UNIVERSITÄT DUISBURG-ESSEN

– CAMPUS DUISBURG –

FACHBEREICH MATHEMATIK

Grundzüge der Maß- und Integrationstheorie

von

Wolfgang Hümbs und Klaus Kuzyk

SS 2009

Inhaltsverzeichnis

Vorwort 1

1 Mengensysteme und σ-Algebren 4

2 Maße, Borel-Lebesgue-Maß 13

3 Messbare Abbildungen 24

4 Allgemeine Integrationstheorie, Lebesgue-Integral 31

5 Produktmaße, Unendliche Produkte von Meßräumen 55

6 Verschiedene Integralbegriffe im Vergleich 69

7 Polnische Räume 80

A Literaturverzeichnis 86

Vorwort

Die Maßtheorie hat ihre Wurzeln in der Volumen- und Flächeninhaltberechnung. Auf diesem Gebiet erzielte bereits die hellenistische Mathematik beeindruckende Resultate. In den ersten zwei Jahrhunderten nach Begründung der Infinitesimalrechnung wurde die Integralrechnung lediglich als Anhängsel der Differentialrechnung angesehen, indem sie einfach als Umkehrung der Differentiation betrachtet wurde. Man erkannte jedoch die Möglichkeit, mittels Integralen Volumina und Flächeninhalte zu berechnen. Erst Cauchy gelang es, im Rahmen der von ihm eingeleiteten Arithmetisierung der Analysis, für stetige Integranden einen konkreten Integralbegriff zu schaffen. Das Cauchy-Integral wurde von Riemann leicht modifiziert und ist bis heute als Riemann-Integral bekannt. Es ist jedoch nur endlich-additiv, was dazu führt, dass noch nicht einmal allen Kompakta im n-dimensionalen Euklidischen Raum ein Volumen zugeordnet werden kann. Dieser (und auch andere) Mängel veranlassten Lebesgue, einen Integralbegriff zu kreieren, der auch σ-additiv ist, d.h., abzählbar additiv. Der neue Integralbegriff beseitigte nicht nur die angesprochenen Unzulänglichkeiten, sondern erwies sich auch hinsichtlich der Vertauschung der Integration und der Limitenbildung von Funktionenfolgen als wesentlich schmiegsamer als das Riemann-Integral. Außerdem erwies er sich nach Schaffung der Begriffe „Maß” und „σ-Algebra” als Prototyp einer allgemeinen Integrationstheorie.

Voluminaberechnung bedeutet abstrakt die Zuordnung von Maßzahlen für Mengen. In der Wahrscheinlichkeitstheorie werden ebenfalls Mengen (dort ”Ereignisse” genannt) Maßzahlen, eben die Wahrscheinlichkeiten, zugeordnet. Es lag also nahe, dass sich Kolmogoroff bei seiner Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitstheorie an der Maß- und Integrationstheorie orientierte. Bis zur Einführung des Unabhängigkeitsbegriffes ist die Wahrscheinlichkeitstheorie auch als ein echtes Teilgebiet der von Borel und Lebesgue initiierten allgemeinen Maß- und Integrationstheorie aufzufassen. Erst mit dem Unabhängigkeitsbegriff wurde die Wahrscheinlichkeitstheorie zu einer eigenständigen mathematischen Disziplin, deren mächtigstes Hilfsmittel aber die Maß- und Integrationstheorie geblieben ist. Umgekehrt haben probabilistische Fragestellungen auch die Maß- und Integrationstheorie nachhaltig befruchtet.

In den Vorlesungen Stochastik I/II wird im Bachelor/Master-Studiengang die Maß- und Integrationstheorie gemäß der Vorgabe im Modulhandbuch auf ein Minimum reduziert, um Platz für mehr Anwendungen freizusetzen. Diesem Zwang zur Minimierung versucht das Skriptum Rechnung zu tragen. Viele wichtige Sachverhalte werden erst gar nicht angesprochen; exemplarisch seien nur erwähnt die Räume der p-fach integrierbaren Funktionen und ihre Dualitätstheorie, das Haarsche Maß auf lokal-kompakten topologischen Gruppen, sowie die Konvergenzbegriffe für Maße. Beweise werden vollständig unterdrückt. Die Inhalte der Abschnitte 1 bis 5 sowie des Abschnitts 7 lassen sich in einer Stochastik-Vorlesung sofort probabilistisch interpretieren. Es ist dem jeweiligen Dozenten überlassen, dann den einen oder anderen Beweis zu demonstrieren, obwohl in den meisten Fällen die Beweise für Wahrscheinlichkeitsmaße nicht wesentlich einfacher als für allgemeine Maße sind. Es genügt, den Abschnitt 6 flüchtig zur Kenntnis zu nehmen. Es werden das Riemann-Integral, sowie zwei wesentliche Erweiterungen des Riemann-Integrals (Henstock-Kurzweil-Integral und Riemann-Stieltjes-Integral) mit dem Lebesgue- bzw. Lebesgue-Stieltjes-Integral verglichen. Allerdings sollte das Lebesgue-Stieltjes-Integral, das durch wahrscheinlichkeitstheoretische Begriffsbildungen motivierend vorbereitet wird, zur Kenntnis genommen werden. Den Abschnitt 4 abschließend werden einige Rechenregeln für das Lebesgue-Integral zusammengetragen, da die Vorkenntnisse über das Lebesgue-Integral aus den Analysis-Vorlesungen sehr unterschiedlich sein können.

Der Aufbau des Skriptes ist so gestaltet, dass es auch (mit Ausnahme des Abschnitts 6) als eine (mögliche) Orientierungshilfe für eine einführende Vorlesung zur Maß- und Integrationstheorie für das Diplom-Hauptstudium oder das Master-Studium verwendet werden kann. Das erklärt auch die vielen Hilfssätze (im Skriptum meistens als Notiz oder Bemerkung bezeichnet), die zu einer systematisch aufgebauten Vorlesung dazu gehören (wobei im Abschnitt 5 die monotonen (Mengen-)Systeme ausgelassen wurden, da dies den Rahmen dieses Abschnittes gesprengt hätte). Prägend für das Skript waren [Bau92], [Els07] und insbesondere [M+93]. Die für Abschnitt 7 erforderlichen rudimentären Kenntnisse aus der mengentheoretischen Topologie werden vorausgesetzt bzw. können sich schnell anhand des Büchleins [Jän90] von Klaus Jänich angeeignet werden.

Unser herzlicher Dank gilt Herrn Dipl.-Math. Ulrich Telle für die hervorragende Arbeit bei der Erstellung der Druckvorlage.

Duisburg / Haan im Frühjahr 2009

Wolfgang Hümbs
Klaus Kuzyk

1 Mengensysteme und σ-Algebren

Definition 1.1:
*Eine nicht-leere Menge $\mathcal{K}$ von Mengen heißt **Mengensystem**.*

Seien $I \neq \varnothing$ eine Menge und A_i durch $i \in I$ indizierte Mengen, so wird für das Mengensystem $\{A_i | i \in I\}$ auch $(A_i)_{i \in I}$ oder $(A_i | i \in I)$ geschrieben. Ist Ω eine Menge und $\mathcal{K} = (A_i)_{i \in I}$ ein Mengensystem mit $A_i \subset \Omega$ für alle $i \in I$, so heißt $\mathcal{K}$ ein Mengensystem über Ω.

Beispiele für Mengensysteme sind die Potenzmenge $P(\Omega)$ einer Menge Ω, $\{\varnothing\}$, $\{\{x\} \mid x \in \mathbb{R}\}$. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ und $\varnothing$ sind keine Mengensysteme.

Notiz 1.2 (de Morgan-Regeln)**:**
Sei $(A_i)_{i \in I}$ ein Mengensystem über Ω. Dann gelten

(i) $(\bigcup\limits_{i \in I} A_i)^C = \bigcap\limits_{i \in I} A_i^C$

(ii) $(\bigcap\limits_{i \in I} A_i)^C = \bigcup\limits_{i \in I} A_i^C$.

Dabei bezeichnet $A_i^C := \Omega - A_i$ das Komplement von A_i in Ω.

Definition 1.3:
Sei $\mathcal{K}$ ein Mengensystem paarweise disjunkter Mengen $A_i (i \in I)$, so schreibt man für $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ auch $\sum\limits_{i \in I} A_i$, $\sum\limits_{I} A_i$ oder $\sum A_i$, wenn klar ist, welche Indexmenge zugrunde liegt.

Definition 1.4:
Ein Mengensystem $\mathcal{K}$ paarweise disjunkter Mengen $A_i (i \in I)$ über Ω mit $\sum A_i = \Omega$ heißt **Partition** *(oder* **Zerlegung** *von Ω).*

Definition 1.5:
*Sei $\mathcal{K} = (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Mengensystem über Ω. Dann werden der **Limes Superior** und der **Limes Inferior** von $\mathcal{K}$ definiert durch*

(1) $\limsup A_n := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{m \geq n} A_m$,

(2) $\liminf A_n := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{m \geq n} A_m$.

Notiz 1.6:
Für ein Mengensystem $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gilt* $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.

Definition 1.7:
Ein Mengensystem $\mathcal{K} = (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt*

(i) **isoton** $:\iff A_n \subset A_{n+1} (\forall n \in \mathbb{N})$,

(ii) **antiton** $:\iff A_n \supset A_{n+1} (\forall n \in \mathbb{N})$,

(iii) **monoton** $:\iff K$ *ist antiton oder isoton.*

Definition 1.8:
Ein Mengensystem $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt* **konvergent**, *wenn gilt:*

$$\liminf A_n = \limsup A_n.$$

In diesem Fall schreibt man kurz $\lim A_n$ *für* $\liminf A_n$ *und* $\limsup A_n$.

Definition 1.9:
Seien $\mathcal{K} = (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ein Mengensystem und* A *eine Menge.*

(i) $\mathcal{K}$ **konvergiert isoton gegen** A *(in Zeichen:* $\mathcal{K} \uparrow A$*):* $\iff \mathcal{K}$ *ist isoton und* $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = A$.

(ii) $\mathcal{K}$ **konvergiert antiton gegen** A *(in Zeichen:* $\mathcal{K} \downarrow A$*)* $\mathcal{K}$ *ist antiton und* $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = A$.

(iii) $\mathcal{K}$ **konvergiert monoton gegen** $A :\iff \mathcal{K}$ *konvergiert isoton oder antiton gegen* A.

Notiz 1.10:
$\mathcal{K} = (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei ein Mengensystem.

Dann gelten:

(i) *Ist $\mathcal{K}$ isoton, so gilt $\lim A_n = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$.*

(ii) *Ist $\mathcal{K}$ antiton, so gilt $\lim A_n = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$.*

Für die Maßtheorie von besonderem Interesse sind Mengensysteme, die gewisse Abschlusseigenschaften gegenüber Mengenoperationen aufweisen.

Definition 1.11:
Ein Mengensystem $\mathcal{K}$ über einer Menge Ω mit $\varnothing \in \mathcal{K}$ heißt **Mengenhalbring** *(kurz:* **Halbring) über** *Ω, wenn gelten*

(i) $A, B \in \mathcal{K} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{K}$

(ii) $A, B \in \mathcal{K} \Rightarrow A - B = \sum\limits_{i=1}^{n} T_i$ *mit paarweise disjunkten Mengen $T_i \in \mathcal{K}$.*
Beachte, dass mit $A, B \in \mathcal{K}$ nicht notwendig $A - B$ in $\mathcal{K}$ liegt.

Beispiel 1.12:
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $a_j \leq b_j$ für $j \in \{1, \dots, n\}$. Unter dem rechts-halboffenen Intervall $[a, b)$ wird die Menge $\bigtimes\limits_{j=1}^{n} [a_j, b_j)$ verstanden.

Das Mengensystem $\mathcal{I}^n$ der rechts-halboffenen Intervalle bildet einen Halbring über $\mathbb{R}^n$.

Definition 1.13:
Ein Mengensystem $\mathcal{K}$ über einer Menge Ω heißt **Mengenring** *(kurz:* **Ring) über** *Ω, falls gelten*

(i) $A, B \in \mathcal{K} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{K}$

(ii) $A, B \in \mathcal{K} \Rightarrow A - B \in \mathcal{K}$.

Offensichtlich sind $\{\varnothing\}, \{\varnothing, \Omega\}, P(\Omega)$ Ringe über Ω.

Notiz 1.14:
Sei $\mathcal{K}$ ein Ring über Ω. Dann gelten:

(i) $\varnothing \in \mathcal{K}$

(ii) $A, B \in \mathcal{K} \Rightarrow A \triangle B \in \mathcal{K}, A \cap B \in \mathcal{K}$

(iii) $A_1, \ldots A_n \in \mathcal{K} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{K}, \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{K}$

(iv) *$\mathcal{K}$ ist ein Halbring über Ω.*

(Dabei bezeichnet
$$A \triangle B := (A - B) \cup (B - A)$$
die **symmetrische Differenz** von A und B.)

Der Halbring $\mathcal{I}^n$ aus Beispiel 1.12 bildet keinen Ring. Aus einem Halbring läßt sich jedoch stets ein kleinster, ihn enthaltender Ring erzeugen.

Satz 1.15:
Sei $\mathcal{K}$ ein Halbring über Ω. Dann existiert ein kleinster Ring $\rho(\mathcal{K})$ über Ω, der $\mathcal{K}$ enthält, d.h. wenn $\mathcal{K}'$ ein beliebiger Ring über Ω ist, der $\mathcal{K}$ enthält, so folgt

$$\mathcal{K} \subset \rho(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}'.$$

Der folgende Satz ist im Hinblick auf den 1. Maßfortsetzungssatz (s. Abschnitt 2) von Bedeutung.

Satz 1.16:
Der von einem Halbring $\mathcal{K}$ über Ω erzeugte Ring $\rho(\mathcal{K})$ über Ω besteht aus allen

endlichen Summen paarweise disjunkter Mengen aus $\mathcal{K}$, d.h.

$$\rho(\mathcal{K}) = \{T | \exists k \in \mathbb{N} \quad \exists T_i \in \mathcal{K}(i \in \{1, \ldots, k\}) : T = \sum_{i=1}^{k} T_i\}.$$

Definition 1.17:
$\rho(\mathcal{I}^n) =: \mathcal{F}^n$ *heißt* **Ring der n-dimensionalen Figuren***: [zu $\mathcal{I}^n$ siehe Beispiel 1.12].*

Die folgende Definition einer σ-Algebra ist grundlegend. Wie in der Einleitung bereits verdeutlicht wurde, sind σ-Algebren die natürlichen Ereignissysteme eines Wahrscheinlichkeitsraumes.

Definition 1.18:

(i) Ein Mengensystem $\mathcal{A}$ über einer Menge Ω heißt **σ-Algebra (über Ω)***, wenn gelten:*

(1) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

(2) Für jedes Mengensystem $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{A}$ liegt $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ in $\mathcal{A}$.

(ii) Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra (über Ω), so heißt $(\Omega, \mathcal{A})$ ein **Messraum***. Die Elemente von $\mathcal{A}$ werden* **($\mathcal{A}$-)messbare Mengen** *(oder auch* **Ereignisse***) genannt.*

Definition 1.19:
Seien $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω und $T \subset \Omega$. Dann ist

$$T \cap \mathcal{A} := \{T \cap A \mid A \in \mathcal{A}\}$$

eine σ-Algebra über T. $T \cap \mathcal{A}$ heißt die **Spur von $\mathcal{A}$ in** *T.*

Offensichtlich sind $\{\varnothing, \Omega\}, \{\varnothing, A, A^c, \Omega\}$ (mit $\varnothing \subsetneq A \subsetneq \Omega$) sowie $P(\Omega)$ σ-Algebren über Ω.

Notiz 1.20:
Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω.

(i) *Gelten $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, so ist $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$.*

(ii) *Ist $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ein Mengensystem in $\mathcal{A}$, so ist $\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$*

(iii) *Gelten $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, so ist $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \Omega$.*

(iv) *Aus $A, B \in \mathcal{A}$ folgt $A - B \in \mathcal{A}$.*

(v) *$\varnothing \in \mathcal{A}, \Omega \in \mathcal{A}$.*

(vi) *Jede σ-Algebra über Ω ist ein Ring über Ω.*

(vii) *Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Mengensystem aus $\mathcal{A}$. Dann gelten:*

  (1) $A_n \uparrow A \Rightarrow A \in \mathcal{A}$

  (2) $A_n \downarrow A \Rightarrow A \in \mathcal{A}$

  (3) $\liminf A_n \in \mathcal{A}$

  (4) $\limsup A_n \in \mathcal{A}$.

σ-Algebren werden in den seltensten Fällen explizit angegeben, sondern durch Erzeugendensysteme. Dies wird in folgendem Satz präzisiert.

Satz 1.21:
Sei $\mathcal{K}$ ein Mengensystem über Ω. Dann existiert eine kleinste σ-Algebra $\sigma(\mathcal{K})$ über Ω, die $\mathcal{K}$ enthält. $\sigma(\mathcal{K})$ ist gegeben durch

$$\sigma(\mathcal{K}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{A}\ \sigma\text{-Algebra über } \Omega \\ \text{mit } \mathcal{K} \subset \mathcal{A}}} \mathcal{A}$$

Bemerkung 1.22:
Sind $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ Mengensysteme über Ω, so gelten

(i) $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2 \Rightarrow \sigma(\mathcal{K}_1) \subset \sigma(\mathcal{K}_2)$,

(ii) $\mathcal{K}_1 \subset \sigma(\mathcal{K}_2), \mathcal{K}_2 \subset \sigma(\mathcal{K}_1) \Rightarrow \sigma(\mathcal{K}_1) = \sigma(\mathcal{K}_2)$.

Notiz 1.23:
Es gilt

$$\sigma(\mathcal{I}^n) = \sigma(\mathcal{F}^n).$$

Definition und Beispiel 1.24:
Die σ-Algebra $\mathcal{B}^n := \sigma(\mathcal{I}^n) = \sigma(\mathcal{F}^n)$ heißt die **Borelsche σ-Algebra (über $\mathbb{R}^n$)**. *Die Elemente von $\mathcal{B}^n$ heißen* **Borelsche Mengen**, *das Paar $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$* **Borelscher Meßraum**. *Anstelle von $\mathcal{B}^1$ schreibt man kurz $\mathcal{B}$.*

Die Borelsche σ-Algebra $\mathcal{B}^n$ ist eines der wichtigsten Ereignissysteme in der Wahrscheinlichkeitstheorie überhaupt. Die naheliegende Frage, warum man in der Wahrscheinlichkeitstheorie nicht einfach die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ als Ereignissystem wählt, kann erst im Abschnitt 2 beantwortet werden.

Wahrscheinlichkeitstheorie betreibt man nicht nur in Ereignissystemen über $\mathbb{R}^n$, sondern über noch viel allgemeineren Räumen ($\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (Stochastische Prozesse), topologischen Gruppen, Hilberträumen (Quantenmechanik) usw.). Alle diese Räume lassen sich (kanonisch) topologisieren und die Ereignissysteme werden durch die entsprechenden Topologien, d.h. das System der offenen Mengen erzeugt. Wie der nächste Satz zeigt, gilt dies auch für die Borelsche σ-Algebra $\mathcal{B}^n$. Mithin haben z.T. völlig verschiedene, der Wahrscheinlichkeitstheorie als Ereignissystem dienende σ-Algebren, eine verbindende Eigenschaft, was eine systematische Untersuchung nahelegt. Man stößt dabei (u.a.) auf die sog. polnischen Räume, die im letzten Abschnitt kurz angerissen werden.

Satz 1.25:
$\mathbb{R}^n$ sei mit der Euklidischen Topologie versehen und $\mathcal{O}^n$ bezeichne das System der offenen Mengen. Dann gilt: $\mathcal{B}^n = \sigma(\mathcal{O}^n)$.
Bezeichnen $\mathcal{K}^n$ bzw. $\mathcal{A}^n$ das System der kompakten (bzw. abgeschlossenen)

Mengen, so gelten zudem

$$\mathcal{B}^n = \sigma(\mathcal{K}^n) \text{ bzw. } \mathcal{B}^n = \sigma(\mathcal{A}^n).$$

Maße, die in Abschnitt 2 behandelt werden, können auch den Wert ∞ annehmen. Deswegen erweist es sich als notwendig auch über den **erweitert-reellen Zahlen** $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\} =: \overline{\mathbb{R}}$ eine σ-Algebra einzuführen, die sich aber kanonisch aus der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}$ herleiten lässt.

Notiz und Definition 1.26:

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{B}} := \mathcal{B} \quad & \cup \{A \cup \{+\infty\} \mid A \in \mathcal{B}\} \\ & \cup \{A \cup \{-\infty\} \mid A \in \mathcal{B}\} \\ & \cup \{A \cup \{+\infty, -\infty\} \mid A \in \mathcal{B}\}\end{aligned}$$

ist eine σ-Algebra über $\overline{\mathbb{R}}$.

$\overline{\mathcal{B}}$ heißt die Borelsche σ-Algebra über $\overline{\mathbb{R}}$. Ihre Elemente heißen **Borelsche Mengen in** $\overline{\mathbb{R}}$. *Das Paar $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$ heißt Borelscher Messraum über $\overline{\mathbb{R}}$.*

In der Wahrscheinlichkeitstheorie sieht man sich häufig vor der Situation, mehrere Zufallsexperimente nacheinander zu betrachten. Das adäquate maßtheoretische Instrumentarium zur Behandlung solcher Fragestellung sind Produktmessräume. Die zugehörigen Produktmaße können an dieser Stelle noch nicht behandelt werden, ebenso wenig der Fall abzählbar unendlicher oder sogar überabzählbar vieler Zufallsexperimente.

Definition 1.27:
Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), \ldots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ Messräume. Dann heißt

$$\bigtimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i := \{\bigtimes_{i=1}^{n} T_i \mid T_i \in \mathcal{A}_i\}$$

das **System der messbaren Rechtecke** *und*

$$\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i := \sigma\left(\bigtimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i\right)$$

heißt die **Produkt-σ-Algebra** *der σ-Algebren $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$. Das Paar*

$$(\Omega, \mathcal{A}) := \left(\bigtimes_{i=1}^{n} \Omega_i, \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i\right)$$

nennt man den ***Produktmessraum*** *der Messräume $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), \ldots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n)$.*

2 Maße, Borel-Lebesgue-Maß

Definition 2.1:
Sei $\mathcal{K}$ ein Mengensystem über Ω mit $\varnothing \in \mathcal{K}$. $\mu : \mathcal{K} \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt ein **Inhalt auf** *$\mathcal{K}$, wenn gelten*

(1) $\mu(\varnothing) = 0$,

(2) $\mu(A) \geq 0 \quad (\forall A \in \mathcal{K})$,

(3) Sind $T_1, \ldots, T_n \in \mathcal{K}$ paarweise disjunkt mit $\sum\limits_{i=1}^{n} T_i \in \mathcal{K}$, so ist

$$\mu\left(\sum_{i=1}^{n} T_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(T_i)$$

(endliche Additivität).

μ heißt **endlich***: $\Longleftrightarrow \mu(A) < \infty \quad (\forall A \in \mathcal{K})$.*

Definition 2.2:
Sei $\mathcal{K}$ ein Mengensystem über Ω mit $\varnothing \in \mathcal{K}$. $\mu : \mathcal{K} \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt ein **Maß auf** *$\mathcal{K}$, wenn gelten*

(1) $\mu(\varnothing) = 0$,

(2) $\mu(A) \geq 0 \quad (\forall A \in \mathcal{K})$

(3) Für jedes Mengensystem $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen aus $\mathcal{K}$ mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{K}$ ist

$$\mu\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

(σ-Additivität)

Ist $\mathcal{K}$ speziell eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ und μ ein Maß auf $\mathcal{A}$, so heißt $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein **Maßraum**.

Gilt in einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *speziell* $\mu(\Omega) = 1$*, so nennt man* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *einen* **Wahrscheinlichkeitsraum** *und* μ *ein* **Wahrscheinlichkeitsmaß**. *Üblicherweise wird dann* μ *mit* P *bezeichnet.*

Ein Maß μ *heißt endlich:* $\Longleftrightarrow \mu(A) < \infty \qquad (\forall A \in \mathcal{K}).$

Auf die Bedeutung der σ-Additivität wurde bereits in der Einleitung hingewiesen.

Notiz 2.3:
(1) Jedes Maß ist ein Inhalt; die Umkehrung ist i.a. falsch.

(2) Wahrscheinlichkeitsmaße sind endlich.

Bemerkung 2.4:
Seien μ *ein Inhalt auf einem Ring* $\mathcal{K}$ *über* Ω *und* $S, T \in \mathcal{K}$ *sowie* $S \subset T$. *Dann gelten*

(i) $\mu(S) < \infty \Longrightarrow \mu(T - S) = \mu(T) - \mu(S)$ *(Subtraktivität)*

(ii) $\mu(S) = \infty \Longrightarrow \mu(S) = \mu(T)$

Bemerkung 2.5:
Ein auf einem Ring $\mathcal{K}$ *über* Ω *definierter Inhalt* μ *ist* **isoton**, *d.h. für* $S, T \in \mathcal{K}$ *mit* $S \subset T$ *gilt*

$$\mu(S) \leq \mu(T)$$

Satz 2.6:
(i) Ist μ *ein Inhalt auf einem Ring* $\mathcal{K}$ *und* $S_n \in \mathcal{K}$ *für alle* $n \in \{1, \dots, m\}$ *mit einem* $m \in \mathbb{N}$*, so gilt*

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{m} S_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{m} \mu(S_n).$$

(Subadditivität)

(ii) *Ist μ ein Maß auf einem Ring $\mathcal{K}$ und $S_n \in \mathcal{K}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n \in \mathcal{K}$, so gilt*

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n).$$

(σ-Subadditivität)

(iii) *Ist μ ein Inhalt auf einem Ring $\mathcal{K}$ und $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Mengensystem paarweise disjunkter Mengen S_i aus $\mathcal{K}$. Dann gilt*

$$\mu(\sum_{n=1}^{\infty} S_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n)$$

(σ-Superadditivität)

Die folgende Definition führt Begriffsbildungen ein, die in engem Zusammenhang mit der σ-Additivität stehen.

Definition 2.7:
Sei μ ein Inhalt auf einem Ring $\mathcal{K}$.

(i) *μ heißt* **stetig von unten:** $\Longleftrightarrow$. *Für jedes Mengensystem $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Mengen S_n aus $\mathcal{K}$ mit $S_n \uparrow S \in \mathcal{K}$ gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(S_n) = \mu(S).$$

(ii) *μ heißt* **stetig von oben:** $\Longleftrightarrow$. *Für jedes Mengensystem $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Mengen S_n aus $\mathcal{K}$ mit $S_n \downarrow S \in \mathcal{K}$ gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(S_n) = \mu(S).$$

(iii) *μ heißt* **$\varnothing$-stetig** *(sprich: nullstetig), wenn für jedes Mengensystem $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$*

auf $\mathcal{K}$ mit $S_n \downarrow \varnothing$ und $\mu(S_n) < \infty (\forall n \in \mathbb{N})$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(S_n) = 0.$$

Notiz 2.8:
2.7 (iii) ist ein Spezialfall von 2.7 (ii).

Satz 2.9:
Sei μ ein Inhalt auf einem Ring $\mathcal{K}$. Dann gelten:

(i) μ ist σ-additiv $\Rightarrow$ μ ist stetig von unten.

(ii) μ ist stetig von unten $\Rightarrow$ μ ist stetig von oben.

(iii) μ ist stetig von oben $\Rightarrow$ μ ist $\varnothing$-stetig.

(iv) μ ist stetig von unten $\Rightarrow$ μ ist σ-additiv.

Satz 2.10 (1. Borel-Cantellisches Lemma)**:**
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Mengensystem von Mengen A_n aus $\mathcal{A}$ mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$. Dann gilt: $\mu(\limsup(A_n)) = 0$.

Im Falle, dass μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß P ist, lässt sich das 1. Borel-Cantellische Lemma unter Zusatzbedingungen wahrscheinlichkeitstheoretischer Natur noch wesentlich verschärfen.

Notiz 2.11:
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Partition von Ω mit $S_n \in \mathcal{A} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$. Dann gilt für jede Menge $T \in \mathcal{A}$:

$$\mu(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(T \cap S_n).$$

Beispiel 2.12:

(1) Sei Ω abzählbar unendlich. Das Mengensystem

$$\mathcal{K} := \{A \subset \Omega \mid |A| < \infty \text{ oder } |A^c| < \infty\}$$

ist ein Ring über Ω

$$\mu : \mathcal{K} \to \overline{\mathbb{R}} : A \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ endlich ist} \\ \infty, & \text{falls } A \text{ unendlich ist.} \end{cases}$$

ist ein Inhalt, aber kein Maß auf $\mathcal{K}$, da offensichtlich die σ-Additivität verletzt ist. Zudem ist μ $\varnothing$-stetig, aber nicht stetig von unten.

(2) Auf dem Halbring $\mathcal{I}^n$ der rechts-halboffenen Intervalle

$$[a, b) \subset \mathbb{R}^n \quad (a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n)$$

mit $a_j \leq b_j$ für $j \in \{1, \dots, n\}$) wird durch

$$\mu([a, b)) := \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j)$$

ein endlicher Inhalt definiert.

(3) Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum, $\eta \in \Omega$ sowie $c > 0$.

Dann wird durch $\mu_\eta^c : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $\mu_\eta^c(S) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \eta \in S \\ 0, & \text{falls } \eta \notin S \end{cases}$ ein Maß auf $\mathcal{A}$ definiert.

Im Falle $c = 1$ ist $\mu_\eta := \mu_\eta^1$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß, welches als **Punkt-W-Maß in** *η bezeichnet wird.*

Auf den Inhalt in Beispiel 2.12 (2) wird bei der Konstruktion des Borel-Lebesgue-

Maßes λ^n zurückgegriffen werden.

Das folgende Beispiel ist für die Vereinheitlichung der Darstellung von „diskreter” und „kontinuierlicher” Wahrscheinlichkeitstheorie von grundlegender Bedeutung, so dass es separat aufgeführt wird.

Beispiel 2.13:
Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Maßraum und $S \subset \Omega$. Dann wird durch

$$\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}} : T \mapsto \begin{cases} |T \cap S|, & \textit{für } |T \cap S| < \infty \\ \infty, & \textit{sonst} \end{cases}$$

*ein Maß auf $\mathcal{A}$ definiert, welches als das S-**Zählmaß auf** $\mathcal{A}$ bezeichnet wird.*

In der Wahrscheinlichkeitstheorie wird gelehrt, dass sich diskrete W-Maße und sogenannte Wahrscheinlichkeitsfunktionen bijektiv entsprechen. Wahrscheinlichkeitsfunktionen lassen sich aber als Dichten [vgl. Abschnitt 4] bzgl. gewisser Zählmaße auffassen, was impliziert, dass sich auch diskrete W-Maße als Integrale darstellen lassen. Damit wird deutlich, dass die Trennung in „Diskrete” und „Kontinuierliche” Wahrscheinlichkeitstheorie (wie sie heute noch in einigen Kochrezept-Lehrbüchern - primär für WiWis - zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik praktiziert wird) völlig überflüssig ist.

Definition 2.14:
Ein Maß μ auf einem Mengensystem $\mathcal{K}$ über Ω heißt σ-endlich: $\Longleftrightarrow$ es gibt eine Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Mengen S_n aus $\mathcal{K}$ mit

$$S_n \uparrow \Omega \quad \textit{und} \quad \mu(S_n) < \infty$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Notiz 2.15:
(i) *Jedes endliche Maß auf einer σ-Algebra ist σ-endlich.*

(ii) *Nicht jedes endliche Maß ist σ-endlich.*

(iii) *Jedes Wahrscheinlichkeitsmaß ist σ-endlich.*

(iv) *Die σ-Endlichkeit eines Maßes impliziert i.a. nicht die Endlichkeit dieses Maßes.*

Definition 2.16:
Seien $\mathcal{K}, \mathcal{K}'$ Mengensysteme über Ω mit $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}'$. Gilt für zwei Abbildungen $\mu : \mathcal{K} \to \overline{\mathbb{R}}$ und $\mu' : \mathcal{K}' \to \overline{\mathbb{R}}$

$$\mu(S) \quad = \quad \mu'(S) \quad (\forall S \in \mathcal{K}),$$

so heißt μ' **eine Fortsetzung von μ auf $\mathcal{K}'$** *und μ* **eine Restriktion von μ' auf $\mathcal{K}$**.

Theorem 2.17 (1. Fortsetzungssatz)**:**
Ist μ ein Maß (Inhalt) auf einem Halbring $\mathcal{K}$, so existiert eine **eindeutige** *Fortsetzung μ' von μ zu einem Maß (Inhalt) auf den von $\mathcal{K}$ erzeugten Ring $p(\mathcal{K})$. μ' ist gegeben durch*

$$\mu'(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(T_i),$$

wobei $A = \sum\limits_{i=1}^{n} T_i$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und paarweise disjunkten Mengen $T_i \in \mathcal{K}$ das gemäß Satz 1.16 allgemeine Element aus $\rho(\mathcal{K})$ ist.

Theorem 2.18 (2. Fortsetzungssatz)**:**

(i) *Ist μ ein Maß auf einem Ring $\mathcal{K}$, so lässt sich dieses zu einem Maß μ' auf die von $\mathcal{K}$ erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{K})$ fortsetzen.* ***Eine*** *solche Fortsetzung μ' wird gegeben durch*

$$\mu' : \sigma(\mathcal{K}) \to \overline{\mathbb{R}}, \quad S \mapsto \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n) \mid S \subset \sum_{n=1}^{\infty} S_n \right\}$$

wobei die Mengen S_n paarweise disjunkte Mengen aus $\mathcal{K}$ sind.

(ii) Ist μ σ-endlich, so ist die Fortsetzung μ' aus (i) eindeutig.

Wendet man den 1. Fortsetzungssatz auf den Inhalt μ auf dem Halbring $\mathcal{I}^n$ aus Beispiel 2.12 (2) an, so erhält man eine eindeutige Fortsetzung von μ zu einem Inhalt μ' auf $\mathcal{F}^n = \rho(\mathcal{I}^n)$. Für diesen Inhalt gilt nun

Lemma 2.19:
μ' ist bereits ein Maß auf $\mathcal{F}^n$, das zudem σ-endlich ist.

Der Beweis des Lemmas ist nicht einfach. Aus dem Lemma folgt trivialerweise, dass der Inhalt μ auf $\mathcal{I}^n$ bereits ein Maß auf $\mathcal{I}^n$ ist. Nur wäre der Beweis der Maßeigenschaft (insbesondere die σ-Additivität) noch schwieriger als derjenige für den Inhalt μ' auf $\mathcal{F}^n$.

μ' (aus Lemma 2.19) lässt sich nun nach dem 2. Fortsetzungssatz **eindeutig** zu einem Maß λ^n auf $\mathcal{B}^n = \sigma(\mathcal{F}^n)$ fortsetzen.

Definition 2.20:
Das so eben konstruierte Maß λ^n auf $\mathcal{B}^n$ heißt das **Borel-Lebesgue-Maß (kurz BL-Maß)** *auf $\mathcal{B}^n$. Für $n = 1$ schreibt man λ für λ^1.*

Notiz 2.21:
Das BL-Maß λ^n ist σ-endlich, aber nicht endlich.

Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $\|f(x) - f(y)\| = ||x - y|| \quad (x, y \in \mathbb{R}^n, ||.|| =$ Euklidnorm) nennt man bekanntlich eine Bewegung (Darunter fallen die Drehungen, Spiegelungen und Translationen.)

Eine Mindestanforderung an ein Maß, das zur Volumenberechnung für Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ dienen soll, ist die Bewegungsinvarianz.

Satz 2.22:
Das BL-Maß λ^n ist bewegungsinvariant, d.h.: Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Bewegung, so gilt für alle $S \in \mathcal{B}^n$

$$\lambda^n(f(S)) = \lambda^n(S).$$

Theorem 2.23 (Hausdorff-Vitali)**:**
Auf der σ-Algebra $P(\mathbb{R}^n)$ existiert kein bewegungsinvariantes Maß μ mit

$$\mu([0,1)^n) = 1.$$

Offensichtlich gilt $\lambda^n([0,1)^n) = 1$. Aufgrund der Tatsache, dass viele wichtige Wahrscheinlichkeitsmaße mittels des BL-Maßes λ^n definiert werden, macht Theorem 2.23 klar, dass man als Ereignissystem dieser Wahrscheinlichkeitsmaße nicht $P(\mathbb{R}^n)$ wählen kann.

Definition 2.24:
*Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Eine μ-***Nullmenge** *S ist eine Menge S aus $\mathcal{A}$ mit $\mu(S) = 0$. Bezeichne $\mathcal{G}$ das System aller μ-Nullmengen aus $\mathcal{A}$. Das Mengensystem $\mathcal{A}' := \{A \cup S \mid A \in \mathcal{A}, S \in \mathcal{G}\}$ ist wiederum eine σ-Algebra.*

Durch
$$\mu'(A \cup S) := \mu(A) \quad (\forall (A, S) \in \mathcal{A} \times \mathcal{G})$$
wird ein Maß auf $\mathcal{A}'$ definiert. Den Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}', \mu')$ nennt man die **Vervollständigung** *des Maßraumes $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Dabei heißt $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$* **vollständig:** $\Longleftrightarrow$

(i) $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$

(ii) $A \in \mathcal{A}, S \subset A, \mu(A) = 0 \Longrightarrow S \in \mathcal{G}$.

Notiz 2.25:
Vervollständigungen eines Maßraumes sind vollständig.

Satz 2.26:
Der Maßraum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, \lambda^n)$ *ist nicht vollständig.*

Definition 2.27:
Sei $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^{n'}, \lambda^{n'})$ *die Vervollständigung von* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, \lambda^n)$. *Das Maß*

$$^L\lambda^n := \lambda^{n'}$$

heißt das **Lebesgue-Maß** *(kurz: L-Maß) auf* $\mathbb{R}^n$ *und*

$$^L\mathcal{B}^n := \mathcal{B}^{n'}$$

heißt die **Lebesguesche σ-Algebra über $\mathbb{R}^n$.**

Satz 2.28:
Das L-Maß $^L\lambda^n$ *ist ebenfalls bewegungsinvariant.*

Satz 2.29:
$^L\mathcal{B}^n \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Beispiel 2.30:
Jede abzählbare Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ *ist eine* λ^n*-Nullmenge und damit auch eine* $^L\lambda^n$*-Nullmenge.*

Satz 2.31:
$^L\mathcal{B}^n$ *wird* **nicht** *vom System der offenen Teilmengen des* $\mathbb{R}^n$ *erzeugt.*

Satz 2.31 ist wegen der in Abschnitt 1 geschilderten Gründe der Anlass, für die Konstruktion des Lebesgue-Integrals im Abschnitt 4 die σ-Algebra $\mathcal{B}^n$ zu wählen.

Satz 2.32:
Es gibt überabzählbar viele Teilmengen S *des* $\mathbb{R}^n$ *mit* $S \notin \mathcal{B}^n$.

Theorem 2.33 (Solovay)**:**
Der Nachweis, dass eine Teilmenge S des $\mathbb{R}^n$ nicht in $\mathcal{B}^n$ liegt, kann ***prinzipiell*** *nur mit Hilfe des Auswahlaxioms (oder eines hierzu äquivalenten Satzes wie dem Zornschen Lemma oder dem Wohlordnungssatz) erbracht werden.*

3 Messbare Abbildungen

Definition 3.1:

(i) *Seien* Ω_1, Ω_2 *Mengen und* $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ *eine Abbildung. Dann heißt*

$$f^{-1} : P(\Omega_2) \to P(\Omega_1)$$

mit

$$f^{-1}(S_2) := \{w_1 \in \Omega_1 | f(w_1) \in S_2\} \quad (\forall S_2 \in P(\Omega_2))$$

die **Urbildabbildung von** f *(nicht zu verwechseln mit dem Begriff der Umkehrabbildung!).* $f^{-1}(S_2)$ *heißt das* **Urbild** *von* S_2

(ii) *Ist weiter* $\mathcal{K}_2$ *ein Mengensystem über* Ω_2*, so heißt*

$$f^{-1}(\mathcal{K}_2) := \{f^{-1}(S_2) \mid S_2 \in \mathcal{K}_2\}$$

das Urbild von $\mathcal{K}_2$*.*

Notiz 3.2:

Seien Ω_1, Ω_2 *Mengen,* $M, N \in P(\Omega_2)$ *und* $\mathcal{S} = (S_i)_{i \in I}$ *ein Mengensystem mit* $\varnothing \in \mathcal{S}$ *über* Ω_2*. Dann gelten:*

(i) $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing, f^{-1}(\Omega_2) = \Omega_1,$

(ii) $f^{-1}(M^c) = (f^{-1}(M))^c$,

(iii) $M \subset N \Longrightarrow f^{-1}(M) \subset f^{-1}(N)$,

(iv) $\bigcup\limits_{i \in I} f^{-1}(S_i) = f^{-1}(\bigcup\limits_{i \in I} S_i)$

(v) $\bigcap\limits_{i \in I} f^{-1}(S_i) = f^{-1}(\bigcap\limits_{i \in I} S_i)$

(vi) *Im Falle, dass die* S_i *paarweise disjunkt sind:*
$\sum\limits_{i \in I} f^{-1}(S_i) = f^{-1}(\sum\limits_{i \in I} S_i)$.

Notiz 3.3:
Seien $f : \Omega_1 \to \Omega_2$, $g : \Omega_2 \to \Omega_3$ *Abbildungen. Dann gilt:*

$$(g \circ f)^{-1}(S_3) = f^{-1}(g^{-1}(S_3)) \qquad (\forall S_3 \in \mathcal{P}(\Omega_3)).$$

Notiz 3.4:
Seien $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ *eine Abbildung und* $\mathcal{A}_2$ *eine* σ*-Algebra über* Ω_2*. Dann ist* $f^{-1}(\mathcal{A}_2)$ *eine* σ*-Algebra über* Ω_1.

Definition 3.5:
Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ *Messräume und* $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ *eine Abbildung.* f *heißt* $\mathcal{A}_1$**-**$\mathcal{A}_2$**-messbar**, *falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:*

(i) $f^{-1}(S_2) \in \mathcal{A}_1 \quad (\forall S_2 \in \mathcal{A}_2)$

(ii) $f^{-1}(\mathcal{A}_2) \subset \mathcal{A}_1$.

Für die Schreibweise „$f : \Omega_1 \to \Omega_2$ ist $\mathcal{A}_1$-$\mathcal{A}_2$-messbar*" wird im Folgenden auch „*$f : (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \to (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ ist messbar*" geschrieben. Dabei bedeutet* $f : (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \to (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$*, dass* $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ *Messräume sind und* $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ *eine Abbildung ist.*

In der Wahrscheinlichkeitstheorie werden messbare Abbildungen auch als **Zufallsvariablen** *(kurz ZVen) bezeichnet, in der mathematischen Statistik nach Zusatzbedingungen an die Messräume als* **Statistiken**.

Bemerkung 3.6:
Die große Analogie zwischen der Messbarkeit und der Definition der Stetigkeit von Abbildungen zwischen topologischen Räumen ist nicht zufällig, wie im Abschnitt 7 über polnische Räume im Theorem von Lusin deutlich wird.

Lemma 3.7:
Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ *Messräume und* $\mathcal{K}_2$ *ein Erzeugendensystem von* $\mathcal{A}_2$*, d.h.* $\mathcal{A}_2 = \sigma(\mathcal{K}_2)$*. Eine Abbildung* $f : (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \to (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ *ist genau dann messbar, wenn eine der nachstehenden äquivalenten Bedingungen gilt:*

(i) $f^{-1}(S_2) \in \mathcal{A}_1 \quad (\forall S_2 \in \mathcal{K}_2)$

(ii) $f^{-1}(\mathcal{K}_2) \subset \mathcal{A}_1$.

Bemerkung 3.8:
Jede stetige (insbesondere also auch jede differenzierbare) Abbildung $f : (\mathbb{R}^m, \mathcal{B}^m) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ ist messbar.

Da $\mathcal{B}^n$ von den offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ erzeugt wird, ist nach Lemma 3.7 nur zu zeigen, dass für jede offene Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ $f^{-1}(A)$ offen in $\mathbb{R}^n$ ist. Das ist aber gerade die Definition der Stetigkeit von f.

Bemerkung 3.9:
Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ seien $g_i : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ Abbildungen und

$$f := (g_1, \ldots, g_n) : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\bigtimes_{i=1}^{n} \Omega_i, \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i)$$

die Produktabbildung der g_i.

Die g_i sind genau dann messbar, wenn f messbar ist.

Notiz 3.10:

$$\begin{aligned} f &: (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \to (\Omega_2, \mathcal{A}_2) \quad \textit{und} \\ g &: (\Omega_2, \mathcal{A}_2) \to (\Omega_3, \mathcal{A}_3) \quad \textit{seien} \end{aligned}$$

messbar. Dann ist auch

$$g \circ f : (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \to (\Omega_3, \mathcal{A}_3)$$

messbar.

Satz 3.11:
$f : (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \to (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ sei messbar und μ sei ein Maß auf $\mathcal{A}_1$:

(i) μ_f *mit* $\mu_f(S_2) := \mu(f^{-1}(S_2)) \quad (\forall S_2 \in \mathcal{A}_2)$ *definiert ein Maß auf* $\mathcal{A}_2$.

μ_f *heißt das* **Bildmaß von μ bei** f. *Es spielt in der Wahrscheinlichkeitstheorie eine bedeutende Rolle.*

Für μ_f *wird häufig auch* $f(\mu)$ *geschrieben.*

(ii) Ist μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{A}$, so ist μ_f ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{A}_2$.

Definition 3.12:
Seien $f : (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \to (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ messbar und $S_2 \in \mathcal{A}_2$.

Dann sei $\{f \in S_2\} := \{w_1 \in \Omega_1 \mid f(w_1) \in S_2\}$. Ist zudem μ ein Maß auf $\mathcal{A}_1$, so sei $\mu\{f \in S_2\} := \mu(\{f \in S_2\})$.

Definition 3.13 (Rechenregeln für ∞ und $-\infty$)**:**
Für $c \in \mathbb{R}$ wird gesetzt

(1) $c + (\pm\infty) := (\pm\infty) + a := (\pm\infty) + (\pm\infty) := \infty$

(2) $c \cdot (\pm\infty) := (\pm\infty) \cdot c := \begin{cases} \pm\infty, & \text{für } c > 0 \\ 0 & \text{für } c = 0 \\ \mp\infty, & \text{für } c < 0 \end{cases}$

(3) $-\infty < c < \infty$

(4) $(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) := +\infty,$
$(\pm\infty) \cdot (\mp\infty) := -\infty,$
$\frac{c}{\pm\infty} := 0, \frac{1}{0} := +\infty$

(5) $(\pm\infty) - (\pm\infty)$ *bleiben undefiniert.*

Definition 3.14:
$\overline{\mathbb{R}}$-wertige Funktionen werden **numerische Funktionen** *genannt.*

Lemma 3.15:
$f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ bzw. $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$ sind genau dann messbar, wenn eine der nachstehenden äquivalenten Bedingungen gilt:

(i) $\{f < a\} \in \mathcal{A} \quad (\forall a \in \mathbb{R})$

(ii) $\{f \leq a\} \in \mathcal{A} \quad (\forall a \in \mathbb{R})$

(iii) $\{f > a\} \in \mathcal{A} \quad (\forall a \in \mathbb{R})$

(iv) $\{f \geq a\} \in \mathcal{A} \quad (\forall a \in \mathbb{R})$.

Beispiel 3.16:
Jede monotone Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist $\mathcal{B} - \mathcal{B}$-messbar.

Bemerkung 3.17:
Mit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{B} - \mathcal{B}$-messbar sind auch $cf (c \in \mathbb{R}), f + g$ und fg messbar.

Gleiches gilt für numerische $\mathcal{B}$-$\overline{\mathcal{B}}$-messbare Funktionen. (Bei $f + g$ mit der Einschränkung, dass $f + g$ definiert ist.)

Definition 3.18:
Sei (f_n) eine Folge numerischer Funktionen $\Omega \to \overline{\mathbb{R}}$. Die numerischen Funktionen $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n, \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n, \limsup f_n, \liminf f_n$ werden definiert durch

(i) $(\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n)(w) := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(w) \quad (\forall w \in \Omega)$

(ii) $(\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n)(w) := \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(w) \quad (\forall w \in \Omega)$

(iii) $(\limsup f_n)(w) := \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \sup\limits_{m\geq n} f_m(w) \quad (\forall w \in \Omega)$

(iv) $(\liminf f_n)(w) := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \inf\limits_{m\geq n} f_m(w) \quad (\forall w \in \Omega)$

(v) *Gilt $\liminf f_n = \limsup f_n$, so wird die numerische Funktion $\lim f_n$ definiert durch*

$$\lim f_n := \liminf f_n = \limsup f_n \,.$$

Satz 3.19:
Sei (f_n) *eine Folge numerischer, messbarer Funktionen* $f_n : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$. *Dann gelten*

(i) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n, \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n, \limsup f_n, \liminf f_n$ *sind messbar.*

(ii) Existiert $\lim f_n$*, so ist* $\lim f_n$ *messbar.*

(iii) Ist $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *konvergent in* $\overline{\mathbb{R}}$*, so ist* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *messbar.*

Definition 3.20:
Für eine numerische Funktion $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *werden der* **Positivteil** f^+ *und der* **Negativteil** f^- *definiert durch*

$$\begin{aligned} f^+(w) &:= \sup(f(w), 0) \quad (\forall w \in \Omega) \\ f^-(w) &:= -\inf(f(w), 0) \quad (\forall w \in \Omega) \end{aligned}$$

Notiz 3.21:
Für eine numerische Funktion $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *gelten*

(i) $f = f^+ - f^-$

(ii) $|f| = f^+ + f^-$

(iii) f *ist genau dann* $\mathcal{A}$-$\overline{\mathcal{B}}$*-messbar, wenn* f^+ *und* f^- $\mathcal{A}$-$\overline{\mathcal{B}}$*-messbar sind.*

Definition 3.22:
Seien Ω *eine Menge und* $A \subset \Omega$*. Die* **Indikatorfunktion** 1_A **von** A *(auch* **charakteristische Funktion von** A *genannt) ist definiert durch*

$$1_A(w) := \begin{cases} 1, & \text{falls } w \in A \quad (\forall w \in \Omega) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Notiz 3.23:
Seien $A, B \subset \Omega$ *und* $(A_i)_{i\in I}$ *ein Mengensystem über* Ω*. Dann gelten*

(i) $1_{A^c} = 1 - 1_A$

(ii) $A \subset B \Longrightarrow 1_A \leq 1_B$

(iii) $1_{\bigcup A_i} = \sup 1_{A_i}$

(iv) $1_{\bigcap A_i} = \inf 1_{A_i}$.

Notiz 3.24:
Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ein Mengensystem über* Ω*. Dann gelten*

(i) $\limsup 1_{A_n} = 1_{\limsup A_n}$

(ii) $\liminf 1_{A_n} = 1_{\liminf A_n}$

(iii) $(\liminf 1_{A_n} = \limsup 1_{A_n}) \iff (1_{\liminf A_n} = 1_{\limsup} 1_{A_n})$, *und in diesem Fall gilt weiter* $\lim 1_{A_n} = 1_{\lim A_n}$.

Notiz 3.25:
Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ *ein Messraum und* $A \subset \Omega$*. Dann gilt:*

$$1_A \textit{messbar} \iff A \in \mathcal{A}.$$

4 Allgemeine Integrationstheorie, Lebesgue-Integral

Die Allgemeine Integrationstheorie (nach einem Maß μ) wird dreistufig entwickelt; zunächst für Elementarfunktionen, dann über nicht-negative Funktionen und schließlich allgemein.

Definition 4.1:
Sei $e : (\Omega, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}, \mathcal{B})$ *messbar.* e *heißt* **Elementarfunktion** *(über* Ω*):* $\Longleftrightarrow$

(1) e *ist nicht-negativ.*

(2) $|e(\Omega)| < \infty$.

Die Menge aller dieser Elementarfunktionen wird mit $\mathcal{E}$ *(gelegentlich auch* $\mathcal{E}(\mathcal{A})$ *oder* $\mathcal{E}(\Omega, \mathcal{A})$*) bezeichnet.*

Notiz 4.2:
Sei e *eine Elementarfunktion über* Ω *mit* $e(\Omega) = \{x_1, \dots, x_s\}$ *und* $x_1 < \dots < x_s$*. Weiter sei für* $j \in \{1, \dots, s\}$*:* $A_j := e^{-1}(\{x_j\}) \in \mathcal{A}$*.* $\{A_1, \dots, A_s\}$ *bildet eine Partition von* Ω *und* e *besitzt eine Darstellung*

$$e = \sum_{j=1}^{s} x_j \cdot 1_{A_j}.$$

Diese Darstellung heißt **Normaldarstellung** *von* e*. Sie ist eindeutig bestimmt.*

Notiz 4.3:
Mit $e_1, e_2 \in \mathcal{E}$ *sind auch*

$$e_1 + e_2 \in \mathcal{E}; e_1 - e_2 \in \mathcal{E} \quad (\textit{falls } e_1 \geq e_2)$$

sowie $ce_1 \in \mathcal{E}$ *(falls* $c \in \mathbb{R}_0^+$*).*

Definition 4.4:
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum und* $e \in \mathcal{E}$ *mit Normaldarstellung*

$$e = \sum_{j=1}^{s} x_j 1_{A_j}.$$

Die erweitert-reelle Zahl

$$\int e \, d\mu := \sum_{j=1}^{s} x_j \mu(A_j)$$

heißt das **(**μ**-)Integral** *von* e*.*

Notiz 4.5:
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum,* $e_1, e_2 \in \mathcal{E}$ *und* $c \in \mathbb{R}_0^+$*. Dann gelten*

(i) $\int 1_S \, d\mu = \mu(S) \quad (\forall S \in \mathcal{A})$

(ii) $\int ce_1 \, d\mu = c \int e_1 \, d\mu$ *sowie* $\int (e_1 + e_2) \, d\mu = \int e_1 \, d\mu + \int e_2 \, d\mu$ *(positive Linearität)*

(iii) $e_1 \leq e_2 \Longrightarrow \int e_1 \, d\mu \leq \int e_2 \, d\mu$ *(Monotonie)*

Beispiel 4.6:
Die **Dirichletfunktion** $1_{\mathbb{Q}} : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ *ist elementar mit* $\int 1_{\mathbb{Q}} \, d\lambda = 0$*.*

Lemma 4.7:
Ein nicht-negatives, messbares $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$ *ist Grenzwert einer monoton steigenden Folge* $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *von Elementarfunktonen.*

Man schreibt hierfür: $e_n \uparrow f$*.*

Definition 4.8:
Die Menge der nicht-negativen, messbaren Funktionen $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$ *wird mit* $\overline{\boldsymbol{\mathcal{M}}}^+$ *(oder auch* $\overline{\boldsymbol{\mathcal{M}}}^+(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ *bzw.* $\overline{\boldsymbol{\mathcal{M}}}^+(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$*) bezeichnet.*

Die Menge der nicht-negativen, messbaren Funktionen $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ wird mit $\boldsymbol{\mathcal{M}^+}$ (oder auch $\boldsymbol{\mathcal{M}^+(\mathcal{A})}$ bzw. $\boldsymbol{\mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{A})}$) bezeichnet.

Definition 4.9:
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in \mathcal{M}^+$. Ist $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementarfunktionen mit $e_n \uparrow f$, so heißt die erweitert-reelle Zahl

$$\int f \, d\mu := \lim_{n\to\infty} \int e_n \, d\mu$$

*das (μ)**-Integral** (über Ω).*

$\int f \, d\mu$ ist unabhängig von der Wahl der Folge der Elementarfunktionen.

Notiz 4.10:
Ist in Definition 4.9 $f \in \mathcal{E}$, so stimmt der in Definition 4.9 definierte Integralbegriff mit dem in Definition 4.4 erklärten überein.

Bemerkung 4.11:
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f \in \overline{\mathcal{M}}^+$ mit $f(\Omega) = \{x_i \mid i \in S\}$, wobei $S \subset \mathbb{N}$ und $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ $((i,j) \in S^2)$. Dann gilt:

$$\int f \, d\mu = \sum_{i\in S} x_i \mu(\{w \in \Omega \mid f(w) = x_i\}).$$

Notiz 4.12:
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $e_1, e_2 \in \overline{\mathcal{M}}^+$ sowie $c \in \mathbb{R}_0^+$. Dann gelten

(i) $\int 1_S \, d\mu = \mu(S) \quad (\forall S \in \mathcal{A})$

(ii) $\int ce_1 \, d\mu = c \int e_1 \, d\mu$ *sowie* $\int (e_1 + e_2) \, d\mu = \int e_1 \, d\mu + \int e_2 \, d\mu$
(positive Linearität)

(iii) $e_1 \leq e_2 \Longrightarrow \int e_1 \, d\mu \leq \int e_2 \, d\mu$
(Monotonie)

Theorem 4.13 (Levi; Satz von der monotonen Konvergenz)**:**
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum und* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine monoton wachsende Folge aus* $\overline{\mathcal{M}}^+$ *mit* $f = \lim f_n$. *Dann gilt* $\lim \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$.

Satz 4.14:
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum und* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge aus* $\overline{\mathcal{M}}^+$. *Dann gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu = \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu.$$

Beweis:
Mit $s \in \mathbb{N}$ ist $h_s := \sum_{n=1}^{s} f_n \in \overline{\mathcal{M}}^+$ mit $h_s \uparrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, d.h. $\lim_{s\to\infty} h_s = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$.
Also gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu &= \lim_{s\to\infty} \sum_{n=1}^{s} f_s \, d\mu = \lim_{s\to\infty} \int h_s \, d\mu \\ &\overset{\text{[Levi]}}{=} \int \lim_{s\to\infty} h_s \, d\mu = \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu. \end{aligned}$$

$\square$

Anwendung 4.15 (Cauchyscher Doppelreihensatz)**:**
Gegeben sei der Maßraum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ *mit* μ *dem* $\mathbb{N}$*-Zählmaß auf* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. *Offensichtlich besteht* $\overline{\mathcal{M}}^+$ *aus allen Funktionen* $f : \mathbb{N} \to [0, +\infty]$. *Für ein* $f \in \overline{\mathcal{M}}^+$ *gilt dann mit* $g_n := f(n) \cdot 1_{\{n\}}$ *offensichtlich* $g_n \in \overline{\mathcal{M}}^+$ *und* $g_n \uparrow \sum_{n=1}^{\infty} g_n = f$. *Mit Satz 4.14 also*

$$\int f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n \, d\mu = f(n) \int 1_{\{n\}} \, d\mu \overset{[\mu \text{ das } \mathbb{N}\text{-Zählmaß}]}{=} f(n).$$

Für jede Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $f_n : \mathbb{N} \to [0, \infty]$ *und* $a_{nk} := f_n(k)$ *gilt* *also nach Satz 4.14 der* **Cauchysche Doppelreihensatz:**

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\right).$$

Damit ist ein nicht-trivialer Satz der Analysis mit Integration in einigen Zeilen bewiesen worden.

Definition 4.16:
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-$\overline{\mathcal{B}}$-messbar.

(i) *heißt* **(μ-)quasiintegrierbar** *:* $\iff$
$\int f^+ \, d\mu < \infty$ *oder* $\int f^- \, d\mu < \infty$.

(ii) *Das* ***(μ-)Integral von*** f *ist alsdann definiert als*

$$\int f \, d\mu := \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu.$$

(iii) *Gelten* $\int f^+ \, d\mu < \infty$ *und* $\int f^- \, d\mu < \infty$, *so heißt* f **(μ-)integrierbar**.

(Anstatt μ-integrierbar wird gelegentlich **Lebesgue-integrierbar bzgl.** μ *geschrieben. Diese Schreibweise wird nur in Abschnitt 6 benutzt, um die Redeweise, dass das Lebesgue-Stieltjes-Integral eine Konkretisierung des Lebesgue-Integrals sei, verständlich zu machen.)*

(iv) *Mit* $\overline{\mathcal{M}}$ *(oder auch* $\overline{\mathcal{M}}(\mathcal{A})$ *bzw.* $\overline{\mathcal{M}}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$*) wird die Menge der messbaren Funktionen* $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$ *bezeichnet.*

(v) *Mit* $\overline{\mathcal{L}}^1$ *(oder auch* $\overline{\mathcal{L}}^1(\mathcal{A})$ *bzw.* $\overline{\mathcal{L}}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$*) wird die Menge der ($\mu$-)integrierbaren Funktionen* $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *bezeichnet.*

(vi) *Mit* $\overline{\mathcal{L}}_q^1$ *(oder auch* $\overline{\mathcal{L}}_q^1(\mu)$ *bzw.* $\overline{\mathcal{L}}_q^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$*) wird die Menge der ($\mu$-)quasiintegrierbaren Funktionen* $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *bezeichnet.*

(vii) *Sind die Funktionen* $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *aus (iv), (v) und (vi) reellwertig, al-*

so $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar, so wird $\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{A})$, $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{L}^1(\Omega,\mathcal{A},\mu)$, $\mathcal{L}^1(\mu)$, $\mathcal{L}^1$, $\mathcal{L}^1_q(\Omega,\mathcal{A},\mu)$, $\mathcal{L}^1_q(\mu)$, $\mathcal{L}^1_q$ anstatt $\overline{\mathcal{M}}(\Omega,\mathcal{A})$, $\overline{\mathcal{M}}(\mathcal{A})$, $\overline{\mathcal{M}}$, $\overline{\mathcal{L}}^1(\Omega,\mathcal{A},\mu)$, $\overline{\mathcal{L}}^1(\mu)$, $\overline{\mathcal{L}}^1$, $\overline{\mathcal{L}}^1_q(\Omega,\mathcal{A},\mu)$, $\overline{\mathcal{L}}^1_q(\mu)$, $\overline{\mathcal{L}}^1_q$ geschrieben.

Notiz 4.17:
Ist in Definition 4.16 f nicht-negativ, so stimmen die Integralbegriffe in Definition 4.16 (iii) und Definition 4.9 überein.

Notiz 4.18:
Es gelten folgende Inklusionsbeziehungen:

(1) $\mathcal{E} \subset \overline{\mathcal{M}}^+ \subset \overline{\mathcal{L}}^1_q \subset \overline{\mathcal{M}}$

(2) $\overline{\mathcal{L}}^1 \subset \overline{\mathcal{L}}^1_q$

(3) $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}^+ \subset \mathcal{L}^1_q \subset \mathcal{M}$

(4) $\mathcal{L}^1 \subset \mathcal{L}^1_q$

(5) $\mathcal{M}^+ \subset \overline{\mathcal{M}}^+$

(6) $\mathcal{M} \subset \overline{\mathcal{M}}$

(7) $\mathcal{L}^1_q \subset \overline{\mathcal{L}}^1_q$

(8) $\mathcal{L}^1 \subset \overline{\mathcal{L}}^1$

Definition 4.19:
Bei verschiedenen Anlässen ist es kommod, mehrere Integralschreibweisen zur Verfügung zu haben. In diesem Sinne haben folgende Schreibweisen äquivalente Bedeutung:

(i) $\int f\, d\mu$

(ii) $\int\limits_{\Omega} f\, d\mu$

(iii) $\int\limits_{\Omega} f(w)\, d\mu$

(iv) $\int\limits_\Omega f(w)\ d\mu(w)$

(v) $\int\limits_\Omega f\ d\mu(w)$.

Bemerkung 4.20:
*Ist $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, so wird $\int f\ dP$ in der Wahrscheinlichkeitstheorie als **Erwartungswert von** f bezeichnet.*

Definition 4.21:
*Das λ^n-Integral heißt **Lebesgue-Integral**. Anstatt $\int f\ d\lambda^n$ wird häufig auch $\int f(x)\ d\lambda^n(x)$ oder $\int f(x)\ dx$ geschrieben.*

Bemerkung 4.22:
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in \overline{\mathcal{M}}$. Dann gilt

$$f \in \overline{\mathcal{L}}^1 \quad \Leftrightarrow \quad |f| \in \overline{\mathcal{L}}^1.$$

Notiz 4.23:
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in \overline{\mathcal{M}}$. Dann gilt

$$f \in \overline{\mathcal{L}}^1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists g \in \overline{\mathcal{L}}^1 : |f| \leq g.$$

Lemma 4.24:
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in \overline{\mathcal{M}}$. Dann gilt

$$f \in \overline{\mathcal{L}}^1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists f_1, f_2 \in \overline{\mathcal{L}}^1 \cap \overline{\mathcal{M}}^+ : f = f_1 - f_2.$$

In diesem Fall gilt

$$\int f\ d\mu = \int f_1\ d\mu - \int f_2\ d\mu.$$

Notiz 4.25:
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann gelten

(i) Mit $f \in \overline{\mathcal{L}}^1$ *und* $c \in \mathbb{R}$ *ist auch* $cf \in \overline{\mathcal{L}}^1$ *und es gilt*

$$\int cf \, d\mu = c \int f \, d\mu$$

(Homogenität)

(ii) Sind $f_1, f_2 \in \overline{\mathcal{L}}^1$ *und ist* $f_1 + f_2$ *auf ganz* Ω *definiert, dann gilt*

$$\int (f_1 + f_2) \, d\mu = \int f_1 \, d\mu + \int f_2 \, d\mu$$

(Additivität)

Notiz 4.26:
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum. Dann gelten*

(i) Ist $f \in \overline{\mathcal{L}}_q^1$ *und* $c \in \mathbb{R}$*, dann ist auch* $cf \in \overline{\mathcal{L}}_q^1$ *und es gilt*

$$\int cf \, d\mu = c \int f \, d\mu$$

(Homogenität)

(ii) Sind $f_1, f_2 \in \overline{\mathcal{L}}_q^1$ *und* $f_1 + f_2$ *sowie* $\int f_1 \, d\mu + \int f_2 \, d\mu$ *wohldefiniert. so gilt*

$$\int (f_1 + f_2) \, d\mu = \int f_1 \, d\mu + \int f_2 \, d\mu$$

(Additivität)

Notiz 4.27:
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum. Dann ist* $\mathcal{L}^1$ *ein* $\mathbb{R}$*-Vektorraum.*

Bemerkung 4.28:
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum und* $f, g \in \overline{\mathcal{L}}_q^1$*. Dann gelten*

(i) $f \leq g \quad \Rightarrow \quad \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$ *(Monotonie)*

(ii) $\left|\int f\,d\mu\right| \leq \int |f|\,d\mu$.

Notiz 4.29:
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum und* $f \in \overline{\mathcal{L}}_q^1$. *Dann gilt:*

$$f \cdot 1_S \in \overline{\mathcal{L}}_q^1 \qquad (\forall S \in \mathcal{A}).$$

Notiz 4.29 rechtfertigt folgende Definition.

Definition 4.30:
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $f \in \overline{\mathcal{M}}$ *sowie* $S \in \mathcal{A}$. *Ist* $f \cdot 1_S \in \overline{\mathcal{L}}_q^1$, *so wird*

$$\int_S f\,d\mu := \int f \cdot 1_S\,d\mu$$

das μ***-Integral von*** f *über* S *genannt.*

Notiz 4.31:
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum,* $f \in \overline{\mathcal{L}}_q^1$ *sowie* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ein Mengensystem paarweise disjunkter Mengen aus* $\mathcal{A}$. *Dann gilt:*

$$\int_{\sum_{n=1}^{\infty} S_n} f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{S_n} f\,d\mu.$$

Definition 4.32:
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum. Eine Menge* $N \in \mathcal{A}$ *mit* $\mu(N) = 0$ *heißt eine* ***(***μ***-)Nullmenge****.*

Beispiel 4.33:

(i) Die Sphären $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ *sind* λ^{n+1}*-Nullmengen* $(\forall n \in \mathbb{N})$.

(ii) Der Torus $S^1 \times S^1$ *ist eine* λ^4*-Nullmenge.*

(iii) *Alle Hyperebenen des* $\mathbb{R}^n$ *sind* λ^n*-Nullmengen.*

Definition 4.34:
Seien $(\Omega.\mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum und* E *eine für alle* $\omega \in \Omega$ *erklärte Eigenschaft (z.B. punktweise Konvergenz einer Funktionenfolge).* E ***besteht (*μ*-) fast überall*** *(kurz:* E ***(*μ*-) f.ü.****)* :$\Leftrightarrow$

$\exists N \in \mathcal{A} : \mu(N) = 0$ *und* $E(\omega)$ *gilt für alle* $\omega \in \Omega - N$.

Satz 4.35:
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum und* $f \in \overline{\mathcal{M}}^+$*. Dann gilt:*

$$\int f \, d\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0 \ \ \mu\text{-f.ü.}$$

Notiz 4.36:
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum,* N *eine* μ*-Nullmenge und* $f \in \overline{\mathcal{M}}$*. Dann gelten:*

(i) $1_N \cdot f \in \overline{\mathcal{L}}^1$,

(ii) $\int\limits_N f \, d\mu = 0$.

Satz 4.37:
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum sowie* $f_1, f_2 \in \overline{\mathcal{M}}$ *mit* $f_1 = f_2$ μ*-f.ü. Dann gelten:*

(1) $f_1 \in \overline{\mathcal{L}}_q^1 \;\Leftrightarrow\; f_2 \in \overline{\mathcal{L}}_q^1$ *und in diesem Fall gilt* $\int f_1 \, d\mu = \int f_2 \, d\mu$.

(2) $f_1 \in \overline{\mathcal{L}}^1 \;\Leftrightarrow\; f_2 \in \overline{\mathcal{L}}^1$ *und in diesem Fall gilt* $\int f_1 \, d\mu = \int f_2 \, d\mu$.

Lemma 4.38:
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum und* $f_1, f_2 \in \overline{\mathcal{L}}_q^1$ *mit* $f_1 \leq f_2$ μ*-f.ü. Dann gilt*

$$\int f_1 \, d\mu \leq \int f_2 \, d\mu.$$

Satz 4.39:
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, μ σ-endlich und $f_1, f_2 \in \overline{\mathcal{L}}_q^1$. Dann gelten

(i) $\int\limits_S f_1 \, d\mu \leq \int\limits_S f_2 \, d\mu \;\; (\forall S \in \mathcal{A}) \quad \Rightarrow \quad f_1 \leq f_2$ *μ-f.ü.,*

(ii) $\int\limits_S f_1 \, d\mu = \int\limits_S f_2 \, d\mu \;\; (\forall S \in \mathcal{A}) \quad \Rightarrow \quad f_1 = f_2$ *μ-f.ü..*

Definition 4.40:
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $M \subset \Omega$ und $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion.

*(1) f heißt **(μ)-fast überall definiert** (kurz: **(μ)-f.ü. definiert**), wenn $\Omega - M$ Teilmenge einer μ-Nullmenge N ist.*

*(2) Existiert ein $g \in \overline{\mathcal{M}}$ mit $g = f$ μ-f.ü., so heißt f **(μ)-fast überall messbar** (kurz: **(μ)-f.ü. messbar**).*

Definition 4.41:
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und f μ-f.ü. messbar:

*(1) f heißt **(μ)-quasiintegrierbar** $:\Leftrightarrow$ $\exists g \in \overline{\mathcal{L}}_q^1$ mit $g = f$ μ-f.ü.*

*(2) f heißt **(μ)-integrierbar** $:\Leftrightarrow$ $\exists g \in \overline{\mathcal{L}}^1$ mit $g = f$ μ-f.ü.*

*In beiden Fällen heißt dann die erweitert-reelle Zahl $\int f \, d\mu := \int g \, d\mu$ das **(μ-)Integral von f**.*

Bemerkung 4.42:
Es ist klar, dass alle bisherigen Aussagen zur Integrationstheorie ihre Gültigkeit behalten, wenn die in den jeweiligen Aussagen auftretenden Funktionen nur μ-f.ü. definiert bzw. nur μ-f.ü. messbar sind.

Die Bedeutung der Bildmaße in der Wahrscheinlichkeitstheorie wurde bereits in Abschnitt 3 erwähnt. Bezüglich Bildmaßen zeigt die Integration ein sehr angenehmes Verhalten.

Satz 4.43:
Seien $(\Omega.\mathcal{A})$, $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{A}})$ Messräume sowie $S : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{A}})$ und $f : (\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{A}}) \to$

$(\mathbb{R}, \overline{\mathcal{B}})$ *seien messbar. Weiter seien* μ *ein Maß auf* $\mathcal{A}$ *und* μ_S *das Bildmaß von* μ *auf* $\widetilde{\mathcal{A}}$*. Dann gelten:*

(i) $f \circ S \in \overline{\mathcal{L}}_q^1(\mu) \quad \Leftrightarrow \quad f \in \overline{\mathcal{L}}_q^1(\mu_S)$,

(ii) $f \circ S \in \overline{\mathcal{L}}^1(\mu) \quad \Leftrightarrow \quad f \in \overline{\mathcal{L}}^1(\mu_S)$.

(iii) In beiden Fällen gilt

$$\int_{\Omega} f \circ S \, d\mu = \int_{\widetilde{\Omega}} f \, d\mu_S.$$

Satz 4.44:
Es seien die Voraussetzungen von Satz 4.43 gegeben. Dann gelten für alle $M \in \widetilde{\mathcal{A}}$*:*

(i) Ist $\int\limits_{S^{-1}(M)} f \circ S \, d\mu$ *definiert, so auch* $\int\limits_{M} f \, d\mu_S$ *(und umgekehrt).*

(ii) Existiert eines der Integrale aus (i), so gilt auch

$$\int\limits_{S^{-1}(M)} f \circ S \, d\mu = \int\limits_{M} f \, d\mu_S.$$

Mit dem Satz von Levi wurde bereits ein wichtiger Konvergenzsatz vorgestellt. Es folgen weitere Konvergenzsätze, darunter der Hauptsatz der Konvergenztheorie von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz.

Satz 4.45 (Lemma von Fatou)**:**
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum und* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Funktionenfolge aus* $\overline{\mathcal{M}}$*. Existiert eine Funktion* $f \in \overline{\mathcal{L}}^1(\mu)$ *mit* $f \leq f_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$*, so sind alle* f_n *sowie* $\liminf f_n$ *aus* $\overline{\mathcal{L}}_q^1$ *und es gilt*

$$\int \liminf f_n \, d\mu \leq \liminf \int f_n \, d\mu.$$

Korollar 4.46 (Dual zum Lemma von Fatou)**:**
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum und* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Funktionenfolge aus* $\overline{\mathcal{M}}$*. Existiert eine Funktion* $f \in \overline{\mathcal{L}}^1(\mu)$ *mit* $f \geq f_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$*, so sind alle* f_n *sowie* $\limsup f_n$ *aus* $\overline{\mathcal{L}}^1_q$ *und es gilt*

$$\int \limsup f_n \, d\mu \geq \limsup \int f_n \, d\mu.$$

Neben seiner eigenständigen Bedeutung ist das Lemma von Fatou das wichtigste beweistechnische Hilfsmittel im nachstehenden Hauptsatz der Konvergenztheorie.

Theorem 4.47 (Lebesgue; Satz von der majorisierten Konvergenz)**:**
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum und* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine* μ*-f.ü. auf* Ω *konvergente Folge aus* $\overline{\mathcal{M}}$*. Existiert eine Funktion* $g \in \overline{\mathcal{L}}^1(\mu)$ *mit* $|f_n| \leq g$ μ*-f.ü.* $(\forall n \in \mathbb{N})$*, so gilt* $f_n \in \overline{\mathcal{L}}^1(\mu)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ *und es existiert ein* $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$*, so dass* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ*-f.ü. gegen* f *konvergiert, und es gilt*

$$\lim \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Notiz 4.48:
Da Funktionenreihen spezielle Funktionenfolgen sind, gilt der Satz von Lebesgue natürlich wörtlich auch für Funktionenreihen.

Beispiel 4.49:
Sei P *ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf* $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ *und* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definiert durch* $t \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}} \arctan(xt) \, dP(x)$.

Es wird gezeigt, dass h *stetig auf* $\mathbb{R}$ *ist.*

Seien hierzu $t_0 \in \mathbb{R}$ *und* $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge aus* $\mathbb{R}$ *mit* $t_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} t_0$*. Wegen der Stetigkeit von* $\arctan$ *folgt* $\arctan(t_k x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \arctan(t_0 x)$.

Für die Funktionenfolge $(H_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$H_k(x) := \arctan(t_k x) \quad (\forall k \in \mathbb{N}_0, \forall x \in \mathbb{R})$$

gilt

$$|H_k(x)| \le \frac{\pi}{2} \cdot 1_{\mathbb{R}}.$$

Wegen $P(\mathbb{R}) = 1$ ist die Majorante $\frac{\pi}{2} \cdot 1_{\mathbb{R}}$ P-integrierbar und mittels des Satzes von Lebesgue folgt

$$\lim_{k\to\infty} h(t_k) = \lim_{k\to\infty} \int H_k \, dP = \int H_0 \, dP = h(t_0),$$

d.h. die Stetigkeit von h in t_0.

Die folgenden vier Sätze benutzen den Satz von der majorisierten Konvergenz als wesentliches Beweishilfsmittel.

Satz 4.50:
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit endlichem Maß und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge mit $f_n \in \overline{\mathcal{L}}^1(\mu)$, die gleichmäßig gegen eine reelle Funktion f konvergiert. Dann gelten

(1) $f \in \overline{\mathcal{L}}^1(\mu)$,

(2) $\lim \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$.

Beweis:
Es gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \, \forall n \ge n(\varepsilon) : |f_n - f| < \varepsilon. \tag{*}$$

Insbesondere gilt auch $\lim f_n = f$. Wegen $f_n \in \overline{\mathcal{L}}^1(\mu)$ sind alle $f_n, f = \lim f_n$ sowie alle $f_n - f$ messbar.

Wegen (*) gilt

$$\forall n \geq n(\varepsilon) : |f| < |f_n| + \varepsilon.$$

Da μ endlich ist, folgt $\varepsilon + |f_n| \in \overline{\mathcal{L}}^1(\mu)$, woraus sich (1) ergibt. Folglich sind auch alle $f_n - f \in \overline{\mathcal{L}}^1(\mu)$.

Wegen (*) und des Theorems von Lebesgue erhält man

$$\lim \int (f_n - f)\, d\mu = \int \lim(f_n - f)\, d\mu = 0 \qquad (**)$$

und weiter

$$\begin{aligned} \lim \int f_n\, d\mu - \int f\, d\mu &= \lim(\int f_n\, d\mu - \int f\, d\mu) \\ &= \lim \int (f_n - f)\, d\mu \overset{[**]}{=} 0 \end{aligned}$$

und somit die Behauptung (2). ☐

In der Riemannschen Integrationstheorie ist die Vertauschung von Integration und Limiten gleichmäßig konvergenter Funktionenfolgen der einzige Konvergenzsatz von Relevanz. Hier ist der entsprechende Satz nur eine triviale Folgerung des Lebesgueschen Konvergenzsatzes.

Der folgende Satz gilt in der Riemannschen Theorie nur für C^1-Funktionen. (Beachte, dass mit f differenzierbar, f' i.A. nicht Riemann-integrierbar ist.)

Satz 4.51:
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar und f' beschränkt (aber nicht notwendig stetig!). Dann ist f' $\lambda_{|[a,b]\cap\mathcal{B}}$-integrierbar und es gilt (mit $\tilde{\lambda} := \lambda_{|[a,b]\cap\mathcal{B}}$)

$$\int_a^b f'\, d\tilde{\lambda} = f(b) - f(a).$$

Im Folgenden wird für Einschränkungen von λ^n auf Spur-σ-Algebren kurzer Hand auch wieder λ^n geschrieben. Missverständnisse können nicht entstehen.

Satz 4.52 (Stetigkeit von Parameterintegralen)**:**
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, (M, d) ein metrischer Raum und $f : M \times \Omega \to \mathbb{R}$ genüge den folgenden Bedingungen:

(1) $f(t, \cdot) \in \mathcal{L}^1 \quad (\forall t \in M)$.

(2) In einem $t_0 \in M$ sei $f(\cdot, \omega) : M \to \mathbb{R}$ stetig für μ-fast alle $\omega \in \Omega$.

(3) Zu dem t_0 aus (2) gibt es eine Umgebung V von t_0 und ein $F \in \overline{\mathcal{M}}^+ \cap \mathcal{L}^1$, so dass für alle $t \in V$ gilt

$$|f(t, \cdot)| \leq F \quad \mu\text{-f.ü.}$$

Dann ist die Funktion $G : M \to \mathbb{R}$ mit

$$G(t) := \int f(t, \omega) \, d\mu(\omega) \qquad (\forall t \in M)$$

stetig in t_0.

Satz 4.53 (Differentiation unter dem Integralzeichen bei Parameterintegralen)**:**
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : J \times \Omega \to \mathbb{R}$ genüge den folgenden Bedingungen:

(1) $f(t, \cdot) \in \mathcal{L}^1 \quad (\forall t \in J)$.

(2) $\frac{\partial f}{\partial t}(t_0, \omega)$ *existiert für alle $\omega \in \Omega$.*

(3) Es gibt eine Umgebung V von t_0 und ein $F \in \mathcal{M}^+ \cap \mathcal{L}^1$, so dass für alle $t \in V \cap J$ mit $t \neq t_0$ gilt

$$\left| \frac{f(t, \omega) - f(t_0, \omega)}{t - t_0} \right| \leq F(\omega) \quad \mu\text{-f.ü.}$$

Dann ist die Funktion $G : J \to \mathbb{R}$ mit

$$G(t) := \int f(t,\omega)\, d\mu(\omega) \qquad (\forall t \in J)$$

in t_0 differenzierbar, $\frac{\partial f}{\partial t}(t_0,\cdot)$ ist μ-integrierbar, und es gilt

$$G'(t_0) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(t_0,\omega)\, d\mu(\omega).$$

Mittels sog. Dichten lassen sich aus gegebenen Maßen durch Integration neue Maße bilden. Für die Wahrscheinlichkeitstheorie von besonderem Interesse ist der Fall, dass diese neuen Maße Wahrscheinlichkeitsmaße sind.

Satz und Definition 4.54:
Seien $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ ein Maßraum und $f \in \overline{\mathcal{M}}^+$. Dann wird durch

$$\nu(A) := \int_A f\, d\mu \qquad (\forall A \in \mathcal{A})$$

ein Maß auf $\mathcal{A}$ definiert.

Dafür schreibt man kurz $\nu = f\mu$.

*f heißt eine μ-**Dichte (von ν)**. λ^n-Dichten werden auch Lebesgue-Dichten genannt.*

Satz 4.55:
Seien $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ ein Maßraum, $f \in \overline{\mathcal{M}}^+$ und $\nu = f\mu$. Dann gilt für jedes $g \in \overline{\mathcal{M}}^+$:

$$\int g\, d\nu = \int fg\, d\mu.$$

Notiz 4.56:
Seien $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ ein Maßraum, $f,g \in \overline{\mathcal{M}}^+$ und $\nu = f\mu$ und $\eta = g\nu$. Dann gilt $g(f\mu) = (gf)\mu$.

Lemma 4.57:
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f, g \in \overline{\mathcal{M}}^+$. Dann gelten

(i) $f = g$ *μ-f.ü.* $\Rightarrow f\mu = g\mu$.

(ii) Ist f oder g μ-integrierbar, so gilt in (i) auch die Umkehrung.

Notiz 4.58:
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $\mathcal{K}$ ein Halbring über Ω mit $\sigma(\mathcal{K}) = \mathcal{A}$ sowie ν ein σ-endliches Maß auf $\mathcal{K}$, so folgt aus $\nu(S) = \int\limits_S f \, d\mu$ $(\forall S \in \mathcal{K})$ bereits $\nu = f\mu$.

Beispiel 4.59:
Durch

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \qquad (\forall x \in \mathbb{R})$$

wird eine λ-Dichte definiert. Das hierdurch induzierte Wahrscheinlichkeitsmaß $N(0,1)$ auf $\mathcal{B}$ mit

$$N(0,1)(S) = \int\limits_S f(x) \, d\lambda(x) \qquad (\forall S \in \mathcal{I}^1)$$

*heißt die **Normalverteilung mit dem Erwartungswert** 0 **und der Varianz** 1. Man spricht auch von der **standardisierten Normalverteilung**.*

Es wird nun ein bereits in Abschnitt 2 angesprochener Sachverhalt präzisiert.

Ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ heißt diskret, wenn Ω abzählbar und $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ gilt. Ist w die Wahrscheinlichkeitsfunktion von $\mathcal{P}$, so gilt

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} w(\omega) \qquad (\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)).$$

Es gilt dann

Satz 4.60:
Sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Dann ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion w von P eine Dichte von P bzgl. des Ω-Zählmaßes auf $P(\Omega)$.

Definition 4.61:
*Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und ν ein weiteres Maß auf $\mathcal{A}$. ν heißt μ-**stetig**, wenn jede μ-Nullmenge auch eine ν-Nullmenge ist. Man schreibt hierfür kurz*

$$\nu \ll \mu.$$

*Ein Maß ν auf $\mathcal{B}^n$ heißt **absolut stetig**, wenn $\nu \ll \lambda^n$ gilt.*

Im Falle eines endlichen Maßes hat der Begriff μ-Stetigkeit eine formale Ähnlichkeit mit dem ε-δ-Kriterium der Stetigkeit.

Satz 4.62:
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und ν ein endliches Maß auf $\mathcal{A}$. Dann gilt:

$$\nu \ll \mu \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 \; \forall S \in \mathcal{A} : \mu(S) \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow \nu(S) \leq \varepsilon.$$

Theorem 4.63 (Radon-Nikodym)**:**
Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum, μ, ν Maße auf $\mathcal{A}$ und μ σ-endlich. Dann sind äquivalent

(i) ν *besitzt eine* μ*-Dichte*

(ii) $\nu \ll \mu$.

Dieses Theorem besitzt bedeutende Anwendungen in der Wahrscheinlichkeitstheorie und in der Mathematischen Statistik; exemplarisch sei erwähnt, dass sich mittels ihm die Existenz bedingter Erwartungen nachweisen lässt.

Aufgrund der Bedeutung der Bildmaße in der Wahrscheinlichkeitstheorie liegt es auf der Hand nach der Dichte eines Bildmaßes zu fragen, insofern das ausgängliche Wahrscheinlichkeitsmaß eine Dichte besitzt. Unter gewissen Voraussetzungen gestattet der folgende Satz eine Beantwortung dieser Frage:

Satz 4.64 (Transformationssatz für Dichten)**:**
Seien P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{B}$ mit $P = f\lambda^n$ und $g = (g_1, \ldots, g_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit

(1) $\det J_g(x) := \det\left(\frac{\partial(g_1,\ldots,g_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}\right) \neq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n)$

(2) g ist injektiv.

Dann gilt: $g^{-1} : g(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ ist messbar und eine Dichte G des Bildmaßes P_g wird gegeben durch

$$G(t) = \begin{cases} \frac{f(g^{-1}(t))}{|J_g(g^{-1}(t))|}, & \text{falls } t \in g(\mathbb{R}^n) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Beispiel 4.65:
Seien $(a, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Anwendung von Satz 4.64 auf $g(x) := \sigma x + a$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ liefert als Dichte des Bildmaßes $N(a, \sigma^2) := N(0, 1)_g$ die λ-Dichte

$$G(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad (\forall t \in \mathbb{R})$$

Das Wahrscheinlichkeitsmaß $N(a, \sigma^2)$ heißt ***Normalverteilung mit Erwartungswert a und Varianz σ^2****.*

Die Normalverteilungen $N(a, \sigma^2)$ gehören zu den wichtigsten Wahrscheinlichkeitsmaßen in der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Der Rest dieses Abschnitts behandelt nur noch Aussagen, die spezifisch auf das Lebesgue-Integral ausgerichtet sind. Neben dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung handelt es sich um Rechenregeln für das Lebesgue-Integral.

Definition 4.66:
*$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt **absolut stetig** :$\Leftrightarrow$*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 \; \forall n \in \mathbb{N} \; \forall i \in \mathbb{N}_n \; \forall [a_i, b_i] \subset [a,b] :$$
$$([a_i, b_i] \cap [a_j, b_j] = \varnothing \text{ für } i \neq j \text{ und } \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i| < \delta(\varepsilon))$$
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |f(a_i) - f(b_i)| < \varepsilon$$

Notiz 4.67:
Für $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gelten

(i) f absolut stetig $\Rightarrow$ f stetig,

(ii) f absolut stetig $\Rightarrow$ f ist λ-f.ü. differenzierbar,

(iii) f Lipschitz-stetig $\Rightarrow$ f absolut stetig,

(iv) f stetig differenzierbar $\Rightarrow$ f absolut stetig.

Lemma 4.68 (Vitali)**:**
Jede absolut stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f' = 0$ λ-f.ü. ist konstant.

Theorem 4.69 (Lebesgue-Vitali; Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für das Lebesgue-Integral)**:**
(1) Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar, so ist

$$F(x) := \int_a^x f(s)\, ds \qquad (\forall x \in [a,b])$$

absolut stetig mit $F' = f$ λ-f.ü.

(2) Ist $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ absolut stetig und setzt man $F'(x) := 0$ in den Punkten x aus $[a,b]$, in denen F nicht differenzierbar ist, so ist F' Lebesgue-

integrierbar mit

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(s)\, ds \qquad (\forall x \in [a,b])$$

Lemma 4.70 (Partielle Integration)**:**
Sind $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ absolut stetig, so gilt

$$\int_a^b f'(x)g(x)\, dx = fg\big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\, dx$$

(Dabei sind f' und g' – falls nötig – wie in Theorem 4.69 (2) aufzufassen.)

Lemma 4.71 (Substitutionsregel)**:**
Ist $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und absolut stetig sowie $f \in \mathcal{L}^1([\varphi(\alpha), \varphi(\beta)])$, so gilt

(i) $(f \circ \varphi) \cdot \varphi' \in \mathcal{L}^1([\alpha, \beta])$ *und*

(ii) $\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\, dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s)\, ds.$

(Dabei ist φ' – falls nötig – wie in Theorem 4.69 (2) aufzufassen.)

Theorem 4.72 (Transformationssatz für das Lebesgue-Integral)**:**
Seien $\varnothing \neq M \subset \mathbb{R}^n$, M offen, $T : M \to \mathbb{R}^n$ injektiv und stetig differenzierbar sowie $\det J_T(v) \neq 0$ für alle $v \in M$. Weiter seien $U \subset \mathbb{R}^n$ messbar mit $\varnothing \neq U \subset M$ und $f : T(U) \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar. Dann ist auch die Funktion

$$T^*f : U \to \mathbb{R}; u \mapsto (T^*f)(u) := f(T(u)) \cdot |\det J_T(u)|$$

Lebesgue-integrierbar und es gilt die Transformationsformel

$$\int_{T(U)} f(x)\, d\lambda^n(x) = \int_U f(T(u)) \cdot |\det J_T(u)|\, d\lambda^n(u).$$

Auf die Fubinischen Sätze wird im Rahmen der allgemeinen Integrationstheorie in Abschnitt 5 eingegangen.

Anwendung 4.73 (Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^p$)**:**
Häufige Anwendung im Transformationssatz finden die ***Polarkoordinaten im*** $\mathbb{R}^p$*, die wie folgt definiert sind.*

Es seien $p \geq 2$, $M := (0,\infty)\times(0,\pi)^{p-2}\times(0,2\pi)$[1] *und für* $(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{p-1})^t \in M$ *sei*

$$T(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{p-1}) := \begin{pmatrix} r & \cos\varphi_1 & & & & & \\ r & \sin\varphi_1 & \cos\varphi_2 & & & & \\ \vdots & & & \ddots & & & \\ r & \sin\varphi_1 & \sin\varphi_2 & \ldots & \sin\varphi_{k-1} & \cos\varphi_k & \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ r & \sin\varphi_1 & \sin\varphi_2 & \ldots & & \sin\varphi_{p-2} & \cos\varphi_{p-1} \\ r & \sin\varphi_1 & \sin\varphi_2 & \ldots & & \sin\varphi_{p-2} & \sin\varphi_{p-1} \end{pmatrix}$$

Es gelten dann: T *vermittelt einen* C^1*-Diffeomorphismus* $M \to \mathbb{R}^p - N$ *mit einer* λ^p*-Nullmenge* N *sowie*

$$\det J_T(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{p-1}) = r^{p-1}\sin^{p-2}\varphi_1 \cdot \sin^{p-3}\varphi_2 \cdot \ldots \cdot \sin^2\varphi_{p-3} \cdot \sin\varphi_{p-2} > 0$$

und somit nach dem Transformationssatz für alle $f \in \mathcal{M}^+ \cap \mathcal{L}^1$*:*

[1] Im Falle $p = 2$ gilt $M = (0,\infty) \times (0, 2\pi)$

$\int\limits_{\mathbb{R}^p} f\, d\lambda^p =$ **(i)**

$\int\limits_{M} f(T(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{p-1}))\cdot r^{p-1}\sin^{p-2}\varphi_1\cdot\ldots\cdot\sin^2\varphi_{p-3}\cdot\sin\varphi_{p-2}\, d\lambda^p(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{p-1}).$

Aus Anwendung 4.73 (i) folgt sofort

Beispiel 4.74:
Sei $\mathcal{B}_r(0) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 \leq r\}$ *die Kreisscheibe um* 0 *mit Radius* $r > 0$. *Für den Flächeninhalt* $\lambda^2(\mathcal{B}_r(0))$ *gilt*

$$\lambda^2(\mathcal{B}_r(0)) = 2\pi r.$$

5 Produktmaße, Unendliche Produkte von Meßräumen

Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ Maßräume. Eine natürliche Fragestellung ist, ob auf dem Produktmessraum $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ ein Maß μ existiert mit

$$\mu(S_1 \times S_2) = \mu_1(S_1) \cdot \mu_2(S_2) \qquad (\forall (S_1 \times S_2) \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2).$$

Unter relativ schwachen Bedingungen an die Maße μ_1, μ_2 kann diese Frage positiv beschieden werden.

Definition 5.1 (Mengenschnitte)**:**
Seien $A \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ und $\overline{w}_1 \in \Omega_1$, so heißt

$$A_{\overline{w}_1} := \{w_2 \in \Omega_2 \mid (\overline{w}_1, w_2) \in A\}$$

*der $\overline{w}_1$**-Schnitt von A**. Ist $\overline{w}_2 \in \Omega_2$, so heißt*

$$A_{\overline{w}_2} := \{w_1 \in \Omega_1 \mid (w_2, \overline{w}_1) \in A\}$$

*der $\overline{w}_2$**-Schnitt von A**.*

Notiz 5.2:
Seien $A_1 \subset \Omega_1, A_2 \subset \Omega_2$ und für $j \in \{1,2\}$ seien $\overline{w}_j \in A_j$. Dann gelten

(i) $\varnothing_{\overline{w}_j} = \varnothing$,

(ii)

$$(A_1 \times A_2)_{\overline{w}_1} = \begin{cases} A_2, & \textit{falls } \overline{w}_1 \in A_1 \\ \varnothing, & \textit{sonst} \end{cases},$$

$$(A_2 \times A_1)_{\overline{w}_2} = \begin{cases} A_1, & \textit{falls } \overline{w}_2 \in A_2 \\ \varnothing, & \textit{sonst} \end{cases},$$

(iii)
$$(\Omega_1 \times \Omega_2)_{\overline{w}_1} = \Omega_2,$$
$$(\Omega_1 \times \Omega_2)_{\overline{w}_2} = \Omega_1,$$

Notiz 5.3:
Seien A, B, A_n $(n \in \mathbb{N})$ Teilmengen von $\Omega_1 \times \Omega_2$ und für $j \in \{1,2\}$ seien $\overline{w}_j \in \Omega_j$. Dann gelten:

(i) $\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)_{\overline{w}_j} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (A_n)_{\overline{w}_j}$

(ii) $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)_{\overline{w}_j} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n)_{\overline{w}_j}$

(iii) $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)_{\overline{w}_j} = \sum_{n\in\mathbb{N}} (A_n)_{\overline{w}_j}$,
falls die Mengen A_n paarweise disjunkt sind.

(iv) $(A - B)_{\overline{w}_j} = A_{\overline{w}_j} - B_{\overline{w}_j}$

(v) $A \subset B \Rightarrow A_{\overline{w}_j} \subset B_{\overline{w}_j}$

(vi) $A_n \uparrow A \Rightarrow (A_n)_{\overline{w}_j} \uparrow A_{\overline{w}_j}$

(vii) $A_n \downarrow A \Rightarrow (A_n)_{\overline{w}_j} \downarrow A_{\overline{w}_j}$

Bemerkung 5.4:
Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ Messräume. Für alle $(\overline{w}_1, \overline{w}_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ gilt dann:

$$A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \Rightarrow A_{\overline{w}_1} \in \mathcal{A}_2 \quad \textit{und} \quad A_{\overline{w}_2} \in \mathcal{A}_1.$$

Definition 5.5 (Funktionenschnitte)**:**
Seien $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion und $(\overline{w}_1, \overline{w}_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2$.

*(i) Der $\overline{w}_1$-**Schnitt der Funktion** f ist definiert durch die Funktion $f_{\overline{w}_1} : \Omega_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $f_{\overline{w}_1}(w_2) := f(\overline{w}_1, w_2) \quad (\forall w_2 \in \Omega_2)$.*

*(ii) Der $\overline{w}_2$-**Schnitt der Funktion** f ist definiert durch die Funktion*

$$f_{\overline{w}_2} : \Omega_1 \to \overline{\mathbb{R}} \text{ mit } f_{\overline{w}_2}(w_1) := f(w_1, \overline{w}_2) \quad (\forall w_1 \in \Omega_1).$$

Notiz 5.6:
Seien $A \subset \Omega_1 \times \Omega_2, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, f_1, f_2$ sowie g_n $(n \in \mathbb{N})$ numerische Funktionen $\Omega_1 \times \Omega_2 \to \overline{\mathbb{R}}$. Weiter seien für $j \in \{1, 2\}$ $\overline{w}_j \in \Omega_j$. Dann gelten:

(i) $(1_A)_{\overline{w}_j} = 1_{(A_{\overline{w}_j})}$

(ii) $(a_1 f_1 + a_2 f_2)_{\overline{w}_j} = a_1 (f_1)_{\overline{w}_j} + a_2 (f_2)_{\overline{w}_j}$

(iii) $(\inf g_n)_{\overline{w}_j} = \inf (g_n)_{\overline{w}_j}$

(iv) $(\sup g_n)_{\overline{w}_j} = \sup (g_n)_{\overline{w}_j}$

Definition und Lemma 5.7:
Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), (\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ Maßräume und $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ der zugehörige Produktmessraum. Die Abbildungen $T_2 : \Omega_1 \times (\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \to \overline{\mathbb{R}}^+$ und $T_1 : \Omega_2 \times (\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \to \overline{\mathbb{R}}^+$ seien definiert durch

$$T_2(w_1, A) := \mu_2(A_{w_1}) \quad (\forall (w_1, A) \in \Omega_1 \times (\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2))$$

sowie

$$T_1(w_2, A) := \mu_1(A_{w_2}) \quad (\forall (w_2, A) \in \Omega_2 \times (\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2))$$

*Für jedes feste $\overline{w}_1 \in \Omega_1$ und jedes feste $\overline{w}_2 \in \Omega_2$ sind dann die Abbildungen $T_2(\overline{w}_1, \cdot) : \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \to \overline{\mathbb{R}}^+$ und $T_1(\overline{w}_2, \cdot) : \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \to \overline{\mathbb{R}}^+$ Maße auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Sie heißen die **von** μ_2 **bzw.** μ_1 **induzierten Schnittmaße auf** $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.*

Lemma 5.8:
Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), (\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ Maßräume mit σ-endlichen Maßen μ_1, μ_2 und $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ der zugehörige Produktmessraum. T_1, T_2 seien wie in Lemma 5.7definiert. Für festes $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ gelten dann

(i) $T_2(\cdot, A) : \Omega_1 \to \overline{\mathbb{R}}^+;\ w_1 \mapsto \mu_2(A_{w_1})$ *ist eine $\mathcal{A}_1$-messbare Funktion.*

(ii) $T_1(\cdot, A) : \Omega_2 \to \overline{\mathbb{R}}^+;\ w_2 \mapsto \mu_1(A_{w_2})$ *ist eine $\mathcal{A}_2$-messbare Funktion.*

Weiter gilt

(iii) $\int\limits_{\Omega_1} T_2(\cdot, A)\, d\mu_1 = \int\limits_{\Omega_2} T_1(\cdot, A)\, d\mu_2$,
was gleichbedeutend ist zu

(iv) $\int\limits_{\Omega_1} \mu_2(A_{w_1})\, d\mu_1 = \int\limits_{\Omega_2} \mu_1(A_{w_1})\, d\mu_2$.

Mittels des Lemmas folgt

Satz 5.9:
Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), (\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ *Maßräume mit* σ*-endlichen Maßen* μ_1, μ_2*. Dann gelten*

(i) Es gibt genau ein σ*-endliches Maß* μ *auf* $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ *derart dass*

$$\mu(S_1 \times S_2) = \mu_1(S_1) \cdot \mu_2(S_2) \qquad (\forall S_1 \in \mathcal{A}_1, \forall S_2 \in \mathcal{A}_2)$$

gilt.

(ii) Das Maß μ *aus (i) ist gegeben durch*

$$\begin{aligned} \mu(S) &= \int\limits_{\Omega_1} \mu_2(S_{w_1})\, d\mu_1(w_1) \\ &= \int\limits_{\Omega_2} \mu_1(S_{w_2})\, d\mu_2(w_2) \qquad (\forall S \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2). \end{aligned}$$

Durch Induktion kann man diese Aussage sofort auf n Maßräume verallgemeinern und erhält

Satz 5.10:
Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), \ldots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mu_n)$ *Maßräume mit* σ*-endlichen Maßen* $\mu_1, \ldots, \mu_n$*. Dann existiert genau ein* σ*-endliches Maß* μ *auf* $\bigotimes\limits_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i$*, so dass*

gilt

$$\mu(S_1 \times \cdots \times S_n) = \prod_{i=1}^{n} \mu_i(S_i) \qquad (\forall S_1 \times \cdots \times S_n \in \mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n).$$

*Das Maß μ wird dann als $\mu = \bigotimes_{i=1}^{n} \mu_i$ geschrieben und heißt das **Produktmaß** der Maße $\mu_1, \ldots, \mu_n$.*
*$\bigotimes_{i=1}^{n} (\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i) := \left(\bigtimes_{i=1}^{n} \Omega_i, \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i, \bigotimes_{i=1}^{n} \mu_i \right)$ heißt das **Produkt der Maßräume** $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$.*

Notiz 5.11:
Sind in Satz 5.10 die $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$ die μ_i Wahrscheinlichkeitsmaße, so ist auch $\bigotimes_{i=1}^{n} \mu_i$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Notiz 5.12:
Die Bildung des Produktmaßes ist assoziativ.
Daher wird statt $\bigotimes_{i=1}^{n} \mu_i$ auch $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ geschrieben.

Satz 5.13:
$\mathcal{B}^n = \mathcal{B} \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}$.

Satz 5.14:
$\lambda^n = \lambda \otimes \cdots \otimes \lambda$.

Theorem 5.15 (1. Fubinischer Satz)**:**
Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), (\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ Maßräume mit σ-endlichen Maßen μ_1, μ_2 und $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \overline{\mathbb{R}}^+$ sei $(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$-$\overline{\mathcal{B}}$-messbar. Dann gelten

(i) Die Funktion $\Omega_1 \ni w_1 \mapsto \int_{\Omega_2} f_{w_1} \, d\mu_2$ ist $\mathcal{A}_1$-messbar.

(ii) Die Funktion $\Omega_2 \ni w_2 \mapsto \int_{\Omega_1} f_{w_2} \, d\mu_1$ ist $\mathcal{A}_2$-messbar.

(iii) $\int\limits_{\Omega_1\times\Omega_2} f\,d(\mu_1\otimes\mu_2) = \int\limits_{\Omega_1}(\int\limits_{\Omega_2} f_{w_1}\,d\mu_2)\,d\mu_1 = \int\limits_{\Omega_2}(\int\limits_{\Omega_1} f_{w_2}\,d\mu_1)\,d\mu_2.$

Der 1. Fubinische Satz wird in der Literatur auch als ***Satz von Tonelli*** *bezeichnet.*

Satz 5.16:

Gilt im 1. Fubinischen Satz für die dort betrachtete $\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2$-$\overline{\mathcal{B}}$-messbare Funktion $f:\Omega_1\times\Omega_2\to\overline{\mathbb{R}}^+$ die folgende Zerlegung

$$f(w_1,w_2) = f_1(w_1)\cdot f_2(w_2)\quad(\forall w_1\in\Omega_1, \forall w_2\in\Omega_2)$$

mit nicht-negativen $\mathcal{A}_j$-$\overline{\mathcal{B}}$-messbaren Funktionen f_j für $j\in\{1,2\}$, dann gilt

$$\int\limits_{\Omega_1\times\Omega_2} f\,d(\mu_1\otimes\mu_2) = \int\limits_{\Omega_1} f_1\,d\mu_1\cdot\int\limits_{\Omega_2} f_2\,d\mu_2$$

Beispiel 5.17:

Auf die σ-Endlichkeit der beteiligten Maße kann im 1. Fubinischen Satz nicht verzichtet werden. Auf den Messräumen

$$(\Omega_1,\mathcal{A}_1) := (\Omega_2,\mathcal{A}_2) := ([0,1],[0,1]\cap\mathcal{B})$$

seien μ_1 das BL-Maß auf $\mathcal{A}_1$ und μ_2 das $[0,1]$-Zählmaß auf $\mathcal{A}_2$. Die Diagonale $\triangle := \{(w_1,w_2)\in\Omega_1\times\Omega_2 \mid w_1=w_2\}$ liegt in $\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2$, und es gilt

$$\begin{aligned}\int\mu_1(\triangle_{w_2})\,d\mu_2 &= \int\mu_1(\{w_2\})\,d\mu_2\\ &= \int 0\,d\mu_2 = 0\neq 1 = \mu_1([0,1]) = \int 1\,d\mu_1\\ &= \int\mu_2(\{w_1\})\,d\mu_1 = \int\mu_2(\triangle_{w_1})\,d\mu_1\end{aligned}$$

Es liegt aber kein Widerspruch zum 1. Fubinischen Satz vor, da das $[0,1]$-Zählmaß auf $[0,1]\cap\mathcal{B}$ nicht σ-endlich ist.

Theorem 5.18 (2. Fubinischer Satz)**:**
Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), (\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ Maßräume mit σ-endlichen Maßen μ_1, μ_2. Dann gelten:

(i) Die Funktionen f_{w_1} sind μ_2-integrierbar μ_1-f.ü.

(ii) Die Funktionen f_{w_2} sind μ_1-integrierbar μ_2-f.ü.

(iii) Die μ_1-f.ü. definierte Funktion $w_1 \mapsto \int f_{w_1}\, d\mu_2$ ist μ_1-integrierbar.

(iv) Die μ_2-f.ü. definierte Funktion $w_2 \mapsto \int f_{w_2}\, d\mu_1$ ist μ_2-integrierbar.

(v) $\int\limits_{\Omega_1 \times \Omega_2} f\, d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int\limits_{\Omega_1} (\int\limits_{\Omega_2} f_{w_1}\, d\mu_2)\, d\mu_1 = \int\limits_{\Omega_2} (\int\limits_{\Omega_1} f_{w_2}\, d\mu_1)\, d\mu_2.$

Der wesentliche Unterschied in den beiden Fubinischen Sätzen besteht darin, dass der 2. Fubinische Satz nicht mehr die Nicht-Negativität von f benötigt, dafür aber deren Integrierbarkeit verlangt.

Aufgrund der Assoziativität der Produktbildung mit σ-Algebren, d.h.

$$\left(\bigotimes_{i=1}^{j} \mathcal{A}_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{i=j+1}^{k} \mathcal{A}_i\right) = \left(\bigotimes_{i=1}^{k} \mathcal{A}_i\right) \qquad (\forall j \in \{1, \ldots, k-1\}),$$

sowie der Assoziativität der Produktbildung mit Maßen, d.h.

$$\left(\bigotimes_{i=1}^{j} \mu_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{i=j+1}^{k} \mu_i\right) = \left(\bigotimes_{i=1}^{k} \mu_i\right) \qquad (\forall j \in \{1, \ldots, k-1\}),$$

lassen sich die Fubinischen Sätze auch sinngemäß auf k Faktoren übertragen.
Die entscheidende Formel lautet dann:

$$\int f\, d(\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_k) = \int (\ldots (\int (\int f(w_1, \ldots, w_k)\, d\mu_{j_1}(w_{j_1}))\, d\mu_{j_2}(w_{j_2})) \ldots)\, d\mu_{j_k}(w_{j_k})$$

für jede Permutation $(j_1, \ldots, j_k)$ von $1, \ldots, k$.

Satz 5.19:
Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), \ldots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ *Messräume mit* σ*-endlichen Maßen* μ_i, η_i $(i \in \mathbb{N}_n)$ *auf* $\mathcal{A}_i$ *mit* $\eta_i = f_i \mu_i$. *Dann gilt*

$$\bigotimes_{i=1}^{n} \eta_i = F \bigotimes_{i=1}^{n} \mu_i \qquad \text{mit } F = \prod_{i=1}^{n} f_i.$$

F *heißt das* ***Tensorprodukt*** *der Dichten* $f_1, \ldots, f_n$.

Satz 5.20:
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \widetilde{\mu}), (\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), (\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ *Maßräume mit* σ*-endlichen Maßen* μ_1, μ_2 *und* $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ *sowie messbaren Abbildungen* $f_i : (\Omega, \mathcal{A}, \widetilde{\mu}) \to (\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ *für* $i = 1, 2$.

Besitzt dann (f_1, f_2) *eine* μ*-Dichte* f, *d.h.,* $\widetilde{\mu}_{(f_1, f_2)} = f\mu$, *so ist*

$$\Omega_1 \ni w_1 \mapsto \int\limits_{\Omega_2} f_{w_1} \, d\mu_2$$

eine μ_1*-Dichte von* f_1 *und*

$$\Omega_2 \ni w_2 \mapsto \int\limits_{\Omega_1} f_{w_2} \, d\mu_1$$

eine μ_2*-Dichte von* f_2.

Der nächste Satz ist für die Wahrscheinlichkeitstheorie von großer Bedeutung:

Satz 5.21:
Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ *seien* $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ *Messräume,* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum und* $X_i : (\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}) \to (\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ *Zufallsvariablen und* $X := (X_1, \ldots, X_n)$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) $P_X = \bigotimes_{i=1}^{n} P_{X_i}$

(2) $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} X_i^{-1}(A_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i^{-1}(A_i)) \quad (\forall A_i \in \mathcal{A}_i (i = 1, \ldots, n)).$

*Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ heißen dann **stochastisch unabhängig**.*

Erst mit dem Begriff der stochastischen Unabhängigkeit von Zufallsvariablen wird die Wahrscheinlichkeitstheorie eine eigenständige mathematische Disziplin. Bis dahin ist sie nur ein Teilgebiet der Maß- und Integrationstheorie.

In der Wahrscheinlichkeitstheorie hat man es häufig auch mit Folgen von Zufallsvariablen (Gesetze der großen Zahlen, zentraler Grenzwertsatz) oder sogar mit überabzählbar vielen Zufallsvariablen (stochastische Prozesse) zu tun. Da man die Gesamtheit dieser Zufallsvariablen auch als eine einzelne messbare Zufallsvariable ansehen möchte, ist es unumgänglich, auch unendliche Produkte von Messräumen einzuführen und zwar derart, dass die kanonischen Projektionen, die sich mit den Ausgangszufallsvariablen identifizieren lassen, messbar bleiben.

Definition 5.22:
Seien für eine nicht-leere Indexmenge L nicht-leere Mengen $\Omega_l (l \in L)$ gegeben und sei $\Omega_V := \bigcup_{l \in L} \Omega_l$. Die Menge

$$\bigtimes_{l \in L} \Omega_l := \{f \in \Omega_V^L \mid f(l) \in \Omega_l \quad (\forall l \in L)\}$$

*heißt das **Produkt der Mengen** Ω_l. Dabei bezeichnet Ω_V^L die Menge aller Abbildungen $f : L \to \Omega_V$.*

Für $f \in \bigtimes_{l \in L} \Omega_l$ schreibt man auch $f = (f_l)_{l \in L}$ mit $f_l := f(l) \quad (\forall l \in L)$.

Ist L endlich, d.h., es existieren eine Menge $\{1, \ldots, n\}$ und eine Bijektion

$\varphi : \{1, \ldots, n\} \to L$, so ist $\bigtimes_{l \in L} \Omega_l$ offensichtlich identifizierbar mit dem gewöhnlichen Kreuzprodukt $\Omega_{\varphi(1)} \times \cdots \times \Omega_{\varphi(n)}$.

Notiz 5.23:
Im Falle L unendlich ist $\bigtimes_{l \in L} \Omega_l$ (aus Definition 5.22) nicht leer.

Der Beweis kann mittels des Auswahlaxioms geführt werden.

Definition 5.24:
Seien $L \neq \varnothing$ eine nicht-leere Indexmenge und $\varnothing \neq K \subset L$ sowie Ω_l beliebige, nicht-leere Mengen $(\forall l \in L)$.

(i) *Die Abbildung*

$$\pi_{L,K} : \bigtimes_{l \in L} \Omega_l \to \bigtimes_{l \in K} \Omega_l$$

*mit $\pi_{L,K}((f_l)_{l \in L}) := (f_l)_{l \in K}$ heißt L-K-**Projektion**.*

(ii) *Ist $K = \{k\}$ für ein $k \in L$, so schreibt man kurz $\pi_{L,k}$ statt $\pi_{L,\{k\}}$.*

Definition 5.25:
Für eine nicht-leere Menge L bezeichne $\mathcal{P}^E_{NL}(L)$ die Menge aller nicht-leeren, endlichen Teilmengen von L.

Definition 5.26:
Seien $L \neq \varnothing$ und $(\Omega_l, \mathcal{A}_l)$ Messräume $(\forall l \in L)$. Dann wird

$$\bigotimes_{l \in L} (\Omega_l, \mathcal{A}_l) := \left(\bigtimes_{l \in L} \Omega_l, \bigotimes_{l \in L} \mathcal{A}_l \right)$$

mit

$$\bigotimes_{l \in L} \mathcal{A}_l := \sigma \left(\bigcup_{l \in L} \pi_{L,l}^{-1}(\mathcal{A}_l) \right)$$

der ***Produktmessraum*** *der Messräume* $(\Omega_l, \mathcal{A}_l)$ $(l \in L)$ *genannt und die* σ*-Algebra* $\bigotimes_{l \in L} \mathcal{A}_l$ *das* ***Produkt*** *der* σ*-Algebren* $\mathcal{A}_l$ $(l \in L)$.

Notiz 5.27:
$\bigotimes_{l \in L} \mathcal{A}_l$ *ist die kleinste* σ*-Algebra, bzgl. der alle Projektionen* $\pi_{L,l}$ $(l \in L)$ *messbar sind.*

Definition 5.28:
Seien $\Omega \neq \varnothing$ *und* $(\Omega_l, \mathcal{A}_l)$ $(l \in L \neq \varnothing)$ *Messräume sowie* $f_l : \Omega \to \Omega_l$ *Abbildungen* $(\forall l \in L)$. *Dann heißt die* σ*-Algebra*

$$\mathcal{A} := \sigma\left(\bigcup_{l \in L} f_l^{-1}(\mathcal{A}_l)\right)$$

die ***initiale*** σ***-Algebra*** *der Abbildungen* f_l *in Bezug auf die Messräume* $(\Omega_l, \mathcal{A}_l)$ $(l \in L)$.

Notiz 5.29:
Offensichtlich ist $\bigotimes_{l \in L} \mathcal{A}_l$ *die initiale* σ*-Algebra der Abbildungen* $\pi_{L,l}$ $(l \in L)$.

Satz 5.30:
Seien die Voraussetzungen von Definition 5.28 gegeben und

$$\mathcal{A} = \sigma\left(\bigcup_{l \in L} f_l^{-1}(\mathcal{A}_l)\right)$$

die entsprechende initiale σ*-Algebra der Abbildungen* f_l $(l \in L)$. *Weiter sei* $(T, \mathcal{T})$ *ein Messraum und* $t : T \to \Omega$ *eine Abbildung. Dann gilt:*

$$t \in \mathcal{M}(\mathcal{T}, \mathcal{A}) \quad \Leftrightarrow \quad f_l \circ t \in \mathcal{M}(\mathcal{T}, \mathcal{A}_l) \qquad (\forall l \in L).$$ [2]

[2] Dabei bezeichnen $\mathcal{M}(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ bzw. $\mathcal{M}(\mathcal{T}, \mathcal{A}_l)$ die Menge der $\mathcal{T}$-$\mathcal{A}$- bzw. $\mathcal{T}$-$\mathcal{A}_l$-messbaren Abbildungen.

Korollar 5.31:
Für $l \in L \neq \varnothing$ seien $(\Omega_l, \mathcal{A}_l)$ Messräume sowie $(T, \mathcal{T})$ ein weiterer Messraum. Sei $t : T \to \bigtimes_{l \in L} \Omega_l$ eine Abbildung. Dann gilt:

$$t \in \mathcal{M}(\mathcal{T}, \bigotimes_{l \in L} \mathcal{A}_l) \quad \Leftrightarrow \quad \pi_{L,l} \circ t \in \mathcal{M}(\mathcal{T}, \mathcal{A}_l) \qquad (\forall l \in L).$$

Korollar 5.32:
Seien $(\Omega_l, \mathcal{A}_l)$ für $l \in L \neq \varnothing$ Messräume sowie $(T, \mathcal{T})$ ein weiterer Messraum und $t_l : T \to \Omega_l$ beliebige Abbildungen. Schließlich sei $t : T \to \bigtimes_{l \in L} \Omega_l$ definiert durch $t(y) = (t_l(y))_{l \in L}$ $(\forall y \in T)$. Dann gilt:

$$t \in \mathcal{M}(\mathcal{T}, \bigotimes_{l \in L} \mathcal{A}_l) \quad \Leftrightarrow \quad t_l \in \mathcal{M}(\mathcal{T}, \mathcal{A}_l) \qquad (\forall l \in L).$$

Satz 5.33:
Für $l \in L \neq \varnothing$ seien $(\Omega_l, \mathcal{A}_l)$ Messräume und $\varnothing \neq K \subset L$. Dann gilt:

$$\pi_{L,K} \in \mathcal{M}(\bigotimes_{l \in L} \mathcal{A}_l, \bigotimes_{l \in K} \mathcal{A}_l).$$

Definition 5.34:
Für $l \in L \neq \varnothing$ seien $(\Omega_l, \mathcal{A}_l)$ Messräume.

$$\bigtimes_{l \in L} \mathcal{A}_l := \bigcup_{K \in \mathcal{P}^E_{NL}(L)} \left\{ \bigtimes_{l \in K} A_l \times \bigtimes_{l \in L-K} \Omega_l \mid A_l \in \mathcal{A}_l \ (\forall l \in K) \right\}$$

*heißt das **System der messbaren Rechtecke in** $\bigotimes_{l \in L} \mathcal{A}_l$.*

$$\mathcal{C} := \bigcup_{K \in \mathcal{P}^E_{NL}(L)} \left\{ A_K \times \bigtimes_{l \in L-K} \Omega_l \mid A_K \in \bigotimes_{l \in K} \mathcal{A}_l \right\}$$

*heißt das **System der Zylindermengen in** $\bigotimes_{l \in L} \mathcal{A}_l$.*

Notiz 5.35:
Für $l \in L \neq \varnothing$ seien $(\Omega_l, \mathcal{A}_l)$ Messräume. Dann gelten

(1) $\bigtimes_{l \in L} \mathcal{A}_l$ *ist ein Halbring über* $\bigtimes_{l \in L} \Omega_l$ *mit* $\sigma\left(\bigtimes_{l \in L} \mathcal{A}_l\right) = \bigotimes_{l \in L} \mathcal{A}_l$.

(2) $\mathcal{C}$ *ist ein Ring über* $\bigtimes_{l \in L} \Omega_l$ *mit* $\sigma(\mathcal{C}) = \bigotimes_{l \in L} \mathcal{A}_l$.

Lemma 5.36:
Für $l \in L \neq \varnothing$ seien $(\Omega_l, \mathcal{A}_l)$ Messräume. Zu $A \in \bigotimes_{l \in L} \mathcal{A}_l$ gibt es dann ein abzählbares $K \subset L$ sowie ein $Y \in \bigotimes_{l \in K} \mathcal{A}_l$ mit $A = Y \times \bigtimes_{l \in L-K} \Omega_l$.

Theorem 5.37 (Andersen-Jessen)**:**
Seien $L \neq \varnothing$ und $(\Omega_l, \mathcal{A}_l, P_l)_{l \in L}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsräumen. Dann existiert auf der σ-Algebra $\mathcal{A} := \bigotimes_{l \in L} \mathcal{A}_l$ ***genau ein*** *Wahrscheinlichkeitsmaß P mit*

$$P\left(\bigtimes_{l \in L} A_l \times \bigtimes_{l \in L-K} \Omega_l\right) = \prod_{l \in K} P_l(A_l)$$

$(\forall A_l \in \mathcal{A}_l$ *mit* $l \in K$ *und* $K \in \mathcal{P}^E_{NL}(L))$.

Im Falle L abzählbar unendlich ist das Andersen-Jessen-Theorem ein Spezialfall des Theorems von Ionescu-Tulcea, welches hier aber nicht wiedergegeben werden kann, da zu viele neue Begriffsbildungen eingeführt werden müssten. Der Beweis des überabzählbaren Falles ergibt sich mittels Lemma 5.36 aus dem abzählbar-unendlichen Fall.

Bemerkung 5.38:
Mit dem Andersen-Jessen-Theorem ist die eingangs dieses Abschnitts aufgeworfene Problemstellung auf unendlich viele Wahrscheinlichkeitsräume erweitert und positiv beschieden worden.

Definition 5.39:
*Seien $L \neq \varnothing$ und $((\Omega_l, \mathcal{A}_l, P_l) \mid l \in L)$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsräumen. Das nach Theorem 5.37 eindeutig bestimmte Wahrscheinlichkeitsmaß $\bigotimes\limits_{l \in L} P_l := P$ auf der σ-Algebra $\mathcal{A} := \bigotimes\limits_{l \in L} \mathcal{A}_l$ über $\bigtimes\limits_{l \in L} \Omega_l =: \Omega$ heißt das **Produkt-Wahrscheinlichkeitsmaß** der Wahrscheinlichkeitsmaße P_l $(l \in L)$. Der Wahrscheinlichkeitsraum $\bigotimes\limits_{l \in L} (\Omega_l, \mathcal{A}_l, P_l) := (\Omega, \mathcal{A}, P)$ wird dann der **Produkt-Wahrscheinlichkeitsraum** der Wahrscheinlichkeitsräume $(\Omega_l, \mathcal{A}_l, P_l)$ für $l \in L$ genannt.*

6 Verschiedene Integralbegriffe im Vergleich[3]

Satz 6.1:
Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ messbar. Ist f Riemann-integrierbar, so ist f auch Lebesgue-integrierbar und die beiden Integralwerte stimmen überein.

Satz 6.2:
Eine messbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ sei über jedem kompakten Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann gilt:

f ist genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn das uneigentliche Riemann-Integral $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{-n}^{n} f(x)\, dx$ existiert. Dieses stimmt dann mit dem Wert des Lebesgue-Integrals von f überein.

Mittels der Zerlegung $f = f^+ - f^-$ folgt

Satz 6.3:
Eine messbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit absolut konvergentem Riemann-Integral ist Lebesgue-integrierbar und $\int f\, d\lambda$ ist gleich dem Wert des uneigentlichen Riemann-Integrals von f. Dabei kann (ebenso in Satz (6.2) der Definitionsbereich $\mathbb{R}$ von f durch ein beliebiges offenes oder halboffenes Intervall ersetzt werden.

Die Tatsache, dass aus der uneigentlichen Riemann-Integrierbarkeit gewisser (sogar stetiger) Funktionen (Ein Beispiel ist die Funktion $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ auf $\mathbb{R}^+$) nicht die Lebesgue-Integrierbarkeit dieser Funktionen **als Ganzes** folgt, ist für

[3] Dieser Abschnitt kann eher oberflächlich zur Kenntnis genommen werden, da er lediglich die Überlegenheit des Lebesgue-Integrals gegenüber anderen Integralbegriffen demonstriert. Lediglich das Lebesgue-Stieltjes-Integral (eine Art Konkretisierung des Lebesgue-Integrals) sollte verinnerlicht werden, da es Anwendungen in der Wahrscheinlichkeitstheorie und in der Physik besitzt.

einen Vergleich zwischen Riemann- und Lebesgue-Integral **völlig bedeutungslos**, da diese Funktionen ja auch nicht Riemann-integrierbar, sondern eben nur uneigentlich Riemann-integrierbar sind. Natürlich erhält man den Wert dieses uneigentlichen Riemann-Integrals auch als Limes einer Folge von Lebesgue-Integralen.

Dass nicht jede Lebesgue-integrierbare Funktion auch Riemann-integrierbar ist, ist ein „Ladenhüter" und sei hier nur im Fließtext erwähnt. Klassisches Beispiel ist die Dirichlet-Funktion $1_{\mathbb{Q}|[0,1]}$.

Henri Lebesgue äußerte sich 1926 sehr bildlich über den Vergleich zwischen Lebesgue- und Riemann-Integral, wobei implizit die Bedeutung der σ-Additivität wieder betont wird [Els07, S. 85]:

> Man kann sagen, daß man sich bei dem Vorgehen von Riemann verhält wie ein Kaufmann ohne System, der Geldstücke und Banknoten zählt in der Reihenfolge, wie er sie in die Hand bekommt, während wir vorgehen wie ein umsichtiger Kaufmann, der sagt:
>
> > Ich habe $m(E_1)$ Münzen zu einer Krone, macht $1 \cdot m(E_1)$.
> >
> > Ich habe $m(E_2)$ Münzen zu zwei Kronen, macht $2 \cdot m(E_2)$.
> >
> > Ich habe $m(E_3)$ Münzen zu fünf Kronen, macht $5 \cdot m(E_3)$,
> >
> > usw.
> >
> > Ich habe also insgesamt
> >
> > $$S = 1 \cdot m(E_1) + 2 \cdot m(E_2) + 5 \cdot m(E_3) + \dots .$$
>
> Die beiden Verfahren führen den Kaufmann sicher zum gleichen Resultat, weil er – wie reich er auch sei – nur eine endliche Zahl von Banknoten zu zählen hat, aber für uns, die wir unendlich viele Indivisiblen zu addieren haben, ist der Unterschied zwischen beiden Vorgehensweisen wesentlich.

Jegliche Integralbegriffe, die sich mit dem Lebesgue-Integral messen lassen wollen, müssen nicht nur einem Vergleich mit den Lebesgue-integrierbaren Funktionen standhalten, sondern **vor allem** mit der Schmiegsamkeit (ganz zu schweigen der Verallgemeinerungsfähigkeit) des Lebesgue-Integrals, d.h., den Konvergenzsätzen der Lebesgueschen Integrationstheorie, wobei als ,,Maß aller Dinge" der Lebesguesche Satz von der majorisierten Konvergenz anzusehen ist. Hier wirkt ein Vergleich zwischen dem Riemann- und dem Lebesgue-Integral schon beinahe kurios, da das Riemann-Integral für das Vertauschen der Integration mit der Limitenbildung von Funktionenfolgen die gleichmäßige Konvergenz, also eine **extrem** einschränkende Bedingung, der Funktionenfolgen benötigt.

Fazit:
Das Lebesgue-Integral ist dem Riemann-Integral in allen Belangen überlegen.

Einige marginale Bemerkungen wert ist das **Henstock-Kurzweil-Integral** (i.F. kurz **HK-Integral** genannt), das auf Arbeiten von Denjoy und Perron zurückgeht und gelegentlich auch als **Gauge-Integral** oder **verallgemeinertes Riemann-Integral** bezeichnet wird. Es zeichnet sich dadurch (aber auch **nur** dadurch!) aus, dass es die Klasse der Lebesgue-integrierbaren Funktionen umfasst, im Bereich der Konvergenz-Sätze aber nicht die Macht der Lebesgue-Theorie besitzt, wie am Satz von der majorisierten Konvergenz demonstriert wird.

Die Verallgemeinerung auf beliebige Maßräume geht dem HK-Integral natürlich vollkommen abhanden. Für die Behufe der höheren Wahrscheinlichkeitstheorie ist es folglich völlig unbrauchbar.

Unter den verschiedenen Arten, das Riemann-Integral zu definieren, wird eine gewählt, die die Konstruktion des HK-Integrals etwas einsichtiger erscheinen lässt.

Definition 6.4:
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und I eine reelle Zahl. Man nennt

$$\int_a^b f(x)\,dx := I$$

das ***Riemann-Integral von*** *f, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ mit folgender Eigenschaft gibt:*

Ist n eine natürliche Zahl und sind $t_0, t_1, \dots t_n$ sowie $s_1, s_2, \dots s_n$ reelle Zahlen, die den Bedingungen

$$a = t_0 \le s_1 \le t_1 \le s_2 \le t_2 \le \dots \le s_n \le t_n = b$$

sowie

$$t_i - t_{i-1} < \delta(\varepsilon) \qquad (\forall i \in \{1, \dots n\})$$

genügen, so gilt

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} f(s_i)(t_i - t_{i-1}) \right| < \varepsilon.$$

Notiz 6.5:
Das Riemann-Integral (falls existent) von $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist wohldefiniert.

Definition 6.6:
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und I eine relle Zahl. $\int_a^b f(t)\,dt := I$ heißt das ***Henstock-Kurzweil-Integral*** *von f, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Funktion $\delta(\varepsilon) : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ mit der folgenden Eigenschaft gibt:*

Ist n eine natürliche Zahl und sind $t_0, t_1, \dots t_n$ sowie $s_1, s_2, \dots s_n$ reelle Zahlen, die den Bedingungen

$$a = t_0 \le s_1 \le t_1 \le s_2 \le t_2 \le \dots \le s_n \le t_n = b \qquad (*)$$

sowie

$$t_i - t_{i-1} < \delta(\varepsilon)(s_i) \qquad (\forall i \in \{1, \dots n\})$$

genügen, dann gilt

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} f(s_i)(t_i - t_{i-1}) \right| < \varepsilon.$$

*Die Funktion $\delta(\varepsilon)$ heißt **Messfunktion** (oder auch **Gauge-Funktion**).*

*Ein $(2n+2)$-Tupel $(n, s_1, \dots, s_n, t_0, t_1, \dots, t_n)$ mit der Eigenschaft (*) heißt eine **etikettierte Partition**, die Zahlen $s_1, \dots s_n$ heißen **Etiketten**. Eine etikettierte Partition $(n, s_1, \dots, s_n, t_0, t_1, \dots, t_n)$ heißt $\delta(\varepsilon)$-**fein**, falls*

$$t_i - t_{i-1} < \delta(\varepsilon)(s_i) \qquad (\forall i \in \{1, \dots n\})$$

Lemma 6.7 (Cousinsches Lemma)**:**
Zu jeder Messfunktion $\delta(\varepsilon)$ existiert eine $\delta(\varepsilon)$-feine etikettierte Partition.

Notiz 6.8:
Das HK-Integral (falls existent) einer Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist wohldefiniert.

Notiz 6.9:
Sind die Messfunktionen $\delta(\varepsilon)$ konstant, so geht das HK-Integral offensichtlich in das Riemann-Integral über.

Notiz 6.10:
*Die HK-integrierbaren Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bilden einen $\mathbb{R}$-Vektorraum, der als **Denjoy-Raum** bezeichnet wird.*

Satz 6.11:
Die HK-integrierbaren Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bilden eine echte Obermenge der Lebesgue-integrierbaren Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Leider schwächelt das HK-Integral enorm bei den Konvergenzsätzen. Dieses sei am bedeutendsten Konvergenzsatz demonstriert.

Satz 6.12 (Satz von der majorisierten Konvergenz für das HK-Integral)**:**
Sei $(f_n)_n$ eine Folge HK-integrierbarer Funktionen, die punktweise gegen eine Funktion f konvergiert. Weiter gelte $m_1 \leq f_n \leq m_2$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, wobei m_1, m_2 HK-integrierbare Funktionen seien. Dann sind f und $|f - f_n|$ ebenfalls HK-integrierbar mit

$$\left| \int f_n - f \right| \leq \int |f_n - f| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Der einschneidende Unterschied zum Lebesgueschen Satz von der majorisierten Konvergenz ist, dass in Satz 6.12 die f_n bereits als HK-integrierbar **vorausgesetzt** werden, während im Lebesgueschen Satz die Lebesgue-Integrierbarkeit bereits eine **Folgerung** ist. Zudem genügt im Lebesgueschen Satz schon die punktweise Konvergenz der f_n λ-f.ü.

Gütemäßig lässt sich das HK-Integral also irgendwo zwischen Riemann- und Lebesgue-Integral einordnen.

Abschließend soll ein Vergleich zwischen dem Riemann-Stieltjes-Integral, einer wesentlichen Erweiterung des Riemann-Integrals, und dem Lebesgue-Stieltjes-Integral gezogen werden. Das Lebesgue-Stieltjes-Integral kann im folgenden Sinne als Konkretisierung des Lebesgue-Integrals angesehen werden. Die Elemente aus $\mathcal{L}^1(\mu)$ werden von einigen Autoren als **Lebesgue-Integral bzgl.** μ bezeichnet und die Lebesgue-Stieltjes-integrierbaren Funktionen lassen sich darstellen als Funktionen aus $\mathcal{L}^1(\mu_F)$ mit einem geeigneten Maß μ_F. Folglich gelten sämtliche Konvergenzsätze aus Abschnitt 4 für Lebesgue-Stieltjes-Integrale, während für das Riemann-Stieltjes-Integral nur ein Konvergenzsatz von Bedeutung existiert, der an dieser Stelle aber noch nicht formuliert werden kann. Es kann aber bereits konstatiert werden:

Bezüglich der Konvergenzsätze ist das Lebesgue-Stieltjes-Integral dem Riemann-Stieltjes-Integral überlegen.

Das Riemann-Stieltjes-Integral setzt den Begriff der beschränkten Variation einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ voraus. Nun lässt sich aber zeigen, dass jede Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkter Variation sich als Differenz zweier monoton steigender Funktionen schreiben lässt und da das Riemann-Stieltjes-Integral (ebenso wie das Lebesgue-Stieltjes-Integral) linear ist, genügt es, i.F. nur monotone Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zu betrachten.

Definition 6.13:
Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall in $\mathbb{R}$ und seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Funktionen, wobei f monoton sei. Sei $\mathcal{G} = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$ sowie $\mathcal{T} = \{\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n\}$ mit $\eta_j \in [t_{j-1}, t_j] \quad (\forall j \in \{1, \ldots n\})$. $\mathcal{T}$ heißt dann ***zulässig*** *für die Zerlegung $\mathcal{G}$. Es sei*

$$\sum(g, f, \mathcal{G}, \mathcal{T}) := \sum_{j=1}^{n} g(\eta_j)(f(t_j) - f(t_{j-1}))$$

Gibt es nun ein $I \in \mathbb{R}$, so dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ existiert mit der Eigenschaft, dass für jede Zerlegung $\mathcal{G}$ von $[a, b]$ mit

$$\sup_{1 \le k \le n} (t_k - t_{k-1}) < \delta(\varepsilon)$$

und jedes für $\mathcal{G}$ zulässige $\mathcal{T}$ gilt

$$\left| \sum(g, f, \mathcal{G}, \mathcal{T}) - I \right| < \varepsilon,$$

so heißt g ***Riemann-Stieltjes-integrierbar auf*** *$[a, b]$* ***bzgl.*** *f. Man schreibt dann*

$$I =: \int_a^b g \, df.$$

Notiz 6.14:
Das Riemann-Stieltjes-Integral (falls existent) ist wohldefiniert.

Notiz 6.15:
Setzt man in Definition 6.13 $f := \mathrm{id}_{|[a,b]}$, *so geht das Riemann-Stieltjes-Integral in das Riemann-Integral über.*

Notiz 6.16:
Ist in Definition 6.13 f *stetig differenzierbar, so gilt*

$$\int_a^b g\, df = \int_a^b g(x) f'(x)\, dx.$$

Es folgt nun der angekündigte Konvergenzsatz.

Satz 6.17:
Sei $(g_n)_n$ *eine Funktionenfolge stetiger Funktionen* $g_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, *die gleichmäßig gegen* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *konvergiert und* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *eine* ***stetige*** *monotone Funktion. Dann ist* g *Riemann-Stieltjes-integrierbar bzgl.* f, *und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n\, df = \int_a^b g\, df.$$

Notiz 6.18:
Setzt man $f := \mathrm{id}_{|[a,b]}$, *so erhält man den aus der Riemannschen Integrationstheorie bekannten Konvergenzsatz.*

Grundlage des Lebesgue-Stieltjes-Integrals sind sog. maßerzeugende Funktionen.

Definition 6.19:
Sei $I \neq \varnothing$ *mit* $I \subset \mathbb{R}$. *Eine Funktion* $F : I \to \mathbb{R}$, *die monoton steigend und linksseitig stetig ist, heißt eine* ***maßerzeugende Funktion auf*** I.

Notiz 6.20:
Mit F ist auch $F + c$ $(\forall c \in \mathbb{R})$ eine maßerzeugende Funktion auf I.

Der Begriff ,,maßerzeugend" wird durch den folgenden Satz geklärt.

Satz 6.21:
Zu jeder maßerzeugenden Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ gibt es genau ein Maß μ_F auf $I \cap \mathcal{B}$ mit

$$\mu_F([a,b]) = F(b) - F(a) \qquad (\forall [a,b) \in I \cap \mathcal{I}^1).$$

Ist E eine weitere maßerzeugende Funktion auf I, gilt $\mu_F = \mu_E$ genau dann, wenn $E = F + c$ mit einem $c \in \mathbb{R}$.

Spezielle maßerzeugende Funktionen werden durch Wahrscheinlichkeitsmaße induziert. Sie spielen in der Wahrscheinlichkeitstheorie eine überragende Rolle.

Definition 6.22:
Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{B}$. Wegen $(-\infty, x) \in \mathcal{B}$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ wird dann durch

$$F_P(x) := P((-\infty, x))$$

*eine Funktion $F_P : \mathbb{R} \to [0,1]$ definiert, welche die **Verteilungsfunktion von** P genannt wird. Sie ist wegen*

$$P([a,b)) = F_P(b) - F_P(a) \qquad (\forall [a,b) \in \mathcal{I}^1)$$

maßerzeugend auf $\mathbb{R}$.

Notiz 6.23:
Die Verteilungsfunktion F_P eines Wahrscheinlichkeitsmaßes P genügt der Beziehung

$$P_{F_P} = P.$$

Unter allen maßerzeugenden Funktionen $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $P_F = P$ gestattet die Verteilungsfunktion F_P eine eindeutige Charakterisierung.

Satz 6.24:
$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann die Verteilungsfunktion eines (dann eindeutig bestimmten) Wahrscheinlichkeitsmaßes P, wenn gelten:

(i) *F ist maßerzeugend (d.h., monoton steigend und linksseitig stetig),*

(ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ *und* $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1.$

Dieser kleine Exkurs in die Wahrscheinlichkeitstheorie motiviert hoffentlich, sich mit Lebesgue-Stieltjes-Integralen zu befassen.

Definition 6.25:
Beschreibt man ein Maß auf $\mathcal{B}$ (bzw. auf $\mathcal{B} \cap I$ mit einem $\emptyset \neq I \subset \mathbb{R}$) mittels einer maßerzeugenden Funktion F auf $\mathbb{R}$ (bzw. I) in der Form μ_F (im Sinne von Satz 6.21, so nennt man die μ_F-integrierbaren $f \in \mathcal{L}^1(\mu_F)$ ***Lebesgue-Stieltjes-integrierbar****.*

Anstelle von $\int f \, d\mu_F$ schreibt man historisch begründet auch $\int f \, dF$.

Ist F stetig differenzierbar, so gilt $\int f \, dF = \int fF' \, d\lambda$, d.h., das Lebesgue-Stieltjes-Integral wird zu einem gewöhnlichen Lebesgue-Integral.

Definition 6.26:
Die von einer maßerzeugenden Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ erzeugten Lebesgue-Stieltjes-integrierbaren Funktionen werden mit $\mathcal{LS}(F)_{[a,b]}$ und die von F erzeugten Riemann-Stieltjes-integrierbaren Funktionen mit $\mathcal{RS}(F)_{[a,b]}$ bezeichnet.

Die Mengen $\mathcal{LS}(F)_{[a,b]}$ und $\mathcal{RS}(F)_{[a,b]}$ können nun miteinander verglichen werden. In Konvergenzfragen wurde die Überlegenheit von $\mathcal{LS}(F)_{[a,b]}$ gegenüber $\mathcal{RS}(F)_{[a,b]}$ bereits konstatiert.

Satz 6.27:
Für messbare Integranden gelten

(1) $\mathcal{LS}(F)_{[a,b]} \supsetneqq \mathcal{RS}(F)_{[a,b]}$.

(2) Existieren sowohl das Lebesgue-Stieltjes-Integral als auch das Riemann-Stieltjes-Integral für einen Integranden, so stimmen beide Werte überein.

7 Polnische Räume

Rudimentäre Grundkenntnisse aus der Topologie werden vorausgesetzt. (Bei Bedarf können sie sich schnell aus dem im Literaturverzeichnis aufgeführten Büchlein [Jän90] von Klaus Jänich angeeignet werden.)

Die σ-Algebra $\mathcal{B}^n$ wird vom System der offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ erzeugt. Dies ist verallgemeinerungsfähig.

Definition 7.1:
Sei X ein beliebiger topologischer Raum. Das die Topologie definierende Mengensystem der offenen Mengen werde mit $\mathcal{T}$ bezeichnet. Um die Topologie auszuzeichnen, wird im Folgenden ein topologischer Raum stets in der Form $(X, \mathcal{T})$ geschrieben. Eine Ausnahme bildet der $\mathbb{R}^n$, der stillschweigend als mit der Euklidischen Topologie versehen, angesehen wird.

Definition 7.2:
*Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer T_2-Raum (auch Hausdorff-Raum genannt). Die von $\mathcal{T}$ in X erzeugte σ-Algebra $\mathcal{B}(X) := \sigma(\mathcal{T})$ heißt die **Borelsche σ-Algebra über** X. Die Mengen aus $\mathcal{B}(X)$ heißen **Borelsche Mengen**.*

Notiz 7.3:
Es ist $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}^n$.

Notiz 7.4:
Sei $(X, \mathcal{T})$ ein T_2-Raum. $\mathcal{B}(X)$ wird auch vom Mengensystem der abgeschlossenen Teilmengen erzeugt.

Da in einem T_2-Raum kompakte Mengen stets abgeschlossen sind, folgt

Notiz 7.5:
Kompakte Teilmengen eines T_2-Raums $(X, \mathcal{T})$ sind borelsch.

Definition 7.6:
Sei $(X, \mathcal{T})$ ein T_2-Raum. Ein auf $\mathcal{B}(X)$ definiertes Maß heißt

(i) ***Borel-Maß*** *auf X, wenn $\mu(K) < \infty$ für jedes Kompaktum $K \subset X$ gilt.*

(ii) ***lokal-endlich****, falls jedes $x \in X$ eine offene Umgebung U_x besitzt mit $\mu(U_x) < \infty$.*

(iii) ***von innen regulär****, wenn für jedes $M \in \mathcal{B}(X)$ gilt*

$$\mu(M) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset M, K \text{ kompakt}\}$$

(iv) ***von außen regulär****, wenn für jedes $M \in \mathcal{B}(X)$ gilt*

$$\mu(M) = \inf\{\mu(U) \mid U \supset M, U \text{ offen}\}$$

(v) ***regulär****, wenn μ von außen und von innen regulär ist.*

Notiz 7.7:

(i) Ein von innen reguläres Maß auf $\mathcal{B}(X)$ ist eindeutig durch seine Werte auf den kompakten Teilmengen von X festgelegt.

(ii) Ein von außen reguläres Maß auf $\mathcal{B}(X)$ ist eindeutig durch seine Werte auf den offenen Teilmengen von X festgelegt.

Notiz 7.8:

Jedes endliche Maß auf $\mathcal{B}(X)$ ist ein Borel-Maß auf X.

Notiz 7.8 rechtfertigt die folgende Definition:

Definition 7.9:

Jedes endliche Maß auf $\mathcal{B}(X)$ wird als ***endliches Borel-Maß auf*** *X bezeichnet.*

Satz 7.10:

Jedes lokal-endliche Maß auf $\mathcal{B}(X)$ ist ein Borel-Maß auf X.

Satz 7.10 rechtfertigt die folgende Definiton:

Definition 7.11:
*Jedes lokal-endliche Maß auf $\mathcal{B}(X)$ wird als **lokal-endliches Borel-Maß auf** X bezeichnet.*

Beispiel 7.12:

(i) *Seien $(X, \mathcal{T})$ ein T_2-Raum und $x \in X$. Das durch*

$$\delta_x(M) := 1_M(x) \quad (\forall M \in \mathcal{B}(X))$$

*definierte Maß ist ein von innen und von außen reguläres (also reguläres) Borel-Maß auf X. Es wird als das zu $x \in X$ gehörige **Dirac-Maß auf** X bezeichnet.*

(ii) *Sei $(X, \mathcal{T})$ diskret, d.h., $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$. Dann ist $(X, \mathcal{T})$ ein T_2-Raum und das durch*

$$\mu(M) := \begin{cases} 0, & \text{falls } M \text{ abzählbar} \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

$(\forall M \in \mathcal{P}(X))$ definierte Maß ist ein lokal-endliches Borel-Maß, das von außen regulär ist. Es ist zudem genau dann von innen regulär (und alsdann insgesamt regulär), wenn X abzählbar ist.

(iii) *Das $\mathbb{R}^n$-Zählmaß auf $\mathcal{B}^n$ ist kein Borel-Maß, nicht von außen regulär, aber es ist von innen regulär.*

Satz 7.13:
Das BL-Maß λ^n ist ein reguläres, lokal-endliches Borel-Maß.

Versieht man $\mathbb{R}$ mit der Sorgenfrey-Topologie $\mathcal{T}$, so kann man ein Maß μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ angeben, so dass μ zwar ein Borel-Maß auf $\mathcal{B}((\mathbb{R}, \mathcal{T}))$ ist, welches aber nicht lokal-endlich ist, d.h. in Definition 7.2 gilt gemäß Satz 7.10 zwar die Implikation $(ii) \Rightarrow (i)$, die Umkehrung $(i) \Rightarrow (ii)$ ist aber i.A. falsch.

Definition 7.14:
Sei $(X, \mathcal{T})$ ein T_2-Raum. Ein auf $\mathcal{B}(X)$ definiertes Maß μ heißt ein ***Radon-Maß*** *auf X, falls X lokal-endlich und von innen regulär ist.*

Aufgrund von Satz 7.10 gilt

Notiz 7.15:
Jedes Radon-Maß auf X ist auch ein Borel-Maß auf X.

Wie bereits erwähnt, ist nicht jedes Borel-Maß lokal-endlich. Man ist daher an einer möglichst großen Klasse von T_2-Räumen interessiert, in der jedes Borel-Maß bereits lokal-endlich ist.

Satz 7.16:
Auf einem T_2-Raum $(X, \mathcal{T})$, in dem jedes $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt, ist jedes von innen reguläre Borel-Maß auch lokal-endlich, d.h., ein Radon-Maß.

T_2-Räume, die den Bedingungen von Satz 7.16 genügen, sind z.B. die Zahlenräume $\mathbb{C}^n$ und $\mathbb{R}^m$, alle parakompakten C^∞-differenzierbaren Mannigfaltigkeiten sowie alle Riemannschen Flächen.

Definition 7.17:
Ein T_2-Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt ***polnisch*** *$:\Leftrightarrow$ $\mathcal{T}$ besitzt eine abzählbare Basis und es gibt eine $\mathcal{T}$ definierende, vollständige Metrik $d : X \times X \to \mathbb{R}_0^+$.*

Beispiel 7.18:
(1) Die Euklidischen Zahlenräume $\mathbb{C}^n$ und $\mathbb{R}^m$ sind polnisch.

(2) Das topologische Produkt $X_1 \times \ldots \times X_n$ polnischer Räume $X_1, \ldots, X_n$ ist polnisch.

(3) Abgeschlossene Unterräume polnischer Räume sind polnisch.

(4) Offene Unterräume polnischer Räume sind polnisch.

(5) Jeder kompakte T_2-Raum $(X, \mathcal{T})$ mit abzählbarer Basis der Topologie ist polnisch.

(6) Aus (5) folgt, dass alle kompakten C^∞-differenzierbaren Mannigfaltigkeiten sowie alle kompakten Riemannschen Flächen polnisch sind.

Satz 7.19:
Jedes endliche Borel-Maß auf einem polnischen Raum ist regulär.

Satz 7.20:
Jedes lokal-endliche Borel-Maß auf einem polnischen Raum ist ein σ-endliches Radon-Maß.

Satz 7.21:
Jedes Radon-Maß auf einem polnischen Raum ist auch von außen regulär (und somit insgesamt regulär).

Es wurde bereits darauf hingewiesen, dass die Analogie der Definition von messbaren Abbildungen und der Definition der Stetigkeit von Abbildungen zwischen topologischen Räumen nicht nur zufällig ist. Im Falle polnischer Räume und Radon-Maßen auf ihnen lehrt das folgende Theorem, dass messbare Abbildungen „sehr dicht an der Stetigkeit liegen".

Theorem 7.22 (Lusin)**:**
Es sei μ ein lokal-endliches Borel-Maß, also ein Radon-Maß auf einem polnischen Raum $(X, \mathcal{T})$. Weiter sei $(X', \mathcal{T}')$ ein T_2-Raum mit abzählbarer Basis der Topologie. Für eine Abbildung $f : X \to X'$ sind dann die nachstehenden drei Eigenschaften äquivalent:

(1) f ist μ-f.ü. gleich einer $\mathcal{B}(X)$-$\mathcal{B}(X')$-messbaren Abbildung.

(2) Es gibt eine Zerlegung von X in eine Folge $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompakter Teilmengen von X und in eine μ-Nullmenge $Z \in \mathcal{B}(X)$ (d.h., $X = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n + Z$) derart, dass die Restriktion von f auf jedes Kompaktum K_n stetig ist.

Ist μ endlich, so ist hierzu noch äquivalent:

(3) *Zu jeder reellen Zahl $c > 0$ gibt es ein Kompaktum $K \subset X$ derart, dass $\mu(X \setminus K) < c$ gilt und die Restriktion von f auf K stetig ist.*

Bemerkung 7.23:
7.22 (3) ist nicht dahingehend misszuverstehen, dass $f : X \to X'$ auf K stetig ist, sondern bedeutet, dass $f|_K : K \to X'$ stetig ist.

Entsprechend ist 7.22 (2) zu verstehen.

Beispiel 7.24:
Die Restriktion von λ auf die Spur-σ-Algebra $[0,1] \cap \mathcal{B}$ werde der Einfachheit wegen wieder mit λ bezeichnet. Dann ist λ ein Wahrscheinlichkeitsmaß und also insbesondere endlich und somit ein Radon-Maß. $[0,1]$ ist abgeschlossen im polnischen Raum $\mathbb{R}$ und somit selbst polnisch. Auf die messbare Abbildung $1_{\mathbb{Q}|[0,1]}$ lässt sich also die Implikation $(1) \Rightarrow (3)$ des Lusinschen Theorems 7.22 anwenden. Es wird nun explizit ein Kompaktum wie in (3) konstruiert.

Sei $c > 0$. Weiter sei $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung von $[0,1] \cap \mathbb{Q}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ werde $V_n := \left(t_n - \frac{c}{2^{n+2}}, t_n + \frac{c}{2^{n+2}}\right) \cap [0,1]$ gesetzt. Die V_n sind offen in $[0,1]$. Es ist $[0,1] \cap \mathbb{Q} \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n$ und $K := [0,1] \setminus \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n$ ist kompakt in $[0,1]$ mit $\lambda(K) < c$ (σ-Subadditivität und geometrische Reihe). Auf K ist $1_{\mathbb{Q}}$ konstant 0, d.h., $1_{\mathbb{Q}|K}$ ist die Nullfunktion und daher stetig.

A Literaturverzeichnis

Literatur

[Bau84] BAUER, H.: *Maße auf topologischen Räumen*. FernUniversität Hagen, 1984.

[Bau92] BAUER, H.: *Maß- und Integrationstheorie*. de Gruyter, 2. Auflage, 1992.

[Doo94] DOOB, J.: *Measure Theory*. Springer Verlag, 1994.

[Els07] ELSTRODT, J.: *Maß- und Integrationstheorie*. Springer Verlag, 5. Auflage, 2007.

[Gor94] GORDON, R.: *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock*. American Mathematical Society, 1994.

[Hal76] HALMOS, P.: *Measure Theory*. Springer Verlag, 2. Auflage, 1976.

[Hen85] HENZE, E.: *Einführung in die Maßtheorie*. Bibliographisches Institut, 2. Auflage, 1985.

[Jän90] JÄNICH, K.: *Topologie*. Springer Verlag, 3. Auflage, 1990.

[M+93] MOESCHLIN, O. et al.: *Wahrscheinlichkeitstheorie I (Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie)*. FernUniversität Hagen, 1993.

[Oxt97] OXTOBY, J.: *Measure and Category*. Springer Verlag, 2. Auflage, 1997.