Journal für die reine und angewandte Mathematik
Herausgegeben von Helmut Hasse und Hans Rohrbach
Sonderdruck aus Band 262/263, Seite 339 bis 355
Verlag Walter de Gruyter · Berlin · New York 1973

Einfache verallgemeinerte klassische Orthogonalpolynome

Von *F. W. Schäfke* und *G. Wolf* in Konstanz

Herrn Professor Dr. Helmut Hasse zum 75. Geburtstag

0. Einleitung

In den letzten Jahren sind mehrfach Orthogonalpolynome zu Skalarprodukten, in die auch Ableitungen eingehen, untersucht worden. 1962 hat Althammer, [1], eine Theorie der Polynome zu

$$(f, g) := \int_{-1}^{1} f(x) g(x)\, dx + \gamma \int_{-1}^{1} f'(x) g'(x)\, dx$$

mit $\gamma \geqq 0$ gegeben, dasselbe — in anderer Notierung — davon unabhängig 1967 Gröbner, [2]. Eine wesentliche Vereinfachung und Ergänzungen dieser Theorie gibt 1972 Schäfke, [3]. Daneben hat nun 1969 Brenner, [4], die Polynome zu

$$(f, g) := \int_{0}^{\infty} e^{-x} f(x) g(x)\, dx + \gamma \int_{0}^{\infty} e^{-x} f'(x) g'(x)\, dx$$

($\gamma \geqq 0$) untersucht. Seine Theorie erscheint jedoch, ähnlich wie [1] und [2], schwerfällig und unbefriedigend, sowie darüber hinaus in mancher Hinsicht ergänzungs- und korrekturbedürftig. Es erschien daher vor allem wünschenswert, ähnlich wie Schäfke, [3], für [1] und [2], auch für [4] eine auf vernünftiger Normierung und einfachen Grundgedanken beruhende knappe Darstellung zu geben.

Nun hat 1971 Blankenagel, [5], auf die Bedeutung adjungierter Polynomoperatoren für die Theorie der Orthogonalpolynome hingewiesen und grundsätzlich gezeigt, wie die wesentlichen Formeln von [1], [2], [3], [4] aus einfachen allgemeineren Überlegungen gewonnen werden können. Hierauf gestützt, erscheint es nun sinnvoll und angezeigt, sogleich wesentlich allgemeiner anzusetzen und nach allen Skalarprodukten und zugehörigen Polynomsystemen zu fragen, für die ähnlich einfache zwei- und dreigliedrige Formeln bestehen und einen Zusammenhang mit klassischen Orthogonalpolynomen herstellen. Es sind dies, genauer gesagt, alle diejenigen Skalarprodukte, für die sich in bestimmter naturgemäßer Weise symmetrische Polynomoperatoren ergeben, die den Grad jedes Polynoms um 1 oder im Falle eines geraden Skalarprodukts um 2 erhöhen.

Diese Problemstellung wird nun in **1.** entwickelt. Mit den Intervallen $\mathfrak{i}$ und Gewichtsfunktionen w der drei klassischen Polynomarten (Jacobi-, Laguerre- und Hermite-

Polynome) sowie mit Polynomen $v_{\nu\mu}$ werden positiv-definite symmetrische Skalarprodukte (für Polynome)

$$(p, q) := \sum_{(\nu,\mu)\in\mathbb{N}_0^2} \int_i w(x) v_{\nu\mu}(x) p^{(\nu)}(x) q^{(\mu)}(x)\, dx$$

betrachtet, die Ableitungen beliebig hoher Ordnung enthalten dürfen. Zusätzlich wird nur angenommen, daß die Differentiation bei p durch partielle Integration abgebaut werden kann. Dazu soll die unendliche Matrix der $v_{\nu\mu}$ zeilen- und spaltenfinit sein. Wie Bemerkung 3. 1 genauer ausführt, muß überdies o. B. d. A.

$$\frac{1}{w} D^\nu w v_{\nu\mu} \in \mathbb{R}[x]$$

gelten. Mit Hilfe des Polynomoperators

$$Bq := \frac{1}{w} \sum_{(\nu,\mu)\in\mathbb{N}_0^2} (-1)^\nu D^\nu (w v_{\nu\mu} D^\mu q)$$

läßt sich dann (p, q) durch das entsprechende klassische Produkt $(p, Bq)_0$ und zugehörige „ausintegrierte" Terme darstellen. Mit Hilfe bekannter Polynomoperatoren C_m, die bezüglich des klassischen Produkts symmetrisch sind und gegebenenfalls die ausintegrierten Terme zum Verschwinden bringen, entstehen dann in $A_m = C_m \circ B$ symmetrische Polynomoperatoren bezüglich des verallgemeinerten Produkts. Fordert man nun, daß A_m (im wesentlichen) den Grad eines Polynoms stets um 1 oder im Fall eines geraden Skalarprodukts um 2 erhöht, so ergeben sich gerade 8 Klassen einfacher verallgemeinerter klassischer Orthogonalpolynome. Sie werden — insbesondere im Falle einer zusätzlichen natürlichen Gradbedingung (1. 20) — vollständig angegeben: I, (1. 28) bis (VIII), (1. 35). Die Polynome von Althammer erscheinen dabei als eine starke Spezialisierung von (IV) und die von Brenner analog von (VI).

In **2.** gelingt es nun, die Theorie dieser acht Polynomklassen ganz allgemein und einfach durchzuführen. Nach Bereitstellung gewisser klassischer Polynome und zugehöriger Konstanten in 2. 1 wird in 2. 2 eine erste rekursive Darstellung der zugehörigen Orthogonalpolynome p_n aus den Eigenschaften der A_m abgelesen: die Differenz benachbarter p_n (bei bestimmter Normierung) ist im wesentlichen ein klassisches Polynom; die zugehörigen Konstanten a_n genügen einer dreigliedrigen Rekursion; man hat einfache Normierungsformeln. 2. 3 gibt dann eine zweite Darstellung: Bp_n läßt sich als Differenz klassischer Polynome darstellen; dabei treten wieder die Konstanten a_n auf. In 2. 4 ergibt sich daraus unmittelbar eine dreigliedrige Rekursion für die p_n, und 2. 5 liefert — gestützt auf 2. 3 und gewisse lineare Abbildungen von $\mathbb{R}[x]$ in $\mathbb{R}$ — explizite Darstellungen der a_n; bemerkenswert ist insbesondere (2. 39) für den Fall, daß B graderhaltend ist. Für diesen Fall wird in 2. 6 eine Umrechnung notiert, die insbesondere auch für die Einordnung der Formeln von [1], [2], [3] und [4] wesentlich ist. Der Frage der Nullstellen ist 2. 7 gewidmet, und zwar insbesondere der Gewinnung hinreichender Bedingungen dafür, daß p_n stets n einfache Nullstellen in i hat. Hier wird für (III), (IV), (VI) einerseits und für (I), (II), (V) andererseits mit Hilfe eines gemeinsamen Prinzips und gewisser Funktionale eine Reihe hinreichender Bedingungen hergeleitet. Sie enthalten die bekannten Resultate aus [1], [2], [3], [4].

Abschnitt **3.** bringt einige ergänzende bzw. erläuternde Bemerkungen über (1. 6) bis (1. 10) (s. oben), über mögliche Transformationen desselben Skalarprodukts, zur Möglichkeit der Positiv-Definitheit und zur Frage der Nullstellen.

1. Verallgemeinerte klassische Orthogonalpolynome

Es sei

$$\text{(1.1.A)} \qquad \mathfrak{i} := (-1, 1)$$

oder

$$\text{(1.1.B)} \qquad \mathfrak{i} := (0, \infty)$$

oder

$$\text{(1.1.C)} \qquad \mathfrak{i} := (-\infty, \infty).$$

Jeweils für $x \in \mathfrak{i}$ sei mit

$$\text{(1.2)} \qquad \alpha > -1, \quad \beta > -1$$

$$\text{(1.3.A)} \qquad w(x) := (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$$

bzw.

$$\text{(1.3.B)} \qquad w(x) := e^{-x} x^\alpha$$

bzw.

$$\text{(1.3.C)} \qquad w(x) := e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Seien nun für $\nu \in \mathbb{N}_0$ und $\mu \in \mathbb{N}_0$

$$\text{(1.4)} \qquad v_{\nu\mu} = v_{\mu\nu} \in \mathbb{R}[x]$$

und sei das mit diesen gebildete symmetrische Skalarprodukt in $\mathbb{R}[x]$ (es treten nur Glieder $\neq 0$ mit $\nu \leqq \partial p$ und $\mu \leqq \partial q$ auf)

$$\text{(1.5)} \qquad (p, q) := \sum_{(\nu,\mu)\in\mathbb{N}_0^2} \int_{\mathfrak{i}} w(x) v_{\nu\mu}(x) p^{(\nu)}(x) q^{(\mu)}(x)\, dx$$

positiv-definit.

Wir nennen die Orthogonalpolynome zu einem solchen Skalarprodukt verallgemeinerte Jacobi-Polynome (A) bzw. Laguerre-Polynome (B) bzw. Hermite-Polynome (C), zusammenfassend verallgemeinerte klassische Orthogonalpolynome.

Wir fordern weiter, daß mit

$$n_\mu \in \mathbb{N}_0 \qquad (\mu \in \mathbb{N}_0)$$

gilt

$$\text{(1.6)} \qquad v_{\nu\mu} = 0 \qquad (\nu > n_\mu)$$

(Zeilen- und Spaltenfinitheit der Matrix $(v_{\nu\mu})$) und überdies

$$\text{(1.7)} \qquad \frac{1}{w} D^\nu w v_{\nu\mu} \in \mathbb{R}[x] \qquad (\nu, \mu \in \mathbb{N}_0).$$

Mit (es treten nur Glieder $\neq 0$ mit $\mu \leqq \partial q$ und $\nu \leqq n_\mu$ auf)

$$\text{(1.8)} \qquad Bq := \frac{1}{w} \sum_{(\nu,\mu)\in\mathbb{N}_0^2} (-1)^\nu D^\nu (w v_{\nu\mu} D^\mu q)$$

ist dann ein linearer Operator in $\mathbb{R}[x]$ definiert. Mit ihm und

$$\text{(1.9)} \qquad (p, q)_0 := \int_{\mathfrak{i}} w(x) p(x) q(x)\, dx$$

entsteht durch partielle Integration

$$\text{(1.10)} \qquad (p, q) = (p, Bq)_0 + \sum_{\mu=0}^{\partial q} \sum_{\nu=1}^{n_\mu} \sum_{\varkappa=0}^{\nu-1} (-1)^\varkappa p^{(\nu-\varkappa-1)} D^\varkappa (w v_{\nu\mu} q^{(\mu)}) \Big|_{\mathfrak{i}}.$$

Hier ist (1. 7) im Falle (C) stets erfüllt und es verschwinden alle ausintegrierten Terme. Im Falle (B) verschwinden jedenfalls die ausintegrierten Terme aus (1. 10) bei ∞, und (1. 7) bedeutet hier, daß $v_{\nu\mu}$ für $\alpha \neq 0$ in 0 eine Nullstelle von mindestens der Ordnung max (ν, μ) hat. Für $\alpha \neq 0$ verschwinden daher auch hier alle ausintegrierten Terme aus (1. 10). Im Falle (A) bedeutet (1. 7), daß $v_{\nu\mu}$ für $\alpha \neq 0$ bzw. $\beta \neq 0$ in 1 bzw. -1 mindestens eine Nullstelle der Ordnung max (ν, μ) hat. Daher verschwinden in (1. 10) für $\alpha \neq 0$ bzw. $\beta \neq 0$ die ausintegrierten Terme bei $+1$ bzw. -1.

Wir fordern jetzt im Falle (B) allgemein, daß $v_{\nu\mu}$ mit minimalem $\sigma \in \mathbb{N}_0$ für $\nu, \mu \in \mathbb{N}_0$ in 0 mindestens eine Nullstelle der Ordnung max $(\nu, \mu) - \sigma$ hat. Dann verschwinden in (1. 10) die ausintegrierten Terme bei 0 mit $\varkappa \leqq \nu - \sigma - 1$. *Alle* ausintegrierten Terme verschwinden also, wenn nur noch p in 0 eine Nullstelle mindestens der Ordnung σ hat. (Dies betrifft, wie oben gezeigt, nur $\alpha = 0$; für $\alpha \neq 0$ ist $\sigma = 0$). Wir fordern analog im Falle (A) allgemein, daß $v_{\nu\mu}$ mit minimalem $\sigma_+ \in \mathbb{N}_0$ bzw. $\sigma_- \in \mathbb{N}_0$ für $\nu, \mu \in \mathbb{N}_0$ in $+1$ bzw. -1 mindestens eine Nullstelle der Ordnung max $(\nu, \mu) - \sigma_+$ bzw. max $(\nu, \mu) - \sigma_-$ hat. Dann verschwinden in (1. 10) die ausintegrierten Terme bei $+1$ für $\varkappa \leqq \nu - \sigma_+ - 1$ bzw. bei -1 für $\varkappa \leqq \nu - \sigma_- - 1$. *Alle* ausintegrierten Terme bei $+1$ bzw. -1 verschwinden also, wenn nur noch p in $+1$ bzw. -1 mindestens eine Nullstelle der Ordnung σ_+ bzw. σ_- hat. (Dies betrifft, wie oben gezeigt, nur $\alpha = 0$ bzw. $\beta = 0$; für $\alpha \neq 0$ ist $\sigma_+ = 0$, für $\beta \neq 0$ ist $\sigma_- = 0$.)

Wir setzen im folgenden für $x \in \mathfrak{i}$ bzw.

(1. 11. A) $\quad w_0(x) := (1 - x^2), \quad w_1(x) := (1 - x)^{\sigma_+}(1 + x)^{\sigma_-}, \quad \sigma := \sigma_+ + \sigma_-,$

(1. 11. B) $\quad w_0(x) := x, \; w_1(x) := x^{\sigma},$

(1. 11. C) $\quad w_0(x) := 1, \; w_1(x) := 1, \; \sigma = 0.$

Dann gilt stets

(1. 12) $$\partial w_1 = \sigma.$$

Nun liefert in jedem Falle gerade für $m \in \mathbb{N}_0$

(1. 13) $$C_m := \frac{(-1)^m}{w} D^m w w_0^m w_1 D^m$$

Operatoren in $\mathbb{R}[x]$, die bezüglich (1. 9) symmetrisch sind, und mit denen im Falle (B) stets $C_m p$ in 0 mindestens eine Nullstelle der Ordnung σ und im Falle (A) stets $C_m p$ in $+1$ bzw. -1 mindestens eine Nullstelle der Ordnung σ_+ bzw. σ_- hat. Man hat überdies stets

(1. 14) $$\partial C_m p = \begin{cases} \partial p + \sigma & (\partial p \geqq m), \\ -\infty & (\partial p < m). \end{cases}$$

Nach diesen Überlegungen liefern nun in jedem Falle

(1. 15) $$A_m := C_m \circ B$$

für $m \in \mathbb{N}_0$ symmetrische Operatoren in $\mathbb{R}[x]$ bezüglich (1. 5).

Wir fordern nun weiter, daß mit einem

(1. 16) $$\varrho \in \mathbb{N}_0$$

für alle $p \in \mathbb{R}[x]$ gilt

(1. 17) $$\partial B p = \partial p + \varrho.$$

Dann gilt nach (1. 14), (1. 15) mit

$$(1.18)\qquad \tau := \varrho + \sigma$$

gerade

$$(1.19)\qquad \partial A_m p = \begin{cases} \partial p + \tau & (\partial p \geqq m - \varrho), \\ -\infty & (\partial p < m - \varrho). \end{cases}$$

Ist hier $\tau = 0$, also $\varrho = \sigma = 0$, so gilt für alle $p, q \in \mathbb{R}[x]$

$$(p, q) = (p, Bq)_0$$

und B ist offenbar bijektiv. Daher sind in diesem Falle die (klassischen) Orthogonalpolynome zu $(,)_0$ auch Orthogonalpolynome zu $(,)$. Hier erhält man also nichts Neues: dieser Fall kann als trivial betrachtet werden.

Als nächst einfacher Fall bietet sich entweder $\tau = 1$ oder, für den Fall, daß in (A) mit $\alpha = \beta$ oder in (C) die $v_{\nu\mu}$ mit $\nu + \mu$ gerade oder ungerade sind, also (1. 5), (1. 8), (1. 9), $\sigma = 2\sigma_+ = 2\sigma_-$, ϱ, (1. 13), (1. 15) gerade sind (wir nennen dies: „gerader Fall"), $\tau = 2$ an. Die zugehörigen Klassen von Orthogonalpolynomen nennen wir *einfache verallgemeinerte klassische Orthogonalpolynome.*

Will man sämtliche Möglichkeiten aufzählen, so ergeben sich für $\tau = 1$ entweder $\varrho = 0$, $\sigma = 1$ oder $\varrho = 1$, $\sigma = 0$ und für $\tau = 2$ im geraden Falle $\varrho = 0$, $\sigma = 2$ oder $\varrho = 2$, $\sigma = 0$. Da für (C) stets $\sigma = 0$ ist und für (B) kein gerader Fall existiert, ergeben sich 8 Klassen:

(I) (A), $\tau = 1$, $\varrho = 1$, $\sigma = 0$,

(II) (A), $\tau = 2$, $\varrho = 2$, $\sigma = 0$, gerader Fall,

(III) (A), $\tau = 1$, $\varrho = 0$, $\sigma = 1$,

(IV) (A), $\tau = 2$, $\varrho = 0$, $\sigma = 2$, gerader Fall,

(V) (B), $\tau = 1$, $\varrho = 1$, $\sigma = 0$,

(VI) (B), $\tau = 1$, $\varrho = 0$, $\sigma = 1$,

(VII) (C), $\tau = \varrho = 1$, $\sigma = 0$,

(VIII) (C), $\tau = \varrho = 2$, $\sigma = 0$, gerader Fall.

Wegen der Transformationsmöglichkeit $x \to -x$ nehmen wir in (III) nur den Fall $\sigma_+ = 1$, $\sigma_- = 0$ auf.

Wir notieren nun die Angaben für die 8 Klassen einfacher verallgemeinerter klassischer Orthogonalpolynome noch etwas detaillierter. Dabei wollen wir insbesondere die Möglichkeiten angeben, in denen jedes Glied in (1. 8) der Gradbedingung

$$(1.20)\qquad \partial \frac{1}{w} D^\nu w v_{\nu\mu} q^{(\mu)} \leqq \partial q + \varrho$$

für $\nu, \mu \in \mathbb{N}_0$ und alle $q \in \mathbb{R}[x]$ genügt, was speziell mit (1. 4)

$$(1.21.\,\mathrm{A})\qquad \partial v_{\nu\mu} \leqq \nu + \mu + \varrho$$

bzw.

$$(1.21.\,\mathrm{B})\qquad \partial v_{\nu\mu} \leqq \min(\nu, \mu) + \varrho$$

bzw.

$$(1.21.\,\mathrm{C})\qquad \partial v_{\nu\mu} \leqq -|\nu - \mu| + \varrho$$

bedeutet. Andererseits hat man nach dem oben hinsichtlich der Nullstellen in $+1$, -1 (A) oder 0 (B) Überlegten:

$$\partial v_{\nu\mu} \geqq 2 \cdot \max(\nu, \mu) - \sigma, \text{ falls } v_{\nu\mu} \neq 0 \tag{1.22.A}$$

bzw.

$$\partial v_{\nu\mu} \geqq \max(\nu, \mu) - \sigma, \text{ falls } v_{\nu\mu} \neq 0. \tag{1.22.B}$$

(1.21) und (1.22) ergeben mit $v_{\nu\mu} = v_{\mu\nu}$, daß in jedem Falle

$$|\nu - \mu| \leqq \tau, \text{ falls } v_{\nu\mu} \neq 0 \tag{1.23}$$

gilt. Offenbar muß dann in jedem Falle

$$v_{00}(x) = \begin{cases} b_0(1-x^2) + c_0 & (\varrho = 2), \\ b_0 x + c_0 & (\varrho = 1), \\ c_0 & (\varrho = 0) \end{cases} \tag{1.24}$$

sein und für $\nu \geqq 1$

$$v_{\nu\nu}(x) = w_0(x)^\nu w_1(x)^{-1} \cdot \begin{cases} b_\nu(1-x^2) + c_\nu & (\tau = 2), \\ b_\nu x + c_\nu & (\tau = 1), \end{cases} \tag{1.25}$$

$$v_{\nu,\nu-1}(x) = w_0(x)^\nu w_1(x)^{-1} \cdot \begin{cases} d_\nu x & (\tau = 2), \\ d_\nu & (\tau = 1), \end{cases} \tag{1.26}$$

und für $\nu \geqq 2$

$$v_{\nu,\nu-2}(x) = w_0(x)^\nu w_1(x)^{-1} e_\nu \qquad (\tau = 2) \tag{1.27}$$

gelten.

Damit hat man nun im einzelnen

(I): (A) mit α, β beliebig, $\sigma_+ = \sigma_- = 0$, $\varrho = 1$:

Das gibt mit (1.20) bis (1.27) speziell die Möglichkeiten

$$\begin{Bmatrix} v_{\nu\mu} = 0 \quad (|\nu - \mu| > 1) \\ v_{\nu\nu}(x) = (1-x^2)^\nu (b_\nu x + c_\nu) \\ v_{\nu,\nu-1}(x) = (1-x^2)^\nu d_\nu \end{Bmatrix} \qquad ((\nu, \mu) \in \mathbb{N}_0^2), \tag{1.28}$$

wobei die reellen Konstanten b_ν, c_ν, d_ν noch Zusatzbedingungen für die Positiv-Definitheit von (1.5) und für (1.17) unterliegen.

(II): (A) mit $\alpha = \beta$ beliebig, $\sigma_+ = \sigma_- = 0$, $\varrho = 2$, gerader Fall:

Das liefert mit (1.20) bis (1.27) speziell die Möglichkeiten

$$\begin{cases} v_{\nu\mu} = 0 \ (|\nu - \mu| > 2), \\ v_{\nu,\nu}(x) = (1-x^2)^\nu (b_\nu(1-x^2) + c_\nu) \\ v_{\nu,\nu-1}(x) = (1-x^2)^\nu d_\nu x & (\nu \geqq 1) \\ v_{\nu,\nu-2}(x) = (1-x^2)^\nu e_\nu & (\nu \geqq 2) \end{cases} \tag{1.29}$$

mit Zusatzbedingungen für die Konstanten b_ν, c_ν, d_ν, e_ν analog (I).

(III): (A) mit $\alpha = 0$, β beliebig, $\sigma_+ = 1$, $\sigma_- = 0$, $\varrho = 0$:

Das liefert mit (1. 20) bis (1. 27) speziell die Möglichkeiten

$$(1.30)\qquad \begin{cases} v_{\nu\mu} = 0 \quad (|\nu - \mu| > 1) \\ v_{00}(x) = c_0, \\ \left.\begin{aligned} v_{\nu\nu}(x) &= (1+x)^\nu (1-x)^{\nu-1}(b_\nu x + c_\nu) \\ v_{\nu,\nu-1}(x) &= (1+x)^\nu (1-x)^{\nu-1} d_\nu \end{aligned}\right\} \quad (\nu \geqq 1) \end{cases}$$

mit Zusatzbedingungen analog (I).

(IV): (A) mit $\alpha = \beta = 0$, $\sigma_+ = \sigma_- = 1$, $\varrho = 0$, gerader Fall:

Das liefert mit (1. 20) bis (1. 27) speziell die Möglichkeiten

$$(1.31)\qquad \begin{cases} v_{\nu\mu} = 0 \quad (|\nu - \mu| > 2), \\ v_{00}(x) = c_0, \\ \left.\begin{aligned} v_{\nu\nu}(x) &= (1-x^2)^{\nu-1}(b_\nu(1-x^2) + c_\nu) \\ v_{\nu,\nu-1}(x) &= (1-x^2)^{\nu-1} d_\nu x \end{aligned}\right\} \quad (\nu \geqq 1), \\ v_{\nu,\nu-2}(x) = (1-x^2)^{\nu-1} e_\nu \qquad (\nu \geqq 2) \end{cases}$$

mit Zusatzbedingungen analog (I).

(V): (B) mit α beliebig, $\sigma = 0$, $\varrho = 1$:

Das liefert mit (1. 20) bis (1. 27) speziell die Möglichkeiten

$$(1.32)\qquad \begin{cases} v_{\nu\mu} = 0 \quad (|\nu - \mu| > 1), \\ v_{\nu\nu}(x) = x^\nu (b_\nu x + c_\nu), \\ v_{\nu,\nu-1}(x) = x^\nu d_\nu \end{cases}$$

mit Zusatzbedingungen analog (I).

(VI): (B) mit $\alpha = 0$, $\sigma = 1$, $\varrho = 0$:

Das liefert mit (1. 20) bis (1. 27) speziell die Möglichkeiten

$$(1.33)\qquad \begin{cases} v_{\nu\mu} = 0 \quad (|\nu - \mu| > 1) \\ v_{00}(x) = c_0, \\ \left.\begin{aligned} v_{\nu\nu}(x) &= x^{\nu-1}(b_\nu x + c_\nu) \\ v_{\nu,\nu-1}(x) &= x^{\nu-1} d_\nu \end{aligned}\right\} \quad (\nu \geqq 1) \end{cases}$$

mit Zusatzbedingungen analog (I).

(VII): (C), $\varrho = 1$:

Das gibt mit (1. 20) bis (1. 27) die Möglichkeiten

$$(1.34)\qquad \begin{cases} v_{\nu\mu} = 0 \quad (|\nu - \mu| > 1) \\ v_{\nu\nu}(x) = b_\nu x + c_\nu, \\ v_{\nu,\nu-1}(x) = d_\nu \end{cases}$$

mit Zusatzbedingungen analog (I).

(VIII): (C), $\varrho = 2$:

Das gibt mit (1. 20) bis (1. 27) die Möglichkeiten

$$(1.35)\qquad \begin{cases} v_{\nu\mu} = 0 \quad (|\nu - \mu| > 2) \\ v_{\nu\nu}(x) = b_\nu x^2 + c_\nu, \\ v_{\nu,\nu-1}(x) = d_\nu x, \\ v_{\nu,\nu-2}(x) = e_\nu \end{cases}$$

mit Zusatzbedingungen analog (I).

Wir bemerken abschließend, daß Althammer [1], Gröbner [2], Schäfke [3] einen Spezialfall von (IV) und Brenner [4] einen Spezialfall von (VI) behandeln. Nach der detaillierten Aufzählung geben wir im folgenden eine gemeinsame Theorie aller einfachen verallgemeinerten klassischen Orthogonalpolynome. Wir sehen dabei von der speziellen Forderung (1. 20) und den Konsequenzen (1. 21), (1. 23) bis (1. 35) ab.

2. Theorie der einfachen verallgemeinerten klassischen Orthogonalpolynome

2. 1. Vorbemerkungen. Bezeichnungen. Wir setzen für $m \in \mathbb{N}_0$ in jedem Falle

$$(2.1)\qquad (p, q)_{(m)} := \int_{\mathfrak{i}} w(x)\,(w_0(x))^m w_1(x) p(x) q(x)\,dx;$$

dies gibt ein positiv-definites symmetrisches Skalarprodukt in $\mathbb{R}[x]$. Mit (2. 1) und (1. 9), (1. 13) wird dann stets

$$(2.2)\qquad (C_m p, q)_0 = (D^m p, D^m q)_{(m)}$$

und mithin

$$(2.3)\qquad (C_m p, p)_0 > 0 \qquad (\partial p \geqq m).$$

Mit (1. 5), (1. 8), (1. 10) und (1. 15) gibt das

$$(2.4)\qquad (A_m p, q) = (C_m B p, B q)_0 = (D^m B p, D^m B q)_{(m)}$$

und mithin

$$(2.5)\qquad (A_m p, p) > 0 \qquad (\partial p \geqq m - \varrho).$$

Mit T_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ bezeichnen wir im folgenden durch

$$(2.6)\qquad (T_n, T_k)_{(0)} = \delta_{nk}, \ \partial T_n = n$$

bis aufs Vorzeichen bestimmte Orthogonalpolynome zu (2. 1) mit $m = 0$. Mit diesen bilden wir die Polynome

$$(2.7)\qquad S_{n+\sigma} = w_1 \cdot T_n \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

vom Grad $n + \sigma$ und

$$(2.8)\qquad S_0 = 1, \text{ falls } \sigma = 1,$$

sowie

$$(2.9)\qquad S_0 = 1, \ S_1 = x, \text{ falls } \sigma = 2.$$

Wir benötigen dann die ersten beiden Koeffizienten der Orthogonalentwicklung der BS_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ nach den T_ν:

(2. 10) $$BS_n = \beta_n T_{n+\varrho} + \gamma_n T_{n+\varrho-\tau} + \cdots,$$

wobei formal $T_{-1} = T_{-2} = 0$ gesetzt seien. Die β_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ und γ_n $(n \in \sigma + \mathbb{N}_0)$ sind durch die (bekannten klassischen) Polynome T_n und durch B bzw. durch die hierin auftretenden Parameter bestimmt und als bekannt anzusehen. Einzelheiten zur Bestimmung dieser Konstanten seien später notiert.

2. 2. Erste (rekursive) Darstellung. Normierung. Seien in jedem Falle, zunächst noch nicht normiert, p_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ Orthogonalpolynome zu (1. 5). Wir bemerken dann, daß wegen (1. 17)

$$D^{n+\varrho} B p_n =: c_{1n} \neq 0 \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

Konstanten sind, und daß mit Konstanten $c_{2n} \neq 0$ für $n \in \mathbb{N}_0$

$$\frac{(-1)^{n+\varrho}}{w} D^{n+\varrho}(w w_1 w_0^{n+\varrho}) = c_{2n} S_{n+\tau}$$

(Rodrigues-Formel für $T_{n+\varrho}$ gemäß (2. 6) und (2. 7)) wird. Damit wird nun gerade

(2. 11) $$A_{n+\varrho} p_n = c_{1n} \cdot c_{2n} \cdot S_{n+\tau} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Andererseits gilt mit Konstanten $c_{3n} \neq 0$, $c_{4n} \neq 0$ gerade

(2. 12) $$A_{n+\varrho} p_n = c_{3n} p_{n+\tau} + c_{4n} p_n.$$

Man entwickelt nämlich nach den p_ν mit $\nu \leqq n + \tau$ und hat wegen (1. 19) von 0 verschiedene Koeffizienten von $p_{n+\tau}$ und wegen (2. 5) von 0 verschiedene Koeffizienten von p_n. Die Koeffizienten mit $\nu < n$ verschwinden wegen der Symmetrie von $A_{n+\varrho}$ und (1. 19); und im geraden Falle, $\tau = 2$, verschwindet der Koeffizient von p_{n+1}, weil $A_{n+\varrho}$ gerade ist und die p_ν mit ν gerade oder ungerade sind.

(2. 12) zeigt nun, daß bei bereits festgelegter Normierung von p_n die Normierung von $p_{n+\tau}$ durch die Festlegung $c_{3n} := -c_{4n}$ eindeutig möglich ist. Das gibt mit Konstanten $a_{n+\tau} \neq 0$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ gerade

(2. 13) $$p_{n+\tau} - p_n = a_{n+\tau} S_{n+\tau} \qquad (n \in \mathbb{R}_0).$$

Mit

(2. 14) $$p_0 := S_0$$

und

(2. 15) $$p_1 := S_1, \text{ falls } \tau = 2,$$

sind daher durch (2. 13) eindeutig normierte Orthogonalpolynome zu (1. 5) gegeben. Setzt man

(2. 16) $$a_0 := 1$$

und

(2. 17) $$a_1 := 1, \text{ falls } \tau = 2,$$

so entsteht mit (2. 8), (2. 9), (2. 14), (2. 15)

(2. 18) $$p_n = \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{\tau}\right]} a_{n-\nu\tau} S_{n-\nu\tau} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Aus (2. 13) entnimmt man insbesondere, daß für $n, m \in \mathbb{N}_0$

(2. 19) $$(S_n, S_m) \neq 0 \curvearrowright |n - m| = 0 \text{ oder } = \tau.$$

Man berechnet nun einfach

$$(S_{n+\tau}, S_n) = (S_{n+\tau}, BS_n)_0 = (T_{n+\varrho}, BS_n)_{(0)}$$

also

(2. 20) $$(S_{n+\tau}, S_n) = \beta_n \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

und

$$(S_n, S_n) = (S_n, BS_n)_0 = (T_{n-\sigma}, BS_n)_{(0)},$$

also

(2. 21) $$(S_n, S_n) = \gamma_n \qquad (n \in \mathbb{N}_0 + \sigma).$$

Wir definieren nun einfach

(2. 22) $$\gamma_0 := (S_0, S_0), \text{ falls } \sigma = 1 \text{ oder } \sigma = 2$$

und

(2. 23) $$\gamma_1 := (S_1, S_1), \text{ falls } \sigma = 2.$$

Dann erhält man aus (2. 18) mit $n \to n + \tau$ und Multiplikation mit S_n bezüglich (1. 5)

(2. 24) $$\beta_n a_{n+\tau} + \gamma_n a_n + \beta_{n-\tau} a_{n-\tau} = 0 \qquad (n \geqq \tau),$$

(2. 25) $$\beta_n a_{n+\tau} + \gamma_n a_n = 0 \qquad (0 \leqq n < \tau).$$

Damit lassen sich die a_n ausgehend von $a_0 = 1$ und, falls $\tau = 2$, $a_1 = 1$ über eine dreigliedrige Rekursion mit bekannten Koeffizienten bestimmen. Das gibt also insgesamt eine rekursive Bestimmung der p_n.

Wir bemerken noch, daß aus (2. 13) und (2. 20) nebst Zusatzverabredungen folgt

(2. 26) $$(p_n, p_n) = -a_n a_{n+\tau} \beta_n \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Bezeichnet man die Hauptkoeffizienten von S_n und p_n mit s_n bzw. k_n, so gilt natürlich

(2. 27) $$k_n = a_n s_n \qquad (n \in \mathbb{R}_0).$$

Wir bemerken noch, daß unsere Normierung

(2. 28) $$p_n(1) = 1 \text{ für (III) und (IV)}$$

und

(2. 29) $$p_n(0) = 1 \text{ für (VI)}$$

bedeutet. In diesen Fällen ist nämlich $w_1(1) = 0$ bzw. $w_1(0) = 0$, also $S_{n+\tau}(1) = 0$ bzw. $S_{n+\tau}(0) = 0$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Das aber gibt mit $p_0 = 1$ für (III) und (IV), $p_1 = x$ für (IV) und $p_0 = 1$ für (VI) die Behauptung.

2. 3. Zweite Darstellung. Entwickelt man

$$Bp_n = \sum_{\nu=0}^{n+\varrho} \gamma_{n\nu} T_\nu \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

so hat man

$$\gamma_{n\nu} = (Bp_n, T_\nu)_{(0)} = (Bp_n, S_{\nu+\sigma})_0 = (p_n, S_{\nu+a}),$$

also

$$\gamma_{n\nu} = \begin{cases} 0 \quad (\nu - n \text{ ungerade, falls } \tau = 2) \text{ oder } (\nu + \sigma < n), \\ (p_n, S_{n+\tau}) = \dfrac{-1}{a_{n-\tau}}(p_n, p_n) \qquad (\nu = n + \varrho), \\ (p_n, S_n) = \dfrac{1}{a_n}(p_n, p_n) \qquad (0 \leq \nu = n + \varrho - \tau). \end{cases}$$

Das gibt mit (2. 26), $T_{-1} = T_{-2} = 0$, für $n \in \mathbb{N}_0$

$$(2.30) \qquad Bp_n = \beta_n(a_n T_{n+\varrho} - a_{n+\tau} T_{n+\varrho-\tau})$$

oder, da B nach (1. 17) jedenfalls injektiv ist,

$$(2.31) \qquad p_n = \beta_n B^{-1}(a_n T_{n+\varrho} - a_{n+\tau} T_{n+\varrho-\tau}).$$

2. 4. Dreigliedrige Rekursion. Offenbar gilt nach (1. 13), (1. 15)

$$A_0 = w_1 B.$$

Multipliziert man (2. 30) mit w_1 und benutzt noch (2. 7), sowie (2. 13) bzw. (2. 18) mit den Zusatzverabredungen, so entsteht

$$(2.32) \qquad A_0 p_n = \begin{cases} \beta_n \dfrac{a_n}{a_{n+\tau}}(p_{n+\tau} - p_n) \quad (n = \varrho = 0) \text{ oder } (\tau = 2, \varrho = 0, n = 1) \\ \beta_n \left(\dfrac{a_n}{a_{n+\tau}}(p_{n+\tau} - p_n) - \dfrac{a_{n+\tau}}{a_n}(p_n - p_{n-\tau})\right) \quad (\text{sonst}), \end{cases}$$

$(p_{-1} = p_{-2} = 0)$, woraus man natürlich die Werte $(A_0 p_n, p_\nu)$ ablesen kann.

2. 5. Explizite Darstellung der a_n.

2. 5. 1. *Prinzip.* (2. 30) kann man zur Gewinnung von Formeln zur expliziten Darstellung der a_n auf folgende Weise benutzen: Hat man eine lineare Abbildung $\lambda: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\lambda(Bp_n) = 0 \qquad (n = n_0, n_0 + \tau, n_0 + 2\tau, \ldots), \quad \lambda(T_{n_0+\varrho-\tau}) \neq 0,$$

so gilt nach (2. 30) offenbar

$$a_n = \frac{\lambda(T_{+n\varrho-\tau})}{\lambda(T_{n_0+\varrho-\tau})} a_{n_0} \qquad (n = n_0, n_0 + \tau, n_0 + 2\tau, \ldots).$$

2. 5. 2. *Der Fall* $\varrho = 0$. Hier kann man

$$\lambda(p) := (B^{-1}p, S_{n_0-\tau}) \quad \text{und} \quad n_0 := \tau$$

für $\tau = 1$ oder $\tau = 2$ und zusätzlich $n_0 := 3$ für $\tau = 2$ wählen. Man entnimmt nun aus (2. 25), (2. 22), (2. 23)

$$a_{n_0} = -\frac{1}{\beta_{n_0-\tau}}(S_{n_0-\tau}, S_{n_0-\tau})$$

und aus (2. 10) andererseits

$$(B^{-1} T_{n_0-\tau}, S_{n_0-\tau}) = \frac{1}{\beta_{n_0-\tau}}(S_{n_0-\tau}, S_{n_0-\tau}).$$

Danach gilt also

$$(2.33) \qquad a_n = -(B^{-1} T_{n-\tau}, S_{n_0-\tau}) \qquad (n = n_0, n_0 + \tau, n_0 + 2\tau, \ldots).$$

Zur weiteren Auswertung dieser Darstellung wird nun (1. 10) herangezogen, wobei hier links nur die Terme mit $\varkappa = \nu - 1$ verbleiben. Es entsteht

$$(*) \qquad a_n = -(T_{n-\tau}, S_{n_0-\tau})_0 - \sum_{\mu=0}^{\cdots} \sum_{\nu=1}^{\cdots} (-1)^{\nu-1} S_{n_0-\tau} D^{\nu-1} w v_{\nu\mu} D^{\mu} B^{-1} T_{n-\tau} |_{\mathrm{i}}.$$

Wir setzen nun für die in Frage kommenden Fälle

$$\begin{aligned} &(\mathrm{III}) && \varepsilon := 1, \quad \eta := -2^{\beta}, \\ &(\mathrm{IV}) && \varepsilon := 1, \quad \eta := -2, \\ &(\mathrm{VI}) && \varepsilon := 0, \quad \eta := 1. \end{aligned}$$

Es kann ferner

$$(2.34) \qquad T_{n-\tau} = \frac{1}{w} D w U_{n-\tau+\varepsilon}$$

gesetzt werden. $U_{n-\tau+\varepsilon}$ ist dabei als Polynom vom Grad $n - \tau + \varepsilon$ eindeutig bestimmt, wenn man noch für (IV) verlangt, daß es gerade bzw. ungerade ist und im geraden Falle $(U_{n-\tau+\varepsilon}, 1)_0 = 0$ gilt, und für (III) $U_{n-\tau+\varepsilon}(-1) = 0$ fordert. Es entsteht dann in jedem Falle direkt oder durch partielle Integration

$$(**) \qquad (T_{n-\tau}, S_{n_0-\tau})_0 = w U_{n-\tau+\varepsilon} S_{n_0-\tau} |_{\mathrm{i}}.$$

Weiter kann nun in jedem Falle B_1 mit

$$(2.35) \qquad B \frac{1}{w} D w = \frac{1}{w} D w B_1, \qquad B^{-1} \frac{1}{w} D w = \frac{1}{w} D w B_1^{-1}$$

bestimmt werden, und zwar im Falle (III) eindeutig als bijektiver graderhaltender Endomorphismus auf dem Unterraum der bei -1 verschwindenden Polynome $\left(w = (x+1)^{\beta}\right)$, im Falle (VI) eindeutig als bijektiver graderhaltender Endomorphismus von $\mathbb{R}[x]$ und im Falle (IV) (nicht eindeutig) als gerader bijektiver graderhaltender Endomorphismus von $\mathbb{R}[x]$ bestimmt werden. Wie dazu (1. 8) zeigt, kann

$$(2.36) \qquad B_1 = B_{10} + B_{11}$$

mit

$$(2.37) \qquad B_{11} = \frac{1}{w} \sum_{(\nu,\mu)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N}_0} (-1)^{\nu} D^{\nu-1} w v_{\nu\mu} D^{\mu} \frac{1}{w} D w$$

gewählt werden, wobei dann B_{10} entsprechend nur aus den Gliedern mit $\nu = 0$ bestimmt wird. Man erhält im Falle (III), (1. 30)

$$(2.38.\ \mathrm{III}) \qquad B_{10} = c_0 + d_1 (x+1)^2 D \frac{1}{x+1},$$

im Falle (IV), (1. 31)

$$(2.38.\ \mathrm{IV}) \qquad B_{10} = (c_0 - d_1 - 2e_2) + (d_1 + 2e_2) x D + e_2 (1 - x^2) D^2$$

und im Falle (VI), (1. 33)

$$(2.38.\ \mathrm{VI}) \qquad B_{10} = c_0 + d_1 D.$$

Man erkennt nun mit $(*)$, $(**)$, (2. 37) gerade

$$a_n = \eta [U_{n-\tau+\varepsilon}(\varepsilon) - B_{11} B_1^{-1} U_{n-\tau+\varepsilon}(\varepsilon)],$$

also schließlich

$$(2.39) \qquad a_n = \eta B_{10} B_1^{-1} U_{n-\tau+\varepsilon}(\varepsilon).$$

2. 5. 3. *Der Fall* $\sigma = 0$. Hier führt die folgende (linear-algebraische) Überlegung zum Ziel: Ist $\tau = \varrho = 1$, so gibt es nach (1. 17) zu jedem $p \in \mathbb{R}[x]$ genau ein $\zeta(p) \in \mathbb{R}$ mit

$$p - \zeta(p)\, T_0 \in B\mathbb{R}[x].$$

Ist $\tau = \varrho = 2$, so gibt es zu jedem $p \in \mathbb{R}[x]$ genau ein $\zeta(p) \in \mathbb{R}$ und ein $\eta(p) \in \mathbb{R}$ mit

$$p - \zeta(p)\, T_0 - \eta(p)\, T_1 \in B\mathbb{R}[x].$$

Man kann nun für $\tau = 1$ und $\tau = 2$, in 2. 5. 1, $n_0 := 0$, $\lambda := \zeta$ und im Falle $\tau = 2$ zusätzlich $n_0 := 1$, $\lambda := \eta$ wählen. Man hat dann stets $a_{n_0} = \lambda(T_{n_0}) = 1$ und so in jedem Falle

$$a_n = \lambda(T_n). \tag{2. 40}$$

λ kann als mit B bekannt gelten.

2. 6. Eine Umrechnung für $\varrho = 0$. Für $\varrho = 0$ kann der „klassische Fall"

$$v_{00} = c_0 = 1, \qquad v_{\nu\mu} = 0 \quad ((\nu, \mu) \neq (0, 0))$$

eingeschlossen werden. Dann ist

$$(\ ,\ ) = (\ ,\ )_0 \quad \text{und} \quad B = B_1 = B_{10} = E.$$

Bezeichnet man die hierauf bezüglichen Größen mit oberem Index ^{0}, so wird gemäß (2. 18)

$$a_n^0 S_n = p_n^0 - p_{n-\tau}^0 =: \hat{S}_n. \tag{2. 41}$$

Rechnet man daher für die Darstellung im allgemeinen Fall

$$a_n S_n = \hat{a}_n \hat{S}_n \tag{2. 42}$$

um, so wird

$$a_n = a_n^0 \hat{a}_n. \tag{2. 43}$$

Zur Bestimmung von a_n^0 kann (2. 39) herangezogen werden. Man erhält

$$a_n^0 = -(T_{n-\tau}, S_{n_0-\tau})_0 = \eta\, U_{n-\tau+\varepsilon}(\varepsilon).$$

Das gibt nun zusammen mit (2. 43)

$$\hat{a}_n = B_{10} B_1^{-1} \hat{U}_{n-\tau+\varepsilon}(\varepsilon) \tag{2. 44}$$

mit

$$\hat{U}_{n-\tau+\varepsilon}(x) = \frac{1}{U_{n-\tau+\varepsilon}(\varepsilon)}\, U_{n-\tau+\varepsilon}(x). \tag{2. 45}$$

Speziell erhält man

$$p_n^0 = P_n, \quad \hat{U}_m = P_m \qquad \text{(Fall (IV))}$$

und

$$p_n^0 = L_n, \quad \hat{U}_m = L_m \qquad \text{(Fall (VI))}.$$

(2. 45) kann auch $U_{n-\tau+\varepsilon} = \frac{1}{\eta} a_n^0 \hat{U}_{n-\tau+\varepsilon}$ geschrieben werden. Definiert man daher

$$\hat{T}_{n-\tau} := \frac{1}{\eta} \frac{1}{w} D w \hat{U}_{n-\tau+\varepsilon}, \tag{2. 46}$$

so wird gemäß (2. 34)

$$T_{n-\tau} = a_n^0 \hat{T}_{n-\tau}, \tag{2. 47}$$

also

$$\hat{S}_n = (a_n^0)^2 w_1 \hat{T}_{n-\tau}. \tag{2. 48}$$

Nun kann man mit (2. 43) und (2. 47) Formel (2. 30) umrechnen zu

$$B p_n = \hat\beta_n(\hat a_n \hat T_n - \hat a_{n+\tau} \hat T_{n-\tau}),$$

wobei nach (2. 20)

$$\hat\beta_n = \beta_n a_n^0 a_{n+\tau}^0 = (\hat S_{n+\tau}, \hat S_n) \tag{2. 49}$$

wird. Mit

$$\hat\gamma_n = \gamma_n (a_n^0)^2 = (\hat S_n, \hat S_n) \tag{2. 50}$$

wird natürlich (2. 24), (2. 25) zu

$$\begin{aligned} &\hat\beta_n \hat a_{n+\tau} + \hat\gamma_n \hat a_n + \hat\beta_{n-\tau}\hat a_{n-\tau} = 0 && (n \geqq \tau), \\ &\hat\beta_n \hat a_{n+\tau} + \hat\gamma_n \hat a_n = 0 && (0 \leqq n < \tau). \end{aligned} \tag{2. 51}$$

2. 7. Nullstellen.

2. 7. 1. *Der Fall* $\varrho = 0$. Wir setzen wie in 2. 5 für die drei in Frage kommenden Fälle

(III) $\varepsilon := 1, \quad \eta := -2^\beta$

(IV) $\varepsilon := 1, \quad \eta := -2$

(VI) $\varepsilon := 0, \quad \eta := 1$

und führen den Operator

$$\hat B := \frac{1}{w} \sum_\mu \sum_{\nu \geqq 1} (-1)^{\nu-1} D^{\nu-1} w v_{\nu\mu} D^\mu \tag{2. 52}$$

ein, wobei zur Interpretation wie bei (1. 8), (1. 10) zu verfahren ist. (1. 10) ergibt dann mit den Bemerkungen von **1.** bezüglich σ bzw. σ_+, σ_- und mit $p_n(\varepsilon) = 1$ die Identität

$$(p_n, B^{-1}q) = (p_n, q)_0 - \eta \hat B B^{-1} q(\varepsilon) \tag{2. 53}$$

für $q \in \mathbb{R}[x]$. Diese Identität kann dazu dienen, hinreichende Bedingungen dafür zu gewinnen, daß p_n in $\mathfrak{i}$ genau n einfache Nullstellen hat. Wir zeigen:

Satz. *Gilt*

(III) $\quad (\hat B B^{-1}(x-1)^\nu)(1) \geqq 0 \qquad (\nu \in \mathbb{N}_0)$

bzw.

(IV) $\quad \begin{cases} (\hat B B^{-1}(x^2-1)^\nu)(1) \geqq 0 \\ (\hat B B^{-1}x(x^2-1)^\nu)(1) \geqq 0 \end{cases} \qquad (\nu \in \mathbb{N}_0)$

bzw.

(VI) $\quad (\hat B B^{-1}(-x)^\nu)(0) \leqq 0 \qquad (\nu \in \mathbb{N}_0),$

so hat p_n *in* $\mathfrak{i}$ *genau* n *einfache Nullstellen* $(n \in \mathbb{N}_0)$.

Andernfalls gäbe es ein Polynom q mit $\partial q \leqq n-1$, das im Falle (IV) mit n gerade bzw. ungerade ist, das als einfache Nullstellen genau die Zeichenwechselstellen von p_n in $\mathfrak{i}$ hat und $q(\varepsilon) > 0$ erfüllt. Dies läßt sich jeweils als Linearkombination der in den Bedingungen auftretenden Polynome mit nicht-negativen Koeffizienten schreiben. Man hat daher stets

$$-\eta \hat B B^{-1} q(\varepsilon) \geqq 0.$$

Dies aber führt mit $(p_n, q)_0 > 0$ und $(p_n, B^{-1}q) = 0$ zum Widerspruch zu (2. 53).

Die angegebenen Bedingungen sollen hier nicht weiter ausführlich diskutiert werden. Wir geben nur an, daß man damit leicht im Falle (IV) für (1. 31) mit

$$c_0 = 1,\ b_1 = 0,\ c_1 \geqq 0,\ 0 \leqq d_1 < 1 \text{ und } b_\nu = c_\nu = d_\nu = e_\nu = 0 \qquad (\nu \geqq 2)$$

sowie im Falle (VI) für (1. 33) mit

$$c_0 = 1,\ b_1 = 0,\ c_1 \geqq 0,\ 0 \geqq d_1 > -1 \text{ und } b_\nu = c_\nu = d_\nu = 0 \qquad (\nu \geqq 2)$$

zum Ziel kommt. Dies umfaßt die bisher bekannten Resultate.

2. 7. 2. *Der Fall* $\sigma = 0$. Wie schon in 2. 5. 3 überlegt, gibt es eine lineare Abbildung $\lambda : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, daß sich, falls $\varrho = 1$ jedes $q \in \mathbb{R}[x]$, falls $\varrho = 2$ jedes gerade oder ungerade $q \in \mathbb{R}[x]$ mit einem (falls $\varrho = 2$ mit q geraden oder ungeraden) $q_1 \in \mathbb{R}[x]$ mit

$$q = Bq_1 + \lambda(q)\, T_{n_0(q)} \tag{2. 54}$$

darstellen läßt. Dabei wird

$$n_0(q) = 0 \qquad \begin{cases} (\varrho = 1) \\ (\varrho = 2,\ q \text{ gerade}) \end{cases}$$

$$n_0(q) = 1 \qquad (\varrho = 2,\ q \text{ ungerade})$$

gesetzt. Rechnet man hiermit

$$(p_n, q)_0 = (p_n, Bq_1)_0 + \lambda(q)\,(p_n, T_{n_0(q)})_0$$

und beachtet (1. 10) sowie $a_{n_0(q)} = 1$, so entsteht $(p_n, q)_0 = (p_n, q_1) + \lambda(q)$. Wegen $\partial q_1 = \partial q - \varrho$ folgt daher

$$(p_n, q)_0 = \lambda(q) \qquad (q \in \mathbb{R}[x],\ \partial q \leqq n). \tag{2. 55}$$

Dies kann, falls $\mathfrak{i} \neq \mathbb{R}$, zur Gewinnung hinreichender Bedingungen dafür dienen, daß die p_n in $\mathfrak{i}$ genau n einfache Nullstellen haben. Wir zeigen

Satz. *Gilt in den Fällen*

(I) $\quad \lambda((x-1)^\nu) \geqq 0 \qquad (\nu \in \mathbb{N}_0)$

(II) $\quad \begin{cases} \lambda((x^2-1)^\nu) \geqq 0 \\ \lambda(x(x^2-1)^\nu) \geqq 0 \end{cases} \qquad (\nu \in \mathbb{N}_0)$

bzw.

(V) $\quad \lambda((-x)^\nu) \geqq 0 \qquad (\nu \in \mathbb{N}_0),$

so hat p_n *in* $\mathfrak{i}$ *genau* n *einfache Nullstellen* $(n \in \mathbb{N}_0)$.

Andernfalls — das ist nur für $n \geqq \varrho$ interessant — gäbe es ein — im Falle (II) zugleich mit n gerades bzw. ungerades — $0 \neq \tilde{q} \in \mathbb{R}[x]$ mit $\partial\tilde{q} \leqq n - \varrho$, das genau die Zeichenwechselstellen von p_n in $\mathfrak{i}$ zu einfachen Nullstellen hat. Man beachtet nun, daß T_n n einfache Nullstellen in $\mathfrak{i}$ hat und daher als Linearkombination der in den jeweiligen Bedingungen auftretenden Polynome mit nicht-negativen Koeffizienten dargestellt werden kann. Daher gilt, nach (2. 40), $a_n \geqq 0$ $(n \in \mathbb{N}_0)$. Damit kann auch p_n als entsprechende Linearkombination mit nicht-negativen Koeffizienten dargestellt werden. Entsprechendes gilt mit geeigneter Normierung für $\tilde{q}$, so daß man $p_n(x)\tilde{q}(x) \geqq 0$ $(x \in \mathfrak{i})$ hat. Bildet man nun

(I) $\quad q(x) = (1-x)\tilde{q}(x)$

bzw.

(II) $\quad q(x) = (1-x^2)\tilde{q}(x)$

bzw.

(V) $\quad q(x) = x\tilde{q}(x),$

so hat man

$$p_n(x)q(x) \geqq 0 \quad (x \in \mathfrak{i}) \text{ und } \partial q \leqq n$$

sowie nach Konstruktion und Voraussetzung $\lambda(q) \leqq 0$. Das aber gibt mit (2. 55) und $(p_n, q)_0 > 0$ einen Widerspruch.

Wir verzichten wieder auf eine ausführliche Diskussion dieser hinreichenden Bedingungen. Wir geben nur an, daß man damit im Falle (II) für (1. 29) mit

$$c_0 = 0, \quad b_0 = 1, \quad 0 \leqq d_1 < \frac{1}{2\alpha + 3}, \quad c_1 \geqq b_1\left(1 + \frac{1}{2\alpha + 3}\right) \geqq 0,$$
$$b_\nu = c_\nu = d_\nu = e_\nu = 0 \qquad (\nu \geqq 2)$$

und im Falle (V) für (1. 32) mit

$$c_0 = 0, \quad b_0 = 1, \quad -1 < d_1 \leqq 0, \quad b_1 = 0, \quad c_1 \geqq 0, \quad b_\nu = c_\nu = d_\nu = 0 \qquad (\nu \geqq 2)$$

zum Ziel kommt.

3. Bemerkungen

3. 1. Zu (1. 6) bis (1. 10). Obwohl naheliegend, sind hier einige Erläuterungen angezeigt:

In (1. 5) besteht in den Fällen (A) und (B) bei der Produktaufspaltung $w(x) \cdot v_{\nu\mu}(x)$ eine gewisse Freiheit, die für (A) möglichen Veränderungen von α oder β, bei (B) von α um ganze Zahlen entspricht. So kann jedenfalls stets $-1 < \alpha \leqq 0$, $-1 < \beta \leqq 0$ erreicht werden, was jedoch nicht immer zweckmäßig sein wird (vgl. (1. 17)).

Will man überhaupt partielle Integration gemäß (1. 10) ermöglichen, so muß man einerseits, um stets — ohne notwendige Konvergenzüberlegungen — mit endlich vielen Gliedern auszukommen, offenbar (1. 6) annehmen und andererseits stets $D^\nu w v_{\nu\mu}$ über $\mathfrak{i}$ integrabel voraussetzen, was natürlich nur für (A) oder (B) und nicht ganzes α bzw. β eine Forderung ist. Die obige Bemerkung über die Aufspaltung $w \cdot v_{\nu\mu}$ zeigt dann, daß stets (1. 7) erreichbar ist.

(1. 6) bis (1. 10) enthalten also hinsichtlich des Ziels der partiellen Integration keine überflüssigen Annahmen.

3. 2. Mögliche Transformationen von (1. 5). Wir erläutern dies an einem Spezielfall und betrachten dazu den Fall (IV) mit $v_{\nu\mu} = 0$ ($\nu \geqq 2$ oder $\mu \geqq 2$). Hier wird

$$Bq = (v_{00} - v'_{10})q - D(v_{11}Dq).$$

(1. 17) mit $\varrho = 0$ liefert jedenfalls $\partial v_{11} \leqq 2$, $\partial(v_{00} - v'_{10}) = 0$. (1. 10) wird zu

$$(p, q) = (p, Bq)_0 + v_{10}(1)\left(p(1)q(1) + p(-1)q(-1)\right)$$
$$+ v_{11}(1)\left(p(1)q'(1) - p(-1)q'(-1)\right).$$

Dies zeigt, daß (1. 5) hier nur von $v_{00} - v'_{10}$, v_{11} und $v_{10}(1)$ abhängt. So liefern

$$\tilde{v}_{11}(x) := v_{11}(x), \qquad \tilde{v}_{10}(x) := v_{10}(1) \cdot x, \qquad \tilde{v}_{00} := v_{00} - v'_{10} + v_{10}(1)$$

das gleiche Skalarprodukt, wobei für diese „Normalform"

$$\partial v_{00} = 0, \qquad \partial\tilde{v}_{10} \leqq 1, \qquad \partial\tilde{v}_{11} \leqq 2,$$

also (1. 20) gilt.

3. 3. Zur Definitheit. Vielleicht sollte aufgewiesen werden, daß z. B. bei (VII), $\varrho = 1$, (1. 34) Positiv-Definitheit von (1. 5) möglich ist. Dazu kann man etwa von der positiv-definiten Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ausgehen und mit $b_0 = 0$, $c_0 = 1$, $d_1 = 1$, $b_1 = 0$, $c_1 = 2$ und $v_{\nu\mu} = 0$ ($\nu \geqq 2$ od. $\mu \geqq 2$) (1. 34) betrachten. Damit ist offenbar (1. 5) positiv-definit. Andererseits erfüllt

$$Bq = (1 + x) \cdot q - \frac{1}{w} D(wDq)$$

offenbar (1. 17) mit $\varrho = 1$.

3. 4. Zu den Nullstellen. Daß ohne spezielle Voraussetzungen — wie in 2. 7 — über die Lage der Nullstellen nichts ausgesagt werden kann, sondern alle Möglichkeiten offen sind, zeigen einfachste Beispiele. Wir betrachten (IV), (1. 31) mit

$$v_{00} = 1, \quad v_{10} = d_1 x, \quad v_{11} = c_1, \quad v_{\nu\mu} = 0 \qquad (\nu \geqq 2 \text{ oder } \mu \geqq 2).$$

Für die Positiv-Definitheit von (1. 5) reicht dann $c_1 > d_1^2$ und für (1. 17) $d_1 \neq 1$. Man hat nämlich $B = (1 - d_1) - c_1 D^2$. Man bestimmt nun, z. B. im Anschluß an 2. 6,

$$p_2 = \frac{\frac{3}{2}}{1 - d_1}(x^2 - 1) + 1$$

und erkennt daran, daß für $d_1 > 1$ die Nullstellen von p_2 außerhalb $(-1, 1)$ liegen, daß 0 für $d_1 = -\frac{1}{2}$ Doppelnullstelle ist und für $d_1 < -\frac{1}{2}$ keine reelle Nullstelle existiert.

Literatur

[1] *P. Althammer*, Eine Erweiterung des Orthogonalitätsbegriffs bei Polynomen und dessen Anwendung auf die beste Approximation, J. reine angew. Math. **211** (1962), 192—204.

[2] *W. Gröbner*, Orthogonale Polynomsysteme, die gleichzeitig mit $f(x)$ auch deren Ableitung $f'(x)$ approximieren, Funktionalanalysis, Approximationstheorie, Numerische Mathematik (Oberwolfach 1965), 24—32 Basel 1967.

[3] *F. W. Schäfke*, Zu den Orthogonalpolynomen von Althammer, J. reine angew. Math. **252** (1972), 195—199.

[4] *J. Brenner*, Über eine Erweiterung des Orthogonalitätsbegriffs bei Polynomen in einer und zwei Veränderlichen, Dissertation Stuttgart 1969.

[5] *J. Blankenagel*, Anwendungen adjungierter Polynomoperatoren, Dissertation Köln 1971.

Fachbereich Mathematik der Universität, 775 Konstanz, Postfach 733

Eingegangen 4. Mai 1973