Heinz Steinbring

Eine andere Epistemologie der Schulmathematik – Kann der Lehrer von seinen Schülern lernen?

(Transkriptanalyse einer Unterrichtsepisode zum Thema Dezimalzahlen)

In: Mathematica didactica, 14 (1991)
S. 69-99

Eine andere Epistemologie der Schulmathematik - Kann der Lehrer von seinen Schülern lernen? *

(Transkriptanalyse einer Unterrichtsepisode zum Thema Dezimalzahlen)

von
Heinz Steinbring
IDM, Universität Bielefeld

Zusammenfassung

Der Beitrag analysiert die Beziehung zwischen der *epistemologischen Struktur mathematischen Wissens* und *dem Lernen von Mathematik im alltäglichen Unterricht*. Im ersten Abschnitt wird thesenartig eine erkenntnistheoretische Perspektive auf die Schulmathematik entwickelt mit deren Hilfe im zweiten Abschnitt eine transkribierte Unterrichtsepisode analysiert wird. Ein wichtiges Ergebnis ist, daß der Lehrer gemäß seines "fertigen" mathematischen Wissens den Unterrichtsablauf linear und deduktiv zu organisieren versucht; demgegenüber zeigt sich in den Äußerungen der noch "unwissenden" Schüler, daß der Erwerb *neuen* mathematischen Wissens essentiell die Reflektion begrifflicher Beziehungen erfordert und sich nicht in der Aneignung automatisierter Regeln erschöpfen kann.

Abstract

The paper analyzes the relation between the *epistemological structure of mathematical knowledge* and *the learning of mathematics in everyday teaching*. In the first part an epistemological perspective towards school mathematics is developed for supporting the analysis of a transcribed teaching episode in the second part. An important result of this

---

Anschrift des Verfassers: .
Heinz Steinbring, IDM, Universität Bielefeld, Postfach 8640, 4800 Bielefeld 1

* Ausgearbeitete Fassung eines Vortrages, gehalten auf der Netz-Tagung "Sanfter Mathematikunterricht, Eine ANDERE Unterrichtskultur", Papenburg, 24. bis 28. Mai 1990 und auf dem Symposium zur Förderung der wissenschaftlichen Zusammenarbeit in der Mathematikdidaktik in Deutschland, Haus Ohrbeck (bei Osnabrück) und Universität Bielefeld/Institut für Didaktik der Mathematik (IDM) vom 21. bis 28. Oktober 1990

analysis shows that the teacher tries to organize according to his "ready made" mathematical knowledge a linear and deductive course of teaching; on the other hand, the remarks made by the still "unlearned" students indicate that the appropriation of *new* mathematical knowledge essentially requires the reflection of conceptual relations and cannot simply be reduced to the use of automatized rules.

1. Einleitung

Gegenstand dieses Beitrages ist die Beziehung zwischen der *epistemologischen Struktur mathematischen Wissens und dem Lernen von Mathematik im alltäglichen Unterricht*. Im ersten Abschnitt wird dazu thesenartig eine wissenschaftstheoretische Perspektive auf die Schulmathematik entwickelt, unter der dann im zweiten Abschnitt eine Unterrichtsepisode analysiert wird. Diese wissenschaftstheoretische Perspektive ist ein *Mittel der Analyse* für die Unterrichtsinteraktion und dient gleichzeitig dazu, die sozial *konstituierte Epistemologie des mathematischen Wissen in der Interaktion* zu charakterisieren.

Der Beitrag ist in mehrfacher Hinsicht **beispielbezogen**: Als inhaltliches Beispiel werden die "Dezimalzahlen" benutzt und zudem wird auch nur eine Unterrichtsepisode zur Analyse exemplarisch herangezogen.

Desweiteren ist es wichtig zu wissen, daß die folgenden Überlegungen in enger Verbindung zu Kooperationen mit der Schulpraxis zu sehen und zu verstehen sind. Hierbei handelt es sich um das Projekt PROFORMA ("Praxis-orientierte Fortbildung für MathematiklehrerInnen"), in dem MathematiklehrerInnen der Sekundarstufe I aus der Region Bielefeld mit Wissenschaftlern des IDM zusammenarbeiten. Es werden modellmäßig Probleme der mathematischen Unterrichts-Praxis unter didaktischer und epistemologischer Perspektive behandelt. Im Verlaufe einer "unterrichts-praktischen Phase", in der die beteiligten LehrerInnen eine Unterrichtsreihe durchführen, werden Fragen der praktischen Lehrer-Tätigkeit z. B. in Form von Unterrichtstranskripten zusammengestellt und auf gemeinsam organisierten Fortbildungsveranstaltungen diskutiert und analysiert. Beispielhafte Themen waren u. a. bisher: "Routine und Bedeutung mathematischen Wissens im Unterricht" (am Beispiel der Dezimalzahlen) , sowie "Graphische Diagramme als theoretische Relationen" (am Beispiel von Stochastik und Explorativer Daten-Analyse). (siehe Steinbring 1987, Steinbring et al. 1987, Biehler & Steinbring 1990).

Aus diesem Kontext stammen im folgenden die Unterrichts-Beispiele, die Erfahrungen aus der Unterrichts-Praxis und die Lehrer- und Schüler-Meinungen und Sichtweisen zu Mathematik, zu Unterricht, zu Lernen und zu Verstehen.

2. Epistemologische Aspekte des mathematischen Wissens im Unterricht: Gebrauchsanweisungen befolgen oder Beziehungsstrukturen entdecken?

Die Verpflichtung des Mathematikunterrichts, den Schülern Mathematik "beizubringen", bringt in der täglichen Unterrichtspraxis immer wieder die Gefahr mit sich, zugunsten eines scheinbar effektiven und unmittelbaren Lernerfolges für den Schüler davon auszugehen, daß die Schulmathematik ein mehr oder weniger fertiges, deduktiv angeordnetes Wissensgebäude darstellt, in dem es vielfältige Informationen, Probleme, Rechen-Verfahren und Lösungen zu finden gibt. Auf Seiten der Mathematik selbst scheint es für das Lernen keine *prinzipiellen* Hindernisse zu geben, wenn überhaupt, dann sind Probleme beim Wissenserwerb nur beim Schüler zu vermuten, bzw. in der unzureichenden *methodischen Aufbereitung* des Wissens für den Schüler.

Eine verbreitete methodische Maßnahme der Einführung in das neue mathematische Wissen ist die, daß zunächst an einem Einführungsbeispiel die unbekannten Regeln vorgeführt, dann an weiteren Beispielen erprobt und schließlich an Übungsaufgaben und Problemen eintrainiert und gefestigt werden. Hiermit geht die Vorstellung einher, daß man in der Unterrichts-Kommunikation eindeutige und präzise Bezeichnungen mathematischer Sachverhalte benötigt, wie sie ja scheinbar im Rahmen der Auffassung von Schulmathematik als einem fertigen Wissensgebäude problemlos möglich sind.

Gegenüber dieser Auffassung von der Natur des schulmathematischen Wissens haben wissenschaftstheoretische und didaktische Analysen des mathematischen Wissens und mathematischer Begriffe sowohl in historischen Kontexten wie in sozialen Lehr/Lern-Prozessen auf die Notwendigkeit einer völlig anderen Charakterisierung der Natur der Schulmathematik aufmerksam gemacht (Brousseau & Otte 1989, Davis & Hersh 1985, Jahnke 1978, 1990, Lakatos 1979, Otte 1984, Steinbring 1986, 1989). Demnach ist mathematisches Wissen nicht in Form einer vollständigen, konsequenten und expliziten Struktur in Texten oder Büchern vorgegeben. Theoretisches, mathematisches Wissen ist als ein komplexes System zu verstehen, das aus 'lokalen' Elementen und gleichzeitig aus 'globalen' Zusammenhängen besteht. Die Bedeutung des Wissens ergibt sich durch die aktive Konstruktion von Beziehungen in diesem System.

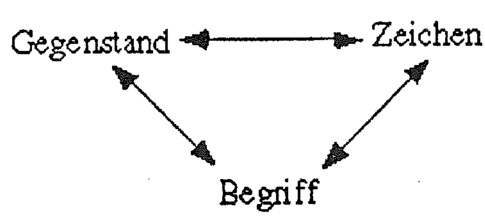
Diese "andere" Auffassung vom theoretischen Charakter des mathematischen Wissens (auch für den Unterricht) zielt insbesondere auf die beiden folgenden Aspekte:

- den *epistemologischen Status des Wissens* selbst und

- auf die *Wechselbeziehung zwischen Wissen und (lernendem) Subjekt.*

Das theoretische Wissen erlangt seine Bedeutung nicht in deduktiver Weise aus vorhergehenden scheinbar elementaren Begriffen, die Bedeutung eines mathematischen Begriffs *steckt letztlich in ihm selbst:* Die epistemologische Struktur verweist auf die Selbst-Referenz der Bedeutung theoretischen Wissens. Die Bedeutung des Wissens muß vom Subjekt aktiv durch die Herstellung von Beziehungen konstruiert werden.

Eine mögliche, elementare Beschreibung mathematischen Wissens als eine *Beziehungsform*, dessen Bedeutung *subjektiv* hergestellt werden muß wird im Diagramm des *epistemologischen Dreiecks* dargestellt:



Die Bedeutung des theoretischen mathematischen Wissens entsteht in der Beziehung zwischen *Zeichen/Modellen* und *Gegenständen/Problembereichen* durch die Tätigkeit des Subjekts. (vgl. Otte 1984, Steinbring 1989). Dieses epistemologische Dreieck stellt eine systemische Grundfigur dar für die Regulierung der Beziehung zwischen der symbolischen Ebene, der Ebene situativer Bezüge sowie der Ebene des Begriffs. Dieses Dreieck ist nicht in der Weise zu verstehen, daß eine der Ecken in diesem Dreieck apriori existiert oder definiert wird und dann eindeutige Definitionen für die anderen liefert, sondern es ist als ein sich wechselweise definierendes *Gleichgewichts-System* zu interpretieren (Steinbring 1990). Diese epistemologische Sichtweise auf das mathematische Wissen wird im folgenden am Beispiel der Dezimalzahlen erläutert.

Die Dezimalbruchrechnung ist ein traditioneller Bereich der Schul-Mathematik, der immer wieder scheinbar problemlos in der Jahrgangsstufe 6 oder 7 durchgenommen wird. Erfahrungen aus Unterrichtsbeobachtungen, aus Analysen von Lehrbüchern und aus empirischen Untersuchungen zur Dezimalbruchrechnung (siehe u. a. Andelfinger, 1982a, 1982b) zeigen, daß dieser Bereich vornehmlich im Sinne von methodischen Verfahren im Unterricht aufgebaut wird. Das Hauptgewicht wird auf die einfachen Regeln für die Beherrschung der elementaren Rechenoperationen mit Dezimalbrüchen gelegt. Dies hat zur Folge, daß man in späteren Jahren bei sehr vielen Schülern einen Mangel an begrifflichem Verständnis zur Bedeutung von Dezimalzahlen feststellt. (Günther 1987, Padberg et al. 1990, Swan 1983).

“Bei der Behandlung der Dezimalzahlen wird .. ein .. Mangel unseres Mathematikunterrichts deutlich: Das Formulieren und Einüben von Rechenverfahren steht ganz im Vordergrund, zu schnell geht man über zum mechanisierten Üben. .... Es muß ... angestrebt werden, daß die Schüler unbedingt ein größeres begriffliches Verständnis und eine bessere Vorstellung von Dezimalzahlen entwickeln.” (Günther 1987, 25).

Für den Begriff der Dezimalzahl lassen sich zwei einander entgegengesetzte “Definitionen” geben. Zum einen eine Definition, die an den Rechen-Regeln mit den Dezimalzahlen orientiert ist, zum anderen eine Definition, die eher versucht, die Bedeutung dieses Begriffes zu reflektieren.

2.1 Definition des Dezimalzahl-Begriffs, die sich auf die Rechen-Regeln stützt:

Dezimalzahlen sind natürliche Zahlen mit Komma.

Für diese Definition muß der Umgang mit dem Komma in den Rechen-Regeln festgelegt werden (vgl. hierzu in Schulbüchern im Abschnitt zur Dezimalbruchrechnung die entsprechenden Merkregeln, Zusammenfassungen oder ergänzenden Darstellungen; Hahn/Dzewas Bd. 6, 1978, Neubert/Wölpert, Bd.6, 1986, Bigalke/Schröder Bd. 6, 1980):

1. Dezimalzahlen werden wie natürliche Zahlen (schriftlich) addiert. Es ist darauf zu achten, daß die Kommata in den Summanden untereinander geschrieben werden. Dann werden die Zahlen schriftlich wie natürliche Zahlen addiert, und das Komma wird an die Stelle in der Summe gesetzt, an der zuvor die Kommata in den Summanden gestanden haben. (Analog wird bei der (schriftlichen) Subtraktion verfahren.)

2. Dezimalzahlen werden wie natürliche Zahlen (schriftlich) multipliziert. Im Produkt wird das Komma an die Stelle von rechts gesetzt, die man aus der Summe der Stellen erhält, an denen sich die Kommata von rechts bei beiden Faktoren befinden.

3. Dezimalzahlen werden wie natürliche Zahlen (schriftlich) dividiert. Zunächst wird beim Dividend und Divisor das Komma gleichzeitig immer um eine Stelle nach rechts verschoben, bis es beim Divisor verschwunden ist. Dann wird schriftlich dividiert. Beim Quotient wird das Komma dann gesetzt, wenn es während der Rechnung heruntergeholt wird.

Natürlich findet man eine solche Regel-gestützte Definition nicht zu Beginn der Unterrichtsreihe oder am Anfang des entsprechenden Abschnittes in Schulbüchern. Natürlich wird die Dezimalzahl in vielen einfachen Größenbereichen wie D-Mark und Pfennig, Kilometer und Meter usw. vorbereitet. Natürlich wird versucht zu erklären, warum es sinnvoll ist, das Komma bei der Multiplikation an die vorgegebene Stelle zu setzen oder bei der Division zunächst einmal das Komma zu verschieben. Natürlich wird diese Regel-gestützte Definition methodisch eingebettet und vorbereitet. Jedoch - und das läßt sich nicht leugnen - der interaktive Lehr-Lernprozeß, der Erwerb dieses Begriffs, der Umgang mit ihm und schließlich die Überprüfung in Tests, ob und was in diesem Stoffbereich gelernt wurde, alles dies zielt sich selbst verstärkend letztlich auf diese Regeln. Und dies liegt nicht einfach an einem Unverständnis oder an einer Uneinsichtigkeit der LehrerInnen in die Notwendigkeit begrifflicher Beziehungen.

Die Prozesse einer zunehmenden Methodisierung, Linearisierung und Algorithmisierung des mathematischen Wissens in der Unterrichtsinteraktion gehen mit der Vorstellung der Lehrerin oder des Lehrers einher, den Schülerinnen und Schülern den Zugang zum Verständnis dieses Wissens möglichst leicht und unmittelbar zu machen. Was kann denn einfacher sein, als zu sagen, die Dezimalzahlen sind im Prinzip schon das, was ihr kennt, nämlich die natürlichen Zahlen mit ihren Rechen-Regeln. Wieviel schwieriger ist es doch, eine vorläufige begriffliche Definition zu geben, diese immer wieder weiter zu entwickeln, abzuändern und neu zu interpretieren.

2.2 Eine mögliche begriffliche Definition des Dezimalzahl-Begriffs:

*Dezimalzahlen sind Maßzahlen mit **variabler Grundeinheit**. Je nach Problemkontext kann diese Grundeinheit 1, 1/10, 1/100 usw. (Potenzen von 10) betragen.*

Diese Definition umfaßt eher eine begriffliche Grundidee, denn eine strikte Regel-gebundene Gebrauchsanweisung. Sie stellt den noch zu entwickelnden Begriff in die Beziehung zu Bedeutungskontexten und Benimmt Rückbezüge auf Aspekte bisheriger Rechentechniken und Begriffsbildungen. Die neue Grundidee besteht in folgendem: Mit diesen Zahlen wird gemessen, jedoch ist nicht apriori festgelegt, wie der Maßstab gewählt werden muß. Wurde bisher, z.B. bei den natürlichen Zahlen, immer mit einer fest vorgegebenen Einheit, nämlich 1, gemessen bzw. gezählt, so wird diese Einheit nun zu einer Variablen. Es kann weiterhin die Einheit 1, aber es können auch andere Einheiten wie 1/10, 1/100 usw. gewählt werden. Diese Offenheit in der Definition beinhaltet eine qualitativ neue Beziehung und hat zur Folge, daß dieser Begriff sich nicht in einer formalen Definition erschöpft, sondern sein Verständnis sich erst aus einer relativ komplexen Bezugsstruktur zu Sachkontexten oder Bedeutungssituationen ergeben kann.

Das begriffliche Merkmal *Maßzahl mit variabler Meßeinheit* weist darauf hin, daß dieser Begriff nur nach und nach im Prozeß von Entwicklungen und Verallgemeinerungen verstanden werden kann. Die Definition nimmt auf bekannte Sachbereiche, wie Längen, Volumina, Inhalte, Gewichte, Geldbeträge usw. Bezug. Neben diesen elementaren praktischen Meßkontexten eröffnen sich auch Beziehungen zu den verschiedenen Aspekten des Zahlbegriffs: sei es zu den natürlichen Zahlen, sei es zu den Brüchen oder sei es zu den reellen Zahlen. Die Grundidee *Maßzahl mit variabler Grundeinheit* (bezogen auf Zehnerbrüche) stellt die Dezimalzahlen in den Schnittpunkt einfacher Anwendungskontexte mit der Zahlbegriffsentwicklungslinie (vgl. hierzu Steinbring et al. 1987).

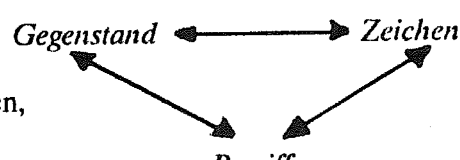
Auf die Dezimalzahlen läßt sich das epistemologische Dreieck folgendermaßen anwenden. Auf der **symbolischen Ebene** sind Dezimalzahlen Ziffern mit Kommaschreibweise, die in zum Teil konventioneller Weise diese spezifische Darstellungsform erhalten. Auf der **Ebene des Objekts**, welche unterschiedliche situative Kontexte, Bezüge, Anwendungsbereiche usw. umfaßt, finden sich je nach Entwicklungsstufe dieses Begriffes die bekannten Sachbereiche elementarer Größen, kompliziertere Anwendungsbezüge, aber auch schon entwickelte oder später zu entwickelnde Bereiche, in denen numerische Beziehungen von Zahlen dargestellt sind.

zum Beispiel:

Anwendungskontexte:
elementare Sachbereiche,
empirische Meßsituationen,

Ziffern mit
Komma-Schreibweise
und Rechen-Regeln

Zahlbereiche:
Natürliche Zahlen,
Brüche, rationale Zahlen,
reelle Zahlen



Die **begriffliche Seite**, die Begriffsidee ist deshalb gesondert dargestellt, weil der Begriff der Dezimalzahl weder ausschließlich auf der symbolischen Ebene, noch ausschließlich auf der Gegenstandsebene zu finden ist, sondern nach und nach als Beziehung zwischen beiden Ebenen konstituiert wird, und diese Konstitution als ein Wechselspiel von subjektiven und objektiven Momenten abläuft.

Die *variable, begriffliche* Beziehung in der Definition der Dezimalzahl erfordert die Entscheidung des Subjekts. Zum Beispiel, welche Einheit bezogen auf einen Sachkontext gewählt werden sollte, daß die Ziffer hinter den Kommata als Pfennig, daß diese Ziffer als ein Zehntel, oder daß diese Ziffer als Meßeinheit auf einer Skala interpretiert werden kann, ist eine **vom Subjekt herzustellende Beziehung**, die jedoch nicht willkürlich ist, sondern sich in einen verwickelten subjektiv-objektiven Gesamtzusammenhang fügt. Diese Konstitution ist abhängig von den Interessen des Subjekts, von seinen Erkenntniszielen, und sie wird durch den Rahmen der sachlichen Situation mitgeformt. Sie ist eindeutig und zugleich beinhaltet sie Möglichkeiten vieldeutiger Interpretationen. Sie ist ein Wechselspiel subjektiver Spielräume und Ziele wie auch objektiver Bedingungen und Strukturen.

Eine begriffliche Definition ist komplexer, offener, unverbindlicher als eine strikt Regel-gestützte Definition. Es ist eine Definition, die eindeutig und vieldeutig zugleich ist: *vieldeutig* durch ihre potentiell unerschöpflichen noch unbekannten Bezugskontexte, die auch zu Verallgemeinerungen Anlaß geben, und eindeutig durch die jeweils vom Subjekt aktuell hergestellten Beziehungen und konkreten Nutzungsweisen. Die begriffliche Definition versucht die Wechselbeziehung zwischen Zeichen und Gegenstand im epistemologischen Dreieck zu entwickeln, die Regelgestützte Definition beschränkt sich tendenziell auf die Zeichen.

2.3 Zirkuläre Aspekte der Begriffsbildung

Die Beziehungen im Spannungsfeld zwischen der symbolischen Darstellung und möglichen Anwendungssituationen der Dezimalzahlen sind nicht eindeutig oder logisch zu rechtfertigen, und sie geben Anlaß zu selbst-bezüglichen oder auch zirkulären begrifflichen Konstruktionen. Wenn man die Frage stellt: Läßt sich der Dezimalzahlbegriff deduktiv aus schon vorhandenen Begriffen in allen Details ableiten?, so stößt man bei dem Versuch sie zu beantworten auf scheinbar un-logische Sachverhalte. Nehmen wir das Beispiel der Multiplikation von Dezimalzahlen:

Man multipliziert Dezimalzahlen, ohne die Kommata zu beachten und setzt dann gemäß eines schematischen Abzählverfahrens das Komma an die richtige Stelle im Ergebnis. Dieses Verfahren gibt nur an, *wie* operiert wird, es sagt nicht, *warum* so operiert werden soll. Versucht man, dies zu erkären, so gibt es unterschiedliche Zugangsweisen.

Ein Zugang besteht darin, die Dezimalzahlen in natürliche Zahlen zu verwandeln. Dazu folgende exemplarische Situation (zum Beispiel in Bell & Beeby o.J.): Es soll das Produkt

$$6{,}5 \,.\, 7{,}2$$

berechnet werden. Die Dezimalzahl 6,5 wird umgewandelt in 0,1 . 65. (Dies geschieht vor dem Hintergrund möglicher Sachinterpretationen, wie z. B., daß 6,5 cm in 65 mm umgerechnet werden.) Dann gilt es noch, die natürlichen Zahlen, die überbleiben, z.B.

$$65 \,.\, 72$$

miteinander zu multiplizieren, um in einem nächsten Schritt

$$0{,}1 \,.\, 0{,}1$$

auszurechnen. Rein formal läßt sich dieses nun nicht bewerkstelligen. Man würde hier in einen unendlichen Regreß geraten und 0,1 immer rückverwandeln in 0,1 . 1. An diesem Punkt muß etwas grundsätzlich Neues passieren. Es muß hier eine neue eigenständige Interpretation von 0,1 . 0,1 erfolgen. Dazu bedarf es entsprechender Sachkontexte wie z. B. 0,1cm . 0,1cm, ist gleichbedeutend mit

1mm . 1mm , ein Produkt, das als 1mm^2

vereinbarungsgemäß interpretiert wird. Und 1mm^2 wird im Rahmen der Dezimalschreibweise übertragen in $0{,}01\text{cm}^2$, wie es sich vielleicht aus der Tatsache plausibel erklären, aber nicht formal deduzieren läßt, daß ein 1cm^2) aus 100mm^2 besteht. Und um vor diesem Hintergrund den Zusammenhang zwischen $0{,}01\text{cm}^2$ und 1mm^2 zu verstehen, ist die begriffliche Idee der Dezimalzahl als *Maßzahl mit variabler Meßeinheit* in spezifischer Weise erforderlich.

Eine rein Regel-gestützte Definition ist für den Dezimalzahl-Begriff nicht angemessen und eine Charakterisierung in Form einer begrifflichen Definition muß immer wieder auf eigenständige Momente dieses Begriffs zurückgreifen. Das läßt sich grundsätzlich für jeden mathematischen Begriff konstatieren. Begriffe sind nur dann sinnvolle Konstrukte, wenn sie eben nicht aus anderen Begriffen formal, schrittweise, logisch hergeleitet werden können. Begriffe sind erst dann wirklich von Bedeutung, wenn sie eigenständige Momente ihrer Konstitution enthalten. Und dieses Faktum macht gerade eine Schwierigkeit in der Begriffsentwicklung im Rahmen von Lehr-Lernprozessen aus. Das neue Wissen in einem Begriff ist dann neu, wenn es sich nicht auf altes reduzieren läßt oder aus ihm direkt abgeleitet werden kann. Wie kann man aber dann dieses neue Wissen verstehen?

3. "Läuft ja wie geschmiert!" - Das Beispiel eines eindeutigen Unterrichtsablaufs und die Suche nach Ansätzen zur Mehrdeutigkeit

Im Projekt PROFORMA wurden zum Themenbereich *Dezimalzahlen* Unterrichtsbeobachtungen durchgeführt, aus denen dann Transkripte zu kurzen Episoden im Rahmen der Fortbildung analysiert und diskutiert wurden. Anhand eines beispielhaften Transkripts (siehe Anhang) sollen aus der Perspektive unterrichtsbezogener Erfahrungen und theoretischer Analysen die vorher entwickelten Ideen zur epistemologischen Struktur des Wissens in interaktiven Unterrichtsprozessen darstellt werden. Thema dieses Unterrichtsabschnittes ist die *Umwandlung von Brüchen in Dezimalzahlen*. Dieser Zusammenhang ist für die Ausweitung begrifflicher Ideen zur Dezimalbruchrechnung von großer Bedeutung. Es wird zwar oberflächlich betrachtet nur die symbolische Ebene im Vergleich der jeweiligen Zahl-Kodierung als Bruch oder als Dezimalzahl thematisiert, aber die Lösung der vom Lehrer gestellten Probleme erfordert die Bezugnahme auf (teils implizite) interpretative Bezugskontexte, die in diesem Beispiel keinen konkreten Sachbezug aufweisen, sondern selbst schon allgemeine arithmetische Beziehungen beinhalten.

3.1 Analyse der Unterrichtsepisode: Kann man Brüche schriftlich dividieren?

In der vorliegenden Unterrichtsepisode stellt der Lehrer nacheinander Aufgaben, an denen gemeinsam im Klassengespräch die Umwandlung geübt und dabei die zulässige Regel eintrainiert werden soll. Die Episode läßt sich für eine erste Analyse in fünf Phasen untergliedern. Die einzelnen Phasen werden im folgenden mit Kommentaren kurz beschrieben; die Zahlen geben die jeweiligen äußerungen von Lehrer oder Schülern und Schülerinnen an.

1. Phase (1 und 2): *Eröffnung:* $\frac{3}{10}$

(1, 2) Das gestellte Problem wird sofort gelöst: 0,3

2. Phase (3 bis 39): *Erste Ausweitung der Problemstellung:* $\frac{4}{50}$

(10) Direkter Lösungsansatz: 0,4 ; (wird in Frage gestellt.)

(14-21) Wiederholung der Bruchrechnung:
Vergleich von $\frac{4}{50}$ und $\frac{4}{10}$

(24) Der Lehrer formuliert die Regel des zulässigen Lösungsverfahrens: "Zehnerpotenzen im Nenner!"

(28-34) Wiederholung der Bruchrechnung: Wie erweitert man einen Bruch?

(38) Lösung: 0,08

3. Phase (40 bis 54): *Erste Übung des Lösungsverfahrens:* $\frac{3}{5}$

(41) Lösungsansatz: Erweitern auf 100.

(43-47) Wiederholung der Bruchrechnung: Wie erweitert man einen Bruch?

(53) Lösung: 0,6

4. Phase (55 bis 74): *Zweite Übung des Lösungsverfahrens:* $\frac{8}{20}$

(57) Lösungsansatz: Erweitern auf 100.

(62) Lösung: 0,40

(67) Alternativer Lösungsansatz: Kürzen (durch 2).

(73) Lösung: 0,4

5. Phase (75 bis 143): *Zweite Ausweitung der Problemstellung:* $\frac{5}{8}$

(77) Erster Lösungsansatz: mal 5!

(79) Zwischenergebnis: 40 im Nenner.

(82) Wiederholung der Regel des zulässigen Lösungsverfahrens: "Zehnerpotenzen im Nenner!" (implizite Zurückweisung des Ansatzes)

(85) Zweiter Lösungsansatz: durch 2!

(88) Zwischenergebnis: 2,5 Viertel.

(89,90) Wiederholung der Regel des zulässigen Lösungsverfahrens: "Zehnerpotenzen im Nenner!"

(93,94) Rückgriff auf den Ansatz: durch 2! und Zurückweisung durch den Lehrer.

(94) Lösungsansatz, der die Regel beachtet (vom Lehrer formuliert).

1.: Kann man auf 10 erweitern?

(97) **2.: Kann man auf 100 erweitern?**

(98) **3.: Kann man auf 1000 erweitern?**

(103-107) Schüler geht zum Ansatz: mal 5! zurück. Dies führt zu 25 Vierzigstel.

(109-111) Der Vorschlag eines Schülers zu kürzen, wird vom Lehrer zurückgewiesen.

(112) Schüler beharrt auf dem hier gemachten Ansatz und will 25 Vierzigstel auf 200 erweitern und dann durch 2 teilen.

(115) Das vom Lehrer hierauf ermittelte Zwischenergebnis $\frac{62,5}{100}$ wird als unzulässig zurückgewiesen.

(117-119) Lösungsansatz, der die zulässige Regel berücksichtigt: **Geht durch 1000!** bzw. **Kann man auf 1000 erweitern!**

(133) Erste Lösung: Die Erweiterungszahl ist 125.

(135-143) Wiederholung der Rechnung in schriftlicher Form: 1000:8 ergibt (die Erweiterungszahl) 125.

In diesem Unterrichtsabschnitt wird die Vorgehensweise einer "Regel-orientierten Eindeutigkeit" sichtbar. Die Umwandlung von Brüchen in Dezimalzahlen geht von einfachen zu schwierigen Übungen und fordert immer ausdrücklicher die einzig zulässige Erweiterung auf eine Zehnerpotenz im Nenner. Auch für die Umwandlung von $\frac{5}{8}$ wird weiterhin versucht, diese Eindeutigkeit der Regel-gebundenen Vorgehensweise durchzusetzen. Dazu sind in "Hilfs-Rechnungen" zusätzliche Rechenoperationen und komplizierte Umwandlungen notwendig, die in gewissem Gegensatz zu der angestrebten *"methodischen Reinheit der zulässigen Regel"* stehen. Denn die hier benutzten Rechenverfahren wären direkt geeignet gewesen, schnell das anstehende Problem selbst zu lösen, jedoch unter Preisgabe der methodischen Eindeutigkeit. Ganz einfach gesagt, hätte man, so wie hier schriftlich 1000 durch 8 dividiert wurde, die 5 schriftlich durch 8 dividieren können - und dies haben die Schüler an anderen Stellen zuvor schon durchgeführt - , so wäre man direkt zur Lösung gelangt. Aber die einmal intendierte Regel-orientierte Vorgehensweise wird wegen vermeintlicher Einfachheit, Konsistenz und Eindeutigkeit nicht fallengelassen, sie verstärkt sich, sie setzt sich durch, sie dominiert und wird im Rahmen der zusätzlichen Anforderungen, gerade der Aufrechterhaltung der Eindeutigkeit wegen, konterkariert, in ihr Gegenteil verkehrt und so vollständig ihres intendierten methodischen Wertes enthoben.

3.2 Epistemologische Strukturen des sozial konstituierten Wissens: Verallgemeinerung und Zirkularität

Die Art der Interaktion in diesem kurzen Unterrichtsausschnitt läßt vermuten, daß der Lehrer ausschließlich mit der methodischen Intention vorgeht, den Gebrauch der zulässigen Regel für die Umwandlung von Brüchen in Dezimalzahlen einzuüben. Auf sich möglicherweise ergebende Probleme des Lehrens *begrifflicher* Aspekte (vgl. Vollrath 1984) ist er völlig unvorbereitet. In der sich entwickelnden sozialen Interaktion zwischen dem Lehrer und seinen Schülerinnen und Schülern gibt es eine interessante Phase, in der **sozial konstituierte Gelegenheiten möglicher Begriffsverallgemeinerungen** sichtbar werden. Dieser Umbruch findet in der **5. Phase (75 bis 143)**: *Zweite Ausweitung der Problemstellung:* $\frac{5}{8}$, statt und umfaßt die Äußerungen 77 bis 116. Hier entscheidet sich, ob letztlich die vom Lehrer formulierte eindeutige Regel einzig maßgebend bleibt, oder ob sich aus Schülervorschlägen mehr oder weniger schlagartig eine qualitative Verallgemeinerung von Begriffen und Operationen entwickeln kann.

In diesem sozial konstituierten Vorfeld begrifflicher Verallgemeinerungen lassen sich im einzelnen folgende Verallgemeinerungs-Gelegenheiten feststellen:

- In den Äußerungen 87,88 und 94 findet sich der Keim einer Begriffsverallgemeinerung: soll man nicht nur natürliche Zahlen, sondern auch Dezimalzahlen in Brüchen zulassen? Ist 2,5 Viertel ein zulässiger Bruch?

- In den Äußerungen 103 bis 109 findet man Angebote der Begriffsverallgemeinerung und der Verallgemeinerung von Operationen: darf man 25 Vierzigstel mit 4 kürzen? Führt dies zu einem zulässigen Bruch?

- In den Äußerungen 112 bis 115 wird das Zwischenergebnis $\frac{62{,}5}{100}$ diskutiert, das selbst wieder Anlaß begrifflicher und operativer Verallgemeinerungen sein könnte.

In dieser Episode bringen die Schüler und Schülerinnen direkt in ihren Lösungsvorschlägen Ansätze für mögliche begriffliche und operative Verallgemeinerungen in die Interaktion ein. Der Lehrer lehnt diese immer wieder mit Hinweis auf die zulässige Regel ab. Als Lernende können die Schüler und Schülerinnen natürlich nicht diese Ansätze im Bewußtsein intendierter Verallgemeinerungen vorschlagen; es sind Ergebnisse ihrer spontanen und unwissenden Direktheit. Und eine solche Direktheit der formalen Übertragung von "alten" Operationen (Kürzen und Erweitern) auf "neue" Symbole (Dezimalzahlen in Brüchen), sowie die formale Einführung "neuer" Begriffe (Dezimalzahl) in "alte" Bereiche (Bruchrechnung) ist ein wichtiges Element in Verallgemeinerungsprozessen mathematischen Wissens. Sie muß durch Neuinterpretation der Begriffe und Operationen bezogen auf erweiterte Anwendungskontexte und durch Überprüfung der Übertragbarkeit interner Konsistenz auf die neue Struktur komplettiert werden.

Gelegenheiten zu qualitativen Verallgemeinerungen werden von den unwissenden Schülerinnen und Schülern formal eingebracht. Sie selbst können den Prozeß nicht fortführen, dies erfordert die *soziale Zustimmung* in der Gruppe, die jedoch vom Lehrer nicht gegeben wird. Er beharrt auf seiner eindeutigen Regel und führt damit zurück zu dem "alten" Wissen mit seinem bisherigen Begriffs- und Operations-Verständnis. Kennzeichnend für die Strategie des Lehrers ist seine Reaktion auf den Vorschlag eines Schülers, 25 Vierzigstel zu kürzen. (109 bis 111). Der Lehrer beharrt strikt auf den Gebrauch der Kürzungs-Regel für Brüche in der hergebrachten Weise und gelangt so zum Ausgangsresultat 5 Achtel zurück. Wenn an dieser Stelle die Regel reduktiv und nicht weiterentwickelnd benutzt wird gelangt man in der Tat in einen infiniten Regress, den der Lehrer in Äußerung 111 so formuliert:

111 L: Das ginge, das ist raffiniert, das können wir immer wieder, aber das dauert nen paar Stunden, erweitern, kürzen, dann schaffen wir's heute nicht mehr. Oliver!

Hier, in der sozialen Interaktion hat sich eine *Zirkularität* in der Problemlösetätigkeit herausgebildet, wie sie analog in den epistemologischen Prozessen der Entwicklung mathematischen Wissens auch sichtbar werden, z. B. als Zirkularität der Begriffsdefinition. Solche Zirkel sind unvermeidbar, sowohl im theoretischen mathematischen Wissen wie in der Problemlösetätigkeit. Ihre negative Wirkung ergibt sich aufgrund von Reduktionen; positiv können sie dann zur Quelle neuen Wissens werden, wenn sie im sozialen Prozeß als Grundbestandteile von Begriffsverallgemeinerung und -neuinterpretation gemeinsam gesehen und akzeptiert werden.

Das deutlichste Angebot einer sozial akzeptierbaren Begriffs- und Operations-Verallgemeinerung findet sich in dieser Unterrichtsepisode an der Stelle, wo der "neue" Bruch:

$$\frac{62{,}5}{100}$$

(115) in der Luft liegt. Auch in diesem Fall haben wieder die Schülerinnen und Schüler den Anfang gemacht durch die Direktheit ihrer formalen Übertragung. Welch' ein Potential an Verallgemeinerungen liegt nicht in dieser neuen Bruchdarstellung! Wie nahe ist man nicht schon der gesuchten Lösung! Und dies nicht nur technisch, nein auch in begrifflicher Hinsicht! Welche positiven Beziehungsmöglichkeiten lassen sich hier nicht entdecken!

Beispielsweise ließe sich dieser neue Bruch analog zu den bekannten Verfahren erschließen.

$$\frac{62{,}5}{100} = \frac{60}{100} + \frac{2}{100} + \frac{0{,}5}{100} = \frac{6}{10} + \frac{2}{100} + \frac{0{,}5}{100}$$

Um den Term $\frac{0{,}5}{100}$ umzuwandeln, ist eine *Selbstanwendung* des Dezimalzahl-Begriffs erforderlich. Dazu benötigt man die *begriffliche Definition*, in der die Dezimalzahl als *Maßzahl mit variabler Meßeinheit* charakterisiert wird. Die Dezimalzahl 0,5 (mit Maßeinheit $\frac{1}{10}$) wird mit der Maßeinheit von $\frac{1}{100}$ neu unterteilt und führt zu der neuen Einheit von $\frac{1}{1000}$. Um diese Einsicht zu erlangen ist in der begrifflichen Definition: "Dezimalzahl als *Maßzahl mit variabler Meßeinheit*" zusätzlich eine Verallgemeinerung erforderlich, die implizit in dieser unabgeschlossenen Definition enthalten ist: als Maßzahlen sind auch Dezimalzahlen zulässig. Hier steckt wieder der Begriffs-Zirkel, der jetzt positiv als Quelle zur Entwicklung wirklich neuen Wissens genutzt wird.

Ist auf diese oder ähnliche Weise einmal der Verallgemeinerungs-Prozeß in Gang gesetzt worden, so werden auch schnell viele der alten Begriffs- und Operations-Vorstellungen aus der Sicht des neuen Wissen neuartig bewertet werden können.

- *Division durch 10* bedeutet Komma um eine Stelle nach rechts verschieben.

- *Kürzen und Erweitern* kann hier "beliebig" durchgeführt werden.

- *Die schriftliche Division* (in der Anwendung auf Dezimalzahlen), die bisher als formales Verfahren, zergliedert in einzelne Schritte, bloß formal benutzt wird, erweist sich als eine operative Regel, die aus der Perspektive der Verallgemeinerung im Prinzip alle Operationen (Komma verschieben, kürzen und erweitern, Bruch-Operationen, Divisionen etc.) und damit implizit auch ausgeweitete Begriffsvorstellungen (Dezimalzahlen sind Brüche, Dezimahlzahlen dürfen in Brüchen benutzt werden, Maßeinheiten und ihre Variation etc.) in einen gemeinsamen, allgemeinen Zusammenhang stellt.

Auf diese Weise wird in der curricularen Beziehung die methodisch-hierarchische Reduktion: *Dezimalzahlen sind spezifische Brüche* durch folgende Relativierung aufgehoben: *Dezimalzahlen gestatten die Konstruktion neuer Brüche*. Doch der Lehrer weist mit der Bemerkung. " .... dann haste wieder ne Kommazahl da drin, ne?" (115) dieses mögliche Zwischenergebnis $\frac{62,5}{100}$ als unzulässig zurück. An dieser Stelle wird exemplarisch die Zerbrechlichkeit theoretischen, mathematischen Wissens (vgl. Brousseau & Otte 1989) sichtbar; in dieser sozialen Interaktion zwischen dem Lehrer und seinen Schülern und Schülerinnen hängt die Möglichkeit eines gemeinsam konstituierten, verallgemeinerten Begriffs an einem seidenen Faden; dieser zerreißt hier, da der Lehrer die Angebote von Seiten der Schüler und Schülerinnen nicht für sich als eigene Lernmöglichkeiten erkennen und dann für das gemeinsame Lernen nutzbar machen kann.

Der analysierte interaktive Unterrichtsprozeß ist ein Zusammenspiel von *Konzentration* (Trichtermuster; vgl. Bauersfeld 1978) und *Transformation*. Auf der Ebene sozialer Interaktion und Tätigkeit werden nach und nach Prozesse der Konzentration auf konkrete Vorgaben wirksam und gleichzeitg findet auf der Ebene des mathematischen Wissens in der Reduktion epistemologischer Beziehungen auf formale Verfahren eine entscheidende Umwandlung statt. Die Berücksichtigung der begrifflichen Verallgemeinerungs-Potenz, wie sie sozial als Möglichkeit konstituiert wurde, würde es gestatten, die äußere Eindeutigkeit des abgeschlossenen Trichtermusters in der Interaktion durch eine noch offene Mehrdeutigkeit der Verallgemeinerungs-Intentionen zu relativieren. Entscheidend hierfür ist, daß die Umwandlungen auf der Ebene des zu konstituierenden mathematischen Wissens keine einseitigen Reduktionen darstellen, sondern die lebendigen Beziehungen zwischen Symbolen und Kontexten aufrechterhalten und durch soziale Verallgemeinerungen zu neuem Leben führen.

Unter solchen Bedingungen stellen in diesem *koevolutionären Lehr-Lern Prozeß von Konzentration und Transformation* die Eindeutigkeit des Trichtermusters und die Mehrdeutigkeit der Wissensverallgemeinerung keine absoluten oder unüberwindlichen Gegensätze dar; vielmehr bieten sie Ansätze des Zusammenwirkens in der Suche nach eindeutiger Kommunikation bei gleichzeitiger Berücksichtigung von zulässiger Offenheit und Mehrdeutigkeit zukünftiger neuer Interpretationen im Zuge von Verallgemeinerungen.

3.3 Versuch eines Resumes

Unter der scheinbar glatten Oberfläche des Unterrichtsablaufs, der den operativen Gebrauch einer Regel zur Umwandlung von Brüchen in Dezimalzahlen zum Gegenstand hat, zeigen sich Brüche des begrifflichen Verstehens, die als indirekte Hinweise auf epistemologische Aspekte schulischen Wissens verstanden werden können, die für diese soziale Interaktion spezifisch sind.

Nimmt man eine *globale* Sicht auf den Unterrichtsausschnitt ein, so läßt sich sagen, daß die unterrichtliche Methodik des Lehrers auf die Vorherrschaft der eindeutigen Regel zur Umwandlung gerichtet ist (auch wenn sie hier technisch zu aufwendig wird). Das Vorherrschen der Regelägestützten Definition von Dezimalzahlen führt im epistemologischen Dreieck zu einer Indentifikation von *Zeichen* und *Gegenstand*; Brüche und Dezimalzahlen sind im Prinzip das "Gleiche", sie werden nur in unterschiedlicher Weise kodiert, wozu man gerade die Umwandlungsregel benötigt und weiter nichts mehr. Oder, die Gleichung $\frac{5}{8} = 0{,}625$ wird ganz strikt genommen und soll bedeuten, daß auch begrifflich kein Unterschied zwischen Brüchen und Dezimalzahlen vorhanden ist.

Die *lokale* Analyse in den einzelnen Phasen der Interaktion läßt in Ansätzen die Probleme und Sichtweisen der Schülerinnen und der Schüler deutlich werden. Sie haben noch Verständnis-Schwierigkeiten mit dem neuen Wissen, sie müssen ihren eigenen Zugang zu diesem Wissen finden. Dazu ist eine Unterscheidung zwischen Bruch-*Begriff* und Dezimalzahl-*Begriff* hilfreich. In den Beiträgen der Schülerinnen und der Schüler werden diese Unterschiede vor allem als Brüche in ihrem Verständnis sichtbar. Der Lehrer ist bestrebt, gemäß seiner "fertigen" Vorstellung über das in Frage stehende mathematische Wissen den Unterrichtsablauf linear und deduktiv zu organisieren; demgegenüber zeigt sich in den Äußerungen der noch "unwissenden" Schülerinnen und Schüler, daß der Erwerb neuen mathematischen Wissens essentiell die Reflektion begrifflicher Beziehungen erfordert und sich nicht in der Aneignung automatisierter Regeln erschöpfen kann. An lokalen Stellen in dieser Episode finden sich somit Gelegenheiten, alle Dimensionen des epistemologischen Dreiecks aufzuspannen, global setzt sich die eindeutige Regel durch und führt mit der Gleichsetzung von *Zeichen* und *Gegenstand* zu einer Reduktion des neuen auf das alte Wissen.

Literatur

Andelfinger B. (1984a) Didaktischer Informationsdienst Mathematik, Thema: Proportion, Curriculum Heft 22, LSW, Soest .

Andelfinger B. (1984b) Quellensammlung zu: Didaktischer Informationsdienst Mathematik, Thema: Proportion, Dokumentation: Literaturnachweise 3, LSW, Soest.

Bauersfeld H. (1978) Kommunikationsmuster im Mathematikunterricht - Eine Analyse am Beispiel der Handlungsverengung durch Antworterwartung, In Bauersfeld H. (ed) Fallstudien und Analysen zum Mathematikunterricht, Schroedel, Hannover, 158-170.

Bell A. W. & Beeby T. (o. J.) Two approaches to the teaching of decimal multiplication, Shell Centre for Mathematical Education, University of Nottingham.

Biehler R. & Steinbring H. (1990.) Entdeckende Statistik im Mathematikunterricht, Materialien aus dem GRAPHDAS-Projekt. Vorläufige Fassung, IDM, Bielefeld.

Bigalke H.-G. & Schröder H. (Hrsg.) (1980) Einführung in die Mathematik, Ausgabe N, 6. Schuljahr, Diesterweg, Frankfurt am Main.

Brousseau G. & Otte M. (1989) The fragility of knowledge, Manuskript, IDM, Bielefeld.

Davis P.J. & Hersh R. (1985) Erfahrung Mathematik, Birkhäuser, Basel.

Günther K. (1987) Über das Verständnis der Schüler von Dezimalzahlen und auftretende Schülerfehler, Mathematische Unterrichtspraxis, 1, 25-40.

Hahn O. & Dzewas J. (Hrsg.) (1978) Mathematik 6, Westermann, Braunschweig.

Jahnke H.N. (1978) Zum Verhältnis von Wissensentwicklung und Begründung in der Mathematik - Beweisen als didaktisches Problem, Materialien und Studien Band 10, IDM Bielefeld.

Jahnke H.N. (1990) Hilbert, Weyl und die Philosophie der Mathematik, Manuskript, IDM, Bielefeld.

Lakatos I. (1979) Beweise und Widerlegungen, Vieweg, Braunschweig.

Otte M. (1984) Was ist Mathematik?, Occasional Paper 43, IDM Bielefeld.

Neubert K. & Wölpert H. (Hrsg.) (1986) Mathematik, Denken und Rechnen, Westermann, Braunschweig.

Padberg F., Neumann R. & Sewing N. (1990) Typische Schülerfehler bei Dezimalbrüchen, Mathematische Unterrichtspraxis, 4, 31-44.

Swan M. (1983) The meaning and use of decimals, Shell Centre for Mathematical Education, University of Nottingham.

Steinbring H. (1986) Zur Natur des mathematischen Wissens in der Unterrichtspraxis des Lehrers, mathematica didactica, 10, 183-198.

Steinbring H. (1987) Episoden aus dem Mathematikunterricht der Sekundarstufe I, Thema: Dezimalbruchrechnung, Material aus dem Projekt: PROFORMA, IDM, Bielefeld.

Steinbring H. (1989) Routine and meaning in the mathematics classroom, For the learning of mathematics, 9.1, 24-33.

Steinbring H. (1990) Probleme der Entwicklung mathematischen Wissens im Unterricht - an einer Analysis-Stunde betrachtet, Der Mathematikunterricht, 36, 3, 4-28.

Steinbring H., Ehrich G., Sensenschmidt K. & Weinberg P. (1987) Einführung in Verständnis und Gebrauch von Dezimalzahlen, Material aus dem Projekt: PROFORMA, IDM, Bielefeld.

Vollrath H.-J. (1984) Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht, Klett, Stuttgart.

Anhang

Thema: Kann man Brüche schriftlich dividieren?

Der Lehrer macht Übungen zur Dezimalbruchrechnung, das heißt, er läßt Zehnerbrüche in Dezimalzahlen umwandeln und schreibt im folgenden auch andere Brüche an die Tafel.

1 L: ... Petra! Dreizehn Zehntel ..

2 S: 1 Komma 3

3 L: Prima

Lehrer schreibt jetzt an die Tafel:

$$\frac{4}{50}$$

4 L: Was ist das denn für ein Ding? Conny, das ist nen Ding! Nicht wahr, René?

Schüler lachen.

5 L: Was? Das ist nen Ding. Ja, jetzt biste fertig, Adrian!

6 S: Da mußte nen halbes Komma nehmen.

7 L: Nen halbes Komma! Ein kleines, ruhig, wollst dich melden oder? Kratzen, gut.

8 S: Ich glaube

9 L: Ja, gut, sag!

10 S: 0 Komma 4

11 L: Warum glaubst du das?

12 S: Ja, weil Komma, bei den Zehntel ist das doch auch, doch nur die 5.

13 L: Bei vier Zehntel ist das auch? Da ist es nur die, da ist auch 0 Komma 4 und da ist 4 Fünfzigstel, das ist doch viel mehr.

14 L: Mal langsam jetzt, ist das denn wohl mehr oder weniger?

15 S: Mehr!

16 L: Das ist mehr? Stimmt das so? Ja?

17 S: Bei mir ist fünfzig mehr als zehn.

18 L: Ja, paß mal auf. Hier haben wir nen Kuchen, den teil ich mal ein ... den teil ich mal ein jetzt

19 S: Ach nein,

20 L: In 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 Teile, da nehm ich zweie von, zwei Achtel, diese beiden hier, das sind zwei Achtel .. Und jetzt nehm ich das Ding und teile das ach, nochmal alles in Sechzehntel, und dann nehm ich jetzt zwei Teile, das sind zwei Sechzehntel. Welches ist denn wohl mehr, welches möchteste denn wohl haben? Also, was ist denn wohl mehr, dieses oder dieses?

21 S: Die 4 Zehntel.

22 L: So, die 4 Zehntel ist mehr. Aber jetzt möcht ich das als Dezimalzahl geschrieben haben .. Erinnert euch mal an die Bruchrechnung .. jetzt guckt mal, was wir haben, immer im Nenner gehabt .. ruhig! Was haben wir immer im Nenner stehen hier! Um das als Dezimalbruch auszudrücken. Jan!

23 S: 0

24 L: Ja, also immer Zehnerpotenzen, nich? Also Potenzen kennt ihr immer noch nicht. Immer Zehner und nen Vielfaches davon, mit 0 dran, 10 mal 10, 10 mal 100, Zehnerpotenzen, 10 hoch 2, das wißt ihr noch nicht. 10, 100, 1000, 10 000, dann können wir es als Dezimalbruch schreiben. Also, das können wir nicht, also Bruchrechnung, das könnt ihr schon. Ja, das kann man auch.

25 L: Bruchrechnung. Luise! Was kann ich daraus machen?

26 S: 100 ehm, Hauptnenner suchen.

27 L: Hauptnenner suchen, du meinst vielleicht schon das Richtige. Du meinst vielleicht das Richtige, ja.

28 S: Also man könnte vielleicht, die mal 2 nehmen, dann hätte man 100 stehen.

29 L: Also, Björn sagt, man könnte erweitern, ja, das meinst du. Erweitern auf Hundertstel. Wie erweitert man einen Bruch? Steffi!

30 S: ......

31 L: Ja, das verfolgt euch immer wieder, hö? Wie erweitern wir einen Bruch, Gerrit!

32 S: Indem wir Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multiplizieren.

33 L: Prima, haste gehört? Haste gehört?

34 S: Indem wir Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multiplizieren.

35 L: Prima, womit haben wir den Nenner multipliziert? Womit müssen wir den Zähler multiplizieren? Was kommt hierhin?

36 S: Acht Hundertstel.

37 L: So, 4 Fünfzigstel ist das gleiche wie 8 Hundertstel. Wie schreiben wir das als Dezimalbruch? Torsten!

38 S: Ehm, 0 Komma 0 8.

39 L: Prima, gut. Es gehen auch solche Verflixten, ne, ja? Mal gucken.

40 L: Drei Fünftel, drei Fünftel, als Dezimalbruch jetzt.

Schüler melden sich.

41 S: Erweitern auf 10

42 L: Prima, erweitern auf 10

43 S: Durch 2

44 L: Durch 2 ?

45 S: 2 Komma 5.

46 L: Sagst du noch einmal die Regel?

47 S: Man erweitert einen Bruch, indem man Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multipliziert.

48 L: Ja, was haste hier gemacht, aus dieser hier? Was haste hier gemacht?

49 S: Erweitert.

50 L: Womit?

51 S: mit 2

52 L: Und was willste hier machen? Nicht durch, ne, prima.
Sechs Zehntel gleich?

53 S: 0 Komma 6.

54 L: Prima. Ja, Mensch, geht ja wie geschmiert. Läuft ja toll .

55 L: Was nehmen wir. Acht Zwanzigstel. Acht Zwanzigstel .

Schüler melden sich.

56 L: Michael!

57 S: Erweitern auf 100 mit 5.

58 L: mit 5 auf 100, was ist oben?

59 S: 40

60 L: 40

61 L: Ist gleich?

62 S: 100, also 0 Komma 40.

63 L: Was, stimmt das nicht?

64 S: Doch!

65 L: Stimmt nicht oder doch?

66 L: Ja, schön, prima. Jetzt hat er diesen erweitert. Björn!

67 S: Ich würde auch, man könnte den auch kürzen, nich?

68 L: Ja, hastes gehört, man könnte beides jetzt anwenden, Björn sagt, das ist ja nicht schwieriger, ich hätte auch gekürzt. Guck mal, 8 Zwanzigstel. Björn, wodurch hättest du denn gekürzt?

69 S: Durch 2.

70 L: Ja, durch 2, und was, wie lautet denn dann der Bruch? Conny! Gekürzt durch 2.

71 S: Ehm, vier, vier Zehntel.

72 L: Prima, und was ist das? Als Dezimalbruch?

73 S: ehm, ehm, 0 Komma 4.

74 L: Gut. Guck mal hier, ne, ist das gleiche, ne? .. Erweitern oder kürzen, kann ich beides machen, ne, prima! Läuft ja wie geschmiert. Jetzt kommt ein bißchen was Schwierigeres.

75 L: Fünf Achtel.. Fünf Achtel.. ja, Pierre! Das Einmaleins kannst du eigentlich gut, müßtest du eigentlich lösen können, also ganz gut, im Kopf kannst du das rechnen.

Die Schüler überlegen.

76 L: Mark, weißt du es schon?

77 S: Ich glaub, mal 5.

78 L: Mal 5, was haben wir dann im Nenner?

79 S: 40

80 L: Und wie schreibst du die als Dezimalzahl? ..

81 S: Da nochmal

82 L: Ja, guck mal, wir erweitern auf 100, wir erweitern auf 10, auf 100, auf 1000, 100 000, mit 40 wird's dir schwerfallen, als Dezimalbruch auszudrücken. Oder wie willste das machen? .. Ja, Silvia!

83 S: Ich glaube

84 L: Erdogan!

85 S: Durch 2.

86 L: Durch 2, ja, was haben wir dann?

87 S: 2 Komma 5.

88 L: Und weiter, wie willste das schreiben? 2 Komma 5 Viertel, wie willst du das schreiben? Wie geht das? Was wollen wir denn unten immer haben im Nenner? Was wollen wir haben, z.B.

89 S: 100, 10,

90 L: 100, 10, tausend, zehntausend, ja. Können wir denn auf 10 erweitern?

91 S: Ja, das wollt ich.

92 L: Ja, das wollst du? Wie machste das denn?

93 S: Wenn wir die 8 vielleicht erst durch 2 teilen.

94 L: Ja, dann haben wir hier 2 Komma 5 und hier 4, das haben wir vorgeschlagen. Auf 10 erweitern, geht das, Peter?

95 S: Ja?

96 L: Ja? Auf 10 die 8, aus Achtel Zehntel machen ... ist nich.

97 L: Können wir die 8 auf 100 erweitern? ..

98 L: Geht nicht. Auf tausend ... Michael!

99 S: Doch, das geht. Mal tausend.

100 L: 8 mal tausend ist tausend?

101 S: Nein

102 L: Glaub ich auch nicht, Torsten!

103 S: Vielleicht geht's so, also mal 5 erweitern, das wären dann 25.

104 L: Warte, machen wir es in Schritten. 25!

105 S: 25 und dann 25, 40 ......

106 L: Vierzigstel

107 S: Und das dann durch, ne das geht ja auch nicht, und dann hat ich gedacht durch 4, das geht nicht.

108 L: Ne, ne.

109 S: Das kann man aber doch kürzen.

110 L: Kürzen, dann haben wir wieder fünf Achtel oder was?

Schüler lachen

111 L: Das ginge, das ist raffiniert, das können wir immer wieder, aber das dauert nen paar Stunden, erweitern, kürzen, dann schaffen wir's heute nicht mehr. Oliver!

112 S: Können wir das erweitern auf 200 und dann durch 2 teilen, dann haben wir wieder 100 unten.

113 S: Hö!

114 S: Also, wenn ich dann

115 L: Also, was kriegst du denn da raus, guck mal. Erweitern auf 200 willst du mit 5 ne? Dann hast du hier 125, dann kürzte durch 2 und dann haste 62 Komma 5, dann haste wieder ne Kommazahl da drin, ne?

116 S: Ich glaub, die geht wahrscheinlich gar nicht.

117 S: Also, geht durch 1000

118 L: Geht durch 1000 ?

119 S: Die kann man auf 1000 erweitern.

120 L: Kann man auf tausend erweitern.

121 S: 100 mal 8, 800

122 L: Warte, du sagst, es ginge auf 1000 zu erweitern, und zwar

123 S: Bsst. 100 mal 8, öh 8 mal 100 sind 800

124 L: Gut, sind 800.

125 S: Und die obere, die 5

126 S: Also 800 jetzt, nochmal

127 L: Wieviel bleiben denn noch?

128 S: Jetzt brauchen wir noch auf 200.

129 L: Ja, 200 durch 8 sind 25 .. 200 haste noch.

130 S: Ich muß noch 200 dazu zählen. Muß ich jetzt nochmal ....

131 L: die 8 da durchteilen.

132 S: Ja, oh ist das kompliziert.

133 S: 25, öh, also 125 muß ich insgesamt.

134 L: Gut.

135 L: Also er sagt, wir können's auch schriftlich machen. Paß auf, die 8 auf tausend, das heißt, er kann hier die 1000 durch 8 teilen, ob das funktioniert, los! Sag's mir schnell, dann rechnen wir's. Mach grad! 8, 1 ....

136 S: 2

137 L: 2, 20

138 L: Was kommt hierhin?

139 S: 2

140 L: 2, 2 mal 8 sind 16, 4, 40

141 S: 5, 40

Lehrer schreibt an die Tafel: 125.

142 L: Also, was ist unsere Erweiterungszahl?

143 S: 125!