Heinz Steinbring

Die Verwendung strukturierter Diagramme im Arithmetikunterricht der Grundschule

Zum Unterschied zwischen empirischer und theoretischer Mehrdeutigkeit mathematischer Zeichen

In: Mathematische Unterrichtspraxis, 1994, 4
S. 7-19

HEINZ STEINBRING

Die Verwendung strukturierter Diagramme im Arithmetikunterricht der Grundschule

1–4

Zum Unterschied zwischen empirischer und theoretischer Mehrdeutigkeit mathematischer Zeichen

Im arithmetischen Anfangsunterricht werden die Zahlen vorwiegend durch vielfältige, empirische Bezüge zu konkreten Dingen und Sachsituationen begründet. Die Notwendigkeit, für die Entfaltung der elementaren, arithmetischen Operationen im 100er und später im 1000er Raum (2. u. 3. Schuljahr) wirkungsvolle Rechen-Strategien zu entwickeln, erfordert eine neue Interpretation der Zahl-Begründung, bei der die empirische Deutung durch eine relationale Sichtweise auf die Zahl-Beziehungen ersetzt wird. Die Verwendung von strukturierten Diagrammen kann die relationale Wahrnehmung der Zahlen unterstützen. Es werden Probleme und Möglichkeiten des Gebrauchs von strukturierten Diagrammen im alltäglichen Mathematikunterricht der Grundschule dargestellt, die im Rahmen eines zweijährigen Forschungsprojekts beobachtet und analysiert wurden. Ist das elementare, mathematische Wissen in der Grundschule ausschließlich empirisch erklärbar oder sind schon (versteckt und implizit oder auch unmittelbar) theoretische Deutungen der Wissensbeziehungen unvermeidlich?

Vorbemerkung

Mathematikunterricht in einer 2. Klasse.
Thema: Zehnerübergang
Rahmengeschichte: Der Frosch und das Känguruh springen auf dem Zahlenstrahl. Der Frosch springt immer erst bis zur nächsten Zehn, das Känguruh springt sofort in einem Satz zum Ziel.

Zwei beispielhafte Aussagen aus einer längeren Unterrichtsepisode:

L.: Der Frosch kann zwar nicht ganz so weit wie das Känguruh springen, aber ich glaub', der ist ganz schlau. Warum springt der auf den Zehner? Wer hat 'ne Idee?

Der Schüler Robert (später): Außerdem ist das Känguruh besser, weil es das ja in einem Sprung macht, es muß nicht zweimal hüpfen, ...und dann ist das Känguruh auch schlauer. Wenn da 'ne Straße wär', dann springt das Känguruh da einfach 'rüber. Der kann doch überfahren werden, der Frosch...

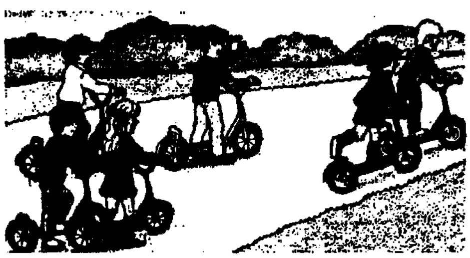
In folgendem soll aus einem laufenden Forschungsprojekt zur Beobachtung von alltäglichem Mathematikunterricht berichtet werden, in dem es um die Analyse von interaktiven Prozessen zur Herstellung von mathematischer Bedeutung geht. Das besondere Interesse richtet sich dabei auf die – wie es Heinrich Winter vor kurzem formulierte – „wahrnehmbaren Diskontinuitäten zwischen *Lebenswelt* und *arithmetischen Begriffen*, die von grundsätzlicher Natur sind." (Winter, 1994, S. 11).

1. Die Dominanz empirischer Begründungen des elementaren mathematischen Wissens im Unterricht der Grundschule

Die Einführung in die Arithmetik und der beginnende Aufbau des Zahlbegriffs zusammen mit den Rechenoperationen stützt sich im wesentlichen auf eine empirische Form der Begründung des mathematischen Wissens. Die Bedeutung der Zahlen und die Erklärung

der Rechenoperationen soll vornehmlich durch Bezugnahme auf reale Dinge aus der Erlebnis- und Alltagswelt der Schüler entstehen. Zahlen sind Mittel, um Dinge abzuzählen; die Operationen der Addition und der Subtraktion, später auch der Multiplikation und der Division werden durch konkrete Tätigkeiten des Hinzufügens, Wegnehmens, Vermehrens und Aufteilens von verschiedenen Dingen aus der Wirklichkeit gedeutet.
Diese Vorgehensweise beginnt bei der Einführung der einzelnen Zahlen mit Hilfe von Zahlenbildern, wie z. B. dem folgenden Fünfer-Bild.

Bei der Erklärung von Addition und Subtraktion wird sie fortgeführt durch das Hinzufügen, Hinzukommen, Dazugeben usw. von Objekten zu einer vorhandenen Grundgesamtheit; bzw. durch das Wegnehmen, Davongehen, Durchstreichen, Abbrennen usw. einer Anzahl von Objekten, die auf Zahlenbildern dargestellt wird (vgl. Voigt, 1993, und Bilder aus Schulbüchern).



Durch diese Form einer empirischen Begründung des elementaren Zahlbegriffs wird versucht, eine enge und recht eindeutige Beziehung zwischen Dingen der Realität und den mathematischen Zeichen und ihren Verknüpfungen herzustellen. Man könnte sagen, daß es so etwas wie ein Prinzip einer methodisch-deduktiven Begründung des mathematischen Wissens gibt: Die vertrauten Sachkontexte und realen Situationen dienen zur Herleitung der Bedeutung für arithmetische Begriffe, Verfahren und Zusammenhänge.
Diese Form einer empirischen Erklärung scheint problemlos im Zahlenraum bis 20, vielleicht auch darüber hinaus möglich zu sein. Sie beginnt jedoch dann an ihre Grenzen zu stoßen und Schwierigkeiten zu bereiten, wenn es darum geht, mit größeren Zahlen mathematisch effektiv zu arbeiten. So wird es z. B. für die Kinder immer aufwendiger und schwieriger, allein auf der Grundlage einer empirischen Zahlinterpretation größere Zahlen im Hunderterraum oder darüber hinaus strategisch geschickt zu addieren oder zu subtrahieren

oder gar allein durch empirischen Bezug die Multiplikation und zugehörige Strategien effektiv zu lernen, zu verstehen und zu begründen.
Doch trotz dieser mit der Komplexität von Rechenoperationen und der mit den größer werdenden Zahlen entstehenden Probleme wird im Kern weiterhin die grundlegende methodische Orientierung aufrecht erhalten, daß Zahlen durch konkrete Sachsituationen und als Anzahlen von Elementen in lebenswirklichen Bereichen empirisch begründet werden können. Die vermeintlich enge und unmittelbare Bindung zwischen den mathematischen Zeichen einerseits und empirischen Objekten und konkreten Tätigkeiten im Bereich alltäglicher Situationen und Erfahrungen andererseits dient als die leitende Hintergrundidee zur Erklärung und Deutung elementarer arithmetischer Zusammenhänge.
Die methodische Absicht, möglichst weitgehend einen direkten Zusammenhang zwischen empirischen Aspekten und mathematischen Zeichen aufrechtzuerhalten, hat häufig das Gegenteil dessen zur Folge, was man intendiert. Die vermeintlich direkte Erklärung der mathematischen Zeichen durch bekannte, empirische Dinge der Erlebniswelt wird im Extremfall ins Absurde verkehrt. Ein Beispiel hierfür sind die Kapitänsaufgaben. Aus einer Reihe von Untersuchungen weiß man, daß Kinder auch auf scheinbar unsinnige Fragestellungen und unvollständige Sachsituationen mit mathematischen Operationen und Verfahren antworten und so ein mathematisches Ergebnis ermitteln (vgl. Selter, 1994). Wurden diese Kinder zudem nach Begründungen für ihr mathematisches Vorgehen gefragt, so waren sie durchaus in der Lage, die unsinnigen Sachkontexte zu rationalisieren, indem sie für sich und gemäß den Erwartungen, denen sie sich ausgesetzt fühlten, direkte Beziehungen zwischen den Zahlen und den Elementen der Sachsituation konstruierten, um so eine Lösung angeben zu können.
Ein zweites Beispiel sind Kinder mit einer ausgeprägten Rechenschwäche, die oft beim Übergang vom zweiten zum dritten Schuljahre erkennbar wird (vgl. Radatz, 1991 und 1993). Eine wichtige Ursache liegt hier in einer einseitigen empirischen Erklärung von Zahlen und Rechenoperationen, die sich in einem Festhalten am Fingerzählen manifestiert und die eine Umdeutung der Zahlbegründung von einer empirischen Erklärung in eine relationale Sichtweise unangemessen erschwert oder unmöglich macht. Wenn diese empirische Erklärung bei großen Zahlen und komplexen Strategien nicht mehr funktioniert, kann es zu einem Bruch bzw. zu einer Entgegensetzung kommen, bei der für viele Kinder, und insbesondere für rechenschwache, die Mathematik und das Rechnen – wie es Radatz einmal formuliert hat – „zu einer kontextfreien Geheimwissenschaft" wird, die schließlich überhaupt keine sinnvollen Bezüge mehr zur Realität hat.
Beim Übergang zu größeren Zahlenräumen und beim Ausbau arithmetischer Strategien tritt mehr und mehr eine Diskrepanz zwischen den arithmetischen Zahlzeichen und den empirischen Sachsituationen auf. Eine direkte Beziehung oder wechselseitige Begründung zwischen beiden Bereichen ist nicht mehr so ohne weiteres möglich (vgl. Steinbring, 1994). Um zwischen den arithmetischen Zeichen sowie den Dingen der Erfahrungswelt der Schüler (mathematische) Beziehungen herstellen zu können, bedarf es vermittelnder Sach-Bilder, Anschauungsmittel und strukturierter Diagramme.

2. Strukturierte Diagramme als Vermittler zwischen Zahlzeichen und Erfahrungswelt

Die Nutzung von visuellen Mitteln der verschiedensten Art zur Erläuterung des Zahlbegriffs und der elementaren Rechenoperationen geschieht schon früh im Anfangsunterricht. Es gibt eine Vielzahl solcher verschiedenartiger Darstellungsmittel: Sie reichen von Bildern, schematisierten Darstellungen von Sachsituationen, sog. Sach-Bildern für die einzelnen Zahlensätze bis hin zu einfachen strukturierten Materialien wie verschieden großen Plättchenfeldern, graphischen Repräsentationen für die Zahlenreihe durch den Zahlenstrahl in

seinen verschiedenen Formen, bis hin zu den Hunderter- und Tausender-Feldern sowie den Darstellungen von Zahlen in Stellenwerttafeln (vgl. hierzu Wittmann, 1993).
Mit der Einführung solcher Darstellungsmittel wird zum einen versucht, die Aufmerksamkeit der Schüler auf zentrale Aspekte der Zahlbeziehungen zu richten, zum anderen soll hiermit die direkte Beziehung zu den Sachsituationen wieder hergestellt werden, die ja dann die gewünschte Begründung des Wissens liefern kann. In dieser Hinsicht werden vielfach die eingeführten Darstellungsmittel unter dem Aspekt eines Bildes benutzt. Dieser Bild-Gebrauch von Diagrammen ist für die elementare Zahlbegriffsentwicklung sehr prägnant von Jörg Voigt analysiert worden.
An verschiedenen Stellen weist Voigt darauf hin, daß das Lesen solcher Sach-Bilder nach konventionellen Mustern und Ritualen abläuft, die eine Eindeutigkeit für die Zahlensätze garantieren sollen. Im Prozeß der von Voigt bezeichneten „Vermathematisierung" fragt der Lehrer in suggestiver Weise einzelne Elemente des Bildes und Bildverbindungen so bei den Schülern ab, daß Schritt für Schritt der gesuchte, eindeutige Zahlensatz zum Vorschein kommt (Voigt, 1993, S. 155).

$\square \circ \square = \square$

So ist in diesem Bild vom Wärter und Affen eindeutig die Aufgabenstellung abzulesen: 5 – 2 = 3. Gegenüber einer solchen Striktheit im richtigen Ablesen solcher Zahlenbilder und dem Erlernen eindeutiger Indikatoren zur Interpretation des Bildes weist Jörg Voigt darauf hin, daß es notwendig ist, eine Mehrdeutigkeit in solchen, auch in Bildern steckenden Sachbeziehungen und Situationen für ein produktives Verstehen des Zahlbegriffs zu nutzen.
Nicht nur die von Voigt kritisierten standardisierten Zahlen-Bilder zur Erklärung arithmetischer Beziehungen, sondern auch strukturierte Diagramme, wie etwa der Zahlenstrahl, werden häufig in dieser einseitigen Bild-Funktion methodisch genutzt. Der Zahlenstrahl selbst wird ähnlich wie die typisierten Bilder von Sachsituationen als eine ökonomische Zusammenfassung und Anordnung der ersten 100 Zahlen interpretiert, wenn etwa auf dem Strahl jede der einzelnen Zahlen von 1 bis 100 als Ziffer eingetragen wird. Diese Gebrauchsweise von Bildern zu Sachsituationen und von strukturierten Diagrammen geschieht ganz im Rahmen der Grundphilosophie, daß die empirische Deutung des Zahlbegriffs gefestigt werden soll und sie haben vor allem die Funktion, in komplexeren Situationen diesen Typ der empirischen Begründung des Zahlbegriffs aufrechtzuerhalten. Und dementsprechend werden so strukturierte und gebrauchte Zahlenstrahlen von den Kindern auch gern als unterstützende Hilfe ihrer bisher geübten Fingerzählmethode angenommen, die es erlauben, weiter im Zahlenraum bis 100 abzählend zu rechnen.
In der Literatur ist schon mehrfach darauf aufmerksam gemacht worden, daß die Einführung von Diagrammen und Anschauungsmitteln in den Unterricht nicht automatisch eine Vereinfachung darstellt, die den Kindern ein direktes Verstehen ermöglicht (vgl. Jahnke,

1984 und 1989; Lorenz, 1992; Schipper und Hülshoff, 1984; Wittmann, 1993). Diese visuellen Mittel sind für die Kinder neue Probleme, die gelernt und verstanden werden müssen und insbesondere müssen die Schülerinnen und Schüler dabei herausfinden, welche Form der Interpretation und Lesweise dieser Diagramme von ihnen im Unterricht erwartet wird. In diesem Lernprozeß wird es zudem wichtig, daß Diagramme anstelle einer empirischen Deutung und Nutzung eine *neuartige*, eine andere Funktion als die eines bloßen Bildes erhalten.

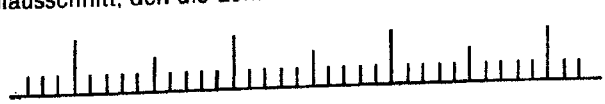
In der schwierigen Beziehung zwischen mathematischen Zahlzeichen und Operationen auf der einen Seite und Sachkontexten und Sachelementen auf der anderen Seite muß darauf geachtet werden, daß Diagramme und Anschauungsmittel auch schon im Anfangsunterricht nicht einfach als zusätzliche Hilfsmittel für eine empirische Begründung des Wissens genutzt werden. Der spezifische epistemologische Charakter solcher Darstellungs- und Anschauungsmittel liegt darin, daß sie in besonderer Weise zwischen der *mathematisch relationalen Struktur* der Zeichen und Operationen und einer *sachlich-inhaltsbezogenen Struktur* von empirischen Elementen und Sachsituationen vermitteln können. Um diese Vermittlungsfunktion herstellen und nutzen zu können, muß man Diagramme als relationale Strukturen nutzen; die ikonischen Elemente in Diagrammen sollte man nicht eindeutig interpretieren und ablesen, sondern mögliche, vielfältige Strukturen in den Diagrammen explorieren, ausbauen sowie mehrdeutig interpretieren und nutzen. An einem Beispiel aus dem 2. und 3. Schuljahr soll im folgenden verdeutlicht werden, wie diese relationale Interpretation von Anschauungsmitteln im alltäglichen Unterricht gemeinsam entwickelt und diskutiert werden kann.

3. Ansätze eines variablen Gebrauchs strukturierter Diagramme – Beispiele aus dem alltäglichen Mathematikunterricht der Grundschule

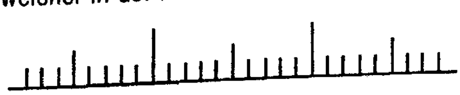
Im Mathematikunterricht des zweiten Schuljahres werden die Addition und die Subtraktion auf den Zahlenraum bis 100 ausgedehnt. Dabei wird u. a. ein beschrifteter Zahlenstrahl benutzt, bei dem die 10er-Zahlen bis zur Hundert eingetragen sind. In längeren Unterrichtsepisoden aus zwei Klassen – die im folgenden analysiert und dargestellt werden sollen –, geht es nun darum, die Lesweise und den Gebrauch dieses Diagramms in spezifischer Weise zu erfassen und dann anzuwenden.

Die Vorgehensweise in beiden Klassen sieht so aus, daß die Lehrerin jeweils den Schülerinnen und Schülern einen unbeschrifteten Ausschnitt des Zahlenstrahls an die Tafel zeichnet und zur Diskussion stellt. Über diesem Ausschnitt ist für die Kinder der vollständige Zahlenstrahl bis 100 zu sehen, den sie im Unterricht schon vor einigen Stunden kennengelernt und benutzt haben.

Der Zahlenstrahlausschnitt, den die Lehrerin der Klasse 2A benutzt sieht so aus:



Der Ausschnitt, welcher in der Klasse 2B benutzt wird ist etwas kürzer:



In beiden Klassen sitzen die Kinder im Stuhlkreis vor der Tafel und erarbeiten gemeinsam mit der Lehrerin eine Interpretation dieses Diagramms.

Auf der Grundlage einer Analyse der Transkripte beider Episoden (die vollständigen Transkripte sind beim Autor erhältlich), ergibt sich folgende gemeinsame Gliederung des interaktiven Unterrichtsverlaufes in beiden Klassen in drei zentrale Phasen:

I. Phase: Passive Wahrnehmung des vorgestellten Diagramms im Vergleich mit dem vollständigen Zahlenstrahl

II. Phase: Aktive Bestimmung und produktive Deutung des Diagramms

III. Phase: Die Anwendung des Diagramms unter einer implikativen Perspektive auf arithmetische Operationen

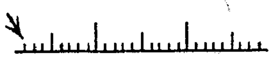
In der *ersten Phase* werden in beiden Klassen folgende Aspekte interaktiv verhandelt: Es werden im Sinne von schon geläufigen Konventionen noch einmal die Interpretationen der langen, der mittel langen und der kurzen Teilstriche im Diagramm als 10er-, 5er- und als 1er-Zahlen im Vergleich mit dem vollständigen Zahlenstrahl erklärt. Hier entsteht zudem die Frage, ob es sich um ein Lineal oder einen Zahlenstrahl handelt.
Dann werden von den Kindern auch empirische Begründungsversuche unternommen, und sie deuten dieses Diagramm in konkreter Weise direkt: Z. B. stellen sie fest, wie „lang" der neue Zahlenstrahl ist (Problem: Ist er 40, 42 oder 45 lang?), wo sich die 10 wirklich befinden muß, wo andere Zahlen eingetragen werden müssen. Und schließlich merken die Kinder an, daß an diesem Ausschnitt noch einiges fehlt, nämlich einige Teilstriche und außerdem ist er nicht beschriftet.
Ähnlich diskutieren die Kinder aus der Klasse 2B in dieser ersten Phase. Für sie geht der Ausschnitt nur bis 26, er ist kürzer als der vollständige Zahlenstrahl und es fehlen offenbar einige Zahlen. So fängt z. B. Robert von links an zu zählen.

34 Robert: Sonst kann das ja nur 1, 2, 3, 4 oder sowas sein, ja das ist 4, 5, 6, 7, 8. Und wo ist die 9? Hm? Gibt's wohl keine 9 in dem Leben?

Die *zweite Phase* der aktiven Bestimmung und produktiven Deutung des Diagramms wird in beiden Klassen damit eröffnet, den Ausschnitt jetzt einmal zu beschriften: Was kann der erste lange Strich bedeuten? bzw. Wo kommt die Zehn hin? In der Klasse 2B wird der Vorschlag, an den ersten langen Strich „10" zu schreiben, kontrovers diskutiert, denn eigentlich fehlt ja links von dieser 10 noch etwas. Die Lehrerin fragt:

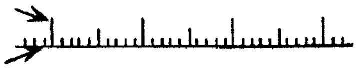
65 L.: Könnte es auch so die 10 sein?
66 *Gemurmel*
67 L.: Kann es nur die 10 sein, wenn da vorne noch Striche sind, oder kann es auch so einfach die 10 sein?

Diese Sichtweise wird von den Schülern nur zögernd aufgegriffen, doch als Robert folgende Erklärung abgibt, können auch andere Schüler diese Deutung akzeptieren.

91 Robert: Ich wollte was anderes sagen. Man kann das auch abzählen, dann muß man nur das 2 sagen. Hier 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
92 *Robert zeigt an den Beginn des Zahlenstrahls.* 

95 L.: ... Wo fängt also dann der Zahlenstrahl an? Bei welcher Zahl?
98 Robert: Bei der 2.

In der Klasse 2A wird diese Sichtweise auf das Diagramm mit Sprechweisen in Form des Konjunktiv unterstützt, zum Beispiel:

123 L.: Jana, kannst du mal begründen, warum das eine 10 sein könnte?
155 L.: Wenn dies die 10 sein soll. Was haben wir dann hier? Alle Kinder?
Lehrerin zeigt auf den Zahlenstrahlausschnitt. 

Ein zentraler Aspekt in dieser zweiten Phase ist in beiden Klassen die Frage, ob der erste lange Strich als Null interpretiert werden darf oder nicht. Hier gerät die intendierte variable

Deutung des Ausschnittes mit Konventionen und mathematischen Bedingungen scheinbar in Konflikt. So argumentiert etwa Miriam aus der Klasse 2A:

198 Miriam: Da vorne vor sind ja noch Striche, also kann dahinter nicht die Null kommen, weil vor der Null gibt's ja keine Zahlen.

In der Klasse 2B hat sich die Frage nach der Null dadurch ergeben, daß die Lehrerin gefragt hat, ob der kleine Strich links neben dem zweiten langen Strich tatsächlich 9 sein könnte.

157 L.: Ja genau. Es könnte die 9 sein, ja. ... Könnte dies hier die 9 sein? Jetzt bin ich aber mal gespannt, könnte das wirklich die Zahl 9 sein? Philip!
Lehrerin zeigt auf den Zahlenstrahlausschnitt:

158 Philip: Nä.
159 L.: Warum nicht?
164 Philip: Vor der 9, da gibt's ja nur 8 Zahlen.
165 L.: Welches müßte dann? Wenn das die 9 wäre, dann wäre hier die?
Lehrerin zeigt auf den Zahlenstrahlausschnitt:

168 Philip: Null.
169 L.: Und hier?
170 *Lehrerin zeigt auf die kleinen Teilstriche links von dem ersten langen Teilstrich.*
171 Philip: Na die Zahlen, die gibt's nicht.
172 L.: Die gibt's nicht. Gibt's die nicht?

In beiden Klassen wird deutlich gemacht, daß der Zahlenstrahl nicht links von der Null endet und es auch hier noch Zahlen gibt, man also sehr wohl eine Null annehmen darf.
Desweiteren wird während der zweiten Phase diese intendierte variable Gebrauchsweise des Diagramms geübt, indem Striche im Diagramm mit beliebigen, passenden Zahlen von den Kindern belegt werden sollen und dann abhängig davon an anderen Stellen im Diagramm die richtige Zahl genannt wird. Z. B. in Klasse 2A:

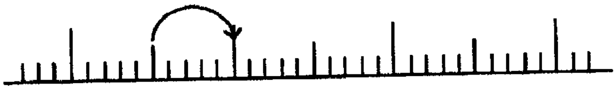
213 L.: Gut, Null, könnte es sein, 10 könnte es sein. ... Was könnte es denn auch noch sein? Ich hab doch einfach so'n Stück da rausgeschnitten, Jana?
214 Jana: Da könnte die 40 auch hinkommen.

Oder in Klasse 2B:

104 L.: Robert sagt, wenn er hier anfängt, ist es die 2. Welche Zahl könnt's aber noch sein, wenn's irgendwo daraus ist? Alexander!
105 Alexander: 22.
106 L.: Zum Beispiel die 22. Schön. Alexander, wenn dies die 22 ist, dann wäre dieser etwas längere Strich?
107 *Lehrerin zeigt auf den ersten mittellangen Strich.*
108 Alexander: 25.
109 L.: 25. Und hier?
110 *Lehrerin zeigt auf den ersten langen Strich, dann weiter auf die folgenden mittellangen und langen Teilstriche.*
111 Alexander: 30, ...35, ...40, ...45, ...48.

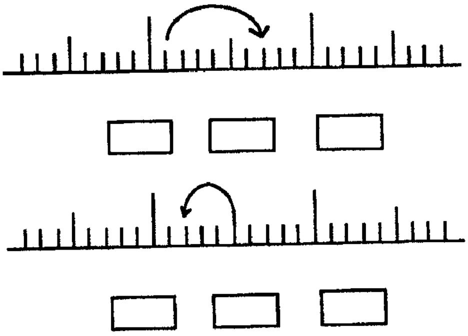
Diese Argumentation hat also die Form einer „*Wenn..., dann...*" Folgerung: „Wenn dies die 22 ist, dann wäre dieser etwas längere Strich?". Hierin kommt ein hypothetischer bzw. implikativer Gebrauch des Diagramms zum Ausdruck. Auf der Grundlage von Konventionen – z. B. zur Lesweise der unterschiedlich langen Teilstriche – und nach einer teils beliebigen Definition einer Ausgangszahl, können nun die folgenden Zahlen im Diagramm hergeleitet werden. Diese implikative Perspektive ermöglicht eine variable und offene Deutung des Diagramms, und sie steht im Gegensatz zu einer empirischen Erklärung, nach der man z. B.

die Eigenschaften des Diagramms eindeutig verifizieren müßte, ja vielleicht herausfinden sollte, um welchen Ausschnitt des vollständigen Zahlenstrahls es sich jeweils „wirklich“ handelt.
In der *dritten Phase,* in der Anwendungen des Diagramms unter einer implikativen Perspektive auf arithmetische Operationen erfolgen, werden in beiden Klassen Rechenaufgaben diskutiert. Zu folgendem Diagramm schlagen die Kinder der Klasse 2A mehrere Aufgaben vor.



15 + 5 = 20, 25 + 5 = 30, usw.

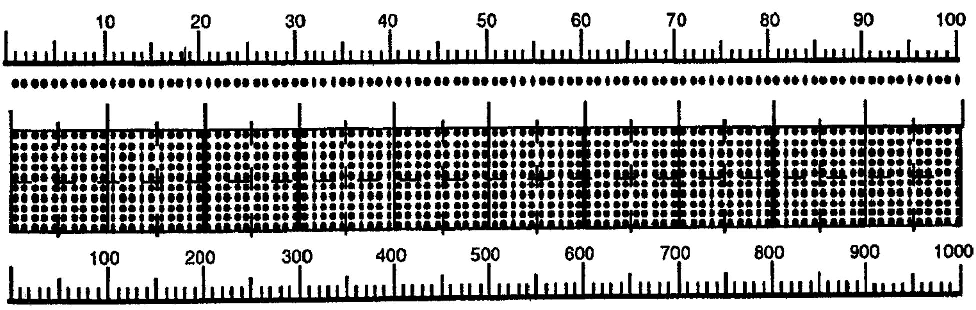
Der Vorschlag der Lehrerin, hier die Aufgabe 85 + 5 = 90 einzusetzen, führt noch einmal zur Diskussion über die Zulässigkeit, denn man würde ja 100 überschreiten; doch übereinstimmend wird akzeptiert, daß der Zahlenstrahl nicht bei 100 endet.
Ähnliche Aufgaben, sowohl zur Addition als auch zur Subtraktion, werden in der Klasse 2B besprochen.



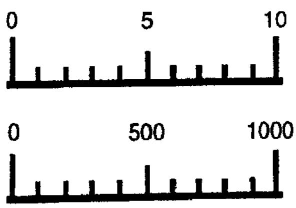
Beispielhafte Aufgaben sind: 11 + 6 = 17, 51 + 6 = 57 usw., oder 15 − 3 = 12, bis zur „schweren“ Aufgabe: 105 − 3 = 102.
Zusammenfassend läßt sich für den Unterrichtsverlauf in beiden Klassen sagen, daß es über diese drei Hauptphasen hinweg eine Umdeutung in der Argumentationsform und in der Interpretation des Diagramms gegeben hat. Begann die Diskussion zunächst mit Aussagen, die die empirischen Eigenschaften des Diagramms als gültig, richtig und eindeutig beschreiben wollten, so setzten dann in der zweiten Phase hypothetische Formen der Argumentation ein. „Wenn das die 22 wäre, was ist dann hier an dieser Stelle?“; oder: „Welche Zahl könnte an dieser Stelle noch stehen?“ Teilweise wurde diese hypothetisch-konjunktive Argumentationsweise von der Lehrerin initiiert, teilweise von den Schülern aufgegriffen und verstärkt. Etwa als Robert erkannt hat, daß der Zahlenstrahlausschnitt auch bei 2 anfangen könnte.
Dieser implikative und variable Gebrauch von Diagrammen wurde in diesen Klassen weiterhin geübt und genutzt, er blieb nicht auf singuläre Ereignisse beschränkt. Auch im dritten Schuljahr wurde beim Addieren und Subtrahieren im 1000er-Raum von der Variation des Zahlenstrahls und anderer strukturierter Diagramme zur Repräsentation der Zahlen im 1000er-Raum Gebrauch gemacht (vgl. hierzu Wittmann und Müller 1990 und 1992). Dabei kommt es zu einer weiteren, neuen Deutung, wenn etwa der 100er-Zahlenstrahl zugleich als 1000er-Zahlenstrahl interpretiert werden soll („Vergröberungen“ und „Verfeinerungen“ des Zahlenstrahls), oder wenn Zahlenstrahlausschnitte variabel für die elementaren Operatio-

nen mit den Einern flexibel verwendet werden sollen („Lupenfunktion“ von Zahlenstrahlausschnitten).

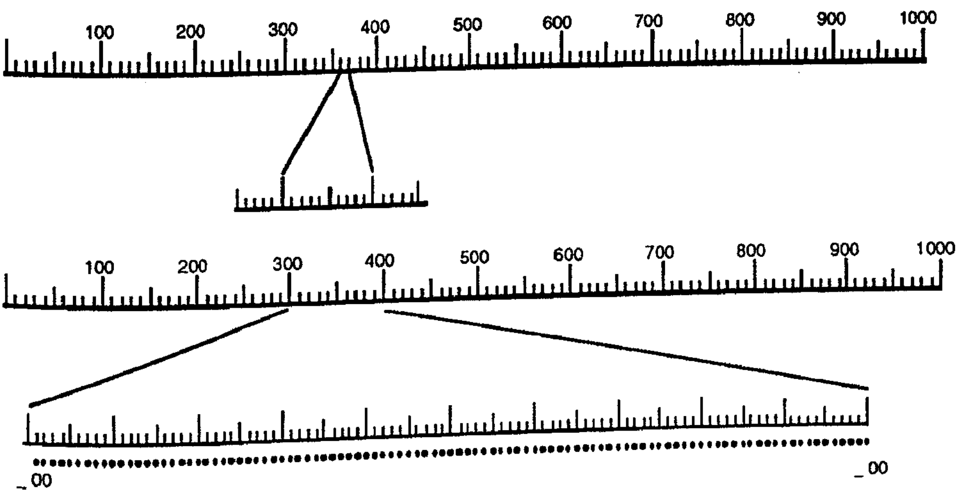
Der 100er-Zahlenstrahl als „Vergröberung“ des 1000er-Zahlenstrahls.



Der 10er-Zahlenstrahl als „Vergröberung“ des 1000er-Zahlenstrahls.



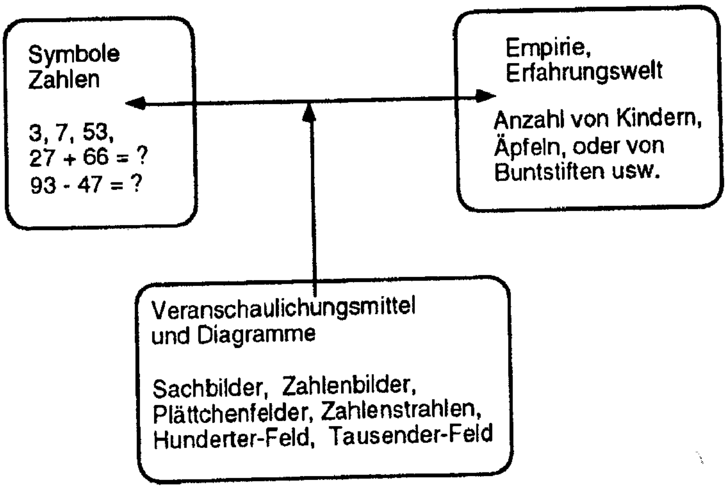
Verschiedene Lupenfunktion bei der Nutzung und Umdeutung von Diagrammen:



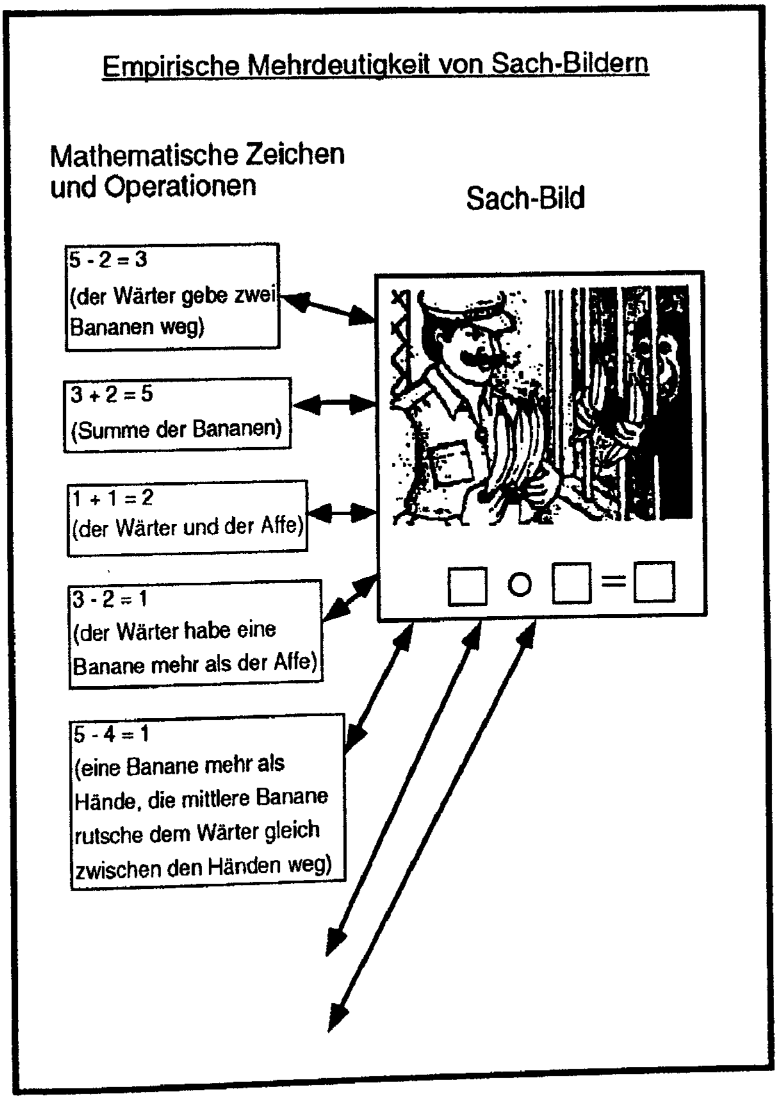
Der wichtige Gesichtspunkt bei diesem implikativen und variablen Gebrauch der Diagramme ist, daß die Kinder die Diagramme nicht nur passiv erschließen, sondern sich aktiv für ihre Zwecke einrichten, definieren, anpassen und dann erfolgreich auf die Bearbeitung arithmetischer Aufgaben anwenden. Eine solche Perspektive unterstützt die kürzlich von Günter Krauthausen erhobene Forderung: „Eine Sache verstehen aber heißt, ihre Struktur zu begreifen, und nicht bloß, das zahlenmäßige Ergebnis zu kennen“ (Krauthausen, 1993, S. 202).

4. Konsequenzen: Das Problem von empirischer und theoretischer Mehrdeutigkeit mathematischer Zeichen und Diagramme

„Insbesondere in der Grundschule beziehen sich die Bedeutungen von Symbolen (Zeichen) auf empirische Aspekte (Zahlen auf Materialien, geometrische Ausdrücke auf den physikalischen Raum, etc.)." (Voigt, 1994a und 1994b.) In den vorangegangenen Abschnitten wurde deutlich, daß diese Beziehung zwischen den Symbolen (Zeichen) und der Empirie schon für die elementare Arithmetik nicht so einfach und direkt hergestellt werden kann. Auch Voigt betont, daß anstelle einer eindeutig kodifizierten Koppelung zwischen Symbolen und Empirie eine Vielfalt und Mehrdeutigkeit in dieser Beziehung für den Unterricht produktiv ist. Analysen aus dem alltäglichen Mathematikunterricht der Grundschule zeigen, „wie im üblicherweise fragend-entwickelnden Mathematikunterricht Eindeutigkeit interaktiv hergestellt wird, wie also aus potentiell verschiedenen subjektiven Deutungen, die zu Beginn bestehen, Intersubjektivität in der Klasse konstituiert wird" (Voigt, 1993, 154). Demgegenüber ist die Aufrechterhaltung von Mehrdeutigkeit potentiell für den Unterricht vorteilhaft. „Vielleicht unterstützt ein bewußtes Annehmen der Mehrdeutigkeit von Bild- und Sachaufgaben sowie von Textaufgaben, von Rechengeschichten usw. auf Lehrerseite die Verbesserung des Mathematikunterrichts" (Voigt, 1993, 154).
Um überhaupt im Mathematikunterricht mit der Beziehung zwischen den Symbolen und der Empirie arbeiten zu können, bedarf es, wie schon eingangs betont, zusätzlicher Repräsentationsmittel, die sich zwischen die Symbole und die Empirie schieben und zwischen ihnen vermitteln.

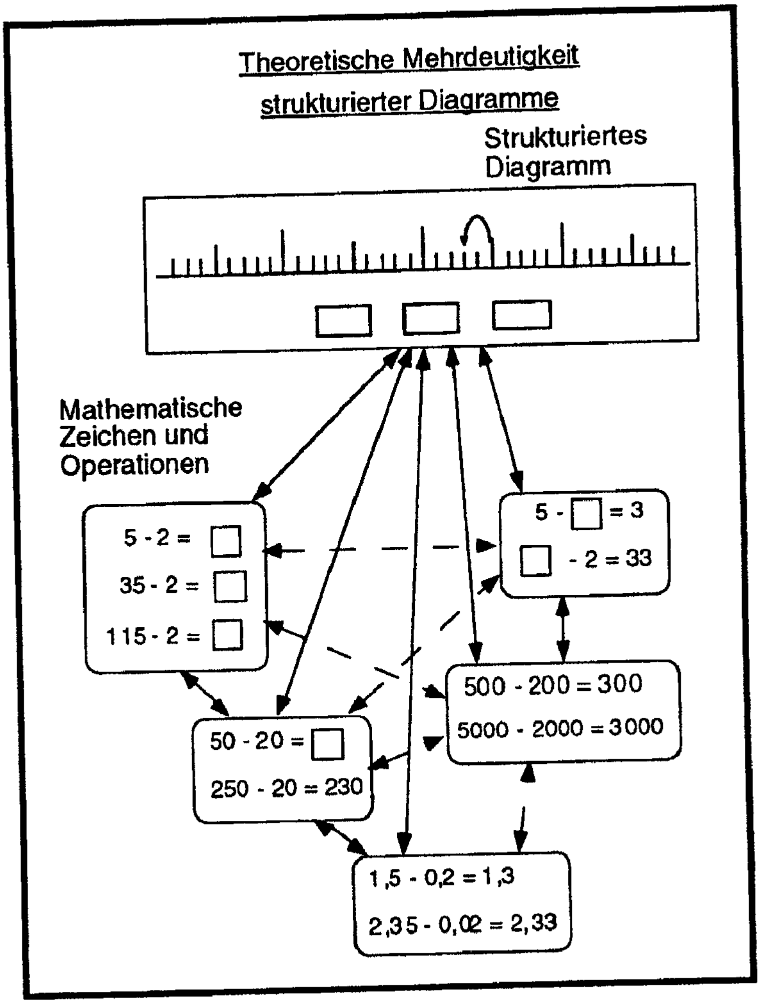


Es ist wichtig, die potentielle Mehrdeutigkeit von Sachbildern zuzulassen und produktiv für das Lernen von Mathematik zu nutzen. Dabei muß aber zwischen den gegensätzlichen Formen einer empirischen und einer theoretischen Interpretation von Diagrammen und Veranschaulichungsmitteln unterschieden werden.
Unter dem Gesichtspunkt einer *empirischen Mehrdeutigkeit* kann eine verbildlichte Sachsituation unterschiedlich durch Zahlen und Rechenoperationen gedeutet werden, es gibt nicht die einzige oder die richtige Auslegung. Ein Beispiel ist hierfür das Sach-Bild vom Affen und Wärter, das von Jörg Voigt auf seine empirischen Mehrdeutigkeiten hin analysiert wurde (Voigt, 1993, S.149).
Jedoch wird im Rahmen dieser Deutung den arithmetischen Zeichen weiterhin vornehmlich die Funktion von Namen für empirische Objekte gegeben; Zahlen bleiben so etwas wie die



Anzahl-Namen von Dingen, und arithmetische Verknüpfungen repräsentieren konkrete Zusammenfügungen oder Trennungen von Anzahlen von Objekten, zwar nicht in einer einzigen Form kanonisiert, also vielfältig zulässig, jedoch unter Aufrechterhaltung einer empirischen Bedeutungskonstruktion für mathematische Zeichen.

In beiden Episoden konnte man verschiedene Interpretationsweisen des Diagramms beobachten. Während der ersten Phase wurde der Ausschnitt des Zahlenstrahls eher empirisch gedeutet, indem im Vergleich zum vollständigen Zahlenstrahl versucht wurde herauszufinden, um welchen Teil es sich wirklich handelt. Im Verlauf der Episoden wurde der Zahlenstrahlausschnitt dann tendenziell als ein relationales Diagramm verstanden. Grundlage für einen solchen Gebrauch ist im Kern eine *theoretische Mehrdeutigkeit*, bei der die Zahlen und die Operationen mit den Zahlen sich auf vielfältige Relationen im Diagramm beziehen; und dabei bekommen die Elemente im Diagramm eine elementare Variablenfunktion für Zahlen: Ein langer Strich auf dem Zahlenstrahl ist ein Zehner (30, 20, 50, etc.). Und ein 100er-Zahlenstrahl ist gleichzeitig ein 1000er-Zahlenstrahl.



Beim Übergang von einer empirischen zu einer relationalen Bedeutungskonstruktion des Zahlbegriffs im Unterricht benötigt man vermittelnde strukturierte Diagramme, die zudem im Sinne einer *theoretischen Mehrdeutigkeit* verstanden werden müssen. Diese theoretische Mehrdeutigkeit von Diagrammen läßt sich sehr schön mit dem Vergleich beschreiben: „Diagramme sind Amphibien zwischen den mathematischen Zeichen und den empirischen Aspekten" – wie Christoph Selter es einmal für die Nutzung von Veranschaulichungsmitteln im Projekt „Mathe 2000" formuliert hat.

Das heißt, relationale, strukturierte Diagramme können sich einerseits auf die empirischen Elemente der Sachsituation beziehen, können also zeitweise Namen für Dinge enthalten, und sie stellen gleichzeitig mathematische Beziehungen zwischen empirischen Elementen der Sachsituation her.

Wir haben es also zum einen mit einer empirischen Deutung von Sach-Bildern zu tun, wobei das Bild mit seinen Elementen die Sachsituation oder Geschichte darstellt und auch unter Aufrechterhaltung einer empirischen Zahlbegründung verschiedene Geschichten umfassen kann, es ist *empirisch mehrdeutig.* Zum anderen muß man Diagramme theoretisch deuten, d. h. Beziehungen zwischen und in den Elementen des Diagramms konstruieren, und erhält so z. B. eine Reihe von arithmetischen Charakterisierungen des Diagramms, die

jedoch nicht isoliert nebeneinander stehen, sondern ein arithmetisches Beziehungssystem bilden; das Diagramm ist *theoretisch mehrdeutig* (vgl. Lorenz, 1991).
Diese theoretische Reflexion zum Gebrauch von Diagrammen im Grundschulunterricht mag spezialisiert oder gar spitzfindig erscheinen. Sie ist jedoch von fundamentaler Bedeutung dafür, wie sich Schülerinnen und Schüler zu Beginn ihrer mathematischen Laufbahn möglicherweise eine einfach erscheinende, empirische Deutung von Zahlen zu eigen machen, die jedoch schon bald äußerst hinderlich werden kann. So hat z. B. Radatz einmal als mögliche Konsequenz für die Probleme, welche rechenschwache Kinder haben, geäußert, daß man vielleicht nicht immer den üblichen methodischen Weg von „enaktiv", über „ikonisch" zu „symbolisch" gehen dürfe, sondern daß auch der umgekehrte Weg notwendig sei und man manchmal *das Symbol an den Anfang des Lernens stellen* sollte.

Literatur

Jahnke, H. N. (1984). Anschauung und Begründung in der Schulmathematik. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 32–41.
Jahnke, H. N. (1989). *Abstrakte Anschauung, Geschichte und didaktische Bedeutung.* Bielefeld: Occasional Paper Nr. 115 des IDM.
Krauthausen, G. (1993). Kopfrechnen, halbschriftliches Rechnen, schriftliche Normalverfahren, Taschenrechner: Für eine Neubestimmung des Stellenwertes der vier Rechenmethoden. *Journal für Mathematikdidaktik, 3/4* (14), 189–219.
Lorenz, J.-H. (1991). Materialhandlungen und Aufmerksamkeitsfokussierung zum Aufbau interner arithmetischer Vorstellungsbilder. In J.-H. Lorenz (Eds.), *Störungen beim Mathematiklernen* (pp. 53–73). Köln: Aulis.
Lorenz, J.-H. (1992). *Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht.* Göttingen: Hogrefe.
Radatz, H. (1991). Einige Beobachtungen bei rechenschwachen Grundschülern. In J.-H. Lorenz (Eds.), *Störungen beim Mathematiklernen* (pp. 74–89). Köln: Aulis.
Radatz, H. (1993). MARC bearbeitet Aufgaben wie 72–59 – Anmerkungen zu Anschauung und Verständnis im Arithmetikunterricht. In J.-H. Lorenz (Eds.) *Mathematik und Anschauung* (pp. 14–24). Köln: Aulis.
Schipper, W., und Hülshoff, A. (1984). Wie anschaulich sind Veranschaulichungshilfen? Zur Addition im Zahlenraum bis 10. *Grundschule, 16* (4), 54–56.
Selter, C. (1994). Jede Aufgabe hat eine Lösung. *Grundschule, 26* (3), 20–22.
Steinbring, H. (1994). Frosch, Känguruh und Zehnerübergang – Epistemologische Probleme beim Verstehen von Rechenstrategien im Mathematikunterricht der Grundschule. In H. Maier und J. Voigt (Eds.), *Verstehen und Verständigung im Mathematikunterricht – Arbeiten zur interpretativen Unterrichtsforschung.* Köln: Aulis.
Voigt, J. (1993). Unterschiedliche Deutungen bildlicher Darstellungen zwischen Lehrerin und Schülern. In J.-H. Lorenz (Eds.), *Mathematik und Anschauung* (pp. 147–166). Köln: Aulis.
Voigt, J. (1994a). Negotiation of Mathematical Meaning and Learning Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 26, 275–298.*
Voigt, J. (1994b). Entwickung mathematischer Themen und Normen im Unterricht. In H. Maier und J. Voigt (Eds.), *Verstehen und Verständigung im Mathematikunterricht – Arbeiten zur interpretativen Unterrichtsforschung.* Köln: Aulis.
Winter, H. (1994). Modelle als Konstrukte zwischen lebensweltlichen Situationen und arithmetischen Begriffen. *Grundschule, 26* (3), 10–13.
Wittmann, E. C. (1993). „Weniger ist mehr": Anschauungsmittel im Mathematikunterricht der Grundschule. In *Beiträge zum Mathematikunterricht* (pp. 394–397). Bad Salzdetfurth: Franzbecker.
Wittmann, E. C., und Müller, G. (1990). *Handbuch produktiver Rechenübungen. Bd. 1: Vom Einspluseins zum Einmaleins.* Stuttgart: Klett.
Wittmann, E. C., und Müller, G. (1992). *Handbuch produktiver Rechenübungen. Bd. 2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen.* Stuttgart: Klett.

Anschrift des Verfassers:
Dr. Heinz Steinbring, IDM, Universität Bielefeld, Postfach 100131, 33501 Bielefeld