq c\gamma^2 ||D^j_{\omega,x}\partial_y(u \circ (\psi_i^{-1}))||^2_{L^2(\psi_i(\Omega),\mathbb{R}^L)}, \ j \in \{0,1\} \\
||D^j_{\omega,x}\partial_y v||^2_{L^2(\psi_i(\Omega),\mathbb{R}^L)} &\leq c\gamma^{-2} ||D_z^j \partial_y(v \circ \psi_i)||^2_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^L)}, \ j \in \{0,1\} \\
||\partial_y^2 u||^2_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^L)} &\leq c\gamma^3 ||(\partial_y^2(u \circ (\psi_i^{-1}))||^2_{L^2(\psi_i(\Omega),\mathbb{R}^L)}, \\
||\partial_y^2 v||^2_{L^2(\psi_i(\Omega),\mathbb{R}^L)} &\leq c\gamma^{-3} ||\partial_y^2(v \circ \psi_i)||^2_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^L)}.
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Die Konstanten c un d γ können von i abhängen, dies ist im weiteren Beweis jedoch nicht von Belang. Was daran liegt, dass wir hier nur *endlich* viele i vorliegen haben. Es gilt

$$\psi_i(\mathscr{K}_i) = B^{\dim M(G_{x_i})} \times \Big\{ \Big[\Big(B_2^{m-\dim M(G_{x_i})} \setminus B_1^{m-\dim M(G_{x_i})} \Big) \times [-2,2] \Big] \cup B_2^{m-\dim M(G_{x_i})} \times ([-2,-1] \cup [1,2]) \Big\}.$$

Für eine Abbildung $\alpha \in W^{2,2}\left(\mathscr{K}_i, \mathbb{R}^L\right)$ definieren wir unter Verwendung des oben durchgeführten Schritt 2 des Beweises

$$\widetilde{\alpha} : \overline{\alpha \circ \psi_i^{-1}} \circ \psi_i : \widetilde{\mathscr{K}_i} \to \mathbb{R}^L$$

In der folgenden Abschätzung ist C die Konstante aus Abschätzung (4.42) und c die Konstante aus (4.43). Für alle $i \in \{1, ..., \ell\}$ und alle $\alpha \in W^{2,2}\left(\mathscr{K}_i, \mathbb{R}^L\right)$ gilt

$$\begin{aligned}
&||\widetilde{\alpha}||_{L^2(\widetilde{\mathscr{K}_i},\mathbb{R}^L)} \\
\leq & c\gamma ||\widetilde{\alpha} \circ (\psi_i^{-1})||_{L^2\left(\psi_i(\widetilde{\mathscr{K}_i}),\mathbb{R}^L\right)} \\
= & c\gamma ||\overline{\alpha \circ \psi_i^{-1}}|||_{L^2\left(\psi_i(\widetilde{\mathscr{K}_i}),\mathbb{R}^L\right)} \\
\leq & Cc\gamma ||\alpha \circ \psi_i^{-1}||_{L^2(\psi_i(\mathscr{K}_i),\mathbb{R}^L)} \\
\leq & Cc ||\alpha||_{L^2(\mathscr{K}_i,\mathbb{R}^L)} \\
\leq & Cc ||\alpha||_{L^2(\mathscr{K}_i,\mathbb{R}^L)}.
\end{aligned}$$

Hierin haben wir die erste und die zweite Zeile aus (4.43). Verfahren wir ebenso mit der dritten und vierten, sowie mit der fnften und sechsten Zeile, so sehen wir für eine geeignete Konstante $C > 0$, die nicht von α, a und b abhängt

$$||\widetilde{\alpha}||_{W^{2,2}(\widetilde{\mathscr{K}_i},\mathbb{R}^L)} \leq C ||\alpha||_{W^{2,2}(\mathscr{K}_i,\mathbb{R}^L)}. \tag{4.44}$$

Nun definieren wir induktiv die Abbildungen $h^{[i]}$: Wir setzen

$$h^{[\ell+1]} := g : \widetilde{\mathscr{K}_{\ell+1}} \to \mathbb{R}^L.$$

Sei $i \in \{1, ..., \ell\}$ und sei

$$h^{[i+1]} : \bigcup_{l=i+1}^{\ell+1} \widetilde{\mathscr{K}_l} \to \mathbb{R}^L$$

bereits konstruiert. Dann definieren wir

$$h^{[i]} : \bigcup_{l=i}^{\ell+1} \widetilde{\mathscr{K}_l} \to \mathbb{R}^L$$

durch

$$h^{[i]}(z) := \begin{cases} h^{[i+1]} & \text{für } z \notin \widetilde{\mathscr{K}_i} \\ \widetilde{h^{[i+1]}} & \text{für } z \in \widetilde{\mathscr{K}_i} \end{cases}.$$

Mit (4.44) gibt es eine Konstante $K > 0$, die nicht von h, a und b abhängt, so dass für alle $i \in \mathbb{N}$

$$||h^{[i]}||_{W^{2,2}(\bigcup_{j=i}^{\ell+1} \widetilde{\mathscr{K}_j}, \mathbb{R}^L)} \leq K ||h^{[i+1]}||_{W^{2,2}(\bigcup_{j=1+1}^{\ell+1} \widetilde{\mathscr{K}_j}, \mathbb{R}^L)}.$$

gilt. Mit

$$\overline{g} := h^{[1]}$$

und mit

$$\bigcup_{i=1}^{\ell} \widetilde{\mathscr{K}_i} = M \times [-b, b]$$

sieht man nun iterativ, dass

$$||\overline{g}||_{W^{2,2}(M\times[-b,b])} \leq C||g||_{W^{2,2}(\widetilde{\mathscr{K}_{\ell+1}}, \mathbb{R}^L)} \leq C||g||_{W^{2,2}(M\times[-b,b],\mathbb{R}^L)}$$

für eine Konstante $C > 0$ gilt, die nicht von g, a und b abhängt. Damit ist die Normabschätzung (4.26) bewiesen.

Mit (4.41) folgt nach der Konstruktionsweise von $\overline{g}$

$$Im(\overline{g}) \subset Im\,(g|\mathscr{K}_{\ell+1})\,.$$

Damit ist Behauptung (4.27) des Satzes bewiesen:

$$\text{dist}(g(x), N) \leq K \text{ für fast alle } x \in M \times [-b, b].$$

Außerdem folgt aus der Konstruktion von $\overline{g}$, dass

$$\overline{g} \equiv g \text{ auf } \left(M \setminus \bigcup_{i=1}^{\ell} \mathscr{M}^i \right) \times [-b, b] \text{ sowie auf einer Umgebung von } M \times \{-b, b\}$$

gilt. Für ein für ein $\epsilon' > \epsilon$ mit

$$M_{\epsilon'} \subset M \setminus \bigcup_{i=1}^{\ell} \mathscr{M}^i$$

gilt dann also die Behauptung 4.25 des Satzes.
Nun müssen wir noch begründen, dass $\overline{g}$ G-äquivariant ist. Nach Lemma 13 ist für jedes $i \in \{1, ..., \ell\}$ und jedes $z \in \{y \in M(G_{x_i}) \ : \ \mathrm{dist}(y, x) < r\}$ ist der eingeschränkte Diffeomorphismus

$$\psi_{z,i} | \Lambda_z(x_i, r_i, R_i) \times [-b, b]$$

(siehe (4.33) für die Definition von $\Lambda_z(x, r, R)$) G_z-äquivariant. Daraus folgt die G_z-Äquivarianz der eingeschränkten Abbildung

$$\overline{g} | \Lambda_z(x_i, r_i, R_i) \times [-b, b] :$$

Hieraus lässt sich nun die G-Äquivarianz der Abbildung $\overline{g}$ schlussfolgern. □

4.2.3 Beweis des Interpolationslemmas

Wir geben zunächst eine Übersicht über den Beweis.

1. Schritt: Wahl eines geeigneten Radius $\rho \in (\eta, 1)$ und geeigneter Nullfolgen $\lambda_i \in (0, 1 - \rho)$, $\kappa_i \in (0, \min\{\rho - \lambda_i, 1 - \rho\})$ $(i \in \mathbb{N})$.

Die in den folgenden Schritten auftretenden Konstanten $C > 0$ hängen alle von u, v, η, ρ und der Folge $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ab, nicht aber von $i \in \mathbb{N}$. Bei allen Abschätzungen und Konvergenzaussagen muss gegebenenfalls zu Teilfolgen übergegangen werden.

2. Schritt: Anwendung von des Fortsetzungslemmas (Lemma 11), um eine Abbildung

$$h_i \in W_G^{2,2}(S^{m-1} \times [-\kappa_i, \lambda_i + \kappa_i], \mathbb{R}^L)$$

mit

$$h_i(t, \omega) = v_i(\rho - \lambda_i + t, \omega) \text{ für } t \in [-\kappa_i, 0]$$
$$h_i(t, \omega) = u_i(\rho - \lambda_i + t, \omega) \text{ für } t \in [\lambda_i, \lambda_i + \kappa_i]$$

sowie mit der Normabschätzung

$$||h_i||_{W^{2,2}(S^{m-1} \times [-\kappa_i, \lambda_i + \kappa_i], \mathbb{R}^L)} \leq C \lambda_i$$

und der Distanzabschätzung

$$\mathrm{dist}\,(h_i(t, \omega), N_i) \leq C \lambda_i^{\frac{1}{2}} \text{ für fast alle } \omega \in (S^{m-1})_\epsilon, \ t \in [-\kappa_i, \lambda_i + \kappa_i]$$

zu konstruieren. Hierbei ist $\epsilon > 0$ fest gewählt und C hängt von ϵ ab.

3. Schritt: Anwendung des Modifikationslemmas (Lemma 12) auf h, um eine neue Abbildung

$$\overline{h}_i \in W^{2,2}_G(S^{m-1} \times [-\kappa_i, \lambda_i + \kappa_i], \mathbb{R}^L)$$

mit

$$\begin{aligned}
\overline{h}_i(t,\omega) &\equiv v_i(\rho - \lambda_i + t, \omega) \text{ in einer Umgebung von } S^{m-1} \times \{\rho - \lambda_i - \kappa_i\},\\
\overline{h}_i(t,\omega) &\equiv u_i(\rho - \lambda_i + t, \omega) \text{ in einer Umgebung von } S^{m-1} \times \{\rho + \kappa_i\},
\end{aligned}$$

sowie mit der Normabschätzung

$$||\overline{h}_i||_{W^{2,2}(S^{m-1}\times[-\kappa_i,\lambda_i+\kappa_i],\mathbb{R}^L)} \leq C\lambda_i$$

und mit der Distanzabschätzung

$$\operatorname{dist}\left(\overline{h}_i(t,x), N_i\right) \leq C\lambda_i^{\frac{1}{2}} \text{ für fast alle } \omega \in S^{m-1},\ t \in [-\kappa_i, \lambda_i + \kappa_i]$$

zu konstruieren.

4. Schritt: Projektion von $\overline{h}_i$ in N_i: Wir können o.B.d.A. $\lambda_i^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\delta}{C}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ annehmen, wobei δ die Konstante aus der Bedingung (4.1) ist. Dann ist die Abbildung

$$\widetilde{h}_i := \Pi_{N_i} \circ \overline{h}_i : S^{m-1} \times [-\kappa_i, \lambda_i + \kappa_i] \to N_i$$

wohldefiniert, wobei Π_{N_i} die Nächste-Punkt-Projektion von N ist. Es gilt

$$||\widetilde{h}_i||_{W^{2,2}(S^{m-1}\times[-\kappa_i,\lambda_i+\kappa_i],\mathbb{R}^L)} \leq C||\overline{h}_i||_{W^{2,2}(S^{m-1}\times[-\kappa_i,\lambda_i+\kappa_i],\mathbb{R}^L)} \leq C\lambda_i, \tag{4.45}$$

wobei die Konstante $C > 0$ nach der Bedingung (4.1) nicht von i abhängt.

5. Schritt: Konstruktion der Abbildung w_i wie folgt:

$$w_i(t,\omega) = \begin{cases} v_i(t,\omega) & \text{falls } 0 < t < \rho - \lambda_i - \kappa_i \\ \widetilde{h}_i(\omega, -\rho + \lambda_i + t) & \text{falls } \rho - \lambda_i - \kappa_i \leq t \leq \rho + \kappa_i \\ u_i(t,\omega) & \text{falls } \rho + \kappa_i < t < 1 \end{cases}.$$

Für jedes

$$R \in (\rho + \sup_{i\in\mathbb{N}} \kappa_i, 1)$$

gilt

$$w_i \equiv u_i \text{ auf } B^m \setminus B^m_R$$

Wegen $u \equiv v$ auf $B^m_R \setminus B^m_{\rho+\kappa_i}$ folgt mit (4.45)

$$\begin{aligned}
&\lim_{i\to\infty} ||w_i - v_i||_{W^{2,2}(B^m_R,\mathbb{R}^L)} \leq \\
&\leq \lim_{i\to\infty} ||w_i - v_i||_{W^{2,2}(B^m_{\rho+\kappa_i}\setminus B^m_{\rho-\lambda_i-\kappa_i},\mathbb{R}^L)} \\
&= \lim_{i\to\infty} ||\widetilde{h}_i||_{W^{2,2}(S^{m-1}\times[-\kappa_i,\lambda_i+\kappa_i],\mathbb{R}^L)} \\
&=0.
\end{aligned}$$

1. Schritt.
Behauptung 1: *Für $\eta \in (0,1)$, $\mu \in (0, 1-\eta)$, $\alpha, \beta \in \{0,1\}$ mit $\alpha + \beta \in \{0,1\}$ und $f, g \in W^{2,2}(B^m, \mathbb{R}^L)$ gilt*

$$\begin{aligned}&\int_{\eta+\mu}^{1} \int_{S^{m-1}} |D_S^\alpha \partial_t^\beta f(t,\omega) - \sum_{k=0}^{1-\alpha-\beta} \mu^k D_S^\alpha \partial_t^{\beta+k} g(t-\mu,\omega)|^2 \, d\mathscr{H}^{m-1}(\omega)\, dt \\ \leq& 2 \int_{B^m \setminus B^m_{\eta+\mu}} |D^{\alpha+\beta} f - D^{\alpha+\beta} g|^2 dx + 2\eta^{-m} \mu^{2(2-\alpha-\beta)} \int_{B^m \setminus B^m_\eta} |D^{\alpha+\beta+1} g|^2 \, dx.\end{aligned} \tag{4.46}$$

Beweis: In der folgenden Rechnung verwenden wir (Aufzählung in der Reihenfolge der Anwendung)

- den eindimensionalen Satz von Taylor in der Form

$$h(t) - h(t-\mu) - \mu \partial_t h(t-\mu) = \int_{t-\mu}^{t} (t-\mu-s) \partial_s^2 h(s)\, ds,$$

- die Hölder-Ungleichung,
- Die Identität

$$\int_{\eta+\mu}^{1} \int_{t-\mu}^{t} h(s,t)\, ds\, dt = \int_{\eta}^{1} \int_{s}^{s+\mu} h(s,t)\, dt\, ds.$$

$$\begin{aligned}&\int_{\eta+\mu}^{1} \int_{S^{m-1}} \left| D_S^\alpha \partial_t^\beta g(t,\omega) - \sum_{k=0}^{1-\alpha-\beta} \mu^k D_S^\alpha \partial_t^{\beta+k} g(t-\mu,\omega) \right|^2 d\mathscr{H}^{m-1}(\omega)\, dt \\ \leq& \int_{\eta+\mu}^{1} \int_{S^{m-1}} \left| \int_{t-\mu}^{t} D_S^\alpha \partial_t^{\beta+1} g(s,\omega)(t-\mu-s)^{1-\alpha-\beta}\, ds \right|^2 d\mathscr{H}^{m-1}(\omega)\, dt \\ \leq& \int_{\eta+\mu}^{1} \int_{S^{m-1}} \left(\int_{t-\mu}^{t} (t-\mu-s)^{2(1-\alpha-\beta)}\, ds \right) \left(\int_{t-\mu}^{t} |D_S^\alpha \partial_s^{\beta+1} g(s,\omega)|^2\, ds \right) d\mathscr{H}^{m-1}(\omega)\, dt \\ \leq& \mu^{2(1-\alpha-\beta)+1} \int_{\eta+\mu}^{1} \int_{t-\mu}^{t} \int_{S^{m-1}} |D_S^\alpha \partial_s^{\beta+1} g(s,\omega)|^2\, d\mathscr{H}^{m-1}(\omega)\, ds\, dt \\ =& \mu^{2(1-\alpha-\beta)+1} \int_{\eta}^{1} \int_{s}^{s+\mu} \int_{S^{m-1}} |D_S^\alpha \partial_s^{\beta+1} g(s,\omega)|^2\, d\mathscr{H}^{m-1}(\omega)\, dt\, ds \\ =& \mu^{2(2-\alpha-\beta)} \int_{\eta}^{1} \int_{S^{m-1}} |D_S^\alpha \partial_s^{\beta+1} g(s,\omega)|^2\, d\mathscr{H}^{m-1}(\omega)\, ds \\ \leq& \mu^{2(2-\alpha-\beta)} \eta^{-m} \int_{\eta}^{1} \int_{S^{m-1}} t^m |D^{\alpha+\beta+1} g|^2\, d\mathscr{H}^{m-1}(\omega)\, ds \\ \leq& \eta^{-m} \mu^{2(2-\alpha-\beta)} \int_{B^m \setminus B^m_\eta} |D^{\alpha+\beta+1} g|^2\, dx.\end{aligned}$$

Daraus folgt Behauptung eins mit der Ungleichung $|a+b|^2 \leq 2|a|^2 + 2|b|^2$. □

Nun sei $\eta > 0$, so dass u und v auf $B^m \setminus B^m_\eta$ übereinstimmen.

Behauptung 2: *Es gibt ein $\rho \in (\eta, 1)$, eine Nullfolge $\lambda_i \in (0, (1-\rho))$, $\kappa_i \in (0, \rho - \lambda_i)$ und ein $K > 0$, so dass für die Abbildungen*

$$\begin{aligned} f_{i,0} &: S^{m-1} \to N,\, f_{i,0}(\omega) := v_i(\rho - \lambda_i, \omega); \\ g_{i,0} &: S^{m-1} \to N,\, g_{i,0}(\omega) := u_i(\rho, \omega); \\ f_{i,1} &: S^{m-1} \to \mathbb{R}^L,\, f_{i,1}(\omega) := \partial_t v_i(\rho - \lambda_i, \omega); \\ g_{i,1} &: S^{m-1} \to \mathbb{R}^L,\, g_{i,1}(\omega) := \partial_t u_i(\rho, \omega) \end{aligned}$$

(evtl. nach Übergang zu Teilfolgen) gilt:

$$\left.\begin{array}{rl} \sup_{i\in\mathbb{N}} \int_{S^{m-1}} \left(|Dg_{i,0}|^2 + |Df_{i,0}|^2\right) d\mathscr{H}^{m-1} & \leq K^2, \\ \sup_{i\in\mathbb{N}} \int_{S^{m-1}} \left(|D^2 g_{i,0}|^2 + |D^2 f_{i,0}|^2\right) d\mathscr{H}^{m-1} & \leq K^2, \\ \sup_{i\in\mathbb{N}} \int_{S^{m-1}} \left(|Dg_{i,1}|^2 + |Df_{i,1}|^2\right) d\mathscr{H}^{m-1} & \leq K^2 \\ \int_{S^{m-1}} |g_{i,0} - f_{i,0}|^2 \, d\mathscr{H}^{m-1} & \leq \lambda_i^2 K^2 \\ \int_{S^{m-1}} |g_{i,1} - f_{i,1}|^2 \, d\mathscr{H}^{m-1} & \leq \lambda_i^2 K^2 \\ \int_{S^{m-1}} |Dg_{i,0} - Df_{i,0}|^2 \, d\mathscr{H}^{m-1} & \leq \lambda_i^2 K^2 \\ \int_{S^{m-1}} |g_{i,0} - f_{i,0} - \lambda_i f_{i,1}|^2 \, d\mathscr{H}^{m-1} & \leq \lambda_i^4 K^2 \end{array}\right\}$$

und

$$\begin{aligned} ||v_i||_{W^{2,2}(B^m_{\rho-\lambda_i} \setminus B_{\rho-\lambda_i-\kappa_i}, \mathbb{R}^L)} &\leq \lambda_i, \\ ||u_i||_{W^{2,2}(B^m_{\rho+\kappa_i} \setminus B_\rho, \mathbb{R}^L)} &\leq \lambda_i. \end{aligned} \tag{4.47}$$

Dabei kann ρ beliebig nahe bei 1 gewählt werden.

Beweis von Behauptung 2: Da die Abbildungen u_i bzw. v_i schwach in $W^{2,2}$ und stark in $W^{1,2}$ gegen u bzw. v, konvergieren, gilt für eine Konstante $C > 0$ mit

$$\begin{aligned} \sup_{i\in\mathbb{N}} \int_{B^m} \left(|D^2 u_i|^2 + |D^2 v_i|^2\right) d\mathscr{H}^m &\leq C, \\ \sup_{i\in\mathbb{N}} \int_{B^m} \left(|Du_i|^2 + |Dv_i|^2\right) d\mathscr{H}^m &\leq C, \\ \lim_{i\to\infty} \int_{B^m} |u_i - u|^2 \, d\mathscr{H}^m + \lim_{i\to\infty} \int_{B^m} |Du_i - Du|^2 \, d\mathscr{H}^m &= 0, \\ \lim_{i\to\infty} \int_{B^m} |v_i - v|^2 \, d\mathscr{H}^m + \lim_{i\to\infty} \int_{B^m} |Dv_i - Dv|^2 \, d\mathscr{H}^m &= 0. \end{aligned}$$

Wir definieren

$$\delta_i := \int_{B^m \setminus B^m_\eta} |u_i - v_i|^2 \, d\mathscr{H}^m + \int_{B^m \setminus B^m_\eta} |Du_i - Dv_i|^2 \, d\mathscr{H}^m.$$

Da u und v auf $B^m \setminus B^m_\eta$ übereinstimmen, folgt

$$\begin{aligned}
\lim_{i\to\infty} \delta_i = &\int_{B^m\setminus B^m_\eta} |u_i - v_i|^2 \, d\mathscr{H}^m + \int_{B^m\setminus B^m_\eta} |Du_i - Dv_i|^2 \, d\mathscr{H}^m \\
= &\int_{B^m\setminus B^m_\eta} |u_i - u|^2 \, d\mathscr{H}^m + \int_{B^m\setminus B^m_\eta} |v - u|^2 \, d\mathscr{H}^m \\
&+ \int_{B^m\setminus B^m_\eta} |v_i - v|^2 \, d\mathscr{H}^m + \int_{B^m\setminus B^m_\eta} |Du_i - Du|^2 \, d\mathscr{H}^m \\
&+ \int_{B^m\setminus B^m_\eta} |Dv - Du|^2 \, d\mathscr{H}^m + \int_{B^m\setminus B^m_\eta} |Dv_i - Dv|^2 \, d\mathscr{H}^m \\
=&0.
\end{aligned}$$

Wir wählen eine Nullfolge $0 < \lambda_i < 1 - \eta$. Nach Übergang zu Teilfolgen von u_i, v_i können wir $\delta_i \leq \lambda_i$ annehmen. Mit (4.46) erhalten wir nun für alle $i \in \mathbb{N}$ mit einer Konstanten $K > 0$

$$\begin{aligned}
\int_\eta^1 \int_{S^{m-1}} \left(|D_S u_i(t,\omega)|^2 + |D_S v_i(t,\omega)|^2\right) \, d\mathscr{H}^{m-1}(\omega)\, dt &\leq K^2, \\
\int_\eta^1 \int_{S^{m-1}} \left(|D_S^2 u_i(t,\omega)|^2 + |D_S^2 v_i(t,\omega)|^2\right) \, d\mathscr{H}^{m-1}(\omega)\, dt &\leq K^2, \\
\int_\eta^1 \int_{S^{m-1}} \left(|D_S \partial_t u_i(t,\omega)|^2 + |D_S \partial_t v_i(t,\omega)|^2\right) \, d\mathscr{H}^{m-1}(\omega)\, dt &\leq K^2, \\
\int_\eta^1 \int_{S^{m-1}} |u_i(t,\omega) - v_i(t-\lambda_i,\omega)|^2 \, d\mathscr{H}^{m-1}(\omega)\, dt &\leq \lambda_i^2 K^2 \\
\int_\eta^1 \int_{S^{m-1}} |\partial_t u_i(t,\omega) - \partial_t v_i(t-\lambda_i,\omega)|^2 \, d\mathscr{H}^{m-1}(\omega)\, dt &\leq \lambda_i^2 K^2 \\
\int_\eta^1 \int_{S^{m-1}} |D_S u_i(t,\omega) - D_S v_i(t-\lambda_i,\omega)|^2 \, d\mathscr{H}^{m-1}(\omega)\, dt &\leq \lambda_i^2 K^2 \\
\int_\eta^1 \int_{S^{m-1}} |u_i(t,\omega) - v_i(t-\mu_j,\omega) - \lambda_i \partial_t v_i(t-\lambda_i,\omega)|^2 \, d\mathscr{H}^{m-1}(\omega)\, dt &\leq \lambda_i^4 K^2.
\end{aligned}$$

Wir können also das Fortsetzungslemma (Lemma 11) anwenden. Folglich gibt es ein $\rho \in (\eta, 1)$, das beliebig nahe bei 1 gewählt werden kann, mit

$$\int_{S^{m-1}} \left(|D_S u_i(\rho,\omega)|^2 + |D_S v_i(\rho,\omega)|^2\right) d\mathscr{H}^{m-1}(\omega) \leq K^2,$$
$$\int_{S^{m-1}} \left(|D_S^2 u_i(\rho,\omega)|^2 + |D_S^2 v_i(\rho,\omega)|^2\right) d\mathscr{H}^{m-1}(\omega) \leq K^2,$$
$$\int_{S^{m-1}} \left(|D_S \partial_t u_i(\rho,\omega)|^2 + |D_S \partial_t v_i(\rho,\omega)|^2\right) d\mathscr{H}^{m-1}(\omega) \leq K^2$$
$$\int_{S^{m-1}} |u_i(\rho,\omega) - v_i(\rho-\lambda_i,\omega)|^2 \, d\mathscr{H}^{m-1}(\omega) \leq \lambda_i^2 K^2$$
$$\int_{S^{m-1}} |\partial_t u_i(\rho,\omega) - \partial_t v_i(\rho-\lambda_i,\omega)|^2 \, d\mathscr{H}^{m-1}(\omega) \leq \lambda_i^2 K^2$$
$$\int_{S^{m-1}} |D_S u_i(\rho,\omega) - D_S v_i(\rho-\lambda_i,\omega)|^2 \, d\mathscr{H}^{m-1}(\omega) \leq \lambda_i^2 K^2$$
$$\int_{S^{m-1}} |u_i(\rho,\omega) - v_i(\rho-\lambda_i,\omega) - \mu_j \partial_t v_i(\rho-\lambda_i,\omega)|^2 \, d\mathscr{H}^{m-1}(\omega). \leq \lambda_i^4 K^2.$$

Wegen

$$\lim_{n\to\infty} ||v_i||_{W^{2,2}(B^m_{\rho-\lambda_i} \setminus B_{\rho-\lambda_i-\frac{1}{n}}, \mathbb{R}^L)} = \lim_{n\to\infty} ||u_i||_{W^{2,2}(B^m_{\rho+\frac{1}{n}} \setminus B_\rho, \mathbb{R}^L)} = 0$$

gibt es ein $\kappa_i \in (0, \rho - \lambda_i)$ mit

$$||v_i||_{W^{2,2}(B^m_{\rho-\lambda_i} \setminus B_{\rho-\lambda_i-\kappa_i}, \mathbb{R}^L)} \leq \lambda_i,$$
$$||u_i||_{W^{2,2}(B^m_{\rho+\kappa_i} \setminus B_\rho, \mathbb{R}^L)} \leq \lambda_i.$$

Damit ist Behauptung 2 bewiesen. $\square$

Von nun an seien ρ, K, λ_i und κ_i wie in Behauptung 2 fest vorgegeben.

2. Schritt.

Für jedes $i \in \mathbb{N}$ können wir nach Schritt 1 das Interpolationslemma (Lemma 11) auf die Funktionen

$$f_{i,0} : S^{m-1} \to N,\ f_{i,0}(\omega) := v_i(\rho - \lambda_i, \omega);$$
$$g_{i,0} : S^{m-1} \to N,\ g_{i,0}(\omega) := u_i(\rho, \omega);$$
$$f_{i,1} : S^{m-1} \to \mathbb{R}^L,\ f_{i,1}(\omega) := \partial_t v_i(\rho - \lambda_i, \omega);$$
$$g_{i,1} : S^{m-1} \to \mathbb{R}^L,\ g_{i,1}(\omega) := \partial_t u_i(\rho, \omega)$$

anwenden. Somit erhalten wir eine Konstante $c > 0$ sowie eine Abbildung

$$h_i \in W^{2,2}([0, \lambda_i] \times S^{m-1}, \mathbb{R}^L)$$

mit

$$\begin{aligned} h_i(0,\omega) &= v_i(\rho-\lambda_i,\omega), \\ \partial_t h_i(0,\omega) &= \partial_t v_i(\rho-\lambda_i,\omega), \\ h_i(\lambda_i,\omega) &= u_i(\rho,\omega), \\ \partial_t h_i(\lambda_i,\omega) &= \partial_t u_i(\rho,\omega), \end{aligned}$$

sowie mit der Normabschätzung

$$||h_i||_{W^{2,2}([0,\lambda_i]\times S^{m-1},\mathbb{R}^L)} \le cK\lambda$$

und der Distanzabschätzung

$$\operatorname{dist}(h_i(t,x),N) \le cK\epsilon^{d-m}\lambda_i^{\frac{1}{2}} \text{ für fast alle } x\in (S^{m-1})_\epsilon,\ t\in[-\kappa_i,\lambda_i+\kappa_i].$$

Weiterhin setzen wir

$$\begin{aligned} h_i(t,\omega) &:= v_i(\rho-\lambda_i+t,\omega) \text{ für } t\in S^{m-1}\times[-\kappa_i,0] \\ h_i(t,\omega) &:= u_i(\rho-\lambda_i+t,\omega) \text{ für } t\in S^{m-1}\times[\lambda_i,\lambda_i+\kappa_i] \end{aligned}$$

Wegen $Im(u_i), Im(v_i) \subset N$ und wegen der Wahl von κ_i (4.47) gilt evtl. nach Vergrößerung von c

$$||h_i||_{W^{2,2}([-\kappa_i,\lambda_i+\kappa_i]\times S^{m-1},\mathbb{R}^L)} \le cK\lambda$$

und

$$\operatorname{dist}(h_i(t,x),N) \le cK\epsilon^{d-m}\lambda_i^{\frac{1}{2}} \text{ für fast alle } x\in (S^{m-1})_\epsilon,\ t\in[-\kappa_i,\lambda_i+\kappa_i].$$

3. Schritt.

Aus der Voraussetzung

$$\mathscr{H}-\dim\left(\{x\in\mathbb{R}^m \ :\ m_x>4\}\right) \le m-5$$

folgt

$$\mathscr{H}-\dim\left(\left\{x\in S^{m-1}\ :\ m_x>4\right\}\right) \le m-4.$$

Deswegen gibt es nach Lemma 12 eine Abbildung

$$\overline{h}_i \in W^{2,2}([-\kappa_i,\lambda_i+\kappa_i]\times S^{m-1},\mathbb{R}^L)$$

mit

$$\overline{h}_i \equiv h \text{ jeweils in Umgebungen von } S^{m-1}\times\{-\kappa\} \text{ bzw } S^{m-1}\times\{\lambda_i+\kappa_i\},$$

mit

$$||\overline{h}_i||_{W^{2,2}(S^{m-1}\times[-\kappa_i,\lambda_i+\kappa_i]\times S^{m-1},\mathbb{R}^L)} \leq ||h_i||_{W^{2,2}(S^{m-1}\times[-\kappa_i,\lambda_i+\kappa_i]\times S^{m-1},\mathbb{R}^L)} \leq C\lambda$$

und mit

$$\text{dist}\left(\overline{h}_i(t,x), N\right) \leq cK\epsilon^{d-m}\lambda_i^{\frac{1}{2}} \leq C\lambda_i^{\frac{1}{2}} \text{ für fast alle } x \in S^{m-1},\ t \in [-\kappa_i, \lambda_i + \kappa_i].$$

Zu Schritt 4 und Schritt 5 ist in obiger Beweisübersicht bereits alles gesagt worden. Damit ist das Interpolationslemma bewiesen. □

4.3 Beweis des Kompaktheitssatzes

Es seien alle Voraussetzungen des Kompaktheitssatzes (Hauptsatz 2) erfüllt. Sei $v \in W_G^{2,2}(B^m, N_\infty)$ eine beliebige Abbildung, die in einer Umgebung von S^{m-1} mit u übereinstimmt. Dann gibt es ein $\eta \in (\frac{3}{4}, 1)$ mit

$$v \equiv u \text{ auf } B^m \setminus B^m_\eta.$$

Nach den an die N_i gestellten Bedingungen gibt es Abbildungen $v_i \in W^{2,2}(B^m, N_i)$, die stark in $W^{2,2}$ gegen v konvergieren. Nach dem Interpolationslemma (Satz 10) gibt es ein $R \in (\eta, 1)$ und Abbildungen

$$w_i \in W_G^{2,2}(B^m, N_i)$$

mit

$$w_i \equiv u_i \text{ auf } B^m \setminus B^m_R$$

für jedes $i \in \mathbb{N}$, deren Einschränkungen $w_i|B^m_R$ stark in $W^{2,2}$ gegen $v|B^m_R$ konvergieren, für die also insbesondere

$$\int_{B^m_R} |\Delta v|^2\, dx = \lim_{i\to\infty} \int_{B^m_R} |\Delta w_i|^2\, dx. \tag{4.48}$$

gilt. Für jede Folge $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset W^{2,2}(B^m, \mathbb{R}^L)$, die in der $W^{2,2}$- Norm beschränkt ist, gilt wegen (4.4)

$$\lim_{i\to\infty} \int_{B^m_R} V_i[f_i]\, dx = 0.$$

Insbesondere gilt also

$$\lim_{i\to\infty} \int_{B^m_R} V_i[v_i]\, dx = 0,\ \lim_{i\to\infty} \int_{B^m_R} V_i[u_i]\, dx = 0. \tag{4.49}$$

Da die euklidische Bienergie E unterhalbstetig bzgl. schwacher $W^{2,2}$-Folgenkonvergenz ist, gilt

$$\lim_{i\to\infty}\int_{B_R^m}|\Delta u_i|^2\,dx \geq \int_{B_R^m}|\Delta u|^2\,dx \tag{4.50}$$

Mit (4.48), (4.49), (4.50) und der Minimierereigenschaft der u_i erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\int_{B_R^m}|\Delta v|^2\,dx\\
&=\lim_{i\to\infty}\int_{B_R^m}|\Delta w_i|^2\,dx\\
&=\lim_{i\to\infty}\int_{B_R^m}\big(|\Delta w_i|^2+V_i[w_i]\big)\,dx\\
&\geq\lim_{i\to\infty}\int_{B_R^m}\big(|\Delta u_i|^2+V_i[u_i]\big)\,dx\\
&=\lim_{i\to\infty}\int_{B_R^m}|\Delta u_i|^2\,dx\\
&\geq\int_{B_R^m}|\Delta u|^2\,dx
\end{aligned}$$

und damit die Minimierereigenschaft von u. Setzen wir hierin $v = u$ ein, so erhalten wir für *jedes (!)* $\eta \in (\frac{3}{4}, 1)$ ein $R \in (\eta, 1)$ mit

$$\int_{B_R^m}|\Delta u|^2\,dx=\lim_{i\to\infty}\int_{B_R^m}|\Delta u_i|^2\,dx. \tag{4.51}$$

Die Ungleichung (4.11) aus Lemma 9 angewendet auf die Abbildung $u_i - u$ liefert

$$\int_{B_{\frac{R}{2}}^m}|D^2(u_i-u)|^2\,dx\leq C\int_{B_R^m}|\Delta(u_i-u)|^2\,dx+CR^{-2}\int_{B_R^m}|D(u_i-u)|^2\,dx. \tag{4.52}$$

Mit (4.51) und der starken $W^{1,2}$-Konvergenz $u_i \to \varphi$ (die aus der schwachen $W^{2,2}$-Konvergenz folgt) erhalten wir

$$\int_{B_{\frac{R}{2}}^m}|D^2(u_i-u)|^2\,dx=0.$$

Mit erneuter Berufung auf starke $W^{1,2}$-Konvergenz folgt

$$\lim_{i\to\infty}||u_i-u||_{W^{2,2}(B_{\frac{R}{2}}^m,\mathbb{R}^L)}=0$$

für jedes $R \in (\eta, 1)$. Dies ist gleichbedeutend mit der starken Konvergenz in $W^{2,2}_{loc}(B^m_{\frac{1}{2}}, \mathbb{R}^L)$. Damit ist der Kompaktheitssatz bewiesen. □

4.4 Eine Monotonieformel

Für $u \in W^{2,2}(B^m, \mathbb{R}^L)$ sei

$$\begin{aligned}\Phi_u(r) := \quad & r^{4-m} \int_{B_r^m} |\Delta u|^2 \, dx \\ & + r^{3-m} \int_{S_r^{m-1}} \left(\partial_R |Du|^2 + 4|Du|^2 - 4r^2 |\partial_R u|^2\right) \mathscr{H}^{m-1}.\end{aligned}$$

Für *fast alle* $0 < r < 1$ ist der Ausdruck $\Phi_u(r)$ wohldefiniert.

Satz 6 (Monotonieformel) *Sei $u \in W^{2,2}(B^m, N)$ stationär bzgl. einer gestörten Bienergie E_V. Dann gilt für alle $\rho, r \in (0,1] \setminus \Lambda_u$ mit $\rho < r$, wobei Λ_u eine (von u abhängige) Nullmenge ist*

$$\begin{aligned}& [\Phi_u(r) + \eta_u(r)] - [\Phi_u(\rho) + \eta_u(\rho)] + \int_\rho^r \theta_u(t) \, dt \\ =& 4 \int_{B_r^m \setminus B_\rho^m} \left(\frac{|D\partial_R u|^2}{|x|^{m-2}} + (m-2) \frac{|\partial_R u|^2}{|x|^m} \right) dx. \end{aligned} \tag{4.53}$$

Dabei sind $\eta_u : (0,1) \to \mathbb{R}$ und $\theta_u : (0,1) \to \mathbb{R}$ (von u abhängende!) L^1_{loc}-Funktionen mit

$$\begin{aligned}|\eta_u(r)| \leq & C r^{5-m} \int_{B_r^m} \left(|D^2 u|^2 + |Du|^4\right) dx \\ & + C r^{6-m} \int_{S_r^{m-1}} \left(|D^2 u|^2 + |Du|^4\right) d\mathscr{H}^{m-1} + C r^3, \\ |\theta_u(r)| \leq & C r^{5-m} \int_{B_r^m} \left(|D^2 u|^2 + |Du|^4\right) dx + C r^3 \end{aligned} \tag{4.54}$$

für alle $r \in (0,1) \setminus \Lambda_u$, wobei die Konstante $C > 0$ nichr von u abhängt.
Ist E_V die euklidische Bienergie (d.h. $V \equiv 0$), so gilt $\eta_u \equiv 0$ und $\theta_u \equiv 0$.

In dem Fall, dass E_V die euklidische Bienergie ist $\int_{B^m} |\Delta u|^2 \, dx$ ist, liegt die Monotonieformel für stationäre biharmonische Abbildungen vor, die Angelsberg in [2] berechnet hat. In diesem Fall folgt aus der Monotonieformel - da deren rechte Seite nichtnegativ ist -, dass die Funktion $r \mapsto \Phi_u(r)$ monoton wachsend ist. Daher kommt der Name „Monotonieformel“.
Ein Spezialfall unseres Satzes ist die Monotonieformel für Abbildungen, die stationär bzgl. der Bienergie $\int_{B^m} |\Delta_{\mathbf{g}} u|^2 \sqrt{|\mathbf{g}|} dx$ für eine beliebige riemannsche Metrik $\mathbf{g}$ sind.

Beim Beweis der Monotonieformel orientieren wir uns an der Arbeit [2] von Angelsberg und werden das dortige Vorgehen gemäß unserer allgemeineren Ausgangssituation modifizieren.

Anwenden werden wir die Monotonieformel später in Form des folgenden Korollars:

Korollar 4 *Für $u \in W^{2,2}(B^m, N)$ gelte die Monotonieformel (4.53). Dann gilt*

$$\sup_{\rho\in\left(0,\frac{1}{2}\right]} \rho^{4-m} \int_{B_\rho^m} \left(|D^2u|^2 + |Du|^4\right)\, dx < \infty \tag{4.55}$$

und es existiert der Grenzwert

$$\lim_{(0,1]\setminus\Lambda_u\ni r\downarrow 0} \left[\Phi_u(r) + \eta_u(r)\right].$$

4.4.1 Einige Hilfssätze

Wir tragen einige Lemmata zusammen, die wir im Beweis der Monotonieformel verwenden werden. Wir führen sie in der Reihenfolge ihres Gebrauches an.

Lemma 14 *Sei $\xi \in C_0^\infty(B, \mathbb{R}^m)$ und sei $\xi_t(x) := x + t\xi(x)$ für $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} |\det(D(\xi_{-t}))| = -\xi_i^i.$$

Beweis: Wir halten uns an [22]. Wegen $\det(D\xi_0) = +1$ und weil die Abbildung $t \mapsto \det(D\xi_t)$ stetig ist, können wir mit $\det(D\xi_{-t})$ anstelle von $|\det(D\xi_{-t})|$ arbeiten. Für eine $m \times m$-Matrix x sei $ad_{ij}(x)$ der $(m-1) \times (m-1)$-Minor, welcher durch Streichung der i-ten Zeile und der j-ten Spalte aus x hervorgeht. Nach dem Entwicklungssatz von Laplace gilt

$$\det(x) = x_{jk} \det\left(ad_{jk}(x)\right) + \text{ Terme unabhängig von } x_{jk}.$$

Es gilt also

$$\frac{\partial}{\partial x_{jk}} \det(x) = ad_{jk}(x)$$

Dies verwenden wir nun zusammen mit der Kettenregel und mit $ad_{ik}(D\xi_0) = \delta_{ik}$:

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \det(D\xi_t) &= ad_{ik}\left(D\xi_0\right) \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} \partial_k \left(\xi_{-t}\right)^i \\ &= \partial_i \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} \left(\xi_{-t}\right)^i = -\partial_i \xi^i = \xi_i^i.\end{aligned}$$

□

Lemma 15 *Für jede Funktion $f : B^m \to \mathbb{R}$, für welche die folgenden Integrale definiert sind, gilt:*

$$\begin{aligned}&\int_\rho^r \tau^{1-m} \int_{B^m} |x| f \varphi_\tau''\, dx\, d\tau = \\ =&(3-m) \int_\rho^r \tau^{2-p} \int_{B^m} f\, \varphi_\tau'\, dx\, d\tau + \int_{B^m} f\left(\varphi_\rho'\, \rho^{3-m} - \varphi_r'\, r^{3-m}\right)\, dx.\end{aligned}$$

Dieses Lemma und seinen Beweis entnehmen wir [2], wo es in einer spezielleren Version zu finden ist.

Beweis: Mit partieller Integration erhält man

$$\int_\rho^r \varphi''_\tau \, \tau^{1-m} \, d\tau = -\varphi'_R \frac{R^{3-m}}{|x|} + \varphi'_\rho \frac{\rho^{3-m}}{|x|} + \frac{3-m}{|x|} \int_\rho^r \varphi'_\tau \, \tau^{2-m} \, d\tau.$$

Nun folgt das Lemma durch eine zweimalige Anwendung des Satzes von Fubini. □

Für $f, \; \varphi \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ definieren wir

$$(\varphi \star f)(x) := \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{y}{x}\right) f(y) \, dy.$$

Durch eine einfache Koordinatentransformation erhalten wir:

$$(\varphi \star f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(z) f(xz) x \, dz.$$

Lemma 16 *Seien $f, \; \varphi_k \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, mit*

$$\varphi_k \geq 0,, \; \int_R \varphi_k(x) \, dx = 1, \; supp\,(\varphi_k) \subset \left[1 - \frac{1}{k}, 1\right], \; k \in \mathbb{N}.$$

Seien $\rho, R \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \rho \leq R$. Dann gilt für den Grenzwertübergang $k \to \infty$:

$$\phi_k \star f \to id \cdot f \;\; in \; L^1([\rho, R]) \tag{4.56}$$

mit $(id \cdot f)(x) = x f(x)$. Weiterhin gilt für fast alle $0 < r < 1$

$$\lim_{k \to \infty} (\phi_k \star f)(r) = r f(r). \tag{4.57}$$

Dieses Lemma und seinen Beweis entnehmen wir dem Appendix von [2]. *Beweis:* Man sieht leicht die folgenden beiden Aussagen:

$$||f(h\cdot) - f||_{L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \to 0 \text{ für } h \to 1, \tag{4.58}$$

$$(\varphi_k \star f)(x) - x f(x) = x \int_{\mathbb{R}} \varphi_k(z) \left(f(xz) - f(x)\right) dz.$$

Durch Anwendung des Satzes von Fubini und der Hölder-Ungleichung erhalten wir damit

$$\begin{aligned}
||\varphi_k \star f - x f||_{L^1([\rho,R])} &\leq \int_\rho^R |x| \int_{\mathbb{R}} |\varphi_k(z)| \, |f(xz) - f(x)| \, dz \, dx \\
&\leq R \int_{\mathbb{R}} |\varphi_k(z)| \left(\int_\rho^R |f(xz) - f(x)| \, dx \right) dz \\
&\leq R \, ||\varphi_k||_{L^1} \sup_{h \in supp \varphi_k} ||f(h\cdot) - f||_{L^1}.
\end{aligned}$$

Wegen $supp\,\phi_k \subset \left[1-\frac{1}{k},1\right]$ und $||\varphi_k||_{L^1}=1$ folgt nun (4.56).
Aus dem Differentiationssatz von Lebesgue folgt nun, dass für *fast alle* $0<r<1$ gilt:

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}(\varphi_k \star f)(r) &= \lim_{k\to\infty}\lim_{\epsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\epsilon}\int_{r-\epsilon}^{r+\epsilon}\varphi_k\star f\,dx\\ &= -\lim_{\epsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\epsilon}\int_{r-\epsilon}^{r+\epsilon} id\cdot f\,dx\\ &= -rf(r).\end{aligned}$$

□

4.4.2 Beweis der Monotonieformel

Zunächst arbeiten wir mit einem beliebiegen positiven C^2-Integranden $W=W(x,z,p,q)$ und dem dazugehörigen Funktional

$$F_W(u) := \int_{B^m} W[u]\,dx.$$

Um die Notationen im Beweis der Monotonieformel nicht ausufern zu lassen, leisten wir uns einige Unsauberheiten in der Notation, um eine unnötige Verkomplizierung derselben zu vermeiden: Das Zeichen "x" verwenden wir nicht nur für die Variable x, sondern auch für die Abbildung $x\mapsto x$. Wir bezeichnen z.B. mit "xf" die Abbildung $x\mapsto xf(x)$ und mit "$x-t\xi$" die Abbildung $x\mapsto x-t\xi(x)$. Ähnlich sei mit "x_i" neben der Variablen x_i auch die Abbildung $x\mapsto x_i$ bezeichnet. Bei Rechnungen in Koordinaten schreiben wir $W\left(x,\,u^\kappa,\,u_i^\kappa,\,u_{ij}^\kappa\right)$ anstatt $W(\cdot,\,u,\,Du,\,D^2u)$. Wir verwenden die Summenkonvention, dabei werden römische Indizes $i,j,k...$ von 1 bis m, griechische Indizes κ von 1 bis L summiert.

Zur Erinnerung:

$$DF_W(u,\varphi) := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F_W\left(u\circ\varphi_t\right)$$

für alle $\varphi\in C_0^\infty(B_r^m,\mathbb{R}^m)$ mit $\varphi_t(x):=x+t\varphi(x)$. Dass u stationär bzgl. F_W ist, bedeutet gerade $DF_W(u,\varphi)=0$ für alle solchen φ.

Lemma 17 *Für jedes $u\in W^{2,2}(B^m,\mathbb{R}^L)$ und jedes $\xi\in C_0^\infty(B^m,\mathbb{R}^m)$ gilt*

$$DF_W(u,\xi) = \int_{B^m}\left\{\alpha_i[u]\,\xi^i + \beta_{ij}[u]\,\xi_i^j + \gamma_{ijk}[u]\,\xi_{ij}^k\right\}\,dx \tag{4.59}$$

mit den Integranden

$$\begin{aligned}\alpha_i &= -W_{x_i},\\ \beta_{ij} &= -W\delta_{ij} + W_{p_i^\kappa}p_j^\kappa + 2W_{q_{ki}^\kappa}q_{kj}^\kappa,\\ \gamma_{ijk} &= W_{q_{ij}^\kappa}p_k^\kappa.\end{aligned} \tag{4.60}$$

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned}(u \circ \xi_t)^\kappa_i &= (u^\kappa_i + t\, u^\kappa_a\, \xi^a_i) \circ \xi_t,\\ (u \circ \xi_t)^\kappa_{ij} &= \left(u^\kappa_{ij} + t\, \left[2u^\kappa_{ia}\, \varphi^a_j + + u^\kappa_a \varphi^a_{ij}\right] + t^2 u^\kappa_{ab}\, \varphi^a_i\, \varphi^b_j\right) \circ \xi_t.\end{aligned}$$

Wir führen die Koordinatentransformation $x \mapsto x - t\xi(x)$. Deren Jacobi-Determinante ist $|\det(D\xi_t)|$. Beachte: $\xi_t \circ \xi_{-t}(x) = x - t\xi(x) + t\xi\,(x - t\xi(x))$.

$$\begin{aligned}&\int_{B^m} W\,[u \circ \xi_t]\; dx\\ =&\int_{B^m} W\,(\xi_{-t},\, u^\kappa \circ \xi_t \circ \xi_{-t},\, (u^\kappa_i + t\, u^\kappa_a\, \xi^a_i) \circ \xi_t \circ \xi_{-t},\\ &\left(u^\kappa_{ij} + t\, \left[2u^\kappa_{ia}\, \xi^a_j + + t\, u^\kappa_a \xi^a_{ij}\right] + t^2 u^\kappa_{ab}\, \xi^a_i\, \xi^b_j\right) \circ \xi_t \circ \xi_{-t}\right)\, \det(D(\xi_t))\; dx.\end{aligned}$$

Nun berechnen wir die Ableitung nach t bei $t = 0$. Nach Lemma 14 gilt

$$\det(D(\xi_t)) = -\xi^i_i.$$

Des weiteren verwenden wir, dass für jede Funktionenfamilie $f_t : B \to \mathbb{R}^n$, die für kleine $|t|$ stetig differnzierbar von t abhängt, gilt:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (f_t \circ \xi_t \circ \xi_{-t})\,(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f_t(x).$$

Ableitung und Integral können nach einem Standardargument aus der Integrationstheorie vertauscht werden. Mit all dem bisher gesagten erhält man durch Anwenden der Kettenregel

$$\begin{aligned}&DF_W(u, \xi) =\\ =&\int_{B^m} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} W\,[u \circ \xi_t]\; dx\\ =&\int_{B^m} \left\{-W[u]\,\xi^i_i - W_{x^i}[u]\,\xi^i + W_{u^\kappa_i}[u]\,u^\kappa_a\,\xi^a_i + W_{u^\kappa_{ij}}\left[2u^\kappa_{ia}\,\xi^a_j + u^\kappa_a \xi^a_{ij}\right]\right\}\; dx\\ =&\int_{B^m} \left\{\alpha_i[u]\,\xi^i + \beta_{ij}[u]\,\xi^j_i + \gamma_{ijk}[u]\,\xi^k_{ij}\right\}\; dx.\end{aligned}$$

□

Für jedes $\nu \in \mathbb{N}$ wählen wir eine Funktion $\varphi_\nu \in C^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ mit $\varphi_\nu \equiv 1$ auf $(-\infty, 1 - \frac{1}{n}]$, $\varphi_\nu \equiv 0$ auf $[1, \infty)$, $\varphi'_\nu \le 0$ und $\int_\mathbb{R} |\varphi'_\nu|\, dx = 1$. Für $0 < \tau < 1$ und definieren wir $\varphi_{\nu,\tau}(x) := \varphi_\nu\left(\frac{|x|}{\tau}\right)$, $\varphi'_{\nu,\tau}(x) := \varphi'_\nu\left(\frac{|x|}{\tau}\right)$ und $\varphi''_{\nu,\tau}(x) := \varphi''_\nu\left(\frac{|x|}{\tau}\right)$. Wir setzen

$$\xi_{\nu,\tau}(x) := \varphi_{\nu,\tau}(x)\, x = \varphi_\nu\left(\frac{|x|}{\tau}\right) x.$$

Wir definieren für $0 < \rho < r < 1$

$$I^\nu_{r,\rho} := \int_\rho^r \tau^{3-m} DF(u, \xi_{\nu,\tau})\, d\tau.$$

Lemma 18 *Ist $u \in W^{2,2}(B^m, N)$ stationär bzgl. F_W, so gilt*

$$\begin{aligned}0 =&(4-m)\int_\rho^r \tau^{3-m}\int_{B^m} A_W[u]\,\varphi_{\nu,\tau}\,dx\,d\tau + \int_\rho^r \tau^{2-m}\int_{B^m} B_W[u]\,\varphi'_{\nu,\tau}\,dx\,d\tau\\ &-\int_{B^m} C_W[u]\,\varphi'_{\nu,r}\,r^{3-m}\,dx + \int_{B^m} C_W[u]\,\varphi'_{\nu,\rho}\,r^{3-m}\,dx\end{aligned}$$

mit Integranden

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_W &= \tfrac{1}{4-m}\left(\alpha_i x_i + \beta_{ii}\right),\\ \mathscr{B}_W &= \tfrac{1}{|x|}\beta_{ik}x_ix_k - \tfrac{1}{|x|}\gamma_{ikk}x_i + \tfrac{1}{|x|}\gamma_{kik}x_i + \tfrac{1}{|x|}\gamma_{kki}x_i + \tfrac{(3-m)}{|x|^3}\gamma_{ijk}x_ix_jx_k,\\ \mathscr{C}_W &= \tfrac{1}{|x|^3}\gamma_{ijk}x_ix_jx_k.\end{aligned} \tag{4.61}$$

Beweis: In diesem Beweis verwenden wir die Abkürzungen $\xi = \xi_{\nu,\tau}$ und $\varphi_\tau = \varphi_{\nu,\tau}$.

$$\begin{aligned}\xi^k &= \varphi_\tau x_k,\\ \xi^k_i &= \frac{1}{\tau}\varphi'_\tau\frac{x_ix_k}{|x|} + \varphi_\tau\delta_{ik},\\ \xi^k_{ij} &= \frac{1}{\tau^2}\varphi''_\tau\frac{x_ix_jx_k}{|x|^2} + \frac{1}{\tau}\varphi'_\tau\left[\frac{-x_ix_jx_k}{|x|^3} + \frac{\delta_{ij}x_k + \delta_{jk}x_i + \delta_{ik}x_j}{|x|}\right].\end{aligned}$$

Dies eingesetzt in (4.59) ergibt

$$\begin{aligned}&DF_W(u,\nu,\tau) =\\ =&\int_{B^m}\alpha_i[u]\,x_i\varphi_\tau\,dx\\ +&\int_{B^m}\left\{\beta_{ik}[u]\,\frac{x_ix_k}{|x|}\frac{1}{\tau}\varphi'_\tau + \beta_{ik}[u]\,\delta_{ik}\varphi_\tau\right\}dx\\ +&\int_{B^m}\left\{\gamma_{ijk}[u]\,\frac{x_ix_jx_k}{|x|^2}\frac{1}{\tau^2}\varphi''_\tau + \gamma_{ijk}[u]\,\left[\frac{-x_ix_jx_k}{|x|^3} + \frac{\delta_{ij}x_k + \delta_{jk}x_i + \delta_{ik}x_j}{|x|}\right]\frac{1}{\tau}\varphi'_\tau\right\}dx\\ =&\int_{B^m}\left[\alpha_i[u]\,x_i + \beta_{ii}[u]\right]\varphi_\tau\,dx\\ +&\int_{B^m}\left[\frac{1}{|x|}\beta_{ij}x_ix_j - \frac{1}{|x|}\gamma_{ikk}[u]\,x_i + \frac{1}{|x|}\gamma_{kik}[u]\,x_i + \frac{1}{|x|}\gamma_{kki}[u]\,x_i\right]\frac{1}{\tau}\varphi'_\tau\,dx\\ +&\int_{B^m}\frac{1}{|x|^2}\gamma_{ijk}[u]x_ix_jx_k\frac{1}{\tau^2}\varphi''_\tau\,dx\end{aligned}$$

Diese Gleichung integrieren wir: $\int_\rho^r ...d\tau$. Daraufhin wenden wir partielle Integration in Form von Lemma 15 an:

$$
\begin{aligned}
&I^{\nu}_{r,\rho} = \\
&= \int_\rho^r \tau^{3-m} \int_{B^m} [\alpha_i[u]\, x_i + \beta_{ii}[u]]\, \varphi_\tau \, dx \, d\tau \\
&+ \int_\rho^r \tau^{2-m} \int_{B^m} \left[\frac{1}{|x|}\beta_{ij}[u]\, x_i x_j - \frac{1}{|x|}\gamma_{ikk}[u]\, x_i + \frac{1}{|x|}\gamma_{kik}[u]\, x_i + \frac{1}{|x|}\gamma_{kki}[u]\, x_i \right] \varphi'_\tau \, dx \\
&+ \int_\rho^r \tau^{2-m} \int_{B^m} \frac{(3-m)}{|x|^3}\gamma_{ijk}[u]\, x_i x_j x_k \varphi'_\tau \\
&- \int_{B^m} \frac{1}{|x|^3}\gamma_{ijk}[u]\, x_i x_j x_k \varphi'_r r^{3-m}\, dx \\
&+ \int_{B^m} \frac{1}{|x|^3}\gamma_{ijk}[u]\, x_i x_j x_k \varphi'_\rho \rho^{3-m}\, dx.
\end{aligned}
$$

Weil u stationär bezgl. F_W ist, gilt $I^\nu_{\rho,r} = 0$. Damit ist das Lemma bewiesen. □

Wir führen als Abkürzung den Integranden

$$U(x, z, p, q) := q^\kappa_{ii} q^\kappa_{jj}$$

ein, d.h. es gilt

$$U[u] = |\Delta u|^2$$

und für W verwenden wir

$$W = U + V,$$

d.h. es gilt

$$E_V(u) = F_W(u) := \int_{B^m} W[u]\, dx = \int_{B^m} \left(|\Delta u|^2 + V[u] \right) dx.$$

Wir berechnen:

$$
\begin{aligned}
U_{x_i} = U_{p^\kappa_i} &= 0, \\
U_{q^\kappa_{ij}}(q) &= 2q^\kappa_{aa}\, \delta_{ij}.
\end{aligned}
$$

Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
\mathscr{A}_U[u] &= |\Delta u|^2, \\
\mathscr{B}_U[u] &= -|\Delta u|^2 |x| + 4\Delta u^\kappa\, u^\kappa_{ij} \frac{x_i x_j}{|x|} + 8\Delta u^\kappa\, u^\kappa_j \frac{x_j}{|x|}, \\
\mathscr{C}_U[u] &= -\Delta u^\kappa\, u^\kappa_j \frac{x_j}{|x|}.
\end{aligned}
$$

Mit

$$I^\nu_{\rho,r} = \int_\rho^r \tau^{3-m} DF_U(u, \nu, \tau)\, d\tau \; + \int_\rho^r \tau^{3-m} DF_V(u, \nu, \tau)\, d\tau.$$

und mit Lemma 18 folgt

$$
\begin{aligned}
0 =& \int_\rho^r \tau^{3-m} \int_{B^m} (4-m)|\Delta u|^2 \varphi_{\nu,\tau}\, dx\, d\tau \\
&+ \int_\rho^r \tau^{2-m} \int_{B^m} \left[-|\Delta u|^2 |x| + 4 u^\kappa_{kk} u^\kappa_{ij} \frac{x_i x_j}{|x|} + 8 u^\kappa_{kk} u^\kappa_j \frac{x_j}{|x|} \right] \varphi'_{\nu,\tau}\, dx\, d\tau \\
&-2 \int_{B^m} u^\kappa_{kk} u^\kappa_j \frac{x_j}{|x|} \varphi'_{\nu,r}\, r^{3-m}\, dx \\
&+2 \int_{B^m} u^\kappa_{kk} u^\kappa_j \frac{x_j}{|x|} \varphi'_{\nu,\rho}\, \rho^{3-m}\, dx \\
&+ \int_\rho^r \tau^{3-m} \int_{B^m} (4-m) \mathscr{A}[u] \varphi_{\nu,\tau}\, dx\, d\tau \\
&+ \int_\rho^r \tau^{2-m} \int_{B^m} \mathscr{B}[u] \varphi'_{\nu,\tau}\, dx\, d\tau \\
&-2 \int_{B^m} \mathscr{C}[u] \varphi'_{\nu,r}\, r^{3-m}\, dx \\
&+2 \int_{B^m} \mathscr{C}[u] \varphi'_{\nu,\rho}\, \rho^{3-m}\, dx,
\end{aligned} \tag{4.62}
$$

dabei setzen wir von nun an - weil außer V keine weiteren Integranden mehr im Spiel sind -

$$
\mathscr{A} := \mathscr{A}_V,\ \mathscr{B} := \mathscr{B}_V,\ \mathscr{C} := \mathscr{C}_V.
$$

Mit

$$
\frac{d}{d\tau} \varphi_{\nu,\tau} = -\varphi'_{\nu,\tau} \frac{|x|}{\tau^2}
$$

berechnen wir

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{d\tau} \left[\tau^{4-m} \int_{B^m} |\Delta u|^2 \varphi_{\nu,\tau}\, dx + \tau^{4-m} \int_{B^m} \mathscr{A}[u]\, \varphi_{\nu,\tau}\, dx \right] \\
=& \tau^{3-m} \int_{B^m} (4-m) |\Delta u|^2\, \varphi_{\nu,\tau}\, dx - \tau^{2-m} \int_{B^m} |\Delta u|^2 |x|\, \varphi'_{\nu,\tau}\, dx \\
&+ \tau^{3-m} \int_{B^m} (4-m) \mathscr{A}[u]\, \varphi_{\nu,\tau}\, dx - \tau^{2-m} \int_{B^m} \mathscr{A}[u]\, |x|\, \varphi'_{\nu,\tau}\, dx.
\end{aligned}
$$

Durch Integration $\int_\rho^r ... d\tau$ ergibt das

$$
\begin{aligned}
&\left[r^{4-m} \int_{B^m} |\Delta u|^2 \varphi_{\nu,r}\, dx + r^{4-m} \int_{B^m} \mathscr{A}[u]\, \varphi_{\nu,r}\, dx \right] \\
&- \left[\rho^{4-m} \int_{B^m} |\Delta u|^2 \varphi_{\nu,\rho}\, dx + \rho^{4-m} \int_{B^m} \mathscr{A}[u]\, \varphi_{\nu,\rho}\, dx \right] \\
=& (4-m) \int_\rho^r \tau^{3-m} \int_{B^m} |\Delta u|^2\, \varphi_{\nu,\tau}\, dx\, d\tau - \int_\rho^r \tau^{2-m} \int_{B^m} |\Delta u|^2 |x|\, \varphi'_{\nu,\tau}\, dx\, d\tau \\
&+ (4-m) \int_\rho^r \tau^{3-m} \int_{B^m} \mathscr{A}[u]\, \varphi_{\nu,\tau}\, dx\, d\tau - \int_\rho^r \tau^{2-m} \int_{B^m} \mathscr{A}[u]\, |x|\, \varphi'_{\nu,\tau}\, dx,\, d\tau.
\end{aligned}
$$

Zusammen mit (4.62) folgt hieraus

$$\begin{aligned}
&\left[\tau^{4-m}\int_{B^m}|\Delta u|^2\varphi_{\nu,r}\,dx+\tau^{4-m}\int_{B^m}\mathscr{A}[u]\,\varphi_{\nu,r}\,dx\right]\\
&-\left[\tau^{4-m}\int_{B^m}|\Delta u|^2\varphi_{\nu,\rho}\,dx+\tau^{4-m}\int_{B^m}\mathscr{A}[u]\,\varphi_{\nu,\rho}\,dx\right]\\
=&-\int_\rho^r\tau^{2-m}\int_{B^m}\left[4u^\kappa_{kk}u^\kappa_{ij}\frac{x_ix_j}{|x|}+8u^\kappa_{kk}u^\kappa_j\frac{x_j}{|x|}\right]\varphi'_{\nu,\tau}\,dx\,d\tau\\
&+2\int_{B^m}u^\kappa_{kk}u^\kappa_j\frac{x_j}{|x|}\varphi'_{\nu,r}\,r^{3-m}\,dx-2\int_{B^m}u^\kappa_{kk}u^\kappa_j\frac{x_j}{|x|}\varphi'_{\nu,\rho}\,\rho^{3-m}\,dx\\
&-\int_\rho^r\tau^{2-m}\int_{B^m}(|x|\mathscr{A}+\mathscr{B})[u]\varphi'_{\nu,\tau}\,dx\,d\tau\\
&+2\int_{B^m}\mathscr{C}[u]\varphi'_{\nu,r}\,r^{3-m}\,dx-2\int_{B^m}\mathscr{C}[u]\varphi'_{\nu,\rho}\,\rho^{3-m}\,dx. \qquad (4.63)
\end{aligned}$$

Nun führen wir den Grenzwertübergang $\nu\to\infty$ durch. Die $\varphi_{\nu,r}$ konvergieren gleichmäßig gegen die charakteristische Funktion von B^m_r. Es gilt also

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_{B^m}(...)\varphi_{\nu,r}\,dx=-\int_{B_r}(...)\,dx$$

für alle entsprechenden Terme. Nach (4.56) aus Lemma 16 gilt für die entsprechenden Terme

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_\rho^r\tau^{2-m}\int_{B^m}(...)\varphi'_{\nu,\tau}dx\,d\tau=-\int_{B_r\setminus B_\rho}|x|^{3-m}(...)\,dx\,d\tau.$$

Auf die übrigen Terme wenden wir (4.57) aus Lemma 16 an:

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_{B^m}(...)\varphi'_{\nu,r}\,r^{3-m}\,dx=-r^{4-m}\int_{S_r}(...)\,d\mathscr{H}^{m-1}$$

Dies führt zu

$$\begin{aligned}
&\left[r^{4-m}\int_{B_r}|\Delta u|^2\,dx+\widetilde{\eta}_u(r)\right]-\left[\rho^{4-m}\int_{B_\rho}|\Delta u|^2\,dx+\widetilde{\eta}_u(\rho)\right]\\
&+\int_{B^m_r\setminus B^m_\rho}\mathscr{W}[u]\,dx\\
=&\quad-\int_{B_r\setminus B_\rho}\left(4\frac{\Delta u^\kappa\,u^\kappa_{ij}x_ix_j}{|x|^{m-2}}+8\frac{\Delta u^\kappa\,u^\kappa_jx_j}{|x|^{m-2}}\right)dx-2\int_{S_r-S_\rho}\frac{\Delta u^\kappa u^\kappa_jx_j}{|x|^{m-3}}\,d\mathscr{H}^{m-1} \qquad (4.64)
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\widetilde{\eta}_u(r)&:=r^{4-m}\int_{B_r}\mathscr{A}[u]\,dx-2r^{4-m}\int_{S^{m-1}_r}\mathscr{C}[u]\,d\mathscr{H}^{m-1},\\
\mathscr{W}(x,z,p,q)&:=-\frac{|x|\mathscr{A}(x,z,p,q)+\mathscr{B}(x,z,p,q)}{|x|^{m-4}}.
\end{aligned}$$

Dabei verwenden wir die Notation

$$\int_{S_r^{m-1}-S_\rho^{m-1}}(...)\,d\mathscr{H}^{m-1}=\int_{S_r^{m-1}}(...)\,d\mathscr{H}^{m-1}-\int_{S_\rho^{m-1}}(...)\,d\mathscr{H}^{m-1}.$$

Für jedes nichtnegative $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$ ist die Funktion

$$(0,1]\ni r\mapsto\int_{B_r^m}f\,dx$$

absolutstetig und für fast alle $r\in(0,1)$ gilt

$$\frac{d}{dr}\int_{B_r^m}f\,dx=\int_{S_r^{m-1}}f\,d\mathscr{H}^{m-1}.$$

Mit partieller Integration erhalten wir also für fast alle $0<\rho<R\le 1$ mit

$$\begin{aligned}\int_{B_R^m\setminus B_\rho^m}\frac{f}{|x|^{m-\alpha}}\,dx=&\int_\rho^R r^{\alpha-m}\int_{S_r^{m-1}}f\,d\mathscr{H}^{m-1}\\ =&R^{\alpha-m}\int_{B_R^m}f\,dx-\rho^{\alpha-m}\int_{B_\rho^m}f\,dx\\ &+(m-\alpha)\int_\rho^R r^{\alpha-1-m}\int_{B_t^m}f\,dx\,dt.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\int_{B_r^m\setminus B_\rho^m}\mathscr{W}[u]\,dx=&\int_{B_r^m\setminus B_\rho^m}\frac{\mathscr{A}[u]}{|x|^{m-5}}\,dx+\int_{B_r^m\setminus B_\rho^m}\frac{\mathscr{B}[u]}{|x|^{m-4}}\,dx\\ =&\quad(m-5)\int_\rho^r t^{4-m}\int_{B_t^m}\mathscr{A}[u]\,dx\,dt\\ &+(m-4)\int_\rho^r t^{3-m}\int_{B_t^m}\mathscr{B}[u],dx\,dt\\ &+r^{4-m}\int_{B_r^m}\mathscr{A}[u]\,dx-\rho^{4-m}\int_{B_\rho^m}\mathscr{A}[u]\,dx\\ &+r^{3-m}\int_{B_r^m}\mathscr{B}[u]\,dx-\rho^{3-m}\int_{B_\rho^m}\mathscr{B}[u]\,dx.\end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}\eta_u(r):=&\widetilde{\eta}_u(r)+r^{4-m}\int_{B_r^m}\mathscr{A}[u]\,dx+r^{3-m}\int_{B_r^m}\mathscr{B}[u]\,dx\\ =&2r^{4-m}\int_{B_r}\mathscr{A}[u]\,dx+r^{3-m}\int_{B_r^m}\mathscr{B}[u]\,dx,\end{aligned}$$

und

$$\theta_u(r)=(m-5)\int_\rho^r t^{4-m}\int_{B_t^m}\mathscr{A}[u]\,dx+(m-4)\int_\rho^r t^{3-m}\int_{B_t^m}\mathscr{B}[u],dx$$

folgt nun

$$\begin{aligned}
&\left[r^{4-m}\int_{B_r^m}|\Delta u|^2\,dx+\eta_u(r)+\right]-\left[\rho^{4-m}\int_{B_\rho^m}|\Delta u|^2\,dx+\eta_u\left(\rho\right)\right]\\
&+\int_\rho^r\theta_u(t)\,dt\\
=&\int_{B_r^m\setminus B_\rho^m}\left(4\frac{\Delta u^\kappa\,u_{ij}^\kappa x_i x_j}{|x|^{m-2}}+8\frac{\Delta u^\kappa\,u_j^\kappa x_j}{|x|^{m-2}}\right)dx-2\int_{S_r^{m-1}-S_\rho^{m-1}}\frac{\Delta u^\kappa u_j^\kappa x_j}{|x|^{m-3}}\,d\mathscr{H}^{m-1}
\end{aligned}$$

Im folgenden werden alle vorübergehend auftretenden Ableitungen dritter Ordnung im Distributionensinn interpretiert. Durch partielle Integration erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\left[r^{4-m}\int_{B_r^m}|\Delta u|^2\,dx+\eta_u(r)+\right]-\left[\rho^{4-m}\int_{B_\rho^m}|\Delta u|^2\,dx+\eta_u\left(\rho\right)\right]\\
&+\int_\rho^r\theta_u(t)\,dt\\
=&\;2\int_{B_r\setminus B_\rho}\left(\frac{u_{kk}^\kappa\,u_{ij}^\kappa x_i x_j}{|x|^{m-2}}-8\frac{u_{kki}^\kappa\,u_j^\kappa x_i x_j}{|x|^{m-2}}+\frac{u_{kk}^\kappa u_j^\kappa x_j}{|x|^{m-2}}\right)dx. \qquad (4.65)
\end{aligned}$$

Die Monotonieformel folgt nun durch einige partielle Integrationen, die wir wortwörtlich (bis auf geringfügig andere Notationen) von Angelsberg [2] übernehmen können.

$$\begin{aligned}
\int_{B_r\setminus B_\rho}\frac{u_{kk}^\kappa u_{ij}^\kappa x_i x_j}{|x|^{m-2}}\,dx=&\int_{S_r-S_\rho}\frac{u_k^\kappa u_{ij}^\kappa x_i x_j x_k}{|x|^{m-1}}\,d\mathscr{H}^{m-1}-\int_{B_r\setminus B_\rho}\frac{u_k^\kappa u_{ijk}^\kappa x_i x_j}{|x|^{m-2}}\,dx\\
&+\int_{B_r\setminus B_\rho}\left(-2\frac{u_k^\kappa u_{ik}^\kappa x_i}{|x|^{m-2}}+\frac{(m-2)u_k^\kappa u_{ij}^\kappa x_i x_j x_k}{|x|^m}\right)dx\\
=&\int_{S_r-S_\rho}\left(\frac{u_k^\kappa u_{ij}^\kappa x_i x_j x_k}{|x|^{m-1}}-\frac{u_k^\kappa u_{ik}^\kappa x_i}{|x|^{m-3}}\right)d\mathscr{H}^{m-1}\\
&+\int_{B_r\setminus B_\rho}\left(\frac{u_k^\kappa u_{ik}^\kappa x_i}{|x|^{m-2}}+\frac{u_{ik}^\kappa u_{jk}^\kappa x_i x_j}{|x|^{m-2}}\right)dx\\
&+(m-2)\int_{B_r\setminus B_\rho}\frac{u_k^\kappa u_{ij}^\kappa x_i x_j x_k}{|x|^m}\,dx,\\
-\int_{B_r\setminus B_\rho}\frac{u_{kki}^\kappa u_j^\kappa x_i x_j}{|x|^{m-2}}dx=&-\int_{S_r-S_\rho}\frac{u_{ki}^\kappa u_j^\kappa x_i x_j x_k}{|x|^{m-1}}\mathscr{H}^{m-1}\\
&+\int_{B_r\setminus B_\rho}\left(\frac{u_{kj}^\kappa u_j^\kappa x_k}{|x|^{m-2}}+\frac{u_j^\kappa u_{kk}^\kappa x_j}{|x|^{m-2}}\right)dx\\
&+\int_{B_r\setminus B_\rho}\left(\frac{(m-2)u_j^\kappa u_{ik}^\kappa x_i x_j x_k}{|x|^m}+\frac{u_{ik}^\kappa u_{jk}^\kappa x_i x_j}{|x|^{m-2}}\right)dx,\\
\int_{B_r\setminus B_\rho}\frac{u_{kk}^\kappa u_j^\kappa x_j}{|x|^{m-2}}\,dx=&\int_{S_r-S_\rho}\frac{(u_k^\kappa x_k)^2}{|x|^{m-1}}\,d\mathscr{H}^{m-1}-\int_{B_r\setminus B_\rho}\frac{|\nabla u|^2}{|x|^{m-2}}\,dx\\
&+\int_{B_r\setminus B_\rho}\left(\frac{(m-2)(u_k^\kappa x_k)^2}{|x|^m}-\frac{u_k^\kappa u_{jk}^\kappa x_j}{|x|^{m-2}}\right)dx.
\end{aligned}$$

Die letzten drei Rechnungen ergeben zusammen mit (4.65)

$$
\begin{aligned}
&\left[r^{4-m}\int_{B_r^m}|\Delta u|^2\,dx+\eta_u(r)+\right]-\left[\rho^{4-m}\int_{B_\rho^m}|\Delta u|^2\,dx+\eta_u\left(\rho\right)\right]\\
&+\int_\rho^r\theta_u(t)\,dt\\
=&2\int_{S_r-S_\rho}\left(\frac{(u_i^\kappa x_i)^2}{|x|^{m-1}}-\frac{u_j^\kappa u_{ij}^\kappa x_i}{|x|^{m-3}}\right)\,d\mathscr{H}^{m-1}\\
&+2\int_{B_r\setminus B_\rho}\left(\frac{u_j^\kappa u_{ij}^\kappa x_i}{|x|^{m-2}}+2\frac{(u_{ij}^\kappa x_i)^2}{|x|^{m-2}}+\frac{u_i^\kappa u_{jj}^\kappa x_i}{|x|^{m-2}}+\frac{(m-2)(u_ix_i)^2}{|x|^m}\right)\,dx.
\end{aligned}
$$

Die Monotonieformel erhält man nun, indem man zu dieser Ungleichung die folgenden beiden (ebenfalls [2] entnommenen) Identitäten addiert, welche ebenfalls durch partielle Integration gezeigt werden:

$$
\begin{aligned}
0=&-4\int_{S_r-S_\rho}\frac{|\nabla u|^2}{|x|^{m-3}}\,d\mathscr{H}^{m-1}+8\int_{B_r\setminus B_\rho}\left(\frac{|\nabla u|^2}{|x|^{m-2}}+\frac{u_j^\kappa u_{ij}^\kappa x_i}{|x|^{m-2}}\right)\,dx,\\
0=&2\int_{S_r-S_\rho}\frac{(u_ix_i)^2}{|x|^{m-1}}\,d\mathscr{H}^{m-1}\\
&-2\int_{B_r\setminus B_\rho}\left(\frac{u_j^\kappa u_{ij}^\kappa x_i}{|x|^{m-2}}+\frac{|\nabla u|^2}{|x|^{m-2}}+\frac{u_i^\kappa u_{jj}^\kappa x_i}{|x|^{m-2}}+\frac{(2-m)(u_ix_i)^2}{|x|^m}\right)\,dx.
\end{aligned}
$$

Nun folgt:

$$
\begin{aligned}
&\left[r^{4-m}\int_{B_r^m}|\Delta u|^2\,dx+\eta_u(r)+\right]-\left[\rho^{4-m}\int_{B_\rho^m}|\Delta u|^2\,dx+\eta_u\left(\rho\right)\right]\\
&+\int_\rho^r\theta_u(t)\,dt\\
=\quad&4\int_{B_r^m\setminus B_\rho^m}\left(\frac{\left(u_j^\kappa+u_{ij}^\kappa x_i\right)^2}{|x|^{m-2}}+\frac{(m-2)(u_i^\kappa x_i)^2}{|x|^m}\right)\,dx.
\end{aligned}
$$

Setzt man hierin $\partial_R u^\kappa=u_i^\kappa x_i$, $(D\partial_R u)_j^\kappa=u_{ij}^\kappa x_i+u_j^\kappa$ und $\partial_R|Du|^2=2u_i^\kappa u_{ij}^\kappa x_j$ ein, so ergibt dies

$$
\begin{aligned}
&\left[r^{4-m}\int_{B_r^m}|\Delta u|^2\,dx+\eta_u(r)+\right]-\left[\rho^{4-m}\int_{B_\rho^m}|\Delta u|^2\,dx+\eta_u\left(\rho\right)\right]\\
&+\int_\rho^r\theta_u(t)\,dt\\
=&4\int_{B_r^m\setminus B_{\frac{r}{2}}^m}\left(\frac{|D\partial_R u|^2}{|x|^{m-2}}+(m-2)\frac{|\partial_R u|^2}{|x|^m}\right)\,dx.
\end{aligned}
$$

Nun müssen noch die Abschätzungen (4.54) für η_u und θ_u zeigen gezeigt werden. Mit der Definition von α, β und γ (siehe (4.60)), den Abschätzungen (4.3) für den Integranden niederer Ordnung V, sowie mit der Young-Ungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned}
|\alpha| &\le C|V_x| \\
&\le C\left(|q|^2+|p|^2+|z|^2\right) \\
&\le C\left(|q|^2+|p|^3+|z|^3+1\right), \\
|\beta| &\le C(|V|+|V_p|\,|p|+|V_q|\,|q|) \\
&\le C\left(|x|\,|q|^2+|q|^{\frac{3}{2}}+|p|^3+|z|^3+1+|q|\,|p|+|p|^2+|p|\,|z|+|q|\,|z|\right) \\
&\le C\left(|x|\,|q|^2+|q|^{\frac{3}{2}}+|p|^3+|z|^3+1\right), \\
|\gamma| &\le C|V_q|\,|p| \\
&\le C\left(|x|\,|q|\,|p|+|p|^2+|p|\,|z|\right) \\
&\le C\left(|x|\,|q|^{\frac{3}{2}}+|x|\,|p|^3+|p|^2+|z|^3+1\right)
\end{aligned}$$

Dies setzen wir in die Definition von $\mathscr{A}=\mathscr{A}_V$, $\mathscr{B}=\mathscr{B}_V$ und $\mathscr{C}=\mathscr{C}_V$ (siehe (4.61)) ein:

$$\begin{aligned}
|\mathscr{A}| &\le C|\alpha|\,|x|+|\beta| \\
&\le C\left(|x|\,|q|^2+|q|^{\frac{3}{2}}+|p|^3+|z|^3+1\right), \\
|\mathscr{B}| &\le C\left(|x|^2\,|q|^2+|x|\,|q|^{\frac{3}{2}}+|x|\,|p|^3+|z|^3+1\right), \\
|\mathscr{C}| &\le C\left(|x|\,|q|^{\frac{3}{2}}+|x|\,|p|^3+|p|^2+|z|^3+1\right).
\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass die Abbildungen $x\mapsto|u(x)|$ und $x\mapsto|x|$ für alle $x\in B^m$ und alle $u\in W^{2,2}(B^m,N)$ wegen der Kompaktheit von N gleichmäßig beschränkt sind, erhalten wir nun

$$\begin{aligned}
|\eta_u(r)| \le& Cr^{5-m}\int_{B_r^m}|D^2u|^2\,dx+Cr^{4-m}\int_{B_r^m}|D^2u|^{\frac{3}{2}}\,dx \\
&+Cr^{4-m}\int_{B_r^m}|Du|^3\,dx+Cr^{4-m}\int_{B_r^m}|Du|^2\,dx+Cr^3, \\
|\theta_u(r)| \le& Cr^{5-m}\int_{B_r^m}|D^2u|^2\,dx+Cr^{4-m}\int_{B_r^m}|D^2u|^{\frac{3}{2}}\,dx \\
&+Cr^{4-m}\int_{B_r^m}|Du|^3\,dx+Cr^{4-m}\int_{B_r^m}|Du|^2\,dx+Cr^3.
\end{aligned}$$

Aus der Hölder-Ungleichung und der Young-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}
r^{3-m}\int_{B_r^m}|D^2u|^{\frac{3}{2}} &\le r^{3-m}\left(\int_{B_r^m}|D^2u|^2\,dx\right)^{\frac{3}{4}}\mathscr{H}^m(B_r^m)^{\frac{1}{4}} \\
&\le Cr^{3-m}\left(r\int_{B_r^m}|D^2u|^2\,dx\right)^{\frac{3}{4}}r^{\frac{m-3}{4}} \\
&\le C\left(r^{4-m}\int_{B_r^m}|D^2u|^2\,dx+1\right)
\end{aligned}$$

und analog dazu

$$\begin{aligned}
r^{2-m}\int_{B_r^m}|Du|^2\,dx &\le C\left(r^{4-m}\int_{B_r^m}|Du|^4\,dx+1\right),\\
r^{3-m}\int_{B_r^m}|Du|^3\,dx &\le C\left(r^{4-m}\int_{B_r^m}|Du|^4\,dx+1\right),\\
r^{4-m}\int_{S_r^{m-1}}|D^2u|^{\frac{3}{2}}d\mathscr{H}^{m-1} &\le C\left(r^{5-m}\int_{S_r^{m-1}}|D^2u|^2 d\mathscr{H}^{m-1}+1\right),\\
r^{3-m}\int_{S_r^{m-1}}|Du|^2 d\mathscr{H}^{m-1} &\le C\left(r^{5-m}\int_{S_r^{m-1}}|Du|^4 d\mathscr{H}^{m-1}+1\right),\\
r^{4-m}\int_{S_r^{m-1}}|Du|^3 d\mathscr{H}^{m-1} &\le C\left(r^{5-m}\int_{S_r^{m-1}}|Du|^4 d\mathscr{H}^{m-1}+1\right)
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
|\eta_u(r)| \le& Cr^{5-m}\int_{B_r^m}\left(|D^2u|^2+|Du|^4\right)\,dx\\
&+Cr^{6-m}\int_{S_r^{m-1}}\left(|D^2u|^2+|Du|^4\right)\,d\mathscr{H}^{m-1}+Cr^3,\\
|\theta_u(r)| \le& Cr^{5-m}\int_{B_r^m}\left(|D^2u|^2+|Du|^4\right)\,dx+Cr^3
\end{aligned}$$

und der Satz ist bewiesen. □

4.4.3 Beweis des Korollars zur Monotonieformel:

Zu jedem $r\in(0,1]$ wählen wir ein $\widetilde{r}\in\left[\frac{2}{3}r,r\right]$

$$\widetilde{r}^{5-m}\int_{S_{\widetilde{r}}^{m-1}}\left(|D^2u|^2+|Du|^4\right)\,d\mathscr{H}^{m-1}\le Cr^{4-m}\int_{B_r}\left(|D^2u|^2+|Du|^4\right)\,dx \tag{4.66}$$

(die Existenz eines solchen $\widetilde{r}$ folgt aus der Koflächenformel) und wir setzen

$$r_n:=\widetilde{(3^{-n})}.$$

Nun definieren wir

$$\begin{aligned}
a_n &:= \Phi_u(r_n)+\eta_u(r_n)\\
b_n &:= r_n^{4-m}\int_{B_{r_n}^m}|\Delta u|^2\,dx.
\end{aligned}$$

Zunächst beweisen wir nun die folgende Behauptung:

Behauptung (A): *Es gibt ein C_0 und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, die beide nicht von u abhängen, so dass für alle $n \geq n_0$ die folgenden Ungleichungen gelten:*

$$b_n \leq a_n + \frac{1}{2}(b_{n-1} + C_0), \tag{4.67}$$

$$a_n \leq a_{n-1} + 3^{-n}(b_{n-2} + 1). \tag{4.68}$$

Wegen $\partial_R |Du|^2 = 2u_i^\kappa u_{ij}^\kappa x_j$ und der Young-Ungleichung in den Formen $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$ sowie $abc \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^4}{4} + \frac{c^4}{4}$ gilt für $|x| \leq r$ und alle $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned}
&\partial_R |Du|^2 + 4|Du|^2 - 4r^2 |\partial_R u|^2 \\
\leq & C(|Du|^2 + |D^2 u|\,|Du|\,r) \\
\leq & \left(r\epsilon^{\frac{1}{2}}|Du|^2\right)\left(Cr^{-1}\epsilon^{-\frac{1}{2}}\right) + \left(r(2\epsilon)^{\frac{1}{2}}|D^2u|\right)\left(r^{\frac{1}{2}}(2\epsilon)^{\frac{1}{4}}|Du|\right)\left(C2^{-\frac{3}{4}}r^{-\frac{1}{2}}\epsilon^{-\frac{3}{4}}\right) \\
\leq & \epsilon r^2\left(|D^2u|^2 + |Du|^4\right) + \frac{C^2}{2}r^{-2}\epsilon^{-1} + \frac{C^4}{16}r^{-2}\epsilon^{-3}.
\end{aligned}$$

Nach Erneuerung der Konstanten $C > 0$ folgt

$$\begin{aligned}
&\left|\partial_R |Du|^2 + 4|Du|^2 - 4r^2|\partial_R u|^2\right| \\
\leq & \epsilon r^2\left(|D^2u|^2 + 2|Du|^4\right) + Cr^{-2}(\epsilon^{-1} + \epsilon^{-3}).
\end{aligned}$$

Damit folgt mit (4.66)

$$\begin{aligned}
&\widetilde{r}^{3-m}\int_{S^{m-1}_{\widetilde{r}}} \left|\partial_R|Du|^2 + 4|Du|^2 - 4r^2|\partial_R u|^2\right| \, d\mathscr{H}^{m-1} \\
\leq & C\epsilon r^{4-m}\int_{B^m_{2r}} |\Delta u|^2\, dx + C(\epsilon^{-1} + \epsilon^{-3}).
\end{aligned} \tag{4.69}$$

mit einer von u, r und ϵ unabhängigen Konstanten $C > 0$. Mit (4.54), zeigt man völlig analog dazu

$$\begin{aligned}
|\eta_u(\widetilde{r})| \leq & C\widetilde{r}^{5-m}\int_{B^m_{\widetilde{r}}} \left(|D^2u|^2 + |Du|^4\right)\, dx \\
& + C\widetilde{r}^{6-m}\int_{S^{m-1}_{\widetilde{r}}} \left(|D^2u|^2 + |Du|^4\right)\, d\mathscr{H}^{m-1} + Cr^3 \\
\leq & C' r\, r^{4-m}\int_{B^m_{2r}} |\Delta u|^2\, dx + C' r
\end{aligned} \tag{4.70}$$

mit geeigneten von u und r unabhängigen Konstanten C, C'.
Wegen $2\,3^{-n} \leq r_{n-1}$ und $3^{-1}r_{n-1} \leq 3^{-n}$ folgt aus (4.69)

$$\begin{aligned}
&r_n^{3-m}\int_{S^{m-1}_{r_n}} (\partial_R|Du|^2 + 4|Du|^2 - 4r^2|\partial_R u|^2)\, d\mathscr{H}^{m-1} \\
\leq & C\epsilon(3^{-n})^{4-m}\int_{B^m_{2\,3^{-n}}} |\Delta u|^2\, dx + C(\epsilon^{-1} + \epsilon^{-3}) \\
\leq & 3^{m-4}C\epsilon r_{n-1}^{4-m}\int_{B^m_{r_{n-1}}} |\Delta u|^2\, dx + C(\epsilon^{-1} + \epsilon^{-3})
\end{aligned}$$

mit einer geeigneten von u, ϵ und n unabhängigen Konstanten $C > 0$ Verfährt man mit (4.70) analog, erhält man

$$|\eta_u(r_n)| \leq C r_{n-1}\, r_{n-1}^{4-m} \int_{B^m_{r_{n-1}}} |\Delta u|^2\, dx + C r_{n-1}$$

mit einer geeigneten von u und n unabhängige Konstante $C > 0$. Bedenken wir

$$r_n^{4-m} \int_{B^m_{r_n}} |\Delta u|^2\, dx \leq \Phi_u(r_n) + \eta_u(r_n)$$
$$+ r_n^{3-m} \left| \int_{S^{m-1}_{r_n}} \left(\partial_R |Du|^2 + 4|Du|^2 - 4r^2|\partial_R u|^2\right) \mathscr{H}^{m-1} \right| + |\eta_u(r_n)|,$$

so haben wir bewiesen:
Es gibt eine von u und n unabhängige Konstante $C_1 > 0$, so dass für jedes $\epsilon > 0$ gilt:

$$r_n^{4-m} \int_{B^m_{r_n}} |\Delta u|^2\, dx \leq \quad \Phi_u(r_n) + \eta_u(r_n)$$
$$+ C_1(\epsilon + r_{n-1}) r_{n-1}^{4-m} \int_{B^m_{r_{n-1}}} |\Delta u|^2\, dx + C_1(r_{n+1} + \epsilon^{-1} + \epsilon^{-3}). \tag{4.71}$$

Weiterhin schätzen wir mit $2^{-1} r_{n-1} \leq r_n$ und Lemma 9, sowie mit $2r_{n-1} \leq r_{n-2}$ und $5^{-1} r_{n-2} \leq r_{n-1}$ mit geeigneten Konstanten C und C' ab:

$$\begin{aligned}
\int_{r_n}^{r_{n-1}} \theta_u(t)\, dt \leq & \int_{r_n}^{r_{n-1}} \left(C t^{5-m} \int_{B^m_t} \left(|D^2 u|^2 + |Du|^4\right) dx + C t^3 \right) dt \\
\leq & C r_n^{5-m}\, r_{n-1} \int_{B^m_{r_{n-1}}} \left(|D^2 u|^2 + |Du|^4\right) dx + C r_n^3\, r_{n-1} \\
\leq & 2^{m-5} C r_{n-1}^{6-m} \int_{B^m_{r_{n-1}}} \left(|D^2 u|^2 + |Du|^4\right) dx + 2^{-3} C r_{n-1}^4 \\
\leq & 2^{m-5} C C' r_{n-1}^{6-m} \int_{B^m_{2r_{n-1}}} |\Delta u|^2\, dx + 2^{m-5} C C' r_{n-1}^2 + 2^{-3} C r_{n-1}^4 \\
\leq & 2^{m-5} 5^{m-6} C C' r_{n-2}^{6-m} \int_{B^m_{r_{n-2}}} |\Delta u|^2\, dx + 2^{m-5} C C' r_{n-1}^2 + 2^{-3} C r_{n-1}^4.
\end{aligned}$$

Wir haben also bewiesen:
Es gibt eine von u und n unabhängige Konstante $C_2 > 0$, so dass für jedes $\epsilon > 0$ gilt:

$$\int_{r_n}^{r_{n-1}} \theta_u(t)\, dt \leq C_2 r_{n-2}^{6-m} \int_{B^m_{r_{n-2}}} |\Delta u|^2\, dx + C_2 r_{n-1}^4. \tag{4.72}$$

Mit den Definitionen von a_n und b_n wird wird (4.71) zu

$$b_n \leq a_n + C_1(\epsilon + r_{n-1})b_{n-1} + C_1(r_{n-1} + \epsilon^{-1} + \epsilon^{-3}).$$

Wählen wir $\epsilon = \frac{4}{C_1}$ und wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}$ hinreichend große, so dass $C_1 r_{n_0-1} \leq \frac{1}{4}$ gilt. Dann gilt für alle $n > n_0$

$$b_n \leq a_n + \frac{1}{2}(b_{n-1} + C_0),$$

wobei $C_0 > 0$ eine von u und n unabhängige Konstante ist. Aus (4.72) wird

$$\int_{r_n}^{r_{n-1}} |\theta_u(t)|\ dt \leq C_2 r_{n-2}^2 b_{n-2} + C_2 r_{n-1}^4. \tag{4.73}$$

Da die rechte Seite der Monotonieformel nichtnegativ ist, folgt aus dieser

$$\Phi_u(r_n) + \eta_u(r_n) \leq \Phi_u(r_{n-1}) + \eta_u(r_{n-1}) + \int_{r_n}^{r_{n-1}} |\theta_u(t)|\ dt,$$

was gleichbedeutend ist mit

$$a_n \leq a_{n-1} + \int_{r_n}^{r_{n-1}} |\theta_u(t)|\ dt$$

worauf mit (4.73) und $r_{n-2} \leq 3^{2-n}$

$$a_n \leq a_{n-1} + C_2 9^{-n}(b_{n-2} + 1)$$

folgt. Nachdem wir n_0 gegebenenfalls vergrößert haben, gilt für alle $n \geq n_0$

$$a_n \leq a_{n-1} + 3^{-n}(b_{n-2} + 1).$$

Damit ist die Behauptung (A) bewiesen.

Behauptung (B): *Die Folgen a_n und b_n sind beschränkt.*
Wir iterieren (4.68) und erhalten

$$b_n \leq \sum_{i=n_0}^{n} \frac{a_i}{2^{n-i}} + \frac{1}{2^{n-n_0+1}} b_{n_0-1} + C_0 \sum_{i=n_0}^{n} 2^{n+1-i}.$$

Für $k \geq n_0$ definieren wir mit $C_1 := \frac{1}{2^{n-n_0+1}} b_{n_0-1} + 2C_0$, sowie

$$A_k := \max\{a_{n_0}, ..., a_k, 1, C_1\}.$$

und erhalten

$$b_n \leq 2A_n + C_1. \tag{4.74}$$

Nach (4.68) gilt für jedes $n_0 \leq k \leq n$

$$\begin{aligned}
a_k \leq & a_{k-1} + 3^{-n}(b_{k-2} + 1) \\
\leq & A_{n-1} + 3^{-n}(2A_{k-2} + C_1 + 1) \\
\leq & A_{n-1} + 3^{-n}(2A_{n-1} + C_1 + 1) \\
= & A_{n-1} + 3^{-n} 4A_{n-1}
\end{aligned}$$

(im letzten Schritt haben wir $A_{n-1} \geq C_1$ und $A_{n-1} \geq 1$ verwendet) und deswegen für alle $n \geq n_0$

$$A_n \leq (1 + 4 \cdot 3^{-n})A_{n-1}.$$

Dies iterieren wir nun:

$$\begin{aligned}
A_n \leq & A_{n_0} \prod_{i=n_0}^{n-1} (1 + 4 \cdot 3^{-n}) \\
= & A_{n_0} \exp\left(\sum_{i=n_0}^{n-1} \log(1 + 4 \cdot 3^{-n})\right) \\
\leq & A_{n_0} \exp\left(4 \sum_{i=n_0}^{n-1} 3^{-n}\right) \\
= & A_{n_0} e^6 < \infty.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass die Folge A_n beschränkt ist. Wegen $b_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und wegen (4.74) folgt daraus, dass die Folge b_n beschränkt ist. Außerdem folgt, dass die Folge a_n *nach oben* beschränkt. Wegen (4.68) muss a_n (wegen der Beschränktheit der b_n) außerdem nach unten beschränkt sein. Damit ist Behauptung (B) bewiesen.

Sei ein $0 < \rho \leq 1$ gegeben. Es gibt ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit

$$r_{n-1} < \rho \leq r_n,$$

woraus mit $r_{n-1} \leq 5r_n$

$$\begin{aligned}
\rho^{4-m} \int_{B^m_\rho} |\Delta u|^2 \, dx \leq r_{n-1}^{4-m} \int_{B^m_{r_n}} |\Delta u|^2 \, dx \\
\leq 5^{m-4} r_{n-1}^{4-m} \int_{B^m_{r_n}} |\Delta u|^2 \, dx \leq \Gamma < \infty
\end{aligned}$$

folgt, wobei Γ nicht von n abhängt. Deswegen folgt

$$\sup_{\rho \in (0,1]} \rho^{4-m} \int_{B^m_\rho} |\Delta u|^2 \, dx < \infty.$$

nach Lemma 9 gilt also

$$\sup_{\rho\in\left(0,\frac{1}{2}\right]} \rho^{4-m} \int_{B_\rho^m} \left(|D^2u|^2 + |Du|^4\right)\, dx < \infty. \tag{4.75}$$

Damit ist der erste Teil des Korollars bewiesen.
Da nun aus (4.54)

$$\left|\int_\rho^r \theta_u(t)\, dt\right| \leq C\rho$$

mit einer geeigenten von u, r und ρ unabhängigen Konstanten $C > 0$ fogt, liefert die Monotonierformel - da deren rechte Seite nichtnegativ ist -

$$[\Phi_u(r) + \eta_u(r)] - [\Phi_u(\rho) + \eta_u(\rho)] \geq -C\rho$$

für alle $r > \rho$ aus $(0,1] \setminus \Lambda_u$. Halten wir r fest, so sehen wir, dass die Funktion

$$(0,1] \setminus \Lambda_u \ni \rho \mapsto [\Phi_u(\rho) + \eta_u(\rho)]$$

beschränkt ist. Angenommen, der Grenzwert

$$\lim_{(0,1]\setminus\ni\rho\downarrow 0} [\Phi_u(\rho) + \eta_u(\rho)]$$

existiert nicht. Dann muss es wegen dieser Beschränktheit zwei Nullfolgen $r_n, \rho_n \in (0,1] \setminus \Lambda_u$ geben, so dass die Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_u(\rho_n) + \eta_u(\rho_n), \; \lim_{n\to\infty} \Phi_u(r_n) + \eta_u(r_n)$$

existieren, aber dennoch

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_u(\rho_n) + \eta_u(\rho_n) < \lim_{n\to\infty} \Phi_u(r_n) + \eta_u(r_n).$$

Wir können o.B.d.A. $\rho_n < r_n$ annehmen. Weil (4.54), (4.75) und dem Satz von der dominierten Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\rho_n}^{r_n} \theta_u(t)\, dt = 0$$

gilt, folgt aus der Monotonieformel und erneuter Anwendung des Satzes von der dominierten Konvergenz

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{n\to\infty} 4 \int_{B_{\rho_n}^m \setminus B_{r_n}^m} \left(\frac{|D\partial_R u|^2}{|x|^{m-2}} + (m-2)\frac{|\partial_R u|^2}{|x|^m}\right) dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\{[\Phi_u(\rho_n) + \eta_u(\rho_n)] - [\Phi_u(r_n) + \eta_u(r_n)] + \int_{r_n}^{\rho_n} \theta_u(t)\, dt\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \{[\Phi_u(\rho_n) + \eta_u(\rho_n)] - [\Phi_u(r_n) + \eta_u(r_n)]\} > 0.
\end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, weswegen die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{(0,1]\setminus\ni\rho\downarrow 0} [\Phi_u(\rho) + \eta_u(\rho)]$$

folgt. Damit ist das Korollar bewiesen.

4.5 Beweis des Skalierungssatzes

Der Skalierungssatz ist eine Anwendung der Monotonieformel (Satz 6) und des Kompaktheitssatzes (Hauptsatz 2).
Wir setzen $u_i := u_{r_i}$. Den skalierten Integranden V_i definieren wir durch

$$V_i(x,z,p,q) := r^4 V(r_i x, z, \frac{1}{r_i}p, \frac{1}{r_i^2}q).$$

Es gilt

$$r_i^{4-m}\int_{B^m_{r_i}} \left(|\Delta u|^2 + V[u]\right)\,dx = \int_{B_m} \left(|\Delta u_i|^2 + V_i[u_i],\right)\,dx.$$

Deswegen ist u_i ein G-Minimierer von E_{V_i}.
Wir wollen den Kompaktheitssatz (Hauptsatz 2) auf die Abbildungen u_i anwenden. Dazu müssen wir nachweisen, dass die V_i die Bedingung aus dem Kompaktheitssatz erfüllen und dass die Folge (u_i) in der $W^{2,2}$-Norm beschränkt ist. (Dass die konstante Folge $N_i = N$ die zu Anfang des Kapitels gestellten Bedingungen erfüllt, garantiert Lemma 8).
Da V ein *Integrand niederer Ordnung* (siehe (4.3)) ist, gilt

$$\begin{aligned} V_i(x,z,p,q) &= r_i^4 V(r_i x, z, \frac{1}{r_i}p, \frac{1}{r_i^2}q) \\ &\leq C\left(r_i|x|\,|q|^2 + r_i|q|^{\frac{3}{2}} + r_i|p|^3 + r_i^4|z|^3 + r_i^4\right) \end{aligned}$$

Deswegen erfüllen die V_i die Bedingung aus dem Kompaktheitssatz. Dass die Folge (u_i) in der $W^{2,2}$-Norm beschränkt ist, ist eine Anwendung der Monotonieformel. Die Monotonieformel ist also für u gültig. Nach dem Korollar zur Monotonieformel (Korollar 4) gilt

$$\sup_{i\in\mathbb{N}}\int_{B^m} \left(|D^2(u_i)|^2 + |D(u_i)|^4\right)\,dx = \sup_{i\in\mathbb{N}} r_i^{4-m}\int_{B_{r_i}{}^m} \left(|D^2u|^2 + |Du|^4\right)\,dx < \infty.$$

Insbesondere gilt

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} ||u_i||_{W^{2,2}} < \infty.$$

Es sind also alle Voraussetzungen des Kompaktheitssatzes erfüllt. Deswegen konvergieren die u_i nach Übergang zu einer Teilfolge schwach in $W^{2,2}(B^m,\mathbb{R}^L)$ und stark in $W^{2,2}_{loc}(B^m_{\frac{1}{2}},\mathbb{R}^L)$ gegen ein $\varphi \in W^{2,2}(B^m,N)$, das die geforderte Minimiereigenschaft erfüllt.

Nun werden wir zeigen, dass φ nullhomogen ist. Hierbei orientieren wir uns erneut an der Arbeit [48] von Scheven, wo der Spezialfall stationärer biharmonischer Abbildungen auf euklidischen Bällen abgehandelt wird.
Wir wählen für dn Rest des Beweises ein beliebiges $\rho \in (0,\frac{1}{2})$ fest aus. Wegen der starken $W^{2,2}(B^m_\rho,\mathbb{R}^L)$-Konvergenz der u_i gegen φ erhalten wir

$$\lim_{i\to\infty}\int_{B^m_\rho} \left(|D^2(u_i-\varphi)|^2 + |D(u_i-\varphi)|^4\right)\,dx = 0$$

(bedenke, dass die u_i wegen der Gagliardo-Nirenberg-Ungleichung $||f||_{L^4}^2 \leq C||f||_\infty(1+||Df||_{L^2})$ (siehe [43])und der Beschränktheit von N (o.B.d.A. nach Übergang zu einer Teilfolge) in L^4 gegen φ konvergieren) Für alle $r \in (0,\rho) \setminus \Theta$ mit einer Nullmenge Θ gilt folglich

$$\lim_{i\to\infty} \int_{S_r^{m-1}} \left(|D^2(u_i-\varphi)|^2 + |D(u_i-\varphi)|^4\right)\, dx = 0.$$

Insbesondere gilt

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} \int_{S_r^{m-1}} \left(|D^2(u_i-\varphi)|^2 + |D(u_i-\varphi)|^4\right)\, dx < \infty \text{ für alle } r \in (0,\rho) \setminus \Theta. \tag{4.76}$$

Für $\alpha \in W^{2,2}(B^m, \mathbb{R}^L)$ definieren wir die Funktion

$$f_\alpha(r) := \int_{S_r^{m-1}} \frac{\partial_R |D\alpha|^2 + 4|D\alpha|^2 - 4|x|^2|\partial_R\alpha|^2}{|x|^{m-3}}\, d\mathscr{H}^{m-1}$$

(für fast alle $r \in (0,1)$). Wir wählen ein beliebiges $\rho \in (0, \frac{1}{2})$. Aus der starken Konvergenz der u_i gegen φ auf B_ρ^m folgt

$$\lim_{i\to\infty} ||f_{u_i}||_{L^1([0,\rho])} = \lim_{i\to\infty} ||f_\varphi||_{L^1([0,\rho])}.$$

Nach Übergang zu einer Teilfolge gilt $\lim_{i\to\infty} f_{u_i}(r) = f_\varphi(r)$ für alle $r \in (0,\rho) \setminus \Gamma$ mit einer Nullmenge Γ. Daraus folgt für jedes $r \in \mathbb{R} \setminus (\Gamma' \cup \Theta)$ mit der Nullmenge

$$\Gamma' := \{s \in (0,\rho) \ : \ sr_i \in \Gamma \text{ für jedes } i \in \mathbb{N}\}$$

$$\begin{aligned}\lim_{i\to\infty} & \int_{S_r^{m-1}} \frac{\partial_R |Du_i|^2 + 4|Du_i|^2 - 4|x|^2|\partial_R u_i|^2}{|x|^{m-3}}\, d\mathscr{H}^{m-1} \\ &= \int_{S_r^{m-1}} \frac{\partial_R |D\varphi|^2 + 4|D\varphi|^2 - 4|x|^2|\partial_R \varphi|^2}{|x|^{m-3}}\, d\mathscr{H}^{m-1}\end{aligned}$$

Weiterhin gilt für alle $r \in (0,1] \setminus \Lambda_u'$ mit der Nullmenge

$$\Lambda_u' := \{s \in (0,\rho) \ : \ sr_i \in \Lambda_u \text{ für jedes } i \in \mathbb{N}\}$$

$$\begin{aligned}|\eta_u(rr_i)| \leq & C(rr_i)^{5-m} \int_{B_{rr_i}^m} \left(|D^2u|^2 + |Du|^4\right)\, dx \\ & + C(rr_i)^{6-m} \int_{S_{rr_i}^{m-1}} \left(|D^2u|^2 + |Du|^4\right)\, d\mathscr{H}^{m-1} + C(rr_i)^3 \\ \leq & Cr_i\, r^{5-m} \int_{B_r^m} \left(|D^2(u_i)|^2 + |D(u_i)|^4\right)\, dx \\ & + Cr_i\, r^{6-m} \int_{S_r^{m-1}} \left(|D^2(u_i)|^2 + |D(u_i)|^4\right)\, d\mathscr{H}^{m-1} + C(rr_i)^3.\end{aligned}$$

Wegen der Beschränktheit der Folgen $\int_{B_r^m} (|D^2(u_i)|^2 + |D(u_i)|^4)\, dx$ und $\int_{S_r^{m-1}} (|D^2(u_i)|^2 + |D(u_i)|^4)\, d\mathscr{H}^{m-1}$ für $r \in (0,\rho) \setminus \Theta$ folgt daraus

$$\lim_{i\to\infty} \eta_u(rr_i) = 0 \quad \text{für alle } r \in (0,\rho) \setminus (\Lambda_u' \cup \Theta).$$

Nun erhalten wir für alle $r \in (0,\rho) \setminus (\Gamma \cup \Lambda_u' \cup \Theta)$ unter Verwendung der starken $W^{2,2}$-Konvergenz der u_i gegen φ auf B_r^m und S_r^{m-1}

$$\begin{aligned}
&\Phi_\varphi(r) = \\
&= r^{4-m} \int_{B_r^m} |\Delta\varphi|^2\, dx + \int_{S_r^{m-1}} \frac{\partial_R |D\varphi|^2 + 4|D\varphi|^2 - 4|x|^2 |\partial_R \varphi|^2}{|x|^{m-3}}\, d\mathscr{H}^{m-1} \\
&= \lim_{i\to\infty} \left(r^{4-m} \int_{B_r^m} |\Delta u_i|^2\, dx + \int_{S_r^{m-1}} \frac{\partial_R |Du_i|^2 + 4|Du_i|^2 - 4|x|^2 |\partial_R u_i|^2}{|x|^{m-3}}\, d\mathscr{H}^{m-1} \right) \\
&= \lim_{i\to\infty} \left((rr_i)^{4-m} \int_{B_{rr_i}^m} |\Delta u|^2\, dx \right. \\
&\qquad \left. + \int_{S_{rr_i}^{m-1}} \frac{\partial_R |Du|^2 + 4|Du|^2 - 4|x|^2 |\partial_R u|^2}{|x|^{m-3}}\, d\mathscr{H}^{m-1} + \eta_u(rr_i) \right) \\
&= \lim_{i\to\infty} [\Phi_u(rr_i) + \eta_u(rr_i)] \\
&= \lim_{(0,1]\setminus\Lambda_u \ni \rho \downarrow 0} [\Phi_u(\rho) + \eta_u(\rho)]
\end{aligned}$$

Da die rechte Seite unabhängig von r undnach dem Korollar zur Monotonieformel (Korollar 4) endlich ist, erhalten wir:

$$\Phi_\varphi(r_1) = \Phi_\varphi(r_2) \text{ für fast alle } r_1, r_2 \in (0,\rho).$$

Die eingeschränkte Abbildung $\varphi|B_\rho^m$ ist ein G-Minimierer der euklidischen Bienergie. Denn sei $\psi \in W_{G;\varphi}^{2,2}(B_\rho^m, \mathbb{R}^L)$. Dann gibt es ein $\overline{\psi} \in W_{G;\varphi}^{2,2}(B^m, \mathbb{R}^L)$ mit $\overline{\psi} \equiv \psi$ auf B_ρ^m und $\overline{\psi} \equiv \varphi$ auf $B^m \setminus B_\rho^m$. Da $\overline{\psi}$ auf einer Umgebung von S^{m-1} mit φ übereinstimmt, gilt

$$E(\varphi) \leq E(\overline{\psi}).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\int_{B_\rho^m} |\Delta\varphi|^2\, dx &= \int_{B^m} |\Delta\varphi|^2\, dx - \int_{B^m\setminus B_\rho^m} |\Delta\varphi|^2 \\
&\leq \int_{B^m} |\Delta\overline{\psi}|^2\, dx - \int_{B^m\setminus B_\rho^m} |\Delta\varphi|^2 \\
&= \int_{B^m} |\Delta\overline{\psi}|^2\, dx - \int_{B^m\setminus B_\rho^m} |\Delta\overline{\psi}|^2 \\
&= \int_{B_\rho^m} |\Delta\psi|^2\, dx
\end{aligned}$$

und damit, dass $\varphi|B_\rho^m$ ein G-Minimierer der euklidischen Bienergie ist. Deswegen ist die Funktion $\varphi_\rho : B^m \to N$, gegeben durch $\varphi_\rho(x) := \varphi(\rho x)$, ebenfalls ein

G-Minimierer der euklidischen Bienergie und erfüllt folglich die Monotonieformel (4.53) mit $\eta_{\varphi_\rho} \equiv 0$, d.h. für alle $0 < r_1 < r_2 \leq 1$ aus $(0,1] \setminus \Lambda_{\varphi_\rho}$ gilt

$$4 \int_{B^m_{r_2} \setminus B^m_{r_1}} \frac{|D\partial_R(\varphi_\rho)|^2 + (m-2)|x|^2 |\partial_R(\varphi_\rho)|^2}{|x|^{m-2}} \, dx = \Phi_{\varphi_\rho}(r_2) - \Phi_{\varphi_\rho}(r_1) = 0.$$

Insbesondere gilt

$$\int_{B^m_{r_2} \setminus B^m_{r_1}} \frac{|\partial_R \varphi|^2}{|x|^m} \, dx = 0,$$

woraus leicht $\partial_R \varphi \equiv 0$ fast überall auf B^m_ρ gefolgert werden kann. Da $\rho \in (0, \frac{1}{2})$ beliebig nahe an $\frac{1}{2}$ gewählt werden kann, folgt die stärkere Aussage

$$\partial_R \varphi \equiv 0 \text{ fast überall auf } B^m_{\frac{1}{2}}.$$

Damit ist der Skalierungssatz bewiesen. $\square$

Kapitel 5

Dimensionsreduktion der singulären Menge

Gegeben seien eine kompakte riemannsche Transformationsgruppe $[M, G]$ von Dimension m, Kohomogenität $d \leq 4$ und mit

$$\mathscr{H}\text{-}\dim\left(\{x \in M \ : \ m_x > 4\}\right) \leq m - 5,$$

eine orthogonale Darstellung $[\mathbb{R}^L, G]$, eine kompakte G-invariante Untermannigfaltigkeit $N \subset \mathbb{R}^L$ und ein G-Minimierer $u \in W^{2,2}_G(M, N)$. Wie in der Einleitung dargelegt wurde, setzen wir folgendes voraus:
Es gilt $u \in C^\infty(M \setminus \Sigma_u, \mathbb{R}^L)$ *mit der* singulären Menge von u $\Sigma_u \subset M$ *mit*

$$\mathscr{H}^{m-4}(\Sigma_u) = 0.$$

Es gibt ein $\epsilon > 0$*, das nicht von* u *abhängt, so dass für alle* $x \in M$ *und alle* $0 < r < inj_M$ *gilt:*

$$r^{4-m} \int_{\mathscr{B}_r(x)} \left(|D_{\boldsymbol{g}} du|^2 + |du|^4_{\boldsymbol{g}}\right) \, dvol_{\boldsymbol{g}} \leq \epsilon \quad \Longrightarrow \quad \Sigma_u \cap \mathscr{B}_{\frac{r}{3}}(x) = \emptyset. \tag{5.1}$$

Aus (5.1) kann man mit Hilfe der G-Äquivarianz von u und der Kompaktheit von $[M, G]$ durch Integration entlang der Orbits sofort die folgende Aussage herleiten:
Es gibt ein $\epsilon > 0$*, das nicht von* u *abhängt, so dass für alle* $x \in M$ *und alle* $0 < r < inj_M$ *gilt:*

$$r^{4-m} \int_{\mathcal{U}_r(Gx)} \left(|D_{\boldsymbol{g}} du|^2 + |du|^4_{\boldsymbol{g}}\right) \, dvol_{\boldsymbol{g}} \leq \epsilon \quad \Longrightarrow \quad \Sigma_u \cap \mathcal{U}_{\frac{r}{3}}(x) = \emptyset. \tag{5.2}$$

Wir sind an hinreichenden Kriterien dafür interessiert, dass für ein $s \in (4, m]$

$$\mathscr{H}\text{-}\dim(\Sigma_u) \leq m - s$$

gilt. Unsere Vorgehensweise ist aus vielen anderen Zusammenhängen unter der Bezeichnung *Dimensionsreduktion der singulären Menge* bekannt. Dieses Vorgehen geht aus Federer [11] zurück, wo es im Kontext der Geometrischen Maßtheorie entwickelt wurde. Eine allgemeine (und gut lesbare) Darstellung findet man bei Simon [50]. Für harmonische Abbildungen geht die Dimensionsreduktion auf Schoen und Uhlenbeck [55] zurück. Eine vereinfachte Form dieses Beweises stammt von Luckhaus [37] und ist bei Steffen [53] detailliert ausgeabreitet. Die äquivariante Version für harmonischer Abbildungen findet man in der Gastels Arbeit [13], an der wir uns stark anlehnen. Die Dimensionsreduktion nicht-äquivarianter biharmonische Abbildungen ist in Schevens Arbeit [48] skizziert.

Wir erinnern an die Definition der Menge $\mathcal{T}_{[M,G]}$ aus der Einleitung: Wir übernehmen sie aus der Arbeit [13] von Gastel, in der das analoge Ergebnis für äquivariante harmonische Abbildungen bewiesen wird.
$\mathcal{T}^0_{[M,G]}$ sei die Menge aller Scheibendarstellungen $[\mathbb{R}^{m_x}, G_x]$ $(x \in M)$. Sukzessive definieren wir nun $\mathcal{T}^k_{[M,G]}$ wie folgt:
Es gebe eine Darstellung $[\mathbb{R}^p, K] \in \mathcal{T}^{k-1}_{[M,G]}$ und ein $x \in \mathbb{R}^p$, so dass $[\mathbb{R}^{\ell+1}, H]$ eine Scheibendarstellung von $[\mathbb{R}^p, K]$ in x ist. Es sei $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{\ell+1}$ ein H-invarianter Unterraum und H operiere auf diesem trivial. Folglich ist auch $\{0\} \times \mathbb{R}^\ell \cong \mathbb{R}^\ell$ ein H-invarianter Unterraum von $\mathbb{R}^{\ell+1}$. Die darauf eingeschränkte Darstellung $[\mathbb{R}^\ell, H]$ ist dann in $\mathcal{T}^k_{[M,G]}$. *Jede* Darstellung dieser Art ist in $\mathcal{T}^k_{[M,G]}$ und *nur* Darstellungen dieser Art sind in $\mathcal{T}^k_{[M,G]}$. Wir setzen $\mathcal{T}_{[M,G]} := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{T}^k_{[M,G]}$. Man bedenke, dass $\mathcal{T}^\ell_{[M,G]} = \emptyset$ für alle hinreichend großen ℓ gilt.

Satz 7 (Dimensionsreduktion) *Unter den Grundvoraussetzungen dieses Kapitels gilt: Sei $s \in [4, m-1] \cap \mathbb{N}$. Angenommen, für keine Darstellung $[\mathbb{R}^q, H] \in \mathcal{T}_{[M,G]}$ mit $5 \leq q \leq s$ gibt es einen glatten, nicht-konstanten, nullhomogeneneinen H-Minimierer $\varphi : B^q \setminus \{0\} \to N$ der euklidischen Bienergie. Dann gilt*

$$\mathscr{H}\text{-}\dim(\Sigma_u) \leq m - s - 1.$$

Im Fall $s = m-1$ ist Σ_u diskret. Im Fall $s = m$ ist u glatt.

Wichtig für den Beweis ist der Begriff der *Tangentialabbildung*, den wir nun erläutern werden.
Sei $x \in M$. Geben seien

- eine Isometrie $I : \mathbb{R}^{m_x} \to \nu_x Gx$,
- ein $0 < r < \mathcal{C}_{[M,G]}\mathrm{dist}\,(x, M(> G_x))$, weshalb also $\exp_x \circ I : B_r^{m_x} \to \mathcal{S}_r(x)$ ein Diffeomorphismus ist, und
- eine Nullfolge $r_i \in (0, r)$.

Dann definieren wir die Abbildung

$$u_{x,I,r,r_i} : B^{m_x} \to N, \quad u_{x,I,r,r_i}(z) := u\left(\exp_x \circ I(r_i z)\right).$$

Wir nennen eine Abbildung $\varphi : B^{m_x} \to N$ eine *Tangentialabbildung von u bei x*, wenn es solche I, r und r_i gibt, so dass die u_{x,I,r,r_i} schwach gegen ein $\psi \in W^{2,2}(B^m, N)$ konvergieren, und so dass gilt:

$$\varphi(x) = \psi\left(\frac{1}{2}x\right) \text{ für alle } x \in B^m,$$

Die Isotropiegruppe G_x operiere über eine Scheibendarstellung von x auf $\mathbb{R}^{m_x}$. Dann ist $\varphi \in W^{2,2}_{G_x}(B^{m_x}_1, N)$. Denn nach dem Scheibensatz ist u_{x,I,r,r_i} G_x-äquivariant, und $W^{2,2}_{G_x}(B^{m_x}, N)$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von $W^{2,2}(B^{m_x}, N)$, wie im Beweis von Satz 3 nachgewiesen wurde. Der folgende Satz folgt unmittelbar aus dem Lokalisierungssatz (Satz 4) und dem Skalierungssatz (Satz 5).

Satz 8 (Existenz von Tangentialabbildungen) *Unter den Grundvoraussetzungen dieses Kapitels gilt: Für jedes $x \in M$ gibt es eine Tangentialabbildung $\varphi \in W^{2,2}_{G_x}(B^{m_x}, N)$ von u in x. Jede dieser Tangentialabbildungen ist ein G_x-Minimierer der euklidischen Bienergie und nullhomogen, d.h.*

$$\varphi(r\omega) = \varphi(\omega) \textit{ für fast alle } r \in (0,1]\,,\ \omega \in S^{m-1}$$

Über die Eindeutigkeit der Tangentialabbildung von u bei x wird in diesem Satz nichts ausgesagt. Im Fall *harmonischer* Abbildungen gibt es Beispiele *nicht-eindeutiger* Tangentialabbildungen, siehe [50]. Deswegen liegt es nahe, dass Tangentialabbildungen auch im biharmonischen Fall nicht eindeutig sind. Ein Beispiel hierfür ist uns nicht bekannt.

Nun machen wir uns an den Beweis von Satz 7.
Da Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist, genügt es für $x \in M$ und ein beliebiges $0 < r < \mathcal{C}_{[M,G]}\operatorname{dist}(x, M(> G_x))$ der Frage nachzugehen, für welche $s \in (4, m]$ die Aussage $\mathscr{H} - dim(\Sigma_u \cap \mathcal{U}_r(Gx) \leq m - s$ gilt. Wegen der G-Äquivarianz von u gilt

$$\mathscr{H}^{m-\ell}(\Sigma_u \cap \mathcal{U}_r(Gx)) = \mathscr{H}^{m_x-\ell}\left(u|_{\mathcal{S}_r(x)}\right)$$

für alle $\ell \in (0, m_x]$. (Wir können $d \geq m - m_x$ annehmen, denn aus $y \in \Sigma_u$ folgt $Gy \subset \Sigma_u$ und $m - m_x$ ist die minimale Orbitdimension in $\mathcal{U}_r(x)$.) Nach dem Lokalisierungssatz (Satz 4) genügt es also, für ein beliebiges solches x und jedes solche r zu zeigen:
Sei $s \in [5, m_x]$. Angenommen, für keine Darstellung $[\mathbb{R}^q, H] \in \mathcal{T}_{[B^{m_x}, G_x]}$ mit $5 \leq q \leq s$ gibt es einen glatten, nichtkonstanten, nullhomogenen H-Minimierer $\varphi \in C^\infty_H(B^q, N)$ der euklidischen Bienergie. Dann gilt $\mathscr{H} - \dim(\Sigma_{u^{[x]}} \cap B^m_{\frac{1}{2}}) \leq m_x - s - 1$ Im Fall $s = m_x - 1$ ist $\Sigma_{u^{[x]}} \cap B^m_{\frac{1}{2}}$ diskret. Im Fall $s = m_x$ ist $u^{[x]}$ glatt.

Als Abkürzung führen wir ein: $k := m_x$, $[\mathbb{R}^k, F]$ sei eine Scheibendarstellung von G in x, $W := V^{[x]}$, $f := u^{[x]}$. Weiterhin setzen wir o.B.d.A. $r = 1$. Der Fall eines beliebigen $0 < r < \mathrm{inj}_M$ folgt dann nach einem Skalierungsargument. Wir haben also zu zeigen:

$$\mathscr{H} - \dim(\Sigma_f \cap B^k_{\frac{1}{2}}) \leq k - s.$$

Damit ist dann Satz 7 bewiesen.

Nach (5.2) und den Bemerkungen im Anschluss an den Lokalisierungssatz gilt: *Es gibt ein $\epsilon > 0$ und einen Integranden $\Lambda : B^k \times \mathbb{R}^L \times \mathbb{R}^{k\times L} \times \mathbb{R}^{k\times k\times L} \to \mathbb{R}$ von niederer Ordnung, die beide nicht von f abhängen, so dass für alle $x \in B^k$ und alle $0 < r < 1 - |x|$ gilt:*

$$r^{4-m} \int_{\mathcal{U}_r(x)} \left(|D^2 f|^2 + |Df|^4 + \Lambda[f]\right) \, dvol_{\mathbf{g}} \leq \epsilon \quad \Longrightarrow \quad \Sigma_f \cap \mathcal{U}_{\frac{r}{3}}(x) = \emptyset. \quad (5.3)$$

Die meisten technischen Details der Dimensionsreduktion befinden sich im folgenden Lemma:

Lemma 19 *Seien $[\mathbb{R}^m, G]$ und $[\mathbb{R}^L, G]$ orthogonale Darstellungen, sei $N \subset \mathbb{R}^L$ eine kompakte G-invariante Untermannigfaltigkeit und sei $u \in W^{2,2}_G(B^m, N)$ ein G-Minimierer der gestörten Bienergie*

$$E_W(u) = \int_{B^m} \left(|\Delta u|^2 + W[u]\right) \, dx.$$

Außerdem habe u die folgende Eigenschaft: Es gibt ein $\epsilon > 0$ und einen Integranden Λ von niederer Ordnung, die beide nicht von u abhängen, so dass für alle $x \in B^k$ und alle $0 < r < 1 - |x|$ gilt:

$$r^{4-m} \int_{\mathcal{U}_r(x)} \left(|D^2 u|^2 + |Du|^4 + \Lambda[u]\right) \, dvol_{\mathbf{g}} \leq \epsilon \quad \Longrightarrow \quad \Sigma_u \cap \mathcal{U}_{\frac{r}{3}}(x) = \emptyset. \quad (5.4)$$

(i) Sei $\mathscr{A} \subset \Sigma_u \cap B^m_{\frac{1}{2}}$ mit $\mathscr{H}\text{-}\dim(\mathscr{A}) = \mathscr{H}\text{-}\dim(\Sigma_u)$. Angenommen, für ein $s \in [0, \inf\{m_x \,:\, x \in B^m\}]$ gilt

$$\mathscr{H}^{m-s}(\mathscr{A}) > 0.$$

Dann gibt es ein $a \in \mathscr{A}$ und eine Tangentialabbildung $v : B^{m_a} \to N$ von u in a mit

$$\mathscr{H}^{m_a - s}(\Sigma_v) > 0$$

und

$$0 \in \Sigma_v.$$

(ii) Angenommen, es gilt $\mathscr{H}^0\left(\Sigma_u \cap B^m_{\frac{1}{2}}\right) > 0$ und Σ_u hat einen Häufungspunkt $a \in B^m$. Dann gibt es eine Tangentialabbildung $v : B^{m_a} \to N$ von u in a mit $\mathscr{H}^1(\Sigma_v) > 0$.

Beweis: Zu (i): Für $\epsilon > 0$ und jede Abbildung $g \in W_G^{2,2}(B^m, \mathbb{R}^L)$ definieren wir

$$S(g,\epsilon) := \Big\{ x \in B^m_{\frac{1}{2}} \; : \; \sigma^4 \fint_{\mathcal{U}_\sigma(Gx)} \big(|D^2 g|^2 + |Dg|^4 + \Lambda[g]\big)\, dx \geq \epsilon \\ \text{für alle } 0 < \sigma < 1 - |x| \Big\}.$$

Nach Voraussetzung gilt für ein geeignet gewähltes $\epsilon > 0$

$$\Sigma_u \cap B^m_{\frac{1}{2}} = S(u,\epsilon), \tag{5.5}$$

also insbesondere

$$\mathscr{A} \subset S(u,\epsilon).$$

Wir zitieren nun ein allgemeines Ergebnis der Geometrischen Maßtheorie, zu finden z.B. in Federers Buch [10], 2.10.19(2). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^\ell$ mit $\mathscr{H}^\gamma(\Omega) > 0$ für ein $\gamma > 0$. Dann gibt es ein $a \in \Omega$ mit

$$\limsup_{\rho \downarrow 0} \rho^{-\gamma} \mathscr{H}^s_\infty \big(B^\ell_\rho(a) \cap \Omega\big) > 0.$$

Dabei ist das äußere Maß $\mathscr{H}^\gamma_\infty$ gegeben durch

$$\mathscr{H}^\gamma_\infty(\Omega) := \inf \left\{ \sum_{j=0}^\infty \alpha(s) \rho_j^\gamma \; : \; \Omega \subset \bigcup_{h=1}^\infty B_{\rho_j}(x_j) \right\}$$

mit $\alpha(\gamma) := \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^\gamma}{\Gamma\left(1+\frac{\gamma}{2}\right)}$. Demnach gibt es also ein $a \in \mathscr{A}$ mit

$$\limsup_{\rho \downarrow 0} \rho^{-(m-s)} \mathscr{H}^{m-s}_\infty (B^m_\rho(a) \cap \mathscr{A}) > 0. \tag{5.6}$$

Wir lokalisieren die Abbildung u gemäß der Bemerkungen im Anschluss an den Lokalisierungssatz (Satz 4) im Punkt a und erhalten für ein $r > 0$ eine Abbildung $\widetilde{u} \in W^{2,2}_{G_a}(B^{m_a}_r, N)$ (dabei werde $\mathcal{S}_r(a)$ durch beliebig gewählte Normalkoordinaten mit $B^{m_a}_r$ identifiziert). Sei $\rho_i \in (0, r]$ eine Nullfolge. Die skalierten Abbildungen

$$\widetilde{u}_i : B^{m_a} \to N, \; \widetilde{u}_i(x) := \widetilde{u}\,(\rho_i x)$$

konvergieren nach dem Skalierungssatz (Satz 5) nach Übergang zu einer Teilfolge schwach in $W^{2,2}(B^{m_a}, N)$ und stark in $W^{2,2}_{loc}(B^{m_a}_{\frac{1}{2}}, N)$ gegen eine Abbildung $\widetilde{u}_\infty \in W^{2,2}_{G_a}(B^{m_a}, N)$ von u in a. Weiterhin definieren wir für $\epsilon > 0$ und $f \in W^{2,2}_G(B^m, \mathbb{R}^l)$

$$\widetilde{S}(f,\epsilon) = S(f,\epsilon) \cap \mathcal{S}_r(a).$$

Wegen der G-Äquivarianz von u ist $S(u,\epsilon)$ eine G-invariante Teilmenge von B^m, und aus (5.6) folgt deshalb

$$\limsup_{\rho \downarrow 0} \rho^{-(m_a - s)} \mathscr{H}^{m_a - s}_\infty (B^m_\rho \cap \widetilde{S}(u,\epsilon)) > 0. \tag{5.7}$$

Nach den Bemerkungen im Anschluss an denn Lokalisierungssatz (Satz 4) gibt es einen Integranden $\widetilde{\Lambda}$ von niederer Ordnung mit

$$\begin{aligned}&\int_{GA}\left(|D^2f|^2+|Df|^4+\Lambda[f]\right)\,dx\\=&\mathscr{H}^{m-m_a}(Ga)\int_{G_aA}\left(|D^2\widetilde{f}|^2+|D\widetilde{f}|^4+\widetilde{\Lambda}[\widetilde{f}]\right)\,dx\end{aligned}$$

für alle $f\in W^{2,2}_G(B^m,\mathbb{R}^L)$ und alle offenen Teilmengen $A\subset B^{m_a}_r$ (die über die Identifizierung von $\mathcal{S}_r(a)$ mit $B^{m_a}_r$ ebenfalls als Teilmengen von $\mathcal{S}_r(a)$ angesehen werden). Nach Lemma 6 gibt es eine Funktion $\gamma:B^{m_a}_r\to(0,\infty)$ mit

$$\mathscr{H}^m\,(GA)=\int_{G_aA}\gamma\,dx$$

für alle offenen Teilmengen $A\subset B^{m_a}_r$. Für alle $\epsilon>0$ und alle Abbildungen $h\in W^{2,2}_{G_a}(B^{m_a},N)$ definieren wir

$$\begin{aligned}&\widetilde{S}_i(h,\epsilon):=\Bigg\{x\in B^{m_a}_{\frac{1}{2}}\;:\\&\frac{\mathscr{H}^{m-m_a}(Ga)}{\fint_{\mathcal{U}_\sigma(G_ax)}\gamma_{\rho_i}\,dx}\sigma^4\fint_{\mathcal{U}_\sigma(G_ax)}\left(|D^2h|^2+|Dh|^4+\widetilde{\Lambda}_{\rho_i}[h]\right)\,dx\geq\epsilon\\&\qquad\text{für alle }0<\sigma<1-|x|\Bigg\}\end{aligned}$$

Der skalierte Integrand Λ_ρ ist hierbei für $0<\rho\leq 1$ durch

$$\Lambda_\rho(x,z,p,q)=\rho^4\Lambda\left(\rho x,z,\frac{p}{\rho},\frac{q}{\rho^2}\right)$$

gegeben und die skalierte Funktion γ_ρ durch

$$\gamma_\rho(x)=\gamma(\rho x).$$

Die folgende Gleichung ist für unseren Beweis von großer Wichtigkeit:

$$\rho_i^{-1}\left(\widetilde{S}(u,\epsilon)\cap B^{m_a}_{\frac{\rho_i}{2}}\right)=\widetilde{S}_i(\widetilde{u}_i,\epsilon).\tag{5.8}$$

Dies ist neben den Definitionen von $\widetilde{S}(u,\epsilon)$ und $\widetilde{S}_i(\widetilde{u}_i,\epsilon)$ aus der Gleichung

$$\begin{aligned}&\fint_{GA}\left(|D^2u|^2+|Du|^4+\Lambda[u]\right)\,dx\\=&\frac{\mathscr{H}^{m-m_a}(Ga)}{\fint_{\rho^{-1}G_aA}\gamma_{\rho_i}\,dx}\sigma^4\fint_{\rho^{-1}G_aA}\left(|D^2u|^2+|Du|^4+\widetilde{\Lambda}_{\rho_i}[u]\right)\,dx\end{aligned}$$

für alle $A\subset B^{m_a}_\rho$ und alle $\rho\in(0,r]$ ersichtlich.
Für alle $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, alle $\kappa\in\mathbb{R}$ und alle $\rho>0$ gilt $\mathscr{H}^\kappa_\infty(\rho^{-1}\Omega)=\rho^\kappa\mathscr{H}^\kappa(\Omega)$. Mit (5.7)

und (5.8) erhalten wir also

$$\begin{aligned}
&\limsup_{i\to\infty} \mathscr{H}_\infty^{m_a-s}\left(\widetilde{S}_i(\widetilde{u}_i,\epsilon)\right)\\
=&\limsup_{i\to\infty} \mathscr{H}_\infty^{m_a-s}\left(\rho_i^{-1}\left(\widetilde{S}(u,\epsilon)\cap B^m_{\frac{\rho_i}{2}}(a)\right)\right)\\
=&2^{-(m_a-s)}\limsup_{i\to\infty}\left(\frac{\rho_i}{2}\right)^{-(m_a-s)}\mathscr{H}_\infty^{m_a-s}\left(\widetilde{S}(u,\epsilon)\cap B^m_{\frac{\rho_i}{2}}(a)\right)>0. \qquad (5.9)
\end{aligned}$$

Wir definieren für alle $h \in W^{2,2}_{G_a}(B^{m_a},N)$ und alle $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned}
\widetilde{S}_\infty(h,\epsilon) := \Bigg\{ x \in B^{m_a}_{\frac{1}{2}} \ :\ \sigma^4 &⨍_{\mathcal{U}_\sigma(G_a x)} \left(|D^2h|^2+|Dh|^4\right)\,dx \geq \epsilon\\
&\text{für alle } 0<\sigma<1-|x|\Bigg\}.
\end{aligned}$$

Da Λ ein Integrand niederer Ordnung ist und weil die Folge $\widetilde{u}_i$ in der $W^{2,2}$-Norm beschränkt ist (da sie schwach konvergiert), gilt

$$\lim_{i\to\infty}\int_A \Lambda_{\rho_i}[\widetilde{u}_i]\,dx = 0$$

für alle $A \subset B^{m_a}$. Außerdem gilt

$$\lim_{i\to\infty}⨍_A \gamma_{\rho_i}\,dx = \mathscr{H}^{m-m_a}(Ga).$$

Deswegen ist $\widetilde{S}_\infty(\widetilde{u}_\infty,\epsilon)$ der mengentheoretische Grenzwert der Mengen $\widetilde{S}_i(\widetilde{u}_i,\epsilon)$, was bedeutet:

$$\widetilde{S}_\infty(\widetilde{u}_\infty,\epsilon) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\bigcap_{i>k}\widetilde{S}_i(\widetilde{u}_i,\epsilon) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}}\bigcup_{i>k}\widetilde{S}_i(\widetilde{u}_i,\epsilon). \qquad (5.10)$$

Sei $x \notin \widetilde{S}_\infty(\widetilde{u}_\infty,\epsilon)$. Aus eben dieser Grenzwerteigenschaft folgt $x \notin \widetilde{S}_i(\widetilde{u}_i,\epsilon)$ für alle hinreichend großen i. Daraus ergibt sich nun die folgende Überdeckungseigenschaft: Sind $A_i \subset B^{m_a}$ $(i \in \mathbb{N})$ offene Mengen mit

$$\widetilde{S}_\infty(\widetilde{u}_\infty,\epsilon) \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i.$$

Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass gilt:

$$\widetilde{S}_j(\widetilde{u}_j,\epsilon) \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \quad \text{für alle } j > k.$$

Für jede kompakte Menge

$$K \subset \overline{B^{m_a}_{\frac{1}{2}}} \setminus \widetilde{S}_\infty(\widetilde{u}_\infty,\epsilon)$$

gilt also

$$K \subset \overline{B^{m_a}_{\frac{1}{2}}} \setminus \widetilde{S}_i(\widetilde{u}_i, \epsilon) \quad \text{für alle hineichend großen } i \in \mathbb{N}. \tag{5.11}$$

Sei ein beliebiges $\delta > 0$ gegeben. Wir wählen nun Bälle $B^{m_a}_{r_i}(v_i) \subset B^{m_a}$ mit

$$\widetilde{S}_\infty(\widetilde{u}_\infty, \epsilon) \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B^{m_a}_{r_i}(v_i)$$

und

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha(m_a - s) r_i^{m_a - s} \leq \delta + \mathscr{H}^{m_a - s}_\infty \left(\widetilde{S}_\infty(\widetilde{u}_\infty, \epsilon) \right)$$

(dass für jedes $\delta > 0$ solche Bälle gibt, folgt unmittelbar aus der Definition von $\mathscr{H}^{m_a-s}_\infty$). Setzen wir in (5.11)

$$K = \overline{B^{m_a}_{\frac{1}{2}}} \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B^{m_a}_{r_i}(v_i),$$

so erhalten wir

$$\widetilde{S}_i(\widetilde{u}_i, \epsilon) \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B^{m_a}_{r_i}(v_i) \quad \text{für alle hineichend großen } i \in \mathbb{N}$$

und deswegen

$$0 < \mathscr{H}^{m_a - s}_\infty (\widetilde{S}_i(\widetilde{u}_i, \epsilon)) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha(m_a - s) r_i^{m_a - s} \leq \delta + \mathscr{H}^{m_a - s}_\infty \left(\widetilde{S}_\infty(\widetilde{u}_\infty, \epsilon) \right).$$

Da $\delta > 0$ hierbei beliebig gewählt werden kann, folgt im Grenzwert $\delta \downarrow 0$

$$\mathscr{H}^{m_a - s}_\infty \left(\widetilde{S}_\infty(\widetilde{u}_\infty, \epsilon) \right) > 0 \tag{5.12}$$

und damit Da $\widetilde{u}_\infty$ ein G_a-Minimierer der *euklidischen* Bienergie ist, gilt nach (5.2)

$$\Sigma_{\widetilde{u}_\infty} \cap B^{m_a}_{\frac{1}{2}} = \widetilde{S}_\infty(\widetilde{u}_\infty, \epsilon). \tag{5.13}$$

Aus $0 \in \widetilde{S}(u, \epsilon)$ folgt $0 \in \widetilde{S}_i(\widetilde{u}_i, \epsilon)$ und deswegen $0 \in \widetilde{S}_\infty(\widetilde{u}_\infty, \epsilon)$. Die Abbildung $v(x) := \widetilde{u}_\infty \left(\frac{1}{2} x \right)$ ist eine Tangentialabbildung von u in a. Aus (5.13) folgt

$$\Sigma_v = \{ 2v \ : \ v \in \widetilde{S}_\infty(\widetilde{u}_\infty, \epsilon) \}$$

und zusammen mit (5.12)

$$\mathscr{H}^{m_a - s}_\infty (\Sigma_v) > 0.$$

Deswegen muss nach der Definition des Hausdorff-Maßes natürlich auch

$$\mathscr{H}^{m_a - s} (\Sigma_v) > 0$$

gelten. Somit ist Teil (i) des Lemmas bewiesen.

Zu (ii): Wir lokalisieren die Abbildung u in a. Dann gehen wir genauso vor wie im Beweis von (i). Für jedes $i \in \mathbb{N}$ hat $\widetilde{S}_i(\widetilde{u}_i, \epsilon)$ abzählbar viele Elemente und 0 ist ein Häufungswert. Deswegen gilt $0 \in \widetilde{S}_\infty(\widetilde{u}_\infty, \epsilon)$. Wir gehen davon aus, dass die ρ_i so gewählt wurden, dass gilt: Es gibt eine kompakte menge $P \subset B^{m_a}_{\frac{1}{2}} \setminus \{0\}$ und für jedes $i \in \mathbb{N}$ gibt es ein $b_i \in \widetilde{S}_i(\widetilde{u}_i, \epsilon) \cap P$. Die b_i haben eine konvergente Teilfolge, der Grenzwert b liegt in P. Nach (5.10) muss also $b \in \widetilde{S}_\infty(\widetilde{u}_\infty, \epsilon)$ gelten. Daraus folgt $2b \in \Sigma_v$. Wir wissen, dass v auf nullhomogen ist. Aus $0 \in \Sigma_v$ und $b \in \Sigma_v$ folgt deshalb $\left\{ r \frac{b}{|b|} \ : \ r \in (-1,\ 1) \right\} \subset \Sigma_v$ und somit $\mathscr{H}^1\left(\Sigma_v\right) > 0$. Damit ist Teil (ii) des Lemmas bewiesen. $\square$

Mit Hilfe von Lemma 19 werden wir nun den Satz 7 von der Dimensionsreduktion beweisen.
Sei $f \in W^{2,2}_F(B^k, N)$ wie zu Beginn des Beweises angegeben, d.h. insbesondere ein F-Minimierer der gestörten Bienergie E_W. Es sei ein
$\kappa \in \left[0, \inf\{m_x \ : \ x \in B^k\}\right]$ gegeben mit

$$\mathscr{H}^{k-\kappa}\left(\Sigma_f \cap B^k_{\frac{1}{2}}\right) > 0.$$

Für alle $\mathbb{N} \ni i \leq \ell$ für ein noch zu bestimmendes $\ell \in \mathbb{N}_{>1}$ gibt es Darstellungen $[H_i, \mathbb{R}^{\ell_i}]$ und Abbildungen $v_i \in W^{2,2}_{H_{\ell_i}}(B^{\ell_i}, N)$, so dass gilt:

- Es gibt ein $a_0 \in \Sigma_f$, so dass $[H_0, \mathbb{R}^{k_0}]$ eine Scheibendarstellung von $[B^k, F]$ in a_0 und $v_0 \in W^{2,2}_{H_{k_0}}(B^{k_0}, N)$ eine Tangentialabbildung von f in a_0 ist.
- Es gibt ein $a_{i+1} \in (\Sigma_{u_i} \cap B^{k_i}_{\frac{1}{2}}) \setminus \{0\}$, so dass $[H_{i+1}, \mathbb{R}^{k_{i+1}}]$ eine Scheibendarstellung von $[H_i, \mathbb{R}^{k_i}]$ in a_{i+1} und $v_{i+1} \in W^{2,2}_{H_{k_{i+1}}}(B^{k_{i+1}}, N)$ eine Tangentialabbildung von u_i in a_{i+1} ist.
- $0 \in \Sigma_{v_i}$.
- $\mathscr{H}^{k_i-\kappa}(\Sigma_{v_i}) > 0$ (man sieht leicht aus der Äquivarianz von u, dass $k_i \geq \kappa$ gelten muss),
- $(\mathbb{R}^i \times \{0\}) \cap B^{k_i}_{\frac{1}{2}} \subset \Sigma_{v_i}$.

Die Abbildungen v_i erhalten wir durch iterierte Anwendung von Lemma 19:
Nach Lemma 19 gibt es ein $a_0 \in \Sigma_f$ und eine Tangentialabbildung $u_0 \in W^{2,2}_{H_0}(B^{m_{k_0}}, N)$ (mit $H_0 = F_{a_0}$ und $k_0 = k_a$) von f in a_0 mit $0 \in \Sigma_{u_0}$ und

$$\mathscr{H}^{k_0-\kappa}\left(\Sigma_{u_0}\right) > 0.$$

Da u_0 nullhomogen ist, muss auch schon

$$\mathscr{H}^{k_0-\kappa}\left(\Sigma_{u_0} \cap B^{k_0}_{\frac{1}{2}}\right) > 0$$

gelten. (Dass die Bedingung (5.4) aus Lemma 19 von f erfüllt wird, haben wir in (5.3) begründet.) Da u_0 ein Minimierer der euklidischen Bienergie ist, können wir Lemma 19 auf u_0 anwenden. (Die Bedingung (5.4) aus Lemma 19 wird von u_0 erfüllt, weil u_0 ein H_1-Minimierer der euklidischen Bienergie ist und weil die zu Beginn des Kapitels hergeleitete Aussage (5.2) für jeden äquivarianten Minimierer der Bienergie gültig ist.) Somit erhalten wir ein $a_1 \in \Sigma_{u_0} \cap (B^{k_0}_{\frac{1}{2}} \setminus \{0\})$ und eine Tangentialabbildung $u_1 \in W^{2,2}_{H_1}(B^{m_{k_1}}, N)$ von u_0 in a_1 mit $0 \in \Sigma_{u_0}$ und

$$\mathscr{H}^{k_1-\kappa}(\Sigma_{u_1}) > 0.$$

Da u_1 nullhomogen ist, folgt aus letzterem

$$\mathscr{H}^{k_1-\kappa}\left(\Sigma_{u_1} \cap B^{k_1}_{\frac{1}{2}}\right) > 0.$$

Außerdem folgt aus der Nullhomogenität die Existenz eines 1-dimensionalen Unterraums $V \subset \mathbb{R}^{k_1}$ gibt, so dass für $0 \neq v \in V$ gilt: $\partial_v u_1 = 0$. Nach einer eventuellen Drehung des Koordinatensystems gilt also

$$\partial_1 u_1 = 0.$$

Wegen $0 \in \Sigma_{u_1}$ gilt außerdem

$$\mathbb{R}^1 \cap B^{k_1} \subset \Sigma_{u_1}.$$

Hier und im Folgenden sei für $\alpha < \beta$ die Inklusion $\mathbb{R}^\alpha \subset \mathbb{R}^\beta$ durch

$$\mathbb{R}^\alpha \ni (x_1, ..., x_\alpha) \mapsto (x_1, ..., x_\alpha, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^\beta$$

gegeben. Weiterhin ist Σ_{u_1} wegen der Nullhomogenität von u_1 ein Kegel im folgenden Sinne:

$$\{\lambda x \ : \ x \in \Sigma_{u_1}, \ \lambda \in (0, \infty)\} \cap B^{k_1} = \Sigma_{u_1}$$

Wir fahren nun iterativ fort, wie es zu Beginn des Beweises beschrieben wurde. Sei $\ell \in \mathbb{N}_{>1}$. Die Abbildung $u_{\ell-1} \in W^{2,2}(B^{k_{\ell-1}}, N)$ sei bereits konstruiert. Diese ist ein $H_{\ell-1}$-Minimierer der euklidischen Bienergie, nullhomogen, und es gilt

$$\partial_1 u_{\ell-1} = ... = \partial_{\ell-1} u_{\ell-1} = 0, \tag{5.14}$$

sowie

$$\mathscr{H}^{k_{\ell-1}-\kappa}\left(\Sigma_{u_{\ell-1}} \cap B^{k_{\ell-1}}_{\frac{1}{2}}\right) > 0.$$

und

$$\mathbb{R}^{\ell-1} \subset \Sigma_{u_{\ell-1}}. \tag{5.15}$$

Wenn in (5.15) „=“ gilt, so brechen wir die Iteration ab. Ansonsten sei u_ℓ nach Lemma 19 eine Tangentialabbildung von $u_{\ell-1}$ in einem

$$a_{\ell-1} \in \left(\Sigma_{u_{\ell-1}} \cap B^{k_\ell - 1}_{\frac{1}{2}}\right) \setminus \left(\mathbb{R}^{\ell-1} \times \{0\}\right) \tag{5.16}$$

mit $0 \in \Sigma_{u_\ell}$ und

$$\mathscr{H}^{k_\ell - \kappa}\left(\Sigma_{u_\ell}\right) > 0.$$

Aus (5.14) bzw. (5.15) folgt (evtl. nach einer Drehung der Koordinaten in $\mathbb{R}^{k_\ell}$)

$$\partial_1 u_\ell = ... = \partial_{\ell-1} u_\ell = 0$$

bzw.

$$\mathbb{R}^{\ell-1} \cap B^{k_\ell} \subset \Sigma_{u_\ell}.$$

Wegen (5.16) und der Nullhomogemität von $u_{\ell-1}$ gibt es einen eindimensionalen Unterraum $V \subset \mathbb{R}^{k_\ell}$, so dass für $0 \neq v \in V$ gilt: $\partial_v u_\ell = 0$. Sei $\widetilde{V}$ die orthogonale Projektion von V auf $\{0\} \times \mathbb{R}^{k_\ell - (\ell-1)}$. Für alle $0 \neq v \in \widetilde{V}$ gilt $\partial_v u_\ell = 0$. Nachdem in $\{0\} \times \mathbb{R}^{k_\ell - (\ell-1)}$ eine geeignete Drehung durchgeführt wurde, gilt also

$$\partial_1 u_\ell = ... = \partial_\ell u_\ell = 0.$$

Wegen $0 \in \Sigma_{u_\ell}$ folgt daraus

$$\mathbb{R}^\ell \cap B^{k_\ell} \subset \Sigma_{u_\ell}.$$

Der hier beschriebene Iterationsprozess endet nach endlich vielen Schritten. Und zwar für ein $\alpha \in \mathbb{N}$ mit einer Abbildung $u_\alpha \in W^{2,2}\left(B^{k_\alpha}, N\right)$, welche ein H_α-Minimierer der euklidischen Bienergie ist, nullhomogen auf $B^{k_\alpha}_{\frac{1}{2}}$, und für die

$$\partial_1 u_\alpha = ... = \partial_\alpha u_\alpha = 0$$

sowie

$$\mathscr{H}^{k_\alpha - \kappa}\left(\Sigma_{u_\alpha} \cap B^{k_\alpha}_{\frac{1}{2}}\right) > 0$$

und

$$\Sigma_{u_\alpha} = \left(\mathbb{R}^\alpha \times \{0\}\right) \cap B^{k_\alpha}$$

gilt. Aus den letzten beiden Eigenschaften folgt

$$k_\alpha - \kappa \leq \alpha. \tag{5.17}$$

Da u_α stationär biharmonisch ist, gilt nach Voraussetzung
$\mathscr{H}^{m-4}(\Sigma_{u_\alpha} \cap B^{k_\alpha}_{\frac{1}{2}}) = 0$ und deshalb

$$\alpha < k_\alpha - 4. \tag{5.18}$$

Wir betrachten nun die eingeschränkte Abbildung

$$\varphi := u_\alpha|_{\{0\} \times B^{k_\alpha - \alpha}}.$$

Da u_α H_α-äquivariant ist und $\partial_1 u_\alpha = ... = \partial_\alpha u_\alpha = 0$ gilt, muss es eine Lie-Untergruppe $K_\alpha \subset G$ geben mit $H_\alpha = id_\alpha \times K_\alpha$. Dann ist φ K_α-äquivariant. Es gilt:
Die Abbildung $\varphi : B^{k_\alpha - \alpha}_{\frac{1}{2}} \to N$ ist ein K_α-Minimierer der euklidischen Bienergie und glatt in $B^{k_\alpha - \alpha} \setminus \{0\}$.
Für den Beweis dieser Aussage verweisen wir auf Lemma 4.2 aus der Arbeit [48]. Dort wird im Fall der trivialen Operation von $G = \{id\}$ bewiesen:
Ist $v : B^m \to N$ eine Tangentialabbildung eines Minimierers der euklidischen Bienergie mit $\partial_i v = 0$ für alle $1 \leq i \leq k$ für ein $k < m$ und $\Sigma_v = \mathbb{R}^k \times \{0\}$. Dann ist die Einschränkung $\widetilde{v} := v|_{\{0\} \times B^{m-k_\ell}}$ ein Minimierer der euklidischen Bienergie und glatt in $B^{m-k_\ell} \setminus \{0\}$.
Der Beweis von Scheven gilt auch im äquivarianten Fall, wenn man nur alle Vergleichs- und Abschneidefunktionen, die im Verlauf gewählt werden, als äquivariant voraussetzt. (Dass Schevens Begriff von der Tangentialabbildung in Details von der unsrigen abweicht, verursacht dabei keinerlei Probleme.) Deswegen verzichten wir auf eine (beinahe) wortwörtliche Wiedergabe von Schevens Beweis.
Damit wissen wir also, dass φ ein glatter, nicht-konstanter, nullhomogener K_α-Minimierer der euklidischen Bienergie ist. Es ist offenkundig, dass $[K_\alpha, \mathbb{R}^{k_\alpha - \alpha}]$ in $\mathcal{T}_{[B^k, F]}$ liegt. Nach den Voraussetzungen des zu beweisenden Satzes muss $k_\alpha - \alpha > s$ oder $k_\alpha - \alpha \leq 4$ gelten. Wegen (5.18) ist letzteres ausgeschlossen. Da $k_\alpha - \alpha$ und s natürliche Zahlen sind, folgt $k_\alpha - \alpha - 1 \geq s$. Außerdem wissen wir nach (5.17) bereits $k_\alpha - \kappa \leq \alpha$. Damit erhalten wir $s + 1 \leq \kappa$ und schließlich $k - \kappa \leq k - s - 1$. Wir wissen also: *Aus $\mathscr{H}^{k-\kappa}(\Sigma_f \cap B^k_{\frac{1}{2}}) > 0$ folgt $k - \kappa \leq k - s - 1$.* Damit erhalten wir $\mathscr{H}\text{-}\dim(\Sigma_f \cap B^k_{\frac{1}{2}}) \leq k - s - 1$ und der erste Teil des Satzes ist bewiesen.
Nun beweisen wir den Fall $s = k - 1$. Angenommen es gibt Folge $a_i \in \Sigma_f \cap B^k_{\frac{1}{2}}$ mit $\lim_{i \to \infty} a_i = a \in \Sigma_f \cap B^k_{\frac{1}{2}}$. Nach Lemma 19 gibt es eine Tangentialabbildung $\varphi \in W^{2,2}_{F_a}(B^{k_a}, N)$ von f in a mit $\mathscr{H}^1(\Sigma_\varphi \cap B^{k_a}_{\frac{1}{2}}) > 0$. Wir wissen aber bereits

$$\mathscr{H}\text{-}\dim(\Sigma_\varphi \cap B^{k_a}_{\frac{1}{2}}) = 0,$$

was dazu im Widerspruch steht.
Zum Schluss beweisen wir den Fall $s = k$. Wir setzen $\Sigma_u \neq \emptyset$ voraus. Es ist bereits bekannt, dass es dann eine Darstellung $[\mathbb{R}^q, K] \in \mathcal{T}_{[M,G]}$ und einen nicht-konstanten, glatten, nullhomogenen K-Minimierer $\varphi \in W^{2,2}_K(B^q, N)$ der euklidischen Bienergie gibt. Nach Voraussetzung muss $q > m$ gelten. Dies kann jedoch nicht sein, denn für *jede* Darstellung $[\mathbb{R}^p, H] \in \mathcal{T}_{[B^k, F]}$ bereits $p \leq k$ gelten muss. Die Voraussetzung $\Sigma_u \neq \emptyset$ führt also zu einem Widerspruch. Deshalb muss f im Fall $s = k$ glatt sein. □

Der in der Einleitung formulierte Hauptsatz 1 ist nun eine Zusammenstellung von Satz 2 und Satz 7.

Literaturverzeichnis

[1] D.R. ADAMS, *A note on Riesz potentials*, Duke Math. J. **42** (1975), 765-778

[2] G. ANGELSBERG, *A monotonicity formula for stationary biharmonic maps*, Math.Z. **252** (2006), pp. 287-293

[3] F. BETHUEL, *On the singular set of stationary harmonic maps*, manuscripta math., **78**, 417-443 (1993)

[4] S. CAMPANATO, *Equazioni ellitiche del II^e ordine e spazi $L^{2,\lambda}$*, Ann. Mat. Pura Appl. **69** (1965), 321-381

[5] A. CHANG, L. WANG AND P. YANG *A regularity theory of biharmonic maps*, Comm. Pure. Appl. Math **52** (1999), no.9, pp.1113-1137

[6] J. EELS AND L. LEMAIRE, *A report on harmonic maps*, Bull. London Math. Soc., **10**, 1-68 (1978)

[7] J. EELLS AND L. LEMAIRE, *Another report on harmonic maps*, Bull. London Math. Soc., **20**, 385-524 (1988)

[8] J. EELLS AND J.H. SAMPSON, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer.J.Math. **86** (1964) 109-160

[9] J. EELLS AND A. RATTO, *Harmonic Maps and Minimal Immersions with Symmetries*, Princeton University Press (1993)

[10] H. FEDERER, *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag 1969

[11] H. FEDERER, *The singular sets of area minimizing rectifiable currents with codimension one and of area minimizing flat chains modulo two with arbitrary codimension*, Bull. Amer. Math. Soc **76** (1970), 767-771

[12] N. FUSCO AND J. HUTCHINSON, *$C^{1,\alpha}$ partial regularity of functions minimising quasiconvex integrals*, Manus. Math. **54** (1986) 121-143

[13] A. GASTEL, *Regularity theory for minimizing equivariant $(p-)$harmonic mappings*, Calc.Var. **6** (1998) 821-844

[14] A. Gastel *Regularitätstheorie für minimierende äquivariante (p-)harmonische Abbildungen*, Dissertation, Düsseldorf 1996

[15] A. Gastel, *Torus equivariant harmonic maps between spheres*, Topology **41** (2002), 213-227

[16] A. Gastel, *The extrinsic polyharmonic heat flow in the critical dimension*, Adv. Geom. **6** (2006), 501-521

[17] A. Gastel and A.J. Nerf, *Density of smooth maps in $W^{k,p}(M,N)$ for a close to critical domain dimension*, Ann. Global Anal. Geom. **39** (2011), 107-129

[18] A. Gastel and F. Zorn, *Biharmonic maps of cohomogeneity one between spheres*, J. Math. Anal. Appl. **387** (2012), 384-399

[19] A. Gastel and Ch. Scheven, *Regularity of polyharmonic maps in the critical dimension*, Commun. Anal. Geom. **17** (2009), 185-226

[20] M. Giaquinta, *Multiple Integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems*, Annals of Mathematics Studies, **105**, Princeton Univ. Press, Princeton

[21] D. Gilbarg and N.S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order (2nd ed.)*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1983)

[22] K. Grosse-Brauckmann, *Interior and boundary monotonicity formulas for stationary harmonic maps*, Man. Math **77**, 89-95

[23] E. Hebey, *Nonlinear Analysis on Manifolds: Sobolev Spaces and Inequalities*, CIMS Lecture Notes, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, **5**, 1999

[24] F. Helein, *Harmonic maps, conservation laws and moving frames*, Cambridge University Press, 2002

[25] F. Helein and J.C. Wood, *Harmonic Maps* in: Handbook on golbal analysis, D. Krupka and D. Saunders editors, Elsevier, 2008, P. 417–491.

[26] J. Jost, *Riemannian Geomertry and Geometric Analysis, 6th ed.*, Springer, 2011

[27] J. Jost, *Harmonic mappings*, Handbook of Geometric Analysis, International Press, 2008, 147-194.

[28] J. Jost and X. Li-Jost, *Calculus of variations*, Cambridge Univ. Press, 1998

[29] S. Kobayashi, *Transformation groups in differential geometry*, Springer Classics in Mathematics, Springer, 1995

[30] T. Lamm, *Heat flow for extrinsic biharmonic maps with small initial energy*, Ann. Glob. Anal. Geom. **26** (2004), 369-384

[31] T. Lamm, *Biharmonic map heat flow into manifolds of nonpositive curvature*, Calc. Var. **22** (2005), 421-445

[32] T. Lamm, *Biharmonic maps*, PhD thesis, Freiburg 2006

[33] T. Lamm, H. Gong and C. Wang, *Boundary partial regularity for a class of biharmonic maps*, Calc. Var **45** (2012), 165-191

[34] T. Lamm and T. Rivière, *Conservation laws for fourth order systems in four dimensions*, Comm.P.D.E., **33** (2008), no. 2, 345-262

[35] T. Lamm and C. Wang, *Boundary regularity for polyharmonic maps in the critical dimension*, Adv. Calc. Var. **2** (2009), 1-16

[36] F.H. Lin, *Gradient estimates and blow-up analysis for stationary harmonic maps*, Annals of Math. **149** (1999), 785-829

[37] S. Luckhaus, *Partial Hölder continuity for minima of certain energies among maps into a Riemannian manifold*, Indiana Univ. Math. J. **37** (1988), 349-367

[38] P. Molino *Riemannian foliations*, Birkhäuser, 1988

[39] J.D. Moore and R. Schlafly, *On equivariant isometric embeddings*, Math.Z. **173** (1980) 119-133

[40] R. Moser *Regularity of harmonic maps and related topics*, World Scientific, 2005

[41] R. Moser *A Variational Problem Petrtaining to Biharmonic Maps*, Communications in Partial Differential Equations **33** (2008), 1654-1689

[42] A. Nerf *„Bubbling off" für konform invariante Funktionale höherer Ordnung*, Dissertation, Erlangen 2011

[43] L. Nirenberg, *An extended interpolation inequality*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **20** (1966), pp. 733-737.

[44] R. Palais and C.-L. Terng, *Critical Point Theory and Submanifold Geometry*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1353, Springer, 1988

[45] J. Rade, *Compactness Theorems in Equivariant Gauge Theory*, arXiv:dg-ga/9704007

[46] T. Rivière, *Everywhere discontinuous harmonic mappings from B^3 into S^2*, Seminaire sur les Equations aux Derivees Partielles, Ecole Polytech., Palaiseau, Exp. No. XIX (1992)

[47] T. Rivière, *Conservation laws for conformal invariant variational problems*, Invent.Math., **168** (2007), 1-22

[48] Ch. Scheven, *Dimension reduction for the singular set of biharmonic maps*, Adv. Calc. Var. **1** (2008), 53-91

[49] Ch. Scheven, *Zur Regularitätstheorie stationärer harmonischer Abbildungen,* Diplomarbeit, Düsseldorf, 2000

[50] L. Simon, *Theorems on regularity and singularity of energy minimizing maps*, Lectures in Mathematics, Birkhäuser 1996

[51] L. Simon, *Lectures on Geometric Measure Theory*, Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, Australian National Universit, Volume **3**, 1983

[52] R.T. Smith, *Harmonic mappimgs of spheres*, Amer. J. Math. **97** (1975) 364-385

[53] K. Steffen *An introduction to harmonic mappings.* Erasmus Lecture Notes 1989

[54] M. Struwe, *Partial regularity for biharmonic maps, revisited*, Calc.Var.Partial Differ.Equ. **33**(2) (2008) 249-262

[55] R. Schoen und K. Uhlenbeck *A regularity theory for harmonic maps* J. Diff. Geom. **17** (1982) 307-335

[56] C. Wang *Biharmonic maps from $\mathbb{R}^4$ into a Riemannian manifold*, Math. Z. **247** (2004), no.1, pp.65-87

[57] C. Wang *Biharmonic maps from $\mathbb{R}^m$ into a Riemannian manifold*, Comm. Pure. Appl. Math **57** (2004), no. 4, pp. 419-444

[58] Y.L. Xin, *Geometry of harmonic maps*, Birkhäuser PNLDE **23**, 1996

[59] W. Ziemer, *Weakly differentiable functions*, Springer, 1989

[60] F. Zorn, *Die Existenz biharmonischer Joins*, Diplomarbeit, Erlangen, 2008