IV. DIDAKTISCHE PROBLEME DES WAHRSCHEINLICHKEITSBEGRIFFS - ANWENDUNGSBEZUG ALS GRUNDLAGE DER BEGRIFFSENTWICKLUNG

IV.1 Einleitung: Die besondere Stellung der Wahrscheinlichkeitstheorie im mathematischen Curriculum

Ein kurzer Blick auf die Einführung der Wahrscheinlichkeitstheorie ins Schulcurriculum (vgl. etwa Heitele, 1976 und 1977; Sträßer, 1977) macht die Sonderstellung, welche die Wahrscheinlichkeitstheorie im Gesamtcurriculum hatte und zum Teil auch weiterhin noch hat, deutlich. Bis in die jüngste Zeit hinein war die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik ein zusätzliches und kaum beachtetes relativ kleines Stoffgebiet, welches nur sporadisch im Gesamtcurriculum erschien. Diesen Charakter eines zusätzlichen Angebots hat die Wahrscheinlichkeitstheorie auch bis heute noch nicht vollständig ablegen können, obwohl inzwischen für alle Schulstufen Lehrpläne zur Stochastik erschienen sind und, wie Jahner anmerkt, zu beachten ist: "Die 'einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung' (sog. Normenbuch) fordern 1975 für die Prüfung in den Abiturfächern: 'Jeder Prüfling muß Kurse in Analysis und in wenigstens einem der beiden Gebiete

- Lineare Algebra/Analytische Geometrie
- Wahrscheinlichkeitsrechnung/Statistik

besucht haben.' (Normenbuch, 1975, S. 9) Insofern gehört die Stochastik wohl inzwischen zu den 'etablierten' Gebieten der Schulmathematik." (Jahner, 1978, S. 226)

Dies wird auch aus den Schulbüchern selbst ersichtlich; bisher hat dort die Tendenz bestanden, dieses Gebiet entweder zusätzlich in Angebotsform über verschiedene Schuljahre verteilt aufzuführen (teilweise schon in der Primarstufe, vor allem jedoch in der Sekundarstufe I) oder eine in sich abgeschlossene Gesamtkonzeption für einen wahlweisen Kurs (Grund-/Leistungskurs) vorzustellen. Wenn auch mehr und mehr die völlige Einbindung der Wahrscheinlichkeitstheorie ins Curriculum angestrebt wird, so wird man sich gerade aufgrund der Neuheit dieses Stoffes zum augenblicklichen Zeitpunkt nicht über dessen besondere Probleme hinwegsetzen können: "Dennoch sind weiterhin wesentliche Fragen zum Unterricht in Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik offen", bemerkt Sträßer in seinem Überblicksreferat zur Situation der Stochastik in der neugestalteten gymnasialen Oberstufe. Bezugnehmend auf die Feststellung in den "Einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung" (1975), daß "... die Terminologie ... in Schulbüchern und in der methodisch-didaktischen Literatur noch keineswegs einheitlich (ist)" (S. 15), fährt er fort: "Dies (muß) wohl als Hinweis auf eine andauernde Unsicherheit über die Inhalte eines Unterrichts in Stochastik angesehen werden ... . Darüber hinaus fehlen mindestens 2o Jahre nach der Erkenntnis der Bedeutung des Stochastik-Unterrichts für die Schüler immer noch qualifizierte Lehrer, die auf eine fundierte Behandlung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik bereits in ihrem Studium vorbereitet worden sind." (Sträßer, 1977, S. 318/19)

Daß gerade der Lehreraus- und -weiterbildung hinsichtlich einer immer stärker geforderten Übernahme der Stochastik im Mathematikcurriculum eine besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden muß, wird aus vielen Hinweisen zu Mißständen in diesem Bereich deutlich. So wird beispielsweise in den Handreichungen "Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung" des Instituts für Lehrerfort- und -weiterbildung Mainz betont:

"Für die Mehrzahl der Mathematiklehrer sind die vom fachwissenschaftlichen Studium gegebenen Voraussetzungen bzgl. Statistik/Wahrscheinlichkeitsrechnung unzureichend.

Die unterrichtspraktischen Erfahrungen sind auf diesem Gebiet noch gering. Dort, wo sie vorliegen, beschränken sie sich häufig auf die unterrichtliche Behandlung enger Teilgebiete im Rahmen von Arbeitsgemeinschaften." (Schmidt, 1976, S. 6)

Und Hermann Dinges bemerkt in seinem "Report on Stochastics at Highschools in the Federal Republic of Gemany" (1979) auf die Frage: "What are the deficiencies in the present state of stochastical education?" (Dinges, 1979, S. 8) u.a. zum Problem der Lehrerfortbildung: "Too little is done for teachers who have not studied stochastics during their university education. The school-authorities should encourage acting teachers to participate in stochastics courses given by professors who know what stochastical thinking is." (Dinges, 1979, S. 9)

In dieser besonderen Situation von einerseits noch weitgehender Uneinigkeit in den Inhalten, vor allem im Bereich der Sekundarstufe I (mit der wir uns im folgenden primär befassen wollen) und andererseits mangelnder Qualifikation der Lehrer, trifft die Stochastik darüber hinaus auf das Problem der Stoffülle, welches ihre Sonderstellung quasi noch verschärft. Denn unter all' diesen Umständen wird es der Stochastik nur dann möglich sein, im verbindlichen Mathematikcurriculum akzeptiert zu werden, wenn es ihr gelingt, ihre besondere Bedeutung für die Mathematik als Wissenschaft einerseits und als ein praktisch nützliches Erkenntnismittel andererseits herauszustellen, ja man könnte fast sagen, sich als eine Leitidee und grundlegende Orientierung für die Mathematik insgesamt darzustellen.

Die Stochastik wird also nicht einfach als ein weiteres zusätzliches Stoffgebiet, in ihrer Bedeutsamkeit einfach mit anderen Bereichen austauschbar, ins Curriculum aufgenommen werden können; sie muß sich in spezifischer Weise zuvor rechtfertigen.

Auf dem Hintergrund der hier skizzierten curricularen Probleme wird man sich bei der Rechtfertigung der Stochastik insbesondere mit den spezifischen inhaltlichen Schwierigkeiten des Wahrscheinlichkeitsbegriffs und seiner Entwicklung auseinandersetzen müssen.

Ausgehend von exemplarischen historischen Fallstudien zu relevanten Übergängen in der Ausdehnung des Anwendungsbereichs der Wahrscheinlichkeitstheorie haben wir im Kap.III versucht, die Wahrscheinlichkeitstheorie als eine "Theorie der Anwendung" (bzw. als eine "Theorie der Anwendung anderer Theorien") zu kennzeichnen. Das "Problem des Anwendungsbezugs" (vgl. Kap.III) ist ein besonderes Merkmal der Wahrscheinlichkeitstheorie, denn es wird hier wie in keiner anderen Theorie gerade das Verhältnis von theoretischen zu empirischen Aspekten zur Richtlinie der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer angemessenen Interpretation. Welche Bedeutung die Analyse des Zusammenhangs und der Differenz von Theorie und Empirie für die Stochastik gewinnt, zeigt sich in der Tatsache, daß die Wahrscheinlichkeitstheorie in der Statistik eine eigene Theorie zu ihrer Anwendung besitzt. In diesem Verhältnis von Wahrscheinlichkeitstheorie zu Statistik reproduzieren sich gewissermaßen die allgemeinen erkenntnistheorischen Probleme von Theorie und Empirie.

Eine besondere Schwierigkeit liegt in dem Verhältnis von einerseits stark universellen theoretischen Methoden zur Bearbeitung von Anwendungsproblemen, die andererseits in der jeweiligen praktischen Situation auf lokale Bedingungen und konkrete Abhängigkeiten stoßen. Dies Verhätlnis von universellen theoretischen zu jeweils spezifisch praktischen Aspekten verleiht der Wahrscheinlichkeitstheorie ihre vielfältigen und flexiblen Anwendungsmöglichkeiten; dies Verhältnis wird jedoch gleichzeitig zur eigentlichen Problematik für die Analyse dieser Theorie: da es keine endgültigen und universellen Lösungen des Anwendungsproblems gibt, da es immer nur zeitlich begrenzte und von den lokalen Bedingungen abhängige Lösungen geben kann (vgl. Kap. III), wird auch jede Erklärung und Interpretation dieser Theorie diesen Besonderheiten Rechnung tragen müssen.

Dies hat für die weitere didaktische Analyse Konsequenzen. Vor allem werden wir ganz allgemein von der Tatsache ausgehen, daß auch die Didaktik sich bewußt zu dem "Problem des Anwendungsbezugs" der Stochastik verhalten muß. Gewiß gibt es hier nun Unterschiede im Vergleich zur mathematischen Wissenschaft, auf die wir im folgenden ausführlicher eingehen werden; jedoch ist die grundsätzliche Orientierung auf das Anwendungsproblem, und darauf haben die historischen Fallstudien exemplarisch aufmerksam gemacht, auch für eine didaktisch-inhaltliche Analyse der prozessualen Aspekte des Wahrscheinlichkeitsbegriffs notwendig.

Konkret ergibt sich nun u.a. aus den besonderen Schwierigkeiten des wahrscheinlichkeitstheoretischen Anwendungsproblems, daß sowohl in der weiteren Bearbeitung dieses didaktischen Kapitels als auch für jeden Stochastikkurs den Beispielen, was ihre sorgfältige Auswahl und ihre ausführliche Bearbeitung betrifft, eine äußerst wichtige Rolle zukommt.

Der Aufbau dieses Kaptels soll diesen Besonderheiten der Wahrscheinlichkeitstheorie entgegenkommen. Es ist zunächst ein stärker systematischer Teil vorgesehen, in dem versucht wird, in einer grundsätzlichen Weise die verschiedenen didaktischen Aspekte der Stochastik aufzunehmen, was jedoch, wie angemerkt, nur im Wechselspiel mit Hinweisen auf konkrete Beispiele und Materialien geschehen kann. Auf der Grundlage einer exemplarischen Darstellung eines Stochastikkurses für die Sekundarstufe I (Bigalke, Einführung in die Mathematik, 1974ff), in welcher das Verhältnis der Einführung bzw.Begründung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs zu (praxisrelevanten) Anwendungen eine zentrale Rolle spielt, werden wir dann in kritischer Ergänzung hierzu konstruktive Vorschläge für den Aufbau eines Stochastikkurses zu machen versuchen, in dem die Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs im Mittelpunkt steht.

IV.2. Systematische Überlegungen

Wir wollen im folgenden versuchen, in grundsätzlicher Weise zentrale didaktische Probleme in der Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs zu diskutieren. Wir werden dabei auch auf wichtige Unterschiede zu anderen Stoffbereichen und auf die auftretenden Besonderheiten der Stochastik aufmerksam machen.

IV.2.1 Zum Verhältnis von Begründung und Anwendung

Die Art und Weise der Begründung bzw. der Einführung neuartiger Begriffe in einen Wissenskontext und die Rolle, welche der Umgang mit diesem Begriff, seine Anwendungen und operativen Beziehungen dabei spielen, unterscheidet sich in wichtigen Aspekten in der Wissenschaft einerseits und im Schulunterricht andererseits. Für die Stochastik beinhaltet dieser Unterschied zwischen Schule und Wissenschaft zudem noch Besonderheiten im Vergleich zu anderen Schulfächern. Dieser Problematik und ihrer Konsequenzen für den Stochastikunterricht wollen wir uns nun zuwenden.

Die Begriffsentwicklung bzw. die Formierung neuen Wissens unterliegt immer den Besonderheiten und Möglichkeiten jeweiliger institutioneller, sozialer und psychologischer Zusammenhänge. So ist die Wissenschaft insgesamt flexibler in der Einführung und im Umgang mit neuen Gegenständen, während die Schule sich eher an gesicherten und allgemeinen bedeutsamen Ergebnissen der Wissenschaft orientiert. Die Wissenschaft ist nämlich daran interessiert, den Gegenstandsbereich eines Begriffs variabel und relativ "offen" zu halten, um diesen Bereich erweitern zu können und damit den Begriff zu vertiefen. Die Schule ist umgekehrt stärker auf eine Stabilität ihrer Orientierungen angewiesen und geht dementsprechend von einem mehr oder weniger typischen Gegenstandsbereich für jeden Begriff aus. Dies darf natürlich nicht dazu führen, diesen Bereich als ein für allemal bestimmt und unabänderlich aufzufassen; jedoch braucht der Schulunterricht eine erste Charakterisierung des jeweiligen Gegenstandsbereiches.

Diese Besonderheiten im Unterschied von Wissenschaft und Schule verdeutlichen Keitel und Otte anhand des Verhältnisses von Begründung und Anwendung eines mathematischen Begriffs:

"In der Wissenschaft bedeutet 'einen Begriff verstehen', eine Theorie entwickeln und umgekehrt ist die Theorie insgesamt logisch begründet, wenn sie als ein - ursprünglicher - Begriff verstanden werden kann, der entwickelt, konkretisiert und entfaltet wurde. Diese weitestgehende Entwicklung des Begriffs in Form der Theorie begründet selbst den Ausgangsbegriff, obwohl sie umgekehrt auf dieser Grundlage fußt. Der Ausgangspunkt wird durch das Ende begründet oder anders, der Begriff wird durch seine Entwicklung begründet, nicht durch seine Entstehung.

Für die Schule war dieser Standpunkt in seinen Zuspitzungen nie vertretbar, insbesondere weil Schüler keine forschenden Mathematiker sind und damit weder über eine differenzierte Erfahrung im Umgang mit Theorien und theoretischen Begriffen verfügen, noch für die Schulmathematik jene Einlinigkeit der fachlichen Forschung vertretbar ist, die die Entstehungs- und Begründungsfragen ausklammert und sich auf rein funktionale Bedeutungsvorstellungen des Begriffs konzentriert.

Auf der anderen Seite führt die Überbetonung des Evidenz- oder Begründungsproblems, zu der Lehrer oft neigen, entweder zu einem lähmenden eklektischen 'einerseits-andererseits' und zu dem unmöglichen Versuch, alle möglichen Gebrauchsweisen des Begriffs in die Begriffsdefinition mit aufzunehmen. Und was wesentlich ist, der Begriff verliert - versucht man, ihn unbedingt zu 'erklären', zu relativieren - seine orientierende und steuernde Funktion gegenüber der kognitiven Aktivität und löst sich in einzelne (sprachliche) Zeichenmodelle oder empirisch anschauliche Aspekte auf." (Keitel/ Otte, 1977, III., S. 6)

In welcher Weise nun in der Schule beispielhaft eine angemessene Einführung eines Begriffs anhand eines Gegenstandsverständnisses geschehen könnte, ohne dem Problem einer zu starken Fixierung einerseits oder einer zu diffusen Auflistung aller Begriffsaspekte andererseits zu verfallen, beschreiben die Autoren im folgenden für den Zahlbegriff. Ihren Intentionen entsprechend wird der Zahlbegriff als ein Größenverhältnis interpretiert. Mit dem Terminus 'Größe' ist dann eine Gegenstandsvorstellung skizziert. (vgl. Keitel/Otte, 1977, III., S.11ff)

Diesen Problemen entsprechend läßt sich festhalten, daß im Gegensatz zur Wissenschaft sich die Schule unmittelbar auf die Anwendungen beziehen muß, um die Bedeutung der mathematischen Begriffe permanent zu entwickeln. Der Mathematikunterricht muß sich bei der Behandlung mathematischer Inhalte auch mit ihrem Verhältnis zu ihren Gegenständen befassen. Für die Schule spielen somit zunächst die Anwendungen der Mathematik eine wichtige Rolle; demgegenüber wird durch die Arbeitsteilung in den Wissenschaften das Anwendungsproblem in der Mathematik "ausgeklammert". Die Anwendungen schlagen sich in der professionellen Mathematik nur sehr vermittelt nieder.

Unser Hinweis auf die Bedeutung der Anwendungen für den Mathematikunterricht kann nun nicht heißen, Anwendungen per se zum Inhalt des Unterrichts zu machen bzw. ausschließlich aus der Perspektive der Anwendungen samt ihrer Vielfalt und der Komplexität verschiedenartiger Rechenprozesse den Unterrichtsverlauf steuern zu wollen.

Es kann nicht darum gehen, beliebige Anwendungen von Mathematik in der Schule als Unterrichtsgegenstand einzuführen, sondern es muß im Hinblick auf die Entwicklung grundlegender Begriffe die Vorstellung und Erfahrbarkeit der Bedeutung von

Anwendungen benutzt werden. Mit Anwendungen muß zwar im Unterricht gearbeitet werden; diese sollten jedoch immer einen relativ prinzipiellen Beispielcharakter besitzen, und demgemäß sorgfältig ausgewählt und detailliert bearbeitet werden.

Haben wir bis hierher darzulegen versucht, daß die Schule bei ihrer Aufgabe, der Entwicklung grundlegender mathematischer Begriffe, ganz allgemein gesehen, einen "direkteren" Gegenstandsbezug pflegen muß als die Wissenschaft, so stellt sich hierbei nun die Frage nach den Besonderheiten des Stochastikunterrichts, und zwar sowohl im Vergleich zur Wissenschaft als auch zu anderen Schulfächern. Zunächst ist festzuhalten, wie schon eingangs angemerkt, daß auch in der Wissenschaft den Anwendungen der Wahrscheinlichkeitstheorie insofern eine besondere Stellung zukommt, als sie in der Statistik eine eigene Theorie der Anwendungen besitzt.

Die bisherige Analyse aus den Fallstudien hat nun ergeben, daß das Verhältnis von Theorie zu Empirie in der Wahrscheinlichkeitstheorie eine besonders wichtige und zugleich schwierige Rolle spielt. Damit erlangt das Problem der Anwendungen für den Stochastikunterricht eine zusätzliche Dringlichkeit.

Man hat somit im Stochastikunterricht mit den beiden folgenden Aspekten des Anwendungsproblems zu tun: Zum einen müssen allgemein auch im Stochastikunterricht, der gerade seiner Anwendungsorientierung wegen ins Curriculum aufgenommen wird, die Anwendungen nicht einfach als Anwendung eines Rechenprozesses, sondern als Momente der Begriffsentwicklung und der Vertiefung des Begriffsverständnisses genommen werden, und zum anderen muß zusätzlich die der Evolution des Wahrscheinlichkeitsbegriffs eigene Vielfalt und Unvergleichbarkeit der Anwendungen beachtet werden, ja diese Besonderheit der wahrscheinlichkeitstheoretischen Anwendungen muß geradezu Entwicklungsgrundlage werden. Daraus ergeben sich nun spezielle Schwierigkeiten, welche wir im folgenden unmittelbarer an Materialien und Beispielen aus der Stochastik weiterverfolgen werden.

Sieht man sich genauer Begründungen für die Aufnahme der Stochastik ins Curriculum an, so trifft man einerseits vor allem auf die herausgestellte Bedeutung der Anwendungen der Stochastik. Andererseits wird die Wahrscheinlichkeitsrechnung als Beispiel für die Bedeutung axiomatischer Begriffsdefinitionen genommen. Dies sind nun nicht nur ausschließlich curriculare Rechtfertigungen; sie beziehen sich zudem in mehr oder weniger grundsätzlicher Weise auf die Art und Weise, wie der Begriff eingeführt wird, welche grundlegende Orientierung hierbei wichtig ist und welche Besonderheiten wirksam werden. Ja, letztlich ist dabei das Verhältnis von Begründung und Anwendung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs für seine Einbeziehung und Entwicklung im Unterricht angesprochen.

So findet man etwa schon in Lennés bekanntem Werk "Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland" den Hinweis auf die Bedeutung des Anwendungsbezugs der Wahrscheinlichkeitstheorie und gleichzeitig die besondere Stellung der Grundlegung dieses Begriffs samt ihrer Problematik erwähnt. Unter dem Themenbereich "Anwendungen von Mathematik in jedem Sinne" wird etwa bezüglich Stochastik konstatiert: "Der größte Teil aller Anwendungen von Mathematik außerhalb von Fachmathematik, Physik und Technik besteht vermutlich in Statistik, in Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kybernetik (im weitesten mathematischen Sinn). Eine empirische Untersuchung über die Anwendungsbereiche der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik fehlt indessen. Entsprechend dem Postulat der allgemeinen Berufsvorbildung wird die systematische Einführung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in die Gymnasialmathematik besonders von der Neuen Mathematik nachhaltig gefordert. Die Traditionelle Mathematik hatte diese Rechenart bereits akzeptiert, allerdings unter pragmatischen Gesichtspunkten, nur in Verbindung mit der Rentenrechnung (Sterbetabellen), im übrigen unter rein fachlichem Interesse in Verbindung mit der Kombinatorik." (Lenné, 1975, S. 276)

Und zur Bedeutung der Wahrscheinlichkeitstheorie für ein beispielhaftes und angemessenes Verständnis der moderneren

Mathematik, insbesondere der Stellung, welche einer axiomatischen Grundlegung zukommen sollte, wird angeführt: "Die gemäßigtere Richtung der Neuen Mathematik fordert zwar gleichfalls die axiomatische Begründung eines Stoffbereichs, besonders für mathematisch-naturwissenschaftliche Zweige bzw. im Rahmen von Arbeitsgemeinschaften. Sie hat dafür aber inzwischen eine Reihe besonders zeitsparender Beispiele wie Inzidenzgeometrien und Wahrscheinlichkeitsrechnung entwickelt." (Lenné, 1975, S. 233)

Es mag nun ein Zufall sein, daß diese fast einzigen Anmerkungen Lennés zur Wahrscheinlichkeitstheorie sich gerade auf den Anwendungsbezug und die Grundlegungsproblematik beziehen, ohne beide direkt miteinander in Verbindung zu bringen; uns scheint dies jedoch auch ein Ausdruck dafür zu sein, daß es sich hierbei um zwei der wichtigsten didaktischen Fragen zur Wahrscheinlichkeitstheorie handelt. Wir sind davon überzeugt, daß diese beiden Probleme sich didaktisch sinnvoll nur in ihrem gegenseitigen Verhältnis zueinander diskutieren und analysieren lassen. Zu welch' mißlichen Konsequenzen es führen kann, stellt man einen der beiden Aspekte in den Vordergrund und vernachlässigt den anderen, zeigen beispielsweise didaktische Begründungen von Kursvorschlägen. So führt etwa Schmidt zunächst die Bedeutung der Anwendungen für die Wahrscheinlichkeitstheorie als besondere Begründung an:
"Die Entscheidung, den Themenbereich Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung neben der Analysis in den Pflichtbereich des Grundfaches Mathematik aufzunehmen, basiert im wesentlichen auf zwei Begründungen:

1. Kenntnisse und Verfahren der Statistik/Wahrscheinlichkeitsrechnung werden in einer Vielzahl von Wissenschafts- und Anwendungsbereichen als Grundlage zur Erkenntnisfindung und Argumentation benutzt. Dies trifft in zunehmendem Maße auch auf Fachbereiche zu, die ansonsten keinen direkten Bezug zur Mathematik aufweisen (wie Politik, Psychologie,

Einer über das rezeptive Anwenden hinausgehenden kritischen Handhabung der entsprechenden Verfahren kommt somit eine wachsende Bedeutung zu.

2. Nach allen bisher vorliegenden Erfahrungen kann damit gerechnet werden, daß auch der weniger an der Mathematik interessierte Schüler über einen unmittelbaren Bezug zu Anwendungssituationen eine hinreichende Motivierung zur Auseinandersetzung mit mathematischen Fragestellungen erfährt. In der Statistik/Wahrscheinlichkeitsrechnung wird der Bezug zwischen Mathematik und Realität besonders deutlich sichtbar." (Schmidt, 1976a, S.9)

Es wird hier also letztlich der Zusammenhang von Anwendbarkeit und Allgemeinbildung als die zentrale Begründung für die Stochastik im Schulcurriculum herausgearbeitet. Umso überraschter ist man von der folgenden Feststellung des Autors: "Die überwiegende Anzahl der 'echten' Anwendungen setzen einen Umfang an Theorie voraus, der das im Unterricht Erreichbare wesentlich übersteigt. Bezogen auf die Statistik/Wahrscheinlichkeitsrechnung betrifft dies vor allem die Verfahren der beurteilenden Statistik." (Schmidt, 1976a, S.9)

Einerseits ist das Kriterium Anwendbarkeit für die Einführung der Stochastik und die Begründung ihrer besonderen Stellung zentraler Aspekt, andererseits erlaube jedoch der Unterricht keine, den spezifischen Bedingungen der Wahrscheinlichkeitstheorie angemessene Bearbeitung dieses Anwendungsproblems. Es müßten vorher erst genügend differenzierte Methoden und Begriffe entwickelt werden, ja die Wahrscheinlichkeitsrechnung als eine abgeschlossene Theorie insgesamt begründet und "definitorisch" festgefügt sein, ehe man dann zu "echten" Anwendungen übergehen könne.

Diese Diskussion verdeutlicht nochmals beispielhaft die Besonderheit des Anwendungsproblems in der Stochastik: Einerseits wird sichtbar, daß die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie nicht über Anwendungen derart gesteuert werden kann, wie sie in der konkreten Praxis der Statistik in ihrer Vielfalt, ja Divergenz und Unvergleichbarkeit relevant sind; zum anderen muß jedoch von Beginn an der Anwendungsbezug in einer allgemeinen und prinzipiellen Weise, etwa durch ausgewählte Beispielsituationen zur Richtschnur der Begriffsentwicklung gemacht werden. Es geht also um ein angemessenes <u>Verhältnis</u> von Begründungs- und Anwendungsaspekten.

Eine dieser Vorgehensweise der Überbetonung des Begründungsaspekts genau entgegengesetzte Haltung findet man in der einseitigen Ausrichtung auf die Anwendungen. Dabei spielt letztlich die Begründungsproblematik des Wahrscheinlichkeitsbegriffs überhaupt keine Rolle, Hauptsache mit diesem Begriff wird "operiert". Einmal kommt es in dieser Hinsicht ganz allgemein dazu, daß bei der "Frage nach der Priorität zwischen 'Begriffsbildung' und dem Umgang mit dem Wahrscheinlichkeitsbegriff", der Umgang mit diesem Begriff betont wird, "wozu eine kurze axiomatische Einführung ausreicht." (Vgl. die Diskussion während der 6. Fachleitertagung für Mathematik in Kassel, 1978, S. 132ff)

Zum anderen kann eine Auffassung, die sich auch der Priorität der Anwendungen verpflichtet fühlt, dazu führen, daß etwa eine Überbetonung des Begriffs der relativen Häufigkeit zwar vordergründig die Probleme einer komplizierten Begründung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs vermeidet und sofort experimentelle Anwendungen gestattet, die jedoch bei zu empiristischer Handhabung dieses Ausgangsbegriffs dann im späteren Verlauf bei komplexeren Anwendungen unüberwindbare Probleme mit sich bringen kann.

So merkt etwa Freudenthal zu einer einseitigen Begründung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs auf dem Konzept der relativen Häufigkeit an, daß Probleme gerade bei Anwendungen entstehen, die vor allem eine zentrale Richtschnur sein sollten. "The suggestion of 'stability of frequencies' evoked by the sequential procedure must also be rejected for more fundamental reasons. The applications of probability, and in particular statistical inferences, are dealt with according to a weak law like pattern." (Freudenthal, 1971/72, S. 488)

Mit dem Schlagwort"weak law like pattern" wird von Freudenthal mit einem speziellen Terminus die Besonderheit der von uns als Beschreibungsproblem stochastischer Anwendungen bezeichnete Schwierigkeit angesprochen: Die Anwendungen der Wahrscheinlichkeitstheorie sind von einer komplizierteren Beschreibungsstruktur geprägt, als sie im Häufigkeitsbegriff <u>allein</u> zum Ausdruck kommt. Bernoullis Theorem, so Freudenthal, drückt <u>beispielhaft</u> in Form der Beziehung von Exaktheit und Sicherheit einer wahrscheinlichkeitstheoretischen Aussage diesen Sachverhalt aus. (vgl. hierzu Kap. III.)

In den didaktischen Diskussionen um die Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in den Unterricht erlangt nun das Verhältnis von Begründung und Anwendung seine deutlichste Schärfe in der alternativ gestellten Frage, ob man entweder mit dem Begriff der Gleichwahrscheinlichkeit oder dem der relativen Häufigkeit beginnen und so die Wahrscheinlichkeitstheorie entwickeln solle.

Die jeweiligen Herangehensweisen, einmal unter der Perspektive der Gleichwahrscheinlichkeit und zum anderen der relativen Häufigkeit, lassen sich durch grundlegende Positionen kennzeichnen. Zum einen geht eine Position in extremer Weise ausschließlischlich von einem ideal-symmetrischen platonischen Körper, wie etwa dem Würfel, aus und definiert ohne Bezug zu Zufallserscheinungen, allein auf Grund der Gestalt des Körpers den Begriff der (Gleich-)Wahrscheinlichkeit.

Demgegenüber geht eine "gegensätzliche" Position ausschließlich von empirischen Fakten der Zufallserscheinungen samt der Stabilisierung von relativen Häufigkeiten aus, wie sich dies beispielsweise in dem in der Didaktik sooft diskutierten "Reißnagelexperiment" ausdrückt; hier wird in der Tat kein Bezug zur Form des Zufallsgenerators, d.h. zu seinen inhaltlichen Aspekten hergestellt.

Diese Positionen verdeutlichen die Grundproblematik des didaktischen Streites um die Frage, ob man mit der "relativen Häufigkeit" oder vielleicht doch mit dem Begriff der "Gleichwahrscheinlichkeit" beginnen solle. Sie zeigen in der Durchführung aber auch, daß dieser alternativ diskutierte Gegensatz so nicht haltbar ist. Sowohl der Begriff der Gleichwahrscheinlichkeit muß sofort auf reale Zufallsphänomene bezogen und der Zusammenhang von Gleichwahrscheinlichkeit und relativer Häufigkeit diskutiert werden, will man nicht einer Vorgehensweise verfallen, welche die Wahrscheinlichkeitstheorie durch die Kombinatorik ersetzt; umgekehrt muß der Begriff der relativen Häufigkeit auf dem Hintergrund inhaltlicher und gegenstandsspezifischer Aspekte (wie etwa der Symmetrie, der Form, biologischer, sozialer usw. Aspekte) des jeweiligen Zufallsgenerators gesehen werden. Eine absolute und vom Anwendungskontext gelöste Konstruktion der relativen Häufigkeit gibt es nicht.

So kritisiert etwa Freudenthal zu Recht: "Ein heutzutage viel abgeschriebenes Beispiel ist auch das Werfen eines Reißnagels. Ich weiß nicht, ob die Verfasser, die es empfehlen, es auch ausprobiert haben. Ich versuchte es einmal, aber nach einigen Versuchen und ein bißchen Nachdenken, wurde es mir klar, daß das Experiment von zu vielen unübersehbaren und unbeherrschbaren Faktoren abhängt, um aufschlußreiche Resultate zu liefern. Es hängt da viel von der Art des Werfens ab, und auf die Dauer wird sogar ein fester Experimentator in seiner Wurftätigkeit Schwankungen zeigen. Es ist übrigens kaum nötig, darauf hinzuweisen, daß dieses Zufallsexperiment selber kaum motiviert und als Idee höchst naiv ist." (Freudenthal, 1973, S. 17)

Es gibt nicht das "reine" Zufallsexperiment oder etwa den "absoluten" Zufall; bei jedem Experiment sind komplexe Zusammenhänge zu berücksichtigen, sind subjektive und auch objektive Faktoren einzubeziehen. In dem einfachen Fall des Würfels etwa ist es gerade die Symmetrie des Zufallsgenerators, welche überhaupt erst die Idee zutagetreten läßt, daß sich die Häufigkeit eines Ereignisses in etwa um $\frac{1}{6}$ stabilisieren wird. Ohne diesen Bezug ist die Betrachtung von Häufigkeiten willkürlich und unverständlich. Man hat es letztlich immer sowohl mit gegenständlichen als auch statistisch-zufälligen Aspekten gleichzeitig zu tun. Es geht um den Zusammenhang der beiden oben skizzierten Positionen, nicht um ein "entweder - oder".

Wie scharf jedoch in der didaktischen Diskussion letztlich ein Gegensatz zwischen beiden Positionen betont wird, zeigt eine Äußerung von Walter, der selbst eher die Grundlegung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs über relative Häufigkeiten anstrebt, gegenüber dem Konzept der Gleichwahrscheinlichkeit. In dem Referat "Wider Münze und Würfel" stellt er fest: "Die Anfänge der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind aufs engste mit kombinatorischen Überlegungen verknüpft und gipfeln in der Definition der Wahrscheinlichkeit als dem Verhältnis der Anzahl der günstigen Fälle zu der Anzahl der möglichen Fälle. Der Vorteil dieser Definition liegt in ihrer durchsichtigen Einfachheit und leichten Handhabung. Ihr Nachteil, daß sie außer zur Beschreibung einiger Glücksspiele zu <u>keiner</u> weiteren praktischen Anwendung taugt, weil vorausgesetzt wird, daß alle elementaren Ereignisse die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen, während in der Praxis gerade die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses die primäre Aufgabe ist. ... Hinzu kommt die didaktisch bedeutsame Tatsache, daß die obige Definition sich naturgemäß nicht zum heute üblichen Wahrscheinlichkeitsbegriff verallgemeinern läßt. ... Für die <u>Einführung</u> stochastischer Grundbegriffe sind also Münze und Würfel denkbar ungeeignet. Für eine <u>spätere Untersuchung</u> denkbar uninteressant. Es bleibt die Aufgabe, nach geeigneten

Zufallsgeneratoren oder natürlichen Zufallserscheinungen zu suchen, die die gewünschte Begriffsbildung provozieren." (Walter, 1978a, S.129ff)

Berechtigt ist z.T. die Kritik an einer Vorstellung, welche die Wahrscheinlichkeit ausschließlich auf die ideale Symmetrie des Würfels oder der Münze zurückführen will und dabei, was zunächst die Grundlegung des Begriffs betrifft, von jeglichem Aspekt der Zufälligkeit absieht. Dies kann in der Tat dazu führen, daß "Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kombinatorik quasi identifiziert (werden)." (Walter, 1975, S. 272)

Der Ausweg kann jedoch nicht darin bestehen, dem Begriff der relativen Häufigkeit die einzige Grundlegungsfunktion zu geben. Die Überlegungen Walters zeigen, daß er letztlich so etwas wie einen allgemeinen und einheitlichen Standpunkt für die Entwicklung der Stochastik sucht; es hat sich jedoch herausgestellt, daß die Besonderheit und auch besondere Schwierigkeit der Wahrscheinlichkeitstheorie gerade in der Vielfalt inhaltlicher Begründungen, d.h. unterschiedlicher Bezüge zu realen Situationen besteht. Dann kann es aber nicht einen "goldenen" Weg geben derart etwa, daß ein Grundbegriff <u>unverändert</u> Grundlage einer längeren Entwicklungsphase sein kann.

Ein weiterer Aspekt, an welchem die Problematik des Verhältnisses von Begründung und Anwendung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes im Schulunterricht besonders relevant wird, ist das sog. "empirische Gesetz der großen Zahlen". Hieran lassen sich wiederum Vereinseitigungen in diesem zentralen Verhältnis aufweisen.

Beide Sichtweisen, die wir oben in ihren gegensätzlichen Aspekten gekennzeichnet haben, versuchen mit Hilfe des empirischen Gesetzes der großen Zahlen die "Lücke" zwischen Wahrscheinlichkeit und relativer Häufigkeit zu schließen. Dieses Gesetz wird dazu primär als eine definitive Aussage, quasi als ein empirisches Faktum benutzt und nicht als eine letztlich noch "offene" Orientierung verstanden, die im Verlaufe

der weiteren Entwicklung zu differenzieren und zu präzisieren ist.
Umgekehrt ist jedoch festzustellen, daß dieses "Gesetz" keine Aussage über Konvergenzen von relativen Häufigkeiten beinhaltet, sondern besagt, daß man bei beobachteten Konvergenzen (oder besser: Stabilisierungstendenzen) Hinweise dafür an die Hand bekommt, daß die vorliegende Situation mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitstheorie analysiert werden kann. Dies ist dann aber keine fixierte Feststellung mehr, sondern letztlich eine Aufforderung, mittels der Wahrscheinlichkeitsrechnung diesen hier konstatierten Zusammenhang von empirischen Beobachtungsgrößen und theoretischen Begriffen wechselseitig herauszuarbeiten.

Wie nun im Unterricht mit diesem Gesetz umgegangen wird, das verrät eine einseitige Auffassung von Wahrscheinlichkeit. Wird der Begriff der Gleichwahrscheinlichkeit als fundamental betrachtet, so erhält dieses Gesetz meist ausschließlich die Funktion, den Begriff der relativen Häufigkeit "komplikationslos" auf den Begriff der Wahrscheinlichkeit zurückzuführen; in der umgekehrten Position, welche den Häufigkeitsbegriff als Grundlage nimmt, wird letztlich der Wahrscheinlichkeitsbegriff einfach durch diesen definiert.

In beiden Positionen wird also letztlich kein Unterschied zwischen Theorie und Empirie gemacht, wird nicht die besondere Bedeutung der Differenz zwischen theoretisch-idealen und praktisch-zufälligen Aspekten gesehen, welche gerade in der Wahrscheinlichkeitstheorie grundlegend ist und hier handhabbar gemacht wird.

Soweit zu einer ersten Charakterisierung didaktischer Probleme im Verhältnis von Begründung und Anwendung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs; im konstruktiven Teil dieses Kapitels wollen wir Vorschläge zur Behandlung dieser Schwierigkeiten geben.

IV.2.2 Erkenntnistheoretische Probleme im Stochastikunterricht - Zum Verhältnis von Kausalität und Zufall

Die Einführung und Behandlung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs wird oft ganz allgemein mit einem Meßprozeß verglichen. Dies gibt gleichzeitig Hinweise auf Ähnlichkeiten und Unterschiede statistischer und deterministischer Meßverfahren bzw. Theorien. Auch im Schulunterricht bieten sich derartige Vergleiche mit der Längenmessung oder Temperaturbestimmung an; es gilt jedoch dabei, immer auch die Besonderheiten und Neuartigkeiten statistischer Messungen im Auge zu behalten.

Einen ausführlichen Vergleich zur Längenmessung stellt Walter in dem Handbuch zur Didaktik der Mathematik (Bigalke/ Hasemann, 1978) her:"Die experimentelle Erfahrung lehrt,

daß ein beobachtbares Ereignis in verschieden umfangreichen Versuchsreihen zwar auch verschieden oft eintritt, die <u>relativen Häufigkeiten</u> (d.h. die Anzahl der Versuche, in denen das beobachtbare Ereignis eingetreten ist, geteilt durch die Anzahl der durchgeführten Versuche) aber alle etwa gleich sind. So läßt sich der Wahrscheinlichkeitswert eines beobachtbaren Ereignisses als die relative Häufigkeit festlegen, mit der dieses Ereignis in (beispielsweise) hundert Versuchen aufgetreten ist. Selbstverständlich kann dieser Wahrscheinlichkeitswert bei einer anderen durchgeführten Versuchsreihe ein anderer sein. Genau in der gleichen Situation befindet man sich, wenn z.B. die Länge eines Stabes gemessen werden soll. Während man dort zur Steigerung der Genauigkeit zu präziseren Meßinstrumenten greift, erhöht man hier die Anzahl der Versuche und, obwohl man weiß, daß sich die Länge eines Stabes genauso wenig exakt messen läßt wie der Wahrscheinlichkeitswert eines beobachtbaren Ereignisses, glaubt man doch an ihre Existenz." (Walter, 1978, S.270)

Zunächst ist anzumerken, daß wir grundsätzlich dem Vergleich mit einem Meßprozeß zustimmen. In der Tat geht es in der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihren Anwendungen auch um die Messung bestimmter (elementarer) Wahrscheinlichkeitswerte.

Was bleibt nun jedoch an Unterschieden im Vergleich zwischen deterministischen und statistischen Theorien? Bei der Beantwortung dieser Frage stützen wir uns stark auf die Überlegungen aus dem Kapitel III. Dort haben wir u.a. festgestellt, daß Unterschiede weder in ontologischen Charakterisierungen noch in epistemologischen Verschiedenheiten zu suchen sind.

So wird oft die Wahrscheinlichkeitstheorie epistemologisch als "Theorie der Massenerscheinungen"charakterisiert. Letztlich muß jedoch jede Theorie, will sie überhaupt verallgemeinerbare Aussagen treffen, sich immer auf Massenerscheinungen, auf die Feststellungen von Invarianten im Zusammenhang der Betrachtung vieler Dinge und deren Beziehungen stützen. Denn jede Theorie bemüht sich um die Erkenntnis des Wesentlichen und Gesetzmäßigen, d.h. gegenüber dem einzelnen Ereignis oder einzelnen Dingen, Invarianten. Das Wesentliche kann nie am einzelnen Ding in empiristischer Weise verifiziert werden.

Und ontologische Unterscheidungen, welche von einem Gegensatz zwischen Zufälligkeit und Gesetzmäßigkeit ausgehen, sind letztlich den Problemen einer Laplaceschen Philosophie des absoluten Determinismus ausgeliefert. Die Fallstudie zu Boltzmanns Arbeiten hat deutlich gemacht, daß es um einen wechselseitigen Zusammenhang von kausalen und zufälligen Aspekten in der Erkenntnis geht.

Worin liegt dann ein Unterschied zwischen deterministischen und statistischen Theorien begründet? Die Besonderheit der Wahrscheinlichkeitstheorie liegt darin, daß der Gesichtspunkt der Massenhaftigkeit, bzw. das Bezogensein auf Verhältnisse und Systeme in der <u>Beschreibung</u> statistischer Gesetzmäßigkeiten erscheint, während sich deterministische Gesetzmäßigkeiten in ihrer Beschreibung mit dem "einzigen" allgemeinen Fall befassen. So beschreibt etwa das Fallgesetz einen idealen

Einzelfall, während sich beispielsweise etwa die statistische Deutung des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik auf eine Vielfalt möglicher Gassysteme bezieht und dieses Gesamtsystem durch eine entsprechende Verteilung zu beschreiben sucht. Letztlich hat sich diese Notwendigkeit, in die Beschreibung statistischer Gesetzmäßigkeiten den Systemgesichtspunkt aufzunehmen, aus den besonderen Problemen wahrscheinlichkeitstheoretischer Anwendungen ergeben; Ausdruck dieses Anwendungsproblems ist die Zirkularität, wie sie sich etwa schon in Bernoullis Theorem zeigt. Dies beinhaltet im Kern, daß sich die Messung von Wahrscheinlichkeiten nicht auf eine andere theoretische Ebene verlagern läßt: Der Zirkel verweist letztlich immer wieder auf die Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten selbst. Ja, im Grunde ist jede nicht-naive Messung selbst statistischer Natur bzw. bedarf einer statistischen Meßtheorie. Dies zeigt sich auch in praktischen Situationen: Hier wird in den meisten Fällen von Fehlertheorien Gebrauch gemacht.

Aus diesen Überlegungen ergibt sich nun, daß auch in dem eingangs dargestellten Vergleich, in dem die Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs mit Hilfe der Analogie des Längenmessens verdeutlicht wurde, darauf zu achten ist, daß die statistische Messung mit ihrem besonderen Beschreibungsproblem gegenüber der Längenmessung die allgemeinere Theorie darstellt und so die Grundlage der Erklärung ist. Dies heißt konkret: Nicht die Messung der relativen Häufigkeit ist auf die Längenbestimmung rückführbar, sondern umgekehrt, die statistische Messung erklärt erst die Längenmessung; ja eine "wirkliche" exakte Messung der Länge eines Stabes ist nur mit Hilfe statistischer Verfahren möglich.
Wird im Unterricht nun ein Vergleich im Sinne des Meßprozesses hergestellt, so sollten nach der Entwicklung entsprechender statistischer Verfahren und Begriffe (arithmetisches Mittel, Verteilungsbegriff etc.) dann die eingangs mehr oder weniger

naiv genommenen Messungen von Länge oder Temperatur auch unter statistischen Gesichtspunkten präzisiert werden.

In der Frage nach besonderen Gesichtspunkten der Wahrscheinlichkeitstheorie im Vergleich zu anderen Theorien hat sich somit gezeigt, daß Unterschiede im Anwendungs- und Beschreibungsproblem der Wahrscheinlichkeitstheorie liegen und nicht in allgemeinen ontologischen oder epistemologischen Charakterisierungen. Dies haben wir im Kap. III durch die Kennzeichnung ausgedrückt, daß die Wahrscheinlichkeitstheorie eine Theorie der Anwendung bzw. eine Theorie zur Anwendung anderer Theorien ist.
Gewissermaßen sind nun diese beiden Probleme, das der Beschreibung und das der Anwendung, komplementär zueinander. So bedeutet etwa in die Beschreibung den Systemgesichtspunkt aufzunehmen, Verfahren zu entwickeln, wie sie beispielhaft im Verteilungsbegriff deutlich werden; Verteilungen, also Systembeschreibungen, als umfassende Anwendungscharakterisierungen zu benutzen, heißt nun, von einer Theorie 2. Stufe zu einer Theorie erster Stufe überzugehen (vgl. Kap. III). Man stellt sich hier somit auf einen Systemstandpunkt: Nicht Einzeldinge werden untersucht und miteinander verglichen, die Systeme selbst werden über ihre Verteilungen miteinander in Beziehung gesetzt. Inwieweit jedoch der Vergleich zwischen konkreten empirischen Verteilungen und theoretisch-berechneten angemessen ist, ist selbst wiederum ein Problem der Anwendung, was erst in einer Beschreibung auf höherer Stufe statistisch behandelt werden kann.

Diese Überlegungen zur Wechselbeziehung von Anwendung und Beschreibung in der Stochastik können andererseits auch vom Verhältnis zwischen Wahrscheinlichkeits<u>theorie</u> und Statistik her untersucht werden. Man kann sagen, daß die Wahrscheinlichkeitstheorie es üblicherweise mit der Berechnung von komplizierten Wahrscheinlichkeiten aus elementaren vorgegebenen zu tun hat; demgegenüber befaßt sich die Statistik mit der Bestimmung, Messung und Schätzung der elementaren Ausgangswahrscheinlichkeiten. Dies kann man nun im Rahmen unserer

Überlegungen so interpretieren: Die Wahrscheinlichkeitstheorie hat es insofern mit dem Beschreibungsproblem zu tun, als sie Mittel zur Verfügung stellt, die Vielfalt idealtypischer Beschreibungen in Form von Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu vermitteln; die Statistik befaßt sich mit dem Anwendungsproblem, denn ihre Aufgabe besteht gerade in der statistischen Abschätzung grundlegender Wahrscheinlichkeiten, welche notwendig ist, um eine ideale Beschreibung als "passend" mit einer empirischen zu beurteilen.

In ihren jeweiligen Zusammenhängen sind das Beschreibungs- und Anwendungsproblem relativ unabhängig voneinander, wie sich dies auch in der relativen Trennung von Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik zeigt. In der jeweiligen konkreten Anwendungssituation bedingen sie sich jedoch gegenseitig: Beschreibungen etwa in Form von Verteilungen müssen eingeführt werden, um Anwendungen durchführen zu können; die Anwendungen bedürfen der Abschätzung von elementaren Wahrscheinlichkeiten, welche meist selbst nur in einem neuen Beschreibungszusammenhang theoretisch möglich sind.

Was können die bisher dargelegten relativ allgemeinen Gedankengänge für den Stochastikunterricht an Konsequenzen mit sich bringen?
Die Tatsache, daß es keine grundsätzlichen epistemologischen oder ontologischen Unterschiede zwischen statistischen und deterministischen Theorien gibt, bedeutet nun auch für den Stochastikunterricht, sich nicht zu stark vom kausal-mechanischen Vorgehen alternativ abzusetzen und die Besonderheit des Zufalls zu thematisieren; es gilt vielmehr, im Stochastikunterricht und über seine Anwendungen geradezu die Verallgemeinerung dieses Vorgehens herauszustellen; also eine Auffassung zu entwickeln, daß die Stochastik in der hier beschriebenen Weise als Theorie der (allgemeinen) Anwendung und in ihrer komplementären Kennzeichnung von wechselseitig zufälligen und kausalen Aspekten geradezu zur Grundlage der Erklärung des mechanischen Arbeitens wird.

Von diesem Standpunkt einer so interpretierten Wahrscheinlichkeitstheorie wird auch anhand einer allgemeineren ontologischen Vorstellung die Bedeutung dieser Theorie als einer allgemeinen Orientierung für die Schulmathematik und ihre inhaltlichen Bezüge deutlich. Bei der Stochastik handelt es sich beispielsweise nicht einfach um eine "andersartige" Theorie neben der mechanischen; die Stochastik dient als eine allgemeinere und umfassendere Theorie etwa zur Erklärung der Mechanik. Für den Unterricht heißt dies, nicht beim Schüler alternative und völlig neuartige Vorstellungen in der Stochastik herauszuarbeiten, sondern verstärkt sowohl an mechanische als auch an erste zufällige Vorerfahrungen des Schülers anzuknüpfen und diese beiden Aspekte aufeinander bezogen, ausgehend von Erfahrungen zu präzisieren und weiterzuentwickeln.

Im Stochastikunterricht sollten nicht nur statistische Techniken und der wahrscheinlichkeitstheoretische Kalkül vermittelt werden, es gilt gleichzeitig eine Vorstellung von der besonderen Natur stochastischer Gesetzmäßigkeiten zu entwickeln, einem neuartigen und allgemeineren Gesetzestyp, welcher umfassenderer Erklärungen und flexiblerer Anwendungen fähig ist.

Um konkrete Auswirkungen für den Stochastikunterricht besser zu verstehen, wollen wir uns nun im folgenden wiederum im Anschluß an die bisher vorgetragenen relativ allgemeinen Überlegungen verstärkt auf Materialien und Lehrbücher zum Unterricht selbst beziehen.

In den meisten Schulbüchern und in didaktischen Analysen wird auf die von uns hier thematisierte Problematik der Entwicklung einer angemessenen Vorstellung eines umfassenden Konzeptes von stochastischer Gesetzmäßigkeit kaum explizit eingegangen.

Die einzigen Hinweise und Äußerungen zu erkenntnistheoretischen Fragen finden sich meist im Vorwort einzelner Bücher oder implizit an solchen Stellen des vorgestellten Kurses, wo erklärt wird, was Zufall ist, und zwar anhand des Unterschiedes zwischen Zufallsexperiment und deterministischem Experiment in der Mechanik etwa. "Es gibt Experimente, bei deren Ausführung das Ergebnis in eindeutiger Weise vorhergesagt werden kann. Beispiele hierfür sind: Siedetemperatur von Wasser bei Normaldruck; Zeitdauer bei 10 m freien Falls; Leuchten einer Lampe bei Stromdurchfluß; Brechung von Licht beim Übergang von einem dünneren in ein optisch dichteres Medium. Experimente dieser Art heißen kausal-determinierte Experimente. Alle anderen Experimente nennen wir Zufallsexperimente. Bei solchen Experimenten spielt der Zufall eine Rolle, d.h. der Ausgang eines Versuchs ist nicht in eindeutiger Weise vorhersehbar. Zufallsexperimente sind etwa: Werfen einer Münze, eines Würfels, eines Reißnagels; Warten auf den Zerfall eines bestimmten Radiumatoms eine halbe Stunde lang; ziehen einer Spielkarte, eines Glücksloses." (Barth u.a., 1978, Bd. 1, S.7) Zufallsexperimente und kausal-deterministische Experimente werden als verschiedene und sich einander ausschließende Untersuchungsweisen aufgefaßt. Zwar wird in einem anderen Schulbuch bemerkt: "Eine dritte Gruppe von Experimenten läßt sich je nach dem Ziel, dem der Versuch dient, bald deterministisch, bald stochastisch betrachten. Hierzu gehören insbesondere alle Experimente, die Messungen enthalten." (Feuerpfeil, Heigl, Volpert, 1975, S.7), jedoch wird auch hier letztlich Zufall und Kausalität als strikt alternativ betrachtet. Es handelt sich dabei um Gegensätze, nicht um komplementäre Aspekte. "Wenn wir sagen, ein Experiment sei ein Zufallsexperiment, so meinen wir damit, seiner Beobachtung werde ein stochastisches Denkschema zugrunde gelegt. Die Entscheidung darüber, ob wir bei der Beschreibung eines Experimentes ein deterministisches oder ein nicht-deterministisches Denkschema anwenden, liegt allein beim Beobachter und hängt ab von dem Ziel, das er mit der Durchführung des Experiments verfolgt." (Heigl, Feuerpfeil, 1976, S.8)

Hervorzuheben ist an diesen Überlegungen, daß Experimente nicht einfach in zwei disjunkte Klassen von kausal-deterministischem und statistisch-zufälligem Typ eingeteilt werden; je nach den Zielen können Experimente sowohl deterministisch als auch stochastisch behandelt werden. U.E. ist jedoch darüber hinaus deutlich zu machen, daß letztlich jedes Experiment gleichzeitig kausal-deterministisch und zufällig-statistisch zu bearbeiten ist. Denn in jedem Experiment kommen Messungen vor, die in den meisten Fällen nur statistisch behandelbar sind.

Die Kontroversen in der Geschichte der statistisch-kinetischen Gastheorie hatten gerade zum Gegenstand, daß beide Sichtweisen, die mechanische und die statistische gleichzeitig zur Erklärung benötigt werden, der 2.Hauptsatz der Thermodynamik ist im Rahmen der Atomistik nicht einmal ein mechanischer und ein anderes Mal ein wahrscheinlichkeitstheoretischer Satz, er ist gewissermaßen beides auf einmal.

Hieran wird deutlich, daß in diesen Schulbüchern doch letztlich nach einer Unterscheidung zwischen den wahrscheinlichkeitstheoretischen und deterministischen Theorien gesucht wird, die beide Theorietypen nebeneinander stellt. Die Stochastik ist eine andersartige Theorie, da sie sich, so die Meinung vieler Schulbuchautoren, ausschließlich auf Zufallserscheinungen, auf unsichere Ereignisse bezieht, und dies stellt etwas grundsätzlich Anderes dar, als die strikte Kausalität in der Mechanik etwa.

Diese Auffassung, die tendenziell in vielen Schulbüchern zu erkennen ist, läuft im Grunde auf den Standpunkt der Laplaceschen Philosophie hinaus. Teilweise wird dieser Standpunkt sogar explizit formuliert. So schreiben etwa Lindenau und Schindler in ihrem Buch "Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Primarstufe und Sekundarstufe I" gleich zu Beginn, wo sie sich mit dem Verhältnis von Zufall und Determinismus auseinandersetzen: "Wir sind überzeugt, daß jede Wirkung eine Ursache hat, glauben also an die Kausalität der

Naturereignisse. Das bedeutet für den Würfel, daß sein jeweiliger Zustand von dem vorangehenden Zustand und den inzwischen erfolgten äußeren Einwirkungen auf eindeutige Weise abhängt. Das Resultat '5' war also durchaus kausal bestimmt. Trotzdem sprechen wir von einem 'Zufall', weil wir unfähig sind, die Gesamtheit der oben genannten Daten, die die Endlage des Würfels beeinflussen, so genau zu erfassen, daß eine verläßliche Vorausbestimmung dieser Endlage möglich wird. Das liegt daran, daß schon eine minimale und unter Umständen eine unmeßbar kleine, folglich nicht von uns beobachtbare Abänderung eines einzigen Einflusses (z.B. der Rauhigkeit der Tischplatte) die Würfelendlage verändern kann. Der Vorgang ist ungeheuer kompliziert, die Zahl der zu berücksichtigenden Daten ist sehr groß, die Daten selbst sind wegen unvermeidbarer Meßfehler nicht hinreichend genau erfaßbar, und bei jeder Wiederholung des Vorgangs sind die meisten Daten verändert. In solch einer Situation sagen wir eben, das Ergebnis des Vorganges sei zufälliger Art. Diese Überlegungen zeigen, daß zwischen Kausalität und Zufall, zwischen der verlangten Eindeutigkeit der Versuchsvorschrift und der verlangten Nicht-Vorhersagbarkeit des Resultats kein Widerspruch besteht." (Lindenau/Schindler, 1977, S.17)

Dies ist ein Beispiel des Laplaceschen Standpunktes des "Alles-oder-Nichts", der Auffassung des absolut Determinierten einerseits gegenüber dem total Zufälligen andererseits. Beide Positionen scheinen sich zu widersprechen, stellen jedoch, wie wir gesehen haben, letztlich eine Identität dar. Es wird keine Variabilität zwischen ihnen gesehen; es fehlt eine Vorstellung von einer komplementär-statistischen Gesetzmäßigkeit, welche nicht einem absoluten Mechanizismus das Wort redet, sondern ihn durch die Stochastik zu relativieren sucht, um somit eine wechselseitig entwickelbare Beziehung in Gang zu setzen. Bezogen auf das obige Beispiel der unterschiedlichen Interpretationen zum Würfelexperiment könnte man etwa sagen, daß es nicht um die Alternative des absoluten Determinismus oder der totalen Zufälligkeit geht. Man kann auch hier in Ansätzen eine Vorstellung der Relativität kausaler Gesetzmäßigkeiten verdeutlichen. Beispielsweise bedeutet dies für den Würfel, daß durchaus ein kausaler Zusammenhang zwischen etwa der Lage des Schwerpunktes des Würfels und seinen jeweiligen Ausfällen besteht und daß dies kein "absolut" kausaler, sondern nur ein statistisch-kausaler Zusammenhang sein kann und als solcher untersucht werden müßte.

Wieso ist es notwendig, etwa den Wurf eines Würfels sowohl wahrscheinlichkeitstheoretisch als auch mit Mitteln der klassischen Mechanik zu beschreiben? Hieran läßt sich nochmals eindrücklich die Neuartigkeit und Besonderheit des stochastischen Standpunktes verdeutlichen. Erst ein Ansatz, der versucht, gleichzeitig inhaltlich-mechanische und statistisch-zufällige Aspekte zu berücksichtigen und einen Zusammenhang zwischen diesen herzustellen, vermag die Verabsolutierung eines klassisch deterministischen Vorgehens oder auch eine Vorstellung des "absoluten" Zufalls zu vermeiden. Man würde sonst in der Tat der Laplaceschen Philosophie zum Opfer fallen, welche etwa Cournot (vgl. Kapitel III) versuchte aufzuheben, indem er anstrebte, Kausalität und Zufall in der Vorstellung einer stochastischen Gesetzmäßigkeit in Form zufälliger Kausalketten miteinander zu versöhnen.

Man könnte hierzu noch allgemeiner feststellen: Das Erkennen <u>jeglicher</u> Gesetzmäßigkeiten in der Welt ist von der Komplementarität zufälliger und kausaler Aspekte abhängig; und so gesehen unterscheiden sich Fallgesetz und zweiter Hauptsatz der Thermodynamik in keiner Weise.
Dementsprechend ist auch unsere Kritik an einem vermeintlich reinen statistischen Erkenntnisprozeß zu verstehen: Die Bestimmung von statistischen Parametern ist nicht bloß eine quasi "äußerliche" Angelegenheit des Zufälligen, also der Beobachtung relativer Häufigkeiten etwa; relevant sind gleichermaßen spezifisch gegenständlich-kausale Aspekte, ohne die man weder auf die Idee gekommen wäre, Häufigkeiten zu analysieren, noch diese in ihrer Bedeutung für die untersuchte Fragestellung überhaupt beurteilen könnte.

Daß die hier beschriebene Trennung von Zufall und Kausalität auch im Schulunterricht bei der Herausbildung stochastischer Denkweisen ein nicht zu unterschätzendes Problem darstellt, zeigen die Äußerungen von Lehrern und Didaktikern. So bemerkt beispielsweise Schupp in einem Bericht über das Curriculum-Projekt "Stochastik in der Hauptschule" folgendes. Die Brauchbarkeit des Galtonbrettes "... in der Einstiegsphase zeigte sich erstmals, als wir im Verlaufe klinischer Untersuchungen zum probabilistischen Vorverständnis der Adressatengruppe (Klasse 7) das Verhalten der Schüler bei der Erstbegegnung mit dem Galtonbrett beobachteten. Sie reagierten zunächst kausal-deterministisch, zum Teil sogar noch magisch-anthropomorph. Auch wenn schließlich die Zufallsbedingtheit der Ergebnisse erkannt ist, wird weiterhin die wechselseitige Abhängigkeit und meist auch Gleichverteilung angenommen." (Schupp, 1976, S.203) Diese Schwierigkeiten faßt er an anderer Stelle so zusammen. "Zwar haben wir in Planung und Ausführung unseres Projekts darauf geachtet, daß der 'Zufall' im Zuge der Auseinandersetzung mit dem Galtonbrett auftaucht und als Erklärungsmuster benutzt wird, doch ist zu wenig herausgearbeitet worden, daß es sich hierbei nicht um einen Faktor handelt, der mit anderen deterministischen Faktoren vergleichbar wäre, sondern um einen Hilfsbegriff bei allzu großer Komplexität und Unübersichtlichkeit des Gefüges der eigentlich wirkenden Faktoren. 'Zufällig' ist ein Ergebnis wie der Kugelweg oder das erreichte Kästchen dann, wenn ich sein Zustandekommen nicht vollständig erklären und damit nicht sicher vorhersagen kann." (Schupp, 1978, S.82)

In der Tat ist es äußerst problematisch, auf dieser hier vertretenen Auffassung vom Status der Zufälligkeit, sich den Begriff der Wahrscheinlichkeit samt seiner neuartigen Aspekte anzueignen. Es besteht die Gefahr, in der Entgegensetzung von Zufall und Determiniertheit den zufälligen Aspekten isolierte, objektivistische Begründungen zuzusprechen;

sie werden als völlig andersartig verstanden, es wird nicht der oben beschriebene komplementäre Zusammenhang von kausalen und zufälligen Aspekten zur Richtschnur der Entwicklung gemacht. Nur so könnte dem Lernenden ein Anschluß, ein Zusammenhang von bekannten kausalen und neuen zufälligen Phänomen vermittelt und der neuartige Typ von Gesetzmäßigkeit entwickelt werden, welcher nicht einfach ein neben den mechanischen Gesetzen stehender anderer ist, sondern der vielmehr letztlich erst den absoluten Determinismus erklärt, indem er ihn relativierend aufhebt.

Soweit zu dem Bestreben, im Unterricht der Wahrscheinlichkeitstheorie Unterschiede in der ontologischen Charakterisierung dieser Theorie im Verhältnis zu anderen aufzudecken. Die Diskussion um epistemologische Unterschiede wird vereinzelt anhand der Auffassung geführt, daß die Wahrscheinlichkeitstheorie eine Theorie der Massenerscheinung ist. Hierbei wird erklärt, die wahrscheinlichkeitstheoretischen Aussagen beziehen sich nicht auf den Einzelfall.[1]

Dieser Zusammenhang zwischen Theorie der Massenerscheinungen als Kennzeichnung der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Unmöglichkeit, Aussagen für den Einzelfall zu formulieren, ist in einem Schulbuch folgendermaßen ausgeführt: "Diese Eigenschaft, daß sich bei jedem Zufallsexperiment bei einer großen Zahl von Versuchen (unter gleichbleibenden Bedingungen) der Wert der relativen Häufigkeit für ein bestimmtes Ereignis um einen festen Wert stabilisiert, heißt das 'empirische Gesetz der großen Zahlen'. Während also für den einzelnen Wurf eine

1 Mit dem Konzept des "Einzelfalles" sind letztlich unterschiedliche Vorstellungen angesprochen. Neben dem Gegensatz von Massenerscheinung und Einzelfall (der auch mehrfach durchführbar ist) wird unter Einzelfall auch das Problem der Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten nur einmal durchführbarer Ereignisse verstanden, (probabilities of single-events; vgl. Gillies, 1973, S.140ff). Ohne diese Diskussion systematisch aufzugreifen, ist hier im Grunde das gesamte Bedeutungsspektrum des Einzelfallproblems intendiert.

Vorhersage nicht möglich ist, kann doch der Anteil der Sechsen an der Gesamtheit einer großen Zahl von Würfen etwa vorausberechnet werden, eine Betrachtungsweise, wie sie für die Statistik typisch ist. Das empirische Gesetz der großen Zahlen ist ein statistisches Gesetz.

Vor einem weitverbreiteten Irrtum sei an dieser Stelle gewarnt: Ein Spieler, der sich bei seinem Wurf gute Chancen auf eine Sechs ausrechnet, weil in einem Spiel schon drei Runden keine Sechs mehr gefallen ist, interpretiert das empirische Gesetz der großen Zahlen völlig falsch. Zum einen ist das Ergebnis eines einzelnen Versuches auch innerhalb einer langen Versuchsfolge ganz dem Zufall überlassen, zum anderen dürfen aus statistischen Aussagen niemals Schlüsse auf einen Einzelfall gezogen werden." (Feuerpfeil/Heigl/Volpert, 1975, S.33)

Es wird also konstatiert, eine Vorhersage ist für den Einzelfall in der Stochastik nicht möglich. In welchem Sinne wird hier jedoch "Vorhersage" verstanden? Offenbar wird hiermit eine Vorstellung von Sicherheit bzw. Exaktheit verbunden, wie sie vermeintlich in deterministischen Theorien gilt. In dem Sinne kann man in der Tat keine Vorhersage über einen spezifischen Einzelfall eines Würfelwurfes etwa treffen. Für das Eintreffen eines (zufälligen) Ereignisses kann "nur" eine Wahrscheinlichkeit angegeben werden, d.h. eine statistische Beurteilung mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Mitteln abgeschätzt werden.

Wie steht es jedoch demgegenüber genauer mit Vorhersagen zum Einzelfall in der Mechanik? Ist es tatsächlich so, daß es eine "absolut" sichere Vorhersagemöglichkeit hier gibt? Ist es nicht vielmehr so, daß diese Sicherheit von der Erfahrung gesetzt wird, daß z.B. ein Stein immer zur Erde herabfällt? Rührt die Exaktheit der Vorhersage bei Planetenkonstellationen nicht daher, daß von vielen letztlich als unwesentlich betrachteten Faktoren abgesehen wird und man nur

in der Theorie zu "wirklich" exakten Werten gelangt, deren Übereinstimmung mit praktischen Werten sehr wohl ein Problem darstellen kann?
Das heißt aber, mechanische Theorien sind bezogen auf Vorhersagen über empirische Sachverhalte auch nicht exakt; es wird und kann jedoch oft von den minimalen Ungenauigkeiten abgesehen werden.

Die Wahrscheinlichkeitstheorie gestattet es nun, diese Ungenauigkeiten theoretisch zu bearbeiten, d.h. also eine fundiertere theoretische Grundlage für Entscheidungen im Hinblick auf diese Ungenauigkeiten zu liefern. Daß sehr wohl die Mechanik einer solchen Theorie bedarf, um in konkreten Fällen Vorhersagen über empirische Erscheinungen zu liefern, zeigt eindringlich das Beispiel von Gauß, der mit Hilfe der von ihm entwickelten Fehlertheorie die Position des Planeten Ceres vorhersagen konnte (vgl. Kap. II.3). Dieses Beispiel verdeutlicht, daß letztlich auch die Mechanik keine absolut exakten Vorhersagen über empirische Vorgänge machen kann, sondern daß man in komplizierten Fällen zusätzlich einer Theorie, etwa der Fehlertheorie bedarf, um genauer die auftretenden Ungenauigkeiten in der Vorhersage abschätzen zu können.

Dementsprechend kann man hier wieder feststellen, daß die Wahrscheinlichkeitstheorie als eine allgemeinere Theorie mehr über den Einzelfall aussagt als die Mechanik, die ja oft dieser Theorie bedarf. Die Wahrscheinlichkeitstheorie behandelt mehr Aspekte eines konkreten "Einzelfalles", sie erlaubt, die Ungenauigkeiten, welche grundsätzlich immer auftreten und in der Mechanik oft einfach vernachlässigbar erscheinen, mit ins Kalkül zu ziehen.

Somit ist es u.E. falsch, bezogen auf die Problematik, "Vorhersagen im Einzelfall" auf der Grundlage einer kausal-mechanischen Erklärung der statistischen Aussage einfach nur "Unsicherheit" zuzubilligen, während der kausal bestimmten Vorhersage erst eine exakte Gültigkeit zukäme.

Auch hier ist es eigentlich umgekehrt: Auf der Grundlage einer stochastischen Erkenntnisposition, die vom komplementären Zusammenhang zwischen kausalen und zufälligen Aspekten ausgeht, wird erst die in konkreten Fällen sichtbare ideale Vereinfachung mechanischer Gesetzmäßigkeiten erklärbar und eine Anwendung dieses Gesetzestyps auf komplexe empirische Situationen möglich.

Diese Überlegungen machen zudem deutlich, daß Theorien und theoretische Erklärungen nicht als quasi vollständige und in jeglichen Aspekten detaillierte Beschreibungen von Wirklichkeit aufgefaßt werden können. Sie sind immer nur auf wesentliche Ausschnitte von Wirklichkeit bezogen und liefern dementsprechend keine exakten Voraussagen über die Wirklichkeit in allen Details, sondern sie stellen Entscheidungshilfen für Handlungsanweisungen gegenüber der Wirklichkeit dar.
In diesem Sinne ist eine statistische Aussage über die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses beim Roulette sehr wohl eine Vorhersage über einen Einzelfall; abhängig von dieser Aussage kann man sich für oder gegen ein weiteres Spiel usw. entscheiden.

Zusammenfassend läßt sich für diesen Abschnitt als wichtig festhalten, daß die Stochastik nicht als eine völlig andersartige Theorie, weder in epistemologischer noch in ontologischer Hinsicht aufgefaßt werden kann im Vergleich etwa zur Mechanik; vielmehr muß gerade ihre Bedeutung als eine entwickeltere und umfassendere Theorie herausgestellt werden, derart, daß von dieser allgemeineren Position her erst die besonderen Fälle der mechanischen Gesetze und der deterministischen Experimente samt ihrer Idealisierungen sichtbar werden.

Für den Stochastikunterricht bedeutet dies, nicht auf vermeintliche Unterschiede der Wahrscheinlichkeitstheorie zu stark abzuheben und die Neuartigkeit dieser Theorie zu betonen, sondern stärker Zusammenhänge zu mechanischen Erklärungen herzustellen und so an die Vorerfahrungen der Schüler anzuknüpfen. Mit Hilfe der sich entwickelnden Wahrscheinlichkeitstheorie sollten dann diese Erfahrungen überprüft, in wichtigen

Aspekten präzisiert und auf die komplexeren Probleme hin verallgemeinert werden. Beispiel hierfür ist die zu Beginn dieses Abschnitts vorgestellte Einführungssituation für den Wahrscheinlichkeitsbegriff, in welcher auf den Meßprozeß Bezug genommen wird.Unter Ausnutzung der Vorerfahrungen der Schüler wird hier der Wahrscheinlichkeitsbegriff eingeführt. Im Verlaufe des Kurses sollte dann vom allgemeineren Standpunkt der Wahrscheinlichkeitstheorie her präzisiert werden, was unter einem Meßprozeß verstanden wird, welche zusätzlichen Aspekte berücksichtigt werden müssen und in welchem Sinne statistische Verfahren (arithmetisches Mittel etwa) eine Verbesserung naiver Messungen ermöglichen.

IV.2.3 Zum Begriffsfeld der Wahrscheinlichkeit

Gegenüber den bisherigen eher allgemeinen Fragestellungen zur Stochastik wollen wir uns in diesem Abschnitt stärker den Besonderheiten der Begriffsstruktur der Wahrscheinlichkeit zuwenden.

Um sich die "Kernstücke" der Wahrscheinlichkeit zu verdeutlichen, ist es nützlich, sich genauer die axiomatische Struktur dieser Theorie anzuschauen. Dabei fallen zwei Gesichtspunkte vor allem auf, die schon Kolmogoroff in seiner berühmten Schrift:"Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung" (1933) hervorhob.
Zum einen betrifft dies die Tatsache, daß die Wahrscheinlichkeitstheorie letztlich in ihrer axiomatischen Kennzeichnung als eine Maßtheorie aufgefaßt werden kann. Zum anderen ist es wichtig, die Besonderheit bzw. den Unterschied der Wahrscheinlichkeitstheorie gegenüber der allgemeinen mathematischen Maßtheorie deutlich zu machen:"... die Unabhängigkeit ist ... derjenige mathematische Begriff, welcher der Wahrscheinlichkeitsrechnung ihr eigenartiges Gepräge gibt ... ." (Kolmogoroff, 1933, S.8) (vgl. auch Kap.III

Diesen beiden zentralen Aspekten wollen wir uns nun im folgenden genauer zuwenden und sie im Hinblick auf didaktische Probleme diskutieren. Dabei scheint es sinnvoll, zunächst diese eng miteinander verbundenen Aspekte relativ unabhängig voneinander zu behandeln.

Gehen wir aus von einer allgemeinen Definition des Maßbegriffs.
"Sei $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra von Teilmengen von Ω.
Definition: Eine Abbildung $\mu: \mathcal{F} \longrightarrow [0,+\infty]$ heißt ein Maß auf $\mathcal{F}$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. (σ- Additivität) Für jede Folge $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ paarweise disjunkter Mengen aus $\mathcal{F}$ gilt
$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n). \text{"}$$

(Bellach u.a., 1978, S.12)

Ein Maß μ wird auf dieser Grundlage zu einem sog. Wahrscheinlichkeitsmaß, wenn eine dritte Bedingung erfüllt ist:

3. μ ist ein (endliches) normiertes Maß mit $\mu(\Omega) = 1$.

Um die Möglichkeiten und auch die Grenzen einer am Maßbegriff orientierten Auffassung der Wahrscheinlichkeit zu verdeutlichen, ist es sinnvoll, neben die Axiome des Wahrscheinlichkeitsmaßes die der Flächeninhaltsfunktion zu stellen. Diese Funktion erfüllt die folgenden Bedingungen:

1.' stimmt mit 1. überein
2.' stimmt mit 2. überein
3.' Normiertheit: Der Inhalt des Einheitsquadrates ist Eins.
4.' Invarianzeigenschaft: Kongruente Figuren besitzen den gleichen Flächeninhalt.

Was sind nun Unterschiede bzw. Übereinstimmungen beider Axiomensysteme?
Während das Wahrscheinlichkeitsmaß ein endliches Maß ist, handelt es sich bei dem Flächenmaß zunächst nur um ein σ-endliches Maß, wie sich dies in den jeweiligen Normierungsbedingungen zeigt. Darüber hinaus erlangt die Flächeninhaltsfunktion durch die zusätzliche Invarianzbedingung 4.' samt der Normiertheit 3.' Eindeutigkeit, d.h. die Funktion ist festgelegt.
Demgegenüber wird mit dem Axiomensystem eine ganze Klasse möglicher Wahrscheinlichkeitsmaße bestimmt; zunächst ist keines dieser Maße ausgezeichnet.

In der axiomatischen Kennzeichnung eines Maßbegriffs kommt in prägnanter Weise zum Ausdruck, daß (Maß-)Begriffe Relationsbegriffe sind. Damit ist gemeint, daß dieser Begriff sich nicht "direkt" auf Gegenstände bezieht, sondern auf Verhältnisse von Gegenständen zueinander. Für die Flächeninhaltsfunktion heißt dies etwa, daß die Maßzahl Ausdruck einer Relation zweier Flächen ist, nämlich des Verhältnisses von zu messender Fläche zum Einheitsquadrat (dem Maßstab).

Ebenso bezieht sich mittels der Normierung auch das Wahrscheinlichkeitsmaß immer auf ein Verhältnis von (zu messendem) Ereignis zum gesamten Ereignisraum Ω. (Wie schon angemerkt, ist das Wahrscheinlichkeitsmaß nicht eindeutig, und somit wird zunächst dieses Verhältnis auch nicht eindeutig bestimmt. Je nach verschiedenen konkreten Zufallssituationen etwa variiert das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß.)
Daß sich die Wahrscheinlichkeit nicht auf Dinge, sondern auf Verhältnisse bezieht, hat schon Bernoulli betont: "Die Wahrscheinlichkeit ist nämlich ein Grad der Gewißheit und unterscheidet sich von ihr wie ein Teil vom Ganzen." (Bernoulli, 1899, S.72; vgl. auch Kap. II.1.)

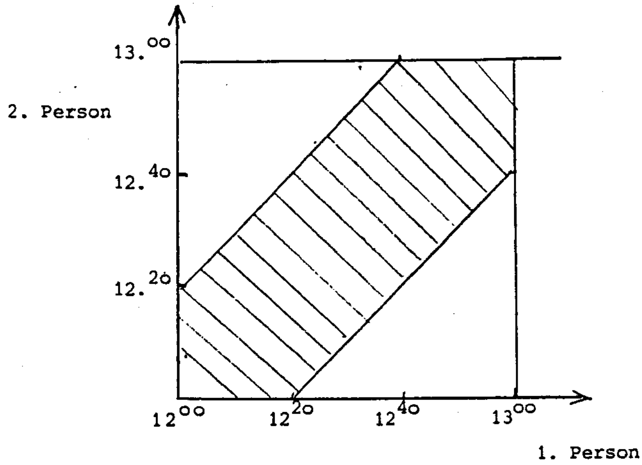
Auch der Begriff der relativen Häufigkeit verweist darauf, daß die Wahrscheinlichkeit ein Relationsbegriff ist: Anteile sind ins Verhältnis zum Gesamten zu setzen und nur dieses Verhältnis interessiert, nicht primär die einzelnen "Dinge". Die Mißachtung dieses Faktums kann etwa bei ungenauer Festlegung des Ereignisraumes und damit einer "falschen" Normierung zu Paradoxien führen.

Wichtig festzuhalten bleibt, daß der Wahrscheinlichkeitsbegriff wie jeder mathematische Begriff Beziehungen und keine Dinge widerspiegelt. Hierin liegt ganz allgemein die besondere Schwierigkeit der Didaktik, denn die Bedeutung von Begriffen ist nicht einfach aus den zugehörigen Dingen ablesbar.

Der Vergleich zwischen Flächeninhaltsfunktion und Wahrscheinlichkeitsmaß läßt sich noch weiter konkretisieren; bzw. es lassen sich Beispiele angeben, in denen mit Hilfe der Flächenfunktion Wahrscheinlichkeiten interpretiert werden können und andere, in denen sich umgekehrt mit Hilfe des Wahrscheinlichkeitsmaßes Flächeninhalte bestimmen lassen. Voraussetzung dieser wechselseitigen Anwendungen ist jedoch – wie auf Grund des Vergleiches der Axiomensysteme anzunehmen –, daß auch das Wahrscheinlichkeitsmaß eindeutig ist, ja gewissermaßen mit dem Flächenmaß "übereinstimmt". Dies wird im folgenden dadurch erreicht, daß wir von der Gleichwahrscheinlichkeit der Elementar-ereignisse ausgehen (bzw. von einer Auffassung, die besagt, daß jedes Element aus einer Menge mit gleicher Wahrscheinlichkeit ausgewählt wird. Wir wollen uns hier nicht auf die Definitionsprobleme kontinuierlicher Wahrscheinlichkeitsmaße einlassen; ja historisch diente die Flächeninhaltsfunktion gewissermaßen oft als "Ersatz" für eine exakte wahrscheinlichkeitstheoretische Definition).

Viele Probleme und Fragestellungen aus dem Bereich der sogenannten geometrischen Wahrscheinlichkeit bringen auf dieser Grundlage den Zusammenhang zwischen Flächeninhaltsfunktion und Wahrscheinlichkeitsmaß zum Ausdruck. Einfachstes Beispiel ist das Roulette: Hier wird dem einzelnen Ereignis als Wahrscheinlichkeit das Verhältnis "seines" Flächenanteils zur in Frage kommenden Gesamtfläche zugeordnet, nämlich $\frac{1}{37}$, da die Roulettscheibe in 37 gleichgroße Abschnitte aufgeteilt wurde. (Die Eindeutigkeit des Wahrscheinlichkeitsmaßes steckt in der Gleichwahrscheinlichkeitsannahme.)
Auch lassen sich mittels Interpretationen der Wahrscheinlichkeit als Flächenmaß viele Aufgaben berechnen. Beispiel:
Das Treffpunktproblem. Zwei Personen haben sich zwischen 12^{00} und 13^{00} verabredet, jedoch nicht zu einem fest vorgegebenen Zeitpunkt. Es ist vielmehr vereinbart worden, daß derjenige, welcher zuerst kommt, 20 Minuten warten soll und dann wieder nach Hause gehen wird. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich die beiden Personen tatsächlich treffen?

Man trägt in einem Koordinatensystem die möglichen Zeitpunkte beider Personen gegeneinander ab; zu jedem Zeitpunkt der 1.Person (x-Achse) wird die Zeitspanne angegeben, in welcher die 2.Person (y-Achse) noch unter den vereinbarten Bedingungen rechtzeitig erscheint. Es ergeben sich dann die folgenden Flächenunterteilungen:



Der schraffierte Teil der Fläche bezeichnet die "günstigen" Zeitspannen. Die gesuchte Treffwahrscheinlichkeit ergibt sich, wenn dieser Teil zum gesamten Quadrat ins Verhältnis gesetzt wird; er beträgt $\frac{5}{9}$.

Die Beziehung von Flächeninhaltsfunktion und Wahrscheinlichkeitsmaß läßt sich auch umgekehrt ausnutzen. So läßt sich etwa mit Hilfe eines Zufallsgenerators der Inhalt des Viertelkreises bestimmen. Als wichtige Voraussetzung geht hier wiederum ein, daß die Wahrscheinlichkeitsfunktion des Zufallsgenerators eindeutig festgelegt ist und als "gleichwahrscheinlich" überhaupt erst den gewünschten Zusammenhang zur Flächeninhaltsfunktion erlaubt. Der Zufallsgenerator erzeuge also mit gleicher Wahrscheinlichkeit Zahlenpaare (a,b), jeweils zwischen O und 1. Solch ein Zahlenpaar trifft nun in den Viertelkreis, wenn die Bedingung

$$a^2 + b^2 \leq 1$$

erfüllt ist und sonst außerhalb dieser Fläche ins Quadrat. Das Verhältnis der Anzahl der Treffer im Viertelkreis zur gesamten Versuchsanzahl ist ein Maß für den Flächeninhalt des entsprechenden Flächenanteiles. (vgl. auch Glaymann/Varga 1975, S.165ff)

Soweit die Beispiele zum Vergleich von Flächeninhaltsfunktion und Wahrscheinlichkeitsmaß. Mag auch vielleicht die Künstlichkeit bzw. die Vereinfachung dieses Zusammenhanges zu kritisieren sein, deutlich wurde über den Vergleich zum Flächeninhaltsmaß jedoch, daß letztlich der Wahrscheinlichkeitsbegriff ein Relationsbegriff ist; in speziellen Aspekten läßt sich dies in Gegenüberstellung zum Flächeninhaltsmaß anschaulich darstellen. Anhand der Grenzen in diesem Vergleich wird darüber hinaus sichtbar, daß der Wahrscheinlichkeitsbegriff im Grunde ein noch "allgemeinerer" Relationsbegriff als das Flächeninhaltsmaß ist.

Die Interpretation der Wahrscheinlichkeit durch Flächenverhältnisse stellt eine Vereinfachung dar, die eine Eindeutigkeit der in Frage stehenden Wahrscheinlichkeitsfunktion als "gleichwahrscheinlich" zur Folge hat. In den verschiedensten Anwendungssituationen geht es oft jedoch darum, aus der Vielfalt möglicher Wahrscheinlichkeitsmaße eine passende, d.h. der Situation und Fragestellung angemessene konkrete Funktion aufzustellen. Auch das dargestellte Beispiel der Messung einer Fläche mit Hilfe der Wahrscheinlichkeit hatte die Annahme eines gleichwahrscheinlichen Maßes (in der Form eines Zufallsgenerators) zur Voraussetzung.

Des weiteren tritt anhand der "wahrscheinlichkeitstheoretischen" Flächenmessung ein zusätzlicher Aspekt zutage, der bei der "geometrischen" Messung nicht gleichermaßen offensichtlich ist. Während bei der Flächeninhaltsfunktion scheinbar die konkreten Flächen selbst zueinander ins Verhältnis gesetzt werden, so gewinnt man den Eindruck, die Flächenbestimmung mittels Zufallssimulation ist komplizierter: Nicht die Flächen, also die konkreten Gegenstände werden direkt miteinander verglichen, zunächst wird eine (neue) Funktion, die sog. Zufallsvariable, eingeführt und entsprechend unserer Problemstellung (Messung des Inhaltes eines Viertelkreises) definiert: Diese Zufallsvariable wird 1, wenn die zu messende Fläche getroffen wird, d.h. wenn für das zufällig erzeugte Zahlenpaar (a,b) gilt $a^2+b^2 \leq 1$, und O sonst. Die Flächen werden dann mittels der Werte entsprechend definierter Zufallsvariablen zueinander ins Verhältnis gesetzt bzw. gemessen.

Letztlich sind es also nicht Gegenstände bzw. Ereignisse, deren Verhältnisse Inhalt der Wahrscheinlichkeit als einer Maßtheorie sind, es sind im Grunde auf den Gegenständen (bzw. Ereignissen) definierte Zufallsvariablen (bzw. die Ereignisse werden durch Zufallsvariablen definiert), deren Verhältnisse Inhalt der wahrscheinlichkeitstheoretischen Berechnungen werden.

Auch bei dem so einfach erscheinenden Beispiel des Würfels müßte eigentlich sorgfältiger zwischen Ereignis und Zufallsvariable entschieden werden; so ist die Kennzeichnung der sechs Seitenflächen mit den Augenzahlen 1,2,3,4,5 und 6 eine Zufallsvariable, die gleichzeitig die (interessierenden) Ereignisse definiert. Es könnte jedoch auch eine andere Zufallsvariable eingeführt werden, welche etwa nur noch zwei Ereignisse (gerade - ungerade) berücksichtigt. Vereinfacht gesagt, ist eine Zufallsvariable eine (reellwertige) Funktion X auf Ω :

$$\omega \in \Omega: \quad \omega \longrightarrow X\ (\omega)(\in \mathbb{R}).$$

(vgl. etwa Chung, 1974, S.75 und S. 109)

Das Konzept der Zufallsvariablen ermöglicht es, sich gegenüber den konkreten Gegenständen noch wesentlich variabler zu verhalten; so lassen sich etwa über geometrische Eigenschaften hinaus die unterschiedlichsten "Eigenschaften" von Gegenständen messen (etwa Gewinn/Verlust in einem Spiel, durchschnittliche Geschwindigkeit in einem Gassystem, der Totalfehler in einem Beobachtungssystem etc.). Die Zufallsvariable dient dabei der Spezifizierung der jeweils interessierenden "Eigenschaft". In diesem Sinne bemerkt Loève auch:"The concept of random variable is more general than that of a random event." (Loève, 1977, S.7).

Diese Überlegungen zum stochastischen "Messen" werfen ein deutlicheres Licht auf unser Beispiel des geometrischen Messens: Auch hierbei wird im Grunde von einem gleichen Verfahren wie in der Wahrscheinlichkeitstheorie Gebrauch gemacht. Um messen zu können, wird letztlich erst eine "Funktion" auf den konkreten Gegenständen eingeführt. Verdeutlichen läßt sich dies schon in sehr einfachen Situationen: Eine elementare Messung der Fläche eines Viertelkreises könnte mit Hilfe einer sog. Gewichtsfunktion vorgenommen werden; so könnten Einheitsquadrat und Viertelkreis aus gleichmäßig dünnem Blech ausgeschnitten und gegeneinander abgewogen werden, um so das Verhältnis als gesuchtes Maß zu bestimmen.
(Dieses Verfahren der Messung findet seinen allgemeinen Ausdruck darin, daß man eine Funktion definiert, die den Wert 1 auf der zu messenden Menge annimmt und sonst 0 ist. Das Maß ist dann das Integral über diese Funktion.)

Kurz, der Inhalt der Wahrscheinlichkeitstheorie und auch allgemein der Maßtheorie sind Verhältnisse von Funktionswerten auf Ereignissen bzw. Gegenständen. Es zeigt sich hierin die allgemeine Bedeutung des Funktionsbegriffs für die Anwendung der Mathematik.

Welchen Ausdruck finden diese komplizierten Verhältnisse in der Wahrscheinlichkeitstheorie? Üblicherweise werden diese Verhältnisse in der Wahrscheinlichkeitstheorie mit Hilfe des Begriffs der Wahrscheinlichkeitsverteilung studiert.

Zunächst wird die sogenannte Dichtefunktion betrachtet (um auch Zufallsvariablen für den allgemeinen Fall von nicht abzählbaren Mengen studieren zu können):

"Consider a function f defined on $\mathbb{R}^1 = (-\infty, +\infty)$.

$$u \longrightarrow f(u)$$

and satisfying two conditions:

$$\text{(i)} \quad \forall u : \; f(u) \geq 0$$
$$\text{(ii)} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,du = 1 .$$

Such a function is called a <u>density function</u> on $\mathbb{R}^1$" (Chung, 1974, S.91).

Im diskreten Fall kann man die Dichtefunktion f auf der Zufallsvariablen X folgendermaßen definieren: Sei $x \varepsilon X$,

$$f(x) = p(x) = P(X=x).$$

Sei nun eine Zufallsvariable X auf Ω derart gegeben, daß die Wahrscheinlichkeiten dieser Zufallsvariablen mittels einer Dichtefunktion f dargestellt werden:

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(u)\,du.$$

Dann wird die <u>Verteilungsfunktion</u> F folgendermaßen als "kumulative Dichtefunktion" definiert:

$$x \varepsilon X : F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du .$$

Im diskreten Fall ist F(x) eine Summe über die Dichtefunktion:

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i) .$$

Dichte- und Verteilungsfunktion definieren sich gegenseitig und stellen allgemein die Wahrscheinlichkeitsverteilung dar. (vgl. hierzu Chung, 1974, S.90-92)

Diese beiden Konzepte erlauben die gesuchten Verhältnisse, etwa als Summen oder Integrale eines bestimmten Bereiches der Zufallsvariablen über die Dichtefunktion zu ermitteln. Die Dichtefunktion stellt die jeweilige "Gewichtung" über den Bereich der Zufallsvariablen dar und wird zur "Messung" benötigt. In einem Abschnitt mit dem Titel "The essential feature of probability theory" bringt Loève die zentrale Bedeutung der Verteilungsfunktion für die Wahrscheinlichkeitstheorie auf die kurze Formel:"A property is probability - theoretical, if and only if, it is describable in terms of a distribution." (Loève, 1977, S.173) Die mathematische Wahrscheinlichkeitstheorie befaßt sich dementsprechend mit Verteilungsfunktionen bzw. Dichtefunktionen; in ihnen kommen die für die Wahrscheinlichkeitstheorie relevanten Aspekte zum Ausdruck. (vgl. auch Kap. II.2) Mathematische Probleme sind u.a. die Bestimmung von "universellen" Grenzverteilungen möglichst allgemeiner Ausgangsverteilungen (Beispiel hierfür ist das Problem der Normalverteilung als einer universellen "Fehlerverteilung"; vgl. Kap. II.2).

Der hier zum Ausdruck kommende relativ allgemeine Standpunkt, daß es die Wahrscheinlichkeitstheorie mit Verteilungen bzw. Dichten auf Zufallsvariablen zu tun hat, kommt letztlich schon in der Kolmogoroffschen Axiomatik zum Tragen. Kolmogoroff formuliert seine Axiome folgendermaßen:
"Es sei E eine Menge von Elementen ξ, η, ζ, ..., welche man <u>elementare Ereignisse</u> nennt und $\mathfrak{F}$ eine Menge von Teilmengen aus E; die Elemente der Menge $\mathfrak{F}$ werden weiter <u>zufällige Ereignisse</u> genannt.

I. $\mathfrak{F}$ ist ein Mengenkörper.
II. $\mathfrak{F}$ enthält die Menge E.
III. Jeder Menge A aus $\mathfrak{F}$ ist eine nicht-negative reelle Zahl P(A) zugeordnet. Diese Zahl P(A) nennt man die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A.
IV. P(E) = 1.
V. Wenn A und B disjunkt sind, so gilt

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Ein Mengensystem $\mathfrak{F}$ mit einer bestimmten Zuordnung der Zahlen P(A), welche den Axiomen I - V genügt, nennt man ein Wahrscheinlichkeitsfeld." (Kolmogoroff, 1933, S.2)

Denkt man an die Bemerkung Loèves, daß"Zufallsvariable"eine Verallgemeinerung von"Zufallsereignis"ist, und berücksichtigt man, daß die Wahrscheinlichkeitsfunktion P auf 1 normiert ist und so mit einer Dichtefunktion vergleichbar wird, so wird deutlich, daß schon die Axiomatik Kolmogoroffs dem von uns beschriebenen allgemeinen Standpunkt der Wahrscheinlichkeitstheorie Rechnung trägt.

Die bisherige Darstellung der Grundfragen der Wahrscheinlichkeit hat zwar auf einige besondere Aspekte im Vergleich zur Flächenmessung aufmerksam gemacht, jedoch noch keine grundlegenden Unterschiede aufgezeigt. Wie Kolmogoroff schon feststellte, ist das, was der Wahrscheinlichkeitstheorie gegenüber der Maßtheorie ihre Eigenständigkeit verleiht, der Begriff der Unabhängigkeit. Gerade in der historischen Entwicklung spielte dieser Begriff eine fundamentale Rolle. Und Loève ist sogar der Meinung, daß der Unabhängigkeitsbegriff das eigentliche Problem der Wahrscheinlichkeitstheorie darstellt : "Until very recently, probability theory could have been defined to be the investigation of the concept of independence. This concept continues to provide new problems. Also it has originated and continues to originate most of the problems where independence is not assumed." (Loève, 1977, S.233)

Wenn wir uns an dieser Stelle des Beispiels der wahrscheinlichkeitstheoretischen Messung des Inhaltes eines Viertelkreises erinnern, so wird vom Gesichtspunkt der Unabhängigkeit her deutlich, daß gewissermaßen "zu viel" in den Meßprozeß hineingesteckt worden ist: Der für die Meßsituation eigentlich "überflüssige" Aspekt der Zufälligkeit bzw. der Unabhängigkeit einzelner Ausfälle des Zufallsgenerators wird sichtbar. Man würde offenbar hier eine effektivere Messung des Flächeninhalts erreichen, wenn man ohne jeglichen Zufallsgenerator "direkt" eine "gleichverteilte" Punktmenge, etwa in Form immer feiner werdender Gitter im Einheitsquadrat benützen und entsprechende Anzahlen von Treffern im Viertelkreis ins Verhältnis setzen würde. Mit anderen Worten: Die Zufälligkeit in Form der Unabhängigkeit einzelner Ausfälle in diesem Simulationsbeispiel weist über den Charakter der Wahrscheinlichkeit als "bloßes" Maß hinaus. Oder man könnte auch feststellen, daß die Abhängigkeiten bzw. Unabhängigkeiten in der Flächeninhaltsmessung (zunächst) kein eigenständiges Problem darstellen. Erst aus der allgemeineren Sicht der Wahrscheinlichkeitstheorie wird es sinnvoll, auch die "gleichverteilten" Gitterpunkte als strikt "abhängig" erzeugt zu betrachten und diese Situation so mit einer Zufallssimulation vergleichbar zu machen. Dieser Vergleich bringt nun prägnant zum Ausdruck, daß in einer Messung mittels Zufallsgeneratoren im Gegensatz zu einer "rein geometrischen" Messung das Unabhängigkeitskonzept (mit seinen graduellen Abstufungen zwischen strikter Abhängigkeit und völliger Unabhängigkeit) variabel und bearbeitbar gemacht wird und damit als ein zentrales neuartiges Problem in den Mittelpunkt der Untersuchung rückt, ("probability theory is the investigation of the concept of independence", Loève). Die Messung mit Hilfe von systematisch angeordneten Gitterpunkten stellt gewissermaßen einen Spezialfall der Messung mittels Zufallssimulation dar.

Der Unabhängigkeitsbegriff dient nun ganz allgemein als eine relativ universelle Grundlage für die Anwendungen der Wahrscheinlichkeitstheorie. Einmal gestattet die Unabhängigkeit die Spezifizierung wichtiger praktischer Maßfunktionen in der Klasse aller möglichen Wahrscheinlichkeitsmaße (vgl. etwa die Entwicklung der Normalverteilung, Kap. II.2.); zum anderen ist es aufgrund der Unabhängigkeit möglich, etwa die einzelnen Ausfälle des Zufallsgenerators als ein (Produkt-) Experiment aufzufassen und so im Grunde überhaupt erst die Anwendung der Zufallssimulation auf die Flächenmessung durchzuführen.

Diesem relativ universellen (technischen) Charakter der Unabhängigkeit für die Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie stehen jedoch gleichzeitig vielfältige inhaltlich unterschiedliche Interpretationen und jeweilige konkrete Probleme entgegen.

Die grundlegenden Schwierigkeiten mit dem Unabhängigkeitskonzept liegen wohl darin begründet, zwei relativ verschiedene "Auffassungen" dieses Konzeptes miteinander in Beziehung zu setzen.
Einerseits hat man eine theoretisch-mathematische Definition von Unabhängigkeit zweier Zufallsereignisse (bzw. allgemeiner: zweier Zufallsvariablen):

<u>Definition:</u> Zwei Zufallsereignisse A und B heißen <u>unabhängig</u>, wenn gilt:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B).$$

Andererseits gibt es intuitive Vorstellungen auf Grund verschiedenster Erfahrungen, daß bestimmte Experimentausgänge, Versuche, Erscheinungen etc. voneinander "unabhängig" sind, d.h. sich nicht beeinflussen bzw. die Kenntnis des einen Experimentausganges die eines anderen nicht beeinflußt usw.

Dieses Problem, mathematische Definition und intuitive Vorstellung von Unabhängigkeit miteinander zu verbinden und gegenseitig zu verstehen, hebt auch Kac als wichtig hervor.
"What is really involved is a <u>definition</u> of independence and a belief (borne out by experience and experiment to be sure) that the definition is applicable to a particular situation. There is, thus, independence in a vague and intuitive sense, and there is 'independence' in the narrow but welldefined sense that the rule of multiplication of probability is applicable.

It was the vague and intuitive notions that provided for a long time the main motivation and driving force behind probability theory." (Kac, 1959a, S.10)

Die Probleme im Verhältnis von intuitiver zu mathematischer Unabhängigkeit lassen sich am besten anhand einiger Beispiele verdeutlichen.
Will man z.B. den eingangs dieses Abschnitts vorgestellten Vergleich zwischen Wahrscheinlichkeitstheorie und Flächenmessung noch weitertreiben, so läßt sich das Unabhängigkeitskonzept auch hier "wiederfinden".

Mathematisch bedeutet stochastische Unabhängigkeit, daß man die "Produktbildung" (der unabhängigen Ereignisse bzw. Zufallsvariablen) unter der Wahrscheinlichkeitsfunktion (bzw. der Meßfunktion) "hervorziehen" darf.

Die Ereignisse A_i $(i = 1, \ldots\ldots, n)$ sind unabhängig, wenn für jedes $m \leq n$ und für alle verschiedenen Zahlen $k_1, k_2, \ldots\ldots, k_m \leq n$ gilt:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_{k_i}\right) = P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \ldots\ldots \cap A_{k_m})$$

$$= P(A_{k_1}) \cdot P(A_{k_2}) \ldots\ldots P(A_{k_m}) = \prod_{i=1}^{m} P(A_{k_i}) \, .$$

Kann man diese "Eigenschaft" bzw. diese Bedingung beim Flächenmessen wiederfinden?

Eine sehr elementare Analogie bietet sich an, soll die Fläche eines Rechtecks aus den Längen ihrer Seiten ermittelt werden. Hier gilt, daß der Inhalt der Fläche gleich dem Produkt der Längen ihrer (senkrechten) Seiten ist (Breite x Länge):
Seien v_1 und v_2 die Vektoren des Rechtecks (v_1, v_2). Dann gilt:

$$F\ (v_1, v_2) = F(v_1) \cdot F(v_2).$$

Für senkrecht zueinander stehende Vektoren gilt also eine "ähnliche Multiplikativität".

Daß hinter diesem Beispiel eine grundlegende Analogie zwischen Unabhängigkeit und Orthogonalität steht, betont Maistrov im Vergleich zwischen Maßtheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie anhand des Buches von Kolmogoroff:"Here (in Kolmogoroffs Buch) the analogies between the notions of the measure of a set and the probability of an event, between the integral and the mathematical expectation, orthogonality of functions and the independence of random variables, and others were established." (Maistrov, 1974, S.262)

Dieser Vergleich zwischen Orthogonalität und (stochastischer) Unabhängigkeit bringt jedoch keine Aufschlüsse für das Verhältnis von intuitiver zu mathematischer Unabhängigkeit; hier wird ein mathematisches Konzept (Unabhängigkeit) durch ein anderes (Orthogonalität) ersetzt.

Ausgehend von der Vorstellung, daß Unabhängigkeit so etwas bedeutet wie "Nicht-Beeinflussung" etc. geht man oft von folgender Überlegung aus: zwei Ereignisse A, B werden als unabhängig betrachtet, wenn sich ihre Wahrscheinlichkeit (P(A) bzw. P(B)) nicht ändert unter der Bedingung, daß ich schon weiß, das andere Ereignis ist eingetreten. Hier bedeutet also, daß sich die Kenntnis des einen Ereignisses bzw. Versuchsausganges die des anderen nicht verändert, eine Interpretation von Unabhängigkeit. Wie stimmt diese intuitive Vorstellung mit der mathematischen Definition überein?

Es gilt entsprechend unserer Annahme

$$p(A) = p(^A/B)$$

bzw. $$p(B) = p(^B/A) \ .$$

In einfachen Fällen lassen sich nun die bedingten Wahrscheinlichkeiten folgendermaßen als Quotienten berechnen:

$$p(^{A}/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

bzw. $$p(^{B}/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \quad .$$

Daraus ergibt sich (in beiden Fällen) die Beziehung

$$p(A) \cdot p(B) = p(A \cap B) \; .$$

Somit wird es plausibel, daß die betrachteten Ereignisse auch im mathematischen Sinne unabhängig sind. Die Schwierigkeit in dieser Herleitung liegt gerade in der Interpretation von bedingten Wahrscheinlichkeiten als Quotienten von Wahrscheinlichkeiten, was ein ähnliches Problem aufwirft wie der Zusammenhang von intuitiver und mathematischer Unabhängigkeit. (vgl. Dinges, 1978, S.125ff)

Ein interessantes Beispiel führt nun Feller an, in dem sich die Unabhängigkeit bestimmter Ereignisse zunächst nur mathematisch bestimmen läßt, ohne daß man eine intuitive Vorstellung hiermit verbinden könnte.

"We ... consider families with three children. We assume that each of the eight possibilities bbb, bbg, ..., ggg has probability $\frac{1}{8}$. Let H be the event 'the family has children of both sexes', and A the event 'there is at most one girl'. Then

$$P(H) = \frac{6}{8} \quad \text{and} \quad P(A) = \frac{4}{8} \; .$$

The simultaneous realisation of A and H means one of the possibilities bbg, bgb, gbb, and therefore

$$P(A \cap H) = P(A) \cdot P(H) .$$

Thus in families with three children the two events are independent. Note that this is not true for families with two or four children. This shows that it is not always obvious wether or not we have independence." (Feller, 1968, S.126).

Allgemein steht man für eine Familie mit n Kindern vor dem Problem, die folgenden Wahrscheinlichkeiten zu berechnen:

$$p(H), \; p(A), \; p(A \cap H) .$$

In einer solchen Familie gibt es offenbar nur 2 Kombinationen von n Kindern, in denen nicht beide Geschlechter vorkommen. Damit gilt:

$$p(H) = \frac{2^n - 2}{2^n} .$$

Das Ereignis A 'höchstens ein Mädchen' besteht aus dem Ereignis 'genau ein Mädchen', das n-mal auftreten kann und dem Ereignis 'kein Mädchen', welches einmal möglich ist. Damit gilt:

$$p(A) = \frac{n+1}{2^n} .$$

Das Ereignis $A \cap H$ kann nach diesen Überlegungen n-mal auftreten. Also ist

$$p(A \cap H) = \frac{n}{2^n} .$$

Die Frage lautet nun, für welche $n \in N$ gilt $P(A \cap H) = p(A) \cdot p(H)$?

Es ist

$$p(A) \cdot p(H) = \frac{2^n-2}{2^n} \cdot \frac{n+1}{2^n}$$

$$= p(A \cap B) = \frac{n}{2^n}$$

$$\Longleftrightarrow (2^n-2)\cdot(n+1) = n \cdot 2^n$$

$$\Longleftrightarrow n \cdot 2^n - n \cdot 2 + 2^n - 2 = n \cdot 2^n$$

$$\Longleftrightarrow 2^n = 2(n+1)$$

Diese Gleichung gilt offensichtlich nur für $n = 3$.

Damit ist nachgewiesen, daß nur in diesem Fall Unabhängigkeit von A und H vorliegt und sonst Abhängigkeit. Es ist noch möglich, sich für Familien mit 2 Kindern intuitiv vorzustellen, daß etwa die Kenntnis des Ereignisses A die Wahrscheinlichkeit von H "verbessert" (zu wissen, daß höchstens ein Mädchen in der Familie vorkommt, bedeutet, daß der Fall eines Mädchenpaares ausgeschlossen ist. Damit wird $P(^{H}/A) = \frac{2}{3} > P(H) = \frac{1}{2}$).

Dagegen erlaubt keine Intuition sich vorzustellen, warum A und H bei 3 Kindern unabhängig sind. Hier kann die Unabhängigkeit in der Tat nur mit Hilfe der mathematischen Definition "nachgerechnet" werden; es ist somit in der Tat nicht immer offensichtlich, ob Unabhängigkeit vorliegt (Feller).

Man kann an diesen beiden Beispielen sehen, daß zwar der intuitive Begriff der Unabhängigkeit zur formalen Definition der Multiplikation von Wahrscheinlichkeit führt; jedoch ist der umgekehrte "Schluß" nicht möglich, wie es Fellers Beispiel anschaulich macht. Die formale Definition, so könnte man sagen, ist "umfassender" als die intuitive Vorstellung. Diese Überlegungen sind natürlich nicht im mathematischen Sinne exakt. Sie werden jedoch weitgehend gestützt durch Argumente, die Fine (1973) entwickelt hat. Ihm ist es möglich, aus einer Axiomatisierung des intuitiven Unabhängigkeitskonzeptes in einem relativ allgemeinen Sinne die Multiplikativität zu folgern. Der umgekehrte Schluß, so Fine, ist jedoch nicht möglich. Er faßt seine Überlegungen so zusammen: "Restated in more familiar terms it is as if product factorization of probability is necessary but not sufficient for independence." (Fine, 1973, S.34) Hierbei ist zu beachten, daß Fines Konzept der Unabhängigkeit den Versuch einer Axiomatisierung des intutiven Begriffs darstellt, während die Produktzerlegung der Wahrscheinlichkeit als mathematische Definition von Unabhängigkeit (etwa bei Kolmogoroff) verstanden wird. So wird verständlich, daß die mathematische Definition "umfassender" als die intuitive Vorstellung von Unabhängigkeit ist.

Dieses problematische Verhältnis zwischen formal-mathematischer Definition und intuitiver Begründung von Unabhängigkeit brachte u.a. auch von Mises gegen die (formale) Definition Kolmogoroffs auf. Er verdeutlichte sein Unbehagen am Beispiel des Würfels mit den Ausgängen 1,2,3,4,5 und 6, die gleichwahrscheinlich sein mögen.

Es werden die Ereignisse $A = \{2,3,4\}$, $B = \{1,2,5\}$, $C = \{2,5\}$ und $D = \{1,6\}$ betrachtet. Hierbei gilt:

$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{6} = P(A \cap B)$; also sind

A und B abhängig. Jedoch ist:

$P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = P(A \cap C)$, und damit

sind A und C unabhängig. Demgegenüber sind die Ereignisse A und D wieder abhängig:

$P(A) \cdot P(D) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \neq 0 = P(A \cap D)$.

Der Vorwurf von R. von Mises läuft darauf hinaus, daß in Kolmogoroffs Definition Ereignisse unabhängig genannt werden, die nicht im intuitiven Sinne von "beeinflussen sich nicht" bzw. "sind verschieden voneinander" unabhängig sind.

"In a meaningfull concept of independence <u>two</u> properties are involved which may or may not influence each other. In contrast to that, a definition based on Eq (38) (die Multiplikationsregel) (to which we did our best to give a meaningfull semblance) remains a watered-down generalization of a meaningfull concept." (von Mises, 1964, S.38)

Die hier von v. Mises geforderte Begrenzung des Unabhängigkeitskonzeptes auf die intuitiven Vorstellungen wurde in der Entwicklung der Mathematik durch vielfältige Erfolge in der Anwendung von wahrscheinlichkeitstheoretischen Methoden etwa in der Analysis und der Zahlentheorie, letztlich überholt. Es wurde klar, welche allgemeine Bedeutung für die Anwendungen dem formalen Unabhängigkeitsbegriff zukommen, auch in Situationen, wo keine intuitive Vorstellung mehr möglich ist. (vgl. hierzu das Buch von Kac, Statistical Independence in probability, analysis and number theory, 1959).

Die dem Verhältnis intuitiver Vorstellungen zur Unabhängigkeit und ihrer formalen Definition zugrundeliegenden Schwierigkeiten führen auch im Schulunterricht immer wieder zu Problemen.
Dinges diskutiert etwa folgendes Beispiel hierzu: "Aus einem Stoß Karten wird eine Karte gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man

ein Pik, einen König, den Pik-König?

Hier ist zu lernen, daß 'Pik' und 'König' unabhängige Ereignisse sind." (Dinges, 1978, S.125)

Nach einer kurzen Rechnung erhält man,

$$P(\text{Pik}) = \frac{1}{4}\ , \quad P(\text{König}) = \frac{1}{8}$$

$$P(\text{Pik-König}) = \frac{1}{32}\ ,$$

also sind "Pik" und "König" unabhängig.

Es macht demgegenüber Kindern oft Probleme, sich intuitiv klarzumachen, daß zwei Ereignisse an ein und demselben Objekt, mit dem sie quasi "verbunden" sind, dennoch voneinander unabhängig sein können. So fällt es etwa schwer, sich anschaulich vorzustellen, daß das Wissen, es werde Pik gezogen, nicht die Auswahl eines Königs beeinflußt; die Rechnung klärt diesen Sachverhalt auf.

Abschließend möchten wir ein Beispiel zum Problem der Unabhängigkeit vorstellen, das verdeutlicht, wie die Entscheidung darüber, ob eine unabhängige Zufallsauswahl vorliegt oder nicht, sehr stark von inhaltlichen Zielstellungen abhängen kann. Üblicherweise ist klar, daß Ziehen mit Zurücklegen Unabhängigkeit beinhaltet, während Ziehen ohne Zurücklegen Abhängigkeit bewirkt. Hat man etwa einen Stoß Karten vor sich liegen, so sind die einzelnen Ziehungen aus diesem Stoß unabhängig voneinander, wenn zurückgelegt und gut gemischt wird. Wird die gezogene Karte jedoch nicht zurückgelegt, so ist der nächste Zug von den vorhergehenden abhängig.

Ist dies immer der Fall?
Wir stellen uns einen Würfel vor, mit dem wir eine Zufallsfolge der Länge n produzieren. Betrachtet man ausschließlich die Menge der n Daten (Zahlen zwischen 1 und 6), so ist hier wiederum Ziehen mit Zurücklegen "unabhängig", während das Ziehen ohne Zurücklegen Abhängigkeit bedeutet. Wie verhält sich dies jedoch gegenüber dem ursprünglichen Zufallsgenerator, dem Würfel? (Etwa wenn man seine elementare Wahrscheinlichkeit abschätzen will.)
Nun bekommt das Ziehen ohne Zurücklegen aus der Zufallsfolge die Bedeutung, daß quasi eine neue Zufallsfolge (mit $k \leq n$) Elementen produziert wird; im Hinblick auf den Zufallsgenerator ist dieses Stichprobenziehen also unabhängig. Demgegenüber wird nun das Ziehen mit Zurücklegen (aus der Zufallsfolge) in bezug auf den Würfel selbst abhängig, denn es können durch das Zurücklegen Verfälschungen bezüglich der Wahrscheinlichkeitsfunktion des Würfels auftreten.
Man sieht aus diesem Beispiel, wie abhängig von bestimmten Fragestellungen sich Unabhängigkeiten und Abhängigkeiten "umkehren" können. (Das Beispiel geht auf die Idee von K. Bosch zurück, Vortrag auf einer Tagung in Oberwolfach, 1979.)

In den vorgestellten Beispielen sind wir bisher immer von der Kenntnis der Wahrscheinlichkeit betrachteter Ereignisse ausgegangen. Die Differenzen zwischen intuitiver und mathematischer Unabhängigkeit werden noch deutlicher in solchen konkreten Anwendungen der Wahrscheinlichkeitstheorie, in denen es um die "Bestimmung" unbekannter Wahrscheinlichkeiten geht. Hierbei muß man oft einerseits eine Annahme über die Unabhängigkeit gewisser Zufallsvariablen machen, um den wahrscheinlichkeitstheoretischen Apparat überhaupt erst einsetzen und so versuchen zu können, die unbekannten Wahrscheinlichkeiten abzuschätzen. Zum anderen wird es jedoch oft erst mit Hilfe dieser Wahrscheinlichkeiten (bzw. des wahrscheinlichkeitstheoretischen Apparates in Form von Testverfahren) möglich sein, das Vorliegen von Unabhängigkeit zu überprüfen. Man hat einen "Zirkel" vorliegen: Die Unabhängigkeit ist gewissermaßen gleichzeitig Voraussetzung und Resultat der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Soweit zur Darstellung der Probleme des Unabhängigkeitsbegriffs anhand verschiedener Beispiele. Eine zentrale Rolle nimmt dieses Konzept im Zusammenhang mit den Anwendungen der Wahrscheinlichkeitstheorie ein (vgl. Kap. III.). Hiermit wird auch das Verhältnis von Unabhängigkeit zur Axiomatik der Wahrscheinlichkeitstheorie angesprochen, den beiden grundlegenden Aspekten der Stochastik, die wir bisher relativ unabhängig voneinander betrachtet haben.

Wie wir schon mehrfach betont und auch in den Beispielen zu Beginn dieses Abschnitts gesehen haben, bedarf die Anwendung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs über die Definition in Form der Axiomatik hinaus zusätzlicher Regeln und Verfahren. Das große Problem liegt nun darin, daß es kein universelles und ein für allemal gültiges Anwendungsverfahren für die Wahrscheinlichkeitstheorie gibt (vgl. IV.2.2). Wahrscheinlichkeitstheoretische Anwendungen sind immer situations- und zeitabhängig, wie wir es im letzten Abschnitt deutlich gemacht haben und wie es sich etwa auch in der großen Vielfalt der Verfahren der Statistik mit all ihren Besonderheiten zeigt.

Trotz dieser Divergenz verschiedener Anwendungen nimmt nun der Unabhängigkeitsbegriff eine wichtige Funktion für die Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie insgesamt ein. Dies ist so zu verstehen, daß einerseits dieser Begriff, wie wir es eben beispielhaft erläutert haben, selbst inhaltlich und intuitiv nicht eindeutig fixiert ist, d.h. je nach der konkreten Situation unterschiedlich interpretiert werden wird. Andererseits stellt jedoch die formale Definition, die Multiplikationsrelation einen wichtigen "Kopplungsmechanismus" für die Anwendungen dar: Verschiedene voneinander unabhängige Anwendungen, z.B. Experimente und Zufallsereignisse, können als eine einzige "Produkt"-Anwendung aufgefaßt werden. Man kann also verschiedene (unabhängige) Anwendungen miteinander vergleichen bzw. sie zueinander in Beziehung setzen.

Die zentrale Funktion der Unabhängigkeit für die wahrscheinlichkeitstheoretischen Anwendungen kann man etwa mit dem Begriff der Variablen vergleichen: Inhaltlich ist dieser Begriff "offen", d.h. abhängig von den jeweiligen Anwendungskontexten, ja in diesen Zusammenhängen selbst nur mit Hilfe statistischer Testverfahren "lokal" bestimmbar. Syntaktisch stellt er jedoch eine fixierte Relation in Form der Multiplikationsregel dar. Und diese Beziehung (allgemeiner könnte man auch bestimmte Abhängigkeiten derart modellieren) ist Grundlage wichtiger wahrscheinlichkeitstheoretischer Theoreme und darüber zentral für die Anwendungen.

Beispiel dafür ist etwa die Entwicklung des zentralen Grenzwertsatzes im Rahmen fehlertheoretischer Fragestellungen. (vgl. Kap. II.2). Es zeigte sich hier, daß sich "Normalverhalten" einer großen Anzahl von Zufallsvariablen (im Grenzfall) im wesentlichen auf Grund der Unabhängigkeit einstellt. Unabhängigkeit der betrachteten Zufallsvariablen war letztlich die "einzige" Voraussetzung (vgl. Kap. II.2.) für die Aufstellung des Fehlergesetzes.

Und es sind solche Typen von wahrscheinlichkeitstheoretischen Gesetzen wie etwa das Fehlergesetz, die Binomialverteilung (und viele andere Verteilungen), welche im wahrscheinlichkeitstheoretischen Anwendungsproblem mit den Besonderheiten der wahrscheinlichkeitstheoretischen Beschreibungsproblematik (vgl. letzten Abschnitt) benutzt werden.

Zwar sind die konkreten Ausformungen der jeweiligen Anwendungsverfahren und Beschreibungen von der jeweiligen Situation abhängig; als eine allgemeine Beziehung über die axiomatische Grundlegung hinaus braucht man jedoch zur Aufstellung von Anwendungsregeln die Unabhängigkeit in Form der Multiplikativität.
Ein einfaches Beispiel in dieser Hinsicht ist das Theorem von Bernoulli (vgl. II.1.).

Zur Aufstellung der Binomialverteilung ist offenbar die Unabhängigkeit der betrachteten Zufallsvariablen erforderlich:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Die Multiplikationsregel findet quasi direkt Eingang in diese Verteilung. Aus dieser Binomialverteilung ist dann eine spezielle Interpretation über den Zusammenhang von Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten möglich, wie dies in dem Theorem Bernoullis zum Ausdruck kommt:

$$P(|h_n - p| < \varepsilon) > 1 - \delta$$

(vgl. II.1). Zudem berechnet Bernoulli (grobe) Abschätzungsformeln für ε und δ, die in der jeweiligen Anwendungssituation verschiedene Werte annehmen können. Dies ist ein Beispiel dafür, wie auf Grund der Unabhängigkeitsannahme (bzw. der Voraussetzung von Zufälligkeit) eine spezielle Anwendungs"formel" entwickelt wird, die des weiteren den konkreten Bedingungen der in Frage stehenden Situation unterliegt.

Wir haben in diesem Abschnitt auf der Grundlage der axiomatischen Definition und des Vergleiches mit der Flächeninhaltsmessung die allgemeinen und besonderen Aspekte der Wahrscheinlichkeitstheorie als einer speziellen Maßtheorie bzw. Theorie des Messens oder Anwendens versucht herauszustellen. Es hat sich gezeigt, daß die Wahrscheinlichkeitstheorie über die allgemeine Maßtheorie hinaus in Form des Unabhängigkeitsbegriffs, welcher selbst "uneinheitlicher" Natur ist und vielen konkreten inhaltlichen Besonderheiten unterliegt, ihre Besonderheit, ihr "eigenes Gepräge" (Kolmogoroff) erlangt. Der Unabhängigkeitsbegriff, so könnte man sagen, versucht in einer allgemeinen mathematischen Form das Problem der Zufälligkeit in ihren vielfältigen Dimensionen in einem ersten Schritt aufzunehmen und in den mathematischen Apparat der Wahrscheinlichkeitstheorie umzusetzen.

Auf diesem Hintergrund wird deutlich, wie die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie in ihren allgemeinen und besonderen Aspekten vom wechselseitigen Zusammenspiel der allgemeinen axiomatischen Begriffsdefinition und dem Unabhängigkeitskonzept samt seiner inhaltlichen Divergenz und der Vielfältigkeit wahrscheinlichkeitstheoretischer Anwendungen abhängt. Die Wahrscheinlichkeitstheorie ist also nur gesteuert über Anwendungen in ihren besonderen und allgemeinen Aspekten verstehbar. Als ein grundlegender struktureller Rahmen, als ein "Begriffsfeld" dient hierbei die Axiomatik und die Unabhängigkeit, bzw. ganz allgemein die Definition (in unterschiedlichen Formen) von Wahrscheinlichkeit zusammen mit einer mathematisch umsetzbaren Interpretation der Anwendbarkeit dieses Begriffs auf Zufallserscheinungen.

In der Didaktik der Wahrscheinlichkeitstheorie wird die Besonderheit der Stochastik im Vergleich zu anderen mathematischen Bereichen häufig mit dem Schlagwort vom "stochastischen Denken" umschrieben. Erreicht werden soll diese besondere Denkweise anhand der Entwicklung und Spezifizierung sog. stochastischer Modelle. Stochastische Modelle sind deshalb nützlich, weil sie eine Möglichkeit darstellen, die in diesem Abschnitt deutlich gewordene Komplexität des wahrscheinlichkeitstheoretischen Begriffsfeldes in verschiedenen konkreten Formen anschaulich zu vergegenständlichen, sie weiterzuentwickeln und so Differenzierungen vorzunehmen. Das Konzept des stochastischen Modells erlaubt es gewissermaßen, der Vielfalt und Divergenz stochastischer Anwendungen in einer beispielhaften und so teilweise "idealtypischen" Weise beizukommen; es stellt somit eine Art Regulativ gegenüber unübersehbaren Unvergleichbarkeiten statistischer Anwendungen dar. Dem Problem des Modellgebrauchs zur Entwicklung des stochastischen Denkens wollen wir uns im folgenden Abschnitt zuwenden.

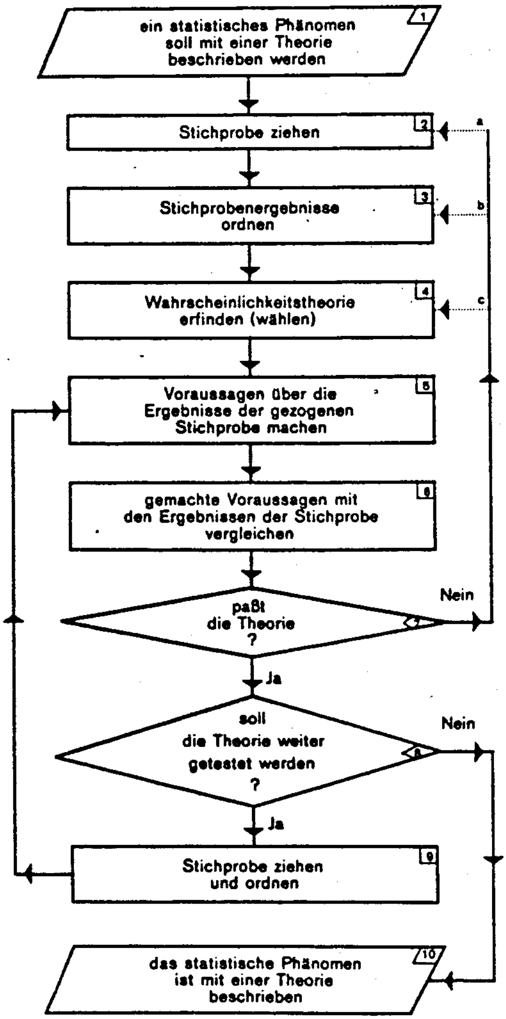
IV.2.4 Stochastisches Denken - Zum Modellgebrauch im Unterricht der Wahrscheinlichkeitstheorie

Um die Besonderheiten der didaktischen Probleme des Stochastikunterrichts im Vergleich zu anderen Stoffgebieten zu kennzeichnen, wird in den letzten Jahren in der didaktischen Diskussion verstärkt vom Konzept des sogenannten "stochastischen Denkens" Gebrauch gemacht. Hiermit soll vor allem auf den spezifischen Charakter wahrscheinlichkeitstheoretischer Begriffe und Aussagen aufmerksam gemacht werden; was jedoch genau darunter zu verstehen ist, unterschiedet sich sehr stark von Autor zu Autor. Heitele hat in seiner Dissertation (1976) mehrere Anmerkungen verschiedener Mathematiker und Didaktiker zum stochastischen Denken aufgelistet: "Fast in demselben Maße, wie der Begriff 'Intuition' wird sowohl von Wahrscheinlichkeitstheoretikern als auch Didaktikern der Terminus 'stochastisches Denken' gebraucht. Renyi (1969, S.85) spricht von der 'eigenartigen Denkweise der Wahrscheinlichkeitsrechnung', Freudenthal (1973, S.554) von der 'eigenartigen Problematik der Wahrscheinlichkeitsrechnung', Varga (1972, S.346) von 'probabilistic impregnation of thinking', Fischbein (1969, S.16) von '... un mode de pensée spécifique, exprimant une orientation distincte de l'intellecte'." (Heitele, 1976, S.179)

Dinges gibt eine erste Charakterisierung des stochastischen Denkens im Vergleich zu anderen mathematischen Disziplinen und im Hinblick auf die Erfordernisse der Allgemeinbildung an: "Wir glauben, daß es so etwas wie stochastisches Denken gibt, in einem ähnlichen Sinn vielleicht, wie es geometrische Vorstellungskraft gibt. Man kann es nicht reduzieren auf Denkweisen der Reinen Mathematik (ebenso wenig wie man geometrische Anschauung auf einen Kalkül reduzieren kann). Das zentrale Anliegen des Stochastikunterrichts muß es sein, dieses stochastische Denken zu befestigen, und zwar vor allem auch bei denjenigen Schülern, die später als Nichtmathematiker mit mathematischen Techniken umgehen lernen müssen: in den Wirtschaftswissenschaften, in der Biologie, in der Psychologie oder wo auch immer." (Dinges, 1977, S.3)

Auch in vielen Lehrwerken, vor allem in Erläuterungen zugehöriger Lehrerbände spielt das Konzept des stochastischen Denkens eine wichtige Rolle; zudem ist man bestrebt, operative Möglichkeiten zur Entwicklung dieser Denkweise auszuarbeiten. So wird beispielsweise im Lehrerband des Unterrichtswerkes "Einführung in die Mathematik" (Bigalke, 1974ff) folgendermaßen stochastisches Denken dargestellt:"Ziel des Kapitels 'Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik' ist die Einführung des Schülers in eine statistische Denkweise. Es soll dabei in ihm ein kritisches Vertrauen in statistische Aussagen aufgebaut werden. Die Berechnung von einzelnen Wahrscheinlichkeiten oder das Zeichnen von Diagrammen sind zwar notwendig, aber die Beherrschung dieser Fähigkeiten ist bei dieser Zielsetzung von untergeordneter Bedeutung. Beschreiben, Planen, Sammeln, Ordnen, Vergleichen, Voraussagen sind einige der Fähigkeiten, die der Schüler zur (statistischen) Beschreibung seiner Umwelt einsetzen darf und soll. Der Schüler soll in die Lage versetzt werden, mit Selbstvertrauen statistische Erscheinungen seiner Umwelt (außerhalb des Mathematikunterrichtes) quantitativ beschreiben und deuten zu können." (Walter in Bigalke, Lehrerband 8, 1977, S.70)

Hierauf bezugnehmend wird dann versucht, in Form eines "Verlaufsplans für einen statistischen Denkprozeß" diese Anforderungen operativ umzusetzen.



(Bigalke, Lehrerband 8, 1977, S. 72)

Die Form eines Verlaufsplanes stellt vor allem den fortwährenden Prozeß der Anpassung theoretischer Annahmen und Hypothesen an gegebene empirische Erscheinungen dar, wie sich dies in den beiden "Schleifen" des Diagramms zeigt.

Eine weitere Erklärung erfordern Schritt 4 und 7. Wie wird die Wahrscheinlichkeitstheorie "gefunden"?, und von welcher Art ist die Begründung, daß die Theorie "paßt" oder auch nicht?

Ansatzweise haben wir vor allem auf die letzte Schwierigkeit versucht, im vorletzten Abschnitt (Kap. IV.2.2) schon zu antworten: Zu beachten ist hier, daß letztlich das Verhältnis von Theorie zu Empirie selbst statistischer Art ist. Was als Frage "Ob die Theorie 'paßt'?" angesprochen wurde, kann oft nur mittels statistischer Methoden entschieden und nur auf diese Weise quantifiziert werden. Es drückt sich hierin wiederum die Tatsache aus, daß wahrscheinlichkeitstheoretische Anwendungen im Grunde nur mittels der Wahrscheinlichkeitstheorie <u>selbst</u> beurteilt werden können.

Zur Beantwortung des Problems in Schritt 4 ist an dieser Stelle nur zu sagen, daß auch eine "Wahrscheinlichkeitstheorie" nicht einfach gefunden wird; die Wahl einer solchen Theorie hängt stark von den jeweiligen <u>inhaltlichen</u> Bedingungen ab. Im Abschnitt IV.2.1 haben wir versucht, dies exemplarisch anhand der beiden gegensätzlichen paradigmatischen Beispiele des idealen Würfels und des Reißnagels zu verdeutlichen.

Die beiden Probleme werden nun für den folgenden Abschnitt von zentraler Bedeutung sein. Insgesamt könnte man die Vorstellung, welche durch diesen Verlaufsplan ausgedrückt wird und die beschreiben soll, was stochastisches Denken ist, so zusammenfassen: Es geht vor allem darum, sich fest vorgegebenen empirischen Zufallserscheinungen in einem fortwährenden Prozeß möglichst optimal anzunähern, d.h. sich mittels dauernder Verbesserung seiner theoretischen Mittel eine immer exaktere theoretische Modellierung des empirischen Phänomens zu verschaffen. Wie dabei die "Theorie gefunden" wird, das wird nicht weiter thematisiert; die Überprüfung der Theorie wird mit statistischen Tests durchgeführt.

"Die Wahrscheinlichkeitsrechnung stellt statistische Modelle (Theorien) bereit, die auf Erscheinungen der Natur angewendet werden können. So erhält man Voraussagen über das Auftreten bestimmter Ereignisse in der Zukunft. Diese Vor-Aussagen sind Aussagen im mathematischen Sinn, da man durch eine Versuchsreihe nachprüfen kann, ob sie wahr sind. Die Nachprüfung erfolgt durch Anwendung eines statistischen Tests." (Walter in Bigalke, Lehrerband 8, 1977, S.70)

Dieses Zitat verdeutlicht die Grundvorstellungen der Autoren zum stochastischen Denken. Zudem wird hierin auch die Bedeutung des stochastischen Modells für die Entwicklung des stochastischen Denkens angesprochen. Noch direkter formuliert Heitele in seiner Arbeit die Aufgabe des stochastischen Modells für den Unterricht:"Stochastisches Denken ist Anlegen von stochastischen Modellen ... ." (Heitele, 1976, S.185).
Allgemein wird unter dem Konzept des stochastischen Modells im Unterschied zur Wahrscheinlichkeitstheorie die (theoretische) Darstellung eines Wahrscheinlichkeitsraumes bzw. die Gesamtheit theoretischer Grundgleichungen für die Charakterisierung eines begrenzten konkreten Gegenstandsbereiches verstanden. Mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitstheorie werden dann bestimmte Aussagen bzw. Prognosen im Modell abgeleitet. In diesem Sinne spricht Walter bei statistischen Modellen auch von Theorien.
Demgegenüber wollen wir das Konzept des stochastischen Modells etwas umfassender verstehen.Im Hinblick auf die didaktische Vermittlungsproblematik geht es uns darum, die Entwicklung von konkreten gegenständlichen (und z.T. ideal vorgestellten) Zufallsgeneratoren, wie beispielsweise den Würfel, über die Benutzung von Zufallszahlen in Simulationen bis hin zum allgemeinen Modellkonzept der Aufstellung eines "passenden" Wahrscheinlichkeitsraumes (etwa das Bernoulli-Schema) zu untersuchen. Modelle wollen wir demgemäß nicht nur in Form <u>expliziter</u> theoretischer Grundgleichungen auffassen, sondern wir zählen auch (ideale) gegenständliche

Zufallsgeneratoren, welche zunächst implizit jeweilige theoretische Postulate repräsentieren, zu den stochastischen Modellen. Dementsprechend ist etwa die Simulation mit einem Roulette (quasi als ein Ersatz für einen noch nicht vorhandenen Kalkül) eine stochastische Modellierung, die im Verlaufe der weiteren Entwicklung zu einem abstrakten Modell (in Form grundlegender Ausgangsgleichungen) werden kann.

Die Bedeutung des Modellgebrauchs in der Stochastik ist letztlich begründet durch die statistische Praxis. "No scientist is as model-minded as the statistician; in no other branch of science is the word model as often and as conciously used as in statistics." (Freudenthal, 1961, S.79). Die Modelle gestatten es, einen systematischen Standpunkt gegenüber konkreten Zufälligkeiten und statistischen Abweichungen einzunehmen, ja diese in einem einheitlichen theoretischen Rahmen zu bearbeiten.

Der Tatsache der großen Vielfalt unterschiedlicher stochastischer Modelle wird im Mathematikunterricht durch verschiedene Modellierungen von Zufallserscheinungen in verschiedenen Konkretisierungen Rechnung getragen. Angefangen bei den einfachsten gegenständlichen Modellen des Würfels, der Münze, des Roulettes und der Urne bis zum Galtonbrett, der Benutzung von Zufallszahlentabellen und der Definition eines "abstrakten" Modells in Form von einigen Postulaten.
Diese Vielfalt unterschiedlicher Modellierungen für die mannigfaltigen Anwendungssituationen führt dazu, die Stochastik insgesamt als eine "Sammlung von stochastischen Modellen" aufzufassen; ja man könnte sagen, die Wahrscheinlichkeitstheorie besteht aus nichts anderem als aus verschiedenen stochastischen Modellen. Das hat nun die folgende Schwierigkeit zur Konsequenz. Es geht darum, diese verschiedenen Modelle aufeinander beziehen zu können, sie zu vergleichen und Vor- und Nachteile ihrer Anwendung in konkreten Situationen zu beurteilen. Kurz, eine Koordination bzw. eine Orientierung zur Entwicklung dieser Modelle

ist notwendig. Gegenüber anderen Stoffbereichen ist diese Problematik ausgeprägter und erfordert somit einen expliziten metatheoretischen Standpunkt; es wird für die Stochastik auf diesem Hintergrund unerläßlich, bewußt "knowledge about knowledge" Wissen über die Koordination und Anwendung von Modellen zu entwickeln.
Was läßt zumindest teilweise die besondere Stellung von Modellen für die Anwendung von Theorien deutlich werden?
Modelle stellen gewissermaßen ein Amalgam von gegenständlichen und theoretischen Aspekten dar; sie verbinden das Allgemeine der Theorie mit konkreten Besonderheiten des Gegenstandes.
In diesem Sinne sind Modelle wie der Würfel, die Urne oder auch das Bernoulli-Schema gleichzeitig Ausdruck relativ allgemeiner theoretischer Aspekte (etwa in Form impliziter oder expliziter Postulate), und sie beziehen sich darüber hinaus auf konkrete Merkmale vorliegender Gegenstände.
Stochastische Modelle "verbinden" Aspekte der Wahrscheinlichkeits<u>theorie</u> mit Besonderheiten statistischer Anwendungsgegenstände. Genauso wenig wie Modell mit Theorie identifiziert werden darf, darf es mit dem Gegenstand gleichgesetzt werden. Man hat gewissermaßen von dem Unterschied und den Beziehungen zwischen den drei Konzepten:
Theorie - Modell - Gegenstand
in der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie auszugehen.

Dies möge an dieser Stelle zunächst als eine vorläufige Problembeschreibung zum Modellbegriff genügen; die folgende Darstellung soll zur weiteren Klärung beitragen. Dabei wollen wir uns stärker an didaktischen Diskussionen und Materialien orientieren.
Es wird sich im folgenden zeigen, daß im wesentlichen von zwei relativ entgegengesetzten Vorstellungen zum stochastischen Modell Gebrauch gemacht wird: und zwar wird einmal vor allem ein rein <u>kombinatorisch</u> begründetes Modellverständnis hervorgehoben, während demgegenüber zum anderen primär angestrebt wird, das Moment der Zufälligkeit ins Modell einzubeziehen. Dies ist

teilweise mit den Problemen der Begründung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs parallel zu sehen, und zwar vergleichbar dem Gegensatz vom idealen Würfelmodell zum Modell des "rein zufälligen" Werfens von Reißzwecken.

Die Vielfalt verschiedener Modelle scheint gut geeignet, möglichen formalistischen Tendenzen im Stochastikunterricht zu begegnen. Gerade für diesen Unterricht wird besonders heftig gegen die Überbetonung technisch-formaler Aspekte Kritik laut. So sagt etwa Dinges: "Es mag im Unterricht mancher Gebiete der reinen Mathematik akzeptabel sein, zu versuchen, den Schülern Sicherheit im Umgang mit den Begriffen und Techniken zu vermitteln, indem man laufend auf Axiome und Schlußregeln hinweist. Für den Unterricht in Wahrscheinlichkeitsrechnung scheint ein solches, auf Formalisierung bedachtes Vorgehen aber unbrauchbar; wenn die Möglichkeiten dieses Unterrichtsstoffes erschlossen werden sollen, müssen laufend die intuitiven Vorstellungen der Schüler über Zufall und Wahrscheinlichkeit aufgenommen und präzisiert werden." (Dinges, 1976, S.83/84)

Diesen Anforderungen kommt der Einsatz vielfältiger Modelle entgegen. So erlauben es stochastische Modelle etwa, ohne eine vorherige explizite Definition von Wahrscheinlichkeit bzw. eine ausführliche Diskussion der Zufälligkeit mit diesem neuen Begriff umzugehen. Konkrete Modelle wie Münze, Würfel oder Urne beinhalten quasi auf einen Schlag die wichtigen Grundregeln (Additions- und Multiplikationstheorem in spezieller Weise, zudem den Unabhängigkeitsbegriff in vorläufiger Form usw.), ohne daß diese erst in komplizierter Form analytisch eingeführt und definiert werden müßten. Darin liegt auch der überaus große Gewinn und didaktische Nutzen solcher Modelle. Sie werden häufig in propädeutischer Weise zur Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs herangezogen; die Axiomatik mit ihren Grundregeln wird quasi aus den materiellen Modellen im Laufe der Begriffsentwicklung herausgelöst.
Des weiteren ermöglichen es diese Modelle als Perspektive auf die komplexe Realität, unwichtige und nebensächliche bzw. für

die Fragestellung uninteressante Aspekte auszublenden und sich völlig auf das Wesentliche zu konzentrieren. Sie stellen eine Grundlage zur Beschreibung und Begrenzung der realen Situation dar und ermöglichen so die Entwicklung erster Rechentechniken, wie etwa der Kombinatorik, zum Aufbau einer Theorie der Wahrscheinlichkeit.

Neben diesen wesentlichen Vorteilen birgt der Gebrauch solcher Modelle jedoch gleichzeitig große Gefahren. So weist Dinges auf positive und negative Aspekte des Modellgebrauchs im Stochastikunterricht hin:"Der objektivistische Wahrscheinlichkeitsbegriff, der sich an Urne und Glücksrad orientiert, scheint gut geeignet, am Anfang des Stochastikunterrichtes zu stehen. Er hat aber Grenzen." (Dinges, 1978, S.121)

Diese Grenzen sind seiner Meinung nach folgende: "Die Vorstellung, was Wahrscheinlichkeit ist, wird entwickelt am Bild der Urne und des Glücksrads. Es wird nicht problematisiert, wie man 'rein zufällig' in eine Urne greifen soll, und nicht, wie man ein 'echtes' Glücksrad technisch realisieren kann. Es ist auch nicht von Zufallserscheinungen die Rede, sondern von Zufallsmechanismen. Es erscheint daher unproblematisch, was Wahrscheinlichkeit bedeutet; die Aufgabe ist, die Wahrscheinlichkeiten von komplizierten Ereignissen auszurechnen, und nicht, sie zu interpretieren." (Dinges, 1978, S.116)

Die einseitige Überbetonung des Modellaspekts, ja letztlich die Identifizierung von Modell und intendiertem Gegenstand führt zu einer Auffassung von Wahrscheinlichkeit im Unterricht, wie sie, jedoch unter ganz anderen Bedingungen, für die mathematische Forschung formuliert wurde, und zwar in Tschebyscheffs Aussage, daß es die Wahrscheinlichkeitstheorie als mathematische Wissenschaft mit der Berechnung von unbekannten, komplizierten Wahrscheinlichkeiten aus bekannten zu tun habe. (vgl. Maistrov, 1974, S.192) Während dies in der Mathematik bedeutete, daß die Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie letztlich zu einem eigenständigen Problem wird, und so die Entwicklung der Theorie aufgrund einer Trennung in reine und angewandte Wahrscheinlichkeitstheorie ermöglichte, wobei gerade dieses Verhältnis zwischen Theorie und Realität "geöffnet", "variabel" gemacht wurde, um die Bearbeitung des Neuen steuern zu können, so besteht in der Schule die Tendenz, vorhandene (materielle) Modelle zu verabsolutieren, sie als ideale und isomorphe Abbilder der Wirklichkeit aufzufassen, sie einfach in ausschließlich simulativer Weise zu benutzen und so Modell und Gegenstand der Untersuchung gleichzusetzen. Die Realität enthält auch unter wahrscheinlichkeitstheoretischen Fragestellungen und Interessen nicht nur zufällige bzw. statistische Aspekte; es ist gerade eine wichtige Aufgabe, durch den Anwendungsbezug der Wahrscheinlichkeitstheorie spezifische gegenständliche Aspekte, die über die bloß zufälligen hinausgehen, herauszuarbeiten bzw. auf diese aufmerksam zu machen.

Es reicht somit nicht, die wahrscheinlichkeitstheoretischen Modelle als ideale Simulationen von realen Situationen zu verstehen; vielmehr muß gerade das in ihnen steckende explorative Potential herausgearbeitet werden. "Modelle sind gerade deshalb nützlich und wirksam, weil sie nicht die gesamte Wirklichkeit enthalten und Grenzen in den Gegenstands- bzw. Anwendungsbereich einführen. Das heißt, daß die abbildende (simulative) Funktion des Modells nur im Zusammenhang mit seiner explorativen Funktion wirksam wird. Die Konstruktion von Modellen muß auch eine Analyse der Wirklichkeit darstellen. Dies geht nur, wenn die Differenz zwischen Modell und Objekt, zwischen Theorie und Realität dauernd mitbeachtet und reflektiert wird." (Jahnke/Otte, 1978, S.231)

In vielen Schulbüchern wird nun nicht sorgfältig genug diese Differenz zwischen Modell und Realität unterschieden; dies führt dann zu der so stark kritisierten Überbetonung des bloßen "Umgehens mit Wahrscheinlichkeiten", des reinen Wahrscheinlichkeitskalküls. Gerade die Aufgaben, welche Engel in seinen Büchern so vielfältig vorstellt, unterliegen u.E. der Gefahr, in diesem Sinne mißbraucht zu werden. Engel gründet seine Konzeption zentral auf dem Begriff des (idealen) Zufallsgenerators (vgl. Engel, 1973, S.11ff). Die Modelle wie Münze, Würfel und Urne mit Kugeln usw. besitzen eine a priori (meist im voraus bekannte) Wahrscheinlichkeit. Ähnlich geht Freudenthal in seinem Buch (Freudenthal, 1968) vor; er benutzt zur Grundlegung seines Konzepts ein einziges Modell, von dem man weiß, daß es (mathematisch) ausreicht, die wichtigsten Situationen zu charakterisieren: die Urne. Solche Modelle sind, wie oben schon bemerkt, nützlich und notwendig, geben aber als einzige Begründung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs Anlaß zu Mißbrauch und Vereinseitungen. An einer Aufgabe im Buch von Engel sei dies verdeutlicht. Untersucht wird hierin die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Flugzeug mit 3 Motoren ausfällt und schließlich abstürzt.

"23. Das Flugzeug ... kann sich in der Luft halten, wenn der Hauptmotor in der Mitte oder beide Nebenmotoren arbeiten. Der Hauptmotor hat die Zuverlässigkeit $p_1 = \frac{199}{200}$, die Nebenmotore nur je $p_2 = \frac{9}{10}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Flugzeug abstürzt?" (Engel, 1973, S. 92)

Das vorliegende Problem braucht nur in ein Urnenmodell übertragen zu werden, ja mit einiger Routine sieht man, daß letztlich die Aufgabe schon in einem idealen Modell-Rahmen formuliert wurde, um dann, durch die Anwendung der erlernten kombinatorischen Regeln, die gesuchte Lösung zu liefern. Die Bearbeitung solcher Aufgaben, die Berechnung dieser Typen von Problemen erweist sich als ein schematisches Rezept der richtigen Auswahl von passenden Techniken zu entsprechenden idealen Situationen. Es gilt, das isomorphe statistische Modell zu finden und dann in rein simulativer Weise, ohne jegliche Interpretation oder statistische Beurteilung der

Lösung, arbeiten zu können. Natürlich kann eine willkürlich herausgegriffene Beispielaufgabe nicht überbewertet werden. Sie ist jedoch beispielhaft für den Typ der Aufgaben in Engels Buch. Zudem erlaubt es diese Aufgabe, mehrere zentrale Aspekte zu verdeutlichen.

Zunächst fällt auf, daß der Gegenstand der Untersuchung, im weitesten Sinne also das Flugzeug, letztlich austauschbar ist; die Aufgabe fordert den Schüler nicht dazu auf, sich etwa über Probleme der Zuverlässigkeit von Flugzeugen, also wirklich gegenstandsspezifischen Aspekten, Gedanken zu machen: Wie stellt man die Ausfallwahrscheinlichkeit überhaupt fest? Wie läßt sich diese verbessern? Was sind eher relevante, also primär wirksame, kausale im Gegensatz zu zufälligen Ursachen in diesem Zusammenhang? usw. Nicht einmal wird aus der Aufgabenstellung selbst ersichtlich, auf welchen Zeitraum sich die betrachtete Wahrscheinlichkeit des Absturzes bezieht.

Daß eine solche Vielfalt möglicher Fragen und Probleme weder angesprochen noch beantwortet werden, weist darauf hin, daß dieses vorliegende Beispiel nur einem ganz speziellen Zweck dienen soll; und zwar wird es im Abschnitt der mathematischen Behandlung von "Indikatoren in der Zuverlässigkeitstheorie" (Engel, 1973, S. 89) diskutiert.

Zu kritisieren ist nun keineswegs, daß solche Typen von Beispielen, in denen kombinatorische Methoden geübt werden sollen, hier bearbeitet werden; die Kritik geht vielmehr dahin, daß zu wenig über die Komplexität stochastischer Probleme explizit gesagt wird, um so deutlicher die Stellung solcher Beispiele im Gesamtgefüge des Problemrahmens zu erkennen. Der Schüler kann auf diese Weise den Eindruck gewinnen, in Beispielen dieser Art erschöpfe sich vollständig der Anwendungsbezug der Wahrscheinlichkeitstheorie, vor allem deshalb, da im vorliegenden Beispiel zudem etwa durch die explizite Benennung möglicher Wahrscheinlichkeiten durch konkrete Zahlenwerte suggeriert wird, es handele sich in der Tat um einen realen Anwendungsfall.

Die hier zunächst dargestellte Behandlung mehr oder weniger "rein" kombinatorischer stochastischer Modelle hat also der unzulässigen Gleichsetzung von idealem kombinatorischem Modell und Gegenstand wegen zur Folge, daß letztlich das zentrale Moment des Zufalls völlig ignoriert wird, geschweige denn der statistische Charakter des Modell-Gegenstands-Verhältnisses irgendwo thematisiert würde. Diesen Mangel, ja diese Einseitigkeit einer "rein" kombinatorischen Wahrscheinlichkeitstheorie versuchte man dadurch abzustellen, indem man explizit die Zufälligkeit als zentrales Moment in das stochastische Modell einbezog. So wurde man zwar dem statistischen Charakter des Modell-Gegenstands-Verhältnisses tatsächlich gerecht, jedoch darüber hinaus zeigten sich auch noch hierbei kritische Punkte: In diesem Modellbegriff werden nämlich meist die "indirekten" inhaltlich relevanten Aspekte des Gegenstandes außer acht gelassen; das Modell wird nun zwar nicht mehr auf der statistischen, so jedoch auf der inhaltlichen Ebene mit dem Gegenstand identifiziert.

In der hier angesprochenen Hinsicht betont etwa Heitele in seiner Dissertation: "Didaktische Ansätze zum Stochastikunterricht in der Grundschule und Förderstufe" (1976) die Bedeutung des stochastischen Modells im Zusammenhang mit dem Konzept des stochastischen Denkens. Er faßt seine Betrachtungen in den drei folgenden Thesen zusammen.

"1. Stochastisches Denken ist Anlegen von stochastischen Modellen, die verschiedene Formalisierungsgrade haben können.

2. Von einer 'eigentümlich' stochastischen Denkweise zu sprechen, ist man nur insofern berechtigt als:
   a) die Möglichkeiten, die Realität durch Modelle zu interpretieren, in der Stochastik vielfältiger und mehrdeutiger sind als in allen anderen mathematischen Disziplinen,

b) das methodische Vorgehen, das bei Hypothesenprüfungen zum Zuge kommt, der Statistik ureigentlich ist,

c) der Grad, der nötigen 'distanzierten Rationalität' höher ist als in anderen mathematischen Disziplinen.

3. Stochastisches Denken läßt sich nicht auf mathematisches Denken reduzieren, sondern trägt eine starke weltanschauliche Komponente." (Heitele, 1976, S.185)

Die Frage nach der Besonderheit des stochastischen Denkens ist hier, wie oben schon angemerkt, an das stochastische Modell "weitergegeben" worden. Wesentliche Aspekte dieses speziellen Modells werden auch benannt. Neben der Vielfalt stochastischer Modelle, im Gegensatz zum sonstigen Modellgebrauch, wird zentral die beim Hypothesentesten entstehende Besonderheit der Stochastik hervorgehoben. Dem entspricht unsere Feststellung, daß nur die Wahrscheinlichkeitstheorie selbst theoretische Aussagen über ihr Verhältnis zur Realität, über den Anwendungsbezug treffen kann. Ausführlicher formuliert Heitele dies so:"Das Besondere an der statistischen Methode ist nun, daß man keineswegs eine der Hypothesen verifiziert oder falsifiziert, wie es in der sonstigen Mathematik üblich ist. Beides ist aus prinzipiellen Gründen unmöglich. Vielmehr fragt man sich etwa, ob die Nullhypothese mit dem Zufall noch in Einklang gebracht werden kann, welch letzteres man durch ein Signifikanzniveau, etwa 5%, festlegt. Vermutlich ist es dieser Tatbestand, der die Statistik für so viele als höchst schwierig erscheinen läßt." (Heitele, 1976, S.183)

Zunächst ist festzustellen, daß u.E. in diesem Zitat ein falscher Gegensatz aufgebaut wird: Es kann nicht einfach die Stochastik mit ihren Problemen als angewandte Disziplin der reinen Mathematik und ihrer Arbeitsweise gegenübergestellt werden; so wird man in der Tat gravierende Unterschiede feststellen können. Man könnte sehr wohl behaupten, daß ein "reiner" Wahrscheinlichkeitstheoretiker in der Tat seine mathematisch-wahrscheinlichkeitstheoretischen Hypothesen innerhalb des formalen Kalküls sehr wohl für verifizierbar bzw. falsifizierbar hält.

Darüber hinaus gilt es jedoch als wichtig festzuhalten, daß die Einschätzung Heiteles, wie sie sich in seiner Charakterisierung des stochastischen Modells niederschlägt in vielen Aspekten unserer Auffassung entgegenkommt. Zu nennen sind hier vor allem die beiden Punkte, daß man auf Grund der großen Divergenz in den verschiedenen Anwendungen zum einen von keiner universellen und allgemeingültigen Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie ausgehen kann, was sich in der Vielfalt möglicher Modelle auswirkt; und zweitens wird betont, daß wahrscheinlichkeitstheoretische Anwendungen insofern ihre Besonderheit haben, als sie selbst statistischer Natur sind, wie wir es im Abschnitt IV.2.2 formuliert haben. Eine mögliche Gefahr beinhaltet die Charakterisierung Heiteles in ihrer Tendenz, sich zu stark alternativ gegenüber anderen Bereichen abzusetzen. An anderer Stelle haben wir darauf hingewiesen, daß es keinen Gegensatz von Zufall und Determiniertheit gibt, es gilt, ihren Zusammenhang auszuarbeiten. Diese möglichen Vereinseitigungen im Gebrauch des stochastischen Modells wollen wir im weiteren beschreiben.

Noch deutlicher als Heitele bezieht Freudenthal in seine Definition des stochastischen Modells explizit das Moment der Zufälligkeit ein. Er ist zudem bestrebt, ein einziges universelles Modell zur Grundlage aller seiner Überlegungen zu machen, und zwar das Urnenmodell.

"The most general chance instrument is the urn filled with balls of different colours or with tickets bearing some ciphers or letters. This model is continuously used in our courses as a didactical tool, and in our statistical analysis as a means of translating realistic problems into mathematical ones." (Freudenthal, 1961, S.79)

Die Urne ist nicht nur als konkretes gegenständliches Modell interessant, sondern aufgrund abstrakter Postulate, welche

in ihr "stecken" und quasi das theoretische Objektverständnis ausmachen. "The urn model is to be the expression of three postulates: (1) the constancy of a probability distribution, ensured by the solidity of the vessel, (2) the random character of the choice, ensured by the narrowness of the mouth, which is to prevent visibility of the contents and any consciously selective choice, (3) the independence of successive choices, whenever the drawn balls are put back into the urn." (Freudenthal, 1961, S.80)
Diese Postulate sollen die für die Wahrscheinlichkeitstheorie relevanten Aspekte realer Zufallsphänomene charakterisieren.

Zunächst verdeutlicht diese Definition das von uns als Amalgam theoretischer und gegenständlicher Aspekte gekennzeichnete Merkmal stochastischer Modelle. Einerseits ideale Annahmen, wie sie sich etwa in der als möglichst "rein" vorgestellten Struktur des Modells darstellen und andererseits die Möglichkeiten des konkreten Umgangs mit diesem Modell, des unabhängigen und zufälligen Ziehens von Kugeln etwa, gestatten so die Verbindung von theoretischen Bestandteilen mit praktischen Problemen.

Die hier gegebene Definition des stochastischen Modells bedeutet nun jedoch nicht, daß alle möglichen Zufallssituationen mittels des universellen Urnenmodells direkt bearbeitet werden können. In dieser Allgemeinheit stellt dieses Modell nur eine erste Orientierung auf die Anwendungen dar; in realen Anwendungen wird dieses Modell dann entsprechend den situationsabhängigen Bedingungen "passende" Spezialisierungen annehmen und verändert und konkretisiert werden müssen. Darüber hinaus wird man dauernd in der Anwendung des stochastischen Modells auf die reale Zufallssituation gerade dieses Verhältnisses von wahrscheinlichkeitstheoretischen Modellierungen zu inhaltlichen Aspekten im Auge behalten müssen; das Problem des Verhältnisses von wahrscheinlichkeitstheoretischer Beschreibung zu den gegenständlich-inhaltlichen Besonderheiten des jeweiligen Objekts, wird zur eigentlichen

Schwierigkeit, die in dieser Modelldefinition zunächst nicht enthalten ist.

Verdeutlichen läßt sich diese Problematik am besten, wenn man beispielhaft die mögliche Verwendung dieses Modellbegriffs untersucht. Diskutieren wollen wir dies an dem von uns in diesem Kapitel dargestellten Gegensatz vom idealen Würfel zum Reißnagelexperiment.

Beim Reißnagel wird gewissermaßen von der Vorstellung ausgegangen, ihm gehöre eine fixierte "objektive" Grundwahrscheinlichkeit an, welche rein experimentell durch vielzähliges Werfen im statistischen Sinne beliebig genau ermittelt werden kann.
Den Reißnagel durch ein Urnenmodell zu simulieren, bedeutet nun, eine Urne mit einem den Häufigkeiten der beiden Resultate im Reißnagelexperiment entsprechenden Verhältnis zweier Kugelsorten zu definieren. Das Urnenmodell wird somit zu einem "Ersatz" für den Reißnagel auf der statistischen Ebene. In diesem Sinne soll der Reißnagel quasi suggerieren, es gäbe so etwas wie "reine" statistische Zufallserscheinungen, ohne jegliche gegenständliche Aspekte.

U.E. beinhaltet jedoch jeder Meßprozeß, jeder Versuch der statistischen Modellierung darüber hinaus konkret gegenständliche Hypothesen, die es überhaupt erst erlauben, einen Ansatz zur Bestimmung der jeweiligen statistischen Parameter zu machen.

Üblicherweise werden nun diese Überlegungen meist im Vorfeld heuristischer und vorwissenschaftlicher Intuition und Vorstellungen angesiedelt; solche Vorüberlegungen könnten erst zu einem stochastischen Modell hinführen, wird gesagt. Ist dann jedoch, wie nun auch immer, ein Modell "gefunden" (vgl. das Verlaufsschema zum stochastischen Denken im Lehrerband 8), so kann erst die eigentlich wissenschaftliche Arbeit des Prognosendeduzierens und der Überprüfung des Modells beginnen. Heuristisches Vorgehen wird somit als die rein subjektiv-psychologische Seite des Erkenntnisprozesses betrachtet, welche ausschließlich im Vorfeld weiterer wissenschaftlicher Präzisierungen steht. Auch im vorliegenden Stochastikkurs wird, wie angemerkt, nichts dazu gesagt, wie letztlich das jeweilige Modell entwickelt wird; diese Frage bleibt ungeklärt.

Analysiert man jedoch genauer das Vorgehen bei statistischer Modellbildung, so stellt man fest, daß eigentlich immer auf jeder Stufe Hypothesen über den betrachteten Gegenstand eine Rolle spielen; so hat etwa Freudenthal zu recht in seiner Kritik gegen das Reißnagelexperiment auf die vielfältigen Unwägbarkeiten des Gegenstandes und des tätigen Umgangs mit diesem aufmerksam gemacht.

Ja, man könnte fast behaupten, in einer reinen Zufallsbeschreibung, in einer ausschließlich simulativ-statistischen Modellierung lernt man nichts. (vgl. Kap.III) Statistische Beschreibungen sagen auch immer, wenn auch nur <u>indirekt</u> etwas über eine statistische Charakterisierung hinaus aus: sie verweisen auf inhaltliche Besonderheiten des Gegenstands. Statistische Abweichungen "verraten" etwa die Fälschung eines Würfels oder unzulässige Manipulationen des Spielers. Dies sind primär gegenständliche Aspekte bzw. Ausdruck des Operierens mit diesem Gegenstand.

Dementsprechend sollten die idealen stochastischen Modelle der Münze, des Würfels oder auch des Glücksrades nicht einfach der möglichen einseitigen rein kombinatorischen Deutung von Wahrscheinlichkeit wegen insgesamt verworfen werden; sie können vielmehr zu Beginn des Stochastikunterrichts sehr wohl in elementarer Weise den Zusammenhang von inhaltlichen Überlegungen und experimentellen Messungen verdeutlichen. Die Symmetrie des Würfels erlaubt erst die vorläufig angemessene Aufstellung eines entsprechenden stochastischen Modells.

In diesem Sinne könnte man etwa feststellen, daß man die Wahrscheinlichkeitstheorie als "Wissenschaft par excellence" bezeichnen könnte: Einerseits hat man zwar seine wissenschaftlichen Instrumente zur Verfügung, nämlich die statistischen Verfahren und den Kalkül der Wahrscheinlichkeitstheorie; um jedoch "wirklich" wissenschaftlich hiermit arbeiten zu können, d.h. neuartige Probleme zu behandeln, bedarf es darüber hinaus inhaltlicher Hypothesen. Diese inhaltlichen Aspekte sind jeweils abhängig von den konkreten Bedingungen des Gegenstandes und sie erfordern somit zusätzliche Überlegungen, die auf die Neuheit dieses Problems Rücksicht nehmen.

Die in diesem Abschnitt vorgenommene Diskussion des statistischen Modellbegriffs hat zusammenfassend auf drei Stufen der Modellentwicklung aufmerksam gemacht. Diese drei Stufen kann man mit den drei von uns beschriebenen historischen Etappen in Verbindung bringen.

Es handelt sich dabei erstens um eine vor-Bernoullische Etappe, in welcher die Modelle der Urne, des Würfels usw. primär als vorgegebene materialisierte Modelle verstanden wurden, und man zunächst den Zusammenhang von Modell und Gegenstand in mehr oder weniger "direkter" Weise erklärte.
In einer zweiten, der nach-Bernoullischen Etappe, wurde die Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie immer mehr zu einem eigenständigen Problem. Der damaligen Auffassung entsprechend gewann das Moment der Zufälligkeit verstärkt zentrale Bedeutung; ja, dem Zufall wurde letztlich im Vergleich zur Kausalität geradezu ein eigenständiger ontologischer Bereich zugewiesen.
Demgegenüber erkannte man in einer dritten, der nach-Boltzmannschen Etappe, den grundlegenden Zusammenhang von zufälligen und kausal-gegenständlichen Momenten. Insbesondere wurde dies anhand des Verhältnisses von stochastischer Analyse der Realität zu inhaltlichen (hier mechanischen) Aspekten deutlich, welche im Rahmen der statistischen Mechanik im Atom letztlich

beide einen gemeinsamen Gegenstand hatten. Damit "verschwanden" grundsätzlich die ontologischen Unterschiede zwischen Stochastik und Mechanik etwa. Das führte dann dazu, das Verhältnis von stochastischer Modellierung zum Objekt selbst als eine relevante Grundbeziehung der Untersuchung anzuerkennen.

Dem entspricht in der didaktischen Diskussion die Kennzeichnung der drei Etappen, in denen erstens das stochastische Modell als primär kombinatorische Modellierung und Ersatz für den Gegenstand aufgefaßt wird, dann zweitens der Etappe, in welcher die Modellkonstruktion explizit das zufällige Moment in der Art einbezieht, daß vor allem der Charakter des Modells als Zufallsgenerator deutlich wird und drittens in einer Etappe, in welcher das Verhältnis von statistischer Analyse zu gegenständlich-inhaltlichen Besonderheiten des Objekts explizit zu einer Grundbeziehung des Modells wird.

Vom allgemeinen Standpunkt der dritten Etappe her wird deutlich, daß letztlich immer sowohl relativ allgemeine wahrscheinlichkeitstheoretische bzw. statistische Aspekte als auch jeweils spezielle inhaltliche Besonderheiten zusammen für den stochastischen Erkenntnisprozeß notwendig sind. Dies bedeutet, daß die Entwicklung des stochastischen Modellkonzeptes über die drei skizzierten Etappen hinweg nur vorstellbar ist, wenn man im Prinzip auf jeder dieser Etappen diese wichtige Wechselbeziehung beachtet und weiterentwickelt.

IV.3. Vorschläge zum Stochastikunterricht

Wie eingangs angekündigt, wollen wir uns nun in diesem 2. Teil des didaktischen Kapitels stärker dem Stochastikunterricht selbst und seinen curriculären Problemen zuwenden. Grundlage der weiteren Diskussion soll ein Kurs zur Wahrscheinlichkeitsrechnung sein, den wir im folgenden zunächst darstellen werden. Wir haben uns vor allem deshalb für einen Kurs der Sekundarstufe I entschieden, da gerade auf dieser Stufe der Zusammenhang von Begründungs- und Anwendungsfragen u.E. besonders wichtig wird und man keinen "rein" mathematischen Standpunkt einnehmen kann, wie dies zum Teil in der Sekundarstufe II angestrebt wird.

Dieser Kurs soll uns sowohl zur Konkretisierung der diskutierten grundlegenden didaktischen Probleme der Stochastik als auch als ein "Rahmen" für konstruktive Vorschläge dienen.

IV.3.1 Beschreibung eines Kurses Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Sekundarstufe I

Zum Teil ist die Auswahl eines solchen Kurses natürlich willkürlicher Art; wir haben uns jedoch bemüht, solch einen Kurs zu finden, der unserer Konzeption möglichst weit "entgegenkommt", d.h. insbesondere die Bedeutung des Anwendungsbezuges der Wahrscheinlichkeitstheorie herausstellt. Geeignet in dieser Hinsicht scheint uns das Lehrwerk "Einführung in die Mathematik" (Bigalke, Hrsg., Diesterweg, Bd. 7, 8, 9, 1974-1978) zu sein. Zusätzlich zu den Schülerbänden wird dieses Lehrwerk durch jahrgangsbezogene Arbeitshefte und durch Lehrerbände ergänzt.

Darüber hinaus ist gerade die Konzeption des Stochastikkurses, die in diesem Lehrwerk vertreten wird, in eine relativ breite didaktische Diskussion eingebettet; es handelt sich hierbei sowohl um didaktische Aufsätze der Autoren (etwa Walter, 1975) als auch um ein Handbuch zur Mathematikdidaktik (Bigalke/Hasemann, 1978) und zudem um einen Vortrag auf einer Fortbildungsveranstaltung (Walter, 1978, 6. Fachleitertagung für Mathematik). Dies ermöglicht insgesamt über das eigentliche Lehrwerk hinaus deutlicher Grundpositionen und -probleme herauszuarbeiten und in den Rahmen der allgemeinen Diskussion zum Stochastikunterricht zu stellen. Kommen wir auf dieser Grundlage zunächst zur Beschreibung des Stochastikkurses selbst.

Wie im Curriculum der Sekundarstufe I üblich, wird auch in diesem Kurs der Bereich Stochastik als ein zusätzliches Stoffgebiet über die Jahrgangsstufen verteilt angeboten. Im vorliegenden Lehrwerk wird mit der Wahrscheinlichkeitstheorie im 7. Schuljahr begonnen; der Kurs umfaßt desweiteren das 8. und 9. Schuljahr in den bisher vorliegenden Bänden. Wichtig anzumerken ist u.E. noch, daß dieses Lehrwerk für den Unterricht an Haupt- und Gesamtschulen (in Hessen) gedacht ist. Dies bedeutet für die Behandlung der Stochastik etwa, daß ein relativ "straffer" Kursverlauf ohne viele zusätzliche technische "Feinheiten" und mathematische Details angestrebt wird, wobei jedoch gleichzeitig immer der Bezug zu realen Anwendungen und die praktische Bedeutsamkeit der Wahrscheinlichkeit für den Schüler im Auge behalten wird. Es muß also in diesem Kurs ein wichtiges Augenmerk auf die sorgfältige Einführung und die Entwicklung der grundlegenden Ideen und Begriffe der Wahrscheinlichkeit gelegt werden. Deutlich wird schon am äußeren Aufbau des Kurses, wie straff er organisiert ist. Jedes der drei über die Schuljahre verteilten Kapitel beinhaltet fünf Abschnitte. In jedem dieser Abschnitte wird im wesentlichen ein Grundbegriff bzw. ein wichtiges Verfahren vorgestellt, diskutiert und mit Aufgaben abgeschlossen. Der Umfang eines jeden dieser Abschnitte beträgt genau 2 Seiten (eine Doppelseite), so daß dem Stoffgebiet der Stochastik pro Jahrgang genau

10 Lehrbuchseiten zur Verfügung stehen. Darüber hinaus gehört zu jedem Abschnitt in etwa jeweils ein Arbeitsblatt aus den separaten Arbeitsheften des betreffenden Jahrgangs.

Das Kapitel "Wahrscheinlichkeit" im Lehrbuch für das 7. Schuljahr behandelt die ersten Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wird von Beginn an der zentrale Begriff des "Zufalls" in den Mittelpunkt gerückt. Ausgangspunkt zur Entwicklung dieses Begriffs ist das "Zufallsexperiment", welches in der beispielhaften Form eines ("Glücks-")Automaten dargestellt wird. Herausgearbeitet wird, daß gewisse Ereignisse bei einem solchen Experiment sicher eintreffen, man jedoch nicht genau weiß, welches Ereignis im einzelnen auftreten wird. "... das <u>Ergebnis</u> (man sagt auch <u>der Ausfall</u>) (kann) nur durch Beobachtung festgestellt werden. Niemand kann vorher oder nachher sicher begründen, weshalb ein bestimmter Ausfall zu beobachten war, ein anderer dagegen nicht. Bei derartigen Vorgängen sagt man häufig: 'Das Ergebnis (der Ausfall) hängt vom <u>Zufall</u> ab'.
Der Mathematiker spricht von einem <u>Zufallsexperiment</u> ."
(Bigalke, 1975, Bd.7, S.59)

Nachdem weitere Experimente auf den Begriff des Zufalls hin untersucht wurden (Zigarettenautomat, Münzwurf) wird abschließend das Ergebnis des ersten Abschnitts folgendermaßen zusammengefaßt: "Ein Zufallsexperiment ist so genau beschrieben, daß alle praktisch möglichen Fälle (Ergebnisse, Ausfälle) vorher bekannt sind.
Wird ein Zufallsexperiment durchgeführt, so trifft genau einer der möglichen Ausfälle ein.
Vor Ausführung eines Zufallsexperiments weiß man nicht sicher, wie es ausfallen wird." (Bigalke, 1975, Bd.7, S.59)

Diese Definition erinnert in ihrer Allgemeinheit an die Definition des Urnenmodells. Dies verweist darauf, daß die hier vorgenommene allgemeine Charakterisierung von Zufallsexperiment auch nur als eine erste Orientierung auf den Gegenstand der Stochastik angesehen werden kann; im Verlaufe der weiteren Entwicklung werden verstärkt die jeweiligen inhaltlichen Bedingungen der konkreten Situation berücksichtigt werden müssen. Zufallsexperiment darf u.E. nicht einseitig als statistisch-zufällig interpretiert werden; es muß zudem deutlich werden, daß ein Zufallsexperiment auch inhaltlich-kausale Aspekte aufnimmt und zu bearbeiten gestattet. Die Schwierigkeit liegt dabei jedoch darin, daß sich diese Anforderung nicht allgemein und ein für allemal definieren bzw. konkret in die Beschreibung von Zufallsexperiment (bzw. stochastischem Modell) aufnehmen läßt, sondern ein permanentes Problem der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie darstellt und über das Verhältnis von statistischer Beschreibung zur Anwendung laufend präzisiert werden muß.

Im zweiten Abschnitt "Ausfall, Ereignis und Ereignismenge" werden die bisherigen neuen Begriffe in Ansätzen mathematisch präzisiert, ohne daß jedoch eine übermäßige Formalisierung der Mengen-"sprache" vorgenommen wird. Ausgang ist wiederum eine Beispielsituation, in der es darum geht, sich systematisch alle Möglichkeiten des "Anhaltens" bzw. des "Durchfahrens" an zwei aufeinanderfolgenden Zebrastreifen auf dem Schulweg untersucht werden. Dazu wird ein Baumdiagramm erstellt, welches es erlaubt, direkt alle "praktisch möglichen Ausfälle" abzulesen. Diese Menge aller praktisch möglichen Ausfälle wird beispielhaft in verschiedene Teilmengen bzw. Ereignisse zerlegt: Etwa, "immer durchfahren können", "anhalten müssen auf dem Schulweg" usw.

Mathematisch präzisiert werden die neuen Begriffe dann folgendermaßen formuliert: "Alle praktisch möglichen Ausfälle werden zur Menge S ... zusammengefaßt. Die Menge S wird auch <u>Ereignis-</u>

raum oder zutreffender Grundereignismenge des Zufallsexperiments genannt. ...
Teilmengen der Grundereignismenge S werden Ereignismengen genannt. (Später wird einfach von Ereignissen gesprochen. H.St.)" (Bigalke, 1975, Bd. 7, S. 61)
Diese Begriffe werden in den dann folgenden Aufgaben vertieft und geübt. So wird beispielsweise die Grundereignismenge des Würfels: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ bezüglich verschiedener Ereignismengen (gerade Zahl, Primzahl, usw.) untersucht.

Im dritten Abschnitt "Stichprobe, absolute und relative Häufigkeit" werden nun erstmals spezifisch wahrscheinlichkeitstheoretische Begriffe eingeführt. Grundlage hierfür sind elementare Konzepte der beschreibenden Statistik.
An einem Eingangsbeispiel, in dem die Gewinne in einem Geldspielautomaten untersucht werden, werden die Begriffe "Stichprobe" und "Stichprobenumfang" exemplarisch eingeführt. Eine vorgegebene Datenliste, in welcher die jeweiligen Auszahlungen (0, 20, 40, 60, 80 und 100 Pfennig) notiert sind, dient als Diskussionsgrundlage für Fragen wie etwa die nach dem absoluten und durchschnittlichen Gewinn usw.

In einem zweiten Beispiel wird die Wichtigkeit des relativen Anteils, also des Vergleichs von in Frage stehendem Ausfall zur gesamten Stichprobe herausgearbeitet. Damit kann nun explizit die "relative Häufigkeit" eingeführt werden: "Die Besetzungszahl eines Ausfalls bei einer Stichprobe gibt an, wie oft der Ausfall in der Stichprobe aufgetreten ist. Der Quotient aus der Besetzungszahl eines Ausfalls und dem Stichprobenumfang wird relative Häufigkeit genannt:

$$\text{relative Häufigkeit} = \frac{\text{Besetzungszahl}}{\text{Stichprobenumfang}}."$$

(Bigalke, 1975, Bd. 7, S. 63)

In den folgenden Aufgaben werden die neuen Begriffe geübt und mit dem Begriff des Zufallsexperiments in einen engeren Zusammenhang gebracht.

Der vierte Abschnitt "Relative Häufigkeit und Gleichwahrscheinlichkeit" stellt einen intuitiven Zusammenhang zwischen relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit (und auch Gleichwahrscheinlichkeit) her. Zunächst wird das Modell der Urne vorgestellt: "In einem Gefäß befinden sich drei verschiedenfarbige Kugeln. Das können z.B. Tischtennisbälle sein, die mit Tusche gefärbt werden. Das Experiment ist einfach durchzuführen. Aus dem Gefäß (man nennt es auch <u>Urne</u>) wird 'blind' (d.h.:ohne hinzusehen, mit geschlossenen Augen) eine Kugel gezogen. Die Farbe wird in einer Strichliste notiert, dann kommt die Kugel in das Gefäß zurück." (Bigalke, 1975, Bd. 7, S. 64) Das Urnenmodell wird also zunächst ausschließlich in Hinsicht auf seine Funktion als Zufallsexperiment, als Zufallsgenerator betrachtet.

Anhand des konkreten Umgehens mit diesem Zufallsgenerator (so etwa unter Zuhilfenahme des entsprechenden Arbeitsblattes) soll nach einer Vielzahl von Versuchen dem Schüler folgende Tatsache deutlich werden: "Die Summe der relativen Häufigkeiten ist für jeden Stichprobenumfang gleich 1. Wenn derselbe Ausfall bei verschiedenen Stichprobenumfängen beobachtet wird, dann 'pendelt' die relative Häufigkeit um eine bestimmte Bruchzahl herum.
Je größer der Stichprobenumfang ist, umso mehr nähert sich die relative Häufigkeit an diese Bruchzahl an." (Bigalke, 1975, Bd. 7, S. 64)

Hier stellen sich sofort Fragen nach dieser "bestimmten Bruchzahl": Warum ist es sinnvoll und was motiviert es überhaupt, von einer <u>bestimmten</u> Bruchzahl in diesem Zusammenhang zu sprechen? Könnte nicht beispielsweise auch von einem "Streuungsintervall" die Rede sein? Und wie kann diese Bruchzahl geschickt gewählt bzw. <u>bestimmt</u> werden?

Diese Fragen zielen wiederum auf das Verhältnis von statistischen zu inhaltlichen Aspekten des Gegenstandes. Es geht auch schon hier um den Zusammenhang von inhaltlichen Hypothesen und statistischen Verfahren; u.E. ist eine rein statistische Grundlegung der Wahrscheinlichkeit durch relative Häufigkeiten und ihre "Konvergenz" nicht motiviert. Von einer bestimmten Bruchzahl zu sprechen wird erst auf der Grundlage inhaltlicher Überlegungen (etwa die Symmetrie des Würfels betreffend) sinnvoll.

Diese Bruchzahl, um welche sich die relative Häufigkeit "einpendelt", wird im folgenden mit Wahrscheinlichkeit des Ereignisses bezeichnet. Auch der Begriff der "Gleichwahrscheinlichkeit" wird zunächst ausschließlich mit Hilfe der relativen Häufigkeit eingeführt: "Zufallsexperimente, bei denen alle Ausfälle (bei genügend großen Stichprobenumfängen) dieselbe relative Häufigkeit besitzen, sind etwas Besonderes. In solchen Fällen sagt man auch:
Alle Ausfälle sind gleichmöglich oder gleichwahrscheinlich." (Bigalke, 1975, Bd. 7, S. 65)

Gleichwahrscheinlichkeit wird hier also nicht mittels gegenstandsspezifischer Hypothesen, wie etwa Symmetriebetrachtungen usw. diskutiert, sondern ausschließlich mit Hilfe der relativen Häufigkeit und über das sogenannte "empirische Gesetz der großen Zahlen" definiert.
Diese experimentelle, allein von der Beobachtung der relativen Häufigkeiten her bestimmte Herangehensweise zeigt sich in diesem Abschnitt deutlich in den Aufgaben. Sie beinhalten allesamt die Durchführung und Auswertung von Zufallsexperimenten; besonders bekannt ist das auch hier durchzuführende Experiment mit dem Reißnagel, ein typisches Beispiel eines Zufallsexperiments, in welchem keine vorherigen inhaltsbezogenen Hypothesen über die Wahrscheinlichkeit gemacht, wo diese nur mittels experimenteller "Messung" ermittelt werden könnten.

In dem abschließenden fünften Abschnitt des ersten Kapitels "Berechnung von Wahrscheinlichkeiten" werden nun einfache

Rechenregeln für die Bestimmung von gleichwahrscheinlichen Ereignissen behandelt.
Zu Beginn werden die schon vorher eingeführten stochastischen Modelle der Münze und der Urne nochmals intensiv diskutiert. Es wird nun jeweils gefragt, welche Erwartung man bei diesen (gleichwahrscheinlichen) Experimenten für den Ausfall eines Ereignisses hat. Auf der Grundlage dieser Diskussionen wird dann implizit auf das empirische Gesetz der großen Zahlen bezugnehmend gesagt: "Den erwarteten Anteil (Bruchteil) eines Ausfalls (oder Ereignisses) am Stichprobenumfang nennt man auch die Wahrscheinlichkeit des Ausfalls (oder Ereignisses).
Für den Sonderfall der Gleichwahrscheinlichkeit aller möglichen Ausfälle in einem Zufallsexperiment kannst du die Wahrscheinlichkeit berechnen:

$$\text{Wahrscheinlichkeit W eines Ereignisses} = \frac{\text{Anzahl aller zum Ereignis gehörenden Ausfälle}}{\text{Anzahl aller beim Experiment möglichen Ausfälle.}}$$ "

(Bigalke, 1975, Bd. 7, S. 66/67)

Mit der hier gegebenen Definition der Laplaceschen Wahrscheinlichkeit werden unter Zuhilfenahme von Baumdiagrammen verschiedene Aufgaben aus dem Lehrbuch und vom entsprechenden Arbeitsblatt behandelt.

Das Kapitel "Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik" im 8. Schuljahr beginnt im ersten Abschnitt "Stufen der Wahrscheinlichkeit" mit einer Wiederholung der Ausgangsdefinition von Wahrscheinlichkeit selbst. Begonnen wird mit einem Beispiel über Wettervorhersage, in welcher nur sprachlich komparative Aussagen über die Wahrscheinlichkeit der künftigen Wetterlage auftauchen. Dies soll auf die Notwendigkeit der exakten Quantifizierung mit Hilfe einer Skala aufmerksam machen. Als ein weiteres Beispiel dient dann der Temperaturbegriff. Auch hier hat man zunächst nur komparative Ausdrücke wie "siedend heiß", "warm", "kalt",

"eiskalt" usw. Hiermit "... kann man nicht objektiv messen, denn was der eine als 'warm' fühlt, empfindet ein anderer schon als 'heiß'.
Anders ist es, wenn man ein Thermometer mit einer Temperaturskala verwendet. Wenn jemand sagt: 'Das Wasser hat die Temperatur 19°C', so weiß man genau, was gemeint ist.
Man kann nachprüfen, ob diese Aussage wahr ist oder nicht.'" (Bigalke, 1975, Bd. 8, S. 49)

Auf die Struktur dieses Meßprozesses der Temperatur wird nun der Begriff der Wahrscheinlichkeit letztlich zurückgeführt.

"So wie man vereinbart (definiert) hat, was zum Beispiel 'Temperatur 50°C' bedeuten soll, so müssen wir vereinbaren (definieren), was z.B. 'Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$' bedeuten soll. Betrachten wir ein einfaches Beispiel: Was soll die Aussage 'Die Wahrscheinlichkeit ist $\frac{1}{2}$, daß ein neugeborenes Kind ein Junge ist', bedeuten? Damit ist gemeint: Wenn wir viele Geburten nehmen, so erwarten wir, daß etwa in der Hälfte aller Fälle das Neugeborene ein Junge ist." (Bigalke, 1975, Bd. 8, S. 49)

Nach Diskussion verschiedener Wahrscheinlichkeitsaussagen im Sinne des "empirischen Gesetzes der großen Zahlen" wird dann zusammenfassend festgestellt: "Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gibt an, welche relative Häufigkeit man etwa für das Eintreten dieses Ereignisses erwartet." (Bigalke, 1975, Bd. 8, S. 49)

Die beiden nächsten Abschnitte, einmal "Experimentelle Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten" und zum anderen "Theoretische Berechnung von Wahrscheinlichkeiten" behandeln zentral ein längeres Beispiel unter verschiedenen Aspekten.
Es geht darum herauszufinden, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, daß eine zufällig auf ein liniertes Papier geworfene Münze auf eine der Linien zu liegen kommt bzw. keine der

Linien berührt. Zunächst wird dieses Problem rein experimentell angegangen. Unter Zuhilfenahme des Arbeitsblattes werden "Groß"-Versuche mit bis zu 100 Würfen durchgeführt und auch registriert. In ein vorbereitetes Koordinatensystem auf Millimeterpapier werden dann Stichprobenumfang und jeweilige relative Häufigkeit gegeneinander abgetragen und es wird so intuitiv ein Eindruck des "Einpendelns" der relativen Häufigkeit um die Wahrscheinlichkeit vermittelt.

In Ergänzung zu dieser experimentellen Aufgabe wird unter einer ähnlichen Perspektive das Fußballtoto behandelt. Entgegen einer allgemein üblichen Vorstellung, daß die drei möglichen Ausfälle "Heimsieg", "Unentschieden" und "Auswärtssieg" als gleichwahrscheinlich betrachtet werden können, wird auf der Grundlage eines umfangreichen Datenmaterials auf dem entsprechenden Arbeitsblatt eine statistisch-experimentelle Untersuchung in Gang gesetzt, welche die unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten von "Heimsieg" und "Auswärtssieg" etwa deutlich zutage bringt. Die Aufgaben dieses Abschnitts beziehen sich allesamt auf solche Probleme des Fußballtotos.

In dem nachfolgenden Abschnitt wird, wie angemerkt, das Beispiel des Münzwurfs auf liniertes Papier von der theoretischen Perspektive her angegangen. Es wird beispielsweise nach den Wahrscheinlichkeiten bei einem Pfennigstück im Vergleich zu einem Groschen gefragt; desweiteren: Wie ändern sich die Wahrscheinlichkeiten bei Veränderung des Abstandes zwischen den einzelnen Linien?
Zunächst können diese Fragen wiederum experimentell beantwortet werden; sie verweisen jedoch auf einen Zusammenhang von Durchmesser der Münze und Abstand der Linien.

Es wird herausgearbeitet, daß eine Münze genau dann eine Linie trifft, wenn ihr Mittelpunkt auf einen Punkt in einem Streifen mit Breite gleich Münzdurchmesser fällt; andernfalls liegt die Münze zwischen den Linien. Mit Hilfe eines intuitiven Infinitesimalprozesses (es handelt sich ja um kontinuierliche Ereignisintervalle) gelangt man schließlich zu der Erklärung, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Münze zwischen zwei Linien auftrifft, durch das Verhältnis zweier Strecken gegeben wird; nämlich der Strecke L(a) von Streifen zu Streifen durch die Strecke L(b) von Linie zu Linie.

Hiermit ist eine Verallgemeinerung des (diskreten) Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsbegriffs vorgenommen worden. Diese "theoretische Berechnung von Wahrscheinlichkeiten" wird schließlich mit den Ergebnissen der vorherigen Experimente verglichen. "Vergleiche das Ergebnis deiner Theorie mit der Wahrscheinlichkeit, die du früher durch eine Versuchsreihe erhalten hattest. Bist du mit deiner Theorie zufrieden?" (Bigalke, 1975, Bd. 8, S. 53) Die Theorie wird als eine Beschreibung aufgefaßt, die möglichst genau sein sollte und die man sich zu den jeweiligen Zufallsphänomenen "bastelt".

In den Aufgaben dieses Abschnitts werden die "theoretischen Berechnungsmethoden" vertieft, indem viele verschiedenartige Situationen des Münzwurfs studiert werden.

Der Abschnitt 4 "Geometrische Wahrscheinlichkeiten" behandelt auf der Grundlage des Roulettes (Glücksrad) verschiedene einfache Beispiele idealgeometrischer Wahrscheinlichkeiten. Hier wird zudem dazu aufgefordert, genauer zu überlegen, was es bedeuten soll, daß ein Spiel "fair" ist; es werden weiterhin Fragen nach gegenstandsspezifischen Aspekten wie Symmetrie, Lagerung der Roulettescheibe, keine "unerlaubten" Eingriffe in den Ablauf eines Spiels usw. gestellt.

Die ausführliche Diskussion dieser Probleme soll dazu führen, daß man bei Berücksichtigung verschiedener gegenständlicher Schwierigkeiten statistische Phänomene am Glücksrad durch eine Theorie beschreiben kann, in welche die Wahrscheinlichkeit durch Flächen- bzw. Winkelanteile vorgegeben sind. Auch in diesem Fall wird eine Theorie konstruiert, deren Angemessenheit sich erst durch eine experimentelle Überprüfung ergeben kann.

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels "Indizien für den Zufall" wird die Zufälligkeit einer Zahlenfolge untersucht. Zunächst werden intuitiv verschiedene Beispiele auf Zufälligkeit hin überprüft. Anschließend werden dann drei Binärfolgen, welche jeweils Münzwurf-Experimente darstellen sollen, vorgelegt. Zwei dieser drei Folgen sind offenbar aufgrund ihrer "Geordnetheit" nicht zufällig zustande gekommen. Alle Folgen werden in ein Häufigkeitsdiagramm eingetragen; der Verlauf der jeweiligen Kurven gibt Aufschluß über die Zufälligkeit. Es wird gesagt: "Bei einer Zufallsreihe schwankt die Kurve der relativen Häufigkeit unregelmäßig um eine Mittellage. Je größer der Stichprobenumfang ist, desto kleiner wird diese Schwankung." (Bigalke, Bd. 8, 1975, S. 57) Dieser Abschnitt fällt etwas aus dem Rahmen der bisherigen Vorgehensweise, ist jedoch ein wichtiger und sinnvoller Versuch, das Problem des Zufalls in ersten Anfängen zu explizieren.

Die Tatsache der relativen Isoliertheit dieses Abschnitts im Gesamtaufbau des Kurses macht allerdings deutlich, daß tendenziell Zufall und Kausalität zu stark gegeneinander abgegrenzt werden. Es ist nicht sinnvoll, ontologische Vorstellungen ausschließlich, bezogen auf das Zufallskonzept, zu entwickeln (vgl. Kap. IV.2.2); es kommt darauf an, anhand des Zusammenhangs von kausalen und zufälligen Aspekten umfassendere Vorstellungen zum Gegenstand zu erarbeiten, welche es erlauben, stärker an Vorerfahrungen der Schüler anzuknüpfen und so das Problem der Zufälligkeit kontinierlich durch den gesamten Kurs zu verfolgen.

Im Kapitel "Statistik und Wahrscheinlichkeit" des neunten Schuljahres geht es nun darum, die eher statistischen Grundbegriffe aus dem siebten Schuljahr weiterzuentwickeln und mit den stärker wahrscheinlichkeitstheoretischen Verfahren in einen fruchtbaren Zusammenhang zu bringen. Grundlage hierfür ist der Begriff der Wahrscheinlichkeitsverteilung (bzw. genauer der Wahrscheinlichkeitsdichte), der in diesem Kapitel in intuitiv-propädeutischer Weise an Beispielen der deskriptiven Statistik herausgearbeitet wird.

So werden zunächst im ersten Abschnitt "Aufstellen von Verteilungen" anhand von verschiedenen Datenmengen Histogramme erstellt. In einem Beispiel werden dazu etwa die Körpergewichte von Schülern einer Klasse untersucht; hieran wird exemplarisch das Konzept des Streifendiagramms verdeutlicht. In den Aufgaben werden zudem die neuen Begriffe geübt und alte Begriffe wie "Durchschnittswert" usw. aufgefrischt.

Der 2. Abschnitt "Voraussagen einer Verteilung" ist gewissermaßen von zentraler Bedeutung für den gesamten Stochastikkurs. Es wird hier angestrebt, in elementarer Weise das "Testen einer Hypothese" zu verdeutlichen.

Gegenstand des gesamten Abschnitts ist eine einzige Aufgabe: "Du weißt: Die Wahrscheinlichkeit, daß bei einer Geburt das Kind ein Mädchen ist, beträgt $\frac{1}{2}$. Dann muß man doch eigentlich voraussagen können, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, daß eine Familie mit 4 Kindern genau 4 (3, 2,1,0) Jungen hat. Was meinst du, wieviele von 1200 Familien mit vier Kindern genau 4 Jungen (4 Mädchen) haben?" (Bigalke, Bd. 9, 1976, S. 60)

Zunächst werden die Schüler aufgefordert, Schätzungen abzugeben. Um diese überprüfen zu können, wird statistisches Material zur Verfügung gestellt: "Zum Vergleich hier das Ergebnis einer statistischen Erhebung. Es wurden nur Familien mit 4 Kindern erfaßt: 8628 dieser Familien hatten jeweils 4 Jungen, 7004 dieser Familien hatten jeweils keinen Jungen, 44793 dieser Familien hatten jeweils gleich viel Jungen wie

Mädchen, 28101 dieser Familien hatten jeweils 3 Mädchen und 36611 dieser Familien hatten nur jeweils 1 Mädchen." (Bigalke, Bd. 9, 1976, S. 60)

In der Konfrontation mit diesen Daten sollen die Schätzungen verbessert und eine "gute Theorie" gefunden werden.
Zunächst wird mittels Verfahren der beschreibenden Statistik das vorliegende Datenmaterial geordnet und analysiert. Dann wird eine erste naive Theorie zur Erklärung vorgeschlagen.
"Man könnte zu folgender Theorie kommen: Bei 4 Kindern in einer Familie gibt es fünf verschiedene Möglichkeiten für die Anzahl der Jungen in dieser Familie, nämlich 0, 1, 2, 3 oder 4 Jungen. Also ist die Wahrscheinlichkeit, daß in einer solchen Familie alle 4 Kinder Jungen sind, $\frac{1}{5}$. Also müßten unter den 120137 Familien etwa 24000 Familien mit jeweils 4 Jungen sein." (Bigalke, Bd. 9, 1976, S. 61)
Hier gibt es jedoch zu große Abweichungen im Vergleich zum statistischen Material. Dies führt dazu, genauer zu analysieren, ob alle betrachteten fünf Ereignisse wirklich gleichwahrscheinlich sind; es muß eine "bessere Theorie ausgedacht" werden.

Dazu wird ein Baumdiagramm erstellt, in welchem alle möglichen Folgen von 4 Geburten verzeichnet sind. Dieses Diagramm erlaubt nun aufgrund der Ausgangshypothese, daß Jungen- und Mädchengeburt die gleiche Wahrscheinlichkeit haben, eine bessere theoretische Vorhersage zu berechnen. Mit Hilfe von Arbeitsblättern wird nun eine graphische Darstellung der berechneten theoretischen Verteilungen gegeben und mit der statistisch empirischen verglichen.
Man gelangt nun zu Aussagen der Form: "Die Wahrscheinlichkeit, in einer Familie mit 4 Kindern kein Mädchen anzutreffen, beträgt 0,0625, wenn Jungen- und Mädchengeburt gleichwahrscheinlich sind."

Der Verteilungsbegriff gestattet somit, den statistischen Charakter des Wahrscheinlichkeitswertes (bzw. der relativen Häufigkeit) mathematisch zu fassen. Das heißt zum Beispiel, es wird besser verständlich, was unter der eingangs eingeführten bestimmten Bruchzahl genauer gemeint ist: Statistische Werte unterliegen selbst einer wahrscheinlichkeitstheoretischen Beurteilung. Dies wird etwa aus der Form des Graphen der Verteilungsfunktion sichtbar: die relative Häufigkeit (hier 2 Junden und 2 Mädchen) ist der vergleichsweise "wahrscheinlichste" Wert.

Im nächsten Abschnitt werden nur Aufgaben gestellt, in denen das bisher diskutierte Verfahren des Vergleichs empirischer statistischer Verteilungen weitergeübt und variiert wird. Positiv hervorzuheben ist, daß nicht einfach mit idealisierten Situationen und "glatten" Wahrscheinlichkeiten operiert wird; es werden vielfältige reale Datenmengen (etwa aus dem statistischen Jahrbuch der BRD entnommen) diskutiert und mit theoretischen Hypothesen konfrontiert.
Auch wenn keine ausgearbeitete Testtheorie oder gar ein detailliertes Konzept der Bernoulli-Verteilung vorliegt, so wird in beiden Abschnitten jedoch in eindrucksvoller Weise deutlich, wie man mit elementaren Methoden reale statistische Anwendungen durchführen und diskutieren kann.

Im vierten Abschnitt "Zur Vererbungsstatistik" werden zum einen nochmals die bisherigen Techniken des Hypothesentestens benutzt. Zu beachten ist jedoch: "Die hier angesprochenen Probleme sind als Bestandteil eines fächerübergreifenden Unterrichts unter besonderer Berücksichtigung der Biologie gedacht. Die Statistik gibt nur Hilfen zum Verständnis der beobachteten Erscheinung. Diese Aufgaben eignen sich nicht als reines Übungsmaterial, weil die biologischen Probleme z.T. größer sind als die mathematischen." (Bigalke, Bd. 9 Lehrerband, 1978, S. 187) Es wird also auf gegenstandsspezifische (hier biologische) Aspekte der Wahrscheinlichkeitstheorie samt ihren Schwierigkeiten aufmerksam gemacht.

Der letzte Abschnitt "Beschreiben von Verteilungen" konzentriert sich im wesentlichen darauf, einige wichtige Parameter von Verteilungen (Durchschnitt, Streuung) zu diskutieren. Dies wird wiederum in erster Linie anhand verschiedener Datenmengen durchgeführt. Insgesamt dient die Einführung einer ersten präziseren Vorstellung über wichtige Merkmale einer Verteilungs<u>funktion</u>: und zwar einmal den äußerlichen graphischen Verlauf der Kurve und zum anderen die Bedeutung einzelner diskreter Verteilungsparamter.

Das gesamte Kapitel ist eine gute Vorbereitung in Form einer ersten Einführung in den mathematischen Begriff der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen.

IV. 3.2. Kritische Anmerkungen zum vorgestellten Kurs

Insgesamt gesehen kommt der dargestellte Stochastikkurs in großen Teilen unserem Anliegen einer anwendungsbezogenen Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs sehr entgegen. Vor allem in der meist sehr sorgfältigen Behandlung bestimmter Aufgaben kommt dies zum Ausdruck; zu nennen sind in diesem Zusammenhang einmal die Aufgabe, Münzen auf liniertes Papier zufällig herabfallen zu lassen und zum anderen das Beispiel der Verteilung von Jungen und Mädchen in einer Familie mit 4 Kindern. In beiden Fällen werden empirische Zufallsdaten (entweder vorgegeben oder mittels Experimenten ermittelt) mit theoretischen Modellierungen konfrontiert. Der Akzent liegt im ganzen Kurs eindeutig auf den Anwendungen. Dies ist der große Vorteil dieses Kurses, und in einer gewissen einseitigen Überbewertung beinhaltet dies gleichzeitig Nachteile und Mängel in Fragen der Begründung. Und in diesem Verhältnis liegt vor allem die große Schwierigkeit, dem vorliegenden Kurs kritisch gerecht zu werden. Während es einerseits viele gute Anwendungsbeispiele gibt, so ist andererseits eine Tendenz einer zu einseitig "universalistischen" Definition der Wahrscheinlichkeit festzustellen. Und gerade dies scheint uns die Stelle zu sein, an welcher mögliche Schwierigkeiten der Umsetzung dieses Kurses besonders relevant werden können: die Funktion, welche die Autoren dem Verhältnis von Begründung und Anwendung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, der Beziehung von Theorie zu Empirie zuordnen.

Was die Grundlegung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs nun betrifft, so wird durch eine recht vorsichtige Einführung der relativen Häufigkeit samt einer geschickt hergestellten Verbindung zur Wahrscheinlichkeit zunächst eine Definition zur Grundlage gemacht, die versucht, den zentralen Aspekt des Zufalls in den Mittelpunkt zu stellen. Es wurde etwa an einer Stelle definiert: "Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gibt an, welche relative Häufigkeiten man für das Eintreten dieses Ereignisses erwartet." (Bigalke, Bd. 8, 1975, S. 49).

Grundlegende Vorstellung hinter der Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffs ist im vorliegenden Lehrwerk ganz allgemein das Konzept des Meßprozesses. Dies zeigt sich einmal im Lehrbuch selbst, wo der Vergleich zum Temperaturbegriff gezogen wurde, dann auch im entsprechenden Lehrerband und in dem von denselben Autoren erstellten Handbuch zur Didaktik der Mathematik (Bigalke/Hasemann, 1978), in dem die Messung von relativen Häufigkeiten mit der Längenmessung eines Stabes verglichen wird (vgl. Kap. IV. 2.2. und Walter, 1978, S. 270).
An diesem Problem des "Meßprozesses" läßt sich u. E. das Verhältnis von Begründung und Anwendung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs diskutieren, da auf diesem Hintergrund eigentlich immer schon von einem bestehenden Zusammenhang ausgegangen wird; es birgt jedoch eine große Gefahr, nämlich bei zu strikter Gleichsetzung von Begründung und Anwendung, etwa in der Form, daß der Meßprozeß selbst zu einem Ersatz für die Definition wird, in einen empiristischen Operationalismus auszuarten.

Zunächst kann man das Vorgehen der Schulbuchautoren, Messen von Wahrscheinlichkeit (bzw. von relativen Häufigkeiten) mit mechanischen bzw. thermodynamischen Meßprozessen zu vergleichen, nur begrüßen. Auch wir haben in Kapitel III darauf aufmerksam gemacht, daß hier keine Unterschiede vorhanden sind; die Unterschiede werden erst in den jeweiligen Arten der <u>Beschreibung</u> von Gesetzmäßigkeiten relevant.

Wie jedoch im weiteren Verlauf des Kurses nun mit diesem zunächst verständlicherweise offengehaltenen Vergleich umgegangen wird, läßt berechtigte Gefahren erkennen: So wird etwa nicht, nachdem im Kapitel 3 des Lehrwerks entsprechende wahrscheinlichkeitstheoretische und statistische Methoden entwickelt worden sind (Verteilungsbegriff, Durchschnitte, Streuung usw.) nochmals auf das Problem der Temperaturmessung (bzw. der Längenmessung eines Stabes) zurückgegriffen und nun auch als ein <u>statistisches</u>

Problem, welches es ja letztendlich ist, explizit behandelt. Im gesamten Kurs diente die Temperaturmessung somit nur als ein heuristisch-intuitiver Vergleich, der jedoch dann nicht "ernstgenommen", d.h. auf seine (statistischen) Probleme hin untersucht wurde.
An dieser Stelle müßte eigentlich konstruktiv der Tatsache Rechnung getragen werden, daß jede nicht naive Messung letztlich statistischen Charakter hat; d.h. somit, die statistische Messung hat eine allgemeinere Erklärungsgrundlage gegenüber den "rein" mechanischen bzw. thermodynamischen Meßprozessen (vgl. Kap. IV. 2.2.).
Schüler können somit berechtigt den impliziten Eindruck gewinnen, daß der Begriff der relativen Häufigkeit (bzw. der Wahrscheinlichkeitsbegriff selbst) auf einen vorläufigen und naiven Temperatur- bzw. Längenbegriff reduziert werden könnte; es ist jedoch genau umgekehrt, erst die neuartige Differenziertheit statistischer (Meß-)Verfahren ermöglicht die Erklärung der Messung von (vermeintlich) einfachen Konzepten wie Länge und Temperatur.
Diese Probleme im Vergleich verschiedener Meßprozesse zeigen sich tendenziell auch in der Behandlung und Weiterentwicklung des Verhältnisses von Wahrscheinlichkeit zu relativer Häufigkeit. Auch hier wird zunächst Wahrscheinlichkeit mittels relativer Häufigkeiten gemessen; jedoch wird im späteren Verlauf des Kurses auch dieser "Meßprozeß" eigentlich nicht konsequent genug als ein statistischer interpretiert und analysiert. Auch für dieses Verhältnis bleibt die eingangs eingeführte Vorstellung der Messung unverändert erhalten; sie wird nicht weiter differenziert und präzisiert. Das anfangs in Form eines "fertigen" Meßprozesses gegebene Verhältnis von Theorie zu Realität bleibt letztlich festgeschrieben und kann sich nicht mehr verändern.
Jedoch ist die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie als einer Theorie der Anwendung gerade auf die Bearbeitung dieses Anwendungsbezuges orientiert, wie es sich in der Beziehung zwischen Beschreibungs- und Anwendungsproblem als eigentlicher

Besonderheit der Stochastik im Vergleich zu anderen Theorien zeigt. Und dieser allgemeinen Anforderung entsprechend müßte der Stochastikunterricht auch das Verhältnis von Wahrscheinlichkeit zu relativer Häufigkeit als einem beispielhaften und einfachen Ausdruck der Anwendungsproblematik weiterentwickeln, indem etwa deutlicher im Kursverlauf die Kennzeichnung der relativen Häufigkeit als eines statistischen Parameters verfolgt wird (vgl. das Kap. II. 1. zu Bernoullis Theorem).
Im nächsten Abschnitt werden wir versuchen, konstruktive Vorschläge für die Behandlung dieses Problems zu geben.

Zusammenfassend ist anzumerken, der empirisch beobachtbare Begriff der relativen Häufigkeit kann aufgrund eines Stabilisierungsarguments nicht als Grunddefinition genommen werden; relative Häufigkeiten als Ersatz für die Wahrscheinlichkeit zu messen, bedeutet gerade über das einfache Abzählen "günstiger" Fälle hinaus immer auch den komplexen Charakter dieses Meßprozesses im Auge zu behalten, d.h. die durch den Eingriff des Erkenntnissubjekts hervorgerufenen Reibungen, Abweichungen und Unregelmäßigkeiten als wichtigen Aspekt der Messung selbst anzuerkennen.
Der Stochastikunterricht kann nicht von einer "fertigen" Definition der Wahrscheinlichkeit ausgehen, etwa einer zu Beginn einmal gegebenen festen Beziehung zwischen Wahrscheinlichkeit und Häufigkeit; der Akzent in der Entwicklung der Stochastik muß verschoben werden auf das Verhältnis von Wahrscheinlichkeit zu relativer Häufigkeit, von Theorie zu Empirie. Dies bedeutet insbesondere, daß der von uns als Beschreibungsproblem gekennzeichneten Besonderheit der Wahrscheinlichkeitstheorie verstärkt im Unterricht Rechnung getragen werden muß. Für die Beziehung zwischen Wahrscheinlichkeit und relativer Häufigkeit heißt dies etwa, daß im Verlaufe des Kurses die anfangs gemachten Aussagen, daß sich die relative Häufigkeit ungefähr, in etwa und um die Wahrscheinlichkeit einpendelt mit Hilfe wahrscheinlichkeitstheoretischer Methoden analysiert und präzisiert werden. So stellt etwa ganz allgemein

der Verteilungsbegriff zur Beschreibung und Klärung dieses Zusammenhangs theoretische Mittel zur Verfügung.

Die Tendenz im vorliegenden Kurs, eine möglichst universelle Definition von Wahrscheinlichkeit mittels relativer Häufigkeit zu geben, zeigt sich sehr deutlich an der Stelle, wo die Gleichwahrscheinlichkeit eingeführt wird: "Zufallsexperimente, bei denen alle Ausfälle (bei genügend großen Stichprobenumfängen) dieselbe relative Häufigkeit besitzen, sind etwas Besonderes. In solchen Fällen sagt man auch:
Alle Ausfälle sind gleichmöglich oder gleichwahrscheinlich" (Bigalke, Bd. 7, 1975, S. 65).
In solchermaßen universellen Definitionen wird jedoch das Verhältnis der Theorie zu ihren Anwendungsgegenständen zu stark und einseitig fixiert; dies steht den besonderen Problemen der Wahrscheinlichkeitstheorie entgegen, denn hier kann es letztlich nur "lokale", d. h. von inhaltlichen und zeitlichen Bedingungen der konkreten Situation abhängige Lösungen in diesem Verhältnis geben, nie allgemeingültige.

Dies führt dann auch zu kritischen Punkten in den anderen Problembereichen der Stochastik. So wird etwa u. E. das Konzept des stochastischen Denkens bzw. der Modellgebrauch zu stark in der Begründung des Wahrscheinlichkeitsbereichs auf ein "reines" Zufallsgenerator-Modell abgehoben. Dieser tendenziellen Einseitigkeit auf den reinen Zufall entspricht auch die schon kritisierte Behandlung ontologischer Vorstellungen zur Stochastik im Abschnitt "Indizien für den Zufall". Auch hier wird stärker der Gegensatz von Zufall und Kausalität als ihr Zusammenhang betont.
Diesen Problemen könnte man wirkungsvoll begegnen, wäre die anfängliche Definition von Wahrscheinlichkeit nicht zu stark von vornherein festgelegt. Es wäre etwa nützlicher, schon zu Beginn anhand einfacher Beispiele auf das Verhältnis von elementaren inhaltlichen Aspekten (wie beispielsweise die Symmetrie beim Würfel) und statistischen Parametern und ihr

Zusammenwirken aufmerksam zu machen (vgl. die Diskussion in Kap. IV. 2.2. zur Kritik an der Laplaceschen Philosophie im Stochastikunterricht). Dies verhindert von Anfang an eine zu starke Entgegensetzung von Zufall zu Kausalität.

Kommen kritische Aspekte in ontologischen und epistemologischen Fragen zur Wahrscheinlichkeitstheorie vor allem durch die in der vorgenannten Begründung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs sich zeigende "direkte" und unmittelbare Beziehung von Theorie zu Empirie hinein, so ist positiv hervorzuheben, daß solche Mängel zu einem großen Teil durch die Aufgaben und Beispiele wieder wettgemacht werden. Hier wird mit diesem Verhältnis kritischer umgegangen; es wird deutlicher zwischen einerseits theoretisch-inhaltlichen Annahmen und andererseits empirisch beobachteten Größen unterschieden.
Als letzten Punkt wollen wir festhalten, daß der Tendenz einer "universellen" Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie ganz allgemein in Form des Zufallsgenerator-Modells letztlich der für die Stochastik so zentrale Begriff der Unabhängigkeit völlig zum Opfer fällt.
Nirgendwo wird dieser Begriff, der ja eine mathematische "Umsetzung" der Zufälligkeit ermöglichen soll, explizit behandelt, er bleibt für den gesamten Kursverlauf <u>implizit</u> in den Konstruktionsmerkmalen des stochastischen Modells. Zufälliges Werfen eines Würfels oder Ziehen aus einer Urne usw. sind ohne weitere Diskussionen oder Anmerkungen "unabhängig". Natürlich kann nicht von Beginn an die mathematische Definition der Unabhängigkeit Eingang in den Kurs finden, und es ist somit sinnvoll, dieses Konzept zunächst implizit im Modell zu belassen. Der zentralen Stellung dieses Begriffs für die gesamte Stochastik wegen ist es u. E. jedoch unerläßlich, schon in der S I explizit hierauf einzugehen. Vorstellbar ist eine schrittweise Erarbeitung dieses Konzepts anhand verschiedener Beispiele zu offensichtlich abhängigen Situationen und ihre Diskussion. So wäre es etwa sinnvoll, am Problem des Ziehens

mit und ohne Zurücklegen erste Einsichten herauszuarbeiten oder im Zusammenhang mit der Entwicklung des Verteilungsbegriffs abhängige Ereignisse zu studieren, um so die Bedeutung der Unabhängigkeit zu explizieren. Auf diese Weise könnte, ausgehend von einem anfangs implizit und in naiver Weise benutzten Unabhängigkeitsbegriff in beispielhafter Form die Bedeutung dieses Begriffs langsam expliziert und die grundlegende Vorstellung der Unabhängigkeit von Ereignissen als eine "stochastische" Sicht auf die Anwendungen herausgearbeitet werden (vgl. hierzu die Diskussion verschiedener Beispiele zur Unabhängigkeit im Kap. IV. 2.2.).

Trotz wichtiger Kritikpunkte zu diesem Kurs, die sich zentral auf das hier explizierte Verhältnis von Wahrscheinlichkeitstheorie zu realen Anwendungssituationen beziehen, ist es u. E. möglich, bei Berücksichtigung dieser Mängel und einer "Erweiterung" der Grundlegung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs gerade der guten Anwendungsbeispiele und Aufgaben wegen, diesen Kurs insgesamt im Sinne unserer Konzeption eines anwendungsorientierten Stochastikunterrichts zu benutzen.
Auf der Grundlage dieses Kurses "Wahrscheinlichkeitsrechnung in der S I" und der hierzu gemachten kritischen Anmerkungen wollen wir nun konstruktive Vorschläge im folgenden Abschnitt anfügen. Bevor jedoch "Korrektur"-vorschläge gemacht werden, wollen wir zunächst einige konzeptionelle Vorüberlegungen entwickeln, die teilweise als konstruktives Resümee des gesamten didaktischen Kapitels angesehen werden können

IV.3.3 Vorschläge für eine anwendungsorientierte Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs – Ergänzungen zum vorgestellten Stochastikkurs

Der zentrale Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist die wichtige Rolle des Anwendungsbezuges für die Herausbildung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs. Wie kann man nun in einer didaktischen Konzeption für einen Stochastikkurs diesem Anliegen gerecht werden? U.E. kann dies nur dadurch geschehen, daß der Anwendungsbezug selbst zum Entwicklungsmittel gemacht wird, daß mittels des sich präzisierenden und differenzierenden Theorie-Realitäts-Verhältnisses die Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs gesteuert wird.

Gerade für einen wirklichkeitsnahen anwendungsorientierten Mathematikunterricht wird ganz allgemein immer wieder gefordert, daß man die Unterschiede zwischen Modell und Realität beachten solle. "It is crucial that mathematical problems which claim to be applications of mathematics to other disciplines be <u>honest</u> applied mathematics. This means that the relationship between the mathematical model and the situation in the outside world that is being mathematized must be clearly understood. It is rather ridiculous to just use some words from another discipline and then exhibit some equation which is said to be relevant. How was it found? What approximations were made in obtaining this equation? How can it be demonstrated that the mathematical conclusions are meaningful in the original real-world situation?" (Pollak, 1970, S.319/20)

Die Besonderheiten und Schwierigkeiten dieser Anwendungsbeziehung sollen im folgenden für die Stochastik ausgearbeitet und für ihre Entwicklung nutzbar gemacht werden.

Konkret kann dies erreicht werden, so der Vorschlag, indem bewußt eine <u>Modellebene</u>, eine <u>Theorieebene</u> und eine <u>Gegenstandsebene</u> eingeführt werden. Diese Einführung orientiert sich ganz allgemein an dem von Keitel und Otte entwickelten Schema: Gegenstand (Sachverhalt) - Begriff - Zeichenmodell, welches ihnen zur didaktischen Analyse der Entwicklung des Zahlbegriffs dient. (Vgl. Keitel/Otte, 1978, Kap. III) Modell- und Gegenstandsebene stehen in wechselseitiger Beziehung zueinander, sie stützen sich gegenseitig und treiben aneinander die Entwicklung des theoretischen Begriffs voran; auf der Ebene der Theorie wird der jeweilige Entwicklungsstand in Form theoretischer Aussagen kodifiziert.

Wir wollen nun eine erste und vorläufige Präzisierung unseres Schemas Theorie - Modell - Gegenstand (Anwendung) vornehmen.

Unter einem Modell verstehen wir solche wahrscheinlichkeitstheoretischen (idealen und vergegenständlichten) Modellierungen, die es erlauben, im Prinzip aus der idealen Struktur (Form, Symmetrie, Aufbau) des Modells selbst die elementaren Wahrscheinlichkeiten abzulesen. Beispiele solcher Modelle sind der ideale Würfel, das Glücksrad, die Urne, das Kartenspiel usw. Darüber hinaus sind statistische Modelle im Verständnis einer Verbindung von theoretischen und gegenständlichen Aspekten zugleich als konkrete Zufallsgeneratoren zu benutzen. Unser Modellbegriff orientiert sich also stark an dem von Freudenthal (1961, S. 80) gegebenen.

Unter dem Gegenstand der Theorie verstehen wir ganz allgemein die Menge aller möglichen Anwendungen dieser Theorie, d.h. hier die Menge möglicher konkreter Zufallserscheinungen und statistischer Situationen, in denen statistische Beobachtungsgrößen generiert werden.
Die Theorie besteht aus einem formalen System von Aussagen und beinhaltet die Koordination der Modelle und methatheoretische Vorstellungen über das Anwendungsproblem, d.h. den Zusammenhang von Wahrscheinlichkeitstheorie und Realität.

Die hier gegebenen Beschreibungen sind und können natürlich keine im mathematischen Sinne exakte Definitionen sein; vielmehr werden sich diese Begriffe nur gegenseitig und in jeweils konkreten Fällen erklären können. Was genau unter einem Anwendungsgegenstand verstanden wird, hängt von den jeweiligen vorgegebenen konkret-praktischen Bedingungen und auch vom Grade theoretischer Bearbeitungsmöglichkeiten ab. Es handelt sich somit in erster Linie um Vorstellungen, die eine permanente Präzisierung erfahren werden, welche sich in gegenseitiger Konfrontation ergeben wird.

An dieser Stelle läßt sich dies anhand des schon im letzten Abschnitts diskutierten Problems der unzulässigen Identifizierung bzw. Verwischung von Modell und Gegenstand verdeutlichen. So kann entsprechend unserer Auffassung, nach der jeweiligen Sichtweise ein Zufallsgenerator, wie beispielsweise der Würfel, die Urne usw., einmal als Modell, zum anderen jedoch als Gegenstand interpretiert werden. Einerseits wird das Modell, wie oben beschrieben, durch die angenommene ideale Symmetrie des Würfels bzw. das vorgegebene Verhältnis verschiedener Kugelsorten charakterisiert, welche quasi direkt die elementaren Wahrscheinlichkeiten festlegen; benutzt man diese Zufallsgeneratoren zur Erzeugung von statistischen Größen, würfelt man oder zieht man Kugeln, so wird jedoch der gegenstandsspezifische Aspekt betont. Noch deutlicher wird dies anhand des Schlagwortes vom "falschen Würfel". Daß man geradezu von einem falschen Würfel sprechen kann, verweist auf ganz andere Aspekte als nur die idealsymmetrischen des Würfel<u>modells</u>, nämlich auf besondere, diesem falschen Würfel anhaftende Gegenstandsmerkmale. Idealer Würfel einerseits und verfälschter Würfel andererseits stehen jeweils primär als typische Beispiele für Modell bzw. Gegenstand; zudem wird der Unterschied und Zusammenhang von Modell und Gegenstand exemplarisch beleuchtet, da es sich in beiden Fällen um einen Würfel handelt.

Auch anhand der Urne werden Unterschiede sichtbar: Einmal ist die Urne vor allem ein Modell, sie dient aufgrund ihrer Konstruktion, nämlich der Möglichkeit, beliebige Verhältnisse zu realisieren, primär als eine Modellierung konkreter Zufallserscheinungen; ihr gegenständlicher Aspekt wird demgegenüber teilweise sichtbar, wenn man von sogenannten "verdeckten" Urnen spricht, also von Situationen ausgeht, in denen die elementaren Wahrscheinlichkeiten der Urne evaluiert werden müssen.

Für angestrebte didaktische Umsetzungen ist es unbedingt notwendig, sorgfältig diese Unterschiede von theoretischen Modellaspekten und praktischen Anwendungsbezügen zu beachten; dies stellt für unser weiteres Vorgehen eine wichtige Grundorientierung dar.

Der Tatsache, daß in der Stochastik wie in keiner anderen mathematischen Disziplin vom Modellkonzept Gebrauch gemacht wird, ist auch in der Didaktik Rechnung zu tragen. Zudem besteht der Vorteil des stochastischen Modells für Lernsituationen u.E. darin, daß es zum einen einfache ideale Wahrscheinlichkeiten mittels struktureller Modellmerkmale repräsentiert und zum anderen den Grundkalkül der Wahrscheinlichkeitstheorie, also Additions- und Multiplikationstheorem in elementarer Weise vergegenständlicht. Das Modell stellt somit idealisierte Teilaspekte einer recht komplexen mathematischen Begriffsstruktur in einheitlicher Weise dar und erlaubt darüber hinaus, mit der strukturellen Vielfalt des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in direkter Weise umzugehen bzw. "gegenständlich" mit ihm zu operieren, anstatt diesen Grundrahmen quasi im Vorhinein analytisch aus Einzelaspekten erst sukzessive aufbauen zu müssen. Mit anderen Worten, das stochastische Modell berücksichtigt in seiner Doppelperspektive auf die theoretischen <u>und</u> gegenständlichen Aspekte von Beginn des Lernprozesses an den Bezug zur Realität, und es beinhaltet in einer impliziten, keimhaften Weise letztlich schon alle wichtigen theoretischen Grundrelationen, die es im Laufe der

Entwicklung von den Vergegenständlichungen abzulösen und in immer differenzierterer Form herauszuarbeiten gilt. Ja, man könnte fast sagen, schon das elementare ideale Modell des Würfels etwa beinhaltet, wenn auch in anderer, nämlich gegenständlicher Form und viel elementarer, dieselben Grundregeln, wie sie sich nach langen Entwicklungen in der Axiomatik des Wahrscheinlichkeitsbegriffs zeigen.

Worin besteht nun im Grunde der Zusammenhang zwischen der Modell- und Gegenstandsebene? Was erlaubt es, hier eine Verbindung, eine Beziehung zu etablieren? Von großer Wichtigkeit ist hierfür der Unabhängigkeitsbegriff, und zwar gerade in seiner doppelten Funktion: Einmal als Ausdruck der empirischen Unabhängigkeit, der "Beziehungslosigkeit" zwischen Ereignissen, zum anderen als Ausdruck der theoretischen Möglichkeit, Wahrscheinlichkeiten unabhängiger Ereignisse zu multiplizieren. Dieses Verständnis und der Umgang mit dem Unabhängigkeitsbegriff steckt auch von Anfang an in der Modell-Gegenstands-Struktur: So ist die sukzessive Erzeugung von Zufallsdaten in konkreten Situationen "nur" verstehbar, wenn man im Prinzip von der Unabhängigkeit der einzelnen Experimente ausgehen kann. Auf der Modellebene wird dieser Sachverhalt durch die Kombination mehrerer gleicher Modelle (etwa ein zehnmal hintereinander ausgeführtes Experiment durch gleichartige Modelle) dargestellt. Dies erfordert die Wahrscheinlichkeit des Mehrfach-Experimentes als die Multiplikation der elementaren Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen. In der einfachen Situation des idealen "Doppelwürfels" geschieht dies wie beim Ausgangsmodell des idealen Würfels etwa durch Auszählen der nun vorhandenen Möglichkeiten, was es erlaubt, die hypothetische Gleichwahrscheinlichkeit des kombinatorischen Modells zu errechnen.
In dieser Weise verbindet somit der Unabhängigkeitsbegriff Modell- und Gegenstandsebene; er stellt ein Bindeglied zwi-

schen theoretischen und empirischen Aspekten dar. Diese Verbindung, daran sei nochmals erinnert, kann nicht in universalistischer Weise a priori hergestellt werden. Die Kennzeichnung des Unabhängigkeitskonzepts als "Variable" (vgl. Kap. IV.2.3) bringt dies zum Ausdruck. Als syntaktische Relation stellt er eine fixierte Beziehung dar, die jedoch empirisch variabel in den jeweiligen Anwendungszusammenhängen ausgefüllt werden muß. Dies hat für den Stochastikunterricht zur Folge, daß dieser Begriff während der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie permanent präzisiert werden muß, ausgehend von seiner Bedeutung als eine erste intuitive empirische Orientierung auf den Gegenstand.

Damit haben wir eine erste Vorstellung von der beziehungsreichen Grundstruktur für die Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs umrissen: nämlich die bewußte Einführung von theoretischer Modell- und realer Gegenstandsebene samt den nach und nach im jeweiligen Bereich zu entwickelnden Methoden und Verfahren sowie den Vorstellungen über das wahrscheinlichkeitstheoretische Anwendungsproblem, die in der Theorie zusammengefaßt werden.
Auf der Grundlage dieser zunächst allgemeinen Perspektive wollen wir uns nun wieder dem Stochastikunterricht zuwenden und konstruktive Ergänzungen anfügen, die zudem unser Konzept konkretisieren sollen. Dazu schein es sinnvoll zu sein, sich exemplarisch in größerer Ausführlichkeit einigen wichtigen Punkten des Kurses zu widmen. Bedeutsam sind nach dem bisher Gesagten die Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs (sowie der beispielhafte Übergang von Gleichwahrscheinlichkeit zum Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsbegriff), die Stellung des Unabhängigkeitsbegriffs und die Kennzeichnung der relativen Häufigkeit als statistischem Parameter auf der Grundlage des Verteilungsbegriffs.

a) Einstiegsphase

Entsprechend unserer Grundorientierung, daß von dem "Begriffsfeld" Wahrscheinlichkeit - Unabhängigkeit - relative Häufigkeit (vgl. Kap. IV.2.3) parallel zum Schema Theorie - Modell - Gegenstand(Anwendung) in der Entwicklung der Stochastik ausgegangen werden sollte, bieten sich zum Einstieg einfache stochastische Simulationsaufgaben an.

Beispiel eines solchen Ausgangsproblems ist etwa die Aufgabe der Entenjagd:"6 Jäger, lauter vollkommene Schützen, gehen auf Entenjagd. Sie lauern am Ufer eines kleinen Teiches. Bald landen im Teich 6 Enten. Die Jäger schießen gleichzeitig, aber jeder wählt sein Opfer zufällig aus. Wieviele Enten überleben, wenn dies oft wiederholt wird?"

Da sich ein reales Experiment mit Jägern und Enten nicht durchführen läßt, ergibt sich die Frage, wie man die hier vorgestellte Situation im Klassenraum simulieren könnte. Stellt man einige ideale Zufallsgeneratoren, wie etwa Münze und Würfel, zur Verfügung, so wird man schnell auf die Idee kommen, durch den Würfelwurf die Entenjagd zu simulieren: Die gewürfelte Augenzahl gibt an, welche der Enten abgeschossen wurde; sechs Würfe hintereinander oder von 6 Schülern durchgeführt, ergeben dann jeweils die Anzahl abgeschossener bzw. überlebender Enten. Darüber hinaus wird nun dieses Experiment mehrfach, vielleicht zehnmal, durchgeführt, um so zu einem ungefähren Durchschnittswert überlebender Enten zu gelangen.

Was ist in die Simulation hineingesteckt worden, von welchen Begriffen und Zusammenhängen wird implizit ausgegangen?

Zunächst wird die Tatsache, daß jeder sein Opfer zufällig auswählt, in das Modell des idealen Würfels übertragen: Im Grunde steht hier hinter die Annahme, daß ein Jäger mit gleicher Wahrscheinlichkeit eine der 6 Enten auswählt, was nun durch den idealen Würfel simuliert werden soll. Die weitere Annahme, daß es sich um vollkommene Schützen handelt, bedeutet, daß keiner daneben schießt, daß also in jedem Experiment eine bestimmte Zahl fällt. Die überhaupt nicht thematisierte Annahme, welche jedoch implizit in dem Moment der Zufälligkeit steckt, daß es sich nämlich um unabhängige Experimente der 6 Jäger handelt, d.h. daß etwa keine Absprachen zwischen den Jägern vorgenommen wurden, manifestiert sich hier zunächst implizit darin, daß die Würfelexperimente, das Werfen einzelner Würfel bzw. ein Wurf von 6 Würfeln unabhängig sind.

Als weitere grundlegende Beziehung geht in den Experimentverlauf die Tatsache ein, daß mehrere Versuche, etwa zehn, immer genauer eine Abschätzung des gesuchten Durchschnittswertes überlebender Enten liefern. Dies ist eine elementare Form des empirischen Gesetzes der großen Zahlen: Je mehr Experimente simuliert werden, desto stärker ergibt die festgestellte relative Häufigkeit den "wirklichen" Durchschnittswert überlebender Enten.

Man sieht also, welch komplexer Grundrahmen in die Bearbeitung dieses Simulationsproblems eingeht: die Wahrscheinlichkeit, hier ideale Gleichwahrscheinlichkeit, die relative Häufigkeit, der Unabhängigkeitsbegriff und eine erste intuitive Vorstellung über den Zusammenhang von relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit.

In ihrer einfachen und elementaren Form erlaubt die hier gestellte Aufgabe, mit Hilfe zur Verfügung gestellter passender Zufallsgeneratoren eine erste und naive Lösung zu "berechnen".

Es sollte nicht nur eine einzige, sondern eine Vielfalt unterschiedlicher einfacher Simulationsaufgaben und stochastischer Spiele, wie sie sich beispielsweise in den Büchern von Glayman/Varga (1975) und Engel/Varga/Walser (1974) finden, zum Einstieg in die Stochastik herangezogen werden. Uns diente die hier vorgestellte Aufgabe primär dazu, beispielhaft zu verdeutlichen, wie man gleich zu Beginn das Moment der Zufälligkeit ("Randomness") als einen zentralen Begriff berücksichtigen sollte und ihn auch mit Hilfe elementarer stochastischer Modelle auf Grund des zunächst noch fehlenden wahrscheinlichkeitstheoretischen Kalküls auch in Ansätzen "bearbeitbar" machen kann.

Für Aufgaben dieses Typs gilt es im folgenden, intuitiv eingehende Begriffe und Konzepte zu explizieren: In einem ersten Schritt sollten notwendige Konventionen und Bezeichnungen eingeführt werden wie Ereignis, Ausfall, Ereignisraum, Stichprobe, relative Häufigkeit usw. In einem zweiten Schritt sollte die eingehende Grundbeziehung, wie sie sich im empirischen Gesetz der großen Zahlen zeigt, diskutiert und ihre Problematik angesprochen werden, nämlich das Schwanken von Häufigkeiten um Wahrscheinlichkeit.

Die in diesem Stadium verwendeten Zufallsgeneratoren der idealen stochastischen Modelle wie Münze, Würfel, Roulette motivieren auf Grund ihrer Struktur (Symmetrien) die Erwartung der Stabilisierung von Häufigkeiten, wenn man mit diesen Generatoren experimentell tätig wird.

In einer zweiten Phase gilt es dann, die Begriffe von Gleichwahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit zu diskutieren; Gleichwahrscheinlichkeit ist zu verallgemeinern etwa auf den Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsbegriff (bzw. geometrischen Wahrscheinlichkeitsbegriff) und der Unabhängigkeitsbegriff sollte später anhand von Versuchen mit abhängigen Ereignissen deutlich gemacht werden. Die jeweilige Definition von Wahrscheinlichkeit orientiert sich an der Struktur des entsprechenden stochastischen Modells: Die Struktur des Modells (Verhältnisse von Kugelsorten im Urnenmodell, Anzahl der Seiten eines ideal symmetrischen Würfels usw.) "definiert" die jeweilige Wahrscheinlichkeit. Da für neuartige Situationen jeweils passende Modelle konstruiert werden müssen, wird deutlich, daß Wahrscheinlichkeiten nicht a priori vorgegeben sind, sondern vom Zusammenhang zwischen empirischen Größen und theoretischen Annahmen abhängen.

Sind bis hierher ideale Zufallsgeneratoren wie Würfel, Münze, Roulette ohne weitere Diskussion zur Simulation und Berechnung benutzt worden, so sollte im folgenden das Augenmerk auf die implizit in den Modellen steckende Annahme, daß es sich um ideale Gleichverteilungen handelt, gerichtet werden. Hierzu eignet sich, in den Unterricht einen gezinkten Würfel, etwa durch eine Bleiplatte an einer Seite erschwert oder durch Unsymmetrien im äußeren Aufbau gekennzeichnet, einzuführen. Die Frage an die Klasse lautet dann etwa: Kann man mit einem solchen Würfel auch die Entenjagd simulieren? Welche Wahrscheinlichkeiten erwartet Ihr für die jeweiligen Ausfälle? Die Schüler sollten durch diese Fragen erkennen, daß es sich einerseits bei der bisherigen Benutzung von Zufallsgeneratoren um implizit benutzte Hypothesen handelt und zum anderen einen Zusammenhang zwischen der Gestalt, dem Aufbau, dem "Inhalt" des Zufallsgenerators und der von ihm produzierten Wahrscheinlichkeitsverteilung vermuten.

Vermutungen über einen gezinkten Würfel könnten etwa darauf hinauslaufen, daß es wahrscheinlicher ist, daß die schwere Seite des Würfels nach unten als nach oben fällt, also daß die der schweren Platte gegenüberliegende Augenzahl häufiger als bei einem gleichwahrscheinlichen Würfel auftreten wird. Wie läßt sich diese Hypothese experimentell überprüfen? Es bietet sich als der natürlichste Weg an, mit dem gezinkten Würfel Zufallsexperimente durchzuführen, um so mittels Häufigkeiten die Wahrscheinlichkeit des Würfels festzustellen, ja die "Falschheit" des Würfels zu überprüfen. Dabei stellen sich auch natürlich wieder Fragen danach, wieviel Experimente müssen durchgeführt werden, um mit einiger Sicherheit sagen zu können, daß der Würfel gefälscht ist bzw. um mit Sicherheit sagen zu können, welche Wahrscheinlichkeitsverteilung zur Beschreibung dieses Würfels angemessen ist.

Hat man "ungefähr" die abweichende Wahrscheinlichkeit des falschen Würfels ermittelt, so läßt sich nun diese Un-Gleichwahrscheinlichkeit mit einem Zufallsgenerator, nämlich der Urne, simulieren: Entsprechend den neuen Werten könnte man etwa verschiedenfarbige Kugeln im jeweiligen Verhältnis in einer Urne als Zufallsgenerator und Simulationsmodell für den gezinkten Würfel benutzen. Die Urne stellt ein typisches Zufallsinstrument für die Laplacesche Wahrscheinlichkeit dar: Konnte beim Würfel die Gleichwahrscheinlichkeit durch die Form des Zufallsgenerators definiert werden, so kann auch hier bei der Urne die Laplacesche Wahrscheinlichkeit durch die Verhältnisse zugrundegelegter Kugelsorten angegeben werden. Auch für diesen Zufallsgenerator gilt wieder, daß die relative Häufigkeit sich mit der Anzahl der Versuche ungefähr der Wahrscheinlichkeit, wie sie im Zufallsmodell repräsentiert wird, nähert. Problem hierbei ist wiederum dieses Verhältnis des ungefähr, in etwa usw. von Wahrscheinlichkeit und relativer Häufigkeit.

Zum einen dient das Urnenmodell dazu, weitere Konzepte und kombinatorische Verfahren zu entwickeln und bisherige einfache Sätze der Wahrscheinlichkeitstheorie wie den Additionssatz und Multiplikationssatz auf das allgemeinere Urnenmodell zu übertragen und zu verallgemeinern. Zum anderen lassen sich nun von der Perspektive des Urnenmodells her kompliziertere Aufgaben diskutieren und simulieren.

b) Der Unabhängigkeitsbegriff

Ähnlich wie man einen Widerspruch zur bisherigen Situation durch das Modell des falschen Würfels hervorgerufen hat, kann man nun einen Widerspruch zur bisherigen Situation durch abhängige Zufallsereignisse provozieren: Dies soll dazu dienen, deutlicher auf bisher implizit benutzte Annahmen zu rekurrieren.

Eine besonders empfehlenswerte Aufgabe in diesem Zusammenhang ist das sogenannte Buchstabenraten (vgl. Bognàr/Nemetz, 1977). Hierbei geht es darum, in einem vorgegebenen Text Häufigkeiten bzw. das Auftreten bestimmter Buchstaben (unter verschiedenen Vorbedingungen) zu erraten. So wird etwa einmal gefordert, den Anfangsbuchstaben eines Satzes, dann jeden zehnten Buch-

staben vorherzusagen und schließlich bei Kenntnis eines Buchstabens den jeweils nachfolgenden anzugeben.
Vereinfacht man beispielsweise das Buchstabenraten auf die Vorhersage von Vokal oder Konsonant, so wird exemplarisch deutlich: Von jedem zehnten Buchstaben zu sagen, ob er ein Vokal oder ein Konsonant ist, ist unabhängig vom vorherigen Ereignis, während jedoch eine Abhängigkeit festzustellen ist, soll man für jeden nachfolgenden Buchstaben angeben, ob es sich um Vokal oder Konsonant handelt.
Literarische Texte eignen sich gut als Anwendungsbeispiele für die Untersuchung von Zufälligkeit, Unabhängigkeit und Abhängigkeit.

Der hier erarbeitete Begriff der Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit kann an einem weiteren einfachen Beispiel verdeutlicht werden: etwa dem Ziehen aus einer Urne mit Zurücklegen und ohne Zurücklegen. Des weiteren könnte vielleicht eine erste Vorstellung vom Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit hieran entwickelt werden. Vor allem ist jedoch die Bedeutung der Unabhängigkeit für das Hintereinanderausführen mehrerer Versuche und die Interpretation dieses Mehrfachversuches als eines neuen Zufallsexperimentes zu diskutieren: Die Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten verschiedener Einzelversuche ist nur dann "gestattet", wenn es sich bei den Einzelversuchen um unabhängige Ereignisse handelt.

Die bisherigen Überlegungen betreffen in erster Linie erste elementare Beispiele zur Explizierung des Unabhängigkeitskonzepts. Auf dieser Grundlage ist es dann im weiteren Kursverlauf möglich, bei Behandlung <u>neuartiger</u> Anwendungssituationen auch die Frage nach Abhängigkeiten bzw. Unabhängigkeiten in die Frage nach den Bedingungen der Anwendung miteinzubeziehen und so das Unabhängigkeitskonzept weiterzuentwickeln. Später sollte etwa vor allem bei der Aufstellung von Verteilungen, wie etwa der Berechnung der Binomialverteilung die Bedeutung der Unabhängigkeit hierfür aufgegriffen werden.

c) <u>Relative Häufigkeit als ein statistischer Parameter</u>

Der Verteilungsbegriff dient zum einen zur Analyse von Mengen empirisch beobachteter Zufallsdaten; zum anderen gestattet er beispielhaft die statistische Charakterisierung von "Zufalls"-Parametern.
Beispiel einer Anwendungssituation, in welcher empirische Verteilungen (Diagramme) mit theoretisch-berechneten verglichen werden, um so Aufschlüsse über die Grundwahrscheinlichkeiten zu erlangen, ist die Aufgabe im Lehrwerk (Bigalke, 1976, Bd.9, S.60f) zum Problem der Jungen- und Mädchenverteilung in Familien mit vier Kindern. Hierauf wollen wir im folgenden nochmals ausführlich eingehen und mögliche weitere Ergänzungen diskutieren.

Die Verteilung einer vorgegebenen Untersuchung von 120137 Familien mit jeweils 4 Kindern wird mit verschiedenen berechneten (möglichen) Verteilungen, die aufgrund bestimmter Annahmen elementarer Wahrscheinlichkeiten ermittelt werden, verglichen.

Die empirische Verteilung läßt sich beispielsweise folgendermaßen kennzeichnen:

Familien mit Jungen	4	3	2	1	0
	8628	31611	44793	28101	7004

(vgl. Bigalke, 1975, Bd. 9, S. 60)

Die erste Annahme besteht nun darin, die 5 Ereignisse 4, 3, 2, 1 und 0 Jungen in einer Familie mit 4 Kindern vorzufinden, sind <u>gleichwahrscheinlich</u>, also $\frac{1}{5}$.
Dann ergäbe sich folgende theoretisch ermittelte (Gleich-) Verteilung:

Familien mit Jungen	4	3	2	1	0
	24027	24027	....	....	....

Die zu großen Abweichungen zwischen beiden Verteilungen führen dazu, die getroffene Annahme der Gleichwahrscheinlichkeit von $\frac{1}{5}$ zu verwerfen und eine neue Annahme aufzustellen: Die Wahrscheinlichkeit von Jungen- und Mädchengeburten ist gleichgroß und beträgt also $\frac{1}{2}$. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit der hier behandelten Ereignisse 4, 3, 2, 1 und 0 Jungen in einer Familie mit 4 Kindern?
Üblicherweise werden diese Wahrscheinlichkeiten so berechnet (Bernoulli-Formel):

$$p(4) = (\tfrac{1}{2})^4 = 0{,}0625$$

$$p(3) = (\tfrac{4}{3})\ (\tfrac{1}{2})^3 \cdot (\tfrac{1}{2})^1 = 4 \cdot 0{,}0625 = 0{,}25$$

$$p(2) = (\tfrac{4}{2})\ (\tfrac{1}{2})^2 \cdot (\tfrac{1}{2})^2 = 6 \cdot 0{,}0625 = 0{,}375$$

$$p(1) = p(3) = 0{,}25$$

$$p(0) = p(4) = 0{,}0625$$

In elementarer Weise läßt sich mit Hilfe eines Baumdiagramms (vgl. Bigalke a.a.O., S. 61) die theoretische Verteilung ermitteln, indem alle möglichen Wege von Jungen- und Mädchengeburten für 4 aufeinanderfolgende Geburten verfolgt werden, und dann die Anzahlen der Wege, in denen jeweils die vorkommenden Geburtsverhältnisse übereinstimmen aufsumiert.
Man gelangt zu dem folgenden Resultat:

Familien mit Jungen	4	3	2	1	0
	$\sim$7508	$\sim$30034	$\sim$45051	$\sim$30034	$\sim$7508

Offensichtlich stimmt diese Verteilung mit der empirischen besser überein: Zunächst handelt es sich hierbei um keine Gleichverteilung, die niedrigen und hohen Werte sind besser angepaßt; jedoch handelt es sich hierbei um eine symmetrische Verteilung. Demgegenüber drückt die empirische Verteilung eine Unsymmetrie aus, welche darauf hinweist, daß Jungengeburten wohl etwas häufiger als Mädchengeburten sind, was aus dem "Übergewicht nach links" in der empirischen Verteilung abzulesen ist.
Welche neue Hypothese für die elementare Wahrscheinlichkeit soll aufgestellt werden?

Es wird angenommen, daß die relative Häufigkeit ein besseres Maß für die gesuchte elementare Wahrscheinlichkeit darstellen wird. Wie groß ist die relative Häufigkeit der Jungengeburten für das betrachtete Datenmaterial? Bzw. wieviele Jungengeburten gibt es auf 120137 Familien mit 4 Kindern?

Es sind:

$$4 \cdot 8628 + 3 \cdot 31611 + 2 \cdot 44793$$
$$+ 1 \cdot 28101 + 0 \cdot 7004$$
$$= 247032 \text{ (Jungen)},$$

bei $4 \cdot 120137 = 480548$ Geburten insgesamt.

Somit beträgt die relative Häufigkeit einer Jungengeburt:

$$\frac{247032}{480548} = 0{,}514$$

Wie sieht die zugehörige theoretische Verteilung nun aus?

Nach der Bernoulli-Formel ergibt sich wiederum:

$$p(k) = \binom{4}{k} (0{,}51)^k \cdot (0{,}49)^{4-k}$$

$$p(4) = (0{,}51)^4 = 0{,}067652$$

$$p(3) = 4 \cdot (051)^3 \cdot 0{,}49) = 0{,}2599956$$

$$p(2) = 6 \cdot (0{,}51)^2 \cdot 0{,}49)^2 = 0{,}3747$$

$$p(1) = 4 \cdot (0{,}51) \cdot (0{,}49)^3 = 0{,}2400036$$

$$p(0) = (0{,}49)^4 = 0.057648$$

Die Verteilung lautet:

Familien mit Jungen	4	3	2	1	0
	∿8127	∿31235	∿45015	∿28833	∿6925

Diese Verteilung stimmt von allen bisher ermittelten am genauesten überein; auch die Unsymmetrie wird wie erwartet berücksichtigt.

Zwar gibt es noch Abweichungen, so liegen etwa manche Werte über und manche unter den empirischen, jedoch scheint nun eine sehr gute Verteilung und damit ein recht guter Wert für die angenommene elementare Wahrscheinlichkeit gefunden worden zu sein.

Hier läßt sich die Frage anschließen, ob es wohl sinnvoll sei, eine Ausgangswahrscheinlichkeit derart zu suchen, so daß eine "exakte" Übereinstimmung zwischen empirischer und theoretischer Verteilung vorliegt. Die Diskussion dieses Problems führt dahin, daß eine "exakte" Übereinstimmung deshalb unmöglich ist,da auf Grund der Zufälligkeit eine andere "Stichprobe" von 120137 Familien sehr wohl geringe Abweichungen innerhalb zu erwartender Grenzen mit sich bringen wird. Die ideale theoretische Verteilung beschreibt nur "ungefähr" innerhalb zulässiger Schwankungen mögliche empirische Verteilungen. Beide verhalten sich zueinander wie die (ideale) Wahrscheinlichkeit und die relative Häufigkeit; jedoch erlaubt der Verteilungsbegriff auf Grund seiner komplexeren Struktur einen besser beurteilbaren Vergleich.

Stand wie bisher ausführlich und beispielhaft dargelegt der Vergleich von empirischen und theoretischen Verteilungen im Vordergrund, so wollen wir nun im folgenden demgegenüber zeigen, wie die bisher entwickelten Begriffe und Methoden der Wahrscheinlichkeitsverteilung dazu benutzt werden können, um deutlicher die Aussage verstehen und beurteilen zu können, daß die relativen Häufigkeiten bei wachsender Anzahl der Versuche sich mehr und mehr um die Wahrscheinlichkeit herum stabilisieren.

Im obigen Fall wurde zuletzt die Wahrscheinlichkeit einer Jungengeburt durch die relative Häufigkeit von $p = 0.51$ angesetzt; dies mag für eine so große Stichprobe von $4 \cdot 120137 = 480548$ Geburten ohne weitere Diskussion hingenommen werden können.

Im gesamten Kursverlauf sollte immer deutlich auf den Unterschied von Wahrscheinlichkeit und relativer Häufigkeit aufmerksam gemacht werden: So können etwa relative Häufigkeiten für verschiedene Stichproben verschieden sein, d.h. um einen bestimmten Wert schwanken etwa. Der Verteilungsbegriff hilft uns nun, dieses Schwanken, diese Abweichungen der relativen Häufigkeit von der Wahrscheinlichkeit besser zu verstehen.

Dazu betrachten wir wiederum das Problem von Jungen- und Mädchengeburten. Doch diesmal unter einer anderen Perspektive.

Ausgehend von derselben elementaren Fragestellung wie bei Bernoulli wollen wir feststellen, wie sich unter der Annahme einer Grundwahrscheinlichkeit p die relative Häufigkeit des Ereignisses verhält (vgl. Kap. II.1).

Die Wahrscheinlichkeit für die Geburt eines Jungen sei $p = \frac{1}{2}$. Nun werden, entsprechend der oben schon benutzten Techniken mehrere ideale Verteilungen ermittelt: Es werden die Verteilungen berechnet in einer Stichprobe von

k Kindern (k = 4, 5, 6, 7, ...)
n Jungen (n = 0, 1, 2, ... k)

anzutreffen. (Anzumerken ist hier, daß man bei einer Stichprobe von k Kindern schlecht allgemein von einer Familie mit k Kindern sprechen kann; man sollte vielleicht von einer Schulklasse ausgehen.)

Für 4 Kinder wurde dies schon gemacht:

Anzahl der Jungen bei 4 Kindern	4	3	2	1	0
Wahrscheinlichkeit :	0,0625	0,25	0,375	0,25	0,0625

Es seien einige Beispiele weiterer Verteilungen angeführt:

Anzahl der Jungen bei 6 Kindern	6	5	4	3	2	1	0
Wahrscheinlichkeit	0,015625	0,09375	0,234375	0,3125	0,234375	0,09375	0,015625

Anzahl der Jungen bei 8 Kindern	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Wahrscheinlichkeit	0,0039	0,0312496	0,1093736	0,2187472	0,2734434	0,2187472	0,1093736		

Anzahl der Jungen bei 10 Kindern	10	9	8	7	6	5	4
Wahrscheinlichkeit	0,0009765	0,009765	0,043942	0,11718	0,205065	0,246078	

Diese Verteilungen sollten diskutiert werden:
Offenbar hat jeweils das Ereignis, bei dem gleichviel Jungen wie Mädchen geboren werden, immer die größte Wahrscheinlichkeit.

Eine graphische Darstellung der berechneten Verteilungen bringt dies noch deutlicher zum Ausdruck: Das Maximum der Kurve befindet sich gerade bei diesem Ereignis.
Dem fällt nun im Vergleich der sich verändernde Verlauf der Kurven auf:
Je größer die betrachteten Stichprobenumfänge sind, desto "steiler" und "spitzer" ist das Maximum der entsprechenden Verteilungskurve.

Neben der graphischen Darstellung dieses Sachverhaltes bietet sich hierfür im Unterricht eine Veranschaulichung mit Hilfe verschiedener Galtonbretter an. Entsprechend einer Zunahme von Nägelreihen wird eine immer spitzer werdende Verteilung der durchlaufenden Kugelmenge erfolgen.

Insgesamt bedeutet dies: Je mehr Versuche gemacht werden, desto größer wird der Flächenanteil der Kurve in einer vorgegebenen Umgebung um den "wahrscheinlichsten" Wert, bzw. die wahrscheinlichsten Werte möglicher auftretender relativer Häufigkeiten (das sind solche Werte, die einen relativ großen Funktionswert haben) befinden sich nahe bei der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit. Dies läßt sich elementar so formulieren: Bei zunehmender Anzahl der Versuche wird es immer wahrscheinlicher, daß die auftretende relative Häufigkeit nahe bei der Wahrscheinlichkeit liegen wird.

Auf diese Weise gewinnt man für ein einfaches Beispiel eine intuitive Darstellung von Bernoullis Theorem; die sich charakteristisch ändernden Verteilungen bei zunehmendem Stichprobenumfang machen anschaulich deutlich, daß die "Annäherung" der relativen Häufigkeit an die (angenommene) Wahrscheinlichkeit selbst immer *wahrscheinlicher* wird.

Natürlich stellt dies in keiner Weise einen exakten mathematischen Beweis dar; diese Überlegungen liefern jedoch erste wichtige Einsichten in die Struktur des Zusammenhangs von Wahrscheinlichkeit und relativer Häufigkeit. Hier wird exemplarisch deutlich, daß dieser Zusammenhang selbst wieder statistisch interpretiert werden muß.

Im Stochastikunterricht könnte auf dieser Grundlage in verschiedener Weise weiter vorgegangen werden. Zum einen könnte man es nach intensiven Diskussionen bei solch einer ersten intuitiven Formulierung des Zusammenhangs von relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit als einer ersten Präzisierung des Gesetzes der großen Zahlen belassen. Andererseits könnten weitere mathematische Präzisierungen hieran vorgenommen werden. So wäre es etwa sinnvoll, nicht nur für den Wert $p = \frac{1}{2}$ die Verteilungen aufzustellen, sondern auch andere Wert zu nehmen, wie etwa $p = 0{,}51$ oder $p = \frac{1}{3}$, um so beispielhaft zu zeigen, daß die Aussage selbst nicht von der Wahl der Wahrscheinlichkeit p abhängt.

In diesem Falle nicht-symmetrischer Binomialverteilungen ist es zunächst notwendig und auch relativ elementar möglich, allgemein den Zentralwert, d.h. den Wert mit der (relativ) größten Wahrscheinlichkeit zu ermitteln. (vgl. hierzu Feller, 1968, S.150f). Dazu wird das Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten für k und k-1 Erfolge berechnet:

$$\frac{b(k,n,p)}{b(k-1,n,p)} = \frac{n!\,p^k q^{n-k}\,(n-k+1)!\,(k-1)!}{(n-k)!\,k!\,n!\,p^{k-1}\,q^{n-k+1}}$$

$$= \frac{(n-k+1)p}{k \cdot q} = 1 + \frac{(n+1)p-k}{k \cdot q}$$

Hieraus läßt sich ablesen, daß b(k,n,p)

für $k < (n+1)p$ <u>größer</u>, und

für $k > (n+1)p$ <u>kleiner</u> als

der vorausgehende Term ist. Das maximale k_o liegt also zwischen

$$(n+1)p-1 \leq k_o \leq (n+1)p.$$

Aus dieser Ungleichung läßt sich neben dem Zentralwert k_o auch die folgende Eigenschaft ableiten:

$$p - \frac{1-p}{n} \leq \frac{k_o}{n} \leq p + \frac{p}{n} \quad .$$

(vgl. Gnedenko/Chincin, 1973, S.63ff).

Dies bedeutet, daß die durch den Zentralwert k_o repräsentierte relative Häufigkeit $\frac{k_o}{n}$ für großes n nahe bei der Wahrscheinlichkeit p liegt. Auf der Grundlage dieser Überlegungen lassen sich nun auch für nicht-symmetrische Binomialverteilungen in ähnlicher Weise wie oben erste anschaulich-intuitive Aussagen zur stochastischen Konvergenz formulieren.

Ergänzend zur Betrachtung von (Binomial-)Verteilungen könnten des weiteren elementare Signifikanzbetrachtungen eingeführt werden. (vgl. Bigalke/Hasemann, 1978, S.278ff). Dabei ist etwa an folgendes gedacht: Wenn ich mit 90%iger Sicherheit eine Aussage über die Häufigkeit von Jungen und Mädchen in einer Stichprobe (Gruppe) von 10 Kindern machen will, welche relativen Häufigkeiten kommen dann in Betracht?

Anhand der aufgestellten Verteilung (siehe oben) ergibt sich, daß die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse

10, 9, 8 und 2, 1, 0

Jungen bei 10 Kindern etwa $p \sim 0{,}109$ beträgt.

Damit haben die Ereignisse

7, 6, 5, 4, 3

etwa eine Wahrscheinlichkeit von

0,9, also 90%.

Die Aussage lautet nun: Bei der Annahme einer Jungengeburt von $\frac{1}{2}$ wird man mit 90-iger Sicherheit unter 10 Kindern (zufällig ausgewählt) 7, 6, 5, 4 oder 3 Jungen antreffen.

Solche Aussagen können wiederum zu "Testzwecken" benutzt werden. So ist etwa größte Vorsicht geboten, wenn man in relativ vielen Stichproben von 10 Kindern jeweils nur 2, 1, 0 oder viele, nämlich 10, 9 Jungen antrifft.

Dies verweist darauf, daß bestimmte Annahmen für diese Fälle nicht zutreffen können. In Frage kommt hierfür:

a) die angenommene Wahrscheinlichkeit ist <u>nicht</u> $p = \frac{1}{2}$

b) es handelt sich <u>nicht</u> um zufällige Stichproben; bzw. letztlich ist die Annahme der Unabhängigkeit von Versuchen (Stichprobenauswahlen etc.) verletzt.

Soweit zur Diskussion konkreter Aspekte des Verteilungsbegriffs, und zwar zum Problem des Vergleichs von empirischen und theoretischen Verteilungen und der Benutzung (theoretischer) Verteilungen zur Charakterisierung der relativen Häufigkeit als statistischem Parameter bzw. zur Präzisierung der intuitiven "Konvergenz"aussage der relativen Häufigkeiten gegen die Wahrscheinlichkeit.

In dieser Hinsicht dient der Verteilungsbegriff ganz allgemein (und die Bernoulli-Verteilung als eine einfache und elementare konkrete Form) dazu, die Unschärfen, d.h. die erwartenden Schwankungen und Abweichungen empirischer relativer Häufigkeiten in einem theoretischen Rahmen in Ansätzen zu präzisieren.

Zusammenfassend läßt sich festhalten, daß der hier in Aspekten konkret vorgeschlagene Entwicklungsgang des Wahrscheinlichkeitsbegriffs sich zentral am Anwendungsbezug der Wahrscheinlichkeitstheorie orientiert. Dem wird anhand der Unterscheidung von Theorie-, Modell- und Gegenstandsebene Rechnung getragen; diese stehen für die in einem Zeitpunkt der Entwicklung fixierte Definition der Wahrscheinlichkeit einerseits und der Gegenstandsauffassung andererseits. Eine grundlegende Beziehung der beiden Ebenen wird durch den Unabhängigkeitsbegriff in einer sich permanent differenzierenden Weise vermittelt. Im Entwicklungsprozeß geht es nun darum, theoretisch-strukturelle Aspekte der Wahrscheinlichkeitstheorie und Merkmale der Gegenstandsauffassung aneinander herauszuarbeiten und herauszukristallisieren. Über verschiedene Etappen der Entwicklung hinweg, etwa der Gleichwahrscheinlichkeit, dem Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsbegriff und einer allgemeinen Vorstellung von Wahrscheinlichkeit als dem Verhältnis von Anteilen, etwa am Glücksrad modelliert, werden die theoretischen Modellaspekte nun präzisiert und es wird der Gegenstand schrittweise analysiert; dabei werden diese theoretischen Merkmale immer "substanzloser", was ihnen jedoch gleichzeitig fruchtbarere Anwendungsmöglichkeiten verleiht. Modell- und Gegenstandsebene stützen und präzisieren sich im Verlaufe der Entwicklung gegenseitig; der jeweilige Anwendungsgegenstand hängt von den Möglichkeiten der Modellierung ab und umgekehrt wird das Modell durch die empirische Zufallserscheinung korrigiert. Der Wahrscheinlichkeitsbegriff ist einheitlicher Ausdruck dieses komplementären, sich entwickelnden Zusammenhangs von Modell- und Gegenstandsebene.

Auf der Grundlage des hier geschilderten Entwicklungsganges ist nun auch im Hinblick auf die Stochastik in der SII eine angemessene Fortführung vorstellbar, welche in weiteren Schritten etwa eine axiomatische Grundlegung der Wahrscheinlichkeit in entsprechender Weise ermöglicht, die mit einer Ausweitung der Anwendungsmöglichkeiten einhergeht, d.h. es wird immer deutlicher die Rolle der Wahrscheinlichkeitstheorie als eine Theorie der Anwendung herausgearbeitet. Dies ist jedoch nur im Stochastikunterricht erreichbar, wenn ständig die konkret-gegenständlichen Aspekte in fachübergreifender Weise berücksichtigt werden.