Heinz Steinbring

Symbole, Referenzkontexte und die Konstruktion mathematischer Bedeutung – am Beispiel der negativen Zahlen im Unterricht

In: Journal für Mathematik-Didaktik, 15 (1994), H. 3/4
S. 277-309

Heinz Steinbring

Symbole, Referenzkontexte und die Konstruktion mathematischer Bedeutung – am Beispiel der negativen Zahlen im Unterricht

Summary: When introducing negative numbers mathematics teaching is confronted with the following developmental problem: The students interpret natural numbers within the frame of concrete, empirical conditions of counting, adding and taking away etc. Negative numbers are no longer immediately applicable to real situations nor is it possible to deduce them logically starting from concrete contexts. According to the methodical principle to begin with the concrete and to go up to the abstract, mathematics teaching handles this contradiction between the concrete, visible perception and the formal-relational structure of the concept of negative numbers in a 'linear' way: The aim is to deduce this new concept in a methodically natural manner from the already known epistemological frame of the natural numbers. This didactical intention contradicts the epistemological insight, that the new concept cannot be reduced to empirical facts. The new symbol system of negative numbers, which is constructed by an 'operational extension' needs a generalised re-interpretation: These symbols no longer refer to empirical properties of real objects, they reflect relational structures within and between objects, and these relations have to be socially negotiated and to be controlled by the mathematical rule-structure.

1. Einleitung: Eine problematische Spannung zwischen epistemologischer Analyse und didaktischer Konstruktion mathematischen Wissens

Der Übergang von den natürlichen zu den negativen Zahlen stellt im Rahmen der Zahlbegriffsentwicklung gemäß der Linie der Zahlbereichserweiterungen eine immer wieder diskutierte besondere Problematik dar. In vielen Untersuchungen und Arbeiten wird betont, daß es hier nach didaktischen und epistemologischen Überlegungen keine "natürliche" Entwicklungsbrücke zu geben scheint [vgl. beispielsweise zu der Vielzahl der hierzu geschriebenen Arbeiten ANDELFINGER, BEKEMEIER & JAHNKE 1983; FREUDENTHAL 1989; HEFENDEHL-HEBEKER 1988, 1989, 1990; JAHNKE, STEINBRING & VOGEL 1975; MALLE 1988]. Der Begriff der negativen Zahlen ist kein logisches, deduktives "Ergebnis", das man aus der Kenntnis der natürlichen Zahlen in Form einer mathematischen Schlußfolgerung ableiten könnte. Auch die vielfältigen, methodischen Überlegungen zur Einführung der negativen Zahlen weisen immer wieder Brüche, Künstlichkeiten, sowie Ungereimtheiten für die Schüler und Schülerinnen auf.

Mit dem Begriff der negativen Zahlen steht man vor folgender Problematik: Einerseits sind die Schüler und Schülerinnen es gewohnt, in relativ natürlicher Weise, d.h. mit konkreten und unmittelbar inhaltlichen Vorstellungen und Anwendungsmöglichkeiten die natürlichen Zahlen im Sinne von Zählen, Vermehren, Hinzuzählen, Wegnehmen usw. zu benutzen. Mit den negativen Zahlen wird nun ein für die Intuition sperriger Begriff betrachtet: Negative Zahlen sind nur in Grenzen entsprechend den gewohnten Ansichten auf konkrete Sachsituationen und reale Umweltbezüge anwendbar; hierzu dienen Modelle wie "Kontenführung", "Höhendifferenzen", "Temperaturen" usw. [vgl. SPIESS

(JMD 15 (94) 3/4, S. 277-309)

1989]. Letztlich bedarf der Begriff der negativen Zahlen samt zugehöriger mathematischer Operationen ähnlicher formaler, autonomer Regeln wie die Algebra. Es gibt ein System in sich stimmiger Operationsregeln, das den Kalkül der negativen Zahlen formal beschreibt. Dieses System "negative Zahlen" wird nicht aus der Realität deduziert, noch ist es unmittelbar auf reale Zusammenhänge beziehbar. Entsprechend der Analyse von Idealisierungsprozessen [SCHREIBER 1980] könnte man sinngemäß sagen: Die ganzen Zahlen schauen nicht aus dem Konto-Modell u.ä. heraus, sondern wir sehen sie hinein. "Abstrahieren ist ein Absehen von bestimmten Eigenschaften, die ein Ding besitzt; Idealisieren ist ein Hineinsehen von Eigenschaften, die ein Ding nicht besitzt." [SCHREIBER 1980, S. 44].

Im alltäglichen Mathematikunterricht ergibt sich für das Erlernen der negativen Zahlen somit eine problematische Spannung zwischen der epistemologischen Analyse des mathematischen Wissens und der curricularen, didaktischen Konstruktion: Das epistemologische Problem bedeutet im Kern, daß das neue mathematische Wissen nicht aus dem alten und schon bekannten Wissen logisch deduzierbar ist. (z.B. die Regel der Multiplikation zweier negativer Zahlen: "- mal - = +"). Dies ist eine andere Formulierung für den epistemologischen Zirkel: Man muß im Prinzip schon über das neue Wissen (die neue begriffliche Idee) verfügen, um dann die mathematische Struktur des in Frage stehenden Wissens erlernen zu können (zum Beispiel der negativen Zahlen vgl. hierzu [COQUIN-VIENNOT 1985]). Oder anders formuliert: Die Konstruktion des neuen mathematischen Wissens ist kein logisch organisierter Prozeß, der sich ausschließlich auf das alte Wissen gründet, sondern umfaßt eine vielschichtige Entwicklung mit Konflikten, Brüchen und Umdeutungen, die zudem außermathematische Bezugnahmen auf verschiedenartige Referenzkontexte und Interpretationsrahmen erfordert.

Das didaktische, curriculare Problem hat zur Folge, daß das neue mathematische Wissen (zeitlich) entwickelt werden muß und nicht fertig und in vollendeter Form von außen vorgegeben werden kann. Die Entwicklung des neuen Wissen muß auch in Verbindung mit dem schon bekannten Wissen geschehen. Denn wenn man bei der didaktischen Konstruktion des Wissens den epistemologischen Erfordernissen in der Weise Rechnung trägt, daß man das neue Wissen mehr oder weniger direkt vorgibt, dann besteht die große Gefahr, den Schülern und Schülerinnen bedeutungslose Zeichen und Operationen mitzuteilen, was meistens zu mathematischen Formalismen führt.

Die hier dargestellte Spannung hat auch in der historischen Entwicklung der negativen Zahlen eine zentrale Rolle gespielt [vgl. die Ausarbeitungen in HEFENDEHL-HEBEKER 1989a, 1993; GLAESER 1981; SCHUBRING 1986, 1998]. Historisch zeigte sich diese Spannung als ein Konflikt zwischen dem ungeklärten epistemologischen Status dieser neuen Zahlen und der Tatsache, daß man mit ihnen schon jahrhundertelang rechnete und operierte: Es wurde im Verlaufe der Geschichte der negativen Zahlen immer deutlicher, daß es keine Möglichkeit gab, sie aus den vorhandenen Zahlen und ihrer Interpretation zu deduzieren, aber gleichzeitig sah man sich vor der Anforderung, diese Zahlen in eine systematische Abfolge der mathematischen Zahlstruktur einzuordnen. "Studies on epistemology and the history of mathematics ... have brought to light that it took the evolution of mathematics more than 300 years until it was possible not only to handle negative numbers in a calculus-related way (partly with bad conscience) but to pervade them philosophically. At the very heart of the problem laid the the relation between concrete interpretation and intellectual construction. In what ways should one interpret these new 'fictional' numbers allowing such miraculous algorithms for solving equations? As long as mathematicians stuck to absolute magnitudes no real satisfying answer emerged. It was not until the past century that these obstacles sould be overcomne by a shift of view: the transition from the concrete to the formal. Hankel and his pioneers gave up a fruitless search for compelling, explanatory models, instead they extended number fields regardless of content-related foundations like 'number of' and 'magnitude'." [HEFENDEHL-HEBEKER 1993, S. 4].

Der Vergleich mit der historischen Entwicklung macht auch deutlich, daß die hier beschriebene Spannung zwischen dem hergebrachten Begründungskontext der bekannten Zahlen und den noch zu explorierenden epistemologischen Beziehungen des neuen Begriffs je nach der eingenommenen Perspektive eine andere Beachtung findet: Steht z. B. die Frage nach der Bedeutung der Zahl "5 - 7" im Mittelpunkt, dann wird diese Spannung in anderer Weise spürbar, als wenn unter einer eher kalkülbezogenen Perspektive das erfolgreiche Rechnen mit den negativen Zahlen in den Vordergrund rückt. Diese unterschiedliche Gewichtung läßt sich auch im Mathematikunterricht beobachten: Bei der ersten Einführung und Begründung der negativen Zahlen bringen auch Schüler und Schülerinnen häufig ihr Unbehagen mit diesen neuen Zahlen zum Ausdruck [vgl. HEFENDEHL-HEBEKER 1993, S. 2ff]; und nachdem die Rechenoperationen einmal als Regeln akzeptiert und nach und nach eingeübt und automatisiert worden sind, wird die epistemologische Begründungsfrage mehr und mehr durch die operativen Strategien und Verfahren ersetzt.

Im folgenden sollen beispielhaft Probleme in der beschriebenen Spannung zwischen epistemologischer Begründung und logischer Konstruktion des mathematischen Wissens dargestellt werden, wie sie in der Interaktion im alltäglichen Mathematikunterricht entstehen und behandelt werden.

2. Die Einführung der negativen Zahlen im Unterricht – Erfahrungen aus einer Unterrichtsstunde

Unter Bezugnahme auf eine Mathematik-Stunde aus einer einführenden Unterrichtsreihe zum Thema "Negative Zahlen" soll im folgenden analysiert werden, wie selbst schon in einem ganz einfachen formal-operativen Modell der negativen Zahlen zugleich mit den "verallgemeinerten" Operationsregeln (der Addition und Subtraktion negativer Zahlen) eine notwendige Veränderung in der Auffassung gegenüber den "Symbolen der Manipulation" (Steinen, Zeichen, Zahlen) in der Entwicklung des Begriffs notwendig wird.

In ihren Überlegungen zum Lernprozeß der negativen Zahlen kommt Frau HEFENDEHL-HEBEKER im Rahmen ihres Zugangs zu den negativen Zahlen, bei dem "die gewohnte Reihenfolge völlig umgekehrt" wird, auf ähnliche Probleme zu sprechen [siehe HEFENDEHL-HEBEKER 1988, S. 11]. Als elementar-formales Mittel zur Visualisierung der negativen Zahlen nimmt sie den "vollständigen" Zahlenstrahl, auf dem positive und negative Zahlen repräsentiert werden. Es werden Beziehungen im Sinne von "größer", "mehr", "links", "rechts", "Richtungen" usw. zunächst thematisiert und dann werden die Operationen (teilweise im Sinne eines formalen Permanenz-Prinzipes), die man aus der Addition und Subtraktion positiver Zahlen kennt, auf den gesamten Bereich der ganzen Zahlen übertragen. Die Subtraktion wird in diesem Modell formal als Addition der "Gegenzahl" erklärt.

Im Rahmen dieser Einführung und unter Benutzung dieses Modells wird aus vielen Feststellungen deutlich, daß die Schüler und Schülerinnen ihre Vorerfahrungen und individuellen Vorstellungen von den natürlichen Zahlen und ihren Operationen mitbringen, die ja auch jetzt in modifizierter Form im System der ganzen Zahlen auftauchen, obwohl zunächst versucht wurde, einen formalen Standpunkt gegenüber den Zeichen und Operationen im Modell aufrechtzuerhalten. Es ist äußerst schwierig, ja wohl unmöglich, einen ausschließlich formalen Systemstandpunkt gegenüber den negativen Zahlen einzunehmen und den Schülern in ihrem Lernprozeß ihre vertrauten Bedeutungsvorstellungen zu nehmen. Die Schüler und Schülerinnen haben es natürlich noch nicht an einer Reihe von Beispielen gelernt, strukturelle operative Beziehungen zunächst "für sich" mathematisch zu modellieren, und dabei den Bezug zu den vertrauten Bedeutungen erst einmal zu unterbrechen. In den realen Lehr/ Lern-Prozessen vermischen sich immer schon vorhandene Intuitionen und Vorstellungen der Schüler und Schülerinnen zum Zahlbegriff mit den neu zu erlernenden Verstehens- und Interpretationsweisen der Zeichen und Operationen.

Damit steht der Lehrer vor dem oben dargestellten Problem: Aus epistemologischen Gründen kann das neue Wissen nicht durch Reduktion auf altes Wissen erklärt werden, und somit sollte er die Einführung in die negativen Zahlen mit Hilfe eines möglichst eigenständigen "formal-systematischen" Modells zur Repräsentation der negativen Zahlen[1] (und ihrer Beziehungen) vornehmen, denn das Beharren auf den hergebrachten empirischen Interpretationsweisen im Umgang mit den natürlichen Zahlen und ihren Operationen stellt sich im Fortgang des Verstehens der negativen Zahlen immer wieder als ein fundamentales, epistemologisches Hindernis heraus. Andererseits sind die Schüler und Schülerinnen nicht in der Lage, allein die strukturellen Beziehungen mit Bedeutung zu füllen; sie benötigen noch konkrete Referenzobjekte für die Interpretation der negativen Zahlen.

Für das Erlernen neuen mathematischen Wissens spielen die Referenzbereiche eine zweifache Rolle. Im curricularen Wissensaufbau wird ihnen meist die Funktion von schlüssigen Modellen zugewiesen, aus denen man die Struktur des neuen Wissens möglichst direkt ablesen möchte; der autonome epistemologische Status des neuen Wissens macht dies im Prinzip unmöglich. Für den Lernenden sind selbst solche Referenzbereiche, die methodisch als zwingende Modelle präsentiert werden, zunächst meist so etwas wie subjektive Erfahrungsbereiche [BAUERSFELD 1983], die es konstruktiv anzueignen, zu erkunden und auszubauen gilt.

Entgegen der curricularen Intention sind Modelle somit nicht einfach eingängige methodischen Hilfen, vielmehr werden sie zu eigenen komplexen Lernanforderungen für den Lernenden, mit denen er sich eigenständig auseinandersetzen muß. Das zu erlernende neue Wissen ist an diesen Erfahrungsbereich gebunden und die Struktur des neuen mathematischen Begriffs kann aus ihm nicht abstrahierend deduziert werden [siehe SCHREIBER 1980]; anders als bei Modellen intendiert, sind Erfahrungsbereiche keine logische Basis für das neue Wissen, vielmehr stehen sie gewissermaßen "neben" der mathematischen Struktur und sie dienen der Konstruktion des neuen Wissens, indem sie als ausdifferenzierte Bereiche insgesamt vergleichend, analogisierend und kontrastierend mit der intendierten mathematischen Struktur in Beziehung gesetzt werden. Auf diese Weise können Referenzbereiche, als Erfahrungsbereiche verstanden und nicht als methodische Modelle, der Vielschichtigkeit der Wissensentwicklung mit ihren Konflikten, Brüchen und Umdeutungen Rechnung tragen.

Im folgenden soll die Rolle von Modellen für die negativen Zahlen analysiert werden, und zwar einmal im Kontext des alltäglichen Mathematikunterrichts und dann im Rah-

[1] vgl. den Vorschlag von H. BAUERSFELD an L. HEFENDEHL-HEBEKER, die "Rechenoperationen kurz und abstrakt als ein Sprachspiel, das für sich steht, ein(zu)führen." [HEFENDEHL-HEBEKER 1988, S. 11].

men der curricularen Konstruktion. Vom Standpunkt der Entwicklung neuen Wissens wird die Analyse deutlich machen, daß in Modellen für die negativen Zahlen eine fundamentale epistemologische Umdeutung des Status der Modellgrößen vorgenommen werden muß. Diese notwendige, neue Interpretation bei der Verwendung von Modellen ergibt sich nicht aus der logischen Struktur des Wissens und stellt so einen Zusammenhang mit der Perspektive der Erfahrungsbereiche für die Entwicklung neuen Wissens im Unterricht her.

2.1 Die "Verallgemeinerung" der Rechenregeln: Eine neue Festlegung der Beziehung von Symbolen zu Referenzobjekten

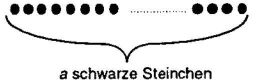
In der vorliegenden Unterrichtsstunde (vgl. den Transkriptausschnitt im Anhang, die gesamte transkribierte Unterrichtsstunde ist beim Autor erhältlich) hat der Lehrer auf der Basis eines anderen einfachen Modells versucht, eine produktive Balance herzustellen zwischen der Notwendigkeit, daß die Schüler und Schülerinnen in (teils konkreten) subjektiven Erfahrungsbereichen lernen und dem epistemologischen Erfordernis, daß der Begriff der negativen Zahl einen formal-systemischen Standpunkt benötigt und dies einen Umbruch von konkreten zu relationalen Referenzobjekten zur Folge hat. Die negativen Zahlen werden durch konkrete Marken repräsentiert, die in roter und schwarzer Farbe vorliegen. Dieses Modell bedient sich der Vorstellung, daß es neben den schwarzen Zahlen (die auch interpretiert werden als "Guthaben", "Geldbetrag", natürliche Zahlen) auch rote Zahlen (als "Schulden", negative Zahlen) gibt. Eine Anzahl von roten Plättchen oder gezeichneten roten Punkten stellt gerade diese Zahl dar. Addition und Subtraktion in diesem Bereich der konkreten Marken wird üblicherweise durch Hinzufügen oder Wegnehmen solcher Marken erklärt. Zu einer Anzahl a von schwarzen Marken addiert man eine Anzahl b von schwarzen Marken, indem man b Steinchen hinzufügt. Auch die "eingeschränkte" Subtraktion ist möglich. Man kann von einer größeren Zahl von Steinchen eine kleinere Zahl von Steinchen subtrahieren, indem man diese Anzahl wegnimmt. Die Operationen der Addition und Subtraktion (im eingeschränkten Sinne) läßt sich auf die roten Steinchen übertragen.

Dieses Modell entstammt dem Arbeits- und Verstehenskontext der natürlichen Zahlen und wird in einem ersten Schritt "symmetrisch" auf die roten Steinchen übertragen. Des weiteren wird eine "Spielregel" folgender Art eingeführt: Eine Anzahl schwarzer Steinchen wird durch eine gleichgroße Anzahl roter Steinchen aufgehoben und ergänzt sich so zu Null (hier spielt z.B. die Vorstellung von Guthaben und Schulden, die sich gegenseitig aufheben, eine mögliche Erklärungsrolle). [vgl. zu diesem Modell SEMADENI 1984 und die Kritik von MALLE 1988].

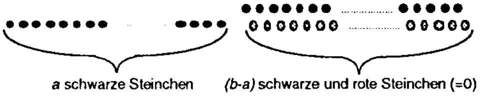
Im Rahmen dieses Modells roter und schwarzer Steinchen mit den eingeschränkten Additions- und Subtraktionsregeln sowie der Regel des Aufhebens gleichvieler roter und schwarzer Steinchen wurden im Unterricht Verallgemeinerungen der Rechenregeln von Addition und Subtraktion (samt ihren Erweiterungen) für den ganzen Bereich roter und schwarzer Steinchen (also der negativen Zahlen in einer quasi-konkreten Repräsentationsform) beispielhaft eingeführt. Zunächst die Verallgemeinerung der eingeschränkten Subtraktion: Ist es möglich, auch Zahlen zu subtrahieren, die größer sind als der Minuend?

Die erste Regel:
(1a) **schwarz a - schwarz b = rot b - rot a**
läßt sich im Rahmen des Modells folgendermaßen herleiten: Man hat a schwarze Steinchen liegen, von diesen Steinchen kann man jedoch nicht b schwarze Steinchen wegnehmen; diese Form der Subtraktion war bisher unzulässig. Um genau b schwarze Steinchen wegnehmen zu können ist es notwendig, nochmals (b-a) schwarze Steinchen hinzuzufügen. Dies geschieht in Form der Hinzufügung einer "künstlichen" Null entsprechend der Regel des Aufhebens, d.h. von gleichviel schwarzen und roten Steinchen (jeweils (b-a)).

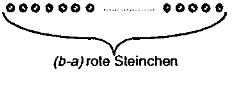
1) Ausgangssituation:



2) Hinzufügen einer "künstlichen" Null (um genau b schwarze Steinchen wegnehmen zu Können)



3) Ergebnis (nach der Wegnahme von b schwarze Steinchen)



Auf diese Weise erhält man die Regel:

schwarz a - schwarz b = rot b - rot a ,

oder in wörtlicher Umschreibung: "Wenn die hintere Zahl in der Subtraktion größer ist, so dreht man die Zahlen um und verändert ihre Farbe und führt dann die Subtraktion aus".

Die entsprechende Regel für die Subtraktion von roten Zahlen (mit b>a) erhält man auf die gleiche Weise unter Austausch der Farben:
(1b) **rot a - rot b = schwarz b - schwarz a.**

Die weiteren Verallgemeinerungsregeln betreffen die jetzt möglichen gemischten Operationen, in denen schwarze und rote Steinchen gleichzeitig auftreten. Das sind im Kern die beiden folgenden Regeln:

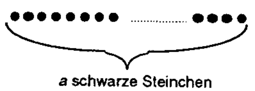
(2a) **schwarz a - rot b = schwarz a + schwarz b**
(3a) **schwarz a + rot b = schwarz a - schwarz b**

(bzw. (2b) rot a - schwarz b
und (3b) rot a + schwarz b
die wieder auf die gleiche Weise unter Austausch der Farben hergeleitet werden wie die Regeln (2a) und (3a)).

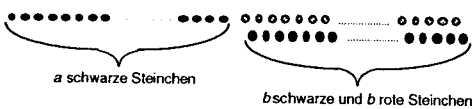
Unter Benutzung der schwarzen und roten Steinen geschieht dies folgendermaßen:

<u>**Regel (2a)**</u> **schwarz a - rot b = schwarz a + schwarz b**

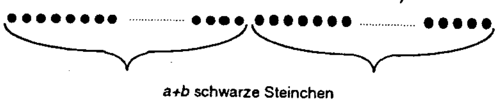
1) Ausgangssituation



2) Hinzufügen einer "künstlichen" Null (um genau b rote Steinchen wegnehmen zu können)

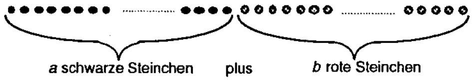


3) Ergebnis (nach der Wegnahme von b roten Steinchen)



Regel (3a) **schwarz a + rot b = schwarz a - schwarz b**

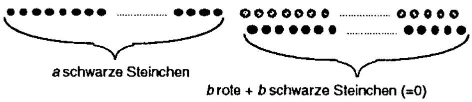
1) Ausgangssituation



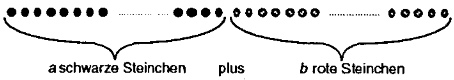
2) Diese Konfiguration kann nicht konkret operativ verändert werden; sie soll einer Konfiguration gleich sein, die die Differenz

a schwarze Steinchen - b schwarze Steinchen

darstellt. Wir operieren jetzt vom Ergebnis her, bzw. versuchen, aus der rechten Seite mit unseren konkreten Operationen die linke Seite der Gleichung herzuleiten. Dazu wird wieder eine "künstliche" Null an a schwarze Steinchen angehängt, um b rote Steinchen wegnehmen zu können:



3) Werden von dieser Konfiguration b schwarze Steinchen entfernt (subtrahiert), so erhält man die Ausgangskonfiguration, bzw. die linke Seite der Gleichung:
schwarz a + rot b



Die Herleitung der Regel (3a) zeigt, daß die bisher verfolgte Arbeitsweise des konkreten Hinzufügens und Wegnehmens für Addition und Subtraktion nicht mehr problemlos funktioniert. Es muß jetzt notwendigerweise von einem "Systemstandpunkt" ausgegangen werden, d.h. man muß schon das Resultat seiner intendierten Operation kennen, um so den Rahmen von scheinbar empirischen, operativen Tätigkeiten des Hinzufügens und Wegnehmens aufrechterhalten und das Resultat:
schwarz a + rot b nachweisen zu können.

Das Ergebnis beider Regeln läßt sich folgendermaßen sprachlich ausdrücken: "Ist bei Additionen oder Subtraktionen mit schwarzen und roten Zahlen die hintere Zahl rot (bzw. schwarz), so kehrt man das Rechenzeichen und die Farbe der hinteren Zahl um."
In der bekannten Notation:

für die Regeln (2a, 3a): $a \mp (-b) = a \pm b$

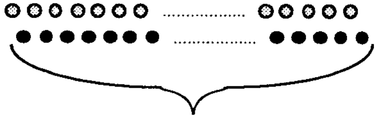
für die Regeln (2b, 3b): $(-a) \mp b = (-a) \pm (-b)$.

Die hier vorgestellte Herleitung der Regeln des Addierens und Subtrahierens von schwarzen und roten Steinchen (bzw. positiven und negativen Zahlen) vollzog sich im Unterricht auf einer vertrauten konkreten Operationsebene des Wegnehmens und Hinzufügens von Plättchen für einige Beispielaufgaben (nicht unter der Vorstellung "variabler" Zahlen für a und b). Diese Operationen wurden durch die Regel des Aufhebens ergänzt. In ihren Arbeiten zur Einführung der negativen Zahlen benutzt Frau HEFENDEHL-HEBEKER auch das Plättchenmodell [HEFENDEHL-HEBEKER 1989b, 1990] und beschreibt seinen epistemologischen Status folgendermaßen: "In diesem Modell kann man das ursprüngliche Verständnis der Addition und Subtraktion als Hinzufügen und Wegnehmen beibehalten, wenn man den Kunstgriff der geeigneten Ergänzung nullwertiger Punktepaare einbezieht." [HEFENDEHL-HEBEKER 1990, S. 98]. Analysiert man die epistemologische Bedeutung des "Kunstgriffs der geeigneten Ergänzung nullwertiger Punktepaare" (auch mystifizierend als "Killermethode" im Mathematikunterricht bezeichnet), so stellt man fest, daß im Grunde mit der hier gegebenen Beschreibung eigentlich nur eine methodische Absicht zum Ausdruck kommt, wie sie im Unterricht angezielt wird. Genau genommen besteht nämlich ein epistemologischer Widerspruch zwischen dem "ursprünglichen Verständnis der Addition und Subtraktion als Hinzufügen und Wegnehmen" und der "Regel des Aufhebens".

Zunächst kann man feststellen, daß alle abgeleiteten Regeln Varianten dieser Regel des "Aufhebens" darstellen: Immer geht es darum, die negativen Zahlen (rote Steinchen oder Gegenzahlen) durch positive Zahlen zu ersetzen bei gleichzeitigem Verändern des Operationszeichens. Das heißt, es ging um eine Verallgemeinerung der Gleichung:

schwarz a + rot a = 0.

Diese mathematische Beziehung wird im Unterricht jedoch nicht in Form einer Gleichung, sondern mit Hilfe der scheinbar so konkreten Steinchen repräsentiert:



schwarz a + rot a

Diese Darstellung suggeriert den Schülern und Schülerinnen, es handele sich hier um konkrete Objekte, die man hinzufügen oder wegnehmen kann, doch im Kern wird der Status der in dieser Darstellung benutzten Objekte radikal geändert. Obwohl es weiterhin die bekannten Plättchen sind, ändern sie sich nun zu einem echten mathematischen Symbol (genauso wie ein Zahlzeichen oder ein Buchstabe). Dafür gibt es mehrere Gründe: Die Null ist nicht auf derselben Bedeutungsebene in diesem Plättchen-Modell repräsentiert, wie etwa die 5 durch 5 Plättchen; die Null bedeutet in diesem konkreten Verständnis "Nichts" und würde durch kein (bzw. null) Plättchen dargestellt. Die hier gegebene Darstellung der Plättchen symbolisiert die Null, sie "ist" nicht die Null. Diese Interpretationsweise, nach der schon von Anfang an die Plättchenkombination der Regel des Aufhebens ein mathematisches Symbol ist, bedeutet, daß die Null als "Beziehung" zwischen anderen mathematischen Objekten behandelt wird. Die Null ist nicht ein konkretes Objekt (Plättchen), sondern eine mathematische Beziehung. Zugleich gibt es "viele" Nullen, d.h. unendlich viele konkrete Darstellungen der Null durch Plättchenkombinationen, was auch dem "ursprünglichen Verständnis" der Zahlen entgegensteht; es handelt sich bei der so symbolisierten Null um eine Form von Variable (eine Klasse von Differenzen, wie man sie in anderen Modellen der negativen Zahlen benutzt).

Schon die Darstellung der Regel des Aufhebens in Form einer Gleichung (im algebraischen Sinne) bewirkt eine veränderte Interpretation. Eine Verallgemeinerung ergibt sich durch "Formelumstellungen" in Gleichungen auf folgende Weise:

schwarz a = - rot a.

Was nun

- rot a

darstellt, ist im Rahmen des empirisch-operativen Vorgehens nicht einfach zu beschreiben, d.h. es müßte formuliert und erklärt werden als ein Wegnehmen von a roten Steinchen. Im Kontext von Schulden würden Schüler und Schülerinnen vielleicht versuchen, folgende Deutung zu geben: "Es wird der Betrag von a Schulden erlassen." Damit ist jedoch noch nicht erklärt, daß dies zu einem Betrag von a Guthaben wird, wie es die Gleichung ausdrückt: - rot a = schwarz a. Eine konkrete Frage wie z.B.: "Wovon werden diese Schulden weggenommen?" gehört gar nicht mehr in den Rahmen der Gleichung. Diese Gleichung - rot a = schwarz a macht negative Zahlen zu "echten" Zahlen (rechts steht eine schon bekannte Zahl), zu eigenen Denkgegenständen [MALLE 1988] und läßt sie nicht bloß in einem vermeintlich konkret-operativen Rahmen existieren (der durch Schulden etc. veranschaulicht wird).

Dieser Gesichtspunkt wird noch deutlicher, wenn man sich den impliziten Gebrauch der Gleichungen und des Gleichheitszeichens klarmacht [vgl. WINTER 1982]. Betrachten wir von diesem verallgemeinerten Blickwinkel her nochmals die Ableitung der ersten Regel:

schwarz a - schwarz b = rot b - rot a.

Man ist mit schwarz a (a schwarzen Steinchen) gestartet, hat etwas hinzugefügt und weggenommen und gelangte dann zu einem Ergebnis der Form rot b - rot a . Diese Gleichheit ist sozusagen eine Gleichheit als Rechenergebnis; implizit wird die "Ergebnisauffassung" des Gleichheitszeichens benutzt. Sieht man jedoch die Gleichheit als formal-symmetrisch, so müßte schon jetzt deutlich werden, daß die umgekehrte Beziehung auch gilt, nämlich rot a - rot b = schwarz b - schwarz a. Im Rahmen der empirisch-operativen Vorgehensweise müßte diese Gleichung als ein eigenständiger Fall nachgewiesen werden.

Ein grundlegendes epistemologisches Problem bei der konkreten Herleitung der Regeln des Addierens und Subtrahierens negativer Zahlen mit Hilfe des Plättchenmodells liegt darin, daß man mit dem "Kunstgriff der geeigneten Ergänzung nullwertiger Punktepaare" letztlich mathematische Symbole einführt, die jedoch aufgrund ihrer konkreten Darstellungsmittel nicht als solche im Unterricht erkannt und verstanden werden. Fügt man wie oben in den drei beispielhaften konkreten Herleitungen geschehen, in "geeigneter" Form Nullen ein, so erhält man eine Mischform von Zahlen als konkreten Objekten und Zahlen als Symbolen. Dies wird nicht thematisiert, da auch die symbolisch repräsentierte Null sofort wieder in ihre beiden konkreten Bestandteile (sie existierte als deren mathematische Beziehung) zerlegt wird, um erneut dem ursprünglichen Verständnis entsprechend Plättchen wegnehmen zu können. Das dann erhaltene Ergebnis scheint die unzureichende Bedeutungsvorstellung der Null zu rechtfertigen.

Die konkreten roten und schwarzen Steinchen müssen sofort bei Benutzung der Regel des Aufhebens in veränderter Weise genutzt werden. Sie sind nicht mehr Gegenstände, mit denen man direkt empirisch operiert, sondern im Grunde symbolisch verwendete Marker, die "für etwas" stehen sollen. Waren die Steinchen im Bedeutungs- und Gebrauchskontext der natürlichen Zahlen "gleichzeitig" Gegenstand der Anwendung und Interpretation sowie Zeichen der mathematischen Operation, so wird eine Trennung zwischen Zeichen- und Gegenstandsaspekt der Steinchen beim Übergang zu den negativen Zahlen erforderlich.

Im Verständnis der Schüler und Schülerinnen dominierte jedoch die konkrete Vorstellung, wie sie vom Gebrauch der natürlichen Zahlen bekannt war; auch die sprachlich gegebenen Formulierungen für die Rechenregeln mit den roten und schwarzen Steinchen, die sie an einfachen Zahlbeispielen hergeleitet hatten, trugen zu dieser an konkreten Ideen des "Hinzufügens", "Wegnehmens", des "Mehr als", des "Weniger als" etc. entwickelten Interpretation bei. Diese Verstehensprobleme im Mathematikunterricht erinnern an die in der Geschichte der negativen Zahlen zu beobachtenden Hindernisse, insbesondere an das Problem der "Stagnation au stade des opérations concrètes" [GLAESER 1981, S. 308]. Zudem muß man bedenken, daß etwa bei notwendig werdenden Begründungen und Erklärungen für falsch benutzte Regeln, immer wieder auf diese eingangs eingeführte konkrete Darstellungsform zurückgegriffen wurde, was natürlich die empirisch orientierten Konnotationen verfestigte. Damit werden nicht nur die bekannten natürlichen sondern auch die neuen negativen Zahlen in Form roter Plättchen wie pseudo positive Größen interpretiert (Schulden), was ähnlich wie in der Geschichte die Überwindung des konkreten zu einem relationalen Verständnis des Zahlbegriffs außerordentlich erschwert [vgl. SCHUBRING 1988]. Im folgenden Abschnitt wird aus der vorliegenden Unterrichtsstunde eine Passage analysiert, die diese Spannung zwischen den konkreten interpretativen Vorstellungen der Schüler und Schülerinnen und den notwendigen begrifflichen Verallgemeinerungen exemplarisch aufzeigt und zudem deutlich macht, wie in der alltäglichen Unterrichtsinteraktion mit diesem "epistemologischen Bruch" umgegangen wird.

2.2 Die "Verallgemeinerung" des "Größer"-Begriffs – Analyse einer Unterrichtsepisode

In der vorliegenden Unterrichtsstunde wird die Spannung zwischen den konkreten Begründungskontexten und den notwendig werdenden Verallgemeinerungen an anderen Begriffsaspekten der negativen Zahlen deutlich, als es im vorigen Abschnitt an den Rechenregeln aufgezeigt wurde. Für die Verallgemeinerung der "eingeschränkten" Subtraktion wurde die erste Regel (Regel 1a und 1b) in der vorhergehenden Unterrichtsstunde beispielhaft eingeführt. Im Verlaufe dieser Unterrichtsepisode wird sie wiederholt und in einer neuen Aufgabe benutzt.

Die vorliegende Episode läßt sich in folgende Phasen und Unterphasen gliedern:

<u>1. Phase (1 – 37):</u> Wiederholung der verallgemeinerten Subtraktionsregel
- Unterphase 1.1 (1 – 19): Wie lautet die allgemeine Subtraktionsregel?
- Unterphase 1.2 (19 – 37): Anwendung der allgemeinen Subtraktionsregel in den Hausaufgaben

<u>2. Phase (46 – 145):</u> Rechnen mit Kontoständen: Wie groß ist der Unterschied zwischen rote 17 und rote 3,4?
- Unterphase 2.1 (46 – 103): Besprechung der Aufgabenlösung in einer Tischgruppe
- Unterphase 2.2 (104 – 145): Präsentation der Aufgabenlösung an der Tafel

Die verallgemeinerte Subtraktionsregel, wie sie im Unterricht erarbeitet wurde, wird in der Unterphase 1.1 schließlich vom Lehrer resümierend so formuliert:

L: Ja, wenn beide dieselbe, dieselbe Farbe haben, beide Zahlen .. und die hintere Zahl ist größer, dann setzen wir die an den Anfang und verändern die Farbe von beiden Zahlen.

Diese Regel wird nochmals ausführlich an einem Beispiel aus den Hausaufgaben besprochen; am Ende der Unterphase 1.2 leitet der Lehrer zu der zweiten Regel über.

Später in der Unterrichtsstunde werden Aufgaben zu Kontoständen in Einzelarbeit berechnet. Von dem "größeren" Kontostand (Repräsentant für eine ganze Zahl) soll der "kleinere" Kontostand subtrahiert werden. Die Unterrichtsinteraktion der 2. Phase macht Begründungen und hinterliegende Vorstellungen deutlich, die bei Gebrauch der verallgemeinerten Subtraktionsregel nun ins Spiel kommen. In der Unterphase 2.1 versucht der Lehrer im Gespräch mit einem Schüler herauszuarbeiten, daß die rote 17 kleiner (geringerer Kontostand) ist als die rote 3,4, entgegen der bisher benutzten empirischen Interpretation von "mehr" und "weniger". Schließlich akzeptiert der Schüler diesen Vorschlag und beginnt zu rechnen: rote 3,4 - rote 17.

In der Unterphase 2.2 wird nun für alle Schüler und Schülerinnen vorne an der Tafel die "korrekte" Lösung der Aufgabe vorgeführt. Die Schülerin Daniela geht zur Tafel und schreibt:
rote 17 < rote 3,4; dann rechnet sie: rote 3,4 - rote 17 = 17 - 3,4 = 13,6.
Diese Lösung entspricht formal den vom Lehrer gestellten Erwartungen, ist jedoch zu schnell vorgetragen und deshalb wird sie noch einmal Schritt für Schritt diskutiert [vgl. zu diesem Interaktionsmuster der "überkompletten Darstellung" JUNGWIRTH 1991].

Der Lehrer nimmt wieder die fragend-entwickelnde Interaktion mit der Frage auf: "Sind alle einverstanden?" (115) und im folgenden richtet er das Augenmerk auf den zentralen Punkt: Welche der beiden Zahlen ist die größere? "Ist siebzehn tatsächlich der niedrigere Kontostand gegenüber drei Komma vier" (119/20), und ".. Normalerweise ist doch siebzehn ... mehr als 3,4" (122, 124). Auf diese Fragen, die indirekt schon die korrekte Antwort suggerieren, geben die Schüler und Schülerinnen Begründungen, die sich des Schulden-Modells, des Zahlenstrahls und der rot gefärbten Plättchen bedienen. Die vorgetragenen Begründungen werden vom Lehrer akzeptiert und benutzt, um die "richtige" Subtraktionsaufgabe zu formulieren: "Und wir müssen vom höheren Kontostand den kleineren abziehen, deswegen müssen wir rechnen drei Komma vier minus siebzehn." (135 - 137).

Nachdem die "richtige" Subtraktionsaufgabe für die beiden Kontostände gefunden wurde, stellt sich sofort die Frage nach der nun für die weitere Rechnung benutzten Regel: "Welche Regel wurde denn hier angewendet?" (137/8). Eine Schülerin antwortet "Die erste." Und ohne nochmals die Begründung für die Anwendung der ersten Regel zu erwähnen faßt der Lehrer zusammen:

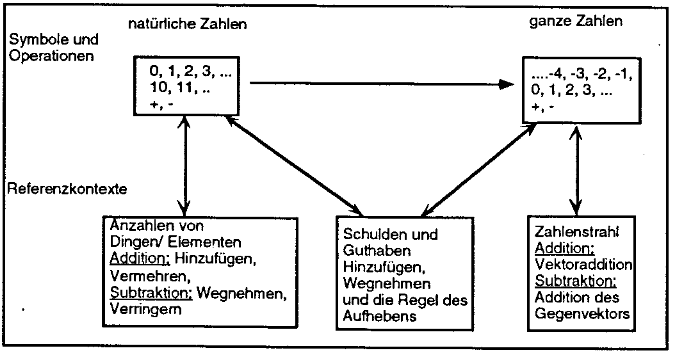
L: Wir haben die Farbe geändert und die Reihenfolge der beiden Zahlen, das ist die erste Regel .. und der Rest ist dann ja leicht. Das können wir ja.

Im Verlaufe des Gebrauches der erlernten verallgemeinerten Subtraktionsregel entstehen unter der Hand zwei gegensätzliche Interpretationen von dem, was größer bzw. kleiner ist. Zunächst wird für die Konstruktion der "richtigen" Subtraktionsaufgabe benötigt: rote 17 < rote 3,4. Im Bedeutungsrahmen der Anordnung auf der Zahlengeraden wird diese Eigenschaft in der Unterrichtsinteraktion mehrfach begründet ((77-94), (119-135)). Dann wird für die Benutzung der Regel (1) die am Anfang der Unterrichtsstunde explizit diskutierte Voraussetzung verwendet: Die hintere Zahl (rote 17) ist größer als die vordere (rote 3,4); dies geschieht im Kontext einer empirischen Auffassung von größer: 17 rote Steinchen sind mehr als 3,4 rote Steinchen. Ausgehend von einer empirisch-operativen Kennzeichnung von größer (als "mehr vorhanden"; dies gilt sowohl im Bereich der schwarzen wie der roten Steinchen) wird eine einheitliche Verallgemeinerung von "größer" und "kleiner" für den gesamten Bereich der ganzen Zahlen erforderlich.

Wie kann es zu dieser gegensätzlichen Interpretation von "größer" und "kleiner" kommen? Liegt hier nur ein methodischer Fehler des Lehrers vor und bei sorgfältigerer Vorbereitung wäre es zu diesem Bedeutungsbruch erst gar nicht gekommen? Für die Addition und die Subtraktion hätte man diesen Gegensatz methodisch gewiß vermeiden können, wenn man sofort mit dem vollständigen Zahlenstrahl und der "Vektoraddition" [vgl. HEFENDEHL-HEBEKER 1989b] als Ausgangsmodell angefangen hätte. Im folgenden soll die gerade analysierte Unterrichtsepisode jedoch nicht einfach methodisch korrigiert werden; sie bietet einen guten Anlaß, ein wichtiges Problem in der Entwicklung neuer mathematischer Begriffe in der Unterrichtsinteraktion zu untersuchen: Welche Bezüge und Verschiebungen gibt es zwischen den mathematischen Symbolen samt ihren Operationen und den entsprechenden Referenzkontexten?

Betrachtet man noch einmal den letzten Abschnitt der Episode (127 - 145), so erstaunt doch, wie problemlos von der einen "größer" Interpretation zu der anderen gewechselt wird. Es ist nicht anzunehmen, daß die für die Anwendung der verallgemeinerten Subtraktionsregel notwendige Interpretation einfach an dieser Stelle vergessen wurde, auch wenn sie hier nicht mehr explizit ausgesprochen wurde. Vielmehr wurde sehr wahrscheinlich hier – wie so oft im Mathematikunterricht erforderlich – ein Wechsel in der Beziehung zwischen den Symbolen und den Referenzkontexten vollzogen. Zunächst werden die rote 17 und die rote 3,4 als Kontostände verstanden, die auf dem Zahlenstrahl repräsentiert werden. Dies ermöglicht es, die erste Teilaufgabe zu bearbeiten: die richtige Subtraktionsaufgabe rote 3,4 – rote 17 aufzuschreiben. Dann wechselt die Interpretation der Beziehung zwischen den Symbolen und den Referenzobjekten: Rote 17 und rote 3,4 sind Steinchen von roter Farbe, damit ist rote 17 mehr als rote 3,4; die verallgemeinerte Subtraktionsregel (1) darf benutzt werden und liefert ein Rechenergebnis.

Interessant ist es, daß offenbar das Schulden-Modell in dieser Interaktion je nach Perspektive als Referenzkontext für beide Interpretationen von "größer" dient. Werden die Schulden als Kontostände auf dem Zahlenstrahl notiert, so ist rote 17 kleiner als rote 3,4; werden die Schulden als eine Anzahl roter Steinchen gesehen, so sind rote 17 mehr als rote 3,4. Das von Beginn an benutzte konkrete Modell der Schulden scheint so etwas wie eine "zweideutige" Funktion zu haben. Beschreiben wir deutlicher die Beziehungsstruktur zwischen den mathematischen Symbolen und beispielhaften Referenzkontexten für den Übergang von den natürlichen zu den ganzen Zahlen (für die Addition und die Subtraktion).



Die in der Episode beobachtete gleichzeitige Existenz zweier - konträrer - Interpretationen von "größer" und "kleiner" hängt mit den je verschiedenen Referenzkontexten bzw. den interaktiv konstituierten verschiedenen Erfahrungsbereichen, zusammen. Zum einen sind Schüler und Schülerinnen häufig nicht in der Lage oder sehen aufgrund ihrer verschiedenen subjektiven Erfahrungsbereiche auch nicht die Notwendigkeit, einen "formalen" Widerspruch als solchen zu erkennen; zum anderen sind geschickte Wechsel der Referenzkontexte und damit veränderte Interpretationen der mathematischen Symbole in vielen Rechnungen, die man durchführt oft von Vorteil, anstatt mit dem "universellen" Referenzkontext die Interpretation der Symbole vorzunehmen. Von Bedeutung ist dabei der jeweilige epistemologische Status des Modells, der zur Interpretation der Symbole benutzt wird; dominiert eher ein emipirisch-konkreter Charakter oder handelt es sich um eine Art relationalem Modell?

Im Wechsel von einem konkreten Referenzkontext der natürlichen Zahlen zu einem relationalen Referenzkontext der ganzen Zahlen zeigen sich somit beispielhaft im "Übergangs-Referenzkontext" von "Schulden und Guthaben, Hinzufügen, Wegnehmen und Regel des Aufhebens" gegensätzliche Interpretationen von "größer" und "kleiner" und gemischte epistemologische Bedeutungen der Darstellungsmittel und Zeichen, die quasi in sich den Umbruch von einer konkreten zu einer relationalen Referenz beinhalten. Im Zuge der Einführung der negativen Zahlen werden hier beispielhaft beim "Größer"-Begriff die epistemologischen Konflikte, Umbrüche und Umdeutungen des Wissens sichtbar, wie sie im Verlaufe des alltäglichen Unterrichts interaktiv ausgebildet werden.

3. Die Rolle von Modellen: Konkrete Sachsituationen, Permanenzprinzipien oder relationale Diagramme?

Die folgende Analyse von Modellen für negative Zahlen erfolgt nicht primär mit der Intention, die unmittelbare, methodische Brauchbarkeit dieser Modelle für ihren problemlosen Einsatz im Unterricht zu bewerten, sondern hat vor allem ihre besonderen epistemologischen Charakteristika im Auge. Die unterrichtliche Verwendung solcher Modelle macht z.B. weitere curriculare Überlegungen bis hin zu Planungen für Unterrichtsreihen erforderlich [vgl. VIET & RAGNITZ 1970; VIET 1971].

Unter der Kennzeichnung "Modell für die negativen Zahlen" lassen sich im wesentlichen drei Typen klassifizieren:
(1) modellierende Strukturen in Sachsituationen
(2) Modelle auf der Basis geometrischer oder arithmetischer Permanenzprinzipien
(3) Modelle als eigenständige Repräsentationen der ganzen Zahlen (für die Addition und die Multiplikation)

Diese Klassifikation erfolgt nicht nach dem Gesichtspunkt, ob sich z.B. zwischen den Modellen formal strukturelle Isomorphien herstellen lassen oder nicht (wie etwa zwischen dem Schulden- und dem Differenzenmodell); die Unterscheidung richtet sich vielmehr nach der jeweiligen Ontologie, die einem Modell zugeschrieben wird.

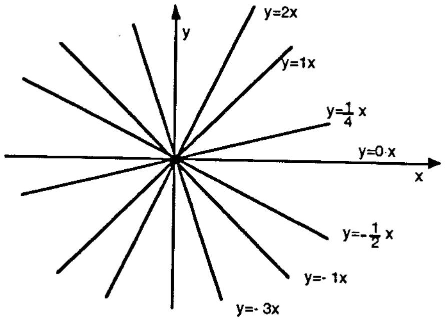
Zu den Modellen des <u>ersten Typs</u> gehören insbesondere die schon erwähnten "Schuldenmodelle", "Temperaturen", "Höhendifferenzen", "Zuwachs-Abnahme-Modelle" etc. [vgl. SPIESS 1989]. Diese Modelle unterliegen der Gefahr einer "zweideutigen" Interpretationsweise der negativen Größen, die hier ja empirisch-konkrete Bedeutung haben und deren relationale Deutung in diesem Sachkontext nicht selbstverständlich ist, ähnlich wie in dieser Unterrichtsstunde beobachtet.

Zu den Modellen des zweiten Typs zählen die arithmetischen Permanenzreihen [WINTER 1989] und die auf dem Begriff der linearen Funktion basierenden geometrisch-strukturierten Zahlenfelder im x-y Koordinatensystem [FREUDENTHAL 1989].

Beispiele für die arithmetischen Permanenzreihen (für die Addition und die Multiplikation ganzer Zahlen) sind Tafeln der folgenden Art:

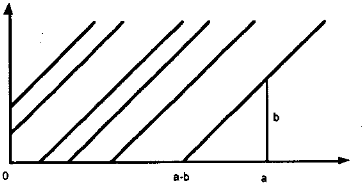
3	+	2	=	5			3	·	(-4)	=	(-12)	
3	+	1	=	4	-1		2	·	(-4)	=	(-8)	+4
3	+	0	=	3	-1		1	·	(-4)	=	(-4)	+4
3	+	(-1)	=	2	-1		0	·	(-4)	=	0	+4
3	+	(-2)	=	1	-1		(-1)	·	(-4)	=	4	+4
3	+	(-3)	=	0	-1		(-2)	·	(-4)	=	8	+4
3	+	(-4)	=	(-1)	-1		(-3)	·	(-4)	=	12	+4

Das folgende Diagramm ist ein Beispiel für ein Modell, das auf dem geometrischen Permanenzprinzip für die Multiplikation der negativen Zahlen aufbaut [nach FREUDENTHAL 1989].



Jede der linearen Funktionen y=a·x stellt die Multiplikationen aller Zahlen (auch der negativen) mit a dar; für die Funktion y=-3·x erhält z.B. man für die Zahlen x= 2, 1, 0, -1, -2, ... die Produkte: y= -6, -3, 0, 3, 6, ..., die man auch am Funktionsgraphen ablesen kann.

Die Modelle auf der Basis geometrischer oder arithmetischer Permanenzprinzipien dienen vor allem zur plausiblen Ausweitung der Rechenregeln auf den neuen Bereich der ganzen Zahlen und sollen Argumente dafür liefern, daß neue Regeln, wie "minus mal



Kann man die Differenzen "ausrechnen" so erhält man die positiven Zahlen, z.B. (8,5) = (8-5,0) = (3,0) (diese Zahlenpaare stellen alle dieselben Differenzen dar); sind die Differenzen im bisherigen Kalkül nicht bestimmbar, so erhält man die negativen Zahlen, z.B. (5,8) = (0,3) als ein "ausgezeichnetes" Zahlenpaar aus dieser Restklasse. Wie werden diese "Zahlen" (durch Klassen repräsentiert) addiert (subtrahiert) und multipliziert (dividiert)?

Definition der Addition:

$$(a,b) + (c,d) := (a + c, b + d)$$

Definition der Multiplikation:

$$(a,b) \cdot (c,d) := (a \cdot c + b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)$$

Die Definition der Addition ist vor dem Hintergrund der "Differenzen" Idee plausibel; demgegenüber läßt sich die Multiplikation nicht so einfach als "vernünftig" darstellen. Zu ihrer "plausiblen Herleitung" benötigt man Vorstellungen über die Eigenschaften, die man gerade den ganzen Zahlen zuschreiben möchte. Man könnte etwa so überlegen: Die Zahlenpaare sind Differenzen, die nun ausmultipliziert werden sollen:

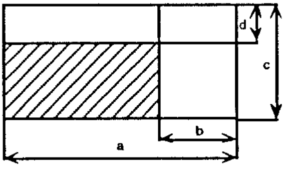
$$(a,b) \cdot (c,d) = (a - b) \cdot (c - d) = ac - bc - ad + bd = (ac + bd, bc + ad)$$

Die hier benutzten Rechenregeln sind noch nicht allgemein verifiziert, sie dienen nur als eine heuristische Idee und ein plausibles Argument. Diesen diffizilen Übergang bei der Einführung der neuen Regeln kann man so beschreiben: die neuen Rechenregeln werden auf der Basis der alten Regeln plausibel definiert, indem man die (allgemeinen) Operationsregeln der Gleichungen (aus der elementaren Algebra) postulierend benutzt.

Die Einführung der Multiplikation der Differenzen

$$(a - b) \cdot (c - d) = ac - bc - ad + bd$$

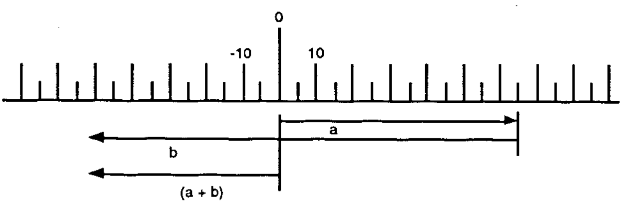
(mit $a > b > 0$, $c > d > 0$) kann man durch folgendes Diagramm unterstützen:



minus gleich plus", vernünftige Verabredungen sind. Diese Modelle nutzen mathematische Strukturen und nehmen dabei keinen Bezug auf Sachsituationen.

Die Modelle des dritten Typs, die eigenständige Repräsentationen der ganzen Zahlen darstellen, unterscheiden sich von den vorherigen darin, daß sie die ganzen Zahlen jeweils (in einer arithmetischen oder geometrischen Struktur) als neue mathematische Objekte repräsentieren und auch die Operation mit diesen Objekten wird gemäß den Eigenschaften des Modells dargestellt.

Das für die Addition (und die Subtraktion) ganzer Zahlen bekannte Modell ist der Zahlenstrahl mit der Vektoraddition. Hier repräsentieren die Vektoren die ganzen Zahlen, die Vektoraddition ist eine die Addition (und Subtraktion) der ganzen Zahlen erklärende und begründende Operation; dabei werden geometrische Eigenschaften der Vektoren in diesem Modell herangezogen.



Die beiden folgenden Modelle umfassen auch die Multiplikation und zeigen somit noch deutlicher den Unterschied zu den vorherigen Modellen. Das erste könnte man als "Differenzen-Modell" bezeichnen, das zweite ist der "Negative Binär-Abakus" [nach GARDNER 1973].

Die Idee des Differenzen-Modells besteht darin, daß man im allgemeinen die Aufgabe $a - b = x$ in den natürlichen Zahlen nicht lösbar ist; also wird mit den Differenzen "$a - b$" folgendermaßen gerechnet. Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ werdenauf diese Weise definiert:

$$\mathbb{Z} = \{ (a,b) / a, b \in \mathbb{N} \}/_{\cong}$$

mit der Eigenschaft: $(a,b) \cong (a',b') :\Leftrightarrow a + b' = b + a'$

Zu den Restklassen nach der Relation " $\cong$ " gehören alle die Zahlenpaare (a,b) welche die gleiche "Differenz" darstellen; diese Klassen können (zunächst) als Halbgeraden in der positiven Viertelebene dargestellt werden:

Die so überlegte Multiplikationsvorschrift, die für den bekannten Bereich der positiven Zahlen gültig ist, wird nun "an den Anfang" gesetzt und für "alle" Differenzen verallgemeinernd definiert [vgl. MALLE 1988, S. 291].

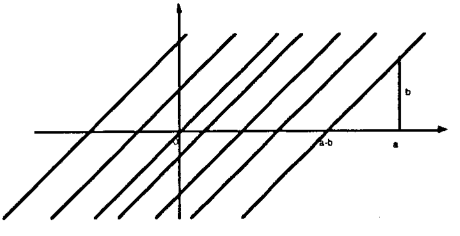
Wenn das Produkt ausgerechnet wird:

$$(0,1) \cdot (0,1) = (0{\cdot}0 + 1{\cdot}1,\ 1{\cdot}0 + 0{\cdot}1) = (1,0).$$

erhält man die Regel "minus mal minus gleich plus".

Die Subtraktion und die Division werden durch die Addition bzw. die Multiplikation mit dem Gegen-Zahlenpaar definiert.

In diesem "Differenzen-Modell" werden die ganzen Zahlen durch Restklassen bzw. durch Geradenstücke repräsentiert; mit diesen Objekten wird im Modell addiert und multipliziert nach Definitionen, die plausibel sind und eingeschränkt auf die Menge der natürlichen Zahlen mit der üblichen Addition und Multiplikation übereinstimmen. In den Restklassen gibt es ausgezeichnete Elemente, solche Paare, die an einer der Stellen Null sind: (a,0) (positive Zahlen) und (0,b) (negative Zahlen). Es sind die Punkte auf der x- bzw. y-Achse im geometrischen Modell, das man folgendermaßen erweitern könnte:

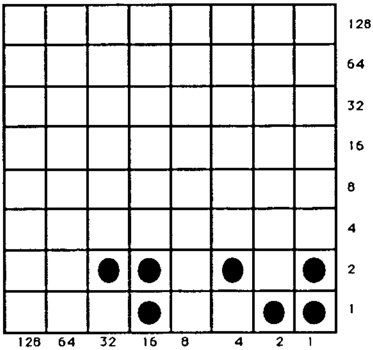


In diesem erweiterten Modell erkennt man, daß die ganzen Zahlen durch die ausgezeichneten Zahlenpaare gerade auf dem bekannten Zahlenstrahl repräsentiert sind: Für die positiven Zahlen kann man (so weit wie bisher) auf die alten Rechenregeln zurückgreifen; mit den "neuen" Zahlen rechnet man "ähnlich" unter Berücksichtigung der arithmetischen "Ausnahme–Regeln".

Dieses Modell der eigenständigen Repräsentation der ganzen Zahlen erhält durch die "richtige" Wahl der Addition und der Multiplikation sowie der Idee der Differenz, die zudem geometrisch dargestellt wird, seine begriffliche Kraft.

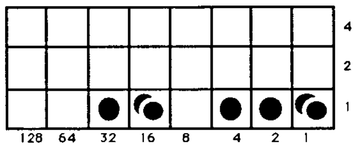
Der <u>Negative Binär-Abakus</u> nutzt in geschickter Weise das (binäre) Stellenwertsystem und zur Repräsentation der Zahlen Steinchen auf einem Schachbrett, die nach einfachen Regeln zur Simulation der Addition und Multiplikation manipuliert werden. [vgl. GARDNER 1973].

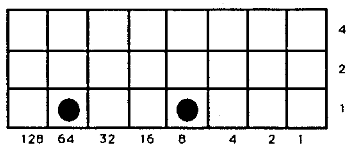
Im "Positiven Binär-Abakus" werden z.B. die Zahlen 53 und 19 so dargestellt:



An jeder der Positionen darf nur ein Steinchen liegen; zwei Steinchen an einer Position bedeuten, daß hierfür eine Stelle "höher" ein Steinchen eingefügt werden muß. Das Ergebnis sieht so aus:

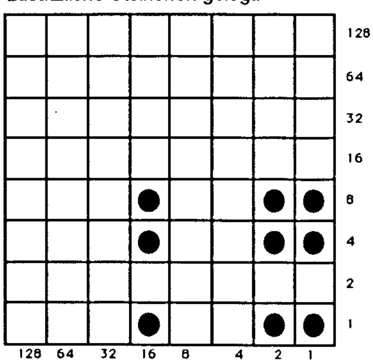
Die Addition beider Zahlen geschieht durch "Zusammenschieben" der Steinchen und anschließend durch Herstellen der "eindeutigen" Darstellung in diesem Stellenwertsystem:



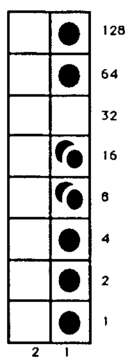


Die Multiplikation geht im "Binär-Abakus" folgendermaßen vor sich.

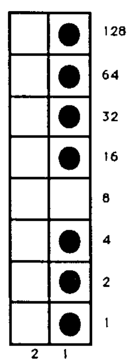
Die beiden zu multiplizierenden Zahlen 19 und 13 werden an den beiden Seiten dargestellt, und an die "Schnittstellen" im Brett werden zusätzliche Steinchen gelegt:



Dann werden alle Steinchen diagonal nach rechts oben geschoben:



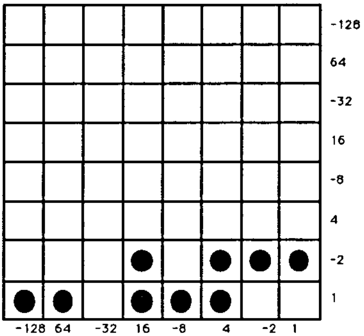
Die eindeutige Darstellung führt zur Lösung:



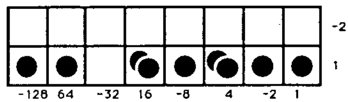
[Zur "Erklärung" dieser Multiplikationsregel siehe GARDNER 1973.]

Auf der Basis des "Positiven Binär-Abakus" läßt sich der "Negative-Binär-Abakus" folgendermaßen erklären: Die Zahlen werden nicht im Binärsystem, sondern im Negativ-Binärsystem [vgl. KNUTH 1969] dargestellt.

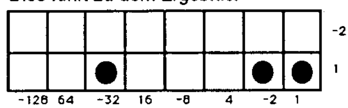
Die Aufgabe 19 + (-52) wird z.B. so gelöst:



Die Regel zur Herstellung einer eindeutigen Zahldarstellung muß leicht modifiziert werden: Im Beispiel heben sich 2·4 und 1·(-8) auf; die 2·16 ist 1·64 + 1·(-32).

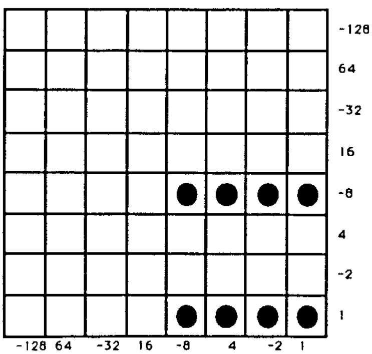


Dies führt zu dem Ergebnis:

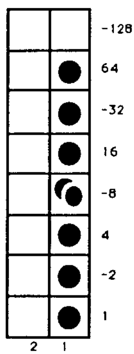


Ganz analog zum positiven wird im "Negativen Binär-Abakus" multipliziert:

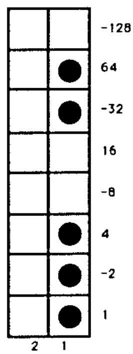
Berechnung des Produkts (-5)·(-7):



Das diagonale Zusammenschieben der Steinchen ergibt



Die eindeutige Darstellung zeigt das Ergebnis 35:



Zwei Aspekte macht der "Negative Binär-Abakus" für die Diskussion um den epistemologischen Status von Modellen für die negativen Zahlen vor allem deutlich. In ganz ausgeprägter Weise verändert sich hier die Rolle der Steinchen. Im Umgang mit den Steinchen und den zugehörigen Tätigkeiten des Hinzufügens und Wegnehmens war im Unterricht die Intention verbunden, sich auf einen vermeintlich konkreten und natürlichen Referenzkontext für die negativen Zahlen stützen zu können. In diesem Modell wird die notwendige Interpretation der Steinchen als abstrakte Symbole in einem begrifflichen Netzwerk unumgänglich: Die Steinchen sind Marker, sie sind nicht in einem unmittelbaren Sinne die Gegenstände der positiven und der negativen Zahlen, sie repräsentieren diese Zahlen und selbst die ganz konkret und enaktiv durchgeführten Manipulationen mit diesen Steinchen auf dem Brett simulieren die Operationen des Addierens und Multiplizierens von ganzen Zahlen.

Desweiteren zeigt dieses Modell, daß die Schreibweise der Zahlen in einem Stellenwertsystem nicht bloß eine ökonomische Kodierung darstellt, sondern ein begriffliches System ist, dessen Entwicklungsstand zirkulär von der Entwicklung des Zahlbegriffs selbst abhängt. In diesem Modell gibt es in der Tat "gleichberechtigte" und in ihrer Kodierung nicht in negative und positive unterscheidbare Zahlen.

Die in diesem Abschnitt vorgenommene Analyse von Modellen für die negativen Zahlen hatte primär die Intention, den epistemologischen Status des in diesen Modellen repräsentierten mathematischen Wissens besser zu verstehen. In der Spannbreite zwischen dem konkreten Modell der "Kontenführung" und dem komplizierten Modell des "Negativen-Binärabakus" wird exemplarisch die notwendige "Verschiebung" von einer empirischen zu einer relationalen Deutung der mathematischen Begriffe sichtbar. Und je mehr die im konkreten Modell intendierte explizite Begründung der negativen Zahlen durch eine implizite, relationale Definition ersetzt wird, umso stärker wird der zirkuläre Begründungscharakter des mathematischen Wissens wirksam, wie er sich im epistemologischen Zirkel zeigt. Und zudem ändern sich – quasi unter der Hand – die Bedeutungen der scheinbar so konkreten Träger des Wissens, der roten und schwarzen Steinchen, der Schulden und Guthaben, der Zahlziffern, der Geraden und Pfeile, etc. zu Zeichen für echte mathematische Symbole.

Dies macht deutlich, daß insbesondere die "kompletten" Modelle, welche die ganzen Zahlen "vollständig" repräsentieren, nicht schon für sich genommen eine ausreichende methodische Basis für die curriculare Umsetzung im Unterricht sein können. Von den Schülern und Schülerinnen müssen diese Modelle notwendigerweise als artifizielle, strukturelle Spiele interpretiert werden, deren begriffliche Begründung man nicht erschließen und verstehen, sondern nur hinnehmen kann.

4. Der epistemologische Status neuer Symbole: Probleme und Konsequenzen

Werden die drei im vorigen Abschnitt dargestellten Typen von Modellen für die ganzen Zahlen – teilweise in Kombination mit weiteren Veranschaulichungen und Bezügen –

zum Lernen der negativen Zahlen benutzt, so dienen sie den Schülern und Schülerinnen vor allem zur Konstruktion eigener Erfahrungsbereiche; sie bewirken zudem unterschiedliche Interpretationen vom epistemologischen Status der negativen Zahlen auf der Grundlage verschiedenartig gestalteter Referenzkontexte.

In den Modellen auf der Basis von modellierenden Strukturen in Sachsituationen erhält die negative Zahl eine ähnlich objektive Art der Existenz, wie sie auch die positive Zahl als eine Größe in der Realität besitzt; negative Größen sind zwar "entgegengesetzt", dennoch gibt es sie scheinbar genauso wirklich, wie die positiven Zahlen. Sie haben eine mythische Existenz als reale Ergänzung zu fehlenden positiven Größen [vgl. SEEGER & STEINBRING 1992].

Die Modelle auf der Basis von geometrischen und arithmetischen Permanenzprinzipien trennen die Bedeutung und Entwicklung der negativen Zahlen und ihrer Operationen zunächst von den Sachkontexten. Sachsituationen dienen hier nicht der begrifflichen Fundierung der negativen Zahlen. Die zentrale Intention dieser Modelle ist die Begründung der Übertragung und Ausweitung der bekannten Rechenoperationen auf den neuen Bereich der ganzen Zahlen. Die ganzen Zahlen werden in diesen Modellen nicht selbst als Modell-Elemente repräsentiert, sie werden vermittelt über die Permanenz der Operationen beschrieben. Die Zahl (-3) "existiert" nicht als eigenständiges Element im Modell, sie erhält z.B. im Rahmen der linearen Funktion $y= (-3)\cdot x$ operative Bedeutung. (Ähnlich für die Addition).

Je nach Intention der Einführung der ganzen Zahlen im Rahmen von Modellen auf der Basis von Permanenzprinzipien erhalten diese neuen negativen Zahlen ihre Bedeutung durch Bezugnahme auf einen "gemischten" Referenzkontext. Die Operationen mit diesen neuen Zahlen sind eine Art "Fortsetzung" der bekannten Regeln, die sich dann auch auf einfache "Ausnahme"–Regeln reduzieren lassen: Im wesentlichen der Umgang mit der Kombination von "minus" und "plus" in Additions- und Multiplikationsaufgaben bei "Klammer-Rechnungen" (sowie Wechsel von Operations- und Vorzeichen). Ihre begriffliche Bedeutung beziehen die negativen Zahlen in diesem Modell wesentlich aus den zugelassenen Operationen und den begrifflichen Vorstellungen, die mit den bekannten Zahlen verbunden werden, seien dies Vorstellungen aus konkreten Sachkontexten, seien es arithmetische, strukturelle Ideen.

Modelle, in denen die ganzen Zahlen eigenständig repräsentiert werden (für die Addition und die Multiplikation) intendieren die Beschreibung von mathematischen "Objekten" und ihren Operationen, die den Bereich der ganzen Zahlen simulieren. Die Bedeutung der ganzen Zahlen wird hierbei nicht hauptsächlich durch die ausgeweiteten Operationen vermittelt, auch die Elemente des Modells enthalten konstitutive Bedeutung für die ganzen Zahlen als einem neuen mathematischen Begriff. Z.B. transportieren die Vektoren im Zahlenstrahl-Modell für die Addition und Subtraktion begriffliche Vorstellungen, ähnlich wie die Differenzen im Differenz-Modell: die ganze Zahl ist ein Vektor mit Richtung oder eine Klasse von Differenzen. Anders als in den Modellen auf der Grundlage von Sachsituationen erhalten hier die ganzen Zahlen keine empirisch-direkte, sondern eine theoretisch-relationale Kennzeichnung (Vektor und Differenzklasse).

Die Kodierung von Zahlen im negativ-binären System kann erst dann produktive, begriffliche Bedeutung für die ganzen Zahlen liefern, wenn der arithmetisch-strukturelle Rahmen von Stellenwertsystemen (und möglichen Verallgemeinerungen) sowie die den konkreten Manipulationen der Steinchen unterliegenden Ideen für die Simulation der Rechenregeln stärker vertraut und gewohnt sind. Erst dann können ganze Zahlen als "mathematische Objekte" eines begrifflichen Zahlensystems mit "natürlich" verallgemeinerten Regeln der Manipulation interpretiert werden.

Für die Entwicklung und das Verstehen der Bedeutung der ganzen Zahlen müssen somit drei epistemologische Charakteristika berücksichtigt werden:

- <u>empirische Bedeutung</u> durch Bezugnahme auf konkrete Sachsituationen als Referenzkontexten
- <u>operative Bedeutung</u> durch Übertragung der arithmetischen Operationen unter Bezug auf arithmetische Referenzkontexte
- <u>theoretische Bedeutung</u> durch Modell-Elemente und ihre Operationen, die einen mathematisch-strukturellen (geometrischen, arithmetischen, algebraischen) Referenzkontext darstellen.

Erfahrungen, die in Unterrichtsbeobachtungen gemacht wurden, lassen vermuten, daß die begrifflichen Vorstellungen zu einem neuen mathematischen Begriff – wie z.B. dem der negativen Zahlen – nicht einfach auf einem einzigen, universellen Referenzkontext beruhen; für die jeweiligen aktuellen Verwendungs- und Gebrauchszwecke werden verschiedenartige Referenzkontexte benutzt und auch im Verlaufe einer Rechnung flexibel ausgewechselt: Solange man mit dem Begriffsrahmen der positiven Zahlen auskommt wird dieser benutzt, kommen Minus–Zeichen in verwickelten Kombinationen vor, so wird auf verallgemeinerte Operationsregeln zurückgegriffen (die häufig rein auswendig memoriert werden), und sollten dann noch Zweideutigkeiten bleiben, so werden so weit wie möglich auch begriffliche Vorstellungen für das mathematische Objekt "negative Zahl" herangezogen (z.B. systematische Trennung von Vorzeichen und Operationszeichen, oder Wachrufen der Vorstellung von negativer Zahl als Vektor im Zahlenstrahl-Modell).

Die Elemente und Anteile der verschiedenen Referenzkontexte für die negativen Zahlen werden, soweit es sich als notwendig erweist, für die Bewältigung von Aufgaben herangezogen, bei tendenziellem Verharren auf den alt bewährten und vertrauten referentiellen Bausteinen. Für den operativen Umgang mit negativen Zahlen und Variablen in Rechnungen und Gleichungen scheint dies auch auszureichen und diese pragmatische Kombination von Versatzstücken aus verschiedenen Referenzkontexten wird auch nur selten durch einen einheitlichen Referenzkontext für die ganzen Zahlen (z.B. dem Differenz-Modell) ausgetauscht.

Ruft man sich vor diesem Hintergrund die zu Beginn angesprochene Spannung zwischen epistemologischer Analyse und didaktischer Konstruktion in Erinnerung, so stellt sich für die Einführung der negativen Zahlen erneut die Frage nach dem Verhältnis zwischen einem auf konkreten Sachsituationen und auf einer empirischen Begriffsvorstellung basierenden schrittweisen, methodischen Aufbau und den Möglichkeiten, mit einem "kompletten", abstrakten, mathematischen Modelle zu beginnen.

Beiden Begründungsweisen der negativen Zahlen ist gemeinsam, daß sie einen universellen und konsistenten Aufbau anbieten wollen. Sowohl die Grundlegung auf empirische Sachsituationen, die eine vermeintliche natürliche Basis für die Herleitung der negativen Zahlen darstellen, als auch die "vorgegebene" Definition durch ein komplettes, strukturelles Modell intendieren eine einheitliche und bruchlose Vorgehensweise. Diese intendierte Perfektion der begrifflichen Struktur birgt für das Lernen der negativen Zahlen Probleme: Die empirische Begründung ist nicht universell tragfähig, wie an mehreren Stellen gezeigt wurde; und die externe Vorgabe von kompletten Modellen verschließt dem Lernenden die Möglichkeit, neue begriffliche Einsichten, die erst im Kontrast zum alten Wissen entstehen können, für sich selbst herauszufinden.

Für das Erlernen von neuen mathematischen Begriffen scheint somit eine solche Orientierung angebracht, bei der bewußt für den Lernprozeß keine logisch konsistente, strukturelle Abfolge unterstellt wird, sondern im Rahmen der persönlichen Erfahrungsbereiche der Schüler und Schülerinnen die auftretenden Konflikte, Brüche und Umdeutungen für den Lernprozeß konstruktiv genutzt werden. Für die negativen Zahlen könnte dies bedeuten, zwar mit Sachsituationen (Kontoständen, Spielsteinchen, etc.) einzusteigen, Erfahrungen zu sammeln und erste Begriffsbildungen vorzunehmen, jedoch im Verlaufe der weiteren Begriffsentwicklung dieses empirische Fundament nicht um jeden Preis aufrechtzuerhalten, sondern auftretende Brüche (die auch bewußt provoziert werden könnten) zum Anlaß für eine begründete und einsehbare Umdeutung des epistemologischen Charakters der Modelle, Zeichen und Begriffe zu nehmen.

Auf diese Weise könnte die Einführung in die negativen Zahlen zu einem tatsächlichen, konstruktiven Lernprozeß werden, wobei es nicht um reduktive Interpretationen des neuen Begriffs auf vorgegebene Bedingungen geht – seien es empirische Fundierungen, seien es umfassende strukturelle Modelle – , sondern um die echte Konstruktion neuer begrifflicher Beziehungen und neuer epistemologischer Erkenntnisse, in den Umbrüchen und Wechselwirkungen zwischen den an eignen, alten Erfahrungen gebundenen Vorstellungen und den Anforderungen nach strukturellen Verallgemeinerungen des Zahlbegriffs. Im Lernprozeß sind aufkommende Brüche für das Verstehen des Wissens unvermeidbar aber auch produktiv; ein komplettes Modell, in dem die konsistente Struktur und die veränderte epistemologische Deutung der Symbole beispielhaft zum Ausdruck gebracht werden kann, erlaubt erst im nachhinein, die im zeitlich erfolgten Lernprozeß gewonnenen Erkenntnisse zu systematisieren und einzuordnen.

Literatur

ANDELFINGER, B., BEKEMEIER, B., & JAHNKE, H. N. (Ed.). (1983). *Zahlbereichserweiterungen als Kernlinie des Lehrplans - Probleme und Alternativen.* Bielefeld: Occasional Paper Nr. 31 des IDM.

BAUERSFELD, H. (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In H. BAUERSFELD et. al. (Eds.), *Lernen und Lehren von Mathematik* (pp. 1 - 56). Köln: Aulis.

COQUIN-VIENNOT, D. (1985). Complexité mathématique et ordre d'acquisition: une hiérarchie de conceptions à propos des relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques 6*(2/3), 133 - 192.

FREUDENTHAL, H. (1989). Einführung der negativen Zahlen nach dem geometrisch-algebraischen Permanenzprinzip. *Mathematik lehren 35*, 26 - 37.

GARDNER, M. (1974). Mathematical Games - How to turn a chessboard into a computer and to calculate with negbinary numbers. *Scientific American* (4), 106 - 111.

GLAESER, G. (1981). Epistémologie des nombres négatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques 2*(3), 303 - 319.

HEFENDEHL-HEBEKER, L. (1988). "... das muß man doch auch anders erklären können!" Protokoll über einen didaktischen Lernprozeß. *Der Mathematikunterricht 35*(2), 4-18.

HEFENDEHL-HEBEKER, L. (1989a). Die negativen Zahlen zwischen anschaulicher Deutung und gedanklicher Konstruktion – geistige Hindernisse in ihrer Geschichte. *Mathematik lehren 35,* 6 - 12.

HEFENDEHL-HEBEKER, L. (1989b). Erfahrungen mit den negativen Zahlen im Gymnasium. *Mathematik lehren 35*, 48 - 58.

HEFENDEHL-HEBEKER, L. (1990). Überlegungen und Erfahrungen zur Einführung der negativen Zahlen (Reflexions et Expériences sur l'Introduction des Nombres Négatifs). *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Strasbourg: IREM Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Strasbourg: IREM 3,* 75-102.

HEFENDEHL-HEBEKER, L. (1993). *The Practice of Teaching Mathematics and Teacher education.* Manuscript for the Conference on "The Culture of the Mathematics Classroom: Analyzing and Reflecting upon the Conditions of Change", Osnabrück, Germany, October, 11-15, 1993.

JAHNKE, H. N., STEINBRING, H., & VOGEL, D. (1975). Zahlbegriff und Rechenfertigkeit / Zur Problematik der Entwicklung wissenschaftlicher Begriffe. *Educational Studies in Mathematics 6*, 213-252.

JUNGWIRTH, H. (1991). Unterschiede zwischen Mädchen und Buben in der Beteiligung am Mathematikunterricht. In H. MAIER & J. VOIGT (Eds.), *Interpretative Unterrichtsforschung* (pp. 33- 56). Köln: Aulis.

KNUTH, D. E. (1969). *The art of computer programming, vol. II, Seminumerical algorithms.* Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company.

MALLE, G. (1988). Die Entstehung neuer Denkgegenstände - untersucht am Beispiel der negativen Zahlen. In W. DÖRFLER (Eds.), *Kognitive Aspekte mathematischer Begriffsbildung. Arbeiten aus dem Projekt "Entwicklung formaler Qualifikationen im Mathematikunterricht"* (pp. 259 - 319). Wien, Stuttgart: Hölder-Pichler-Tempsky, B.G. Teubner.

SCHREIBER, A. (1980). Idealisierungsprozesse - ihr logisches Verständnis und ihre didaktische Struktur. *Journal für Mathematik-Didaktik, 1*(2), 42 - 61.

SCHUBRING, G. (1986). Rupture dans le statut mathématique des nombres négatifs. *Petit x, 12*, 5 - 32.

SCHUBRING, G. (1988). Epistemologische Debatten über den Status negativer Zahlen in deutschen und französischen Lehrbüchern 1795 - 1845. *Mathematische Semesterberichte XXXV* (2), 183 - 196.

SEEGER, F., & STEINBRING, H. (1992). The Myth of Mathematics. In F. SEEGER & H. STEINBRING (Eds.), *The Dialogue between Theory and Practice in Mathematics Education: Overcoming the Broadcast Metaphor, Proceedings of the Fourth Conference on Systematic Cooperation between Theory and Practice in Mathematics Education (SCTP), Brakel, Germany, September 16 – 21, 1990* (pp. 69 – 89). Bielefeld: IDM.

SEMADENI, Z. (1984). A principle of concretization permanence for the formation of arithmetical concepts. *Educational Studies in Mathematics 15*, 379 - 395.

SPIESS, H. (1989). Wie Hauptschüler mit Problemen aus dem Umfeld negativer Zahlen umgehen. *Mathematik lehren 35*, 42 - 46.

VIET, U. (1971). Modelle zur Einführung der Addition und der Subtraktion von ganzen Zahlen. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 1969* (pp. 58 - 64). Hannover: Schroedel.

VIET, U., & RAGNITZ, H. (1970). *Negative Zahlen.* Stuttgart: Klett.

WINTER, H. (1982). Das Gleichheitszeichen im Mathematikunterricht der Primarstufe. *mathematica didactica 5*, 185 - 211.

WINTER, H. (1989). Da ist weniger mehr - die verdrehte Welt der negativen Zahlen. *Mathematik lehren 35*, 22 - 25.

Dr. Heinz Steinbring
Institut für Didaktik der Mathematik
Universität Bielefeld
Postfach 10 01 31
33501 Bielefeld

Anhang:

Episode aus dem Mathematikunterricht (8. Klasse Erweiterungskurs)

Thema: Hohe Schulden und kleine Kontostände - Wann sind negative Zahlen kleiner?

Anmerkung: Im folgenden wird *Lehrer* mit L und *Schüler* mit S abgekürzt.

L: ...... Wer nennt mal die erste Regel nochmal richtig?

L: Sandra!

S: Auswendig?

S: Wenn beide Zahlen gleich sind, also zum Beispiel .. neun, nein fünf, fünf schwarz plus, nein minus neun, öh schwarz, dann dann ist es einfach die Farbe und Du machst ..

S: Nein

S: .. natürlich, ja natürlich

L: Laßt mal ruhig Sandra jetzt sprechen.

S: Ja, dann macht, wechselt die Farbe und dann die größere Zahl nach vorne und die kleinere nach hinten.

L: mm

S: Und dann hat dasselbe Zeichen.

L: Sag's nochmal!

S: Wenn jetzt hier zum Beispiel neun minus ..

L: Ja, wenn beide dieselbe, dieselbe Farbe haben, beide Zahlen .. und die hintere Zahl ist größer, dann setzen wir die an den Anfang und verändern die Farbe von beiden Zahlen. Ist genau richtig, wie Sandra es gesagt hat. Wann haben wir denn diese Regel angewendet, vorne an der Tafel?

S: Gar nicht.

S: Gar nicht.

Andere Schüler melden sich.

S: Ja doch.

L: Till!

S: Öh, bei, wo war das, neun, bei fünf minus neun, fünf schwarz minus neun schwarz.

Lehrer zeigt an der Tafel:

L: Hier waren beide Zahlen gleichfarbig, die hintere war die größere, wir haben sie nach vorne genommen und die Farbe geändert.. also hier haben wir die erste Regel angewendet. Genau an dieser Stelle beim Übergang von hier nach hier, deswegen schreibe ich das unter das Gleichheitszeichen.

(Lehrer schreibt 1(für die Benutzung der ersten Regel) unter das Gleichheitszeichen.)

L: Erste Regel.. gut, wenn jetzt nicht beide Zahlen dieselbe Farbe haben?

Später in der Unterrichtsstunde: Die Rechenregel zur Subtraktion wird benutzt zur Bestimmung der Differenz von "Kontoständen"; die Schüler sollen jeweils den "kleineren" vom "größeren" Kontostand subtrahieren.

Der Lehrer hat folgende Kontostände an die Tafel geschrieben: eine rote 17 und eine rote 3,4. In Einzelarbeit soll diese Aufgabe nun gelöst werden.

L: Ich kann Euch verraten, alle Hefte, die ich gesehen habe
S: Ja?
L: .. waren falsch, stimmte nicht, was da drin stand.
S: Ah
S: Oh
S: Stimmt
L: Alle Hefte
S: Wir haben minus
S: Stimmt, jetzt weiß ich auch warum.
S: Drei Komma vier.
S: Hei
S: Dieter?
L: Ich gebe ja zu, daß die Aufgabe etwas gemein war.
Schüler melden sich.
S: Du, jetzt weiß ich's.
S: Dieter, Dieter.
S: Drei Komma vier.
S: Die ist doch höher, nicht?
L: Ja, natürlich, ist doch der höhere Kontostand.
S: Dieter, ich hab
S: Dieter
S: Drei Komma vier
L: Mm
S: Die Differenz ist hier ..
S: Die Differenz ist doch
S: Siebzehn

L: Überleg doch mal, welches Zeichen dazwischen kommt.

S: Weil man dann zu den Schwarzen .. deswegen doch grad.

S: Da hast Du weniger Schulden ... also wird Dein Vermögen so größer..

S: Ich hab Vermögen? ...

S: (lacht) ne, Du nich ...

L: Du, paß mal auf, guck Dir das doch mal links an, wie wir's gemacht haben und dann machst's genau so, überträgst's auf dieses.. Du kannst es bloß nicht interpretieren, was Du da hingeschrieben hast .. du hast doch plötzlich die Siebzehn em .. was ist denn der höhere Kontostand von den beiden?

S: Drei Komma vier

L: Mm

L: Und, was haben wir denn eben nach vorne geschrieben?

S: Du mußt doch drei Komma vier nach vorne nehmen.

S: Hab ich doch gemacht.

S: Aber wieso denn?

L: Weil das doch der größere Kontostand ist. Du mußt doch vom höheren Kontostand den kleineren abziehen, um zu sehen, was dazwischen ist.

S: Dieter, Dieter, ist das richtig hier?

L: Ziehst doch immer die kleinere von der größeren Zahl ab.

S: ..

L: Was ist denn von den beiden Zahlen die größere?

S: Diese Drei Komma Vier

L: Ja, und was mußt Du also demnach nach vorne schreiben?

S: Die Siebzehn von der Drei Komma Vier abziehen?

L: Ja, sicher.

S: Dieter ..

L: Mm, Achim ist es Dir aufgefallen, ja?

S: Muß man drei Komma vier minus siebzehn rechnen?

L: Mm .., ja, ja, so ist es richtig.

Lehrer bricht die zweite Phase der Einzelarbeit ab.

L: So, wer wär denn bereit, nun mal die Aufgabe anzuschreiben?

Schüler melden sich.

S: Ich ... Ich

L: Daniela!

S: Nimm doch die Mappe mit.

L: Wollen mal gucken, ob sie's richtig macht.

Die Schülerin geht nach vorne zur Tafel und schreibt rote 17 < rote 3,4. Dann schreibt sie rote 3,4 - rote 17 = 17 - 3,4 = 13,6.

S: Ich hab's ja, ich hab sie.

S: So kann man's auch rechnen.

L: Mm

L: Sind alle einverstanden?

S: Nein

S: Stimmt

S: Doch

L: Ist siebzehn tatsächlich der niedrigere Kontostand gegenüber drei Komma vier

S: Ja

L: Woran liegt das? .. Normalerweise ist doch siebzehn .

S: Schulden

L: .. mehr als 3,4

S: Das hier aber Schulden sind . das hier.

L: Katharina!

S: Öh, weil ehm die Siebzehn, weil die Siebzehn weiter links steht als die Drei Komma Vier .. Wir haben doch gesagt, die großen Zahlen stehen rechts und die kleinen links, also ist die Siebzehn kleiner als die Drei Komma Vier, weil sie weiter links steht.

L: Jawohl

S: .. es ist eine Rote

L: Es ist ja eine rote Siebzehn und deswegen steht sie tatsächlich weiter links auf unserer Zahlengeraden als die Drei Komma Vier, ist also der kleinere Kontostand siebzehn. Und wir müssen vom höheren Kontostand den kleineren abziehen, deswegen müssen wir rechnen drei Komma vier minus siebzehn .. Welche Regel wurde denn hier angewendet?

Schüler melden sich.

S: Ich hab's.

L: Barbara!

S: Die erste.

L: Wir haben die Farbe geändert und die Reihenfolge der beiden Zahlen, das ist die erste Regel .. und der Rest ist dann ja leicht. Das können wir ja.