

HEINZ STEINBRING

EXEMPLE DE RENVERSEMENT DU CONTENU
INTUITIF D'UN CONCEPT ET DE SA
DEFINITION MATHEMATIQUE FORMELLE:
L'INDEPENDANCE STOCHASTIQUE

OCCASIONAL PAPER 39

NOVEMBER 1983

Exemple de renversement du contenu intuitif d'un concept et de sa définition mathématique formelle: l'indépendance stochastique

Heinz Steinbring, Bielefeld (IDM)*

1. Introduction: L'indépendance - un concept de la stochastique au statut ambigu?

On peut dire sans exagérer que le concept d'"indépendance stochastique" a un statut extraordinaire dans le cadre de la théorie des probabilités. Ce statut particulier se manifeste dans nombre de caractérisations et d'affirmations qui sont en partie contradictoires, par exemple:

- L'indépendance stochastique ne fait pas partie des axiomes fondamentaux de la théorie des probabilités. Par contre: la méthode axiomatique est le seul moyen d'arriver à une définition "propre" de l'indépendance.
- L'indépendance est une notion intuitive. Par contre: l'indépendance est un concept formel, une règle de multiplication.
- L'indépendance est un postulat. Par contre: l'indépendance doit être vérifiée par des tests statistiques.
- L'indépendance est le concept fondamental spécifique de la probabilité (Kolmogorov). "La structure stochastique qui, dès la genèse, fut et demeure au centre du calcul des probabilités est celle d'indépendance." (Loève, 1978) Par contre: l'indépendance est un concept auxiliaire et utile qui simplifie le calcul des probabilités (! - dans un manuel scolaire).

* Version rédigée d'une contribution au colloque Inter-IREM "Histoire des Mathématiques et Epistémologie, Poitiers, 27 et 28 mai 1983", traduite par G. Seib (Bielefeld), corrigée et rédigée par E. Bloch (Poitiers).

- L'indépendance est la condition fondamentale pour toute application des probabilités. Par contre: l'indépendance est la condition fondamentale pour démontrer des résultats essentiels en théorie des probabilités.

Quels sont les raisons de ces "oppositions", et comment peut-on les utiliser d'une façon constructive?

La difficulté, dans le cas de l'indépendance, est de mettre d'accord deux conceptions concurrentes. D'une part, il y a une définition mathématique théorique:

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace de probabilité. Les événements $A, B \in \mathcal{A}$ sont indépendants, si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

D'autre part, il y a de nombreuses représentations intuitives, fondées sur les expériences les plus diverses, qui font dire que des observations, des résultats d'expériences, des phénomènes etc. sont indépendants les uns des autres.

C'est le probabiliste Mark Kac* qui a insisté sur ce rapport entre définition mathématique et représentation intuitive de l'indépendance. "Ce qui se cache derrière la définition de l'indépendance est la conviction (fondée sur l'expérience) que cette définition peut aussi s'appliquer à une situation bien précise. Il y a donc indépendance dans un sens vague et intuitif, et il y a indépendance en ce sens étroit, mais bien défini mathématiquement, que le théorème de multiplication des probabilités est valide. Ce sont ces représentations vagues et intuitives qui furent longtemps la force motrice principale dans le développement de la théorie des probabilités." (Kac 1959, p.10).

* Prononcer Katz

Ce rapport entre significations intuitives et caractérisations formelles de l'indépendance a vu un "renversement" du contenu du concept et de la définition, quand la théorie des probabilités s'est constituée: la validité de la formule de multiplication n'est plus rendue plausible à partir de représentations du réel traduisant des indépendances observables; à l'inverse, on dit qu'il y a indépendance si on peut appliquer la formule de multiplication.

R. von Mises, entre autres, a vivement protesté contre une définition aussi formelle de l'indépendance. Son objection était que, dans le cadre d'une théorie axiomatique selon Kolmogorov, des événements peuvent être indépendants qui ne seraient pas du tout ressentis comme indépendants les uns des autres, dans un sens intuitif comme "ils ne s'influencent pas" ou "ils sont distincts les uns des autres": "Quand on considère deux caractères qui s'influencent ou pas, on donne un sens à la notion d'indépendance. Par contre, une définition fondée sur la règle de multiplication n'est que la généralisation affaiblie d'un concept plein de signification." (von Mises 1964, p. 38). Ce qu'il dénonce, c'est l'extension d'un concept vidé de son contenu.

Ce problème du renversement du contenu et de la définition mathématique de l'indépendance joue aussi un rôle important dans l'enseignement. Quelques manuels tentent de déduire la formule de l'indépendance, sans rupture, par le biais des probabilités conditionnelles. Cette manière de procéder est souvent accompagnée de considérations d'analogie avec l'incompatibilité et le théorème d'addition, afin de justifier les cas particuliers - $P(A)$, resp. $P(B) = 0$ - de l'indépendance. Par contre, A. Engel a constaté que, pour les applications, l'indépendance n'est pas définie (par la règle de multiplication) mais postulée.

Böge, dans une lettre circulaire, fait remarquer qu'on ne peut pas tout simplement éliminer cette difficulté de l'enseignement des probabilités, à savoir la difficulté de faire se recouvrir l'intuition et la définition mathématique. C'est une des raisons qui le font se prononcer nettement contre l'introduction de la stochastique dans l'enseignement des mathématiques.

"La difficulté réside dans la traduction entre mathématiques et réalité. Dans d'autres domaines des mathématiques, cette traduction s'effectue sans aucun problème. Mais il en est autrement dans le cas du calcul des probabilités... La relation (entre mathématiques et réalité) y devient intéressante à partir du moment où l'on veut déterminer la "probabilité" des suites de zéro ou un de longueur n , en disant, par exemple, qu'elles sont toutes "équiprobables". Pour les résultats (i, j) avec $i, j \in A = \{1, 2, \dots, 6\}$ de deux coups "indépendants" avec le même dé, on propose d'ordinaire que la probabilité soit $1/6 \cdot 1/6 = 1/36$, si le dé est symétrique; sinon qu'elle soit $P_{ij} = P_i \cdot P_j$, où P_i est la probabilité d'obtenir i en un seul coup. Malheureusement un professeur ne pourra enseigner une telle proposition que comme un dogme, parce qu'il ne pourra pas la justifier d'une manière convaincante, même dans le cas du dé symétrique." (Böge 1979, p. 3/4)

Ensuite Böge démontre, par diverses considérations et à l'aide d'exemples que la formule du produit, donc la définition formelle de l'indépendance, ne peut pas être dérivée mathématiquement, sinon - à son avis - dans le cadre d'une théorie subjective des probabilités. "Dans ces conditions, il me semble que c'est trop demander au professeur que de défendre une telle proposition devant ses élèves. Et il y serait contraint, puisque les plus simples applications du calcul des probabilités deviennent impossibles sans elle... Il n'y a aucune raison, malgré les difficultés fondamentales qu'on rencontre dès les questions les plus simples, de supprimer la théorie des probabilités? Pourtant, à cause de ces difficultés, on ne devrait pas l'enseigner à l'école. Le professeur serait contraint de répondre de manière dogmatique aux plus simples objections des élèves."

Les difficultés mentionnées dessus dans le rapport entre les aspects intuitifs et formels de l'indépendance, ainsi que les objections contre l'enseignement du calcul des probabilités à un niveau élémentaire, donnent à penser que le renversement du contenu et de la définition serait à l'avantage des seules mathématiques pures. Ce renversement semble être, pour l'essentiel, une abstraction formelle, en vue de la pureté mathématique, concentrant la théorie des probabilités d'une

façon aussi économique que possible. En ce qui concerne l'enseignement, il subsiste la crainte que de telles abstractions mènent vite à des concepts vidés de contenu.

Est-ce-que ce problème s'est présenté d'une manière analogue au cours du développement historique, ou bien y avait-il des nécessités, des raisons objectives impérieuses en faveur d'une généralisation du concept d'indépendance, sans que cela amène obligatoirement à faire abstraction de ses propriétés?

Dans ce qui suit, je vais éclairer par des exemples, en esquissant quelques étapes historiques pour la probabilité, l'évolution du concept d'indépendance, tout en montrant que ce concept a, en effet, une importance particulière, ou, comme le disait Kolmogorov, "confère à la théorie des probabilités son caractère particulier".

Les considérations suivantes reposent sur la thèse que la transition du XVIII^e au XIX^e siècle aurait réalisé un changement dans le rapport entre objet et méthode en mathématiques. Au XVIII^e siècle, la première tâche était de légitimer et délimiter l'objet des études mathématiques; les méthodes les plus diverses étaient admises pour traiter et analyser cet objet. Au XIX^e siècle, ce rapport s'est renversé, l'objet devenant arbitraire, et la tâche étant d'affermir les méthodes mathématiques et de définir des procédés rigoureux permettant une abstraction de l'objet et ainsi une extension des applications. En fait, ce sont alors les méthodes sûres qui constituent l'objet nouveau des mathématiques, lequel est devenu "théorique".

Cette proposition va me servir de guide. En même temps, elle devra être rendue plausible en ce qui concerne la stochastique, grâce à des exemples.

2. L'indépendance et les probabilités classiques

Pour la période classique du développement des probabilités, le jeu de hasard (idéal) était d'une importance singulière, ce qui ressort du

fait que tous les premiers travaux sur ce sujet traitent presque exclusivement de problèmes de jeux (cf. Pascal/Fermat 1654, dans David, 1962; Huygens 1657, J. Bernoulli 1713, Montmort 1708, etc.). Mais il serait hâtif d'en conclure que la théorie des probabilités, à cette époque, était exclusivement une théorie des jeux de hasard. Il faut se rendre compte que l'on travaillait en même temps sur des problèmes pratiques, parmi lesquels il faut noter les applications aux calculs de mortalité et de rente (cf. John Graunt, 1663, et De Witt, 1671) et au secteur juridico-légal (Leibniz 1665). En fait on peut dire sans exagérer qu'existait l'intention d'utiliser cette nouvelle théorie des probabilités dans tous les domaines de la vie quotidienne, de l'appliquer à "des situations civiles, morales et économiques" (J. Bernoulli).

D'où vient donc la grande importance du jeu de hasard?

Le jeu de hasard permettait de modéliser d'une façon naturelle des probabilités véritables, à savoir les fréquences relatives. Avec le jeu de hasard idéal, l'objet de la théorie des probabilités se présentait sous une forme concise. Il expliquait, mathématiquement, la probabilité, en tant que rapport (entre les cas favorables et les cas possibles); en outre, ce cadre permettait de dériver, dans une forme simple, les règles les plus importantes de la théorie des probabilités, dont le théorème de l'addition et le théorème de multiplication, et aussi d'introduire, en embryon, et dans des situations exemplaires, d'autres concepts fondamentaux, comme ceux de la probabilité conditionnelle et de l'indépendance.

L'indépendance appartenait, sans que ce soit devenu très explicite, d'une façon naturelle au cadre du jeu d'hasard, comme il est évident dans les exemples de "tirages sans remise" données par de Moivre. L'indépendance est un élément fondamental des règles élémentaires de la théorie classique des probabilités, mais il est certain qu'on n'y attachait alors aucune importance théorique (stochastique) particulière, puisque le concept n'en fut défini explicitement que plus tard par de Moivre (1718/1756) et par Bayes (1763). Auparavant Bernoulli, pour démontrer son théorème, avait déjà utilisé largement le concept d'indépendance,

mais sans le savoir, implicitement. Dans ce qui est dit autour du théorème, le concept de l'indépendance ne figure même pas comme méritant d'être spécialement signalé.

Même si l'on considère, à juste titre, qu'avec le théorème de Bernoulli le calcul des probabilités a commencé sa lente évolution vers une discipline mathématique pure (Loève), rien n'est changé, au fond, dans cette compréhension naive de l'indépendance, par les améliorations et généralisations de ce théorème effectuées par Laplace et de Moivre. C'est seulement lors des applications de la théorie des probabilités à la théorie des erreurs d'observation, et au moment où les problèmes des théorèmes-limites se sont ajoutés à ceux de la recherche d'une loi universelle des erreurs, que le statut de l'indépendance, comme concept important pour la théorie des probabilités, vient à poser un problème aigu.

3. L'indépendance dans des contextes d'application des probabilités

3.1 Probabilité et théorie des erreurs

L'application de la théorie des probabilités aux résultats d'observations n'entraîna pas seulement une amélioration des méthodes et des calculs dans la théorie des erreurs; en retour, la théorie des probabilités a aussi gagné un nouveau point de vue conceptuel, grâce à ces applications mêmes.

Dans une observation concrète, la vraie valeur t ne sera jamais connue. Ce qui veut dire que les erreurs ("incertitudes"), resp. les déviations autour de la vraie valeur ne peuvent pas être connues dans l'absolu. Une théorie mathématique des erreurs d'observation ne peut pas traiter des valeurs mesurées individuelles considérées comme des grandeurs isolées. La tâche de la théorie des erreurs est d'analyser la relation entre des observations individuelles resp. entre les incertitudes attachés aux

observations. La théorie des probabilités expliqua une telle relation avec le concept de distribution (au sens de distribution - ou repartition - de probabilité).

Une multitude de lois de distribution possibles pour les erreurs furent d'abord envisagées; elles servirent en premier lieu pour fonder mathématiquement des principes statistiques utilisés pragmatiquement jusque-là, entre autres le principe que la moyenne arithmétique d'une série de données est la meilleure estimation de la vraie valeur d'une grandeur.

De plus en plus, les recherches tendirent ensuite à trouver une loi universelle pour les erreurs d'observation. En essayant de justifier la méthode des moindres carrés, Gauss fut un des premiers à dériver la distribution normale comme loi universelle des erreurs. Certaines caractéristiques de cette fonction de distribution avaient été posées en prémisses et on exigeait que la moyenne arithmétique des résultats d'observation fût la valeur mesurée la plus probable. (Gauss a donc procédé, pour ainsi dire, "à l'envers").

Le nouveau point de vue conceptuel mentionné ci-dessus, qui doit son introduction dans la théorie des probabilités à l'urgence des problèmes pratiques de mesurage, tient surtout au fait que désormais on ne considérait plus seulement des événements individuels, mais des systèmes entiers de paramètres aléatoires. La notion de distribution devint l'outil essentiel pour une description et une analyse adéquates.

L'objet de la théorie des probabilités n'est donc plus un jeu de hasard qui peut être défini a priori; c'est maintenant un système de nombreux événements de nature inconnue. Comment définir ce nouvel objet? Dans les tentatives pour le préciser, le concept de l'indépendance a joué un rôle important.

Gauss avait posé un grand nombre de préalables avant de dériver la distribution normale. L'analyse des conditions (nécessaires et suffisantes) du comportement "normal" a abouti au résultat suivant: c'est que doivent entrer en jeu de nombreuses erreurs (resp. grandeurs aléatoires) indépen-

dantes, qui soient elles-mêmes distribuées de manière "uniforme" (ce qui veut dire qu'il n'y a pas de variables aléatoires dominantes).

L'exacte signification mathématique de ce fait d'uniformité fut enfin exprimée et démontrée par Lindeberg (1922) et Feller (1937):

Soit $(X_n, n = 1, 2, \dots)$ une suite de variables aléatoires indépendantes centrées et $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Soit s l'écart-type de S_n . Le théorème de Lindeberg et Feller dit que la distribution de S_n/s_n tend, quand n tend vers l'infini, vers la distribution normale $N(0,1)$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{|x| \geq \varepsilon s_n} x^2 dF_{X_k}(x) \rightarrow 0.$$

Ceci implique que la variance de chaque X_k est petite par rapport à la variance de la somme S_n . (Cf. Feller, vol. II, p.256).

L'indépendance devient alors un caractère exigé de l'objet. Pour les mathématiques, l'indépendance, sous la forme du théorème de multiplication et de ses généralisations (interversion de produits et d'intégrales), a apporté surtout des avantages techniques, des "simplifications du calcul".

Dans le cadre des applications à la théorie des erreurs, apparaît un autre aspect de l'indépendance stochastique: servir à l'analyse des événements aléatoires réels. Si on postule l'indépendance, un comportement normal du système devrait se révéler. S'il n'est pas observé dans des cas particuliers, les prémisses, dont l'indépendance, ne sont pas valables. Ici l'indépendance traduit une propriété tangible de la réalité; elle sert à analyser la réalité. Entre autres choses, elle est caractéristique de l'objet probabiliste.

Dans un article de 1845, Gauss a remarqué l'importance de ce concept dans l'application de la théorie des probabilités: "On escompte que les fluctuations aléatoires, sur un grand nombre d'observations, se compensent en très grande partie les unes les autres, et on accorde une confiance

d'autant plus grande à la valeur moyenne que le nombre des résultats est plus grand. En quoi on a généralement tout à fait raison; d'ailleurs le développement ultérieur et l'exploitation prudente de ce principe ont donné, surtout dans les sciences de la nature, des résultats souvent fructueux et parfois très remarquables. Pourtant cette sûreté du principe fondamental repose sur une condition essentielle, qui est souvent négligée même par des spécialistes, et qui consiste en ce que les perturbations irrégulières ou fluctuations, attachées aux observations ou expériences individuelles, doivent être totalement indépendantes les unes des autres. Juger si une telle indépendance existe ou non peut être très difficile, voire impossible, sans une investigation plus poussée des faits. S'il reste un doute, le poids attribué aux résultats finaux sera précaire." (Gauss 1873, p. 143)

L'indépendance stochastique, chez Gauss, a évidemment une tout autre charge que 150 ans auparavant.

C'est dans le cadre de ce développement, qui faisait d'un ensemble aléatoire le nouvel objet de la théorie des probabilités, que l'on doit considérer les travaux de Fechner, Bruns, Helms, et finalement, de Richard von Mises, qui voulait fonder le concept du "collectif statistique" par la méthode axiomatique, lui assignant la place de l'objet classique, c'est à dire celle du jeu de hasard (ce qui conduisait à des difficultés quant aux fondements).

3.2 Probabilité et théorie cinétique des gaz

La théorie cinétique des gaz est un autre domaine dans lequel de vastes systèmes de paramètres aléatoires furent étudiés. Là aussi, non seulement l'application de la théorie des probabilités a donné naissance à la physique statistique, mais de plus, en retour, les probabilités ont bénéficié de cette application.

Le problème de l'application de la théorie des probabilités à la théorie des gaz est beaucoup trop complexe pour être exposé ici, même brièvement. Je me limiterai donc à un point capital, celui qui touche au

deuxième principe de la thermodynamique, en montrant, à l'aide d'un modèle simple conçu par P. et T. Ehrenfest, de quelle façon des prémisses probabilistes y interviennent.

C'est surtout dans les travaux de Ludwig Boltzmann qu'on peut se rendre compte de l'importance de la probabilité pour la physique. Ses recherches étaient centrées sur le deuxième principe de la thermodynamique qui constate l'accroissement irréversible de l'entropie, du désordre d'un système de gaz jusqu'à son équilibre. Si Boltzmann était convaincu, au début de son étude, qu'il pourrait donner une démonstration purement mécanique de ce théorème, il constata, après de longues débats jalonnés de vives objections, qu'en dernière instance il faudrait nécessairement faire appel à la théorie des probabilités. Instrument auxiliaire au départ, l'usage du concept de probabilité s'était transformé, au cours de ses travaux, en moyen de connaissance fondamental.

Où donc la probabilité s'insère-t-elle d'une manière essentielle dans la théorie des gaz? D'abord il est évident que des systèmes gazeux, consistant d'un nombre énorme de particules, ne peuvent être décrits que statistiquement. Leur état, par exemple les vitesses des particules, fut caractérisé à l'aide de distributions. Mais la probabilité, dans ce cadre, fut d'abord comprise comme un outil auxiliaire pour décrire des phénomènes au fond mécaniques.

C'est seulement avec l'étude du comportement de la macrostructure du système gazeux, c'est à dire de l'évolution d'un état ordonné à l'état de désordre maximal, que la probabilité apparut avec évidence comme un concept fondamental.

Afin d'étudier ces changements temporels de la fonction de distribution des vitesses, on a dû introduire des prémisses additionnelles. Pour une part, des prémisses mécaniques, dont celle qu'il n'y aurait que des chocs binaires dans les cas simples. D'autre part, il a fallu faire une hypothèse stochastique fondamentale (très importante, comme on le vit plus tard), à savoir la fameuse condition du nombre de chocs (Stoßzahlansatz, autrefois posée en postulat du chaos moléculaire).

Cette condition contient essentiellement la proposition suivante: le nombre de chocs de deux groupes de molécules ayant des vitesses différentes, dans un intervalle de temps Δt , est égal au produit des nombres de chacun des deux groupes (aux coefficients de proportionnalité près). Cette proposition permet, dans les calculs, de passer des distributions des vitesses des paires de molécules à celles des molécules individuelles.

Thompson, pour exemple, donne la définition suivante pour le Stoszahlansatz: "La fonction de distribution pour des paires de molécules est donnée par

$$f^2(v_1, v_2, t) = f(v_1, t) \cdot f(v_2, t)''.$$

"Cette prémisse à l'air innocent est celle qui fut et qui est encore discutée le plus vivement après plus d'un siècle." (Thompson)

Cela signifie, dans la théorie des probabilités, que les variables aléatoires correspondantes sont statistiquement indépendantes (Cf. Thompson, 1972, p. 11).

Le concept central pour l'application de la probabilité, c'est ici encore l'indépendance, qui n'est pas, dans ce cas, simple propriété statistique des paramètres aléatoires, mais liée à des caractéristiques mécaniques des particules considérées dans le système.

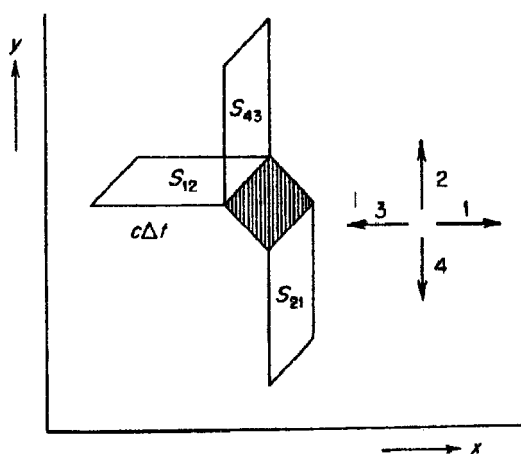
On peut montrer comment sont liés les aspects mécaniques et statistiques dans le Stoszahlansatz, sur le modèle simplifié imaginé par Ehrenfest (1911).

Soient donnés N P-atomes (points) dans le plan euclidien par carré-unité; ces P-atomes n'interagissent pas les uns avec les autres. Cependant, ils se heurtent d'une manière élastique contre des C-atomes donnés (carrés), qui sont fixés dans le plan et distribués irrégulièrement. Aussi, les diagonales de ces C-atomes sont parallèles à l'axe x ou y ; en plus, leurs distances soient grandes comparé à leurs

longueurs de côté ("gaz rarefié"). Leur densité soit n par carré-unité. Ce dernier est une prémisses importante d'équiprobabilité sur laquelle s'appuie le Stoszahlansatz.

En plus, on suppose que tous les P-atomes aient la même vitesse constante c et qu'ils bougent seulement dans les quatre directions des coordonnées.

Fig. 1



La distribution des vitesses se rapporte, dans ce modèle, exclusivement aux quatre directions données.

Soit f_i le nombre de P-atomes en mouvement dans la direction i , l'état d'équilibre est donné par

$$f_i = \frac{N}{4} \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Il doit être montré l'approche monotone à l'état d'équilibre pour ce modèle.

Soit $N_{ij} \cdot \Delta t$ le nombre des P-atomes qui sont jetés par un choc dans l'intervalle de temps Δt , de la direction de mouvement i dans la direction j . Donc, ces atomes doivent précisément satisfaire les deux conditions suivantes:

- 1) ils possèdent la direction i , et
- 2) ils se trouvent dans l'une des bandes S_{ij} .

Donc, il ne suffit pas de connaître la distribution actuelle (f_1, f_2, f_3, f_4) = f (donnée au moment t) des vecteurs afin de déterminer la distribution "nouvelle" après le choc. Il faut faire une prémisse additionnelle, à savoir le Stoszahlansatz. Pour ce modèle, il est formulé comme suit: "Du nombre des P-molécules de chaque direction de mouvement, il revient, sur les bandes S , la fraction qui correspond à la proportion de la surface totale de tous les S à la surface libre totale" (Ehrenfest, p.20).

Cela signifie que la direction de mouvement de la P-molécule est (statistiquement) indépendante de sa position; resp. qu'elle est indépendante du fait si un C-atome se trouve "devant" le P-atome ou pas.

La proportion de la surface totale de tous les S à la surface libre totale est $S_{ij} \cdot n$ (toujours considérée par carré-unité); le Stoszahlansatz est donc mathématiquement exprimé comme suit:

$$N_{ij} \cdot \Delta t = f_i \cdot S_{ij} \cdot n$$

D'une manière illustrative, ceci signifie: le nombre de chocs resp. le nombre de paires de P-atomes et C-atomes qui se chocquent, est proportionnel au produit des nombres d'atomes individuels:

$$f_i \cdot n \cdot S_{ij}$$

Dans le même intervalle de temps Δt

$$N_{ji} \cdot \Delta t = f_j \cdot S_{ji} \cdot n$$

P atomes sont jetés de j à i . Par comparaison des deux équations, on obtient

$$|N_{ij} \cdot \Delta t - N_{ji} \cdot \Delta t| = |f_i - f_j| \cdot S \cdot n$$

$$(S = |S_{ij}| \text{ comme aire de surface}).$$

"La comparaison des équations montre immédiatement que, dans des chocs du type décrit, le plus grand f perd, en somme

$$|f_i - f_j| \cdot S \cdot n$$

molécules au plus petit f pendant Δt .

Si le calcul des nombres N_{12} , N_{21} , N_{23} , N_{32} , etc pour tout intervalle de temps Δt est toujours basé sur le Stoßzahlansatz, on obtient une décroissance monotone pour les différences des nombres f_1 , f_2 , f_3 , f_4 . (Approchement monotone à la distribution de l'état d'équilibre)." (Ehrenfest, 1911)

Dans l'état d'équilibre

$$f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = \frac{N}{4}$$

il n'y plus de différences significatives entre les f_i .

Un des aspects de ce Stoßzahlansatz, d'abord, mérite d'être mentionné: en regardant, encore une fois, l'équation

$$N_{ij} \cdot \Delta t = f_i \cdot n \cdot S_{ij}$$

et en "calculant" le facteur de proportionnalité

$$S_{ij} = a \cdot c \cdot \Delta t \quad (2a = \text{diagonale du C-atome})$$

on voit que des caractéristiques concrètes de la géométrie s'y insèrent.

Dans notre tout simple modèle, ceci peut apparaître comme subtilité marginale; dans l'équation générale de Boltzmann, ce phénomène surgit dans la forme du soi-disant Wirkungsgesetz (loi d'action), à propos duquel Boltzmann lui-même nota le suivant: "Le Wirkungsgesetz des forces qui s'exercent au moment d'un choc doit nous être donné, naturellement. Mais je n'y ferai aucune prémisses limitante. Il se peut qu'il nous est donné

que deux molécules ricochent l'une de l'autre comme des sphères élastiques; il se peut aussi que n'importe quel autre Wirkungsgesetz nous est donnée.

En ce qui concerne les parois du récipient enfermant le gaz, je voudrais supposer que les molécules sont réfléchies de ces derniers comme des sphères élastiques. Dans ce cas, tout autre loi d'action fournirait les mêmes formules." (Boltzmann 1872. p. 320).

Dans l'équation de Boltzmann, qui dérive de l'hypothèse "Stoßzahlansatz", il y a donc un lien entre des caractéristiques probabilistes et des caractéristiques spécifiques, mécaniques et géométriques, des particules. Dans ce cas, l'indépendance stochastique est liée d'une manière spécifique à des conditions physiques objectives. Cette liaison devient, pour ainsi dire, la cellule germinale de la nouvelle théorie cinétique des gaz, dans laquelle des éléments théoriques aussi bien mécaniques que probabilistes fonctionnent à égalité de droits.

"Il est remarquable que la représentation scientifique (...) a évolué vers une conception plus subtile, dans laquelle un rôle important revient à des caractéristiques déterministes aussi bien qu'à des caractéristiques aléatoires. Nous ne voulons citer ici que la formulation donnée par Boltzmann du deuxième principe de la Thermodynamique, dans laquelle le concept de la probabilité joue, pour la première fois, un rôle théorique essentiel." (Prigogine, p. 217)

4. L'indépendance comme concept des mathématiques pures

Les idées avancées ci-dessus ont montré que le concept de l'indépendance s'est développé et est devenu un instrument d'analyse utile pour beaucoup d'applications, au cours du processus qui a éliminé le jeu de hasard comme objet assigné à la théorie des probabilités, le remplaçant par une conception ouverte, fondamentalement généralisée de cet objet, sous la forme d'un complexe aléatoire.

Même si le concept de l'indépendance, et avec lui la théorie des probabilités, fut incontestablement accepté dans beaucoup de domaines d'applications, cette théorie resta encore longtemps suspecte aux yeux de nombreux mathématiciens.

"Et pendant qu'un formalisme impressionnant était en train de se créer, les mathématiciens (à très peu d'exceptions près) se tenaient à l'écart parcequ'ils ne voyaient pas clairement quels étaient les objets auxquels on pouvait appliquer ce formalisme." (Kac, 1959).

Kac considère que la théorie des probabilité ne fut décidément acceptée comme une véritable théorie mathématique que grâce à ses applications en théorie des nombres et à la "découverte" qu'il y a la indépendance stochastique dans un contexte inattendu:

"Puis, en 1909, Emile Borel fit observer que les fonctions de Rademacher sont indépendantes. Enfin il y avait des objets bien définis pour lesquels on pouvait appliquer la théorie des probabilités pour événements indépendants, sans avoir à se commettre avec des pièces de monnaie, des coups de dés, des éventualités, des expériences. La publication du mémoire classique de Borel "Sur les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques" marque le commencement de la théorie moderne des probabilités." (Kac, 1959).

Enfin, pour les mathématiques aussi l'admissibilité de la théorie des probabilités avait été prouvée par une application, mais une application interne aux mathématiques: la théorie des nombres.

"L'indépendance statistique, considérée jusqu'alors comme une fréquentation douteuse des joueurs, a atteint la respectabilité que seule une discipline ancienne comme la théorie des nombres peut conférer." (Kac 1982, p. 72).

L'axiomatique de Kolmogorov, en 1933, fut la suite logique de cette reconnaissance. Même si ce fut relativement tard, la théorie des probabilités devint une discipline mathématique au sens strict.

Nos remarques sur l'histoire du concept d'indépendance ont cependant montré que l'axiomatique des probabilités, dans laquelle l'appareil méthodologique est fixé, ne représente pas seulement une récapitulation minimale des règles fondamentales les plus simples, mais est aussi la conséquence nécessaire du développement des applications de la théorie.

L'axiomatisation avait surtout pour but de s'assurer que les méthodes probabilistes seraient observées strictement et rigoureusement, mais tout en conservant la possibilité de les utiliser pour traiter une multitude d'objets les plus divers. Ces objets ne sont pas complètement arbitraires, bien au contraire ils doivent toujours être soigneusement redéfinis, et là le concept de l'indépendance joue un rôle prépondérant.

BIBLIOGRAPHIE

- Bayes, Th.:
An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. 1793, wiederabgedruckt in: Pearson, E.S./Kendall, M. (ed.): Studies in the History of Statistics and Probability, vol. I, Griffin, London, 1970, 131-153
- Bernoulli, J.:
Ars conjectandi. Basel, 1713, auf Deutsch erschienen: Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ostwald's Klassiker Nr. 107 u. 108, Leipzig, 1899
- Böge, W.:
Bedenken gegen die Einführung von Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik und evtl. Spieltheorie in den Mathematikunterricht in der Schule. Rundbrief, Heidelberg, 1979
- Boltzmann, L.:
Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen. In: Wiss. Abhandlungen, Bd. I, 1872, 316-402
- David, F.N.:
Games, Gods and Gambling. London, 1962
- De Moivre, A.:
The Doctrine of Chances or a Method of Calculating the Probability of Events in Play. 1756, reprinted, Chelsea, New York, 1967
- Dieudonné, J.:
Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900. Bd. I und II, Hermann, Paris, 1978
- Ehrenfest, P.u.T.:
Begriffliche Grundlagen der statistischen Auffassung in der Mechanik. In: Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. IV, Art. 32, Leipzig-Berlin, 1911
- Feller, W.:
Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung. In: Math. Z., 1935/37, 40, 521-559 und 42, 488-575

- Gauß, C.F.:
Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis arbiensium.
Perthes und Bessler, Hamburg, 1809, teilweise auf Deutsch wiederabgedruckt, in: Gauß, 1964, 92-117
- Gauß, C.F.:
Werke, vol. 4, Göttingen, 1873
- Gauß, C.F.:
Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate, Würzburg 1964
- Graunt, J.:
Natural and Political Observations mentioned in a following Index and made upon bills of mortality, London, 1662
- Huygens, Ch.:
Ratiociniis in aleae ludo (Van Rekeningh in Spelen van Geluck). In: Schouten, F. van (ed.): Exercitium Mathematicorum, Amsterdam, 1657
- Kac, M.:
Statistical Independence in Probability, Analysis and Number Theory. Wiley, Rahway, N.J., 1959
- Kac, M.:
The search for the meaning of independence. In: Gani, J. (ed.): The making of statisticiens, Springer, Heidelberg, 1982, 62-72
- Kolmogoroff, A.N.:
Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Springer, Berlin, 1933
- Lindeberg, J.:
Über das Exponentialgesetz in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. Zeitsch., t. 15, 1922, 211-225
- Loève, M.:
Calcul des probabilités. In: Dieudonné, J.: Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900, Bd. II, 1978, 277-313
- Mises, R. von:
Mathematical Theory of Probability and Statistics, New York 1964
- Mises, R. von:
Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit. Springer, Wien, 1972
- Montmort, P.R. de:
" Essay d'analyse sur les jeux de hazards, Paris, 1713
- Prigogine, J.:
Vom Sein zum Werden. Piper, 1979
- Steinbring, H.:
Zur Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs - Das Anwendungsproblem in der Wahrscheinlichkeitstheorie aus didaktischer Sicht. Materialien und Studien des IDM, Bd. 18, Bielefeld, 1980
- Thomson, C.J.:
Mathematical statistical mechanics. The Macmillan Company, New York, 1972
- Witt, J. de:
Waerdye van lyf - renten near proportie van los - renten, s'Gravenhage. 1671, wiederabgedruckt in: Die Werke von Jakob Bernoulli, Birkhäuser, Basel, 1975, 327-350

D. "OCCASIONAL PAPERS"

(Stand November 1983)

Nr. 1

Sträßer, Rudolf:
*Stochastik-Unterricht an beruflichen
Vollzeitschulen*
(März 1981)

Nr. 2

Richenhagen, Gottfried:
Zwei Fallstudien zur Numerik
(Februar 1981)

Nr. 3

Richenhagen, Gottfried:
Non-Standard-Analysis
(März 1981)

Nr. 4

Heymann, Hans Werner:
*Zur Erforschung subjektiver Unter-
richtstheorien von Mathematik-
lehrern. Überlegungen zu einer
empirischen Studie.*
(September 1980)

Nr. 5

Heymann, Hans Werner:
*Verstehen von Mathematik - Aus der
Sicht von Lehrern*
(März 1981)

Nr. 6

Bromme, Rainer:
*"Understanding texts" as heuristics
for the analysis of thinking aloud
protocols*
(März 1981)

Nr. 7

Steiner, Hans-Georg/
Sträßer Rudolf:
*Mathematik in der Berufsschule -
Gegenwärtiger Stand, Entwicklungstendenzen,
drängende Probleme*
(September 1980)

Nr. 8

Bromme, Rainer/
Steinbring, Heinz:
*Lokale und globale Aspekte des
Lehrerwissens - Dargestellt am
Beispiel der Stochastik*
(April 1981)

Nr. 9

Biehler, Rolf:
*The role of applications of mathe-
matics in theory and practice of
mathematics education in the
Federal Republic of Germany*
(Januar 1981)

Nr. 10

Jahnke, Hans Niels:
*Wissenschaft und Bildung in der
Mathematik des 19. Jahrhunderts*
(September 1981)

Nr. 11

Bauerfeld, Heinrich/
Zawadowski, Wacław:
*Metaphors and metonymies in the
teaching of mathematics*
(August 1981)

Nr. 12

Schminnes, Bernd:
*Wissenschaft und Verwaltung -
Kamerawissenschaften und
Zentralverwaltung in Preußen an der
Wende zum 19. Jahrhundert*
(September 1981)

Nr. 13

Keitel, Christine:
*Comparative studies on mathe-
matical education and educational
research in the USA and USSR*
(März 1980)

Nr. 14

Keitel, Christine:
*Curriculum variables, theory
and goals*
(November 1980)

Nr. 15

Otte, Michael:
*What relevance has the 'Problem of
Texts' for mathematics education
and its understanding?*
(November 1980)

Nr. 16

Steiner, Hans-Georg:
*Eine gemeinsame Charakterisierung
der Additivität von Rangordnungen
auf endlichen Booleschen Verbänden
und der Messbarkeit von
Abstimmungsgebilden*
(Januar 1982)

Nr. 17

Krummheuer, Götz:
*Rahmen und Identität im
Mathematikunterricht*
(Januar 1982)

Nr. 18

Heymann, Hans Werner:
*Mathematikunterricht als
schulischer Alltag*
(Januar 1982)

Nr. 19

Sträßer, Rudolf:
*Mathematik als Element beruflicher
Qualifikation*
(Februar 1982)

Nr. 20

Otto, Michael:
Fachdidaktik als Wissenschaft
(Februar 1982)

Nr. 21

Richenhagen, Gottfried:
*Numerisch vs. Analytisch -
Oberlegungen zum epistemolo-
gischen Ort der Schulanalysis*
(März 1982)

Nr. 22

Steiner, Hans-Georg:
*Mathematisch-Naturwissenschaft-
liche Bildung. Kritisch-konstruk-
tive Fragen und Bemerkungen
zum Aufruf einiger Fachverbände*
(April 1982)

Nr. 23

v. Harten, Gerd/
Steinbring, Heinz:
*Die stochastische Unabhängigkeit -
Ein zentrales Konzept zur mathema-
tischen Behandlung des Zufalls*
(Mai 1982)

Nr. 24

Bromme, Rainer:
*How to analyze routines in teachers'
thinking processes during lesson
planning*
(Mai 1982)

Nr. 25

Krummheuer, Götz:
*Ein Fall von Unterrichts-
kommunikation in der Diskussion mit
Mathematik Lehrern*
(August 1982)

Nr. 26

Huster, Ludger:
Analyse von Abiturrichtlinien
(August 1982)

Nr. 27

Lohmann, Ingrid:
*Zur Konzeption von Allgemeinbildung
im frühen 19. Jahrhundert. Ober-
legungen für eine Fallstudie zur
Lehrplentheorie F.E.D.
Schleiermachers*
(September 1982)

Nr. 28

Lohmann, Ingrid:
*Die Entwicklung der Metakonzepte
von Erziehung in der Spätaufklä-
rung und im Neuhumanismus - Zur
Herausbildung der "Relativen Auto-
nomie" des Bildungssystems*
(Oktober 1982)

Nr. 29

Winkalman, Bernard:
*Veränderungen von Analysis-
unterricht durch Computer*
(Oktober 1982)

Nr. 30

Peschek, Werner:
*Einige Differenzierungsaspekte in
Stochastik-Lehrbüchern der
gymnasialen Oberstufe*
(Januar 1983)

Nr. 31

Andelfinger, Bernhard/
Bekemeier, Bernd/
Jahnke, Hans Niels:
*Zahlbereichserweiterungen als
Kernlinie des Lehrplans - Probleme
und Alternativen*
(April 1983)

Nr. 32

Bromme, Rainer/Brophy, Jere:
Teachers' cognitive activities
(Mai 1983)

Nr. 33

Scholz, Roland W./Waller, Manfred:
*Conceptual and theoretical issues
in developmental research on the
acquisition of the probability
concept*
(Mai 1983)

Nr. 34

Beck, Uwe/Biehler, Rolf/
Kaiser Gabriele:
*Review of applications in school
mathematics in the Federal
Republic of Germany*
(Mai 1983)

Nr. 35

Steiner, Hans-Georg:
*Mathematikunterricht im Rahmen der
NGO und ein integrativ-differen-
zierendes Konzept seiner Weiter-
entwicklung*
(Dezember 1982)

Nr. 36

Peschek, Werner:
*Einige Differenzierungsaspekte in
den Analysis-Lehrbüchern der
gymnasialen Oberstufe*
(Juli 1983)

Nr. 37

Winkelmann, Bernard:
*The impact of the computer on the
teaching of analysis*
(August 1983)

Nr. 38

Bromme, Rainer/Bussmann, Hans/
Heymann, Hans-Werner/
Lorenz, Jens-Holger/
Reiß, Veronika/Scholz, Roland W./
Seeger, Falk:
*Methodological Problems of
Object-Adequate Modelling and
Conceptualization of Teaching,
Learning, and Thinking Processes
Related to Mathematics*
(Oktober 1983)

Nr. 39

Steinbring, Heinz:
*Exemple de renversement du contenu
intuitif d'un concept et de sa
définition mathématique formelle:
l'indépendance stochastique*
(November 1983)



Das IDM ist ein überregionales Zentralinstitut für Forschung, Entwicklung und Koordination im Bereich des mathematischen Unterrichts. Es widmet sich bei interdisziplinärer und kooperativer Arbeitsweise schwerpunktmäßig

- der Forschung und Entwicklung im Bereich des mathematischen Curriculums
- der fachdidaktischen Grundlagenforschung
- der fachbezogenen Unterrichtsforschung
- der Lehrerbildung durch konzeptionelle Arbeit und Materialentwicklung.

Im Rahmen seiner nationalen und internationalen Kooperations- und Koordinationsstrukturen führt das IDM Konferenzen und Arbeitstagungen durch und nimmt vielfältige Beratungstätigkeiten wahr. Am IDM wird eine internationale Bibliothek und eine Sammlung von Dokumenten und Materialien zur Mathematikdidaktik ausgebaut.

Vom IDM werden folgende Reihen herausgegeben:

- Untersuchungen zum Mathematikunterricht
(Aulis Verlag Deubner & Co. KG, Köln)
- Materialien und Studien (erhältlich beim IDM)
- Schriftenreihe des IDM / Dokumentation (erhältlich beim IDM)
- Occasional Papers (erhältlich beim IDM)

A 1 2 3 4