*Offprint from "Archive for Rational Mechanics and Analysis",
Volume 45, Number 2, 1972, P. 134–142
© by Springer-Verlag 1972
Printed in Germany*

Integralrelationen Mathieuscher Funktionen

GERHARD WOLF

Vorgelegt von J. MEIXNER

0. Einleitung

Bei der Entwicklung ebener Wellen $e^{ik(x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha)}$ — oder auf elliptische Koordinaten

$$h := \frac{kc}{2}; x_1 \pm ix_2 = c \cdot \cosh(z \pm it); c \neq 0$$

transformiert: $e^{2ih(\cosh z \cos t \cos \alpha + \sinh z \sin t \sin \alpha)}$ — treten Integralrelationen zwischen Mathieuschen Funktionen mit obigen Funktionen als Kern auf, die sich teilweise bei MCLACHLAN [3], CAMPBELL [1] and MEIXNER & SCHÄFKE [4] finden. Wir werden die bekannten Relationen im ersten Abschnitt so verallgemeinern, daß sich alle oben genannten daraus ergeben, sowie dann im zweiten Abschnitt durch einfache Überlegungen unter anderen diejenigen reellen Integrale von SIPS [6] erhalten, die den Integralen von Weber-Schafheitlin für Bessel-Funktionen entsprechen. Die Herleitung der Formel wird für beliebige komplexe Parameter auf funktionentheoretischer Grundlage gegeben, so daß die reellen Integrale als Grenzfälle im größeren Zusammenhang gesehen werden können. In den Bezeichnungen der Mathieuschen Funktionen schließen wir bei MEIXNER & SCHÄFKE [4] an.

1. Eine allgemeine Integralrelation

Aufgrund des asymptotischen Verhaltens der Lösungen der Mathieuschen Differentialgleichung ([4], 2.42) sind die Integrale für $h \in \mathbb{C} - \{0\}$

$$(1.1) \quad \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}_\rho} e^{2ihw(z, t, \alpha)} y_\nu(t) dt \quad (\rho = 3, 4)$$

mit

$$w(z, t, \alpha) := \cosh z \cos t \cos \alpha + \sinh z \sin t \sin \alpha,$$

einer Lösung y_ν der Mathieuschen Differentialgleichung zu den Parameterwerten $(\lambda, (h^2), h^2)$ und den Wegen

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_3: & \text{ von } -\xi + i\infty \text{ nach } \eta - i\infty \\ \mathbb{C}_4: & \text{ von } \eta - i\infty \text{ nach } 2\pi - \xi + i\infty \end{aligned} \quad (\xi, \eta \in \mathbb{R})$$

für $z \in \mathfrak{G}_\xi(\alpha) \cap \mathfrak{G}_\eta(-\alpha)$ ($\mathfrak{G}_\xi(\alpha) := \{z | -\xi < \arg [h(\cosh(z + i\alpha) \pm 1)] < \pi - \xi\}$) konvergent und gemäß eines Satzes über Integralrelationen ([4], S. 33) holomorphe Lösungen der modifizierten Mathieschen Differentialgleichung (zu $\lambda_\nu(h^2), h^2$). Entsprechendes gilt für das Integral

$$(1.2) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{C}_1} e^{2ihw(z,t,\alpha)} y_\nu(t) dt$$

in $\mathfrak{G}_\xi(\alpha)$ mit $\mathfrak{C}_1$: von $-\xi + i\infty$ nach $2\pi - \xi + i\infty$.

Um festzustellen, um welche Lösungen der modifizierten Mathieschen Differentialgleichung es sich handelt, bezeichnen wir zunächst mit $I_{y_\nu}^{(\rho)}(z; \alpha)$ ($\rho = 1; 3, 4$) die aus den Integralen (1.2) und (1.1) durch die analytische Fortsetzung für verschieden ξ, η hervorgehenden ganzen Funktionen. Man hat

$$(1.3) \quad I_{y_\nu}^{(1)} = \frac{1}{2}(I_{y_\nu}^{(3)} + I_{y_\nu}^{(4)}).$$

Für $y_\nu = me_\nu$ (=Floquetsche Lösung zum charakteristischen Exponenten ν) verifiziert man aus den Beziehungen

$$\begin{aligned} w(z, t, \alpha) &= w(i\alpha, t, -iz) \\ z \in \mathfrak{G}_\xi(\alpha) &\rightsquigarrow i\alpha \in \mathfrak{G}_\xi(-iz), \end{aligned}$$

sowie mit Hilfe des Identitätssatzes für holomorphe Funktionen

$$(1.4) \quad I_{me_\nu}^{(1)}(z; \alpha) = I_{me_\nu}^{(1)}(i\alpha; -iz)$$

und aus

$$\begin{aligned} w(z + i\pi, t, \alpha) &= w(z, t - \pi, \alpha) \\ z + i\pi \in \mathfrak{G}_\xi(\alpha) &\rightsquigarrow z \in \mathfrak{G}_{(\xi+\pi)}(\alpha) \end{aligned}$$

entsprechend (Substitution $t \rightarrow t + \pi$ im Integral)

$$(1.5) \quad I_{me_\nu}^{(1)}(z + i\pi; \alpha) = e^{i\nu\pi} I_{me_\nu}^{(1)}(z; \alpha).$$

Der Vergleich mit dem Fundamentalsystem $M_\nu^{(1)}, M_\nu^{(2)}$ (vgl. [4]) der modifizierten Mathieschen Differentialgleichung ergibt

$$I_{me_\nu}^{(1)}(z; \alpha) = C_\nu(\alpha) \cdot M_\nu^{(1)}(z)$$

und zusammen mit (1.4) und $me_\nu(\alpha) = \text{konst. } M_\nu^{(1)}(i\alpha)$

$$(1.6) \quad I_{me_\nu}^{(1)}(z; \alpha) = c_\nu me_\nu(\alpha) M_\nu^{(1)}(z).$$

Wie bei (1.5) führen Transformationen in den Integralen (1.1) ($t \rightarrow -t$ bzw. $t \rightarrow 2\pi - t$) sowie Vertauschung von ξ und η für $\nu \notin \mathbb{Z}$ zu

$$(1.7) \quad I_{me_{-\nu}}^{(3)}(z; \alpha) = I_{me_\nu}^{(3)}(z; -\alpha)$$

$$(1.8) \quad I_{me_{-\nu}}^{(4)}(z; \alpha) = e^{-2\pi i\nu} I_{me_\nu}^{(4)}(z; -\alpha).$$

Mit (1.3), (1.7), (1.8) errechnet man der Reihe nach

$$\begin{aligned}
 c_{-v} \operatorname{me}_v(\alpha) M_{-v}^{(1)}(z) &= \frac{1}{2} (I_{\operatorname{me}_v}^{(3)}(z; \alpha) + e^{-2\pi i v} I_{\operatorname{me}_v}^{(4)}(z; \alpha)) \\
 I_{\operatorname{me}_v}^{(3)}(z; \alpha) &= \operatorname{me}_v(\alpha) \frac{e^{iv\frac{\pi}{2}}}{i \sin(v\pi)} \{c_{-v} e^{iv\frac{\pi}{2}} M_{-v}^{(1)}(z) - c_v e^{-iv\frac{3\pi}{2}} M_v^{(1)}(z)\} \\
 I_{\operatorname{me}_v}^{(4)}(z; \alpha) &= \operatorname{me}_v(\alpha) \frac{-e^{iv\frac{\pi}{2}}}{i \sin(v\pi)} \{c_{-v} e^{iv\frac{\pi}{2}} M_{-v}^{(1)}(z) - c_v e^{iv\frac{\pi}{2}} M_v^{(1)}(z)\}.
 \end{aligned}
 \tag{1.9}$$

Die Konstante c_v kann für $\alpha = \xi = \eta = 0$ und $z \in \mathfrak{G}_0(0)$ aus

$$I_{\operatorname{me}_v}^{(3)}(z; 0) = \frac{1}{\pi} \int_{i\infty}^{-i\infty} e^{2ih \cosh z \cosh t} \operatorname{me}_v(t) dt$$

durch Einsetzen der Fourier-Reihe

$$\operatorname{me}_v(t) = e^{ivt} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{2n}^v e^{2int}$$

und Vertauschen von Summation und Integration nach dem Konvergenzsatz von Lebesgue bestimmt werden. Man notiert:

$$\begin{aligned}
 I_{\operatorname{me}_v}^{(3)}(z; 0) &= e^{iv\frac{\pi}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{2n}^v \frac{(-1)^n}{\pi} \int_{i\infty}^{-i\infty} e^{i \cosh t (2h \cosh z)} e^{i(v+2n)(t-\frac{\pi}{2})} dt \\
 &= e^{iv\frac{\pi}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{2n}^v (-1)^n H_{v+2n}^{(1)}(2h \cosh z) \\
 &= e^{iv\frac{\pi}{2}} \operatorname{me}_v(0) M_v^{(3)}(z).
 \end{aligned}$$

Die letzten Gleichungen erhält man aus der Sommerfeldschen Integraldarstellung der ersten Hankelfunktion sowie aus [4] (S. 178 (13)). Das liefert mit (1.9) und

$$M_v^{(3)} = \frac{1}{i \sin(v\pi)} (M_{-v}^{(1)} - e^{-iv\pi} M_v^{(1)}) \quad (v \in \mathbb{C} - \mathbb{Z})$$

$$c_v = e^{iv\frac{\pi}{2}}$$

und damit

$$I_{\operatorname{me}_v}^{(3)}(z; \alpha) = \operatorname{me}_v(\alpha) (e^{iv\frac{\pi}{2}} M_v^{(3)}(z))$$

(1.10)

$$I_{\operatorname{me}_v}^{(4)}(z; \alpha) = \operatorname{me}_v(\alpha + \pi) (e^{-iv\frac{\pi}{2}} M_v^{(4)}(z)).$$

Wegen

$$I_{\operatorname{me}_{-v}}^{(3)}(z; \alpha) = I_{\operatorname{me}_v}^{(3)}(z; -\alpha) = \operatorname{me}_{-v}(\alpha) (e^{iv\frac{\pi}{2}} M_v^{(3)}(z))$$

haben wir für jede Lösung y_v der Mathieuschen Differentialgleichung die Relationen

$$I_{y_v}^{(3)}(z; \alpha) = y_v(\alpha) (e^{iv\frac{\pi}{2}} M_v^{(3)}(z))$$

(1.11)

$$I_{y_v}^{(4)}(z; \alpha) = y_v(\alpha + \pi) (e^{-iv\frac{\pi}{2}} M_v^{(4)}(z))$$

zunächst nur für $v \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$, aber nach Grenzübergang $v \rightarrow n \in \mathbb{Z}$ dann für alle $v \in \mathbb{C}$ (vgl. den Spezialfall in [4], S. 184 ff.). Differenziert man (1.11) noch nach α , so entsteht für $z \in \mathfrak{G}_\xi(\alpha) \cap \mathfrak{G}_\eta(-\alpha)$

$$(1.12) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\pi \mathfrak{G}_3} \int 2ih \frac{\partial w}{\partial \alpha} e^{2ihw} y_v dt &= y'_v(\alpha) e^{iv \frac{\pi}{2}} M_v^{(3)}(z) \\ \frac{1}{\pi \mathfrak{G}_4} \int 2ih \frac{\partial w}{\partial \alpha} e^{2ihw} y_v dt &= y'_v(\alpha + \pi) e^{-iv \frac{\pi}{2}} M_v^{(4)}(z). \end{aligned}$$

Mit (1.3) gewinnen wir aus (1.11)

$$(1.13) \quad I_{y_v}^{(1)}(z; \alpha) = e^{iv \frac{\pi}{2}} y_v(\alpha) M_v^{(1)}(z) + \frac{1}{2} (y_v(\alpha + \pi) e^{-iv\pi} - y_v(\alpha)) e^{iv \frac{\pi}{2}} M_v^{(4)}(z)$$

und für $z \in \mathfrak{G}_\xi(\alpha)$ aus (1.12)

$$(1.14) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2\pi \mathfrak{G}_1} \int 2ih \frac{\partial w}{\partial \alpha} e^{2ihw} y_v dt &= e^{iv \frac{\pi}{2}} y'_v(\alpha) M_v^{(1)}(z) \\ &+ \frac{1}{2} (y'_v(\alpha + \pi) e^{-iv\pi} - y'_v(\alpha)) e^{iv \frac{\pi}{2}} M_v^{(4)}(z). \end{aligned}$$

2. Folgerungen und Spezialisierungen

Zunächst können genau wie in [4], 268 die bekannten Integralrelationen für die Floquetschen Lösungen ganzer Indizes gefolgert werden.

Weiter erhält man für $\xi = \eta = \alpha = 0$ in $\mathfrak{G}_0(0)$ aus (1.11) und (1.12) durch einfache Rechnung ($t = -i\tau$)

$$(2.1) \quad \int_0^\infty e^{2ih \cosh z \cosh \tau} \text{Ce}_v(\tau) d\tau = \frac{\pi i}{2} e^{iv \frac{\pi}{2}} \text{ce}_v(0) M_v^{(3)}(z)$$

$$(2.2) \quad \int_0^\infty e^{2ih \cosh z \cosh \tau} \sinh z \sinh \tau \text{Se}_v(\tau) d\tau = -\frac{\pi}{4h} e^{iv \frac{\pi}{2}} \text{se}'_v(0) M_v^{(3)}(z)$$

[In (2.2) muß im Falle ganzer Indizes $M_v^{(3)}$ durch $M_{-v}^{(3)}$ ersetzt werden (vgl. [4], S. 116 (30) (31)).]

Für $h > 0$ wird $\mathfrak{G}_0(0) = \{z | \text{Re } z > 0, 0 < \text{Im } z < \pi\}$. Aus der Konvergenz der Integrale bei ganzen Indizes für $z > 0$ ($\text{Im } z = 0$) bzw. $0 < \text{Im } z < \pi$ ($\text{Re } z = 0$) – das folgt aus dem asymptotischen Verhalten der Funktionen für $h > 0$ und $z \rightarrow \infty$ ($u := 2h \cosh z$)

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \text{Ce}_{2n}(z) &= c_{2n} u^{-\frac{1}{2}} \cos\left(u - \frac{\pi}{4}\right) + O(u^{-\frac{3}{2}}) \\ \text{Ce}_{2n+1}(z) &= c_{2n+1} u^{-\frac{1}{2}} \cos\left(u + \frac{\pi}{4}\right) + O(u^{-\frac{3}{2}}) \\ \text{Se}_{2n+1}(z) &= s_{2n+1} u^{-\frac{1}{2}} \cos\left(u + \frac{\pi}{4}\right) + O(u^{-\frac{3}{2}}) \\ \text{Se}_{2n+2}(z) &= s_{2n+2} u^{-\frac{1}{2}} \cos\left(u - \frac{\pi}{4}\right) + O(u^{-\frac{3}{2}}) \end{aligned}$$

ergibt sich deren gleichmäßige Konvergenz (in entsprechenden Winkelräumen bez. u) nach einem Satz über Laplace-Transformationen ([2], S. 35) und damit die Gültigkeit von (2.1) in

$$\overline{\mathfrak{G}_0(0)} := \{z \mid \operatorname{Re} z \geq 0, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq \pi\}$$

bzw. von (2.2) in $\overline{\mathfrak{G}_0(0)} \setminus \{0\}^*$. Wir notieren einige reelle Spezialfälle nach Trennung von Real- und Imaginärteil unter Benutzung einiger Formeln aus [4], 2.75 für $z = iy$:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \cos(2h \cos y \cosh \tau) \operatorname{Ce}_{2n}(\tau) d\tau \\ &= -\frac{\pi}{2} (-1)^n M c_{2n}^{(2)}(0) \operatorname{ce}_{2n}(y); \quad y \in \mathbb{R}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \sin(2h \cos y \cosh \tau) \operatorname{Ce}_{2n}(\tau) d\tau \\ &= -\frac{\pi A_0^{2n}}{2 \cdot \operatorname{ce}_{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right)} \left\{ \operatorname{ce}_{2n}(y) \mp \frac{2}{\pi C_{2n}} \operatorname{fe}_{2n}(y) \right\}; \\ & \quad y \in \begin{cases} [2m\pi, (2m+1)\pi] \\ [(2m+1)\pi, (2m+2)\pi] \end{cases}, \quad m \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2.4) \quad & \int_0^\infty \cos(2h \cos y \cosh \tau) \operatorname{Ce}_{2n+1}(\tau) d\tau \\ &= \frac{\pi h A_1^{2n+1}}{2 \operatorname{ce}_{2n+1}'\left(\frac{\pi}{2}\right)} \left\{ \operatorname{ce}_{2n+1}(y) \mp \frac{2}{\pi C_{2n+1}} \operatorname{fe}_{2n+1}(y) \right\}; \\ & \quad y \in \begin{cases} [2m\pi, (2m+1)\pi] \\ [(2m+1)\pi, (2m+2)\pi] \end{cases}, \quad m \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \sin(2h \cos y \cosh \tau) \operatorname{Ce}_{2n+1}(\tau) d\tau \\ &= -\frac{\pi}{2} (-1)^n M c_{2n+1}^{(2)}(0) \operatorname{ce}_{2n+1}(y); \quad y \in \mathbb{R}; \end{aligned}$$

mit

$$A_0^{2n} := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{ce}_{2n}(t) dt \quad \text{und} \quad A_1^{2n+1} := \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{ce}_{2n+1}(t) \cos t dt.$$

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \cos(2h \cos y \cosh \tau) \sin y \sinh \tau \operatorname{Se}_{2n+1}(\tau) d\tau \\ &= -\frac{\pi}{4h} (-1)^n M s_{2n+1}^{(2)'}(0) \operatorname{se}_{2n+1}(y); \quad y \in \mathbb{R}; \end{aligned}$$

* Die Integrale (2.1) sind in $\overline{\mathfrak{G}_0(0)}$ sogar absolut gleichmäßig konvergent.

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty \sin(2h \cos y \cosh \tau) \sin y \sinh \tau \operatorname{Se}_{2n+1}(\tau) d\tau \\
 &= \frac{\pi \cdot B_1^{2n+1}}{4 \operatorname{se}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)} \left\{ \operatorname{se}_{2n+1}(y) \mp \frac{2}{\pi S_{2n+1}} \operatorname{ge}_{2n+1}(y) \right\}; \\
 & \quad y \in \begin{cases} (2m\pi, (2m+1)\pi) \\ ((2m+1)\pi, (2m+2)\pi) \end{cases}, \quad m \in \mathbb{Z} \\
 (2.5) \quad & \int_0^\infty \cos(2h \cos y \cosh \tau) \sin y \sinh \tau \operatorname{Se}_{2n+2}(\tau) d\tau \\
 &= -\frac{h B_2^{2n+2}}{4 \operatorname{se}'_{2n+2}\left(\frac{\pi}{2}\right)} \left\{ \operatorname{se}_{2n+2}(y) \mp \frac{2}{\pi S_{2n+2}} \operatorname{ge}_{2n+2}(y) \right\}; \\
 & \quad y \in \begin{cases} (2m\pi, (2m+1)\pi) \\ ((2m+1)\pi, (2m+2)\pi) \end{cases}, \quad m \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty \sin(2h \cos y \cosh \tau) \sin y \sinh \tau \operatorname{Se}_{2n+1}(\tau) d\tau \\
 &= \frac{\pi}{4h} (-1)^n M s_{2n+2}^{(2)'}(0) \operatorname{se}_{2n+1}(y); \quad y \in \mathbb{R};
 \end{aligned}$$

mit

$$B_1^{2n+1} := \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{se}_{2n+1}(t) \sin t dt$$

und

$$B_2^{2n+2} := \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{se}_{2n+2}(t) \sin(2t) dt.$$

Dies sind ein Teil der Integrale von SIPS [6]. Mit dem Hinweis auf [3], Kap. X verzichten wir auf eine Notierung der Integrale für $z \geq 0$ bzw. $z > 0$.

Auf gleiche Weise erhalten wir Integralrelationen mit den Zweitlösungen bei ganzen Indizes ($\xi = \eta = \alpha = 0$) in $\mathfrak{G}_0(0)$

$$\begin{aligned}
 (2.6) \quad & \int_0^\infty e^{2ih \cosh z \cosh \tau} \sinh z \sinh \tau \operatorname{Fe}_m(\tau) d\tau = -\frac{\pi}{4h} i^m \operatorname{fe}'_m(0) M_m^{(3)}(z) \\
 & \int_0^\infty e^{2ih \cosh z \cosh \tau} \operatorname{Ge}_m(\tau) d\tau = \frac{\pi}{2} i^{m+1} \operatorname{ge}_m(0) M_{-m}^{(3)}(z).
 \end{aligned}$$

Auch hier können wieder wie bei der Herleitung von (2.4) und (2.5) eine Reihe reeller Integrale aufgeschrieben werden, die anscheinend unbekannt sind, wie z. B.

$$\int_0^\infty \cos(2h \cosh z \cosh \tau) \sinh z \sinh \tau \operatorname{Fe}_{2n}(\tau) d\tau = -\frac{C_{2n} \pi \operatorname{ce}_{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{4h A_0^{2n}} \operatorname{Ce}_{2n}(z).$$

Zum Schluß seien noch einige Relationen als Folgerungen aus (1.13) und (1.14) notiert, die sich teilweise bei Sips [6] finden, der diese aus bekannten Integralrelationen mittels Fouriertransformation mühsam gewinnt. (1.14) ergibt für $\xi = \alpha = 0$ und $y_v = fe_m (m \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ wegen

$$fe'_m(0) = (-1)^m fe'_m(\pi)$$

$$(2.7) \quad \frac{ih}{\pi} \int_{\mathfrak{G}_1} e^{2ih \cosh z \cos t} \sinh z \sin t fe_m(t) dt = i^m fe'_m(0) M_m^{(1)}(z).$$

Für $m = 2n$ ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) kann weiter ausgewertet werden nach Zerlegung des Integrationsweges und nach Parametertransformationen. Die elementare Rechnung liefert mit Benutzung der Formeln aus [4], 2.7 für $z \in \mathfrak{G}_0(0)$

$$(2.8) \quad \begin{aligned} & \int_0^{\pi/2} \sin(2h \cosh z \cos t) \sinh z \sin t \left(ce_{2n}(t) - \frac{2}{\pi C_{2n}} fe_{2n}(t) \right) dt \\ & - i \int_0^{\pi/2} \cos(2h \cosh z \cos t) \sinh z \sin t ce_{2n}(t) dt \\ & - i \int_0^\infty e^{2ih \cosh z \cosh t} \sinh z \sinh t Ce_{2n}(t) dt = \frac{ce_{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2hA_0^{2n}} Ce_{2n}(z) \end{aligned}$$

und für $m = 2n + 1$

$$(2.9) \quad \begin{aligned} & \int_0^{\pi/2} \cos(2h \cosh z \cos t) \sinh z \sin t \left(ce_{2n+1}(t) - \frac{2}{\pi C_{2n+1}} fe_{2n+1}(t) \right) dt \\ & - i \int_0^{\pi/2} \sin(2h \cosh z \cos t) \sinh z \sin t ce_{2n+1}(t) dt \\ & + \int_0^\infty e^{2ih \cosh z \cosh t} \sinh z \sinh t Ce_{2n+1}(t) dt = \frac{ce'_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{4h^2 A_1^{2n+1}} Ce_{2n+1}(z). \end{aligned}$$

Die entsprechende Überlegung mit (1.13) und $y_v = ge_m$ ergibt:

$$(2.10) \quad \begin{aligned} & i \int_0^{\pi/2} \sin(2h \cosh z \cos t) \left(se_{2n+1}(t) - \frac{2}{\pi S_{2n+1}} ge_{2n+1}(t) \right) dt \\ & + \int_0^{\pi/2} \cos(2h \cosh z \cos t) se_{2n+1}(t) dt \\ & + \int_0^\infty e^{2ih \cosh z \cosh t} Se_{2n+1}(t) dt \\ & = (-1)^n \frac{se_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{hB_1^{2n+1}} Se_{2n+1}(z) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\pi/2} \cos(2h \cosh z \cos t) \left(\operatorname{se}_{2n+2}(t) - \frac{2}{\pi S_{2n+2}} \operatorname{ge}_{2n+2}(t) \right) dt \\
 & + i \int_0^{\pi/2} \sin(2h \cosh z \cos t) \operatorname{se}_{2n+2}(t) dt \\
 & + \int_0^{\infty} e^{2ih \cosh z \cosh t} \operatorname{Se}_{2n+2}(t) dt \\
 (2.11) \quad & = (-1)^n \frac{\operatorname{se}'_{2n+2}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h^2 B_{2n+2}^2} \operatorname{Se}_{2n+2}(z)
 \end{aligned}$$

(gültig jeweils für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $z \in \mathbb{G}_0(0)$).

Genau wie bei der Herleitung von (2.4) und (2.5) können für $h > 0$ wegen der Konvergenz der Integrale für reelle Parameter z (bzw. rein imaginäre z) durch Trennung von Real- und Imaginärteil 16 neue Relationen gewonnen werden, welche zusammen mit (2.4) und (2.5) den Gleichungen von Weber-Schafheitlin für Besselfunktionen entsprechen (vgl. SIPS [6]). Wir notieren hier nur die vier aus (2.8) folgenden Integrale:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\pi/2} \sin(2h \cosh z \cos t) \sinh z \sin t \left(\operatorname{ce}_{2n}(t) - \frac{2}{\pi C_{2n}} \operatorname{fe}_{2n}(t) \right) dt \\
 & + \int_0^{\infty} \sin(2h \cosh z \cosh t) \sinh z \sinh t \operatorname{Ce}_{2n}(t) dt \\
 & = \pm \frac{\operatorname{ce}_{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2hA_0^{2n}} \operatorname{Ce}_{2n}(z); \quad z \geq 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\pi/2} \cos(2h \cosh z \cosh t) \sinh z \sin t \operatorname{ce}_{2n}(t) dt \\
 & + \int_0^{\infty} \cos(2h \cosh z \cosh t) \sinh z \sinh t \operatorname{Ce}_{2n}(t) dt = 0 \quad (z \neq 0);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\pi/2} \cos(2h \cos y \cos t) \sin y \sin t \operatorname{ce}_{2n}(t) dt \\
 & + \int_0^{\infty} \cos(2h \cos y \cosh t) \sin y \sinh t \operatorname{Ce}_{2n}(t) dt \\
 & = \frac{\operatorname{ce}_{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2hA_0^{2n}} \operatorname{ce}_{2n}(y); \quad y \in (0, \pi);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\pi/2} \sin(2h \cos y \cos t) \sin y \sin t \left(\operatorname{ce}_{2n}(t) - \frac{2}{\pi C_{2n}} \operatorname{fe}_{2n}(t) \right) dt \\
 & + \int_0^{\infty} \sin(2h \cos y \cosh t) \sin y \sinh t \operatorname{Ce}_{2n}(t) dt = 0; \quad y \in (0, \pi).
 \end{aligned}$$

Literatur

1. CAMPBELL, R., Théorie générale de l'Equation de Mathieu. Paris 1955.
2. DOETSCH, G., Handbuch der Laplace-Transformation. Bd. 1. Basel 1950.
3. McLACHLAN, N. W., Theory and Application of Mathieu Functions. New York: Dover Publ. 1964.
4. MEIXNER, J., & F. W. SCHÄFKE, Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1954.
5. SCHÄFKE, F. W., Einführung in die Theorie der speziellen Funktionen der Math. Physik. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1963.
6. SIPS, R., Quelques intégrales définies discontinues contenant des fonctions de Mathieu. Acad. roy. Belgique; Bull. Cl. Sci. V. Ser. **56**, 475—491 (1970).
7. WATSON, G. N., Theory of Bessel Functions. Cambridge 1962.

II. Math. Institut der Freien Universität Berlin
1 Berlin 33
Königin-Luise-Str. 24—26

(Eingegangen am 5. Oktober 1971)