Heinz Steinbring

Wie unterrichten Lehrer stochastische Grundbegriffe?

Eine vergleichende Falluntersuchung zwischen Grund- und Erweiterungskurs einer 7. Klasse

In: Bromme, R., Seeger, F., Steinbring, H.: Aufgaben als Anforderungen an Lehrer und Schüler, Köln 1990
S. 231-273

Wie unterrichten Lehrer stochastische Grundbegriffe?

Eine vergleichende Falluntersuchung zwischen Grund- und Erweiterungskurs einer 7. Klasse

Heinz Steinbring

Zusammenfassung

In drei siebten Klassen (einem E- und zwei G-Kursen einer Gesamtschule) wurden Unterrichtsreihen zur elementaren Wahrscheinlichkeitsrechnung beobachtet. Für einen quantitativen und qualitativen Vergleich wurden die curricularen Konzeptionen dieser Reihen rekonstruiert im Hinblick auf Grundbegriffe, Regeln und Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung sowie ausschnittweise Unterrichtsepisoden in transkribierter Form herangezogen, in denen exemplarisch unterliegende Interpretationen von Wahrscheinlichkeit und ihrer unterrichtlichen Erarbeitung zum Ausdruck kommen. Neben den zumeist bekannten Unterschieden bezüglich des Umfangs des behandelten Unterrichtsstoffes in den Kursen, macht der Vergleich u.a. auf folgenden interessanten Zusammenhang aufmerksam. Während im E-Kurs eine relativ strikte Definition von Wahrscheinlichkeit erarbeitet wurde und eher formal rechnerische Arbeitsweisen dominierten, sahen sich die G-Kurs Lehrer gezwungen, die Entwicklung der Wahrscheinlichkeit stärker in konkreten Beispielsituationen zu verankern und vermehrt experimentelle Tätigkeiten in den Lernprozeß einzubeziehen; dies bewerteten sie als ein Defizit im Vergleich zur E-Kurs Konzeption, obwohl die in ihrem Unterricht sich zeigende experimentelle und kontextbezogene Akzentuierung der Wahrscheinlichkeit eher der besonderen Epistemologie der Stochastik angemessen ist.

Abstract

Three mathematics classes in grade seven (one E- and two B-courses in a comprehensive school) treating elementary probability theory have been observed. For a quantitatve as well as a qualitative comparison according to basic concepts, rules and problems of probability, the curricular conceptions of these three courses have been reconstructed and sections of transcribed teaching episodes have been investigated showing in an exemplary way underlying interpretations of the probability concept and its treatment in the classroom. Besides the well known differences with respect to the amount of treated curricular subject matter in the courses, the comparison points to the following interesting fact. Whereas within the E-course a relatively strict definition of probability has been elaborated and more or less formal calculations and "abstract" activities dominated, the B-course teachers saw themselves forced to embed the development of probability more explicitly in concrete situations and to enlarge the integration of experimental activities in the learning process; they estimated this fact rather as a deficit in comparison to the E-course conception, although the experimental and context-related accentuation which showed up in their teaching is more appropriate to the specific epistemology of probability.

Inhalt

1. Einleitung 234

2. Vergleich der curricularen Elemente der Stochastikreihen zu E- und G-Kursen 237

3. Exemplarische Unterrichtsszenen – Unterschiede in der Begriffsbildung (in E- und G-Kursen) 245

4. Modularität vs. lineare Abfolge – Zum Selbstverständnis der Lehrer über die unterrichtliche Vorgehensweise 254

Literatur 259

Verzeichnis der Tabellen und Anhänge

Tabelle 1: Vergleichende Zusammenstellung der behandelten Begriffe und Inhalte in den drei Kursen 238

Tabelle 2: Länge von Lehreräußerungen 246

Anhang: Unterrichtsausschnitte

- Ausschnitt 1 261
- Ausschnitt 2 263
- Ausschnitt 3 268
- Ausschnitt 4 270

1. Einleitung

Entsprechend dem Selbstverständnis vieler Mathematiklehrer (in den Gesamtschulen in Nordrhein-Westfalen) beginnt etwa ab der 7. Klasse ein neuer Abschnitt für die Schulmathematik. Die eher einführende und teils spielerisch motivierende Phase während der Jahrgangsstufen 5/6 wird durch einen stärker fachmathematischen Unterricht abgelöst. Die einsetzende Differenzierung in Fachleistungskurse, in sogenannte Grund- und Erweiterungskurse verstärkt diese Einstellung zum Mathematikunterricht.

Die Mathematiklehrer sind von nun an bestrebt, expliziter bestimmte Begriffsdefinitionen, mathematische Methoden und Arbeitsweisen in Form von Merksätzen zu formulieren, die der Mathematik eigene Fachsprache deutlicher werden zu lassen und, so könnte man sagen, den systematischen Charakter von Mathematik, d.h. ihre "logische Abfolge" mehr zur Geltung zu bringen. Dabei wissen die Lehrer, daß zumindest die Grundkurse diese Intention nicht vollständig werden ausfüllen können. Hier wird man sich mit Teilaspekten begnügen müssen, man wird bestimmte Kompromisse bei diesem Vorhaben vornehmen müssen.

Dieser "Wechsel" muß im Zusammenhang mit einer sich grundlegend ändernden Auffassung zum Lernen von Mathematik im Übergang von der Primar- zur Sekundarstufe gesehen werden.

"The situation of the teaching of mathematics in an institution like our modern general school is completely different in many ways. It gives widely the same mathematical training to all pupils without taking into consideration their individual interests, their personal history, their belonging to different social groups and so on. At the primary and lower secondary levels this generality has not a very marked effect: the mathematical topics there at least potentially have many relations to the pupil's experience and life outside school. Mathematics can and is taught there in a way which can be meaningful for (almost) all pupils (although this does not itself prevent aberrations!). Primary mathematics and great parts of traditional lower secondary school mathematics get

an automatic justification by what the children see, do, hear outside school; they can make operative use of their mathematical knowledge. At this level there is a rich variety of genuine mathematical activities carried out by the children with what they learn at school.

...

In (upper) secondary schools ... mathematics is taught and learned in a more or less isolated and self-contained way. Most of those who teach and those who learn usually carry out no other mathematical activities (relating to the subject matter taught!) beyond this teaching and learning. In particular, there is no activity from which the contents of the teaching and learning processes could be derived. The motivation to teach or to learn a certain part of mathematics in this setting does not come as a result of one's own mathematical or other activities or of one's own experiences. The abstract content itself is expected to carry the incentive for studying it." (Dörfler & McLone 1985, 61/62)

Verstehen und mathematische Bedeutung wird den Schülern in der Primarstufe relativ direkt ermöglicht durch unmittelbar konkrete Anschauung und Tätigkeit; die dann einsetzende "Algebraisierung" der Schulmathematik bewirkt eine Abstraktion von direkter gegenständlicher Bedeutung und erschwert den Verstehensprozeß.

"Schüler empfinden diesen Übergang von Verständigung zu steifer Interaktion und schließlich zu bloßer verbaler Kommunikation auf Zeichenänderungstricks hin mit ihrem Lehrer ziemlich schmerzlich. Sie wollen verstehen und entwickeln bzw. verstärken unter Rückgriff auf subjektive Grundbestände und gesellschaftliche Einschätzungen von Mathematik hilfsweise allgemeinere Denkstrategien. Ein Beispiel hierfür ist der Trend zum hemmungslosen Generalisieren einmal gefundener Regeln oder Beispiele." (Andelfinger & Jahnke 1985, 81)

Das Problem in diesem Übergang liegt gewissermaßen auf "beiden Seiten". Die vorherrschende Tendenz einer unmittelbaren, empiristischen Bedeutungsauffassung in der Primarstufe und zu Beginn der Sekundarstufe I verschärft den eintretenden Bruch durch die zunehmende Abstraktion noch und kann diese in keinem Falle ersetzen. Demgegenüber muß stärker eine Bedeutungsvorstellung für mathematische

Begriffe entwickelt werden, nach der mathematische Begriffe nicht Gegenstände oder empirische Eigenschaften sondern **Beziehungen** zwischen Gegenständen modellieren (vgl. z.B. v. Harten u.a. 1986). Diese relationale bzw. funktionale Auffassung von mathematischen Begriffen sollte im Unterricht von Beginn an entwickelt werden, um die unfruchtbare Alternative zwischen empirisch-anschaulicher und formal-abstrakter Bedeutung im Unterricht überwinden zu können.

Im folgenden sollen anhand eines Vergleichs zur Einführung in die Stochastik in einem Erweiterungs- und zwei Grundkursen einige curriculare und didaktische Unterschiede analysiert werden. Bei diesem Vergleich interessiert auch, inwieweit sich die angesprochenen didaktischen Probleme im Verhältnis von empirisch-anschaulichen zu formal-abstrakten Aspekten des Stochastikunterrichts beispielhaft aufzeigen lassen. Es sollen nicht nur curriculare Differenzen zwischen den einzelnen Kursen dargestellt werden, sondern die beobachtbaren Unterschiede sollen auch, soweit dies möglich ist, als (indirekte) Hinweise interpretiert werden, daß für eine angemessene didaktische Bewertung der Unterrichtsreihen beider Kurse von einem "anderen" fachdidaktischen Verständnis des mathematischen Inhalts und seiner Vermittlung im Unterricht ausgegangen werden muß.

Der Unterricht wurde in drei Kursen (in einem Erweiterungs- und zwei Grundkursen) eines fünfzügigen 7. Jahrgangs in einer Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen durchgeführt. Der Erweiterungskurs umfaßte 23 Schüler, in den Grundkursen waren jeweils ca. 30 Schüler. Den Lehrern standen als Materialgrundlage neben ihren Schulbüchern die erste Fassung eines Handreichungstextes, der von uns erstellt worden war, zur Verfügung (vgl. v. Harten & Steinbring 1986).

Die Unterrichtsreihe startete zu Beginn eines neuen Schuljahres. Insgesamt wurde während ca. sechs Wochen Stochastikunterricht durchgeführt. Von den 20 Unterrichtsstunden (ohne den abschließenden Test samt seiner Vor- und Nachbereitung) wurden von uns in jedem Kurs fünf Unterrichtsstunden beobachtet und auf Tonband aufgezeichnet;

diese Stunden stehen fast vollständig in transkribierter Form zur Verfügung.

Neben den Beobachtungen wurden während der Beratungsgespräche mit den Lehrern in einer Liste die behandelten Begriffe und Regeln der Stochastik sowie die bearbeiteten Aufgaben für die gesamte Unterrichtsreihe zusammengetragen. Dies bildet die Materialgrundlage für die folgende vergleichende Analyse.

2. Vergleich der curricularen Elemente der Stochastikreihen in E–und G–Kursen

Für eine erste Gegenüberstellung der beobachteten Unterrichtsreihen ist es hilfreich, eine vergleichende Tabelle (siehe Tabelle 1) über die jeweils behandelten curricularen Bestandteile in den Kursen zu erstellen. Zudem vermittelt diese Übersicht einen Eindruck darüber, welche Inhalte und welchen Umfang die Unterrichtsreihen haben. Über die Auflistung der curricularen Bestandteile hinaus ist es für ein erstes Verständnis dieser Tabelle notwendig, zu den einzelnen Punkten (1–9) qualitative Anmerkungen zu machen, d.h. beobachtete Unterschiede in Einführung, Explikation und Gebrauch dieser Begrifflichkeiten darzustellen.

(1) Gegenstand der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die Diskussion des besonderen Gegenstandes der Wahrscheinlichkeitsrechnung, nämlich die Einführung des Zufallsexperimentes in Abgrenzung zu naturwissenschaftlichen bzw. deterministischen Experimenten, war unter den beteiligten Lehrern vereinbart worden. Sie entspricht der im Mathematikunterricht weit verbreiteten besonderen Motivierung der Stochastik und der spezifischen Deutung des Zufallscharakters ihres Gegenstandes. In den Kursen ist faktisch kein Unterschied, bezogen auf diesen Gesichtspunkt, festzustellen. Die Einführung des Zufallsexperiments geschah jeweils in engem Zusammenhang mit einem beispielhaften Experiment an einem Zufallsgerät.

Tabelle 1: Vergleichende Zusammenstellung der behandelten Begriffe und Inhalte in den drei Kursen

	Erweiterungskurs	Grundkurs 1	Grundkurs 2
1) Gegenstand der W.R.	Zufallsexperiment in Abgrenzung vom nat.wiss.Experiment	Zufallsexperiment in Abgrenzung vom nat.wiss.Experiment	Zufallsexperiment in Abgrenzung vom nat.wiss.Experiment
2) Beispielhafte Zufallsgeräte und Versuche	Münze, Schraubenmutter, Marionettenfuß, Oktdaeder, echter/schräger Würfel, Roulette, Urne, Skatspiel, Glücksrad, -automat, Jungen – Mädchengeburt	Münze, Reißzwecke, Schraubenmutter, Würfel, Spielball, Glücksrad, Oktaeder	Würfel, Münze, Urne, Skatspiel Geheimschrift, Glücksrad
3) elementare Terminologie der W.R.	– Ergebnis, Ergebnisraum – Ereignis, Elementarereignis – Sicheres, unmögliches, Gegen – Ereignis	– Ergebnis, Ergebnisraum – Elementareignis (im Beispiel eingeführt!)	– Ergebnis, Ergebnismenge
4) Wahrscheinlichkeitsbegriff	– als "stabilisierende" relative Häufigkeit ("Vorform" des emp.Gesetzes d.g.Zahlen) – Laplacesche W. als Spezialfall hiervon	– als "stabilisierende" Relative Häufigkeit ("Vorform" des emp.Gesetzes d.g.Zahlen) am Beispiel des Reißzwecken-Experiments – in Beispielform u.unabhängig als relativer Anteil	– als "stabilisierende" relative Häufigkeit ("Vorform") des emp.Gesetztes d.g.Zahlen) – Laplacesche W. beispielhaft u. unabhängig beim Glücksrad
5) Grundregeln der W.R.	$0 \leq P(A) = 1$, $P(\Omega) = 1$ $P(\{\}) = 0$, $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ Summe der W. aller Elementarereignisse = 1	– Summe der W. aller Äste im 1 – stufigen Baum = 1 (als Beispiel)	– "Vorform" der Addition von W. bei Laplaceschen Zufallsgeräten, nicht explizit als Regel!

Tabelle 1/Fortsetzung

	Erweiterungskurs	Grundkurs 1	Grundkurs 2
6) Diagramme der Wahrscheinlichkeitsrechnung	Strichliste/Tabelle Baumdiagramm (bis zu 4−stufig) − reduzierte Bäume − exakt beschriftet	Strichliste/Tabelle einfache Verteilungsform Baumdiagramm (bis 3−stufig) vollständige Bäume	Strichliste/Tabelle einfache Verteilungsform Säulendiagramm
7) Regeln der W.R.	Additions- und Multiplikationsregeln in Bäumen als explizite Merksätze	− Additionsregel im Baum durch Zusammenzählen von (neuen) Elementarereignissen − keine "echte" Multiplikation	
8) Bruchrechnung	Addition von Brüchen sowie Umwandlung von Brüchen in Dezimalzahlen: keine math. Schwierigkeiten bei Anwendung auf rel. Häufigkeit bzw. Wsch.	Addition von Brüchen sowie Umwandlung von Brüchen in Dezimalzahlen: große math.Schwierigkeiten in technischer und inhaltlicher Anwendung auf rel. Häufigkeit u. W., umfangreiche Wiederholungen	wie G−Kurs 1
9) Mengenlehre	als math. Darstellungsform für die elementare Terminologie der W.R.: explizit u.umfassend benutzt, ohne Probleme oder zusätzlichen Zeitaufwand	als math.Darstellungsform für die elementdare Terminologie der W.R.: wenig und nur in Aspekten genutzt, beim Beschriften der Baumdiagramme z.B. zu aufwendig	fast überhaupt nicht genutzt

(2) Beispielhafte Zufallsgeräte und Versuche

Im Vergleich fällt auf, daß im Erweiterungskurs etwa doppelt so viele Zufallsgeräte (ca. 12) als jeweils im Grundkurs (ca. 6) besprochen wurden. Jedoch ist es hier wichtig anzumerken, daß im E-Kurs von den Schülern nur zwei stochastische Experimentreihen tatsächlich durchgeführt wurden (eine im Unterricht und eine als Hausaufgabe), während die Schüler der G-Kurse jeweils sechs Experimente durchgeführt und ausgewertet haben (ca. jeweils vier im Unterricht und zwei zu Hause, mit denen schon im Unterricht begonnen wurde). Die Durchführung eines Experiments (ohne Auswertung) dauerte in den G-Kursen im Durchschnitt ca. 20 Minuten und erforderte hier mehr Zeit als im E-Kurs. Anstelle konkreter Experimente wurden im E-Kurs andere Zufallsgeräte entweder entsprechend ihren idealen Symmetrie-Bedingungen eingeführt, oder es wurden experimentelle Daten des jeweiligen Zufallsgeräts vom Lehrer vorgegeben.

(3) Elementare Terminologie der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die Begriffe: Ergebnis und Ergebnisraum bzw. Ergebnismenge (eines Zufallsexperiments) waren vereinbarungsgemäß für beide Kurse verpflichtend. Nur im E-Kurs wurden dann die Begriffe: Ereignis, Elementar-Ereignis, sichers, unmögliches Ereignis, Gegenereignis explizit eingeführt und als eigenständige mathematische Kennzeichnung formuliert. In beiden Grundkursen wurden darüber hinausgehende Grundbezeichnungen, wenn überhaupt nur implizit und in Beispielkontexten behandelt. Diese Bezeichnungen erhielten hier keine beispiel-unabhängige Bedeutung.

Der Unterschied im Ausmaß der Explikation von Grundbegriffen im E-Kurs einerseits und in G-Kursen andererseits ist ein wichtiges Unterscheidungsmerkmal und zeigt sich auch in den folgenden Punkten (4-9).

(4) Wahrscheinlichkeitsbegriff

Die Einführung und Definition von Wahrscheinlichkeit als sich "stabilisierender Limes" relativer Häufigkeiten war unter den beteiligten Lehrern vorher für alle Kurse vereinbart worden. Anhand eines Zufallsexperiments und seiner Auswertung wurden relative Häufigkeiten (umgewandelt in Dezimalzahlen) in ein Koordinatensystem eingetragen; die Auswertung mehrerer Versuche sollte den Stabilisierungseffekt deutlich machen. Inhaltlich handelt es sich hierbei um Intuitionen, wie sie mit dem empirischen Gesetz der großen Zahlen verbunden werden. Dieser Bedeutungs- und Vorstellungsrahmen von Wahrscheinlichkeiten machte in den Grundkursen große Schwierigkeiten. Auch im Erweiterungskurs war es nur möglich, über Wiederholungen und eine konsistente Beharrung auf diesem Standpunkt, den Wahrscheinlichkeitsbegriff auf diese Weise zu "definieren".

Unterschiede in den Kursen und damit auch spezifische Probleme im Verständnis eines so begründeten Wahrscheinlichkeitsbegriffs zeigten sich bei der Behandlung der Laplaceschen Wahrscheinlichkeit. Im E-Kurs wurde die Laplacesche Wahrscheinlichkeit lapidar als Spezialfall der "allgemeinen Definition" interpretiert (wenn auch später mit einer vereinfachten Berechnungsregel versehen).

In den G-Kursen mußten aufgrund von Verständnisschwierigkeiten zusätzlich zu dieser "Definition" eigenständige beispielhafte Bedeutungsaspekte der Laplaceschen Wahrscheinlichkeit besprochen werden. Im Grundkurs 1 wurde die relative Häufigkeit über das Reißzwekken-Experiment behandelt, und die Laplacesche Wahrscheinlichkeit in solchen Beispielen thematisiert, in denen gleichmögliche Fälle (aufgrund von Symmetrien) zur Verfügung standen. Im Grundkurs 2 wurde die Laplacesche Wahrscheinlichkeit am Beispiel des Glücksrads mit seinen anschaulich gegebenen Flächenanteilen thematisiert.

Während im E-Kurs die Laplacesche Wahrscheinlichkeit explizit auf die Definition über relative Häufigkeiten zurückgeführt wurde, wurde demgegenüber in beiden G-Kursen kein expliziter definitorischer Zusammenhang zwischen beiden Wahrscheinlichkeitsdefinitionen hergestellt.

(5) Grundregeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Explizit als eigenständige Merksätze wurden die Grundregeln der Wahrscheinlichkeit nur im E-Kurs eingeführt. Im G-Kurs 1 wurde eine

Vorform der Additionsregel von Wahrsheinlichkeiten im einstufigen Baum beispielhaft behandelt. Rechenregeln für einfache Wahrscheinlichkeiten sind im G-Kurs 2 überhaupt nicht thematisiert worden, wenn man einmal davon absieht, daß das Zusammenzählen der Wahrscheinlichkeiten der Elementar-Ereignisse, aus denen sich das in Frage stehende Ereignis "zusammensetzt", auch eine Form der Addition darstellt.

(6) Diagramme der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Für die Auswertung statistischer Experimente wurden Strichlisten und Tabellen in allen Kursen eingeführt. Ihre Nutzung mußte in den Grundkursen häufig diskutiert und korrigiert werden. Einfache Verteilungsdiagramme (Säulen-Diagramme bzw. Wahrscheinlichkeitsverteilungen in tabellarischer Form) wurden nur in den Grundkursen behandelt.

Das Baumdiagramm (bis zu vierstufigen Baumdiagrammen, sowie reduzierte Bäume und vollständig beschriftet) wurden im E-Kurs zu einem wichtigen Arbeitsmittel. Im Grundkurs 1 wurden Baumdiagramme (bis zu dreistufig und meist vollständige Bäume) als Beschreibungsmittel für Experimente benutzt. Sie dienten hier vor allem der ökonomischen Darstellung und zum Abzählen, jedoch nicht der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten. Im Grundkurs 2 wurden Baumdiagramme überhaupt nicht behandelt.

(7) Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Im E-Kurs wurden Additions- und Multiplikationsregeln in mehrstufigen Baumdiagrammen explizit als Merksätze formuliert und an verschiedenen Beispielen geübt. Im G-Kurs 1 wurde der Baum, wie beschrieben, nur im Rahmen von "Gleichwahrscheinlichkeiten" zum Abzählen der Wahrscheinlichkeit "neuer" Elementar-Ereignisse benutzt. Er wurde nicht für eine "echte" Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten eingesetzt.

Hilfreich für den Vergleich der Stochastikreihen ist auch die Präsenz von "bekanntem" Unterrichtsstoff, wie der Bruchrechnung und Mengenlehre, die für die Stochastik eine wichtige "Hilfsfunktion" haben.

(8) Bruchrechnung

Die Addition von Brüchen sowie die Umwandlung von Brüchen in Dezimalzahlen machten im E-Kurs keine großen mathematischen Schwierigkeiten bei der Anwendung auf relative Häufigkeiten bzw. auf Wahrscheinlichkeiten. Mögliche Besonderheiten des stochastischen Aspekts im Verhältnisbegriff (eine Vorstellung von relativer Häufigkeit als einer Zufallsgröße) wurden in diesem Kurs nicht thematisiert (vgl. Steinbring 1985 (b)).

In beiden Grundkursen verursachte die Bruchrechnung, d.h. die Addition von Brüchen und die Umwandlung von Brüchen in Dezimalzahlen große mathematische Schwierigkeiten sowohl in technischer Hinsicht als auch in inhaltlicher Anwendung auf relative Häufigkeiten. Hierzu waren umfangreiche Wiederholungen notwendig. An vielen Stellen zeigte sich, daß es den Schülern sehr schwerfiel, Wahrscheinlichkeiten als Brüche zu interpretieren.

(9) Mengenlehre

Als mathematische Darstellungsform für die elementare Terminologie und Begrifflichkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung wurde im E-Kurs die Mengenlehre explizit und auch relativ umfassend genutzt. Hierbei ergaben sich für die Schüler wenig Probleme oder zusätzlicher Zeitaufwand. Immer war es relativ schnell möglich, trotz manchmal komplizierter Bezeichnungskonventionen, z.B. das Baumdiagramm vollständig und exakt zu beschriften.

Demgegenüber war im Grundkurs 1 und Grundkurs 2 die Nutzung der Mengensprechweise kaum sinnvoll und wurde auch wenig vorangetrieben. So war z.B. das Beschriften eines Baumdiagrammes mit der "richtigen" Symbolik viel zu zeitaufwendig und dem eigentlichen Problemverständnis hinderlich.

Sieht man sich diesen ersten, quantitativen Vergleich zusammen mit den inhaltlichen Anmerkungen an, dann macht man die bekannten Feststellungen. In G-Kursen:

- wird quantitativ weniger "Stoff" durchgenommen
- wird mehr Zeit benötigt

- muß häufiger und intensiver wiederholt und eingeübt werden
- ist die mathematische Fachsprache und der sachlogische Zusammenhang nicht so explizit
- ist die "Übersetzung" in Fachtermini aufwendiger
- muß stärker mit Beispielen argumentiert werden
- werden eine größere Anzahl an stochastischen Experimenten tatsächlich durchgeführt und ausgewertet
- ist "alter" Unterrichtsstoff nicht sofort präsent

im Vergleich zu E-Kursen.

Auf diese und ähnliche Probleme des Stochastikunterrichts ist mehrfach hingewiesen worden (vgl. Andelfinger 1983, 1984, 1985; Hefendehl-Hebeker 1983). Der wichtigste beobachtbare Unterschied bei der Behandlung der Stochastik war die relativ weitgehende Explikation von Grundbegriffen und Regeln im E-Kurs gegenüber einer stärker beispielhaften Arbeitsweise in den G-Kursen.

Unterrichtsbeobachtungen und Gespräche mit den Lehrern brachten trotz dieses Unterschieds zum Ausdruck, daß sich die Lehrer der Grundkurse in ihrer Planung an einem "ausgedünnten" E-Kurs-Konzept orientierten. Dabei mußten stoffliche Einschränkungen von vornherein einkalkuliert und während der laufenden Unterrichtsreihe weitere Reduzierungen, Umstellungen und Wiederholungsphasen (insbesondere für die Bruchrechnung) in den G-Kursen vorgenommen werden. Demgegenüber konnte der E-Kurs sein geplantes Programm fast vollständig realisieren. (Diese Unterschiede zeigten sich auch in den jeweiligen Tests für E- und G-Kurse.)

Für einen möglichst breit angelegten Vergleich ist es nützlich, neben den quantitativen Unterschieden in der Behandlung curricularer Elemente auch qualitative Aspekte jeweiliger unterrichtlicher Vorgehensweisen und Lehrerauffassungen einzubeziehen. Eine Diskussion der Problematik von E-Kurs- bzw. G-Kurs-Konzeption, die sich ausschließlich auf die quantitativen Aspekte beschränkt, und G-Kurs-Reihen als verdünnte E-Kurse auffaßt, ist nicht hinreichend. Anhand von transkribierten Unterrichtsausschnitten soll im folgenden versucht werden, exemplarisch grundlegende Unterschiede in den Lehr-Lern-Prozessen der G-Kurse gegenüber dem E-Kurs darzustellen, die eine konzeptionelle "Umorientierung" für die unterrichtliche Arbeitsweise in den G-Kursen als notwendig erscheinen lassen. So hat man es in dem hier betrachteten E-Kurs z.B. eigentlich mit einer recht speziellen Auffassung und Bedeutung von Wahrscheinlichkeit zu tun, die in dieser "strikten" mathematischen Form für G-Kurse nicht hilfreich erscheint.

Die sich gerade in der Gegenüberstellung der G-Kurse zum E-Kurs deutlich zeigenden inhaltlichen Probleme, wie sie real unter den jeweiligen unterrichtlichen Bedingungen auftreten, sollen für uns nicht Anlaß sein, die Differenzen zwischen den Kurstypen zu verschärfen. Die Gegensätzlichkeiten in den Auffassungen und Durchführungskonzepten der Lehrer in G- und E-Kursen ermöglichen vor allem zusätzliche Einsichten in das schwierige didaktische Verhältnis von anschaulich-konkretem zu mathematisch-abstraktem Begriffsverständnis, und sie sollen uns dazu dienen, trotz unterschiedlicher curricularer Gewichtungen der beiden Kurstypen, einer einheitlichen, aber auch eigenständigen, konzeptionellen Auffassung für die Schulmathematik im allgemeinbildenden Unterricht näherzukommen. Die folgenden Unterrichtsausschnitte und ihre Analyse werden dies trotz ihres notwendigerweise exemplarischen und fallstudienartigen Charakters verdeutlichen.

3. Exemplarische Unterrichtsszenen – Unterschiede in der Begriffsbildung (in E- und G-Kursen)

Die Unterrichtsausschnitte (siehe Anhang) verstärken auf den ersten Blick den Eindruck, den wir schon durch den quantitativen Vergleich gewonnen haben. In den Grundkursen dauert die Bearbeitung fachlicher Inhalte "viel länger", dieser muß "ausführlicher" behandelt werden und insgesamt kommt "weniger Unterrichtsstoff" zur Sprache. Der Unterricht in den E-Kursen "kommt schneller voran" und es wird "mehr Stoff" bewältigt.

Zusätzlich fällt auf – und dies zeigte sich auch in den anderen Stunden –, daß der Lehrer im E-Kurs zeitweise längere und umfassende Erklärungen abgeben konnte und die Schülerantworten sich hier meist auf kurze Reaktionen zu Lehrerfragen beschränkten. In den G-Kursen halten sich Lehrer meist mit längeren fachlichen Erklärungen zurück; die Schüler werden aufgefordert, inhaltsbezogener zu antworten und Sachverhalte mehrfach und teilweise unterschiedlich zu begründen sowie zu wiederholen. Im E-Kurs werden die mathematischen Sachverhalte schon stark in fachlichen Termini abgehandelt, so daß kurze Antworten einzelner Schüler zur Erklärung auszureichen scheinen.

Diese Einschätzung läßt sich beispielhaft anhand einer vergleichenden Auszählung der Länge von Lehreräußerungen über eine Unterrichtsstunde hinweg verdeutlichen. Bei der Auszählung wurde eine Zeile im Transkript des Unterrichtsverlaufes als Einheit genommen. Dabei ergab sich, daß die sprachlichen Äußerungen des E-Kurs-Lehrers im Durchschnitt immer etwa doppelt so lang waren, wie die eines G-Kurs-Lehrers. Beispielhaft für zwei Unterrichtsstunden läßt sich die folgende (grobe) Verteilung in den Längen von Lehreräußerungen (G- und E-Kurs im Vergleich) ermitteln:

Tabelle 2: Länge von Lehreräußerungen

Lehreräußerungen	G-Kurs-Lehrer	E-Kurs-Lehrer
kurze Reaktionen (1 Zeile)	57 %	36 %
kurze inhaltliche Erläuterungen (2-3 Zeilen)	31 %	34 %
mittellange inhaltliche Erläuterungen (4-7 Zeilen)	10 %	20 %
längere inhaltliche Erläuterungen (mehr als 7 Zeilen)	1 %	10 %

Es wird deutlich, daß im E-Kurs längere fachliche Erläuterungen durch den Lehrer vorgenommen werden; der exemplarische Eindruck aus den Unterrichtsausschnitten wird also hier bestätigt.

Die Unterrichtsausschnitte sind auch ein beispielhafter Beleg für besondere didaktische Probleme in den einzelnen Kursen. Fachliche Schwierigkeiten in der Auseinandersetzung mit den Begriffen der Stochastik zeigen sich zunächst einmal deutlicher in den G-Kursen; Probleme der unterrichtlichen Organisation und Disziplin sind hier offensichtlicher als im E-Kurs. Verständnisprobleme der Schüler und ihre Ursachen bleiben im E-Kurs implizit und kommen nicht recht zum Vorschein, d.h. sie bleiben durch eine relativ explizite fachliche Darstellung und mathematische Termini verdeckt. Mißverständnisse und Fehlinterpretationen, wenn sie im E-Kurs entstehen, können scheinbar schnell und zügig durch entsprechend richtige fachliche Bezeichnungen ausgeräumt werden. In Grundkursen sind Lehrer demgegenüber — so könnte man sagen — mißtrauischer und fragen eher nach zusätzlichen Begründungen, um so ein richtiges Verständnis zu garantieren.

Im folgenden sollen die Unterrichtsausschnitte beispielhaft auf bestimmte unterrichtliche und didaktische Probleme hin analysiert werden, um so Hinweise auf jeweilige Besonderheiten im Unterrichtsverlauf der beiden Kurse zu erhalten. Die beiden Unterrichtsausschnitte zu den Grundkursen (siehe Ausschnitte Nr. 3 und 4) zeigen, daß im Unterricht der Grundkurse die stochastischen Experimente sowie konkrete Tätigkeiten der Schüler in gewissem Sinne ernster genommen werden müssen. Sie können hier nicht nur der Motivation und der Vorbereitung auf die mathematischen Strukturzusammenhänge dienen, sie müssen umfassend geplant, vorbereitet und durchgeführt werden; sie bilden eine wichtige, eigenständige Grundlage für das Verstehen stochastischer Begriffe. Für die Schüler bilden die eigenen experimentierenden Tätigkeiten sowie ihre Reflexion hierüber unverzichtbare Zugänge für mathematische Argumentationen und einfache Modellbildungen.

In beiden Unterrichtssituationen geht es darum, im Rahmen stochastischer Experimente zusätzliche inhaltliche Interpretationen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff zu gewinnen. In dem einen Ausschnitt (Nr. 3) sollen die Schüler im Anschluß an ein Experiment mit zwei Würfeln Begründungen für die unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten der auftretenden Augensummen liefern. In dem anderen Ausschnitt (Nr. 4) werden die Schüler aufgefordert, nach der Durchführung eines Experiments mit Glücksrädern — abhängig vom jeweiligen Flächenanteil — die zu erwartende Wahrscheinlichkeit zu schätzen. Neben vielen anderen Aspekten wird aus beiden Ausschnitten deutlich, daß die Schüler in den Grundkursen für eine angemessene Interpretation von Wahrscheinlichkeit zusätzlicher inhaltlicher Vorstellungen bedürfen, die neben einer strikten mathematischen Definition von Wahrscheinlichkeit explizite Bedeutungen ermöglichen.

Das folgende kurze Unterrichtsgespräch aus Ausschnitt 3 zeigt beispielhaft, wie konkrete Vorstellungen der Schüler zu den Augenanzahlen und -summen zweier Würfel in die mathematische Begründung eingehen.

11 L: *Was unterscheidet die 2 von der 7? ... Dirk!*

12 S: *Daß sie nicht so häufig fallen kann, weil eigentlich die Einsen sind schwer zu würfeln. Eigentlich die höheren Zahlen, die höheren wie 4, 5, 6 kommen eigentlich öfter.*

13 L: *Ja warum? ... Weil die Einsen schlechter zu würfeln sind? ... Alexandra, wiederholst Du noch einmal, was Du gesagt hast? ... Und das müssen sich jetzt alle genau anhören!*

14 S: *Die Nr. 7 und die Nr. 8 sind immer frei von irgendwelchen Sachen zusammengebaut. Die 7 aus der 4, ne 4 und ne 3 und ne 5 und ne 2 und ne 6 und ne 1, ...*

15 L: *Augenblick, vielleicht denken wir da noch einmal drüber nach ...*

Auch der Ausschnitt 4 verdeutlicht, daß ein Rückgriff auf konkrete Eigenschaften des (geometrischen) Glücksrads notwendig und hilfreich für Begründungen und Argumente der Schüler ist. Interessant ist es, im folgenden kurzen Gespräch zu sehen, wie ansatzweise das Glücksrad sowohl unter einer geometrisch-idealen als auch einer empirisch-experimentellen Perspektive betrachtet wird.

10 S: *Also, bei den 3, also gelb, blau und rot, da sind die Felder alle gleich groß. Deshalb sind die auch alle gleich. Das macht ja nichts, wenn das, wenn also das gelbe Feld mal einmal einen mehr hat.*

11 L: *Ja, Carsten!*

12 S: *Die sind doch zu nah aneinander, vielleicht sind die Ergebnisse 36 oder 37 und dann nur 26 oder 27 ...*

13 L: Da ist ein fast optimales Ergebnis ... Womit kann man denn die erwarteten Werte praktisch ausrechnen?
14 S: 100 geteilt durch 3.
15 L: Ja warum denn?
16 S: Weil es drei Möglichkeiten gibt.

Auch der im Unterrichtsverlauf der G-Kurse zu beobachtende zeitliche Aufwand bei der Durchführung der Experimente mit ihren Anforderungen nach konkret-inhaltlichen Vorstellungen, sowie die sich daran anschließenden Schüler-Lehrer-Diskussionen zu den experimentellen Resultaten, mit der Intention eine einfache mathematischen Begrüdung zu entwickeln, sind eine weitere Bestätigung dafür, daß der Wahrscheinlichkeitsbegriff in diesen Kursen stärker im Rahmen inhaltlicher Kontexte dargestellt werden muß und wird. Der Wahrscheinlichkeitsbegriff muß vielfältig inhaltlich repräsentierbar sein, und darauf bezogene Tätigkeiten des Experimentierens und Analysierens müssen vom Schüler selbst durchgeführt und vorstellbar sein.

Der Ausschnitt aus dem E-Kurs (vgl. Nr. 1) zeigt demgegenüber, mit welcher relativen Striktheit und Konsequenz der Wahrscheinlichkeitsbegriff im Unterricht über die relativen Häufigkeiten und einer ersten Vorstellung vom empirischen Gesetz der großen Zahlen eingeführt wird. Auch wenn sich hier und da einige Verständnisschwierigkeiten zeigen, so gewinnt man insgesamt doch den Eindruck, daß die Schüler diese fachlich eingeschränkte Definition von Wahrscheinlichkeit akzeptieren. Für die Schüler geht es hier vor allem darum, einen fachlichen Zusammenhang zu lernen und weniger um das Problem, diesen fachlichen Zusammenhang auch inhaltlich bedeutungsvoll verstehen zu können.

Die Intention einer strikten Zurückführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs auf eine mathematisch eindeutige Definition und damit die Ausblendung gegenständlicher und expliziter Bedeutungsaspekte dieses Begriffs zeigen sich in den Äußerungen des Lehrers, der immer wieder betont, daß "die Wahrscheinlichkeit eine fest Maßzahl ist", daß sie "eine ideale Maßzahl" darstellt, auf die man sich "einigt", mit der man "rechnen kann".

Diese auf eine mathematisch "saubere" Definition zielende Interpretation der Wahrscheinlichkeit formuliert der Lehrer im Unterrichtsgespräch (Ausschnitt 1) beispielhaft folgendermaßen.

15 L: ... Das war die relative Häufigkeit, aber was wollen wir jetzt als Wahrscheinlichkeit bezeichnen?
Ich glaube, das ist eben schon mal angeklungen .. Jörg!
16 S: Das ist dieser Idealwert.
17 L: Genau! Dieser Idealwert! Wir hatten gesagt: diese Maßzahl, die sich nach sehr vielen Versuchen ergibt, das soll gerade unsere Wahrscheinlichkeit sein. Denn wir haben festgestellt, es ist ja unheimlich blöde, wenn wir mit ständig wechselnden Werten arbeiten müssen. Z.B. der relativen Häufigkeit nach 5 Versuchen, nach 50 Versuchen, nach 200 Versuchen, nach 500 Versuchen oder gar 10.000 Versuchen, es ergibt sich immer ein anderer Wert, wenigstens leicht veränderte Werte. Und so hatten wir gesagt, wenn wir vernünftig arbeiten wollen, umgehen wollen mit diesen Sachen, dann müssen wir mit so einem idealisierten Modell arbeiten, ja, wo wir unsere Idealzahl, unsere Maßzahl, die wir hier gewinnen können als Wahrscheinlichkeit interpretieren. Wir hatten auch gleich eine Bezeichnung dafür ..
Wir hatten dann verschiedene Wahrscheinlichkeiten schon ermittelt. Die Wahrscheinlichkeit beim Münzwurf für das Ergebnis Wappen.
18 S: 0,5 eh, ja 0,5!
19 L: Genau, 0,5. Oder wenn wir das als Bruch aufschreiben?
20 S: 1/2
21 L: Oder 5/10 ...

Die in der Wahrscheinlichkeit liegende begriffliche "Offenheit" als Zufallsgröße und seine verschiedenen mathematischen Repräsentationen (in Form relativer Häufigkeiten, relativer Anteile usw., vgl. Steinbring 1985 (b)) werden zugunsten einer scheinbar sauberen mathematischen Definition zurückgestellt. Gute Klassen, diesen Eindruck könnte man gewinnen, kommen mit solch' einer fachlogischen Inhaltsauffassung aus, die sich vor allem präziser Begriffe und mathematischer Zusammenhänge bedient. Dahinter liegende inhaltliche Bedeutungen und Vorstellungen werden häufig nicht thematisiert. Wie schon angemerkt werden zudem Schwierigkeiten, falls sie überhaupt erkennbar werden, schnell durch fachliche Termini und Regeln überdeckt.

In welcher Weise die "Auflösung" von Schwierigkeiten im E-Kurs beispielhaft vonstatten geht, zeigt der zweite Unterrichtsausschnitt (vgl. Nr. 2). Hier geht es um die Einführung der Multiplikationsregel im zweistufigen Baumdiagramm. Im Unterrichtsverlauf wird die Frage aufgeworfen, warum sich beim doppelten Münzwurf im Baumdiagramm als Wahrscheinlichkeit 1/4 ergibt. Der Lehrer will auf die Multiplikation der Grundwahrscheinlichkeiten hinaus.

5 L: *Ja, lassen wir dieses hier erst mal weg. Schauen wir uns das da oben an. Du hast gerade gesagt, beim ersten Mal haben wir festgestellt, die Wahrscheinlichkeit, eine Zahl zu erhalten, ist 1/2. Richtig?*
6 S: *Ja*
7 L: *Und wenn wir dann noch mal Zahl werfen, ist die Wahrscheinlichkeit, eine Zahl zu werfen, wieder 1/2. Insgesamt aber sind das 1/4. Michael!*
8 S: *Vielleicht müssen wir die beiden Wahrscheinlichkeiten da, eh, plusnehmen.*
9 L: *Plusnehmen! 1/2 plus 1/2*
10 S: *.. 1/4, 2/4 ..*
11 L: *1/2 plus 1/2 gibt? Ich dreh Euch den Hals um!*
12 S: *1/1, 1! Ein Ganzes*
13 L: *okay*
14 S: *Ist klar. Hehe .*
15 L: *Aber, da war schon jemand ganz dicht dran! .*
16 S: *Ja, ich. Marion ..*
17 L: *Warum. Was passiert dann? ... Michael!*
18 S: *Jetzt kann man malnehmen. 1/2 mal 1/2 gibt .. 2/4*
19 L: *2/4 ?*
20 S: *... Mann, eh ... ach so ja ....*
21 L: *Prima, also . Wie sieht das bei den anderen aus?*
22 S: *. auch .*

23 L: *Auch so. Auch ein Viertel, auch ein Viertel, auch ein Viertel. Jedes Mal 1/2 mal 1/2. Wie würden wir denn beim zweiten vorgehen?*

Man stellt in dieser unterrichtlichen Interaktion fest, daß die Schüler sich offensichtlich keine inhaltliche Vorstellung vom dahinterliegenden Prozeß des zweistufigen Experiments machen können; angesichts der Struktur des Baumdiagramms und der hier eingetragenen Zahlen, fangen sie an zu raten. Da die Addition der Grundwahrscheinlichkeiten nicht zum gewünschten Resultat führt, kommt nur noch die Multiplikation dieser Zahlen in Frage. Mit der Multiplikationsregel als solcher sind die Schüler auch im folgenden zufrieden. Es wird nicht weiter thematisiert, warum aus inhaltlichen Gründen die Wahrscheinlichkeiten multipliziert werden müssen. Es reicht als Erklärung, daß mit der Multiplikation das gewünschte und vorher bekannte Ergebnis von 1/4 erreicht wird. Man hat eine mathematische Regel gefunden, die funktioniert; warum sie funktioniert, wird dabei nicht gefragt.

Diese Sichtweise von Schülern, daß man den "Mechanismus", der wie eine Regel funktioniert, kennen muß, ohne nach einer möglichen inhaltlichen Begründung hierfür zu fragen, ist im Unterricht immer wieder beobachtbar. So geben sich die meisten Schüler z.B. bei der schrittweisen Konstruktion des Pascalschen Zahlendreiecks durchaus mit der Merkregel zufrieden, daß sich ein neuer Zahlwert aus der Addition der "beiden darüberliegenden Werte" ergibt. Überlegungen für mögliche Gründe werden meist nicht als notwendig erachtet.

Trotz ihrer Kürze und Beispielhaftigkeit verdeutlichen die Unterrichtsausschnitte zum einen noch einmal die jeweiligen curricularen Schwierigkeiten und didaktischen Besonderheiten des Stochastikunterrichts in G- und E-Kursen. Im Hinblick auf das anfangs thematisierte schwierige Verhältnis von empirisch-anschaulichen zu abstrakt-kalkülmäßigen Aspekten mathematischen Wissens finden sich in den Ausschnitten für die vergleichende Bewertung zwischen E- und G-Kursen zusätzliche Hinweise. Die Art und Weise der Einführung bzw. Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffs ist hierfür ein Beispiel.

Im E-Kurs kann man die Intention erkennen, den Wahrscheinlichkeitsbegriff möglichst "unabhängig" von zu vielen inhaltlichen Bezügen mathematisch eindeutig und klar mit Hilfe einer tragfähigen umfassenden Definition einzuführen. Der Begründungs- und Argumentationsrahmen ist hier vor allem die mathematische Definition sowie strukturelle Gesichtspunkte in den Regeln und Rechenverfahren. Außermathematische Überlegungen werden kaum zur Begründung herangezogen. Man kann sagen, daß in der Unterrichtsreihe des E-Kurses der **Übergang** von konkret-anschaulichen Aspekten zu abstrakt-mathematischen Arbeitsweisen mehr oder weniger vollzogen wurde. Zu Beginn der Unterrichtsreihe wurde ein stochastisches Experiment konkret durchgeführt und ausgewertet; dies diente im weiteren Verlauf der Reihe als anschauliche Grundlage, auf der dann die mathematischen Definitionen, die mathematischen Beziehungen, Regeln und Kalküle in ihrer eigenen "Logik" entwickelt wurden.

Auch in den G-Kursen bestand zunächst die gleiche Intention, diesen Übergang von konkret-anschaulichen Experimentsituationen zu einer mathematisch-abstrakten Behandlung der Stochastik durchzuführen. Daß dies nur mit Einschränkungen und geringen inhaltlichen Ansprüchen möglich wäre, davon wurde in der Planung der Unterrichtsreihen für die G-Kurse ausgegangen. Der reale unterrichtliche Verlauf in den G-Kursen zeigte jedoch, daß auch unter den getroffenen einschränkenden Annahmen, dieser Übergang von anschaulichen empirischen zu abstrakten mathematischen Begriffsauffassungen nicht möglich war. So verdeutlichen die Ausschnitte beispielhaft, daß es eigentlich immer um die **Beziehung** zwischen gegenständlich-konkreten und mathematisch-formalen Aspekten des Wahrscheinlichkeitsbegriffs ging. Für die Entwicklung eines Verständnisses der Wahrscheinlichkeit war es wichtig, viele beispielhafte, konkrete Aspekte und Anwendungskontexte zu berücksichtigen und diese auch in realen Experimenten und einfachen Modellen zu untersuchen. Im Unterricht der G-Kurse war es nicht möglich, die Bedeutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs völlig von beispielhaften inhaltlichen Kontexten zu lösen und sie auf die mathematische Definition des Begriffs zu reduzieren.

Der im E-Kurs beobachtbare "Übergang" kann als ein empirischer Beleg dafür aufgefaßt werden, daß im Mathematikunterricht eine Tendenz der Identifizierung von Gegenstand und mathematischem Zeichen weit verbreitet ist. "Die Praxis der Mathematik, besonders in der Schule, wird ... zu einer Identifizierung von Zeichen und Bezeichnetem verführt oder, wenn man die dreifache Unterscheidung von Begriff, Zeichen und Gegenstand macht, die eigentlich notwendig wäre, zu einer Identifizierung von Zeichen und Gegenstand bei Vernachlässigung eines davon unabhängigen Begrifflichen." (Otte 1984, S. 19). Diese Identifizierung von Gegenstand und Zeichen, die Beschränkung der mathematischen Arbeitsweise auf den Kalkül und die Regeln ist in den G-Kursen durch die Verstehensprobleme der Schüler "verhindert" worden. Das Verhältnis von Gegenstand zu Zeichen mußte im Unterricht selbst behandelt werden.

Geht man wie wir davon aus, daß sich die spezifische Bedeutung stochastischer Begriffe nur in der Beziehung von realen beispielhaften Zufallssituationen und ihren mathematischen Modellierungen entwickeln läßt (vgl. Steinbring 1985 (a)), so könnte man sagen, daß trotz größerer unterrichtlicher Probleme in den G-Kursen, dort die Spezifik der Stochastik und des stochastischen Denkens mehr Berücksichtigung gefunden hat als im E-Kurs, wo die strukturelle Seite der Stochastik im Vordergrund stand.

4. Modularität vs. lineare Abfolge – Zum Selbstverständnis der Lehrer über die unterrichtliche Vorgehensweise

Sowohl die Unterrichtsbeobachtung als auch die Gespräche während und die Interviews am Ende der Unterrichtsreihe mit den beteiligten Lehrern brachten Aspekte ihrer impliziten Auffassungen zum Charakter der Schulmathematik zum Ausdruck. In der Tendenz sehen die meisten Lehrer die Schulmathematik als einen festen, geordneten Wissensbestand von Begriffen, Methoden, Regeln und Merksätzen. Diese Grundhaltung stimmt im wesentlichen mit der Darstellung überein, die Brown zu Lehrerauffassungen über die Natur der Mathematik gibt.

"First of all, there is the world view that asserts that in mathematics the establishment of truths is relatively easy, surely in comparison with fields that require worldly experience, like philosophy or literature. This is not to deny that there exist unsolved problems, nor to imply

that most people would not have difficulty in understanding higher level mathematics. Rather, it is to suggest that an appropriate level of intelligence, coupled with a well-developed sequence of mathematical experiences (the latter being harder to come by than the former), will enable one to understand and to solve problems with considerably more ease than is the case in the humanities.

Second, there is the world view that mathematics searches for generality and abstraction. Certainly, for pedagogical purposes, a great deal of mathematical experience is 'concrete' in nature. But there appears to be an assumption that such approaches to the curriculum are a function of the immaturity and lack of intelligence of students. If the clientèle were only clever enough, we could move rather quickly to the demonstration of isomorphic structures, and thus show the underlying unity of ostensibly different structures." (Brown 1985, 19)

Von ähnlichen Vorstellungen sind die Lehrer bei der Planung ihrer Unterrichtsreihen ausgegangen. Angezielt wurde – für E- und G-Kurse – die Stochastik in ihren mathematisch-strukturellen Beziehungen zu entwickeln, d.h. auf der Grundlage einer umfassenden Definition von Wahrscheinlichkeit die ersten einfachen Regeln und Verfahren der elementaren Stochastik in ihrer internen "Logik" darzustellen. Unterschiede in den Planungen der Lehrer wurden für die einzelnen Kurse vor allem darin gesehen, daß von dem zu vermittelnden fachlichen Wissensbestand in G-Kursen quantitativ weniger als in E-Kursen behandelt werden kann. Zur Differenzierung besteht im wesentlichen so etwas wie ein "Defizit-Modell". Das heißt, je schwächer ein Schüler in seinen Leistungen und Fähigkeiten ist, umso weniger wird er von dem Wissensbestand erwerben können, den etwa E-Kurs-Schüler normalerweise lernen.

Die interne begriffliche Konsistenz und Eindeutigkeit in der Darstellung mathematischen Wissens und der Bearbeitung von Aufgaben ist nach Meinung der Lehrer eine unverzichtbare Grundlage für die Entwicklung mathematischen Verständnisses beim Schüler. Dies bedeutet insbesondere, daß nach Ansicht der Lehrer allein die innere Struktur und der logische Zusammenhang die Bedeutung mathematischen Wissens erzeugt. So äußerte ein Lehrer im Abschluß-Interview, daß vor allem für die Schüler der G-Kurse der fachliche Aufbau sauber, logisch strukturiert und vollständig gegeben werden müsse. So müßten diese Schüler insbesondere auch schwierige und komplexere Schreibformen mathematischer Sachverhalte vollständig durchführen, weil nach seiner Meinung gerade die schwächeren Schüler über diese terminologische Vollständigkeit erst eine Grundlage für ein mathematisches Verständnis erlangen könnten. Erst der bessere Schüler, der diese Anforderungen beherrsche, dürfe später auf solche umfassenden Darstellungs- und Beschreibungsweisen verzichten. Der schwächere Schüler müsse zwar vielleicht mehr und sorgfältiger schreiben, habe dann aber auch mit größerer Wahrscheinlichkeit die Garantie, eine Aufgabe richtig zu lösen.

Diese Aussagen verdeutlichen noch einmal, daß mathematisches Verständnis und Verstehen allein in der Herstellung interner Zusammenhänge gesehen wird. Ein außermathematisches inhaltlich begründetes Verständnis wird nicht angesprochen.

Wie haben sich diese Auffassungen zur Mathematik und die damit verbundenen Intentionen für den Unterricht in der Einschätzung der Lehrer dann realisieren lassen? Für den E-Kurs kann man sagen, daß nach der Meinung des Lehrers die Planungen in der Unterrichtsreihe tatsächlich im wesentlichen verwirklicht wurden. Entsprechend der Vorstellung, daß die Mathematik einen "logisch geordneten" Wissensbestand darstellt, wurde der Unterricht gemäß dem schrittweise zu lernenden Wissen linear und konsekutiv aufgebaut. Für den Lehrer ergab sich somit eine "Übereinstimmung" zwischen seiner Auffassung zur Schulmathematik und der Realität des Unterrichtsverlaufs.

Demgegenüber ließen sich nach der Meinung beider Grundkurs-Lehrer in ihrem Unterricht die vorherigen Planungen und Vorstellungen nicht realisieren. Auftretende Schwierigkeiten betrafen insbesondere die Tatsache, daß für den G-Kurs-Schüler das Verständnis stochastischer Begriffe stark an reale Erfahrungen und Experimente gebunden war und der Übergang zu mathematischer Allgemeinheit und Abstraktion nicht so ohne weiteres durchgeführt werden konnte. So war es z.B.

nicht möglich, die Wahrscheinlichkeit einseitig auf eine formale Definition (nämlich als "Grenzwert" relativer Häufigkeiten) zurückzuführen. Die Verständnisschwierigkeiten der Grundkursschüler zwangen den Lehrer – so deren Einschätzung – immer wieder, zusätzliche Interpretationen, zusätzliche Vorstellungsmöglichkeiten und zusätzliche experimentelle Tätigkeiten und Verständnishintergründe mit einzubeziehen.

Diese Notwendigkeiten, trotz einer gegenüber dem E-Kurs-Konzept vorgenommenen quantitativen Reduzierung, den Lehr-Lern-Prozeß sehr stark in konkreten und experimentellen Beispielkontexten entwikkeln zu müssen, ergaben sich für die Lehrer nicht aus objektiven Bedingungen des stochastischen Fachinhalts; sie wurden mehr oder weniger nur den unzureichenden Fähigkeiten der Schüler zugeschrieben (vgl. Zitat von Brown).

In der vergleichenden Unterrichtsbeobachtung ließ sich demgegenüber jedoch feststellen, daß sich in den G-Kursen häufig Lernsituationen ergaben, in denen für die Schüler gerade erst durch den konkreten Anwendungskontext ein wirkliches stochastisches Verständnis ermöglicht wurde, welches den Aspekt des Zufalls mit seiner mathematischen formalen Darstellung in eine Beziehung stellte. Und im E-Kurs gab es – wie oben dargestellt – Situationen, in denen mathematisches Verständnis auf der "formellen" Ebene verblieb und mögliche tieferliegende Verständnisprobleme durch Beziehungen und explizite Regeln "verdeckt" wurden. Der E-Kurs Lehrer sah die von ihm intendierten Unterrichtsplanungen im wesentlichen als erreicht an; die G-Kurs Lehrer konstatierten eine Kluft zwischen Planungen und Unterricht und bewerteten die umfangreiche Bezugnahme auf konkrete Beispiele, Anschauungen und Experimente im Unterricht eher als Mißerfolg.

Zum Unterrichtsverlauf einzelner Stunden sowie der gesamten Unterrichtsreihe ist zusammenfassend anzumerken, daß der E-Kurs sich relativ strikt an eine **fachliche Abfolge** und einen **systematischen Aufbau** für die Stochastik gehalten hat. Begriffe und Definitionen, sowie Sätze und Merkregeln bauten aufeinander relativ strikt auf. Ohne vorherige Zusammenhänge waren spätere Sachverhalte nicht mehr "direkt" verständlich.

Demgegenüber waren die Grundkurse, zum Teil wegen auftretender Schwierigkeiten und Umorientierungen gezwungen, insgesamt weniger sach-logisch bzw. systematisch voranzugehen. Es war auffallend, daß hier einzelne Stunden eigenständig und ohne große wechselseitige Abhängigkeit voneinander gestaltet werden mußten, und damit mathematische Zusammenhänge, Definitionen usw. "variabler", inhaltlich konkreter und weniger in einem systematischen Zusammenhang gehandhabt wurden.

Vereinfachend könnte man festhalten, daß der Unterricht im E-Kurs in eine zeitlich lineare und **fachlich systematische Abfolge** gebracht wurde, während der Unterrichtsablauf in Grundkursen stärker "**modularisiert**" war, d.h. häufiger einzelne Stoffabschnitte vermittelt wurden, die wechselweise wenig Voraussetzungen bedingten.

Diese Falluntersuchung hat exemplarisch deutlich gemacht, daß Lehrer häufig bestrebt sind, entsprechend ihrer Vorstellung von Mathematik den Unterrichtsablauf auch systematisch und folgerichtig anzuordnen. "Das zentrale Unterrichtskonzept vieler Mathematiklehrer ist die Idee eines fachlich stringenten, vollkommen konsequenten und formal eleganten Langzeit-Systems. In ihm mit den Schülern zusammen Probleme zu entwickeln und zu lösen ist ihre Wunschvorstellung." (Andelfinger & Jahnke 1985, 81) Ihrer Vorstellung nach ist diese Vorgehensweise eigentlich die einfachste Art des Lernens für die Schüler. Die Logik des fachlichen Inhalts soll die Grundlage für den Lernprozeß bilden. Abweichungen von diesem Vorgehen, Konkretisierungen sowie reale Situationskontexte, widersprechen nicht der prinzipiellen Aussage dieser "Lerntheorie" vieler Lehrer; sie ergeben sich aus den subjektiven Lernschwierigkeiten der Schüler. "Dementsprechend empfindet der Mathematiklehrer (aller Schulformen der Sekundarstufe I) seinen Unterricht primär als mühevolle und irgendwo unbefriedigende Kleinschreibung dieses Unterrichtskonzepts, ohne es aber grundsätzlich aufzugeben." (Andelfinger & Jahnke 1985, 82)

Die alltägliche Realität des Mathematikunterrichts steht jedoch im Widerspruch zu einer solchen "Lerntheorie". Lernen – und auch Lernen von Mathematik – erfordert die Einführung von modularen, relativ eigenständigen Elementen auf vielen Ebenen. Die explizite Einbeziehung von Modularität und Bereichsspezifität in unterrichtliche Prozesse stellt keine "automatische" Lösung für Lern- und Verstehensprobleme dar. Ihre Berücksichtigung ist zunächst eine weitere Schwierigkeit für den Unterricht. Daß sie jedoch notwendig und eine wichtige Voraussetzung für Verstehen ist, zeigen beispielhaft die hier vorgestellten unterschiedlichen Ausprägungen von realen mathematischen Unterrichtsreihen. In dieser Hinsicht ist im Vergleich zwischen E- und G-Kursen zum Ausdruck gekommen, daß für das Verständnis des Wahrscheinlichkeitsbegriffs eine Ausweitung der Bedeutungsvorstellungen sowie verschiedene beispielhafte Interpretationskontexte anzustreben sind und man sich nicht auf formalisierte oder logische Aspekte der Begriffsdefinition beschränken sollte. Die Beschränkung auf einen fachlich-systematischen Zusammenhang ist für viele Schüler keine Vereinfachung und Erleichterung, sondern eine Erschwerung, und sie verhindert vielen einen persönlichen Zugang zum Wissen und eine inhaltlich sinnvolle Bedeutung.

Literatur

Andelfinger, B. (1983). Umgehen mit dem Zufall – Ein Erfahrungsbericht aus dem Unterricht (Klasse 7, Gymnasium). Stochastik in der Schule, 3, 19–24.

Andelfinger, B. (1984). Zur Lehr-Lern-Situation im Mathematikunterricht der Klassen 5/6. ZDM, 2, 45–51.

Andelfinger, B. (1985). Didaktischer Informationsdienst Mathematik. Thema: Arithmetik, Algebra und Funktionen. Soest: LSW.

Andelfinger, B. & Jahnke, H.N. (1985). Nachwort. B. Andelfinger, H.N. Jahnke, H. Schmitt, & H. Steinbring, Verständnis und Verständigungsprobleme im Arithmetik- und Algebra-Unterricht der Sekundarstufe I (S.79–89). Occasional Paper 72. IDM, Bielefeld.

Brown, S.I. (1985). Problem-solving and teacher education: the humanism twixt models and muddles. In R. Morris (ed.), Studies in Mathematics Education, vol. 4, The Education of Secondary School Teachers of Mathematics (S.3–28). Paris: UNESCO.

Dörfler, W. & McLone, R.R. (1986). Mathematics as a school subject. In B. Christiansen, A.G. Howson & M. Otte (eds.), Perspectives on Mathematics Education (S.49–97). Dordrecht: Reidel.

v.Harten, G. et al. (1986). Funktionsbegriff und funktionales Denken. Köln: Aulis.

v.Harten, G. & Steinbring, H. (1986). Einführung in die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Stochastik in der Klassenstufe 5/6 (Handreichung für die Gesamtschule, Heft 19). Soest: LSW.

Hefendehl-Hebeker, L. (1983). Der Begriff "Ereignis" im Stochastikunterricht. In: Stochastik in der Schule, 2, 4–16.

Otte, M. (1984). Was ist Mathematik? Occasional Paper 43. Bielefeld: IDM.

Steinbring, H. (1985) (a). Mathematische Begriffe in didaktischen Situationen: Das Beispiel der Wahrscheinlichkeit. JMD, 6, 85–118.

Steinbring, (1985) (b). Dimensionen des Verhältnisbegriffs im Stochastikunterricht. mathematica didactica, 8, 1985, 217–238.

Ausschnitt 1

Erweiterungskurs Klasse 7

Wahrscheinlichkeit als sich "stabilisierende" relative Häufigkeit

Zu Beginn der Stunde wird die Interpretation von Wahrscheinlichkeit als sich "stabilisierende" relative Häufigkeit wiederholt, wie sie in der Stunde zuvor eingeführt und an Beispielen eingeübt wurde.

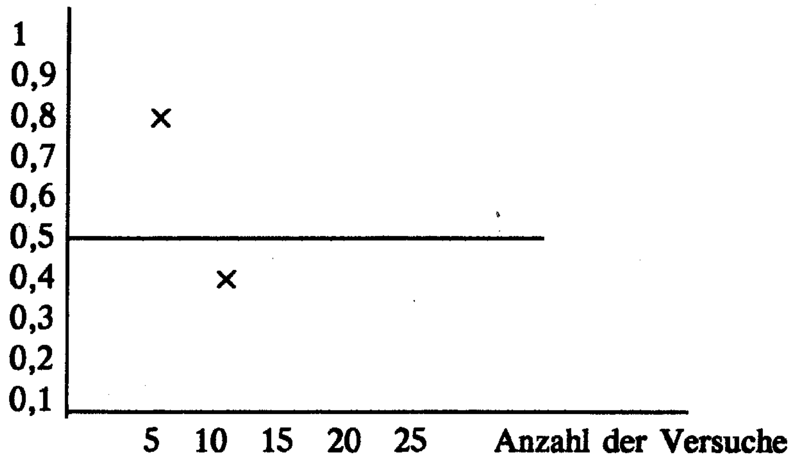
1 L: Guten Morgen:

2SS: Guten Moorgen ...

3 L: Wir wollen heute die wichtigsten Ergebnisse der letzten Stunde zusammenfassen, anschließend möchte ich Euch gerne eine neue Methode zeigen, wie man Wahrscheinlichkeit und verschiedene Experimente mit ihren Wahrscheinlichkeiten darstellen kann, und zum Abschluß der Stunde wollen wir dann versuchen, für unsere Experimente, die wir bereits kennen, diese Darstellung anzuwenden. ...
Fangen wir als erstes mit der Wiederholung an, wir haben in der letzten Stunde einen neuen Begriff kennengelernt, und zwar den Begriff der Wahrscheinlichkeit.
Wer kann uns noch einmal sagen, wie wir die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses definiert, vereinbart haben? ...
Erinnert Euch vielleicht noch an den Projektor an unsere Folie darauﬂiegen, ... und dann hatten wir uns aufgeschrieben, was wir darunter verstehen wollen.
Lars!

4 S: Also da war so ... hatten wir einen blauen Strich bei 0,5 eingezeichnet, und das war die relative Häufigkeit, und dann haben wir vereinbart, ... daß die relative Häufigkeit eh, ... diese Wahrscheinlichkeit ist.

5 L: Aha. Ich glaube, das müssen wir uns unbedingt nochmal etwas anschauen ... Ich habe noch einmal diese Folie hier mitgebracht, die wir in der letzten Stunde hatten ...
(legt diese auf)



Ich glaube, es kann jeder sehen.
Stimmt das, was der Lars gesagt hat, daß wir diesen blauen oder grünen Strich als relative Häufigkeit bezeichnet hatten? Und daß die relative Häufigkeit das gleiche ist, wie die Wahrscheinlichkeit?

6 S: Nein! ... Die Wahrscheinlichkeit ist nach dem ganzen ungefähr die Hälfte ... also bei 200 Würfen, wär das ... ging das nur bis 1.0, wär das das höchste gewesen, was überhaupt erreicht werden konnte, und bei 0,5 war genau die Mitte ...

7 L: Hmh ja

8 S: Die Mitte ist kein ... nicht die relative Häufigkeit, die Häufigkeit ist, wie oft ein Ergebnis eintrifft.

9 L: Ja! Wollen wir uns nochmal klarmachen, was die relative Häufigkeit war. Und zwar wir hatten, ich hatte so eine Liste gemacht – kann ich Euch auch noch einmal zeigen – ... ich lege die nochmal drüber, da hatten wir uns die ersten 5 Versuche angesehen. Wie groß war die relative Häfuigkeit in 5 Versuchen? ... Michael?

10 S: 0,8 und 0,2

11 L: Genau! Zuerst 0,8 war die relative Häufigkeit des Ereignisses, deshalb hab ich diesen Punkt hier ganz oben hingemacht, der so abstrus in der Gegend lag ... Und nach 10 Versuchen, wie sah das da aus? ... Frank?

12 S: Dann fiel die relative Häufigkeit auf 0,4 ...

13 L: Richtig! Dann lag das mit mal hier unten. Also ein ganz schöner Sprung. Und dann ging sie wieder hoch ... Ja und was passierte dann mit den relativen Häufigkeiten, wenn wir viele Versuche gemachte hatten?

14 S: Das pendelte sich richtig ein, eh, um die, eh um das Ideal ... um den Idealpunkt.

15 L: Richtig, wir hatten so einen Idealwurf bei unserem Münzwurf festgestellt und hatten schon erwartet, daß in etwa der Hälfte der Fälle Wappen und in etwa der Hälfte der Fälle Zahl eintreten würde. Und wir hatten dann festgestellt, wenn wir nur ein paar Würfe machen, muß das nicht gleich Halbe–Halbe sein, Wappen und Zahl, das kann also ganz schön abweichen ... wie wir hier ganz deutlich sehen konnten, und dann hier auch noch, ist eine richtige Zacke drin.

Wenn wir aber sehr viele Versuche machen, dann pendelt das sich um einen bestimmten Wert ein; bei unserem Versuch mit Wappen und Zahl, unserer Münze hatten wir festgestellt um den Wert 1/2. Das war die relative Häufigkeit, aber was wollen wir jetzt als Wahrscheinlichkeit bezeichnen?

....

Ich glaube, das ist eben schon mal angeklungen .. Jörg!

16 S: Das ist dieser Idealwert.

17 L: Genau! Dieser Idealwert! Wir hatten gesagt: diese Maßzahl, die sich nach sehr vielen Versuchen ergibt, das soll gerade unsere Wahrscheinlichkeit sein. Denn wir haben festgestellt, es ist ja unheimlich blöde, wenn wir mit ständig wechselnden Werten arbeiten müssen. Z.B. der relativen Häufigkeit nach 5 Versuchen, nach 50 Versuchen, nach 200 Versuchen, nach 500 Versuchen oder gar 10.000 Versuchen, es ergibt sich immer ein anderer Wert, wenigstens leicht veränderte Werte. Und so hatten wir gesagt, wenn wir vernünftig arbeiten wollen, umgehen wollen mit diesen Sachen, dann müssen wir mit so einem idealisierten Modell arbeiten, ja, wo wir unsere Idealzahl, unsere Maßzahl, die wir hier gewinnen können als Wahrscheinlichkeit interpretieren. Wir hatten auch gleich eine Bezeichnung dafür ...

Wir hatten dann verschiedene Wahrscheinlichkeiten schon ermittelt. Die Wahrscheinlichkeit beim Münzwurf für das Ergebnis Wappen.

18 S: 0,5 eh, ja 0,5!

19 L: Genau, 0,5. Oder wenn wir das als Bruch aufschreiben?

20 S: 1/2

21 L: Oder 5/10 ...

22 S: Ja ..

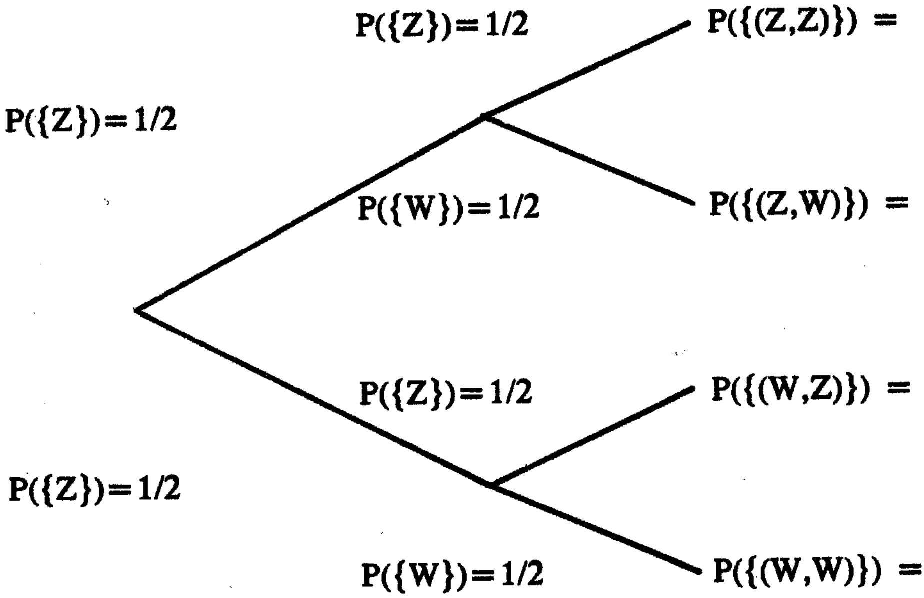
Ausschnitt 2

Erweiterungskurs Klasse 7

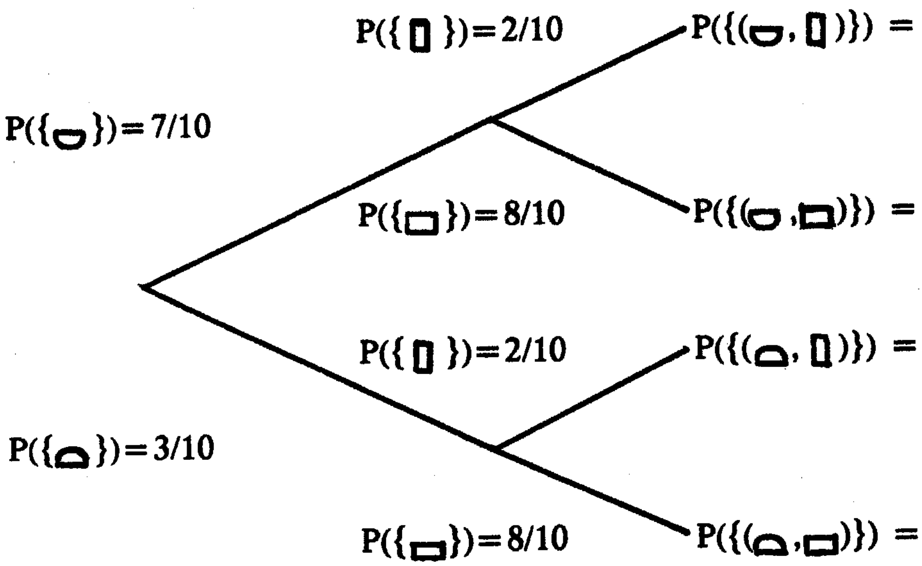
Einführung der Multiplikationsregel im 2-stufigen Baumdiagramm

Die Klasse kennt zusammengesetzte Zufallsexperimente und mehrstufige Baumdiagramme. Anhand eines 2-stufigen Baumdiagramms zum zweifachen Münzwurf und anhand des zusammengesetzten Zufallsexperiments: erst einen Marionettenfuß (Kugelabschnitt) und dann eine Schraubenmutter werfen, wird die Multiplikationsregel erörtert.
Auf Grund der Gleichmöglichkeit der (vier) Ereignisse beim doppelten Münzwurf erkennen die Schüler schnell, daß deren Wahrscheinlichkeit jeweils 1/4 ist.

Zweifacher Münzwurf



Experiment mit Marionettenfuß und Schraubenmutter



1 L: Gehen wir nochmal an das hier oben. Hier oben habt Ihr maßgeschneidert gesagt, da kommt überall ein Viertel. .. Hier ein Viertel, da ein Viertel, da ein Viertel, da ein Viertel. Was meint Ihr, gibt es eine Möglichkeit, aus diesem Baumdiagramm, das vielleicht schon abzulesen? ....

2 S: ... da sind ja 4 Äste, Ausläufer vom Baumdiagramm, aber damit kann man auch nicht immer rechnen, weil das ja verschiedene Wahrscheinlichkeiten gibt, z.B. 7/10, und 3/10 oder ...

3 L: aha. Der Frank hat als erstes also gesagt, das geht nicht, daß wir einfach nur die Äste zählen, denn hier haben wir 4 Äste, da haben wir Äste und daß wir dann einfach so sagen, okay, jedes müßte dann ein Viertel sein. Da scheint hier oben zu klappen. Denn da hat keiner Protest angemeldet, aber hier unten geht das sicherlich nicht, und der Frank hat uns gerade gesagt, vielleicht spielen die Wahrscheinlichkeiten noch eine Rolle, die wir vorher ermittelt haben. .. Kann man denn irgendwie anhand dieser Wahrscheinlichkeiten, die wir hier im Baumdiagramm angegeben haben, diese Wahrscheinlichkeiten hier ermitteln? .... Michael, paßt Du mit auf! Ich glaube nämlich, daß Du eben schon ganz dicht an der Lösung dran gewesen bist .. Noch einmal, wir haben hier hinten 1/4 stehen und hatten das als Wahrscheinlichkeiten dieses Ereignisses besprochen. . Und meine Frage ist jetzt, kann man nicht aus diesem Baumdiagramm, wir haben hier ja auch schon Wahrscheinlichkeiten drin, an denen wir uns hier gerade stören, die müssen da also irgendwie mit zusammenhängen. Kann man anhand dieser Wahrscheinlichkeiten diese Wahrscheinlichkeiten da hinten ermitteln? ....

4 S: eh, das kommt ganz drauf an, wenn man einem sagt, wie die Chancen stehen, weil Münzwurf, da gibt es ja ... 50 zu 50 und bei anderen ist die Wahrscheinlichkeit 80 zu 20, bei anderen 70 zu 30, bei ...

5 L: Ja, lassen wir dieses hier erst mal weg. Schauen wir uns das da oben an. Du hast gerade gesagt, beim ersten Mal haben wir festgestellt, die Wahrscheinlichkeit, eine Zahl zu erhalten, ist 1/2. Richtig?

6 S: Ja

7 L: Und wenn wir dann noch mal Zahl werfen, ist die Wahrscheinlichkeit, eine Zahl zu werfen, wieder 1/2. Insgesamt aber sind das 1/4. Michael!

8 S: Vielleicht müssen wir die beiden Wahrscheinlichkeiten da, eh, plusnehmen.

9 L: Plusnehmen! 1/2 plus 1/2

10 S: .. 1/4, 2/4 ..

11 L: 1/2 plus 1/2 gibt? Ich dreh Euch den Hals um!

12 S: 1/1, 1! Ein Ganzes

13 L: okay

14 S: Ist klar. Hehe .

15 L: Aber, da war schon jemand ganz dicht dran! .

16 S: Ja, ich. Marion ..

17 L: Warum. Was passiert dann? ... Michael!

18 S: Jetzt kann man malnehmen. 1/2 mal 1/2 gibt .. 2/4

19 L: 2/4 ?.

20 S: ... Mann, eh ... ach so ja ....

21 L: Prima, also . Wie sieht das bei den anderen aus?

22 S: . auch .

23 L: Auch so. Auch ein Viertel, auch ein Viertel, auch ein Viertel. Jedes Mal 1/2 mal 1/2. Wie würden wir denn beim zweiten vorgehen?

24 S: drei . huhu, schwer

25 L: Monika, was würdest Du denn beim ersten machen?

26 S: Auch malnehmen.

27 L: Ja, schreiben wir das doch mal hin. Ergebnis?

28 S: eehm

29 L: Wie nimmt man den noch mal 2 Brüche miteinander mal?

30 S: ..

31 L: Thomas!

32 S: Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner.

33 L: Ja, jetzt müßte das ja wohl jeder können. Wieviel sind denn 7/10 mal 2/10

34 S: .. gibt genau die ..

35 L: 7/10 mal 2/10 ?.....

36 S: 14/100

37 L:	Genau. 7 mal 2 gibt 14, 10 mal 10 gibt 100, also 14/100
38 S:	....
39 L:	Und das Nächste! ..... Monika!
40 S:	eh, 56/100.
41 L:	paß doch auf ..
42 S:	6/100
43 L:	Ja, da haben wir 3 mal 2, das gibt 6/100 ..
44 S:	.... 17/100 eh ..
45 L:	Würde das denn jetzt unseren Vorstellungen entsprechen. Ihr habt ja gesagt, daß es bestimmte Sachen gibt, die gleich häufig auftreten werden und andere, die wohl seltener auftreten werden. Könnte das denn passen, Frank?
46 S:	Das kommt genau aus .. ah ja.
47 L:	Ah, Du hast erst mal überprüft, ob das anständige Wahrscheinlichkeiten sind. Was muß man denn von anständigen Wahrscheinlichkeiten hier erwarten? Frank, erklärst Du das mal!
48 S:	Ja, die Summe darf nicht über 1 kommen.
49 L:	Ja.
50 S:	Und muß genau auf 1.
51 L:	Ja, darf nicht größer und nicht kleiner sein, also genau 1. Wollen wir mal durchgehen. 14/100 und 56/100 sind?
52 S:	.. 70
53 L:	70/100 und 6?
54 S:	76
55 L:	76 und 24
56 S:	..
57 L:	100/100. Also sind anständige Wahrscheinlichkeiten, das heißt, da scheint also was Sinnvolles herauszukommen.

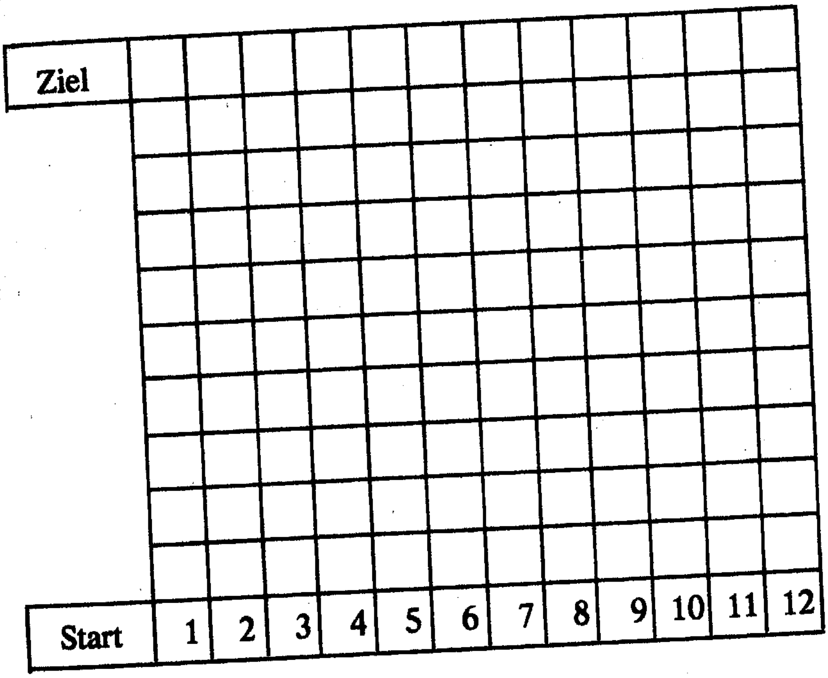
Ausschnitt 3

Grundkurs Klasse 7

Kombinationsmöglichkeiten der Augensumme zweier Würfel – Experimente und Diskussionen

Die Schüler spielen in ihren Tischgruppen folgendes Spiel:
Wähle Dir eine Zahl von 1 bis 12. Es wird mit zwei Würfeln gewor-

fen, und die Summe der obenliegenden Augenzahlen berechnet. Wenn Deine Zahl erscheint, darfst Du ein Feld vorrücken. Wer zuerst das Ziel erreicht hat, hat gewonnen.



Die Schüler haben ca. 20 Minuten dieses Spiel gespielt und sich ihre Ergebnisse in Strichlisten notiert. In der Diskussion dieser Spielergebnisse wird festgestellt, daß einige Zahlen häufiger, andere seltener aufgetreten sind. Diese Tatsache nimmt der Lehrer zum Anlaß, um nach möglichen Ursachen zu fragen.

1 L: Warum meinst Du, ist eine 5 oder eine 7 leichter als eine 2?
2 L: Wir haben doch vorhin festgestellt, daß eine 1 genauso leicht fällt wie eine 6 bei einem Würfel?
3 S: hm ... ich hab die 7 neunmal gesetzt und dann gewonnen.
4 L: Ja, Alexandra!
5 S: ... die Ursachen sind, weil die 7 aus 'ner 4 und 3 aufgebaut ist und die 1 geht überhaupt nicht.
6 L: mhm .. Das wollen wir gleich nochmal wiederholen, was Alexandra gesagt hat, das ist sehr wichtig. Was unterscheidet die 2 bei zwei Würfeln von der 7?

7 S: Das ist meiner
8 S: ist er nicht, ist er nicht.
9 S: Doch, das ist meiner.
10 L: Willi! Willi!
11 L: Was unterscheidet die 2 von der 7? ... Dirk!
12 S: Daß sie nicht so häufig fallen kann, weil eigentlich die Einsen sind schwer zu würfeln. Eigentlich die höheren Zahlen, die höheren wie 4, 5, 6 kommen eigentlich öfter.
13 L: Ja warum? ... Weil die Einsen schlechter zu würfeln sind? ... Alexandra, wiederholst Du noch einmal, was Du gesagt hast? ... Und das müssen sich jetzt alle genau anhören!
14 S: Die Nr. 7 und die Nr. 8 sind immer frei von irgendwelchen Sachen zusammengebaut. Die 7 aus der 4, ne 4 und ne 3 und ne 5 und ne 2 und ne 6 und ne 1, ...
15 L: Augenblick, vielleicht denken wir da noch einmal drüber nach ...

Gong, Ende der Stunde.

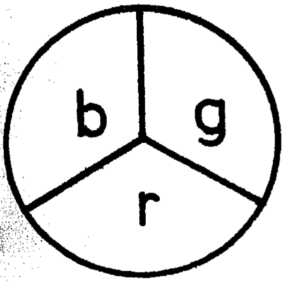
Ausschnitt 4

Grundkurs Klasse 7

Wahrscheinlichkeit als Flächenanteil – Experimente und Diskussion

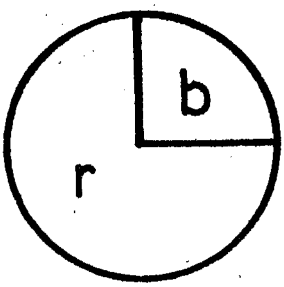
Die Schüler haben zu Beginn der Stunde die Aufgaben bekommen, in ihren Tischgruppen jeweils eins von zwei Glücksrädern zu testen und die Ergebnisse aus 100 Versuchen in eine Tabelle einzutragen.
Die Schüler experimentieren ca. 20 Minuten, der Lehrer geht von Tischgruppe zu Tischgruppe, gibt Hinweise zur Strichliste und erklärt wiederholt in den Gruppen, wie man die relative Häufigkeit ausrechnet und Brüche in Dezimalzahlen umwandelt.

Die Gruppenarbeit wird beendet, die Ergebnisse der Gruppen werden vom Lehrer abgefragt und auf einer Folie notiert.



I

Ergebnis	Häufigkeit	rel. Häufigkeit
gelb		
blau		
rot		
Summe		



II

Ergebnis	Häufigkeit	rel. Häufigkeit
rot		
blau		
Summe		

1 L: So, dann möchte ich mal hier ein Beispiel für Glücksrad Nr. 1 haben. Stephan, da hinten.

2 S: 34 oder? ... 33, nochmal 33.

3 L: ... ohne daß man jetzt anfängt, hier zu rechnen, was schätzt Ihr, was hier unten rauskommt, bei Glücksrad 2. Die Leute, die das 2. hatten. Oliver, was meinst Du?

4 S: mhm ...

5 L: So. Jetzt vergleicht mal bitte die beiden Sachen hier. Glücksrad 1 und Glücksrad 2. Nehmt mal Stellung zu den Ergebnissen, die dabei rausgekommen sind, ... zu den Häufigkeiten. Erstaunt Euch das? ... Michael!

6 S: Also bei Glücksrad 1, ist also ... muß herauskommen. Das sind ja drei verschiedene Farben und also, ... da waren ja die drei Möglichkeiten und ...

7 L: Ja, ... weiter, Stephan!

8 S: Also bei Glücksrad Nr. 1, da sind die 3 Felder, also, alle gleich groß ... und deshalb würde das Ergebnis auch .. stimmen.

9 L: Prima Stehphan! .. Das hast Du jetzt wieder nicht mitgekriegt, Guido! ...
Jetzt ist die Bemerkung, die wirklich gut war, ein bißchen untergegangen ... Mußt Du nochmal wiederholen ... ja, dann Antonia nochmal.

10 S: Also, bei den 3, also gelb, blau und rot, da sind die Felder alle gleich groß. Deshalb sind die auch alle gleich. Das macht ja nichts, wenn das, wenn also das gelbe Feld mal einmal einen mehr hat.

11 L: Ja, Carsten!

12 S: Die sind doch zu nah aneinander, vielleicht sind die Ergebnisse 36 oder 37 und dann nur 26 oder 27 ...

13 L: Da ist ein fast optimales Ergebnis ... Womit kann man denn die erwarteten Werte praktisch ausrechnen?

14 S: 100 geteilt durch 3.

15 L: Ja warum denn?

16 S: Weil es drei Möglichkeiten gibt.

17 L: Wir hatten in der letzten Stunde einen Begriff dafür, oder in der vorletzten Stunde .... Da war ein neuer Begriff eingeführt worden ..

18 S: Ja? ... in der letzten Stunde?

19 L: Der schwirrt hier schon die ganze Zeit durch die Gegend. Es ist der Begriff der Wahrscheinlichkeit ... Ihr könnt jetzt alle, glaub ich, sagen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist beim ersten Glücksrad, daß gelb kommt? ... Oliver!

20 S: fifty–fifty nehme ich an
21 L: Rad 1 ist, fifty–fifty? Also los!
22 S: Ach nein!
23 L: Also: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß gelb kommt?
24 S: 3 Drittel ... ein Drittel!
25 L: Ganz laut!
26 S: Ein Drittel!

Kurze Zeit später werden die Ergebnisse beim zweiten Glücksrad diskutiert.

27 L: Dann frage ich nochmal ganz direkt, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß Rot kommt?
28 S: Dreiviertel .. Dreiviertel!
29 L: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß Blau kommt?
30 S: Ein Viertel ... ein Viertel!
31 L: So, wenn man das weiß, dann hätte man schon wieder ne Vorhersage machen können über das Experiment ... Carsten!
32 S: .. Dreiviertel Rot und ein Blau
33 L: und rechnerisch, im Idealfall, wieviel Rote hätten denn da sein müssen?
34 S: Dreiviertel eh 75, 80 so!
35 L: Bitte?
36 S: 60!
37 L: Was?
38 S: 75!
39 L: OK und wieviel Blaue hätten es sein müssen?
40 S: 25!
41 L: Nochmal!
42 S: 25
43 L: OK und wie kann man die Abweichung da erklären, daß es nur 23 sind? ....
44 S: Zufall! Zufall! ... Zufall!