Heinz Steinbring

L'indépendance stochastique
Un exemple de renversement du contenu intuitif d'un concept et de sa définition mathématique formelle

In: Recherches en didactique des mathématiques,
7 (1986), no 3, S. 5-49

RECHERCHES EN DIDACTIQUE
DES MATHEMATIQUES

COMITE SCIENTIFIQUE – SCIENTIFIC BOARD

A. BELL – Nottingham, Grande-Bretagne
P. BOERO – Gênes, Italie
G. BROUSSEAU – Bordeaux, France
Y. CHEVALLARD – Marseille, France
G. DELACOTE – Paris, France
R. DOUADY – Paris, France
E. FILLOY – Mexico, Mexique
J. GIRAUD – Paris, France
G. GLAESER – Strasbourg, France
P.-L. HENNEQUIN – Clermont-Ferrand, France
N. HERSCOVICS – Montréal, Canada
C. JANVIER – Montréal, Canada
J.-P. KAHANE – Orsay, France
A.-Z. KRYGOWSKA – Cracovie, Pologne
B. MALGRANGE – Grenoble, France
M. OTTE – Bielefeld, R.F.A.
F. PLUVINAGE – Strasbourg, France
J.-F. RICHARD – Paris, France
H.-G. STEINER – Bielefeld, R.F.A.
G. VERGNAUD – Paris, France

ADMINISTRATION/ABONNEMENTS
Editions LA PENSEE SAUVAGE, B.P. 141 - F 38002 Grenoble cedex.
Responsable de gestion : Monique Geoffroy.

© 1986 – La Pensée Sauvage, éditions.
Tous droits réservés pour tous pays.
ISSN 0246 - 9367

L'INDEPENDANCE STOCHASTIQUE

Un exemple de renversement du contenu intuitif d'un concept et de sa définition mathématique formelle

Heinz Steinbring
Institut für Didaktik der Mathematik (IDM)
Université de Bielefeld/Allemagne

ABSTRACT

The paper analyzes the historical development of stochastical independence from an epistemological point of view with the intention of obtaining an educational perspective for this concept. In the historical development, a conversion of the concept's content and of the mathematical definition can be noted. At the beginning, immediately concrete representations about dependencies resp. independencies of real facts were associated with this concept, whereas the concept was formally defined, mathematically, by the multiplication formula. This process should not be interpreted as a total detachment of a mathematical concept from real references. This opens, in principle, a variety of possible references to applications, which, however, are no longer simultaneously realized in the scientific research of the discipline. As opposed to tat, developing the concept in mathematics instruction should be organized by establishing a permanent relationship between representations of content (object) and mathematical definition (signs, formulas). In this respect, the concept of stochastical independence is an important example for analyzing the transition from an empirical to a theoretical understanding of the object.

RESUMÉN

En este artículo se analiza epistemológicamente la evolución histórica del concepto de independencia estocástica por el fin de desarollar una perspectiva didáctica. El estúdio del desarollo permite de poner en evidencia una inversión entre el aspecto conceptual y la definición matemática. En los inicios del desarollo, se asocian con este concepto nociones concretas immediatamente referentes a dependencias o independencias de hechos reales ; cuando en el transcurso posterior, se define el concepto matematicamente en forma de regla de multiplicación. Sin embargo ne se dehe interpretar este proceso como la separación total entre un concepto matemático y les hechos reales. Eso ofrece, en principio, una variedad de posibles aspectos de aplicación, los reales, sin embargo, no han sido realizados en la investigación científica contemporánea. Por otra parte, el desarollo del concepto en la enseñonza de la

matemática deberia tener en cuenta una relación permanente entre las representationes del contenido y la definición matemática (siniholos, fórmulas). En este sentido, el concepto de independencia estocástica est un ejemplo importante para el anàlisis de la comprension del paso de un aspecto empirico a un aspecto teórico.

RÉSUMÉ

L'article analyse le développement historique de l'indépendance stochastique dans une perspective épistémologique, dans le but d'essayer de dégager les éléments d'une perspective didactique. Dans le développement historique, on assiste à un renversement du contenu du concept et de sa définition mathématique. Au départ, des représentations immédiatement concrètes des dépendances (resp. indépendances) des faits réels lui ont été associées alors que le concept a été défini formellement en mathématiques, par la règle de multiplication. Ce processus ne paraît pas devoir être interprété comme le détachement complet d'un concept mathématique de ses références réelles. En principe, ceci ouvre aux applications une multitude de références possibles, mais elles ne sont plus réalisées simultanément au niveau de la recherche dans la discipline. Par contre, le développement du concept dans l'enseignement des mathématiques devrait être organisé par l'établissement d'une relation permanente entre les représentations du contenu (objet) et la définition mathématique (signes, formules). En ce sens, le concept de l'indépendance stochastique est un exemple important pour l'analyse du passage d'une compréhension empirique à une compréhension théorique de l'objet.

1. Introduction : l'indépendance — un concept de la stochastique au statut ambigu ?

On peut dire sans exagérer que le concept d'« indépendance stochastique » a un statut extraordinaire dans le cadre de la théorie des probabilités. Ce statut particulier se manifeste dans nombre de caractérisations et d'affirmations qui sont en partie contradictoires, par exemple :

— *l'indépendance stochastique ne fait pas partie des axiomes fondamentaux de la théorie des probabilités. Par contre : la méthode axiomatique est le seul moyen d'arriver à une définition « propre » de l'indépendance ;*

— *l'indépendance est une notion intuitive. Par contre : l'indépendance est un concept formel, une règle de multiplication ;*

— *l'indépendance est un postulat. Par contre : l'indépendance doit être vérifiée par des tests statistiques ;*

— *l'indépendance est le concept fondamental spécifique de la probabilité (Kolmogorov). « La structure stochastique qui, dès la genèse, fut et demeure au centre du calcul des probabilités est celle d'indépendance » (Loève, 1978). Par contre : l'indépendance est un concept auxiliaire et utile qui simplifie le calcul des probabilités (! — dans un manuel scolaire) ;*

— *l'indépendance est la condition fondamentale pour toute application des probabilités. Par contre : l'indépendance est la condition fondamentale pour démontrer des résultats essentiels en théorie des probabilités.*

Quels sont les raisons de ces « oppositions », et comment peut-on les utiliser d'une façon constructive ?

La difficulté, dans le cas de l'indépendance, est de mettre d'accord deux conceptions concurrentes. D'une part, il y a une définition mathématique théorique :

Soit (Ω, A, p) un espace de probabilité.
Les événements $A, B \in \Omega$ sont indépendants, si et seulement si :
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

D'autre part, il y a de nombreuses représentations intuitives, fondées sur les expériences les plus diverses, qui font dire que des observations, des résultats d'expériences, des phénomènes, etc., sont indépendants les uns des autres.

C'est le probabiliste Mark Kac* qui a insisté sur ce rapport entre définition mathématique et représentation intuitive de l'indépendance. « Ce qui se cache derrière la définition de l'indépendance est la conviction (fondée sur l'expérience) que cette définition peut aussi s'appliquer à une situation bien précise. Il y a donc indépendance dans un sens vague et intuitif, et il y a indépendance en ce sens étroit, mais bien défini mathématiquement, que le théorème de multiplication des probabilités est valide. Ce sont ces représentations vagues et intuitives qui furent longtemps la force motrice principale dans le développement de la théorie des probabilités. » (Kac, 1959, p. 10).

Ce rapport entre significations intuitives et caractérisations formelles de l'indépendance a vu un « renversement » du contenu du concept et de la définition, quand la théorie des probabilités s'est constituée : la validité de la formule de multiplication n'est plus rendue plausible à partir de représentations du réel traduisant des indépendances observables ; à l'inverse, on dit qu'il y a indépendance si on peut appliquer la formule de multiplication.

R. von Mises, entre autres, a vivement protesté contre une définition aussi formelle de l'indépendance.Son objection était que, dans le cadre d'une théorie axiomatique selon Kolmogorov, des événements peuvent être indépendants qui ne seraient pas du tout ressentis comme indépendants les uns des autres, dans un sens intuitif comme « ils ne s'influencent pas » ou « ils sont distincts les uns des autres » : « Quand on considère deux caractère qui s'influencent ou pas, on donne un sens à la notion d'indépendance. Par contre, une définition fondée sur la règle de multiplication n'est que la généralisation affaiblie d'un concept plein de signification » (von Mises, 1964, p. 38). Ce qu'il dénonce, c'est l'extension d'un concept vidé de son contenu.

Ce problème du renversement du contenu et de la définition mathématique de l'indépendance joue aussi un rôle important dans l'enseignement. Quelques manuels tentent

* Prononcer Katz.

de déduire la formule de l'indépendance, sans rupture, par le biais des probabilités conditionnelles. Cette manière de procéder est souvent accompagnée de considérations d'analogie avec l'incompatibilité et le théorème d'addition, afin de justifier les cas particuliers — P (A) [resp. P (B)] = 0 — de l'indépendance. Par contre, A. Engel a constaté que, pour les applications, l'indépendance n'est pas définie (par la règle de multiplication) mais postulée.

Böge, dans une lettre circulaire, fait remarquer qu'on ne peut pas tout simplement éliminer cette difficulté de l'enseignement des probabilités, à savoir la difficulté de faire se recouvrir l'intuition et la définition mathématique. C'est une des raisons qui le font se prononcer nettement contre l'introduction de la stochastique dans l'enseignement des mathématiques.

« La difficulté réside dans la traduction entre mathématiques et réalité. Dans d'autres domaines des mathématiques, cette traduction s'effectue sans aucun problème. Mais il en est autrement dans le cas du calcul des probabilités... La relation (entre mathématiques et réalité) y devient intéressante à partir du moment où l'on veut déterminer la "probabilité" des suites de zéro ou un de longueur n, en disant, par exemple, qu'elles sont toutes "équiprobables". Pour les résultats (i, j) avec i, j ε A = { 1, 2,..., 6 } de deux coups indépendants avec le même dé, on propose d'ordinaire que la probabilité soit 1/6 · 1/6 = 1/36, si le dé est symétrique ; sinon qu'elle soit $P_{ij} = P_i \cdot P_j$, où P_i est la probabilité d'obtenir i en un seul coup. Malheureusement un professeur ne pourra enseigner une telle proposition que comme un dogme, parcequ'il ne pourra pas la justifier d'une manière convaincante, même dans le cas du dé symétrique » (Böge, 1979, p. 3/4).

Ensuite Böge démontre, par diverses considérations et à l'aide d'exemples que la formule du produit, donc la définition formelle de l'indépendance, ne peut pas être dérivée mathématiquement, sinon — à son avis — dans le cadre d'une théorie subjective des probabilités. « Dans ces condi-

tions, il me semble que c'est trop demander au professeur que de défendre une telle proposition devant ses élèves. Et il y serait contraint, puisque les plus simples applications du calcul des probabilités deviennent impossibles sans elle... Il n'y a aucune raison, malgré les difficultés fondamentales qu'on rencontre dès les questions les plus simples, de supprimer la théorie des probabilités ? Pourtant, à cause de ces difficultés, on ne devrait pas l'enseigner à l'école. Le professeur serait contraint de répondre de manière dogmatique aux plus simples objections des élèves. »

Les difficultés mentionnées dessus dans le rapport entre aspects intuitifs et aspects formels de l'indépendance, ainsi que les objections contre l'enseignement du calcul des probabilités à un niveau élémentaire, donnent à penser que le renversement du contenu et de la définition serait à l'avantage des seuls mathématiques pures. Ce renversement semble être, pour l'essentiel, une abstraction formelle, dans un but de pureté mathématique, concentrant la théorie des probabilités d'une façon aussi économique que possible. En ce qui concerne l'enseignement, il subsiste la crainte que de telles abstractions mènent vite à des concepts vidés de contenu.

Est-ce que ce problème s'est présenté d'une manière analogue au cours du développement historique, ou bien y avait-il des nécessités, des raisons objectives impérieuses en faveur d'une généralisation du concept d'indépendance, sans que cela amène obligatoirement à faire abstraction à ses propriétés ?

Dans ce qui suit, je vais éclairer par des exemples, en esquissant quelques étapes de l'histoire des probabilités, l'évolution du concept d'indépendance, tout en montrant que ce concept a, en effet, une importance particulière, ou, comme le disait Kolmogorov, « confère à la théorie des probabilités son caractère particulier. »

Les considérations suivantes reposent sur la thèse que la transition du XVIIIe au XIXe siècle aurait réalisé un changement dans le rapport entre objet et méthode en mathématiques.

Au XVIIIe siècle, la première tâche était de légitimer et délimiter l'objet des études mathématiques ; les méthodes les plus diverses étaient admises pour traiter et analyser cet objet. Au XIXe siècle, ce rapport s'est renversé, l'objet devenant arbitraire, et la tâche étant d'affermir les méthodes mathématiques et de définir des procédés rigoureux permettant une abstraction de l'objet et ainsi une extension des applications. En fait, ce sont alors les méthodes sûres qui constituent l'objet nouveau des mathématiques, lequel est devenu « théorique ».

Cette proposition va me servir de guide. En même temps, elle devra être rendue plausible en ce qui concerne la stochastique, grâce à des exemples.

2. L'indépendance dans l'histoire des probabilités

2.1. *L'indépendance et les probabilités classiques*

Pour la période classique du développement des probabilités, le jeu de hasard (idéal) était d'une importance singulière, ce qui ressort du fait que tous les premiers travaux sur ce sujet traitent presque exclusivement de problèmes de jeux (cf. Pascal/Fermat, 1654, dans David, 1962 ; Huygens, 1657 ; J. Bernoulli, 1713 ; Montmort, 1708 ; etc.). Mais il serait hâtif d'en conclure que la théorie des probabilités, à cette époque, était exclusivement une théorie des jeux de hasard. Il faut se rendre compte que l'on travaillait en même temps sur des problèmes pratiques, parmi lesquels il faut noter les applications aux calculs de mortalité et de rente (cf. John Graunt, 1663 et De Witt, 1671) et sur le secteur juridico-légal (Leibniz, 1665). En fait on peut dire sans exagérer qu'existait l'intention d'utiliser cette nouvelle théorie des probabilités dans tous les domaines de la vie quotidienne, de l'appliquer à « des situations civiles, morales et économiques » (J. Bernoulli).

D'où vient donc la grande importance du jeu de hasard ?

Le jeu de hasard permettait de modéliser d'une façon naturelle des probabilités véritables, à savoir les fréquences

relatives. Avec le jeu de hasard idéal, l'objet de la théorie des probabilités se présentait sous une forme concise. Il expliquait, mathématiquement, la probabilité, en tant que rapport (entre les cas favorables et les cas possibles) ; en outre, ce cadre permettait de dériver, dans une forme simple, les règles les plus importantes de la théorie des probabilités, dont le théorème de l'addition et le théorème de multiplication, et aussi d'introduire, en embryon, et dans des situations exemplaires, d'autres concepts fondamentaux, comme ceux de la probabilité conditionnelle et de l'indépendance.

L'indépendance appartenait, sans que ce soit devenu très explicite, d'une façon naturelle au cadre du jeu de hasard, comme celà est évident dans les exemples de « tirages sans remise » donnés par de Moivre. L'indépendance est un élément fondamental des règles élémentaires de la théorie classique des probabilités, mais il est certain qu'on n'y attachait alors aucune importance théorique (stochastique) particulière, puisque le concept n'en fut défini explicitement que plus tard par de Moivre (1718/1756) et par Bayes (1763). Auparavant, Bernoulli, pour démontrer son théorème, avait déjà utilisé largement le concept d'indépendance, mais sans le savoir, implicitement. Dans ce qui est dit autour du théorème, le concept d'indépendance ne figure même pas comme méritant d'être spécialement signalé.

Même si l'on considère, à juste titre, que c'est avec le théorème de Bernoulli que le calcul des probabilités a commencé sa lente évolution vers une discipline mathématique pure (Loève), rien n'est changé, au fond, dans cette compréhension naïve de l'indépendance, par les améliorations et généralisations de ce théorème effectuées par Laplace et de Moivre. C'est seulement lors des applications de la théorie des probabilités à la théorie des erreurs d'observation, et au moment ou les problèmes des théorèmes-limites se sont ajoutés à ceux de la recherche d'une loi universelle des erreurs, que le statut de l'indépendance, comme concept important pour la théorie des probabilités, vient à poser un problème aigu.

2.2. *L'indépendance dans des contextes d'application des probabilités*

2.2.1. Probabilité et théorie des erreurs

L'application de la théorie des probabilités aux résultats d'observations n'entraîna pas seulement une amélioration des méthodes et des calculs dans la théorie des erreurs ; en retour, la théorie des probabilités a aussi gagné un nouveau point de vue conceptuel, grâce à ces applications mêmes.

Dans une observation concrète, la vraie valeur t ne sera jamais connue. Ce qui veut dire que les erreurs (« incertitudes »), resp. les déviations autour de la vraie valeur ne peuvent pas être connues dans l'absolu. Une théorie mathématique des erreurs d'observation ne peut pas traiter des valeurs mesurées individuelles considérées comme des grandeurs isolées. La tâche de la théorie des erreurs est d'analyser la relation entre des observations individuelles (resp. entre les incertitudes) attachées aux observations. La théorie des probabilités rendit compte de cette relation à l'aide du concept de distribution (au sens de distribution — ou répartition — de probabilité).

Une multitude de lois de distribution possibles pour les erreurs furent d'abord envisagées ; elles servirent en premier lieu à fonder mathématiquement des principes statistiques qui étaient utilisés pragmatiquement jusque-là, entre autres le principe selon lequel la moyenne arithmétique d'une série de données est la meilleure estimation de la vraie valeur d'une grandeur.

De plus en plus, les recherches tendirent ensuite à trouver une loi universelle pour les erreurs d'observation. En essayant de justifier la méthode des moindres carrés, Gauss fut un des premiers à dériver la distribution normale comme loi universelle des erreurs. Certaines caractéristiques de cette fonction de distribution avaient été posées en prémisses et on exigeait que la moyenne arithmétique des résultats d'observation fût la valeur mesurée la plus probable. (Gauss a donc procédé, pour ainsi dire, « à l'envers ».)

Le nouveau point de vue conceptuel mentionné ci-dessus, qui doit son introduction dans la théorie des probabilités à l'urgence des problèmes pratiques de mesurage, tient surtout au fait que désormais on ne considérait plus seulement des événements individuels, mais des systèmes entiers de paramètres aléatoires. La notion de distribution devint l'outil essentiel pour une description et une analyse adéquates.

L'objet de la théorie des probabilités n'est dont plus un jeu de hasard qui peut être défini *a priori* ; c'est maintenant un système de nombreux événements de nature inconnue. Comment définir ce nouvel objet ? Dans les tentatives pour le préciser, le concept d'indépendance a joué un rôle important.

Gauss avait posé un grand nombre de préalables avant de dériver la distribution normale. L'analyse des conditions (nécessaires et suffisantes) du comportement « normal » a abouti au résultat suivant : c'est que doivent entrer en jeu de nombreuses erreurs (resp. grandeurs aléatoires) indépendantes, qui soient elles-mêmes distribuées de manière « uniforme » (ce qui veut dire qu'il n'y a pas de variables aléatoires dominantes).

La formulation mathématique exacte de l'uniformité fut enfin proposée et démontrée par Lindeberg (1922) et Feller (1937) :

Soit $(X_n, n = 1, 2,...)$ une suite de variables aléatoires indépendantes centrées et $S_n = X_1 + ... + X_n$. Soit s_n l'écart-type de S_n. Le théorème de Lindeberg et Feller dit que la distribution de S_n/s_n tend, quand n tend vers l'infini, vers la distribution normale N (0,1) si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x| \geq \varepsilon s_n} x^2 \, dF_{X_k}(x) \to 0 .$$

Ceci implique que la variance de chaque X_k est petite par rapport à la variance de la somme S_n. (Cf. Feller, vol. II, p. 256.)

L'indépendance devient alors un caractère exigé de l'objet. Pour les mathématiques, l'indépendance, sous la forme du théorème de multiplication et de ses généralisations

(interversion de produits et d'intégrales), a apporté surtout des avantages techniques, des « simplifications du calcul ».

Dans le cadre des applications à la théorie des erreurs, apparaît un autre aspect de l'indépendance stochastique : servir à l'analyse des événements aléatoires réels. Si on postule l'indépendance, un comportement normal du système devrait se révéler. S'il n'est pas observé dans des cas particuliers, les prémisses, dont l'indépendance, ne sont pas valables. Ici l'indépendance traduit une propriété tangible de la réalité ; elle sert à analyser la réalité. Entre autres choses, elle est caractéristique de l'objet probabiliste.

Dans un article de 1845, Gauss a remarqué l'importance de ce concept dans l'application de la théorie des probabilités : « On escompte que les fluctuations aléatoires, sur un grand nombre d'observations, se compensent en très grande partie les unes des autres, et on accorde une confiance d'autant plus grande à la valeur moyenne que le nombre des résultats est plus grand. En quoi on a généralement tout à fait raison ; d'ailleurs le développement ultérieur et l'exploitation prudente de ce principe ont donné, surtout dans les sciences de la nature, des résultats souvent fructueux et parfois très remarquables. Pourtant cette sûreté du principe fondamental repose sur une condition essentielle, qui est souvent négligée même par des spécialistes, et qui consiste en ce que les perturbations irrégulières ou fluctuations, attachées aux observations ou expériences individuelles, doivent être totalement indépendantes les unes des autres. Juger si une telle indépendance existe ou non peut être très difficile, voire impossible, sans une investigation plus poussée des faits. S'il reste un doute, le poids attribué aux résultats finaux sera précaire » (Gauss, 1873, p. 143).

L'indépendance stochastique, chez Gauss, a évidemment une tout autre signification que 150 ans auparavant.

C'est dans le cadre de ce développement, qui faisait d'un ensemble aléatoire le nouvel objet de la théorie des probabilités, que l'on doit considérer les travaux de Fechner, Bruns, Helms, et finalement, de Richard von Mises, qui voulait

fonder le concept du « collectif statistique » par la méthode axiomatique, lui assignant la place de l'objet classique, c'est-à-dire celle du jeu de hasard (ce qui conduisait à des difficultés quant aux fondements).

2.2.2. Probabilité et théorie cinétique des gaz

La théorie cinétique des gaz est un autre domaine dans lequel de vastes systèmes de paramètres aléatoires furent étudiés. Là aussi, non seulement l'application de la théorie des probabilités a donné naissance à la physique statistique, mais de plus, en retour, les probabilités ont bénéficié de cette application.

Le problème de l'application de la théorie des probabilités à la théorie des gaz est beaucoup trop complexe pour être exposé ici, même brièvement. Je me limiterai donc à un point capital, celui qui touche au deuxième principe de la thermodynamique, en montrant, à l'aide d'un modèle simple conçu par P. et T. Ehrenfest, de quelle façon des prémisses probabilistes y interviennent.

C'est surtout dans les travaux de Ludwig Boltzmann qu'on peut se rendre compte de l'importance de la probabilité pour la physique. Ses recherches étaient centrées sur le deuxième principe de la thermodynamique qui constate l'accroissement irréversible de l'entropie, du désordre, d'un système de gaz jusqu'à son équilibre. Si Boltzmann était convaincu, au début de son étude, qu'il pourrait donner une démonstration purement mécanique de ce théorème, il constata, après de longs débats jalonnés de vives objections, qu'en dernière instance il faudrait nécessairement faire appel à la théorie des probabilités. Instrument auxiliaire au départ, l'usage du concept de probabilité s'était transformé, au cours de ses travaux, en moyen de connaissance fondamental.

Où donc la probabilité s'insère-t-elle d'une manière essentielle dans la théorie des gaz ? D'abord il est évident que des systèmes gazeux, consistant d'un nombre énorme de particules, ne peuvent être décrits que statistiquement. Leur état, par exemple les vitesses des particules, fut caractérisé à l'aide de distributions. Mais la probabilité, dans ce cadre, fut

d'abord comprise comme un outil auxiliaire pour décrire des phénomènes au fond mécaniques.

C'est seulement avec l'étude du comportement de la macrostructure du système gazeux, c'est-à-dire de l'évolution d'un état ordonné à l'état de désordre maximal, que la probabilité apparut avec évidence comme un concept fondamental.

Afin d'étudier ces changements temporels de la fonction de distribution des vitesses, on a dû introduire des prémisses additionnelles. Pour une part, des prémisses mécaniques, dont celle qu'il n'y aurait que des chocs binaires dans les cas simples. D'autre part, il a fallu faire une hypothèse stochastique fondamentale (très importante, comme on le vit plus tard), à savoir la fameuse condition du nombre de chocs (Stoßzahlansatz) autrefois posée en postulat du chaos moléculaire.

Cette condition contient essentiellement la proposition suivante : le nombre de chocs de deux groupes de molécules ayant des vitesses différentes, dans un intervalle de temps Δt, est égal au produit des nombres de chacun des deux groupes (aux coefficients de proportionnalité près). Cette proposition permet, dans les calculs, de passer des distributions des vitesses des paires de molécules à celles des molécules individuelles.

Thompson, pour exemple, donne la définition suivante pour le Stoßzahlansatz : « La fonction de distribution pour des paires de molécules est données par :

$$f^2(v_1, v_2, t) = f(v_1, t) \cdot f(v_2, t)".$$

« Cette prémisse à l'air innocent est celle qui fut et qui est encore discutée le plus vivement après plus d'un siècle » (Thompson).

Cela signifie, dans la théorie des probabilités, que les variables aléatoires correspondantes sont statistiquement indépendantes (Cf. Thompson, 1972, p. 11).

Le concept central pour l'application de la probabilité, c'est ici encore l'indépendance, qui n'est pas, dans ce cas, simple propriété statistique des paramètres aléatoires, mais

liée à des caractéristiques mécaniques des particules considérées dans le système.

On peut montrer comment sont liés les aspects mécaniques et statistiques dans le Stoßzahlansatz, sur le modèle simplifié imaginé par Ehrenfest (1911, *figure 1).* Soient donnés N P-atomes (points) dans le plan euclidien par carré-unité ; ces P-atomes n'interagissent pas les uns avec les autres. Cependant, ils se heurtent d'une manière élastique contre des C-atomes donnés (carrés), qui sont fixés dans le plan et distribués irrégulièrement. Les diagonales de ces C-atomes sont parallèles à l'axe x ou y ; leurs distances sont grandes par rapport à la longueur de leur côté (« gaz raréfié »), leur densité est n par carré-unité. Cette dernière hypothèse est une prémisse importante d'équiprobabilité sur laquelle s'appuie le Stoßzahlansatz.

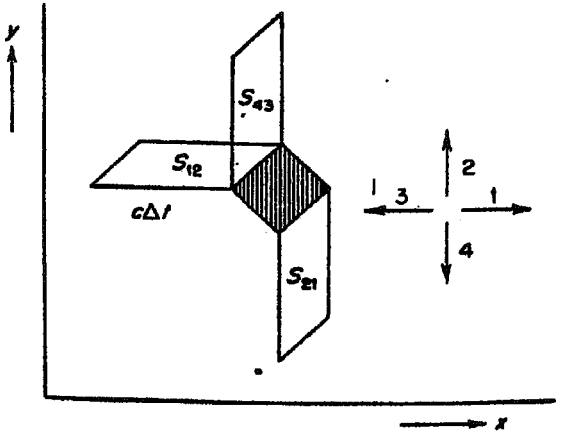


Fig. 1

En plus, on suppose que tous les P-atomes aient la même vitesse constante c et qu'ils se déplacent seulement dans des directions parallèles aux axes. La distribution des vitesses se rapporte, dans ce modèle, exclusivement aux quatre directions données.

Soit f_i le nombre de P-atomes en mouvement dans la direction i, l'état d'équilibre est donné par :

$$f_i = \frac{N}{4} \quad i = 1, 2, 3, 4$$

On doit donc montrer que l'état d'équilibre pour ce modèle peut être approché de façon monotone.

Soit $N_{ij} \cdot \Delta t$ le nombre des P-atomes qui sont passés, à la suite d'un choc, de la direction de mouvement i dans la direction j dans l'intervalle de temps Δt. Donc, ces atomes doivent précisément satisfaire les deux conditions suivantes :

1) ils possèdent la direction i, et
2) ils se trouvent dans l'une des bandes S_{ij}.

Donc, il ne suffit pas de connaître la distribution actuelle $(f_1, f_2, f_3, f_4) = f$ (donnée au moment t) des vecteurs afin de déterminer la distribution « nouvelle » après le choc. Il faut faire une prémisse additionnelle, à savoir le Stoßzahlansatz. Pour ce modèle, on retiendra la formulation suivante : « Du nombre des P-molécules de chaque direction de mouvement, il revient, sur les bandes S, la fraction qui correspond à la proportion de la surface totale de tous les S à la surface libre totale » (Ehrenfest, p. 20).

Cela signifie que la direction de mouvement de la P-molécule est (statistiquement) indépendante de sa position ; resp. qu'elle est indépendante du fait qu'un C-atome se trouve « devant » le P-atome ou pas.

La proportion de la surface totale de tous les S à la surface libre totale est $S_{ij} \cdot n$ (toujours considérée par carré-unité) ; le Stoßzahlansatz est donc mathématiquement exprimé comme suit :

$$N_{ij} \cdot \Delta t = f_i \cdot S_{ij} \cdot n.$$

D'une manière illustrative, ceci signifie : le nombre de chocs (le nombre de paires de P-atomes et C-atomes qui se choquent), est proportionnel au produit des nombres d'atomes individuels :

$$f_i \,.\, n \,.\, S_{ij}$$

Dans le même intervalle de temps Δt

$$N_{ji} \cdot \Delta t = f_j S_{ji} \cdot n$$

P atomes sont passés de j à i. Par comparaison des deux équations, on obtient

$$|N_{ij} \cdot \Delta t - N_{ji} \cdot \Delta t| = |f_i - f_j| \cdot S \cdot n$$
$$(S = |S_{ij}| \text{ comme aire de surface}).$$

« La comparaison des équations montre immédiatement que, dans des chocs du type décrit plus haut, le plus grand f perd, en somme

$$|f_i - f_j| \cdot S \cdot n$$

molécules au profit du f le plus petit pendant l'intervalle de temps Δt.

Si le calcul des nombres N_{12}, N_{21}, N_{23}, N_{32}, etc. pour tout intervalle de temps Δt est toujours basé sur le Stoßzahlansatz, on obtient une décroissance monotone pour les différences des nombres f_1, f_2, f_3, f_4. (Approche monotone de la distribution à l'état d'équilibre) » (Ehrenfest, 1911).

Dans l'état d'équilibre

$$f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = \frac{N}{4}$$

il n'y a plus de différences significatives entre les f_i.

Un des aspects de ce Stoßzahlansatz, d'abord, mérite d'être mentionné : en regardant, encore une fois, l'équation

$$N_{ij} \cdot \Delta t = f_i \cdot n \cdot S_{ij}$$

et en « calculant » le facteur de proportionnalité

$$S_{ij} = a \cdot c \cdot \Delta t \ (2\,a = \text{diagonale du C-atome})$$

on constate qu'il est nécessaire de faire intervenir des caractéristiques géométriques.

Dans notre modèle tout simple, ceci peut apparaître comme subtilité marginale ; dans l'équation générale de Boltzmann, ce phénomène surgit dans la forme du soi-disant Wirkungsgesetz (loi d'action), à propos duquel Boltzmann lui-même fit les remarques suivantes : « Le Wirkungsgesetz des forces qui s'exercent au moment d'un choc doit nous être donné, naturellement. Mais je n'y ferai aucune prémisse limitante. Il se peut qu'il nous est donné que deux molécules ricochent l'une de l'autre comme des sphères élastiques ; il se peut aussi que n'importe quel autre Wirkungsgesetz nous soit donnée.

En ce qui concerne les parois du récipient enfermant le gaz, je voudrais supposer que les molécules sont réfléchies de ces derniers comme des sphères élastiques. Dans ce cas, tout autre loi d'action fournirait les mêmes formules » (Boltzmann, 1872, p. 320).

Dans l'équation de Boltzmann, qui dérive de l'hypothèse « Stoßzahlansatz », il y a donc un lien entre des caractéristiques probabilistes et des caractéristiques spécifiques, mécaniques et géométriques, des particules. Dans ce cas, l'indépendance stochastique est liée d'une manière spécifique à des conditions physiques objectives. Cette liaison devient, pour ainsi dire, la cellule germinale de la nouvelle théorie cinétique des gaz, dans laquelle des éléments théoriques aussi bien mécaniques que probabilistes fonctionnent à égalité de droits.

« Il est remarquable que la représentation scientifique (...) a évolué vers une conception plus subtile, dans laquelle un rôle important revient à des caractéristiques déterministes aussi bien qu'à des caractéristiques aléatoires. Nous ne voulons citer ici que la formulation donnée par Boltzmann du deuxième principe de la Thermodynamique, dans laquelle le concept de la probabilité joue, pour la première fois, un rôle théorique essentiel » (Prigogine, p. 217).

2.3. *L'indépendance comme concept des mathématiques pures*

Les idées avancées ci-dessus ont montré que le concept de l'indépendance s'est développé et est devenu un instrument d'analyse utile pour beaucoup d'applications, au cours du processus qui a éliminé le jeu de hasard comme objet assigné à la théorie des probabilités, le remplaçant par une conception ouverte, fondamentalement généralisée de cet objet, sous la forme d'un complexe aléatoire.

Même si le concept de l'indépendance, et avec lui la théorie des probabilités, fut incontestablement accepté dans

beaucoup de domaines d'applications, cette théorie restera encore longtemps suspecte aux yeux de nombreux mathématiciens.

« Et pendant qu'un formalisme impressionnant était en train de se créer, les mathématiciens (à très peu d'exceptions près) se tenaient à l'écart parce qu'ils ne voyaient pas clairement quels étaient les objets auxquels on pouvait appliquer ce formalisme » (Kac, 1959).

Kac considère que la théorie des probabilités ne fut décidément acceptée comme une véritable théorie mathématique que grâce à ses applications en théorie des nombres et à la « découverte » qu'il y a là indépendance stochastique dans un contexte inattendu :

« Puis,en 1909, Émile Borel fit observer que les fonctions de Rademacher sont indépendantes. Enfin il y avait des objets bien définis pour lesquels on pouvait appliquer la théorie des probabilités pour événements indépendants, sans avoir à se commettre avec des pièces de monnaie, des coups de dés, des éventualités, des expériences. La publication du mémoire classique de Borel « Sur les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques » marque le commencement de la théorie moderne des probabilités » (Kac, 1959).

Finalement, pour les mathématiques aussi l'admissibilité de la théorie des probabilités avait été prouvée par une application, mais une application interne aux mathématiques : la théorie des nombres. « L'indépendance statistique, considérée jusqu'alors comme une fréquentation douteuse des joueurs, a atteint la respectabilité que seule une discipline ancienne comme la théorie des nombres peut conférer » (Kac, 1982, p. 72).

L'axiomatique de Kolmogorov, en 1933, fut la suite logique de cette reconnaissance. Même si ce fut relativement tard, la théorie des probabilités devint une discipline mathématique au sens strict.

Nos remarques sur l'histoire du concept d'indépendance ont cependant montré que l'axiomatique des probabilités,

dans laquelle l'appareil méthodologique est fixé, ne représente pas seulement une récapitulation minimale des règles fondamentales les plus simples, mais est aussi la conséquence nécessaire du développement des applications de la théorie.

L'axiomatisation avait surtout pour but d'assurer que les méthodes probabilistes seraient observées strictement et rigoureusement, mais tout en conservant la possibilité de les utiliser pour traiter une multitude d'objets les plus divers. Ces objets ne sont pas complètement arbitraires, bien au contraire ils doivent toujours être soigneusement redéfinis, et là le concept de l'indépendance joue un rôle prépondérant.

3. Distribution binomiale et planche de Galton : une mise en perspective didactique du concept de l'indépendance

L'analyse historique a montré le développement de l'indépendance stochastique dans le rapport mutuel entre des modélisations mathématiques et des situations d'applications concrètes. Ce développement a produit une séparation *relative* entre la règle de multiplication d'une part et des significations concrètes de l'indépendance d'autre part. Cette séparation relative implique que l'indépendance stochastique pourrait devenir un concept fondamental pour le calcul et les théorèmes dans la théorie des probabilités, sans que en principe les rapports fondamentaux aux situations d'applications soient coupés. Et même, les possibilités d'appliquer les probabilités à l'aide de l'indépendance dans la réalité augmentent encore ; mais ils ne sont pas *en même temps* réalisés dans le cadre du développement théorique des probabilités. Dans la théorie des probabilités on veut déduire en quelque sorte des conséquences mathématiques de l'indépendance, on veut admettre des résultats et des théorèmes sur la base de l'indépendance (resp. de la dépendance) stochastique. Çà veut dire, que la signification de l'indépendance dans le cadre de la recherche scientifique se découvre dans le développement ultérieur de la théorie des probabilités. En principe il y a là des possibilités d'appliquer les probabilités

aux situations externes, mais elles n'ont pas d'importance dans le savoir théorique mathématique.

Dans l'enseignement de la théorie des probabilités à l'école, est-ce qu'on devrait partir d'une telle séparation entre une définition mathématique formelle et le contenu intuitif du concept de l'indépendance ? Est-ce qu'on devrait introduire l'indépendance à l'école à l'aide d'une définition mathématique élémentaire (par la règle de multiplication) et en déduire des conséquences mathématiques sans établir une relation aux situations d'applications significatives d'après l'état actuel du développement historique ?

Tout d'abord il faut remarquer que les probabilités ne sont pas encore fréquemment enseignées à l'école. Là où on fait les probabilités on peut constater une orientation assez forte vers les mathématiques pures ; ça signifie que sont mis au premier plan les définitions des concepts et la démonstration des théorèmes mathématiques. Souvent la théorie des probabilités à l'école se développe d'une manière plus ou moins intra-mathématique. Mais une compréhension appropriée du concept de probabilité et un développement de l'intuition probabiliste chez l'élève ne peut pas se fonder simplement sur les formules et les techniques mathématiques, mais il faut aussi prendre en considération le rôle du hasard et des phénomènes aléatoires dans le cadre de la théorie des probabilités à l'école (voir v. Harten/Steinbring, 1984 et Steinbring, 1985).

Dans l'enseignement des probabilités le concept d'indépendance joue le plus souvent un rôle subordonné. A l'aide des exemples concernant les probabilités conditionnelles on essaie de déduire la règle de multiplication et de rendre plausible le concept d'indépendance. On utilise cette règle pour simplifier le calcul des probabilités et pour pouvoir en tirer quelques conséquences mathématiques élémentaires ; mais on n'analyse presque jamais les conditions réelles d'indépendance ou l'aspect aléatoire de la situation donnée. On prend la règle de multiplication comme point de départ

du concept d'indépendance sans considérer plus en détail le contenu intuitif de ce concept.

Les considérations suivantes ouvrent des perspectives didactiques sur le traitement de l'indépendance stochastique à l'école. Elles offrent quelques propositions exemplaires pour le développement du concept dans l'enseignement en se référant à l'analyse épistémologique. En même temps il faut comprendre que le statut épistémologique de l'indépendance pourrait distinguer le savoir mathématique scientifique du savoir mathématique à l'école. L'étude de l'objet d'enseignement repose sur la thèse que le développement didactique d'un concept mathématique ne doit pas partir d'une séparation stricte entre le modèle mathématique et les situations d'applications concrètes, entre les règles mathématiques et leurs interprétations intuitives. La dialectique entre le contenu intuitif d'un concept et sa définition formelle est une force motrice importante — comme dans le développement historique — pour la formation d'un concept mathématique et de sa signification dans l'enseignement.

3.1. La planche de Galton et l'indépendance

Des générateurs concrets de nombres aléatoires sont tout d'abord des moyens auxiliaires dans l'enseignement pour l'introduction du concept de probabilité. Ce sont des appareils exemplaires pour illustrer les concepts fondamentaux et les règles simples du calcul des probabilités. Ils ne sont pas eux-mêmes des objets d'investigation mais ils représentent des objets « idéals » pour motiver les fondements de la théorie des probabilités à l'école.

De la même manière on peut utiliser la planche de Galton pour produire des distributions binomiales empiriques et pour les représenter sous une forme concrète. On suppose que les planches idéales produisent des distributions binomiales « exactes ». La nécessité de la constance des probabilités à chaque degré (resp. l'indépendance stochastique des degrés dans la planche de Galton) devrait être garanti par

l'uniformité des obstacles (ou des cônes) et par leur arrangement symétrique. On suppose la constance de probabilité (resp. l'indépendance des degrés) et on en déduit la loi binomiale

$$B(n, k, p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

comme modèle mathématique pour le processus stochastique d'une bille dans la planche de Galton.

Si on obtient au cours de quelques expériences aléatoires avec une planche de Galton des résultats qui ne sont pas conformes à la distribution binomiale, on dira que cette planche n'était sûrement pas construite assez soigneusement. Elle ne pourrait pas représenter l'objet idéal, qu'on considère dans l'enseignement des mathématiques. Mais on pourrait s'imaginer en principe une planche idéale pour vraiment réaliser une distribution binomiale, dont on peut expliquer le processus stochastique à partir de considérations analogues à celles qui seraient conduites à l'aide d'une planche imprécise. Mais on ne prend presque jamais la planche de Galton elle-même comme objet d'analyse mathématique, c'est-à-dire stochastique et géométrique. La planche concrète est souvent un simple objet de substitution d'une planche idéale qui n'est pas à notre disposition.

L'analyse d'une expérience aléatoire avec une planche de Galton (*figure 2*) montrera la dialectique entre la loi de Bernoulli (et ses généralisations) et les intuitions concrètes de l'indépendance dans le cadre physique de la planche. Ça nous donnera une compréhension plus profonde du processus stochastique dans la planche de Galton ; cette analyse est analogue à celle du modèle de gaz imaginé par Ehrenfest. On a fait 3 000 expériences aléatoires avec une telle planche de Galton à huit degrés et on a trouvé des résultats intéressants (*tableau 1*).

Si on compare les données observées avec celles qu'on obtient avec la distribution binomiale on peut remarquer des différences importantes (*figure 3*). Comment est-ce qu'on peut interpréter ces différences ? Est-ce que notre planche

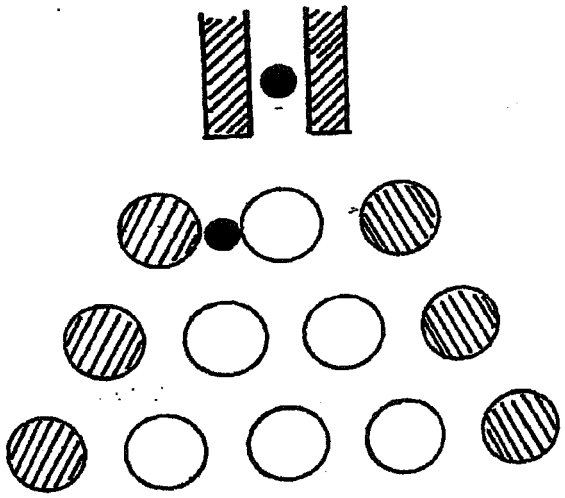


Fig. 2

compartment	0	1	2	3	4	5	6	7	8
distribution observée	8	74	296	712	883	667	283	69	8
distribution binomiale attendue	11,7	93,7	328,1	656,2	820,3	656,2	328,1	93,7	11,7

Tableau 1

est simplement imprécise ou peut-on identifier quelques conditions de construction de cette planche qui pourraient expliquer la réalisation d'une telle distribution observée ?

Tout d'abord on peut constater que les déviations ne sont pas « aléatoires », mais elles suivent un certain ordre : au centre de cette distribution il y a plus de billes qu'attendu, dans les compartiments extérieurs par contre se trouvent moins de billes (*tableau 2*).

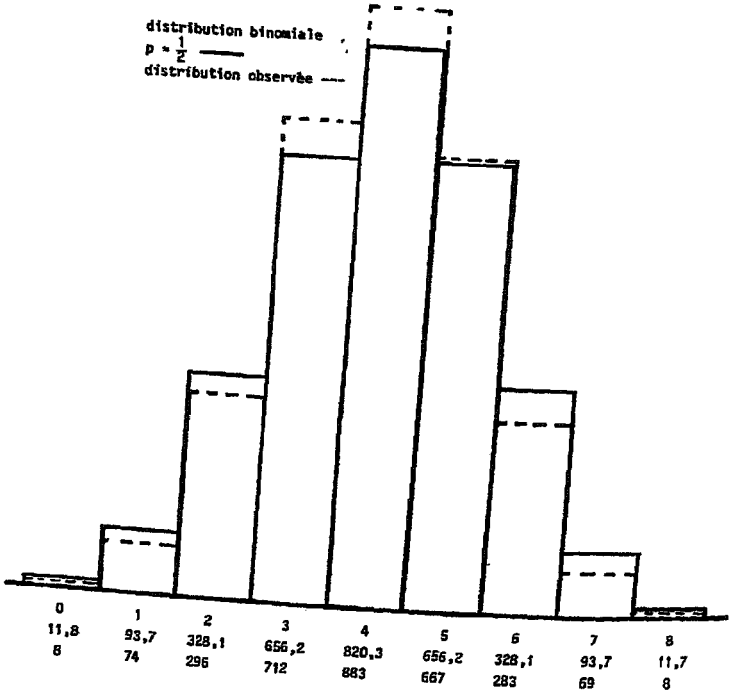


Fig. 3

0	1	2	3	4	5	6	7	8
-3,7	-19,7	-32,1	+55,8	+62,7	+10,8	-45,1	-24,7	-3,7

"au-dessous" "au-dessus" "au-dessous"

de la distribution binomiale attendue

Tableau 2

Comment est-ce qu'on pourrait expliquer la tendance des billes vers le centre de la distribution ? Regardons plus en détail notre planche de Galton et une expérience aléatoire avec une petite bille.

D'abord la bille tombe dans un couloir sur un obstacle ; on peut ici supposer que la bille tombe assez précisément sur le centre de cet obstacle ; alors la probabilité que la bille continue son trajer vers la gauche (de la perspective du spectateur) ou vers la droite sera dans chaque cas $\frac{1}{2}$. Qu'est-ce qu'il se passe après au prochain degré ? Si la bille roule sur le disque vers la gauche, elle tombera sur le premier disque du prochain degré. Comment les probabilités de tomber vers la droite ou vers la gauche changent-elles à ce point-là ? Pour pouvoir vraiment passer entre deux disques il faut que le diamètre de la bille doit plus petit que la distance entre les bords des deux disques. Quand on suppose que la bille roule vraiment sur le disque, elle tombera le plus souvent un petit peu plus à droite du centre sur le disque en-dessous ; puis elle continuera son trajet avec un peu plus de probabilité ($p > \frac{1}{2}$) vers la droite que vers la gauche. Ça veut dire en général que les chemins « zigzagués » sont plus probables que les chemins « droits » dans notre planche de Galton.

Comment est-ce qu'on peut modéliser mathématiquement ces conditions intuitives ? Prenons le triangle de Pascal comme modèle pour la planche de Galton. On peut introduire les coefficients P_k^n et Q_k^n à l'aide du triangle de Pascal (*figure 4*).

Les indices $[{n \atop k}]$ marquent les nœuds du triangle de Pascal : sur le $n^{\text{ième}}$ degré le $k^{\text{ième}}$ point ($k = 0,1,\ldots n$). Les coefficient P_k^n (resp. Q_k^n sont des probabilités d'arriver aú point $[{n \atop k}]$ en passant le point $[{n-1 \atop k-1}]$ (resp. le point $[{n-1 \atop k}]$). Ça veut dire que P_k^n est le produit récurrent des probabilités des chemins qui conduisent au point $[{n-1 \atop k}]$. Comment est-ce qu'on peut calculer ces coefficients ? Regardons en détail un morceau du

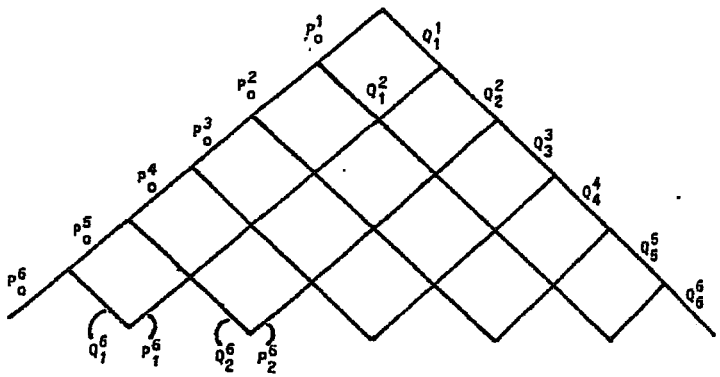


Fig. 4

triangle et analysons le passage du $(n-1)^{\text{ième}}$ degré au $n^{\text{ième}}$ degré (*figure 5*).

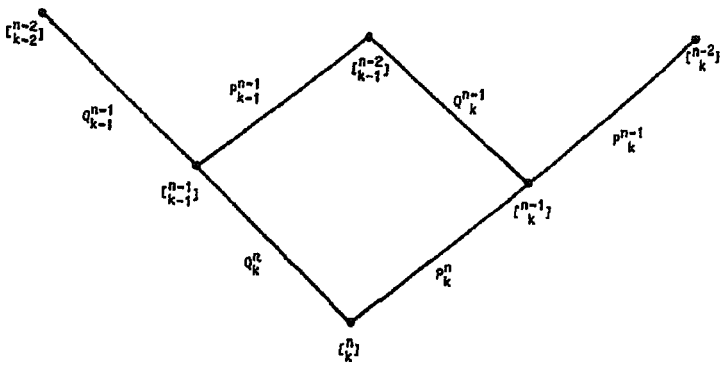


Fig. 5

Notre supposition que les chemins « zigzagués » sont plus probables que les chemins « droits » implique ici qu'il faut multiplier les probabilités d'arriver au point $[^{n-1}_{k}]$ (resp. au

point $[^{n-1}_{k-1}]$) par un facteur $p < \frac{1}{2}$ ou $p > \frac{1}{2}$ pour parvenir au $n^{\text{ième}}$ degré. A l'aide de notre hypothèse intuitive on peut écrire les relations de récurrences suivantes (voir P.L. Hennequin, 1981, p. 437) :

$P_0^1 = \frac{1}{2}$, $Q_1^1 = \frac{1}{2}$, $P_n^n = 0$, $Q_0^n = 0$, pour tous les n

$P_k^n = pP_k^{n-1} + qQ_k^{n-1}$, pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$

$Q_k^n = pQ_{k-1}^{n-1} + qP_{k-1}^{n-1}$, pour $k = 1, 2, \ldots, n$

$p = \frac{1}{2} \pm \varepsilon$, $q = \frac{1}{2} \pm \varepsilon$, $p + q = 1$

$P\,[^{n}_{k}] = P_k^n + Q_k^n$ nous donne la distribution calculée en suivant notre hypothèse. Les relations de récurrence expriment les dépendances stochastiques d'un degré par rapport au degré précédent, ou plus précisément la dépendance de la chute d'une bille de son chemin précédent. A l'aide d'un ordinateur on peut assez vite calculer quelques distributions concrètes, pour différentes valeurs de ε. D'une telle manière on peut essayer de trouver un ajustement assez préci pour la distribution observée. Le *tableau 3* donne quelques distributions calculées à l'aide des relations de récurrence.

compartiment	0	1	2	3	4	5	6	7	8
distribution binomiale p = 1/2	11,7	93,7	328,1	656,2	820,3	656,2	328,1	93,7	11,7
distribution observée	8	74	296	712	883	667	283	69	8
distribution calculée ε= − 0,026	8	77,1	309,5	672,8	864,8	672,8	309,5	77,1	8
ε= − 0,035	7	72,2	303,1	677,7	879,5	677,7	303,1	72,2	7
ε= − 0,037	6,8	71	301,6	678,8	883	678,8	301,6	71	6,8
ε= − 0,040	6,5	69,4	299,3	680,5	888,3	680,5	299,3	69,4	6,5

Tableau 3

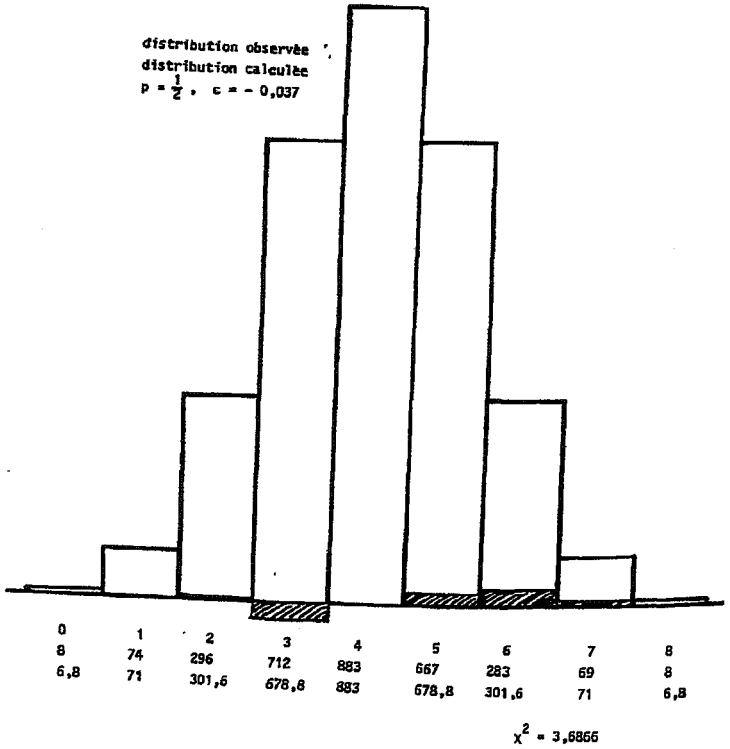


Fig. 6

Pour $p = \frac{1}{2} - 0{,}037 = 0{,}463$ on trouve un ajustement assez précis *(figure 6)*. Le test de chi carré nous donne aussi une valeur acceptable : $\chi^2 = 3{,}6866$. Ça veut dire que sous l'hypothèse qu'il s'agit d'une distribution binomiale conditionnelle avec $p = 0{,}463$ on peut observer effectivement une distribution de ce type dans 80 %-90 % des cas. On ne peut donc pas refuser l'hypothèse. En outre nos remarques concernant les conditions concrètes de dépendance stochastique dans la planche de Galton ont expliqué d'une manière plausible la réalisation d'une telle distribution statistique.

L'analyse de la géométrie de la planche et surtout celle de la question concernant l'indépendance (stochastique) dans cette expérience aléatoire ont fourni une amélioration du modèle du processus stochastique : tout d'abord on a effectué une généralisation de la loi de Bernoulli sous forme de relations de récurrence et en même temps, on a appréhendé le rôle de l'indépendance stochastique dans l'expérience de Galton.

3.2. *La distribution binomiale conditionnelle*

A l'aide d'une analyse des conditions concrètes de la planches de Galton et sous l'hypothèse qu'il y a des petites dépendances d'un degré à l'autre il était possible de généraliser la loi binomiale. Les relations de récurrence représentent les équations du modèle stochastique et elles permettent de calculer des distributions plus ajustées. On peut essayer de généraliser encore plus le modèle en variant aussi les conditions de l'expérience aléatoire de Galton. Ces variations et leurs interprétations mathématiques pourraient renforcer la validité de nos réflexions concrètes concernant la construction de la planche. Les considérations suivantes montrent comment la nature dialectique de l'indépendance contrôle le processus de généralisation.

Non seulement on peut analyser la planche de Galton dans une position horizontale, mais on peut aussi faire des expériences aléatoires dans une position inclinée *(figure 7)*. Pour chacun des angles d'inclinaison $\delta = 2°$, $\delta = 5°$ et $\delta = 7°$ on a fait 3 000 expériences aléatoires ; on a observé les résultats suivants *(tableau 4)*.

compartiment	0	1	2	3	4	5	6	7	8
δ = 0°	8	74	236	712	883	667	283	69	8
δ = 2°	4	57	216	527	830	808	420	120	21
δ = 5°	1	16	105	305	680	827	712	291	63
δ = 7°	0	5	23	111	339	607	901	702	312

Tableau 4

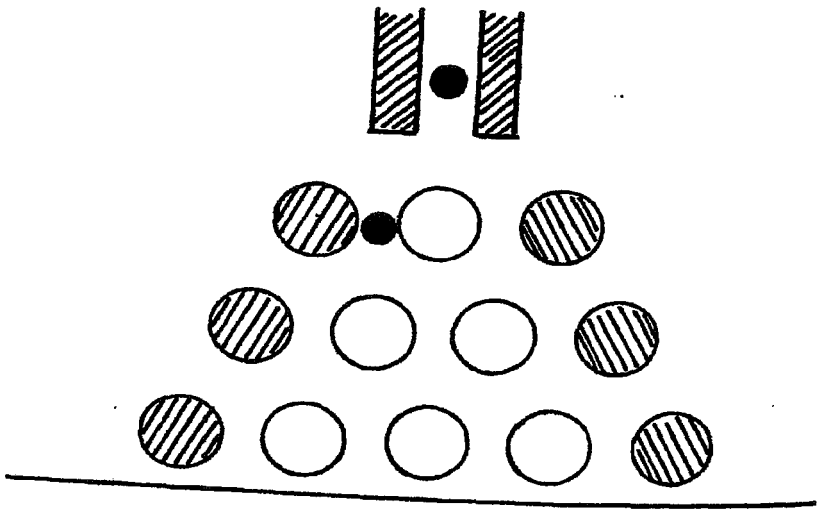


Fig. 7

On ne peut pas modéliser ces données à l'aide de la loi binomiale générale ($p \neq \frac{1}{2}$). Il faut analyser comme auparavant la situation géométrique pour proposer des relations de récurrence qui expliquent les dépendances différentes de cette expérience aléatoire. Considérons encore une fois le morceau du triangle de Pascal et analysons les conditions du passage du $(n-1)^{\text{ième}}$ degré au $n^{\text{ième}}$ degré *(figure 5)*.

Dans cette situation-ci les chemins « zigzagués » sont aussi plus probables que les chemins « droits ». Mais à cause des inclinaisons de la planche des chemins de la droite à la gauche (de la perspective du spectateur) sont un peu plus probables que les chemins de la gauche à la droite. Ces idées généralisent les relations de récurrence :

$P_0^1 = p$, $Q_1^1 = q$, $P_n^n = 0$, $Q_0^n = 0$, pour tous les n

$P_k^n = p_1 P_k^{n-1} + p_2 Q_k^{n-1}$, pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$

$Q_k^n = q_2 Q_{k-1}^{n-1} + q_1 P_{k-1}^{n-1}$, pour $k = 1, 2, \ldots, n$

$p_1 = p + \varepsilon_1$, $q_1 = q - \varepsilon_1$

$q_2 = q + \varepsilon_2$, $p_2 = q - \varepsilon_2$

$p + q = 1$, $p_1 + q_1 = 1$, $p_2 + q_2 = 1$.

Ces relations de récurrence définissent la *loi binomiale conditionnelle* (à deux degrés). C'est une généralisation de la loi de Bernoulli ; nous retrouvons la situation connue dans le cas $\varepsilon_1 = 0$ et $\varepsilon_2 = 0$ resp. aussi $p = \frac{1}{2}$. A l'aide de ces équations on peut calculer les distributions ajustées pour nos données. Le programme d'ordinateur nous fournit les distributions calculées suivantes *(voir les figures 8, 9 et 10)*.

Les valeurs de χ^2 montrent qu'on ne peut pas refuser l'hypothèse que les distributions observées sont assez conformes aux distributions calculées respectives.

La variation des conditions expérimentales par différents angles d'inclinaison de la planche et la généralisation de la loi binomiale avec leur possibilités d'ajuster les données observées, renforcent notre impression qu'il s'agit ici en effet des dépendances stochastiques et expérimentales sur les degrés différents. Les résultats calculés ne sont pas complètement égaux aux données observées — naturellement on ne peut pas attendre un tel ajustement exact dans les statistiques —, mais ils décrivent très bien le processus stochastique de cette planche de Galton spécifique.

Les représentations des polygones montrent les possibilités de variation d'une loi binomiale conditionnelle. D'abord il s'agit des variations dans le cas symétrique ; on peut constater que la variation des polygones pas à pas commencent avec une concentration au centre jusqu'à une distribution de toutes les valeurs sur les bords *(figure 11)*.

Dans le cas général on peut varier les deux paramètres ε_1 et ε_2 en partant d'une $p = \frac{1}{2}$. Commençant avec une concentration des valeurs p.e. sur le bord gauche on peut transfor-

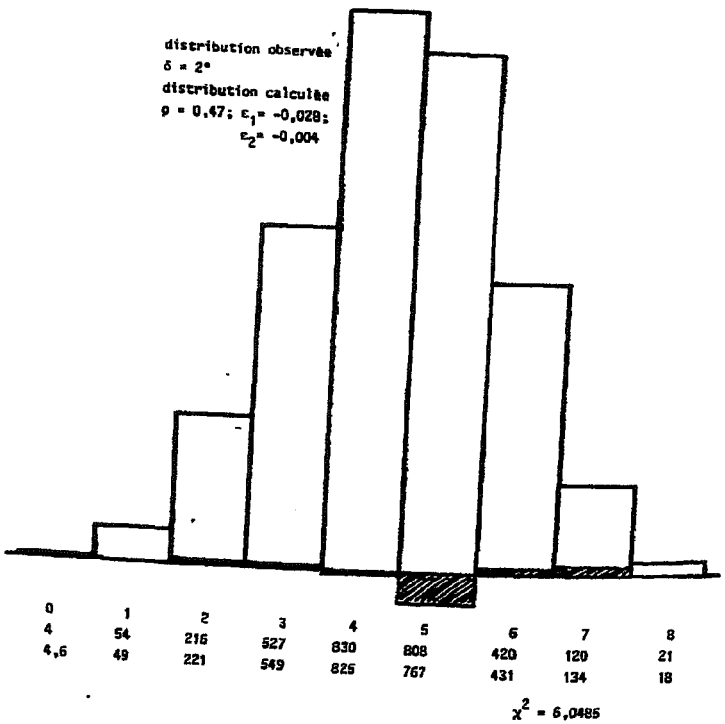


Fig. 8

mer la distribution jusqu'au cas $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, et puis arriver à une concentration des valeurs sur le bord droit *(voir les figures 12 et 13)*.

Cet exemple illustre le grand spectre de variation de la loi binomiale conditionnelle. On peut ajuster une multitude de données concrètes par la variation des paramètres d'une loi binomiale conditionnelle. Mais un tel ajustement ne devrait pas être « quelconque », ça veut dire réaliser simplement une uniformité « extérieure », mais il faut qu'il soit fondé sur quelques conditions concrètes de l'expérience aléatoire et du générateur. Dans notre exemple de la planche de Galton c'était l'idée que l'indépendance ou la dépendance stochasti-

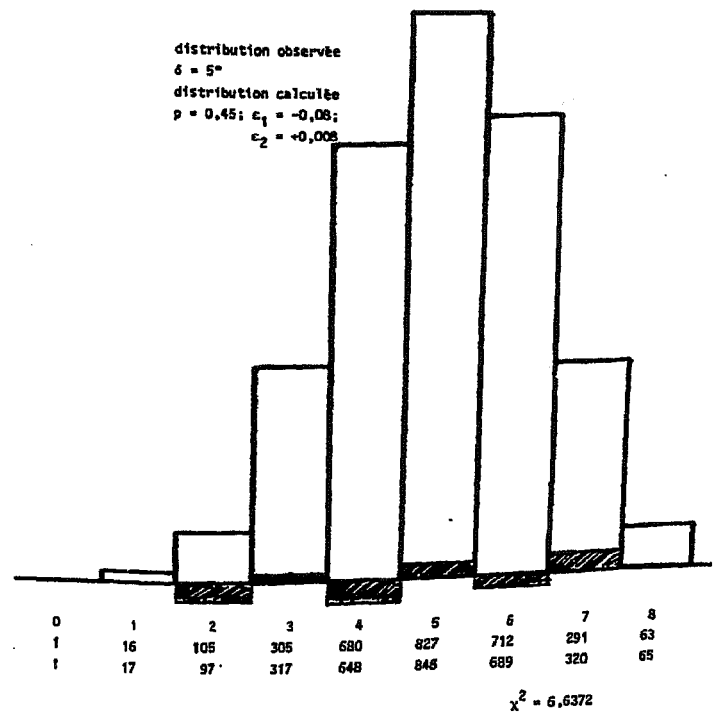


Fig. 9

que corresponde aux faits réels de la planche considérée et que cette correspondance reflète les deux conceptions concurrentes du concept d'indépendance. Dans une telle perspective l'indépendance est un moyen de contrôle pour le processus de généralisation ; ce concept joint les possibilités de variations et de généralisation avec les conditions concrètes et spécifiques du processus stochastique observé. Les deux conceptions de l'indépendance (resp. de dépendance) stochastiques rendent possibles un tel contrôle : d'une part la règle de multiplication (et puis les relations de récurrence) pour le calcul des probabilités, d'autre part l'idée

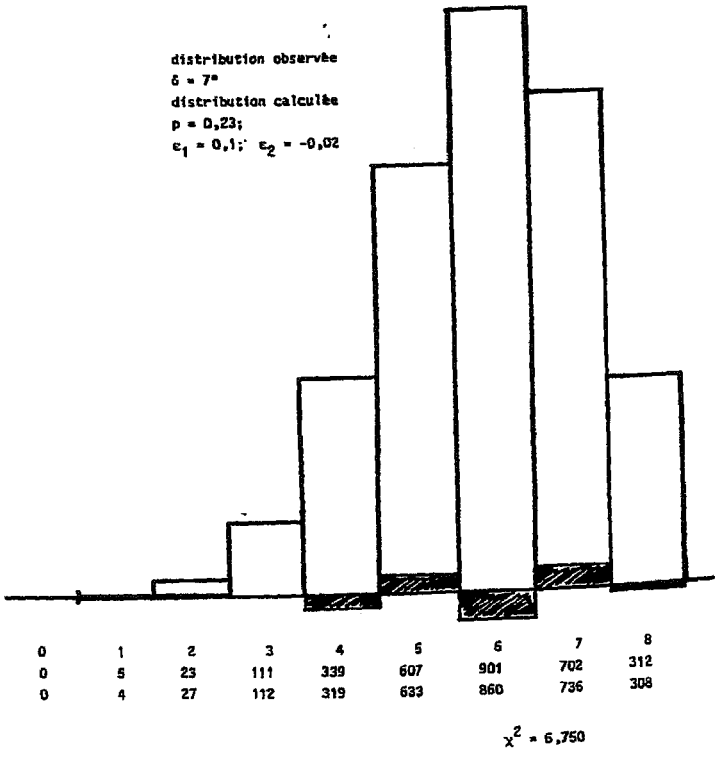


Fig. 10

intuitive qu'il existe des dépendances et des indépendances concrètes dans une situation donnée. La supposition de la dépendance de deux degrés dans la planche de Galton qui s'appuye sur quelques conditions réelles est comparable à la condition du nombre de chocs (Stoßzahlansatz) dans le modèle de gaz imaginé par Ehrenfest.

Dans le même temps il faut faire le rapport entre la loi binomiale conditionnelle et le théorème de limite centrale. Les affaiblissement étudiés au concept d'indépendance dans le cadre de la loi binomiale conditionnelle conduisent à des

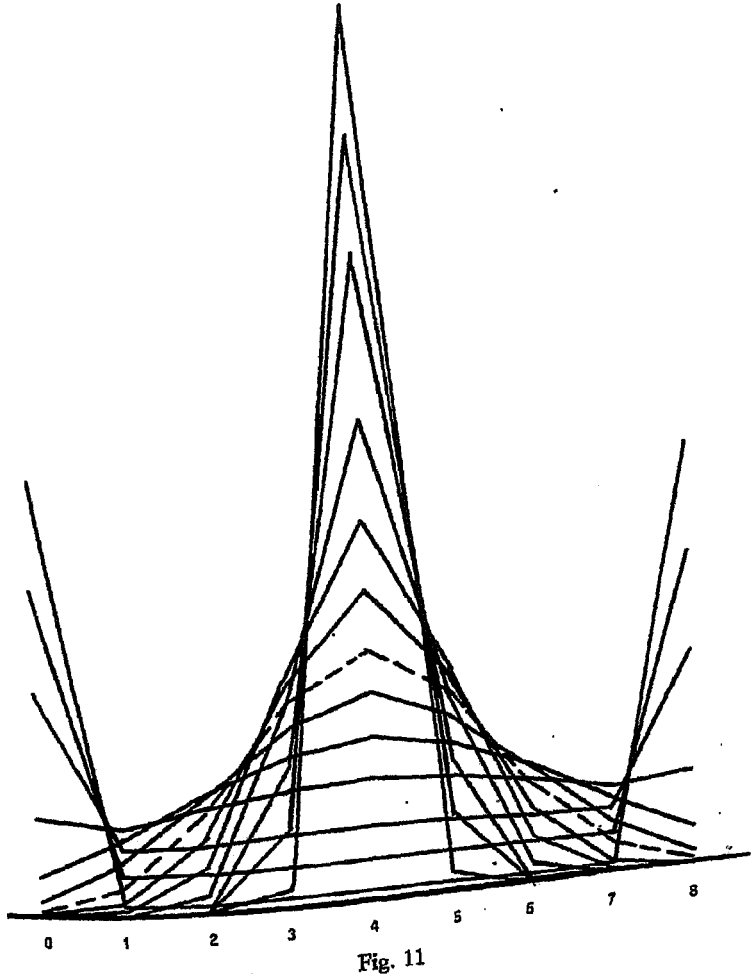


Fig. 11

enchaînements markoviens. Pour ces enchaînements le théorème de limite centrale subsiste (voir par exemple P.L. Hennequin, 1981, p. 441). Alors on y trouve aussi une généralisa-

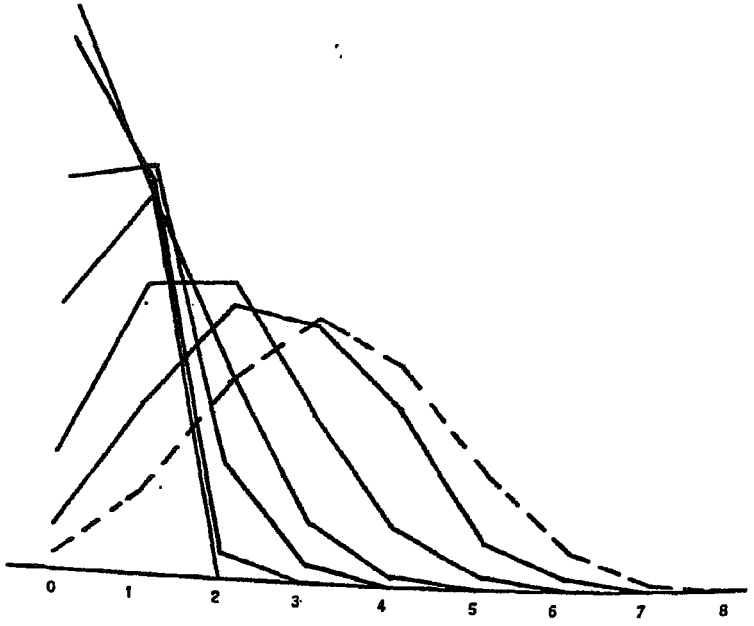


Fig. 12

tion des conditions sous lesquelles se produisent des répartitions gaussiennes (voir 2.2.1.).

3.3. La nature complémentaire du concept d'indépendance

Le rôle double de l'indépendance est très important pour la construction des modèles stochastiques et pour l'analyse statistiques des situations réelles. Il faut comprendre que ce caractère complémentaire de l'indépendance établit une tension principale et permanente entre le modèle stochastique et la situation aléatoire réelle. Ce rapport mutuel produit toujours de nouvelles compréhensions des conditions concrètes des situations aléatoires.

L'exemple suivant montre qu'un ajustement prétendûment complet entre le modèle et la situation ne peut plus produire de nouvelles connaissances. Cet exemple traite

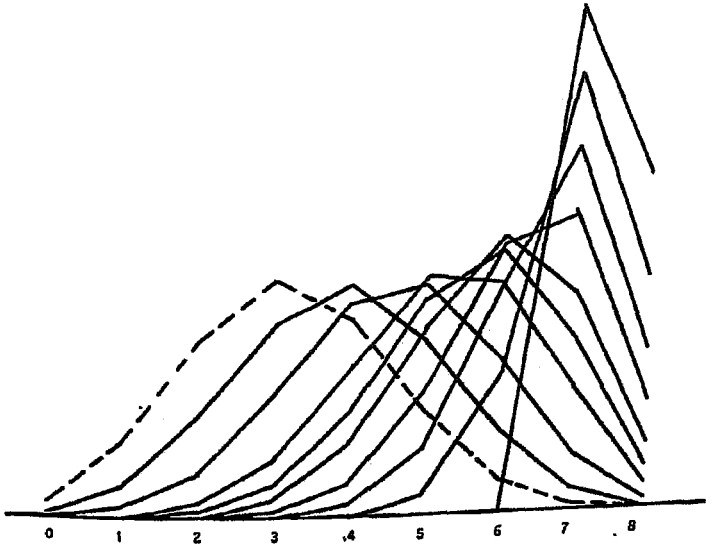


Fig. 13

l'analyse des données concernant le rapport des naissances de filles et de garçons. Il s'agit d'un ensemble des données levées par A. Geissler (1889) pendant les années 1876 jusque 1880 ; il a enregistré environ 4 millions de naissances. Jusqu'aujourd'hui il y a une discussion entre des statisticiens et des biologistes concernant l'interprétation juste de ces données. Regardons plus en détail la distribution des garçons et des filles dans les familles de 12 enfants *(tableau 5)*.

La comparaison de la distribution observée avec la distribution binomiale ($p = 0{,}5168$) montre qu'il y a plus de familles avec beaucoup de filles (resp. garçons) qu'attendu. Le nombre des familles avec un équilibre de filles et garçons est plus petit *(figure 14)*. Pour mieux comprendre ce phénomène on a développé des modèles stochastiques différents. Geissler n'a pas pris en considération les naissances des vrais jumeaux ; quand même on ne pourrait pas expliquer avec satisfaction les données observées et « nettoyées ».

s.e x e garçons	filles	nombres des mères	somme des garçons	filles	enfants
6.	7.	8.	9.	10.	11.
		douze enfants			
12	—	7	84	—	84
11	1	60	660	60	720
10	2	298	2980	596	3576
9	3	799	7191	2397	9588
8	4	1398	11184	5592	16776
7	5	2033	14231	10165	24396
6	6	2360	14160	14160	28320
5	7	1821	9105	12747	21852
4	8	1198	4792	9584	14376
3	9	521	1563	4689	6252
2	10	160	320	1600	1920
1	11	29	29	319	348
—	12	6	—	72	72
		10690	66299	61981	128280

Tableau 5

Dans le cadre de nos réflexions sur la distribution binomiale conditionnelle nous voulons essayer de construire un meilleur ajustement des données. Ça veut dire que nous faison l'hypothèse qu'il y a des dépendances dans la suite des naissances des enfants d'une famille. Ça semble être justifié en premier lieu, parce qu'il y a plus de familles dans lesquelles on ne trouve que des garçons ou que des filles. Avec les paramètres $p = 0{,}5168$, $\varepsilon_1 = 0{,}028$ et $\varepsilon_2 = 0{,}029$ nous pouvons calculer un meilleur ajustement que la distribution binomiale *(figure 15)*.

Ce n'est pas une « solution » du problème des données de Geissler, mais on peut constater que l'idée de dépendance dans la suite des naissances fournit une première améliora-

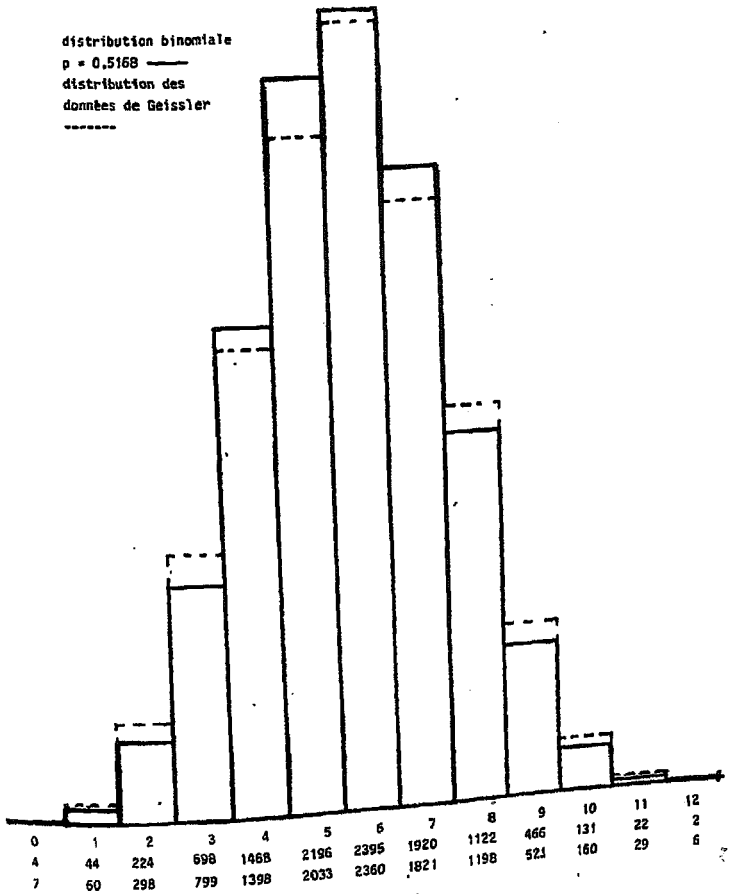


Fig. 14

tion de la description statistique. Nous n'avons pris que l'aspect stochastique de la dépendance dans notre modèle mathématique. Il faudrait compléter cette analyse par une investigation des dépendances génétiques. Mais cela c'est vraiment encore un problème de la recherche scientifique dans ce domaine. On voit que l'indépendance ne devrait pas

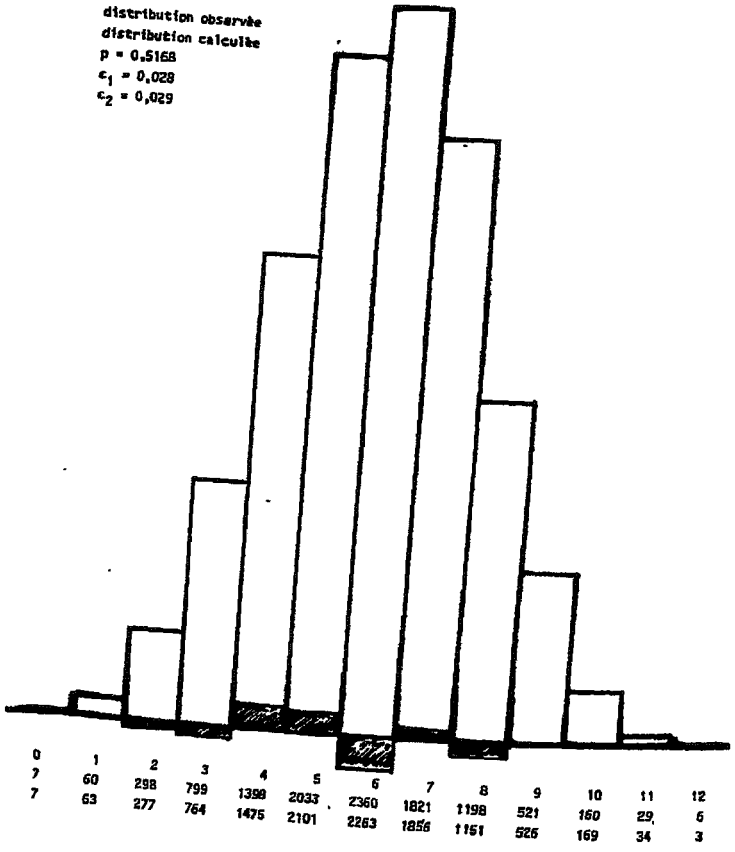


Fig. 15

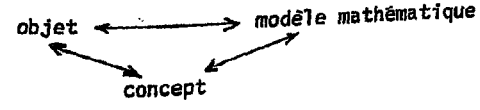
être simplement une condition formelle et technique pour le modèle stochastique mais qu'elle doit correspondre aux faits réels, dans le cas présent aux dépendances biologiques.

A l'aide de notre exemple on pourrait encore rendre plus claire la dialectique entre les intuitions concrètes sur les dépendances réelles et leurs modèles stochastique. Si on savait, par exemple, pour les 10 690 familles toutes les suites

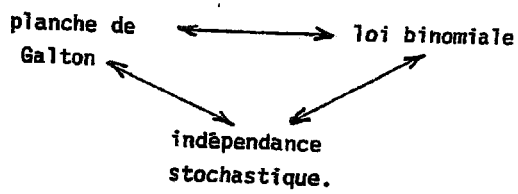
de garçons et de filles du premier jusqu'au douzième enfants on pourrait estimer les probabilités de chaque degré par les fréquences relatives. C'est-à-dire on pourrait généraliser empiriquement la distribution binomiale conditionnelle de deux à douze degrés pour les données de Geissler. De cette façon on pourrait recevoir un ajustement total. Mais cette généralisation ne s'appuye que sur l'aspect formel de l'indépendance, c'est-à-dire la règle de multiplication resp. le changement des probabilités (ou les fréquences relatives) à chaque degré. Ce serait une généralisation « exagérée » parce qu'elle n'exprime plus de connaissance théorique nouvelle ; elle n'est qu'une copie des données réelles, mais elle ne peut pas vraiment expliquer les conditions concrètes qui causent la réalisation de cette distribution.

Alors il faut qu'une différence existe entre la situation réelle et le modèle stochastique. Et c'est la dialectique entre règle mathématique et intuition concrète de l'indépendance qui contrôle les processus de généralisation et qui empêche des généralisations « exagérées ». Nous n'avons considéré qu'une possibilité de mieux appliquer les données de Geissler ; il y a beaucoup d'autres approches. Par exemple, il y a des modèles qui reposent sur l'hypothèse que la probabilité de la naissance d'un garçon (resp. d'une fille) est dépendante de ses parents (resp. que la probabilité est dépendante des groupes sociaux des parents). C'est une autre manière d'utiliser le concept d'indépendance pour comprendre la structure stochastique des données de Geissler. Mais en tout cas il manque une explication génétique qui correspondent au concept de dépendance stochastique (dans les approches différentes d'analyse).

Cet analyse didactique du concept d'indépendance a travaillé de manière exemplaire la structure même du triangle relationnel :



en étudiant l'exemple :



La relation entre l'objet et le modèle mathématique était développée à l'aide des variations des conditions d'expérimentation d'une part et des variations des formules et des paramètres au modèle d'autre part. Le concept d'indépendance a contrôlé cette relation entre la planche de Galton et la loi binomiale et leurs généralisations mutuelles. C'était le rôle complémentaire de l'indépendance comme objet et moyen (voir R. Douady, 1985) qui pouvait régler la relation entre la planche de Galton et la loi binomiale et leur développement. En même temps on pourrait mieux comprendre le concept d'indépendance. L'indépendance c'est pas simplement une qualité empirique, mais ce concept reflète comme tout concept mathématique des *relations* possibles entre les objets concrets. Dans notre exemple l'indépendance exprime des aspects de la structure géométrique et physique de la planche et leur rapport avec l'expérimentation et l'expérimentateur. Alors, les indépendances et les dépendances ne sont pas simplement donnés *a priori* ni empiriquement ni théoriquement (par la règle de multiplication) ; il faut les constater, il faut les analyser et les développer et il faut les comprendre dans leur caractère complémentaire.

Le développement historique de l'indépendance stochastique a vu un renversement du contenu intuitif de ce concept et de sa définition mathématique formelle. Les probabilités scientifiques s'appuyent surtout sur la définition formelle pour pouvoir en tirer les conséquences mathématiques sans en même temps prendre en considérations quelques applications concrètes de ce concept. C'est la manière de procéder d'une discipline scientifique spécialisée ; elle se procure un

contexte de signification dans le champ d'un concept très spécialisé. Dans l'enseignement des mathématiques à l'école il faut introduire un contexte commun d'un concept mathématique pour tous les élèves de la classe. Ça veut dire que le savoir mathématique doit être à l'école — contrairement au savoir mathématique scientifique — doit être développé dans une dialectique plus étroite entre les objets (des situations réelles, des objets, des significations concrètes) et des modélisations mathématiques (des règles, des équations, des calculs). La compréhension du concept d'indépendance dans l'enseignement général a besoin des deux aspects, de l'objet et du moyen mathématique, des intuitions concrètes et des règles formelles ; ni l'un seul ni l'autre seul des deux aspects pourrait être un fondement satisfaisant pour le processus de compréhension de la signification d'un concept mathématique.

BIBLIOGRAPHIE

BAYES Th., 1973, *An essay towards solving a problem in the doctrine of chances.* Aussi dans : PEARSON E.S./KENDALL M. (eds) : Studies in the history of statistics and probability. Vol. I, Griffin, London, 1970, 131-153.

BERNOULLI J., 1713, *Ars conjectandi,* Basel. Auf Deutsch erschienen : *Wahrscheinlichkeitsrechnung,* Ostwald's Klassiker Nr. 107 u. 108, Leipzig, 1899.

BÖGE W., 1979, *Bedenken gegen die Einführung von Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik und evtl. Spieltheorie in den Mathematikunterricht in der Schule.* Rundbrief, Heidelberg.

BOLTZMANN L., 1872, *Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen.* Dans : Wissenschaftliche Abhandlungen, Bd. I, 316-402.

DAVID F.N., 1962, *Games, Gods and Gambling.* London.

DE MOIVRE A., 1756, *The doctrine of chances or a method of calculating the probability of events in play.* Reprinted, Chelsea, New York, 1967.

DIEUDONNE J., 1978, *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900.* Bd. I et II, Hermann, Paris.

DOUADY R., 1985, *The interplay between different settings. Tool-object dialectic in the extension of mathematical ability. Examples from elementary school teaching.* Manuscrit, Paris.

EHRENFEST P. u. T, 1911, *Begriffliche Grundlagen der statistischen Auffassung in der Mechanik.* Dans : Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. IV, Art. 32, Leipzig, Berlin.

FELLER W., 1935/1937, Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Mathematische Zeitschrift,* 40, 521-559 und 42, 488-575.

GEISSLER A., 1889, Beiträge zur Frage des Geschlechtsverhältnisses der Geborenen. *Zeitschrift des K. Sächsischen Stat. Bureaus,* 35, 1-24.

GAUSS C.F., 1809, *Theoria motus corporum cœlestium in sectionibus conicis arbientium.* Perthes und Bessler, Hamburg, teilweise auf Deutsch wiederabgedruckt in : GAUSS, 1964, 92-117.

GAUSS C.F., 1873, *Werke,* vol. 4, Göttingen.

GAUSS C.F., 1964), *Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate,* Würzburg.

GRAUNT J., 1662), *Natural and political observations mentioned in a following Index and made upon bills of mortality,* London.

V. HARTEN G./STEINBRING H, 1984, *Stochastik in der Sekundarstufe I,* Köln.

HENNEQUIN P.L., 1981, Schéma de Bernoulli et planchettes à clous. *Bulletin de l'APMEP,* 435-441.

HUYGENS Ch., 1657, *Ratiociniis in aleae ludo (van Rekeningh in Spelen van Geluck).* Dans : SCHOUTEN F. van (ed.) : Exercitionum Mathematicorum, Amsterdam.

KAC M., 1959, *Statistical independence in probability, analysis and number theory.* Wiley, Rahway, New Jersey.

KAC M., 1982, *The search for the meaning of independence.* Dans : GANI J. (ed.) : The making of statisticiens. Springer, Heildelberg, 62-72.

KOLMOGOROV A.N., 1933, Grundbergriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Springer, Berlin.

LINDEBERG J., 1922, Über das Exponentialgesetz in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Mathematische Zeitschrift,* 15, 211-225.

LOÈVE M., 1978, *Calcul des probabilités.* Dans : DIEUDONNÉ J. : Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900, Bd. II, 277-313.

MISES R. von, 1964, *Mathematical theory of probability and statistics,* New York.

MISES R. von, 1972, *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit.* Springer, Wien.

MONTMORT P.R. de, 1713, *Essai d'analyse sur les jeux de hasards,* Paris.

PRIGOGINE J., 1979, *Vom Sein zum Werden.* Piper.

STEINBRING H., 1980, *Zur Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs — Das Anwendungsproblem in der Wahrscheinlichkeitstheorie aus didaktischer Sicht.* Materialien und Studien des IDM, Bd. 18, Bielefeld.

STEINBRING H., 1985, Mathematische Begriffe in didaktischen Situationen : Das Beispiel der Wahrscheinlichkeit. *Journal für Mathematikdidaktik,* 6, Heft 2, 85-118.

THOMSON C.J., 1972, *Mathematical statistical mechanics.* The MacMillan Company, New York.

WITT J. de, 1671; *Waerdye van lyf — renten near proportie van los — renten, s'Gravenhage.* Wiederabgedruckt in : Die Werke von Jakob Bernoulli, Birkhäuser, Basel, 1975, 327-350.