

Sebastian Kuhn

**Betriebsoptimierung von
elektrischen Energieerzeugungsanlagen
und Übertragungssystemen bei
unvollständiger Information**

2. Auflage



Cuvillier Verlag Göttingen

Vorwort zur 2. Auflage

In der vorliegenden Neuauflage wurden Tippfehler korrigiert. Das Layout wurde geringfügig überarbeitet. Zudem wurde auf den Seiten 38, 53, 99 und 108 jeweils eine Korrektur in der Symbolik vorgenommen.

Bis auf die angesprochenen Änderungen sind die 1. und 2. Auflage inhaltlich identisch.

Duisburg, im Jahr 2011

Sebastian Kuhn

Betriebsoptimierung von elektrischen
Energieerzeugungsanlagen und
Übertragungssystemen bei unvollständiger
Information

- 2. Auflage -

Die im Jahr 2008 veröffentlichte Dissertation wurde
vom Fachbereich Mathematik
der Universität Duisburg-Essen
(Campus Duisburg)

zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
- Dr. rer. nat. -
genehmigt.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

2. Aufl. - Göttingen: Cuvillier, 2011

Zugl.: Duisburg-Essen, Univ., Diss., 2008

978-3-86727-775-4

© CUVILLIER VERLAG, Göttingen 2011

Nonnenstieg 8, 37075 Göttingen

Telefon: 0551-54724-0

Telefax: 0551-54724-21

www.cuvillier.de

Alle Rechte vorbehalten. Ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages ist es nicht gestattet, das Buch oder Teile daraus auf fotomechanischem Weg (Fotokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen.

2. Auflage, 2011

Gedruckt auf säurefreiem Papier

978-3-86727-775-4

Danksagung

Die im Jahr 2008 veröffentlichte Dissertation ist im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter der Arbeitsgruppe „Diskrete Mathematik und Optimierung“ an der Universität Duisburg-Essen entstanden. Mein ganz besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. rer. nat. Rüdiger Schultz, der mir nicht nur die Mitarbeit an einem äußerst interessanten Projekt ermöglichte, sondern auf dessen Unterstützung ich auch jederzeit zählen konnte. Nicht zuletzt seine Anregungen verhalfen dieser Arbeit zum Erfolg.

Größten Dank gilt Herrn Dr. rer. nat. Ralf Gollmer, der mir oft mit Rat und Tat zur Seite stand. Weiter möchte ich mich bei Herrn Dr.-Ing. Hendrik Neumann bedanken, der mich mit seinen ingenieurwissenschaftlichen Fachkenntnissen zu Beginn meiner Tätigkeit unterstützte. Zudem danke ich Herrn Dipl.-Wirt.-Ing. Daniel Waniek, tätig am Lehrstuhl für Energiesysteme und Energiewirtschaft der technischen Universität Dortmund, und Herrn Prof. Dr.-Ing. Edmund Handschin sowie Herrn Prof. Dr.-Ing. Christian Rehtanz, ebenfalls dort tätig, für die gemeinsame Kooperation.

Herrn Prof. Dr. Marc C. Steinbach möchte ich für die Übernahme des Korreferats danken. Schließlich möchte ich mich beim Bundesministerium für Bildung und Forschung für die finanzielle Förderung des Projektes bedanken.

Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung/Abstract	1
1 Einleitung	3
2 Mathematische Optimierungsmodelle	9
2.1 Ignorierung des Energieübertragungssystems	10
2.2 Integration des Energieübertragungssystems	12
2.3 Ausdehnung auf einen Zeitraum	21
2.4 Modellrelationen	24
2.5 Nachrüstung elektrischer Energieübertragungssysteme	30
3 Lösungsverfahren	33
3.1 Ein klassisches Verfahren	34
3.2 Ein äußeres Approximationsverfahren	36
4 Stochastische Optimierung	47
4.1 Zweistufige stochastische gemischt-ganzzahlige lineare Modelle . . .	48
4.2 Zweistufige stochastische gemischt-ganzzahlige konvexe Modelle . .	55
4.3 Ein Ausblick auf mehrstufige stochastische Modelle	56
4.4 Anwendungen	58
5 Dekompositionsverfahren	61
5.1 Gemischt-ganzzahlige lineare Modellklassen	62
5.2 Gemischt-ganzzahlige konvexe Modellklassen	66

6	Eine Heuristik für das Wechselstrommodell	71
6.1	Güteabschätzungen	72
6.2	Ein Transformationsansatz	75
6.3	Heuristische Ansätze	78
7	Numerische Beispiele	81
7.1	Deterministische Vorbetrachtungen	83
7.2	Stochastische Optimierung: Motivierende Beispiele	90
7.3	Effizienz der Dekompositionsverfahren	92
7.4	Nachrüstung eines Übertragungssystems	98
7.5	Eine Fallstudie aus der Energiewirtschaft	100
	Zusammenfassung	105
	A Symbolverzeichnis	107
	B Datensituation: 6-Knoten-Netz	111
	Tabellenverzeichnis	114
	Abbildungsverzeichnis	115
	Literaturverzeichnis	117

Kurzfassung

Die mathematische Modellierung und Analyse elektrischer Energieübertragungssysteme mit dezentraler Erzeugung begründet sich in der zunehmenden Bedeutung an erneuerbaren Energiequellen, wie etwa Wind- oder Solarenergie. Eine Nutzung derartiger Systeme erfordert neben der Steuerung der Energieerzeugungsanlagen auch die der Energieflüsse, und das unter Beachtung von Unsicherheiten. Es ergeben sich, in mathematischer Betrachtungsweise, Verknüpfungen kombinatorischer und stochastischer Effekte unter Miteinbeziehung von Netzwerken, die zu hochgradig nichtlinearen Strukturen führen und geeignete Approximationstechniken erfordern. Unterschiedliche Interpretationen des Risikos, von risikoneutralen bis hin zu risikoaversen Modellierungen unter Nutzung geeigneter statistischer Parameter, werden angesprochen. Dekompositionsalgorithmen für zweistufige stochastische gemischt-ganzzahlige Modelle werden vorgestellt, mit deren Hilfe es möglich ist, sowohl lineare als auch nichtlineare Approximationen der Energieflüsse bei adäquater Modellierung des Zufalls zu beachten. Zahlreiche Beispielrechnungen werden aufgezeigt.

Abstract

Increased importance of renewable energy such as wind or solar energy has motivated mathematical modelling and analysis of electricity networks with dispersed generation. The operation of these systems requires the simultaneous handling of unit commitment and powerflow considering uncertainties. Mathematically, this leads to a combination of combinatorial, network, and stochastic phenomena. Such models involving power flow lead to highly nonlinear structures and require adequate model simplifications. Attention is paid to different perceptions of risk, from risk neutral to risk averse models incorporating different statistical parameters for risk measurement. Algorithms for two-stage stochastic mixed-integer programs are presented to handle linear and nonlinear approximations of powerflow constraints with adequate modelling of uncertainty. Numerous numerical examples are presented.

Kapitel 1

Einleitung

Durch die verstärkte Nutzung erneuerbarer Energiequellen zur Stromerzeugung haben die Unsicherheiten bezüglich der zu erwartenden Einspeisung und Abnahme in elektrischen Energieübertragungssystemen enorm zugenommen. So unterliegt die Windeinspeisung stochastischen Schwankungen, die sich nur mit einer begrenzten Genauigkeit voraussagen läßt. Dezentrale Energieerzeugungsanlagen, wie Blockheizkraftwerke oder Brennstoffzellen, werden heute vorrangig wärmegeführt gefahren. Dadurch richtet sich ihre Stromerzeugung primär nach der ebenfalls unsicheren Wetterprognose. Soll eine Erzeugungsanlage kostenoptimal betrieben werden, so erfordert die Optimierung nicht nur Informationen über die zu erwartende Entwicklung bezüglich des Strom- und Wärmebedarfs, sondern auch Informationen über die Preise für Primärenergien. Diese basieren ebenfalls auf Prognosen und sind deshalb mit Unsicherheiten behaftet. Verstärkt wird diese Situation durch den Stromhandel mit beschränkt vorhersagbaren Auswirkungen auf Einspeisungen und Abnahmen im Energieübertragungssystem. Somit ergibt sich schnell die Fragestellung, wie die dezentralen Erzeugungsanlagen anzusteuern sind, damit zum einen ein kostenoptimaler Betrieb eingehalten werden kann und zum anderen die Versorgungssicherheit selbst dann, wenn die Abnahme unsicher ist, gewährleistet bleibt. Eine entscheidende Bedeutung kommt in diesem Kontext dem Energieübertragungssystem zu. Ein solches transportiert die benötigte Energie vom Erzeuger zum Verbraucher und verursacht Abhängigkeiten zwischen den möglichen Produktionen der an ihm angeschlossenen Erzeugungsanlagen, so dass

eine einzelne dezentrale Erzeugungsanlage nicht als autonome Einheit angesehen werden kann. Doch ein Energieübertragungssystem wirft neue Fragestellungen auf. Eine kostenminimale Produktionsentscheidung der Erzeugungsanlagen, die die nachgefragte Last decken kann, muss sicherlich einen Energiefluss zur Folge haben, der die Leitungen des Energieübertragungssystems nicht überlastet.

Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung mathematischer Modelle und Verfahren zur stochastischen Leistungsfluss- und Betriebsoptimierung dezentraler Erzeugungsanlagen im obigen Kontext. Dabei sind die geschilderten stochastischen Einflüsse miteinzubeziehen. Die mathematische Optimierung als Teilgebiet der angewandten Mathematik stellt ein für zahlreiche Probleme der Praxis nutzbares Instrumentarium bereit. Sie findet ihren Anwendungsbereich beispielsweise auch in der Produktionsplanung, der Telekommunikation oder der Logistik. So kann bei der Entwicklung angemessener mathematischer Modelle und auch bei deren Lösung auf ein breites Spektrum an Modellierungstechniken und gängigen Softwarepaketen zurückgegriffen werden. Auch können zahlreiche Literaturquellen genannt werden, die sich mit der Einspeisungsoptimierung bei sicheren Eingangsdaten auseinandersetzen, wie etwa [13, 25, 28, 36, 71].

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert. In Kapitel 2 werden geeignete mathematische Optimierungsmodelle gemäß den zuvor geschilderten Anliegen vorgestellt, die unterschiedliche Modellierungstechniken, angefangen von einer vollständigen Ignorierung des elektrischen Energieübertragungssystems, übergehend zu Approximationsmöglichkeiten des solchen bis hin zu einer exakten Wiedergabe, nutzen und zudem hinsichtlich untereinander geltender Relationen näher untersucht werden. Weiter wird ein Optimierungsmodell vorgestellt, mit dessen Hilfe sich eine kostengünstige Nachrüstung eines elektrischen Energieübertragungssystems bestimmen lässt. Eine solche Nachrüstung kann langfristig dazu beitragen, die Versorgungssicherheit zu erhöhen und die Produktionskosten zu senken. Der in diesem Kapitel gewählte Zugang erfolgt in rein deterministischer Betrachtungsweise, d.h. alle Eingangsdaten werden als bekannt vorausgesetzt. Kapitel 3 stellt Lösungsverfahren dar, die auf die meisten der gewonnenen Modellklassen

anwendbar sind. Kapitel 4 beschäftigt sich intensiv mit der Integration von mit Unsicherheiten behafteten Datensätzen und stellt geeignete stochastische Optimierungsmodelle bei Fokussierung auf den zweistufigen stochastischen Ansatz vor. Sowohl risikoneutrale als auch risikoaverse Betrachtungsweisen mit der Möglichkeit einer Nutzung diverser statistischer Parameter werden genutzt. Eine genaue Modellierung der unsicheren Eingangsdaten kann jedoch die benötigte Rechenzeit bei Nutzung der in Kapitel 3 vorgestellten Algorithmen enorm steigern. Spezielle Algorithmen, die Dekompositionstechniken ausnutzen und so zu einer wesentlichen Reduzierung der Rechenzeiten führen, werden in Kapitel 5 angesprochen. Kapitel 6 stellt neben einer in den Ingenieurwissenschaften eingesetzten Methode zur Lastflussberechnung auch heuristische Ansätze für das in Kapitel 2 entwickelte und schwer zu behandelnde Optimierungsmodell bei einer exakten Modellierung der physikalischen Zusammenhänge des Energieübertragungssystems, d.h. ohne Nutzung von Approximationsmöglichkeiten, bei denen gewisse Voraussetzungen zu erfüllen sind, vor. Die Arbeit schließt mit in Kapitel 7 dargestellten zahlreichen numerischen Testrechnungen.

Nachfolgend wird ein kurzer Einblick in relevante Grundlagen der elektrischen Energieversorgung gegeben. Für etwaige Vertiefungen auf diesem Gebiet wird an dieser Stelle auch auf [4, 28, 29] verwiesen. Zunächst wird der Begriff der elektrischen Energieübertragung näher erläutert, der auch in dem Internetlexikon *Know-Library* [42] zu finden ist. Um die Verbraucher mit elektrischer Energie zu versorgen, ist es notwendig, Leitungen von den Energieerzeugungsanlagen zu den Verbrauchern zu legen. Über weite Distanzen wird in Deutschland die Energie mittels Dreiphasenwechselstrom mit einer Frequenz von 50Hz und einer Spannung von bis zu 400kV übertragen. Erst kurz vor dem Verbraucher wird er auf die bekannte Niederspannung von 230V Einphasenwechselstrom bzw. 400V Dreiphasenwechselstrom transformiert. In anderen Ländern sind abweichende Spannungen oder Frequenzen möglich. Die Übertragung mit Hochspannung hat sich aus verschiedenen Gründen durchgesetzt, da hohe Spannungen technisch leichter zu kontrollieren sind als hohe Ströme, eine hohe Übertragungsleistung gewährleistet ist, geringere Übertragungsverluste auftreten und grosse Entfernungen überbrückt werden können. Je nach anliegender Spannung können Höchstspannungsnetze ($220kV$

oder $380kV$), Hochspannungsnetze ($50kV$ bis $150kV$), Mittelspannungsnetze ($10kV$ bis $30kV$) und Niederspannungsnetze ($230V$ oder $400V$) unterschieden werden. Abb. 1.1 zeigt exemplarisch ein elektrisches Energieübertragungssystem. Ein solches System besteht aus Sammelschienen (*Knoten*), Übertragungsleitungen

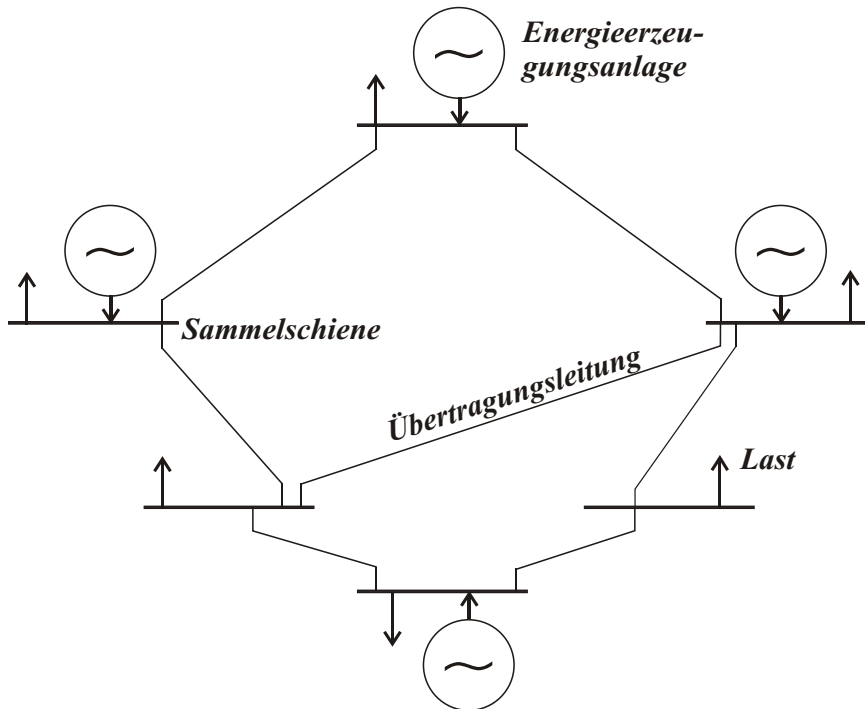


Abbildung 1.1: Ein elektrisches Energieübertragungssystem

(*Kanten*) und Transformatoren. An den Sammelschienen treten zu bedienende Lasten auf, bei Anschluss einer Erzeugungsanlage kann zudem eine Einspeisung elektrischer Energie erfolgen. In der Regel existieren bei größeren Netzen mit mehreren stetig regelbaren Erzeugungsanlagen, zumindest theoretisch, unendlich viele zulässige Einspeisungen in das Energieübertragungssystem, die zu bedienende Lasten decken, aber zu unterschiedlichen Produktionskosten führen. Dieser Sachverhalt kann beispielsweise anhand des Übertragungssystems aus Abb. 1.2 überprüft werden, wenn die Einspeisungsgrenzen der Generatoren geeignet vorgegeben sind. Aus wirtschaftlicher Sicht stellt sich die Ermittlung einer zulässigen Produktionsentscheidung mit minimalen Kosten (*Betriebsoptimierung*), doch soll oftmals auch eine Minimierung von Übertragungsverlusten vorgenommen werden

(*Leistungsflussoptimierung*). Dabei kann es sich um verschiedenartige Aufgaben handeln, wie das nachfolgende Beispiel zeigt:

Beispiel

Man betrachte ein elektrisches Energieübertragungssystem mit zwei reinen Einspeisungspunkten und einem Lastknoten. Die Leitung von Knoten 1 nach Knoten 2

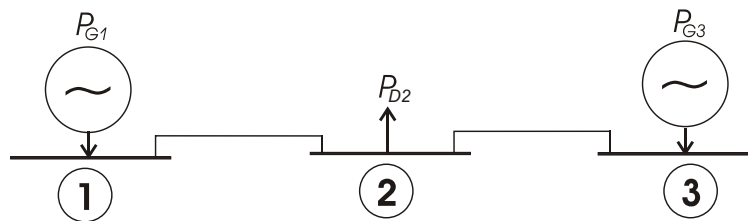


Abbildung 1.2: Ein 3-Knoten-System

sei derart ausgestattet, dass bei einem elektrischen Energiefluss marginale Verluste auftreten, wohingegen eine Übertragung über die Leitung von Knoten 3 nach Knoten 2 zu deutlichen Verlusten führt. Man setze weiter voraus, dass sowohl Erzeugungsanlage 1 mit der Einspeisungsvariablen P_{G_1} als auch Erzeugungsanlage 3 mit der Einspeisungsvariablen P_{G_3} alleine in der Lage wären, die Last P_{D_2} zu bedienen. Zudem verursache die Einspeisung P_{G_1} Produktionskosten, wobei eine Einspeisung mit P_{G_3} zu keinerlei Kosten führe, wie dies bei Windenergieanlagen der Fall ist (Wartungskosten werden hier ignoriert). Eine optimale Einspeisung mit minimalen Netzverlusten würde die Last P_{D_2} sicherlich vollständig mit P_{G_1} bedienen. Eine kostenminimale Einspeisung könnte aber nur bei alleiniger Bedienung durch P_{G_3} vorliegen.

Neben der Minimierung von Übertragungsverlusten gehören zur Leistungsflussoptimierung auch die Verbesserung von Spannungsprofilen und die Reduktion des Blindleistungstransportes, doch werden die letzten beiden Aufgaben in dieser Arbeit nicht behandelt. Spannungen und Ströme in einem elektrischen Energieübertragungssystem sind einem zeitkontinuierlichen Prozess unterworfen. In den noch vorzustellenden Modellen wird jedoch eine stationäre Systemdarstellung, d.h.

eine Darstellung zu einem festen Zeitpunkt, betrachtet. In dieser Repräsentation ist, wie [28, 29] entnommen werden kann, die Beschreibung des symmetrisch betriebenen Drehstromsystems durch ein einphasiges Wechselstromsystem möglich. Zwar kann mit den nachfolgenden Modellen auch eine Optimierung über einen Zeitraum vorgenommen werden, doch wird ein solcher immer als diskretisiert vorausgesetzt. Nachfolgende Betrachtungen beziehen sich daher ausschließlich auf eine einphasige Darstellung des Stroms. Weiter wird festgehalten, dass hier das Energieübertragungssystem als ein Inselnetz angesehen wird und so keine Möglichkeit eines Exports oder Imports elektrischer Energie besteht, da nur die grundlegenden Modellierungsaspekte erörtert werden. Zudem werden Transformatoren nur implizit über die durch ihren Einsatz verbesserten Übertragungsfähigkeiten der Leitungen beachtet. Das nachfolgende Kapitel stellt geeignete mathematische Optimierungsmodelle vor, die den zuvor genannten Aufgaben, zunächst in rein deterministischer Betrachtungsweise, d.h. alle Eingangsdaten werden als bekannt vorausgesetzt, gerecht werden.

Kapitel 2

Mathematische Optimierungsmodelle

Gemäß der im vorhergehenden Kapitel umrissenen Problemstellung stellt sich nun die Aufgabe der Entwicklung geeigneter mathematischer Optimierungsmodelle, die den genannten Zielen gerecht werden. Bei der Erstellung derartiger Modelle wird die zugrunde liegende Problemstellung noch weiter konkretisiert werden. Die Modellgenauigkeit, d.h. die Abbildungstreue der physikalischen Zusammenhänge, spiegelt sich wesentlich in der Komplexität der mathematischen Beschreibung wieder. Dies wiederum kann beträchtliche Auswirkungen auf Lösungsverfahren haben, mit denen tatsächlich ein optimaler Betrieb, sei es aus kosten- oder verlustminimaler Sicht, berechnet werden kann. Von daher wird hier nicht nur das Modell, welches die physikalischen Zusammenhänge 1:1 wiedergibt, behandelt. Vielmehr werden auch reduzierte Modellansätze angesprochen. Das Kapitel ist wie folgt gegliedert. Zunächst werden Modelle, die sich der Aufgabe der Ermittlung eines optimalen Betriebes annehmen, vorgestellt. In Abschnitt 2.1 wird ein in seiner Darstellung sehr kompaktes Modell unter Ignorierung des elektrischen Energieübertragungssystems angesprochen und in Abschnitt 2.2 drei Modelle, die eine Beachtung des Energieübertragungssystems ermöglichen. Die fundamentalen Modellierungsansätze sind dabei die AC-Darstellung, eine exakte, aber mathematisch anspruchsvolle Wiedergabe der physikalischen Zusammenhänge, und approximierte Repräsentationen des AC-Modells, die in der DC- und DCOL-Modellierung ihren Ausdruck

finden, aber durch ihre Darstellung die Anwendung effizienter Lösungsverfahren zulassen. Die Entwicklung dieser Modelle geschieht zunächst bzgl. eines Zeitschrittes, erst in Abschnitt 2.3 erfolgt die Ausdehnung auf einen Zeitraum. Abschnitt 2.4 beschäftigt sich intensiv mit der Herstellung von Relationen in Bezug auf die vorgestellten Modelle. Es soll so einerseits einem besseren Verständnis der Modelle entgegen gekommen werden und andererseits überprüft werden, ob durch die approximativen Modellierungstechniken Güteabschätzungen für das mathematisch schwer zu behandelnde AC-Modell - wie sich dies noch zeigen wird - möglich sind. Ferner wird in Abschnitt 2.5 ein Modell entwickelt, mit dessen Hilfe sich eine kostenoptimale Nachrüstung eines elektrischen Energieübertragungssystems vornehmen lässt, die langfristig dazu beitragen kann, die Versorgungssicherheit zu erhöhen und Produktionskosten zu senken.

2.1 Ignorierung des Energieübertragungssystems

Eine stark vereinfachende Modellbildung besteht sicherlich in der vollständigen Ignorierung des elektrischen Energieübertragungssystems und einer gedachten Konzentration von Einspeisung und Last in einem Netzknoten. Ansätze dieser Art können auch [13, 19, 23, 28, 32, 36, 51, 52, 66, 68] entnommen werden. Teilweise sind dort auch Überproduktionen an elektrischer Energie erlaubt, wenn etwa Exportmöglichkeiten nicht benötigter Energie bestehen. Da das elektrische Energieübertragungssystem hier als ein abgeschlossenes System, d.h. als ein Inselnetz ohne Möglichkeit eines Exports oder Imports elektrischer Energie angesehen wird, kann die Bilanzierungsgleichung, die Gleichung, die dafür Sorge trägt, dass ausreichend Energie produziert wird, wie folgt angesetzt werden:

$$\sum_{k \in V'} P_{G_k} - P_D = 0 \quad (2.1)$$

Die variablen Größen $P_{G_k} \in \mathbb{R}_+$ bezeichnen dabei die Wirkleistungseinspeisungen der an einem Knoten $k \in V'$ befindlichen Energieerzeugungsanlage. Die Menge $V' \subseteq V$ steht für die Einspeisungsknoten, d.h. Knoten an denen eine Erzeugungsanlage angeschlossen ist, wohingegen bei $n \in \mathbb{N}$ vorhandenen Knoten die

Menge $V = \{1, \dots, n\}$ die Knotennummern des Energieübertragungssystems enthält. Es wird weiter davon ausgegangen, dass jedes Energieübertragungssystem mit einem sogenannten Slackknoten ausgestattet ist, an dem eine äußerst leistungsfähige Erzeugungsanlage angeschlossen ist. Dieser trägt hier die Knotennummer $1 \in V'$. Die Verwendung eines Slackknotens ist allgemein üblich und kann auch [8, 24, 36, 28, 71] entnommen werden. Die gesamte Wirkleistungslast P_D ist als Summe der Wirkleistungslasten $P_{D_k} \in \mathbb{R}_+$ an allen Knoten $k \in V$ gegeben, d.h. es gilt:

$$P_D = \sum_{k \in V} P_{D_k}$$

Eine Energieerzeugungsanlage kann sogar aus einem ganzen System unterschiedlicher Einheiten zur Stromgewinnung bestehen. So kann beispielsweise ein Blockheizkraftwerk neben den Kesseln zur Gewinnung von thermischer Energie aus mehreren elektrischer Energie erzeugenden Komponenten bestehen, wie etwa Gasturbinen oder Verbrennungsmotoren. Es ist zu beachten, dass die Erzeugungsanlage hier als eine Einheit angesehen wird. Wird etwa gefordert, dass diese eine vorgegebene elektrische Leistung erzeugen soll, so nehmen sich die nachfolgenden Modelle nicht der Aufgabe an, wie die einzelnen Komponenten der Erzeugungsanlage anzusteuern sind. Die Modelle begnügen sich hier mit der Information, ob eine solche Anlage dazu in der Lage ist. Es sind also weitere Restriktionen einzuhalten, die durch die technischen Gegebenheiten der Energieerzeugungsanlagen festgelegt sind. Die Wirkleistungseinspeisung $P_{G_k} \in \mathbb{R}_+$ darf sich nur innerhalb fester Grenzen $P_{G_k}^{min}, P_{G_k}^{max} \in \mathbb{R}_+$ bewegen. Zusammen mit dem aktuellen Schaltzustand $s_k \in \{0, 1\}$ der Erzeugungsanlage $k \in V'$, der darüber Auskunft gibt, ob die jeweilige Energieerzeugungsanlage ein- oder ausgeschaltet ist, sind die Restriktionen

$$P_{G_k}^{min} \cdot s_k \leq P_{G_k} \leq P_{G_k}^{max} \cdot s_k \quad \forall k \in V' \quad (2.2)$$

einzuhalten, die die möglichen Einspeisungswerte regeln. Das Optimierungskriterium kann sich bei diesem Modellierungsansatz nur an der Minimierung von Produktionskosten bemessen, da das Netz ignoriert wird. Eine Leistungsflussoptimierung aus verlustminimaler Sicht (*Verluste treten bei einem Energietransport auf den Übertragungsleitungen auf*) ist nicht möglich. Das Optimierungskriterium kann so über

$$\sum_{k \in V'} C_k(P_{G_k}, s_k) \rightarrow \min \quad (2.3)$$

angesetzt werden. Hierbei beschreiben die Funktionen C_k für $k \in V'$ die Brennstoffkosten bei einer Produktion, für die eine lineare Repräsentation angenommen wird, d.h. $C_k(P_{G_k}, s_k) = \alpha_k P_{G_k} + \beta_k s_k$ mit geeigneten Konstanten $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}_+$. Diese sind der Dauer des zu optimierenden Zeitschrittes anzupassen. Oftmals weisen die Kostenfunktionen nichtlineare, wohl aber konvexe Verläufe auf. Für diesen Fall können auch Linearisierungstechniken verwendet werden, die den konvexen Verlauf über eine stückweise lineare Funktion approximieren. Derartige Modellierungstechniken können auch [38] entnommen werden. Zudem können Anfahrkosten der Energieerzeugungsanlagen, fixe Kostenanteile, die entstehen, wenn eine Erzeugungsanlage vom Zustand der Nichtproduktion in den Zustand der Produktion wechselt, bei Betrachtung eines Zeitraumes vorliegen. Derartige Modellierungen werden in Abschnitt 2.3 vorgenommen.

Der Nachteil des hier geschilderten Modellierungsansatzes ist offensichtlich. Durch Konzentration von Last und Einspeisung in einem Knoten können weder maximal zulässige Übertragungskapazitäten noch Durchleitungskosten beachtet werden. Die in Kapitel 7 vorgestellten Testrechnungen zeigen zudem, dass die durch diese Art der Modellierung gewonnenen optimalen Einspeisungen die Leitungen des elektrischen Energieübertragungssystems massiv überlasten können. Ferner kann das Modell nicht zur Leistungsflussoptimierung verwendet werden. Dennoch liefert dieser Ansatz erste Schätzungen der Optimallösung hinsichtlich einer kostenminimalen Einspeisung und ist aufgrund der günstigen gemischt-ganzzahligen linearen Modellbeschreibung weit verbreitet. Das hier vorgestellte Modell wird nachfolgend mit IG-Modell (*Ignorierung des Energieübertragungssystems*) bezeichnet.

2.2 Integration des Energieübertragungssystems

Eine Integration des Energieübertragungssystems ermöglicht die Beachtung der tatsächlich vorhandenen Energieflüsse auf den jeweiligen Leitungen. Hierdurch lassen sich diese begrenzen und somit auch die maximal möglichen Übertra-

gungskapazitäten beachten, aber auch evtl. vorhandene Durchleitungskosten in der Optimierungsphase miteinbeziehen. Man assoziiert zunächst mit dem Energieübertragungssystem einen ungerichteten Graph $G = (V, E)$. Wie zuvor bezeichnet V die Menge der Netzknoten und $V' \subseteq V$ die Menge der Einspeisungsknoten. Die Menge $E \subset V \times V$ beinhaltet die Kanten (*Leitungen*) des Graphen G . Die Menge $E' \subset E$ gibt darüber Auskunft, auf welchen Kanten bei einem Energietransport zusätzliche Kosten anfallen. Es wird darauf hingewiesen, dass für eine Kante $kl \in E$ auch $lk \in E$ gilt und dies ebenso für E' gültig ist. Diese im Grunde redundante Beschreibung ermöglicht eine äußerst kompakte Notation der physikalischen Restriktionen. Ferner bezeichnet $N_k \subset V$ die Menge der zu $k \in V$ adjazenten Knoten, d.h. es ist $N_k = \{l \in V : \exists k \in V \text{ mit } kl \in E\}$.

Eine Integration des Energieübertragungssystem kann über die AC-Modellierung (*alternating current*), die DC-Modellierung (*direct current*) oder die DCOL-Modellierung (*direct current ohmic losses*) erfolgen. Vor Unterscheidung nach diesen Ansätzen, wie sie in den nachfolgenden Betrachtungen vorgenommen werden, sollen die grundlegenden Gleichungen angegeben werden, die eine zügige Realisierung dieser Modelle ermöglichen (vgl. [4]). Man betrachte die an jedem Netzknoten $k \in V$ vorhandene komplexe Leistung $S_k = P_k + jQ_k$. Dabei bezeichnet $P_k \in \mathbb{R}$ die Wirkleistung und $Q_k \in \mathbb{R}$ die Blindleistung an dem Knoten $k \in V$. Die komplexen Leistungen können wiederum über die beiden Gleichungen

$$P_k = \sum_{l \in N_k} p_{kl} \quad \forall k \in V, \quad (2.4)$$

$$Q_k = \sum_{l \in N_k} q_{kl} \quad \forall k \in V \quad (2.5)$$

ausgedrückt werden. Hierbei bezeichnet $p_{kl} \in \mathbb{R}$ den Wirkleistungsfluss und $q_{kl} \in \mathbb{R}$ den Blindleistungsfluss auf einer Kante $kl \in E$. Die komplexe Leistung S_k kann nun als Differenz aus komplexer Einspeisung $S_{G_k} = P_{G_k} + jQ_{G_k}$ und komplexer Last $S_{D_k} = P_{D_k} + jQ_{D_k}$ ausgedrückt werden. Man erhält somit aus (2.4), (2.5) die Gleichungen:

$$P_{G_k} - P_{D_k} = \sum_{l \in N_k} p_{kl} \quad \forall k \in V' \quad (2.6)$$

$$Q_{G_k} - Q_{D_k} = \sum_{l \in N_k} q_{kl} \quad \forall k \in V' \quad (2.7)$$

$$-P_{D_k} = \sum_{l \in N_k} p_{kl} \quad \forall k \in V \setminus V' \quad (2.8)$$

$$-Q_{D_k} = \sum_{l \in N_k} q_{kl} \quad \forall k \in V \setminus V' \quad (2.9)$$

Die Art der physikalischen Darstellung der Energieflüsse p_{kl} und q_{kl} resultiert nun im AC-, DC- und DCOL-Modell. Zuvor sollen noch die Restriktionen aufgeführt werden, die alle Ansätze gemeinsam haben. Zwecks Darstellung der Energieflüsse wird an jedem Knoten $k \in V$ der variable Spannungswinkel $\theta_k \in \mathbb{R}$ benötigt. Am Slackknoten $1 \in V$ wird zusätzlich

$$\theta_1 = 0 \quad (2.10)$$

verlangt (siehe [4, 8, 28]). Um die minimal und maximal möglichen Einspeisungsgrenzen der Energieerzeugungsanlagen einzuhalten, können die Restriktionen bei (2.2) übernommen werden. Nachfolgend werden drei Unterabschnitte betrachtet, in denen nach der Art der physikalischen Modellierung der Energieflüsse unterschieden wird.

AC-Modellierung

Die AC-Modellierung oder auch Wechselstrommodellierung ermöglicht eine exakte Wiedergabe der physikalischen Zusammenhänge in einem elektrischen Energieübertragungssystem, resultiert aber auch in einer für die Optimierung anspruchsvollen mathematischen Formulierung. Ähnliche Modellierungsansätze finden sich auch in den Arbeiten von [1, 40, 41, 49]. Die hier gewählte Darstellung der Energieflüsse orientiert sich hauptsächlich an [4]. Um die Energieflüsse in Wechselstrommodellierung entlang der Kanten $kl \in E$ ausdrücken zu können, werden zunächst an allen Knoten $k \in V$ die komplexen Spannungen $U_k e^{j\theta_k} \in \mathbb{C}$ mit den Variablen $U_k \in \mathbb{R}_+$, die die Beträge der komplexen Spannungen beschreiben, und den

Variablen $\theta_k \in \mathbb{R}$, die die Spannungswinkel ausdrücken, eingeführt. Weiter bezeichnen die Variablen $\theta_{kl} \in \mathbb{R}$ die Spannungswinkeldifferenzen zwischen den Knoten $k, l \in V$, d.h. es gilt $\theta_{kl} = \theta_k - \theta_l$. Ohne hier auf eine genaue Herleitung eingehen zu wollen, lassen sich die Energieflüsse mit diesen neu eingeführten Variablen über

$$p_{kl} = U_k^2 g_{kl} - U_k U_l g_{kl} \cos \theta_{kl} - U_k U_l b_{kl} \sin \theta_{kl} \quad \forall kl \in E, \quad (2.11)$$

$$q_{kl} = U_k U_l b_{kl} \cos \theta_{kl} - U_k U_l g_{kl} \sin \theta_{kl} - U_k^2 (b_{kl} + b_{kl}^0) \quad \forall kl \in E \quad (2.12)$$

ausdrücken. Die dabei für alle Kanten $kl \in E$ vorgegebenen Konduktanzen $g_{kl} \in \mathbb{R}_+$, Suszeptanzen $b_{kl} \in \mathbb{R}_-$ und Nebenwiderstandssuszeptanzen $b_{kl}^0 \in \mathbb{R}_+$ geben die Übertragungsfähigkeit einer Kante $kl \in E$ wieder. Hierbei werden auch die Transformatoren implizit berücksichtigt, da durch ihr Vorhandensein die Übertragungsfähigkeit verbessert wird und dementsprechend die zuvor genannten Parameter angepasst werden können. Natürlich darf eine Kante nicht beliebig stark belastet werden, so dass der Leistungsfluss mit der maximal möglichen Übertragungsfähigkeit $d_{kl}^{max} \in \mathbb{R}_+$ über

$$p_{kl}^2 + q_{kl}^2 \leq (d_{kl}^{max})^2 \quad \forall kl \in E \quad (2.13)$$

limitiert wird. Neben einer Wirkleistungseinspeisung können nun die Energieerzeugungsanlagen bei einer Wechselstrommodellierung auch eine Blindleistungseinspeisung vornehmen. Auch die Blindleistungseinspeisung $Q_{G_k} \in \mathbb{R}$ für $k \in V'$ gilt es zu begrenzen, sie kann hier allerdings als unabhängig vom Schaltzustand s_k modelliert werden, d.h. sie ist stetig von Null an bis hin zu ihren Einspeisungsgrenzen ansteuerbar. Zahlreiche Literaturquellen stützen diesen Modellierungsansatz, wie etwa [4, 8, 28]. Weiter wird darauf hingewiesen, dass eine Blindleistungseinspeisung keine Produktionskosten verursacht. Somit gilt es, die Restriktionen

$$Q_{G_k}^{min} \leq Q_{G_k} \leq Q_{G_k}^{max} \quad \forall k \in V' \quad (2.14)$$

einzuhalten. Auch die Spannungsbeträge U_k dürfen sich an den Generator- und Lastknoten nur in bestimmten Bereichen bewegen und sind über

$$U_k^{min} \leq U_k \leq U_k^{max} \quad \forall k \in V \setminus \{1\} \quad (2.15)$$

zu begrenzen. Am Referenzknoten selbst wird der Spannungsbetrag fixiert, wie dies auch [4, 28] entnommen werden kann, und in der Regel zu $U_1 = 1$ fest vorgegeben. Die fundamentalen physikalischen Zusammenhänge in einem Energieübertragungssystem sind durch die obigen Betrachtungen modelliert. Sicherlich könnten Modellbildungen noch umfassender ausfallen, indem noch weitere technische Aspekte, wie z.B. Transformatoren mit variablen Übersetzungsverhältnissen beachtet werden. Die hier gezeigte Modellbildung zielt auf die mathematische Darstellung der grundlegenden Eigenschaften eines elektrischen Energieübertragungssystems ab. Wenn als Optimierungskriterium die Betriebsoptimierung gewählt wird, so kann (2.3) verwendet werden. Zusätzlich besteht aufgrund der Integration des Energieübertragungssystems die Möglichkeit einer Beachtung von Durchleitungskosten. Die Optimierungsaufgabe bei einer Betriebsoptimierung (*jetzt: Minimierung von Produktions- und Transmissionskosten*) kann dann wie folgt angesetzt werden:

$$\sum_{k \in V'} C_k(P_{G_k}, s_k) + \sum_{kl \in E'} E_{kl}^{AC}(p_{kl}, q_{kl}) \rightarrow \min \quad (2.16)$$

Dabei beschreiben die Funktionen E_{kl}^{AC} die anfallenden Transmissionskosten bei einem Energietransport, die abhängig von dem Betrag des komplexen Leistungsflusses sind, d.h. es sind $E_{kl}^{AC}(p_{kl}, q_{kl}) = \delta_{kl} \sqrt{p_{kl}^2 + q_{kl}^2}$ mit geeigneten Konstanten $\delta_{kl} \in \mathbb{R}_+$ für $kl \in E'$. Soll hingegen eine Leistungsflussoptimierung aus verlustminimaler Sicht vorgenommen werden, so stellt sich gemäß [28] die Aufgabe:

$$\left(\sum_{k \in V'} P_{G_k} - P_D \right)^2 + \left(\sum_{k \in V'} Q_{G_k} - Q_D \right)^2 \rightarrow \min \quad (2.17)$$

Das AC-Modell liegt in einer für Optimierungsverfahren sehr anspruchsvollen mathematischen Beschreibung vor. Neben Ganzzahligkeitsforderungen treten auch trigonometrische Ausdrücke und Variablenprodukte in den Restriktionen auf. Auf die Problematik, die sich in Bezug auf Lösungsverfahren für Modelle in derartiger Beschreibung ergibt, geht Kapitel 3 gesondert ein. Die anspruchsvolle Modellbeschreibung legt aber auch Modellreduktionsansätze nahe, die in den beiden nachfolgenden Abschnitten angesprochen werden.

DC-Modellierung

Die DC-Modellierung oder auch Gleichstrommodellierung stellt eine linearisierte Form der AC-Lastflüsse dar und wird auch in [10, 18, 24] verwendet. Hierbei werden die in Hochspannungsnetzen möglichen nachfolgenden Annahmen getroffen:

$$(i) \quad \theta_{kl} \approx 0 \quad \forall kl \in E$$

$$(ii) \quad U_k = 1 \quad \forall k \in V$$

(iii) Vernachlässigung von Blindleistungskomponenten

Mit der Annahme (i) sind die Linearisierungen $\cos \theta_{kl} \approx 1$ und $\sin \theta_{kl} \approx \theta_{kl}$ für alle $kl \in E$ möglich. Zusammen mit Annahme (ii) sind die Wirkleistungsflüsse p_{kl} über

$$p_{kl} = \bar{b}_{kl}(\theta_l - \theta_k) \quad \forall kl \in E \quad (2.18)$$

gegeben. Diese liegen nun in einer wesentlich günstigeren linearen Darstellung vor. Dabei ist $\bar{b}_{kl} = -\frac{1}{x_{kl}}$, wobei $x_{kl} \in \mathbb{R}_+$ für die Längsreaktanz auf der Leitung $kl \in E$ steht. Aufgrund von Annahme (iii) werden die Blindleistungsflüsse und somit auch die Gleichungen (2.7) und (2.9) vernachlässigt. Die relevanten Restriktionen bei einer DC-Modellierung sind somit (2.2), (2.6), (2.8), (2.10) und (2.18). Die Übertragungslimitierungen auf den Leitungen $kl \in E$ können, wiederum mit der maximal möglichen Kapazität $d_{kl}^{max} \in \mathbb{R}_+$, über die Restriktionen

$$-d_{kl}^{max} \leq p_{kl} \leq d_{kl}^{max} \quad \forall kl \in E \quad (2.19)$$

realisiert werden. Um auch Durchleitungskosten beachten zu können, gilt es, den Betrag des Wirkleistungsflusses so zu ermitteln, dass insgesamt eine gemischt-ganzzahlige lineare Modellbeschreibung gewahrt werden kann. Gemäß dieser Aufgabe wird zunächst für jede Leitung $kl \in E'$ die Binärvariable $\tilde{p}_{kl} \in \{0, 1\}$ benötigt. Dann lässt sich $\hat{p}_{kl} := |p_{kl}|$ mit einer geeigneten Konstante $M > 2 \cdot \max_{kl \in E'} d_{kl}^{max}$ wie folgt formulieren:

$$\hat{p}_{kl} \geq p_{kl} \quad (2.20)$$

$$\hat{p}_{kl} \geq -p_{kl} \quad (2.21)$$

$$\hat{p}_{kl} - p_{kl} \leq M \cdot \tilde{p}_{kl} \quad (2.22)$$

$$\hat{p}_{kl} + p_{kl} \leq M \cdot (1 - \tilde{p}_{kl}) \quad (2.23)$$

Mit Hilfe dieser Restriktionen kann so die Betragsbildung in gemischt-ganzzahliger linearer Beschreibung modelliert werden. Durch die Gross-M-Modellierung ist für $kl \in E'$, je nach Zustand der Binärvariablen \tilde{p}_{kl} , nur eine der Restriktionen (2.22), (2.23) tatsächlich eine Forderung. Zusammen mit dem gleichzeitigen Erfülltsein von (2.20) und (2.21) wird aber so gerade $\hat{p}_{kl} = \max\{p_{kl}, -p_{kl}\}$ modelliert. Mit der Transmissionskostenfunktion $E_{kl}^{DC}(\hat{p}_{kl}) = \delta_{kl} \cdot \hat{p}_{kl}$ kann nun das Optimierungskriterium aus betriebsoptimaler Sicht über

$$\sum_{k \in V'} C_k(P_{G_k}, s_k) + \sum_{kl \in E'} E_{kl}^{DC}(\hat{p}_{kl}) \rightarrow \min \quad (2.24)$$

angesetzt werden. Ein Nachteil der DC-Modellierung wird durch die nachfolgenden Betrachtungen ersichtlich. Offenbar können die komplexen Übertragungsverluste eines elektrischen Energieübertragungssystems berechnet werden, indem man, falls die gewählte Einspeisung physikalisch zulässig ist, die Differenz aus der insgesamt erzeugten Leistung und der insgesamt vorhandenen Last bildet. Diese Aussage kann auch [28] entnommen werden. Die komplexen Netzverluste $S_L = P_L + jQ_L$ sind somit über

$$S_L = \sum_{k \in V} S_k = \sum_{k \in V} (P_k + jQ_k)$$

gegeben. Aufgrund von Annahme (iii) und der Beziehung $\bar{b}_{kl} = \bar{b}_{lk}$ für alle $kl \in E$ gilt nun:

$$S_L = P_L + jQ_L = P_L = \sum_{k \in V} P_k = \sum_{k \in V} \sum_{l \in N_k} p_{kl} = \sum_{kl \in E: k < l} p_{kl} + p_{lk} = 0$$

Somit werden bei der DC-Modellierung aufgrund der dort gewählten Annahmen die Übertragungsverluste ignoriert. Nun sind aber bei Hochspannungsnetzen mit geographisch kleineren Ausmaßen die Verluste eher gering und werden erst bei geographisch größeren Netzen wieder relevant, so dass deren Einfluss in Hinsicht auf einen tatsächlich betriebs- oder leistungsflussoptimalen Zustand dann durchaus von Belang sein kann. So berechnen sich die anfallenden Wirkübertragungsverluste für eine Übertragungsleitung mit Widerstand R , Spannung U und einer übertragenen Wirkleistung von P zu:

$$P_L = \frac{P^2 \cdot R}{U^2}$$

Die Wirkverlustleistung P_L nimmt also bei vorgegebener Wirkleistung P quadratisch mit der Spannung ab. Weiter kann [69] unter dem Stichwort „Hochspannungsnetze“ entnommen werden, dass die Übertragungsverluste auf etwa 6% je 100 km bei einer 110-kV-Leitung und bei einer 800 kV Höchstspannungsleitung auf etwa 0.5% je 100 km reduziert werden können. Da das DC-Modell solche ignoriert, kann es auch nicht zur Leistungsflussoptimierung herangezogen werden. Die günstige Darstellung der Netzgleichungen erlaubt insgesamt eine gemischt-ganzzahlige lineare Modellbeschreibung, so dass effiziente Lösungsverfahren in Hinblick auf einen betriebsoptimalen Zustand anwendbar bleiben. In Kapitel 7 werden diesbezüglich umfangreiche Testrechnungen vorgestellt. Die vorhergehenden Betrachtungen legen aber auch die Konstruktion von Modellen nahe, die zum einen eine in Hinsicht auf Lösungsverfahren günstige Darstellung aufweisen und zum anderen in der Lage sind, Übertragungsverluste zu beachten. Dieses Anliegen findet seinen Ausdruck in der DCOL-Modellierung.

DCOL-Modellierung

Im Folgenden wird der DC-Modellierungsansatz als Ausgangsbasis verwendet. Nachträglich werden die approximierten ohmschen Übertragungsverluste wieder hineingerechnet. Ansätze dieser Art können auch [60, 61] entnommen werden. Um die ohmschen Übertragungsverluste im Nachhinein beachten zu können, werden die Bilanzgleichungen (2.6), (2.8) um die an jedem Knoten $k \in V$ auftretende Verlustgröße $P_{L_k} \in \mathbb{R}_+$ ergänzt und sind dann über

$$P_{G_k} - P_{D_k} - \frac{1}{2}P_{L_k} = \sum_{l \in N_k} p_{kl} \quad \forall k \in V', \quad (2.25)$$

$$-P_{D_k} - \frac{1}{2}P_{L_k} = \sum_{l \in N_k} p_{kl} \quad \forall k \in V \setminus V' \quad (2.26)$$

gegeben. Wiederum ist der Leistungsfluss über

$$p_{kl} = \bar{b}_{kl}(\theta_l - \theta_k) \quad \forall kl \in E$$

gegeben. Entlang einer Kante $kl \in E$ fallen die ohmschen Übertragungsverluste

$$\nu_{kl} = g_{kl}(U_i^2 + U_j^2) - 2g_{kl}U_iU_j \cos(\theta_k - \theta_l) \quad \forall kl \in E$$

an. In Hinblick auf Lösungsverfahren, wie sie in Kapitel 3 entwickelt werden, ist eine Verlustbeschreibung $\nu_{kl} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von Vorteil. Von daher werden zusätzlich die Variablen $\theta_{kl} \in \mathbb{R}$ für alle $kl \in E$ zusammen mit den Restriktionen

$$\theta_{kl} = \theta_k - \theta_l \quad \forall kl \in E \quad (2.27)$$

eingeführt. Durch die in der DC-Modellierung verwendete Approximation $U_i, U_j \approx 1$ ergeben sich ungefähre Verluste von

$$\nu_{kl} = 2g_{kl}(1 - \cos \theta_{kl}) \quad \forall kl \in E. \quad (2.28)$$

Nun wird aber die Approximation $\cos \theta_{kl} \approx 1$ nicht verwendet, da sie wieder zu $\nu_{kl} \approx 0$ führen würde. Die so ermittelten Übertragungsverluste P_{L_k} werden auf die Knoten $k, l \in V$ gleichmäßig aufgeteilt und die Verlustgrößen P_{L_k} werden über

$$P_{L_k} = \sum_{l \in N_k} \nu_{kl} \quad \forall k \in V \quad (2.29)$$

angesetzt. Geht man von einer festen Schaltbelegung für die an der Modellierung beteiligten Binärvariablen aus, so wird durch (2.28) wiederum ein nichtkonvexes Optimierungsmodell hervorgerufen. In Abschnitt 3.2 wird ein äußeres Approximationsverfahren angesprochen, welches das Lösen des hier vorliegenden Optimierungsmodells durch ein wiederholtes Lösen von Approximationen des DCOL-Modells in gemischt-ganzzahliger linearer Darstellung gestattet. Als Optimierungsaufgabe kann bei Kostenminimierung wieder

$$\sum_{k \in V'} C_k(P_{G_k}, s_k) + \sum_{kl \in E'} E_{kl}^{DC}(\hat{p}_{kl}) \rightarrow \min$$

verwendet werden. Soll hingegen eine Leistungsflussoptimierung in Bezug auf minimale Übertragungsverluste vorgenommen werden, so ist die Optimierungsaufgabe wie folgt gegeben:

$$\sum_{k \in V} P_{L_k} \rightarrow \min$$

Durch die letztgenannte Zielfunktion werden aber die anfallenden ohmschen Übertragungsverluste überschätzt, denn es gilt die Beziehung

$$\frac{1}{2} \sum_{t \in T} \sum_{k \in V} P_{L_k}^{(t)} = \sum_{t \in T} \sum_{kl \in E: k < l} \nu_{kl}^{(t)},$$

da für $1 \leq t \leq t_{max}$ und $k, l \in V$ die Variable $\nu_{kl}^{(t)}$ in die Berechnung von $P_{L_k}^{(t)}$ und die Variable $\nu_{lk}^{(t)}$ in die von $P_{L_l}^{(t)}$ einfließt. Weiterhin gilt der Zusammenhang

$$\nu_{kl}^{(t)} = \nu_{lk}^{(t)} \quad \forall kl \in E \quad \forall t \in T,$$

da die Konduktanzen die Eigenschaft $g_{kl} = g_{lk}$ für alle $kl \in E$ erfüllen. Der Faktor $\frac{1}{2}$ kann somit in der Zielfunktion ergänzt werden. Er beeinflusst zwar den Optimalwert, nicht aber die Optimallösung des DCOL-Modells.

2.3 Ausdehnung auf einen Zeitraum

Die bisher erarbeiteten Modelle können zur Ermittlung eines betriebs- bzw. leistungsflussoptimalen Zustandes über einen Zeitschritt, je nach Modellwahl, genutzt werden. Im Folgenden sollen die Modelle dahingehend erweitert werden, dass mit ihnen auch die Optimierung über einen Zeitraum vorgenommen werden kann, wobei dieser aus diskretisierten Zeitschritten besteht. Es wird eine Diskretisierung in $t_{max} + 1$ äquidistante Zeitintervalle betrachtet und die Menge der diskretisierten Zeitschritte mit $T = \{0, \dots, t_{max}\}$ angesetzt. Alle bisher in den Abschnitten 2.1 und 2.2 benötigten Variablen erhalten zusätzlich einen Zeitindex (t). Auch alle genannten Restriktionen treten zu jedem Zeitschritt auf und sind für alle Zeitpunkte $t \in T$ zu erfüllen. Da nun ein Zeitraum betrachtet wird, sind weitere technische Randbedingungen, wie Leistungsgradienten und Mindestlauf- bzw. Mindeststillstandzeiten der Energieerzeugungsanlagen, einzuhalten. Modellerweiterungen dieser Art können auch [32, 43] entnommen werden. Da die Leistungseinspeisung von einem bis zum nächsten Zeitschritt nicht beliebig verändert werden darf, sind Restriktionen zu erfüllen, die die Einhaltung der Leistungsveränderung in den Grenzen der maximal möglichen Steigerung $\bar{\Delta}_k \in \mathbb{R}_+$ bzw. maximal möglichen Verminderung $\underline{\Delta}_k \in \mathbb{R}_+$ garantieren. Mit $\bar{T} := T \setminus \{0\}$ sichern Restriktionen der Art

$$P_{G_k}^{(t)} - P_{G_k}^{(t-1)} \leq \bar{\Delta}_k \cdot s_k^{(t-1)} + \bar{\Gamma}_k(1 - s_k^{(t-1)}) \quad \forall t \in \bar{T} \quad \forall k \in V', \quad (2.30)$$

$$\underline{\Gamma}_k(s_k^{(t)} - 1) - \underline{\Delta}_k \cdot s_k^{(t)} \leq P_{G_k}^{(t)} - P_{G_k}^{(t-1)} \quad \forall t \in \bar{T} \quad \forall k \in V' \quad (2.31)$$

diesen Sachverhalt. Hierbei geben die Parameter $\bar{\Gamma}_k \in \mathbb{R}_+$ und $\underline{\Gamma}_k \in \mathbb{R}_+$ zusätzlich noch Leistungswerte an, von denen eine Einschaltung bzw. Abschaltung der Erzeugungsanlage $k \in V'$ erzwungen werden kann. Hilfreich ist die Einführung von Indikatoren $u_k^{(t)}, v_k^{(t)} \in \{0, 1\}$, die signalisieren, ob die Erzeugungsanlage $k \in V'$ im Zeitschritt $t \in \bar{T}$ ein- bzw. ausgeschaltet wurde. Restriktionen der Art

$$s_k^{(t)} - s_k^{(t-1)} = u_k^{(t)} - v_k^{(t)} \quad \forall t \in \bar{T} \quad \forall k \in V', \quad (2.32)$$

$$u_k^{(t)} + v_k^{(t)} \leq 1 \quad \forall t \in \bar{T} \quad \forall k \in V' \quad (2.33)$$

sind hierzu erforderlich. Mit denen durch diese Restriktionen hervorgerufenen Schaltbelegungen der Variablen $u_k^{(t)}$ und $v_k^{(t)}$ lassen sich leicht Anfahrkosten der Energieerzeugungsanlagen beachten, d.h. fixe Kosten, die entstehen, wenn eine Erzeugungsanlage vom Zustand der Nichtproduktion in den Zustand der Produktion übergeht, aber auch Mindestlauf- und Mindeststillstandzeiten derselbigen modellieren. Bezeichnet $\bar{\Lambda}_k \in \mathbb{N}$ die Mindestlaufzeit und $\underline{\Lambda}_k \in \mathbb{N}$ die Mindeststillstandzeit der Energieerzeugungsanlage $k \in V'$, so kann dieser Sachverhalt, falls $\underline{\Lambda}_k, \bar{\Lambda}_k \geq 2$ gilt, über

$$s_k^{(t+n)} \geq u_k^{(t)} \quad \forall t \in \{1, \dots, t_{max} + 1 - \bar{\Lambda}_k\} \quad (2.34)$$

$$\forall n \in \{1, \dots, \bar{\Lambda}_k - 1\} \quad \forall k \in V',$$

$$s_k^{(t+n)} \leq 1 - v_k^{(t)} \quad \forall t \in \{1, \dots, t_{max} + 1 - \underline{\Lambda}_k\} \quad (2.35)$$

$$\forall n \in \{1, \dots, \underline{\Lambda}_k - 1\} \quad \forall k \in V'$$

modelliert werden. Für die Zeitschritte $t_{max} + 2 - \bar{\Lambda}_k \leq t < t_{max}$ bzw. $t_{max} + 2 - \underline{\Lambda}_k \leq t < t_{max}$ müssen, wenn $\underline{\Lambda}_k, \bar{\Lambda}_k > 2$ gilt, zusätzlich noch Restriktionen ähnlich zu obiger Art aufgenommen werden. Weiter kann es erforderlich sein, Startwerte $P_{G_k}^{init}$ und s_k^{init} bzgl. der Einspeisungswerte und der Schaltzustände der Energieerzeugungsanlagen $k \in V'$ zu Beginn des Optimierungszeitraums vorzugeben. Dies kann durch Hinzunahme der Restriktionen

$$s_k^{(0)} = s_k^{init} \quad \forall k \in V', \quad (2.36)$$

$$P_{G_k}^{(0)} = P_{G_k}^{init} \quad \forall k \in V' \quad (2.37)$$

geschehen. Mit den Schaltveränderungsvariablen $u_k^{(t)}$ können zudem leicht Anfahrkosten $\gamma_k \in \mathbb{R}_+$ der Energieerzeugungsanlagen beachtet werden. Man setzt hierzu für alle $k \in V'$ die Funktionen D_k mit $D_k(u_k^{(t)}) = \gamma_k u_k^{(t)}$ an. Weiter wird davon ausgegangen, dass $u_k^{(0)} = v_k^{(0)} = 0$ für alle $k \in V'$ gilt, wobei abweichende Annahmen natürlich möglich sind. Die für einen Optimierungszeitraum bei einer Betriebsoptimierung erforderliche Minimierungsaufgabe kann dann, wobei bei einer DC-, DCOL- oder AC-Modellierung evtl. noch der Transmissionskostenanteil beachtet werden muss, über

$$\sum_{t \in T} \sum_{k \in V'} \left(C_k(P_{G_k}^{(t)}, s_k^{(t)}) + D_k(u_k^{(t)}) \right) \rightarrow \min$$

angesetzt werden. Falls eine Leistungsflussoptimierung in Bezug auf minimale Übertragungsverluste vorgenommen werden soll, ist das Optimierungskriterium, verdeutlicht am Beispiel der DCOL-Modellierung, über

$$\sum_{t \in T} \sum_{k \in V} P_{L_k}^{(t)} \rightarrow \min$$

gegeben. Tabelle 2.1 stellt die jeweiligen Modellansätze hinsichtlich ihrer Möglichkeiten einander gegenüber und hält auch die zugehörige Problemklasse fest. Im nachfolgenden Abschnitt 2.4 werden Zusammenhänge zwischen den Optimal-

Modell	IG	DC	DCOL	AC
Betriebsoptimierung	+	+	+	+
Netzintegration	-	+	+	+
Leistungsflussoptimierung	-	-	+	+
Problemklasse	MILP	MILP	MINLP	MINLP

Tabelle 2.1: Vor- und Nachteile der Modellierungsansätze

lösungen der jeweiligen Modellierungsansätze erarbeitet. Abschließend wird das DC-Modell über einen Zeitraum vollständig ausformuliert betrachtet.

$$(DC) \quad \sum_{t \in T} \left[\sum_{k \in V'} \left(C_k(P_{G_k}^{(t)}, s_k^{(t)}) + D_k(u_k^{(t)}) \right) + \sum_{kl \in E'} E_{kl}^{DC}(\hat{p}_{kl}^{(t)}) \right] \rightarrow \min$$

Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} P_{G_k}^{(t)} - P_{D_k}^{(t)} &= \sum_{l \in N_k} p_{kl}^{(t)}, \quad -P_{D_i}^{(t)} = \sum_{l \in N_i} p_{il}^{(t)} \\ p_{kl}^{(t)} &= \bar{b}_{kl}(\theta_l^{(t)} - \theta_k^{(t)}), \quad -d_{kl}^{max} \leq p_{kl}^{(t)} \leq d_{kl}^{max}, \quad \theta_1^{(t)} = 0 \\ P_{G_k}^{min} \cdot s_k^{(t)} &\leq P_{G_k}^{(t)} \leq P_{G_k}^{max} \cdot s_k^{(t)} \\ P_{G_k}^{(\bar{t})} - P_{G_k}^{(\bar{t}-1)} &\leq \bar{\Delta}_k \cdot s_k^{(\bar{t}-1)} + \bar{\Gamma}_k(1 - s_k^{(\bar{t}-1)}) \\ \underline{\Gamma}_k(s_k^{(\bar{t})} - 1) - \underline{\Delta}_k \cdot s_k^{(\bar{t})} &\leq P_{G_k}^{(t)} - P_{G_k}^{(\bar{t}-1)} \\ s_k^{(\bar{t})} - s_k^{(\bar{t}-1)} &= u_k^{(\bar{t})} - v_k^{(\bar{t})}, \quad u_k^{(\bar{t})} + v_k^{(\bar{t})} \leq 1 \\ s_k^{(j_k^1 + n_k^1)} &\geq u_k^{(t)}, \quad s_k^{(j_k^2 + n_k^2)} \leq 1 - v_k^{(t)}, \quad \hat{p}_{ab}^{(t)} \geq p_{ab}^{(t)}, \quad \hat{p}_{ab}^{(t)} \geq -p_{ab}^{(t)} \\ \hat{p}_{ab}^{(t)} - p_{ab}^{(t)} &\leq M \cdot \tilde{p}_{ab}^{(t)}, \quad \hat{p}_{ab}^{(t)} + p_{ab}^{(t)} \leq M \cdot (1 - \tilde{p}_{ab}^{(t)}) \\ s_k^{(0)} &= s_k^{init}, \quad P_{G_k}^{(0)} = P_{G_k}^{init}, \quad P_{G_k}^{(t)} \in \mathbb{R}, \quad s_k^{(t)}, \quad u_k^{(t)}, \quad v_k^{(t)} \in \{0, 1\} \\ \forall j_k^1 &\in \{1, \dots, t_{max} + 1 - \bar{\Lambda}_k\}, \quad \forall n_k^1 \in \{1, \dots, \bar{\Lambda}_k - 1\} \\ \forall j_k^2 &\in \{1, \dots, t_{max} + 1 - \underline{\Lambda}_k\}, \quad \forall n_k^2 \in \{1, \dots, \underline{\Lambda}_k - 1\} \\ \forall t \in T, \forall \bar{t} \in \bar{T}, \forall kl \in E \quad \forall ab \in E', \forall k \in V', \quad \forall i \in V \setminus V' \end{aligned}$$

2.4 Modellrelationen

Im Folgenden soll verifiziert werden, ob zwischen den Optimalwerten der vier Modelle, d.h. dem IG-, DC-, DCOL- und AC-Modell, Relationen geltend gemacht werden können. Die Überlegungen beschränken sich hier auf die Verwendung der entsprechenden Zielfunktionen zur Kostenminimierung. Zunächst wird der Begriff der Relaxierung, der für die nachfolgenden Betrachtungen notwendig ist, definiert.

Definition (Relaxierung)

Gegeben seien die Funktionen $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : Y \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Das Optimierungsmodell $\min\{g(x) : x \in Y\}$ heißt *Relaxierung* von $\min\{f(x) : x \in X\}$, wenn $g(x) \leq f(x) \quad \forall x \in X$ und $X \subseteq Y$ gilt.

Offenbar stellt der Optimalwert einer Relaxierung eine untere Schranke für den Optimalwert des Ausgangsproblems dar. Die Bildung einer Modellrelaxierung kann sinnvoll sein, wenn die Problemklasse dadurch vereinfacht wird und somit die Erzielung einer Optimallösung oder auch unteren Schranke leichter erreichbar ist als im Ausgangsproblem. Mit dem Optimalwert des relaxierten Problems bzw. einer unteren Schranke kann so die Güte zulässiger Punkte im Ausgangsproblem abgeschätzt werden. Diese Strategie in Bezug auf die hier vorgestellten Modelle verfolgend, soll so zum einen einem besseren Verständnis der Modelle entgegen gekommen und zum anderen auch Möglichkeiten einer Güteabschätzung von zulässigen Punkten im AC-Modell erörtert werden. Zuvor wird die nachfolgende Notationsvorschrift festgehalten.

Notationsvorschrift: Gegeben sei ein Modell M mit zugehöriger Optimallösung $x = (x_1, \dots, x_l)$ (M zulässig, $l \in \mathbb{N}$ geeignet). Die i -te Komponente der Optimallösung x sei mit $[x_i]_M$ bezeichnet. Der Zulässigkeitsbereich des Modells M sei mit \mathcal{Z}_M bezeichnet.

Zunächst stellt der Optimalwert des IG-Modells eine untere Schranke für den des DC-Modells dar. Dies kann wie folgt nachgewiesen werden:

Satz 2.1

Der Optimalwert z^{IG} des IG-Modells stellt eine untere Schranke für das DC-Modell dar, d.h. es gilt $z^{IG} \leq z^{DC}$.

Beweis: Die Modelle (IG) und (DC) seien zulässig. Die DC-Modellierung erfordert die Restriktionen:

$$P_{G_k}^{(t)} - P_{D_k}^{(t)} = \sum_{l \in N_k} p_{kl}^{(t)} \quad \forall k \in V' \quad \forall t \in T \quad (2.38)$$

$$-P_{D_k}^{(t)} = \sum_{l \in N_k} p_{kl}^{(t)} \quad \forall k \in V \setminus V' \quad \forall t \in T \quad (2.39)$$

$$p_{kl}^{(t)} = \bar{b}_{kl}(\theta_l^{(t)} - \theta_k^{(t)}) \quad \forall kl \in E \quad \forall t \in T \quad (2.40)$$

Addiert man (2.38) und (2.39) für alle $k \in V'$ bzw. für $k \in V \setminus V'$ auf, so ergeben sich die Restriktionen:

$$\sum_{k \in V'} P_{G_k}^{(t)} - P_D^{(t)} = \sum_{k \in V} \sum_{l \in N_k} p_{kl}^{(t)} \quad \forall t \in T$$

Da weiter

$$\sum_{k \in V} \sum_{l \in N_k} p_{kl}^{(t)} = \sum_{kl \in E: k < l} p_{kl}^{(t)} + p_{lk}^{(t)} \quad \forall t \in T$$

gilt und wegen (2.40) $p_{kl}^{(t)} + p_{lk}^{(t)} = 0$ für alle $kl \in E$ und für alle $t \in T$ gilt (man beachte: $\bar{b}_{kl} = \bar{b}_{lk}$), sind die Restriktionen

$$\sum_{k \in V'} P_{G_k}^{(t)} - P_D^{(t)} = 0 \quad \forall t \in T$$

für alle $P_{G_k}^{(t)} \in \mathcal{Z}_{DC}$ erfüllt. Ein Hinzufügen dieser Gleichungen zum DC-Modell ändert somit den Zulässigkeitsbereich nicht. Entfernt man nun die Gleichungen (2.38)-(2.40) sowie die Restriktionen (2.10), (2.19)-(2.23) aus der Modellbeschreibung, so ergibt sich eine Relaxierung des DC-Modells. Der Restriktionsbereich dieser Relaxierung stimmt, wie sich leicht nachprüfen lässt, mit dem des IG-Modells überein. Da weiter

$$\sum_{t \in T} \sum_{kl \in E'} E_{kl}^{DC}(\hat{p}_{kl}^{(t)}) \geq 0$$

für alle $\hat{p}_{kl}^{(t)} \in \mathcal{Z}_{DC}$ gilt, ist somit (IG) eine Relaxierung von (DC) und daher $z^{IG} \leq z^{DC}$. Falls (DC) unzulässig, gilt sicherlich $z^{IG} \leq z^{DC} = +\infty$. Falls (IG) unzulässig, ist trivialerweise auch (DC) unzulässig. Insgesamt gilt also $z^{IG} \leq z^{DC}$ \square

Auch zwischen der IG- und AC-Modellierung lässt sich ein analoges Resultat herleiten. Für den Beweis wird das zum IG-Modell gehörige RIG-Modell aufgebaut. Das RIG-Modell stimmt mit dem IG-Modell bis auf die Bilanzgleichungen bei (2.1), unter Betrachtung eines Zeitraums, überein. Diese wird durch

$$\sum_{k \in V'} P_{G_k}^{(t)} - P_D^{(t)} \geq 0 \quad \forall t \in T \tag{2.41}$$

ersetzt. Leistungsbilanzierungen dieser Art finden sich auch in [23, 51]. Offenbar ist dann (RIG) eine Relaxierung von (IG). Es lässt sich nachfolgender Satz aufstellen.

Satz 2.2

Der Optimalwert z^{RIG} des RIG-Modells stellt eine untere Schranke für das AC-Modell dar, d.h. es gilt $z^{RIG} \leq z^{AC}$.

Beweis: Der Beweis läuft zunächst analog zu dem vorhergehenden. Die Optimierungsmodelle (RIG) und (AC) seien zulässig. Die Addition der Wirkleistungsgleichungen für Generator- und Lastknoten führt auf die Restriktionen:

$$\sum_{k \in V'} P_{G_k}^{(t)} - P_D^{(t)} = \sum_{kl \in E: k < l} p_{kl}^{(t)} + p_{lk}^{(t)} \quad \forall t \in T$$

Bei der AC-Modellierung gilt für $kl \in E$:

$$p_{kl}^{(t)} + p_{lk}^{(t)} = g_{kl} \left[(U_k^{(t)})^2 + (U_l^{(t)})^2 - 2U_k^{(t)}U_l^{(t)} \cos \theta_{kl}^{(t)} \right] \quad \forall t \in T$$

Somit sind die Restriktionen

$$\sum_{k \in V'} P_{G_k}^{(t)} - P_D^{(t)} = \underbrace{\sum_{kl \in E: k < l} g_{kl} \left[(U_k^{(t)})^2 + (U_l^{(t)})^2 - 2U_k^{(t)}U_l^{(t)} \cos \theta_{kl}^{(t)} \right]}_{=: P_L} \quad \forall t \in T$$

für alle zulässigen Punkte des AC-Modells erfüllt. Da $g_{kl} \geq 0$ und zusammen mit dem Cosinussatz $p_{kl}^{(t)} + p_{lk}^{(t)} \geq 0$ für alle $kl \in E$, ist auch $P_L \geq 0$. Somit ist

$$\sum_{k \in V'} P_{G_k}^{(t)} - P_D^{(t)} \geq \sum_{k \in V'} P_{G_k}^{(t)} - P_D^{(t)} - P_L = 0 \quad \forall t \in T$$

für alle $P_{G_k}^{(t)} \in \mathcal{Z}_{AC}$ immer erfüllt. Fügt man nun die Restriktionen

$$\sum_{k \in V'} P_{G_k}^{(t)} - P_D^{(t)} \geq 0 \quad \forall t \in T$$

zu (AC) hinzu und entfernt (2.6)-(2.15), so ergibt sich eine Relaxierung des AC-Modells, die mit dem RIG-Modell übereinstimmt, wenn zudem der Transmissionskostenanteil aus der Zielfunktion entfernt wird. Somit gilt $z^{RIG} \leq z^{AC}$. Falls (AC) unzulässig, gilt sicherlich $z^{RIG} \leq z^{AC} = +\infty$. Falls (RIG) unzulässig, ist trivialerweise auch (AC) unzulässig. Insgesamt gilt somit $z^{RIG} \leq z^{AC}$ \square

Falls die Optimallösung des RIG-Modells die Restriktionen bei (2.41) mit Gleichheit erfüllt, so ist $z^{IG} = z^{RIG} \leq z^{AC}$. Gerade in Hinblick auf die schwer zu

behandelnde Problemklasse des AC-Modells stellt sich die Frage nach vereinfachten Modellen, die eine gute Schrankenbildung zulassen. Bisher konnte zwar gezeigt werden, dass z^{RIG} eine untere Schranke darstellt, doch muss bereits schon hier angemerkt werden, dass ihre Güte aufgrund der vollständigen Netzignoring und der damit verbundenen Nichtbeachtung von maximalen Übertragungskapazitäten und Durchleitungskosten mehr als dürftig ausfallen wird. Wünschenswert wäre daher die Herstellung eines Zusammenhangs zwischen dem DC- und AC-Modell. Rein intuitiv vermutet man sicherlich bei dem DC-Modell aufgrund der Ignorierung von Übertragungsverlusten, dass mit ihm eine untere Schranke erzeugt werden kann, doch ist es allgemein nicht gelungen, diese Vermutung zu beweisen.

Bei Nutzung speziell angesetzter Kostenfunktionen kann jedoch eine weitere untere Schranke für das AC-Modell, genauer gesagt für das AC-Modell bei zusätzlichen Forderungen an die Schaltbelegungen der Energieerzeugungsanlagen, erzeugt werden. Kapitel 6 wendet sich diesem Anliegen erneut zu. Auch zwischen dem RDC-Modell, welches nachfolgend aufgebaut wird, und dem DCOL-Modell kann eine Relation hergestellt werden. Offenbar entsteht eine Relaxierung des DC-Modells, wenn die Restriktionen (2.6) und (2.8), bei Betrachtung eines Zeitraums, ersetzt werden durch:

$$P_{G_k}^{(t)} - P_{D_k}^{(t)} \geq \sum_{l \in N_k} p_{kl}^{(t)} \quad \forall k \in V' \quad \forall t \in T \quad (2.42)$$

$$-P_{D_k}^{(t)} \geq \sum_{l \in N_k} p_{kl}^{(t)} \quad \forall k \in V \setminus V' \quad \forall t \in T \quad (2.43)$$

Das so entstehende Modell wird mit RDC bezeichnet. Es lässt sich dann das nachfolgende Resultat beweisen.

Satz 2.3

Der Optimalwert z^{RDC} des RDC-Modells stellt eine untere Schranke für das DCOL-Modell dar, d.h. es gilt $z^{RDC} \leq z^{DCOL}$.

Beweis: Man betrachte das DCOL-Modell. Da $P_{L_k} \geq 0$ für alle $k \in V$, gelten die Abschätzungen:

$$\begin{aligned} P_{G_k}^{(t)} - P_{D_k}^{(t)} &\geq P_{G_k}^{(t)} - P_{D_k}^{(t)} - \frac{1}{2}P_{L_k}^{(t)} = \sum_{l \in N_k} p_{kl}^{(t)} \quad \forall k \in V' \\ -P_{D_k}^{(t)} &\geq -P_{D_k}^{(t)} - \frac{1}{2}P_{L_k}^{(t)} = \sum_{l \in N_k} p_{kl}^{(t)} \quad \forall k \in V \setminus V' \end{aligned}$$

Ersetzt man nun (2.25) und (2.26) durch (2.42) und (2.43), so ergibt sich eine Relaxierung des DCOL-Modells. Entfernt man weiter die Restriktionen (2.27)-(2.29), so ergibt sich eine Relaxierung, die mit dem RDC-Modell übereinstimmt, und die Behauptung ist bewiesen \square

Wenn weiter die Optimallösung des RDC-Modells die Restriktionen (2.42), (2.43) mit Gleichheit erfüllt, so ist $z^{DC} = z^{RDC} \leq z^{DCOL}$. Vorausgreifend auf die Testrechnungen in Kapitel 7 sollen einige Optimalwerte bzgl. des in der Einleitung dargestellten 6-Knoten-Netzes angegeben werden.

Beispiel

Betrachtet sei das in Abbildung 1.1 dargestellte 6-knotige elektrische Energieübertragungssystem über einen Zeitpunkt. Die Daten des Energieübertragungssystems und technischen Merkmale der Energieerzeugungsanlagen sowie die Lastprofile können Anhang B entnommen werden. Die Optimierung erstreckte sich über einen Zeitschritt ohne Beachtung von Transmissionskosten. Dabei wurden die Optimalwerte $z^{IG} = z^{RIG} = 287.64$, $z^{DC} = z^{RDC} = 455.81$, $z^{DCOL} = 456.96$ und $\tilde{z}^{FAC} = 457.27$ ermittelt.

Dabei bezeichnet \tilde{z}^{FAC} einen durch eine Heuristik gemäß Kapitel 6 gewonnenen zulässigen Punkt des AC-Modells. Der Optimalwert z^{RIG} stellt eine nachweisbar untere Schranke für das AC-Modell dar.

2.5 Nachrüstung elektrischer Energieübertragungssysteme

In Kapitel 7 werden umfangreiche Testrechnungen unter Nutzung der entwickelten Optimierungsmodelle hinsichtlich einer betriebsoptimalen Einspeisung vorgestellt. Wie im vorhergehenden Beispiel dargestellt, kann die Art der zugrunde liegenden Modellierung den Optimalwert deutlich beeinflussen. Während die Beachtung von Netzverlusten, zumindest in dem vorhergehenden Beispiel, nur geringe zusätzliche Kosten verursacht, führt die Hinzunahme des elektrischen Energieübertragungssystems mit kapazitätsbegrenzten Leitungen zu einer deutlichen Kostensteigerung gegenüber dem IG-Modell. Der direkte Vergleich von z^{IG} und z^{DC} zeigt eine Steigerung der Produktionskosten von fast 60%. Es stellt sich somit die Frage, wie das elektrische Energieübertragungssystem nachzurüsten ist, sei es durch die Verstärkung und der damit verbundenen Erhöhung maximal möglicher Übertragungskapazitäten als auch durch den kompletten Neubau von Leitungen, um die Produktionskosten in Richtung des Optimalwerts z^{IG} zu bewegen, im mathematischen Idealfall sogar zu erreichen. Sicherlich sollte ein Ausbau möglichst kostengünstig erfolgen. Weiter können Situationen auftreten, in denen das IG-Modell zulässig, aber das DC-Modell aufgrund von zu geringen Leitungskapazitäten oder zu wenigen Leitungen unzulässig ist. Wiederum stellt sich die Frage nach einem kostengünstigen Netzausbau, der Zulässigkeit für das DC-Modell sichert. Somit ergibt sich erneut die Aufgabe, ein angemessenes mathematisches Optimierungsmodell zu entwickeln. Die nachfolgenden Modellierungen erfolgen unter Nutzung des DC-Modells. Prinzipiell lässt sich aber auch die DCOL-Modellierung anwenden. In [10] finden sich auch Optimierungsmodelle unter Verwendung des DC-Modellierungsansatzes, die sich der Aufgabe annehmen, elektrische Energieübertragungssysteme zur Prävention von Ausfällen bei unvorhergesehenen oder sehr unwahrscheinlichen Ereignissen geeignet zu erweitern. In den nachfolgenden Betrachtungen werden möglicherweise vorhandene Transmissionskosten ignoriert, da hier nur die grundlegenden Eigenschaften modelliert werden sollen. Bei Bedarf lassen sich aber Erweiterungen vornehmen, die eine Beachtung dieser Kosten gestatten. Die Menge $\tilde{E} \subseteq E$ gibt

darüber Auskunft, welche bereits vorhandenen Leitungen für eine mögliche Verstärkung freigegeben werden. Weiter gibt $\bar{E} \subset V \times V \setminus E$ die zulässige Menge der Neuerrichtung von Leitungen an und $\bar{N}_k = \{l \in V : kl \in \bar{E}\}$ die zum Knoten $k \in V$ bei einem Leitungsneubau zusätzlichen adjazenten Knoten. Die Menge $T = \{0, \dots, t_{max}\}$ beinhaltet wieder die diskretisierten Zeitpunkte. Die Netzgleichungen des DC-Modells verändern sich unter Beachtung eines Zeitraumes zu:

$$\begin{aligned} P_{G_k}^{(t)} - P_{D_k}^{(t)} &= \sum_{l \in N_k} p_{kl}^{(t)} + \sum_{l \in \bar{N}_k} \bar{p}_{kl}^{(t)} \quad \forall k \in V' \quad \forall t \in T \\ -P_{D_k}^{(t)} &= \sum_{l \in N_k} p_{kl}^{(t)} + \sum_{l \in \bar{N}_k} \bar{p}_{kl}^{(t)} \quad \forall k \in V \setminus V' \quad \forall t \in T \end{aligned}$$

Die zusätzlich erforderlichen Variablen $\bar{p}_{kl}^{(t)} \in \mathbb{R}$ für $kl \in \bar{E}$ und $t \in T$ bezeichnen den möglichen Leistungsfluss entlang einer neugebauten Leitung. Der Leistungsfluss selbst ist mit geeigneter Konstante $M > 4\pi \max_{kl \in \bar{E}} |\bar{b}_{kl}|$ über den Zusammenhang

$$\begin{aligned} p_{kl}^{(t)} &= \bar{b}_{kl}(\theta_l^{(t)} - \theta_k^{(t)}) && \forall kl \in E \quad \forall t \in T, \\ \bar{p}_{kl}^{(t)} &\leq \bar{b}_{kl}(\theta_l^{(t)} - \theta_k^{(t)}) + M \cdot (1 - n_{kl}) && \forall kl \in \bar{E} \quad \forall t \in T, \\ \bar{p}_{kl}^{(t)} &\geq \bar{b}_{kl}(\theta_l^{(t)} - \theta_k^{(t)}) - M \cdot (1 - n_{kl}) && \forall kl \in \bar{E} \quad \forall t \in T, \\ \bar{p}_{kl}^{(t)} &\leq M \cdot n_{kl} && \forall kl \in \bar{E} \quad \forall t \in T, \\ \bar{p}_{kl}^{(t)} &\geq -M \cdot n_{kl} && \forall kl \in \bar{E} \quad \forall t \in T \end{aligned}$$

gegeben. Man beachte bei der Wahl der Konstanten M , dass die Lastwinkeldifferenzen θ_{kl} für $kl \in E \cup \bar{E}$ betragsmäßig maximal 2π sein können. Die Binärvariablen n_{kl} für $kl \in \bar{E}$ geben dabei über neuerrichtete Kanten Auskunft. Die Beschränkung der Lastflüsse führt mit den Variablen $d_{kl}^{add} \in \mathbb{R}_+$ für $kl \in \tilde{E} \cup \bar{E}$ zur Erfassung der Kapazitätserweiterungen der Leitungen auf:

$$\begin{aligned} -d_{kl}^{add} &\leq \bar{p}_{kl}^{(t)} \leq d_{kl}^{add} && \forall kl \in \bar{E} \quad \forall t \in T \\ -d_{kl}^{max} - d_{kl}^{add} &\leq p_{kl}^{(t)} \leq d_{kl}^{max} + d_{kl}^{add} && \forall kl \in \tilde{E} \quad \forall t \in T \end{aligned}$$

Weiter zu erfüllen sind Restriktionen mit Bezug auf die Beachtung von Mindestlaufzeiten, Mindeststillstandzeiten, Leistungsgradienten und evtl. Startbedingun-

gen, d.h. es sind (2.30)-(2.37) einzuhalten. Das Optimierungskriterium kann sich an der Minimierung von Ausbau und Betriebskosten bemessen, welches dann über

$$\sum_{kl \in \tilde{E} \cup \bar{E}} F_{kl}^1(d_{kl}^{add}) + \sum_{kl \in \bar{E}} F_{kl}^2(n_{kl}) + \sum_{t \in T} \sum_{k \in V'} \left(C_k(P_{G_k}^{(t)}, s_k^{(t)}) + D_k(u_k^{(t)}) \right) \rightarrow \min$$

angesetzt wird. Hierbei beschreiben die Funktionen $F_{kl}^1(d_{kl}^{add}) = c_{kl}^{add} \cdot d_{kl}^{add}$ für $c_{kl}^{add} \in \mathbb{R}_+$ die durch einen Ausbau von Übertragungskapazitäten anfallenden Kosten und $F_{kl}^2(n_{kl}) = c_{kl}^{ins} \cdot n_{kl}$ für $c_{kl}^{ins} \in \mathbb{R}_+$ die zusätzlich durch einen Neubau einer Leitung entstehenden Kosten. Das gesamte Modell zum Netzausbau liegt so in gemischt-ganzzahliger linearer Beschreibung vor. Falls die DCOL-Modellierung für eine Nachrüstung des Netzausbaus herangezogen wird, kann auch eine Leistungsflussoptimierung hinsichtlich minimaler Übertragungsverluste erfolgen. Das Optimierungskriterium wird dann mit geeignetem Gewichtungsfaktor $\rho > 0$ über

$$\sum_{kl \in \tilde{E} \cup \bar{E}} F_{kl}^1(d_{kl}^{add}) + \sum_{kl \in \bar{E}} F_{kl}^2(n_{kl}) + \rho \cdot \sum_{t \in T} \sum_{k \in V} P_{L_k}^{(t)} \rightarrow \min$$

angesetzt. Im Falle eines fest vorgegebenen Budgets $b \in \mathbb{R}_+$, welches ausschließlich für eine Nachrüstung des elektrischen Energieübertragungssystems verwendet werden darf, kann natürlich auch alternativ die Restriktion

$$\sum_{kl \in \tilde{E} \cup \bar{E}} F_{kl}^1(d_{kl}^{add}) + \sum_{kl \in \bar{E}} F_{kl}^2(n_{kl}) \leq b$$

in das Modell aufgenommen werden und stattdessen die Optimierungsaufgabe mit alleiniger Minimierung von Produktionskosten oder Übertragungsverlusten angesetzt werden. Im nachfolgenden Kapitel werden Lösungsverfahren für die entwickelten Modelle vorgestellt.

Kapitel 3

Lösungsverfahren

Die in Kapitel 2 vorgenommene Entwicklung angemessener mathematischer Modelle zur Ermittlung einer kostenminimalen Einspeisung bzw. einer verlustminimalen Übertragung erforderte sicherlich einigen Aufwand, ist aber eher als eine der unproblematischeren Aufgaben anzusehen. Wichtig ist es nun, zu untersuchen, ob mathematische Verfahren zur Verfügung stehen, mit denen die Optimallösungen dieser Modelle bestimmt werden können. Dies hängt sicherlich in hohem Maße davon ab, in welcher Beschreibung die Modelle vorliegen. In Tabelle 2.1 wurden die Problemklassen der jeweiligen Modelle bereits dargestellt, sollen hier aber nochmals genannt werden:

- (i) IG/DC: Beide Modelle liegen in gemischt-ganzzahliger linearer Beschreibung vor (*MILP*).
- (ii) DCOL/AC: Beide Modelle erfordern eine gemischt-ganzzahlige nichtlineare Darstellung (*MINLP*). Bei Relaxierung der Ganzzahligkeitsforderungen ist die Modellbeschreibung zudem nichtkonvex.

Im Idealfall sind Optimierungsverfahren in der Lage, das globale Optimum zu bestimmen oder aber aufgrund des Typs des Optimierungsmodells bzw. eines zu hohen Rechenaufwands fähig, untere Schranken zu berechnen, mit denen sich eine Güteabschätzung von bei Ausführung dieser Verfahren generierten zulässigen Punkten vornehmen lässt. Während für gemischt-ganzzahlige lineare Optimierungsmodelle leistungsfähige Algorithmen zur Verfügung stehen, kann die Si-

tuation bei gemischt-ganzzahligen nichtlinearen Optimierungsmodellen, abhängig davon, ob Konvexität nach Relaxierung der Ganzzahligkeitsforderungen vorliegt, ungünstiger aussehen. In Abschnitt 3.1 wird ein klassisches Verfahren für gemischt-ganzzahlige lineare Optimierungsmodelle, wie bei IG- oder DC-Modellierung der Fall, vorgestellt und dessen Anwendbarkeit auch auf die gemischt-ganzzahlige nichtlineare Modellklasse überprüft. Abschnitt 3.2 stellt ein in allgemeingültiger Beschreibung gehaltenes Verfahren für gemischt-ganzzahlige konvexe Modellklassen vor, welches sich auf eine relaxierte Form des DCOL-Modells anwenden lässt.

3.1 Ein klassisches Verfahren

Die gemischt-ganzzahlige lineare Modellklasse kann über das Branch&Bound-Verfahren [70] angegangen werden. Die Grundidee des solchen wird nachfolgend dargestellt, auch um deren Anwendbarkeit auf gemischt-ganzzahlige nichtlineare Modellklassen zu prüfen. Man betrachte für die Vektoren $b \in \mathbb{R}^s$, $c \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^m$ und Matrizen $A \in \text{Mat}(s, n, \mathbb{R})$, $B \in \text{Mat}(s, m, \mathbb{R})$ das gemischt-ganzzahlige lineare Optimierungsproblem:

$$\min_{x,y} \{c^\top x + d^\top y : (x, y) \in M\}$$

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^m : Ax + By \leq b\}$$

Die Strategie in der Grundversion des Branch&Bound-Verfahrens besteht in der Unterteilung der zulässigen Menge des Optimierungsmodells und anschließender Beherrschung der Teilmodelle mittels geeigneter Schrankenbildung. Prinzipiell ist dieses Verfahren auch auf gemischt-ganzzahlige nichtlineare Optimierungsmodelle anwendbar, weist aber gerade bei der gemischt-ganzzahligen linearen Klasse günstige Eigenschaften auf. Die theoretischen Grundlagen sind in den beiden folgenden Lemmata zusammengefasst.

Satz 3.1 (branch)

Sei $M = \bigcup_{k=1}^N M_k$ und $\varphi = \min_{x,y} \{c^\top x + d^\top y : (x, y) \in M\}$ sowie $\varphi_k = \min_{x,y} \{c^\top x + d^\top y : (x, y) \in M_k\}$. Dann ist $\varphi = \min_{k \in \{1, \dots, N\}} \varphi_k$.

Satz 3.2 (bound)

Seien $\underline{\varphi}_k$ und $\overline{\varphi}_k$ eine untere bzw. obere Schranke für φ_k . Dann gilt:

$$\underline{\varphi} := \min_{k \in \{1, \dots, N\}} \underline{\varphi}_k \leq \varphi \leq \min_{k \in \{1, \dots, N\}} \overline{\varphi}_k := \overline{\varphi}$$

Beide Beweise sind trivial. Dabei lässt sich für φ_k eine untere Schranke $\underline{\varphi}_k$ durch Lösen der LP-Relaxierung des entsprechenden Teilproblems, d.h. einer Verwerfung der Ganzzahligkeitsforderungen, gewinnen und eine obere Schranke $\overline{\varphi}_k$ durch zulässige Punkte im entsprechenden Teilproblem ermitteln. Die Effektivität des Branch&Bound-Verfahrens besteht nun in der Möglichkeit der impliziten Enumeration (*Abschneiden von Knoten*). Liegt Inferiorität vor, d.h. für ein Teilproblem ist die Bedingung $\underline{\varphi}_k \geq \overline{\varphi}$ erfüllt, so kann der entsprechende Knoten im Branch&Bound-Baum abgeschnitten werden. Das vollständige Algorithmenschema kann wiederum [70] entnommen werden.

Bei Zugrundelegung der AC- oder DCOL-Modellierung wird, selbst bei einer Relaxierung der 0-1-Forderungen bzgl. der Binärvariablen, aufgrund der Restriktion (2.11) und (2.12) bzw. (2.28) ein nichtkonvexes Optimierungsmodell hervorgerufen. Ein wesentlicher Grund für die praktische Effizienz des Branch&Bound-Verfahrens liegt in der Möglichkeit des Abschneidens von Knoten aufgrund von Inferiorität, setzt allerdings die Gewinnung einer unteren Schranke voraus. Im Falle gemischt-ganzzahliger linearer Modelle lässt sich diese durch Lösung der LP-Relaxierung und Beachtung von Lemma 3.2 realisieren. Auch bei gemischt-ganzzahligen nicht-linearen Modellen, die nach Relaxierung der Ganzzahligkeitsforderungen Konvexität aufweisen, ist diese Methodik anwendbar. Bei Nichtkonvexität der relaxierten Modellbeschreibung kann aber nicht garantiert werden, den globalen Optimalpunkt zu erreichen. Somit besteht nicht die Möglichkeit der Gewinnung unterer Schranken und der damit verbundenen Gegebenheit des Entferns von Knoten aufgrund von Inferiorität. Dies hat enorme Auswirkungen auf die Effektivität des Branch&Bound-Verfahrens, da sämtliche Kombinationsmöglichkeiten überprüft werden müssten und so eine vollständige Enumeration vorgenommen würde. In den nachfolgenden Betrachtungen soll daher das AC-Modell zunächst ignoriert werden und stattdessen vorrangiges Interesse auf die Entwicklung eines geeigneten

Verfahrens zur Lösung des DCOL-Modells gerichtet werden, welches zwar derselben Modellklasse angehört, für das aber eine günstige Relaxierung angegeben werden kann. Auch die in Kapitel 4 vorgenommenen stochastischen Erweiterungen der Optimierungsmodelle wie auch die in Kapitel 5 dargelegten Algorithmen zur Behandlung stochastischer Optimierungsmodelle sind nur auf die IG- und DC-Modellierung bzw. auf eine relaxierte Form des DCOL-Modells anwendbar. In Kapitel 6 werden dennoch heuristische Ansätze für das AC-Modell vorgestellt, die auf die Ermittlung guter zulässiger Punkte zielen, um so auch anhand einiger numerischer Beispielrechnungen die Genauigkeit der approximativen Modelle gegenüber dem AC-Modell überprüfen zu können.

3.2 Ein äußeres Approximationsverfahren

Das DCOL-Modell liegt aufgrund der Restriktionen bei (2.28) und vorhandener Binärvariablen in einer anspruchsvollen Beschreibung vor. Es hat als Erweiterung des DC-Modells insbesondere bei Hoch- und Höchstspannungsübertragungen seine Gültigkeit. Bei derartigen Übertragungen kann wiederum ausgenutzt werden, dass die Lastwinkeldifferenzen $\theta_{kl} \in \mathbb{R}$ auf den Leitungen $kl \in E$ klein sind und im Anwendungsfall der Bedingung $\theta_{kl} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ genügen. Zahlreiche sich hieraus ergebende Approximationsmöglichkeiten können auch [60] entnommen werden. Um die Anzahl von Binärvariablen im DCOL-Modell bzw. in einer Variante mit approximierten ohmschen Übertragungsverlusten nicht noch weiter zu erhöhen, soll die Verlustfunktion nicht über eine stückweise lineare Funktion angenähert werden, sondern vielmehr ein Ansatz, der das DCOL-Modell geeignet relaxiert, vorgestellt werden. Ersetzt man nun die Verlustgleichung (2.28) durch

$$\nu_{kl}^{(t)} \geq 2g_{kl}(1 - \cos \theta_{kl}^{(t)}) \quad \forall kl \in E \quad \forall t \in T \quad (3.1)$$

und fordert zudem, dass die Lastwinkeldifferenzen den Bedingungen

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta_{kl}^{(t)} \leq \frac{\pi}{2} \quad \forall kl \in E \quad \forall t \in T \quad (3.2)$$

genügen, so sind die Funktionen $2g_{kl}(1 - \cos \theta_{kl}^{(t)})|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ für alle $kl \in E$ und $t \in T$ konvex, da $g_{kl} \geq 0$ für $kl \in E$ gilt. Das so entstehende Modell wird mit RDCOL

bezeichnet und liegt in gemischt-ganzzahliger konvexer Beschreibung vor. Eine solche liegt vor, wenn nach Relaxierung der Ganzzahligkeitsforderungen des Ursprungsmodells ein konvexes Optimierungsmodell verbleibt. Zwischen dem RDC, RDCOL und DCOL werden die nachfolgenden Beziehungen festgehalten, wobei für alle Modelle als Optimierungskriterium die Produktionskostenminimierung zugrunde liegt.

Bemerkung

Wenn das RDCOL-Modell zulässig ist und die Lastwinkeldifferenzen zu den Optimallösungen des RDC- und DCOL-Modells die Bedingung $[\theta_{kl}^{(t)}]_{RDC}, [\theta_{kl}^{(t)}]_{DCOL} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ für alle $kl \in E$ und $t \in T$ erfüllen, so ist $z^{RDC} \leq z^{RDCOL} \leq z^{DCOL}$.

Sicherlich können die tatsächlich auftretenden Verluste im RDCOL-Modell überschätzt werden. Dennoch sollte beachtet werden, dass es sich um ein Minimierungsproblem handelt und eine Überschätzung zu zusätzlichen Kosten führt. Es kann aber nicht ausgeschlossen werden, dass in bestimmten Fällen eine Optimallösung zu überschätzten Verlusten existiert. Nachfolgend wird ein äußeres Approximationsverfahren zur Lösung des RDCOL-Modells vorgestellt. Allgemein ist die gemischt-ganzzahlige konvexe Modellklasse, die hier betrachtet wird, über

$$(P) \quad \left. \begin{array}{l} \min_{x,y} \left\{ c^\top x + d^\top y \quad : \quad Ax + By \leq b \right. \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in Y \subset \mathbb{Z}^s \end{array} \right\}$$

gegeben. Dabei sind $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konvex und differenzierbar. Von der Menge $Y \subset \mathbb{Z}^s$ wird Beschränktheit vorausgesetzt. Die Matrizen A, B und Vektoren b, c, d sind mit passender Dimensionierung ausgestattet. Das Modell (P) ist somit ein gemischt-ganzzahliges konvexes Optimierungsmodell. Nun stellt sich die Frage, wie sich eine Optimallösung von (P) ermitteln läßt. In [17, 21] finden sich speziell auf die hier vorliegende Modellklasse angepasste Schnittebenenverfahren. Dabei sind auch nichtlineare Masterprobleme zu minimieren. Nachfolgend wird ein Verfahren vorgestellt, welches in der Lage ist, einen Optimalpunkt von (P)

bzw. einen zulässigen Punkt mit überprüfbarem Gütezertifikat durch Lösen von Masterproblemen, die in gemischt-ganzzahliger linearer Beschreibung vorliegen, zu ermitteln. Dadurch ist ein solches Verfahren insbesondere geeignet, es auf stochastische Modelle in Verbindung mit Dekompositionsverfahren anzuwenden. Dekompositionsverfahren wie die Szenariodekomposition [12] erfordern gemischt-ganzzahlige lineare Strukturen der Masterprobleme. Daher wurde in dieser Arbeit die Modellklasse (P) nicht mit Approximationsverfahren der Art, wie sie [17, 21] zu entnehmen sind, behandelt. Der nachfolgend entwickelte Algorithmus baut auf das Verfahren von Kelley [39] und in seiner Erweiterung (*siehe Abschnitt 5.2*) auch auf die Szenariodekomposition auf. Es wird nun an den nachfolgenden Satz, bekannt aus der nichtlinearen Optimierung [3], erinnert.

Satz 3.3

Sei $g : C \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar auf der offenen und konvexen Menge C . Dann ist g auf C konvex genau dann, wenn $g(x) \geq g(\bar{x}) + \nabla g(\bar{x})(x - \bar{x})$ für alle $x, \bar{x} \in C$.

Zwecks Konvergenzaussagen des noch im Folgenden vorgestellten Algorithmus werden zwei Voraussetzungen getroffen:

(V1) Es existiert ein beschränktes Polytop

$$\mathcal{Z}_{\overline{M}_0} \supset \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\}.$$

(V2) Es existiert ein $K \in \mathbb{R}$ mit $\|\nabla f_i(x)\| \leq K$ für alle $x \in \mathcal{Z}_{\overline{M}_0}$ und $i = 1, \dots, m$.

Nach (V1) ist $\mathcal{Z}_{\overline{M}_0}$ und somit auch \mathcal{Z}_P beschränkt. Man betrachtet nun das wie folgt definierte Masterproblem in einem Schritt $k \in \mathbb{N}_0$:

$$(M_k) \quad \min_{x,y} \{c^\top x + d^\top y : Ax + By \leq b, x \in \mathcal{Z}_{\overline{M}_k}, y \in Y \subset \mathbb{Z}^s\}$$

Die Menge $\mathcal{Z}_{\overline{M}_k}$ wird nun definiert. Die Optimallösung von (M_k) wird, wenn $\mathcal{Z}_{M_k} \neq \emptyset$ (\mathcal{Z}_{M_k} steht wieder für den Zulässigkeitsbereich), mit (x_k^*, y_k^*) bezeichnet. Ferner wird ein für (M_k) zulässiger Punkt $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)$ betrachtet, der zu vorgegebener Toleranz $\tau_k \geq 0$ und der für (M_k) gültigen Schranke $\underline{\varphi}_k$ die Bedingung

$$\frac{c^\top \tilde{x}_k + d^\top \tilde{y}_k - \underline{\varphi}_k}{\underline{\varphi}_k} \leq \tau_k \tag{3.3}$$

erfüllt. Die Menge $\mathcal{Z}_{\overline{M}_k}$ mit $k \in \mathbb{N}$ ist dann über den Zusammenhang

$$\mathcal{Z}_{\overline{M}_{k+1}} = \mathcal{Z}_{\overline{M}_k} \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^n \quad : \quad \begin{array}{l} f_i(\tilde{x}_k) + \nabla f_i(\tilde{x}_k)(x - \tilde{x}_k) \leq 0 \\ \forall i \in \{j \in \{1, \dots, m\} : f_j(\tilde{x}_k) > 0\} \end{array} \right\}$$

gegeben. Das äußere Approximationsverfahren gestaltet sich dann wie folgt:

Algorithmus 3.1

(S0) **Initialisierung**

Bestimme ein Polytop $\mathcal{Z}_{\overline{M}_0}$, wähle $\tau_0 \geq 0$ und setze $k = 0$.

(S1) **Optimierung**

Bestimme, wenn möglich, einen für das Masterproblem (M_k) zulässigen Punkt, der (3.3) erfüllt.

(S2) **Terminierung**

Wenn $f_i(\tilde{x}_k) \leq 0$ für alle $i = 1, \dots, m$ oder $\mathcal{Z}_{M_k} = \emptyset$, dann terminiere.

(S3) **Aufdatierung**

Wähle $0 \leq \tau_{k+1} \leq \tau_k$, setze $k := k + 1$ und gehe zu (S1).

Zwecks Konvergenzaussagen wird der nachfolgende Satz betrachtet, welcher sich für die konvexe Modellklasse, d.h. ohne Vorhandensein von Ganzzahligkeitsforderungen, neben [39] auch [53] entnehmen lässt, hier aber auf die gemischt-ganzzahlige konvexe Modellklasse angepasst wurde. Die Optimallösung von (P) wird, falls $\mathcal{Z}_P \neq \emptyset$, mit (x^*, y^*) bezeichnet. Falls $\mathcal{Z}_P = \emptyset$, so wird $c^\top x^* + d^\top y^* := +\infty$ definiert.

Satz 3.4

(i) $\mathcal{Z}_P \subset \mathcal{Z}_{M_k}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

(ii) Ein durch Algorithmus 3.1 in einem Schritt $k \in \mathbb{N}_0$ generierter Punkt $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) \in \mathcal{Z}_{M_k}$ erfüllt die Bedingung:

$$\frac{c^\top \tilde{x}_k + d^\top \tilde{y}_k - c^\top x^* - d^\top y^*}{c^\top x^* + d^\top y^*} \leq \tau_k \quad (3.4)$$

(iii) Wenn $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) \notin \mathcal{Z}_P$, dann ist $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) \in \mathcal{Z}_{M_k} \setminus \mathcal{Z}_{M_{k+1}}$.

Beweis:

- (i) Nach Voraussetzung (V1) ergibt sich $\mathcal{Z}_P \subset \mathcal{Z}_{M_0}$. Sei für einen Schritt $k \in \mathbb{N}$ die Bedingung $\mathcal{Z}_P \subset \mathcal{Z}_{M_{k-1}}$ erfüllt. Für alle zulässigen $(x, y) \in \mathcal{Z}_P$ gilt nach Satz 3.3 dann:

$$0 \geq f_i(x) \geq f_i(\tilde{x}_k) + \nabla f_i(\tilde{x}_k)(x - \tilde{x}_k) \quad \forall i = 1, \dots, m$$

Da $(x, y) \in \mathcal{Z}_P$ beliebig ist, folgt somit auch $\mathcal{Z}_P \subset \mathcal{Z}_{M_k}$.

- (ii) Der Punkt $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) \in \mathcal{Z}_{M_k}$ erfüllt (3.3) nach Konstruktion. Mit (i) gilt sicherlich:

$$\begin{aligned} c^\top \tilde{x}_k + d^\top \tilde{y}_k &\leq \underline{\varphi}_k(1 + \tau_k) \\ &\leq (c^\top x_k^* + d^\top y_k^*)(1 + \tau_k) \\ &\leq (c^\top x^* + d^\top y^*)(1 + \tau_k) \end{aligned}$$

- (iii) Ist $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) \notin \mathcal{Z}_P$, so existiert ein Index $i \in \{1, \dots, m\}$ mit $f_i(\tilde{x}_k) > 0$. Dann ist aber die Ungleichung

$$f_i(\tilde{x}_k) + \nabla f_i(\tilde{x}_k)(x - \tilde{x}_k) \leq 0$$

für $x = \tilde{x}_k$ verletzt und somit $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) \in \mathcal{Z}_{M_k}$, aber es ist $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) \notin \mathcal{Z}_{M_{k+1}}$ \square

Bei Ablauf von Algorithmus 3.1 sind nun die folgenden drei Fälle möglich:

- (i) In einem Schritt $k \in \mathbb{N}_0$ ist $\mathcal{Z}_{M_k} = \emptyset$. Nach Satz 3.4(i) ist dann aber auch $\mathcal{Z}_P = \emptyset$ und (P) besitzt keine Lösung.
- (ii) In einem Schritt $k \in \mathbb{N}_0$ ist $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) \in \mathcal{Z}_P$. Nach Satz 3.4(ii) ist dann (3.4) erfüllt.
- (iii) Es wird eine unendliche Folge $\{\tilde{x}_k, \tilde{y}_k\}$ erzeugt.

Falls die unendliche Folge $\{\tilde{x}_k, \tilde{y}_k\}$ erzeugt wird, so ist jeder Häufungspunkt eine Lösung von (P) , wenn $\{\tau_k\} \rightarrow 0$ gilt. Die Folge muss mindestens einen Häufungspunkt besitzen, da die Folgenglieder von $\{\tilde{x}_k, \tilde{y}_k\}$ aufgrund der Kompaktheit

von $\mathcal{Z}_{M_0} \supseteq \mathcal{Z}_{M_k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ in einer kompakten Menge liegen. Der Beweis orientiert sich wiederum an [39, 53], wobei Anpassungen zur Behandlung der gemischt-ganzzahligen konvexen Modellklasse vorgenommen werden.

Satz 3.5

Algorithmus 3.1 stoppe nicht nach endlich vielen Schritten und es sei $\{\tau_k\} \rightarrow 0$. Dann ist jeder Häufungspunkt der Folge $\{\tilde{x}_k, \tilde{y}_k\}$ eine Optimallösung von (P).

Beweis:

Es sei $\{\tilde{x}_{k_j}, \tilde{y}_{k_j}\}$ eine Teilfolge von $\{\tilde{x}_k, \tilde{y}_k\}$, die gegen den Häufungspunkt (\tilde{x}, \tilde{y}) konvergiert. Zudem werden die Folgen $\{x_{k_j}^*, y_{k_j}^*\}$ und $\{\tau_{k_j}\} \rightarrow 0$ betrachtet. Es gilt mit Satz 3.4(ii) der Zusammenhang:

$$\begin{aligned} c^\top \tilde{x}_{k_j} + d^\top \tilde{y}_{k_j} &\leq (c^\top x^* + d^\top y^*)(1 + \tau_{k_j}) \\ &\leq (c^\top x + d^\top y)(1 + \tau_{k_j}) \quad \forall x, y \in \mathcal{Z}_P \end{aligned}$$

Im Grenzübergang ist dann die Bedingung $c^\top \tilde{x} + d^\top \tilde{y} \leq c^\top x + d^\top y \quad \forall x, y \in \mathcal{Z}_P$ erfüllt. Es verbleibt zu zeigen, dass $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathcal{Z}_P$ ist. Angenommen, es ist $(\tilde{x}, \tilde{y}) \notin \mathcal{Z}_P$. Somit existiert ein Index $i \in \{1, \dots, m\}$ mit $f_i(\tilde{x}) = \eta > 0$. Da (\tilde{x}, \tilde{y}) Häufungspunkt und f_i stetig ist, existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\|\tilde{x}_k - \tilde{x}\| < \frac{\eta}{2K}$ und $f_i(\tilde{x}_k) > \frac{\eta}{2}$. Dabei ist nach (V2) die Bedingung $\|\nabla f_i(x)\| \leq K$ für alle $(x, y) \in \mathcal{Z}_{M_0}$ erfüllt. Dann gilt:

$$f_i(\tilde{x}_k) + \nabla f_i(\tilde{x}_k)(\tilde{x} - \tilde{x}_k) > \frac{\eta}{2} - K \frac{\eta}{2K} = 0$$

Somit ist $(\tilde{x}, \tilde{y}) \notin \mathcal{Z}_{M_{k+1}}$. Da $\mathcal{Z}_{M_{k+1}}$ abgeschlossen ist, existiert ein $\epsilon > 0$, so dass für die Kugel $B = B((\tilde{x}, \tilde{y}), \epsilon)$ nun $B \cap \mathcal{Z}_{M_{k+1}} = \emptyset$ ist. Da aber $(\tilde{x}_l, \tilde{y}_l) \in \mathcal{Z}_{M_{k+1}}$ für alle Indizes $l \geq k + 1$ gelten muss, ist dies ein Widerspruch \square

Nach Konstruktion ist $\mathcal{Z}_{M_{k+1}} \subseteq \mathcal{Z}_{M_k}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ erfüllt. Somit ist eine für das Masterproblem (M_k) generierte untere Schranke auch für das Masterproblem (M_{k+1}) gültig.

Anwendung des Verfahrens auf das RDCOL-Modell Das vorgestellte äußere Approximationsverfahren ist auf das RDCOL-Modell anwendbar. Im Folgenden werden Verfeinerungen im Algorithmus vorgenommen. Dabei wird neben der

zu approximierenden konvexen Menge auch die exakte Beschreibung der linearen Schnitte zur Approximation derselbigen aufgezeigt. Weiter werden obere Schranken für die Variablen ν_{kl} mit $kl \in E$, die die ohmschen Übertragungsverluste beschreiben, genannt. Auch das in Algorithmus 3.1 aufgezeigte Abbruchkriterium wird angepasst. Die exakten ohmschen Übertragungsverluste können mit den für $kl \in E$ definierten Funktionen

$$\begin{aligned} f_{kl} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \theta_{kl} &\mapsto 2g_{kl}(1 - \cos \theta_{kl}) \end{aligned}$$

beschrieben werden. Die zulässige Verlustmenge auf einer Leitung $kl \in E$, nachfolgend mit M_{kl} bezeichnet, kann dann über den Zusammenhang

$$M_{kl} := \left\{ (\nu_{kl}, \theta_{kl}) \in \mathbb{R} \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] : f_{kl}(\theta_{kl}) - \nu_{kl} \leq 0 \right\}$$

ausgedrückt werden und ist in Abb. 3.1 verdeutlicht. Da $g_{kl} = g_{lk}$ für alle $kl \in E$, ist auch $f_{kl} = f_{lk}$ und somit auch $M_{kl} = M_{lk}$ für alle $kl \in E$. Bisher sind

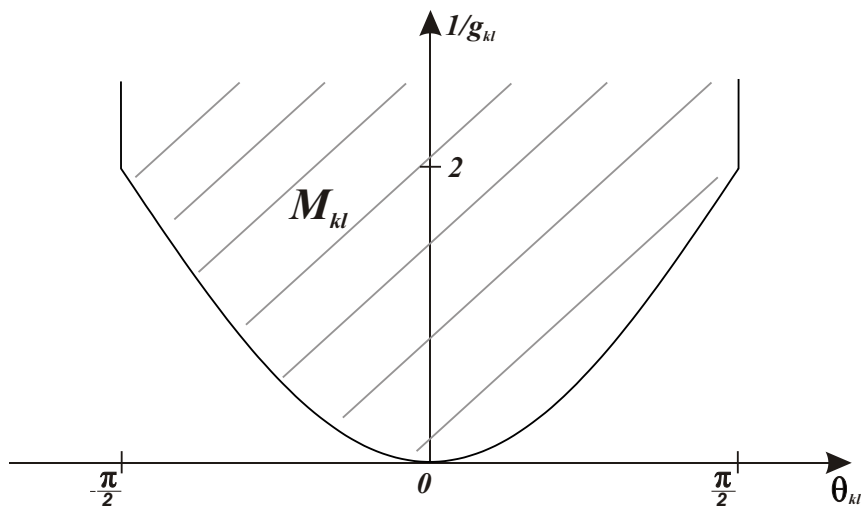


Abbildung 3.1: Graphische Veranschaulichung der zulässigen Verluste

die Mengen M_{kl} unbeschränkt, so dass Voraussetzung (V1) nicht erfüllt werden kann. Nun nehmen aber die Funktionen $f_{kl}|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ ihr Maximum bei $\theta_{kl} = \pm \frac{\pi}{2}$ an. Dort beträgt der Funktionswert $2g_{kl}$. Insgesamt gesehen - bei Betrachtung eines Zeitraums - kann die zu approximierende konvexe Menge über

$$M = \left\{ \bigotimes_{t \in T} \bigotimes_{kl \in E: k < l} (\nu_{kl}^{(t)}, \theta_{kl}^{(t)}) \in (\mathbb{R} \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])^{|T| \frac{|E|}{2}} : \begin{array}{l} f_{kl}(\theta_{kl}^{(t)}) - \nu_{kl}^{(t)} \leq 0 \\ \nu_{kl}^{(t)} \leq 2g_{kl} \\ \forall kl \in E : k < l \\ \forall t \in T \end{array} \right\}$$

angesetzt werden. Zusätzlich wird

$$\nu_{kl}^{(t)} = \nu_{lk}^{(t)} \quad \forall kl \in E \text{ mit } k > l \quad \forall t \in T$$

gefordert. Es lassen sich sogar noch weitere obere Schranken für die Variablen $\nu_{kl}^{(t)}$ angeben. Natürlich können die ohmschen Übertragungsverluste auf einer Leitung $kl \in E$ nie den auf ihr maximal möglichen Fluss übersteigen. Dies führt auf die Restriktionen:

$$\nu_{kl}^{(t)} \leq d_{kl}^{max} \quad \forall kl \in E \quad \forall t \in T$$

Noch schärfer kann dies mit Hilfe der zuvor eingeführten Variablen $\hat{p}_{kl}^{(t)} = |p_{kl}^{(t)}|$ formuliert werden, denn es gilt:

$$\nu_{kl}^{(t)} \leq \hat{p}_{kl}^{(t)} \quad \forall kl \in E \quad \forall t \in T$$

Es ist aber zu beachten, dass zur Betragsberechnung Binärvariablen benötigt werden, die den Rechenaufwand deutlich steigern können. Beachtet man allerdings auf gewissen Leitungen ohnehin Transmissionskosten, kann auf die schärfere Schrankenbildung zurückgegriffen werden. Nachfolgend werden die Stützhyperebenen an die Funktionen f_{kl} in einem Punkt $\bar{\theta}_{kl} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ angegeben. Mit Satz 3.3 sind diese über

$$\begin{aligned} f_{\bar{\theta}_{kl}} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] &\rightarrow \mathbb{R} \\ \theta_{kl} &\mapsto 2g_{kl}[1 - \cos \bar{\theta}_{kl} + \sin \bar{\theta}_{kl}(\theta_{kl} - \bar{\theta}_{kl})] \end{aligned}$$

gegeben. Man rechnet nach, dass dies auf die Restriktionen

$$\begin{aligned} f_{\bar{\theta}_{kl}}(\theta_{kl}) &\leq \nu_{kl} \\ \Leftrightarrow 2g_{kl} \sin \bar{\theta}_{kl} \theta_{kl} - \nu_{kl} &\leq 2g_{kl}[\sin \bar{\theta}_{kl} \bar{\theta}_{kl} + \cos \bar{\theta}_{kl} - 1] \end{aligned}$$

führt. Im äußeren Approximationsverfahren selbst werden geringfügige Anpassungen gegenüber Algorithmus 3.1 vorgenommen. Es wird eine vorzeitige Terminierung eingeleitet, wenn in einem Schritt $k \in \mathbb{N}_0$ zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ die Bedingung

$$f_{ij}(\tilde{\theta}_{ij,k}^{(t)}) - \tilde{v}_{ij,k}^{(t)} < \epsilon \quad \forall ij \in E : i < j \quad \forall t \in T \quad (3.5)$$

erfüllt ist. Dabei bezeichnen $\tilde{\theta}_{ij,k}^{(t)}$ und $\tilde{v}_{ij,k}^{(t)}$ für $ij \in E$ und $t \in T$ einen durch den Algorithmus in einem Schritt $k \in \mathbb{N}_0$ ermittelten zulässigen Punkt, der die Toleranzbedingung (3.3) erfüllt. Eine Unterschätzung der Netzverluste um den Wert ϵ wird somit gestattet.

Überschätzung von Netzverlusten Es können Situationen auftreten, in denen die Optimallösung bzw. ein zulässiger Punkt des RDCOL-Modells, der (3.4) erfüllt, überschätzte Netzverluste aufweist. Angenommen auf genau einer Kante $ab \in E$ tritt dies zu einem Zeitpunkt $t' \in T$ für die Optimallösung auf, d.h. es ist:

$$[\nu_{ab}^{t'}]_{RDCOL} > 2g_{ab}(1 - [\cos\theta_{ab}^{t'}]_{RDCOL})$$

Eine Verlustüberschätzung hat aufgrund von Restriktion (2.29) unmittelbar Auswirkungen auf die Größen $[P_{L_a}^{t'}]_{RDCOL}$ und $[P_{L_b}^{t'}]_{RDCOL}$. Somit werden in den Knoten $a, b \in V$ fiktive Lasten angenommen, die durch Zusatzleistungen der Generatoren gedeckt werden. Ohne diese zusätzlichen Lasten würde die Produktion, wenn als Optimierungsziel die Kostenminimierung gewählt wurde, entweder teurer oder unzulässig. Dies kann mit den minimalen Einspeisungsgrenzen und unterschiedlichen Kostenfunktionen der Energieerzeugungsanlagen sowie den maximal möglichen Übertragungskapazitäten der Leitungen begründet werden. Es kann somit sinnvoll sein, technische Geräte bereitzuhalten, die elektrische Energie bzw. geeignet umgewandelte speichern oder ungenutzt lassen. Falls aber eine Überschätzung der Übertragungsverluste explizit verhindert werden soll, kann ergänzend zur äußeren noch eine innere Approximation der Netzverluste vorgenommen werden. Die Idee ist in Abb. 3.2 veranschaulicht. Dort ist neben einer exemplarischen äußeren auch eine innere Approximation gekennzeichnet. Bei der inneren Approximation handelt es sich um eine stückweise-lineare Funktion, die über die

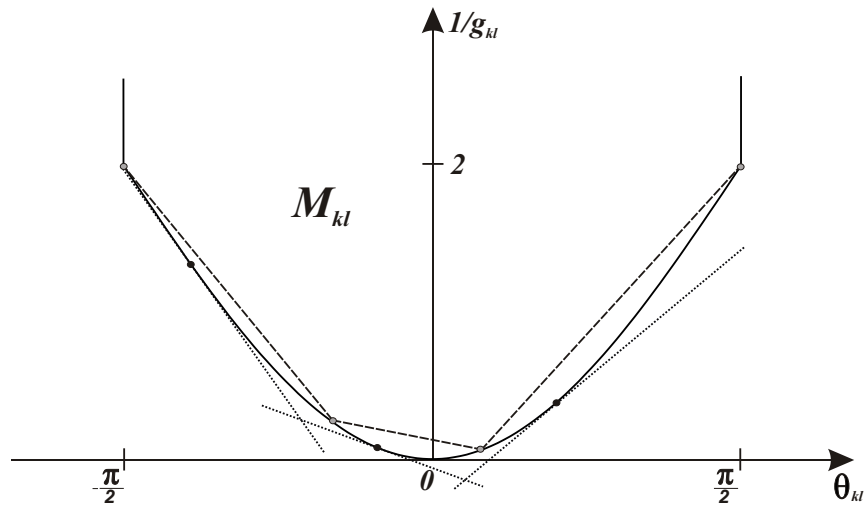


Abbildung 3.2: Exemplarische Approximation der Verluste

grau gekennzeichneten Stützpunkte charakterisiert ist. Die genaue Modellierungstechnik kann beispielsweise [38] entnommen werden. Mit hinreichend vielen solcher Stützpunkte kann die tatsächliche Verlustfunktion natürlich beliebig genau approximiert werden. Doch wird zur mathematischen Beschreibung einer solchen stückweise-linearen Funktion für jedes ihrer Segmente eine Binärvariable benötigt. Dies steigert, wenn größere Energieübertragungssysteme und ein Optimierungszeitraum betrachtet werden, den Rechenaufwand zur Lösung des RDCOL-Modells enorm. Nachfolgend wird dieser Ansatz nicht weiter verfolgt und stattdessen auf [47] verwiesen. Dort werden neben der zuletzt genannten Modellierungstechnik auch sogenannte SOS-Ansätze verfolgt.

Kapitel 4

Stochastische Optimierung

Die bisherigen Betrachtungen gingen von einer vollständigen Kenntnis der Eingangsdaten aus, doch sind gerade diese oftmals mit Unsicherheiten behaftet. So können im Fall der hier vorgestellten Modelle Wirk- und Blindleistungslasten unsicher sein, aber auch die maximal möglichen Übertragungskapazitäten der Übertragungsleitungen von atmosphärischen Bedingungen abhängen. Bei Windenergie- oder Solarenergieanlagen sind die maximal möglichen Einspeisungswerte von der aktuellen Witterung, d.h. von der Strahlungsintensität des Lichtes und der Stärke des Windes, abhängig und somit, selbst wenn gute Prognosen für diese Einflussgrößen vorliegen, in gewissem Maße auch dem Zufall unterworfen. Entgegen den Modellierungen gemäß Kapitel 2 sind somit Teile der dort verwendeten Eingangsdaten, die mit den vorhergehenden Erläuterungen in Verbindung stehen, unsicher. Dies führt insgesamt auf zufallsbehaftete bzw. stochastische Optimierungsmodelle. Nicht nur auf eine kostenoptimale Einspeisung, viel mehr noch auf eine Einspeisung der Energieerzeugungsanlagen, die eine Versorgungssicherheit gewährleisten muss, können diese zufälligen Parameter einen hohen Einfluss ausüben. Nachfolgend soll aber zumindest davon ausgegangen werden, dass für diese zufälligen Parameter gute Prognosen vorhanden sind, d.h. man ist in der Lage, die Wahrscheinlichkeiten, dass eine Zufallsvariable, die den zufallsbehafteten Bedarf an den Knoten, die maximal mögliche Übertragung der Übertragungsleitungen oder die maximal mögliche Einspeisung gewisser Energieerzeugungsanlagen beschreibt, bestimmte Werte annimmt, anzugeben. Nun stellt sich die Frage, in welcher Weise diese vorhandenen

Informationen in den Prozess einer optimalen Entscheidungsfindung miteinzubringen sind. Dies ist das Aufgabengebiet der stochastischen Optimierung. In Abschnitt 4.1 werden zunächst zweistufige stochastische gemischt-ganzzahlige lineare Modelle vorgestellt, die ihre Anwendung bei der IG- und DC-Modellierung mit zufallsbehafteten Eingangsdaten finden. In Abschnitt 4.2 werden zweistufige stochastische gemischt-ganzzahlige konvexe Modelle angesprochen, die bei Nutzung des RDCOL-Modells relevant werden. Abschnitt 4.3 gibt zudem einen Einblick in die mehrstufige stochastische Optimierung, die eine sehr genaue Modellierung der Unsicherheiten zulässt. Die hier gewählten Zugänge sind in allgemeingültiger Beschreibung gehalten und so auf zahlreiche Probleme der Praxis anwendbar. Abschnitt 4.4 befaßt sich gesondert mit der Aufgabe, in welcher Weise die nachfolgend aufgeführten stochastischen Modellierungstechniken auf die in Kapitel 2 vorgestellten Optimierungsmodelle übertragen werden können.

4.1 Zweistufige stochastische gemischt-ganzzahlige lineare Modelle

Unter Außerachtlassung einer möglichen Stufentrennung, eine Motivation dieser wird noch erfolgen, wird zunächst ein allgemeines stochastisches gemischt-ganzzahliges lineares Optimierungsmodell betrachtet. Ein derartiges Modell wird auch in [9, 37, 59] vorgestellt. Dieses wird nachfolgend für die gemischt-ganzzahlige lineare Modellklasse definiert.

Definition 4.1

Das Optimierungsmodell

$$\min_x \{c(\omega)^\top x : T(\omega)x = h(\omega), x \in X\} \quad (4.1)$$

heißt stochastisches gemischt-ganzzahliges lineares Modell. Dabei sind $X \subseteq \mathbb{R}^m$ ein Polyeder mit Ganzzahligkeitsforderungen, $c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, $T : \Omega \rightarrow \text{Mat}(s, m, \mathbb{R})$ und $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^s$ Zufallsvektoren auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Bei einem Polyeder mit Ganzzahligkeitsforderungen handelt es sich nicht um ein Polyeder im herkömmlichen Sinn. Es weist bis auf Randfälle auch keine Konve-

xitätseigenschaft auf. Ist $X \subseteq \mathbb{R}^m$ ein Polyeder mit Ganzzahligkeitsforderungen, so existieren ein Polyeder $P \subseteq \mathbb{R}^m$ und eine Indexmenge $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ mit $X = \{x \in P : x_i \in \mathbb{Z} \forall i \in I\}$. Die konvexe Hülle von X entspricht somit wieder P .

Nachfolgend soll die Problematik verdeutlicht werden, die eine Minimierung von Modell (4.1) mit sich bringt. Es sei zusätzlich vorausgesetzt, dass der Zulässigkeitsbereich des Modells (4.1) für jedes $\omega \in \Omega$ beschränkt und nicht leer ist. Man betrachte die mengenwertige Optimallösungsfunktion

$$\begin{aligned} \varphi : \Omega &\rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^m) \\ \omega &\mapsto \arg \min_x \{c(\omega)^\top x : T(\omega)x = h(\omega), x \in X\}. \end{aligned}$$

Es soll nun davon ausgegangen werden, dass eine Funktion $\psi : \mathcal{P}(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^m$ zur Verfügung steht, die so für jedes $\omega \in \Omega$ eindeutig ein Element aus der Menge $\varphi(\omega)$ auswählen kann. Man betrachte nun die Funktion $\varphi^* = \psi \circ \varphi$. Offenbar ist φ^* eine Zufallsvariable, die für ein $\omega \in \Omega$ auf eine für (4.1) optimale Entscheidung $\varphi^*(\omega)$ abbildet. Wichtig ist es, bereits vor Realisierung des Zufalls eine Entscheidung zu treffen, die möglichst günstig, im Idealfall optimal nach Realisierung des Zufalls ist. Oftmals bedient man sich, wenn nur der Kostenvektor c zufallsbehaftet und der Restriktionsbereich selbst keinen Unsicherheiten unterworfen ist, einer der beiden nachfolgenden Ansätze.

(E1) Ersetze die Zufallsvektoren durch ihren Erwartungswert und löse das resultierende deterministische Optimierungsproblem.

(E2) Verwende die Entscheidung $\int_{\Omega} \varphi^*(\omega) \mathbb{P}(d\omega)$.

Gemäß den Optimierungsmodellen aus Kapitel 2 sind aber gerade die Nebenbedingungen, die Bilanzgleichungen, Übertragungslimitierungen und Leistungseinspeisungen modellieren, zufallsbehaftet. Würden dennoch die Ansätze (E1), (E2) verwendet, so ist beiden gemein, dass die entstehende Lösung nach Realisierung des Zufalls unzulässig sein kann. Man betrachte dazu das nachfolgende Beispiel.

Beispiel 4.1

Gegeben sei das stochastische Optimierungsmodell

$$\max_{x_1, x_2} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + \frac{1}{2}x_2 \quad : \quad x_1 + x_2 \leq h(\omega) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}.$$

Man betrachte den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und die diskret verteilte Zufallsvariable $h(\omega)$ mit den Realisierungen 0.8, 1 und 1.2. Dabei ist $\mathbb{P}(h = 0.8) = 0.2$, $\mathbb{P}(h = 1.0) = 0.5$ und $\mathbb{P}(h = 1.2) = 0.3$. Man rechnet leicht nach, dass die beiden zuvor dargestellten Ansätze (E1) und (E2) den Punkt $(x_1, x_2) = (1.02, 0)$ liefern. Dieser ist somit unzulässig bei Eintreten der Realisierungen 0.8 und 1. Bei Eintreten der Realisierung 1.2 ist er zwar zulässig, aber nicht optimal, da die Optimallösung dann über $(x_1, x_2) = (1.2, 0)$ gegeben wäre.

Gerade eine mögliche Unzulässigkeit der durch (E1) und (E2) gewonnenen Entscheidung stellt beide Ansätze für die in dieser Arbeit behandelten Modelle in Frage. Insbesondere in der elektrischen Energieversorgung müssen zulässige Produktionsentscheidungen in Hinblick auf Versorgungssicherheit gewährleistet werden, d.h. es ist eine Produktion zu ermitteln, die, egal wie auch die Realisierung der Zufallsvariablen ausfallen wird, alle erforderlichen Nebenbedingungen der vorgestellten Modelle einhundertprozentig einhält. Eine Spezialisierung von (4.1) kann über den Zweistufenansatz erreicht werden, der sich durch die Arbeiten [7, 15] begründet. Hierbei lässt sich das Optimierungsmodell in eine Stufe mit sicheren und in eine Stufe mit unsicheren Informationen aufteilen. Betrachtet man nochmals das allgemeine stochastische Optimierungsmodell (4.1), so kann im zweistufigen Fall der Zielfunktionsvektor in zwei Einzelvektoren aufgeteilt werden. Dabei besitzt einer dieser beiden sichere Informationen. Dementsprechend werden Variablen, die über die Zielfunktion mit sicheren Eingangsdaten in Verbindung stehen, von denen, die mit unsicheren verbunden sind, unterschieden. Ein zweistufiges stochastisches gemischt-ganzzahliges lineares Optimierungsmodell kann wie folgt definiert werden:

Definition 4.2

Das Optimierungsmodell

$$\min_{x,y} \left\{ \begin{array}{l} c^\top x + d(\omega)^\top y \quad : \quad T(\omega)x + W(\omega)y = h(\omega) \\ x \in X, y \in Y \end{array} \right\} \quad (4.2)$$

heißt zweistufiges stochastisches gemischt-ganzzahliges lineares Modell. Dabei sind $X \subseteq \mathbb{R}^{m_1}$ und $Y \subseteq \mathbb{R}^{m_2}$ Polyeder mit Ganzzahligkeitsforderungen sowie $c \in \mathbb{R}^{m_1}$. Die Zufallsvektoren $d : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}$, $T : \Omega \rightarrow \text{Mat}(s, m_1, \mathbb{R})$, $W : \Omega \rightarrow \text{Mat}(s, m_2, \mathbb{R})$ und $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^s$ sind auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ definiert.

Zu Modell (4.2) lässt sich die äquivalente Beschreibung

$$\min_x \{c^\top x + \phi(x, \omega) : x \in X\}$$

mit der Funktion

$$\begin{aligned} \phi : X \times \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ x \times \omega &\mapsto \min_y \{d(\omega)^\top y : W(\omega)y = h(\omega) - T(\omega)x, y \in Y\} \end{aligned}$$

aufbauen. Das zweistufige stochastische Optimierungsmodell kann so in ein mit Zufall behaftetes inneres und ein äußeres Minimierungsproblem zerlegt werden. Entsprechend werden Variablen $x \in X$ und $y \in Y$ als Erststufen- und Zweitstufenvariablen bezeichnet. Eine Entscheidung $x \in X$ ist nichtantizipierend zu treffen, d.h. es gilt die folgende Abfolge von Entscheidungen und Beobachtungen:

$$\text{entscheide } x \rightarrow \text{beobachte } (d, T, W, h)(\omega) \rightarrow \text{entscheide } y = y(x, \omega)$$

Dabei wird immer vorausgesetzt, dass die Verteilung des Zufallsvektors (d, T, W, h) unabhängig von einer Entscheidung $x \in X$ ist. Sicherlich hängt eine Zweitstufenentscheidung $y \in Y$ sowohl von der Erststufenentscheidung $x \in X$ als auch vom Zufall selbst ab, da $\phi : X \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gilt. Strukturelle Eigenschaften, die unter gewissen Voraussetzungen die Reellwertigkeit, Unterhalbstetigkeit und stückweise Linearität der Funktion ϕ zeigen, können [11] entnommen werden. Wie lässt sich nun eine optimale Erststufenentscheidung $x \in X$ bei Zufallseinfluss in der zweiten Stufe

treffen? Offenbar ist $\phi(x, \cdot)$ für festes $x \in X$ eine auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ definierte Zufallsvariable. Aufgabe der stochastischen Optimierung ist somit die Auffindung einer für (4.2) optimalen Zufallsvariablen $c^\top x^* + \phi(x^*, \cdot)$, die durch die Entscheidung $x^* \in X$ hervorgerufen wird. Gemäß dieser Aufgabe kommen risikoneutrale und risikoaverse Ansätze zum Einsatz.

Risikoneutrale Modelle

Als Standardwerke zur Einführung und Vertiefung auf dem Gebiet der zweistufigen stochastischen Optimierung soll neben der bereits genannten Literaturquelle [37] auch [9] festgehalten werden. Man betrachtet für $x \in X$ die auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ definierten Zufallsvariablen:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_x : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto c^\top x + \phi(x, \omega) \end{aligned}$$

Es sei $Z = \{\mathcal{F}_x : x \in X\}$ die Menge aller für (4.2) zulässigen Zufallsvariablen. Die Bestimmung einer besten nichtantizipierenden Entscheidung $x \in X$ ist gleichbedeutend mit der Bestimmung einer besten Zufallsvariable $\mathcal{F}^* \in Z$. Bei der risikoneutralen Modellierung wird der erwartungswertbasierte Ansatz zugrunde gelegt. Dieser zielt darauf ab, die sich im Durchschnitt ergebenden Kosten auf lange Sicht zu minimieren. Betrachtet man das Erwartungswertfunktional

$$\begin{aligned} Q_\varepsilon : X &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_\Omega \mathcal{F}_x(\omega) \mathbb{P}(d\omega), \end{aligned}$$

so ergibt sich

$$\min_x \{Q_\varepsilon(x) : x \in X\} \tag{4.3}$$

als Optimierungsproblem. Eine für (4.3) optimale Entscheidung $x \in X$ minimiert somit auf lange Sicht die sich im Durchschnitt ergebenden Kosten. In [63] finden sich strukturelle Aussagen über das Q_ε -Funktional, die eine Unterhalbstetigkeit des Funktionals und sogar Stetigkeit unter zusätzlichen Voraussetzungen sichern. Mit der Annahme, dass die Verteilung des Zufallsvektors (d, T, W, h) diskret ist und die

N Realisierungen oder auch Szenarien (d_i, T_i, W_i, h_i) mit den Wahrscheinlichkeiten π_i für $i = 1, \dots, N$ annehmen kann, lässt sich eine äquivalente Darstellung von (4.3) in gemischt-ganzzahliger linearer Beschreibung angeben. Diese lautet mit $\mathbf{y} := (y_1, \dots, y_N)$:

$$\left. \begin{array}{l} \min_{x, \mathbf{y}} \left\{ c^\top x + \sum_{j=1}^N \pi_j d_j^\top y_j \quad : \quad T_j x + W_j y_j = h_j \right. \\ \left. \begin{array}{l} x \in X, y_j \in Y \\ j = 1, \dots, N \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (4.4)$$

Man hat durch diese Darstellung (*bei diskreter Verteilung*) somit die Möglichkeit geschaffen, für (4.2) eine Entscheidung zu finden, die auf lange Sicht die durchschnittlichen Kosten minimiert. Auf algorithmische Schwierigkeiten, insbesondere bei hoher Szenarioanzahl N , wird in Kapitel 5 näher eingegangen. Dort werden auch problemangepasste Algorithmen vorgestellt.

Risikoaverse Modelle

Durch (4.3) werden zwar die durchschnittlichen Kosten auf lange Sicht minimiert, nach Realisierung des Zufalls können aber die tatsächlichen Kosten stark vom Erwartungswert abweichen. Eine zu starke Abweichung kann unter Umständen ein zu großes Risiko darstellen. Zur Erfassung des Risikos wird ein weiteres Funktional

$$Q_{\mathcal{R}} : X \rightarrow \mathbb{R}$$

benötigt. Mit einem geeigneten Gewichtungsfaktor $\rho > 0$ lautet das so entstehende Erwartungswert-Risiko-Modell:

$$\min_x \{ Q_{\mathcal{E}}(x) + \rho \cdot Q_{\mathcal{R}}(x) : x \in X \} \quad (4.5)$$

Typgleiche Modellierungsansätze und weitere Risikomaße können auch [48, 50, 67] entnommen werden. Mit Hilfe von $\rho > 0$ lässt sich gewichten, wie stark das Risiko in der Optimierung mitbeachtet werden soll. Zwei typische Risikomaße sind bei vorgegebenem Niveau $\eta \in \mathbb{R}_+$ die Überschusswahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} Q_{\mathcal{EP}} : X &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \mathcal{F}_x(\omega) > \eta\}) \end{aligned}$$

und der erwartete Überschuss

$$\begin{aligned} Q_{\mathcal{E}\mathcal{E}} : X &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_{\Omega} \max\{\mathcal{F}_x(\omega) - \eta, 0\} \mathbb{P}(d\omega). \end{aligned}$$

Offenbar misst $Q_{\mathcal{E}\mathcal{P}}$ die Wahrscheinlichkeit einer Überschreitung von η , während $Q_{\mathcal{E}\mathcal{E}}$ zudem die erwartete Höhe der Überschreitung von η misst. Weitere in der stochastischen Optimierung häufig anzutreffende Risikomaße sind der Wert im Risiko oder die Semiabweichung. Als Literaturquellen seien [46, 67] genannt, die detailliert auf strukturelle Eigenschaften der Risikomaße $Q_{\mathcal{E}\mathcal{P}}$ und $Q_{\mathcal{E}\mathcal{E}}$ eingehen. Falls der Zufallsvektor (d, T, W, h) diskret verteilt ist, lassen sich wiederum zu (4.5) Reformulierungen in gemischt-ganzzahliger linearer Beschreibung angeben. Für das Risikomaß $Q_{\mathcal{E}\mathcal{P}}$ lautet die Reformulierung mit geeigneter Konstante $B > 0$ und dem Variablenvektor $\Theta := (\theta_1, \dots, \theta_N)$:

$$\left. \begin{aligned} \min_{x, y, \Theta} \left\{ c^\top x + \sum_{j=1}^N \pi_j d_j^\top y_j + \rho \cdot \sum_{j=1}^N \pi_j \theta_j \quad : \quad T_j x + W_j y_j = h_j \right. \\ \left. \begin{aligned} c^\top x + d_j^\top y_j - \eta &\leq B \cdot \theta_j \\ x \in X, y_j \in Y, \theta_j &\in \{0, 1\} \\ j &= 1, \dots, N \end{aligned} \right\} \quad (4.6) \end{aligned}$$

Die zusätzlich für $j = 1, \dots, N$ erforderlichen Variablen $\theta_j \in \{0, 1\}$ messen für die Optimallösung $x^* \in X$, ob bei Eintreten von Szenario $j \in \{1, \dots, N\}$ die Gesamtkosten η überschritten werden. Bezeichnen $\theta_j^* \in \{0, 1\}$ und $y_j^* \in Y$ für $j = 1, \dots, N$ eine optimale Belegung, so gilt:

$$c^\top x^* + d_j^\top y_j^* - \eta \leq B \theta_j^* \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}$$

Bei einer Überschreitung des Levels $\eta \in \mathbb{R}_+$ für Szenario $j \in \{1, \dots, N\}$ muss $\theta_j^* = 1$ gelten. Von der Konstante $B > 0$ kann die Existenz für beschränktes X gezeigt werden (vgl. [64]). Falls das Level η für ein Szenario $j \in \{1, \dots, N\}$ nicht überschritten wird, so wird in der Optimallösung $\theta_j^* = 0$ angenommen. Bei der Verwendung des Risikomaßes $Q_{\mathcal{E}\mathcal{E}}$ kann für eine diskrete Verteilung des Zufallsvektors (d, T, W, h) ebenfalls eine äquivalente Darstellung in gemischt-ganzzahliger

linearer Beschreibung angegeben werden, die mit dem zusätzlichen Variablenvektor $\mathbf{v} := (v_1, \dots, v_N)$ wie folgt gegeben ist:

$$\min_{x, \mathbf{y}, \mathbf{v}} \left\{ \begin{array}{l} c^\top x + \sum_{j=1}^N \pi_j d_j^\top y_j + \rho \cdot \sum_{j=1}^N \pi_j v_j \quad : \quad T_j x + W_j y_j = h_j \\ c^\top x + d_j^\top y_j - \eta \leq v_j \\ x \in X, y_j \in Y, v_j \in \mathbb{R}_+ \\ j = 1, \dots, N \end{array} \right\} \quad (4.7)$$

Die im Optimalpunkt für $j = 1, \dots, N$ erzielten Lösungen $v_j^* \in \mathbb{R}_+$ messen für die optimale Erststufenentscheidung $x^* \in X$, wie stark in einem Szenario $j \in \{1, \dots, N\}$ mit optimaler Zweitstufenentscheidung y_j^* das Niveau $\eta \in \mathbb{R}_+$ überschritten wird. In der Optimallösung gilt für $j \in \{1, \dots, N\}$ dann:

$$v_j^* = \begin{cases} c^\top x^* + d_j^\top y_j^* - \eta & : c^\top x^* + d_j^\top y_j^* > \eta \\ 0 & : c^\top x^* + d_j^\top y_j^* \leq \eta \end{cases}$$

4.2 Zweistufige stochastische gemischt-ganzzahlige konvexe Modelle

In Hinblick auf die Einbeziehung stochastischer Datensätze bei Anwendung des RDCOL-Modells, soll in diesem Unterabschnitt die zugehörige stochastische Modellklasse dargelegt werden, aber wiederum in allgemeingültiger Beschreibung gehalten werden. Die Betrachtungen beschränken sich dabei auf stochastische Modelle solcher Art, die über nachfolgende Definition gegeben sind.

Definition 4.3

Das Optimierungsmodell

$$\min_{x, y} \left\{ \begin{array}{l} c^\top x + d(\omega)^\top y \quad : \quad T(\omega)x + W(\omega)y = h(\omega) \\ x \in X \cap E, y \in Y \cap F \end{array} \right\} \quad (4.8)$$

heißt *zweistufiges stochastisches gemischt-ganzzahliges konvexes Modell*. Dabei sind $X \subseteq \mathbb{R}^{m_1}$ und $Y \subseteq \mathbb{R}^{m_2}$ Polyeder mit Ganzzahligkeitsforderungen sowie $E \subseteq$

\mathbb{R}^{m_1} und $F \subseteq \mathbb{R}^{m_2}$ konvexe Mengen. Die Zufallsvektoren $d : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}$, $T : \Omega \rightarrow \text{Mat}(s, m_1, \mathbb{R})$, $W : \Omega \rightarrow \text{Mat}(s, m_2, \mathbb{R})$ und $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^s$ sind auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ definiert.

Die Mengen $A \subseteq \mathbb{R}^{m_1}$ und $B \subseteq \mathbb{R}^{m_2}$ sind nur als konvex vorausgesetzt und müssen demzufolge keine Polyedergestalt haben. Das zweistufige stochastische gemischt-ganzzahlige lineare Modell (4.2) stimmt mit (4.8) für $E = \mathbb{R}^{m_1}$ und $F = \mathbb{R}^{m_2}$ überein. Wieder lässt sich die Reformulierung

$$\min_x \{c^\top x + \phi(x, \omega) : x \in X \cap E\}$$

mit

$$\begin{aligned} \phi : X \times \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ x \times \omega &\mapsto \min_y \{d(\omega)^\top y : W(\omega)y = h(\omega) - T(\omega)x, y \in Y \cap F\} \end{aligned}$$

nutzen. Der rein erwartungswertbasierte Ansatz führt auf das Optimierungsmodell:

$$\min_x \{Q_\mathcal{E}(x) : x \in X \cap E\}$$

Geht man wieder von einer diskreten Verteilung des Zufallsvektors (d, T, W, h) aus, so ergibt sich die äquivalente Darstellung zu:

$$\left. \begin{aligned} \min_{x, y} \left\{ c^\top x + \sum_{j=1}^N \pi_j d_j^\top y_j \quad : \quad T_j x + W_j y_j = h_j \right. \\ \left. \begin{aligned} x \in X \cap E, y_j \in Y \cap F \\ j = 1, \dots, N \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

Analog zum gemischt-ganzzahligen linearen Fall lassen sich auch die äquivalenten Darstellungen für die Erwartungswert-Risiko-Modelle konstruieren, wenn der Zufallsvektor (d, T, W, h) diskret verteilt ist.

4.3 Ein Ausblick auf mehrstufige stochastische Modelle

In den zuvor definierten zweistufigen stochastischen Optimierungsmodellen wurde von einer vollständigen Kenntnis der zufallsbehafteten Informationen zu ei-

nem festen Zeitpunkt ausgegangen. In der Praxis und gerade bei den in Kapitel 2 vorgestellten Optimierungsmodellen, die eine Einspeisungsoptimierung vornehmen, erhält man diese Information oft erst im Laufe der Zeit. Mehrstufige stochastische Optimierungsmodelle sind in der Lage, diese Eigenschaft abzubilden. Nachfolgend soll nur ein Einblick in die Modellierungstechniken der mehrstufigen gemischt-ganzzahligen stochastischen Optimierungsmodelle gegeben werden. Für weitere Vertiefungen wird auf [2, 9, 57, 65] verwiesen. Nachfolgend wird auch aus [33] zitiert. Man betrachte ein in $T \in \mathbb{N}$ verschiedenen Stufen zu beobachtendes diskretes System. Ein mehrstufiges gemischt-ganzzahliges Modell kann mit den Vektoren c_t , b_t und Matrizen $A_{t\tau}$, die als Datensätze zu verstehen sind, sowie den Polyedern mit Ganzzahligkeitsforderungen X_t für $\tau = 1, \dots, t$ und $t = 1, \dots, T$ wie folgt angesetzt werden:

$$\min_{x_1, \dots, x_T} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{t=1}^T c_t^\top x_t \quad : \quad \sum_{\tau=1}^t A_{t\tau} \leq b_t \\ x_t \in X_t, \quad t = 1, \dots, T \end{array} \right\}$$

Alle zuvor angesprochenen Größen sind dabei mit passender Dimensionierung ausgestattet. Voraussetzend, dass die obigen Datensätze zufallsbehaftet sind, wird ein auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definierter stochastischer Prozess $\{\xi_t\}_{t=1}^T$ betrachtet. Man gelangt so zu einem mehrstufigen stochastischen gemischt-ganzzahligen Modell. Ein solches kann, wenn man den rein erwartungswertbasierten Ansatz zugrunde legt, wie folgt dargestellt werden:

$$\min_{x_1, \dots, x_T} \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \sum_{t=1}^T c_t(\xi_t)^\top x_t \mathbb{P}(d\omega) \quad : \quad \sum_{\tau=1}^t A_{t\tau}(\xi_t) \leq b_t(\xi_t) \\ x_t \in X_t, \quad t = 1, \dots, T \end{array} \right\}$$

Dabei wird zusätzlich angenommen, dass die aufgrund ihrer Zufallsabhängigkeit nun vorliegenden Funktionen c_t , b_t und $A_{t\tau}$ für $\tau = 1, \dots, t$ und $t = 1, \dots, T$ affin-linear sind. Bisher wurden keinerlei Einschränkungen vorgenommen, inwieweit sich zufällige Ereignisse der einzelnen Stufen beeinflussen dürfen. So können zwei Zufallsvariablen ξ_t und $\xi_{t'}$ mit $t, t' \in \{1, \dots, T\}$ und $t \neq t'$ durchaus voneinander abhängig sein. Eine Abhängigkeit der zufälligen Ereignisse von den Entscheidungen ist, wie im zweistufigen Fall auch, nicht zugelassen. Bei einer zu treffenden

Entscheidung in einer Stufe $1 \leq t \leq T$ können bis hierhin aber die gesamten Informationen des stochastischen Prozesses genutzt werden, so dass die Entscheidungsfindung in die letzte Stufe T verlegt wird. Es soll nun eine Abfolge nichtantizipierender Entscheidungen getroffen werden, wobei o.B.d.A. vorausgesetzt wird, dass die Entscheidung in der ersten Stufe zufallsunabhängig getroffen werden kann, d.h.:

$$\begin{aligned} & \text{entscheide } x_1 \rightarrow \text{beobachte } \xi_2 \rightarrow \text{entscheide } x_2(x_1, \xi_2) \\ \rightarrow & \dots \\ \rightarrow & \text{beobachte } \xi_T \rightarrow \text{entscheide } x_T(x_1, \dots, x_{T-1}, \xi_2, \dots, \xi_T) \end{aligned}$$

Betrachtet man die σ -Algebren $\mathcal{F}_t := \sigma(\xi_1, \dots, \xi_t)$ für $1 \leq t \leq T$, so gilt $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{t+1}$ für alle $t = 1, \dots, T-1$, da die verfügbaren Informationen im Laufe der Zeit zunehmen und sich die σ -Algebren dadurch verfeinern. Gemäß vorhergehender Voraussetzung ist $\mathcal{F}_1 = \{\Omega, \emptyset\}$. Weiter soll $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$ gelten. Um tatsächlich die gewünschte Reihenfolge von Entscheidungen und Beobachtungen einhalten zu können, muss zum Zeitpunkt $t \in \{1, \dots, T\}$ die Entscheidungsvariable x_t \mathcal{F}_t -meßbar sein. Diese Meßbarkeitsbedingung kann mathematisch dargestellt werden, doch wird an dieser Stelle auf deren Darstellung aufgrund der hierfür erforderlichen zusätzlichen Betrachtungsweisen nicht näher eingegangen und stattdessen auf [6, 33, 34] verwiesen. Die Meßbarkeitsbedingungen führen auf zusätzliche lineare Restriktionen. Insgesamt gelangt man so zu dem gewünschten mehrstufigen gemischt-ganzzahligen stochastischen Optimierungsmodell, welches die Reihenfolge von Entscheidungen und Beobachtungen einhält. Die Miteinbeziehung von risikoaversen Modellierungsansätzen gestaltet sich im mehrstufigen Fall deutlich komplexer. Diese Thematik wird in [5, 20, 34, 33, 58] näher behandelt.

4.4 Anwendungen

Die in Kapitel 7 aufgezeigten numerischen Beispiele konzentrieren sich auf die Anwendung des Zweistufenansatzes. Dessen Anwendbarkeit auf die in Kapitel 2 dargelegten Optimierungsmodelle soll nun überprüft werden.

Einspeisungsoptimierung Man geht davon aus, dass für den Zeitraum $T = \{0, \dots, t_{max}\}$ bis zu dem Zeitpunkt $t^* \in T$ die Eingangsdaten sicher sind und ab dem Zeitpunkt $t^* + 1$ Unsicherheiten auftreten. Somit liegt eine Zerlegung des Zeitraumes in die Stufen $T_1 = \{0, \dots, t^*\}$ und $T_2 = \{t^* + 1, \dots, t_{max}\}$ vor. Gegeben sind dann die auf dem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ definierten Zufallsvariablen

$$\begin{aligned} P_{D_k}^{(t)} &: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad \forall k \in V \quad \forall t \in T_2, \\ P_{G_k}^{max,(t)} &: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad \forall k \in V' \quad \forall t \in T_2, \\ d_{kl}^{max,(t)} &: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad \forall kl \in E \quad \forall t \in T_2, \end{aligned}$$

die zufallsbehaftete Eingangsdaten der zweiten Stufe modellieren. Die maximal möglichen Einspeisungen der Generatoren und maximal möglichen Übertragungsfähigkeiten der Leitungen werden hier, im Gegensatz zur ursprünglichen Modellierung, als zeitabhängig betrachtet, um eine genauere Abbildung des Zufalls zuzulassen. Weiter können die Produktions- und Transmissionskosten in der zweiten Stufe als zufallsbehaftet angesehen werden. Bei Verwendung der IG-Modellierung kann sicherlich der Zusammenhang $P_D^{(t)} = \sum_{k \in V} P_{D_k}^{(t)}$ ausgenutzt werden.

Optimaler Ausbau eines Energieübertragungssystems Das vorgestellte Modell zum Ausbau des elektrischen Energieübertragungssystems findet vor allem dann eine praktische Anwendung, wenn Lastdaten und Produktionskosten als stochastisch angenommen werden. Die Stufentrennung ist hier grundlegend verschieden zur reinen stochastischen Einspeisungsoptimierung. Hier sind sämtliche Variablen, die einen Netzausbau beschreiben, Erststufenvariablen, wohingegen alle übrigen Zweitstufenvariablen sind. Der Netzausbau findet vollständig in der ersten Stufe statt. Die Deckung der elektrischen Last wird in der zweiten Stufe vorgenommen. Für die zweite Stufe wird in der Regel ein langer Zeitraum, der Jahrzehnte simuliert, angesetzt.

Bemerkungen Offenbar hat eine Produktionsentscheidung in der ersten Stufe nur dann Auswirkungen auf die zweite, wenn die Zeitstufen miteinander verkoppelt

sind, da sonst eine getrennte Minimierung über jede einzelne Stufe erfolgen könnte. Verkopplungen der Zeitstufen treten bei einer Einspeisungsoptimierung durch das Vorhandensein von Mindestlaufzeiten und Mindeststillstandzeiten, aber auch durch die Notwendigkeit der Berücksichtigung von Leistungsgradienten auf. Bei der Bestimmung des optimalen Ausbaus eines elektrischen Energieübertragungssystems ist die Verkopplung noch stärker, da die Art der Deckung der elektrischen Last in der zweiten Stufe zwar zum einen von den Lastwerten, aber vor allem auch von dem zur Verfügung stehenden elektrischen Energieübertragungssystem abhängt. Bei der reinen stochastischen Einspeisungsoptimierung kann der Zufall realistischer über den Mehrstufenansatz modelliert werden, in dem hier lediglich ein kurzer Einblick gegeben wurde. Doch wurde während des Entstehens von [33] auch der Fortschritt der hier vorliegenden Arbeit beachtet. Der DC-Modellierungsansatz fand so auch in [33] in einigen numerischen Testrechnungen seine Verwendung, deren Ergebnisse in Kapitel 7 in Auszügen aufgezeigt werden.

Kapitel 5

Dekompositionsverfahren

Mit steigender Anzahl von Szenarien wird das Lösen der äquivalenten Darstellungen für die zweistufigen stochastischen Optimierungsmodelle, die im vorhergehenden Kapitel vorgestellt wurden, zunehmend schwieriger. Zum einen nimmt der Lösungsaufwand für die relaxierten Probleme aufgrund der mit der Szenarioanzahl steigenden Anzahl von Restriktionen zu und zum anderen kann die wachsende Anzahl ganzzahliger Variablen die Größe der Branch&Bound-Bäume enorm beeinflussen. Dies kann insgesamt deutliche Auswirkungen auf die Rechenzeit haben, die zur Ermittlung eines zulässigen Punktes akzeptabler Güte benötigt wird. Im Folgenden werden Möglichkeiten angesprochen, wie trotz wachsender Szenarioanzahl derartige Modelle behandelbar bleiben. Hierzu wird in Abschnitt 5.1 ein Dekompositionsverfahren für die zweistufige stochastische gemischt-ganzzahlig lineare Modellklasse vorgestellt. Abschnitt 5.2 zeigt auch ein Dekompositionsverfahren für die zweistufige stochastische gemischt-ganzzahlig konvexe Modellklasse auf. Bei diesen Algorithmen werden spezielle Strukturen der äquivalenten Darstellungen ausgenutzt. Die Bestimmung einer Lösung kann so bei hoher Szenarioanzahl deutlich effektiver gestaltet werden, als dies bei Anwendung von Standardverfahren der Fall wäre.

5.1 Gemischt-ganzzahlige lineare Modellklassen

Die für die zweistufige stochastische gemischt-ganzzahlige lineare Modellklasse anwendbare Szenariodekomposition kann beispielsweise [12, 45] entnommen werden. Da diese in Abschnitt 5.2 auch bei der Entwicklung eines Algorithmus für die zweistufige stochastische gemischt-ganzzahlige konvexe Modellklasse eine entscheidende Rolle spielt, wird sie nachfolgend vorgestellt. Prinzipiell weist diese in ihrem algorithmischen Ablauf eine ähnliche Struktur wie das Branch&Bound-Verfahren auf, doch nutzt sie auch heuristische Ansätze. Nachfolgend werden einige Bezeichnungen zwecks Formulierung des vollständigen Algorithmus eingeführt. Es wird mit \mathcal{P} die Liste offener Probleme, mit $\varphi_{LB}(P)$ eine untere Schranke für das Problem $P \in \mathcal{P}$ und mit $\bar{\varphi}$ die momentan beste obere Schranke für das allgemeine Erwartungswert-Risiko-Modell (4.5), an dem das Dekompositionsverfahren erläutert werden soll, bezeichnet. Falls das Problem $P \in \mathcal{P}$ unzulässig ist, so wird die untere Schranke mit $\varphi_{LB}(P) := +\infty$ definiert. Weiter bezeichnet $\tau \geq 0$ den relativen Toleranzparameter, mit dessen Hilfe die Güte von durch den Algorithmus gefundenen zulässigen Punkten bewertet wird, und \mathcal{Z}_P den Zulässigkeitsbereich eines Problems $P \in \mathcal{P}$. Die Szenariodekomposition wird mit der unteren Schranke $\underline{\varphi} \in \{\mathbb{R}, +\infty\}$ initialisiert, wobei $+\infty$ gewählt wird, wenn keine untere Schranke angegeben werden kann. Der Algorithmus gestaltet sich wie folgt:

Algorithmus 5.1 (Szenariodekomposition)

(S0) **Initialisierung**

Setze $\mathcal{P} := \{(4.5)\}$ und $\bar{\varphi} = +\infty$.

(S1) **Terminierung**

Wenn $\underline{\varphi} \neq +\infty$ und $\frac{\bar{\varphi} - \underline{\varphi}}{\underline{\varphi}} \leq \tau$ oder $\mathcal{P} = \emptyset$, dann terminiere mit dem \bar{x} , für das $\bar{\varphi} = Q_{\mathcal{E}}(\bar{x}) + \rho \cdot Q_{\mathcal{R}}(\bar{x})$ bzw. stelle die Unzulässigkeit von (4.5) fest.

(S2) **Schrankenbildung**

Wähle und entferne Problem $P \in \mathcal{P}$. Berechne untere Schranke $\varphi_{LB}(P)$, setze $\underline{\varphi} := \min\{\varphi_{LB}(P), \underline{\varphi}\}$ und bestimme einen Punkt $\bar{x} \in \mathcal{Z}_P$. Falls kein zulässiger Punkt $\bar{x} \in \mathcal{Z}_P$ gefunden werden kann, dann gehe zu

(i) (S1), wenn $\varphi_{LB}(P) = +\infty$.

(ii) (S4), wenn $\varphi_{LB}(P) \neq +\infty$.

(S3) **Abschneiden**

Wenn $\varphi_{LB}(P) = Q_{\mathcal{E}}(\bar{x}) + \rho \cdot Q_{\mathcal{R}}(\bar{x})$ (Optimalität) oder $\varphi_{LB}(P) > \bar{\varphi}$ (Inferiorität), dann gehe zu (S1). Wenn $Q_{\mathcal{E}}(\bar{x}) + \rho \cdot Q_{\mathcal{R}}(\bar{x}) < \bar{\varphi}$, dann $\bar{\varphi} := Q_{\mathcal{E}}(\bar{x}) + \rho \cdot Q_{\mathcal{R}}(\bar{x})$.

(S4) **Verzweigung**

Bilde zwei neue Teilprobleme durch Partitionierung der zulässigen Menge von P . Füge diese Teilprobleme zu \mathcal{P} hinzu und gehe zu (S1).

Für eine Partitionierung der Zulässigkeitsmenge der ersten Stufe in (S4) werden, um gemischt-ganzzahlige lineare Teilprobleme wahren zu können, nur lineare Nebenbedingungen verwendet. Konnte in (S2) beispielsweise zu einem Problem $P \in \mathcal{P}$ kein zulässiger Punkt $\bar{x} \in \mathcal{Z}_P$ bestimmt werden, so wird eine Komponente $i \in \mathbb{N}$ des Vektors x gewählt (bezeichnet mit $x_{(i)}$) und zwei neue Teilprobleme durch Hinzufügen von je einer der nachfolgenden Restriktionen zu P generiert. Diese haben die Beschreibung:

$$\begin{aligned} x_i \in \mathbb{Z} \Rightarrow \quad & x_{(i)} \leq \lfloor \bar{x}_{(i)} \rfloor \\ & x_{(i)} \geq \lfloor \bar{x}_{(i)} \rfloor + 1 \\ x_i \in \mathbb{R} \Rightarrow \quad & x_{(i)} \leq \lfloor \bar{x}_{(i)} \rfloor - \epsilon \\ & x_{(i)} \geq \lfloor \bar{x}_{(i)} \rfloor + \epsilon \end{aligned}$$

In Schritt (S2) wird dabei immer ein \bar{x} generiert, welches jedoch nicht zwingend $\bar{x} \in \mathcal{Z}_P$ erfüllen muß. Der Parameter $\epsilon > 0$ ist geeignet vorzugeben und verhindert so ein möglicherweise unendliches Verzweigen auf stetigen Komponenten. Die Qualität des erzeugten Punktes $\bar{x} \in \mathcal{Z}_P$ kann durch die während des Algorithmus generierte Schranke $\underline{\varphi}$ bewertet werden. Zur Verdeutlichung der Schrankenbildung in (S2) wird das Erwartungswert-Risiko-Modell mit dem erwarteten Überschuss als Risikomaß und der äquivalenten Formulierung (4.7) betrachtet. Die Szenario-dekomposition kann analog zu den nachfolgenden Darstellungen auch auf das rein erwartungswertbasierte Modell bzw. auf das Erwartungswert-Risiko-Modell mit

dem Risikomaß Überschusswahrscheinlichkeit angewendet werden. Zunächst werden Kopien x_j für $j \in \{1, \dots, N\}$ von x eingeführt und (4.7) reformuliert, indem zusätzlich die Nebenbedingung $x_1 = \dots = x_N$ aufgenommen wird. Es wird nun davon ausgegangen, dass diese Restriktion über $\sum_{j=1}^N H_j x_j = 0$ mit geeigneten Matrizen $H_j \in \text{Mat}(l, m_1, \mathbb{R})$ dargestellt ist. Es ergibt sich somit:

$$\min_{x, y, v} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^N (c^\top x_j + \pi_j d_j^\top y_j) + \rho \cdot \sum_{j=1}^N \pi_j v_j \quad : \quad T_j x_j + W_j y_j = h_j \\ c^\top x_j + d_j^\top y_j - \eta \leq v_j \\ \sum_{j=1}^N H_j x_j = 0 \\ x_j \in X, y_j \in Y, v_j \in \mathbb{R}_+ \\ j = 1, \dots, N \end{array} \right\} \quad (5.1)$$

Ohne die Bedingung $\sum_{j=1}^N H_j x_j = 0$, der Kopplungsnebenbedingung, wäre die Reformulierung (5.1) separabel bzgl. jedem einzelnen Szenario. Dies ist die bereits zu Beginn des Kapitels angesprochene spezielle Struktur der zweistufigen stochastischen gemischt-ganzzahligen linearen Modelle. Durch Entfernen der Kopplungsnebenbedingung aus (5.1) ist die so entstehende Relaxierung, wenn zudem die dadurch möglich gewordene Vertauschung der Summenbildung mit der Minimierungsaufgabe vorgenommen wird (*Dekompositionseffekt*), über

$$\sum_{j=1}^N P_j \quad (5.2)$$

mit

$$P_j = \min_{x_j, y_j, v_j} \left\{ \begin{array}{l} c^\top x_j + \pi_j d_j^\top y_j + \rho \cdot \pi_j v_j \quad : \quad T_j x_j + W_j y_j = h_j \\ c^\top x_j + d_j^\top y_j - \eta \leq v_j \\ x_j \in X, y_j \in Y, v_j \in \mathbb{R}_+ \end{array} \right\}$$

gegeben. Durch Minimierung obiger Relaxierung werden eine untere Schranke für (5.1) und Lösungen $x_j^* \in X$ für $j \in \{1, \dots, N\}$ erzielt, die sicherlich nicht notwendigerweise die Kopplungsnebenbedingung erfüllen. Von daher werden Heuristiken angewandt, wie z.B. der gewichtete Durchschnitt $\bar{x} = \sum_{j=1}^N \pi_j x_j^*$, um Zulässigkeit

herzustellen. Bei Ganzzahligkeitsforderungen werden die entsprechenden Komponenten des Vektors \bar{x} gerundet. Zur Verbesserung der Schrankenbildung kann auch der Lagrange-Dual-Ansatz verfolgt werden. Mit den für $j = 1, \dots, N$ definierten Funktionen

$$L_j(x_j, y_j, v_j, \lambda) := \pi_j(c^\top x_j + d_j^\top y_j + \rho v_j) + \lambda^\top H_j x_j$$

ist die Lagrange-Funktion über

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{v}, \lambda) = \sum_{j=1}^N L_j(x_j, y_j, v_j, \lambda)$$

gegeben. Das Lagrange-Dual Problem ergibt sich zu:

$$\max_{\lambda} \{D(\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}^l\} \quad (5.3)$$

Hierbei ist

$$D(\lambda) = \min_{x_j, y_j, v_j} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^N L_j(x_j, y_j, v_j, \lambda) : T_j x_j + W_j y_j = h_j \\ c^\top x_j + d_j^\top y_j - \eta \leq v_j \\ x_j \in X, y_j \in Y, v_j \in \mathbb{R}_+ \\ j = 1, \dots, N \end{array} \right\}.$$

Obiges Optimierungsproblem kann wieder bzgl. jedem einzelnen Szenario separiert werden. Es gilt somit $D(\lambda) = \sum_{j=1}^N D_j(\lambda)$ mit

$$D_j(\lambda) = \min_{x_j, y_j, v_j} \left\{ \begin{array}{l} L_j(x_j, y_j, v_j, \lambda) : T_j x_j + W_j y_j = h_j \\ c^\top x_j + d_j^\top y_j - \eta \leq v_j \\ x_j \in X, y_j \in Y, v_j \in \mathbb{R}_+ \end{array} \right\}$$

für $j = 1, \dots, N$. Man sieht leicht ein, dass $D : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ eine stückweise lineare konkave Funktion ist. Da $\max\{D(\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}^l\} = -\min\{-D(\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}^l\}$, gilt es, die stückweise lineare konvexe Funktion $-D$ zu minimieren. Mit Hilfe eines Subgradientenverfahrens lässt sich diese Aufgabe, viel effektiver aber noch mit ConicBundle-Verfahren [35], lösen.

Bemerkung 5.1

Algorithmus 5.1 ist endlich, wenn $X \subset \mathbb{Z}^{m_1}$ und beschränkt ist. Ist X jedoch gemischt-ganzzahlig, so benötigt man ein Abbruchkriterium, um endloses Verzweigen auf stetigen Komponenten zu verhindern, welches bei einer Wahl von $\epsilon > 0$ gegeben ist.

5.2 Gemischt-ganzzahlige konvexe Modellklassen

Während sich die Szenariodekomposition auf zweistufige stochastische gemischt-ganzzahlige lineare Problemklassen anwenden lässt, wie sich diese bei Zugrundelegen der IG- oder DC-Modellierung mit stochastischen Eingangsdaten ergeben, soll im Folgenden ein Dekompositionsverfahren für zweistufige stochastische gemischt-ganzzahlige konvexe Optimierungsmodelle angesprochen werden, um das RDCOL-Modell mit stochastischen Eingangsdaten behandeln zu können. Vorgestellt wird unter Nutzung des äußeren Approximationsverfahrens aus Abschnitt 3.2 ein auf Probleme gemäß Definition 4.3 anwendbarer Algorithmus. Diese Problemklasse wird hier nochmals dargestellt:

$$\min_{x,y} \left\{ \begin{array}{l} c^\top x + d(\omega)^\top y \quad : \quad T(\omega)x + W(\omega)y = h(\omega) \\ x \in X \cap E, y \in Y \cap F \end{array} \right\} \quad (5.4)$$

Dabei sind $X \subseteq \mathbb{R}^{m_1}$, $Y \subseteq \mathbb{R}^{m_2}$ Polyeder mit Ganzzahligkeitsforderungen und $E \subseteq \mathbb{R}^{m_1}$, $F \subseteq \mathbb{R}^{m_2}$ konvexe Mengen, die keine Polyedergestalt haben müssen. Ferner wird vorausgesetzt, dass konvexe und differenzierbare Funktionen $e_k : \mathbb{R}^{m_1} \rightarrow \mathbb{R}$ für $k = 1, \dots, p$ und $f_l : \mathbb{R}^{m_2} \rightarrow \mathbb{R}$ für $l = 1, \dots, q$ existieren mit $E = \{x \in \mathbb{R}^{m_1} : e_k(x) \leq 0, k = 1, \dots, p\}$ und $F = \{y \in \mathbb{R}^{m_2} : f_l(y) \leq 0, l = 1, \dots, q\}$. Das für Modell (5.4) entwickelte Dekompositionsverfahren wird bei Zugrundelegung des rein erwartungswertbasierten Ansatzes erläutert. Die Modellbeschreibung ist für diskret verteilte Zufallsvariablen dann über

$$\min_{x,y} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^N (c^\top x + \pi_j d_j^\top y_j) \quad : \quad T_j x + W_j y_j = h_j \\ x \in X \cap E, y_j \in Y \cap F \\ j = 1, \dots, N \end{array} \right\} \quad (5.5)$$

gegeben. Da die Mengen E und F zwar als konvex, aber nicht in Polyederdarstellung vorausgesetzt sind, kann das Modell 5.5, bei Anwendung der RDCOL-Modellierung der Fall, in gemischt-ganzzahliger nichtlinearer, wohl aber konvexer Beschreibung vorliegen. Wiederum werden gemäß Abschnitt 3.2, angepasst auf die hier vorliegende Modellklasse (5.5), die nachfolgenden Voraussetzungen getroffen:

(i) Es existiert ein Polytop $\mathcal{Z}_{\overline{M}_0}$ mit

$$\mathcal{Z}_{\overline{M}_0} \supset \left. \begin{aligned} (x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{N \cdot m_2} \quad : \quad & e_k(x) \leq 0, \quad k = 1, \dots, p \\ & f_l(y_j) \leq 0, \quad l = 1, \dots, q \\ & j = 1, \dots, N \end{aligned} \right\}.$$

(ii) Es existiert ein $K \in \mathbb{R}$ mit $\|\nabla e_k(x)\| \leq K$ und $\|\nabla f_l(y_1)\| \leq K$ für alle $(x, \mathbf{y}) \in \mathcal{Z}_{\overline{M}_0}$ mit $1 \leq k \leq p$ und $1 \leq l \leq q$.

Das Masterproblem in einem Schritt $\xi \in \mathbb{N}_0$ wird über

$$(M_\xi) \quad \left. \begin{aligned} \min_{x, \mathbf{y}} \left\{ c^\top x + \sum_{j=1}^N \pi_j d_j^\top y_j \quad : \quad & T_j x + W_j y_j = h_j \\ & x \in X, \quad y_j \in Y \\ & (x, y_1, \dots, y_N) \in \mathcal{Z}_{\overline{M}_\xi} \\ & j = 1, \dots, N \end{aligned} \right\}$$

angesetzt. Wiederum wird ein für (M_ξ) zulässiger Punkt $(\tilde{x}_\xi, \tilde{y}_{1,\xi}, \dots, \tilde{y}_{N,\xi})$ betrachtet, der zu vorgegebener Toleranz $\tau_\xi \geq 0$ und der für (M_ξ) gültigen Schranke $\underline{\varphi}_\xi$ die Toleranzbedingung

$$\frac{c^\top \tilde{x}_\xi + \sum_{j=1}^N \pi_j d_j^\top \tilde{y}_{j,\xi} - \underline{\varphi}_\xi}{\underline{\varphi}_\xi} \leq \tau_\xi \quad (5.6)$$

erfüllt. Die Mengen $\mathcal{Z}_{\overline{M}_\xi}$ werden nun analog zu den Masterproblemen aus Algorithmus 3.1 aufgebaut. Hier gilt es aber, zu überprüfen, ob die nichtlinearen Restriktionen der ersten Stufe durch die Erststufenentscheidung erfüllt wird bzw. ob die nichtlinearen Restriktionen der zweiten Stufe durch alle möglichen Zweitstufenentscheidungen erfüllt werden. In einem Schritt $\xi \in \mathbb{N}$ sind die Mengen dann über den Zusammenhang

$$\mathcal{Z}_{\overline{M}_{\xi+1}} = \mathcal{Z}_{\overline{M}_{\xi}} \cap \left. \begin{array}{l} \left\{ (x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{N \cdot m_2} : \begin{array}{l} e_v(\tilde{x}_{\xi}) + \nabla e_v(\tilde{x}_{\xi})(x - \tilde{x}_{\xi}) \leq 0 \\ f_{w_j}(\tilde{y}_{j,\xi}) + \nabla f_{w_j}(\tilde{y}_{j,\xi})(y_j - \tilde{y}_{j,\xi}) \leq 0 \\ \forall v \in \{k \in \{1, \dots, p\} : e_k(\tilde{x}_{\xi}) > 0\} \\ \forall w_j \in \{l_j \in \{1, \dots, q\} : f_{l_j}(\tilde{y}_{j,\xi}) > 0\} \\ j = 1, \dots, N \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

gegeben. Da $\mathcal{Z}_{\overline{M}_0}$ als Polytop vorausgesetzt ist, ist es beschränkt und somit auch jedes in einem Schritt $\xi \in \mathbb{N}_0$ gegebene Masterproblem (M_{ξ}) beschränkt. Die Masterprobleme (M_{ξ}) werden nun mit der Szenariodekomposition behandelt, um deren günstige strukturellen Eigenschaften ausnutzen zu können. Der Algorithmus gestaltet sich dann wie folgt:

Algorithmus 5.2

(S0) **Initialisierung**

Bestimme ein Polytop $\mathcal{Z}_{\overline{M}_0}$, wähle $\tau_0 \geq 0$, $\underline{\varphi}_0 := +\infty$ und setze $\xi = 0$.

(S1) **Optimierung**

Initialisiere die Szenariodekomposition mit der unteren Schranke $\underline{\varphi}_{\xi}$, dem Toleranzparameter τ_{ξ} und wende sie auf das Masterproblem (M_{ξ}) an.

(S2) **Terminierung**

Wenn $e_k(\tilde{x}_{\xi}) \leq 0$ für alle $k = 1, \dots, p$ und $f_l(\tilde{y}_{j,\xi}) \leq 0$ für alle $l = 1, \dots, q$ und $j = 1, \dots, N$ oder $\mathcal{Z}_{M_{\xi}} = \emptyset$, dann terminiere.

(S3) **Aufdatierung**

Wähle $0 \leq \tau_{\xi+1} \leq \tau_{\xi}$, setze $\underline{\varphi}_{\xi+1} := \underline{\varphi}_{\xi}$, $\xi := \xi + 1$ und gehe zu (S1).

Nach Konstruktion des Algorithmus gilt hier Satz 3.4 analog. Wenn das Verfahren nach endlich vielen Schritten stoppt, so wurde ein zulässiger Punkt akzeptabler Güte gefunden oder die Unzulässigkeit von Modell (5.5) festgestellt. Im Falle der Nichtterminierung wird unter Beachtung des Analogons zu Satz 3.5 und Bemerkung 5.1 festgehalten:

Bemerkung 5.2

Wenn Algorithmus 5.2 die unendliche Folge $(\tilde{x}_\xi, \tilde{y}_{1,\xi}, \dots, \tilde{y}_{N,\xi})$ erzeugt, $\{\tau_\xi\} \rightarrow 0$ und $X \subset \mathbb{Z}^{m_1}$ ist, so ist jeder Häufungspunkt der Folge eine Lösung von (5.5). Ist X jedoch gemischt-ganzzahlig, so ist zu einem Schritt $\xi \in \mathbb{N}_0$ in (S1) die Bestimmung eines Punktes, der mit dem Toleranzparameter τ_ξ Bedingung (5.6) erfüllt, nicht unbedingt möglich. Dies hängt mit dem gemäß Bemerkung 5.1 in der Szenariodekomposition verwendeten Abbruchkriteriums zur Verhinderung eines unendlichen Verzweigens auf stetigen Komponenten zusammen. Unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass für fixierte Toleranzparameter $\tau_\xi := \tau$ für alle $\xi \in \mathbb{N}_0$ in (S1) ein (5.6) erfüllender Punkt bestimmt werden kann, ist sicherlich jeder Häufungspunkt $(\tilde{x}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_N)$ der Folge $(\tilde{x}_\xi, \tilde{y}_{1,\xi}, \dots, \tilde{y}_{N,\xi})$ zulässig für (5.5) und erfüllt die Bedingung $c^\top \tilde{x} + \sum_{j=1}^N \pi_j d_j^\top \tilde{y}_j \leq (1 + \tau)(c^\top x^* + \sum_{j=1}^N \pi_j d_j^\top y_j^*)$, wobei $(x^*, y_1^*, \dots, y_N^*)$ die Optimallösung zu (5.5) bezeichnet.

Kapitel 6

Eine Heuristik für das Wechselstrommodell

In den beiden vorhergehenden Kapiteln ist die Modellklasse des AC-Modells aufgrund ihrer gemischt-ganzzahligen nichtkonvexen Darstellung vernachlässigt worden. Doch gerade weil diese Art der Modellierung die physikalischen Zusammenhänge exakt wiedergibt, soll sie dahingehend weiter untersucht werden, ob zumindest heuristische Ansätze entwickelt werden können, um gute zulässige Punkte bestimmen zu können. So könnten auch anhand einiger Beispielrechnungen die reduzierten Modellformulierungen, d.h. die IG-, DC- und DCOL-Modellierung, dem AC-Modell gegenübergestellt werden. Zunächst wird in Abschnitt 6.1 nochmals auf die in Abschnitt 2.4 zurückgestellte Herstellung von Zusammenhängen zwischen dem DC- und AC-Modell eingegangen, um so neben der nach Satz 2.2 vorhandenen Schranke eine weitere und bessere konstruieren zu können. In Abschnitt 6.2 wird neben dem bisherigen AC-Modell eine transformierte Darstellung vorgestellt, die auf in den Ingenieurwissenschaften angewandten Verfahren zur Netzzustandsbestimmung aufbaut. Abschnitt 6.3 stellt schließlich heuristische Ansätze für das gemischt-ganzzahlige nichtlineare AC-Modell sowohl für deterministische als auch für stochastische Datenlagen vor.

6.1 Güteabschätzungen

Eine weitere untere Schranke lässt sich für eine Darstellung des AC-Modells, in der die Binärvariablen fixiert sind, unter Zuhilfenahme des DC-Modells konstruieren. Zunächst werden Transmissionskosten und Anfahrkosten ignoriert, d.h. es ist $E' = \emptyset$ und $\gamma_k = 0 \forall k \in V'$. Wenn unter diesen Voraussetzungen z^{DC} eine untere Schranke von z^{AC} darstellt, so gilt die nachfolgende Äquivalenzkette ([.] bezeichnet wieder den Wert der betreffenden Variablen bzgl. der Optimallösung):

$$\begin{aligned}
& z^{DC} \leq z^{AC} \\
\Leftrightarrow & \sum_{t \in T} \sum_{k \in V'} C_k([P_{G_k}^{(t)}]_{DC}, [s_k^{(t)}]_{DC}) \leq \sum_{t \in T} \sum_{k \in V'} C_k([P_{G_k}^{(t)}]_{AC}, [s_k^{(t)}]_{AC}) \\
\Leftrightarrow & \sum_{t \in T} \sum_{k \in V'} C_k(P_{D_k}^{(t)} + \sum_{l \in N_k} [p_{kl}^{(t)}]_{DC}, [s_k^{(t)}]_{DC}) \\
& \leq \\
& \sum_{t \in T} \sum_{k \in V'} C_k(P_{D_k}^{(t)} + \sum_{l \in N_k} [p_{kl}^{(t)}]_{AC}, [s_k^{(t)}]_{AC}) \\
\Leftrightarrow & \sum_{t \in T} \sum_{k \in V'} \left(\alpha_k \sum_{l \in N_k} [p_{kl}^{(t)}]_{DC} + \beta_k [s_k^{(t)}]_{DC} \right) \\
& \leq \\
& \sum_{t \in T} \sum_{k \in V'} \left(\alpha_k \sum_{l \in N_k} [p_{kl}^{(t)}]_{AC} + \beta_k [s_k^{(t)}]_{AC} \right)
\end{aligned}$$

Die Kette von Äquivalenzen wäre wahrheitsgemäß, wenn man allgemein die Bedingung

$$\sum_{k \in V'} \left(\alpha_k \sum_{l \in N_k} [p_{kl}^{(t)}]_{DC} + \beta_k [s_k^{(t)}]_{DC} \right) \leq \sum_{k \in V'} \left(\alpha_k \sum_{l \in N_k} [p_{kl}^{(t)}]_{AC} + \beta_k [s_k^{(t)}]_{AC} \right) \quad \forall t \in T \quad (6.1)$$

nachweisen könnte. An die DC-Modellierung erinnernd ist bekannt, dass für alle $kl \in E$ und $t \in T$ der Zusammenhang $[p_{kl}^{(t)}]_{DC} + [p_{lk}^{(t)}]_{DC} = 0$ gilt. Um diesen Sachverhalt auszunutzen und ohne die DC- und AC-Modellierung in ihrer Art zu verändern, lässt sich jeder reine Lastknoten aus der Menge $V \setminus V'$ in einen Einspeisungsknoten transformieren. Man setzt hierfür an den Knoten, die zwar nur Lastknoten sind, aber an denen nun ein gedachter Generator angenommen

werden soll, die zugehörigen Minimal- und Maximaleinspeisungswerte sowohl für Wirkleistungs- als auch Blindleistungseinspeisung auf Null, so dass folglich $V = V'$ gilt. Ferner bezeichnet die Menge V'' die tatsächlich vorhandenen Generatoren. Die zu (6.1) gleichwertige Bedingung lautet dann:

$$\sum_{k \in V} \left(\alpha_k \sum_{l \in N_k} [p_{kl}^{(t)}]_{DC} + \beta_k [s_k^{(t)}]_{DC} \right) \leq \sum_{k \in V} \left(\alpha_k \sum_{l \in N_k} [p_{kl}^{(t)}]_{AC} + \beta_k [s_k^{(t)}]_{AC} \right) \quad \forall t \in T$$

Es ist nicht gelungen, diese Bedingung nachzuweisen, so dass zwischen DC- und AC-Modell allgemein keine Relation hergestellt werden konnte. Für bestimmte Fälle, in denen die Kostenfunktionen und Schaltzustände der Energieerzeugungsanlagen speziell angesetzt werden, kann aber eine untere Schranke für das AC-Modell konstruiert werden. Man betrachte das nachfolgende Modell:

S-Modell: Erzeugung der Schranke

- (i) Verwende das DC-Modell mit $E' = \emptyset$ und $V' = V$.
- (ii) Benutze für alle $k \in V$ die Kostenfunktionen $\underline{C}_k(P_{G_k}, s_k) = \alpha P_{G_k} + \beta_k s_k$ mit $\alpha := \min\{\alpha_k : k \in V''\}$. Wähle $\beta_k > 0$ für alle $k \in V \setminus V''$.
- (iii) Füge die Restriktionen $s_k^{(t)} = [s_k^{(t)}]_{DC}$ ($s_k^{(t)} = [s_k^{(t)}]_{RDCOL}$) $\forall k \in V'' \forall t \in T$ hinzu.
- (iv) Setze $P_{G_k}^{min} = P_{G_k}^{max} = 0$ für alle $k \in V \setminus V''$.

In Abhängigkeit von der Wahl einer optimalen Schaltbelegung in Schritt (ii), wird auch von dem S(DC)- bzw. S(RDCOL)-Modell gesprochen. Aus beweistechnischen Gründen wird auch das nachfolgende Modell konstruiert:

SAC-Modell: beweistechnisch notwendig

- (i) Verwende das AC-Modell mit $E' = \emptyset$ und $V' = V$.
- (ii) Benutze für alle $k \in V$ die Kostenfunktionen $\underline{C}_k(P_{G_k}, s_k) = \alpha P_{G_k} + \beta_k s_k$ mit $\alpha := \min\{\alpha_k : k \in V''\}$. Wähle $\beta_k > 0$ für alle $k \in V \setminus V''$.

(iii) Füge die Restriktionen $s_k^{(t)} = [s_k^{(t)}]_{DC}$ ($s_k^{(t)} = [s_k^{(t)}]_{RDCOL}$) für alle $k \in V''$ $\forall t \in T$ hinzu.

(iv) Setze $F_{G_k}^{min} = F_{G_k}^{max} = Q_{G_k}^{min} = Q_{G_k}^{max} = 0$ für alle $k \in V \setminus V''$.

Aus den Annahmen (iv) folgt insbesondere, dass $[s_k^{(t)}]_S = [s_k^{(t)}]_{SAC} = 0$ für alle $k \in V \setminus V''$ und $t \in T$ gilt. Nun stellt der Optimalwert z^S des S-Modells bei Zulässigkeit eine untere Schranke für das SAC-Modell dar. Dies kann wie folgt verifiziert werden, wobei hier die optimale Schaltbelegung des DC-Modells verwendet wird:

$$\begin{aligned}
& z^S \leq z^{SAC} \\
\Leftrightarrow & \sum_{t \in T} \sum_{k \in V} \left(\alpha_k \sum_{l \in N_k} [p_{kl}^{(t)}]_S + \beta_k [s_k^{(t)}]_S \right) \\
& \leq \\
& \sum_{t \in T} \sum_{k \in V} \left(\alpha_k \sum_{l \in N_k} [p_{kl}^{(t)}]_{SAC} + \beta_k [s_k^{(t)}]_{SAC} \right) \\
\Leftarrow & \sum_{k \in V} \left(\alpha_k \sum_{l \in N_k} [p_{kl}^{(t)}]_S + \beta_k [s_k^{(t)}]_S \right) \\
& \leq \\
& \sum_{k \in V} \left(\alpha_k \sum_{l \in N_k} [p_{kl}^{(t)}]_{SAC} + \beta_k [s_k^{(t)}]_{SAC} \right) \quad \forall t \in T \\
\Leftrightarrow & \sum_{k \in V} \alpha \sum_{l \in N_k} [p_{kl}^{(t)}]_S + \sum_{k \in V''} \beta_k [s_k^{(t)}]_{DC} \\
& \leq \\
& \sum_{k \in V} \alpha \sum_{l \in N_k} [p_{kl}^{(t)}]_{SAC} + \sum_{k \in V''} \beta_k [s_k^{(t)}]_{DC} \quad \forall t \in T \\
\Leftrightarrow & 0 \leq \underbrace{\alpha \sum_{k \in V} \sum_{l \in N_k} [p_{kl}^{(t)}]_{SAC}}_{\geq 0} \quad \forall t \in T
\end{aligned}$$

Falls die RDCOL-Entscheidung im S-Modell zugrunde liegt, gelten die obigen Betrachtungen analog. Aufgrund der für das S-Modell fixierten Schaltbelegung, die auch beim SAC-Modell verwendet wird, sieht man sofort, dass auch $z^S \leq z^{SAC}$ gilt, wenn Anfahrkosten im S- und SAC-Modell beachtet werden. Transmissionskosten müssen aber im S-Modell ignoriert werden. Für die in Abschnitt 6.3 vorgestellten

heuristischen Lösungsverfahren wird das wie folgt definierte FAC-Modell bedeutsam sein. Auf die Annahme gedachter Generatoren, die lediglich für den Beweis des obigen Sachverhalts dienlich waren, wird verzichtet.

FAC-Modell

- (i) Verwende das AC-Modell.
- (ii) Füge die Restriktionen $s_k^{(t)} = [s_k^{(t)}]_{DC}$ ($s_k^{(t)} = [s_k^{(t)}]_{RDCOL}$) für alle $k \in V'$ und $t \in T$ hinzu.

Je nach Wahl der optimalen Schaltbelegung in Schritt (ii), wird von dem $FAC(DC)$ - oder $FAC(RDCOL)$ -Modell gesprochen. Sicherlich sind die Relationen $z^{AC} \leq z^{FAC}$, da die im FAC-Modell gewählte Schaltbelegung nicht optimal für das AC-Modell sein muss, und $z^{SAC} \leq z^{FAC}$ aufgrund der im SAC-Modell veränderten Kostenfunktionen erfüllt. Bei Zulässigkeit des S-Modells gilt somit der Zusammenhang

$$z^S \leq z^{SAC} \leq z^{FAC},$$

so dass z^S neben z^{RIG} eine untere Schranke für das FAC-Modell darstellt.

6.2 Ein Transformationsansatz

Neben dem in Abschnitt 2.2 dargestellten AC-Modell wird nachfolgend eine durch zusätzliche Annahmen äquivalente Reformulierung angesprochen. Diese transformiert das AC-Modell unter Verwendung einer klassischen Methode zur Netzzustandsbestimmung elektrischer Energieübertragungssysteme. Die Art der Netzzustandsbestimmung kommt in gängigen Softwarepaketen zur Lastflussberechnung, wie etwa dem PowerWorldSimulator [56], zum Einsatz. Das transformierte AC-Modell wird aber auch deswegen hier dargestellt, um aufzuzeigen, dass in dieser Arbeit die in den Ingenieurwissenschaften entwickelten Methoden und Verfahren eingehend analysiert und deren Anwendbarkeit auf die hier vorliegenden Problemstellungen überprüft wurde. Weiter soll abgewägt werden, ob diese veränderte

Repräsentation Vorteile gegenüber der bisherigen bietet. Die transformierte Darstellung nutzt zunächst eine kartesische Darstellungsform der komplexen Spannungen aus, so dass in der Folge eine mathematische Beschreibung der Lastflussgleichungen unter Verzicht auf trigonometrische Ausdrücke ermöglicht wird. Man ist weiter in der Lage, mit Hilfe des Newtonverfahrens eine Funktion anzugeben, die von den Wirkleistungseinspeisungen und betraglichen Spannungen an den spannungsgeregelten Erzeugungsanlagen (*jede Erzeugungsanlage, außer die am Slackknoten angeschlossene*) auf die Blindleistungseinspeisung der spannungsgeregelten Erzeugungsanlagen und auf die komplexe Einspeisung der Erzeugungsanlage am Slackknoten so abbildet, dass die Gleichungen (2.6)-(2.12) erfüllt sind. Der genaue Weg zu dieser Funktion wird aufgrund der hierfür notwendigen umfangreichen Betrachtungsweisen nicht näher erläutert, ist aber in [4, 8, 28] ausführlich dargestellt. Prinzipiell wird mit den Parametern

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{kl} + j\tilde{b}_{kl} &= -g_{kl} - jb_{kl} & k, l = 1, \dots, n \text{ mit } k \neq l, \\ \tilde{g}_{kl} + j\tilde{b}_{kl} &= \sum_{l \in N_k} (g_{kl} + j(b_{kl} + b_{kl}^0)) & k, l = 1, \dots, n \text{ mit } k = l\end{aligned}$$

und den Lastflussgleichungen

$$P_{G_k} - P_{D_k} - \sum_{l=1}^n (e_k(\tilde{g}_{kl}e_l - \tilde{b}_{kl}f_l) + f_k(\tilde{g}_{kl}f_l + \tilde{b}_{kl}e_l)) = 0 \quad \forall k \in V, \quad (6.2)$$

$$Q_{G_k} - Q_{D_k} - \sum_{l=1}^n (f_k(\tilde{g}_{kl}e_l - \tilde{b}_{kl}f_l) - e_k(\tilde{g}_{kl}f_l + \tilde{b}_{kl}e_l)) = 0 \quad \forall k \in V, \quad (6.3)$$

die jetzt in kartesischer Darstellung vorliegen, sowie den Bedingungen

$$U_k^2 - e_k^2 - f_k^2 = 0 \quad \forall k \in V$$

ein nichtlineares Gleichungssystem aufgestellt, welches mit dem Newton-Verfahren gelöst wird, so dass als Folge die in den Knoten $k \in V$ bisher unbekanntes Spannungen $\mathbf{U}_k = e_k + jf_k$ angegeben werden können. Da so die gesamte Spannungsverteilung bekannt ist, können die noch unbekanntes Größen, wie die Energieflüsse und Blindleistungseinspeisungen, schnell bestimmt werden. Man gelangt so zu stetig differenzierbaren Funktionen $L_{P_{G_1}}, L_{Q_{G_k}}$ für $k \in V'$ und $L_{d_{kl}^2}$ für $kl \in E$, die auf der Menge $D = (\times_{i \in V' \setminus \{1\}} [P_{G_i}^{min}, P_{G_i}^{max}]) \times (\times_{i \in V' \setminus \{1\}} [U_i^{min}, U_i^{max}])$ definiert sind,

und auf die Wirkleistungseinspeisung der Energieerzeugungsanlage am Slackknoten, die Blindleistungseinspeisungen der Energieerzeugungsanlagen und auf die Quadrate der Lastflüsse auf den jeweiligen Kanten abbilden. Das transformierte AC-Modell, im Folgenden mit TAC-Modell bezeichnet, kann so aufgebaut werden. Einzuhalten sind die Restriktionen

$$\begin{aligned} P_{G_k}^{min} \cdot s_k &\leq P_{G_k} \leq P_{G_k}^{max} \cdot s_k \quad \forall k \in V' \setminus \{1\}, \\ U_k^{min} &\leq U_k \leq U_k^{max} \quad \forall k \in V \setminus \{1\}, \end{aligned}$$

wobei die Energieerzeugungsanlage am Slackknoten jetzt keinen Einspeisungsgrenzen unterworfen wird (vgl. [8, 28]). Weiter ist mit dem Vektor P_G , der die einzelnen Wirkleistungseinspeisungsvariablen zusammenfasst, und mit dem Vektor U_G in analoger Definition die Nebenbedingung

$$L_{P_{G_1}}(P_G, U_G) \geq 0$$

zu erfüllen, da die Wirkleistungseinspeisung des Slackgenerators in der transformierten Darstellung keine Optimierungsvariable darstellt und sich erst als Resultat aus der Wahl der übrigen Optimierungsvariablen einstellt. Die Beschränkung der Blindleistungseinspeisungen führt auf

$$Q_{G_k}^{min} \leq L_{Q_{G_k}}(P_G, U_G) \leq Q_{G_k}^{max} \quad \forall k \in V' \setminus \{1\}.$$

Die Lastflüsse sind über

$$L_{d_{kl}^2}(P_G, U_G) \leq (d_{kl}^{max})^2 \quad \forall kl \in E$$

zu limitieren. Das zum AC-Modell gleichwertige Optimierungskriterium kann über

$$C_1(L_{P_{G_1}}(P_G, U_G)) + \sum_{k \in V' \setminus \{1\}} C_k(P_{G_k}) + \sum_{kl \in E'} E_{kl}^{TAC}(L_{d_{kl}^2}(P_G, U_G)) \rightarrow \min$$

angesetzt werden. Um Durchleitungskosten beachten zu können, wird $E_{kl}^{TAC}(d_{kl}^2) = \delta_{kl} \sqrt{d_{kl}^2}$ angesetzt. Man beachte, dass für ein $kl \in E'$ mit $L_{d_{kl}^2}(P_G, U_G) = 0$ die Zielfunktion nicht differenzierbar ist. Die kartesischen Lastflussgleichungen sind mittels der Transformation als Nebenbedingungen vermieden worden und werden nun implizit in der Zielfunktion beachtet. Die Ausdehnung

auf einen Optimierungszeitraum verläuft analog zu Abschnitt 2.3, wobei die am Slackknoten angeschlossene Energieerzeugungsanlage weder Mindestlauf- oder Mindeststillstandzeiten noch Leistungsgradienten unterworfen wird. Die anspruchsvolle gemischt-ganzzahlige nichtlineare Modellklasse bleibt aber auch mit Nutzung des Transformationsansatzes erhalten, da die Funktionen $L_{P_{G_1}}, L_{Q_{G_k}}$ für $k \in V'$ und $L_{d_{kl}^2}$ für $kl \in E$ in nichtkonvexer Beschreibung vorliegen. Zwischen dem AC- und TAC-Modell wird der nachfolgende Zusammenhang festgehalten:

Bemerkung

Da der Slackgenerator im TAC-Modell keinen technischen Nebenbedingungen unterworfen ist, gilt sicherlich $z^{TAC} \leq z^{AC}$. Sind weiter die Datensätze so beschaffen, dass $P_{G_1}^{min} = 0$, $Q_{G_1}^{min} = -\infty$, $P_{G_1}^{max} = Q_{G_1}^{max} = +\infty$ und die Energieerzeugungsanlage am Slackknoten keinen Mindestlaufzeiten, Mindeststillstandzeiten und Leistungsgradienten unterworfen ist, so ist $z^{TAC} = z^{AC}$.

Aufgrund der mathematischen Beschreibung des TAC-Modells ist die in Abschnitt 3.1 bereits angesprochene Problematik bei Anwendung eines Branch&Bound-Verfahrens auch hier relevant. Es wurden weiter Lösungsansätze angedacht, die die in den Lastflussgleichungen (6.2) und (6.3) auftretenden Variablenprodukte geeignet approximieren, um so eine in kartesischer Darstellung vorliegende AC-Modellierung in eine insgesamt gemischt-ganzzahlige lineare Form zu überführen. Hierbei wächst die Anzahl benötigter Binärvariablen mit der Anzahl der Netzknoten überproportional stark an. Nur für sehr kleine Netze unter Beachtung eines Zeitpunktes konnten so zulässige Punkte ermittelt werden. Weitere Einzelheiten über derartige Approximationsmöglichkeiten können auch [47] entnommen werden. Im nachfolgenden Unterabschnitt werden heuristische Ansätze für das AC-Modell vorgestellt.

6.3 Heuristische Ansätze

Die Modellklasse des AC-Modells führt zu den zuvor angesprochenen algorithmischen Schwierigkeiten. Über heuristische Ansätze sollen nachfolgend Möglichkeiten vorgestellt werden, mit denen sich gute zulässige Punkte bestimmen lassen.

Deterministische Datenlage Mittels vorherigen Lösens des approximativen DC- bzw. RDCOL-Modells sollen die Ganzzahligkeitsforderungen im AC-Modell eliminiert werden. Die Heuristik gestaltet sich wie folgt:

Heuristik 6.1

- (i) Löse das DC-Modell (RDCOL-Modell).
- (ii) Ersetze die binären Variablen im AC-Modell durch die optimale Schaltbelegung des DC-Modells (RDCOL-Modells) \Rightarrow FAC-Modell.
- (iii) Löse das FAC-Modell.

Für das in Schritt (iii) notwendige Lösen des FAC-Modells kann ein SQP-Verfahren, wie beispielsweise in dem Programmpaket SNOPT umgesetzt, verwendet werden. Als sich hiermit befassende weitergehende Literaturquellen können [26, 27, 54, 62, 72] genannt werden. Sicherlich erreichen derartige Verfahren nachweisbar nur einen stationären Punkt und können ggf. überprüfen, ob es sich um einen lokal optimalen Punkt handelt. Mit Hilfe der zu Beginn dieses Kapitels für das FAC-Modell entwickelten Schranke z^S kann dessen Güte bewertet werden. Ferner kann die durch DC- oder RDCOL-Modellierung gewonnene Optimalentscheidung als Startpunkt für ein SQP-Verfahren verwendet werden.

Eine Heuristik bei zweistufiger stochastischer Modellierung Die Miteinbeziehung von Zufallseinflüssen in das AC-Modell ist aus modellierungstechnischer Sicht möglich. Wie in Kapitel 4 für den gemischt-ganzzahligen linearen bzw. konvexen Fall dargestellt, lässt sich ein zweistufiges stochastisches Modell aufbauen. Hierbei hingegen in einer deutlich anspruchsvolleren Beschreibung unter zusätzlichen Ganzzahligkeitsforderungen. Da die prinzipielle Funktionsweise der Modellierung zweistufiger Ersatzmodelle durch die Betrachtungen aus Kapitel 4 bereits verdeutlicht wurde, soll das resultierende zweistufige Modell bei AC-Modellierung hier nicht ausformuliert werden. Die Miteinbeziehung von Risikomaßen kann, wie etwa bei Verwendung der Überschusswahrscheinlichkeit, zusätzliche Binärvariablen erfordern, die eine Optimierung des ohnehin schon komplexen zweistufigen stochastischen AC-Modells noch weiter erschwert. Nachfolgend

wird eine Heuristik für das zweistufige rein erwartungswertbasierte AC-Modell vorgestellt, die wiederum Ganzzahligkeitsforderungen durch vorhergehendes Lösen der approximierten Modelle vermeidet.

Heuristik 6.2

- (i) Löse das zweistufige stochastische erwartungswertbasierte DC-Modell (RDCOL-Modell).*
- (ii) Ersetze die binären Variablen im zweistufigen stochastischen erwartungswertbasierten AC-Modell durch die optimale Schaltbelegung des zweistufigen stochastischen erwartungswertbasierten DC-Modells (RDCOL-Modells).*
- (iii) Löse das Modell aus Schritt (ii).*

Nach Anwendung dieser Heuristik liegen keine Aussagen über globale Optimalität des Lösungspunktes vor. Eine Entscheidung, die auf lange Sicht die Produktionskosten minimieren soll, macht nur dann Sinn, wenn sie global optimal ist oder zumindest deren Güte abgeschätzt werden kann. Die Betrachtungen aus Abschnitt 6.1 können sinngemäß auf den stochastischen Fall übertragen werden, so dass auch hier eine gewisse Abschätzung ermöglicht wird. Da es aber allgemein nicht gelungen ist, den Optimalwert des DC-Modells als untere Schranke für das AC-Modell zu verifizieren, sind derartige Abschätzungen bei Betrachtungen eines Zeitraums nur sehr grob möglich. Von daher muss an dieser Stelle auf die Problematik einer Miteinbeziehung stochastischer Effekte bei einer Wechselstrommodellierung hingewiesen werden. Die Ermittlung einer kostengünstigen Nachrüstung eines elektrischen Energieübertragungssystems bei zugrunde liegender AC-Modellierung ist ebenso problematisch, da zusätzliche Binärvariablen zwecks Erfassung möglicher Neuerrichtungen von Kanten benötigt werden. Das nachfolgende Kapitel, in welchem zahlreiche numerische Testrechnungen für unsichere Datenlagen vorgestellt werden, konzentriert sich aufgrund dieser Problematiken daher neben deterministischen Betrachtungen zu allen vorgestellten Modellen auf die stochastische DC- und RDCOL-Modellierung.

Kapitel 7

Numerische Beispiele

Das letzte Kapitel dieser Arbeit zeigt zahlreiche numerische Beispielrechnungen auf. In Abschnitt 7.1 werden einige Berechnungen bei deterministischer Datenlage veranschaulicht, auch um den Einfluss des zugrunde liegenden Modellierungsansatzes weiter zu verdeutlichen. Anhand der Rechnungen soll so, sicherlich nicht allgemeingültig, sondern nur für die hier gewählten Beispiele, die Approximationsgenauigkeit der DC- und DCOL-Modellierung gegenüber dem AC-Modell verdeutlicht werden. Die Einflüsse der durch die Beachtung des Energieübertragungssystems möglich gewordenen zusätzlichen Faktoren, wie Lastflusslimitierungen oder auch Transmissionskostenanteile in der Zielfunktion, werden exemplarisch aufgezeigt. Zahlreiche Testrechnungen bei unsicheren Datensätzen werden unter Verwendung des Zweistufenansatzes und auch des mehrstufigen Ansatzes dargelegt, wobei die zum mehrstufigen Fall aus [33] zitiert werden. Neben ersten motivierenden Beispielen in Abschnitt 7.2, in denen risikoneutrale und risikoaverse Modellierungstechniken genutzt wurden, finden dort auch größere Referenznetze, die IEEE30-BUS und IEEE118-BUS-Systeme [55], ihre Anwendung. Abschnitt 7.3 zeigt die numerische Effizienz der in Kapitel 5 vorgestellten Dekompositionsverfahren für die zweistufigen stochastischen gemischt-ganzzahlig linearen und konvexen Modellklassen auf. Abschnitt 7.4 zeigt Testrechnungen zur Ermittlung einer kostenoptimalen Nachrüstung eines Energieübertragungssystems auf, um so langfristig die Produktionskosten zu senken und die Versorgungssicherheit zu erhöhen. Das Kapitel zeigt abschließend eine konkrete Fallstudie aus der Energiewirtschaft auf, in der das

Energieübertragungssystem der Bundesrepublik Deutschland genutzt wird. Für sämtliche der hier vorgestellten Testrechnungen wurde als Optimierungskriterium der kostenminimale Betrieb gewählt. Abb. 7.1 zeigt das 6-Knoten-Referenznetz, an welchem bereits zu Beginn dieser Arbeit die grundlegenden Eigenschaften elektrischer Energieübertragungssysteme erläutert wurden. Für viele der nachfolgend dargestellten Testrechnungen wurde dieses System verwendet. Zudem gibt Abb. 7.1 auch den Typ der Knoten und die zu den Knoten zugeordneten Knotennummern wieder. Die genauen Netzparameter, die technischen Merkmale der Energieerzeugungsanlagen und die zugrunde liegenden Lastdaten können Anhang B entnommen werden. Für sämtliche der nachfolgend dargestellten Testrechnungen

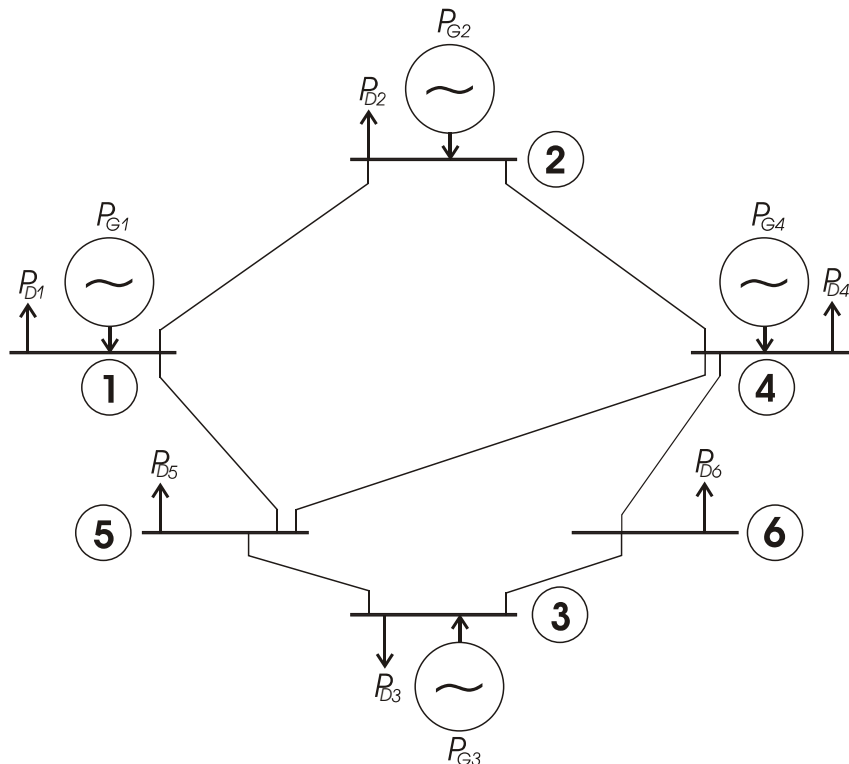


Abbildung 7.1: Ein 6-Knoten-Netz

wurde ein Pentium-IV-System mit einer 3.2 Ghz-Taktung und einem 4 GB RAM verwendet. Größtenteils wurden die Rechnungen auf einer Unix-Plattform vorgenommen, wobei für deterministische Testrechnungen auch eine Windows-Plattform zum Einsatz kam. Gemischt-ganzzahlige lineare Modellklassen, wie bei IG- oder

DC-Modellierung vorliegend, wurden mit dem Softwarepaket CPLEX [14] behandelt. Die bei RDCOL-Modellierung vorliegende gemischt-ganzzahlige konvexe Modellklasse wurde mit Algorithmus 3.1, implementiert in C++, gelöst, wobei die dabei zu lösenden Masterprobleme selber mit CPLEX behandelt wurden. Die Ermittlung eines vielversprechenden zulässigen Punktes für das AC-Modell geschah durch Anwendung der heuristischen Ansätze und dem Programmpaket SNOPT [22], eine leistungsfähige Umsetzung eines SQP-Verfahrens. Im Falle zufallsbehafteter Datensätze wurden, je nach Modellklasse, auch die Algorithmen 5.1 und 5.2 eingesetzt.

7.1 Deterministische Vorbetrachtungen

In diesem Abschnitt wird ausschließlich das 6-Knoten-Netz aus Abb. 7.1 verwendet. Es werden in den nachfolgenden drei Unterabschnitten deterministische Berechnungen aufgezeigt, in denen Betriebsoptimierungen über einen Zeitpunkt ohne Vorhandensein von Transmissionskosten, über einen Zeitpunkt bei Vorhandensein von Transmissionskosten und über einen Zeitraum vorgenommen wurden.

Einspeisungsoptimierung über einen Zeitpunkt

Nachfolgend wird nach der zugrunde liegenden Modellbeschreibung, d.h. ob IG, DC, RDCOL- oder AC-Modellierung vorliegt, unterschieden. Neben den durch die gewonnenen Produktionsentscheidungen resultierenden Lastflüssen wird auch die insgesamt erzeugte Wirkleistung der Energieerzeugungsanlagen verdeutlicht.

IG-Modellierung: Bei Anwendung der IG-Modellierung ergeben sich Produktionskosten von $z^{IG} = 287.64$ Einheiten. Die optimale Produktionsentscheidung ist über $([P_{G_1}]_{IG}, \dots, [P_{G_4}]_{IG}) = (7.61, 0, 0, 0)$ gegeben. Die insgesamt erzeugte Wirkleistung beträgt $\bar{P}_G^{IG} = 7.61$. Setzt man diese Produktionsentscheidung in die Bilanzgleichung des DC-Modells ein, so resultiert ein Lastfluss, der Tabelle 7.1 entnommen werden kann. Sämtliche mit einem Stern markierten Eintragungen überlasten die Leitungen. Die tatsächlich maximal möglichen Übertragungen

	1	2	3	4	5	6
1		-3.208*			-3.402*	
2	3.208*			-1.008*		
3					1.588*	0.132
4		1.008*			0.814*	-0.642
5	3.402*		-1.588*	-0.814*		
6			-0.132	0.642		

Tabelle 7.1: Resultierender Lastfluss bei IG-Modellierung

können Anhang B entnommen werden. Die erzielte Produktionsentscheidung bei IG-Modellierung ist somit unzulässig für das DC-Modell.

DC-Modellierung: Bei Anwendung der DC-Modellierung ergeben sich Produktionskosten von $z^{DC} = 455.81$ Einheiten. Die optimale Produktionsentscheidung ist über $([P_{G_1}]_{DC}, \dots, [P_{G_4}]_{DC}) = (0, 3, 3, 1.61)$ gegeben. Die insgesamt erzeugte Wirkleistung beträgt $\bar{P}_G^{DC} = 7.61$ und ist mit \bar{P}_G^{IG} natürlich identisch. Der resultierende Lastfluss bei Verwendung der Bilanzgleichungen des DC-Modells kann Tabelle 7.2 entnommen werden. Im Gegensatz zur IG-Produktionsentscheidung

	1	2	3	4	5	6
1		0.743			0.257	
2	-0.743			-0.057		
3					-0.827	-0.453
4		0.057			-0.430	-0.057
5	-0.257		0.827	0.430		
6			0.453	0.057		

Tabelle 7.2: Resultierender Lastfluss bei DC-Modellierung

resultieren nun zulässige Lastflüsse, da im DC-Modell die Restriktionen bei (2.19), die eine Lastflusslimitierung vornehmen, aufgenommen wurden.

RDCOL-Modellierung Der Toleranzparameter für das äußere Approximationsverfahren gemäß Algorithmus 3.1 wird zu $\epsilon = 10e-5$ angesetzt. Das äußere Approximationsverfahren terminiert so mit gewünschter Toleranz und Produktionskosten von $z^{RDCOL} = 456.962$ Einheiten. Die optimale Produktions-

entscheidung ist über $([P_{G_1}]_{RDCOL}, \dots, [P_{G_4}]_{RDCOL}) = (0, 3, 3, 1.665)$ gegeben. Die insgesamt erzeugte Wirkleistung beträgt $\bar{P}_G^{RDCOL} = 7.696$ und ist mit \bar{P}_G^{DC} nicht identisch, da Übertragungsverluste auftreten. Der resultierende Lastfluss bei Verwendung der Bilanzgleichungen des DCOL-Modells kann Tabelle 7.3 entnommen werden. Eine Verwendung der RDCOL-Produktionsentscheidung im IG- oder DC-Modell ist natürlich unzulässig, da die RDCOL-Produktionsentscheidung Übertragungsverluste ausgleicht, die im IG- und im DC-Modell missachtet werden.

	1	2	3	4	5	6
1		0.750			0.259	
2	-0.750			-0.040		
3					-0.823	-0.443
4		0.040			-0.451	-0.071
5	-0.259		0.823	0.451		
6			0.443	0.071		

Tabelle 7.3: Resultierender Lastfluss bei DCOL-Modellierung

FAC(RDCOL)-Modellierung: Bei Anwendung des FAC-Modells mit der für das RDCOL-Modell optimalen Schaltbelegung ergeben sich Produktionskosten von $\tilde{z}^{FAC} = 457.273$ Einheiten. Die Produktionsentscheidung ist über $([\tilde{P}_{G_1}]_{FAC}, \dots, [\tilde{P}_{G_4}]_{FAC}) = (0, 3, 3, 1.679)$ gegeben. Die ermittelte Lösung und der Zielfunktionswert sind zusätzlich mit $\tilde{\cdot}$ gekennzeichnet, da es sich bei der durch SNOPT ermittelten Lösung um einen stationären Punkt handelt. Die insgesamt erzeugte Wirkleistung beträgt $\bar{P}_G^{FAC} = 7.679$. Der Betrag des resultierenden Lastflusses bei Verwendung der Bilanzgleichungen des AC-Modells kann Tabelle 7.4 entnommen werden, die keine Symmetrie aufweist. Durch Anwendung von Satz 2.2 kann für das FAC-Modell die Schranke $z^{RIG} = z^{IG} = 287.64$ ermittelt werden. Weiter lässt sich mit Hilfe des S(RDCOL)-Modells die deutlich bessere Schranke $z^S = 444.98$ berechnen. Somit ist die Güteabschätzung

$$\frac{\tilde{z}^{FAC} - z^S}{z^S} \cdot 100\% \approx 2.75\%$$

möglich. Tabelle 7.5 stellt die erzielten Ergebnisse nach Modellwahl gegenüber. Es zeigt sich, dass die durch DC-, RDCOL- und AC-Modellierung erzielten Optimal-

	1	2	3	4	5	6
1		0.744			0.285	
2	0.770			0.001		
3					0.831	0.442
4		0.005			0.487	0.083
5	0.277		0.866	0.450		
6			0.448	0.075		

Tabelle 7.4: Resultierender Lastfluss bei FAC-Modellierung

lösungen nur geringfügig voneinander abweichen, so dass auch deren Optimalwerte eng zusammen liegen. Das IG-Modell führt hingegen zu einer stark abweichenden Optimallösung und auch zu einem deutlich reduzierten Optimalwert im Vergleich zu den übrigen. Die Rechenzeit betrug in allen Fällen weniger als eine Sekunde.

	IG	DC	RDCOL	FAC
Produktionskosten	287.64	455.81	456.961	457.273
PG1	7.61	0	0	0
PG2	0	3	3	3
PG3	0	3	3	3
PG4	0	1.61	1.665	1.679

Tabelle 7.5: Vergleich der ermittelten Optimallösungen/-werte

Einfluss von Transmissionskosten

Exemplarisch wurde der Einfluss von Transmissionskosten zu den im vorhergehenden Unterabschnitt aufgezeigten Testrechnungen untersucht. Dabei wurde angenommen, dass bei einem Energietransport entlang der Leitung $12, 21 \in E$ Transmissionskosten anfallen. Somit gilt $E' = \{12, 21\}$ und die für die Transmissionskostenfunktionen erforderlichen Parameter sind über $\delta_{12} = \delta_{21} = 20$ Einheiten gegeben. Tabelle 7.6 stellt die erzielten Ergebnisse dar. Zudem wurden die anfallenden Transmissions- und Gesamtkosten ermittelt, die entstehen würden, wenn der Transmissionskostenanteil selbst nicht in der Zielfunktion berücksichtigt worden wäre. Es zeigt sich, dass ein Vorhandensein von Transmissionskosten spürbare Auswirkungen auf die Optimallösung hat. Die Schaltung der Energieerzeugungsan-

	DC	RDCOL	FAC	DC	RDCOL	FAC
	$\delta_{12} = \delta_{21} = 0$			$\delta_{12} = \delta_{21} = 20$		
Produktionskosten	455.81	456.96	457.27	467.64	470.03	471.38
Transmissionskosten	29.72	30	30.28	0.32	1.84	0.08
Gesamtkosten	485.53	486.96	487.55	467.96	471.87	471.46
PG1	0	0	0	1.61	1.71	1.696
PG2	3	3	3	3	3	3
PG3	3	3	3	3	3	3
PG4	1.61	1.665	1.679	0	0	0

Tabelle 7.6: Lösungsvergleich bei Hinzunahme von Transmissionskosten

lagen variiert. Durch die veränderte Schaltung und Anpassung der Wirkleistungseinspeisungen können die anfallenden Transmissionskosten erheblich reduziert werden. Trotz der hierfür erforderlichen zusätzlichen Produktionskosten sind dennoch die Gesamtkosten geringer als bei Verwendung der Produktionsentscheidung für $\delta_{12} = \delta_{21} = 0$. Die durch DC-, RDCOL- und FAC(RDCOL)-Modellierung erzielten Optimallösungen/-werte unterscheiden sich dabei nur geringfügig.

Einspeisungsoptimierung über einen Zeitraum

Die für die Einspeisungsoptimierung über einen Zeitraum zusätzlich notwendigen Datensätze, d.h. die Lastdaten, Leistungsgradienten, Mindestlauf- und Mindeststillstandzeiten, können wiederum Anhang B entnommen werden. Auch hier wird für das FAC-Modell die optimale Schaltbelegung des RDCOL-Modells verwendet, d.h. es wird das FAC(RDCOL)-Modell minimiert. Es ergeben sich die Optimalwerte $z^{IG} = 7856.53$, $z^{DC} = 9226.52$, $z^{RDCOL} = 9461.08$ und $\tilde{z}^{FAC} = 9467.36$ Einheiten. Dabei wurde für das äußere Approximationsverfahren die Toleranz mit $\epsilon = 10e-5$ angesetzt. Mit Hilfe des S(RDCOL)-Modells kann für das FAC(RDCOL)-Modell die Schranke $z^S = 8979$ Einheiten ermittelt werden und nachfolgende Güteabschätzung ist möglich:

$$\frac{\tilde{z}^{FAC} - z^S}{z^S} \cdot 100\% \approx 5.44\%$$

Die Abbildungen 7.2 - 7.5 zeigen die erzielten Wirkleistungseinspeisungen auf.

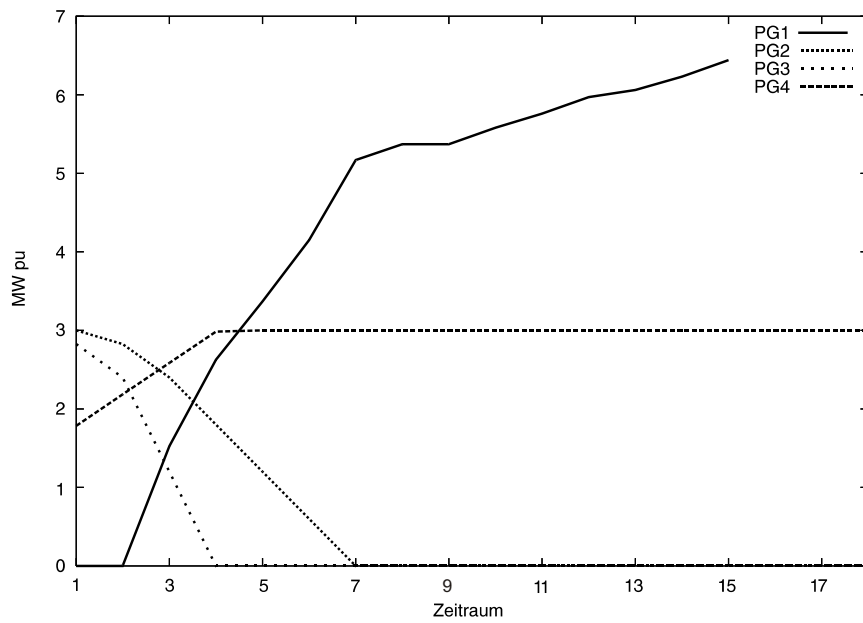


Abbildung 7.2: Optimierte Einspeisung bei IG-Modellierung

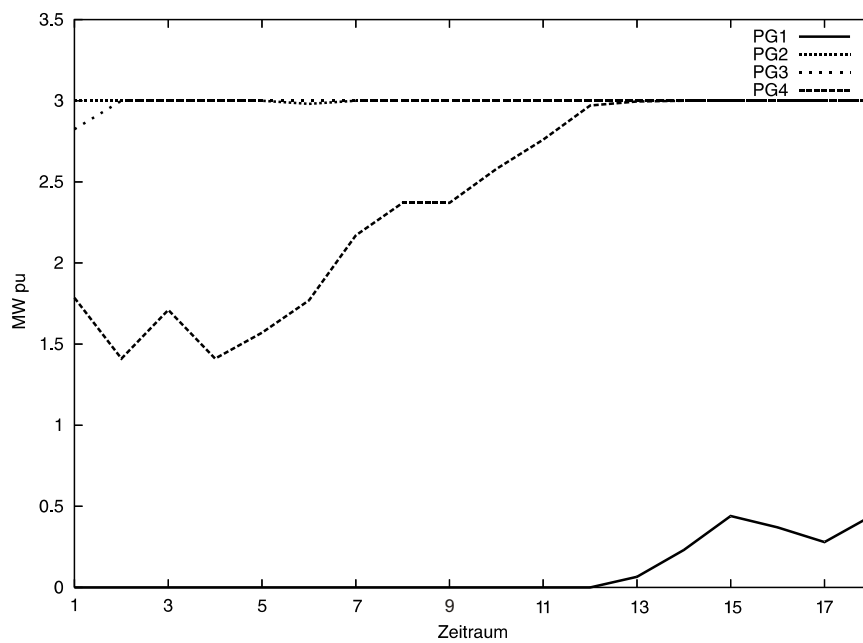


Abbildung 7.3: Optimierte Einspeisung bei DC-Modellierung

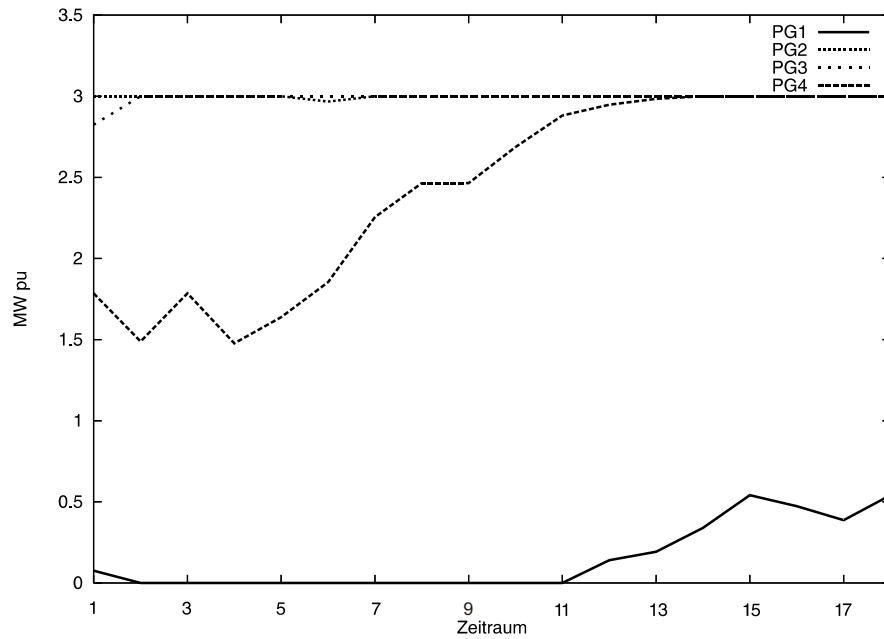


Abbildung 7.4: Optimierte Einspeisung bei RDCOL-Modellierung

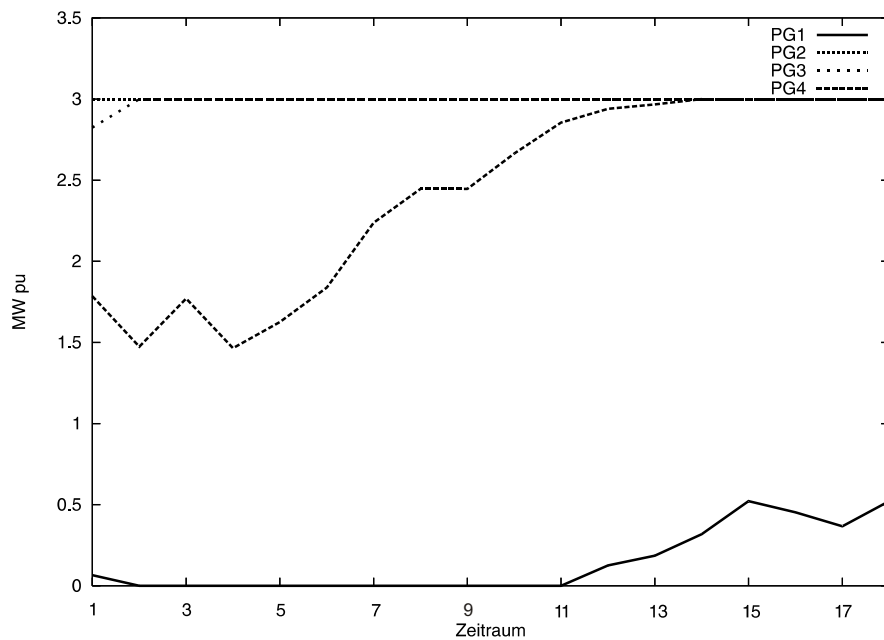


Abbildung 7.5: Optimierte Einspeisung bei FAC(RDCOL)-Modellierung

7.2 Stochastische Optimierung: Motivierende Beispiele

Im Nachfolgenden werden zahlreiche Testrechnungen bei stochastischer Datenlage aufgezeigt, die den zweistufigen stochastischen Modellierungsansatz weiter motivieren und dessen praktische Relevanz hervorheben. All diese verwenden als Optimierungskriterium die Betriebskostenminimierung.

Einleitendes Beispiel: Man betrachte das RDCOL-Modell zum 6-Knoten-Netz über einen Zeitraum. Der letzte deterministische Zeitpunkt wurde mit $t^* = 12$ angesetzt. Der Wahrscheinlichkeitsraum ist hier über $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ mit $(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (0.7, 0.2, 0.1)$ gegeben. Die Datensituation wurde dabei so gewählt, dass bei Eintreten des Ereignisses ω_1 exakt dieselbe Datensituation vorliegt, wie sie in vorhergehendem Unterabschnitt bei der rein deterministischen Einspeisungsoptimierung über einen Zeitraum genutzt wurde (*siehe auch Anhang B*). Falls die Ereignisse ω_2 oder ω_3 auftreten, wurde hingegen eine Abweichung der maximal möglichen Übertragungskapazitäten auf den Leitungen $12, 24 \in E$ für alle $t^* + 1 \leq t \leq t_{max}$ wie folgt angenommen:

$$\begin{aligned} d_{12}^{max,(t)}(\omega_2) &= d_{21}^{max,(t)}(\omega_2) = d_{24}^{max,(t)}(\omega_2) = d_{42}^{max,(t)}(\omega_2) = 1.5 \\ d_{12}^{max,(t)}(\omega_3) &= d_{21}^{max,(t)}(\omega_3) = d_{24}^{max,(t)}(\omega_3) = d_{42}^{max,(t)}(\omega_3) = 0 \end{aligned}$$

Weiter wurde am Knoten $2 \in V'$ ein möglicher Leistungsabfall von $P_{D_2}^{(t)}(\omega_2) = P_{D_2}^{(t)}(\omega_3) = 1.5$ für $t^* + 1 \leq t \leq t_{max}$ angenommen. Alle weiteren von den Ereignissen ω_2 und ω_3 abhängigen Daten stimmen wiederum mit denen des bei Eintreten des Elementarereignisses ω_1 überein. Bei Anwendung des rein erwartungswertbasierten Zweistufenansatzes ergeben sich nun die erwarteten mittleren Produktionskosten zu $z^{RDCOL} = 9331.84$ Einheiten. Man beachte, dass eine Überschätzung der anfallenden ohmschen Übertragungsverluste auf den Leitungen $12, 24 \in E$ bei Eintreten des Ereignisses ω_3 durch die Restriktionen

$$\nu_{kl}^{(t)} \leq d_{kl}^{max,(t)}(\omega) \quad \forall t \in \{t^* + 1, \dots, t_{max}\} \quad \forall kl \in E \quad \forall \omega \in \Omega$$

verhindert wird. Bereits in Abschnitt 3.2 wurde auf die physikalische Gültigkeit dieser Restriktionen hingewiesen. In Tabelle 7.7 wird verdeutlicht, inwieweit die zufallsbehaftete maximale Übertragungskapazität auf den Leitungen $12, 24 \in E$ die optimale Produktion beeinflussen kann. Dabei wird die optimale Erststufenentscheidung, die durch Lösen des erwartungswertbasierten Zweistufenmodells gewonnen wurde, mit der Optimalentscheidung zum 1-Szenario-Modell, wobei das Szenario ω_1 verwendet wurde, verglichen. Es zeigt sich, dass die zufälligen

t	Lösung zu Szenario 1			Zweistufenansatz		
	10	11	12	10	11	12
$P_{G_1}^{(t)}$	0	0	0.14	0	0.18	1.35
$P_{G_2}^{(t)}$	3	3	3	3	2.7	2.1
$P_{G_3}^{(t)}$	3	3	3	3	3	3
$P_{G_4}^{(t)}$	2.69	2.88	2.94	2.69	3	2.6

Tabelle 7.7: Einfluss von Unsicherheiten auf die Optimallösung

Ereignisse hier Rückwirkungen auf die optimale Produktionsentscheidung der ersten Stufe haben, da zum einen die Stufen des Zweistufenmodells miteinander verkoppelt sind und zum anderen der mögliche Ausfall der Leitungen $12, 24 \in E$ bereits vor Eintreten eines solchen Ereignisses kompensiert werden muss.

Motivation des Risikoansatzes: Unter Nutzung des IEEE30-BUS-Referenznetzes [55] soll im Folgenden der Erwartungswert-Risikoansatz weiter motiviert werden. Die hier vorgestellten Resultate können, bis auf geringfügige Anpassungen, auch [43] entnommen werden. Der Optimierungszeitraum wurde mit zwölf Stunden in einstündiger Auflösung angesetzt. Ferner wurden Unsicherheiten ab der zehnten Stunde bzgl. Last und maximaler Übertragungsfähigkeit sowie 30 mögliche Szenarien angenommen. Die rein erwartungswertbasierte Minimierung führt auf $Q_{\mathcal{E}} = 28368.09$ Einheiten. Nach Auswertung der hieraus resultierenden szenariospezifischen Optimalwerte wird das Niveau mit $\eta = 28800$ Einheiten angesetzt, welches mit einer Wahrscheinlichkeit von 51 % überschritten wird. Werden nun die Erwartungswert-Risiko-Modelle minimiert, so resultieren die

in Tabelle 7.8 dargestellten Ergebnisse. Dabei kennzeichnen $x_{\mathcal{E}}$, $x_{\mathcal{E}\mathcal{P}}$ und $x_{\mathcal{E}\mathcal{E}}$ die ermittelten Lösungsvektoren zu den zugehörigen Erwartungswert- bzw. Erwartungswert-Risiko-Modellen. Ferner werden die optimalen Produktionseinstellungen im letzten deterministischen Zeitpunkt aufgezeigt. Eine deutliche

	$Q_{\mathcal{E}}$	$Q_{\mathcal{E}\mathcal{P}}$	$Q_{\mathcal{E}\mathcal{E}}$	$P_{G_2}^{(9)}$	$P_{G_5}^{(9)}$	$P_{G_{13}}^{(9)}$
$x_{\mathcal{E}}$	28 368.09	0.51	25.85	10	13.8831	9.0169
$x_{\mathcal{E}\mathcal{P}}$	28 398.00	0.27	24.99	9	13.9443	9.9557
$x_{\mathcal{E}\mathcal{E}}$	28 400.65	0.27	24.93	9	13.9395	9.9605

Tabelle 7.8: Einfluss des Risikos auf Optimallösung/-wert

Reduzierung des Risikos ist bei relativ geringen zusätzlichen Kosten im Mittel möglich. Der Gewichtungsfaktor wurde für diese Testrechnungen auf $\rho = 1000$ angesetzt. Weiter wird veranschaulicht, welchen Einfluss der Gewichtungsfaktor auf das Risiko der Optimallösung haben kann. Tabelle 7.9 zeigt anhand des Risikomaßes Überschusswahrscheinlichkeit den Einfluss dieses Faktors.

ρ	$Q_{\mathcal{E}}$	$Q_{\mathcal{E}\mathcal{P}}$
0	28 368.09	0.51
1	28 368.09	0.51
10	28 371.55	0.33
100	28 398.00	0.27
1000	28 398.00	0.27

Tabelle 7.9: Einfluss des Gewichtungsfaktors

7.3 Effizienz der Dekompositionsverfahren

Anhand ausgewählter Beispiele soll im Folgenden die Effizienz der in Kapitel 4 vorgestellten Dekompositionsverfahren veranschaulicht werden. Insbesondere wird das algorithmische Verhalten bei wachsender Anzahl von Szenarien getestet. Größere Energieübertragungssysteme finden hier ihre Beachtung. Neben Resultaten zum Zweistufenansatz werden auch Testrechnungen zum mehrstufigen

Ansatz zitiert. Die Szenariodekomposition gemäß Algorithmus 5.1 wurde in dem Programmpaket `ddsip` [16] umgesetzt und hier verwendet, wohingegen für Algorithmus 5.2 eine eigene Umsetzung in C++ unter Nutzung von `ddsip` und CPLEX erfolgte.

Zweistufige stochastische gemischt-ganzzahlige lineare Modelle: Die nachfolgend vorgestellten Rechnungen legen das 6-Knoten-Netz mit 36 diskreten Zeitschritten zugrunde. Unsichere Daten (*Last, Bedarf, max. Übertragungskapazität*) treten ab dem 7. Zeitschritt auf. Die hier gelisteten Resultate können ebenfalls [43] entnommen werden. Die Tabellen 7.10 und 7.11 zeigen die erzielten Ergebnisse bei Verwendung des rein erwartungsbasierten Ansatzes als auch des Erwartungswert-Risiko-Ansatzes unter Nutzung des erwarteten Überschusses als Risikomaß auf. Für die Erwartungswert-Risiko-Minimierung werden das notwendige Niveau η und $\rho > 0$ geeignet gewählt. Weiter wurde eine maximale Rechenzeit von einer Stunde und eine vorzeitige Terminierung der Algorithmen bei Unterschreitung einer relativen Toleranz von 0.3% eingeleitet. Die mit “-“ markierten Felder zeigen ein Nichtauffinden eines zulässigen Punktes in der hier vorgegebenen maximalen Rechenzeit an.

N	ILOG-CPLEX			Dekomposition (<code>ddsip</code>)		
	Zeit (sec.)	$Q_{\mathcal{E}}$	GAP (%)	Zeit (sec.)	$Q_{\mathcal{E}}$	GAP (%)
20	5	4 307.33	0.00	8	4 318.69	0.28
100	3 600	4 266.95	0.76	227	4 278.06	0.29
500	3 600	-	-	1 865	4 283.07	0.29
1000	3 600	-	-	3 274	4 280.23	0.24

Tabelle 7.10: Ergebnisse bei Erwartungswertminimierung

Tabelle 7.12 zeigt Ergebnisse bei Verwendung des Erwartungswert-Risiko-Ansatzes unter Nutzung des Risikomaßes Überschusswahrscheinlichkeit auf. Die maximale Rechenzeit wurde wiederum mit einer Stunde angesetzt. Eine vorzeitige Terminierung bei Unterschreitung der zuvor gesetzten relativen Toleranz wurde nicht eingeleitet. Es zeigt sich, dass es mit steigender Anzahl von Szenarien zunehmend schwieriger bis nicht mehr möglich ist, mit CPLEX in der hier vorgegebenen maximalen Rechenzeit Lösungen zu erzielen. Selbst für eine hohe Anzahl von Szenarien

N	ILOG-CPLEX				Dekomposition (ddsip)			
	Zeit (sec.)	$Q_{\mathcal{E}}$	$Q_{\mathcal{E}\mathcal{E}}$	GAP (%)	Zeit (sec.)	$Q_{\mathcal{E}}$	$Q_{\mathcal{E}\mathcal{E}}$	GAP (%)
20	5	4 307.33	13.97	0.00	78	4 307.34	13.97	0.01
100	3 600	4 267.22	1.61	1.02	106	4 275.61	2.43	0.26
500	3 600	-	-	-	1 542	4 280.61	3.26	0.26
1000	3 600	-	-	-	3 600	4 283.37	3.61	0.34

Tabelle 7.11: Ergebnisse bei Erwartungswert-Erwart.Überschuss-Minimierung

N	ILOG-CPLEX				Dekomposition (ddsip)			
	Zeit (sec.)	$Q_{\mathcal{E}}$	$Q_{\mathcal{E}\mathcal{P}}$	GAP (%)	Zeit (sec.)	$Q_{\mathcal{E}}$	$Q_{\mathcal{E}\mathcal{P}}$	GAP (%)
20	3 600	4 307.33	0.30	0.00	3 600	4 307.33	0.30	0.00
100	3 600	4 269.34	0.05	0.14	3 600	4 273.45	0.06	0.18
500	3 600	-	-	-	3 600	4 283.61	0.13	0.31
1000	3 600	-	-	-	3 600	4 283.83	0.15	0.34

Tabelle 7.12: Ergebnisse bei Erwartungswert-Überschusswahrsh.-Minimierung

ist die Szenariodekomposition in der Lage, Lösungen mit akzeptabler Güte zu ermitteln. Abschließend zeigt Tabelle 7.13 die resultierenden Modelldimensionen der deterministisch äquivalenten Formulierungen bei 1000 Szenarien im Vergleich zum 1-Szenario-Modell (*deterministisches Modell*) auf.

N	1	1000	1000	1000
Risikomaß	-	-	Überschusswahr.	Erwarteter Überschuss
Nebenbedingungen	2 888	2 422 466	2 423 466	2 423 466
stetige Variablen	864	720 144	720 144	721 144
binäre Variablen	432	360 072	361 072	360 072

Tabelle 7.13: Modelldimensionen bei stochastischer Optimierung

Zweistufige stochastische gemischt-ganzzahlige konvexe Modelle: Wieder wurde das 6-Knoten-Netz, allerdings mit veränderten Eingangsdaten verwendet. Der Optimierungszeitraum erstreckte sich über 18 diskretisierte Zeitschritte mit auftretenden Unsicherheiten ab dem 13. Zeitschritt. Die maximale Rechenzeit wurde mit 3600 Sekunden angesetzt und eine vorzeitige Terminierung bei Unterschreiten einer relativen Toleranz von 1% eingeleitet. Zudem wurde die

Approximationsgenauigkeit gemäß (3.5), angepaßt auf den zweistufigen Fall, mit $\epsilon = 0.01$ angesetzt. Für die Erwartungswert-Risiko-Minimierungen wurde das notwendige Niveau η und $\rho > 0$ geeignet gewählt. Die nachfolgenden Szenariosätze sind, wie zuvor auch, zufällig generiert worden. Abhängig davon kann das Lösen der szenariospezifischen Teilprobleme unterschiedlichen Rechenaufwand erfordern. Die benötigte Rechenzeit muss so nicht zwingend mit der Szenarioanzahl steigen, sondern ist sicherlich in großem Maße von den zugrunde liegenden Szenarien selbst abhängig. Aber auch hier zeigt sich, dass ein äußeres Approximationsverfahren in Verbindung mit einer Dekomposition gemäß Algorithmus 5.2 deutlich effizienter ist als es dies bei Außerachtlassung der Möglichkeit einer Dekomposition der Fall wäre. Die Bestimmung eines zulässigen Punktes in der hier vorgegebenen maximalen Rechenzeit wird erst durch die Dekomposition möglich. Es wird

N	Äußere Approximation			Äußere Approximation + Dekomposition		
	Zeit (sec.)	$Q_{\mathcal{E}}$	GAP (%)	Zeit (sec.)	$Q_{\mathcal{E}}$	GAP (%)
5	7	8 940.16	0.00	10	8 939.48	0.93
10	3 600	7 505.11	8.18	3 600	7 414.65	1.48
25	3 600	-	-	3 600	7 455.14	2.74
100	3 600	-	-	3 600	7 412.99	6.92

Tabelle 7.14: Ergebnisse bei Erwartungswertminimierung

N	Äußere Approximation				Äußere Approximation + Dekomposition			
	Zeit (sec.)	$Q_{\mathcal{E}}$	$Q_{\mathcal{E}\mathcal{E}}$	GAP (%)	Zeit (sec.)	$Q_{\mathcal{E}}$	$Q_{\mathcal{E}\mathcal{E}}$	GAP (%)
5	8	8 940.22	4.51	0.00	46	8 939.35	0.52	0.76
10	3 600	-	-	-	3 600	7 419.61	0.66	12.80
25	3 600	-	-	-	3 600	7 472.43	0.64	5.46
100	3 600	-	-	-	3 600	7 512.71	79.21	92.17

Tabelle 7.15: Ergebnisse bei Erwartungswert-Erwart.Überschuss-Minimierung

nachdrücklich darauf hingewiesen, dass es hier lediglich um die Darstellung der numerischen Effizienz der Dekompositionsverfahren geht. Oftmals weisen die Optimalwerte zum rein erwartungswertbasierten Modell bereits minimale Risiken auf oder es können bei Erwartungswert-Risiko-Minimierung Optimallösungen mit besserem resultierendem Erwartungswert ermittelt werden als dies bei rein

N	Äußere Approximation				Äußere Approximation + Dekomposition			
	Zeit (sec.)	$Q_{\mathcal{E}}$	$Q_{\mathcal{EP}}$	GAP (%)	Zeit (sec.)	$Q_{\mathcal{E}}$	$Q_{\mathcal{EP}}$	GAP (%)
5	8	8 940.16	0.40	0.00	124	8 939.33	0.20	0.19
10	3 600	-	-	-	3 600	7 416.36	0.20	23.09
25	3 600	-	-	-	3 600	7 472.30	0.12	16.57
100	3 600	-	-	-	3 600	7 498.81	0.58	48.87

Tabelle 7.16: Ergebnisse bei Erwartungswert-Überschusswahrsch.-Minimierung

erwartungswertbasierter Minimierung der Fall war. Ergebnisse dieser Art können natürlich bei vorzeitiger Terminierung der Verfahren erreicht werden, wenn die relative Toleranz nicht Null ist und tatsächlich auch bessere Optimallösungen existieren. Weitere Testrechnungen können auch [44] entnommen werden.

Optimierung größerer Energieübertragungssysteme: Nachfolgend wird die numerische Effizienz der Dekompositionsverfahren unter Nutzung eines großen Energieübertragungssystems, dem IEEE118-BUS-System [55], verdeutlicht. Der Zeitraum wurde mit neun Stunden in halbstündiger Auflösung angesetzt, von denen die ersten vier keine Unsicherheiten aufwiesen. Bei einer maximalen Rechenzeit von 24 Stunden wurde eine vorzeitige Terminierung bei Unterschreitung einer relativen Toleranz von 1.5% eingeleitet. Tabelle 7.17 zeigt die erzielten Ergebnisse bei DC- und RDCOL-Modellierung auf. Die RDCOL-Modellierung steigert, hier

N	DC-Modellierung			RDCOL-Modellierung		
	Zeit (sec.)	$Q_{\mathcal{E}}$	GAP (%)	Zeit (sec.)	$Q_{\mathcal{E}}$	GAP (%)
5	319	17 189.81	0.65	51 968	19 555.02	0.58
10	10 933	15 063.13	1.10	95 900	17 027.39	0.82
15	-	-	-	90 523	15 712.96	1.48

Tabelle 7.17: Ergebnisse zum IEEE118-Knoten-Netz

zumindest, die Rechenzeiten erheblich gegenüber denen zur DC-Modellierung. Weiter steigen die sich im Mittel ergebenden Kosten auf lange Sicht spürbar an. Die Beachtung von Übertragungsverlusten hat hier deutliche Auswirkungen auf die Optimalwerte. Weiter ist zu bemerken, dass für den 15-Szenariofall bei DC-Modellierung keine Lösung gefunden wurde. Dabei ist dieser Szenariosatz

für das DC-Modell tatsächlich unzulässig, aber zulässig für das RDCOL-Modell. Erinnernd an Satz 2.3, der sich auf den 2-stufigen stochastischen Fall sinngemäß übertragen lässt, ist dieser Fall aber durchaus möglich. Durch eine Überschätzung von Netzverlusten im RDCOL-Modell („*Energievernichtung*“) kann Zulässigkeit bei Eintreten kritischer Szenarien erreicht werden.

Mehrstufige stochastische Optimierungsmodelle: Einige numerische Testrechnungen für den mehrstufigen stochastischen Fall werden aus [33] zitiert. Dabei soll nur ein Ausblick gegeben werden. Ziel ist es, aufzuzeigen, dass sich die mehrstufige stochastische Optimierung, die eine noch genauere Modellierung von Zufallseinflüssen gestattet, auf die in dieser Arbeit entwickelten Modelle anwenden lässt und Verfahren existieren, die ein effizientes Lösen derartiger Modelle gestatten. Zugrunde gelegt wurde hier das IEEE14-BUS-System, wobei Resultate zum rein erwartungswertbasierten mehrstufigen Modell aufgezeigt werden. Die maximale Rechenzeit wurde mit 1800 Sekunden angesetzt. Ferner wurde eine vorzeitige Terminierung der Algorithmen bb-tree und bb-hash, spezielle Verfahren für die mehrstufige gemischt-ganzzahlige Modellklasse, bei Unterschreitung einer relativen Toleranz von 0.1% eingeleitet. Die Zeitangabe bei bb-tree und bb-hash,

t_{max}	N	bb-tree (sec.)	CPLEX (in %)	bb-hash (sec.)	CPLEX (in %)
3	50	66	3.5	135	3.2
3	100	358	9.5	1 376	8.1
5	50	160	6.1	315	5.3
5	100	404	6.0	684	5.3

Tabelle 7.18: Ergebnisse bei mehrstufiger Optimierung

die in allen Fällen unterhalb von 1800 Sekunden liegt, signalisiert das Auffinden eines Punktes mit einer relativen Toleranz von weniger als 0.1%. Zum Vergleich wurde die verfügbare relative Toleranz bei Anwendung von CPLEX in derselben Rechenzeit aufgezeigt.

7.4 Nachrüstung eines Übertragungssystems

Mittels Anwendung des in Kapitel 7 vorgestellten Modells wird am Beispiel des 6-Knoten-Netzes eine kostenoptimale Nachrüstung des solchen vorgenommen. Die Produktionskosten sollen so langfristig gesenkt werden und zudem auch Zulässigkeit bei Eintreten kritischer Szenarien erreicht werden. Dabei wurde als Optimierungskriterium die Minimierung von Investitions- und Produktionskosten gewählt. Das zur Verfügung stehende Budget weist keine obere Schranke auf. Zugrunde gelegt wurden 5 Szenarien, die die auftretenden Lastwerte in der zweiten Stufe über einen längeren Zeitraum simulieren. Unter Verwendung der IG- und der DC-Modellierung wurden zunächst die Optimalwerte bestimmt, die sich durch separates Lösen der zweiten Stufe ergeben. Tabelle 7.19 zeigt unter Verwendung dieser 5 Szenariosätze die minimalen Produktionskosten auf, die sich bei Nutzung des vorhandenen Netzes ergeben würden, und diejenigen bei einer Ignorierung des Netzes. Die Beachtung des Energieübertragungssystems steigert die Produktions-

N	π_i	z^{DC}	z^{IG}
1	0.3	93 887 308	55 664 544
2	0.1	80 965 468	48 924 600
3	0.2	112 274 558	65 086 800
4	0.25	-	68 245 656
5	0.15	110 115 938	62 937 096

Tabelle 7.19: Produktionskosten vor Ausbau

kosten erheblich. Bei Eintreten von Szenario 4 liegt ferner Unzulässigkeit bei DC-Modellierung vor, obwohl die insgesamt zur Verfügung stehende Wirkleistung zur Lastdeckung ausreichen würde, da $z^{IG} \in \mathbb{R}$. Zwecks Senkung der Produktionskosten und Herstellung von Zulässigkeit für das kritische Szenario, wurden die noch nicht vorhandenen Leitungen $\bar{E} = \{14, 41, 34, 43\}$ zum Neubau freigegeben. Die Installationskosten wurden mit $c_{kl}^{ins} = 2\,000\,000$ Einheiten und Verstärkungskosten mit $c_{kl}^{add} = 500$ Einheiten für $kl \in \bar{E}$ angesetzt. Weiter wurden mit $\tilde{E} = E$ sämtliche bereits vorhandenen Leitungen zur Verstärkung freigegeben. Die Kosten einer Verstärkung wurden über $c_{kl}^{add} = 2000$ Einheiten für $kl \in \tilde{E}$ angesetzt. Das 2-stufige

stochastische rein erwartungswertbasierte Modell zugrundelegend, wurde nach diesen Lösen die Leitung $14,41 \in \bar{E}$ zusätzlich errichtet und die übrigen Leitungen teils deutlich verstärkt. Abb. 7.6 zeigt das erweiterte 6-Knoten-Netz. Die an den Leitungen notierten Werte zeigen die zusätzlich bereitgestellten Übertragungskapazitäten an. Man gelangt so zu erwarteten Kosten von $Q_{\mathcal{E}} = 69\,454\,489$ Einheiten,

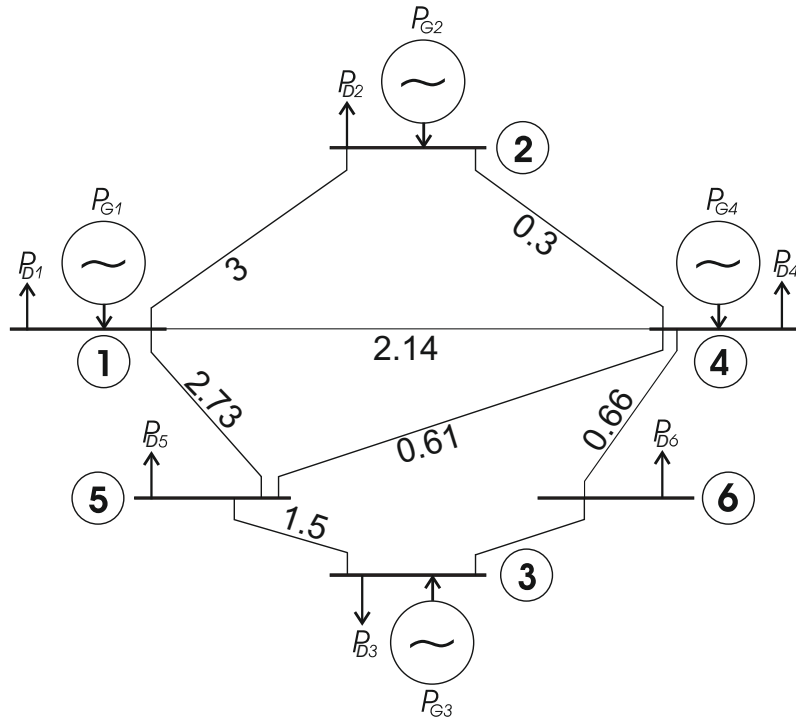


Abbildung 7.6: Das nachgerüstete 6-Knoten-Netz

welche die Ausbaurkosten von 4031874 Einheiten beinhalten. Das so ausgebaut Netz ermöglicht Produktionen, die Tabelle 7.20 zu entnehmen sind. Der Ausbau

N	1	2	3	4	5
z^{DC}	55 664 544	48 924 600	72 437 900	77 545 856	66 378 316

Tabelle 7.20: Produktionskosten nach einer Nachrüstung

stellt Zulässigkeit bei Eintreten von Szenario 4 her und senkt die Produktionskosten erheblich, kann aber sicherlich nie den Wert z^{IG} unterschreiten, da $z^{IG} \leq z^{DC}$ für alle Szenarien gelten muss. Es ist ferner zu beachten, dass zwecks Beschleunigung der Optimierung die Branchingstrategie zuerst auf die zur Neuerrichtung von

Kanten zugehörigen Binärvariablen umgestellt wurde. Das hier aufgezeigte Modell konnte so in weniger als einer Minute gelöst werden.

7.5 Eine Fallstudie aus der Energiewirtschaft

Für die nachfolgend dargelegten Testrechnungen wurde ein Energieübertragungssystem zugrunde gelegt, welches es erlaubt, typische Situationen im Übertragungssystem der Bundesrepublik Deutschland nachzubilden. Dieses ist in Abb. 7.7 veranschaulicht. Die hier aufgezeigten Resultate entstanden in enger Kooperation mit dem Lehrstuhl für Energiesysteme und Energiewirtschaft der technischen Universität Dortmund. Aus der Zusammenarbeit ging auch [31] hervor. Die nachfolgend dargelegte Fallstudie kann detailliert dieser Literaturquelle entnommen werden. Die Parameter für das verwendete Energieübertragungssystem, welches in [30] ausführlich vorgestellt wird, wurden vom Lehrstuhl für Energiesysteme und Energiewirtschaft der technischen Universität Dortmund zur Verfügung gestellt. Es wird hier nur erwähnt, dass das Spannungsniveau 380 kV beträgt. Das verwendete Netz spiegelt das Energieübertragungssystem der BRD zwar nicht vollständig wider, im übrigen sind derartige Netzdaten nicht öffentlich zugänglich, es lassen sich aber trotz einer Reduktion auf insgesamt 28 Knoten stark belastete Nord-Süd-Verbindungen ausmachen und der Einfluss der Windeinspeisung untersuchen. Insbesondere wurden bei den noch aufgezeigten Testrechnungen Situationen untersucht, bei denen es zu Netzengpässen, d.h. möglichen Überlastungen von Übertragungsleitungen, kommen kann.

Abweichend von den bisher vorgestellten Optimierungsmodellen werden nun auch Mehrfachleitungen zwischen Netzknoten beachtet. Weiter bestehen hier die Energieerzeugungsanlagen aus einem ganzen Park von Kraftwerken, die sich aus Braunkohle-, Kernkraft-, Steinkohle- und Gasturbinenkraftwerken sowie Windenergieanlagen zusammensetzen können. Auch die Möglichkeit eines Imports und Exports elektrischer Energie (*Transit*) mit den dadurch verbundenen Kosten bzw. Gewinnen wird in diesem erweiterten Modell beachtet (*in Abb. 7.7 sind Import/Export-Möglichkeiten über die gerasterten Quadrate gekennzeichnet*). Modellweiterungen der zuvor geschilderten Art sind wiederum [31] zu entnehmen.

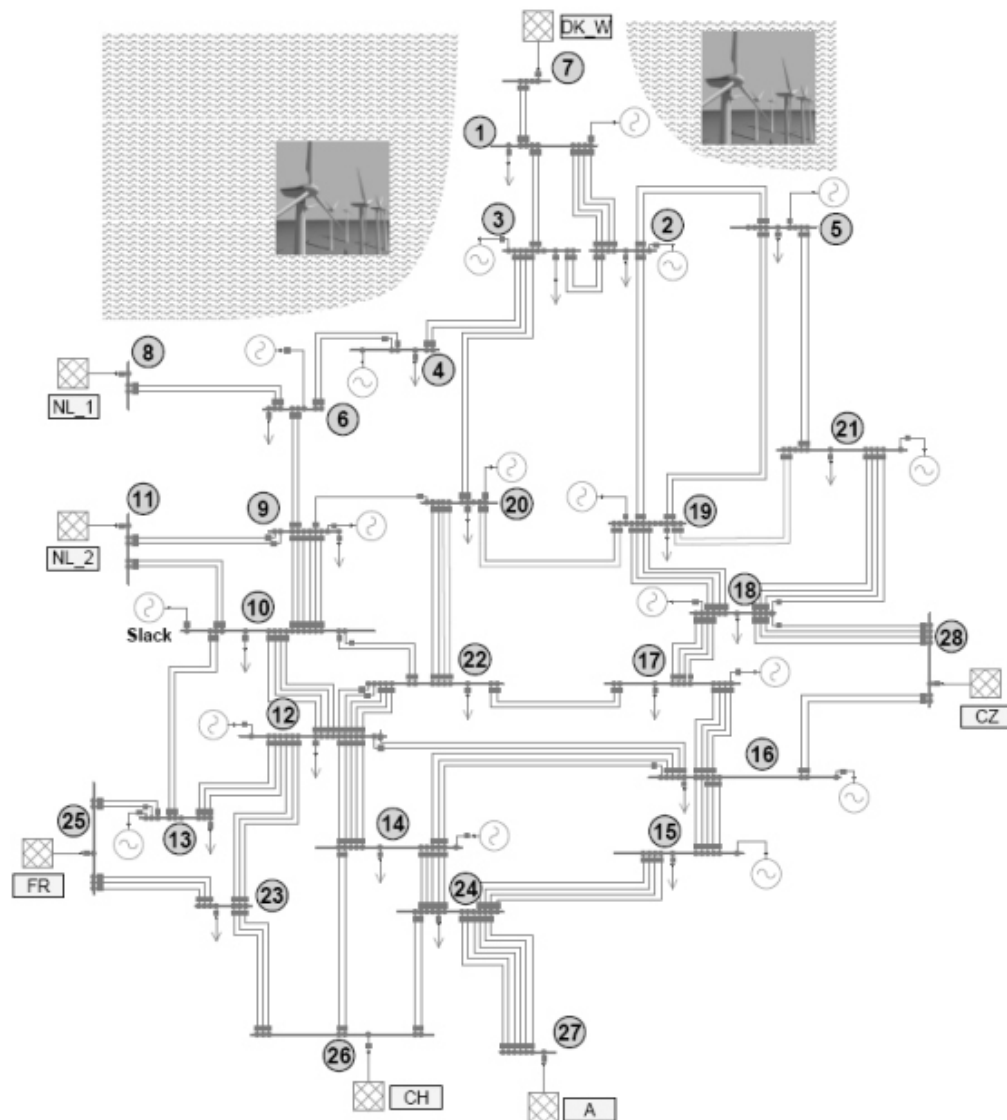


Abbildung 7.7: Ein typisiertes Energieübertragungssystem der BRD

Auch bei den Kraftwerksdaten konnte seitens des Lehrstuhls für Energiesysteme und Energiewirtschaft auf eine Datenbank mit detailreichen Informationen zurückgegriffen werden. Wiederum können diesbezüglich [30, 31] weitere Informationen entnommen werden.

Die Rechenzeiten, die zur Lösung der DC- bzw. RDCOL-Modelle benötigt wurden, betragen nur wenige Sekunden. Tabelle 7.21 zeigt die durch Minimierung des DC- und RDCOL-Modells ermittelten Werte und weitere Kenngrößen, wobei

Rundungen vorgenommen wurden. Die Windeinspeisung betrug hierbei 7200 MW. Dies entspricht genau 40% der maximal zur Verfügung stehenden Leistung der Windenergieanlagen, welche sich auf 18000 MW beläuft. Eine Überprüfung der

	DC	RDCOL
Optimalwert	1 181 596	1 200 164
Gesamteinspeisung	59 018	59 442
WEA-Einspeisung	7 200	7 200
Import	5 882	5 882
Export	3 125	3 125
Last	61 775	61 775
Verluste	0	424

Tabelle 7.21: Optimalwerte in Euro und weitere Kenngrößen in MW bei 40% WEA-Einspeisung

RDCOL-Lösung bzgl. der approximierten ohmschen Übertragungsverluste ergab zudem, dass diese auf keiner Leitung überschätzt wurden. Somit unterschätzt die Lösung des RDCOL-Modells die Übertragungsverluste. Da der Toleranzparameter mit $\epsilon = 10^{-5}$ angesetzt wurde, lag aber nur eine geringfügige Unterschätzung vor. Zudem zeigte sich, dass die durch das RDCOL-Modell gewonnene Entscheidung als Startpunkt für eine klassische Lastflussberechnung verwendet werden kann, d.h. von ihr aus tritt Konvergenz des Newton-Verfahrens ein. Weitere Einzelheiten werden noch genannt. Ergänzend wurden auch Testrechnungen vorgenommen, bei denen die Windeinspeisung 80% bzw. 100% der installierten Leistung betrug. Tabelle 7.22 zeigt die gewonnenen Ergebnisse. Oftmals sind hohe Einspeisungen der Windenergieanlagen problematisch, da sie zu Überlastungen der Leitungen führen. Durch die DC- bzw. RDCOL-Modellierung konnten dennoch Einspeisungen ermittelt werden, welche die Übertragungsleitungen nicht überlasten. Es zeigte sich ferner, dass lediglich bei einer 100%-Windeinspeisung eine geringfügige Verlustüberschätzung auf der Leitung $13,31 \in E$ vorlag. Auf allen anderen Leitungen lag keine Überschätzung der Netzverluste vor. Von den ermittelten RDCOL-Entscheidungen konnte wieder eine Konvergenz des Newton-Verfahrens für die

	DC	RDCOL	DC	RDCOL
	80% WEA-Einspeisung		100% WEA-Einspeisung	
Optimalwert	969 421	986 275	931 242	945 198
Gesamteinspeisung	59 417	60 117	59 422	60 178
WEA-Einspeisung	14 400	14 400	18 000	18 000
Import	5 483	5 483	5 478	5 483
Export	3 125	3 125	3 125	3 125
Last	61 775	61 775	61 775	61 775
Verluste	0	700	0	762

Tabelle 7.22: Optimalwerte in Euro und weitere Kenngrößen in MW

klassische Lastflussberechnung eingeleitet werden. Dipl.-Wirt.-Ing. D. Waniek führte, neben Bereitstellung der Netz- und Kraftwerksdaten, auch eine Verifikation der durch Lösen des RDCOL-Modells ermittelten Werte durch. Diese Validierung kann in weitaus detaillierter Form [31] entnommen werden. Dabei wurden die über RDCOL-Minimierung ermittelten Werte als Eingangsdaten für das AC-Modell verwendet, welches im Anschluss selbst mit einer klassischen Methode zur Lastflussberechnung gelöst wurde. Das kommerzielle Netzberechnungsprogramm Neplan wurde hierbei verwendet. In Tabelle 7.23 sind die Datensätze, die in mit Ref. (AC) gekennzeichneten Spalten stehen, durch Neplan ermittelt worden. Die mit Opt. (AC) gekennzeichneten Spalten zeigen die durch Neplan ermittelten Werte an, wenn die Optimalentscheidung des RDCOL-Modells als Eingangsgröße genutzt wird. Es

	Ref. (AC)	Opt. (RDCOL)	Opt. (AC)	Ref. (AC)	Opt. (RDCOL)	Opt. (AC)	Ref. (AC)	Opt. (RDCOL)	Opt. (AC)
Windeinspeisung		40%			80%			100%	
Optimalwert [T€]	1231	1200	1201	971	986	987	858	945	945
Import [MW]	5347	5882	5882	5347	5483	5483	5437	5483	5483
Export [MW]	3472	3125	3125	3472	3125	3125	3472	3125	3125
Netzverluste [MW]	444	424	434	1016	700	709	1468	762	768
Überlastung von Betriebsmitteln	nein	nein	nein	ja	nein	nein	ja	nein	nein

Tabelle 7.23: Vergleich der Modellierungsansätze

wurden hier nur die grundlegenden Resultate aufgezeigt. Der Literaturquelle [30]

können weitere Einzelheiten entnommen werden. Insbesondere beschäftigt sich der Artikel weitaus detaillierter mit der Interpretation der Ergebnisse. Der folgende Auszug wird aus der genannten Quelle zitiert:

Der Vergleich der Ergebnisse des vorgestellten Fallbeispiels zeigt, dass es auf einzelnen Leitungen zu hohen Abweichungen der Leistungsflüsse kommt. Diese sind größtenteils durch das Modell selbst bedingt und von Fall zu Fall unterschiedlich. Das Ziel der RDCOL-Modellierung konnte jedoch erreicht werden, da die optimierten Einspeisungen der Kraftwerke in keinem Fall zu Überlastungen von Betriebsmitteln bei der Berechnung des vollständigen AC-Lastflusses führen und die gesamten Netzverluste sehr genau abgeschätzt werden. Die Ergebnisse werden durch die Netztopologie begünstigt, da in den Bereichen um die Slack- und PU-Knoten, in denen es zu den größten Abweichungen kommt, das Netz nur schwach ausgelastet ist. Die stark belasteten Leitungen werden dagegen durch das RDCOL-Modell sehr genau abgebildet.

Zukünftig kann auch dazu übergegangen werden, einen gesamten Zeitraum zu simulieren. Entsprechende exemplarische Rechnungen wurden in diesem Kapitel vorgestellt. Erst so ist es möglich, über den Ansatz der zwei- oder auch mehrstufigen stochastischen Optimierung unsichere Datensätze, wie die der Windstärke, in der Optimierungsphase beachten zu können. In dieser Arbeit wurde aufgezeigt, in welcher Weise sich unsichere Datensätze miteinbinden lassen. Die vorgestellten Testrechnungen, bei denen Dekompositionsmöglichkeiten ausgenutzt wurden, zeigten auch, dass derartige Modelle in akzeptabler Rechenzeit, natürlich abhängig von der Modellierungsgenauigkeit der stochastischen Effekte, lösbar bleiben.

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit wird mit einer Zusammenfassung des Erreichten und einem Ausblick auf mögliche Weiterentwicklungen abgeschlossen. Zunächst wurde in Kapitel 1 die zugrunde liegende Problemstellung erläutert und ein erster Eindruck der zu beachtenden technischen und mathematischen Aspekte gegeben. Gemäß dieser in Grundzügen formulierten Aufgabenstellung wurde in Abschnitt 2 die Aufgabenstellung weiter konkretisiert und geeignete mathematische Optimierungsmodelle für deterministische Datenlagen entworfen. Insbesondere wurde hierbei ein Modell entwickelt, welches das elektrische Energieübertragungssystem integriert, Übertragungsverluste auf Leitungen beachtet und den Einsatz der Energieerzeugungsanlagen genau erfasst, d.h. neben der reinen Einspeisung wird auch der Schaltzustand berücksichtigt. In Kapitel 3 wurden Lösungsverfahren in allgemeingültiger Beschreibung vorgestellt. Dabei wurde ein Algorithmus entwickelt, der es erlaubt, die Optimallösung einer relaxierten Form desjenigen Optimierungsmodells, welches ohmsche Übertragungsverluste beachtet, durch Lösen von Masterproblemen, die selber nur in gemischt-ganzzahliger linearer Beschreibung vorliegen, anzunähern. Kapitel 4 befasste sich intensiv mit der Integration von unsicheren Datensätzen. Dies führte auf stochastische Optimierungsmodelle. Dabei wurden sowohl risikoneutrale als auch risikoaverse Zweistufenansätze angesprochen, aber auch in Grundzügen Mehrstufenmodelle aufgezeigt. Die Verwendbarkeit der stochastischen Modellierungsansätze auf die in Kapitel 2 angesprochenen Modelle wurde festgestellt. In Kapitel 5 wurden effektive Dekompositionsverfahren vorgestellt, mit denen stochastische Optimierungsmodelle auch bei einer genaueren Modellierung des Zufalls behandelbar bleiben. Der für die zweistufige gemischt-ganzzahlige konvexe Modellklasse aufgezeigte Algorithmus erlaubte so auch, nichtlineare Einflüsse

bei gleichzeitiger Ausnutzung dekompositorischer Eigenschaften, die zu deutlichen Effizienzsteigerungen hinsichtlich der Rechenzeit führen, beachten zu können. In Kapitel 6 wurden untere Schranken für das Wechselstrommodell erzeugt und eine in den Ingenieurwissenschaften eingesetzte Methode zur Netzzustandsbestimmung weiter untersucht. Heuristische Lösungsansätze wurden hier vorgestellt. Abschließend zeigten die Beispielrechnungen aus Kapitel 7 für rein deterministische Datenlagen, dass die ermittelten Lösungen für die approximativen Gleichstrommodelle nahe an denen des durch den heuristischen Ansatz gewonnenen zulässigen Punktes des Wechselstrommodells liegen. Zudem wurde dort auch auf die Problematik bei Anwendung von Produktionsentscheidungen eingegangen, die sich bei einer Mißachtung des elektrischen Energieübertragungssystems in der Optimierungsphase ergeben, indem die massiven Überlastungen der Übertragungsleitungen bei Nutzung derartiger Entscheidungen aufgezeigt wurden. Ferner wurde der mögliche Einfluss von Transmissionskosten auf die Optimallösung aufgezeigt. Zahlreiche stochastische Testrechnungen wurden veranschaulicht und neben motivierenden Beispielen auch die Effizienz der Dekompositionsverfahren vorgestellt. Eine konkrete Fallstudie aus der Energiewirtschaft schloss dieses Kapitel ab. Gemäß der in Kapitel 1 genannten Aufgabenstellung, Modelle und Algorithmen zur stochastischen Betriebsoptimierung von elektrischen Energieerzeugungsanlagen zu entwickeln, kann dieses Ziel für die reduzierten Modellformulierungen als erreicht angesehen werden. Bei Nutzung der Wechselstrommodellierung konnten hingegen nur heuristische Ansätze entwickelt werden. Forschungsbedarf bleibt daher bei derartigen Modellierungstechniken bestehen. Es soll festgehalten werden:

Könnte man allgemein zeigen, dass das DC-Modell eine Relaxierung des AC-Modells darstellt, so wäre man in der Lage, gute untere Schranken zu erzeugen. Man könnte so unter Umständen das AC-Modell doch über ein Branch&Bound-Verfahren angehen, indem gute untere Schranken durch Lösen des DC-Modells gewonnen werden und obere durch Lösen des von Ganzzahligkeitsforderungen bereinigten AC-Modells, welches durch Nutzung einer globalisierten Form der sequentiellen quadratischen Programmierung ermöglicht wird.

Anhang A

Symbolverzeichnis

Mengen

V	Netzknoten
V'	Einspeisungsknoten
E	Kanten
E'	Kanten mit Durchleitungskosten
\tilde{E}	zur Verstärkung freigegebene Kanten
\bar{E}	zur Neuerrichtung von Kanten freigegebene Verbindungen
N_k	zu $k \in V$ adjazente Knoten
\bar{N}_k	zu $k \in V$ durch Leitungsneubau mögliche adjazente Knoten
T	diskretisierte Zeitpunkte
\bar{T}	$T \setminus \{0\}$

Daten

P_D	gesamte Wirkleistungslast
Q_D	gesamte Blindleistungslast
P_{D_k}	Wirkleistungslast in $k \in V$
Q_{D_k}	Blindleistungslast in $k \in V$
g_{kl}	Konduktanz der Leitung $kl \in E$
b_{kl}	Suszeptanz der Leitung $kl \in E$
\bar{b}_{kl}	Suszeptanz der Leitung $kl \in E$ für DC-Fluss
x_{kl}	Längsreaktanz der Leitung $kl \in E$

b_{kl}^0	Nebenwiderstandssuszeptanz der Leitung $kl \in E$
\tilde{g}_{kl}	Realteil des Elements kl der Knoten-Kanten-Admittanzmatrix
\tilde{b}_{kl}	Imaginärteil des Elements kl der Knoten-Kanten-Admittanzmatrix
d_{kl}^{max}	maximale Übertragungskapazität der Leitung $kl \in E$
$P_{G_k}^{min}$	minimal mögliche Wirkleistungseinspeisung der Anlage $k \in V'$
$P_{G_k}^{max}$	maximal mögliche Wirkleistungseinspeisung der Anlage $k \in V'$
$Q_{G_k}^{min}$	minimal mögliche Blindleistungseinspeisung der Anlage $k \in V'$
$Q_{G_k}^{max}$	maximal mögliche Blindleistungseinspeisung der Anlage $k \in V'$
U_k^{min}	minimal mögliche Spannung an $k \in V$
U_k^{max}	maximal mögliche Spannung an $k \in V$
$P_{G_k}^{init}$	Initialisierung der Wirkleistungseinspeisung von Anlage $k \in V'$
s_k^{init}	Initialisierung des Schaltzustands von Anlage $k \in V'$
$\bar{\Delta}_k$	max. mögliche Leistungssteigerung der Anlage $k \in V'$
$\underline{\Delta}_k$	max. mögliche Leistungsverminderung der Anlage $k \in V'$
$\bar{\Gamma}_k$	max. möglicher Leistungswert bei Einschaltung von Anlage $k \in V'$
$\underline{\Gamma}_k$	max. möglicher Leistungswert bei Abschaltung von Anlage $k \in V'$
$\bar{\Lambda}_k$	Mindestlaufzeit von Anlage $k \in V'$
$\underline{\Lambda}_k$	Mindeststillstandzeit von Anlage $k \in V'$
$P_{G_k}^{init}$	Wirkleistungseinspeisung der Anlage k zu Beginn der Optimierung
s_k^{init}	Schaltzustand der Anlage k zu Beginn der Optimierung
α_k	linearer Brennstoffkostenanteil der Anlage $k \in V'$
β_k	fixer Brennstoffkostenanteil der Anlage $k \in V'$
γ_k	Anfahrkosten der Anlage $k \in V'$
δ_{kl}	linearer Transmissionskostenanteil für Leitung $kl \in E'$
c_{kl}^{add}	linearer Kostenanteil bei Kapazitätserweiterung der Kante $kl \in \bar{E} \cup \tilde{E}$
c_{kl}^{ins}	Errichtungskosten bei Neubau der Leitung $kl \in \bar{E}$
M	hinreichend groß gewählte Konstante (Mehrfachverwendung)
n	Kardinalität von V
t_{max}	Kardinalität von \bar{T}
t^*	letzter deterministischer Zeitpunkt bei Zweistufenmodellierung

Variablen

S_k	$\in \mathbb{C}$	komplexe Leistung in $k \in V$
P_k	$\in \mathbb{R}$	Wirkleistung in $k \in V$
Q_k	$\in \mathbb{R}$	Blindleistung in $k \in V$
S_L	$\in \mathbb{C}$	komplexe Netzverluste
P_L	$\in \mathbb{R}_+$	Wirkleistungsverluste
Q_L	$\in \mathbb{R}$	Blindleistungsverluste
e_k	$\in \mathbb{R}_+$	Realteil der komplexen Spannung in $k \in V$
f_k	$\in \mathbb{R}$	Imaginärteil der komplexen Spannung in $k \in V$
P_{G_k}	$\in \mathbb{R}_+$	Wirkleistungseinspeisung der Anlage $k \in V'$
Q_{G_k}	$\in \mathbb{R}$	Blindleistungseinspeisung der Anlage $k \in V'$
P_{L_k}	$\in \mathbb{R}_+$	Hilfsgrösse zur Einbeziehung von Übertragungsverlusten
s_k	$\in \{0, 1\}$	Schaltzustand von Anlage $k \in V'$
u_k	$\in \{0, 1\}$	Einschaltungserfassung der Anlage $k \in V'$
v_k	$\in \{0, 1\}$	Ausschaltungserfassung der Anlage $k \in V'$
n_{kl}	$\in \{0, 1\}$	Neubauentscheidung für $kl \in \bar{E}$
p_{kl}	$\in \mathbb{R}$	Wirkleistungsfluss entlang Kante $kl \in E$
\bar{p}_{kl}	$\in \mathbb{R}$	Wirkleistungsfluss entlang einer möglichen Kante $kl \in \bar{E}$
d_{kl}^{add}	$\in \mathbb{R}$	zusätzliche Übertragungskapazität für Kante $kl \in E$
ν_{kl}	$\in \mathbb{R}$	ohmsche Übertragungsverluste entlang Kante $kl \in E$
q_{kl}	$\in \mathbb{R}$	Blindleistungsfluss entlang Kante $kl \in E$
\tilde{p}_{kl}	$\in \{0, 1\}$	Hilfsvariable zur Betragsbestimmung von $p_{kl} \in E'$
\hat{p}_{kl}	$\in \mathbb{R}_+$	Betrag des Wirkleistungsflusses p_{kl}
U_k	$\in \mathbb{R}_+$	Spannungsbetrag in $k \in V$
\mathbf{U}_k	$\in \mathbb{C}$	komplexe Spannung in $k \in V$
θ_k	$\in \mathbb{R}$	Spannungswinkel in $k \in V$
θ_{kl}	$\in \mathbb{R}$	Spannungswinkeldifferenz zwischen $k, l \in V$

Funktionen

- C_k Produktionskosten der Anlage $k \in V'$
- D_k Anfahrkosten der Anlage $k \in V'$
- E_{kl}^{AC} Transmissionskosten auf Leitung $kl \in E'$ (AC-Modellierung)
- E_{kl}^{DC} Transmissionskosten auf Leitung $kl \in E'$ (DC-Modellierung)
- F_{kl}^1 Kosten bei Ausbau der Übertragungskapazität von Leitung $kl \in \bar{E} \cup \tilde{E}$
- F_{kl}^2 Kosten bei Neuerrichtung der Leitung $kl \in \bar{E}$

Bei Betrachtung eines Zeitraumes sind hier gelistete Variablen teilweise mit einem zusätzlichen Zeitindex zu kennzeichnen. Ferner beziehen sich die hier angegebenen Bezeichnungen nur auf die entwickelten Modelle gemäß Kapitel 2.

Anhang B

Datensituation: 6-Knoten-Netz

Netzdaten

$$V = \{1, \dots, 6\}$$

$$V' = \{1, \dots, 4\}$$

$$E = \{12, 21, 15, 51, 24, 42, 35, 53, 36, 63, 46, 64, 45, 54\}$$

$$g_{kl} = 5, b_{kl} = -10, b_{kl}^0 = 0 \quad \forall kl \in E$$

$$d_{kl}^{max} = 1 \quad \forall kl \in E \setminus \{45, 54\}, d_{45}^{max} = d_{54}^{max} = 0.5$$

Daten der Erzeugungsanlagen

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (24, 20, 18, 21)$$

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = (105, 101, 109, 98)$$

$$(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4) = (60, 40, 20, 30)$$

$$(P_{G_1}^{min}, P_{G_2}^{min}, P_{G_3}^{min}, P_{G_4}^{min}) = (0, 0.5, 0.2, 0.5)$$

$$(P_{G_1}^{max}, P_{G_2}^{max}, P_{G_3}^{max}, P_{G_4}^{max}) = (10, 3, 3, 3)$$

$$(\bar{\Gamma}_1, \bar{\Gamma}_2, \bar{\Gamma}_3, \bar{\Gamma}_4) = (\bar{\Delta}_1, \bar{\Delta}_2, \bar{\Delta}_3, \bar{\Delta}_4) = (2, 0.6, 1.2, 1.4)$$

$$(\underline{\Gamma}_1, \underline{\Gamma}_2, \underline{\Gamma}_3, \underline{\Gamma}_4) = (\underline{\Delta}_1, \underline{\Delta}_2, \underline{\Delta}_3, \underline{\Delta}_4) = (2, 0.6, 1.2, 1.4)$$

$$(\bar{\Lambda}_1, \bar{\Lambda}_2, \bar{\Lambda}_3, \bar{\Lambda}_4) = (1, 3, 3, 3)$$

$$(\underline{\Lambda}_1, \underline{\Lambda}_2, \underline{\Lambda}_3, \underline{\Lambda}_4) = (1, 3, 3, 3)$$

Lastdaten

t	$P_{D_1}^{(t)}$	$P_{D_2}^{(t)}$	$P_{D_3}^{(t)}$	$P_{D_4}^{(t)}$	$P_{D_5}^{(t)}$	$P_{D_6}^{(t)}$
1	1.00	2.20	1.72	1.18	1.00	0.51
2	1.00	2.20	1.72	1.18	0.80	0.51
3	1.10	2.42	1.83	1.21	0.60	0.55
4	1.10	2.42	1.83	1.21	0.30	0.55
5	1.15	2.53	1.89	1.23	0.20	0.57
6	1.20	2.64	1.94	1.24	0.15	0.58
7	1.30	2.86	2.04	1.26	0.10	0.61
8	1.35	2.97	2.09	1.27	0.06	0.63
9	1.35	2.97	2.09	1.27	0.06	0.63
10	1.40	3.08	2.13	1.27	0.06	0.64
11	1.44	3.17	2.16	1.28	0.06	0.65
12	1.49	3.28	2.20	1.28	0.06	0.66
13	1.51	3.32	2.22	1.28	0.06	0.67
14	1.55	3.41	2.25	1.29	0.06	0.67
15	1.60	3.52	2.28	1.29	0.07	0.68
16	1.58	3.48	2.27	1.29	0.07	0.68
17	1.56	3.43	2.25	1.29	0.07	0.68
18	1.60	3.52	2.28	1.29	0.07	0.68

$$(Q_{D_1}^{(t)}, Q_{D_2}^{(t)}, Q_{D_3}^{(t)}, Q_{D_4}^{(t)}, Q_{D_5}^{(t)}, Q_{D_6}^{(t)}) = (0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.5, 0.1) \quad \forall t \in T$$

Bei den Testrechnungen bzgl. eines Zeitpunktes wurden die Lastprofile für $t = 1$ zugrundegelegt.

Tabellenverzeichnis

2.1	Vor- und Nachteile der Modellierungsansätze	23
7.1	Resultierender Lastfluss bei IG-Modellierung	84
7.2	Resultierender Lastfluss bei DC-Modellierung	84
7.3	Resultierender Lastfluss bei DCOL-Modellierung	85
7.4	Resultierender Lastfluss bei FAC-Modellierung	86
7.5	Vergleich der ermittelten Optimallösungen/-werte	86
7.6	Lösungsvergleich bei Hinzunahme von Transmissionskosten	87
7.7	Einfluss von Unsicherheiten auf die Optimallösung	91
7.8	Einfluss des Risikos auf Optimallösung/-wert	92
7.9	Einfluss des Gewichtungsfaktors	92
7.10	Ergebnisse bei Erwartungswertminimierung	93
7.11	Ergebnisse bei Erwartungswert-Erwart.Überschuss-Minimierung . .	94
7.12	Ergebnisse bei Erwartungswert-Überschusswahrsch.-Minimierung .	94
7.13	Modelldimensionen bei stochastischer Optimierung	94
7.14	Ergebnisse bei Erwartungswertminimierung	95
7.15	Ergebnisse bei Erwartungswert-Erwart.Überschuss-Minimierung . .	95
7.16	Ergebnisse bei Erwartungswert-Überschusswahrsch.-Minimierung .	96
7.17	Ergebnisse zum IEEE118-Knoten-Netz	96
7.18	Ergebnisse bei mehrstufiger Optimierung	97
7.19	Produktionskosten vor Ausbau	98
7.20	Produktionskosten nach einer Nachrüstung	99
7.21	Optimalwerte in Euro und weitere Kenngrößen in MW bei 40% WEA-Einspeisung	102

7.22	Optimalwerte in Euro und weitere Kenngrößen in MW	103
7.23	Vergleich der Modellierungsansätze	103

Abbildungsverzeichnis

1.1	Ein elektrisches Energieübertragungssystem	6
1.2	Ein 3-Knoten-System	7
3.1	Graphische Veranschaulichung der zulässigen Verluste	42
3.2	Exemplarische Approximation der Verluste	45
7.1	Ein 6-Knoten-Netz	82
7.2	Optimierte Einspeisung bei IG-Modellierung	88
7.3	Optimierte Einspeisung bei DC-Modellierung	88
7.4	Optimierte Einspeisung bei RDCOL-Modellierung	89
7.5	Optimierte Einspeisung bei FAC(RDCOL)-Modellierung	89
7.6	Das nachgerüstete 6-Knoten-Netz	99
7.7	Ein typisiertes Energieübertragungssystem der BRD	101

Literaturverzeichnis

- [1] Aguado, J.A.; Rosehart, W.: *Alternative Optimal Power Flow Formulations*, 14h PSCC, Sevilla (2002)
- [2] Ahmed, S.; King, A.J.; Parija, G.: *A Multi-stage Stochastic Integer Programming Approach for Capacity Expansion under Uncertainty*, Journal of Global Optimization, Vol. 26, Issue 1, 3-24 (2003)
- [3] Alt, W.: *Nichtlineare Optimierung*, Vieweg Studium (2002)
- [4] Andersson, G.: *Modelling and Analysis of Electric Power Systems*, Lecture 227-0526-00, Power Systems Laboratory, ETH Zürich (2004)
- [5] Artzner, P.; Delbaen, F.; Eber, J.-M.; Heath, D.: *Coherent measures of risk*, Mathematical Finance, Vol. 9, No. 3, 203-228 (1999)
- [6] Bauer, H.: *Wahrscheinlichkeitstheorie*, de Gryter (2002)
- [7] Beale, E.M.L.: *On minimizing a convex function subject to linear inequalities*, J. Royal Statistical Society, Series B 17, 173-184 (1955)
- [8] Bergen, A.R.; Vittal, V.: *Power Systems Analysis, Second Edition*, Prentice-Hall (2000)
- [9] Birge, J.R.; Louveaux, F.V.: *Introduction to Stochastic Programming*, Springer-Verlag (1997)
- [10] Bienstock, D.; Mattia, S.: *Using mixed-integer programming to solve power grid blackout problems*, Discrete Optimization, Vol. 4, Issue 1, 115-141 (2007)

- [11] Blair, C.E.; Jeroslow, R.G.: *The value function of a mixed integer program*, Discrete Mathematics 19, 121-138 (1977)
- [12] Carøe, C.C.; Schultz, R.: *Dual decomposition in stochastic integer programming*, Operations Research Letters 24, 37-45 (1999)
- [13] Christensen, G.S.; El-Hawary, M.E.; Soliman, S.A.: *Optimal Control Application in Electric Power Systems*, Wiley (1987)
- [14] CPLEX Interactive Optimizer 9.1.3, ILOG (1997-2005)
- [15] Dantzig, G.B.: *Linear programming under uncertainty*, Management Science 1, 197-206 (1955)
- [16] ddsip, *C package for the dual decomposition of stochastic programs with mixed-integer recourse*, Fachbereich Mathematik, Universität Duisburg-Essen (2004)
- [17] Duran, M.A.; Grossmann, E.: *An outer-approximation algorithm for a class of mixed-integer nonlinear programs*, Mathematical Programming, Volume 36, Issue 3, 307-339 (1986)
- [18] Dyer, J.: *Escort: DC optimisation for production cost estimation*, IEE Colloquium on Optimal Power Flow - Invaluable Tool or Expensive Toy? 8/1-8/4 (1997)
- [19] Edelmann, H.; Theilsiefje, K.: *Optimaler Verbundbetrieb in der elektrischen Energieversorgung*, Springer-Verlag (1974)
- [20] Eichhorn, A.; Römis, W.: *Polyhedral risk measures in stochastic programming*, SIAM Journal on Optimization, Volume 16, Issue 1, 69-95 (2005)
- [21] Fletcher, R.; Leyffer, S.: *Solving mixed integer nonlinear programs by outer approximation*, Mathematical Programming, Volume 66, Issue 3, 327-349 (1994)
- [22] Gill, P.; Murray, W.: *SNOPT - A software package for solving large-scale optimization problems (linear and nonlinear programs)*, Stanford Business Software (1998-2006)

- [23] Gollmer, R.; Nowak, M.P.; Römisch, W.; Schultz, R.: *Unit commitment in power generation - a basic model and some extensions*, Annals of Operations Research, Vol. 96, Numbers 1-4, 167-189 (2000)
- [24] Gönen, T.: *Modern Power System Analysis*, Wiley (1988)
- [25] Grainger, J.J.; Stevenson, W.D.: *Power System Analysis*, McGraw-Hill (1994)
- [26] Han, S.P.: *Superlinearly convergent variable metric algorithm for general nonlinear programming problems*, Mathematical Programming, Vol. 11, 263-282 (1976)
- [27] Han, S.P.; Mangasarian, Q.L.: *Exact penalty function in nonlinear programming*, Mathematical Programming, Vol. 17, 251-269 (1976)
- [28] Handschin, E.: *Elektrische Energieübertragungssysteme*, 2. Auflage, Hüthig-Verlag (1987)
- [29] Handschin, E.: *Elektrische Energietechnik*, Skriptum, Lehrstuhl für Energiesysteme und Energiewirtschaft, Universität Dortmund (2004)
- [30] Handschin, E.; Häger, U.; Rehtanz, C.; Waniek, D.: *Influences of Wind Energy on the Operation of Transmission Systems*, IEEE PES General Meeting, Pittsburgh (2008)
- [31] Handschin, E.; Kuhn, S.; Rehtanz, C.; Schultz, R.; Waniek, D.: *Optimaler Kraftwerkseinsatz in Netzengpasssituationen*, Manuskript: Universität Duisburg-Essen/Technische Universität Dortmund, (erscheint noch) (2008)
- [32] Handschin, E.; Neise, F.; Neumann, H.; Schultz, R.: *Optimal operation of dispersed generation under uncertainty using mathematical programming*, International Journal of Electrical Power & Energy Systems, Vol. 28, Issue 9, 618-626 (2005)
- [33] Heinze, T.: *Ein Verfahren zur Dekomposition mehrstufiger stochastischer Optimierungsprobleme mit Ganzzahligkeit und Risikoaversion*, Dissertation, Fachbereich Mathematik, Universität Duisburg-Essen (2007)

- [34] Heinze, T.; Schultz, R.: *A branch-and-bound method for multistage stochastic integer programs with risk objectives*, Optimization (to appear) (2008)
- [35] Helmberg, C.: *Semidefinite Programming for Combinatorial Optimization*, ZIB-Report ZR-00-34, Konrad-Zuse-Zentrum Berlin (2000)
- [36] Herold, G.: *Elektrische Energieversorgung I*, J. Schlembach Fachverlag (2001)
- [37] Kall, P.; Wallace, S.: *Stochastic Programming*, Wiley (1994)
- [38] Kallrath, J.: *Gemischt-ganzzahlige Optimierung: Modellierung in der Praxis*, Vieweg (2002)
- [39] Kelley, J.E.: *The cutting-plane method for solving convex programs*, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Vol. 8, No. 4, 703-712 (1960)
- [40] Kim, S.G.; Outhred, H.: *Voltage quality of supply incorporated spot market model: a market efficiency perspective*, AUPEC2003, New Zealand (2003)
- [41] Kim, S.; Song, W.; Lee, B.: *Generation Redispatch Model to Enhance Voltage Security in Competitive Power Market Using Voltage Stability Constrained Optimal Power Flow (VSCOPF)*, Korea University Seoul, School of Electrical Engineering
- [42] Know Library: *Internetlexikon*, <http://know-library.net>
- [43] Kuhn, S.; Schultz, R.: *Risk Neutral and Risk Averse Power Optimization in Electricity Networks with Dispersed Generation*, Mathematical Methods of Operations Research (to appear) (2008)
- [44] Kuhn, S.; Schultz, R.: *Lastflussoptimierung bei unvollständiger Information*, VDI-Berichte 2018, Optimierung in der Energiewirtschaft, 237-248 (2007)
- [45] Louveaux, F.V.; Schultz, R.: *Stochastic integer programming*, in: Handbooks in Operations Research and Management Science, 10: Stochastic Programming (A. Ruszczyński, A. Shapiro eds.), Elsevier, Amsterdam (2003)

- [46] Märkert, A.; Schultz, R.: *On Deviation Measures in Stochastic Integer Programming*, Operations Research Letters, Vol. 33, No. 5, 441-449 (2005)
- [47] Moritz, S.: *A Mixed Integer Approach for the Transient Case of Gas Network Optimization*, Dissertation, Fachbereich Mathematik, Technische Universität Darmstadt Verlag (2006)
- [48] Müller, A.; Stoyan, D.: *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks*, Wiley (2002)
- [49] Murillo-Sánchez, C.; Thomas, R.J.: *Thermal Unit Commitment Including Optimal AC Power Flow Constraints*, Proceedings of the Thirty-First Hawaii International Conference on System Sciences, Vol. 3, 81-88 (1998)
- [50] Neise, F.; Schultz, R.: *Algorithms for mean-risk stochastic integer programs in energy*, Revista Investigación Operacional, Vol. 28, No. 1, 4-16 (2007)
- [51] Nowak, M.P.; Römisch, W.: *Stochastic Lagrangian relaxation applied to power scheduling in a hydro-thermal system under uncertainty*, Annals of Operations Research, Vol. 100, 251-272 (2000)
- [52] Nürnberg, R.; Römisch, W.: *A two-stage planning model for power scheduling in a hydro-thermal system under uncertainty*, Optimization and Engineering, Vol. 3, No. 4, 355-378 (2002)
- [53] Overhagen, T.: *Vorlesung Optimierung I und II*, Universität Siegen (1999)
- [54] Powell, M.J.D.: *Algorithms for nonlinear constraints that use Lagrangian functions*, Mathematical Programming, Vol. 14, 224-248 (1978)
- [55] Power Systems Test Case Archive: *Beispiele für Energieübertragungssysteme*, <http://www.ee.washington.edu/research/pstca>, University of Washington, College of Engineering
- [56] PowerWorld Simulator, PowerWorld Corporation, Illinois (2005)

- [57] Römisch, W.; Schultz, R.: *Multistage stochastic integer programs: An Introduction*, Online Optimization of Large Scale Systems (M. Grötschel, S.O. Krumke, J. Rambau, Eds.), Springer-Verlag (2001)
- [58] Ruszczyński, A.; Shapiro, A.: *Optimization of Convex Risk Functions*, Mathematics of Operations Research, Vol. 31, Issue 3, 433-452 (2006)
- [59] Ruszczyński, A.; Shapiro, A. (eds.): *Stochastic Programming*, Handbooks of Operations Research and Management Science, Vol. 10, Elsevier (2003)
- [60] Sánchez-Martin, P.; Ramos, A.: *Modeling Transmission Ohmic Losses in a Stochastic Bulk Production Cost Model*, Instituto de Investigación Tecnológica, Universidad Pontificia Comillas, Madrid (1997)
- [61] Sánchez-Martin, P.; Ramos, A.; Alonso, J.F.: *Probabilistic Midterm Transmission Planning in a Liberalized Market*, IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 20, No. 4, 2135-2142 (2005)
- [62] Schittkowski, K.: *On the convergence of a Sequential Quadratic Programming Method with an Augmented Lagrangian Line Search Function Systems Optimization Laboratory*, Dept. of Operations Research, Stanford University, California (1982)
- [63] Schultz, R.: *On structure and stability in stochastic programs with random technology matrix and complete integer recourse*, Mathematical Programming, Vol. 70, Issue 1, 73-89 (1995)
- [64] Schultz, R.; Tiedemann, S.: *Risk Aversion via Excess Probabilities in Stochastic Programs with Mixed-Integer Recourse*, SIAM Journal on Optimization, Vol. 14, Issue 1, 115-138 (2003)
- [65] Shapiro, A.: *On complexity of multistage stochastic programs*, Operations Research Letters, Vol. 34, Issue 1, 1-8 (2006)
- [66] Takriti, S.; Birge, J.R.; Long, E.: *A stochastic model for the unit commitment problem*, IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 11, Issue 3, 1497-1508 (1996)

- [67] Tiedemann, S.: *Risk Measures with Preselected Tolerance Levels in Two-Stage Stochastic Mixed-Integer Programming*, Dissertation, Cuvillier Verlag (2005)
- [68] Wallace, S.W.; Fleten, S.-E.: *Stochastic programming models in energy*, in: *Handbooks in Operations Research and Management Science 10: Stochastic Programming* (A. Ruszczyński, A. Shapiro eds.), Elsevier (2003)
- [69] Wikipedia: *Wikipedia - Die freie Enzyklopädie*, <http://www.wikipedia.org>
- [70] Wolsey, L.A.: *Integer Programming*, Wiley (1998)
- [71] Wood, A.J.; Wollenberg, B.F.: *Power Generation, Operation, and Control, 2nd Edition*, Wiley (1996)
- [72] Zhou, G.: *A Modified SQP Method and Its Global Convergence*, *Journal of Global Optimization*, Vol. 11, Issue 2, 193-205 (1997)

