Heinz Steinbring

**Die Konstruktion mathematischen Wissens im
Unterricht – eine epistemologische Methode der
Interaktionsanalyse**

**In: Journal für Mathematik-Didaktik, Jg. 14 (1993), H. 2
S. 113-145**

Heinz Steinbring

Die Konstruktion mathematischen Wissens im Unterricht – Eine epistemologische Methode der Interaktionsanalyse

Summary: A method for analyzing everyday mathematics teaching is presented which permits to take into account the different levels of mathematical meaning within teacher-students interactions. By means of graphical diagrams conceptual structures of the development of mathematical meaning in the classroom are visualized. These new diagrams permit to display the chronological course of teaching and at the same time global patterns. The actual epistemological analysis of lessons about elementary probability (in grades 5, 6 and 7) reveals the following central result. There are mainly two basic types of interactive development of mathematical knowledge: 1) Some lessons display graphical patterns indicating teacher-student work simultaneously and parallel on different levels of meaning. This characterizes an open, systemic and anticipating type of teaching process. 2) Other lessons result in graphical diagrams indicating a strictly linear succession caused by working only separately on different levels of meaning in isolated teaching phases. This characterizes a linear, consecutive and deductive type of teaching process.

Vorbemerkung

In diesem Beitrag soll ein Analyseverfahren für den alltäglichen Mathematikunterricht vorgestellt werden, das dazu dient, die epistemologische Struktur des mathematischen Wissens zu rekonstruieren, wie es in einer Unterrichtsstunde in der Interaktion zwischen Lehrerin und SchülerInnen konstituiert wird. Dabei wird versucht, die zwischen den Beteiligten hergestellte Bedeutung des Wissens in einem neuartigen graphischen Verlaufsdigramm darzustellen. In diesem Diagramm wird sowohl der Ablauf der Wissensentwicklung aus einer spezifisch-epistemologischen Perspektive dokumentiert, in diesem Diagramm zeigen sich auch ganzheitliche Strukturen, Muster und Beziehungen, die es ermöglichen, unterschiedliche Formen der Wissensentwicklung im Mathematikunterricht zu klassifizieren und zu bewerten. Dieses Analyse- und graphische Auswertungsverfahren basiert auf der Grundidee, daß die Konstitution mathematischer Bedeutung im Unterrichtsprozeß wesentlich zwei wechselseitig aufeinander bezogenen Bedingungen unterliegt. Die Entwicklung mathematischer Bedeutung ist ein Wechselspiel von einerseits subjektbezogenen Interaktionen, Interpretationen und Anwendungen und andererseits von wissensbezogenen Strukturen und Modellierungen. Die Einleitung dieses Beitrages skizziert kurz die epistemologische Grundlage des Analyseverfahrens, um dann in den folgenden Abschnitten – zunächst in Abschnitt 2 – weitere Erläuterungen und ein kurzes, konkretes Beispiel zum Analyseverfahren und zum Lesen der Diagramme zu geben. In den Abschnitten 3, 4 und 5 geht es schließlich darum, eine beispielhafte Auswertung einiger der vorliegenden Unterrichtsstunden unter einer globalen Perspektive vorzustellen.

1. Einleitung: Epistemologische Bedingungen für die Entwicklung mathematischen Wissens im Unterricht.

Die folgende kurze Unterrichtsepisode zum Thema "Negative Zahlen" stammt aus dem alltäglichen Mathematikunterricht einer 8. Klasse. Sie wurde auf Videoband aufgenommen und für die Analyse vollständig transkribiert. Sie soll als beispielhafte Illustration dienen, um die besondere *epistemologische* Analyseperspektive zu verdeutlichen.

- 1 L: Siebzehn und drei Komma vier sind die beiden Kontostände.
Dabei schreibt der Lehrer an die Tafel: (rot) 17 und (rot) 3,4
- 2 L: Ihr sollt euch überlegen, wie man von Kontostand siebzehn zu Kontostand drei Komma vier kommt und die zugehörige Rechnung aufschreiben.
Es beginnt eine Phase der Schüler-Einzelarbeit. Der Lehrer geht dabei von einem zum anderen Tisch.
- 3 L: Stefanie, überleg Dir doch mal, welche von den beiden Zahlen die größere ist.
- 4 S: Das muß plus sein.
- 5 L: Welche von den beiden Zahlen ist denn die größere?
- 6 S: Vorn die siebzehn.
- 7 L: Bist du sicher?
- 8 L: Welche steht denn weiter links auf der Zahlengeraden?
- 9 S: Diese ...
- 10 L: Ehmm ..
- 11 L: Die steht weiter links.
- 12 L: Und je weiter links Du bist ?
- 13 S: umso mehr Schulden ...
- 14 L: ja, oder umso kleiner der Kontostand, ne? Umso niedriger der Kontostand
- 15 S: Ist die drei Komma vier größer?
- 16 L: Ja ohne Zweifel, ne? Ist jetzt klar, was Du machen mußt?

Solche und ähnliche Unterrichtsausschnitte oder auch ganze Unterrichtsstunden sind Grundlage für verschiedenartigste Analyse- und Auswertungsverfahren. Sie bieten Anlässe, die kommunikative Struktur im Unterrichtsprozeß zu analysieren. So findet man hier ansatzweise Strukturen des Trichtermusters, wenn der Lehrer in der Interaktion mit dieser Schülerin immer enger auf die Lösung des Problems hinarbeitet; man findet Routinen und Zugzwänge in dieser Interaktion; ja man kann auch mit Konzepten der Rahmung versuchen, diesen Unterrichtsausschnitt auszuwerten. [vgl. hierzu BAUERSFELD 1978, sowie KRUMMHEUER 1991, MAIER 1991, NETH & VOIGT 1991, VOIGT 1991].

Richtet man in der Analyse den Blick auch auf die Spezifik des mathematisch-inhaltlichen Problems, dann macht es dieser Unterrichtsausschnitt erforderlich, nach epistemologischen Bedingungen des Wissens und seiner Bedeutung in dieser Situation zu fragen. So ist es für diesen Unterrichtsausschnitt z.B. wichtig zu wissen, daß die Schülerin hier nicht einfach nur eine anfangs mitgeteilte Information, wie rote 17 und rote 3,4

als neue - negative Zahlen - gelesen werden müssen, richtig verwerten kann und nun weiß, was für diese Zahlen "kleiner" und "größer" bedeutet. Vielmehr sind vorher im unterrichtlichen Entwicklungsprozeß zur Herleitung bestimmter Regeln für die rote 17 und rote 3,4 (also für die neuen Zahlen) auch Beziehungen benutzt worden, bei denen im Sinne von "mehr" oder "weniger" für diese Zahlwerte in der Tat die rote 17 als mehr negative Zahlen (oder rote Plättchen, bzw. Schulden) interpretiert wurden als rote 3,4. Dieser Hintergrund zeigt, daß in dem vorliegenden Unterrichtsausschnitt neben den kommunikativen, interaktiven Problemen, wie sie in der Konstitution neuen Wissens und neuer Bedeutungen auftreten, auch epistemologische Bedingungen des Wissens selbst eine unvermeidliche Rahmenbedingung darstellen.

Verstehensprobleme und Bedeutungsbrüche, die in der alltäglichen Unterrichtsinteraktion entstehen, kann man aus unterschiedlichen Perspektiven analysieren:

- im Hinblick auf die "Richtigkeit" von Bezeichnungen, Definitionen, Konventionen, logischen Zusammenhängen, die im Rahmen sprachlicher Kommunikation nicht korrekt beherrscht werden, und
- aus einer epistemologischen Perspektive, nach der in der mathematischen Interaktion immer auch ein spezifisches Problem der Wissens-Begründung vorliegt.

Die im alltäglichen Mathematikunterricht beobachtbaren Probleme liegen nicht bloß auf der Ebene sprachlicher Kommunikation, sie beinhalten zugleich immer einen epistemologischen Anteil, der in der *theoretischen* Natur des Wissens begründet ist. Beide Perspektiven sind für die Analyse von mathematischer Interaktion notwendig. Das Lernen setzt eine soziale Praxis des schulmathematischen Wissens voraus (eine "soziale" Ganzheitlichkeit) [vgl. SOLOMON 1989], in der die SchülerInnen ihre Wissensbedeutung konstruieren können [cf. COBB, YACKEL & WOOD 1992]. Und im Lehrprozeß müssen die Lehrerinnen explizit auf die erkenntnistheoretischen Aspekte des schulmathematischen Wissens Bezug nehmen, um die zunächst als Namen für gegebene "Objekte" gebrauchten sprachlichen Bezeichnungen mit mathematisch-begrifflicher Bedeutung füllen und damit einen Übergang von sprachlichen Zeichen zu mathematischen Symbolen (Symbole als Repräsentanten für *begriffliche Beziehungen*) in Gang setzen zu können.

In dem vorliegenden Abschnitt liegt die Verstehensschwierigkeit der Schülerin nicht nur darin, neue Informationen richtig auf diesen Fall anzuwenden, sondern bewußt eine Umstrukturierung, eine Neuinterpretation mathematischer Konzepte vorzunehmen. Hier muß explizit eine Weiterentwicklung, eine Verallgemeinerung des mathematischen Begriffs "größer als" und "kleiner als" auf den neuen Zahlbereich vorgenommen werden. Das, was vorher "mehr" und "weniger" in einem direkten und konkreten Sinne

bedeutete, muß nun aufgehoben und uminterpretiert werden zu einer theoretischen Beziehung von "kleiner als" und "größer als".

Im Hinblick auf das neue Wissen muß vom Lernenden aktiv eine Umgestaltung und Neuordnung der Beziehungen in diesem Wissen vollzogen werden. Diese Umwandlung der begrifflichen Beziehungsstruktur ergibt sich nicht logisch und automatisch aus der formalen Struktur des Wissens selbst, sondern ist eine Anforderung an das Verhältnis zwischen dem Kenntnis- und Interpretationsstand des Subjekts und der neuen Struktur des Wissens.

In diesem Abschnitt wird somit neben vielen anderen zu analysierenden interessanten Fakten sichtbar, daß im Prozeß des *Erwerbs neuen Wissens* [vgl. JAHNKE 1978, SEEGER 1991, STEINBRING 1988] der Lernende aktiv eine Umstrukturierung des bekannten Wissens vornehmen und eine neue Beziehungsstruktur selbständig konstruieren muß. Dieses Problem, dem Wissen in der Situation der Verallgemeinerung und der Aneignung neuen Wissens eine unbekannte, neue Beziehungsstruktur und Rolle zuzuweisen, stellt für den Mathematikunterricht eine große Schwierigkeit und Herausforderung dar. Denn diese Anforderung findet man nicht nur bei den negativen Zahlen, sie zeigt sich eigentlich überall im Mathematikunterricht: sei es in der elementaren Stochastik, wo der Würfel zum einen als zu analysierender, empirischer Gegenstand, zum anderen als ein vorgestellter idealer Wahrscheinlichkeitsraum interpretiert wird. Oder sei es in der Geometrie, wo die SchülerInnen sich immer der Anforderung ausgesetzt sehen, z.B. in elementaren Figuren, wie in einem Dreieck, die jeweils für diesen Problemkontext wichtigen allgemeinen Beziehungen in dem vorliegenden einzelnen konkreten Dreieck zu entdecken.

In Situationen der Problemlösung oder der Weiterentwicklung mathematischen Wissens sieht man sich somit der Anforderung ausgesetzt, eine Beziehung zwischen allgemeinen strukturellen Aspekten des Wissens und Bedingungen einer mehr oder weniger konkreten, gegenständlichen Situation vorzunehmen. Erst die Herstellung einer Beziehung erlaubt es z.B., eine Auswahl und Ordnung in der Vielfalt möglicher Interpretationen dieser Situation zu treffen, Wesentliches von Unwesentlichem zu unterscheiden, auf das in dieser Problem- oder Wissensentwicklung vorgegebene Ziel hinarbeiten usw. Dieser Prozeß der Herstellung einer Beziehung zwischen strukturellen Merkmalen des Wissens und den durch eine Problemaufgaben- oder Gegenstandssituation gegebenen Kontext des Wissens beinhaltet viele implizite und nicht explizierbare Merkmale: So z.B. die Frage danach, was in dieser Situation von Bedeutung ist, wie ein Diagramm gelesen werden muß, wie und in welcher Form die Informationen aus dem Sachkontext entschlüsselt und für die Bearbeitung des Problems wichtig werden usw. Dies sind implizite, teils konventionalisierte Vereinbarungen und Vorgaben, die nicht als Regel explizit formuliert werden können, jedoch eine grundlegende Schwierigkeit für die Kon-

struktion einer sachgerechten Beziehung zwischen symbolisch-struktureller und gegenständlich-kontextbezogener Ebene des Wissens sind. [vgl. ROUCHIER & STEINBRING 1988, STEINBRING 1992].

Dieses für den Mathematikunterricht zentrale Problem der Herstellung einer Beziehung zwischen *symbolisch-struktureller Ebene* und *gegenständlich-kontextbezogener Ebene* des Wissens ist beispielhafter Ausdruck für die Wechselbeziehung zwischen *subjektbezogenen* und *objektiven* Momenten in der Wissensentwicklung. [STEINBRING 1991a].

Die Schülerin in unserem Unterrichtsausschnitt muß subjektiv diese Beziehung (zum Teil) selbst konstruieren und aktiv mit dieser Beziehung zwischen einer neu interpretierten Struktur, nämlich "größer" und "kleiner", und den vorgegebenen Gegenständen, hier den roten Zahlen, umgehen, um für sich selbst Bedeutung und Sinn in der Situation entwickeln zu können. Diese, vom Subjekt geforderte aktive Herstellung einer Beziehung im Wissen zwischen strukturellen und kontextbezogenen Momenten ist jedoch nicht willkürlicher und beliebiger Natur, sie ist nur verstehbar vor dem Hintergrund potentieller objektiver Strukturen und Beziehungsmöglichkeiten im Wissen selbst. Die Verallgemeinerung dieser empirischen "*Mehr- und Weniger-Beziehung*" in eine mathematische "*Größer- und Kleiner-Beziehung*" ist nicht beliebig, sondern kann nur eine Form von vielen objektiv möglichen erlangen. Sie muß vom Subjekt hergestellt werden, um als objektive Beziehung erkannt zu werden. Und diese subjektive Herstellung ist nicht ein auf das individuelle Subjekt beschränkter Prozeß, sondern die hierin eingehende Verallgemeinerung mathematischer Begriffe und Vorstellungen macht einen sozialen Lernkontext erforderlich, in dem erst durch Kontrast und Vergleich mit dem Lernen und Verstehen anderer SchülerInnen in der Interaktion eine Relevanz und Akzeptanz für Verallgemeinerungs- und Abstraktionsprozesse erwachsen kann. Erst die Kommunikation und Interaktion mit anderen trägt dazu bei, Verallgemeinerungen auch sozial zu akzeptieren, ihnen einen tragfähigen Sinn, eine stabile Bedeutung geben zu können. [vgl. KRUMMHEUER 1991, 71].

Vor dem Hintergrund dieses kurzen Unterrichtsausschnitts soll im folgenden das Problem der Beziehung zwischen der strukturellen, symbolischen Ebene des Wissens und der gegenständlichen, kontextbezogenen Ebene des Wissens zentraler Ausgangspunkt und Grundlage für das Analyseverfahren und die graphischen Darstellungen sein. Wir gehen davon aus, daß die Bedeutung des mathematischen Begriffes sich als eine Beziehungsform zwischen *Zeichen (oder Symbol)* und *Gegenstand (oder Objekt)* im epistemologischen Dreieck konstituiert. [vgl. ODGEN & RICHARDS 1923, STEINBRING 1989, STEINBRING 1992].

Die Interpretation mathematischen Wissens als eine *Form der Beziehung* hat insbesondere zur Folge, daß das Wissen und seine Bedeutung gleichermaßen durch das lernende Subjekt konstruiert und hergestellt, sowie sozial in der Interaktion mit anderen vereinbart und abgestimmt werden muß und gleichzeitig eine mögliche objektive Beziehung in der Struktur des Wissens zwischen Zeichen und Gegenstand darstellt. (vgl. Steinbring 1991b). Es ist wichtig, die einzelnen Elemente (Objekt, Symbol, Begriff) in diesem Dreieck nicht als a-priori definiert zu verstehen, Bedeutung erlangen sie erst in Wechselbeziehungen zueinander. "Das ursprüngliche Dreieck von Symbol, Begriff und Objekt von Odgen und Richards geht von einem untrennbaren (wenn auch vermittelten) Zusammenhang von Zeichen und Gegenstand aus, insofern ja gerade der in Beziehung setzende Gedanke ein notwendiges Bindeglied darstellt. Gegenstand und Zeichen beziehen sich nicht 'von alleine' aufeinander. Diese Beziehung wird immer sozial konstruiert und ist damit einer situativen wie historischen Entwicklung unterworfen und bringt diese zum Ausdruck." [SEEGER 1990, 142]. (Zum Unterschied zwischen dem Bedeutungs-dreieck von Odgen und Richards und dem epistemologischen Dreieck vergleiche [STEINBRING 1992]).

Das epistemologische Dreieck ist zum einen als Analysegrundlage für die Rekonstruktion epistemologischer Bedingungen in einzelnen kurzen Unterrichtsausschnitten benutzt worden. Im folgenden soll es die Grundlage dafür sein, ganze Unterrichtsstunden zu analysieren. [vgl. STEINBRING 1990, vgl. BROMME & STEINBRING 1990a].

Analysen, die aus einer epistemologischen Perspektive Unterricht untersuchen, müssen sich des sozialen Kontextes bewußt sein, in dem Interaktionen stattfinden und so neues Wissen und neue Bedeutungen entwickelt und ausgehandelt werden. Unterschiedliche soziale Kontexte können sein: die Lehrer-Schüler-Interaktion in Form kleiner Gruppen oder eines Lehrers mit einem Schüler, Gruppeninteraktion von Schülern untereinander oder aber auch die gesamte unterrichtliche Situation einer Klasse mit einem Lehrer. Je nach Verschiedenartigkeit dieses sozialen Kontextes erhält das interaktiv thematisierte mathematische Wissen einen anderen Status. Da wir uns im folgenden immer auf den sozialen Kontext einer ganzen Schulklass mit ihrem Lehrer beziehen, wird somit das Wissen und seine Entwicklung als abhängig von dieser gesamten Klassensituation betrachtet. Es ist ein in der Klassensituation global konstituiertes, *kollektives Wissen*,

das nicht unbedingt jedem Schüler oder jeder Schülerin individuell zukommt, sondern als das gemeinsam konstituierte Wissen der ganzen Klasse betrachtet werden muß. Das Wissen ist somit soziales Produkt der gesamten Klasse in der Interaktion, Auseinandersetzung, Entwicklung usw. und nicht absolutes oder isoliertes Wissen, was nur einzelne Personen für sich besitzen.

2. Analyseverfahren und graphische Verlaufsdiagramme

Insgesamt liegen 10 analysierte Mathematikstunden (von ca. 80 auf Tonband aufgezeichneten Stunden insgesamt) vor, die von sechs Mathematiklehrern und -lehrerinnen gehalten wurden. Diese Lehrer wurden bei der Durchführung ihres Unterrichts beobachtet, der Unterricht wurde auf Tonband aufgezeichnet und transkribiert. Jede der Unterrichtsstunden aus den Klassen 6 bzw. 7 hatte die elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung zum Gegenstand. Dabei ging es bei den hier analysierten Stunden um Themen wie:

- *Einführung in zweistufige Zufallsexperimente und Baumdiagramme,*
- *Aufgaben zu Glücksrädern (geometrische Wahrscheinlichkeit),*
- *Aufgaben zum Simulieren und Stichprobenziehen (empirische Wahrscheinlichkeit), sowie um*
- *Verbindungen beider Aspekte der Wahrscheinlichkeit in Aufgaben zu Geheimschriften (Buchstabenhäufigkeiten).*

Gerade die elementare Wahrscheinlichkeitstheorie umfaßt einen Stoffbereich des Mathematikcurriculums, in dem es permanent um die Herstellung von Beziehungen zwischen einfachen *mathematischen Modellierungen* und *experimentellen Kontexten* geht. Hier ist der Lernende tatsächlich immer wieder gefordert, sich darüber Klarheit zu verschaffen, wie der Bezug zwischen dem Problem, also dem Sachkontext, und einer möglichen Modellierung aussieht. Auch gibt es teilweise innerhalb einer Stunde Modifikationen und Neuinterpretationen in dieser Beziehung zwischen symbolischer und gegenständlicher Ebene, wenn zum einen bestimmte Zufallsgeräte einmal als empirische Objekte der Untersuchung, zum anderen aber als vorgestellte ideale Modelle zur Beschreibung anderer Sachverhalte benutzt werden.

Die vorliegenden 10 transkribierten Unterrichtsstunden wurden folgendem Analyseverfahren [vgl. hierzu auch BROMME & STEINBRING 1990a, 1990b] unterzogen: Entsprechend dem epistemologischen Dreieck von *Objekt*, *Symbol* und *Begriff* wurden die Äußerungen von Lehrerin und SchülerInnen diesen drei Ebenen folgendermaßen zugeordnet:

- Äußerungen, in denen sich nur Hinweise, Beschreibungen, Merkmale usw. aus der Sachsituation fanden, wurden der *Objektebene* zugeordnet.

- Solche Äußerungen, die ausschließlich Bezüge zur Symbolebene beinhalteten (Aspekte der zu modellierenden Struktur usw.), wurden der *Symbolebene* zugeordnet.
- Die Ebene des Begriffs, wie sie im epistemologischen Dreieck gekennzeichnet ist, läßt sich in der unterrichtlichen Interaktion nicht direkt beobachten. Hier wurde für die Kodierung folgendermaßen verfahren. Solche Äußerungen von Lehrer und Schülern, in denen sich gleichzeitig Aspekte der Symbol- und der Objektebene fanden, also Bezüge zu Sachsituationen und Modellierungen enthielten, wurden auf der *Beziehungsebene* bzw. der *Relationsebene* kodiert.

In einer 4. Kategorie wurden nicht-zuordnenbare Äußerungen von LehrerIn und SchülerInnen aufgenommen. Sie wurden als unbestimmte Äußerungen kodiert. Bei diesen Äußerungen handelt es sich um sachbezogene Beiträge von Lehrern und SchülerInnen, die sich jedoch nicht einer der drei Ebenen explizit zuordnen lassen. Zum Beispiel äußern Lehrer häufig allgemeine Orientierungen im Hinblick auf die zu bearbeitende Situation, ohne jedoch direkt Bezug auf Kontext oder Symbolstruktur zu nehmen. Äußerungen sind z.B.: "Wie haben wir das denn in der letzten Stunde gemacht?" Oder: "Überlegt doch einmal, wie wir sowas bei der Bruchrechnung schon gemacht haben!"

Diese vier Kategorien, *Objektebene*, *Relationsebene*, *Symbolebene* und *unbestimmte Ebene*, wurden weiter unterteilt in die Differenzierung: *Lehrereleräuterungen*, *Lehrerfrage* und *Schüleraussage*, so daß man zu insgesamt 12 Unterscheidungen für die geleisteten Beiträge in der Unterrichtsinteraktion kommt. Wichtig ist anzumerken, daß in die Kodierung nur die tatsächlichen, fachinhaltlichen Beiträge von LehrerIn und SchülerInnen einbezogen worden sind; Äußerungen, die disziplinäre Probleme, organisatorische Fragen, Ermahnungen usw. zum Inhalt hatten, wurden außer acht gelassen.

Die Grundlage der Kodierung gemäß dieser vier Kategorien war eine didaktisch-epistemologische Aufgabenanalyse der Unterrichtsstunden anhand der fertigen Unterrichtstranskripte. Diese Analyse führt im nachhinein zu einer Bewertung und Festlegung von Objektebene und Symbolebene in bezug auf den in der jeweiligen Stunde bzw. in dem Unterrichtsausschnitt interaktiv ausgehandelte und vereinbarte "Rollenverteilung" für die symbolischen bzw. strukturellen Elemente und für die gegenständlichen, kontextbezogenen Aspekte des Wissens. Eine solche nachträgliche didaktische Analyse der Unterrichtsstunde ist deshalb wichtig, weil erst von der gesamten Stunde her zu bewerten ist, in welchen Abschnitten der Stunde welche Konstellation von Gegenstands- und Symbolebene sich herausgebildet hat bzw. welche Veränderungen und Neuordnungen sich in der Interaktion für diese Beziehung zwischen symbolischer und gegenständlicher Ebene bezüglich der Probleme und der Entwicklung des Wissens ergeben haben.

"The analysis of teaching episodes uses a schema of structurization for subdividing the course of teaching into different *phases*. A phase is characterized by the *opening*: the teacher poses a question or a problem to be tackled by the students, and by the *closing*: students seem to be able to answer the question and sometimes the teacher reconfirms this by repeating the answer in his 'corrected' manner. Clearly, the course of a whole mathematics lesson normally cannot be structurized as a sequence of phases one following directly the other. The phase-structure is more complex. When treating a problem, a new question may arise causing the opening of a *sub-phase* within the present phase. The closing of the old phase normally has to wait for the closing of the sub-phase or even of other sub-sub-phases. In this way the structurization of transcribed mathematics lessons by means of *phases* leads to a hierarchical and linear pattern: On the micro level, there are phases following in a linear way one another, and on the macro level there are overlapping phases containing a complex of sub-phases. The interaction in the classroom changes from macro to micro levels and back." [STEINBRING1991, 74, für die Phasenstrukturierung einer ganzen Unterrichtsstunde siehe STEINBRING 1990].

Auf der Grundlage der didaktischen Analyse wurden dann von externen Kodierern die Aussagen der SchülerInnen und des Lehrers entsprechend den vorgegebenen Kategorien kodiert; die Kodierlisten wurden in ein Computerprogramm eingegeben, das diese Kategorien in verschiedenartige graphische Ablaufdiagramme überträgt. Die folgende Graphik zeigt ein solches Ablaufdiagramm für eine der beobachteten Unterrichtsstunden. Der Unterricht beginnt links an der x- oder Zeitachse, er endet rechts mit der letzten Äußerung. Auf der x-Achse sind Zeitintervalle von je zwei Minuten eingetragen. Die y-Achse zeigt die verschiedenen Bedeutungsebenen: Objekt-, Relations-, Symbolebene und unbestimmte Ebene.

Dem Diagramm für die gesamte Stunde entnimmt man auch eine lange Phase von Einzelgruppenarbeit der SchülerInnen, die sich vom 8. bis zum 15. Zeitintervall hinzieht. In dem folgenden Ausschnitt dieses graphischen Verlaufsdiagramms wird deutlich, wie die einzelnen Muster zu lesen sind.

Anhand einer beispielhaft vorgestellten Analyse eines kurzen Unterrichtsausschnittes soll im folgenden versucht werden, die einzelnen Schritte des eben allgemein dargestellten Verfahrens konkret zu erläutern. In der Unterrichtsstunde, aus der die Beispiel-Episode stammt, haben die Schüler folgende Aufgabe von der Lehrerin zur Bearbeitung erhalten, mit ihr zunächst besprochen, dann in einer Stillarbeitsphase mit einem Partner bearbeitet und schließlich gemeinsam mit der ganzen Klasse rückblickend besprochen.

Aufgabe

Bruno hat immer Schwierigkeiten, sich zu entscheiden, ob er Fußball spielen, schwimmen oder auf den Spielplatz gehen soll. Da kommt ihm die Idee, seine Entscheidung ganz dem Zufall zu überlassen.

Oben siehst du die Straßen, die von Brunos Haus ausgehen. Bruno wirft nun an jeder Kreuzung eine Münze. Erscheint Zahl, nimmt er die linke Straße, sonst die rechte. Nach einigen Monaten fällt Bruno auf, daß er viel öfter Fußball spielt als schwimmt.

- a) Führe Brunos Entscheidungen 50mal durch und schreibe auf, wie oft er schwimmt, Fußball spielt oder auf dem Spielplatz ist.
Warum spielt Bruno so häufig Fußball?
- b) Bruno muß zwei Münzwürfe durchführen, um an einem Ort anzukommen.
Bei welchem Wurf gelangt er ins Schwimmbad?
Welche anderen Würfe sind möglich, und wohin gelangt Bruno bei diesen Würfen?

Die didaktische Analyse der Unterrichtsstunde und der Episode führte zu der folgenden Klassifizierung von "Elementen", die in der Interaktion zwischen Lehrerin und Schülern der Objekt- oder der Symbol-Ebene zugeordnet wurden:

Objekt-Ebene:

Fußballplatz, Spielplatz, Schwimmbad, Straße, Kreuzung, Haus, Münze, Kopf, Zahl (auf der Münze), links, rechts, oben, unten

Symbol-Ebene:

Zuordnung: Zahl $\rightarrow$ linke Straße, L
Kopf $\rightarrow$ rechte Straße, R

Würfel (als "Modell" für die Münze)

Baumdiagramm (mit eigener Beschriftung) als Modell des Straßendiagramms, Zahlen (Anzahlen) in der Strichliste, Häufigkeiten, relative Häufigkeiten, Möglichkeiten, Wahrscheinlichkeiten

In dem folgenden Unterrichtsausschnitt sollen die Schüler nun den Zufallsgenerator "Münze", der in der Aufgabenstellung benutzt wurde, durch den Würfel ersetzen. In den ersten Lösungsvorschlägen versucht der Schüler Michael die verschiedenen Spielplätze durch Zahlkombinationen auf dem Würfel zu kodieren. Schließlich gelingt es im Verlauf des Unterrichtsgesprächs, die "Entscheidungen" für die Wahl der linken oder der rechten Straße mit den Zahlen des Würfels zu kodieren (1,2,3 für rechts und 4,5,6 für links). Die Zahlen (und ihre Kombinationen) auf dem Würfel dienen in dieser Phase dazu, Elemente der Objekt-Ebene zu kodieren oder zu symbolisieren. Das Problem besteht hier in einer sachgerechten Modellierung von Elementen der Objektebene: Die vorgeschlagene Relation zwischen Zahlen und den Spielplätzen ($\{1,2\} \leftrightarrow$ Fußballplatz, $\{3,4\} \leftrightarrow$ Spielplatz, $\{5,6\} \leftrightarrow$ Schwimmbad) wird der Aufgabenstellung nicht gerecht, sie wird später korrekt als eine Relation zwischen den Zahlen und den Links- Rechts-Entscheidungen hergestellt (wie es der Schüler Volker schon in Äußerung 168 vorschlägt). Die Münze, mit "Kopf" und "Zahl" und weiteren konkreten Aspekten des Spielens etc. gehört zur Objekt-Ebene, der Würfel wird hier als Modell benutzt und gehört mit den Augen-Zahlen zur Symbol-Ebene.

L. 157:	Wollen wir nochmal eben überlegen, wie war das, wenn wir nen Würfel hatten, wie hätten wir die ganze Sache anstelle mit einer Münze auch mit einem Würfel machen können? Michael?	LFR Münze <--> Würfel
S. 158:	1, 2, 3 für eh – Ne, doch nicht! 1, 2 für Fußball, 3, 4 für Schwimmen, 5, 6 für Spielen.	SAR 1,2 <--> Fußball
L. 159:	Michael, ich wolft mich auch gerne wieder entscheiden an diesen Stellen.	LFO entscheiden
S. 160:	Ja, Sie können sich doch entscheiden. Haha!	NKÄ
L. 161:	Wenn wir das so machen, wie der Michael gerade gesagt hat, 1, 2 für Fußball, 3, 4 für Spielplatz, 5, 6 für das Schwimmbad.	LER 1,2 <--> Fußball
S. 162:	Andere Reihenfolge!	NKÄ
L. 163:	Volker?	NKÄ
S. 164:	Dann sind manche Zahlen nicht belegt, also öfter kommt ja wohl 1,2 als 1,1, z.B. also, nee, also, wenn jetzt 1,1 kommt.	SAS Zahlen
L. 165:	Nein, so hat er das nicht gemeint, er hat gemeint..	NKÄ
S. 166:	Aber wenn jetzt 1,1 kommt, dann kann er ja gar nicht weitergehen.	SAR 1,1 <--> Bruno kann gehen
L. 167:	Michael hat gesagt, wenn ich eine 1 würfele oder eine 2 würfele, dann soll ich zum Fußballplatz gehen, wenn ich eine 3 oder eine 4 würfele, dann gehe ich zum Spielplatz, wenn ich eine 5 oder eine 6 würfele, gehe ich zum Schwimmbad. Warum? Volker!	LFR 1,2 <--> Fußball
S. 168:	Da müßte man 3 von den verschiedenen Zahlen doch wieder für rechts oder links nehmen.	SAR Zahlen <--> rechts, links
S. 169:	Kopf oder Zahl!	SAO Kopf, Zahl
L. 170:	Ja, aber was hinkt denn bei Michaels Sache? Was ist nicht in Ordnung? Uwe?	LFU
S. 171:	Man könnte ja jetzt dann sich wieder bei zwei Fußballplätzen was aussuchen.	SAO Fußballplätze
S. 172.1:	Wenn nur 2 Zahlen für das, für die, die für Fußball und so, wenn das nur dafür verteilt ist, dann gibts ja für die Kreuzungen nichts mehr.	SAR Kreuzung <--> 2 Zahlen

S. 172.2: Und außerdem, wenn jetzt nur Zahlen für die Kreuzung wären, es käme ne andere Zahl, dann wär er ja immer noch auf der gleichen Stelle.	SAR Kreuzung <--> Zahlen
L. 173.1: Aha, wir hatten gerade überlegt, wenn wir uns vorgestellt hätten, wir wären 100mal angekommen, dann kämen wir 50mal am Fußballplatz an, 25mal am Spielplatz, 25mal am Schwimmbad.	LFR Schätzen <--> Fußball etc.
L. 173.2: Der Michael hat gesagt, für 1,2 komme ich am Fußballplatz an, für 3,4 komme ich da an, für 5,6 komme ich da an.	LER 1,2 <--> Fußball

Rechts neben den Äußerungen von Lehrerin und Schülern finden sich die Kodierungen zusammen mit den jeweiligen "Elementen" der beiden Ebenen (Objekt- und Symbol-Ebene). Die Abkürzungen bedeuten folgendes:

an der ersten Stelle: L $\triangleq$ Lehrer, S $\triangleq$ Schüler,

an der zweiten Stelle: F $\triangleq$ Frage, E $\triangleq$ Erläuterung, A $\triangleq$ Äußerung

an der dritten Stelle: O $\triangleq$ Objekt, R $\triangleq$ Relation, S $\triangleq$ Symbol, U $\triangleq$ Unbestimmt

NKÄ ist eine nicht zu kodierende Äußerung, z.b. zu kurz, abgebrochene Äußerung, Name wird aufgerufen, etc.

(Für weitere Informationen siehe BROMME & STEINBRING 1990a, S.210 ff).

Der graphische Ausschnitt für diese kurze Episode sieht folgendermaßen aus:

Zwischen dem 17. und 18. Intervall finden sich die kodierten Äußerungen von Nr. 157 bis Nr. 173.2 aus der Beispiel-Episode. Man kann hier eine Konzentration auf die Relations-Ebene feststellen; inhaltlich geht es ja gerade um die Beziehung zwischen dem Zufallsgenerator "Münze" und der Modellierung durch einen "idealen" Würfel.

Ein detailliertes und umfassendes graphisches Verlaufsdiagramm für den Unterricht, das die Unterscheidung in alle möglichen Typen von Äußerungen berücksichtigt, ist eher für lokale oder ausschnittsweise Analysen geeignet. Hierbei geht es darum zu sehen, wie (auch im Vergleich zu dem behandelten Unterrichtsstoff) die wechselweisen Interaktionen von Äußerungen der SchülerInnen und der Lehrerin erfolgen und so Veränderungen in der Struktur des Musters hervorbringen. In dieser komplexen und umfassenden Form sind diese Diagramme für den Ungeübten natürlich zunächst schwer zu lesen und zu interpretieren. Sie enthalten viele Detail-Informationen und lenken vielleicht in der visuellen Wahrnehmung von globalen Mustern ab. Sie dienen eher der Detail-Analyse bzw. der Analyse von Bedingungen in den zeitlichen Abläufen und sind nicht so sehr geeignet, auf globale Strukturen und Zusammenhänge aufmerksam zu machen.

Die folgenden Ausführungen in diesem Beitrag beschränken sich auf eine globale Darstellung und Analyse des Wissens in diesen Unterrichtsstunden. Dabei wird nicht durch verschiedenartig gemusterte Balken in einem Diagramm zwischen den einzelnen Äußerungen von LehrerIn und SchülerInnen differenziert; sie werden unterschiedslos als (kollektive) wissensbezogene Beiträge zum Unterrichtsinhalt aufgefaßt. Auch soll hier von der unbestimmten Ebene abgesehen werden, auf der Sachbeiträge ohne expliziten Bezug zu den drei Bedeutungsebenen auftreten. Zu weiteren Details der Datenerhebung, der Auswahl der LehrerInnen und zu Problemen des schulmathematischen Inhalts in der Interaktion siehe Bromme & Steinbring 1990a; hier sollen auf dieser Grundlage vornehmlich die Verlaufsdiagramme zur *epistemologisch-didaktischen* Analyse der Entwicklung kollektiven mathematischen Wissens im Unterricht eingesetzt werden.

3. Globale epistemologische Strukturen mathematischer Unterrichtsstunden - Grundmuster

Für die Entwicklung einer visuellen Perspektive und zum Eingewöhnen in das Lesen und Interpretieren der Diagramme und Verlaufsmuster werden typische Stunden mit kontrastierenden Strukturen beispielhaft vorgestellt. Dabei handelt es sich um die zweite analysierte Stunde der Lehrerin A (A2), um die analysierte Stunde der Lehrerin F (F1),

sowie um die erste analysierte Stunde Lehrers D (D1) und die zweite analysierte Stunde der Lehrerin B (B2). (vgl. die Graphiken auf der nächsten Doppelseite!)

Die graphischen Diagramme für jede der vier vorgestellten Stunden zeigen am Unterrichtsbeginn eine Konzentration der Beiträge auf der Objekt-Ebene, manchmal sehr deutlich, manchmal weniger deutlich. Die Analysen von Episoden und ganzen Unterrichtsstunden [vgl. BROMME & STEINBRING 1990a] verdeutlichen, daß ein interaktives Ziel darin besteht, im Verlaufe der unterrichtlichen Arbeit möglichst effektiv und problemlos die Symbol-Ebene zu erreichen.

In dem Spannungsfeld zwischen der anfänglichen Konzentration der Beiträge auf der Objekt-Ebene und der angestrebten Erreichung der Symbol-Ebene bilden sich für verschiedene Unterrichtsstunden ganz unterschiedliche graphische Muster für die Repräsentation der mathematischen Bedeutungsentwicklung heraus. Die vier Diagramme zeigen prägnant zwei Grundtypen in ihren Strukturen: Es gibt Unterrichtsstunden, in denen beobachtbar ist, daß ein gleichzeitiges, paralleles oder simultanes Arbeiten auf den verschiedenen Bedeutungsebenen stattfindet. In diesen Unterrichtsstunden verteilen sich Äußerungen von LehrerIn oder SchülerInnen relativ gleichmäßig über alle Bedeutungsebenen hinweg. Die Stunden A2 und F1 sind hierfür ein gutes Beispiel.

Demgegenüber gibt es einen zweiten Grundtyp in den Verlaufsmustern. Man beobachtet hier, daß die einzelnen Bedeutungsebenen separat, getrennt bzw. nur blockweise und für sich allein genommen benutzt werden. Man findet ein Vorgehen, bei dem zunächst auf einer der Bedeutungsebenen für sich allein verhandelt wird um dann zu einer anderen Bedeutungsebene überzugehen. Beispiele sind hierfür die Stunden D1 und B2.

Bezogen auf diese Unterscheidung in die zwei Grundmuster in den graphischen Verlaufsdiagrammen ist zu anzumerken, daß parallel zu dieser Unterscheidung die Ebene der Beziehung, die Relationsebene, jeweils unterschiedlich in einzelnen Stunden genutzt wird. In den Stunden, wo man gleichzeitig paralleles Arbeiten auf verschiedenen Bedeutungsebenen feststellt, ist häufig auch eine weitaus umfangreichere Nutzung der Beziehungsebene sichtbar. Demgegenüber finden sich bei den Stunden, wo eher blockweise und separat die einzelnen Ebenen frequentiert werden, auch weniger explizit sichtbare Nutzungen der Beziehungsebene. Ihre Berücksichtigung wird im Dialog und der Interaktion des Unterrichts eher vernachlässigt.

Diese vier vorgestellten Unterrichtsstunden stellen exemplarisch "reine" Beispiele für diese Grundmuster dar. Häufig sind in Unterrichtsstunden Mischformen anzutreffen, bei denen sich einige Abschnitte des Unterrichts als Formen des gleichzeitigen und parallelen Nutzens der Bedeutungsebene interpretieren lassen und andere Abschnitte in die-

ser Stunde sind von einem separaten und getrennten Arbeiten auf den verschiedenen Ebenen gekennzeichnet.

Graphisches Verlaufsdigramm der Lehrerin A (zweite analysierte Stunde); hier: Gesamtdarstellung ohne "unbestimmte Ebene" und ohne Differenzierung der Beiträge nach Sprecher.

Graphisches Verlaufsdigramm der Lehrerin F (einzige analysierte Stunde); hier: Gesamtdarstellung ohne "unbestimmte Ebene" und ohne Differenzierung der Beiträge nach Sprecher.

Graphisches Verlaufsdigramm des Lehrers D (erste analysierte Stunde); hier: Gesamtdarstellung ohne "unbestimmte Ebene" und ohne Differenzierung der Beiträge nach Sprecher.

Graphisches Verlaufsdigramm der Lehrerin B (zweite analysierte Stunde); hier: Gesamtdarstellung ohne "unbestimmte Ebene" und ohne Differenzierung der Beiträge nach Sprecher.

Graphisches Verlaufsdigramm der Lehrerin A (zweite analysierte Stunde); hier: geglättete Darstellung ohne "unbestimmte Ebene" und ohne Differenzierung der Beiträge nach Sprecher.

Graphisches Verlaufsdigramm der Lehrerin F (einzige analysierte Stunde); hier: geglättete Darstellung ohne "unbestimmte Ebene" und ohne Differenzierung der Beiträge nach Sprecher.

Graphisches Verlaufsdigramm des Lehrers D (erste analysierte Stunde); hier: geglättete Darstellung ohne "unbestimmte Ebene" und ohne Differenzierung der Beiträge nach Sprecher.

Graphisches Verlaufsdigramm der Lehrerin B (zweite analysierte Stunde); hier: geglättete Darstellung ohne "unbestimmte Ebene" und ohne Differenzierung der Beiträge nach Sprecher.

Die Unterrichtsstunde, in denen sich die gesamte Interaktion fast ausschließlich auf der Symbolebene befindet (D1), stellt in den Augen vieler LehrerInnen eine ideale Mathematikstunde dar. Hier wird sehr schnell nach Bearbeitung und Diskussion der Aufgabenstellung auf die Symbolebene übergegangen und hier konsequent weitergearbeitet. D.h. im Rahmen mathematischer Rechnungen und Modellierungen werden die Lösungen für die Aufgaben ermittelt. Ein solches Verlaufsmuster ist das implizite Ziel vieler Unterrichtsstunden in Mathematik. Es wird häufig von LehrerIn und auch von SchülerInnen interaktiv angezielt. So ist auch die zweite Stunde (B2), in der kaum gleichzeitig oder simultan verschiedene Ebenen genutzt werden, von einer solchen Intention gekennzeichnet. Hier wird immer wieder versucht, möglichst schnell und problemlos die Ebene der Symbole und Zeichen zu erreichen. Dies scheitert jedoch mehrmals im Unterrichtsverlauf, so daß auf die Objektebene zurückgegangen werden muß. In dieser Stunde zeigt sich das Wellenmuster eines "Auf-und-Ab" zwischen der Ebene des Objekts und des Symbols, ohne dabei die Ebene der Beziehungen explizit und wirkungsvoll zu nutzen. (für eine inhaltsbezogene Analyse dieser Stunde siehe BROMME & STEINBRING 1990a).

Die zwei Grundtypen der unterrichtlichen Interaktion mit dem sich zeigenden epistemologischen Muster läßt sich durch folgendes Verfahren noch deutlicher herausarbeiten. Die einzelnen Aussagen werden für dieses Verfahren nach folgendem Schema "geglättet": 3 Äußerungen, die unmittelbar aufeinander folgen, werden nach einem Algorithmus in der Weise "gemittelt", daß bestimmte lokale Zufälligkeiten ausgeglichen werden. Mit diesem Verfahren erhält man eine prägnantere graphische Struktur der jeweiligen Unterrichtsstunde. Zudem berücksichtigt das Glättungsverfahren, daß auch Äußerungen verschiedener Beteiligter, von denen die eine Äußerung auf der Symbol- und die andere auf der Objektebene liegt, wegen ihrer zeitlich nahen Zusammengehörigkeit zu einer neuen Äußerung, die auf der Relationsebene liegt, geglättet werden. Damit hat man ein Verfahren, das zum einen deutlicher die Struktur und den Typ der Unterrichtsinteraktion widerspiegelt, zum anderen aber auch bestimmte künstliche Unterteilungen in einzelne semantischen Äußerungen relativiert und verwischt. Bei mehrmaligem Glätten ergibt sich für Stunden, in denen gleichzeitig und parallel auf verschiedenen Ebenen gearbeitet wird, daß sich nun überproportional viele Beiträge auf der Relationsebene konzentrieren. (Vgl. hierzu das Beispiel einer Unterrichtsstunde des Lehrers E, die im Abschnitt 4 genauer analysiert wird.) Demgegenüber zeigt sich für das andere Grundmuster, daß sich nach dem Glätten die Struktur auf die Ränder verschiebt, d.h. vornehmlich Objekt- und Symbolebene genutzt werden. Dies ist an den hier vorgestellten 4 Unterrichtsstunden sichtbar, deren geglättete Verlaufsdiagramme auf der vorhergehenden Doppelseite dargestellt werden.

4. Wie unterscheiden sich die Verlaufsdiagramme für die Beiträge des Lehrers von denen der SchülerInnen?

Im Rahmen einer globalen epistemologischen Analyse einer Unterrichtsstunde ist die Differenzierung nach Lehrer- und Schüleräußerungen interessant. Wie unterscheiden sich gemäß unserer Frage nach den zwei Grundmustern der Unterrichtsinteraktion, jeweils die durch die Beiträge des Lehrers erzeugten Strukturen und von den durch die Beiträge der SchülerInnen erzeugten Strukturen? Zunächst einmal ist zu vermuten und in der Tat auch zutreffend, daß es für "extreme" Interaktionsmuster, bei denen sich die Äußerungen für längere Zeiten auf einer Ebene konzentrieren, keine Unterschiede in der Lehrer- und Schülerstruktur gibt. So wird in der Struktur der Stunde D1, in der die Situation völlig auf der Symbolebene verbleibt, auch in der Unterscheidung zwischen Lehrer und SchülerInnen kaum ein Unterschied feststellbar sein. Hier wird sichtbar, daß die SchülerInnen und parallel dazu der Lehrer hauptsächlich auf der Symbolebene verbleiben. (vergleiche die beiden folgenden Diagramme).

Graphisches Verlaufsdiagramm des Lehrers D (erste analysierte Stunde); hier: Darstellung der "Lehrerstruktur" ohne "unbestimmte Ebene" und ohne Differenzierung der Beiträge nach Sprecher.

Graphisches Verlaufsdigramm des Lehrers D (erste analysierte Stunde); hier: Darstellung der "SchülerInnenstruktur" ohne "unbestimmte Ebene" und ohne Differenzierung der Beiträge nach Sprecher.

Schon anders verhält es sich bei der graphischen Struktur der Stunde B2 mit dem Verlauf eines "Auf und Ab". Hier bestimmen die SchülerInnen die Struktur der Interaktion, die deutlich von der graphischen Verlaufsstruktur der Lehrerin abweicht.

Graphisches Verlaufsdigramm der Lehrerin B (zweite analysierte Stunde); hier: Darstellung der "Lehrerstruktur" ohne "unbestimmte Ebene" und ohne Differenzierung der Beiträge nach Sprecher.

Graphisches Verlaufsdiagramm der Lehrerin B (zweite analysierte Stunde); hier: Darstellung der "SchülerInnenstruktur" ohne "unbestimmte Ebene" und ohne Differenzierung der Beiträge nach Sprecher.

Wie sieht dies bei den Unterrichtsstunden aus, in denen sich die Interaktion tendenziell auf allen Ebenen gleichzeitig abspielt? Hier kann man feststellen, insbesondere für die erste Stunde (A2), daß wiederum die graphische Struktur der Beiträge der Lehrerin und der SchülerInnen in ihren Mustern ähnlich zueinander sind. Die SchülerInnenbeiträge befinden sich auf verschiedenen Ebenen der Bedeutung. Für die zweite Stunde ist dies nicht so ganz deutlich (F1), insbesondere nicht im ersten Abschnitt, während ansatzweise der zweite Abschnitt eine über alle Ebenen verteilte Struktur bei den Schülern zeigt. (siehe die folgenden Seiten).

Die Unterscheidung zwischen Lehrer- und Schüleräußerungen zeigt, daß neben der Frage, ob die Strukturen zwischen Lehrer und SchülerInnen übereinstimmen oder welche Struktur der Gesamtbeiträge dominiert, eine neue Fragestellung Bedeutung erlangt: Gibt es Stunden, in denen sich die Schülerbeiträge (tendenziell) über die drei hier betrachteten Bedeutungsebenen verteilen oder ist die Struktur der Schülerbeiträge grundsätzlich von der Art, daß sie sich vornehmlich für bestimmte Abschnitte immer nur auf eine der Bedeutungsebenen konzentrieren?

A2 L

Graphisches Verlaufsdiagramm der Lehrerin A (zweite analysierte Stunde); hier: Darstellung der "Lehrerstruktur" ohne "unbestimmte Ebene" und ohne Differenzierung der Beiträge nach Sprecher.

A2 S

Graphisches Verlaufsdiagramm der Lehrerin A (zweite analysierte Stunde); hier: Darstellung der "SchülerInnenstruktur" ohne "unbestimmte Ebene" und ohne Differenzierung der Beiträge nach Sprecher.

Graphisches Verlaufsdigramm der Lehrerin F (einzige analysierte Stunde); hier: Darstellung der "Lehrerstruktur" ohne "unbestimmte Ebene" und ohne Differenzierung der Beiträge nach Sprecher.

Graphisches Verlaufsdigramm der Lehrerin F (einzige analysierte Stunde); hier: Darstellung der "SchülerInnenstruktur" ohne "unbestimmte Ebene" und ohne Differenzierung der Beiträge nach Sprecher.

Es scheint der Fall vorzuherrschen, bei dem insbesondere die Schülerbeiträge (noch stärker als die Lehrerbeiträge) sich nur auf der Objekt- oder nur auf der Symbolebene befinden und dort weiterhin verbleiben, und daß in den Äußerungen der Schüler fast gar nicht die Relationsebene genutzt wird. Ausnahmen hiervon sind Stunden, die schon von ihrer Gesamtstruktur her tendenziell breiter ausgefächert die drei Bedeutungsebenen in der Interaktion gleichzeitig ansprechen.

Im Hinblick auf diese Unterscheidung von Schüler- und Lehreräußerungen ist eine der vorliegenden analysierten Unterrichtsstunden von größerem Interesse. (Lehrer E, einzige analysierte Stunde E1). Betrachtet man den Gesamtverlauf dieser Unterrichtsstunde, so stellt man fest, daß hier ein *Mischtyp* vorliegt.

Graphisches Verlaufsdiagramm des Lehrers E (einzige analysierte Stunde); hier: Gesamtdarstellung ohne "unbestimmte Ebene" und ohne Differenzierung der Beiträge nach Sprecher.

In einer ersten Phase vom Zeit-Intervall 0 bis 6, wird zunächst ausschließlich auf der Symbolebene gearbeitet, während dann eine neue Aufgabe eingeleitet wird. Dies geschieht etwa ab Mitte des 6. Zeit-Intervalls. Nach Einzelarbeit differenziert sich der Verlauf der Interaktion auf die beiden Ebenen Symbol- und Objektebene, um dann in einem letzten Abschnitt, etwa ab Intervall 16, sich mehr oder weniger auf alle drei Ebenen zu verteilen. Wie ist diese Struktur des Unterrichtsverlaufs zu interpretieren? Ein geglätteter Unterrichtsverlauf macht für diese Phase des parallelen Arbeitens auf der Symbol- und Objektebene deutlich, wie hier in der Glättung alle Äußerungen auf die Relationsebene konzentriert werden, d.h., daß hier die kurz aufeinanderfolgenden, abwechselnden Äußerungen von Objekt- und Symbolebene immer als potentielle Relati-

onsebenenbeiträge angesehen werden, da sie zeitlich eng aufeinander folgen und keine abgeschlossene Blöcke für sich bilden.

Graphisches Verlaufsdiagramm des Lehrers E (einzige analysierte Stunde); hier: geglättete Gesamtdarstellung ohne "unbestimmte Ebene" und ohne Differenzierung der Beiträge nach Sprecher.

Wie unterscheiden sich nun, bezogen auf diesen mittleren Unterrichtsabschnitt die Äußerungen von Lehrer und SchülerInnen? Betrachtet man die einzelnen Diagramme separat für sich, so hat man folgenden interessanten Eindruck. Es scheint zu sein, daß Lehrer und SchülerInnen sich während dieses Unterrichtsabschnittes abwechseln, was die Nutzung der Symbol- und Objektebene betrifft. Während der Lehrer (mit wenigen Ausnahmen) laufend Beiträge auf der Objektebene liefert, reagieren die SchülerInnen hierauf mit Äußerungen auf der Symbolebene. Ein Anschauen der Unterrichtstranskripte zeigt, daß hier eine Phase über mehrere Intervalle abläuft, in denen der Lehrer Fragen auf der Aufgabenebene stellt (hier handelt es sich um das Lösen von Geheimschriften mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung), zu denen die SchülerInnen immer auf der Symbolebene antworten. In diesem Unterrichtsabschnitt versucht der Lehrer nicht, die SchülerInnen auf die von ihm intendierte, "richtige" Bedeutungsebene zu bringen, vielmehr beobachtet man hier eine für die Bearbeitung des mathematischen Problems fruchtbare und von den Beteiligten "akzeptierte" Rollenverteilung, bei der zwischen den Äußerungen von Lehrer und SchülerInnen Beziehungen (begriffliche Relationen) ermöglicht werden, was dann im letzten Abschnitt dieses Unterrichts ansatzweise zu einer Verteilung der Äußerungen der SchülerInnen auf verschiedene Ebenen führt. Insbesondere ist zu beachten, daß dann auch die Relationsebene genutzt wird.

5. Schlußfolgerungen

Die hier vorgestellten Diagramme mit ihrer Intention, globale Verlaufsstrukturen und Muster in der Epistemologie des in der Unterrichtsinteraktion konstituierten Wissens graphisch zu visualisieren, gestatten zum einen (wenn man nach einiger Übung gewohnt ist, diese Diagramme zu lesen), sich schnell und effektiv einen Überblick darüber zu verschaffen, wie im Verlaufe dieser Unterrichtsstunde Lehrer und SchülerInnen gemeinsam mit dem Problem umgegangen sind, Beziehungen zwischen den mathematischen Symbolen und ihren Referenzobjekten zu entfalten. Mit diesen Diagrammen ist es möglich, den Unterricht, den man sonst eher vom Inhalt in vertrauter Weise anschaut, in einer *neuen Perspektive* zu sehen. Insofern sind diese graphischen Verlaufsdiagramme nicht einfach bildliche, anschauliche Wiedergaben der Unterrichtsstunden und ihres Ablaufes, sondern sie sind neuartige Darstellungen und Analysemittel, um die Struktur der Bedeutungskonstitution in einer gesamten Unterrichtsstunde in einer anderen Weise analysieren zu können.

Die zwei hier identifizierten Grundtypen von Ablaufmustern in den Diagrammen machen für das mathematische Wissen als interaktiv konstituiertes Produkt einer gesamten Unterrichtsstunde im Vergleich deutlich, was sich auch aus den Detail-Analysen kurzer Unterrichtsepisoden ergibt: Tendenziell ist festzustellen, daß die Bedeutung mathematischen Wissens vornehmlich und intentional auf der Ebene der Symbole angesiedelt wird. Mathematisches Wissen ist dadurch gekennzeichnet, und dies zeigt sich in den meisten der Verlaufsstrukturen, daß mit Symbolen, formalen Operationen usw. umgegangen wird. Demgegenüber gibt es nur wenige Stunden, in denen der Gesamtverlauf sichtbar macht, daß sich die Interaktion parallel und gleichzeitig auf den hier dargestellten drei Bedeutungsebenen vollzieht.

Diese zwei Grundmuster lassen sich auch unterschiedlichen impliziten Auffassungen über Struktur und Ablauf unterrichtlicher Lernprozesse im Rahmen einer Unterrichtsstunde zuordnen. Dem einen Grundmuster, das vornehmlich auf das Erreichen der Symbolebene abzielt, entspricht eine Vorstellung, nach der unterrichtliche Lernprozesse *lineare Ablaufprozesse* sind, die Schritt für Schritt erfolgen. Das andere Grundmuster, in dem sich Interaktionen auf vielen Ebenen gleichzeitig abspielen, basiert auf einer impliziten Auffassung, nach der unterrichtliche Lernprozesse *komplexe, umfassende Geschehnisse* sind.

Diese Interpretation wird durch die didaktische Sachanalyse von verschiedenen strukturierten Unterrichtsstunden unterstützt. Betrachtet man die Unterrichtsstunden mit "konsekutivem" Muster, so findet man auf der Grundlage einer mathematischen Inhaltsanalyse, daß hier das schnelle Erreichen der Symbolebene angestrebt wird, einmal mit Erfolg (d.h. der weitere Unterrichtsverlauf verbleibt auf dieser Ebene), einmal ohne

Erfolg (der weitere Verlauf wechselt immer wieder zur Objektebene unter Beibehaltung der Absicht, schnell die Symbolebene zu erreichen). Anders verhält sich dies bei Unterrichtsstunden mit "parallelem" Muster. Hier werden die Ebenen und auch ihre Beziehungen zueinander gleichzeitig entwickelt; selbst gegen Ende der Unterrichtsstunde gibt es Rückbezüge von der Symbol- zur Objektebene.

Wird über eine längere Zeitspanne nur auf einer einzigen Ebene (der Objekt- oder der Symbolebene) gearbeitet, dann setzen sich Interaktions- und Argumentationsformen durch, die sich stärker an den sozialen Rahmenbedingungen orientieren und so die bekannten kommunikativen Muster (Trichtermuster, Routinen, etc.) produzieren, da sich der offizielle gemeinsame Diskurs "nur" auf die Elemente der einen Ebene bezieht, z.B. nur die mathematischen Zeichen und ihre formalen Operationen thematisiert ohne ihren Bezug zu den Referenzobjekten zu ermöglichen. Dies führt zu den bekannten schrittweisen und linear organisierten Abläufen unterrichtlichen Vorgehens.

Wird jedoch auf den beiden Ebenen (Symbol- und Objektebene) mit ihren Beziehungen mehr oder weniger gleichzeitig gearbeitet, dann bieten sich im Unterrichtsdiskurs neue Möglichkeiten, die intendierten Bedeutungen des mathematischen Wissens eher durch Beziehungen zwischen den Symbolen und ihren Referenzobjekten als durch soziale Erwartungen an die Lehrerintention und durch unterrichtliche Muster zu entwickeln. Ein solcher Unterricht muß jedoch viele Quer- und Rückbezüge zwischen der Symbol- und der Objektebene gestatten und darf nicht die Symbolebene direkt und als einzige ansteuern; Unterricht wird hier zu einem "selbstorganisierten" Prozeß.

Von dieser Perspektive her gesehen dienen die Diagramme auch dazu, Strukturen interaktiver, sich selbst organisierender Prozesse wiederzugeben und nicht einfach nur zeitliche Ablaufdiagramme von quasi deterministischen Ursache-Wirkungsabläufen zu sein. Die Analyse von Stunden zum Mathematikunterrichts mit Hilfe solcher Diagramme zeigt, wie schwierig es ist, sich selbst konstituierende Strukturen und Muster sichtbar zu machen und gleichzeitig, und inhaltliche Analysen der Stunden zeigen wie schwierig es ist, von einer quasi linearen Struktur abzuweichen und zu einer eher komplexen, alle Bedeutungsebenen erfassenden systemischen Struktur des Unterrichts zu gelangen.

Die Detailanalysen von Unterrichtsepisoden sowie längeren Unterrichtsausschnitten machen zudem deutlich, wie wichtig es ist, in der Tendenz eine solche systemisch ganzheitliche Perspektive unterrichtlicher Lehr/Lernprozesse anzuzielen. Auch hier zeigt sich, wie es schon in dem einführenden Unterrichtsausschnitt sichtbar wurde, daß das Lernen, das heißt die Weiterentwicklung des Wissens und das Lösen von Problemen nicht einfach als linearer, automatisierter und schrittweise ablaufender Prozeß angemessen beschrieben werden kann. Beim Übergang von altem zu neuem Wissen, bei Prozessen der Verallgemeinerung oder des Problemlösens ist immer ein komplexes,

ganzheitliches Bedingungsgefüge im Spiel, bei dem nicht von den Ursachen her das Ergebnis deduktiv abgeleitet werden kann, sondern umgekehrt, bei dem erst die Gesamtheit des Endproduktes, sozusagen aus einer *Perspektive des Nachhinein*, eine Lösung des Problems bzw. ein Neuverstehen und Neuorganisieren des Wissens ermöglicht.

Die Unterscheidung zwischen Unterrichtsprozessen als *linear-deduktiv organisierten* Abläufen und als *komplexen, sich selbst organisierenden* Prozessen macht deutlich, warum es für die SchülerInnen, - also den am Unterricht Beteiligten, für die das behandelte Wissen wirklich *neu* ist, - es so schwer ist, von einer linearen, auf einzelne Ebenen der Bedeutung beschränkten Interaktion wegzukommen und Interaktionsformen zu initiieren, bei denen auf den verschiedenen Bedeutungsebenen Beiträge (wenn nicht vom einzelnen Schüler, so doch von der gesamten Klasse) erfolgen. Dies, so hat unsere Analyse gezeigt, ist nur in wenigen der analysierten Stunden möglich geworden. Unterstützend hierfür scheint zu sein, daß in diesen Stunden relativ viel Einzelarbeit geleistet und nicht so vordergründig und direkt auf Ergebnisse im Sinne einer formalen mathematischen Lösung abgezielt wurde. In diesen Stunden konnten die beteiligten LehrerInnen sich stärker "zurückhalten", konnten eher antizipierend den Unterrichtsverlauf gestalten, und so Schwierigkeiten technischer Art usw. teilweise besser umgehen. Diesen LehrerInnen war es eher möglich, den Unterrichtsprozeß nicht direkt auf ein Ziel hin strikt zu organisieren, sondern immer bei dem Versuch der Erreichung dieses Ziels auch den Kontext der Aufgabenstellung, der Bearbeitung und der verschiedenen Schülervorschläge reflexiv und im nachhinein entwickelnd mit in die Lösungsfindung einzubeziehen. Dadurch war es im Unterrichtsverlauf insgesamt, aber auch in Ansätzen für die SchülerInnen im Lernprozeß möglich, auf verschiedenen Ebenen gleichzeitig aktiv zu werden.

Die vorgestellten graphischen Verlaufsdiagramme sind Mittel der epistemologischen Analyse von *kollektiven Prozessen der Entwicklung mathematischen Wissens* im Unterricht. Das in einer Unterrichtsstunde von SchülerInnen und LehrerIn interaktiv entwickelte und konstituierte mathematische Wissen ist als kollektives Wissen eine besondere Form des Wissens, ein "abstraktes", der Klasse und der zeitlichen Situation kollektiv zugehörendes Wissen. In den individuellen Lern- und Lehrprozessen, in kurzen Episoden der Interaktion zwischen LehrerIn und einem oder wenigen SchülerInnen, sieht man sich aus einer epistemologischen Perspektive beim Übergang von altem zu neuem Wissen vor den Gegensatz von *linear, schrittweisen Abläufen* und *komplexen Prozessen der Umstrukturierung* des Wissens gestellt. Dieses Problem, Wissensentwicklung als lineare, kausal determinierte Abfolgen oder als komplexe, sich selbstorganisierende Prozesse zu verstehen und in realen Unterrichtssituationen solche Prozesse zu rekon-

struieren, zu initiieren und zu entwickeln, stellt sich auch für das kollektive Wissen und kollektive Lehr-Lern-Prozesse.

Für die Rekonstruktion dieser Grundtypen stellen die graphischen Verlaufsdiagramme wichtige Analysemittel dar: das eine Grundmuster graphischer Verlaufsdiagramme, bei dem "blockweises" Arbeiten, getrennt nach Bedeutungsebenen zu beobachten ist, korrespondiert für das kollektive Klassen-Wissen einer Auffassung, nach der mathematisches Wissen hierarchisch und linear strukturiert ist. Das andere Muster, bei dem gleichzeitig auf mehreren Bedeutungsebenen parallel gearbeitet wird, unterstützt eher die Auffassung, nach der mathematisches Wissen im Zuge seiner Weiterentwicklung fortwährend umorganisiert wird und dabei auch die Grundbegriffe neuinterpretiert werden müssen.

Dementsprechend sind diese neuartigen Verlaufsdiagramme methodische Mittel, um sich eine differenzierte, konzeptionelle Vorstellung davon zu machen, was *"kollektiv konstituiertes mathematisches Wissen in einer Klasse"* bedeutet und wie sich solche kollektiven Wissensentwicklungsprozesse charakterisieren und klassifizieren lassen. Sie gestatten für die analysierten Stunden Ansatzpunkte möglicher, komplexer Umstrukturierungsprozesse des Wissens bei kollektiven Wissensentwicklungen aufzufinden, oder zeigen, ob Unterrichtsabläufe zu dominant auf einer einzigen Bedeutungsebene im kollektiven Lehr-Lern-Prozeß verbleiben und damit letztlich die Entwicklung des Wissens zu einer linearen und deduktiven Abfolge formieren. Für das kollektive Wissen und seine Entwicklung im Unterrichtsprozeß ist es ohne die hier vorgestellten Diagramme, allein aufgrund von Transkripten, Videoaufzeichnungen oder direkten Unterrichtsbeobachtungen nur schwer möglich, differenzierte Strukturen für die Gesamtheit der Beiträge bzw. den Vergleich von Lehrerstruktur und Schülerstruktur wahrzunehmen, und so durch Analysen und Kontrastierungen Typen für die kollektive Entwicklung des Wissens identifizieren zu können.

Literatur

- BAUERSFELD, H. (1978) Kommunikationsmuster im Mathematikunterricht - Eine Analyse am Beispiel der Handlungsverengung durch Antworterwartung, in: BAUERSFELD H. (Hrsg.), *Fallstudien und Analysen zum Mathematikunterricht*, Schroedel, Hannover, 158-170.
- BROMME R. & STEINBRING H. (1990a), Die epistemologische Struktur mathematischen Wissens im Unterrichtsprozeß. Eine empirische Analyse von vier Unterrichtsstunden in der Sekundarstufe I, in: BROMME, R., SEEGER, F. & STEINBRING, H., *Aufgaben als Anforderungen an Lehrer und Schüler*, Köln, Aulis, 151-229.
- BROMME R. & STEINBRING H. (1990b), Eine graphische Analysetechnik für Unterrichtsverläufe, in: HAUSSMANN, K. & REISS, M. (ed.), *Mathematische Lehr-Lern-Denkprozesse*. Ergebnisse der Pädagogischen Psychologie, Band 9, Göttingen, Hogrefe, 55-81.
- COBB P., YACKEL E. & WOOD T. (1992), A constructivist Alternative to the Representational View of Mind in Mathematics Education, in: *JRME*, 23(1), 2-33.
- JAHNKE H.N. (1978). *Zum Verhältnis von Wissensentwicklung und Begründung in der Mathematik - Beweisen als didaktisches Problem*, Materialien und Studien Band 10, IDM, Bielefeld.
- KRUMMHEUER G. (1991), Argumentations-Formate im Mathematikunterricht, in: MAIER H. & VOIGT J. (Hrsg.), *Interpretative Unterrichtsforschung*, Köln, Aulis, 57-78.
- MAIER H. (1991), Analyse von Schülerverstehen im Unterrichtsgeschehen - Fragestellungen, Verfahren und Beispiele, in: MAIER H. & VOIGT J. (Hrsg.), *Interpretative Unterrichtsforschung*, Köln, Aulis, 117-151
- NETH A. & VOIGT J. (1991), Lebensweltliche Inszenierungen - Die Aushandlung schulmathematischer Bedeutungen an Sachaufgaben, in: MAIER H. & VOIGT J. (Hrsg.), *Interpretative Unterrichtsforschung*, Köln, Aulis, 79-116.
- ODGEN C. K. & RICHARDS F. A. (1923), *The Meaning of Meaning*, Routledge and Kegan, London.
- ROUCHIER A. & STEINBRING H. (1988), The Practice of Teaching and Research in Didactics, (Survey Lecture, ICME-6, Budapest, Hungary, July 27 - August 3, 1988), in: *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 9, no 2, 189-220.
- SEEGER F. (1990), Die Analyse von Interaktion und Wissen im Mathematikunterricht und die Grenzen der Lehrbarkeit, in: *JMD* 11(2), 129-158.
- SEEGER, F. (1991). Interaction and Knowledge in Mathematics Education, in: *Recherche en Didactique des Mathématiques*, vol. 11, no 2/3, 125-166.
- SOLOMON Y. (1989), *The Practice of Mathematics*, Routledge, London.
- STEINBRING H. (1988), Nature du Savoir Mathématique dans la Pratique de l'Enseignant, in: Laborde, C. (Hrsg.), *Actes du Premier Colloque Franco-Allemand, de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble, 307-316.
- STEINBRING H. (1989), Routine and Meaning in the Mathematics Classroom, in: *For the Learning of Mathematics*, 9, 1, 24-33.

- STEINBRING H. (1990), "..... was uns bevorsteht, ist das Gebiet der Extrema." Probleme der Entwicklung mathematischen Wissens im Unterricht - an einer Analysis-Stunde betrachtet, in: *Der Mathematikunterricht*, Heft 3, 4-28.
- STEINBRING H. (1991a), The concept of chance in everyday teaching: Aspects of a social epistemology of mathematical knowledge, in: *Educational Studies in Mathematics*, 22, 503-522
- STEINBRING H. (1991b), Mathematics in teaching processes - The disparity between teacher and student knowledge, in: *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 11 no. 1, 65 - 107.
- STEINBRING H. (1992), Zum Verhältnis von sozialen und begrifflichen Konventionen im alltäglichen Mathematikunterricht, Manuskript, Bielefeld.
- VOIGT J. (1991), Die mikroethnographische Erkundung von Mathematikunterricht - Interpretative Methoden der Interaktionsanalyse, in: MAIER H. & VOIGT J. (Hrsg.), *Interpretative Unterrichtsforschung*, Köln, Aulis, 79-116.

Dr. Heinz Steinbring
Institut für Didaktik der Mathematik
Universität Bielefeld
Postfach 10 01 31

D-4800 Bielefeld 1