Heinz Steinbring

Wie verteilen sich die Kugeln beim Galtonbrett wirklich?

In: Mathematik lehren, 1985, Heft 12
S. 31-34, 38

Wie verteilen sich die Kugeln beim Galtonbrett wirklich?

von Heinz Steinbring

1
Problematik

Das Galtonbrett bietet gute Einstiegsmöglichkeiten in den Stochastikunterricht und sollte ihn als wichtiges Arbeits- und Darstellungsmittel beständig begleiten (vgl. Jäger/Schupp 1983). Ist man zu Beginn von gewissen Vorannahmen bezüglich einer möglichst idealen Konstruktion dieses Gerätes ausgegangen, so kann man im Zuge der Entwicklung stochastischer Begriffe und Techniken die Tragfähigkeit dieser Annahmen thematisieren und ihre Abänderungen untersuchen.

Dabei steht nicht die Frage „Gibt es überhaupt ideale Galtonbretter?" zur Diskussion. Die Antwort hierauf ist bekannt und für den Unterricht unfruchtbar: Jedes noch so gut gearbeitete reale Galtonbrett hat notwendigerweise Konstruktionsmängel, die sich bei genügend feiner Analyse statistisch nachweisen lassen. Es kann also nicht um die strikte Alternative unbrauchbares oder „ideales" Galtonbrett gehen.

Wir wollen bei der experimentellen Untersuchung von Galtonbrettern mögliche Gesetzmäßigkeiten und konstruktionsbedingte Merkmale herausfinden, die es gestatten, sich ein dem Idealfall nahekommendes Modell vom Galtonbrett zu machen. Weiß man etwa, wie sich unter veränderten konstruktiven und experimentellen Bedingungen die jeweils real auftretenden Verteilungen verändern, ja, sollte es in einigen Fällen gar möglich sein, hierfür einen mathematischen Zusammenhang anzugeben, so läßt sich der Idealfall gewissermaßen als „Spezialfall" solcher Variationen auffassen.

Eine zentrale Vorannahme für Binomialverteilungen ist die stochastische Unabhängigkeit der einzelnen Stufen. Was sind konstruktive Merkmale für die Gewährleistung der stochastischen Unabhängigkeit bei realen Galtonbrettern?

2
Modellverbesserung

Ein umfangreiches Experiment mit einem Galtonbrett, dessen Zapfen zylindrisch geformt sind (s. Foto 3 im Basisartikel) hat folgende Ergebnisse gebracht:

Kästchen	0	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
beobachtet	8	74	296	712	883	667	283	69	8	3000
erwartet gemäß der Binomialverteilung	11,7	93,7	328,1	656,2	820,3	656,2	328,1	93,7	11,7	3000

Tabelle 1

Zunächst wollen wir aus den Beobachtungsdaten einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit p (einer Linksabweichung) ermitteln. Wenn insgesamt k Kugeln über n Zapfenreihen in (n+1) Kästchen fallen, dann ist die Anzahl der zu erwartenden Linksabweichungen einer Kugel n·p, und die Anzahl der zu erwartenden Linksabweichungen für alle Kugeln k·n·p. Diese Zahl wird mit der Anzahl aller tatsächlich aufgetretenen Linksabweichungen im Experiment verglichen.

Befinden sich im Kästchen 0 k_0 Kugeln, im Kästchen 1 k_1 Kugeln usw., dann ist die experimentelle Anzahl der Linksabweichungen:

$$k_0 \cdot (n-0) + k_1 \cdot (n-1) + \ldots + k_n \cdot (n-n).$$

Durch Gleichsetzen mit der erwarteten Anzahl läßt sich für p ein Schätzwert $\hat{p}$ angeben:

$$\hat{p} = \frac{k_0 \cdot (n-0) + k_1(n-1) + \ldots + k_n(n-n)}{k \cdot n}$$

Für unsere Experimentdaten erhalten wir:

$$\hat{p} = \frac{8 \cdot 8 + 74 \cdot 7 + 296 \cdot 6 + 712 \cdot 5 + 883 \cdot 4 + 667 \cdot 3 + 283 \cdot 2 + 69 \cdot 1}{8 \cdot 3000}$$

$$\hat{p} = \frac{12086}{24000} = 0{,}50358\overline{3}.$$

Ein recht guter empirischer Wert für die erwartete Wahrscheinlichkeit! Unter diesen Umständen wollen wir einmal mit dem χ^2-Test überprüfen, ob die beobachteten Werte von den theoretisch zu erwartenden signifikant abweichen.

	beobachtete Werte x_i	theoretisch zu erwartende Werte kp_i	$\frac{(x_i - kp_i)^2}{kp_i}$
0	8	11,7	1,1701
1	74	93,7	4,1418
2	296	328,1	3,1405
3	712	656,2	4,7450
4	883	820,3	4,7925
5	667	656,2	0,1778
6	283	328,1	6,1994
7	69	93,7	6,5111
8	8	11,7	1,1701

Tabelle 2 Σ 32,1085

Dieser beobachtete Wert für χ^2 liegt bei 7 Freiheitsgraden weit über der 0,01-Schranke 18,4753 und ist somit hoch signifikant. Man kann davon ausgehen, daß es sich in diesem Fall nicht um eine Binomialverteilung handelt. Entsprechend der „Philosophie" des χ^2-Texts haben wir herausgefunden, daß sich eine Verteilung, wie die von uns beobachtete, unter der Hypothese, es liege eine (ideale) Binomialverteilung zugrunde, nur in weit weniger als 1 % der Fälle einstellen wird. Der Test gibt für sich allein nur eine negative Antwort. Ja, man weiß, daß bei großer Anzahl von Versuchen der χ^2-Text sehr scharf ist und so (fast) jedes Galtonbrett als falsch entlarven würde (vgl. Engel 1973, S. 112).

Berechnet man die Differenz zwischen den beobachteten und den entsprechend der Binomialverteilung zu erwartenden Werten, so fällt sofort eine Regelmäßigkeit ins Auge:

0	1	2	3	4	5	6	7	8
−3,7	−19,7	−32,1	+55,8	+62,7	+10,8	−45,1	−24,7	−3,7

„unterhalb" „oberhalb" „unterhalb"

Tabelle 3

In der Mitte, d. h. in den Kästchen 3, 4 und 5 finden sich mehr Kugeln als erwartet, in den äußeren Kästchen dagegen weniger. Das „Vorzeichenmuster" läßt vermuten, daß eine gewisse Regelmäßigkeit dahintersteckt. Woher kann es kommen, daß mehr Kugeln in die Mitte fallen und weniger nach außen als erwartet? Wodurch läßt sich das „Streben in die Mitte" erklären?

Man kann von der Vermutung ausgehen, daß bei allen Zapfen (dem ersten ausgenommen) die Wahrscheinlichkeit, nach außen zu fallen, geringer als $\frac{1}{2}$ und die Wahrscheinlichkeit, nach innen zu fallen, größer als $\frac{1}{2}$ ist. Wie läßt sich eine solche Annahme präzisieren und anhand des Aufbaus unseres Galtonbrettes plausibel machen? Betrachten wir dazu einen Ausschnitt des Galtonbretts im Detail:

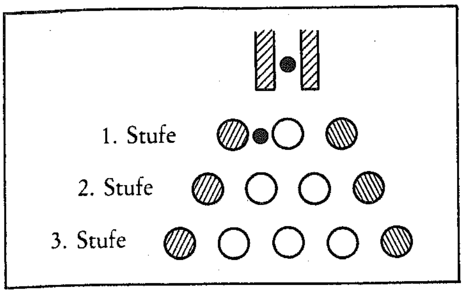


Abb. 1

Zunächst wird die fallende Kugel durch einen Kanal auf den zylindrisch geformten Zapfen der 1. Stufe geführt; hier kann man wohl annehmen, daß die Kugel genau auf die Mitte fällt, die Links- bzw. Rechts-Wahrscheinlichkeit also $\frac{1}{2}$ beträgt.

Was passiert in der zweiten Stufe? Rollt die Kugel von der Scheibe der 1. Stufe links herab, dann wird sie auf die 1. Scheibe der 2. Stufe fallen. Wie ändern sich an dieser Stelle die Ausweichwahrscheinlichkeiten? Damit die Kugel zwischen zwei Scheiben hinabrollen kann, muß ihr Durchmesser geringer als der Abstand beider Scheibenränder sein.

Geht man davon aus, daß die Kugel tatsächlich rollt, so wird sie in den meisten Fällen leicht rechts von der Mitte der unteren Scheibe aufprallen und mit geringfügig größerer Wahrscheinlichkeit nach rechts abweichen. Im Unterschied zum Fall auf die Scheibe der ersten Stufe wird die Kugel auf ihrem weiteren Weg nicht vor einem Aufprall jeweils durch einen zentrierten Kanal geführt, der ihre Fallbewegung stabilisiert und auf die Mitte ausrichtet; sie rollt zwischen zwei Scheiben hindurch, wobei sie entweder gleich etwas neben die Mitte der unteren Scheibe fällt oder dieser Effekt durch den Abprall an der benachbarten Scheibe verursacht wird. Diese inhaltlichen Überlegungen lassen sich zumindest als „statistisch" bedeutungsvoll erklären.

Wie kann man diese Überlegungen in den Wahrscheinlichkeitskalkül des Galtonbretts übertragen? Betrachten wir zunächst ein zweistufiges Galtonbrett mit drei Kästchen. Das entsprechende Baumdiagramm ist zur Berechnung der Verteilung hilfreich.

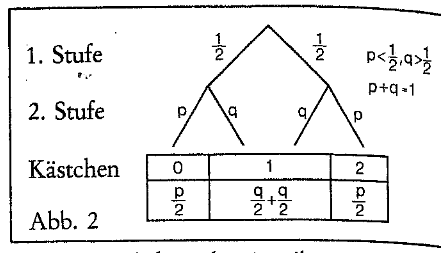


Abb. 2

Die Ermittlung der Verteilung wird für ein dreistufiges Galtonbrett schon schwieriger.

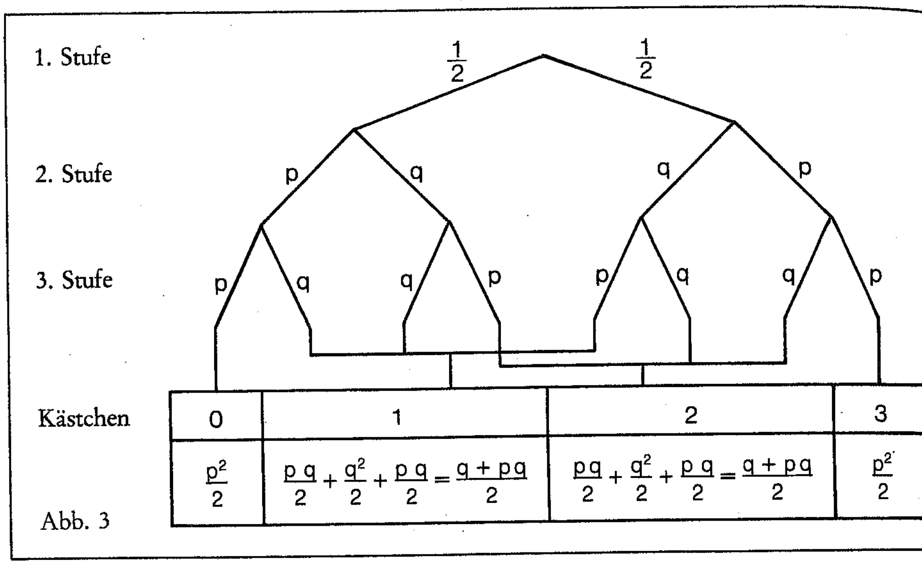


Abb. 3

Für vier- und mehrstufige Galtonbretter wird dieser „direkte“ Rechenweg über das Baumdiagramm schnell zu aufwendig. In den behandelten einfachen Fällen kann jedoch folgende Feststellung gemacht werden: Für eine Kugel hängt die Wahrscheinlichkeit für eine Abweichung nach rechts oder links davon ab, ob sie von rechts oder von links auf den infrage stehenden Zapfen fällt. Unsere anfängliche Annahme wird hierdurch präzisiert: Die Kugeln fallen nicht in jedem Fall an einem Zapfen mit größerer Wahrscheinlichkeit nach „innen“ als nach „außen“; dies hängt davon ab, woher die betrachtete Kugel gekommen ist.

In unserem Beispiel liegt somit keine Unabhängigkeit aller Stufen im Galtonbrett vor: abhängig vom Fall in der Stufe zuvor wird sich für die betrachtete Stufe die Wahrscheinlichkeit ändern.

Sei mit l_i und r_i das Ereignis bezeichnet: auf der i-ten Stufe fällt eine Kugel nach links bzw. nach rechts, dann läßt sich die Abhängigkeit zweier aufeinander folgender Stufen im Galtonbrett als bedingte Wahrscheinlichkeit formulieren:

$$P(l_{i+1}/l_i) = P(r_{i+1}/r_i) = p < \frac{1}{2},$$

$$P(l_{i+1}/r_i) = P(r_{i+1}/l_i) = q > \frac{1}{2}$$

Diese Bedingung muß bei der allgemeinen Berechnung der gesuchten Verteilung für unser achtstufiges Galtonbrett berücksichtigt werden. Zu dieser Berechnung wollen wir die Koeffizienten

$$P_k^n \text{ und } Q_k^n$$

in einem Pascalschen Dreieck definieren:

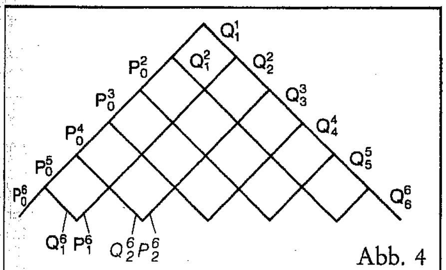


Abb. 4

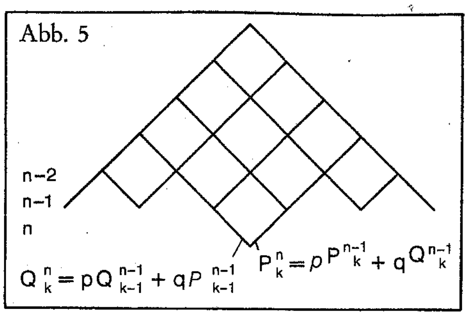
Die Indizes $\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{n}{k}\right]$ bezeichnen einen Punkt im Pascalschen Dreieck: auf der n-Stufe den k-ten Punkt ($k = 0,1, \dots n$). Die Koeffizienten P_k^n und Q_k^n (z. B. P_2^6 und Q_2^6) sind dann längs den Wegen im Pascalschen Dreieck aufmultiplizierte Wahrscheinlichkeiten zum Punkt $\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{n}{k}\right]$; und zwar ist

- P_k^n die Wahrscheinlichkeit zum Punkt $\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{n}{k}\right]$ von rechts oben, d. h. über den Punkt $\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{n-1}{k}\right]$ zu gelangen, und
- Q_k^n die Wahrscheinlichkeit zum Punkt $\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{n}{k}\right]$ von links oben, d. h. über den Punkt $\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{n-1}{k-1}\right]$ zu gelangen.

Es gilt für P (Kugel erreicht $\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{n}{k}\right]$), kurz $P\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{n}{k}\right]$: $P\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{n}{k}\right] = P_k^n + Q_k^n$. Wie lassen sich die P_k^n und Q_k^n rekursiv bestimmen? Dazu sehen wir uns den Übergang von der (n–1)-ten zur n-ten Stufe im Pascalschen Dreieck an:

Auf den Punkt $\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{n}{k}\right]$ „entfällt“ vom Punkt $\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{n-1}{k}\right]$ der Anteil p von „oben rechts“ (d. h. von $\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{n-2}{k}\right]$) und der Anteil q vo „oben links“ (d. h. von $\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{n-2}{k-2}\right]$).

Abb. 5



Die Koeffizienten sind zusammen mit den Rand- und Anfangsbedingungen rekursiv definiert:

$P_0^1 = \frac{1}{2}$, $Q_1^1 = \frac{1}{2}$, $P_n^n = 0$, $Q_0^n = 0$, für alle n

$P_k^n = pP_k^{n-1} + qQ_k^{n-1}$ für $k = 0, \dots, n-1$,

$Q_k^n = pQ_{k-1}^{n-1} + qP_{k-1}^{n-1}$ für $k = 1, \dots, n$,

$f: \left[\genfrac{}{}{0pt}{}{n}{k}\right] \to P\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{n}{k}\right] = P_k^n + Q_k^n$

ist die gesuchte Verteilung (vgl. hierzu Hennequin, 1981).

Die Wahrscheinlichkeiten p und q müssen vorgegeben oder empirisch geschätzt werden; die Differenz $\frac{1}{2} - p$ drückt die Abweichung von der idealen Gleichwahrscheinlichkeit auf allen Stufen des Galtonbrettes aus.

Für die Ermittlung unserer theoretischen Verteilung unter der Annahme gewisser Abhängigkeiten zweier aufeinanderfolgender Stufen im Galtonbrett bleibt noch ein recht aufwendiger Rechenweg. Für n = 2 und n = 3 haben wir die Verteilung am Baumdiagramm ermittelt. Will man die Verteilung für n = 8 ausrechnen, so muß man der Rekursion wegen alle vorhergehenden Verteilungen mit ausrechnen. Nach langen Rechnungen (unter Berücksichtigung von Symmetrien) erhält man die folgende Verteilung:

$P\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{8}{0}\right] = P\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{8}{8}\right]$	$\frac{p^7}{2}$
$P\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{8}{1}\right] = P\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{8}{7}\right]$	$\frac{p^5q}{2}(1+5q+P)$
$P\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{8}{2}\right] = P\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{8}{6}\right]$	$\frac{p^3q}{2}(1+3p^2q+3q^2+6q^3+p^3+4pq^2)$
$P\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{8}{3}\right] = P\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{8}{5}\right]$	$\frac{pq}{2}(p^5+p^4+p^4q+2p^3q+5p^3q^2+2p^2q+3p^2q^2+3p^2q^3+pq^2+2pq^3+3pq^4+q^2+q^3+q^4+q^5)$
$P\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{8}{4}\right]$	$q(p^6+3p^4q^2+3p^2q^2+2p^2q^3+p^2q^4+q^3)$

Tabelle 4

Man kann sehen, welch' komplizierte Polynome in p und q sich für diese Verteilung ergeben. Demgegenüber ist es recht einfach und schnell, die rekursiv definierten P_k^n und Q_k^n mit Hilfe eines Computerprogramms für bestimmte p und q berechnen zu lassen.

Die Wahrscheinlichkeiten $P\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{8}{0}\right] = \frac{p^7}{2}$ oder $P\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{8}{1}\right] = \frac{p^5q}{2}(1+5q+p)$ ermöglichen es, einen Schätzwert für p aus den beobachteten Daten zu ermitteln, indem man die zu erwartende Wahrscheinlichkeit mit der beobachteten relativen Häufigkeit gleichsetzt.

$\frac{p^7}{2} = \frac{8}{3000}$ führt zu den Schätzwerten:

$$p = 0{,}47346 \text{ und } q = 0{,}52654.$$

Mit diesen Werten p und q berechnet das Computerprogramm folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$$P\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{8}{0}\right] = P\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{8}{8}\right] = 0{,}002666570$$
$$P\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{8}{1}\right] = P\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{8}{7}\right] = 0{,}025718978$$
$$P\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{8}{2}\right] = P\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{8}{6}\right] = 0{,}103185489$$
$$P\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{8}{3}\right] = P\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{8}{5}\right] = 0{,}224279037$$
$$P\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{8}{4}\right] = 0{,}288299851$$

Für diese Wahrscheinlichkeitsverteilung sind bei 3000 Versuchen folgende Anzahlen zu erwarten:

0	1	2	3	4	5	6	7	8
8,0	77,2	309,6	672,8	864,9	672,8	309,6	77,2	8,0

Tabelle 5

Ein Vergleich mit den beobachteten Daten der Tabelle 1 zeigt, daß für k = 0 und k = 8 die Werte natürlich genau angepaßt sind; ansonsten liegt unsere theoretische Verteilung (für p = 0,47346) – wenn auch weit weniger als die Binomialverteilung (für $p = \frac{1}{2}$) – wiederum in der Mitte (Kästchen 3 und 4) leicht unterhalb und am Rande leicht oberhalb der beobachteten Verteilung. Wir sollten unser p noch ein wenig verkleinern. Mit dem Computerprogramm lassen sich schnell die Verteilungen für p = 0,465, p = 0,4615, p = 0,46, p = 0,45 ermitteln. Im folgenden sind zur vergleichenden Übersicht unter die beobachteten Daten die für das jeweilige p zu erwartenden Anzahlen aufgelistet:

Tabelle 6

Kästchen	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Binomialverteilung ($p = \frac{1}{2}$)	11,7	93,7	328,1	656,2	820,3	656,2	328,1	93,7	11,7
beobachtete Verteilung	8	74	296	712	883	667	283	69	8
bedingte Verteilung für p = 0,47346	8	77,2	309,6	672,8	864,9	672,8	309,6	77,2	8
für p = 0,465	7	72,2	303,1	677,7	879,5	677,7	303,1	72,2	7
für p = 0,4615	6,7	70	300,5	680	886	680	300,5	70	6,7
für p = 0,46	6,5	69,4	299,3	680,5	888,3	680,5	299,3	69,4	6,5
für p = 0,45	5,6	63,9	291,4	686	906,2	686	291,4	63,9	5,6

Man kann „sehen", wie mit kleiner werdendem p die Verteilungen in der Mitte langsam ansteigen und an den Rändern flacher werden. Der Fall $p=\frac{1}{2}$, also die ideale Binomialverteilung, entpuppt sich als ein Spezialfall dieser Schar von Verteilungen. Nach dem Grad der Abhängigkeit zweier Stufen in unserem Galtonbrett läßt sich durch die Variation des Parameters p eine gute Anpassung an die beobachtete Verteilung ermitteln. Für ein p zwischen 0,46 und 0,465 kann man die empirische Verteilung sehr gut approximieren. Auf die theoretische Verteilung für $p=0{,}4615$ wollen wir „der Sicherheit halber" auch den χ^2-Test anwenden. Es ergibt sich hierfür folgender Wert:

$$\chi^2 = 3{,}5993.$$

Dies bedeutet, daß unter der Hypothese, es liege eine „bedingte" Binomialverteilung mit $p = 0{,}4615$ vor, Werte, wie die von uns beobachteten in 80 % bis 90 % der Fälle auftreten. Unsere Hypothese ist nicht abzulehnen. Unsere inhaltlichen Vorüberlegungen geben zudem eine positive und einleuchtende Erklärung für das Zustandekommen dieser Verteilung.

3 Veränderte Versuchsbedingungen

Experimentell gewonnene Daten und konstruktionsbedingte Merkmale des Galtonbrettes haben uns über die Annahme, daß in realen Galtonbrettern – wenn auch geringe – Abhängigkeiten vorhanden sind, zum Begriff der „bedingten" Binomialverteilung geführt. Lassen sich durch veränderte Versuchsbedingungen im Experiment mit dem Galtonbrett „Verstärkungen" der Abhängigkeiten erzeugen und mit Hilfe unseres mathematischen Modells „überprüfen", so daß sich die inhaltlichen Annahmen über unser reales Galtonbrett erhärten? Zum einen könnte man beispielsweise Kugeln mit noch kleinerem Durchmesser als üblich durchlaufen lassen. Zum anderen ist es möglich, durch eine Kippstellung des Galtonbretts nach hinten und so bewirktes langsameres und stabileres Rollen der Kugeln gewisse Stoß- und Abpralleffekte zu vermeiden, um auf diese Weise vielleicht die Mittenbevorzugung noch deutlicher zu verstärken.

Beim Einfüllen der Kugeln in das um rund 40° aus der Senkrechten nach hinten geneigte Galtonbrett ist Vorsicht geboten! Immer schön nacheinander und möglichst einzeln, um Behinderungen und Verstopfungen zu vermeiden. Bei insgesamt 3000 Kugeln ergab sich eine überraschende Verteilung (vgl. Tab. 7). Der Vergleich mit der idealen Binomialverteilung zeigt auf einen Blick, daß genau das Gegenteil dessen, was wir erwartet haben, herausgekommen ist: Nicht eine noch größere Konzentration der Kugeln in der Mitte bei gleichzeitigem Abflachen an den Rändern wurde erreicht, umgekehrt, diesmal sind mehr Kugeln in die äußeren Kästchen gerollt und weniger (als selbst für $p=\frac{1}{2}$) in die mittleren! Wie läßt sich dies physikalisch verstehen? Nun, man muß wohl davon ausgehen, daß die einmal eingeschlagene Richtung der Rollbewegung der Kugeln auf der „schiefen Ebene Galtonbrett" relativ stabil ist und eher ein Weiterrollen in gleicher Richtung hervorruft als ein „Abbiegen" in die andere Richtung. Und genau diese Zick-Zack-Wege waren bei senkrecht stehendem Galtonbrett leicht bevorzugt.

Kästchen	0	1	2	3	4	5	6	7	8
beobachtete Verteilung	14	122	340	631	797	613	351	117	15
Binomialverteilung ($p=\frac{1}{2}$)	11,7	93,7	328,1	656,2	820,3	656,2	328,1	93,7	11,7
bedingte Verteilung für $p = 0{,}51$	13,5	100	334,5	649	804	649	334,5	100	13,5
für $p = 0{,}52$	15,4	107	340,5	642	788	642	340,5	107	15,4
für $p = 0{,}5285$	17,3	113,3	345,4	636,7	774,6	636,7	345,4	113,3	17,3
für $p = 0{,}53$	17,6	114,3	346,2	635,6	772,3	635,5	346,2	114,3	17,6
für $p = 0{,}54$	20	121,6	351,6	628,3	756,8	628,3	351,6	121,6	20

Tabelle 7

Mit dem Computerprogramm lassen sich schnell die „bedingten" Verteilungen für einige $p>\frac{1}{2}$ berechnen und mit der beobachteten Verteilung vergleichen. Ein Wert von p zwischen 0,52 und 0,53 scheint eine gute Beschreibung für den beobachteten Experimentverlauf darzustellen. Für $p=0{,}5285$ ergibt sich für unsere Daten folgender Wert für χ^2 : 3,4567. Auch jetzt können wir davon ausgehen, daß man in 80 % bis 90 % der Fälle eine solche Verteilung beobachten kann.

Das Experiment mit kleineren Holzkugeln bietet auch eine Überraschung. Die üblichen Holzkugeln haben einen Durchmesser von rund 1 cm, bei etwa 1,1 cm Abstand zwischen den Scheibenrändern. Im Experiment sind Holzkugeln mit rund 0,8 cm Durchmesser benutzt worden. Es muß hier wiederum auf sorgfältiges und einzelnes Einfüllen der Kugeln geachtet werden, um Verstopfungen beim Durchlaufen zu vermeiden! Folgende Werte wurden in 3000 Versuchen beobachtet:

Kästchen	0	1	2	3	4	5	6	7	8
beobachtete Verteilung	13	124	382	609	864	592	299	105	12

Tabelle 8

Im Vergleich zur Binomialverteilung hat man hier höhere Anzahlen in den Kästchen 0, 1, 2, 7 und 8 niedrigere in den Kästchen 3, 5 und 6. Im mittleren Kästchen befinden sich dagegen mehr Kugeln als „binomial" erwartet. Die kleineren Kugeln streuen mehr nach außen, sie sind leichter, prallen eher ab und „spritzen" – was man z. T. auch beobachten kann – nach außen weg. Daneben gibt es – überraschenderweise – einen großen Teil dieser kleinen Kugeln, die verstärkt ins mittlere Fach rollen. Es scheint, als ob in diesem Experiment zwei unterschiedliche Versuchsbedingungen wirksam werden: Für einen Teil der Kugeln, vielleicht entsprechend einem eher instabilen Einfüllen (Drall der Kugel, Stoß- und Pralleffekte), ein Spritzen nach außen und für den anderen Teil der Kugeln, die stabil und ruhig rollen, eine Bevorzugung der Mitte. Diese Mischung experimenteller Bedingungen läßt sich noch besser an einem Galtonbrett mit Nägeln und kleinen Schrotkügelchen verdeutlichen.

Ein Galtonbrett mit sehr vielen kleinen Kügelchen scheint den Vorteil zu haben, in einem einzigen Versuch schon ein Massenexperiment realisieren zu können. So enthält etwa das von uns untersuchte Galtonbrett (Foto 1) rund 5420–5450 kleine Eisenkugeln (nach Auskunft des Herstellers). Die über kleine Nägel bzw. Eisenstifte springenden und „fließenden" Kugeln werden in insgesamt 13 Kästchen aufgefangen. Es ist klar, daß man nach einem Versuch die Anzahl der Kügelchen in den einzelnen Kästchen nicht durch Auszählen ermitteln kann, man muß die jeweiligen Höhen messen und so eine Anzahl schätzen. In insgesamt 10 Versuchen, über die die Meßwerte gemittelt und auch „symmetrisiert" wurden (d. h. die Mittelwerte der Kästchen k und n−k genommen wurden), ergaben sich so folgende beobachtete und geschätzte Anzahlen (der Symmetrie wegen nur für die Kästchen $k = 0, 1, \ldots 6$ aufgeführt) (s. Tabelle 9).

In der Tabelle sind für verschiedene $p \geqq \frac{1}{2}$ die zu erwartenden „bedingten" Binomialverteilungen aufnotiert worden. Im Vergleich fallen mehrere Sachverhalte ins Auge. Eine (ideale) Binomialverteilung liegt mit Sicherheit nicht vor. Auch mit dem Konzept der „bedingten" Binomialverteilung allein kann man das Zustandekommen der Beobachtungswerte nicht erklären.

Schaut man sich den Experimentverlauf genauer an, beobachtet man mit geschärftem

Kästchen	0 u. 12	1 u. 11	2 u. 10	3 u. 9	4 u. 8	5 u. 7	6
empirisch geschätzte Verteilung	86	158	228	379	567	766	1062
bedingte Verteilung für p = 0,75	114,7	203,8	331,2	465,6	584,7	666,8	696,1
für p = 0,7	53,6	144,6	285,8	457,8	626	749,4	794,8
für p = 0,6	9,8	56,9	179,5	395,9	669,1	904,6	998,2
für p = 0,5	1,3	15,9	87,5	291,6	656,2	1049,9	1224,9

Tabelle 9

Blick das Fallen, besser das „Fließen" der kleinen Kügelchen, so bemerkt man folgendes:

– Ein großer Anteil der Kugeln „fließt", nur vom 1. Nagel „geteilt", wie in einem Strom in die mittleren Kästchen hinab, viele von ihnen ohne je einen Nagel zu berühren, geschweige denn auf ihn drauf zu fallen.

– Vom Anteil der Kugeln, die am Rand durch die Trichteröffnung gepreßt werden, „spritzen" tatsächlich viele Kugeln stark nach außen, und zwar so weit, daß sie eigentlich bis in Kästchen mit Nummern -3, -2, -1 und 13, 14, 15 fallen müßten. Dieses Ausbrechen verhindert die seitliche Wand, an der die Kügelchen reflektieren und so in die den Wänden benachbarten Kästchen fallen.

– Nur für die dazwischen liegenden Kästchen (2, 3, 9 und 10) mag vielleicht die bedingte Binomialverteilung (für p zwischen 0,6 und 0,7) eine plausible Erklärung abgeben.

Unsere Überlegungen verdeutlichen, daß hier vielfältige experimentelle Effekte zusammenwirken, die eine Modellierung dieses Galtonbretts mit Hilfe einer (bedingten) Binomialverteilung nicht möglich machen. Das „Fließen" der Kügelchen aus dem Trichter bewirkt große gegenseitige Beeinflussungen der Kugeln, das Fallen eines großen Anteils in die Mitte, das „Spritzen" und bogenförmige Abprallen anderer Kugeln und das Reflektieren an den seitlichen Wänden. Insgesamt ist dieses Galtonbrett nicht geeignet, ein mehrstufiges Binomialexperiment zu simulieren. Die experimentelle Herstellung zufälligen Verhaltens bedarf sorgfältiger konstruktiver Maßnahmen bezüglich des Zufallsgeräts. Zufall ist dabei kein Ergebnis unbekannter und beliebiger Unregelmäßigkeiten oder willkürlichen Geschehens (vgl. v. Harten/Steinbring 1984).

4 Galtonbrett und stochastisches Modell

War man vielleicht zu Beginn davon ausgegangen, daß bei der experimentellen Überprüfung mehrerer Galtonbretter sich zum Schluß eines als das geeignetste, das möglichst „ideale" erweisen könnte, so wird man enttäuscht sein. Weder das Brett mit zylindrischen Zapfen, noch das Gerät mit vielen kleinen Kügelchen, die auf Nägel herabfallen, sind ideale Galtonbretter. Sie können es auch nicht sein – dies hätte man vorher wissen müssen. Macht man nur genügend viele Versuche, so zeigen sich verstärkt Abweichungen vom erwarteten Idealfall, die auf spezifische Eigenarten und Konstruktionsmerkmale des real getesteten Galtonbretts indirekt aufmerksam machen.

Unter diesem Gesichtspunkt haben wir sehr viel über das Verhältnis von Galtonbrett und Binomialverteilung, von inhaltlichen Konstruktionsmerkmalen und ihren stochastischen Modellierungen gelernt. Ein wichtiger Punkt ist hierbei die Vorstellung, wie sich die stochastische Unabhängigkeit durch Form und Anordnung der Zapfen im Galtonbrett realisieren läßt. Neben dem Aufbau des Brettes ist natürlich für die Unabhängigkeit auch die Durchführung des Experiments selbst von großer Wichtigkeit. Ob Kugeln einzeln und ungehindert fallen können oder ob ihr gemeinsamer Fall wechselweise Einwirkungen hervorruft, das zeigt sich in der beobachtbaren Verteilung deutlich. Des weiteren gibt eine Analyse der Zapfenform, ihrer Anordnung sowie die variierenden Veränderungen durch Kippstellungen des Galtonbretts mögliche Aufschlüsse über veränderte Wahrscheinlichkeiten für das Herabfallen der Kugeln nach links oder rechts.

Das Zusammenspiel zwischen Modellannahmen und realem Galtonbrett sowie die Konfrontation von experimentell gewonnenen Daten mit den Verteilungen auf der Basis der stochastischen Modelle ermöglichen es, sich das „ideale" Galtonbrett sowie die „ideale" Binomialverteilung als Spezialfall unter variierenden Konstruktionsbedingungen und sich ändernden Modellannahmen vorzustellen.

Abschließend kann man feststellen, daß wir – ohne je ein „ideales" Galtonbrett zur Verfügung haben zu können – sehr viel über „ideale" Galtonbretter erfahren haben. Diese Art des „indirekten Lernens" ist für die Stochastik typisch. Man sieht, auf welche Weise die Stochastik und die zufälligen Erscheinungen mit inhaltlichen Bedingungen zusammenhängen. Und überprüft man mit stochastischen Mitteln eine inhaltliche Modellannahme, so wird man nicht nur neue Einsichten, ein tieferes Verständnis und adäquatere Lösungen gewinnen, genauso häufig stellen sich weiterführende Fragen und neue Probleme.

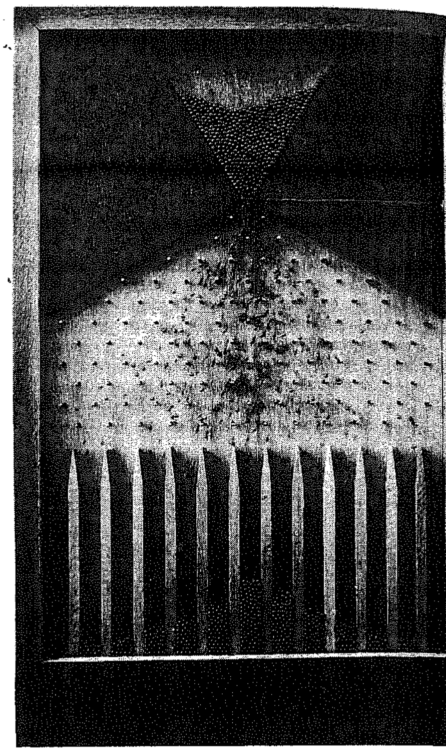


Foto 1

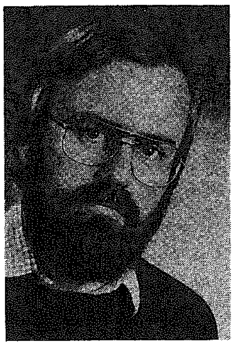
Literatur

Engel, A.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Bd. 1, Stuttgart 1973

Hennequin, P. L.: Schéma de Bernoulli et planchettes à clous, in: Bulletin de l'APMEP, Juli 1981, S. 435–441

v. Harten, G./Steinbring, H.: Stochastik in der Sekundarstufe I, Köln 1984

Jäger, J./Schupp, H.: Stochastik in der Hauptschule, Paderborn 1983



Dr. Heinz Steinbring
Külicher Str. 10a
4800 Bielefeld 1;
wissenschaftlicher Mitarbeiter im Institut für Didaktik der Mathematik (IDM) in Bielefeld.