Heinz Steinbring

Zur Natur des mathematischen Wissens in der Unterrichtspraxis des Lehrers

In: Mathematica didactica, 10 (1987)
S. 183-198

mathematica didactica 10, 183 1987

ZUR NATUR DES MATHEMATISCHEN WISSENS IN DER UNTERRICHTSPRAXIS DES LEHRERS

von

Heinz Steinbring **

Universität Bielefeld

Zusammenfassung:

Aus einer epistemologischen Perspektive versucht der Beitrag ein zentrales Problem zur Wissensauffassung in mathematischen Lehr-Lern-Prozessen zu analysieren. Anhand eines kurzen Unterrichtsausschnitts wird beispielhaft die Notwendigkeit einer theoretischen Charakterisierung mathematischen Wissens für den Unterricht erläutert. Insbesondere wird das Problem einer sich selbst verstärkenden Zirkularität der Unterrichtspraxis diskutiert: eine wachsende Entleerung der theoretischen Begriffsbedeutung durch die Zunahme methodischer Vereinfachungen.

Abstract

From an epistemological point of view the paper tries to analyse a central problem of knowledge conception in mathematical teaching-learning-processes. With the help of a short lesson transcript the necessity of a theoretical characterization for mathematical knowledge is shown. In particualr the problem of a self reinforcing vicious circle in the teaching practice is discussed: an increasing evacuation of the theoretical significa-tion of concepts by augmentation of methodological simplifica-tions.

---

* Beitrag auf dem deutsch-französischen Symposium zur Mathematikdidaktik in Luminy, Marseille, 16.-21.11.1986

**Anschrift des Verfassers:
Dr. H. Steinbring
Universität Bielefeld, Institut für Didaktik der Mathematik
Postfach 8640, 4800 Bielefeld 1

1. Einleitung: Welches "Wissen" braucht der Mathematiklehrer?

Für die "Beziehungen zwischen mathematikdidaktischer Forschung und der beruflichen Praxis des Mathematiklehrers" ist die Frage nach der Art des Wissens, welches der Lehrer benötigt, von zentraler Bedeutung. Worin unterscheidet sich das Wissen der Praktiker von dem Wissen, das in der Forschung untersucht und erarbeitet wird? Läßt sich zudem mit Hilfe einer genaueren Unterscheidung jeweiliger Typen von Wissen das Verhältnis von Theorie und Praxis im Bereich didaktischer Arbeit besser verstehen?

Für seinen alltäglichen Unterricht - so die weitverbreitete Auffassung - braucht der Lehrer in erster Linie umfassendes praktisches Wissen. Und tatsächlich sind zur Bewältigung der vielfältigen Anforderungen aus der Unterrichtspraxis eigene Erfahrungen, unterrichtliche Routinen und praktisches Wissen unerläßlich. Diese Unterrichtspraxis umfaßt eine so große Komplexität von unterrichtsorganisatorischen, sozialen, pädagogischen, fachlichen, didaktischen sowie epistemologischen Aspekten, daß es zu ihrer "Beherrschung" auch vielfältiger Forschungen und theoretischer Analysen bedarf. Die theoretischen Ergebnisse der didaktischen Forschung können aber nicht unverändert Eingang in die Unterrichtspraxis finden; es wird erwartet, daß sie in praxis-wirksame Anleitungen transformiert werden.

Einerseits wird die unmittelbare Praxiswirksamkeit des Wissens für den Lehrer als entscheidendes Merkmal hervorgehoben. Zum anderen muß man jedoch die **Doppelrolle** des Wissens in der Lehrertätigkeit im Auge behalten. "Der zentrale Punkt in der Entwicklung der Lehrerprofession ist der Charakter des speziellen Wissens, über das sie verfügt. ... Das besondere strukturelle Problem der Lehrerprofession besteht gegenüber anderen Professionen darin, daß es keine 'Kernwissenschaft' gibt, in dem Sinne wie etwa die Rechtswissenschaft für den Rechtsanwalt, die Medizin für den praktischen Arzt eine Kernwissenschaft darstellt. Man darf nicht übersehen, daß wisenschaftliche Theorie sich auf zwei völlig verschiedene Weisen auf die Praxis des Mathematiklehrers bezieht: Einmal sind wissenschaftliche Erkenntnisse und Verfahren Gegenstand des Unterrichts, zum anderen bedürfen die Bedingungen und Formen ihrer Vermittlung der wissenschaftlichen Begründung." (Otte/Reiß 1977, S. 25/6)

Die Doppelrolle des Wissens wirft also die Frage danach auf, in welcher Weise die Mathematik als **theoretisches** Wissen in der **Praxis** des Unterrichts vermittelt werden kann. Sind hierfür gute praktische Fragen und explizite Regeln allein ausreichend? Hiermit verbindet sich auch das Problem des Verhältnisses von wissenschaftlicher Mathematik zur Schulmathematik: Bedarf die im allgemeinbildenden Unterricht vermittelte Mathematik einer spezifischen theoretischen Perspektive, oder genügt es, die Schulmathematik hinsichtlich Umfang und Charakter als "Teilmenge" der wissenschaftlichen Mathematik zu verstehen? (vgl. Steinbring, 1985)

2. Wie entsteht im Unterrichtsverlauf neues Wissen? – Analyse einer Unterrichtsepisode

Der kurze Unterrichtsauschnitt "Die Einführung des Distributivgesetzes" (siehe Anlage) soll dazu dienen, beispielhaft die Art und Weise des interaktiven Umgangs mit neuem Wissen im Unterrichtsgespräch zu illustrieren. Unter einer epistemologischen Perspektive soll der Charakter des infragestehenden Wissens und die Art seiner Vermittlung analysiert werden. Der Ablauf dieser Episode läßt sich in 11 Phasen strukturieren.

1. Phase: *Präsentation eines Darstellungsmittels*

Das Diagramm des Rechtecks wird den Schülern vorgegeben.

2. Phase: *Entwicklung einer Fragestellung*

Länge und Breite des Rechtsecks werden als variable Größen, nämlich x und y, eingeführt. Inhaltlich anschauliche Vorstellungen, die hinter dem Rechteck-Diagramm und den Variablen stehen, sind ein Garten mit einem Zaun. Die Frage: "Wieviel Zaun muß ich kaufen?" führt in die 3. Phase.

3. Phase: *Bearbeitung der Fragestellung*

Die Schülerantworten verdeutlichen dem Lehrer, daß die gestellte Frage zu "abstrakt" war.

4. Phase: *Veränderung der Fragestellung: Konkretisierung*

In dieser Phase werden die Variablen durch konkrete Zahlen ersetzt, und das Rechteck wird zum Abbild für einen Garten erklärt.

5. Phase: *Bearbeitung der Fragestellung*

Die Ausgangsfrage kann durch Rechenoperationen mit konkreten Zahlen beantwortet werden.

6. Phase: *Veränderung der Fragestellung: Verallgemeinerung*

Die Zahlen werden wieder durch Variablen ersetzt.

7. Phase: *Bearbeitung der Fragestellung*

Die Interaktion zwischen Lehrer und Schülern führt über viele Zwischenschritte der Konkretisierung und Verallgemeinerung schließlich zu folgender "Mischform": 2(x+y) = 2x + 2y. Dieser Zusammenhang wird "Distributivgesetz" genannt.

8. Phase: *Veränderung der Fragestellung: Verallgemeinerung*

Auf der Grundlage der gewonnenen "Mischform" werden alle infragestehenden konkreten Zahlen durch die Variablen a, b und c ersetzt, und es wird die Frage nach dem "allgemeinen" Distributivgesetz gestellt.

9. Phase: "*Zwischenstück*"

Lehrer-Schüler-Gespräch unabhängig vom Unterrichtsproblem.

10. Phase: *Bearbeitung der Fragestellung*

Das Zwischenergebnis wird "verallgemeinert", indem die Zahl 2 durch die Variable c "ersetzt" wird. Nach "Umordnen" der Variablen erhält man das gesuchte Ergebnis: $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c)$.

11. Phase: "*Ausklang*"

Das Ergebnis wird "verfeinert" und vom Lehrer wird zusammenfassend betont, daß man das Distributivgesetz "rausgefunden" hat.

Auch dieses Transkript bietet - wie alle Ausschnitte realen Mathematikunterrichts - zunächsts Anlaß zu vielen kritischen Anmerkungen, zu gegensätzlichen Interpretationsweisen sowie zu Vorschlägen, mit völlig andersartigen methodischen Zugängen das gewählte fachliche Thema didaktisch angemessen im Unterricht zu behandeln.

Von einer relativ offenen geometrisch-anschaulichen Fragestellung führt der Verlauf des Unterrichts in den beschriebenen 11 Phasen über Konkretisierungen und anschließende Verallgemeinerungen, über Eingrenzungen der Fragestellungen und damit verbunden der Antwortmöglichkeiten sowie über das Ausschließen von Fehlern und Alternativen durch Gegenbeispiele, schließlich zu **dem** determinierten, eindeutigen Resultat.

Dieser Verlauf von einer offenen Ausganssituation zu dem intendierten, eindeutigen Ergebnis läßt sich mit Konzepten der Interaktions- und Kommunikationstheorie beschreiben. Man kann die Konzepte von "Routine und Zugzwang" (Voigt, 1984) an vielen Stellen zur Analyse heranziehen, man trifft auf "geometrische und algebraische Rahmungen" sowie ihre Modulation (vgl. Krummheuer, 1982), und man kann auch Merkmale des "Trichtermusters" entdekken, d.h. der "Handlungsverengung durch Antworterwartung" (vgl. Bauersfeld, 1978, S. 162). Die Lehrer-Schüler-Interaktion führt über Eingrenzung von Bedeutungen und Explizitmachen von Wissen zur "allgemeinen" Formel des Distributivgesetzes. Neben einer kommunikationstheoretischen Analyse sollte man den Ausschnitt auch unter einer epistomologischen Perspektive untersuchen. Welchen Status haben Begriffe und Mittel (der Darstellung und der Tätigkeit), wie verändert dieser sich im Verlauf der Interaktion und wie beeinflußt er den Lernprozeß?

In dem vorliegenden Ausschnitt besteht das **inhaltliche** Problem darin, von der Kenntnis des "Distributivgesetzes für konkrete Zahlen" zum allgemeinen "Distributivgesetz für Variablen" zu gelangen. Dazu bedient sich der Lehrer zunächst des Rechteckdiagramms mit variabler Breite und Länge. Die anfängliche Absicht, durch den Bezug auf das Diagramm die Variablen implizit als beliebige positive Größen geometrisch einzuführen und gleichzeitig eine geometrische "Anwendungssituation" für das Distributivgesetz zu geben, scheitert. In der Interaktion wird immer wieder eine unmittelbare Erklärung, eine Explizite Erläuterung durch die Reduktion auf konkrete Zahlen erzwungen. Das Diagramm wird zudem zum Abbild eines konkreten Gartens erklärt. Die immer wieder vorgenommene Erklärung durch Reduktion führt im Prinzip zu folgender Begründung für das "allgemeine" Distributivgesetz: Da das Distributivgesetz für konkrete Zahlen gilt, so gilt es auch für Buchstaben, die an die Stelle von konkreten Zahlen gesetzt werden. Das neue Wissen wird vollständig auf der Basis des alten erklärt.

Das neue Wissen - hier der Begriff der Variablen - ist zu neu, es entsteht in der Beziehung zwischen bekanntem und neuem Wissen eine Situation der Blockade (vgl. Chevallard, 1985, S. 67). Der Neuheitsgrad des Wissens muß vermindert werden. "En fait, la situation de blocage doit être diagnostiquée lorsque l'objet introduit, trop 'nouveau', suscitant conséquemment un taux d'échec trop élevé, est dénaturé (par divers procédés dont, notamment, l'algorithmisation) afin que soit atténué son caractère de 'nouveauté', et accentuée sa mise en continuité avec les connaissances 'anciennes'." (Chevallard, 1985, S. 67)

Die Bedeutungsreduktion durch "Algorithmisierung des Wissens" (Chevallard) verändert den epistemologischen Charakter der Begriffe. So wird das Diagramm des Rechtecks nur noch **methodisch** genutzt, es wird als Bild und nicht als Symbol gesehen (vgl. Jahnke, 1984, S. 35). Und der Variablenbegriff wird ausschließlich im Sinne der **Einsetzungsauffassung** und nicht auch im Sinne der **Gegenstandsauffassung** verstanden (vgl. Jahnke, 1978,S.182ff). Die Begriffe verlieren ihren **theoretischen** Charakter, sie erhalten unmittelbare **empirische** Bedeutung.

Die gute Absicht vieler Lehrer, das unbekannte mathematische Wissen den Schülern möglichst einfach darzustellen und direkt zu erklären, ja der Zwang in unterrichtlichen Interaktionen alles Wissen, alle Bedeutungen explizit zu machen, führt dazu, daß in der totalen Rückführung des neu zu erwerbenden Wissens auf schon bekanntes Wissen nichts Neues mehr gelernt werden kann. Die Tendenz der vollständigen Explizierung und Reifizierung des Wissens macht es unmöglich, im Unterricht wirklich neues Wissen zu erlernen. Diesen Prozeß kann man als sich selbst verstärkende **Zirkularität der Unterrichtspraxis** verstehen: einer wachsenden Entleerung der theoretischen Begriffsbedeutung durch die Zunahme methodischer Vereinfachungen.

Die im unterrichtlichen Interaktionsprozeß sich herausbildenden Intentionen, durch Vereinfachung und Elementarisierung sowie durch Beschränkung auf Formeln und Verfahren den explizierbaren Kern der Bedeutung herauszufinden, hat zur Konsequenz, daß mehr und mehr die Formel, das Verfahren für sich allein steht und kein umfassender Erklärungszusammenhang mehr vorhanden ist. Eine solche Form der Bedeutungsvermittlung findet man vor allem im Algebra-Unterricht. Hier stehen die Formeln, die mathematischen Gesetze in ihrer algebraischen Notierung am Ende eines solchen Erklärungsprozesses für sich allein. Sie können nicht mehr verstanden werden, sie müssen vom Schüler auswendig gelernt werden.

Wie kann man aber aus diesem Zirkel von zunehmender methodischer Vereinfachung und gleichzeitig abnehmender Begriffsbedeutung herauskommen? Offenbar nicht durch noch mehr methodische Maßnahmen und Rezepte! Man muß theoretische Orientierungen für die Praxis entwickeln, und zwar in der angesprochenen **Doppelrolle.** Es muß der spezifische theoretische Charakter der Schulmathematik erforscht werden, und da entwickelte theoretische Beschreibungskategorien in der Unterrichtspraxis häufig wieder zu bloßen methodischen Prinzipien erstarren, bedarf es gleichzeitig einer theoretischen Perspektive auf die Vermittlung theoretischer Ergebnisse in die Praxis, auf die Beziehungen zwischen mathematikdidaktischer Forschung und der beruflichen Praxis des Mathematiklehrers.

3. Der theoretische Charakter schulmathematischen Wissens – Ein Kernproblem in der Beziehung zwischen Forschung und Unterrichtspraxis

Aus epistemologischer Sicht verhindert im vorliegenden Unterrichtsausschnitt eine empiristische Wissensinterpretation zusammen mit der Vorstellung, die Bedeutung neuen Wissens sei aus bekannten Grundbegriffen vollständig herleitbar, die Entwicklung von tatsächlichem Begriffsverständnis. Hierzu ist eine andere Perspektive auf den epistemologischen Charakter mathematischen Wissens erforderlich.

Für den Gebrauch von Diagrammen und Visualisierungen im Unterricht bedeutet dies z.B., daß diese nicht einfach als methodische Mittel oder Bilder für konkrete Sachverhalte angesehen werden dürfen. Sie sollten als **Symbole** verstanden werden (vgl. Jahnke, 1984). Die Auffassung von Veranschaulichungen als Symbolen bedeutet vor allem, daß es bei Veranschaulichungen nicht so sehr auf die Wiedergabe empirischer Sachverhalte ankommt, sondern vielmehr die Möglichkeiten der Exploration von **Beziehungen** zwischen empirischen Dingen sowie die Veränderung dieser Beziehungen mit Hilfe einer geometrischen Darstellung in den Blick geraten sollten.

Eine so veränderte Sicht auf die Rolle vn Diagrammen eröffnet Möglichkeiten, den Variablenbegriff zu entwickeln. Der Variablenbegriff ist in der Mathematik der typische Begriff für den operativen Umgang mit dem Neuen und Unbekannten (vgl. v. Harten/Otte, 1986). Neu und unbekannt heißt nun nicht einfach, die Variable steht als Leerstelle für im Prinzip bekannte Zahlen, die nur im Augenblick unbekannt sind und noch berechnet werden müßten. Die Variablen sollen auch tatsächlich Unbekanntes operativ erschließbar machen, wie z.B. die negativen oder komplexen Zahlen. Und die hierfür benötigten Diagramme von Zahlenstrahl bzw. Gaußscher Zahlenebene stellen keine empiristischen Abbilder für diese neuen Zahlen dar, sie repräsentieren vielfältige, operative **Beziehungen** zur Entwicklung dieser Zahlen.

Der Kerngedanke einer veränderten Sicht auf den epistemologischen Charakter mathematischen Wissens besteht somit darin, daß mathematische Begriffe nicht empirische Dinge oder Eigenschaften der Realität widerspiegeln, sondern **Beziehungen** zwischen den Dingen. "For didactics ... it is obious that the didactical problem in its deeper sense, that is in the sense that it is necessary to work on it scientifically, is constituted by the very fact that concepts will reflect relationships, and not things. Analogously, we may state for the problem of the application of science that it will become a real problem only where the relationship between concept and application is no longer quasi self-evident, but where to establish such a relationship requires an independent effort." (Jahnke/Otte, 1981, S. 77/8)

Bezüglich des epistemologischen Problems, daß Begriffe Beziehungen repräsentieren, sind in der Didaktik eine Reihe von theoretischen Beschreibungskonzepten entwickelt worden. So stellt z.B. die **komplementäre** Auffassung mathematischer Begriffe (vgl. AG Mathematiklehrerbildung, 1981) einen analytischen Beschreibungsrahmen dar, um die Entwicklung verschiedener Begriffe der Schulmathematik in der Dialektik von Erkenntnisobjekt und Erkenntnissubjekt auszuarbeiten. In der Dialektik von "Werkzeug und Gegenstand" ist die Begriffskomplementarität auch ein Mittel zur didaktischen und psychologischen Analyse von realen Begriffsentwicklungen im Unterricht (vgl. Douady, 1984, und Vergnaud, 1984). Nicht nur auf seiten der didaktischen Forschung, auch für die didaktische Ausbildung der Lehrer sind solche epistemologischen Charakterisierungen mathematischer Begriffe notwendig (vgl. Vollrath, 1984). Die Übertragung didaktischer Forschungsergebnisse bzw. die Anwendung theoretischen Wissens in der Unterrichtspraxis (siehe Jahnke/Otte) versteht sich jedoch nicht von selbst, sie ist selbst ein theoretisches Problem. Die in der Lehrerbildung - insbesondere im Referendariat - anzutreffende Tendenz, theoretische Konzepte und Orientierungen zur Analyse und Beschreibung von Unterrichtsprozessen in explizite Regeln und Prinzipien zu verwandeln, beinhaltet ähnliche Probleme der Bedeutungsreduktion, wie sie im Unterrichtstranskript sichtbar werden.

Ein zentrales Charakteristikum theoretischen Wissens besteht darin, daß der Wissensinhalt und die Wissensbedeutung (z.B. eines Begriffs) nicht identisch mit der formalen Darstellung des Wissens bzw. der Definition des Begriffs ist. Es muß prinzipiell zwischen den Darstellungsmitteln für das Wissen und dem Wissen selbst unterschieden werden. Will man jedoch Wissen in Lehr/Lernprozessen vermitteln, so ist dieses immer an gewisse Darstellungsmittel und Mittel der Tätigkeit (für den Lernenden) gebunden. Dieses komplizierte Verhältnis zwischen Wissen und den Mitteln zur Darstellung und Tätigkeit bezogen auf das Wissen ist für den Mathematikunterricht und für die Anwendung theoretischen Wissens in der Lehrerbildung von roßer Bedeutung. (Seeger/Steinbring, 1986, S. 11ff)

Um Lehrern in der Aus- und Fortbildung die Notwendigkeit für eine theoretische und umfassende Wissensperspektive bewußt zu machen, ist z.B. die Analyse und Diskussion von Unterrichtstranskripten - ähnlich wie hier geschehen - äußerst hilfreich (vgl. Andelfinger/ Voigt, 1984, und v. Harten/Steinbring, 1986). Für eine konstruktive unterrichtliche Orientierung sind Vorschläge notwendig, die explizit das Verhältnis von Wissensbedeutung und Darstellungsformen des Wissens thematisieren, um so die Entwicklung von tatsächlichem Wissensverständnis in Gang zu setzen. Mit der Entwicklung des Konzepts "Aufgabensystem" und seiner Erprobung in Lehrerfortbildungen und kooperativer Materialentwicklung haben wir versucht, in exemplarischer Weise das Problem der Entwicklung von Darstellungsmitteln für die Vermittlung von theoretischem Wissen in die Unterrichtspraxis des Lehrers zu bearbeiten (vgl.v.Harten/ Steinbring, 1985, und Steinbring, 1986). Aufgabensysteme sollen z.B. die strikte linear-zeitliche Abfolge in der fachlichen Struktur des Wissens mindern und die im Unterricht notwendige "Gleichzeitigkeit" im Lernprozeß von Wissen erhöhen, ähnlich wie Chevallard dies für "Situationen zur Konstruktion mathematischer Begriffe" fordert. "La construction d'une théorie des situations adéquate suppose un changement de temporalité, ou plutôt la prise en compte du problème de l'articulation entre plusieurs temporalités non isomorphes." (Chevallard, 1985, S.88)

Die Tatsache, daß der fundamentale, theoretische Charakter mathematischen Wissens im realen Unterrichtsprozeß in indirekter Weise sichtbar wird, ist im Kern der Grund dafür, daß auch die Beziehung zwischen der didaktischen Forschung und der Unterrichtspraxis des Lehrers theoretischer Natur ist. Es gibt in dieser Beziehung nicht einfach auf der einen Seite ausschließlich Theorie und auf der anderen ausschließlich Praxis. "We suggest, however, that intelligent reflection on the actual and potential relationships between researchers and practitioners may be better achieved by locating the nature of both theory and practice residing in each of these communities rather than by dichotomizing them." (Brown/Cooney, 1986, S.1) Dies hat zur Folge, daß es keine direkte Übertragung theoretischer Ergebnisse in die Unterrichtspraxis geben kann oder auch, daß es keine direkt einsetzbaren Materialien und Bücher für den Unterricht gibt. Der Austausch von Wissen zwischen Theorie und Praxis bedarf angemessener Darstellungsmittel für das Wissen und geeigneter Formen der Kooperation zwischen den Partnern, sei es zwischen Forscher und Lehrern, sei es zwischen Lehrer und Schülern. Der Unterschied zwischen mathematikdidaktischer Forschung und der beruflichen Praxis des Mathematiklehrers kann nicht "aufgelöst" oder überbrückt werden; er konstituiert ein permanent zu bearbeitendes theoretisches Problem. Theoretisches Wissen kann nicht wie ein Ding übergeben werden; es kann nur als ein Problem der Beziehung zwischen Wissensrepräsentationen und Wissensbedeutungen kommuniziert werden. Und diese Beziehung erhält in den beteiligten Kontexten der Theorie bzw. der Praxis eine je spezifische Form. Für ein genaueres Verständnis sind hierzu detaillierte Fallstudien zu den Eigenarten von Wissensrepräsentationen und Kooperationsformen zwischen didaktischer Theorie und unterrichtlicher Praxis notwendig. (Dies geschieht z.B. in dem internationalen Projekt: "Systematic Cooperation Between Theory and Practica in Mathematics Education", siehe Christiansen, 1985, und Verstappen, 1986.)

Literatur

AG Mathematiklehrerbildung: Perspektiven für die Ausbildung des Mathematiklehrers. Köln 1981

Andelfinger, B./Voigt, J.: Der Alltag des Mathematikunterrichts und die Ausbildung von Referendaren. Occasional Paper Nr. 51. Bielefeld 1984

Bauersfeld, H.: Kommunikationsmuster im Mathematikunterricht - Eine Analyse am Beispiel der Handlungsverengung durch Antworterwartung, in: Bauersfeld, H. (Hrsg.): Fallstudien und Analysen zum Mathematikunterricht, Hannover, 1978, S.158-170

Brown, S./Cooney, T.: Stalking the Dualism between Theory and Practice. Paper presented for the Conference "Systematic Cooperation between Theory and Practice in Mathematics Education", Lochem, NL, 3.-7.11.1986

Chevallard, Y.: La Transposition Didactique, Grenoble 1985

Christiansen, B. et al.: Systematic co-operation between theory and practice in mathematics education, Copenhagen 1985

Douady, R.: Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques, in: IIème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, Recueil des Textes et Comptes Rendus, Grenoble 1984, S.68-88

v.Harten/G./Otte, M.: Gleichungen, in: v.Harten, G. et al.: Funktionsbegriff und funktionales Denken, Köln 1986, S.131-180

v.Harten, G./Steinbring, H.: Aufgabensysteme im Stochastikunterricht - Didaktische Konzepte zur Materialentwicklung und Lehrerfortbildung im LEDIS-Projekt, Occasional Paper Nr. 71. Bielefeld 1985

v.Harten, G./Steinbring, H.: Lesson Transcripts and Their Role in the In-Service Training of Mathematics Teachers, Paper presented at the International Conference on "Systematic Cooperation between Theory and Practice in Mathematics Education", Lochem/Netherlands, November 3-7, 1986

Jahnke, H.N.: Zum Verhältnis von Wissensentwicklung und Begründung in der Mathematik - Beweisen als didaktisches Problem. Materialien und Studien des IDM, Heft 10. Bielefeld 1978

Jahnke, H.N.: Anschauung und Begründung in der Schulmathematik, in: Beiträge zum Mathematikunterricht, 1984, S.32-41

Jahnke, H.N./Otte, M.: On "Science as Language", in: Jahnke, H.N./Otte, M. /Hrsg.): Epistemological and Social Problems of the Sciences in the Early Nineteenth Century, Reidel, Dordrecht 1981, S.75-89

Krummheuer, G.: Rahmenanalyse zum Unterricht einer achten Klasse über "Termumformungen", in: Bauersfeld, H. et al.: Analysen zum Unterrichtshandeln. Köln: Aulis, 1982, S. 41-103

Otte, M./Reiß, V.: Der Mathematiklehrer in der Ausbildung und im Beruf, in: Schriftenreihe des IDM, 11, 1977, S.15-51

Seeger, F./Steinbring, H.: Neue Anforderungen an die Tätigkeit der Fachleiter zwischen Allgemeinbildung, Wissenschaft und Unterricht, in: ZDM, 1, 1986, S. 9-14

Steinbring, H.: Mathematische Begriffe in didaktischen Situationen: Das Beispiel der Wahrscheinlichkeit, in: JMD, 6, 1985, S.85-118

Steinbring, H.: The Interaction between Teaching Practice and Theoretical Conceptions - A Cooperative Model of In-Service Training in Statistics for Mathematics Teachers (Grades 5-10). Paper presented at the "Second International Conference on Teaching Statistics" (ICoTS II), 11-16 August 1986, Victoria, Canada

Vergnaud, G.: Problem Solving and Symbolism in the Development of Mathematical Concepts, in: Proceedings of the Eight International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Sydney 1984, S. 27-38

Verstappen, P. (ed.): Papers of the Second International Conference on "Systematic Cooperation between Theory and Practice in Mathematics Education", Lochem/Netherlands, November 3-7, 1986

Voigt, J.: Interaktionsmuster und Routinen im Mathematikunterricht - Theoretische Grundlagen und mikroethnographische Falluntersuchungen. Weinheim: Beltz, 1984

Vollrath, H.-J.: Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht. Stuttgart 1984

A N H A N G : UNTERRICHTSTRANSKRIPT ZUR EINFÜHRUNG DES DISTRIBUTIVGESETZES (Klasse 8)

.
.
.

1 L: So! Hmh. Gut. Dann hätten wir das klar. Können wir eigentlich weitermachen.

<u>1. Phase:</u>
Präsentation eines Darstellungsmittels

Lehrer malt ein Rechteck an die Tafel:

2 L: Wißt ihr, was das ist?

3 S: .. en Kasten!

4 L: Ein Kasten ...

5 S: ... Schuhkarton.

6 S: ... Kreidestriche!

7 S: ... ganz viele Punkte.

8 L: Hm. Mike, sagst du es bitte noch mal laut.

9 S: Ein Rechteck!

<u>2. Phase:</u>
Entwicklung einer Fragestellung

10 L: Ein Rechteck. Dieses Rechteck ... eh hat ne bestimmte Länge. Weil ich das jetzt nicht weiß, schreib ich dran x.. Und, Beate, ..

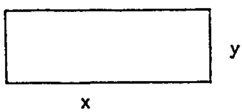
11 S: ... ja ..

12 L: ... schau bitte her. Dieses Rechteck hat auch ne bestimmte Breite. Und weil ich das nicht weiß ..

13 S: ... y ...

14 L: ... könnte ich sie y nennen. Gut.

Lehrer schreibt ans Diagramm:



15 L: ... so. Wer von euch könnte mir jetzt mal sagen, wie groß .. der Umfang .. von diesem Rechteck ist? Umfang! ... Ihr könnt euch vorstellen, das wär vielleicht en Stück Garten, da soll ein Zaun drumherum gemacht werden. Frage: Wieviel Zaun muß ich kaufen? Jetzt nicht mit Zahlen, sondern mit unseren Variablen. Mike!

<u>3. Phase:</u>
Bearbeitung der Fragestellung

16 S: Meinetwegen, x mal x und y mal y ...

17 S: nee, nee, hier!

18 L: Nee, Sascha!

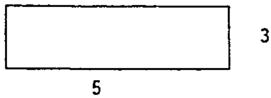
19 S: x hoch zwei mal y hoch zwei!

20 S: .. nee, nee ..

<u>4. Phase:</u>
Veränderung der Fragestellung: Konkretisierung

21 L: Hmh. Paß mal auf. Ich laß das mal mit den Variablen mal grad weg. Vielleicht fällt euch das leichter, wenn ich mal richtig Zahlen einsetze. Wieviel Meter Zaun müßte ich da kaufen?

Lehrer hat x und y an der Tafel ersetzt:



<u>5. Phase:</u>
Bearbeitung der Fragestellung

22 S: Hier!

23 L: Ingo!

24 S: 16 Meter

25 L: Wie kommst du denn darauf?

26 S: Ja, eh, 2 mal 5 ist 10 und 2 mal 3 sind .. 16.

27 S: ... 6 ..

28 L: 5 Meter, 3 Meter, ... 5 Meter, 3 Meter ... 30 Meter?!

29 S: ... Nee, nee ..

30 L: André! Nochmal ... du fängst da an, ne, deinen Zaun zu ziehen. Wieviel brauchst du bis dahin?

31 S: 3 Meter ... 5, 3 ..

32 L: Ne, also, wir müssen den, um den Umfang zu bestimmen, müssen wir die vier Seiten, die es da gibt, die müssen wir .. addieren. Gut. Hm. Jetzt mach ich's aber nochmal .. mit Variablen. Wer könnte denn das mal mit x und mit y ausdrücken? ... Mike! .. Ich versteh Janine nicht! .. Bitte.

<u>6. Phase:</u>
Veränderung der Fragestellung: Verallgemeinerung

7. Phase:

Bearbeitung der Fragestellung

33 S: 2x mal 2y.

34 L: 2x ist schon mal gut, ne!

35 S: ... hier ..

36 L: Sascha.

37 S: Eh, plus.

38 S: ... ach ja!

39 L: Hastu dich versprochen?! Nee? 2mal diese Seite und 2mal diese. Gut. 2x plus 2y. Eh, könnte man da vielleicht auch noch irgendwie anders ausdrücken? ... Nicole?

40 S: Klammer auf x mal y Klammer zu hoch 2 ...

41 L: Auh, ich glaube, jetzt kommen wir aber schwer durchein ..

42 S: ... eh plus, mein ich ...

43 L: ... ander. Jetzt kommen wir schwer durcheinander! .. Sandra, hattest du nicht auch ne Idee? ... Sag mal, wie kommt ihr immer auf dieses x hoch 2? .. Das heißt doch x mal x, ne!

44 S: ... hier, hier!

45 L: Mike!

46 S: Ist doch ganz klar, wir werden 2 mal x brauchen, eh, .. x hoch 2, das heißt doch 2 mal x.

47 S: Nein ...

48 S: Ja .. nein, nein, ...
x hoch 2, da steht mal x, das heißt doch 2 mal x ...

49 L: Nochmal ganz schnell, wenn ihr euch das, .. paßt mal auf, wir gehen lieber wieder mal von unseren Zahlen aus. Ja! ... 5, nee, und wenn du sagst, das kommt zweimal vor, dann sind das, 2 mal 5, ist 10. Und das andere wäre 5 mal 5 und das ist ...

50 S: .... 25 ...

51 L: ... so viel Zaun braucht der überhaupt nicht, nee! Peter!

52 S: Ich würde das so machen, ich würde zwei mal Klammer auf x plus y rechnen ...

53 L: Moment ...

Lehrer schreibt

$$2 \cdot (x + y)$$

54 L: ... kannst du uns das mal ein bißchen erklären?

55 S: Na ja. y ist ja die Hälfte der, des Zaunabschnitts. Wir haben ja 2mal x und 2mal y, nee. Also wir können das ja addieren, beliebig. Und jetzt rechne ich x plus y ist erstmal die Hälfte des Zaunes,

8 Meter, und dann rechne ich das mal 2, .. 16 Meter.

56 L: Aha. Also du möchtest das so machen, x plus y, und das dann doppelt nehmen, mal zwei halt. Ginge auch, nee. Katarina!

57 S: Eh, ... also dieses, dies zweite, was Peter gesagt hat, das entsteht ja durch das 2x plus 2y. Man könnte nämlich genauso gut jetzt, eh, das so machen, die 2 gilt ja für x und y. Also 2 mal x plus 2 mal y...

58 L: Aha.

59 S: ... Und dann das nur verkürzen, das Ganze.

60 L: Toll.

61 S: ... ist es ja auch ...

62 L: Das ist verkürzt. Ich wollte euch das nur zeigen, daß man das hier mit dem Zaun ganz gut erkennen kann, daß das ja im Grunde genommen das gleiche ist, ... daß wir also vielleicht hier so was hinschreiben dürfen. Wollen wir's nochmal mit Zahlen grad probieren?

63 S: Hm, ja ...

64 L: .. ist vielleicht besser, ne! Was hatten wir gesagt, x war

65 S: ... 5

66 L: 5.

67 S: Und das andere war 3.

68 L: Und das war 3, nee. Dann müßte ich das so hinschreiben, 2 mal 5 plus 2 mal 3, und das müßte dasselbe ergeben oder das gleiche, wie?

69 S: 2 mal Klammer auf 5 plus 3

Lehrer hat an die Tafel geschrieben:

$$2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 2 \cdot (5+3)$$

70 L: Ja, guckt mal nach.

71 S: ... ja ist 16, ...

72 L: 10, 16, 16, nee! ... Wißt ihr, was da an der Tafel steht? Klaus, weiß du es noch?

73 S: Distributivgesetz.

<u>8. Phase:</u>

Veränderung der Fragestellung: Verallgemeinerung

74 L: Ja. Ist zwei Jahre her, aber immerhin. Schön. .. Wer, wer von euch könnte denn das mal in der allgemeinen Form mit den Buchstaben a, b, c anschreiben, dieses Distributivgesetz? Ingo, kannst du das sagen?

9. Phase:

Zwischenstück

75 S: Assoziativgesetz.

76 L: Nein! Falsch. Das kann der jetzt so gut, das sagt der nur noch ....

Lachen

... kannst du das auch, Distributivgesetz?

77 S: Das sagen?

78 L: Hm.

79 S: Distributivgesetz.

10. Phase:

Bearbeitung der Fragestellung

80 L: Toll. o.k. Klaus machst du's mal? ... mit a,b,c?

81 S: Schlecht. Aber, na ja.

82 L: Komm an ...

83 S: ... nee, nee anschreiben nicht, dann kann das keiner lesen.

84 L: Na gut. Dann kannst du's mir ja sagen.

85 S: a mal zwei plus b mal zwei ist das gleiche wie, eh, zweimal a plus zweimal a + b. Oder man kann auch statt der zwei, b, eh, c noch nehmen, geht auch noch ... a mal c plus b mal c ist das gleiche wie c mal Klammer auf a plus b Klammer zu.

86 L: Nochmal. a ..

87 S: .. mal zwei ..

88 L: Nee, zwei wollt ich ja nicht.

89 S: a mal b ...

90 S: ... oder b mal c ...

91 S: ... c ...

92 L: Ach, wir fangen von vorne an .... Mach mal weiter.

93 S: c mal b .. nicht b mal c, c mal b ...

94 L: .. ach du drehst das jetzt um. Mach das mal so, daß für die zwei das a gesetzt wird, weil das das erste ist im Alphabet ...

95 S: ... ja, ja, geht ja. Also dann a mal b plus a mal c ist gleich a mal Klammer auf b plus c Klammer zu.

Lehrer hat an die Tafel geschrieben:

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$$

11. Phase:

"Ausklang"

96 L: Soo. Jetzt haben wir es auf die Reihe gekriegt, nee? Eh, ich kann das natürlich jetzt noch anders schreiben, nee, ich hab en paar Zeichen zuviel gemacht, die eigentlich gar nicht nötig sind. Was könnte denn da rausfallen? .. wo wir dann trotzdem Bescheid wissen, was dann Sache ist? ... Oliver?

97 S: das mal ...

98 L: ... nicht, das könnte ich jetzt wegnehmen. Dann schreib' ich's mal en bißchen kürzer hin.

Lehrer schreibt:

$$ab + ac = a(b + c)$$

99 L: So, ab plus ac ist a Klammer auf b plus c Klammer zu. Das wäre das, was wir hier oben rausgefunden haben.