Universität Duisburg-Essen

Fakultät für Mathematik

2010

Mathematikgeschichte lesen und verstehen

Eine theoretische und empirische Vergleichsstudie

Dissertation

zur Erlangung des Grades

Dr. rer. nat.

an der Fakultät für Mathematik
der Universität Duisburg-Essen

vorgelegt von

Michael R. Glaubitz

Band 1

Gutachter:

Prof. Dr. Hans Niels Jahnke (Universität Duisburg-Essen)
Prof. Dr. Jan van Maanen (Universität Utrecht)

Datum der mündlichen Prüfung: 29. April 2011

Fazil Hüsnü Daglarca

Reise

Verstehen
Ist eine Reise
Ins Land
Eines Anderen

Inhaltsverzeichnis

Band 1

Einleitung

0. Zielsetzung und Aufbau der Arbeit 1

0.1 Fokussierungen und Forschungsfragen 2
0.2 Aufbau der Arbeit 4
0.3 Danksagung 5

I. Theoretischer Teil

1. Mathematikgeschichte und Unterricht 8

1.1 Die historisch-genetische Konzeption 8
1.2 Die historisch-hermeneutische Konzeption 18

2. Die historisch-hermeneutische Konzeption mathematikgeschichtlicher Unterrichtsinterventionen 20

2.1 Der mathematikdidaktische Diskussionskontext 22
2.1.1 Die Lektüre historischer Quellen: Ansprüche und Chancen für den Mathematikunterricht . 22
2.1.2 Mathematikunterricht und Reflexion 24
2.1.2.1 Die Frage nach den Gründen 24
2.1.2.2 Die Frage nach den Inhalten 26
2.1.2.3 Die Frage nach den Implementierungsstrategien 28
2.1.2.3.1 Strategietypen 28
2.1.2.3.2 Lernpsychologische Hintergründe von Dissonanzstrategien 28
2.1.2.3.3 Historisch-hermeneutische Interventionen als reflexionsfördernde Diskrepanzerlebnisse .. 30

2.2 Der geschichtsdidaktische Diskussionskontext 30
2.2.1 Definition und Differenzierungen: Was ist eine historische Quelle? 31
2.2.1.1 Beispiele für mathematikgeschichtliche Quellen 31
2.2.1.2 Differenzierungen des Quellenbegriffs 37
2.2.2 Zum Umgang mit Quellen und ihren Eigenarten 39
2.2.2.1 Quellen: Illustration oder Mehrwert? 39
2.2.2.2 Beispiel: Die soziologische Dimension mathematischer Arbeit als Kontextinformationen von Quellen ... 40
2.2.2.3 Quellen im Vergleich zu Darstellungen 47
2.2.2.4 Quellen als Medien dialogischer Verstehensvollzüge 48
2.2.3 Methodische und didaktische Anforderungen an die Textsorte Quelle 49
2.2.4 Methodische Arrangements 52
2.2.5 Fazit nach Durchsicht der geschichtsdidaktischen Beiträge 54

2.3 Der hermeneutische Diskussionskontext 57
2.3.1 Terminologisches: Was heißt Hermeneutik? 57
2.3.2 Systematisches: Was bedeutet Hermeneutik? 59
2.3.2.1 Verstehen 59
2.3.2.1.1 Verstehen im hermeneutischen Zirkel 61
2.3.2.1.2 Verstehen und Erklären 67
2.3.2.1.3 Sinnhaftigkeit und die zirkuläre „Als-Struktur" des Verstehens 72
2.3.2.1.4 Der Primat des dialogischen, menschlichen Verstehens 75
2.3.2.1.5 Zusammenfassung der Gedanken zum Verstehensbegriff 77
2.3.2.2 Perspektivität 78
2.3.2.3 Die Begegnung mit dem Fremden 83
2.3.2.4 Beispiel: Die Einführung der irrationalen Zahlen im Unterricht 86
2.3.2.4.1 Die gemutmaßte Herkunft des Irrationalitätsbeweises: Euklid X, 115a/117 86
2.3.2.4.2 Analyse von Euklid X, 115a/117 88
2.3.2.4.3 Zahlenverhältnisse und Bruchrechnung bei den Griechen 94
2.3.2.4.4 Zur Darstellung im Schulbuch 96
2.3.2.5 Zwischenbemerkung 97
2.3.2.6 Beispiel: Der Deutungsstreit um Euklid II 98
2.3.2.7 Zum Umgang mit dem „Anderen" in mathematikgeschichtlichen Quellen 100
2.3.3 Didaktisch-pädagogische Implikationen 103
2.3.4 Zur Frage einer möglichen methodischen Ausgestaltung hermeneutisch orientierten Unterrichts 105
2.3.4.1 Hermeneutische Kanones 105
2.3.4.2 Hermeneutische Kompetenzen und methodische Zugänge 107

II. Exegetischer Teil

3. Das Material 112

3.1 Al-Khwarizmis al-jabr 112
3.1.1 Al-Khwarizmis al-jabr: Die Textdimension 112
3.1.1.1 Zur Überlieferung 112
3.1.1.2 Zu den gewählten Auszügen 115
3.1.1.2.1 Die Auflösungsregeln 116
3.1.1.2.1.1 Al-Khwarizmis Fall 4: „Quadrate und Wurzeln sind gleich Zahlen" 116
3.1.1.2.1.2 Al-Khwarizmis Fall 5: „Quadrate und Zahlen sind gleich Wurzeln" 118
3.1.1.2.1.3 Al-Khwarizmis Fall 6: „Wurzeln und Zahlen sind gleich Quadraten" 120
3.1.1.2.2 Die Begründungen 122
3.1.1.2.2.1 Begründung zu Fall 4: „Quadrate und Wurzeln sind gleich Zahlen" 122
3.1.1.2.2.2 Begründung zu Fall 5: „Quadrate und Zahlen sind gleich Wurzeln" 129
3.1.1.2.2.3 Begründung zu Fall 6: „Wurzeln und Zahlen sind gleich Quadraten" 136
3.1.1.2.3 Zur Semantik einzelner Ausdrücke 141
3.1.1.2.4 Das Vorwort des Autors 142
3.1.1.3 Die deutschsprachige Übertragung der Quelle 145
3.1.2 Die hermeneutische Analyse der Quelle 150
3.1.2.1 Zum Autor und seinem kulturellen sowie geschichtlichen Kontext 151

3.1.2.1.1 Al-Khwarizmis Leben und Werk ... 151
3.1.2.1.2 Das Haus der Weisheit und das Streben nach Wissen ... 153
3.1.2.1.3 Historischer Exkurs ... 154
3.1.2.1.3.1 Der Aufstieg des Islam und seine kulturelle Blüte ... 154
3.1.2.1.3.2 Religion und Vernunft in der islamischen Kultur ... 157
3.1.2.1.4 Al-Khwarizmis Vermächtnis ... 159
3.1.2.2 Zur Stellung der Quelle innerhalb der problemgeschichtlichen Tradition ... 162
3.1.2.2.1 Geschichtlicher Überblick ... 162
3.1.2.2.1.1 Ägypter ... 163
3.1.2.2.1.2 Babylonier ... 164
3.1.2.2.1.3 Griechen ... 165
3.1.2.2.1.4 Inder ... 166
3.1.2.2.1.5 Araber ... 167
3.1.2.2.1.6 Europäische Renaissance ... 168
3.1.2.2.1.7 Das Problem der negativen Zahlen ... 169
3.1.2.2.1.8 Fortschreitende Formalisierung und Standardisierung ... 171
3.1.2.3 Al-Khwarizmis al-jabr als Zeugnis einer präformalen Entwicklungsstufe ... 173

III. Empirischer Teil

4. Das Design der empirischen Studie ... 178

4.1 Das Arrangement der Untersuchung als Vergleichsstudie ... 178

4.2 Die Datenerhebung ... 179

4.3 Die Unterrichtsreihen ... 179
4.3.1 Die gemeinsame Grundlage beider Reihen ... 179
4.3.2 Die historisch-hermeneutische Unterrichtsreihe ... 183
4.3.2.1 Überblick ... 183
4.3.2.1.1 Arbeitsheft ... 183
4.3.2.1.2 Phasierung ... 184
4.3.2.2 Ablauf und mögliche Gestaltung des Unterrichts ... 186
4.3.2.2.1 Erste Stunde: Einstieg ... 186
4.3.2.2.2 Zweite bis vierte Stunde: Erarbeitung ... 200
4.3.2.2.3 Fünfte und sechste Stunde: Weitere Handlung, Ergebnis und Reflexion ... 215
4.3.2.3 Zur Frage der Schulung und Begleitung der Lehrerinnen und Lehrer ... 229
4.3.3 Die konventionelle Vergleichsreihe ... 230
4.3.3.1 Überblick ... 230
4.3.3.2 Erste und zweite Stunde: Übungen ... 230
4.3.3.3 Dritte bis fünfte Stunde: Einfache Anwendungen ... 231
4.3.3.4 Sechste Stunde: Weitere Anwendungen ... 234

4.4 Die Leistungstests ... 235

5. Durchführung und Auswertung der Intervention 236

5.1 Überblick 236

5.2 Beschreibung der teilnehmenden Schülerpopulation (Prä-Befragung) 236
5.2.1 Das allgemeine Interesse der Schülerinnen und Schüler an Mathematik 237
5.2.1.1 Gesamtbilanz 237
5.2.1.2 Differenzierung nach Experimental- und Kontrollgruppe 240
5.2.1.3 Differenzierung nach Gender 241
5.2.1.4 Differenzierung nach Klassen 242
5.2.1.5 Zusammenfassung 244
5.2.2 Der mathematische Alltag – typische Tätigkeiten im Unterricht 244
5.2.2.1 Gesamtbilanz 244
5.2.2.2 Differenzierung nach Experimental- und Kontrollgruppe 245
5.2.2.3 Differenzierung nach Gender 247
5.2.2.4 Differenzierung nach Klassen 248
5.2.2.5 Zusammenfassung 254
5.2.3 Das mathematische Selbstbild – was trauen die Lernenden sich zu? 255
5.2.3.1 Gesamtbilanz 255
5.2.3.2 Differenzierung nach Experimental- und Kontrollgruppe 258
5.2.3.3 Differenzierung nach Gender 258
5.2.3.4 Differenzierung nach Klassen 260
5.2.3.5 Zusammenfassung 262
5.2.4 Die Ergebnisse der vorgängigen Lernstandserhebung 263
5.2.5 Der Beitrag der Lernenden zum Unterricht und ihre Motivation 265
5.2.6 Die Ansichten und Urteile der Lernenden über Mathematik 266
5.2.6.1 Gesamtbilanz 266
5.2.6.2 Differenzierung nach Experimental- und Kontrollgruppe 267
5.2.6.3 Differenzierung nach Gender 268
5.2.6.4 Differenzierung nach Klassen 268
5.2.6.5 Zusammenfassung 270
5.2.7 Angaben der Lernenden zum eigenen Lerntyp 270
5.2.7.1 Gesamtbilanz 270
5.2.7.2 Differenzierung nach Experimental- und Kontrollgruppe, nach Gender und nach Klassen....271
5.2.8 Zusammenfassung 272
5.2.8.1 Die Unterschiede zwischen Experimental- und Kontrollgruppe 272
5.2.8.2 Die Unterschiede zwischen Jungen und Mädchen 272
5.2.8.3 Die Merkmale der Klassen 273

5.3 Darstellung des Unterrichts während der Intervention 274
5.3.1 Besonderheiten in den Unterrichten der Experimentalklassen 274
5.3.2 Hermeneutisch interessante Beispiele 275
5.3.2.1 Erste Szene: Einstieg und erster Kontakt mit der Quelle 275
5.3.2.1.1 Vorbemerkung 275
5.3.2.1.2 Kommentiertes Unterrichtstranskript (Klasse B1) 276

5.3.2.1.3 Einschätzungen ... 284
5.3.2.1.3.1 Aus Sicht des Beobachters ... 284
5.3.2.1.3.2 Aus Sicht der Beteiligten ... 285
5.3.2.2 Zweite Szene: Der Umgang mit den Darstellungsformen Al-Khwarizmis ... 286
5.3.2.2.1 Überblick ... 286
5.3.2.2.2 Ausschnitte aus den Arbeitsheften ... 287
5.3.2.2.3 Kommentiertes Unterrichtstranskript (Klasse D2) ... 293
5.3.2.2.4 Einschätzungen ... 297
5.3.2.2.4.1 Aus Sicht der Beteiligten ... 297
5.3.2.2.4.2 Aus Sicht des Beobachters ... 299
5.3.2.3 Dritte Szene: Die Diskussion über negative Zahlen ... 299
5.3.2.3.1 Überblick ... 299
5.3.2.3.2 Klasse E ... 300
5.3.2.3.2.1 Kommentiertes Unterrichtstranskript ... 300
5.3.2.3.2.2 Einschätzungen ... 304
5.3.2.3.2.2.1 Aus Sicht des Beobachters ... 304
5.3.2.3.2.2.2 Aus Sicht der Beteiligten ... 304
5.3.2.3.3 Klasse A ... 305
5.3.2.3.3.1 Kommentiertes Unterrichtstranskript ... 305
5.3.2.3.3.2 Einschätzungen ... 309
5.3.2.3.3.2.1 Aus Sicht der Beteiligten ... 309
5.3.2.3.3.2.2 Aus Sicht des Beobachters ... 309
5.3.2.3.4 Zwischenfazit ... 310
5.3.2.4 Vierte Szene: Die Diskussion des Vorworts ... 310
5.3.2.4.1 Überblick ... 310
5.3.2.4.2 Klasse C ... 310
5.3.2.4.2.1 Kommentiertes Unterrichtstranskript ... 311
5.3.2.4.2.2 Einschätzungen ... 315
5.3.2.4.2.2.1 Aus Sicht des Beobachters ... 315
5.3.2.4.2.2.2 Aus Sicht der Beteiligten ... 315
5.3.2.4.3 Klasse B2 ... 316
5.3.2.4.3.1 Kommentiertes Unterrichtstranskript ... 317
5.3.2.4.3.2 Einschätzungen ... 318
5.3.2.4.3.2.1 Aus Sicht der Beteiligten ... 318
5.3.2.4.3.2.2 Aus Sicht des Beobachters ... 319
5.3.2.5 Einordnung ... 320
5.3.3 Wahrnehmungen der Schülerinnen und Schüler zum experimentellen Unterricht ... 320
5.3.3.1 Wahrgenommene Kontextelaborationen ... 320
5.3.3.2 Differenzierte Wahrnehmungen zum stattgehabten Unterricht ... 324
5.3.4 Der Unterricht in der Kontrollgruppe ... 330

5.4 Wirkungen der Unterrichtsinterventionen ... 332
5.4.1 Wirkungen auf die Leistung ... 333
5.4.1.1 Erster Leistungstest ... 333
5.4.1.2 Zweiter Leistungstest ... 336
5.4.1.3 Differenzierungen ... 337

5.4.1.3.1 Nach Gender 337
5.4.1.3.2 Nach Klassen 338
5.4.2 Wirkungen auf die Ansichten und Urteile der Lernenden über Mathematik 339
5.4.2.1 Gesamtbilanz 339
5.4.2.2 Differenzierungen 344
5.4.2.2.1 Nach Gender 344
5.4.2.2.2 Nach Klassen 345
5.4.2.2.3 Zusammenfassung 350
5.4.3 Korrelationen von Ansichten bzw. Urteilen und Leistungen 350
5.4.4 Wirkungen auf das Interesse der Lernenden 351
5.4.4.1 Gesamtbilanz und Differenzierungen 351
5.4.4.2 Korrelationen mit anderen Items 353
5.4.4.2.1 Korrelationen mit Vorab-Dispositionen (Prä-Items) 353
5.4.4.2.2 Korrelationen mit Einschätzungen zum erlebten Unterricht (Post-Items) 356
5.4.5 Wirksame Fremdheit? 357

6. Resümee und Ausblick 360

7. Literaturverzeichnis 366

Band 2

Anhang A: Arbeitsheft zur historisch-hermeneutischen Unterrichtsreihe 1
Anhang B: Lehrerbegleitheft zur historisch-hermeneutischen Unterrichtsreihe 38
Anhang C: Arbeitsheft zur konventionellen Unterrichtsreihe 71
Anhang D: Lehrerbegleitheft zur konventionellen Unterrichtsreihe 96
Anhang E: Leistungstests 103
Anhang F: Fragebogen der Vorbefragung (Prä-Fragebogen) 106
Anhang G: Statistisches Material ..... auf CD-ROM

0 Zielsetzung und Aufbau der Arbeit

Der Erschließung fachgeschichtlicher Elemente und ihrer Nutzung im Mathematikunterricht ist in den letzten Jahren ein nicht mehr zu übersehendes Interesse zugewachsen. Diese erhöhte Aufmerksamkeit und Wertschätzung wird inzwischen nicht nur durch eine beachtliche Zahl von didaktischen Publikationen, Materialsammlungen und (internationalen) Tagungen dokumentiert, sondern auch durch entsprechende curriculare Rahmensetzungen für den schulischen Unterricht bestätigt (Fasanelli, 2000). Deutschsprachige Schulbücher enthalten schon seit längerem mathematikgeschichtliche Elemente, etwa in der Gestalt von historischen (bzw. historisierenden) Aufgaben, themen- oder problemgeschichtlichen Exkursen, biographischen Notizen etc. Wie (Furinghetti, Jahnke & van Maanen, 2006) zu Recht feststellen, besteht unter Didaktikern zunehmend Einigkeit darüber, dass der durch historische Materialien und Sichtweisen bereicherte Mathematikunterricht u. a. dazu beitragen kann,

- Schülerinnen und Schülern aufschlussreiche Einsichten in die Entwicklung und Vernetzung fachlicher Konzepte zu gewähren,
- ihnen ein tieferes Verständnis für die Rolle der Mathematik in unserer Welt und für ihre Beziehungen zu Anwendungen, Kultur und Philosophie zu ermöglichen und
- ihnen die im Unterricht oft übergangenen, subjektiven sowie menschlichen Dimensionen des Faches näher zu bringen.

Die didaktischen Ambitionen, die allein schon in dieser knappen Auflistung proklamiert werden, erscheinen beachtlich. Zweifellos rechtfertigen sie eine empirische Überprüfung ihrer Verwirklichungschancen. Dies gilt umso mehr, da es fachgeschichtliche Inhalte aus verschiedenen Gründen immer noch schwer haben, ihren Eingang in den regulären Unterricht zu finden. Auf typische Widerstände weisen beispielsweise (Smestad, 2006), (Demattè, 2006), (Siu, 2004), (Tzanakis, Arcavi & al., 2000, S. 203) oder – in einer etwas älteren Arbeit – schon (Fraser & Koop, 1987) hin. Die von diesen Autoren zusammengetragenen Gegenargumente umfassen u. a.

- Zweifel am tatsächlichen Nutzen historischer Elemente für die Lernenden,
- Hinweise auf die (zu) knappen zeitlichen Ressourcen im schulischen Alltag sowie auf die
- unzureichende fachgeschichtliche Ausbildung der Lehrkräfte,
- Annahmen über die angebliche Unbeliebtheit solcher Interventionen bei Schülerinnen und Schülern sowie
- Bedenken hinsichtlich der Abprüfbarkeit der Lernergebnisse.

Solche Vorbehalte stehen in einem offenkundigen und nachdenklich stimmenden Kontrast zu den zuvor zitierten Hoffnungen und Erwartungen. Indes ist über die *tatsächlichen* Realisierungsmomente und *faktischen* Wirkungen mathematikgeschichtlicher Unterrichtsinterventionen nur sehr wenig bekannt. Neben einigen explorativen Untersuchungen (im deutschsprachigen Raum vgl. z. B. (Glaubitz & Jahnke, 2003), (Jahnke H. N., 1995) gibt es bislang nur eine einzige größere, einschlägige Studie. Sie wurde 2004/5 in den Niederlanden angefertigt (van Gulik-Gulikers, 2005). Die Ergebnisse dieser – eher vereinzelten – Arbeiten scheinen zwar überwiegend auf einen positiven Nutzen der Idee „Mathematikgeschichte im Unterricht“ hinzudeuten, – stärkere und vor allem vergleichende Aussagen lassen sich jedoch aus ihnen nicht gewinnen. Im weiteren Abbau dieses Wissens- und Forschungsdefizites ist daher ein wichtiges Anliegen zu sehen. Die vorliegende Arbeit soll hierzu einen substanziellen

Beitrag leisten und speziell der Frage nachgehen, welche *tatsächlichen* Wirkungen von einem bestimmten Typus fachgeschichtlicher Intervention, nämlich der *Lektüre historischer Originalquellen,* ausgehen. Ziel ist es, die Effekte solch mathematikgeschichtlichen Unterrichtens nicht nur mittels einer Fülle von Indikatoren detailliert zu messen, sondern die hierbei gewonnenen Resultate und Einsichten insbesondere auch den Ansprüchen und Ergebnissen des konventionellen Unterrichts gegenüberzustellen. Nur so lassen sich interessante Aussagen gewinnen, die auch sinnfällig eingeordnet werden können.

Im Unterschied zur schon erwähnten Arbeit von van Gulik-Gulikers ist die vorliegende Untersuchung darum als Vergleichsstudie angelegt: In ihrem *empirischen Teil* beschreibt sie ein umfangreiches Unterrichtsprojekt, das in der Konzeptionierung, Durchführung und vergleichenden Auswertung zweier paralleler Unterrichtseinheiten besteht:

- einer historischen Experimentalreihe, in der Schülerinnen und Schüler schwerpunktmäßig mathematikgeschichtliches Quellenmaterial lesen und bearbeiten sowie
- einer in der Sache identischen, methodisch und didaktisch jedoch konventionellen Vergleichs- bzw. Referenzreihe, die ganz ohne historische Bezüge auskommt.

Im *theoretischen Teil* der Arbeit wird das mit der Empirie verknüpfte Ziel verfolgt, der Nutzung fachgeschichtlicher Elemente und speziell der Lektüre mathematischer Originalquellen eine unterrichtsphilosophische und didaktische Grundlage sowie Perspektive aufzuzeigen. Zu diesem Zweck werden einschlägige Ansätze (Toeplitz, 1927), (Klein, 1933/1968),(Jahnke H. N., 1991) durchgesehen, vertieft und mit verwandten Konzepten anderer Fachdidaktiken (Fremdsprachen, Deutsch, Geschichte) in Beziehung gesetzt.

0.1 Fokussierungen und Forschungsfragen

Die grundsätzliche Intention der Arbeit ist damit grob umrissen. Sie bedarf aber noch weiterer Fokussierungen und Schwerpunktsetzungen. Wenn – wie beabsichtigt – die fachgeschichtliche Intervention so konzipiert und durchgeführt werden soll, dass ihr Verlauf und ihre Ergebnisse auf sinnvolle Weise mit korrespondieren Daten konventioneller Unterrichtshandlungen verglichen werden können, so muss sie sich exemplarisch auf ein thematisch gut abgrenzbares, möglichst relevantes Gebiet des Curriculums konzentrieren: In der vorliegenden Arbeit fiel die Wahl auf das Kapitel „Quadratische Gleichungen“. Ausschlaggebend hierfür war, dass es sich bei diesem Thema um einen konventionellen und lange tradierten Kernstoff handelt, für den es darüber hinaus auch gute und bereits erfolgreich erprobte (Kaske, 1998), historische Quellen gibt, nämlich die bekannten Auszüge aus Al-Khwarizmis ‚al-jabr’ (820 n. C.) (Rosen, 1831). Das nach dieser thematischen Vorauswahl konkret ins Auge gefasste Unterrichtsprojekt betrifft demzufolge nur Schülerinnen und Schüler einer einzigen Jahrgangsstufe (Klasse 9). Seine Umsetzung wird in dieser Arbeit zudem auf Schulen des Typs Gymnasium beschränkt.

Zu beachten ist, dass die nach diesen Vorgaben zu entwickelnde Intervention nicht als Anhang (und Verlängerung) dem konventionellen Unterricht hinzugefügt werden kann und soll. Dies wäre im Hinblick auf das ohnehin knappe (oder knapp empfundene) Zeitbudget im Schulalltag nicht erwünscht und damit nicht realisierbar. Stattdessen muss und soll die Intervention ausgewählte Elemente konventionellen Unterrichtshandelns ersetzen und damit jede zusätzliche Belastung für den Zeitplan vermeiden.

Eine wichtige, sich hieraus unmittelbar ergebende Frage lautet, inwieweit die intendierten Funktionen der substituierten Elemente durch die mathematikhistorische Intervention kompensiert werden. *Insbesondere ist danach zu fragen, wie Schülerinnen und Schüler nach Abschluss des Experimentes hinsichtlich ihres erworbenen fachlichen Wissens und ihrer Fertigkeiten im Vergleich zu Lernenden abschneiden, die den üblichen Unterricht durchlaufen haben (Kontrollgruppe).* Diese Frage drängt sich in der vorliegenden Studie deshalb auf, weil die Intervention für die vorliegende Untersuchung so arrangiert wird, dass die Behandlung mathematikgeschichtlicher Elemente – in unserem Falle also: die Arbeit mit historischen Quellen – an die Stelle der konventionellen Übungs- und Festigungsphase tritt und gleichsam deren Funktion mit übernehmen soll.

Neben der Überprüfung der *expliziten* (sich u. a. in Punktzahlen und Zensuren niederschlagenden) Lernziele soll auch der Frage nachgegangen werden, ob die Schülerinnen und Schüler der Experimentalgruppe durch das Lesen mathematischer Originalquellen in Bezug auf ihre Denk-, Herangehens- und Bewältigungsstrategien *implizit* beeinflusst (idealerweise bereichert bzw. befruchtet) werden, ob sie den behandelten Stoff nicht nur technisch beherrschen sondern – in einem noch zu spezifizierenden Sinn – auch *verstehen* und ob sie zu signifikanten Reflexionen über das Gelernte oder ihre eigene Beziehung zu den Inhalten angeregt werden. Das Forschungsinteresse begnügt sich daher nicht nur mit der Messung von Effekten auf der kognitiv-leistungsbezogenen Ebene, sondern erstreckt sich auch auf die affektiven Dimensionen des Lernens. *Hier soll es vor allem darum gehen festzustellen, in welcher Weise und bis zu welchem Grad der Umgang mit mathematikgeschichtlichen Quellen Einfluss auf die Ansichten und Urteile der Lernenden (im Hinblick auf die Mathematik als Disziplin bzw. als Lerngegenstand) und auf ihr persönliches und kulturelles Selbst- sowie Fremdverständnis auszuüben vermag. Daneben sind auch Effekte auf die motivationale Befindlichkeit von Interesse.*

Auf beiden Ebenen soll zudem versucht werden, die Zusammenhänge zwischen den jeweiligen Vorab-Dispositionen der Lernenden und dem gemessenen oder empfundenen Nutzen der Intervention zu erhellen. Auch das Problem der Nachhaltigkeit ist von Bedeutung und soll darum – im Rahmen der hier gegebenen Möglichkeiten – untersucht werden.

Der Frage nach den Qualitätsmerkmalen des erteilten *Unterrichts* kann und soll hier *nicht in der gleichen Tiefe* nachgegangen werden. Dafür hingen diese zu stark von zufälligen Gegebenheiten vor Ort und den jeweiligen Unterrichtsstilen der beteiligten Lehrkräfte ab. Die Qualität mathematikgeschichtlichen Unterrichtens (besonders in der hier vorliegenden, sprachintensiven Form) könnte nur dann adäquat und gerecht beurteilt werden, wenn dem Unterricht auch eine entsprechende, konzeptionelle und methodische Vorbereitung der Lehrerinnen und Lehrer im Sinne der hier vertretenen Unterrichtsphilosophie vorausginge. Dies war mit der vorliegenden Studie zwar angeboten worden, fand jedoch nicht den erhofften Zuspruch. Die Arbeit dokumentiert daher die Ergebnisse von Unterricht, dessen Inhalte und Zielsetzungen zwar von außen weitgehend vorgegeben und einheitlich materialisiert worden waren (durch Arbeits- und Lehrerbegleithefte), dessen stilistische und (fein-)methodische Ausprägungen aber von den persönlichen didaktischen Vorstellungen, Interessen und Erfahrungen der jeweiligen Lehrerinnen und Lehrer bestimmt sind. Die Studie zeigt im Zusammenhang mit Fragen nach der Unterrichtsqualität also lediglich an Fallbeispielen auf, wie mathematikgeschichtliche Interventionen in unpräparierten, mithin alltäglich anzutreffenden Kontexten umgesetzt werden und gibt Hinweise auf mögliche Entwicklungsarbeit für die Lehrerinnen- und Lehrerausbildung.

0.2 Aufbau der Arbeit

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut:

Das erste Kapitel beginnt vor dem Hintergrund der vorstehend beschriebenen Interessen und Fragestellungen mit der Darlegung und Diskussion einschlägiger Ansätze zur Nutzung fachgeschichtlicher Elemente im Mathematikunterricht, wie sie von Felix Klein (1849-1925), Otto Toeplitz (1881-1940) und Hans Niels Jahnke (geb. 1948) vorgeschlagen worden sind.

Im zweiten Kapitel wird Jahnkes Idee einer *hermeneutischen* Begegnung mit Geschichte im Hinblick auf die durch sie anvisierten Ziele und Konzepte anhand einer umfassenden Reflexion ihrer philosophischen, pädagogischen und psychologischen Dimensionen vertieft diskutiert. Den besonderen Anforderungen, die die Textsorte „historische Quelle" im Zusammenhang leseintensiven Unterrichtens stellt, wird mit einer Durchsicht und Diskussion der im Rahmen der Geschichtsdidaktik thematisierten Theorie und Methodik der Quelleninterpretation begegnet.

Im dritten Kapitel wende ich mich dem mathematikgeschichtlichen Material zu, das in der empirischen Studie dem Unterricht als stoffliche Grundlage dient. Nach einer sachlichen Analyse zeige ich beispielhaft auf, wie das Material mit den im ersten Teil bereit gestellten Begrifflichkeiten und Vorgehensweisen bearbeitet und (in einem noch zu definierenden Sinn) *verstanden* werden kann. Die Ergebnisse geben u. a. auch Hinweise auf mögliche Entwicklungshorizonte für die Aus- und Fortbildung von Lehrerinnen und Lehrern.

Unter Bezugnahme auf die bis dahin ausformulierte Theoriebasis und die oben notierten Forschungsfragen erläutere ich im vierten Kapitel das empirische Design der Untersuchung. In diesem Zusammenhang gehe ich auf das grundsätzliche Arrangement der Vergleichsstudie ein und beschreibe die für die Experimental- und die Kontrollgruppe jeweils konzipierten Unterrichtsreihen sowie deren Pilotierung.

Im fünften Kapitel schließlich stelle ich die mit diesem Design gewonnenen Daten und Befunde vor und analysiere sie im Hinblick auf die zuvor formulierten Fragestellungen und Erwartungen.

Das sechste Kapitel gewährt neben einer Zusammenfassung und Gesamtbewertung der Studie und ihrer Ergebnisse einen Ausblick auf Verbesserungsmöglichkeiten und weitere Anwendungsgebiete des erarbeiteten Konzeptes sowie auf nächstliegende Forschungsinteressen und offene Fragestellungen.

0.3 Danksagung

Ich danke Herrn Prof. Dr. Hans Niels Jahnke für die Themenstellung, die exzellente Betreuung und für die sehr wertvollen Anregungen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Für viele Ratschläge und Diskussionen danke ich den Mitgliedern der Arbeitsgruppe Didaktik der Mathematik an der Universität Duisburg-Essen.

Ich danke allen beteiligten Schülerinnen und Schülern sowie Lehrkräften, ohne die dieses Projekt nicht durchführbar gewesen wäre.

Ich danke der Universität Duisburg-Essen für die Bereitstellung der für die Arbeit benötigten technischen Hilfsmittel.

Ganz besonders danke ich meiner Frau Mareile für ihre Geduld und großartige Unterstützung bei der Fertigstellung dieser Arbeit.

I.

Theoretischer Teil

1 Mathematikgeschichte und Unterricht

1.1 Die historisch-genetische Konzeption

Versuche, die Geschichte der Mathematik für Lehre und Unterricht fruchtbar zu machen, besitzen eine lange Tradition. Häufig wird in diesem Zusammenhang auf Vorschläge und Arbeiten von Felix Klein (1849-1925) sowie Otto Toeplitz (1881-1940) hingewiesen (Vollrath, 1968). Beide zählen in der Mathematikdidaktik zu den Ahnherren der so genannten *historisch-genetischen Methode* (Wittmann, 1976, S. 107). Klein war einer der ersten und vor allem einflussreichsten Mathematiker, der sich ausdrücklich auf Vorstellungen berufen hat, die die unter dieser Bezeichnung zusammengefasst werden. In seinem an werdende Lehrer gerichteten Klassiker „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus" (1907/8) bestimmt er einen Unterricht als „genetisch", wenn in ihm

> „das ganze Lehrgebäude [...] auf Grund bekannter anschaulicher Dinge ganz allmählich von unten aufgebaut [wird]; hierin liegt ein scharf ausgeprägter Gegensatz gegen den meist auf Hochschulen üblichen logischen und systematischen Unterrichtsbetrieb." (Klein, 1933/1968, S. 6)

Die genetische Unterrichtsmethode, die Klein „naturgemäß" und – in pointierter Abgrenzung zu den Ansprüchen der deduktiven Methode – „*wahrhaft* wissenschaftlich" nennt (Klein, 1933/1968, S. 289, meine Hervorhebung), genießt bei ihm die größte Wertschätzung. Die deduktive Methode dagegen, die „so gern durch die Autorität des Euklid" gestützt (Klein, 1933/1968, S. 16) und von ihren Befürwortern „nach Art der mittelalterlichen Scholastiker" (Klein, 1933/1968, S. 289) betrieben werde, lehnt er für Unterrichtszwecke ab. Mit ihrer „kalten, wissenschaftlich aufgeputzten Systematik" würde man den Lernenden nur „ins Gesicht springen" (Klein, 1933/1968, S. 289), anstatt daran zu arbeiten, „zwischen der theoretischen Wissenschaft und allem, was das moderne Leben bewegt, eine wirklich positive Beziehung herzustellen" (Klein, 1933/1968, S. 296) und „die Mathematik stets verknüpft [zu] halten mit allem, was den Menschen gemäß seinen sonstigen Interessen auf seiner jeweiligen Entwicklungsstufe bewegt und was nur irgend in Beziehung zur Mathematik sich bringen lässt" (Klein, 1933/1968, S. 4). Interessanterweise hat Klein hat sein Verständnis der genetischen Methode nirgends umfassend oder zusammenhängend präzisiert, vgl. (Schubring, 1978, S. 142). Immerhin können wir aber seinen verstreuten Äußerungen entnehmen, wie sehr er den Gedanken des *Genetischen* mit jenem des *Historischen* verknüpft hat. So besteht denn auch seiner Meinung nach ein wesentliches Hindernis für die weitere Verbreitung der genetischen Methode darin, dass es den Lehrenden an Kenntnissen in Bezug auf die *historische Entwicklung* ihrer Disziplin mangele. Seinen Studenten empfiehlt er darum nachdrücklich:

> „Lernen Sie […], wie langsam alle mathematischen Ideen erst entstanden sind, wie sie fast stets in mehr divinatorischer Gestalt auftauchten und erst in langer Entwicklung die starre und auskristallisierte Form der systematischen Darstellung annahmen!" (Klein, 1933/1968, S. 289)

Die große Bedeutung historischer Kenntnisse begründet Klein mit einem Hinweis auf das von Ernst Haeckel (1834-1919) formulierte, so genannte „biogenetische Grundgesetz" (Haeckel, 1866). In Kleins Worten besagt es, dass

> „das Individuum in seiner Entwicklung in abgekürzter Reihe alle Entwicklungsstadien der Gattung durchläuft […]"(Klein, 1933/1968, S. 289)

Übertragen auf den Lernprozess versteht Klein diesen Vorgang so, dass

> „der Lernende naturgemäß im Kleinen immer denselben Entwicklungsgang durchlaufen [wird], den die Wissenschaft im Großen gelaufen ist." (Klein, 1896, S. 148)

Dieses Prinzip hält Klein für so evident, dass er behauptet, die in ihm zum Ausdruck kommenden Gedanken seien

> „heute nachgerade Bestandteile der allgemeinen Bildung eines jeden geworden." (Klein, 1933/1968, S. 289)

Entsprechend fordert er:

> „Dies Grundgesetz, denke ich, sollte auch der mathematische Unterricht, wie jeder Unterricht überhaupt, wenigstens im allgemeinen befolgen: Er sollte, an die natürliche Veranlagung der Jugend anknüpfend, sie langsam auf demselben Wege zu höheren Dingen und schließlich auch zu abstrakteren Formulierungen führen, auf dem sich die ganze Menschheit aus ihrem naiven Urzustande zu höherer Erkenntnis emporgerungen hat." (Klein, 1933/1968, S. 289)

Die Vorstellung, nach welcher das schwierige Geschäft einer im Unterricht versuchten ontogenetischen Steuerung oder Einflussnahme nach dem Vorbild der – von der „ganze[n] Menschheit" durchlaufenen und damit als mustergültig bestätigten – Phylogenese in den Griff zu bekommen sei, erscheint zunächst tatsächlich faszinierend. Auch bei anderen Mathematikern und Didaktikern dieser (und späterer) Zeiten standen solche Ideen hoch im Kurs. So schrieb etwa Henri Poincaré (1854-1912):

> „Die Zoologen behaupten, dass die embryonale Entwicklung eines Tieres in sehr kurzer Zeit die ganze Geschichte seiner Vorfahren in den geologischen Epochen durchmacht. Ebenso scheint es mit der Entwicklung des menschlichen Geistes zu sein. Der Erzieher muss das Kind durch alle Phasen führen, die seine Vorfahren durchgemacht haben, bedeutend schneller, aber ohne eine Etappe hinter sich zu verbrennen [sic]. In diesem Sinne muss die Geschichte der Wissenschaft unser vornehmster Führer sein." (Poincaré, 1914, S. 113)

Von Seiten der Didaktik wiesen z. B. Max Simon (1908) und Siegmund Günther (1913) auf den mutmaßlichen Wert der historisch-genetischen Methode hin:

> „Die Schüler sind für geschichtliche Mitteilungen sehr dankbar, sie fühlen ganz richtig heraus, […] dass der Einblick in das historische Werden der Erkenntnis zugleich auch das *beste Verständnis* für das Gewordene vermittelt. Für den Lehrer ist dieser Einblick besonders wichtig, *weil nur die Geschichte Aufklärung gibt über die Schwierigkeiten, welche der Geist bei der Bewältigung der einzelnen Probleme zu überwinden hat.*" (Simon, 1908, S. 5)

> „Ich glaube, dass dieser genetische Lehrgang nur dann seine volle Wirksamkeit entfalten kann, wenn er *in jeder Hinsicht geschichtlich* aufgefasst wird." (Günther, 1915, S. 144)

Die Geschichte der Mathematik wird hier also als ein Wegweiser für eine optimale Entfaltung und Vermittlung des Unterrichtsstoffes, als ein *Hilfsmittel zur Strukturierung von Lehrgängen* verstanden. In diesem Sinne dient sie zunächst und vor allem der Orientierung des Lehrers, – doch auch die Lernenden können den Nutzen „fühlen“ (Simon), der ihnen aus der Begegnung mit geschichtlichen „Mitteilungen“ erwächst. Diese Auffassung meinte, wie wir gesehen haben, ihre wissenschaftliche Stütze und Absicherung in der Übertragung des biogenetischen Grundgesetzes auf lernpsychologische Zusammenhänge finden zu können.

Doch schon die Zeitgenossen Kleins äußerten erhebliche Zweifel am Wert und der Haltbarkeit solcher Ideen. So schrieb etwa der Mathematiker Alfred Pringsheim (1850-1941):

> „Ob es zweckmäßig erscheint, das Haeckel’sche Princip von der Übereinstimmung zwischen Phylogenese und Ontogenese in dieser uneingeschränkten Weise auf eine Frage des *Unterrichts* zu übertragen, will mir keineswegs einleuchten. Ich meine, wir sollten doch gerade aus der Entwicklungsgeschichte der Wissenschaft lernen, die von früheren Generationen begangenen Schlussfehler oder Unzulänglichkeiten zu *vermeiden* [...]“ (Pringsheim, 1898, S. 74, Hervorhebung im Original)

Sehr pointiert vergleicht Pringsheim die geschichtliche Entwicklung der Wissenschaften mit dem Durchleiden von Kinderkrankheiten:

> „Und wie die heutigen Ärzte nicht mehr der Ansicht sind, dass jeder gewisse Kinderkrankheiten durchmachen müsse, und man demgemäß bestrebt ist, dieselben durch eine verständige Prophylaxe so viel als möglich fernzuhalten, so sollten wir doch wohl auch darauf ausgehen, dem Anfänger die Kinderkrankheiten, welche die Wissenschaft bei ihrer Entwicklung durchgemacht hat, möglichst zu ersparen. (Pringsheim, 1898, S. 74)

Alsdann nennt Pringsheim Beispiele, die seine ablehnende Haltung verdeutlichen sollen: So würde doch „niemand mehr“ die „sehr bequemen, aber unzulänglichen“ analytischen Methoden eines Euler im Unterricht lehren und auch keiner mehr Zeit auf die überholte Phlogiston-Theorie der Wärmelehre oder das ptolemäische Weltbild verwenden. Mit diesen Beispielen meint Pringsheim zeigen zu können,

> „dass das von Herrn Klein angeführte Princip als Unterrichts-Grundsatz keineswegs stichhaltig erscheint und zumindest einer genauen Prüfung von Fall zu Fall bedarf. Und ich glaube, dass das Resultat einer solchen Prüfung ganz *anders,* etwa folgendermaßen lauten würde: Jeder einzelne durchläuft im wesentlichen denselben Entwicklungsgang wie die Wissenschaft selbst*, solange ihm kein besserer Weg gezeigt wird.* Ist aber ein solcher *besserer* Weg vorhanden, so ist es gerade die Pflicht und Aufgabe des *Lehrenden,* ihm denselben nicht nur zu weisen, sondern auch *gangbar* zu machen.“ (Pringsheim, 1898, S. 75, Hervorhebung im Original)

An den sich hierin abzeichnenden Streit zwischen Klein und Pringsheim hat nun Otto Toeplitz angeschlossen und eine Differenzierung der historisch-genetischen Methode angegeben. Damit verfolgte er das Ziel, dieselbe einerseits vom Vorwurf des Historisierens freizusprechen und andererseits ihre didaktischen Stärken, vor allem im Vergleich zur logisch-systematischen Methode, zu unterstreichen. In einer Rede vor dem Kongress der Deutschen Mathematikervereinigung 1926 in Düsseldorf hat Toeplitz seine diesbezüglichen Gedanken ausdrücklich erläutert. Dabei erklärte er zunächst, wodurch das Interesse an der Geschichte der Mathematik seiner Meinung nach hervorgerufen und legitimiert werden kann:

> „Ich […] sagte mir: alle diese Gegenstände […], die heute als kanonisierte Requisiten gelehrt werden […] und bei denen nirgends die Frage berührt wird: warum so? wie kommt man zu ihnen?, alle diese Requisiten also müssen doch einmal Objekte eines spannenden Suchens, einer aufregenden Handlung gewesen sein, nämlich damals, als sie geschaffen wurden. Wenn man an diese Wurzeln der Begriffe zurückginge, würden der Staub der Zeiten, die Schrammen langer Abnutzung von ihnen abfallen, und sie würden wieder als lebensvolle Wesen vor uns erstehen.“ (Toeplitz, 1927, S. 92)

Dann unterscheidet er zwei Möglichkeiten, wie von der Geschichte der Mathematik für den Unterricht Gebrauch zu machen sei:

> „Entweder man könnte den Studenten direkt die Entdeckung in ihrer ganzen Dramatik vorführen und solcherart die Fragestellungen, Begriffe und Tatsachen vor ihnen entstehen lassen - das würde ich die *direkte genetische Methode* nennen -, oder man könnte für sich selbst aus solcher historischen Analyse lernen, was der eigentliche Sinn, der wirkliche Kern jedes Begriffes ist, und könnte daraus Folgerungen für das Lehren dieses Begriffes ziehen, die als solche nichts mehr mit der Historie zu tun haben - die *indirekte genetische Methode.*“ (Toeplitz, 1927, S. 92, Hervorhebung im Original)

Die Feststellung, mit der genetischen Methode einen Weg vorzuschlagen, der sich zwar an der geschichtlichen Entwicklung des Faches orientiert, mit Geschichte *an sich* aber nichts zu tun hat, ist Toeplitz so wichtig, dass er sie noch einmal ausdrücklich der gesamten weiteren Argumentation vorausschickt. Damit möchte er

> „dem Mißverständnis vorbeugen, daß es sich hier um eine ‚historische Methode' handele. Dieses Schlagwort ist, nicht ohne Grund unbeliebt; am Historischen haftet die Idee vom alten Zopf, den wir doch gerade abschneiden wollten, von den Umwegen, die die Forschung oft durchläuft, von der Subjektivität und Zufälligkeit der Entstehung wissenschaftlicher Entdeckungen. Es ist mir besonders wichtig, den Trennungsstrich nach dieser Seite zu ziehen. Der Historiker, auch der Mathematik, hat die Aufgabe, *alles* Gewesene zu registrieren, ob es gut war oder schlecht. *Ich* will aus der Historie nur die Motive für *die* Dinge, die sich hernach bewährt haben, herausgreifen und will sie direkt oder indirekt verwerten. Nichts liegt mir ferner als eine Geschichte […] zu lesen; ich selbst bin als Student aus einer ähnlichen Vorlesung weggelaufen. Nicht um die *Geschichte* handelt es sich, sondern um die *Genesis* der Probleme, der Tatsachen und Beweise, um die entscheidenden Wendepunkte in dieser Genesis.“ (Toeplitz, 1927, S. 93, Hervorhebung im Original)

Das Ziel einer solchen Vorgehensweise lautet für Toeplitz:

> „Aufhellung didaktischer Schwierigkeiten, ich möchte sagen didaktische Diagnose und Therapie auf Grund historischer Analysen, die nur dazu dienen, die Aufmerksamkeit auf die richtigen Punkte zu lenken.“ (Toeplitz, 1927, S. 99)

Im Sinne dieser Idee rät Toeplitz dazu, den Unterrichtsstoff nicht nach den materiellen Inhalten, sondern nach dem „methodischen Gesichtspunkt des Ansteigens“ (Toeplitz, 1927, S. 95) anzuordnen, wobei die genetische Methode den „sichersten Wegweiser“ angebe, um den „sanften Anstieg, der gar nicht so leicht überall herauszuspüren ist, zu vollziehen“ (a. a. O.):

> „Denn wenn man die genetische Entwicklung, die die gesamte mathematische Menschheit gegangen ist, sinngemäß in ihrer großen, fortschreitenden Linie nimmt, so bemerkt man, daß sie im allgemeinen eben jenen sanften Anstieg vom Leichteren zum Schwereren genommen hat, und man kann die einzelnen oft explosiv vollzogenen großen Entwicklungen in der Regel als einen Fingerzeig für eine methodische Fort-

> entwicklung nehmen. Unerschöpflich kann man so aus der Historie für die didaktische Methodik lernen." (Toeplitz, 1927, S. 95)

Damit beruft sich also auch Toeplitz auf das biogenetische Prinzip, nennt es auch und gibt zu, dass seine Vorschläge „nicht etwa an sich etwas neues darstellen" sondern beispielsweise schon Gegenstand des Streits zwischen Klein und Pringsheim gewesen wären (Toeplitz, 1927, S. 93).

Die *direkte* genetische Methode könne nun Toeplitz zufolge im Unterricht der *Schule* „nur eine begrenzte Bedeutung erlangen" (Toeplitz, 1927, S. 96):

> „Ich sehe das Hauptfeld der Schulmathematik prinzipiell in solchen Entwicklungen, die sich in Serien methodisch ansteigender Aufgaben auflösen lassen. Dramatische Darstellungen werden daneben auf der Schule immer eine sekundäre Rolle spielen." (Toeplitz, 1927, S. 96)

Für die Schule eigne sich aber die *indirekte* genetische Methode, insofern sie dazu tauge, den Lehrer zu informieren, in welcher Weise der zu unterrichtende Stoff sinnfällig und nach dem Prinzip des von der Phylogenese abgeschauten „sanften Anstiegs" entfaltet werden könne. Exemplarisch schlägt Toeplitz im Sinne dieser Idee vor, den Lehrgang der Differential- und Integralrechnung entgegen den etablierten Gewohnheiten mit der Behandlung des bestimmten Integrals zu beginnen. Dieses sei nämlich von den Griechen, genauer gesagt von Archimedes, bereits in der Antike entdeckt worden und die Neuzeit habe der schon „reifen Theorie" (a. a. O.) nur noch die Leibnizschen Zeichen und den Begriff der Funktion hinzugefügt, *bevor* die übrige Infinitesimalrechnung entdeckt worden sei. Darum hätte man im Unterricht auch vorrangig den Zusammenhang zwischen bestimmten Integral einerseits, der Differentialrechnung und dem unbestimmten Integral andererseits „mit möglichster Plastik" als „Kernpunkt" (a. a. O.) herauszuarbeiten, „anstatt daß er zugleich mit den Differentialen als möglichst banal unvermerkt eingeschmuggelt wird" (Toeplitz, 1927, S. 97). Toeplitz verweist hierbei auf Fermat (1607/8-1665), der sowohl über das bestimmte Integral verfügt habe wie er auch – „in der Redeweise der Griechen" – die ganze Differentialrechnung gekannt und Maximumaufgaben gelöst habe, ohne zu ahnen, dass zwischen diesen beiden „getrennten Sphären" eine Verbindung existiert (a. a. O.). Diese historische Notiz belege die Nichttrivialität des Zusammenhangs, auf den darum der besondere Akzent zu legen sei. Schließlich plädiert Toeplitz dafür, die Grundlagenfragen (Begriff der reellen Zahlen etc.) an den Schluss und nicht etwa – wie logisch-systematisch üblich – an den Anfang des Kurses zu legen.

Die hiermit skizzierte Kursabfolge ist von Toeplitz noch für ein (Universitäts-)Lehrbuch präzisiert worden, dessen Vollendung ihm allerdings nicht mehr zu Lebzeiten vergönnt war. Erst posthum ist es von Gottfried Köthe unter dem Titel „Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung. Eine Einleitung in die Infinitesimalrechnung nach der genetischen Methode. Erster Band" aus dem Nachlass herausgegeben worden – zu einem zweiten Band hat das im Nachlass befindliche Material dann nicht mehr ausgereicht. Das Buch behandelt, mit den Griechen beginnend, die Infinitesimalrechnung bis Leibniz und Newton und stellt das erste Semester einer entsprechenden Universitätsvorlesung dar.

Auch für eine Algebravorlesung hat Toeplitz nach Maßgabe seiner indirekten genetischen Methode immerhin noch grobe Umrisse skizziert (Toeplitz, 1932, S. 10). Den Ausgangspunkt einer solchen Vorlesung sieht er auch hier in den „spannenden Problemen" und ihre Leitmotive entsprechend in den historisch bedeutsam gewordenen Fragen der Winkeldreiteilung, der Konstruktion des regelmäßigen Siebzehnecks und der Lösbarkeit von Gleichungen fünften Grades. Aus diesen Motiven würde die Galoissche Theorie dann auf natürliche Weise hervorgehen.

Obwohl Toeplitz sich ausdrücklich gegen den Vorwurf des Historisierens verwahrt hat, werden seine Ideen doch von den gleichen Einwänden berührt, die schon gegen das genetische Prinzip nach Klein vorgebracht worden waren. Neben der Pringsheimschen Kritik, die vor allem auf die nach dessen Meinung unzulässige Übertragung des biogenetischen Grundgesetzes und die ungenügende Berücksichtigung des wissenschaftlichen Fortschritts abzielte, waren und sind dies vor allem didaktisch und entwicklungspsychologisch motivierte Zweifel an der Angemessenheit und Fruchtbarkeit historischer Elemente für den Lernprozess. So betonte schon Lietzmann, dass man sich,

> „will man Aufschluss über die Entwicklung der mathematischen Fähigkeiten des jungen Menschen, an ihn selbst, nicht an die geschichtliche Entwicklung der Mathematik halten“ (Lietzmann, 1919, S. 135)

müsse. Auch Freudenthal meinte, dass

> „Mathematik nicht nach einem historischen Schema zu unterrichten“ (Freudenthal, 1963, S. 15)

sei. Klafki sah den größten Mangel der historisch-genetischen Methode darin, dass in ihr

> „das Kind im Prinzip nie [weiß], wohin der Weg zuletzt führt, da der Ausgangspunkt nicht die aktuelle Frage im Angesicht der Realität ist. Das Kind wird nicht dazu geführt, in seiner alltäglichen Welt Probleme zu lösen, Fragen zu formulieren und denkend zu lösen … [es] geht nicht den Weg von der aktuellen Ausgangsfrage zur Erkenntnis des Elementaren denkend mit, um sich dann zurückschreitend das Komplizierte selbst zu erschließen; vielmehr wird ihm das Elementare (die Ausgangselemente der Wissenschaft) hier immer schon in ‚reiner’ Form geboten.“ (Klafki, 1963, S. 273)

Demgegenüber forderte Klafki:

> „Wer für die Gegenwart bilden will, muss die Gegenwart zum Ausgangspunkt seiner Bemühungen machen.“ (Klafki, 1963, S. 273)

Die Toeplitzsche Konzeptionierung scheint diesen Anspruch zu konzedieren, indem sie auf die Thematisierung historischer Umwege und Besonderheiten verzichtet und entlang eines *bereinigten,* d. h. von Irritationen und Wendungen befreiten Weges, der nur „die große aufsteigende Linie“ (Toeplitz, s. o.) berücksichtigt, zum modernen und für die Gegenwart relevanten Verständnis führen will.

Gegen diese Vorgehensweise kann nun allerdings von wissenschaftstheoretischer Seite eingewendet werden, dass sie eine lineare Kausalität in der Wissensentwicklung suggeriert, die zumeist nicht den Tatsachen entspricht und in dieser Allgemeinheit heute auch nirgends mehr aufrecht erhalten wird. In den historischen Wissenschaften wird die zugrunde liegende Haltung als *kontinuistische* Auffassung bezeichnet. Damit ist die Vorstellung gemeint, dass der Ablauf der Geschichte – in unserem Fall also die historische Entwicklung der Wissenschaften – sich kumulativ, folgenotwendig und organisch entwickelt hätte. Tatsächlich mutet es ja faszinierend an, einen großen Spannungsbogen über die Jahrtausende zu hypostasieren, einen roten Faden, der unser heutiges Wissen und Dasein bruchlos mit den Anfängen des menschlichen Denkens und Handelns verbindet. Die Toeplitzschen „Glättungs“-Vorschläge scheinen eine solche Sicht der Dinge zu fördern. Von Seiten der Wissenschaftsphilosophie sind jedoch inzwischen erhebliche Einwände gegen das Kontinuitäts-Konzept auf dem Gebiet der exakten Wissenschaften geltend gemacht worden. Thomas S. Kuhn (1922-1996) hat in seinem einflussreichen Hauptwerk „Die Struktur wissenschaftlicher Revolutionen“ (Kuhn, 1967) die Auffassung entwickelt, wonach Wissenschaft sich *keineswegs* linear, kontinuierlich und kumulativ auf den heutigen Zustand hin entwickelt habe, sondern durch periodisch stattgehabte, epistemologische Umbrüche und Diskontinuitäten vorangeschritten sei. Bei diesen von Kuhn ursprünglich so bezeichneten „Paradigmenwechseln“ wird jeweils eine Phase „normaler Wissenschaft“, in welcher es um die Bearbeitung eines bestimmten, von allen Wissenschaftlern anerkannten „Paradigmas“ gehe, durch Anomalien und Krisen erschüttert, bis es zu einem abrupten Umbruch in Gestalt eines neuen Paradigmas komme, welches das vorherige Theorie-System umstürze. Diese „Struktur wissenschaftlicher Revolutionen“ hat Kuhn zunächst vor allem an physik- und chemiegeschichtlichen Beispielen herausgearbeitet: Er nennt etwa die Ersetzung der Phlogistontheorie durch Lavoisiers Arbeiten, die Kopernikanische Wende vom geozentrischen zum heliozentrischen Weltbild, die Ablösung der aristotelischen durch die galileische Physik und die Umwälzung der klassischen Begriffe von Raum und Zeit infolge der Relativitätstheorien Einsteins. Die während solcher Übergänge miteinander konkurrierenden Paradigmen würden Kuhn zufolge „Inkommensurabilitäten“ aufweisen, die durch drei Merkmale gekennzeichnet seien:

1. Konkurrierende Paradigmen würden höchst verschiedene Normen und Definitionen von Wissenschaft festlegen und sich damit hinsichtlich dessen unterscheiden, was als wissenschaftliche Frage gelten kann und zu beantworten sei:

   > „Muss eine Bewegungstheorie die Ursache der Anziehungskräfte zwischen Materieteilchen erklären, oder braucht sie einfach nur das Vorhandensein solcher Kräfte festzustellen? Newtons Dynamik wurde weithin abgelehnt, weil sie, im Gegensatz zu den Theorien von Aristoteles und Descartes die zweite Antwort auf die Frage gab. Durch die Annahme von Newtons Theorie wurde deshalb eine Frage aus der Wissenschaft verbannt, von der die allgemeine Relativitätstheorie jedoch behaupten kann, sie habe sie gelöst.“ (Kuhn, 1967, S. 159)

2. In den unterschiedlichen Paradigmen würde eine oftmals identische oder ähnliche Terminologie zur Benennung und Klassifizierung ganz unterschiedlicher Gegenstandsbereiche fungieren: So bedeute etwa der Begriff „Energie“ bei Newton etwas ganz anderes als bei Einstein.

   > „Nehmen wir als ein weiteres Beispiel jene Männer, die Kopernikus verrückt nannten, weil er verkündete, dass die Erde sich bewege. Sie waren nicht ganz und gar im Unrecht. Was sie unter ‚Erde’ verstanden, war unter anderem feste Position. Zumindest ihre Erde konnte sich nicht bewegen. Dementsprechend bestand Kopernikus’ Neuerung nicht einfach darin, die Erde in Bewegung zu versetzen. Es war vielmehr eine völlig neue Art und Weise die Probleme der Physik und Astronomie zu betrachten, eine Art, die notwendigerweise die Bedeutung sowohl von ‚Erde’ wie von ‚Bewegung’ veränderte.“ (Kuhn, 1967, S. 160);

3. Schließlich würden die Proponenten konkurrierender Paradigmen ihre Tätigkeit „in verschiedenen Welten“ ausüben:

   > „Die eine enthält gefesselte Körper, die langsam fallen, die andere Pendel, die ihre Bewegungen fortgesetzt wiederholen. In der einen sind Lösungen Verbindungen, in der anderen Mischungen. Die eine liegt in einem ebenen, die andere in einem gekrümmten Raum.“ (Kuhn, 1967, S. 161).

Obwohl Kuhns Thesen verschiedentlich kritisiert wurden, haben sie sich doch in der Wissenschaftstheorie weitgehend durchgesetzt (Gillies, 1992, S. 1). Für die Bewertung des Toeplitzschen Konzeptes historisch-genetischer Lehrgänge wirft Kuhns Analyse zusätzliche Kriterien und Fragen auf. Ist es demnach überhaupt legitim, unter der Leitvorstellung einer kontinuistischen Wissenschaftsgenese eine „große aufsteigende Linie“ zu hypostasieren, um sie für didaktische Zwecke zu nutzen? Oder lassen sich möglicherweise *auch im Bereich der Mathematik* „Revolutionen“, „Paradigmenwechsel“ und „Inkommensurabilitäten“ im Kuhnschen Sinne konstatieren, deren Existenz eine historisch-genetische Vorgehensweise nach Toeplitz nicht nur aus didaktischer sondern auch aus wissenschaftstheoretischer Sicht problematisch erscheinen ließe? Die damit aufgeworfene Frage ist unter Mathematikhistorikern intensiv und kontrovers diskutiert worden. Michael J. Crowe hatte sie, z. T. unter Berufung auf Fourier (1768-1830), Hankel (1839-1873) und Truesdell (1919-2000), verneint und Kuhns Analyse als für die Mathematik unzutreffend zurückgewiesen. Im Gegensatz zu den entsprechenden Verhältnissen auf dem Gebiet der Naturwissenschaften könne wissenschaftlicher Fortschritt in der Mathematik niemals den Wahrheits- und Gültigkeitsanspruch älterer Theorien einschränken oder gar umstürzen. Crowe nennt ausdrücklich das Beispiel der nicht-euklididschen Geometrien und bemerkt zur Wirkung ihrer Entdeckung:

> ”Euclid was not deposed by, but reigns along with, the various non-Euclidean geometries.“ (Crowe, 1975/1992, S. 19)

Grundlegend für Crowes Sicht ist die Auffassung,

> „that a necessary characteristic of a revolution is that some previously existing entitiy (be it king, constituition, or theory) must be overthrown and irrevocably discarded.” (Crowe, 1975/1992, S. 19)

Da solches in der Mathematik nicht möglich sei, hätte es in ihr auch nie „Revolutionen“ gegeben. Crowe hat die von ihm verwendete Definition selbst schon als „somewhat restricted“ bezeichnet, vgl. (Dauben, 1984/1992, S. 50).

Hierauf hat Joseph Dauben geantwortet, und ein anderes Verständnis des Begriffs „Revolution“ eingefordert, nach welchem

> „revolutions have been those episodes of history in which the authority of an older, accepted system has been undermined and a new, better authority appeared in its stead.” (Dauben, 1984/1992, S. 52)

Dauben zufolge hätten sich in *diesem* Sinne sehr wohl auch in der Mathematik Revolutionen ereignet, für die er auch Beispiele angibt: die Entdeckung inkommensurabler Größen durch die Pythagoräer – hierauf werde ich noch ausführlich eingehen –, Cantors Theorie transfiniter Mengen, Cauchys Etablierung einer neuen Strenge etc. In seiner Analyse präzisiert Dauben, dass

> “[…], because of the special nature of mathematics, it is not always the case that an older order is refuted or turned out. Although it may persist, the old order nevertheless does so under different terms, in radically altered or expanded contexts [...] Often, many of the theorems and discoveries of the older mathematics are *relegated to a significantly lesser position* as a result of a conceptual revolution that brings an entirely new theory or mathematical discipline to the fore [...] the old mathematics is no longer what it seemed to be, perhaps no longer of much interest when compared with the new and revolutionary ideas that supplant it.” (Dauben, 1984/1992, S. 52, meine Hervorhebung)

In Anspielung auf die sehr unterschiedlichen politischen Wirkungen der bolschewistischen Revolution verglichen mit denen der französischen oder britischen der Vorjahrhunderte hat Gillies eine terminologische Differenzierung des Begriffes „Revolution“ angegeben:

> „In the first type, which could be called *Russian*, the strong Crowe condition is satisfied and ‚some previously existing entitiy … is overthrown and irrevocably discarded.' In the second type, which could be called *Franco-British*, the 'previously existing entity' persists, but experiences a considerable loss of importance. (Gillies, 1992, S. 5)

Herbert Mehrtens schlug hingegen vor, den aus seiner Sicht eher problematischen und fruchtlosen Begriff „Revolution“ gänzlich zu vermeiden:

> "There are many words that can be used to express the historical importance of an event; 'revolution' is one of these. The implicit analogy to political history is a means of expression for the historian as a writer. But if one is looking for a concept that is to play a methodological role in historiography, guiding and helping research and interpretation in the history of mathematics, this imaginative force of such a connotation-laden word is rather a danger." (Mehrtens, 1976/1992, S. 26)

Ungeachtet dieser Kritik an der Kuhnschen Terminologie (wie auch an einigen seiner konzeptuellen Vorstellungen) hat Mehrtens die *soziologischen* Dimensionen, die dessen Arbeit der Wissenschaftshistoriographie erschlossen hat, für sehr wertvoll erachtet und ihren die Perspektive erweiternden Nutzen in mathematikgeschichtlichen Zusammenhängen ausdrücklich anerkannt:

> "Take an example: [...] Taylor's theorem, which has been invariably valid since its publication in 1715. But is it of the same content in Taylor's original publication and in modern textbooks? There is always a wide background connected with such a theorem. Today the function concept is completely different, infinitesimal analysis is set up on the basis of general topology, with Taylor's theorem the mathematician has a generalization to Banach spaces in mind, and so forth. Still, there is something more than mere tradition connecting the theorem of 1715 and that of today. The example should show that this 'content' is difficult to grasp. One cannot possibly strip the content from nomenclature, symbolism, metamathematics, and so on." (Mehrtens, 1976/1992, S. 25)

Nach Auffassung von Mehrtens würden Mathematiker die Bedeutung der sozio-kulturellen Kontexte, in denen Mathematik erschaffen wird, oft unterschätzen und die Geschichte ihres Faches dementsprechend zu sehr vom fachlich-systematischen Standpunkt ihrer jeweiligen Gegenwart aus beurteilen:

> "The mathematician of today tends to declare all history the prehistory of the mathematics he knows. Thus everything which is included in or derivable from modern mathematics is in mathematics. The historically significant features like the use of concepts, or the general beliefs concerning the discipline, are naturally not in mathematics." (Mehrtens, 1976/1992, S. 25)

Demgegenüber betont Mehrtens die Relevanz von Kontexten, deren Wandel im Laufe der Geschichte auch mit konzeptionellen Veränderungen *innerhalb* der Mathematik einhergehe:

> " [...] a concept […] is not only determined by its proper content as given in the definition but it is also determined by the contexts in which it is used. Thus there is a 'metaphysics' to it. Furthermore, every

> single one of the elements is substantial to the theory as it historically occurs. Consequently, I should say that changes in methodology, symbolism, and so on are changes in mathematics.” (Mehrtens, 1976/1992, S. 25 f.)

Schon ein oberflächlicher Blick über die Geschichte der Mathematik legt es nahe, der Mehrtensschen Beschreibung zuzustimmen und die Existenz von Umbrüchen – ich will ausdrücklich nicht von „Revolutionen“ sprechen – und Inkompatibilitäten auf dem Gebiet der Mathematik anzuerkennen: Beschreibt beispielsweise ein Axiomensystem bei Euklid nicht ein ganz anderes Paradigma als die Axiomatik eines Hilbert (Bochenski, 1969)? Liegt der griechischen Geometrie nicht ein Denken zugrunde, das mit den Auffassungen und Methoden eines Descartes nachgerade unverträglich ist (Mancosu, 1992)? Und wurde das ursprünglich empirische, gegenständliche Paradigma der Geometrie nicht vollends durch die Entdeckung und Etablierung der nichteuklidischen Geometrien sowie durch das Studium beliebig-dimensionaler Räume aufgegeben? Fragen dieser Art lassen sich im Hinblick auf viele Themen, Methoden oder Gegenstände der Mathematik formulieren, vgl. (Gillies, 1992). Für die Algebra, die Toeplitz ja ebenfalls historisch-genetisch konzipieren wollte, hat Jahnke einen interessanten Vergleich der geschichtlich verbürgten Ansätze von Babyloniern, Griechen und Arabern vorgelegt und bei der Diskussion ihrer Unterschiede und Ähnlichkeiten darauf hingewiesen, dass

> „das, was da gleich ist, historisch in sehr verschiedenen ‚Denkwelten’ angesiedelt [ist]. Diese Denkwelten umfassen die Motive, warum man etwas tut, die Art und Weise, wie man sich etwas vorstellt, und die Mittel zur Darstellung von Sachverhalten.“ (Jahnke H. N., 1991, S. 8)

Damit schließt Jahnke direkt an einen Kuhnschen Begriff an. In seinen Schlussfolgerungen stellt er entsprechend fest, dass all die verschiedenen algebraischen Ansätze zwar „praktisch und theoretisch konstituierte Sinnzusammenhänge“ darstellten, diese aber „keine Realisationen ein und derselben Struktur“ seien:

> „Die griechische geometrische Algebra [gemeint ist Euklid II, M.G.] ist keine einfache Übersetzung babylonischer Traditionen, *so wenig wie unsere Algebra eine Übersetzung und kumulative Weiterführung griechischer Mathematik ist.*“ (Jahnke H. N., 1991, S. 10, meine Hervorhebung)

Man komme daher zum Schluss,

> „dass es eine Geschichte der Algebra nicht gibt, sondern dass verschiedene wissenschaftliche Felder sich historisch entwickelt haben, die man diesem Bereich zuordnen kann und die keine einheitliche, zusammenhängende Geschichte aufweisen.“ (Jahnke H. N., 1991, S. 11)

Wie aber könnte nun, angesichts eines solchen Befundes, eine historisch-genetische Konzeption, die sich im Toeplitzschen Sinne an „der großen aufsteigenden Linie“ zu orientieren hätte, glaubhaft substanziiert werden?

So sind also nach fachwissenschaftlicher und didaktischer Kritik auch aus Sicht der Wissenschaftstheorie Zweifel an der Legitimation und Dienlichkeit der Toeplitzschen Vorschläge angebracht. Diese Feststellung wirkt auf den ersten Blick ernüchternd. Denn ursprünglich mutete Toeplitz’ Idee doch faszinierend an: dass es möglich sein könnte, ja, möglich sein müsste, den oft als spröde und verkrustet empfundenen Mathematikunterricht durch Fragen nach dem Woher und Warum seiner Themen und Gegenstände zu verlebendigen und damit auch effektiv verständlicher zu machen. Die historisch-genetische Konzeption ist indes nicht die einzige Möglichkeit, aus der Geschichte der Mathematik für ihre Lehre zu schöpfen.

1.2. Die historisch-hermeneutische Konzeption

Eine interessante Verallgemeinerung der Toeplitzschen Vorschläge wurde von (Jahnke H. N., 1991) formuliert. Wir können sie als historisch-hermeneutische Konzeption bezeichnen. In ihr geht es nicht mehr einzig darum, heutige Wissensbestände entlang gemutmaßter Entwicklungsstränge (idealtypisch) zu rekonstruieren oder historische Einstiegsmomente für bestimmte Themenkreise zu realisieren. Jahnkes Ansatz ist breiter und genereller angelegt. In ihm sollen „historisches Denken und die damit verbundenen Qualifikationen zur Reflexion“ (Jahnke H. N., 1991, S. 11) das ausdrückliche Ziel der Auseinandersetzung mit mathematikgeschichtlichen Inhalten, vor allem mit historischen Quellen, sein. Jahnke verweist unter dieser Vorgabe auf die besonderen Bildungschancen, die sich gerade dann ergeben, wenn Lernende mit den originalen Äußerungen und Artefakten einer fremden Zeit und Kultur konfrontiert und auf diese Weise dazu angeregt werden,

> „über das, was sie [die Lernenden, M. G.] tun, nachzudenken, sich Gedanken zu machen über ihr eigenes Verhältnis zu Wissenschaft, Technik und wissenschaftlichem Denken. […] *In dem Vergleich mit den eigenen Vorstellungen liegt der bildende Wert der Geschichte.*“ (Jahnke H. N., 1991, S. 12, meine Hervorhebung)

Eine kontinuistische „Glättung“ des historischen Hergangs, wie sie von Toeplitz vorgeschlagen wurde, lehnt Jahnke ab. Im Gegenteil: Es müsse darum gehen, Geschichte möglichst authentisch zu präsentieren und ihre Diskontinuitäten, Umwege und Irritationen als Mittel reflektierten Verstehens zu bewerten. Die Behandlung im Unterricht

> „[…] sollte etwas zeigen, zu dem der Schüler einen Zugang hat, und sie sollte zugleich die historische Gestalt eines mathematischen Inhalts in seiner Andersartigkeit und Fremdheit vor Augen führen. Nur dann geht von der Geschichte ein wirksamer Antrieb zum Nachdenken aus.“ (Jahnke H. N., 1991, S. 11)

Damit ist das Motiv einer auf interpretatives Verstehen abzielenden Begegnung mit mathematikgeschichtlichen Inhalten angeschlagen. Was Verstehen in diesem Zusammenhang bedeuten soll, ist eine zentrale und zugleich sehr komplexe Frage. Ihre Beantwortung erfolgt in aller Ausführlichkeit im nächsten Kapitel. Eines wird jedoch schon jetzt deutlich: die Begriffe „Andersartigkeit“ und „Fremdheit“, die üblicherweise mit Lernhindernissen in Beziehung gesetzt werden, verlieren in diesem Konzept ihren negativen Konnotationen und erhalten – ganz im Gegenteil – den Rang von Bildungsmomenten: „Verstehen ist eine Reise ins Land eines Anderen“, schreibt der türkische Dichter Fazil Hüsnü Daglarca (Daglarca, 1987, S. 137). Die Begegnung mit dem Anderen ist demnach eine Begegnung, die zum Verstehen führt, auch zum Verstehen des Eigenen. Jahnkes Konzeption, die diesen Gedanken an zentraler Stelle integriert, steht damit in der Tradition eines Bildungsbegriffs, wie er besonders von Georg Wilhelm Friedrich Hegel (1770-1831) und Hans Georg Gadamer (1900-2002) formuliert worden ist:

> „[Theoretische Bildung] besteht darin, auch anderes gelten lassen zu lernen und allgemeine Gesichtspunkte zu finden, um die Sache, ‚das Objektive in seiner Freiheit’ (…) und ohne eigennütziges Interesse

> zu erfassen. […] Hegel begründet die besondere Eignung der Welt und Sprache der Alten damit, dass diese Welt fern und fremd genug ist, um die notwendige Scheidung, die uns von uns trennt, zu bewirken. – ‚aber sie enthält zugleich alle Ausgangspunkte und Fäden der Rückkehr zu sich selbst, der Befreundung mit ihr und des Wiederfindens seiner selbst, aber seiner nach dem wahrhaften allgemeinen Wesen des Geistes'. Man wird in diesen Worten des Gymnasialdirektors Hegel das klassizistische Vorurteil erkennen, dass gerade an den Alten das allgemeine Wesen des Geistes besonders leicht zu finden sei. Aber der Grundgedanke bleibt richtig. Im Fremden das Eigene zu erkennen, in ihm heimisch zu werden, ist die Grundbewegung des Geistes, dessen Sein nur Rückkehr zu sich selbst aus dem Anderssein ist. […] Damit ist klar, dass nicht Entfremdung als solche, sondern die Heimkehr zu sich, die freilich Entfremdung voraussetzt, das Wesen der Bildung ausmacht.“ (Gadamer, 1990, S. 20)

Dieses Verständnis ist einerseits verträglich mit den oben zitierten Forderungen von Wittmann, Klafki etc., wonach die Gegenwart des Lernenden, sein „Eigenes“, der Ausgangspunkt aller Bildungsbemühungen sein müsse. Andererseits unterstreicht es mit der Würdigung des „Anderen“ und der „Sache“ die Notwendigkeit zusätzlicher Momente von Enkulturation und Erziehung, die außerhalb des Eigenen liegen. In der Jahnkeschen Konzeption haben mathematikgeschichtliche Elemente die vorrangige Funktion, solche Momente konkret und glaubhaft zu realisieren und für die Lernenden fassbar zu machen. Die theoretischen Fundamente und Bezüge dieses Konzeptes genauer herauszuarbeiten, ist das Thema des folgenden ersten Teils dieser Arbeit.

Das Bekannte überhaupt ist darum, weil es bekannt *ist, nicht erkannt.*
(Hegel)

2 Die historisch-hermeneutische Konzeption mathematikgeschichtlicher Unterrichtsinterventionen

Die Diskussion des historisch-*genetischen* Ansatzes im ersten Kapitel hat aufgezeigt, welche prinzipiellen Absichten oft mit der Einbeziehung fachgeschichtlicher Elemente in den Mathematikunterricht verknüpft werden. Die historisch-*hermeneutische* Konzeption verfolgt demgegenüber andere Ziele und wird auch von anderen Realisierungsmomenten bestimmt: In ihr geht es nicht um die Konstruktion ganzer Lehrgänge nach historischen Vorbildern sondern um *lokale*, d. h. zeitlich und sachlich begrenzte, fachgeschichtliche *Interventionen* mit episodischem Charakter. Diese dienen nicht der – im genetischen Verfahren häufig im Vordergrund stehenden – motivierenden *Einführung* mathematischer Begriffe oder Verfahren sondern vielmehr deren *Vertiefung* und *Reflexion*. Das wichtigste methodische Hilfsmittel der historisch-hermeneutischen Konzeption ist der Umgang mit originalen Quellen. Diese werden mit Schülerinnen und Schülern bearbeitet, die bereits über ein modernes Vorverständnis der in ihnen behandelten Begriffe und Themen verfügen, den Stoff also zuvor im Unterricht auf konventionelle Weise gelernt haben. Dass in den historischen Quellen oftmals Brüche oder Widersprüche zu heutigen Sichtweisen auftreten können, wird nicht (wie in der genetischen Methode) negativ bewertet, sondern als wichtiges Mittel des Verstehens betrachtet: Die Erfahrungen der Fremdheit und Alterität bereiten den Boden, auf dem – so die Hoffnung – das Bekannte neu *er*kannt wird (Hegel, 1987, S. 31) und reflektierendes Nachdenken einsetzen kann.

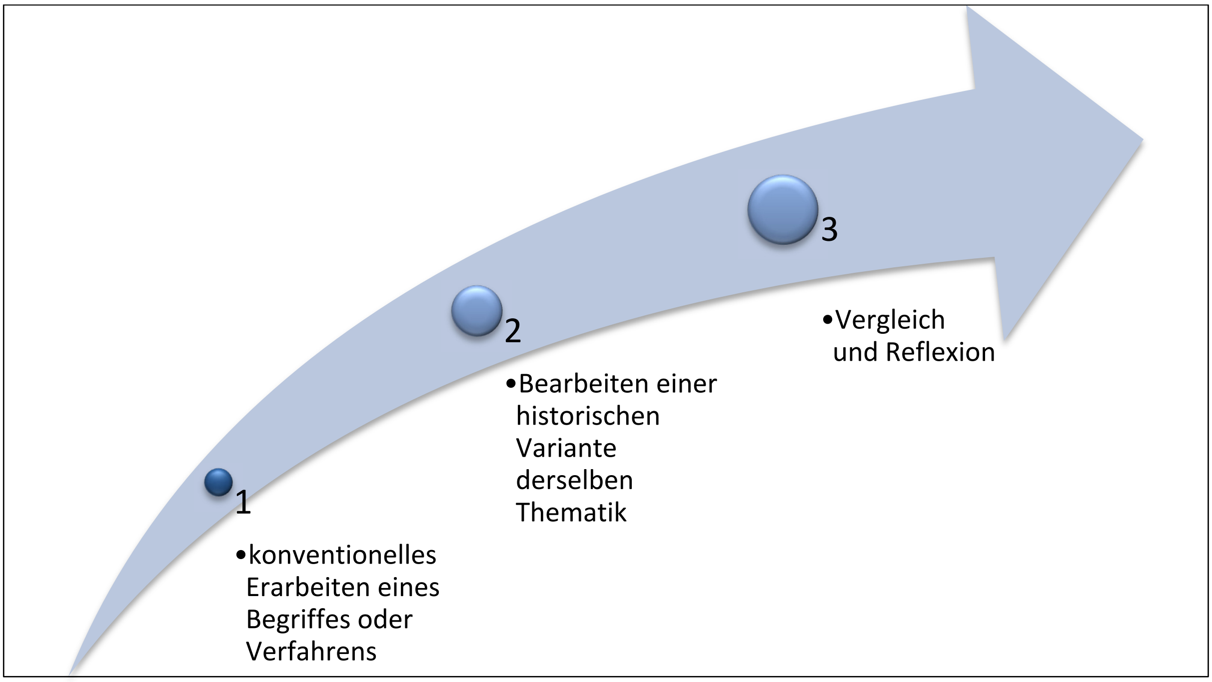


Abbildung 1: Methodischer Dreischritt in der historisch-hermeneutischen Konzeption. Ein Stoff (ein mathematischer Begriff/ein mathematisches Verfahren) wird zunächst auf konventionelle Weise erarbeitet und dann mit einer historischen Variante kontrastiert. Hierdurch nimmt zum einen das rein fachlich-technische Wissen zu (ausgedrückt durch das Ansteigen des Pfeils), zum andern erschließen sich auch ganz neue Dimensionen des Verstehens (ausgedrückt durch die Verbreiterung des Pfeils).

In den folgenden Abschnitten werde ich die theoretische Basis und Perspektive dieser konzeptionellen Idee entwickeln. Dabei werde ich mich vor allem von den folgenden Fragen leiten lassen:

1. Welche besonderen Leistungen vermag der historisch-hermeneutische Ansatz für das Gesamtunternehmen „Mathematikgeschichte im Unterricht“ zu erbringen?
2. In welchem Zusammenhang mit den allgemeinen und fachspezifischen Zielen des Mathematikunterrichts kann dieser Ansatz gebracht werden?
3. Welche Unterrichtskonzepte zeitigt er?

Zur Beantwortung dieser Fragen ziehe ich drei Diskussionskontexte heran:

- Die Mathematikdidaktik ist der natürliche Rahmen, innerhalb dessen die vorstehenden Fragen bereits thematisiert worden sind, vgl. insbesondere (Jahnke et al., 2000), (Furinghetti, Jahnke & van Maanen, 2006). Einen Überblick über die dabei erbrachten Ideen und Überlegungen gebe ich im ersten Abschnitt (2.1).
- Die möglichen Beiträge der *Geschichtsdidaktik* für den vorliegenden Zusammenhang sind hingegen in der Forschung bisher kaum zur Kenntnis genommen worden. Dies hole ich im zweiten Abschnitt (2.2) nach. Dabei wird sich zeigen, dass die Geschichtsdidaktik dem historisch-hermeneutischen Ansatz einerseits ein theoretisches Gerüst liefern kann, innerhalb dessen einige seiner wichtigsten Leitideen erörtert und validiert werden können. Zum andern kann sie den Ansatz auch auf pragmatischer Ebene befruchten, indem sie Verfahren, Prinzipien und Kategorien zur Verfügung stellt, die das Lernen aus der (fachlichen) Geschichte ermöglichen oder erleichtern.
- Schließlich stellt die *Hermeneutik* als ‚Wissenschaft und Philosophie des Verstehens‘ einen klassischen, über Jahrhunderte gewachsenen Fundus an Ideen und Erkenntnissen bereit, der einen Ansatz, in dem es ja um ein vertieftes „Verstehen“ von Mathematik gehen soll, beträchtlich bereichern kann. Der bisher nur ansatzweise in Angriff genommenen Aufgabe, diesen Fundus zu eruieren und für den vorliegenden Zusammenhang nutzbar zu machen, wende ich mich ausführlich im dritten Abschnitt (2.3) zu.

Im Folgenden wird es also darum gehen, die drei genannten Kontexte – Mathematikdidaktik, Geschichtsdidaktik und Hermeneutik – zu entfalten und ihre Beiträge im Hinblick auf die Beantwortung der oben notierten theoretischen Fragen zu identifizieren und zu erschließen (vgl. Abbildung 2).

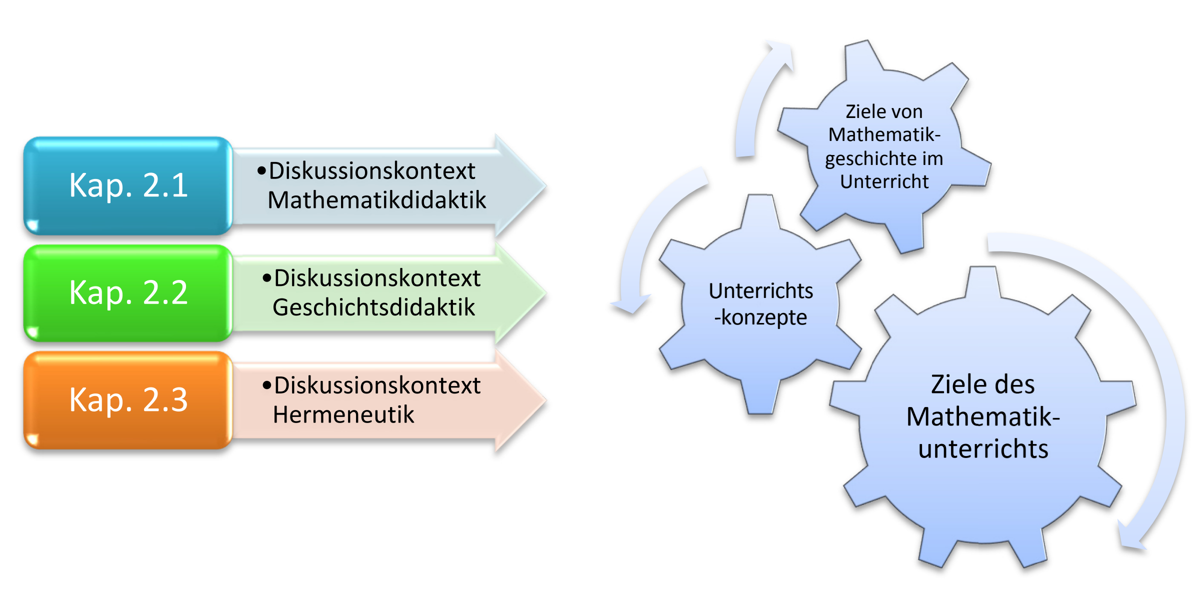


Abbildung 2: Fragestellungen und Diskussionskontexte des vorliegenden Kapitels.

2.1 Der mathematikdidaktische Diskussionskontext

2.1.1 Die Lektüre historischer Quellen: Ansprüche und Chancen für den Mathematikunterricht

Im historisch-hermeneutischen Ansatz geht es um die Lektüre mathematikgeschichtlicher Quellen im Unterricht. Zweifellos ist dies ein substanzielles Unternehmen: Es verlangt ein hohes Maß an methodischer Reflexion und Vorbereitung, benötigt vergleichsweise viel Unterrichtszeit und stellt auch fachlich-inhaltlich hohe Ansprüche. Quellenlektüre fordert von allen Beteiligten, sich in fremde Denkwelten (vgl. Kuhn) einzufinden, historische und kulturelle Kontexte wahrzunehmen sowie mit einem ungewohnt text- und sprachintensivem Material möglichst kompetent umzugehen. Jahnke et al. heben jedoch hervor, dass die Lektüre mathematikgeschichtlicher Originalquellen im Gegenzug auch ganz besondere Chancen eröffnet (Jahnke et al., 2000, S. 292 ff.):

1. Originalquellen ermöglichen den unmittelbaren Kontakt mit den Ideen und Denkstilen einer vergangenen, entfernten Zeit.
2. Originalquellen gewähren einen Einblick in die geschichtliche (diachronische) Entwicklung und Wandlung mathematischer Begriffe und Konzepte (Beispiele: der Funktionsbegriff, der Zahlbegriff, der Begriff der Kurve etc.). Vgl. (Barbin, 1996), (Youschkevitch, 1976).
3. Originalquellen bieten Einblicke in andersartige Systeme der Darstellung (für Zahlen, Gleichungen etc.) und schärfen das Bewusstsein für den operationellen und kommunikativen Wert fremder sowie eigener Zeichen und Symbole. Vgl. (van Maanen, 1997), (Arcavi, 1987).
4. Originalquellen ermöglichen den konkreten Vergleich fremder und eigener Vorstellungen, Denkweisen und Darstellungsmethoden. Sie sind somit u. a. ein Medium der Selbst- und Fremdreflexion. Vgl. (Glaubitz & Jahnke, 2003), (Jahnke H. N., 1995), (Barbin, 1994).
5. Durch die modellhafte Auseinandersetzung mit den in Originalquellen enthaltenen, fremdartigen Sicht- und Behandlungsweisen eines an sich bekannten Gegenstandes können die *Un-*

terrichtenden lernen, eine von Geduld, Toleranz und Wertschätzung getragene Haltung gegenüber den ebenfalls idiosynkratisch geprägten Ausdrucksweisen ihrer Schülerinnen und Schüler zu entwickeln, und eine Kompetenz des „produktiven Zuhörens“ aufzubauen, in welcher einseitige Vorab-Festlegungen im Sinne eigener oder etablierter Denkstile vermieden werden („decentering“) (Arcavi & Isoda, 2007).

6. Originalquellen sind Zeugnisse menschlichen Handelns. Sie bereichern nicht nur die fachlichen Kompetenzen der Lernenden sondern geben ihnen auch Anlässe, *über* Mathematik und das Betreiben von Mathematik zu sprechen (Ransom, Arcavi, Barbin & Fowler, 1991, S. 9).
7. Originalquellen können Querverbindungen zu philosophischen Themen herstellen, die von den in den Quellen thematisierten mathematischen Inhalten berührt werden. Im Unterrichtsprojekt der vorliegenden Arbeit beispielsweise liegt es nahe, ausgehend vom Quellentext den Zahlbegriff oder die Frage der symbolischen Formalisierung zu diskutieren. Vgl. (Furinghetti & Somaglia, 1997), (Barbin & Caveing, 1996).
8. Gelegentlich bieten Originalquellen auch einen leichteren Zugang zu einem konkreten Thema. Beispiele sind Dedekinds (1831-1916) Definition des reellen Zahlbegriffs, wie sie in seinem Aufsatz „Stetigkeit und irrationale Zahlen“ (1872/1932) gegeben wird oder Viètes (1540-1603) Darstellung algebraischer Regeln in seinem „In artem analyticem isagoge“, vgl. (Bruckheimer & Arcavi, 2000).
9. Originalquellen bieten guten Diskussionsstoff zur Erörterung der Frage nach den zentralen Themen der Schulmathematik, nach curricularen Trends im Allgemeinen wie auch nach unterschiedlichen Ansätzen des Lernens und Unterrichtens, vgl. (Bruckheimer, Ofir & Arcavi, 1995).
10. Originalquellen können auch dazu dienen, geistesgeschichtliche Querverbindungen zu ziehen und auf das kulturelle Erbe bestimmter Epochen oder Ethnien hinzuweisen (vgl. vorliegende Arbeit).

Jahnke et al. umschreiben das in diesen Punkten skizzierte, weite Feld an Intentionen und Erwartungen zusammenfassend mit drei Begriffen, die das Potenzial der Arbeit mit mathematikgeschichtlichen Quellen prägnant charakterisieren können (Jahnke et al., 2000, S. 292). Ich gebe sie hier mit *Substitution* („replacement“), *Umorientierung* („reorientation“) und *kulturellem Verstehen* („cultural understanding“) wieder:

- *Substitution* meint, dass es bei der Verwendung historischer Quellen darum geht, etwas Vertrautes durch etwas Anderes, etwas Fremdes zu ersetzen.
- *Umorientierung* bezeichnet den Anspruch, die eigenen Verstehensperspektiven im Hinblick auf dieses fremde Andere und die in ihm zum Ausdruck kommenden Sichtweisen zu überdenken und neu zu bewerten.
- *Kulturelles Verstehen* schließlich weist auf die Notwendigkeit hin, dabei die Kontexte gesellschaftlicher, wissenschaftlich-technischer und anderer Art in die Auseinandersetzung mit einzubeziehen.

Diese dreifältige Dimensionierung macht deutlich, warum Quellenlektüre ein so anspruchsvolles Unternehmen ist: Im Unterricht, in dem Quellen gelesen werden, geht es darum, einen mathematischen Gegenstand (einen Begriff, ein Verfahren) hinsichtlich seines Reichtums an Aspekten, seiner Vielfalt an Explikationsvarianten sowie seiner von unterschiedlichsten, intra- und extradisziplinären Kontextfaktoren bestimmten Querbezüge zu durchdringen. Dabei spielt nicht nur die Förderung von fachlich-inhaltlichen Kompetenzen der Lernenden eine Rolle, sondern vor allem die vergleichende und bewertende Weiterverarbeitung des durch die Quellenlektüre Erfahrenen. In Bezug auf die von (Tzanakis, Arcavi & al., 2000) diskutierten, grundsätzlichen Möglichkeiten, Mathematikgeschichte im Unterricht zu nutzen *(learning history, learning mathematical topics, developing deeper awareness* (S. 211 ff.)), wird damit vor allem die dritte der dort genannten Zielebenen angesteuert, auf welcher es um die Entwicklung mathematischer Bewusstheit („awareness“) geht. Der historisch-hermeneutische Ansatz, der diesen Anspruch akzentuiert, bewegt sich damit auf der Höhe der gegenwärtigen didaktischen Diskussion; denn das Interesse an der Ermöglichung, Unterstützung und Einforderung *bewusst reflektierter* Erkenntnisakte im Unterricht ist in der Mathematikdidaktik größer denn je. Ich möchte dies im nächsten Abschnitt näher ausführen.

2.1.2 Mathematikunterricht und Reflexion

Ansätze zur Integration von Reflexionsmomenten in den Mathematikunterricht gibt es schon lange. In ihnen werden sowohl innerfachliche (z. B. (Steiner, 1989), (Bauer, 1990), (Neubrand, 1990a), (Neubrand, 1990b), (Neubrand, 2000), (Sjuts, 2002), (Prediger, 2005)) wie auch außerfachliche Aspekte und Bezüge (z. B. (Scarafiotti & Giannetti, 1998), (Rottoli, 1998), (Skovsmose, 1998)) der Mathematik thematisiert. In der didaktischen Diskussion geht es dabei darum herauszuarbeiten,

- *warum* Reflexionen im Mathematikunterricht sinnvoll sind (Frage nach den Gründen),
- *was* man in ihnen thematisieren kann (Frage nach den Inhalten)
- und *wie* sie in den Unterricht integriert werden können (Frage nach den Implementierungen).

Alle drei Fragen sollen hier angesprochen und dabei mit den Möglichkeiten und Intentionen historisch-hermeneutischer Unterrichtsinitiativen in Beziehung gesetzt werden.

2.1.2.1 Die Frage nach den Gründen

Der Wert von Reflexionselementen im Unterricht ist unter Didaktikern im Grunde unstrittig. Befürwortende Argumente werden gewöhnlich aus a) fachlicher, b) lernpsychologischer, c) pädagogischer und d) kultureller Perspektive geltend gemacht (Bauer, 1990, S. 7), (Neubrand, 1990b, S. 23 ff.):

a) Bauer weist im Hinblick auf die *fachliche* Komponente darauf hin, dass es ein Charakteristikum mathematischen Arbeitens sei,

> „dass man sich mit dem, was zunächst als mathematische Aktivität ausgeführt wird, in einem nächsten Schritt bzw. auf einer nächsten Arbeitsstufe reflektierend auseinandersetzt.“ (Bauer, 1990, S. 7)

Bereits (Freudenthal, 1973) hatte sich in ähnlichem Sinn geäußert, vgl. (Bauer, 1990, S. 7). Insofern der mathematische Unterricht sich dem Ziel verschreibe, eine Vorstellung von den Grundzügen des mathematischen Denkens und Handelns zu vermitteln, insofern sei es – Bauer zufolge – notwendig,

> „diesen Wesenszug der reflektierenden Auseinandersetzung mit dem mathematischen Stoff im Unterricht angemessen zu artikulieren.“ (Bauer, 1990, S. 7)

(Skovsmose, 1989) argumentiert entsprechend, wenn er (exemplarisch) darauf hinweist, dass ein Thema wie „mathematische Modellierung“ nicht etwa dadurch im Unterricht erschöpfend behandelt werde, dass Schülerinnen und Schüler fortwährend Modelle bildeten. Das hierbei erworbene „technological knowledge“ müsse vielmehr durch ein „reflective knowledge“ ergänzt und bereichert werden. (Steiner, 1989) geht noch weiter, wenn er vorschlägt, die *Philosophie der Mathematik* selbst zum „Bestandteil eines reflektiven Mathematikunterrichts“ zu machen, um damit „zur Entwicklung eines angemessenen Metawissens über Mathematik“ (S. 56) beizutragen. Dies ist eine sehr anspruchsvolle Idee, die schon früh und oft diskutiert (Kropp, 1958), bisher jedoch kaum nachhaltig umgesetzt wurde.

b) Aus *lernpsychologischer* Sicht werden Reflexionsmomente als metakognitive Elemente begriffen, denen in der Verarbeitung von Erlebnissen und (Lern-)Erfahrungen wichtige Strukturierungsaufgaben zukommen. Einerseits verknüpfen sie die in der Auseinandersetzung mit der Welt erworbenen Wissensbausteine, Schemata, frames etc. zu einem kohärenten Gesamtnetz; dies ist ihre rückblickend-kontrollierende Funktion. Andererseits laden und initialisieren sie Teile dieses Netz für die Begegnung mit neuen Themen und Gegenständen; dies ist ihre vorausschauend-disponierende Funktion(Hasemann, 1988), (Davis, 1984).

c) Auf *pädagogischer* Ebene wird Reflexion häufig mit Begriffen wie Nachdenklichkeit, Besinnung und Bildung in Verbindung gebracht. Hentig etwa schreibt:

> „Bildung ist eine Geistesverfassung, Ergebnis eines nachdenklichen Umgangs mit den Prinzipien und Phänomenen der eigenen Kultur.“ (Hentig, 1987) zit. nach (Bauer, 1990, S. 6)

Unabhängig von den differenzierteren, häufig sehr unterschiedlichen Definitionen des Bildungsbegriffes – deren Darlegung hier nicht im Mindesten möglich ist – folgt daraus: Wenn der Mathematikunterricht grundsätzlich etwas zur Bildung beitragen soll, dann muss er sich dem Anspruch stellen, einen angemessen nachdenklichen Umgang mit den Prinzipien und Phänomenen der Mathematik zu fördern. Der Beitrag zur Bildung ist indes noch nicht alles, was Reflexionen auf pädagogischem Gebiet zu erbringen vermögen; denn Reflexionsmomente wirken, wie Neubrand betont hat, nicht nur auf kognitiver sondern auch auf affektiver Ebene, wenn sie z. B. das – Freude oder Befriedigung spendende – „Erlebnis des Verstandenhabens“ (Aeschbacher) akzentuieren und bewusst machen (Neubrand, 1990b, S. 25).

d) Die *kulturelle* Argumentationsperspektive zugunsten von Reflexionsmomenten bezieht sich auf die oft konstatierte Dissoziierung der menschlichen Gesamtkultur in zwei Teilbereiche: einem naturwissenschaftlich-erklärenden, analytisch-exaktem sowie einem geisteswissenschaftlich-verstehenden, erzählend-hermeneutischem Bereich (Snow, 1959), (Jank & Meyer, 1994, S. 112). Bauer bemerkt dazu:

> „Diese beiden Teilkulturen scheinen sich immer mehr auseinander zu entwickeln und zu autarkisieren. Die Mathematik hat nun zu beiden Bereichen starke Affinitäten. Die naturwissenschaftlich-technischen Disziplinen benutzen mathematische Modelle, Strukturen und Instrumentarien. Im mathematischen Denken wird aber auch eine geisteswissenschaftliche Tendenz sichtbar: Das betrachtende Verweilen am Gegenstand, die Besinnung auf die eigenen Grundlagen, die Reflexion der bei der Arbeit benutzten Voraussetzungen. Insofern könnte die Mathematik bzw. der Mathematikunterricht als eine Art Bindeglied zwischen den beiden Kulturbereichen dienen und dem Prozess der Dissoziation entgegenwirken. Allerdings geschieht dies im schulischen Unterricht nicht von selbst. Der Mathematikunterricht muss vielmehr konsequent auf die oben genannten Affinitäten, insbesondere eben auch auf reflexive Aktiväten ausgerichtet werden.“ (Bauer, 1990, S. 7)

Eine solche Ausrichtung, wie sie Bauer hier fordert, wird mit dem theoretischen Ansatz der vorliegenden Arbeit ausdrücklich angestrebt. Auf den Themenkreis der „zwei Kulturen" werde ich später noch ausführlicher zu sprechen kommen (Kap. 2.3.2.1.2).

Die vier Legitimierungsperspektiven a)-d), die in der Abbildung 3 noch einmal dargestellt sind, können auch dem historisch-hermeneutischen Ansatz zugrunde gelegt werden. Zu untersuchen, inwieweit die in ihnen zum Ausdruck kommenden Ansprüche tatsächlich eingelöst werden, ist ein wichtiges Anliegen des empirischen Teils der vorliegenden Arbeit.

Abbildung 3: Legitimierungsperspektiven reflektierender Tätigkeiten im Mathematikunterricht.

2.1.2.2 Die Frage nach den Inhalten

Ergiebige Systematisierungen, nach denen Reflexionstätigkeiten im Mathematikunterricht thematisch differenziert werden können, wurden von (Neubrand, 1990b) und (Bauer, 1990) vorgelegt. Für den Kontext der vorliegenden Arbeit ist Bauers Beitrag interessanter, da er ein größeres Gewicht auf die Sinn- und Selbstperspektive der Lernerfahrungen legt und damit die Zusammenhänge von Mathematik und Mensch stärker thematisiert. Im Einzelnen unterscheidet Bauer zwischen:

- *Inhaltsreflexion* bzw. *Reflexion* im *Gegenstand Mathematik,* d.h. ein „auf mathematische Inhalte und Themen sich richtendes bewusstes, prüfendes Nachdenken und Überlegen, ein sich Vertiefen in Mathematik, ein sich Beschäftigen und Umgehen mit Mathematik, ein verständiges Betreiben von Mathematik" (Bauer 1990, S. 6).
- *Gegenstandsreflexion* bzw. *Reflexion* über *den Gegenstand Mathematik,* d.h. „Reflexion über Entwicklungslinien, Strukturmerkmale, Erscheinungsformen, Grundlagenfragen der Mathematik. Die Reflexion richtet sich auf das Wesen der Disziplin Mathematik." (Bauer 1990, S. 6).

- *Bedeutungs- und Sinnreflexion,* d.h. „Reflexion über Möglichkeiten und Grenzen mathematischen Denkens, über die Bedeutung der Mathematik und über den Sinn einer Beschäftigung mit Mathematik. Im Zentrum stehen dabei Bedeutungseinheiten, Zweckbezüge, Sinnzuschreibungen." (Bauer 1990, S. 6).
- *Selbstreflexion,* d.h. Reflexion über die Bedeutung von Mathematik für die eigene Person und das eigene Selbstverständnis.

> „Es liegt gewissermaßen eine ‚doppelte Reflexion' vor: Der Mensch bewertet die Mathematik und denkt über sich nach, beides in gegenseitiger Verflochtenheit", (Bauer 1990, S. 6).

Um dies zu ermöglichen sollte ein Lehrer seinen Schülerinnen und Schülern

> „dabei helfen, mathematische Aktivitäten und Leistungen als potenziell eigene Fähigkeiten zu erkennen und in mathematischen Begriffen und Verfahren eigene Denkansätze und Denkmuster wiederzuentdecken." (Bauer 1988, S. 247)

Mit den beiden letzten Punkten lenkt Bauer den Blick auf die Felder, die durch die historisch-hermeneutischen Konzeption besetzt werden sollen; denn deren Kernanliegen besteht ja gerade darin, Schülerinnen und Schüler beim Verstehen von Mathematik dadurch zu unterstützen, dass man ihnen Anlässe schafft, über (eigene und fremde) Bedeutungsstrukturen und Sinnperspektiven sowie über die persönliche Beziehung zur Mathematik als Wissenschaft und als Schulfach nachzudenken. Historischen Quellen stellen in diesem Zusammenhang Medien dar, die diesen Prozess initiieren können. Dem Ansatz liegt die Annahme zugrunde, dass Lernende, die sich auf der Gegenstandsebene allein nicht gut ansprechen lassen, möglicherweise über die Sinn- und Selbstebene besser erreicht und für mathematische Fragestellungen aufgeschlossen werden können (Abbildung 4).

Abbildung 4: Die möglichen thematischen Ebenen von Reflexionstätigkeiten im Mathematikunterricht nach (Bauer, 1990). Die Auseinandersetzung in historisch-hermeneutischen Interventionen wird auf allen Ebenen angestrebt.

2.1.2.3 Die Frage nach den Implementierungsstrategien

Hinsichtlich des Problems, *wie* Reflexionsmomente methodisch in den Unterricht integriert werden können, wurden in der Vergangenheit verschiedene Möglichkeiten vorgeschlagen.

2.1.2.3.1 Strategietypen

Zu den *aufgabendidaktischen Strategien* gehören Ansätze, die Reflexionsmomente im Zusammenhang mit der Entwicklung oder Pflege bestimmter Aufgabenkulturen thematisieren. Da der Mathematikunterricht de facto zumeist aufgabenorientiert konzipiert und durchgeführt wird, liegt es tatsächlich nahe, sich hiervon schnelle Umsetzungen und direkte Wirkungen zu versprechen. Bei den bisher in diesem Sinne entwickelten Formaten handelt es sich u. a. um offene Aufgaben mit mehreren Lösungen oder Probleme ohne enge Fragestellungen(Winter, 1988), (Becker & Shimada, 1997), Aufgaben, die mathematische Modellbildungen verlangen(Böer, 2000), (Herget & Scholz, 1998), kognitionsorientierte Aufgaben, die metakognitive Reflexionen auslösen sollen (Sjuts, 2006), (Sjuts, 2002) oder auch um Aufgaben, in denen es um die Suche nach Fehlern bzw. Fehlvorstellungen geht (Furdek, 2002).

Einen allgemeineren Ansatz verfolgen Strategien, in denen Reflexionsmomente nicht notwendigerweise mit der Bearbeitung von Aufgaben verknüpft werden. Ich möchte sie als *explizite Strategien* bezeichnen. In der Literatur gibt es auch für sie zahlreiche Beispiele: So schlägt etwa Neubrand vor, Reflexionen im Unterricht als „Sprechen über Mathematik" aufzufassen, das an vielen geeigneten Stellen direkt angestoßen und geübt werden könnte. Als Beispiele nennt er das Sprechen über spezifische mathematische Arbeitsweisen (z. B. logisches vs. heuristisches Arbeiten), über bestimmte Charakteristika der Mathematik (z. B. Axiomatik), über die Anpassung mathematischer Begrifflichkeiten und Modelle an Anwendungs- und Problemkontexte etc. (vgl. (Neubrand, 1990b, S. 32-45)). Auch Bauer möchte Schülerinnen und Schüler durch ausdrückliches Fragen und Impulse-Geben zum Nachdenken über Mathematik anregen (Bauer, 1990, S. 8). (Kaune, 2005) empfiehlt, die Lernenden zur schriftlichen Auseinandersetzung mit ihren eigenen Lernprozessen zu ermuntern. (Gallin & Ruf, 1994) erweitern den möglichen Radius solcher Vertiefungen, indem sie zum „spurenlegenden und -lesenden", dialogischen Lernen (in Lernjournalen) aufrufen, das sowohl die Mitschüler wie auch die Lehrpersonen als Gesprächspartner einbezieht.

Das historisch-hermeneutische Konzept gehört hinsichtlich seines Ansatzes zur Integration von Reflexionsmomenten im Unterricht zur Gruppe der zuletzt genannten, expliziten Initiativen. In Bezug auf sein Dialogizitätspotenzial und -interesse greift es die Ideen von (Gallin & Ruf, 1994) auf und geht noch über diese hinaus, indem es den Horizont des intendierten Dialogs historisch erweitert. Mit der verfremdenden Wirkung mathematikgeschichtlicher Quellenlektüren wird in dem Konzept zugleich eine *Dissonanzstrategie* verfolgt: Dabei geht es darum, Lernende „dosierte Diskrepanzerlebnisse" (Mietzel, 2001, S. 77) erfahren zu lassen, um auf solche Weise ihre „epistemische Neugier" zu wecken und für die Lernsituation zu nutzen. Dies sei im Folgenden näher erläutert.

2.1.2.3.2 Lernpsychologische Hintergründe von Dissonanzstrategien

Der für die Dissonanzstrategie wichtige Begriff der epistemischen Neugier stammt aus der Theorie des britischen Psychologen Daniel Berlyne (1924-1976), (Berlyne, 1974). In dieser Theorie unterscheidet Berlyne zwischen zwei grundsätzlichen Formen menschlicher Neugier: Wahrnehmungsneugier einerseits – die beispielsweise durch überraschende Sinnesreize, etwa einen lauten Knall o. ä. ausgelöst werden kann – und eben epistemischer Neugier, die erregt wird,

> „wenn ein Mensch Informationen zur Kenntnis zu nehmen hat, die mit seinem Wissen, seinen Überzeugungen oder Einstellungen nicht, oder nur teilweise zu vereinbaren sind." (Mietzel, 2001, S. 351)

Epistemische Neugier wird nach Berlyne in Situationen hervorgerufen, die neuartig, komplex, ungewiss und konfliktbeladen sind (Berlyne, 1974, S. 38 ff.). Hierbei hat sich ein mittlerer („dosierter") – und nicht etwa ein maximaler – Ausprägungsgrad solcher Attribute als optimal erwiesen:

> „Die Neugier wird […] nur erregt, wenn Informationen einen mittleren Neuigkeitsgrad aufweisen. Menschen tendieren nämlich dazu, alles zu ignorieren, was ihnen bereits weitestgehend vertraut ist. Sofern ihnen etwas begegnet, was ihnen völlig unbekannt ist, werden sie sich wahrscheinlich sehr schnell davon abwenden, weil es praktisch keine Aussichten gibt, es zu verstehen. […] Schließlich bleibt als Drittes der Fall, dass der Mensch etwas erfährt, was ihm zwar neu ist. Aber es bleibt durchaus noch die Möglichkeit bestehen, es zu verstehen; ein solcher Fall ist eine gute Voraussetzung von Neugier. […] Jean Piaget (1959) hat in diesem Zusammenhang von einer ‚Zone des optimalen Interesses für das, was weder zu bekannt, noch zu neu ist' gesprochen." (Mietzel, 2001, S. 352)

In einschlägigen Experimenten konnte Berlyne nachweisen, dass Probanden ein besonders ausgeprägtes Neugierverhalten (im Sinne verlängerter Aufmerksamkeitszuwendung) zeigten, wenn ihnen *vertraute* Reize oder Materialien dargeboten wurden, die in manchen Aspekten *verfremdet* worden waren (vgl. Abbildung 5).

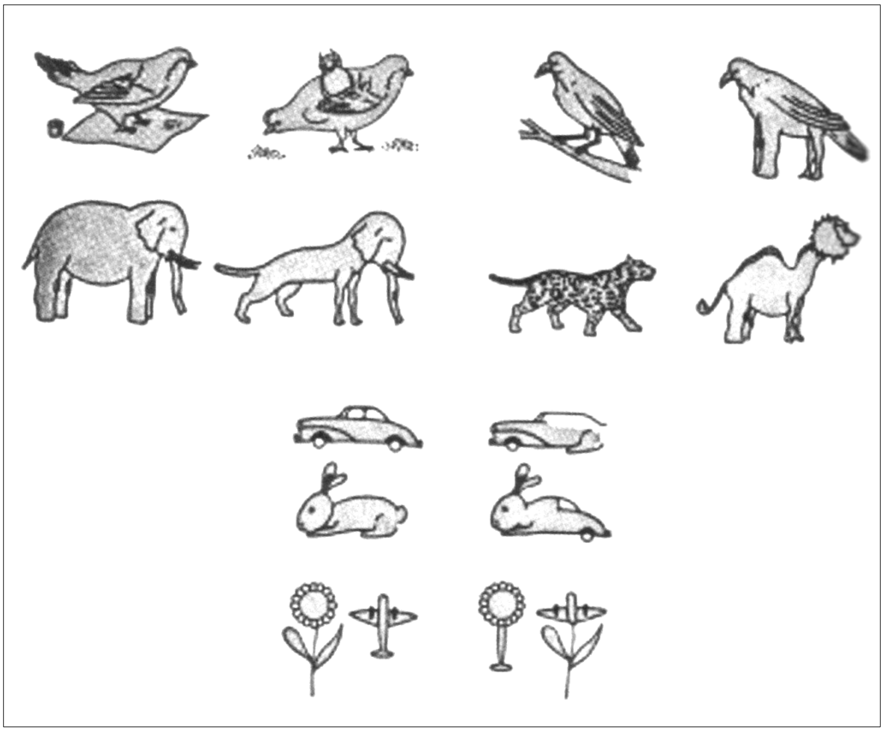


Abbildung 5: Einige Beispielbilder, die Daniel Berlyne zur Untersuchung des menschlichen Neugierverhaltens verwendet hat. Aus: (Mietzel, 2001, S. 352).

Im Einklang mit diesem Ergebnis stehen Untersuchungen der Textverstehensforschung, die gezeigt haben, dass sich epistemische Neugier *anhand von Texten* vor allem dann anregen und maximieren lässt,

- wenn bei der Einführung neuen Materials einerseits ein starker Rückbezug auf vorhandene Assoziationen gewährt wird,
- die neuen Konzepte sich aber andererseits als *inkongruent* zu bereits vorhandenen, verfestigten Konzepten erweisen (Groeben, 1978, S. 51).

Der *inkongruente Rückbezug auf Bekanntes* ist demnach einer der wichtigsten Ansatzpunkte zum Schaffen kognitiver Konflikte und damit zum Wecken epistemischer Neugier. Er ist darum auch bereits relativ ausführlich erforscht worden. Seine Wirksamkeit wurde nicht nur im Hinblick auf die Einstellung und das Verhalten von Probanden gesichert, sondern auch hinsichtlich ihrer Motivierung sowie ihrer Lern- und Behaltensleistungen. So hat zum Beispiel Paradovsky in einem Experiment 52 Schülern Textabschnitte und Illustrationen von fünf bekannten und fünf relativ unbekannten, merkwürdig aussehenden Vögeln vorgelegt. Die Behaltensprüfung ergab, dass die (in den zugehörigen Texten mitgeteilten) Informationen über die unbekannten Tiere signifikant besser behalten wurden (Groeben, 1982, S. 268). Der ganz allgemein positive Zusammenhang zwischen Interesse und Lernleistung ist inzwischen durch viele empirische Studien gesichert (Schiefele, Krapp & Winteler, 1992).

2.1.2.3.3 Historisch-hermeneutische Interventionen als reflexionsfördernde Diskrepanzerlebnisse

Jahnkes historisch-hermeneutische Konzeption ist so angelegt, dass sie die eben zitierten (Optimierungs-)Kriterien gut bedienen kann; denn die historischen Quellen werden *nach* der konventionellen Behandlung des fraglichen Stoffes gelesen und ermöglichen damit den geforderten assoziativ-inkongruenten Rückbezug. Fachlich geht es in den Quellen um *vertraute* Dinge. Der historische Abstand jedoch, die verschiedenartige Form der Darstellung, die ungewohnten Fragestellungen oder Kontextbezüge etc. bieten aber genügend *Verfremdungen,* die Elemente der Neuheit und Überraschung sowie der Inkongruenz zum bisherigen Wissen beinhalten. Die Hypothese lautet daher:

Hypothese: *Mathematikgeschichtliche Quellen, die Vertrautes verfremden, wecken epistemische Neugier und stoßen Reflexionen im Unterricht auf natürliche (intrinsische), wirkungsvolle und leistungsfördernde Weise an.*

Ob es sich tatsächlich so verhält, soll im empirischen Teil der vorliegenden Arbeit eingehend untersucht werden.

2.2 Der geschichtsdidaktische Diskussionskontext

Wenn man die Ausführungen des vorigen Abschnittes durchgeht, sieht man sich einer Reihe von (z. T. elementaren) Fragen bzw. Sichtweisen gegenüber, zu deren Diskussion es nützlich erscheint, weitere Kontexte beizuziehen. Im Hinblick auf den Umgang mit historischem Material im Mathematikunterricht erscheint es besonders plausibel, das Feld der Geschichtsdidaktik zu erschließen, um dort nach theoretischen Rahmungen, Definitions- und Validierungsangeboten, methodisch-pragmatischen Hilfestellungen etc. zu suchen. Dieser Aufgabe – die in der Forschung bisher unerledigt geblieben ist – komme ich im vorliegenden Abschnitt nach. Dabei werde ich nach einer grundsätzlichen Definition und Differenzierung der benutzten Begrifflichkeiten (2.2.1) die Eigenarten historischer Quellen (2.2.2) sowie die geschichtsdidaktischen und -methodischen Kriterien für einen angemessenen unterrichtlichen Umgang mit ihnen erörtern (2.2.3) und mit mathematischen Beispielen veranschaulichen. Anschließend werde ich pragmatische Vorschläge für methodische Arrangements vorstellen (2.2.4). Der fünfte Abschnitt (2.2.5) schließlich beschreibt, welcher Ertrag m. E. aus der Berücksichtigung des geschichtsdidaktischen Diskussionskontextes zu ziehen ist.

2.2.1 Definition und Differenzierungen: Was ist eine historische Quelle?

Welche Art von Material eigentlich mit dem Begriff „Originalquelle“ gemeint ist, gehört zu den elementaren Fragen, deren Antwort im Bereich der Geschichtsdidaktik gesucht werden kann. Hier finden wir beispielsweise die folgenden, üblichen Definitionen:

> „Quellen sind Resultate menschlicher Betätigungen, welche zur Erkenntnis und zum Nachweis geschichtlicher Tatsachen entweder ursprünglich bestimmt oder doch vermöge ihrer Existenz, Entstehung und sonstiger Verhältnisse vorzugsweise geeignet sind.“ (Bernheim, 1889, S. 227)

> „Als historische Quellen bezeichnen wir im weitesten Sinn alle Zeugnisse (Überlieferungen), die über geschichtliche (= vergangene) Abläufe, Zustände, Denk- und Verhaltensweisen informieren, d. h. letztlich über alles, was sich in der Vergangenheit ereignet hat, diese kennzeichnet, von Menschen gedacht, geschrieben oder geformt wurde.“ (Goetz, 1993, S. 62)

Der Historiker Paul Kirn (1890-1965) bezeichnet in ähnlicher Weise als Quellen

> „alle Texte, Gegenstände oder Tatsachen, aus denen Kenntnis der Vergangenheit gewonnen werden kann.“ (Kirn, 1969, S. 29)

Der Geschichtsdidaktiker Hans-Jürgen Pandel (*1940) weist allerdings auf die Unzulänglichkeit dieser Definition hin, da sie nicht berücksichtige, dass unter Quellen Medien verstanden werden (sollen), die *über die Zeitabstände* kommunizieren. Nach Kirns Definition wäre ja jeder zeitgenössische Text ebenfalls eine Quelle, sofern er über etwas Vergangenes berichtet. Pandel schlägt darum folgende Definition vor, der ich mich in der vorliegenden Arbeit anschließen will:

> „Quellen sind Objektivationen und Materialisierungen vergangenen menschlichen Handelns und Leidens. Sie sind in der Vergangenheit entstanden und liegen einer ihr nachfolgenden Gegenwart vor.“ (Pandel, 2003, S. 11)

2.2.1.1 Beispiele für mathematikgeschichtliche Quellen

Beispiele für Quellen, die im Mathematikunterricht zum Gegenstand der Betrachtung gemacht werden können, sind (u. a.):

- Aufsätze und Arbeiten forschender Mathematiker (vgl. (Laubenbacher & Pengelley, 1999)),
- Auszüge aus historischen Lehrbüchern (z. B. Al-Khwarizmis ‚al-jabr‘, Bearbeitungen von Euklids „Elementen“, alte Schulbücher) oder aus popularisierenden Büchern,
- Titelseiten (vgl. Abbildung 7) oder Frontispizen mit bildlichen (auch allegorischen) Darstellungen (vgl. (Remmert, 2005)),
- Briefe, Briefwechsel (vgl. Abbildung 11),
- Gemälde (vgl. Abbildung 8), Skulpturen (vgl. Abbildung 10),
- historisches Kartenmaterial (vgl. Abbildung 6), Globen,

- mathematische oder technische Geräte und Instrumente (vgl. Abbildung 9),
- alte Uhren oder Kalender,
- Überreste vergangener Wirtschafts- oder Handelssysteme.

Es ist wichtig festzuhalten, dass nach dem in dieser Arbeit zugrunde gelegten Verständnis Quellen nicht etwa erst dann als lohnend oder ergiebig angesehen werden, wenn sie aus der Feder oder Hinterlassenschaft bedeutender Wissenschaftler stammen. Im Gegenteil: Auch Quellen gewöhnlicherer bzw. alltäglicher Herkunft (z. B. alte Schulbücher) sind für die historisch-hermeneutische Behandlung von großem Interesse.

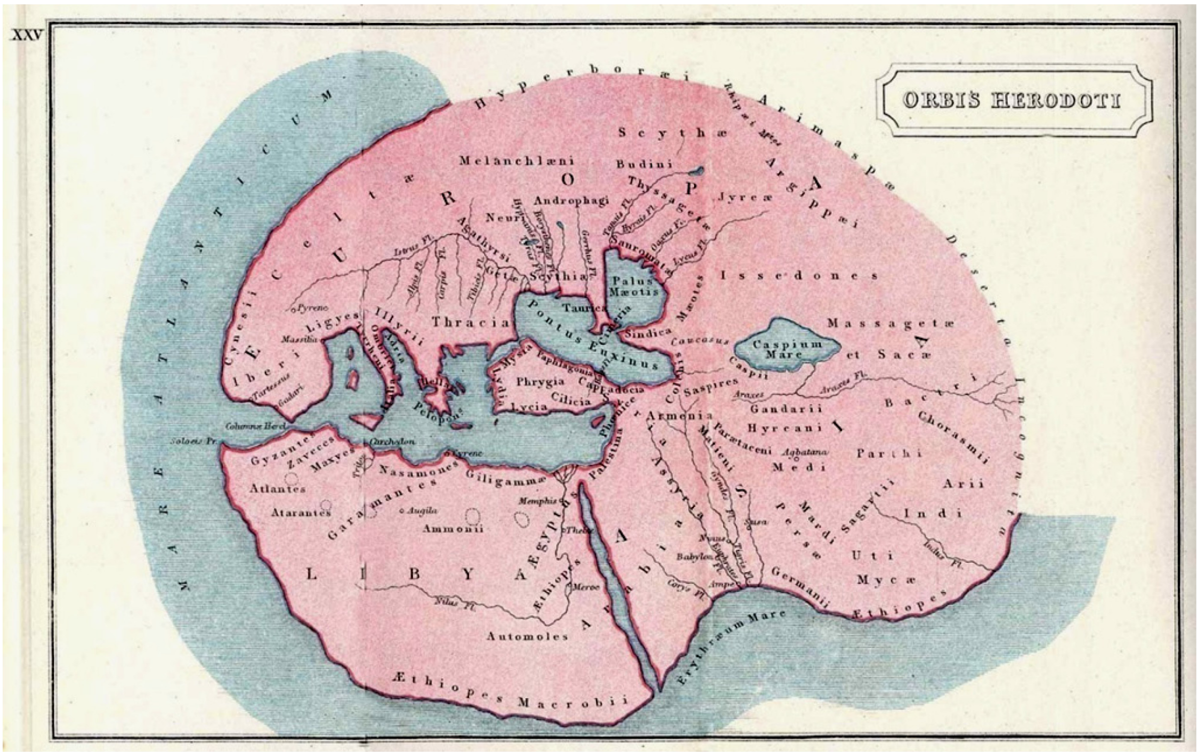


Abbildung 6: Weltkarte nach den Vorstellungen von Herodot (ca. 484-424 v. Chr.).
Quelle: (Lahanas, Map of the world according to Herodotus).

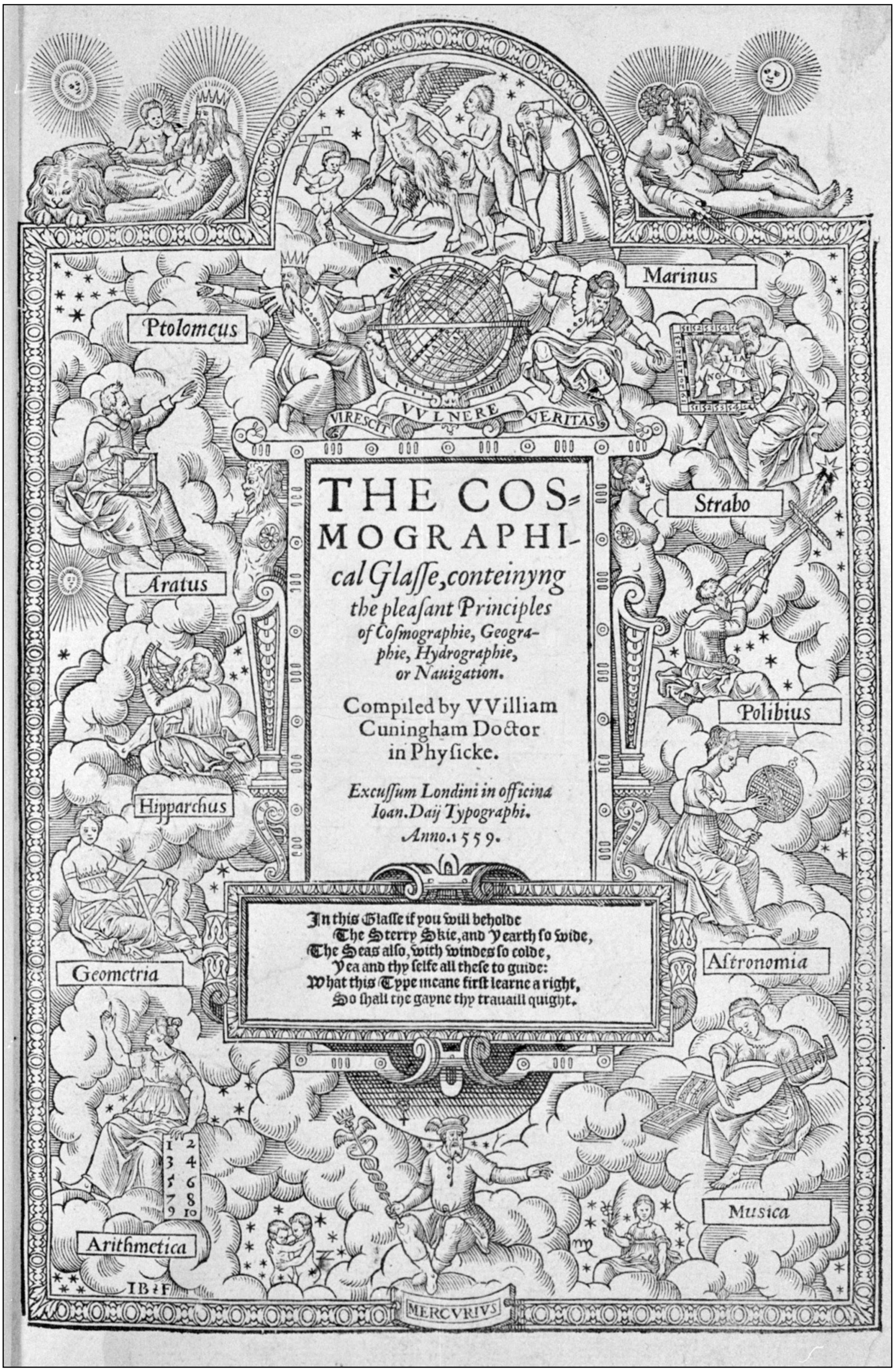


Abbildung 7: Titelbild von William Cunninghams „Cosmographicall Glasse“ (London 1559). Unter der Parole „Virescit vulnere veritas“ (Durch die Wunde wird die Wahrheit gestärkt) sind u. a. Darstellungen verschiedener antiker Gelehrter (Ptolemäus, Strabon, Hipparchus, Marinus, Polybius, Aratus) sowie Allegorien der vier mathematischen Teildisziplinen (Geometria, Arithmetica, Musica, Astronomia) zu erkennen. Quelle: (University of Cambridge, Department of History and Philosophy of Science, Liba Taub, 1999).

Abbildung 8: *Arithmetica*, von Gregor Reisch (1503), ein symbolisches Bild. Boethius schlägt mit seinem Wissen um die indisch-arabischen Notations- und Rechentechniken Pythagoras in einem Rechenwettbewerb. Triumphierend blickt Boethius Pythagoras an, der mit seinem Abakus die Aufgabe immer noch nicht gelöst hat. (Quelle: (Lahanas, Boethius)).

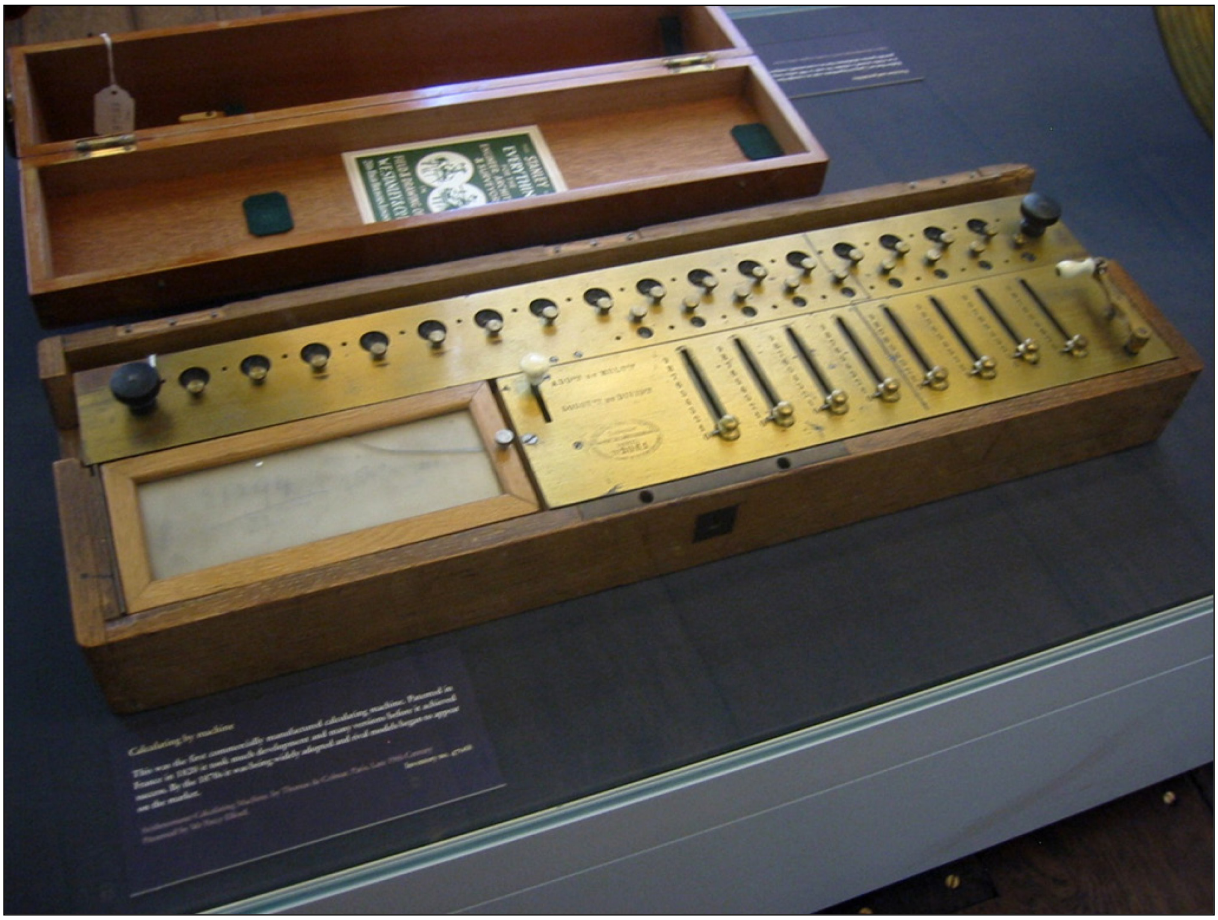
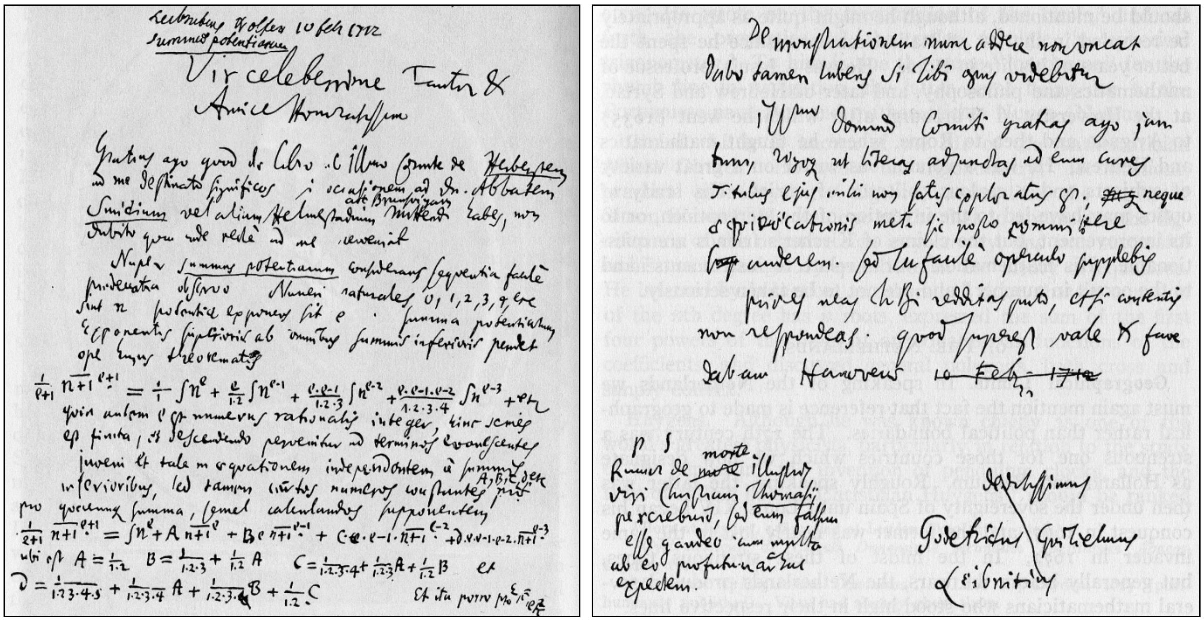


Abbildung 9: *Arithmometer*, eine Rechenmaschine von Thomas de Colmar, Paris, spätes 19. Jahrhundert. Museum of the History of Science, University of Oxford (Inventarnummer 47068). Quelle: eigenes Foto (2008).

Abbildung 10: Denkmal für den arabischen Mathematiker Muhammad Al-Khwarizmi in seiner Geburtsstadt Khiva (heutiges Usbekistan). Quelle: http://home.nordnet.fr/~ajuhel/Al-Khow/Al_Khowar.html, abgerufen am 26.09.2010.


Leibnitius Wolfio 10 Feb 1712
Summae potentiarum
Vir celeberrime Fautor et Amice Honoratissime

Dabam Hanoverae 10 Febr. 1712

Devotissimus Godefridus Guilielmus Leibnitius

Abbildung 11: Brief von Gottfried Wilhelm Leibniz an Christian Wolf, datiert vom 10. Februar 1712. Autograph aus: (Smith, 1958, II, S. 420).

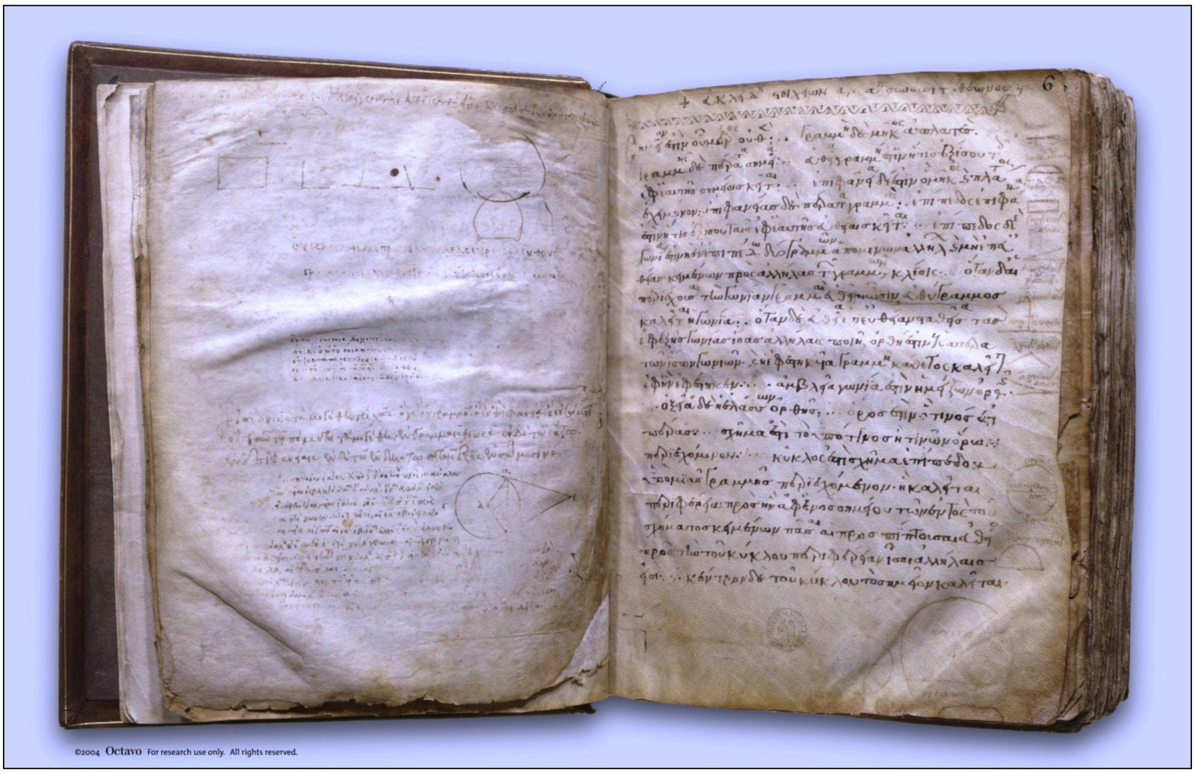


Abbildung 12: Eine Seite aus dem Manuskript MS D'Orville 301 (Euklids „Elemente", fol. 7), Bodleian Library, University of Oxford. Geschrieben im Jahre 888. Auf der rechten Seite beginnt der Haupttext von Buch I der „Elemente" (vgl. Abbildung 13). Quelle: (Rare Book Room).

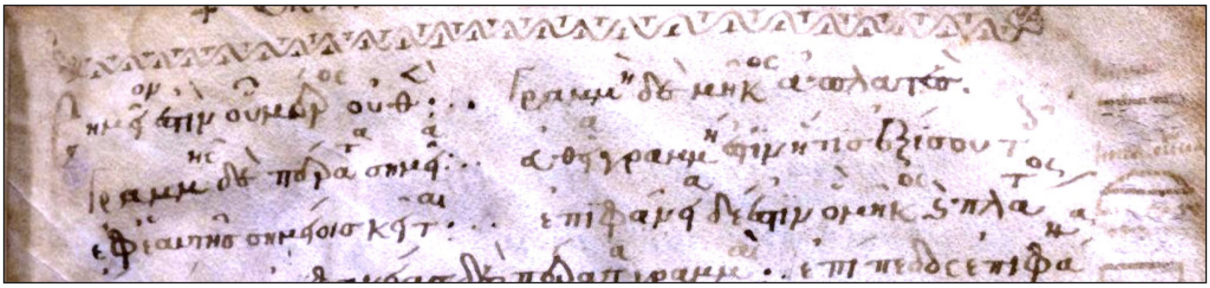
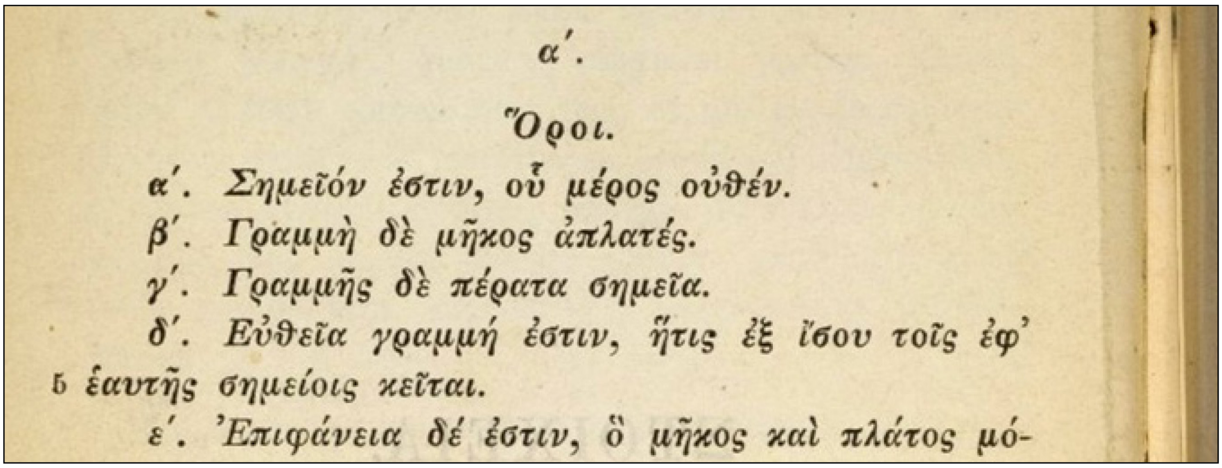


Abbildung 13: Detail von Abbildung 12. Der Beginn der „Elemente“, Buch I. In der ersten Zeile stehen die ersten beiden Definitionen, in der zweiten und dritten Zeile Definition 3 und 4. In der Mitte der dritten Zeile beginnt die Definition 5. Für eine Übertragung dieses Manuskriptes vgl. Abbildung 14. Quelle: (Rare Book Room).

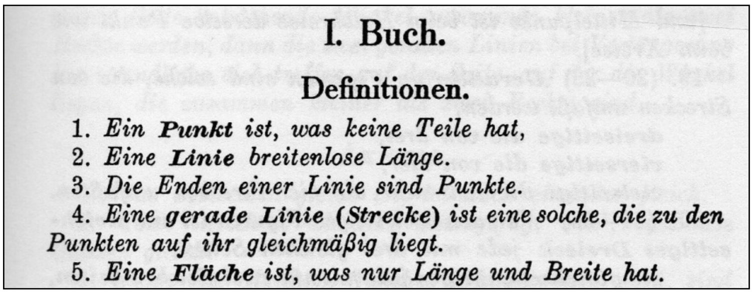


α΄.

Ὅροι.

α΄. Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.
β΄. Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.
γ΄. Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα.
δ΄. Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.
ε΄. Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μό-

Abbildung 14: Der gleiche Textabschnitt der „Elemente“ in der Übertragung von Heiberg. Das erste Wort im Manuskript aus Abbildung 13 steht hier nach dem Gliederungspunkt α’. Das letzte Wort in der dritten Zeile des Manuskripts steht hier an vorletzter Stelle (*πλάτος*, Breite), im Manuskript mit hochgestellten Buchstaben. Quelle: (Max-Planck-Institut for the History of Science).



I. Buch.

Definitionen.

1. *Ein* ***Punkt*** *ist, was keine Teile hat,*
2. *Eine* ***Linie*** *breitenlose Länge.*
3. *Die Enden einer Linie sind Punkte.*
4. *Eine* ***gerade Linie*** **(*Strecke*)** *ist eine solche, die zu den Punkten auf ihr gleichmäßig liegt.*
5. *Eine* ***Fläche*** *ist, was nur Länge und Breite hat.*

Abbildung 15: Der entsprechende Textabschnitt in der Übersetzung von Clemens Thaer. Grundlage dieser Übersetzung war die Ausgabe von Heiberg. Quelle: (Thaer, 2003), eigenes Faksimile.

2.2.1.2 Differenzierungen des Quellenbegriffs

Für eine feinere Spezifizierung des Begriffs „Quelle“ hat der Historiker Johann Gustav Droysen (1808-1884) eine Unterscheidung von Überresten, Quellen (im engeren Sinne) und Denkmälern angeregt (Pandel, 2003, S. 12). *Überreste* sind demnach alle Dokumente und Gegenstände (Sach-überreste), die *ohne* die Absicht, der Nachwelt eine Erinnerung oder Botschaft zu hinterlassen, entstanden und gebraucht worden sind: Typischerweise handelt es sich um Briefe, Tagebücher, Notizen, Protokolle, Werkzeuge, Gegenstände des täglichen Gebrauchs etc. Von den Überresten unterscheidet Droysen die *Quellen* (im engeren Sinne). Diese wurden ausdrücklich zum Zwecke der Erinnerung abgefasst und überliefert (z. B. Annalen, Chroniken, Autobiographien etc.). Das *Denkmal* schließlich besitzt nach Droysen sowohl Überrest- wie auch Quellencharakter. An dieser Trichotomie, die später zur Dualität von Überresten und Traditionen vereinfacht wurde, ist kritisiert worden, dass es durchaus von der Fragestellung eines späteren Forschers abhängen könne, ob er eine Quelle eher als Überrest oder eher als Tradition auffasse. Diese Charakterisierung kennzeichne folglich kein Merkmal der Quelle selbst. So mag beispielsweise der Schreiber einer Autobiographie die Etablierung einer bestimmten Tradition beabsichtigen, in seinem Text jedoch unwillkürlich auch Überreste seiner individuellen Denkwelt, seines Charakters, seiner Interessen etc. hinterlassen, derer er sich beim Abfassen vielleicht nicht voll bewusst war oder sein konnte. Obwohl das Droysensche Konzept durch diesen Einwand relativiert wird, behält es doch seinen Nutzen zur Typisierung und Beurteilung des Aussagewertes einer Quelle. Im modernen Sprachgebrauch hat sich für die Dualität von Überrest und Tradition auch das Begriffspaar von Dokument und Monument herausgebildet. Der im Unterrichtsprojekt der vorliegenden Arbeit behandelte Quellentext von Al-Khwarizmi ist, wie aus dem Vorwort klar hervorgeht, in diesem Sinne ein Überrest bzw. Dokument.

Wie ein Blick auf die Abbildung 12 bis Abbildung 15 zeigt, ist der einfache Begriff der „Quelle“ im Übrigen eine simplifizierende Abstraktion (Pandel, 2003, S. 18 ff.). Quellen können nach ihrem jeweiligen Bearbeitungs- bzw. Übertragungsgrad differenziert werden. Man unterscheidet hier zwischen Manuskript, Transkription, Druckfassung, Übertragung/Übersetzung und Auszug. Die Abbildung 12 und Abbildung 13 zeigen exemplarisch für ein Manuskript (in fotografischer Reproduktion) zwei Seiten aus dem im Jahre 888 verfassten und heute in der Bodleian Library in Oxford aufbewahrten MS D’Orville 301, dem ältesten, vollständig erhaltenen Manuskript der Euklidischen „Elemente“. Bis vor kurzem war es nur unter größten Mühen möglich, solche Originale überhaupt je zu Gesicht zu bekommen. Erfreulicherweise haben jedoch inzwischen viele Bibliotheken weltweit damit begonnen, ihre wertvollen Stücke zu digitalisieren und im Internet oder auf elektronischen Datenträgern prinzipiell jedermann zugänglich zu machen. Der Anblick einer Seite aus dem Bodleian-Manuskript auf einem Computerbildschirm besitzt zwar nicht die gleiche sinnliche Qualität wie der unmittelbare Kontakt mit dem Buch selbst, zeigt aber immer noch viel von der Widerständigkeit alter Texte. Dies beweist der Vergleich mit Abbildung 14, in welcher derselbe Abschnitt der „Elemente“ in der transkribierten und gedruckten Fassung von Heibergs Euklid-Ausgabe dargestellt ist. Man kann hieran ersehen, welche Leistung es ist, alte, schwer zu entziffernde Texte in eine lesbare Form zu bringen. Im vorliegenden Falle ist diese Leistung umso höher einzuschätzen, da Heiberg nicht nur auf das Oxford-Manuskript zurückgegriffen hat, sondern noch viele andere „Quellen“ der „Elemente“ ausgewertet und den gesamten Text mit einer lateinischen Übersetzung und Kommentierung versehen hat. Was uns heute im deutschen Sprachraum üblicherweise vorliegt, wenn wir Euklids Elemente „im Original“ lesen, ist die von Clemens Thaer besorgte Übersetzung (vgl. Abbildung 15). Sie besitzt nicht mehr viel von der besonderen Aura des Manuskriptes, ist jedoch in vielen Fällen eine geeignete oder jedenfalls ausreichende Form der Übertragung. Um beispielsweise die Definitionen von Punkt, Linie oder Fläche zu „verstehen“, ist es nicht unbedingt notwendig, die entsprechende Stelle im Oxforder Manuskript aufzusuchen. Pandel ist jedoch Recht zu geben, wenn er mit Blick auf solche Übertragungen bemerkt:

> „Interpretation als ein Schwierigkeiten ausräumendes Verfahren erfordert eine gewisse Widerständigkeit des Textes. Eine zu große Vereinfachung sollte vermieden werden, damit ein gewisser Auslegungsspielraum gewahrt bleibt. Einige Schwierigkeiten müssen zum interpretativen ‚Nüsseknacken' übrig bleiben." (Pandel, 2003, S. 23)

Ich werde auf diesen Punkt noch anhand eines weiteren Beispiels aus Euklids „Elementen" zurückkommen (vgl. Kap. 2.3.2.4).

2.2.2 Zum Umgang mit Quellen und ihren Eigenarten

Der Nutzen, den Quellen für den Mathematikunterricht erbringen können, hängt, wie ich in den vorhergehenden Abschnitten und im ersten Kapitel ausgeführt habe, entscheidend von der Art ihres Gebrauchs und des Umgangs mit ihnen ab. Ich möchte die bisher dazu erbrachten Überlegungen nunmehr mit Gesichtspunkten aus der zeitgenössischen Geschichtsdidaktik ergänzen (vgl. (Pandel, 2003)).

2.2.2.1 Quellen: Illustration oder Mehrwert?

Für einen Mathematiker oder einen Mathematiklehrer kann es verführerisch sein, in einer historischen Quelle – beispielsweise in der ‚al-jabr' des Al-Khwarizmi – vorrangig einen Wissens- oder Informationsspeicher zu sehen, den man zum Zwecke einer bloßen – wenngleich mutmaßlich ‚motivierenden' oder ‚mal etwas anderen' – Vermittlung der gerade auf dem Stoffplan stehenden Inhalte anzapfen und abschöpfen könnte. Ein solches Vorgehen ist natürlich möglich und bisweilen auch recht ergiebig. Allerdings lässt es das besondere Wesen und didaktische Potenzial geschichtlicher Quellen außer Acht: Die traditionelle und auch heute noch verbreitete Meinung, wonach Quellen bloß ‚illustrierenden' oder ‚motivationellen' Wert besitzen (Ebeling, 1962, S. 51), greift zu kurz. Sie ignoriert die Tatsache, dass Quellen auf ihre ganz eigene Weise zu uns sprechen – oder zum Sprechen *gebracht werden* können – und uns damit Anlässe stiften, über das, was sie uns sagen und schließlich auch über uns selbst nachzudenken (vgl. Ziel der Sinn- und Selbstreflexion). Der frühere Wuppertaler Gymnasialdirektor Ernst Wilmanns (1882-1960) hat dieser Auffassung 1913 erstmals eine wissenschaftstheoretische Vertiefung gegeben und an einer Reihe unterschiedlicher Beispiele drei grundsätzliche Absichten von Quellenlektüre im (Geschichts-)Unterricht aufgezeigt, nämlich

> „Zur Erkenntnis früherer Zustände, zur Erfassung eines ganz bestimmten einmaligen Vorganges und zur Erarbeitung eines gedanklichen Zusammenhangs." (Wilmans, 1927, S. 158)

Keineswegs gehe es dabei um die Auffindung einer definitiv in den Quellen besiegelten Bedeutung, sondern vielmehr darum,

> „eine über den bekannten Tatbestand hinausgehende, ergänzende, oder ihn erläuternde Erkenntnis zu gewinnen." (Wilmans, 1927, S. 163)

Nach dieser Maßgabe verbietet es sich, in Quellen nur nach illustrativen Bestätigungen des ohnehin schon immer Gewussten zu suchen und sie damit gleichsam zur bloßen Erarbeitung einseitig vorgegebener Erkenntnisziele und Stoffkanons zu funktionalisieren. Vielmehr gilt, was Pandel als fundamentale Einsicht der modernen Geschichtsdidaktik vorstellt:

> *„Quellen besitzen unausschöpfbare Sinnpotenziale. Eine endgültige Auslegung ist nicht möglich, solange die Zukunft offen ist. Quellen zeigen das Andere, das, was nicht Gegenwart ist, die Alterität. Sie bewirken Horizonterweiterung und verlangen Identitätsüberprüfung. Trotz allen Bemühens einer Gegenwart, die Quellen ‚endgültig' und für alle Zeiten auszulegen, liefern sie neue Sinnpotenziale, die sich zu der jeweils ‚letzten' Auslegung widerborstig verhalten."* (Pandel, 2003, S. 127)

Für die sozial- und kulturgeschichtlich geprägten Disziplinen mag man die Gültigkeit dieser Behauptungen anerkennen, zugleich aber fragen, ob sie sie in dieser Form auch auf die Mathematik zutreffen? Immerhin besitzen die in mathematischen Quellen getroffenen Aussagen doch in der Regel eine andere, gewissere und überzeitlichere Art von Faktizität, die ja sogar *jederzeit* (logisch) bewiesen werden kann. Trotzdem ist die Frage nach der Unerschöpflichkeit auch ihrer Sinnpotenziale uneingeschränkt zu bejahen:

- Denn zum einen deckt sich die in Quellen anzutreffende Mathematik niemals völlig mit ihren kulturell oder zeitlich entfernten Entsprechungen anderer Epochen oder der Gegenwart. Stets liefert sie ein abweichendes, von andersartigen Interessen, Zwecken, Methoden und Hintergründen bestimmtes Bild eines mathematischen Sachverhaltes, bedient sich anderer Beispiele oder hebt ganz unterschiedliche Aspekte hervor. Gerade diese sachlich-inhaltliche Bereicherung, diese Erweiterung des Blicks ist es ja, von der der Unterricht, in dem Quellen gelesen werden, in hohem Maße profitieren kann. Die im Unterrichtsprojekt dieser Untersuchung thematisierte Quelle – Al-Khwarizmis „al-jabr" – stellt ein ausgezeichnetes Beispiel dafür dar, wie eine „aus der Mode gekommene" Begründungsmethode das fachliche Verständnis der Lernenden fördern kann. Die Schülerinnen und Schüler unseres Unterrichtsprojektes haben diesen Punkt immer wieder hervorgehoben, – dazu später mehr.
- Zum andern machen mathematikgeschichtliche Quellen auch oft die besonderen sozialen, religiösen, ökonomischen oder kulturellen Kontexte ihrer Entstehung sichtbar. Zu einer angemessenen Interpretationsleistung gehört es dann, solche Quellen nicht nur nach ihren fachlichen Gesichtspunkten sondern auch im Hinblick auf ihre weiteren (sozio-kulturellen, religiösen etc.) Dimensionen zu befragen. Jahnke meint:

  > „Vom pädagogischen Blickwinkel ist es gerade erforderlich, den Kontext der Mathematik zu stärken. Man würde wesentliche Möglichkeiten verschenken, wenn man Geschichte nicht auch in diesem Sinne betreiben würde, dass sie etwas über die Beziehungen der Mathematik zu ihrem Kontext erfahren lehrt." (Jahnke H. N., 1998, S. 115)

Dieser Punkt soll im Folgenden durch ein Beispiel verdeutlicht werden.

2.2.2.2 *Beispiel: Die soziologische Dimension mathematischer Arbeit als Kontextinformation von Quellen*

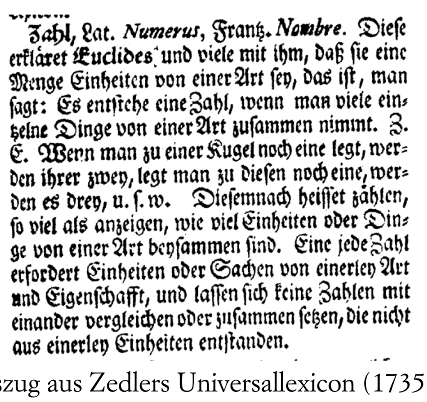
Es ist oft bemerkt worden, dass zwischen den Strenge-Ansprüchen der Mathematik des 17. und 18. und denen des 19. Jahrhunderts enorme Unterschiede bestanden haben. Morris Kline formuliert diesen Sachverhalt drastischer:

> "It is safe to say that no proof given at least up to 1800 in any area of mathematics, except possibly in the theory of numbers, would be regarded as satisfactory by the standards of 1900." (Kline, 1973, S. 69)

Gericke hat die in diesem Zeitraum stattgehabte Entwicklung der Mathematik „in starker Vergröberung und mit einigen Vorbehalten" wie folgt zusammengefasst:

> „Im 17. Jh. wurden neue Methoden entdeckt (die analytische Geometrie, die Differential- und Integralrechnung, das algebraische Umformen von Gleichungen), im 18. Jh. wurden die Methoden ausgearbeitet und großartige Erfolge damit erzielt (u. a. gelang es, die Mechanik mit Hilfe der Differentialgleichungen zu beherrschen, eine Differentialgeometrie zu begründen, den Fundamentalsatz der Algebra zu beweisen), im 19. Jh. wurden – neben dem weiteren Ausbau der Theorien – die Grundlagen, die Grundbegriffe und die Grundstruktur der Theorien untersucht und mit immer steigender Genauigkeit herausgearbeitet und festgelegt." (Gericke, 1970, S. 79)

Die Veränderung der begrifflichen Standards soll hier anhand der Entwicklung des Begriffs der natürlichen Zahl exemplifiziert werden. Dessen ursprüngliche Definition geht mathematikgeschichtlich auf Euklids „Elemente" zurück (und laut Iamblichos vielleicht auf Vorformen bei Thales und den Ägyptern, (Gericke, 1970, S. 28)). Sie lautet: ʽΑριθμός τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος. Thaer übersetzt: (VII, 2:) „Zahl ist die aus Einheiten zusammengesetzte Menge." Das Wort πλῆθος, für das Thaer „Menge" schreibt, kann auch mit „Vielheit" wiedergegeben werden. Es taucht schon beim älteren Aristoteles (384-322) auf, dort in einer Art systematischen Definition, in welcher Zahl als πλῆθος besonderer Art, nämlich als *diskret* und *begrenzt* (πλῆθος ὡρισμένον) erklärt wird (Gericke, 1970, S. 26). Euklids Definition (VII, 2), die hieran anzuschließen scheint, wurde bis zum Beginn der Neuzeit immer wiederholt: *Numerus est collectio unitatum.* (Gericke, 1970, S. 45). So lesen wir etwa in „Zedlers Universallexicon" (1735-1752) im 60. Band, Spalte 1145:



Zahl, Lat. *Numerus*, Frantz. *Nombre*. Diese erkläret Euclides und viele mit ihm, daß sie eine Menge Einheiten von einer Art sey, das ist, man sagt: Es entstehe eine Zahl, wenn man viele einzelne Dinge von einer Art zusammen nimmt. Z. E. Wenn man zu einer Kugel noch eine legt, werden ihrer zwey, legt man zu diesen noch eine, werden es drey, u. s. w. Diesemnach heisset zählen, so viel als anzeigen, wie viel Einheiten oder Dinge von einer Art beysammen sind. Eine jede Zahl erfordert Einheiten oder Sachen von einerley Art und Eigenschafft, und lassen sich keine Zahlen mit einander vergleichen oder zusammen setzen, die nicht aus einerley Einheiten entstanden.

Abbildung 16: Auszug aus Zedlers Universallexicon (1735-1752), 60. Band.
Quelle: http://www.zedler-lexikon.de

Für einen umfassenderen Zahlbegriff, der nicht nur die natürlichen sondern auch die rationalen und irrationalen Zahlen einschließt, verweist das Lexikon allerdings auf eine andere Definition, die auf geometrischen Begriffen aufbaut (Spalte 1146):

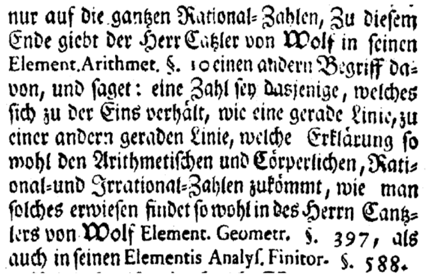

nur auf die gantzen Rational-Zahlen, Zu diesem Ende giebt der Herr Catzler von Wolf in seinen Element.Arithmet. §. 10 einen andern Begriff davon, und saget: eine Zahl sey dasjenige, welches sich zu der Eins verhält, wie eine gerade Linie, zu einer andern geraden Linie, welche Erklärung so wohl den Arithmetischen und Cörperlichen, Rational-und Irrational-Zahlen zukömmt, wie man solches erwiesen findet so wohl in des Herrn Cantzlers von Wolf Element. Geometr. §. 397, als auch in seinen Elementis Analys. Finitor. §. 588.

Abbildung 17: Auszug aus Zedlers Universallexicon (1735-1752), 60. Band.
Quelle: http://www.zedler-lexikon.de/

Eine solche Erklärung schien – im deutlichen Widerspruch zu antiken Auffassungen, als Größenverhältnisse *nicht* als Zahlen anerkannt wurden – möglich und akzeptabel geworden zu sein, vor allem nachdem Descartes (1596-1650) gezeigt hatte (1637), wie man mit Strecken („geraden Linien") „rechnen", sie insbesondere auch multiplizieren (und dividieren) konnte und dabei als Ergebnisse wieder Strecken erhielt. Bei den Griechen (und auch bei den mittelalterlichen Arabern) war das Produkt zweier Faktoren („gerader Linien") noch stets als Fläche – und damit als Entität anderer Art – aufgefasst worden. Frege (1848-1925) hat allerdings (1884) auf die Schwierigkeiten eines geometrisch begründeten Zahlenbegriffes hingewiesen:

> „Man glaubte offenbar, die vielfachen Anwendungen der Arithmetik auf Geometrie dadurch zu erleichtern, dass man gleich die Anfänge in die engste Beziehung setzte. Newton will unter Zahl nicht so sehr eine Menge von Einheiten als das abstrakte Verhältnis einer jeden Größe zu einer andern derselben Art verstehen, die als Einheit genommen wird. Man kann zugeben, dass hiermit die Zahl im weitern Sinne, wozu auch die Brüche und Irrationalzahlen gehören, zutreffend beschrieben sei; doch werden hierbei die Begriffe der Größe und des Größenverhältnisses vorausgesetzt. Danach scheint es, dass die Erklärung der Zahl im engern Sinne, der Anzahl, nicht überflüssig werde; denn Euklid braucht den Begriff des Gleichvielfachen um die Gleichheit von zwei Längenverhältnissen zu definieren; und das Gleichvielfache kommt wieder auf eine Zahlengleichheit hinaus. Aber es mag sein, dass die Gleichheit von Längenverhältnissen unabhängig vom Zahlbegriffe definierbar ist. Man bliebe dann jedoch im Ungewissen darüber, in welcher Beziehung die so geometrisch definierte Zahl zu der Zahl des gemeinen Lebens stände. Dies wäre dann ganz von der Wissenschaft getrennt. Und doch kann man wohl von der Arithmetik verlangen, dass sie die Anknüpfungspunkte für jede Anwendung der Zahl bieten muss, wenn auch die Anwendung selbst nicht ihre Sache ist. Auch das gewöhnliche Rechnen muss die Begründung seines Verfahrens in der Wissenschaft finden. Und dann erhebt sich die Frage, ob die Arithmetik selbst mit einem geometrischen Begriffe der Zahl auskomme, wenn man an die Anzahl der Wurzeln einer Gleichung, der Zahlen, die prim zu einer Zahl und kleiner als sie sind, und ähnliche Vorkommnisse denkt. Dagegen kann die Zahl, welche die Antwort auf die Frage wieviel? gibt, auch bestimmen, wieviel Einheiten in einer Länge enthalten sind. Die Rechnung mit negativen, gebrochenen, Irrationalzahlen kann auf die mit den natürlichen Zahlen zurückgeführt werden. Newton wollte aber vielleicht unter Größen, als deren Verhältnis die Zahl definiert wird, nicht nur geometrische, sondern auch Mengen verstehen. Dann wird jedoch die Erklärung für unsern Zweck unbrauchbar, weil von den Ausdrücken ‚Zahl, durch die eine Menge bestimmt wird' und ‚Verhältnis einer Menge zur Mengeneinheit' der letztere keine bessere Auskunft als der erstere gibt." (Frege, 1987, S. 48 f.)

Zurück also zu den natürlichen Zahlen. Neben dem Versuch, sie an das Verständnis von Verhältnissen bei geometrischen Größen, insbesondere „geraden Linien", anzubinden, hat es auch immer wieder Bemühungen gegeben, den Zusammenhang zwischen Zahl und *Zeit* (bzw. Zeitablauf) herzustellen: so schon bei Aristoteles, später dann bei Kant (1724-1804), Hamilton (1805-1865), Helmholtz

(1821-1894), Kronecker (1823-1891) und Brouwer (1881-1966), vgl. (Gericke, 1970, S. 81 f., 126 f.). Gegen solche Vorstellungen hat sich indes Dedekind (1831-1916) gewandt:

> „Indem ich die Arithmetik (Algebra, Analysis) nur einen Teil der Logik nenne, spreche ich schon aus, dass ich den Zahlbegriff für gänzlich unabhängig von den Vorstellungen oder Anschauungen des Raumes und der Zeit, dass ich ihn vielmehr für einen unmittelbaren Ausfluss der reinen Denkgesetze halte. […] Die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes, sie dienen als ein Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen. Durch den rein logischen Aufbau der Zahlen-Wissenschaft und durch das in ihr gewonnene stetige Zahlenreich sind wir erst in den Stand gesetzt, unsere Vorstellungen von Raum und Zeit genau zu untersuchen, indem wir dieselben auf dieses in unserem Geiste geschaffene Zahlenreich beziehen." (Dedekind, 1893, S. vii)

Entscheidend ist für Dedekind die Untersuchung des Zählvorgangs, den er vor allem mit dem Begriff der *Abbildung* einfängt:

> „Verfolgt man genau, was wir bei dem Zählen der Menge oder Anzahl von Dingen tun, so wird man auf die Betrachtung der Fähigkeit des Geistes geführt, Dinge auf Dinge zu beziehen, einem Ding ein Ding entsprechen zu lassen, oder ein Ding durch ein Ding abzubilden, ohne welche Fähigkeit überhaupt kein Denken möglich ist. Auf dieser einzigen, auch sonst ganz unentbehrlichen Grundlage muss nach meiner Ansicht … die gesamte Wissenschaft der Zahlen errichtet werden." (Dedekind, 1893, S. vii)

Dedekind hat dieses Programm in seinem Aufsatz „Was sind und was sollen die Zahlen?" in insgesamt 172 Abschnitten durchgeführt. Diese Theorie wurde kurz darauf von Peano (1858-1932) formalisiert und damit erstmals eine axiomatische Begründung des Begriffs der natürlichen Zahl (als Element der Menge der natürlichen Zahlen) angegeben. Eine Darstellung würde an dieser Stelle zu weit führen. Zum einen rückt der Aufbau bei Dedekind und Peano – durch die starke Betonung der Nachfolgerbeziehung – eher den ordinalen Aspekt des Zahlbegriffs in den Blick (vgl. (Gericke, 1970, S. 127 ff.)). Darüber hinaus weicht er der Frage, *was* eine (natürliche) Zahl denn nun *ist*, gerade aus. Es ist ja nachgerade ein Kennzeichen des axiomatischen Ansatzes, solche Fragen nicht mehr beantworten zu wollen. Ich möchte als Beispiel für moderne Zahldefinitionen daher lieber auf Cantor (1845-1918), Frege (1848-1925) und Russel (1872-1970) zurückgreifen. Letzterer schreibt:

> „Die Frage ‚Was ist eine Zahl?' ist oft gestellt, aber erst in unserer Zeit korrekt beantwortet worden. Die Antwort gab Frege 1884 in seinen *Grundlagen der Arithmetik*. Obschon dieses Buch ganz kurz, nicht schwer und von der allergrößten Wichtigkeit ist, wurde es fast nicht beachtet, und die in ihm enthaltene Definition der Zahl blieb so gut wie unbekannt, bis sie durch den Verfasser 1901 wieder entdeckt wurde." (Russel, 2002, S. 16)

Frege wirft in seinen hier erwähnten und oben schon einmal zitierten „Grundlagen der Arithmetik" – nach einer ebenso umfangreichen wie faszinierenden Analyse und Kritik aller bisherigen Versuche, den Zahlbegriff zu definieren – zunächst das Problem auf, den „Sinn der Zahlengleichung" festzustellen und bemerkt dazu:

> „Es scheint in neuerer Zeit die Meinung unter den Mathematikern vielfach Anklang gefunden zu haben, dass die Gleichheit der Zahlen mittels der eindeutigen Zuordnung definiert werden müsse." (Frege, 1987, S. 95)

In einer Fußnote zitiert Frege hier zum Beleg u. a. Cantors „Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre". Etwas später definiert er dann:

> „Die Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt, ist der Umfang des Begriffes ‚gleichzahlig dem Begriffe F'" (Frege, 1987, S. 100),

wobei hier an „Gleichzahligkeit" im (modernen) Sinne von „Gleichmächtigkeit" auf der Grundlage einer bijektiven Zuordnung gedacht ist. Diese Definition ist nach dem Vorbild einer vorangestellten, exemplarischen Definition des Begriffes „Richtung" geformt, die Frege wie folgt angibt:

> „Die Richtung der Gerade a ist der Umfang des Begriffes ‚parallel der Gerade a'." (Frege, 1987, S. 100)

Gericke erläutert hierzu, dass

> „unter dem ‚Umfang eines Begriffes' die Gesamtheit der unter ihn fallenden Objekte zu verstehen ist." (Gericke, 1970, S. 136)

Der „Umfang des Begriffes" ist also das, was wir heute als Menge bezeichnen würden. In ähnlicher Weise wie Frege kommt Russel zu seiner Definition von „Zahl", indem er zunächst sagt, was unter „Menge", „eineindeutiger Abbildung" sowie unter „äquivalent" zu verstehen ist, um dann zu erklären:

> „Die Zahl einer Menge ist die Menge aller ihr äquivalenten Mengen. […] Eine Zahl ist irgendetwas, das die Zahl einer Menge ist." (Russel, 2002, S. 24 f.)

Ich möchte hier nicht näher auf die bekannten Probleme dieser Definitionen eingehen, die mit dem nicht genügend reflektierten Mengenbegriff zusammenhängen, und erst durch die Konzipierung und Anwendung der Typentheorie vermieden werden konnten. In der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre, die diesen Ansatz inzwischen nachhaltig abgelöst hat, wird eine (natürliche) Zahl als Element der Schnittmenge aller Mengen definiert, die die Eigenschaft haben, die leere Menge zu enthalten und mit x auch die Vereinigung von x und $\{x\}$. Dass solche Mengen existieren, wird zuvor durch das von Zermelo so benannte „Axiom des Unendlichen" sichergestellt (Zermelo, 1908, S. 266 f.). Die bewusste Schnittmenge ist also die kleinste mit solcher Eigenschaft und hat die Gestalt

$$\mathbb{N} := \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\Big\}, \cdots\Big\}.$$

Doch ist dies hier, wie gesagt, nicht das Thema. Für unseren Zusammenhang genügt es, schlicht die Zunahme an Strenge, Präzision und begrifflicher Schärfe, die sich in den vorstehenden Definitionen ausdrückt, zu konstatieren. Frege stellt in der Einleitung seiner „Grundlagen" zu dieser Entwicklung fest:

> „Nachdem die Mathematik sich eine Zeit lang von der Euklidischen Strenge entfernt hatte, kehrt sie jetzt zu ihr zurück und strebt gar über sie hinaus. In der Arithmetik war schon infolge des indischen Ursprungs vieler ihrer Verfahrungsweisen und Begriffe eine laxere Denkweise hergebracht als in der von den Griechen vornehmlich ausgebildeten Geometrie. Sie wurde durch die Erfindung der höhern Analysis nur gefördert; denn einerseits stellten sich einer strengen Behandlung dieser Lehren erhebliche, fast unbesiegliche Schwierigkeiten entgegen, deren Überwindung andrerseits die darauf verwendeten Anstrengungen wenig lohnen zu wollen schien. Doch hat die weitere Entwickelung immer deutlicher gelehrt, dass in der Mathematik eine bloß moralische Überzeugung, gestützt auf viele erfolgreiche Anwendungen, nicht genügt. Für Vieles wird jetzt ein Beweis gefordert, was früher für selbstverständlich galt. Die Grenzen der Giltigkeit [sic] sind erst dadurch in manchen Fällen festgestellt worden. Die Begriffe der Funktion, der Stetigkeit, der Grenze, des Unendlichen haben sich einer schärferen Bestimmung bedürftig gezeigt. Das Negative und die Irrationalzahl, welche längst in die Wissenschaft aufgenommen waren, haben sich einer genaueren Prüfung ihrer Berechtigung unterwerfen müssen. So zeigt sich überall

> das Bestreben, streng zu beweisen, die Giltigkeitsgrenzen [sic] genau zu ziehen und, um dies zu können, die Begriffe scharf zu fassen." (Frege, 1987, S. 25)

Unsere Frage lautet: Wie und warum ist es zu dieser Entwicklung gekommen? Sicher stimmt es, dass die Zunahme an Strenge und Präzision der mathematischen Begriffe immer mit bestimmten Zwängen und Notwendigkeiten, mit Einwänden oder Unklarheiten und dem Versuch, diese zu beseitigen, zusammenhängt. Imre Lakatos führt einen solchen Prozess anhand von Beweisversuchen zum Eulerschen Polyedersatz stilisiert vor (Lakatos, 1974). Die Infinitesimalrechnung des 18. Jahrhunderts verfügte tatsächlich nur über schwache Grundlagen. Das war den Mathematikern dieser Zeit im Grunde auch immer bewusst gewesen – bekannt ist D'Alemberts Ausspruch: „allez en avant et la foi vous viendra" (Heuser, 1990, S. 689). Der Entdeckungseifer der Mathematiker ließ sich von zeitgenössischen Zweifeln tatsächlich nicht bremsen: Das 18. Jahrhundert gilt als Epoche der „analytischen Explosion" (Heuser). Darum ist es verwunderlich, wieso nach einem Jahrhundert relativ unbekümmerter und höchst erfolgreicher Forschung auf einmal, im 19. Jahrhundert, die Besinnung und die Zeit der „neuen Strenge" beginnt. Mehrtens hat sich hierüber Gedanken gemacht (Mehrtens, 1976/1992) und versucht, soziologische Kontextfaktoren zu bestimmen, die die stattgehabte Entwicklung gerade zu diesem Zeitpunkt beeinflusst haben könnten. In seiner Analyse weist er zunächst darauf hin, dass der soziale Status eines Mathematikers in einer Gesellschaft immer auch Einfluss auf sein Schaffen hat:

> „The development of mathematics is not independent of the fact that the mathematicians are amateurs, philosophers, civil servants, academicians, or university teachers." (Mehrtens, 1976/1992, S. 36)

Unter Bezugnahme auf (Ben-David, 1971) fügt er hinzu:

> „The social structure of society is a precondition for the establishment of a scientific role that is the basis of a scientific tradition." (Mehrtens, 1976/1992, S. 36)

Die institutionelle Basis der Mathematik des 18. Jahrhunderts aber seien die Akademien und wissenschaftlichen Sozietäten gewesen, in denen es bekanntlich keinen Lehrbetrieb gab. In diesen hätten sich nicht nur Mathematiker fortwährend mit Vertretern der Anwendungsfächer ausgetauscht (bzw. austauschen *müssen*). Die Akademien hätten darüber hinaus auch den ausdrücklichen Auftrag gehabt, neben theoretischen Forschungen vor allem nützliches, d. h. *anwendungsfähiges* Wissen zu generieren:

> "Thus the mathematicians were concerned with 'applied' mathematics too, so that, for example, the results of higher calculus had a ready and strong justification although they rested on a doubtful basis." (Mehrtens, 1976/1992, S. 37)

Diese Konstellation habe sich Mehrtens zufolge mit den gesellschaftlichen Umbrüchen des 19. Jahrhunderts grundlegend geändert. Das Bürgertum in Europa erstarkte, das überkommene Bildungssystem wurde tiefgreifend reformiert. In Frankreich wurde (1794) die École Polytechnique gegründet, in Deutschland (1809) als erste von vielen Neugründungen die Berliner Universität (heutige Humboldt-Universität). Gemäß dem Bildungskonzept von Wilhelm von Humboldt kam es im Universitätsbetrieb fortan zu einer engen Verbindung der (zuvor getrennt gehaltenen) Bereiche von Forschung und Lehre. Den Wissenschaftlern sollte es ferner möglich sein, ihre Forschungen „zweckfrei" und unabhängig von jeglicher politischer, religiöser oder wirtschaftlicher Einflussnahme um ihrer selbst willen betreiben zu können. Dies brachte u. a. eine Stärkung der gesellschaftlichen Stellung professioneller

Mathematiker mit sich. Mehrtens hat darauf hingewiesen, dass diese Entwicklung aber auch das innere Verhältnis von reiner und angewandter Mathematik in vielfältiger Weise beeinflusst habe. Zunächst habe die Gründung *technischer* Hochschulen die mathematische und technische Forschung zunehmend voneinander getrennt. Zum zweiten hätten die institutionellen Strukturen der aufkommenden Seminare für weitere Einkapselungen der verschiedenen Fachrichtungen gesorgt. Schließlich hätte die Verknüpfung von Forschung und Lehre den Nebeneffekt gehabt, dass Professoren sich zunehmend mit den Grundlagen ihrer Fächer auseinander gesetzt hätten. So spricht Dedekind retrospektiv vom

> „[...] Herbst des Jahres 1858. Ich befand mich damals als Professor am eidgenössischen Polytechnicum zu Zürich *zum ersten Male* in der Lage, die Elemente der Differentialrechnung vortragen zu müssen, und fühlte dabei *empfindlicher als jemals früher* den Mangel einer wirklich wissenschaftlichen Begründung der Arithmetik." (Dedekind, 1872/1932, S. 315, meine Hervorhebungen).

Zusammengenommen hätten diese Faktoren dazu beigetragen, dass die Mathematik ihren Kontakt zu den Anwendungsfächern gelockert und sich auf sich selbst zurückgezogen habe. In Verbindung mit den Erfordernissen der Lehre (u. a. saubere Begründungen der Grundlagen) habe sich fachliche Strenge, die vorher zugunsten von Nützlichkeit und Fruchtbarkeit zurückgedrängt worden war, (wieder) zu einem Primärwert entwickeln können. Dedekind bemerkt hierzu:

> „Später [nach 1858, M. G.] habe ich wohl dem einem oder anderen meiner Schüler diese Gedanken über eine Wissenschaftliche Begründung der Arithmetik auseinandergesetzt, auch hier in Braunschweig in dem wissenschaftlichen Verein der Professoren einen Vortrag über diesen Gegenstand gehalten, zu einer eigentlichen Publikation konnte ich mich nicht recht entschließen, weil erstens die Darstellung nicht ganz leicht, und weil außerdem die Sache *so wenig fruchtbar* ist." (Dedekind, 1872/1932, S. 316, meine Hervorhebung).

Auch Frege hatte davon gesprochen, dass die Erforschung der Grundlagen der Analysis sich zunächst wenig zu lohnen schien (s. o.).

Im Hinblick auf die oben geforderte Befragung mathematikgeschichtlicher Quellen nach den Kontextinformationen, die sie transportieren, ist nach diesem Beispiel folgendes zu sagen. Sicher wird man aus einem singulären Zitat von nur wenigen Zeilen oftmals nicht gleich auf den Geist der jeweiligen Epoche, auf die politischen, wirtschaftlichen, religiösen etc. Hintergründe der Zeit schließen können. Indes sind bei *jeder* Begegnung mit einer Quelle grundlegende Fragen zu stellen: Dabei geht es nicht nur um das „Was" des Textes, es geht auch darum, *wer* hier *für wen* schreibt, und vor welchem Hintergrund, aus welcher Veranlassung oder in welchem Interesse er dies tut. Erst diese Fragen erschließen die möglichen Tiefendimensionen einer Quelle. Wenn man sich unter diesem Gesichtspunkt die Fregesche oder Russelsche Definition des Zahlbegriffes ansieht, wenn man ggf. weitere Auszüge aus ihren oder den Schriften anderer Mathematiker (z. B. Cantor) oder ältere Definitionen desselben Begriffes heranzieht (für Beispiele vgl. etwa (Frege, 1987), (Gericke, 1970)) und Kontextinformationen berücksichtigt, dann fügt sich das Bild eines wandlungsfähigen, von zahlreichen Faktoren abhängenden Wissenschaftsbegriffes zusammen, das seinerseits nicht ohne Folgen für die eigenen Vorstellungen von Wissenschaft und Mathematik bleiben kann. Hierdurch können Denkprozesse ausgelöst werden, die einseitige Vorurteilsstrukturen aufweichen und einer neuen, reicheren und zugleich realistischeren Sichtweise Raum verschaffen. Im Fortgang dieser Arbeit werde ich immer wieder implizit oder explizit auf diesen Punkt zurückkommen.

2.2.2.3 Quellen im Vergleich zu Darstellungen

Geschichtliche Quellen sind als Textsorte oder Medium nicht beliebig ersetzbar, gerade weil sie Konnotationen wie die eben besprochenen kommunizieren. Der Wert ihrer Lektüre kann durch kein anderes didaktisches Arrangement eingeholt werden:

> „So wie keine Inhaltsangabe der ‚Buddenbrooks' im Literaturlexikon die Lektüre des Romans ersetzen kann, können keine Schulbuchdarstellung und kein Lehrervortrag Quellen überflüssig machen." (Pandel, 2003, S. 126)

Der Grund dafür ist darin zu sehen, dass Darstellungen den Quellen, auf die sie sich beziehen, immer nur bestimmte ihrer potenziell unendlich vielen Sinngehalte entnehmen. Häufig dienen Darstellungen damit der Absicht, gerade gängige oder vom Interpreten bevorzugte Sichtweisen auf einen historischen oder fachlichen Sachverhalt zu unterstreichen. Auch wenn dies zumeist in der besten Absicht geschieht, so nehmen Darstellungen den Lernenden damit auch immer die Chance, für sich selbst Sinn aus vorgelegten Texten zu entbinden und im eigenständigen Dialog mit ihnen subjektgebundene semantische Operationen (wie z. B. gewichten, kontrastieren, beurteilen, Schlüsse ziehen etc.) durchzuführen sowie Fremdheitserfahrungen zu machen.

An einem Beispiel lässt sich dies gut einsehen. Es bezieht sich auf eine Darstellung einer Aufgabe von Al-Khwarizmi, wie sie (Cofman, 2001, S. 32) angibt. Sie lautet:

> „Das Ziel dieser Aufgabe ist, die Methode von al Hwarizmi zur Lösung der quadratischen Gleichung
>
> $$2x^2 + 100 - 20x = 58 \qquad (1.7)$$
>
> zu analysieren […]
>
> al Hwarizmi löst die Gleichung (1.7) in drei Schritten.
>
> Im ersten Schritt wird (1.7) auf eine Normalform gebracht, in der alle Koeffizienten nicht negativ sind und der Koeffizient von x^2 gleich 1 ist. Das geschieht durch die folgenden Umformungen.
>
> $$\begin{aligned} &2x^2 + 100 - 20x = 58 \\ &2x^2 + 100 - 20x + 20x = 58 + 20x \\ &2x^2 + 100 - 58 = 58 - 58 + 20x \\ &2x^2 + 42 = 20x \\ &x^2 + 21 = 10x \end{aligned}$$
>
> […]" [Cofman 2001: 32]

Sehen wir uns nun die Quelle an (in ihrer englischen Übersetzung), die dieser Darstellung zugrunde liegt („Fifth Problem" bis etwa zur Mitte von Seite 40: „there remains twenty-one and a square, equal to ten things").

(39)

these twenty dirhems, there remain nineteen dirhems, equal to the moiety of one-sixth of a square, and one-third of thing, and one-fourth of thing. Now make your square a whole one: you perform this by multiplying all that you have by twelve. Thus you have one square and seven roots, equal to two hundred and twenty-eight dirhems. Halve the number of the roots, and multiply it by itself; it is twelve and one-fourth. Add this to the numbers, that is, to two hundred and twenty-eight; (28)
the sum is two hundred and forty and one quarter. Extract the root of this; it is fifteen and a half. Subtract from this the moiety of the roots, that is, three and a half, there remains twelve, which is the square required. This question leads you to one of the cases, namely, " squares and roots equal to numbers."

Fifth Problem.

I have divided ten into two parts; I have then multiplied each of them by itself, and when I had added the products together, the sum was fifty-eight dirhems.*

Computation: Suppose one of the two parts to be thing, and the other ten minus thing. Multiply ten minus thing by itself; it is a hundred and a square minus twenty things. Then multiply thing by thing; it

---

$$* \quad x^2+(10-x)^2=58$$
$$2x^2-20x+100=58$$
$$x^2-10x+50=29$$
$$x^2+21=10x$$
$$x=5\pm\sqrt{25-21}=5\pm2=7 \text{ or } 3$$

(40)

is a square. Add both together. The sum is a hundred, plus two squares minus twenty things, which are equal to fifty-eight dirhems. Take now the twenty negative things from the hundred and the two squares, and add them to fifty-eight; then a hundred, plus two squares, are equal to fifty-eight dirhems and twenty things. Reduce this to one square, by taking the moiety of all you have. It is then: fifty dirhems and a square, which are equal to twenty-nine dirhems and ten things. Then reduce this, by taking twenty-nine from fifty; there remains twenty-one and a square, equal to ten things. Halve the number of the roots, it is five; multiply this by itself, it is twenty-five; take from this the twenty-one which are connected with the square, the remainder
(29) is four. Extract the root, it is two. Subtract this from the moiety of the roots, namely, from five, there remains three. This is one of the portions; the other is seven. This question refers you to one of the six cases, namely " squares and numbers equal to roots."

Sixth Problem.

I have multiplied one-third of a root by one-fourth of a root, and the product is equal to the root and twenty-four dirhems.*

$$* \quad \frac{x}{3}\times\frac{x}{4}=x+24$$
$$\frac{x^2}{12}=x+24$$
$$x^2=12x+288$$
$$x=6+\sqrt{36+288}=6+18=24$$

Abbildung 18: (Verkleinertes) Faksimile aus (Rosen, 1831), S. 39/40.

Die Gegenüberstellung macht die Unterschiede zwischen Darstellung und Quelle deutlich. Die Darstellung erweckt den Eindruck, dass Al-Khwarizmi bereits wie wir über einen algebraischen Kalkül verfügt hätte. Die Information, dass Al-Khwarizmis Buch ein Buch über „Algebra“ ist, dürfte diesen Eindruck eher noch verstärken. Indem die Darstellung die für Al-Khwarizmi so typische, rhetorische Ausdrucks- und Operationsweise durch die heutige Symbolik ersetzt, verhindert sie, dass Schülerinnen und Schüler beide Formen miteinander vergleichen und – beispielsweise – zu einer fundierteren Einschätzung der Leistungsfähigkeit des heutigen Kalküls gelangen können.

Natürlich soll mit dieser Bemerkung nichts gegen den unbezweifelbaren Wert von Darstellungen gesagt werden. Es kommt auf den Zusammenhang und die Interessen der Rezipienten an. Darbietungen wird man bevorzugen, wenn es darum geht, einen schnellen, strukturierten, verschlankten und möglichst einfach zu verstehenden Überblick über den Inhalt einer Quelle zu erlangen. Dass man damit aber nicht alles erfassen kann, was wesentlich ist, darf nicht vergessen werden. Wenn im Mathematikunterricht über Geschichte gesprochen wird, sollten darum immer wieder auch Quellen herangezogen werden.

2.2.2.4 *Quellen als Medien dialogischer Verstehensvollzüge*

Auf eine weitere, wichtige Eigenschaft historischer Quellen möchte ich noch zu sprechen kommen, die schon vom deutschen Pädagogen Johann Friedrich Herbart (1776-1841) erkannt wurde, als er die Möglichkeit hervorhob, aus der Lektüre von Quellen „Leben und Anschauung [zu] gewinnen“

(Pandel, 2003, S. 76). Dieser Aspekt verdient große Beachtung: Mit ihrer Anschaulichkeit appellieren Quellen nicht nur an unser Vorstellungsvermögen, indem sie abstrakte Aussagen konkretisieren. Vielmehr noch verschaffen sie uns mit der Gestalt ihres Autors auch ein individualisiertes, menschliches Gegenüber, mit dem wir im Zuge unserer Auseinandersetzung in ein fruchtbares, virtuelles „Verstehensgespräch" eintreten können. In der hermeneutischen Theorie, auf die ich im nachfolgenden Abschnitt 2.3 noch genau eingehen werde, ist viel von der so genannten „dialogischen Struktur" bzw. Dialogizität des Verstehens die Rede. Der Theologe, Philosoph und Jurist Emilio Betti (1890-1968) beschreibt diese mit fast schon euphorischen Worten:

> „Nichts liegt dem Menschen so sehr am Herzen, als sich mit seinen Mitmenschen zu verstehen. Nichts richtet an sein Verständnis ein so verlockendes Ansinnen wie die verschollene Menschenspur, die ihm wieder aufleuchtet und zu ihm spricht. Wo immer wir sinnhaltige Formen uns gegenübersehen, durch die ein anderer Geist zum unsrigen spricht, da wird unsere Kraft der Auslegung mit dem Ziel angeregt, zu erraten, was für einen Sinn diese Formen in sich tragen. Von der gesprochenen flüchtenden Rede bis zur starren Urkunde und zum stummen Überbleibsel, von der Schrift bis zur Chiffre und zum künstlerischen Symbol, von der artikulierten Sprache bis zur figürlich-bildenden oder tondichtenden Darstellung, von der Erklärung bis zum tätigen Verhalten, von dem Gesichtsausdruck bis zum Stil der Haltung und des Charakters – kurz, alles was von fremdem Geist an den unsrigen herantritt, richtet eine Anforderung an unser Verständnisvermögen in der Erwartung erschlossen zu werden." (Betti E., 1962, S. 7)

Das Unterrichtsprojekt der vorliegenden Untersuchung macht diese spezifisch humane Dialogizität konkret: Die mit der historischen Quelle arbeitenden Schülerinnen und Schüler konnten in den Quellen Spuren eines personalen, menschlichen Gegenübers entdecken. Eine solche Möglichkeit zum Dialog mit dem Material bot sich den Lernenden der Kontrollgruppe, die im konventionellen Setting nur mit einem abstrakten Kalkül umzugehen hatten, hingegen nicht.

2.2.3 Methodische und didaktische Anforderungen an die Textsorte „Quelle"

Anschaulichkeit und Dialogizität im eben beschriebenen Sinn sind wichtige, *geschichtsmethodische* Kriterien bei der Auswahl historischer Quellen. Sie sind zumeist dann erfüllt, wenn in den Quellen *Menschen als Handelnde, Denkende oder Leidende* gezeigt werden. Im Zusammenhang der vorliegenden Studie ist vor allem die folgende Äußerung des Geschichtsdidaktikers Pandel interessant:

> „Vermutlich haben die Geschichtsdidaktiker sich einen Bärendienst erwiesen, als sie vorschnell die Strukturgeschichte übernahmen. Sie entlastet den Unterricht zwar von einer Fülle von Details, schafft aber eine menschenleere Geschichte. Aus diesem Grund ist die Sozial- und Strukturgeschichte in der Gegenwart unter den Druck einer neuen Kulturgeschichte geraten, die Mikrogeschichte, Alltagsgeschichte, Erfahrungsgeschichte verlangt. Didaktisch ergiebig sind stets solche Quellen, die einen Handlungszusammenhang darstellen." (Pandel, 2003, S. 132)

Dieses Zitat sollte all jenen zu denken geben, die im Sinne von Toeplitz die Mathematikgeschichte nutzen wollen, um „die große aufsteigende Linie" sichtbar zu machen (vgl. Kap. 1), die letztlich also *Strukturgeschichte des Faches* betreiben wollen.

Ein weiteres, ebenfalls wichtiges Kriterium in diesem Zusammenhang ist die Authentizität des Gezeigten. Nach moderner Auffassung sollen Quellen in Form und Inhalt auf die Alterität des Früheren, des Fremden hinweisen:

> „Das Andersartige, andere Denk- und Handelsweisen, Mentalitäten und Weltbilder, Gesellschaftsvorstellungen sollen den Inhalt ausmachen. Die formale Alterität drückt sich in der Sinnlichkeit der Erfahrung aus, die nur originale Quellen liefern können. […] Historische Sinnlichkeit und sinnlich erfahrbare Vergangenheit haben schon immer die Faszination der Geschichte ausgemacht. Nicht nur das berichtete Ereignis verweist auf die Vergangenheit, sondern auch die Art und Weise, wie es berichtet wird. Die Art der Quelle liegt wie eine zweite Chronologie über ihrem Inhalt, die alten Techniken geben uns eine Datierung über die Datierung der Inhalte der Quelle hinaus." (Pandel, 2003, S. 132)

Im 19. Jahrhundert hatte die Geschichtsdidaktik noch eine ganz andere Einstellung zu diesem Anspruch:

> „Abänderungen in der sprachlichen Form, eine Übersetzung der Fremdwörter, eine Ersetzung von altsprachlichen Ausdrücken, Auslassungen und Abänderungen des Satzbaus wurden als sehr hilfreich angesehen und waren daher üblich. Obwohl betont wurde, dass der Inhalt dadurch nicht verfälscht würde, veränderte sich natürlich doch die inhaltliche Substanz der Quellen. [...] Der Gedanke, Originale zu verwenden, tauchte erst später auf." (Pandel, 2003, S. 78)

Der heute geforderten, *inhaltlichen* Authentizität des Materials sollte hingegen eine Präsentation entsprechen, die die *formale* Eigenart historischer Quellen in ihrer häufig zu beobachtenden Überkommenheit, Antiquiertheit und Verwitterung widerspiegelt. Quellen zu „normalisieren", d. h. sauber auf Hochglanzpapier zu kopieren, in modernem Schrift- und Blocksatz zu drucken sowie am Rand bereits mit Zeilennummern zu versehen, wird als Fehler angesehen, da eine solche Aufmachung unterschwellig die Historizität der Quellen in Frage stellt. Für das Material des in dieser Studie durchgeführten historischen Unterrichtsprojektes wurde darum bewusst ein Layout gewählt, das die Quellen eigentümlich, »alt« und – trotz Übersetzung – glaubhaft aussehen lässt.

Wichtiger als die geschichts*methodischen* sind die geschichts*didaktischen* Kriterien. Sie lassen sich nach den Aspekten „Lernen", „Verstehen und Begreifen" sowie „Erzählen" entfalten (Pandel, 2003, S. 129):

- Quellen müssen Informationen enthalten, denen Schülerinnen und Schüler etwas Lernzielrelevantes entnehmen können. Diese Forderung ist grundlegend.
- Darüber hinaus sollen Quellen aber auch „Verstehen" ermöglichen. Der Analyse des schwierigen und vieldeutigen Verstehensbegriffs hat sich eine ganze Disziplin – die Hermeneutik – gewidmet, auf die ich darum in einem eigenen Abschnitt ausführlich eingehen werde. An dieser Stelle sei nur gesagt, dass mit „Verstehen" mehr gemeint ist als das hastige Verfahren, das darauf abzielt, Schülerinnen und Schüler in die Lage zu versetzen, den Inhalt einer Quelle wiederzugeben. Der Begriff weist vielmehr auf ein tieferes Motiv- und Sinnverstehen hin. Was aber bedeutet „Sinn"? Mögliche Antworten werde ich im Abschnitt 2.3 diskutieren.
- Quellen sollten schließlich in eine „erzählbare" Gesamtstruktur einzubetten sein. Pandel hält gerade dieses Kriterium für unverzichtbar, wenn die Quellenlektüre nicht nur ein Feststellen von „Tatsachen", eine Addition von Einzelkenntnissen sondern historisches Denken verbürgen soll:

  > „Es kommt darauf an, die Quellen in einen zeitlichen Zusammenhang zu stellen, ein Vorher und ein Nachher herzustellen. Jede Quelle hat eine Vor- und eine Nachgeschichte. [...] Quellen, die nur auf einen einzigen Zeitpunkt bezogen sind, sind didaktisch gesehen wenig ergiebig. Hier scheint der Grund für die Schwierigkeiten der schulischen Quelleninterpretation zu liegen. Quel-

len bleiben punktuell und werden nicht auf den historischen Prozess bezogen.“ (Pandel, 2003, S. 131)

Im Beispiel des vorigen Abschnittes haben wir schon exemplarisch gesehen, wie sehr eine Quelle durch die Berücksichtigung ihres sozio-historischen Kontextes erhellt werden kann. Im Rahmen des in dieser Arbeit durchgeführten historischen Unterrichtsreihe wurde den Schülerinnen und Schüler im Nachgang zur Lektüre des Al-Khwarizmi-Textes ein grober Überblick über die Weiterentwicklung der mittelalterlichen ‚al-jabr’ gewährt. So konnten sie sich anhand weiterer Quellen ein Bild vom langen und mühseligen Weg bis zum heute üblichen, symbolischen Kalkül machen. Auch wurde ihnen der interessante Zusammenhang der ‚al-jabr’ mit der Problematik der negativen Zahlen, die noch für Jahrhunderte einen Streitgegenstand der Mathematik darstellten, deutlich. Auf solche Weise gewann die historische Unterrichtsreihe die von der Geschichtsdidaktik so sehr eingeforderte narrative Gesamtstruktur, die dem konventionellen Mathematikunterricht meistens vollständig abgeht.

An die Textsorte „historische Quelle“ wird noch ein weiterer Typ von Anforderungen gestellt, der die *editorische* Zuverlässigkeit und Transparenz betrifft. Die Geschichtsdidaktik nennt als erstrangige Kriterien: wissenschaftliche Exaktheit, synonymer Text und wissenschaftlicher Apparat. Die Beachtung dieser Kriterien ist vor allem eine Frage der Redlichkeit und im Hinblick auf die in der Schule einzuübende Wissenschaftspropädeutik unabdingbar. Gleichwohl scheint sie in den Materialien für den Geschichtsunterricht keine Selbstverständlichkeit zu sein (Pandel, 2003, S. 132).

Eine Zusammenfassung der didaktisch-methodischen Anforderungen an eine Quelle gibt die folgende Übersicht (Abbildung 19):

Abbildung 19: Didaktisch-methodische Anforderungen an eine historische Quelle, nach (Pandel, 2003, S. 129).

2.2.4 Methodische Arrangements

In der Geschichtsdidaktik ist eine Vielzahl methodischer Arrangements ersonnen worden, um die Arbeit mit geschichtlichen Quellen zu unterstützen und ihr Ziel (hermeneutische Interpretation) sicherzustellen. Zweifellos kann der historisch-hermeneutische Ansatz der Mathematikdidaktik hiervon pragmatisch profitieren. Darum sei an dieser Stelle eine kurze Übersicht dargeboten, die sich eng an die Zusammenstellung in (Pandel, 2003, S. 183 ff.) anlehnt.

2.2.4.1 „Historisches Seminar"

Die unter diesem Stichwort zusammengefassten Arrangements stehen den im Mathematikunterricht häufig vorherrschenden, eher nüchtern-sachlichen Methoden am nächsten. Sie erfordern vergleichsweise weniger Vorbereitung und enthalten zudem nicht so viele spielerische, die Phantasie anregende Elemente. Ob darin ein Vor- oder ein Nachteil zu sehen ist, muss wohl jeder Lehrer und jede Lehrerin im Einzelfall und mit Blick auf die jeweilige Lerngruppe selbst abwägen.

1) *„Gegenüberstellen":* Synchrone oder diachrone Vergleiche durchführen; nach Gegensätzen, Ähnlichkeiten und Übereinstimmungen suchen. Vor dem Interpretieren Kriterien des Vergleichs festlegen: Motive der Verfasser, Datum der Abfassung, Wirkung auf die Zeitgenossen, Unterstützung für eine Person oder Sache etc. – Im Unterrichtsprojekt der vorliegenden Studie wurde die Intervention hauptsächlich nach dieser Methode gestaltet.
2) *„Plausibel statt richtig":* Konkurrierende Deutungen, d. h. die gleiche Quelle von mehreren Gruppen interpretieren lassen, über den unterschiedlichen Sinn eine Verständigung herbeiführen. – Ein Beispiel für den Mathematikunterricht findet sich in (Glaubitz & Jahnke, 2003), dort zur Deutung der in einer antiken Quelle enthaltenen Vorstellungen zu Form und Größe der Erde.
3) *„Narrativieren":* Auf der Grundlage verschiedener zeitdifferenter Quellen eine Erzählung schreiben; zuvor eine „Chronik der laufenden Ereignisse" herstellen, dabei Erzähltypen oder Theorien zugrunde legen. – Hierfür wird verhältnismäßig viel Zeit und Material (unterschiedliche Quellen) benötigt. Mögliche Themen wären beispielsweise die klassischen Probleme der Mathematik (Kreisquadratur-, Winkeltrisektions-, Würfelverdoppelungsproblem etc.), die eine lange und ereignisreiche Geschichte aufweisen. Die Methode eignet sich ggf. gut für Facharbeiten.
4) *„Nachforschung":* Eine Quelle mit der Deutung in zwei fachwissenschaftlichen Texten vergleichen. – Dies kann je nach gewähltem Thema ebenfalls aufwändig werden, da mindestens drei Texte analysiert werden müssen. Ein Beispiel wäre der Deutungsstreit um Euklid II oder die Frage, ob die Griechen die irrationalen Zahlen erfunden haben (s. u.).

2.2.4.2 „Die unvollständige Quelle"

Die Verfahren, die unter diesem Stichwort zusammengestellt werden, eignen sich gut bei Quellen, die eine mathematische Argumentation oder einen Beweis enthalten, und deren logische Struktur, Gliederung und Folgerichtigkeit verstanden werden soll.

5) *„Fortsetzung folgt":* Eine Quelle wird in mehrere Teile zerschnitten. Die Schülerinnen und Schüler sollen nach jedem Arbeitsschritt Hypothesen über den Fortgang aufstellen. Al-Khwarizmis Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen eignen sich gut für eine solche Vorgehensweise.

6) *„Open-End“:* Der Schluss der Quelle fehlt. Schülerinnen und Schüler erfinden das Ende, das dann später mit dem tatsächlichen verglichen wird. Dies ist ein Spezialfall von a).
7) *„Brand im Archiv“:* Quellenpassagen werden („durch Feuer zerstört“) geschwärzt und müssen ergänzt werden. Zum Teil sind mathematische Beweislücken schon per se in der überlieferten Quelle enthalten, so dass nicht von „Brand“ oder „Feuer“ gesprochen werden muss.
8) *„Schnitzeljagd“:* Eine Quelle wird in mehrere Stücke zerrissen und muss in der richtigen Reihenfolge wieder zusammengesetzt werden. Der Schwierigkeitsgrad kann dadurch gesteigert werden, dass die Gesamtmenge der Teile auf zwei Schülergruppen aufgeteilt wird.

2.2.4.3 „Fälscher am Werk“

9) *„Kuckucksei“:* In eine tatsächliche Quelle werden Anachronismen eingefügt, die entdeckt werden müssen. Bei den Anachronismen kann es sich beispielsweise um unpassende mathematische Fachwörter oder Symbole handeln.
10) *„Kujau war da“:* Sachliche Fehler sind in eine tatsächliche Quelle eingeschmuggelt worden und müssen entdeckt werden.

2.2.4.4 „Rasender Reporter“

11) *„Antwortende Quellen“:* Die Klasse wird in zwei Gruppen eingeteilt: Reporter und historische Persönlichkeit. Die Reporter denken sich anhand der Quelle Fragen aus, die die Persönlichkeiten mit den Worten der Autobiographie beantworten muss. Im Beispiel der Al-Khwarizmi-Quelle wäre ein Interview mit dem Autor für eine historische „Zeitung“ denkbar. Auch die Vorwörter vieler Monographien oder Aufsätze bieten ergiebigen Stoff (vgl. Dedekind, Frege, s. o.).
12) *„Der Demoskop geht um“:* Eine Quelle zur Grundlage einer demoskopische Untersuchung machen. Zu bestimmten Aussagen der Quelle können Erwachsene oder Mitschüler befragt werden. So habe ich vor einigen Jahren zu einigen der im Kleomedes-Text „Zur Kreisbewegung der Gestirne“ aufgestellten Behauptungen und Aussagen über Form und Größe der Erde (Glaubitz & Jahnke, 2003) eine Umfrage mit einer 9. Klasse in der Innenstadt des Schulortes durchgeführt (samt Tonband-/Videoaufnahmen).
13) *„Historisches Magazin“:* Eine Quelle mit historischem oder selbst angefertigtem Bildmaterial illustrieren.

2.2.4.5 „Wortklaubereien“

14) *„Schlag nach im Brockhaus“:* Begriffsgeschichte lässt sich relativ einfach betreiben, wenn historische Lexika (oder Kopien davon) zur Verfügung stehen (Zedler, Brockhaus, Pierer, Meyer etc.). Diese sind zum Teil im Internet frei zugänglich. Auch englische, französische etc. Lexika können einbezogen werden.
15) *„Auf die Wortwaage legen“:* Der Sinn eines Textes kann verändert werden, wenn man seinen Wörtern andere Nuancen gibt. So kann man sich der tatsächlichen Aussageabsicht und inhaltlicher Abgrenzungen bewusster werden (z. B. „Zahl“, „Größe“, „Verhältnis“ bei Euklid).
16) *„Imaginative writing“:* Geschichtserzählungen können auch von Schülerinnen und Schülern selbst geschrieben werden. Eine relativ dürftige Quelle wird mit kontrollierter Phantasie zu einer Erzählung oder einem Rollenspiel ausgestaltet. Im angelsächsischen Sprachraum ist dieses methodische Arrangement als „historical fiction“ bzw. „imaginative writing“ bekannt. Schöne Beispiele aus dem Bereich der Naturwissenschaften gibt Jürgen Teichmann in (Teichmann, 1992).

17) *„Ideologiekritik üben“:* Voraussetzung hierfür ist eine verstehende Interpretation (vgl. auch den Abschnitt über den „hermeneutischen Zirkel“ im Kap. 2.3.). Als kritisierbare „Ideologien“ kommen in der Mathematik vor allem erkenntnistheoretische Positionen (Platonismus, Formalismus, Logizismus, Intuitionismus oder Konventionalismus) in Frage, die anhand entsprechender Quellen thematisiert werden können.

2.2.4.6 „Zeitreisen“

18) *„Time-Tunnel“:* In der Zeit zurückreisen und dem Autor mit heutigem Wissen zur Verfügung stehen. Zukunftsbezogene Aussagen der Quellen (Hoffnungen, Warnungen, Befürchtungen, Voraussagen etc.) mit heutigem Wissen bestätigen bzw. widerlegen. Dieses Arrangement hängt eng mit 17) zusammen und eignet sich gut für die klassischen Themen oder für alles, was mit der Geschichte des Rechnens in Verbindung steht.
19) *„Berater aus der Zukunft“:* Eine historische Person von einem Berater mit heutigem Wissen beraten lassen (etwa die vermeintlichen Kreisquadrierer, z. B. Thomas Hobbes (1588-1679), vgl. auch (Underwood, 1995)).

2.2.4.7 „In anderer Haut stecken“

20) *„Mit fremdem Kopf denken“:* Die Ansichten einer historischen Person übernehmen und so handeln, wie sie es tun würde. – Dies geschieht eigentlich immer, wenn geschichtliche Lösungsmethoden behandelt werden, die heutzutage nicht mehr in Gebrauch sind (etwa Al-Khwarizmis Methoden, die im Unterrichtsprojekt der vorliegenden Studie thematisiert wurde).
21) *„Nicht in Stimmung?“:* Stimmungen der Autoren beschreiben, dabei aber an den tatsächlichen Quellentext halten: Wortfelder benutzen. Diese Methode dürfte nur in Ausnahmefällen wirksam einzusetzen, eignet sich aber z. B. gut bei der Interpretation von Briefen.
22) *„Einfühlen“:* Gefühlszustände von solchen Personen imaginieren und beschreiben, die sich in einer besonderen historischen Situation befinden: Le Verrier und Adams nach der Entdeckung des von ihnen aufgrund von Berechnungen vorausgesagten Planeten Neptun (1846), von Lindemann nach dem Beweis der Unmöglichkeit der Kreisquadratur (1882), Einstein nach der Entdeckung, dass die Feldgleichungen seiner allgemeinen Relativitätstheorie den richtigen Wert der mit der Newtonschen Theorie nicht zu erklärenden Periheldrehung des Merkur ergeben (1915), Wiles nach dem Beweis der Fermatschen Vermutung (1993/94) etc.
23) *„Gelehriger Schüler“:* Fragen, wie interessante Mathematiker zu dem wurden, was sie waren. Hierbei spielen Rückgriffe auf Erziehung und Sozialisation, geltende Normen und Wertvorstellungen eine Rolle. Beispiele: Isaac Newton (1643-1727), Georg Cantor (1845-1918), oder – um einen lebenden Mathematiker zu nennen – Andrew Wiles (*1953).

Diese methodischen Arrangements, so unterschiedlich voneinander sie auch sein mögen, vereint das eine, primäre Ziel ihrer Anwendung, das darin besteht, mögliche mathematische Denkweisen (im historischen Gegenüber und in sich selbst) explizit, transparent und verstehbar zu machen.

2.2.5 Fazit nach Durchsicht der geschichtsdidaktischen Beiträge

Die vorstehenden Abschnitte haben m. E. aufzeigen können, dass die Geschichtsdidaktik überaus wertvolle Beiträge zur Fundierung und Ausgestaltung des historisch-hermeneutischen Konzeptes im Mathematikunterricht zu leisten vermag. Ich sehe diese vor allem in den pragmatischen Ideen des unmittelbar vorangegangenen Abschnitts 2.2.4 und in der Bewusstmachung und Hervorhebung dreier zentraler Aspekte:

1. Quellen besitzen „unerschöpfliche Sinnpotenziale“ und dürfen nicht als bloße Veranschaulichungsmittel oder zum Zwecke der Vermittlung einseitig gesetzter Erkenntnisziele funktionalisiert werden.
2. Quellen sind didaktisch und pädagogisch umso wirksamer und nachhaltiger, je mehr sie Menschen als Handelnde, Denkende, Fühlende und Leidende zeigen und sowohl Aspekte der Vertrautheit wie des Fremden und Anderen enthalten.
3. Quellen können ein Mittel der Narrativierung sein und damit zur Verbesserung der wahrgenommenen globalen Kohärenz der Unterrichtsinhalte beitragen.

	Kognitionen (kognitive Operationen)	**Methoden** (methodische Operationen)	**Urteile** (evaluative Operationen)
Ebene 1	Kenntnisse Ereignisse, Zahlen, Personen und Begriffe entnehmen	Datieren Zeit, Ort und Person des Quellenautors feststellen bzw. aus dem Text erschließen	Kritisieren Aufgrund von zeitgenössischem oder gegenwärtigem Sachwissen Aussagen kritisieren
Ebene 2	Erkenntnisse Verbindung von Absichten und Bedingungen, von Ursachen und Folgen; unbeabsichtigte Nebenwirkungen; Bezug auf die eigene Situation; Alterität erkennen	Hineinversetzen (Innenperspektive): Mit den Augen der anderen sehen, mit dem Bewusstsein der anderen denken; empathische Interpretation ohne kritische Distanz; kontrolliertes Verstehen (dem anderen nicht aufs Wort glauben)	Urteilen Sachurteile fällen; Ambivalenzen und Widersprüche durch Sachurteile lösen; historisch offene Fragen für die eigene Person beantworten; über Sinnbildungen und Zeitverlaufsvorstellungen urteilen
Ebene 3	Narrativieren Aus zeitdifferenten Ereignissen Verläufe herstellen (Erzählen im ursprünglichen Sinne); umerzählen, nacherzählen; eine aus Quellen gebildete Erzählung beurteilen (Metanarration); Orientieren in der Zeit; Erzähltypen auf Ereignisse anwenden	Perspektiven wahrnehmen „Fakten an sich“ gibt es nicht, sondern sie sehen aus unterschiedlichen Perspektiven stets anders aus; soziale, ethnische, religiöse, historische Perspektiven benennen können	Werten Kenntnisse, Erkenntnisse, Erzählungen und Sinnbildungen (aber auch Methoden) bewerten; Ideologien feststellen und ihre Folgen für eine humane Gesellschaft aufzeigen; aufgrund der eigenen Vorlieben, Bindungen und Abneigungen sozialen Kollektiven gegenüber; eigene moralische und ethische Maßstäbe anwenden; Auskunft geben können über die eigenen Wertvorstellungen und Identitäten; Erkennen der eigenen Perspektivität

Tabelle 1: Anforderungsstufen der Quellenarbeit, nach (Pandel, 2003, S. 188).

Die Geschichtsdidaktik hat die Anforderungsstufen der Arbeit mit Quellen genau herausgearbeitet und dabei nach Operationstypen (kognitiv, methodisch, evaluativ) und Schwierigkeitsgraden differenziert. Auf der basalen Ebene geht es zunächst darum, Fakten zu ermitteln, elementare Methoden anzuwenden und Quellenaussagen unter Ausnutzung des heutigen Wissenstandes (-vorsprungs) zu kritisieren. Komplexer sind die Operationen der zweiten Ebene. Hier müssen Kenntnisse bzw. Kenntnisbereiche miteinander in Beziehung gesetzt werden, die Innenperspektive des Autors wahrgenommen und Sachurteile gefällt werden. Die anspruchsvollsten und zeitaufwändigsten Operationen finden sich auf der dritten Ebene. Sie verlangen vom Schüler, größere Zusammenhänge durch Narrativierung herzustellen, eigene *und* fremde Perspektiven angemessen zu differenzieren und die persönlichen Wertvorstellungen und Normen mit denen der Quelle zu vergleichen. Einen Überblick gibt die Tabelle 1, die an (Pandel, 2003, S. 188) angelehnt ist.

Zum Abschluss dieses Exkurses in die Geschichtsdidaktik ist es instruktiv, noch einen Blick auf die von Pandel zusammengestellten „sieben Todsünden" zu werfen, die im polemisch-ironischen Ton aufzeigen sollen, was man bei der Arbeit mit Quellen alles falsch machen kann:

Die sieben Todsünden im Umgang mit Quellen

1. Tilgen Sie sorgfältig die Differenz zwischen Quellen und gegenwärtigen Materialien. Ebnen Sie die spezifischen Unterschiede beider Textgruppen so ein, dass Schülerinnen und Schüler keine Differenz mehr wahrnehmen. Ein „M" wie „Material" vor Quelle und Darstellung sowie das gleiche drucktechnische Layout bürgen dafür, dass die Schüler nicht auf den Gedanken kommen, dass zwischen beiden eine Differenz besteht. Damit ist schon der erste Schritt getan, um Historizität auf der Ebene des Verfahrens zu tilgen.
2. Streichen Sie aus den Quellen alles Fremd- und Andersartige früherer Epochen, und ersparen Sie Ihren Schülern und Schülerinnen Alteritätserfahrungen. Was wollen Sie Ihre Schüler und Schülerinnen mit vorrationalen Denkweisen plagen. Vielleicht finden die sogar Interesse am widerstrebenden Fremden, das unser heutiges Denken hinterfragbar machen könnte.
3. Kürzen Sie die Quelle so, dass Schüler und Schülerinnen auf Ihre entsprechende Frage nur mit einem Wort oder Satz reagieren können. Das ist nicht nur ökonomisch; es gewähnt den Schülern und Schülerinnen auch das historische Denken gründlich ab.
4. Nennen Sie auf keinen Fall die Quellengattungen. Die Schüler und Schülerinnen könnten sonst aus der Angabe der Gattung Hilfe für ihre Interpretationen erhalten.
5. Reden Sie nicht über unterschiedliche Interpretationsmöglichkeiten. Damit gefährden Sie nur die Eindeutigkeit des positiven Wissens, denn Geschichte [resp. Mathematik!] ist ein Fach, bei dem alles aus gesicherten Fakten und exakten Daten besteht. Skepsis und Zweifel, Ambivalenzen und Kritik lassen nur das Missverständnis entstehen, dass Geschichte [Mathematik] ein Denkfach und nicht das wichtigste Lernfach ist. Jedes Reden über Interpretation führt vom vorgegebenen Lernziel ab. Thematisieren Sie den Interpretationsprozess selbst auf keinen Fall. Ihre Schüler und Schülerinnen könnten sonst zum Nachdenken kommen.
6. Vermeiden Sie Methodenlernen. Machen Sie die Schüler und Schülerinnen nicht mit den methodischen Schritten einer Quelleninterpretation und dem theoretischen Rüstzeug (hermeneutischer Zirkel, Wirkungszusammenhang, Perspektivität, inhaltsanalytische Verfahren) vertraut. Sie geben sonst eines Ihrer wichtigsten Steuerungsmittel aus der Hand, und die Schüler und Schülerinnen könnten sonst ohne Ihre Hilfe die Quellen entschlüsseln.
7. Machen Sie die Schüler und Schülerinnen auf keinen Fall mit einer Heuristik des Fragens bekannt. Hören Sie nicht auf die praxisfremden Geschichtstheoretiker und Geschichts-[Mathematik-]Didaktiker, die nicht müde werden zu behaupten, dass Geschichte erst aus Fragen an

> die Vergangenheit entsteht. Wichtiger ist doch, dass den Schülern und Schülerinnen nicht diejenigen Fragen einfallen, die Sie doch selbst stellen wollen."
>
> (Pandel, 2003, S. 190 f.)

2.3 Der hermeneutische Diskussionskontext

In den vorangegangenen Abschnitten war viel davon die Rede, dass mathematikgeschichtliche Quellen und historisch-hermeneutischer Unterricht „Verstehen" ermöglichen und fördern sollen (vgl. 2.2.3, S. 50). Was es nun aber in diesem Zusammenhang eigentlich heißt – oder heißen könnte –, etwas zu „verstehen", „Sinn" zu entbinden, „Perspektiven" zu entdecken etc., ist bisher nicht präzisiert worden. Tatsächlich ist „Verstehen" ein schillernder Begriff, der von vielen, z. T. völlig gegensätzlichen Unterrichtsphilosophien und -konzeptionen in Anspruch genommen und mit höchst unterschiedlichen Bedeutungen gefüllt wird. Es soll deshalb in den nächsten Abschnitten darum gehen, eine genauere Vorstellung des Verstehensbegriffes im Rahmen der historisch-hermeneutischen Perspektive zu entwickeln. Eine Durchsicht relevanter Beiträge auf dem Gebiet der in diesem Zusammenhang klassischen Theorie der Hermeneutik soll hierfür den Boden bereiten; denn die Hermeneutik – als Wissenschaft und Philosophie des Verstehens – stellt einen über viele Jahrhunderte gewachsenen, ausdifferenzierten Fundus an Erkenntnissen und Ideen bereit, „den zu nutzen schon die Klugheit gebietet" (Jung, 2001, S. 30). Sie besitzt ferner zahlreiche Querverbindungen nicht nur zur Historik – einer ihrer klassischen Anwendungsdomänen – sondern auch zur (geisteswissenschaftlich aufgefassten) Mathematik (Bauer, 1990, S. 7), vgl. S. 24 ff.

Nun ist die Inanspruchnahme hermeneutischer Modelle und Begrifflichkeiten – zumal unter diesem Namen – dem Mathematikunterricht (noch) weitgehend fremd. Gelegentlich wird auch bezweifelt, dass Hermeneutik für das Fach überhaupt eine Rolle spielen könnte (Leuders, 2003, S. 54). In den folgenden Unterkapiteln will ich darum aufzeigen, dass hermeneutischen Ideen und Impulsen zumindest auf den Gebieten der Mathematik*didaktik* und des Mathematik*unterrichts* sehr wohl ein legitimer, erwünschter und sogar notwendiger Platz zukommt. Die Argumentation wird sich dabei an der Problematik und den Erfordernissen der konkreten Themenstellung der mit der vorliegenden Arbeit beabsichtigten empirischen Untersuchung orientieren: In ihr geht es um die episodische Integration fachgeschichtlicher Elemente durch Lektüre originaler Quellen. Verallgemeinerungen des theoretischen Ansatzes – etwa im Hinblick auf die Arbeit mit anderen, nicht-historischen Materialien – liegen jedoch sehr nahe. Sie deuten damit die mittel- und langfristige Reichweite an, die das hier entwickelte hermeneutische Konzept für den Mathematikunterricht besitzen könnte.

Ich beginne den Abschnitt mit einer kurzen terminologischen Klärung und sachlichen Abgrenzung des Begriffs „Hermeneutik" (2.3.1). Daran schließe ich die systematische Aufarbeitung der für die vorliegende Arbeit relevanten Begriffe, Thesen und Argumentationen der klassischen Hermeneutik an (2.3.2). Zuletzt diskutiere ich die aus der Systematik sich ergebenden didaktischen und pädagogischen Impulse (2.3.3) und wende mich der Frage der methodischen Ausgestaltung hermeneutisch-orientierten Unterrichtens zu (2.3.4).

2.3.1 Terminologisches: Was heißt Hermeneutik?

Das Wort „Hermeneutik" ist aus den Geisteswissenschaften, traditionell vor allem aus der Theologie bekannt. Es bezeichnet dort – nach heutiger Lesart – *die Lehre und Tätigkeit des interpretativen und evaluativen Verstehens, Auslegens oder Deutens sinnhaltiger (von Menschen hervorgebrachter) Zeichen*.

Dies ist die Definition, die ich in der vorliegenden Arbeit verwenden werde. Wenn ich schreibe: „nach heutiger Lesart“, so lasse ich darin bereits anklingen, dass nicht zu allen Zeiten unter diesem Begriff dasselbe verstanden wurde. Tatsächlich hat es für die Hermeneutik seit der Antike eine ganze Reihe unterschiedlicher Definitionen und Aufgabenstellungen gegeben, die je nach Epoche, geistesgeschichtlichem Kontext oder Autor sehr unterschiedliche Akzente gesetzt haben. Demnach wurde Hermeneutik zunächst als bloße Hilfswissenschaft zur Übersetzung und Auslegung (vorwiegend) sakraler oder mythischer Texte aufgefasst, später als „Kunstlehre des Verstehens“ und schließlich als „Philosophie mit Universalitätsanspruch“ (Grondin, 1996, S. 1350). Auch heute noch wird das Wort „Hermeneutik“ in verschiedenen Sinnzusammenhängen und zur Charakterisierung recht unterschiedlicher Interessen und Absichten genannt, wie die folgende Zusammenstellung von Definitionen zeigt:

> „Hermeneutik ist die Lehre vom Verstehen.“ (Jung, 2001, S. 7)

> „Hermeneutik ist die Wissenschaft [auch im Sinne einer Technik, M. G.] der interpretierenden Sinnvermittlung.“ (Seiffert & Radnitzky, 1994, S. 128)

> „Der Begriff ‚Hermeneutik’ meint [...] zunächst einmal die Praxis des Auslegens, die zum Verstehen führt.“ (Pandel, 2003, S. 110)

Lehre, Wissenschaft, Technik, Praxis – die Hermeneutik hat (wie die Mathematik) anscheinend von allem etwas, und offenbar kommt es auf den Standpunkt an, welches Merkmal an ihr als vorrangig angesehen wird. Der Stammvater der deutschen Hermeneutik, Friedrich Schleiermacher (1768-1834), nannte sie sogar eine Kunst, genauer gesagt: eine „Kunstlehre“. Trotz unterschiedlicher Pointierungen geht es in allen Definitionen jedoch immer um Verstehen und Auslegen. Besonders ausführlich und erhellend wird dieser grundlegende Aspekt von (Kurt, 2004) erläutert:

> „Ganz allgemein betrachtet geht es [in der Hermeneutik, M. G.] darum, *dass sich ein Subjekt zu einem Objekt verhält:* es steht vor etwas (vor-stan) [das ist die mutmaßliche etymologische Wurzel von ‚verstehen’, M. G.], um mit diesem etwas zu machen. Dieses Machen – die hermeneutische Tätigkeit – hat mehrere Dimensionen: Einerseits führt sie über das Vorgegebene hinaus (exegomai, exegese, auslegen; ex = aus, heraus). Sie überschreitet, transzendiert das Gegebene in Richtung eines Nichtgegebenen (das sich im Gegebenen ausdrückt). [...] Zweitens führt das hermeneutische Denken in das Gegebene hinein, indem es ‚dazwischen’ (inter) geht und die Bestandteile auseinander legt, ausbreitet, entfaltet, entwickelt. Das verweist auf den analytischen Aspekt der hermeneutischen Vorgehensweise. Drittens enthält die hermeneutische Tätigkeit auch einen synthetischen Aspekt: es fügt und fasst zusammen (concipere, comprehendo; con/cum = zusammen). Viertens eignet der Hermeneutik eine Über-Funktion: sie übersetzt und über-bringt und über-trägt (transfero) etwas von hier nach dort und von dort nach hier. Einerseits wird beim Auslegen (hermeneuein) Gegebenes in Geist übertragen, andererseits wird beim Aussagen (hermeneuein) der eigene Geist in Zeichen übersetzt. Fünftens ist die hermeneutische Tätigkeit an Sprache gebunden. Die Grundbedeutung von hermeneuo verweist (höchstwahrscheinlich) auf Sprachwurzeln im Bedeutungsbereich ‚sprechen’, ‚sagen’.“ (Kurt, 2004, S. 26, meine Hervorhebung)

Kurt fasst diese Ausführungen zusammen, indem er sagt, dass der Hermeneut (Ausleger, Interpret) *vor* etwas (außerhalb seiner selbst) steht, das – jedenfalls seiner Meinung nach – *für* etwas steht. Im Bewusstsein nicht zu wissen, *wofür* dieses Etwas steht, versucht er das Nichtgegebene durch Analyse, Synthese und Übersetzung aus dem Gegebenen zu ermitteln und es in Worte zu fassen.

2.3.2 Systematisches: Was bedeutet Hermeneutik?

Aus der terminologischen Bestimmung des vorigen Abschnittes geht hervor, dass die hermeneutische Modalität des Verstehens einen Vorgang beschreibt, in welchem ein Subjekt einem Objekt, einem Gegenüber begegnet. Dies weist auf den Wert hermeneutischer Ideen und Begrifflichkeiten für den Umgang mit historischen Quellen hin: In Abschnitt 2.2.1 waren Quellen ja ausdrücklich als *Objekte,* als Materialisierungen, die uns *vorliegen,* definiert worden. In der Hermeneutik geht es also um die Entwicklung und Pflege eines Denkens, das vom *Eigenen* absehen kann und auf das *Andere* des Gegenübers blickt. Dieses Andere sind in unserem Fall die historischen Texte. Die Charakteristika, Interessen und Zielsetzungen des hermeneutischen Blicks sollen das Thema der in diesem Unterabschnitt diskutierten Systematik sein. Ich möchte sie sukzessive nach den Aspekten

- Verstehen (2.3.2.1),
- Perspektivität (2.3.2.2) und
- Begegnung mit dem Fremden (2.3.2.3)

entfalten.

2.3.2.1 Verstehen

„Hermeneutik ist die Lehre vom Verstehen“. So haben wir es eben im Zitat von Jung gelesen, so oder so ähnlich lesen wir es bei vielen anderen Autoren. Was aber bedeutet „Verstehen“? Eine erste Antwort darauf fällt anscheinend gar nicht so schwer. Wenn wir an den Mathematikunterricht denken, so bemerken wir, dass es in ihm fast ständig darum geht, etwas zu „verstehen“. Meistens lautet der Anspruch sogar: etwas *richtig* zu verstehen. Mit dieser scheinbaren Nuance wird eine normative Tendenz in den Verstehensbegriff eingeführt, die für den Mathematikunterricht durchaus typisch ist. Häufig – wenn auch nicht immer – ist mit mathematischem Verstehen im täglichen Unterricht nichts anderes gemeint als über Kenntnisse und Fertigkeiten zu verfügen, die es ermöglichen, Aufgaben zu lösen, seien sie nun vom Lehrer vorgelegt oder von den Lernenden selbst entwickelt und formuliert worden. Der Verstehensbegriff ist damit auf ein „Problemlöseverständnis“ spezifiziert und zugleich reduziert. Innerhalb des dadurch abgesteckten definitorischen Rahmens wird somit auch die Logik des normativen Anspruchs deutlich: Ein Schüler versteht ein Thema, wenn er in der Lage ist, die für den Problembereich typischen Aufgaben richtig zu lösen – ein klares Kriterium, das gut operationalisiert werden kann.

Natürlich haben sich Didaktiker und Psychologen nicht mit dieser schlichten Definition zufrieden gegeben. Jerome Bruner (*1915) beispielsweise sagt mit Blick auf das Verstehen von Mathematik:

> „To understand something well is to sense wherein it is simple, wherein it is an instance of a simpler, general case […] In the main, however, to understand something is to sense the simpler structure that underlies a range of instances, and this is notably true in mathematics. (Bruner, 1995, S. 333)

Auch der amerikanische Fachverband NCTM vermerkt in seinen *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, dass es beim Verstehen von „Konzepten” um durchaus mehr gehe als um das Erinnern von Definitionen und das Wiedererkennen der üblichen Beispiele. Verständnis drücke sich bei Schülerinnen und Schülern vielmehr dann aus, wenn es ihnen gelänge, Konzepte auf neue Situationen anzuwenden (National Council of Teachers of Mathematics, 1989, S. 223). Cramer und Karnowski definieren Verstehen als Fähigkeit, eine mathematische Idee auf vielfache Weisen darzustellen und Verbindungen zwischen den verschiedenen Darstellungen zu ziehen (Cramer & Karnowski, 1995, S. 333). Skemp unterscheidet zwischen instrumentellem und relationalem (Skemp, 1978), Cangelosi zwischen literalem und interpretativem (Cangelosi, 1992, S. 98), Sfard zwischen operationalem und strukturellem Verstehen (Sfard, 1991), Sierpinska diskutiert den Verstehensbegriff nach Maßgabe des von Bachelard geprägten Begriffs der „Erkenntnishindernisse" („obstacles épistémologiques") (Sierpinska, 1994), (Bachelard, 1978) usw.

Die Zahl der einschlägigen Definitionen und Umschreibungen ist offensichtlich sehr groß und dokumentiert das bereits erwähnte, breite Spektrum an unterschiedlichen didaktischen oder psychologischen Interessen und Pointierungen. Beim *hermeneutischen* Verstehensbegriff, den ich hier entwickeln möchte, geht man von der grundlegenden Tatsache aus, dass ein Fachgebiet (wie die Mathematik) – unabhängig von seinem etwaigen Faktizitäts- und Objektivitätsanspruch – letztlich immer durch *menschliche* Handlungen und Kodifizierungen zur Ausdrücklichkeit gebracht wird. Brown weist schon in (Brown, 1991) darauf hin, dass Mathematik insofern als lohnender Gegenstand hermeneutischen Verstehens betrachtet werden kann, als es darum geht, das *mathematische* Handeln als *menschliches* Handeln zu *interpretieren*. Der besonderen Stellenwert dieser Herangehensweise kann darin gesehen werden, dass

> „Personal interpretation underlies all mathematical understanding." (Brown, 1991, S. 475)

In der Hermeneutik wird eine Dimension des Verstehensbegriffs thematisiert, die – grob und vorläufig gesprochen – mit der reflektierenden Erfassung von humanen Sinngehalten, Sinnbezügen und Sinnstrukturen zusammenhängt. Diese evaluative Dimension ist es, die wir in Aussagen wie „ich verstehe, was Du sagst", „ich verstehe dieses Buch", „ich verstehe den Anspruch" etc. konnotieren.

Folgendes Beispiel möge einer ersten Veranschaulichung dienen: Sprechen wir von „Verstehen", wenn ein Schüler in der Lage ist, den Term $\int_0^2 x^2 dx$ nach $\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{8}{3}$ aufzulösen? Wahrscheinlich noch nicht. Unter „Verstehen" stellen wir uns meistens etwas Komplexeres, Reichhaltigeres vor. Die Bezeichnung „Regelwissen" würde uns hier angemessener erscheinen. Wie aber urteilen wir, wenn derselbe Schüler uns noch sagen kann, dass er mit dieser Rechnung den Flächeninhalt unter einer Normalparabel im Intervall [0;2] bestimmt hat? Wenn er weiß, dass dieselbe Rechnung zugleich den Mittelwert der Funktion $f: x \mapsto x^2$ im besagten Intervall ergibt? Wenn er obendrein noch bemerkt, dass er mit $\frac{1}{3}x^3$ den Term der Stammfunktion von *f* gefunden hat? Hat er dann die Integralrechnung „verstanden", weil er Teile ihres Aspekt- und Anwendungsreichtums kennt und aussprechen kann, selbst wenn er vielleicht nicht alle Kalkülmethoden beherrscht? Oder würden wir ihm „Verstehen" vielleicht erst dann attestieren, wenn er uns außerdem – oder: vor allem? – noch eine Form von evaluativ-reflektierendem „Metawissen" demonstrieren kann, indem er beispielsweise den Stellenwert des von ihm in der Umformungsregel benutzten Hauptsatzes für die Integralrechnung sachgemäß beurteilt, oder indem er erläutert, welche Möglichkeiten dieser Satz im Vergleich zu den älteren Summations-, Reihen- und Exhaustionsverfahren an die Hand gibt? Die Antwort kann nicht allgemeingültig und auch nicht mit wenigen Worten gegeben werden. Sie hängt vor allem von den Interessen und Zielen der am Unterricht beteiligten und in ihm handelnden Personen, der Lehrer und Schüler also, und von den Ansprüchen der Gesellschaft an diesen Unterricht ab. Das Beispiel kann uns aber auf die Komplexität und potenzielle Unausschöpfbarkeit des Verstehensbegriffs aufmerksam machen und unsere Auffassung für eine reichhaltigere, hermeneutische Orientierung einstimmen, die hier systematisch entfaltet werden soll.

2.3.2.1.1 Verstehen im hermeneutischen Zirkel

Der Verstehensbegriff ist seit der Antike immer wieder Gegenstand philosophischer Abhandlungen und Streitigkeiten gewesen. Obwohl dieser geschichtliche Hintergrund nicht unwichtig ist, werde ich auf seine genauere Darstellung an dieser Stelle verzichten und auf die Literatur verweisen (Kurt, 2004), (Coreth, 1969, S. 56 ff.). Stattdessen komme ich direkt auf die aus der langen Tradition hervorgegangenen Begriffsdualitäten von „Ratio“ und „Intellekt“, von „Verstand“ und „Vernunft“ zu sprechen. Sie verweisen auf eine Grunderfahrung menschlicher Erkenntnis, wonach es im Hinblick auf vorliegende Verstehensobjekte zwei prinzipielle und zueinander diametrale Bewegungen oder Zugangsweisen gibt: die eine, die aus der diskursiven, logisch schließenden Synthese von Teilen einer Entität das Ganze gewinnen und *vermitteln* will; und die andere, die eine *unmittelbare* Einsicht in den einheitlichen Sinn und Wesensgehalt dieses Ganzen erfasst, dessen Vielfalt dann aber nicht anders als durch analytische Entfaltung darstellen kann. Die erste ist traditionell die Bewegung der „Ratio“ und des „Verstandes“, die zweite die des „Intellekts“ und der „Vernunft“. Schleiermacher spricht vom „komparativen“ (d. h.: die Einzelerkenntnisse ausarbeitenden und vergleichenden) Verstehen im Gegensatz zum „divinatorischen“ (d. h.: intuitiven, ahnend sich einfühlenden) (Schleiermacher, 1995, S. 169).

Zwischen diesen beiden Polen besteht nun nicht etwa ein unauflöslicher Widerspruch sondern eine dialektische Spannung, die erfolgreich im Modell des hermeneutischen Zirkels diskutiert und nutzbar gemacht werden kann:

> „Der divinatorische Vorentwurf des Verständnisses geht der komparativen Auslegung als Bedingung und leitender ‚Hinblick' voraus, wird aber durch die differenzierte Ausarbeitung bestätigt oder berichtigt, erweitert und vertieft. Die Auslegung setzt also einerseits einen ersten, ahnend entworfenen Verständniszugang voraus und mündet andererseits in ein bereichertes, in seinen Momenten ausdrücklicher entfaltetes Verstehen. Man kann hierin wieder eine Wechselbeziehung zwischen Vernunft (intellectus) und Verstand (ratio) sehen oder – mit Hegel – ein dialektisches Geschehen zwischen Unmittelbarkeit und Vermittlung, das zur ‚vermittelten Unmittelbarkeit' führt.“ (Coreth, 1969, S. 95)

Der damit beschriebene Verstehensprozess kann in der bekannten Standardfigur der Abbildung 20 veranschaulicht werden. Die Figur besagt folgendes: Wenn wir an ein Objekt des Verstehens herantreten, beispielsweise an einen Text, so geschieht das nie ohne einige Vorstellungen davon, was wir dort finden werden. Die Summe all dieser Vormeinungen fassen wir unter dem Begriff „Vorverständnis“ zusammen. Das Vorverständnis V_0 impliziert eine entsprechende *Sinnerwartung*, die nun im Erstzugriff auf das Verstehensobjekt T_1 (Textlektüre 1) an ihm geprüft und – typischerweise – berichtigt werden muss. Diese Berichtigung bzw. *Umstimmung* führt zu einem veränderten Vorverständnis V_1, mit dem wir erneut an das Objekt zum Zwecke der Überprüfung herantreten (T_2), etc. Im Zuge der Entfaltung solcher Kreise, nimmt die hermeneutische Differenz (Distanz) zwischen den „Horizonten“ des Interpreten und des Autors (bzw. Textes) durch Überprüfungen und Umstimmungen beständig ab, so dass es schließlich zu einer (wenigstens partiellen) Horizontverschmelzung kommt, die wir „Verstehen“ nennen. Die Abbildung 21 auf Seite 63 veranschaulicht diesen Vorgang mit anderen grafischen Mitteln.

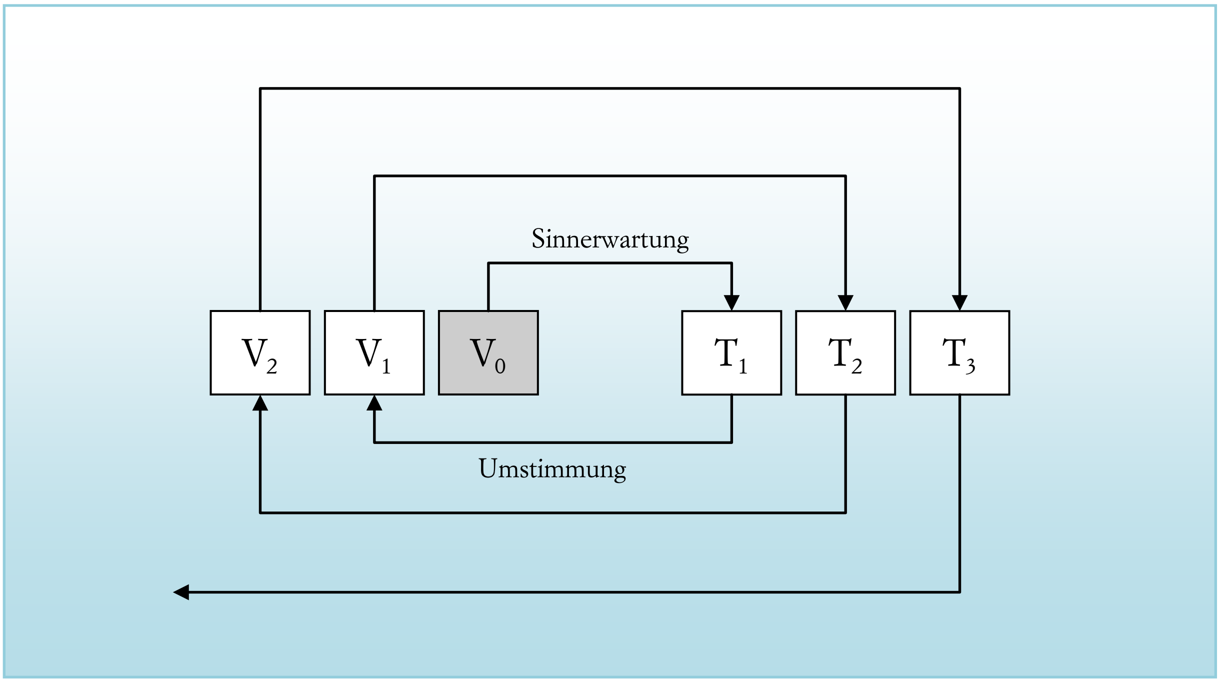


Abbildung 20: Standardfigur des hermeneutischen Zirkels.

Der hermeneutische Zirkel beschreibt in seiner allgemeinen Struktur also ein Wechselspiel zwischen Einzelnem und Ganzem, das eigentlich paradox anmutet:

> „Das Verstehen des Einzelnen setzt […] ein Vorverständnis des Ganzen voraus, innerhalb dessen es verstanden wird; das Verstehen des Ganzen erwächst aber aus dem Verständnis der Einzelmomente, die sich zur Ganzheit zusammenfügen." (Coreth, 1969, S. 95)

Dieser Vorgang ist indes alltäglicher als es den Anschein hat. Einige Beispiele mögen das illustrieren:

- Wir schlagen ein Buch auf und lesen die ersten Worte: „Es war einmal …". Sofort konstituiert sich unsere Sinnerwartung: Das wird ein Märchen sein. Im Fortgang der Lektüre rechnen wir mit der Entfaltung der bekannten Topoi.
- Wir nehmen eine CD mit der Aufschrift „Bach: Kunst der Fuge" aus dem Regal und entwickeln sogleich eine ungefähre Vorstellung davon, wie die Musik klingen wird, weil wir möglicherweise schon andere Werke von Bach (bewusst oder unbewusst) kennen oder zumindest doch wissen, dass es sich um einen Komponisten eines früheren Jahrhunderts handelt, der keine Pop-, Rock- oder Techno-Musik geschrieben hat.
- Wir bekommen ein Buch mit dem Titel „Mathematik 7" und dem Bild zweier fröhlich lachender Kinder auf dem Deckel in die Hand und haben sofort bestimmte Vorstellungen von dem, was wir in dem Buch finden werden und was nicht. So erwarten wir wohl einen Abschnitt über Dreiecksgeometrie, nicht aber Informationen darüber, wer die Kinder auf dem Buchdeckel sind und was sie so fröhlich gestimmt hat – bei einem Lesebuch würden wir vielleicht eher *damit* rechnen.
- In einem mathematischen Text kommen wir an eine Stelle, die mit den Worten „Sei $\varepsilon > 0$" eingeleitet wird. Wir erwarten im Folgenden eine Beweisfigur, die sich auf einen Grenzwert oder einen Grenzprozess bezieht.

- Unter der Überschrift „Textaufgaben“ entdecken wir in einem Lehrbuch einige Zeilen fortlaufenden Textes mit Zahlenangaben. Schülerinnen und Schüler erwarten zumeist, dass es darum gehen wird, alle angegebenen Zahlen miteinander zu verrechnen, um die jeweiligen Fragen zu beantworten – und meistens liegen sie mit dieser Erwartung ja auch richtig.

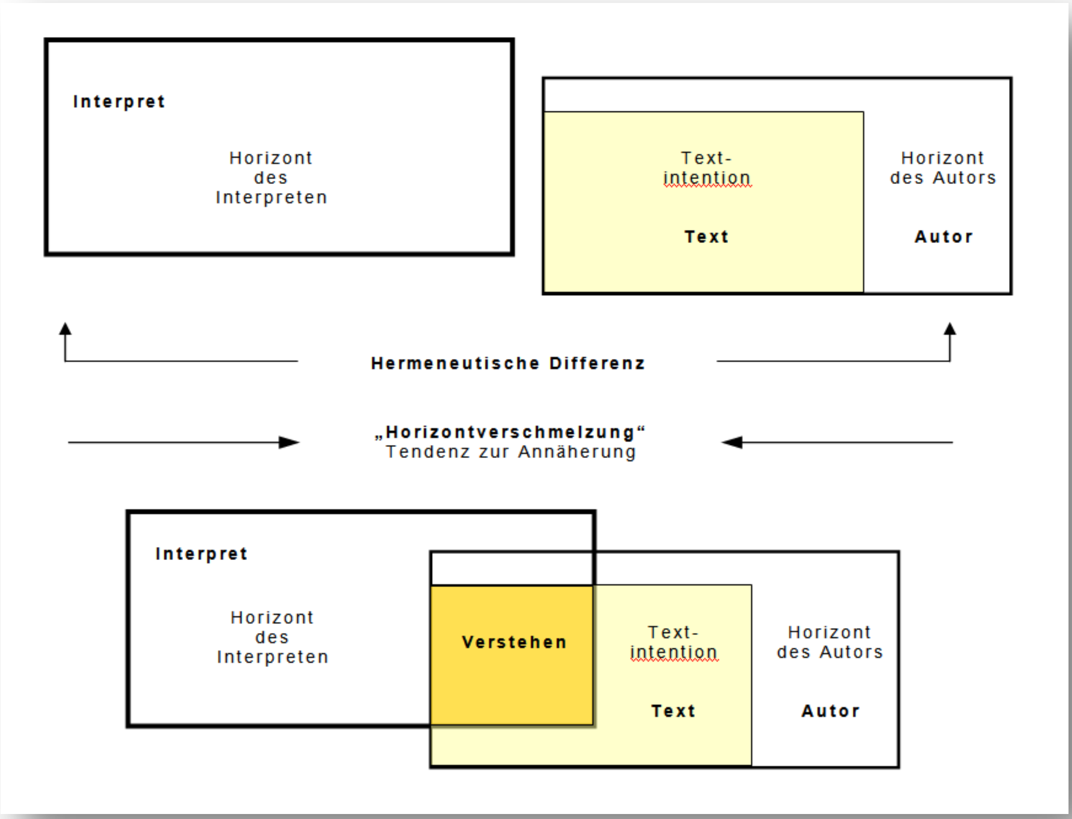


Abbildung 21: Hermeneutische Differenz und Horizontverschmelzung (nach einer Figur aus (Teachsam - Lehren und Lernen online))

Zur besseren Veranschaulichung, welche Rolle der hermeneutische Zirkel bei der Lektüre eines mathematischen Quellentextes spielt, möchte ich ein Beispiel anführen, in welchem ich die möglichen Erwartungen, Umstimmungen und Verschmelzungen nachvollziehe, die ein Schüler bei der Lektüre eines der Al-Khwarizmi-Texte erlebt, die im Unterrichtsprojekt der vorliegenden Arbeit verwendet wurden (vgl. Kap. 3). Der Schüler selbst ist zwar fiktiv, seine hinleitenden Fragen und den Verstehensweg als Ganzen habe ich jedoch aus zahlreichen Beobachtungen und Gesprächen mit realen Schülerinnen und Schülern, die an der Pilotphase der Untersuchung beteiligt waren, zusammengefasst und idealtypisch rekonstruiert (in Klammern jeweils die Sätze der Quelle, auf die sich die Aussagen beziehen). Der dadurch verbalisierte „innere Dialog“ vollzieht sich natürlich unter normalen Umständen in großer Geschwindigkeit:

	Vorverständnis V_0	
1a	„Nach Angaben des Lehrers ist dies ein mathematischer ‚Text’ aus einem ganz alten Lehrbuch. Ich	

	stelle ihn mir erst einmal so ähnlich vor wie die ‚Texte' in unserem Schulbuch. Diese ‚Texte' enthalten üblicherweise viele Formelzeilen, algebraische Umformungen, Zahlen natürlich und erläuternde Zeichnungen. Da dieser ‚Text' alt ist, ist er vielleicht in Fraktur gesetzt und enthält noch andere Zeichen als die, die wir heutzutage benutzen. Vielleicht handelt es sich inhaltlich bei dem ‚Text' um eine ‚Textaufgabe'.“	
	Sinnerwartung ⇨	**Überprüfung T_1**
1b		„Der Text ist – anders als die Texte im Schulbuch – sehr lang und fortlaufend geschrieben, d. h. er enthält keine einzige Formelzeile und auch sonst keine Symbole, nicht einmal Ziffern – die Zahl 10 im ersten Satz ist als Wort ausgeschrieben. Auf den ersten Blick sieht er darum eher so aus wie die Texte, die wir aus Deutsch, Geschichte, Politik etc. kennen. Allerdings ist eine geometrische Zeichnung beigefügt. Und das weist dann doch auf einen mathematischen Zusammenhang hin.“
	Vorverständnis V_1	⇦ **Umstimmung**
2a	„Da der Text keine Formeln und Symbole enthält, beschreibt er vielleicht nicht ‚richtig' mathematische Dinge. Vielleicht handelt es sich dann wirklich um eine Textaufgabe, nur eben eine aus einem alten Mathematikbuch. Früher waren die möglicherweise länger als heute.“	
	Sinnerwartung ⇨	**Überprüfung T_2**
2b		„Tatsächlich beginnt der Text mit einer Aufgabe. Das kann man daran erkennen, dass eine Frage gestellt wird (1b). Allerdings geht es dann gleich weiter (2: ‚Wir gehen aus von …‘). Anscheinend wird ein Verfahren beschrieben. Das ergibt sich beim ersten Weiterlesen (‚hinzuzufügen‘ (3), ‚halbieren‘ (4), ‚konstruieren‘ (4)).“
	Vorverständnis V_2	⇦ **Umstimmung**
3a	„Es handelt sich anscheinend um eine Textaufgabe, deren Lösung wohl gleich angegeben wird. Vermutlich geht es um Geometrie, denn da ist eine Zeichnung, und Wörter wie ‚konstruieren‘ klingen geometrisch. Außerdem enthält der Text keine Formel, was auch besser zur Geometrie passt. Wahrscheinlich ist das Ganze eine Musterlösung, die zeigt, wie ein bestimmter Aufgabentyp gelöst werden muss.“	
	Sinnerwartung ⇨	**Überprüfung T_3**
3b		„Es geht um ein Quadrat und um zehn Wurzeln, die 39 ‚Dirhem‘ ergeben sollen (1a). Dirhem ist eine Währungseinheit (Lehrer gefragt). Die beigefügte Zeichnung soll wahrscheinlich dieses ‚Quad-

		rat‘ darstellen; denn da steht ja: ‚Wir gehen aus von der quadratischen Fläche …‘ (2).“
	Vorverständnis V_3	**Umstimmung**
4a	„Das Quadrat ist das gezeichnete Quadrat. Dem sind irgendwie zehn Wurzeln hinzuzufügen. Doch wie zeichnet man Wurzeln? Und wie fügt man sie dann dem Quadrat hinzu? Vielleicht ist es doch keine geometrische Aufgabe? Denn Wurzeln gibt es doch gar nicht in der Geometrie. Und außerdem scheint es um einen Geldbetrag zu gehen – obwohl das vielleicht auch den Wert eines Grundstücks bedeuten könnte.“	
	Sinnerwartung	**Überprüfung T_4**
4b		„Die Wurzeln im Text sind Vierecke, oder zumindest werden sie als zwei Vierecke gezeichnet. Eine Seite eines solchen Vierecks entspricht der Quadratkante. Die andere Seite ist 5 Einheiten lang. Dann ist das „Quadrat“ im Text wohl nicht das ganze Quadrat in der Zeichnung, sondern vielleicht eins der beiden kleinen Quadrate im Inneren des großen; denn an die inneren Quadrate grenzen ja auf beiden Seiten Vierecke. Im Text heißt es ja: ‚…die zehn Wurzeln desselben hinzuzufügen.‘ (3), ‚Zu diesem Zweck …‘ (4), ‚… konstruieren zwei Vierecke …‘ (4), ‚… ihre Länge ist jeweils 5, … während ihre Breite jeweils gleich ist einer Seite der Quadratfläche …‘ (5).“
	Vorverständnis V_4	**Umstimmung**
5a	„Die Wurzeln sind zwei Vierecke. Die kann man dem Quadrat hinzufügen, indem man sie an das Quadrat ‚anzeichnet‘. So erhält man eine Gesamtfläche. Vermutlich ist das gemeint, wenn gesagt wird, dass sich zusammen 39 ergibt. Und mit Dirhem könnte der Wert des Landes gemeint sein, wenn man annimmt, dass diese Quadrate und Vierecke Grundstücke sind. Allerdings gibt es in der Zeichnung *zwei* innere Quadrate. Was ist mit dem anderen?“	
	Sinnerwartung	**Überprüfung T_5**
5b		„ ‚Wie muss das Quadrat lauten …‘ (1b)“
	Vorverständnis V_5	**Umstimmung**
6a	„Aha, möglicherweise geht es darum, die Größe des anderen Quadrates zu bestimmen, wenn das erste Quadrat mit den beiden Vierecken zusammen 39 Euro ergibt. Dann müsste man aber noch mehr wissen. Jeweils eine Seite des Vierecks ist ja 5 Zentimeter lang. Vielleicht kann man damit etwas anfangen.“	
	Sinnerwartung	**Überprüfung T_6**
6b		„ ‚(…) das um zehn seiner eigenen Wurzeln ver-

		mehrt neununddreißig ergibt.‘ (1b)“
	Vorverständnis V_5	**Umstimmung**
7a	„Ach nein, das Quadrat, das gesucht wird, ist ja in der Fläche von 39 enthalten. Dann verstehe ich aber nicht, was das andere Quadrat da noch soll. Das erste Quadrat jedenfalls ist zusammen mit den beiden Vierecken 39 Euro wert. Besser gesagt 39 Dirhem.“	
	etc.	

Wie das Beispiel zeigt, drückt sich die im hermeneutischen Zirkel thematisierte Dialektik zwischen dem Ganzen und seinen Teilen schon in der Beziehung zwischen einzelnen Wörtern und dem Ganzen der von ihnen gebildeten Sätze aus (vgl. die Sequenz 5b-6a-6b-7a); dann wiederum zwischen einzelnen Sätzen und dem Ganzen des Sinns, den sie konstituieren (vgl. 1b-2a-2b-3a), wobei auf beiden Seiten des Zirkels die jeweiligen Horizonte des Textes bzw. des Lesers einwirken – beim lesenden Schüler schwingt etwa implizit die Erwartung mit, dass es sich wohl um eine Textaufgabe handele; denn was könnte ein Text im Fach Mathematik sonst bedeuten?) Bei der (ggf. angeleiteten) Textinterpretation können die Schleifen des hermeneutischen Zirkels aber auch unter Fokussierung jeweils verschiedener *sachlicher* Leseinteressen durchlaufen werden. So könnte in einer ersten Lektüre des Al-Khwarizmi-Textes der mathematische Gehalt im Vordergrund stehen, während es bei einer wiederholten Lektüre darum gehen könnte, auf historische Kontexte und Sinnbezüge oder die Verwendung einer bestimmten Terminologie zu achten. Diese Durchläufe können sich in ihrer Entfaltung selbstverständlich gegenseitig befruchten. Schließlich gibt es auch *erkenntnisleitende* Interessen, mit denen Leser einem Text begegnen. Auf diesen Sachverhalt hat besonders Jürgen Habermas hingewiesen (Habermas, 2003). Zwei Beispiele aus dem Bereich der Mathematik, die diesen Punkt beleuchten, bringe ich in den Abschnitten 2.3.2.4. und 2.3.2.6

Der hermeneutische Zirkel hat seine Bedeutung nicht nur im Kontext von Textinterpretationen (so war es bei Schleiermacher). Er wird vielmehr immer durchlaufen, wenn es darum geht, die Zusammenhänge zwischen den Einzelheiten und der Ganzheit eines Interpretandums zu erhellen: so zum Beispiel wenn die Wechselbeziehungen zwischen einem konkreten Lebensmoment einer Person und der Totalität ihres ganzen Lebens, der sozialen Umstände, der geschichtlichen Epoche etc. herangezogen werden, um diese Person oder ihr Denken, Handeln und Dulden zu *verstehen* (so bei Dilthey und Droysen). Die Bedeutung der Zirkelfigur ist aber darüber hinaus für alle so genannten „verstehenden Disziplinen“ – Psychologie, Anthropologie, Ethnologie, Kulturwissenschaften, Kunst, Rechtswissenschaften, Philosophie etc. – von grundlegender Bedeutung (so bei Heidegger und Gadamer). Auch auf dem Gebiet der Mathematik lassen sich Beispiele finden, die mehr umfassen als die konkrete Verstehenssituation eines mathematischen Textes. Man kann etwa an das Wechselspiel einzelner Definitionen, Sätze oder Methoden mit einer Theorie als Ganzer denken (Beispiele: Parallelenpostulat und (nicht-)euklidische Geometrie, Satz von der eindeutigen Primzahlzerlegung und Zahlentheorie etc., Koordinaten-Transformationen und theoretische Mechanik) oder auch an die wechselseitige Beeinflussung einer mathematischen Theorie und ihrem geistesgeschichtlichen Kontext (Zahlbegriff, Proportionenlehre und Theorie der (In-)Kommensurabilität vor dem Hintergrund des griechischen Denkens, s. u.). Ganz allgemein lässt sich Verstehen nach Maßgabe dieser Dialektik charakterisieren als

„ein Prozess, in dem das Denken oszillieren muss: zwischen Einzelnem und Ganzem, zwischen Individuellem und Allgemeinem, zwischen Anfang und Ende und, sofern sich das Verstehen im Dialog vollzieht, zwischen Ich und Du." (Kurt, 2004, S. 99)

2.3.2.1.2 Verstehen und Erklären

Die Bedeutung des hermeneutischen Zirkels für die Beschreibung und mögliche methodische Unterstützung von Verstehensvorgängen wird durch das bisher Gesagte evident. Es gibt aber noch eine weitere Funktion des Zirkels, die in der Klärung von Verstehens*interessen* und *-motiven* liegt, die auch im Zusammenhang mit Mathematik von Belang sind. Diese Funktion wird durch das Begriffspaar „Verstehen" und „Erklären" beschrieben, dessen Bedeutung ich erläutern möchte, indem ich zunächst – im hier möglichen Rahmen – seine geschichtlich verbrieften Funktionen aufarbeite (a., b.), um sie anschließend der moderneren Auffassung gegenüberzustellen (c.), die auch der vorliegenden Arbeit zugrunde liegt (d.). Für Einzelheiten verweise ich auf (Riedel, 1978) und (Apel, 1979).

a. Differenzierung nach Droysen und Dilthey. Der Historiker Johann Gustav Droysen (1808-1884) war der Erste, der dem kausalen „Erklären" der Naturwissenschaften terminologisch und begrifflich das hermeneutische „Verstehen" gegenübergestellt hat. Es ging ihm dabei um zweierlei: Zum einen wollte er den hegemonialen Anspruch der seit dem 17. Jahrhundert expandierenden und immens erfolgreichen Naturwissenschaften zurückweisen, wonach es nur eine einzige wissenschaftliche Methode gäbe – nämlich das an gesetzmäßigen Kausalzusammenhängen orientierte Erklären. Zum anderen verfolgte er die Absicht, die Historik mit der ihr eigentümlichen Methode der Interpretation als Wissenschaft zu legitimieren:

„Das Wesen der geschichtlichen Methode ist forschend zu verstehen, ist die Interpretation." (Droysen, 1937, S. 22)

„Wir erklären nicht. Interpretation ist nicht Erklärung des Späteren aus dem Früheren, des Gewordenen als notwendiges Resultat der historischen Bedingungen, sondern ist die Deutung dessen, was vorliegt, gleichsam ein Lockermachen und Auseinanderlegen dieses unscheinbaren Materials nach der ganzen Fülle seiner Momente, der zahllosen Fäden, die sich zu einem Knoten verschürzt haben, das durch die Kunst der Interpretation gleichsam wieder rege wird und Sprache gewinnt." (Droysen, 1937, S. 163)

Diese Gedanken führte später vor allem Wilhelm Dilthey (1833-1911) fort, freilich ohne Droysen dabei zu erwähnen. Auch Dilthey schrieb den Begriffen „Verstehen" und „Erklären" disjungierende Funktionen zu, um auf solche Weise die Ansprüche, Interessen und Vorgehensweisen der gesamten „Geisteswissenschaften" – nicht nur der Historik – von denen der Naturwissenschaften abzugrenzen. Begriffsgeschichtlich ist diese Unterscheidung später sehr wirkungsmächtig geworden, und hat bis hin zur Rede von den „zwei Kulturen" (Snow, 1959) ihren Widerhall gefunden. Die Auffassung der Gegensätzlichkeit zwischen Natur und Geist brachte Dilthey auf die berühmte Formel:

„Die Natur erklären wir, das Seelenleben verstehen wir."(Dilthey, 1957, S. 144)

Riedel kommentiert diesen Kontrast wie folgt:

> „Erklären' heißt in allen Wissenschaften, das Spätere aus dem Früheren, die Wirkung aus der Ursache, die Tatsache aus dem Gesetz in Form des Schlusses ‚ableiten'." (Riedel, 1978, S. 14)

Was ist damit gemeint? Hier zwei Beispiele: Ein Vorgang in der Natur, das Fallen eines Steines etwa, wird durch den Hinweis auf die in der natürlichen Welt geltenden Gravitationsgesetze und die Feststellung, dass Erde und Stein sich infolge ihrer Massen gegenseitig anziehen, was letztlich den Fall verursacht, *erklärt*. Ähnlich in der Mathematik: Unter bestimmten axiomatischen Voraussetzungen, beispielsweise denen der euklidischen Geometrie, kann die Gültigkeit des Pythagoräischen Lehrsatzes unter Zuhilfenahme der Gesetze der gewöhnlichen Logik strukturell erklärt (abgleitet, bewiesen) werden. Diese beiden Beispiele entsprechen einander zwar nicht vollkommen, sie illustrieren jedoch die konstitutiven Voraussetzungen, derer ein Akt des Erklärens bedarf: Das Vorliegen von Gesetzmäßigkeiten und Kausalitäten sowie das diskursive *Zusammenfügen* einzelner Elemente zu einem Gesamtzusammenhang. Anders verhält es sich nun, wenn beispielweise eine menschliche Geste, etwa das Heben oder Senken des Arms auf solche Weise erklärt wird. Ein Hinweis auf die dabei involvierten muskulären Tätigkeiten – womöglich noch bezogen auf den Zusammenhang mit der Schwerkrafteinwirkung – und auf die vorgängigen Nervenaktivitäten samt einer Beschreibung des Reizweiterleitungsschemas stellt dann eben kein eigentliches Verstehen dar, wenn darüber hinaus nicht Bezug auf den Sinn bzw. die Bedeutung des Vorgangs genommen wird. Das Heben des Arms hat üblicherweise etwas zu bedeuten: Es dient z. B. dem Grüßen, dem Winken, es soll auf etwas hinweisen etc. Kunstwerken, um ein anderes Beispiel zu nennen, kann man mit bloßen Erklärungen ebenfalls nicht gerecht werden. Selbst wenn man alle Ursachen erkannt hätte, die den Gesamtklang von Bachs „Kunst der Fuge" hervorbringen – etwa die Theorie der mechanischen Schwingungen und Wellen, die komplizierten Vorgänge in den Instrumenten und in den Ohren der Hörer etc. – so wären Sinn und Bedeutung der Musik, mit der Bach sich selbst und seinem Publikum etwas sagen wollte, noch in keiner Weise erschlossen. Auf das Sinn- bzw. Bedeutungspostulat wird in den sogenannten „erklärenden Wissenschaften" üblicherweise verzichtet. Der Tatsache, dass ein Stein zur Erde fällt, oder dass in der euklidischen Geometrie der Satz des Pythagoras gilt, lässt sich anscheinend keine tiefere Bedeutung abgewinnen. Im didaktischen Zusammenhang ist es oft diese Art von Sinnleere, über die Lernende in der Auseinandersetzung mit Mathematik oder Naturwissenschaften klagen. Verstehen bedeutet demgegenüber aber: Humanen Sinn zu erfassen. Die Geisteswissenschaften gehen nach Dilthey zu diesem Zweck so vor, dass sie die

> „menschlich-geschichtlich-gesellschaftliche äußere Wirklichkeit zurückübersetzen in die geistige Lebendigkeit, aus der sie hervorgegangen ist." (Dilthey, 1957, S. 119)

Im Vollzug dieser Rückübersetzung durchstößt der Verstehende gedanklich gewissermaßen die äußere (z. B. textliche) Oberfläche eines Interpretandums, um zu einem Sinn- und Bedeutungskern vorzudringen, der dem Verstehensobjekt bei seiner Erzeugung von Menschenhand einbeschrieben worden ist. Dilthey formuliert dies mit den berühmt gewordenen Worten:

> „Wir nennen den Vorgang, in welchem wir aus Zeichen, die von außen sinnlich gegeben sind, ein Inneres erkennen: Verstehen." (Dilthey, 1957, S. 318)

Im Unterschied dazu verharrt das Erklären bei der bloßen Betrachtung der Oberfläche und bescheidet sich mit einer – wenn auch genauen – Analyse ihrer materiellen, kausalen oder strukturellen Erscheinung. Diese (Selbst-)Beschränkung kann u. a. damit zusammenhängen, dass das Objekt der Betrachtung keinen einbeschriebenen Bedeutungskern besitzt oder aber der Interpret nicht über die entsprechenden Interessen bzw. Kompetenzen verfügt, ihn freizulegen. Ein stilisiertes Beispiel aus der Literatur vermag diese Erkenntnishaltung zu illustrieren. In seinem Roman „Homo Faber“ (1957) beschreibt Max Frisch (1911-1991) die Unfähigkeit des Protagonisten Walter Faber, die Bedeutung der Worte zu verstehen, die einer seiner Gesprächspartner angesichts eines als überwältigend empfundenen Mondaufgangs über der Wüste ausspricht:

> „Er fand es ein Erlebnis. […] Ich fand es kalt. Ich habe mich schon oft gefragt, was die Leute eigentlich meinen, wenn sie von Erlebnis reden. Ich bin Techniker und gewohnt, die Dinge zu sehen, wie sie sind. Ich sehe alles, wovon sie reden, sehr genau; ich bin ja nicht blind. Ich sehe den Mond über der Wüste von Tamaulipas – klarer als je, mag sein, aber eine errechenbare Masse, die um unseren Planeten kreist, eine Sache der Gravitation, interessant, aber wieso ein Erlebnis? Ich sehe die gezackten Felsen, schwarz vor dem Schein des Mondes; sie sehen aus, mag sein, wie die gezackten Rücken von urweltlichen Tieren, aber ich weiß: Es sind Felsen, Gestein, wahrscheinlich vulkanisch, das müsste man nachsehen und feststellen. Wozu soll ich mich fürchten? Es gibt keine urweltlichen Tiere mehr. Wozu sollte ich sie mir einbilden? Ich sehe auch keine versteinerten Engel, es tut mir leid; auch keine Dämonen, ich sehe, was ich sehe: die üblichen Formen der Erosion, dazu meine langen Schatten auf dem Sand, aber keine Gespenster. Wozu weibisch werden? Ich sehe auch keine Sintflut, sondern Sand, vom Mond beschienen, vom Wind gewellt wie Wasser, was mich nicht überrascht; ich finde es nicht fantastisch, sondern *erklärlich*.“ (Frisch, 1977, S. 24, meine Hervorhebung)

b. Methodologische und ontologische Aspekte. Riedel hat darauf hingewiesen, dass die Differenzierung von „Verstehen“ und „Erklären“ bei Dilthey einen *methodologischen* Zweck erfüllen sollte, insofern es darum ging, mit ihr die Auffassungs- und Konstitutionsbedingungen der Erfahrungswissenschaften zu klären (Riedel, 1978, S. 23). Dilthey war sich dabei dessen bewusst, dass die Abgrenzung von *Gebieten* (Physisches/Psychisches, Objekt/Subjekt, Geisteswissenschaft/Naturwissenschaft) eine Simplifizierung und Abstraktion einer letztlich unteilbaren Wirklichkeit bedeutete. Das zeigt beispielsweise das folgende Zitat:

> „Der Vorgang eines modernen Krieges enthält ebenso die chemischen Wirkungen des Schießpulvers als die moralischen Eigenschaften der in Pulverdampf stehenden Soldaten.“ (Dilthey, 1957, S. 82)

Entsprechend äußerte sich auch der Philosoph Wilhelm Windelband (1848-1915), als er (in seiner Straßburger Rektoratsrede von 1894) das Begriffspaar von *Nomothetik* und *Idiographie* aufbrachte – nicht etwa, um damit mutmaßliche Seinsweisen voneinander abzugrenzender Kultur- oder Wissensdomänen zu beschreiben, sondern um die unterschiedlichen *Interessen* und *Verfahrensweisen* der in den Wissenschaften handelnden Menschen zu charakterisieren (Windelband, 1924). Nomothetisch nannte Windelband zwar nur die Erfahrungswissenschaften, die er im Hinblick auf ihren empirischen Gegenstandsbereich von der Mathematik unterschied – letztere zählte er zu den „rationalen Wissenschaften“. Es erscheint jedoch plausibel und zweckmäßig, den Begriff der Nomothetik auch auf die Mathematik auszudehnen, um damit das in ihr nachgerade prototypisch verfolgte Interesse an der Auffindung, Darlegung und logischen Verknüpfung allgemeiner, vielleicht sogar „ewig“ gültiger Regeln, Strukturen und Gesetzmäßigkeiten (gr. *νόμοι*) zu beschreiben. Der nomothetischen Denk- und Verstehensmodalität stellte Windelband die idiographische gegenüber, die sich für das Individuelle und Einmalige in einem Geschehen oder Sachverhalt interessiert. Während demnach das Ziel der ersteren „das generelle, apodiktische Urteil“ sei, gehe es der letzteren um den „singuläre[n], assertorische[n] Satz“ (Windelband, 1924, S. 5):

> „Die eine sucht Gesetze, die andere Gestalten. In der einen treibt das Denken von der Feststellung des Besonderen zur Auffassung allgemeiner Beziehungen, in der andern wird es bei der liebevollen Ausprägung des Besonderen festgehalten." (Windelband, 1924, S. 7)

Windelband weist aber sogleich darauf hin, dass dieser

> „methodische Gegensatz nur die Behandlung, nicht den Inhalt des Wissens selbst classificirt. Es bleibt möglich und zeigt sich in der Tat, dass dieselben Gegenstände zum Object einer nomothetischen und daneben auch einer idiographischen Untersuchung gemacht werden können." (Windelband, 1924, S. 5)

In diesem Sinne haben sich später auch andere geäußert, so z. B. der Philosoph und Soziologe Helmuth Plessner (1892-1985), der darauf hingewiesen hat, dass die Frage „Erklären oder Verstehen" nicht am Gegenstand entschieden werde, sondern von der Art des Fragens abhänge (Plessner, 1981, S. 175 ff.).

Nichtsdestotrotz kam es in der Nachfolge Diltheys zu einer scharfen Kontroverse zwischen den Vertretern einer radikalen Existenz-Hermeneutik und den Anhängern des aufkeimenden logischen Positivismus (Riedel, 1978, S. 24). Während erstere darauf pochten, dass es fundamentalontologisch nur das Verstehen „gebe", und Erklären allenfalls ein davon abgeleiteter Modus sei, beharrten letztere auf dem Gegenteil: demnach „gebe" es grundsätzlich nur das Erklären, und das Verstehen leiste diesem bloß heuristische Dienste, ohne selbst im Erklärungszusammenhang wirksam zu werden. Der zum Wiener Kreis zählende Philosoph Otto Neurath (1882-1945) formulierte es so:

> „Einfühlen, Verstehen und Ähnliches mag den Forscher fördern, es geht aber in die Aussagengesamtheit der Wissenschaft ebenso ein wie ein guter Kaffee, der den Gelehrten bei seiner Arbeit förderte." (zit. nach (Apel, 1979, S. 47))

Beide Denkrichtungen, die Existenz-Hermeneutik wie auch der logische Positivismus, teilten miteinander die Auffassung eines methodologischen und ontologischen Monismus in der Wissenschaft, der eine Vermittlung ihrer beiden Positionen unmöglich zu machen schien:

> „Wenn die Aussagen der Geisteswissenschaften auf Verstehen und den Mitteln der Interpretation beruhen, sind die interpretierten Sachverhalte nicht mehr erklärbar; wenn sie sich umgekehrt auf das Erklären und die Mittel nomologischer Subsumtion stützen, lassen sich die subsumierten Sachverhalte nicht mehr verstehen. Zwischen Erklären und Verstehen klafft eine methodologische Lücke, die von beiden Positionen durch ontologische Vorannahmen verdeckt wird." (Riedel, 1978, S. 26)

c. Integrationsbestrebungen nach Ricœur. In der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts zeigte sich zunehmend die Schwäche und Fruchtlosigkeit der bis dahin geltenden, dichotomen Wissenschaftsgliederung, die schließlich einer umfassender angelegten und besser differenzierten Systematik Platz machen musste. Auf Einzelheiten will ich an dieser Stelle verzichten, vgl. jedoch (Riedel, 1978, S. 27 f.). Nach modernem Verständnis, das auch der vorliegenden Arbeit zugrunde liegt, werden Nomothetik und Idiographie, Verstehen und Erklären nicht (bzw. nicht mehr) als unversöhnliche Gegensätze begriffen. Die eine Modalität schließt die andere keineswegs aus. Vielmehr stehen sie beide für komplementäre Herangehensweisen des fragenden Menschengeistes. Der französische Philosoph Paul Ricœur (1913-2005) hat sich in diesem Zusammenhang dafür ausgesprochen,

> “to proceed gradually to a more complementary and reciprocal relation between explanation and interpretation” (Ricœur, 1981, S. 158),

und vorgeschlagen, dieses Fortschreiten als eine

> “reconciliation between explanation and interpretation” (Ricœur, 1981, S. 161)

aufzufassen, in welcher es darum geht,

> „[...] to situate explanation and understanding along a unique hermeneutical arc and to integrate the opposed attitudes of explanation and understanding within an overall conception [...]“ (Ricœur, 1981, S. 161), vgl. auch (Ricœur, 1976, S. 87).

Bezogen auf den hermeneutischen Zirkel wird Verstehen damit als die Bewegung begriffen, die vom Ganzen her kommt und sich zur Entfaltung seiner Teile regt – Erklären meint entsprechend die umgekehrte Richtung. Die Differenzierung erhält ihren Sinn also nicht durch obsolet gewordene, ontologische Abgrenzungsversuche oder methodologische Hegemonialansprüche sondern durch die Akzentuierung von unterschiedlichen, einander gleichwohl befruchtenden und sich gegenseitig erhellenden Fragen und Interessen im Zusammenhang mit ein und demselben Objekt der Betrachtung.

d. Relevanz für die Lehre der Mathematik. Sicherlich ist es keine Übertreibung festzustellen, dass der nomothetisch-erklärenden Perspektive im Mathematikunterricht bisher die bei weitem größere Aufmerksamkeit zuteil wurde. Dies findet nicht nur in der überreichen Fülle an entsprechenden, für den Unterricht gedachten Operationalisierungen seinen Ausdruck. Auch der historisch-genetische Ansatz kann ja als Versuch interpretiert werden, die nomothetisch-erklärende Sichtweise in Bezug auf die geschichtliche Entwicklung des Faches zu etablieren. Idiographisch-verstehende Aspekte wurden im Mathematikunterricht demgegenüber bisher viel seltener thematisiert, obwohl sie in den meisten curricularen Vorgaben gefordert werden – allerdings oft in knapperer und diffuserer Formulierung. Ihre Akzentuierung scheint offenbar schwieriger zu sein. Eine bemerkenswerte Ausnahme stellen aber beispielsweise die Arbeiten von Gallin und Ruf über das Verhältnis des Regulären zum Singulären beim Erlernen der Mathematik dar (Gallin & Ruf, 1998). Auch die vorliegende Arbeit will als Beitrag zu einem „verstehensorientierten“ Zugang zur Mathematik im beschriebenen Sinne aufgefasst werden. Von Dilthey können wir etwas über den Wert solcher Zugänge lernen:

> „Es ist die Richtung auf die Selbstbesinnung, es ist der Gang des Verstehens von außen nach innen. Diese Tendenz verwertet jede Lebensäußerung für die Erfassung des Innern, aus dem sie hervorgeht.“ (Dilthey, 1970, S. 92)

Dieser Gedanke wirkt interessant, doch kann man fragen, ob er auf den Mathematikunterricht tatsächlich anwendbar ist. Anders gefragt: Besitzt die Mathematik Attribute, die sich einem „verstehenden“ Zugang erschließen? Die Antwort darauf lautet: Ja –, denn alles kann verstanden werden,

> „dem der Mensch wirkend sein Gepräge aufgedrückt hat“ (Dilthey, 1970, S. 148).

Von der Mathematik lässt sich dies zweifellos sagen, wie überhaupt von der gesamten Wirklichkeit, mit der Menschen in Berührung treten. In diesem Sinne schreibt z. B. der Physiker Werner Heisenberg (1901-1976):

> „Die Wirklichkeit, von der wir sprechen können, ist nie die Wirklichkeit an sich, sondern […] eine von uns gestaltete Wirklichkeit. Wenn […] eingewandt wird, dass es schließlich doch eine objektive, von uns und unserem Denken völlig unabhängige Welt gebe, […] so muss diesem […] entgegengehalten werden, dass schon das Wort ‚es gibt' aus der menschlichen Sprache stammt und daher nicht gut etwas bedeuten kann, das gar nicht auf unser Erkenntnisvermögen bezogen wäre. Für uns gibt es eben nur die Welt, in der das Wort ‚es gibt' einen Sinn hat." (Heisenberg, 1959)

Notwendige Voraussetzung für die glaubhafte Anwendung eines hermeneutischen Ansatzes, der auf das Erfassen, Beschreiben und Würdigen humanen Sinns abzielt, ist also eine gewisse Offenheit gegenüber moderat konstruktivistischen Vorstellungen vom Wesen der Mathematik. Nur unter dieser Prämisse ist es nämlich möglich, vom hypostasierten Tatsachen- bzw. Objektivitätsgehalt mathematischer Formulierungen (wie dem Satz des Pythagoras) abzusehen und sie zumindest *auch* als – sprachlich oder zeichenhaft gefasste – Lebensäußerungen von Mathematikern, von Menschen und ganzen Kulturen zu verstehen, deren Interessen und Absichten höchst unterschiedlich definiert sein können und sich beispielsweise auf konkrete Probleme der Landvermessung (S. d. P. im Anwendungszusammenhang), auf die Systematisierung eines logisch strukturierten Gefüges (S. d. P. als Theorem innerhalb einer deduktiven Theorie) oder auf die Hervorhebung von Denkmöglichkeiten (S. d. P. im strukturellen Geflecht unterschiedlicher axiomatischer Systeme) beziehen. Tatsächlich lässt der in den letzten Jahrzehnten in philosophischen, kognitionswissenschaftlichen und didaktischen Kreisen stattgehabte Wandel der Sichtweisen auf die Mathematik eine breitere Anwendung der hermeneutischen Verstehenskonzeption im Mathematikunterricht in den Bereich des Vorstellbaren und grundsätzlich Möglichen rücken.

2.3.2.1.3 Sinnhaftigkeit und die zirkuläre „Als-Struktur" des Verstehens

Zurück zum Verstehensbegriff selbst. Man kann den bisher gegebenen Definitionen vorwerfen, dass sie nichts Erhellendes bieten, wenn sie anstelle eines unklaren Begriffes – Verstehen – lediglich andere Begriffe setzen – Inneres, Bedeutung, Sinn – deren Gehalte ebenso wenig klar sind. Denn was soll „Sinn" heißen? Zunächst sei grundsätzlich darauf hingewiesen, dass der Begriff „Sinn" hier stets in der Bedeutung von „Sinnhaftigkeit" gemeint ist. „Sinnhaft" bedeutet dabei: auf Sinn bezogen und darf nicht mit dem wertenden „sinnvoll" verwechselt werden. Es ist im Kontext der Mathematik auch nicht etwa auf „widerspruchsfrei" zu reduzieren und schon gar nicht mit „anwendbar" gleichzusetzen. Sinnhaftigkeit verweist auf einen anderen, spezifisch humanen Sinn:

> „Was immer Sinn sonst noch sein mag, es ist jedenfalls ein Titel für *menschliche* Deutungen der Wirklichkeit. Sinnvoll oder sinnlos, mit einem spezifischen Sinn ausgestattet oder nicht, ist Realität nur als *menschlich* angeeignete, im Lichte *humaner* Interessen und ihrer Symbole gedeutete Realität." (Jung, 2001, S. 13, meine Hervorhebungen)

Diese Umschreibung erscheint unergiebig, verwendet sie doch zur Erklärung das zum Verstehensbegriff semantisch nahe Wortfeld des Deutens. Coreth bemerkt zu dieser Problematik:

> „Der Zirkel, der sich daraus ergibt, dass wir das Verstehen nur durch den Sinn, und den Sinn nur durch das Verstehen bestimmen können, ist jedoch kein ‚circulus vitiosus', sondern durch die Sache gefordert. Wir wissen und verstehen vieles, was wir nicht im eigentlichen Sinn definieren können, nämlich durch bestimmende Ableitung von anderem oder durch Rückführung auf anderes. Wir sind oft in der Lage,

> Begriffe nur durch ihre Wechselbeziehung aufeinander bestimmen zu können, vor allem, wenn es sich um Grundbegriffe handelt, die einer unmittelbaren Erfahrung entspringen und deshalb in dem, was sie meinen, nicht von anderem ableitbar oder auf anderes rückführbar sind. Dies zeigt, dass die Definition selbst ein sekundärer, schon abgeleiteter Modus der Erkenntnis ist, der seinem Wesen nach eine ursprünglichere Sinnerfassung voraussetzt. [...] So sind auch die Worte ‚Verstehen' und ‚Sinn' sprachlicher Ausdruck für zwei Seiten desselben Urphänomens, das nicht weiter ableitbar oder rückführbar ist, das aber in seiner Eigenart schärfer erfasst und in seiner Struktur aufgehellt werden muss." (Coreth, 1969, S. 63)

Die damit angesprochene, grundsätzliche Struktur dieses „Urphänomens" besteht nun darin, dass etwas stets *als* etwas verstanden wird. Das hermeneutische „als" *konstituiert* nach Heidegger das Verstehen, in welchem das „zuhandene Zeug" (Heidegger) dem Verstehenden stets *als* etwas begegnet. Beispiele: Etwas wird *als* Tisch, Tür, Auto, Bahnhof oder – wie im obigen Beispiel des hermeneutischen Zirkels – *als* Textaufgabe „gesehen". Das bedeutet nicht etwa, dass das „Zuhandene" als „Ding" erst identifiziert oder bloß sprachlich mit der Als-Struktur ausgedrückt wird:

> „Auto und Bahnhof sind, wie Heidegger es ausdrückt, Bewandtniszusammenhänge. Es hat eine Bewandtnis mit ihnen. Sie sind als etwas da, in dem Wahrnehmungen, Emotionen, Motivationen, Erinnerungen und Gebrauchsweisen miteinander verbunden sind." (Kurt, 2004, S. 162)

Auch wird das „Zuhandene" nicht aus Empfindungselementen erst zu einem „Ding" zusammengefügt:

> „‚Zunächst' hören wir nie und nimmer Geräusche und Lautkomplexe, sondern den knarrenden Wagen, das Motorrad. [...] Es bedarf schon einer sehr künstlichen und komplizierten Einstellung, um ein ‚reines Geräusch' zu ‚hören'." (Heidegger zit. nach (Kurt, 2004, S. 162))

Das „Sehen" und „Hören" – oder allgemeiner: das Wahrnehmen – des „Zuhandenen" ist vielmehr *vorprädikativ* und *grundsätzlich auslegend*. Ein „als-freies" Erfassen – etwa beim anstarrenden Vor-sich-haben – ist Heidegger zufolge nur ein sekundärer und zugleich höchst artifizieller Modus des zunächst sehr wohl in irgendeiner – nicht notwendig im Sinne gewisser Normen ‚richtigen' – Weise verstehenden Wahrnehmens (Heidegger, 1993, S. 149). Die zwei Momente des „*etwas* als *etwas* auslegen" sind darum im Normalfall nicht voneinander zu trennen. Es gibt kein „Zuhandenes", dem eine Bedeutung abginge oder erst zugesprochen werden müsste. Es gibt nur ein „als etwas Begegnendes" (Heidegger, 1993, S. 150). Auslegungen sind also nie voraussetzungslos, sondern basieren auf den Vorstrukturen des Verstehens, die sich in Sinnerwartungen formieren. Dies gilt natürlich auch für die subjektive Auseinandersetzung mit mathematischen Themen und Gegenständen. Die Bedeutung, die die hermeneutischen Theorien darum auch für den Mathematikunterricht besitzen, begründet sich in eben dieser Tatsache. Das oben zitierte Beispiel veranschaulicht dies: Der Al-Khwarizmi-Text begegnet einem Schüler A gemäß seiner – vielleicht im Unterricht konditionierten – Vorstrukturen *als* Textaufgabe; etwas anderes vermag er darin (zunächst jedenfalls) nicht zu sehen. Eine andere Schülerin B hingegen nimmt den Text vielleicht als Ausdruck und Thematisierung von Denkmöglichkeiten wahr, ein dritter Schüler C als Überrest und Zeugnis einer alten Kultur, eine Schülerin D als ein (weiteres) Rezept, um Gleichungen zu lösen, ein Schüler E als Lebensäußerung eines personalen Gegenübers (des Autors) etc. Hier kommt eine Pluralität von „Als-Strukturen" und „Bewandtniszusammenhängen" zum Vorschein, der im Unterricht nachzugehen sich lohnen dürfte. Die Auffassung, dass solche Strukturen und Zusammenhänge tatsächlich dem gesamten menschlichen „In-der-Welt-Sein“ zugrunde lägen, wurde für Heideggers Existenzphilosophie bekanntermaßen bestimmend. In ihr formuliert er den universellen Anspruch der Hermeneutik. Die Frage nach der Bedeutung von „Sinn“ beantwortet Heidegger wie folgt:

> „Was im verstehenden Erschließen artikulierbar ist, nennen wir Sinn.“ (Heidegger, 1993, S. 151)

Sinn gibt es also nicht als solchen und nicht aus sich heraus sondern nur infolge einer auf Vorstrukturierungen aufbauenden Auslegung. Auch hier wird demnach „Sinn“ und „Verstehen“ unauflöslich aufeinander bezogen. Hinsichtlich der Vorstrukturierungen differenziert Heidegger die Aspekte „Vorhabe“, „Vorsicht“ und „Vorgriff“. Damit ist gemeint, dass das eigene Verstehen sich daran orientiert,

- was man schon immer gewusst hat („Vorhabe“),
- welche Ziele man ansteuert („Vorsicht“) und
- von welchen Begriffen man sich leiten lässt („Vorgriff“) (Kurt, 2004, S. 163)

Verstehen in diesem Sinne stellt sich demnach als *unvermeidlich* zirkelhafte Bewegung dar:

> „Alle Auslegung [...] muss das Auszulegende schon verstanden haben [...] Wenn aber Auslegung sich je schon im Verstandenen bewegen und aus ihm her sich nähren muss, wie soll sie dann wissenschaftliche Resultate zeitigen ohne sich in einem Zirkel zu bewegen? [...] Nach Wegen Ausschau halten, ihn [den Zirkel, M. G.] zu vermeiden, ja ihn auch nur als unvermeidliche Unvollkommenheit ‚empfinden’, heißt das Verstehen von Grund aus missverstehen. [...] Das Entscheidende ist nicht, aus dem Zirkel heraus-, sondern in ihn nach der rechten Weise hineinzukommen.“ (Heidegger, 1993, S. 152, 153)

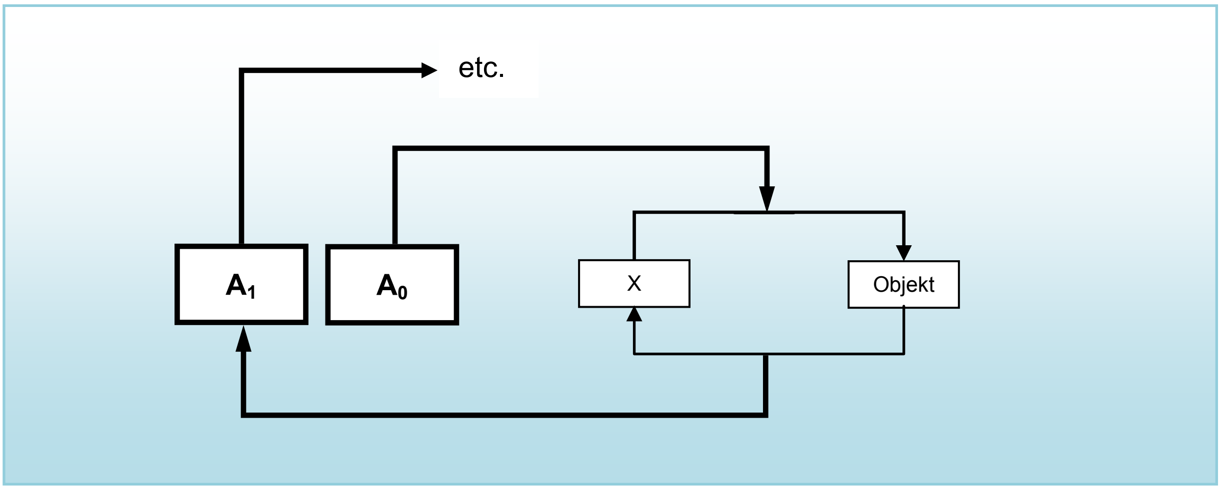


Abbildung 22: In die Zirkel der Anderen hineinkommen. Die Verstehensobjekte sind jeweilige Momentaufnahmen der Zirkel von B, C, D, E usw. (hier durch die Variable X repräsentiert).

Der letzte Satz hat in der Hermeneutik einige Berühmtheit erlangt. In den Zirkel „nach der rechten Weise hineinzukommen“, das kann in unserem Zusammenhang bedeuten, sich der Vorstrukturen des eigenen Verstehens bewusst zu werden, sie zu artikulieren und das Verstehen selbst damit reflektierbar und bis zu einem gewissen Grade auch kontrollierbar zu machen (Kurt, 2004, S. 164); denn die Entdeckung der eigenen und fremden Verstehensvorurteile vermag ein bloßes „Kreisen“ zu verhindern. Indem ich ein Verstehensobjekt betrachte, kann ich auch mich selbst wahrnehmen, mich im ganz konkreten Wortsinn in dem reflektieren, was mir vor Augen liegt: Warum, so kann sich Schüler A im obigen Beispiel fragen, sehe ich in Al-Khwarizmis Text eine „Textaufgabe“ und nicht etwas anderes? Was sagt diese Art der Auffassung letztlich über mich und mein Denken aus, über mein Verhältnis zur Mathematik und über die Welt, in der ich lebe? Was sagen mir B’s, C’s etc. Sichtweisen über deren Welt, und was hat diese mit der meinen zu tun? Wenn ich diesen Fragen nachgehe, eröffnet sich mir zugleich ein Weg zu einer sich ausweitenden, *spiralförmigen* Bewegung, in der nun auch neue und fremde Sinnstrukturen sowie Verstehenshorizonte erschlossen werden können. Dazu reicht es aber nicht, mir „nur“ meiner eigenen Vorurteile bewusst zu werden. Dies ist eine zwar notwendige, aber noch keine hinreichende Voraussetzung. Ich muss vielmehr auch in der Lage sein, einen Moment lang von meinen Vorurteilen *abzusehen*. In den Zirkel „nach der rechten Weise hineinzukommen“ heißt dann: die Verstehensbewegungen anderer wahrzunehmen und zu versuchen, sich von ihnen mitnehmen zu lassen und gleichsam in *ihren* Zirkel „hineinzukommen“, der zu meinem eigenen werden kann (Abbildung 22). Im Grunde ist es das, was wir tun müssen, wenn wir verstehen wollen, wie ein anderer denkt und versteht, egal ob dieser andere ein Al-Khwarizmi ist, der vor 1200 Jahren gelebt und geschrieben hat oder der gleichaltrige Mitschüler, der nebenan am Tisch sitzt. Verstehen ist also immer etwas Menschliches bzw. Zwischenmenschliches, es ist, wie Heidegger sagt, eine menschliche Seinsweise. Da das hermeneutische „als“ stets dieses humane Agens konnotiert – ohne das es keinen Bestand haben könnte – ist darum

> „[d]ie Urform des Verstehens [...] das menschliche Verstehen, vor allem im Gespräch.“ (Coreth, 1969, S. 64)

Gadamer bemerkt dazu,

> „[...] dass Verstehen und Verständigung nicht primär und ursprünglich ein methodisch geschultes Verhalten zu Texten meinen, sondern die Vollzugsform des menschlichen Soziallebens sind, das in letzter Formalisierung eine Gesprächsgemeinschaft ist.“ (Gadamer, 1977, S. 289)

Im Prinzip können darum alle von Menschen produzierten Zeichen und Handlungen – natürlich auch die der Mathematik – im Hinblick auf ihr hermeneutisches Als und ihre jeweiligen Bewandtniszusammenhänge befragt werden. Im Zusammenspiel von Fragen und Antworten erweist sich damit die grundsätzliche Dialogizität des Verstehens im hermeneutischen Zirkel.

2.3.2.1.4 Der Primat des dialogischen, menschlichen Verstehens

a. Menschliches und sachliches Verstehen. Verstehen im Gespräch besitzt wesensmäßig dialogische Struktur. Ich spreche mit einem Anderen und erfasse im mir Zugesprochenen den Sinn des Gemeinten, den ich im hermeneutischen Als erblicke. Das gelingt umso „besser“ (kongruenter mit den Intentionen des Anderen), je mehr ich über den Anderen weiß, je besser mir seine Eigenart, seine Herkunft und Denkweise vertraut sind. Coreth weist darauf hin, dass schon in dieser Urform des menschlichen Verstehens zwei Dimensionen aufscheinen, eine personale und eine sachbezogene:

> „Im Gespräch verständige ich mich ‚mit einem’ ‚über etwas’ [...]. Einerseits ist es ein Geschehen von Mensch zu Mensch. [...] Zugleich aber sprechen wir ‚über etwas’, wir verstehen uns ‚in etwas’. Alles Sprechen hat sein ‚Worüber’, alles Verstehen hat sein ‚Worin’. Ich kann ‚ihn’ nur verstehen, wenn ich verstehe, ‚was’ er sagt, ‚worüber’ er spricht. Ich kann darum den anderen nur verstehen im gemeinsamen

> Blick auf die Sache, von der die Rede ist. Das Verstehen ist also nicht nur ein zweipoliges Geschehen, sondern zeigt eine wesentliche Dreiecksstruktur.“ (Coreth, 1969, S. 64)

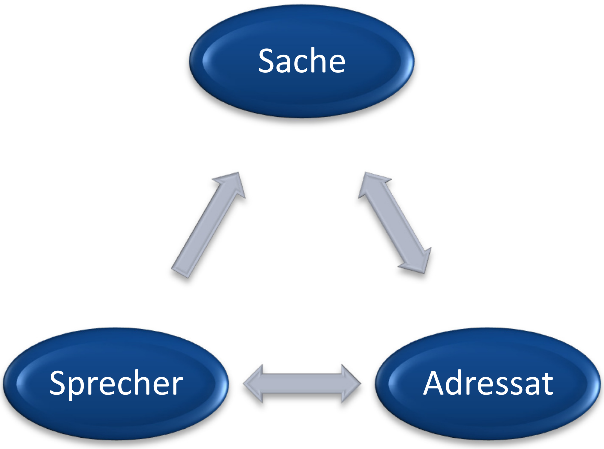


Abbildung 23: Das hermeneutische Dreieck.

Damit ist die Grundfigur des hermeneutischen Dreiecks konnotiert, die begrifflich erstmals beim lutherischen Theologen Johann Konrad Dannhauer (1603-1666) auftaucht. Jahnke hat sie für den didaktischen Kontext der Quellenlektüre modifiziert und damit für eine theoretische Beschreibung des hermeneutischen Ansatzes im Mathematikunterricht nutzbar gemacht (Jahnke H. N., 1998). Ganz grundsätzlich weist das Dreieck darauf hin, dass ein *sachliches Verstehen* weitgehend als Derivat des menschlichen Verstehens aufgefasst werden kann. Und zwar gilt dies

> „im ganzen Bereich menschlich gesetzter Zeichen. [...] In dem Zeichen liegt ein von Menschen gesetzter ‚Sinn', der sich an das Verständnis anderer Menschen richtet. Das gilt auch von wortlosen oder sprachlosen Zeichen, z. B. Verkehrszeichen, mathematischen Symbolen, Abzeichen, Wappen und Fahnen. Mit solchen Zeichen ist etwas ‚gemeint'. Weil es ein von Menschen in bestimmter Intention gesetzter und festgelegter ‚Sinn' ist, verstehe ich das Zeichen nur, wenn ich seinen ‚Sinn' erfasse. Insofern ist das Verstehen des Zeichens eine abgewandelte und dinghaft vermittelte Form menschlichen Verstehens.“ (Coreth, 1969, S. 66)

Dem ist hinzuzufügen, dass sich der von einem Menschen gesetzte „Sinn“ nicht notwendigerweise an das Verständnis *anderer* Menschen richten muss, sondern bereits an seinen Schöpfer selbst (Verstehen im Vollzug eines Selbstgesprächs).

b. Praktisches Verstehen. Eine weitere Verstehensform ist hier von Interesse, nämlich die Form des praktischen Verstehens. Sie ist es, die im alltäglichen Mathematikunterricht eine solche Dominanz entwickelt hat. Aus hermeneutischer Sicht ist sie keineswegs zu diskreditieren. Praktisches Verstehen, ein „Sich-auf-etwas-Verstehen“ also, ist zwar nicht auf die Erkenntnis theoretischer Wahrheiten oder Sinnstrukturen gerichtet. Trotzdem ist es nicht blind, da es sehr wohl Sinnbezüge oder -gefüge im Blick hat, die nun aber den praktischen Umgang selbst, das Werkzeug, seinen Zweck und seine Handhabung umfassen:

> „Auch in diesem Fall aber handelt es sich um das Verstehen menschlicher Sinnsetzung, also analog zum Verstehen etwa eines Zeichens. Auch in diesem Fall besteht daher das Verstehen nicht allein im Nach-

> vollzug dessen, was der Hersteller gedacht oder gewollt hat, sondern – relativ unabhängig davon – im Verstehen der Sache in sich selbst. Ich muss ihre Eigenart, ihren Zweck und die Weise ihrer Handhabung kennen, um sie richtig gebrauchen zu können. Dennoch ist auch solches Verstehen, da es sich auf menschliche Sinnsetzung richtet, eine Abwandlung menschlichen Verstehens, vermittelt durch Werke, in denen sich menschliches Denken und Wollen vergegenständlicht hat. Auch in dieser Art des Verstehens wachsen wir hinein in eine gemeinsame menschliche Welt.“ (Coreth, 1969, S. 68)

Diese Worte könnten uns davor bewahren, das praktische Verstehen zu sehr zu unterschätzen und ihm – wie (Skemp, 1978) das getan hat – den Charakter eines eigentlichen Verstehens abzusprechen.

c. Geschichtliches Verstehen. Von erstrangiger Bedeutung für die Hermeneutik und von großem Stellenwert für die vorliegende Arbeit ist das geschichtliche Verstehen. Auch dieses ist ein menschliches Verstehen, jedoch sachlich – durch zeitlich abständige Quellen – vermittelt. Darin ist allerdings kein fundamentaler Unterschied zu sehen; denn auch die scheinbare Unmittelbarkeit einer menschlichen, dialogischen Verstehenssituation ist nur vermittelt: durch Worte, Gesten, Mimik, Verhaltensweisen etc. Einen wirklichen Wesensunterschied kann man hingegen zwischen dem Verstehen des *gesprochenen* und des *geschriebenen* Wortes ausmachen. Ein lebendiger Mensch, mit dem ich spreche, kann meine Fragen im gemeinsamen Dialog hören und auf sie eingehen. Mit einem Text gibt es diese Art der Verständigung nicht. Dennoch bleibt das geschriebene Wort mir gegenüber nicht stumm:

> „Umso mehr muss der Text aus dem Zusammenhang verstanden, umso mehr muss nach dem geistigen und kulturellen Hintergrund, nach der Denkweise und dem Sprachgebrauch des Verfassers gefragt werden, wenn seine Worte richtig verstanden werden sollen. So aber hat auch solches Verstehen – wenn auch auf analoge Weise – dialoghaften Charakter. Ich muss mich ansprechen und belehren lassen; ich muss an den Text Fragen stellen, die ich mir von ihm beantworten lasse; ich muss mich mit dem Blick auf die Sache dem gemeinten Sinn öffnen und mein Verständnis stets offenhalten, um es vom Text her ergänzen, vertiefen und berichtigen zu lassen.“ (Coreth, 1969, S. 69)

Schülerinnen und Schüler haben nicht selten die größten Schwierigkeiten, einen vorgelegten Text in der beschriebenen Weise zum Sprechen zu bringen. Dies hängt mit der Unvertrautheit dieser Anforderung im Mathematikunterricht, mit grundsätzlich fehlenden methodischen Kenntnissen, aber auch mit einer vorab schon unzureichenden hermeneutischen Haltung zusammen.

2.3.2.1.5 Zusammenfassung der Gedanken zum Verstehensbegriff

Ich möchte die in diesem Abschnitt formulierten Gedanken wie folgt zusammenfassen:

1. Verstehen kann im Mathematikunterricht Verschiedenes bedeuten. Die üblichste Bedeutung ist die des praktischen „Sich-auf-etwas-Verstehen“. Sie artikuliert sich z. B. in der Fähigkeit, bereichstypische Aufgaben lösen zu können.
2. Darüber hinaus gibt es noch andere wichtige Formen des Verstehens. Hermeneutisches Verstehen zielt darauf ab, menschlich gesetzte Sinnstrukturen zu erfassen und bewusst zu machen. Da die uns vorliegende Mathematik das Ergebnis menschlicher Ideen und Handlungen ist und nur sprachlich bzw. zeichenhaft vermittelt werden kann, stellt sie für die Hermeneutik einen lohnenden Gegenstand dar.

3. Beim hermeneutischen Verstehen geht es grundsätzlich darum, die Zusammenhänge zu erfassen und zu erhellen, die zwischen den Teilen eines zu verstehenden Ganzen und diesem Ganzen selbst bestehen.
4. Solches Verstehen vollzieht sich in einer oszillierenden Bewegung zwischen den Polen eines *hermeneutischen Zirkels* mit dem Ziel der – wenigstens partiellen – Horizontverschmelzung. Bei der Lektüre von Texten wird diese Bewegung modellhaft und prototypisch realisiert.
5. Verstehen besitzt wesensmäßig eine „Als-Struktur". Das hermeneutische „Als" hängt von den Vorstrukturen der Interpretierenden ab und führt bei ein und demselben Verstehensobjekt zu durchaus je verschiedenen Sinnerwartungen und -attribuierungen.
6. Jegliches Verstehen ist letztlich ein Derivat menschlichen Verstehens. Es besitzt daher dialogische Struktur und bedeutet ein Hineinwachsen in eine gemeinsame menschliche Welt.
7. Hermeneutisches Verstehen meint insbesondere die Frage nach dem Sinn, den ein anderer Mensch beim Betrachten und Gestalten der gemeinsamen Welt gefunden bzw. erzeugt hat. Die Frage richtet sich auf das Spektrum möglicher Bewandtniszusammenhänge und verfolgt das Ziel der Selbst- und Fremdvergewisserung.

In den letzten Punkten drückt sich die Erkenntnis aus, dass eine gemeinsame menschliche Welt – die natürlich auch Mathematik umfasst – immer von verschiedenen Standpunkten aus gesehen und mit Sinn gefüllt wird. Dies führt auf den Begriff der Perspektivität, der als nächster Aspekt des hermeneutischen Verstehensbegriffs diskutiert werden soll.

2.3.2.2 Perspektivität

Im Zusammenhang mit mathematikgeschichtlichen Unterrichtsinitiativen ist es wichtig zu vermerken, dass die Begriffe Perspektive und Standortgebundenheit in den historischen Wissenschaften wie auch im (guten) Geschichtsunterricht schon lange eine Selbstverständlichkeit sind. Sie stehen dort für eine grundlegende Einsicht in die Möglichkeiten, Grenzen und Eigenarten historischer Forschung und Erkenntnis. Zugleich bestimmen sie die prinzipiell unüberwindlichen Schranken der (früheren und heutigen) Geschichtsschreibung. Was ist damit gemeint? Nach unserer Definition aus Abschnitt 2.2.1 sind Quellen „Objektivationen und Materialisierungen vergangenen menschlichen Handelns und Leidens". Als solche tragen sie stets eine menschliche „Signatur", eine – unbewusste oder bewusste, verschleierte oder offen zu Tage tretende, jedenfalls aber unvermeidliche – Konnotation der Ansichten, Interessen und Vorlieben ihrer jeweiligen Urheber. Diese Feststellung gilt aber nicht nur für Quellen, sondern ganz allgemein: In allem, was Menschen erschaffen, bringen sie stets auch ihre spezifischen Sichtweisen und Standpunkte zum Ausdruck. Diese Einsicht klingt heutzutage viel selbstverständlicher, als sie es früher gewesen ist. In der Antike wurde zumindest an Historiographie und Geschichtsforschung ein tatsächlich ganz anderer Anspruch formuliert. So schreibt der für die europäische Geistesgeschichte einflussreiche antike Satiriker Lucian von Samosata (120-180), dass die Seele eines Historikers sein solle wie ein Spiegel,

> „der die Bilder der Gegenstände so zurückgibt, wie er sie aufgefasst hat, ohne das Geringste an ihrer Farbe oder Gestalt zu verändern." (Lucian, 1867, S. 176: sog. „Spiegelmetapher")

Im Verlaufe der Jahrhunderte haben sich solche Metaphern zwar gewandelt – Leopold von Ranke (1795-1886) sprach etwa von der „nackten Wahrheit ohne allen Schmuck" (Ranke, 1824, S. 28) –, die in ihnen zum Ausdruck kommende Vorstellung jedoch, wonach der Historiker die reine Wahrheit aufdecken und darstellen könne, das, was wirklich geschehen ist', hat überdauert:

> „Ich wünschte mein Selbst gleichsam auszulöschen, und nur die Dinge reden, die mächtigen Kräfte erscheinen zu lassen […]" (Ranke, 1867-90, S. 103)

Im Dienste der geschichtlichen ‚Wahrheit' galt es, Augen- und Ohrenzeugen zu befragen, oder – wenn nicht mehr verfügbar – Quellen heranzuziehen und hinsichtlich ihrer Zuverlässigkeit, Aussagekraft und Konsistenz zu beurteilen und zu selegieren. Bestimmt wurde diese Tätigkeit von der Annahme,

> „[...] dass es jenseits der Quellen eine objektive Wirklichkeit gäbe, [...] an die sich Quellen mehr oder minder annähern oder sich von ihr entfernen könnten." (Pandel, 2003, S. 11 f.)

Dass die Arbeit des Historikers schon immer einen Standpunkt voraussetzt, war lange Zeit – bis hin zu Ranke – ignoriert oder sogar negiert worden, obgleich schon der lutherische Theologe und Historiker Johann Martin Chladenius (1710-1759) in seiner „Allgemeinen Geschichtswissenschaft" notiert hatte, dass sich diejenigen sehr irren,

> „die verlangt haben, dass ein Geschichtsschreiber wie ein Mensch ohne Religion, ohne Vaterland, ohne Familie anstellen soll, und sie haben nicht bedacht, dass sie unmögliche Dinge fordern." (Chladenius, 1985, S. 151)

Chladenius war es schließlich, der mit seiner Idee vom „Sehepunkt" als einer der ersten mit den alten Idealvorstellungen aufräumte. Mit dem „Sehepunkt" bezeichnet er

> „diejenigen Umstände unserer Seele, unseres Leibes und unserer ganzen Person, welche machen oder Ursach sind, dass wir uns eine Sache so und nicht anders vorstellen [...] Wie nämlich der Ort unseres Auges, und insbesondere die Entfernung von einem Vorwurf, die Ursache ist, dass wir ein solches Bild und kein anderes von der Sache bekommen, also gibt es bei allen unseren Vorstellungen einen Grund, warum wir die Sache so und nicht anders erkennen: und dieses ist der Sehe-Punkt von derselben Sache." (Chladenius, 1969, S. 187, § 309)

Für die Entwicklung der Hermeneutik wurden diese Begrifflichkeit und die damit verbundenen Ideen sehr gewichtig. Hier soll es uns um ihre mögliche Bedeutung auf dem Gebiet der Mathematik und deren Lehre gehen. Von dem britischen Zahlentheoretiker Godfrey Harold Hardy (1877-1947) stammt ein schönes Zitat, an das wir anknüpfen können:

> "I have myself always thought of a mathematician as in the first instance an observer, who gazes at a distant range of mountains and notes down his observations. His object is simply to distinguish clearly and notify to others as many different peaks as he can. […] If he wishes someone else to see it, he *points to it*, either directly or through the chain of summits which led him to recognize it himself. When his pupil also sees it, the research, the argument, the *proof* is finished." (Hardy, 1929, S. 18)

Stellen wir diese Worte einmal – etwas anachronistisch – neben das folgende Chladenius-Zitat:

> „[Wenn] viele Personen einerley Sache auf einer gewissen Seite ansehen, so betrachten sie dennoch dieselbe deswegen noch nicht auf einerley Art; sondern sie beweisen ferner daran eine verschiedene Einsicht.“ (Chladenius, 1985, S. 102)

Thomas Kuhn diskutiert diesen Befund nach Maßgabe seines „Denkwelten-“ und Paradigmen-Modells im wissenschaftstheoretischen Zusammenhang. Er betrachtet dabei Proponenten zweier konkurrierender Paradigmen und stellt fest:

> „Da sie in verschiedenen Welten arbeiten, sehen die beiden Gruppen von Wissenschaftlern verschiedene Dinge, wenn sie vom gleichen Punkt aus in die gleiche Richtung schauen. Das heißt aber wiederum nicht, dass sie alles sehen können, was sie wollen. Beide betrachten sie die Welt, und was sie anschauen, hat sich nicht verändert. Aber in manchen Bereichen sehen sie verschiedene Dinge, und sie sehen sie in unterschiedlichen Beziehungen zueinander. Darum kann ein Gesetz, das einer Gruppe von Wissenschaftlern nicht einmal demonstriert werden kann, einer anderen gelegentlich intuitiv als evident erscheinen.“ (Kuhn, 1967, S. 161)

Beim letzten Satz können wir z. B. an die negativen Zahlen und die Rechenregel $(-1) \cdot (-1) = +1$ denken, welche im Unterrichtsprojekt der vorliegenden Arbeit eine Rolle spielt.

Interessant mag die Frage erscheinen, *was* es eigentlich genau ist, worauf ein Mathematiker seinen Blick richtet. Hardy spricht metaphorisch von einem entfernten Gebirge, das er betrachtet, und meint damit vielleicht eine mathematische Realität, die nach seiner Auffassung auch jenseits dessen existiert, was Menschen über sie sagen und schreiben (können). Wir wollen auf die komplizierte erkenntnistheoretische Problematik, die sich hier andeutet, nicht eingehen, da ihre Diskussion den Rahmen und die Ansprüche der vorliegenden Arbeit bei weitem überschreiten würde. Für den hermeneutisch orientierten Unterricht ist die Frage nach der gemutmaßten Objektivität mathematischer Aussagen und Gegenstände zwar nicht vollkommen unwichtig, aber doch zweitrangig. An erster Stelle steht hingegen das Interesse an dem, was Menschen über Mathematik *gesagt* und *geschrieben* haben – dabei kann es zunächst gleichgültig sein, ob das, worüber sie schreiben, als Objekt eo ipso tatsächlich in irgend einer Weise *existiert* oder aber ein bloßes Konstrukt, eine Erfindung von Menschen ist. Worauf es ankommt, ist die Existenz einer sprachlich oder in Zeichen fixierten Wahrnehmung und Erkenntnis. Sie – und nur sie – ist der Ausgangspunkt eines möglichen Diskurses. Ein Blick auf die Abbildung 24 mag diese Auffassung veranschaulichen. Die Abbildung zeigt in der Bildmitte in allegorischer Darstellung die Weltgeschichte, die *Historia Universalis*. Diese steht kurz davor, von Chronos, der im Hintergrund bereits den Hammer schwingt, zertrümmert zu werden: die Zeit vernichtet alles, was vergangen ist. Bevor dies geschieht, zeichnet Clio, die Muse der Geschichtsschreibung, schnell ein Abbild der Weltgeschichte, verfertigt also eine Aufzeichnung des Geschehenen. Dabei kann sie natürlich nur erfassen, was sie von ihrem Blickwinkel aus zu sehen bekommt. Hätte sie an einer anderen Stelle gesessen (oder gestanden), hätte sie andere Ansichten gehabt und dementsprechend ein anderes Bild entworfen. Das Bild verrät uns also nicht nur etwas über den Gegenstand – die Geschichte – sondern auch einiges über den Standpunkt und die Umstände dessen, der den Gegenstand betrachtet und aufgezeichnet hat. Etwas anderes ist außerdem wichtig: Nach Vernichtung der *Historia* durch Chronos ist eine unmittelbare Wahrnehmung ihrer selbst nicht mehr möglich. Jede Kenntnis von ihr ist vermittelt – zum Beispiel durch Bilder wie das der Clio. Gerade so ist auch jedwede Kenntnis der Geschichte notwendigerweise vermittelt, und zwar zuallererst durch Quellen, später auch durch Darstellungen.

Abbildung 24: Clio (unten links), die Muse der Geschichtsschreibung, entwirft ein Bild der Weltgeschichte, bevor Chronos (rechts) dieselbe zerschlägt. Allegorische Darstellung, die auch die Perspektivität des Wahrgenommenen veranschaulicht. Aus (Pandel, 2003, S. 96).

Worin bestehen nun die Parallelen zur Mathematik? Zunächst einmal gab es – und gibt es noch – an die Mathematik die gleichen Objektivitätsansprüche wie an die Geschichte – sie sind grob und vereinfachend gesprochen ein gemeinsames Kennzeichen des antiken und mittelalterlichen Denkens (Coreth, 1969, S. 104). Doch genau wie für das Gespräch über die vergangene *Historia* immer auf Bilder, Texte etc. zurückgegriffen werden muss, so ist der mathematische Diskurs nur möglich durch Vermittlung von Zeichen und Symbolen, die die Mathematik zur jeweiligen Ausdrücklichkeit bringen. Unabhängig davon, ob Mathematik objektiv existiert oder nicht – und falls ja, auf welche Weise –, können wir uns nicht über mathematische Sachverhalte austauschen, ohne die von Menschen gesetzten Zeichen zu lesen (oder zu hören) und selbst Zeichen zu notieren (oder auszusprechen). Diese aber enthalten, wie alle Zeichensetzungen, unvermeidlich die Perspektiven ihrer Urheber und stehen nicht mehr nur für das reine Objekt, das sie (falls es existiert) zum Ausdruck bringen sollen.

Die Tatsache, dass Mathematik zeichenvermittelt kommuniziert wird, hat einige zu der Ansicht geführt, dass sie schlechthin nichts weiter *ist* als ein System von Zeichen und syntaktischen Regeln, vgl. z. B. (Hoffmann & Plöger, 2000). Im Rahmen der vorliegenden Arbeit müssen wir nicht darüber diskutieren, ob solche Versuche, Mathematik in ein wie auch immer geartetes Korsett von Definitionen und Bestimmungen zu zwingen, erfolgreich sein können oder nicht. Persönlich glaube ich es aus verschiedenen Gründen nicht, aber darauf kommt es hier nicht an. Was letztlich nur zählt, ist die Einsicht, dass der mathematische *Diskurs* allein zeichenvermittelt geschieht. Die Hermeneutik beschreibt in diesem Zusammenhang den Versuch, den menschlichen, perspektivisch gefilterten Sinn zu entbinden, dessen Träger die Zeichen sind.

Der Begriff der Perspektivität besitzt neben der intersubjektiven oder interkulturellen Dimension auch eine diachrone. Für die historischen Wissenschaften galt, wie schon erwähnt, lange der Primat der Augenzeugenschaft. Zeitlicher Abstand zu vergangenen Ereignissen wurde als Erkenntnishindernis begriffen. Doch schon der evangelische Theologe Gottlieb Jacob Planck (1751-1833) äußerte die Ansicht, dass

> „[j]ede große Begebenheit […] immer für die Zeitgenossen, auf welche sie wirkt, in einen Nebel verhüllt [ist], der sich nur nach und nach, oft kaum nach einigen Menschenaltern wegzieht." (Planck, zit. nach (Koselleck, 1985, S. 191))

Hierin klingt die Ahnung an, dass die zeitliche Distanz zu einem geschichtlichen Ereignis die Erkenntnischancen nicht notwendigerweise mindert, sondern auch vergrößern kann. Die Realisierung immer neuer und frischer Sichtweisen durch nachfolgende Generationen kann einen insgesamt reicheren (multiperspektivischen) Blick auf einen historischen Sachverhalt gewähren.

Schleiermacher hatte noch gefordert, die zeitlichen, kulturellen und geistigen Differenzen zum Autor eines Textes durch einen „Akt der Einfühlung" zu minimieren. Seine „divinatorische" Verstehensmethode war

> „die, welche, indem man sich selbst gleichsam in den andern verwandelt, das Individuelle unmittelbar aufzufassen sucht." (Schleiermacher, 1995, S. 169)

Sie meinte also das gleiche methodische Ideal der „Selbstauslöschung", das Ranke schon für die Historik formuliert hatte. Dieses Prinzip geht von der an sich ehrenwerten Absicht aus, den anderen „aus sich selbst heraus", d. h. im Horizont der ihm eigenen Denk- und Ausdrucksweisen zu verstehen. Es ist nun aber immer wieder sowohl auf die Unmöglichkeit wie auch auf die eigentliche Fragwürdigkeit dieser Forderung aufmerksam gemacht worden (Gadamer, 1990, S. 270 ff.). Unmöglich ist sie, weil ich den zeitlichen Abstand niemals überspringen und mich in den anderen „verwandeln" kann. Sie ist aber auch fragwürdig, weil durch eine solche Gleichsetzung „mein" Verstehen des Anderen aufgehoben würde:

> „Denn ‚ich' bin es, der den Anderen verstehen soll und will, von meinem Standpunkt her, aus meiner Zeit, meiner geschichtlichen Situation und meinem konkreten Verständnishorizont. Ich muss den Anderen – als Anderen – hören, um zu verstehen, was mir von ihm her aus seiner Zeit und in seinem Geist zugesprochen wird. Könnte ich in Identität seinen Standort einnehmen, so gäbe ich, wenn es möglich wäre, mich selbst auf; es wäre nicht mehr ‚mein' Verstehen des Anderen." (Coreth, 1969, S. 130)

Nach Gadamer kann es im Verstehen nicht darum gehen, die Differenz aufzuheben sondern sie bewusst zu machen und

> „[…] den Abstand der Zeit als eine positive und produktive Möglichkeit des Verstehens zu erkennen. Er ist nicht ein gähnender Abgrund, sondern ist ausgefüllt durch die Kontinuität des Herkommens und der Tradition, in deren Lichte uns alle Überlieferung sich zeigt." (Gadamer, 1990, S. 302)

Durch diese „Wirkungsgeschichte“, in der wir alle stehen, kommt es zur „wesenhaften Vorurteilshaftigkeit alles Verstehens“ (Gadamer, 1990, S. 274). Diese aber braucht das Verstehen keineswegs zu vereiteln, solange man als Interpret versucht, sich ihrer bewusst zu werden (und zu bleiben). Es geht dabei gerade um

> „[…] die abhebende Aneignung der eigenen Vormeinungen und Vorurteile“ (Gadamer, 1990, S. 274)

als Voraussetzung wissenschaftlichen Verstehens, vgl. dazu auch (Gadamer, 1990, S. 306)).

Betrachten wir erneut das Beispiel des im Unterrichtsprojekt dieser Untersuchung thematisierten Quellentextes: Al-Khwarizmi hat seine Einsichten in einen bestimmten Bereich dessen, was wir heute als Gleichungslehre auffassen, unter Nutzung des zu seiner Zeit und in seiner Kultur üblichen Zeichenvorrates zum Ausdruck gebracht. Spätere und heutige Mathematiker bzw. Lehr- und Schulbuchautoren tun das gleiche mit den Mitteln, die ihnen in ihren jeweiligen Kontexten zu Gebote stehen. Aber zu glauben, dass wir Heutigen mit unserem Formelkalkül im Grunde das gleiche meinen wie einst Al-Khwarizmi mit seiner rhetorisch-geometrischen al-jabr, ist zumindest kühn. Es gibt keinen stichhaltigen Grund zu der Annahme, dass er sich im gleichen hermeneutischen Zirkel bewegt wie wir, und der Unterschied nur darin besteht, dass wir ihm gewissermaßen ein paar Umdrehungen voraus sind und inzwischen über andere Zeichen verfügen. Eine solche Denkweise kennzeichnet typischerweise eine vorschnelle, vereinnahmende Erkenntnishaltung dem Anderen gegenüber. Wir müssen sehr wohl damit rechnen, dass Al-Khwarizmi seine al-jabr möglicherweise ganz anders gesehen und verstanden hat als wir, (dass, um nur ein Detail zu nennen, die in seinem Buch enthaltenen Zeichnungen keineswegs, wie bei uns, veranschaulichenden Charakter hatten). Sich einer solchen, fremden Perspektive zu öffnen, kann tatsächlich mühsam sein, ist aber gerade die Essenz dessen, was wir mit einer hermeneutischen Orientierung ansteuern:

> „Die Erkenntnis von Anderem setzt voraus, dass man von sich absehen kann. Dieses Absehen ist kein Wegsehen, sondern ein Hinsehen von einem anderen Standpunkt aus. […] Die Unterscheidung zwischen eigenen und fremden Perspektiven ist der Kern der hermeneutischen Differenzierungsarbeit.“ (Kurt, 2004, S. 173)

Damit komme ich zum zentralen Aspekt der „Begegnung mit dem Fremden“, der den bildenden Wert einer hermeneutischen Orientierung des Unterrichts durch seine didaktisch-pädagogischen Implikationen bestimmt.

2.3.2.3 Die Begegnung mit dem Fremden

Das Bewusstsein für die Existenz und die Ansprüche des „Anderen“ im Sinne eines gänzlich und radikal Fremden ist erst relativ spät, nämlich erst im Laufe des 20. Jahrhunderts, in das abendländische Denken eingedrungen. Zuvor wurde dem „Anderen“ – wenn es denn überhaupt in den Blick genommen wurde – durchaus keine wesensmäßige Eigenart zuerkannt. Ganz im Gegenteil: Im Alltag, in der Philosophie und in den Wissenschaften dominierte die Auffassung, wonach zunächst einmal *der* „Andere“ (als Person) im Wesentlichen der „Selbe“ war, nämlich einer, der sich von mir (als Selbem) nicht grundlegend unterschied, sondern lediglich eine zweite (dritte etc.) Ausführung meiner selbst darstellte, insofern er ja mit dem gleichen Grundvermögen ausgestattet war, das mir und allen Menschen als Voraussetzung des Daseins und Verhaltens eigen ist:

> „Unterschiede zwischen dem einen und dem Anderen wurden von den meisten Philosophen nur als akzidentell, also nicht konstitutiv und daher auch nicht bedenkenswert betrachtet. Grundsätzlich, so der gängige Standpunkt, eigneten jedem Individuum die gleichen wesentlichen Konstituentien, [sic] die es den Denkern erlaubten, alle Individuen wie ein einziges Individuum zu behandeln." (Ruchlak, 2004, S. 207)

Diese Auffassung war in der Antike und im Mittelalter, als es noch keinen Subjektbegriff moderner Prägung gab, ganz selbstverständlich (Ruchlak, 2004, S. 209). Sie hielt aber auch in der Neuzeit noch lange vor. So spricht beispielsweise Friedrich Schleiermacher (1768-1834) von einem „minimum", das „jeder von jedem […] in sich trägt" (Schleiermacher, 1974, III, S. 105) und sein Schüler August Boeckh (1785-1867) schreibt:

> „Wenngleich nämlich die Individuen verschieden sind, stimmen sie doch auch wieder in vielen Beziehungen überein; daher kann man eine fremde Individualität bis auf einen gewissen Grad durch Berechnung verstehen, in manchen Aeusserungen aber vollständig durch lebendige Anschauung begreifen, die im Gefühl gegeben ist […] ὃμοιοσ ὃμοιον γιγνώσκει – das ist das Einzige, wodurch Verständniss [sic] möglich ist: Congenialität ist erforderlich." (Boeckh, 1966, S. 86)

Das hierin zum Ausdruck kommende gedankliche Motiv, das Friedrich Ast (1778-1841) die „Einheit und Gleichheit alles Geistigen" genannt hat, ohne welche

> „[a]lles Verstehen und Auffassen nicht nur einer fremden Welt, sondern überhaupt eines Anderen […] schlechthin unmöglich" wäre (Ast, 1808, S. 167 f.)

wurde erst von Edmund Husserls (1859-1938) Phänomenologie im 20. Jahrhundert systematisch hinterfragt. Ruchlak bemerkt hierzu:

> „Dass erst mit Husserl der Schwierigkeit der Intersubjektivität explizit nachgegangen wurde, lässt sich möglicherweise dadurch erklären, dass die philosophische Tradition vor Husserl damit beschäftigt war, die Erfahrung und Konstitution der Welt aus dem Prinzip des sich selbst gewissen Subjekts, des eigenen Ego, zu untersuchen (wie es u.a. Descartes und Fichte unternommen haben), teilweise auch um den Preis solipsistischer Konsequenzen." (Ruchlak, 2004, S. 217)

Hörisch vermutet daneben den Einfluss des Monotheismus als vorrangige Ursache des – wie er es nennt – „Einheitsdeliriums", des „Vereinheitlichungsfurors" im hermeneutischen Denken (Hörisch, 1988, S. 67; 61).

Wir können und wollen an dieser Stelle nicht die unzähligen Beiträge durchgehen, die im Zusammenhang mit der Frage nach dem Fremden formuliert und diskutiert worden sind. Stattdessen werden wir uns auf das beschränken, was für unseren Kontext, den Kontext von Mathematik und Unterricht, relevant ist. In ihm stellt sich gerade bei der Begegnung mit historischen Quellen die Frage nach dem Umgang mit Fremdem *und* Eigenem sowie seinem jeweiligen Verhältnis zum gemutmaßten Mathematisch-Absolutem. Ich will erläutern, was damit gemeint ist: Der Literaturwissenschaftler Péter Szondi (1929-1971) hat einmal bemerkt, dass sämtliche Verstehenstheorien seiner Zeit (1967/68) immer noch die „Aufhebung bzw. Abschaffung des historischen Abstands zwischen Text und Leser" und die Beseitigung der dadurch gegebenen Fremdheit im Sinne hätten (Szondi, 1975, S. 19). Mit dieser Äußerung verweist Szondi auf hermeneutische Traditionen, die bis zu den Frühgriechen zurückverfolgt werden können (Müller C. W., 1965), und die im Kern übereinstimmend besagen, dass der Weg zum Verstehen über „Verähnlichung“ führen müsse. Diese ist aber prinzipiell auf zwei mögliche Weisen denkbar:

1. Als (reflexive) Angleichung des verstehenden Subjekts an das zu verstehende Objekt im Sinne einer Selbstnegierung des Subjekts (so bei Ranke und Schleiermacher). In der Tradition der Griechen und der mittelalterlichen Scholastik wurde dabei vor allem im Zusammenhang von Ethik, Theologie und Erkenntnistheorie auf die Verähnlichung mit Gott (ὁμοίωσις θεῷ) angespielt. In den Hermeneutiken von Ranke, Schleiermacher und Boeck ist von „Gleichsetzung mit dem Verfasser“ (Schleiermacher, 1974, S. 84) die Rede, davon, „sich in die Individualität eines Autors hineinzuversetzen“ (Boeckh, 1966, S. 119) und das „Selbst gleichsam auszulöschen“ (Ranke, 1867-90, S. 103). Aus der Psychologie Jean Piagets (1896-1980) kennen wir für das Motiv der Selbst-Angleichung an das Fremde den Begriff „Akkommodation“. Dieser beschreibt im Zusammenhang der intellektuellen Entwicklung von Kindern den Vorgang der Anpassung vorhandener kognitiver Strukturen und Schemata an die Widerständigkeit der äußeren Welt (Piaget, 1973).

2. Die Verähnlichung ist auch als transitive Angleichung des zu verstehenden Objekts an das verstehende Subjekt im Sinne einer „Anzwingung“ (Gadamer) des Fremden denkbar. So spricht etwa Friedrich Schiller (1759-1805) davon, dass der menschliche Geist danach strebe, „alles um sich herum seiner eigenen vernünftigen Natur zu assimilieren“ (Schiller, o. J., S. 183). Georg Wilhelm Friedrich Hegel (1770-1831) drückt diesen Gedanken noch plastischer aus, indem er sagt:

> „Das Begreifen ist das Durchbohren des Gegenstandes, der nicht mehr mir gegenübersteht, und dem ich das Eigene genommen habe, das er für sich gegen mich hatte. Wie Adam zu Eva sagt, du bist Fleisch von meinem Fleisch, und Bein von meinem Bein, so sagt der Geist, dieß ist Geist von meinem Geist und die Fremdheit ist verschwunden.“ (Hegel, 1964, S. 51)

In der Piagetschen Entwicklungspsychologie wird ein analoger Vorgang „Assimilation“ genannt. Gemeint ist damit die Anpassung der äußeren Welt an die eigenen kognitiven Strukturen, besser gesagt: die Veränderung der Wahrnehmung, so dass diese zu den vorhandenen Strukturen und Schemata passt (Piaget, 1973). Den Terminus Assimilation hatte schon Schiller verwendet.

In der Mathematik und ihrer Lehre hat man sich – unter dem überwiegenden Eindruck einer als *objektiv*, überzeitlich und kulturunspezifisch (Gerdes, 1997, S. 911) empfundenen begrifflichen Idealstruktur – zumeist für den zweiten Weg der Verähnlichung, den Weg der transitiven Angleichung (bzw. Anzwingung) des Fremden, entschieden. Im Fremden wurde demnach vorrangig das jeweils Eigene erkannt, das seinerseits wiederum als eine – allen vorhergehenden Darstellungen überlegene – Annäherung oder gar Verkörperung der *einen*, für absolut gehaltenen Mathematik betrachtet wurde. Im Früheren erblickte man folglich nur Varianten des Heutigen in seinen jeweiligen, zumeist defizitär beurteilten Prototypien (Mehrtens, 1976/1992, S. 25).

Die folgenden Beispiele mögen diesen oft anzutreffenden Umgang mit dem Fremden und Anderen in der Mathematik illustrieren. Das erste Beispiel soll darüberhinaus die Durchdringung eines mathematischen Quellentextes nach den bis hierher entfalteten hermeneutischen Gesichtspunkten exemplarisch vorführen.

2.3.2.4 Beispiel: Die Einführung der irrationalen Zahlen im Unterricht

2 Die Unzulänglichkeit der rationalen Zahlen

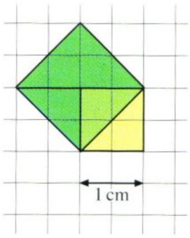


Fig. 1

1 Wie groß ist der Flächeninhalt des kleinen (großen) Quadrats in Fig. 1? Gib auch jeweils die Länge der Seiten und der Diagonalen der beiden Quadrate an.

2 Mit drei verschiedenen Taschenrechnern wurde $\sqrt{2}$ mit der Wurzeltaste bestimmt (Fig. 2).
a) Zeige durch Quadrieren, dass keiner der Dezimalbrüche $\sqrt{2}$ genau angibt.
b) Weshalb kann kein Dezimalbruch mit endlich vielen Stellen beim Quadrieren die Zahl 2 ergeben?

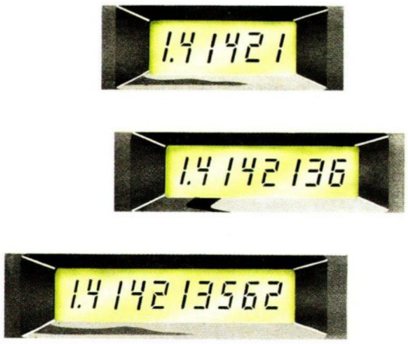


Fig. 2

Abbrechende Dezimalbrüche und nicht abbrechende periodische Dezimalbrüche beschreiben rationale Zahlen, man kann sie als Brüche der Form $\frac{p}{q}$ mit $q \neq 0$ und ganzen Zahlen p, q schreiben. Kann man auch für die Maßzahl der Länge eines Quadrates mit einem Flächeninhalt von $2\,\text{cm}^2$ einen Bruch finden?
Schon in der Antike wurde von Euklid gezeigt, dass man $\sqrt{2}$ nicht als Bruch darstellen kann. Fig. 3 zeigt in heutiger Sprechweise diesen Beweis von Euklid.

Euklid (um 300 v. Chr.) lehrte Mathematik in Alexandria. Von ihm stammt die bedeutendste Gesamtdarstellung der antiken griechischen Mathematik, die „Elemente". Der Beweis von Fig. 3 steht im 10. Buch der Elemente.

Es wird angenommen, dass es eine Darstellung von $\sqrt{2}$ als Bruch gibt. Also kann im Schritt (1) $\sqrt{2}$ auch als ein gekürzter Bruch $\frac{p}{q}$ geschrieben werden.
Mit den Schritten (2)–(5) wird gezeigt, dass p eine gerade Zahl ist.
Mit den Schritten (6)–(8) wird gezeigt, dass auch q eine gerade Zahl ist.
(5) und (8) ergeben einen Widerspruch zu (1), wonach $\frac{p}{q}$ ein gekürzter Bruch ist.
Dieser Widerspruch zeigt:
Es kann keine Darstellung von $\sqrt{2}$ als Bruch geben; $\sqrt{2}$ kann keine rationale Zahl sein.

$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.
Beweis des Euklid:
(1) Angenommen: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ mit teilerfremden Zahlen p und q.
(2) $2 = \frac{p^2}{q^2}$
(3) $2q^2 = p^2$
(4) p^2 ist durch 2 teilbar.
(5) p ist durch 2 teilbar. Setze $p = 2r$.
(6) $q^2 = 2r^2$
(7) q^2 ist durch 2 teilbar.
(8) q ist durch 2 teilbar.
Dies ist mit (5) ein Widerspruch zu (1).

Fig. 3

Folgerung für die Geometrie:
In Fig. 4 ist $\overline{AB} = 5 \cdot \overline{PQ}$ und $\overline{CD} = 3 \cdot \overline{PQ}$.
Man sagt dazu:
Die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ haben als ein **gemeinsames Maß** die Länge der Strecke $\overline{PQ}$, denn $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ lassen sich als natürliche Vielfache von $\overline{PQ}$ darstellen.
Damit ist auch $\overline{AB} = \frac{5}{3}\overline{CD}$.

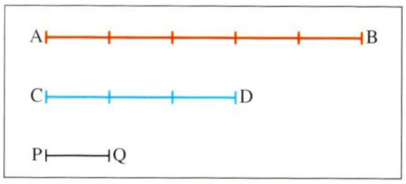


Fig. 4

Dass man nun $\sqrt{2}$ nicht als Bruch darstellen kann, bedeutet auch: Seite und Diagonale eines Quadrats haben kein gemeinsames Maß.
Vergleiche dazu Aufgabe 9.

8

Abbildung 25: Auszug aus einem Schulbuch (Schmid & Weidig, 1996).

Das Beispiel stammt aus dem Schulunterricht und ist dem Themenkreis der reellen Zahlen entnommen. Reelle Zahlen werden in der Schule üblicherweise in Klasse 9 durchgenommen. Im Verlauf ihrer Behandlung wird oft gleich zu Beginn die Irrationalität von $\sqrt{2}$ bewiesen. In einem weit verbreiteten Schulbuch für das Gymnasium finden wir nun im entsprechenden Kapitel unter der Fragestellung „Kann man auch für die Maßzahl der Länge eines Quadrates mit einem Flächeninhalt von 2 cm^2 einen Bruch finden?“ den üblichen (modern formulierten) Widerspruchsbeweis (Abbildung 25). Zusammen mit einer bildlichen Darstellung Euklids (365- ca. 300) wird den Lernenden gegenüber behauptet,

(1.) dass schon in der Antike von Euklid gezeigt worden sei, dass $\sqrt{2}$ nicht als Bruch dargestellt werden könne, und
(2.) dass der im Kasten abgedruckte Beweis (Fig. 3 in Abbildung 25) „im 10. Buch der Elemente“ stehe.

Was hat es damit auf sich?

2.3.2.4.1 Die gemutmaßte Herkunft des Irrationalitätsbeweises: Euklid X, 115a/117

Die graphische Aufmachung des Kastens (Fig. 3 in Abbildung 25) legt es tatsächlich nahe, an die Übertragung eines Quellenauszuges zu denken. Die Schulbuchautoren meinen mit ihrer Anspielung auf die „Elemente“ offenbar den berühmten Satz X, 115a (nach anderer Zählung X, 117) über die Inkommensurabilität von Quadratseite und -diagonale, dessen Authentizität allerdings seit langem als sehr unwahrscheinlich gilt. Zwar ist er in den meisten Euklidkodizes überliefert (Becker O., 1957, S. 51). Es gibt jedoch gute Gründe zu der Annahme, dass es sich um einen späteren Einschub handelt:

- Die Positionierung des Satzes am Ende passt nicht zur Systematik des X. Buches.
- Die am Anfang des Beweises enthaltene Vorausschau auf den zu entwickelnden Beweisgang (s. u.) ist für Euklid ganz und gar untypisch.
- Die Beweismethodik geht vollständig an den Inhalten des X. Buches vorbei.
- Der Satz behandelt einen Spezialfall eines lange zuvor in aller Allgemeinheit bewiesenen Satzes (X, 9).

Viele Mathematikhistoriker glauben, dass ein späterer Autor diesen vermutlich alten, wahrscheinlich schon in voreuklidischer Zeit entdeckten Satz samt Beweis dem X. Buch (als X, 115a bzw. X, 117) angehängt habe (Thaer, 2003, S. 462), (Heath, 1956, I, S. 61, 67, 79; III, S. 2). Eine genaue Datierung fällt schwer. Immerhin darf man vermuten, dass schon Aristoteles (384-322) nicht nur das im Satz behandelte Phänomen der Inkommensurabilität sondern speziell auch die hier zum Beweis angewandte Methode der *reductio ad absurdum* gekannt hat, wie mehrere Stellen aus seinen Schriften zu belegen scheinen (Anal. prior. I, 23 p. 41a, 26-27; Met. 983a, 19 ff. und 1053a, 14 f.), vgl. (Becker O., 1957, S. 51), (Heath, 1970, S. 22), (Szabó, 1994, S. 291). Auch wenn es über das Alter des Satzes Kontroversen gibt, so besteht doch Einigkeit darüber, dass er jedenfalls nicht zum Euklidischen Urtext der „Elemente“ gehört und schon gar nicht von Euklid persönlich entdeckt worden ist. Es ist daher gut möglich, dass Euklid selbst *gar nichts* mit dem Satz oder seinem Beweis zu tun hat.

In diesem Zusammenhang ist anzumerken, dass die schöpferischen Leistungen Euklids immer wieder in Frage gestellt worden sind. Stellvertretend sei van der Waerden zititert, der sagt, dass Euklid „bestimmt kein großer Mathematiker“ gewesen sei (van der Waerden, Erwachende Wissenschaft, 1966, S. 323). Große Teile des schwierigen X. Buches der „Elemente“ habe er von Theaitetos (ca. 415-369) übernommen, den Inhalt der ebenfalls hochstehenden Bücher V und XII verdanke er Eudoxos von Knidos (410/08-355/47) (a. a. O. und (Gericke, 2003, S. 239)). Die Leistungen Euklids seien vor allem auf didaktischem Gebiet zu sehen (van der Waerden, 1966, S. 323).

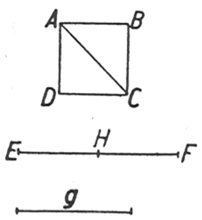
Angesichts dieser etwas unübersichtlichen Urheberschaft darf man von einem Schulbuch wie dem in Abbildung 25 zitierten sicher nicht zuviel des Guten verlangen. Die mathematikgeschichtliche Forschungslage bei Euklid X, 115a/117 ist andererseits so eindeutig (und auch hinlänglich bekannt), dass es verwundern und ärgern muss, wenn immer noch eine längst widerlegte Behauptung an exponierter Stelle aufgewärmt und Lernenden gegenüber als Faktum ausgegeben wird: dass nämlich der hier zitierte Beweis „von Euklid“ stamme.

2.3.2.4.2 Analyse von Euklid X, 115a/117

Doch werfen wir nun einen Blick auf den Satz selbst. In der 1933-37 erschienenen und in Deutschland sehr verbreiteten Euklid-Ausgabe von Clemens Thaer (1883-1974) wird er wie folgt wiedergegeben:

(§ 115a) (117; L. 92).

[*Man soll zeigen, daß in jedem Quadrat die Diagonale der Seite linear inkommensurabel ist.*]



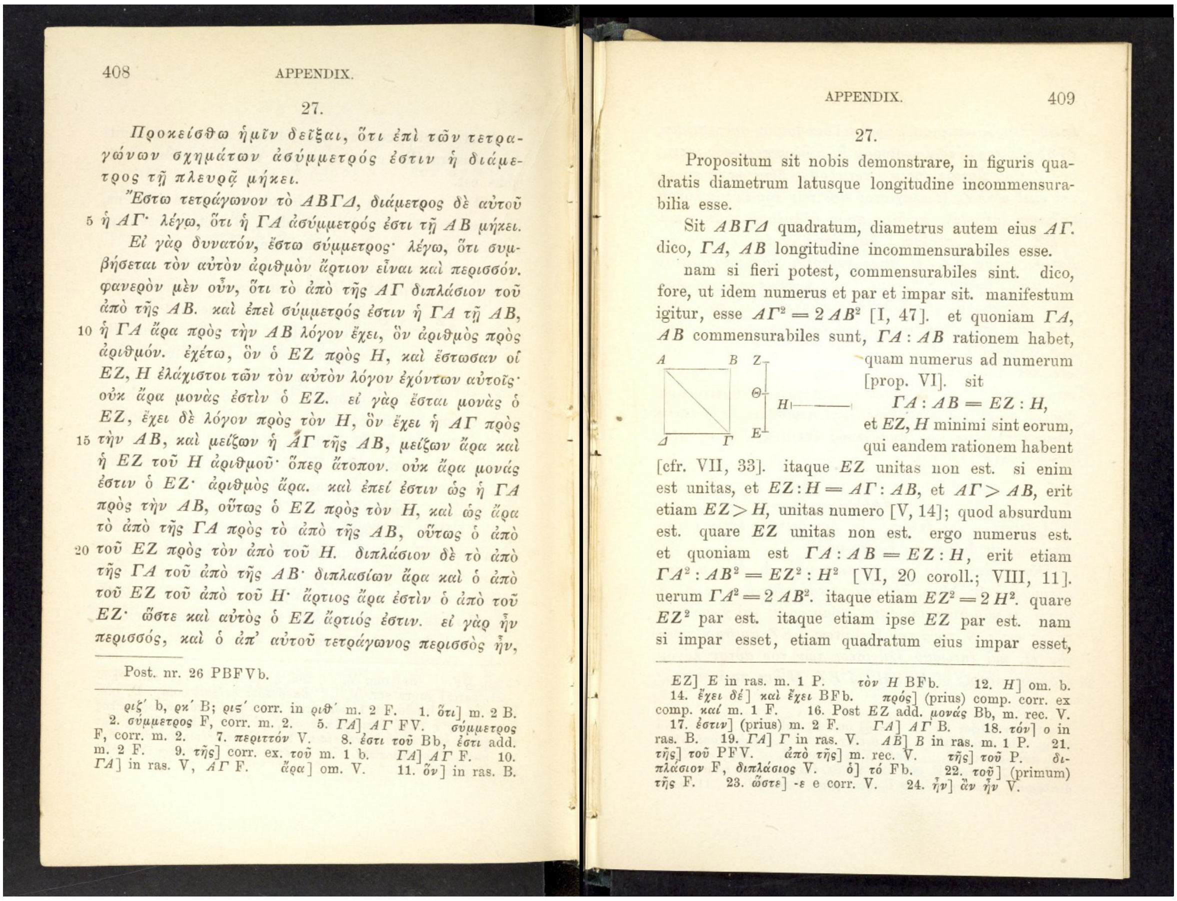
Es sei *ABCD* ein Quadrat, *AC* seine Diagonale. Ich behaupte, daß $CA \cup CB$

Wenn möglich, sei es nämlich (linear) kommensurabel. Ich behaupte, dann muß herauskommen, daß dieselbe Zahl gerade und ungerade wäre.

Offenbar ist $AC^2 = 2\,AB^2$ (I, 47). Da $CA \cap AB$ hätte *CA* zu *AB* ein Verhältnis wie eine Zahl zu einer Zahl (X, 5). Das Verhältnis sei $EF : g$; hier seien *EF*, *g* die kleinsten unter den Zahlen, die dasselbe Verhältnis haben wie sie (VII, 33). Dann ist *EF* nicht die Einheit. Wäre nämlich *EF* die Einheit und hätte zu *g* das Verhältnis $= AC : AB$, wo $AC > AB$, dann wäre $EF >$ eine Zahl, nämlich *g* (V, Def. 5). Dies wäre Unsinn. *EF* ist also nicht die Einheit, wäre also eine Zahl. Da $CA : AB = EF : g$, wäre auch $CA^2 : AB^2 = EF^2 : g^2$ (VI, 20 Zus.; VIII, 11). Aber $CA^2 = 2\,AB^2$, also wäre auch $EF^2 = 2\,g^2$ (V, Def. 5), also EF^2 gerade. (VII, Def. 6). Folglich wäre auch *EF* selbst gerade; wäre es nämlich ungerade, so wäre auch sein Quadrat ungerade, da, wenn man beliebigviele ungerade Zahlen zusammensetzt und ihre Anzahl ungerade ist, auch die Summe ungerade ist (IX, 23). *EF* wäre also gerade; man halbiere es in *H*. Da *EF*, *g* die kleinsten von den Zahlen sein sollten, die dasselbe Verhältnis haben, wären sie gegeneinander prim (VII, 22). Hier wäre *EF* gerade, also *g* ungerade; denn wenn es gerade wäre, mäße die Zwei die Zahlen *EF*, *g* – jede gerade Zahl hat ja eine Hälfte – während sie gegeneinander prim sein sollten; dies ist unmöglich. *g* ist also nicht gerade, wäre also ungerade. Da $EF = 2\,EH$, wäre $EF^2 = 4\,EH^2$. Nun war $EF^2 = 2\,g^2$, also wäre $g^2 = 2\,EH^2$. Also wäre g^2 gerade, also nach dem Gesagten *g* gerade. Dabei war es ungerade. Dies ist unmöglich. Also ist *CA* nicht $\cap$ *AB* – q. e. d.]

(Thaer, 2003, S. 313 f.)

Thaers Übersetzung stützt sich auf die auch heute noch maßgebende Euklid-Ausgabe von Johan Ludvig Heiberg (1854-1928) (Heiberg, 1886). Auffällig an ihr ist die reiche Verwendung von symbolischen Zeichen, die in der Antike unbekannt waren. Schon frühere Übersetzer hatten bei ihren Euklid-Übertragungen dem Text solche Symbole hinzugefügt, vermutlich in der Absicht, dessen Lesbarkeit zu erhöhen. Die folgende Abbildung 26 zeigt zur Illustration auf der linken Seite den von Heiberg erschlossenen griechischen Originaltext und rechts seine Übersetzung ins Lateinische (Heiberg, 1886, S. 408-411), der er noch eine erläuternde Zeichnung beigegeben hat.



408 APPENDIX.

27.

Προκείσθω ἡμῖν δεῖξαι, ὅτι ἐπὶ τῶν τετραγώνων σχημάτων ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ διάμετρος τῇ πλευρᾷ μήκει.

Ἔστω τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΑ ἀσύμμετρός ἐστι τῇ ΑΒ μήκει.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω σύμμετρος· λέγω, ὅτι συμβήσεται τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἄρτιον εἶναι καὶ περισσόν. φανερὸν μὲν οὖν, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ, ἡ ΓΑ ἄρα πρὸς τὴν ΑΒ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἐχέτω, ὃν ὁ ΕΖ πρὸς Η, καὶ ἔστωσαν οἱ ΕΖ, Η ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· οὐκ ἄρα μονὰς ἐστὶν ὁ ΕΖ. εἰ γὰρ ἔσται μονὰς ὁ ΕΖ, ἔχει δὲ λόγον πρὸς τὸν Η, ὃν ἔχει ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΒ, καὶ μείζων ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ, μείζων ἄρα καὶ ἡ ΕΖ τοῦ Η ἀριθμοῦ· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα μονάς ἐστιν ὁ ΕΖ· ἀριθμὸς ἄρα. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως ὁ ΕΖ πρὸς τὸν Η, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Η. διπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ· διπλασίων ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τοῦ Η· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ· ὥστε καὶ αὐτὸς ὁ ΕΖ ἄρτιός ἐστιν. εἰ γὰρ ἦν περισσός, καὶ ὁ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνος περισσὸς ἦν,

Post. nr. 26 PBFVb.

ρις' b, ρκ' B; ρις' corr. in ριθ' m. 2 F. 1. ὅτι] m. 2 B. 2. σύμμετρος F, corr. m. 2. 5. ΓΑ] ΑΓ FV. σύμμετρος F, corr. m. 2. 7. περιττόν V. 8. ἐστι τοῦ Bb, ἐστι add. m. 2 F. 9. τῆς] corr. ex. τοῦ m. 1 b. ΓΑ] ΑΓ F. 10. ΓΑ] in ras. V, ΑΓ F. ἄρα] om. V. 11. ὅν] in ras. B.

APPENDIX. 409

27.

Propositum sit nobis demonstrare, in figuris quadratis diametrum latusque longitudine incommensurabilia esse.

Sit $AB\Gamma\Delta$ quadratum, diametrus autem eius $A\Gamma$. dico, ΓA, AB longitudine incommensurabiles esse.

nam si fieri potest, commensurabiles sint. dico, fore, ut idem numerus et par et impar sit. manifestum igitur, esse $A\Gamma^2 = 2\,AB^2$ [I, 47]. et quoniam ΓA, AB commensurabiles sunt, $\Gamma A : AB$ rationem habet, quam numerus ad numerum [prop. VI]. sit

$$\Gamma A : AB = EZ : H,$$

et EZ, H minimi sint eorum, qui eandem rationem habent [cfr. VII, 33]. itaque EZ unitas non est. si enim est unitas, et $EZ : H = A\Gamma : AB$, et $A\Gamma > AB$, erit etiam $EZ > H$, unitas numero [V, 14]; quod absurdum est. quare EZ unitas non est. ergo numerus est. et quoniam est $\Gamma A : AB = EZ : H$, erit etiam $\Gamma A^2 : AB^2 = EZ^2 : H^2$ [VI, 20 coroll.; VIII, 11]. uerum $\Gamma A^2 = 2\,AB^2$. itaque etiam $EZ^2 = 2\,H^2$. quare EZ^2 par est. itaque etiam ipse EZ par est. nam si impar esset, etiam quadratum eius impar esset,

EZ] E in ras. m. 1 P. τὸν Η BFb. 12. Η] om. b. 14. ἔχει δέ] καὶ ἔχει BFb. πρός] (prius) comp. corr. ex comp. καί m. 1 F. 16. Post ΕΖ add. μονάς Bb, m. rec. V. 17. ἐστιν] (prius) m. 2 F. ΓΑ] ΑΓ B. 18. τόν] ο in ras. B. 19. ΓΑ] Γ in ras. V. ΑΒ] Β in ras. m. 1 P. 21. τῆς] τοῦ PFV. ἀπὸ τῆς] m. rec. V. τῆς] τοῦ P. διπλάσιον F, διπλάσιος V. ὁ] τό Fb. 22. τοῦ] (primum) τῆς F. 23. ὥστε] -ε e corr. V. 24. ἦν] ἂν ἦν V.

Abbildung 26: Faksimile aus Heibergs Euklid-Ausgabe, Seiten 408 und 409.
Quelle: (Max-Planck-Institut for the History of Science).

Es ist durchaus instruktiv, eine Aussage wie *διπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς* ΓΑ *τοῦ ἀπὸ τῆς* ΑΒ (links, 5. Zeile von unten), die von Heiberg mit „Verum ΓΑ^2 = 2 ΑΒ^2“ (rechts, 3. Zeile von unten), von Thaer mit „Aber CA^2 = 2 AB^2“ wiedergegeben wird, zum Kontrast einmal interlinear zu übersetzen:

διπλάσιον	*δὲ*	*τὸ*	*ἀπὸ*	*τῆς*	ΓΑ	*τοῦ*
Doppeltes	(aber)	das	von	der	*[Strecke]* **ΓΑ** *[Ausgehende]*	des

ἀπὸ	*τῆς*	ΑΒ·
von	der	*[Strecke]* **AB** *[Ausgehenden].*

Eine mögliche Übertragung in akzeptables Deutsch könnte zum Beispiel lauten: *Das Doppelte des von AB Ausgehenden ist das von CA Ausgehende.* Oder, schon sehr viel freier: *Das Doppelte des Quadrates über AB ist das Quadrat über CA* oder, noch freier: *ist dem Quadrat über CA gleich.* An diesem Beispiel lässt sich gut erkennen, welche Erleichterungen die symbolischen Schreibweisen in den Übertragungen bei Heiberg und Thaer für die Lesbarkeit aus heutiger Sicht bedeuten. Zugleich wird aber auch der Grad der Bearbeitung bzw. „Verfälschung“ deutlich, den der ursprüngliche Text hierdurch erleidet (vgl. auch Kap. 2.2.1.2).

Heiberg hatte den Lehrsatz, an dessen Authentizität er mit gutem Grund zweifelte, in einen Anhang verbannt (app. 27). In der älteren, deutschen Übersetzung der „Elemente“ von Johann Friedrich Lorenz (1737-1807) aus dem Jahre 1781 bildete er hingegen noch als Satz 117 den Schlusspunkt des X. Buches:

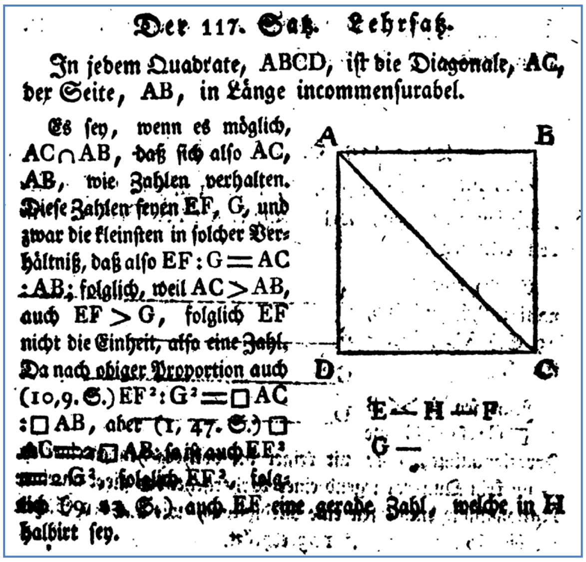
Der 117. Satz. Lehrsatz.

In jedem Quadrate, ABCD, ist die Diagonale, AC, der Seite, AB, in Länge incommensurabel.

Es sey, wenn es möglich, AC $\cap$ AB, daß sich also AC, AB, wie Zahlen verhalten. Diese Zahlen seyen EF, G, und zwar die kleinsten in solcher Verhältniß, daß also EF : G = AC : AB; folglich, weil AC > AB, auch EF > G, folglich EF nicht die Einheit, also eine Zahl. Da nach obiger Proportion auch (10, 9. S.) $EF^2 : G^2 = \square AC : \square AB$, aber (I, 47. S.) $\square AC = 2\square AB$. So ist auch $EF^2 = 2G^2$, folglich EF^2, folglich (9, 23. S.) auch EF eine gerade Zahl, welche in H halbirt sey. Da EF, G, die kleinsten Zahlen in ihrer Verhältniß, folglich Primzahlen zu einander sind, aber EF gerade ist: so kann nicht auch G gerade seyn, weil sonst EF, G, von der Zahl Zwey gemessen würden; welches, weil sie Prinzahlen zu einander sind, unmöglich ist. Demnach ist G ungerade.

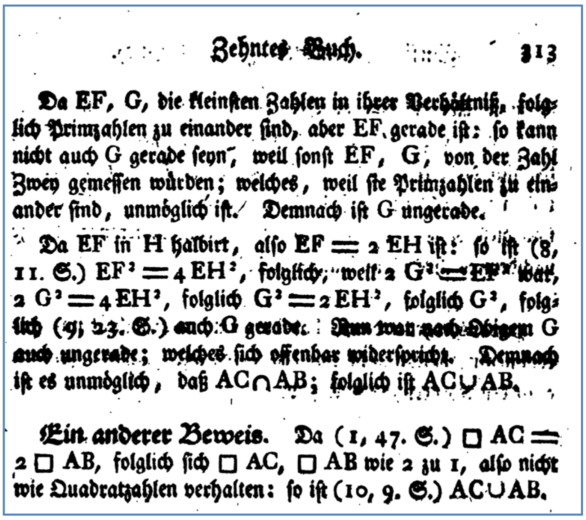
Da EF in H halbirt, also EF = 2 EH ist: so ist (8, 11. S.) $EF^2 = 4\,EH^2$, folglich, weil $2G^2 = EF^2$ war, $2G^2 = 4\,EH^2$, folglich $G^2 = 2\,EH^2$, folglich G^2, folglich (9, 23. S.) auch G gerade. Nun war nach Obigem G auch ungerade; welches sich offenbar widerspricht. Demnach ist es unmöglich, daß AC $\cap$ AB; folglich ist AC $\cup$ AB.

(Lorenz, 1824, S. 312 f.)


Der 117. Satz. Lehrsatz.

In jedem Quadrate, ABCD, ist die Diagonale, AC, der Seite, AB, in Länge incommensurabel.

Es sey, wenn es möglich, AC$\cap$AB, daß sich also AC, AB, wie Zahlen verhalten. Diese Zahlen seyen EF, G, und zwar die kleinsten in solcher Verhältniß, daß also EF : G = AC : AB; folglich, weil AC > AB, auch EF > G, folglich EF nicht die Einheit, also eine Zahl. Da nach obiger Proportion auch (10, 9. S.) $EF^2 : G^2 = \square AC : \square AB$, aber (I, 47. S.) $\square AC = 2\square AB$, so ist auch $EF^2 = 2G^2$, folglich EF^2, folglich (9, 23. S.) auch EF eine gerade Zahl, welche in H halbirt sey.


Zehntes Buch. 313

Da EF, G, die kleinsten Zahlen in ihrer Verhältniß, folglich Primzahlen zu einander sind, aber EF gerade ist: so kann nicht auch G gerade seyn, weil sonst EF, G, von der Zahl Zwey gemessen würden; welches, weil sie Primzahlen zu einander sind, unmöglich ist. Demnach ist G ungerade.

Da EF in H halbirt, also EF = 2 EH ist: so ist (8, 11. S.) $EF^2 = 4\,EH^2$, folglich, weil $2\,G^2 = EF^2$ war, $2\,G^2 = 4\,EH^2$, folglich $G^2 = 2\,EH^2$, folglich G^2, folglich (9, 23. S.) auch G gerade. Nun war nach Obigem G auch ungerade; welches sich offenbar widerspricht. Demnach ist es unmöglich, daß AC$\cap$AB; folglich ist AC$\cup$AB.

Ein anderer Beweis. Da (1, 47. S.) $\square AC = 2\square AB$, folglich sich $\square$ AC, $\square$ AB wie 2 zu 1, also nicht wie Quadratzahlen verhalten: so ist (10, 9. S.) AC$\cup$AB.

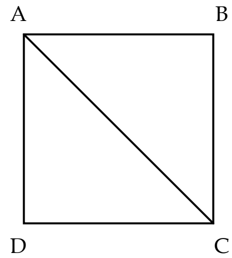
Abbildung 27: Faksimile aus Lorenz’ Euklid-Ausgabe, Seiten 312 und 313.

Auch Lorenz verwendet, wie wir sehen, symbolische Schreibweisen – u. a. die später bei Thaer wieder auftauchenden $\cap$ und $\cup$ –, unterscheidet aber interessanterweise zwischen einer hochgestellten 2 bei

Quadraten aus Zahlen („diese *Zahlen* seyen EF, G“) und einem □-Symbol bei Quadraten über Strecken. Ferner fällt auf, dass Lorenz‘ Version nicht die Vorausschau auf den Beweisgang enthält, die wir in Heibergs Fassung finden (*λέγω, ὅτι συμβήσεται τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἄρτιον εἶναι καὶ περισσόν*, zu deutsch: ich sage, dass dann herauskommen wird, dass dieselbe Zahl gerade und ungerade wäre.)

Thomas L. Heath (1861-1940) lässt in seiner Übersetzung aus dem Jahr 1908 den fraglichen Satz im Haupttext ganz aus, umschreibt den Beweis aber im Vorwort zum dritten Band seiner Ausgabe:

> The proof formerly appeared in the texts of Euclid as X. 117, but it is undoubtedly an interpolation, and August and Heiberg accordingly relegate it to an appendix. It is in substance as follows.



> Suppose AC, the diagonal of a square, to be commensurable with AB, its side. Let $\alpha : \beta$ be their ratio expressed in the smallest numbers.
> Then $\alpha > \beta$ and therefore necessarily > 1.
> Now $AC^2 : AB^2 = \alpha^2 : \beta^2$,
> and, since $AC^2 = 2\,AB^2$, [Eucl. I, 47]
> $\alpha^2 = 2\beta^2$
> There α^2 is even, and therefore α is even.
> Since $\alpha : \beta$ is in its lowest terms, it follows that β must be *odd*.
> Put $\alpha = 2\gamma$;
> therefore $4\gamma^2 = 2\beta^2$,
> or $\beta^2 = 2\gamma^2$,
> so that β^2, and therefore β, must be *even*.
> But β was also odd;
> which is impossible.

(Heath, 1956, III, S. 2)

Was zeigen nun all diese Auszüge, wenn wir sie mit dem zuvor zitierten Schulbuchtext vergleichen? Zunächst: Der griechische Urtext enthält – im Gegensatz zu allen vorliegenden Übersetzungen oder Übertragungen – keinerlei Symbole. Dann aber vor allem dieses: *In keinem der Auszüge, weder im griechischen Original noch in den Übersetzungen noch in der Übertragung von Heath, ist davon die Rede, dass die Irrationalität von $\sqrt{2}$ bewiesen werde.* Vielmehr stimmen Urtext und alle Übertragungen – außer derjenigen des Schulbuches – darin überein, dass es um die Inkommensurabilität von Diagonale und Seite im Quadrat gehe. Dies aber ist ein rein geometrischer Sachverhalt. Inkommensurabel heißen bei Euklid bekanntlich Größen, wenn sie nicht mit demselben Maß gemessen werden können, gemäß der 1. Definition des X. Buches:

> ***Σίμμετρα μεγέθη λέγεται τὰ τῷ αὐτῷ μέτρῳ μετρούμενα, ἀσύμμετρα δέ, ὧν υηδὲν ἐδέχεται κοινὸν μέτρον γενέσθαι.***

(Heiberg, 1886, S. 12)

> (X, Def. 1.) Kommensurabel heißen Größen, die von demselben Maß gemessen werden, und inkommensurabel solche, für die es kein gemeinsames Maß gibt.

(Thaer, 2003, S. 213)

Euklid differenziert hiervon noch einen zweiten Typus von *quadratischer* (In-)Kommensurabilität, der sich allerdings ausdrücklich auf *Strecken* (gr. *εὐθεῖαι* / bei Heiberg lat. *rectae*) und nicht auf allgemeine *Größen* (gr. *μεγέθη* / bei Heiberg lat. *magnitudines*) bezieht. In X, 115a/117 handelt es sich jedoch nicht um eine quadratische sondern um eine *lineare* Inkommensurabilität (gr. *μήκει* / bei Heiberg lat. *longitudine*), so dass diese zweite Definition hier keine Anwendung findet. Quadratseite und -diagonale sind ja sehr wohl quadratisch kommensurabel. Gericke hat darauf hingewiesen, dass dieser Befund – lineare Inkommensurabilität bei gleichzeitiger quadratischer Kommensurabilität – eigentlich einen hervorragenden Grund dafür hätte abgeben können, den Satz an den Anfang des X. Buches zu stellen. Er hätte dann nämlich sofort aufgezeigt, dass die dort abgehandelte, verwickelte Theorie über lineare und quadratische Kommensurabilitäten ihre Berechtigung habe (Gericke, 2003, S. 239). Nun aber steht er nicht am Anfang, sondern am Ende des X. Buches, und die in ihm verwendete Beweismethode ist eine vollkommen andere als die in diesem Buch allgemein gelehrte (X, 2). Diese Umstände gehören zu den oben bereits genannten Indizien, die dafür sprechen, dass es sich bei diesem Satz um eine spätere Einfügung handelt. Die Größen jedenfalls, um die es in ihm geht, sind tatsächliche *Strecken,* nämlich gerade die Seite und Diagonale eines Quadrates, und diese Strecken bedeuten nicht etwa symbolisierte Zahlen, wie man spekulieren könnte. Das geht nicht allein aus der Verwendung des Wortes *μήκει* (von *μῆκος*, Länge) hervor sondern auch aus der Tatsache, dass Pseudo-Euklid die *Größen ΓA* und *AB* begrifflich von den *Zahlen* (gr. *ἀριθμὸς* / bei Heiberg lat. *numerus*) *EZ* und *H* (bzw. *EF* und *G* oder *g*) scharf abgrenzt. Diese Differenzierung zwischen (geometrischen) Größen und Zahlen – die im Übrigen ein generelles Merkmal der „Elemente“ mit ihren getrennten Proportionenlehren (in Buch V bzw. Buch VII) darstellt – kommt auch in allen hier vorgelegten Übersetzungen klar zum Ausdruck: Am deutlichsten bei Lorenz, der sie durch die jeweilige Verwendung von □-Symbolen (bei Strecken) bzw. Exponenten (bei Zahlen) besonders hervorhebt. Der Sachverhalt, den es zu beweisen gilt, stellt aber letztlich auch deshalb keine verhüllte Zahlentheorie dar, weil es zwischen Zahlen für Euklid gar keine Inkommensurabilität geben kann; denn:[*]

> (VII, 4.) Jede kleinere Zahl ist von jeder größeren Zahl entweder ein Teil (gr. *μέρος* / lat. bei Heiberg pars) oder eine Menge von Teilen (gr. *μέρη* / lat. bei Heiberg partes),

wobei die Begriffe „Teil“ sowie „Menge von Teilen“ zuvor wie folgt erklärt werden:

> (VII, Def. 3) Teil einer Zahl ist eine Zahl, die kleinere von der größeren, wenn sie die größere genau mißt.

> (VII, Def. 4) Und Menge von Teilen, wenn sie sie nicht genau mißt.

Demnach ist 3 also ein *Teil* von 9. 6 hingegen ist eine *Menge von Teilen* von 9, wobei diese Menge aus zwei Dreien besteht. 7 ist ebenfalls eine *Menge von Teilen* von 9, und zwar besteht sie aus sieben Einheiten. Die Einheit ist in dieser Definition – wiewohl sie nicht als Zahl gilt (VII, Def. 1 und 2) – als Teil zugelassen (Thaer, 2003, S. 439). Dies zeigt der Beweis zu Satz VII, 4, in welchem davon die Rede ist, dass „jede der Einheiten“ einer gewissen Zahl ein Teil einer anderen Zahl sein müsse. An eine Form von „zahlentheoretischer Inkommensurabilität“ ist also, selbst bei teilerfremden Zahlen, nicht zu denken. Aufs klarste finden wir diesen Sachverhalt in X, 7 ausgedrückt:

> (X, 7) Inkommensurable Größen verhalten sich nicht wie Zahlen zueinander.

[*] Alle folgenden, deutschen Euklid-Zitate nach (Thaer, 2003).

Obwohl nun in X, 115a/117 ganz gewiss nicht von Zahlen sondern von Strecken die Rede ist, stützt sich die Beweisargumentation zum großen Teil auf arithmetische Definitionen und Sätze. Die Verbindung zur Zahlentheorie wird dabei durch den impliziten Verweis auf X, 5 und X, 6 hergestellt:

> (X, 5) Kommensurable Größen (μεγέθη / bei Heiberg lat. *magnitudines*) haben zueinander ein Verhältnis wie eine Zahl zu einer Zahl (ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν / bei Heiberg lat. *numerus ad numerum*).
>
> (X, 6) Haben zwei Größen zueinander ein Verhältnis wie eine Zahl zu einer Zahl, dann müssen die Größen kommensurabel sein.

Die Frage der Kommensurabilität wird dadurch in eine Frage nach Zahlenverhältnissen verwandelt. Diese werden durch die 20. Definition im (zahlentheoretischen) Buch VII beschrieben:

> (VII, Def. 20) Zahlen stehen in Proportion (ἀνάλογόν / bei Heiberg lat. *proportionales*), wenn die erste von der zweiten Gleichvielfaches oder derselbe Teil oder dieselbe Menge von Teilen ist wie die dritte von der vierten.

Es fällt auf, dass der Begriff des Verhältnisses (λόγος/ratio) *an sich* hier gar nicht erklärt wird (wohl aber im Buch V über Größen, dort in Def. 3), sondern nur die Wendung, dass Zahlen *in Proportion stehen*. Was bedeutet das? Den eben zitierten Definitionen für *Teil* und *Menge von Teilen* entnimmt man, dass damit offenbar Zahlen gemeint sind, die *dasselbe Verhältnis* aufweisen. Ein Beispiel solcher Zahlen ist: 2, 3, 12, 18. Eine verbreitete Schreibweise für die zur Rede stehende Verhältnisgleichheit sieht wie folgt aus: 2 : 3 :: 12 : 18. Damit wird im Einklang etwa mit VII, 4 zum Ausdruck gebracht, dass die 12 eine Menge von zwei Teilen •••••• der 18 ist, die 18 selbst aber aus dreien dieser Teile besteht. Im Beweis von VII, 4 wird ausdrücklich vom *größten* gemeinsamen Maß der Zahlen gesprochen, so dass man im Hinblick auf 12 und 18 beispielsweise nicht sagen sollte, dass die 12 eine Menge von vier Teilen ••• der 18 ist, die 18 selbst aber sechs dieser Teile ausmachen; denn 3 ist nicht der *größte* gemeinsame Teiler von 12 und 18 sondern 6.

Im Beweis von X, 115a/117 wird nun unter der Annahme, dass Quadratseite und -diagonale kommensurabel seien, ihr Verhältnis gemäß X, 5 mit dem Verhältnis zweier Zahlen identifiziert, die bereits die kleinsten Zahlen mit solchem Verhältnis sein mögen. Auch diese Forderung steht im Einklang mit dem Beweis von VII, 4. Die Zahlen haben also keine gemeinsamen Teiler. Dass das Verhältnis der *Quadrate* über Seite und Diagonale gleich dem Verhältnis der *Quadrate* dieser Zahlen ist (bei Lorenz: $EF^2 : G^2 = \square AC : \square AB$), erscheint, wenn man an algebraische Umformungen gewöhnt ist, trivial. Pseudo-Euklid aber muss die quadrierten Verhältnisse zunächst mit Hilfe der Sätze VI, 20 Cor. (für die geometrischen *Größen* AC und AB) sowie VIII, 11 (für die *Zahlen* EZ und H) auf die einfachen Verhältnisse zurückführen. Dass die jeweiligen Quadrate dann tatsächlich einander gleich sind, wenn die einfachen Verhältnisse übereinstimmen, ist eine richtige Annahme, die allerdings, wie Heath bemerkt hat (Heath, 1956, III, S. 31), nirgendwo in den „Elementen" ausdrücklich bewiesen wird. Es handelt sich um eine einfache Schlussfolgerung, die aus V, 22 gezogen werden könnte. Die Umkehrung hingegen lässt sich nicht so leicht beweisen, wird aber von Pseudo-Euklid ebenfalls als evident angenommen. Indem er nun die aus dem Satz des Pythagoras (I, 47) oder auch durch einfache Anschauung gewonnene Beziehung zwischen den Quadraten über der Diagonale und der Seite auf die Quadrate der Zahlen EZ und H überträgt, – wofür er V, Def. 5 benötigt – gelangt er zum Schluss, dass EZ eine gerade Zahl sein muss. Da EZ und H teilerfremd sind, folgt daraus sofort, dass H ungerade ist. Nach einer weiteren Substitution aber erweist sich H zugleich als gerade. Hierin liegt der Widerspruch, der die anfangs aufgestellte Hypothese – dass Quadratseite und -diagonale kommensurabel seien – zu Fall bringt.

Wie wir daraus ersehen, beruht der hier vorgelegte Beweis der Inkommensurabilität also zu großen Teilen auf arithmetischen bzw. zahlentheoretischen Argumenten. Er ließe sich zwar auf Grundlage von X, Def. 2 auch allein mit geometrischen Mitteln nach dem Prinzip der Wechselwegnahme führen (vgl. (Heath, 1956, III, S. 19), (Gericke, 2003, S. 100 f.). Ob aber dieser Weg tatsächlich in der Antike beschritten wurde, ist den spärlich überlieferten Quellen nicht mehr zu entnehmen. In X, 115a/117 ist es jedenfalls nicht geschehen.

2.3.2.4.3 Zahlenverhältnisse und Bruchrechnung bei den Griechen

Wie verhält sich nun die Darstellung im Schulbuch zu diesen Sachverhalten? Insbesondere: Trifft die Bemerkung zu, wonach der dort abgedruckte Beweis die in moderne Schreibweisen übertragene Wiedergabe des pseudo-euklidischen Beweises von Satz X, 115a/117 ist?

Zunächst ist festzuhalten, dass die auf arithmetischen Überlegungen fußende Argumentation im Schulbuch oberflächlich durchaus ihre Entsprechung bei Pseudo-Euklid hat. Das hat der vorangegangene Abschnitt ergeben. Bei näherer Betrachtung muss man allerdings bemerken, dass die Beweisführung, die bei Pseudo-Euklid auf Zahlenverhältnissen gründete, durch eine Argumentation ersetzt wurde, die sich unserer Bruchrechnung bedient. Offenbar haben die Autoren, die im Schulbuch behaupten, den Beweis „in heutiger Sprechweise“ wiederzugeben, die Auffassung zugrunde gelegt, wonach Zahlenverhältnisse eine Äquivalenzrelation auf dem Bereich der Paare natürlicher Zahlen definieren, die zum Begriff der rationalen Zahl führt, wenn man sich dazu entschließt, die durch die Relation erzeugten Äquivalenzklassen in den Rang entsprechender Entitäten zu erheben. Das aber haben die Griechen ja gerade *nicht* getan:

> „Das Verhältnis 1:2 oder 2:1 war für die Griechen keineswegs identisch mit dem Bruch $\frac{1}{2}$ oder der ganzen Zahl 2. Sie fassten das Verhältnis vielmehr als ein nicht näher zu definierendes mathematisches Gedankending, das sowohl bei Zahlen wie bei Größen auftritt.“ (Junge, 1926, S. 252)

Zwar waren den Griechen Brüche und das Rechnen mit ihnen sehr wohl spätestens zur Zeit Platos bekannt. Belege dafür finden sich im *Timaeus* (im Zusammenhang mit der arithmetischen Entwicklung einer Tonleiter), in der (vermutlich aus platonischer Zeit stammenden) pseudo-euklidischen Schrift *Sectio Canonis* (Junge, 1926, S. 251) sowie im *Staat* (Junge, 1926, S. 254 f.) und in einem alten Scholion zum *Charmides* (Platon, 1858, S. 290), welches den Schluss erlaubt, dass die Griechen über die ägyptischen Methoden der Bruchrechnung verfügt haben. Dennoch: Ein Existenzrecht innerhalb der Mathematik haben sie den Brüchen nicht eingeräumt:

> „Die Brüche gehören in die Logistik, und diese ist kein Zweig der reinen Mathematik […] Ein Verhältnis, gleichviel ob zwischen Zahlen oder Größen, wird niemals einem Bruch oder einer ganzen Zahl einfach gleichgesetzt.“ (Junge, 1926, S. 254)

Die Ablehnung der Brüche kommt besonders klar an einer Stelle des bereits erwähnten Platon-Dialogs *Staat* zum Ausdruck:

> „Du weißt ja, wie die geschulten Mathematiker es machen: wenn einer versucht, die reine Eins in Gedanken zu zerteilen, so lachen sie ihn aus und weisen sie ihn ab; und wenn du sie zerstückelst, so werden jene sie vervielfachen, immer nur darauf bedacht, dass nicht die Eins sich als etwas zeigt, was nicht eins, sondern eine Vielheit von Teilen wäre." (Plato *Rep. VII, 525, D, E,* zit. nach (Scholz, 1928, S. 65 f.))

Gemeint ist laut (Junge, 1926, S. 255) damit folgendes: Wenn der mathematische Laie die Eins zerteilt und beispielsweise sagt: etwas sei gleich drei Fünftel der Einheit, so werden die „geschulten Mathematiker" stattdessen vervielfachen und sagen: Das Fünffache von jenem Etwas sei gleich dem Dreifachen der Einheit, so dass die Einheit nicht plötzlich eine „Vielheit von Teilen" wäre. – Abgesehen von dieser Stelle finden wir bei Aristoteles auch folgende, unmissverständliche Aussage:

> „Nichts ist zwischen der Zwei und der Eins." (Aristoteles *Phys. V,3,* (Weiße, 1829, S. 131))

Die Griechen sind also, wie sich aus all dem ergibt, nie zum theoretischen Begriff der rationalen Zahl vorgestoßen, weder indem sie die Verhältnisse als Klassen rationaler Zahlen aufgefasst hätten noch irgendwie anders. Die Gründe, *warum* dies nicht geschehen ist, sind in der Literatur bisweilen diskutiert worden. (Scholz, 1928) hat ausführliche und ansprechende Überlegungen durchgeführt und im Einklang mit unseren bisherigen Ergebnissen zunächst festgestelt, dass

> „[d]ie Nichtexistenz der rationalen Zahlen im Bereich der griechischen Mathematik […] nicht das Werk des Zufalls, sondern das Resultat eines bewussten Ausschließungsprozesses" (Scholz, 1928, S. 65)

ist: Die Griechen hätten die rationalen Zahlen deshalb *nicht gewollt*, weil ihr Denken und Urteilen seit der Zeit der Eleaten immer

> „ein Abbilden von etwas ‚Seiendem' gewesen ist, also ein Denken von etwas, was nicht nur dadurch ‚ist', dass es gedacht wird." (Scholz, 1928, S. 67)

Scholz nennt dies die *ontologistische Auffassung* und verweist zum weiteren Beleg u. a. auf Plato, der von Parmenides (frühes 5. Jh.), dem Hauptvertreter der Eleaten, beeinflusst war und in dessen *Theaitetos* erkenntnisstiftendes Denken bezeichnenderweise als ein „Hinnehmen" (*λαμβάνειν*), als ein „Erschauen" (*ἐπισκοπεῖν*), „Antreffen" (*τυγχάνειν*) oder „Berühren" (*ἅπτεσθαι*) (*Theaitetos* 185, 186) von etwas ‚Seiendem' beschrieben wird. Daraufhin fährt Scholz fort:

> „Setzt man diese ontologistische Auffassung des erkenntnisstiftenden Denkens bei den Griechen voraus, und nimmt man hinzu, dass dementsprechend *jede* Wissenschaft, also *jedes* System von erkenntnisstiftenden Sätzen sich auf etwas ‚Seiendes' beziehen muss, so lässt sich in der Tat die Frage beantworten, warum die Griechen in ihre Mathematik die rationalen Zahlen nicht aufgenommen haben; denn, um mit dem großen Algebraiker des 19. Jahrhunderts Leopold Kronecker zu sprechen: die natürlichen (d. i. die positiven ganzen) Zahlen hat der liebe Gott geschaffen; alles übrige ist Menschenwerk. Nun haben die Griechen den lieben Gott für die Existenz der natürlichen Zahlen zwar ganz bestimmt *nicht* in Anspruch genommen; aber darauf kommt es auch gar nicht an. Es genügt, dass sie sich der Sonderstellung der natürlichen Zahlen gegenüber *allen* übrigen Zahlen – die Sonderstellung, die darin besteht, dass sie und *nur* sie zum Zählen erforderlich sind – in der Weise zurechtgelegt haben, dass den natürlichen Zahlen und *nur* diesen ein jeder menschlichen Willkür entzogenes ‚Sein' zukommt; denn den rationalen Zahlen, mit denen das praktische Rechnen operiert, konnte man ja das ‚Sein' nach Belieben dadurch entziehen, dass man jede Gleichung mit rationalen Zahlen in eine solche mit ganzen Zahlen transformierte. […] Folglich

hat die *wissenschaftliche* Mathematik, die als Wissenschaft auf das ‚Seiende' festgenagelt ist, die seinsunbeständigen rationalen Zahlen auszuschließen." (Scholz, 1928, S. 69)

Wir hatten oben gesehen, dass Dedekind die Zahlen als „freie Schöpfungen des menschlichen Geistes" aufgefasst hat (S. 42 und (Dedekind, 1893, S. vii)). Für die Griechen waren sie das *sicher nicht.* Scholz fasst diesen Sachverhalt so zusammen:

> „Der letzterreichbare Grund dafür, warum die Griechen die Irrationalzahlen nicht aufgebaut haben, ist ein Begriff von wissenschaftlicher Mathematik, der eine Erweiterung des Bereichs der natürlichen Zahlen grundsätzlich nicht zulässt; und zwar deshalb nicht, weil nur die natürlichen Zahlen dem Postulat jener von aller Willkür des Denkens unabhängigen Existenz genügen, dessen Erfüllung, bei der griechischen Auffassung des erkenntnisstiftenden Denkens und Urteilens, selbst wieder eine notwendige Bedingung dafür ist, dass eine wissenschaftliche Mathematik überhaupt möglich ist." (Scholz, 1928, S. 69)

2.3.2.4.4 Zur Darstellung im Schulbuch

Vor diesem Hintergrund soll nun die Schulbuch-Darstellung weiter eingeschätzt werden. Wir hatten schon festgehalten:

1. Der Beweis, auf den das Schulbuch anspielt, stammt nicht von Euklid selbst. Mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit war er auch nicht im Urtext enthalten. Dies steht im faktischen Widerspruch zur Aussage „Schon in der Antike wurde von Euklid gezeigt …".
2. Die geometrische Fragestellung, um die es anfangs geht (Verhältnis von Seite und Diagonale im Einheitsquadrat), wird im Schulbuch zutreffend wiedergegeben. Darüber hinaus stimmen Schulbuch und Euklid X, 115a/117 insofern überein, als beide sich in ihrer Beweisführung auf eine im Wesentlichen arithmetische Argumentation stützen.
3. Die Schreibweisen im Schulbuch sind modern und enthalten operative Kalkülsymbole. Diese fehlen bei Pseudo-Euklid natürlich vollständig.

Dem können wir nunmehr hinzufügen:

4. Der Ausgangspunkt der Überlegungen im Schulbuch sind die rationalen Zahlen. Die geometrische Fragestellung wird dementsprechend in die Frage umgemünzt, ob sich für die Maßzahl der Diagonale im Einheitsquadrat ein Bruch finden lasse. Ausgangspunkt bei Euklid X, 115a/117 ist hingegen die Frage nach der linearen Kommensurabilität von Diagonale und Seite. Diese Fragestellung wird mitsamt ihrer Antwort im Schulbuch erst als nachgeordnete „Folgerung für die Geometrie" thematisiert.
5. Es wird behauptet, dass Euklid das geometrische Problem genau so wie die Schulbuchautoren interpretiert und gezeigt habe, „dass man $\sqrt{2}$ nicht als Bruch darstellen kann". Wie wir gesehen haben, ist diese Behauptung faktisch und historisch falsch. Die Argumentation bei Pseudo-Euklid bedient sich nicht der Bruchrechnung mitsamt ihren Kürzungsregeln, sondern greift auf Euklid X, 5 und auf die Lehre vom Geraden und Ungeraden zurück. Die Interpretation der in diesem Zusammenhang benutzten Zahlenverhältnisse als Brüche ist begreiflicherweise naheliegend, aber dennoch unzutreffend.
6. Bei allen bisher bemerkten Irritationen bleibt anzuerkennen, dass im Schulbuch nirgendwo *explizit* behauptet wird, dass die Griechen die irrationalen Zahlen entdeckt oder erfunden hät-

ten. Es heißt dort einige Seiten später lediglich (etwas sibyllinisch): „Mit der Erkenntnis, dass es Strecken ohne gemeinsames Maß gibt, waren zugleich die irrationalen Zahlen entdeckt", und: „Platon […] berichtet von der Irrationalität von $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots, \sqrt{17}$ " (Seite 26). Gemeint ist offenbar die Stelle im *Theaitetos,* wo es heißt: *Von den Seiten der Vierecke zeichnete uns Theodoros etwas vor, indem er uns von der des dreifüßigen und fünffüßigen bewies, dass sie als Länge nicht messbar wären durch die einfüßige. Und so ging er jede einzeln durch bis zur siebzehnfüßigen, bei dieser hielt er inne* (*Theaitetos* 147, in der Übersetzung von Schleiermacher). Wie man sieht, spricht Plato hier nicht (wie im Schulbuch behauptet) von Irrationalität sondern von Inkommensurabilität. Tatsächlich ist den Griechen keineswegs eingefallen, dass es irrationale *Zahlen* gäbe, wie es im Schulbuch an dieser Stelle indirekt anklingt. Vielmehr hat die Theorie des Eudoxos (Euklid V) eindrucksvoll bewiesen, dass zur Bewältigung der Inkommensurabilitäten die natürlichen Zahlen ausreichten und es keiner Zahlbereichserweiterung – weder durch rationale noch durch irrationale Zahlen – bedurfte (Scholz, 1928, S. 70). Die Definition, wonach „Zahl" die aus Einheiten zusammengesetzte Menge sei (Euklid VII, 2; S. 41), musste nicht angetastet werden.

Die Einführung der irrationalen Zahlen hingegen ist die moderne Fragestellung, unter welcher Euklid X, 115a/117 heutzutage oft vereinnahmt wird. So geschieht es auch im zitierten Schulbuch. Pseudo-Euklid aber ging es im Gegensatz dazu darum, zu beweisen, dass das Verhältnis von Quadratseite und -diagonale nicht durch ein Verhältnis von (ganzen) Zahlen bestimmt werden kann. Das ist etwas ganz anderes! Die Fragestellung, die auf diese, als ungeheuerlich empfundene Einsicht führte, hatte nichts mit der Bruchrechnung zu tun, die ohnehin nicht zur Mathematik gehörte, sondern war durch den pythagoreischen Glauben motiviert, demzufolge ausnahmslos alles in der Welt Zahl oder Zahl*verhältnis* sei. Die Entdeckung der Inkommensurabilität – die ja bereits den Pythagoreern lange vor Euklid gelungen bzw. „zugestoßen" war – erschütterte das an diesem Glauben hängende Weltbild nachhaltig und führte nach einer möglichen Interpretation u. a. dazu, dass die griechische Mathematik sich von der suspekt gewordenen Arithmetik weitgehend abwandte. Die Idee, die entdeckten „Nichtverhältnisse" als neuartige Zahlen aufzufassen, war den Griechen gerade *nicht* in den Sinn gekommen. Wie man erkennt, tut sich schon mit diesem knappen Rekurs „auf die motivierenden Fragen" (Toeplitz) ein gänzlich anderer Verstehenshorizont auf, der die Bedeutung des Irrationalitätsbegriffes in völlig anderem Licht erscheinen lässt. Wenn man dies durchblickt hat, so kann man in der Tat anschließend mit Gericke fragen: Was bringt *uns* eigentlich dazu, diese doch offenbar ganz unterschiedlichen Entitäten, die natürlichen Zahlen, die Zahlverhältnisse, die Größenverhältnisse etc. allesamt mit dem Gemeinbegriff „Zahlen" zu bezeichnen (Gericke, 2003, S. 113 f.)? Diese Frage soll hier jedoch nicht weiter diskutiert werden.

2.3.2.5 Zwischenbemerkung

Das in den vorangegangenen Abschnitten dargestellte Beispiel liefert ein Muster für einen möglichen Verlauf einer hermeneutischen Auseinandersetzung mit einem mathematischen Quellentext. Grundsätzlich geschieht diese im oben besprochenen Modell des hermeneutischen Zirkels. Das sukzessive Durchlaufen seiner Schleifen bewirkt und dokumentiert die fortschreitende Verfeinerung des Verstehens, die in der Erschließung immer weiterer Diskussions- und Erkenntnisebenen nach Tabelle 1 (S. 55) besteht:

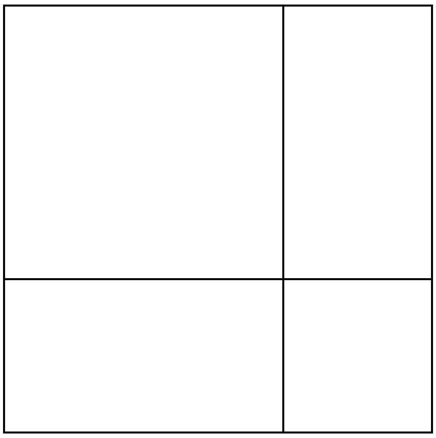
1. Herkunft der Quelle klären, Synonymität des Textes beurteilen (Textkritik).
2. Sachliches Verstehen der Aussagen und der Argumentationslogik.
3. Analyse der verwendeten Begriffe, Methoden und Terminologien, Differenzierung ihrer heutigen von ihren historischen Bedeutungen.
4. Beiziehung weiterer Quellen und/oder Kontexte.
5. Kritik.

Ich werde auf die Fragen der methodischen Ausgestaltung später noch präziser eingehen (2.3.4). Klar ist jedoch, dass der Schulbuchtext mit seiner *Darstellung* von Euklid X, 115a/117 zu einer hermeneutischen Auseinandersetzung nicht herausfordern kann. Er will es vermutlich auch nicht. Vielmehr ist in ihm alles beseitigt oder geglättet worden, was zum (historisch und eben auch mathematisch lohnenswerten) Nachdenken hätte anregen können (vgl. dies mit den „Todsünden" oben). Dass es den Autoren offenbar auch nicht um die Mitteilung zuverlässiger, geschichtlicher Daten ging, liegt nach dem Gesagten ohnehin auf der Hand. Welchen Zweck erfüllt dann eigentlich der Verweis auf Euklid, wenn weder historisches Denken gefördert, noch mathematische Aspekte ergänzt, noch philosophische Themen erschlossen, noch historisch gesicherte Tatsachen vermittelt werden? Es entsteht der Eindruck, dass die Autoren letztlich das Ziel verfolgen, eine bestimmte, gewissermaßen überzeitliche und autoritative „Aura" zu kreieren, die im Hinblick auf die Geschichtlichkeit der Mathematik wohl eher zu falschen Vorstellungen bei vielen Lernenden führen dürfte. Denn im Grunde wird – neben sachlich falschen Informationen – durch solche Nivellierungen vor allem die Botschaft vermittelt, dass Mathematik früher zwar weniger umfassend war, in ihren bereits erforschten Bereichen aber eigentlich von vornherein oder jedenfalls im Wesentlichen mit ihrer heutigen Gestalt übereinstimmte – wenn man von der als offensichtlich sekundär beurteilten Frage der Schreibweisen absieht. Hiergegen sind nicht nur die bereits erwähnten wissenschaftshistorischen bzw. -philosophischen Einwände zu erheben. Es ist auch misslich, wenn sich aufgrund solcher Darstellungen der (unzutreffende) Glaube breit macht, dass es in der Geschichte der Mathematik letztlich nichts Neues oder Interessantes zu entdecken gäbe und sie somit überflüssig sei. Vor diesem Hintergrund kann es dann auch gar nicht mehr verwundern, wenn Mathematikgeschichte im Unterricht nicht Fuß fasst und die Lernenden nicht viel mit ihr anzufangen wissen. Sie ist, um mit Schleiermachers Worten zu sprechen, hermeneutisch „nullwertig" (Schleiermacher, 1995, S. 83) geworden.

2.3.2.6 Beispiel: Der Deutungsstreit um Euklid II

Man mag die eben beschriebenen Irritationen für die typischen Probleme einer didaktischen Reduktion halten, die aus der Spannung zwischen wissenschaftlichem Exaktheitsanspruch einerseits und pädagogischem Vereinfachungsgebot andererseits resultieren. Die Angelegenheit ist jedoch nicht bloß eine didaktische Krux, sondern Ausdruck der oben beschriebenen transitiv-aneignenden Erkenntnishaltung, die sich auch auf dem Gebiet der wissenschaftlich betriebenen Mathematikgeschichte exemplarisch am Streit um die rechte Deutung von Buch II der *Elemente* des Euklid belegen lässt. Dessen Inhalt besteht bekanntlich aus einer Zusammenstellung einander ähnlicher Sätze über Flächeninhalte geradlinig begrenzter Figuren. Betrachten wir als Beispiel den Satz II, 4:

> II, 4: Teilt man eine Strecke, wie es gerade trifft, so ist das Quadrat über der ganzen Strecke den Quadraten über den Abschnitten und zweimal dem Rechteck aus den Abschnitten zusammen gleich.



Auf den ersten Blick ist unklar, welche Interessen und Absichten mit einer Sammlung von Sätzen dieser Art verfolgt wurden. Der Mathematikhistoriker Zeuthen hat eine Deutung vorgeschlagen, wonach die Satzgruppe in Euklid II als Äquivalent *unserer* Algebra bzw. *unserer* algebraischen Regeln anzusehen sei. So würde beispielsweise der eben zitierte Satz II, 4 das griechische Pendant der binomischen Formel $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ darstellen. Tatsächlich ist es möglich, auf ähnliche Weise alle in Euklid II enthaltenen Sätze zu transkribieren:

II, 1	→	Distributivgesetz $a(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = ab_1 + ab_2 + \ldots + ab_n$
II, 2	→	Spezialfall von II, 1: Aus $a = b + c$ folgt $a^2 = a(b + c)$
II, 3	→	weiterer Spezialfall von II, 1: Aus $a = b + c$ folgt $ab = bc + b^2$
II, 4	→	(1.) Binomische Formel $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
II, 5	→	(3.) Binomische Formel $(a - b)(a + b) + b^2 = a^2$ oder $ab + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$
II, 6	→	Variante von II, 5
II, 7	→	(2.) Binomische Formel $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
II, 8	→	$4ab + (a - b)^2 = (a + b)^2$
II, 9	→	$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$
II, 10	→	Variante von II, 9: $(2a + b)^2 + b^2 = 2[(a + b)^2 + a^2]$
II, 11	→	Goldener Schnitt, d. h. Lösung der Gleichung $a(a - x) = x^2$
II, 12	→	Kosinussatz im stumpfwinkligen Dreieck (1. Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras, I, 47)
II, 13	→	Kosinussatz im spitzwinkligen Dreieck (2. Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras, I, 47)
II, 14	→	Quadratur des Rechtecks, d. h. Lösung der Gleichung $x^2 = ab$

Zeuthens Interpretation hat sich allgemein durchgesetzt, so dass inzwischen für Euklid II der Titel „geometrische Algebra“ üblich geworden ist. An diesem lange währenden Deutungskonsens wurde erstaunlicherweise erst von (Unguru, 1975/76) sowie (Unguru & Rowe, 1981), (Unguru & Rowe, 1982) gerüttelt, (vgl. (Jahnke H. N., 1991) sowie (Fauvel & Grey, 1987)). Sie und weitere Kritiker der von Zeuthen inaugurierten Sichtweise haben bemerkt, dass die geometrisch gefassten Theoreme in Euklid II einen Deutungsmehr- und -eigenwert besäßen, der durch die algebraische Transkription keineswegs vollständig erkannt oder adäquat wiedergegeben werden könne. So finden wir dort eine Reihe von Sätzen, die geometrisch zwar sehr verschiedene Sachverhalte behandeln, im algebraischen Transkript jedoch auf eine (nahezu) identische Formel bzw. Aussage führen, im Interesse der Algebra also redundant wären. Auf diese Kritik haben (van der Waerden, 1975/76), (Freudenthal, 1976/77) und (Weil, 1978) geantwortet (für Einzelheiten und eine Zusammenstellung von Ausschnitten aus den Originalarbeiten vgl. (Fauvel & Grey, 1987). Jahnke kommt in seiner Darstellung des Deutungsstreites um Euklid II zum Schluss,

> „dass diese Theorie [die ‚geometrische Algebra' in Euklid II, M. G.] in die Geschichte der Algebra hineingehört. Dennoch war die geometrische Algebra der Griechen unbestreitbar eine geometrische Theorie, die geometrisch verstanden werden kann. Dass sie eine Zusammenstellung allgemeiner Gesetze für Zahlenrechnungen gewesen sei und in diesem Sinne ‚durch und durch Algebra' war, dafür gibt es keine Belege. […] Geschichtlich kann man offenbar nicht von ‚der' Algebra sprechen, und das legt die Schlussfolgerung nahe, dass man die Geschichte generell nicht angemessen verstehen kann, wenn man die Mathematik als einen Bestand überhistorisch existierender begrifflicher Strukturen auffasst, die mal im Gewande der Geometrie, mal im Gewande verbaler Beschreibungen, und schließlich als symbolischer Kalkül auftraten, ideell aber eigentlich immer dieselben geblieben sind. Zweifellos gibt es etwas, das gleich bleibt und das es uns ermöglicht, zwischen der griechischen Flächenanlegung mit Defekt und einem speziellen Typ einer quadratischen Gleichung eine Beziehung herzustellen. Dennoch ist das, was da gleich ist, historisch in sehr verschiedenen ‚Denkwelten' angesiedelt. Diese Denkwelten umfassen die Motive, warum man etwas tut, die Art und Weise, wie man sich etwas vorstellt, und die Mittel zur Darstellung von Sachverhalten." (Jahnke H. N., 1991, S. 8)

Ich möchte diese Gedanken in den folgenden Abschnitt noch weiter vertiefen und Perspektiven für einen hermeneutisch angemessenen Umgang mit dem „Anderen" in mathematikgeschichtlichen Quellen (2.3.2.7) wie auch die daraus entspringenden didaktisch-pädagogischen Implikationen (2.3.3) aufzeigen.

2.3.2.7 Zum Umgang mit dem „Anderen" in mathematikgeschichtlichen Quellen

Auf die Einzigartigkeit und Dignität von „Denkwelten" im Sinne Jahnkes (s. o.) hatte bereits Dilthey hingewiesen und hinzugefügt, dass es nicht das Ziel (der Geisteswissenschaften) sein dürfe, sinnhaltige Zeugnisse der Geschichte auf Gesetzmäßigkeiten zu reduzieren oder aus ihnen Gesetzmäßigkeiten abzuleiten:

> „Daher sind die soziologischen und geschichtsphilosophischen Theorien falsch, welche in der Darstellung des Singularen [sic] einen bloßen Rohstoff für ihre Abstraktionen erblicken." (Dilthey, 1979, S. 91)

Unter Bezugnahme auf Dilthey spricht auch Gadamer davon, dass es in der Begegnung mit historischen Zeugnissen darum gehen müsse,

> „die Erscheinung selber, in ihrer einmaligen und geschichtlichen Konkretion zu verstehen." (Gadamer, 1990, S. 10)

Die in der Mathematik übliche Verstehenspraxis und die ihr zugrunde liegende Erkenntnishaltung sind – das zeigen die Beispiele – von dieser Maßgabe oft weit entfernt. Auf sie trifft eine Bemerkung Gadamers zu, wonach sich in unseren Auffassungen

> „das Andere so sehr vom Eigenen her [zeigt], dass es gar nicht mehr als Eigenes und Anderes zur Aussage kommt.“ (Gadamer, 1990, S. 306)

Jahnke ist mit seinen Beiträgen dieser Attitüde auf dem Gebiet der Mathematikgeschichte im Unterricht deutlich entgegengetreten. Wenn man aber die – gewissermaßen „kolonialisierende“ – Haltung der transitiven „Anzwingung“ ablehnt, wie könnte dann ein angemessenerer Umgang mit dem Fremden aussehen? Sollte man bei der Arbeit mit mathematikgeschichtlichen Quellen lieber nach Maßgabe der oben beschriebenen *reflexiven* Angleichung verfahren und versuchen, das Eigene ganz aufzugeben und zu negieren, um sich in einem Akt der „Versenkung“ (Szondi) den Objekten des Verstehens zu nähern? Doch dann hört, wie oben schon bemerkt wurde, das Verstehen letztlich auf, ein *eigenes, individuelles* Verstehen des Anderen zu sein (vgl. 2.3.2.2, S. 81 bzw. Coreth 1969: 130). Unsere Antwort auf dieses Problem orientiert sich darum am Ansatz Hans-Georg Gadamers: Demnach besteht die eigentliche und zentrale Aufgabe der hermeneutischen Arbeit gar nicht in der traditionell geübten (reflexiven oder transitiven) *Verähnlichung* des Eigenen mit dem Fremden sondern – ganz im Gegenteil – in der bewussten *Herausarbeitung der Differenzen* zwischen beiden:

> „Jede Begegnung mit der Überlieferung, die mit historischem Bewusstsein vollzogen wird, erfährt an sich das Spannungsverhältnis zwischen Text und Gegenwart. Die hermeneutische Aufgabe besteht darin, diese Spannung nicht in naiver Angleichung zuzudecken, sondern bewusst zu entfalten.“ (Gadamer, 1990, S. 311)

Es ist dieser Zusammenhang, in welchem Gadamer den Begriff der Horizontverschmelzung entwickelt, den wir bereits im Abschnitt 2.3.2.1.1 bei der Diskussion des hermeneutischen Zirkels erörtert haben:

> „Das historische Bewusstsein ist sich seiner eigenen Andersheit bewusst und hebt daher den Horizont der Überlieferung von dem eigenen Horizont ab. Andererseits aber ist es selbst nur [...] wie eine Überlagerung über einer fortwirkenden Tradition, und daher nimmt es das voneinander Abgehobene sogleich wieder zusammen, um in der Einheit des geschichtlichen Horizontes, den es sich so erwirbt, sich mit sich selbst zu vermitteln. – Der Entwurf des historischen Horizontes ist also nur ein Phasenmoment im Vollzug des Verstehens und verfestigt sich nicht zu der Selbstentfremdung eines vergangenen Bewusstseins, sondern wird von dem eigenen Verstehenshorizont der Gegenwart eingeholt. Im Vollzug des Verstehens geschieht eine wirkliche Horizontverschmelzung, die mit dem Entwurf des historischen Horizontes zugleich dessen Aufhebung vollbringt. Wir bezeichneten den kontrollierten Vollzug solcher Verschmelzung als die Aufgabe des wirkungsgeschichtlichen Bewusstseins.“ (Gadamer, 1990, S. 311)

An dieser Gadamerschen Idee der Horizontverschmelzung unter dem Eindruck der Wirkungsgeschichte ist kritisiert worden, dass auch sie nicht auf ein eigentliches Verstehen des „Fremden“, nämlich *als* eines Fremden, abziele, sondern im Grunde ebenfalls nur dessen Beseitigung bzw. Überwindung bezwecke:

> „Das Gelingen geschichtlichen Verstehens besteht [bei Gadamer] letztlich in der Herstellung einer horizontverschmelzenden ‚Einheit' des ‚Einen und Anderen', die der Auflösung des Anderen im Einen bedenklich nahe kommt.“ (Wierlacher, 1985, S. 3)

Es handele sich, so der Vorwurf, damit letztlich doch wieder um eine „Hermeneutik der Identität“. Doch gehe es eben nicht darum,

> „das Fremde [...] durch methodische Besinnung auszuschalten, sondern in seiner trennenden und seiner vereinigenden Andersheit erkennbar zu machen.“ (Wierlacher, 1985, S. 11)

Damit wird dem traditionellen Hermeneutikbegriff eine radikale „Hermeneutik der Distanz“ entgegen gestellt. Man kann jedoch fragen, ob eine solche Hermeneutik überhaupt möglich ist. Denn was soll das bedeuten und wie könnte es methodisch abgesichert werden: das Fremde nicht auszuschalten, es gleichwohl aber („in seiner [...] Andersheit“) erkennbar zu machen? Hört denn das Fremde im Vorgang des Erkanntwerdens nicht auf, tatsächlich fremd zu sein? Hierzu kann man zwei Bemerkungen machen. Zunächst einmal hat Hirsch darauf hingewiesen, dass es im gesamten Kontext des Lernens und Denkens letztlich keine Alternative zum „Quantenprinzip“ des „imaginativen Sprungs“ gäbe, durch welchen das bisher Unbekannte einem Bekannten angenähert werde und etwas völlig Neues entstehe (Hirsch Jr., 1972, S. 134 ff.). Das verstehende Subjekt bilde sich demnach – nach Art der hermeneutischen Zirkelbewegung – laufend „Wahrscheinlichkeitsurteile“ über ein zu verstehendes, unbekanntes Objekt und hieraus folge,

> „dass das Urteil sein unbekanntes Objekt irgendwie dem Bekannten assimilieren *muss* [...] Das Unbekannte *muss* irgendwie [...] dem Bekannten angenähert werden, sonst gäbe es überhaupt keinen rationalen – auch keinen versuchsweisen – Zugang zu allem Unbekannten [...] Wenn wir das Unbekannte nicht unter irgendeine Art bekannter Klasse subsumieren können, dann können wir auch keine Wahrscheinlichkeitsurteile abgeben, da wir dann keine Methode besitzen, nach der wir das Unbekannte dem Bekannten assimilieren können.“ (Hirsch Jr., 1972, S. 272 f., meine Hervorhebungen)

> „Es ist einfach unwahr, dass die Erkenntnisgegenstände in den Kulturwissenschaften völlig einmalig seien. Wäre dem so, dann könnten sie keine Erkenntnisgegenstände sein. Diltheys Motto, Individuum est ineffabile, hat als Folge Individuum non est intelligibile.“ (Hirsch Jr., 1972, S. 225)

Hiermit wird zunächst die Ansicht zurückgewiesen, wonach das Andere immer auch ein Unvergleichliches darstelle. Wäre es so, so wäre die hermeneutische Aufgabe auf das bloße Feststellen der Alterität beschränkt und würde sich im gleichsam musealen Sammeln des unerkannten Fremden erschöpfen. Horstmann verweist in diesem Zusammenhang auf die Notwendigkeit eines zweiten Begriffes, nämlich den der Kritik (Horstmann, 1993, S. 406), den er bis hin zu Boeckh zurückverfolgt. Jener notierte bereits in seiner „Enzyklopädie und Methodenlehre“ von 1886:

> „Das Verstehen ist [...] einerseits absolut, andererseits relativ, d. h. man hat jedes Object einerseits an sich, andererseits im Verhältnis zu anderen zu verstehen. Letzteres geschieht mittels eines Urtheils durch Festsetzung eines Verhältnisses zwischen einem Einzelnen und dem Ganzen oder einem andern Einzelnen, oder durch Beziehung auf ein Ideal. Das absolute Verstehen behandelt die Hermeneutik, das relative die Kritik.“ (Boeckh, 1966, S. 55)

Hermeneutik und Kritik stehen Boeckh zufolge in einem unauflöslichen Wechselverhältnis zueinander:

> „Die Hermeneutik kommt [...] überall auf die Betrachtung von Gegensätzen und Verhältnissen hinaus; aber sie betrachtet sie nur um die einzelnen Gegenstände an sich zu verstehen. Dagegen muss die Kritik überall das Hermeneutische, die Erklärung des Einzelnen voraussetzen um von da aus ihre eigene Aufgabe zu lösen, die Verhältnisse des Einzelnen zu dem umfassenden Ganzen der Bedingungen zu begreifen. Man kann nichts beurtheilen ohne es an sich zu verstehen; die Kritik setzt also die hermeneutische

> Aufgabe als gelöst voraus. Allein man kann sehr oft auch den Gegenstand der Auslegung nicht an sich verstehen ohne schon ein Urtheil über seine Beschaffenheit gefasst zu haben; daher setzt die Hermeneutik wieder die Lösung der kritischen Aufgabe voraus […]“ (Boeckh, 1966, S. 178)

Kritik also ist es – und nicht bloße Angleichung – die das fremde Andere in ein „lebendiges Verhältnis zum Eigenen setzt“ (Horstmann, 1993, S. 408), indem sie sowohl Differenz und Distanz wie auch Übereinstimmung und Nähe bestimmt und

> „damit beiden Seiten, dem Subjekt wie dem Objekt dieses Erkenntnisprozesses, die Chance der Individualität eröffnet.“ (Horstmann, 1993, S. 408 f.)

Auch hierin, im Wechselspiel von Hermeneutik und Kritik, zeigt sich erneut die Unhintergehbarkeit einer hermeneutischen Zirkelbewegung.

2.3.3 Didaktisch-pädagogische Implikationen

Damit komme ich auf ein erstrangiges Ziel des Mathematikunterrichts mit historischen Quellen zu sprechen. Dieser macht es sich nämlich zur Aufgabe, die Pluralität und mögliche Divergenz menschlicher Sinnattribuierungen, wie sie gerade durch geschichtliche Eigenarten, Diskontinuitäten und Inkonsistenzen verbrieft wird, ernst zu nehmen und zur Geltung zu bringen. Der Begegnung mit dem historisch Entfernten kommt unter dieser Prämisse ein besonderer Erkenntnis- und Bildungswert zu. Im hermeneutisch(-kritisch) orientierten Unterricht geht es – im Gegensatz zum genetischen Unterricht – nicht um bloße Herleitung, Bestätigung und Absicherung des Bekannten sondern um die *kritische Erfahrung des Fremden, die letztlich auch in die kritische Reflexion des Eigenen münden soll.* Den Lernenden wird mit den historischen Quellen zugleich ein Anlass bereitgestellt, sich nicht nur der fremden sondern auch ihrer je eigenen Beziehung zur Mathematik bewusst zu werden. Dies soll sie zur (Fort-)Bildung und Bereicherung ihrer (für den Lernprozess so wichtigen) subjektiven An- und Einsichten sowie Überzeugungen anregen. Darüber hinaus geht es auch darum, die Schülerinnen und Schüler für die Relativität von Standpunkten zu sensibilisieren und damit auch zur Toleranz und zur Aufgeschlossenheit für die Welt der anderen zu erziehen.

Damit wird die pädagogische Rechtfertigung des hermeneutischen Ansatzes im Mathematikunterricht berührt. Nach einer berühmten Bemerkung Jean Pauls (1763-1825) sind die meisten Menschen so sehr in ihre eigenen Ichs „eingesunken“,

> „[…] dass jeder den Küchenzettel fremder Leibgerichte gähnend anhört und doch mit dem Intelligenzblatte der *seinigen* andere zu erfreuen meint.“ (Kaiser, 1996, S. 42)

Der Soziologe Heinrich Popitz (1925-2002) vermutet als Ursachen solcher menschlichen Selbstbezogenheit übermäßigen Narzissmus und fehlendes Interesse am Andern:

> „Es scheint so, als vermöge es der Mensch immer weniger, über seinen Schatten zu springen; als könne er sich nur noch zu dem in Bezug setzen, worauf sein eigener Schatten fällt.“ (Popitz, 2000, S. 192)

Friedrich Nietzsche (1844-1900) hingegen meinte, dass es letztlich der kreatürliche „Instinkt der Furcht" sei, der die Menschen (und alle Geschöpfe) dazu bringt, das Fremde durch Subsumption unter das Bekannte zu vermeiden oder zu unterdrücken:

> „Das Bekannte, das heißt: das woran wir gewöhnt sind, so dass wir uns nicht mehr darüber wundern, unser Alltag, irgend eine Regel, in der wir stecken, Alles und Jedes, in dem wir uns zu Hause wissen. […] *Sollte das Frohlocken des Erkennenden nicht eben das Frohlocken des wieder erlangten Sicherheitsgefühls sein?*" (Nietzsche, 2000, S. 254, 355; meine Hervorhebung)

Ob nun Popitz oder Nietzsche zuzustimmen ist, ob also eher Narzissmus oder eher Furcht das maßgebliche Motiv des Aneignungsstrebens ist, kann und soll hier nicht weiter diskutiert werden. Wahrscheinlich ist es ein je subjektives Gemisch aus beiden und möglicherweise noch weiteren Faktoren (Machtstreben etc.). Unabhängig von der Klärung dieser Frage bleibt es für uns wichtig festzustellen, dass der hermeneutisch orientierte Unterricht, der die (kritische) Erfahrung des Fremden sucht und gewährt, eben auch das Potenzial besitzt, zur Eindämmung von Selbstverliebtheiten, Herrschaftsgelüsten oder Angstinstinkten beizutragen. *Dies* ist tatsächlich eine kaum zu überschätzende pädagogische Leistung, die weit über unser Kernanliegen (Mathematik zu lernen) hinausweist. Hermeneutischer Unterricht kann und sollte für Offenheit und Interesse an der Begegnung mit dem oder den Anderen werben. In der Fremdsprachendidaktik existiert ein entsprechender Ansatz bereits seit längerem (Hunfelds „Skeptische Hermeneutik", (Hunfeld, 2004)). Angesichts der politischen, religiösen und auch zwischenmenschlichen Spannungen und Konflikte unserer Zeit, die letztlich immer häufiger in gewalttätigen Exzessen ihren traurigen Höhepunkt finden, darf er nicht nur auf das Gebiet der Fremdsprachen begrenzt bleiben, sondern muss die ganze Erziehung umfassen. Der italienische Philosoph, Jurist und Theologe Emilio Betti (1890-1968) sieht darin eine der zentralen Aufgaben der Pädagogik:

> „Man soll die Menschen zu der Bereitschaft erziehen, sich für die Einsicht in fremdes Denken einzusetzen." (Betti E., 1967, S. 203)

Aus *Verstehen* entsteht so *Verständigung*. Die Schülerinnen und Schüler, die im Unterrichtsprojekt der vorliegenden Studie etwas über arabische Mathematik der Vergangenheit lernen, erfahren zugleich und unausbleiblich auch etwas über eine andere (die arabische) Welt, über ihre Menschen und ihre Kultur sowie über ganz fremd erscheinende Denkweisen und Selbstverständlichkeiten. Natürlich geht es in solchen Begegnungen nicht darum, fremde Standpunkte *über* die eigenen zu stellen. Im Gegenteil:

> „Wer verstehen will, braucht das, was er versteht, nicht zu bejahen." (Gadamer, 1977, S. 313)

Es ist aber wichtig, die Offenheit zu besitzen oder zu erlernen, eine Sache vorübergehend mit den Augen eines anderen anzuschauen und diese Sichtweise *neben* die eigene zu stellen. Wie schafft man das? Gadamer sagt:

> „Indem man *zuhören* lernt. Der Philosophietitel dazu heißt: Hermeneutik. Die Möglichkeit, dass der andere was zu sagen hat." (Gadamer 1993, zitiert in (Schröer, 1994, S. 7, meine Hervorhebung))

Die Fähigkeit zum Zuhören ist aber anscheinend schwerer zu lehren, zu lernen und aufrechtzuerhalten als Gadamer dachte. Manche halten sie für eine Gabe. Ich meine, dass man durch Vorleben guter

Beispiele, durch Thematisierung geeigneter Inhalte und Methoden und durch kritische Reflexion der in einer jeweiligen Gruppe (z. B. in einer Schulklasse) üblichen, oft einseitigen Verstehens- und Vereinnahmungsroutinen einiges bewirken kann. Dies führt uns auf die Frage der methodischen Ausgestaltung eines hermeneutisch orientierten Unterrichts.

2.3.4 Zur Frage einer möglichen methodischen Ausgestaltung hermeneutisch orientierten Unterrichts

Methodische Hinweise zur Realisierung einer hermeneutischen Herangehensweise habe ich in den vorstehenden Kapiteln schon vereinzelt gegeben: explizit im Zusammenhang mit der Diskussion des hermeneutischen Zirkels als grundlegender hermeneutischen Methode (2.3.2.1.1), implizit bei der Besprechung von Beispielen (insbes. 2.3.2.4). Diese Bemerkungen möchte ich in diesem Abschnitt zur Verdeutlichung bündeln, ergänzen und im Hinblick auf den Einsatz im Mathematikunterricht präzisieren. Zu weiteren Ideen für konkrete didaktische Arrangements im Unterricht vgl. auch den Abschnitt 2.2.4.

2.3.4.1 Hermeneutische Kanones

Hans-Georg Gadamer ist in seinem Hauptwerk „Wahrheit und Methode“ ausdrücklich der Auffassung entgegengetreten, wonach es sich bei der Hermeneutik um eine Theorie, Methodik oder Methodenlehre handeln würde. Gleichwohl umfasst sie einen Apparat an Herangehensweisen, Kriterien und Richtlinien, die Emilio Betti als „hermeneutische Kanones“ bezeichnet hat (Betti E., 1962, S. 14 ff.), (Betti E., 1967) und die jeder Auslegung sinnhaltiger Werke zugrunde liegen (sollten):

1. *Kanon der hermeneutischen Autonomie des Objekts* bzw. *Kanon der Immanenz des hermeneutischen Maßstabs*: die zu interpretierenden Texte, Bilder, Äußerungen etc. sind zunächst im Geiste ihres Urhebers, der sich in ihnen objektiviert hat, zu verstehen, d. h. gemäß ihrer Eigengesetzlichkeit, nach ihrem beabsichtigten Zusammenhang, in ihrer eigenen Notwendigkeit und Kohärenz (vgl. 2.3.2.3 bis 2.3.2.7). Die Maxime der Hermeneuten des 19. Jahrhunderts lautete entsprechend: *Sensus non est inferendus sed efferendus!*

2. *Kanon der Totalität* bzw. *Kanon des sinnhaften Zusammenhangs der hermeneutischen Betrachtung*: stets ist die Wechselbeziehung und Kohärenz zwischen den Bestandteilen eines zu verstehenden Ganzen und diesem Ganzen selbst zu beachten, ihre gegenseitige Erhellung und Durchdringung unter Bezugnahme nicht nur auf das jeweilige Werk sondern auch auf den Autor und ggf. den kulturellen Zusammenhang. Offensichtlich geschieht das Verstehen im hermeneutischen Zirkel gerade in Befolgung dieses Kanons (vgl. 2.3.2.1.1).

Während diese beiden Kanones sich auf das Objekt der Auslegung beziehen, nehmen die folgenden ihr Subjekt in den Blick.

3. *Kanon der Aktualität des Verstehens*: demnach geht es darum, einen fremden Gedanken (ein berichtetes Erlebnis etc.) in die eigene Lebensaktualität zurückzuübersetzen. Nach Droysen ist das verstehende Urteil über einen Sachverhalt bloß die Antwort auf eine vom Interpreten zuvor gestellte Frage (Betti E., 1962, S. 27) und, wie der Theologe und Philosoph Rudolf Bultmann (1884-1976) bemerkt hat, erwächst die Art der Fragestellung, das „Woraufhin“ der

Befragung erst aus der jeweiligen geistigen Lage des Fragenden (Betti E., 1962, S. 21 ff.), zu welcher er einen Text (ein Bild, eine Äußerung etc.) in Beziehung zu setzen hat. Ich bin in den vorigen Abschnitten bereits ausführlich auf diesen Punkt eingegangen (vgl. vor allem 2.3.2.2).

4. *Kanon der Sinnadäquanz des Verstehens* bzw. *Kanon der hermeneutischen Abstimmung*: Der Interpret sollte danach streben, „die eigene lebendige Aktualität in innerste Abstimmung mit der Anregung zu bringen, die vom Objekt ausgeht" (Betti E., 1962, S. 53). Dieser Kanon hängt eng mit dem vorhergehenden zusammen. Hinsichtlich der Frage seiner Einlösbarkeit verweist Betti auf einen Ausspruch von Giovanni Battista Vico (1668-1774), auf eine „tiefe Wahrheit", wie er es nennt, zufolge derer die „ganze Kulturwelt sicherlich von Menschenhand und Menschengeist gestiftet wurde, weshalb man ihre Prinzipien und Gesetzlichkeiten innerhalb der Seinsweisen des Geistes ebenderselben Menschen wiederfinden kann, weil man sie nämlich dort wiederfinden muss" (Betti E., 1962, S. 56). Dieser Gedanke gehört sicherlich zum hermeneutischen Credo. In unseren Tagen wird er von den Ergebnissen der Kognitionspsychologie und Linguistik untermauert, welche seit einiger Zeit auch gewinnbringend auf den Bereich der Mathematik angewendet werden, vgl. z. B. (Lakoff & Núñez, 2000, S. 378).

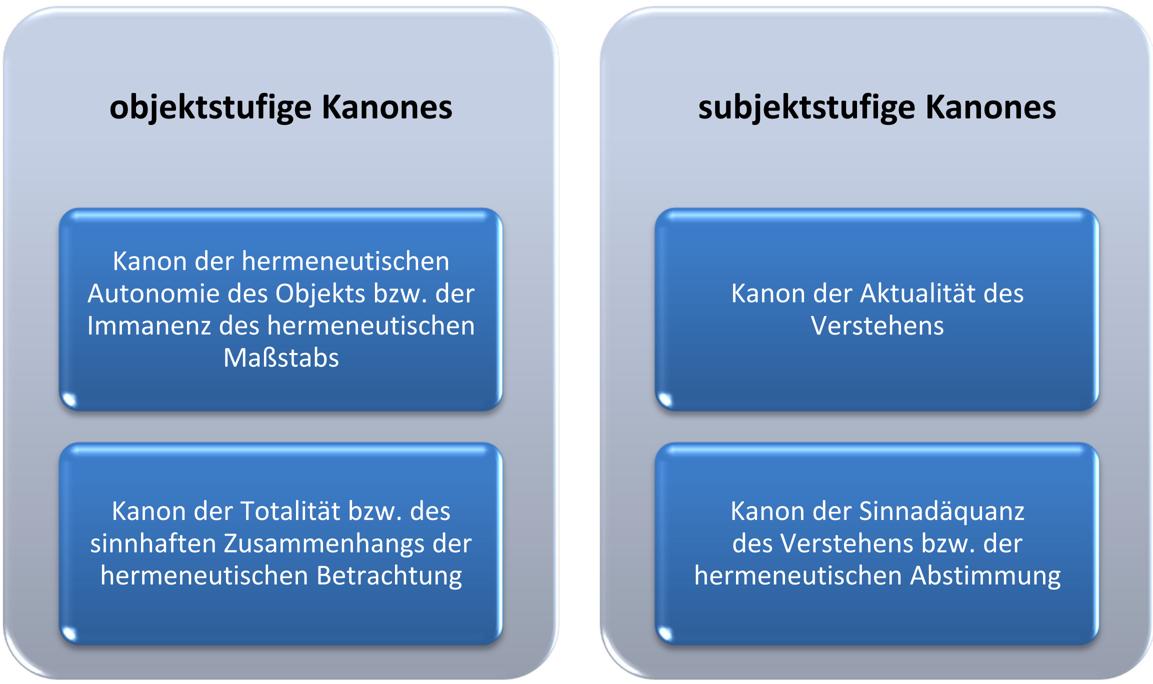


Abbildung 28: Die hermeneutischen Kanones nach Betti.

In ähnlicher Weise wie Betti beschreibt der Philosoph Thomas Seebohm (geb. 1934) die hermeneutische Aufgabe mit fünf Grundregeln (Seebohm, 1972, S. 12 f.), in welchen er Bettis vierten Kanon (der hermeneutischen Abstimmung) in zwei Regeln (4 und 5) differenziert:

1. Sensus non est inferendus sed efferendus.
2. Das Ganze ist aus den Teilen, die Teile aber aus dem Ganzen zu verstehen. Dieser „hermeneutische Zirkel" umfasst vier Relationen:
    a. Das Verhältnis von Textteilen und Textganzem.
    b. Das Verhältnis zwischen einer Sprache und einem Text als bestimmter Rede in dieser Sprache.
    c. Das Verhältnis zwischen dem Autor als einer Ganzheit von Sinngehalten und dem Text als einem dieser Sinngehalte.
    d. Das Verhältnis zwischen dem kulturellen Gesamtkontext und dem darin entstandenen und weiterwirkenden Text.
3. Der Interpret hat den Text zu aktualisieren:
    a. Der Wert des Textes (seine „Aussage") für die eigene Situation muss dargelegt werden.
    b. Die aus der eigenen Situation resultierenden Vormeinungen sind zu reflektieren und nach Möglichkeit festzuhalten.
4. Der Interpret soll sich in ein harmonisches Verhältnis zum Text als seinem Objekt bringen.
5. Der Interpret hat den gegebenen Sinnzusammenhang notfalls durch passende Annahmen zu ergänzen.

Die Kanones bzw. Grundregeln sind zwar fundamental, für unseren Zusammenhang aber zugleich noch sehr unspezifisch und gewissermaßen „fleischlos". Im Hinblick auf didaktisch-pädagogisches Handeln müssen sie im Folgenden darum noch mit mehr Anschaulichkeit und Operationalität gefüllt werden.

2.3.4.2 Hermeneutische Kompetenzen und methodische Zugänge

Hermeneutisch orientierter Mathematikunterricht zielt auf die Förderung „hermeneutischer Kompetenz" ab, die sich im Verstehen von Sinn, in der aktiven (Re-)Konstruktion von Bedeutungszuschreibungen artikuliert, vgl. 2.3.2.1 und (Deutsches PISA-Konsortium, 2001, S. 71). Wenn man dieses Ziel – spezifiziert auf das Verstehen mathematikgeschichtlicher Texte – im Spannungsfeld zwischen Autor, Text und Lesenden verortet, so scheint es natürlich, sich den Zugang zum Verstehen unter diesen drei Perspektiven zu erschließen. Dabei ist allerdings zu beachten, dass hermeneutische Kompetenz nicht etwa schon da erreicht ist,

> „wo man alles über einen Autor weiß *oder* einen Text nach bestimmten Methoden entschlüsseln kann *oder* sich des eigenen Vorverständnisses detailliert versichert, sondern wo es gelingt, die verschiedenen Dimensionen im Verstehensprozess aufeinander zu beziehen und miteinander zu verknüpfen." (Müller, Dierk & Müller-Friese, 2005, S. 224, Hervorhebung im Original)

Die Dimensionen hermeneutischer Kompetenz lassen sich nach dieser dreifältigen Herangehensweise in entsprechende Teilkompetenzen gemäß nachstehender Übersicht ausdifferenzieren, vgl. (Müller, Dierk & Müller-Friese, 2005, S. 224 f.). Zusammen mit der in Kapitel 2.2.5 abgedruckten Tabelle zeigt sie die Intentionen methodischer Zugänge auf:

Hermeneutische Teilkompetenzen mit Blick auf die Autorendimension

- Texte als Äußerungen eines menschlichen Autors erkennen
- Zeit- und Standortgebundenheit von Autoren erschließen
- Informationen über den Autor kennen
- Mutmaßliche ursprüngliche Intentionen herausarbeiten

Hermeneutische Teilkompetenzen mit Blick auf die Textdimension

- Text- bzw. Quellenkritik üben (Authentizitätsfrage)
- Semantik einzelner Ausdrücke und Formen klären (einschließlich ihrer ggf. stattgehabten historischen Wandlungen)
- Text wiedergeben oder nacherzählen
- zentrale Aussagen und inhaltliche Schwerpunkte herausstellen
- logische Stimmigkeit und Widerspruchsfreiheit überprüfen
- erzählende, metaphorische, argumentative etc. Redeweisen unterscheiden
- emotionale Dimensionen und Konnotationen würdigen

Hermeneutische Teilkompetenzen mit Blick auf die Rezipientendimension

- Texte als Adressen an und für Menschen wahrnehmen
- Informationen über gesellschaftliche, kulturelle, wissenschaftliche etc. Verhältnisse beschaffen und ggf. mit den unsrigen vergleichen
- mit den Autorintentionen konkurrierende oder rivalisierende Intentionen ermitteln (Opponentensicht)
- eigenes Vorwissen und Vorverständnis bzw. eigene Vorerfahrungen bewusst machen
- eigene Reaktionen als Verstehenshorizont wahrnehmen
- Texte in Beziehung zu eigenen Erfahrungen setzen
- Kreative Interpretationsmöglichkeiten kennen und erproben
- Grenzen der Interpretation kennen

Tabelle 2: Intendierte Teilkompetenzen differenziert nach den Herangehensweisen

Die so umrissenen Ziele können (u. a.) durch die in der folgenden Tabelle zusammengestellten methodischen Herangehensweisen angesteuert und erreicht werden:

Hermeneutische Annäherung mit Blick auf den Autor

- „Autorenprofile“ erstellen: Welche Rückschlüsse lässt ein Text auf seinen Autor zu?
- fiktives Interview mit dem Autor führen, dabei nach seinen Absichten fragen
- Informationen über den Autor beschaffen (Lexikon, Internet etc.)
- „Situationsprofile“ erstellen: Was lässt ein Text über die Situation erkennen, in der er steht? Wann und für wen ist er zu welchem Zweck geschrieben?

Hermeneutische Annäherung mit Blick auf den Text

- Verben, Substantive, Namen etc. markieren; auf Wiederholungen und Oppositionen achten
- Worte nachschlagen, Wortfelder erstellen; Übersetzungen vergleichen
- Metaphern und Sprachbilder kennzeichnen, nach ihrem Erfahrungshorizont fragen
- Sätze erschließen, Halbsätze vervollständigen; zu einem Satz das Gegenteil formulieren; zentrale Sätze hervorheben
- Textsinn rekonstruieren: (fehlende) Textteile ergänzen; Textpuzzle zusammenfügen; Überschriften finden; eine SMS schreiben; Verknüpfungen mit anderen Texten herstellen
- Texte ggf. mit „Gefühlsfarben“ markieren, „Sinnlinien“ graphisch hervorheben

Hermeneutische Annäherung mit Blick auf die Rezipienten

- Informationen über mögliche Rezipienten beschaffen: Wer sind oder waren sie? Wie haben sie reagiert?
- eigene Fragen an den Text stellen: Was möchte ich von „dir“ wissen?
- die eigene Reaktion auf einen Text wahrnehmen und beschreiben
- einen Text eigenständig nacherzählen

- einen Text graphisch oder zeichnerisch darstellen oder ggf. in eine Spielhandlung umsetzen
- einen Text weiterdenken oder weiterschreiben
- eine Vor- oder Nachgeschichte zu einem Text erfinden
- einen Text aus der Perspektive eines anderen erzählen
- Gegenargumente zu den Intentionen eines Textes finden und Stellung beziehen

Tabelle 3: Mögliche methodische Annäherungen differenziert nach den Herangehensweisen

Hinweise wie die vorstehenden stellen natürlich nur Beispiele für eine mögliche methodische Aufbereitung hermeneutischer Prozesse dar. Sie können leicht mit den in Abschnitt 2.2.4 notierten Arrangements oder mit weiteren praktischen Ideen aus der einschlägigen Literatur, z. B. (Altenburg, 1991), zu mehr oder weniger differenzierten Settings erweitert werden. Dabei versteht es sich von selbst, dass die gewählten Methoden nicht nur im Hinblick auf die jeweils zur Rede stehenden Interpretationsgegenstände (Texte etc.) flexibel bleiben, sondern auch hinsichtlich der jeweiligen Unterrichtssituation, des Alters und Vermögens der Lernenden etc. angepasst werden müssen. Auf der anderen Seite dürfte klar sein, dass alle Methodisierungsversuche auch ihre Grenzen haben. Methoden können hermeneutisches Verstehen durchaus erleichtern und befördern, keineswegs aber garantieren. Oftmals hängt der Erfolg von der Haltung der Interpreten selbst ab (vgl. 2.3.3). Methoden bauen Brücken, die es allerdings zu überqueren gilt, wenn Verstehen erreicht werden soll – für sich allein genommen stellen Methoden kein Ziel unterrichtlicher Bemühungen dar. Der Pädagoge Helmut Danner (geb. 1941) warnt zu Recht:

> „Vor einer Methodengläubigkeit sollten wir uns hüten, weil Methoden lediglich dienende Funktion haben; ein selbstständiger Methodenapparat macht nicht die gesamte Forschung aus. Vielmehr kann eine Überbewertung einzelner Methoden oder der Methodenfrage insgesamt bedeuten, dass der Gegenstand der Untersuchung verdeckt oder verfälscht wird." (Danner, 1998, S. 18)

Auch in der Unterrichtssituation bleibt es von entscheidender Bedeutung, das Heil nicht nur in Methoden zu suchen, sondern stets die Vielschichtigkeit und Unausschöpfbarkeit des Verstehensprozesses im Blick zu behalten:

> „Beim Verstehen geht es nicht nur um einen Text oder ein anderes Verstehensobjekt, nicht nur um Autor oder Autorin, nicht nur um die Rezeption, sondern immer um ein Beziehungsgefüge dieser verschiedenen Elemente. ‚Zwischen' Bekanntem und Fremdem ereignet sich Verstehen als Prozess. Deswegen legt es sich nahe, Schritte aus den verschiedenen Dimensionen miteinander zu verbinden und auf diese Weise eine ‚Hermeneutik der Beziehung' methodisch anzubahnen." (Müller, Dierk & Müller-Friese, 2005, S. 226)

Ein solches Streben ist zweifellos anspruchsvoll, zumal es den meisten Lehrenden und Lernenden im Mathematikunterricht unvertraut ist. Doch sind es gerade diese neuen Akzente, die bislang unbekannten Anforderungen, die einem solchen Unterricht seine Spannung verleihen und ihn letztlich mit dem Potenzial ausstatten, festgefahrene Ansichten (bei Unterrichtenden und Lernenden) aufzubrechen und zu einer mathematikbezogenen Kompetenz beizutragen, die über bloßes Fakten-, Verfahrens- und Anwendungswissen hinausreicht und die so gesuchten Momente der Reflexion (vgl. 2.1.2) erschließt.

II.

Exegetischer Teil

3 Das Material

3.1 Al-Khwarizmis al-jabr

Die Materialgrundlage des Unterrichts, dessen Konzeptionierung und Durchführung im Folgenden beschrieben und analysiert wird, bilden im Wesentlichen Auszüge aus dem *Al-kitab al-muhtasar fi Hisab al-jabr w'al-muqabala* (übersetzt etwa: „Kurzgefasstes Buch über die Rechenverfahren durch Ergänzen und Ausgleichen“) des persischen Mathematikers Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (ca. 780-850), kurz Al-Khwarizmi. Dieses etwa um 820 entstandene Buch stellt einen der wichtigen Grundtexte der klassischen Algebra dar und hat einen Jahrhunderte währenden, im spätmittelalterlichen Europa traditionsbildenden Einfluss auf die Entwicklung und Lehre dieser Disziplin ausgeübt. Das Buch beginnt – modern gesprochen – mit einer Zusammenstellung von Regeln zum Lösen „linearer“ und „quadratischer Gleichungen“ samt deren Begründungen sowie etlicher Beispielaufgaben. In den weiteren Abschnitten geht es um praktische Vermessungsaufgaben und um Berechnungen zur Lösung von Erbteilungsproblemen nach dem komplizierten islamischen Recht. Überraschenderweise erfordert keine dieser Anwendungen die im ersten Abschnitt entwickelten Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen.

Abbildung 29: Eine Seite aus Al-Khwarizmis ‚al-jabr.‘

Die für den Unterricht gewählten Auszüge entstammen dem ersten Teil des Buches. Sie sollen im Folgenden vorgestellt (3.1.1) und im Hinblick auf die Verwertung für einen historisch-hermeneutisch konzipierten Unterricht nach Maßgabe der im zweiten Kapitel ausführlich erläuterten Prinzipien und Verfahrensweisen analysiert und aufbereitet werden (3.1.2).

3.1.1 Al-Khwarizmis al-jabr: Die Textdimension

3.1.1.1 Zur Überlieferung

Al-Khwarizmis *al-jabr* ist in Abschriften sowie in Übersetzungen ins Lateinische, Italienische und Hebräische erhalten. Das bekannteste arabische Manuskript liegt in der Bodleian Library (Oxford: Hunt. 214/1, fols. 1–34, Uri No. 918 (1342)), fünf weitere Manuskripte befinden sich in Kabul, Berlin, Medina (2) und Ägypten (Oaks & Alkhateeb, 2005, S. 404). Die einzigen beiden gedruckten Ausgaben des arabischen Textes – (Rosen, 1831) sowie (Musharrafa & Ahmad, 1939) – beruhen ausschließlich auf dem Oxforder Manuskript. Die mittelalterlichen lateinischen Übersetzungen sind in 16 Manuskripten überliefert (Hughes, 1982, S. 31-32) und enthalten nur den ersten Teil des originalen Textes (die eigentliche Algebra). Zwei der insgesamt drei lateinischen Übersetzungen stammen von Robert von Chester (lat. Robertus Castrensis, ca. 1145) bzw. von Gerhard von Cremona (lat.

Gerardus Cremonensis, ca. 1150). Sie sind älter als das Oxforder Manuskript und bildeten bis zum 15. Jahrhundert den „Grundstock für das algebraische Wissen" in Westeuropa (Kaunzner, 1985, S. 2). Daneben existiert – in zwei Manuskripten überliefert (Vatikan, Biblioteca Apostolica Vaticana: MS Vat. lat. 4606 sowie Oxford, Bodleian: MS Lyell 52) – eine weitere Fassung, deren Urheberschaft nicht zweifelsfrei geklärt ist (Kaunzner, 1985). Sie könnte das Übersetzungswerk eines gewissen Guglielmo de Lunis (ca. 1250-?) sein (Kaunzner, 1985, S. 10 ff. und Fußnote 69), (Hughes, 1982, S. 35) und diente offenbar der italienischen Version eines anonymen Übersetzers aus dem Jahre 1313 als Vorlage (Franci, 2003), (Oaks & Alkhateeb, 2005, S. 404). Vor kurzem wurde darüber hinaus noch ein weiteres, aus dem Mittelalter stammendes hebräisches Manuskript (Genf, BPU: MS heb. 10) als eine Bearbeitung von Al-Khwarizmis Algebra identifiziert und im nahen zeitlichen und geistigen Umfeld des jüdischen Gelehrten Abraham ben Meir ibn Esra (ca. 1092, Tudela/Spanien bis 1167) eingeordnet (Lévy, 2002), s. Abbildung 30.

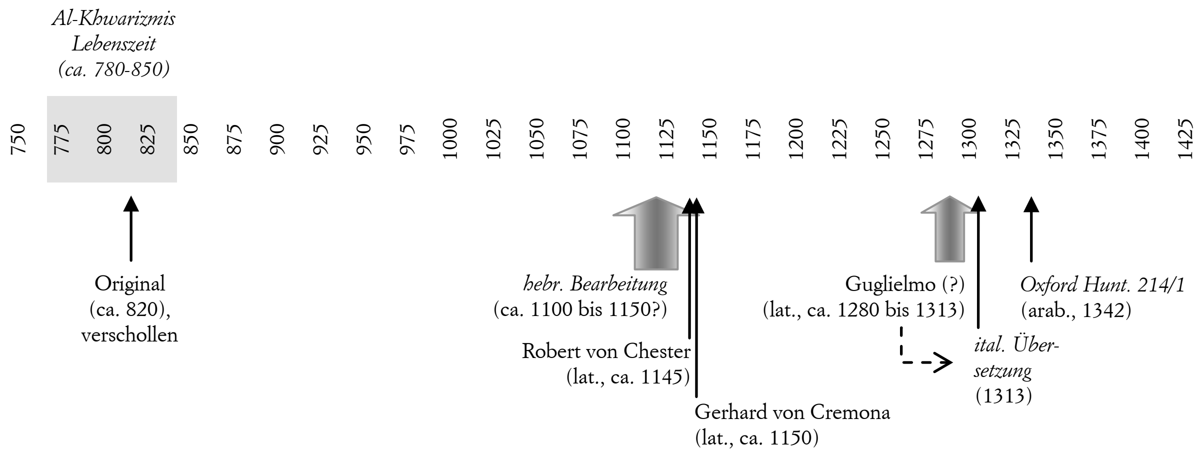


Abbildung 30: Überblick über die vorhandenen Texte der Algebra Al-Khwarizmis.

Die Fassung des arabischsprachigen Oxford Hunt. 214/1 zu erschließen, die in (Rosen, 1831) und (Musharrafa & Ahmad, 1939) abgedruckt ist, hätte den Rahmen, die Zielsetzungen und auch die Möglichkeiten der vorliegenden Arbeit überstiegen. Für die Materialerstellung wurden darum die zugänglicheren Texte der englischsprachigen, auf Oxford Hunt. 214/1 basierenden Übersetzung von (Rosen, 1831), sowie der lateinischen Fassungen von Robert von Chester – nach der Ausgabe von (Hughes, 1989) unter Berücksichtigung der Ausgabe von (Karpinski, 1915) – und von Gerhard von Cremona – nach der Ausgabe von (Hughes, 1986) unter Berücksichtigung der Ausgabe von (Libri, 1838, S. 253-299) – herangezogen (vgl. (Kaunzner, 1985, S. 2, Fußnoten 4 und 5)). Die dritte lateinische Fassung von Guglielmo de Lunis (?), die sich in mancherlei Hinsicht von den Texten Roberts und Gerhards unterscheidet – sie enthält etwa einige symbolische Schreibweisen (Kaunzner, 1985, S. 6 ff.) und daneben auch einen höheren Grad an Bearbeitung (Hughes, 1982, S. 33) –, blieb außen vor. Es ist zu betonen, dass der im Folgenden mitgeteilte Gerhard-Text (aus dem Jahre 1150) von Fachleuten als diejenige Fassung angesehen wird, die dem verschollenen Original am nächsten kommen dürfte, näher jedenfalls als das arabische Oxford Hunt. 214/1 aus dem Jahr 1342, das der Rosen- bzw. der Musharrafa/Ahmad-Übersetzung zu Grunde lag. Dieses nämlich sei

> "significantly farther removed from [Al-Khwarizmi's original] (at least in certain points) than the manuscript used by Gherardo for his translation."
>
> (Høyrup, 1998, S. 6)

Høyrup präzisiert diese auf der Grundlage einer text- und literarkritischen Analyse entwickelte Auffassung im folgenden, als vorläufig angegebenen Stemma:

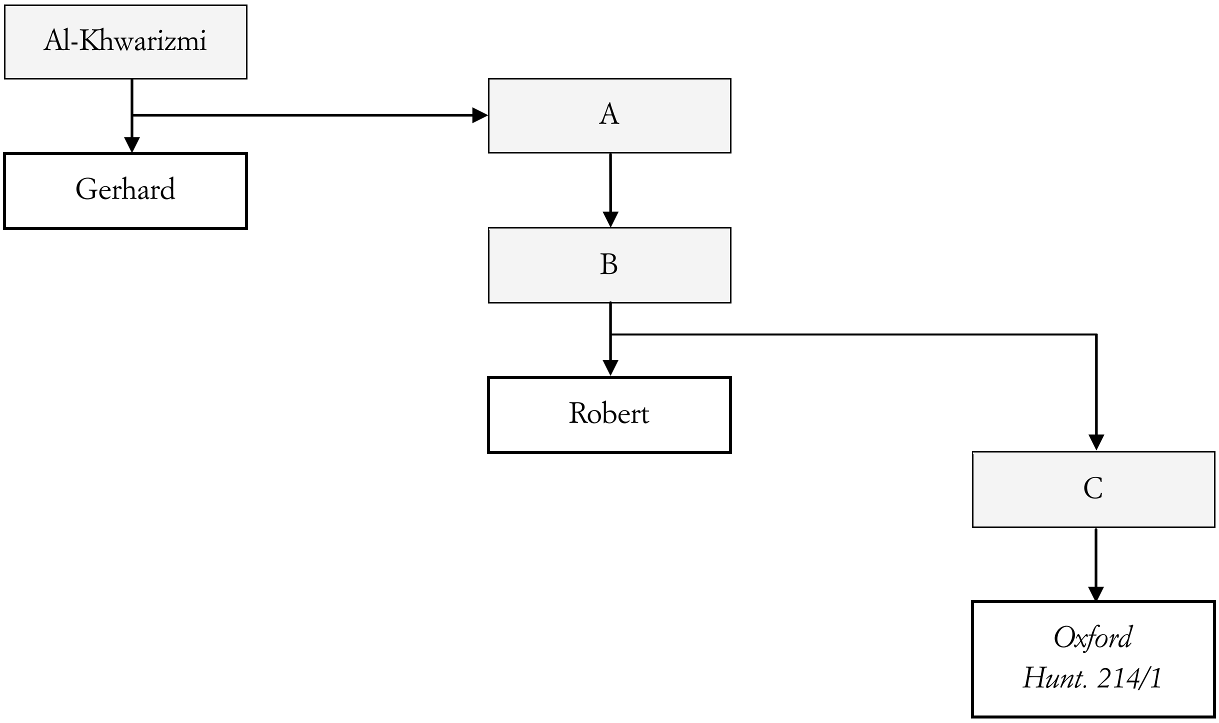


Abbildung 31: Stemma der Algebra Al-Khwarizmis nach einem Vorschlag von (Høyrup, 1998). A, B und C stehen für nicht erhaltene Zwischenstufen der Überlieferung. In A seien – diesem Vorschlag zufolge – stilistische „Normalisierungen" (Vereinheitlichungen) des Originals vorgenommen worden (betreffend die grammatikalischen Formen), in B sei ein (inkorrekter) Textabschnitt im Beweis zu Al-Khwarizmis Fall V ergänzt worden (s. u., Rb V,29 ff. und Ox V,29 ff.). Beide Merkmale fehlen bei Gerhard. In C sei schließlich die Beschriftung der Beweisfigur zu Al-Khwarizmis Fall 5 (s. u., Kap. 3.1.1.2.2.2) verändert worden. Diese ist im Oxforder Manuskript anders als bei Robert und Gerhard.

Es würde den Rahmen und die Möglichkeiten der vorliegenden Arbeit sprengen, die Argumente, die zu diesem Stemma geführt haben, im Einzelnen kritisch zu diskutieren. Ich werde es darum im Folgenden bei Anmerkungen belassen, die mir für meinen Zusammenhang relevant erscheinen. Es sei jedoch notiert, dass die Ergebnisse der Text- und Literarkritik sowie eine Bemerkung Høyrups – wonach Gerhard ein „extremely conscientious translator, probably one of the most accurate translators of scientific and philosophical texts of all times" (Høyrup, 1998, S. 5) gewesen sei – bei der Erstellung der deutschsprachigen Textfassung (3.1.1.2.6) in Zweifelsfällen eine ausschlaggebende Rolle gespielt haben.

3.1.1.2 Zu den gewählten Auszügen

In den für den Unterricht ausgesuchten Auszügen der *al-jabr* behandelt Al-Khwarizmi Probleme, die nach unserem Verständnis dem Lösen quadratischer Gleichungen entsprechen. Er unterscheidet in diesem Zusammenhang sechs Standardformen von Gleichungen:

- „Quadrate sind gleich Wurzeln“ ($ax^2 = bx$)
- „Quadrate sind gleich Zahlen“ ($ax^2 = c$)
- „Wurzeln sind gleich Zahlen“ ($bx = c$)
- „Quadrate und Wurzeln sind gleich Zahlen“ ($ax^2 + bx = c$)
- „Quadrate und Zahlen sind gleich Wurzeln“ ($ax^2 + c = bx$)
- „Wurzeln und Zahlen sind gleich Quadraten“ ($bx + c = ax^2$)

Ein auffälliges und durchgängiges Merkmal der *al-jabr* ist das völlige Fehlen einer Formelschrift:

> “The algebra of al-Khwarizmi is thoroughly rhetorical, with none of the syncopation found in the Greek Arithmetica or in Brahmagupta’s work. Even the numbers were written out in words rather than symbols!” (Boyer, 1991, S. 228)

Die in Klammern notierten Formelschreibweisen in der obigen Liste mögen daher nur so verstanden werden, dass sie *uns* fürs Erste eine leichtere Identifizierung des gemeinten Aufgabentyps ermöglichen. Al-Khwarizmi und seinen Zeitgenossen waren sie natürlich unbekannt. Daneben sei hier bereits bemerkt, dass die heute üblichen Übersetzungen „Quadrat“ (bzw. „square“), „Wurzel“ (bzw. „root“) und „Zahl“ (bzw. „number“) für die arabischen Wörter *mal* (مال), *jidhr* (جذر) und *shay‘* (شيٌء) durchaus problematisch sind. Ich möchte die damit zusammenhängende Diskussion jedoch auf einen späteren Abschnitt (3.1.1.2.4) verschieben.

Al-Khwarizmi behandelt jede vorgelegte Aufgabe (jede algebraische Gleichung bis zum zweiten Grad) zunächst mit *jabr* und *muqabala*, um auf eine der sechs Standardformen zu kommen. Bei der *jabr* (zu deutsch etwa: Wiederherstellung, Ergänzung) geht es – modern gesprochen – darum, eine subtrahierte Größe von einer Seite der Gleichung auf die andere zu schaffen und dort als addierte Größe zu notieren (Rosen, 1831, S. 176-186). Die wiederholte Anwendung dieses Verfahrens eliminiert darum alle subtrahierten Terme in einer Gleichung und lässt nur addierte Glieder stehen. *Muqabala* (zu deutsch etwa: Ausgleichung) bedeutet – wiederum modern gesprochen – das Wegschaffen von Gliedern (oder Anteilen derselben), die auf *beiden* Seiten der Gleichung zugleich auftreten. Wiederholte *muqabala* bewirkt, dass jeder Typ von Term (Quadrat, Wurzel, Zahl) in einer Gleichung höchstens einmal (links oder rechts) vorkommen kann, so dass tatsächlich nur die sechs grundlegenden Standardformen wie oben verzeichnet zu unterscheiden sind (für ein Beispiel einer solchen Umformung, allerdings in moderner Ausdrucksweise, vgl. Abbildung 18 auf S. 48). Eine weitere Zusammenfassung kann Al-Khwarizmi nicht vollziehen, da er keine negativen Zahlen oder Größen zulässt. Die Lösung der Standardgleichungen geschieht dann jeweils nach einer der Methoden, die Al-Khwarizmi für jede der sechs Formen individuell angibt. Für den Unterricht der vorliegenden Untersuchung wurden die Fälle 4 bis 6 ausgewählt, die Fälle also, die – nach heutiger Lesart – aus drei verschiedenen Termen bestehen. Al-Khwarizmi bezeichnet sie als „zusammengesetzt“ („compound“, „composita“).

In den folgenden Abschnitten gebe ich einen synoptischen Vergleich der zu diesen Fällen gehörigen Texte in den Fassungen von Rosen (Ox), Robert von Chester (Rb) und Gerhard von Cremona (Gr). Dieser Vergleich verfolgt das Ziel, die Synonymität der Textgrundlage zu beurteilen (vgl. editorische

Kriterien, S. 50) und die Erstellung einer deutschsprachigen Fassung vorzubereiten, die in 3.1.1.3 angegeben wird. Aus Gründen der leichteren Referenzierbarkeit habe ich die Texte parallelisiert, in Sätze und Teilsätze („Verse") eingeteilt sowie mit exponierten Bezifferungen versehen.

3.1.1.2.1 Die Auflösungsregeln

Von allen in dieser Arbeit betrachteten Texten besitzen diejenigen der ersten drei Parallelabschnitte die größten Ähnlichkeiten untereinander. In ihnen werden die Auflösungsregeln der (gemischten) Standardformen 4, 5 und 6 mitgeteilt:

3.1.1.2.1.1 Al-Khwarizmis Fall 4: „Quadrate und Wurzeln sind gleich Zahlen"

Frederic Rosen (1831) **Ox I**	**Robert von Chester (1145)** **Rb I**	**Gerhard von Cremona (1150)** **Gr I**
[1]I found that these three kinds; namely, roots, squares, and numbers[*], may be combined together, [2]and thus three compound species arise; [3a]that is, "squares and roots equal to numbers;" [3b]"squares and numbers equal to roots;" [3c]"roots and numbers equal to squares."	[1]Radices ergo et substancie et numeri soli secundum[*], quod iam diximus, distinguuntur. [2]Unde et ex his tribus quo iam premisimus, tria oriuntur genera tripliciter distincta; [3a]et substancie et radices numeros coequant; [3b]et substancie et numeri radices coequant; [3c]et radices et numeri substancias coequant.	[1]… tres modos qui sunt radices et census et numerus[*] inveni componi. [2]Et sunt ex eis tria genera composita, [3a]que sunt hec: census namque et radices equantur numero; [3b]et census et numerus equantur radicibus, [3c]et radices et numerus equantur censui.
	<Capitulum IV:>De substanciis et radicibus numeros coequantibus.	
[4a]Roots and Squares are equal to Numbers; [4b]for instance, "one square, and ten roots of the same, amount to thirty-nine dirhems;" [5a]that is to say, [5b]what must be the square which, when increased by ten of its own roots, amount to thirty-nine?	[4a]Substancie vero et radices numerum coequantes sunt, [4b]sicut diceres, „Substancia et 10 radices 39 coequantur dragmatibus. [5a]Huius ergo artis investigacio talis est. [5b]Dic ergo, „Que est substancia, cui si similitudinem 10 suarum radicum adiunxeris, ad 39 tota hec collacio protendatur."	[4a]Census autem et radices que numero equantur [4b]sunt sicut si dicas: ‚Census et decem radices equantur triginta novem dragmis.' [5a]Cuius hec est significatio: [5b]ex quo censu cui additur equale decem radicum eius aggregatur totum quod est trigenta novem.
[6]The solution is this: [7]you halve the number of the roots, [8]which in the present instance yields five. [9]This you multiply by itself; the product is twenty-five. [10]Add this to thirty-nine; the sum is sixty-four. [11]Now take the root of this, which is eight, [12]and subtract from it half the number of the roots, which is five; [13]the remainder is three. [14]This is the root of the square which you sought for;	[6]Modus hanc artem inveniendi est [7]ut radices iam pronunciatas per medium dividas [8]sed radices in hac interrogacione sunt 10. Accipe igitur 5, [9]et eas in seipsis multiplica et fient 25; [10]quas super 39 adicias et fient 64. [11]Huius ergo collacionis radice assumpta id est 8, [12]ab ea medietatem radicum, id est 5, diminuas, [13]et remanebunt tria. [14]Ternarius ergo numerus huius substancie unam ostendit radicem, que videlicet substancia novenario	[6]Cuius regula est [7]ut medies radices [8]que in hac questione sunt quinque. [9]Multiplica igitur eas in se et fiunt ex eis viginti quinque. [10]Quos triginta novem adde, et erunt sexaginta quattuor. [11]Cuius radicem accipias que est octo. [12]Deinde minue ex ea medietatem radicum que est quinque. [13]Remanet igitur tres [14]qui est radix census.

[*] Ox/Rb/Gr I,1: Zur Übersetzung dieser Begriffe vgl. Abschnitt 3.1.1.3

[15]the square itself is nine.	noscitur numero. [15]Novem ergo iam componunt substanciam.	[15]Et census est novem.
(Rosen, 1831, S. 8)	(Hughes, 1989, S. 32), vgl. auch (Karpinski, 1915, S. 70, 72)	(Hughes, 1986, S. 234), vgl. auch (Libri, 1838, S. 255)

In diesem Abschnitt geht es inhaltlich um die Lösung der vierten der oben notierten sechs Standardformen, die Al-Khwarizmi an einem Beispiel vorführt. Das Verfahren entspricht in moderner Notation einer schrittweisen Auflösung der Gleichung $x^2 + 10x = 39$ nach dem Schema

$$10 \xrightarrow{\text{halbieren}} 5 \xrightarrow{\text{quadrieren}} 25 \xrightarrow{\text{zu 39 addieren}} 64 \xrightarrow{\text{Wurzel ziehen}} 8 \xrightarrow{\text{5 subtrahieren}} 3.$$

Unter Nutzung der modernen Formelschreibweise können *wir* den so identifizierten Prozess auch noch kürzer als Term $\sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + 39} - \frac{10}{2}$ notieren. Musterhaft zeigt uns Al-Khwarizmi damit die Lösung der allgemeinen Gleichung $x^2 + px = q$ nach dem Schema

$$p \xrightarrow{\text{halbieren}} \frac{p}{2} \xrightarrow{\text{quadrieren}} \left(\frac{p}{2}\right)^2 \xrightarrow{\text{zu } q \text{ addieren}} \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$$
$$\xrightarrow{\text{Wurzel ziehen}} \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} \xrightarrow{\frac{p}{2}\text{ subtrahieren}} \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}$$

Ausdrücklich notiert Al-Khwarizmi hier (wie in allen anderen Fällen) noch den Wert für das Quadrat (square, census, substantia): 9. Das Quadrat ist in diesem Fall die eigentliche Unbekannte: „What must be the square …“ (Ox I,5b), „Que est substancia …“ (Rb I,5b), „ex quo censu …“ (Gr I,5b). In anderen Beispielen wird gelegentlich auch nach der Wurzel gesucht. Al-Khwarizmi erwartet von seinen Lesern hier offenbar eine gewisse Flexibilität.

Die Übereinstimmung der drei Paralleltexte betrifft übrigens nicht nur ihren Inhalt. Die Texte besitzen auch eine gemeinsame (grammatikalische) Auffälligkeit, die darin besteht, dass der Leser in der zweiten Person Singular bzw. im Imperativ I angesprochen wird. Es handelt sich hierbei um eine sehr alte, schon in babylonischen Quellen zu findende Tradition,

> “where teaching takes the form of inculcation of rules and procedures (whether reasoned or acquired through rote learning). Modern mathematics, on the other hand, is mostly presented in the first person plural mixed up with an impersonal third person, passive or active present or future tense, ‘We construct’, ‘The line is drawn’, ‘the value will be’, etc. The latter format is already found in Greek mathematical texts (even though the Greek mathematicians often speak in the first person singular).
>
> (Høyrup, 1998, S. 7)

Eine wichtige Differenz zwischen Rb einerseits sowie Ox und Gr andererseits muss noch vermerkt werden. Sie äußert sich darin, dass Rb sehr oft Zahlziffern verwendet, während Ox und Gr alle Zahlen ausschreiben. Dieses Merkmal ist nicht etwa durch Unachtsamkeiten in den Druckausgaben von (Rosen, 1831), (Hughes, 1986) bzw. (Hughes, 1989) bedingt, sondern wird bereits auf der Manuskriptebene so angetroffen (Hughes, 1986, S. 231).

3.1.1.2.1.2 Al-Khwarizmis Fall 5: „Quadrate und Zahlen sind gleich Wurzeln"

Frederic Rosen (1831) **Ox II**	**Robert von Chester (1145)** **Rb II**	**Gerhard von Cremona (1150)** **Gr II**
[1]Squares and Numbers are equal to Roots; [2]for instance, "a square and twenty-one in number are equal to ten roots of the same square."	[1]*<Capitulum V:>De substanciis et numeris radices coequantibus* [2]Proposicio autem huius artis talis est, ut dicas, „Substancia et 21 dragmata 10 radicibus coequantur."	[1]Census vero et numerus qui radicibus equantur, [2]sunt sicut si dicas: ‚Census et viginti una dragma equantur decem radicibus'.
[3a]That is to say, [3b]what must be the amount of a square, which, when twenty-one dirhems are added to it, becomes equal to the equivalent of ten roots of that square?	[3a]Ad hoc ergo investigandum talis datur regula ut dicas, [3b]„Que est substancia, cui si 21 dragmata adiunxeris, tota summa similis 10 ipsius substancie radicibus procreetur?"	[3a]Cuius significatio est [3b]quod cum cuilibet censui addideris viginti unum, erit quod aggregabitur equale decem radicibus illius census.
[4]Solution: [5]Halve the number of the roots;	[4]Huius autem questionis solutio hac regula concipitur. [5]Primum ergo radices per medium dividas,	[4]Cuius regula est [5]ut medies radices
[6]the moiety is five. [7]Multiply this by itself; the product is twenty-five.	[6]et fient 5. [7]Eas ergo in se multiplica, et erunt 25.	[6]et erunt quinque. [7]Quas in se multiplica et proveniet viginti quinque.
[8]Subtract from this the twenty-one which are connected with the square;	[8]Ex hiis ergo 21 diminuas, quem cum substancia iam pretaxavimus,	[8]Ex eo itaque minue viginti unum quem cum censu nominasti
[9]the remainder is four. [10]Extract its root; it is two. [11]Subtract this from the moiety of the roots, which is five; [12]the remainder is three. [13]This is the root of the square which you required, [14]and the square is nine.	[9]et remanebunt 4. [10]Horum ergo radicem accipias id est 2, [11]que ex medietate radicum id est 5 diminuas, [12]et remanebunt tria, [13]unam radicem huius substancie constituencia, [14]quam scilicet substanciam novenus complet numerus.	[9]et remanebit quattuor. [10]Cuius accipies radicem, que est duo. [11]Quam ex radicum medietate, que est quinque, minue. [12]Remanebit ergo tres [13]qui est radix census quem voluisti; [14]et census est novem.
[15]Or you may add the root to the moiety of the roots; [16]the sum is seven;	[15]Et si volueris ipsa duo que a medietate radicum iam diminuisti, ipsi medietati id est 5 addicias, [16]et fient 7;	[15]Quod si volueris, addes ipsam medietati radicum [16]et erit septem.
[17]this is the root of the square which you sought for, [18]and the square itself is forty-nine. [19]When you meet with an instance which refers you to this case, [20]try its solution by addition,	[17]Hec igitur 7 unam substancie radicem demonstrant [18]quam scilicet substanciam 49 adimplent. [19]Cum ergo aliquod huius capituli tibi propositum fuerit, [20]ipsius modum cum adieccione secundum quod dictum est investiga.	[17]Qui est radix census; [18]et census est quadragenta novem. [19]Cum ergo questio evenerit tibi deducens te ad hoc capitulum, [20]ipsius veritatem cum additione experire.
[21a]and if that do not serve, [21b]then subtraction certainly will.	[21a]Quam si cum adieccione non inveneris, [21b]proculdubio cum diminucione reperies.	[21a]Quod si non fuerit, [21b]tunc procul dubio erit cum diminutione.
[22a]For in this case both addition and subtraction may be employed, [22b]which will not answer in any other of the three cases in which the number of the roots must be	[22a]Hoc enim solum capitulum adieccione similiter et diminucione indiget [22b]quod in tribus capitulis preter hunc solum in quibus radices	[22b]Et hoc quidem unum trium capitulorum in quibus radicum mediatio est necessaria [22a]progreditur cum additione et diminutione.*

* Gr II,22: Die Versnummerierung habe ich mit Rücksicht auf Ox 22 und Rb 22 vertauscht.

halved.	mediantur, minime reperies.	
[23a]And know, that, when in a question belonging to this case you have halved the number of the roots	[23a]Sciendum eciam quoniam quando radices iuxta hoc capitulum mediaveris,	[23a]Scias autem quod cum medias radices in hoc capitulo
[23b]and multiplied the moiety by itself,	[23b]et eas in seipsis multiplicaveris,	[23b]et multiplicas eas in se,
[23c]if the product be less than the number of dirhems connected with the square,	[23c]si quod ex multiplicacione colligitur minus dragmatibus cum substancia pronunciatis fuerit,	[23c]et fit illud quod aggregatur minus dragmis que sunt cum censu,
[23d]then the instance is impossible;	[23d]quodque tibi facta fuerat adnulla est.	[23d]tunc questio est impossibilis,
[24a]but if the product be equal to the dirhems by themselves,	[24a]Ac si ipsa similiter dragmatibus fuerit	[24a]Quod si fuerit eisdem dragmis equalis,
[24b]then the root of the square is equal to the moiety of the roots alone,	[24b]una radix substancie similis erit medietati radicum, que cum substancia pronunciantur,	[24b]tunc radix census est equalis medietati radicum
[24c]without either addition or subtraction.	[24c]adieccione similiter et diminucione abiectis.	[24c]absque augmento et diminutione.
(Rosen, 1831, S. 11 f.)	(Hughes, 1989, S. 34 f.), vgl. auch (Karpinski, 1915, S. 74, 76)	(Hughes, 1986, S. 235 f.), vgl. auch (Libri, 1838, S. 257)

Auch die Texte dieses Parallelabschnittes sind untereinander sehr ähnlich. Inhaltlich geht es um die Auflösungsregel der fünften Standardform. Al-Khwarizmi behandelt sie am Beispiel einer Gleichung, die *wir* als $x^2 + 21 = 10x$ notieren können. Die Lösung entspricht dem Schema

$$10 \xrightarrow{\text{halbieren}} 5 \xrightarrow{\text{quadrieren}} 25 \xrightarrow{\text{21 subtrahieren}} 4 \xrightarrow{\text{Wurzel ziehen}} 2 \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{von 5 subtrahieren}} 3 \\ \xrightarrow{\text{zu 5 addieren}} 7 \end{array} ,$$

das sich gemäß Satz 15 f. und Satz 22 im letzten Schritt in zwei Stränge differenziert. Dieser Prozess lässt sich noch kürzer als Term $\frac{10}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 21}$ notieren. Im allgemeinen Fall können durch ihn zwei Lösungen der Gleichung $x^2 + q = px$ nach dem Schema

$$p \xrightarrow{\text{halbieren}} \frac{p}{2} \xrightarrow{\text{quadrieren}} \left(\frac{p}{2}\right)^2 \xrightarrow{q\text{ subtrahieren}} \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$
$$\xrightarrow{\text{Wurzel ziehen}} \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{von }\frac{p}{2}\text{ subtrahieren}} \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\ \xrightarrow{\text{zu }\frac{p}{2}\text{ addieren}} \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \end{array}$$

gefunden werden. Welche der beiden derart ermittelten Zahlen als *tatsächliche* Lösung eines vorgelegten Problems gelten darf, muss der Anwender allerdings von Fall zu Fall entscheiden (Sätze 19-21b). Mit der Möglichkeit, dass *beide* Zahlen auch tatsächliche Lösungen sind, rechnet Al-Khwarizmi anscheinend nicht (Satz 21a). Immerhin garantiert er dem Leser, dass *eine* der beiden Zahlen auf jeden Fall die gesuchte Antwort darstellt (Satz 21b).

Al-Khwarizmi erkennt nun noch, dass das Ziehen der Wurzel im vorliegenden Fall problematisch sein kann, da die zu radizierende Zahl aus einer Differenz gebildet wird. Wenn diese verschwindet – Minuend und Subtrahend also gleich groß sind (Satz 24a) –, so besitzt die Gleichung nur eine Lösung, in unserer Notation $\frac{p}{2}$ (Sätze 24b-c). Wenn der Minuend den Subtrahenden sogar übertrifft, so bezeichnet Al-Khwarizmi den Fall als „impossibilis“ (Gr II,23d). Wir erkennen hierin die uns geläufigen Fallunterscheidungen bei quadratischen Gleichungen gemäß der Diskriminantenbedingung.

Die Möglichkeit, zwei Zahlen bei der Auflösung zu finden, wird von Al-Khwarizmi übrigens nur im vorliegenden Fall 5 angesprochen. Das hat einen tieferen Grund: In den Fällen 4 und 6 wären, wie wir heute formulieren, die zweiten Lösungen negative Zahlen, die die arabische Mathematik des Mittelalters nicht gekannt und nicht benutzt hat.

Für die Entwicklung der Algebra war die Erkenntnis, dass eine („quadratische“) Gleichung zwei Lösungen haben kann, ein wichtiger konzeptioneller Fortschritt.

3.1.1.2.1.3 Al-Khwarizmis Fall 6: „Wurzeln und Zahlen sind gleich Quadraten”

Frederic Rosen (1831) **Ox III**	**Robert von Chester (1145)** **Rb III**	**Gerhard von Cremona (1150)** **Gr III**
[1]Roots and Numbers are equal to Squares; [2]for instance, “three roots and four of simple numbers are equal to a square.”	*[1]<Capitulum VI :>De radicibus et numeris substantiam coaequantibus.* [2]In hoc autem capitulum primum sic proponuntur, „Tres autem radices et 4 ex numero uni coequantur substancie.	[1]Radices vero et numerus que censui equantur, [2]sunt sicut si dicas: ‚Tres radices et quattuor ex numeris equantur censui uni.‘
[3]Solution: [4]Halve the roots; [5]the moiety is one and a half. [6]Multiply this by itself; [7]the product is two and a quarter. [8]Add this to the four; [9]the sum is six and a quarter. [10a]Extract its root; [10b]it is two and a half. [10c]Add this to the moiety of the roots, [10d]which was one and a half;	[3]Huius igitur talis datur regula, [4]quantas radices per medium dividas [5]et fiet una radix et alterius medietas. [6]Hec igitur in seipsis multiplica [7]fientque duo et quarta. [8]Hec igitur super 4 adicias, [9]et erunt 6 et quarta. [10a]Huius ergo summe radicem accipias, [10b]id est duo et medium. [10c]Quam super medietatem radicum adicias, [10d]id est super unum et alterius medietatem,	[3]Cuius regula est [4]*ut*[*] medies radices [5]que erant unus et semis. [6]Multiplica ergo ipsas in se, [7]et provenient ex eis duo et quarta. [8]Ipsum itaque quattuor dragmis adde [9]et fiunt sex et quarta. [10a]Cuius radicem [10b]que est duo et semis assume; [10c]quam medietati radicum [10d]que est unus et semis adde;
[10e]the sum is four. [10f]This is the root of the square, [11]and the square is sixteen.	[10e]fientque 4, [10f]que unam substancie radicem componunt, [11]16 ergo substanciam adimplent.	[10e]et erit quattuor [10f]qui est radix census, [11]Et census est sedecim.
(Rosen, 1831, S. 12 f.)	(Hughes, 1989, S. 35), vgl. auch (Karpinski, 1915, S. 76)	(Hughes, 1986, S. 236), vgl. auch (Libri, 1838, S. 255)

In den Texten dieses Parallelabschnittes gibt Al-Khwarizmi die Auflösungsregel der sechsten Standardform an. Ähnlich wie in den beiden vorigen Fällen löst er das Beispiel $x^2 = 3x + 4$ durch ein Schema entsprechend

$$3 \xrightarrow{\text{halbieren}} 1\tfrac{1}{2} \xrightarrow{\text{quadrieren}} 2\tfrac{1}{4} \xrightarrow{\text{zu 4 addieren}} 6\tfrac{1}{4} \xrightarrow{\text{Wurzel ziehen}} 2\tfrac{1}{2} \xrightarrow{\text{zu } 1\frac{1}{2} \text{ addieren}} 4$$

was sich im allgemeinen Fall, von $x^2 = px + q$ ausgehend, durch

[*] Gr III,4: Kursivstellungen deuten auf Korrekturen des Manuskripttextes durch den Bearbeiter hin (Hughes, 1986, S. 231).

$$p \xrightarrow{\text{halbieren}} \frac{p}{2} \xrightarrow{\text{quadrieren}} \left(\frac{p}{2}\right)^2 \xrightarrow{\text{zu } q \text{ addieren}} \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$$
$$\xrightarrow{\text{Wurzel ziehen}} \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} \xrightarrow{\text{zu } \frac{p}{2} \text{ addieren}} \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \frac{p}{2}$$

darstellen lässt.

Ein bemerkenswerter Unterschied des vorliegenden Falles 6 zu den vorangegangenen Fällen 4 und 5 ist darin zu erkennen, dass Al-Khwarizmi *hier* die Aufgabenstellung nur als Gleichung ausspricht (III,2), während er sie *zuvor* beide Male zusätzlich als Handlungskette mit fehlendem Anfangsglied angibt (I,5a.b und II,3a.b). (Oaks & Alkhateeb, 2005) bezeichnen eine solche (Um-)Formulierung als „enunciation"; z. B.:

> „ [4b]… ‚Census et decem radices equantur triginta novem dragmis.' [5a]*Cuius hec est significatio:* [5b]ex quo censu cui additur equale decem radicum eius aggregatur totum quod est trigenta novem."
>
> (Gr I,4b-5b, meine Hervorhebung)

Bei dieser Reformulierung, die dem Zwecke der Erläuterung dient und entsprechend durch „Cuius hec est significatio" eingeleitet wird, handelt es sich um eine Darstellung der Aufgabe in einer älteren, arithmetischen und zugleich elementareren Sprechweise, die den zeitgenössischen Lesern vermutlich besser vertraut war als die Gleichungen der Algebra:

> "Algebra was just one method available to medieval mathematicians for working out problems. Others were single and double false position, geometry, and 'working backwards.' Even in books specifically devoted to algebra one often finds two solutions to a single enunciation by different methods."
>
> (Oaks & Alkhateeb, 2005, S. 413 f.)

So verhält es sich auch mit Al-Khwarizmis *al-jabr*, die ja ausdrücklich in die Algebra *einführen* will:

> "He [Al-Khwarizmi] first states the algebraic equation to be solved. […] Then, *to explain the wording, he translates the equation back into the arithmetical language of an enunciation.* […] Al-Khwarizmi gives both versions for the […] examples of type (4) and […] (5)." (Oaks & Alkhateeb, 2005, S. 413 f., meine Hervorhebung)

Im vorliegenden Fall 6 unterlässt Al-Khwarizmi die Reformulierung; denn:

> "By the time students get to type (6), they have presumably become accustomed to the phrasing, so only the algebraic equation is stated." (Oaks & Alkhateeb, 2005, S. 414)

Wie diese wenigen Bemerkungen zeigen, lassen sich aus den kurzen Passagen I,5a-b und II,3a-b bereits interessante Schlüsse auf den Kontext von Al-Khwarizmis Werk und seine Leserschaft ziehen. Ich werde diesen Aspekt bei der Diskussion der Rezipientendimension wieder aufgreifen und vertiefen (3.1.2).

Wenn wir uns die von Al-Khwarizmi angegebenen Auflösungsregeln vor Augen führen, fallen uns sowohl Gemeinsamkeiten wie auch Unterschiede der Fälle 4, 5 und 6 auf: In allen Fällen bestehen die ersten beiden Schritte darin, die Anzahl der Wurzeln zu halbieren und diese Hälfte zu quadrieren.

Im 4. und 6. Fall wird anschließend die (absolute) Zahl addiert, im 5. Fall hingegen subtrahiert. Wenn die Subtraktion nicht ausgeführt werden kann (weil der Minuend größer als der Subtrahend ist), dann kann die Gleichung nicht gelöst werden. Aus dem Ergebnis der Addition bzw. Subtraktion wird in allen Fällen die Wurzel gezogen. Nur der letzte Schritt ist jeweils verschieden: Im 4. Fall muss die Hälfte der Anzahl der Wurzeln vom bisherigen Ergebnis, im 5. Fall das bisherige Ergebnis von dieser Hälfte subtrahiert und auch addiert werden. Im 6. Fall müssen die beiden Zahlen nur addiert (statt subtrahiert) werden.

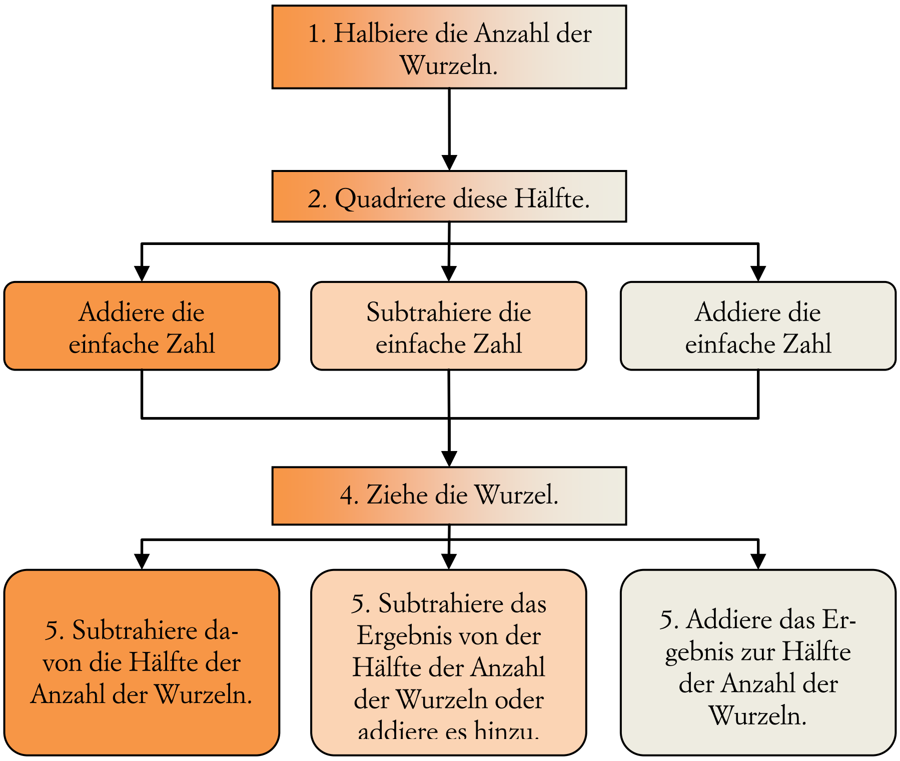


Abbildung 32: Gemeinsamkeiten und Unterschiede in den Auflösungsregeln der Fälle 4, 5 und 6.

3.1.1.2.2 Die Begründungen

Nach der Darstellung der Auflösungsregeln fährt Al-Khwarizmi mit der Begründung der Verfahren fort. Während die Texte der vorangegangenen drei Parallelabschnitte sehr große Ähnlichkeiten untereinander besitzen, begegnen uns in den nächsten drei Abschnitten die ersten größeren Differenzen. Sie werden von Høyrup als das Ergebnis der Bearbeitungen an den nicht erhaltenen Überlieferungszwischenstufen A, B und C angesehen und liefern die Evidenzen für das von ihm konstruierte Stemma der Abbildung 31.

3.1.1.2.2.1 Begründung zu Fall 4: „Quadrate und Wurzeln sind gleich Zahlen"

Die Auflösungsregel dieses Falls wurde in Abschnitt 3.1.1.2.1.1 angegeben. Ihre Begründung lautet so:

Frederic Rosen (1831) **Ox IV**	**Robert von Chester (1145)** **Rb IV**	**Gerhard von Cremona (1150)** **Gr IV**
[1]Demonstrations of the Case: “a Square and ten Roots are equal to thirty-nine Dirhems.” [2]The figure to explain this a quadrate [sic], the sides of which are unknown. [3]It represents the square,	[1]Substancia et 10 radices 39 coequantur dragmatibus. [2]Huius probacio est ut rumbum cuius latera ignorantur, proponamus. [3]Hic igitur rumbus substanciam,	[1]Causa autem est ut hic. Cencus et decem radices equantur triginta novem dragmis. [2]Fit ergo illi superficies quadrata ignotorum laterum [3]que est census
[4]the which, or the root of which, you wish to know. [5]This is the figure AB, [6]each side of which may be considered as one of its roots; [7a]and if you multiply one of these sides by any number,	[4]quam et cuius radices scire voluimus designet. [5]Et ipse est rumbus *a b* [6]cuius unumquodque latus unam eius ostendit radicem. [7a]Et iam manifestum est quoniam, quando aliquod eius latus in numero numerorum	[4]quem et eius radices scire volumus. [5]Que sit superficies *a.b.* [6]Unumquodque autem laterum ipsius est radix eius. [7a]Et unumquodque latus eius cum in aliquem numerum multiplicatur,
[7b]then the amount of that number may be looked upon as the number of the roots which are added to the square.	multiplicaverimus, [7b]tunc hoc quod ex multiplicacione colligitur erit numerus radicum radici ipsius numeri consimilis.	[7b]tunc numerus qui inde aggregatur est numerus radicum quarum queque est sicut radix illius superficies.
[7C]*Each side of the quadrate represents the root of the square;		
[8a]and, as in the instance, the roots were connected with the square, [8b]we may take one-fourth of ten, [8c]that is to say, two and a half,	[8a]Quando igitur cum substancia primum decem radices propsuimus, [8b]quartam partem denarii numeri, [8c]id est 2 et medium, accipiemus.	[8a]Postquam igitur dictum est quod cum censu sunt decem radices, [8b]accipiam quartam decem, [8c]que est duo et semis.
[9a]and combine it with each of the four sides of the figure.	[9a]At eciam unicuique 4 laterum rumbi primi aream equalium laterum applicabimus	[9a]Et faciam unicuique quarte cum uno laterum superficiei superficiem.
[9b; Rb 11b]†Thus with the original quadrate AB, four new parallelograms are combined,		[9b; Rb 11b]Fiunt ergo cum superficie prima que est superficies *a.b.* quattuor superficies equales cuiusque
[10; Rb 11c]each having a side of the quadrate as its length,	[10] quare scilicet longitudinem longitudo unius lateris rumbi primi demonstret.	[10; Rb 11c]quarum longitudo est equalis radicis *a.b.*
[11; Rb 11d]and the number of two and a half as its breadth;	[11a]Earum vero latitudinem duo et medium obtineant,	[11; Rb 11d]et latitudo est duo et semis.
	[11b; Ox 9b, Gr 9b]que videlicet quartam partem denarii numeri demonstrant. Quatuor ergo aree laterum equalium rumbo primo, id est *a b*, applicantur. [11c; Ox 10, Gr 10]Quarum omnium longitudo longitudini unius radicis	

* Ox IV,7C: Verse, die in mindestens einem der Paralleltexte keine Entsprechung haben, werden durch eine Ziffer und einen Großbuchstaben gekennzeichnet.

† Ox IV,9b: Die Angabe bedeutet, dass sich die Parallelstelle bei Robert in Vers 11b findet.

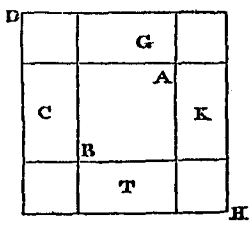
	rumbi *a b* maius consimilis, [11d; Ox 11a, Gr 11a]quarumque latitudinem duo et medium, ut iam dictum est, demonstrant;[*]	
[12] they are the parallelograms C, G, T, and K. [13]We have now a quadrate of equal, though unknown sides; [14a]but in each of the four corners of which a square piece of [14b]two and a half multiplied by two and a half is wanting.	[12]et hec sunt aree *g d h c*. [13]Ex hoc ergo quod diximus, fit area laterum equalium, que similiter ponuntur ignota, [14a]in cuius videlicet 4 angulis, id est in cuius unoquoque angulo quantitas aree, [14b]quam duo et medium in duo et medium multiplicata circundant, imperfectionem maioris aree idem ostendunt.	[12] Que sunt superficies *g.h.t.k.* [13]Radici igitur superficiei equalium laterum et etiam ignotorum [14a]deest quod ex angulis quattuor est diminutum, scilicet unicuique angulorum [14b]deest multiplicatio duorum et semis in duo et semis.
[15]In order to compensate for this want and to complete the quadrate,	[15]Unde fit ut circunduccionem aree maioris,	[15]Quod igitur ex numeris necessarium est ad hoc ut superficiei quadratura compleatur,
[16]we must add (to that which we have already) four times the square of two and a half, [17]that is, twenty-five.	[16]cum adieccione duorum et medii cum duobus et medio 4 vicibus multiplicatorum compleamus, [17]ut hec tota multiplicatio 25 pariat.	[16]est multiplicatio duorum et semis in se quater. [17]Et aggregatur ex summa illius totius viginti quinque.
[18a]We know (by the statement) that the first figure, namely, the quadrate representing the square, [18b]together with the four parallelograms around it,	[18a]Et iam manifestum est quoniam primus rumbus, qui substanciam signat, [18b]et 4 aree ipsum circundantes,	[18a]Iam autem scivimus quod prima superficies que est superficies census, [18b]et quattuor superficies que ipsam circumdant,
[18C]which represent the ten roots,		[18C]que sunt decem radices,
[19]is equal to thirty-nine of numbers. [20a]If to this we add twenty-five, [20b]which is the equivalent of the four quadrates at the corners of the figure AB, [20c]by which the great figure DH is completed, [21]then we know that this together makes sixty-four.	[19]39 perficiunt numerum. [20a]Quibus quando 25 [20b]et 4 rumbos qui scilicet super angulos rumbi *a b* ponuntur adiciemus, [20c]rumbus maior id est rumbus *e c* circunduccione complebitur. [21]Unde eciam et hec tota numeri summa usque ad 64 excrescet,	[19]sunt ex numeris triginta novem. [20a]Cum ergo addiderimus ei viginti quinque, [20b]qui sunt ex quattuor quadratis que sunt super angulos superficiei *a.b.*, [20c]complebitur quadratura maioris superficiei que est superficies *d.e.* [21]Nos autem iam novimus quod totum illud est sexaginta quattuor.
[22a]One side of this great quadrate is its root, [22b]that is, eight.	[22b]cuius summe radicem unius octonarius numerus obtinet, [22a]qui eciam unum eius latus compleri probatur.[†]	[22a]Unum igitur laterum eius est ipsius radix [22b]que est octo.
[23a]If we subtract twice a fourth of ten, that is five, from eight, [23b]as from the two extremities of the side of the great quadrate DH, [24]then the remainder of such a side will be three,	[23a]Quando igitur ex numero octonario similitudinem quarte partis denarii numeri [23b]simul in extremitatibus rumbis maioris qui est *e c* ponuntur, bis subtraxerimus. [24a]Tria ex ipsius latere remanebunt.	[23a]Minuam itaque quod est equale quarte decem bis [23b]ab extremitatibus duabus lateris superficiei maioris que est superficies *d.e.* [24]Et remanebit latus eius tres.
	[24B; Ox 23a]Quinque ergo ex 8	

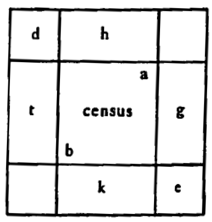
[*] Rb IV,11d ist eine bloße Wiederholung von Rb IV,11a. Vgl. aber auch Ox IV,8C und Gr IV,8C.

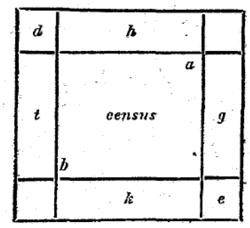
[†] Rb IV,22: Die Versnummerierung habe ich mit Rücksicht auf Ox 22 und Gr 22 vertauscht.

	subtractis, [24C]tria remanere necesse est;	
[25b]and that is the root of the square, [25a]or the side of the original figure AB. *	[25a]que similiter uni lateri rumbi primi qui est *a b* equiparantur. [25b]Hec igitur tria unam huius rumbi radicem,	[25a]Qui est equalis lateri superficiei prime, que est *a.b.*, [25b]et est radix illius census.
	[25C]id est unam radicem substancie proposite obtinent, quam videlicet substanciam novenarius adimplet numerus.	
[26]It must be observed, that we have halved the number of the roots, [27a]and added the product of the moiety multiplied by itself [27b]to the number thirty-nine, [28]in order to complete the great figure in its four corners;	[26]Igitur numerum denarium mediavimus, [27a]et unam medietatem in seipsam multiplicavimus, [27b]et totam multiplicacionis summam super 39 addidimus, [28a]et maioris rumbi, qui est *e c*, circunduccio completur.	[26]Non† autem mediamus radices decem; [27a]et multiplicamus eas in se; [27b]et addimus eas numero qui est triginta novem; [28]nisi ut compleatur nobis figure maioris quadratura cum eo quod deest quattuor angulis.
	[28B]Nam et eius 4 angulorum diminucio totam huius rumbi circunduccionem imperfectam reddebat.	
[29a]because the fourth of any number multiplied by itself, [29b]and then by four, [29c]is equal to the product of the moiety of that number multiplied by itself. [30a]Accordingly, we multiplied only the moiety of the roots by itself, [30b]instead of multiplying its fourth by itself, and then by four.	[29a]Manifestum est enim, quoniam quarta pars omnis numeri in suo consimili *a e* ducta, [29b]deinde in 4 multiplicata, [29c]eundem perficiet numerum. Quem si medietas in seipsam semel duceretur perficeret. [30a]Ergo si radicum medietas semel in seipsam ducatur, huius multiplicacionis summa, [30b]multiplicaccionem quarte partis in seipsam ac deinde in 4 deducte, sufficienter evacuet.	[29a]Cum enim cuiusque numeri quarta in se multiplicatur; [29b]et deinde quod inde provenit in quattuor, [29c]erit quod proveniet multiplicationi medietati eius in se equale. [30a]Sufficit igitur nobis multiplicatio *medietatis* radicum in se, [30b]loco multiplicandi quartam in se quater.

[30C]This is the figure:





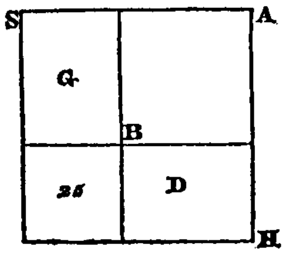
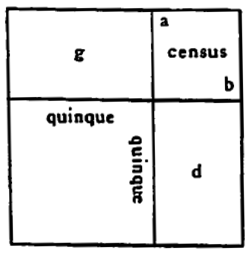
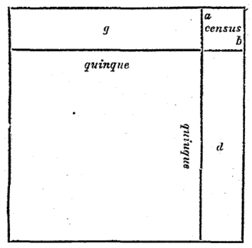


[31]The same may also be explained	[31]Ad hoc eciam idem probandum,	[31]Est eius preterea forma altera ad

* Ox IV,25a.b: Die Versnummerierung habe ich mit Rücksicht auf Rb 25 und Gr 25 vertauscht.
† Gr IV,26: Bei Libri: „Nos“ (!)

by another figure. [32]We proceed from the quadrate AB, which represents the square. [33]It is our next business to add to it the ten roots of the same. [34]We halve for this purpose the ten, so that it becomes five, [35a]and construct two quadrangles on two sides of the quadrate A B, namely, G and D, [35c]the length of each of them being five, as the moiety of the ten roots, [35b]whilst the breadth of each is equal to a side of the quadrate AB.*	altera datur formula. [32]Sit *a b* ipsam signans substanciam [33]cuius similitudinem 10 radices addimus. [34]10 ergo radices per medium dividamus et fient 5, [35a]ex quibus similiter duas areas super duo latera rumbi *a b* constituas. Proponimus et ipse sunt aree *b d* et *b g*, [35b]quare similiter latitudines uni lateri rumbi *a b* habuntur consimiles. [35c]Earum vero longitudines quinarius complet numerus qui medietatem 10 radicum super duo latera rumbi *a b* adiectarum adimplet.	hoc idem perducens: [32]que est superficies a.b. que est census. [33]Volumus autem ut addamus ei equale decem radicibus eius. [34]Mediabimus igitur decem et erunt quinque. [35a]Et faciemus eas duas superficies super duas partes a.b. que sint due superficies g. et d. [35b]quarum cuiusque longitudo sit equalis lateri superficiei a.b., [35c]et latitudo eius sit quinque, qui est medietas decem.
[36a]Then a quadrate remains	[36]Restat igitur	[36a]Remanebit ergo nobis
[36B]opposite the corner of the quadrate AB.		[36B]super superficiem a.b. quadratum
[37a]This is equal to five multiplied by five: [37b]this five being half of the number of the roots which we have added to each of the two sides of the first quadrate. [38]Thus we know that the first quadrate, which is the square, and the two quadrangles on its sides, which are the ten roots, make together thirty-nine.	[37a]ut rumbum ex multiplicacione 5 in 5, [37b]que medietatem 10 radicum designant quas super duo latera rumbi extremi addidimus, qui et substanciam signat, faciamus. [38]Et iam manifestum est quoniam due aree que super duo latera ponuntur et que 10 radices substancie signant,similiter cum rumbo primo qui est substancia 39 ex numero adimplent.†	[37a]quod fit ex quinque in quinque, [37b]qui est medietas decem radicum. Quas addidimus super duas partes superficiei prime. [38]Scimus autem quod superficies prima est census, et quod due superficies que sunt super duas ipsius partes, sunt decem radices eius. Et hoc totum est triginta, novem.
[39a]In order to complete the great quadrate, there wants only a square of five multiplied by five,	[39a]Manifestum est eciam, quoniam ex perfeccione aree maioris rumbus ex multiplicacione 5 in 5 que facit 25 nondum perficitur. Hic ergo rumbus perficiatur,	[39]Ad hoc igitur ut maioris superficiei quadratum compleatur
[39B]or twenty-five. This we add to thirty-nine, in order to complete the great square SH.	[39B]et ad perfecionem rumbi maioris qui est rumbus *a h* super 39 adiciatur.	
[40]The sum is sixty-four.	[40]Tota igitur hec summa usque ad 64 excrescet.	[40]erit totum illud quod aggregatur sexaginta quattuor.
[41]We extract its root, eight, which is one of the sides of the great quadrangle. [42]By subtracting from this the same quantity which we have before added, namely five, we obtain three as the remainder. [43]This is the side of the quadrangle A B, which represents the square;	[41]Huius ergo summe radicem, que unum latus rumbi designat, accipias [42]et ex ea similitudinem eius quod ei addidisti, id est 5, subtrahas et remanebunt tria [43]que similiter latus rumbi *a b*, qui est substancia, complere probatur.	[41]Accipe ergo radicem eius que est unum laterum superficiei majoris: quod est octo. [42]Cum ergo minuerimus ex ea equale ei quod super ipsam addidimus quod est quinque, remanebit tres. [43]Qui est latus superficiei a.b. que est census.

* Ox IV,35b.c: Die Versnummerierung habe ich mit Rücksicht auf Rb IV,35 und Gr IV,35 vertauscht.
† Rb IV,38 zählt die Teilstücke in umgekehrter Reihenfolge wie Ox IV,38 und Gr IV,38 auf.

[44]it is the root of this square,	[44]Hoc igitur unam substancie radicem adimplet. Tria ergo huius substancie sunt radix;	[44]Ipse namque est radix eius,
[45a]and the square itself is nine. [45B]This is the figure:—	[45]et substancia novem.	[45]et census est novem.
		
(Rosen, 1831, S. 13-16)	(Hughes, 1989, S. 36-39), vgl. auch (Karpinski, 1915, S. 76, 78, 80, 82)	(Hughes, 1986, S. 236 ff.), vgl. auch (Libri, 1838, S. 260-261)

Die Texte weisen, wie man auf den ersten Blick sieht, größere Abweichungen voneinander auf, als es in den vorherigen Abschnitten der Fall gewesen ist. Dabei ist die Zahl der Abweichungen zwischen Oxford und Gerhard mit 4 (7C, *30C*, 39B, *45B*) geringer als zwischen Oxford und Robert mit 8 (7C, 18C, 24B, 25C, 28B, *30C*, 36B, *45B*) bzw. zwischen Robert und Gerhard mit 6 (18C, 24B, 25C, 28B, 36B, 39B). Auch die unterschiedliche Reihenfolge in Rb IV,11b-d hebt Roberts Text von den beiden anderen ab.

Inhaltlich geht es in diesem Parallelabschnitt darum, anhand geometrischer Überlegungen die Auflösungsregel zu Fall 4 zu begründen. Al-Khwarizmi bringt gleich zwei Begründungen (IV,1-30 und IV,31-45) mit jeweils eigenen Zeichnungen. Es fällt natürlich sofort auf und ist auch schon oft bemerkt worden, dass die erste Begründung in Abschnitt IV,1-30 *nicht* zu der in I angegebenen Auflösung passt: Die Anzahl der Wurzeln wird – entgegen dem Verfahren der Auflösungsregel – mitnichten *halbiert*, sondern in *vier* Teile geteilt, die dann durch vier Flächenstücke an den Seiten des Quadrats repräsentiert werden. Die Figuren, die Al-Khwarizmi dem Text hinzugefügt hat, zeigen – hier wie auch in den anderen Fällen – die Ergebnisse aller Schritte, die in dem von ihm angegebenen Verfahren durchlaufen werden. Der Leser ist implizit aufgefordert, die Zeichnung Schritt für Schritt nachzukonstruieren, um die Argumentation zu verstehen. Dies könnte auf folgende Weise geschehen:

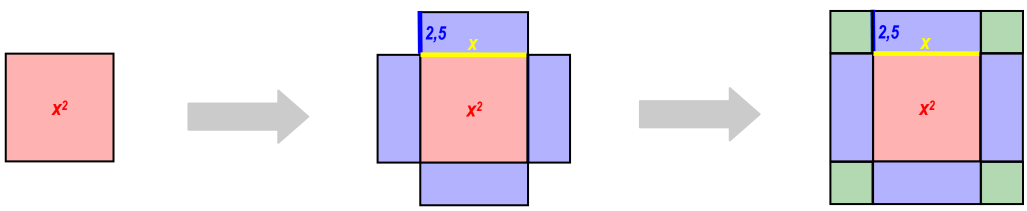


Abbildung 33: Die rote Fläche bezeichnet in allen Abbildungen das Quadrat (census, x^2). Die zehn Wurzeln ($10x$), die diesem Quadrat hinzugefügt werden, werden durch die vier blauen Flächen dargestellt (Mitte). Die **kürzere Kante** jeder blauen Fläche hat darum die Länge 10 : 4 = 2,5, die **längere Kante** entspricht dem x. Insgesamt hat die Figur einen Flächeninhalt von 39 Einheiten. Die grünen Flächen (rechts) werden nun ergänzt, um das größere Quadrat zu vervollständigen. Sie besitzen jeweils den Flächeninhalt 2,5 · 2,5, alle grünen Flächen zusammen also 4 · 2,5 · 2,5 = 25. Mit den addierten Flächen des roten und der blauen Stücke (39) ergibt sich so für das große Quadrat ein Gesamtflächeninhalt von 64 Einheiten, und daraus eine Kantenlänge von 8. Das rote Quadrat hat daher die Kantenlänge 8 – 2 · 2,5 = 3, und die Fläche 9.

Die mangelnde Übereinstimmung zwischen dieser Begründung und dem in I angegebenen Verfahren ist natürlich auch Al-Khwarizmi bewusst gewesen; denn in IV,26-30 bemüht er sich, eine Harmonisierung zwischen dem Verfahren in I und der Begründung in IV,1-25 herzustellen; sie läuft auf die Feststellung (IV, 29a-c) hinaus, dass $4\left(\frac{n}{4}\right)^2 = \left(\frac{n}{2}\right)^2$, was uns Heutigen, die wir über einen algebraischen Formelkalkül verfügen, trivialer vorkommt als es Al-Khwarizmis Zeitgenossen erschienen sein dürfte. In Gr IV,26a heißt es laut der Hughes-Ausgabe mit Blick auf den vorausgegangenen Text: „*Non* autem mediamus radices decem“ – „wir haben die zehn Wurzeln aber *nicht* halbiert“, während Libri die Stelle ganz gegenteilig mit „*Nos* autem mediamus radices decem“, also unter besonderer (aber unbegründeter) Betonung der 1. Person Plural wiedergibt: „*Wir* haben die zehn Wurzeln halbiert“ oder gar „*Wir* waren es, die die zehn Wurzeln halbiert haben“. Es ist zu vermuten, dass Hughes diese Stelle zutreffender gelesen hat.

Warum bringt Al-Khwarizmi einen Beweis, der angesichts dessen, was dann folgt (Satz IV,31-45), überflüssig zu sein scheint und darüber hinaus gar nicht zum zuvor von ihm angegebenen Verfahren passt? Høyrup vermutet, der Beweis sei “most obviously taken over from the sub-scientific cut-and-paste tradition“ (Høyrup, 1998, S. 20), “borrowed from the surveyors’ tradition” (Høyrup, 2002, S. 6). Heefer verweist darauf, dass der Beweis

> “corresponds remarkably well with the Babylonian table BM 13901, nr. 23 [eine Aufgabe, die auf die quadratische Gleichung $x^2 + 4x = 25/36$ hinausläuft, M. G.]. According to Høyrup, al-Khwarizmi’s proof must have been derived from this tradition. This way of demonstrating may then have been more familiar than the *al-jabr* itself.” (Heeffer, 2008, S. 101)

Möglicherweise suchte Al-Khwarizmi also auch hier zunächst den Anschluss an das Vorwissen und das Vorverständnis seiner Leser.

Erst der zweite Beweis steht dann im vollen Einklang mit dem Verfahren, das Al-Khwarizmi zuvor beschrieben hat. Eine schrittweise Darstellung könnte wie folgt aussehen:

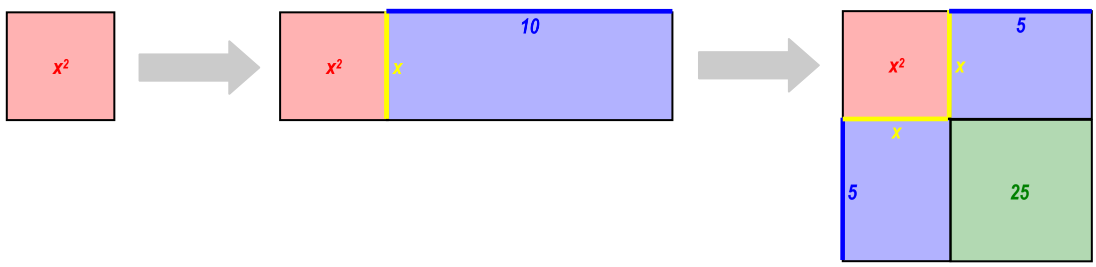


Abbildung 34: Die rote Fläche bezeichnet wiederum das Quadrat (census, x^2), die blauen Fläche die zehn Wurzeln ($10x$), die dem Quadrat hinzugefügt werden und zusammen mit ihm 39 Flächeneinheiten ergeben (Mitte). Ihre kürzeren Kanten entsprechen dem x, die längeren der 10. Hier nun wird diese 10 tatsächlich in zwei gleiche Teile halbiert und die so gewonnenen blauen Flächen zusammen mit dem roten Quadrat zu einem Winkelhaken (Gnomon) gelegt (rechts). Die grüne Fläche ergänzt diesen Haken zu einem vollen Quadrat und besitzt den Flächeninhalt $5 \cdot 5 = 25$ Einheiten. Mit den addierten Flächen des roten und der beiden blauen Stücke ergibt sich für das große Quadrat ein Gesamtflächeninhalt von $25 + 39 = 64$, mithin eine Kantenlänge von 8. Das rote Quadrat hat daher die Kantenlänge $8 - 5 = 3$ und die Fläche 9.

Nach Jens Høyrup trägt auch dieser Beweis Anklänge an ein alt-babylonisches Verfahren, das in BM 13901, Nr. 1 enthalten ist, vgl. hierzu (Jahnke H. N., 1991, S. 9) und (Høyrup, 2002, S. 11-14). Ich komme hierauf später noch zurück (S. 164).

3.1.1.2.2.2 Begründung zu Fall 5: „Quadrate und Zahlen sind gleich Wurzeln"

Die Auflösungsregel dieses Falls wurde in Abschnitt 3.1.1.2.1.2 angegeben. Ihre Begründung lautet so:

Frederic Rosen (1831) **Ox V**	**Robert von Chester (1145)** **Rb V**	**Gerhard von Cremona (1150)** **Gr V**
	[1]*DE SUBSTANTIA ET 21 DRAGMATIBUS 10 RES COEQUANTIBUS.*	
[1]Demonstration of the Case: "a Square and twenty-one Dirhems are equal to ten Roots."	Substancia vero et 21 dragmata 10 rebus equiparantur.	[1]Census autem et viginti unum equantur decem radicibus.
[2]We represent the square by a quadrate AD, the length of whose side we do not know. [3]To this we join a parallelogram, the breadth of which is equal to one of the sides of the quadrate AD, such as the side HN.	[2]Rumbum igitur *a b*, qui latera habeat ignota, substanciam pono. [3a]Cui aream laterum equalium cuius latitudo similis sit uni lateri rumbi *a b*,	[2]Ponam itaque censum superficiem quadratam ignotorum laterum que sit superficies *a.b.* [3]Deinde adiungam ei superficiem equidistantium laterum cuius latitudo sit equalis uni lateri superficiei *a.b.* quod sit latus *g.d.*
	[3B]cuiusque longitudo ad quamlibet hanc quantitatem applico.	
[4]This parallelogram [*sic*] is HB.		[4a]Et superficies sit *g.a.*
	[4B]Summam igitur huis aree 21 ex numero constituo,[13]	[4B]Et ponam ipsam esse viginti unum;[13]
	[4C]qui similiter est numerus cum ipsa substancia propositus.	
	[4a]Hec area *a g* inscribitur,	
	[4D]cuius similiter latitudo *g d* dinoscitur.	
[5]The length of the two figures together is equal to the line HC. [6]We know that its length is ten of numbers;	[5]Longitudo ergo duarum arearum invicem coniunctarum in *h d* terminatur. [6]Et iam manifestum est quoniam sua longitudo decenum obtineat numerum.	[5]Fit ergo longitudo duarum superficierum simul latus *e.d.* [6]Nos autem iam novimus quod longitudo eius est decem ex numeris.
[7a]for every quadrate has equal sides	[7a]Quoniam omnis area quadrata	[7a]Omnis namque superficiei

[13] Gr V,4B; Rb V,4B: Später (V, 19a) verweisen alle Texte darauf, dass bereits bemerkt wurde – nämlich hier, in V,4B –, dass die genannte Fläche die 21 repräsentiere. Bei Ox fehlt dieser Hinweis jedoch. Für Høyrup ist dies ein Anzeichen dafür, dass das Oxford-Manuskript eine „Verschlimmbesserung" [sic] gegenüber den lateinischen Versionen ist (Høyrup, 1998, S. 15). Vgl. Fußnote zu Ox V,19a.

and angles, [7b]and one of its sides multiplied by a unit is the root of the quadrate, [7c]or multiplied by two it is twice the root of the same. [8]As it is stated, therefore, [9]that a square and twenty-one of numbers are equal to ten roots, [10]we may conclude that the length of the line HC is equal to ten of numbers, [11]since the line CD represents the root of the square.	laterum et angulorum equalium, [7b]ex multiplicacione sui lateris in unum, unam obtinet radicem. [7c]Et si in binario ducatur numero, due eiusdem aree nascuntur radices. [8]Quoniam igitur primum sic proposuit: [9]Una substancia et 21, 10 radicibus equiparantur. [10]Manifestum est quoniam longitudo lateris *h d* in deceno terminetur numero, [11]quoniam latus *h b* unam substancie obtinet radicem.	quadrate equalium laterum et angulorum, [7b]si unum latus multiplicatur in unum, est radix illius superficiei. [7c]Et si in duo, est due radices eius. [8]Postquam igitur iam dictum est [9]quod census et viginti una dragma equantur decem radicibus, [10]et scimus quod longitudo lateris *e.d.* est decem, [11]quoniam latus *b.e.* est radix census.
[12]We now divide the line CH into two equal parts at the point G:	[12]Latus ergo *h d* super punctum e per medium divide.	[12]Ergo dividam latus *e.d.* in duo media super punctum *h.*,
		[13B]et erigam super ipsum lineam *h.t.*
[13]the line GC is then equal to HG.	[13a]Unde et linea *e h* linee *e d* fiet similis.	[13a]Manifestum est itaque quod *h.d.* est equalis *h.e.*
[14]It is also evident that the line GT is equal to the line CD. [15a]At present we add to the line GT, in the same direction, a piece equal to the difference between CG and GT,[14]	[14]Sed et iam manifestum est quoniam linea *e t* similis sit *h b*. [15a]In linea ergo *e t* simile residui *d e* super *e t* adiciam	[14]Sed iam fuit nobis manifestum quod linea *h.t.* est equalis *b.e*. [15a]Addam itaque linee *h.t.* quod sit equale superfluo *d.h.* super *h.t.*,
[15b]in order to complete the square.	[15b]ut et aree circunduccie adimpleatur,	[15b]ut quadretur superficies, quod sit linea *h.k*.
[16]Then the line TK becomes equal to KM,	[16]et fiet linea *t c* similis linee *t g*.	[16a]Fit ergo *t.k.* equalis *t.g.*
		[16B]quoniam *d.h.* fuit equalis *t.g.*
[17a]and we have a new quadrate of equal sides and angles, namely, the quadrate MT.	[17]Unde rumbus *t l*,	[17]et provenit superficies quadrata que est superficies *l.t.*
[17B]We know that the line TK is five; this is consequently the length also of the other sides: the quadrate itself is twenty-five,		
[18]this being the product of the multiplication of half the number of the roots by themselves, for five times five is twenty-five. [19a]We have perceived that the quadrangle HB represents the twenty-one of numbers[15] which were added to the quadrate.	[18]qui ex multiplicacione medietatis radicum in seipsam deducte, id est multiplicatione quinarii in quinario colligitur et fiunt 25, nobis eveniet. [19a]Et iam eciam manifestum est, quoniam area *a g* 21, que in simili substancie addidimus, in se obtineat.	[18]Et ipsa est quod aggregatur ex multiplicatione medietatis radicum in se, que est quinque in quinque. Et illud est viginti quinque. [19]Superficies vero *a.g.* fuit iam viginti unum qui iam fuit adiunctum ad censum.

[14] Ox V,15a unterscheidet sich bei der Nennung der Vergleichslinie von Rb V,15 und Gr V,15a. Nach deren Lesart hätte es lauten müssen: „a piece equal to the difference between GH and GT."

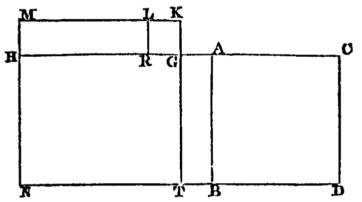
[15] Ox V,19a: Tatsächlich aber fehlt im Oxford-Text eine entsprechende Bemerkung. Vgl. Fußnote zu Gr V,4B; Rb V,4B.

[19B]We have then cut off a piece from the quadrangle HB by the line KT (which is one of the sides of the quadrate MT),	[19B]Ex area igitur *a g* linea *t c*, que est unum latus aree *t l* extrahamus	
	[19C (inc)]ac ex area *a g* aream *a t* minuamus.	
[19C (inc)]so that only the part TA remains.		
	[20A]Ac super lineam *e c*, que est in quo linea *c e t* lineam *b h* in quantitate vincit, rumbum *e* et *n m c* faciamus.	[20A]Post hoc faciamus super *h.k.* superficiem quadratum equalium laterum et angulorum, que sit superficies *m.h.*
	[20B (inc)]Sed et iam manifestum est, quoniam et linea *c t* similis sit linee *c l*, nam et ipse in rumbo *t l* equales protenduntur.	
		[20B (inc)]Et iam scivimus quod *h.t.* est equalis *e.b.*
		[20C]Sed *e.b.* est equalis *a.e.*
		[20D]Ergo *h.t.* est equalis *a.e.* [20E]Sed *t.k.* iam fuit equalis *h.e.*
		[20F]Ergo *h.a.* reliqua est equalis relique *h.k.*
		[20G]Sed *h.k.* est equalis *m.n.* ergo *m.n.* est equalis *h.a.* Sed *t.k.* fuit equalis *k.l.*,
[20 (inc)]At present we take from the line KM the piece KL,		
[21]which is equal to GK;	[21a]Similiter et linea *e c* similis est linee *m c*	[21]et *h.k.* est equalis *m.k.*
	[21B]quoniam et ipse rumbum *e m* equali divisione circundant.	
[22a]it then appears that the line TG is equal to ML;	[22a]Linea igitur *e t* linee *m l* restat consimilis.	[22]Ergo *m.l.* reliqua est equalis *h.t.* relique.
[22b; Rb 21a, Gr 21]moreover, the line KL, which has been cut off from KM, is equal to KG;		
	[22C]Et iam eciam manifestum est, quoniam et linea *g d* similis fit linee *b h*, quoniam ipse in latitudine aree *h g* aequali divisione tenduntur.	
	[22D]Sed linea *b h* similis est linee *g d*.	

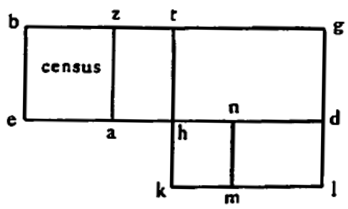
	[22E]Item quoniam linea *g l* et linea *h e* in quantitate habentur consimiles quoniam linea *g l* similis est linee *d e* nam ipse in uno rumbo reperiuntur equales, [22F]Lineaque *d e* similis est linee *h e*, nam eciam et ipse 10 radices per medium dividunt.	
	[22G]Linea ergo *e a*[16] ex linea *e h* residua similis erit linee *d l* ex linea *g l* residue.	
	[22H]Sed et linea *t e* linee *l m* iam fuerat consimilis,[17] [22I]area igitur quam linee *t e*, *e a* circundant similis est aree quam linee *m l*, *l d* circundant.	
[23]consequently, the quadrangle MR is equal to TA.	[23]Area igitur *t a* similis est aree *m d*.	[23]Ergo superficies *l.n.* est equalis superficiei *t.a.*
	[24a]Et iam manifestum est, quoniam area *l t* 25 in se contineat. Cum igitur ex area *l t*	[24a]Iam autem novimus quod superficies *l.t.* est viginti quinque.
[24b]Thus it is evident that the quadrangle HT, augmented by the quadrangle MR, is equal to the quadrangle HB, which represents the twenty-one.[18]	[24b]areas *d t*, *m d* que videlicet duabus areas *a t*, *e g*, 21 in se continentibus sunt consimiles,	[24b]Nobis itaque patet quod superficies *g.h.* addita sibi superficie *l.n.* est equalis superficiei *g.a.* que est viginti unum.
[24a]The whole quadrate MT was found to be equal to twenty-five.[18]		
[24c]If we now subtract from this quadrate, MT, the quadrangles HT and MR, which are equal to twenty-one, [24d]there remains a small quadrate KR, which represents the difference between twenty-five and twenty-one.	[24c]subtraxerimus, [24d]rumbus *n c* nobis remanebit, qui similitudinem numeri qui est inter 25 et 21, obtinet.	[24c]Postquam ergo minuerimus ex superficiei *l.t.* superficiem *g.h.* et superficiem *n.l.* que sunt viginti unum, [24d]remanebit nobis superficies parva que est superficies *n.k.* Et ipsa est superfluum quod est inter viginti unum et viginti quinque.
[25a]This is four; [25b]and its root, represented by the line RG, which is equal to GA, is two.	[25a]Et hic numerus est quaternarius, [25b]cuius videlicet radicem duo designant, quae latus *e c* adimplent.	[25a]Et ipsa est quattuor [25b]cuius radix est *h.k.* Sed ipsa est equalis *h.a.* et illud est duo.
	[25C]Et hoc latus simile est *e a*, quoniam *e c* similis est *d l*, nam et ipse in latitudine aree *d c* continentur.	

[16] In Hughes' Ausgabe steht hier: „Linea ergo *c a*" – doch nur *e a* ergibt Sinn.
[17] Rb V,22H: vgl. 22a.
[18] Ox V,24: Die Versnummerierung habe ich mit Rücksicht auf Rb V,24 und Gr V,24 vertauscht.

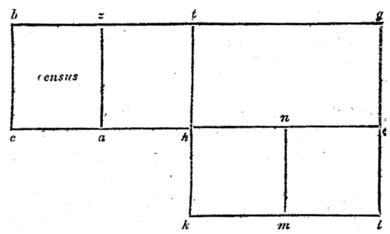
[26]If you subtract this number two from the line CG, which is the moiety of the roots,	[26]Et iam manifestum est, quoniam *d l* similis sit *e a*, que sunt duo ex *e h*, que sunt medietas radicis, quam quinarius ostendit numerus. Abstulerimus	[26]Sed *h.e.* est medietas radicum, que est quinque. Cum ergo minuerimus ex ea *h.a.* que est duo,
[27]then the remainder is the line AC; that is to say, three,	[27]linea *a h* ternarium designans numerum restabit.	[27]remanebit tres qui est linea *a.e.*
[28]which is the root of the original square.	[28]Ternarius igitur numerus radicem prime demonstrat substancie.	[28]que est radix census.
		[28B]Et census est novem. [28C; Rb 34B]Et illud est quod demonstrare voluimus.
[29]But if you add the number two to the line CG, which is the moiety of the number of the roots, [30]then the sum is seven, [31]represented by the line CR, [32]which is the root to a larger square. [33]However, if you add twenty-one to this square, then [34]the sum will likewise be equal to ten roots of the same square.	[29]Quod si lineam *e n* super lineam *e h* addiderimus, que solum medietatem radicum continet, [30]fiunt 7, [31]que lineam *n h* ostendunt. [32]Et tunc radix substancie maior ista substancia [33]quando videlicet super ipsam 21 addidimus, [34a]fiet ipsa substancia 10 suis consimilis radicibus,	
	[34B; Gr 28C]Et hoc est quod explanare voluimus.	
[35]Here is the figure:—		



(Rosen, 1831, S. 16-18)



(Hughes, 1989, S. 39-41), vgl. auch (Karpinski, 1915, S. 82, 84, 86)

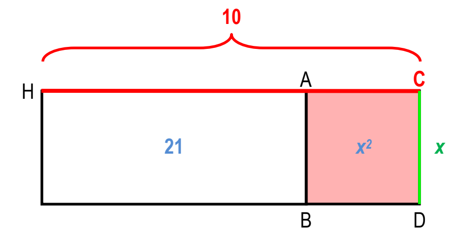


(Hughes, 1986, S. 238 f.), vgl. auch (Libri, 1838, S. 261-263)

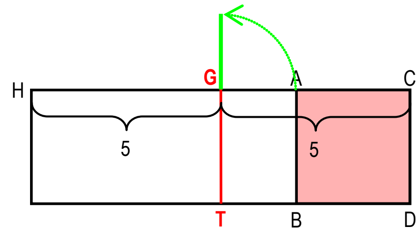
Beim Vergleich der drei Texte fällt auf, dass Gerhard die zweite Lösung der Gleichung (Ox/Rb V,29 ff.) überhaupt nicht erwähnt. An Abweichungen zählen wir darüber hinaus im Bereich von V,1 bis V,28 zwischen Ox und Gr: 8 (4B, 13B, 16B, 17B, 19B.C, 20A-G), Ox/Rb 20 (1B, 4B-D, 13B, 15B, 17B, 19C, 20A.B, 21B.C, 22B-I, 25C) sowie zwischen Rb und Gr: 19 (1B, 4C.D, 15B, 16B, 19B.C, 20B;D.E;G, 21B, 22B-I, 25C). Roberts Text hebt sich vor allem durch die lange, nicht parallelisierte Stelle Rb V,22B-I von den anderen beiden Texten ab. Die Beschriftung der Zeichnung hingegen weicht in der Oxforder Version von Robert und Gerhard ab. Letztere stimmen praktisch miteinander überein.

Inhaltlich geht es in diesem Abschnitt um die Begründung des Falls 5. Die Argumentation ist durchaus verwickelt. Durch schrittweise Rekonstruktion kann sie aber zufriedenstellend nachvollzogen werden:

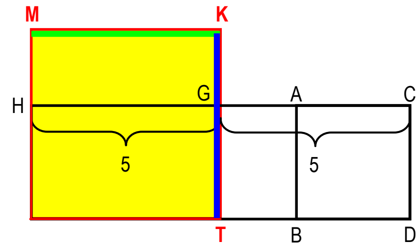
Al-Khwarizmi stellt das Quadrat und die zehn Wurzeln wieder als zweiteilige Fläche aus Quadrat und Rechteck dar. Während das Quadrat in unseren Begriffen erneut den Term x^2 repräsentiert, steht das Rechteck diesmal für die 21. Beide Flächen zusammen ergeben die $10x$, so dass die **Strecke HC** gleich 10, die **Strecke CD** gleich x ist.



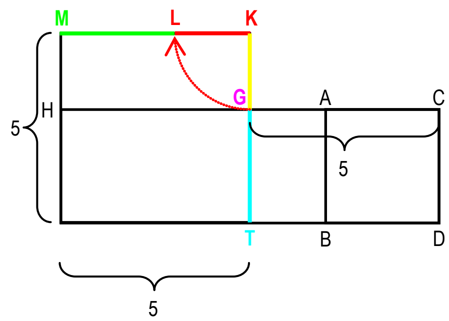
Nach Teilung der Strecke HC durch den Punkt G in der Mitte, wird der **Strecke GT ein Stück** aufgesetzt, das genauso lang ist wie GA.



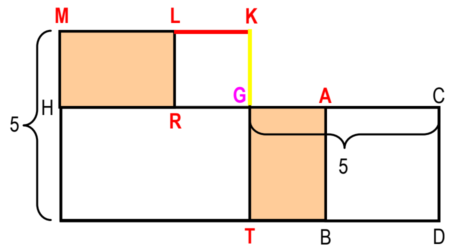
Auf dieser **verlängerten Strecke** TK wird ein Quadrat errichtet. Da $\overline{TK} = \overline{HG}$, beträgt der Flächeninhalt dieses Quadrates $5^2 = 25$ Einheiten.



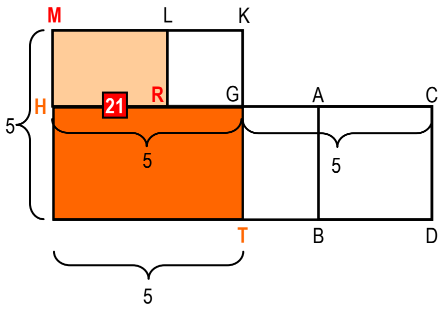
Von der Strecke KM wird nun ein **Stück KL** abgezogen, das genauso lang ist wie KG. Folglich ist der **Rest LM** genauso lang wie der **Rest GT**.

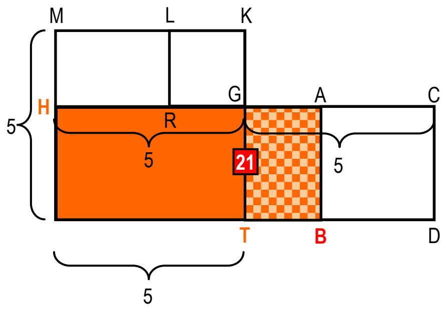


Da konstruktionsbedingt auch $\overline{KG} = \overline{GA}$ ist, sind die beiden Flächen *MLRH* und *TGAB* gleich groß.

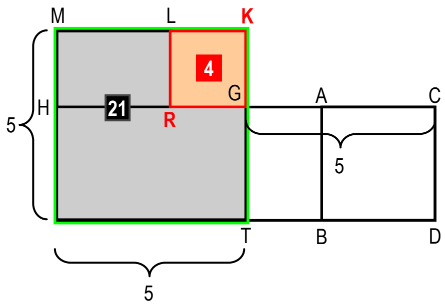


Die rot markierten Flächen in den beiden nachstehenden Zeichnungen ergeben also jeweils 21 Flächeneinheiten. Rechts gilt dies nach Voraussetzung, links aufgrund der soeben eingesehenen Flächengleichheit von *MLRH* und *TGAB*:





Da das **Quadrat MT** einen Flächeninhalt von 25 Einheiten hat, entfallen auf das kleine **Quadrat** *KGRL* also 4 Einheiten. Die Strecke *KG* ist darum, genau wie die Strecke *AG*, 2 Einheiten lang. Damit bleiben für *AC*, die Wurzel des gesuchten Quadrates, 3 Einheiten.



Die von Al-Khwarizmi verwendete Figur erinnert, wie schon oft bemerkt worden ist, an Euklids *Elemente* II, 5.6 und VI, 28.29. Hughes weist jedoch auf einen bedeutenden Unterschied hin:

> "Euclid of course proves the theorem synthetically; al-Khwarizmi on the contrary reaches it analytically." (Hughes, 1989, S. 215)

(Jahnke H. N., 1991) hat diesen Befund noch weiter herausgearbeitet. Die Vorgehensweise bei Al-Khwarizmi belege – im Gegensatz zum Euklidischen Paradigma –

> „… eine Denkweise […], die man als *‚analytisch'* bezeichnen kann und die jedermann aus der Schulalgebra geläufig ist. Um eine Aufgabe zu lösen und eine unbekannte Größe zu finden, nehme man an, man habe diese Größe bereits gefunden und sie sei bekannt. Sie wird = x […] = einer gesuchten Länge gesetzt. Dann werden mit x und den gegebenen Daten Relationen (Gleichungen) aufgestellt und umgeformt, bis man das Gesuchte in expliziter Form erhalten hat. Die analytische Methode operiert in einem Bereich von Größen, die nicht problematisiert und als gegeben akzeptiert werden. Sie ist auf die Bestimmung einer Größe orientiert. Ihr Interesse ist praktisch […] (Mathematische) Texte, in denen analytisch argumentiert wird, sind ‚gerichtet', der Leser hat ein erkennbares Ziel vor Augen." (Jahnke H. N., 1991, S. 9)

Der Ansatz in der geometrischen Algebra des Euklid (Buch II der *Elemente*) zeichne sich hingegen durch ganz andere Merkmale aus:

> „Sie ist ein Aggregat von Sätzen, in denen Beziehungen zwischen Flächen dargestellt werden. Diese Beziehungen sind abhängig von gewissen Voraussetzungen und werden aus diesen gefolgert. Den Sätzen steht nicht an der Stirn geschrieben, ob und wie sie auch für praktische Berechnungen genutzt werden können. Ihr Interesse ist theoretisch. Solche Texte sind nicht ‚gerichtet'. Es gibt kein ‚Ziel', auf das der Text hinsteuert, weil der theoretische Zusammenhang als ganzer selbst das Ziel ist." (Jahnke H. N., 1991, S. 9)

Obgleich nun die Figuren des Al-Khwarizmi denen von Euklid ähnelten, bestünden von der Argumentation doch keine weiteren Beziehungen zur griechischen geometrischen Algebra, die des analytischen Geistes des Al-Khwarizmi völlig entbehre. Jahnke hat, auch unter Berufung auf Gandz, darauf hingewiesen, dass Al-Khwarizmi eher als Gegner des griechischen Einflusses anzusehen sei. Diese Einschätzung wird auch von Høyrup geteilt.

Zurück zu unserem Quellentext: Die Sätze V,29ff., die bei Ox und Rb die zweite Lösung beschreiben, passen nicht zur angegebenen Zeichnung, bei der die Wurzel des gesuchten Quadrates offensichtlich kleiner als 5 sein muss. Høyrup bemerkt dazu:

> "The person responsible for this minor blunder, however, cannot be the editor who is responsible for the changed lettering [Ox und Gr stimmen nur in 3 von 12 Buchstaben der Zeichnung überein, M. G.] and for the omitted identification of the rectangle *ga* (Gherardo's lettering) as 21; this follows from a comparison with Robert of Chester's translation. Two hands, at least (one working before and one after the Oxford manuscript family branched off from Robert's family, and none of them too competent) will have been active in recasting the Oxford version of this particular proof." (Høyrup, 1998, S. 15)

Die im Stemma der Abbildung 31 angegebene Bearbeitung „B" zeichnet demzufolge für die Ergänzung der Sätze V,29 ff. verantwortlich. Die Umbennung der Buchstaben in der Zeichnung führt Høyrup auf die vermutete Bearbeitung „C" zurück. Zum Robert-Text schließlich stellt er fest:

> Robert has the same lettering as Gherardo, except that he interchanges the correspondences of hā and ha hā and makes ka¯f correspond to c. He has the same diagram as Gherardo (and, lettering apart, the Oxford version) […]. He also tells the area of *ga* to be 21. But like the Oxford version, Robert gives the double solution in spite of his diagram, in words which come too close to those of the Oxford version to be independent; Robert also agrees with this version in omitting erroneously from his description the drawing of *ht* (Gherardo's lettering). (Høyrup, 1998, S. 15)

Mit der letzten Bemerkung spielt Høyrup auf die Stelle Gr V,13B an, die in Ox und Rb keine Entsprechung hat.

3.1.1.2.2.3 Begründung zu Fall 6: „Wurzeln und Zahlen sind gleich Quadraten"

Die Auflösungsregel dieses Falls wurde in Abschnitt 3.1.1.2.1.3 angegeben. Ihre Begründung lautet so:

Frederic Rosen (1831) **Ox VI**	**Robert von Chester (1145)** **Rb VI**	**Gerhard von Cremona (1150)** **Gr VI**
[1]Demonstration of the Case: "three Roots and four of Simple Numbers are equal to a Square."	[1]*DE 3 RADICIBUS ET 4 EX NUMERO SUBSTANTIAM COEQUANTIBUS.* Tres autem radices et 4 ex numero coequant substanciam.	[1]Dictum est autem ‚Tres radices et quattuor dragme equantur censui'.
[2a]Let the square be represented by a quadrangle, the sides of which are unknown to us,	[2]Rumbum igitur cuius latera ignota ponuntur substanciam propono,	[2a]Ponam ergo censum superficiem quadratam ignotorum laterum
[2B]though they are equal among themselves, as also the angles.		[2B]sed equalium, et equalium angulorum
[3]This is the quadrate AD, [4]which comprises the three roots and the four of numbers mentioned in this instance.	[3]qui sit rumbus *a d*. [4]Sed et totum rumbum tribus radicibus et 4 ex numero, quem preduximus, equalem constituo.	[3]que sit superficies *a.d.* [4]Tota igitur hec superficies congregat tres radices et quatuor quos tibi nominavi.
[5]In every quadrate one of its sides,	[5]Et iam manifestum est, quoniam	[5]Omnis autem quadrate superficie

multiplied by a unit, is its root.	si unum latus omnis rumbi semel in unitatem duxerimus, una radix eiusdem rumbi necessario nascetur.	unum latus in unum multiplicatum est radix eius.
[6a]We now cut off the quadrangle HD from the quadrate AD, [6b]and take one of its sides HC for three, which is the number of the roots. [6c]The same is equal to RD.	[6a]Aream igitur *h d* ex area *a d* resecemus, [6b]et unum aliquod latus numerum ternarium, id est numerum radicum signans, constituamus. [6c]Erit quoque hoc latus simile *z d*.	[6a]Ex superficie igitur *a.d.* secabo superficiem *e.d.* [6b]et ponam unum latus eius quod est *e.g.* tres qui est numerus radicum. [6c]Ipsum vero est equale *z.d.*
[7]It follows, then, that the quadrangle HB represents the four of numbers which are added to the roots. [8]Now we halve the side CH, which is equal to three roots, at the point G; from this division we construct the square HT,	[7]Nobis igitur manifestum quoniam area *h b* quatuor ex numero, quam super radices adiecimus, adimpleat. [8]Ergo super punctum *e* latus *e h g* tres radices signans, in duo media dividamus, ex quibus rumbum qui est area *e c* faciamus. Eritque hec area	[7]Nobis itaque patet quod superficies *e.b.* est quattuor qui radicibus est additus. [8]Dividam ergo latus *e.g.* quod est tres radices in duo media super punctum h. Deinde faciam ex eo superficiem quadratam que sit superficies *e.t.*
[9a]which is the product of half the roots (or one and a half) multiplied by themselves,	[9a]que ex multiplicacione medietatis radicum in seipsa deducte,	[9a]Et ipsa est quod fit ex multiplicatione medietatis radicum; que est unum et semis in se,
[9b]that is to say, two and a quarter.	[9b]id est ex duobus et quarta in seipsis deductis, perficitur.	[9b]et est duo et quarta.
[10a]We add then to the line GT a piece equal; to the line AH, namely, the piece TL;	[10]Deinde lineam *t l* linee *a h* consimilem linee *e t* adiciamus.	[10a]Post hoc addam linee *h.t.* quod fit equale *a.e.* que sit linea *t.l.*
[10b]accordingly the line GL becomes equal to AG,	[10b]Fietque linea *a e* similis linee *e l*,	[10b]Fit ergo linea *h.l.* equalis *a.h.*
[10C]and the line KN equal to TL.[19]		
[11]Thus a new quadrangle, with equal sides and angles, arises, namely, the quadrangle GM;	[11a]ut rumbus qui est area *e m* inde nascatur.	[11]et provenit superficies quadrata que est superficies *h.m*
	[11B]Et iam manifestum est, quoniam linea *a g* similis sit linee *h z*,	[11B]Iam autem manifestum fuit nobis quod linea *a.g.* est equalis *e.z.*,
[11b (inc)]and we find that the line AG is equal to ML,		
[12]and the same line AG is equal to GL.[20]		[12]et *a.h.* est equalis *e.n.*
	[12a (inc)]sed *h e* similis est *h c*, [12B]quoniam ipse in rumbo *e m* tenduntur equales.	
[13]By these means the line CG re-	[13a]Linea ergo *e g* linee *z n* remansit	[13]Remanet ergo *g.h.* equalis *n.z.*

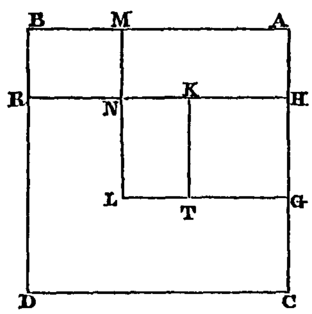
[19] Ox VI,10c: Der Punkt K war zuvor bei der Konstruktion des Quadrates HT entstanden, obgleich er dabei nicht erwähnt wurde. Robert und Gerhard verzichten darauf, die Gleichheit von KN und TL herauszustellen und damit die Quadrateigenschaft von GM (Ox), *g o* (Rb) und *h.m.* (Gr) zu begründen.

[20] Ox VI,12 unterscheidet sich bei der Nennung der Vergleichslinie von und Gr VI,12a. Nach dessen Lesart hätte es lauten müssen: „and the same line AG is equal to <u>HN</u>“.

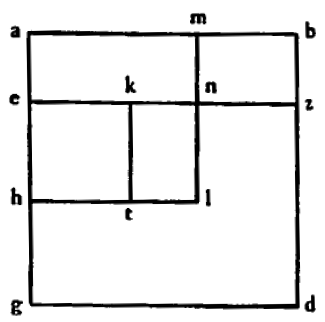
mains equal to NR,	consimilis.	
	[13B]Sed et linea *e g* similis est linee *h e*, nam et ipse radices mediant, id est divideunt per medium. Linea quoque *h e* similis est linee *t c*, nam ipse in latitudine aree *h l* continentur equales. [13C]Linea igitur *n z* similis est linee *t c*.	
	[13D]Et iam manifestum est, quoniam linea *a h* similis sit *m n*, quoniam in latitudine aree *a z* proponuntur equales. Sed et linea *a e* similis est linee *e l* quoniam ipse rumbum *e m* equali divisione circundant. Et linea *h e* similis est linee *e t*, nam et ipse rumbum *e c* equali longitudine circundant. Remanet eciam linea *a h* similis linee *t l*.	
[14a]and the line MN equal to TL,	[14a] Linea ergo *t l* similis fit linee *m n*. Sed et linea *c t* linee *n z* iam fuerat consimilis.	[14a]Sed *m.n.* est equalis *t.l.*
[14b]and from the quadrangle HB a piece equal to the quadrangle KL is cut off.[21]	[14b]Area igitur quam *m n*, *n z* circundant similis est aree quam *c t*, *t l* simili quantitate circundant. Area igitur *m z* similis est aree *c l*.[21]	[14b]Superficies igitur *m.z* fit equalis superficiei *k.l.*[21]
[15]But we know that the quadrangle AR represents the four of numbers which are added to the three roots.	[15]Et iam manifestum est quoniam area *a z* 4 ex numero quam super 3 radices addidimus in se obtineat.	[15]Iam autem scivimus quod superficies *a.z.* est quattuor qui est additus tribus radicibus.
[16]The quadrangle AN and the quadrangle KL are together equal to the quadrangle AR, which represents the four of numbers.	[16]Due igitur aree *a n* et *c l* uni aree *a z* que 4 ex numero in se continet in quantitate fiunt consimiles.	[16]Fiunt ergo superficies *a.n.* et superficies *k.l.* simul equales superficiei *a.z.* que est quattuor.
[17a]We have seen, also, that the quadrangle GM comprises the product of the moiety of the roots, or of one and a half, multiplied by itself;	[17a]Manifestum ergo est nobis quoniam rumbus *e m* qui ex multiplicacione radicis in suo consimili deducte que scilicet duo habet et medium colligitur totum adimplet, id est duo et ¼ que similiter rumbum *e c* perficiunt,	[17a]Manifestum est igitur quod superficies *h.m.* est medietas radicum que est unum et semis in se,
that is to say two and a quarter,		quod est duo et quarta,
[17b]together with the four of numbers, which are represented by the quadrangles AN and KL.	[17b]cuius videlicet adieccio sunt 4 ex numero quem due aree *a n*, *c l* adimplent.	[17b]et quattuor additi qui sunt superficies *a.n.* et superficies *k.l.*
	[17C]Fitque hoc totum senario numero et unius quarte coequale, [17D]cuius similiter radicem duo et medium designant, que in latere *a e* continentur.	[17C]Quod vero ex eo aggregatur est sex et quarta, [17D]cuius radix est duo et semis. Que est latus *h.a.*

[21] Gr VI,14b und Rb VI,14b benennen – im Gegensatz zu Ox VI,14b – ausdrücklich die inhaltsgleichen Flächen, sprechen aber nicht von der Abtrennung einer derselben.

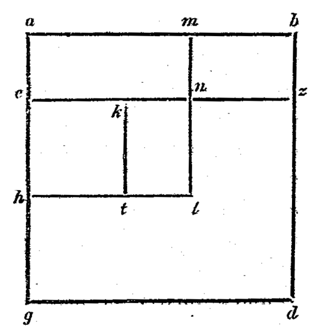
[18a]There remains now from the side of the great original quadrate AD, which represents the whole square, [18b]only the moiety of the roots, that is to say, one and a half, namely, the line GC.	[18a]Restat igitur nobis ex latere rumbi primi, qui est area *a d* que et totam signat substanciam, [18b]radicis medietas, que duo et medium in se continet, que similiter lineam *e g* perficit.	[18a]Iam autem remansit nobis ex latere quadrati primi, quod est superficies *a.d.* que est totus census, [18b]medietas radicum que est unum et semis. Et est linea *g.h.*
[19a]If we add this to the line AG, which is the root of the quadrate GM, [19b]being equal to two and a half; then this,	[19a]Cum ergo lineam *a e*, quae est radix rumbi *e m* [19b]qui hoc quod ex multiplicacione medietatis radicis in suo consimili deducte colligitur continet, [19c]cuiusque adieccio	[19a]Cum addiderimus super lineam *a.h.*, que est radix superficiei *h.m.* [19b]quod est duo et semis,
[19c]together with CG, or the moiety of the three roots, namely, one and a half, [19d]makes four,	[19d]sunt 4, que diximus.	[19c]lineam *h.g.* que est medietas radicum trium que est unum et semis, [19d]provenit illud totum quattuor.
	Et hoc totum 6 et ¼ in se obtinet, quare radix duo sunt et medium. Quam si super lineam *e g* que est medietas trium radicum unum et medium continens addiderimus, tota hec summa ad quaternarium excrescet numerum,	
[19e]which is the line AC, [19f]or the root to a square, which is represented by the quadrate AD.	[19e]qui est linea *a g* [19f]que est radix substancie que est area *a d*.	[19e]Quod est linea *a.g.* [19f]Et ipsa est radix census qui est superficies *a.d.*
	[20A]Tota igitur substancia in 16 et subiecta docet. [20B]Et hoc est quod exponere voluimus.	[20A]Et ipse est sedecim. [20B]Et illud est quod demonstrare voluimus.
[20 (inc)]Here follows the figure.		



(Rosen, 1831, S. 19-20)



(Hughes, 1989, S. 42-44), vgl. auch (Karpinski, 1915, S. 86, 88)

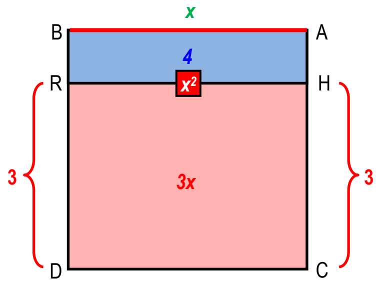


(Hughes, 1986, S. 239 ff.), vgl. auch (Libri, 1838, S. 263-265)

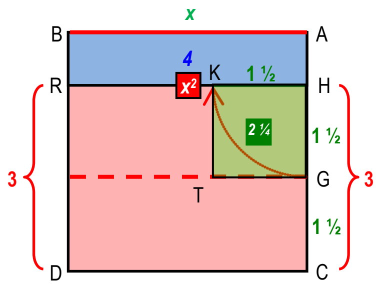
Abweichungen der Paralleltexte untereinander finden sich: zwischen Ox/Rb in 2B, 10C, 11B, 12, 13B-D, 17C-D, 19d, 20; zwischen Ox/Gr in 10C, 11B, 17C-D, 20; zwischen Rb/Gr in 2B, 12, 13B-D, 19d.

Al-Khwarizmis Argumentation wird am besten wieder durch eine schrittweise Rekonstruktion aufgehellt:

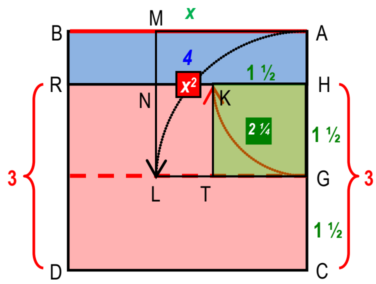
In diesem Fall ist es das gesuchte Quadrat selbst, das sich als zweiteilige Fläche darstellen lässt. Die beiden Rechtecke, die zusammen das Quadrat ergeben, repräsentieren die Anteile ***3x*** und ***4***.



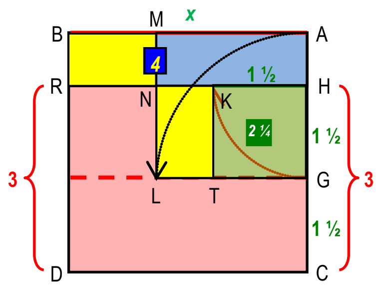
Wiederum wird die Anzahl der Wurzeln (3), die durch eine Seite eines Rechtecks repräsentiert werden, halbiert. Sodann wird auf dieser Hälfte ein **Quadrat** errichtet, das den Flächeninhalt **1 ½ · 1 ½ = 2 ¼** besitzt.



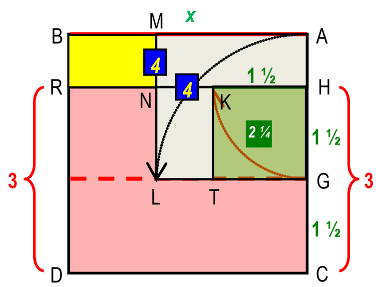
Dieses Quadrat ist Teil eines größeren Quadrates AGLM, das über AG errichtet wird. Man erkennt, dass $\overline{LT} = \overline{AH} = \overline{MN}$ und $\overline{NR} = \overline{CG} = \overline{KT}$ sind.



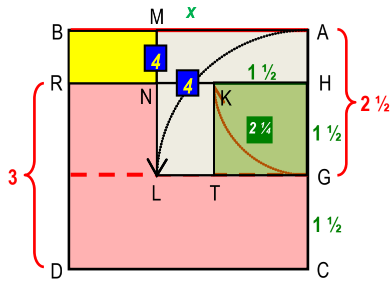
Die Flächen MNRB und KTLN haben also den gleichen Flächeninhalt. Nun entspricht einerseits das Rechteck BAHR, das sich aus MNRB und **MAHN** zusammensetzt, 4 Flächeneinheiten, …



…andererseits auch der Winkelhaken MNLTKHA, der sich aus KTLN und und **MAHN** zusammensetzt.



Dieser Winkelhaken hat zusammen mit dem (grünen) **Quadrat KHGT** eine Fläche von 4 + 2 ¼ = 6 ¼, eine Seite AG also die Länge 2 ½. Daraus ergibt sich für die Kantenlänge des großen Quadrates $\overline{AC} = x = 4$.



3.1.1.2.3 Zur Semantik einzelner Ausdrücke

In den vorangegangenen Abschnitten habe ich bereits darauf hingewiesen, dass die Übersetzung einiger Stellen des arabischen Originaltextes nicht unproblematisch ist. Dies gilt insbesondere für das arabische Wort *mal* (مال), welches Rosen mit „square", Robert mit „substancia" und Gerhard mit „census" wiedergeben. Die gewöhnliche (d. h. nicht-technische, alltägliche) Bedeutung des Wortes *mal* bezieht sich auf einen Besitz, auf ein Kapital, auf Reichtum oder manchmal sogar auf einen ganz bestimmten Geldbetrag (Chasles, 1841, S. 509), (Oaks & Alkhateeb, 2005, S. 403). Diese Bedeutung findet man in mathematischen Texten der Araber dieser Zeit ausdrücklich im Zusammenhang mit den so genannten Teilungsproblemen. In diesen geht es meistens darum, einen Geldbetrag unter einer gewissen Anzahl von Männern zu verteilen:

> "One book that uses *mal* in the context of this model is the 10th-century scientific lexicon composed by Muhammad ibn Ahmad al-Khwarizmi (not our algebraist). There division is explained through the example of a *mal* of 20 dirhams divided by five men, so that the share of each is 4 dirhams. This definition appears in the chapter on arithmetic, before the author brings up algebra." (Oaks & Alkhateeb, 2005, S. 410)

Mal ist also ein Wort, das Lernenden aus der Arithmetik schon bekannt war. Es wurde dort in der gewöhnlichen Bedeutung von „Vermögen" oder „Geldbetrag" verwendet, besaß aber zudem bereits den Nebensinn von „gesuchte Zahl". Die Einheit dieses Vermögens – bzw. dieser Zahl – war dann natürlich der Dirhem, die zur damaligen Zeit vorherrschende Währungseinheit:

> "Whether by intent or not, *mal* became the preferred word for 'quantity' in Arabic arithmetic, and dirham became the unit." (Oaks & Alkhateeb, 2005, S. 417)

Al-Khwarizmi behandelte, wie wir gesehen haben, in seinem Buch, das in die Algebra einführen sollte, zunächst Probleme, die nicht notwendigerweise mit den Operationen der *jabr* und der *muqabala* gelöst werden mussten. Ihre oben bereits beobachtete Umformulierung in arithmetischer Sprechweise (als ‚enunciation') unter Benutzung der einschlägigen Vokabeln *mal* und Dirhem war dazu angetan, an das Vorwissen der Lernenden terminologisch und methodisch anzuschließen und sie auf arithmetische Lösungsmöglichkeiten hinzuweisen. Die Ausdrucksweise wurde auch dann noch beibehalten, wenn die Probleme nicht mehr auf solch elementare Weise sondern nur noch mit den (neuen) Mitteln der Algebra gelöst werden konnten (Oaks & Alkhateeb, 2005, S. 417). Wichtig bleibt die Feststellung, dass für Al-Khwarizmi aufgrund dieser Tradition immer *mal* die grundlegende Unbekannte war und nicht – wie für uns heute – die Wurzel aus *mal*. Neben Oaks und Alkhateeb weist auch Høyrup darauf hin:

> "That the mal is considered a basic and not a derived unknown is born out by the rather frequent use of the term to designate the unknown in a first degree problem as a mal – e.g., in one of the monetary problems from al-Karajı's Kafi (ed., transl. Hochheim 1878: iii, 14), and in the bulk of first-degree problems contained in the Liber augmenti et diminutionis (ed. Libri 1838: I, 304ff; Libri's commentary, it is true, misses the point completely, demonstrating *ad oculos* the dangers of the conventional translation)." (Høyrup, 1998, S. 8-9, Fußnote 11, Hervorhebung im Original)

Zur Problematik, eingedenk dessen *mal* korrekt zu übersetzen, schreibt Høyrup:

> "'Treasure' renders Latin *census* and Arabic *mal*. This translation is to be preferred to the conventional 'square', which is misleading for several reasons. Firstly, 'square' possesses geometrical connotations, which were only to be associated with *mal* in later times – indeed by those generations who had learned their algebra from al-Khwarizmi. The customary translation therefore makes a fool of al-Khwarizmi when he takes great pain to explain that a geometrical square represents the *mal*. Secondly, the *algebraic* understanding of 'square' is also misleading: The square is the second power of the unknown, and no unknown in its own right. This, again, makes a fool of al-Khwarizmi (and quite a few modern scholars *have* considered him lacking in mathematical consequence on this account) when, after finding the root (*jidhr*), he also finds the *mal*. Thirdly, speaking of the *mal* as a second power of the unknown makes us believe that the *root* is meant as the *root of the equation* – once again a meaning only taken on by the term as a consequence of al-Khwarizmi's work. To al-Khwarizmi, the *root* is simply the *square root* of the *mal*. (Høyrup, 1998, S. 8, Fußnote 11, Hervorhebungen im Original)

Diese Bemerkungen werfen natürlich Probleme für eine akkurate Übersetzung der Begriffe in die deutsche Sprache auf. Ich habe mich – trotz einiger Bedenken – schließlich dazu entschlossen, in meiner Übertragung von „Quadrat", „Quadratfläche" und „Quadratzahl" zu sprechen (vgl. 3.1.1.3).

3.1.1.2.4 Das Vorwort des Autors

Al-Khwarizmi hat seinem Buch ein Vorwort vorangestellt, welches unter den hier betrachteten Paralleltexten nur in der Oxford-Version vollständig überliefert ist. Robert von Chester und Gerhard von Cremona fassen das Vorwort demgegenüber in äußerst knappen Worten zusammen, um sich sogleich dem mathematischen Hauptteil zuzuwenden. Da eine Synopse hier nicht lohnen würde, betrachten wir zunächst den bei Rosen angegebenen Oxford-Text für sich:

> IN THE NAME OF GOD, GRACIOUS AND MERCIFUL! This work was written by MOHAMMED BEN MUSA, of KHOWAREZM. He commences it thus:
>
> Praised be God for his bounty towards those who deserve it by their virtuous acts: in performing which, as by him prescribed to his adoring creatures, we express our thanks, and render ourselves worthy of the continuance (of his mercy), and preserve ourselves from change: acknowledging his might, bending before his power, and revering his greatness! He sent MOHAMMED (on whom may the blessing of God repose!) with the mission of a prophet, long after any messenger from above had appeared, when justice had fallen into neglect, and when the true way of life was sought for in vain. Through him he cured of blindness, and saved through him from perdition, and increased through him what before was small, and collected through him what before was scattered. Praised be God our Lord! and may his glory increase, and may all his names be hallowed — besides whom there is no God; and may his benediction rest on MOHAMMED the Prophet and on his descendants!

> The learned in times which have passed away, and among nations which have ceased to exist, were constantly employed in writing books on the several departments of science and on the various branches of knowledge, bearing in mind those that were to come after them, and hoping for a reward proportionate to their ability, and trusting that their endeavours would meet with acknowledgment, attention, and remembrance — content as they were even with a small degree of praise; small, if compared with the pains which they had undergone, and the difficulties which they had encountered in revealing the secrets and obscurities of science.
>
> Some applied themselves to obtain information which was not known before them, and left it to posterity; others commented upon the difficulties in the works left by their predecessors, and defined the best method (of study), or rendered the access (to science) easier or placed it more within reach; others again discovered mistakes in preceding works, and arranged that which was confused, or adjusted what was irregular, and corrected the faults of their fellow-labourers, without arrogance towards them, or taking pride in what they did themselves.
>
> That fondness for science, by which God has distinguished the IMAN AL MAMUN, the Commander of the Faithful (besides the caliphat which He has vouchsafed unto him by lawful succession, in the robe of which He has invested him, and with the honours of which He has adorned him), that affability and condescension which he shows to the learned, that promptitude with which he protects and supports them in the elucidation of obscurities and in the removal of difficulties, — has encouraged me to compose a short work on Calculating by (the rules of) Completion and Reduction confining it to what is easiest and most useful in arithmetic, such as men constantly require in cases of inheritance, legacies, partition, law-suits, and trade, and in all their dealings with one another, or where the measuring of lands, the digging of canals, geometrical computation, and other objects of various sorts and kinds are concerned — relying on the goodness of my intention therein, and hoping that the learned will reward it, by obtaining (for me) through their prayers the excellence of the Divine mercy: in requital of which, may the choicest blessings and the abundant bounty of God be theirs! My confidence rests with God, in this as in every thing, and in Him I put my trust. He is the Lord of the Sublime Throne. May His blessing descend upon all the prophets and heavenly messengers! (Rosen, 1831, S. 1-4)

Anstelle dieses Vorwortes finden wir bei Robert von Chester nur die folgenden Zeilen:

> In nomine dei pii et misericordis incipit liber Restaurationis et Opposicionis Numeri quem edidit Mahumed filius Moysi Algaurizmi. Dixit Mahumed: laus deo creatori, qui homini contulit scientiam inueniendi vim numerorum.
>
> (Hughes, 1989, S. 29), vgl. auch (Karpinski, 1915, S. 70, 72)

> *Zu deutsch:* Im Namen Gottes, des Gnädigen und Barmherzigen, so beginnt das Buch der Wiederherstellung und Gegenüberstellung, welches Mahumed, der Sohn von Moyse Algaurizmus herausgegeben hat. So spricht Mahumed: Lob sei dem Schöpfergott, der dem Menschen das Wissen gegeben hat, die Kraft der Zahlen zu erkennen.

Warum hat Robert das Vorwort nicht vollständig übersetzt? (Karpinski, 1915) vermutet sehr ansprechend, dass die in allen arabischen Büchern enthaltenen Lobpreisungen des Propheten Mohammed und der Kalifen im Widerspruch zum christlichen Glauben der mittelalterlichen Übersetzer (oder ihrer Auftraggeber) standen und darum stark gekürzt oder ganz ausgelassen wurden. Gerhard von Cremona schafft es, Al-Khwarizmis Vorwort sogar noch gedrängter zusammenzufassen als Robert. Er schreibt lediglich:

> Liber Maumeti filii Moysi alchoarismi de algebra et almuchabala incipit. Hic *post laudem dei et ipsius exaltationem* inquit: …
>
> (Hughes, 1986, S. 233, meine Hervorhebung)
>
> *Zu deutsch:* Hier beginnt das Buch des Maumet, des Sohnes von Moyse Alchoarismus über Algebra und Almuchabala. Dieser sagt, *nachdem er Gott gepriesen und erhöht hat*: …

Al-Khwarizmis Vorwort verrät einiges über die Umstände, in welcher sein Werk entstanden ist und über die Absichten, die der Autor mit seiner Abfassung verfolgte.

Der Text beginnt mit der Basmala, der feststehenden arabischen Wendung *bismi 'llâhi r-rahmani r-rahim*, zu deutsch: „Im Namen des barmherzigen und gnädigen Gottes", (Paret, 2007, S. 439 f.). Die Basmala, die die ersten beiden der nach islamischen Glauben 99 Namen Gottes zitiert, leitet 113 von insgesamt 114 Suren des Koran ein. Diesem Vorbild folgend haben islamische Autoren sie als Eröffnungsformel an den Anfang jedes ihrer Werke gesetzt. Auch Al-Khwarizmi ist dieser Tradition gefolgt. Die Basmala wurde darüberhinaus in vielerlei Kontexten verwendet: sie ist ein fester Bestandteil der täglichen Gebete, sie wird rezitiert vor Beginn einer Koranlesung, vor Antritt einer Reise, beim Betreten und Verlassen eines Hauses bzw. einer Moschee (wenn der rechte Fuß die Schwelle übertritt), bei der Grablegung eines Toten, vor dem ehelichen Geschlechtsverkehr usw. (Piamenta, 1979, S. 32 ff.) Ihre große Verbreitung verdankt die Basmala u. a. einem Ausspruch des Propheten Mohammed, wonach jede wichtige Handlung eines Moslem, die ohne Rezitation beginnt, keinen göttlichen Segen erhalte (Piamenta, 1979, S. 32).

Um Gottes Segen bittet Al-Khwarizmi in seinem Vorwort zur *al-jabr* jedoch nicht nur durch die Rezitation der Basmala. Er widmet vielmehr den ganzen ersten Absatz seines Textes der Danksagung sowie Anbetung Gottes und preist dessen Wirken durch den Propheten Mohammed. Die Worte zeigen eindrucksvoll, welche beherrschende Rolle die Religion in Al-Khwarizmis Lebensumfeld gespielt hat. Sie weisen ihn zugleich als frommen Moslem aus.

Al-Khwarizmi lebte in einer Kultur, die nicht nur religiös geprägt war, sondern darüber hinaus der Bewahrung alten und dem Erwerb neuen Wissens die größte Wertschätzung entgegenbrachte. Dies drückt sich in den vielen Worten der Hochachtung und den zahlreichen Lobpreisungen aus, mit welchen Al-Khwarizmi nicht nur seinen Mäzen und Förderer, den Kalifen Al-Mamun, sondern auch die Gelehrten vergangener Zeiten und fremder Länder bedenkt, deren Leistungen er mit Ehrerbietung wahrgenommen hat und in deren Tradition er sich zu stellen bemüht. Wie sich aus der Erschließung der Quellenkontexte nahelegt, wird Al-Khwarizmi hierbei vor allem an die antiken Babylonier, Inder und Griechen gedacht haben, deren wissenschaftliche und kulturelle Errungenschaften am Ort, an dem er arbeitete (dem Haus der Weisheit), gesammelt, übersetzt und bewahrt wurden (s. u., 3.1.2.1.2). Bemerkenswert erscheint die Tatsache, dass Religion und Vernunft in Al-Khwarizmis Kultur offenbar nicht als unversöhnliche Gegensätze verstanden wurden, sondern im Einklang einander dienten. Auch die aus dem Text zu erschließende Toleranz und Offenheit gegenüber den Leistungen und Werten anderer, andersgläubiger Menschen „fremder Länder", verdient – gerade vor dem Hintergrund durchaus gegenteiliger Usancen im mittelalterlichen Europa – besondere Beachtung. Ich werde hierauf später noch ausführlich zurückkommen (s. u., 3.1.2.1.3.2)

Im weiteren Verlauf des Textes beschreibt Al-Khwarizmi den Zweck und das Ziel der von ihm verfassten *al-jabr*: Es soll ein einfach verständliches und zugleich nützliches Lehrbuch sein, das seinen Zeitgenossen bei der Bewältigung ihrer alltäglichen Pflichten und Aufgaben im Zusammenhang mit Erbschaftsfragen, Handel, Landvermessung und anderen praktischen und lebensnahen Tätigkeiten hilft. Die *al-jabr* ist also nach dem Willen ihres Autors und dessen Auftraggebers, des Kalifen, keine Abhandlung für Gelehrte gewesen, sondern ein Handbuch für Laien. Ob sie jenen wirklich nützen konnte, ist nicht überliefert. Fest steht jedoch, dass die *al-jabr* gerade unter Gelehrten jahrhundertelang aufs nachhaltigste rezipiert worden ist (s. u., 3.1.2.1.4), so dass Al-Khwarizmis Hoffnung, „that the learned will reward it" eindrucksvoll in Erfüllung gegangen ist.

Das Vorwort schließt mit einer Fürbitte für die Gelehrten, einem Bekenntnis zu Gott und der nochmaligen Bitte um Segen und umspannt damit noch einmal die herausragenden Motive in Al-Khwarizmis Leben: Glaube und Vernunft.

3.1.1.3 Die deutschsprachige Übertragung der Quelle

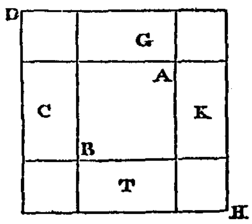
Die von mir vorgenommene deutschsprachige Übertragung der Quelle orientiert sich vornehmlich an Rosen und Gerhard von Cremona und sei im Folgenden wiedergegeben. Die Bezifferungen D I,1 bis D VII (D für „deutsch") folgen der in der Synopse vorgenommenen Einteilung der Abschnitte:

(D I): [1]Ich habe herausgefunden, dass diese drei Arten – Quadrate, Wurzeln und Zahlen – miteinander kombiniert werden können, [2]und folglich drei zusammengesetzte Typen bilden können; [3a]diese sind: „Quadrate und Wurzeln sind gleich Zahlen", [3b]„Quadrate und Zahlen sind gleich Wurzeln", [3c]„Wurzeln und Zahlen sind gleich Quadraten". [4]Ein Quadrat und zehn seiner Wurzeln ergeben neununddreißig Dirhem. [5a]Das heißt: [5b]wie muss das Quadrat lauten, das um zehn seiner eigenen Wurzeln vermehrt neununddreißig ergibt? [6]Dies ist die Lösung: [7]Du halbierst die Anzahl der Wurzeln, [8]was im vorliegenden Fall fünf ergibt. [9]Diese multiplizierst du mit sich selbst; das Produkt ist fünfundzwanzig. [10]Addiere dieses zu neununddreißig; die Summe ist vierundsechzig. [11]Nun ziehe daraus die Wurzel, was acht ergibt, [12]und subtrahiere davon die halbe Anzahl der Wurzeln, was fünf macht; [13]der Rest ist drei. [14]Dies ist die Wurzel des Quadrates, welches du gesucht hast. [15]Das Quadrat selbst ist neun.

(D II): [1]Quadrate und Zahlen sind gleich Wurzeln; [2]zum Beispiel: Ein Quadrat und einundzwanzig einfache Zahlen sind gleich zehn Wurzeln desselben Quadrats. [3a]Das heißt, [3b]wie groß muss ein Quadrat sein, welches, wenn man einundzwanzig Dirhems hinzufügt, genauso groß wird wie zehn Wurzeln dieses Quadrats? [4]Lösung: [5]Halbiere die Anzahl der Wurzeln; [6]diese Hälfte ist fünf. [7]Multipliziere dies mit sich selbst; das Produkt ist fünfundzwanzig. [8]Subtrahiere hiervon die einundzwanzig, die mit dem Quadrat verbunden sind; [9]der Rest ist vier. [10]Ziehe daraus die Wurzel; das ist zwei. [11]Subtrahiere dies von der Hälfte der Wurzeln, also von fünf; [12]der Rest ist drei. [13]Dies ist die Wurzel des geforderten Quadrats, [14]und das Quadrat ist neun. [15]Oder du kannst auch die Hälfte der Wurzeln addieren; [16]die Summe ist sieben. [17]Dies ist die Wurzel des gesuchten Quadrats, [18]und das Quadrat selbst ist neunundvierzig. [19a]*Wenn du auf ein Beispiel triffst, das zu diesem Fall gehört,* [20]*versuche es durch Addition zu lösen.* [21a]*Und wenn dies nicht gelingt,* [21b]*dann wird es durch Subtraktion gelingen.* [22a]*Denn in diesem Fall können sowohl Addition wie auch Subtraktion angewandt werden,* [22b]*was ansonsten in keinem anderen der Fälle, in denen die Wurzeln halbiert werden, eine Lösung bringt.* [23a]Falls du in einem Fall der hier vorliegenden Art die Anzahl der Wurzeln halbiert [23b]und diese Hälfte mit sich selbst multipliziert hast, [23c]und falls dieses Produkt kleiner ist als die Anzahl Dirhems, die mit dem Quadrat verbunden sind, [23d]dann ist die Aufgabe unmöglich. [24a]Aber wenn das Produkt den Dirhems genau entspricht, [24b]dann ist die Wurzel des Quadrats gleich der Hälfte der Wurzeln selbst, [24c]also ohne Addition oder Subtraktion.

(D III): [1]Wurzeln und Zahlen sind gleich Quadraten; [2]zum Beispiel: Drei Wurzeln und vier einfache Zahlen sind gleich einem Quadrat. [3]Lösung: [4]Halbiere die Wurzeln; [5]die Hälfte ist eins und ein Halbes. [6]Multipliziere dies mit sich selbst; [7]das Produkt ist zwei und ein Viertel. [8]Addiere dies zu der Vier; [9]die Summe ist sechs und ein Viertel. [10a]Ziehe die Wurzel; [10b]es sind zwei und ein Halbes. [10c]Addiere dies zu der Hälfte der Wurzeln, [10d]welche eins und ein Halbes war; [10e]die Summe ist vier. [10f]Dies ist die Wurzel des Quadrats [11]und das Quadrat ist sechzehn.

(D IV):[22] [1]*Begründung des Falls: ‚ein Quadrat und zehn seiner Wurzeln ergeben neununddreißig Dirhem.‘* [2]Die Figur, um dies zu erklären, ist eine Quadratfläche, dessen Seiten unbekannt sind. [3]Es repräsentiert das Quadrat, [4]welches man kennen möchte, bzw. dessen Wurzeln man kennen möchte. [5]Dies ist die Figur AB, [6]von welcher jede Seite als eine der Wurzeln angesehen werden kann; [7a]und wenn man eine dieser Seiten mit irgend einer Zahl multipliziert, [7b]dann kann der Betrag dieser Zahl angesehen werden als die Anzahl Wurzeln, die zum Quadrat addiert werden. [7C]Jede Seite der Quadratfläche repräsentiert die Wurzel des Quadrats[23]; [8a]und da, wie in diesem Fall, die Wurzeln mit dem Quadrat verbunden waren, [8b]können wir ein Viertel von zehn nehmen, [8C]also zweieinhalb[24], [9a]und das mit jeder der vier Seiten der Figur verbinden. [9b]Folglich werden mit der originalen Quadratfläche AB vier neue Parallelogramme [Rechtecke] verbunden[25], [10]von denen jedes eine Seite der Quadratfläche als seine Länge [11]und die Zahl zweieinhalb als seine Breite hat; [12]dies sind die Parallelogramme [Rechtecke] C, G, T und K. [13]Wir haben nun eine Quadratfläche mit gleichen aber unbekannten Seiten. [14a]Aber in jedem seiner vier Ecken fehlt ein quadratisches Stück von [14b]zweieinhalb multipliziert mit zweieinhalb. [15]Um dies auszugleichen und die Quadratfläche zu vervollständigen, [16]müssen wir viermal das Quadrat von zweieinhalb hinzufügen (zu dem, was wir schon haben), [17]also fünfundzwanzig. [18a]Wir wissen (aus der Aufgabe), dass die erste Figur, die Quadratfläche nämlich, die das Quadrat repräsentiert, [18b]zusammen mit den vier Parallelogrammen [Rechtecken] herum, [18C]die die zehn Wurzeln repräsentieren[26], [19]gleich neununddreißig in Zahlen ist. [20a]Wenn wir hierzu fünfundzwanzig addieren, [20b]was den vier Quadratflächen an den Ecken der Figur AB entspricht, [20c]durch welche die große Figur DH vervollständigt wird, [21]dann wissen wir, dass dies zusammen vierundsechzig macht. [22a]Eine Seite dieser großen Quadratfläche ist seine Wurzel, [22b]nämlich acht. [23a]Wenn wir zweimal ein Viertel von zehn abziehen, also fünf von acht, [23b]wie von den beiden äußeren Enden der Seite der großen Quadratfläche DH, [24a]dann wird ein Rest von drei übrig bleiben, [25b]und das ist die Wurzel des Quadrates [25a]oder die Seite der ursprünglichen Figur AB.[27] [26]Es muss beachtet werden, dass wir die Anzahl der Wurzeln halbiert haben [27a]und das Produkt der Hälfte mit sich selbst multipliziert [27b]zur Zahl neununddreißig addiert haben, [28]um die große Figur in ihren vier Ecken zu vervollständigen; [29]denn ein Viertel jeder Zahl, mit sich selbst [29b]und dann mit vier multipliziert, [29c]ist gleich dem Produkt der Hälfte dieser Zahl multipliziert mit sich selbst. [30a]Dementsprechend haben wir nur die Hälfte der Wurzeln mit sich selbst multipliziert, [30b]anstatt ihr Viertel mit sich selbst und dann mit vier zu multiplizieren. [30C]Dies ist die Figur.[28]



[31]Das gleiche kann auch durch eine andere Figur erklärt werden. [32]Wir gehen aus von der Quadratfläche AB, welche die Quadratzahl repräsentiert. [33]Es ist als nächstes unsere Aufgabe, zu dieser [Fläche] die zehn Wurzeln derselben hinzuzufügen. [34]Zu diesem Zweck halbieren wir die Zehn, so dass es fünf werden, [35a]und konstruieren zwei Vierecke auf zwei Seiten der Quadratfläche AB, nämlich G und D. [35c]Ihre Länge ist jeweils fünf, die Hälfte der zehn Wurzeln nämlich, [35b]während die Breite jeweils gleich ist einer Seite der Quadratfläche AB.[29] [36]Nun

[22] In der Übertragung unterscheide ich, wie schon bemerkt, zwischen *Quadratfläche* und *Quadrat(-zahl)*, um damit der Differenzierung von *quadrate* und *square* bei Rosen, *quadratum* und *substancia* bei Robert sowie *superficies quadrata* und *census* bei Gerhard Rechnung zu tragen. Zur Problematik dieser Begriffe vgl. 3.1.1.3.

[23] IV,7C: nur bei Ox IV,7C.

[24] IV,8C: nur bei Ox IV,8C und Gr IV,8c, nicht aber bei Robert.

[25] IV,9b: Dieser Satz entspricht Ox IV 9b sowie Gr IV,9b, jedoch Rb IV,11b.

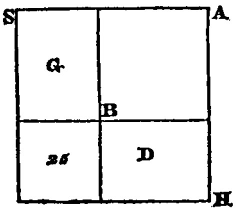
[26] IV,18C: nur bei Ox IV,18C und Gr IV,18C auf, nicht aber bei Robert.

[27] IV,25a.b: Die Nummerierung orientiert sich an Robert und Gerhard.

[28] IV,30C: nur bei Ox IV,30C.

[29] IV,35b.c: Die Nummerierung orientiert sich an Robert und Gerhard.

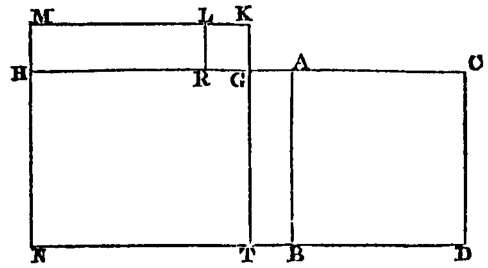
bleibt eine Quadratfläche übrig, [36B]gegenüber der Ecke der Quadratfläche AB[30]. [37a]Diese ist gleich fünf multipliziert mit fünf. [37b]Diese Fünf ist die Hälfte der Anzahl der Wurzeln, die wir zu jeder der zwei Seiten der ersten Quadratfläche hinzugefügt haben. [38b]Nun wissen wir aber, dass die erste Quadratfläche, welche die Quadratzahl repräsentiert, und die zwei Vierecke an seinen Seiten, welche die zehn Wurzeln sind [repräsentieren], zusammen neununddreißig ergeben. [39]Um die große Quadratfläche zu vervollständigen, benötigt man nur eine Quadratzahl von fünf multipliziert mit fünf, [39B]oder fünfundzwanzig. Diese fügen wir zu neununddreißig hinzu, um die große Quadratfläche SH zu vervollständigen.[31] [40]Die Summe ist vierundsechzig. [41]Wir ziehen die Wurzel, acht, welche eine der Seiten des großen Vierecks ist. [42]Subtrahieren wir hiervon dieselbe Anzahl, die wir vorher addiert haben, nämlich fünf, so erhalten wir drei als Rest. [43]Dies ist die Seite des Vierecks AB, welches die Quadratzahl repräsentiert; [44]es ist die Wurzel dieser Quadratzahl, [45]und die Quadratzahl selbst ist neun. [46]Dies ist die Figur[32]:



(D V): [1]*Begründung des Falls: ‚ein Quadrat und einundzwanzig Dirhem ergeben zehn Wurzeln.‘* [2]Wir repräsentieren das Quadrat durch die quadratische Fläche AD, dessen Seitenlänge wir nicht kennen. [3]Dieser [Fläche] fügen wir ein Parallelogramm [Rechteck] hinzu, dessen eine Seite gleich ist einer Seite der Quadratfläche AD, wie zum Beispiel die Seite HN. [4a]Dieses Parallelogramm [Rechteck] ist HB, [4B]*ihm entspricht die 21*[33]. [5]Die Länge der beiden Figuren ist zusammen gleich der Linie HC. [6]Wir wissen, dass dessen Länge in Zahlen gleich zehn Einheiten; [7a]denn jede Quadratfläche hat gleiche Seiten und Winkel, [7b]und eine ihrer Seiten multipliziert mit einer Einheit ergibt die Wurzel der Quadratfläche, [7c]oder multipliziert mit zwei ist zweimal die Wurzel derselben. [8]Da es heißt, [9]dass ein Quadrat und einundzwanzig in Zahlen gleich zehn Wurzeln sind, [10]können wir darum schlussfolgern, dass die Länge der Linie HC gleich zehn in Zahlen ist, [11]denn die Linie CD repräsentiert die Wurzel des Quadrats. [12]Wir teilen nun die Linie CH im Punkt G in zwei gleiche Teile [13B]*und errichten durch ihn die Senkrechte GT*[34]: [13a]die Linie GC ist dann HG gleich. [14]Es ist auch klar, dass die Linie GT der Linie CD gleich ist. [15]Der Linie GT fügen wir nun in gleicher Richtung ein Stück hinzu, das genauso groß ist wie die Differenz zwischen CG und GT, [15B]um das Quadrat zu vervollständigen[35]. [16]Dann wird die Linie TK gleich groß wie KM [17a]und wir haben eine neue Quadratfläche aus gleichen Seiten und Winkeln, nämlich MT. [17B]Wir wissen, dass die Linie TK gleich fünf ist; dies ist folglich auch die Länge der anderen Seiten: die Quadratfläche selbst ist fünfundzwanzig[36]; dies ist das Produkt der Multiplikation der Hälfte der Anzahl der Wurzeln mit sich selbst, denn fünf mal fünf ist fünfundzwanzig. [18]Wir haben festgestellt, dass das Rechteck EB die einundzwanzig in Zahlen repräsentiert, welche der Quadratfläche hinzugefügt wurden. [19B]Wir haben dann mit der Linie KT (welche eine der Seiten der Quadratfläche MT ist) ein Stück vom Rechteck HB abgeschnitten[37], [19C]so dass nur der Teil TA zurückbleibt[38]. [20]Nun nehmen wir von der Linie KM das Stück KL[39], [21]das gleich GK ist; es wird dann deutlich, [22a]dass die Linie TG gleich ML ist; [22b]außerdem ist die Linie KL, die von KM abgeschnitten wurde, gleich KG[40]; [23]folglich ist das Rechteck MR gleich TA. [24b]Es ist also klar, dass das Rechteck HT, vergrößert

[30] IV,36B: nur bei Ox IV,36B und Gr IV,36B, nicht aber bei Robert.
[31] IV,39B: nur bei Ox IV,39B und Rb IV,39B, nicht aber bei Gerhard.
[32] IV,46: nur bei Ox IV,46.
[33] V,4B: nur bei Rb V,4B und Gr V,4B, nicht aber bei Rosen.
[34] V,13B: nur bei Rb V,13B und Gr V,13B, nicht aber bei Rosen.
[35] V,15B: nur bei Ox V,15B und Gr V,15B, nicht aber bei Robert.
[36] V,17B: nur bei Ox V,17B.
[37] V,19B: nur bei Ox V,19B und Rb V,19B, nicht aber bei Gerhard.
[38] V,19C: nur bei Ox V,19C.
[39] V,20: nur bei Ox V,20.
[40] V,22b: entspricht Ox V,22b bzw. Rb V,21a bzw. Gr V,21a

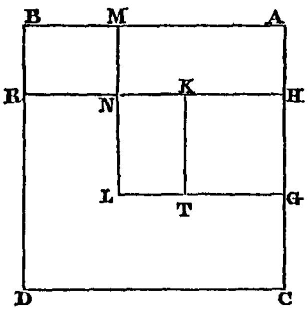
um das Rechteck MR, gleich dem Rechteck HB ist, welches die einundzwanzig repräsentiert. [24a]Wir hatten schon gesehen, dass die ganze Quadratfläche MT gleich fünfundzwanzig ist.[41] [24c]Wenn wir nun von dieser Quadratfläche MT die Rechtecke HT und MR (die gleich einundzwanzig sind) subtrahieren, [24d]verbleibt eine kleine Quadratfläche KR, die die Differenz zwischen fünfundzwanzig und einundzwanzig repräsentiert. [25a]Sie ist vier; [25b]und ihre Wurzel, repräsentiert durch die Linie RG, welche AG gleich ist, ist zwei. [26]Wenn du diese Zahl (zwei) von der Linie CG, welche die Hälfte der Anzahl der Wurzeln ist, subtrahierst, [27]dann bleibt die Linie AC übrig; also drei, [28]welches die Wurzel des ursprünglichen Quadrats ist. [29]Aber wenn du die Zahl zwei zur Linie CG, welche die Hälfte der Anzahl der Wurzeln ist, addierst, [30]dann ist die Summe sieben, [31]was durch die Linie CR dargestellt wird, [32]welche die Wurzel einer größeren Quadratfläche ist. [33]Wenn du jedoch einundzwanzig zu diesem Quadrat addierst, [34]dann wird die Summe auch den zehn Wurzeln desselben Quadrats gleich sein. [35]Hier ist die Figur[42]:



(D VI): [1]*Begründung des Falls: ‚drei Wurzeln und vier einfache Zahlen ergeben ein Quadrat.‘* [2a]Das Quadrat soll durch ein Viereck repräsentiert werden, dessen Seiten uns unbekannt sind; [2B]diese wie auch die Winkel seien jedoch untereinander gleich[43]. [3]Dies ist die Quadratfläche AD, [4]welche die drei Wurzeln und die Vier in Zahlen in diesem Beispiel umfasst. [5]In jeder Quadratfläche ist eine ihrer Seiten, multipliziert mit der Einheit, gleich seiner Wurzel. [6a]Wir schneiden nun das Viereck HD aus der Quadratfläche AD, [6b]und nehmen eine seiner Seiten HC als drei, welches die Anzahl der Wurzeln ist. [6C]Das gleiche gilt für RD[44]. [7]Es folgt dann, dass das Viereck HB die Vier in Zahlen repräsentiert, die zu den Wurzeln addiert werden. [8]Jetzt halbieren wir die Seite CD, die den drei Wurzeln gleich ist, am Punkt G; von dieser Teilung aus konstruieren wir das Quadrat HT, [9a]welches das Produkt aus der Hälfte der Wurzeln (oder eineinhalb) multipliziert mit sich selbst ist, [9B]nämlich zweieinviertel[45]. [10a]Wir fügen dann der Linie GT ein Stück zu, das gleich der Linie AH ist, nämlich das Stück TL; [10b]entsprechend wird die GL der Linie AG gleich werden, [10C]und KN der Linie TL[46]. [11]Folglich entsteht ein neues Viereck mit gleichen Seiten und Winkeln, nämlich das Viereck GM; [11b]und wir sehen, dass die Linie AG gleich ist ML[47], [12]und dieselbe Linie AG ist gleich GL. [13A]Dadurch bleibt CG gleich NR[48], [13B]NR gleich KT[49] [14a]und die Linie MN gleich TL, [14b]und vom Viereck HB wird ein Stück gleich dem Viereck KL abgeschnitten. [15]Aber wir wissen, dass das Viereck AR die Vier in Zahlen repräsentiert, welche zu den Wurzeln addiert werden. [16]Das Viereck AN und das Viereck KL sind zusammen gleich dem Viereck AR, welches die Vier in Zahlen repräsentiert. [17a]Wir haben ferner gesehen: das Viereck GM umfasst das Produkt aus der Hälfte der Wurzeln (nämlich eineinhalb) multipliziert mit sich selbst (nämlich zweieinviertel), [17b]zusammen mit den Vier in Zahlen, welche durch die Vierecke AN und KL repräsentiert werden. [17C]Zusammen ergibt dies sechseinviertel; [17D]die Wurzel daraus ist zweieinhalb; das ist die Seite AG.[50] [18a]Von der Seite der großen ursprünglichen Quadratfläche

[41] V,24a.b: Die Nummerierung orientiert sich an Robert und Gerhard.
[42] V,35: nur bei Ox V,35.
[43] VI,2B: nur bei Ox VI,2B und Gr VI,2B, nicht aber bei Rb VI,2B.
[44] VI, 6C: nur bei Ox VI,6c und Gr VI,6c, nicht aber bei Robert.
[45] VI, 9B: nur bei Ox VI,9b und Gr VI,9b nicht aber bei Robert
[46] VI,10C: nur bei Ox VI,10C.
[47] VI,11b: nur bei Ox VI,11b
[48] VI,13A: nur bei Ox VI,13 und Rb VI,13a, nicht aber bei Gerhard.
[49] VI,13B: nur bei Rb VI,13C und Gr VI,13C, nicht aber bei Rosen.
[50] VI,17C.D: nur bei Rb VI,17C.D und Gr VI,17C.D, nicht aber bei Rosen.

AD, welche das ganze Quadrat repräsentiert, [18b]verbleibt nur die Hälfte der Wurzeln, also eineinhalb, nämlich die Linie GC. [19a]Wenn wir zu dieser Linie AG hinzufügen, welche die Wurzel der Quadratfläche GM ist – [19b]sie ist gleich zweieinhalb – [19c]dann ergibt dies, zusammen mit CG, oder der Hälfte der drei Wurzeln, nämlich eineinhalb, [19d]vier, [19e]welches der Linie AC [19f]oder der Wurzel eines Quadrates entspricht, welches durch die Quadratfläche AD repräsentiert wird. [20]Hier ist die Figur.[51]



(D VII): *Das Vorwort des Autors.* Im Namen Allahs, des Gnädigen und Barmherzigen! Dieses Werk wurde von Muhammad Ibn Musa, der aus der Stadt Khowarezm stammt, geschrieben. Es beginnt so: Gelobt sei Allah für Seine Großmut denen gegenüber, die sich durch ihre tugendhaften Taten um das verdient gemacht haben, was Er Seinen Geschöpfen vorschreibt, die Ihn anbeten. Drücken wir Ihm unseren Dank aus und erweisen uns der Fortdauer Seiner Barmherzigkeit würdig. Er bewahre uns vor dem Wandel. Wir erkennen Seine Kraft an, beugen uns vor Seiner Macht und verehren Seine Größe! Er sandte Mohammed – auf dem der Segen Allahs ruhen möge! – mit der Mission eines Propheten, lange nachdem irgend ein Bote von oben erschienen war, als die Gerechtigkeit der Vernachlässigung anheimgefallen war und als der wahre Weg des Lebens vergeblich gesucht wurde. Durch ihn heilte er die Blindheit, und durch ihn wurden wir vor dem Verderben gerettet. Durch ihn wuchs, was vorher klein war und durch ihn wurde gesammelt, was vorher zerstreut war. Gepriesen sei Allah, unser Herr! Möge Sein Ruhm wachsen und mögen alle Seine Namen geheiliget werden – außer Ihm gibt es keinen Gott; und möge Sein Segen ruhen auf Mohammed, dem Propheten, und auf seinen Nachkommen! Die Gelehrten vergangener Zeiten, die aus Ländern kamen, die längst nicht mehr existieren, waren unentwegt damit beschäftigt, Bücher zu schreiben über die verschiedenen Bereiche der Wissenschaften und die unterschiedlichen Zweige des Wissens. Sie dachten an diejenigen, die nach ihnen kommen würden, hofften auf einen Lohn, der ihren Fähigkeiten angemessen ist, und vertrauten darauf, dass ihre Anstrengung die rechte Anerkennung, Aufmerksamkeit und Erinnerung finden mögen. Bescheiden wie sie waren – bescheiden im Vergleich zu den Strapazen, die sie erleiden mussten und den Schwierigkeiten, auf die sie bei der Enthüllung der Geheimnisse und Rätsel der Wissenschaften trafen – begnügten sie sich mit nur kleinen Lobpreisungen. Einige schufen Wissen, das vor ihnen nicht bekannt war, und hinterließen es der Nachwelt. Andere beschäftigten sich mit den ungelösten Schwierigkeiten in den Arbeiten ihrer Vorgänger, und noch andere bestimmten die besten Untersuchungsmethoden oder machten den Zugang zur Wissenschaft leichter oder brachten ihn zumindest in greifbare Nähe. Andere wiederum entdeckten Fehler in vorangegangenen Arbeiten ihrer Gelehrtenkollegen; sie ordneten, was Verwirrung schuf, berichtigten, was fehlerhaft war, ohne Arroganz und Hochmut. Die Vorliebe für die Wissenschaften, für die Allah den Kalifen al Mamun, den Führer der Gläubigen, berühmt gemacht hat – nebst dem Kalifat, das Er ihm der gesetzesmäßigen Abfolge gemäß übergeben hat, dem Gewand, in das Er ihn gekleidet hat, und den Ehren, mit welchen Er ihn geschmückt hat – die Freundlichkeit und das gönnerhafte Wesen, welches er gegenüber den Gelehrten zeigt, die Bereitschaft, mit der er sie bei der Aufklärung von Unbekanntem und dem Beseitigen von Schwierigkeiten schützt und unterstützt – all dies hat mich ermutigt, ein kurzgefasstes Rechenbuch zu schreiben über die Regeln des Ergänzens und Ausgleichens. Es ist beschränkt auf die gebräuchlichsten und nützlichsten Rechenvorschriften, die die Leute fortwährend benötigen in Fällen von Erbschaften, Vermächtnissen, Teilungen, Gerichtsprozessen und Handelsgeschäften, sowie bei allem, bei dem

[51] VI,20: nur bei Ox VI,20.

sie miteinander ins Geschäft kommen, von der Ausmessung der Ländereien, dem Bau von Kanälen, der Geometrie und anderen Dingen verschiedenster Art und Weise. Dabei vertraue ich auf die Güte meiner Absicht und hoffe, dass die Gelehrten es belohnen werden, so dass ich durch ihre Gebete die Auszeichnung des göttlichen Dankes erlange. Als Belohnung dafür mögen ihnen die auserlesenen Segnungen und die reichliche Freigiebigkeit Allahs zugute kommen! Mein Vertrauen liegt in Allah, in diesen wie in allen Dingen, und an Ihn glaube ich. Er ist der Herr des Erhabenen Throns. Möge Sein Segen herabkommen auf alle Propheten und himmlische Boten!

3.1.2 Die hermeneutische Analyse der Quelle

Der im vorstehenden Abschnitt erschlossene Text liefert eine Fülle von Anknüpfungspunkten für hermeneutische Analysen und hierauf aufbauenden Unterricht. Für uns ist dabei die Frage nach möglichen „Bewandtniszusammenhängen", die Frage also nach dem hermeneutischen „Als" des Textes von zentraler Bedeutung (vgl. 2.3.2.1.3). Nach Heidegger müssen hierbei die Dimensionen der „Vorhabe", der „Vorsicht" und des „Vorgriffs" beachtet werden. Im Hinblick auf die beabsichtigte Verwendung des Textes als Unterrichtsmaterial in einer neunten Klasse kommen darum vor allem die folgenden „Als-Strukturen" in Frage:

a) Die Quelle als (Proto-)Typus neuer Textaufgaben.
b) Die Quelle als Rezept zum Lösen quadratischer Gleichungen.
c) Die Quelle als (Teil-)Beweis eines Lösungsverfahrens für quadratische Gleichungen.
d) Die Quelle als Äußerung eines menschlichen Individuums.
e) Die Quelle als Artefakt einer fremden Kultur.
f) Die Quelle als Artefakt einer historischen Epoche.
g) Die Quelle als Zeugnis einer Stufe innerhalb einer Problemgeschichte (nämlich der quadratischen Gleichungen).
h) Die Quelle als Zeugnis einer präformalen Entwicklungsstufe innerhalb der Mathematik.

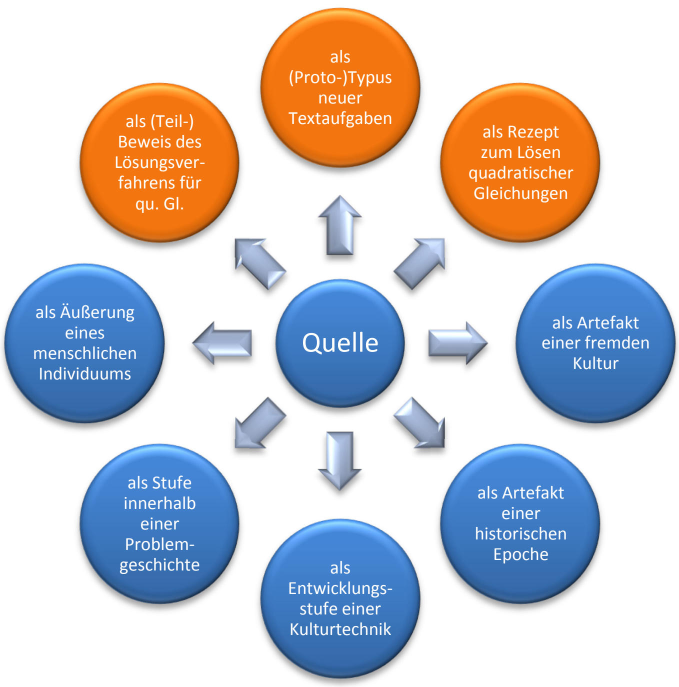


Abbildung 35: Mögliche „Als-Strukturen" der Quelle.

Über die Bewandtniszusammenhänge a) bis c) brauchen hier nicht mehr viele Worte gemacht zu werden. Ihr Potenzial wurde eingehend durch die Ausführungen des vorangegangenen Abschnittes verdeutlicht. Selbstverständlich haben solche Zusammenhänge im Mathematikunterricht eine fortdauernde und ganz natürliche Berechtigung. Geschichtliche Beispiele werden im konventionellen Unterricht ja gerade in einem solchen Sinne verwendet. Im historisch-hermeneutischen Ansatz geht es jedoch darum, den Blick auch für die in d) bis h) angesprochenen „Als-Strukturen" zu öffnen. Deshalb sollen an dieser Stelle wesentliche Aspekte der mit diesen Strukturen verbundenen Kontexte diskutiert werden. Die Darstellung kann natürlich nicht erschöpfend sein. Vollständigere Ausführungen als hier möglich sind, liefert die für alle Punkte im Folgenden angegebene weiterführende Literatur.

3.1.2.1 Zum Autor und seinem kulturellen sowie geschichtlichen Kontext (Bewandtniszusammenhänge d) bis f))

3.1.2.1.1 Al-Khwarizmis Leben und Werk

Über den Autor des *Al-kitab al-muhtasar fi Hisab al-jabr w'al-muqabala*, den persischen Gelehrten Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi, ist kaum etwas Gesichertes bekannt. Das wenige, was man über ihn weiß, stammt größtenteils aus bibliographischen Einträgen seiner Epoche und kurzen Erwähnungen bei arabischen Historiographen. Diese Quellen beziehen sich ausschließlich auf Al-Khwarizmis wissenschaftliche Arbeiten und Leistungen und berichten nichts über seine Person oder sein sonstiges Leben. Unter heutigen Mathematikhistorikern besteht immerhin weitestgehende Einigkeit darüber, dass das Namenselement „al-Khwarizmi" einen Hinweis auf seine Herkunft aus der Stadt Khwarizm (dem heutigen Khiva/Usbekistan) südlich des Aralsees bedeutet. Spekulationen von (Toomer, 1973, S. 358), wonach Al-Khwarizmi dem arabischen Geschichtsschreiber Al-Tabari (838-923) zufolge die zusätzlichen Benennungen *al-Qutrubbulli* und *al-Majusi* bessessen habe, die auf seine Herkunft aus Qutrubbull (nahe Bagdad) und seine ursprüngliche Zugehörigkeit zum Zoroastrismus hindeuten würden – *majusi* (vgl. „Mager", „Magier") war in der arabischen Welt der damaligen Zeit ein Begriff für einen Zoroastrier –, sind von (Rashed, 1994, S. 19 (Fußnote 1)) als „Märchen" („fantasy") zurückgewiesen worden. Tatsächlich weist das im vorigen Abschnitt zitierte Vorwort zur *al-jabr* Al-Khwarizmi als gläubigen Moslem aus, der diesen Glauben bei seinen Lesern offenbar gleichfalls voraussetzt.

Die Lebensdaten Al-Khwarizmis lassen sich nicht präzise bestimmen. Vorsichtige Quellen sprechen davon, dass er vor 800 geboren und nach 847 gestorben sein müsse (Toomer, 1973). Andere Autoren datieren seine Geburt etwas genauer auf ca. 780 und seinen Tod auf ca. 850 (Brezina, 2006, S. 32). Als gesichert kann immerhin gelten, dass Al-Khwarizmis *al-jabr* in der Regierungszeit des Kalifen Al-Mamun (813-833) entstanden ist; denn im Vorwort schreibt er, dass dieser Kalif, der sich durch seine „Vorliebe für die Wissenschaft" auszeichne, ihn zur Fertigstellung des Buches ermutigt habe. Al-Khwarizmi widmete dem Kalifen neben der *al-jabr* noch ein weiteres seiner Werke, ein astronomisches Buch mit dem Titel *zij al-sindhind*, welches vor allem Tabellen und anderes Material zur Bestimmung von Himmels- und Planetenbewegungen enthält. Im arabischen Raum war dieses Buch das erste einer ganzen Serie solcher *zijs*.

Abbildung 36: Geburts- und Wirkungsstätte Al-Khwarizmis: Khiva (A) im heutigen Usbekistan und Bagdad (1). Quelle: Google Maps.

Ein weiteres, sehr bedeutendes Werk von Al-Khwarizmi ist das berühmte Buch über das Rechnen mit den indischen Ziffern. Sein Titel lautete möglicherweise *Al-Kitab al-gami‘ wa'l-Tafriq bi-Hisab al-Hind* („Buch der Addition und Subtraktion nach der indischen Methode des Rechnens“) oder *Kitab Hisab al-Adad al-Hindi* („Buch über das Rechnen mit indischen Ziffern“) (Brezina, 2006, S. 67). Genaueres lässt sich dazu nicht sagen, da der arabische Urtext verloren gegangen ist. Überliefert ist lediglich eine vom Original bekanntermaßen beträchtlich abweichende, lateinische Übersetzung des Werkes aus dem 12. Jahrhundert unter dem Titel *Algoritmi de numero indorum*. Aus dem Titel des Buches, der eine Transkription des Namens Al-Khwarizmi ([Liber] algoritmi) enthält, wurde später das Wort „Algorithmus“ abgeleitet, das zunächst das in jenem Buch behandelte Rechenverfahren bezeichnete, später jedoch seine heutige, allgemeinere Bedeutung annahm. In diesem Buch erläutert Al-Khwarizmi das bei den Indern kennengelernte dezimale Stellenwertsystem und erklärt das Rechnen mit Ziffern inklusive der Null. Das Buch ist insofern als ein Markstein anzusehen, als die in ihm mitgeteilte Art zu rechnen sich – über die arabische Kultur vermittelt – bis nach Europa ausbreitete, dort aufgrund ihrer größeren Effizienz die älteren Rechenverfahren (auf den Linien, mit dem Abakus etc.) samt den römischen Zahlzeichen verdrängte und sich heute zum weltweiten Standard entwickelt hat. Noch heute lernen alle Schulkinder in den ersten Jahren des Mathematikunterrichts das Rechnen nach diesem System. Al-Khwarizmi ist zwar nicht der Erfinder des indischen Ziffernrechnens, wohl aber – durch das besagte Buch und seine spätere Verbreitung – dessen erster und wirksamster Lehrer und Propagator. Eine Spur davon ist in der bei uns üblichen Sprechweise von den „arabischen Zahlen“ erhalten geblieben. Genauer müsste man jedoch von „indischen“ oder „indisch-arabischen Zahlen“ heißen müssten.

Neben seinen wichtigen und einflussreichen Werken über Algebra, Ziffernrechnen und Astronomie verfasste Al-Khwarizmi um 823/24 ein Buch über den jüdischen Kalender, *Risala fi Istikhraj Ta‘rikh al-Yahud*, eine astrologisch gefärbte Chronik mit dem Titel *Kitab al-Ta’rikh* (nach 826), ein nicht näher datierbares, geographisches Werk mit dem Titel *Kitab Surat al-Ard* („Buch über das Bild der Erde“), sowie zwei Abhandlungen über das Astrolabium und eine Arbeit über die Sonnenuhr.

Al-Khwarizmis Werkverzeichnis belegt die große Spanne seiner wissenschaftlichen Produktivität, durch welche er sich nicht nur als Mathematiker, sondern auch als Astronom und Geograph hervorgetan hat. Es kann als ziemlich sicher gelten, dass er zusammen mit anderen führenden Gelehrten seiner Zeit an der um 827 von Kalif Al-Mamun initiierten Gradmessung zur Bestimmung des Erdumfangs teilgenommen hat. Umstritten ist hingegen, ob er tatsächlich, wie gelegentlich vermutet wurde, zu der Delegation gehörte, die 842 vom Kalifen Al-Wathiq zu diplomatischen Verhandlungen mit dem König der benachbarten, aggressiven Chasarenstämme in den Nordkaukasus abgesandt wurde (Dunlop, 1943). Eine andere Expedition nach Griechenland (zur Erforschung der bei Christen wie Moslems tradierten Legende der *Sieben Schläfer von Ephesus*) wurde ebenfalls mit Al-Khwarizmi in Verbindung gebracht – auch dies wahrscheinlich zu Unrecht, zumal sein Name in keiner Quelle explizit genannt wird (Brezina, 2006, S. 42). Eine letzte, hingegen gesicherte Erwähnung geht auf die Annalen des schon erwähnten Historikers Al-Tabari zurück und bezieht sich auf das Jahr 847. Al-Khwarizmi gehörte demnach zu einer Gruppe von Astronomen, die an das Bett des todkranken Kalifen Al-Watiqh gerufen wurde, um die Sterne nach dessen Schicksal zu befragen. Die Begebenheit unterstreicht, welches Ansehen Al-Khwarizmi zu seinen Lebzeiten genoss. Die Befragung der Sterne ergab, dass der Kalif noch weitere 50 Jahre leben würde; – dieser verstarb jedoch nur zehn Tage darauf. Die meisten Quellen gehen davon aus, dass Al-Khwarizmi wenig später, etwa um 850, im Alter von etwa 70 Jahren gestorben ist.

3.1.2.1.2 Das Haus der Weisheit und das Streben nach Wissen

Al-Khwarizmis produktivste Phase fällt, wie bereits gesagt, in die Regierungszeit des Kalifen Al-Mamun. Dieser ist nicht nur – wie so viele andere Kalifen auch – durch seinen ausgeprägten Machtwillen bekannt geworden – 813 entthronte er beispielsweise nach kriegerischen Auseinandersetzungen seinen älteren Bruder und ließ ihn hinrichten, nachdem dieser ihn kurz zuvor von der durch den gemeinsamen Vater festgelegten Erbfolge des Kalifats ausgeschlossen hatte. Al-Mamun ist aber viel mehr noch als Freund und Förderer der Wissenschaften in die Geschichte eingegangen. Nicht nur das Vorwort in Al-Khwarizmis *al-jabr* gibt hierauf einen Hinweis. Das berühmte *Baitul Hikmah* („Haus der Weisheit"), das wahrscheinlich schon von seinem Vater ar-Rashid (Kalif von 786-809, in Europa vor allem durch die Erzählungen aus „Tausendundeiner Nacht" bekannt) als *Khaznatul Hikmah* („Schatzhaus der Weisheit") in Bagdad gegründet worden war (Deen, 2007, S. 29), baute Al-Mamun zu einer Art wissenschaftlichen Akademie aus, in der einige der bedeutendsten Gelehrten der damaligen Zeit arbeiteten: Zu Al-Khwarizmis Kollegen gehörten der große moslemische Philosoph Al-Kindi (801-873) sowie die drei Banu-Musa-Brüder, Jafar Muhammad (vor 801-873), Ahmad (801-873) und Al-Hasan (810-873), die Beiträge zur Geometrie sowie zur Mechanik und Technik lieferten. Im Haus der Weisheit wurden – möglicherweise unter der Aufsicht von Al-Khwarizmi und den Banu Musa (Brezina, 2006, S. 37) – wissenschaftliche Werke fremder Kulturen (vor allem der Inder, Perser und Griechen) gesammelt, abgeschrieben und übersetzt. Sie standen damit allen Gelehrten, die dort arbeiteten, zur schnellen Verfügung. Um 751 war darüberhinaus die Technik der Papierherstellung aus China eingeführt worden, gegen 793 wurde in Bagdad eine Papiermühle fertiggestellt. Der Aufstieg des *Baitul Hikmah* hängt auch eng mit diesen Entwicklungen zusammen, da die Textproduktion nun viel größere Ausmaße annehmen konnte. Der einfache Zugang zu reichen Wissensbeständen und die Möglichkeit, eigene Ideen „zu Papier zu bringen", ermöglichte es den arabischen Gelehrten, auch originäre Forschung zu planen und zu betreiben. (Deen, 2007) beschreibt den Geist dieser Zeit:

> Material prosperity enabled the people to participate in cultural activities and to conduct the search for knowledge. The elite joined in with the Khalifas, in funding the translation work, to demonstrate their

> culture and respectability. Sponsorships of scholars became the norm, debate and discourse became the sign of status. It never happened before – as if all the Greek city states, with their manifold scientific endeavours, had squeezed into the single city of Baghdad. If there was ever a time in human history when seeking truth and knowledge was the most fashionable thing to do, then that was it. Let us quote from Kindi to get the spirit of the time: 'We should not be timid in praising truth and in seeking it from wherever it comes – even if it be from distant races or people different from us.'
>
> (Deen, 2007, S. 6)

Es ist dieser Geist, der sich auch in Al-Khwarizmis Vorwort zu seiner *al-jabr* und in dem in ihm enthaltenen umfassenden Lob der „Gelehrten vergangener Zeiten, die aus Ländern kamen, die längst nicht mehr existieren" ausdrückt. Und tatsächlich werden die Moslems durch den Koran und zahlreiche Hadithen ausdrücklich aufgefordert, Wissen wertzuschätzen, nach Wissen zu streben und den Geheimnissen der göttlichen Schöpfung nachzuspüren. Der ganze Kosmos ist diesen Texten zufolge als Zeichen göttlichen Wirkens zu betrachten, welches zu verstehen jedem Moslem aufgegeben ist. Deen meint hierzu:

> No religion has given a more powerful incentive for the study of science. Science is thus essential for fulfilling the Quranic recommendations. There are also many hadiths exhorting Muslims to seek knowledge. Here are some of them:
>
> 1. Go even as far as China to seek knowledge.
> 2. Scholar's ink is holier than martyr's blood.
> 3. He who pursues the road to knowledge, God will direct him to the road to paradise.
> 4. The brightness of a learned man compared to that of a mere worshiper is like that of a full moon compared to that of all the stars.
> 5. Obtain knowledge; its possessor can distinguish right from wrong, it shows the way to Heaven.
> 6. Seeking knowledge is required for every Muslim.
>
> (Deen, 2007, S. 6)

Die Kalifen zu Zeiten Al-Khwarizmis unternahmen viele Anstrengungen, um diesen Aufforderungen nachzukommen. Die Bedingungen hierfür waren günstig: Das islamische Reich war nach seiner Gründung in atemberaubender Geschwindigkeit zur Weltmacht aufgestiegen und hatte die Moslems mit vielen Völkern Asiens und des Mittelmeerraums sowie deren kulturellen und wissenschaftlichen Errungenschaften in Berührung gebracht (vgl. Abbildung 37). Ein kurzer historischer Exkurs möge diesen Hintergrund beleuchten.

3.1.2.1.3 Historischer Exkurs

3.1.2.1.3.1 Der Aufstieg des Islam und seine kulturelle Blüte

Während der ersten gut hundert Jahre nach dem Tode Mohammeds (632) hatten die sogenannten „rechtschaffenen Kalifen" die islamische Expansion vorangetrieben. Hierbei eroberten sie in zahlreichen, kurz aufeinander folgenden Schlachten mit dem oströmischen Reich (Byzanz) und dem sassanidischen Perserreich (das sich etwa über die Gebiete des heutigen Iran und Irak erstreckte) zunächst Syrien, den Irak, Palästina und Jerusalem (638), wenig später Ägypten und Alexandria (642) sowie das westliche Nordafrika (670). 711 landeten sie in Spanien und brachten bis 719 die iberische Halbinsel unter ihre Kontrolle. Der Vormarsch konnte erst 732 nahe Poitiers durch die Franken unter Karl Martell (dem „Retter des Abendlandes") aufgehalten werden. Die versuchte Einnahme Konstantino-

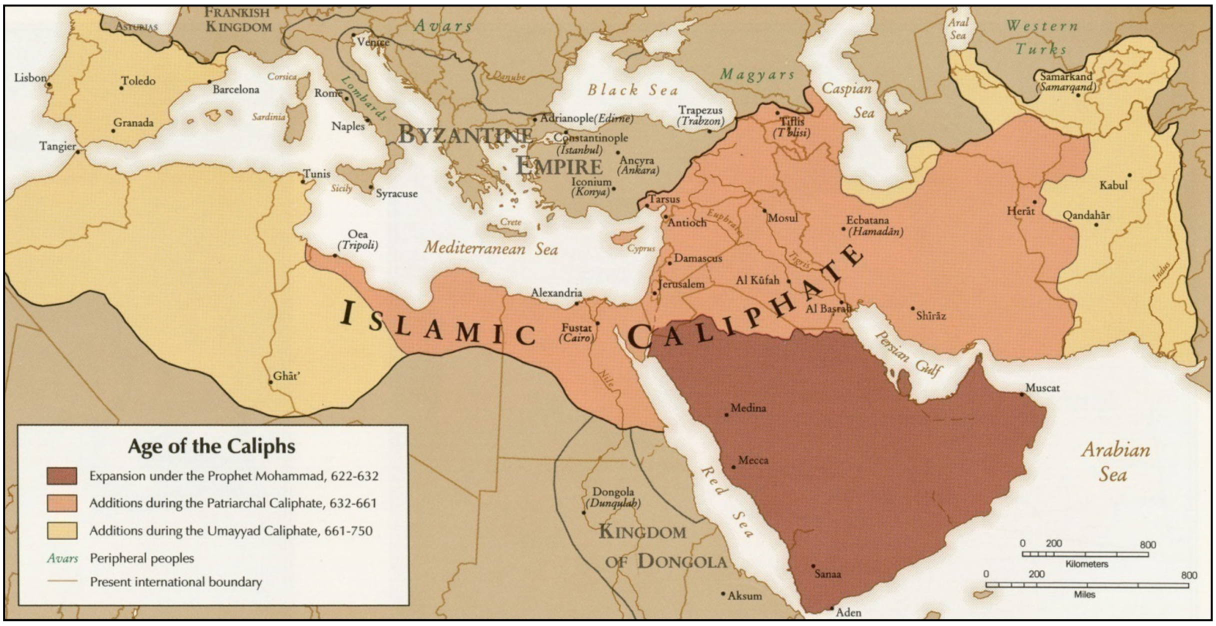


Abbildung 37: Ausdehnung des Islam ■ unter Mohammed, dem Propheten (622-632); ■ während der Kalifate der „Rechtschaffenen“ (632-661); ■ unter den umayyadischen Kalifen (661-750). Die Umayyaden wurden durch die „abbasidische Revolution“ (747-750) von der Macht verdrängt. Nur Andalusien blieb unter ihrer Herrschaft. Von 758 bis 762 ließ der zweite abbasidische Kalif al-Mansur (754-775) Bagdad erbauen und machte es zur Hauptstadt des islamischen Reiches, das in der Folgezeit seine größte Blüte erlebte, bevor es – nach dem Tode al-Mamuns (833) – begann, sich in schnell aufeinander folgenden Revolten zu zerreiben und zu zerfallen. Um 900 beherrschten die Kalifen von Bagdad nur noch die Gebiete des heutigen Irak, des Westens Irans, Syriens und Teile von Ägypten. Karte nach(University of Texas Libraries, 1993).

pels scheiterte in den Jahren 674-678 und ein zweites Mal 717/18; doch hatte Byzanz bis dahin schon etwa zwei Drittel seines Territoriums, drei Viertel seiner Steuereinnahmen sowie die Hälfte seiner Bevölkerung verloren und musste Tribute an das Kalifenreich entrichten. Im Osten stießen die Moslems nach Zentralasien und bis 711 an die Grenzen Chinas und Indiens vor. Das sassanidische Perserreich, vier Jahrhunderte lang die dominierende Macht im Osten, ging während dieses Vormarsches vollständig unter (642). Erst 738 wurden die Moslems an den Grenzen Zentralindiens aufgehalten. Gegen die Chinesen gelang 751 allerdings noch ein größerer Sieg – den chinesischen Gefangenen wurde die Technik der Papierherstellung abgeschaut (s. o.). Im Westen wurde im 9. Jahrhundert noch Sizilien erobert, der Sprung nach Italien und Rom aber misslang. Ebenso verhinderten die Chasaren einen möglichen Durchmarsch durch den Kaukasus nach Osteuropa. Das islamische Reich war zu dieser Zeit im Wesentlichen befriedet. Die in der Weltgeschichte beispiellose Expansion, die mit dem Zusammenbruch der zuvor dominierenden Weltmächte Byzanz und Persien einherging, kann nach Ansicht vieler Historiker nicht allein damit erklärt werden, dass Römer und Perser sich in ihren jahrhundertelangen Auseinandersetzungen – insbesondere aber während ihres letzten Krieges (603-628), der Byzanz an den Rand des Abgrunds gebracht hatte – so aufgerieben und geschwächt hatten, dass sie den plötzlich vordrängenden Moslems nichts Entscheidendes mehr entgegensetzen konnten. Die beiden Weltreiche hätten kaum in so kurzer Zeit besiegt (bzw. im Falle Persiens sogar vernichtet) werden können, wenn die Völker in den Provinzen die moslemischen Eroberer nicht willkommen geheißen und es begrüßt hätten, die römische bzw. persische Herrschaft auf diese Weise abschütteln zu können:

> Muslim success in getting one vanquished population after another to accept and serve their new rulers was made easier by the long-deprived condition of so many of the people in the occupied lands and by the relatively benevolent requirements of the occupiers. Muslim rule was generally less harsh than that of previous invaders. Christians and Jews were not required to convert if they paid suitable tribute; they were also freed from obligatory (and dreaded) military service. […] What soon became the pivotal empire-building force was the generally rational, just, and humane Muslim approach to the rule and civil management of conquered territories, an approach that reflects precepts clearly set forth in the Islamic Revelation. All in all, Islamic rule encouraged cooperation on the part of local populations.
>
> (Turner, 1995, S. 7, 12)

Die so genannten „rechtschaffenen Kalifen" herrschten von 632 bis 661. Unter ihrer Führung war die Gemeinschaft der Gläubigen noch ungespalten. Streitigkeiten zwischen dem umstrittenen vierten Kalifen Ali ibn Ali Talib und seinem Gegenspieler Mu'awiya, der 660 ein Gegenkalifat in Damaskus errichtet hatte, führten schließlich zum Schisma der Moslems in Sunniten („Volk der Tradition") und Schiiten (nach *Schi'at 'Ali*, „Partei Alis"). Nachdem Ali 661 ermordet worden war, fiel das Kalifat endgültig an Mu'awiya, der als erster Kalif (deutsch: Nachfolger, Stellvertreter) nicht aus der engeren Familie Mohammeds stammte. Er begründete die Dynastie der Umayyaden. Diese führten die von den rechtschaffenen Kalifen begonnene Expansion erfolgreich weiter, wurden jedoch in den Jahren 747-750 durch einen (von Schiiten und Persern unterstützten) Umsturz seitens der Abbasiden, der Nachfahren von Mohammeds Onkel Abbas, von der Macht verdrängt. Die Abbasiden vertraten (wie die Schiiten) die Ansicht, dass das Kalifat nur ein Abkömmling der engeren Familie Mohammeds innehaben dürfe und setzten darum ihren eigenen Mann, Abu l-Abbas *as-Saffah* (arab. „der Blutvergießer"), ein, der aber schon 754, mit 32 Jahren, verstarb. Sein Bruder und Nachfolger Al-Mansur war in den Jahren 754-775 der zweite Kalif der neuen Dynastie. Er gründete 762 die neue Hauptstadt Bagdad (pers. „gottgegeben", „Geschenk Gottes") und begann das bereits erwähnte, groß angelegte Übersetzungsprojekt, das sein zweiter Sohn Ar-Rashid (Kalif von 786-809) fortsetzen ließ und durch die Gründung des *Khaznatul Hikmah* maßgeblich förderte. Unter Al-Mamun (Kalif von 813-833) wurde es als *Baitul Hikmah* schließlich die bedeutendste akademische Einrichtung der damaligen Welt, in welcher hervorragende wissenschaftliche Einflüsse und kulturelle Anregungen der eroberten Völker von Menschen unterschiedlichster religiöser Bekenntnise zusammengetragen, ausgewertet und weiterentwickelt wurden:

> Most of the translators of Greek books were Christians but most of the philosophers were Muslims. Some doctors were Christians but many more were Muslims. The search of knowledge under Islam was conducted together by Muslims alongside Christians, Jews, Hindus and Zoroastrians. This was unparalleled in the history of any other religion, and has only been equalled in the modern secular time.
>
> (Deen, 2007, S. 7)

Turner bemerkt hierzu:

> This ethnic and religious mixture probably rendered early Muslim scientific endeavor more resistant to theological constraint than it would have been had only Muslim Arabs been involved.
>
> (Turner, 1995, S. 28)

Al-Mamun schickte Gesandtschaften nach Kleinasien, das noch unter byzantinischer Herrschaft stand, nach Zypern und sogar zum byzantinischen Kaiser selbst, um in den Besitz weiterer griechischer Bücher und des in ihnen enthaltenen Wissens zu kommen. Er veranlasste darüber hinaus auch eigene Forschungen, vor allem auf den Gebieten der Mathematik, Optik, Medizin, Geographie und Astronomie. Die oben erwähnte Gradmessung und die Siebenschläfer-Expedition nach Griechenland sind Beispiele für solche Initiativen. Al-Mamun förderte Dichter, Philosophen, Buchautoren, Übersetzer und Wissenschaftler aufs Großzügigste und schuf damit ein Klima intellektueller und kultureller Prosperität. Der Islam und das Kalifenreich erlebten unter Al-Mamun und auch noch unter seinen beiden Nachfolgern Al-Mutasim (833-842) und Al-Wathiq (842-847) ihre höchsten Blüten, ihr von vielen Historiken so apostrophiertes „goldenes Zeitalter“. Das von Al-Khwarizmi in seinem Vorwort zur *al-jabr* niedergeschriebene, ausführliche Lob für al-Mamun ist vor diesem Hintergrund zu sehen. Es dürfte mehr sein als eine notwendige Pflichtübung eines Untergebenen und Angestellten gegenüber seinem Herrscher und Geldgeber. Vielmehr bringt es seine aufrichtig und zu Recht empfundene Anerkennung und Dankbarkeit zum Ausdruck.

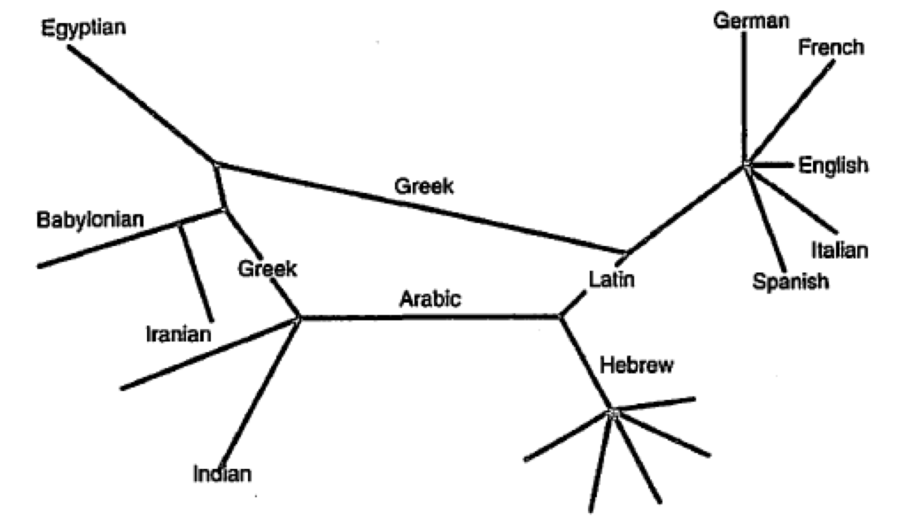


Figure 3.1
Diagram of the Genesis of Islamic Science
(The Transmission of Science from Antiquity to the Middle Ages)

Nearly half a century ago George Sarton, the celebrated historian of science, used a diagram similar to this one to show how the Arabic scientific effort revived and continued not only Greek science but also many scientific concepts of Iranian and Hindu origin. As can be seen here, the transmission of historic scientific traditions never takes a single, direct route. Alternate paths and crosscurrents were involved in all the great eras of early scientific progress.

Abbildung 38: Die Genese der islamischen Wissenschaft. Die Zeit schreitet in diesem Diagramm von links nach rechts voran. Aus (Turner, 1995, S. 40).

3.1.2.1.3.2 Religion und Vernunft in der islamischen Kultur

Dass Glaube und Wissenschaft im arabischen Mittelalter eine so friedliche und einander befruchtende Koexistenz führten, dürfte angesichts der Verwerfungen, die in diesem Zusammenhang wenig später im wissenschaftlich erwachten, christlichen Europa zu verzeichnen waren, überraschen. Man denke etwa zum Vergleich an den erst 1966 von Papst Paul VI. abgeschafften *Index Librorum Prohibitorum*, auf dem sich Autoren wie Descartes, Bacon, d’Alembert, Diderot, Pascal, Bolzano, Heinrich Heine sowie natürlich Kopernikus, Galilei und Darwin befanden (BFE, 2008). Man erinnere sich an die öffentlichen Verbrennungen von Gelehrten wie Jan Hus (1370-1415) oder Giordano Bruno (1548-1600). Welche Gründe haben dazu geführt, dass die islamische Religion zu Al-Khwarizmis Zeiten ein entspannteres und offeneres Verhältnis zur Wissenschaft pflegte, als dies später im Christentum der Fall war? Ein wichtiger Grund wurde im vorigen Abschnitt schon genannt: Die in Bagdad lebenden und arbeitenden Protagonisten waren ethnisch und religiös durchmischt. Dies wappnete sie gegen die Gefahren religiös motivierter Einseitigkeiten oder Verabsolutierungen und beförderte zugleich größere Toleranz untereinander. Zudem barg die moslemische Religion ihrerseits von vornherein synkretistische Züge in sich (Hauschild, 1995, S. 360). Der Kalif Al-Mamun letztlich soll durch eine Vision dazu bewogen worden sein, Kultur und Wissenschaften zu fördern. Hierüber berichtet eine Quelle aus dem späten 10. Jahrhundert, der *Kitab al-Fihrist* des persischen Gelehrten Al-Nadim. Demnach wurde Al-Mamun von Zweifeln geplagt, ob sein Vorhaben, das von seinem Vater gegründete *Khaznatul Hikmah* fortzuführen, das Übersetzungswerk voranzutreiben, das Wissen fremder Völker zu sammeln und zu bewahren und eine eigenständige Wissenschaftskultur zu etablieren, tatsächlich dem Willen Gottes entspräche. Im Kern ging es also um die Frage, ob Vernunft und Wissenschaft einerseits und der islamische Gottesglaube andererseits miteinander vereinbar seien. In dieser Situation erschien ihm im Traum die Gestalt des griechischen (heidnischen!) Philosophen Aristoteles. Al-Nadim erzählt die Begebenheit unter der bemerkenswerten Überschrift *Mention of the Reason Why Books on Philosophy and Other Ancient Sciences Became Plentiful in This Country*. Ich zitiere die Stelle nach der englischsprachigen Ausgabe von Dodge:

> "One of the reasons for this was that al-Ma'mun saw in a dream the likeness of a man white in color, with a ruddy complexion, broad forehead, joined eyebrows, bald head, bloodshot eyes, and good qualities sitting on his bed. Al-Ma'mun related, "It was as though I was in front of him, filled with fear of him. Then I said, 'Who are you?' He replied, 'I am Aristotle.' Then I was delighted with him and said, 'Oh sage, may I ask you a question?' He said, 'Ask it.' Then I asked, 'What is good?' He replied, 'What is good in the mind.' I said again, 'Then what is next?' He answered, 'What is good in the law.' I said, 'Then what next?' He replied, 'What is good with the public.' I said, 'Then what more?' He answered, 'More? There is no more.'" According to another quotation: "I [al-Ma'mun] said, 'Give me something more!' He [Aristotle] replied, 'Whosoever gives you advice about gold, let him be for you like gold; and for you is oneness [of Allah].'" This dream was one of the most definite reasons for the output of books."
>
> (Dodge, 1970, S. 583 f.)

Der Abschnitt wird von Dodge wie folgt gedeutet:

> This whole conversation between al-Ma'mun and Aristotle endorses the idea that reason (good in the mind) and revelation (good in the law) can be combined for the good of the public.
>
> (Dodge, 1970, S. 584)

Der Legende zufolge soll al-Mamun durch den Traum von seinen Zweifeln befreit und in seinem Vorhaben bestärkt worden sein, Gott – und seinen Gläubigen – durch die Förderung der Wissenschaften in rechter Weise zu dienen. Diese Initiative brachte letztlich ein einzigartiges Ergebnis hervor. Mit den Worten Turners:

> In less than four centuries after the first Islamic conquest, philosophers, mathematicians, botanists, physicians, geographers, alchemists, and their peers in the other scientific disciplines, at work throughout the wide reaches of the Islamic empire, had accomplished the remarkable feat of unwrapping the vast intellectual legacy received from past civilizations, analyzing it in relentless detail, fussing with it, testing and

> re-testing its hypotheses and answers, evolving new ones, and further revising, discarding, or reformulating many of those. From the broadest concepts of the physical universe to details of the smallest scale – including invisible processes within the human body – much was put in order and connected in ways some of which appear to reflect or to parallel the Muslim concept of cosmic unity spelled out in the Islamic Revelation. In sum, a new concept of the universe was put together, in many ways remarkably similar, or at least parallel, to the old ones, in other ways significantly simplified and clarified. […] It represented a critical advance beyond contemporary non-Muslim concepts, most of which it would eventually affect profoundly.
>
> (Turner, 1995, S. 33 f.)

Die hiermit umrissene Totalität des wissenschaftlichen Aufschwungs im Islam beschreiben zu wollen, würde den Rahmen und die Absichten der kontextuellen Erschließung unserer Quelle natürlich weit übersteigen. Die aus diesem Grunde knapp gehaltene und notwendigerweise unvollständige Darstellung in diesem Abschnitt kann jedoch ein besseres Verständnis für die Arbeiten Al-Khwarizmis ermöglichen und helfen, diese besser einzuordnen und würdigen zu können. Al-Khwarizmi war kein Sonderling, der abgeschieden vom Rest der Welt über Themen spekulierte, für die es zu seiner Zeit weder Interesse noch Verständnis gegeben hätte. Al-Khwarizmi war, ganz im Gegenteil, eine – wenngleich herausragende – Figur in einer breiten Bewegung,

- die sich als Teil einer welt-, epochen- und sogar glaubensübergreifenden Tradition verstand,
- die sich dem intellektuellen und kulturellen Aufbruch verschrieben hatte,
- und die einem übergeordneten, religiösen Ziel diente – der Verherrlichung Gottes und seiner Werke zum Wohle der Menschen.

Der im Vergleich zum europäischen Mittelalter liberalere Geist, der sich in dieser Bewegung manifestierte – und der sich beispielhaft in Al-Khwarizmis Vorwort zu seiner *al-jabr* artikuliert – ebnete im arabischen Raum den Weg zu intellektuellen, kulturellen und technischen Fortschritten, auf die Europa noch bis zum Beginn der Renaissance warten musste.

3.1.2.1.4 Al-Khwarizmis Vermächtnis

Obschon Al-Khwarizmi auf vielen Feldern der Wissenschaft gearbeitet hat, so liegen seine nachhaltigsten Verdienste auf dem Gebiet der Mathematik. Al-Khwarizmis *al-jabr* entwickelte sich in den Jahrhunderten nach seinem Tod zu einem so oft gelesenen, kopierten und zitierten Werk, dass seinem Autor von einigen seiner Rezipienten der Ehrentitel „Vater der Algebra“ beigelegt wurde (Mohamed, 2000, S. 41 ff.). Tatsächlich ist der immense Einfluss Al-Khwarizmis auf die Entwicklung der Mathematik unter Forschern unumstritten. (Alten et al., 2003) stellen fest:

> Al-Hwarizmis [sic] Verfahren wurde von allen bis heute bekannten Mathematikern der islamischen Länder […] exakt oder ähnlich wiederholt. Seine Algebra hatte im Abendland Auswirkungen u. a. auf die Werke von Leonardo Fibonacci (ca. 1170-1240) [dessen *Liber abaci* ein Kapitel mit der Überschrift *Aljebra et almuchabala* enthält, M. G.] und Gerolamo Cardano (1501-1576), der ihn zu Beginn seiner Algebra würdigt mit den Worten: ‚Diese Kunst geht zurück auf Muhammad Ibn Musa al-Hwarizmi‘.“
>
> (Alten et al., 2003, S. 168 f.)

Doch nicht nur Algebra, sondern auch das Rechnen mit den (indisch-)arabischen Zahlen hat Europa von Al-Khwarizmi gelernt (Allard, 1991). Die Verbreitung des genialen und heute weltweit gebräuchlichen dezimalen Stellenwertsystems ist letztlich ihm geschuldet:

> He composed the oldest works on arithmetic and algebra. They were the principal source of mathematical knowledge for centuries to come both in the East and the West.
>
> (Khan, 1946, S. 11)

Es ist vor diesem Hintergrund verständlich, wenn Philip Hitti in seinem monumentalen Werk „History of the Arabs" von Al-Khwarizmi schreibt als

> One of the greates scientific minds of Islam, he influenced mathematical thought to greater extent than any other medieval writer. (Hitti, 2002, S. 379)

und (Khan, 1946) zu dem Schluss kommt:

> In the foremost rank of mathematicians of all times stands al-Khwarizmi. (Khan, 1946, S. 11)

Etwas uneinheitlicher wird Al-Khwarizmi allerdings hinsichtlich seiner schöpferischen Leistungen und ihrer Authentizität beurteilt. Eine Reihe von Mathematikhistorikern sieht ihn eher als Sammler, Systematisierer und Lehrer bereits vorhandenen denn als Begründer neuen Wissens. So vertritt (Toomer, 1973, S. 362) die Meinung, dass Al-Khwarizmis wissenschaftliche Leistungen „at best mediocre" gewesen seien und Cajori behauptet sogar

> The work on algebra, like the arithmetic by the same author, contains little that is original. (Cajori F., 1931, S. 103)

Insbesondere die Frage, ob und inwieweit Al-Khwarizmi tatsächlich als Urheber der Algebra gelten kann, gab oft Anlass zu Meinungsverschiedenheiten. Während (Rashed, 1994, S. 10) meint, dass es es unmöglich sei „to overstress the originality of the conception and style of al-Khwarizmi's algebra, which did not rise from any ‚arithmetical' tradition", sind von anderen Forschern sehr wohl mutmaßliche Vorbilder ausgemacht worden. Besonders der mögliche Einfluss der Euklidischen *Elemente* auf die *al-jabr* ist in diesem Zusammenhang immer wieder diskutiert worden: Al-Khwarizmi untermauert die oben ausführlich zitierten und diskutierten Lösungsverfahren mit Beweisen, in denen geometrische Figuren vorkommen, welche jenen aus Euklid II ähnlich sehen (s. 3.1.1.2.2.2 und 3.1.2.2.1.3). Zudem lagen die *Elemente* in einer arabischen Übersetzung von Al-Hajjaj (786-833) im Haus der Weisheit vor und waren Al-Khwarizmi mit Sicherheit zugänglich. Gandz sieht Al-Khwarizmi trotz solcher Indizien als Gegner der griechischen Tradition an:

> Euclid and his geometry, though available in a good translation by his colleague, M. G.], is entirely ignored by him when he writes on geometry. On the contrary, in the preface to his *Algebra* al-Khowarizmi [sic] distinctly emphasizes his purpose of writing a popular treatise that in contradiction to Greek theoretical mathematics, will serve the practical ends and needs of the people in their affairs of inheritance and legacies, in their law suits, in trade and commerce, in the surverying of lands and in the digging of canals. Hence, al-Khowarizmi appears to us not as a pupil of the Greeks, but quite to the contrary, as the antagonist of al-Hajjaj and the Greek school, as the representative of the native popular sciences.
>
> Gandz, zitiert nach (Brezina, 2006, S. 91 f.), vgl. auch (Jahnke H. N., 1991, S. 11)

Gandz glaubt daher, dass Al-Khwarizmis *al-jabr* sich nicht auf Euklid, sondern – zumindest in einigen Abschnitten – auf eine alte hebräische Abhandlung über Geometrie, den *Mishnat ha-Middot* (übersetzt etwa: Lehre der Maße), stützt. Dieser sei Gandz zufolge im 2. Jahrhundert niedergeschrieben worden. Andere Forscher datieren seine Entstehung jedoch auf die Zeit nach Al-Khwarizmi (Brezina, 2006, S. 95).

Hoyrup vermutet, wie schon erwähnt, babylonische Einflüsse auf Al-Khwarizmi, vgl. (Jahnke H. N., 1991, S. 9) und (Høyrup, 2002, S. 11-14), Cajori meint, indische und griechische Vorbilder zu erkennen, vgl. (Mohamed, 2000, S. 29). Alten et. al. konstatieren hingegen eine gewissermaßen allumfassende „Kombination der Strenge Euklids mit den rechnerischen Aspekten der Babylonier, des Diophant, des Inders Brahmagupta und seiner zusätzlichen geometrischen Beweise für die Lösungsformel der quadratischen Gleichungen“ (Alten et al., 2003, S. 168).

Angesicht dieser Wirrsal an Meinungen mahnt (Rashed, 1994):

> The very fact that so many contradictory opinions exist indicates that no single one can prevail and that no historian has been able to establish effectively any kind of link between Al-Khwarizmi and any of the supposed authors.
>
> (Rashed, 1994, S. 9)

Der Streit zwischen Historikern verschiedener Lager habe keine Klarheit erbringen können:

> The question is still open, how this newly conceived discipline [nämlich Algebra, M. G.] was developed, and how it is that this particular contribution [nämlich Al-Khwarizmis *al-jabr*, M. G.], several aspects of which suggest the culmination of past activity, emerges as a radical departure. Unable to find a satisfactory answer, historians have for some time engaged in an endless debate around two complementary themes: the origins of algebra and the sources used by al-Khwarizmi, referring in turn to the Hellenistic mathematician (Euclid or Diophantus, depending upon the case) and to Indian or, more recently, Babylonian mathematics.
>
> (Rashed, 1994, S. 8)

Der nächste Abschnitt wird u. a. aufzeigen, um welche Mathematik es im Kern dieser Diskussionen geht. Dies geschieht allerdings nicht zu dem Zweck, „endlose Debatten“ zu verlängern, sondern vielmehr dazu, den nächsten Bewandtniszusammenhang unserer Quelle, ihre Stellung innerhalb der problemgeschichtlichen Tradition, zu erschließen.

Zu Al-Khwarizmi selbst sei noch bemerkt, dass ihm – unabhängig von der Frage nach seiner Originalität – in seiner Heimat bis in die heutige Zeit große Verehrung entgegengebracht wird. Hiervon zeugen u. a. die Denkmäler, die in seiner Heimatstadt sowie in Teheran errichtet worden sind sowie die Briefmarke, die in der früheren Sowjetunion zum Anlass seines 1200. Geburtstages herausgegeben worden ist. Georges Ifrah schreibt in seiner „Universal History of Numbers“ zusammenfassend über ihn:

> Unbeknown to him, al-Khwarizmi provided the name for a fundamental branch of modern mathematics, and gave his own name to the science of algorithms, the basis for one of the practical and theoretical activities of computing. What more can be said about this great scholar’s influence?
>
> (Ifrah, 2000)

3.1.2.2 Zur Stellung der Quelle innerhalb der problemgeschichtlichen Tradition (Bewandtniszusammenhang g))

In seinem Vorwort zur *al-jabr* dankt Al-Khwarizmi den „Gelehrten vergangener Zeiten, die aus Ländern kamen, die längst nicht mehr existieren“ und die „unentwegt damit beschäftigt [waren], Bücher zu schreiben über die verschiedenen Bereiche der Wissenschaften und die unterschiedlichen Zweige des Wissens.“ Auf dem Gebiet dessen, was wir heute unter dem Titel der quadratischen Gleichungen fassen können, hat es tatsächlich schon in der Frühgeschichte relevante Entdeckungen gegeben. Ob und inwieweit diese Al-Khwarizmi bekannt gewesen sind, muss an dieser Stelle offenbleiben. Im historisch-hermeneutischen Ansatz geht es uns ja gerade *nicht* darum, Entwicklungslinien zu hypostasieren, deren Plausibilität im vorliegenden Fall auch nicht gut zu untermauern wären. Die folgenden, bewusst knapp gehaltenen Bemerkungen mögen daher nur dazu dienen, Al-Khwarizmis *al-jabr* innerhalb der problemgeschichtlichen Tradition der quadratischen Gleichungen besser einzuordnen.

3.1.2.2.1 Geschichtlicher Überblick

Die quadratische Gleichung in ihrer Normalform $x^2 + px + q = 0$, so wie wir sie kennen, hat es bis vor relativ kurzer Zeit gar nicht gegeben. Was es gab, – das zeigen u. a. die *al-jabr*-Auszüge –, waren Probleme und Aufgabenstellungen, die auf quadratische Gleichungen (in unserem Sinne) führen können. In verschiedenen antiken Kulturkreisen traten diese „quadratischen Probleme“ in unterschiedlichen Zusammenhängen auf. Da viele frühere Kulturen nicht mit negativen Zahlen und der Null gerechnet haben, wurde dabei zumeist zwischen drei Problemtypen unterschieden, die wir heute mit folgenden Gleichungen wiedergeben würden:

$$(\mathrm{T}_1)\quad ax^2 + bx = c$$
$$(\mathrm{T}_2)\quad ax^2 + c = bx$$
$$(\mathrm{T}_3)\quad ax^2 = bx + c$$

Diese drei Problemtypen, die in den oben wiedergegebenen Zitaten aus Al-Khwarizmis *al-jabr* als Fälle (iv) bis (vi) auftauchen, wurden stets separat voneinander betrachtet und mit unterschiedlichen Lösungsmethoden bearbeitet. Eine einheitliche Sicht hat es zwar schon bei den alten Indern (iv.) gegeben, ihre Tradition ist jedoch nicht nach Westen überliefert worden. So blieb es dem europäischen Mittelalter überlassen, hier für eine Vereinheitlichung zu sorgen.

In den erhaltenen Schriften der Ägypter und Babylonier sind uns rezeptartige Verfahren zur Lösung quadratischer Probleme überliefert, die allerdings nicht näher begründet werden.

Erst die Griechen führten nachweislich die Beweiskultur in die Mathematik ein. Quadratische Probleme traten bei ihnen aber nur implizit im Gewand der Geometrie auf. Euklid betrachtete geometrische Aufgaben, in denen es darum ging, die Länge einer bestimmten Strecke zu finden, die aus moderner Sicht die Wurzel einer quadratischen Gleichung darstellt.

Die Inder verfügten bereits im fünften Jahrhundert nach Christus über eine universelle Lösungsmethode, die alle drei Typen T_1, T_2 und T_3 einheitlich (sogar in einer symbolischen Schreibweise) zusammenfasste. Von ihnen sind uns jedoch keine Begründungen des Verfahrens überliefert.

Die Araber unterschieden wieder zwischen den drei Problemtypen, da sie die Null nicht kannten und auch keine negativen Zahlen verwendeten. Die drei Lösungsverfahren hat Al-Khwarizmi, wie oben gesehen, mit geometrischen Überlegungen begründet, die auf das Vervollständigen eines Quadrats (quadratische Ergänzung) hinauslaufen.

Im europäischen Abendland vereinheitlichte Michael Stifel (vi.) die drei quadratischen Probleme zu einer Normalform mit einer einzigen Lösungsmethode, indem er negative Koeffizienten zuließ.

Weitere Fortschritte bestanden in der Erkenntnis, dass jede quadratische Gleichung, die nicht „unmöglich“ ist, genau zwei Lösungen hat. Die Einführung der komplexen Zahlen schließlich führte zum Fundamentalsatz der Algebra, der allerdings einer allgemeineren Gleichungstheorie angehört. In unserem Zusammenhang ist die Vereinheitlichung der Symbolik interessanter, die seit Viète (1540-1603) ihre bis heute übliche Form angenommen hat.

Die folgenden Abschnitte behandeln die soeben angesprochenen Stationen etwas ausführlicher und enthalten Beispiele.

3.1.2.2.1.1 Ägypter

Die wohl älteste dokumentierte Lösung einer (rein-)quadratischen Gleichung findet sich in dem so genannten Berlin Papyrus, einem Fund aus dem alten Ägypten der Zeit des Mittleren Reiches (etwa 2010 bis 1793 v. Chr.) Das dort betrachtete Problem lautet (Gillings, 1982, S. 161):

Die Fläche eines Quadrates von 100 Einheiten ist gleich der Fläche zweier kleinerer Quadrate; die Seite des einen ist ein halbes und ein viertel mal die Seite des anderen. Wie groß sind die Seiten der beiden unbekannten Quadrate?

Dieses Problem würden wir heute in folgenden Gleichungen notieren (Smith, 1958, II, S. 432):

$$x^2 + y^2 = 100 \qquad\qquad y = \frac{3}{4}x$$

Die Lösungsidee lautet so: Nimm ein Quadrat, dessen Seite gleich 1 ist und ein weiteres, dessen Seite gleich $\frac{3}{4}$ ist. Quadriere $\frac{3}{4}$, das ergibt $\frac{9}{16}$. Addiere die beiden Quadrate, es ergibt sich $1+\frac{9}{16}=\frac{25}{16}$. Die Quadratwurzel daraus ist $\frac{5}{4}$. Die Wurzel aus 100 ist aber 10. Teile darum 10 durch $\frac{5}{4}$, das ergibt $8 = x$, und $\frac{3}{4}$ von 8 sind $6 = y$. Dann gilt $8^2 + 6^2 = 100$ und $6 = \frac{3}{4}\cdot 8$, so dass die Wurzeln der beiden Gleichungen 6 und 8 sind. Die aus unserer Sicht ebenfalls möglichen, negativen Lösungen -8 und -6 werden nicht erwähnt.

Die Lösungsmethode ist ein Beispiel für den so genannten *falschen Ansatz*, der lange Zeit beim Lösen von Problemen eingesetzt wurde, die wir heute als lineare Gleichungen formulieren: Man setzt die (falsche) Lösung $x=1$ an, woraus sich $y=\frac{3}{4}$ ergibt. Nach Einsetzen in x^2+y^2 erhält man damit $1^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{25}{16}$, ein offenbar von 100 verschiedenes Ergebnis. Nun wird der Ansatz korrigiert, indem man das Verhältnis der Wurzeln berechnet: $\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{\frac{25}{16}}}=\frac{10}{\frac{5}{4}}=8$. Das 8-fache des falschen Ansatzes ergibt dann die richtigen Lösungen: $x=8, y=6$.

Handelt es sich hier noch um den rein-quadratischen Problemtyp, so werden in den demotischen Papyri auch einige gemischt-quadratische Gleichungen gelöst (Tropfke, 1980, S. 407).

3.1.2.2.1.2 Babylonier

In einem altbabylonischen Text (BM 13901) findet sich eine allgemeine Lösungsvorschrift für eine quadratische Gleichung des Typs T_1: (Tropfke, 1980, S. 407)

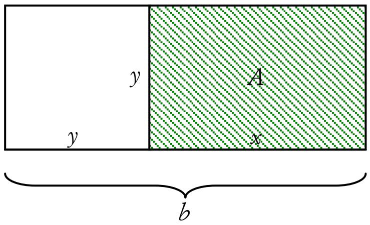
Text	**moderne Notation**
Die Fläche und die Seite des Quadrates habe ich addiert, und 0;45 ist es.	$x^2+x=0;45=\frac{3}{4}$ $x^2+bx=c$
1, den Koeffizienten nimmst du. Die Hälfte von 1 brichst du ab.	$\frac{b}{2}=0;30=\frac{1}{2}$
0;30 und 0;30 multiplizierst du.	$\left(\frac{b}{2}\right)^2=0;15=\frac{1}{4}$
0;15 zu 0;45 fügst du hinzu.	$\left(\frac{b}{2}\right)^2+c=1$
Und 1 hat 1 als Quadratwurzel. 0;30, das du [mit sich] multipliziert hast, von 1 subtrahierst du und 0;30 ist die Seite des Quadrats.	$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}-\frac{b}{2}=x$ $\sqrt{1}-0;30=0;30=\frac{1}{2}$

Auch in diesem Beispiel wird die aus unserer Sicht ebenfalls mögliche, negative Lösung $-\frac{3}{2}$ nicht erwähnt.

In den erhaltenen Dokumenten werden keinerlei Begründungen für die Gültigkeit der von den Ägyptern und Babyloniern benutzten Verfahren mitgeteilt. Beweise treffen wir erstmals in den Schriften der griechischen Mathematik an.

3.1.2.2.1.3 Griechen

Griechische Mathematik war Geometrie. Es ist aber möglich, einige der geometrischen Aufgaben, mit denen sich z.B. Euklid in den Elementen befasst, als Verfahren zur Lösung quadratischer Probleme zu deuten. Als Beispiel betrachten wir eine Aufgabe aus den *Elementen* (VI, 28):

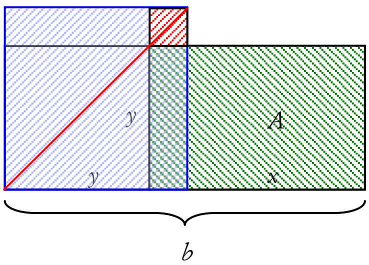


An eine gegebene Strecke [b] ist eine gegebene Fläche [A] so anzulegen, dass ein Quadrat fehlt.

In der Abbildung sehen wir, dass an die Strecke b die grün schraffierte Fläche A angelegt wurde, so dass das weiße Quadrat (y^2) übrig bleibt.

In Formeln kann man das mit den Beschriftungen der Zeichnung folgendermaßen ausdrücken: $x + y = b$ und $xy = A$. Zusammengefasst erhält man also $x(b - x) = A$ bzw. $x^2 + A = bx$, eine quadratische Gleichung vom Typ T_2.

Um x zu finden, überlegt Euklid wie folgt (vgl. Abbildung): Über der Hälfte von b zeichnet man das blaue Quadrat mit dem Flächeninhalt $\left(\frac{b}{2}\right)^2$. Von diesem Quadrat wird die Fläche A (geometrisch) subtrahiert. Die so erhaltene Fläche wird (wieder geometrisch) in ein Quadrat verwandelt. Diese Flächensubtraktion und -verwandlung müsste man in Nebenzeichnungen durchführen, – wir wollen diese Konstruktionen hier nicht vorführen, sondern uns auf die Theorie konzentrieren: Die Seite des so erhaltenen Quadrates ist $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - A} = \dfrac{x-y}{2}$, wie die folgende geometrische Betrachtungsweise zeigt.



Das rote Quadrat in der nebenstehenden Figur ist offensichtlich so groß wie die Differenz aus dem blauem Quadrat $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ und dem blauen Gnomon (Winkelhaken) um das rote Quadrat. Der Gnomon hat aber gerade den gleichen Inhalt wie die grüne Fläche $xy = A$. (Dies erkennt man an der Symmetrie des Gnomons zur rot eingezeichneten Diagonalen.) Das rote Quadrat besitzt also den Flächeninhalt $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - A$. Seine Kante hat, wie man sich leicht überlegt, die Länge $\frac{x-y}{2}$.

Trägt man diese Strecke an $\frac{x+y}{2} = \frac{b}{2}$ an, so erhält man schließlich $x = \dfrac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - A}$ als Lösung für das gesuchte x.

Euklid betrachtet auch an anderen Stellen seiner „Elemente" und auch in seinen „Data" Aufgaben, die quadratischen Problemen entsprechen. Wir überspringen diese und halten fest: Gewisse Aufgaben der griechischen Geometrie entsprechen der Lösung quadratischer Probleme. Die Lösungsverfahren werden erstmals nachweislich mit (geometrischen) Beweisen begründet.

3.1.2.2.1.4 Inder

Unter den Schriften der Inder ragt das Werk Brahmaguptas (598-670 n. Chr.) heraus. Seine Methode war schon sehr zukunftsweisend: Er ließ in den von ihm betrachteten Ausdrücken negative Zahlen zu und benutzte Abkürzungen. Durch den Gebrauch der negativen Zahlen und der Null konnte er auf die oben beschriebene Unterscheidung in drei Problemtypen verzichten. Eine Aufgabe, die unserer Gleichung $x^2 - 10x = -9$ entspricht, wurde in zwei Zeilen notiert,

yâ v 1 *yâ* $\dot{10}$ *ru* 0
yâ v 0 *yâ* 0 *ru* $\dot{9}$

wobei der Zeilenwechsel unserem Gleichheitszeichen entspricht. Ein Punkt über einer Zahl hat die Bedeutung unseres Minuszeichens. Die Abkürzung *yâ* steht für ‚yâvat-tavat' („soviel-wieviel") und bezeichnet die Unbekannte. Das nachgestellte *v* (‚varga') bedeutet Quadrat und *rû* kürzt ‚rûpa' („das Äußere") ab und steht für die absolute Zahl.

Wenn Symbole für weitere Unbekannte benötigt wurden, so bediente man sich der Abkürzungen für Farbzeichnungen, z.B. kâ für ‚kâlaka' („schwarz") etc. Für die Koeffizienten haben die Inder keine festgelegten Symbole verwendet. Deswegen bemerkt Krämer:

> Dieses Fehlen eines Zeichens für die bekannten Koeffizienten sowie die Symbolisierungen der Unbekannten und der Potenzen zeigen, dass wir es – bei allem Fortschritt in der Anwendung einer Kunstsprache – keineswegs mit einem formalen Symbolismus zu tun haben. Die Symbole entstanden als Abkürzungen von – in ihrer Bedeutung allerdings mathematisch festgelegten – Termini der Umgangssprache. Nicht anders als bei Diophant blieben sie Abbreviaturen dessen, was man auch ohne Symbole sagen kann.
>
> (Krämer, 1988, S. 50)

Zur Lösung schreibt Brahmagupta:

	$x^2 - 10x = -9$	$ax^2 + bx = c$
Die absolute Zahl multipliziert mit [dem Koeffizienten des] Quadrats	$(-9) \cdot 1$	$c \cdot a$
und addiert zum Quadrat der Hälfte des [Koeffizienten des] mittleren Ausdrucks, nämlich 25, ergibt 16;	$(-9) \cdot 1 + (-5)^2 = 16$	$ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2$
davon ist die Wurzel 4,	$\sqrt{(-9) \cdot 1 + (-5)^2} = 4$	$\sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$
weniger der Hälfte [des Koeffizienten] der Unbekannten ist 9;	$\sqrt{(-9) \cdot 1 + (-5)^2} - (-5) = 9$	$\sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \left(\frac{b}{2}\right)^2$

und geteilt durch [den Koeffizienten des] Quadrats ergibt den Wert der Unbekannten, 9.	$x = \frac{\sqrt{(-9)\cdot 1 + (-5)^2} - (-5)}{1} = 9$	$x = \frac{\sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \left(\frac{b}{2}\right)^2}{a}$

Es ist belegt, dass die Inder die Zweiwertigkeit der Wurzel anerkannt haben. Brahmagupta schreibt (Tropfke, 1980, S. 417):

> Das Quadrat von Negativem und Positivem ist positiv, das von 0 ist 0; die Wurzel richtet sich nach dem, was wir ins Quadrat gesetzt haben.

Tropfke kommentiert diese Stelle so:

> Er scheint sich das so vorzustellen: aus einer positiven Zahl kann sich als Wurzel eine positive oder eine negative Zahl ergeben; das ist aber durch die Entstehung des Quadrats vorherbestimmt.
> (Tropfke, 1980, S. 417)

Bhaskaracharya (1114-1185) spricht die Zweiwertigkeit klar aus mit den Worten:

> Das Quadrat einer positiven oder einer negativen Größe ist positiv; und die Wurzel einer positiven Größe ist zweifach, positiv und negativ. Es gibt keine Quadratwurzel einer negativen Größe; denn sie ist kein Quadrat. (ebd.)

Eine Beispielaufgabe bei Bhaskaracharya, bei der eine Doppelwurzel auftritt, lautet:

> Der achte Teil einer Herde Affen, quadriert, sprang in einem Wald herum, die zwölf übrigen waren auf einem Hügel zu sehen. Wie viele waren es im Ganzen? (ebd.)

Als Gleichung finden *wir*: $\left(\frac{1}{8}x\right)^2 + 12 = x$. Daraus kann man die Form $x^2 - 64x = -768$ herstellen. Nach dem obigen Lösungsschema ergeben sich dann $x = 50$ und $x = 16$ als Lösung.

3.1.2.2.1.5 Araber

Al-Khwarizmis Verfahren wurden bereits hinlänglich besprochen. Es weist Ähnlichkeiten mit den Methoden der Inder und der Babylonier auf, unterscheidet sich aber von jenen in einem wichtigen Punkt:

> What made al-Khwarizmi's work pivotal was his introduction of (geometric) proofs for the al-jabr rules. The aim was no doubt to present the discipline in agreement with the already familiar Greek norms; the proofs themselves, however, were cut-and-paste proofs borrowed from the surveyors' tradition, only slightly adapted to Greek style. (Høyrup, 2002, S. 5)

Al-Khwarizmis *al-jabr* diente vielen seiner Zeitgenossen und Nachfolgern als Vorlage (Rashed, 1994, S. 8). Abu Kamil (850-930) entwickelte die Methodik weiter, indem er in den Gleichungen irrationale

„Koeffizienten“ zuließ und auch den Trend einer zunehmenden Ablösung der Algebra von der Geometrie hin zur Arithmetik einleitete. Als Beispiel betrachten wir eine Aufgabe aus Abu Kamils *Kitab al-gabr wa-l-muqabala*, zit. nach (Alten et al., 2003, S. 171):

> Wenn dir gesagt wird, in einem gleichseitigen und gleichwinkligen Dreieck, die Summe seines Flächeninhaltes und seiner Höhe ist 10, wieviel ist seine Höhe?

Abu Kamil löst diese Aufgabe, indem er die Höhe als Unbekannte (in moderner Schreibweise: x) ansetzt, für den Flächeninhalt entsprechend $\frac{x^2}{\sqrt{3}}$ schreibt und somit als Gleichung $\frac{x^2}{\sqrt{3}}+x=10$ oder $x^2+\sqrt{3}x=\sqrt{300}$ erhält.

Die Arithmetisierung der Algebra wurde später durch den herausragenden Mathematiker Al-Karaji (ca. 953-ca. 1029) auf der Grundlage der Werke von Al-Khwarizmi und Abu Kamil fortgeführt, vgl. (Alten et al., 2003, S. 173 f.).

3.1.2.2.1.6 Europäische Renaissance

In Europa wurden die mathematischen Schriften der Araber seit Beginn der Renaissance eifrig studiert. Unter den Algebraikern der Anfangszeit verdient der lutherische Theologe Michael Stifel (ca. 1486/87-1567) besondere Beachtung. Er fasste die bis dahin unverbunden nebeneinander stehenden drei Auflösungsregeln in einer einzigen Form zusammen. Tropfke schreibt:

> Was ein Jahrtausend vorher den Indern gelungen, dann aber der Vergessenheit anheimgefallen war, […] wurde durch ihn endlich der Mathematik wiedergewonnen (1544). (Tropfke III, 50)

Möglich war dies geworden, indem Stifel bei der Aufstellung der Gleichung nicht nur die Null sondern auch negative Zahlen als „Koeffizienten“ zuließ, die er allerdings noch „numeri absurdi“ und „numera ficti infra nihil“ nannte (Jahnke H. N., 2003). Stifel brachte seine Gleichung auf die „Normalform“ $x^2=\pm px\pm q$ (hier in moderner Schreibweise wiedergegeben) und ging dann nach folgendem Verfahren vor (zit. nach (Mäder, 1992, S. 20 f.)):

> Also setze ich für die selbige[n] Regeln eine einzige Regel, mit der ich alles ausrichte.
>
> 1. Beginne mit der Anzahl der Wurzeln, halbiere sie ... [A numero radicum incipe]
> 2. Multipliziere diese Hälfte mit sich.
> 3. Addiere oder subtrahiere, wie es das Vorzeichen ... verlangt
> 4. Aus der Summe oder dem Rest ist die Quadratwurzel zu finden [Invenienda est radix quadrata]
> 5. Addiere oder subtrahiere, wie es das Vorzeichen verlangt.

Als Merkwort für diese Vorgehensweise nannte Stifel AMASIAS, welches er aus den Anfangsbuchstaben der einzelnen Schritte gebildet hatte. Abschließend meinte er:

> Wem diese meine Reduktion nicht gefällt, der mag so gut sein und den [alten] Algorithmus durchführen und an Stelle der einen Regel so viele aufstellen wie die Sache erfordert. Aber niemand wird diese Mühe

anerkennen.

3.1.2.2.1.7 Das Problem der negativen Zahlen

Die Vermutung, dass sich jemand am Verfahren von Stifel stören könnte, war durchaus nicht aus der Luft gegriffen. Tatsächlich emfpanden viele damalige Mathematiker Unbehagen beim Gebrauch negativer Zahlen – für eine Übersicht vgl. (Hefendehl-Hebeker, 1989). Exemplarisch betrachten wir die Zweifel, die der französische Theologe und Mathematiker Antoine Arnauld (1612-1694) an der Multiplikationsregel äußerte, wonach das Produkt einer negativen Zahl mit einer negativen Zahl eine positive Zahl ergibt. In seinen *Nouveaux Elémens de géométrie* (1667) notierte er in Artikel 61,

> qu'il 'paroît bien étrange que moins multiplié par moins donne plus ; et qu'en effet il ne faut pas s'imaginer que cela puisse arriver autrement que par accident : parce que de soi-même moins multiplié par moins ne peut donner que moins.'
>
> zit. nach (Schrecker, 1935, S. 85)

In einem Briefwechsel mit dem Theologen und Mathematiker Jean Prestet (1648-1690) erläuterte Arnauld seine Bedenken etwas genauer:

> 'Je ne sçai de plus comment ajuster cela au fondement de la multiplication, qui est que l'unité doit être à l'une des grandeurs que l'on multiplie, comme l'autre est au produit. Ce qui est également vrai dans les entiers et dans les fractions. Car 1 est à 3, comme 4 est à 12. Et 1 est à 1/3, comme 1/4 est à 1/12. Mais je ne puis ajuster cela aux multiplications de deux moins. Car dira-t-on que +1 est à -4 comme -5 est à +20 ? Je ne le vois pas. Car +1 est plus que -4. Et au contraire -5 est moins que +20. Au lieu que dans toutes les autres proportions, si le premier terme est plus grand que le second, le troisième doit être plus grand que le quatrième.'
>
> zit. nach (Schrecker, 1935, S. 85)

Wie man sieht, bestand Arnaulds Hauptproblem offenbar darin, den Zahlbegriff von seiner Umklammerung durch den Größenbegriff zu befreien. Dieser Punkt wurde von Leibniz (1646-1716), der mit Arnauld einen regen Briefkontakt pflegte, in einer höchst interessanten Überlegung aus dem Jahre 1712 (nach Arnaulds Tod also) beleuchtet. Ich gebe die Passage, die unter der barocken Überschrift *Observationes quod rationes sive proportiones non habeant locum circum quantitates nihilo minores, & de vero sensu Methodi infinitesimalis* ursprünglich in den *Acta Eruditorium Lipsiae* erschienen war, zunächst im Original wieder und schließe eine eigene Übersetzung an:

> Cum olim Parisiis Vir summus Antonius Arnaldus sua nova Geometriae Elementa mecum communicaret, atque in iisdem admirari se testatus fuisset, quomodo posset esse 1 ad –1, ut –1 ad 1, quae res probari videtur ex eo, quod productum est idem sub extremis quod sub mediis, cum utroque prodeat +1; jam tum dixi mihi videri, versa illas rationes non esse, in quibus quantitas nihilo minor est antecedens, vel consequens, etsi in calculo haec, ut alia imaginaria, tuto et utiliter adhibeatur. Et sane identitatis rationum verarum fundamentum est rerum similitudo, quae facit exempli causa, ut segmentis similibus diversorum circulorum assumtis sit ubique eadem ratio chordae ad radium, seu ut chorda minoris se habeat ad radium minoris, vel ut chorda majoris ad radium majoris. Sed vero nulla plane apparet similitudo in supradicta Analogia. Si enim –1 est minus nihilo, utique 1 ad –1 erit ratio majoris ad minus; sed vero contra ratio –1 ad 1 est ratio minoris ad majus; quomodo ergo utrobique eadem ratio erit? Sed rationes istas esse imaginarias, etiam alio certissimo argumento comprobabo, scilicet a Logarithmis. Nempe ratio, cui

> nullus datur respondens Logarithmus, ratio vera non est. Porro posito unitatis Logarithmum esse 0, rationis –1 ad 1 idem est Logarithmus, qui ipsius –1; at ipsius –1 non datur Logarithmus. Non enim est positivus, nam talis omnis est Logarithmus numeri positivi unitate majoris. Sed tamen etiam non est negativus, quia talis omnis est Logarithmus numeri positivi unitate minoris. Ergo Logarithmus ipsius –1 cum nec positivus sit nec negativus, superest ut sit non verus, sed imaginarius. Itaque et ratio, cui respondet, non vera, sed imaginaria erit. Idem etiam sic probo: Si daretur verus Logarithmus ipsius –1, seu rationis -1 ad 1, ejus logarithmi dimidium foret Logarithmus ipsius $\sqrt{-1}$, sed $\sqrt{-1}$ est quantitas imaginaria. Itaque daretur Logarithmus verus imaginariae quantitatis, quod est absurdum. Et proinde nonnihil humani passus est insignis in paucis Geometr[i]a Johannes Wallisius, cum dixisset rationem 1 ad –1 esse plus quam infinitam; et recte hoc (etsi aliis considerationibus) celeberimus Varignonius rejicit. Interim nolim cum ipso negare, –1 esse quantitatem nihilo minorem, modo id sano sensu intelligatur. Tales enuntiationes sunt toleranter verae, ut ego cum summo Viro Joachimo Jungio loqui soleo; Galli appellarent passables. Rigorem quidem non sustinent, habent tamen usum magnum in calculando, et ad artem inveniendi, universalesque conceptus valent.
>
> (Leibniz G. W., 1712, S. 167 f.)

Hier nun die Übersetzung:

> Als einst Paris' höchst bedeutender Mann Antoine Arnauld [seine Elementen der Geometrie] mit mir besprach, und in selbigen sich zu verwundern bezeugt hatte, wie es sein könne, [dass] 1 zu –1 wie –1 zu 1; welches dadurch bewiesen zu werden scheint, dass das Produkt aus den Äußeren [1·1] gleich dem aus den Mittleren [(–1)·(–1)] ist, da jedes von beiden +1 hervorbringt; da habe ich mir schon damals gesagt, dass es so aussehe, als ob jene umgekehrten Verhältnisse nicht existierten, in welchen eine vorausgehende oder nachfolgende Größe [der Zähler oder der Nenner] kleiner als Nichts ist, wenngleich diese [Verhältnisse] in der Rechnung, wie die anderen imaginären, b [sind] und nutzbringend angewendet werden. Und die Grundlage der Gleichheit dieser wahren Verhältnisse ist freilich die Ähnlichkeit der Dinge, die zum Beispiel bewirkt, dass (in) ähnlichen, [angenommenen] Abschnitten (Segmenten) unterschiedlicher Kreise überall dasselbe Verhältnis der Sehnen zum Radius sei, oder dass die kleinere Sehne sich zum kleineren Radius verhalte wie die größere Sehne zum größeren Radius. Aber freilich erscheint keine Ähnlichkeit in der oben erwähnten Analogie. Wenn nämlich –1 kleiner als Nichts ist, so wird durchaus 1 zu –1 das Verhältnis des Größeren zum Kleineren sein; wenn aber andererseits –1 zu 1 das Verhältnis des Kleineren zum Größeren ist, wie also wird auf beiden Seiten dasselbe Verhältnis sein? Aber dass diese Verhältnisse scheinbare [imaginarias] sind, werde ich auch mit einem anderem, unzweifelhaftem Argument beweisen, nämlich mit den Logarithmen. Denn natürlich ist ein Verhältnis, für das es keinen Logarithmus gibt, kein wahres Verhältnis. Sofern gegeben sei, dass der Logarithmus der Einheit 0 ist, so ist der Logarithmus des Verhältnisses (von) –1 zu 1 derselbe wie der von –1 selbst; und den Logarithmus von –1 gibt es nicht. Er ist nämlich nicht positiv, denn solcherart ist jeder Logarithmus der positiven Zahlen, die größer als die Einheit sind (>1). Er ist aber auch nicht negative, denn solcherart ist jeder Logarithmus der positiven Zahlen, die kleiner als die Einheit sind (<1). Dem Logarithmus von –1 selbst, da er weder positive noch negativ ist, bleibt also nur über, dass er nicht reell ist sondern imaginär. Und so wird auch das Verhältnis, dem er entspricht, nicht reell sondern imaginär sein. Dasselbe beweise ich auch so: Wenn es den wahren Logarithmus von –1 selbst oder des Verhältnisses –1 zu 1 gäbe, so wird die Hälfte dieses Logarithmus der Logarithmus von $\sqrt{-1}$ selbst sein, aber $\sqrt{-1}$ ist eine imaginäre Größe.

(Leibniz meint hier folgendes: log(–1) hat $\frac{1}{2}\log(-1)$ zur Hälfte. Aber letzterer Ausdruck ist nach den Logarithmengesetzen gleich $\log(-1)^{1/2} = \log(\sqrt{-1})$. Wenn also log(–1) reell wäre, so müsste auch $\log(\sqrt{-1})$ reell sein; denn $\log(\sqrt{-1})$ ist die Hälfte von log(–1).)

> Und so gäbe es einen reellen Logarithmus einer imaginären Größe, was absurd ist. Und entsprechend ist die Geometrie des (ansonsten) in Einzelheiten ausgezeichneten John Wallis einem menschlichen Irrtum erlegen, wenn sie sagt, dass das Verhältnis von 1 zu –1 größer als Unendlich sei; und zu Recht weist dies (wenn auch aus anderen Gründen) der berühmte Varignon zurück. Unterdessen will ich nicht mit ihm bestreiten, dass –1 eine Größe kleiner als Nichts ist, wenn nur dieses auf richtige [gesunde] Weise verstanden würde. Solche Aussagen sind *toleranter verae* [vgl. (Cassirer, 1999, S. 51)], wie ich mit dem hochmögenden Joachim Jungius [1587–1657] zu sagen pflege; Die Gallier hätten es 'passables' genannt. Die Strenge jedenfalls halten sie nicht aus, doch haben sie großen Nutzen beim Rechnen, und in der Kunst des Entdeckens, und sind eines allgemeinen Erfassens wert.

Leibniz erkennt also ausdrücklich den heuristischen und praktischen Nutzen der negativen Zahlen an und plädiert aus diesen Gründen für einen gewissen Pragmatismus im Umgang mit ihnen. Hierin äußert sich auch der Zeitgeist, der im Zuge der Entwicklung der Infinitesimalrechnung (durch Leibniz und Newton) aufgekommen war, nach welchem Abstriche von der Euklidischen Strenge zugunsten des Fortschritts hinzunehmen waren.

Im Zusammenhang mit den quadratischen Gleichungen brachte Stifels Toleranz gegenüber den „numeri absurdi" sicherlich eine zuvor nicht erreichte Vereinheitlichung und Vereinfachung. Über die Möglichkeiten, Merkmale und Grenzen des von ihm angewandten „schöpferischen" Verfahrens war indes zu seiner Zeit noch gar nichts bekannt. Das Permanenzprinzip wurde erst von Hankel ausgesprochen (Hefendehl-Hebeker, 1989). Vertiefende Lektüre hierzu bietet (Cassirer, 1999).

3.1.2.2.1.8 Fortschreitende Formalisierung und Standardisierung

Mit dem AMASIAS-Verfahren von Stifel stand nunmehr eine universelle Lösungsmethode zur Verfügung, die bei allen quadratischen Gleichungen funktionierte. Es hat allerdings noch lange gedauert, bis daraus die uns heute geläufige Lösungsformel wurde. Dies hing damit zusammen, dass früher sehr unterschiedliche und uneinheitliche, teilweise auch umständliche und schwerfällige Schreib- und Darstellungsweisen existierten. Einen Eindruck davon gibt die Abbildung 39.

Bis zur Vereinheitlichung der Formelschrift war es ein weiter Weg. Das moderne Gleichheitszeichen wurde z. B. erst 1557 von dem englischen Mathematiker Recorde eingeführt. Zur Begründung schrieb er:

> To avoid the tedious repetition of these words – is equal to – I will set […] a pair of parallels or twin lines of one length, thus = , because no two things can be more equal.
>
> (Um die lästige Wiederholung dieser Wörter – ist gleich – zu vermeiden, werde ich … ein Paar von Parallelen oder Zwillingslinien einer Länge setzen, so: = ; denn keine zwei Dinge sind einander gleicher.)
>
> zit. nach (Cajori F., 1993, S. 165)

In unserer Zeit hat sich eine einheitliche Formelschrift und Bezeichnungsweise weltweit verbreitet, wie z. B. die Abbildung 40 aus einem hebräischen Mathematikbuch veranschaulicht.

Jahr	Mathematiker	verwendete Schreibweisen	moderne Form
1494	Pacioli	Trouame .1.n° che giōto al suo q̄drat° facia .12.	$x + x^2 = 12$
1514	Vander Hoecke	4 Se. – 51 Pri. – 30 N. dit is ghelijc $45\frac{3}{5}$.	$4x^2 - 51x - 30 = 45\frac{3}{5}$
1521	Ghaligai	1 □e 32 c° – 320 numeri	$x^2 + 32x = 320$
1545	Cardano	cub⁹ p: 6 reb⁹ aeq̄lis 20	$x^3 + 6x = 20$
1556	Tartaglia	Trouame uno numero che azontoli la sua radice cuba uenghi ste, cioe .6.	$x + \sqrt[3]{x} = 6$
1559	Buteo	1 ◇ P6ϱP9 ⊏ 1 ◇ P3ϱP24	$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 3x + 24$
1577	Gosselin	12LM1QP48 aequalia 144M24LP2Q	$12x - x^2 + 48 = 144 - 24x + 2x^2$
1585	Stevin	$3^{(2)} + 4$ egales à $2^{(1)} + 4$	$3x^2 + 4 = 2x + 4$
1586	Ramus & Schoner	1q + 8l aequatus sit 65	$x^2 + 8x = 65$
1629	Girard	1 (4) + 35 (2) + 24 = 10 (3) + 50 (1)	$x^4 + 35x^2 + 24 = 10x^3 + 50x$
1631	Oughtred	$\frac{1}{2}$ Z ± $\sqrt{}_q$:$\frac{1}{4}$Z$_q$ - AE = A	$\frac{1}{2}Z \pm \sqrt{\frac{1}{4}Z^2 - AE} = A$
1631	Harriot	aaa – 3 · bba === + 2 · ccc	$x^3 - 3b^2x = 2c^3$
1637	Descartes	yy ∞ cy - $\frac{\mathrm{cx}}{\mathrm{b}}$y + ay - ac	$y^2 = cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac$
1693	Wallis	$x^4 + bx^3 + cxx + dx + e = 0$	$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$

Abbildung 39: Mathematische Schreibweisen im 16. und 17. Jahrhundert. Auszug aus (Mäder, 1992, S. 22).

ד. מהו תחום העלייה ותחום הירידה של

$$y = x^3 - x^2 - 5x + 4$$

התרה: הנגזרת: $y' = 3x^2 - 2x - 5$

הפונקציה בעלייה כאשר:

$$3x^2 - 2x - 5 > 0$$

התיאור הגרפי של $z = 3x^2 - 2x - 5$ הוא פראבולה ישרה, החותכת את ציר ה־x
בנקודות $x = -1$, $x = \frac{5}{3}$ ועל־כן $3x^2 - 2x - 5 > 0$ בשביל $x > \frac{5}{3}$ או $x < -1$
הפונקציה $y = x^3 - x^2 - 5x + 4$ בעלייה לכל ה־x־ים, המקיימים

$x > \frac{5}{3}$ או $x < -1$

ובירידה כאשר $3x^2 - 2x - 5 < 0$

וזה קורה לכל x המקיימים: $-1 < x < \frac{5}{3}$.

ה. מהו תחום העלייה ותחום הירידה של:

$$y = \sin x$$

$$y' = \cos x$$

Abbildung 40: Auszug aus einem hebräischen Mathematikbuch, aus (Mäder, 1992, S. 23).

3.1.2.3 Al-Khwarizmis al-jabr als Zeugnis einer präformalen Entwicklungsstufe (Bewandtniszusammenhang h))

Ein auffälliges Merkmal der *al-jabr* Al-Khwarizmis ist das vollständige Fehlen symbolischer oder wenigstens abkürzender Ausdrücke. In den meisten erhaltenen Manuskripten werden sogar die Zahlen ausgeschrieben. Al-Khwarizmis Ausführungen bekommen dadurch einen sehr weitschweifigen und teilweise umständlichen Charakter.

Die Mathematik der Gegenwart unterscheidet sich hiervon vor allem durch den Gebrauch einer in einem Kalkül verkörperten, formalen Sprache. Die Berliner Philosophin Sybille Krämer bezeichnet es als deren Spezifik,

> das Operieren mit Gegenständen, Begriffen, Gedanken zu ersetzen durch das Operieren mit *Zeichen*, welche an die Stelle dieser Gegenstände, Begriffe und Gedanken treten. Die Pointe eines solchen Verfahrens ist es, dass die Regeln, nach denen sich die Operationen in einer formalen Sprache vollziehen, Bezug nehmen auf die Zeichen, nicht aber auf das, wofür diese stehen. (Krämer, 1988, S. 57)

Mathematik ist – dieser Auffassung zufolge – eine Disziplin, die zu einer solchen „symbolischen Differenz" fähig geworden ist, zur Unterscheidung also „zwischen einem Symbol und dem, was das Symbol darstellt" (Krämer, 1991, S. 8). Die Bezeichnung „Symbol" (hier auch „Zeichen") meint dabei ein sichtbares Gebilde, „welches Träger einer nicht unmittelbar sichtbaren, nur noch verstehbaren Bedeutung ist" (a. a. O.). Eine symbolische Differenz beobachten und benutzen wir schon beim elementaren Rechnen, etwa bei der schriftlichen Multiplikation:

> Es genügt die Kenntnis des kleinen Einmaleins und der Multiplikationsregel, um diesen Rechenprozess mechanisch, und das heißt ohne daran zu denken, was man tut, durchzuführen. Die Regel der Multiplikation im indischen Ziffernsystem ist keine Regel, um Zahlen miteinander zu multiplizieren, sondern eine Regel, um Zeichen auf bestimmte Weise miteinander zu verknüpfen. (Krämer, 1988, S. 57)
>
> Rechenregeln werden zu Zeichenmanipulationsregeln. […] Wenn uns das kleine Einsundeins, Einsminuseins, Einsmaleins, Einsdurcheins als schriftliche Tabellen vorliegen, können wir rechnen, indem wir graphische Zeichenmuster formen und umformen, ohne dabei überhaupt ein Bewusstsein haben zu müssen, dass wir Arithmetik treiben, also mit Zahlen ‚hantieren'. (Krämer, 2003, S. 19)

Krämer kontrastiert diese moderne Technik sehr ansprechend mit den Möglichkeiten römischen Antike:

> Versuchen Sie, DCCCCLXXXXIX mal DCCCLXXXVIII auszurechnen. Sie werden merken: Im römischen Ziffernsystem ist diese Aufgabe mit Papier und Bleistift alleine nicht zu lösen. Mit römischen Ziffern können zwar Zahlen dargestellt, es kann aber nicht mit ihnen auch gerechnet werden. Auszugleichen ist solch operatives Defizit nur durch die Benutzung weiterer gegenständlicher Hilfsmittel des Rechnens. Ein solches Hilfsmittel ist der römische Abakus, auf dem Calculi in Spalten ausgelegt werden, so dass Rechenoperationen durch Hinzufügen, Wegnehmen und Verschieben der Calculi auf dem Rechenbrett zu bewerkstelligen sind. [...] Für die römische Zahlensprache ist es also charakteristisch, dass Zahlendarstellung und Zahlenrechnen aufgespalten sind und sich jeweils andersgearteter Medien bedienen.
> (Krämer, 1989, S. 2)

Ein bedeutender Vorzug des indischen gegenüber dem römischen Zahlzeichensystem kann demnach darin gesehen werden,

> dass es in ein und demselben Medium zwei Funktionen zu realisieren erlaubt: In ihm können Zahlen sowohl dargestellt, wie auch mit Zahlen gerechnet werden. (Krämer, 1993, S. 79)

In einer vergleichbaren Situation wie die römische Zahlsprache befindet sich nach dieser Lesart die Algebra Al-Khwarizmis. In Ermangelung einer integrierenden *formalen* Ausdrucksweise ist sie in ihrer Darstellung aufgespalten in eine *rhetorische* Regel- und eine *geometrische* Beweis- oder Begründungssprache. Diese Dichotomie blieb bis zur Renaissance ein wesentliches Merkmal der Algebra. Erst mit Vieta (1540-1603) und seiner logistica speciosa – dem Buchstabenrechnen – begann nach und nach die symbolische Kalkülisierung dieses Zweiges der Mathematik nach dem Vorbild der kalkülisierten Arithmetik, wie sie sich im indischen Ziffernsystem schon erfolgreich manifestiert hatte. Algebra verwandelte sich infolge dieser Neuerung zunehmend in eine *Technik*, die nur noch im Medium von Zeichen (Symbolen) ausgeübt wird. Das Operieren mit Gegenständen wurde, wie Krämer sagt, ersetzt durch ein Operieren mit Zeichen, welche an die Stelle dieser Gegenstände traten. Dies ist ein Charakteristikum formaler Sprachen. Die Regeln, nach denen sich diese Operationen vollziehen, nehmen nur noch Bezug auf die Zeichen, aber nicht mehr auf das, wofür die Zeichen stehen. Krämer verweist auf die hierin liegende schöpferische Potenz:

> In bezug auf die ‚Natur' der Gegenstände, die durch die Zeichen bezeichnet werden, heißt dies, die Relation zwischen einem Gegenstand und dem, wodurch dieser Gegenstand bezeichnet wird, kehrt sich um. Nicht mehr sind einzelne wohl bestimmte Gegenstände vorgegeben – z.B. die natürlichen Zahlen, für welche dann geeignete Zeichensysteme gesucht werden, die es erlauben, das Operieren mit den Gegenständen ‚der Einfachheit halber' auf das Operieren mit den Zeichen für die Gegenstände zurückzuführen. Vielmehr gibt es Zeichen und Regeln ihrer zulässigen Verknüpfung, für die wir dann ‚im Nachhinein' mögliche Interpretationen suchen (…) Im ersten Falle verdankt das Zeichen seine „Existenz" dem Objekt, an dessen Stelle es tritt. Im zweiten Fall verdankt das Objekt seine ‚Existenz' einem Zeichen, für das es eingesetzt werden kann. Man kann das auch die symbolische Konstitution mathematischer Gegenstände nennen. Im Zuge dieser symbolischen Konstitution wird $\sqrt{-2}$ zu einem Zeichenausdruck, der für einen mathematischen Gegenstand steht. Für einen Gegenstand, der uns nicht anders denn in Gestalt seiner symbolischen Repräsentation gegeben ist. (Krämer, 1988, S. 60)

Krämer nennt diese Eigenart symbolischer Konstituierungen den „operativen Symbolismus", den sie vom „ontologischen Symbolismus" abgrenzt. Im *ontologischen* Symbolismus repräsentieren Symbole Dinge, die vorgängig existieren, im Sinne eines Abbildverhältnisses. Im *operativen* Symbolismus hingegen werden Dinge – wenn sie überhaupt zur Sprache gebracht werden – als nachrangig von Symbolen geschaffen betrachtet. Im Rahmen dieser Arbeit möchte ich lieber von einem *abbildenden* oder *sekundären Symbolismus* bzw. von einem *generierenden* oder *primären Symbolismus* sprechen. Die in dieser Terminologie kodifizierte Sichtweise lässt sich natürlich schon auf die (für uns selbstverständlich gewordenen) negativen Zahlen anwenden:

> Kein Weg führt zu der Vorstellung, dass von einer kleineren Anzahl eine größere abgezogen werden könne und sich dennoch eine Zahl ergebe; kein Weg auch zu der Vorstellung, dass eine Zahl mit sich selbst multipliziert –1 ergeben könne. Und doch kennen wir negative und imaginäre Zahlen und lernen bereits in der Schule, mit ihnen umzugehen. Durch den Einsatz typografischer Schriften können mathematische Gegenstände gebildet werden, die wir uns nicht mehr anders vergegenwärtigen können, denn in Gestalt ihrer symbolischen Repräsentanten. (Krämer, 1989, S. 8)

Al-Khwarizmi stehen solche Mittel nicht zur Verfügung. Sein Denken ist darum noch ganz dem Gegenständlichen verpflichtet, – negative Zahlen hat er nicht benutzt. Eben darum war er ja genötigt, seine Regeln zum Umgang mit quadratischen Gleichungen in sechs Teilregeln zu formulieren. Die Beweise, die er für sie angegeben hat, sind demnach auch mehr als bloße „Veranschaulichungen“, wie gelegentlich zu hören ist. Die geometrischen Figuren sind vielmehr *die Sache selbst*. Sie definieren die für Al-Khwarizmi gültigen ontologischen Grenzen, eben weil sie keine Symbole oder Zeichen im modernen Sinne sind und nicht über das verfügen, was Krämer die „symbolische Differenz“ nennt: Al-Khwarizmis Figuren sind, ganz im Gegenteil, Träger einer klar sichtbaren Bedeutung. Sie repräsentieren daher in ihrem Einssein von Symbol und Symbolisierten eher noch eine Vorstufe des ontologischen wie auch des operativen Symbolismus, wie wir sie etwa auch in der Psephoi-Arithmetik der Pythagoräer antreffen (Becker O., 1957, S. 40). Die Bezeichnungen *Quadrat*zahl, *Dreieck*szahl etc., aber auch *quadratische Ergänzung* sind heute noch vorhandene, sprachliche Relikte einer solchen Denk- und Sichtweise.

III.

Empirischer Teil

4 Das Design der empirischen Studie

4.1 Das Arrangement der Untersuchung als Vergleichsstudie

Die zentrale Forschungsfrage der vorliegenden Arbeit lautet: Welche Wirkungen und Ergebnisse zeitigt ein schulischer Mathematikunterricht, der nach den Maßgaben der in Kapitel 2 beschriebenen historisch-hermeneutischen Orientierung auf der in Kapitel 3 erschlossenen Materialgrundlage durchgeführt wird? Diese Frage soll nun durch die im Folgenden beschriebene, breit angelegte Vergleichsstudie beantwortet werden. Die Studie umfasst ein Unterrichtsprojekt zum Thema „Quadratische Gleichungen“, das gemäß der nachstehenden Abbildung konzipiert, durchgeführt und ausgewertet wurde.

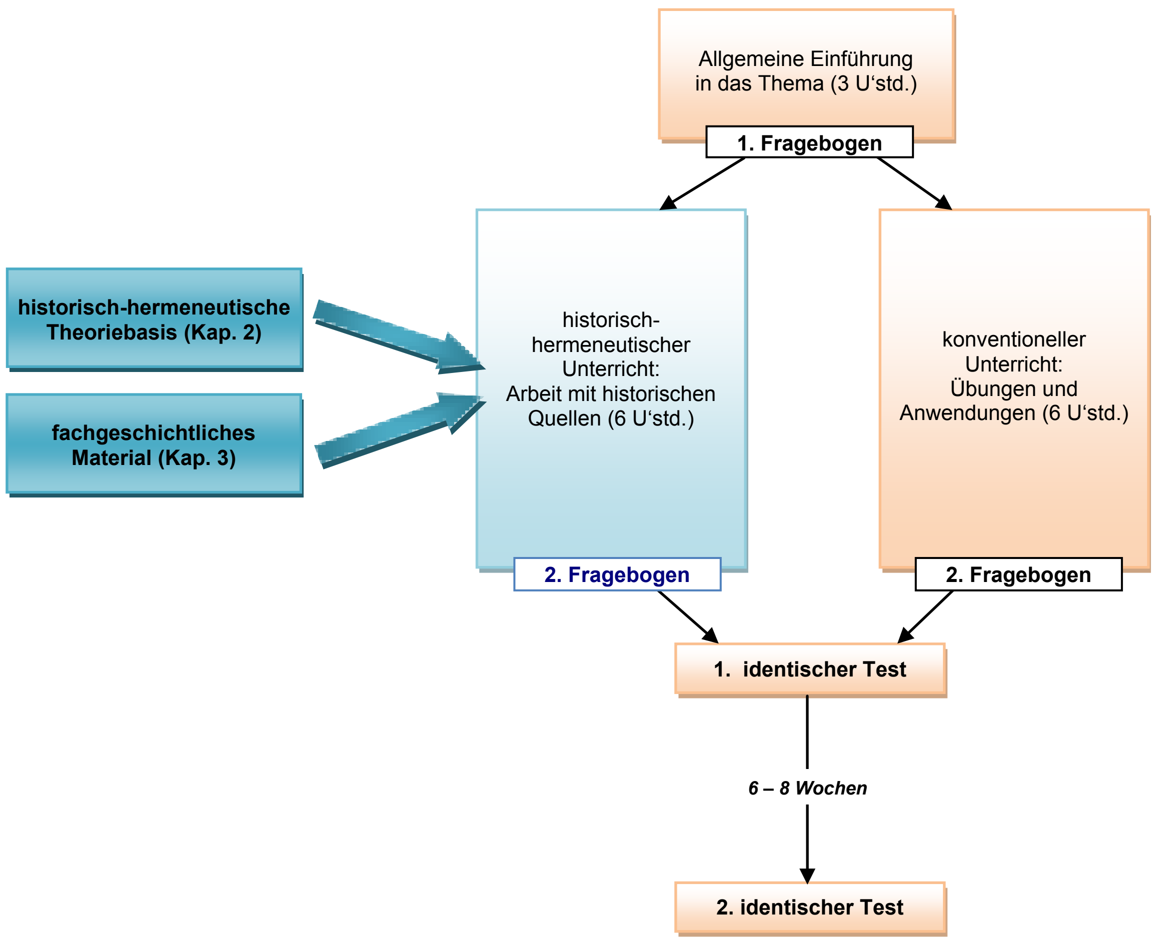


Abbildung 41: Überblick über den Ablauf des Unterrichtsprojektes.

Das Projekt wurde mit zehn Klassen der Jahrgangsstufe 9 in sechs nordrhein-westfälischen Gymnasien durchgeführt. Sieben Klassen bildeten dabei die sog. *Experimental-* bzw. *Probandengruppe*, drei weitere Klassen die *Kontrollgruppe*. Insgesamt waren damit 260 Schülerinnen und Schüler sowie deren Lehrerinnen und Lehrer beteiligt. Nach Maßgabe der in Kapitel 2 ausformulierten Theoriebasis wurde eine Unterrichtsintervention konzipiert, die nach einer allgemeinen Einführung in das Thema der quadratischen Gleichungen den Schülerinnen und Schülern der *Experimentalgruppe* eine fachliche und hermeneutische Auseinandersetzung mit Teilen des in Kapitel 3 erschlossenen, historischen Materials ermöglichte. Parallel dazu wurde für die Schülerinnen und Schüler der *Kontrollgruppe* eine Vergleichsintervention entworfen, die sachlich den gleichen Stoff abdeckt, jedoch ohne historische Bezüge auskommt. Die Konzepte beider Unterrichtsinterventionen werden im Abschnitt 4.3 und den dazugehörigen Anhängen genau beschrieben.

Die geschichtliche Intervention wurde so arrangiert, dass die Arbeit mit dem historischen Material an die Stelle der konventionellen Übungs-, Anwendungs- und Festigungsphase treten und deren Funktion übernehmen konnte. Auf diese Weise wurde erreicht, dass beide Interventionen den gleichen zeitlichen Umfang beanspruchten.

4.2 Die Datenerhebung

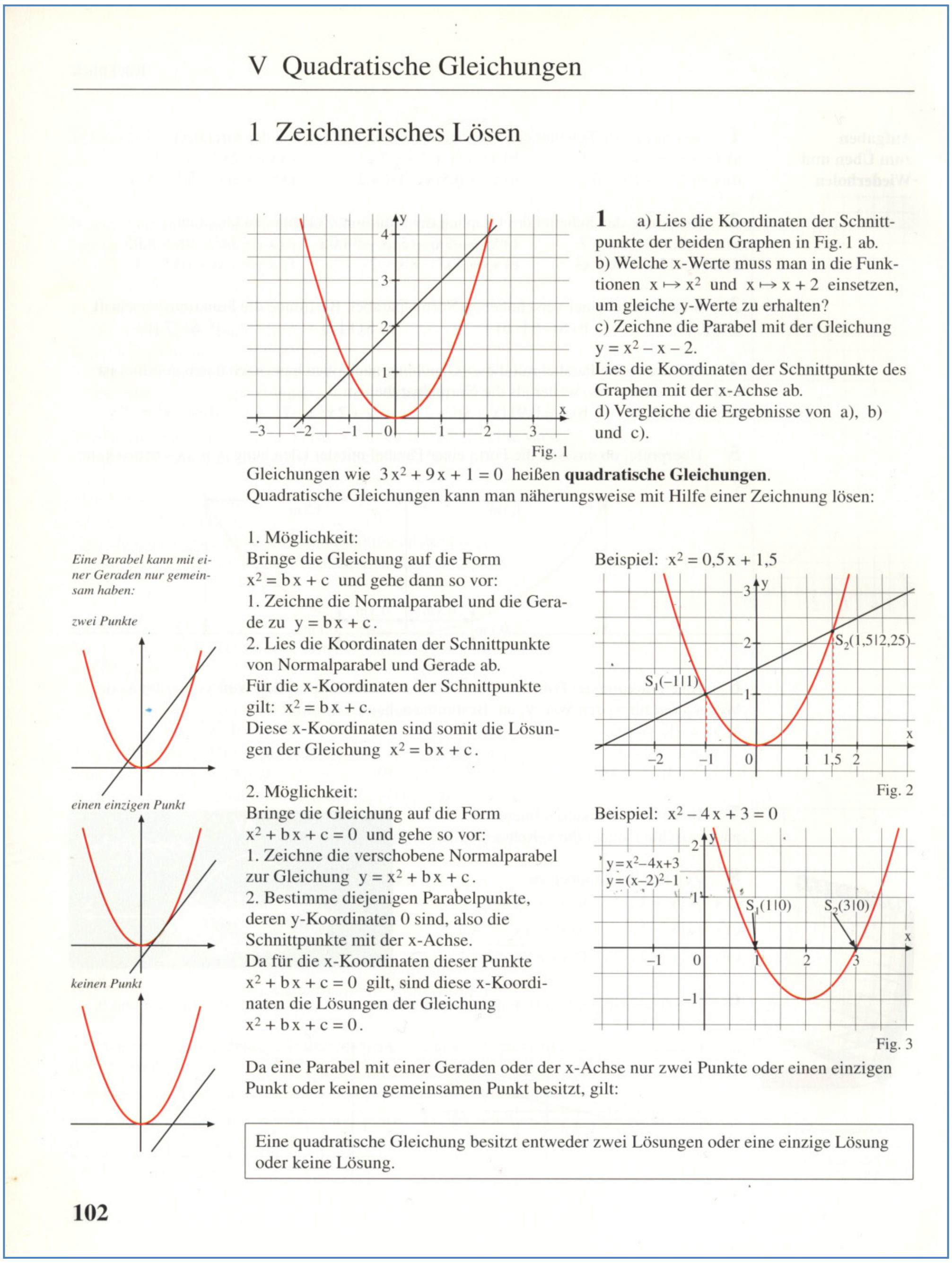
Zur Datenerhebung wurde der Unterricht beobachtet, videographiert und transkribiert. Die Lernenden haben alle ihre Aufzeichnungen und Notizen in Arbeitshefte eingetragen, die speziell für diesen Zweck vorbereitet waren und später eingescannt wurden. Darüber hinaus waren die Schülerinnen und Schüler angehalten, während der Intervention ein Lernjournal zu führen und zwei Fragebögen – zu Beginn und am Ende der Reihen – auszufüllen. Im ersten Fragebogen wurden sie u. a. zu ihren bisherigen Leistungen, zu ihrer Selbsteinschätzung sowie zu ihren Ansichten und Urteilen über die Mathematik als Schulfach und als Wissenschaft befragt. Die Befragung wurde nach der Intervention erneut durchgeführt, um ggf. stattgehabte Änderungen und Verschiebungen feststellen zu können. Am Ende der jeweiligen Unterrichtsreihen wurden die Schülerinnen und Schüler außerdem einem für alle Teilnehmerinnen und Teilnehmer der Experimental- wie der Vergleichsreihe identischen Leistungstest unterzogen. Ein weiterer Test nach sechs bis acht Wochen hat die mittelfristige Nachhaltigkeit des jeweiligen Unterrichts gemessen. Zur weiteren Einschätzung der teilnehmenden Klassen standen die Ergebnisse der kurz zuvor stattgehabten, landesweit durchgeführten Lernstandserhebung zur Verfügung. Alle hier genannten Datenerhebungsinstrumente sind im Anhang (Band 2 der vorliegenden Arbeit) abgedruckt. Die mit diesen Instrumenten ermittelten Ergebnisse finden sich im Kapitel 5.

4.3 Die Unterrichtsreihen

4.3.1 Die gemeinsame Grundlage beider Reihen

Kennzeichnend für die Idee einer hermeneutischen Auseinandersetzung mit mathematikgeschichtlichem Material ist – im Gegensatz zur genetischen Konzeption (vgl. Kap. 1.1) – eine Konfrontation mit historischen Quellen auf der Grundlage eines bereits erarbeiteten, fachlichen Vorverständnisses der behandelten Begriffe oder Verfahren (vgl. den methodischen Dreischritt, Kap. 2, S. 20). Im hier beschrienenen Unterrichtsprojekt wird dieses Vorverständnis durch drei Unterrichtsstunden gewonnen, in welchen sowohl die Schülerinnen und Schüler der Experimentalgruppe wie auch diejenigen der Kontrollgruppe in die Thematik der quadratischen Gleichungen und ihrer Lösung auf konventionelle Weise eingeführt werden. Da in allen an dieser Untersuchung beteiligten Klassen zu dieser Zeit dasselbe Schulbuch (Schmid & Weidig, 1996) benutzt wurde, wurden die Einführungsstunden nach dem dort dargestellten Muster (S. 102-112) gestaltet:

1. Stunde: Die Problemstellung wird aus der Aufgabe gewonnen, die Schnittpunkte einer Parabel mit einer Geraden zu bestimmen (S. 102-3). Die Lösung wird zunächst zeichnerisch bestimmt. Als Übungen werden die Aufgaben 4a) und b) sowie als Hausaufgaben 5a) und b) auf S. 103 bearbeitet.



V Quadratische Gleichungen

1 Zeichnerisches Lösen

Fig. 1

1 a) Lies die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Graphen in Fig. 1 ab.
b) Welche x-Werte muss man in die Funktionen $x \mapsto x^2$ und $x \mapsto x + 2$ einsetzen, um gleiche y-Werte zu erhalten?
c) Zeichne die Parabel mit der Gleichung $y = x^2 - x - 2$.
Lies die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen mit der x-Achse ab.
d) Vergleiche die Ergebnisse von a), b) und c).

Gleichungen wie $3x^2 + 9x + 1 = 0$ heißen **quadratische Gleichungen**.
Quadratische Gleichungen kann man näherungsweise mit Hilfe einer Zeichnung lösen:

Eine Parabel kann mit einer Geraden nur gemeinsam haben:

zwei Punkte

einen einzigen Punkt

keinen Punkt

1. Möglichkeit:
Bringe die Gleichung auf die Form $x^2 = bx + c$ und gehe dann so vor:
1. Zeichne die Normalparabel und die Gerade zu $y = bx + c$.
2. Lies die Koordinaten der Schnittpunkte von Normalparabel und Gerade ab.
Für die x-Koordinaten der Schnittpunkte gilt: $x^2 = bx + c$.
Diese x-Koordinaten sind somit die Lösungen der Gleichung $x^2 = bx + c$.

Beispiel: $x^2 = 0{,}5x + 1{,}5$

$S_1(-1|1)$ $S_2(1{,}5|2{,}25)$

Fig. 2

2. Möglichkeit:
Bringe die Gleichung auf die Form $x^2 + bx + c = 0$ und gehe so vor:
1. Zeichne die verschobene Normalparabel zur Gleichung $y = x^2 + bx + c$.
2. Bestimme diejenigen Parabelpunkte, deren y-Koordinaten 0 sind, also die Schnittpunkte mit der x-Achse.
Da für die x-Koordinaten dieser Punkte $x^2 + bx + c = 0$ gilt, sind diese x-Koordinaten die Lösungen der Gleichung $x^2 + bx + c = 0$.

Beispiel: $x^2 - 4x + 3 = 0$

$y = x^2 - 4x + 3$
$y = (x-2)^2 - 1$
$S_1(1|0)$ $S_2(3|0)$

Fig. 3

Da eine Parabel mit einer Geraden oder der x-Achse nur zwei Punkte oder einen einzigen Punkt oder keinen gemeinsamen Punkt besitzt, gilt:

Eine quadratische Gleichung besitzt entweder zwei Lösungen oder eine einzige Lösung oder keine Lösung.

102

Abbildung 42: Auszug aus dem Material für die 1. Stunde der Unterrichtsreihen in allen Klassen verwendeten Schulbuch (Schmid & Weidig, 1996), S. 102.

Beispiel

Löse graphisch $7{,}5x^2 + 7{,}5x - 15 = 0$.

Lösung:

1. Möglichkeit:

Bringe die Gleichung auf die Form $x^2 = bx + c$.

$$7{,}5x^2 + 7{,}5x - 15 = 0 \quad |:7{,}5$$
$$x^2 + x - 2 = 0 \quad | -x + 2$$
$$x^2 = -x + 2$$

Zeichne die Normalparabel und die Gerade mit der Gleichung $y = -x + 2$. *Lies die x-Koordinaten der Schnittpunkte von Normalparabel und Gerade ab.*

Lösungsmenge: $L = \{-2; 1\}$

2. Möglichkeit:

Bringe die Gleichung auf die Form $x^2 + bx + c = 0$.

$$7{,}5x^2 + 7{,}5x - 15 = 0 \quad |:7{,}5$$
$$x^2 + x - 2 = 0$$

Gleichung der Parabel: $y = x^2 + x - 2$

Bringe die Gleichung auf die Scheitelpunktsform. Forme hierzu die rechte Seite mit Hilfe der quadratischen Ergänzung um.

$$x^2 + x - 2 = x^2 + x + 0{,}5^2 - 0{,}5^2 - 2$$
$$= (x + 0{,}5)^2 - 2{,}25$$

Gleichung in der Scheitelpunktsform:

$y = (x + 0{,}5)^2 - 2{,}25$

Zeichne die verschobene Normalparabel mit dem Scheitel $S(-0{,}5\,|\,-2{,}25)$ *und lies die x-Koordinaten der Schnittpunkte mit der x-Achse ab.*

Lösungsmenge: $L = \{-2; 1\}$

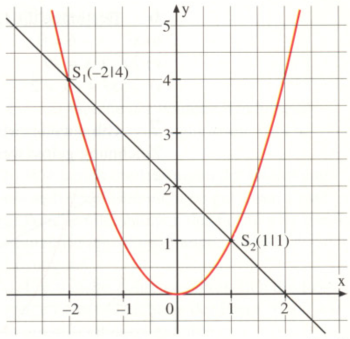


Fig. 1

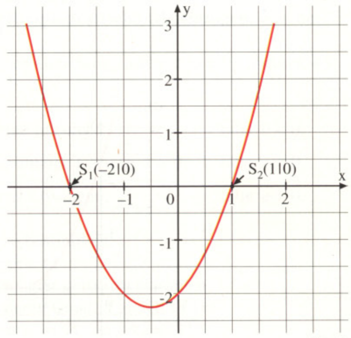


Fig. 2

Aufgaben

2 Löse zeichnerisch.

a) $x^2 + 3x + 2 = 0$ b) $x^2 - 2x - 3 = 0$ c) $x^2 + 3x - 4 = 0$ d) $x^2 + 5x + 4 = 0$
e) $3x^2 + 12x + 9 = 0$ f) $20x^2 - 60x - 80 = 0$ g) $0{,}3x^2 - 0{,}3x - 0{,}6 = 0$ h) $1{,}5x^2 + 1{,}5x - 3 = 0$

3 Löse zeichnerisch.

a) $x^2 = -5x - 6$ b) $x^2 = 2x + 8$ c) $x^2 = -x + 12$ d) $x^2 = -7x - 12$
e) $17x^2 = 17x + 204$ f) $0{,}2x^2 = -1{,}2x - 1{,}6$ g) $x^2 = -x + 4$ h) $0{,}5x^2 = -x + 4$

4 Bestimme die Lösungsmenge mit Hilfe einer Zeichnung.

a) $x^2 + 4x + 4 = 0$ b) $x^2 + 4x + 4{,}5 = 0$ c) $x^2 = 6x - 9$ d) $x^2 = 6x - 9{,}7$
e) $0{,}2x^2 - 2x + 5 = 0$ f) $0{,}5x^2 + 4x + 8{,}5 = 0$ g) $4x^2 = 4x - 1$ h) $4x^2 = 4x - 1{,}2$

5 Bestimme die Lösungsmenge. Lies die Lösungen so genau wie möglich ab.

a) $x^2 + 2x + 2 = 0$ b) $x^2 - x - 5 = 0$ c) $x^2 + 2x - 2{,}5 = 0$ d) $x^2 - 4x + 2 = 0$
e) $2x^2 + 3x - 2 = 0$ f) $x^2 + 0{,}9x - 3{,}6 = 0$ g) $x^2 + 1{,}6x + 2{,}8 = 0$ h) $4x^2 + 20x + 18 = 0$
i) $1{,}5x^2 - 3x - 0{,}8 = 0$ k) $4x^2 + 1{,}5x + 6 = 0$ l) $0{,}2x^2 - 2x + 0{,}3 = 0$ m) $0{,}5x^2 - 4x + 5 = 0$

Abbildung 43: Weiterer Auszug aus dem Schulbuch (Schmid & Weidig, 1996), S. 103.

2. Stunde: Da eine zeichnerische Lösung des Eingangsproblems offenbar zeitaufwändig und ungenau ist, wird ein rechnerisches Verfahren gesucht und nach dem auf S. 109 (Abbildung 44) dargestellten Beispiel 3.1 vom Lehrer bzw. der Lehrerin vorgestellt und begründet. Die sog. „pq-Formel“ zur Lösung der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ wird nach der Methode der „quadratischen Ergänzung“ im Analogieverfahren gemäß S. 107 (Abbildung 45) entwickelt und ausdrücklich festgehalten. Auf die im Buch dargestellte Lösungsformel der allgemeinen quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ sowie auf den Begriff „Diskriminante“ wird hingegen verzichtet. Als Übungen werden die Aufgaben S. 110, 9c), g) und 10a), b) sowie als Hausaufgaben die Nummern 9d), h) sowie 10e), f) aufgegeben.

Lösen allgemein quadratischer Gleichungen

Beispiel 3
Berechne die Lösungen: $2x^2 - 14x = -20$
Lösung:

1. Möglichkeit: Quadratische Ergänzung

$2x^2 - 14x = -20 \quad |:2$
$x^2 - 7x = -10$
$x^2 - 7x + 3{,}5^2 = 3{,}5^2 - 10$
$(x - 3{,}5)^2 = 2{,}25$

1. Lösung: $x_1 - 3{,}5 = \sqrt{2{,}25}$
$x_1 - 3{,}5 = 1{,}5 \quad |+3{,}5$
$x_1 = 3{,}5 + 1{,}5$
$x_1 = 5$

2. Lösung: $x_2 - 3{,}5 = -\sqrt{2{,}25}$
$x_2 - 3{,}5 = -1{,}5 \quad |+3{,}5$
$x_2 = 3{,}5 - 1{,}5$
$x_2 = 2$

2. Möglichkeit: Lösungsformeln
Bringe auf die Form $ax^2 + bx + c = 0$

$2x^2 - 14x = -20 \quad |+20$
$2x^2 - 14x + 20 = 0$
$2x^2 + (-14)x + 20 = 0$
$a = 2$; $b = -14$ und $c = 20$
Diskriminante:
$(-14)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 20 = 196 - 160 = 36$

1. Lösung: $x_1 = \frac{-(-14) + \sqrt{36}}{2 \cdot 2} = \frac{14 + 6}{2 \cdot 2}$
$x_1 = 5$

2. Lösung: $x_2 = \frac{-(-14) + \sqrt{36}}{2 \cdot 2} = \frac{14 - 6}{2 \cdot 2}$
$x_2 = 2$

Abbildung 44: Musterbeispiel zur rechnerischen Lösung einer (konkreten) quadratischen Gleichung gemäß dem Schulbuch (Schmid & Weidig, 1996), S. 109 (1. Möglichkeit).

$x^2 = e$ $(e > 0)$
also:
$x = \sqrt{e}$ oder $x = -\sqrt{e}$

ebenso:
$(x + d)^2 = e$ $(e > 0)$
$x + d = \sqrt{e}$
oder
$x + d = -\sqrt{e}$

Eine quadratische Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$ kann man leicht lösen, wenn man geschickt die quadratische Ergänzung anwendet und eine binomische Formel nutzt:

$x^2 + px + q = 0 \quad |-q$
$x^2 + px = -q$

Addiert man $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ auf beiden Seiten der Gleichung, so kann man auf der linken Seite eine binomische Formel anwenden:

$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$
$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$

also gilt:
$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ oder $x + \frac{p}{2} = -\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

1. Lösung: $x_1 + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad |-\frac{p}{2}$
$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

2. Lösung: $x_2 + \frac{p}{2} = -\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad |-\frac{p}{2}$
$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

z. B. $x^2 + 5x + 6 = 0 \quad |-6$
$x^2 + 5x = -6$

Addiert man $\left(\frac{5}{2}\right)^2$ auf beiden Seiten der Gleichung, so kann man auf der linken Seite eine binomische Formel anwenden:

$x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6$
$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

also gilt:
$x + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$ oder $x + \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$

1. Lösung: $x_1 + \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \quad |-\frac{5}{2}$
$x_1 = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}$
$x_1 = -2$

2. Lösung: $x_2 + \frac{5}{2} = -\frac{1}{2} \quad |-\frac{5}{2}$
$x_2 = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}$
$x_2 = -3$

Abbildung 45: Herleitung der sog. pq-Formel gemäß dem Schulbuch (Schmid & Weidig, 1996), S. 107.

9 Löse durch quadratisches Ergänzen.

a) $x^2 - 8x + 4 = 0$	b) $x^2 + 6x - 4 = 0$	c) $x^2 + 3x + 4 = 0$	d) $x^2 + 6x + 6 = 1$
e) $x^2 + 8x + 17 = 1$	f) $x^2 - 8x + 20 = 4$	g) $x^2 - 5x + 10 = 4$	h) $x^2 + 4x = -5$
i) $3u^2 - 25u + 8 = 0$	k) $2z^2 - 11z - 6 = 0$	l) $10t^2 - 17t + 9 = 2$	m) $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 15 = 0$
n) $u^2 + 6u + \frac{7}{2} = 0$	o) $\frac{1}{2}v^2 + 4v = -\frac{11}{2}$	p) $6w^2 - w = \frac{10}{3}$	q) $5s^2 - 4s = -0{,}6$

Lösungsformel

10 Löse

a) $x^2 + 6x + 5 = 0$	b) $x^2 + 8x - 9 = 0$	c) $3x^2 - 4x - 4 = 0$	d) $2x^2 - 5x - 42 = 0$
e) $x^2 + 6x + 7 = 0$	f) $x^2 - x - 20 = 0$	g) $2x^2 - 11x - 6 = 0$	h) $x^2 - x - 56 = 0$
i) $z^2 - 13z - 48 = 0$	k) $3z^2 - 4z - 4 = 0$	l) $2z^2 + 9z + 7 = 0$	m) $3z^2 - 11z + 10 = 0$

Abbildung 46: Erste Übungsaufgaben aus dem Schulbuch (Schmid & Weidig, 1996), S. 110.

3. Stunde: Zum Üben und Erlangen größerer Sicherheit im Umgang mit quadratischen Gleichungen werden die Aufgaben S. 110, 12a), e), 14a), d) sowie 15c) bearbeitet. Hausaufgabe sind die Nummern 12b) und 14b).

12

a) $x^2 = 4x - 3$ b) $x^2 + 3x = -2$ c) $8 = x^2 + 2x$ d) $6x^2 + 6 = 13x$

e) $1 - x = 30x^2$ f) $11x = 3 + 30x^2$ g) $5x + 4x^2 = 6$ h) $34x - 15 = 15x^2$

13 Multipliziere zuerst die Gleichung mit dem Hauptnenner der Brüche.

a) $x^2 + \frac{2}{5}x - \frac{3}{5} = 0$ b) $x^2 - \frac{14}{3}x + \frac{16}{3} = 0$ c) $\frac{1}{5}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{1}{5} = 0$ d) $\frac{1}{3}x^2 + x - \frac{4}{3} = 0$

e) $x^2 + \frac{1}{20} = \frac{3}{5}x$ f) $-\frac{1}{2}x^2 = 2x + \frac{15}{8}$ g) $\frac{2}{9}u^2 - 42 = \frac{5}{3}u$ h) $-\frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{2}z = -\frac{20}{3}$

i) $\frac{22}{3}x = x^2 + \frac{35}{3}$ k) $\frac{4}{15}x^2 = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}$ l) $\frac{3}{20}x^2 + \frac{3}{10} = \frac{1}{2}x$ m) $3x = \frac{7}{11}x^2 + \frac{36}{11}$

14 Löse

a) $x^2 - 1{,}8x + 0{,}32 = 0$ b) $x^2 - 0{,}6x + 0{,}05 = 0$ c) $x^2 + 2{,}4x - 0{,}81 = 0$

d) $0{,}2x^2 - 0{,}1x + 0{,}012 = 0$ e) $0{,}5z^2 + 0{,}2z + 0{,}52 = 0$ f) $1{,}5u^2 - 1{,}2u + 0{,}24 = 0$

g) $v^2 + 1{,}2v = 0{,}45$ h) $2w^2 = 0{,}18 - 1{,}6w$ i) $1{,}245 = 0{,}04t + t^2$

15

a) $12x^2 + 2x = 9x^2 + 9x - 2$ b) $11x^2 - 7x = 8x^2 + 4x + 20$

c) $10z^2 - 120 + 6z = 98z - 3z^2 - 24$ d) $25u^2 - 3u + 8 - 3u^2 = 7u^2 + 25u + 3$

e) $5w - 3 - 2w(3w - 4) = 4$ f) $11x^2 + 2(x + 1) = 8x^2 + 9x$

g) $10x^2 - 7x = 7x^2 + 4x + 20$ h) $3(5 - 2z) = z(12z - 2) + 10$

i) $x(3x - 7) = (x + 2)^2 + x - 4$ k) $(3k + 5)^2 - k(7k - 3) = 29k + 45$

Abbildung 47: Weitere Übungsaufgaben aus dem Schulbuch (Schmid & Weidig, 1996), S. 110.

Diese vom Schulbuch vorgegebene Einführung ist – wie jede andere Vorgehensweise auch – aus didaktischer Sicht gewiss diskussionswürdig. Wir wollen die Diskussion an dieser Stelle aber nicht führen sondern stattdessen festhalten, dass sich die auf solche Weise stattgehabte Einleitung in die Thematik der quadratischen Gleichungen als pragmatisch erwiesen hat und jedenfalls das für die folgende Vergleichsstudie notwendige Vorverständnis schaffen und sichern konnte. Ab der vierten Stunde wurden die Schülerinnen und Schüler der sieben Experimentalklassen nach dem historisch-hermeneutischen Konzept unterrichtet, das im folgenden Abschnitt 4.3.1 beschrieben wird. Die Schülerinnen und Schüler der drei Kontrollklassen erhielten hingegen einen Unterricht nach vergleichsweise konventionellem Muster, das ich in 4.3.2 darlegen werde.

4.3.2 Die historisch-hermeneutische Unterrichtsreihe

4.3.2.1 Überblick

Im Zentrum der historisch-hermeneutischen Unterrichtsintervention steht eine eingehende Beschäftigung mit historischem, authentischem Material (vgl. Kap. 2). Im vorliegenden Fall handelt es sich um die Auszüge aus der *al-jabr* von Al-Khwarizmi, die ich in Kapitel 3 ausführlich vorgestellt und analysiert habe. Die Lernenden sollen sich unter vielfältigen Perspektiven nach dem Modell der hermeneutischen Zirkelbewegung (vgl. 2.3.2.1.1) mit Teilen dieser Texte auseinandersetzen.

4.3.2.1.1 Arbeitsheft

Diesem Ziel dient u. a. ein Schülerarbeitsheft, das ich zur Durchführung der historischen Intervention für die Benutzung im Unterricht entworfen habe. Es ist im Anhang A (Band 2 der vorliegenden Arbeit) vollständig abgedruckt. Bei seiner Erstellung wurden die in Kap. 2.2.3 (S. 49) hervorgehobenen geschichtsmethodischen Kriterien gewissenhaft berücksichtigt: Die inhaltliche Authentizität des historischen Materials blieb – trotz Kürzung, Umstellung (s. u.) und Übersetzung der Texte – gewahrt. In formaler Hinsicht wurde durch die Wahl eines entsprechenden Layouts die Alterität der Quelle betont. Auszüge aus diesem Arbeitsheft werden in den folgenden Abschnitten benutzt.

4.3.2.1.2 Phasierung

Zum *Einstieg* sammeln die Schülerinnen und Schüler ihr Vorwissen über die zur Debatte stehende historische Epoche und Kultur bzw. zur Geschichte der Mathematik im Allgemeinen. In der Quelle begegnen sie dann erstmals einem authentischen Beispiel historischer Mathematik und erfahren exemplarisch, wie mathematische Gleichungen vor Erfindung der Formelschrift notiert und bearbeitet wurden und auf welche Weise mathematische Erkenntnisse in präformalen Zeiten gewonnen und begründet wurden (Arbeitsheft S. 3-13, Abschnitt 1: „Gleichungen früher").

In der *Erarbeitungsphase* lernen die Schülerinnen das zum Gleichungstyp gehörige Beweisverfahren kennen (vgl. Kap. 3.1.1.2.2), welches auf anschauliche und eindrucksvolle Weise die modernen Methoden ergänzt, die sie in der allgemeinen Einführung erarbeitet und eingeübt haben. Damit wird das erste der oben (Kap. 2.2.3, S. 50) zitierten geschichtsdidaktischen Kriterien – „Lernen" – auch im Hinblick auf das mathematische Curriculum bedient. Die Phase modelliert darüber hinaus den ersten Umlauf der beabsichtigten hermeneutischen Zirkelbewegung, welche – so die Hoffnung – schließlich in ein umfassenderes *Verstehen* der Quelle in dem im Kap. 2.3.2.1 beschriebenen Sinne und in ein tieferes Verständnis der zur Rede stehenden Mathematik münden soll.

Im weiteren Fortgang der Reihe, der *Handlungsphase*, vollzieht sich der Verstehensweg durch eine immer weitere Kreise ziehende Entfaltung von Kontexten fachlicher, historischer, kulturell-religiöser und biographischer Art (vgl. 2.3.2.5). Dies betrifft das geschichtsdidaktische Kriterium des „Verstehens und Begreifens" (Kap. 2.2.3, S. 50). Zugleich führt die Kontrastierung des Alten mit dem Heutigen, des Fremden mit dem Vertrauten gewissermaßen in die pädagogische Herzkammer der historisch-hermeneutisch orientierten Intervention (vgl. Kap. 2.3, insbesondere 2.3.2.3 und 2.3.3). Im Arbeitsheft wird dieser Weg im zweiten und dritten Abschnitt („Auf dem Weg zur Formel", „Die negativen Zahlen") angeleitet (Arbeitsheft S. 18-23, 26), indem den Lernenden weitere Quellen angeboten und sie dazu ermuntert werden, die erworbenen Kenntnisse anzuwenden, zu vergleichen und weitere Fragen zu stellen. Die im Arbeitsheft eingestreuten Hinweise auf die arabisch-islamische Geschichte, ihre Kultur und Religion (Arbeitsheft S. 6; 14 ff.) ermöglichen weitere Runden im hermeneutischen Zirkel und bedienen das letzte der oben zitierten geschichtsdidaktischen Kriterien: die Einbettung der Quelle in eine „erzählbare" Gesamtstruktur (Kap. 2.2.3, S. 50). Hierfür sorgen auch die angebotenen Einblicke in die Weiterentwicklung der mittelalterlichen Algebra, in die Entwicklung der symbolischen Formelschrift und in die Zusammenhänge mit der Problematik der negativen Zahlen, die durch Hinzuziehung von einigen der in Kap. 3.1.2.2.1.7 abgedruckten Zitate von Leibniz und Arnauld pointiert werden.

Am Schluss der Reihe, in der *Ergebnis- und Reflexionsphase*, richtet der Autor der *al-jabr* persönlich das Wort an seine Leser und damit auch an uns Heutige (Arbeitsheft S. 24 f.). Wir erfahren nun von ihm selbst etwas über sein Leben, seine Lebensumstände und seine Weltsicht und tauchen damit in den biographisch-persönlichen Kontext des Werkes ein. Die Quelle wird somit – entsprechend den ge schichtsdidaktischen Forderungen – zum Medium eines persönlichen und dialogischen Verstehensvollzuges (vgl. 2.2.2.4, S. 47 ff.). Der auf solche Weise angelegte Unterrichtsgang intendiert die Entfaltung des hermeneutischen Zirkels gemäß den Abbildungen 48 und Abbildung 49. Einen groben Überblick über die Abschnitte und ihre Funktionen gewährt auch die Tabelle 4.

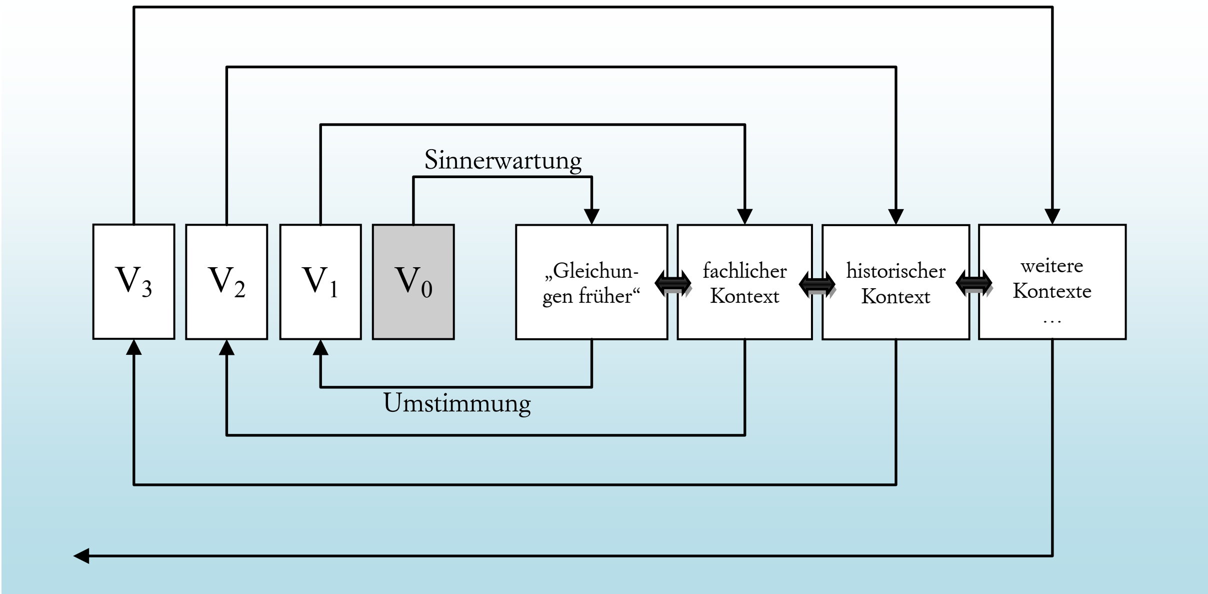


Abbildung 48: Intendierte Entfaltung des hermeneutischen Zirkels durch die im Arbeitsheft entwickelten fachlichen und kontextuellen Informationen (vgl. Kap. 2.3.2.1.1). Das Vorverständnis V_0 und die mit ihm verbundene Sinnerwartung wurde insbesondere (aber nicht ausschließlich) in den ersten drei Stunden der allgemeinen Einführung begründet. Die Doppelpfeile auf der rechten Seite des Zirkels bringen die stets gegebene Möglichkeit zur Beiziehung anderer Kontexte in jedem Umlauf der hermeneutischen Auseinandersetzung zum Ausdruck. Vgl. auch Kap. 2.3.2.1.3 (Abbildung 22).

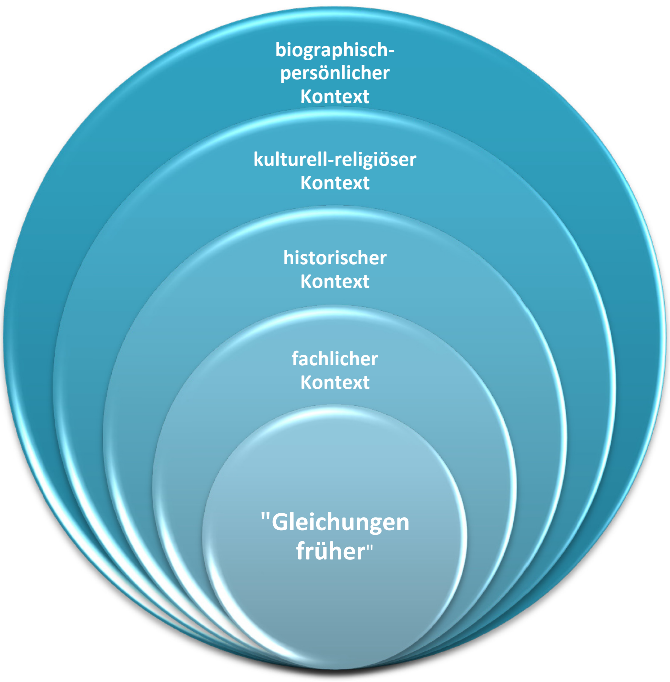


Abbildung 49: Verstehen durch die zunehmende Entfaltung von Kontexten. In der hier beschriebenen Unterrichtsreihe handelt es sich um fachliche, historische, kulturell-religiöse sowie biographisch-persönliche Kontexte.

<table>
<tr><th>Phase der Intervention</th><th colspan="2">Abschnitt des Arbeitsheftes</th><th>Hermeneutische Funktion</th></tr>
<tr><td>Einstieg</td><td rowspan="2">1. Abschnitt:
„Gleichungen früher“</td><td rowspan="5">begleitende Kontextinformationen</td><td rowspan="2">Erster Kontakt mit der Quelle; engeres Verstehen im Sinne eines sachlichen Erklärens der mathematischen Inhalte</td></tr>
<tr><td>Erarbeitung</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Handlung</td><td>2. Abschnitt:
„Auf dem Weg zur Formel“</td><td rowspan="2">Weitergehendes Verstehen durch Erschließen fachlicher, historischer, religiös-kultureller …</td></tr>
<tr><td>3. Abschnitt:
„Die negativen Zahlen“</td></tr>
<tr><td>Ergebnis und Reflexion</td><td>4. Abschnitt:
„Das Vorwort des Autors“</td><td>… sowie persönlich-biographischer Kontexte; die Quelle als Medium eines dialogischen Verstehensvollzuges.</td></tr>
</table>

Tabelle 4: Phasen der historisch-hermeneutischen Unterrichtsreihe sowie zugehörige Abschnitte im Arbeitsheft samt ihrer jeweiligen Funktionen. Alle Phasen sind durch intensive Quellenlektüre gekennzeichnet.

4.3.2.2 Ablauf und mögliche Gestaltung des Unterrichts

Wir schauen nun genauer auf den Ablauf und eine mögliche Gestaltung der einzelnen Stunden. Die Unterrichtsreihe wurde in der hier beschriebenen Weise im Rahmen der Pilotierung von mir selbst mit zwei Klassen erprobt. Die dabei gemachten Erfahrungen sind im Folgenden in kursiver Schrift abgedruckt.

4.3.2.2.1 Erste Stunde: Einstieg

Die Schülerinnen und Schüler haben in den Stunden der allgemeinen Einführung das gängige Verfahren der quadratischen Ergänzung kennen gelernt, auf welchem letztlich die Begründung der „*pq*-Formel“ beruht. Die darin enthaltene Idee der Vervollständigung zu einem Quadrat ist, wie wir in Kapitel 3 gesehen haben, bereits Al-Khwarizmi vertraut gewesen. Mit den entsprechenden Auszügen aus seiner *al-jabr* sollen die Lernenden sich nun auseinandersetzen. Das Ziel der ersten Unterrichtsstunde besteht darin, die Schülerinnen und Schüler anhand einer konkreten Beispielaufgabe mit der ganz anderen, geometrischen Denk- und Herangehensweise Al-Khwarizmis beim Lösen von Gleichungen zu konfrontieren. Indem sie eine Aufgabe, die sie der Quelle entnehmen, zunächst mit dem heute üblichen, scheinbar alternativlosen Standardkalkül lösen und danach das auf ganz anderen gedanklichen Grundlagen beruhende Verfahren Al-Khwarizmis kennen lernen und durchdenken, können sie die Unterschiede und Gemeinsamkeiten der beiden Methoden besonders deutlich erleben. Der intendierte Stundenverlauf sieht wie folgt aus:

Die Lehrperson kündigt an, dass die Klasse sich in den nächsten Stunden mit einem Beispiel historischer Mathematik auseinandersetzen und einen Blick darauf werfen werde, wie der Stoff, der gerade behandelt wurde, vor 1200 Jahren ausgesehen hat und unterrichtet wurde. Zum Einstieg wird jeder

Schüler gebeten, nach Art eines Brainstorming/Brainwriting zu notieren, was sie bzw. er über die Zeit um 800 bzw. über die Geschichte der Mathematik zu wissen meint. Die hermeneutische Funktion liegt in der Sichtung des Vorwissens und in der Exploration von (Sinn-)Erwartungen.

In den Pilotklassen haben die Schülerinnen und Schüler farbige Karteikarten beschrieben und an eine Pinnwand geheftet. Auf grünen Karten wurden allgemeingeschichtliche Kenntnisse notiert, auf blauen Karten mathematikgeschichtliches Wissen. Dabei zeigte sich, dass die Klassen zwar überraschend viele Namen von Mathematikern kannten, diese jedoch historisch nicht einmal annähernd einordnen konnten. Über die historische Epoche um 800 war so gut wie gar nichts bekannt. Auf den grünen Karten standen dementsprechend vor allem Wörter wie „Mittelalter" bzw. „finsteres Mittelalter" oder auch das schlichte Bekenntnis „Ich weiß nichts darüber." Ein Schüler hatte immerhin den Namen „Karl der Große" notiert, und auf einer anderen Karte war „Herrschaft der Kirche" zu lesen. Die arabische Blüte und Expansion, der Ansturm auf Europa etc. wurden hingegen nicht erwähnt, übrigens auch nicht von Kindern islamischer Religionszugehörigkeit. In den Pilotklassen war den Schülerinnen und Schülern schlicht nichts über arabische Geschichte bekannt. Auf Vorab-Belehrungen in dieser Richtung habe ich jedoch bewusst verzichtet – die noch zu lesenden Texte sollten für sich selbst sprechen.

Nach der gemeinsamen Sichtung des Vorwissens stellt die Lehrperson einen Abschnitt aus der Quelle vor. Es handelt sich um den Aufgabentext zu Al-Khwarizmis viertem Problemtyp (vgl. 3.1.1.3, D I,4-5): „Ein Quadrat und zehn seiner Wurzeln ergeben neununddreißig Dirhem. Das heißt, wie muss das Quadrat lauten, das um zehn seiner eigenen Wurzeln vermehrt neununddreißig ergibt?"

In einer der beiden Pilotklassen habe ich diese zwei Sätze den Schülerinnen und Schülern nur vorgelesen, nicht aber gezeigt. Diese Vorgehensweise beruht auf dem Gedanken, dass die intendierte hermeneutische Grundhaltung sich besser einzustellen vermag, wenn die Klasse still wird, konzentriert zuhört und sich dadurch zugleich der notwendigen Verstehensanstrengung bewusst wird. In der anderen Klasse habe ich den Schülerinnen und Schülern hingegen nur eine Folie mit dem Text gezeigt, ihn aber nicht vorgelesen. In beiden Klassen habe ich nach der Vorstellung des Textes die Schülerinnen und Schüler gefragt: „Was ist das für eine Aufgabe? Worum geht es hier?". Diese Frage wurde in Vierergruppen nach der – in beiden Klassen bekannten und eingeübten – Placemat-Methode bearbeitet, allerdings in einer materialmäßig schlichteren Variante, in welcher die Schülerinnen und Schüler ihre jeweiligen Ideen auf DIN-A4-Blättern notierten und das Gruppenergebnis auf eine Folie schrieben. Die Placemat-Methode ermöglichte es nicht nur, alle Lernenden zu aktivieren, sondern auch das Verstehen des Einzelnen wie auch die Verstehenserweiterung durch Austausch und Addition in der Gruppe zu dokumentieren. Dabei stellte sich – erwartungsgemäß – heraus, dass die „Nur-Hören"-Klasse weniger gut verstanden hatte: Der für Schüler offenbar naheliegende Fehler, Al-Khwarizmis Gleichung mit $x^2 + 10\sqrt{x} = 39$ *zu transkribieren, trat hier vermehrt auf und wurde auch zweimal als Gruppenergebnis präsentiert. In der Klasse, die den Text auf Folie vor Augen hatte, wurde dieser Fehler weniger häufig gemacht und in jedem Falle von der Gruppe erkannt und korrigiert. Die meisten Gruppen in beiden Klassen erarbeiteten im Übrigen nicht nur die Transkription sondern lösten die Gleichung auch mit der pq-Formel, obwohl dies nicht verlangt worden war.*

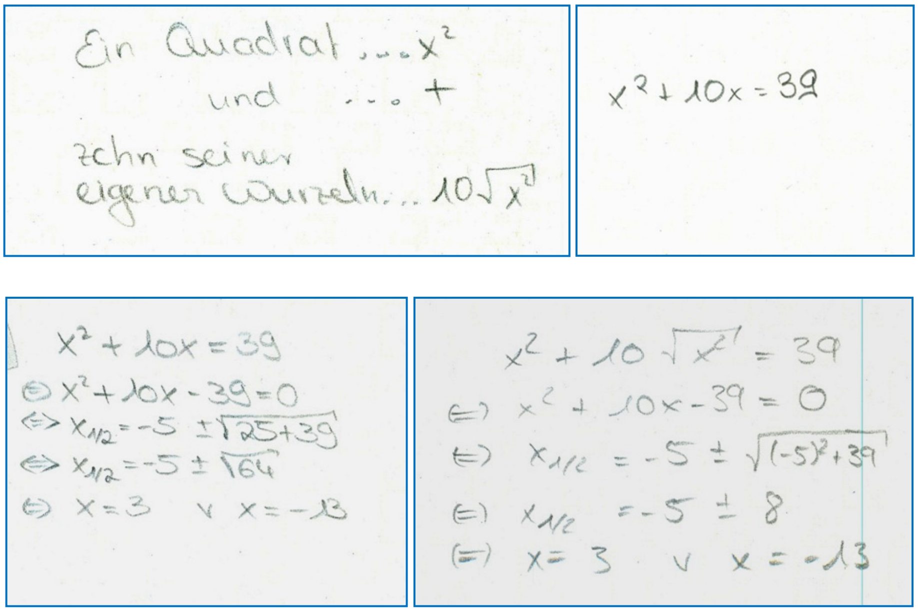


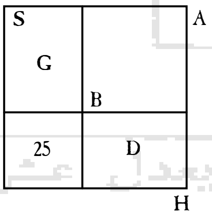
Abbildung 50: Beispiele für Schülerdeutungen des ersten Quellenauszugs.

Die Lehrperson spricht nun die Frage an, auf welche Weise wohl Al-Khwarizmi diese Aufgabe gelöst haben könnte. Die Schülerinnen und Schüler äußern hierzu Vermutungen – dass er die Lösung wahrscheinlich nicht mit unserer Formel ermittelt hat, geht für sie plausiblerweise aus der Tatsache hervor, dass er nicht unsere Schreibweise benutzt hat.

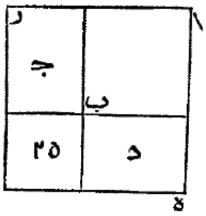
In den Pilotklassen brachten einige Schülerinnen und Schüler den in der Tat naheliegenden Gedanken auf, dass Al-Khwarizmi die Gleichung – in Ermangelung eines symbolischen Formalismus – dann wohl graphisch gelöst haben müsse. Dabei dachten sie an das aus dem vorausgegangenen Unterricht bekannte Verfahren, in welchem eine Parabel mit einer Geraden im Koordinatensystem geschnitten wurde. Andere Schüler spekulierten darüber, ob Al-Khwarizmi vielleicht einen „Trick“ gekannt hätte, wobei freilich offen blieb, worum es bei einem solchen Trick ungefähr hätte gehen können. In einer der beiden Pilotklassen äußerte ein Schüler die interessant anmutende Idee, dass Al-Khwarizmi vielleicht irgend eine Art „mathematischen Apparat“ besessen oder erfunden haben könnte, die ihm die Lösung der Aufgabe ermöglichte. Der Schüler stellte sich unter einem solchen Apparat etwas durchaus Gegenständliches, etwa wie einen Zirkel, einen Rechenschieber oder Rechenautomaten vor, letztlich also eine Technologie, die in ihrer Funktion für den Mathematiker unseren heutigen Taschenrechnern bzw. Computern entspricht.

Nachdem einige Erwartungen generiert und ausgesprochen wurden, liest die Klasse den Abschnitt der Quelle, in welchem Al-Khwarizmi sein Verfahren geometrisch beschreibt und begründet (D IV,32-46). Im Original ist dieser Abschnitt der Auflösungsregel (D I,7-15) zwar nachgestellt; aus didaktischen Gründen bietet es sich jedoch an, ihn bei der Lektüre vorzuziehen und die Regel erst später als verbale Kondensation des dargelegten Verfahrens zu präsentieren: In früheren Unterrichtsversuchen mit diesem Text hat sich nämlich oft gezeigt, dass die originale Reihenfolge in der *al-jabr* für die heutigen Schülerinnen und Schüler nicht so günstig ist wie die hier bevorzugte. Das mag zum einen damit zusammenhängen, dass sich einige Lernende vorschnell zufrieden geben, sobald sie über einen funktionierenden Algorithmus verfügen, an dessen Begründung sie dann kein größeres Interesse mehr zeigen. Durch die Umstellung kann dieses Problem vermieden werden. Zum andern gelingt den Schülerinnen und Schülern, die durch den heute dominierenden Formalismus geprägt sind, die Verknüpfung der verbalen Kurzfassung mit der zugrunde liegenden, geometrischen Beweisführung erfahrungsgemäß weniger gut, wenn diese nachgeschoben wird. In einem solchen Falle – das haben Voruntersuchungen gezeigt – verlassen die Lernenden kaum die Domäne des Kalküls, verkennen die Bedeutung der Zeichnungen und begründen nicht selten Al-Khwarizmis „Rezept“ mit unserer Formel.

[1a]Ein Quadrat und zehn seiner Wurzeln ergeben neununddreißig Dirhem. [1b]Das heißt: wie muss das Quadrat lauten, das um zehn seiner eigenen Wurzeln vermehrt neununddreißig ergibt? (...)
[2]Wir gehen aus von der quadratischen Fläche AB, welche das Quadrat repräsentiert. [3]Es ist als nächstes unsere Aufgabe, hierzu die zehn Wurzeln desselben hinzuzufügen. [4]Zu diesem Zweck halbieren wir die Zehn, so dass es fünf werden, und konstruieren zwei Vierecke auf zwei Seiten der Quadratfläche AB, nämlich G und D. [5]Ihre Länge ist jeweils fünf, die Hälfte der zehn Wurzeln nämlich, während die Breite jeweils gleich ist einer Seite der Quadratfläche AB. [6]Nun bleibt eine Quadratfläche übrig, gegenüber der Ecke der Quadratfläche AB. [7]Diese ist gleich fünf multipliziert mit fünf. [8]Diese Fünf ist die Hälfte der Anzahl der Wurzeln, die wir zu jeder der zwei Seiten der ersten Quadratfläche hinzugefügt haben. [9]Nun wissen wir aber, dass die erste Quadratfläche, welche das Quadrat repräsentiert, und die zwei Vierecke an seinen Seiten, welche die zehn Wurzeln sind, zusammen neununddreißig ergeben. [10]Um die große Quadratfläche zu vervollständigen, benötigt man nur ein Quadrat von fünf multipliziert mit fünf, oder fünfundzwanzig. [11]Diese fügen wir zu neununddreißig hinzu, um die große Quadratfläche SH zu vervollständigen. [12]Die Summe ist vierundsechzig. [13]Wir ziehen die Wurzel, acht, welche eine der Seiten des großen Vierecks ist. [14]Subtrahieren wir hiervon dieselbe Anzahl, die wir vorher addiert haben, nämlich fünf, so erhalten wir drei als Rest. [15]Dies ist die Seite des Vierecks AB, welches das Quadrat repräsentiert; es ist die Wurzel dieses Quadrats, und das Quadrat selbst ist neun. [16]Dies ist die Figur:



(Modernisierte Figur mit Bezeichnungen in unserer Schrift)



(So sieht die Figur im arabischen Original aus)

Abbildung 51: Auszug aus dem Arbeitsheft. Zitiert wird der Quellenabschnitt D IV,32-46.

Die Textarbeit zu diesem Auszug ist im Arbeitsheft durch die Aufgaben 2 bis 6 ausdifferenziert. Sie lauten:

(2.) ***Welche Besonderheiten fallen Dir an dieser Lösungsmethode auf, wenn du sie mit unserer heutigen Vorgehensweise vergleichst?***

In den Pilotklassen stellten die Schülerinnen und Schüler zutreffend fest, dass Al-Khwarizmi keine Symbole benutzt, keine Umformungen durchführt, geometrisch argumentiert und nur eine Lösung erhält:

Herons: kommt ohne terme und Gleichungen aus. Ist geometrisch.

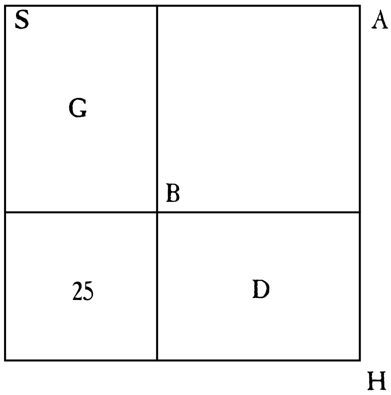
Quadratische ~~Lösung~~ Gleichungen wurden zeichnerisch gelöst und es gab nur eine Lösung. Die heutigen Formeln sind um vielfaches einfacher und man kann ~~mehrere~~ bis zu zwei Lösungen ~~bekommen~~! erhalten

Die Aufgabe/Lösung ist ~~in~~ einem zusammenhängenden Text gefasst. es kommen keine Therme oder Gleichungen vor. die Aufgabe wird ~~in~~ auf zeichnerische (Geometrische) Art gelöst, nur eine Lösung, die positiv ist

Abbildung 52: Beispiele für Schülerantworten zu Aufgabe 2 (Pilotklassen).

Das rein sachliche Verständnis soll durch Aufgaben 3 und 4 geklärt werden:

(3.) ***Beschrifte die Flächen bzw. Strecken in der Zeichnung mit Termen der Gleichung $x^2 + 10x = 39$.***



Typische Schülerlösungen aus den Pilotklassen zeigt die folgende Abbildung.

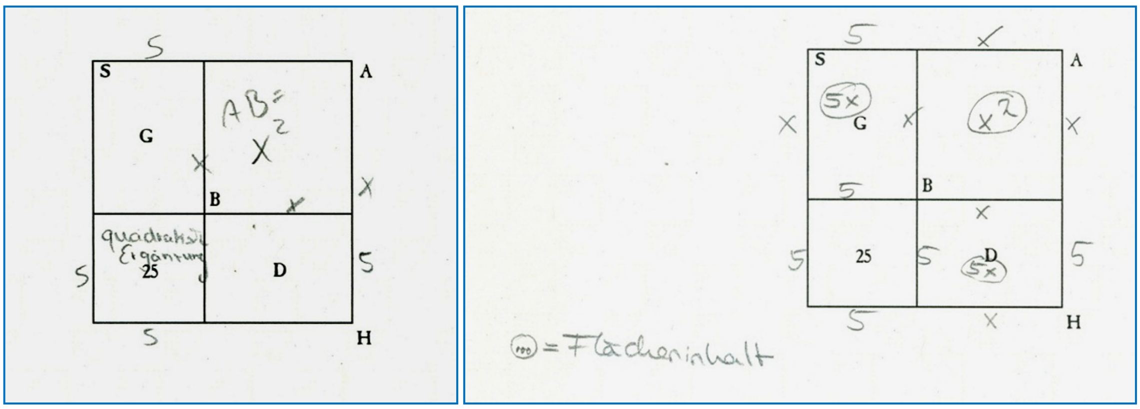


Abbildung 53: Beispiele für Schülerantworten zu Aufgabe 3 (Pilotklassen).

(4.)* *Gib den Gedankengang von Al-Khwarizmis Lösung in eigenen Worten und mit eigenen Zeichnungen wieder.

In den Pilotklassen ist diese Aufgabe z. T. als Hausaufgabe erledigt worden. Die folgenden Abbildungen zeigen Bearbeitungsbeispiele.

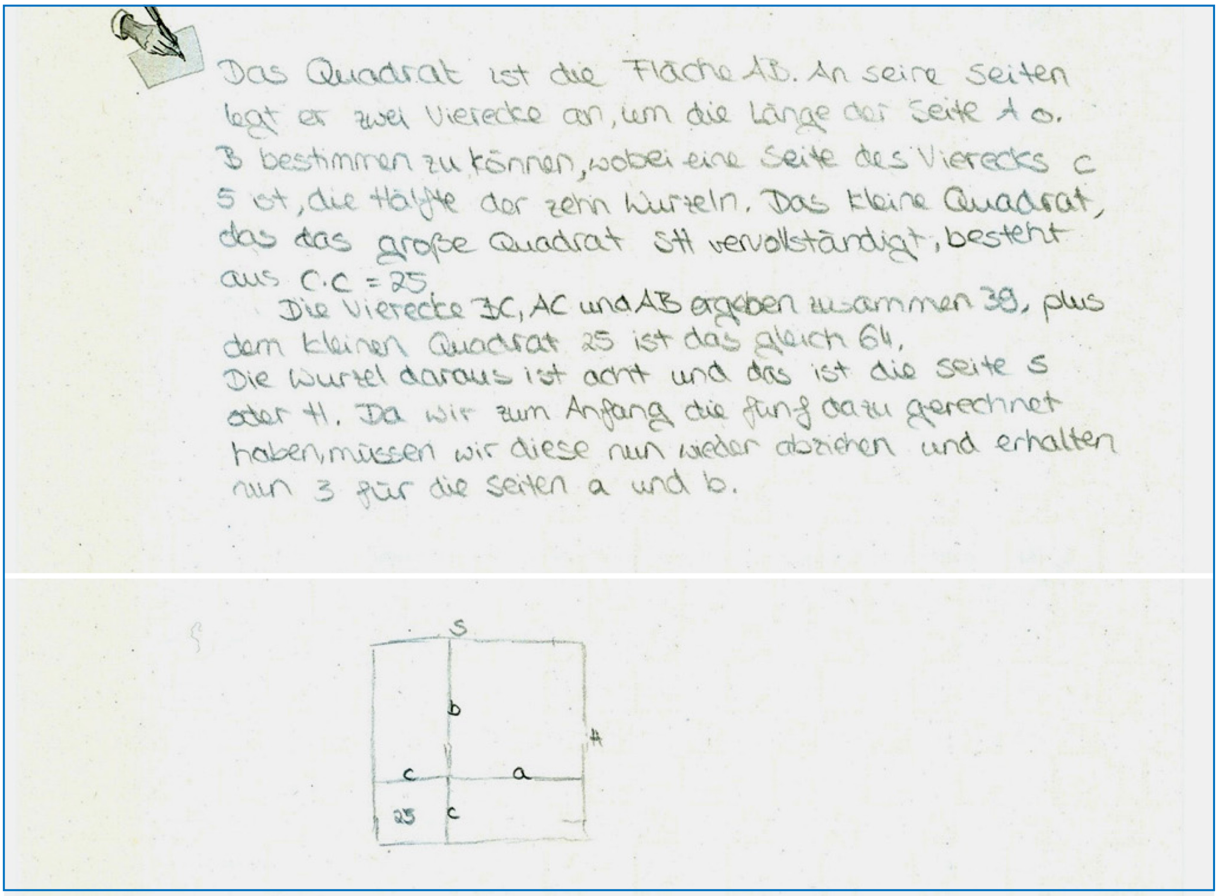


Abbildung 54: Beispiel einer Schülerantwort zu Aufgabe 4 (Pilotklassen).

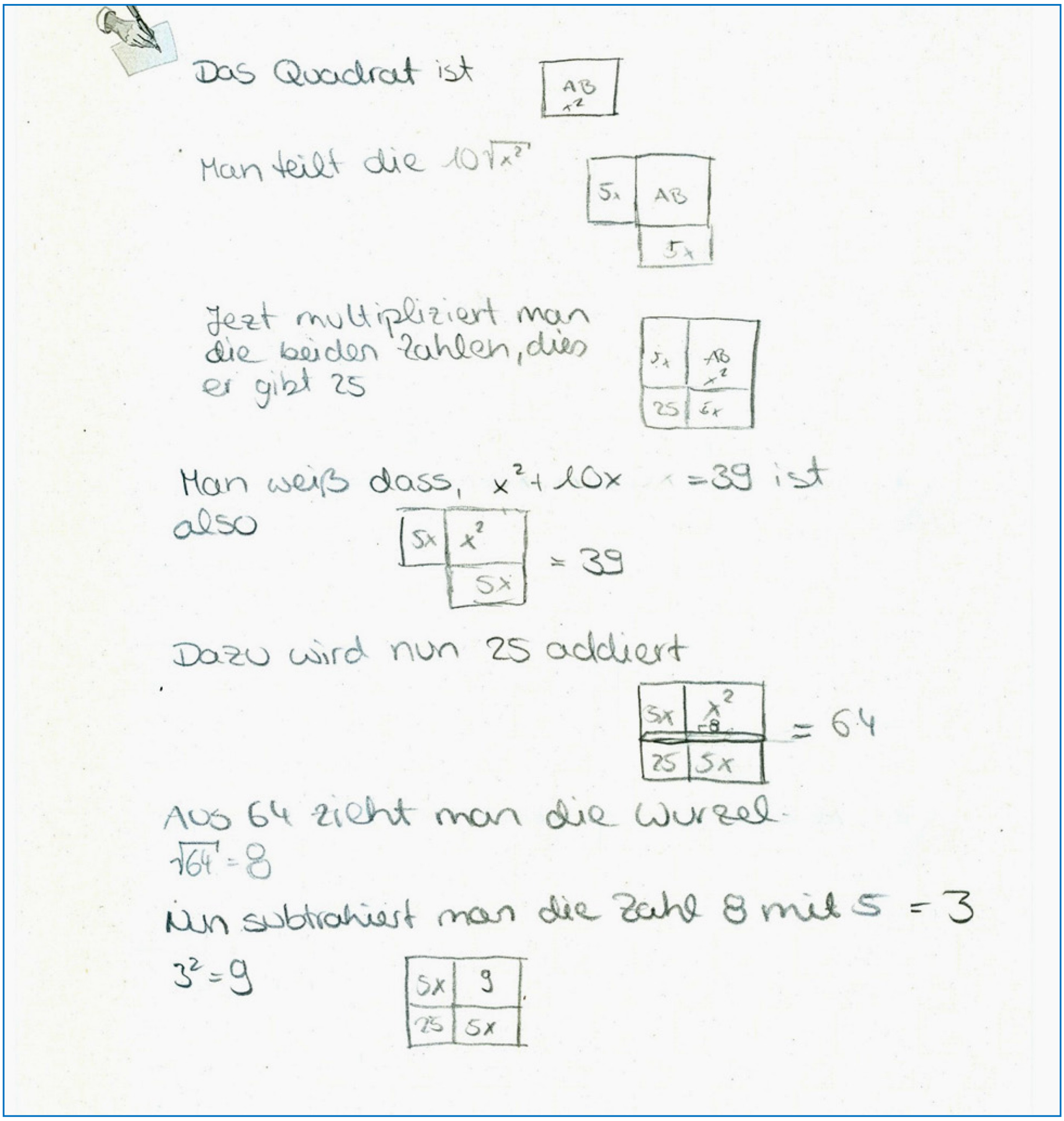


Abbildung 55: Beispiel einer Schülerantwort zu Aufgabe 4 (Pilotklassen).

Neben solchen, durchaus zufriedenstellenden Bearbeitungen kamen auch fehlerhafte Darstellungen vor, wie die folgende Abbildung 56 zeigt: Die dort zu sehende Bearbeitung ist auf mehrfache Weise fehlerhaft: Zum einen hat die Division der 10 durch 2 nichts damit zu tun, aus dem – wie es hier heißt – x^2 ein x zu machen. Zum andern geht es bei Al-Khwarizmi auch nicht darum, „das Quadrat zu $\sqrt{x}$“ zu zeichnen. Entsprechend ist die Beschriftung $\sqrt{39}$ in der Zeichnung falsch, obwohl der Schüler hier immerhin erkannt hat, dass die Wurzel eines Quadrates geometrisch der Seitenlänge entspricht.

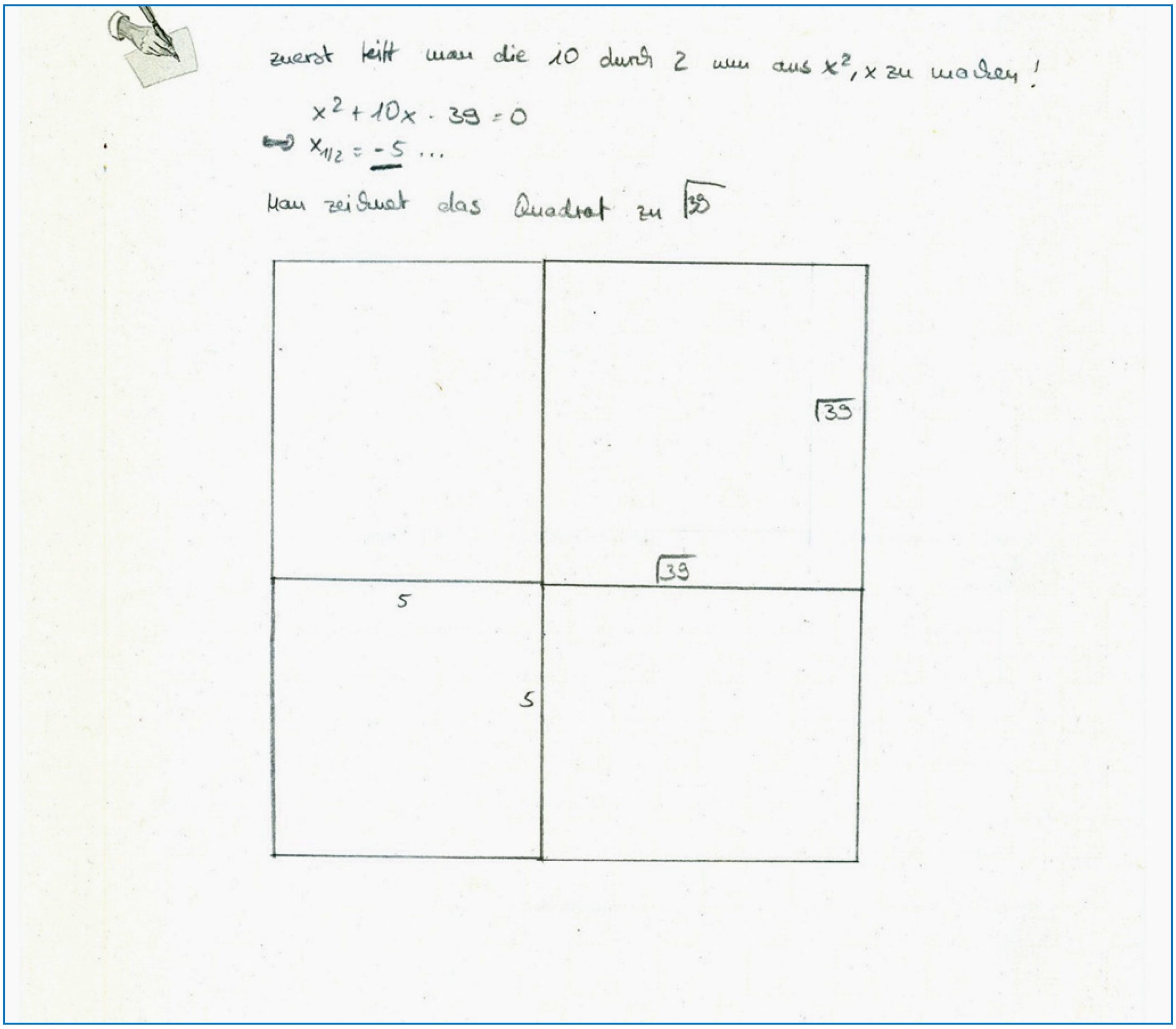


Abbildung 56: Beispiel einer (fehlerhaften) Schülerantwort zu Aufgabe 4 (Pilotklassen).

Die Bearbeitungen einiger anderer Schüler aus den Pilotklassen gaben Al-Khwarizmis Gedankengang zwar im Großen und Ganzen richtig wieder, offenbarten jedoch auch Verständnislücken. Im Beispiel der Abbildung 57 etwa gab der Schüler zu erkennen, dass er letztlich nicht weiß, warum die Rechtecke G und D bündig an das Quadrat AB angelegt werden können. Die entsprechende Stelle habe ich durch einen Kasten hervorgehoben.

Eine schöne Bearbeitung zeigt hingegen die Abbildung 58. In den letzten Zeilen seiner Antwort kam dieser Schüler von sich aus auf das Fehlen der zweiten Lösung bei Al-Khwarizmi zu sprechen und nahm dadurch die Antwort auf die Aufgabe 5 vorweg, in welcher die Lernenden noch einmal ausdrücklich zur Erklärung dieses Sachverhalts aufgefordert werden.

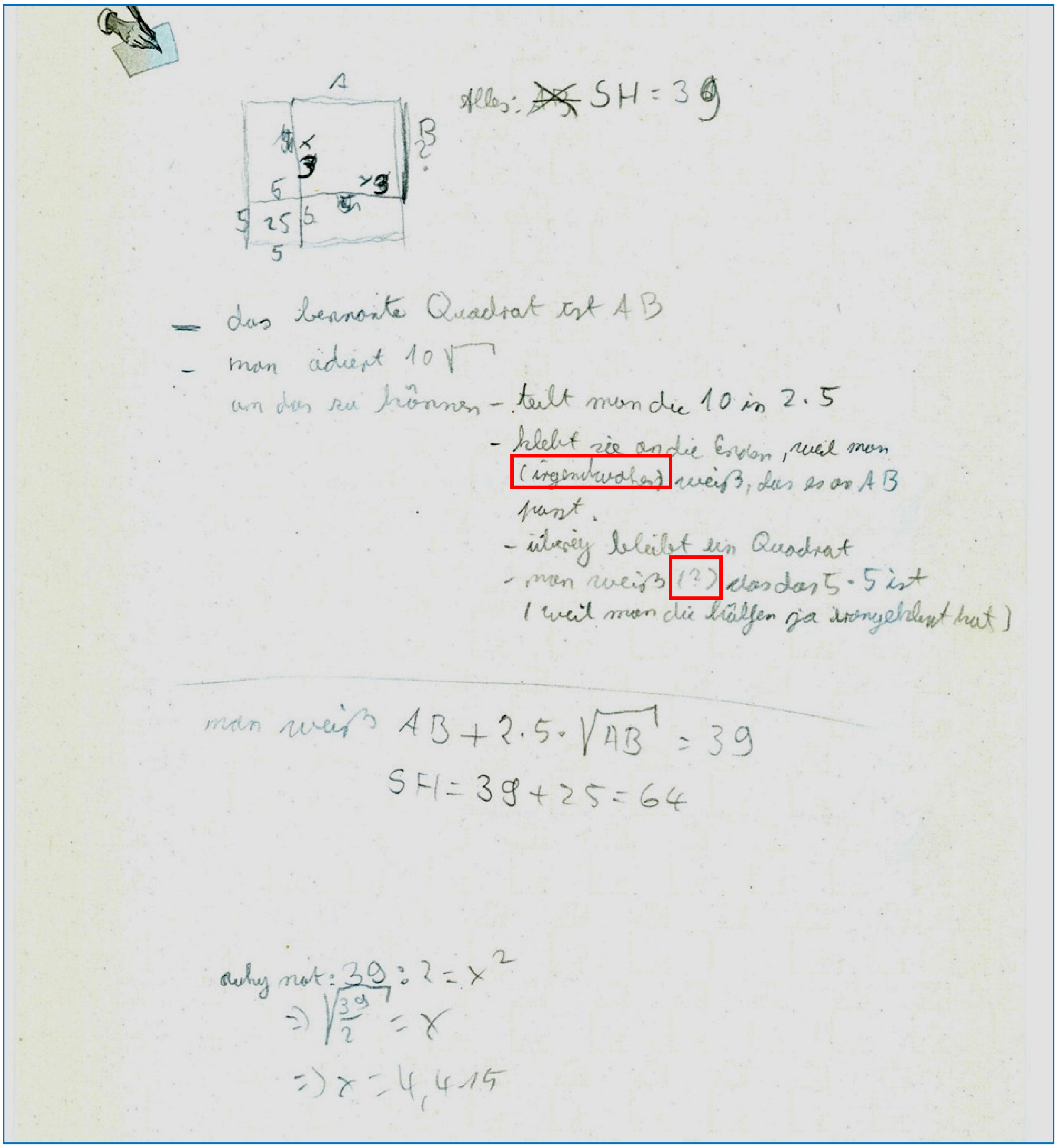


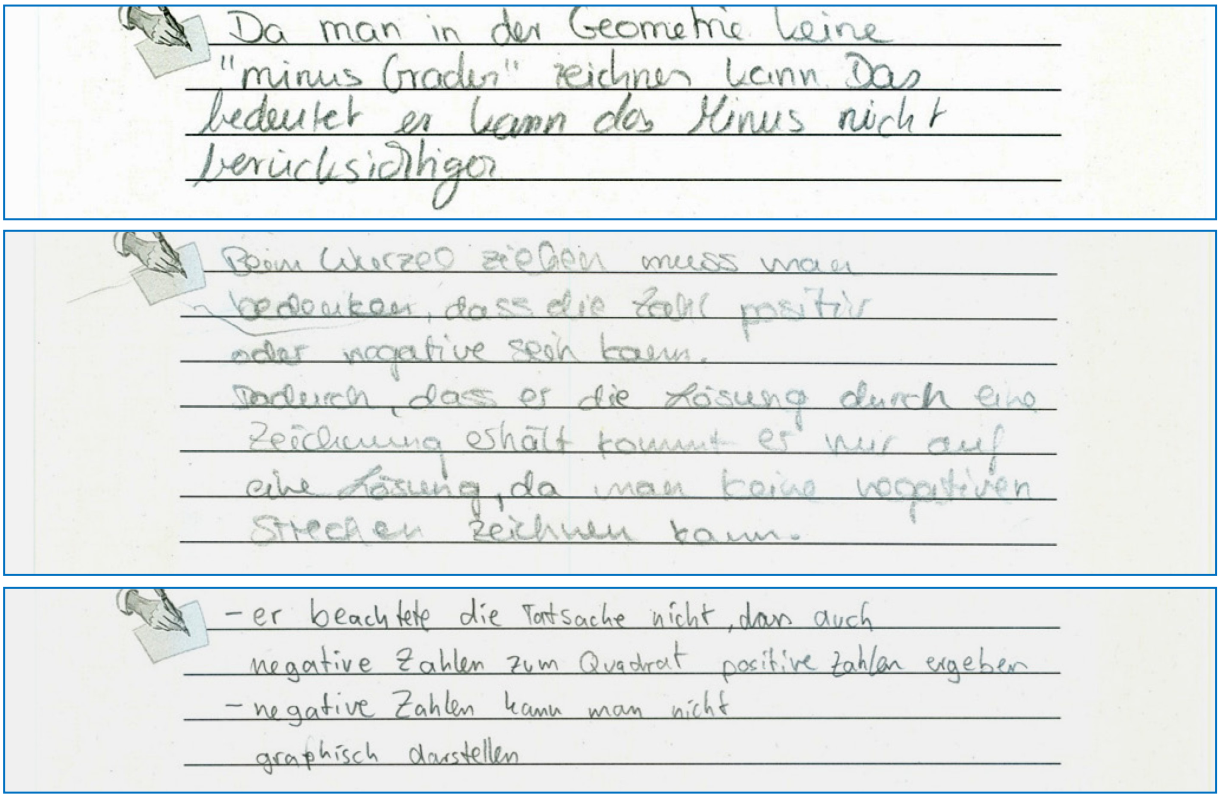
Abbildung 57: Beispiel einer Schülerantwort zu Aufgabe 4 (Pilotklassen). Die roten Kästen („irgendwoher“, „?“) habe ich ergänzt.

- Al-Khwarizmis Ausgangspunkt ist das Quadrat
AB $= x^2$
- Nun fehlen ihm noch die zehn Wurzeln desselben Quadrates.
- Dafür konstruirt es zwei Vierecke (G, D) an das Quadrat AB. Da es zwei Vierecke zeichnet, teilt es folglich die Zahl Zehn ebenfalls durch zwei und es hält den Flächeninhalt für $G / D = 5x$
Rechnet man jetzt $G + D$ erhält man
$5x + 5x = 10x$
- Man hat nun: $x^2 + 10x = 39$
- Nun bleibt eine Quadratfläche übrig, um aus allen Vierecken ein großes Quadrat zu konstruieren.
- Dieses hat durch die Seitenlängen 5 einen Flächeninhalt von 25
- $25 + 39 = 64$, dadurch erhält es den Flächeninhalt "des großen Quadrates" SH
- Die Seitenlängen SHs betragen $\sqrt{64} = 8$
- Um nun x zu erhalten, zieht es die Teilseite 5 von 8 ab, also
$8 - 5 = x$ und erhält $3 = x$
- Leider entgeht ihm durch sein Verfahren die Möglichkeit $\sqrt{64} = -8$ und so auch das Ergebnis $x = -13$

Abbildung 58: Beispiel einer Schülerantwort zu Aufgabe 4 (Pilotklassen).

(5.) Warum kommt Al-Khwarizmi im Gegensatz zu uns nicht auf die zweite Lösung?

In beiden Pilotklassen gaben die Schülerinnen und Schüler die geometrische Betrachtungsweise als Hinderungsgrund an:


Da man in der Geometrie keine "minus Graden" zeichnen kann. Das bedeutet er kann das Minus nicht berücksichtigen

Beim Wurzeln ziehen muss man bedenken, dass die Zahl positiv oder negative sein kann.
Dadurch, dass er die Lösung durch eine Zeichnung erhält kommt er nur auf eine Lösung, da man keine negativen Strecken zeichnen kann.

- er beachtete die Tatsache nicht, dass auch negative Zahlen zum Quadrat positive Zahlen ergeben
- negative Zahlen kann man nicht graphisch darstellen

Abbildung 59: Beispiele von Schülerantworten zu Aufgabe 5 (Pilotklassen).

Die letzte Aufgabe in dieser Abfolge verfolgt den Zweck, die Lernenden auf die in einem neuen Licht erscheinende Bezeichnung „quadratische Ergänzung“ hinzuweisen.

(6.) Warum spricht man wohl (bis heute) von „quadratischer Ergänzung“?

In den Pilotklassen haben die meisten Schülerinnen und Schüler es unterlassen, schriftlich auf diese Frage zu antworten. Gleichwohl äußerten sie im Unterrichtsgespräch ein erweitertes Verstehen des Begriffes.

Die Ergebnisse der Quellenlektüre wurden zum Schluss in einem kurzen Plenumsgespräch zu folgendem Tafelanschrieb zusammengetragen:

- *Al-Khwarizmi schreibt keine Formeln sondern Texte.*
- *Er hat keine Lösungsformel.*
- *Er löst die Aufgabe geometrisch.*
- *Er erhält nur eine Lösung.*

In der Hausaufgabe sollen die Schülerinnen und Schüler die Handhabung der alten Lösungsmethode an einem analogen Beispiel üben und festigen (Arbeitsheft Aufgabe 7).

(7.) Ein Quadrat und acht seiner Wurzeln ergeben dreiunddreißig.

a.) Übersetze diese Gleichung in eine Formel und löse sie mit einer der heutigen Methoden.
b.) Stelle die Gleichung geometrisch mit Flächen dar und löse sie nach Art des Al-Khwarizmi.
c.) Stimmen die Lösungen aus a) und b) überein?

Bearbeitungsbeispiele aus den Pilotklassen zeigen die folgenden Abbildungen:

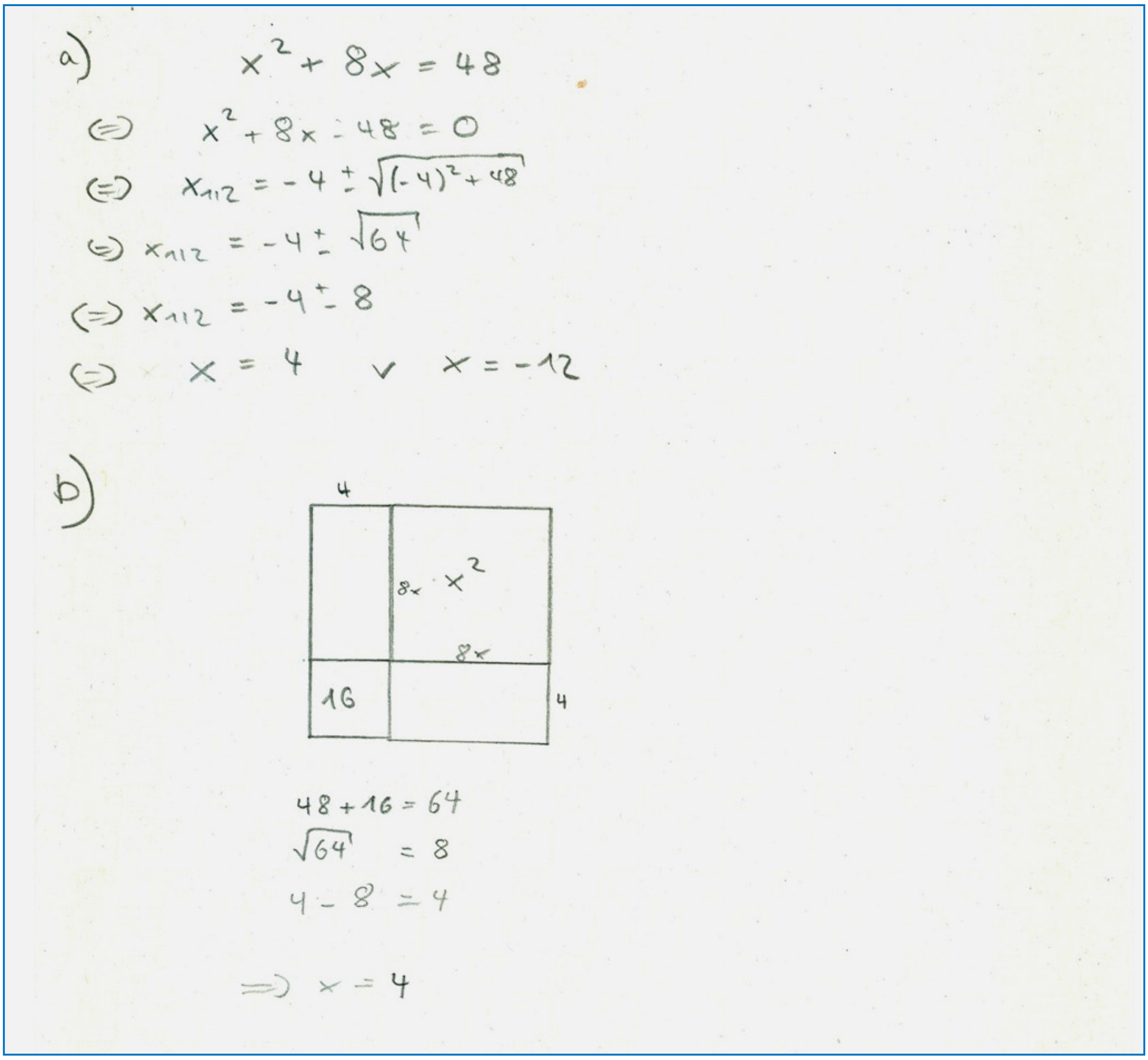


Abbildung 60: Beispiel einer Schülerantwort zu Aufgabe 7 (Pilotklassen).

a) $x^2 + 8\sqrt{x^2} = 48$

$\Leftrightarrow x^2 + 8x = 48$

$\Leftrightarrow x^2 + 8x - 48 = 0$

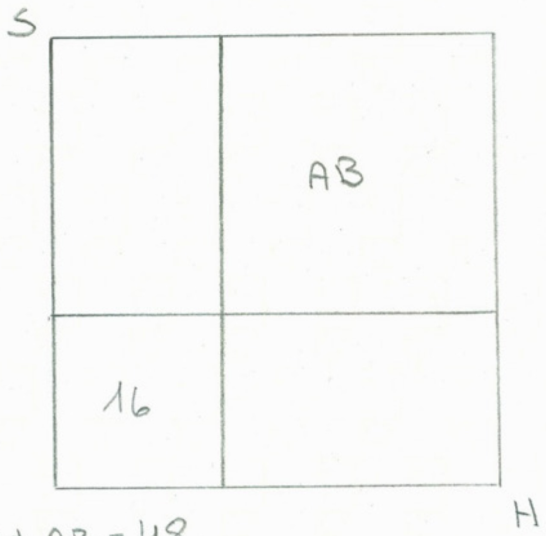
$\Leftrightarrow x_{1/2} = -\frac{8}{2} \pm \sqrt{\frac{64}{4} + 48}$

$\Leftrightarrow x_{1/2} = -4 \pm \sqrt{64}$

$\Leftrightarrow x_{1/2} = -4 \pm 8$

$\Leftrightarrow x = 4 \quad \vee \quad x = -12$

b)



$S + H + AB = 48$

$16 + 48 = 64$

$\sqrt{64} = 8$

$8 - 4 = 4$

Abbildung 61: Beispiel einer Schülerantwort zu Aufgabe 7.

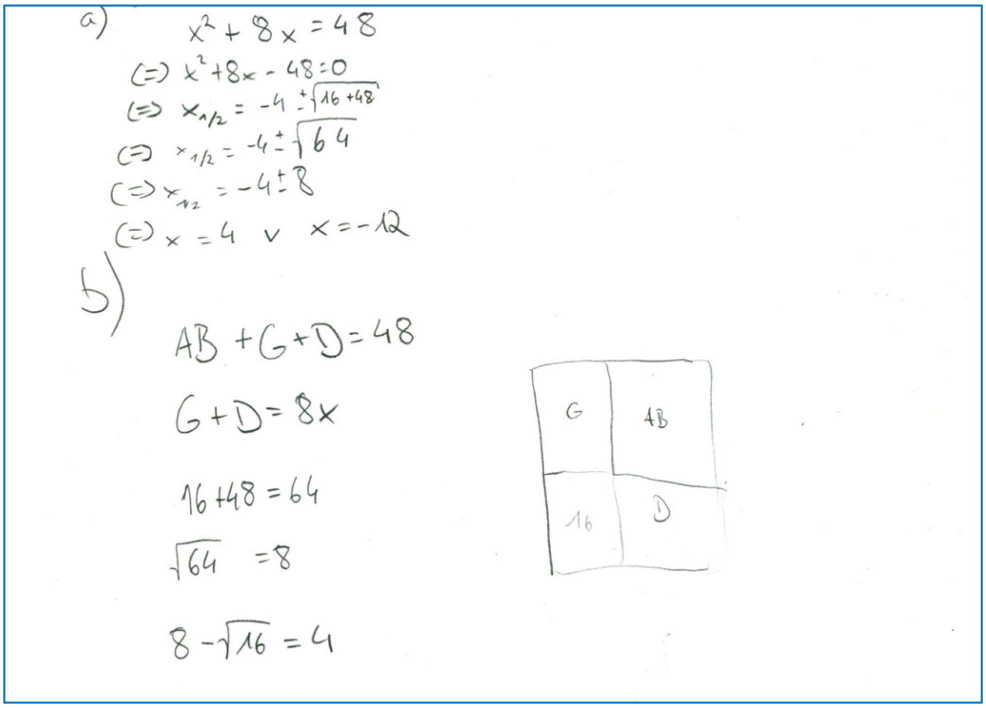


Abbildung 62: Beispiel einer Schülerantwort zu Aufgabe 7 (Pilotklassen).

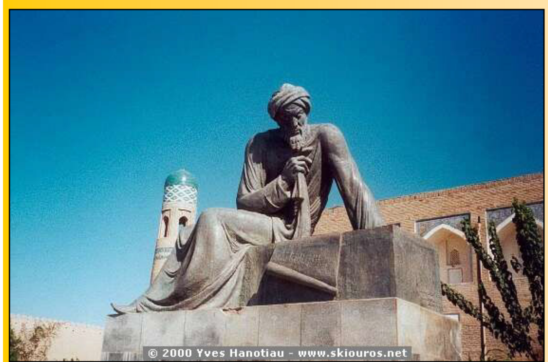
Ein zwischen Aufgabe 6 und 7 im Arbeitsheft abgedruckter, auffälliger Info-Kasten vermittelt zudem „en passant" erste grundlegende Informationen über Al-Khwarizmi und seinen Lebenskontext. Damit wird die hermeneutische Annäherung an den Text mit Blick auf den Autor intendiert.

Muhammad Al-Khwarizmi

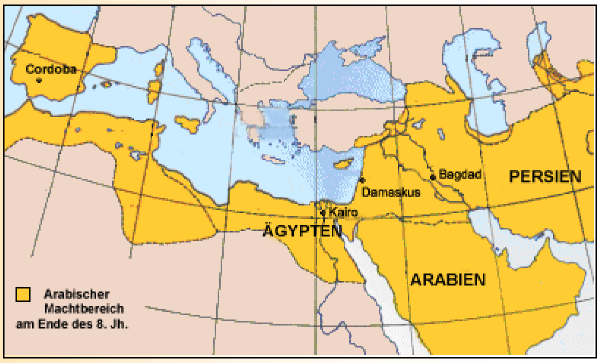
hieß mit vollem Namen: Abu Ja'far Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi. Sein Name deutet darauf hin, dass er aus der alten arabischen Stadt Khwarizm stammt, die jetzt Khiva heißt. Diese Stadt liegt in Zentralasien, südlich des Aralsees, in der heutigen Republik Usbekistan.

Zu der Zeit, als Al-Khwarizmi geboren wurde (um 780 n. Chr.), regierte der Kalif Harun Al-Raschid über das arabische Reich. Viele kennen den Namen dieses Kalifen aus den Geschichten aus „Tausendundeiner Nacht". Sein Reich besaß eine riesige Ausdehnung.

Haupt- und Regierungsstadt der Araber war Bagdad. Im dortigen „Haus der Weisheit", einer Art Universität, lehrte und forschte Al-Khwarizmi bis zu seinem Tode (ca. 840 bis 850 n. Chr.).



Al-Khwarizmi-Denkmal in der Stadt Khiva (heute Usbekistan)



Arabischer Machtbereich zu Al-Khwarizmis Zeit

Abbildung 63: Info-Kasten aus dem Arbeitsheft.

Einen Überblick über den Ablauf der ersten Stunde gewährt die nachstehende Tabelle.

Element	**methodische Hinweise**	**hermeneutische Aspekte**
Sammeln des (geschichtlichen und mathematikgeschichtlichen) Vorwissens	Kartenabfrage	Bewusstmachen des Vorverständnisses
Quellenlektüre (Aufgabenstellung)	Vorlesen oder Folie auflegen	Originale Begegnung: Text spricht selbst, keine Vorinterpretation eines „Experten“, Fremdheitswirkung erregt Aufmerksamkeit
Bearbeiten des Quellentextes	(vereinfachtes) Placemat	Verstehensstand jedes Einzelnen und der Gruppe(n) festhalten, Addition unterschiedlicher Verstehenskompetenzen, Artikulation des Verstandenen
Sammeln von Erwartungen an Al-Khwarizmis Lösung der Aufgabe	Plenumsgespräch	Bewusstmachen von Erwartungen
Quellenlektüre (Beschreibung und Begründung der Lösung) und Bearbeiten des Textes	Arbeitsheft, ggf. Lerntempoduett, Plenum	hermeneutischer Zirkel: Wechsel von divinatorischem Vorentwurf und komparativer Auslegung (vgl. Kap. 2.3.2.1.1); individuelle Verstehensinseln aufbauen; Verstehenserweiterungen auf der Basis eigener Arbeit und der Addition mit (Duett-)Partnern; Grenzen des eigenen Verstehens erfahren und in neue (partnerangeregte) Verstehensschleifen eintreten
Hausaufgabe	Arbeitsheft	Wiederholen, Üben

Tabelle 5: Überblick über den Ablauf der ersten Stunde.

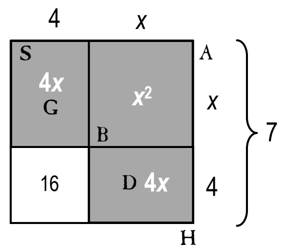
4.3.2.2.2 Zweite bis vierte Stunde: Erarbeitung

Nachdem die Schülerinnen und Schüler Al-Khwarizmis geometrische Denk- und Herangehensweise in der ersten Stunde kennen gelernt haben, sollen sie sich in dieser und in der nächsten Stunde anhand einiger Übungen mit ihr vertrauter machen. Auf diese Weise tauchen sie nicht nur weiter in die begriffliche Welt Al-Khwarizmis ein, sondern vergrößern auch ihre Kompetenz, Problemstellungen auf unterschiedliche Weisen auszudrücken und zu bearbeiten. Die Lernenden erhalten zu diesem Zweck Gleichungen in geometrischer, in symbolisch-formelhafter und in verbaler Darstellung. Der

Arbeitsauftrag lautet jeweils, die vorgegebene Darstellung in andere mögliche Repräsentationen zu „übersetzen“. Am Beispiel der Hausaufgabe zu dieser Stunde wird zunächst besprochen, was damit gemeint ist (Arbeitsheft Aufgabe 7).

In den Pilotklassen wurde der folgende Anschrieb an die Tafel gebracht:

Die graue Fläche entspricht den 33 (Dirhem/Einheiten). Das große Quadrat besitzt also die Fläche von 33 + 16 = 49 (Einheiten), seine Kantenlänge beträgt demnach 7 (Einheiten). Es folgt, dass die Kante des kleinen grauen Quadrats 3 Einheiten lang ist. (Die Zeichnung ist nicht maßstabsgetreu.)

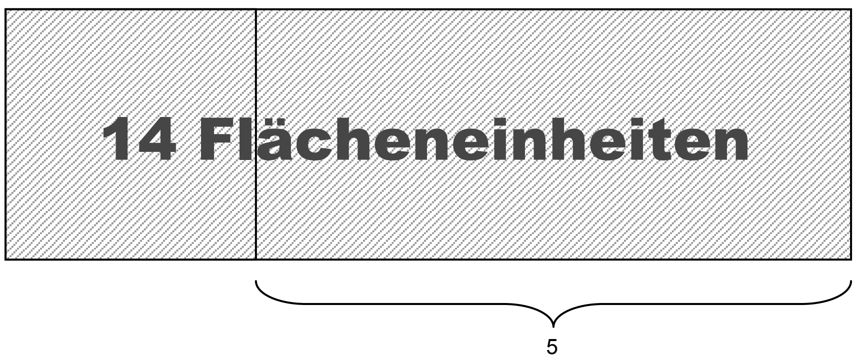


Die Aufgaben 8-13 im Arbeitsheft verfolgen den beschriebenen Zweck, die Schülerinnen und Schüler im Umgang mit geometrischen und verbalen Darstellungsarten für Gleichungen zu üben. Sie sind so angelegt, dass sie die technischen Kompetenzen der Lernenden allmählich erweitern, bis ihnen schließlich – in Nummer 13 – ein eigenständiger geometrischer Lösungsversuch für eine Gleichung zugetraut werden kann. Bei dieser handelt es sich um den Problemtyp D V aus Al-Khwarizmis *al-jabr*. Die Schülerinnen und Schüler können hierzu eine eigene Lösung samt Beweis finden, die sie später mit Al-Khwarizmis Verfahren, das auf S. 16 im Arbeitsheft abgedruckt ist, vergleichen können.

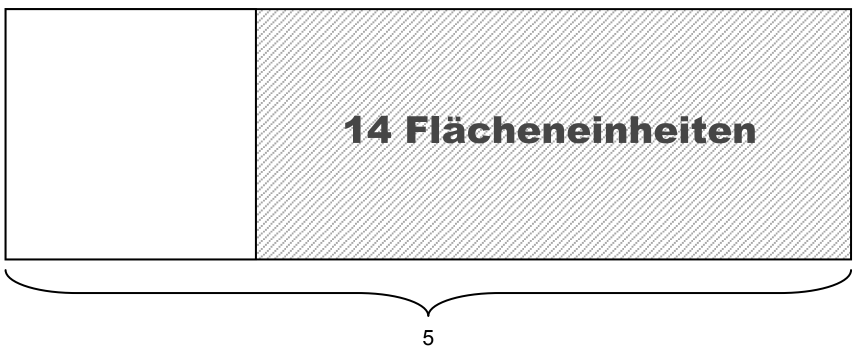
Die Aufgabe 9 führt zunächst in die geometrischen Repräsentationen der drei verschiedenen Gleichungsgrundtypen bei Al-Khwarizmi ein:

(9.) ***Vor Erfindung der Formelschrift wurden Gleichungen oft mit geometrischen Figuren dargestellt. Wir wollen das an einigen Beispielen nachempfinden.***

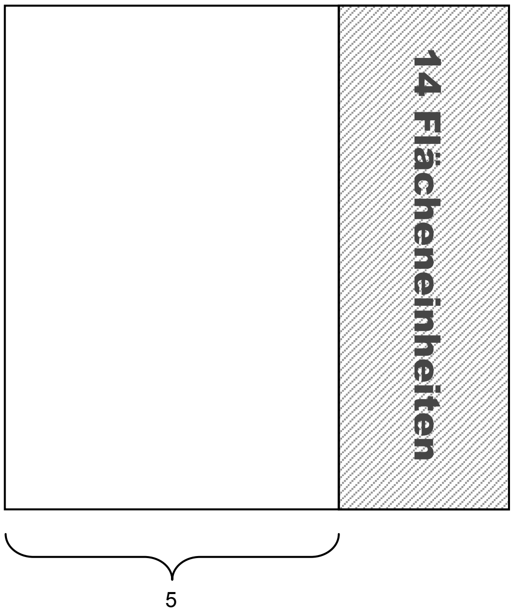
a. ***Welche quadratische Gleichung könnte durch die folgende Zeichnung dargestellt sein?***



b. ***Welche quadratische Gleichung könnte durch die folgende Zeichnung dargestellt sein?***



c. *Welche quadratische Gleichung könnte durch die folgende Zeichnung dargestellt sein?*

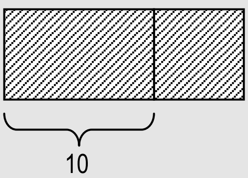


Die Schülerinnen und Schülern der Pilotklassen bearbeiteten diese wie auch die folgenden Aufgaben in kleinen Gruppen. Es bereitete ihnen wenig Mühe, in den vorgelegten Figuren die Gleichungen a. $x^2 + 5x = 14$, *b.* $x^2 + 14 = 5x$ *und c.* $x^2 = 5x + 14$ *zu erkennen. Dabei fanden sie heraus, dass man in den Zeichnungen nach dem Quadrat zu suchen habe, welches man mit* x^2 *zu identifizieren und dessen Seiten man mit x zu beschriften hätte. Außerdem wurden die drei Fälle als „Prototypen" quadratisch-geometrischer Gleichungen (in allgemeiner Form mit p und q) an die Tafel geschrieben.*

In der Aufgabe 10 geht es darum, Formvariationen zu erkennen und Figuren, die keine reinen Rechtecke mehr sind, mit einer Gleichung zu beschreiben.

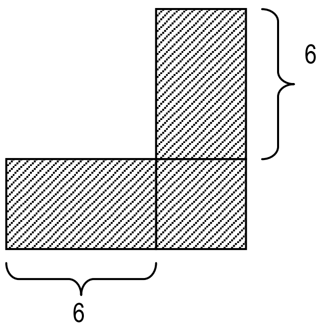
(10.) ***Ergänze wie im Beispiel!***

Beispiel:



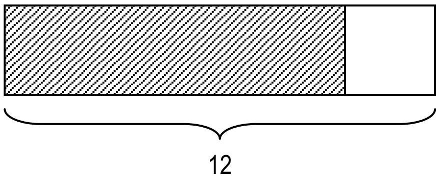
Die schraffierte Fläche entspricht 39 Flächeneinheiten.

▶ $x^2 + 10x = 39$

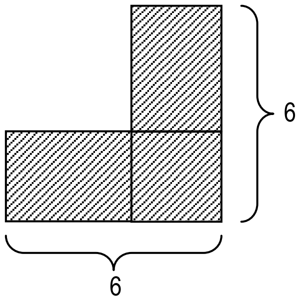


a. Die schraffierte Fläche entspricht 160 Flächeneinheiten.

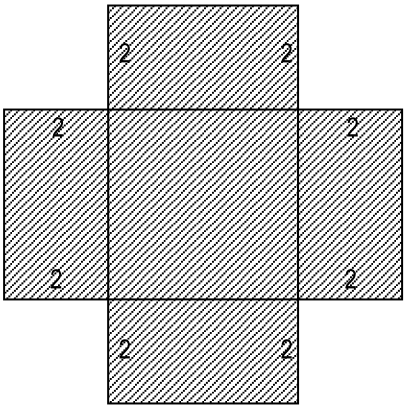
▶ ______________________



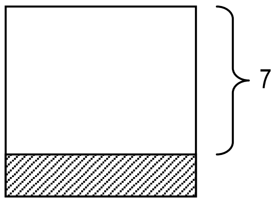
b. Die schraffierte Fläche entspricht 20 Flächeneinheiten.



c. Die schraffierte Fläche entspricht 20 Flächeneinheiten.



d. Die schraffierte Fläche entspricht 33 Flächeneinheiten.



e. Die schraffierte Fläche entspricht 8 Flächeneinheiten.

Auch die Bearbeitung dieser Aufgaben gelang den meisten Schülerinnen und Schülern in den Pilotklassen recht gut. Die häufigsten Schwierigkeiten gab es bei Nummer c. . Der Fehler $x^2 + 6x + 6x = x^2 + 12x = 20$*, der die quadratische Teilfläche doppelt zählt, trat einige Male auf. Etliche Schüler versuchten es mit der additiven Zerlegung* $x^2 + (6 - x)x + (6 - x)x = 20$*, woraus sie durch – dem historischen Kontext eigentlich nicht angemessenes – Umformungen* $x^2 + 6x - x^2 + 6x - x^2 = 20$ *und letztlich* $x^2 + 20 = 12x$ *gewannen. Kein Schüler der Pilotklassen entwickelte indes die Sichtweise, wonach zwei Rechtecke, jeweils mit dem Flächeninhalt 6x, einander im Quadrat überlappen, so dass entsprechend* $6x + 6x - x^2 = 20$ *bzw.* $12x - x^2 = 20$ *zu formulieren ist.*

10c. ist ein Beispiel für Al-Khwarizmis fünften Gleichungstyp, für den später – in den Aufgaben 12b. und 13 – eine geometrische Lösung gefunden werden soll. Der Gedanke an eine überlappte Figur kann und soll dabei die Suche nach einer Lösung erleichtern.

Auch die übrigen Teilaufgaben thematisieren Al-Khwarizmis Grundfiguren: 10a., b. und d. stellen weitere Beispiele für den vierten Gleichungstyp dar. 10d. motiviert eine alternative Lösung dieses

Typs mittels einer vierfachen Ergänzung in den „Ecken“. Al-Khwarizmi hat diese Lösung in seiner *al-jabr* ebenfalls aufgeführt (D IV,1-30C – im Schülermaterial wird dieser Text sonst nicht verwendet). 10e. schließlich repräsentiert Al-Khwarizmis sechsten Gleichungstyp.

In der Aufgabe 11 geht es um Übersetzungen in die andere Richtung. Bei a. handelt es sich um Gleichungstyp 6, bei b. um Gleichungstyp 5.

(11.) ***Stelle die folgenden Gleichungen jeweils durch eine Zeichnung dar.***

a. $x^2 = 5x + 6$
b. $x^2 + 5 = 10x$

In den Pilotklassen hatten die Übungen die erhoffte Sicherheit im Umgang mit Gleichungen und flächenhaften Figuren hergestellt, so dass die Bearbeitung keine Probleme mehr bereitete. Beispiele von Schülerantworten zeigen die folgenden Abbildungen:

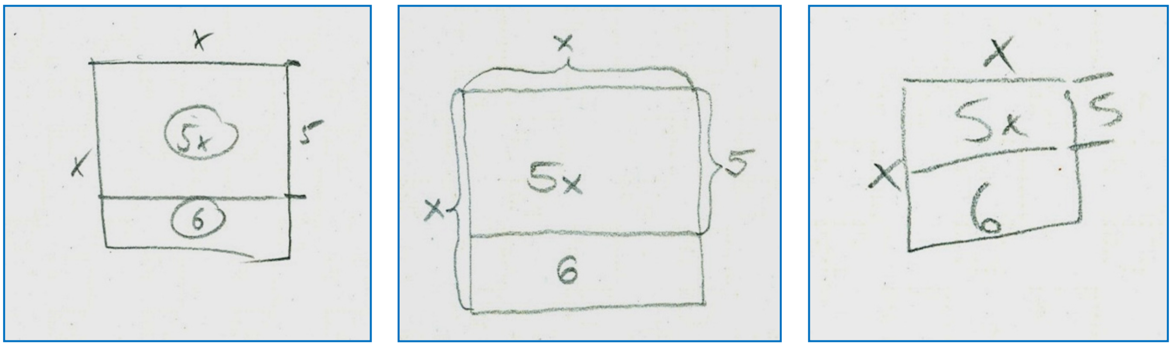


Abbildung 64a-c: Beispiele für Schülerantworten zu Aufgabe 11a (Pilotklassen).

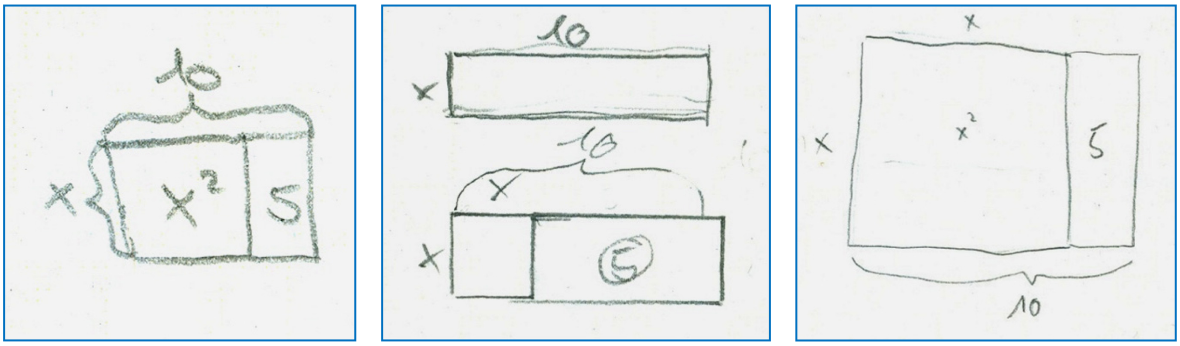
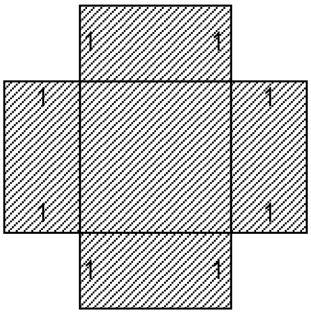


Abbildung 65a-c: Beispiele für Schülerantworten zu Aufgabe 11b (Pilotklassen).

Bisher ging es darum, die Schülerinnen und Schüler im Wechsel des Repräsentationsmodus zu üben. Mit den Aufgaben 12 und 13 wird nun beabsichtigt, über das bloße Übersetzen von Gleichungen zwischen den Modi hinauszukommen und ihre geometrische Lösung nach der Art Al-Khwarizmis vorzubereiten. 12a. greift in Anknüpfung an 10d. zunächst noch einmal Al-Khwarizmis Gleichungstyp 4 auf und thematisiert seinen Lösungsweg gemäß Quellenauszug D IV,1-30C (ohne allerdings auf die historische Herkunft hinzuweisen).

(12.) ***Da es früher keine Formelschrift gab, konnten Gleichungen auch nicht mit Termumformungen gelöst werden. Stattdessen mussten Mathematiker wie Al-Khwarizmi versuchen, die entsprechenden Zeichnungen so umzugestalten, dass sie die Lösung in der Figur ablesen konnten. Bei quadratischen Gleichungen hieß das: man musste herausfinden, wie lang eine Kante des gezeichneten Quadrats war.***

a. Welche quadratische Gleichung wird durch die folgende Zeichnung dargestellt? Finde die Lösung dieser Gleichung, indem du die Figur zu einem vollständigen Quadrat ergänzt!



Gleichung lautet:

Die schraffierte Fläche entspricht 12 Flächeneinheiten.

In den Pilotklassen bereitete diese Aufgabe einigen Schülerinnen und Schülern Mühe. Die Gleichung $x^2 + 4x = 12$ *wurde zwar von nahezu allen richtig erkannt. Dann aber kamen einige Schüler nicht mehr weiter. Andere erhielten durch fehlerhafte Argumentation das Ergebnis* $x = 4$*. Beispiele für solche Bearbeitungen zeigen die folgenden Abbildungen:*

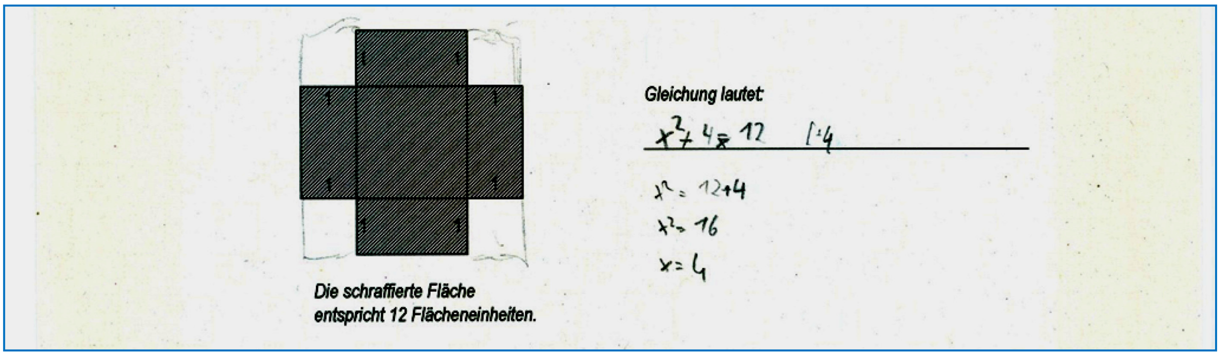


Abbildung 66: Beispiel für eine Schülerantwort zu Aufgabe 12a (Pilotklassen). Der Schüler hat die sinnvolle Ergänzung in den Ecken der vorgegebenen Figur noch erkannt. Dann aber löst er die Gleichung nicht mittels geometrischer Überlegungen sondern anhand des symbolischen Umformungsformalismus, wobei er sich freilich schon bei der ersten Umformung vertut und infolgedessen das falsche Ergebnis $x = 4$ errechnet.

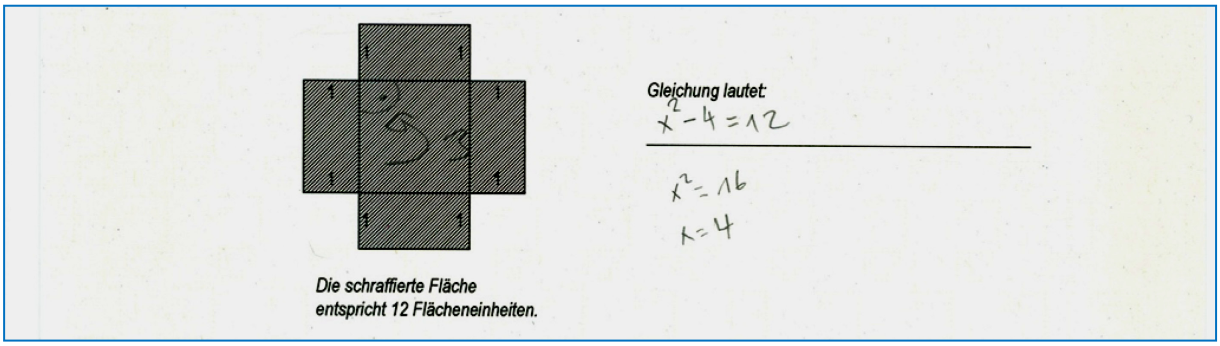


Abbildung 67: Beispiel einer Schülerantwort zu Aufgabe 12a (Pilotklassen). Dieser Schüler ermittelt mit x anscheinend die Kantenlänge des ergänzten, größeren Quadrates, wobei er es freilich unterlässt, die vier Ecken auszufüllen. Seine Gleichung, $\boldsymbol{x^2 - 4 = 12}$, lässt jedoch die Vermutung zu, dass er sich das große Quadrat vor-

gestellt hat, von welchem 4 Flächeneinheiten (die vier Ecken) abgezogen wurden, so dass ein Flächeninhalt von 12 Einheiten (entsprechend der Kreuzfigur) übrig blieb. Ähnliche Überlegungen haben auch andere Schüler angestellt. Die Beschriftung einer Kante des inneren Quadrates mit „3“ ist im vorliegenden Beispiel allerdings fehlerhaft. Hier müsste „2“ stehen. Sie ist allerdings ein Hinweis darauf, dass geometrische Überlegungen tatsächlich angestellt wurden und nicht etwa (ausschließlich) symbolisch umgeformt wurde.

Beispiele für richtige Lösungen sind in den folgenden Abbildungen dargestellt.

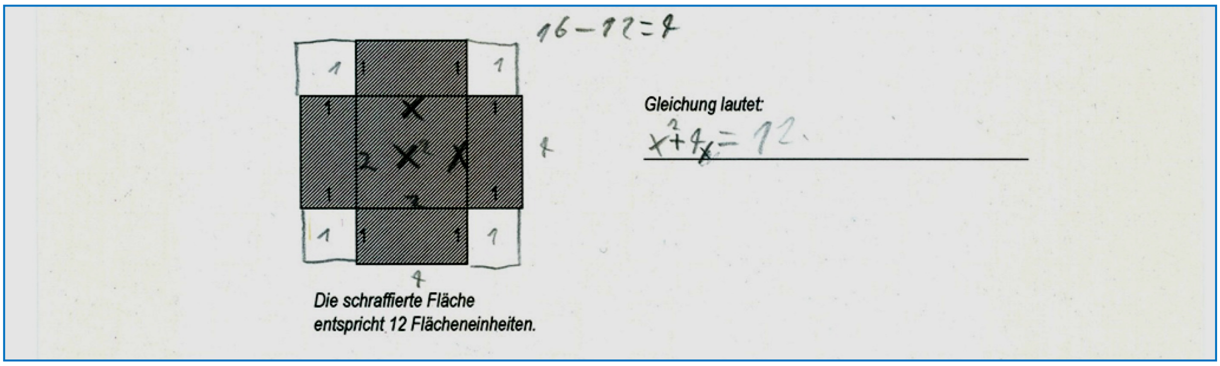


Abbildung 68: Beispiel einer Schülerantwort zu Aufgabe 12a (Pilotklassen). Die korrekte Lösung (x = 2) ist in der Zeichnung eingetragen. Dort wurde sie allem Anschein nach auch ermittelt, da Notizen zu symbolischen Umformungen der Gleichung fehlen.

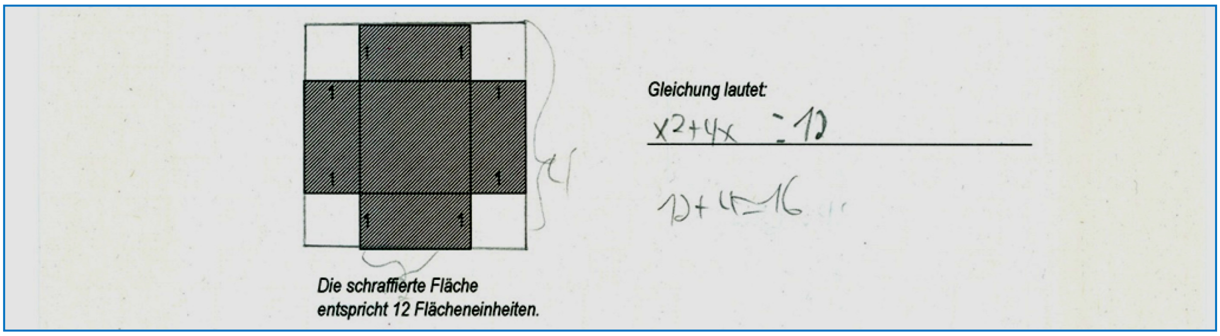


Abbildung 69: Beispiel einer Schülerantwort zu Aufgabe 12a (Pilotklassen). Auch hier ist die korrekte Lösung am „Entstehungsort“ in der Zeichnung eingetragen (über den gedruckten Text).

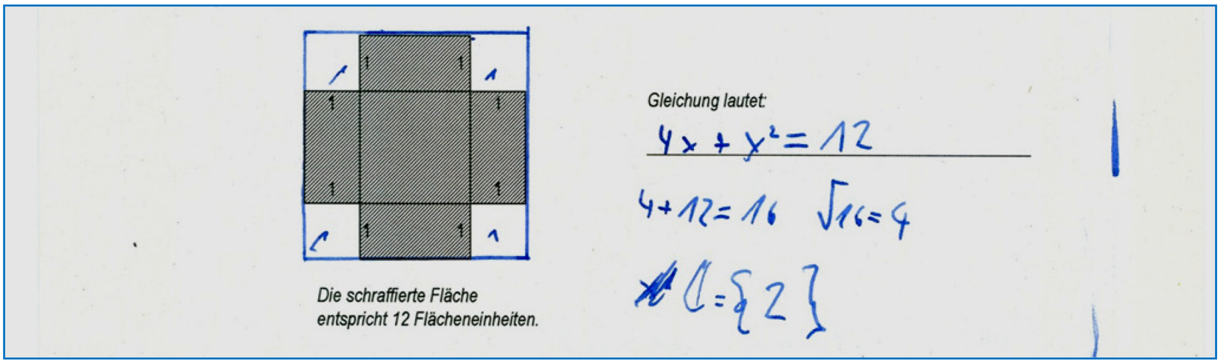
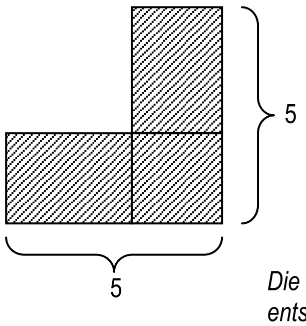


Abbildung 70: Beispiel einer Schülerantwort zu Aufgabe 12a (Pilotklassen). Die korrekte Lösung ist hier als Lösungsmenge angegeben.

In Aufgabe 12b geht es nun um den Gleichungstyp 5 bei Al-Khwarizmi, der insbesondere in 10c., aber auch in 11b. schon vorbereitet wurde.

b. Kannst du die Gleichung, die durch die folgende Zeichnung dargestellt ist, auf ähnliche Weise lösen? Versuche wieder, die Figur zu einem vollständigen Quadrat zu ergänzen.



Gleichung lautet:

Die schraffierte Fläche entspricht 21 Flächeneinheiten.

Bemerkenswerterweise fiel die Bearbeitung dieser Aufgabe vielen Schülerinnen und Schülern der Pilotklassen leichter als die vorhergehende Aufgabe. Der Anteil richtiger Lösungen fiel dementsprechend höher aus. Einige Beispiele zeigen die folgenden Abbildungen.

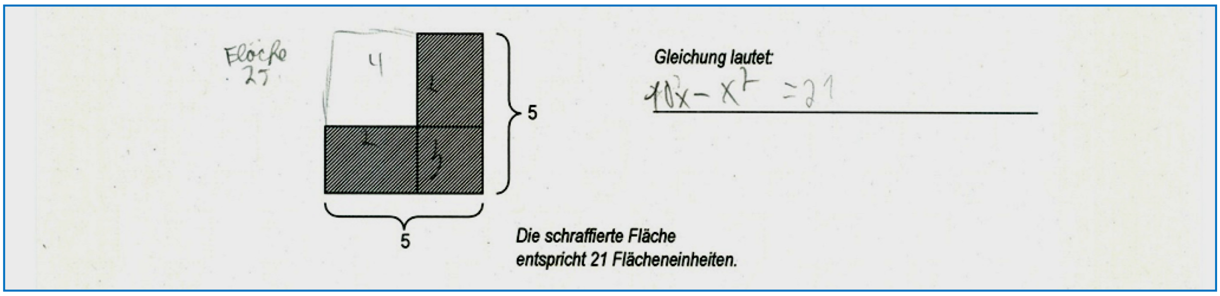


Abbildung 71: Beispiel einer Schülerantwort zu Aufgabe 12b. Die Beschriftung ist stimmig und lässt auf eine zutreffende geometrische Argumentation schließen. Es fehlt die Angabe der Lösung ($x = 3$), so dass letztlich nicht ganz klar ist, ob der Schüler die Zahl 3 oder die Zahl 2 – was gelegentlich explizit vorkam – für das Ergebnis hält.

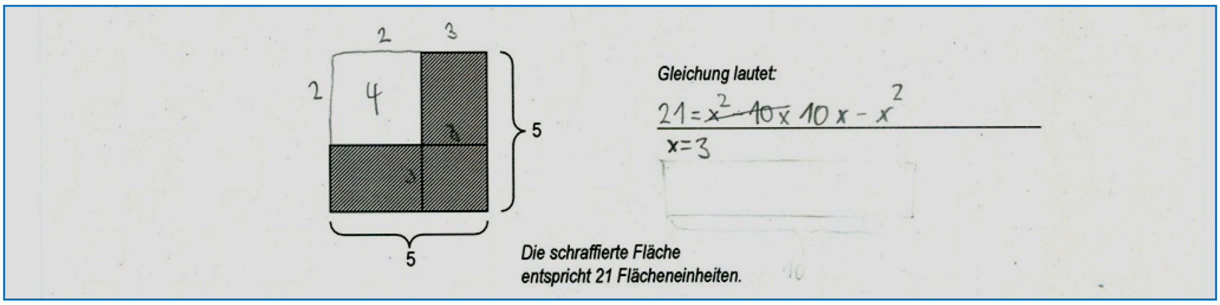
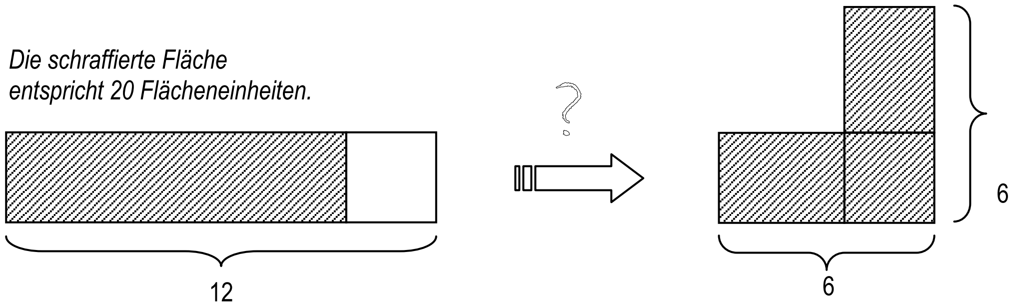


Abbildung 72: Beispiel einer Schülerantwort zu Aufgabe 12b. Die Lösung wird hier – wie in der Mehrzahl aller Fälle – ausdrücklich notiert ($x = 3$).

In Aufgabe 12c. wird derselbe Gleichungstyp noch in einer anderen, schlichteren und naheliegenderen Weise als einfaches Rechteck dargestellt. Neben der Frage nach der Lösung geht es hier vor allem darum zu überlegen, wie die Rechtecksfigur in den Winkelhaken umgebildet werden kann.

c. Löse auch die Gleichung, die durch die linke Zeichnung dargestellt ist. Überlege, durch welche Schritte die linke Figur in die rechte verwandelt werden kann.



*Gleichung lautet:*______________________________

Wie macht man aus der linken Figur die rechte?

____

____

____

____

In den Pilotklassen wurde die Verwandlung von der großen Mehrheit der Schülerinnen und Schüler zutreffend als Überlappungsphänomen erklärt. Indes vergaßen viele danach, den zweiten Teil der Aufgabe – das Lösen der Gleichung – auch noch zu erledigen.

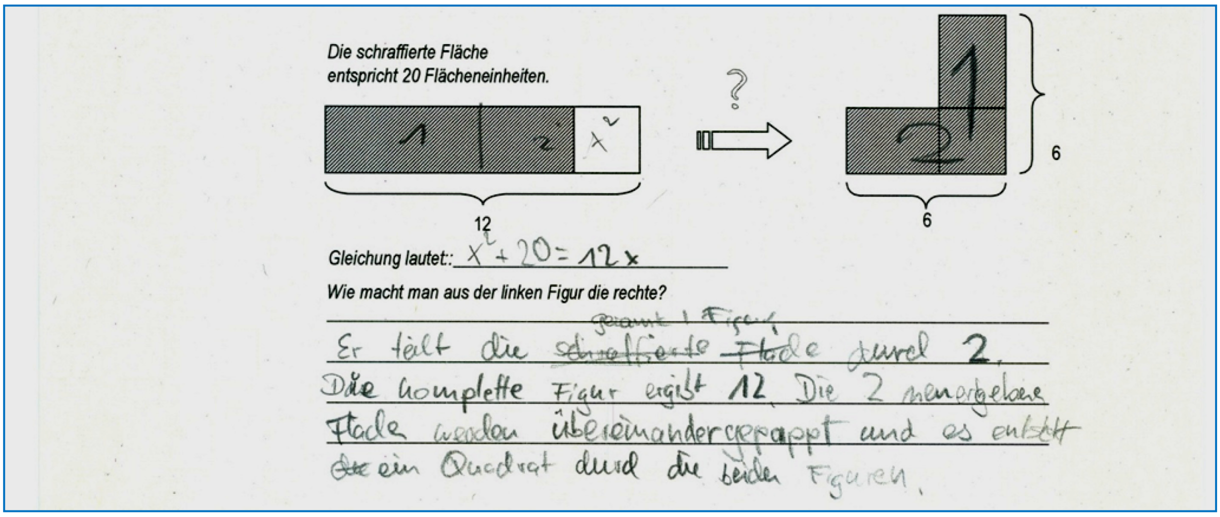


Abbildung 73: Beispiel einer Schülerantwort zu Aufgabe 12c. (Pilotklassen). Die Gleichung wurde richtig erkannt und die Verwandlung zutreffend und anschaulich erklärt, wenngleich die Bedeutung des Satzes „Die komplette Figur ergibt 12“ unklar bleibt. Es entsteht ferner nicht – wie behauptet wird – ein Quadrat, sor zunächst ein Winkelhaken, der allerdings zu einem Quadrat ergänzt werden kann. Die Ergänzung (und Lö der Gleichung) hat der Schüler jedoch unterlassen.

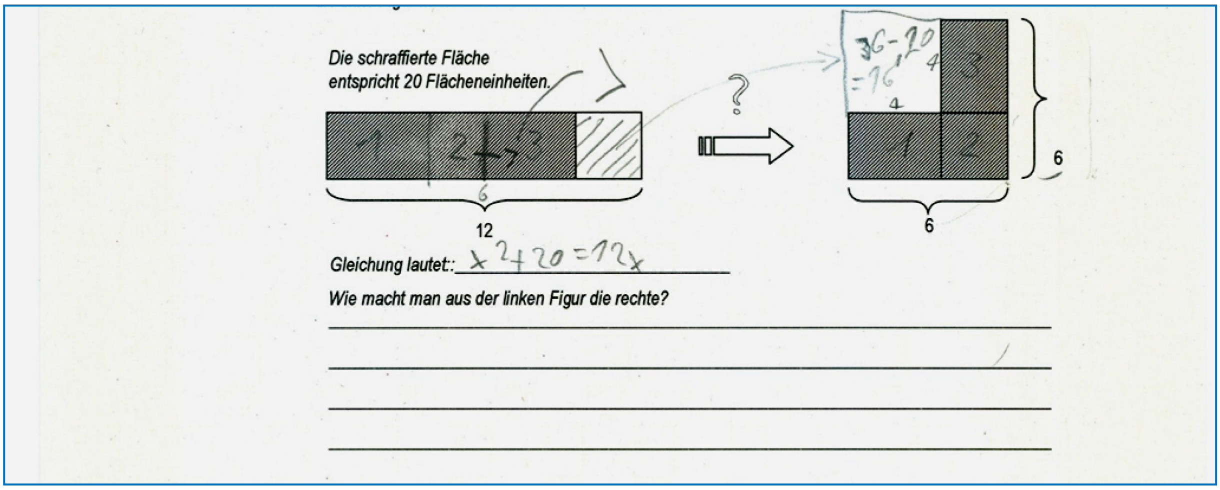


Abbildung 74: Beispiel einer Schülerantwort zu Aufgabe 12c. (Pilotklassen). Der Schüler hat keinen Text geschrieben, dafür aber die Zeichnung stimmig beschriftet. In der rechten Figur unternimmt er einen Lösungsversuch, der jedoch mit der Kantenlänge des ergänzten Quadrates endet, so dass offen bleibt, ob der Schüler die richtige Lösung $x = 6 - 4 = 2$ erkannt hat.

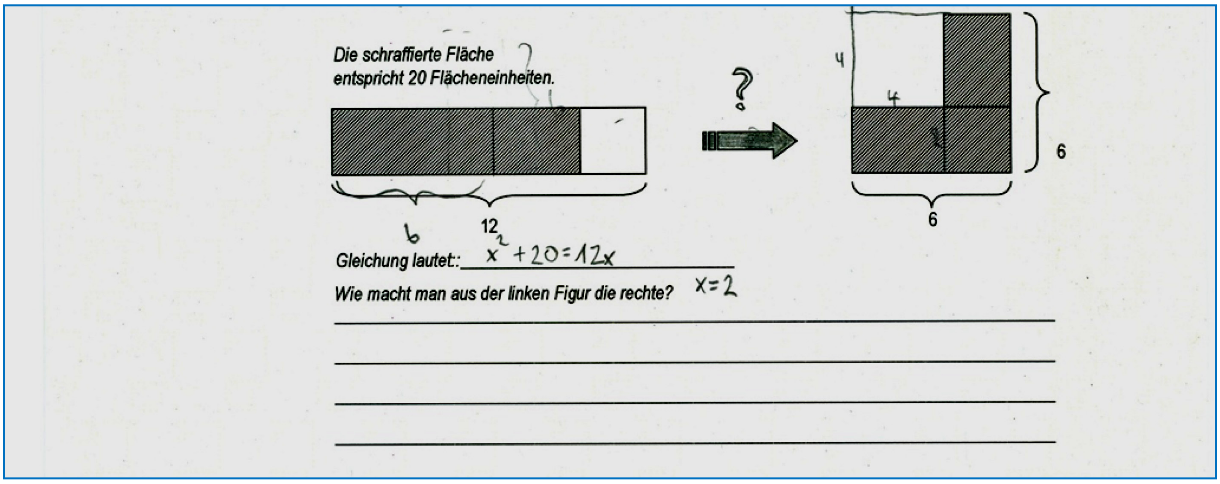


Abbildung 75: Beispiel einer Schülerantwort zu Aufgabe 12c (Pilotklassen). Der Schüler erklärt die Verwandlung nicht – möglicherweise hat dies ein Gruppenpartner in seinen Unterlagen getan – er bestimmt aber die Lösung der Gleichung auf geometrischem Wege.

Zum Schluss der Aufgabensequenz, sollen die Schülerinnen und Schüler – ggf. in der Hausaufgabe – versuchen, eine Aufgabe gemäß Al-Khwarizmis Gleichungstyp 5 – es handelt sich sogar genau um die bei ihm besprochene Musteraufgabe – geometrisch zu lösen.

(13.) ***„Ein Quadrat und einundzwanzig ergeben zehn Wurzeln des Quadrates.“***
Löse diese Gleichung geometrisch wie in Aufgabe 12.

Nach den geleisteten Vorarbeiten hatten die meisten Schülerinnen und Schüler der Pilotklassen mit dieser Aufgabe keine Probleme. Folgende Beispiele illustrieren dies:

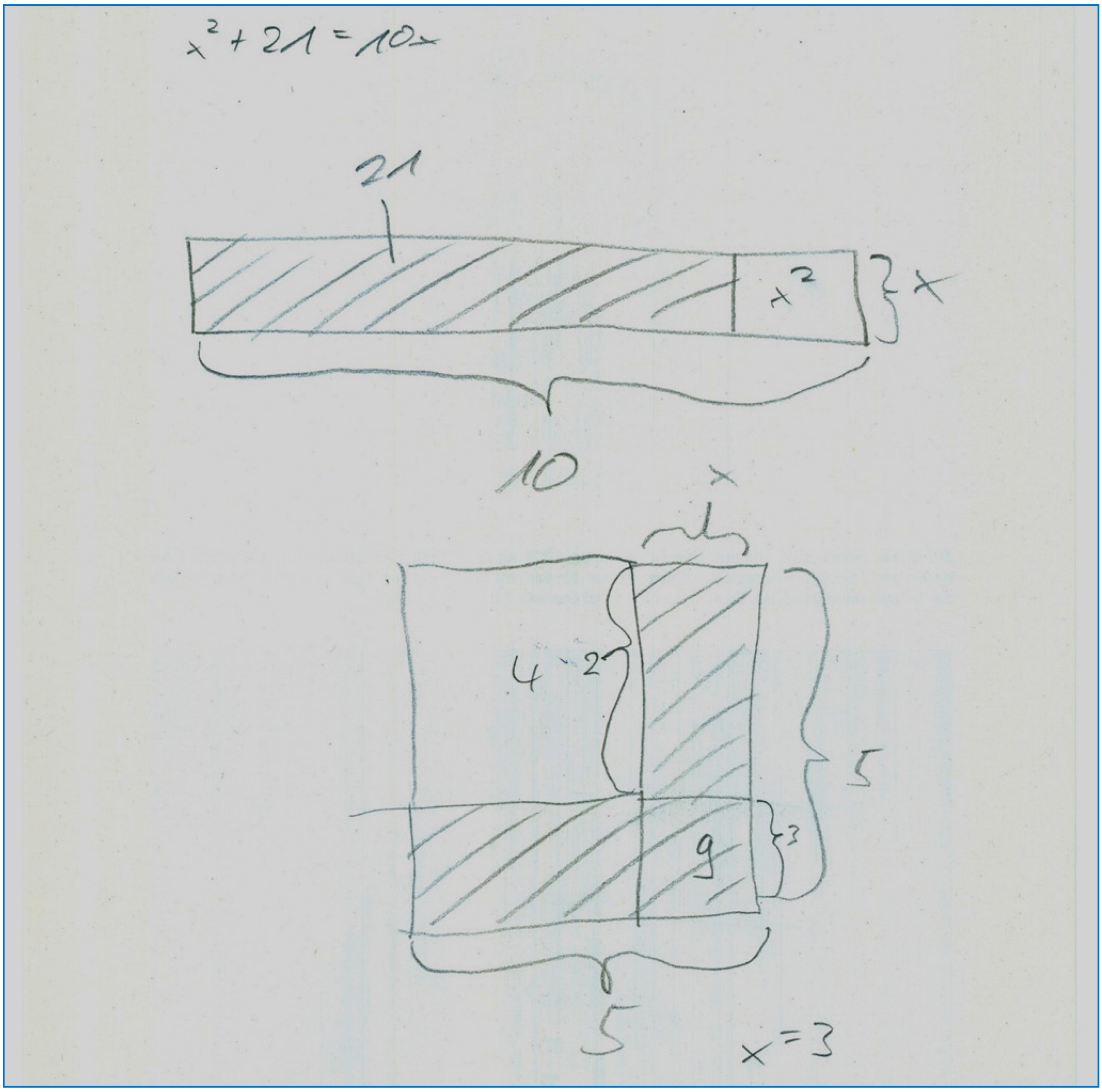


Abbildung 76: Beispiel einer Schülerantwort zu Aufgabe 13 (Pilotklassen).

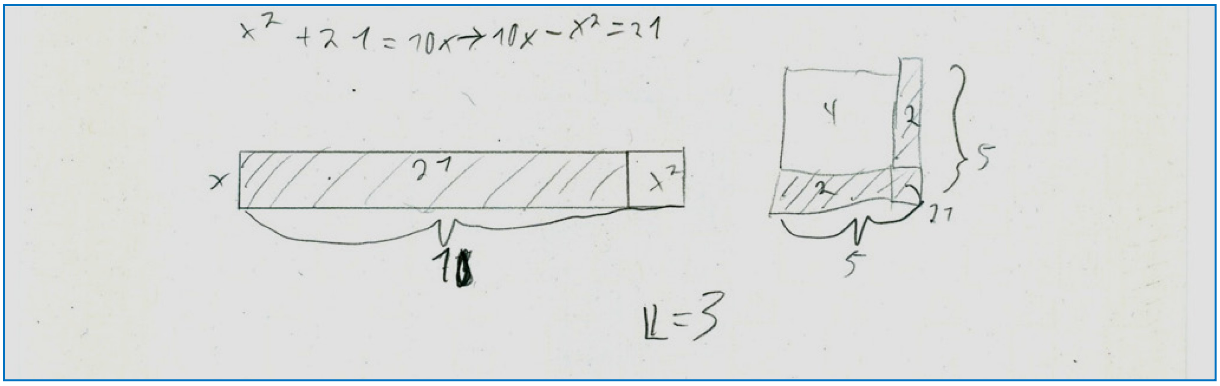


Abbildung 77: Weiteres Beispiel einer Schülerantwort zu Aufgabe 13 (Pilotklassen).

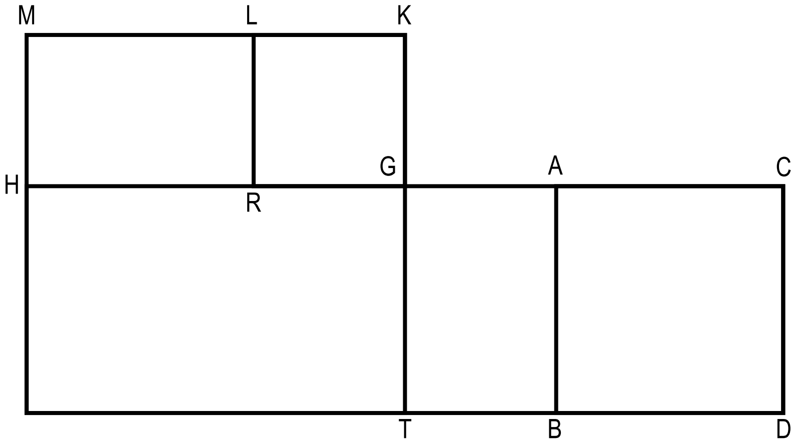
Die Schülerinnen und Schüler sollen die Bearbeitung der Aufgaben 9 bis 13 sowie den Austausch darüber innerhalb von zwei Stunden (2. und 3. Stunde der Reihe) abschließen.

In den Pilotklassen wurde die Bearbeitung dieser Aufgaben auf methodisch unterschiedliche Weise durchgeführt. In der ersten der beiden Klassen wurden die Schülerinnen und Schüler einfach aufgefordert, das Material innerhalb von zwei Stunden durchzuarbeiten, Lösungsansätze miteinander zu diskutieren und die erhaltenen Ergebnisse mit den im Klassenraum ausliegenden Lösungskärtchen zu vergleichen. Da nach meinem Eindruck auf diese Weise individuelle Ansätze Einzelner zu schnell von Partner- oder Gruppengesprächen verdrängt wurden, habe ich in der zweiten Pilotklasse auf ein Mindestmaß von 15 Minuten stiller Einzelarbeit pro Unterrichtsstunde bestanden. Erst im Anschluss an diese Phase war der Austausch mit einem Partner oder in einer Gruppe gestattet. Hinsichtlich der Qualität der Arbeitsergebnisse konnte ich jedoch keine nennenswerten Unterschiede zwischen den beiden Klassen ausmachen.

Die methodische Ausgestaltung der beiden Stunden bleibt im Hinblick auf die unterschiedlichen Situationen vor Ort dem unterrichtenden Lehrer überlassen. Ein zusätzliches Informationsangebot für die Lernenden stellen die zwischen Aufgabe 13 und 14 eingestreuten Abbildungen und biographischen Notizen zu Al-Khwarizmi dar. Mit ihnen wird erneut die hermeneutische Annäherung an den Text mit Blick auf den Autor und seine Lebenswelt intendiert.

In der vierten Stunde der Reihe soll nun Al-Khwarizmis Lösung zu Aufgabe 13 studiert werden. Dazu lesen die Schülerinnen und Schüler den Quellenauszug D V (Arbeitsheft S. 16):

[1a]Ein Quadrat und einundzwanzig einfache Zahlen sind gleich zehn Wurzeln desselben Quadrats. [1b]Das heißt, wie groß muss ein Quadrat sein, welches, wenn man einundzwanzig Dirhems hinzufügt, genauso groß wird wie zehn Wurzeln dieses Quadrats? (...)
[2]Wir repräsentieren das Quadrat durch die quadratische Fläche AD, dessen Seitenlänge wir nicht kennen. [3a]Dieser[Fläche] fügen wir ein Parallelogramm [Rechteck] hinzu, [3b]dessen eine Seite gleich ist einer Seite der Quadratfläche AD. [4]Dieses Parallelogramm [Rechteck] ist HB. [5]Die Länge der beiden Figuren ist zusammen gleich der Linie HC. [6]Wir wissen, dass diese Länge gleich zehn Einheiten ist; [...] [7a]Da es zuvor heißt, dass ein Quadrat und einundzwanzig Einheiten gleich zehn Wurzeln sind, [7b]können wir schlussfolgern, dass die Länge der Linie HC gleich zehn Einheiten ist, [7c]denn die Linie CD repräsentiert die Wurzel des Quadrats. [8]Wir teilen nun die Linie CH im Punkt G in zwei gleiche Teile [...] [9a]Der Linie GT fügen wir in gleicher Richtung ein Stück hinzu, [9b]das genauso groß ist wie die Differenz zwischen CG und GT [...]. [10a]Dann wird die Linie TK gleich groß wie KM [10b]und wir haben eine neue Quadratfläche, [...] nämlich MT. [11a]Wir wissen, dass die Linie TK gleich fünf ist; [11b]dies ist folglich auch die Länge der anderen Seiten: [11c]die Quadratfläche selbst ist fünfundzwanzig. [...] [12a]Wir nehmen von der Linie KM das Stück KL, [12b]das gleich GK ist; [12c]es wird dann deutlich, dass die Linie TG gleich ML ist; [13a]außerdem ist die Linie KL, die von KM abgeschnitten wurde, gleich KG; [13b]folglich ist das Rechteck MR gleich TA. [14]Es ist also klar, dass das Rechteck HT, vergrößert um das Rechteck MR, gleich dem Rechteck HB ist, [14b]welches die einundzwanzig repräsentiert. [15]Wir hatten schon gesehen, dass die ganze Quadratfläche MT gleich fünfundzwanzig ist. [16a]Wenn wir nun von dieser Quadratfläche MT die Rechtecke HT und MR (die gleich einundzwanzig sind) subtrahieren, verbleibt eine kleine Quadratfläche KR, [16b]die die Differenz zwischen fünfundzwanzig und einundzwanzig repräsentiert. [17a]Sie ist vier; [17b]und ihre Wurzel, repräsentiert durch die Linie RG, welche AG gleich ist, ist zwei. [18a]Wenn du diese Zahl von der Linie CG (welche die Hälfte der Wurzeln ist) subtrahierst, dann bleibt die Linie AC übrig; [18b]also drei, [18c]welches die Wurzel des ursprünglichen Quadrats ist.



Diesen Text zu lesen und zu verstehen bereitete den meisten Schülerinnen und Schülern der Pilotklassen große Probleme. Al-Khwarizmis Argumentation nachzuvollziehen erfordert in der Tat ein hohes Maß an Konzentration. Deshalb habe ich in beiden Klassen auf zehn Minuten ungestörter Stillarbeit bestanden, gefolgt von einer fünfzehnminütigen Phase des kooperativen Austauschs. Verständnis für die Argumentation als Ganzes stellte sich von allein nur bei wenigen Schülerinnen und Schülern ein. Dennoch verfügte fast jeder über lokale „Verstehensinseln", die durch Addition in Gruppen- und Partnergesprächen zumeist erweitert werden konnten.Beispiele solcher „Inseln" zeigen die folgenden Abbildungen.

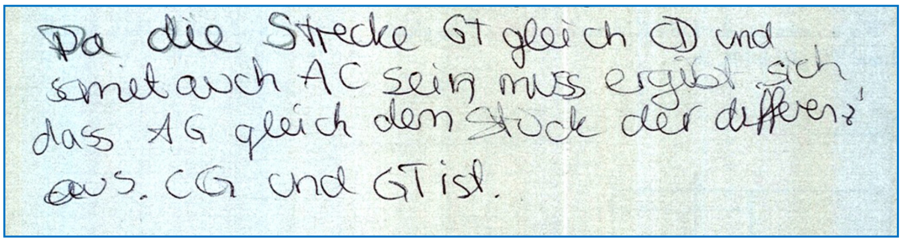

Da die Strecke GT gleich CD und somit auch AC sein muss ergibt sich dass AG gleich dem Stück der differenz aus. CG und GT ist.

Abbildung 78: Beispiel einer Schülernotiz zum Quellenauszug D V (Pilotklassen). Hier erklärt ein Schüler, warum die Differenz aus CG und GT genauso groß ist wie GA (Satz 9b).

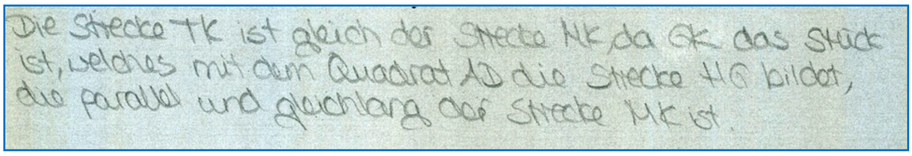

Die Strecke TK ist gleich der Strecke MK da GK das Stück ist, welches mit dem Quadrat AD die Strecke HG bildet, die parallel und gleichlang der Strecke MK ist.

Abbildung 79: Beispiel einer Schülernotiz zum Quellenauszug D V (Pilotklassen). Der Schüler erklärt, wieso TK genauso lang ist wie KM (Satz 10a). Die Formulierung ist nicht ganz einwandfrei. Statt „mit dem Quadrat AD die Strecke HG bildet" hieße es besser „mit der Seite AC des Quadrats AD die Strecke GC bildet, die genauso lang ist wie HG".

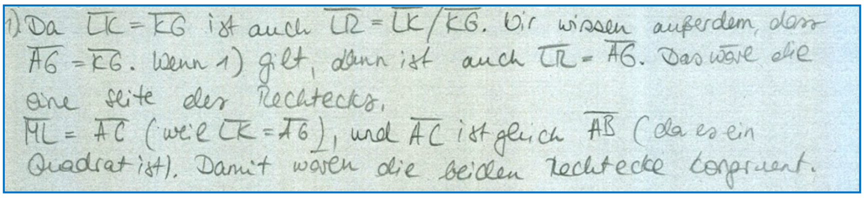


Abbildung 80: Beispiel einer Schülernotiz zum Quellenauszug D V (Pilotklassen). Der Schüler erklärt, wieso die Rechtecke MR und TA den gleichen Flächeninhalt haben (Satz 13b).

Im Zuge dieser Arbeit entstanden auch einige gute Skizzen, wie die Abbildungen Abbildung 81 *bisAbbildung* 83 *zeigen.*

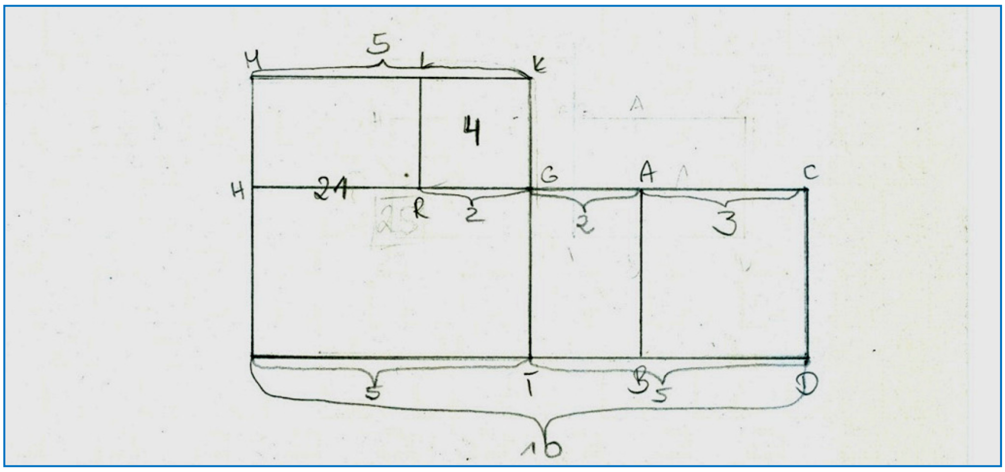


Abbildung 81: Beispiel einer Schülerzeichnung nach der Lektüre von Quellenauszug D V (Pilotklassen).

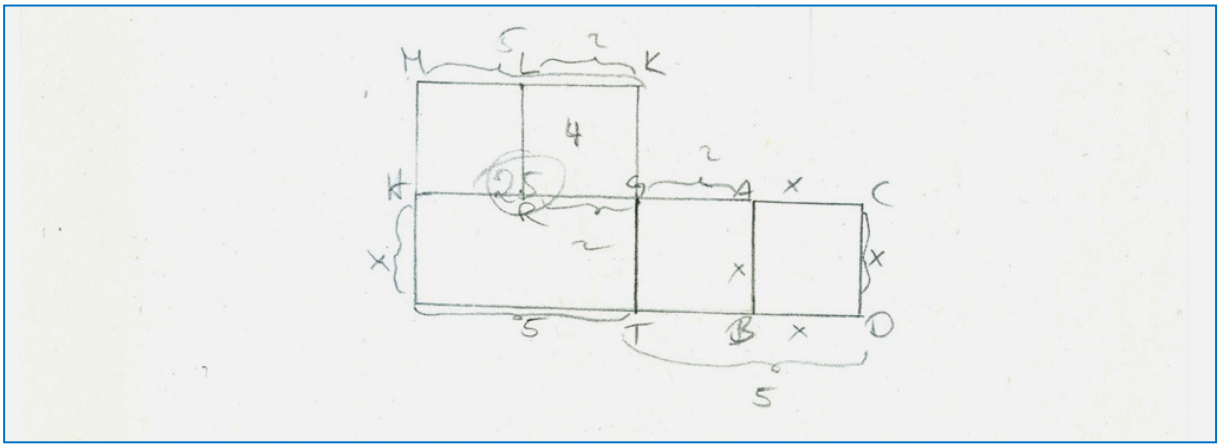


Abbildung 82: Beispiel einer Schülerzeichnung nach Lektüre des Quellenauszugs D V (Pilotklassen).

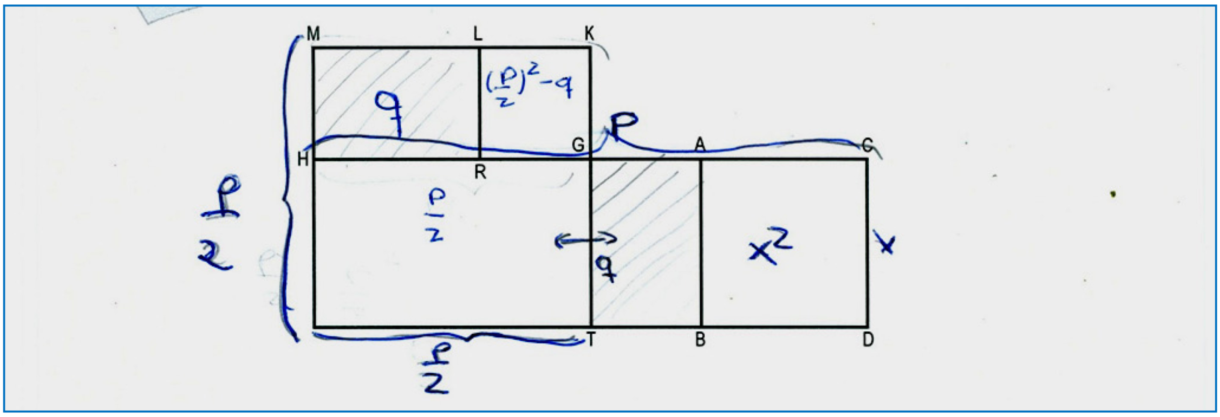


Abbildung 83: Beispiel einer Schülerzeichnung nach Lektüre des Quellenauszugs D V (Pilotklassen). Der Schüler hat versucht, von den konkreten Zahlen zu abstrahieren.

Obwohl die Lektüre des Quellenauszugs D V auf den ersten Blick scheinbar keinen Fortschritt bedeutet – die Aufgabe ist ja bereits auf einfachere Weise gelöst worden – erfüllt sie eine wichtige hermeneutische Funktion: Sie führt den Schülerinnen und Schülern nämlich die tatsächliche Widerständigkeit einer fremden Denkweise vor Augen, die nach Durcharbeit des ersten Beispiels oft vorschnell als besonders anschaulich und klar begrüßt wird. Die Lernenden erkennen nunmehr, dass sich auch (und gerade) die Mathematik eines Al-Khwarizmi nicht auf einen kurzen Blick, „auf ein Fingerschnippen hin“ (Ryszard Kapuścinski) enthüllt, sondern erhebliche Verstehensanstrengungen erfordert (vgl. Kap. 2.3.2.3, 2.3.2.7).

Die Lektüre des Quellenauszugs D V kann dementsprechend sinnfällig in eine erste Reflexionsphase münden, in welcher die Lernenden über die Merkmale sowie die Vor- und Nachteile der geometrischen Lösungsverfahren diskutieren – der selbst ersonnenen wie auch der von Al-Khwarizmi.

Die Schülerinnen und Schüler der Pilotklassen äußerten sich an dieser Stelle ausgiebig und sehr differenziert. Generell wurde das in der ersten Stunde behandelte Verfahren für Gleichungstyp 4 sehr gelobt – es sei „anschaulich“ und „leicht zu verstehen“, die schrittweise Vorgehensweise erlaube es zudem auch zu sehen, „warum man etwas so tut, wie man es tut.“ Die pq-Formel samt ihrer Herleitung besitze diese Qualität demgegenüber nicht. Überhaupt beurteilten einige Schülerinnen und Schüler es als „faszinierende Idee“, Zahlenquadrate (wie 25 oder auch x^2) als „echte“, geometrische Quadrate aufzufassen und die Gleichungen in Flächenbeziehungen zu übersetzen. Entsprechend positiv äußerten sie sich über die Übungen in der zweiten und dritten Stunde. Generell kamen die „Übersetzungsaufgaben“ in beiden Klassen gut an. Hinsichtlich der eigentlichen Lösungsverfahren äußerten die Schülerinnen und Schüler sich zwiespältig. Viele erkannten sehr wohl die Vorzüge einer anschaulichen, klar vor Augen liegenden Argumentationsweise, kritisierten jedoch, dass man schon „besondere Eingebungen“ brauche, um eine zum Ziel führende Idee zu finden. Im Hinblick auf Al-Khwarizmis Verfahren gemäß Quellenauszug D V formulierten die meisten Schülerinnen und Schüler Unbehagen angesichts der, wie sie meinten, „sehr komplizierten“ und „schwer nachvollziehbaren“ Argumentation. Einige merkten an, dass es insbesondere schwierig gewesen sei, Text und Zeichnung parallel im Blick zu behalten und Elemente des einen auf entsprechende Elemente des anderen zu beziehen. Oft wurde auch geäußert, dass die geometrischen Methoden – seien es jene von Al-Khwarizmi oder jene, die die Schülerinnen und Schüler selbst ersonnen hatten – „sehr aufwändig“ wären, „viel zu viel Arbeit“ kosteten und auch das Glück des kreativen Moments benötigten („man muss erstmal drauf kommen“). Die pq-Formel sei insofern „ganz anders“ (vgl. Kap. 2.3.2.3): sie erleichtere die praktische Arbeit, indem sie „schneller“ handzuhaben sei *und darüberhinaus in jedem Falle funktioniere. Bei den geometrischen Darstellungen habe man hingegen gesehen, dass man bei verschiedenen Aufgaben jeweils unterschiedliche Ansätze benötige. Dieses Problem existiere mit der pq-Formel nicht. An dieser Stelle habe ich als Lehrer darauf hingewiesen, dass Al-Khwarizmi die in der Tat etwas länglichen geometrischen Verfahren sehr wohl auch bündiger gefasst hat – allerdings ohne Formeln zu benutzen. Die Frage, wie er dies getan hat, habe ich als Thema der nächsten Stunden angekündigt.*

Einen Überblick über die 2. bis 4. Stunde der Reihe gibt die folgende Tabelle:

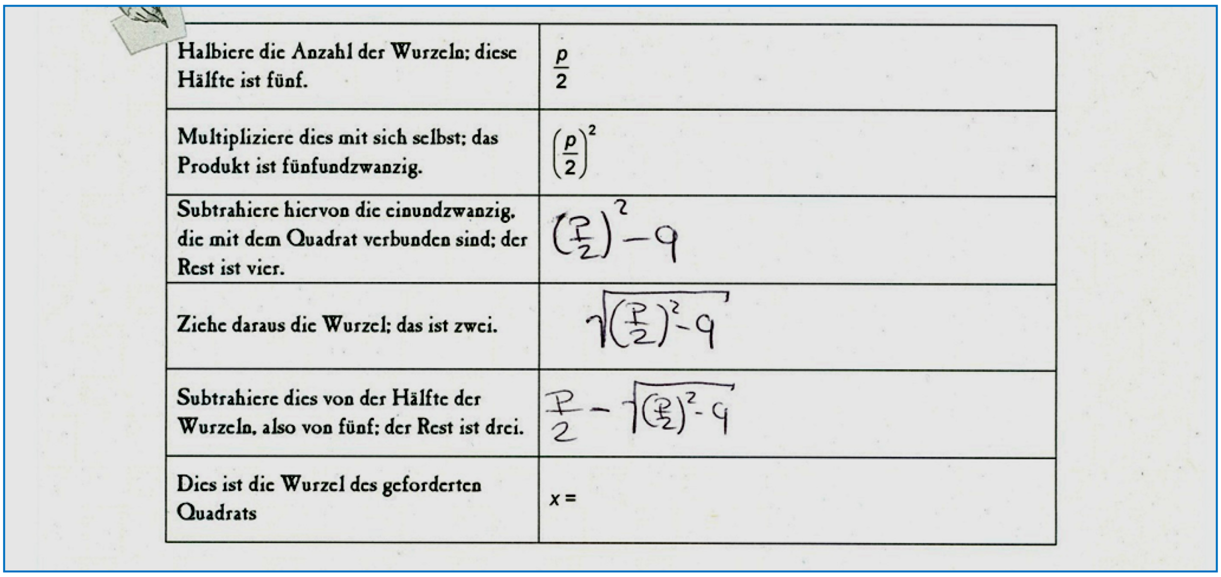
Element	**methodische Hinweise**	**hermeneutische Aspekte**
Aufgaben bearbeiten	Arbeitsheft Lösungskärtchen	Vertiefung des Verstehens; Einfinden in Al-Khwarizmis Denkweisen, Eintritt in seinen hermeneutischen Zirkel (vgl. Kap. 2.3.2.1.3); Generieren von Erwartungen an die weitere Quellenlektüre
Quellenlektüre (Auszug D V) und Bearbeiten des Textes	Arbeitsheft deutlich getrennte Einzelarbeits- und Kooperationsphasen	Originale Begegnung; hermeneutischer Zirkel; individuelle Verstehensinseln aufbauen; Artikulation des Verstandenen; Verstehenserweiterungen auf der Basis eigener Arbeit und der Addition mit Partnern; Grenzen des eigenen Verstehens erfahren und in neue (partnerangeregte) Verstehensschleifen eintreten; Vergleich mit eigenen Lösungsansätzen;
Reflexion	Plenumsgespräch (oder Alternativen)	Diskussion und Beurteilung der eigenen Verstehenserfahrungen: die kritische Erfahrung des Fremden mündet in die kritische Reflexion des Eigenen (vgl. Kap.2.3.3)

Tabelle 6: Überblick über die 2. bis 4. Stunde der experimentellen Unterrichtsreihe.

4.3.2.2.3 Fünfte und sechste Stunde: Weitere Handlung, Ergebnis und Reflexion

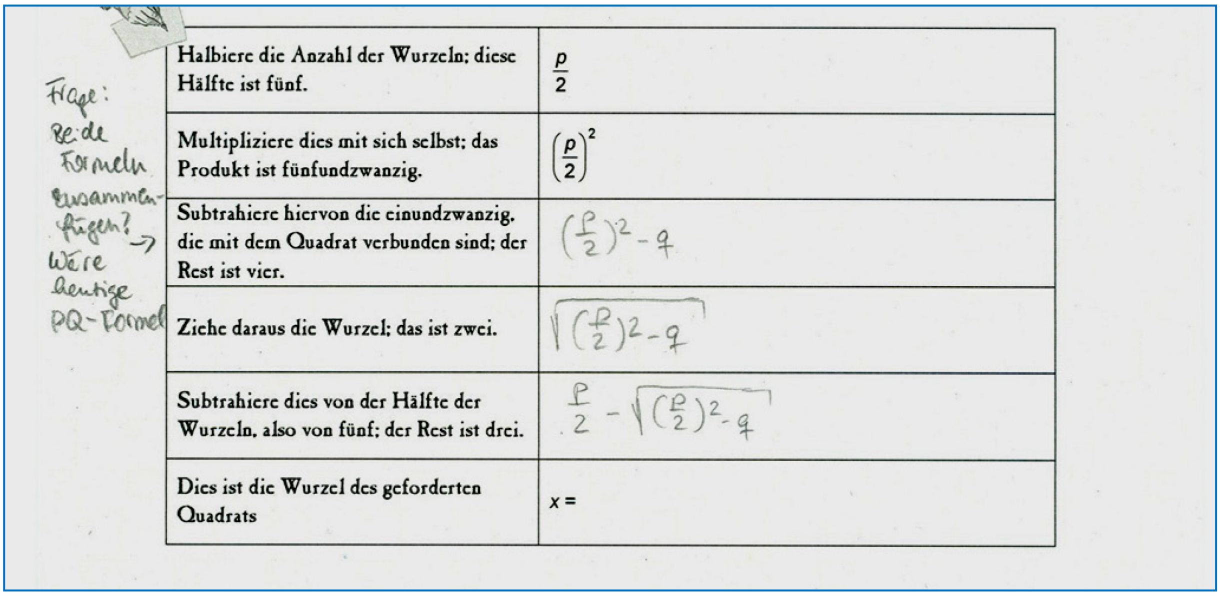
Im Mittelpunkt der fünften Stunde stehen zunächst die Kurzfassungen, die Al-Khwarizmi für seine Lösungsverfahren formuliert hat. Für die Gleichung in Aufgabe 13 entnehmen die Schülerinnen und Schüler die kurze Lösungsform einem weiteren Quellenauszug. Es handelt sich um den – aus didaktischen Gründen (s.o.) an diese Stelle verschobenen – Text D II, der im Arbeitsheft als „Lösungsrezept“ bezeichnet wird. Die Lernenden ordnen einander entsprechende Schritte dieses Textes und der ihnen bekannten *pq*-Formel passend zu (Arbeitsheft S. 18, Aufgabe 14).

Die Aufgabe wurde in den Pilotklassen souverän gelöst. Beispiele zeigen die folgenden Abbildungen:



Halbiere die Anzahl der Wurzeln; diese Hälfte ist fünf.	$\frac{p}{2}$
Multipliziere dies mit sich selbst; das Produkt ist fünfundzwanzig.	$\left(\frac{p}{2}\right)^2$
Subtrahiere hiervon die einundzwanzig, die mit dem Quadrat verbunden sind; der Rest ist vier.	$\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$
Ziehe daraus die Wurzel; das ist zwei.	$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$
Subtrahiere dies von der Hälfte der Wurzeln, also von fünf; der Rest ist drei.	$\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$
Dies ist die Wurzel des geforderten Quadrats	$x =$

Abbildung 84: Beispiel einer Schülerantwort zu Aufgabe 14 (Pilotklassen).

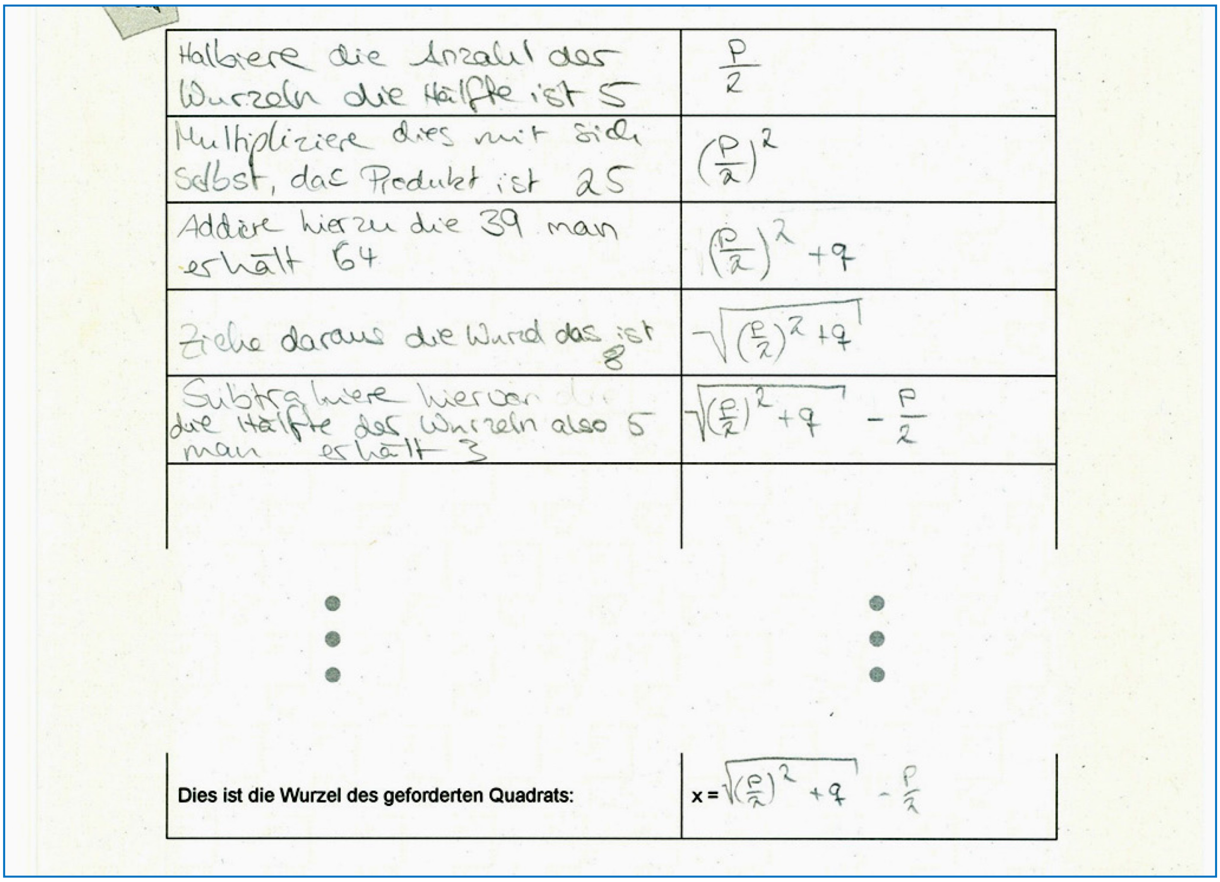


Halbiere die Anzahl der Wurzeln; diese Hälfte ist fünf.	$\frac{p}{2}$
Multipliziere dies mit sich selbst; das Produkt ist fünfundzwanzig.	$\left(\frac{p}{2}\right)^2$
Subtrahiere hiervon die einundzwanzig, die mit dem Quadrat verbunden sind; der Rest ist vier.	$\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$
Ziehe daraus die Wurzel; das ist zwei.	$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$
Subtrahiere dies von der Hälfte der Wurzeln, also von fünf; der Rest ist drei.	$\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$
Dies ist die Wurzel des geforderten Quadrats	$x =$

Abbildung 85: Beispiel einer Schülerantwort zu Aufgabe 14 (Pilotklassen). Wie aus der Randbemerkung hervorgeht, zeigt dieser Schüler hier schon Interesse für eine Vereinheitlichung der beiden Ansätze Al-Khwarizmis.

Für das Einstiegsproblem der Unterrichtsreihe ($x^2 + 10x = 39$) entwickeln die Schülerinnen und Schüler selbst ein „Rezept“ nach diesem Muster (Arbeitsheft S. 20, Aufgabe 15) und vergleichen es mit der von Al-Khwarizmi notierten Kurzfassung aus der Quelle (D I).

Die folgende Abbildung zeigt beispielhaft die Bearbeitung eines Schülers in einer der Pilotklassen:

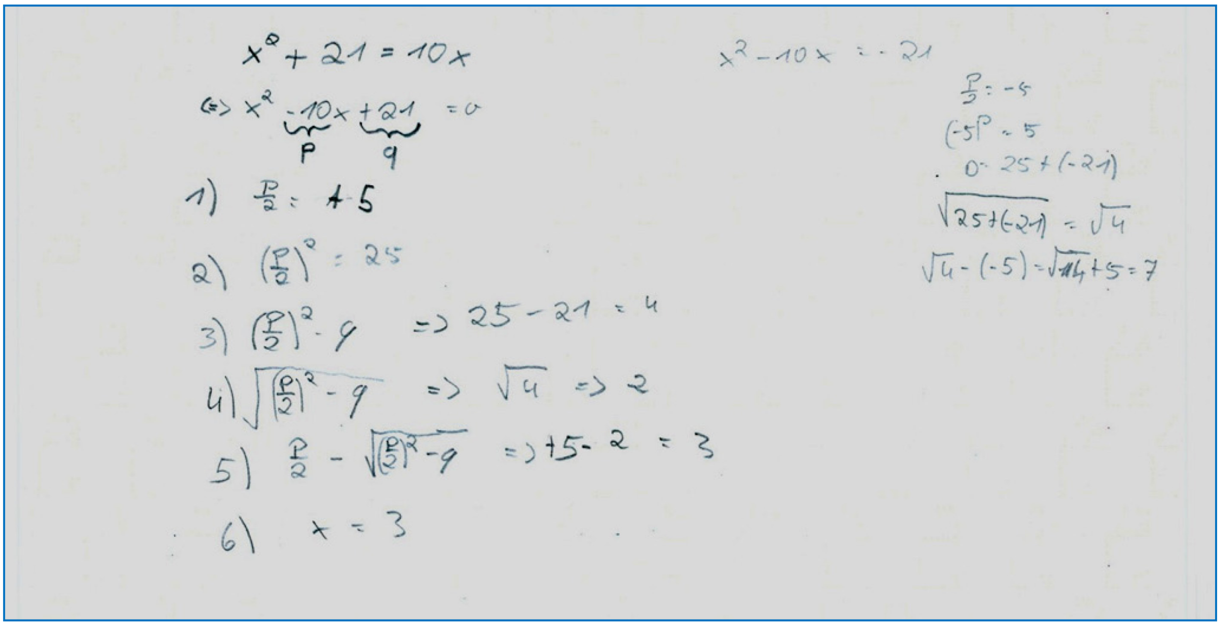


Halbiere die Anzahl das Wurzeln die Hälfte ist 5	$\frac{p}{2}$
Multipliziere dies mit sich selbst, das Produkt ist 25	$\left(\frac{p}{2}\right)^2$
Addiere hierzu die 39 man erhält 64	$\left(\frac{p}{2}\right)^2+q$
Ziehe daraus die Wurzel das ist 8	$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q}$
Subtrahiere hiervon die Hälfte der Wurzeln also 5 man erhält 3	$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q}-\frac{p}{2}$
⋮	⋮
Dies ist die Wurzel des geforderten Quadrats:	$x=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q}-\frac{p}{2}$

Abbildung 86: Beispiel einer Schülerantwort zu Aufgabe 15 (Pilotklassen).

Vor allem in diskussionsfreudigen Klassen kann sich nun ein Gespräch über Gemeinsamkeiten und Unterschiede sowie über Vor- und Nachteile der jeweiligen Darstellungsarten anschließen (in Kleingruppen, als schriftliche Diskussion, im Plenum, etc.). Insbesondere kann man die Frage aufwerfen, warum Al-Khwarizmi zwei offenbar verschiedene Lösungsverfahren angibt, die sich in zwei unterschiedliche Formeln übersetzen lassen, und ob *wir* die Aufgabe 13 nicht vielleicht auch mit dem ersten Verfahren hätten lösen können (Aufgabe 16). Dabei stellt sich heraus, dass sich die Lösungsverfahren nur dann vereinheitlichen lassen, wenn man negative Zahlen zulässt und die Regel ‚minus mal minus gleich plus' festlegt.

In den Pilotklassen war die Existenz zweier unterschiedlicher Wege zur Lösung quadratischer Gleichungen zwar sofort aufgefallen. Einige Schülerinnen und Schüler aber hatten – wie sich jetzt herausstellte – noch nicht realisiert, dass dies eine notwendige Folge der geometrischen Argumentationsweise war, sondern hielten es gewissermaßen für eine kreative Spielerei seitens Al-Khwarizmis. Ihrer Meinung nach funktionierte die Lösung der Aufgabe 13 problemlos auch mit dessen zuerst angegebenen Verfahren. Den „Beweis" trat ein Schüler mit folgender Überlegung an:



$$x^2 + 21 = 10x$$
$$\Leftrightarrow x^2 \underbrace{-10x}_{p} \underbrace{+21}_{q} = 0$$
$$1)\ \frac{p}{2} = +5$$
$$2)\ \left(\frac{p}{2}\right)^2 = 25$$
$$3)\ \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \Rightarrow 25 - 21 = 4$$
$$4)\ \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \Rightarrow \sqrt{4} \Rightarrow 2$$
$$5)\ \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \Rightarrow +5 - 2 = 3$$
$$6)\ x = 3$$

$$x^2 - 10x = -21$$
$$\frac{p}{2} = -5$$
$$(-5)^2 = 5$$
$$0 = 25 + (-21)$$
$$\sqrt{25 + (-21)} = \sqrt{4}$$
$$\sqrt{4} - (-5) = \sqrt{4} + 5 = 7$$

Abbildung 87: Beispiel einer Schülerantwort zu Aufgabe 16 (Pilotklassen). Auf der linken Seite stehen die Notizen, die der Schüler zunächst aufgrund eigener Überlegungen gemacht hat. Die Zeilen rechts wurden nach dem Gespräch mit einem Mitschüler ergänzt.

Wie man an den ersten Notizen (links) erkennt, beachtet der Schüler die Vorzeichen zunächst gar nicht. Hierzu passt, dass er die Gleichung auf die moderne Normalform bringt – diese wäre Al-Khwarizmi ganz unmöglich erschienen. Das gewünschte Ergebnis fest vor Augen führt der Schüler im dritten Schritt anstelle einer Addition eine Subtraktion durch. Nach dem Wurzelziehen vertauscht er darüberhinaus Minuend und Subtrahend. Auf diese Weise „bestätigt" er schließlich das zuvor erhaltene Ergebnis: 3. In der Austauschphase ist der Schüler allerdings auf einen Kameraden gestoßen, der auf 7 gekommen war. Nach der Besprechung mit ihm ergänzte unser Schüler die Zeilen auf der rechten Seite. Jetzt notierte er die Gleichung in der zum ersten Verfahren passenden Form (Quadrate und Wurzeln sind gleich Zahlen). Bei der Durchführung beachtete er die Vorzeichen sowie die Anweisungen genau und erhält – wie sein Austauschpartner – 7. Hiernach gab er jedoch an, nicht zu wissen, was nun stimme. Schließlich habe sich die 3 zuvor ja auch als richtig erwiesen. Erst im weiteren Gespräch klärte sich, dass die 7 offenbar die zweite Lösung der Gleichung ist, die Al-Khwarizmi ja stets entgangen war.

Weitere Bearbeitungsbeispiele zeigen die folgenden Abbildungen.

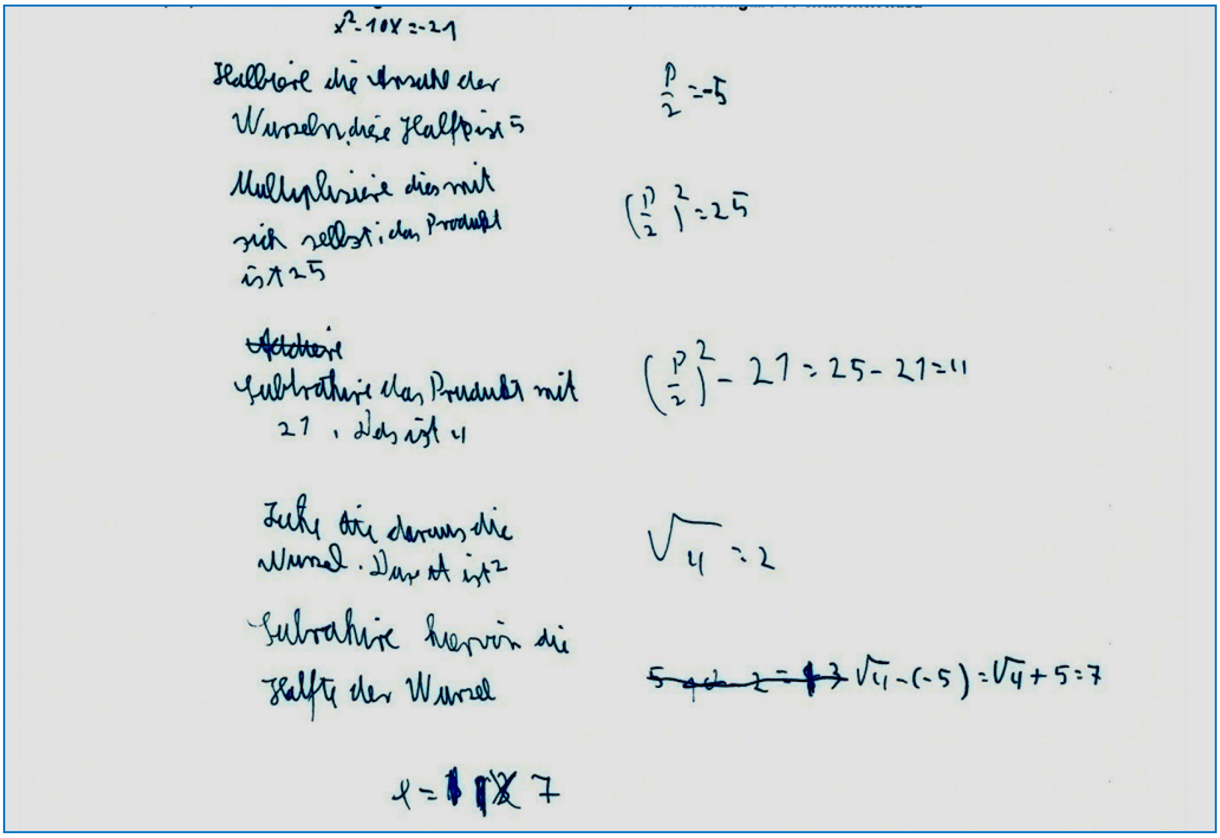


Abbildung 88: Beispiel einer Schülerantwort zu Aufgabe 16 (Pilotklassen).

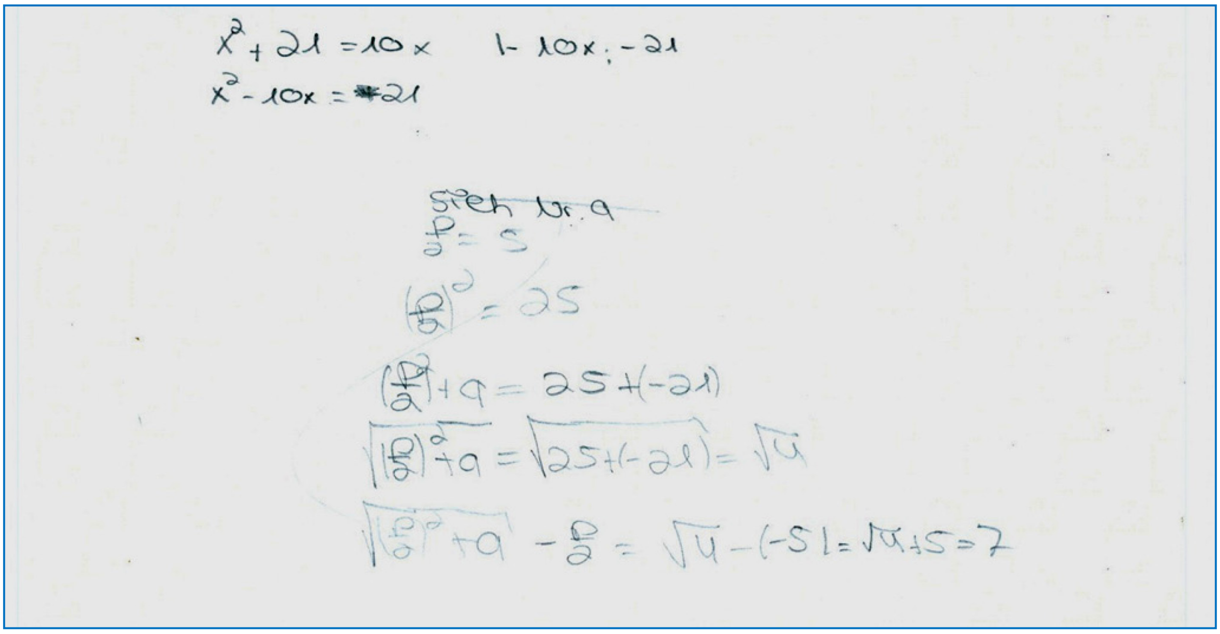


Abbildung 89: Beispiel einer Schülerantwort zu Aufgabe 16 (Pilotklassen).

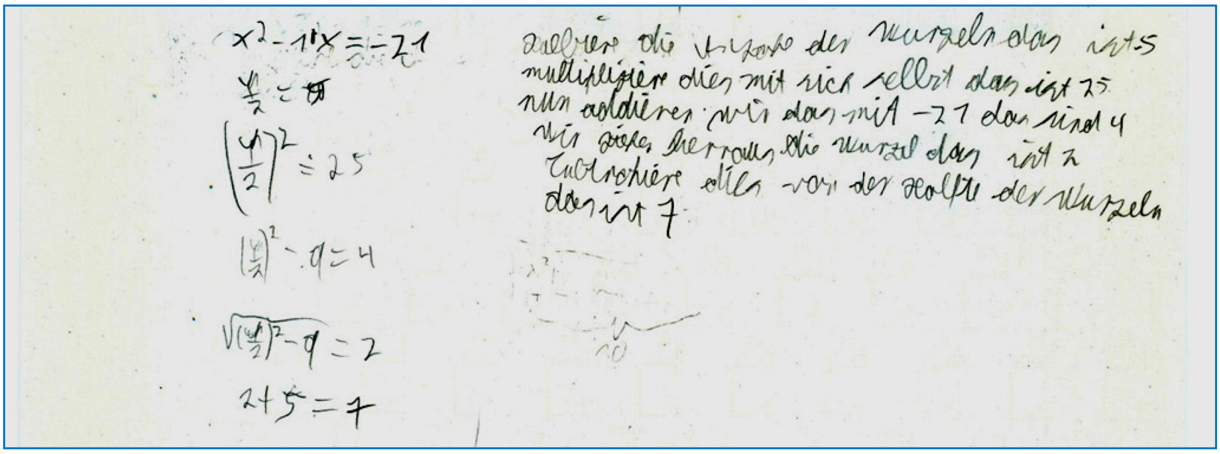


Abbildung 90: Beispiel einer Schülerantwort zu Aufgabe 16 (Pilotklassen).

Einigen Schülerinnen und Schülern war durchaus klar, dass hier negative Zahlen auftreten, die in der geometrischen Argumentation eigentlich keinen Platz haben. Die andere, fast noch größere Besonderheit – dass nämlich minus 5 mal minus 5 gleich plus 25 sein soll – erschien hingegen niemandem bemerkenswert.

In der Diskussion ergibt sich erfahrungsgemäß die Frage: Warum ist Al-Khwarizmi nicht auch so vorgegangen? Er hätte doch in Worten notieren können, wofür er keine Formeln kannte! Die Antwort lautet: Al-Khwarizmi wusste nicht, wie man mit negativen Zahlen rechnet, weil es für ihn überhaupt keine negativen Zahlen gab. Zahl bedeutete für Al-Khwarizmi immer: Anzahl (von Dingen, z. B. von Längen- oder Flächeneinheiten). Auch in der geometrischen Denkweise, die er verwendet, gibt es keinen Platz für negative Größen (negative Längen). Die besondere Einschränkung dieses Zahlbegriffs sollte akzentuiert werden, beispielsweise durch einen Tafelanschrieb.

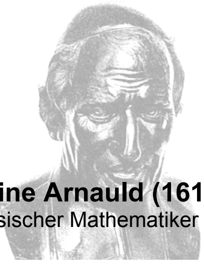
In den Pilotklassen lautete dieser Anschrieb:

> *Für Al-Khwarizmi bedeutet Zahl immer: Anzahl von etwas (z. B. von Längen- oder Flächeneinheiten). Negative Zahlen sind bei ihm daher nicht möglich, weil es keine negativen Anzahlen gibt. Aus diesem Grund gibt es bei Al-Khwarizmi unterschiedliche Lösungsverfahren für unterschiedliche quadratische Gleichungstypen, die er nicht vereinheitlichen konnte.*

Das noch fehlende, dritte Lösungsverfahren Al-Khwarizmis (Quellenauszüge D III, D VI) soll im Unterricht allerdings nicht mehr eigens besprochen werden. Interessierte Schülerinnen und Schüler können es jedoch als Referat bearbeiten.

In den Pilotklassen wollte niemand diese Aufgabe übernehmen.

Die Lernenden finden es erfahrungsgemäß verwunderlich, dass ein scheinbar so triviales Konzept wie das der negativen Zahlen früher noch nicht geläufig war. Sie denken und fragen häufig: „Sind denn die Menschen früher nicht auf die Idee gekommen, negative Zahlen als Schulden zu veranschaulichen?“ Die Antwort lautet: Doch, darauf gekommen sind sie schon (eine finanzielle Schuld als Veranschaulichung erwähnt erstmals Leonardo von Pisa im 13. Jahrhundert). Aber diese Veranschaulichung hat nicht etwa alle Schwierigkeiten beseitigt. Es ist für Schüler irritierend und lehrreich zugleich, eine Kostprobe der ungeahnten begrifflichen Probleme zu Gesicht zu bekommen. Zu diesem Zweck kann man ihnen das in Kap. 3.1.2.2.1.7 abgedruckte Briefzitat von Antoine Arnauld (Schrecker, 1935, S. 85) zu lesen geben:



Antoine Arnauld (1612 – 1694)
französischer Mathematiker und Theologe

Der folgende Text ist einem Brief an einen Mathematikerkollegen (Jean Prestet, 1648-1690) entnommen (Original auf Französisch):

[*Zur Regel, wonach minus mal minus gleich plus sein soll:*] „Ich weiß nicht, wie ich das mit den Grundgesetzen der Multiplikation in Einklang bringen kann; diese besagen, dass sich die 1 zum ersten Faktor verhält wie der zweite Faktor zum ganzen Produkt. Dies gilt für ganze Zahlen genauso wie für Brüche.

Denn die 1 verhält sich zur 3 wie die 4 zur 12.
Und die 1 verhält sich zu $\frac{1}{3}$ wie die $\frac{1}{4}$ zu $\frac{1}{12}$.

Aber das kann ich nicht auf die Multiplikation negativer Zahlen anwenden. Denn sagt man, dass sich die 1 zur –4 verhält wie die –5 zur 20? Das sehe ich nicht ein. Denn 1 ist größer als –4. Und –5 ist im Gegensatz dazu kleiner als 20. Hier gilt wie bei allen anderen Verhältnissen: Wenn der erste Term größer ist als der zweite, dann muss der dritte größer sein als der vierte."

Ich habe dieses Zitat in der ersten Pilotklasse verwendet. Dort stellte es sich für die Schülerinnen und Schüler jedoch als „harte Nuss" heraus und bereitete beträchtliche Mühe. Zunächst herrschte Uneinigkeit darüber, wovon Arnauld überhaupt spricht. Nach einigem Hin und Her stellte ein Schüler fest, dass es wohl um die Gleichung $3 \cdot 4 = 12$ *gehe. Der erste Faktor dort sei 3, der zweite 4 und das ganze Produkt 12. Deswegen verhalte sich 1 zum ersten Faktor (3) wie der zweite Faktor (4) zum ganzen Produkt (12). Der Schüler schlug eine Schreibweise mit Brüchen vor:*

$$\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$$

Entsprechend für die Multiplikation mit Brüchen. Arnaulds Beispiele sähe in Bruchschreibweise so aus:

$$\frac{1}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{12}}$$

Dieser Doppelbruch bereitete einigen Schülerinnen und Schülern Schwierigkeiten, so dass eine Umformung angegeben wurde:

$$\frac{3}{1} = \frac{12}{4}$$

Diese leuchtete zwar den meisten Schülerinnen und Schülern ein, hatte jedoch nicht mehr viel mit Arnaulds Verhältnissen von Brüchen zu tun.

Noch sperriger als der bisherige Text wirkte der zweite Absatz. Nach etwas Überlegen wurde einigen Schülern aber klar, dass Arnauld hier von der Gleichung $(-4) \cdot (-5) = 20$ *spricht. Seine Argumentation leuchtete jedoch erst einmal niemandem ein. Als Lehrer gab ich daher den Impuls, dass man es auch bei dieser Gleichung mit der Bruchschreibweise versuchen könne. Wenig später stand an der Tafel:*

$$\frac{1}{-4} = \frac{-5}{20}$$

Wir gingen nun erneut in den Text und lasen den zweiten Absatz noch einmal. In der Sprache der Hermeneutik unternahmen wir also mit verändertem Vorverständnis einen zweiten Durchlauf im hermeneutischen Zirkel. Nun erkannten etliche Schülerinnen und Schüler, dass Arnauld sich offenbar daran störte, dass die 1 zwar größer als die –4, die –5 jedoch kleiner als die 20 ist. Die Klasse fand es jedoch schwierig, dieses Unbehagen wirklich nachzuvollziehen – „mathematisch" sei doch „alles in Ordnung", wie ein Schüler bemerkte. Da niemand protestierte, entgegnete ich, dass ich Arnauld so verstehe, dass er es merkwürdig findet, dass das Kleinere sich zum Größeren so verhalte wie das Größere zum Kleineren. Wieder wurde mir entgegengehalten, dass das „vielleicht merkwürdig, mathematisch" aber dennoch korrekt" sei. Einen letzten Einwand brachte ich vor, indem ich sagte, dass bei positiven Zahlen aber stets gelte: „klein (1) zu groß (3) wie klein (4) zu groß (12)", und dass diese Regel nun bei den negativen Zahlen auf den Kopf gestellt werde. Dort gelte auf einmal „klein (-5) zu groß (20) wie groß (1) zu klein (-4)". Die Klasse sagte nun nichts mehr. Ich wollte es nun jedoch genauer wissen: Wieviele Schüler konnten – nach meinen Erklärungen – Arnaulds „Bauchschmerzen" verstehen? Um eine bewusste und klare Entscheidung zu erzwingen, ließ ich die Schülerinnen und Schüler aufstehen. Das Ergebnis lautete 5 zu 24 (17% zu 83%). Und wer konnte Arnaulds Einwände teilen? Bei dieser Frage liefen auch die fünf zu den 24 über. Unter dem Eindruck dieses Ergebnisses verzichtete ich auf die Thematisierung der Leibnizschen Erwiderung auf Arnauld, die an dieser Stelle hätte folgen sollen.

Es ist nicht ganz einfach, den heutzutage bei Neuntklässlern schon selbstverständlich gewordenen Umgang mit negativen Zahlen zu hinterfragen bzw. gar zu erschüttern. Viele Schülerinnen und Schüler geben sich schnell zufrieden, sobald eine Gleichung aufgeht und „mathematisch" alles korrekt zu sein scheint. Die unter der Oberfläche des Kalküls liegenden Begriffsbildungen werden dann kaum noch angetastet. Unter diesen Voraussetzungen mag der Arnauld-Text vielleicht nicht griffig und pointiert genug sein, um Schülerinnen und Schüler wirksam aufzustören. Hinzu kommt, dass er als schwer verständlich empfunden wurde und vieler Erklärungen bedurfte. Seine eigentlich beabsichtigte Wirkung mag darunter verpuffen.

Ich begann daher, mich nach anderen Texten umzusehen und erinnerte mich an einen Aufsatz von Gavin Hitchcock (Hitchcock, 1996)*. In ihm verweist der Autor auf ein von ihm geschriebenes Theaterstück „in two Acts, of the struggles of European mathematicians of the seventeenth and eighteenth centuries to come to terms with the newly admitted negative numbers." Das Stück ist im Internet veröffentlicht* (Hitchcock, Loci: Convergence, Alien Encounters)*. In ihm kommt auch Arnauld zu Wort. Hitchcock lässt ihn dabei folgendes sagen:*

> I simply cannot see how to reconcile this with a basic principle of multiplication of two factors, which is

> that the ratio of unity to the first factor is equal to the ratio of the second factor to the whole product. This is true whether we are talking of whole numbers or fractions. Thus:
>
> "three times four is twelve", yields "one is to three as four is to twelve";
>
> or "one-third times one-quarter is one-twelfth" yields "one is to one-third as one-quarter is to one-twelfth".
>
> Now, when multiplying two negatives, I meet a contradiction:
>
> minus four times minus five is supposed to be plus twenty, $(-4)\cdot(-5)=20$,
>
> so that we must have plus one is to minus four as minus five is to plus twenty.
>
> I find myself quite unable to accept this! For plus one is bigger than minus four, and minus five is less than plus twenty, so we have that bigger is to smaller as smaller is to bigger! But this is ridiculous, when we know that in all such proportions, if the first term is bigger than the second, then the third term must be bigger than the fourth.
>
> (Hitchcock, 1996, Scene 1)

Hitchcock gibt an, diesen Text an dem oben abgedruckten Auszug aus dem Brief an Prestet orientiert zu haben. Er schien mir Arnaulds Bedenken deutlicher zum Ausdruck zu bringen als das Original und machte immer noch einen authentischen und lebendigen Eindruck. Ich erwog daher, ihn anstelle des Briefauszugs zu benutzen. Natürlich hieße das, an dieser Stelle vom Prinzip der Originallektüre abzuweichen und sich als Vorinterpret in den hermeneutischen Prozess einzuschalten. Andererseits ist das Ersinnen fiktiver Dialoge und Zitate ein sehr bewährtes pädagogisches Mittel, das von Männern wie Plato, Galilei, Lakatos und anderen erfolgreich eingesetzt wurde. Zudem schien Arnaulds Originaltext im Klassenraum nicht zu funktionieren. Gleichwohl wollte ich ihn nicht einfach fallen lassen, da ich es nach wie vor attraktiv fand, zusammen mit der Erwiderung von Leibniz gewissermaßen einen Dialog zwischen zwei Mathematikern über eine strittige Frage inszenieren zu können. Diese Idee wurde auch dadurch nahe gelegt, dass beide Männer, wie oben (Kap. 3.1.2.2.1.7) bereits erwähnt, ja tatsächlich in einem regen Briefkontakt zueinander standen (Leibniz G. W., 1997) *und Leibniz sich in den „Observationes" explizit zu den Bedenken Arnaulds geäußert hatte, wenn auch außerhalb dieses Briefwechsels. Ich entschied mich nach ausführlichem Abwägen schließlich dafür, die Originallektüre in dieser Unterrichtsreihe auf die Texte von Al-Khwarizmi allein zu begrenzen und den Hitchcock-Text in deutscher Übersetzung zu verwenden. Auch die „Observationes" von Leibniz ersetzte ich durch die Paraphrasierung, die Hitchcock ihnen in seinem Stück in folgender Weise gegeben hat:*

> We cannot expect these mixed ratios to inherit the well-known properties of ordinary ratios of positive quantities, and to behave legitimately, for they are not truly ratios at all, as we know them. However, for my part, I believe there is nothing hindering us from formally calculating with them, just as we calculate with the square root of negative unity. We may even reach some useful conclusions, in spite of the lack of rigour surrounding these pseudo-ratios, and hence I think we may regard them as tolerable and useful. At least no harm can come of it!
>
> (Hitchcock, 1996, Scene 1)

Mit diesen Texten unternahm ich es nun, die Frage nach den negativen Zahlen in der zweiten Pilotklasse zu thematisieren. Tatsächlich traten im Falle Arnaulds erheblich weniger Verständnisschwierigkeiten als mit der Originalquelle auf. Die große Mehrheit der Schülerinnen und Schüler konnte die Argumentation zügiger *nachvollziehen. Dadurch standen größere geistige und auch zeitliche Ressourcen zur Verfügung, Arnaulds Aussagen zu prüfen und zu bewerten. Einige Lernende äußerten sich indes nicht unähnlich wie in der ersten Pilotklasse: Die Sache sei mathematisch richtig, die – durchaus verstandenen – Merkwürdigkeiten nahmen sie schulterzuckend hin. Diesmal gab es jedoch auch mehr andere Stimmen. Arnaulds Beispiel hätte diesen zufolge aufgezeigt, dass die negativen Zahlen andere Eigenschaften besäßen, dass sie gegenüber den positiven Zahlen gewissermaßen einen „Mangel", jedenfalls aber eine „Besonderheit" aufwiesen, die sie von jenen unterschiede. Schüler der ersten Gruppe entgegneten, dass dies nichts wirklich Aufregendes sei, da es sich ja eben um „Zahlen unter Null" handele, und das sei ja per se schon merkwürdig. Da niemand darauf erwiderte, merkte ich als Lehrer an, dass dies richtig sei, und Arnaulds Äußerungen uns nun eine dieser Merkwürdigkeiten etwas genauer vor Augen führten. Zudem griff ich einen Teil der letzten Schüleräußerung auf – dass die negativen Zahlen „Zahlen unter Null" seien –, stellte die provokante Frage, ob dies wirklich so sei und schrieb die folgende Ungleichungskette an die Tafel:*

$$\cdots < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{1}{1} < \frac{1}{0}(= +\infty) < \frac{1}{-1} < \frac{1}{-2} < \frac{1}{-3} < \frac{1}{-4} < \cdots$$

Diese von John Wallis im 17. Jahrhundert aufgestellte Kette „beweist" (besser: suggeriert), dass das Verhältnis von 1 zu –1 (das wir nach unseren Regeln zur Zahl –1 umformen), größer als plus Unendlich sei. Man könnte sogar schlussfolgern, dass alle negativen Zahlen größer als plus Unendlich oder, wenn man den problematischen Term 1/0 fortließe, doch immerhin noch größer als $+1$ oder sogar größer als jede noch so große Zahl (der Form $1/\varepsilon$) seien (Jahnke H. N., 2003, S. 39). Leibniz war in seinen oben (Kap. 3.1.2.2.1.7) zitierten „Observationes" auch auf diesen Punkt eingegangen und hatte von einem menschlichem Irrtum gesprochen, dem Wallis erlegen wäre. Zuvor hatte Leibniz unter Bezugnahme auf Logarithmen Verhältnisse wie 1 zu –1 als „imaginarias" bezeichnet.

In der Pilotklasse gab die Ungleichungskette den Schülerinnen und Schülern zu denken. Erwartungsgemäß wollten die meisten den Ausdruck 1/0 nicht akzeptieren. Ich strich ihn also zunächst aus. Ein Schüler bemerkte, dass die Aussage –1 > 1 aber bestehen bliebe. Andere Schüler sagten, dass man durch Hinzufügen weiterer „Brüche" das noch „steigern" könne. Einer von ihnen trat zur Tafel und ergänzte den Anschrieb, so dass dort stand:

$$\cdots < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{1}{1} < \frac{1}{0{,}5}(= 2) < \frac{1}{0{,}25}(= 4) < \cdots < \frac{1}{-1} < \frac{1}{-2} < \frac{1}{-3} < \frac{1}{-4} < \cdots$$

Auf diese Weise werde gezeigt, dass –1 schließlich größer als jede positive Zahl sei, da man ja jede positive Zahl als „Bruch 1 durch Zahl zwischen 0 und 1" schreiben könne. Abgesehen von der zwar naheliegenden aber unpassenden Bezeichnung „Bruch" hatte dieser Schüler die Argumentation Wallis' offenbar vollständig verstanden und sogar weiter entwickelt. Eine andere Schülerin bemerkte noch, dass auf der rechten Seite auch jede negative Zahl als „Bruch 1 durch irgendwas Negatives" notiert werden könne und daraus schließlich folge, dass jede negative Zahl größer sei als jede positive Zahl. Zur Verdeutlichung ergänzte sie:

$$\cdots < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{1}{1} < \frac{1}{0{,}5}(= 2) < \frac{1}{0{,}25}(= 4) < \cdots < \frac{1}{-0{,}25}(= -4) < \frac{1}{-0{,}5}(= -2) < \frac{1}{-1} < \frac{1}{-2} < \frac{1}{-3} < \frac{1}{-4} < \cdots$$

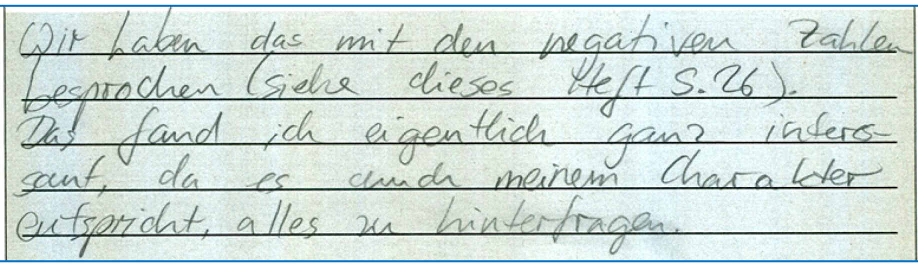
An dieser Stelle fragte ich die Schülerinnen und Schüler, wer von ihnen glaube, dass die negativen Zahlen tatsächlich größer als die positiven seien. Erwartungsgemäß wollte das niemand glauben. Also fragte ich, wer verstehe, dass Arnauld „Bauchschmerzen" bei den negativen Zahlen hatte. Fast alle Schülerinnen und Schü-

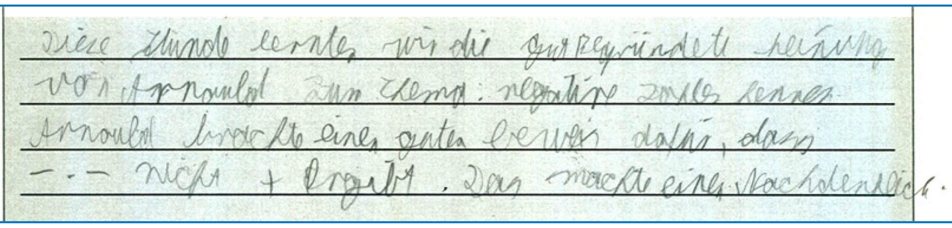
ler standen auf.

Da die Lernenden sich auch für die „Auflösung" der vorgeführten Widersprüche interessieren, kann ihnen die Hitchcock-Paraphrasierung der Leibnizschen „Observationes" präsentiert werden (Arbeitsheft, S. 22 unten). Schüler fassen die Aussage dieses Textes in eigenen Worten zusammenfassen und werden darauf hingewiesen, dass die Frage endgültig im 19. Jahrhundert im Leibnizschen Sinne entschieden wurde. Die Vorteile, die die negativen Zahlen für die Vereinheitlichung der Algebra boten, waren einfach zu groß, als dass sie von den Bedenken aufgewogen werden konnten. Der Ausweg bestand schließlich darin, die in Frage stehenden Objekte als *formale* Gegenstände zu definieren und auf bestimmte inhaltliche und anschauliche Forderungen zu verzichten (die man zuvor freilich für wesentlich gehalten hatte). Dieser Weg wurde übrigens auch bei der Klärung vieler anderer mathematischer Grundlagenfragen beschritten (etwa bei der Analysis) und besitzt damit paradigmatischen Charakter (vgl. 3.1.2.2.1.7).

An diesem Beispiel können die Schülerinnen und Schüler einen Eindruck davon bekommen, wodurch der vergleichsweise hohe Anteil an abstrakten Formalismen in der Mathematik motiviert wird, und dass er das schöpferische Ergebnis eines bewussten, und auch *verstehbaren,* menschlichen Entscheidungsprozesses ist – keineswegs fällt er vom Himmel oder ist gottgegeben. Da die Schülerinnen und Schüler in den vorangegangenen Stunden das Beispiel einer historisch verbürgten, weniger formalen Alternative zu ihrer üblichen Praxis kennen gelernt und praktisch eingeübt haben, können sie sich ihr Urteil hierüber (z. B. „viel zu aufwändig" …) auf einer viel besseren Basis bilden, als wären ihnen diese Dinge nur theoretisch mitgeteilt worden.

Einschätzungen aus den Pilotklassen zeigen die folgenden Abbildungen.


Wir haben das mit den negativen Zahlen besprochen (siehe dieses Heft S. 26). Das fand ich eigentlich ganz interessant, da es auch meinem Charakter entspricht, alles zu hinterfragen.


Diese Stunde lernten wir die gut begründete Meinung von Arnauld zum Thema: negative Zahlen kennen. Arnauld brachte einen guten Beweis dafür, dass − · − nicht + ergibt. Das machte einen nachdenklich.

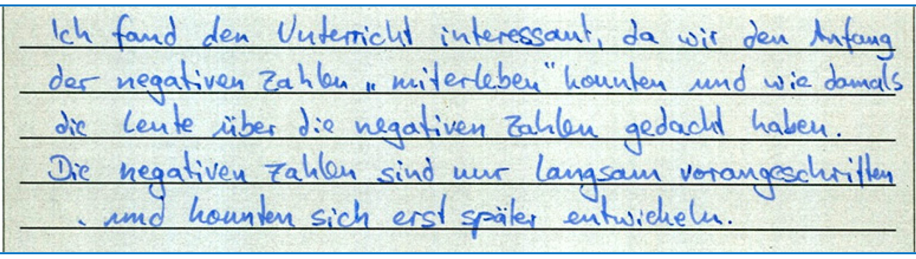

Ich fand den Unterricht interessant, da wir den Anfang der negativen Zahlen „miterleben" konnten und wie damals die Leute über die negativen Zahlen gedacht haben. Die negativen Zahlen sind nur langsam vorangeschritten und konnten sich erst später entwickeln.

Abbildung 91a-c: Äußerungen von Schülerinnen und Schülern der zweiten Pilotklassen zum Thema „negative Zahlen" (aus den Lernjournalen).

Ich fand es interessant zu erfahren wie die Menschen früher über negative Zahlen gedacht haben.

Abbildung 91d: Weitere Äußerung (vgl. Abbildung 91a-c).

In der letzten Stunde der Unterrichtsreihe erhalten die Schülerinnen und Schüler nun die Gelegenheit, noch mehr über die Person Al-Khwarizmis und seine Intentionen zu erfahren. Dazu lesen sie das Vorwort aus seiner *al-jabr* (Arbeitsheft, S. 24) bzw. die biographischen Notizen über ihn (Arbeitsheft, S. 6 und 14/15) und bearbeiten einige Texterschließungs- und –reflexionsaufgaben (Aufgaben 17 und 18).

Die folgenden Abbildungen zeigen beispielhaft Bearbeitungen aus den Pilotklassen.

Abschnitt	Satznummer von ... bis ...	Überschrift
1	1 - 12	Huldigung Allahs
2	13-15	Gelehrten vergangener Tage
3	16-18	Die Vorgänger
4	19-20	Lob des Kalifen/der Arbeit
5	21-25	Huldigung Allahs

Abbildung 92: Beispiel einer Schülerantwort zu Aufgabe 17 (Pilotklassen). Aufgabe war es, den Text von Al-Khwarizmis Vorwort zur ‚al-jabr' zu strukturieren.

Abschnitt	Satznummer von ... bis ...	Überschrift
1	1	Überschrift
2	2	Einleitung
3	3-12	Preisung Allahs
4	13 - 15	Gelehrte vergangener Zeiten
5	16 - 18	ihre Arbeit
6	19 - 20	Lob an den Kalif al Mamun
7	21-24	Schlußwort mit Lob an Allah

Abbildung 93: Weiteres Beispiel einer Schülerantwort zu Aufgabe 17 (Pilotklassen).

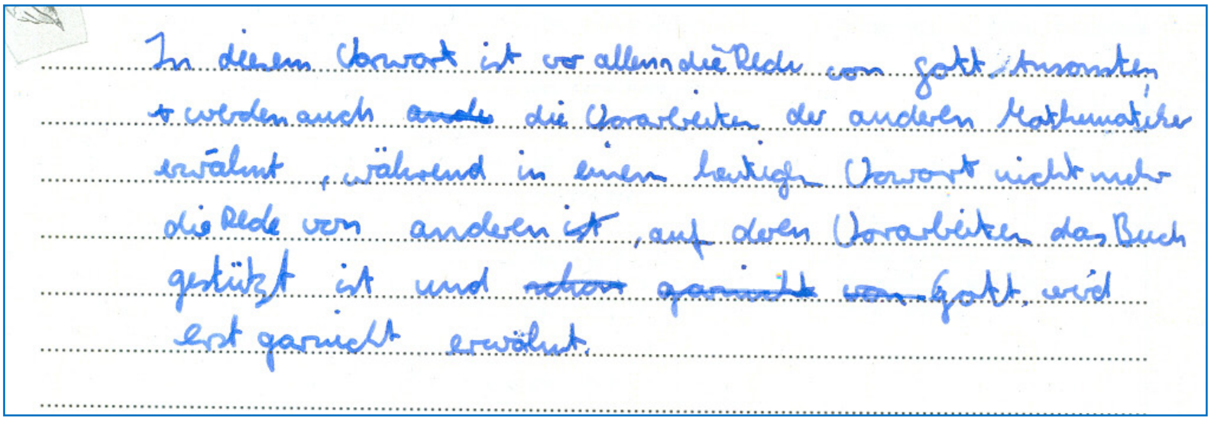

In diesem Vorwort ist vor allem die Rede von gott/Anwonten + werden auch ~~ande~~ die Vorarbeiten der anderen Mathematiker erwähnt, während in einem heutigen Vorwort nicht mehr die Rede von anderen ist, auf deren Vorarbeiten das Buch gestützt ist und ~~schon~~ garnicht ~~von~~ gott, wird erst garnicht erwähnt.

Abbildung 94: Beispiel einer Schülerantwort zu Aufgabe 18 (Pilotklassen). Aufgabe war es, Al-Khwarizmis Vorwort mit heutigen Vorworten zu vergleichen.

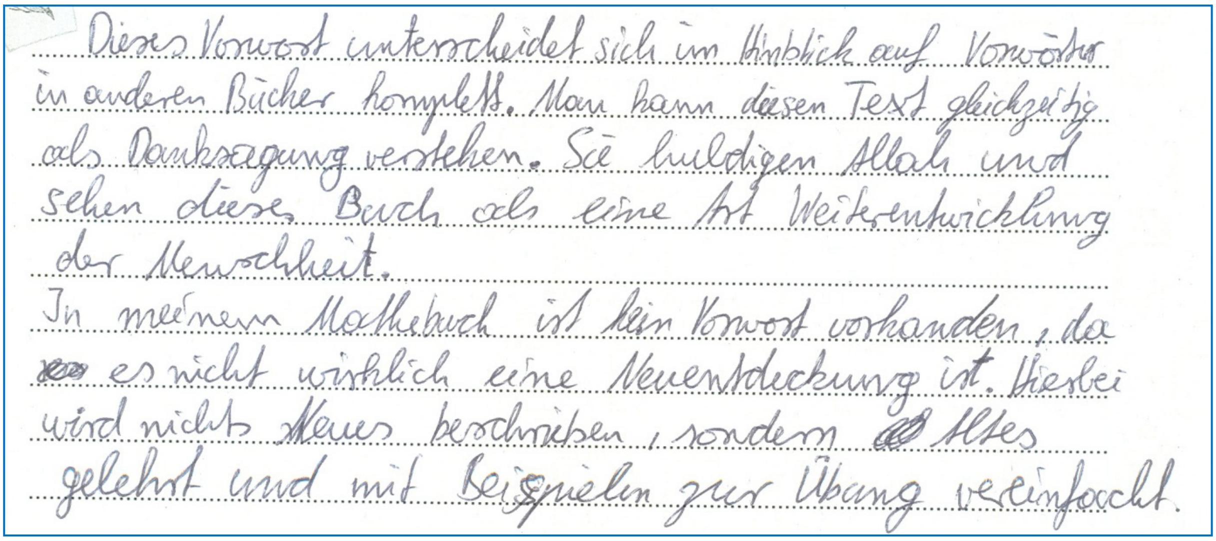

Dieses Vorwort unterscheidet sich im Hinblick auf Vorwörter in anderen Bücher komplett. Man kann diesen Text gleichzeitig als Danksagung verstehen. Sie huldigen Allah und sehen dieses Buch als eine Art Weiterentwicklung der Menschheit.
In meinem Mathebuch ist kein Vorwort vorhanden, da es nicht wirklich eine Neuentdeckung ist. Hierbei wird nichts Neues beschrieben, sondern Altes gelehrt und mit Beispielen zur Übung vereinfacht.

Abbildung 95: Weiteres Beispiel einer Schülerantwort zu Aufgabe 18 (Pilotklassen).

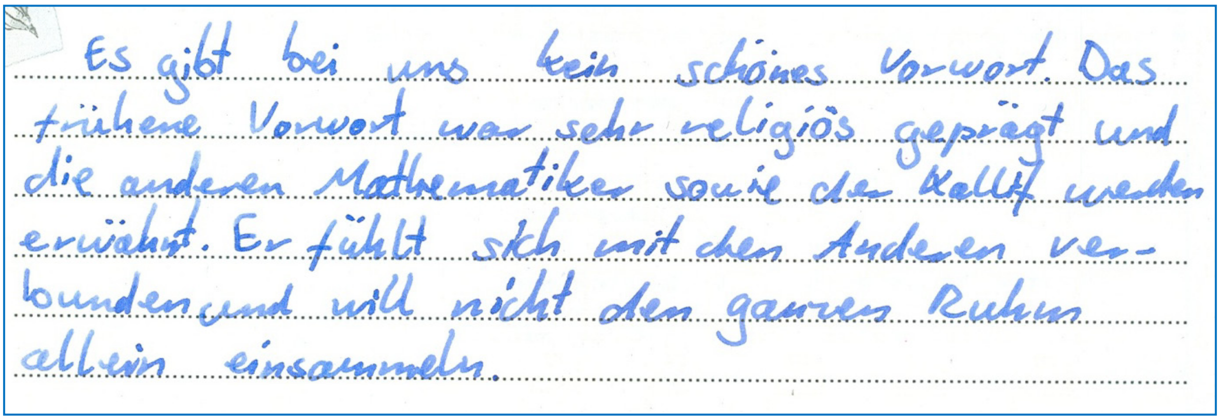

Es gibt bei uns kein schönes Vorwort. Das frühere Vorwort war sehr religiös geprägt und die anderen Mathematiker sowie der Kalif werden erwähnt. Er fühlt sich mit den Anderen verbunden und will nicht den ganzen Ruhm allein einsammeln.

Abbildung 96: Weiteres Beispiel einer Schülerantwort zu Aufgabe 18 (Pilotklassen).

An einem exemplarischen Überblick (Arbeitsheft, S. 26) können die Schülerinnen und Schüler darüber hinaus sehen, wie lang der Weg bis zur einheitlichen Formelschrift gewesen ist, die inzwischen auch dort üblich geworden ist, wo ansonsten ganz andere Schriftzeichen verwendet werden. Das Arbeitsheft enthält hierzu eine kleine (aber erfahrungsgemäß sehr beliebte) Transkriptionsaufgabe (S. 26, Aufgabe 19).

Zum Abschluss der Reihe wird den Schülerinnen und Schülern noch der berühmte Auszug aus Recordes „Whetstone of Witte“ präsentiert, in welchem er das moderne Gleichheitszeichen einführt. Ein weiteres Bild zeigt einen Abschnitt aus einem hebräischen Mathematikbuch und veranschaulicht die weltweite Verbreitung einer inzwischen standardisierten mathematischen Formelschrift und Bezeichnungsweise. Ihre Gedanken zu diesen Eindrücken notieren die Schülerinnen und Schüler in ihren Lernjournalen und in den Fragebögen.

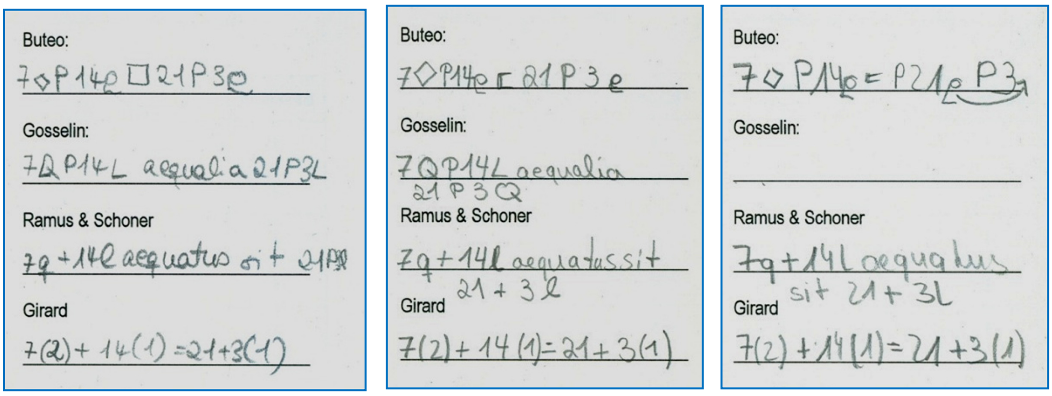


Abbildung 97: Beispiel von Schülerantworten zur Aufgabe 19 (Pilotklassen). Aufgabe war es, die Gleichung $7x^2 + 14x = 21 + 3x$ in den historischen Schreibweisen von Buteo (1559), Gosselin (1577), Ramus & Schoner (1586) und Girard (1629) zu notieren (vgl. Kap. 3.1.2.2.1.8).

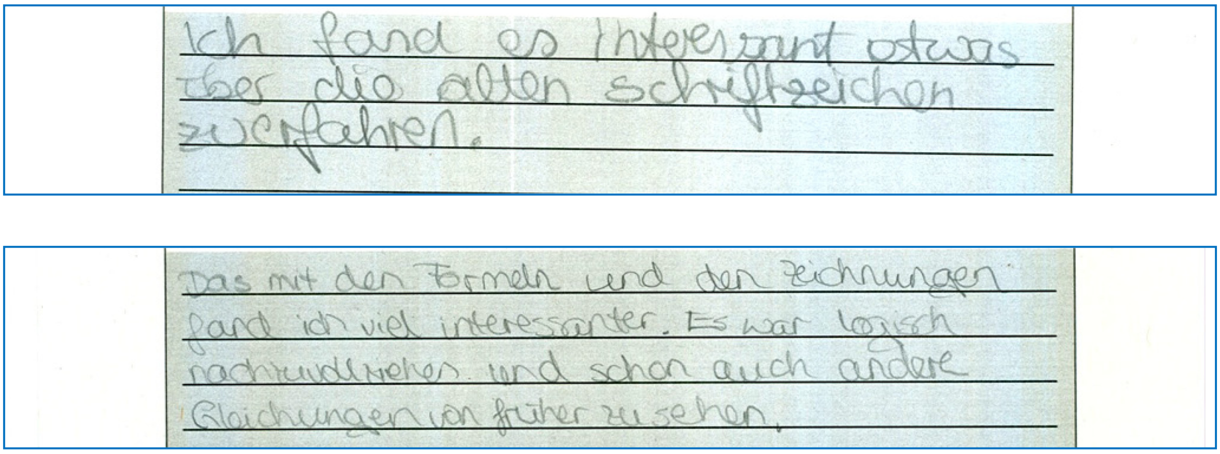


Abbildung 98a-b Äußerungen von Schülerinnen und Schülern der Pilotklassen zu den Inhalten der letzten Stunde (aus den Lernjournalen).

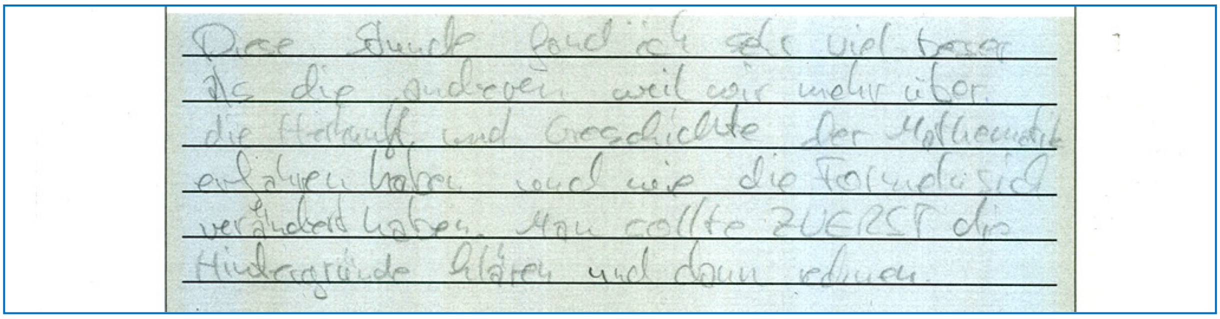

Diese Stunde fand ich sehr viel besser
als die anderen weil wir mehr über
die Herkunft und Geschichte der Mathematik
erfahren haben und wie die Formeln sich
verändert haben. Man sollte ZUERST die
Hintergründe klären und dann rechnen.

Abbildung 98c: Weitere Äußerungen (vgl. Abbildung 98a-b).

4.3.2.3 Zur Frage der Schulung und Begleitung der Lehrerinnen und Lehrer

Allen teilnehmenden Lehrerinnen und Lehrern wurde vor Beginn der Intervention eine einschlägige Fortbildungsveranstaltung angeboten. Hierbei sollte es zum einen darum gehen, fachliche Fragen zu klären, zum andern darum, das didaktische Konzept zu erläutern und methodische Vereinbarungen zu treffen. Das Angebot wurde leider nur von einem einzigen Lehrer wahrgenommen. Die übrigen ließen sich unter Hinweis auf ihre übrige Arbeitsbelastung entschuldigen. An dieser Stelle ist zu betonen, dass alle Lehrerinnen und Lehrer, die (freiwillig) an dieser Untersuchung teilgenommen haben, sich außerordentlich für ihren Unterricht und ihre Schülerinnen und Schüler engagieren – ansonsten hätten sie einer Teilnahme an dieser Untersuchung auch kaum zugestimmt. Gerade für diese Lehrerinnen und Lehrer jedoch hat die Arbeitsintensität in den letzten Jahren durch verschiedene Faktoren enorm zugenommen – es seien genannt: ausgedehnterer Nachmittagsunterricht, schwieriger werdende Kinder und Erziehungsberechtigte, die Umstellung von Curricula, die Pflicht zur Erarbeitung neuer Arbeitspläne und weitgehender interner Absprachen, eine höhere Dichte an Konferenzen, die Verkürzung der Schulzeit, die Reform des Abiturs, vermehrter Druck der Öffentlichkeit usw. bei unverändert dünner Personaldecke. Zeit für Präsenz-Fortbildungen verbleibt unter diesen Bedingungen nur noch im geringen Maße und nur zu bestimmten Perioden des Schuljahres. Realistischerweise hat man also davon auszugehen, dass unter den gegenwärtigen Bedingungen die Idee und Konzeption des historisch-hermeneutischen Unterrichts an den Großteil der Lehrerinnen und Lehrer eher indirekt, über Handouts, Bücher, Arbeitsmaterialien etc., kommuniziert wird. Genau diese Situation ist nun durch die vorliegende Untersuchung modelliert worden. Die Lehrerinnen und Lehrer wurden nicht durch direkte Fortbildungsmaßnahmen sondern durch kurzgefasste, schriftliche Materialien (Arbeitshefte, Lehrerbegleithefte) thematisch und didaktisch unterwiesen. Das verwendete Lehrerbegleitheft ist im Anhang B (Band 2 der vorliegenden Arbeit) abgedruckt. Zur Unterrichtsmethodik wurden keine präzisen Vereinbarungen getroffen. Bestimmte methodische Entscheidungen (z. B. Gruppenarbeit) sind zwar z. T. im Arbeitsmaterial angelegt, die Feinmethodik aber blieb den Unterrichtenden, die ihre jeweiligen Klassen kennen, als Vor-Ort-Entscheidung selbst überlassen. Damit wurde eine Szenario nachgebildet, das dem Normalfall im alltäglichen Unterrichtsbetrieb gut entspricht: Ideen und Konzepte des historisch-hermeneutischen Unterrichts treffen auf sehr diverse und weitgehend auch unpräparierte Kontexte. In diesem Umstand ist letztlich auch der Grund dafür zu sehen, dass in dieser Untersuchung die Frage der Unterrichtsqualität nicht mit wissenschaftlichen Mitteln verfolgt wird (vgl. Kap. 0.1).

4.3.3 Die konventionelle Vergleichsreihe

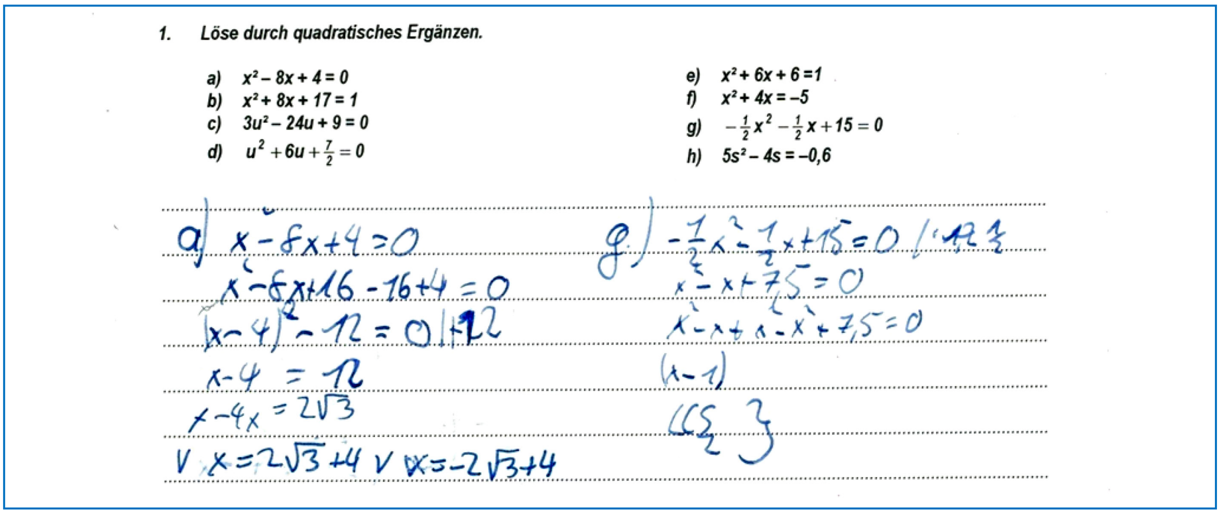
4.3.3.1 Überblick

Genau wie die Schülerinnen und Schüler der Experimentalgruppe haben auch diejenigen der Kontrollgruppe in den ersten Stunden der Gesamtreihe das Verfahren der quadratischen Ergänzung samt der Begründung der „*pq*-Formel“ kennen gelernt. In der sich nun anschließenden Reihe geht es darum, dass sie technische Sicherheit im Umgang mit diesen Verfahren erlangen, ihre Kenntnisse festigen und Anwendungen kennen lernen. Zu diesem Zweck habe ich für sie ebenfalls ein Arbeitsheft erstellt, das im Anhang C (Band 2 der vorliegenden Arbeit) vollständig abgedruckt ist. Einige der in diesem Heft verwendeten Aufgaben entstammen dem Schulbuch (Schmid & Weidig, 1996), das in allen Klassen der Kontrollgruppe zum Zeitpunkt der Intervention eingeführt ist. Seine Einteilung in die beiden Abschnitte Übungen und Anwendungen entspricht der intendierten Phasierung der Vergleichsreihe. Für die Lehrerinnen und Lehrer habe ich ebenfalls ein kurzgefasstes Lehrerbegleitheft erstellt (Anhang D).

4.3.3.2 Erste und zweite Stunde: Übungen

In den ersten beiden Stunden soll in der üblichen Manier die technische und formale Sicherheit im Umgang mit den neuen Verfahren gefestigt werden. Dieser Zweck wird mit den Aufgaben auf den Seiten 1 bis 4 des Arbeitsheftes verfolgt. Die Aufgaben entstammen dem Schulbuch (Schmid & Weidig, 1996, S. 109 ff.). In Aufgabe 1 wird die quadratische Ergänzung, in Aufgabe 2 die Lösungsformel geübt. Die Aufgaben 3 und 4 thematisieren die Frage, welche Bedingungen die Gleichungen im Hinblick auf die Eigenschaften der Lösungen aufweisen müssen. Dabei treten auch Gleichungen mit Parametern auf. Zu diesen Übungen lässt sich kein Pendant in der historisch-hermeneutischen Reihe finden. Umgekehrt gibt es in der konventionellen Reihe auch keine Entsprechung zur Quellenlektüre und ihrer Historizität. Beides liegt in der Natur der jeweiligen Sache.

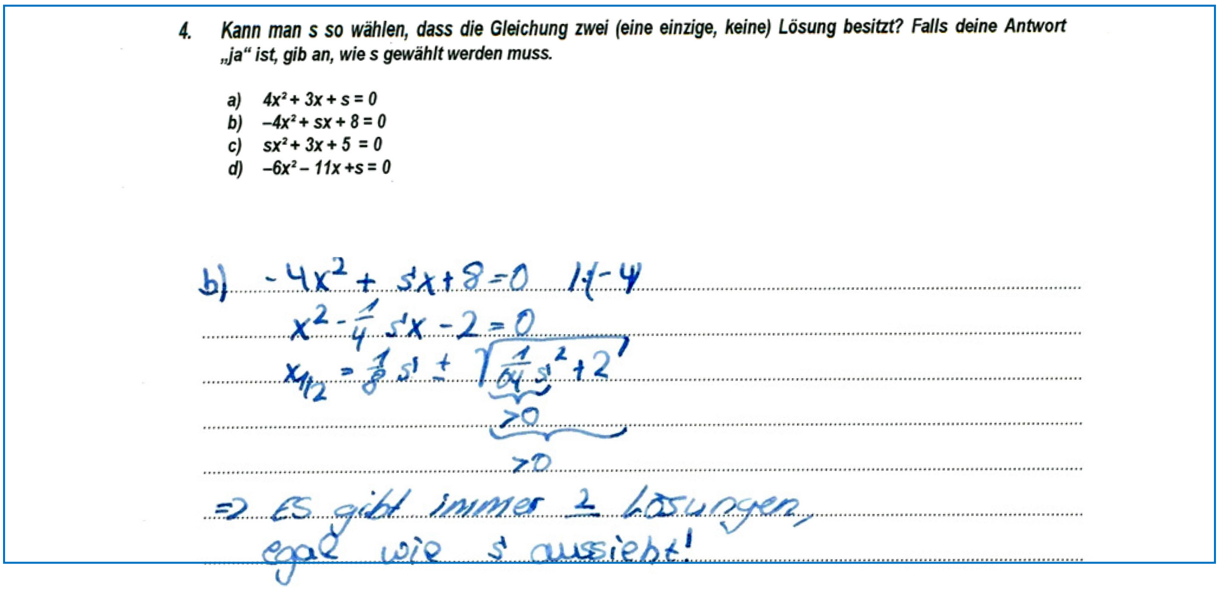
Bearbeitungsbeispiele aus den Kontrollklassen zeigen die folgenden Abbildungen.



1. **Löse durch quadratisches Ergänzen.**

a) $x^2 - 8x + 4 = 0$
b) $x^2 + 8x + 17 = 1$
c) $3u^2 - 24u + 9 = 0$
d) $u^2 + 6u + \frac{7}{2} = 0$
e) $x^2 + 6x + 6 = 1$
f) $x^2 + 4x = -5$
g) $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 15 = 0$
h) $5s^2 - 4s = -0{,}6$

Abbildung 99a: Beispiel einer Schülerantwort zu Aufgabe 1 (Kontrollklassen). Es handelt sich um Routineübungsaufgaben zur Lösung quadratischer Gleichungen mit quadratischer Ergänzung.



4. **Kann man s so wählen, dass die Gleichung zwei (eine einzige, keine) Lösung besitzt? Falls deine Antwort „ja" ist, gib an, wie s gewählt werden muss.**

a) $4x^2 + 3x + s = 0$
b) $-4x^2 + sx + 8 = 0$
c) $sx^2 + 3x + 5 = 0$
d) $-6x^2 - 11x + s = 0$

b) $-4x^2 + sx + 8 = 0 \quad | :(-4)$

$x^2 - \frac{1}{4}sx - 2 = 0$

$x_{1/2} = \frac{1}{8}s \pm \sqrt{\underbrace{\underbrace{\frac{1}{64}s^2}_{\geq 0} + 2}_{>0}}$

=> Es gibt immer 2 Lösungen, egal wie s aussieht!

Abbildung 98b: Beispiel einer Schülerantwort zu Aufgabe 4 (Kontrollklassen). In Abhängigkeit von einem Parameter soll die Anzahl der Lösungen ermittelt werden.

4.3.3.3 Dritte bis fünfte Stunde: Einfache Anwendungen

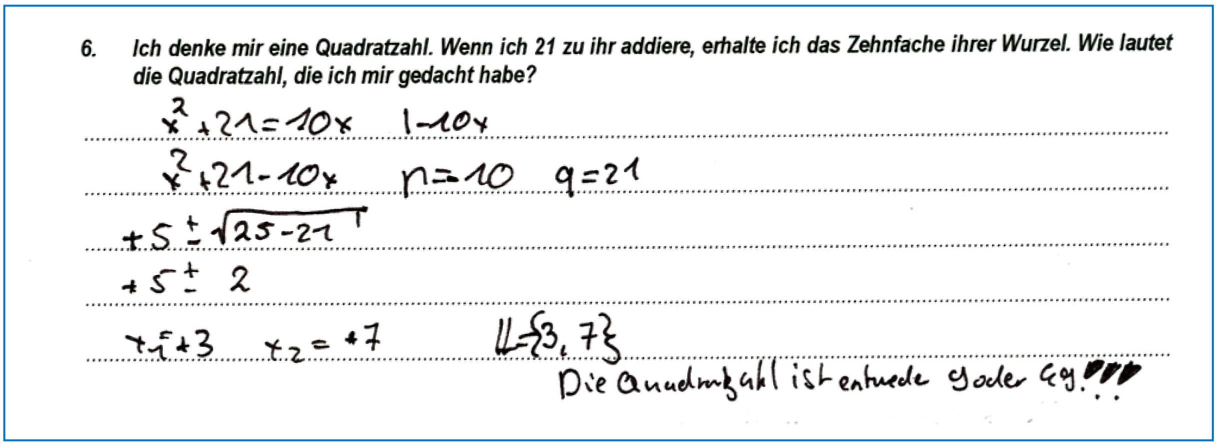
Nach den Übungen werden einfache Anwendungen betrachtet. An erster Stelle stehen Zahlenrätsel (Aufgaben 5 und 6). Die Anforderung hierbei besteht darin, die verbal mitgeteilten Operationen in die formale Ausdrucksweise zu übersetzen und die Aufgaben formal zu lösen. In der historisch-hermeneutischen Reihe entsprechen die Aufgaben 1 und 7a diesem Zweck. Nach den Zahlenrätseln sollen einige Probleme aus der Flächengeometrie thematisiert werden, deren Behandlung auf quadratische Gleichungen führt.

Die Beispiele und Übungen entsprechen (aus Gründen der Vergleichbarkeit) in ihrer mathematischen Substanz genaustens jenen in der historisch-hermeneutischen Vergleichsreihe. Die Einkleidung und Notationsweise ist allerdings „modern". Die folgende Gegenüberstellung zeigt die Analogien auf, die sich auch in einer gleichartigen Abfolge äußern:

Aufgabe im Arbeitsheft der konventionellen Unterrichtsreihe	Bezugsaufgabe im Arbeitsheft der historisch-hermeneutischen Unterrichtsreihe
1 – 4	keine
5	1, 7a
6	(13)
7	3, 4, 6
8	9
9	10
10	12b
11	12a
12	13
13	keine
14	keine

Tabelle 7: Einander entsprechende Aufgaben aus den Arbeitsheften der konventionellen und der historisch-hermeneutischen Unterrichtsreihe

Bearbeitungsbeispiele zeigen die folgenden Abbildungen.



6. *Ich denke mir eine Quadratzahl. Wenn ich 21 zu ihr addiere, erhalte ich das Zehnfache ihrer Wurzel. Wie lautet die Quadratzahl, die ich mir gedacht habe?*

$x^2 + 21 = 10x \quad | -10x$

$x^2 + 21 - 10x \quad p = 10 \quad q = 21$

$+5 \pm \sqrt{25-21}$

$+5 \pm 2$

$x_1 = +3 \quad x_2 = +7 \quad \mathbb{L} = \{3, 7\}$

Die Quadratzahl ist entweder 9 oder 49!!!

Abbildung 99: Beispiel einer Schülerantwort zu Aufgabe 6 (Kontrollklassen).

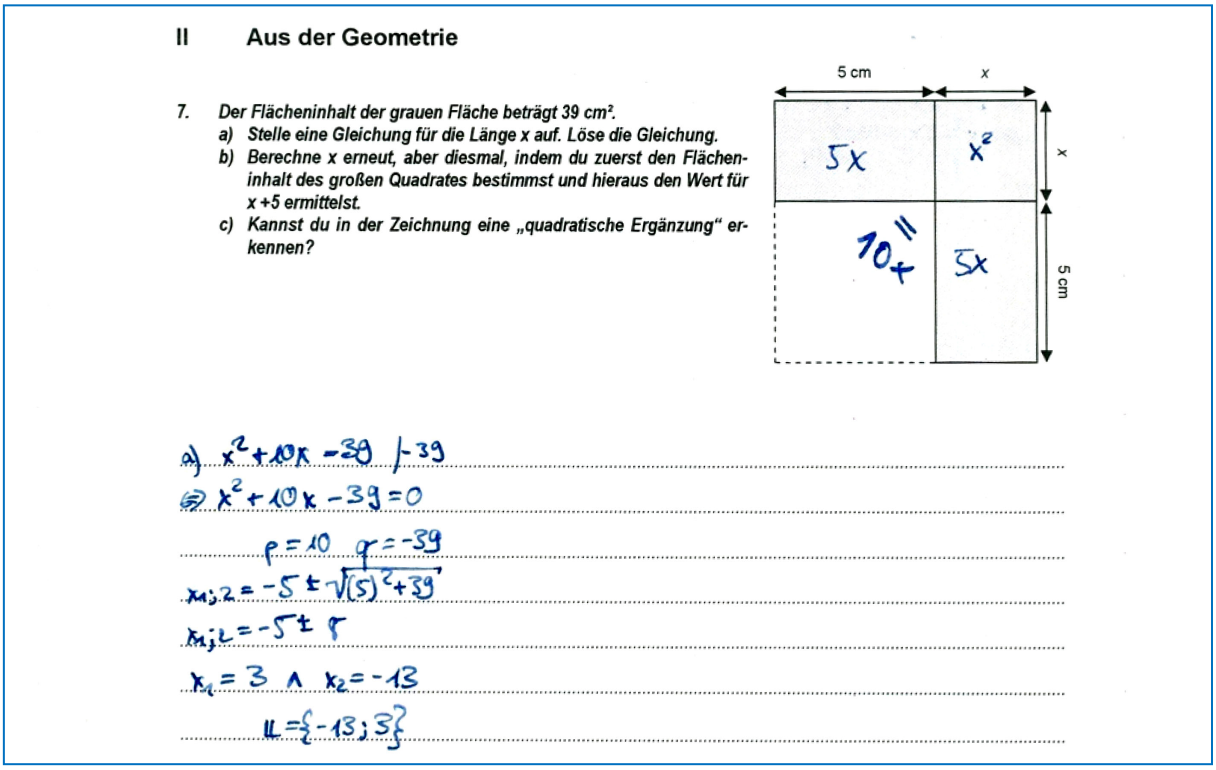


Abbildung 100: Beispiel einer Schülerantwort zu Aufgabe 7 (Kontrollklassen).

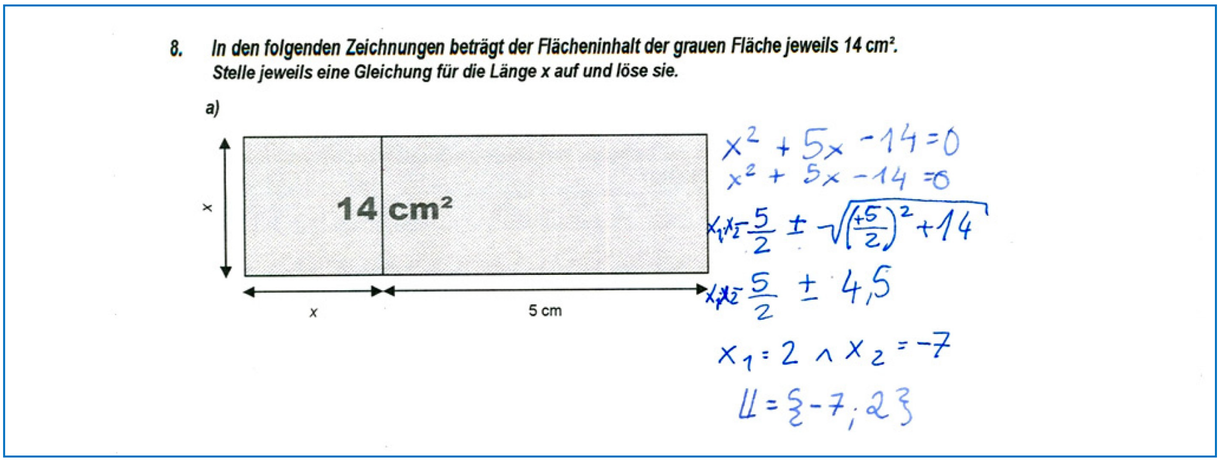


Abbildung 101: Beispiel einer Schülerantwort zu Aufgabe 8 (Kontrollklassen).

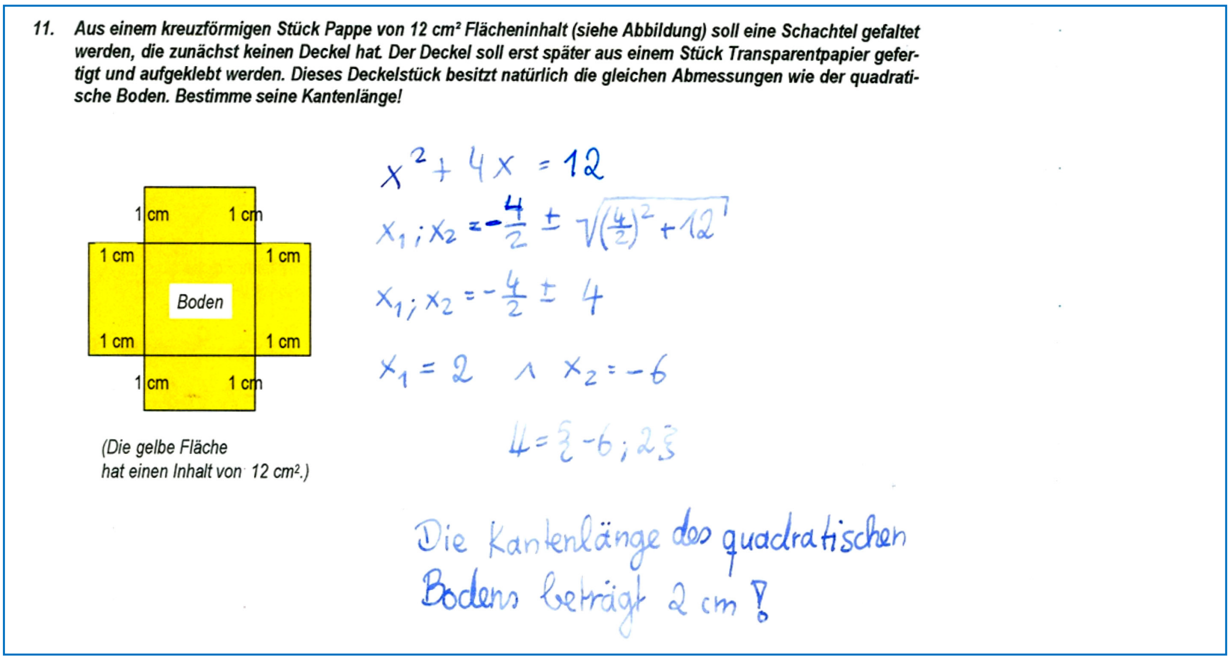


Abbildung 102: Beispiel einer Schülerantwort zu Aufgabe 11 (Kontrollklassen).

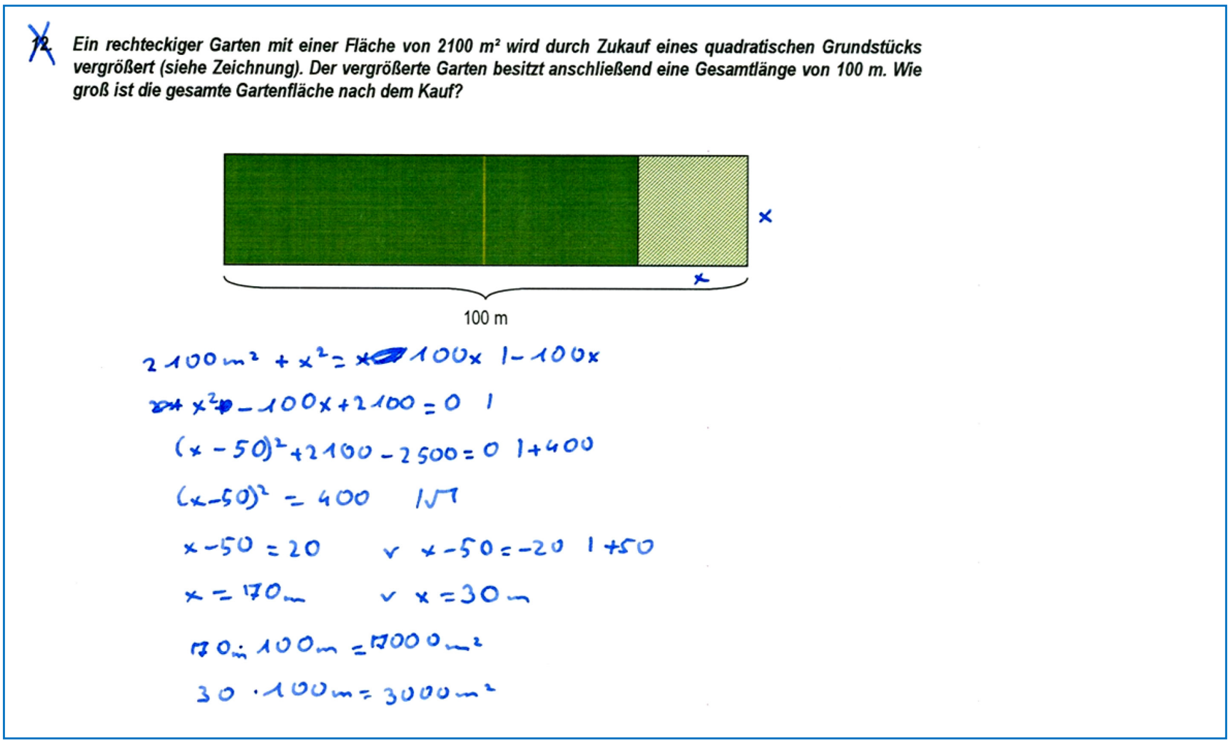


Abbildung 103: Beispiel einer Schülerantwort zu Aufgabe 12 (Kontrollklassen).

4.3.3.4 Sechste Stunde: Weitere Anwendungen

Zwei so genannte Alltagsaufgaben schließen das Anwendungsmaterial ab. In Aufgabe 13 untersuchen die Schülerinnen und Schüler den durch eine quadratische Gleichung modellierten Anhalteweg eines Kraftfahrzeuges. Dabei wird der Zusammenhang mit dem parabelförmigen Schaubild betont. Aufgabe 14 ist eine Textaufgabe aus (Schmid & Weidig, 1996, S. 115). In ihr geht es um die Bestimmung eines Zinssatzes für eine Kapitalanlage. Die Lösung ergibt sich wiederum aus einer quadratischen

Gleichung. Für beide Beispiele gibt es in der historisch-hermeneutischen Reihe keine Entsprechungen. Stattdessen wird dort das Vorwort von Al-Khwarizmi gelesen sowie der fachlich-geschichtliche Zusammenhang zwischen quadratischen Gleichungen und negativen Zahlen thematisiert.

4.4 Die Leistungstests

Nach Abschluss der Interventionen werden die Schülerinnen und Schüler einem für beide Gruppen identischen, auf die mathematischen Inhalte bezogenen Leistungstest unterzogen. Dabei wird überprüft, inwieweit die Lernenden in der Lage sind,

- quadratische Gleichungen mit einem Verfahren ihrer Wahl zu lösen (Aufgabe 1);
- Zahlenrätsel zu lösen (Aufgabe 2);
- flächengeometrische Bestimmungen mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad durchzuführen (Aufgaben 3-5).

Der Test ist damit an den Standards des konventionellen Unterrichts orientiert und konzentriert sich auf den sachlichen Kern, der in beiden Unterrichtsinterventionen identisch war. Historische Bezüge wurden im Test *nicht* thematisiert. Die Aufgaben entsprechen somit in ihrer neutralen Färbung eher jenen, mit denen die Schülerinnen und Schüler in der konventionellen Unterrichtsreihe gearbeitet haben.

Der zweite Leistungstest zur Überprüfung der mittleren Nachhaltigkeit der Interventionen ist identisch aufgebaut. Beide Tests sind im Anhang E (Band 2 der vorliegenden Arbeit) abgedruckt.

5 *Durchführung und Auswertung der Intervention*

5.1 *Überblick*

Im vorliegenden Kapitel soll es nun darum gehen, die Daten darzustellen, die mit dem in Kapitel 4 und den Anhängen beschriebenen Unterrichtsprojekt gewonnen wurden. Auf eine Beschreibung der an der Untersuchung teilnehmenden Schülerpopulation (5.2) folgt eine Darstellung des Unterrichts in den Experimental- und Kontrollklassen samt der Besprechung verschiedener hermeneutisch interessanter Beispiele (5.3). Im Abschnitt 5.4 schließlich werden die Wirkungen der Unterrichtsinterventionen anhand der aus dem Material extrahierten Daten vergleichend untersucht und die empirischen Forschungsfragen beantwortet. Die tabellarischen Daten, die den Aussagen und Diagrammen zugrunde liegen, sind auf der CD, die dieser Arbeit beiliegt, enthalten. Entsprechende Verweise sind jeweils beigefügt. Sie sind durch das Präfix CD gekennzeichnet (z. B. Tab. CD.1).

5.2 *Beschreibung der teilnehmenden Schülerpopulation (Prä-Befragung)*

An dieser Studie nahmen insgesamt 260 Schülerinnen und Schüler aus zehn Klassen von sechs verschiedenen nordrhein-westfälischen Gymnasien teil. Davon waren 152 Jungen (58,5 %) und 95 Mädchen (36,5 %). 13 Teilnehmer (5,0 %) haben ihr Gender im Fragebogen nicht angegeben (vgl. Tab. CD.1)

In sieben der zehn Klassen wurde die historische Unterrichtsreihe behandelt; diese Klassen konstituieren im Sinne der Untersuchung die Experimentalgruppe. Die übrigen drei Klassen, in denen konventioneller Unterricht stattfand, bilden die Kontrollgruppe (88 Schülerinnen und Schüler, vgl. Tab. CD.2). Das Genderverhältnis männlich/weiblich betrug in der Experimentalgruppe 61,3 zu 38,9 der gültigen Prozente, in der Kontrollgruppe 61,9 zu 38,3 der gültigen Prozente, kann also als in beiden Gruppen quasi identisch angesehen werden (vgl. Tab. CD.2).

Zu Beginn der jeweiligen Unterrichtsreihen wurden alle Schülerinnen und Schüler mittels eines Fragebogens (vgl. Anhang F) zu ihrer Wahrnehmung des Mathematikunterrichts sowie zu ihren fach- und schulbezogenen Kompetenzen, Interessen und Ansichten befragt. Das Ausfüllen der Bögen erfolgte unter Aufsicht der jeweiligen Lehrkraft in einer dafür eigens reservierten Schulstunde.

Die Ergebnisse dieser Vorbefragung werden in diesem Abschnitt vorgestellt und sollen ein aussagekräftiges und detailreiches Bild von der Stimmungs-, Leistungs- und Interessenslage der Lernenden zeichnen, die mit der Idee „Mathematikgeschichte im Unterricht“ konfrontiert und – so die Hoffnung – möglichst bereichert werden. Diskutiert werden die Ergebnisse der Befragung sowohl gesamtbilanziert wie auch differenziert nach Zugehörigkeiten der Lernenden zu verschiedenen Untergruppen der Grundgesamtheit. In diesem Zusammenhang ist es untersuchungsmethodisch zunächst vorrangig festzustellen, ob – und wenn ja, in welchen Aspekten – sich die Angehörigen der Experimentalgruppe schon vorab von denen der Kontrollgruppe *signifikant* unterscheiden, da später auch die jeweiligen Effekte der Unterrichtsreihen vor allem auf dieser Aggregationsebene im Vergleich diskutiert werden. Die gleiche Frage nach Unterschieden muss allerdings auch auf dem Niveau der Klassenzugehörigkeiten beantwortet werden; denn letztlich wurde die Intervention in den konventionellen Klassenverbänden durchgeführt. Es ist naturgemäß zu erwarten, dass die hierdurch vorgegebenen Strukturen die Aussagen der Untersuchung mitprägen. In einem weiteren Schritt sollen die festgestellten Ausprägungen hinsichtlich ihrer Genderspezifizität dargestellt werden.

5.2.1 Das allgemeine Interesse der Schülerinnen und Schüler an Mathematik

5.2.1.1 Gesamtbilanz

Auf einer vierstufigen Ratingskala konnten die Schülerinnen und Schüler ankreuzen, welches Interesse sie dem Fach Mathematik im Ganzen entgegenbringen und welche Sympathien sie für die einzelnen Teilgebiete des Faches hegen. Die Kreuze wurden gemäß der nachstehenden Tabelle 8 in Zahlenwerte codiert. Die Codierung ist musterhaft für die gesamte Studie zu verstehen: Ein sehr hoher Zustimmungsgrad zu einem Item wird stets mit dem Wert 4 codiert, ein sehr hoher Grad an Ablehnung mit dem Wert 1. Einige Schülerinnen und Schüler setzten ihre Kreuze vereinzelt zwischen die vorgesehenen Kästchen. In einem solchen Fall wurde das arithmetische Mittel der benachbarten Werte codiert (z. B. 2,5 bei einem Kreuz zwischen 2 und 3).

Interesse	sehr langweilig	eher langweilig	eher interessant	sehr interessant
Sympathie	mag ich gar nicht	mag ich eher nicht	mag ich	mag ich sehr
Codierung	1	2	3	4

Tabelle 8: Codierung der Ratingstufen im Fragebogen

Das Interesse der Lernenden an Mathematik kann aus dem folgenden Diagramm 1 abgelesen werden:

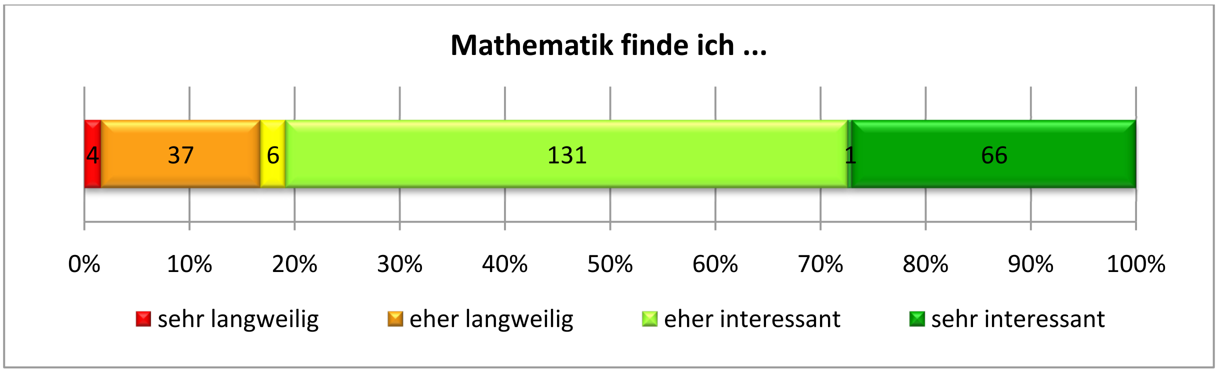


Diagramm 1: Interesse der Schülerinnen und Schüler an Mathematik (Gesamtpopulation)

Das Diagramm zeigt: Über 80 % aller Befragten äußerten ein gewisses bis großes Interesse am Fach Mathematik (vgl. Tab. CD.3). Das Bild wird differenzierter, wenn nach den Sympathien für die einzelnen Teilgebiete gefragt wird. Die entsprechende Verteilung der Antworten ist dem Diagramm 2 zu entnehmen (vgl. Tab. CD.4-6). Hier fällt auf den ersten Blick auf, dass kein einzelnes Teilgebiet für sich ein so großes Interesse generiert wie die Mathematik als Ganzes. Die Lernenden erleben offensichtlich Mathematik als etwas, das umfassender ist als die Summe seiner in der Schule thematisierten Teile. Ins Auge sticht ferner die vergleichsweise große Unbeliebtheit des Teilgebietes Stochastik. Das erkennt man auch aus den Kennwerten, die sich aus den Verteilungen ergeben. Der (für gehäufte ordinale Daten berechnete) Median für das Interesse an Mathematik liegt bei 3,10, für die Beliebtheit der Teilgebiete Algebra und Geometrie bei 3,01 bzw. 3,05. Stochastik erreicht demgegenüber nur magere 2,26. Etwas anderes fällt außerdem auf: Die Frage nach Stochastik wurde von 30 Schülerinnen und Schüler gar nicht beantwortet. Zur Begründung wurde in vielen Fragebögen geschrieben, dass man dieses Gebiet im Unterricht bisher nicht kennengelernt habe. Man ahnt, dass das Gebiet auch unter Lehrenden durchschnittlich eher unbeliebt ist.

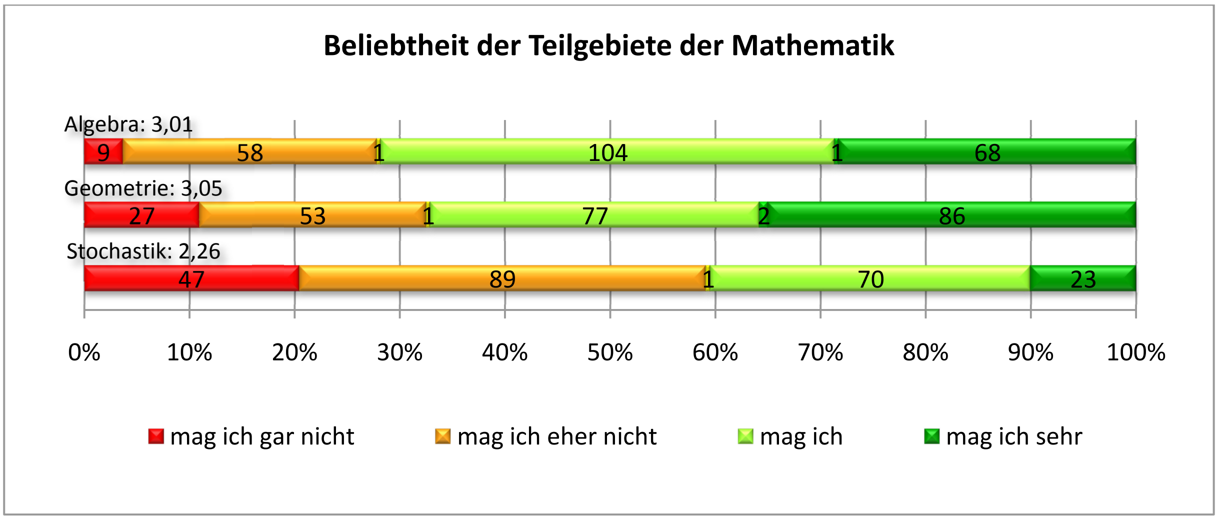


Diagramm 2: Sympathien für die Teilgebiete der Mathematik. Die Zahlen 3,01 bzw. 3,05 bzw. 2,26 bezeichnen jeweils den gehäuften Median. Zur Berechnung vgl. (Bühl, 2006, S. 124 ff.).

		Mathematik finde ich ...	Algebra mag ich ...	Geometrie mag ich ...	Statistik/ W'rechnung mag ich ...
N	Gültig	245	241	246	230
	Fehlend	15	19	14	30
Median		3,10	3,01	3,05	2,26

Tabelle 9: Interesse an der Mathematik und Beliebtheit ihrer Einzelgebiete. Bei den Werten handelt es sich um Mediane gehäufter Daten. Zur Interpretation vgl. Tabelle 8 (Codierung der Ratingstufen).

Besser noch als aus den Verteilungsdiagrammen lassen sich statistische Aussagen aus entsprechenden Boxplots entnehmen. Diese können auf der Grundlage von Perzentilberechnungen für gehäufte ordinale Daten erstellt werden (vgl. Tab. CD.7). Ein Beispiel zeigt das nachstehend abgedruckte Diagramm 3. Die vier Ratingstufen des Fragebogens (1, 2, 3, 4) sind dort in vier äquidistanten Intervallen (0,5-1,5/1,5-2,5/2,5-3,5/3,5-4,5) wiederzufinden, über welchen eine gleichmäßige Verteilung der Ratings modelliert wird (vgl.(Bühl, 2006, S. 127 f.)).

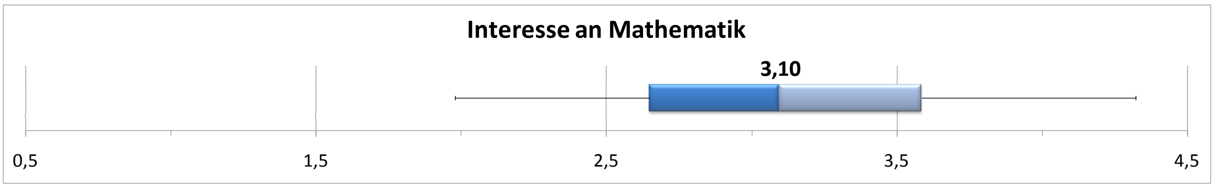


Diagramm 3: Interesse der Schülerinnen und Schüler an Mathematik. Die Werte wurden als Perzentile gehäufter ordinaler Daten berechnet.

Wegen ihrer eingängigen und übersichtlichen Form sollen Boxplots im Folgenden bevorzugt werden. Die Aussagen des Diagramms 2 stellen sich in Boxplots entsprechend so dar:

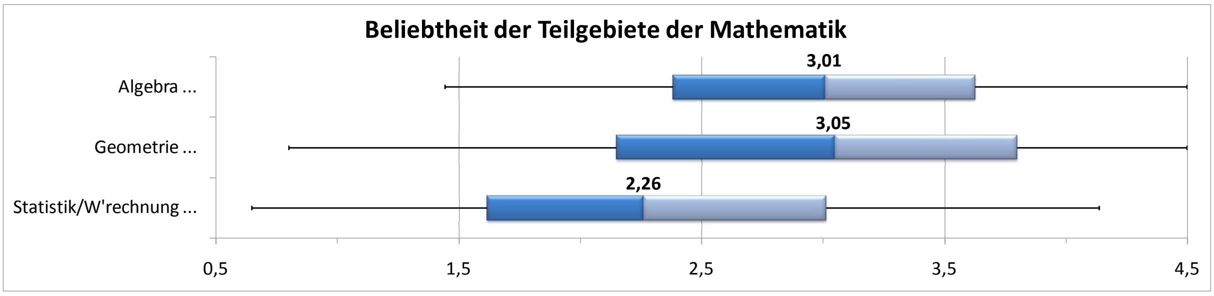


Diagramm 4: Sympathien für die Teilgebiete der Mathematik. Die Werte wurden als Perzentile gehäufter Daten errechnet (vgl. Tab. CD.7).

Mit dem Wilcoxon-Tests für abhängige Stichproben, der als nichtparametrischer Test dem vorliegenden Datenniveau entspricht, lässt sich feststellen, ob die beobachteten Beliebtheitsunterschiede der Teilgebiete Algebra, Geometrie und Stochastik signifikant sind oder nicht. Im vorliegenden Fall kommt die sog. Vorzeichen-Variante des Tests zur Anwendung (Bühl, 2006, S. 322 f.).

	Geometrie – Algebra	**Statistik/ W'rechnung – Algebra**	**Statistik /W'rechnung – Geometrie**
Z	0,000	-7,035	-6,037
Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	1,000	0,000	0,000
Monte-Carlo-Signifikanz (2-seitig)	1,000	0,000	0,000

Tabelle 10: Wilcoxon-Test auf signifikante Unterschiede zwischen den Beliebtheitsverteilungen, hier in der Variante des Vorzeichentests. Asymptotische und exakte Tests (nach dem Monte-Carlo-Verfahren) kommen zum selben Ergebnis.

Aus den errechneten Werten geht hervor, dass es zwischen Algebra und Geometrie keine signifikanten Unterschiede hinsichtlich ihrer Beliebtheit gibt, dass jedoch die Unterschiede zwischen Stochastik und jedem der beiden anderen Gebiete höchst signifikant sind ($p < 0{,}001$).

Eine weitere Frage betrifft die Korrelationen zwischen den vier Items Interesse an Mathematik und der Beliebtheit seiner Teilgebiete. Die Antwort ergibt sich aus Tabelle 11. Es zeigt sich, dass das Interesse an Mathematik im mittleren bis geringen Maße mit den Sympathien für Algebra und für Stochastik, nicht jedoch mit den Sympathien für Geometrie korreliert ist. Die entsprechenden Korrelationen sind dabei hochsignifikant. Möglicherweise assoziieren die Schülerinnen und Schüler Mathematik eher mit Algebra und Stochastik. Genauere Aussagen sind aus den Antworten auf spätere Items des Fragebogens zu erhoffen (s. u.). Auffällig ist noch, dass eine zwar sehr geringe, jedoch immerhin signifikante, *negative* Korrelation zwischen Algebra und Geometrie besteht: Beide Teilgebiete sind zwar sehr beliebt, möglicherweise jedoch aus unterschiedlichen Gründen. Im Hinblick auf die fachlichen Inhalte der in der vorliegenden Studie zu untersuchenden experimentellen Unterrichtsreihe, in welcher algebraische Methoden geometrisch untermauert werden, ist dies eine interessante und wichtige Beobachtung.

			Interesse an Mathematik	Algebra	Geometrie	Statis-tik/W'rech-nung
Spearman-Rho	Interesse an Mathematik	Korrelationskoef-fizient	1,000	0,493(**)	0,103	0,278(**)
		Sig. (2-seitig)	.	0,000	0,110	0,000
		N	245	239	244	228
	Algebra	Korrelationskoef-fizient	0,493(**)	1,000	-0,150(*)	0,133(*)
		Sig. (2-seitig)	0,000	.	0,020	0,047
		N	239	241	241	226
	Geometrie	Korrelationskoef-fizient	0,103	-0,150(*)	1,000	-0,048
		Sig. (2-seitig)	0,110	0,020	.	0,470
		N	244	241	246	230
	Statistik/ W'rech-nung	Korrelationskoef-fizient	0,278(**)	0,133(*)	-0,048	1,000
		Sig. (2-seitig)	0,000	0,047	0,470	.
		N	228	226	230	230

Tabelle 11: Korrelationen zwischen dem Interesse an Mathematik und der Beliebtheit der Teilgebiete Algebra, Geometrie sowie Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung.
** Die Korrelation ist auf dem 0,01 Niveau signifikant (zweiseitig).
* Die Korrelation ist auf dem 0,05 Niveau signifikant (zweiseitig).

5.2.1.2 Differenzierung nach Experimental- und Kontrollgruppe

Differenziert man das Interesse an Mathematik nach Zugehörigkeit der antwortenden Schülerinnen und Schüler zur Experimental- bzw. zur Kontrollgruppe, so erhält man Diagramm 5 (vgl. Tab. CD.8-9).

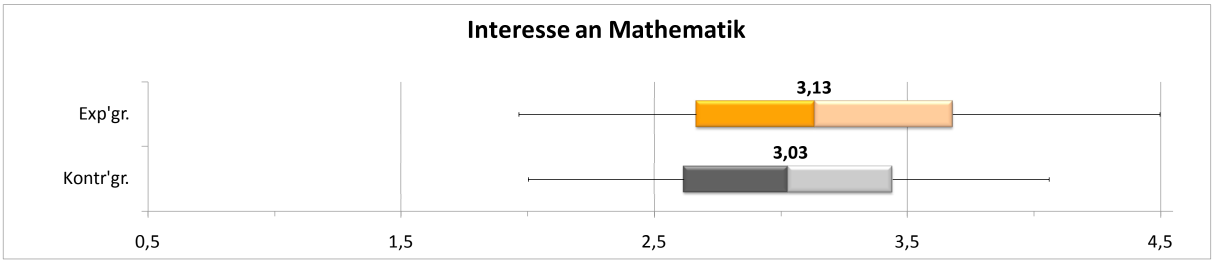


Diagramm 5: Interesse der Schülerinnen und Schüler an Mathematik, differenziert nach Zugehörigkeit zur Experimental- bzw. zur Kontrollgruppe. Der dargestellte Unterschied ist nicht signifikant.

Wie nicht anders zu erwarten, unterscheiden sich die Mediane und Perzentile der beiden Gruppen. Ob solche Unterschiede und die zugrunde liegenden Abweichungen in den jeweiligen Verteilungen zufälliger oder signifikanter Art sind, lässt sich anhand des Kolmogorov-Smirnov-Test für zwei Stichproben mit ordinalem Datenniveau entscheiden. Dieser Test ist dem geläufigen U-Test nach Mann und Whitney wegen der geringen Anzahl von Kategorien vorzuziehen (Bühl, 2006, S. 317 f.). Er liefert die in Tabelle 12 abgedruckten Werte. Die Unterschiede zwischen der Experimental- und der Kontrollgruppe (vgl. Tab. CD.8) sind demnach sowohl hinsichtlich des allgemeinen Interesses der Lernenden an Mathematik wie auch ihrer Sympathien für die einzelnen Teilgebiete *nicht* signifikant.

		Mathematik finde ich ...	Algebra mag ich ...	Geometrie mag ich ...	Statistik/ W'rechnung mag ich ...
Extremste Differenzen	Absolut	0,102	0,052	0,115	0,072
	Positiv	0,000	0,052	0,000	0,000
	Negativ	-0,102	-0,017	-0,115	-0,072
Kolmogorov-Smirnov-Z		0,758	0,380	0,856	0,518
Asymptotische Signifikanz (2-seitig)		0,614	0,999	0,456	0,951
Monte-Carlo-Signifikanz (2-seitig)		0,163	0,710	0,154	0,481

Tabelle 12: Prüfung der Unterschiede zwischen Experimental- und Kontrollgruppe auf Signifikanz mit dem Kolmogorov-Smirnov-Test. In der vorletzten Zeile sind die Ergebnisse der asymptotischen Tests, in der letzten Zeile die Ergebnisse der exakten Tests nach dem Monte-Carlo-Verfahren abgedruckt (Janssen & Laatz, 2007, S. 576).

Die Korrelationen zwischen dem Interesse an Mathematik und der Beliebtheit seiner Teilgebiete zeigen in der Experimentalgruppe und der Kontrollgruppe insgesamt die gleichen Tendenzen wie in der Gesamtpopulation. Ein Unterschied ist jedoch bemerkenswert: Während in der Experimentalgruppe die negative Korrelation zwischen den Teilgebieten Algebra und Geometrie sich noch mehr ausprägt und sogar als *hoch* signifikant bewertet wird, verschwindet sie in der Kontrollgruppe (vgl. Tab. CD.9).

Um die Beliebtheitsunterschiede der mathematischen Teilgebiete differenziert nach Experimental- und Kontrollgruppe zu erfassen, wird wieder der Wilcoxon-Vorzeichen-Test angewendet. Man gelangt zu fast identischen Ergebnissen wie bei der Gesamtpopulation (vgl. Tab. CD.10-11). Lediglich das Maß der Signifikanz ist im Falle Stochastik/Geometrie bei der Kontrollgruppe „signifikant" statt „höchst signifikant". Ansonsten gibt es in Bezug auf die Beliebtheit der mathematischen Einzelgebiete keine nennenswerten Unterschiede zwischen der Experimental- und der Kontrollgruppe.

5.2.1.3 Differenzierung nach Gender

Die Differenzierung nach Gender ergibt die folgenden Ergebnisse (vgl. auch Tab. CD.12):

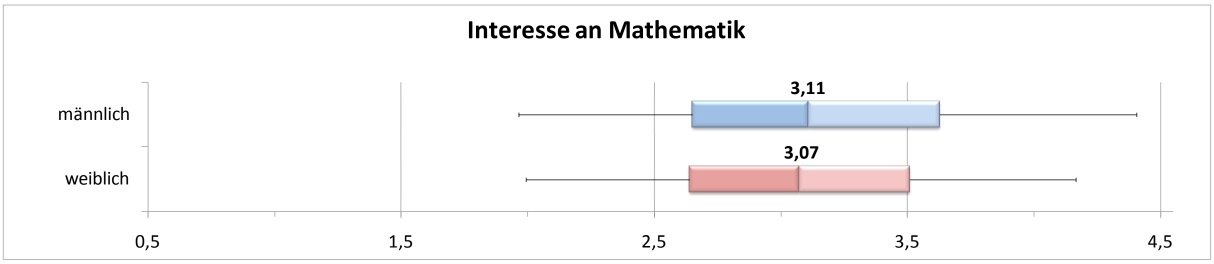


Diagramm 6: Interesse der Schülerinnen und Schüler an Mathematik, differenziert nach Zugehörigkeit zur Experimental- bzw. zur Kontrollgruppe. Der dargestellte Unterschied ist nicht signifikant.

Dieser Unterschied ist nicht signifikant (vgl. Tab. CD.14). Ebenso verhält es sich mit den Sympathien für die Teilgebiete Algebra und Geometrie. Diese sind mit den Medianen 3,00 bzw. 3,05 bei den Jungen sowie 3,02 bzw. 3,05 bei den Mädchen gleichermaßen beliebt. Anders sieht es beim Teilgebiet

Statistik/Wahrscheinlichkeitsrechnung aus: Es erhält bei den Jungen einen Wert von 2,45, bei den Mädchen jedoch nur 2,04. Der Unterschied wird als hoch signifikant bewertet (vgl. Tab. CD.12): Die an dieser Studie teilnehmenden Mädchen mögen die Stochastik im Durchschnitt deutlich weniger als die Jungen.

Bei den Korrelationen der Items kommt man zu Ergebnissen, die schon bei der Differenzierung nach Zugehörigkeit zur Experimental- bzw. Kontrollgruppe aufgetreten sind. Die Gesamttendenz bleibt demnach erhalten, jedoch wird die negative Korrelation zwischen den Teilgebieten Algebra und Geometrie nur bei den Jungen als hoch signifikant bewertet. Dort tritt sie auch ausgeprägter auf. Bei den Mädchen hingegen liegt sie nahe bei Null (vgl. Tab. CD.13).

5.2.1.4 Differenzierung nach Klassen

Die letzte Differenzierung soll nach den Klassen (Lerngruppen) vorgenommen werden. Die Ergebnisse für das Item „Interesse an Mathematik" sind im Diagramm 7, für die Items „Beliebtheit der Teilgebiete" in den Diagrammen 8-10 dargestellt.

Die Mediane und Quartile weichen z. T. nicht unbeträchtlich voneinander ab. Um zu ermitteln, ob diese Unterschiede signifikant sind oder nicht, werden H-Tests nach Kruskal und Wallis durchgeführt (Bühl, 2006, S. 326), deren Ergebnisse in Tabelle 13 dargestellt ist. Die Tests zeigen, dass die Unterschiede zwischen den Lerngruppen im Hinblick auf das Item „Interesse an Mathematik" nicht signifikant sind. Dies gilt auch für die Unterschiede hinsichtlich der Beliebtheit der Teilgebiete Algebra sowie Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Als signifikant stellen sich hingegen die Unterschiede im Teilgebiet Geometrie heraus. Ins Auge springen die vergleichsweise hohen Werte der Lerngruppen C und D2. Tatsächlich können durch eine Reihe von paarweisen Tests die Unterschiede zwischen C einerseits sowie B1, E und K als signifikant, zwischen C und K2 sogar als hoch signifikant nachgewiesen werden. D2 hingegen unterscheidet sich von keiner der anderen Lerngruppen in signifikanter Weise (vgl. Tabellen CD.16-33).

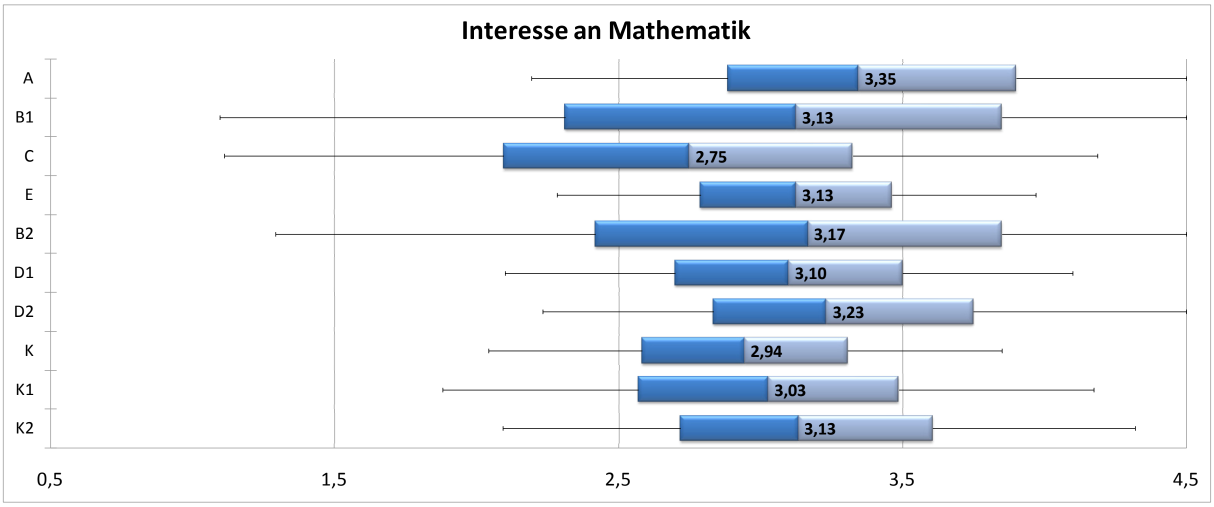


Diagramm 7: Interesse der Schülerinnen und Schüler an Mathematik, differenziert nach Zugehörigkeit zu einer Klasse (Lerngruppe). Die ersten sieben Klassen (A, B1, C, E, B2, D1, D2) stellen die Klassen der Experimentalgruppe dar, die letzten drei Klassen (K, K1, K2) die Klassen der Kontrollgruppe. Die Unterschiede sind nicht signifikant.

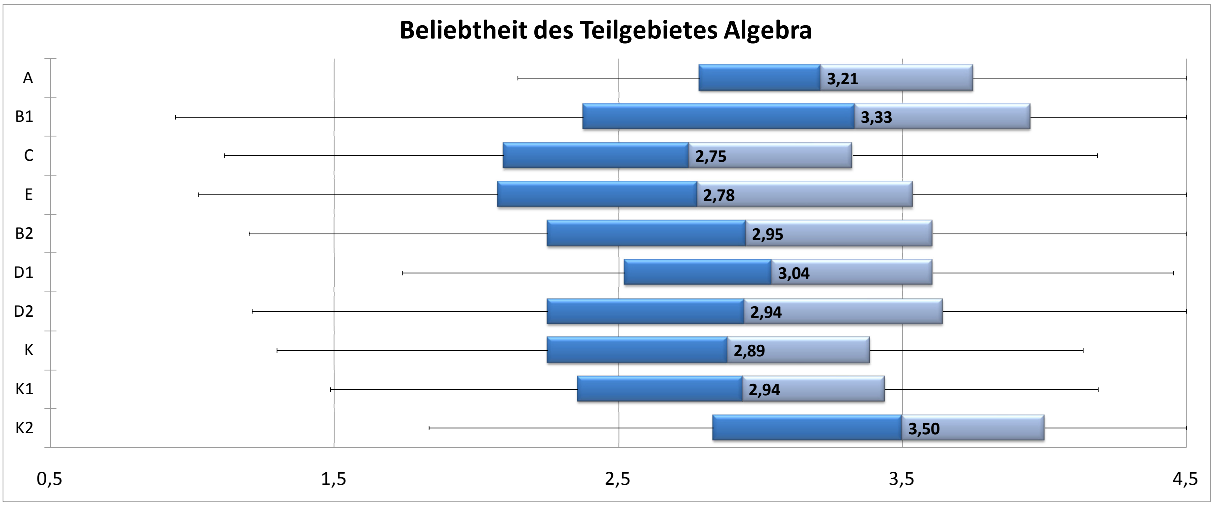


Diagramm 8: Beliebtheit des Teilgebietes Algebra, differenziert nach Zugehörigkeit zu einer Klasse. Die Unterschiede sind nicht signifikant (vgl. Tabelle 12).

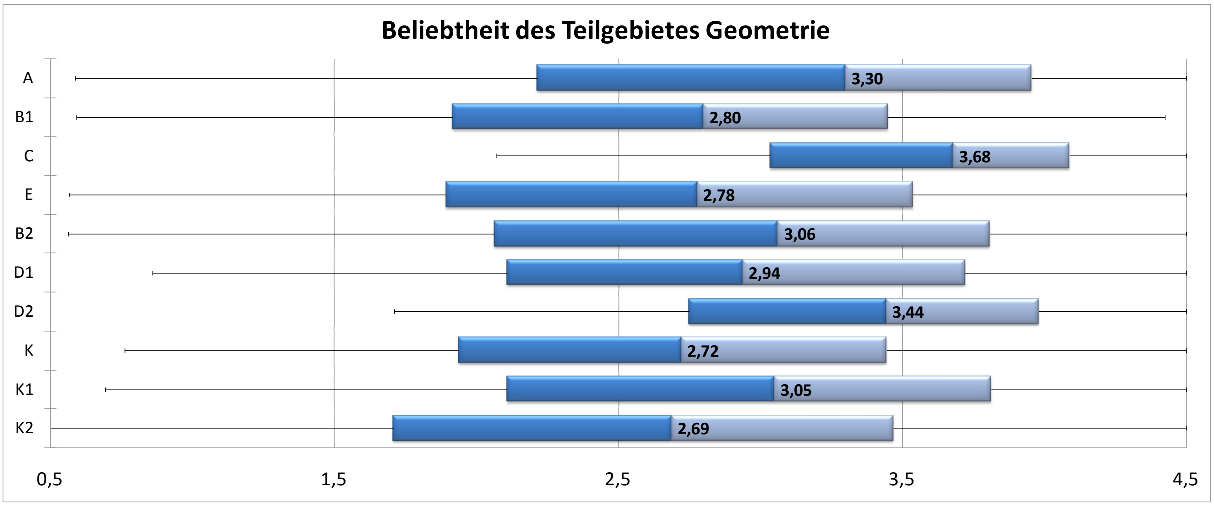


Diagramm 9: Beliebtheit des Teilgebietes Geometrie, differenziert nach Zugehörigkeit zu einer Klasse. Die Unterschiede zwischen C einerseits sowie B1, E, K und K2 andererseits sind signifikant (vgl. Tabelle 5).

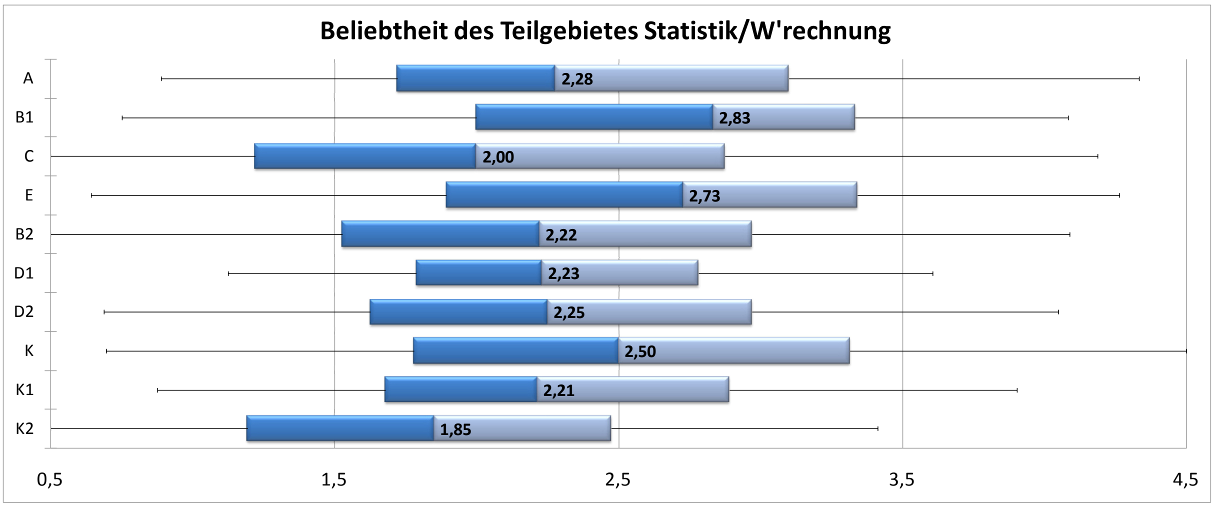


Diagramm 10: Beliebtheit des Teilgebietes Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung, differenziert nach Zugehörigkeit zu einer Klasse. Die Unterschiede sind nicht signifikant (vgl. Tabelle 12).

			Mathematik finde ich ...	**Algebra ...**	**Geometrie ...**	**Statistik/ W'rechnung ...**
Chi-Quadrat			16,270	12,058	17,534	12,638
df			9	9	9	9
Asymptotische Signifikanz			,061	,210	,041	,180
Monte-Carlo-Signifikanz	Signifikanz		,059(a)	,213(a)	,037(a)	,169(a)
	99%-Konfidenzintervall	Untergrenze	,053	,202	,032	,159
		Obergrenze	,065	,223	,042	,178

Tabelle 13: H-Test nach Kruskall und Wallis. Der Test zeigt nur für das Teilgebiet Geometrie signifikante Unterschiede zwischen den Lerngruppen.
a Basiert auf 10000 Stichprobentabellen.
b Kruskal-Wallis-Test, c Gruppenvariable: Klasse

Die Frage nach den Korrelationen erfährt auf der Aggregationsebene der Klassen sehr unterschiedliche Antworten (vgl. Tab. CD.34). In keinem der Fälle lässt sich aber noch eine signifikante, negative Korrelation zwischen den Teilgebieten Algebra und Geometrie nachweisen. Am ehesten ist der Zusammenhang in den Klassen B1 und E anzutreffen, wobei er in E die Signifikanzschwelle nur knapp verfehlt. Mittlere bis hohe Korrelationen treten ferner in den Lerngruppen B1 zwischen Mathematik und Algebra (0,827) und zwischen Mathematik und Stochastik (0,898) sowie in D1 zwischen Mathematik und Algebra (0,872) auf.

5.2.1.5 Zusammenfassung

Hinsichtlich des Interesses am Fach Mathematik und der Beliebtheit seiner Einzelgebiete gibt es zwischen der Experimental- und der Kontrollgruppe insgesamt keine signifikanten Unterschiede. Mathematik wird demnach in allen Klassen der beiden Gruppen im Mittel als ein eher interessantes Fach wahrgenommen, und zwar sowohl von Jungen wie auch von Mädchen.

Als Teilgebiete sind Algebra und Geometrie gleichermaßen beliebt. Diese Beliebtheit ist jedoch im geringen Maße gegenläufig (negativ korreliert). Insbesondere gilt dies in der Experimentalgruppe – vor allem in den Klassen B1 und E – sowie bei den Jungen. Stochastik erfährt – vor allem bei den Mädchen – deutlich weniger Sympathie als die beiden anderen Teilgebiete.

5.2.2 Der mathematische Alltag – typische Tätigkeiten im Unterricht

5.2.2.1 Gesamtbilanz

Welches sind die mathematischen Tätigkeiten, mit denen sich die an dieser Studie teilnehmenden Schülerinnen und Schüler – ihrer eigenen Wahrnehmung nach – hauptsächlich im Unterricht beschäftigen? Die Antworten hierauf ergeben das in Diagramm 11 abgedruckte Bild (vgl. Tab. CD.36). Die Zahlen entsprechen folgenden Aussagen der von den Lernenden ausgefüllten Rating-Skala:

Häufigkeit	das kommt im Unterricht nie vor	das kommt im Unterricht seltener vor	das kommt im Unterricht öfters vor	das kommt im Unterricht sehr oft vor
Codierung	1	2	3	4
Intervalle	0,5-1,5	1,5-2,5	2,5-3,5	3,5-4,5

Tabelle 14: Codierung der Ratingstufen im Fragebogen und Intervallbildung.

Es fällt auf, dass offenbar die technisch-formalen Elemente in den Klassenzimmern vorherrschen: Termumformungen, Formeloperationen, Rechnen und Taschenrechnerarbeit belegen in der Wahrnehmung der Lernenden mit Abstand die ersten Plätze. Tätigkeiten, die dem Umgang mit Mathematik eine sprachliche Dimension eröffnen könnten – so etwa Diskussionen mit anderen Schülerinnen und Schülern, Textlektüren oder auch das schlichte Übertragen mathematischer Sachverhalte in Umgangssprache – kommen nur selten vor und landen auf den hintersten Rängen. Im Hinblick auf die Untersuchungsziele der vorliegenden Arbeit ist dies ein interessanter und wichtiger Befund. Ganz am Ende der Liste findet sich – mit drastischem Abstand zu den davor platzierten Items – die Arbeit am Computer. Sie findet in den hier untersuchten Lerngruppen offenbar gar nicht oder nur ganz vereinzelt statt.

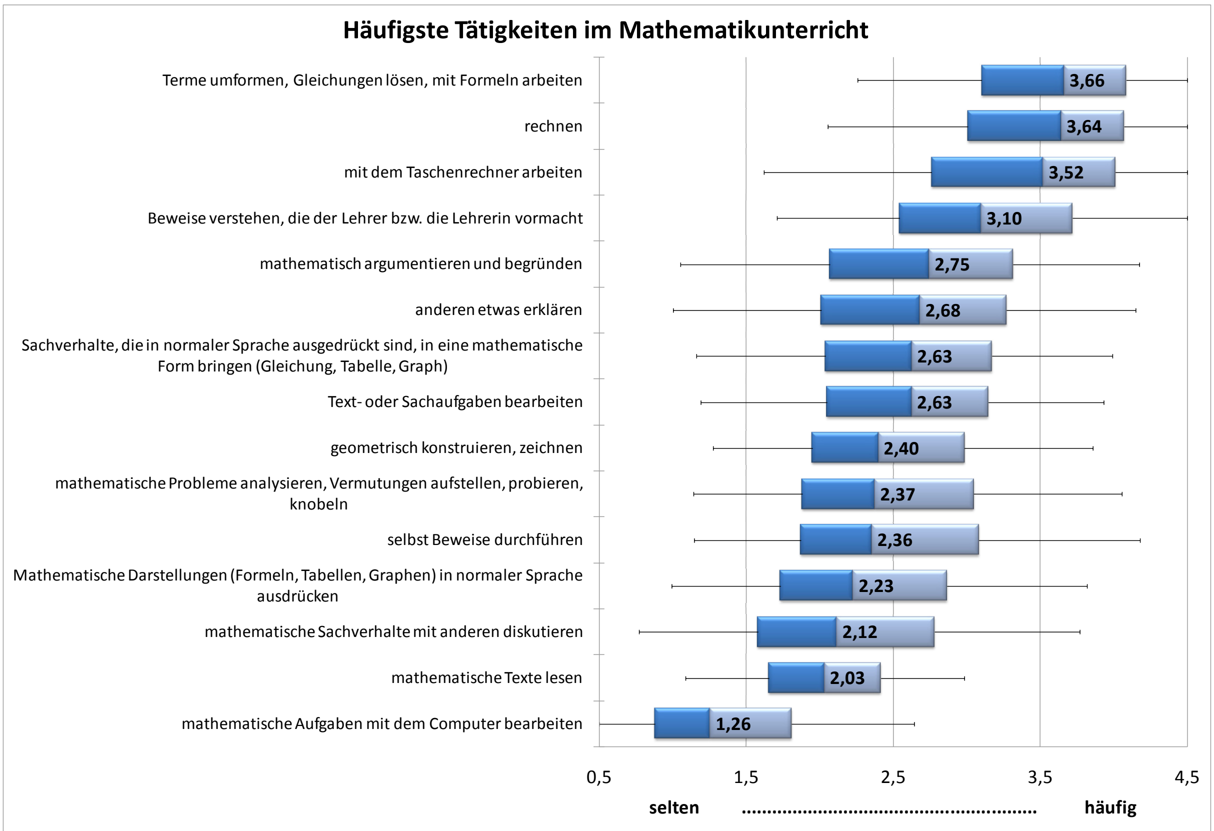


Diagramm 11: Die in der Wahrnehmung aller Schülerinnen und Schüler häufigsten Tätigkeiten im regulären Mathematikunterricht (Gesamtpopulation).

5.2.2.2 Differenzierung nach Experimental- und Kontrollgruppe

Der differenzierte Blick auf die Schülerinnen und Schüler der Experimentalgruppe einerseits und der Kontrollgruppe andererseits enthüllt nennenswerte (weil signifikante) Unterschiede zwischen den beiden Gruppen. Sie betreffen die folgenden Tätigkeiten, die in der Experimentalgruppe als häufiger wahrgenommen werden. Die Sterne kennzeichnen das Signifikanzniveau dieser Unterschiede (* für signifikant, ** für sehr oder hoch signifikant, *** für höchst signifikant). In den Klammern werden die jeweilige Irrtumswahrscheinlichkeit des Kolmogorov-Smirnov-Tests (vgl. Tab. CD.38) sowie die Mediane der Experimental- bzw. der Kontrollgruppe und deren Differenz angegeben:

- mathematisch argumentieren, begründen***($p < 0{,}001$; $m_E = 2{,}94$ / $m_K = 2{,}30$; +0,64)
- Terme umformen, Gleichungen lösen, mit Formeln arbeiten***
  ($p < 0{,}001$; $m_E = 3{,}77$ / $m_K = 3{,}37$; +0,40)
- mathematische Probleme analysieren, Vermutungen aufstellen, probieren, knobeln ***
  ($p < 0{,}001$; $m_E = 2{,}54$ / $m_K = 2{,}16$; +0,38)
- selbst Beweise durchführen** ($p = 0{,}002$; $m_E = 2{,}48$ / $m_K = 2{,}18$; +0,30)
- Beweise verstehen, die der Lehrer/die Lehrerin vormacht**
  ($p = 0{,}004$; $m_E = 3{,}21$ / $m_K = 2{,}93$; +0,28)
- mathematische Aufgaben mit dem Computer bearbeiten***
  ($p < 0{,}001$; $m_E = 1{,}37$ / $m_K = 1{,}10$; + 0,27)
- mathematische Texte lesen**($p = 0{,}009$; $m_E = 2{,}09$ / $m_K = 1{,}93$; +0,16)

Ein anderes, höchst signifikant unterschiedliches Item – „mit dem Taschenrechner arbeiten“ – wird in der Kontrollgruppe häufiger wahrgenommen ($p = 0{,}002$; $m_E = 3{,}28$ / $m_K = 3{,}75$; –0,47). Zur besseren Übersicht und späteren Referenzierung sind die Boxplots der Experimental- und der Kontrollgruppe in Diagramm 12a und 12b abgedruckt (vgl. Tab. CD.36 und CD.37).

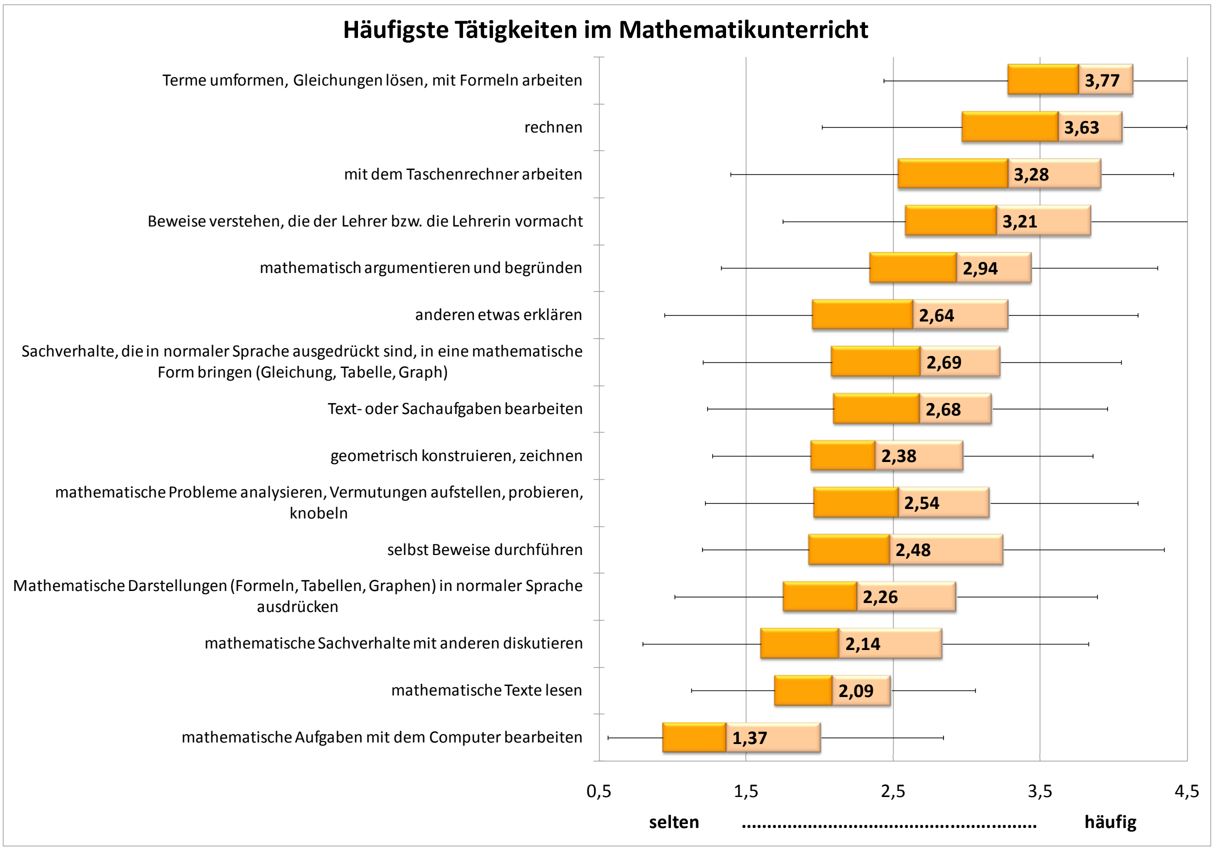


Diagramm 12a: Die in der Wahrnehmung der Schülerinnen und Schüler der Experimentalgruppe häufigsten Tätigkeiten im regulären Mathematikunterricht. Die Sortierung folgt der Reihenfolge in der Gesamtpopulation (vgl. Diagramm 11).

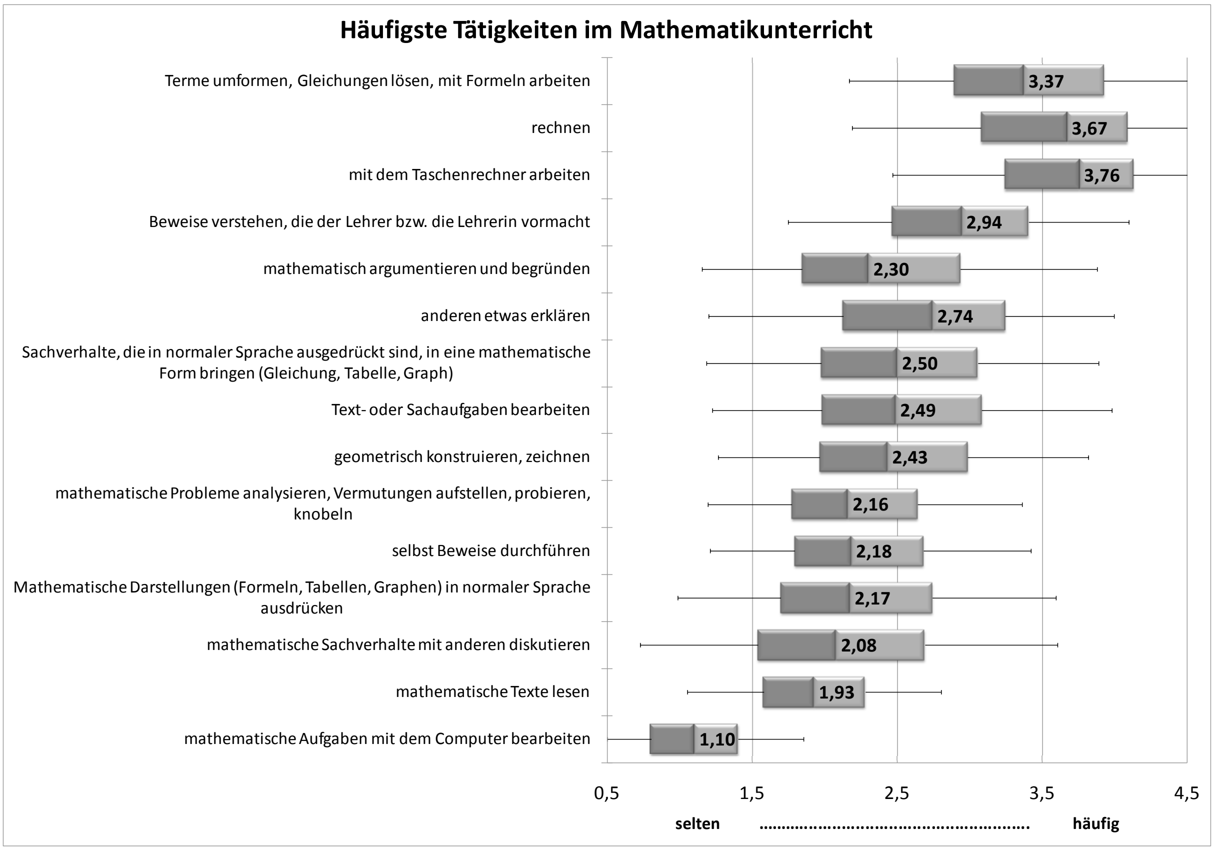


Diagramm 132b: Die in der Wahrnehmung der Schülerinnen und Schüler der Kontrollgruppe häufigsten Tätigkeiten im regulären Mathematikunterricht (Kontrollgruppe). Die Sortierung folgt der Reihenfolge in der Gesamtpopulation (vgl. Diagramm 11).

Die Daten können ein Indiz dafür sein, dass die Schülerinnen und Schüler der Experimentalgruppe in ihrem regulären Unterricht etwas mehr mit dem Bereich des mathematischen Analysierens, Argumentierens und Beweisens in Berührung kommen.

5.2.2.3 Differenzierung nach Gender

Besteht zwischen Jungen und Mädchen eine unterschiedliche Wahrnehmung hinsichtlich der Häufigkeiten bestimmter Tätigkeiten im Unterricht? Dies ist tatsächlich der Fall und betrifft die folgenden Items, die in der Wahrnehmung der Mädchen signifikant häufiger auftreten als in der Wahrnehmung der Jungen:

- geometrisch konstruieren, zeichnen** ($p = 0{,}001$; $m_J = 2{,}28$ / $m_M = 2{,}67$; –0,39)
- mathematische Sachverhalte mit anderen diskutieren**
  ($p = 0{,}008$; $m_J = 2{,}03$ / $m_M = 2{,}31$; –0,28)
- rechnen** ($p = 0{,}013$; $m_J = 3{,}54$ / $m_M = 3{,}77$; –0,23)
- Terme umformen, Gleichungen lösen, mit Formeln arbeiten**
  ($p = 0{,}046$; $m_J = 3{,}59$ / $m_M = 3{,}76$; –0,17)

An der Spitze der Unterschiede stehen geometrisches Zeichnen sowie das Diskutieren mit anderen. Beide Tätigkeiten werden von den Mädchen hoch signifikant häufiger wahrgenommen und – vermutlich – dementsprechend auch häufiger ausgeübt. Traditionelle Rollenbilder scheinen sich hierin zu spiegeln. Nur bei einem einzigen Item verhält es sich umgekehrt. Es handelt sich um das Item „mathematische Aufgaben mit dem Computer bearbeiten“. Dieses liegt in der Wahrnehmung der Jungen etwas weiter vorn – allerdings auf niedrigstem Niveau ($p = 0{,}001$; $m_J = 1{,}36$ / $m_M = 1{,}13$; $+0{,}23$). Auch dieser Befund entspricht einem geläufigen Rollenschema.

5.2.2.4 *Differenzierung nach Klassen*

Differenziert nach Klassen ergeben sich ebenfalls unterschiedliche Wahrnehmungen der häufigsten Tätigkeiten im Mathematikunterricht. Diese Unterschiede sind *höchst* signifikant in den nachstehend dargestellten Items (vgl. Tab. CD.42):

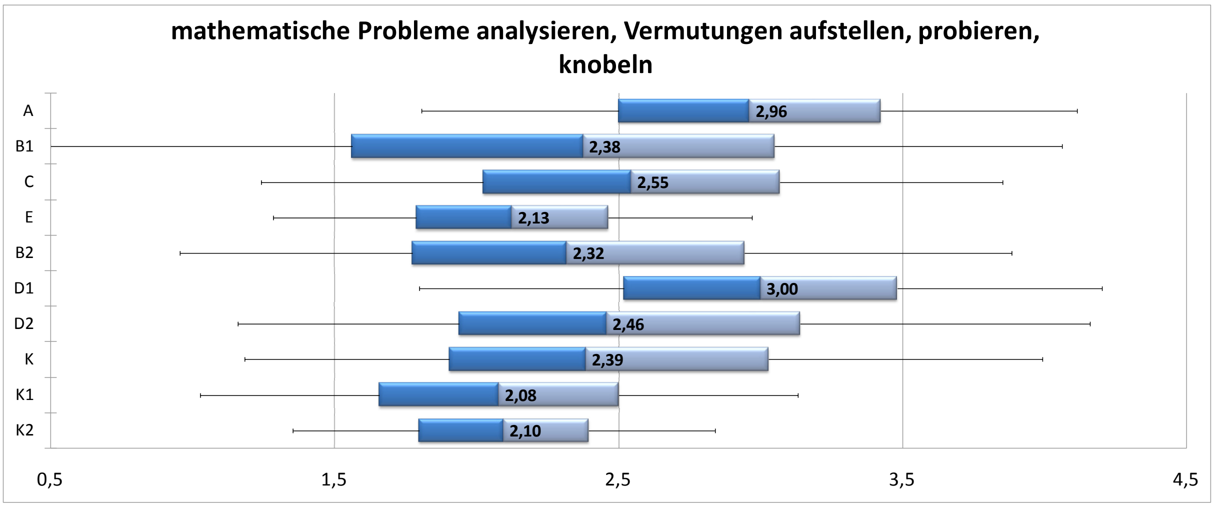


Diagramm 13a: Häufigkeitswahrnehmung der Tätigkeit „mathematische Probleme analysieren, Vermutungen aufstellen, probieren, knobeln“ im regulären Mathematikunterricht, differenziert nach Zugehörigkeit zu einer Klasse.

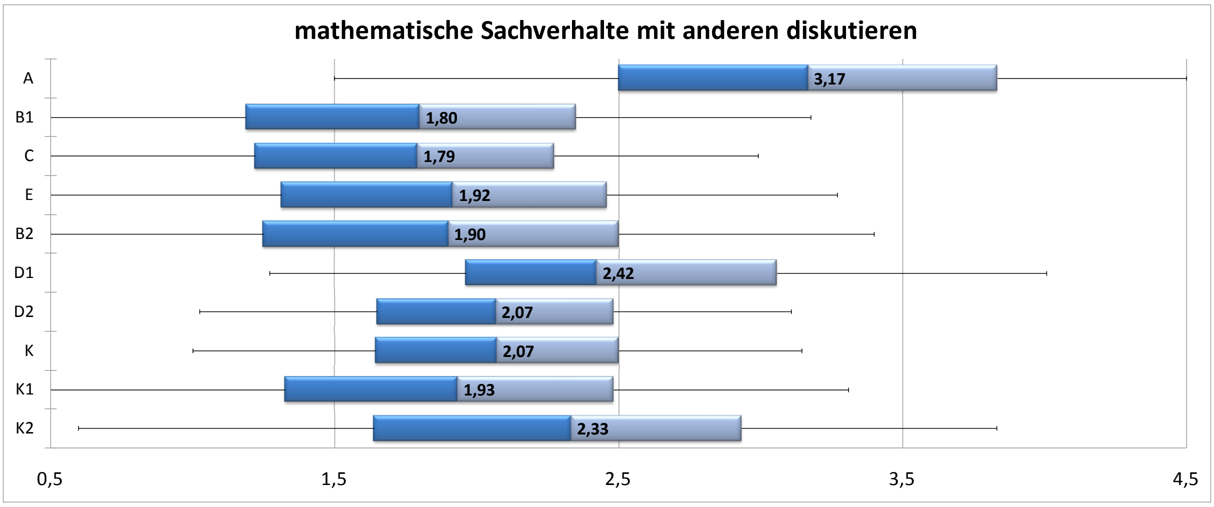


Diagramm 13b: Häufigkeitswahrnehmung der Tätigkeit „mathematische Sachverhalte mit anderen diskutieren“ im regulären Mathematikunterricht, differenziert nach Zugehörigkeit zu einer Klasse. Der Mädchenanteil in Klasse A liegt bei 75 %.

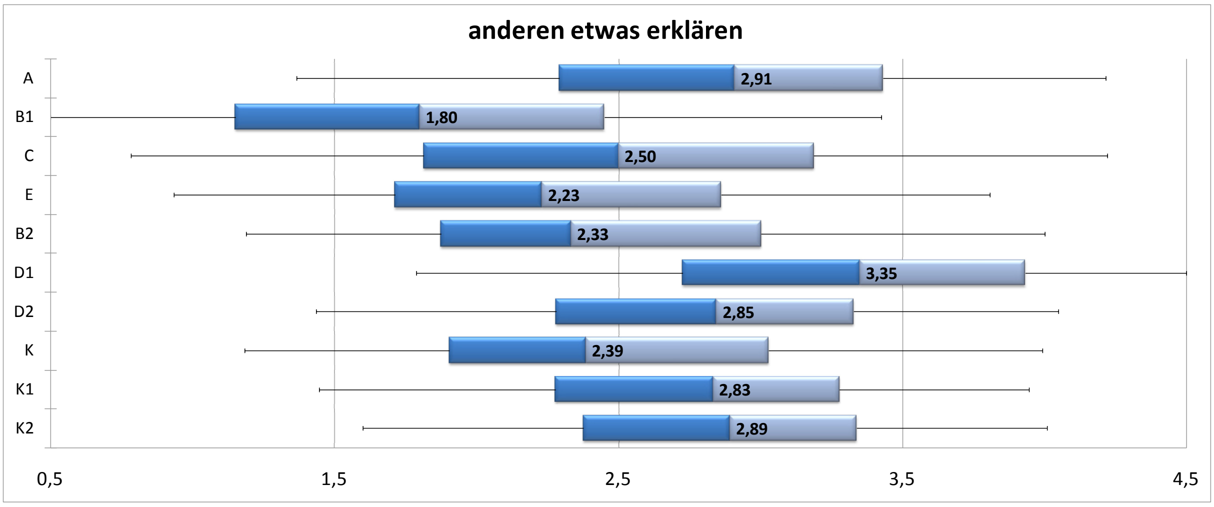


Diagramm 13c: Häufigkeitswahrnehmung der Tätigkeit „anderen etwas erklären" im regulären Mathematikunterricht, differenziert nach Zugehörigkeit zu einer Klasse.

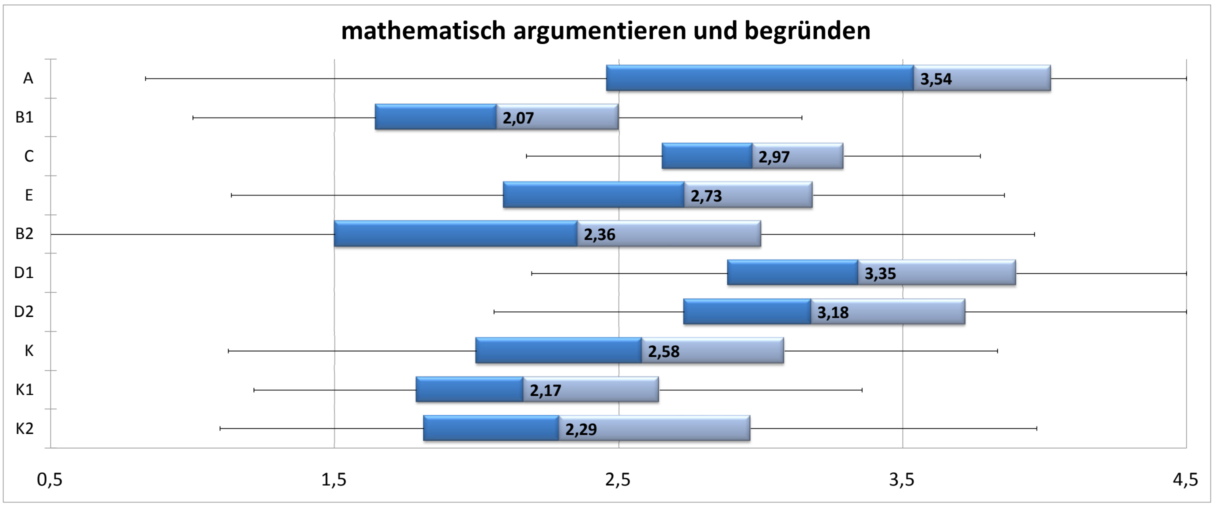


Diagramm 13d: Häufigkeitswahrnehmung der Tätigkeit „mathematisch argumentieren und begründen" im regulären Mathematikunterricht, differenziert nach Zugehörigkeit zu einer Klasse.

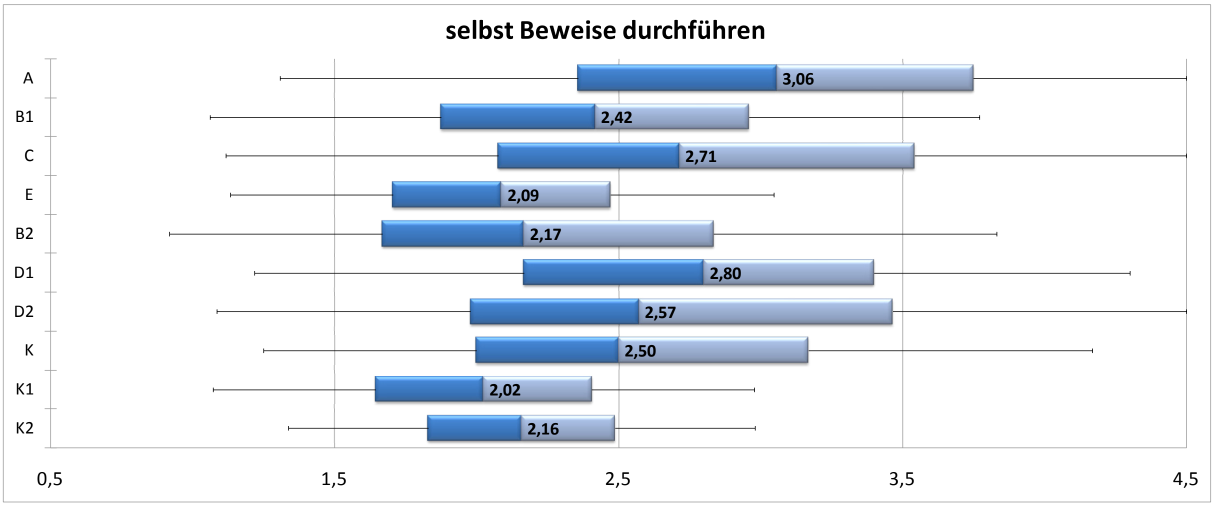


Diagramm 13e: Häufigkeitswahrnehmung der Tätigkeit „selbst Beweise durchführen" im regulären Mathematikunterricht, differenziert nach Zugehörigkeit zu einer Klasse.

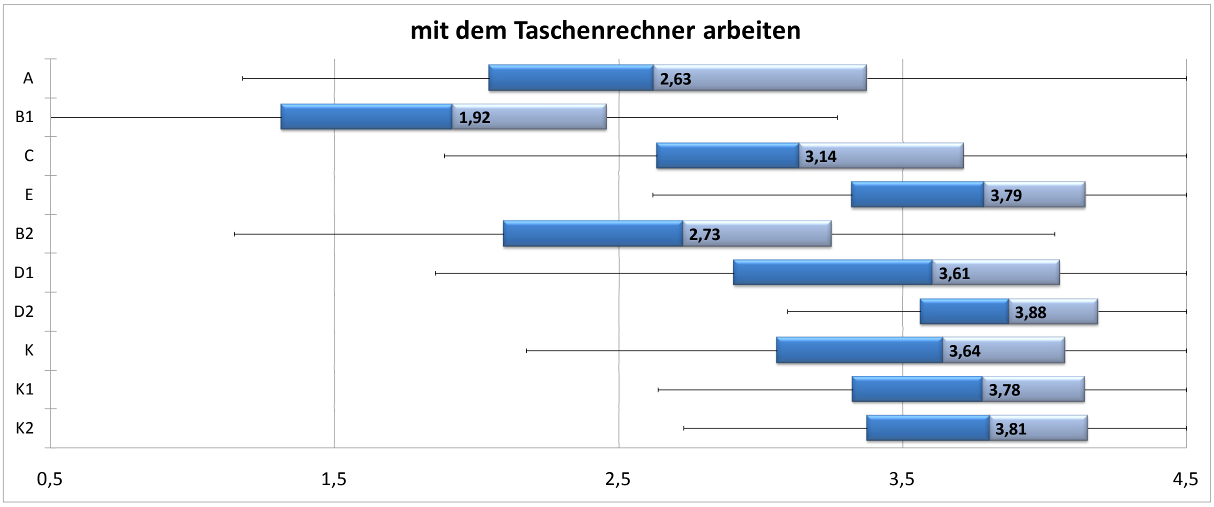


Diagramm 13f: Häufigkeitswahrnehmung der Tätigkeit „mit dem Taschenrechner arbeiten" im regulären Mathematikunterricht, differenziert nach Zugehörigkeit zu einer Klasse.

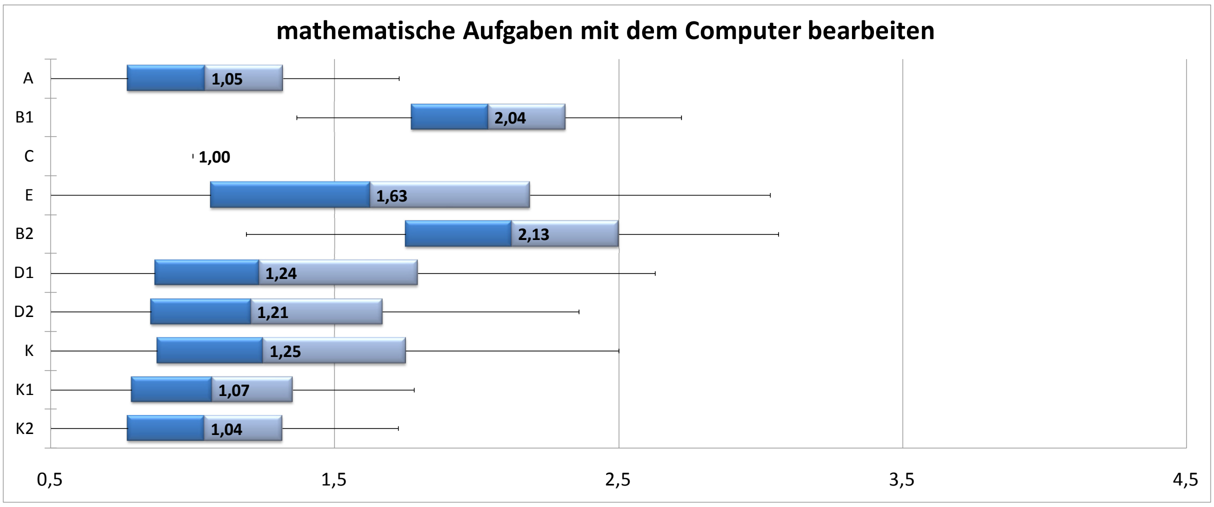


Diagramm 13g: Häufigkeitswahrnehmung der Tätigkeit „mathematische Aufgaben mit dem Computer bearbeiten" im regulären Mathematikunterricht, differenziert nach Zugehörigkeit zu einer Klasse.

Die Unterschiede sind ferner hoch signifikant in den folgenden Items:

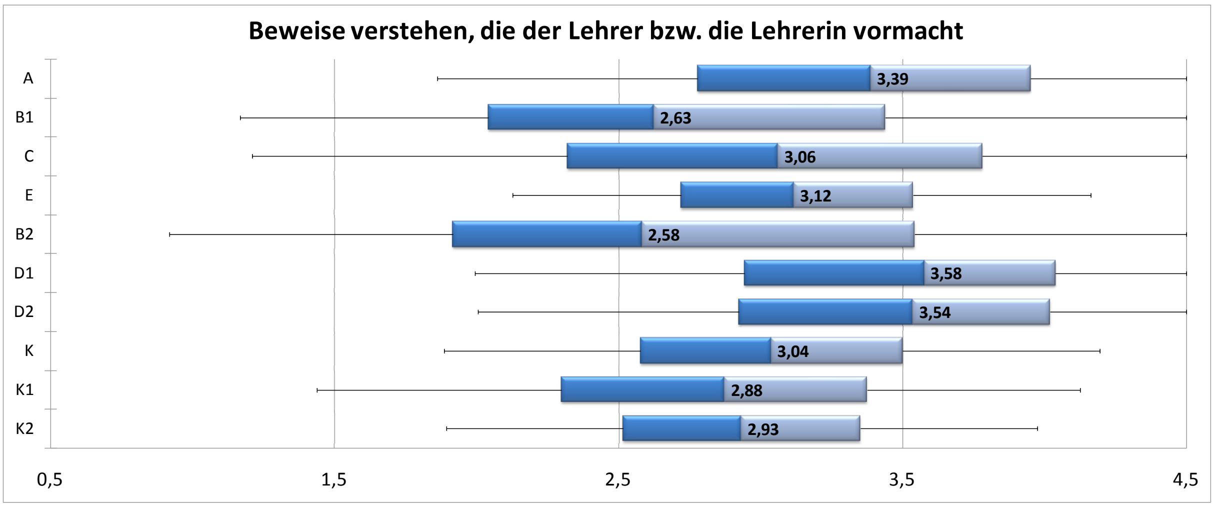


Diagramm 13h: Häufigkeitswahrnehmung der Tätigkeit „Beweise verstehen, die der Lehrer bzw. die Lehrerin vormacht" im regulären Mathematikunterricht, differenziert nach Zugehörigkeit zu einer Klasse.

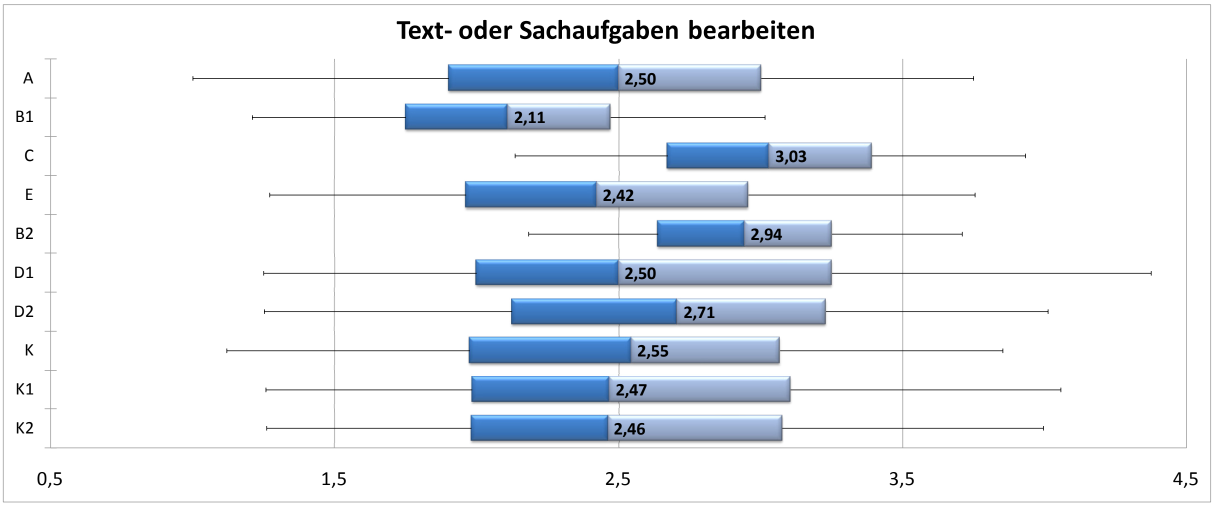


Diagramm 13i: Häufigkeitswahrnehmung der Tätigkeit „Text- oder Sachaufgaben bearbeiten" im regulären Mathematikunterricht, differenziert nach Zugehörigkeit zu einer Klasse.

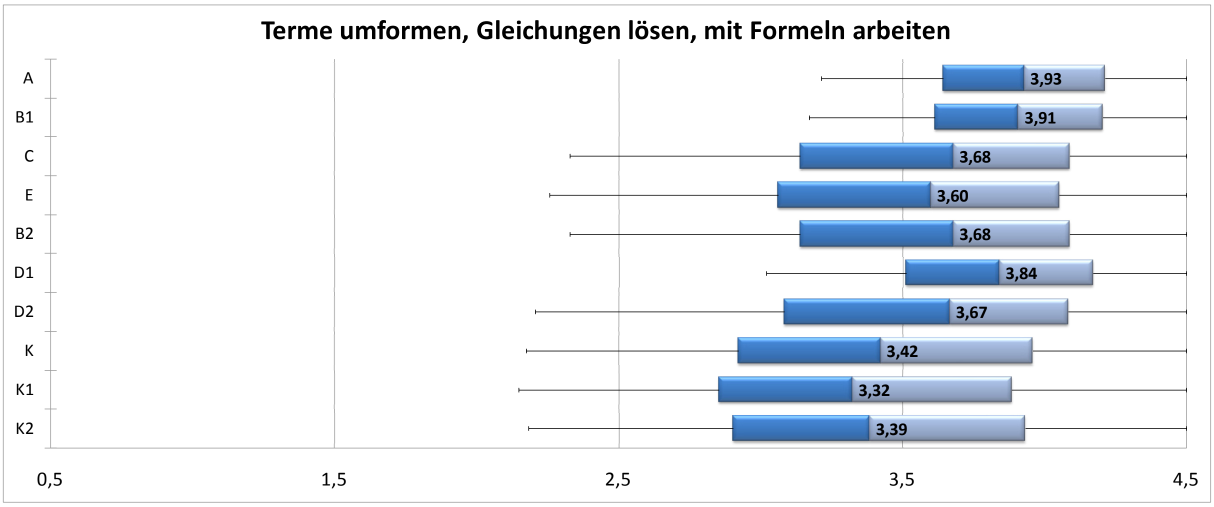


Diagramm 13j: Häufigkeitswahrnehmung der Tätigkeit „Terme umformen, Gleichungen lösen, mit Formeln arbeiten" im regulären Mathematikunterricht, differenziert nach Zugehörigkeit zu einer Klasse.

Signifikant sind außerdem die Unterschiede im folgenden Item:

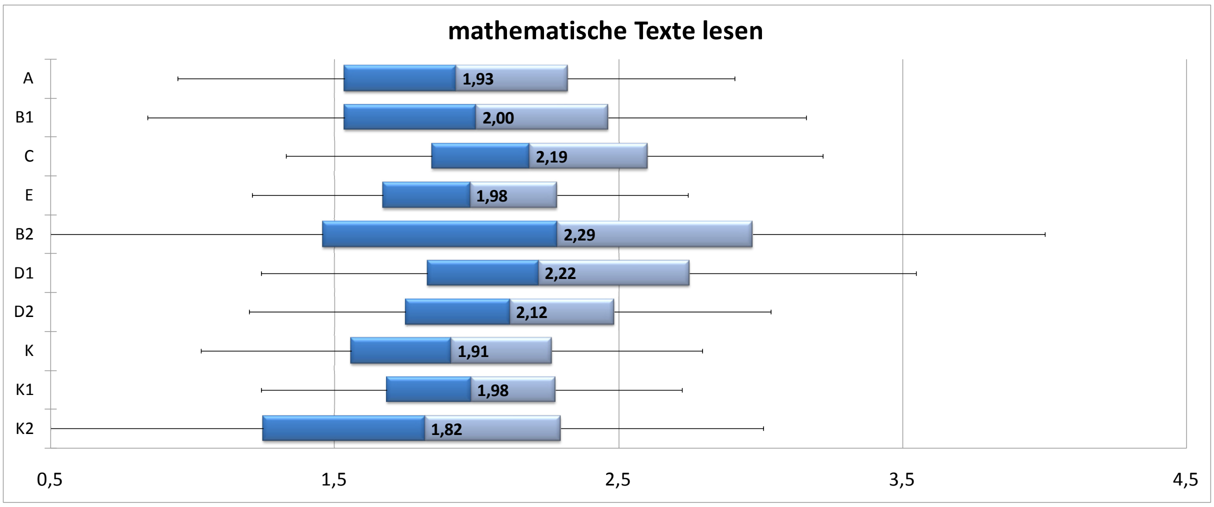


Diagramm 13k: Häufigkeitswahrnehmung der Tätigkeit „mathematische Texte lesen" im regulären Mathematikunterricht, differenziert nach Zugehörigkeit zu einer Klasse.

Es stellt sich die Frage, ob die soeben gezeigten Daten nicht noch kompakter und übersichtlicher dargestellt werden könnten. Dies ist tatsächlich möglich, wenn eine Faktorenanalyse über die Matrix der Mediane durchgeführt wird. Eine solche Matrix enthält zwar keine Informationen mehr über die Streuung der erhobenen Werte. Die Mediane jedoch können entsprechend ihrer Berechnung als stetige, intervallskalierte Daten aufgefasst werden, gegen deren faktorenanalytische Betrachtung nichts spricht (Backhaus et al., 2003, S. 264). Die folgende Tabelle zeigt die Medianmatrix, die nach (im Mittel) absteigenden Werten von links nach rechts sortiert ist:

	Terme umformen, Gleichungen lösen, mit Formeln arbeiten	rechnen	mit dem Taschenrechner arbeiten	Beweise verstehen, die der Lehrer bzw. die Lehrerin vormacht	mathematisch argumentieren und begründen	Sachverhalte, die in normaler Sprache ausgedrückt sind, in eine mathematische Form bringen (Gleichung, Tabelle, Graph)	anderen etwas erklären	Text- oder Sachaufgaben bearbeiten	selbst Beweise durchführen	mathematische Probleme analysieren, Vermutungen aufstellen, probieren, knobeln	geometrisch konstruieren, zeichnen	Mathematische Darstellungen (Formeln, Tabellen, Graphen) in normaler Sprache ausdrücken	mathematische Sachverhalte mit anderen diskutieren	mathematische Texte lesen	mathematische Aufgaben mit dem Computer bearbeiten
A	3,93	3,82	2,63	3,39	3,54	2,92	2,91	2,50	3,06	2,96	2,39	2,50	3,17	1,93	1,05
B1	3,91	3,33	1,92	2,63	2,07	2,50	1,80	2,11	2,42	2,38	2,09	2,08	1,80	2,00	2,04
C	3,68	3,90	3,14	3,06	2,97	2,92	2,50	3,03	2,71	2,55	2,77	2,19	1,79	2,19	1,00
E	3,60	3,54	3,79	3,12	2,73	2,46	2,23	2,42	2,09	2,13	2,31	2,08	1,92	1,98	1,63
B2	3,68	3,54	2,73	2,58	2,36	2,50	2,33	2,94	2,17	2,32	2,17	2,25	1,90	2,29	2,13
D1	3,84	3,36	3,61	3,58	3,35	2,75	3,35	2,50	2,80	3,00	2,50	2,55	2,42	2,22	1,24
D2	3,67	3,46	3,88	3,54	3,18	2,63	2,85	2,71	2,57	2,46	2,58	2,18	2,07	2,12	1,21
K	3,42	3,69	3,64	3,04	2,58	2,50	2,39	2,55	2,50	2,39	2,50	2,33	2,07	1,91	1,25
K1	3,32	3,66	3,78	2,88	2,17	2,54	2,83	2,47	2,02	2,08	2,42	2,18	1,93	1,98	1,07
K2	3,39	3,67	3,81	2,93	2,29	2,46	2,89	2,46	2,16	2,10	2,39	2,04	2,33	1,82	1,04

Tabelle 15: Matrix der Häufigkeitsmediane in den Lerngruppen (Medianmatrix). Grüne Tönungen bedeuten: ‚wird häufig wahrgenommen', rote Tönungen bedeuten: ‚wird selten wahrgenommen'. Die Klassen A, D1 und C, mit Abstrichen auch D2 fallen durch einen höheren Anteil von Grüntönen auf, die Klasse B1 durch einen hohen Anteil roter Töne.

Die Hauptkomponentenanalyse ergibt eine schlüssige Extraktion zweier Faktoren, die knapp 2/3 der Gesamtvarianz erklären:

Komponente	Rotierte Summe der quadrierten Ladungen		
	Gesamt	% der Varianz	Kumulierte %
1	5,930	39,534	39,534
2	4,034	26,892	66,426

Tabelle 16: Erklärte Gesamtvarianz der Faktorenanalyse zur Häufigkeit der Tätigkeiten im Mathematikunterricht. Extraktionsmethode: Hauptkomponentenanalyse.

Die Faktoren laden gemäß der nachstehenden Tabelle auf die Items:

Item	Komponente	
	1	2
mathematische Probleme analysieren, Vermutungen aufstellen, probieren, knobeln***	,986	
selbst Beweise durchführen***	,933	
mathematisch argumentieren und begründen***	,855	
Mathematische Darstellungen (Formeln, Tabellen, Graphen) in normaler Sprache ausdrücken	,832	
Sachverhalte, die in normaler Sprache ausgedrückt sind, in eine mathematische Form bringen (Gleichung, Tabelle, Graph)	,804	
Terme umformen, Gleichungen lösen, mit Formeln arbeiten**	,792	
mathematische Sachverhalte mit anderen diskutieren***	,686	
Beweise verstehen, die der Lehrer bzw. die Lehrerin vormacht**	,653	
mathematische Texte lesen*		
geometrisch konstruieren, zeichnen		,904
mathematische Aufgaben mit dem Computer bearbeiten***		-,866
mit dem Taschenrechner arbeiten***		,731
rechnen		,656
anderen etwas erklären***		,599
Text- oder Sachaufgaben bearbeiten**		,532

Tabelle 17: Rotierte Komponentenmatrix der Faktorenanalyse zu den häufigsten Tätigkeiten im Mathematikunterricht. Extraktionsmethode: Hauptkomponentenanalyse. Rotationsmethode: Varimax mit Kaiser-Normalisierung. a: Die Rotation ist in 3 Iterationen konvergiert.

Der erste Faktor beschreibt die Häufigkeit der eher analytisch-problemlösenden und diskursiven Tätigkeiten, während der zweite Faktor die Häufigkeit der eher operativen, technisch-instrumentellen Tätigkeiten abbildet. Das Lesen mathematischer Texte wird durch diese Faktoren leider nicht hinreichend abgebildet. Die unterschiedliche Wahrnehmung dieses Items kann jedoch mittels Diagramm 13k beurteilt werden.

Aus dem nachstehend abgedruckten Faktormapping geht hervor, wie die verschiedenen Klassen hinsichtlich dieser Faktoren zu beurteilen sind. Es zeigt sich sehr anschaulich die schon aus den zuvor dargestellten Boxplots und aus der Medianmatrix zu erahnende Sonderstellung der (Experimental)Klassen A und D1, die beide hohe Werte auf der analytisch-diskursiven Achse erreichen. Am gegenüberliegenden Ende dieser Achse befinden sich die (Kontroll-)Klassen K1 und K2. Diese beiden Klassen, die beim selben Lehrer Unterricht haben, liegen insgesamt sehr nah beieinander. Bedenklich stimmt, dass auch die dritte Kontrollklasse (K) auf der analytisch-diskursiven Achse nur unterdurchschnittliche Werte erreicht. Immerhin liegen alle Kontrollklassen im positiven Bereich der operativ-instrumentellen Achse. Auf dieser Achse nimmt die (Experimental-)Klasse C eine Spitzen-, die (Experimental-)Klasse B1 hingegen eine Schlussposition ein. Auch diese Klassen waren in der Medianmatrix hervorgetreten. Es fällt auf, dass extremale Faktorausprägungen sich nur auf einen der beiden Faktoren beziehen, während der andere Faktor im neutralen Bereich (d. h. nah an der Achse) bleibt. Die Kombination zweier deutlicher Ausprägungen (doppelt positiv, doppelt negativ oder gemischt) tritt nicht auf.

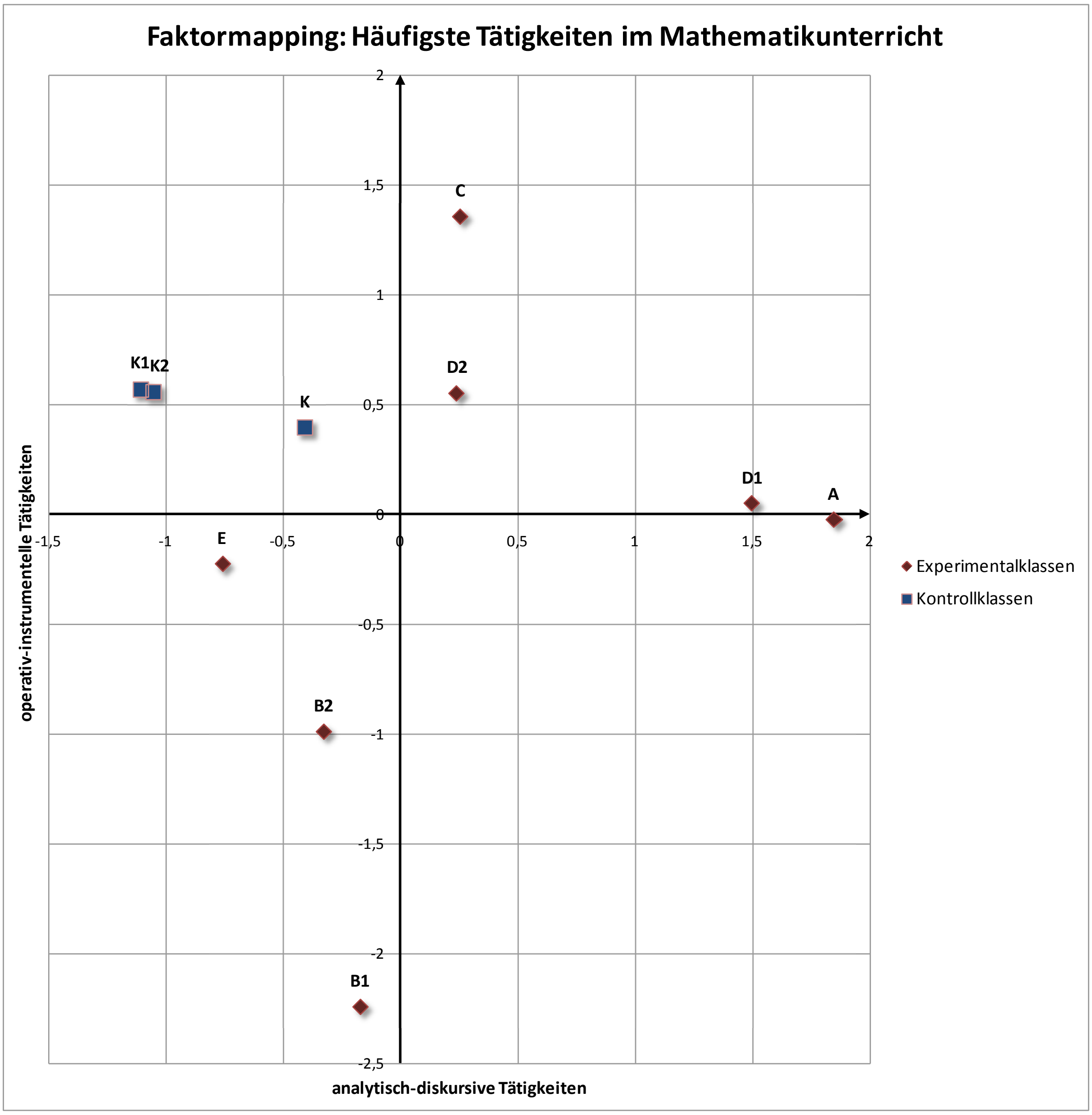


Diagramm 14: Faktormapping der häufigsten Tätigkeiten im Mathematikunterricht. Zur Erklärung vgl. Haupttext.

5.2.2.5 *Zusammenfassung*

Im Mathematikunterricht der meisten an dieser Studie teilnehmenden Schülerinnen und Schüler dominieren die technisch-formalen Elemente. In einigen Klassen der Experimentalgruppe, vor allem A und D1, spielt aber auch das selbsttätige Argumentieren, Begründen und Beweisen eine Rolle. Auf diesem Gebiet der analytisch-diskursiven Tätigkeiten schneiden die drei Kontrollklassen K, K1 und K2 hingegen allesamt unterdurchschnittlich ab.

Sprachliche Dimensionen der Mathematik werden, abgesehen von Textaufgaben, im Unterricht offenbar nur selten erschlossen. Es ist anzunehmen, dass man mit ihnen vor allem die Mädchen – die im Unterricht signifikant häufiger mit anderen über Mathematik diskutieren – erreichen könnte.

Mädchen beschäftigen sich auch intensiver mit geometrischen Konstruktionen und Zeichnungen. Für die vorliegende Untersuchung sind diese beiden Aussagen sicherlich von Bedeutung.

Die Arbeit mit Computern schließlich kommt in den meisten Lerngruppen überhaupt nicht vor. Lediglich in den zwei Klassen B1 und B2, die beim selben Lehrer Unterricht haben, werden höhere Wahrnehmungswerte gemessen.

5.2.3 Das mathematische Selbstbild – was trauen die Lernenden sich zu?

5.2.3.1 Gesamtbilanz

Nach der Darstellung der am häufigsten von den Schülerinnen und Schülern wahrgenommenen Tätigkeiten im Mathematikunterricht ist es interessant zu sehen, welche Kompetenzen die Lernenden sich hinsichtlich dieser Tätigkeiten zuschreiben.

Eine erste Antwort hierauf gibt das Diagramm 15. Die dort abgedruckten Zahlen wurden aus der von den Lernenden ausgefüllten Rating-Skala durch Codierung gemäß der folgenden Tabelle gewonnen.

Kompetenz	das liegt mir gar nicht	das liegt mir nicht so gut	das liegt mir ganz gut	das liegt mir sehr gut
Codierung	1	2	3	4
Intervalle	0,5-1,5	1,5-2,5	2,5-3,5	3,5-4,5

Tabelle 18: Codierung der Ratingstufen im Fragebogen und Intervallbildung.

Wie zu erkennen ist, trauen sich die Schülerinnen und Schüler am meisten im Bereich der operativ-technischen Tätigkeiten zu. Die Arbeit mit dem Taschenrechner erreicht eine einsame Spitzenposition. Doch auch der Umgang mit dem Computer im Zusammenhang mit mathematischen Problemen – eine Kompetenz, die im Unterricht anscheinend gar nicht vermittelt wird – nimmt einen der vorderen Ränge ein. Sicherlich spiegelt sich hier die allgemeine Vorstellung, dass Jugendliche technikkompetent seien.

Interessant ist die Ausprägung des Selbstbildes hinsichtlich der analytisch-diskursiven Kompetenzen: Beweise zu *verstehen*, die ein anderer vormacht, das trauen sich die meisten zu. Möglicherweise geht in diese Einschätzung das jeweilige Selbstkonzept hinsichtlich der eigenen Intelligenz und Auffassungsgabe ein. Im Gegensatz hierzu bescheinigen sich die Lernenden nur geringe Kompetenzen bei der *aktiven* und *selbsttätigen* mathematischen Analyse, Problemdiskussion und Beweisführung. Die hiermit verbundenen Items stehen auf den letzten Plätzen. Wirkliche Inkompetenz indes wird für keines der angesprochenen Items konstatiert.

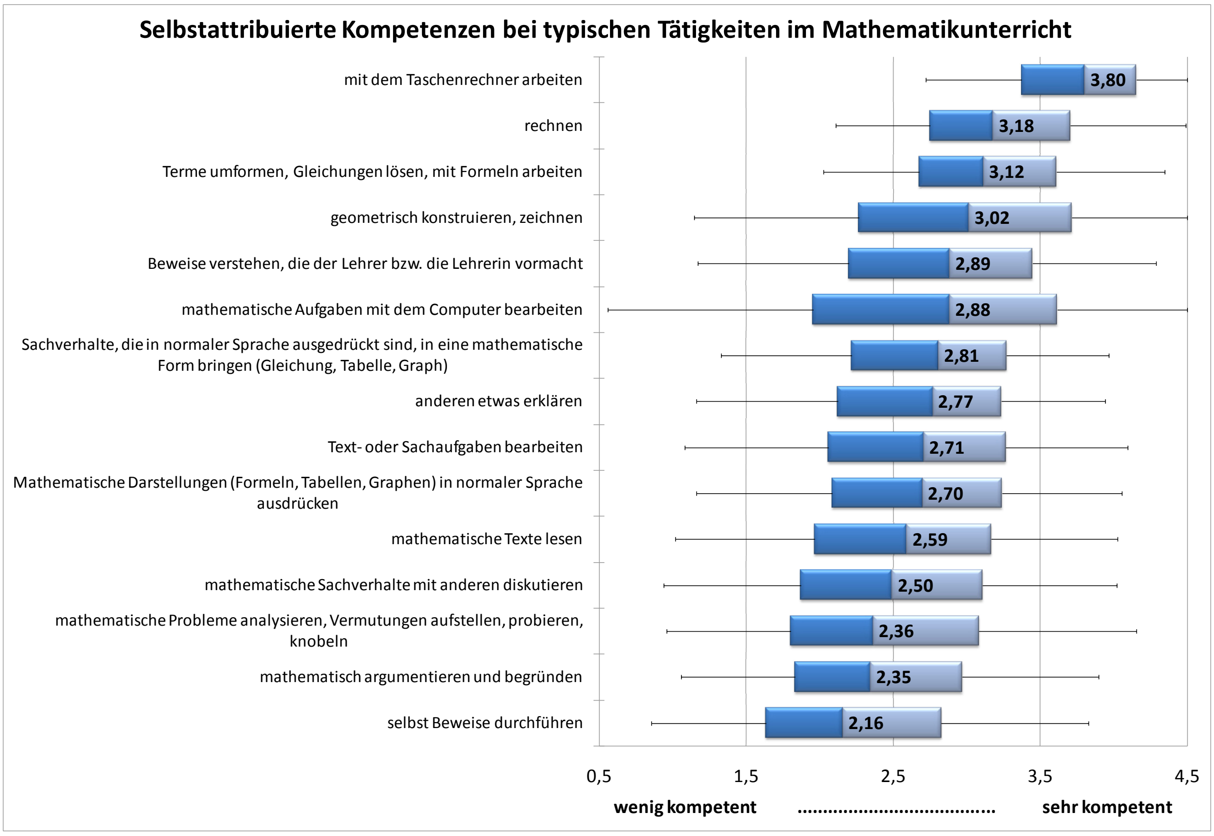


Diagramm 15: Selbstattribuierte Kompetenzen bei typischen Tätigkeiten im Mathematikunterricht (Gesamtpopulation)

	Häufigkeiten	Kompetenzen
Terme umformen, Gleichungen lösen, mit Formeln arbeiten (1)	3,662	3,115
rechnen (2)	3,642	3,181
mit dem Taschenrechner arbeiten (3)	3,520	3,804
Beweise verstehen, die der Lehrer bzw. die Lehrerin vormacht (4)	3,098	2,885
mathematisch argumentieren und begründen (5)	2,745	2,347
anderen etwas erklären (6)	2,681	2,768
Sachverhalte, die in normaler Sprache ausgedrückt sind, in eine mathematische Form bringen (Gleichung, Tabelle, Graph) (7)	2,626	2,808
Text- oder Sachaufgaben bearbeiten (8)	2,625	2,708
geometrisch konstruieren, zeichnen (9)	2,398	3,016
mathematische Probleme analysieren, Vermutungen aufstellen, probieren, knobeln (10)	2,374	2,364
selbst Beweise durchführen (11)	2,355	2,158
Mathematische Darstellungen (Formeln, Tabellen, Graphen) in normaler Sprache ausdrücken (12)	2,228	2,699
mathematische Sachverhalte mit anderen diskutieren (13)	2,117	2,495
mathematische Texte lesen (14)	2,032	2,594
mathematische Aufgaben mit dem Computer bearbeiten (15)	1,255	2,884

Tabelle 19: Wahrgenommene Häufigkeit und selbstattribuierte Kompetenz bei mathematischen Tätigkeiten. Mediane im Vergleich. Die eingeklammerten Zahlen beziehen sich auf die Beschriftung der Punkte im nachstehenden Diagramm 16.

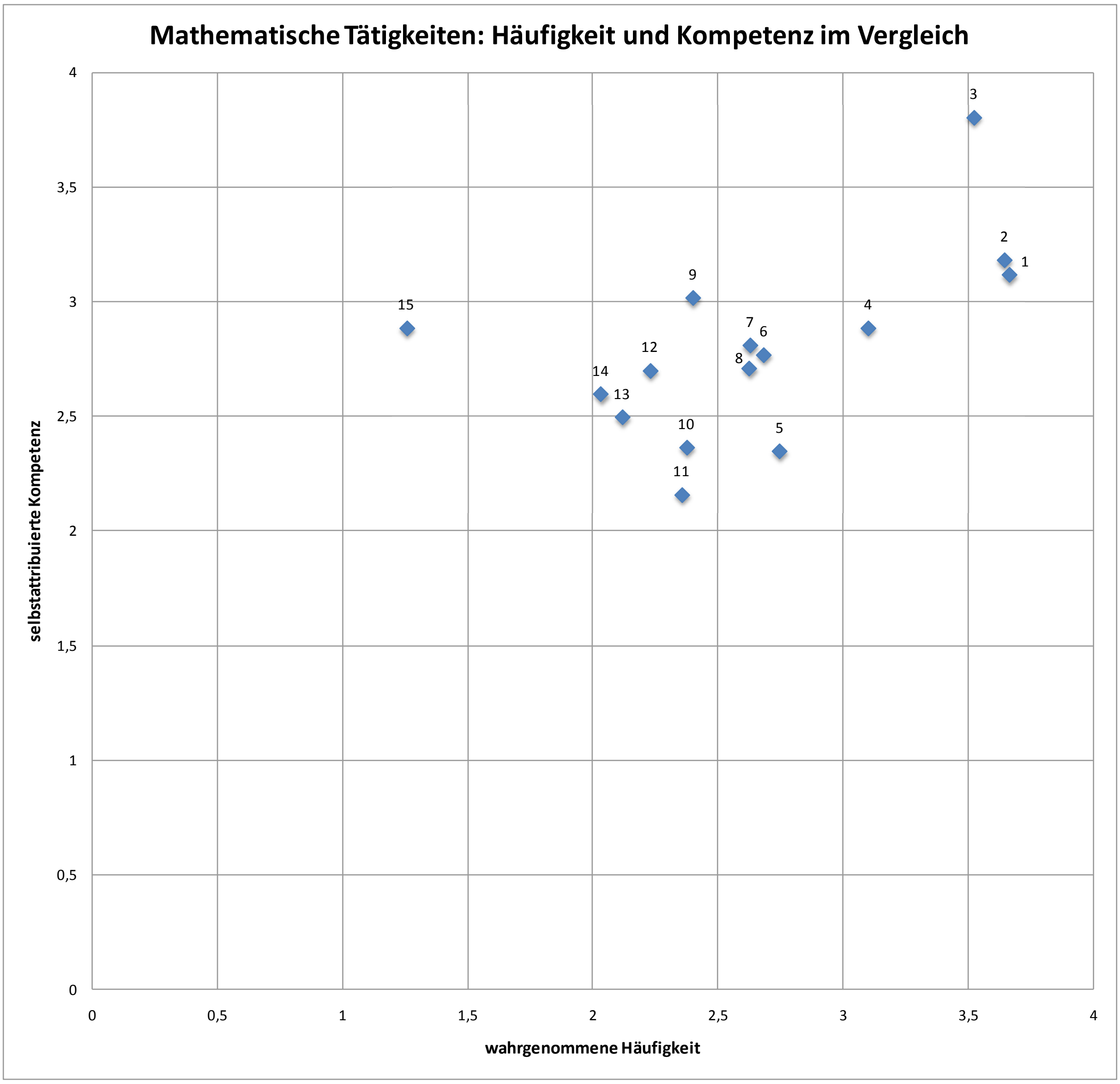


Diagramm 16: Streudiagramm zur wahrgenommenen Häufigkeit und selbstattribuierten Kompetenz bei mathematischen Tätigkeiten. Die Nummern beziehen sich auf die Reihenfolge in Tabelle 19.

Bevor ich die Daten wieder nach Untersuchungsgruppe, Gender und Klasse differenziere, möchte ich auf die nahe liegende Frage eingehen, ob die Einschätzung der eigenen Kompetenz möglicherweise mit der wahrgenommen Häufigkeit bestimmter Tätigkeiten korreliert ist. Dieser Eindruck entsteht, wenn man die entsprechenden Mediane einander gegenüberstellt (Tabelle 19) und das zugehörige Streudiagramm (Diagramm 16) betrachtet.

Die Variablen können hier als intervallskalierte Daten aufgefasst werden. Die Berechnung des Pearssonschen Korrelationskoeffizienten ergibt 0,551**. Dieser Wert entspricht einer signifikanten mittleren Korrelation. Bringt man die Mediane in eine Rangreihenfolge und führt dann eine Rangkorrelationsanalyse durch, so erhält man das gleiche Ergebnis. Der maßgebliche Spearmansche Korrelationskoeffizient errechnet sich zu 0,571**. Er ist etwas größer, da durch die Art der Berechnung der Wert weniger von den mutmaßlichen Ausreißern (15) und (3) gestört wird.

Für die meisten Items (1, 2, 4, 6, 7, 8, 12, 13, 14) kann der folgende – fast lineare – Zusammenhang festgestellt werden: Je häufiger die Lernenden die Auseinandersetzung mit einer bestimmten Tätigkeit im Unterricht erleben, umso kompetenter fühlen sie sich darin. Diese Aussage gilt jedoch nicht für die Items „mit dem Taschenrechner arbeiten“ (3), „mathematische Aufgaben mit dem Computer bearbeiten“ (15) sowie „geometrisch konstruieren, zeichnen“ (9). Auf diesen (technisch-instrumentellen) Feldern fühlen sich die Schülerinnen und Schüler kompetenter als es ihre Übung im Unterricht vermuten ließe. Entgegengesetzt verhält es sich bei den Items „selbst Beweise durchführen“ (11), „mathematisch argumentieren und begründen“ (5) sowie „mathematische Probleme analysieren, Vermutungen aufstellen, probieren, knobeln“ (10). Trotz einiger Anstrengung fühlen sich die Lernenden in diesen (analytisch-argumentativen) Bereichen nicht so kompetent, wie man es aufgrund der übrigen Korrelationsstruktur erwarten könnte.

5.2.3.2 Differenzierung nach Experimental- und Kontrollgruppe

Die Unterschiede hinsichtlich der selbstattribuierten Kompetenzen, die zwischen der Experimental- und der Kontrollgruppe festgestellt wurden, betreffen bemerkenswerterweise nur ein einziges Tätigkeitsfeld – „selbst Beweise durchführen“. Hier schreiben sich die Schülerinnen und Schüler der Experimentalgruppe signifikant höhere Kompetenzen zu als dies Angehörige der Kontrollgruppe tun. (p = 0,04; m_E = 2,25 / m_K = 2,00; +0,25). In keinem der anderen Bereiche gibt es signifikante Unterschiede. Die entsprechenden Tabellen sind im Anhang zu finden (Tab. CD.44-45).

5.2.3.3 Differenzierung nach Gender

Etwas anders verhält es sich mit den Unterschieden zwischen Jungen und Mädchen. Sie betreffen die folgenden Tätigkeitsfelder, in welchen ausnahmslos die Jungen sich zuversichtlicher hinsichtlich ihrer eigenen Fähigkeiten zeigen.

- mathematische Aufgaben mit dem Computer bearbeiten***
  (p < 0,001; m_J = 3,12 / m_M = 2,40; +0,72)
- mathematische Texte lesen*
  (p = 0,012; m_J = 2,71 / m_M = 2,36; +0,35)
- mathematische Probleme analysieren, Vermutungen aufstellen, probieren, knobeln*
  (p = 0,017; m_J = 2,43 / m_M = 2,24; +0,19)
- rechnen*
  (p = 0,048; m_J = 3,24 / m_M = 3,09; +0,15)

Die Selbstattribuierung der Jungen beim Item „mathematische Aufgaben mit dem Computer bearbeiten“ überrascht nicht, da sie wiederum einem gängigen Rollenschema entspricht. Verwunderlich scheint jedoch, dass die Jungen sich auch in den anderen Punkten höher einschätzen, zumal auch ein Item betroffen ist („rechnen“), in welchem die Mädchen sich signifikant mehr Übung zuschreiben. Wenn man auf die anderen Items blickt, stellt man einen ganz entsprechenden Trend fest (vgl. auch Tab. CD.46-47), der sich in der vorletzten Spalte der folgenden Tabelle 20 zeigt:

	männlich	weiblich	Differenz	Signifikanz
mathematische Aufgaben mit dem Computer bearbeiten***	3,12	2,40	0,72***	0,000
mathematische Texte lesen*	2,72	2,36	0,36*	0,012
mathematische Sachverhalte mit anderen diskutieren	2,60	2,33	0,27	0,089
mathematische Probleme analysieren, Vermutungen aufstellen, probieren, knobeln*	2,43	2,24	0,19*	0,017
Mathematische Darstellungen (Formeln, Tabellen, Graphen) in normaler Sprache ausdrücken	2,76	2,58	0,19	0,174
selbst Beweise durchführen	2,22	2,04	0,19	0,067
rechnen*	3,24	3,09	0,15*	0,048
Text- oder Sachaufgaben bearbeiten	2,75	2,61	0,14	0,271
mathematisch argumentieren und begründen	2,38	2,29	0,09	0,070
Sachverhalte, die in normaler Sprache ausgedrückt sind, in eine mathematische Form bringen (Gleichung, Tabelle, Graph)	2,84	2,76	0,08	0,338
Beweise verstehen, die der Lehrer bzw. die Lehrerin vormacht	2,91	2,85	0,06	0,110
Terme umformen, Gleichungen lösen, mit Formeln arbeiten	3,12	3,11	0,01	0,965
anderen etwas erklären	2,74	2,80	-0,06	0,353
mit dem Taschenrechner arbeiten	3,77	3,85	-0,07	0,243
geometrisch konstruieren, zeichnen	2,98	3,10	-0,13	0,365

Tabelle 20: Mediane der selbstattribuierten Kompetenzen und ihre Unterschiede bei Jungen und Mädchen.

In nur drei von 15 Tätigkeiten sprechen die Mädchen sich eine – geringfügig – höhere Kompetenz zu als die Jungen dies tun: „geometrisch konstruieren, zeichnen" ist dabei eine Tätigkeit, die sie im Unterricht auch häufiger wahrnehmen als die Jungen. In allen anderen Bereichen zeigen die Jungen sich hinsichtlich ihrer eigenen Fähigkeiten zuversichtlicher. Selbst auf dem Gebiet „mathematische Sachverhalte mit anderen diskutieren", einer nach den bisherigen Ergebnissen eher weiblichen Domäne, trauen sie sich mehr zu.

Offensichtlich ist vielen der Jungen ein höheres Selbstvertrauen zueigen als den meisten der Mädchen – berechtigt scheint dies jedoch nicht zu sein. Denn die Zeugniszensuren im Fach Mathematik sprechen eher eine gegenteilige Sprache: Der (gruppierte) Median der Mädchen liegt bei 3,06, der der Jungen bei 3,38, also immerhin um eine Drittelnote schlechter – und dieser Unterschied wird sogar als signifikant ausgewiesen ($p = 0{,}023$):

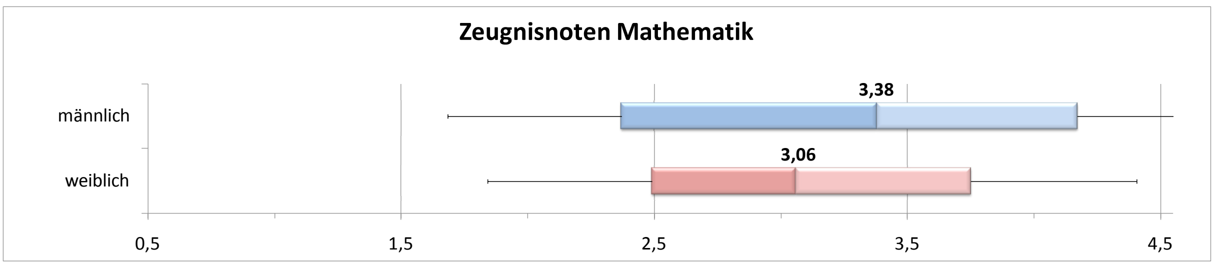


Diagramm 17: Zeugnisnoten in Mathematik, differenziert nach Gender

Für unsere Untersuchung ist es noch wichtig festzuhalten, dass die Jungen sich auch im Umgang mit mathematischen Texten signifikant größere Kompetenzen zutrauen.

5.2.3.4 Differenzierung nach Klassen

Die nach Klassen differenzierten Unterschiede hinsichtlich der selbstattribuierten Kompetenzen stellen wir gleich in einer Medianmatrix dar, die wieder nach (im Mittel) absteigenden Werten von links nach rechts sortiert ist:

	mit dem Taschenrechner arbeiten	rechnen	Terme umformen, Gleichungen lösen, mit Formeln arbeiten	geometrisch konstruieren, zeichnen	Beweise verstehen, die der Lehrer bzw. die Lehrerin vormacht	mathematische Aufgaben mit dem Computer bearbeiten	Sachverhalte, die in normaler Sprache ausgedrückt sind, in eine mathematische Form bringen (Gleichung, Tabelle, Graph)	anderen etwas erklären	Mathematische Darstellungen (Formeln, Tabellen, Graphen) in normaler Sprache ausdrücken	Text- oder Sachaufgaben bearbeiten	mathematische Texte lesen	mathematische Sachverhalte mit anderen diskutieren	mathematisch argumentieren und begründen	mathematische Probleme analysieren, Vermutungen aufstellen, probieren, knobeln	selbst Beweise durchführen
A	3,83	3,09	3,50	3,06	3,29	2,42	3,08	2,60	3,06	2,89	2,67	2,61	2,50	2,58	2,50
B1	3,78	3,25	2,63	2,58	2,63	2,92	2,42	2,71	2,22	2,06	2,58	2,5	2,17	1,67	1,80
C	3,90	3,31	3,03	3,62	2,65	2,63	2,86	2,67	2,56	2,73	2,35	2,32	2,21	2,21	2,13
E	3,86	3,16	2,91	3,00	2,77	3,11	2,75	2,58	2,75	2,83	2,55	2,68	2,46	2,34	2,17
B2	3,83	3,25	3,27	2,94	2,80	2,86	2,62	2,92	3,09	2,40	2,79	2,69	2,29	2,55	2,28
D1	3,72	3,19	3,14	3,25	2,95	2,83	2,92	2,31	2,56	3,07	2,41	2,65	2,77	2,45	2,56
D2	3,81	3,13	3,31	3,20	3,00	2,86	3,07	2,95	2,56	2,88	2,80	2,55	2,38	2,72	2,21
K	3,82	3,21	2,93	2,95	3,10	2,69	2,67	2,70	2,79	2,55	2,61	2,31	2,14	2,44	2,21
K1	3,71	3,20	3,09	3,00	2,65	3,21	2,79	3,00	2,41	2,67	2,54	2,25	2,33	2,21	1,83
K2	3,77	3,08	3,19	2,55	2,96	2,75	2,63	2,61	2,68	2,46	2,50	2,54	2,22	2,27	2,00

Tabelle 21: Mediane der selbstattribuierten Kompetenzen in den Klassen. Grüne Tönungen stehen für hohe, rote Tönungen für geringe Kompetenzattribuierungen. Hier fällt B1 durch ein hohes Maß roter Töne auf.

Die Unterschiede sind hoch signifikant ($p = 0{,}002$) für das Item „Mathematische Darstellungen (Formeln, Tabellen, Graphen) in normaler Sprache ausdrücken“ (vgl. Tab. CD.49). Sie sind ferner signifikant für die Items

- „geometrisch konstruieren, zeichnen“ ($p = 0{,}010$),
- „Terme umformen, Gleichungen lösen, mit Formeln arbeiten“ ($p = 0{,}023$),
- „selbst Beweise durchführen“ ($p = 0{,}023$),
- „Text- oder Sachaufgaben bearbeiten“ ($p = 0{,}029$) sowie
- „Sachverhalte, die in normaler Sprache ausgedrückt sind, in eine mathematische Form bringen (Gleichung, Tabelle, Graph)“ ($p = 0{,}045$).

Wie zuvor wenden wir auf die Medianmatrix eine Hauptkomponentenanalyse an. Es ergibt sich eine Zwei-Faktoren-Lösung, die eine Varianzaufklärung von 58 % bietet. Tabelle 22 zeigt die rotierte Komponentenmatrix.

	Komponente	
	1	2
Mathematische Darstellungen (Formeln, Tabellen, Graphen) in normaler Sprache ausdrücken**	0,825	
mathematische Probleme analysieren, Vermutungen aufstellen, probieren, knobeln	0,824	
Beweise verstehen, die der Lehrer bzw. die Lehrerin vormacht	0,823	
Terme umformen, Gleichungen lösen, mit Formeln arbeiten*	0,822	
mathematische Texte lesen	0,674	-0,532
rechnen	-0,612	
mathematische Sachverhalte mit anderen diskutieren	0,504	
mathematische Aufgaben mit dem Computer bearbeiten	-0,478	
mit dem Taschenrechner arbeiten		
Text- oder Sachaufgaben bearbeiten*		0,873
mathematisch argumentieren und begründen		0,767
geometrisch konstruieren, zeichnen*		0,747
Sachverhalte, die in normaler Sprache ausgedrückt sind, in eine mathematische Form bringen (Gleichung, Tabelle, Graph)*	0,505	0,698
selbst Beweise durchführen*	0,637	0,664
anderen etwas erklären		-0,629

Tabelle 22: Rotierte Komponentenmatrix nach der Hauptkomponentenanalyse der Medianmatrix. Extraktionsmethode: Hauptkomponentenanalyse. Rotationsmethode: Varimax mit Kaiser-Normalisierung. a: Die Rotation ist in 3 Iterationen konvergiert.

Der erste Faktor fasst Kompetenzen im Bereich des Nachvollziehens, Reorganisierens, Verarbeitens mathematischer Inhalte zusammen (mathematische Ausdrücke in normale Sprache übertragen, Probleme analysieren, Beweise verstehen, Terme umformen, Texte lesen). Im zweiten Faktor sind Kompetenzen im Bereich des Anwendens, Transferierens und kreativen Gebrauchens mathematischer Inhalte versammelt (Textaufgaben bearbeiten, argumentieren, konstruieren, mathematisieren, Beweise selbst durchführen). Die Items „mathematische Sachverhalte mit anderen diskutieren“ sowie „mit dem Taschenrechner arbeiten“ und „mathematische Aufgaben mit dem Computer bearbeiten“ werden durch die beiden Faktoren allerdings nicht angemessen beschrieben. Eine Erhöhung der Faktorenzahl auf 3 oder 4 ergibt indes keine größere Klarheit.

Im Faktormapping fallen – wie zuvor – die Klassen A und D1 sowie B1 auf. A unterscheidet sich aber diesmal von D1. Die selbstattribuierten Kompetenzen liegen bei A eher im Bereich des Nachvollziehens und Reorganisierens als im Bereich des Anwendens und Transferierens. Dort nimmt D1 mit großem Abstand die Spitzenposition ein. Die Schülerinnen und Schüler der Klasse B1 trauen sich hingegen auf beiden Gebieten nur wenig zu. Auffällige Positionen nehmen auch C und B2 ein. Beide Klassen bewerten die eigenen Kompetenzen auf einem der beiden Gebiete als relativ gering, auf dem jeweils andern jedoch als relativ hoch. Dabei sieht C die eigenen Stärken im Bereich des Anwendens und Transferierens, B2 im Gegensatz dazu eher im Bereich des Nachvollziehens und Reorganisierens. Schließlich fällt auf, dass die drei Kontrollklassen K, K1 und K2 im Hinblick auf die anwendend-transferierenden Kompetenzen allesamt in der unteren Hälfte des Teilnehmerfeldes liegen.

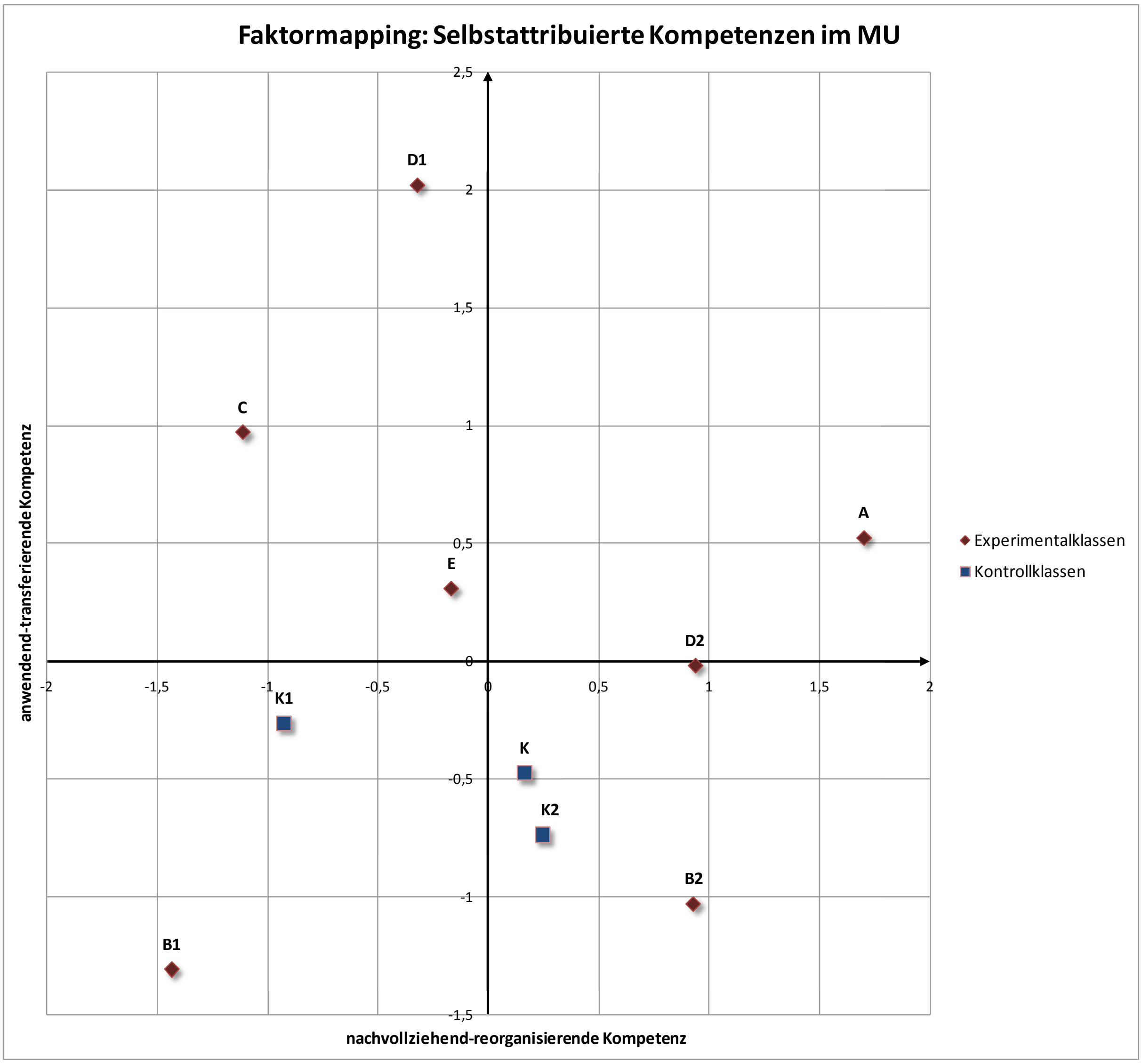


Diagramm 18: Faktormapping der selbstattribuierten Kompetenzen

Die Selbsteinschätzungen zeigen im Übrigen eine gute Konsistenz mit den Ergebnissen einer kurz zuvor landesweit durchgeführten Lernstandserhebung im Fach Mathematik, auf die ich im nächsten Abschnitt 5.2.4 eingehen werde.

5.2.3.5 Zusammenfassung

Die an dieser Untersuchung teilnehmenden Schülerinnen und Schüler sehen ihre mathematischen Kompetenzen eher auf dem Gebiet der technisch-operativen Tätigkeiten und weniger im analytisch-diskursiven Bereich. Unterschiede zwischen der Experimental- und der Kontrollgruppe gibt es dabei kaum. Auffällig ist jedoch ein genderspezifischer Unterschied: die Jungen zeigen demnach ein größeres Zutrauen in ihre eigenen Fähigkeiten als die Mädchen. Gleichwohl sind es die Mädchen, die durchschnittlich die besseren Noten auf dem Zeugnis erhalten. Unter den Klassen fallen erneut A und D1 als Gruppen mit einer hohen, sowie B1 als eine Klasse mit einer geringen Selbsteinschätzung auf.

5.2.4 Die Ergebnisse der vorgängigen Lernstandserhebung

Einige Monate vor Durchführung der hier beschriebenen Studie haben alle Klassen an einer landesweit durchgeführten Lernstandserhebung teilgenommen. Ihr Abschneiden dabei soll hier ebenfalls dargestellt werden.

In einem 90minütigem schriftlichen Test wurden die Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler in den Gebieten Algebra/Arithmetik, Funktionen, Geometrie und Stochastik überprüft. Das dazu verwendete Testmaterial ist online publiziert und einsehbar[52]. Die (Klassen-)Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst. Die Zahlen stehen für den Anteil richtiger Lösungen bei den gestellten Aufgaben (in Prozent).

	Arithmetik /Algebra	Funktionen	Geometrie	Stochastik	**Durchschnitt**
D1	72,1	68,4	71,6	74,3	**71,1**
A	70,9	66,2	71,3	72,7	**69,7**
D2	64,1	63,8	62,5	67,4	**64,3**
C	58,9	54,5	57,6	69,8	**59,5**
K	59,7	57,1	58,8	63,1	**59,3**
B2	58,7	55,5	57,3	61,9	**57,9**
E	56,9	54,7	51,6	60,7	**55,6**
K2	53,6	49,8	51	55,9	**52,1**
K1	48,3	46,2	49,9	52,1	**48,8**
B1	36,9	43,3	39,9	39,5	**40,6**

Tabelle 23: Ergebnisse der Klassen bei der Lernstandserhebung. Die Zahlen stehen für den Anteil richtiger Lösungen bei den gestellten Aufgaben in Prozent (Arithmetik/Algebra: 7 Aufgaben, Funktionen: 16 Aufgaben, Geometrie: 11 Aufgaben, Stochastik: 10 Aufgaben). Grüne Tönungen stehen für gute Werte, rote Tönungen für weniger gute. Die Klassen sind absteigend nach dem Gesamtdurchschnitt sortiert. Die Unterschiede zwischen Experimental- und Kontrollklassen sind nicht signifikant (Kolmogorov-Smirnov-Test, Monte-Carlo-Signifikanz = 0,400).

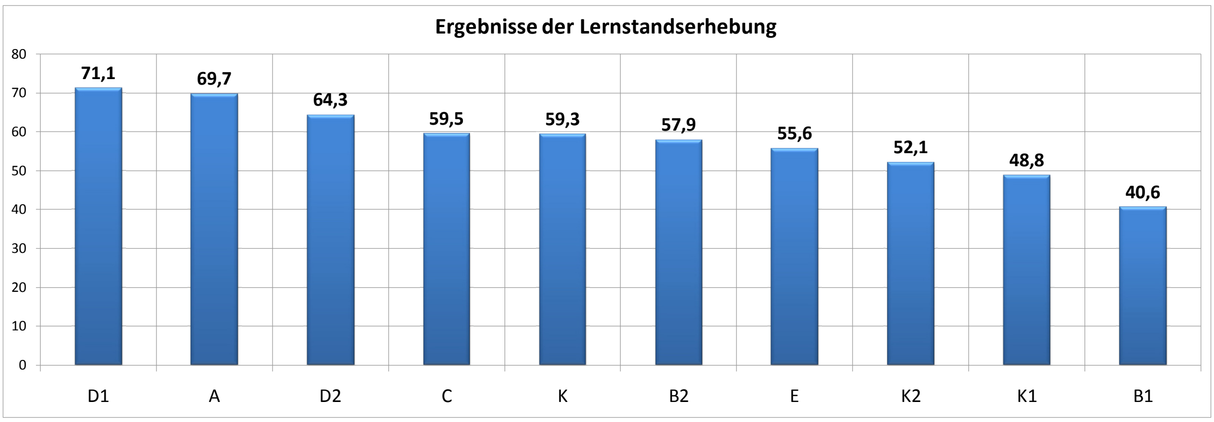


Diagramm 19: Ergebnisse der Lernstandserhebung im Vergleich der Klassen.

[52] vgl. http://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/lernstand8/materialien/materialien-04-05.html

Die Ergebnisse bestätigen den Trend, der sich in den Selbstattribuierungen bereits abgezeichnet hatte. Demnach handelt es sich bei D1 und A um die leistungsstärksten Klassen. B1 liegt mit deutlichem Abstand am Schluss des Feldes. Die Kontrollklassen K1 und K2 rangieren ebenfalls hinten, lediglich die Kontrollklasse K belegt einen mittleren Rang. Insgesamt erreichen die Klassen der Experimentalgruppe einen Durchschnittswert von 59,8 % richtigen Lösungen, die Klassen der Kontrollgruppe hingegen 53,4 %. Dieser Unterschied als nicht signifikant ausgewiesen (vgl. Tab. CD.50a). Die Aussagekraft des entsprechenden Testes ist jedoch aufgrund der Aggregation der individuellen Daten zu Klassen-Mittelwerten begrenzt und kann auch nicht verbessert werden, da keine Einzelergebnisse bzw. Verteilungen vorliegen.

Eine naheliegende Frage soll hier nicht ausgespart werden: Spiegeln sich die Ergebnisse der Lernstandserhebung in den Zeugnisnoten und umgekehrt? Mit Ausnahmen ist dies der Fall, wie aus der Gegenüberstellung in Tabelle 24 hervorgeht. Viele Klassen erreichen eine erwartungsgemäße Platzierung, es gibt jedoch auch Abweichungen (D1, C, K2). Dies überrascht nicht, da mit der Notengebung nicht nur diagnostische sondern auch pädagogische Ziele verfolgt werden (Anreize geben etc.). Der Spearmansche Rangkorrelationskoeffizient zwischen den Zeugnisnoten und den Lernstandsergebnissen beträgt -0,661, der Pearsonsche Korrelationskoeffizient -0,682. Beide Werte weisen auf eine immerhin mittlere Korrelation hin (vgl. Diagramm 20). Die Koeffizienten sind negativ wegen der entgegengesetzten Polung der Daten.

Die Klassen der Experimentalgruppe erreichen im Übrigen insgesamt eine Zeugnis-Durchschnittsnote von 3,16, die Klassen der Kontrollgruppe von 3,35. Dieser Unterschied ist ebenfalls nicht signifikant (vgl. Tab. CD.50b).

Klasse … (Rang nach Lernstand)	Zeugnisnote	Lernstand
D2 … (3)	2,86	64,3
A … (2)	2,89	69,7
K … (5)	2,94	59,3
D1 … (1)	3,1	71,1
K2 … (8)	3,14	52,1
B2 … (6)	3,25	57,9
E … (7)	3,31	55,6
B1 … (10)	3,58	40,6
C … (4)	3,63	59,5
K1 … (9)	3,79	48,8

Tabelle 24: Lernstandsergebnisse und durchschnittliche Zeugnisnoten im Vergleich. Die Tabelle ist aufsteigend nach den Noten sortiert. In Klammern ist der Rang vermerkt, den die Klasse in der Lernstandserhebung belegt.

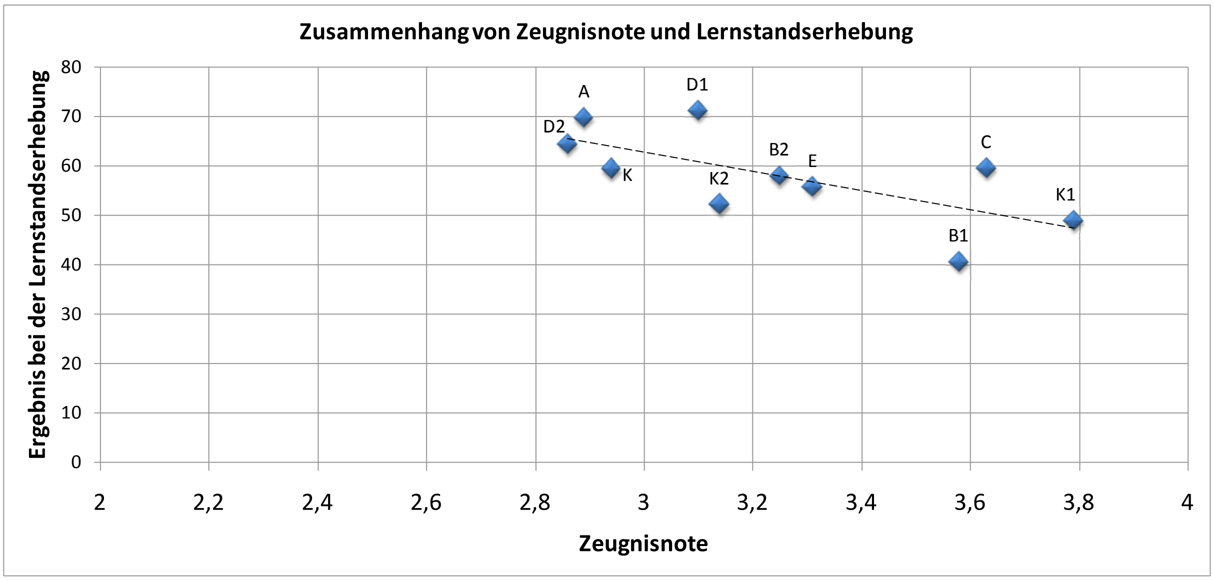


Diagramm 20: Zusammenhang von durchschnittlicher Zeugnisnote und Ergebnis der Lernstandserhebung. Die gestrichelte Trendlinie deutet eine mittlere negative Korrelation an.

5.2.5 Der Beitrag der Lernenden zum Unterricht und ihre Motivation

In einem weiteren Item wurden alle Schülerinnen und Schüler danach befragt, welchen Anteil sie sich selbst (als Klasse) bzw. ihrem jeweiligen Lehrer an der Entwicklung und Ausarbeitung der Unterrichtsthemen zuschreiben und wie sie ihren individuellen Beitrag zum Unterricht einschätzen.

Im Durchschnitt beurteilen die Lernenden ihren Einfluss im Unterricht eher zurückhaltend. Demnach finden viele Stunden nach dem Muster statt, dass ein mathematisches Thema vom Lehrer erklärt wird, und die Schülerinnen und Schüler nur gelegentlich etwas selbstständig erarbeiten (vgl. Tab. CD.51). Diese Tendenz ist in der Kontrollgruppe übrigens signifikant stärker ausgeprägt. Der persönliche Beitrag wird indes über alle Lernenden gemittelt in der Experimental- und in der Kontrollgruppe gleichermaßen als durchschnittlich eingestuft (vgl.Tab. CD.52-53).

Ein differenzierteres Bild ergibt sich, wenn man auf die einzelnen Klassen schaut. Der Anteil des Lehrers wird am höchsten in den Klassen C, K, K1 und K2, am geringsten in den Klassen B1 und B2 gesehen. Signifikante Zusammenhänge zu den Leistungsdaten (Zeugnisnoten, Lernstandserhebung) sind nicht erkennbar (vgl. Tab. CD.54-55).

Bei der Frage, was die Schülerinnen und Schüler dazu motiviert, sich für den Mathematikunterricht anzustrengen, wird in allen Klassen an erster Stelle der Wunsch nach einer guten Note genannt. Es folgen: der Wille, das eigene Können zu demonstrieren sowie das fachliche Interesse an Mathematik. Diesen Items stimmen die Lernenden überwiegend zu. Druck von Seiten der Erziehungsberechtigten wird dagegen im Durchschnitt als insgesamt eher bedeutungslos eingestuft, wenngleich er in der Experimentalgruppe etwas größeren Einfluss hat als in der Kontrollgruppe (vgl. Tab. CD.51-53).

5.2.6 Die Ansichten und Urteile der Lernenden über Mathematik

5.2.6.1 Gesamtbilanz

Als mögliche Wirkung historisch-hermeneutischen Unterrichts wurde in der theoretischen Konzeption die Beeinflussung der Ansichten und Urteile der Lernenden über die Mathematik als Lerngegenstand, Unterrichtsfach und als geistige bzw. kulturelle Errungenschaft genannt. Es ist demnach von großem Interesse, solche Ansichten und Urteile vorab kennen zu lernen, um ggf. stattgehabte Änderungen feststellen zu können. Zu diesem Zweck wurden den Schülerinnen und Schülern Aussagen vorgelegt, denen sie auf einer vierstufigen Ratingskale zustimmen bzw. widersprechen konnten. Die von ihnen gesetzten Kreuze wurden entsprechend der Tabelle 16 als Zahlen codiert.

Zustimmung	trifft gar nicht zu	trifft eher nicht zu	trifft eher zu	trifft völlig zu
Codierung	1	2	3	4
Intervalle	0,5-1,5	1,5-2,5	2,5-3,5	3,5-4,5

Tabelle 25: Codierung der Ratingstufen im Fragebogen und Intervallbildung.

Die Ergebnisse der Befragung zeigt das Diagramm 21 (vgl. Tab. CD.56a). Auf den ersten Blick fällt die Wertschätzung auf, die der Mathematik als geistiger Betätigung entgegengebracht wird. Nach durchschnittlicher Ansicht hat Mathematik viel mit „Denken lernen" (gruppierter Median: 3,31), weniger mit „Auswendig lernen" (2,16) zu tun. Dass dies im Prinzip jedem möglich sei, glaubt die Mehrheit (3,35) – die Meinungen sind in diesem Punkt jedoch weiter gestreut. Der rege Gebrauch von Formeln und Kalkülen wird als nützlich (3,59) empfunden. Eine Mathematik ohne dieselben können sich die meisten eher nicht vorstellen (2,06). Schülerinnen und Schüler sind zudem mehrheitlich der Meinung, Mathematik vor allem durch das Rechnen vieler Aufgaben erlernen zu können (3,05) und legen dabei großen Wert auf die Chance, eigene Ideen zu entwickeln. Die Alternative – den Stoff „vorgemacht" zu bekommen – wird kritisch beurteilt (1,94). Dass die Kenntnis der Rechentechniken allein genügt, um im Unterricht zurecht zu kommen, wird demgemäß eher abgelehnt (2,34), Zusammenhänge, Argumentationen und Schlussfolgerungen werden als wichtiger angesehen (2,63). Die Lernenden gestehen der Mathematik eine hohe Bedeutung für das „wirkliche" Leben zu (3,01), äußern sich aber deutlich zurückhaltender in der Frage, ob sie selbst im Unterricht neben dem reinen Stoff Dinge von allgemeiner Wichtigkeit oder Relevanz lernen (2,53). Desgleichen sind sie unentschieden darüber, ob die Mathematik den Menschen beim Verstehen der Welt hilft (2,59). Über die Natur der Mathematik gehen die Meinungen auseinander (größere Streuung): Die Mehrheit glaubt jedoch, dass Mathematik unabhängig vom Menschen existiert (2,93) sowie entdeckt (und nicht etwa erschaffen) wird (2,92).

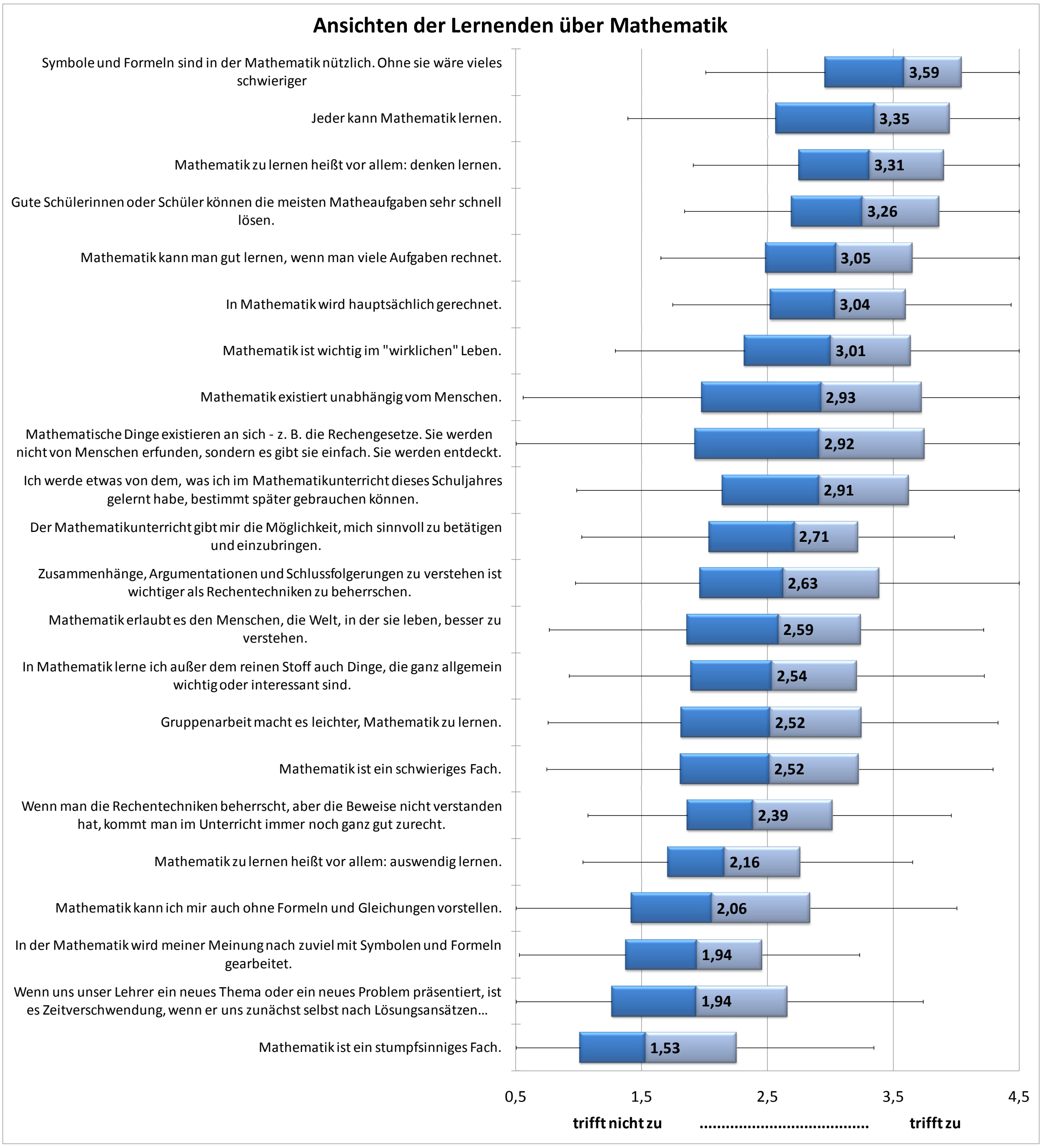


Diagramm 21: Ansichten und Urteile der Lernenden über Mathematik.

5.2.6.2 Differenzierung nach Experimental- und Kontrollgruppe

Die Ansichten und Urteile der Lernenden über Mathematik unterscheiden sich nur hinsichtlich dreier Items signifikant voneinander (vgl. Tab. CD.56-57). In allen dreien ist die Zustimmung in der Experimentalgruppe geringer als in der Kontrollgruppe. Die Unterschiede sind allerdings so gering, dass die Mediane beider Gruppen im selben Zustimmungsintervall bleiben:

- Mathematische Dinge existieren an sich – z. B. die Rechengesetze. Sie werden nicht von Menschen erfunden, sondern es gibt sie einfach. Sie werden entdeckt.*
  ($p = 0{,}033$; $m_E = 2{,}77$ / $m_K = 3{,}12$; –0,35; beide Mediane im Intervall „trifft eher zu“)

- In der Mathematik wird (…) zuviel mit Symbolen und Formeln gearbeitet.*
  (p = 0,018; m_E = 1,86 / m_K = 2,08; –0,22; beide Mediane im Intervall „trifft eher nicht zu“)
- Jeder kann Mathematik lernen.*
  (p = 0,029; m_E = 3,31 / m_K = 3,41; –0,10; beide Mediane im Intervall „trifft völlig zu“)

Insbesondere die Schülerinnen und Schüler der Experimentalgruppe glauben also an die Kraft der Symbole und Formeln. Sie sind zudem weniger offen für die Meinung, dass Mathematik vom Menschen vorgefunden wird. Dies ist deshalb wichtig zu bemerken, da es die Schülerinnen und Schüler dieser Gruppe sind, die in der Unterrichtsreihe die kontrastierende, formelfreie Methode zum Lösen quadratischer Gleichungen von Al-Khwarizmi kennenlernen werden.

5.2.6.3 *Differenzierung nach Gender*

Auch zwischen den Geschlechtern gibt es nur in drei Items signifikante, z. T. hochsignifikante Unterschiede (vgl. Tab. CD.58-59). In allen drei Items ist die Zustimmung bei den Jungen deutlich höher als bei den Mädchen:

- Jeder kann Mathematik lernen.**
  (p = 0,001; m_J = 3,49 / m_M = 3,06; +0,43)
- Ich werde etwas von dem, was ich im Mathematikunterricht dieses Schuljahres gelernt habe, bestimmt später gebrauchen können.**
  (p = 0,007; m_J = 3,08 / m_M = 2,68; +0,40)
- In Mathematik lerne ich außer dem reinen Stoff auch Dinge, die ganz allgemein wichtig oder interessant sind.*
  (p = 0,012; m_J = 2,68 / m_M = 2,29; +0,39)

Der zweite und dritte Punkt betreffen offenbar das Ausmaß, in welchem die Angebote des Mathematikunterrichts die eigene Person berühren. Die unterschiedliche Beurteilung der Brauchbarkeit dessen, was man im Mathematikunterricht lernt, hat möglicherweise mit genderspezifischen Berufswünschen zu tun: Jungen stellen sich im Rahmen eines klassischen Rollenverständnisses vielleicht eher eine Tätigkeit vor, zu deren Ausübung sie Mathematik benötigen. Hinsichtlich des letzten Punktes darf man gespannt sein, ob die Mädchen der Experimentalgruppe durch den historisch-hermeneutischen Unterricht in ihrer Ansicht beeinflusst werden.

5.2.6.4 *Differenzierung nach Klassen*

Die Differenzierung nach Klassen zeigt höchst signifikante Unterschiede in den Items (vgl. Tab. CD.60-61)

- „In Mathematik wird hauptsächlich gerechnet“ (p < 0,001) sowie
- „Mathematik zu lernen heißt vor allem: auswendig lernen“ (p < 0,001).

Es handelt sich um Items, die die Mathematik als ein von Routinearbeiten beherrschtes Fach beschreiben. In beiden Diagrammen sind jeweils grob zwei Gruppen von Klassen zu erkennen, deren

Mediane relativ eng aneinander liegen, sich aber von den Medianen der jeweils anderen Gruppe stark unterscheiden. Die größten Differenzen treffen wir bei den Klassen B1 und C an, wobei die Schülerinnen und Schüler C den Aussagen sehr viel deutlicher zustimmen als die Schülerinnen und Schüler von B1. Tatsächlich wird in C auch die Stumpfsinnigkeit von Mathematik mit dem höchsten aller zehn Werte beschrieben. Diese Beobachtung passt auch gut zu dem oben ausgearbeiteten Befund (Faktormapping in Diagramm 14): Dort schätzte die Klasse C den Anteil operativ-instrumenteller Tätigkeiten im Unterricht als sehr hoch, die Klasse B1 den entsprechenden Anteil als sehr niedrig ein. Offenbar schlagen sich hier die Eigenarten des jeweiligen Unterrichts nieder.

	A	B1	C	E	B2	D1	D2	K	K1	K2
Symbole und Formeln sind in der Mathematik nützlich. Ohne sie wäre vieles schwieriger	3,87	3,25	3,73	3,40	3,41	3,77	3,61	3,50	3,33	3,64
Mathematik zu lernen heißt vor allem: denken lernen.*	3,58	2,92	3,45	3,29	2,96	3,67	3,61	3,15	3,19	3,27
Jeder kann Mathematik lernen.*	3,58	2,67	2,67	3,39	3,61	3,67	3,17	3,57	3,58	3,11
Gute Schülerinnen oder Schüler können die meisten Matheaufgaben sehr schnell lösen.*	3,50	3,08	3,54	3,09	3,05	3,61	3,00	2,97	3,58	3,29
Mathematik kann man gut lernen, wenn man viele Aufgaben rechnet.	3,04	3,14	2,94	3,18	3,08	2,89	2,79	2,86	3,27	3,29
In Mathematik wird hauptsächlich gerechnet.***	3,00	2,58	3,54	3,18	3,25	2,64	2,63	3,04	3,14	3,12
Mathematik ist wichtig im "wirklichen" Leben.	3,00	2,88	3,00	3,15	2,77	3,07	2,89	3,10	3,06	3,08
Mathematik existiert unabhängig vom Menschen.	3,50	2,90	2,92	2,77	2,70	2,78	2,63	2,81	2,96	3,50
Ich werde etwas von dem, was ich im Mathematikunterricht dieses Schuljahres gelernt habe, bestimmt später gebrauchen können.	3,07	2,14	2,69	3,31	2,75	2,96	3,13	2,80	2,85	3,17
Mathematische Dinge existieren an sich - z. B. die Rechengesetze. Sie werden nicht von Menschen erfunden, sondern es gibt sie einfach. Sie werden entdeckt.*	3,50	2,20	2,88	2,36	3,13	2,45	2,75	2,86	3,19	3,50
Der Mathematikunterricht gibt mir die Möglichkeit, mich sinnvoll zu betätigen und einzubringen.	2,83	2,86	2,54	2,73	2,27	2,94	2,81	2,65	2,70	2,85
Zusammenhänge, Argumentationen und Schlussfolgerungen zu verstehen ist wichtiger als Rechentechniken zu beherrschen.**	3,25	2,06	2,86	2,29	2,72	2,36	3,11	2,15	2,69	2,80
Mathematik erlaubt es den Menschen, die Welt, in der sie leben, besser zu verstehen.	2,90	2,13	2,64	2,45	2,14	2,56	2,71	2,58	2,62	3,06
Gruppenarbeit macht es leichter, Mathematik zu lernen.	2,59	2,81	2,42	2,44	2,70	2,89	2,36	2,50	2,12	2,68
Mathematik ist ein schwieriges Fach.	2,41	2,63	2,69	2,62	2,50	2,75	2,31	2,23	2,39	2,75
In Mathematik lerne ich außer dem reinen Stoff auch Dinge, die ganz allgemein wichtig oder interessant sind.	2,50	2,14	2,45	2,80	2,42	2,65	2,77	2,36	2,46	2,63
Wenn man die Rechentechniken beherrscht, aber die Beweise nicht verstanden hat, kommt man im Unterricht immer noch ganz gut zurecht.	2,30	2,58	2,65	2,14	2,69	2,44	2,38	2,18	2,42	2,58
Mathematik zu lernen heißt vor allem: auswendig lernen.***	1,89	1,78	2,92	2,22	2,50	2,13	2,08	2,07	2,17	2,05
Mathematik kann ich mir auch ohne Formeln und Gleichungen vorstellen.	2,23	1,80	1,81	1,92	2,32	1,86	2,35	2,07	2,00	1,97
Wenn uns unser Lehrer ein neues Thema oder ein neues Problem präsentiert, ist es Zeitverschwendung, wenn er uns zunächst selbst nach Lösungsansätzen suchen lässt. Er sollte lieber gleich erklären, was richtig ist und funktioniert.**	1,61	1,80	1,64	2,13	2,00	1,94	2,08	1,90	2,68	1,39
In der Mathematik wird meiner Meinung nach zuviel mit Symbolen und Formeln gearbeitet.	1,73	1,95	1,92	2,05	2,10	1,46	1,69	2,04	2,25	1,90
Mathematik ist ein stumpfsinniges Fach.*	1,36	1,71	2,18	1,31	1,24	1,65	1,33	1,80	1,54	1,57

Tabelle 26: Ansichten und Urteile der Lernenden über Mathematik, differenziert nach Klassen.

Die Unterschiede in den Medianen sind ferner hoch signifikant für die Items

- „Wenn uns unser Lehrer ein neues Thema oder ein neues Problem präsentiert, ist es Zeitverschwendung, wenn er uns zunächst selbst nach Lösungsansätzen suchen lässt. Er sollte lieber gleich erklären, was richtig ist und funktioniert.“ ($p = 0{,}001$),

- „Zusammenhänge, Argumentationen und Schlussfolgerungen zu verstehen ist wichtiger als Rechentechniken zu beherrschen“ ($p = 0{,}002$),

Hinsichtlich des ersten Items fallen die Klassen K1 gegenüber K2, hinsichtlich des zweiten Items die Klassen A und D2 gegenüber B1 und K aus dem Rahmen.

Signifikant sind die Unterschiede schließlich für die Items

- „Mathematische Dinge existieren an sich – z. B. die Rechengesetze. Sie werden nicht von Menschen erfunden, sondern es gibt sie einfach. Sie werden entdeckt.“ ($p = 0{,}020$, besonders starke Zustimmung bei A und K2)
- „Jeder kann Mathematik lernen“ ($p = 0{,}021$, geringere Zustimmung bei B1 und C – diese beiden gehören hinsichtlich der Zeugnisnoten zu den erfolglosesten Klassen),
- „Mathematik ist ein stumpfsinniges Fach“ ($p = 0{,}023$, relativ stärkere Zustimmung bei C, s. o.)
- „Mathematik zu lernen heißt vor allem: denken lernen“ ($p = 0{,}027$, relativ geringe Zustimmung bei B1 und B2 – dies sind Klassen, die denselben Lehrer haben),
- „Gute Schülerinnen und Schüler können die meisten Mathematikaufgaben schnell lösen“ ($p = 0{,}030$).

5.2.6.5 Zusammenfassung

Mathematik wird von der großen Mehrheit der an dieser Studie teilnehmenden Schülerinnen und Schüler als eine reputierliche und wichtige Disziplin angesehen. Ihr symbolisch-formelhaftes Gewand wird von vielen geschätzt – andere Ausdrucks- und Darstellungsformen scheinen eher nicht vorstellbar. Dies wird am stärksten von den Schülerinnen und Schülern der Experimentalgruppe so gesehen. Die übrigen Unterschiede zwischen Experimental- und Kontrollgruppe sowie zwischen Jungen und Mädchen fallen indes gering aus. Anders sieht es bei einzelnen Klassen aus. Hier fallen offenbar Eigenarten des jeweiligen Unterrichts so ins Gewicht, dass die Schülerinnen und Schüler unterschiedlicher Lerngruppen in einigen Punkten zu markant verschiedenen Ansichten und Urteile kommen.

5.2.7 Angaben der Lernenden zum eigenen Lerntyp

5.2.7.1 Gesamtbilanz

In einem weiteren Abschnitt des Fragebogens konnten die Schülerinnen und Schüler Angaben zum eigenen Lerntyp machen. Die Ergebnisse zeigt das Diagramm 22 (vgl. Tab. CD.63). Extreme Ausprägungen sind für kein Item zu erkennen. Für einen großen Teil der Schülerinnen und Schüler hat das Lesen, auch in der Freizeit, aber einen eher großen Stellenwert. Die für die Schule relevanten Texte werden hingegen zurückhaltender, als durchschnittlich eher langweilig beurteilt Desweiteren lässt sich ablesen, dass vielen Lernenden eine gewisse Nachhaltigkeit zueigen ist: Sie beschreiben sich als eher konsequent-ausdauernd und interessieren sich (mit Abstrichen) auch für größere Zusammenhänge. Die Schülerinnen und Schüler glauben, dass viel zu lernen notwendig für schulischen Erfolg ist und wissen, dass dies von ihnen Anstrengung erfordert. Gleichwohl bezeichnet sich die Mehrheit eher nicht als fleißig und lehnt es vor allem ab, unverstandene Dinge zu lernen.

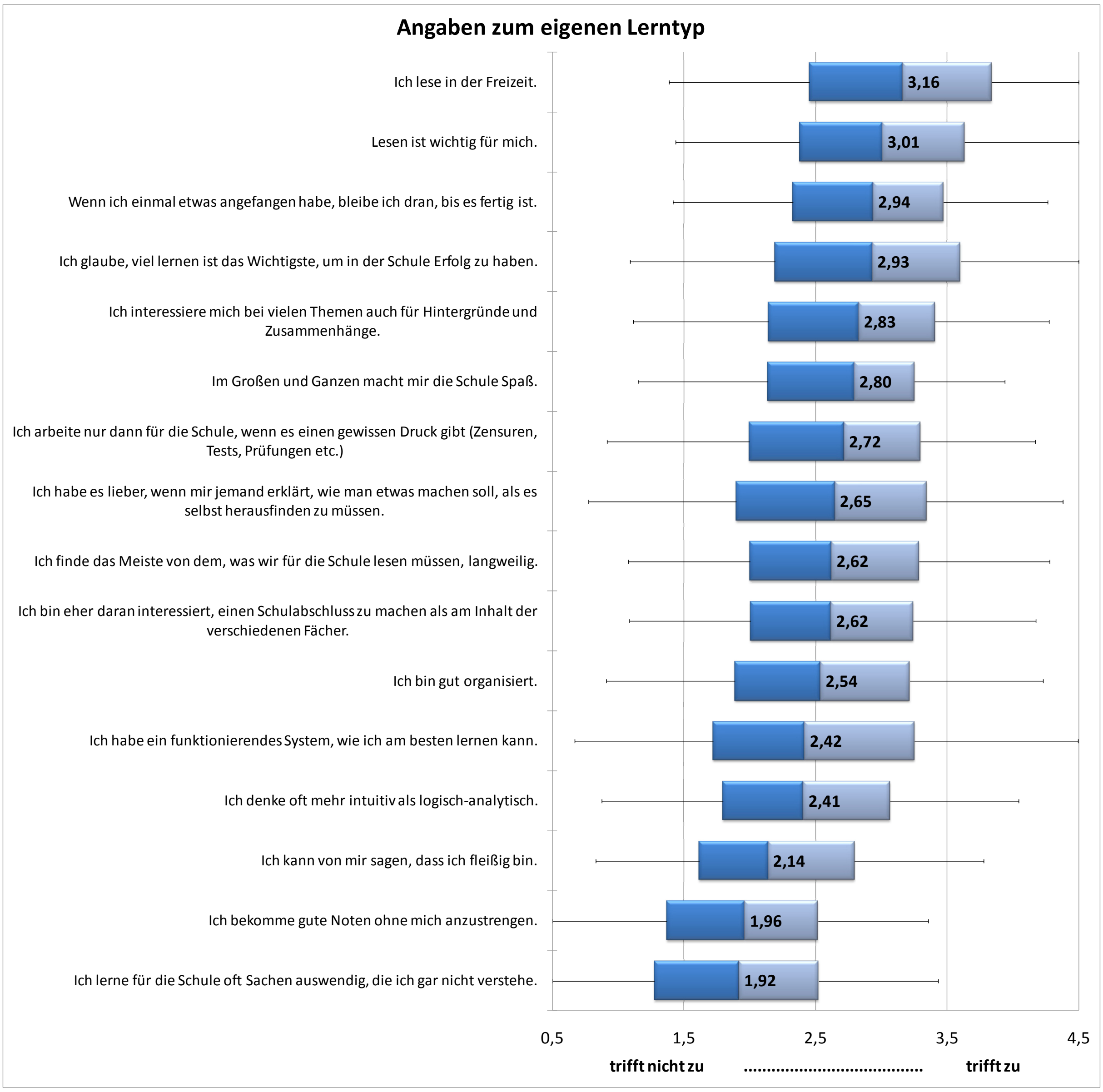


Diagramm 22: Angaben zum eigenen Lerntyp.

5.2.7.2 *Differenzierung nach Experimental- und Kontrollgruppe, nach Gender und nach Klassen*

Zwischen der Experimental- und der Kontrollgruppe gibt es nur ein signifikant verschiedenes Item, das von den Lernenden der Experimentalgruppe im Schnitt weniger bejaht wird als von jenen der Kontrollgruppe. Es handelt sich um die Aussage: „Ich habe es lieber, wenn mir jemand erklärt, wie man etwas machen soll, als es selbst herausfinden zu müssen“ (p = 0,027, m_E = 2,47, m_K = 2,85, -0,38), (vgl. Tab. CD.63a, b).

Dieser Unterschied ist vor allem darauf zurückzuführen, dass zwei Kontrollklassen (K und K1) dieser Aussage eine signifikant höhere Zustimmung erteilt haben als die übrigen Klassen. In den übrigen Punkten gibt es hingegen keine signifikanten Unterschiede zwischen den Klassen (vgl. Tab. CD.63e, f).

Wenn man nach Geschlechtern differenziert, erkennt man ebenfalls nur ein signifikant verschiedenes Item, nämlich die Aussage: „Ich bin eher daran interessiert, einen Schulabschluss zu machen als am Inhalt der verschiedenen Fächer.“ Diese wird stärker von den Jungen als von den Mädchen bejaht ($p = 0{,}028$, $m_J = 2{,}73$, $m_M = 2{,}37$, $+0{,}36$), (vgl. Tab. CD.63c, d).

5.2.8 Zusammenfassung

In diesem Abschnitt sollen die zuvor dargestellten Daten nicht einfach wiederholt, sondern nach den Differenzierungsgruppen sortiert zusammengefasst werden. Auf diese Weise soll noch einmal herausgearbeitet werden, in welchen Punkten sich die betrachteten Gruppen unterscheiden.

5.2.8.1 Die Unterschiede zwischen Experimental- und Kontrollgruppe

Die Unterschiede zwischen Experimental- und Kontrollgruppe sind für das Anliegen der vorliegenden Arbeit am wichtigsten.

Hinsichtlich des Leistungsniveaus ergeben sich weder aus den Lernstandserhebungen noch aus den Zeugniszensuren Hinweise auf signifikante Unterschiede zwischen den beiden Gruppen. Die selbstattribuierten Kompetenzen differerieren demgemäß auch in nur einem einzigen Punkt („selbst Beweise durchführen“), in welchem sich beide Gruppen jedoch auf demselben Niveau einschätzen (nämlich als ‚weniger kompetent‘). Den Angaben zur wahrgenommenen Häufigkeit bestimmter Tätigkeiten im Unterricht zufolge werden die Lernenden der Experimentalgruppe offenbar etwas häufiger mit Anforderungen im Bereich des mathematischen Analysierens, Argumentierens und Beweisens konfrontiert. Hierzu passt auch der Befund, wonach die Schülerinnen und Schüler der Kontrollgruppe gemäß ihrer eigenen Wahrnehmung etwas weniger selbstständiger arbeiten als jene der Experimentalgruppe.

Hinsichtlich der Meinungen über Mathematik gibt es nur in ganz wenigen Punkten Differenzen, die Signifikanzniveau erreichen. Diese sind jedoch gering, so dass sie nur die Ausprägung innerhalb eines gleichen Zustimmungs- oder Ablehnungsintervalls betreffen.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass die Experimental- und Kontrollgruppe genügend ähnliche Voraussetzungen und Prädispositionen mitbringen, um im Sinne der in dieser Arbeit beabsichtigten Untersuchung als vergleichbar zu gelten.

5.2.8.2 Die Unterschiede zwischen Jungen und Mädchen

Auffällig ist, dass die Jungen sich hinsichtlich ihrer eigenen Kompetenzen signifikant zuversichtlicher und selbstbewusster zeigen als die Mädchen. In den Zeugnissen schneiden sie dennoch durchschnittlich um eine Drittelnote schlechter ab.

Im Hinblick auf die Ansichten und Urteile zur Mathematik gibt es nur wenige Unterschiede zwischen den Geschlechtern; diese betreffen vor allem das Maß, in welchem die eigene Person vom Fach tangiert wird.

5.2.8.3 Die Merkmale der Klassen

Allen Klassen ist ein im Durchschnitt hohes Interesse am Fach Mathematik gemein. Im Einzelnen fallen die Klassen durch folgende Merkmale auf:

Klasse A
- nimmt ein hohes Maß an analytisch-diskursiven Tätigkeiten im Unterricht wahr;
- attribuiert sich die höchste Kompetenz bei nachvollziehenden, reorganisierenden Tätigkeiten;
- belegt bei der Lernstandserhebung den zweiten Rang;
- weist den höchsten Mädchenanteil aller teilnehmenden Klassen auf.

Klasse B1
- nimmt ein sehr geringes Maß an operativ-instrumentellen Tätigkeiten im Unterricht wahr;
- attribuiert sich die niedrigsten fachlichen Kompetenzen aller teilnehmenden Klassen;
- belegt bei der Lernstandserhebung abgeschlagen den letzten Rang.

Klasse C
- zeigt vergleichsweise das geringste Interesse am Fach Mathematik;
- nimmt ein hohes Maß an operativ-instrumentellen Tätigkeiten im Unterricht wahr;
- erlebt einen Mathematikunterricht, der von Routinearbeiten beherrscht wird;
- erreicht die höchste Zustimmung zur Aussage „Mathematik ist stumpfsinnig“;
- belegt bei der Lernstandserhebung einen mittleren Rang.

Klasse E
- ist eine reine Jungenklasse;
- belegt dennoch in allen Kategorien mittlere Ränge und repräsentiert damit – abgesehen von der Genderfrage – eine idealtypische Durchschnittsklasse.

Klasse B2
- schreibt sich hohe Kompetenzen im Bereich des Nachvollziehens und Reorganisierens zu, jedoch nur geringe Kompetenzen auf dem Gebiet des Anwendens und Transferierens;
- fällt darüber hinaus nicht durch Abweichungen von durchschnittlichen Werten auf.

Klasse D1
- nimmt ähnlich wie Klasse A ein hohes Maß an analytisch-diskursiven Tätigkeiten im Unterricht wahr;
- attribuiert sich die höchste Kompetenz bei anwendend-transferierenden Tätigkeiten;
- erreicht bei der Lernstandserhebung die beste Platzierung aller Klassen.

Klasse D2
- belegt bei der Lernstandserhebung den dritten Rang;
- schreibt sich vor allem Kompetenzen im Bereich des Nachvollziehens und Reorganisierens zu.

Klasse K
- liegt gemeinsam mit A und D1 bei den Zeugnisnoten vorn, erreicht ansonsten aber viele

durchschnittliche Werte.

Klasse K1
- schätzt den bestimmenden Einfluss des Lehrers im Unterrichtsgeschehen als hoch ein;
- nimmt nur ein geringes Maß an analytisch-diskursiven Tätigkeiten im Unterricht wahr;
- sieht eigene Schwächen im Bereich des Anwendens und Transferierens mathematischen Wissens;
- belegt bei der Lernstandserhebung den drittletzten Rang.

Klasse K2
- ähnlich wie K1, bei der Lernstandserhebung allerdings geringfügig besser.

5.3 Darstellung des Unterrichts während der Intervention

In den folgenden Abschnitten werde ich eine Darstellung des in den Experimental- und Kontrollklassen durchgeführten Unterrichts geben. Nachdem ich auf die Besonderheiten in einzelnen Klassen hingewiesen habe (5.3.1), werde ich an Beispielen des reichlichen Materials Szenen, die unter hermeneutischen Gesichtspunkten interessant sind, dokumentieren und analysieren (5.3.2). Den Blick der Schülerinnen und Schüler auf den erlebten Unterricht gebe ich in Abschnitt 5.3.3 (Experimentalgruppe) und 5.3.4 (Kontrollgruppe) wieder.

5.3.1 Besonderheiten in den Unterrichten der Experimentalklassen

In allen Klassen der Experimentalgruppe wurden die inhaltlichen Aspekte der Unterrichtsreihe gemäß der in Kapitel 4 vorgestellten Planung und anhand des in den Anhängen (A-D) abgedruckten Materials weitestgehend realisiert. Klasse B1 benötigte jedoch mehr Zeit als angegeben und verwendete eine zusätzliche Unterrichtsstunde auf die Lektüre des Quellenauszuges D V (Arbeitsheft S. 16), in welchem Al-Khwarizmi den zweiten der drei Gleichungstypen vorstellt.

Trotz der inhaltlichen und formalen Übereinstimmungen wurde die Unterrichtsreihe in den einzelnen Klassen auf unterschiedliche Weisen durchgeführt. Hierbei ergaben sich zwei methodische Hauptrichtungen, die im Wesentlichen mit den bevorzugten Unterrichtsstilen der in den jeweiligen Klassen wirkenden Lehrer zusammenhingen:

- In den Klassen B1, B2, C und E wurde das Arbeitsheft relativ kleinschrittig „abgearbeitet“. Plenums- und Still- oder Partnerarbeitsphasen lösten einander dabei mit großer Regelmäßigkeit ab. Alle Schülerinnen und Schüler befassten sich zeitgleich mit denselben Inhalten und Aufgaben, die am Ende einer jeden Arbeitsphase im Plenum verglichen und – wenn gewünscht – dort auch erläutert wurden. Ich möchte diese Vorgehensweise als *konventionelles Erarbeitungs- und Interaktionsmuster* bezeichnen, und die nach diesem Muster unterrichteten Klassen die „BCE-Klassen“ nennen.
- In den Klassen A, D1 und D2 erfolgte die Bearbeitung des Arbeitsheftes eher nach Art eines Arbeits- oder Wochenplans (mit sechs Stunden Laufzeit). Den Schülerinnen und Schülern wurden dadurch individuelle Spielräume in ihrer Arbeit eingeräumt. Die Klassen D1 und D2 waren von ihrem Lehrer gebeten worden, das vorgelegte Material in (ausgelosten) Kleingrup-

pen oder in Tandems selbständig zu bearbeiten. In der Klasse A gab der Lehrer verschiedene methodische Hilfestellungen an (u. a. kooperative Rekonstruktion) und teilte leistungsheterogene Kleingruppen ein, die während der Unterrichtsreihe stabil blieben und relativ autonom arbeiten konnten. Die Schülerinnen und Schüler der Klassen D1 und D2 konnten nach Verabredung mit dem Lehrer auch den Raum verlassen und sich in stillere Bereiche der Schule zurückziehen, um dort zu arbeiten. Ich möchte hier von einem *individualisierenden Erarbeitungs- und Interaktionsmuster* sprechen und die entsprechend unterrichteten Klassen die „AD-Klassen" nennen.

Abgesehen von der Klasse A nutzte keine Klasse im Unterricht spezielle Lese- oder Texterarbeitungstechniken. Die Klasse A war mit der Technik der kooperativen Rekonstruktion vertraut. In der hier praktizierten Variante wurden die Texte von Tandems gelesen. Dabei liest ein Partner einen Abschnitt vor, während der andere nur zuhört und anschließend wiedergibt, was er behalten und verstanden hat. Hierbei wird er vom ersten Partner überprüft und ggf. korrigiert. Abschnittsweise werden die Rollen getauscht.

5.3.2 Hermeneutisch interessante Beispiele

Im Folgenden werde ich vier Szenen aus dem Unterricht herausgreifen und sie im Hinblick auf die stattgehabte hermeneutische Auseinandersetzung analysieren. Es handelt sich um

- den Einstieg und Erstkontakt mit der Quelle (5.3.2.1);
- den Umgang mit den anderen Darstellungsformen bei Al-Khwarizmi (5.3.2.2);
- die Diskussion über negative Zahlen (5.3.2.3);
- sowie die Lektüre des Vorwortes samt (Abschluss-)Diskussion (5.3.2.4).

5.3.2.1 Erste Szene: Einstieg und erster Kontakt mit der Quelle

5.3.2.1.1 Vorbemerkung

Der Einstieg sowie der erste Kontakt mit der Quelle markieren wichtige Stellen im Verlauf einer historisch-hermeneutisch orientierten Unterrichtsreihe. Das in Kapitel 4 vorgelegte Konzept trägt dem durch den Vorschlag Rechnung, den Einstieg beispielsweise mit der Methode des Brainwriting bzw. Brainstorming zu gestalten (vgl. Kap. 4.3.2.2.1). Die hermeneutische Funktion dieser Methode liegt in der Reflexion des Vorwissens von Schülerinnen und Schülern zur Vorbereitung des ersten Kontaktes mit der Quelle.

Nicht alle an der Untersuchung teilnehmenden Lehrer sind dem Vorschlag gefolgt. Diejenigen, die es getan haben, machten dabei Beobachtungen, die so ähnlich schon in den Pilotklassen zu verzeichnen waren. Demnach kannten die Schülerinnen und Schüler zwar einige der großen Namen der Mathematik, konnten diese aber nicht historisch oder kulturell einordnen. Kenntnisse über die Geschichte der Mathematik oder über das arabische Mittelalter waren so gut wie überhaupt nicht vorhanden.

Die Klasse B1 gehörte zu den Klassen, in denen der Lehrer auf hermeneutisch vorbereitende oder zumindest einstimmende Aktivitäten ganz verzichtet hat. Im folgenden Transkript wird der Verlauf der Einstiegsstunde in dieser Klasse in wichtigen Ausschnitten wiedergegeben. Sie sind gut geeignet, um beispielhaft Probleme und Hindernisse für den hermeneutischen Unterricht unter bestimmten, abträglichen Umständen zu beleuchten.

5.3.2.1.2 Kommentiertes Unterrichtstranskript (Klasse B1)

L: Wir hatten uns äh in den letzten Stunden beschäftigt, hoffentlich hinreichend, mit quadratischen . Gleichungen, hatten zwei Lösungverfahrn kennengelernt.
S: *(ruft dazwischen)* Welche nomma
L: Welche noch mal fragt der S. zu Recht . *(ruft Schülerin auf)* G.!
S: pq-Formel . Mit der pq-Formel.
L: (nickt)
S: *(ruft dazwischen)* Und .. wir haben noch Tricks kenngelernt.
S: *(ruft dazwischen)* Ja, und zeichnerische Lösung.
L: Zeichnerische Lösung.
S: *(ruft dazwischen)* Die rechnerische Lösung.
L: Ja, bezogen auf den Graphen der Parabel zeichnerisch, richtig.
S: *(ruft dazwischen)* Ja, mit den binomischen Formeln.
L: Hm . Wie haben wir das denn genannt, das Verfahren?
S: *(ruft dazwischen)* Binomische-Formel-Verfahren.
S: *(ruft dazwischen)* Ja, ausklammern hammwer
S: *(ruft dazwischen)* Ja, stimmt, dat Ausklammern
K: *(murmeln durcheinander)*
L: Ja gut, äh, lassen wir das vielleicht mal stehen, wir werden *(ein Schüler ruft etwas dazwischen)* .. J. hat jetzt unerlaubt, ohne sich zu melden, dazwischen gesagt. Sag's laut, unerlaubt.
S: *(murmelt)* Quadratische Ergänzung.
L: Sag's mal laut.
S: *(lauter)* Quadratische Ergänzung.
L: War ja das Verfahr'n, aus dem wir die Lösungsformel entwickelt hatten, das brauchen wir ja jetzt nicht noch mal öhm genau zu besprechen .. Äh, ich hatte ja schon angekündigt, wir werden uns jetzt noch mal mit dem gleichen Thema beschäftigen, äh und wir haben jetzt eine Aufgabe aus dem Irak, genauer gesagt aus Bagdad
S: *(ruft dazwischen)* Bagdad.
L: Öh, von Herrn, öh, Muhammed al-Khwa .. äh .. rizmi, . der nicht deshalb jetzt hier zu Wort kommt, weil wir keine Aufgaben mehr hätten, öh sondern weil er 'ne ganz besond're Umgehensweise mit diesen quadratischen Gleichungen . gepflegt hat .. Das war alles noch weit vor dem Irak-Krieg, das war nämlich vor ungefähr tausendzweihundert Jahren,
K: boa
L: und deshalb woll'n wir ma' schaun, äh, erstmal, welche Art von Aufgaben mit dem zu tun haben, was wir jetzt grade machen und wie er damit umgegangen ist . Wir werden also sogar dessen Lösung gleich sehn und versuchen, damit dann weiterzuarbeiten.
S: *(flüstert)* oh . ist das schwierig? /
L: Die Aufgabe .. *(schaltet OHP ein)* ist in einer modernen Übersetzung aus dem arabischen Mathematikbuch, achthundertzwanzig nach Christus .. sieht so aus
K: *(lesen)*
S: *(murmelt etwas)*
L: Das ist schön . dann lies mal vor!
K: *(murmeln, lachen)*
S: *(ruft dazwischen)* boa cool!
S: Ich versteh das selber nicht, ich kann's nur lesen.
L: *(ruft Schülerin auf)* Y.! /
S: Ich versteh die Aufgabe irgendwie voll nicht, aus zehn seiner Wurzeln ergeb'n neununddreißig Dirhem u n d wie muss das Quadrat lauten, das um zehn seiner eigenen Wurzeln vermehrt neununddreißig ergibt . neun .. wieso zehn Wurzeln?
S: *(ruft dazwischen)* Hier! . *(wird aufgerufen)* muss man nicht erstmal neununddreißig durch zehn machen und danach
S: *(ruft dazwischen)* Mein Gott, ist doch voll einfach!

S: *(ruft dazwischen)* Meint der, um zehn seiner Wurzeln, heisst das dann mal zehn oder .. ach *(nachdenklich)*
L: *(lauter)* Ja, da müssen wir sicherlich so einige Vokabeln überhaupt klären, was bedeutet eigentlich ein Quadrat und zehn seiner Wurzeln .. Öh, wie würden wir Quadrat heute übersetzen, wenn wir ‘mal ‘ne rechnerische Übersetzung (wählen)?
S: x hoch zwei
S: x Quadrat
L: Beides richtig . So würden wir das machen /. Und was wäre dann eine Wurzel davon?
S: *(ruft dazwischen)* x
L: Och, S., versuchen wir das doch mal jetz wirklich durchzuhalten . *(ruft Schüler auf)* B.! /
S: *(murmelt etwas)*
L: Die Wurzel von x Quadrat, wie würden wir das vielleicht vereinfacht ausdrücken?
S: x
L: x, unter bestimmten Voraussetzungen wäre das x . Gut, mit den Hilfen könnt ihr mal versuchen, diesen Satz in Formelsprache nur zu übersetzen ohne zur Lösung zu kommen. Nur . die Übersetzung in Formelsprache jeder für sich, . nicht S. für uns alle /.
S: *(fragt etwas)*
L: Übersetzen in Formelsprache, äh, ins Heft bitte.
S: Ins Heft.

In diesem Ausschnitt fällt – neben der schnörkellosen Eröffnung des Themas durch den Lehrer (Z. 24-34) – zunächst die geringe Gesprächsdisziplin der Schülerinnen und Schüler dieser Klasse auf. Der Unterrichtsfluss wird beinahe ständig durch Zwischenrufe unterbrochen. Dies geschieht schon in Zeile 3. Der Lehrer reagiert unterschiedlich auf die Störungen. Oft lässt er die Schülerinnen und Schüler gewähren und geht auch auf ihre Zwischenrufe ein (Z. 4, 9, 11, 19 etc.). Andererseits gibt er gelegentlich zu erkennen, dass er das gezeigte Verhalten eigentlich nicht dulden kann (Z. 18,19: „unerlaubt“; Z. 59). Nach Auflage der Folie mit dem ersten Quellentext (Z. 37) kommt es durch viele spontane Zwischenrufe zu einem kommunikativen Durcheinander in der Klasse (Z. 41-51), dem der Lehrer entgegentritt, indem er sich lautstark zu Wort meldet und ein ebenso kleinschrittiges wie eng geführtes Frage-und-Antwort-Spiel beginnt (Z. 53 ff.): „wie würden wir Quadrat heute übersetzen, wenn wir ‘mal ‘ne rechnerische Übersetzung (wählen)?“ (Z. 53 f.); „was wäre dann eine Wurzel davon?“ (Z. 57); „wie würden wir das vielleicht vereinfacht ausdrücken?“ (Z. 61). Dieses „Sperrfeuer“ an Fragen seitens des Lehrers behindert die Entwicklung eines freien Gedankenflusses jedoch in einem ähnlichen Maße wie das zuvor stattgehabte „Kreuzfeuer“ an Zwischenrufen seitens der Schülerinnen und Schüler. Die Ausbildung einer hermeneutischen Haltung ist in beiden Fällen kaum möglich. Der Lehrer bricht die Plenumsphase schließlich ab und fordert die Klasse auf, die „Übersetzung“ der Quelle mit den bereitgestellten „Hilfen“ (Z. 63) schriftlich zu erledigen (Z. 67: „ins Heft bitte“).

Der Ausschnitt zeigt die typischen Probleme in einer Gruppe, die über wenig oder gar keine Gesprächskultur verfügt. Eine Möglichkeit, diesen Problemen auszuweichen – sofern man sie nicht in einem sicherlich längerfristig anzulegenden Programm beseitigen kann – besteht darin, alternative Formen der Auseinandersetzung mit der Sache und der Kommunikation untereinander zu suchen.

Nach einigen Minuten der Bearbeitung nimmt der Unterricht in Klasse B1 folgenden Fortgang:

K: <: *(murmeln durcheinander, blättern, einige zeigen auf)*
L: Ja, wer ‘n Vorschlag hat, der kommt . ausnahmsweise o h n e jetzt große Diskussion einfach mal nach vorne und schreibt an .. Alles kann angeschrieben werden.
S: *(läuft zur Tafel, andere folgen)*
L: Tafel ist geputzt, ist schon mal prima!
K: <: *(reden durcheinander, 3 Schüler schreiben etwas an die Tafel, setzen sich wieder)*

Abbildung 104: Schüler notieren ihre Antworten zu Aufgabe 1 an der Tafel (Experimentalklasse B1).

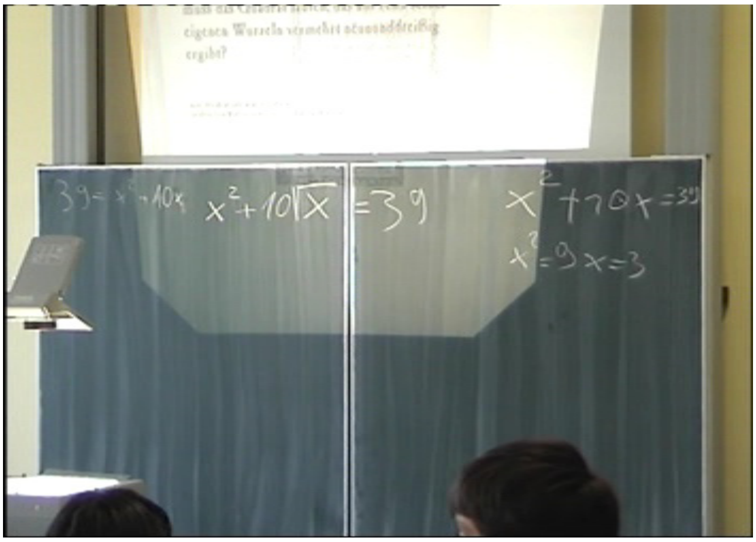


Abbildung 105: Schülerantworten zu Aufgabe 1 (Experimentalklasse B1).

L: Ja, dann bitte ich mal jeden einzelnen, seine Gleichung zu erklär'n.
S: Bitte?
L: öh, M., fängste dann mal an? /
S: Also . das Quadrat, also, da steht ja das Quadrat, also e i n Quadrat, dann hab ich x als Quadrat, hab ich x als Quadrat hingeschrieben, und dann steht da weiter und zehn seiner Wurzeln *(andere Schüler rufen dazwischen)* . Jetzt sei mal leise!
L: Ich glaub', wir sehen, M. ist dran, können wir vielleicht mal zuhören! \
S: Und zehn seiner Wurzeln, also da steht Wurzel der Zahl, die wir (halt) x benannt haben, also dann schreibt man zehn Wurzel x ergeben dann neununddreißig Dirhem
L: Gut, Kommentare erstmal zu dieser Lösung . Wir hatten ja vorhin schonmal was zu den Wurzeln gesagt . äh *(ruft Schülerin auf)* Y.!
S: J a , äh, Wurzel aus x das brauch' man doch gar nicht, man muss ja eigentlich nur zehn x hinschreiben, weil \ die Wurzel aus x Quadrat, die is' ja x
L: Das hatten wir vorhin ja abgeklärt *(setzt den Schwamm an das Wurzelzeichen)*
K: <: *(diskutieren durcheinander)*
S: Oder ich nehm' das Quadrat einfach weg. *(L zieht den Schwamm zurück, ohne gewischt zu haben)*
S: Ja, du hast doch überhaupt kein Quadrat hingemacht.

S: Doch, x Quadrat *(L wischt den Exponenten 2 im ersten Summanden weg)*
S: ja das kann man auch wegmachen
K: <: *(diskutieren)*
L: *(ruft Schüler auf)* J.! /
S: In der Aufgabe steht ja, dass das ein Quadrat ist.
L: Okay . gut, also das würde schon für diese Übersetzung sprechen *(L schreibt den zuvor weggewischten Exponenten 2 wieder hin)*, wobei die andere auch *(L wischt das Wurzelzeichen weg)* verfolgt werden könnte. \ Gut, das soll aber jetzt nicht unser Hauptthema sein, wie wir das richtig übersetzen. Damit sind auch alle anderen bis auf eine Ausnahme auch öhm praktisch (in Übereinstimmung), brauchen wir nicht drüber zu reden. Wer war das unten rechts? / S., komm
S: Ja, das x Quadrat äh plus zehn x ist sind neundreißich
L: Ganz unten rechts bist du? /
S: bitte? /
L: Unten rechts.
S: Ja, da steht x Quadrat gleich neun und x gleich 3.
L: Ach so, „und“ steht dazwischen!
S: J a a
L: Also, ich seh jetzt da x Quadrat gleich neun x gleich drei, aber das hätt ich dir jetzt # nicht zugetraut.
S: Nein, das stimmt nicht. #
L: Find ich auch . Aber das wär jetzt praktisch schon # x ausgerechnet
S: Die Lösung #
L: *(wischt die zweite Zeile rechts weg)* Okay, mit der Lösung können wir vielleicht auch #
S: Aber die is‘ richtig! #
L: # Wir sind ja relativ fit darin, die Lösung auf unsere Art einfach mal aufzuschreiben ..
S: Hä?
L: Lösung der Gleichung!
S: An die Tafel oder .. ?
L: Ins Heft und dann an die Tafel .. Rechne einfach mal die Gleichung aus, und dann gucken wir mal
K: <: *(reden durcheinander)*
S: Mit der pq-Formel oder .. ? /
L: Wie du willst
K: *(rechnen in Stille)*
L: *(geht durch den Raum)* Was ist mit Kürzen? / … äh Y., schreibst du mal an? /
S: *(geht an die Tafel, schreibt Lösung an – die Kreide ist nass und zeichnet sich zunächst nur schlecht auf der Tafel ab)*
L: Y., dreh die Kreide bitte mal um vielleicht kann man dann
S: Soll ich jetzt noch die Lösungsmenge hinschreiben? /
L: Ist in Ordnung, die Lösungen stehen da /
S: *(setzt sich wieder)*
L: *(sitzt hinten im Raum)* Ich denk‘, brauch’n wir auch nicht .. *(ermahnt Schüler)* B., was ist los? / . nicht d‘rüber zu diskutieren. Was mich nur wundert, ich bin extra mal rumgegangen und frag jetzt nochmal, (ob ich das richtig gesehen hab‘): Hat das jemand anders gelöst?
S: Ja *(zeigt auf)*
L: mit ‘nem anderen Verfahr‘n?
K: *(murmeln)*
L: .. Ich glaube nicht ‘ne? / Es hat keiner die Lösungsformel benutzt, ist das richtig /
S: D o c h !
S: Doch, ich!
L: Doch / gut, also in einem Fall doch . Brauchen wir jetzt nicht noch zusätzlich, ich # wollte mich nur
S: *(ruft dazwischen)* Ich habs versucht, aber ich habs nicht geschafft mit der pq-Formel
K: <: *(reden durcheinander)*
L: Gut, . das ist unser Problem, dass wir später nochmal drauf zurückkommen / *(geht wieder nach vorne)*. So, was für uns jetzt .. *(bricht ab)*
S: *(reden durcheinander)*
L: Das *(zeigt auf die Lösung an der Tafel)* finden wir in Ordnung, brauchen wir nicht drüber zu reden, denk‘ ich, das könn‘ wir jetzt.

Trotz der zuvor erlebten Schwierigkeiten der Klasse ordnet der Lehrer den Ergebnisvergleich erneut im Plenum an. Die mittlere der drei Lösungen, die Schülerinnen und Schüler daraufhin an die Tafel schreiben (s. Abbildung 105), enthält einen Fehler. Der Lehrer stellt sie als erstes zur Diskussion und bittet den Urheber um Erklärung. Der aufgerufene Schüler wird zunächst so sehr in seinen Ausführungen gestört, dass er selbst um Ruhe bitten muss (Z. 79/80). Der Lehrer unterstützt diesen Appell eher zaghaft (Z. 81). Nachdem der Schüler seine Erklärungen abgeschlossen hat, weist der Lehrer auf die fehlerhafte Stelle hin (Z. 84: „wir hatten vorhin ja schonmal was zu den Wurzeln gesagt“) und ruft erst dann eine Schülerin auf, die den Sachverhalt richtig stellt. Hier kommt es jedoch zu einer interessanten Irritation. Der Lehrer ist schon drauf und dran, das Wurzelzeichen wegzuwischen (Z. 88), wird aber durch den Zwischenruf eines Schülers: „Oder ich nehm‘ das Quadrat einfach weg“ (Z. 90) gestoppt. In der Tat würde auch auf solche Weise, durch Wegnahme des Exponenten 2, eine korrekte Transkription der Quelle entstehen, die sogar der Tatsache Rechnung trägt, dass die gesuchte Größe – in unserer Sprechweise x – das Quadrat selbst ist, und nicht etwa die Wurzel des Quadrates (vgl. hierzu Kap. 3.1.1.2.3, insbesondere die Bemerkungen zum arabischen Wort „mal“). Wieder branden Diskussionen in der Klasse auf, bis ein vom Lehrer aufgerufener Schüler bemerkt, dass in der Quelle doch von einem Quadrat die Rede sei, was für den Lehrer den Ausschlag gibt, der Transkription mit Exponent und weggewischtem Wurzelzeichen den Vorzug zu geben (Z. 97 f.). Hier zeigt sich eine Schwierigkeit, deren Ursache letztlich in der Übersetzung des Wortes „mal“ mit dem deutschen Wort „Quadrat“ zu finden ist. Jedoch stellt der Lehrer an dieser Stelle kategorisch fest, dass „das nicht unser Hauptthema“ sein solle, „wie wir das richtig übersetzen“. Leider vergibt er dadurch eine interessante Möglichkeit, die Quelle hermeneutisch besser zu durchdringen und – beispielsweise – für ihre Fremd- und Eigenartigkeit zu sensibilisieren. Doch auch die anderen Schüler, die ihre Lösungen angeschrieben hatten, kommen – entgegen der ausdrücklichen Aufforderung in Z. 75 – nun nicht mehr zu Wort (Z. 100: „brauchen wir nicht drüber zu reden“). Man muss zugeben, dass es in der Plenumssituation auch kaum noch Möglichkeiten gibt, die Diskussion mit der Klasse gewinnbringend weiter zu verfolgen. Das hat schon das erneute Durcheinander kurz zuvor (Z. 89-94) gezeigt. Ein anderes kommunikatives Arrangement hätte hier möglicherweise mehr Ertrag bringen können. So aber steuert der Lehrer das nächste Teilziel an, das darin besteht, die nun in vertrauter Form vorliegende Gleichung zu lösen. Tatsächlich wird diese Aufgabe auch rasch erledigt. Die Nachfragen in Z. 118, 121 und 127 zeigen allerdings, wie sehr die Schülerinnen und Schüler dieser Klasse es gewöhnt sind, auf kleinschrittige, bis ins Detail gehende Anweisungen ihres Lehrers zu warten. Im Widerspruch hierzu steht die Aussage, wonach die Lernenden gerade dieser Klasse den steuernden Einfluss ihres Lehrers als vergleichsweise am geringsten einschätzen (vgl. 5.2.5).

Der Unterricht nimmt nun folgenden Fortgang.

L: Was jetzt vielleicht interessanter ist, öhm, der Muhammed al-Khwarizmi, achtundertzwanzig nach Christus, äh interessiert uns **deshalb,** . weil der für uns vielleicht ‘ne ganz neue Möglichkeit hat, solche Gleichungen zu behandeln, . nämlich **ohne** diese schrecklichen, lästigen Gleichungen und Formeln,

S: *(ruft dazwischen)* cool

L: und das wär natürlich vielleicht ‘ne Möglichkeit, die uns einerseits das Verständnis erleichtert und vielleicht auch ausbaubar wäre auf andere Dinge, die wir sonst gar nicht verstehen . Und dazu bitt ich euch jetzt mal, .. auf der Seite drei seht ihr nochmal die Aufgabe und auf der Seite vier seht ihr die Lösung . und den Gedankengang sollt ihr im Folgenden **in** dem Heft \ ihr seht dort die Aufgaben und weiter auch auf den folgenden Seiten, äh, übersetzen, so wie‘s da steht. \ Guckt euch also erstmal die Lösung an, wie sie dort formuliert ist und versucht, den Gedankengang dann mit eigenen Worten, so wie‘s dort vorgeschlagen ist, nachzuvollziehen. \ Dazu habt ihr zehn Minuten Zeit, und ich würde euch bitten, das zu zweit zu tun, so dass ihr euch gegenseitig beratet, aber in einer Lautstärke, die Denken ermöglicht. Ja, . / *(Schüler ruft etwas dazwischen)* S., psst . Reden erlaubt, aber nur leise!

K: *(setzen sich zu zweit zusammen, murmeln durcheinander*

Der Lehrer will, dass die Schülerinnen und Schüler sich nun mit der Lösungmethode von Al-Khwarizmi befassen und dazu den Quellenauszug lesen. Dabei fällt auf, dass er die bisher behandelte Mathematik vorab schon als „schrecklich“ und „lästig“ bewertet (Z. 149). Da er selbst vermutlich nicht so über Gleichungen und Formeln denkt, äußert er dieses Urteil anscheinend stellvertretend im Namen seiner Schülerinnen und Schüler. Seine Einschätzung mag auf einer genaueren Kenntnis der Ansichten und Urteile in seiner Klasse beruhen. Sie könnte aber auch ein Hinweis darauf sein, dass er den Jugendlichen kein eigenes, differenzierteres Urteil zutraut. Hierzu würde die Beobachtung passen, dass er ihnen auch im bisherigen Unterricht nur wenige Spielräume zum eigenen Denken überlässt. Für eine hermeneutische Betrachtung und Reflexion jedenfalls ist die stattgehabte, tendenziöse Einstimmung nicht produktiv. Ebenfalls ungünstig ist die sofortige Einteilung von Partnergruppen. Hierdurch sind die Schülerinnen und Schüler nicht nur der Wirkung der Quelle, sondern auch den spontanen Reaktionen ihrer Kameraden ausgesetzt. Auch wird die Notwendigkeit des eigenen Denkens in Frage gestellt, da sogleich jemand zur Verfügung steht, der im Zweifel übernimmt, oder – wenn dies nicht geschieht – für Ablenkung sorgt.

Fragwürdig ist auch der Versuch, den Schülerinnen und Schülern sofort einen Sinn der Lektüre angeben zu wollen (Z. 151: Verständniserleichterung). Gerade den soll ja jeder für sich selbst entdecken: Darin liegt das Wesen des hermeneutisch orientierten Unterrichts.

Doch schauen wir, was in der Partnerarbeit geschieht. Das folgende Transkript gibt das Gespräch zwischen zwei Schülern der Klasse wieder. Bei diesen beiden Schülern handelt es sich um einen recht leistungsstarken, aber sehr undisziplinierten Schüler (S1) und um seine in Mathematik viel schwächere und leicht abzulenkende Banknachbarin (S2).

Kamera ist auf zwei Schüler gerichtet, im Folgenden S1 und S2 genannt. S2 ist dieselbe Schülerin, die zuvor die Lösung der Gleichung an die Tafel geschrieben hatte.
S1 und S2 lesen
S1: *(zum Kameramann)* Hallo, bin die Gazelle!
S2: *(flüstert etwas)*
S1: Was? /
S2: *(lauter)* Ich hasse Kameras!
S1: Warum hasst du denn Kameras? Ich find‘ die cool.
S2: *(flüstert)*
S1: Egal!
S2: *(zeigt auf, spricht an den Lehrer gerichtet)* Was sollen diese Zahlen immer darüber? Also: zehn, um die große Quadratfläche zu vervollständigen benötigt man nur ein Quadrat von fünf multipliziert mit fünf oder fünfundzwanzig.
L: Das ist die Satznummerierung.
S2: Ach so! /
L: Jeder Satz hat ‘ne Nummer.
S2: Ach so, ja dann.
L: Damit du dann sagen kannst: das steht aber in Satz 7, oder so, ja? /
S2: Okay.
S1: Zur Begründung, falls du etwas nicht verstehst, was ja höchstwahrscheinlich vorkommen wird.
S2: *(liest)* (Irgendwie klingt) das logisch.
S1: Ja, natürlich ist das logisch, aber du verstehst das eh nicht.
L: Ihr habt ja die Hilfe drunter, eine Originalzeichnung, eine übersetzte Zeichnung, und die Lösung haben wir ja auch an der Tafel.
S1 und S2 murmeln und lachen
S2 zeigt auf, L kommt zu ihr
S2: Die Summe ist vierundsechzig, aber hier kommt doch niemals ne vierundsechzig raus.
S1: Die Summe! S u m m e ! *(L geht wieder)* a plus b gleich eine Summe.

S2: c.
S1: J a a !
S1 und S2 lesen weiter, flüstern
S2: *(schaut an die Tafel)* Ist eigentlich genau dasselbe, (wie wir es davor gemacht haben, oder?) /
S1: Jetzt ist aber was komplett anderes
S2: Aber vom Prinzip her ist doch
S1: <: Nein, es ist nicht das gleiche
S2: *(zeigt auf, spricht an den Lehrer gerichtet)* Herr S.? /
S1: Mein Gott, es ist ein komplett neuer Weg *(liest weiter)*.. Ja, aber is' doch voll umständlich . soll'n wir jetzt das, äh, Aufgabe zwei machen? /
L: Ja, sicherlich, (hab ich gesagt.)
S1: Gut
S2: Al-Khwarizmi
S1 schreibt
S2: Soll'n wir jetzt hierzu 'nen **ganzen** Text schreiben, oder wie? /
L: Wie du willst!
S1 murmelt etwas
S2: Schaff ich!
S1: Nee, schaffst du nicht, weil du überhaupt nicht verstehst, worum es da geht.
S2: Ich muss das einfach nur umformulieren.
S1 murmelt etwas
S1: Aber warum nimmt man denn erst die Hälfte? /
L: Ja, guck dir mal die Zeichnung an vielleicht.
S: Y., hast'n Blatt? /
S2: Muss ich gucken *(sucht)* Nein, hab ich nicht .
L: Äh, vielleicht noch ein, ob erlaubt oder nicht, einen Hinweis für diejenigen, die jetzt sagen: Ich versteh jetzt Satz zwei bis fünfzehn nicht. \ Äh, es macht durchaus Sinn, dass man erstmal Satz zwei und dann Satz drei versucht zu verstehen . Zweiter Tipp: es sind unten zwei Skizzen, / die wenn man ganz frech nochmal umblättert dort noch einmal etwas besser verständlich vielleicht sind . Das könnten vielleicht Hilfen sein, aber ich bitte euch trotzdem mal versucht zu versuchen, wirklich die Lösung so wie sie hier steht, wie sie dort steht, übersetzt in unsere Sprache
S1 und S2 unterhalten sich
S1: Ja, das ist AB heisst /
S2: Wo ist AB?
S1: AB gleich, ja, aber das ist, äh, *(zeigt auf)* AB ist doch dieses große Quadrat, ja, muss ja.
S2 murmelt etwas
S1: Ja, das ist AB.
S2: Anspitzer 'n Lineal /
S1: Ach   s o / *(liest weiter)*
S2 murmelt etwas
S1 und S2 überlegen
S1: Ja, jetzt hab ichs verstanden, das ist zehn, das ist fünf *(murmelt, zeigt auf)* Das ist sowieso nicht maßstrabsgetreu.
L: Denk dir die Kästchen weg!
S2: Maßstab!
L: Schreib auf, dass wir gleich drüber reden können. Jetzt nicht wir beide sondern dann alle.
S1: Ja gut, haha, ich habs nämlich verstanden haha . ich habs verstanden
S1 erklärt S2 etwas
S1: Zehn mal die Wurzel . Ja, das hier ist zehn mal die Wurzel.
S2: Das hier ist zehn mal die Wurzel, also AB.
S1: Öh, nee, das ist dieses große Quadrat hier, das da, das ist AB. Größe ist doppelt so groß wie fünfundzwanzig
S2: Also das da.
S1 und S2 murmeln, S1 und S2 schreiben ins Heft
S2 fällt ein Stift herrunter, flucht
S1: Bleib mal ruhig!
S2: Ich will nicht ruhig bleiben.
S2: Ich **bin** locker.

245 S1: Ganz locker.
246 S1: Ist doch nur Mathe.
247 S2: *(ironisch)* **Nur** Mathe.
248 *Kamera wieder vorne auf den Lehrer gerichtet*
249 L: So, können wir dann vielleicht schon mal, äh, unterbrechen

Es ist schwer, aus diesem Transkript zu schließen, was genau die beiden tatsächlich verstanden haben, zumal sie oft vom Thema abschweifen und sich nicht wirklich sachbezogen austauschen. Als didaktisches Problem stellt sich die Strukturierung der Arbeitsphase heraus, in welcher sofortige Partnerarbeit nicht nur zugelassen wird, sondern der Lehrer ausdrücklich dazu auffordert (Z. 157). S2 wird auf diese Weise nicht nur am eigenständigen Denken gehindert, sondern muss darüber hinaus noch die demoralisierenden Kommentare und Angriffe von S1 ertragen (vgl. Z. 180, 182, 207). Immerhin hat S2 am Ende der Stunde die folgende Eintragung im Heft:

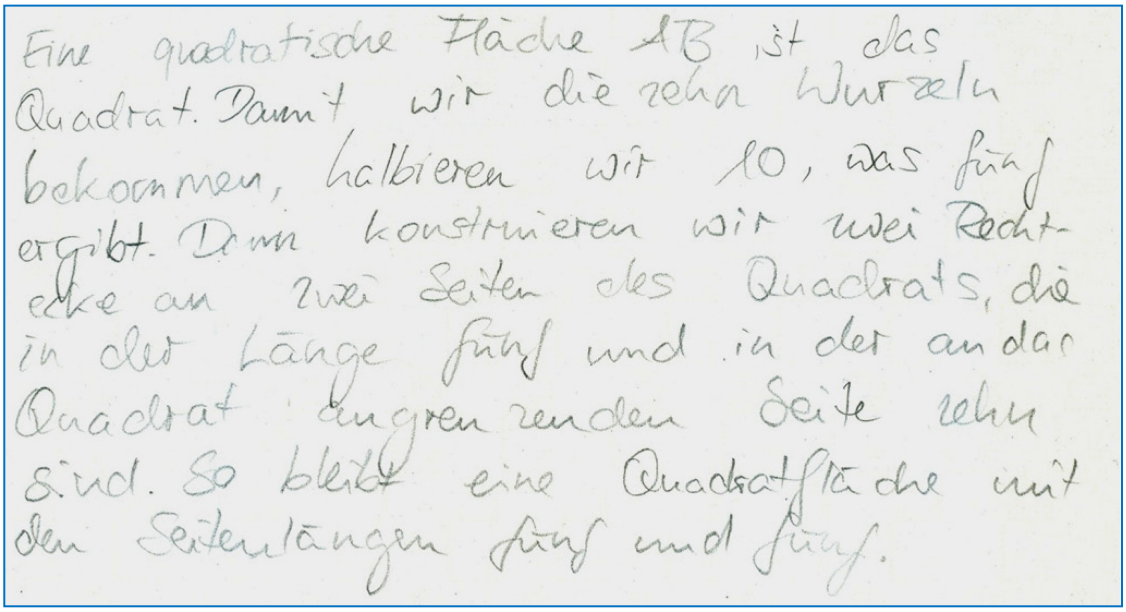

Eine quadratische Fläche AB ist das Quadrat. Damit wir die zehn Wurzeln bekommen, halbieren wir 10, was fünf ergibt. Dann konstruieren wir zwei Rechtecke an zwei Seiten des Quadrats, die in der Länge fünf und in der an das Quadrat angrenzenden Seite zehn sind. So bleibt eine Quadratfläche mit den Seitenlängen fünf und fünf.

Abbildung 106: Antwort der Schülerin S2 zu Aufgabe 4 als Ergebnis der Partnerarbeitsphase (Experimentalklasse B1).

Bei diesen Zeilen handelt es sich aber nur um eine ziemlich schlichte Umformulierung des Quellentextes. Eine Bearbeitung dieser Art hatte S2 in Z. 208 angekündigt. Ob und inwiefern sie tatsächlich über eine ihr einleuchtende Erklärung verfügt, warum Al-Khwarizmi diese Schritte unternimmt und wohin sie ihn führen, wird hieraus nicht deutlich.

Anders sieht das bei S1 aus, der mit mehreren Skizzen dokumentiert, dass er den Aufbau und die Gerichtetheit der Argumentation durchaus verstanden hat. Interessant ist, dass – trotz der Unterhaltungen zwischen S1 und S2 – keiner der beiden vom jeweils anderen etwas übernommen hat. Dies wird schon allein aus den unterschiedlichen Bezeichnungen ersichtlich (AB bei S2 vs. ab, also a *mal* b bei S1).

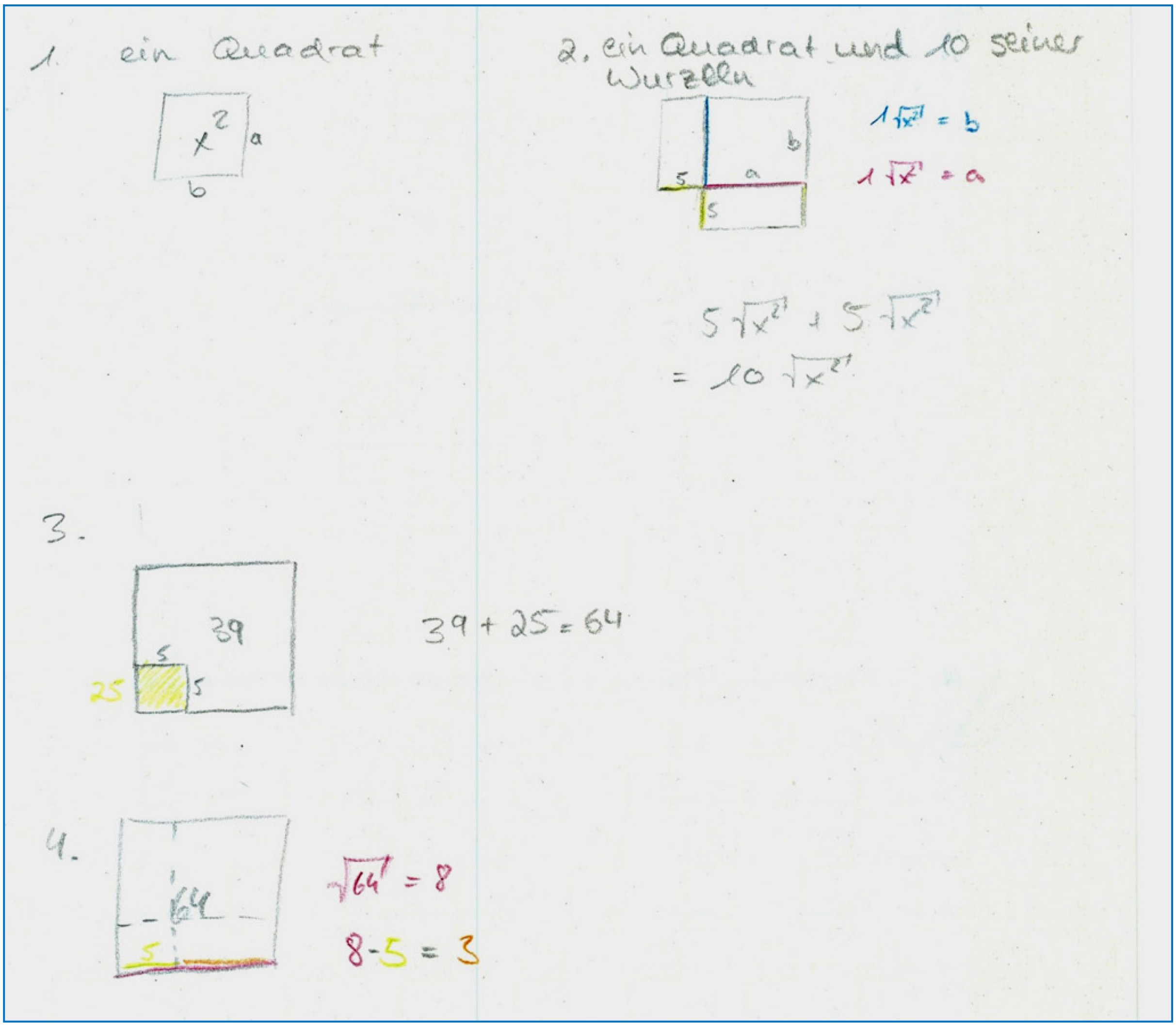


Abbildung 107: Antwort des Schülers S1 zu Aufgabe 4 als Ergebnis der Partnerarbeitsphase (Experimentalklasse B1).

Nach der Partnerphase setzt der Lehrer den Unterricht im Plenum fort und lässt einzelne Schüler ihre sachlich durchaus richtigen Ergebnisse bzw. Formulierungen an der Tafel vortragen. Hierbei zeigt sich erneut, dass die Klasse nur über ganz wenig Gesprächs- und Interaktionsdisziplin verfügt. Störungen und Unterbrechungen des gerade Sprechenden nach dem oben beschriebenen Muster sind keine Ausnahmen sondern die Regel. Dadurch verliert jegliches Geschehen immer wieder seinen Fokus und Fluss. Die Stunde deckt dennoch die geplanten Inhalte ab und endet schließlich mit der Formulierung der vorgesehenen Hausaufgabe (Aufgabe 7).

5.3.2.1.3 Einschätzungen

5.3.2.1.3.1 Aus Sicht des Beobachters

Die im vorigen Abschnitt dokumentierte und kommentierte Szene gibt einen durchaus typischen Eindruck vom Unterrichtsgeschehen in der Klasse B1 wieder – auch außerhalb der experimentellen Intervention. Sie zeigt eine auf Seiten der Schülerinnen und Schüler nur unterdurchschnittlich entwickelte Kommunikations- und Interaktionskultur. Grundlegende Haltungen und Kompetenzen wie Respekt vor dem Anderen und seiner Rede, Aufmerksamkeit und Offenheit, Bereitschaft zum Gespräch, Bewertungsaufschub und das Einhalten von Gesprächsregeln zeigen sich nur in geringem

Maße. Für den hermeneutisch orientierten Unterricht ist das Fehlen dieser Qualitäten besonders nachteilig; denn sie konstituieren, vielleicht noch mehr als im konventionellen Unterricht, unabdingbare Voraussetzungen für seine Wirksamkeit und sein Gelingen. Was in der dokumentierten Szene darüber hinaus fehlte, war: *Stille*. Wirksame Stille, nicht bloß als akustisches Phänomen sondern als „Spannungsgeschehen (‚Stille vor dem Sturm'), das bestimmten Ereignissen vorausgeht und ihr Gelingen begleitet" (Böhm, 2005), hat es in dieser Stunde der Klasse B1 zu keinem Zeitpunkt gegeben. Das ganze Geschehen wirkt dadurch unfokussiert.

Hierzu tragen auch die Aktionen des Lehrers bei. Der aus seiner Sicht wohl zu bemängelnden Arbeitshaltung seiner Schüler versucht er, durch massives Intervenieren (hauptsächlich durch längere Redebeiträge und viele Fragen) zu begegnen. Auf diese Weise entsteht im Plenum ein eng gelenktes Frage-Antwort-Spiel, in dessen Verlauf der Lehrer nicht nur der möglichen Entwicklung eigener Fragen von Seiten der Lernenden keinen Raum gibt sondern ihnen auch bestimmte Sinngebungen oder Wertungen nahelegt oder sie ihnen gleich abnimmt (Z. 149, 151). Diese Vorgehensweise mag durch die Erfahrungen des Lehrers mit seiner Klasse begründet sein, sie stimmt aber natürlich nicht mit der Grundidee einer hermeneutischen Orientierung überein.

Trotz dieser ungünstigen Umstände ist es immerhin gelungen, mit dem angebotenen Material (dem ersten Zitat von Al-Khwarizmi) einen relevanten Fremdheitsimpuls in der Klasse auszulösen, der Fragen stimulierte und, hiervon ausgehend, erste Denkprozesse anzuregen vermochte (Z. 41 ff.) – wenngleich diese sogleich im Sinne einer einseitig vom Lehrer vorgegebenen, technisch-operativ orientierten Lernzielsetzung vereinnahmt und kanalisiert wurden. Doch hören wir im nächsten Abschnitt die Einschätzungen der Beteiligten selbst.

5.3.2.1.3.2 Aus Sicht der Beteiligten

Die Schülerinnen und Schüler zeichneten insgesamt ein überraschend positives Bild von der stattgehabten Stunde. Auf einer Skala von 1 (sehr langweilig) bis 4 (sehr interessant) beurteilten sie die Stunde mit einem Durchschnittswert von 3,2, also als interessant bis z. T. sehr interessant. Den Schwierigkeitsgrad der Stunde stuften sie auf einer Skala von 1 (sehr einfach) bis 4 (sehr schwierig) mit durchschnittlich 2,9, also als „eher schwierig" ein. Unter anderem wurde in den Lernjournalen folgendes geäußert (Rechtschreibung und Zeichensetzung wie im Original):

- „Wenn man die Technik einmal verstanden hat, ist es eigentlich ganz interessant."
- „Die Stunde hat mir gut gefallen und ich habe eine neue Rechenart gelernt mit der es leichter ist zu rechnen."
- „Ich habe gelernt wie man die Aufgaben zeichnerisch löst weil ich mich intensiv damit beschäftigt habe. Ich finde das Zeichnen besser als das normale Rechnen weil die alte Methode leichter ist."
- „Ich fande die Stunde interessant weil wir auch für uns alleine verstehen konnten und das dann zusammen besprochen bzw. ausgewertet haben."
- „Ich habe mich mit geometrischen Rechnungen beschäftigt womit man eine Lösung für gleichungen bekommt. Ich habe gelernt dass man Gleichungen nicht nur mit Formeln lösen kann sondern mit einer geometrischen Rechnung. Mir hat eigentlich alles gefallen."
- „Wir haben uns mit Seite 4 aus diesem Heft auseinander gesetzt und ich fand es sehr kompliziert. Ich finde, dass die Rechnung mit Formeln viel einfacher ist."
- „Ich habe mich mit dem Text auf Seite 4 beschäftigt und versucht ihn zu verstehen. Ich fands eher einfach. Es hat mir Spaß gemacht. Es war alles sehr interessant, aber der Text hat mir nicht gefallen da er komplizierter ausgedrückt wurde als er ist."

Bemerkenswert an diesen Einschätzungen ist nicht nur ihr positiver Grundtenor sondern auch die Tatsache, dass kein einziger der Schülerinnen und Schüler notiert, dass sie oder er mit der Geschichte der Mathematik oder mit einem Zeugnis einer räumlich und zeitlich distanten Kultur in Berührung gekommen sei. Alle Äußerungen beziehen sich ausschließlich auf den technischen Gehalt der Stunde, auf das Berechnen und Lösen von Gleichungen. Dass es in der Stunde auch um Geschichte oder um Al-Khwarizmi gegangen wäre, ist nicht herauszulesen. Im Hinblick auf die Ziele einer historisch-hermeneutischen Intervention ist das natürlich enttäuschend, in Anbetracht des Stundenverlaufs mit seiner vereinseitigten Zielorientierung aber auch nicht überraschend. Passend hierzu kommentierte der Lehrer die Stunde aus seiner Sicht, indem er vor allem seine Sorge artikulierte, den Stoff nicht in der vorgesehenen Zeit zu schaffen.

5.3.2.2 Zweite Szene: Der Umgang mit den Darstellungsformen Al-Khwarizmis

5.3.2.2.1 Überblick

Eine weitere, wichtige Station der Reihe ist die Erarbeitungsphase, die durch die Aufgaben 9-13 im Arbeitsheft materialisiert ist. Ihr Zweck ist oben (Kap. 4.3.2.1.2) beschrieben: Die Schülerinnen und Schüler sollen schrittweise mit den geometrischen Denk- und Herangehensweisen Al-Khwarizmis vertraut werden. In allen teilnehmenden Klassen haben die Lernenden zu diesem Zweck drei Unterrichtsstunden (in B1 vier Unterrichtsstunden) intensiv mit dem Arbeitsheft gearbeitet. Die Lehrer der BCE-Klassen haben dabei auf gemeinsames, synchrones Fortschreiten und regelmäßigen Abgleich im Plenum, zumeist nach jeder Aufgabe, geachtet. In den AD-Klassen haben die Schülerinnen und Schüler im eigenen Tempo gearbeitet, der Austausch fand individuell und problembezogen mit und ohne Einbeziehung der Lehrperson statt. Im Folgenden habe ich einige Bearbeitungen beispielhaft und möglichst repräsentativ ausgewählt.

5.3.2.2.2 Ausschnitte aus den Arbeitsheften

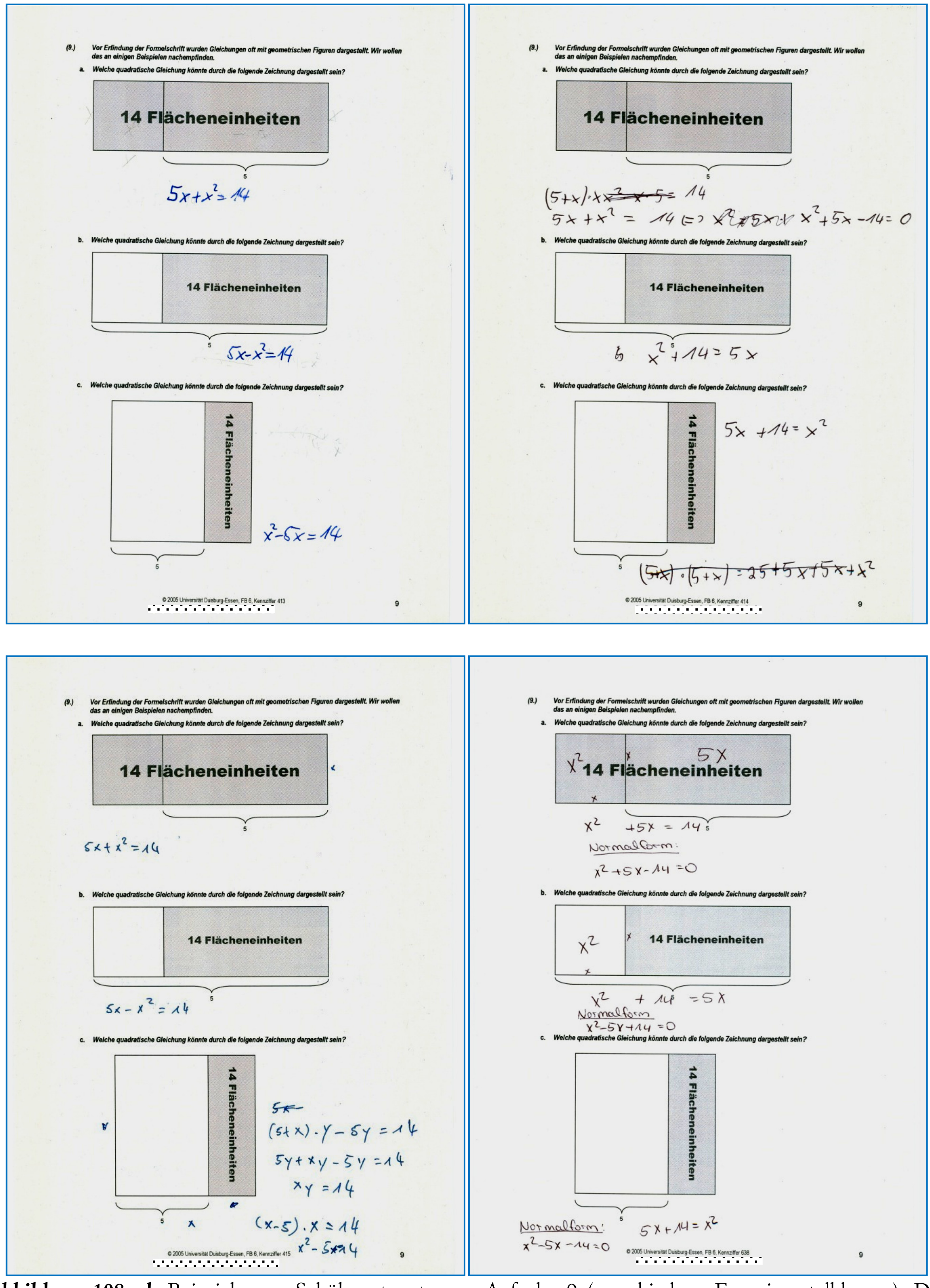


Abbildung 108a-d: Beispiele von Schülerantworten zu Aufgabe 9 (verschiedene Experimentalklassen). Die Lernenden hatten mit diesen Aufgaben keinerlei Schwierigkeiten. In den Antworten zeigen sich unterschiedliche Sichtweisen auf die Darstellungen, die sich in entsprechend verschiedenen Termbildungen ausdrücken.

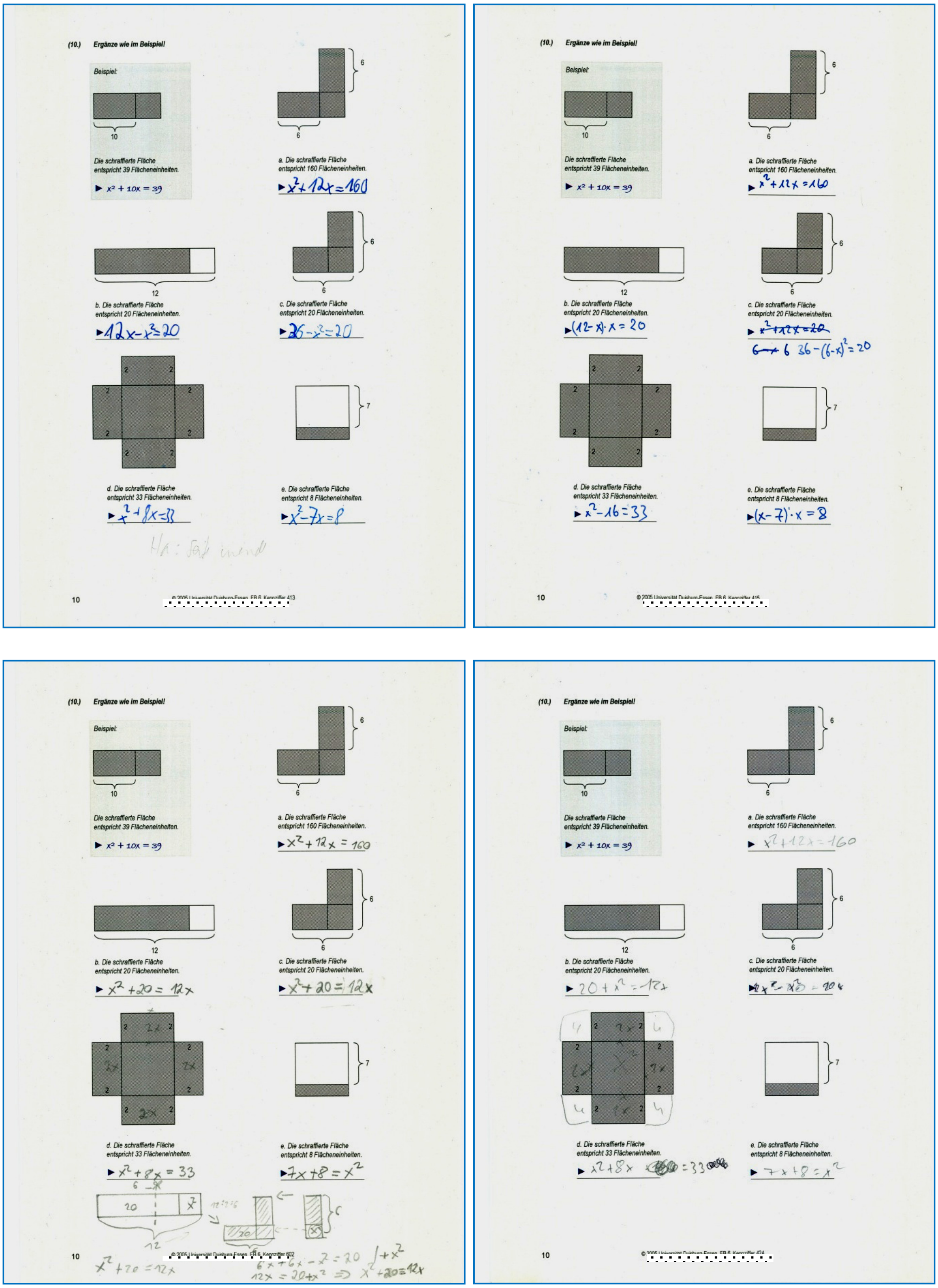


Abbildung 109a-d: Beispiele von Schülerantworten zu Aufgabe 10 (verschiedene Experimentalklassen). Auch diese Aufgabe wurde weitgehend erfolgreich bearbeitet. Fehler sind jedoch – wie erwartet und hier auch zu sehen – vermehrt in Aufgabenteil c.) und zum Teil in d.) aufgetreten.

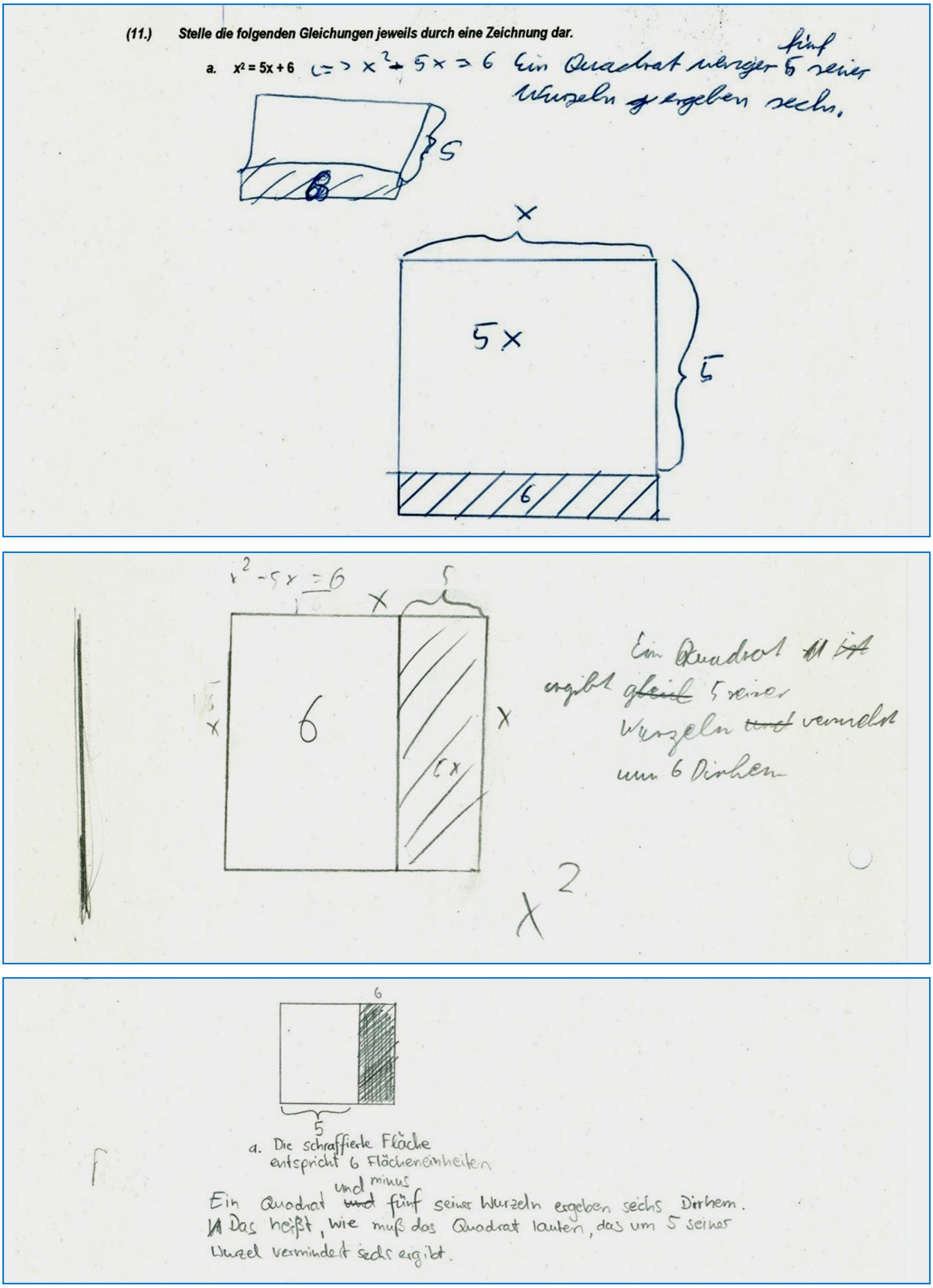


Abbildung 110a-c: Beispiele von Schülerantworten zu Aufgabe 11a (verschiedene Experimentalklassen). Die Aufgabe wurde ganz überwiegend erfolgreich bearbeitet.

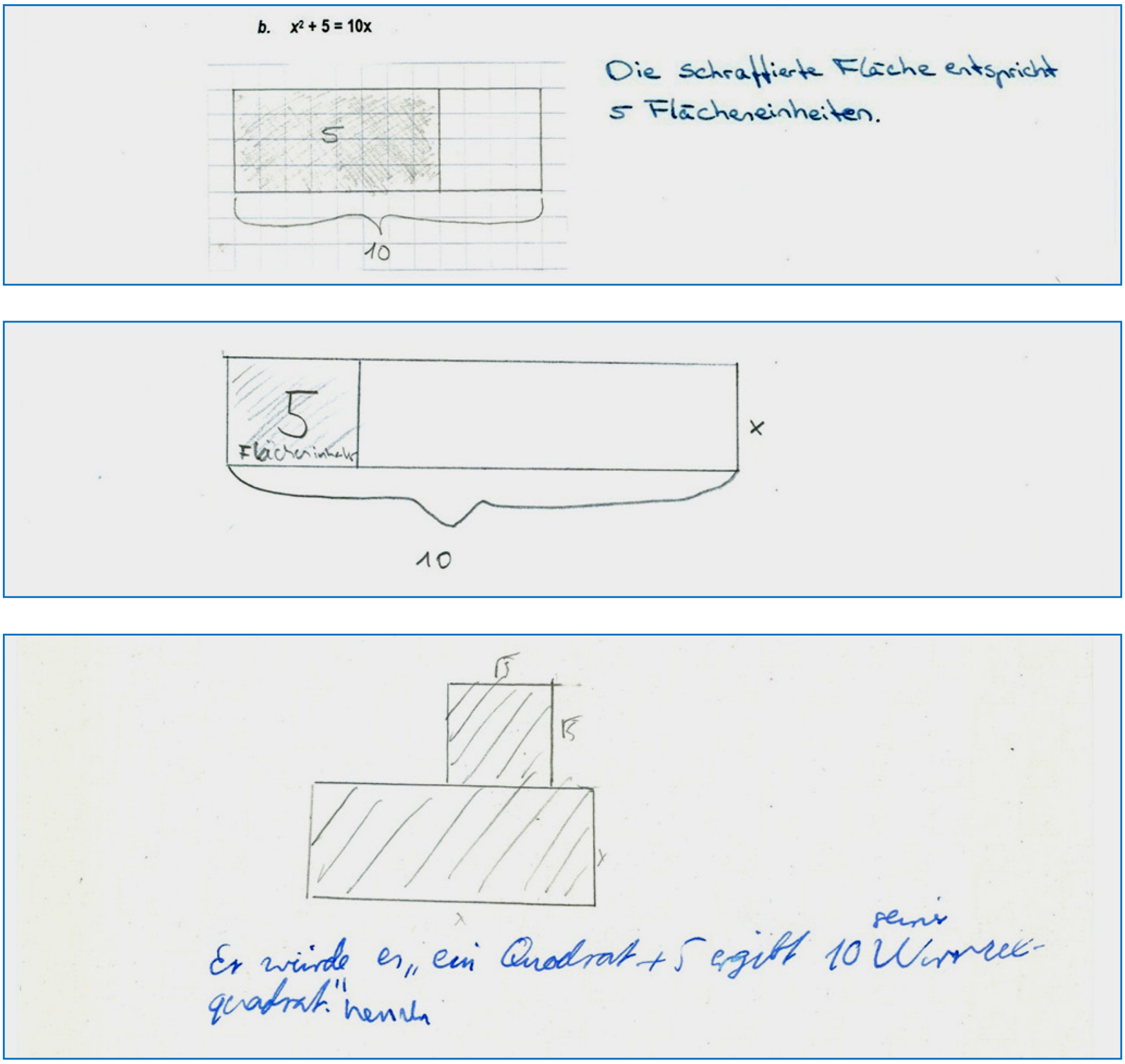


Abbildung 111a-c: Beispiele von Schülerantworten zu Aufgabe 11b. Neben vielen erfolgreichen Bearbeitungen waren auch vermehrt Ungenauigkeiten bzw. Fehler zu beobachten, von denen hier zwei zu sehen sind: In der mittleren Zeichnung wird nicht das x^2 als Quadrat dargestellt sondern die 5. Offenbar wurden die beiden Flächenanteile verwechselt – ob aus Flüchtigkeit oder aus mangelndem Verständnis ist nicht zu ersehen. Die untere Zeichnung zeigt ein Rechteck, dessen beiden (verschieden langen) Seiten widersinnig mit x beschriftet wurden, während die obere Form ein Quadrat mit den Seiten $\sqrt{5}$, also Flächeninhalt 5 darstellt. Die beiden Figuren ergeben darüber hinaus zusammen keine Rechtecks- oder sonstige Figur, die als $10x$ aufgefasst werden könnte. Der Schüler hat hier offenbar nur einige Elemente aus dem Unterricht reproduziert, deren Zusammenhänge er aber nicht durchschaut. Interessant ist, dass die beiden fehlerhaften Beispiele aus Klassen stammen, in denen regelmäßige Abgleiche im Plenum – auch über diese Aufgabe – stattgefunden haben. Es zeigt sich, dass solche Maßnahmen keineswegs hinreichen, um alle Fehler bzw. Missverständnisse richtig zu stellen.

Wie aus den Abbildungen zu erkennen ist, wuchs mit fortschreitender Komplexität der Aufgaben auch der Anteil von Fehlern, Ungenauigkeiten und Missverständnissen in den Bearbeitungen, was kaum verwunderlich ist und so auch erwartet wurde. Unbedingt erwähnenswert ist in diesem Zusammenhang die Feststellung, dass in den AD-Klassen – den Klassen also, deren Schüler in individuellem Tempo arbeiteten und sich problembezogen in Tandems, Kleingruppen oder mit dem Lehrer austauschten – der Restbestand von Fehlern in den Arbeitsheften spürbar geringer war als in den BCE-Klassen – jenen Klassen also, in denen synchron gearbeitet wurde und in denen der Abgleich im Plenum (mit dem ausdrücklichen Ziel der Fehlerbeseitigung) ein festes Ritual war. Vermutlich lässt sich dieser Unterschied damit begründen, dass ein Schüler, der selbstbestimmt und im eigenen Rhythmus arbeiten kann, sicher auch ein größeres Maß an Engagement, Achtsamkeit und Verantwortung für seine Arbeitsprodukte aufbringt. Eine solche Haltung kann für jede Art von Unterricht, insbesondere aber für den hermeneutisch orientierten Unterricht, nur zuträglich sein.

Wie in den Pilotklassen konnten nun die meisten Schülerinnen und Schüler der Experimentalklassen die Aufgabe 13 erfolgreich bearbeiten. Es stellte sich jedoch auch hier heraus, dass die AD-Klassen einen geringen Vorsprung vor den BCE-Klassen besaßen, in dem Sinne, dass der Anteil zustimmungsfähiger Lösungen in ihnen noch größer war. Beispiele zeigen die folgenden Abbildungen.

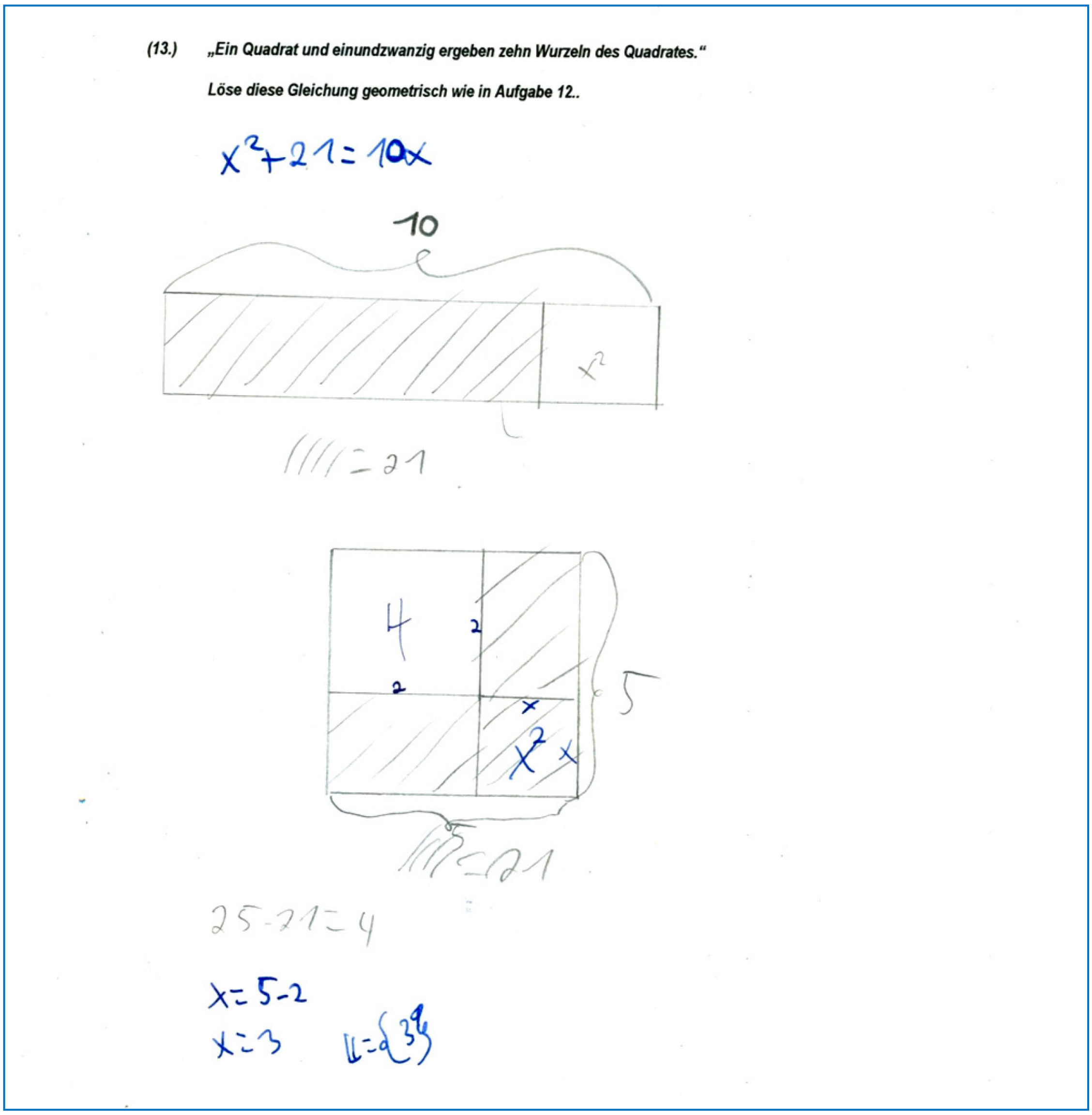


Abbildung 112: Beispiel einer Schülerantwort zu Aufgabe 13 (Experimentalklassen).

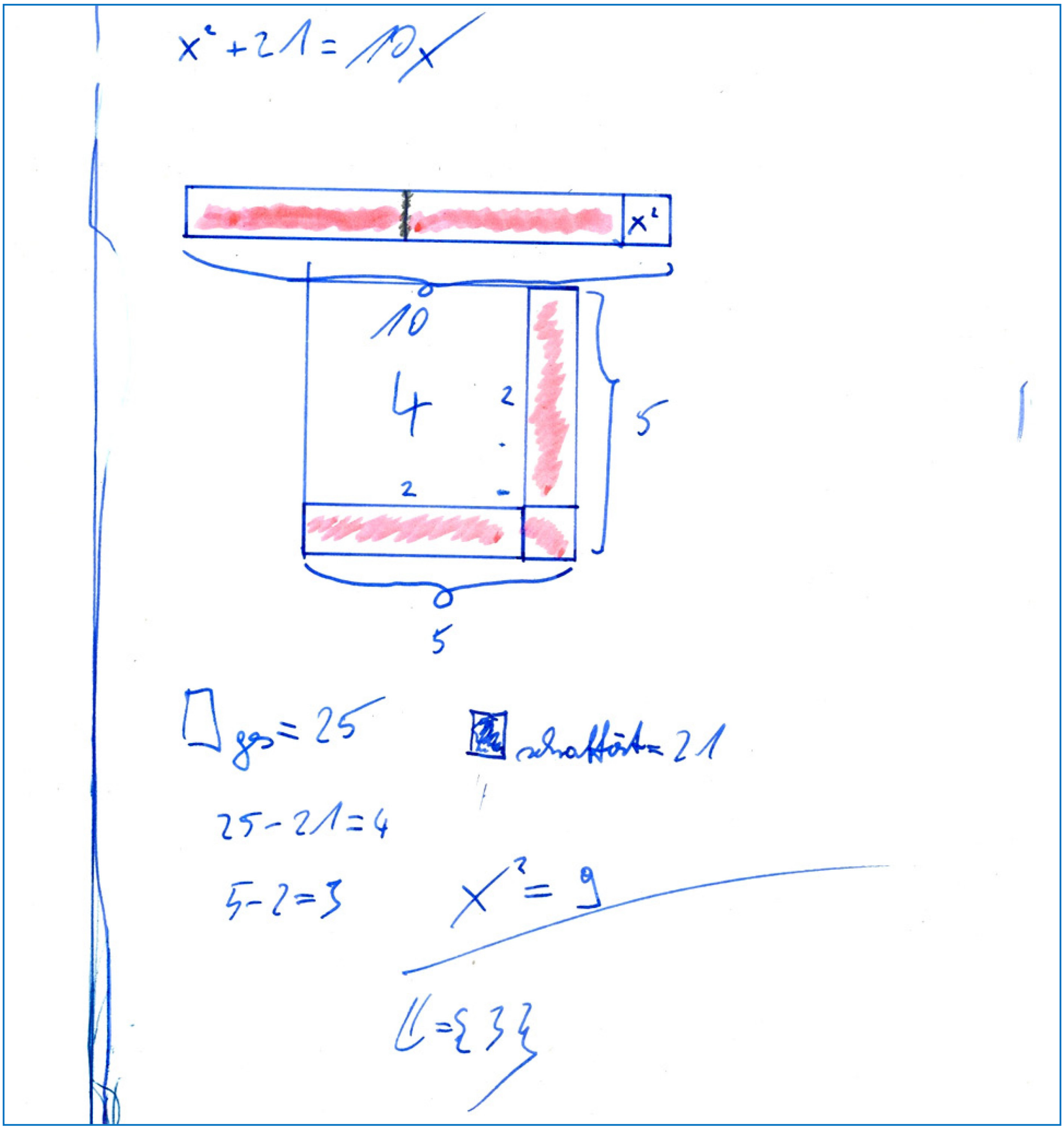


Abbildung 113: Weiteres Beispiel einer Schülerantwort zu Aufgabe 13 (Experimentalklassen).

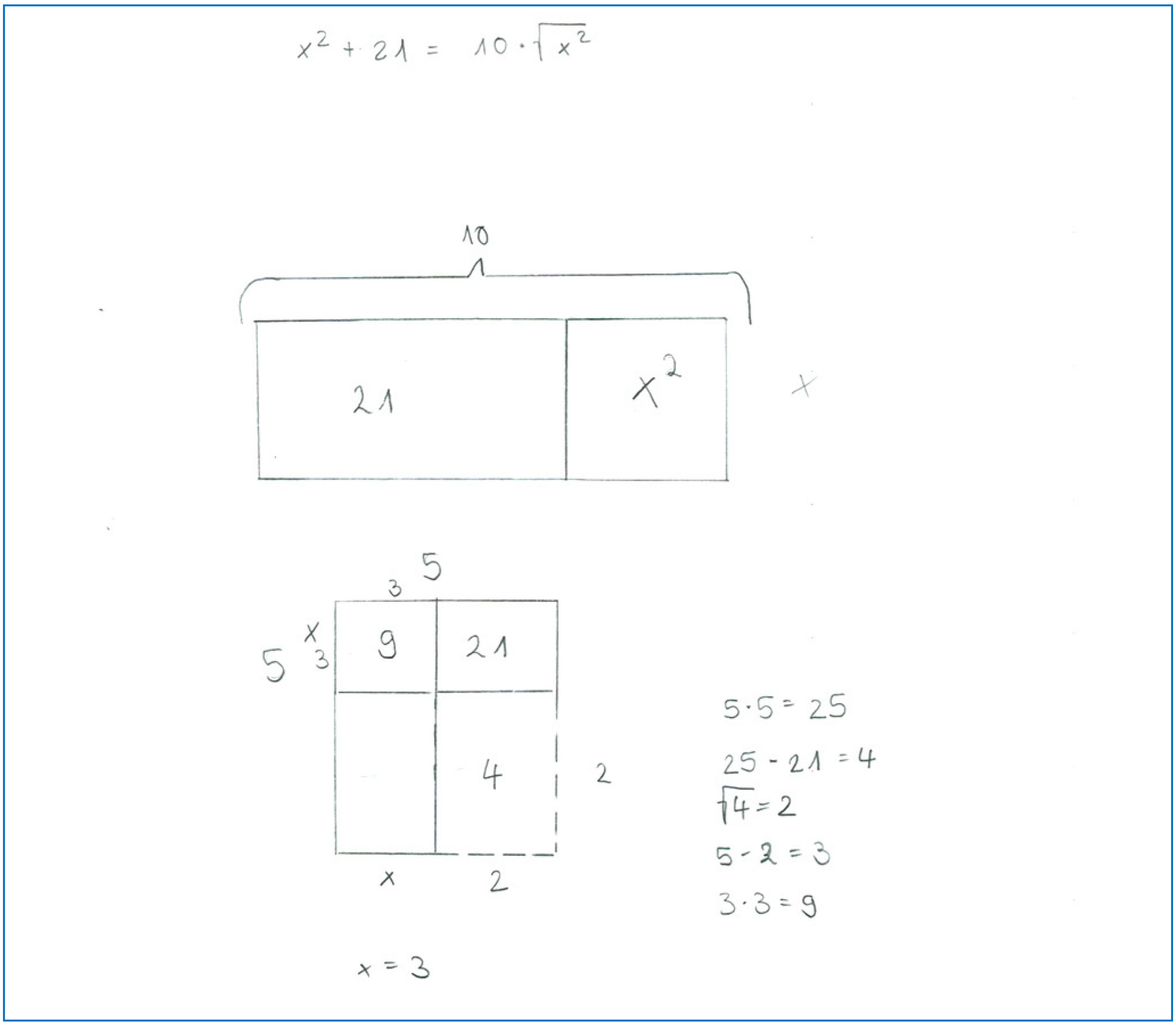


Abbildung 114: Weiteres Beispiel einer Schülerantwort zu Aufgabe 13 (Experimentalklassen).

5.3.2.2.3 Kommentiertes Unterrichtstranskript (Klasse D2)

Die Erarbeitungsphase endete plangemäß mit der Lektüre des Quellenauszugs D V, der viele Schülerinnen und Schüler vor ähnliche Schwierigkeiten stellte, wie sie schon in der Pilotierung zu beobachten waren (vgl. Kap. 4.3.2.2.2). In den Klassen D1 und D2 wurden nach der Bearbeitung des Textes in Kleingruppen bzw. Tandems jeweils zwei Schüler ausgelost, um über die Ergebnisse ihrer Arbeit zu berichten. Dieses Verfahren gehörte zu den festen Ritualen in diesen Klassen und stellte insofern keine Besonderheit der historischen Interventionsreihe dar. Der Lehrer der Klassen D1 und D2 pflegt auf diese Weise den Plenumsaustausch über die Arbeit seiner Schülerinnen und Schüler, die er ansonsten mit großen, individuellen Spielräumen ausstattet. Im Folgenden ist der Vortrag zweier Schüler (S1, S2) der Klasse D2 wiedergegeben.

S1: Also ich würde sagen, die Grundidee ist hier, äh, hierbei wieder, dass wir das in ein Rechteck darstellen .. *(zeichnet Rechteck an die Tafel)*
K: nee, er muss erst mal n Quadrat malen .
S1: Das sind halt diese zehn x .. und davon ziehen wir dann äh . x Quadrat ab *(teilt ein Quadrat im Rechteck ab und beschriftet es mit x^2)* also vielleicht, weil ja .. *(schreibt an: $10x - x^2 = 21$)*. Ja, äh . und das sind halt die zehn *(fährt*

mit der Hand an langen Seite des Rechtecks entlang) dann können wir erst mal halt diese ganz .. wir nennen das mal ..
S2: hier, schreib für alle ..
S1: ja *(beschriftet einige Punkte mit Buchstaben)* ich schreib äh immer nen neuen Buchstaben, immer wenn etwas Neues dazu kommt. Erst ist, äh, ..
S2: die Strecke halbiert worden
S1: Ja, erst wurde halbiert . Ich mach eine Gerade, die das halbiert *(zeichnet eine Linie ein, die etwas rechts von der Mitte liegt)*
S2: *zeigt wortlos auf die unterschiedlichen Längen der Strecken links und rechts von der Halbierungslinie*
S1: ja okay .. das äh .. *(wendet sich zur Klasse)*, das halbiert hier das
S2: das ist fünf *(zeigt auf rechte Strecke)*, und das ist auch fünf *(zeigt auf linke Strecke)*
S1: ja, das nenn ich mal T . das benenn ich G .. warte .. *(7 Sekunden)*
S2: jetzt, also .. jetzt verlängert man, also, man macht das so, . so dass die Verlängerung .. hier, mach mal den Punkt *(nimmt seinem Partner die Kreide ab und zeichnet einen Punkt K auf der Halbierungslinie ein)* der Punkt K, so, so dass KG genauso lang wie GA ist, meine ich zumindest.
S1 und S2 *murmeln miteinander*
L: zeigst das mal kurz, welche Strecken gleich lang sind, so richtig draufzeigen
S2 *markiert KG und GA jeweils mit einem Doppelstrich*
L: Ja! So ist gut!
S1 und S2 *murmeln miteinander (23 Sekunden),* S1 *guckt in den Text*
S2: ja okay, ich mach' . jetzt *(zeichnet eine weitere Linie von K nach links ein und eine Verbindungslinie zum bereits vorhandenen Rechteck)* senkrecht und so
S1: ja, . ja ja, das soll ein Quadrat sein .
S2: # das ist M *(beschriftet den neuen Eckpunkt links oben)*
S1: das soll ein . Quadrat sein . *(deutet die Umrandung des Quadrats mit der Hand an)* # Es wurde dann #
S2: Seitenlänge fünf # .. mit der Seitenlänge fünf. Das, .. Das ist natürlich fünf *(schreibt 5 an die Linie MK)*, weil das *(deutet auf die Linie HG)* fünf ist.
S1: ja, ja .. also fünf Einheiten
S2 und S1 *reden durcheinander*
S2 und S1 *hören beide auf zu reden*
S1: wart! . Hier äh, dann wird dieses hier, GATB, hierhin übertragen
S2: Nee, stopp, stopp, stopp
S1 und S2 *murmeln miteinander*
S1: Das wird hierdrauf übertragen *(setzt die Kreide auf die Linie KM und zögert)*
S2: Dann übertrag das doch
S1: ja *(zieht eine Senkrechte von MK nach HG und beschriftet die Endpunkte mit L und R) .* ja
S2: jetzt haben wir den Faden verloren
S1 und S2 *lesen im Heft und murmeln miteinander*
S2: Ja, wir wissen, das TK gleich fünf ist.
S1: ja, hier hier, guck mal . so . warum, äh, das, äh, KT sollte, laut dem Buch äh ist KT gleich fünf und äh, warum das so ist, das liegt, liegt daran, dass äh die Differenz von äh GC wurde GT abgezogen und hierdrauf verlängert *(deutet mit der Kreide auf GK)* das ist ja klar. Und äh .. das hier *(zeigt auf GT)* ist ja gleich dem hier *(zeigt auf AC)* weil das ein Quadrat .. äh .. das .. das war ja x, x lang Also das ist x *(beschriftet CB und GT mit x)* und weil das x Quadrat ist *(beschriftet ABCD mit x^2)*, ist das auch x *(beschriftet AC mit x).* Folglich ist das *(zeigt auf GT)* gleich dem hier *(zeigt auf AC)*, und das *(zeigt auf KG)* gleich dem hier *(zeigt auf GA).* Also ist das hier *(zeigt auf KT)* auch gleich dem hier *(zeigt auf GC)*. Und äh, also ist das hier fünf mal fünf
S2: Also ist die Quadratfläche fünfundzwanzig, # obwohl das ja hier kein Quadrat ist, aber ist ja egal
S1: ja insgesamt ist das fünfundzwanzig #
S1 und S2 *reden durcheinander*

Abbildung 115: Vortrag zweier Schüler über den Quellentext D V (vgl. Z. 21).

K: *(lachen)* Ihr labert so durcheinander.
S1 *(ignoriert den Kommentar)* Ja, das ist dann fünfundzwanzig *(deutet zur Tafel)*
S2: das haste schon genormt, das stimmt /
S1: ja ja, warte, das hier ..
S2: das hier ..
S1: Warte! Das hier *(zieht die Umrandung MLRGT dick mit Kreide nach)*
S2: Ich würd erst mal sagen, # dass LR gleich ..
S1: sei mal leise #
S2: gleich .. Ich würd erst mal sagen, dass LR gleich groß wie .. äh .. wie
S1: Hier, das hier, was ich jetzt einmarkiert habe ist gleich dem hier groß *(deutet die Umrandung des Rechtecks HD an)*
S2 *wendet sich achselzuckend ab*
S1: und da .. und das ist einundzwanzig. Die Quadratfläche ist insgesamt fünfundzwanzig
S2: *(breitet die Arme aus)* Stopp! Stopp! Ich würd erst mal sagen, dass GR genauso groß wie RL ist, ne / Du, du ... man schneidet das so ab, dass GR so groß wie RL ist, sonst geht das nicht
S1: Ja, das ist halt, . das, das liegt daran, dass wir ja hier mit diesem Ganzen, ja .. äh, .. ja, das hier *(deutet auf GATB)* dahin übertragen haben *(deutet auf MLRH)*. Ja und das hier *(deutet auf KG)* war ja schon mal das groß *(deutet auf GA)* und folglich ist also das auch gleich groß *(deutet auf RG)*. Ja, und das was ich gerade markiert habe, war einundzwanzig groß, und die Quadratfläche ist fünfundzwanzig *(S2 nimmt S1 die Kreide aus der Hand und markiert LR mit einem Doppelstrich)*, folglich ist äh das *(nimmt S2 die Kreide wieder weg)* .. ist das vier *(schreibt 4 in das Quadrat LKGR)* und das ist zwei *(schreibt 2 an die Strecke KG)*

Abbildung 116: Vortrag zweier Schüler über Quellentext D V (vgl. Z. 68)

S2: Dass das einundzwanzig groß ist, folgt, folgern wir daraus, dass das Rechteck, dieses Rechteck mit diesem Rechteck und weiter mit dem den gleichen Flächeninhalt haben *(fuchtelt mit einer Hand über der Tafel)*, das große Rechteck hat einen Flächeninhalt von einundzwanzig, man überträgt dieses Rechteck nach oben *(fuchtelt weiter)* und *(schnell gesprochen)* folglich hat dieses Rechteck auch einen Flächeninhalt von einundzwanzig.

K: *kichern*

S1: Ja, das ist zwei, das ist auch zwei *(schreibt 2 an GA)* und weil das fünf Einheiten waren *(deutet auf GC)*, ist das drei *(schreibt 3 an AC)*. Folglich .. *(schreibt in großer Schrift: x = 3)*

S2: Folglich, olé, gelöst!

Den beiden Schülern S1 und S2 ist hier, obwohl sie sich gelegentlich gegenseitig behindert haben (Z. 58 ff.), insgesamt ein sehr überzeugender Vortrag gelungen, der gezeigt hat, dass sie in der Tandemarbeit einen guten Überblick über den Text und seine Argumentation gewonnen hatten. Bemerkenswert ist, dass sie ihre Ausführungen – trotz eines erkennbaren Stockens (Z. 41 ff.) – vollständig ohne Hilfe oder Eingreifen seitens anderer Schüler oder des Lehres abgeschlossen haben. Diese haben sich zurückgehalten, abgewartet und konzentriert zugehört – ein Hinweis auf die gut entwickelte Unterrichts- und Kommunikationskultur in dieser Klasse. Nachdem ein Schüler eine kurze Frage zur Klärung gestellt und beantwortet bekommen hatte, schaltete sich erstmals der Lehrer ein, indem er sich erkundigte, was die beiden Vortragenden von Al-Khwarizmis Verfahren halten.

S2: Also ich persönlich finde das, so .. *(macht eine abfällige Geste)*

S1: Also, ich hab‘, wir haben das gerade noch nach dem al-, andern Prinzip gelöst und ich fand das andere leichter als das hier.

S2: Also in, also in, also, also in Worten gefasst, der war ‘n bisschen, . also, . blöd.

K: find ich nicht .. nö!
S1: ja, nicht .. nicht der Al-Khwarizmi, aber das hier, dieser Lösungsweg.
S2: Naja, aber zur Verteidigung müssen wir sagen, dass der das noch nicht besser konnte, ich mein‘, der hatte auch noch nicht ..
K: *(ruft laut dazwischen)* Immerhin hatte der Phantasie, der Typ!
K: Ja eben, im Prinzip war der schlau!
S2: # ja, der hatte noch nicht solche Möglichkeiten
S1: # ja, also ich fand diesen Weg hier einfacher
K: # Ja, aber guck doch mal, ich mein, du hast da so’n, so‘n Satz, ‘ne und dann mal das mal alles auf, da muss man erst mal drauf kommen!
S1: # den wir auch gerad gemacht haben. Der war halt einfacher als das, fand ich.
L: Und es ist nun interessant, warum er eigentlich zwei verschiedene Verfahren verwendet für Gleichungen, die eigentlich beides quadratische Gleichungen sind.
S2: Ja, vielleicht ist der so ein Genie und deswegen, da wollte er nicht immer das Gleiche machen, deswegen macht er mal was Neues, und dann ist die Menschheit stolz auf ihn.
K: *lachen*
S1: Nein, es könnte auch daran liegen, dass er versucht hat, vielleicht . es gibt ja noch für diese Gleichung die Lösung sieben, und er wollte das vielleicht, äh dass er irgendwie auf die sieben kommt.
K: Vielleicht wusste der auch einfach nicht, dass die Gleichungen gleichbedeutend sind, es waren ja für ihn keine Gleichungen.
S2: Der hatte ja noch keine Äquivalenzumformungen.
K: Und darum wusste er nicht, dass die gleich sind. Und die kann man halt eben, wenn man genau die Gleichung lösen will, kann man die ja eben nicht auf dem, auf dem, auf dem Prinzip lösen. Die einundzwanzig ist ja auch keine .. Zahl, die man .. da einträgt.

Interessant ist, dass die beiden schon von allein auf die Idee gekommen waren, das zuvor behandelte, erste Lösungsverfahren Al-Khwarizmis zu verwenden. Dass sie dies leichter finden, verwundert nicht. Sie ahnen allerdings auch, dass diese Vorgehensweise Al-Khwarizmi nicht möglich war (Z. 94), da er „noch keine Äquivalenzumformungen“ kannte (Z. 108). Ein Hinweis auf die nicht zur Verfügung stehenden negativen Zahlen ist in dieser Aussage vielleicht implizit enthalten. Unter hermeneutischen Gesichtspunkten ist hervorzuheben, dass aus den meisten Äußerungen das Bemühen herauszuhören ist, sich in die (fach-)geschichtliche Situation hineinzudenken und auf diese Weise zu einer angemesseneren Einschätzung und Würdigung der Leistung Al-Khwarizmis zu gelangen, als dies in der etwas flapsigen Bemerkung von S2 zum Ausdruck kommt (Z. 87). S2 relativiert seine Aussage auch sogleich (Z. 90 f., 94).

5.3.2.2.4 Einschätzungen

5.3.2.2.4.1 Aus Sicht der Beteiligten

Zum Schluss der Erarbeitungsphase fand nicht nur in der Klasse D2 sondern – konzeptgemäß (vgl. Kap. 2.1.2) – in allen Klassen eine mehr oder weniger ausführliche Reflexion über die bis hierhin bearbeitete Mathematik und den erlebten Unterricht statt. Dies geschah vorwiegend in Plenumsgesprächen. In den D-Klassen wurden überdies Kommentare auch an einer Feedback-Wand gesammelt, die im Unterricht dieser Klassen ihren festen Platz hat. Einen Eindruck von den Äußerungen gibt die folgende Zusammenstellung.

- „Ich finde es interessant zu sehen, wie Menschen in früher Zeit Lösungswege gefunden haben. Es fordert einen unglaublich hohen Intelligenzgrad, wie wir heute feststellen konnten. Und ich finde es auch interessant, alte Rechenformen in heutige Ausdrucksweise umzuformen.“ (Klasse E)

- „Ich frage mich, wie man auf so was kommen kann, vor allem um 800 nach Christus. Gefallen tut mir das schon, vor allem, da es eine Abwechslung zum normalen Unterricht ist." (Klasse E)
- „Es ist faszinierend, den Zusammenhang zwischen Formeln und geometrischen Zeichnungen zu klären." (Klasse E)
- „Es ist interessant, dass es auch in der Geometrie so viele Lösungswege gibt. Aber der zweite von Al-Khwarizmi ist voll kompliziert gewesen." (Klasse E)
- „Nützlich ist es eigentlich nicht, weil ich mir diese komplizierte Art einfach nicht merken kann. Die Stunden haben mir trotzdem gefallen, ich weiß nur nicht genau warum. Ich denke, dass das Knobeln an den Aufgaben der entscheidende Faktor war." (Klasse B1)
- „Es ist kein Fortschritt. Nur Wiederholung. Und trotzdem schwierig." (Klasse B1)
- „Ich finde es bemerkenswert, dass man viele Gleichungen auch durch Geometrie lösen kann, das ist Mathematik mal ganz anders." (Klasse D1, schriftlich)
- „Wenn man verstanden hat, wie man die Gleichungen in verschiedenen Flächen darstellt, lassen sich auch die Aufgaben gut lösen." (Klasse C)
- „Theoretisch braucht man nun keine Formeln mehr, um diese Aufgaben zu lösen." (Klasse C)
- „Man braucht die Formeln schon, weil man ja immer nur eine Lösung herausbekommt." (Klasse C)
- „Mir ist aufgefallen, dass das Lösen dieser Aufgaben meistens schneller ablief als üblich." (Klasse A, schriftlich)
- „Für mich persönlich ist die Rechenart eines arabischen Mathematikers aus dem Mittelalter nicht sonderlich interessant. Aber es ist gut, so was wenigstens mal kennengelernt zu haben." (Klasse D2, schriftlich)
- „Das Rechnen von quadratischen Gleichungen ohne Formeln klang zunächst sehr interessant. Jedoch war die Einstiegsaufgabe sehr schwer verständlich. Nach einiger Einarbeitung trat jedoch eine Art ‚Aha-Effekt' auf, und die Zusammenhänge sind klar geworden. Das hat den Stoff dann interessant gemacht, da die Beschreibung ganz ohne Formelzeichen tatsächlich funktioniert." (Klasse A, schriftlich)
- „Ich finde, dass der Stoff so einfacher zu verstehen ist, obwohl ich denke, dass die Methode ein wenig umständlicher ist. Ich musste zum Beispiel den Text mehrmals durchlesen, bis ich verstanden habe, wie die Methode funktioniert. Aber nun könnte ich sie problemlos immer wieder anstelle von Formeln einsetzen." (Klasse D1, schriftlich)
- „Die zeichnerische Lösung finde ich nicht unbedingt besser als die Formelschrift." (Klasse D1, schriftlich)
- „Gefallen hat mir, dass man gesehen hat, welche andere Methoden es noch gibt und dass man jetzt versteht, warum das genau so ist." (Klasse D1, schriftlich)
- „Ich fand es sehr interessant, dass wir versucht haben, mathematische Aufgaben ohne Formelanwendungen zu lösen. Bisher hatte ich gedacht, dass dies nicht möglich sei." (Klasse A, schriftlich)
- „Für mich sind Al-Khwarizmis Mathestudien etwas zu undurchsichtig." (Klasse B2)
- „Ich habe bemerkt, dass Rechnung mit Formeln um einiges leichter ist als durch Geometrie." (Klasse B2)
- „Eigentlich braucht man die Zeichnungen ja nicht. Die wird ja nur zur Erklärung der Technik angefertigt. Wir können die Lösung auch ohne Zeichnung, also nur im Kopf finden. Die Zeichnungen sind ja auch nicht im richtigen Maßstab." (Klasse D2, schriftlich)
- „Ein Nachteil ist, dass die zweite Lösung fehlt." (Klasse D2, schriftlich)
- „Man muss den Typ der Gleichung erkennen und kann erst dann lösen. Das macht die Sache schwieriger." (Klasse D1, schriftlich)
- „Ich finde, dass es eine großartige Leistung ist, solche Aufgaben ohne Variablen zu lösen." (Klasse D2, schriftlich)

An diesen Äußerungen, so differenziert und positiv sie überwiegend sind, fällt auf, dass viele Schülerinnen und Schüler keinen Bezug auf die historische, kulturelle oder biographische Dimension des bearbeiteten Materials nehmen. Im Vordergrund steht der mathematische Sachverhalt, gelegentlich auch seine Attraktivität oder sein Nutzen. Die Diskussion konzentriert sich weitgehend auf den „Text-Pol" des hermeneutischen Spannungsfeldes (Kap. 2.3.4.2). Den Blick der Lernenden im hermeneutischen Sinn zu weiten, ist darum Aufgabe der nächsten Stunden der Reihe, die ja ausdrücklich auch so angelegt ist (vgl. Kap. 4.3.2.1.2).

5.3.2.2.4.2 Aus Sicht des Beobachters

In allen Klassen ist das Ziel erreicht worden, die Schülerinnen und Schüler zu einer gründlichen Auseinandersetzung mit den geometrischen Denk- und Verfahrensweisen Al-Khwarizmis anzuleiten. Die Lernenden konnten sich gegenseitig problematische Stellen (z. B. Aufgabe 10c) in angeregten Diskussionen gut erklären. Zum Schluss der Phase trat auch der anfangs gelegentlich beobachtete Fehler, dass Seite und Fläche einer Figur verwechselt wurden, nicht mehr auf. Die allermeisten Schülerinnen und Schüler konnten nun auch flüssig zwischen Text, Formel und geometrischer Darstellung wechseln und die Zusammenhänge erläutern, solange diese nicht so komplex waren wie in Al-Khwarizmis Quellentext D V. Dieser Auszug sorgte bei vielen Schülerinnen und Schülern für eine gewisse Ernüchterung und wurde vor allem in den BCE-Klassen nur von wenigen in Gänze nachvollzogen. Auch gab es in manchen Gruppen Schwierigkeiten mit der Motivation, da eine „bessere" Lösung ja bereits nach Bearbeitung der Aufgabe 13 zur Verfügung stand. Schließlich haben Schülerinnen und Schüler mit einem geringeren Lern- und Arbeitstempo in den AD-Klassen den Text nur sehr kursorisch bearbeitet. Eine abschließende Beobachtung betrifft die Tatsache, dass in den Klassen niemand je von Harun al-Rashid gehört hatte – er wird im Arbeitsheft zur besseren Einordnung Al-Khwarizmis erwähnt. Hinweise auf die Geschichten aus tausenduneiner Nacht lösten allenfalls verlegenes Lächeln bei den Schülerinnen und Schülern aus.

5.3.2.3 Dritte Szene: Die Diskussion über negative Zahlen

5.3.2.3.1 Überblick

Die vorausgegangenen Stunden hatten gezeigt, dass die Schülerinnen und Schüler die gewünschte technische Sicherheit im Umgang mit Al-Khwarizmis Mathematik erlangt hatten und bereit waren, in die nächste Phase der Reihe einzutreten. Gemäß dem Unterrichtskonzept wurde nun der Text D II gelesen. Die Möglichkeit, auf Zeichnungen zu verzichten und die Lösung einfach nur durch Befolgen der Schritte „im Kopf" zu finden, hatte sich ja schon in den Schülerkommentaren oben angedeutet. Bei der Bearbeitung der Aufgabe 14 wunderten sich in allen Klassen immer wieder einige Schülerinnen und Schüler über das „falsche" Vorzeichen in der pq-Formel. Der Hinweis auf die Form der Gleichung, die ja anders als die übliche Normalform aufgebaut ist, konnte das Problem jedoch jeweils klären. Der Wechsel zwischen Zahlen- und Variablengleichung bereitete keine Schwierigkeiten. In einer Klasse wurde gefragt, was die Überschrift „Auf dem Weg zur Formel", die über der Aufgabe 14 abgedruckt ist, bedeute. Diese Frage wurde von einem Schüler so beantwortet, dass die Lösungen inzwischen schon rein mechanisch erreicht, die Zeichnungen darum kaum noch benötigt würden.

Beim Versuch, die unterschiedlichen „Rezepte" zu einer einzigen Regel zusammenzuführen (vgl. Kap. 4.3.2.2.3), fiel den Schülerinnen und Schülern die Problematik des Rechnens mit negativen Zahlen auf. In den BCE-Klassen wurde zu diesem Thema im Plenum diskutiert. Die im Folgenden abgedruckten Transkripte geben eine dieser Diskussionen wieder.

5.3.2.3.2 Klasse E

5.3.2.3.2.1 Kommentiertes Unterrichtstranskript

Der folgende Ausschnitt aus der Klasse E setzt nach Besprechung der Aufgabe 16 ein.

L: So. Wenn wir uns das hier angucken, an welcher Stelle hätte aber Al-Khwarizmi, wenn wir ihm die Formelschreibweise erklärt hätten, ja, nehm' wir mal an, und da hätten wir gesagt, pass mal auf lieber Al-Khwarizmi, das, was du hier so mühselich in Sätzen schreibst, das schreiben wir jetzt neuerdings nach n paar Jahrhunderten, das kann ja schon mal passiern, schreiben wir jetzt das in solchen Zeichen \ ja hat er gesagt, ist okay, und dann kommen wir auf sieben, findet er auch gut, aber an welcher Stelle hätte er rechnerische Probleme / Lukas
S: ja ich würd sagen, bei minus einundzwanzich weil, ja (.) er kennt das ja eigentlich nicht, also schon bei minus (.) minus zehn Halbe eigentlich schon
L: bei minus zehn Halbe hätte er das erste Problem okay . und
S: das (.) das richtige Problem ist beim zweiten Schritt, minus (.) minus fünf ins Quadrat gleich # 25
L: ja # also mit anderen Worten, er hätte das Problem bei, entweder hier schon oder hier, bei den negativen Zahlen. Hier hätt er vielleicht gesacht, naja das heisst halt, ich zieh etwas ab ne . So und jetzt komm' wir bei der Gelegenheit mal generell auf das Problem der negativen Zahlen, die nun ja, öh, warum hat der die nicht gekannt oder umgekehrt gefragt . wie spät glaubt ihr sind die denn in die Mathematik eingedrungen / .. also wir machen das ja im sechsten siebten Schuljahr, da werden negative rationale Zahlen sogar eingeführt, also bei 11- und 12-Jährigen .. öh .. müsste ja irgendwie doch dann auch möglich sein dass das im Laufe der Jahrhunderte . etwas früher entwickelt worden wär, *(ruft Schüler auf)* M.!
S: Ich denke, zu der Zeit gab's einfach keine praktischen Anwendungs-äh-gebiete für die negativen Zahlen, vielleicht äh ... allerhöchstens bei äh (.) beim Geld, vielleicht äh beim Geldverleih ...
L: ja!
S: ..., aber ich denke, da haben die das anders gemacht, die haben das nicht als negative Zahlen so gesehen wie wir
L: ja öh gut, aber da hast du schon Recht. Man hätte ja sagen können wenn jemand Geld bekommt oder Schulden hat oder so, dann sind das negative Zahlen, das haben die vielleicht auch so ungefähr gemacht, aber haben das nicht mathematisch umgesetzt \ So. So ne Rechnung hätten die gar nicht nachvollziehen können *(zeigt an die Tafel)* und da gibt es hier in unserm Heft n sehr schönes Beispiel / äh und dann schaut ihr euch mal die Zahl an versucht mal diesen Text von wie heisst der Antoine Arnauld zu verstehen . und da seht ihr mal, ihr habt Geschichte, was ist, äh, was verbindet ihr mit diesen Jahreszahlen die da bei Arnauld stehen / .
S: ... der hat die Kekse erfunden ...
L: der Typ da drunter hat die Leibniz Kekse erfunden, ja
K: *lachen*
L: und Bonifatius den Käse, klar, so kann man das sehen. Das ist schon der berühmte Leibniz, öh, letztes Universalgenie, also, die Kekse sind nach ihm benannnt, aber nicht umgekehrt naja . so . äh . also, Arnauld, was issen da gewesen, sechzehnhundertzwölf sechzehnhundertvierneunzich, mal so zwei drei Stichworte, was war schon entdeckt oder erfunden, siebzehntes Jahrhundert /
K: *reden, lachen*
L: ja, die Steintafel . mit dem Alphabet, ja klasse ... *(winkt ab)* siebzehntes Jahrhundert . was macht ihr in Geschichte? /
S: Nix.
L: Ja, dann habt ihr es vergessen
K: 19. Jahrhundert ... da machen wir 19. Jahrhundert ... war das nicht mit .. *(unverständlich)* .. Galileo *(reden durcheinander)*
L: ja, das kommt schon eher hin, Galileo, also Kopernikus gab es schon und Kepler und den Text von der Eroberung Amerikas und so weiter .. aber noch keine französische Revolution . so jetzt liest mal jemand den Text vor versucht mal den zu verstehn. *(ruft Schüler auf)* D.! S., be quiet! Komm .. D.!
S: *(liest vor)* „Ein grundlegendes Prinzip der Multiplikation zweier Faktoren besagt, dass sich die Eins zum ersten Faktor verhält wie der zweite Faktor zum ganzen Produkt. Dies gilt für ganze Zahlen genauso wie für Brüche. Zum Beispiel: Aus drei mal vier gleich zwölf ergibt sich, die Eins verhält sich zur Drei wie die Vier zur Zwölf, also eins zu drei gleich vier zu zwölf. Aus ein Drittel mal ein Viertel gleich ein Zwölftel ergibt sich, die Eins verhält sich zu ein Drittel wie die ein Viertel zu einem Zwölftel, also eins zu ein drittel gleich ein Viertel zu ein Zwölftel."

L: ja. Stop mal. ist das erstmal klar? / .. Ist nicht schwer? Na gut. Also normales Verhältnis ganzer Zahlen, das wussten die damals, hat der hier nur nochmal aufgelistet . so und jetzt gehts aber weiter . ja, D.!
S: *(liest weiter)* „Wenn ich nun aber zwei negative Zahlen multipliziere, stoße ich auf einen Widerspruch: minus vier mal minus fünf ist angeblich plus zwanzig. Klammer auf, minus vier, Klammer zu, mal, Klammer auf, minus fünf, Klammer zu, gleich plus zwanzig . so dass wir erhalten: plus eins verhält sich zu minus vier wie minus fünf zu plus zwanzig, Klammer auf, plus eins, Klammer zu, zu, Klammer auf, minus vier, Klammer zu, gleich, Klammer auf, minus fünf, Klammer zu, zu zwanzig."
L: ja, stimmt das nach unsern Rechnungen, was er sagt? /
K: *(murmeln)* ja ...
L so. Und was stört ihn jetzt daran, das lesen wir im dritten Absatz. Mach mal bitte, ja, J., mach mal bitte.
S: Okay. *(liest vor)* „Ich finde es ganz unmöglich, das zu akzeptieren! Denn plus eins ist größer als minus vier, und minus fünf ist kleiner als plus zwanzig, so dass wir erhalten: das Größere verhält sich zum Kleineren wie das Kleinere zum Größeren. Aber dies ist . töricht; denn wir wissen, dass bei solchen Verhältnissen immer gilt: Wenn der erste Term größer ist als der zweite, dann muss der dritte größer sein als der vierte."
L: ja, denn eins zu drei wie vier zu zwölf, dann ist eins größer als drei dann muss auch vier größer als zwölf sein und hier heisst es jetzt plus eins zu minus vier ist minus fünf zu zwanzich .. was sagt ihr zu Herrn Arnauld ... *(15 sec)* was? /
S: zu dem Text, den wir gerade gelesen haben?
L: zu seinem ganzen Gedankengang .. *(ruft Schüler auf)* S.!
S: auch wenn wir das nicht logisch eigentlich, aber, wenn man äh diese, den Term hier halt ausrechnet, nach unseren, äh, Rechen-äh-art, nach unserer Rechenart, dann kriegt man das richtige Ergebnis raus .. Obwohl das nach seiner Auffassung, wenn man, in seiner Sicht, wenn man sich das anschaut, ist das eigentlich logisch, dass wir das # Richtige
L: aha . wo steckt denn, wo steckt denn # seine Formulierung für unsere Rechenart, die er ja schon irgendwo kannte. Da ist so n kleines Wörtchen eingefügt, wo er unsere Rechnung, so wie wir es machen, öh, erwähnt \ töricht auch, ja aber vorher noch da wird die Rechnung auch durchgeführt .. und da steckt son kleines Wörtchen drin, was wir so nicht mehr in Arbeiten schreiben würden / was ich natürlich auch anstreichen würde ...
S: dieses „es verhält sich", das # ist
L: nee # das mein ich nicht . öh er sacht doch hier ich stoße auf einen Widerspruch minus vier mal minus fünf ist angeblich plus zwanzich was heisstn das angeblich \ wenn ich sage das und das . *(ruft Schüler auf)* S.!
S: ja weil, es ist zwar nach der Rechnung zwanzich aber er hat kann das nicht glauben dass es zwanzich ist und deshalb sagt er. dass es angeblich zwanzich sein soll.
L: ja sein soll \ wer ist das, der sagt, es soll so sein /
S: die anderen
L: die anderen, die offenbar in seiner Zeit mit dieser neuen Rechenmethode kamen, ja! genau, die das so angeben, angeblich \ und das soll angeblich so sein, S., ja angeblich nach unseren Rechenmethoden scheint das zu stimmen, und er sacht ..
S: ja, das Verhältnis, das Verhältnis # stimmt ja nicht
L: das Verhältnis, sacht er, # kommt dann falsch raus. Ja, was sagen wir dazu / erstens, hat er n Fehler gemacht? / Verrechnet er sich? / Ich mein, da müssen wir vorsichtig sein, Mathematiker und Theologe, ne öh, wolln mal vorsichtig sein, ja, bevor man da irgendwas sacht \ öh so und .. aber wenn er sich nun nicht verrechnet hat, was sagen wir zu seinem Gedankengang. S. hat gesagt, es klingt logisch ..
S: Es sagt doch keiner, # dass
L: S.! #
S: ja es klingt auch logisch, aber negative Zahlen haben doch eigentlich andere Eigenschaften als positive, also Recheneigenschaften
L: aha .. und sind trotzdem Zahlen
S1: ja #
S2: nee #
L: nee … also offenbar stört ihn etwas, gut, wir sagen öh die haben andere Recheneigenschaften, wir rechnen damit anders . fragen wir mal andersrum: wenn wir nun anders rechnen und im siebzehnten Jahrhundert hat Arnauld das noch bezweifelt, was sagt das über, sagen wir mal, die Geschichte oder die Entwicklung der Mathematik oder *(zeigt zur Tafel)* dieser Verfahren der pq-Formel, oder, öhm, auch die Entwicklung der negativen Zahlen. Was, was, was habt ihr da fürn Eindruck von dem Ganzen? / .. *(ruft Schüler auf)* M.!
S: *(unverständlich) (Gong ertönt, Schüler packen sofort ein)*

L: ja! *(in den allgemeinen Aufbruch hineingesprochen)* Genau das ist der Punkt, das könnt ihr bitte im Journal formuliern. Wir werden dann wahrscheinlich, ja, Donnerstag öh zu nem Abschluss kommen, muss ich noch mal klären. Aber äh ... ihr versucht, genau dieses Ergebnis nachzuvollziehen.

Das an dieser Stelle unterbrochene Unterrichtsgespräch wurde vom Lehrer in der nächsten Stunde wieder aufgenommen und fortgesetzt (siehe unten). Bis hierher fällt zunächst auf, dass das Gespräch nur zäh vorankommt, obwohl einzelne Schülerinnen und Schüler durchaus kluge und interessante Gedanken vorbringen: Auf Anhieb erkennen sie, dass ihre Lösung der Aufgabe 16 für Al-Khwarizmi die Problematik der negativen Zahlen birgt (Z. 6 f.), identifizieren sogar das spezielle Problem der Multiplikation negativer Zahlen (Z. 9), und vermuten sehr zutreffend, dass der immer bemühte Anwendungsfall „Schulden" mathematisch wohl auch ohne die Erfindung negativer Zahlen bewältigt werden konnte (Z. 20). Auch nach dem Verlesen des Arnauld-(Hitchcock-)Zitats sind vielversprechend klingende Ansätze zu vernehmen (Z. 68 ff., 93 f.), die sich unter einer anderen Sozial- und Interaktionsform möglicherweise zu einem fruchtbaren Gespräch hätten entwickeln können. Die Klasse diskutiert hier aber im Plenum. Freies, tastendes Sich-Äußern fällt vielen Schülerinnen und Schülern unter diesen Umständen bekanntlich viel schwerer als in Kleingruppen oder in Tandems. Sie agieren bedeutend zurückhaltender, zumal im vorliegenden Fall das verhandelte Thema – Begriffsbildungen auf mathematischem Gebiet – unvertraut ist und der Lehrer recht dominant auftritt, indem er viel lenkt, oft unterbricht (Z. 49, 56, 72, 77, 92) und komplizierte Fragen stellt (Z. 13 ff., Z. 99 ff.). Keiner der Schüler folgte der Aufforderung des Lehrers, im Journal oder im Arbeitsheft etwas zu formulieren (Z. 104 ff.) Angesichts der Umstände, in denen dieser Auftrag gegeben wurde (allgemeiner Aufbruch) verwundert das auch nicht. In der nächsten Stunde setzte sich das Gespräch in folgender Weise fort:

L: So, Frage: was haben wir denn letzte Stunde . über negative Zahlen gelernt, gehört *(7 sec)* so, das können einige auch, ohne das nochmal nachzulesen, wenn sie denn ... lasst ihr mal ... ja, jetzt schlagt ihr alle die Seiten auf, eben nicht, als ich's gesagt hab, . öhm . das müsstet ihr auch so können so viel wars nicht (?) also *(ruft Schüler auf)* M.!
S: öhm, . ja, die negativen Zahlen, die wurden .. entdeckt . öh wann wurden die entdeckt, auf jeden Fall sehr spät ich glaub ... *(3 sec)*
L: was meinstn mit entdeckt bei Zahlen? /
S: ja mit denen also richtig umgegangen wurde .. also, die gab es doch da früher schon so bei früheren (?)
L: gabs bei Schulden schon
S: aber ich glaub, dass ab . dann . mit negativen Zahlen gerechnet wurde, vorher nicht
L: warum nicht? *(ruft Schüler auf)* J.!
S: ja, weil die Leute das sich das nicht vorstellen konnten (dass es überhaupt negative Zahlen gibt)
L: hmhm ... naja .. gut, öh, kann das jemand noch konkreter sagen, *(ruft Schüler auf)* P.?
S: es gab ja halt diesen Arnauld,
L: ja ..
S: der hat sich halt #
L: ungefähr wann lebte der, damit wir da mal nen Vergleich haben zu Al-Khwarizmi und heute
S: sechzehnhundert fünfzehn bis ...
L: ja gut, also # siebzehntes Jahrhundert, ja
S: siebzehntes Jahrhundert # ja und, öhm, der hat halt den anderen gesagt, dass er bezweifelt, dass es diese Zahlen gibt, dass also minus fünf mal fünf gleich öh minus öh zwanzich sein sollten, und ähm hat er halt geschrieben, dass er das nicht glauben könne, weil ähm das einfach nicht möglich wäre ..
L: ja, so wie er das sagt, es gab minus äh negative Zahlen, sie ham euch, das hört sich so an als hätten die da irgendwo ein Nashorn in der Wüste entdeckt und die anderen haben gesagt: nee glaub ich nicht \ äh nun sind # das aber Zahlen
S: Ja, er hat nicht, # er hat nicht verstanden, wie das öh das möglich sein könnte, dass öhm aus einer Minus und einer öh positiven Zahl öh eine negative Zahl werden kann öh
L: jooaa dassss Beispiel war's glaube ich so nicht. P., kommt die Erinnerung?

S: der hat die Rechnung mit den negativen Zahlen, also, der hat da versucht son System äh zu finden öh wenn zum Beispiel drei, vier und zwölf dass äh die erste Zahl kleiner sein muss als die zweite, die zweite kleiner als die dritte und die dritte kleiner als die vierte .. und weil das irgendwie nicht ging, hat er's nicht verstanden
L: joa, naja was heisstn System finden, das andere, das war schon das richtige Beispiel, das stimmt .. was muss man doch noch machen? Was war das, was er gesagt hat? *(ruft Schüler auf)* S.!
S: Er hat zuerst gesagt äähm: der erste Faktor durch eins geteilt ist gleich dem äh Produkt . Produkt durch den zweiten Faktor .. oder umgekehrt?
S: andersrum!
L: na und .. wenn‘s so wäre?
S: ja wie, wenns so wäre?!
L: ja, was soll das heissen?
S: ja das, . was wolln Sie von mir hören?
L: ja, ihr sagt sowas auswendig Gelerntes . ja dann sach doch mal jetzt
S: ja, dann ist halt vier mal drei, ist ja zwölf, ne
L: vier mal drei ist zwölf ja da könn wir uns drauf einigen *(schreibt an die Tafel: 4 · 3 = 12)*
S: das heißt jetzt ja, dass ein Drittel, ein Viertel, ein Viertel *(L schreibt an die Tafel: 1 : 4 =)* .. gleich zwölf durch drei ist, so. *(L schreibt an die Tafel 12 : 3)* Wenn man jetzt das gleiche mit # negativen
L: Moment, eins durch vier ist zwölf durch drei.
S: Nein, Quatsch.
S: Nein, andersrum!
L: Vielleicht so . *(wischt 12 : 3 weg und schreibt stattdessen 3 : 12)*
S: ja, so. Und wenn man das jetzt mit negativen Zahlen macht, könnte man ja minus vier und minus drei dafür einsetzen
L: *(schreibt in einer dritten Zeile 1 : (-4) = (-3) : 12)* ja, und wo ist da das Problem /
S: ja, oben einsetzen
L: ist doch wurscht
S: Ja, die sind ja nicht größer.
L: # was ist nicht größer?
S: (?) # dieses Verhältnis von einer gro-, größeren zu einer kleineren Zahl gleich wie eine kleinere zu einer größeren
L: *(schreibt in eine vierte Zeile: 1 > -4 -3 < 12)* aha jetzt komm wir auf den entscheidenden Punkt. ja
S: und das meint hier der Arnauld
L: richtich . das ist der entscheidende Punkt: Bei den negativen Zahlen entsteht ein Verhältnis und eine Rechnung - Multiplikation und äh Quotientenbildung - wo plötzlich alles, was wir im Alltag so normalerweise für richtich halten, nicht mehr stimmt \ also, was Größerem zu was Kleinerem ist dasselbe wie was Kleineres zu was Größerem, das sind Verhältnisse, das ist doch nicht möglich, sagt er
S: *(unverständlich)*
L: bitte? / .. ja also es sind die negativen Zahlen, und warum hat man sich drüberhergesetzt .. bei diesen negativen Zahlen die da so störend waren, was meint ihr? . haben wir nicht besprochen aber müssen wir mal ein bisschen . überlegen. Wer die Seiten noch durchgelesen hat, findet da n Hinweis aber auch so \ .. *(8 sec)* ja nun blättern alle nach .. also, da sagt ein großer Mathematiker das Verhältnis ist merkwürdig, kann nicht sein und trotzdem rechnen wir nach zweihundert Jahrn damit \
S1: ja, es muss ja nicht sein, dass das gleich ist, es kann ja auch anders sein, ist ja egal.
S2: hä?
S1: man kann ja nicht, man kann ja nicht alles mit dieser, äh mit dieser . mit diesem Verhältnis rechnen . man kann das ja auch noch ein bisschen erweitern vielleicht, würd ich sagen
L: jaa das heisst man hat gesagt, ja, *(ruft Schüler auf)* P.!
S: Ja, ich hab das allgemeiner verstanden, man müsste nicht sagen, man hat bloß hundert Euro Schulden, sondern man kann jetzt sagen, man hat minus hundert Euro Guthaben. Dass man dann alles auf ein . eine Beschreibung hinzuziehen hat, also dass man ..
L: ja
S: ja, dann schönere Ausdrücke in der Gleichung dastehen
L: gut, also ich greif mal diese Begriffe von Euch auf: Ausdrücke . allgemeiner schreiben . formaler. Das heisst, es wird in der Mathematik, **egal** was es sonst im Leben für Verhältnisse gibt, man macht es nur noch, und das hat man ja an der Stelle, man macht es nicht mehr konkret sondern nur noch formal. Das heisst, man rechnet mit Zahlen, ohne zu überlegen ob, dahinter irgendwelche Geld oder Schulden, sagst du richtich, oder Elefanten oder

Größenverhältnisse oder irgendwas anderes steht \ ja . und nur weil man das so formal macht in der Mathematik, und seitdem die Leute sagen, Mathematik ist abstrakt, **deswegen** kann man mit negativen Zahlen rechnen, das hat man da eingeführt. Dass manches ganz anders war könnte man sehen, wenn man auf Seite viernzwanzich mal eben das Vorwort liest, das ist jetzt eure Aufgabe.

Mit diesen Worten schließt der Lehrer die Aussprache über die negativen Zahlen und leitet zum Vorwort Al-Khwarizmis über. Im zuvor stattgehabten Unterrichtsgespräch zeigt sich erneut, dass die Schülerinnen und Schüler – trotz ihrer Startschwierigkeiten – z. T. brauchbare Ansätze liefern, diese jedoch nicht ausführen. Wiederum scheint es so, dass die gewählte Sozialform (Plenum) dem Unterrichtsanliegen keinen guten Dienst erweist. Die meisten Schülerinnen und Schüler übernehmen keine Initiative sondern warten ab. Die Beiträge der wenigen, die sich äußern, sind zudem sehr knapp und richten sich ausschließlich an den Lehrer, offenbar in der Absicht, *dessen* Fragen zu beantworten. Der Lehrer wiederum zeigt ein ähnliches Verhalten wie in der vorigen Stunde, bricht die Phase dann bald ab (Z. 81 ff.) und gibt selbst eine Zusammenfassung. Das entscheidende Stichwort („formal“) bringt er selbst ins Gespräch ein und beschreibt mit sehr knappen, bestimmenden Worten das Wesen der modernen Zahlauffassung (Z. 83 f.).

5.3.2.3.2.2 Einschätzungen

5.3.2.3.2.2.1 Aus Sicht des Beobachters

Eine Unterrichts- und Gesprächssteuerung wie bringt die Idee der hermeneutischen Orientierung nur mangelhaft zur Geltung. Zwar wird über das Thema geredet, und das Gespräch öffnet sich auch in Richtung der Autoren- und Rezipientendimensionen. Eine echte und offene Auseinandersetzung unterbleibt jedoch. Dies hängt vor allem damit zusammen, dass die Lernenden keine eigenen Fragen formulieren und auch nur ganz wenige Anreize für die gemeinsame Diskussion über den Text erhalten. Die Fixierung auf die Erwartungen des Lehrers wird überdeutlich, der Austausch mit Mitschülern fehlt ganz. Man darf sich fragen, ob unter diesen Umständen die Beschäftigung mit dem Thema nach hermeneutischen Kriterien überhaupt ertragreich sein kann. Genaueren Aufschluss darüber wird die Analyse der Daten ab Kap. 5.3.3 geben. Zunächst stellen wir nur fest, dass immerhin 83 % der Schülerinnen und Schüler von sich behaupten, dass sie verstanden hätten, warum negative Zahlen früher für problematisch gehalten wurden. (In den anderen Klassen beträgt dieser Anteil aber im Durchschnitt 94 %.) Ein Blick auf die Eintragungen in den Lernjournalen der Klasse E im nächsten Abschnitt lässt zudem erkennen, dass viele Schülerinnen und Schüler von den Inhalten der Stunde durchaus angesprochen und zum Nachdenken angeregt wurden, auch wenn die stattgehabte Plenumsdiskussion nicht so überzeugend zum Ausdruck gebracht hat.

5.3.2.3.2.2.2 Aus Sicht der Beteiligten

Die folgenden Äußerungen haben Schülerinnen und Schüler der Klasse E nach Behandlung des Arnauld-(Hitchcock)-Textes in ihren Lernjournalen notiert.

- „In dieser Stunde fand ich die Aufgaben, mit denen wir uns beschäftigt haben, ziemlich interessant und einfach, dagegen fand ich die Diskussion um die Formulierungen von Gottfried Leibniz und Antoine Arnauld ehe [sic] langweilig.“

- „Diese Stunde haben wir uns die Frage gestellt, wann der Mensch die Minuszahlen entdeckt hat. Dazu haben wir Kommentare von Leibniz und Arnauld angeschauen [sic] und bemerkt, dass man diesen Bereich der Zahlen nicht mit Logik erklären kann."
- „Den zweiten Teil der Stunde mit den Mathematikern und deren Ansichten fand ich total langweilig, weil es einfach nicht interessant ist."
- „In dieser Stunde haben wir etwas Neues angefangen. Wir haben uns mit der Zahlen-Frage im Mittelalter beschäftigt und dazu den Kommentar eines gewissen Herrn Leibniz gelesen. Das fand ich recht interessant."
- „Wir haben etwas über die Theologen von damals gelernt. Einer war ein Herr Leibniz, der viel über Mathematik herausgefunden genau wie Al-Kwarizmi [sic]. Wir haben überlegt, wie sie damals gerechnet haben."
- „Wir haben uns über die Einführung und den Umgang mit negativen Zahlen unterhalten und nachvollzogen, wie die Leute mit diesen umgegangen sind."
- „Besprechen der damaligen Rechenweisen und Denkensweise [sic] (Mathematik basierte auf praktischen Anwendungen). Ergebnis: Zur damaligen Zeit gab es keine Rechnungen mit negativen Zahlen, da es dafür keine praktischen Beispiele gab."
- „Die Stunde war interessant und ich lernte viel über negative Zahlen. Früher im 15. Jahrhundert [sic] hatte man Probleme damit."
- „Interessant waren die Vermutungen von Leibniz, wie sich negative Zahlen verhalten."
- „Diese Stunde lernten wir die gut begründete Meinung von Arnauld zum Thema: negative Zahlen kennen. Arnauld brachte einen guten beweis dafür, dass – · – nicht + ergibt. Das machte einen Nachdenklich. [sic]"
- „In der Stunde haben wir uns mit der geschichtlichen Auffassung der Negativen Zahlen beschäftigt und uns angeschaut, welche Meinung die Mathematiker im 17. Jahrhundert über diese hatten. Ich fand dieses Thema interessant, da es zeigt, welche Schwierigkeiten es auch in der Mathematik gibt, wenn man seinen Horizont erweitern muss."

Die Äußerungen zeigen im Vergleich zu denen aus dem vorigen Unterkapitel (5.3.2.2.2.1) einen höheren Anteil an Bemerkungen zur historischen und kulturellen Dimension. Dies kann als deutlicher Hinweis auf tatsächlich größer werdende Umläufe im hermeneutischen Zirkel gesehen werden. Die Äußerungen belegen ferner, dass die Schülerinnen und Schüler durchaus interessante, z. T. auch kritik- oder diskussionswürdige Gedanken in ihren Köpfen bewegt haben, ohne dass sie diese in der Stunde artikuliert hätten. Sie konnten darum auch nicht im Unterrichtsgespräch ausgetauscht oder verwertet werden. Man ist versucht, hier von einer vertanen Chance für den hermeneutisch-orientierten Unterricht zu sprechen. Die Gründe dafür liegen offensichtlich in den wenig anregenden und unterstützenden Interaktions- und Kommunikationsformen. Diese Annahme drängt sich vor allem deshalb auf, da dieser Befund in allen BCE-Klassen, die in ähnlichen interaktiven und kommunikativen Settings unterrichtet wurden, zutage tritt, – in der Klasse E ist er allerdings am stärksten ausgeprägt. Was dies im Hinblick auf die Wirkung der Unterrichtsreihe bedeutet, werde ich in Kap. 5.4 analysieren. Schauen wir zunächst aber in eine Klasse, deren Unterricht anderen Vorgaben folgte.

5.3.2.3.3 Klasse A

5.3.2.3.3.1 Kommentiertes Unterrichtstranskript

In der Klasse A hat der Lehrer eine generell andere Form der Auseinandersetzung gewählt als in der Klasse E (und den übrigen BCE-Klassen). Die Schülerinnen und Schüler haben hier, ähnlich wie in den D-Klassen, in Kleingruppen und Tandems gearbeitet. Bei der Arbeit mit den Arnauld-/Leibniz-Hitchcock-Texten erhielten diese Gruppen auch die Erlaubnis, den Klassenraum zu verlassen, um in stillen Winkeln der Schule die Texte zu lesen und über ihr Verständnis sowie ihre Interpretationen zu beraten. Am Ende dieser Arbeitsphase wurde wie üblich ein Schüler gelost, dessen Aufgabe es war, die Ergebnisse der Gruppenarbeit im Plenum vorzustellen. Seinen Vortrag gibt das folgende Transkript wieder.

S: Also, hier geht's um die Ansichten zweier .. Theologen .. nein, Mathematiker . oder Philosophen ., zweier Männer jedenfalls, geht's um deren Ansichten zum Thema, zum Thema negative Zahlen. Einer von ihnen, Antoine .. Arnauld . lehnt sie ab, der andere .. Gottfried Leibniz . befürwortet sie. Und zwar, .. *(geht zur Tafel)* die Argumentation von Arnauld bezieht sich auf das grundlegende Prinzip der Multiplikation von Faktoren. Er sagt, . dass sich die Eins zum ersten Faktor verhält wie der zweite Faktor zum ganzen Produkt. Also damit meint er *(schreibt an die Tafel $3 \cdot 4 = 12$)* . bei dieser Aufgabe .. die Eins, die hab' ich jetzt nicht angeschrieben, verhält sich zur Drei wie die Vier zur Zwölf .. hier, so .. *(schreibt an die Tafel $1 : 3 = 4 : 12$)* ne, eins *(zeigt auf 1)* zu drei *(zeigt auf 3)* wie vier *(zeigt auf 4)* zu zwölf *(zeigt auf 12)*. Das kann man ja ganz einfach aus der ersten Gleichung herleiten, und zwar .. *(schreibt an die Tafel: $3 \cdot 4 = 12$ | : 12, nächste Zeile $\frac{3\cdot 4}{12} = 1$ | :3, nächste Zeile $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$).*
So, mit Brüchen ist das klarer. Also eins *(zeigt auf 1 im Bruch)* zu drei *(zeigt auf 3 im Bruch)* wie vier *(zeigt auf 4 im Bruch)* zu zwölf *(zeigt auf 12 im Bruch)*. Ja? *(5 Sekunden)*
Also gut, ich mach' mal weiter, nun will er das mit negativen Zahlen auch .., will er das jetzt genauso machen, und da nimmt er als Beispiel minus vier mal minus fünf gleich plus zwanzig *(schreibt an die Tafel $(-4) \cdot (-5) = +20$)* und wenn er das als Bruch schreiben würde, dann steht da nämlich, .. steht da .. _(schreibt an die Tafel: *$(-4) \cdot (-5) = +20$ | : 20, nächste Zeile $\frac{(-4)\cdot(-5)}{20} = 1$ | : (−4), nächste Zeile $\frac{-5}{20} = \frac{1}{-4}$).* Ne, also, eins *(zeigt auf 1 im Bruch)* zu minus vier *(zeigt auf −4 im Bruch)* wie minus fünf *(zeigt auf −5 im Bruch)* zu zwanzig *(zeigt auf 20 im Bruch)*. So, bis hier ist ja eigentlich alles in Ordnung, aber nun meint er, ‚Ich finde es ganz unmöglich, das zu akzeptieren'. Und was er unmöglich findet, ist, dass sich hier das Größere zum Kleineren verhält wie das Kleinere zum Größeren, wie er sagt. Und zwar ist die Eins größer als die minus Vier und die minus Fünf ist kleiner als die plus Zwanzig. Und da sagt er, das wäre töricht, denn … das geht ja nicht, . wenn auf einer Seite steht groß zu klein und auf der anderen Seite klein zu groß. *(Eine Schülerin K aus der Klasse meldet sich, S ruft sie auf.)*
K: Und zwar, das haben wir auch so, aber wir haben uns noch gedacht, dass das ja eigentlich gar nicht so ist, wie er sagt. Wenn man mal .. wenn . wenn man .. also, wir ham das mal auf n Zahlenstrahl eingezeichnet, und da ist das in Ordnung.
L: Zeigst du uns das mal bitte?
K: Ja .. *(geht zur Tafel und zeichnet den Zahlenstrahl an)* .. So, und jetzt stimmt das nämlich doch, denn diese Strecke *(zeigt auf die Strecke, die −5 darstellt)* verhält sich zu dieser Strecke *(zeigt auf die Strecke, die +20 darstellt)* wie diese Strecke *(zeigt auf die Strecke, die +1 darstellt)* zu dieser Strecke *(zeigt auf die Strecke, die −4 darstellt).*
S: Ja, ich glaub', der kannte noch keinen Zahlenstrahl ..
K: *(an den Lehrer gerichtet)* Kannte der noch keinen Zahlenstrahl?
L: Weiß' nich' .. kannte der den Zahlenstrahl? .. ich glaub' nich', *(3 Sekunden)* . sonst hätte er ihn wohl benutzt .
K: Aber eigentlich stimmt das ja nicht, was er sagt. Das sieht man ja hier .. *(5 Sekunden)*
L: Was sagt denn Leibniz dazu?
S: Ja, der meint also, dass wir nicht erwarten können, dass diese gemischten .. *(blickt ins Arbeitsheft)* diese gemischten Verhältnisse die wohlbekannten Eigenschaften gewöhnlicher Verhältnisse positiver Zahlen besitzen und sich nach deren Gesetzen richten. Also, das heißt, für ihn sind das nur Ausdrücke, die man so aufschreibt, aber die nicht genauso sind, .. nicht .. nicht die gleichen . Eigenschaften haben wie die positiven . also, die normalen Verhältnisse .. deswegen sagt er ja auch Pseudoverhältnisse, also . nicht echt .. keine echten Verhältnisse. Und er sagt, dass sie keinen Schaden anrichten.

Der ausgeloste Schüler trägt zunächst sachlich einwandfrei die Argumentation Arnaulds vor und erläutert sie mit algebraischen Umformungen. Bevor nun hierüber ein Gedankenaustausch entstehen könnte, wird Arnaulds Position sofort von einer Schülerin angegriffen (Z. 22). Dabei bezieht sie sich allerdings auf eine Betrachtungsweise, die im Text gar keine Rolle spielt (Z. 23: „Zahlenstrahl"). Der Lehrer fordert die Schülerin auf, diese weiter zu erläutern (Z. 25). Aus hermeneutischer Sicht ist diese

Vorgehensweise nicht unproblematisch; denn oft wird bei solcher Gelegenheit der Text zu schnell verlassen – der hermeneutische Zirkel trennt sich gewissermaßen vom Objekt seiner Betrachtung und wird frei schwebend. In der vorliegenden Szene bestätigt sich diese Befürchtung auch sogleich. Die Ausführungen der Schülerin (Z. 26 ff.) beziehen sich nämlich nicht auf die von Arnauld vorgebrachte Argumentation, sondern greifen nur das Ergebnis seiner Überlegungen an – allerdings auf einer ganz anderen Ebene. Arnauld hat gar nicht an die Zahlen*gerade* (die die Schülerin eigentlich meint) gedacht. Die Frage, ob er sie denn überhaupt gekannt hat, wird in Z. 29 f. explizit gestellt. Der Lehrer ist sich unsicher – zur Klärung sei hier angemerkt, dass die Verwendung der Zahlengerade in unserem Sinne üblicherweise John Wallis und seinem „Treatise on Algebra“ (1685) zugeschrieben wird. Ob Arnauld damit vertraut war, ist für die Diskussion indes nicht relevant, da er das Konzept der Zahlengerade ja nicht benutzt. Seine Überlegungen werden jedoch in der vorliegenden Szene nicht aus *seiner* Sicht reflektiert. Stattdessen wird ihr Ergebnis von der Schülerin in den Kategorien *unseres* Denkens und der *uns* naheliegenden Veranschaulichungen beurteilt. Hier begegnen wir einer grundsätzlichen Problematik, die ich im Kap. 2.3.2.7 diskutiert habe. Gadamer beschreibt sie mit den Worten, dass sich „das Andere so sehr vom Eigenen her [zeigt], dass es gar nicht mehr als Eigenes und Anderes zur Aussage kommt.“ (Gadamer, 1990, S. 306). Die vorliegende Szene liefert hierfür ein passendes Beispiel: Die fremde Argumentation Arnaulds kommt angesichts der sofortigen Herbeiziehung der Zahlengeraden in den Ausführungen der Schülerin gar nicht mehr zur Geltung (Z. 32). Der Anspruch des hermeneutisch-orientierten Unterrichts lautet nun aber, die Differenzen zwischen Fremdem und Eigenem, Altem und Heutigem gerade nicht zu übergehen oder zuzudecken, sondern sie ins Bewusstsein zu heben und kritisch zu bearbeiten (vgl. Kap. 2.3.2.7). Schülerinnen und Schüler können dies in der Regel nicht von allein leisten. Sie bedürfen der Unterstützung durch die Lehrperson, die hier in besonderem Maße gefordert ist. Im vorliegenden Fall hätte eine klarere Trennung zwischen dem, was einerseits Arnauld sagt und dem, was andererseits die Schülerin vorbringt, sicher helfen können. Ansätze in dieser Richtung waren vorhanden (Z. 29 ff.), wurden aber nicht konsequent ausgeführt. Der hier agierende Lehrer gab nach der Stunde an, dass ihm die Problematik auch aufgefallen sei. Er habe sich jedoch für eine, wie er sagt, „historische Diskussion“ über Arnaulds Argumente, die Zahlengerade „und die ganzen Zusammenhänge“ nicht gerüstet gefühlt und sei darum lieber zum Leibniztext übergegangen. Wäre er noch etwas länger bei Arnauld und der Schülerin verblieben, hätte er m. E. auch auf eine Diskussion über Richtungen bzw. Absolutbeträge auf der Zahlengerade nicht verzichten können. Im Plenum wäre dies zweifellos problematisch geworden. So also trägt der ausgeloste Schüler die Aussagen des Leibniz-Textes in nahezu wortgleichen Formulierungen vor (Z. 34 ff.).

L: Gut, Leibniz sagt also, die gemischten Verhältnisse richten keinen Schaden an, und deshalb sind sie okay. Also ist es okay, zu sagen: minus vier mal minus fünf ergibt plus zwanzig? .. *(8 Sekunden, Schüler blättern)* Das steht da nicht drin .. *(schaut S, der an der Tafel steht, auffordernd an)*
S: Ja, ich denke, dass es okay ist. *(7 Sekunden)*
L: Welche Gründe kennt ihr denn sonst noch, dass wir sagen minus mal minus ist plus?

Mit dieser Frage weitet der Lehrer erneut das Feld, indem er seine Schülerinnen und Schüler auffordert, *weitere* Gründe für die besagte Festlegung zu nennen: Gründe, die es „sonst noch“ gibt, die also nicht unbedingt etwas mit dem hier thematisierten Grund – der Vereinheitlichung unterschiedlicher Lösungsformeln für quadratische Gleichungen – zu tun haben. Auch diese Vorgehensweise ist aus hermeneutischer Sicht nicht ganz unproblematisch. Es ist zwar sinnvoll, die Frage nach der Angemessenheit der Multiplikationsregel im Anschluss an die Betrachtung der beiden unterschiedlichen Positionen von Arnauld und Leibniz erneut in den Blick zu nehmen. Allerdings könnte dies – um den hermeneutischen Zirkel gewissermaßen ‚abzurunden‘ – sinnfälliger mit einem Rückbezug auf den bisherigen Unterricht und den Gewinn einer einheitlichen Lösungsformel geschehen: spricht Leibniz-Hitchcock doch ausdrücklich davon, dass man „einige nützliche Ergebnisse erzielen" könne. Vor *weiteren* Runden im Zirkel würde eine solche Rückbesinnung zugleich illustrierend wie auch selbstvergewissernd wirken, und Selbstvergewisserung (im Sinne einer Klärung des gegenwärtigen Verstehens) ist ein wichtiges Moment in der hermeneutischen Bewegung.

K: Ja, man kann die quadratischen Gleichungen mit einer, mit . mit einer einzigen Methode lösen, wenn man negative Zahlen erlaubt. Man muss dann nur mit den negativen Zahlen richtig rechnen.
L: Richtig, das hatten wir ja schon gesehen. Und was für Gründe gibt's denn sonst noch, die Regel so festzulegen?

Auf die Frage nach guten Gründen für die Multiplikationsregel antwortet ein Schüler der Klasse mit dem Hinweis auf den in der Unterrichtsreihe herausgearbeiteten Vorteil, der darin besteht, die verschiedenen Lösungsmethoden Al-Khwarizmis zu vereinheitlichen. Hier wäre nun die Gelegenheit für eine Zäsur gewesen, möglicherweise in Form einer schriftlichen Ergebnissicherung, die einen vollendeten Umlauf in der hermeneutischen Zirkelbewegung markiert. Der Lehrer möchte jedoch noch auf etwas anderes („sonst noch?") hinaus und bohrt weiter nach.

L: *(10 Sekunden)* Das habt ihr alle in einer früheren Klasse gelernt. *(7 Sekunden, schreibt schließlich an die Tafel)*
$(-2) \cdot 0 = 0$
$(-2) \cdot (-3 + 3) = 0$
(an einen Schüler gerichtet) Multiplizier mal aus!
K: Ja, das .. ist . minus zwei mal minus drei plus .. minus zwei mal plus drei . gleich null.
L: *(schreibt an die Tafel)*
$(-2) \cdot (-3) + (-2) \cdot (+3) = 0$
So, minus zwei mal plus drei ist / ..
K: Minus sechs.
L: Also . was muss dann minus zwei mal minus drei sein / ..
K: Ja, minus zwei mal minus drei muss dann minus .. äh muss dann plus sechs sein .. plus sechs.
L: Muss plus sechs sein, denn sonst kommt da nicht mehr null raus .. Also, minus mal minus muss plus ergeben, weil sonst unsere üblichen Rechengesetze nicht mehr gelten. Welches ist denn das Gesetz, das ich hier angewendet habe / .
K: Das Komm .. nee, .. weiß nicht ..
K: Distributivgesetz. . Das Distributivgesetz.
L: Das Distributivgesetz. Also können wir sagen *(schreibt an die Tafel)* minus zwei mal minus drei ist gleich sechs ist also festgelegt zur Rettung des Distributivgesetzes .

Die Absicht des Lehrers an dieser Stelle scheint zu sein, mit dem Hinweis auf eine Regel mit ‚Gesetzescharakter', ein gewissermaßen noch gewichtigeres Argument für den guten Sinn der Multiplikationsregel anzuführen als die bloße Bequemlichkeit, die eine einheitliche Formel bietet. Die Distributivgesetze gehören zu den Ring- und Körperaxiomen der ganzen bzw. reellen Zahlen und nehmen damit in der sachlogischen Hierarchie eine fundamentale Stellung ein. Den Fachmathematiker mag dies beeindrucken, und es mag ihm darum besonders erstrebenswert erscheinen, ein solches Gesetz im Sinne des Permanenzprinzips zu „retten", wie hier formuliert wird. Die Tatsache, dass damit auch die Lösungsmethoden vereinheitlicht werden können, mag ihm dabei wie eine Nebenwirkung erscheinen. Im Gegensatz hierzu wird jedoch ein im formal-mathematischen Denken weniger geübter Schüler den ökonomisierenden Nutzen der Multiplikationsregel wohl überzeugender finden. Ihm wird das Distributivgesetz im Vergleich dazu eher zweitrangig erscheinen. Eine Untersuchung der Schüleransichten hierzu ist unterblieben, da die Thematisierung des Distributivgesetzes spontan geschah. Interessant ist aber immerhin festzustellen, dass die Aufzeichnungen der Schülerinnen und Schüler der Klasse A bei der Begründung der Multiplikationsregel keinen Bezug auf die Vereinheitlichung der Lösungsmethoden nehmen. Dies hängt sicherlich damit zusammen, dass der Lehrer in seinem Tafelanschrieb nur das Distributivgesetz erwähnt hat, und die Schülerinnen und Schüler nur diesen Anschrieb in ihre Unterlagen übernommen haben.

5.3.2.3.3.2 Einschätzungen

5.3.2.3.3.2.1 Aus Sicht der Beteiligten

Die folgenden Zitate haben die Schülerinnen und Schüler der Klasse A in ihren Lernjournalen notiert. Rechtschreibung und Orthographie sind wie in den Originalen.

- „Die Texte waren zu kompliziert.“
- „Wir haben versucht, herauszufinden, warum $-1 \cdot -1 = 1$ ist. Ganz verstanden habe ich es nicht.“
- „Wir haben uns mit der Geschichte der negativen Zahlen beschäftigt. Dabei ist uns aufgefallen, dass man heutzutage die mathematischen Festlegungen meistens einfach nur hinnimmt ohne aber die genaue Bedeutung geschweigedenn den Ursprung zu kennen wie zum Beispiel $(-1) \cdot (-1) = +1$ Warum?/(nicht?) $(-1) \cdot (-1) = -1$?“
- „Die Erklärung in Bezug auf die negativen Zahlen waren interessant. Ich halte es für motivierend, historische Persönlichkeiten anzuführen und zu verstehen. Da die Auffassung charakteristisch für die Zeit war, erhielt man einen interessanten Einblick ins damalige Leben.“
- „Wir haben uns mit negativen Zahlen beschäftigt und haben beschlossen, dass die Eigenschaft von negativen Zahlen eine rein Formale Festlegung, die nicht begründbar ist.“
- „Heute ging es um negative Zahlen. Es war interessant darüber nachzudenken!“
- „Wir haben uns mit dem Problem der negativen Zahlen nach Arnauld auseinandergesetzt. Das war nicht so interessant wie andere Stunden.“
- „Wir beschäftigten uns mit den negativen Zahlen, wobei ich die Theorien der einzelnen Mathematiker sehr interessant fand.“
- „Wir haben uns mit negativen Zahlen befasst. Ich fande die Argumente von Arnauld und Leibniz sehr interessant und auch welche Gedanken sie sich um die neg. Zahlen gemacht haben.“

In ähnlicher Weise setzen sich die Äußerungen fort. Zumeist ist in ihnen davon die Rede, dass man sich mit negativen Zahlen beschäftigt habe und dieses Thema interessant oder eben nicht interessant fand. Einzelheiten werden kaum genannt. Im Hinblick auf die vorausgegangene Intensität der Auseinandersetzung ist dies vielleicht ein wenig enttäuschend, zumal auch die historischen und kulturellen Dimensionen des Themas nur wenig benannt werden. In den Klassen D1 und D2 ist der Befund übrigens ähnlich. Demnach lassen die protokollierten Äußerungen nicht auf ein vertieftes Niveau der stattgehabten Auseinandersetzung schließen. Genaueres lässt sich hierzu allerdings erst nach Analyse der differenzierteren Daten aus den Schülerfragebögen sagen. Ich komme hierauf ab Kap. 5.4 zurück.

5.3.2.3.3.2.2 Aus Sicht des Beobachters

Die Stunde hat deutlich gemacht, dass es Lernenden schwer fallen kann, bei der Bearbeitung historischen Materials, das mit heutigen Sichtweisen nicht ganz im Einklang steht, die eigenen Ansichten und Vorurteile vorübergehend beiseite zu stellen und fremde Ideen ausreichend zur Geltung kommen zu lassen. Es handelt sich hierbei um ein typisches Problem jeder ernsthaft betriebenen, hermeneutischen Auseinandersetzung. Im vorliegenden Fall kam hinzu, dass die Schülerinnen und Schüler mit den Anforderungen unvertraut waren und von Seiten des Lehrers nur wenige Hinweise für ihre

Arbeit erhielten. Diese waren im Hinblick auf die hermeneutischen Intentionen oft sogar kontraproduktiv und führten zu einem überhasteten und stark vom Lehrer bestimmten Ende der Stunde.

5.3.2.3.4 Zwischenfazit

Die Pilotierung der Unterrichtsreihe hatte einen Hinweis darauf gegeben, dass die Behandlung der negativen Zahlen im Rahmen dieser Reihe kein ganz einfaches Unterfangen darstellen würde (Kap. 4.3.2.2.3, S. 212 ff.). Diese Vermutung hat sich bei der Durchführung größtenteils bestätigt. Die verwendeten Texte wurden von den Lernenden als schwieriger eingestuft als die Al-Khwarizmi-Texte, obwohl hier schon den vereinfachten Varianten von Hitchcock der Vorzug gegeben worden war. Die Schülerinnen und Schüler artikulierten nichtsdestotrotz mehrheitlich großes Interesse am Thema. Es fiel jedoch auf, dass in vielen Klassen Lehrer und Lernende unsicher waren, wie sie mit den Texten umgehen sollten. Häufig versuchte man, sich auf ‚bekanntes Terrain' zurückzuziehen und nur die rein fachliche Ebene zu bearbeiteten. Dies ist jedoch ein vordergründiges Bild. Tatsächlich finden hermeneutische Prozesse im Hintergrund *immer* statt. Das zeigen ja auch viele der im Nachklang zu den jeweiligen Stunden notierten Äußerungen. Diese Prozesse können jedoch ganz offensichtlich noch deutlich optimiert werden. Die Hoffnung, dass dies – in einer Art Selbstlernprozess der Schülerinnen und Schüler – ganz von allein und ohne nennenswerte Moderation oder Unterstützung seitens der Lehrenden geschieht, ist zumindest unter den gegenwärtig vorherrschenden Paradigmen von Mathematikunterricht sehr zweifelhaft. Darauf deuten die Beobachtungen in allen Klassen, und zwar unabhängig davon, welcher grundlegende Unterrichtsstil in ihnen verfolgt. Ziel künftiger Entwicklungsarbeit im Rahmen der historisch-hermeneutischen Orientierung wird es darum sein, Lehrerinnen und Lehrer in die Fertigkeit einzuweisen, hermeneutische Prozesse in dem im Kapitel 2 beschriebenen Sinne zu fördern und vorsichtig anzuleiten, ohne die Lernenden dabei zu dominieren oder fehlzulenken. Dies kann im Rahmen der Lehreraus- und -weiterbildung, ggf. auch schon durch Bereitstellen von *methodisch explizit* gestaltetem Material geschehen.

5.3.2.4 Vierte Szene: Die Diskussion des Vorworts

5.3.2.4.1 Überblick

Die Unterrichtsreihe schloss in allen Experimentalklassen mit der Lektüre und Diskussion des Vorworts, das Al-Khwarizmi für seine ‚al-jabr' geschrieben hatte (Quellentext D VII). Wir blicken zunächst in Klasse C und danach in Klasse B2.

5.3.2.4.2 Klasse C

Die Vorbefragung hatte ergeben, dass die Schülerinnen und Schüler in Klasse C üblicherweise einen Mathematikunterricht wahrnehmen, der von operativ-instrumentellen Tätigkeiten und anderen Routinearbeiten dominiert wird. Diskursive Elemente kommen nur sehr selten vor. Die Lehrperson hatte den bis zu der hier dokumentierten Stunde stattgehabten Unterricht entsprechend technisch abgewickelt und – im Gegensatz zu den übrigen Lehrerinnen und Lehrern – vergleichsweise wenig Interesse an den Kontextdimensionen des Materials gezeigt. Die Lektüre des Vorwortes eröffnete diesen erstmals mehr Raum.

5.3.2.4.2.1 *Kommentiertes Unterrichtstranskript*

Der folgende Transkriptausschnitt beginnt, nachdem ein Schüler gerade das Vorwort Al-Khwarizmis aus dem Arbeitsheft auf Anweisung des Lehrers laut vorgelesen hat.

L: öh D., was hastn gerad gelesen /
S: den Text
L: ja aber was istn das fürn Text
S: n Vorwort
L: Vorwort eines Buches, genau
S: *(unverständlich)*
L: öh P. sag mal laut
S: Ob das bei uns auch im Mathebuch steht
L: ja, könnt man ja mal gucken, ich hab jetzt kein Neunerbuch dabei. Ich hab nur das *(beginnt in seiner Tasche zu kramen)* ... bitte / dann nicht alle durcheinander. F.!
S: Das ist ein sehr religiös geprägtes . Vorwort, von wegen der Anfang: „Im Namen Allahs“, am Ende: „möge sein Segen herabkommen“
L: ja . also das öh könn wir gucken . P. willst du hier *(reicht Schüler ein Mathebuch, das er aus seiner Tasche hervorgeholt hat; es handelt sich nicht um das eingeführte Schulbuch)* .. ob da auch sowas ähnliches drin ist .. ja überfliegs mal und die anderen könn sich .. sch .. ja vielleicht stehts ja im Kleingedruckten öh ich war etwas danach enttäuscht. Ich hab das jetzt nicht von der neun dabei und öh aber öhm ich hätte da mehr erwartet im Vorwort, aber da, hast du was gefunden in dem Stil, über Allah oder religiös: gar nichts! \ eure Aufgabe ist jetzt in den nächsten zehn Minuten in aller Ruhe und Konzentration diesen ersten Teil zu machen, das heisst öh den Text zu gliedern öh .. und entsprechende Titel und Überschriften zu finden, das heisst, ihr müsst nochmal durchlesen. Ihr habt da diese Satzzeichen oder Verse, oder wie man das nennen will, habt ihr da als Zeilen oder Satznummern, und dann gliedert ihr das mal entsprechend, wie wir das auch sonst machen \
K: <: *arbeiten, reden (von Zeitindex 15:34 bis 21:36)*

Der Lehrer leitet hier die Textarbeit nach einem üblichen Schema an, indem er zunächst die Frage nach der Textgattung stellt und – nach ersten Reaktionen (Z. 8, 11 f.) – die Schülerinnen und Schüler bittet, den Text in Sinnabschnitte zu gliedern. Diese Vorgehensweise ist zwar hermeneutisch plausibel und durch das Arbeitsheft auch nahegelegt, sie läuft hier jedoch suboptimal ab. Die erste Schüleräußerung (Z. 8) löst beim Lehrer sofort hektische Betriebsamkeit aus: Er beginnt, in seiner Tasche zu kramen, findet dort zunächst nichts, ruft den nächsten Schüler auf, hört ihm aber nicht aktiv zu, kramt stattdessen weiter, findet schließlich ein Buch in seiner Tasche, überreicht es dem ersten Schüler, lässt ihn darin blättern, stellt ihm eine Frage, beantwortet sie gleich selbst (Z. 17) und bricht die Phase ab, ohne noch weitere Reaktionen einzufangen. Hieran ist mehreres kritikwürdig. Zum einen ist es nicht schön, wenn – wie hier geschehen (Z. 11 f.) – Schüleräußerungen verhallen, ohne dass ihnen angemessene Beachtung geschenkt wird. Zum andern sollte die Phase, in der spontane Reaktionen gesammelt werden, natürlich nicht störend von anderen Tätigkeiten (Kramen nach einem Buch) überlagert werden. Im Hinblick auf die intendierte hermeneutische Grundhaltung, die ganz grundlegend (aktives) Zuhören umfasst, ist ein solches Verhalten besonders kontraproduktiv. Besser wäre es gewesen, die Phase bewusster zu gestalten, klarer von den Lektürephasen abzugrenzen und vielleicht auch methodisch zu unterfüttern (z. B. mit der „Blitzlicht-Methode“, (Klippert, 2001, S. 93)). Dies hätte nicht nur Vorteile für die Kommunikation gebracht, sondern hätte auch der notwendigen Umstimmung von Sinnerwartungen vor dem erneuten Lesen des Textes im zweiten Umlauf des hermeneutischen Zirkels Raum gegeben (vgl. Kap. 2.3.2.1.1).

…
S1: *(bei Zeitindex 16:12)* Was hat das denn mit Mathe zu tun?
L: bitte?
S1: Was das mit Mathe zu tun hat?
S2: Das ist Deutsch.
L: Das ist die Vorrede eines Mathebuchs.
S1: Ja, aber das so einzuteilen, das ist doch Deutsch und kein Mathe.
L: Joa. Aber n Text erfassen musst du auch in Mathe.
…
L: *(bei Zeitindex 16:53)* Aber schreibt bitte lesbar, ja!
…
L: *(bei Zeitindex 18:54) ermahnt einen Schüler*
S: *antwortet auf die Ermahnung* Bin fertig!
L: Ja, deswegen musst du nicht mit Quasseln anfangen. Geh in dich, sitz gerade, und dann ist gut!
…

Für die Schülerinnen und Schüler der an dieser Untersuchung teilnehmenden Klassen ist die Arbeit mit längeren Texten im Mathematikunterricht eine sehr ungewöhnliche Aufgabe. Dies gilt umso mehr, wenn – wie hier – die Texte zum eigentlichen Gegenstand des Unterrichts gemacht werden und nicht nur eine bloße Absprungfunktion in Richtung fachmathematischer Aktivitäten zu erfüllen haben. In Zeile 24 ff. äußert ein Schüler sein hierauf bezogenes, mutmaßliches Unbehagen. Die in seinen Worten mitschwingende Kritik mag als ein Beispiel für das oft anzutreffende Schubladendenken im Schulbetrieb (bei Schülern *und* Lehrern) gelten. Es ist jedoch interessant, dass diese Haltung nur in der Klasse C so offen artikuliert wurde. Das mag damit zusammenhängen, dass gerade in dieser Klasse ein besonders einseitiges Bild von Mathematik und Mathematikunterricht vorherrscht (vgl. 5.2.8.3), das nun möglicherweise stärker als in anderen Klassen irritiert wird.

Interessant ist auch das Geschehen in Z. 34 ff. Ein Schüler, der die Aufgabe erledigt hat, wird vom Lehrer ermahnt, er möge nicht „mit Quasseln anfangen“ sondern in sich gehen und gerade sitzen. In dieser kurzen Szene sieht man, wie sehr eine auf Gleichtakt orientierte Unterrichtsmethode Potenziale brachliegen lässt. Denkbar wäre doch gewesen, dass der Schüler, der schneller als andere fertig ist, sich mit anderen, ebenfalls schnellen Schülern austauscht (z. B. in Tandems). Im Mathematikunterricht der Klasse C sind kooperative Methoden jedoch unbekannt. Also wird von schnellen Schülern erwartet, dass sie still abwarten und gerade sitzen.

L: *(bei Zeitindex 21:36, also nach 6 Minuten)* So! .. Also, ich hab einige gesehen die fertig sind, die's auch gut gemacht haben. Das wolln wir mal zusammenfassen, also Vorschläge ... *(ruft Schüler auf)* J.! Abschnitt eins
S: *(unverständlich)*
L: achso und jetzt bis zwölf hab ich aufgeteilt gesehen bei jemandem vielleicht können wir es an der Stelle noch etwas kleinschrittiger feststellen
S: ja eins bis zwei weil am Anfang steht, ist das wie sone Überschrift im Namen Allahs
SS: *ironisch anerkennend* hoy hoy boaa ...
L: hört ihr mal auf /
schreibt an die Tafel:
I 1-2 Überschrift und Titel
also Überschrift und Titel, so und dann, *ruft Schüler auf* J., machen wir mal weiter
S: drei bis zwölf
L: drei bis zwölf, *schreibt an die Tafel:*
II 3-12
wie nennste das
S: Ja, ich habe dann .. Einleitung
K: *stöhnen*

L: Einleitung, Mittelteil, Schluss *(ironisch)* ja toll. *ruft Schüler auf* R.!
S: Huldigung Allahs?
L: ja, .. Huldigung . Allahs. *schreibt an die Tafel:*
II 3-12 Huldigung Allahs
Übrigens, was heisst eigentlich, das Wort wurde hier nicht übersetzt, obwohl ja alle arabischen Ausdrücke übersetzt werden, was heisstn Allah auf deutsch /
K: <: Gott
L: ja, also es heißt nur Gott, und man könnte es auch so übersetzen ne / so drei bis zwölf, *ruft Schüler auf* S.!
S: jetzt ist dreizehn bis fuffzehn. Äh . Gelehrte vergangener Zeiten
L: *schreibt an die Tafel:*
III 13-15
ja ist richtich, aber kann man vielleicht noch anders formuliern, *ruft Schüler auf* P.
S: öh Lob oder Lob, also vielleicht Lob für Bücher
L: Lob für Bücher .
S: ja, weil die wolln ja .. Lob-, vielleicht Lobpreisungen für die Bücher
L: Nee, also da würd ich die Gelehrten schon mit rein nehmen, also wie hast dus gesagt /
S: Gelehrte vergangener Zeiten
L: ja also sagen wir mal, könn wir ja kombinieren \ Lob für Gelehrte vergangener .. vergangener Zeiten *schreibt an die Tafel:*
III 13-15 Lob für Gelehrte vergangener Zeiten
so, dann hamm wir viertens
S: Viertens, sechzehn bis achtzehn beschreibt die ähh .. äh ..Vor- ähh ... die Vorgänger
L: sechzehn bis achzehn, jetzt müssen wir mal .. ja gut, die Vorgänger, ja kann man hier noch
schreibt an die Tafel
IV 16-18 Vorgänger Al-Khwarizmis
.. so fünftens .. so also ..
S: Da habe ich für n e u n zehn bis ausschließlich einundzwanzig: Zielsetzung und Motivation
L: das öh .. *schreibt an die Tafel*
IV 19-20
reicht mir nicht .
S: Sie wollens jetzt wieder in lateinisch ham . #
L: Zielsetzung und Motivation, *schaut in den Text (5 sec)* nee das äh finde ich, da fehlt was wichtiges *ruft Schüler auf* S.!
S: Würdigung Allahs
L: bitte? /
S: Würdigung Allahs
L: nee, da hast jetzt nicht zugehört. Neunzehn bis zwanzich fehlt mir was .. äh gehts nicht nur um die Motivation, und die könnte man ja auch benennen, *ruft Schüler auf* S.
S: ja der lobt ja auch den Kalif Al Mamun
L: ja also, Lob des Ka-lifen und da kann man das andere von St. ja nehmen und .. und Motivation der Arbeit
schreibt an die Tafel
V 19-20 Lob des Kalifen und Motivation der Arbeit
... So und dann hamm wir sechstens den Abschluss, habt ihr gerade gesagt, *ruft Schüler auf* S., hier
S: Auch Huldigung Allahs und .. ja, Verabschiedung und Huldigung Allahs
L: joa, ihr fahrt jetzt so auf das Huldigung ab, meinetwegen . Huldigung . *schreibt an die Tafel:*
VI 21-24 Huldigung Allahs
so .. das heisst
S1: Aber Moment mal, jetzt gibts bei Ihnen fünf Paragraphen, denn Zielsetzungen . ist gar nicht.
L: # Motivation .. *schreibt über das Wort ‚Motivation' das Wort ‚Ziel'*
S2: Die Zielsetzung # **umfasst** die Motivation und deswegen habe ich das auch nicht so weit wie S.

Der Lehrer beginnt die Plenumsbesprechung deutlich vor Ablauf der zugesagten Zeit, da nach seiner Beobachtung „einige" (Z. 38) fertig sind. Es werden nun aber nicht unterschiedliche Ergebnisse vorgestellt, begründet und diskutiert. Stattdessen wird im Lehrer-Schüler-Gespräch eine für alle verbindliche Unterteilung kleinschrittig (Z. 42!) entwickelt und an die Tafel geschrieben. Der Lehrer moderiert und fasst Schülerbeiträge zusammen (Z. 72, Z. 94), erhebt aber auch immer wieder seine eigenen An- und Einsichten zum Richtigkeitskriterium (Z. 70, Z. 84, Z. 86, Z. 91). Die Schülerinnen und Schüler kennen dieses schulmeisterliche Auftreten ihres Lehrers (Z. 85), und setzen sich mitunter auch dagegen zur Wehr (Z. 102 ff.). Zu einer echten Diskussion kommt es dabei allerdings nicht. Möglicherweise hängt damit zusammen, dass auf Seiten des Lehrers eine gewisse Geringschätzung gegenüber den Schülern zu spüren ist (Z. 36, 55).

L: Okay öh wenn wir uns das angucken. Wir haben gesagt das Mathevorwort in unseren Mathematikbüchern hat das nicht, . öh das heisst . warum fehlt das heute, oder was hat er denn jetzt so richtich zusätzlich? Man kann jetzt nochmal alles vorlesen, das mein ich nicht, sondern: was istn das andere, was ihn jetzt als Mathematiker oder meinetwegen Vorwortschreiber von unsern Mathebüchern äh unterscheidet? *ruft Schüler auf* S.!
S: Er ist sehr religiös ... äh . Am Anfang und am Ende erwähnt er Allah # und
L: Gut, # das hatten wir ja, religiös wäre hier erklärt *(zeigt auf die Nummern I und VI im Tafelanschrieb)* aber noch nicht die andern Dinge *(zeigt auf die Nummern II bis V)*, vielleicht gibts noch was Allgemeineres?
S: Also hier *(unverständlich)*, dass er . das Wissen mit Allah bekommen hat, oder dass er das . mit Hilfe Allah . all diese .. ja, diese .. Quadrate gezeichnet hat und dass er hier .. das .. durch Allah erklärt hat *(wird immer leiser, Rest unverständlich)*
L: joa naja – *ruft Schüler auf* P.
S: Er hat es nicht allein geschrieben und er dankt ja auch den anderen Leuten, die bisher die Arbeit geleistet haben, diese Erkenntnisse zu erlangen. Das würde heute niemand mehr machen. Sich bedanken für die Verdienste, das würde heute niemand mehr machen.
L: ja ja öh das heisst, er erwähnt die andere Leute (höchstens bei der Oscarverleihung) er erwähnt die andern Leute und öh den Kalifen und Allah das - *ermahnt Schüler* J.! ..
S: Ja, also ich denk mal, er hätte das Buch, hätt er gar nicht veröffentlichen können, also . wenn er dem Kalifen nicht gedankt hätte, dann hätt er das Buch gar nicht veröffentlichen können
L: Kann auch sein .. gut, das heisst, er sieht sich hier überhaupt nicht als Einzelner, der hier irgendwie abstrakt vom Himmel heraus die Mathematik macht, sondern sieht sich verbunden mit all den andern in der Tradition der Wissenschaft und mit andern \ guckt auch mal eure Chemie- und Biobücher an, die haben auch diese Illusion, als wären sie vor fünfzich Jahrn vom Himmel gefallen, als gäbs keine Tradition. Das ist aber falsch, also .. so Hausaufgabe .. ist, .. öh das ganze hier fertig zu machen *(Gong ertönt)* Ihr sollt das ganze Heft zu Ende stellen ..

Nach dem Erstellen der Gliederung versucht der Lehrer, die Schülerinnen und Schüler zu einer Reflexion über den Text anzuregen (Z. 105 ff.). Zwei Schüler nennen die religiöse Dimension (Z. 109, Z. 112 ff.), die schon in einer der spontanen Reaktionen angesprochen worden war (Z. 8). Sie treffen damit aber nicht ganz das, was der Lehrer offenbar hören möchte (Z. 110: „das hatten wir ja", Z. 115: „joa naja"). Dieser denkt an „was Allgemeineres" (Z. 111) und meint damit vor allem Al-Khwarizmis Bezugnahme auf die „Tradition der Wissenschaft" (Z. 124, Z. 126). Der Punkt wird von einem Schüler tatsächlich genannt (Z. 116), und ein weiterer weist sehr ansprechend auf die zu beobachtende, notwendige Verbeugung Al-Khwarizmis vor dem Kalifen als maßgeblicher Autorität seines Lebenskontextes hin (Z. 121). Die Schülerinnen und Schüler verfügen also über interessante Ideen, mit denen jedoch insgesamt nicht kreativ – und auch nicht sonderlich wertschätzend (Z. 115, Z. 123: „Kann auch sein" statt z. B. „Sehr gute/interessante Beobachtung!") – umgegangen wird. Angesichts des bevorstehenden Stundenendes gibt der Lehrer eine eigene Zusammenfassung (Z. 123 ff.), und nimmt den Schülerinnen und Schülern dabei auch das eigene Urteil ab (Z. 126: „Das ist aber falsch").

5.3.2.4.2.2 Einschätzungen

5.3.2.4.2.2.1 Aus Sicht des Beobachters

Der soeben dargestellte Unterrichtsverlauf hat erneut auf mögliche Schwierigkeiten aufmerksam gemacht, die sich bei der Durchführung einer hermeneutisch orientierten Unterrichtsreihe ergeben können. Im vorliegenden Fall waren vor allem zwei Problemfelder zu bemerken:

Zum einen verfügte die Klasse über keine passenden Kommunikations- und Interaktionsstrukturen, um sich wirklich intensiv über den Text auszutauschen. An den Plenumsgesprächen beteiligten sich nur wenige, und diejenigen, die es taten, mussten sich mit ihren Äußerungen überwiegend an den Erwartungen des Lehrers orientieren. Einen ähnlichen Befund hatten wir bereits in Klasse E beobachtet (vgl. Kap. 5.3.2.3.2). In der Einzel-/Partnerarbeitsphase wiederum wurden mögliche Diskussionspotenziale auch nicht genutzt. Schüler, die die Gliederungsaufgabe schnell erledigt hatten, konnten sich nicht etwa miteinander austauschen und ihre Ergebnisse vergleichen, sondern sollten den Mund halten, gerade sitzen und ‚in sich gehen'. Der sich in all dem manifestierende Befund von kommunikativer Kargheit ist natürlich kein spezielles und schon gar kein beabsichtigtes Merkmal des hier durchgeführten Unterrichtsexperimentes. Er kennzeichnet nach Aussagen der Beteiligten vielmehr den Alltag in den jeweiligen Klassen (vgl. Kap. 5.2.5) und spiegelt damit einen Sachverhalt wider, der in der Forschung wohlbekannt ist (Klippert, 2001, S. 22 ff.).

Zum andern verdeutlicht die dargestellte Szene einen Teil der Probleme, die entstehen, wenn sich mit der Lehrperson ein zusätzlicher Pol in das Spannungsgefüge des hermeneutischen Dreiecks drängt und dort eine dominierende Stellung einnimmt. Hermeneutische Prozesse können hiervon empfindlich tangiert werden. Unter anderem hängt dies mit den Machtverhältnissen im Klassenraum zusammen. Der hermeneutische Zirkel von Schülerinnen und Schülern bewegt sich nicht mehr frei im Feld zwischen Text, Autor und Rezipient, sondern wird durch das Agieren der Lehrperson massiv beeinflusst. Die Qualität solcher Beeinflussung kann durchaus verschieden sein. Sie kann hermeneutische Prozesse auch anregen oder unterstützen. Im vorliegenden Fall jedoch tendierte sie dazu, diese zu lähmen bzw. zu ersticken.

Immerhin zeigte die Klasse trotz der beschriebenen Widrigkeiten noch vielversprechende Ansätze. Blicken wir darum auf das, was die Schülerinnen und Schüler im Nachklang zur erlebten Stunde noch mitzuteilen hatten.

5.3.2.4.2.2.2 Aus Sicht der Beteiligten

Die folgenden Äußerungen haben Schülerinnen und Schüler der Klasse C nach Behandlung des Vorwortes von Al-Khwarizmi in ihren Lernjournalen notiert. Rechtschreibung und Zeichensetzung sind wie in den Originalen.

- „In diesem Vorwort werden Gründe und Nutzen dieses Buches genannt. Allah kommt am Anfang und am Ende vor, was auf einen hohen religiösen Einfluss schließen lässt."
- „In der heutigen Stunde war interessant, wie früher ein Vorwort geschrieben wurde. Heute würde niemand mehr seine Religion mit einbeziehen."
- „Das Vorwort war lesenswert."

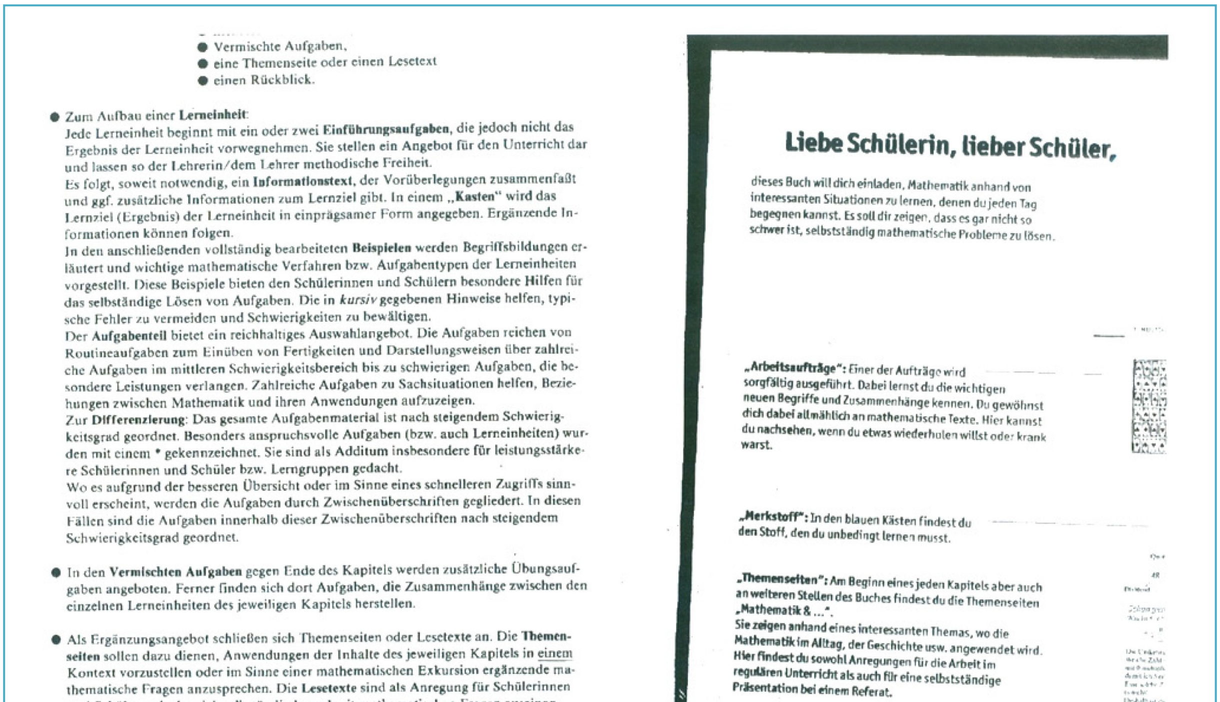
- „Das Vorwort ist sehr religiös gehalten. Er redet viel von Allah."
- „Al-Khwarizmi erwähnt auch die andern, die vor ihm gelebt haben."
- „Er dankt Allah und dem Kalifen."

usw.

Die Äußerungen geben in erster Linie den Inhalt des Vorwortes gemäß dem gemeinsamen Tafelanschrieb wieder. Weiterführende Gedanken – etwa im Hinblick auf Al-Khwarizmis Absicht, sich in eine bestimmte Tradition zu stellen, seine eigene Leistung einzuordnen, den Erfordernissen seiner eigenen Zeit zu dienen, etc. – werden hier genau so wenig wie im Unterricht expliziert. Die Schülerinnen und Schüler reproduzieren, sie kommen aber fast gar nicht auf Zusammenhänge zu sprechen und ziehen auch kaum Schlüsse (im Hinblick auf den Autor, auf seine Lebenswelt, auf die Problemgeschichte, etc.). Nach den Eindrücken in der Stunde war auch nicht mehr zu erwarten. Blicken wir darum noch in eine andere Klasse.

5.3.2.4.3 Klasse B2

Der Lehrer der Klasse B2 hatte zu Beginn der hier zur Rede stehenden Stunde seinen Schülerinnen und Schülern zusätzlich zum Arbeitsheft eine Fotokopie mit dem Vorwort eines modernen Mathematik-Schulbuches ausgeteilt. Die Fotokopie ist in der Abbildung 117 so dargestellt, wie sie im Unterricht verwendet wurde. Das folgende Transkript gibt das stattgehabte Unterrichtsgespräch wieder.



- Vermischte Aufgaben,
- eine Themenseite oder einen Lesetext
- einen Rückblick.

- Zum Aufbau einer **Lerneinheit**:
Jede Lerneinheit beginnt mit ein oder zwei **Einführungsaufgaben**, die jedoch nicht das Ergebnis der Lerneinheit vorwegnehmen. Sie stellen ein Angebot für den Unterricht dar und lassen so der Lehrerin/dem Lehrer methodische Freiheit.
Es folgt, soweit notwendig, ein **Informationstext**, der Vorüberlegungen zusammenfaßt und ggf. zusätzliche Informationen zum Lernziel gibt. In einem „**Kasten**" wird das Lernziel (Ergebnis) der Lerneinheit in einprägsamer Form angegeben. Ergänzende Informationen können folgen.
In den anschließenden vollständig bearbeiteten **Beispielen** werden Begriffsbildungen erläutert und wichtige mathematische Verfahren bzw. Aufgabentypen der Lerneinheiten vorgestellt. Diese Beispiele bieten den Schülerinnen und Schülern besondere Hilfen für das selbständige Lösen von Aufgaben. Die in *kursiv* gegebenen Hinweise helfen, typische Fehler zu vermeiden und Schwierigkeiten zu bewältigen.
Der **Aufgabenteil** bietet ein reichhaltiges Auswahlangebot. Die Aufgaben reichen von Routineaufgaben zum Einüben von Fertigkeiten und Darstellungsweisen über zahlreiche Aufgaben im mittleren Schwierigkeitsbereich bis zu schwierigen Aufgaben, die besondere Leistungen verlangen. Zahlreiche Aufgaben zu Sachsituationen helfen, Beziehungen zwischen Mathematik und ihren Anwendungen aufzuzeigen.
Zur **Differenzierung**: Das gesamte Aufgabenmaterial ist nach steigendem Schwierigkeitsgrad geordnet. Besonders anspruchsvolle Aufgaben (bzw. auch Lerneinheiten) wurden mit einem * gekennzeichnet. Sie sind als Additum insbesondere für leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler bzw. Lerngruppen gedacht.
Wo es aufgrund der besseren Übersicht oder im Sinne eines schnelleren Zugriffs sinnvoll erscheint, werden die Aufgaben durch Zwischenüberschriften gegliedert. In diesen Fällen sind die Aufgaben innerhalb dieser Zwischenüberschriften nach steigendem Schwierigkeitsgrad geordnet.

- In den **Vermischten Aufgaben** gegen Ende des Kapitels werden zusätzliche Übungsaufgaben angeboten. Ferner finden sich dort Aufgaben, die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Lerneinheiten des jeweiligen Kapitels herstellen.

- Als Ergänzungsangebot schließen sich Themenseiten oder Lesetexte an. Die **Themenseiten** sollen dazu dienen, Anwendungen der Inhalte des jeweiligen Kapitels in einem Kontext vorzustellen oder im Sinne einer mathematischen Exkursion ergänzende mathematische Fragen anzusprechen. Die **Lesetexte** sind als Anregung für Schülerinnen und Schüler gedacht, sich selbständig lesend mit mathematischen Fragen auseinanderzusetzen. Da das Ziel „lesen und verstehen" ist, enthalten diese Seiten keine Aufgaben.

- Den Abschluß jeden Kapitels bildet ein **Rückblick** im Umfang einer Doppelseite, in dem die zentralen Inhalte des gesamten Kapitels zusammengefaßt und an Beispielen verdeutlicht werden. Auf einer zweiten Seite werden Aufgaben zum Üben und Wiederholen bereitgestellt, die sich auf diese zentralen Inhalte beziehen. Zur Selbstkontrolle finden Schülerinnen und Schüler die Lösungen dieser Aufgaben am Ende des Buches.

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieses Buch will dich einladen, Mathematik anhand von interessanten Situationen zu lernen, denen du jeden Tag begegnen kannst. Es soll dir zeigen, dass es gar nicht so schwer ist, selbstständig mathematische Probleme zu lösen.

„Arbeitsaufträge": Einer der Aufträge wird sorgfältig ausgeführt. Dabei lernst du die wichtigen neuen Begriffe und Zusammenhänge kennen. Du gewöhnst dich dabei allmählich an mathematische Texte. Hier kannst du nachsehen, wenn du etwas wiederholen willst oder krank warst.

„Merkstoff": In den blauen Kästen findest du den Stoff, den du unbedingt lernen musst.

„Themenseiten": Am Beginn eines jeden Kapitels aber auch an weiteren Stellen des Buches findest du die Themenseiten „Mathematik & …".
Sie zeigen anhand eines interessanten Themas, wo die Mathematik im Alltag, der Geschichte usw. angewendet wird. Hier findest du sowohl Anregungen für die Arbeit im regulären Unterricht als auch für eine selbstständige Präsentation bei einem Referat.

Abbildung 117: Vorwort aus einem modernen Mathematikbuch. Diese Fotokopie wurde im Unterricht der Klassen B1 und B2 in der hier gezeigten Qualität im Unterricht verwendet.

5.3.2.4.3.1 Kommentiertes Unterrichtstranskript

Zu Beginn dieser Szene haben die Schülerinnen und Schüler gerade einige Minuten still mit der Fotokopie und dem im Arbeitsheft abgedruckten Vorwort Al-Khwarizmis gearbeitet. Die genauere Gliederung hatte der Lehrer an dieser Stelle noch nicht aufgegeben.

L geht herum, beobachtet, ermahnt und ermuntert
S: soll ich jetzt das erklären oder das erklären? *(hält Arbeitsheft in der linken und Fotokopie in der rechten Hand hoch)*
L: was solltet ihr denn tun? /
S: ääh, hier das durchlesen *(zeigt Fotokopie)* .. und . wie die Unterschied, also worum's da . (wie das halt) so ist
L: und was hast du raus?
S: ja erstmal bei . oh . al . ich hab al . also . bei dem, erstmal redet der über . also er dankt Allah und redet über die ganzen, über Mohammed und so . also erstmal erklärt er fast schon die ganze, . den ganzen Koran oder so . und dann kommt am, dann kommt am Ende erst wofür er's, wof- wofür seine mathematischen Kenntnisse . zu gebrauchen sind
L: also könn' wir das vielleicht einmal so ganz grob gliedern, öhm, worum geht es in den ersten drei Vierteln des Textes offensichtlich? / .. *(ruft Schüler auf)* C.!
S: ja um . Allah und Mohammed . und was die anderen vor ihm für Fehler, Fehler gemacht haben und was die, die, nachdem die Fehler gemacht haben, verbessert haben
L: hmm *(zustimmend, nickt anderem Schüler auffordernd zu)*
S: ja, die Geschichte der Mathematik und die, und der Wissenschaft
L: ja
S1: also erstmal woran er glaubt und **wie** er glaubt und was er damit erreichen wollte und öhm halt dann, . diese Mat-, also was die Mathematiker auch richtich gemacht, also ein insgesamt, er versucht die Wissenschaft noch mal aufzudröseln und öhm
L: hochzudrücken, aufzu-, oder was hast du gesagt?
S1: a u f zudröseln und öhm damit versucht er halt seins äähm . in das richtige Lis- ähllm, Licht zu stelln also dass er . mit den Kenntnissen der anderen noch mal zusammen was Neues macht
L: hmm . welchen Sinn mag das denn haben, diesen, bei diesem Vorwort öh was erst mal überhaupt nichts mit der Mathematik zu tun hat . also mit dem, was er in dem Buch . dann offensichtlich . schreibt . *(ruft Schüler auf, der Schüler ist iranischer Herkunft)* J.!
S: also in . bei uns, in iranischen, arabischen Büchern steht **immer** sowas davor, . dass man erst äh öhm im Namen Gottes das alles schreibt und dass man ihm dankt für dieses Wissen, was er ihm eingegeben \ Und hier redet er auch nicht nur über Gott oder Mohammed .. also, der sagt hier, dass ähm . er . er dankt **dem** Gott, der auch Mohammed geholt hat, um uns weiter zu bringen und der diejenigen geholt hat, die unserem Wissen (gegeben hat) \ dass das nicht nur die Menschen machen sondern Gott, weil er ihnen dieses Wissen gegeben hat, und . um es uns zu . # äh zeigen
L: aha # ja sehr schön das ist ja schon ne sehr . gute Übertragung offensichtlich auch auf andere . Bücher öhm . was hat das denn mit der Mathematik zu tun? /
S: keine Ahnung
L: .. was bezweckt er mit solchen Vorworten offensichtlich / *(ruft Schüler auf)* N.!
S: öh vielleicht, dass ohne Gott halt diese Mathematik gar nicht gäbe oder so
L: und wär das schlimm?
S1: ja!
L: findst du das schlimm? /
S: dann würde im Moment, also heutzutage, alles auseinanderbrechen
L: ok also das war sicherlich damals noch nicht so, aber ich denke, es wird deutlich in dem Text öh dass er das Wissen für etwas ganz Wertvolles hält . und dass er, um das . weiterzugeben, eben dieses Buch schreibt . und wenn wir zumindest unser Vorwort aus dem modernen Buch mal damit vergleichen
S: Tss! *(verächtlich)*
L: öh welchen Anspruch hat unser Vorwort nur? .. *(ruft Schüler auf)* M.!
S1: Fünf minus!

S: zu erklärn, worum es darin geht, wie . die Seiten aufgebaut sind . und öhm . Mathematik vielleicht weil's ja halt nicht so von . den meisten Schülern als Lieblingsfach angesehen wird vielleicht auch ein bisschen . näher zu bringen
L: gut, wird darauf Rücksicht genommen in dem Vorwort, wird da klar gemacht wofür . es überhaupt wichtich ist, solch ein Buch zu schreiben oder darin zu arbeiten? /
S: Nö, ich denke nicht.
L: *(Gong ertönt)* öh ich bitte euch das jetzt, was die meisten nicht hier schriftlich getan haben, zu Hause nachzuholn, dass wir also diese Abschnittsuntergliederung auch wirklich schriftlich in . ähm dieses Heft eintragt.

Die in dieser Szene zu Wort kommenden Schülerinnen und Schüler benennen treffsicher, wenn auch etwas ungelenk, die hauptsächlichen Kontexte, die Al-Khwarizmi im Vorwort seiner ‚al-jabr' zur Sprache bringt. Sie lauten: Glauben (Z. 6 f.), Tradition (Z. 18 ff.) und Streben nach Wissen (Z. 27 ff.), (vgl. Kap. 3.1.1.2.4). Ein Schüler vermutet sehr ansprechend, dass Al-Khwarizmi mit dieser Kontextualisierung seine eigenen Leistungen „ins rechte Licht" stellen (Z. 21), sie also im Hinblick auf die genannten Zusammenhänge gewürdigt wissen möchte. Aus hermeneutischer Sicht gibt er damit einen ganz wesentlichen Verstehensimpuls (vgl. Kap. 2.3.2.1), der bei seinen Mitschülern auch sichtlich verfängt: Ein aus dem Iran stammender Klassenkamerad, der eine gewisse Vertrautheit mit arabischen bzw. iranischen Büchern zu besitzen scheint, äußert sich (Z. 26 ff.). Er kennt die Basmala und ihre Verwendung (vgl. Kap. 3.1.1.2.4), er weiß – möglicherweise aufgrund seines persönlichen Hintergrundes – auch etwas über den damals wie heute noch vergleichsweise hohen Stellenwert der Religion in der islamischen Kultur. In seinem Beitrag beschreibt er sehr schön die religiös geprägte Sichtweise Al-Khwarizmis, in der Gottes Wirken als fundamental, inspirierend und segensbringend für die Menschheit dargestellt wird. Der Lehrer, der – anders als sein Kollege in Klasse C – die Schülerinnen und Schüler lobt (Z. 32) und sie ermuntert (Z. 37, 39), ergänzt diesen Gedanken mit der Feststellung, dass Al-Khwarizmi das (von Gott gestiftete und übermittelte) Wissen als etwas Wertvolles ansehe, das sich nicht weiter – durch Anwendbarkeit, Interessantheit etc. – zu legitimieren habe (Z. 41, 48 f.). An dieser Stelle wird der Kontrast zum vergleichsweise matten Vorwort des modernen Mathematikbuches besonders deutlich (Z. 47 f.). Dies geht auch aus den spontanen Reaktionen einiger Schüler hervor (Z. 44, 46). Blicken wir im nächsten Abschnitt auf weitere Einschätzungen.

5.3.2.4.3.2 Einschätzungen

5.3.2.4.3.2.1 Aus Sicht der Beteiligten

Die folgenden Zitate haben die Schülerinnen und Schüler der Klasse B2 in ihren Lernjournalen notiert. Rechtschreibung und Zeichensetzung sind wie in den Originalen.

- „Dieses Vorwort ist ganz anders als die Heutigen! In diesem Vorwort wird gebetet. Allahs [sic] wird dabei verehrt."
- „Dieses Mathematikbuchvorwort geht auch stark auf die Religion und Gottes Taten ein. Bei uns gibt es auch ein Vorwort. Es beinhaltet aber weder einen Satz über alte Gelehrte noch über Gott."
- „Es [das Vorwort Al-Khwarizmis] unterscheidet sich von den Vorwörtern in heutiger Zeit, da er erst Allah dankt und da er die Geschichte grob und kurz erklärt. Außerdem gibt er konkrete Beispiele, wo Mathematik nötig ist. Das moderne Vorwort erklärt nur grob, wie man einzelne Seiten zu verstehen hat."
- „Das Vorwort zeigt, wie wichtig Religion in der damaligen Gesellschaft war."
- „Al-Khwarizmi war ein gläubiger Moslem."
- „Vielleicht war er nicht unbedingt so religiös, aber in der damaligen Zeit wurde es von ihm erwartet, dass er Allah und dem Kalifen dankt."

- „Es [das Vorwort Al-Khwarizmis] vermittelt uns mehr Ambitionen und will und [sic] erklären, dass Wissen etwas ist, wofür man dankbar sein sollte und dass Gott uns diese Gabe des Erkennens gab. Wir sollen dankbar sein und sollen darüber nachdenken."
- „Er [Al-Khwarizmi] wittmet [sic] seine Arbeit einem Gott. Er bezieht sich auf die Geschichte seines Volkes. Er berichtet auch von anderen Gelerten [sic]."
- „Al-Khwarizmi reiht sich in die Tradition der Mathematiker ein."
- „Im modernen Buch steht nur wo ich was finde."
- „… in den heutigen Vorwörtern steht nichts über Gott, sondern über die Themen im Buch …"
- „Dort [in den heutigen Vorwörtern] wird nur ausgeführt, was das Buch zeigen soll und nicht, wie es entstanden ist.
- „Das Vorwort unserer Mathebücher ist nicht von solchen religiösen Gedanken geprägt. Überhaupt wird die Tradition und die Vorgeschichte zum Buch fast gänzlich verschwiegen. Das moderne Buch besitzt ein sachliches Vorwort, das allerdings auch kaum Inhalt besitzt."
- „Heutzutage handeln die Vorwörter nur von dem Gebrauch des Buches, und es werden Schüler/innen Tipps und Informationen gegeben."

Praktisch alle Äußerungen verweisen auf deutlich wahrgenommene Unterschiede zwischen heutigen Vorworten und dem Vorwort Al-Khwarizmis. Das moderne Vorwort wird demnach zwar generell als sachbezogener und zweckorientierter, in gewisser Weise jedoch auch als ‚ärmer' bzw. uninteressanter beschrieben. Dies zeigt sich schon rein äußerlich in der häufigen Verwendung von abqualifizierenden Sprachpartikeln wie ‚nur', ‚kaum' etc. Inhaltlich wird zumeist das Fehlen jeglicher kultureller und geschichtlicher Kontexte als Mangel benannt. Zuweilen wird damit auch eine ästhetische Unterlegenheit verknüpft (in einer Pilotklasse: „gibt bei uns kein schönes Vorwort"). Im Hinblick auf die Intentionen der hermeneutischen Orientierung ist dies ein höchst interessanter Befund, der die positive Bedeutung solcher Kontext-Elemente auch auf affektiver Ebene unterstreicht.

Eine zweite Feststellung ist bemerkenswert. Im Gegensatz zur Klasse C bleiben die Schülerinnen und Schüler der Klasse B2 sichtlich nicht bei der knappen Reproduktion von einzelnen Aussagen aus dem Vorwort stehen. Sie äußern sich länger und umfassender und stellen auch Zusammenhänge zum Autor, seinen (mutmaßlichen) Absichten und seiner (aus dem Text erschlossenen) Lebenswelt her. Man darf hierin wohl das Nachwirken einer offeneren und auch ergiebigeren Diskussion im Unterricht sehen.

5.3.2.4.3.2.2 Aus Sicht des Beobachters

Die Idee des Lehrers, seiner Klasse ein modernes Vorwort zum Vergleich vorzulegen, kann als voller Erfolg angesehen werden. Die Kontrastwirkung hat die Sinne der Schülerinnen und Schüler für die Besonderheiten des Textes Al-Khwarizmis noch einmal in besonderer Weise geschärft und sie zu relevanten Beobachtungen und interessanten Anschlussüberlegungen im Hinblick auf die (autorenbezogenen und lebensweltlichen) Kontexte geführt. Beachtung verdient in diesem Zusammenhang die zurückhaltend-unterstützende Moderation des Lehrers, die – anders als in der ebenfalls von ihm unterrichteten Klasse B1 – den Gedankenfluss der Schülerinnen und Schüler zu fördern vermochte, ohne sie zu dominieren. Zu den positiven Eindrücken passt, dass die Stunde, aus der die Szene entnommen wurde, zugleich die Stunde mit den durchschnittlichen höchsten Beliebtheitswerten der ganzen Reihe in der Klasse B2 war (im Hinblick auf Interessantheit).

5.3.2.5 Einordnung

Die in den vorigen Abschnitten vorgestellten und analysierten Transkripte hinterlassen einen durchaus gemischten Eindruck. Neben einigen schönen Stunden dokumentieren sie auch Unterricht, der aus hermeneutischer Sicht skeptisch zu beurteilen ist und die Frage aufwirft, welche Wirkungen er wohl erzielt haben mag.

Transkripte sind zur Beantwortung dieser Frage jedoch nur ganz bedingt geeignet. Sie geben zwar eine gewisse Anschauung davon, was im Unterricht geschehen ist, bilden dabei aber nur einen kleinen Ausschnitt aus einem sehr komplexen Ganzen ab und zeigen lediglich das, was sich an der Oberfläche dieses Ganzen abgespielt hat. Auskünfte darüber, wie Schülerinnen und Schüler den stattgehabten Unterricht tatsächlich wahrgenommen haben, wie sie ihn vor allem im Vergleich zum Unterricht, den sie gewohnt sind, beurteilen, wie er ihre Leistung, ihr Denken und Meinen beeinflusst haben mag etc., geben Transkripte nicht.

Es ist darum nicht nur interessant, sondern zur Beantwortung der empirischen Forschungsfragen auch unerlässlich, den Blick der beteiligten Schülerinnen und Schüler in die Untersuchung einzubeziehen und zu analysieren. Dies soll in den nächsten Abschnitten geschehen.

5.3.3 Wahrnehmungen der Schülerinnen und Schüler zum experimentellen Unterricht

In diesem Abschnitt dokumentiere ich das Material, das die Schülerinnen und Schüler der Experimentalgruppe zur Beantwortung der ersten empirischen Forschungsfrage dieser Studie („Wie verändert der Unterricht mit historischen Quellen das Unterrichtsgeschehen?“) beigetragen haben. Hierzu gehe ich zunächst auf die Ergebnisse von Punktabfragen in den einzelnen Klassen ein (5.3.3.1), bevor ich differenzierte Daten zu den wahrgenommenen Schwerpunkten in der Reihe darstelle (5.3.3.2).

5.3.3.1 Wahrgenommene Kontextelaborationen

Nach Abschluss der eigentlichen Unterrichtsreihe (aber noch vor dem Leistungstest) habe ich in jeder Klasse eine Punktabfrage durchgeführt. Die Schülerinnen und Schüler sollten auf diese Weise das relative Gewicht der stattgehabten Kontextelaborationen beurteilen. Zu diesem Zweck legte ich jeder Klasse ein Wandplakat vor, auf welchem die Schülerinnen und Schüler frei (und unbeobachtet) punkten konnten. Ein Beispiel zeigt die folgende Abbildung 119. Die drei Zeilen – „der fachlich-mathematische Inhalt“, „die Person Al-Khwarizmi“, „der geschichtliche Hintergrund“ – beziehen sich auf die Pole des in Kap. 2.3.2.1.4 und Kap. 2.3.4.2 dargestellten hermeneutischen Dreiecks. Die Bepunktung beschreibt somit die von den Schülerinnen und Schülern wahrgenommenen Elaborationen von Kontextdimensionen.

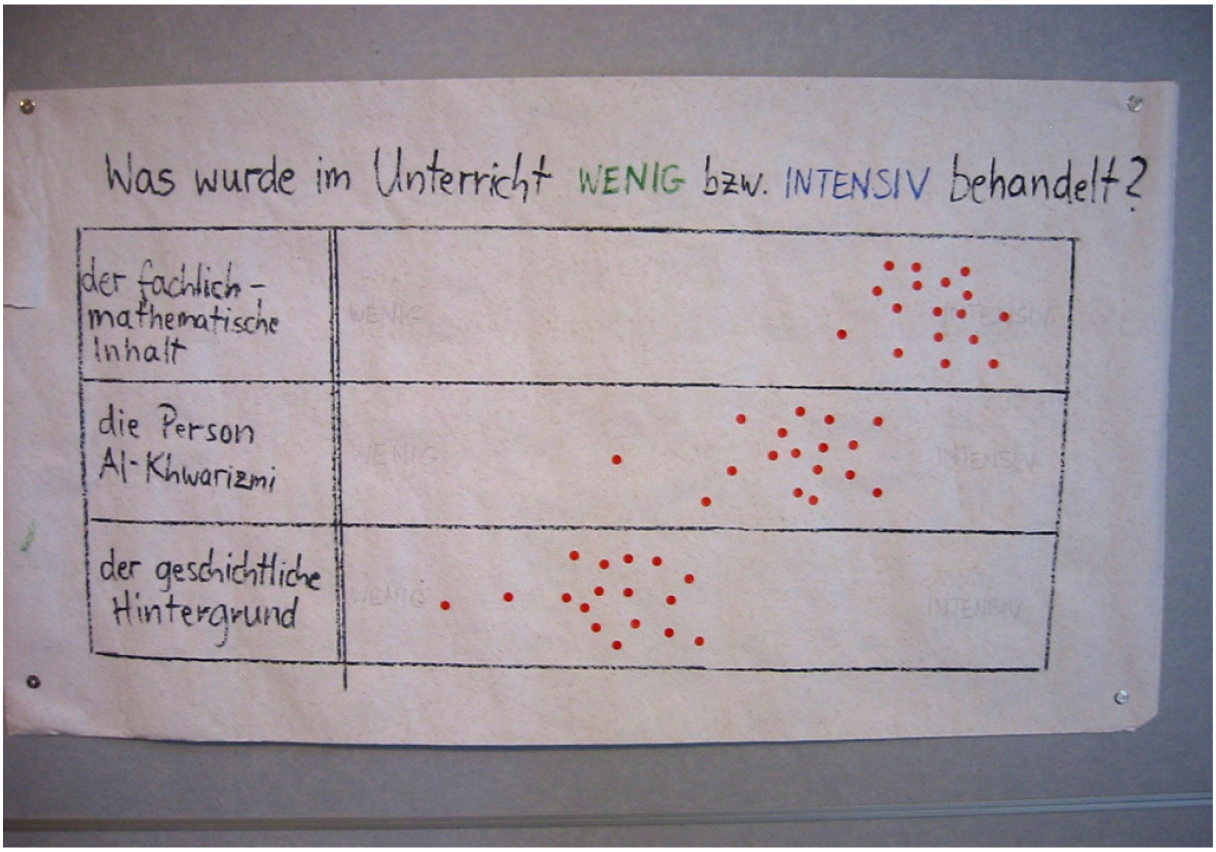


Abbildung 118: Plakat zur Punktabfrage (Klasse B2). Die Schülerinnen und Schüler konnten verdeckt punkten.

Die Punkte wurden mit einfachen Abstandsmessungen in ganze Zahlen zwischen 0 und 100 verwandelt, wobei 0 für minimale und 100 für maximale Elaboration stand. In jeder Klasse wurde anschließend für jede Dimension der Mittelwert gebildet. Mit diesen Werten wurden Netzdiagramme wie nachstehend gezeichnet:

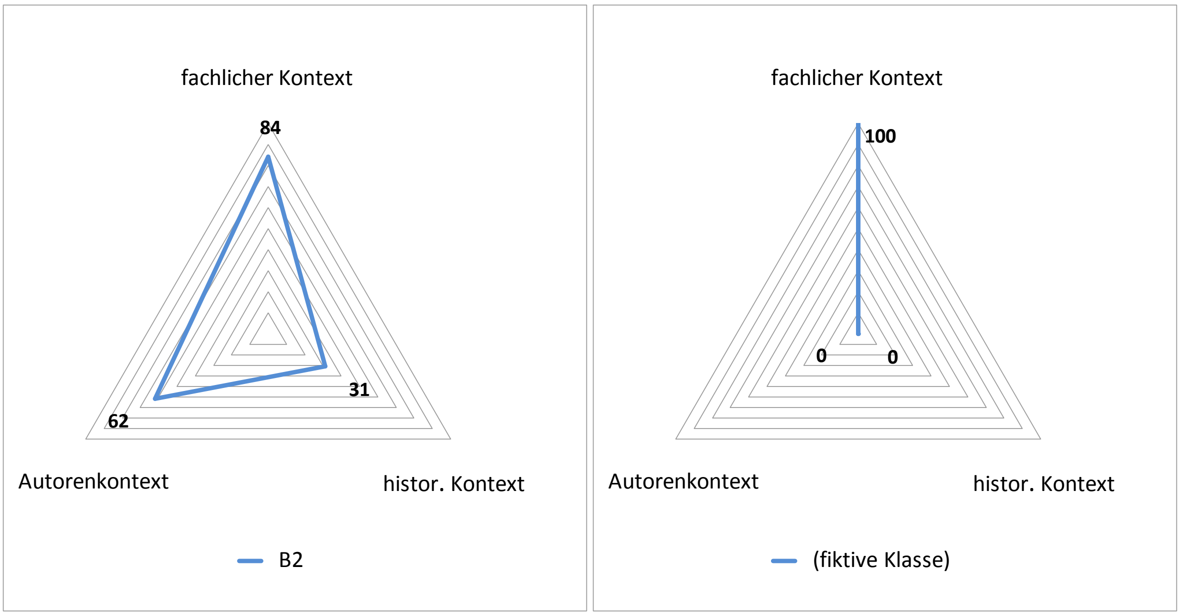


Diagramm 23: Wahrnehmung von Kontextelaborationen im Netzdiagramm. Links der Unterricht in Klasse B2, rechts idealtypisch ein vollständig auf fachliche Inhalte konzentrierter (fiktiver) Unterricht.

Das linke Diagramm zeigt in aggregierter Form, in welchem Maß die Kontextaufbereitungen von den Schülerinnen und Schülern (hier in Klasse B2) wahrgenommen wurden. Die deutlichste Ausprägung weist dabei der fachliche Inhalt auf (Mittelwert 84), relativ dicht gefolgt von der Autorendimension (62). Der historische Kontext spielte demgegenüber eine untergeordnete Rolle (31). Ein rein auf fachliche Inhalte bezogener Unterricht würde in dieser Darstellung das Bild eines zur vertikalen Linie degenerierten Dreiecks ergeben ergeben (rechtes Diagramm). Die Basisbreite (und -schiefe) stellt somit eine Veranschaulichung der stattgehabten Kontexterschließung dar, die Spitzwinkligkeit des Dreiecks hingegen ist ein Maß für die Konzentration auf fachliche Dimensionen (jeweils aus Sicht der Lernenden). Die mögliche Spannweite wird in alle drei Richtungen durch die Gitternetzlinien angedeutet. Ein Unterricht, der keine der genannten Kontexte in nennenswerter Weise elaboriert hätte, würde sich dementsprechend in einem sehr kleinen Dreieck abbilden.

Diagramm 24a-d: Wahrnehmung von Kontextelaborationen im Netzdiagramm nach Klassen.

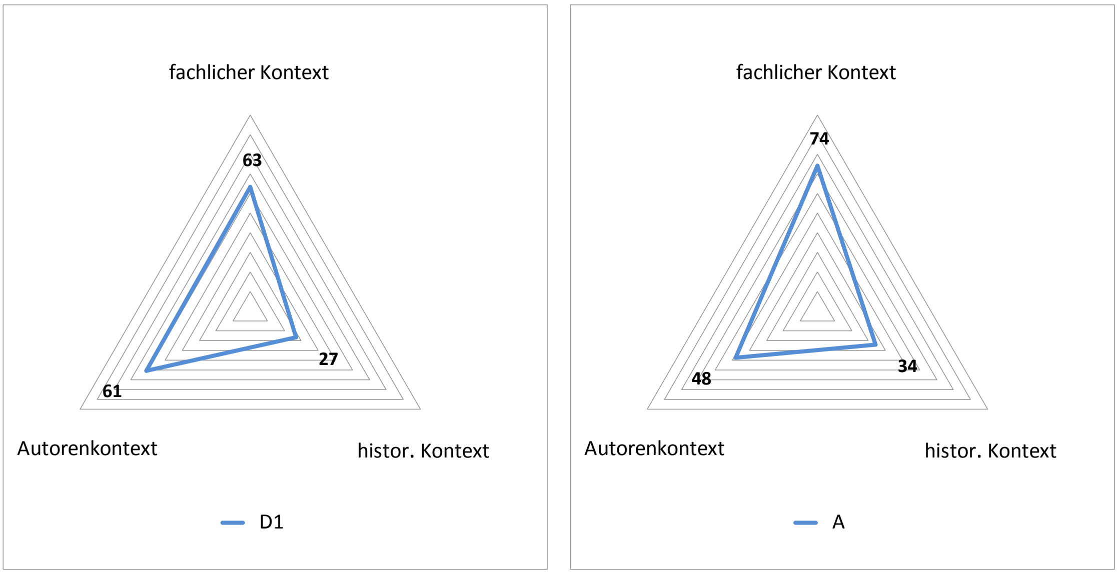


Diagramm 24e-f: Wahrnehmung von Kontextelaborationen im Netzdiagramm nach Klassen.

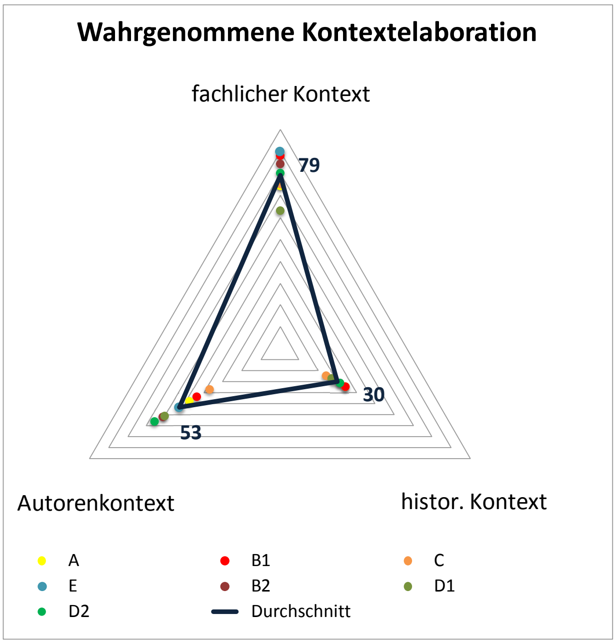


Diagramm 25: Wahrnehmung von Kontextelaborationen im Netzdiagramm. Durchschnittslinie und gleichzeitiger Überblick über alle Experimentalklassen.

Relativ hohe Ausprägungen in Richtung Autorenkontext zeigen die Klassen B2 (62), D1 (61) und D2 (66), geringe dagegen C (37) und B1 (41). A (48) und E (53) stehen in der Mitte. Ein solcher Befund hat sich nach Analyse der Transkripte schon abgezeichnet. Die Klasse E weist die größte Zuspitzung auf den fachlichen Kontext auf. Hinsichtlich der Fachlichkeit zeigen neben E (90) noch B1 (88), B2 (84) und D2 (80) die höchsten Werte. Schlusslicht ist hier D1 (63). Der historische Kontext schließlich spielte in allen Klassen eine weniger wichtige Rolle. Die Werte liegen hier relativ einheitlich zwischen mageren 24 und 34.

Eine Zusammenschau aller Ergebnisse mit den jeweiligen Durchschnittswerten liefert neben Diagramm 25 auch Tabelle 27. Die von den Schülerinnen und Schülern empfundene Schwerpunktsetzung kann hier im Vergleich sehr schön abgelesen werden.

	fachlicher Kontext	Autorenkontext	historischer Kontext
E	90	53	28
B1	88	44	34
B2	84	62	31
D2	80	66	31
C	75	37	24
A	74	48	34
D1	63	61	27

Tabelle 27: Maße der wahrgenommenen Kontextelaborationen in den Experimentalklassen. Grüne Färbungen zeigen (vergleichsweise) hohe, rote Färbungen niedrige Werte an. Der historische Kontext spielt eine untergeordnete Rolle und wurde dementsprechend nicht eingefärbt.

Die natürliche Frage, die sich nun aufdrängt, lautet: Wie hat diese (jeweils unterschiedliche) Weitung das Unterrichtsgeschehen aus Sicht der Schülerinnen und Schüler im Einzelnen beeinflusst? Die Antwort hierauf wird im nächsten Abschnitt gegeben.

5.3.3.2 Differenzierte Wahrnehmungen zum stattgehabten Unterricht

Die Darstellungen im vorigen Unterabschnitte haben überzeugende Belege für eine tatsächlich wahrgenommene, wenngleich unterschiedlich intensive Beeinflussung des Unterrichts in den Experimentalklassen durch Elaboration von Kontexten liefern können. In diesem Abschnitt soll dieser Befund mit weiteren Daten präzisiert werden. Zu diesem Zweck werde ich dokumentieren, wie sich die wahrgenommene Häufigkeit typischer Tätigkeiten im Unterricht während der Intervention verändert hat. Den Darstellungen liegen die Antworten der Schülerinnen und Schüler auf entsprechende Fragen im Post-Fragebogen (Anhang F) zugrunde. Die Items entsprechen dabei genau jenen, die auch vor der Intervention abgefragt und in Kap. 5.2.2 differenziert dargestellt wurden. Zum Vergleich beschränken wir uns sinnvollerweise auf die Prä-Ergebnisse in der Experimentalgruppe (vgl. Kap. 5.2.2.2). Die Zahlen entsprechen – wie oben – den folgenden Aussagen der von den Lernenden ausgefüllten Rating-Skala:

Häufigkeit	das kommt im Unterricht nie vor	das kommt im Unterricht seltener vor	das kommt im Unterricht öfters vor	das kommt im Unterricht sehr oft vor
Codierung	1	2	3	4
Intervalle	0,5-1,5	1,5-2,5	2,5-3,5	3,5-4,5

Tabelle 28: Codierung der Ratingstufen im Fragebogen und Intervallbildung.

Es ergibt sich die Darstellung in Diagramm 26 (vgl. Tab. CD.64a). Sie zeigt deutliche Verschiebungen in zahlreichen Items (dunkelblaue vs. hellblaue Linie). Der starke Anstieg in den Items „mathematische Texte lesen" sowie „geometrisch konstruieren, zeichnen" ist kaum verwunderlich. Doch darüber hinaus wurden noch weitere Tätigkeiten, die vor allem mit Prozesskompetenzen wie Kommunizieren und Problemlösen zu tun haben, verstärkt wahrgenommen (Anstieg in der rechten Hälfte des Diagramms: „mathematische Sachverhalte mit anderen diskutieren", Repräsentationsmodi wechseln, „mathematische Probleme analysieren, Vermutungen aufstellen, probieren, knobeln"). In den Hintergrund traten demgegenüber die eher technisch-formalen Tätigkeiten wie Termumformungen, Rechnen und die Arbeit mit dem Taschenrechner (Absinken links oben im Diagramm). Die Signifikanzen dieser Änderungen lassen sich statistisch überprüfen (Tab. CD.64b). Bis auf die Änderungen des Items „Text- oder Sachaufgaben bearbeiten“, „anderen etwas erklären“ (beide nicht signifkant) sowie „selbst Beweise durchführen“ (signifikant) und „mathematisch argumentieren und begründen“ (hochsignifikant) werden alle anderen Änderungen als höchstsignifikant ausgewiesen. Der Rückgang im Item „Beweise verstehen, die der Lehrer vormacht“ ist vermutlich damit zu erklären, dass während des Experiments die entsprechenden Inputs hauptsächlich vom historischen Quellentext und nicht von der Lehreperson ausgingen.

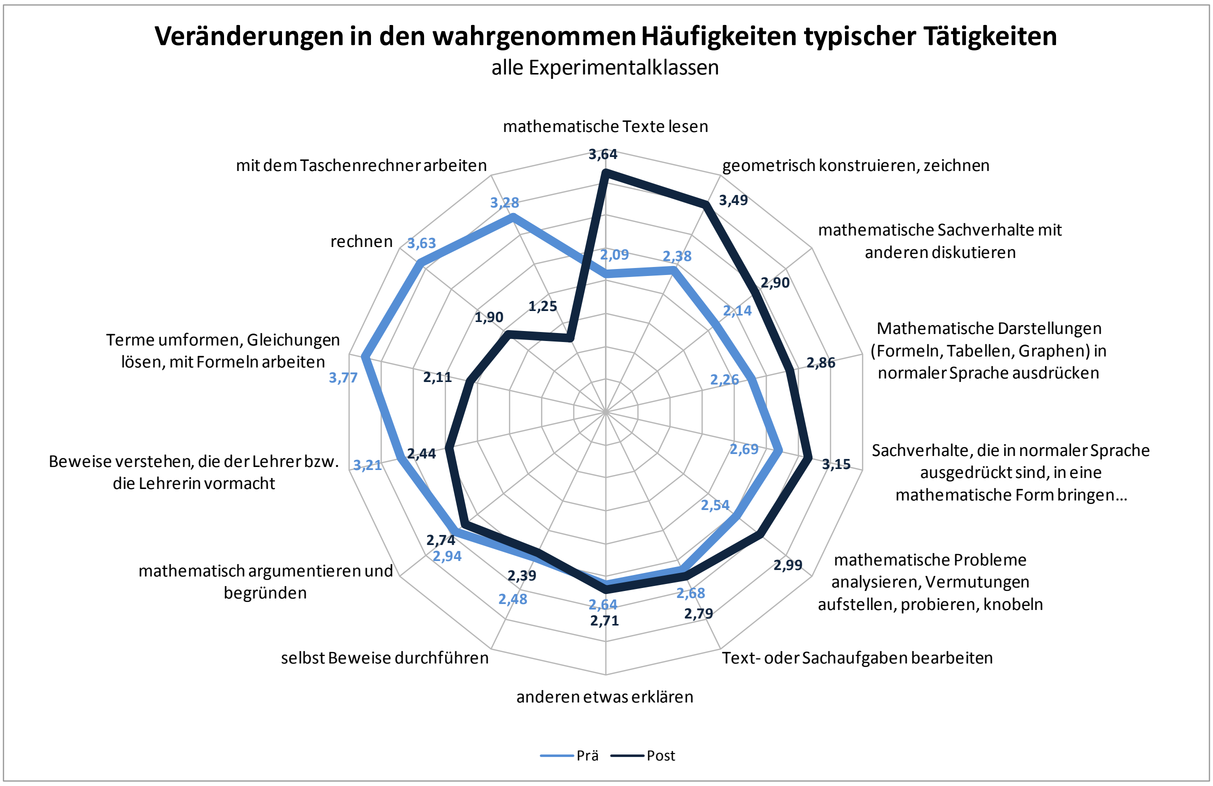


Diagramm 26: Wahrgenommene Verschiebungen in den Häufigkeiten typischer Tätigkeiten im Mathematikunterricht während des Experimentes: Durchschnitt aller Schülerinnen und Schüler in den Experimentalklassen. Die hellblaue Linie zeigt die vor der Intervention erhobenen Aussagen zum üblichen Unterricht (Prä), die dunkelblaue Linie die Einschätzungen des experimentellen Unterrichts (Post).

Solche Diagramme lassen sich mit den abgefragten Daten auch klassenweise erstellen (vgl. Tab. CD.65a). Das Diagramm 27 zeigt dies am Beispiel der Klasse B1. Außer den beiden dicken Linien, die ausschließlich auf Aussagen aus dieser einen Klasse beruhen, enthält das Diagramm zwei gestrichelte Linien, die die durchschnittlichen Werte aller Klassen wie in Diagramm 26 noch einmal wiedergeben. Die Items sind auch in der gleichen Reihenfolge sortiert. Wie man erkennen kann, sind die Wirkungen der Intervention in Klasse B1 offenbar besonders ausgeprägt: Die durchgezogene blaue Linie, die die Aussagen zum experimentellen Unterrichts darstellt, liegt in fast allen Items mindestens gleichauf mit, oft sogar oberhalb der gepunkteten blauen Durchschnittslinie. Hinzu kommt, dass die Klasse B1 von einem sehr niedrigen Niveau – dem niedrigsten aller Klassen – aufgestiegen ist. Dies ist an der näheren Lage der hellblauen Linie zum Mittelpunkt im Vergleich zur hellblauen gestrichelten Durchschnittslinie zu erkennen. Der Unterricht in Klasse B1 wurde also nach Wahrnehmung der Schülerinnen und Schüler während des Experiments *im besonderen Maße* in den bereits genannten Gebieten Problemlösen, Argumentieren und Kommunizieren bereichert, während das Absinken in den technisch-formalen Teilbereichen durchaus dem Durchschnitt entspricht. Interessant ist noch die

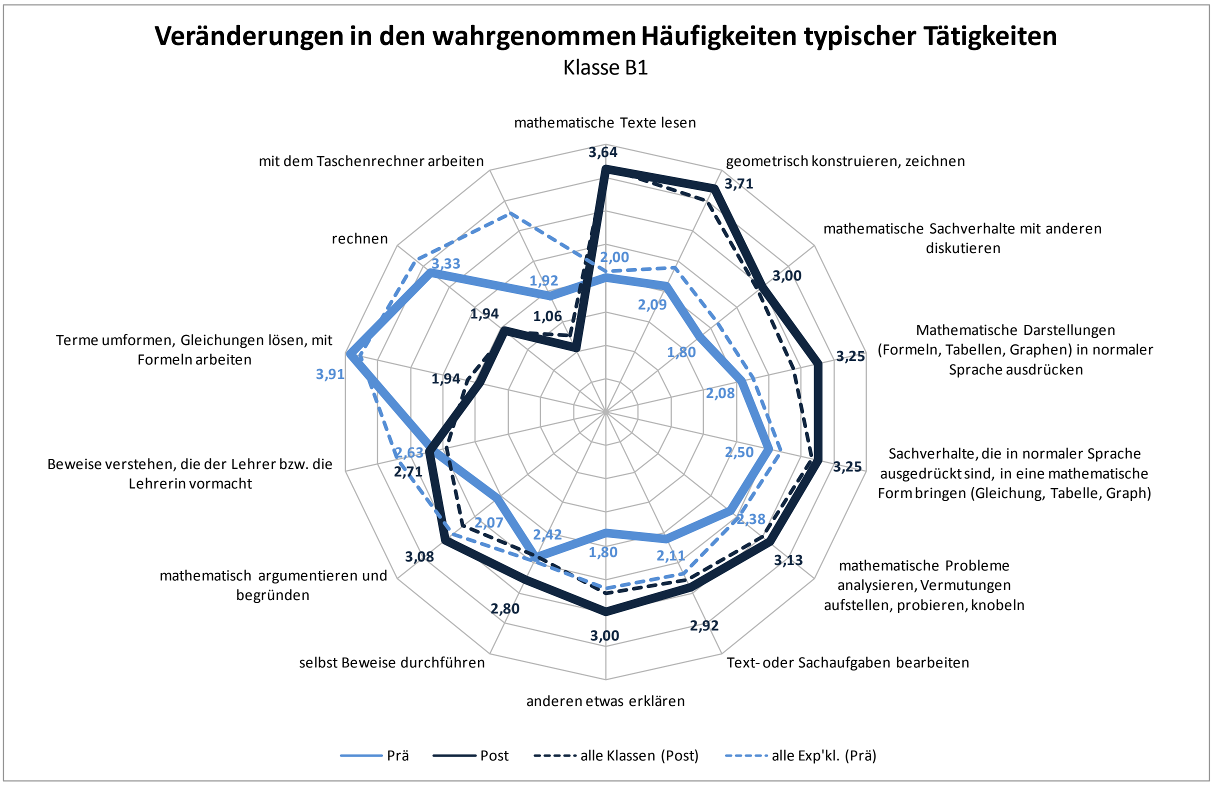


Diagramm 27: Wahrgenommene Verschiebungen in den Häufigkeiten typischer Tätigkeiten im Mathematikunterricht während des Experimentes: Durchschnitt aller Schülerinnen und Schüler in Klasse B1. Die durchgezogenen Linien haben die Bedeutung wie in Diagramm 26. Die gestrichelten Linien geben noch einmal die Durchschnittswerte über alle Experimentalklassen wieder.

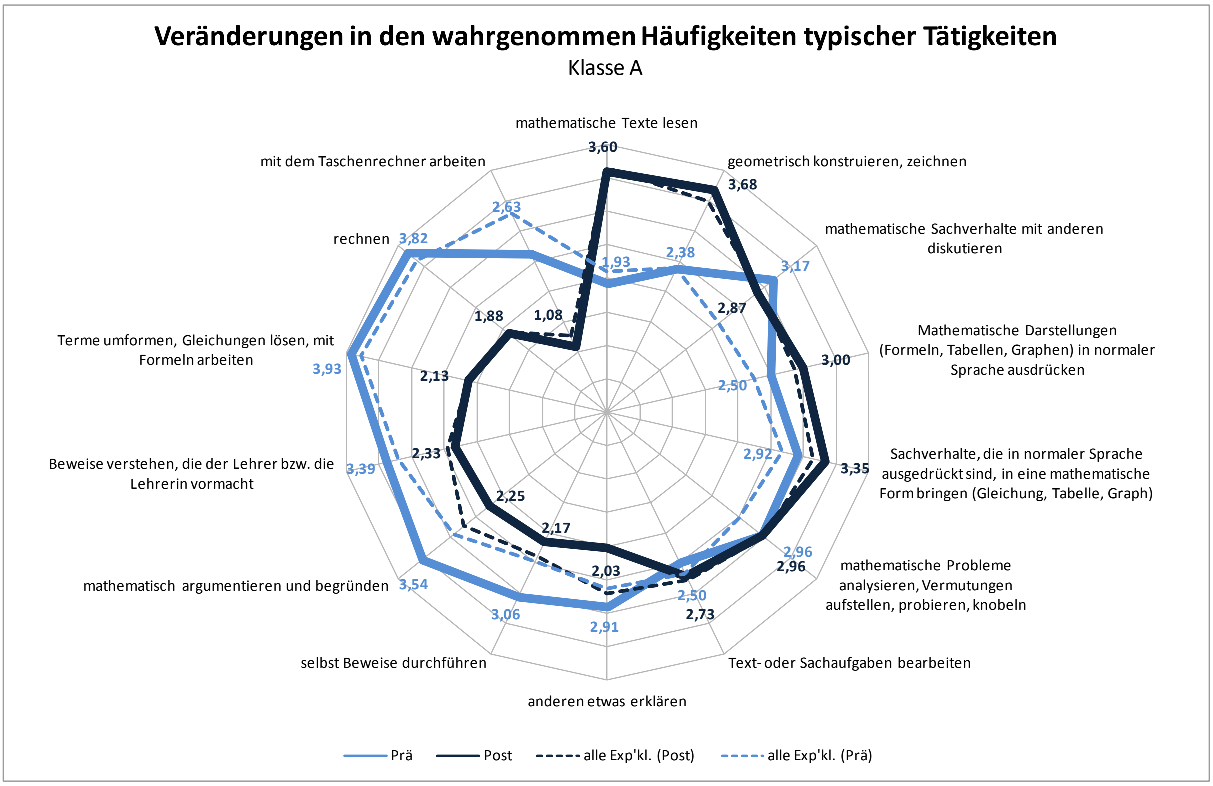


Diagramm 28: Wahrgenommene Verschiebungen in den Häufigkeiten typischer Tätigkeiten im Mathematikunterricht während des Experimentes: Durchschnitt aller Schülerinnen und Schüler in Klasse A.

Beobachtung, dass der Lehrer in Klasse B1 nach Wahrnehmung der Lernenden eine im Vergleich zum Durchschnitt größere Rolle als Inputgeber einnimmt (Item „Beweise verstehen, die der Lehrer vormacht“). Dies deckt sich durchaus mit den Eindrücken aus den Transkriptausschnitten.

Ein ganz anderes Bild ergibt sich in Klasse A. Hier bleibt die durchgezogene dunkelblaue Linie nicht nur viel häufiger unterhalb der gestrichelten dunkelblauen Linie sondern oft auch unterhalb der hellblauen durchgezogenen Linie. Diese liegt ihrerseits in fast allen Items oberhalb der hellblauen gestrichelten Linie. Das bedeutet, dass die Klasse bereits vor der Intervention einen überdurchschnittlich facettenreichen Unterricht erlebt hat, der von der experimentellen Unterrichtsreihe offenbar nicht bedeutend bereichert werden konnte – vielleicht eher im Gegenteil. Man kann dies rein optisch ahnen, da die von der blauen Linie umschlossene Fläche etwas kleiner wirkt als diejenige, der von der hellblauen Linie umfasst wird. Neben dem zu erwartenden Anstieg in den Items „mathematische Texte lesen“ und „geometrisch zeichnen, konstruieren“ sind nur im (Doppel-)Bereich ‚Wechsel der Repräsentationsmodi‘ signifikante Zugewinne zu verbuchen. Auf der anderen Seite ist jedoch ein Einbruch auf den Gebieten des mathematischen Begründens und Beweisens zu verzeichnen. Die Klasse war aus ihrem sonstigen Unterricht offenbar mehr gewöhnt. Hingegen steht die Beobachtung, dass auch in Klasse A die technisch-formalen Elemente zurückgedrängt wurden und Texte als Informationsquelle die Rolle des Lehrers zum Teil übernahmen, mit dem durchschnittlichen Ergebnis aller Klassen im Einklang.

Um einen vergleichenden Überblick über alle Klassen zu gewinnen, blicken wir auf die Matrix der Häufigkeitsmediane, die mit der entsprechenden Tabelle in Kap. 5.2.2.4 korrespondiert und – wie auch dort – nach den (im Mittel) absteigenden Werten von links nach rechts sortiert ist:

	mathematische Texte lesen***	geometrisch konstruieren, zeichnen***	Sachverhalte, die in normaler Sprache ausgedrückt sind, in eine mathematische Form bringen (Gleichung, Tabelle, Graph)***	mathematische Probleme analysieren, Vermutungen aufstellen, probieren, knobeln***	Mathematische Darstellungen (Formeln, Tabellen, Graphen) in normaler Sprache ausdrücken	mathematische Sachverhalte mit anderen diskutieren***	Text- oder Sachaufgaben bearbeiten	mathematisch argumentieren und begründen**	anderen etwas erklären	Beweise verstehen, die der Lehrer bzw. die Lehrerin vormacht***	selbst Beweise durchführen*	Terme umformen, Gleichungen lösen, mit Formeln arbeiten***	rechnen***	mit dem Taschenrechner arbeiten***
A	3,60***	3,68**	3,35	2,96	3,00	2,87	2,73	2,25**	2,03***	2,33***	2,17**	2,13***	1,88***	1,08***
B1	3,64***	3,71**	3,25	3,13	3,25*	3,00	2,92	3,08	3,00	2,71	2,80	1,94**	1,94*	1,06*
C	3,70***	3,30*	2,94	3,11*	3,21	2,75**	2,75**	2,96	3,00	2,17**	2,38	2,28***	2,00***	1,83**
E	3,77***	3,70***	3,07	2,83*	2,72	3,23***	2,91	2,64	2,35	2,39*	2,00	2,07***	1,83***	1,27***
B2	3,62***	3,50***	3,10	3,13**	2,92	3,14***	2,83	2,96	3,13	2,85	2,89	2,15***	1,82***	1,32***
D1	3,42***	3,30**	3,04	2,90	2,50	2,42	2,77	2,50**	2,50*	2,27**	2,33	1,85***	1,91***	1,17***
D2	3,67***	3,19	3,44*	3,06*	2,75	2,87**	2,67	2,82	2,89	2,44***	2,21	2,44***	2,00***	1,33***

Tabelle 29: Matrix der Häufigkeitsmediane in den Experimentalklassen (Post-Befragung). Grüne Tönungen bedeuten: ‚wurde in der Unterrichtsreihe häufig wahrgenommen‘, rote Tönungen bedeuten: ‚wurde in der Unterrichtsreihe selten wahrgenommen‘. Vor allem die Klassen B1 und B2 fallen durch einen höheren Anteil von Grüntönen auf. Vermehrt rote Töne scheinen die Klassen A und D1 zu zeigen. Statistisch signifikante Unterschiede sind durch Sterne gekennzeichnet.

Eine Faktorenanalyse dieser Werte wie in Kap. 5.2.2.4 bietet sich diesmal nicht an, da hier keine Dimensionsreduzierung sondern ein Vergleich mit den Prä-Werten angestrebt wird. Dieser könnte mit Faktorwerten aufgrund jeweils unterschiedlicher Eigenräume (Prä/Post) nicht durchgeführt werden. Stattdessen schauen wir auf die nebeneinander gestellten Netzdiagramme der einzelnen Klassen (Diagramm 29). Alle Klassen zeigen das aus dem Durchschnittsdiagramm Diagramm 26 bekannte Muster, das auf einen deutlichen Rückgang der technisch-formalen Elemente (Items l, m, n in Diagramm 29) und einem erwartungsgemäßen Anstieg in den Bereichen „mathematische Texte lesen“ (a) und „geometrisch zeichnen, konstruieren“ (b) hinweist. Darüber hinaus können wir im Wesentlichen drei Gruppen unterscheiden:

- Klassen, die ohnehin einen besonders vielfältigen Unterricht gewohnt sind, der von der experimentellen Unterrichtsreihe nicht mehr nennenswert bereichert werden konnte. Im Teilbereich ‚Begründen und Beweisen‘ (Items i, j in Diagramm 29) wurde der Unterricht sogar etwas ärmer (Klassen A und D1).
- Klassen, die einen durchschnittlich vielfältigen Unterricht kennen, der aus Sicht der Schülerinnen und Schüler von der experimentellen Unterrichtsreihe in der oben beschriebenen Weise auf den Gebieten Kommunizieren und Problemlösen (Items a-f in Diagramm 29) befruchtet werden konnte (Klassen D2, C und E, wobei E von einem vergleichsweise niedrigen Niveau her kommt).
- Klassen, die einen unterdurchschnittlich vielfältigen Unterricht gewohnt sind, der von der experimentellen Unterrichtsreihe in besonderer Weise auf den genannten Gebieten und darüber hinaus auch im Teilbereich ‚Begründen und Beweisen‘ bereichert werden konnte (Klassen B1 und B2).

Die empfundene Stärkung des Bereiches „Kommunizieren“ mag angesichts der in manchen Transkripten zu erkennenden Unzulänglichkeiten auf den ersten Blick etwas überraschen. Das Ergebnis besagt jedoch zunächst einmal nur, dass überhaupt *mehr* kommuniziert wurde als sonst, und dieses „Mehr“ bezieht sich auch auf die Kommunikation in Kleingruppen, die von den Transkripten nicht dokumentiert wird. Der Eindruck, dass die Plenumsdiskussionen in einigen Klassen kein befriedigendes Niveau erreicht haben, bleibt bestehen. Die Gründe dafür wurden bereits beschrieben. Indes kann sich am Niveau nur dann etwas ändern, wenn die Klassen (und ihre Lehrer) das Diskutieren überhaupt mehr pflegen und üben. Die historische Reihe hat hierfür nach Wahrnehmung der Schülerinnen und Schüler deutlich mehr Gelegenheiten geschaffen als der normale Unterricht.

Zusammenfassend können wir im Hinblick auf die erste empirische Forschungsfrage dieser Arbeit festhalten:

Die Behandlung des historischen Themas hat aus Sicht der Schülerinnen und Schüler in allen Klassen zu einer deutlichen Verschiebung der Akzente im Unterricht geführt. Technisch-formale Routinen verloren demnach stark an Bedeutung und büßten ihre im Alltag beinahe erdrückende Dominanz ein. Gefördert und entfaltet wurden hingegen Aktivitäten, die mit der Kommunikation und Darstellung mathematischer Sachverhalte, mit Argumentieren und mit Problemlösen zusammenhängen. Im Hinblick auf den Teilbereich des „Begründens und Beweisen“ fiel die Wahrnehmung in den einzelnen Klassen auffallend unterschiedlich aus: Während sehr leistungsstarke Klassen hier eine gewisse Verarmung des Unterrichts verspürt haben, registrierten andere Klassen keine Änderung oder gaben an, bereichert worden zu sein. Fachliche Inputs wurden dabei vor allem aus der Arbeit mit den Texten und weniger aus den Instruktionen des Lehrers gewonnen.

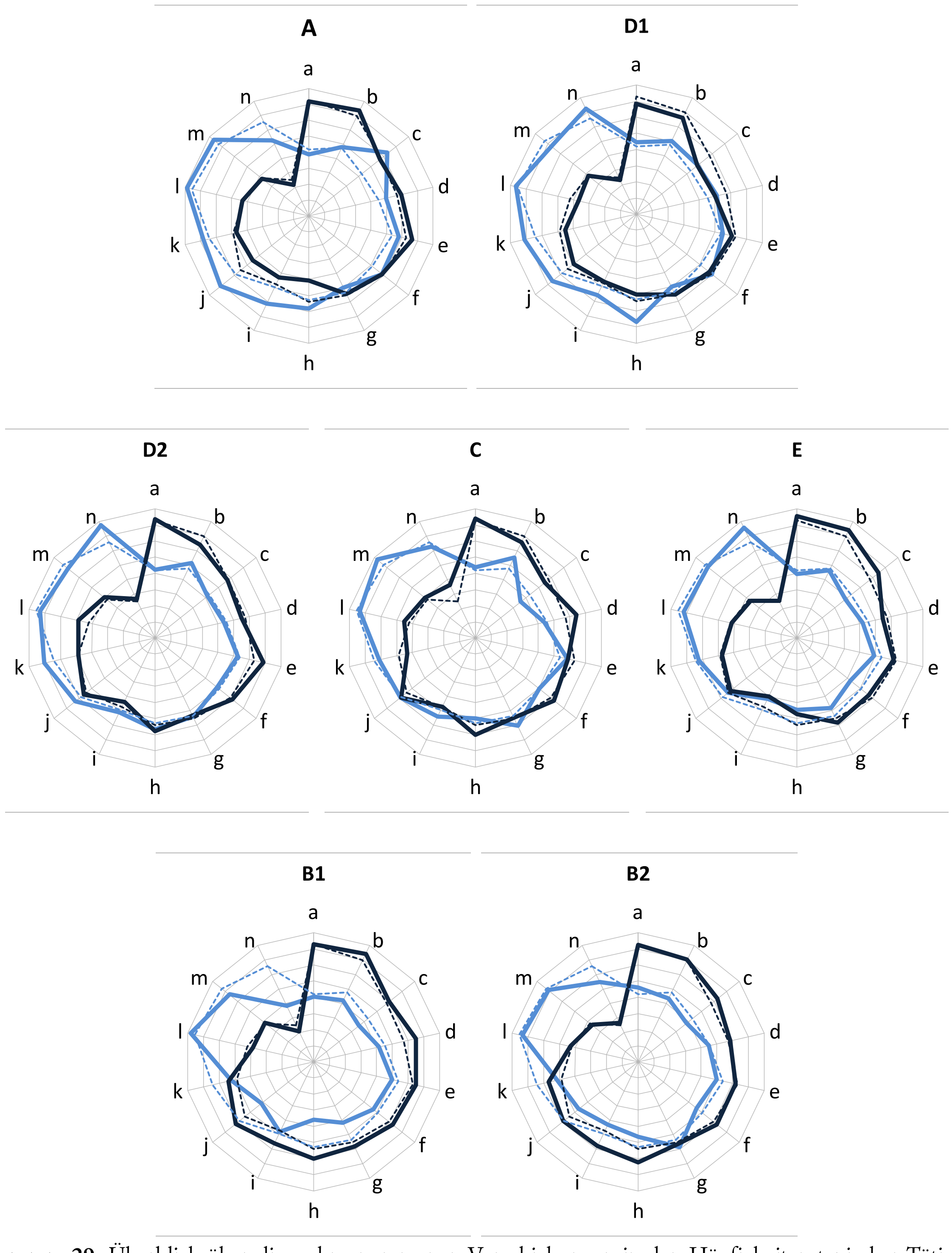


Diagramm 29: Überblick über die wahrgenommenen Verschiebungen in den Häufigkeiten typischer Tätigkeiten. Es bedeuten: a. mathematische Texte lesen; b. geometrisch konstruieren, zeichnen; c. mathematische Sachverhalte mit anderen diskutieren; d. mathematische Darstellungen (Formeln, Tabellen, Graphen) in normaler Sprache ausdrücken; e. Sachverhalte, die in normaler Sprache ausgedrückt sind, in eine mathematische Form bringen (Gleichung, Tabelle, Graph); f. mathematische Probleme analysieren, Vermutungen aufstellen, probieren, knobeln; g. Text- oder Sachaufgaben bearbeiten; h. anderen etwas erklären; i. selbst Beweise durchführen; j. mathematisch argumentieren und begründen; k. Beweise verstehen, die der Lehrer bzw. die Lehrerin vormacht; l. Terme umformen, Gleichungen lösen, mit Formeln arbeiten; m. rechnen; n. mit dem Taschenrechner arbeiten.

5.3.4 Der Unterricht in der Kontrollgruppe

Nachdem wir in den vorangegangenen Abschnitten auf den Unterricht in den Experimentalgruppen geschaut haben, wollen wir jetzt einen vergleichenden Blick auf den Unterricht in den Kontrollgruppen werfen. Er wurde plangemäß in drei Klassen nach dem in Abschnitt 4.3.2 dargestellten Entwurf und mit dem in Anhang C abgedruckten Material durchgeführt. Einige Bearbeitungsbeispiele sind dort ebenfalls abgebildet.

Die Schülerinnen und Schüler der Kontrollklassen wurden genauso wie diejenigen der Experimentalklassen gebeten, nach Abschluss der Intervention ihre Wahrnehmungen zum stattgehabten Unterricht möglichst differenziert zu artikulieren. Auch sie legten in einem (identischen) Fragebogen dar, in welchem Maße die Häufigkeiten typischer Tätigkeiten im Unterricht sich ihrer Ansicht nach verändert hatten. Die Ergebnisse dieser Befragung zeigt das Diagramm 30 (vgl. Tab. CD.67a und auch CD.37). Die Items des dort zu sehenden Netzdiagramms sind in der gleichen Reihenfolge sortiert wie in dem zur Experimentalgruppe gehörigen, analogen Diagramm 26. Beide Diagramme können darum direkt miteinander verglichen werden. Dabei fällt sofort auf, dass die Post-Werte der Kontrollgruppe deutlich geringere Ausprägungen aufweisen als diejenigen der Experimentalgruppe. Insgesamt haben die Post- und Pra-Linien der Kontrollgruppe viel größere Ähnlichkeit miteinander als dies bei der Experimentalgruppe der Fall ist. Dieser Sachverhalt tritt noch klarer im Diagramm 31 zutage. Deutliche Unterschiede sind dort auf den ersten Blick nur in den Items „mit dem Taschenrechner arbeiten", „rechnen" sowie „Beweise verstehen, die der Lehrer vormacht" zu erkennen. In diesen drei Punkten sind die Werte sichtlich zurückgegangen. Von den Schülerinnen und Schülern wurden diese Tätigkeiten in der Kontrollreihe entsprechend seltener als im sonstigen Unterricht wahrgenommen. Daneben gibt es sehr viel Übereinstimmung zwischen den Häufigkeitsprofilen vor und in der Reihe. Ein Signifikanztest ergibt (Tab. CD.67b): höchstsignifikant sind die Unterschiede in den drei schon genannten Items; der Zuwachs im Item „mathematische Probleme analysieren etc." wird als hochsignifikant ($p = 0{,}006$) bewertet; das Absinken der Werte in den Items „Terme umformen, Gleichungen lösen, mit Formeln arbeiten" ($p = 0{,}011$) sowie „geometrisch konstruieren, zeichnen" ($p = 0{,}035$) schließlich stellt sich als signifikant heraus. Alle anderen Verschiebungen verfehlen das Signifikanzniveau.

Im Vergleich zur Experimentalreihe wich die Kontrollreihe also sehr viel weniger von dem ab, was die jeweils unterrichteten Klassen als Standard kennen und gewohnt waren. Im Rahmen dieser Untersuchung ist dies ein durchaus erwünschter Effekt, da es in der Kontrollgruppe ja genau darum ging, den üblichen Unterricht als Referenz zu modellieren. Die Abschwächungseffekte im Bereich des Technisch-Kalkulatorischen („mit dem Taschenrechner arbeiten", „rechnen") hat es – wenngleich in erheblich stärkerem Maße – auch in der Experimentalreihe gegeben. Sie sind offenbar ein Merkmal der hier vorgenommenen Umsetzung und Didaktisierung des Themas und hängen letztlich mit den Zwängen zusammen, die sich daraus ergeben haben, beide Reihen möglichst vergleichbar zu gestalten und zu formulieren.

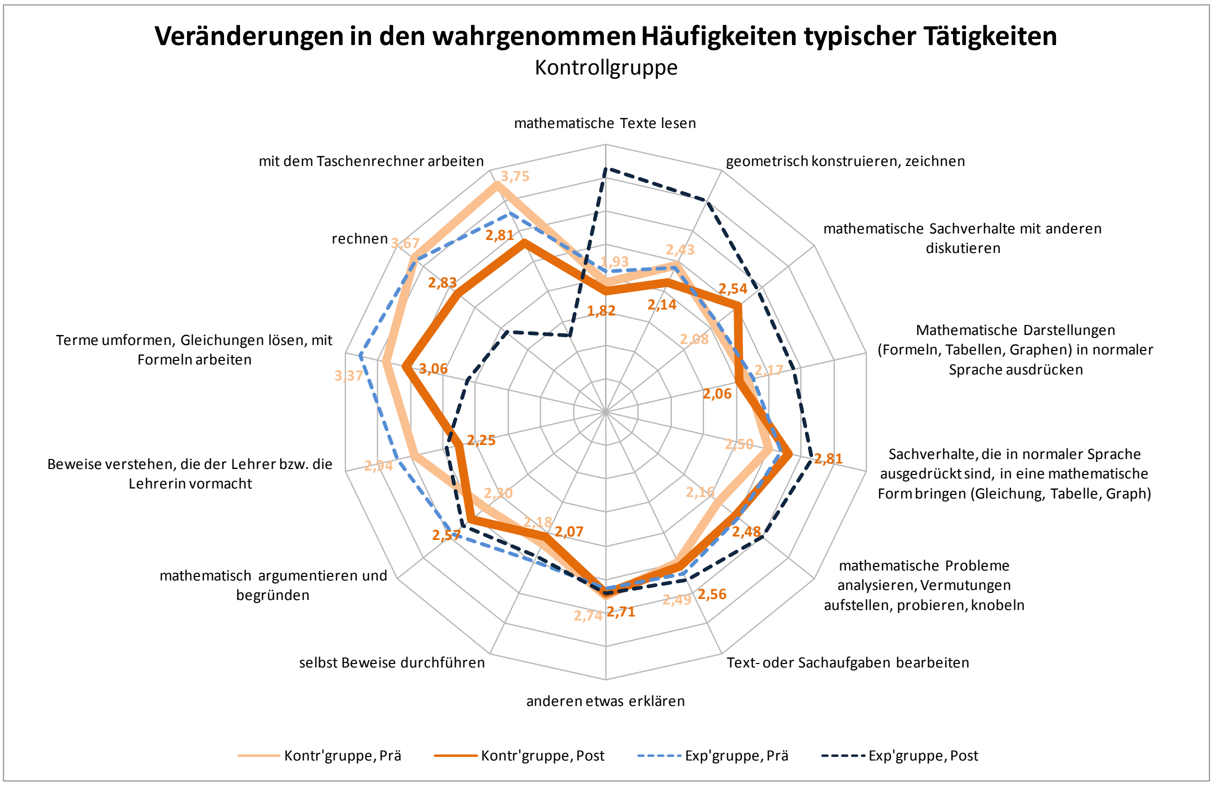


Diagramm 30: Wahrgenommene Verschiebungen in den Häufigkeiten typischer Tätigkeiten im Mathematikunterricht während des Experimentes: Durchschnitt aller Schülerinnen und Schüler in den Kontrollklassen. Die Werte der Experimentalgruppe werden darüber hinaus durch die gestrichelten Linien angedeutet. In der Kontrollgruppe gibt es deutlich geringere Abweichungen zwischen den Profillinien.

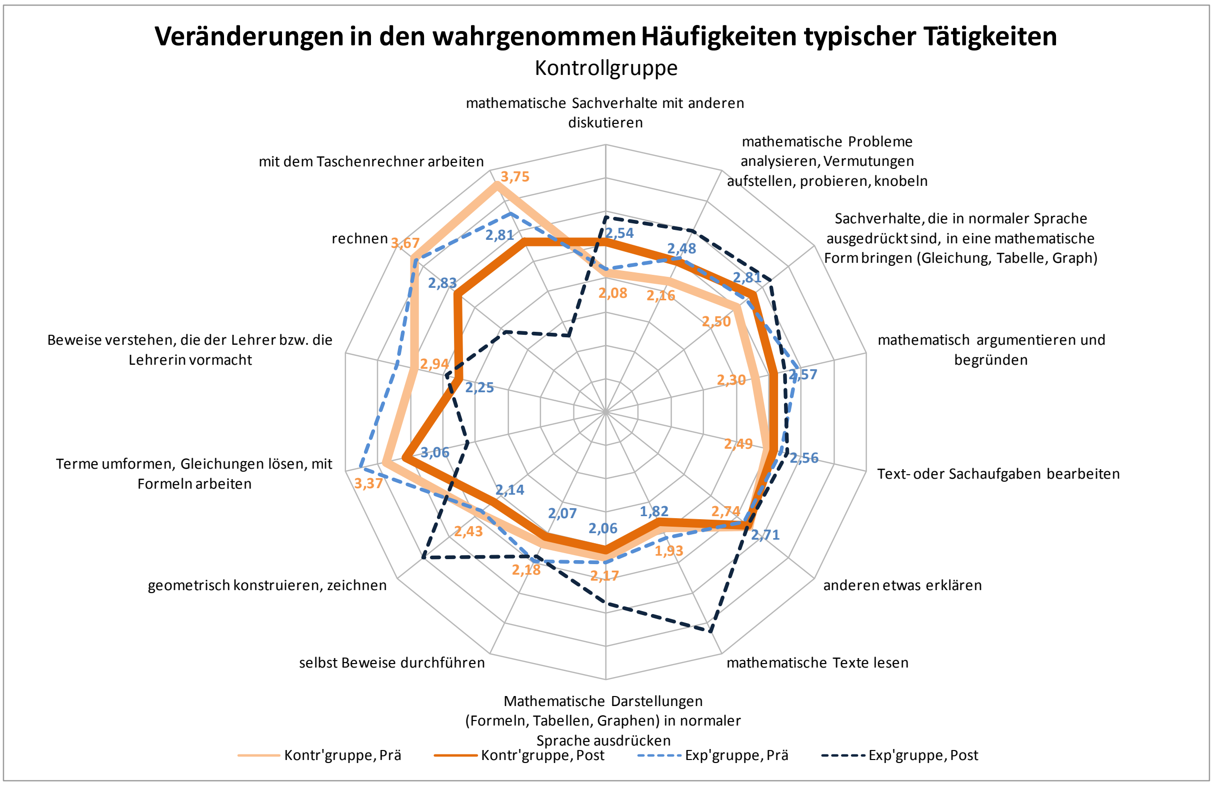


Diagramm 31: Derselbe Sachverhalt, diesmal absteigend nach den Differenzen in der Kontrollgruppe sortiert. Die Profillinien sind einander viel ähnlicher als in der Experimentalgruppe.

Die Differenzen der Profile werden im Diagramm 32 direkt visualisiert und verglichen. Auch aus diesem Diagramm geht hervor, dass die Experimentalreihe nach Ansicht der Lernenden einen in den meisten Punkten sehr viel ausgeprägteren Effekt auf den Unterricht gehabt hat als die Kontrollreihe. Auf welch unterschiedliche Weisen dies auf die Schülerinnen und Schüler der Experimental- und Kontrollgruppe gewirkt hat, soll nun im nächsten Abschnitt untersucht werden.

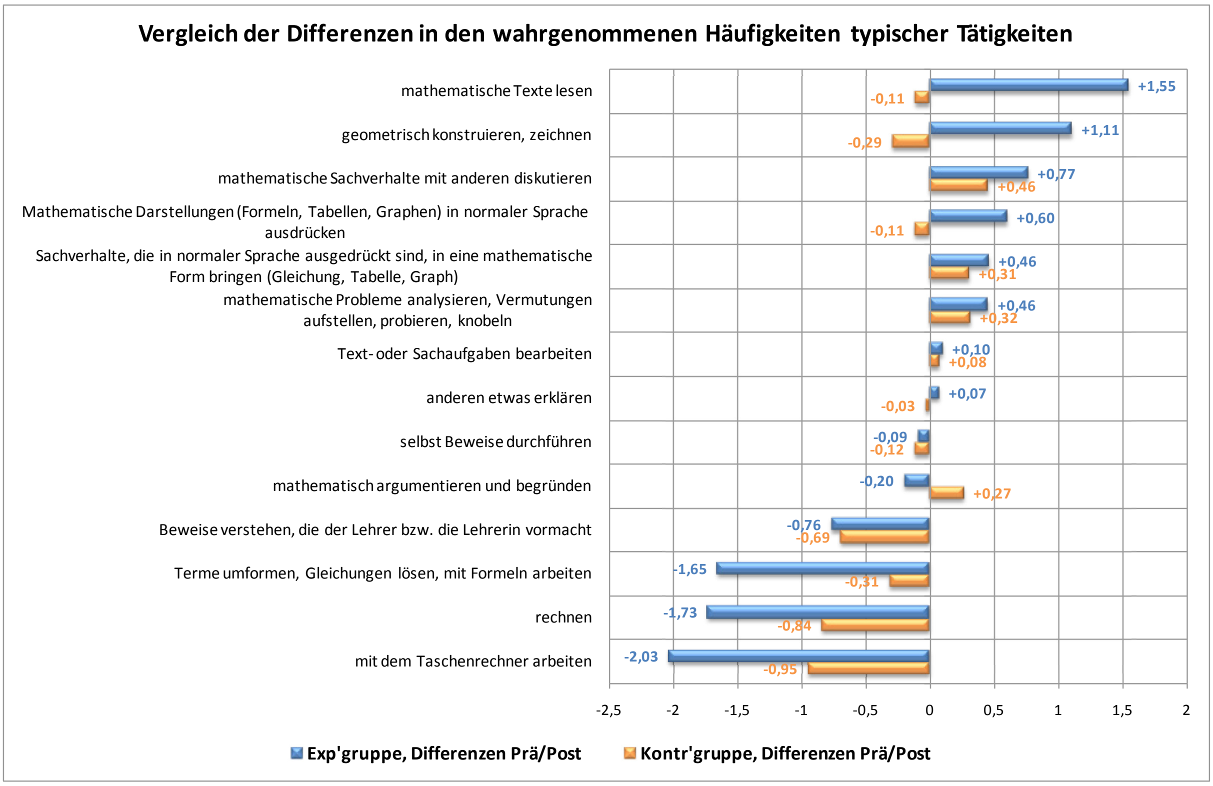


Diagramm 32: Das Diagramm veranschaulicht die deutlichere Wirkung der Experimentalreihe.

5.4 *Wirkungen der Unterrichtsinterventionen*

Nach der ausführlichen Beschreibung des stattgehabten Unterrichts werden wir uns in diesem Abschnitt mit den Wirkungen der Unterrichtsinterventionen auf die Lernenden befassen. Damit kommen wir auch zur Beantwortung der weiteren empirischen Forschungsfragen dieser Arbeit. Sie lauten (vgl. S. 3):

- Wie schneiden Schülerinnen und Schüler nach Abschluss des Experimentes hinsichtlich ihres erworbenen fachlichen Wissens und ihrer Fertigkeiten im Vergleich zu Lernenden ab, die den üblichen Unterricht durchlaufen haben?
- In welcher Weise und bis zu welchem Grad vermochte der Umgang mit mathematikgeschichtlichen Quellen Einfluss auf die Ansichten und Urteile der Lernenden über die Mathematik als Disziplin und Lerngestand sowie auf ihr persönliches und kulturelles Selbst- sowie Fremdverständnis auszuüben?

Jede dieser Fragen wird im Folgenden in einem eigenen Unterabschnitt untersucht (5.4.1, 5.4.2). Zudem untersuchen wir den Zusammenhang zwischen beiden Aspekten (5.4.3). Im nachfolgenden Abschnitt 5.4.4 fragen wir dann, auf welches Interesse das historische Thema bei den Schülerinnen und Schülern gestoßen ist und wie das Interesse mit anderen Items korreliert ist. Schließlich zeigen wir an einigen Beispielen auf, welche besonderen Wirkungen die Begegnung mit dem „Fremden" erzielt hat (5.4.5).

5.4.1 Wirkungen auf die Leistung

5.4.1.1 Erster Leistungstest

Der fachliche Lernerfolg sowohl der experimentellen wie auch der konventionellen Unterrichtsreihe wurde direkt nach Abschluss der Intervention in einem Leistungstest überprüft, dessen Benotung auch Zeugnisrelevanz und damit Ernstcharakter hatte. Aus Gründen der Vergleichbarkeit wurden hierfür identische Aufgaben verwendet, die also insbesondere keine historischen oder gar historisch-hermeneutischen Bezüge enthielten. Die Aufgaben wurden in einvernehmlicher Absprache mit allen beteiligten Lehrerinnen und Lehrern der an dieser Studie teilnehmenden Klasse entwickelt und formuliert. Sie beziehen sich ausschließlich auf die in den Curricula festgelegten, für diesen Jahrgang und das übergeordnete Thema üblichen Kompetenzziele. Die Aufgabenblätter mit den von Nummer 1 bis Nummer 5 im Schwierigkeitsgrad ansteigenden Aufgaben sind im Anhang E abgedruckt

Im Test konnten insgesamt 30 Punkte erreicht werden. Die Schülerinnen und Schüler der Experimentalgruppe erreichten im Durchschnitt 21,4 Punkte (71,3 %) bei einer Standardabweichung von 4,8 Punkten. In der Kontrollgruppe beträgt der Mittelwert 19,8 (66,0 %) mit einer Standardabweichung von 5,8. Dieser Unterschied wird als signifikant getestet (p = 0,021; vgl. Tab. CD.80-81). Wir halten darum zunächst einmal fest:

Die Schülerinnen und Schüler der Experimentalgruppe haben im ersten Leistungstest signifikant besser abgeschnitten als diejenigen der Kontrollgruppe.

Diese Aussage wird auch auch durch einen Blick auf die (kumulierten) Verteilungen in Diagramm 33 bestätigt.

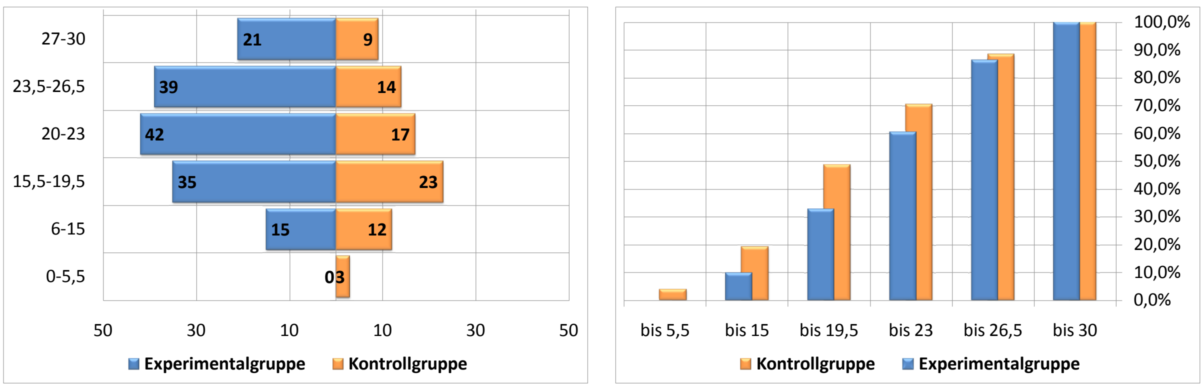


Diagramm 33: Verteilungsdiagramme. Die zu erreichende Punktzahl wurde in sechs Bereiche eingeteilt, die später zur Bildung von Zensuren herangezogen wurden. Demnach wurden Ergebnisse im Bereich von 27-30 Punkten mit der Note „sehr gut", im Bereich von 23,5-26,5 Punkten mit der Note „gut" usw. beurteilt. Das linke Diagramm stellt die daraus resultierenden Verteilungen in den beiden Gruppen in absoluten Zahlen einander gegenüber. Im rechten Diagramm sieht man den kumulierten Anteil von Schülerinnen und Schülern (in Prozent), die höchstens die angegebene Punktzahl erreicht haben. Beide Diagramme verdeutlichen klar den Überhang der Kontrollgruppe (orange) im Bereich der schwächeren Leistungen.

Natürlich stellt sich die wichtige Frage, inwiefern dieser signifikante Unterschied tatsächlich ein Ergebnis der jeweiligen Intervention ist oder vielleicht auf grundsätzliche Verschiedenheiten in den Leistungsniveaus der beteiligten Klassen zurückgeführt werden muss. Die Ergebnisse der vorgängigen Lernstandserhebung helfen in diesem Zusammenhang aufgrund ihrer groben Datenstrukturen – es stehen keine Daten auf Individualniveau zur Verfügung – nur begrenzt weiter (vgl. Kap. 5.2.4). Was zur Verfügung steht, sind die schriftlichen Durchschnittsnoten aller Schülerinnen und Schüler. Sie beziehen sich auf Klassenarbeiten, die vor der Intervention im selben Schuljahr geschrieben worden waren. Obwohl solche Zensuren nicht nur die Leistungen messen, sondern auch pädagogische Funktionen erfüllen und sie auch nur mit Vorsicht zwischen unterschiedlichen Klassen verglichen werden können, werden wir sie für unsere Analyse verwenden.

Zunächst stellen wir die vorgängigen schriftlichen Durchschnittsnoten – im Folgenden als „Vornoten" bezeichnet – den Zensuren im Test, wie sie sich aus Diagramm 33 erschließen, gegenüber. Es ergibt sich

- in der Experimentalgruppe eine durchschnittliche Vornote von 3,16 und eine durchschnittliche Testnote von 2,89 (Verbesserung um 0,28, also um eine gute Viertelnote).
- in der Kontrollgruppe eine durchschnittliche Vornote von 3,29 und eine durchschnittliche Test-1-Note von 3,30 (Verschlechterung um 0,01, also nahezu unverändert).

Die Unterschiede in den Vornoten werden – anders als in den Testnoten – statistisch als nicht signifikant bewertet ($p = 0{,}370$; vgl. Tab. CD.84b). Die Verbesserung in der Experimentalgruppe stellt sich als höchstsignifikant heraus ($p < 0{,}001$; vgl. Tab. CD.86). Die Änderung in der Kontrollgruppe ist hingegen natürlich nicht signifikant ($p = 0{,}877$). Damit steht fest:

Die Schülerinnen und Schüler der Experimentalgruppe haben im Mittel eine hochsignifikante Verbesserung ihrer schriftlichen Note (um eine gute Viertelnote) verzeichnet, während es in der Kontrollgruppe keine Änderungen gab.

Ein Blick auf die entsprechenden Verteilungen bekräftigt diese Aussage:

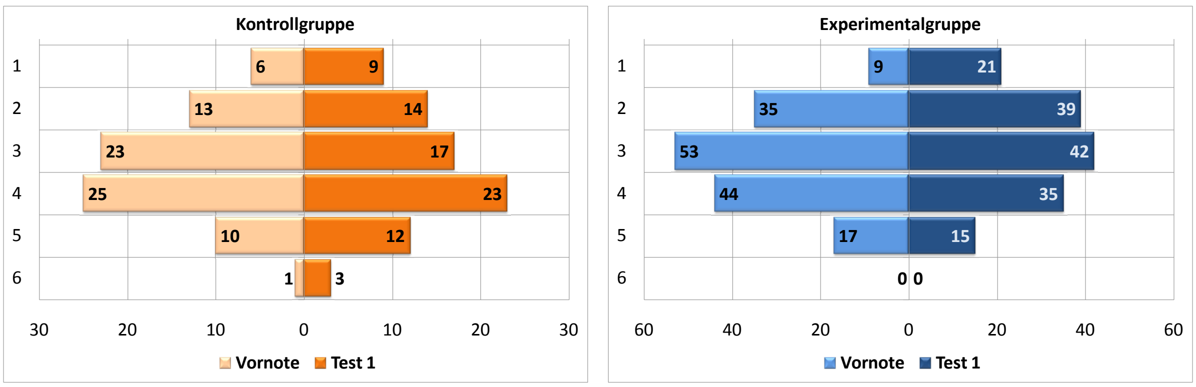


Diagramm 34: Verteilung der Vornoten und der Noten im Test 1 in der Kontroll- und in der Experimentalgruppe.

Die nachstehend abgedruckten Parset-Diagramme geben differenziertere Auskünfte über die Veränderungen, indem sie die „Schülerströme" zwischen den Notenstufen veranschaulichen. Wir erkennen auf den ersten Blick, dass es in der Kontrollgruppe (oben) weniger Bewegungen gegeben hat als in der Experimentalgruppe (unten). Wir sehen ferner, dass keine Sprünge um drei oder mehr Notenstufen vorgekommen sind. In der Kontrollgruppe wandern im mittleren Notenbereich zumeist etwa so viele Schülerinnen und Schüler von einer Notenstufe nach links (in Richtung besserer Noten) wie nach rechts, während der Hauptstamm erhalten bleibt. Diese Beobachtung begründet den nahezu unveränderten Notenschnitt. In der Experimentalgruppe gibt es im Notensegment von 3 bis 5 erkennbar mehr Bewegung von rechts nach links als in umgekehrter Richtung. Lediglich von der

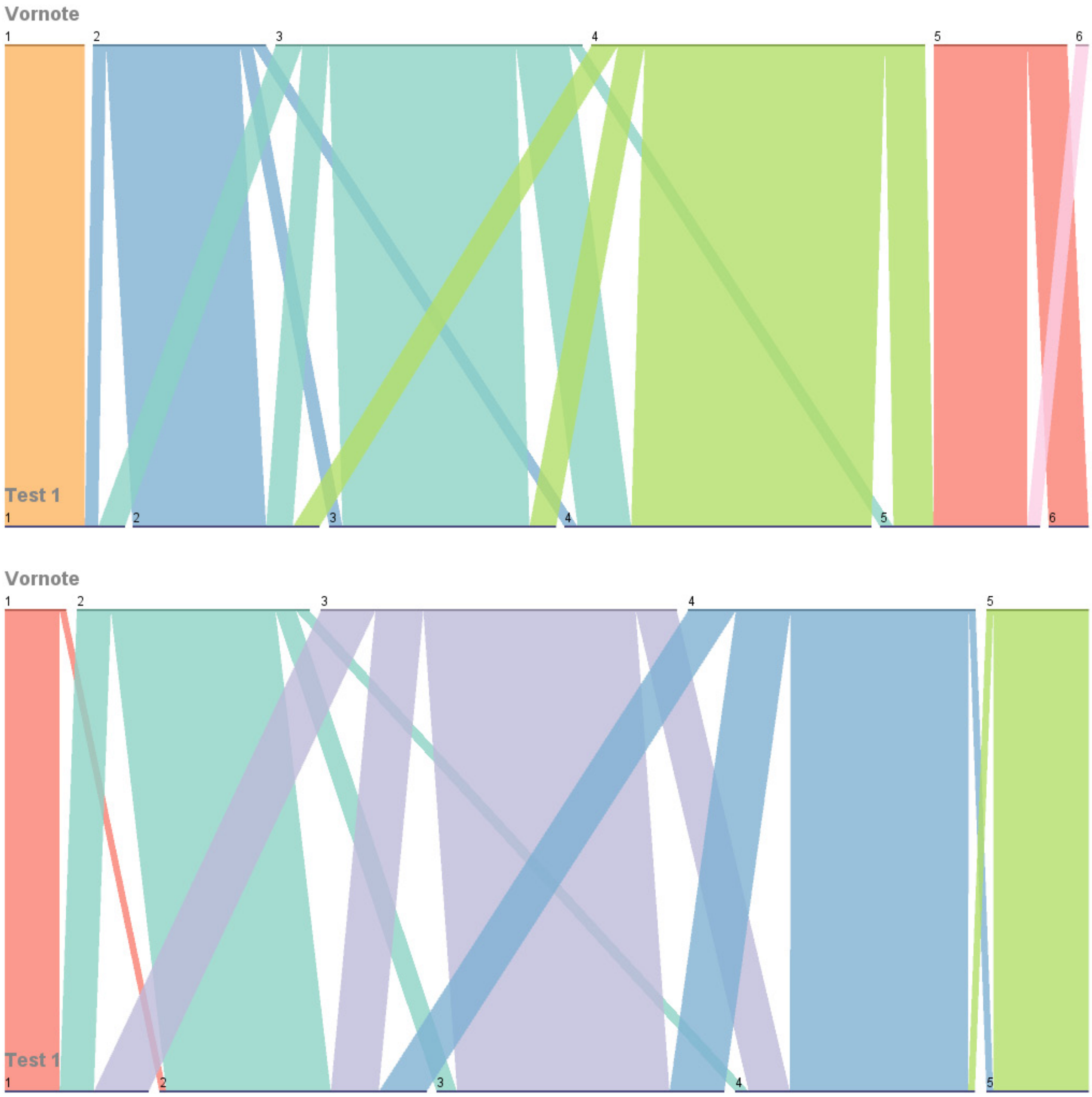


Diagramm 35: ParSet-Diagramme zur Veranschaulichung und differenzierteren Betrachtung der stattgehabten Änderungen. Die Diagramme wurden mit der freien Software ‚Parallel Sets V2.1' erstellt, vgl. auch (Kosara, Bendix & Hauser, 2006). Das obere Bild zeigt die Bewegungen in der Kontrollgruppe, unten sind die entsprechenden Veränderungen in der Experimentalgruppe zu sehen. Die Länge der waagerechten Linien am oberen bzw. unteren Rand eines jeden Bildes gibt die jeweilige Häufigkeit wieder. Die verzweigten farbigen Streifen deuten die Verteilung einer Kategorie am oberen Rand auf die Kategorien am unteren Rand an. Weitere Erklärungen im Haupttext.

Notenstufe 2 wandern etwa ebenso viele Schüler nach links (zur 1) wie nach rechts (zur 3 oder 4), der Hauptstamm bleibt jedoch erhalten. Insgesamt ergibt sich daraus die beschriebene, hochsignifikante Verbesserung der Durchschnittsnote, von der vor allem Schülerinnen und Schüler des mittleren Zensurenniveaus profitieren.

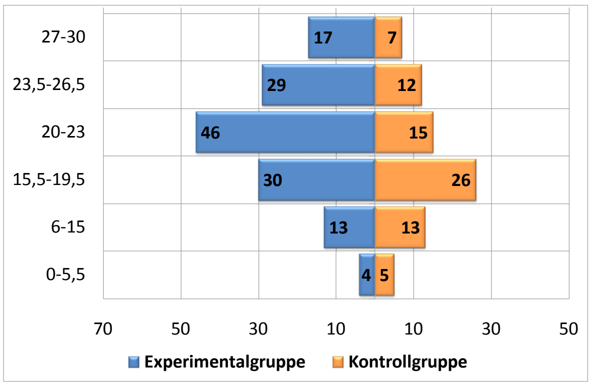
5.4.1.2 Zweiter Leistungstest

Um den Nachhaltigkeitseffekt der Interventionen zu untersuchen, wurde im Zeitraum von sechs bis acht Wochen nach dem ersten Test ein zweiter Test durchgeführt. In der Zwischenzeit wurde das Thema im Unterricht nicht weiter behandelt. Auch der zweite Test wurde benotet und besaß somit Zeugnisrelevanz. Die Aufgabenstellungen wurden – erneut in Abstimmung mit den unterrichtenden Lehrern – gegenüber dem ersten Test nur leicht modifiziert (vgl. Anhang E).

Wieder waren insgesamt 30 Punkte zu erreichen. Die Schülerinnen und Schüler der Experimentalgruppe erreichten im Durchschnitt unverändert 21,4 Punkte (71,2 %) bei einer Standardabweichung von diesmal 5,8 Punkten. In der Kontrollgruppe fiel der Mittelwert auf 18,7 (62,3 %) mit einer Standardabweichung von 6,1. Der Unterschied zwischen den Mittelwerten der beiden Gruppen wird diesmal sogar als hochsignifikant bewertet (p = 0,001; vgl. Tab. CD.89-90). Wir halten fest:

Die Schülerinnen und Schüler der Experimentalgruppe haben auch im zweiten Leistungstest besser abgeschnitten als diejenigen der Kontrollgruppe. Der Unterschied ist diesmal sogar hochsignifikant.

Auch hier schauen wir zur Veranschaulichung und Bestätigung auf die Verteilungen:



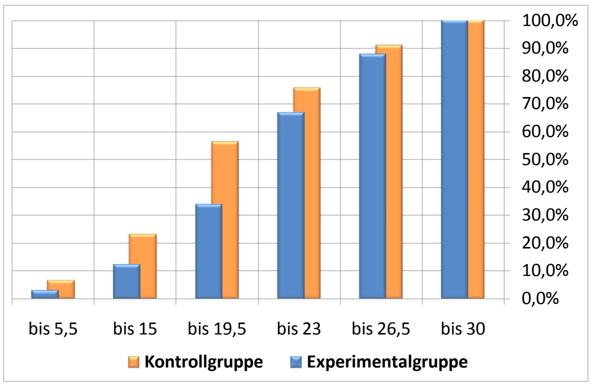


Diagramm 36: Verteilungsdiagramme für Test 2. Das Diagramm korrespondiert mit Diagramm 33. Der im Vergleich zum ersten Test noch stärkere Überhang schwächerer Leistungen in der Kontrollgruppe (orange) ist deutlich zu erkennen.

Im Hinblick auf die Durchschnittsnoten finden wir:

- Die Schülerinnen und Schüler der Experimentalgruppe erzielen – nach einer durchschnittlichen Vornote von 3,16 und der Durchschnittsnote 2,89 im ersten Test – nunmehr die Note 3,04.
- In der Kontrollgruppe kommen die Schülerinnen und Schüler – nach der Vornote 3,29 und der Test-1-Note von 3,30 – im zweiten Test auf die Note 3,59.

Diese Resultate werden im folgenden Diagramm noch einmal anschaulich dargestellt:

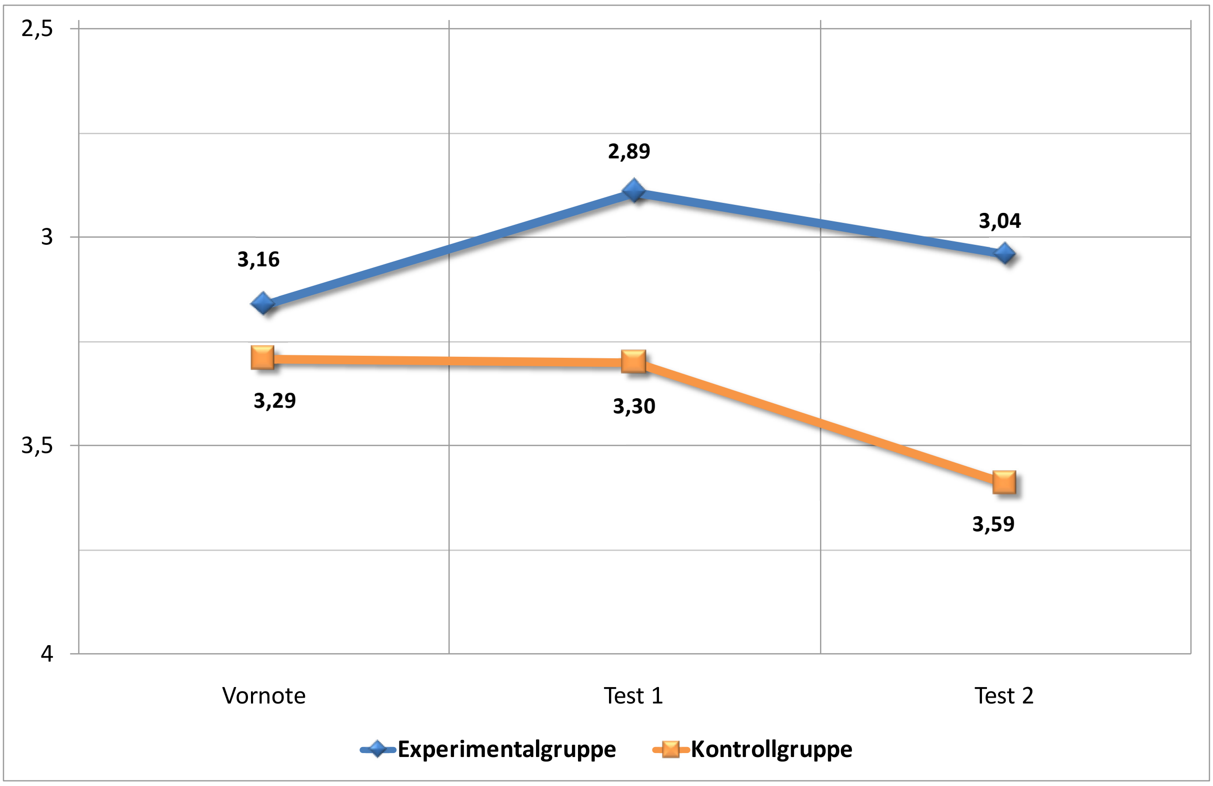


Diagramm 37: Durchschnittliche Vornoten und Noten in Test 1 und 2 im Vergleich zwischen Experimental- und Kontrollgruppe.

Mit Blick auf diese Darstellung halten wir fest: Die Noten haben in der Experimentalgruppe viel weniger stark nachgelassen als in der Kontrollgruppe. Daraus darf man schlussfolgern, dass der Behaltenseffekt in der Experimentalgruppe deutlich größer war.

Wir sind damit in der Lage, folgende Antwort auf die zweite empirische Forschungsfrage zu formulieren:

Die experimentelle Unterrichtsreihe hat für einen signifikanten Leistungsschub bei den beteiligten Schülerinnen und Schülern gesorgt. Dies zeigt sich nicht nur in der unmittelbaren Verbesserung des Notenschnitts (um eine gute Viertelnote) sondern auch in der deutlich größeren Nachhaltigkeit des Lernerfolgs. Profitiert haben hiervon insbesondere Schülerinnen und Schüler mit zuvor eher mittelmäßigen Noten. Entsprechende Effekte hat es in der Kontrollgruppe nicht gegeben.

5.4.1.3 Differenzierungen

5.4.1.3.1 Nach Gender

Die Durchschnittswerte der Jungen und Mädchen weichen in der Experimentalgruppe sowohl beim ersten wie auch beim zweiten Test voneinander ab. Demnach erzielen die Mädchen erkennbar bessere Ergebnisse als die Jungen. Die Unterschiede verfehlen jedoch knapp das Signifikanzniveau (vgl.

Tab. CD.92). Auch haben die Mädchen der Experimentalgruppe bereits in den Vornoten einen Vorsprung von knapp einer Drittelnote vor den Jungen. Dennoch lässt sich der Eindruck nicht ganz abwehren, dass die Mädchen im Hinblick auf ihre Leistungen vom experimentellen Unterricht etwas stärker profitieren konnten. Wenn dies zutrifft, könnte ein Grund dafür in der oben (Kap. 5.3.3.2) beschriebenen Betonung kommunikativ-sprachlicher Aspekte im experimentellen Unterricht zu finden sein; denn diese liegen den Mädchen vielleicht doch besser als das in ihrer vermutlich unangemessen zurückhaltenden Selbstattribuierung zum Ausdruck gekommen ist (Kap. 5.2.3.3).

			Vornote	Test 1	Test 2
Jungen	Experimentalgruppe	Punktzahl	-	20,7	20,1
		Note	3,26	3,03	3,15
	Kontrollgruppe	Punktzahl	-	19,4	17,5
		Note	3,30	3,26	3,58
Mädchen	Experimentalgruppe	Punktzahl	-	22,9	21,7
		Note	3,00	2,68	2,87
	Kontrollgruppe	Punktzahl	-	18,8	17,3
		Note	3,29	3,36	3,61

Tabelle 30: Testergebnisse, differenziert nach Gender.

5.4.1.3.2 Nach Klassen

Ein Vergleich aller Klassen führt zu folgender Tabelle:

Klasse	Vornote	Punktzahl Test 1	Note Test 1	Diff. zur Vornote	Punktzahl Test 2	Note Test 2	Diff. zum Test 1
A	2,86	23,20	2,62	0,24	22,10	2,81	-0,19
D2	2,92	23,00	2,67	0,25	22,00	2,83	-0,16
D1	2,92	22,70	2,71	0,21	21,40	2,92	-0,21
K2	3,04	20,00	3,13	-0,08	18,20	3,46	-0,33
K	3,09	20,80	3,00	0,09	19,60	3,23	-0,23
B1	3,15	22,40	2,75	0,40	22,10	2,80	-0,05
E	3,37	20,50	3,04	0,33	19,80	3,19	-0,15
B2	3,38	20,50	3,04	0,35	19,90	3,17	-0,13
C	3,50	18,80	3,35	0,15	17,20	3,63	-0,28
K1	3,63	17,30	3,63	0,00	15,30	3,94	-0,31

Tabelle 31: Die Klassen sind nach ihren Vornoten sortiert. Die Färbungen geben gute Ergebnisse in Grün-, schwache Ergebnisse (im Vergleich zum jeweiligen Spaltendurchschnitt) in Rot-Tönen wieder.

Gemessen an den Vornoten ergibt sich ein in dieser Reihung schon vertrautes Bild (vgl. Kap. 5.2.4): Das Feld wird von den Klassen A, D1 und D2 angeführt, mit etwas Abstand gefolgt von den Kontrollklassen K2 und K, die zusammen mit B1, E und B2 das Mittelfeld bilden. K1 und C nehmen die letzten Plätze ein. Wir hatten bereits gesehen, dass im Gegensatz hierzu die Klasse C in der Lernstandserhebung besser, die Klasse B1 hingegen sehr viel schlechter eingestuft wird. Die Klasse B1 schätzt die eigene Leistungsfähigkeit auch sehr viel skeptischer ein als in den Benotungen zum Ausdruck kommt (vgl. Kap. 5.2.3.4). In den Tests zu den Unterrichtsreihen nun erreicht sie bemerkenswert gute Ergebnisse. In Tabelle 31 wird dies sehr schön durch die zahlreichen Grünfärbungen in der entsprechenden Zeile veranschaulicht. Mit einer Verbesserung um eine 4/10-Note im Test 1 (gegenüber der Vornote) und der geringsten Verschlechterung im Test 2 (gegenüber Test 1) hat die Klasse B1 den größten Zuwachs aller Experimental- und Kontrollklassen eingefahren. Ebenfalls überdurchschnittlich profitiert haben die (Experimental-)Klassen B2 und E. Auch dies lässt sich an den Grünfärbungen in den Differenzenspalten der Tabelle 31 erkennen. Die (ohnehin schon leistungsstarken) Klassen A, D1 und D2 haben demgegenüber zwar die besten Durchschnittsnoten in beiden Tests erzielt, konnten jedoch nicht so große Verbesserungen verbuchen wie die zuvor genannten Klassen B1, B2 und E. Dieses Ergebnis passt sehr gut mit den in Kap. 5.3.3.1. und 5.3.3.2 dargestellten Erkenntnissen zusammen. Dort wurde festgestellt, dass der Unterricht insbesondere der Klassen B1 und B2 sowie – mit Einschränkungen – der Klasse E nach Wahrnehmung der Lernenden von der historischen Unterrichtsreihe bereichert wurde und von diesen Klassen auch am stärksten mit einer fachlichen Schwerpunktsetzung wahrgenommen wurde. Es ist naheliegend, hier einen Zusammenhang zu vermuten und in den oben beschriebenen Wirkungen des experimentellen Unterrichts im Hinblick auf die Kompetenzbereiche „Kommunizieren“, „Argumentieren“ und „Problemlösen“ einen wichtigen Grund für die überdurchschnittlichen Leistungssteigerungen zu sehen.

5.4.2 *Wirkungen auf die Ansichten und Urteile der Lernenden über Mathematik*

5.4.2.1 *Gesamtbilanz*

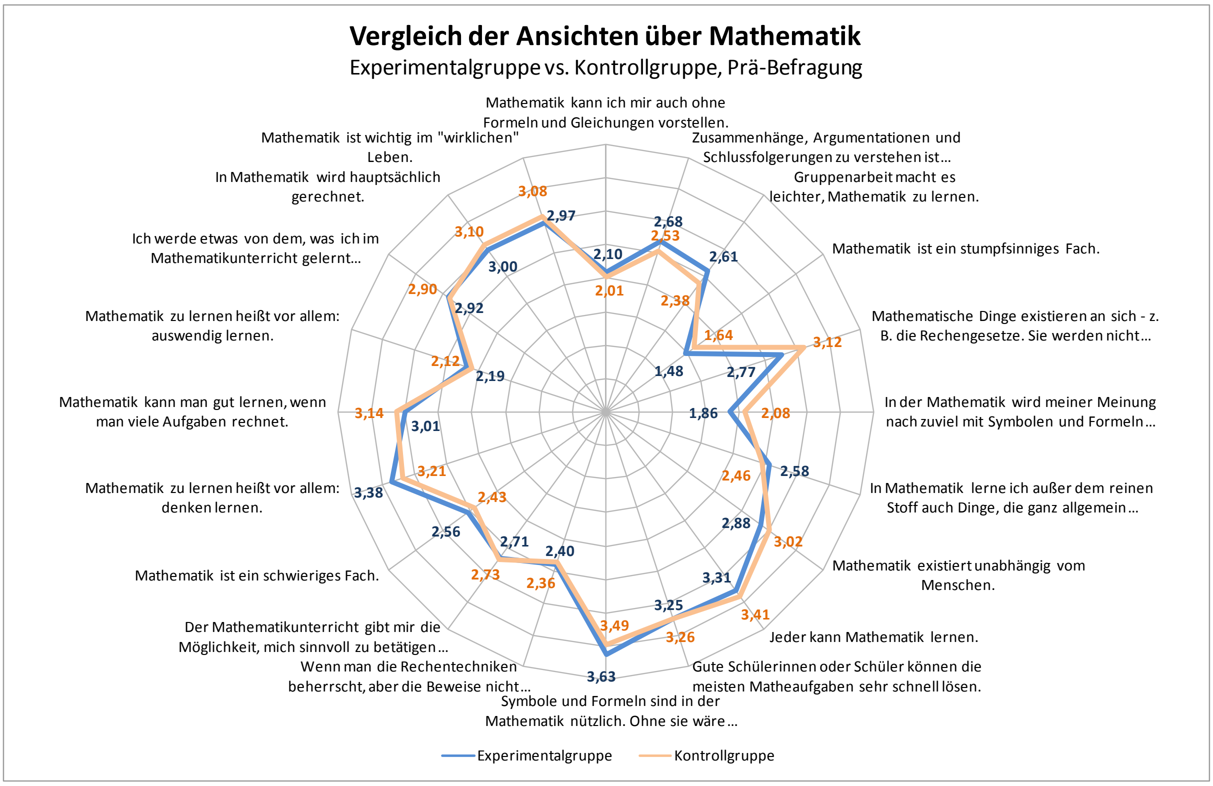


Diagramm 38: Die Ansichten und Urteile der Lernenden beider Gruppen über Mathematik *vor* der Intervention. Zwischen Experimental- und Kontrollgruppe gibt es praktisch keine Unterschiede. Die Items sind sortiert nach der Vorgabe von Diagramm 39.

Die Voruntersuchung hatte gezeigt, dass die Schülerinnen und Schüler der Experimental- und der Kontrollgruppe sich im Hinblick auf ihre Ansichten und Urteile über Mathematik als Disziplin und als

Lerngegenstand kaum unterscheiden (vgl. Kap. 5.2.6.2). Dieser Sachverhalt wird durch das Diagramm 38 noch einmal veranschaulicht. Es zeigt sehr schön die große Ähnlichkeit des Meinungsprofils in beiden Gruppen vor der Intervention.

Nach Abschluss der Interventionen wurden beide Gruppen erneut gebeten, ihre Ansichten und Urteile über Mathematik darzulegen, diesmal jedoch im besonderen Hinblick auf die zuvor erlebte Unterrichtsreihe. Forschungsmethodisch wurde diese Fokussierung bei den Teilnehmern erreicht, indem jedem Item des Fragebogens nun der Satz „Dieses Thema hat gezeigt: …“ vorangestellt wurde. Die Ergebnisse der Befragung in der Experimentalgruppe sind im folgenden Diagramm dargestellt.

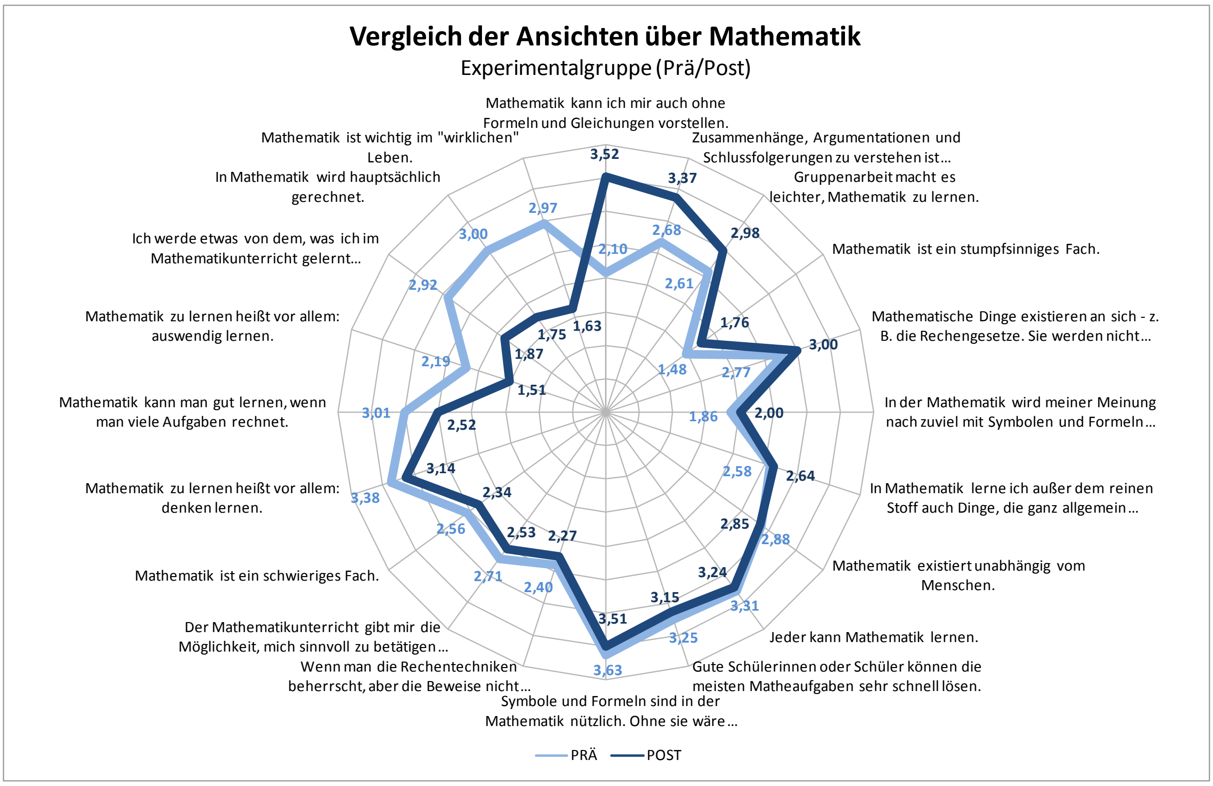


Diagramm 39: Die Ansichten und Urteile der Lernenden in der Experimentalgruppe über Mathematik *vor* (helle Linie) und *nach* der Intervention (dunkle Linie). Jedem Item war in der Post-Befragung der Satz „Dieses Thema hat gezeigt:“ vorangestellt worden.

In der Experimentalgruppe haben sich demnach einige deutliche Veränderungen gegenüber den Vorab-Profilen ergeben (vgl. Tab. CD.94). Dabei sind vor allem die Zustimmungswerte zu den Aussagen,

- dass es wichtiger sei, Zusammenhänge, Argumentationen und Schlussfolgerungen zu verstehen als Rechentechniken zu beherrschen;
- dass Mathematik auch ohne Formeln und Gleichungen vorstellbar sei

im höchstsignifikanten Maße gestiegen. Im Gegenzug sank die Zustimmung dazu,

- dass in Mathematik hauptsächlich gerechnet werde;
- dass Mathematik zu lernen vor allem heiße: auswendig zu lernen;
- dass Mathematik gut zu lernen sei, indem man viele Aufgaben rechne

ebenfalls in höchstsignifikantem Maße. Diese Verschiebungen zeigen an, dass die technisch-operative Seite des Mathematikverstehens und -betreibens in der Wahrnehmung der Lernenden deutlich an Bedeutung verloren hat. Stattdessen wird Mathematik, so wie sie sich in der historischen Unterrichtsreihe gezeigt hat, stärker als ein Fach wahrgenommen und gewürdigt, das in Kontexte eingebettet ist und dessen Ideen und Inhalte auf ganz unterschiedliche Weisen von Menschen zum Ausdruck gebracht werden können. Methodisch wird die stattgehabte Gruppenarbeit sehr geschätzt. Diese Ergebnisse passen sehr gut zu den Resultaten in Kap. 5.3.3.2 (Häufigkeiten typischer Tätigkeiten im Unterricht) und sind insbesondere im Hinblick auf die normalerweise vorherrschende Kalkülorientierung in den beteiligten Klassen von Bedeutung (vgl. Kap. 5.2.2).

Die Bedeutung von Symbolen und Formeln wird von den Schülerinnen und Schülern gleichwohl weiterhin anerkannt. Der Zustimmungswert des entsprechenden Items ist zwar etwas gesunken (von 3,63 auf 3,51), bewegt sich aber immer noch auf höchstem Niveau. Sicherlich wirkt sich hierin die Begegnung mit Al-Khwarizmis Lösungswegen als formelfreie Alternative zum heutigen Standardkalkül aus. Auf die Frage, welche der beiden Vorgehensweisen die Schülerinnen und Schüler denn schließlich bevorzugen würden, da sie nun beide kennten, sprachen sich nur 8,9 % für Al-Khwarizmis Methode aus, 51,4 % jedoch für unsere modernen Methoden. 35,6 % gaben an, dass ihnen beide gleich gut gefallen würden, der Rest war unentschieden. Man kann davon ausgehen, dass diese Wertschätzung des Kalküls nunmehr auf einer viel reflektierteren Basis beruht als vor dem Experiment.

Ein wenig enttäuschen mag die kaum veränderte Ansicht der Lernenden darüber, ob in Mathematik außer dem reinen Stoff auch Dinge gelernt werden, die ganz allgemein von Interesse sind. Hier hat der Kontakt mit der historischen Mathematik und ihren Kontexten scheinbar nichts bewirken können. Wir werden jedoch bei der Betrachtung gender- bzw. klassenspezifischer Unterschiede in den folgenden Abschnitten darauf noch einmal zurück kommen und differenziertere Ergebnisse sehen.

Etwas irritierend wirkt auf den ersten Blick auch der drastische Verlust an Zustimmung für die Aussagen, dass Mathematik im „wirklichen Leben“ wichtig sei und dass etwas von dem, was im Unterricht behandelt wurde, später noch zu gebrauchen sei. Ein ähnlich deutlicher Rückgang hat jedoch auch in der Kontrollgruppe stattgefunden (vgl. Diagramm 41) und kann damit vor allem als Einschätzung des in beiden Gruppen behandelten Themas „quadratische Gleichungen“ interpretiert werden – und nicht etwa in erster Linie als Urteil über den Wert der jeweiligen Perspektive (historisch oder modern).

Genauso verwundert der – als signifikant getestete ($p = 0{,}010$) – Zustimmungsverlust zur Aussage, dass Mathematik zu lernen bedeute, denken zu lernen. Auch hier hilft der Blick auf die Kontrollgruppe weiter (vgl. Diagramm 41). Dort ist die Zustimmung zu diesem Item nämlich noch deutlicher gesunken als in der Experimentalgruppe (mit $p = 0{,}002$). Wir können darum erneut vermuten, dass sich hierin Einschätzungen zum Thema „quadratische Gleichungen“ in beiden Gruppen wiederspiegeln. Der geringere Rückgang in der Experimentalgruppe ist insofern eher als ein Erfolg der historischen Perspektive anzusehen, zumal der Vorsprung in den Post-Werten als signifikant getestet wird ($p = 0{,}021$; vgl. Tab. CD.95). Im entsprechenden Prä-Item gab es noch keinen signifikanten Unterschied ($p = 0{,}150$; vgl. Tab. CD.57).

Im Vergleich der Post-Werte der Experimentalgruppe mit denen der Kontrollgruppe ergeben sich darüber hinaus nahezu identisch die gleichen Verschiebungen wie im Vergleich mit den Prä-Werten der Experimentalgruppe. Dies ist vor allem darauf zurückzuführen, dass es in der Kontrollgruppe überhaupt nur zu sehr wenigen Veränderungen des Ausgangsprofils gekommen ist (vgl. Diagramm 41) – und auch nicht kommen sollte –, so dass die Post-Zustimmungswerte nahezu denen der Vorab-Befragung entsprechen. Diese aber stimmten in beiden Gruppen praktisch überein.

Die gemessenen Veränderungen in der Experimentalgruppe können somit sowohl als Abweichungen von den *eigenen Prä-Werten* wie auch von den *Post-Werten in der Kontrollgruppe* interpretiert werden. Sie repräsentieren damit ein in doppelter Hinsicht gesichertes Ergebnis, das wir wie folgt als Antwort auf die dritte empirische Forschungsfrage zusammenfassen können:

Der experimentelle Unterricht hat die Ansichten und Urteile der Lernenden über Mathematik – im Unterschied zum konventionellen Unterricht – in einigen Punkten deutlich beeinflusst. Schülerinnen und Schüler, die die historische Mathematik kennengelernt haben, wenden sich nun stärker gegen die Vorstellung, dass Mathematik vor allem mit Rechnen oder Auswendiglernen zu tun habe und besonders gut durch das Abarbeiten vieler Aufgaben gelernt werden könne. Sie sind nun viel mehr der Auffassung, dass es darauf ankomme, Zusammenhänge und Argumentationen zu verstehen als bloß Rechentechniken zu beherrschen und können sich die Darstellung und Vermittlung mathematischer Ideen nun auch auf andere Weise als mit Formeln und Gleichungen vorstellen. Gleichwohl erkennen sie ganz deutlich den Wert eines einheitlichen Kalküls. Diese Unterschiede bestehen sowohl im Vergleich zu den vorherigen Ansichten in der Experimentalgruppe wie auch zu den (weitestgehend unveränderten) Ansichten in der Kontrollgruppe.

Über Langzeit- und Nachhaltigkeitseffekte der genannten Verschiebungen kann hier keine Aussage gemacht werden, da entsprechende Messungen nicht durchgeführt wurden. Es liegt aber nahe anzunehmen, dass unter dem Eindruck zurückkehrender Routinen die beschriebenen Änderungen nur vorübergehenden Charakter besitzen.

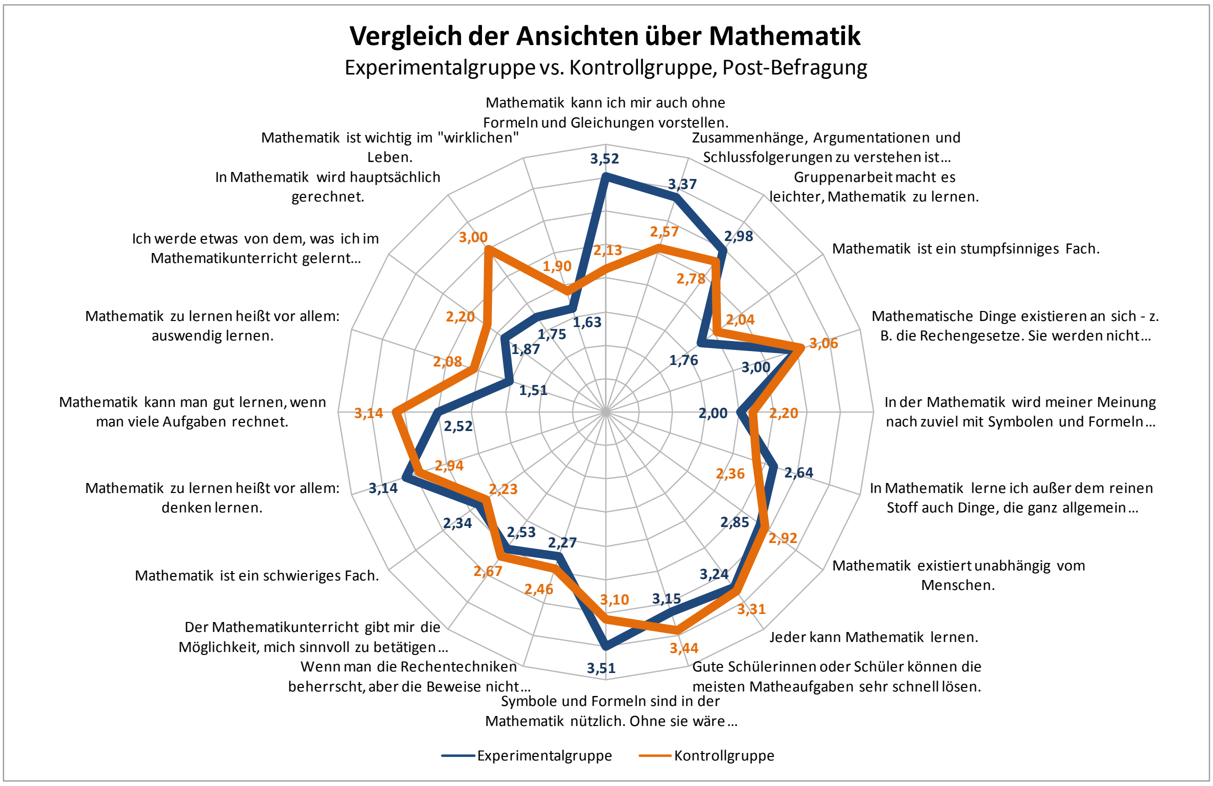


Diagramm 40: Die Ansichten und Urteile der Lernenden beider Gruppen über Mathematik *nach* der jeweiligen Intervention (blaue Linie: Experimentalgruppe, orange Linie: Kontrollgruppe). Jedem Item war der Satz „Diese Thema hat gezeigt:" vorangestellt worden. Die Items sind sortiert nach der Vorgabe von Diagramm 39.

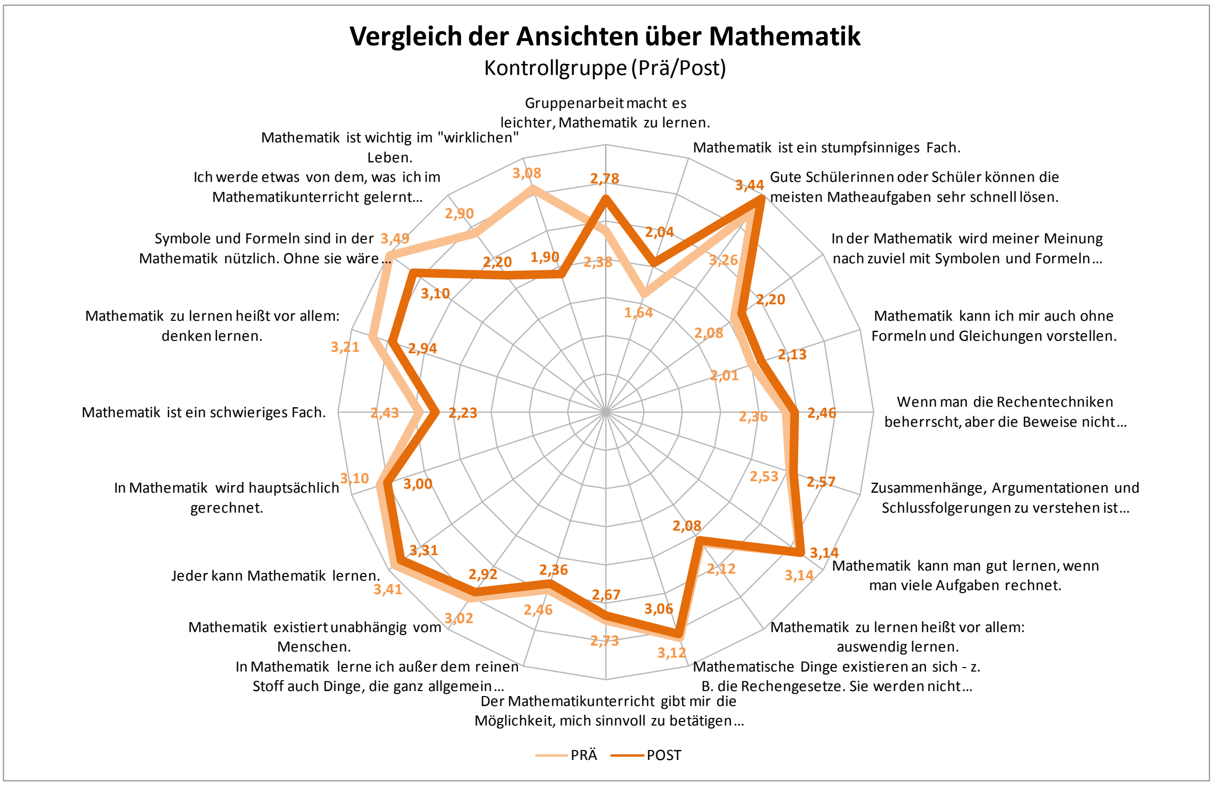


Diagramm 41: Die Ansichten und Urteile der Lernenden in der Kontrollgruppe über Mathematik *vor* (helle Linie) und *nach* der Intervention (dunkle Linie). Jedem Item war in der Post-Befragung der Satz „Dieses Thema hat gezeigt:" vorangestellt worden. Die Items sind nach absteigenden Differenzen geordnet.

5.4.2.2 Differenzierungen

5.4.2.2.1 Nach Gender

Die nach Abschluss der experimentellen Unterrichtsreihe erhobenen Ansichten und Urteile über Mathematik weisen, wie aus Diagramm 42 hervorgeht, keine signifikanten genderspezifischen Unterschiede auf (vgl. Tab. CD.99). Das Item mit der größten Differenz zwischen beiden Gruppen („Mathematik ist ein schwieriges Fach“) verfehlt mit $p = 0{,}083$ knapp das Signifikanzniveau. Ansonsten liegen die Profile eng beieinander.

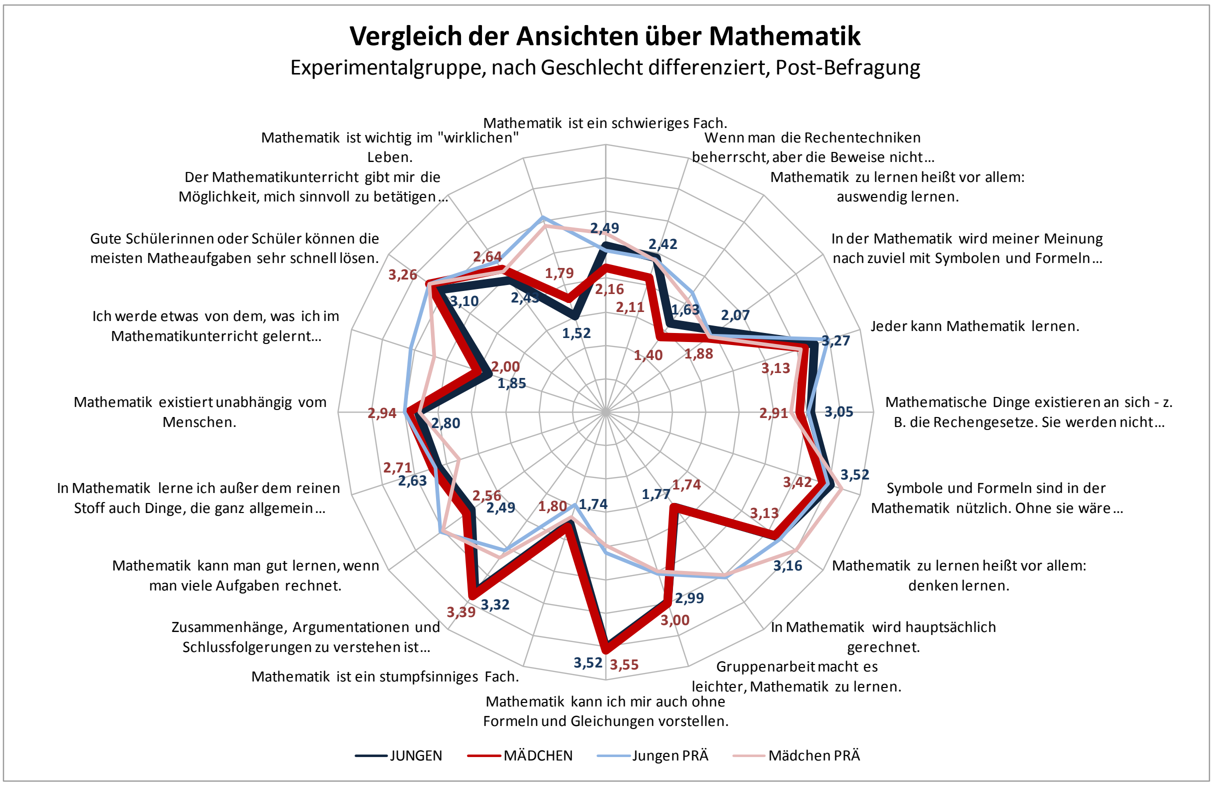


Diagramm 42: Die Ansichten und Urteile der Lernenden über Mathematik *vor* (dünne, hellere Linien) und *nach* (dicke, dunklere Linien) der Intervention, differenziert nach Gender (rot: Mädchen, blau: Jungen). Jedem Item war in der Post-Befragung der Satz „Dieses Thema hat gezeigt:“ vorangestellt worden. Die Items sind nach absteigenden Differenzen in den Post-Werten geordnet.

Diese Ergebnisse müssen allerdings auch mit den Resultaten der Prä-Befragung verglichen werden. Dabei tritt zutage, dass es – außer den in der Gesamtbilanzierung bereits beschriebenen Verschiebungen – keine weiteren, genderspezifischen Veränderungen gegeben hat, die Signifikanzniveau erreichen (vgl. Tab CD.101).

Sieht man von Signifikanz ab, so zeigen sich die interessantesten Unterschiede zwischen Jungen und Mädchen in den folgenden Items:

- Die Schwierigkeit des Faches Mathematik wird von den Jungen nahezu unverändert beurteilt (Prä 2,41 zu Post 2,49). Die Mädchen hingegen äußern mehrheitlich das Empfinden, dass das Fach sich im experimentellen Unterricht leichter dargestellt habe (Prä 2,68 zu Post 2,16;

jedoch nicht signifikant, $p = 0{,}239$; vgl. Tab. CD.101). Die Verhältnisse haben sich also umgekehrt: Während die Mädchen üblicherweise Mathematik schwieriger finden als die Jungen, war es bei dieser Unterrichtsreihe gerade anders herum.

- Die Zustimmung der Mädchen zu der Aussage, dass sie in Mathematik außer dem reinen Stoff auch Dinge lernen, die ganz allgemein wichtig oder interessant seien, ist spürbar angestiegen (von Prä 2,29 auf Post 2,71; jedoch nicht signifikant, $p = 0{,}227$; vgl. Tab. CD.101), während es bei den Jungen in diesem Punkt praktisch keine Änderung gegeben hat (Prä 2,68 zu Post 2,63). Diese differenzierte Beobachtung war in der Gesamtbilanzierung noch infolge der Aggregierung verwischt worden (s. o.).

Das zweite der beiden Items war schon in der Vorab-Befragung mit genderspezifisch differenzierten Ausprägungen hervorgetreten (vgl. Kap. 5.2.6.3). Der dort noch verzeichnete Unterschied ist nunmehr durch die experimentelle Unterrichtsreihe egalisiert worden. Wegen der fehlenden Signifikanz müssen wir mit Interpretationen zwar vorsichtig sein. Wir können aber erneut mutmaßen, dass die starke Kontextorientierung der historischen Unterrichtsreihe und die Betonung sprachlich-kommunikativer Aspekte die Mädchen in besonderer Weise angesprochen und sie deshalb zu einer positiveren Attribuierung angeregt haben könnte (vgl. Kap. 5.2.2.3, 5.2.3.3).

5.4.2.2.2 Nach Klassen

Um die Ansichten und Urteile über Mathematik nach Klassen zu differenzieren, wird im Diagramm 43 die in Kap. 5.4.2.1 dargestellte Profillinie der gesamten Experimentalgruppe mit den Ergebnissen der einzelnen Klassen (dargestellt durch Punkte) kombiniert. Dabei fällt zunächst die von Item zu Item sehr unterschiedliche Streuung der Klassenwerte auf. Auf den ersten Blick ist zu erkennen, dass die Werte zu Aussagen wie etwa „Mathematik zu lernen heißt vor allem: denken lernen“ sehr nah beieinander liegen, während sie beispielsweise im Hinblick auf die Aussage „Mathematik ist ein stumpfsinniges Fach“ stark divergieren. Eine Möglichkeit, diese Streuungen zu quantifizieren besteht darin, itemweise die Spannweiten bzw. die Standardabweichungen zu berechnen. Dies ist in Tabelle 32 geschehen.

In dieser Tabelle zeigt sich, dass viele der Items, für die wir – bezogen auf die ganze Experimentalgruppe – signifikante oder sogar höchstsignifikante Verschiebungen festgestellt hatten (kursiv bzw. fett hervorgehoben), auch von den Klassen sehr einheitlich beurteilt werden. Dies dürfte aus statistisch-rechnerischen Gründen kaum überraschen. Interessanter sind die Fälle, in denen signifikante oder sogar höchstsignifikante Verschiebungen mit einer zugleich großen Streuung über die Klassen verbunden sind.

Betrachten wir z. B. das Item, das unter denjenigen mit signifikanten Prä-Post-Änderungen die stärkste Streuung aufweist. Es handelt sich um die Aussage „Mathematik ist stumpfsinnig.“ Im Diagramm 43 ist zu erkennen, dass die große Streuung vor allem den Beurteilungen zweier Klassen geschuldet ist: B1 und C haben dem Item deutlich mehr Zustimmung erteilt als alle anderen Klassen – sie sind in diesem Sinne „auffällig“. In ähnlicher Weise kann man bezüglich der anderen Items auffällige Klassen suchen und in Tabelle 32 eintragen. Dabei stellt sich heraus, dass die Klasse B1 sehr oft, die Klasse C oft und die Klasse E gelegentlich auffallen.

Weitere Klarheit erhalten wir, wenn wir nicht nur die Streuung der Post-Werte vergleichen sondern zusätzlich überprüfen, in welcher Weise die *Differenzen* von Prä- und Post-Werten zwischen den Klassen variieren. Zu diesem Zweck betrachten wir Diagramm 44 und Tabelle 33. Wiederum sind es (fast ausschließlich) die Klassen B1, C und E, die auffallen, oftmals in den gleichen Items wie zuvor.

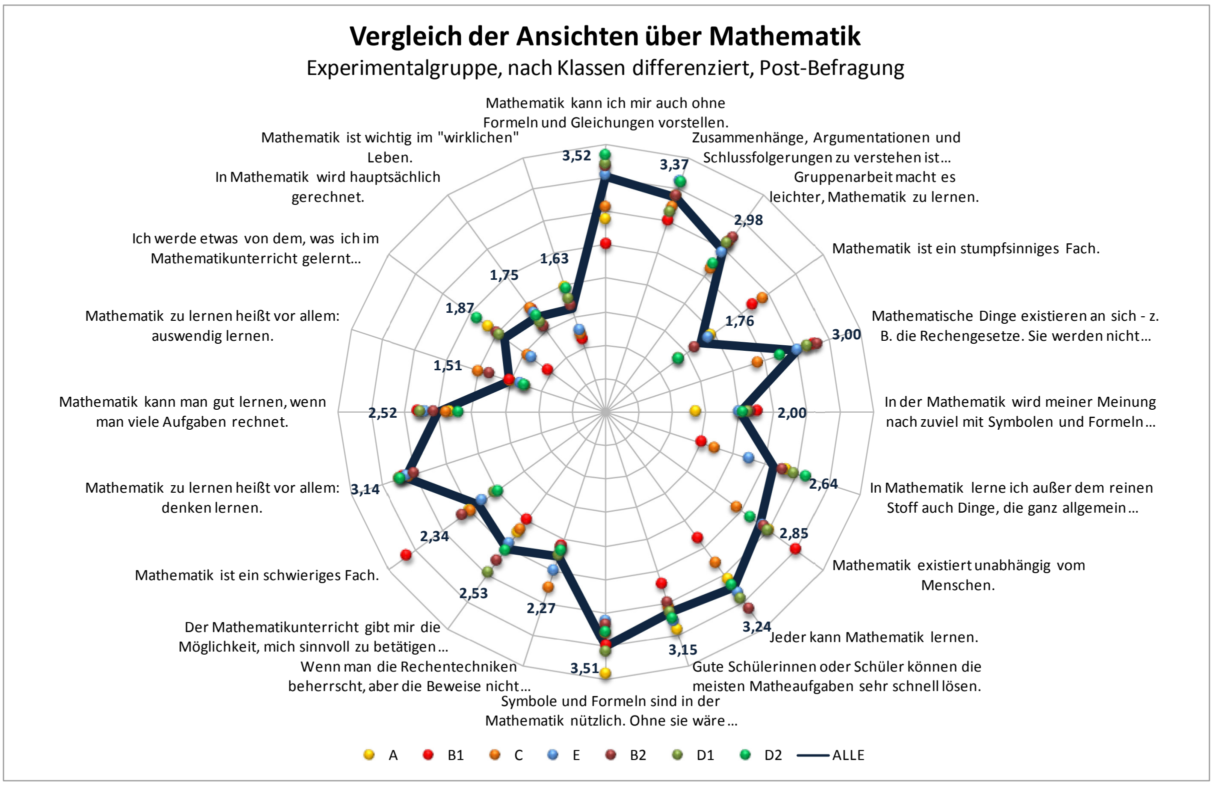


Diagramm 43: Die Ansichten und Urteile der Lernenden in den Experimentalklassen über Mathematik *nach* der Intervention. Jedem Item war in der Post-Befragung der Satz „Dieses Thema hat gezeigt:“ vorangestellt worden. Die Punkte repräsentieren Werte in den einzelnen Klassen, die durchgezogene Linie den Durchschnitt über alle Klassen, der auch mit den Zahlen wiedergegeben wird. Die Items sind sortiert nach der Vorgabe von Diagramm 39.

	Auffällige Klassen	Spannweite	Standard-abweichung
Mathematik zu lernen heißt vor allem: denken lernen.		0,23	0,08
In Mathematik wird hauptsächlich gerechnet.		0,36	0,13
Gruppenarbeit macht es leichter, Mathematik zu lernen.		0,58	0,20
Mathematik kann man gut lernen, wenn man viele Aufgaben rechnet.		0,59	0,21
Zusammenhänge, Argumentationen und Schlussfolgerungen zu verstehen ist wichtiger als Rechentechniken zu beherrschen.		0,62	0,22
Gute Schülerinnen oder Schüler können die meisten Matheaufgaben sehr schnell lösen.	B1	0,74	0,22
Wenn man die Rechentechniken beherrscht, aber die Beweise nicht verstanden hat, kommt man im Unterricht immer noch ganz gut zurecht.		0,65	0,23
Symbole und Formeln sind in der Mathematik nützlich. Ohne sie wäre vieles schwieriger.	A	0,78	0,25
Mathematik zu lernen heißt vor allem: auswendig lernen.	C, B2	0,75	0,26
In der Mathematik wird meiner Meinung nach zuviel mit Symbolen und Formeln gearbeitet.	A	0,90	0,28
Mathematische Dinge existieren an sich - z. B. die Rechengesetze. Sie werden nicht von Menschen erfunden, sondern es gibt sie einfach. Sie werden entdeckt.		0,94	0,31
Mathematik existiert unabhängig vom Menschen.	B1	1,10	0,31
Der Mathematikunterricht gibt mir die Möglichkeit, mich sinnvoll zu betätigen und einzubringen.		0,96	0,31
Mathematik ist wichtig im „wirklichen“ Leben.	B1, C, E	0,84	0,33
Jeder kann Mathematik lernen.	B1, C	1,32	0,41

	Auffällige Klassen	Spannweite	Standard-abweichung
Ich werde etwas von dem, was ich im Mathematikunterricht gelernt habe, bestimmt später gebrauchen können.	B1, E, C	1,33	0,45
Mathematik kann ich mir auch ohne Formeln und Gleichungen vorstellen.	B1	1,34	0,47
Mathematik ist ein schwieriges Fach.	B1	1,67	0,52
Mathematik ist ein stumpfsinniges Fach.	B1, C	1,57	0,57
In Mathematik lerne ich außer dem reinen Stoff auch Dinge, die ganz allgemein wichtig oder interessant sind.	B1, C, (E)	1,64	0,60

Tabelle 32: Streuungen der Werte in Diagramm 43, quantifiziert durch Spannweiten und Standardabweichungen. Geringe Streuungen sind grün gefärbt, starke Streuungen rot. Items, die – bezogen auf die ganze Experimentalgruppe – signifikante Wertverschiebungen erfahren hatten sind *kursiv* gedruckt, solche mit höchstsignifikanten Verschiebungen **fett.**

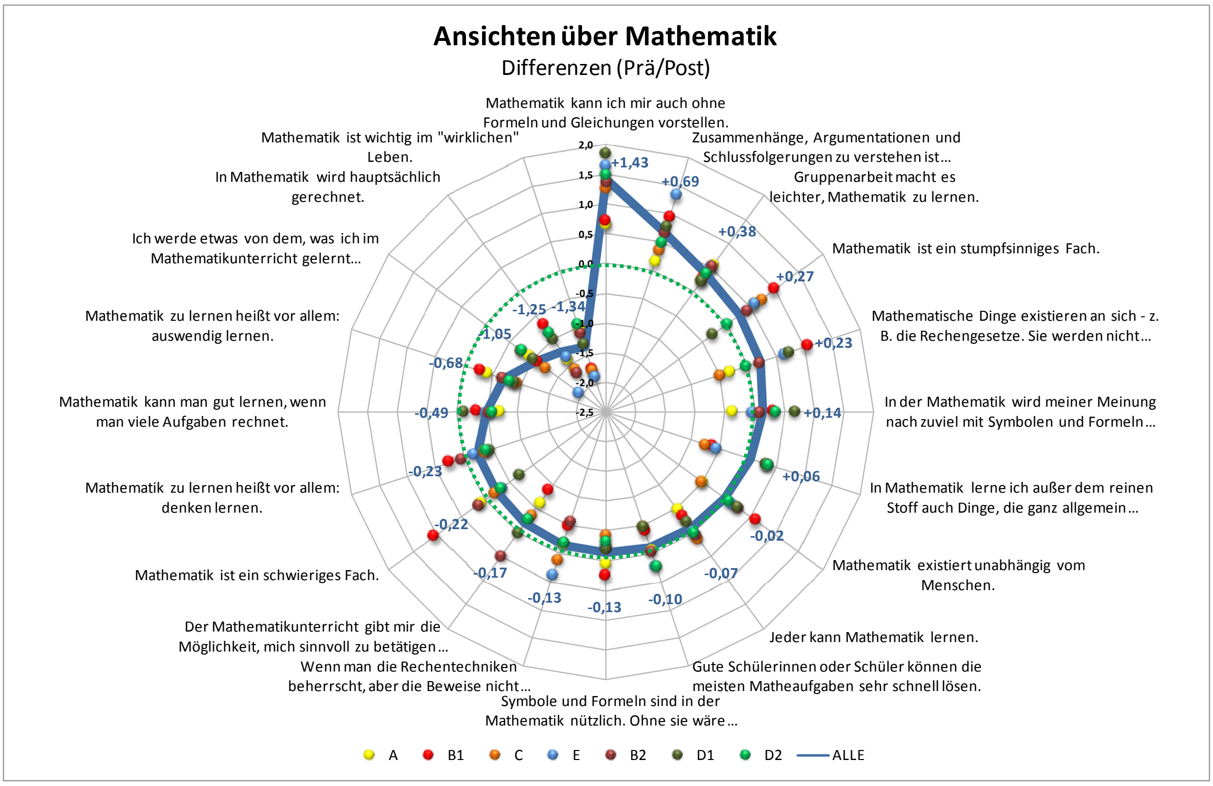


Diagramm 44: Prä/Post-Differenzen in den Ansichten und Urteilen der Lernenden in den Experimentalklassen über Mathematik. Jedem Item war in der Post-Befragung der Satz „Dieses Thema hat gezeigt:“ vorangestellt worden. Die Punkte repräsentieren Werte in den einzelnen Klassen, die durchgezogene Linie die durchschnittliche Differenz über alle Klassen, der auch mit den Zahlen wiedergegeben wird. Die grüne gepunktete Linie deutet die Differenz 0 (keine Differenz) an. Die Items sind sortiert nach der Vorgabe von Diagramm 39.

	Auffällige Klassen	Spannweite	Standard-abweichung
Gruppenarbeit macht es leichter, Mathematik zu lernen.		0,33	0,13
Mathematik kann man gut lernen, wenn man viele Aufgaben rechnet.		0,59	0,18
Jeder kann Mathematik lernen.		0,60	0,20
Symbole und Formeln sind in der Mathematik nützlich. Ohne sie wäre vieles schwieriger		0,68	0,22
Mathematik zu lernen heißt vor allem: auswendig lernen.		0,65	0,24
Mathematik zu lernen heißt vor allem: denken lernen.		0,69	0,24
Gute Schülerinnen oder Schüler können die meisten Matheaufgaben sehr schnell lösen.		0,72	0,28
Wenn man die Rechentechniken beherrscht, aber die Beweise nicht verstanden hat, kommt man im Unterricht immer noch ganz gut zurecht.		0,92	0,29

	Auffällige Klassen	Spannweite	Standard-abweichung
In der Mathematik wird meiner Meinung nach zuviel mit Symbolen und Formeln gearbeitet.		1,04	0,31
In Mathematik wird hauptsächlich gerechnet.	*	0,97	0,35
Zusammenhänge, Argumentationen und Schlussfolgerungen zu verstehen ist wichtiger als Rechentechniken zu beherrschen.	E	1,17	0,36
Mathematik ist wichtig im „wirklichen“ Leben.	E*, C*, B1*	0,92	0,36
Mathematik existiert unabhängig vom Menschen.	C, B1*	1,12	0,38
Ich werde etwas von dem, was ich im Mathematikunterricht gelernt habe, bestimmt später gebrauchen können.	E*	1,20	0,38
Der Mathematikunterricht gibt mir die Möglichkeit, mich sinnvoll zu betätigen und einzubringen.		1,34	0,40
Mathematik ist ein stumpfsinniges Fach.		1,28	0,40
Mathematik kann ich mir auch ohne Formeln und Gleichungen vorstellen.	A, B1*	1,20	0,42
In Mathematik lerne ich außer dem reinen Stoff auch Dinge, die ganz allgemein wichtig oder interessant sind.	C*, B1*, E*	1,11	0,49
Mathematik ist ein schwieriges Fach.	B1*	1,75	0,51
Mathematische Dinge existieren an sich - z. B. die Rechengesetze. Sie werden nicht von Menschen erfunden, sondern es gibt sie einfach. Sie werden entdeckt.		1,55	0,53

Tabelle 33: Streuungen der Werte im Diagramm 44, quantifiziert durch Spannweiten und Standardabweichungen. Mit einem Stern versehen sind jene Klassen, die beim entsprechenden Item schon in Tabelle 32 aufgefallen waren, deren jeweiligen Post-Werte also Ausreißerqualitäten zeigten.

Die Auffälligkeiten bei Klasse B1 (insbesondere in den Post-Werten) spiegeln zunächst das bereits in der Prä-Befragung festgestellte, geringe Zutrauen der Schülerinnen und Schüler zu den eigenen Fähigkeiten sowie ihr distanziertes Verhältnis zum Fach Mathematik im Allgemeinen wieder. Die historische Perspektive wurde darüber hinaus hier als sehr schwierig eingeschätzt (3,50, ein Anstieg um 1,04). Dieser Wert fällt nicht nur im Vergleich mit den anderen Klassen deutlich heraus. Er überrascht auch deshalb, da die Klasse B1 so gute Testergebnisse erzielt hat (zum Zeitpunkt der Befragung waren die Tests jedoch noch nicht geschrieben). In beiden Tests lagen die Schülerinnen und Schüler dieser Klasse in der Spitzengruppe, und die Klasse als Ganzes verzeichnete den stärksten Leistungsschub aller beteiligten Klassen (vgl. Kap. 5.4.1.3.2).

Dennoch: Im Hinblick auf die Frage, ob man in der Auseinandersetzung mit der historisch geprägten Mathematik außer dem reinen Stoff auch allgemein wichtige oder interessante Dinge gelernt habe, hat die Zustimmung in Klasse B1 deutlich auf 1,50 abgenommen (-0,64). Die Ansicht, dass man etwas von dem, was man im Unterricht gelernt habe, später noch gebrauchen könne, liegt von den Verlusten her im Trend aller Klassen, erreicht jedoch – aufgrund des ohnehin schon sehr niedrigen Prä-Niveaus – nur noch eine minimale Zustimmung von 1,06, wird also – anders ausgedrückt – rundweg abgelehnt. Bezeichnenderweise ist die Zustimmung zur Aussage, dass Mathematik unabhängig vom Menschen existiere – mit dem Menschen also letztlich nichts oder jedenfalls nicht viel zu tun habe – in dieser Klasse von einem vergleichsweise hohen Niveau noch einmal gestiegen und liegt nun beim Spitzenwert von 3,50.

Auch in den Klassen C und E kam es zu solch auffälligen Werten. Am deutlichsten wird dies im Item „In Mathematik lerne ich außer dem reinen Stoff auch Dinge, die ganz allgemein wichtig oder interessant sind“. Insbesondere bei den Verschiebungswerten stehen sich hier zwei Fraktionen gegenüber: Die Klassen B1, C und E mit einem durchschnittlichen Zustimmungs*verlust* von -0,65 und die Klassen A, B2, D1 und D2 mit einen durchschnittlichen Zustimmungs*gewinn* von +0,34 (vgl. Tabelle 35).

Eine mögliche Erklärung für dieses Phänomen liefern die Wahrnehmungen der Lernenden zu den Kontextelaborationen im jeweils stattgehabten Unterricht (vgl. Kap. 5.3.3.1). Die Klassen B1, C und E haben im experimentellen Unterricht eine vergleichsweise geringere Gewichtung der Autorendimension, dafür jedoch eine deutlichere Zuspitzung auf die fachliche Dimension wahrgenommen als die übrigen Experimentalklassen. B1 und E haben entsprechend den stärksten Zugewinn in den Leistungswerten (Tests) verzeichnet. In den anderen Klassen, insbesondere in B2, D1 und D2, hat im Gegensatz dazu eine stärkere hermeneutische Öffnung stattgefunden. Die unterschiedlichen Verteilungen der Post-Werte erscheinen vor diesem Hintergrund plausibel. Sie reflektieren ziemlich gut die erlebten Schwerpunktsetzungen im Unterricht, die auch mit den Eindrücken aus den Transkripten kongruieren (vgl. Kap. 5.3.2).

Zudem fällt auf, dass es die Klassen B1, B2, C und E waren, die das Material der experimentellen Unterrichtsreihe relativ kleinschrittig „abarbeiten" mussten und dabei viel weniger Freiräume eingeräumt bekamen als die Schülerinnen und Schüler der Klassen A, D1 und D2. Die Vermutung liegt nahe, dass diese sehr verschiedenen methodischen Grundmuster auch unterschiedliche Wirkungen auf die Entwicklung fachbezogener Ansichten und Urteile über die historische Mathematik gezeitigt haben. Der Einfluss der Unterrichtsmethodik wurde jedoch – aus zuvor beschriebenen Gründen – in dieser Studie nicht näher untersucht. Seine Erforschung muss künftigen Arbeiten vorbehalten bleiben.

	A	B1	C	E	B2	D1	D2
Symbole und Formeln sind in der Mathematik nützlich. Ohne sie wäre vieles schwieriger.	3,92	3,50	3,30	3,14	3,19	3,58	3,29
Zusammenhänge, Argumentationen und Schlussfolgerungen zu verstehen ist wichtiger als Rechentechniken zu beherrschen.	3,40	3,00	3,21	3,62	3,39	3,14	3,61
Mathematik kann ich mir auch ohne Formeln und Gleichungen vorstellen.	2,88	2,50	3,07	3,55	3,68	3,70	3,84
Mathematik zu lernen heißt vor allem: denken lernen.	3,21	3,17	3,08	3,12	3,00	3,23	3,22
Gute Schülerinnen oder Schüler können die meisten Matheaufgaben sehr schnell lösen.	3,44	2,70	3,06	3,31	3,00	3,14	3,23
Jeder kann Mathematik lernen.	3,10	2,33	2,79	3,35	3,65	3,44	3,18
Mathematische Dinge existieren an sich - z. B. die Rechengesetze. Sie werden nicht von Menschen erfunden, sondern es gibt sie einfach. Sie werden entdeckt.	3,17	3,25	2,38	3,00	3,31	3,17	2,72
Gruppenarbeit macht es leichter, Mathematik zu lernen.	3,14	3,10	2,64	2,94	3,22	3,10	2,73
Mathematik existiert unabhängig vom Menschen.	3,00	3,50	2,40	2,89	2,93	3,00	2,67
Mathematik kann man gut lernen, wenn man viele Aufgaben rechnet.	2,33	2,80	2,39	2,69	2,56	2,77	2,21
Mathematik ist ein schwieriges Fach.	2,50	3,67	2,50	2,27	2,64	2,05	2,00
In Mathematik lerne ich außer dem reinen Stoff auch Dinge, die ganz allgemein wichtig oder interessant sind.	2,83	1,50	1,70	2,25	2,77	2,96	3,14
Der Mathematikunterricht gibt mir die Möglichkeit, mich sinnvoll zu betätigen und einzubringen.	2,23	2,00	2,17	2,45	2,75	2,96	2,56
Wenn man die Rechentechniken beherrscht, aber die Beweise nicht verstanden hat, kommt man im Unterricht immer noch ganz gut zurecht.	2,13	2,10	2,75	2,50	2,13	2,25	2,18
In der Mathematik wird meiner Meinung nach zuviel mit Symbolen und Formeln gearbeitet.	1,35	2,25	2,00	2,00	2,17	2,13	2,04
Mathematik ist ein stumpfsinniges Fach.	1,93	2,70	2,90	1,89	1,64	1,36	1,33
Ich werde etwas von dem, was ich im Mathematikunterricht gelernt habe, bestimmt später gebrauchen können.	2,17	1,06	1,44	1,38	2,00	1,96	2,39
In Mathematik wird hauptsächlich gerechnet.	1,59	1,88	1,93	1,82	1,57	1,64	1,77
Mathematik ist wichtig im "wirklichen" Leben.	1,96	1,13	1,23	1,27	1,67	1,77	1,93
Mathematik zu lernen heißt vor allem: auswendig lernen.	1,50	1,50	2,00	1,35	1,83	1,25	1,28

Tabelle 34: Ansichten und Urteile über Mathematik, hier als klassenweiser Überblick über die durchschnittlichen Zustimmungswerte zu den Items im Post-Fragebogen. Jedem Item war der Satz „Dieses Thema hat gezeigt:" vorangestellt worden.

	A	B1	C	E	B2	D1	D2
Mathematik kann ich mir auch ohne Formeln und Gleichungen vorstellen.	0,65	0,70	1,26	1,63	1,36	1,84	1,49
Zusammenhänge, Argumentationen und Schlussfolgerungen zu verstehen ist wichtiger als Rechentechniken zu beherrschen.	0,15	0,94	0,35	1,32	0,67	0,77	0,50
Gruppenarbeit macht es leichter, Mathematik zu lernen.	0,55	0,29	0,23	0,51	0,52	0,21	0,36
Mathematik ist ein stumpfsinniges Fach.	0,57	0,99	0,72	0,58	0,40	-0,29	0,00
Mathematische Dinge existieren an sich - z. B. die Rechengesetze. Sie werden nicht von Menschen erfunden, sondern es gibt sie einfach. Sie werden entdeckt.	-0,33	1,05	-0,50	0,64	0,19	0,72	-0,03
In der Mathematik wird meiner Meinung nach zuviel mit Symbolen und Formeln gearbeitet.	-0,38	0,30	0,08	-0,05	0,07	0,66	0,34
In Mathematik lerne ich außer dem reinen Stoff auch Dinge, die ganz allgemein wichtig oder interessant sind.	0,33	-0,64	-0,75	-0,55	0,36	0,31	0,36
Mathematik existiert unabhängig vom Menschen.	-0,50	0,60	-0,52	0,12	0,23	0,22	0,04
Jeder kann Mathematik lernen.	-0,48	-0,33	0,12	-0,03	0,05	-0,22	0,02
Gute Schülerinnen oder Schüler können die meisten Matheaufgaben sehr schnell lösen.	-0,06	-0,38	-0,49	0,21	-0,04	-0,47	0,23
Symbole und Formeln sind in der Mathematik nützlich. Ohne sie wäre vieles schwieriger	0,05	0,25	-0,43	-0,26	-0,22	-0,19	-0,32
Wenn man die Rechentechniken beherrscht, aber die Beweise nicht verstanden hat, kommt man im Unterricht immer noch ganz gut zurecht.	-0,18	-0,48	0,10	0,36	-0,56	-0,19	-0,19
Der Mathematikunterricht gibt mir die Möglichkeit, mich sinnvoll zu betätigen und einzubringen.	-0,60	-0,86	-0,38	-0,28	0,48	0,02	-0,26
Mathematik ist ein schwieriges Fach.	0,09	1,04	-0,19	-0,34	0,14	-0,71	-0,31
Mathematik zu lernen heißt vor allem: denken lernen.	-0,36	0,25	-0,37	-0,18	0,04	-0,44	-0,39
Mathematik kann man gut lernen, wenn man viele Aufgaben rechnet.	-0,71	-0,34	-0,55	-0,49	-0,53	-0,12	-0,58
Mathematik zu lernen heißt vor allem: auswendig lernen.	-0,39	-0,28	-0,92	-0,87	-0,67	-0,88	-0,80
Ich werde etwas von dem, was ich im Mathematikunterricht gelernt habe, bestimmt später gebrauchen können.	-0,90	-1,09	-1,25	-1,94	-0,75	-1,00	-0,74
In Mathematik wird hauptsächlich gerechnet.	-1,41	-0,71	-1,61	-1,36	-1,68	-0,99	-0,86
Mathematik ist wichtig im „wirklichen“ Leben.	-1,04	-1,75	-1,77	-1,88	-1,11	-1,29	-0,96

Tabelle 35: Prä/Post-Verschiebungen in den Ansichten und Urteilen über Mathematik, hier als klassenweiser Überblick über die durchschnittlichen Änderungen der Zustimmungswerte in den Items des Fragebogens. Jedem Item war in der Post-Befragung der Satz „Dieses Thema hat gezeigt:“ vorangestellt worden.

5.4.2.2.3 Zusammenfassung

Die Entwicklung der fachbezogenen Ansichten und Urteile weisen keine signifikante Gender-Abhängigkeit auf – trotz einiger Indizien dafür, dass Mädchen von der historischen Mathematik in manchen Punkten möglicherweise etwas stärker angesprochen wurden. Hingegen ist die Annahme wahrscheinlich, dass es Zusammenhänge zur methodischen Steuerung und zur vorgenommenen kontextuellen Schwerpunktsetzung des Materials durch die Lehrperson gibt. Die hermeneutische Verbreiterung des Unterrichts hat demnach dann eine förderliche Wirkung auf die Entwicklung von fachbezogenen Ansichten und Urteilen, wenn sie mit einer Freiräume gewährenden Gestaltung des Unterrichts einhergeht.

5.4.3 Korrelationen von Ansichten bzw. Urteilen und Leistungen

Wir fragen nun noch, ob die Ansichten und Urteile der Lernenden (vgl. Kap. 5.4.2) und ihre Leistungen (vgl. Kap. 5.4.1) in irgendeiner Weise korreliert sind. Dabei stellen wir fest, dass es zwischen den Testnoten und den Ansichten-Items nur eine einzige signifikante Korrelation gibt: Sie betrifft den Zusammenhang der Note in Test 2 mit der Aussage „Ich werde etwas von dem, was ich im Mathematikunterricht gelernt habe, gebrauchen können.“ Beides ist gering negativ miteinander korreliert (r = -0,225, vgl. Tab. CD.102), so dass die Zustimmung zu diesem Item tendenziell mit besseren Noten in Test 2 steigt. Wenn auch nur schwach, so zeigt sich hierin offenbar: Schülerinnen und Schüler, die von der Brauchbarkeit des Themas eher überzeugt waren, haben den Stoff auch mit größerer Nachhaltigkeit gelernt und mehr davon im Kopf behalten. Für alle anderen Items hingegen gilt: Ein Zusammenhang mit den Leistungswerten (Testnoten) kann nicht nachgewiesen werden.

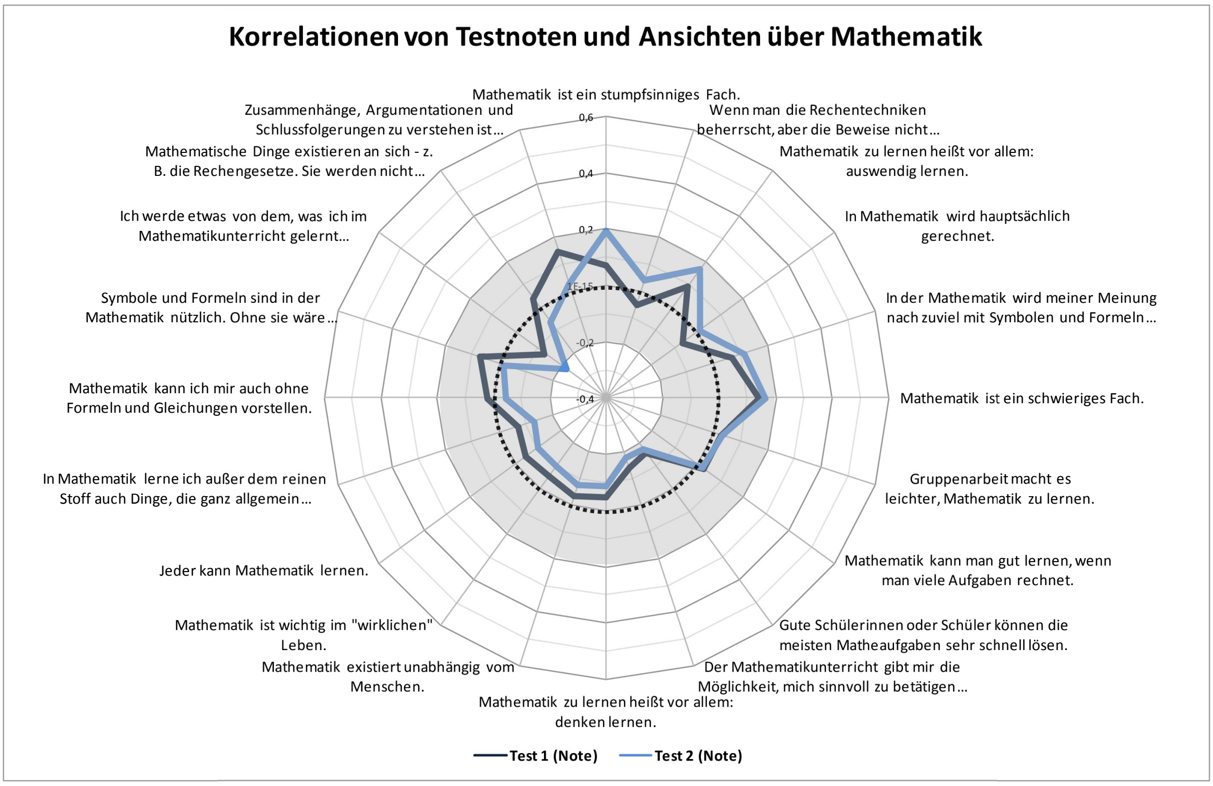


Diagramm 45: Korrelationen von Testnoten und Ansichten über Mathematik (Experimentalgruppe). Innerhalb des gepunkteten Kreises (Nulllinie) gilt: Je besser die Leistung umso größer die Zustimmung (negative Polung). Außerhalb des Kreises gilt: Je besser die Leistung, umso größer die Ablehnung (positive Polung). Der Bereich sehr geringer Korrelation wird durch eine graue Unterlegung angedeutet.

5.4.4 *Wirkungen auf das Interesse der Lernenden*

Im folgenden Abschnitt soll zum Abschluss untersucht werden, welches Gesamtinteresse die historische Reihe bei den Lernenden ausgelöst hat.

5.4.4.1 *Gesamtbilanz und Differenzierungen*

Auf einer vierstufigen Rating-Skala konnten die Schülerinnen und Schüler ankreuzen, wie interessant oder langweilig sie die Unterrichtsreihe fanden. Die Antworten wurden in Zahlen codiert, die – wie im Prä-Fragebogen – den folgenden Aussagen auf der Skala entsprachen:

	sehr langweilig	eher langweilig	eher interessant	sehr interessant
Codierung	1	2	3	4
Intervalle	0,5-1,5	1,5-2,5	2,5-3,5	3,5-4,5

Tabelle 36: Codierung der Ratingstufen im Fragebogen und Intervallbildung.

Es ergibt sich ein gehäufter Median von 3,28. Zum Vergleich: Das Prä-Item „Interesse an Mathematik“ erreichte in der Experimentalgruppe einen Wert von 3,13 (vgl. Tab. CD.68). Der verzeichnete

Anstieg verfehlt allerdings das Signifikanzniveau ($p = 0,125$, vgl. Tab. CD.69). Wir können also zunächst nur mit Sicherheit sagen, dass der experimentellen Unterrichtsreihe von Seiten der Schülerinnen und Schüler mindestens so viel Interesse entgegengebracht wurde wie dem Fach Mathematik im Allgemeinen.

Die Werte unterscheiden sich genderspezifisch. Bei den Jungen ergibt sich ein gehäufter Median von 3,33, bei den Mädchen von 3,24. Dieser Unterschied wird jedoch als nicht signifikant getestet ($p = 0,292$, vgl. Tab CD.103). Zum Vergleich: In der Prä-Befragung ergaben sich in der Experimentalgruppe Werte von 3,17 bei den Jungen und 3,09 bei den Mädchen. Das Interesse nahm durch den Unterricht damit quasi einheitlich um +0,16 bzw. +0,15 zu.

Ein Blick auf die Werte in den einzelnen Experimentalklassen zeigt deutlichere Schwankungen mit einem vertrauten Muster (vgl. Tabelle 37). Demnach äußerten die Klassen B1, C und E durchschnittlich das geringste Interesse an der Unterrichtsreihe. Dieser Befund enttäuscht etwas, da es aus diesen Klassen durchaus sehr positive und wertschätzende Äußerungen gegeben hat (vgl. z. B. Kap. 5.3.2.2.2.1) und die Klassen B1 und E in den Tests besonders gute Leistungen verzeichnet hatten. Gerade in Klasse B1 irritiert das schlechte Abschneiden der historischen Mathematik im Vergleich zur Mathematik im Allgemeinen: der Wert ist um -0,50 gefallen. Hierin zeigt sich offenbar:

Die positive Entwicklung der Leistung geht nicht zwangsläufig mit erhöhtem Interesse der Lernenden einher.

Das zurückhaltende Urteil der Klassen B1, C und E mag u. a. mit der in diesen Klassen angewandten Unterrichtsmethodik zusammenhängen, nach welcher der Stoff kleinschrittig abgearbeitet und den Schülern nur wenig kreativer Freiraum gewährt wurde (vgl. Kap. 5.3.2). Klassen hingegen, in denen freiere Methoden benutzt wurden (A, D1 und D2), zeigten durchweg sehr viel größeres Interesse am Thema. Der entsprechende Wert ist in diesen Klassen deutlich gestiegen, während er in B1 gefallen ist und in C und E nahezu unverändert blieb. Es liegt darum nahe zu vermuten:

Das Urteil der Lernenden über die Interessantheit der historischen Unterrichtsreihe ist nicht allein durch die inhaltlichen Angebote sondern maßgeblich auch durch die Art der Umsetzung mitgeprägt. Es gibt Hinweise darauf, dass individualisierende Methoden das Interesse stärker zu fördern vermögen.

In wie weit diese Feststellung zutrifft, müsste in einem künftigen Experiment untersucht werden, in welchem auch die Unterrichtsmethodik als Parameter kontrolliert wird.

Klasse	**A**	**B1**	**C**	**E**	**B2**	**D1**	**D2**
Interesse an der historischen Mathematik (Post-Befragung)	3,54	2,63	2,72	3,08	3,33	3,50	3,77
Allgemeines Interesse an Mathematik (Prä-Befragung)	3,35	3,13	2,75	3,13	3,17	3,10	3,23
Differenz	+0,19	-0,50	-0,03	-0,05	+0,16	+0,40	+0,54

Tabelle 37: Interesse am historischen Thema und an Mathematik im Allgemeinen. Größere Zustimmungswerte sowie positive Differenzen sind in grün hervorgehoben, geringere Zustimmungswerte und negative Differenzen in rot.

5.4.4.2 Korrelationen mit anderen Items

5.4.4.2.1 Korrelationen mit Vorab-Dispositionen (Prä-Items)

Man kann nun noch die Frage untersuchen, mit welchen anderen Items das Interesse an der experimentellen Unterrichtsreihe korreliert ist. Zunächst zeigt sich, dass es einen Zusammenhang zwischen dem vorab erhobenen, allgemeinen Interesse an Mathematik und dem speziellen Interesse am historischen Thema gibt. Die statistische Analyse weist eine zwar geringe, aber höchstsignifikante Korrelation zwischen den beiden Items nach ($r = 0{,}375$, $p < 0{,}001$). Das bedeutet: Schülerinnen und Schüler, die sich für Mathematik stärker interessieren, fanden auch etwas eher Gefallen am historischen Thema. Diese Aussage wird auch durch das folgende Parset-Diagramm (Diagramm 46) veranschaulicht. Man erkennt, dass knapp die Hälfte derjenigen, die das historische Thema als sehr interessant beurteilt haben, auch an Mathematik im Allgemeinen sehr interessiert ist, die andere Hälfte sie immerhin als „eher interessant“ und ein kleiner Teil sie als „eher langweilig“ einschätzt. Ferner sieht man, dass etwa die Hälfte derjenigen, die Mathematik als „eher langweilig“ beurteilen, die historische Unterrichtsreihe „eher interessant“ bzw. sogar „sehr interessant“ gefunden haben, wie aus den Verzweigungen der roten Streifen deutlich wird. Auch unter denjenigen, die Mathematik „eher interessant“ finden, hat im Hinblick auf die historische Unterrichtsreihe bei vielen eine Verschiebung in Richtung der noch höheren Beurteilung „sehr interessant“ stattgefunden. Der Effekt wurde jedoch teilweise durch eine gegenläufige Bewegung von Seiten der an Mathematik sehr interessierten Schülerinnen und Schüler in Richtung geringerer Beurteilungen kompensiert. Insgesamt ergibt dies den oben beschriebenen, geringen Anstieg des gehäuften Medians.

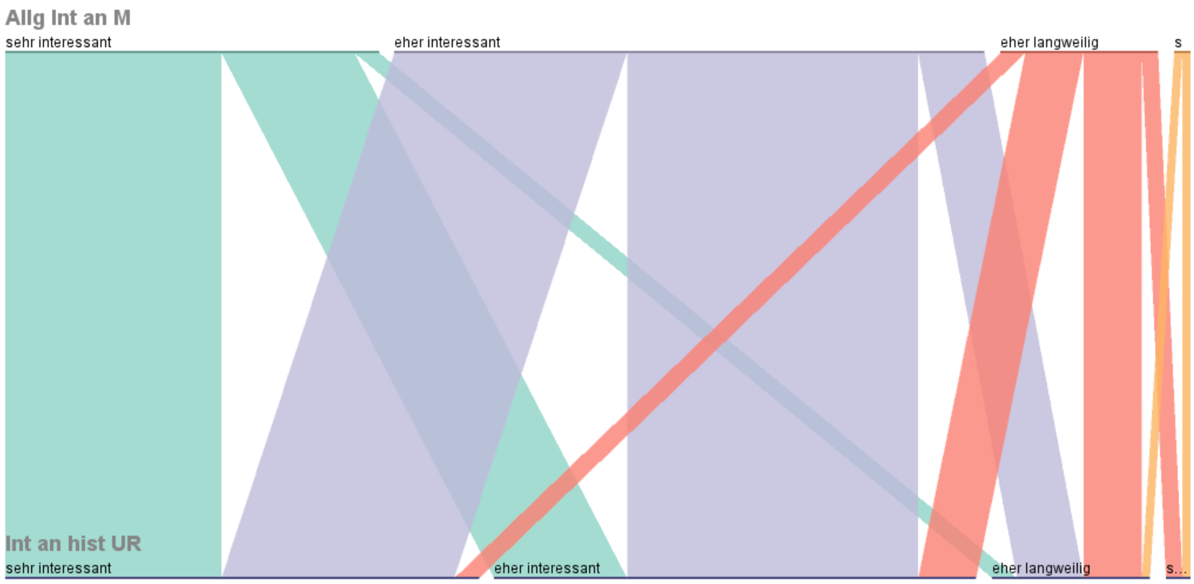


Diagramm 46: Allgemeines Interesse an Mathematik und Interesse an der historischen Unterrichtsreihe.

Welche Zusammenhänge weisen die Interesse-Items mit den Lerntypdispositionen (s. Kap. 5.2.7.2) und Zeugniszensuren in bestimmten Fächern auf? Eine umfassende Korrelationsanalyse führt zum Diagramm 48 (vgl. auch Tab. CD.70):

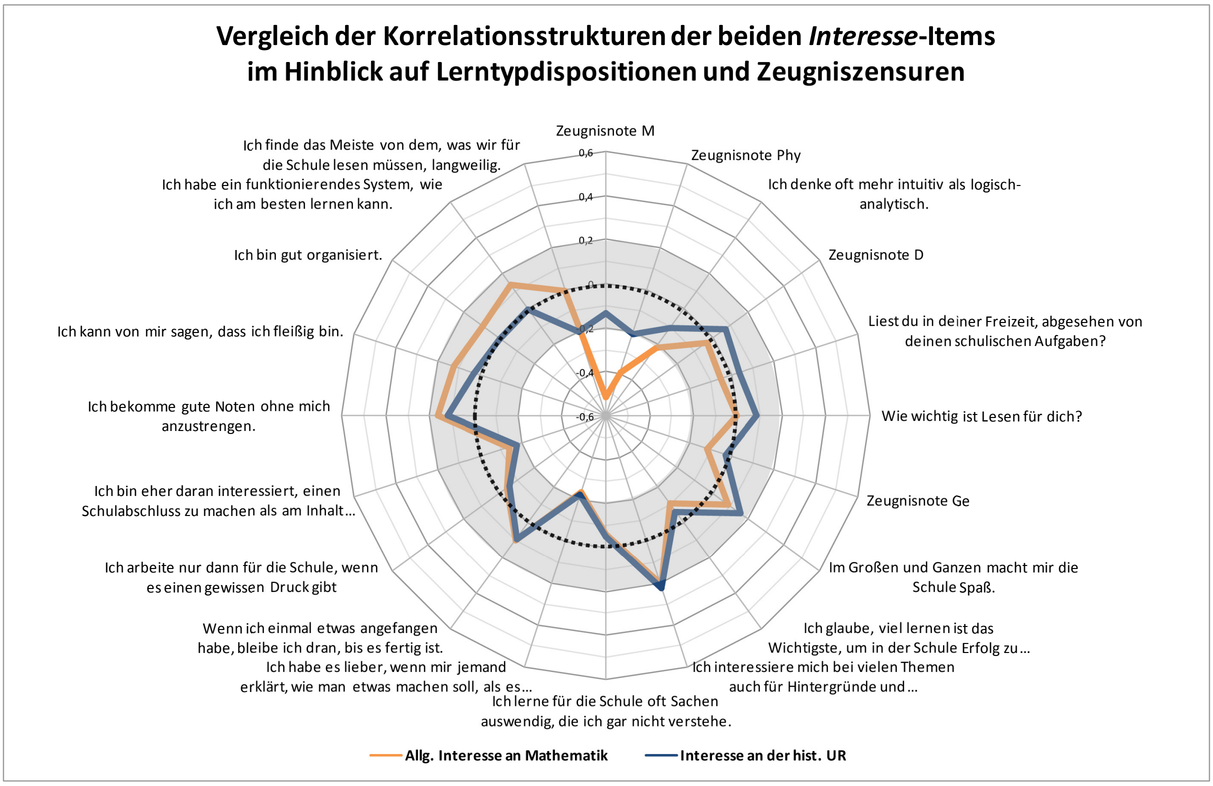


Diagramm 47: Korrelationsprofile im Hinblick auf Lerntypdispositionen und Zeugniszensuren. Das Nullniveau (keine Korrelation) wird durch die gepunktete Linie, der Bereich sehr geringer Korrelation durch eine graue Unterlegung angedeutet. Punkte negativer Korrelation befinden sich innerhalb des gepunkteten Kreises, Punkte positiver Korrelation außerhalb.

Das Diagramm zeigt: Die Korrelationsstrukturen der beiden Items „Allgemeines Interesse an Mathematik“ und „Interesse an der historischen Unterrichtsreihe“ sind einander in weiten Bereichen sehr ähnlich. Zu den meisten anderen Items bestehen demnach nur sehr geringe oder gar keine Korrelationen (Kurve bleibt im grau unterlegten Bereich). Es gibt aber auch auffällige Ausnahmen: So ist das allgemeine Interesse an Mathematik im mittleren Maße mit der Zeugnisnote in diesem Fach (r = -0,515; p < 0,001), sowie im geringen Maße mit der Physiknote (r = -0,391; p < 0,001), mit der Bevorzugung eigenständiger Arbeitsweisen (r = -0,225; p = 0,019), mit der Selbstattribuierung eines eher logisch-analytischen Denkstils (r = -0,214; p = 0,019) und mit Interesse an Hintergründen und Zusammenhängen (r = 0,223; p = 0,019) korreliert.

Abweichend hiervon hängt das Interesse an der historischen Unterrichtsreihe sehr viel weniger mit den Zeugnisnoten in Mathematik (und Physik) zusammen. Dieser sehr auffällige Unterschied wird im folgenden ParSet-Diagramm (Diagramm 48) noch einmal illustriert. Die gesunkene Korrelation zeigt sich in den deutlicheren Aufspreizungen und häufigeren Überkreuzungen der Streifen im unteren Bild:

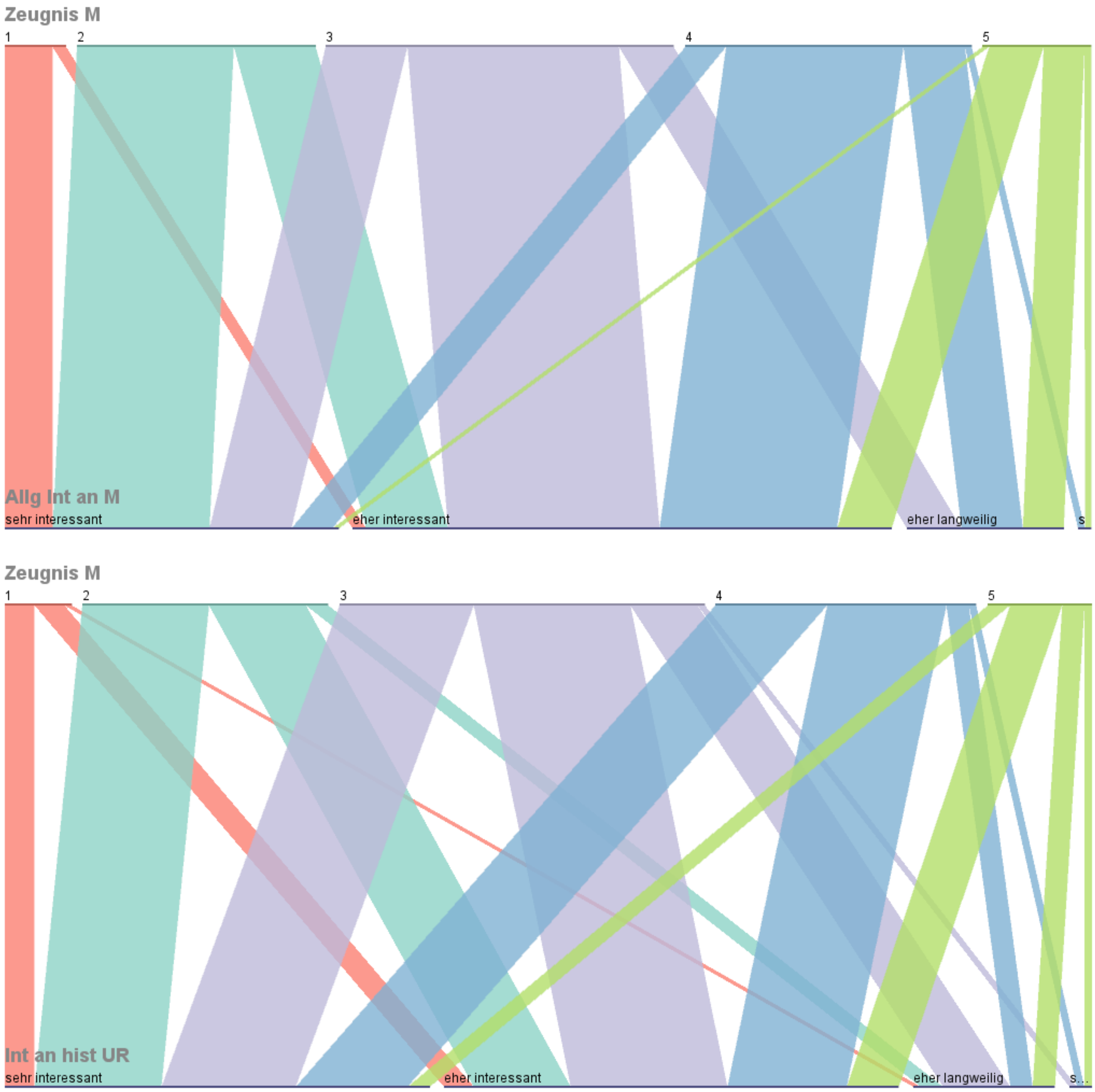


Diagramm 48: Die Zeugnisnote ist stark mit dem allgemeinen Interesse an Mathematik, jedoch kaum mit dem Interesse an der historischen Unterrichtsreihe korreliert. Sichtbar wird dies in der stärkeren Aufspreizung und Überkreuzung der farbigen Streifen im unteren Bild.

Die stärksten Korrelationen des Items „Interesse an der historischen Unterrichtsreihe" bestehen zu den Items „Vorliebe für eigenständige Arbeitsweisen" (r = -0,225; p = 0,019), und „Interesse an Hintergründen und Zusammenhängen" (r = 0,223; p = 0,019). Im Hinblick auf die unterschiedlichen Umsetzungen des historischen Themas in den Experimentalklassen ist dies ein stimmiges Resultat: Die auf Selbständigkeit und Eigenverantwortung abgestellten Unterrichtsmethoden in den AD-Klassen lösten bei den Schülerinnen und Schülern ein deutlich höheres Interesse aus als die kleinschrittig-gelenkten Vorgehensweisen in den BCE-Klassen. Die weiteren Analyseergebnisse weisen darüber hinaus darauf hin, dass Schülerinnen und Schüler, die sich für das historische Thema besonders interessiert haben,

- sich tendenziell etwas weniger stark dem logisch-analytischem Denktyp zuordnen,

- in ihrer Freizeit etwas mehr lesen und Lesen auch für wichtiger halten,
- Lektüren für die Schule insgesamt interessanter finden,
- und bemerkenswerterweise trotzdem eine etwas schlechtere Deutschnote haben

als solche, die ein mehr allgemeines Interesse an Mathematik geäußert haben. Die zuletzt Genannten halten sich im Gegenzug

- tendenziell für fleißiger sowie besser organisiert,
- und verfügen auch eher über ein funktionierendes Lernsystem.

Bei den letzten Punkten ist jedoch Vorsicht geboten: Keine der Aussagen – mit Ausnahme der ersten (Denktyp) – erreicht das in dieser Arbeit verwendete statistische Signifikanzniveau. Wir wollen sie darum eher als Hinweise und Anzeichen denn als erhärtete Fakten verstehen.

Zusammenfassend können wir festhalten: Den Schülerinnen und Schülern, die sowohl für die historische Unterrichtsreihe wie auch für das Fach Mathematik im Ganzen ein großes Interesse artikulieren, ist eine stärkere Wertschätzung von Eigenständigkeit und Hintergrundwissen gemein. Während das allgemeine Interesse an Mathematik aber am stärksten mit der Zeugnisnote in diesem Fach (und im Fach Physik) korreliert ist und daneben auch eher mit einem ausgeprägteren, logisch-analytischen Denktyp zusammenhängt, ist das Interesse an der historischen Unterrichtsreihe von diesen Items vollständig losgelöst. Es ist demnach nicht leistungsabhängig oder denktypspezifisch bedingt. Dies ist ein wichtiger Hinweis darauf, dass historische Themen potenziell neue Interessentenkreise zu erschließen vermögen. Ferner gibt es Anzeichen dafür, dass das Interesse an historischer Mathematik etwas stärker mit einer höheren Freude am Lesen, dafür aber weniger mit Selbstorganisation korreliert ist als das allgemeine Interesse an Mathematik.

5.4.4.2.2 Korrelationen mit Einschätzungen zum erlebten Unterricht (Post-Items)

Bisher haben wir uns darauf konzentriert zu untersuchen, mit welchen allgemeinen Vorab-Dispositionen (Prä-Items) das Interesse am historischen Thema zusammenhängt. Nun fragen wir, mit welchen Einschätzungen zum tatsächlich erlebten Unterricht (Post-Items) dieses Interesse verknüpft ist. Auch hier hilft eine Korrelationsanalyse weiter. Es zeigt sich:

Schülerinnen und Schüler, die sich (stärker als andere) für das historische Thema interessiert haben,

- würden es begrüßen, wenn sie im Unterricht gelegentlich mehr darüber erführen, wie Mathematik früher ausgesehen hat (r = 0,632; hochsignifikant),
- geben an, dass sie bei diesem Thema auch Dinge gelernt hätten, die ganz allgemein wichtig oder interessant sind (r = 0,551; hochsignifikant)
- sagen, dass es lohnenswert sei, sich in jemanden wie Al-Khwarizmi hineinzudenken (r = 0,522; hochsignifikant),
- lehnen die Aussage, dass das Thema stumpfsinnig gewesen sei, ab (r = -0,511; hochsignifikant),

Die Korrelationen bis hierher besitzen ein mittleres Niveau. Auf geringerem Niveau bewegen sich die folgenden Korrelationen. Demnach gilt für die stärker interessierten Schülerinnen und Schüler tendenziell,

- dass sie meinen, etwas von dem, was sie bei diesem Thema gelernt haben, bestimmt später gebrauchen zu können ($r = 0{,}483$; hochsignifikant),
- dass das Thema ihnen die Möglichkeit gegeben hat, sich im Unterricht sinnvoll zu betätigen und einzubringen ($r = 0{,}429$; hochsignifikant),
- dass sie angeregt wurden, über ihre eigenen Denk- und Herangehensweisen nachzudenken ($r = 0{,}425$; hochsignifikant).

Die Beobachtung, dass interessierte Schülerinnen und Schüler meinen, in der Beschäftigung mit historischer Mathematik etwas von allgemeiner Wichtigkeit zu lernen, das (u. a.) ihre bisherigen Denkweisen in Frage zu stellen vermag, ist im Rahmen dieser Untersuchung von Interesse. Wir wollen uns darum im letzten Unterabschnitt dieses Kapitels weiter damit befassen.

5.4.5 Wirksame Fremdheit?

In Kap. 2.3.3 habe ich es als erstrangiges pädagogisches Ziel der historisch-hermeneutischen Unterrichtskonzeption bezeichnet, die Pluralität und mögliche Divergenz menschlicher Sinnattribuierungen zur Geltung zu bringen. Nach Emilio Betti geht es dabei darum, „Menschen zu der Bereitschaft [zu] erziehen, sich für die Einsicht in fremdes Denken einzusetzen" (s. o.). Die kritische Erfahrung des Fremden mündet dann – so die Hoffnung – in eine kritische Reflexion des Eigenen. Dabei wird den Schülerinnen und Schülern nicht nur die eigene Beziehung zur Mathematik bewusst (Jahnke). Sie entwickeln ebenso Sensibilität und Aufgeschlossenheit für die Welt der „Anderen". Die hermeneutische Orientierung kann damit auch einen Beitrag zur Verständigung von Menschen über Grenzen und Gräben hinweg leisten und als ein Element interkultureller Erziehung gelten.

Die Konzeption der vorliegenden Untersuchung als Vergleichsstudie mit definierten Fragestellungen (vgl. Einleitung) gestattet es zwar nicht, auch das Erreichen solcher genuinen Erziehungsziele historisch-hermeneutischen Unterrichtens in differenzierter Form zu überprüfen und darzustellen. Dennoch geben die erhobenen Daten und insbesondere einige Schüleräußerungen interessante Hinweise auf den möglichen pädagogischen Ertrag des stattgehabten Experiments.

So stellen wir zunächst fest, dass gut 55 % aller Befragten angeben, in der historischen Unterrichtsreihe etwas gelernt zu haben, das sie für *allgemein* wichtig oder interessant halten. 53 % der Befragten bestätigen, durch die Unterrichtsreihe dazu angeregt worden zu sein, über die eigenen Denk- und Herangehensweisen nachzudenken. Die beiden Items sind auf mittlerem Niveau hochsignifikant korreliert ($r = 0{,}506$).

Was aber meinen Schülerinnen und Schüler genau, wenn sie diesen Aussagen zustimmen? Viele von ihnen denken zunächst an nächstliegende Zusammenhänge:

- „Wenn man Al-Kharizmi verstanden hat, dann verleichtert [sic] sich die Mathematik, weil man alles aus einem anderen Blickwinkel sieht." (Klasse E)
- „Durch dieses Heft wurde ich tatsächlich angeregt etwas mehr über die Denk- und Herangehensweisen eines Mathematikers zu überlegen." (Klasse D2)
- „Man kann nicht die Mathematik neu erfinden aber über Alternativen zu dem bestehenden nachden-

ken." (Klasse B1)
- „Ich halte es für interessant, Mathematik so stark zu verbalisieren." (Klasse A)

Äußerungen wie diese beziehen sich – anders als die Aussagen in Kap. 5.3.2.2.2.1 – nicht nur auf die konkreten Inhalte der Unterrichtsreihe, sondern nehmen durchaus schon die Mathematik als Ganzes in den Blick. Noch deutlicher wird dies in den folgenden Aussagen:

- „Dass es in Mathe so unterschiedliche Ideen und Ansätze zum selben Problem geben kann war mir neu. Das zeigt dass unsere Art zu denken nicht die einzig mögliche ist, und vielleicht nicht einmal die beste." (Klasse B2)
- „Ich habe unsere Herangehensweise bisher für selbstverständlich gehalten. Das ist sie aber nicht wie dieser Blick in die Geschichte zeigt." (Klasse D1)
- „Ich staune darüber, dass sogar ein Fach wie Mathematik zu verschiedenen Zeiten so verschieden aussehen kann. Das beweist, dass es eigentlich keine endgültigen Aussagen gibt." (Klasse D1)
- „Vielleicht gibt es ja nicht einmal in Mathe ‚ewige Wahrheiten'. Wer weiß, wie das alles in 1000 Jahren aussieht?!!" (Klasse D2)

Die zitierten Aussagen scheinen zunächst den Dunstkreis des mathematischen Denkens nicht zu verlassen, so dass die Frage aufkommen mag, warum Schülerinnen und Schüler mit ihnen etwas zum Ausdruck zu bringen meinen, das sie für „ganz allgemein wichtig oder interessant" halten. Bei näherem Hinsehen erkennt man jedoch, dass die Äußerungen durchaus Verknüpfungen zu übergreifenden Fragen herstellen, wie z. B. nach der Gültigkeit, Wandlungsfähigkeit und „Haltbarkeit" menschlichen Wissens. Für solches Wissen gibt ja vor allem die Mathematik mit ihren oft behaupteten Gewissheits- und Absolutheits-Attributen ein herausragendes Beispiel ab. Diese Attribute aber scheinen für einige Schülerinnen und Schüler auf einmal in Frage zu stehen. Besonders pointiert bringen das die beiden zuletzt zitierten Äußerungen zum Ausdruck. Sie besagen, dass die Entwicklung und Wandlung des Wissens kein Ende hat, und dass unsere wie auch Al-Khwarizmis Weisheit nur Teile eines größeren Ganzen sind, das wir wohl nie vollständig überschauen können. Diese Erkenntnis mag – vor allem angesichts unserer gefühlten Fortschrittlichkeit gegenüber Al-Khwarizmi – auch als Mahnung zur Bescheidenheit verstanden werden: In 1000 Jahren wird vielleicht ein Schüler der Zukunft *unser* Denken und *unsere* Herangehensweisen kopfschüttelnd betrachten und sie als ebenso fremd und seltsam empfinden wie wir die vor über 1000 Jahren gebräuchliche Mathematik Al-Khwarizmis. Wenn einige der zitierten Schülerinnen und Schüler in diesen Spuren gedacht haben, als sie ihre Äußerungen niederschrieben – und es klingt danach –, dann haben sie tatsächlich das grundlegende pädagogische Ziel der hermeneutischen Orientierung erreicht: Aus der kritischen Erfahrung des Fremden haben sie eine kritische Sicht auf das Eigene entwickelt.

Es gab aber auch Schülerinnen und Schüler, die nicht bei der Selbstreflexion stehen geblieben sind, sondern sich auch dem zweiten pädagogischen Ziel – der Sensibilisierung für die Welt der „Anderen" – genähert haben. Das zeigen die folgenden Aussagen:

- „Ich habe nicht gewusst, dass die Araber so viel für die Mathematik bzw. Wissenschaft getan haben. Heute denkt man ja, dass arabische Länder eher rückständig sind. Darum finde ich es wichtig zu erfahren, was die Menschen dort schon früh geleistet haben." (Klasse A)
- „Ich denke nun anders über die arabischen Länder und ihre Kultur, über die ich bisher eigentlich nur Vorurteile kannte." (Klasse D1)
- „Ich finde es schön, das [sic] eine so bedeutende Entdeckung von einem Araber gemacht worden ist."

(Klasse B1 – der Schüler, der dies geschrieben hat, ist selbst Moslem und hat iranische Vorfahren)

- „Bis jetzt war ich eher der Meinung, dass Wissenschaft und Religion im Widerspruch stehen und Wissenschaftler wohl eher nicht gläubig sind. Aber vielleicht ist das in dieser Kultur anders." (Klasse B2)
- „Dass die Araber im Mittelalter den Europäern überlegen war [sic], habe ich schon von Spanien-Urlauben her gewusst. Ich hatte allerdings keine Ahnung, dass sich das auch auf Mathematik bezog." (Klasse D2)
- „Ich frage mich: Wieso haben die ihren Vorsprung eingebüßt? Wieso sind nicht die auf dem Mond gelandet, sondern die Amis?" (Klasse A)

Schüleräußerungen wie diese sind beeindruckend, z. T. sogar bewegend. Sie sind u. a. ein Hinweis auf das mutmaßlich große *pädagogische* Potenzial der hermeneutischen Konzeption, und ermutigen dazu, diesem Thema eigene Untersuchungen zu widmen. Ich werde im Schlusskapitel noch einmal darauf zurückkommen.

6 *Resümee und Ausblick*

Mit der vorliegenden Arbeit habe ich das Ziel verfolgt, einen substanziellen Beitrag zur anhaltend kontrovers geführten Diskussion um den Sinn, den Nutzen und die praktische Durchführbarkeit fachgeschichtlicher Interventionen im schulischen Mathematikunterricht zu leisten. Zu diesem Zweck habe ich einen besonderen Typus solcher Interventionen – die Lektüre historischer Originalquellen – ausgewählt und eine umfassende Studie zu seiner Untersuchung als vergleichendes Unterrichtsprojekt konzipiert, durchgeführt und ausgewertet. Die Studie lässt sich in drei Hauptteile gliedern.

Im theoretischen Teil (Kap. 1 und 2) habe ich diejenigen Aspekte des Themas entwickelt und analysiert, die der Idee, Mathematikgeschichte im Unterricht zu nutzen,

- eine unterrichtsphilosophische Begründung,
- einen didaktischen und methodischen Rahmen
- sowie eine pädagogische Perspektive aufzeigen.

Dazu habe ich die in diesem Zusammenhang relevanten Entwürfe von Klein (1908), Toeplitz (1926) und Jahnke (1991) dargestellt und gegeneinander abgewogen. Als konzeptionelle Grundlage der vorliegenden Studie habe ich den von Jahnke vorgeschlagenen, hermeneutischen Ansatz aufgegriffen, ihn durch eine Analyse seiner philosophischen Bezugspunkte (insbesondere bei Schleiermacher, Dilthey, Gadamer und Heidegger) vertieft und durch interdisziplinäre Reflexionen unter Bezugnahme auf das didaktische und methodische Inventar des Faches Geschiche weiter entwickelt und ausformuliert.

Als zentrales pädagogisches Motiv der Arbeit mit historischen Quellen kristallisierte sich auf diesem Wege neben der schon von Jahnke beschriebenen Förderung von Selbstwahrnehmung und Selbstreflexion bei Schülerinnen und Schülern ihre Sensibilisierung für „das Andere" bzw. „den Anderen" heraus. Diese vollzieht sich in sinnenschärfenden Fremdheitserfahrungen, die durch die Begegnung mit Quellen gewährt werden. Historisch-hermeneutischer Unterricht thematisiert nach diesen Überlegungen nicht nur fachlich-diachronische sondern auch allgemein-interkulturelle Bezüge und stellt Einsichten her, die über *Verstehen* letztlich zu *Verständigung* führen können.

Das damit umrissene Konzept lässt sich didaktisch und lernpsychologisch als reflexionsfördernder, dissonanzstrategischer Ansatz einordnen. Seine prinzipielle Anwendbarkeit habe ich an mehreren mathematikgeschichtlichen Beispielen (Zahlbegriff, Funktionsbegriff, Irrationalitätsbeweis, „geometrische Algebra" in Euklid II) demonstriert.

Im exegetischen Teil der Arbeit (Kap. 3) habe ich mich ausführlich mit Auszügen aus der für das Unterrichtsexperiment ausgewählten hauptsächlichen Quelle, der ‚al-jabr' des persischen Mathematikers Al-Khwarizmi, befasst. Neben einer text- und literarkritischen Analyse zweier lateinischer und einer englischsprachigen Fassung habe ich eine neue Übersetzung der relevanten Abschnitte ins Deutsche angefertigt. Darüber hinaus habe ich zahlreiche biographische, historiographische sowie problem- und wirkungsgeschichtliche Informationen recherchiert und zusammengetragen. Die Fülle dieses Materials habe ich alsdann einer tiefgehenden hermeneutischen Analyse unterzogen, die das im Theorieteil entfaltete Instrumentarium an Begriffen und Methoden exemplarisch zur Anwendung bringt.

Im empirischen Teil der Arbeit (Kap. 4 und 5) habe ich die Entwicklung und Planung des Unterrichtsprojekts, seine Durchführung und seine Auswertung beschrieben. Dabei habe ich mich auf die Erforschung dreier wichtiger Teilaspekte der grundsätzlichen Fragestellung nach dem Nutzen des hier untersuchten Interventionstypus – der Lektüre historischer Originalquellen – konzentriert. Diese lauten:

- *Wie beeinflusst der Unterricht mit historischen Quellen das Unterrichtsgeschehen?*
- *Welches fachliche Wissen und welche Fertigkeiten erlangen Schülerinnen und Schüler, die mit historischen Quellen unterrichtet werden im Vergleich zu solchen, die den üblichen Unterricht genießen? Konkret: Schneiden sie in Vergleichsarbeiten besser, schlechter oder gleich gut ab?*
- *Welche Wirkung hat der Umgang mit historischen Quellen auf die Ansichten und Urteile der Lernenden über Mathematik?*

Mit dem vorbereiteten Material habe ich auf Grundlage der hermeneutischen Theorie eine experimentelle Unterrichtsreihe konzipiert, didaktisiert und in einem Arbeitsheft materialisiert. Parallel dazu habe ich eine Vergleichsreihe mit sachlich identischem, aber konventionellem Material entworfen, das keine historischen Bezüge enthält. Der Unterricht wurde von mir probeweise in zwei Pilotklassen durchgeführt. Die dabei gemachten Erfahrungen habe ich ausführlich protokolliert und in eine Feinjustierung der didaktischen Überlegungen einfließen lassen.

Das Unterrichtsprojekt wurde schließlich mit insgesamt zehn verschiedenen (Gymnasial-)Klassen der 9. Jahrgangsstufe durchgeführt. Sieben Klassen bildeten die Experimentalgruppe, drei weitere Klassen die Kontrollgruppe. Der Unterricht wurde von den in diesen Klassen regulär tätigen Mathematik-Lehrkräften abgehalten, die sich nach entsprechender Anfrage bereit erklärt hatten, am Experiment teilzunehmen. Bei ihnen handelte sich durchweg um Lehrerinnen und Lehrer ohne besondere Expertise auf dem Gebiet der Mathematikgeschichte. Eine u. a. aus diesem Grund von mir angebotene Fortbildungsmaßnahme zur sachlichen und didaktischen Vorbereitung auf das Projekt wurde jedoch unter Verweis auf die zu große Arbeitsbelastung nicht angenommen. Die Einweisung erfolgte darum nur indirekt durch Lehrerbegleithefte zu den Unterrichtsreihen. Das Experiment bildete auf diese Weise eine Situation ab, die im derzeitigen Alltag den Normalfall darstellen dürfte: Demnach treffen Ideen und Konzepte des historisch-hermeneutischen Unterrichts auf sehr unterschiedliche, oft wenig oder gar nicht vorbereitete Kontexte.

Die teilnehmenden Schülerinnen und Schüler wurden vor Beginn der jeweiligen Unterrichtsintervention ausführlich zu ihrem Leistungsstand, zu ihrer Selbsteinschätzung, zur Wahrnehmung ihres Mathematikunterrichts und zu ihren persönlichen Ansichten und Urteilen über Mathematik befragt. Das Ergebnis dieser Befragung habe ich ausführlich dokumentiert und analysiert. Es kann dahingehend zusammengefasst werden, dass die Experimental- und die Kontrollgruppe genügend ähnliche Voraussetzungen und Prädispositionen mitbringen, um in dieser Arbeit sinnvoll miteinander verglichen werden zu können.

Den eigentlichen Unterricht während des Experiments habe ich anhand von kommentierten Unterrichtstranskripten, Auszügen aus den Arbeitsheften sowie Äußerungen von Schülerinnen und Schülern dokumentiert. Im Umgang mit dem angebotenen Material zeigten sich in den Klassen durchaus große Unterschiede, die vor allem der Bandbreite ganz unterschiedlicher Unterrichtsstile der beteiligten Lehrpersonen geschuldet waren. Ungeachtet solcher Differenzen war es möglich, übergreifende Trends aus den Daten zu extrahieren, die es gestatten, die empirischen Forschungsfragen wie folgt zu beantworten:

Wie verändert der Unterricht mit historischen Quellen das Unterrichtsgeschehen?

Das Experiment hat gezeigt,

- dass die Arbeit mit historischen Quellentexten nach Wahrnehmung der Lernenden zu einer starken Akzentverschiebung im Hinblick auf typische Aktivitäten im Unterricht führen kann;
- dass die überaus starke Alltagsdominanz technisch-formaler Routinen (wie Termumformungen oder Rechnen) wirkungsvoll durchbrochen werden kann;
- dass Tätigkeiten in den Kompetenzbereichen des Argumentierens, Kommunizierens und Problemlösens, die im Alltag oft unterrepräsentiert sind, durch Unterricht mit historischen Quellen sehr gut gefördert und entfaltet werden können;
- dass Schülerinnen und Schüler lernen können, fachliche Inputs aus Quellen zu entnehmen und nicht auf Vorabinterpretationen ihres Lehres bzw. ihrer Lehrerin angewiesen sind;
- dass Unterricht, der durch stärkere Kontextelaborationen auf eine größere hermeneutische Verbreiterung abzielt, in der Wahrnehmung der Lernenden u. U. als weniger fachlich wahrgenommen werden kann.

Dass das Empfinden geringerer Fachlichkeit nicht unbedingt mit der tatsächlichen Entwicklung der Leistungen korreliert, zeigen die Antworten auf die zweite Forschungsfrage:

Welches fachliche Wissen und welche Fertigkeiten erlangen Schülerinnen und Schüler, die mit historischen Quellen unterrichtet werden im Vergleich zu solchen, die den üblichen Unterricht genießen? Konkret: Schneiden sie in Vergleichsarbeiten besser, schlechter oder gleich gut ab?

Das Experiment hat gezeigt,

- dass die Arbeit mit historischen Quellen für einen deutlichen Leistungsschub bei vielen Schülerinnen und Schülern sorgen kann;
- dass Schülerinnen und Schüler, die mit historischen Quellen gearbeitet haben, im direkten Vergleich signifikant bessere Ergebnisse erzielen können als solche, die mit konventionellen (fachlich identischen) Materialien unterrichtet werden; – dies trifft selbst dann noch zu, wenn fachlich gute Leistungen – wie in der vorliegenden Studie – ausschließlich nach den Maßstäben des konventionellen Unterrichts definiert werden;
- dass Unterricht mit historischen Quellen im Hinblick auf die fachliche Leistung einen signifikant größeren Nachhaltigkeitseffekt haben kann als konventioneller Unterricht.

Welche – zumindest temporäre – Wirkung hat der Umgang mit historischen Quellen auf die Ansichten und Urteile der Lernenden über Mathematik?

Das Experiment hat gezeigt,

- dass der Umgang mit historischen Quellen bei Schülerinnen und Schülern sehr großes Interesse wecken kann, das – im Unterschied zum allgemeinen Interesse an Mathematik – nichts mit deren jeweiligen Leistungs- bzw. Notenständen im Fach zu tun hat;
- dass Schülerinnen und Schüler, die mit historischen Quellen gearbeitet haben, Mathematik stärker als ein Fach wahrgenommen wird, das in relevante Kontexte eingebettet ist und dessen Ideen und Inhalte auf ganz unterschiedliche Weisen von Menschen zum Ausdruck gebracht werden können;
- dass das Ausmaß der Entwicklung fachbezogener Ansichten und Urteile bei der Arbeit mit historischen Quellen sehr wahrscheinlich mit dessen methodischer Aufbereitung und kontextueller Akzentuierung zusammenhängt;
- dass die Entwicklung fachbezogener Ansichten und Urteile bei Schülerinnen und Schülern hingegen nichts mit deren Leistungs- und Notenständen zu tun hat;
- dass die hermeneutische Verbreiterung des Unterrichts fachbezogene Ansichten und Urteile vermutlich dann am besten entwickeln kann, wenn sie mit einer Gestaltung des Unterrichts einhergeht, die kreative Freiräume gewährt.

Diese Teilergebnisse fasse ich im folgenden Resümee zusammen:

Die empirischen Befunde zeigen, dass die Arbeit mit historischen Originalquellen den Schülerinnen und Schülern im Mathematikunterricht nützt. Sie erleben nicht nur einen vielfältig bereicherten, als interessant empfundenen Unterricht, sondern schneiden in direkten Leistungsvergleichen besser ab als Schülerinnen und Schüler, die konventionell unterrichtet werden. Darüber hinaus werden ihre Ansichten und Einstellungen zum Fach auf sinnvolle Weise weiter entwickelt, indem bestimmte einseitige Vorstellungen und Eindrücke von Mathematik durch umfassendere und differenziertere Anschauungen ergänzt werden. Dass dies auch in weitgehend unpräparierten Alltagskontexten gelingen kann, wird durch das Setting der vorliegenden Untersuchung demonstriert.

Über die Begründungszusammenhänge dieses Ergebnisses können auf der Grundlage der erhobenen Daten neben gesicherten Erkenntnissen einige plausible Vermutungen zusammengestellt werden:

Gewiss ist zunächst, dass die Entwicklungen von Leistungen sowie von Ansichten und Urteilen miteinander kaum korreliert sind (vgl. Kap. 5.4.3). Sie müssen vielmehr durch andere Merkmale und Eigenarten des stattgehabten Unterrichts zu erklären sein.
Die Bereicherung der Unterrichtsaktivitäten – vor allem im Hinblick auf den Gebieten der Kommunikation, der Argumentation und des Problemlösens – hat sicherlich einen förderlichen Einfluss auf die Entwicklung der Leistungen gehabt. Insbesondere der differenzierte Blick in die einzelnen Experimentalklassen liefert hierfür ausreichend Belege (vgl. Kap. 5.4.1.3.2).

Ich vermute jedoch, dass der entscheidende Grund für den Erfolg der experimentellen Reihe in der offenbar geglückten Vermittlung der im theoretischen Teil beschriebenen, reflexionsfördernden Diskrepanzerlebnisse liegt. In Kap. 2.1.2.1 sowie 2.1.2.3.2 und 3 habe ich das lernpsychologische Potenzial einer solchen „Dissonanzstrategie“ erläutert und die schlüssige Hypothese formuliert, dass mathematikgeschichtliche Quellen, die Vertrautes verfremden, epistemische Neugier wecken und Reflexionen im Unterricht auf natürliche, wirkungsvolle und auch leistungsfördernde Weise anstoßen.

Die empirischen Ergebnisse der vorliegenden Studie haben diese Erwartungen auf ganzer Linie bestätigt. Die Schülerinnen und Schüler der Experimentalgruppe haben viel mehr als sonst über das reflektiert und kommuniziert, was sie im Unterricht, in der Begegnung mit der Quelle, erfahren und gelernt haben. Oft geschah dies von selbst, ohne und manchmal sogar gegen die explizite Aufforderung durch die Lehrperson, im Zuge des Wunderns, Nachdenkens und Austauschens über das fremd und zugleich vertraut wirkende Material. Hierin zeigt sich, dass auch ein eher suboptimal durchgeführter Unterricht den möglichen Erfolg der Intervention nicht unbedingt verhindert, solange Reflexionen zumindest ein gewisser Entfaltungsraum (in individualisierenden Unterrichtsphasen) geboten wird. „Gute" mathematikhistorische Quellen wirken dann – im Rahmen einer geeigneten Didaktisierung – durchaus *per se* und zwar so massiv, dass sie nicht unbedingt einer fein ausgeklügelten und ausführlich trainierten Erarbeitungs- oder Inszenierungsstrategie bedürfen. Natürlich soll damit nicht der Möglichkeit und dem Wunsch nach methodischen Optimierungen eine Absage erteilt werden. Vielmehr erklärt sich dadurch, warum die experimentelle Unterrichtsreihe auch in unpräparierten (aber aufgeschlossenen) Kontexten beachtliche Erfolge erzielt hat.

Was aber sind eigentlich „gute" Quellen? Im Rahmen von Schulunterricht sollten sie einen curriculumsrelevanten Stoff behandeln, so viel ist klar. Das entscheidende Kriterium entnehmen wir jedoch der Geschichtsdidaktik (vgl. Kap. 2.2.2.4): Demnach sollen Quellen vor allem Medien dialogischer Verstehensvollzüge sein. Sie eignen sich in aller Regel dann, wenn sie *Menschen* als Handelnde, Denkende oder Leidende zeigen. Warum ist dies so? Weil – wie es Betti ausdrückt – „nichts […] dem Menschen so sehr am Herzen [liegt], als sich mit seinen Mitmenschen zu verstehen", weil „nichts […] an sein Verständnis ein so verlockendes Ansinnen [richtet] wie die verschollene Menschenspur, die ihm wieder aufleuchtet und zu ihm spricht." (Betti E., 1962, S. 7).

Das aber ist noch nicht alles. Eine „gute" Quelle zeichnet sich außerdem noch dadurch aus, dass ihre Inhalte in eine erzählbare Gesamtstruktur eingebettet werden können. Das ‚al-jabr'-Beispiel der vorliegenden Studie hat diesen Anspruch sicherlich eingelöst. Inwieweit aber die Narrativierbarkeit der fachgeschichtlichen Elemente eine wichtige Rolle für den Erfolg des Unterrichts gespielt hat, kann anhand der erhobenen Daten leider nicht beantwortet werden. Die aufgezeichneten Äußerungen von Schülerinnen und Schülern lassen in dieser Hinsicht keine Rückschlüsse zu. Ebenso bleibt offen, ob der hohe Sprachanteil des verwendeten Materials einen nennenswerten Einfluss gehabt hat.

In Fragen wie diesen deuten sich indes mögliche Themen für künftige Forschungen an. Ich möchte auf diese zum Abschluss der Arbeit noch etwas näher eingehen.

Eben angesprochen wurde die Aufgabe, Quellen zu identifizieren, die sich nach Maßgabe der hermeneutischen Konzeption gut zur Lektüre und Behandlung im Mathematikunterricht eignen. Wesentliche Gütekriterien habe ich in der vorliegenden Arbeit bereits ausgearbeitet, weitere Merkmale – z. B. sprachlicher Art – müssen noch ermittelt, genauer spezifiziert und selbstverständlich empirisch auf ihre tatsächliche Relevanz hin untersucht werden.

Ganz allgemein bleibt es ein wichtiges Anliegen, maßgebliche Faktoren zu erkennen, zu beschreiben und zu bewähren, die zum Erfolg (oder Misserfolg) einer mathematikgeschichtlichen Intervention (mit Quellenlektüre) beitragen. Diese Aufgabe ist offenbar ziemlich komplex. Einige Vorarbeiten sind mit der vorliegenden Arbeit aber bereits geleistet worden. So können etwa Studien, die den Einfluss spezieller Unterrichtsmethoden untersuchen, auf das methodische Inventar zurückgreifen, das ich in

Kap. 2.2.4 beschrieben habe.

Auch im Hinblick auf den Einfluss von weniger leicht oder überhaupt nicht zu kontrollierenden Variablen auf den Unterrichtserfolg gibt es noch viele unbeantwortete Fragen: Welche Lese- und Verarbeitungsstrategien beispielsweise setzen Schülerinnen und Schüler bei der Bewältigung mathematikgeschichtlicher Quellentexte ein und welchen Erfolg haben sie mit ihnen? Einen theoretischen Beschreibungsansatz, der in einen allgemeineren Rahmen eingearbeitet werden könnte, liefere ich in der vorliegenden Arbeit mit der Diskussion des hermeneutischen Zirkels (Kap. 2.3.2.1.1). Eine weitere forschungsrelevante Frage betrifft den Zusammenhang zwischen dem allgemeinen „Weltwissen" von Schülerinnen und Schülern und ihren jeweiligen Strategien bzw. Kompetenzen im Umgang mit historischen Quellen. Auch die Korrelationen zu sozio-kulturellen, intellektuellen oder entwicklungspsychologischen Hintergründen von Lernenden wären für eine Untersuchung sicher ergiebig.

Besonders wichtig und interessant wäre es, im Rahmen künftiger Arbeiten das in Kap. 2.3.3 beschriebene *pädagogische* Potenzial der hermeneutischen Konzeption genauer auszuloten. Am Ende des fünften Kapitels hatten wir an einigen Beispielen gesehen, wie der experimentelle Unterricht offenbar dazu beigetragen hat, unreflektierte Vorurteile über eine fremde und weitgehend unbekannte Kultur in Frage zu stellen oder aus dem Weg zu räumen und Platz zu schaffen für eine neue, von größerem Respekt erfüllte Sichtweise (Kap. 5.4.5). Wirkungen wie diese deuten an, wie aus dem zunächst beabsichtigten *Verstehen* letztlich *Verständigung* zwischen Menschen und Kulturen wachsen kann. Dieses Thema ist gerade in einer sich wandelnden Migrationsgesellschaft zu wichtig, um außer Acht gelassen zu werden; denn für Impulse dieser Art wird es künftig zunehmenden Bedarf geben. Auch der Mathematikunterricht kann und muss sich der Herausforderung stellen. Die in dieser Arbeit vorgelegte *historisch*-hermeneutische Konzeption ist unter einer solchen Perspektive als Baustein eines umfassenderen (und noch auszuarbeitenden) *multikulturalistisch*-hermeneutischen Ansatzes zu verstehen. Dieser gewinnt seine Alteritäts- und Dissonanzimpulse nicht mehr nur aus *historischen* Quellen sondern aus *jeder* Art von mathematikhaltigem (auch zeitgenössischem) Material, das auf interessante und darstellbare Weise das „Fremde", das unbekannte „Andere" thematisiert. Die Merkmale, Ziele und möglichen Früchte eines solchen Ansatzes werden m. E. nirgends so schön beschrieben wie bei (Grugnetti & Rogers, 2000). Ihnen soll daher das letzte Wort in dieser Arbeit und der Blick in eine mögliche Zukunft gebühren:

> „Multiculturalism then […] is the identification and celebration of diversity, the respecting and valuing of the work of others, the recognition of different contexts, needs and purposes, and the realisation that each society makes and has made important contributions to the body of knowledge that we call mathematics. Given this view, the inclusion of a multicultural dimension in our teaching of mathematics makes a significant contribution to humanist and democratic traditions in education."
>
> (Grugnetti & Rogers, 2000, S. 51)

Literaturverzeichnis

Allard, A. (1991). La diffusion en occident des premières oeuvres latines issues de l'arithmétique perdue d'al-Khwarizmi. *J. Hist. Arabic Sci.* (9 (1-2)), S. 101-105.

Alten, H.-W., Djafari Naini, A., Folkerts, M., Schlosser, H., Schlote, K.-H. & Wußing, H. (2003). *4000 Jahre Algebra. Geschichte, Kulturen, Menschen.* Berlin, Heidelberg, New York: Springer.

Altenburg, E. (1991). *Wege zum selbständigen Lesen. 10 Methoden der Texterschließung.* Frankfurt/Main, Berlin: Cornelsen Scriptor.

Apel, K.-O. (1979). *Die Erklären-Verstehen-Kontroverse in transzendentalpragmatischer Sicht.* Frankfurt/Main: Suhrkamp.

Arcavi, A. (1987). Using historical materials in the mathematics classroom. *Arithmetic Teacher*, *35* (4), S. 13-16.

Arcavi, A. & Isoda, M. (2007). Learning to Listen: From Historical Sources to Classroom Practice. *Educational Studies in Mathematics*, *66* (2), S. 111-129.

Ast, F. (1808). *Grundlinien der Grammatik, Hermeneutik und Kritik.* Landshut: Thomann.

Bachelard, G. (1978). *Die Bildung des wissenschaftlichen Geistes. Beitrag zu einer Psychoanalyse der objektiven Erkenntnis. Übers. von Michael Bischoff.* Frankfurt/Main: Suhrkamp.

Backhaus, Erichson, Plinke & Weiber. (2003). *Multivariate Analysemethoden* (10. Aufl.). Berlin, Heidelberg, New York: Springer.

Barbin, E. (1996). On the role of problems in the history and teaching of mathematics. In R. Calinger (Hrsg.), *Vita Mathematica. Historical research and integration with teaching* (S. 17-26). Washington, D. C.: Mathematical Association of America.

Barbin, E. (1994). The meanings of mathematical proof. On relations between history and mathematical education. In J. M. Anthony (Hrsg.), *Eves' Circles* (S. 41-52). Washington D. C.: Mathematical Association of America.

Barbin, E. & Caveing, M. (Hrsg.). (1996). *Les philosophes et les mathématiques.* Paris: Ellipses.

Bauer, L. (1990). Mathematikunterricht und Reflexion. *Mathematik lehren* (38), S. 6-9.

Beacon for Freedom of Expression (Hrsg.) (2008). *Censored Publications*. Internetressource, abgerufen am 15.10.2008 von "Index Librobrum Prohibitorum": http://www.beaconforfreedom.org/search/censored_publications/result.html?author=&cauthor=&title=&country=8052&language=&censored_year=&censortype=&published_year=&censorreason=&Search=Search

Becker, J. P. & Shimada, S. (Hrsg.). (1997). *The open-ended approach: A new proposal for teaching mathematics.* Reston: NCTM.

Becker, O. (1957). *Das mathematische Denken der Antike.* Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Ben-David, J. (1971). *The Scientist's Role in Society.* New Jersey: Englewood Cliffs (Prentice Hall).

Berlyne, D. (1974). *Konflikt, Erregung und Neugier. Konzepte der Humanwissenschaften.* Stuttgart: Klett-Cotta.

Bernheim, E. (1889). *Lehrbuch der historischen Methode.* Leipzig: Duncker & Humblot.

Betti, E. (1962). *Die Hermeneutik als allgemeine Methodik der Geisteswissenschaften.* Tübingen: Mohr.

Betti, E. (1967). Hermeneutische Methodologie. In E. Betti, *Allgemeine Auslegungslehre als Methodik der Geisteswissenschaften* (S. 203-255). Tübingen: Mohr.

Bochenski, J. M. (1969). *Die zeitgenössischen Denkmethoden.* Marburg: Francke.

Boeckh, A. (1966). *Enzyklopädie und Methodenlehre der philologischen Wissenschaften. Hrsg. von E. Bratuscheck. Nachdruck der 2., von R. Klussmann besorgten Auflage, Leipzig 1886, 1. Hauptteil: Formale Theorie der philologischen Wissenschaft.* Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Böer, H. (2000). Offene und lebensrelevante Aufgaben - nach und trotz TIMSS! *Mathematik lehren* (100), S. 60-62.

Böhm, W. (2005). *Wörterbuch der Pädagogik* (16. Aufl.). Stuttgart: Kröner.

Boyer, C. B. (1991). *A History of Mathematics. Second Edition.* New York: Wiley.
Brezina, C. (2006). *Al-Khwarizmi: the inventor of algebra.* New York: The Rosen Publishing Group.
Brown, T. (1991). Hermeneutics and Mathematical Activity. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, S. 475-480.
Bruckheimer, M. & Arcavi, A. (2000). Mathematics and its history - an educational partnership. In V. Katz (Hrsg.), *Using history to teach mathematics: An international perspective* (S. 135-146). Washington D. C.: Mathematical Association of America.
Bruckheimer, M., Ofir, R. & Arcavi, A. (1995). The case for and against casting out nines. *For the learning of mathematics*, *15* (2), S. 24-35.
Bruner, J. (1995). On Learning Mathematics. *Mathematics Teacher* (88), S. 330-335.
Bühl, A. (2006). *SPSS 14. Einführung in die moderne Datenanalyse* (10. Aufl.). München: Pearson Studium.
Cajori, F. (1993). *A History of Mathematical Notations.* New York: Dover Publications.
Cajori, F. (1931). *A History of Mathematics.* New York: Macmillan Company.
Cangelosi, J. (1992). *Teaching Mathematics in Secondary and Middle School: Research-Based Approaches.* New York: Merril.
Cassirer, E. (1999). *Ziele und Wege der Wirklichkeitserkenntnis.* Hrsg. J. M. Krois & K. C. Köhnke. Hamburg: Meiner Verlag.
Chasles, M. (1841). Histoire de l'algèbre. *Compte Rendu des Séances de l'Académie des Sciences (6 septembre)*, (S. 497–542; 601-628).
Chladenius, J. M. (1985). *Allgemeine Geschichtswissenschaft. Mit einer Einleitung von Christoph Friedrich und einem Vorwort von Reinhart Koselleck. Neudruck der Ausgabe Leipzig 1752.* Wien: Hermann Böhlaus Nachfolger.
Chladenius, J. M. (1969). *Einleitung zur richtigen Auslegung vernünfftiger Reden und Schriften. Mit einer Einleitung von Lutz Geldsetzer.* Düsseldorf: Stern-Verlag Janssen & Co.
Christmann, U. & Groeben, N. (1999). Psychologie des Lesens. In Franzmann, Hasemann, Löffler & Schön (Hrsg.), *Handbuch Lesen* (S. 145-223). München: Saur.
Cofman, J. (2001). *Einblicke in die Geschichte der Mathematik.* Heidelberg, Berlin: Spektrum.
Coreth, E. (1969). *Grundfragen der Hermeneutik. Ein philosophischer Beitrag.* Freiburg, Basel, Wien: Herder.
Cramer, K. & Karnowski, L. (1995). The importance of informal language in representing mathematical ideas. *Teaching Children Mathematics* (1), S. 332-335.
Crowe, M. J. (1975/1992). Ten 'Laws' concerning Patterns of Change in the History of Mathematics. In D. Gillies (Hrsg.), *Revolutions in Mathematics* (S. 15-22). New York: Oxford University Press.
Daglarca, F. H. (1987). Reise. In Y. Parzakaya (Hrsg.), *Die Wasser sind weiser als wir. Türkische Literatur der Gegenwart.* München: Franz Schneekluth.
Danner, H. (1998). *Methoden geisteswissenschaftlicher Pädagogik. Einführung in Hermeneutik, Phänomenologie und Dialektik* (4. Aufl.). München, Basel: UTB.
Dauben, J. (1984/1992). Conceptual Revolutions and the History of Mathematics: Two Studies in the Growth of Knowledge. In D. Gillies (Hrsg.), *Revolutions in Mathematics* (S. 49-71). New York: Oxford University Press.
Davis, R. B. (1984). *Learning mathematics - the cognitive science approach to mathematics education.* London, Sydney: Croom Helm.
Dedekind, R. (1872/1932). Stetigkeit und irrationale Zahlen. In R. Dedekind, R. Fricke, E. Noether, R. Dedekind & Ö. Ore (Hrsg.), *Gesammelte mathematische Werke* (Bd. 3, S. 315-334). Braunschweig: Vieweg.
Dedekind, R. (1893). *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig: Vieweg.
Deen, S. M. (2007). *Science Under Islam. Rise, Decline and Revival.* Lulu Edition.
Demattè, A. (2006). A collection of documents for secondary school students. In F. Furinghetti, H. N. Jahnke & J. van Maanen (Hrsg.), *Oberwolfach Report 22 (MFO Mini-Workshop on*

Studying Original Sources in Mathematics Education) (S. 1296-1298). Oberwolfach: Mathematisches Institut.

Deutsches PISA-Konsortium (Hrsg.). (2001). *PISA 2000.* Opladen.

Dilthey, W. (1970). *Der Aufbau der geschichtlichen Welt in den Geisteswissenschaften.* Frankfurt/Main: Suhrkamp.

Dilthey, W. (1957). *Die geistige Welt. Einleitung in die Philosophie des Lebens. Gesammelte Schriften V. Band.* Stuttgart: Teubner.

Dilthey, W. (1979). *Einleitung in die Geisteswissenschaften. Gesammelte Schriften I. Band.* Stuttgart: Teubner.

Dodge, B. (1970). *The Fihrist of Al-Nadim. A Tenth Century Suvery of Muslim Culture.* (Bd. II). New York: Columbia University Press.

Droysen, J. G. (1937). *Historik. Vorlesungen über Enzyklopädie und Methodologie der Geschichte. Herausgegeben von Rudolf Hübner.* München: Oldenbourg.

Dunlop, D. M. (1943). Muhammad ibn Musa al-Khwarazmi. *Journal of the Royal Asiatic Society of Great Britain and Ireland*, S. 248-250.

Ebeling, H. (1962). *Methodik des Geschichtsunterrichts* (5. Aufl.). Berlin, Hannover, Darmstadt: Schroedel.

Fasanelli, F. (2000). The political context. In J. Fauvel & J. van Maanen (Hrsg.), *History in Mathematics Education. The ICMI Study.* (S. 2 ff.). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fauvel, J. & Grey, J. (1987). *The History of Mathematics – a Reader.* London: Macmillan Education.

Fauvel, J. & Van Maanen, J. (Hrsg.). (2000). *History in Mathematics Education. The ICMI Study.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Franci, R. (2003). Una traduzione in volgare dell'al-jabr di al-Khwarizmi (MS. Urb. Lat. 291 Biblioteca Apostolica Vaticana). In R. Franci, P. Pagli & A. Simi (Hrsg.), *Il Sogno di Galois: Scritti di storia della matematica dedicati a Laura Toti Rigatelli per il suo 60° compleanno* (S. 19-49). Siena: Centro Studio della Matematica Medioevale, Università di Siena.

Fraser, B. J. & Koop, A. J. (1987). Teachers' Opinions about some Teaching Material involving History of Mathematics. *International Journal for Mathematics Education in Science and Technology*, *9* (2), S. 147-151.

Frege, G. (1987). *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl.* Hrsg.: J. Schulte. Stuttgart: Reclam.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe.* Stuttgart: Klett.

Freudenthal, H. (1963). Was ist Axiomatik, und welchen Bildungswert kann sie haben? *Der Mathematik-Unterricht* (4), S. 5-29.

Freudenthal, H. (1976/77). What is Algebra and What it has been in History? *Archive for History of Exact Sciences* (16), S. 189-200.

Frisch, M. (1977). *Homo Faber. Ein Bericht.* Frankfurt/Main: Suhrkamp.

Furdek, A. (2002). *"Fehlerbeschwörer". Typische Fehler beim Lösen von Mathematikaufgaben.* Norderstedt: Books on demand.

Furinghetti, F. & Somaglia, A. M. (1997). History of mathematics in school across disciplines. *Mathematics in school*, *27* (4), S. 48-51.

Furinghetti, F., Jahnke, H. N. & van Maanen, J. (Hrsg.). (2006). *Oberwolfach Report 22 (MFO Mini-Workshop on Studying Original Sources in Mathematics Education, 2006), No. 22/2006.* Oberwolfach: Mathematisches Institut.

Gadamer, H. G. (1977). Rhetorik, Hermeneutik und Ideologiekritik (57-82); Replik (283-317). In J. Habermas, D. Henrich, L. N. & J. Taubes (Hrsg.), *Hermeneutik und Ideologiekritik.* Frankfurt/Main: Suhrkamp.

Gadamer, H. G. (1990). *Wahrheit und Methode. Gesammelte Werke* (6. Aufl., Bd. 1). Tübingen: Mohr.

Gallin, P. & Ruf, U. (1994). Ein Unterricht mit Kernideen und Reisetagebuch. *Mathematik Lehren* (64), S. 51-57.

Gallin, P. & Ruf, U. (1998). Singuläre Schülertexte als Basis eines allgemeinbildenden Unterrichts. In R. Biehler, H. Heymann & B. Winkelmann (Hrsg.), *Mathematik allgemeinbildend unterrichten: Impulse für Lehrerbildung und Schule* (S. 58-82). Köln: Aulis.

Gerdes, P. (1997). Ethonomathematics and Mathematics Education. In A. Bishop (Hrsg.), *International Handbook of Mathematics Education* (Bd. II).

Gericke, H. (1970). *Geschichte des Zahlbegriffs.* Mannheim, Wien, Zürich: Hochschultaschenbücher-Verlag.

Gericke, H. (2003). Mathematik in Antike und Orient. In H. Gericke, *Mathematik in Antike, Orient und Abendland. Sonderausgabe in einem Band.* Wiesbaden: Fourier-Verlag.

Gillies, D. (Hrsg.). (1992). *Revolutions in Mathematics.* New York: Oxford University Press.

Gillings, R. J. (1982). *Mathematics in the time of the pharaohs.* New York: Dover.

Glaubitz, M. R. & Jahnke, H. N. (2003). Die Bestimmung des Umfangs der Erde als Thema einer mathematikhistorischen Unterrichtsreihe. *Journal für Mathematikdidaktik*, *24* (2), S. 71-95.

Goetz, H.-W. (1993). *Proseminar Geschichte: Mittelalter.* Stuttgart.

Groeben, N. (1978). *Die Verständlichkeit von Unterrichtstexten. Dimensionen und Kriterien rezeptiver Lernstadien.* Münster: Aschendorff.

Groeben, N. (1982). *Leserpsychologie: Textverständnis - Textverständlichkeit.* Münster: Aschendorff.

Grondin, J. (1996). Artikel "Hermeneutik". In *Historisches Wörterbuch der Rhetorik, t. 3.* Tübingen: Mohr Siebeck.

Grugnetti, L. & Rogers, L. (2000). Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues. In J. Fauvel & J. van Maanen (Hrsg.), *History in Mathematics Education. The ICMI Study* (S. 39-62). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Günther, S. (1915). Das geschichtliche Element im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht. (A. Thaer, Hrsg.) *Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften. Jahrgang XIX bis XXI, 1913 bis 1915*, S. 141 ff.

Habermas, J. (2003). *Erkenntnis und Interesse. Mit dem Nachwort von 1973.* Frankfurt/Main: Suhrkamp.

Haeckel, E. (1866). *Generelle Morphologie.* Berlin: Georg Reimer Verlag.

Hardy, G. H. (1929). Mathematical Proof. *Mind*, *XXXVIII* (149), S. 1-25.

Hasemann, K. (1988). Kognitionstheoretische Modelle und mathematische Lernprozesse. *Journal für Mathematikdidaktik*, *9*, S. 95-161.

Hauschild, W.-D. (1995). *Lehrbuch der Kirchen und Dogmengeschichte* (Bd. 1: Alte Kirche und Mittelalter). Gütersloh: Chr. Kaiser/Gütersloher Verlagshaus.

Heath, T. L. (1956). *Euclid - The Thirteen Books of the Elements, Vol. I-III* (2nd ed.). New York: Dover Publications.

Heath, T. L. (1970). *Mathematics in Aristotle.* London: Oxford University Press.

Heeffer, A. (2008). A Conceptual Analysis of Early Arabic Algebra. In S. Rahman, T. Street & H. Tahiri (Hrsg.), *The Unity of Science in the Arabic Tradition* (S. 89-128). Berlin, Heidelberg, New York: Springer.

Hefendehl-Hebeker, L. (1989). Die negativen Zahlen zwischen anschaulicher Deutung und gedanklicher Konstruktion. Geistige Hindernisse in ihrer Geschichte. *Mathematik lehren* (35), S. 6-12.

Hegel, G. W. (1987). *Phänomenologie des Geistes.* Stuttgart: Reclam.

Hegel, G. W. (1964). *Sämtliche Werke. Jubiläumsausgabe in 20 Bänden, einer Hegel-Monographie und einem Hegel-Lexikon. Hrsg. v. Hermann Glockner.* (4. Aufl., Bd. 26). Stuttgart: Frommanns.

Heiberg, J. L. (1886). *Euclidis Elementa. Editit et Latine interpretatus est I. L. Heiberg. Vol. III, Librum X continens. In: Heiberg, J. L., Menge, H.: Euclidis Opera Omnia. Ediderunt I. L. Heiberg et H. Menge.* Leipzig: Teubner.

Heidegger, M. (1993). *Sein und Zeit.* Tübingen: Niemeyer.

Heisenberg, W. (1959). *Physik und Philosophie.* Stuttgart: S. Hirtzel.

Hentig, H. v. (1987). Die Krise des Abiturs und eine Alternative. *Süddeutsche Zeitung* vom 27., 28. Juni.

Herget, W. & Scholz, D. (1998). *Die etwas andere Aufgabe - aus der Zeitung. Mathematikaufgaben Sek I.* Seelze: Kallmeyer.

Heuser, H. (1990). *Lehrbuch der Analysis. Teil 2.* Stuttgart: Teubner.

Hirsch Jr., E. D. (1972). *Prinzipien der Interpretation. Übersetzt v. A. A. Späth.* München: Wilhelm Fink.

Hitchcock, G. (1996). Dramatizing the Birth and Adventures of Mathematical Concepts: Two Dialogues. In R. Calinger (Hrsg.), *Vita Mathematica - Historical Research and Integration with Teaching* (S. 27-42). Washington D. C.: Mathematical Association of America.

Hitchcock, G. (kein Datum). *Loci: Convergence, Alien Encounters*. Internetressource, abgerufen am 20.06.2007 von http://mathdl.maa.org/mathDL/46/?pa=content&sa=viewDocument&nodeId=435&bodyId=448

Hitti, P. K. (2002). *History of the Arabs: From the Earliest Times to the Present. Revised tenth Edition. New Preface by Walid Khalidi.* New York: Palgrave Macmillan.

Hoffmann, M. & Plöger, M. (2000). Mathematik als Prozess der Verallgemeinerung von Zeichen: Eine exemplarische Unterrichtseinheit zur Entdeckung der Inkommensurabilität. *Zeitschrift für Semiotik*, *22* (1), S. 81-114.

Hörisch, J. (1988). *Die Wut des Verstehens. Zur Kritik der Hermeneutik.* Frankfurt/Main: Suhrkamp.

Horstmann, A. (1993). Das Fremde und das Eigene. "Assimilation" als hermeneutischer Begriff. In A. Wierlacher (Hrsg.), *Kulturthema Fremdheit.* (S. 405 ff.). München: Iudicium.

Høyrup, J. (1998). „Oxford“ and „Cremona“: On the Relation between two Versions of Al-Khwarizmi's Algebra. In A. A. Mathématiques (Hrsg.), *Actes du 3me Colloque Maghrébin sur l'Histoire des Mathématiques Arabes*, *II*, S. 159-178. Tipaza (Alger, Algérie).

Høyrup, J. (2002). *Lengths, Widths, Surfaces: A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin.* Berlin, Heidelberg, New York: Springer.

Høyrup, J. (2002). Pre-Modern 'Algebra': a Concise Survey of That Which was Shaped Into the Technique and Discipline We Know. *Quaderni di Ricerca in Didattica*, *11*.

Hughes, B. (1986). Gerard of Cremona's Translation of Al-Khwarizmi's Al-Jabr: A Critical Edition. *Mediaeval Studies*, *48*, S. 211-263.

Hughes, B. (1989). *Robert of Chester's Latin Translation of Al-Khwarizmi's Al-jabr. A New Critical Edition.* Wiesbaden: Steiner.

Hughes, B. (1982). The Medieval Latin Translations of Al-Khwarizmi's al-jabr. *Manuscripta* (26), S. 31-37.

Hunfeld, H. (2004). *Fremdheit als Lernimpuls - Skeptische Hermeneutik - Normalität des Fremden - Fremdsprache Literatur.* Meran: Drava.

Ifrah, G. (2000). *The Universal History of Numbers. From Prehistory to the Invention of the Computer.* New York: John Wiley & Sons.

Jahnke, H. N. (1998). Al-Khwarizmi und Cantor in der Lehrerbildung. In Biehler, Heymann & Winkelmann (Hrsg.), *Mathematik allgemeinbilden unterrichten: Impulse für Lehrerbildung und Schule* (S. 114-136). Köln: Aulis.

Jahnke, H. N. (1995). Historische Reflexionen im Unterricht. Das erste Lehrbuch der Differentialrechnung (Bernoulli 1692) in einer elften Klasse. *Mathematica didactica*, *18* (2), S. 30-58.

Jahnke, H. N. (1991). Mathematik historisch verstehen - oder: Haben die alten Griechen quadratische Gleichungen gelöst? *Mathematik lehren* (47), S. 6-12.

Jahnke, H. N. (2003). Numeri absurdi infra nihil. Die negativen Zahlen. *Mathematik lehren* (121), S. 21-22, 39-40.

Jahnke., H. N. et al. (2000). The use of original sources in the mathematics classroom. In J. Fauvel & J. v. Maanen (Hrsg.), *History in Mathematics Education* (S. 291-328). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Jank, W. & Meyer, H. (1994). *Didaktische Modelle.* Frankfurt/Main, Berlin: Cornelsen Scriptor.

Janssen, J. & Laatz, W. (2007). *Statistische Datenanalyse mit SPSS fürWindows* (6. Aufl.). Berlin, Heidelberg, New York: Springer.

Jung, M. (2001). *Hermeneutik zur Einführung.* Hamburg: Junius.

Junge, G. (1926). Besonderheiten der griechischen Mathematik. Dritter Teil. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* (35), S. 251-268.

Kaiser, H. (Hrsg.). (1996). *Jean Paul zum Vergnügen.* Stuttgart: Reclam.

Karpinski, L. C. (1915). *Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of Al-Khwarizmi.* New York: Macmillan Company.

Kaske, R. (1998). Quadratische Gleichungen bei Al-Khwarizmi. *Mathematik lehren* (91), S. 14-18.

Kaune, C. (2005). Schreiben als Anregung zum Nachdenken über eigene Lernprozesse. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *47* (5), S. 7-11.

Kaunzner, W. (1985). Über eine frühe lateinische Bearbeitung der Algebra al-Khwarizmis in MS Lyell 52 der Bodleian Library Oxford. *Archive for History of Exact Sciences*, *32* (1), S. 1-16.

Khan, M. A. (1946). *A brief survey of Muslim contribution to science and culture.* Lahore: Muhammad Ashraf.

Kirn, P. (1969). *Einführung in die Geschichtswissenschaft* (5. Aufl.). Berlin.

Klafki, W. (1963). *Studien zur Bildungstheorie und Didaktik.* Weinheim: Beltz.

Klein, F. (1933/1968). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* (Bd. 1). Hrsg.: F. Seyfarth. Berlin, Heidelberg, New York: Springer.

Klein, F. (1896). Über Arithmetisierung der Mathematik. *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht* (27), S. 143-149.

Kline, M. (1973). *Why Johnny Can't Add - The Failure of the New Mathematics.* New York: Random House.

Klippert, H. (2001). *Kommunikationstraining. Übungsbausteine für den Unterricht* (8. Aufl.). Weinheim und Basel: Beltz.

Kosara, R., Bendix, F. & Hauser, H. (Jul/Aug 2006). Parallel Sets: Interactive Exploration and Visual Analysis of Categorical Data. *Transactions on Visualization and Computer Graphics*, *12* (4), S. 558-568.

Koselleck, R. (1985). Standortbindung und Zeitlichkeit. In R. Koselleck, *Vergangene Zukunft. Zur Semantik geschichtlicher Zeiten* (4. Aufl., S. 176-207). Frankfurt/Main: Suhrkamp.

Krämer, S. (1991). *Berechenbare Vernunft. Kritik und Rationalismus im 17. Jahrhundert.* Berlin, New York: de Gruyter.

Krämer, S. (1989). Geistes-Technologie. Über syntaktische Maschinen und typographische Schriften. In W. Rammert & G. Bechmann (Hrsg.), *Technik und Gesellschaft, Jahrbuch 5* (S. 38-52). Frankfurt am Main/New York: Campus.

Krämer, S. (1993). Operative Schriften als Geistestechnik. Zur Vorgeschichte der Informatik. In P. Schefe, H. Hastedt & Y. Dittrich (Hrsg.), *Informatik und Philosophie* (S. 69-84). Mannheim: BI-Wissenschaftsverlag.

Krämer, S. (1988). *Symbolische Maschinen. Die Idee der Formalisierung im geschichtlichen Abriss.* Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Krämer, S. (2003). Textualität, Visualität und Episteme. Über ihren Zusammenhang in der frühen Neuzeit. In R. Lachmann & S. Rieger (Hrsg.), *Text und Wissen. Technologische und anthropologische Aspekte* (S. 17-28). Tübingen: Gunter Narr.

Kropp, G. (1958). Philosophie im mathematischen Unterricht. In T. Ballauf (Hrsg.), *Philosophie im mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht* (S. 16-49). Heidelberg: Quelle & Meyer.

Kuhn, T. S. (1967). *Die Struktur wissenschaftlicher Revolutionen* (3. Aufl. 1978). Frankfurt/Main: Suhrkamp.

Kurt, R. (2004). *Hermeneutik. Eine sozialwissenschaftliche Einführung.* Konstanz: UVK Verlagsgesellschaft.

Lahanas, M. (kein Datum). *Boethius.* Internetressource, abgerufen am 26.09.2010 von "Hellenica": http://www.hellenica.de/Griechenland/Biographie/BoethiusPythagoras.jpg

Lahanas, M. (kein Datum). *Map of the world according to Herodotus.* Internetressource, abgerufen am 26.09.2010 von "Hellenica": http://www.mlahanas.de/Greeks/Bios/HerodotusMap.jpg
Lakatos, I. (1974). *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery.* Cambridge: University Press.
Lakoff & Núñez. (2000). *Where Mathematics Comes From.* New York: Basic Books.
Laubenbacher, R. & Pengelley, D. (1999). *Mathematical Expeditions. Chronicles by the Explorers.* Berlin, Heidelberg, New York: Springer.
Leibniz, G. W. (1971). *Leibniz: Mathematische Schriften.* (Bd. V). Hrsg. C. I. Gerhardt. Hildesheim.
Leibniz, G. W. (1712). Observationes quod rationes sive proportiones non habeant locum circum quantitates nihilo minores & de vero sensu Methodi infinitesimalis. Hrsg. J. Grosse, J. F. Gledtisch & T. Fritsch. *Acta eruditorium. Anno MDCCXII publicata.*
Leibniz, G. W. (1997). *Philosophischer Briefwechsel* (Bd. I: Der Briefwechsel mit Antoine Arnauld). Hrsg. R. Finster. Hamburg: Felix Meiner Verlag.
Leuders, T. (2003). *Mathematikdidaktik.* Frankfurt/Main, Berlin: Cornelsen Scriptor.
Lévy, T. (2002). A newly-discovered partial Hebrew version of al-Khwarizmı's Algebra. *Aleph* (2), S. 225-234.
Libri, G. (1838). *Histoire des Sciences Mathématiques en Italie, depuis la Renaissance des Lettres, jusqu'à la fin du 17e siècle* (Bd. 1). Paris: J. Renouard et C^{ie}.
Lietzmann, W. (1919). *Methodik des mathematischen Unterrichts* (Bd. 1). Leipzig: Quelle und Meyer.
Lorenz, J. F. (1824). *Euklid's [sic] Elemente, fünfzehn Bücher, aus dem Griechischen übersetzt von Johann Friedrich Lorenz. Auf's neue herausgegeben von Carl Brandan Wollweide. Fünfte verbesserte Ausgabe.* Halle: In der Buchhandlung des Waisenhauses.
Lucian (1867). Wie man Geschichte schreiben muß. In *Lucian's Werke. Deutsch von Dr. Theodor Fischer. Vierter Band,* S. 148 ff. Stuttgart: Hoffmann'sche Verlags-Buchhandlung.
Mäder, P. (1992). *Mathematik hat Geschichte.* Hannover: Metzler.
Mancosu, P. (1992). Descartes' Géométrie and Revolutions in Mathematics. In D. Gillies (Hrsg.), *Revolutions in Mathematics* (S. 83-116). New York: Oxford University Press.
Max-Planck-Institut for the History of Science. (kein Datum). *Euclides, Euclidis Opera omnia ediderunt I. L. Heiberg wet H. Menge, Vol. 1: Euclidis Elementa, Libros I-IV, edidit et latine interpretatus est I. L. Heiberg, 1883.* Internetressource, abgerufen am 26.09.2010 von "European Cultural Heritage Online": http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/ECHOdocuView?url=%2Fmpiwg%2Fonline%2Fpermanent%2Flibrary%2FA7K4NQG4%2Fpageimg&start=11&viewMode=images&pn=16&mode=imagepath
Mehrtens, H. (1976/1992). T. S. Kuhn's Theories and Mathematics: A Discussion Paper on the ‚New Historiography' of Mathematics. Original in: Historia Mathematica (1976), 3, 297-320. In D. Gillies (Hrsg.) (1992), *Revolutions in Mathematics* (S. 21-41). New York: Oxford University Press.
Mietzel, G. (2001). *Pädagogische Psychologie des Lernens und Lehrens.* Göttingen, Bern, Toronto, Seattle: Hogrefe.
Mohamed, M. (2000). *Great Muslim mathematicians.* Johor Darul Ta'zim: Universiti Teknologi Malaysia.
Müller, C. W. (1965). *Gleiches zu Gleichem. Ein Prinzip frühgriechischen Denkens.* Wiesbaden: O. Harassowitz.
Müller, P., Dierk, H. & Müller-Friese, A. (2005). *Verstehen lernen - ein Arbeitsbuch zur Hermeneutik.* Stuttgart: Calwer Verlag.
Musharrafa, A. M. & Ahmad, M. M. (1939). *Kitab al-mukhtasar fı hisab al-jabr wa'l-muqabala. Edited by Alı Mustafa Musharrafa and Muhammad Mursı Ahmad.* Kairo.
National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Neubrand, M. (2000). Reflecting as a Didaktik construction: Speaking about mathematics in the mathematics classroom. In I. Westbury et al. (Hrsg.), *Teaching as a reflective practice: The German Didaktik tradition* (S. 251-267). London: Lawrence Erlbaum Publishers.
Neubrand, M. (1990b). Stoffvermittlung und Reflexion: Mögliche Verbindungen im Mathematikunterricht. *Mathematica didactica*, *13* (1), S. 21-48.
Neubrand, M. (1990a). Über Mathematik sprechen. Möglichkeiten und Beispiele aus der Analysis. In M. Glatfeld (Hrsg.), *Finden, Erfinden, Lernen - zum Umgang mit Mathematik unter heuristischem Aspekt* (S. 62-83). Frankfurt/Main: Lang.
Nietzsche, F. (2000). *Die fröhliche Wissenschaft.* Stuttgart: Reclam.
Oaks, J. A. & Alkhateeb, H. M. (2005). Mal, enunciations, and the prehistory of Arabic algebra. *Historia Mathematica* (32), S. 400-425.
Pandel, H.-J. (2003). *Quelleninterpretation. Die schriftliche Quelle im Geschichtsunterricht.* Schwalbach/Ts.: Wochenschau Verlag.
Paret, R. (2007). *Der Koran* (10. Aufl.). Stuttgart: Kohlhammer-Verlag.
Piaget, J. (1973). *Das Erwachen der Intelligenz beim Kinde. Autorisierte Übersetzung nach der 3. Aufl. mit einer Einführung v. H. Aebli* (2. Aufl.). Stuttgart: Klett-Cotta.
Piamenta, M. (1979). *Islam in Everyday Arabic Speech.* Leiden, Boston: Brill Academic Publishers
Platon. (1858). Charmides. In K. F. Hermann (Hrsg.), *Platonis Dialogi secundum Thrasylli tetralogias dispositi ex recognitione Caroli Friderici Hermanni* (Bd. VI). Leipzig: Teubner.
Plessner, H. (1981). Macht und menschliche Natur. Ein Versuch zur Anthropologie der geschichtlichen Weltansicht (1931). In H. Plessner, *Gesammelte Schriften Bd. V: Macht und menschliche Natur* (S. 135-234). Frankfurt/Main: Suhrkamp.
Poincaré, H. (1914). *Wissenschaft und Hypothese.* Leipzig: Teubner.
Popitz, H. (2000). *Wege der Kreativität.* Tübingen: Mohr.
Prediger, S. (2005). Developing reflectiveness in mathematics classrooms. *ZDM*, *37* (3), S. 250-257.
Pringsheim, A. (1898). Über den Zahl- und Grenzbegriff im Unterricht. *Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung.*, *6* (1), S. 73-83.
Ranke, L. (1867-90). *Sämmtliche Werke* (Bd. 15). Leipzig.
Ranke, L. (1824). *Zur Kritik neuerer Geschichtsschreiber.* Leipzig.
Ransom, P., Arcavi, A., Barbin, E. & Fowler, D. (1991). The experience of history in mathematics education. *For the learning of mathematics*, *11* (2), S. 7-16.
Rare Book Room. (kein Datum). *Elementa - 888 - Euclid, (author) - Byzantine - The Bodleian Library, University of Oxford.* Internetressource, abgerufen am 26.09.2010 von "Rare Book Room": http://rarebookroom.org/Control/eucmsd/index.html
Rashed, R. (1994). *The development of Arabic mathematics: between arithmetic and algebra.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
Remmert, V. (2005). *Widmung, Welterklärung und Wissenschaftslegitimisierung: Titelbilder und ihre Funktionen in der Wissenschaftlichen Revolution.* Wiesbaden: Harassowitz.
Ricœur, P. (1981). *Hermeneutics and the human sciences. Essays on language, action and interpretation. Edited and translated by John B. Thompson.* Cambridge: University Press.
Ricœur, P. (1976). *Interpretation Theory. Discourse and the Surplus of Meaning.* Fort Worth: The Texas Christian University Press.
Riedel, M. (1978). *Verstehen oder Erklären? Zur Theorie und Geschichte der hermeneutischen Wissenschaften.* Stuttgart: Klett-Cotta.
Rosen, F. (1831). *The Algebra of Mohammed ben Musa. Translated and edited by Frederic Rosen.* London: Oriental Translation Fund.
Rottoli, E. (1998). Ethics in mathematical education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *30* (3), S. 82-83.
Ruchlak, N. (2004). *Das Gespräch mit dem Anderen. Perspektiven einer ethischen Hermeneutik.* Würzburg: Königshausen und Neumann.
Russel, B. (2002). *Einführung in die mathematische Philosophie. Mit einer Einleitung von Michael Otte.* Hrsg. J. Lenhard & M. Otte. Hamburg: Meiner.

Scarafiotti, A. R. & Giannetti, A. (1998). Can mathematics educate for peace? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *30* (3), S. 84-87.

Schiefele, U., Krapp, A. & Winteler, A. (1992). Interest as a predictor of academic achievement: A meta-analysis of research. In K. A. Renninger, S. Hidi & A. Krapp (Hrsg.), *The role of interest in learning and development* (S. 183-211). Hillsday, NJ: Erlbaum & Associates.

Schiller, F. (o. J.). *Sämmtliche Werke* (Bd. 6).

Schleiermacher, F. D. (1995). *Hermeneutik und Kritik. Herausgegeben und eingeleitet von Manfred Frank.* Frankfurt/Main: Suhrkamp.

Schleiermacher, F. D. (1974). *Hermeneutik. Nach den Handschriften neu hrsg. u. eingel. v. H. Kimmerle* (2. Aufl.). Heidelberg: Carl Winter Universitätsverlag.

Schmid, A. & Weidig, I. (Hrsg.). (1996). *Lambacher-Schweizer LS 9. Mathematisches Unterrichtswerk für das Gymnasium. Ausgabe Nordrhein-Westfalen.* Stuttgart: Klett.

Scholz, H. (1928). Warum die Griechen die Irrationalzahlen nicht aufgebaut haben. *Kant-Studien* (33), S. 35-72.

Schrecker, P. (1935). Arnauld, Malebranche, Prestet, et la Theorie des Nombres Negatifs. *Thales*, *2*, S. 82-90.

Schröer, N. (Hrsg.). (1994). *Interpretative Sozialforschung. Auf dem Wege zu einer hermeneutischen Wissenssoziologie.* Opladen: Westdeutscher Verlag.

Schubring, G. (1978). *Das genetische Prinzip in der Mathematikdidkatik.* Stuttgart: Klett-Cotta.

Seebohm, T. (1972). *Zur Kritik der hermeneutischen Vernunft.* Bonn: Bouvier.

Seiffert, H. & Radnitzky, G. (Hrsg.). (1994). *Handlexikon zur Wissenschaftstheorie* (2. Aufl.). München: dtv.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22* (1), S. 1-36.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics.* London, Washington: The Falmer Press.

Simon, M. (1908). *Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik* (2. Aufl.). München: Beck.

Siu, M. K. (2004). No, I don't use history of mathematics in my class: Why? In F. Furinghetti, S. Kaijser & A. Vretblad (Hrsg.), *Proceedings of the 4th Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education & the HPM Satellite Meeting of ICME 10.* Uppsala.

Sjuts, J. (2006). Beim Denken gedacht, das Denken überwacht. Ideen der Metakognition beim Umgang mit Termen. *Mathematik lehren* (136), S. 47-49.

Sjuts, J. (2002). Metacognition in mathematics lessons. In H.-G. Weigand et al. (Hrsg.), *Developments in mathematics education in German speaking countries* (S. 76-87). Hildesheim: Franzbecker.

Skemp, R. (Nov 1978). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *The arithmetic teacher* (26), S. 9-15.

Skovsmose, O. (1998). Linking Mathematics Education and Democracy: Citizenship, Mathematical Archaeology, Mathemacy and Deliberative Interaction. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *30* (6), S. 195-203.

Skovsmose, O. (1989). Models and reflective knowledge. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *21*, S. 3-8.

Smestad, B. (2006). Curricula, textbooks and teachers - their roles in making history of mathematics part of mathematics education. In F. Furinghetti, H. N. Jahnke & J. van Maanen (Hrsg.), *Oberwolfach Report 22/2006 (MFO Mini-Workshop on Studying Original Sources in Mathematics Education).* (S. 1295-1296). Oberwolfach: Mathematisches Institut.

Smith, D. E. (1958). *History of Mathematics.2 Volumes*. New York: Dover Publications.

Snow, C. P. (1959). *The Two Cultures and the Scientific Revolution.* New York: Cambridge University Press.

Söding, T. (1998). *Wege der Schriftauslegung. Methodenbuch zum Neuen Testament.* Freiburg, Basel, Wien: Herder.

Steiner, H.-G. (1989). Philosophische und epistemologische Aspekte der Mathematik und ihr Einfluss auf den Mathematikunterricht. *Mathematische Semesterberichte*, *36* (1), S. 47-60.

Szabó, A. (1994). *Die Entfaltung der griechischen Mathematik.* Mannheim: BI-Wiss.-Verl.
Szondi, P. (1975). *Einführung in die literarische Hermeneutik, hrsg. v. J. Bollack u. H. Stierlin* (Bd. 5). Frankfurt/Main: Suhrkamp.
Teachsam - Lehren und Lernen online. (Kein Datum). *Hermeneutischer Zirkel - Überblick.* Internetressource, abgerufen am 01.04.2007 von "teachSam Deutsch": http://www.teachsam.de/deutsch/d_schreibf/schr_schule/txtinterpr/txtinterpr_3_1_1_0.htm
Teichmann, J. (1992). *Moment mal, Herr Gallilei! Eine Reise durch die Geschichte der Wissenschaft* (3. Aufl.). Stuttgart: Verlag für Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik.
Thaer, C. (Hrsg.) (2003). *Die Elemente von Euklid. Nach Heibergs Text aus dem Griech. übers. und hrsg. von Clemens Thaer.* Frankfurt/Main: Deutsch.
Toeplitz, O. (1932). Das Problem der "Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus". *Semesterberichte* (1), S. 1-15.
Toeplitz, O. (1927). Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihrer Abgrenzung gegenüber der Infinitesimalrechnung an den höheren Schulen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung* (36), S. 90-100.
Toomer, G. (1973). Al-Khwarizmi. In C. C. Gillispie (Hrsg.), *Dictionary of Scientific Biography* (Bd. VII, S. 358-65). New York: Charles Scribner's Sons.
Tropfke, J. (1980). *Geschichte der Elementarmathematik. Band 1: Arithmetik und Algebra.* (4. Aufl.). Bearbeitet von Kurt Vogel, Karin Reich, Helmuth Gericke. Berlin, New York: de Gruyter.
Turner, H. R. (1995). *Science in Medieval Islam. An illustrated introduction.* Austin: University of Texas Press.
Tzanakis, C., Arcavi, A. et al. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. In J. Fauvel & J. van Maanen (Hrsg.), *History in mathematics education. The ICMI Study* (S. 201-240). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
Underwood, D. (1995). *Mathematik zwischen Wahn und Witz. Trugschlüsse, falsche Beweise und die Bedeutung der Zahl 57 für die amerikanische Geschichte.* Basel: Birkhäuser.
Unguru, S. (1975/76). On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics. *Archive for the History of Exact Sciences* (15), S. 67-114.
Unguru, S. & Rowe, D. E. (1981). Does the quadratic equation have Greek roots? A Study of "geometric algebra", "application of areas", and related problems. *Libertas Mathematica* (1), S. 1-49.
Unguru, S. & Rowe, D. E. (1982). Does the quadratic equation have Greek roots? A Study of "geometric algebra", "application of areas", and related problems. *Libertas Mathematica* (2), S. 1-62.
University of Cambridge, Department of History and Philosophy of Science, Liba Taub. (1999). *The title page of William Cunningham's Cosmographicall Glasse.* Internetressource, abgerufen am 26.09.2010 von "Starry Messenger": http://www.hps.cam.ac.uk/starry/hipparchuslrg.jpg
University of Texas Libraries. (1993). *Atlas of the Middle East. Historical Eras (Age of the Caliphs).* Internetressource, abgerufen am 25.09.2010 von "Perry-Castaneda Library Map Collection": http://www.lib.utexas.edu/maps/atlas_middle_east/txu-oclc-28514370-06.jpg
van der Waerden, B. L. (1975/76). Defence of a "Shocking" Point of View. *Archive for History of Exact Sciences* (15), S. 199-210.
van der Waerden, B. L. (1966). *Erwachende Wissenschaft.* Basel, Stuttgart: Birkhäuser.
van Gulik-Gulikers, I. (2005). *Meetkunde opnieuw uitgevonden : een studie naar de waarde en de toepassing van de geschiedenis van de meetkunde in het wiskundeonderwijs. Proefschrift Rijksuniversiteit Groningen.* Groningen.
van Maanen, J. (1997). New maths may profit from old methods. *For the learning of mathematics*, *17* (2), S. 39-46.
Vollrath, H. J. (1968). Die Geschichtlichkeit der Mathematik als didaktisches Problem. *Neue Sammlung* (8), S. 108-112.
Weil, A. (1978). Who betrayed Euclid? (Extract from a Letter to the Editor.) *Archive for History of Exact Sciences* (19), S. 91-93.
Weiße, C. (1829). *Aristoteles: Physik.* Leipzig: Johann Ambrosius Barth.

Wierlacher, A. (Hrsg.). (1985). *Das Fremde und das Eigene.* München: Iudicium.
Wierlacher, A. (Hrsg.). (1993). *Kulturthema Fremdheit. Leitbegriffe und Problemfelder kulturwissenschaftlicher Fremdheitsforschung.* München: Iudicium.
Wilmans, E. (1927). Die Verwendbarkeit der Quellen im Geschichtsunterricht. *Vergangenheit und Gegenwart* (17), S. 148-163.
Windelband, W. (1924). Geschichte und Naturwissenschaft. Straßburger Rektoratsrede. In W. Windelband, *Präludien. Aufsätze und Reden zur Einleitung in die Philosophie.* Tübingen: Mohr.
Winter, H. (1988). Divergentes Denken und quadratische Gleichungen. *Mathematik lehren* (28), S. 54-55.
Wittmann, E. (1976). *Grundfragen des Mathematikunterrichts.* Braunschweig: Vieweg.
Youschkevitch, A. P. (1976). The concept of function up to the middle of the 19th century. *Archive for the history of exact sciences*, *16*, S. 37-85.
Zermelo, E. (1908). Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I. *Mathematische Annalen*, *65*, S. 261-281.