Heinz Steinbring

Wahrscheinlichkeit als allgemeine Messtheorie Vorschläge für eine didaktische Konzeption des Entwicklungsprozesses der Wahrscheinlichkeit

In: Stochastik im Schulunterricht
Hrsg.: Willibald Dörfler, E. Fischer
Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Bd. 3
Wien, Stuttgart 1981
S. 223-230

SONDERDRUCK
aus

SCHRIFTENREIHE DIDAKTIK DER MATHEMATIK
Universität für Bildungswissenschaften in Klagenfurt
Band 3

Stochastik
im Schulunterricht

BEITRÄGE ZUM
3. INTERNATIONALEN SYMPOSIUM FÜR
„DIDAKTIK DER MATHEMATIK"
vom 29. 9. bis 3. 10. 1980

Hölder-Pichler-Tempsky, Wien
B. G. Teubner, Stuttgart

Heinz Steinbring

WAHRSCHEINLICHKEIT ALS ALLGEMEINE MESSTHEORIE — VORSCHLÄGE FÜR EINE DIDAKTISCHE KONZEPTION DES ENTWICKLUNGSPROZESSES DER WAHRSCHEINLICHKEIT

1. Einleitung

In seinem inzwischen berühmt gewordenen Buch: "Proofs and Refutations" [4] beklagt Lakatos den "deduktivistischen" Zugang zur Mathematik in verschiedenen Kursen und Lehrbüchern. Er kritisiert vor allem, daß die Definitionen oft "gekünstelt und geheimnisvoll verwickelt" erscheinen, und aus der Abfolge Definition - Satz - Beweis der eigentliche Sinn mathematischer Begriffsbildungen nicht verständlich wird. Mag diese Kritik vornehmlich an die Universitätsmathematik gerichtet sein, sie trifft auch auf die Schulmathematik zu; insbesondere scheint mir dies für die Stochastik zu gelten.

Wie kann man diesen in der Tendenz formal-deduktivistischen Zugang überwinden und zu bisher weitgehend fehlenden "autonomen Konstruktionsprinzipien" [7] für den didaktischen Aufbau von Stochastikkursen (der SI) gelangen? Wie bekannt setzt Lakatos dem kritisierten deduktivistischen seinen heuristischen Zugang entgegen; ausgearbeitet hat er ihn u.a. beispielhaft anhand einer historisch-rationalen Rekonstruktion der Entwicklung des Polyederbegriffs. Ohne nun im folgenden weiter explizit auf Lakatos Bezug zu nehmen, werde auch ich auf der Grundlage historischer Überlegungen [8] eine didaktische Konzeption zur Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs vorschlagen. Die "Heuristik" (Lakatos) meines Vorgehens wird sich ganz allgemein auf das Problem des w. th. Anwendungsbezuges und seiner historischen Veränderungen konzentrieren. Dies wird mir dann im folgenden als zentraler Ausgangspunkt für eine didaktische Charakterisierung von W. als "verallgemeinerter Meßtheorie" dienen. Meine Überlegungen haben nicht einen neuen Kurs selbst zum Ziel, sondern intendieren in erster Linie, dem Lehrer Metawissen zur Verfügung zu stellen, um mit vorhandenen Stochastikkursen kritischer und flexibler umgehen zu können.

2. Wahrscheinlichkeit und Entwicklungsstandpunkt

Grundlegende Probleme der Selbstbegründung mathematischen Wissens, wie sie bei Einführung, Definition und Entwicklung von Begriffen relevant werden, zeigen sich besonders deutlich beim W.B., welcher geradezu als das Paradebeispiel dafür dient, die bei expliziten Begriffsdefinitionen auftretenden (logischen) Zirkel zu belegen (vgl.[6]).

Zirkularität wird eigentlich immer als ein Mangel begriffen, nie wird der hierin liegende konstruktive Aspekt gesehen, daß sich theoretische Begriffe letztlich selbst erklären müssen und nicht vollständig auf andere zurückgeführt werden können. Im Grunde drückt ein Zirkel den untrennbaren Zusammenhang zwischen der Theorie und ihren Anwendungen aus.

Um diese gerade auch für die didaktische Vermittlung von Wahrscheinlichkeit zentrale Schwierigkeit der Zirkularität besser verstehen zu können, erscheint es sinnvoll, sich zunächst in der Geschichte dieser Theorie die Erscheinungsformen, die Veränderungen und den Umgang mit diesem Problem anzusehen. Da die historische Entwicklung jedoch hier nicht insgesamt dargestellt werden kann, soll nur soweit ein Resümee gegeben werden, wie es für den didaktischen Teil wichtig sein wird. Grundlage sind hierfür 3 historische Fallstudien, die an anderer Stelle detailliert ausgearbeitet wurden (vgl.[8]) und die als Beispiele für die Entwicklung des w.th. Anwendungsbezuges und seiner Veränderungen stehen:

1. Bernoullis Werk und die frühen Arbeiten zum (schwachen) Gesetz der großen Zahlen;
2. die Anwendung der W.Th. auf die Fehlertheorie samt der Entwicklung des Konzepts der Wahrscheinlichkeitsverteilung, und
3. die Anwendung der W.Th. in der kinetischen Gastheorie anhand des Werkes von Ludwig Boltzmann.

Will man die zentralen Resultate über diese 3 historischen Etappen kurz zusammenfassen, so läßt sich folgende These formulieren: Die Entwicklung der W.Th. läßt sich als die Entwicklung ihrer Anwendungsbeziehung charakterisieren. Diese These erfährt in den 3 Fallstudien eine Konkretisierung und ihre jeweilige spezifische Ausprägung.

In der ersten hier angesprochenen Etappe wird zum ersten Mal die Theoretizität des Anwendungsproblems offenbar. Die zunächst vorherrschende Identifizierung zwischen beobachtbarer relativer Häufigkeit und Gleichwahrscheinlichkeit empirischer Glücksspielmodelle wird überwunden und erhält in Form von Bernoullis Theorem eine theoretische Struktur. Der Zirkel der Begriffsdefinition taucht nun im allgemeineren Anwendungszusammenhang des Begriffs explizit als das Problem der "stochastischen Konvergenz" wieder auf. Dies bedeutet, daß die Anwendung der W.Th. selbst wiederum durch eine stochastische Beziehung reguliert und nicht wie bisher "unmittelbar" vorgenommen wird. Dieser allgemeinere Kontext ermöglicht erst eine konstruktive Umsetzung des Zirkels und in den weiteren Etappen seine relative Auflösung bzw. die Herausarbeitung seiner jeweiligen Voraussetzungen und Möglichkeiten.

In der zweiten historischen Etappe zeigt sich bezüglich der Zirkularität der w.th. Anwendung vor allem die folgende Veränderung: War die Voraussetzung zur Anwendung des Bernoullischen Theorems noch durch eine relativ komplexe Ausgangssituation impliziter Annahmen gekennzeichnet, so werden nun immer stärker die grundlegenden elementaren Bedingungen des betrachteten w.th. Gegenstandes explizit herausgearbeitet. In dieser Hinsicht stellt das Fehlersystem ein erstes wichtiges Beispiel dar, dessen grundlegende Merkmale wie die große Anzahl der Fehlergrößen, ihre "Gleichmäßigkeit" und Unabhängigkeit im Zusammenhang mit so wichtigen praktischen Problemen wie der Methode der kleinsten Quadrate und der Hypothese der Elementarfehler nach und nach erschlossen wurden.

Die Herausbildung der Systemauffassung und die damit einhergehende Entwicklung des Verteilungsbegriffs ermöglichten eine qualitative Ausweitung des Anwendungsbereichs der W.Th.. Die zirkulären Aspekte werden dabei zwar "einsichtiger", jedoch nicht absolut aufgelöst. Nur mit zusätzlichen Annahmen und nur in konkreten Anwendungssituationen sind Auflösungen des Zirkels in Teilaspekten zu erwarten. Beispielhaft deutlich wird dieser Charakter der zirkulären Selbstbegründung w.th. Anwendungen beim Unabhängigkeitskonzept: Zum einen stellt dieses eine relativ allgemeine Voraussetzung für die Anwendung der Stochastik dar, zum anderen hängt jedoch das "Erfülltsein" von Unabhängigkeit in konkreten

Situationen von der W.Th. selbst ab, denn auf ihrer Grundlage entwickelte Testverfahren ermöglichen erst die Überprüfung von Unabhängigkeit.

Die dritte Etappe ist auch in ihren Ergebnissen zu umfangreich, um hier in wenigen Worten wiedergegeben werden zu können. Für unsere Fragestellung ergibt sich vor allem, daß mehr und mehr über eine "rein" stochastische Behandlung des Anwendungsproblems hinaus, wie sie primär in der Fehlertheorie mit den relativ allgemeinen theoretischen Konzepten des Systems der Zufallsgrößen und dem Begriff der Wahrscheinlichkeitsverteilung angestrebt wurde , nun auch spezifische inhaltliche Aspekte des jeweiligen Anwendungsgegenstandes relevant werden. Beispielhaft zeigt sich in den Auseinandersetzungen zum 2.Hauptsatz der Thermodynamik und dem Versuch, ihn auf atomistischer Grundlage herzuleiten, wie wichtig inhaltliche Besonderheiten, und zwar hier mechanische Beziehungen und Annahmen, im Verhältnis zu den allgemeinen w.th. Kennzeichnungen werden. Es wird hier eine wechselseitig komplementäre Beziehung von jeweiligen inhaltlichen Spezifika des Anwendungsgegenstandes zu seiner allgemeinen w.th. Charakterisierung sichtbar: Mechanische und statistische Vorstellungen beschreiben gemeinsam Strukturebenen eines einheitlichen systemhaft aufgefaßten Gegenstandsbereichs.

Zudem klärt sich in dieser Etappe, daß die W.Th. nicht einfach eine "äußere" Hilfsmethode des unvollkommenen Erkenntnissubjekts etwa im Sinne der Laplaceschen Auffassung ist, sondern zu einem eigenständigen Grundbegriff zur Bearbeitung und konkreten Anwendung unterschiedlicher Substanztheorien (wie der statistischen Mechanik, der Quantentheorie, der Sozialwissenschaften, der Psychologie usw.) wird. Die Entwicklung der W.Th. läßt sich also tatsächlich als die Entwicklung ihrer Anwendungsbeziehung charakterisieren. Vor allem hat der historische Entwicklungsstandpunkt, auf den wir uns gestellt haben, verdeutlicht, wie schrittweise mit dem Problem der Zirkularität in zunehmend komplizierter werdenden Anwendungszusammenhängen umgegangen wurde, indem anfänglich relativ voraussetzungsvolle Annahmen, die implizit den Begriff und seine Anwendung regulierten, mehr und mehr expliziert, auf ihren eigentlichen Kern begrenzt und in einen vielfältig in-

haltlichen Bezugsrahmen gestellt wurden.

Diese historischen Betrachtungen legen es nahe, auch die didaktische Konzeption der Entwicklung der W. vom Anwendungsbezug her zu strukturieren. Dies soll mit Hilfe einer Vorstellung von W. als einer "allgemeinen Meßtheorie" erreicht werden.

3. Wahrscheinlichkeit als ein verallgemeinerter Meßprozeß

Ein wichtiger Hinweis, die W. auf dem Hintergrund einer allgemeinen Vorstellung vom Messen zu verstehen, findet sich bei Kolmogoroff. Dieser betont zum einen den engen Zusammenhang von Maßtheorie und moderner axiomatischer W.Th., um jedoch sogleich auch den Unterschied hervorzuheben:"Geschichtlich ist die Unabhängigkeit .... derjenige mathematische Begriff, welcher der Wahrscheinlichkeitsrechnung ihr eigenartiges Gepräge gibt ... ." ([3]). Dies verdeutlicht, daß der W.B. unter der Perspektive seiner Anwendung über die Eigenschaft der Additivität eines üblichen Maßes hinaus eines zusätzlichen, ihm speziell eigenen Konzepts bedarf, nämlich des Unabhängigkeitsbegriffs.
Die besondere Bedeutung der Unabhängigkeit wird ersichtlich, wenn man feststellt, daß in der Stochastik elementare Meßvorgänge, wie etwa die Flächenmessung, unter einem neuartigen Gesichtspunkt betrachtet werden. Hier wird der jeweilige Meßvorgang mehrfach wiederholt, um auftretende Fehler zu eliminieren.Die theoretische Grundlage, diese Massen-Experimente einheitlich zu bewerten, bildet das Unabhängigkeitskonzept. Die Auffassung von W. als einer besonderen Meßtheorie ist somit nur sinnvoll, wenn man über eine mathematische Kennzeichnung in Form einer Definition des W.B. hinaus, gleichzeitig den konkreten Anwendungsbezug realer Messungen berücksichtigt und damit in grundsätzlicher Weise dem Unabhängigkeitskonzept als der W.Th. eigener Begrifflichkeit (Kolmogoroff) Rechnung trägt. Auf diese Weise läßt sich die W. als ein Begriffsfeld kennzeichnen, das einerseits aus einer entsprechenden Begriffsdefinition und andererseits aus dem Unabhängigkeitskonzept besteht. Diese Charakterisierung bleibt zunächst relativ "offen" und unbestimmt. Sie muß entsprechend konkreter Bezugssituationen inhaltlich gefüllt und interpretiert werden.

Wie läßt sich der didaktische Vorteil, die W. als allgemeine Meßtheorie aufzufassen, praktisch realisieren?

Beim ersten Herangehen an einen konkreten Meßvorgang stellt man sich vor, einerseits ein Meßinstrument und andererseits einen Meßgegenstand zu haben; der Zusammenhang zwischen beiden, gewissermaßen die Gebrauchs- bzw. die Meßvorschrift wird durch die Meßtheorie gegeben. Diese Sichtweise auf den Meßvorgang läßt sich bei dem elementaren Beispiel der Flächenmessung wiederfinden: Der Meßgegenstand besteht in der vorliegenden Fläche, das Meßinstrument ist ein gewähltes Einheitsmaß, etwa das Einheitsquadrat, und die Meßtheorie in Form der Axiome liefert letztlich eine Versuchsvorschrift für den Meßprozeß.
Diese Vorstellung läßt sich in wichtigen Aspekten auf die W.Th. übertragen. Der Meßgegenstand besteht aus einer konkreten Zufallserscheinung; unterschiedliche Zufallsgeneratoren stellen Meßinstrumente dar, welche den passenden W.R. repräsentieren; und die Meßtheorie (bzw. die W.Th.) liefert unterschiedliche Meßvorschriften (etwa in Form des Bernoulli-Theorems). Diese Vorschriften geben Hinweise auf den Einsatz und Gebrauch der Meßinstrumente und regulieren den Zusammenhang von Zufallsgenerator und Zufallserscheinung. Beispielhaft steht hierfür das Verhältnis von relativer Häufigkeit, als einem empirischen Parameter der Zufallserscheinung zu W. als einem theoretischen Konzept des Instruments, dessen Zusammenhang gerade im Bernoulli-Theorem thematisiert wird.

Das hier eingeführte Konzept des w.th. Meßinstruments ist nicht völlig neuartig. In der didaktischen Diskussion wird an seiner Stelle stärker das Konzept des stochastischen Modells aufgegriffen. Darunter läßt sich ganz allgemein ein Spektrum von konkreten Zufallsgeneratoren, wie Würfel, Urne und Roulette bis hin zu stochastischen Modellen in Form von Ausgangsgleichungen auffassen (vgl.[2]). Die zentrale Stellung des Konzepts "Meßinstrument" wird daraus ersichtlich, daß es das eingangs diskutierte Problem der Theoretizität bzw. Zirkularität stochastischer Begriffsbildungen und Anwendungen aufnimmt und didaktisch bearbeitbar werden läßt. Ein Meßinstrument ist nämlich nicht einfach "fix und fertig" vorgegeben, sondern es muß immer auch an den jeweiligen Meßgegenstand "angepaßt" und auf eine geforderte Meßgenauigkeit hin eingerichtet werden. Ein Meßinstrument ist somit gleichzeitig Mittel und Gegenstand der Messung, d.h. es dient sowohl zur Bestimmung bestimmter Quantitäten eines Meßgegenstandes und kann diese Auf-

gabe jedoch nur erfüllen, wenn dieses Instrument geeignet an den Gegenstand angepaßt, justiert, geeicht, d.h. selbst zum Gegenstand einer w.th. Messung gemacht wurde.

Die Vorschriften zum Umgang mit stochastischen Meßinstrumenten reichen von recht einfachen und pragmatischen, wie etwa die im sogenannten empirischen G.d.g.Z. zum Ausdruck kommende Anweisung, nur häufig genug den Maßstab anzulegen bzw. den Zufallsgenerator zu betätigen, bis hin zu relativ theoretischen Regeln, die ihrer Struktur nach dem Bernoullischen Theorem entsprechen.

Aufbauend auf diesen Überlegungen soll nun die Grundstruktur eines anwendungsorientierten Stochastikkurses (für die SI) skizziert werden. Der Vorschlag läuft darauf hinaus, bewußt zwischen Modellebene bzw. Ebene des Meßinstrumentes, der Ebene der Meßtheorie und der Ebene des Meßgegenstandes zu unterscheiden. Ähnlich wie in allen Meßsituationen bestimmt sich auch der W.B. abhängig von dem gesamten Kontext des Meßvorganges:"Das Glücksspiel oder der Würfel oder der Zufallsgenerator oder das Problem der Meßgenauigkeit bestimmen den Begriff von 'Wahrscheinlichkeit', den man in dem jeweiligen Zusammenhang hat, genauso deutlich und genauso stark wie eine entsprechende Definition." (vgl.[5])

In ersten einfachen und plausiblen Anwendungskontexten wird die Gleichwahrscheinlichkeit zusammen mit einer intuitiven Vorstellung zum empirischen G.d.g.Z. ausreichen, durch Simulationen ein befriedigendes Meßergebnis zu erhalten. In komplexeren Situationen wird dieses Konzept durch die Laplacesche W. (z.T. auch in geometrischer Form) abgelöst werden müssen; zudem sind implizit eingegangene Annahmen (wie die der Unabhängigkeit) zu explizieren, und die intuitiven Meßregeln auf eine mehr und mehr theoretische Grundlage zu stellen, die nach und nach Abschätzungen der Exaktheit und Sicherheit des Meßzusammenhanges explizit ermöglicht. (Für Beispiele vgl. etwa [1] und [9].)

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß in diesem Konzept-Vorschlag der W.B. und sein Verhältnis zu realen Anwendungsgegenständen immer in bezug auf die gesamte Meßsituation mit ihren Anforderungen und Möglichkeiten gesehen wird. Des weiteren kommt diese Konzeption der W.Th. als Meßtheorie, und damit als Abfolge aufeinander aufbauender unterschiedlicher Meßsituationen, den Anforderungen

nach verstärkter Eigentätigkeit der Schüler entgegen. Ja, die vielfach erhobene Forderung, daß Schüler im Stochastikunterricht sich selbst die Daten beschaffen müssen, indem sie etwa Experimente durchführen oder Umfragen organisieren, diese Daten anschließend ordnen, bewerten und auswerten, um schließlich neue Ansätze ihrer Experimente vornehmen zu können, wird geradezu zu einem zentralen Bestandteil dieses Konzepts. Dabei zeigt sich, daß mit zunehmender Verallgemeinerung des W.B. in schrittweise komplexer werdenden Anwendungssituationen nicht eine Ablösung von realen Erkenntniszusammenhängen und praktischen Bezügen einhergeht, sondern daß die Vielfalt der unterschiedlichen Tätigkeiten bei einem w.th. "Meßvorgang" eine umfassendere und vielfach differenzierte Beziehung zwischen sich verallgemeinerndem Begriff und konkreten Anwendungsgegenständen ermöglicht.

Abschließend sei angemerkt, daß die hier vorgeschlagene Konzeption zur Entwicklung des W.B. in der Arbeitsgruppe "Mathematiklehrerausund -weiterbildung" am IDM diskutiert wurde; die hier notwendigerweise kurz und knapp gehaltenen Überlegungen werden an anderer Stelle ausführlich in unterschiedlichen Konkretionen ausgearbeitet und sollen für die Lehrerfortbildung (in der SI) nutzbar gemacht werden.

Literatur

[1] Engel/Varga/Walser: Zufall oder Strategie? Stuttgart, 1974

[2] Heitele, D.: Didaktische Ansätze zum Stochastikunterricht in Grundschule und Förderstufe, Dissertation, Dortmund, 1976

[3] Kolmogoroff, A.N.: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Springer, Berlin, 1933

[4] Lakatos, I.: Beweise und Widerlegungen, Braunschweig, 1979

[5] Otte, M.: Einige grundsätzliche Überlegungen zum Lehrbuch im Mathematikunterricht, Manuskript, Bielefeld, 1978

[6] Schreiber, A.: Probleme bei der Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, in: math.did. 2, 1979, S.235-246

[7] Schupp, H.: Evaluation eines Curriculums, in: MU 5, 1979, S.22-42

[8] Steinbring, H.: Zur Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs - Das Anwendungsproblem in der Wahrscheinlichkeitstheorie aus didaktischer Sicht, Materialien und Studien des IDM, Bd.18, Bielefeld, 1980

[9] Winter, H.: Erfahrungen zur Stochastik in der Grundschule (Klasse 1-6), in: DdM, 1, 1976, S.22-37