Heinz Steinbring

„Kann man auch ein Meter mit Komma schreiben?“

Konkrete Erfahrungen und theoretisches Denken im Mathematikunterricht der Grundschule

In: Mathematica didactica, 16 (1993), Bd. 2
S. 30-55

"Kann man auch ein Meter mit Komma schreiben?" – Konkrete Erfahrungen und theoretisches Denken im Mathematikunterricht der Grundschule

von

Heinz Steinbring, Bielefeld

Zusammenfassung: Der Beitrag befaßt sich beispielhaft mit der Frage, in welcher Weise schon im Mathematikunterricht der Grundschule elementare, epistemologische Aspekte des schulmathematischen Wissens berücksichtigt werden müssen. Die Analyse einer transkribierten Unterrichtsstunde zum Thema "Dezimalzahlen und Größen" (in einer dritten Klasse) macht exemplarisch deutlich, daß in dem Bezugssystem von "Meßgegenstände – Meßinstrumente – Meßresultate: Dezimale Größen bzw. Dezimalzahlen" epistemologische Fragestellungen für die Anwendung, Interpretation und Begründung von Dezimalzahlen relevant werden und auch zu einem besseren Verstehen alltäglicher Unterrichtsinteraktionen beitragen. Eine wichtige Konsequenz besteht darin, das mathematische Wissen auf der Grundschule nicht einfach auf natürliche Sachkontexte zu reduzieren, sondern schon frühzeitig den theoretischen und strukturellen Charakter des mathematischen Wissens in Betracht zu ziehen.

Summary: The paper discusses the question in which way elementary epistemological aspects of schoolmathematical knowledge has to be taken into consideration already in primary mathematical teaching. The analysis of a transcribed lesson on "Decimal numbers and quantities" (in a third grade) shows in an exemplary manner that in the relational system of "Objects of measurement – instruments of measurement – results of measurement: decimal quantities or decimal numbers" epistemological questions become relevant concerning the application, the interpretation and the justification of decimal numbers; at the same time this epistemological perspective supports a better understanding of everyday interactions in the mathematics classroom. An important consequence is not to simply reduce mathematical knowledge at the primary level to natural, empirical contexts of reference, but to be as soon as possible aware of the theoretical and structural character of mathematical knowledge.

Die in diesem Beitrag dargestellte Forschung wurde durch Mittel der Universität Bielefeld unterstützt

1. Einführung: Konkrete Mathematik auf der Primarstufe – abstrakte Mathematik auf der Sekundarstufe?

Aus der Gesamtsicht aller Schulstufen gewinnt der Mathematikunterricht in der Grundschule häufig eine ganz spezifische Interpretation und Vorstellung. Mathematisches Arbeiten wird hier insbesondere mit konkretem, praktischem Handeln, anschaulichen, unmittelbaren Erfahrungen und lebensweltlichen Vorstellungen und Entdeckungen der SchülerInnen in Verbindung gebracht. Mathematisches Operieren und Verstehen auf der Primarstufe basiert vor allem auf der Anschaulichkeit und Unmittelbarkeit konkreter Vorstellungs- und Anwendungsbereiche für die SchülerInnen. Diese Interpretation für mathematisches Tun und für die Entwicklung mathematisches Wissens wird im großen und ganzen auch so im Lehrplan der Grundschule formuliert:

"Im Mathematikunterricht sollen die Kinder so gefördert werden, daß sie

- elementare mathematische Fertigkeiten verständig erwerben,
- Grundkenntnisse über Zahlen, Formen und Größen gewinnen,
- Fähigkeiten zur Lösung mathematischer Probleme entwickeln,
- positive Einstellungen zum mathematischen Arbeiten aufbauen."

Und weiter unten findet sich beispielsweise neben vielen ähnlichen Äußerungen: "Beim Erlernen der vier Grundrechenarten muß von solchen Lebenssituationen aus dem Erfahrungsbereich der Kinder ausgegangen werden, die die additiven bzw. multiplikativen Operationen in ihrer jeweiligen Ganzheit verkörpern und zu praktischem Tun im Unterricht anregen." (Lehrplan Grundschule NRW, 1985, S. 22 u. 23)

Diese Intentionen des Lehrplans kann man auch in mathematischen Unterrichtsstunden in der Grundschule sowie in den Planungen und Vorbereitungen der GrundschullehrerInnen wiederfinden. Mathematisches Verstehen und die Entwicklung mathematischer Begrifflichkeiten werden auf Anschaulichkeit und Konkretheit vorstellbarer Situationen gegründet. Unbestreitbar ist es wichtig, daß die SchülerInnen der Grundschule nur in für sie bedeutungsvollen Situationen mathematisches Wissen verstehen, sich aneignen und weiterentwickeln können. Die Frage bleibt jedoch, ob die unmittelbare Anschaulichkeit gegebener, konkreter Sachsituationen die einzige und universelle Basis für das Erlernen der elementaren Mathematik sein kann (vgl. Winter, 1984).

Mit der in Lehrplänen, im Unterricht und auch in der didaktischen Literatur beobachtbaren Tendenz, die Entwicklung mathematischen Denkens in der Grundschule auf die Anschaulichkeit von Alltagssituationen zu beschränken, verbindet sich aus der Sicht aller Schulstufen ein grundlegendes Problem für die

Entwicklung mathematischen Denkens und mathematischer Begriffsauffassungen über alle Schuljahre hinweg. Dörfler und McLone charakterisieren den Übergang von der Primarstufe zur Sekundarstufe für das mathematische Denken folgendermaßen: "Unsere moderne allgemeinbildende Schule vermittelt allen Schülern im großen und ganzen dieselbe mathematische Ausbildung, ohne ihre individuellen Interessen, ihre persönliche Geschichte, ihre Zugehörigkeit zu unterschiedlichen sozialen Gruppen usw. usf. zu beachten. In der Primarstufe und der unteren Sekundarstufe I hat diese Allgemeinheit keinen besonderen Effekt: die mathematischen Inhalte haben hier zumindest potentiell viele Beziehungen zu den Erfahrungen der SchülerInnen und ihrem Leben außerhalb der Schule. Mathematik wird und kann hier in einer Art unterrichtet werden, die für (fast) alle SchülerInnen bedeutungsvoll ist (obwohl dies selbst noch keine Abweichungen verhindern kann). Grundschulmathematik und große Teile der traditionellen unteren Sekundarstufe I-Mathematik erhalten ihre unmittelbare Rechtfertigung durch das, was die SchülerInnen sehen, was sie tun und außerhalb der Schule hören; sie können einen operativen Gebrauch ihres mathematischen Wissens machen. Auf dieser Stufe gibt es einen reichhaltigen Variationsspielraum von ursprünglichen mathematischen Aktivitäten, die von den Schülern in ihrem schulischen Lernprozeß vorgenommen werden. ...

In den höheren Sekundarstufen ... wird Mathematik in einer mehr oder weniger isolierten und selbstbezogenen Weise gelehrt und gelernt. Die meisten der Beteiligten, welche lehren und lernen, führen üblicherweise keine anderen mathematischen Aktivitäten durch außer Lehren und Lernen (in Beziehung zu dem zu vermittelnden Unterrichtsstoff). Insbesondere gibt es hier keine Aktivität, von der die Inhalte des Unterrichts bzw. des Lernprozesses hergeleitet werden könnten. Die Motivation, in diesem Rahmen einen Teil der Mathematik zu unterrichten oder zu lernen, ergibt sich nicht als Resultat der eigenen mathematischen Aktivitäten oder der eigenen Erfahrungen. Vom abstrakten Inhalt wird erwartet, daß er selbst den entscheidenden Anreiz für seine Analyse und Verstehen enthält." (Dörfler & McLone, 1985, S. 61/62)

Diese Beschreibung macht deutlich, daß es einen *fundamentalen Bruch* in der Entwicklung mathematischen Wissens und mathematischer Begriffsauffassung über die Schuljahre hinweg gibt. Während sich der Primarstufenunterricht auf Anschaulichkeit und Konkretheit lebensweltlicher Situationen stützt (vgl. Radatz & Schipper, 1983), wird demgegenüber zu Ende der Sekundarstufe II die Mathematik mehr und mehr zu einem internen, abgeschlossenen und abstrakten Stoffbereich. Mit Beginn der Bruchrechnung in der Sekundarstufe I, und in jedem Fall mit Einsetzen der Algebra, wird dieser Bruch zwischen Anschaulichkeit / Konkretheit einerseits und Abstraktion / Isoliertheit andererseits in Gang gesetzt, wie er dann zum Ende der Sekundarstufe I vollzogen ist.

Ist dieser Bruch in der Entwicklung mathematischer Denk-, Arbeits- und Interpretationsweisen notwendig? Oder ist er vermeidbar bzw. sonst in irgendeiner Weise umgehbar? Zum einen gibt es Bestrebungen, den Übergang von der Konkretheit zur Abstraktheit der Mathematik möglichst weit hinauszuschieben, wie er teilweise im Unterricht und didaktischen Arbeiten zu den Schulstufen von 6 und 7 (in der Sekundarstufe I) zu beobachten ist. Tendenzen, die Algebra möglichst aus dem SI-Unterricht herauszuhalten bzw. zu reduzieren, gehen u.a. auch in diese Richtung. Einen anderen "Lösungsversuch" für dieses Problem kann man darin sehen, die Grundschulmathematik wissenschaftlicher zu strukturieren, wie dies etwa u.a. mit der neuen Mathematik versucht wurde. Beide Vorschläge gingen jedoch implizit davon aus, daß die Entwicklung der Mathematik, (ob nun in dieser Schnelligkeit und Striktheit) grundsätzlich von einer konkreten Anschaulichkeit über verschiedene Stufen bis hin zur Abstraktheit und Isoliertheit mathematischer Begrifflichkeit führt. Diese Auffassung von der Entwicklung mathematischen Denkens führt zu Fehlinterpretationen und Problemen. Mathematisches, wissenschaftliches Wissen ist nicht einfach die Abstraktion aus der konkreten Wirklichkeit, von der ausgehend und auf der basierend schließlich die logisch sauberen Strukturen und Denkweisen der Mathematik erwachsen.

Die Polarisierung von Konkretheit als Ausgangspunkt und Abstraktheit als Zielgröße für die Entwicklung mathematischen Wissens stimmt in dieser simplen Form nicht. Im Prinzip hat es die Mathematik immer *gleichzeitig* mit der Konkretheit und gewissen Formen der Abstraktheit zu tun (vgl. Lorenz, 1993). Diese gleichzeitige Beziehung zeigt sich auf den unterschiedlichen Schulstufen in unterschiedlichen Ausprägungen, d.h. sie muß und wird auf der Primarstufe anders gestaltet sein, als es in der Sekundarstufe I oder Sekundarstufe II der Fall sein wird. Der Bruch in der Entwicklung mathematischen Denkens und mathematischer Begriffsauffassungen von der Primarstufe bis in die Sekundarstufe I und II wird sich im Prinzip nicht vermeiden lassen, solange man von dieser Polarisierung in anschauliche Konkretheit als Startpunkt für mathematisches Denken ausgeht, das zu einer abstrakten Begrifflichkeit führt.

Der im Unterricht und für viele SchülerInnen in ihrer mathematischen Laufbahn auftretende Bruch wird nur dann zu bearbeiten und zu bewältigen sein, wenn schon die Grundschulmathematik nicht auf die alltäglichen, anschaulichen Lebenssituationen reduziert wird (Pimm, 1987; Tahta, 1986) und dann die weiterführende Mathematik der Sekundarstufe I und Sekundarstufe II nicht in abstrakten, internen Begriffsbereichen verharrt.

Mit dieser Beschreibung ist hier nicht die altbekannte Alternative zwischen Wissenschaftsorientierung und Kind-Orientierung des Mathematikunterrichts gemeint. Jeder Mathematikunterricht sollte gleichzeitig eine Kind-Orientierung und eine Orientierung zum Wissen aufbauen und entwickeln. Wie diese Intention genauer vorzustellen ist und was mit ihr gemeint ist, soll im folgenden beispielhaft dargestellt und mit Hilfe einer Transkriptanalyse einer Unterrichtsstunde aus der 3. Klasse diskutiert werden.

2. Längenmaße und Dezimalschreibweise: Zusammenfassende Darstellung einer Unterrichtsstunde aus einer 3. Klasse

Erste Formen der Dezimalschreibweise für Zahlen werden den SchülerInnen der Grundschule u.a. im Bereich der Größen vermittelt. Für die Auffassungen und Interpretation von Größen und damit verbunden auch einer dezimalen Schreibweise gilt, was in der Einleitung hervorgehoben wurde: die Begründung mathematischen Denkens mit der Lebenswirklichkeit und Anschaulichkeit der Schülervorstellungen zu verbinden. Im Lehrplan wird formuliert: "Der Aufbau von Größenvorstellungen trägt dazu bei, daß die Kinder die Lebenswirklichkeit verstehen und bewältigen lernen. Die Arbeit mit Größen vermittelt zudem auch Einsicht in die Anwendungsnähe von Mathematik ... Die dezimale Schreibweise wird behutsam und in alltagsrelevanten Fällen verwendet, ohne den Bruchcharakter ausdrücklich bewußt zu machen." (Lehrplan Grundschule NRW, 1985, S.24/25)

Größen und Dezimalzahlen sind nicht nur in der Grundschule, sondern auch später in der Sekundarstufe I typische Beispiele für die behauptete Nähe und Unmittelbarkeit von mathematischen Arbeitsweisen zu lebensweltlich realen Situationen (vgl. Bauersfeld, 1991; Winter, 1985). Ja, häufig wird so getan, als wären die dezimale Schreibweise und mit ihr die Dezimalzahlen nicht etwas wirklich Neues, kein eigenständiger mathematischer Begriff für die SchülerInnen; es wird meistens angestrebt, die Dezimalzahlen so zu erklären, als seien sie natürliche Zahlen mit Kommaschreibweise (vgl. Postel, 1991; Steinbring, 1991, 1992). Die Rechenverfahren mit Dezimalzahlen werden dann – insbesondere in der Sekundarstufe I – auf das Rechnen mit natürlichen Zahlen reduziert und es wird suggeriert, man brauchte nur die Stellung und Bedeutung des Kommas in der Dezimalschreibweise durch einfache Regeln abzuklären (Komma unter Komma schreiben und so rechnen, wie man es von den natürlichen Zahlen schon weiß).

Im folgenden soll eine Unterrichtsstunde zu "Längenmaß und Dezimalschreibweise" in einer 3. Klasse der Grundschule als ein exemplarischer Beleg herangezogen werden, um beispielhaft herauszuarbeiten, wie und mit welchem Bezug auf anschaulich konkrete Situationen die SchülerInnen in den Kontext von Größen und Dezimalschreibweise eingeführt werden. In einem weiteren Schritt (Abschnitt 3) soll dann versucht werden aufzuzeigen, welche besonderen mathematisch-theoretischen Aspekte in dieser Stunde enthalten sind, und wie diese im Hinblick auf die Anschaulichkeit bzw. Unmittelbarkeit der mathematischen Begründung zu bewerten sind.

Unterrichtsausschnitte und insbesondere ganze Unterrichtsstunden lassen sich unter verschiedenen Aspekten betrachten. Im folgenden soll die Aufmerksamkeit, soweit wie möglich, auf bestimmte inhaltliche und epistemologische Kennzeichen der vorliegenden Unterrichtsstunde gerichtet werden (das vollständige Unterrichtstranskript ist beim Autor erhältlich).

Die vorliegende Unterrichtsstunde zum Thema: "Längenmaß und Dezimalschreibweise" läßt sich in insgesamt drei Hauptabschnitte unterteilen:

1. Phase (20–180): Einführung in die Thematik der Unterrichtsstunde

2. Phase (181–216): Partnerarbeit der SchülerInnen

3. Phase (217–428): Auswertung der Partnerarbeit

An diese 3 Hauptabschnitte schließt sich ein kleinerer 4. Abschnitt zur Vorbereitung der Hausaufgaben an (429–477).

Der *einführende Abschnitt* beginnt mit einer motivierenden kleinen "Geschichte", mit der die Lehrerin das Unterrichtsthema eröffnet:

021 L: Ich habe vor ein paar Tagen Kindern zugehört, die stritten sich, zwar nicht so doll .. und die sagten, das eine Kind sagte .. "Du weiß doch, in der Schule haben wir Kordeln gemacht, meine ist viel länger als Deine", sagt das andere Kind, "Das glaube ich nicht, meine ist viel länger" .. ich hab auch mal zwei mitgebracht, das vielleicht dem einen oder anderen Kind gehören könnte.. und es ging immer hin und her, "Meine ist länger und meine ist länger", und die kamen zu gar keinem Ergebnis. Hättet Ihr denn eine Idee, wie die sich hätten helfen können ..?

Es wird eine Situation präsentiert, in der es gleich um vielfältige Bezüge und Anforderungen nach Interpretationen und Meinungen sowie Aufforderung zu Lösungs- und Bearbeitungsvorschlägen geht. Auf das Problem, ob die zwei präsentierten Kordeln gleich lang, verschieden lang sind, oder wie lang sie sind, reagieren die SchülerInnen auch mit vielfältigen Vorschlägen des Vergleichens, Messens, wechselweise Anlegens usw. Die erzählte Situation wird teilweise nachgespielt, und hierbei wird es möglich, unterschiedliche Erfahrungen zu sammeln, z. B. wie die Kordeln im Längenvergleich aneinander angelegt werden, wie das Maßband benutzt und richtig abgelesen wird usw. usf. Die Vorschläge der SchülerInnen werden von der Lehrerin in eine ordnende Reihenfolge gebracht, die es erlaubt, ohne zu große Hast nach und nach alle gemachten Vorschläge zu berücksichtigen und so vielfältige Sichtweisen, Erfahrungen und Bezugsmöglichkeiten für die SchülerInnen offen zu halten, ohne dabei das Lernziel unvermittelt anzusteuern.

Zunächst werden die Kordeln direkt verglichen, um so die längere herauszufinden. Dann wird versucht, eine Schätzung der Längen vorzunehmen und schließlich werden die Kordeln gemessen. Das Meßergebnis wird zudem in einer bestimmten Schreibweise an der Tafel notiert, zum einen als ein Meter fünfzehn Zentimeter (1Meter 15 Zentimeter) und zum anderen in der Form "115 Zentimeter". In diesem Kontext appelliert die Lehrerin an die Erinnerung der SchülerInnen. Zum Beispiel, daß ihnen schon die abgekürzten Schreibweisen für Meter und Zentimeter bekannt sind und daß sie auch andere Längenmaße schon kennengelernt haben. Hierauf reagieren die SchülerInnen unterschiedlich, sie nennen weitere Längenmaße, bringen aber auch Flächen- und Voluminamaße in die Diskussion ein.

Diese breitgefächerte Rückerinnerung an Größen- und Längenmaße wird im folgenden durch die Lehrerin wieder auf die Unterrichtsthematik gerichtet, indem nun mit dem Verteilen von Arbeitsblättern die *zweite Hauptphase* eröffnet wird. Die Aufgaben auf dem Arbeitsblatt sollen in Partnerarbeit durchgeführt werden:

Arbeitsblatt

1. Nimm dein Maßband! Miß mit deinem Partner:

die Länge des Tisches:	die Länge einer Fußbodenplatte:
die Breite des Tisches:	die Länge des Sprachbuchs:
die Höhe des Tisches:	die Länge deines Bleistifts:
die Höhe des Stuhls:	

2. Schreibe selbst Dinge auf, die du mit deinem Partner messen willst! Schreibe die Meßergebnisse wie bei Nr. 1 daneben!

In dieser Phase geht es zum einen darum, daß die SchülerInnen mit ihren Partnern (auch mit der Lehrerin) darüber diskutieren und verhandeln, wie zu messen ist, was zu messen ist, wie man Meßgegenstände messen kann, die für das Maßband zu lang sind usw. Der Meßvorgang selbst und die Benutzung des Zentimetermaßes als ein Meßinstrument zusammen mit dem Vorgang des richtigen Ablesens und Notierens der Ergebnisse stellt ein relativ komplexes Bezugssystem dar, in dem Entscheidungen getroffen und Annahmen expliziert werden müssen, die ansonsten die Einheitlichkeit und Vergleichbarkeit der Ergebnisse beeinflussen oder verändern würden. Während dieser Experimentier-Phase wird eine rudimentäre Form der "Addition" von Dezimalzahlen beim Aneinanderlegen zweier Maßbänder sichtbar.

Mit vielfältigen Messungen und Erfahrungen geht dieser zweite Unterabschnitt zu Ende und führt dann zur gemeinsamen Besprechung der ermittelten Meßergebnisse. Während dieser *Auswertungsphase* werden die ermittelten Ergebnisse verglichen und an der Tafel aufnotiert. Die Lehrerin achtet darauf, daß möglichst viele Schreibweisen für die Meßergebnisse in Erscheinung treten, ja sie fragt schließlich, ob es für einige der notierten Ergebnisse noch andere Schreibweisen gibt. Zu Ende dieser 3. Phase sieht das Tafelbild folgendermaßen aus.

Tafelbild 1 Meter 15 Zentimeter 115 Zentimeter

m = Meter cm = Zentimeter

1 Meter = 100 Zentimeter

die Länge des Tisches: *1 Meter 30 Zentimeter; 1,30 m; 130 cm*

die Breite des Tisches: *0,55 m; 55 Zentimeter*

die Höhe des Tisches:

die Höhe des Stuhls: *37 Zentimeter; 0,37 m*

die Länge einer Fußbodenplatte: *60 Zentimeter; 0,6 m*

die Länge des Sprachbuchs:

die Länge deines Bleistifts: *10 Zentimeter; 12 Zentimeter; 7 Zentimeter*

Unter anderem kommt in dieser Auswertungsphase zur Sprache, daß die Maßbänder, wie die SchülerInnen sie verwenden, normiert sind, d.h. alle gleich sind. In diesem Kontext wird an frühere Unterrichtsstunden erinnert, in denen es um alte Längenmaße wie Elle, Spanne, Fuß usw. ging. An einer anderen Stelle wird in gewissem Sinne der "Gültigkeitsbereich" bzw. der Stellenbereich für Meter und Zentimeter (insbesondere Stellenanzahl hinter dem Komma für diese Längenmaße) diskutiert. Hierzu wird der Übergang von ein Meter zu zwei Meter als Erklärung herangezogen. Des weiteren wird am Beispiel der Meßfehler kurz *das Problem des richtigen Messens* angesprochen und außerdem zeigen sich implizite Voranname darüber, welche geometrischen Eigenschaften der konkreten Objekte gemessen werden sollen, z.B. was an welcher Stelle zu messen ist (etwa bei der Höhe der Sitzfläche eines Stuhls).

In diesem 3. Unterabschnitt der Auswertung der Meßergebnisse wird beispielhaft die Komplexität der Meßsituation mit dem konkreten Meßvorgang und den Formen der Notierung der Meßergebnisse in ihren einzelnen Aspekten diskutiert.

Diese betreffen wiederum das Messen selbst: "Wie Anlegen?", "Wo Anlegen?", "Die Normiertheit des Maßbandes", "Die Unterschiedlichkeit oder Gleichheit der zu messenden Objekte" sowie "Die Schreibweisen der gewonnenen Resultate in ihren unterschiedlichen Darstellungsformen".

In dem kleinen *4. Abschnitt* zur Vorbereitung der Hausaufgaben wird dann die entwickelte Betrachtungsweise beispielhaft auf eine Aufgabe des Schulbuches angewendet, um so die Möglichkeit, selbständig die Hausaufgaben bearbeiten zu können, vorzubereiten.

Bezüglich des unterrichtlichen Inhalts und der begrifflichen Vorstellungen und Interpretationen, wie sie in dieser Stunde thematisiert werden, ist zu sagen, daß es sich mehr oder weniger um einen relativ abgestimmten und beziehungsreichen Unterrichtsverlauf handelt. Den SchülerInnen werden viele Bezugsmöglichkeiten zur Thematik eröffnet, sie sollen konkrete Meßtätigkeiten in Partnerarbeit durchführen, es gibt Diskussionen zu der einführenden Situation und zu den Meßergebnissen, die gemeinsame Überlegungen, Kritik, Veränderungen usw. ermöglichen. Die Angebote an Einbettungen und Bezugnahmen auf konkrete Vorstellungen und Tätigkeiten der SchülerInnen werden zudem behutsam und ohne zu direkte Zielorientierung auf "technische" Ergebnisse im Unterricht durchgeführt. Weder von den Erwartungshaltungen der SchülerInnen, noch von der Zielvorstellung der Lehrerin ist der Verlauf des Unterrichts strikt oder unmittelbar durch ein anzustrebendes mathematisches Resultat bestimmt und organisiert.

Vom Gesamtblick auf diese Unterrichtsstunde gewinnt man den Eindruck, daß die mathematischen Tätigkeiten und Verstehensprozesse der SchülerInnen in einer ausgewogenen Weise in der Anschaulichkeit, Vorstellungsmöglichkeit und den alltäglichen Erfahrungsbereichen der SchülerInnen verankert sind und diese sinnvoll genutzt werden, um elementare Vorstellungen im Zusammenhang mit Dezimalzahlen und ihrer Schreibweise zu entwickeln. Auf diesen ersten Blick gesehen, scheint diese Stunde ein Beleg dafür zu sein, daß in der Grundschule Mathematik von konkreten Situationen auszugehen hat und Abstraktionen sich hieraus erst später entwickeln können, ja vielleicht sogar erst in späteren Schuljahren.

In einem zweiten Durchgang durch diese Stunde soll versucht werden, an einzelnen Stellen mathematische Aspekte und Beziehungen aufzudecken, die deutlich machen, daß unter dieser sichtbaren Oberfläche des Unterrichtsverlaufs elementare Formen von "theoretischem Wissen und theoretischem Denken" im Keim enthalten sind, die es m.E. bewußt zu entwickeln und in Kontrast und Bezug zu den anschaulichen Situationen zu stellen gilt.

3. Welche "mathematisch-theoretischen" Beziehungen werden in der Unterrichtsinteraktion konstituiert?

Ergibt sich die mathematische Darstellung und Schreibweise von Dezimalzahlen automatisch und in einer natürlichen, direkten Weise aus anschaulichen Bedeutungskontexten? Wie ist das Verhältnis von der Ebene mathematischer Zeichen zu den gegebenen Erfahrungs- und Tätigkeitsbereichen der SchülerInnen?

Ein genauerer Blick auf den Verlauf dieser Stunde zeigt, daß zwar an vielen Stellen von den SchülerInnenn und der Lehrerin anschauliche Situationen, gegebene Gegenstände und durchgeführte Meßtätigkeiten zur Begründung und zur Entwicklung von mathematischen Bedeutungen herangezogen werden. Diese konkret-anschaulichen Belege zur Begründung mathematischen Wissens können jedoch nicht für sich allein stehen, sie selbst geben nicht eine hinreichende Erklärung ab; nur zusammen mit den zugehörigen Intentionen auf der Basis impliziter mathematischer und konventioneller Vorannahmen können in der Interaktion tragfähige mathematische Begründungen konstituiert werden. So ist der Meßvorgang und insbesondere das Zentimetermaß nicht für sich selbst genommen eine anschauliche Grundlegung und erste Begründung für Dezimalzahlen und ihre besondere Schreibweise, sondern der Kontext impliziter Annahmen und Gebrauchsregeln, wie mit diesem Zentimetermaß in Meß- und Vergleichssituationen umgegangen wird, gehört letztlich mit zur Grundlegung der Dezimalschreibweise im Bereich von Längen.

Ein erster zentraler Eindruck, der sich bei der Analyse dieser Unterrichtsstunde ergibt, besteht darin, daß an vielen Stellen dieses Unterrichtsverlaufes die Frage nach dem Verhältnis von *konstruktiven* und den *konventionellen* Aspekten der Mathematik angesprochen wird. Hier zeigt sich, daß die Mathematik nicht aus der konkreten Situation automatisch hergeleitet werden kann, sondern geradezu so konstruiert worden ist, um die Situation zu erklären; auch sind viele Sachverhalte, die scheinbar begründet werden, nicht aus der Situation ableitbar, sondern sie sind im Rahmen von Absprachen, Konventionen, Definitionen vorab getroffen worden.

Ein wesentliches Beispiel ist die gemeinsam vorab festgelegte Normiertheit des Maßbandes. Mathematisch gesprochen handelt es sich hierbei um die Festlegung einer Maßeinheit (in Zentimetern oder Metern), die unverändert und invariant bleibt. Diese Tatsache ist nicht Ergebnis einer konkreten Situation, sondern enthält viele Elemente konventionaler Übereinkunft der beteiligten Personen. So wird die Uneinheitlichkeit der Maße, wie sie historisch mit Elle, Fuß, Spanne usw. gegeben war, zwar Plausibilitäten und Argumente für die Einführung einer Normierung ergeben, begründen oder gar mathematisch beweisen kann man sie in keinem Fall.

Im Verlaufe des Unterrichts waren viele Aspekte dieses Verhältnisses von definitorischer Übereinkunft gegenüber begründbaren Bedeutungszusammenhängen festzustellen, ja die Komplexität der Meßsituation hat die SchülerInnen mehrfach veranlaßt, sich mit diesem Verhältnis implizit oder explizit auseinanderzusetzen: So war für einige der zu messenden Gegenstände mehr oder weniger selbstverständlich, daß sie gleich breit oder gleich lang sind (etwa die Schülerarbeitstische oder die Schülerstühle), von anderen Gegenständen war demgegenüber davon auszugehen, daß sie wohl verschieden lang sind (insbesondere die Bleistifte der SchülerInnen). Für einen Teil der SchülerInnen waren diese impliziten Annahmen und Bedingungen kein Problem, sie konnten mit ihnen relativ spontan umgehen, andere SchülerInnen wiederum mußten sich deutlicher klarmachen, auf welcher Seite ihrer Meß- und Vergleichstätigkeiten voraussichtlich Invarianten und Normierungen anzutreffen waren und wo es Variationen und Spielräume gibt. (vgl. im folgenden den Schüler der die Verschiedenheit der Zentimetermaße vermutete). Des weiteren war die Frage der impliziten Annahmen und Ausgangsbedingungen auch auf den Genauigkeitsanspruch der Messungen bezogen, d.h. die SchülerInnen mußten implizit mit der Tatsache umgehen, daß nur im Meter- und Zentimeterbereich gemessen wurde. Millimeter oder halbe Zentimeter zunächst nicht explizit benutzt. Wenn auch die Lehrerin diese Offenheit nicht definitiv ausschloß, so gingen doch viele SchülerInnen genau von dieser impliziten Annahme von vornherein aus.

Der Charakter der Normiertheit bzw. der konventionellen Übereinkunft mathematischer Sprech-, Definitions- und Arbeitsweisen zeigte sich dann wieder in der Darstellungsweise der Dezimalzahlen selbst. Bekannt ist u.a. die Sprechweise, in der die Ziffern nach dem Komma einzeln benannt werden, sowie die relative formale Konstruktion der Stelle, an der das Komma in der Dezimalzahlschreibweise erscheint. Diese Kommaposition ist letztlich nicht aus der gegebenen Situation vollständig ableitbar, sie hängt von unterschiedlichen Intentionen des lernenden Subjekts, der Anwendungs-Situation und der mathematischen Modellierung ab. Sieht man das Komma nicht nur als ein formales Zeichen in der Ziffernfolge an, sondern überlegt sich, welche begrifflichen Aspekten enthalten sind, so könnte man sagen, daß das Komma als eine verdeckte Form von mathematischer Variablen anzusehen ist. Unter der zeichenmäßig geronnenen Form von Ziffern und Komma versteckt sich nämlich so etwas wie eine Modellierung von *Längen mit variablen Einheiten* (vgl. Steinbring, 1992).

Einfache Formen dieser Einheiten sind in dieser Stunde Zentimeter und Meter (oder später auch Zentimeter, Millimeter, D-Mark, Pfennig usw.). Entsprechend den impliziten der gegebenen experimentellen Aufgabenstellung müssen die SchülerInnen die adequate Einheit wählen, konstruieren und so die Modellierung und Darstellung in der Ziffernschreibweise vornehmen. Auch hierbei gehen wiederum viele Aspekte konventioneller Übereinkunft und Aspekte möglicher anschaulicher Begründungen wechselweise ineinander über. Diese dezimale Schreibweise ist nicht einfach ein natürliches Ergebnis der vorgelegten Situation, sie enthält umgekehrt viele Aspekte, die konventionell und teils definitorisch konstruiert und hergestellt worden sind, um die Wirklichkeit, die vorgegebene Situation zu analysieren.

Im folgenden soll an einigen kurzen Ausschnitten aus der 3 Phase (der Auswertung der Partnerarbeit) beispielhaft das Verhältnis definitorischer Normiertheit zu anschaulicher Begründung im Detail untersucht werden, um genauer das Verhältnis von mathematischer Modellierung und symbolischer Schreibweise zu den konkreten Situationen zu verstehen.

Ein *erstes Beispiel*, in dem das Zusammenspiel von impliziten Annahmen über bestimmte Normierungen mit den natürlichen, situativen Begründungen zu Mißverständnissen führt, bezieht sich auf einen Schüler, der davon ausgeht, daß die Maßbänder vielleicht verschieden sein können.

246 L: Wie kann das denn nun kommen, daß da verschiedene Ergebnisse sind? .. Ihr hattet eins neunundzwanzig, und Ihr ein Meter 31... Volker? Schaut Ihr bitte den Volker an!

247 S: Wir haben genau das gleiche Maßband, genauso groß, aber wir hatten mehr Zahlen drauf.

248 L: Ja?

249 S: ...eins dreißig...

250 L: Sabine!

251 S: ...eins dreißig....

252 S: ....nee!

253 S: Wir haben vielleicht einen größeren Tisch.

254 L: Ich denke, die müßten alle genau gleich sein. Sicher, das könnte einmal der Fall sein, dann müßten wir einmal alle Tische ausmessen, aber das ist nicht Sinn der Sache. ... Volker!

255 S: Weil manche kleiner sind.

256 L: Du meinst, die Maßbänder wären anders.

257 S: Ein Meter.

258 L: Kann das denn sein? ...Kann das sein, daß Eure Maßbänder verschieden sind?

259 S: Nein, geht ja nicht.

260 L: Christof .. warte mal, bis alle Dir zuhören. Mike, das geht jetzt nicht!

261 S: Kann ja gar nicht sein.

262 L: Weißt du, wer dran ist? So,.. bitte!

263 S: Das geht ja nicht, wenn eine Zahl so und eine so und eine so.

264 L: Warum geht das nicht?

265 S: Dann hätte ja jeder eine andere Länge raus.

266 L: Ja.

267 L: Bei Herrn Brockmann hattet Ihr doch schon darüber gesprochen. Früher wurde mit anderen Maßen gemessen, z.B. mit der

268 S: ...mit der Hand

269 L: Mit der Hand oder auch mit der Elle.

270 L: Damals wart Ihr doch zu einem Ergebnis gekommen, mit den Ellen oder mit der Handspanne,....... Marion!

271 S: Da würde jeder anders messen.

272 S: Und dann haben wir den Tisch gemessen mit diesen Händen.

273 L: Und dann Marion, was haben wir festgestellt, dann haben sich die Leute geeinigt. Nämlich......

274 S: ein Zentimeter, denn das ist für jeden gleich, und wenn der da einen Stock nimmt, dann ist das ja verschieden..

275 L: Und ein Meter ist auch genau festgelegt... Von daher kann das jetzt nicht sein, daß ein Metermaß jetzt anders sein sollte.

Zunächst ist ganz allgemein zu sagen, daß beim ersten Herangehen an solche Meßsituationen oder ähnlich komplexe Problemstellungen es wichtig ist, möglichst offen gegenüber zu frühen Festlegungen zu sein, d.h. auch solche möglicherweise falschen Annahmen wie die Verschiedenheit von Maßbändern zuzulassen. Es ist unmöglich, vorab alle impliziten Annahmen explizit festzulegen, ja nicht nur unmöglich, sondern auch nicht anstrebenswert. Vielmehr gilt es im Wechselspiel zwischen mathematischen Beschreibungen, Operationen und den Situationen herauszufinden, in wieweit ein Explizitmachen solcher Annahmen notwendig ist und wieweit man mit bedeutungsvollen, impliziten Situationen relativ direkt verfahren kann.

In dieser Situation sieht sich die Lehrerin veranlaßt, das Problem, ob es unterschiedliche Maßbänder gibt, mit Rückgriff auf frühere Unterrichtsstunden zu erörtern. Sie will deutlich machen, daß die Einheitlichkeit der Maßbänder sich historisch gerade aus der Verschiedenheit von Meßinstrumenten entwickelt hat. Diese "natürliche Begründung", die sich auf eine konkret vorstellbare Situation stützt, reicht diesem Schüler jedoch im folgenden offensichtlich nicht zur Erklärung. An einer späteren Stelle wird die mögliche Verschiedenheit der Maßbänder von diesem Schüler nochmals angesprochen:

Lehrerin hat an die Tafel geschrieben "0,55 Zentimeter".

299 S: Ja, das stimmt.

300 L: Hm,.. Britta!

301 S: ...Meter!...

302 L: Du meinst, Meter müßte dahin?.. Volker!

303 S: Kann ja auch sein, weil das Metermaß....

304 L: Volker, Du denkst jetzt noch an das Metermaß, daß das anders sein könnte, ja? Dann überprüfen wir das demnächst mal.

Ein *zweites Beispiel* für diesen schwierigen Charakter mathematisch-definitorischer Übereinkunft einerseits und einer natürlichen, sachgerechten Begründung andererseits ist die folgende Episode, in der die "richtige Schreibweise" für Zahlen in Komma und Einheiten-Darstellung diskutiert wird.

281 L: Wir hatten uns jetzt aber auf ein Meter 30 geeinigt, ja?

Lehrerin schreibt an die Tafel "1 Meter 30 ".

282 L: Kann ich das jetzt so stehen lassen? Ein Meter 30?

283 S: Zentimeter

Lehrerin schreibt "Zentimeter" dazu.

284 L: Weiter, Peter!

285 S: Die Breite des Tisches,.. 55 Zentimeter.

286 S: Ich hab 65 Zentimeter.

287 L: Und Ihr?

288 S: Ich hab auch,.. öhm, 56 Zentimeter.

289 L: Wie bitte?

290 S: Null Komma fünfundfünfzig Zentimeter.

291 L: Ja,..... wir merken wieder Meter.

292 S: Meter, Zentimeter.

293 L: Und dann?

294 S: Mehr nicht, Zentimeter und dann?

295 L: Schaut Ihr mal zur Tafel.

296 S: ..fünfundfünfzig Meter

297 L: Christof!

298 S: Wir dürfen sonst da ja auch nicht Pfennig hinter schreiben.

Lehrerin hat an die Tafel geschrieben "0,55 Zentimeter".

299 S: Ja, das stimmt.

300 L: Hm,.. Britta!

301 S: ...Meter!...

302 L: Du meinst, Meter müßte dahin?.. Volker!

303 S: Kann ja auch sein, weil das Metermaß....

304 L: Volker, Du denkst jetzt noch an das Metermaß, daß das anders sein könnte, ja? Dann überprüfen wir das demnächst mal. Wie ist das jetzt hier mit der Schreibweise? ......Norman!

305 S: Da muß Meter hin, wenn ich da Pfennig und D-Mark hinschreibe, da kommt ja auch nicht Null Komma fünfundfünfzig Pfennig hinter, sondern Null Komma fünfundfünfzig D-Mark.

306 L: Jetzt wollt ich grade unser Metermaß holen, aber es ist gar nicht da, wo ist es denn nur?

307 S: Manometer! ..

308 L: Gibst Du mir mal Dein Zentimetermaß? So, ein Meter, hier könnt Ihr das nur so schlecht dran erkennen, an der Tafel bei dem Metermaß sah man das ganz gut.

309 S: Das ist eins dreißig.

310 L: ... erinnert sich noch jemand, wie ein Meter aufgeteilt ist? Wenn Ihr an Zentimeter denkt?

311 S: 60 Zentimeter

312 L: Melde Dich!

313 L: Ein Meter.. (Lehrerin zeigt dies auf dem Metermaß).... Ann-Kristin!

314 S: ..hat 100 Zentimeter.

Lehrerin schreibt an die Tafel: "ein Meter = 100 Zentimeter".

315 L: ..hm .. sind 100 Zentimeter..

316 S: Das steht auch im Mathe-Buch.

317 L: Und wenn Du das jetzt mit Komma schreiben möchtest? Ein Meter .. gleich 100 Zentimeter?.. Kann man auch ein Meter mit Komma schreiben?

318 S: ehm....

319 L: Marion?

320 S: Ja, klar.

321 S: ..66!

323 S: Eins Komma Null Null..

324 L: Warum denn jetzt noch Null Null?,.. richtig Marion, schön..

325 S: Wir haben ja keine Zentimeter.

326 L: Überhaupt keine, aber wieviel könnt ich denn noch haben, wieviel Zentimeter?

327 S: ..99

328 L: ..und ganze Meter noch nicht...Volker?

329 S: ..99!

330 L: 99, dafür brauch ich ja die 2 Stellen dann, und wenn ich dann schon 100 habe,..... habe ich...

331 S: ...ein Meter.

332 S: Zwei Meter!

333 L: Zwei Meter. Ein Meter 99 und dann zu zwei Meter, also Schreibweise....

334 L: Null Meter, 55 Zentimeter ....

In der gemeinsamen Besprechung und beim Notieren der Ergebnisse an der Tafel hat die Lehrerin für die Breite des Tisches nach Schülerzuruf 0,55 cm an die Tafel geschrieben. Dies wird von einigen Schülern bemerkt; ein Schüler ruft: "Wir dürfen da ja auch sonst nicht Pfennig hinterschreiben."(298). Und an späterer Stelle erläutert er: "Da muß Meter hin, wenn ich da Pfennig und D-Mark hinschreibe, da kommt ja auch nicht Null Komma Fünfundfünfzig Pfennig hinter, sondern Null Komma Fünfundfünfzig D-Mark."(305).

Auf den ersten Blick könnte man meinen, daß der Schüler in einer konkreten Situation ein gutes, inhaltliches Argument gegeben hat, um die falsche Schreibweise 0,55 cm für diese Situation deutlich zu machen. Es ist jedoch nicht nur eine natürliche Begründung in dieser Situation vorgestellt worden, sondern gleichzeitig hat dieser Schüler eine relativ große Abstraktion vorgenommen. Er hat nämlich die dezimale Struktur von D-Mark und Pfennig zu Meter und Zentimeter in Bezug gesetzt. Dies mag auf der Oberfläche relativ simpel erscheinen, bedeutet jedoch, daß auf einer bestimmten Ebene Meter und D-Mark sowie Zentimeter und Pfennig strukturell gleichzusetzen sind, was sie jedoch in einer konkreten, anschaulich gegebenen Situation nie sein werden.

Die "Gleichheit" zwischen den beiden Größenbereichen von "D-Mark - Pfennig" und "Meter - Zentimeter" besteht nicht in einer natürlich gegebenen Übereinstimmung, sondern in einer konstruierten Gleichheit, wie sie durch konventionelle und strukturelle Aspekte der Mathematik erst ermöglicht wird. Dieses Beispiel macht schlagartig deutlich, daß die Mathematik hier nicht in direkter Weise etwas über Wirklichkeit aussagt, d.h. daß die Zeichen, Ziffernfolgen und Darstellungsweisen der Mathematik nicht direkt aus der Realität hervorgehen, sondern diese mathematischen Zeichen mit ihren Beziehungen etwas über die Wirklichkeit aussagen und die Wirklichkeit "mathematisch strukturieren".

Das in diesem Unterrichtsausschnitt zur Sprache kommende Problem der richtigen Schreibweise, d.h. die "Verbesserung" der Darstellung von 0,55cm in 0,55m, versucht die Lehrerin im folgenden in Form eines Übergangs von ein Meter zu zwei Meter zu erläutern (man könnte hier in Ansätzen von funktionalem oder variierendem Gebrauch und Interpretation sprechen; vgl. Äußerungen 308–333). Dieser Erklärungsversuch stützt sich nur zum Teil auf die Natürlichkeit der Situation, zum anderen Teil versucht er gerade die Zählstruktur, das Voranschreiten der Ziffern, auszunutzen und den Wechsel von kleinen Längeneinheiten (Zentimetern) zu großen (Metern) zu verwenden. Die Erklärung stützt sich zum gleichen Teil auch auf eine elementare, einfache Zählstruktur im Ziffernsystem der Dezimalzahlen für Größenbereiche.

Die schwierige Beziehung zwischen Normiertheit und Natürlichkeit des Wissens und seiner mathematischen Begründung kommt im Verlaufe dieses Unterrichts in einem wichtigen *dritten Beispielfall* bei der Auswertung der Ergebnisse zur Sprache, wenn explizit zwischen Lehrerin und SchülerInnen die verschiedenen Darstellungsformen für Längen diskutiert werden. Im Anschluß an die Zusammenstellung aller Meßergebnisse in den von den SchülerInnen angegebenen Schreibweisen fragt die Lehrerin ausdrücklich, wer diese Zahlen in Kommaschreibweise notiert hat. Zudem werden die SchülerInnen aufgefordert zu überlegen – und die Lehrerin erläutert es später –, wie verschiedene Übersetzungen in andere Schreibweisen vorzunehmen sind.

Schüler schauen nach vorne zur Tafel, an der die Ergebnisse in verschiedenen Formen aufgeschrieben wurden. Einmal nach Einheiten geordnet, Meter, Zentimeter, einmal in Komma-Schreibweise.

377 L: Melde Dich!

378 L: Stefanie!

379 S: Jeder hat es anders geschrieben.

380 L: Was meinst Du jetzt? Jeder hat es anders geschrieben?

381 S: Hat es anders ausgedrückt.

382 L: Wie denn zum Beispiel?

383 S: Ein Meter 30 z.B. ein Meter und 30 Zentimeter und dann haben welche, haben dann halt eins Komma dreißig Meter geschrieben.

384 L: Stefanie überlegt jetzt, ob jemand das mit Komma geschrieben hat. Meldet Euch einmal. Hat jemand die Länge des Tisches in der Kommaschreibweise geschrieben? .. Michael!

385 S: Wir habens gemacht...

386 L: ...Ja, was habt Ihr denn da geschrieben?

387 S: Ehm, beim ersten Mal war eins Komma dreißig...ehm Meter.

388 L: Ja, weißt Du noch, wie wir es ganz genau aussprechen solln?

389 S: Eins Komma drei Null

390 L: Laut.

391 S: Eins Komma drei Null Meter.

392 L: Richtig.

393 S: Eins Komma drei Null Meter.

394 L: Kann ich da ein Gleichheitszeichen zwischensetzen?

395 S: Ja

396 L: Ja, nur eine andere Ausdrucksweise....Weiter, habt Ihr noch weitere Ideen zum Andersschreiben? Marion!

397 S: Einhundertdreißig Zentimeter.

398 L: Aha (schreibt dies an die Tafel).

399 L: Ein Meter sind hundert Zentimeter und dann nehm ich die dreißig Zentimeter noch dazu, die ich gemessen habe und dann hab ich einhundertdreißig Zentimeter... Wer hat noch Ideen? Hier geht's auch noch weiter. Such Dir einfach was aus, was Du gerne sagen möchtest... Stefanie noch mal.

400 S: Höhe des Stuhles.

401 L: ...ehm

402 S: Null Komma drei sieben.... Meter.

403 L: Null Meter drei sieben Zentimeter.

404 L: Noch Ideen zum Umformulieren, Timm? .. Sabrina!

405 S: Da gibt's keinen mehr bei.

406 L: Nein, eine dritte Form gibt's hier nicht. Das stimmt, weil keine Meter da sind. Christof!

407 S: Länge einer Bodenplatte.

408 L: ..hm.

409 S: Null Komma sechs Null Meter.

410 L: Null Meter,.. und dann kommen die Zentimeter.

411 L: Wer probiert denn mal, das hier oben umzuformulieren? Breite des Tisches, bitte?

412 S: Da hast Du Zentimeter geschrieben.

413 L: Ja, und......

414 S: ...da kommt Meter hin.

415 L: Sind das denn Zentimeter? Sind das denn wirklich null Zentimeter, die Ihr gemessen habt?

416 L: Habt Ihr Null Zentimeter gemessen, das heißt das ja eigentlich, was habt Ihr gemessen?

417 S: Wir haben 60 Zentimeter gemessen.

418 L: Und das bedeutet,.... Ihr habt Null Meter gemessen, aber die 60 Zentimeter bleiben.

419 S: Da oben steht's auch.

420 L: Da hab ich auch hingeschrieben, gut, daß Ihr aufpaßt... Wer probiert denn mal die Breite des Tisches anders zu schreiben? Das habt Ihr sicher auf Euren Zetteln fast alle.

421 S: Null Komma fünf fünf Meter.

422 L: Sven!

423 S: Null Komma fünf fünf Meter.

424 L: Ja, könntest Du es auch anders schreiben?

425 S: Fünfundfünfzig Zentimeter.

426 L: Bitte?

427 S: Fünfundfünfzig Zentimeter.

428 L: Ja. Schreib dies an die Tafel.

Diese verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten der Meßergebnisse zeigen noch einmal, daß die natürliche Meßsituation keine eindeutige, mathematische Formulierung produziert, sondern umgekehrt, daß es eine relative Autonomie in den Darstellungsweisen gibt, die es zu vergleichen gilt und die ineinander transformiert werden können und müssen.

In diesen drei Episoden mit ihrem konkreten, elementaren Zugang wird deutlich, daß schon in der Grundschule die Dezimalschreibweise einen einfachen System- und Strukturcharakter beinhaltet, d.h. relativ autonom gegenüber der realen Meßsituation ist. Das bedeutet insbesondere, daß die Ziffern in ihrer Kommaschreibweise nicht in direkter, empirischer Weise aus der Situation Bedeutung erhalten: In ihrer Beziehungs-Struktur, im System der zeichenmäßigen Darstellung, Transformation, Veränderung (und später der mathematischen Operationen des Addierens, Subtrahierens, Multiplizierens usw.) gewinnen diese Zeichen in relationaler und intentionaler Weise Bedeutung für die Wirklichkeit. Diese Zeichen bilden Wirklichkeit nicht direkt ab, sondern stellen Beziehungen der Wirklichkeit dar (Mason, 1987; Steinbring, 1993a). Diese Beziehungen sind in diesem konkreten Meßkontext noch unmittelbar deutlich, es handelt sich mehr oder weniger immer um das grundlegende Verhältnis von Gesamtlänge zu einer zu wählenden und zu konstruierenden Grundeinheit. Diese Beziehung

"Gesamtlänge zu Grundeinheit" läßt sich mathematisch durch die Gleichung ausdrücken:

$$\text{Länge} = \text{Vielfaches x Grundeinheit.}$$

Diese Gleichung beinhaltet zum einen den relationalen Charakter der mathematischen Bedeutung in Form "Länge durch Einheit" (dies ergibt dann die mathematische "Zahl", hier als Dezimalzahl):

$$\frac{\text{Länge}}{\text{Grundeinheit}} = \text{Vielfaches (Zahl)}$$

Zum Beispiel erhält man für 5m und 20cm bei verschiedenen Grundeinheiten mittels dieser Gleichung folgende Dezimalzahlen:

$$\frac{5\text{m } 20\text{cm}}{1\text{m}} = 5,20; \quad \frac{5\text{m } 20\text{cm}}{1\text{dm}} = 52,0; \quad \frac{5\text{m } 20\text{cm}}{1\text{cm}} = 520; \quad \frac{5\text{m } 20\text{cm}}{1\text{mm}} = 5200;$$

Die Begriffe "Länge", "Dezimalzahl" (der Position des Kommas) und "Grundeinheit" bestimmen sich in dieser Gleichung wie in einem System in wechselweiser Abhängigkeit. In dieser Gleichung ist im Kern auch die konventionelle Seite mathematischer Definitionen enthalten, d.h. hier insbesondere die Freiheit gegenüber der Wahl und Konstruierbarkeit einer Einheit sowie die Bedingung, daß diese Einheit im Rahmen sozialer Beziehungen invariant gewählt und normiert ist.

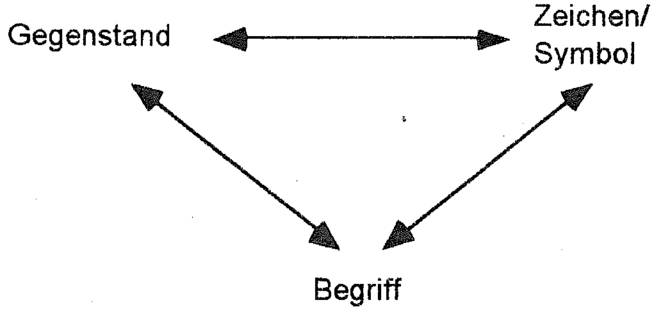
Die drei Beispiel-Episoden haben insbesondere folgendes deutlich gemacht:

1. Mathematische Bedeutung und mathematisches Wissen ist nicht vollständig aus natürlichen Situationen herleitbar; mathematische Tätigkeiten, wie in unserem Kontext von Messen und Vergleichen, umfassen eine Mischung von konventionellen, definitorischen Aspekten und situativen, natürlichen Aspekten.

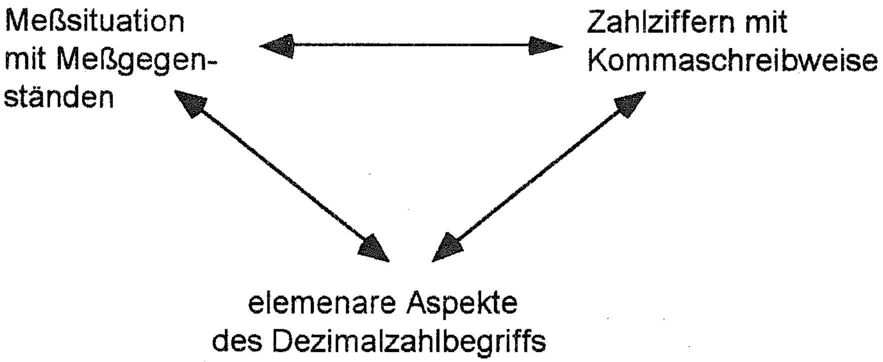
2. Diese Unterscheidung zwischen konventionellen, definitorischen Aspekten und situativen, natürlichen Aspekten der Mathematik führt ansatzweise zu einer relativen Autonomie der gegenständlichen Situation einerseits und der mathematischen Darstellungs- und Schreibweise andererseits. Auch in der Grundschule muß für die elementare Dezimalschreibweise zwischen der Seite der mathematischen Zeichen und der Seite der situativen Gegenstände unterschieden werden.

Die Analyse des elementaren, mathematischen Wissens in der Grundschule, z.B. der Beziehungen zwischen den Zifferndarstellungen der Dezimalzahlen zu ihren beispielhaften Meßsituationen, läßt sich mit Hilfe des epistemologischen

Dreiecks von Gegenstand, Zeichen und Begriff durchführen (vgl. Steinbring, 1989, 1992).



Der Gegenstandsbereich umfaßt in unserem Beispiel die konkreten Meßsituationen und Meßgegenstände, auf der Zeichenebene finden sich die Kommaschreibweise, Längeneinheiten usw. Unter den "Begriff" gehört in diesem Fall ein erster Entwicklungsstand des elementaren Dezimalbegriffs.



In der Wechselbeziehung zwischen Gegenstand und Zeichen vermittelt als Arbeits- und Darstellungsmittel das Maßband (Zentimetermaß): Zum einen dient dieses Instrument der operativen Analyse und des Messens in den konkreten Sachsituationen, zum anderen ist dieses Maßband auch ein Darstellungsmittel, eine erste Repräsentationsform für Dezimalzahlen.

Die im epistemologischen Dreieck deutlich werdende Unterscheidung zwischen einem Gegenstandsbereich und dem Bereich der mathematischen Zeichen wird bei genauerer Betrachtung dieser vorliegenden Unterrichtsstunde auch für die Entwicklung mathematischen Wissens in der Primarstufe relevant. An den Bemerkungen einzelner SchülerInnen, in den Argumentationen der Lehrerin, in den Anforderungen, das Implizite, die Voraunahmen, mitzudenken und in Betracht zu ziehen, wird einsichtig, daß die mathematische Bedeutung und die Interpretationsanforderungen sich nicht in natürlicher Weise - quasi automatisch - aus den empirischen Fakten ergeben, sondern daß die SchülerInnen schon referentielle Deutungen vornehmen müssen.

Die SchülerInnen müssen strukturelle Beziehungen benutzen, um damit andere Zusammenhänge argumentiv begründen zu können. Diese strukturelle Begründungsweise zeigte sich sehr deutlich in der vergleichenden Gegenüberstellung von D-Mark zu Meter und Pfennig zu Zentimeter. Nicht die Situation in ihrer empirischen Gegebenheit, sondern was mit dieser Situation intentional ausgesagt werden soll und wie die Mathematik in dieser Situation benutzt werden kann, sind wichtige Anforderungen, die es im Unterricht zu erwerben gilt. Nicht die natürlich gegebene, lebensnahe Realität und der Erfahrungsbereich der SchülerInnen bilden allein die einsichtige Begründungsgrundlage für mathematische Abstraktionen, sondern umgekehrt gilt schon für den Grundschulunterricht in Ansätzen, daß die mathematische Ebene der Zeichen und einfachen Modellierungen im Keim eine autonome Stellung gegenüber dieser Realität haben und nur in dieser Wechselbeziehung sich mathematisches Wissen und mathematische Bedeutung für SchülerInnen entwickeln können.

Unter epistemologischen Gesichtspunkten ist die dezimale Schreibweise nicht einfach eine bloß ökonomische Notierung konkreter Meßergebnisse; schon in ihrer elementaren Form ist sie Struktur, Kalkül und Beziehungsgeflecht. Es wäre z.B. interessant zu beobachten, wie SchülerInnen in der Primarstufe die Bedeutung der alltäglich anzutreffenden Darstellungen von Preisen diskutieren, etwa den Preis für einen Liter Benzin. Die Preisangabe von $1{,}36^9$ ist nicht nur eine aus der Wirklichkeit entstandene "natürliche", arithmetische Modellierung, sie beinhaltet auch eine Aussage gegenüber der Wirklichkeit, die täglich tausendfach benutzt wird. In der Diskussion der Bedeutung einer solchen Darstellung würde wohl sichtbar, wie relativ selbständig die Zeichen- und Kalkülstruktur der Dezimalzahlen gegenüber der Wirklichkeit ist und daß nur über diese Struktur eine Beziehung (die nicht unmittelbar sein kann) zur Wirklichkeit herstellbar wird.

4. Die unangebrachte Alternative zwischen Wissenschafts- und Kind-Orientierung in der Grundschulmathematik – Konsequenzen

In der Entwicklung von Lehrplankonzepten und in der Darstellung der angezielten fachlichen Orientierung zum Mathematikunterricht gibt es immer ein *Schwanken zwischen einer wissensorientierten und einer kindorientierten Perspektive*. Die Wissenschaftsorientierung versucht stärker das Wissen selbst und seine Struktur in den Vordergrund des Lern- und Lehrprozesses zu stellen, während bei der Kind-Orientierung das Subjekt, seine Fähigkeiten, Ansichten, sein Entwicklungsstand und sein Bezug zu seiner Lebenssituation im Vordergrund stehen. Das Problem bei dieser Alternative besteht darin, daß sich für einen genuinen Lehr/Lernprozeß eigentlich die eine Orientierung nicht simpel auf die andere reduzieren läßt.

Eine solche Reduktion verliert zumeist aus dem Blick, daß zum einen das Wissen nicht einfach aus seiner wissenschaftlichen Struktur, wie es in der wissenschaftlichen Forschung entstanden ist, für unterrichtliche Prozesse übersetzbar ist. Versucht man dies, so bleibt man, wie es häufig passiert, auf einer zeichenmäßigen Oberfläche der Darstellung des Wissens stehen, ohne daß man für die unterrichtliche Situation geeignete Bedeutungszusammenhänge und operative Gebrauchsweisen hat. In einer solchen Art der Wissensorientierung verkümmert das lebendige, mathematische Wissen in der Transformation zu schulischem Wissen zu einer bloßen formalen Repräsentationsform, in der scheinbar alles systematisch geordnet ist und linear als Definition und Regelwerk erlernt werden kann.

Eine ausschließliche Kind-Orientierung unterliegt demgegenüber der Gefahr, daß das mathematische Wissen vollständig auf Tätigkeiten und Erfahrungsbereiche der SchülerInnen zurückgeführt werden könnte. Damit würde sich jedoch der in der Einleitung formulierte Bruch zwischen Primarstufen-Mathematik und Sekundarstufen-Mathematik nur noch mehr verschärfen. Mathematik würde notwendigerweise so eine empiristische Wissenschaftsform bleiben oder zumindest in der Gefahr stehen, an empirisch konkrete Tätigkeiten und Operationen gebunden zu sein.

Gegenüber dieser Situation scheint es m.E. notwendig und sinnvoll, für die Grundschulmathematik einen anderen Akzent zu setzen und eine zusätzliche Perspektive auf das Lernen und Lehren von Mathematik zu eröffnen. Es ist unbestritten, daß Mathematik in der Grundschule in schülergerechten Vorstellungs- und Tätigkeitsbereichen entwickelt werden muß, daß mathematisches Wissen sich hier auf Erfahrungen und Vorstellungen der SchülerInnen bezieht und nicht als abstraktes, referenzloses Zeichensystem vermittelbar ist. Jedoch birgt schon eine solche relativ einseitige Formulierung implizite Gefahren und bringt eine Sichtverschiebung mit sich, die vermieden werden sollte. Exemplarisch ist anhand der einzelnen Ausschnitte aus der vorliegenden Unterrichtsstunde deutlich geworden, daß selbst unmittelbar anschauliche Tätigkeiten und Bezugnahmen auf reale Kontexte für das Erlernen von Mathematik immer mit Vorsicht bedacht werden müssen, d.h. allen Beteiligten muß klar werden, daß viele implizite Annahmen eingehen und man in jeweiligen Augenblicken flexibel Annahmen explizieren und sie hinsichtlich ihres konventionellen Charakters bzw. ihrer natürlichen Begründbarkeit verstehen muß (Steinbring, 1993b)

Mathematik betreiben, mathematisch operieren, mathematische Zusammenhänge interpretieren usw. bedeutet selbst in ersten, elementaren Situationen schon, nicht einfach direkt die konkreten, empirischen Sachverhalte in mathematische

Zeichen zu übersetzen, sondern daß man mit der mathematischen Struktur etwas über die potentiellen Beziehungen in einer Situation aussagt, etwas intendiert, etwas anderes ausdrücken möchte. Und es gilt, diese Flexibilität im Denken, diese Form, sich etwas dabei zu denken, diese Form von Wissen und Metawissen selbst in der Grundschulmathematik zu entwickeln (vgl. Wittmann & Müller, 1990, 1992).

Diese Anforderung an eine nicht-reduktive Mathematik, die versucht, intentional und nicht empiristisch zu sein, stellt diffizile Anforderungen an den Mathematikunterricht der Grundschule. Diese Anforderungen sind keinesfalls Anforderungen hinsichtlich der traditionellen üblichen Forderungen nach Wissenschaftsorientierung, sondern sind Anforderungen im Hinblick auf *theoretisches Denken.*

Theoretische Denken läßt sich geradezu als ein intentionales Denken verstehen, als ein sich etwas Dabei-Denken, als ein Konstruieren und Variieren von Beziehungen. Eine große Schwierigkeit - nicht nur für die Grundschule - besteht darin, daß dieses theoretische Denken nicht direkt als ein Lernziel des Unterrichts angegangen werden kann. Theoretisches Denken in der Grundschule kann m.E. nur beispielhaft in Kontexten und den SchülerInnen zugänglichen Erfahrungsbereichen entwickelt werden. Das heißt, man wird weiterhin auf die Einbindung mathematischen Wissens in die Vorstellungs- und Erfahrungswelt der SchülerInnen angewiesen sein und diese Beziehung ausbauen und entwickeln müssen (vgl. Voigt, 1990). Jedoch wird es hilfreich und fördernd für die mathematische Arbeits- und Denkweise der SchülerInnen sein, wenn sich die LehrerInnen sensibler und bewußter gegenüber einzelnen Bemerkungen, Hinweisen, Rückfragen von Schülern verhalten können, die indirekt auf theoretisches Denken, auf Mitdenken, auf Darüber-Nachdenken verweisen.

In der vorliegenden Stunde hat es viele solcher indirekten Hinweise von SchülerInnen zu theoretischem Denken bzw. zu Brüchen zwischen Schülerauffassungen und der natürlichen Wissensbegründung gegeben. Von der Gesamtanlage des Unterrichts her, in seiner Balance zwischen Meßsituationen und elementaren Strukturen dezimaler Schreibweisen, wäre es gut möglich, solche indirekten Hinweise aufzugreifen. Dabei wird nicht gefordert, jeden einzelnen Hinweis in allen Details zu explizieren und den Ursachen nachzuspüren (was je nach der Bewertung der Lehrerin vielleicht auch mal notwendig ist). Dieses Gleichgewicht zwischen Erfahrungsbereich und System der Schreibweise hat "Dimensionen" für den Unterricht aufgespannt, in denen Mißverständnisse, Fehler, unterschiedliche Sichtweisen aufeinander bezogen werden können und in der nicht, wie ansonsten in linearen, hierarchischen Unterrichtsverläufen, ein aufkommendes Mißverständnis das Zurückgehen bis zum Anfang der Stunde erfordert.

Die Einbettung der Entwicklung mathematischen Verstehens und mathematischer Begriffsauffassungen für die Grundschule in den Kontext schülergemäßer Erfahrungsbereiche darf nicht reduktiv gesehen werden, sie ist eine notwendige Basis, muß aber mit einer immer stärkeren Bewußtheit gegenüber einer Akzentverschiebung zum theoretischen Denken entwickelt werden.

Literatur

Bauersfeld, H. (1991). Sachaufgaben - Nichts als Ärger!? Die Grunschulzeitschrift , 42(5), 8 - 10.

Dörfler, W., & MCLone, R. R. (1986). Mathematics as a school subject. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), Perspectives on Mathematics Education (pp. 49-97). Dordrecht: Reidel.

Lehrplan Grundschule NRW (1985) Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen, Mathematik, Herausgeber: Der Kultusminister des Landes Nordrhein-Westfalen, Köln: Greven Verlag.

Lorenz, J.-H. (Ed.). (1993). Mathematik und Anschauung. Köln: Aulis.

Mason, J. (1987). What do symbols represent? In C. Janvier (Eds.), Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics (pp. 73-81). Hillsdale, NJ: Erlbaum Associates.

Pimm, D. (1987). Beyond reference. Mathematics Teaching(No. 116), 48 - 51.

Postel, H. (1991). Konzeptionen zur Behandlung der Dezimalbruchrechnung in der Bundesrepublik Deutschland. Der Mathematikunterricht, 37(2), 5-21.

Radatz, H., & Schipper, W. (1983). Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. Hannover: Schroedel.

Steinbring, H. (1989). Routine and Meaning in the Mathematics Classroom. For the Learning of Mathematics, 9(1), 24-33.

Steinbring, H. (1991). Eine andere Epistemologie der Schulmathematik - Kann der Lehrer von seinen Schülern lernen? mathematica didactica, 14(2/3), 69-99.

Steinbring, H. (1992). The relation between social and conceptual conventions in everyday mathematics teaching (Manuscript). Bielefeld: IDM.

Steinbring, H. (1993a). Symbole, Referenzkontexte und die Konstruktion mathematischer Bedeutung - am Beispiel der negativen Zahlen im Unterricht (Manuskript). Bielefeld: IDM.

Steinbring, H. (1993b). Frosch, Känguruh und Zehnerübergang - Epistemologische Probleme beim Verstehen von Rechenstrategien im Mathematikunterricht der Grundschule (Manuskript). Bielefeld: IDM.

Tahta, D. (1986). On notation. Mathematics Teaching(no. 112), 49 - 51.

Voigt, J. (1990). Mehrdeutigkeit als ein wesentliches Moment der Unterrichtskultur. In Beiträge zum Mathematikunterricht (pp. 305 - 308). Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Winter, H. (1984). Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Grundschule, 16(4), 24 - 29.

Winter, H. (1985). Sachrechnen in der Grundschule. Bielefeld: Cornelsen, Velhagen und Klasing.

Wittmann, E. C., & Müller, G. (1990). Handbuch produktiver Rechenübungen. Bd. 1: Vom Einspluseins zum Einmaleins. Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. C., & Müller, G. (1992). Handbuch produktiver Rechenübungen. Bd. 2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen. Stuttgart: Klett.

Anschrift des Verfassers:

Dr. Heinz Steinbring, IDM
Universität Bielefeld
Postfach 100131
33501 Bielefeld.