Über unendliche Frobenius- und Zassenhausgruppen

Vom Fachbereich Mathematik
der Universität Duisburg-Essen

zur Erlangung des akademischen Grades eines
Dr. rer. nat.
genehmigte Dissertation

von

Artem Myrkin

aus

Uljanowsk

Referent: Prof. Dr. Heinrich Wefelscheid
Korreferent: Prof. Dr. Rüdiger Göbel
Tag der mündlichen Prüfung: 01. Juni 2007

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich hauptsächlich mit Frobenius- und Zassenhausgruppen, die im endlichen Fall gut untersucht sind. Im unendlichen Fall ist jedoch wenig bekannt.

1902 hat Frobenius seinen berühmten Satz bewiesen:

Sei H eine echte malnormale Untergruppe einer endlichen Gruppe G. Dann bildet die Menge

$$F = \big(G \backslash \bigcup_{g \in G} gHg^{-1}\big) \cup \{1\}$$

einen Normalteiler von G.

Diese Untergruppen F und H nennt man Frobeniuskern bzw. Frobeniuskomplement.

Es ist zu bemerken, dass es bis jetzt nur Beweise gibt, die die Theorie der Gruppencharaktere benutzen, und es gibt keinen elementaren Beweis.

Das andere bedeutende Resultat wurde in 1959 von Thompson bewiesen:

Der Frobeniuskern einer endlichen Frobeniusgruppe ist nilpotent.

Burnside hat gezeigt:

Die p-Sylowgruppen von H sind für $p > 2$ zyklisch, und zyklisch oder verallgemeinerte Quaternionengruppen für $p = 2$.

Es gibt noch weitere Ergebnisse über endliche Frobeniusgruppen, über die Struktur von Frobeniuskomplement und Kern. Einige sind im Paragraphen 1.2 angegeben.

Was kann man erwarten, wenn eine Frobeniusgruppe unendlich ist? Im unendlichen Fall ist bekannt, dass obige Ergebnisse im Allgemeinen nicht gelten. Insbesondere gilt der Satz von Frobenius nicht mehr.

Die erste Klasse von unendlichen Gruppen, für die der Satz von Frobenius gilt, sind die lokal endlichen Gruppen. Kegel und Wehrfritz haben dies bewiesen. Sie haben auch gezeigt, dass lokal endliche Frobeniusgruppen dem Satz von Thompson genügen.

In der Tat, gibt es nicht viele Resultate für den unendlichen Fall.

In den Paragraphen 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5 betrachten und beweisen wir einige allgemeine Eigenschaften von unendlichen Frobeniusgruppen. Insbesondere beweisen wir Aussagen über Transversalen zu einem Frobeniuskomplement, über Involutionen und über Frobeniuskomplemente.

Eine kleine Beobachtung folgt sofort aus dem Lemma 2.1.2. Nämlich, *es gibt keine abelsche Frobeniusgruppe.*

In der Literatur werden verschiedene Definitionen von Frobeniusgruppen benutzt. Manchmal ist es nicht offensichtlich, dass diese Definitionen äquivalent sind. Zum Beispiel sind die Definitionen 2.1.4 und 2.1.5 äquivalent, wie in 2.1.6 gezeigt wird.

Im endlichen Fall gibt es viele Aussagen über das Frobeniuskomplement und den Kern. Einige Aussagen wie 1.2.9, 1.2.13 kann man auf den unendlichen Fall übertragen.

Im Folgenden verstehen wir unter einer Transversalen stets eine Transversale zu einem Frobeniuskomplement einer Frobeniusgruppe. Unter den vielen Transversalen sind wir an solchen Transversalen mit besonders schönen Eigenschaften interessiert.
Wefelscheid [26] vermutet, dass wegen Arbeiten von Nesin und Borovik eine unendliche Frobeniusgruppe mit einer endlichen Transversale existieren sollte. In der vorliegenden Arbeit widerlegen wir diese Vermutung (Lemma 2.2.2).

Es zeigt sich (Satz 2.2.3), dass *kommutative Transversalen stets Gruppen sind.*

Mit $\mathfrak{T}^* := \big\{T\backslash\{id\} \mid T \in \mathfrak{T}\big\}$ bezeichnen wir die Menge aller Transversalen einer Frobeniusgruppe ohne Identitätsabbildung. In Lemma 2.2.6 wird gezeigt, dass *es keine Frobeniusgruppen gibt, so dass jede Menge aus $\mathfrak{T}^*$ nur aus fixpunktfreien Abbildungen besteht.*

Im endlichen Fall spielt der Frobeniuskern F die Rolle einer Transversale. $F\backslash\{id\}$ besteht bekanntlich nur aus fixpunktfreien Abbildungen und F ist ein Normalteiler.

Das Lemma 2.2.10 liefert *eine hinreichende Bedingung, dass eine Transversale zu sich selbst konjugiert ist. Nämlich, das Frobeniuskomplement muss die Ordnung* 2 *haben.*

Dass das Frobeniuskomplement einer unendlichen Frobeniusgruppe endlich sein kann, liefert das Beispiel 2.2.8. In diesem Beispiel ist die Transversale kommutativ und normal.

Man kann vermuten, dass Kommutativität eine hinreichende Bedingung dafür ist, dass die Transversale normal ist. In 2.2.11 geben wir jedoch ein Beispiel für eine normale, nicht kommutative Transversale.

Wir benutzen dieses Beispiel auch, um zu zeigen, dass es unendliche Frobeniusgruppen gibt, die keine Involutionen haben (Beispiel 2.4.2). Diese Gruppen genügen sogar dem Satz von Frobenius (Bemerkung 2.4.3).

Unter anderem wird gezeigt:

Jede Gruppe mit fixpunktfreier (nach Def. 1.2.6) *Untergruppe der Automorphismengruppe kann als Frobeniuskern in einer Frobeniusgruppe vorkommen* (Satz 2.3.1 und Folgerung 2.3.4 als Beispiel).

Ferner betrachten wir ein umgekehrtes Einbettungsproblem:

Es sei eine unendliche Frobeniusgruppe gegeben, die dem Satz von Frobenius genügt. Das Zentrum eines Frobeniuskomplements sei trivial. Dann besitzt die Automorphismengruppe des Frobeniuskernes eine Untergruppe, die zum Frobeniuskomplement isomorph ist (Satz 2.3.5).

Man kann Zassenhausgruppen als eine transitive Erweiterung von Frobeniusgruppen betrachten.

Es liegt nahe zu versuchen, die Ergebnisse über endliche Zassenhausgruppen auf die Klasse der lokal endlichen Zassenhausgruppen auszudehnen. Dies gelingt teilweise. Kegel und Wehrfritz geben eine vollständige Übersicht über die lokal endlichen scharf 3-fach transitiven Zassenhausgruppen.

Bis jetzt sind uns nur solche unendlichen Zassenhausgruppen bekannt, die Untergruppen von scharf 3-fach transitiven Gruppen sind, sowie natürlich lokal endliche Suzuki-Gruppen $Sz(F)$.

In dieser Arbeit definieren wir die Zassenhausgruppen in Analogie zur Definition der Frobeniusgruppen, nämlich als transitive Permutationsgruppe G, derart dass die Standuntergruppen Frobeniusgruppen sind.

Huppert engt diese Definition - er betrachtet aber nur endliche Gruppen - noch weiter ein, indem er zusätzlich fordert, dass G keinen regulären Normalteiler besitzen soll.

Der Grund dafür ist wohl, weil es im endlichen Fall außer der Beispielklasse 1.3.6 keine Zassenhausgruppe mit regulärem Normalteiler gibt. Ito [12] hat es bewiesen.

Wir empfinden diese Beschränkung als künstlich und lassen diese Einschränkung in unserer Definition fort.

Die Konstruktion der endlichen Zassenhausgruppen mit regulärem Normalteiler läßt sich vermutlich nicht auf den lokal endlichen Fall verallgemeinern. Mit etwas anderen Ideen können wir *neue unendliche Zassenhausgruppe mit regulärem Normalteiler* angeben (Konstruktion (3.3.5) und Beispiele 3.3.10, 3.3.11).

Bis jetzt ist noch nicht geklärt, ob diese Zassenhausgruppe eine Untergruppe einer scharf 3-fach transitiven Gruppe ist. Es gilt allerdings, *falls die von uns in (3.3.5) konstruierte Gruppe eine Untergruppe einer scharf* 3*-fach transitiven Gruppe ist, dass dann das zugehörige und eindeutig bestimmte KT-Feld (3.2.2, 3.2.3) die Charakteristik* 2 *hat* (Satz 3.3.12 und Folgerung 3.3.15).

Wir vermuten aber, dass keine scharf 3-fach transitive Gruppe unsere Gruppe (3.3.5) als Untergruppe enthalten kann.

Wir haben auch gezeigt, dass *die schwächste algebraische Struktur* $(F, +, \cdot)$*, die zur Konstruktion 3.3.5 passt, ein Fastkörper ist* (Folgerung 3.3.7).

In [27] sind die Zassenhausuntergruppen von scharf 3-fach transitiven Gruppen klassifiziert. Dieses Resultat betrachten wir im Paragraphen 3.2.

Einige Aussagen über die endlichen Zassenhausgruppen sind ohne Einschränkungen auf den unendlichen Fall übertragbar. (z.B. 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3).

Abschliessend, in Kapitel 4, sammeln wir offene Fragen und Problemstellungen über unendliche Frobenius- und Zassenhausgruppen.

Meinem akademischen Lehrer Heinrich Wefelscheid möchte ich an dieser Stelle für Gespräche und Anregungen danken.

Abkürzungen und Bezeichnungen

Allgemein

$(a) \Rightarrow (b)$	aus (a) folgt (b)
$(a) \Leftrightarrow (b)$	(a) gilt genau dann, wenn (b) gilt
$\forall$; $\exists$; $\exists_1$	für alle; es existiert; es existiert genau ein
$:=$	nach Definition gleich
$\dot\cup$	disjunkte Vereinigung
$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}$	Menge der natürlichen, ganzen, komplexen Zahlen
F^*	$:= F\backslash\{0\}$
$GF(p^n)$	Galoiskörper mit $\mathrm{p^n}$ Elementen
$\{x \mid P(x)\}$ oder $\{x : P(x)\}$	Menge aller x mit der Eigenschaft P(x)
$\lvert M\rvert$	Mächtigkeit einer Menge M
$A\backslash B$	Menge aller Elemente aus A, die nicht zu B gehören
$\varphi : A \mapsto B$	Abbildung φ von A nach B
$\varphi\,\psi$	Komposition der Abbildungen ψ und φ (zuerst wird ψ und dann φ angewendet)
$(a,b) = 1$ oder $\mathrm{ggT}(a,b) = 1$	a und b sind teilerfremd
$a \mid b$	a teilt b
$\cong$	isomorph zu
$\square$	Beweisende

Bei einer Gruppe $(G,\cdot)$

$U < G$; $U \triangleleft G$	U ist eine Untergruppe bzw. Normalteiler von G
$[G : U]$	Index der Untergruppe U in G
G^*	$:= G\backslash\{e\}$ (e neutrales Element von G)
$Z(G)$	Zentrum von G
$C_G(S)$	Zentralisator von einer Menge S in G
$N_G(S)$	Normalisator von einer Menge S in G
G/N	Quotientengruppe von G nach N
$\langle S\rangle$	von $\mathrm{S \subset G}$ aufgespannte Untergruppe
SR	$\{\mathrm{s \cdot r} : \mathrm{s \in S},\ \mathrm{r \in R}\}$ $(\mathrm{S, R \subset G})$
aS ; Sa	$:= \{a\}S$ bzw. $S\{a\}$ $(\mathrm{a \in G},\ \mathrm{S \subset G})$
$[f,g]$	$:= \mathrm{f^{-1}h^{-1}fh}$ (Kommutator zweier Elemente) (manchmal auch $\mathrm{fhf^{-1}h^{-1}}$)

$H' = H^{(1)}$	$:= [\mathrm{H},\mathrm{H}]$ (Kommutatoruntergruppe von H)
f^h	$:= \mathrm{h}^{-1}\mathrm{fh}$
$Inn(G)$	Menge aller inneren Automorphismen von G
$Aut(G)$	Automorphismengruppe von G
$K(q)$	(siehe 1.2.17)
$ord(g)$; $\|g\|$	Ordnung eines Gruppenelementes g
$ord(G)$	$:= \|\mathrm{G}\|$
$Exp(G)$	Exponent von G
$c(G)$	Nilpotenzklasse von G
(G, M)	auf M operierende Permutationsgruppe G
$G_{a_1,\ldots,a_n}$	(siehe 1.1.7)

<u>bei speziellen Gruppen</u>

S_M	Symmetrische Gruppe, die auf M operiert
$\mathbf{P}(1, p^f)$	(siehe 1.3.2)
$Sz(q)$	Suzuki – Gruppe (siehe 1.3.3)
$M(p^f)$	(siehe 1.3.2)
$GL(2, \mathbb{K})$	Gruppe aller invertierbaren 2×2 Matrizen mit Koeffizienten aus dem kommutativen Körper $\mathbb{K}$
$GL(2, p^f)$	$:= \mathrm{GL}(2, \mathbb{K})$ mit $\|\mathbb{K}\| = \mathrm{p^f}$
$SL(2, \mathbb{K})$	eine Untergruppe von Matrizen aus $\mathrm{GL}(2, \mathbb{K})$ mit der Determinante 1
$PGL(2, \mathbb{K})$	$:= \mathrm{GL}(2, \mathbb{K})/\mathrm{Z}\big(\mathrm{GL}(2, \mathbb{K})\big)$
$PSL(2, \mathbb{K})$	$:= \mathrm{SL}(2, \mathbb{K})/\Big(\mathrm{Z}\big(\mathrm{GL}(2, \mathbb{K})\big) \cap \mathrm{SL}(2, \mathbb{K})\Big)$
$P\Gamma L(2, \mathbb{K})$	(siehe 1.3.2)
$char\ G$	(siehe 2.5.9 und 2.5.15)
$T_2(\mathbb{K})$; $T_3(\mathbb{K})$	(siehe 2.4.1 bzw. 3.2.2)
$(F, +, \cdot, \sigma)$	ein KT – Feld (siehe 3.2.2)
F^{φ}	(siehe 3.2.6)

1 Grundlagen

In diesem Kapitel werden grundlegende Definitionen und Sätze über endliche (multiplikativ geschriebene) Frobenius- und Zassenhausgruppen zusammengestellt, wie man sie unter anderem in [7],[8] und [10] finden kann.

1.1 Grundbegriffe

Wir benutzen die Standarddefinitionen aus der Gruppentheorie (siehe z.B. [7]). Ferner definieren wir, wie üblich, Transversalen folgendermaßen:

Definition 1.1.1. *Es sei $A \leqslant G$. Betrachten wir Linksnebenklassen gA von A in G. Dann ist G die disjunkte Vereinigung aller verschiedenen Linksnebenklassen gA. Enthält die Menge $T \subset G$ aus jeder Linksnebenklasse von A genau ein Element, so nennen wir T ein System von Linksnebenklassenvertretern oder auch Transversale von A in G. Die Zerlegung*

$$G = \dot{\bigcup_{t \in T}} tA$$

nennen wir die Zerlegung von G in Linksnebenklassen nach A. (Analog für Rechtsnebenklassen.)

Satz 1.1.2. *([29]) Wenn $[G : A]$ endlich ist, dann besitzen Links- und Rechtsnebenklassen von A in G sogar ein gemeinsames Vertretersystem T.*

Definition 1.1.3. *Eine Teilmenge $S_1 \subset G$ heißt konjugiert zu $S_2 \subset G$ wenn es ein $x \in G$ gibt mit $S_2 = xS_1x^{-1}$.*
$g \in G$ heißt konjugiert zu $g' \in G$, wenn es ein $x \in G$ gibt mit $g' = xgx^{-1}$.
Die Menge $\{xgx^{-1} : x \in G\}$ aller Konjugierten von g heißt eine Konjugiertenklasse.

Wichtig sind nun die Teilmengen von G, die zu sich selbst konjugiert sind. Dazu gehören z.B. die Normalteiler und die Konjugiertenklassen.

Satz 1.1.4. *Jede zu sich selbst konjugierte Teilmenge von G ist Vereinigung von Konjugiertenklassen.*

Definition 1.1.5. *Eine Permutationsgruppe ist ein Paar (G, M), bestehend aus einer Menge M und einer Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_M.*

Die Elemente aus M werden als Punkte bezeichnet. Die Mächtigkeit von M heißt der Grad der Permutationsgruppe (G, M).

Jede Permutation aus G der Ordnung 2 heißt Involution. Ist $|M| = n$ ($n \in \mathbb{N}$), so schreibt man auch S_n anstelle von S_M (bzw. A_n anstelle der Alternierenden Gruppe A_M).

Definition 1.1.6. *Eine Permutationsgruppe (G, M) bezeichnet man als (scharf) n-fach transitiv, wenn es zu je zwei n-Tupeln $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ und $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ mit jeweils n verschiedenen Elementen aus M (genau) ein $\varphi \in G$ existiert mit $\varphi(a_i) = b_i$ für $i = 1, \ldots, n$.*

Für "G ist 1-fach transitiv" sagt man auch kurz "G ist transitiv". Und statt "G ist scharf 1-fach transitiv" sagt man oft "G ist regulär".

Definition 1.1.7. *Ist (G, M) eine Permutationsgruppe und $a \in M$, so heißt die Gruppe $G_a := \{\varphi \in G \mid \varphi(a) = a\}$ die Standuntergruppe von G bzgl. des Punktes a (oder Stabilisator von a).*

Sind $a_1, \ldots, a_n$ verschiedene Punkte aus M, dann ist mit G_{a_1,a_2} die Standuntergruppe von G_{a_1} bzgl. des Punktes a_2 gemeint. Durch rekursive Fortsetzung gelangt man schliesslich zu der Definition der Gruppe $G_{a_1,\ldots,a_n}$.

Satz 1.1.8. *([16]) Alle Elemente einer Konjugiertenklasse in einer Permutationsgruppe haben die gleiche Anzahl von Fixpunkten.*

Satz 1.1.9. *([23]) Ist (G, M) eine 2-fach transitive Permutationsgruppe und $a \in M$, so gilt für alle $\beta \in G \backslash G_a$:*

$$G = G_a \,\dot{\cup}\, G_a \beta G_a = \langle G_a, \beta \rangle.$$

Satz 1.1.10. *([16]) Es sei (G, M) eine transitive Permutationsgruppe und $a \in M$. Dann sind die beiden folgenden Aussagen für $k > 3$ äquivalent:*

(*i*) *G ist scharf k-fach transitiv auf M.*
(*ii*) *G_a ist scharf $k-1$-fach transitiv auf $M \backslash \{a\}$.*

Satz 1.1.11. *([21]) Jede scharf k-fach transitive Permutationsgruppe G von Grad n mit $k, n \in \mathbb{N}$ hat die Mächtigkeit*

$$|G| = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

Definition 1.1.12. *Jeder Homomorphismus einer Gruppe G in die symmetrische Gruppe S_n auf einer Ziffernmenge Ω mit $|\Omega| = n$ heißt eine Permutationsdarstellung von G von Grad n auf Ω. Eine Permutationsdarstellung heißt treu, wenn sie ein Monomorphismus ist.*

1.2 Allgemeines über endliche Frobeniusgruppen

Definition 1.2.1. *Eine Untergruppe H der Gruppe G heißt malnormal, wenn $H \cap H^g = \{1\} \quad \forall\, g \in G \backslash H$ gilt.*

Definition 1.2.2. *G heißt eine Frobeniusgruppe, falls sie eine echte malnormale Untergruppe $H < G$ besitzt.*

Hauptsatz 1.2.3 (Satz von Frobenius)**.** *([7]) Sei H eine echte malnormale Untergruppe von G und $|G| < \infty$. Dann ist*

$$F = G \backslash \bigcup_{g \in G} (H \backslash \{1\})^g$$

ein Normalteiler von G, $F \cap H = \{1\}$ und G ein semidirektes Produkt von F und H.

Die Schwierigkeit des Beweises liegt darin, zu zeigen, dass F eine Untergruppe ist. Die Normalität folgt sofort. Nach 1.2.3 nennen wir G eine Frobeniusgruppe zu H, und F den Frobeniuskern von G.

Es ist zu bemerken, dass es bis jetzt nur Beweise gibt, die die Theorie der Gruppencharaktere benutzen.

An den in 1.2.2 eingeführten Bezeichnungen halten wir in diesem Paragraphen fest. Zuerst übersetzen wir die Aussage von 1.2.3 in die Sprache der Permutationsgruppen.

Satz 1.2.4. *a) Sei G eine transitive, nicht reguläre Permutationsgruppe. Jedes von 1 verschiedene Element von G habe höchstens einen Fixpunkt. Sei H der Stabilisator eines Punktes. Dann ist G eine Frobeniusgruppe zu H. Die fixpunktfreien Permutationen aus G bilden zusammen mit 1 den Frobeniuskern F von G, und F ist regulär.*

b) Sei G eine Frobeniusgruppe zu H. Dann liefert die Permutationsdarstellung von G auf den Nebenklassen von H einen Isomorphismus von G auf eine transitive, nicht reguläre Permutationsgruppe von Grad$[G : H]$, in welcher jedes von 1 verschiedene Element höchstens einen Fixpunkt hat.

Bemerkung. Im unendlichen Fall gilt diese Äquivalenz der zwei Definitionen auch. Die Behauptung, dass die fixpunktfreien Permutationen aus G zusammen mit 1 den Frobeniuskern F von G bilden und F regulär ist, muss man jedoch weglassen.

Satz 1.2.5. *([7]) Sei G eine Frobeniusgruppe zu H. Dann ist $|H|$ ein Teiler von $[G : H] - 1$. Also sind H und der Frobeniuskern F von G Hallunter-gruppen von G. Insbesondere ist F eine charakteristische Untergruppe von G.*

Definition 1.2.6. *a) Sei α ein Automorphismus von G. Wir nennen α fixpunktfrei, wenn α kein von 1 verschiedenes Element von G festlässt.*

b) Ist U eine Untergruppe der Automorphismengruppe $Aut(G)$, so nennen wir U fixpunktfrei, wenn alle $u \in U \backslash \{1\}$ fixpunktfreie Automorphismen von G sind.

Wir benutzen mehrfach die folgende Beschreibung der Frobeniusgruppen:

Satz 1.2.7. *Gleichwertig sind:*

a) G ist eine Frobeniusgruppe zu H, und F ist der Frobeniuskern von G.

b) Es gilt $G = F \cdot H$ mit $H < G$ und $F \lhd G$. Die Abbildung φ von H in $Aut(F)$ mit $f^{\varphi(h)} = h^{-1}fh$ für $h \in H$ und $f \in F$ ist ein Isomorphismus von H auf eine fixpunktfreie Gruppe von Automorphismen von F.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b)

Nach 1.2.3 gilt $G = F \cdot H$ mit $F \lhd G$ und $F \cap H = \{1\}$. Sei $h \in H$ und $f \in F$ mit $f^h = f$. Dann ist $fhf^{-1} = h \in H \cap H^{f^{-1}}$. Ist $f \neq 1$, also $f^{-1} \in G \backslash H$, so folgt aus unseren Voraussetzungen $H \cap H^{f^{-1}} = \{1\}$, also $h = 1$. Ist $h \neq 1$, so gilt daher $f = 1$. Somit bewirkt H eine fixpunktfreie Gruppe von Automorphismen auf F.

b) $\Rightarrow$ a)

Sei $x \in F \cap H$. Dann ist $x = x^x$, also $x = 1$ wegen der Fixpunktfreiheit von $\varphi(x)$. Somit gilt $F \cap H = \{1\}$, und $G = F \cdot H$ ist ein semidirektes Produkt von F mit H. Sei $h_1 \in H \cap H^g$ mit $g \in G \backslash H$. Dann ist $g = hf$ mit $h \in H$ und $1 \neq f \in F$. Es folgt $H^g = H^f$ und

$h_1 = h_2^f \in H \cap H^f$

mit geeigneten $h_2 \in H$. Wegen $F \lhd G$ ist

$h_1 h_2^{-1} = [f, h_2^{-1}] \in H \cap F = \{1\}$.

Somit $h_1 = h_2$. Aus $f^{h_1} = f$ folgt wegen der Voraussetzung ($f \neq 1$) nun $h_1 = 1$. Also ist $H \cap H^g = \{1\}$ und G ist eine Frobeniusgruppe zu H.

□

Beispiel 1.2.8. *a) Es sei* $(L, +, \cdot)$ *ein Körper mit* $|L| > 2$ *und* $\{1\} \neq A \leqslant (L^*, \cdot)$*, dann ist* (G, L) *mit*

$$G := \left\{ \gamma_{a,m} \ : \begin{cases} L \to L \\ x \to a + mx \end{cases} \ \middle| \ a \in L,\ m \in A \right\}$$

eine Frobeniusgruppe zu $H = \{\beta \ : \ x \to ax \mid a \in L^*\} = G_0$.
Die Gruppe $F = \{\gamma \ : \ x \to x + b \mid b \in L\}$ *ist der Frobeniuskern von* G.

b)(Beispiel 8.6 aus [7]) Über dem Körper $\mathbb{K} = GF(p^f)$ *betrachten wir die Gruppe* $F = \big\{(k_{ij}) \mid \ k_{ij} \in \mathbb{K},\ k_{ii} = 1,\ k_{ij} = 0 \ für \ j > i;\ i, j = 1 \ldots n\big\}$ *aller Dreiecksmatrizen mit Diagonalelementen* 1. *Sei* q *ein Primteiler von* $p^f - 1$ *mit* $q \geqslant n$*, dann gibt es in* $\mathbb{K}$ *paarweise verschiedene Elemente* $d_1, \ldots, d_n$ *mit* $d_i^q = 1$. *Wir bilden die Diagonalmatrix*

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$$

und behaupten: Für $0 < m < q$ *bewirkt* $\mathbf{M}^m$ *einen fixpunktfreien Automorphismus auf* F. *Sei nämlich* $\mathbf{A} = (k_{ij})$ *und* $\mathbf{M^{-m}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{A}$. *Das erfordert* $d_j^{-m} \cdot k_{ij} \cdot d_j = k_{ij}$ *für alle* i, j. *Wegen* $(m, q) = 1$ *ist für* $i \neq j$ *auch* $d_i^m \neq d_j^m$. *Also gilt* $k_{ij} = 0$ *für* $i \neq j$ *und somit* $\mathbf{A} = \mathbf{E}$. *Nach 1.2.7 ist daher das semidirekte Produkt* $G = F \cdot H$ *mit* $H = \langle \mathbf{M} \rangle$ *eine Frobeniusgruppe zu* H *mit dem Frobeniuskern* F.

c) Es sei D_{2n} *die Diedergruppe der Ordnung* $2n$. D_{2n} *ist für ungerades* n *eine Frobeniusgruppe. Frobeniuskomplemente sind die* 2*-Sylowgruppen, die alle die Ordnung* 2 *haben (da* n *ungerade).*

$D_{2n} = \langle a, b \rangle$ *mit* $a^2 = 1$ *und* $b^n = 1$ *und* $aba^{-1} = b^{-1}$. $\Rightarrow D_{2n} = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$. *Setze* $B := \langle b \rangle = \{1, b, \ldots, b^{n-1}\}$ *und* $A := \langle a \rangle = \{1, a\}$. *Die Untergruppe* B *ist ein Normalteiler von* D_{2n} *und für alle* $m \in \{1 \ldots n-1\}$ $b^m \cdot A \cdot b^{-m} = \{1, b^m a b^{-m}\} = \{1, ab^{-2m}\} \Rightarrow \ A \cap b^m \cdot A \cdot b^{-m} = \{1\}$.

Satz 1.2.9. *Sei* G *eine Frobeniusgruppe zu* H *mit dem Frobeniuskern* F. *Ist* $N \trianglelefteq G$*, so gilt* $N \leqslant F$ *oder* $F < N$.

Beweis. Sei $N \nleqslant F$, dann gibt es ein $n \in N$ so, dass $n \notin F$. $\Rightarrow \exists g \in G$ und $h \in H : n = g^{-1}hg$ ist. Also $n_2 = h = gng^{-1} \in N$ und $n_2 \notin F$. $\Rightarrow (fn_2f^{-1})n_2^{-1} \in N$ und $f(n_2f^{-1}n_2^{-1}) \in F \ \ \forall f \in F$.

Nach dem Satz 2.1.6 $\ \forall f \in F \ \alpha_{n_2} = \alpha_h : f \mapsto fhf^{-1}h^{-1}$ ist bijektiv für $h \neq 1$. Also $\alpha(F) = F \Rightarrow F \subset N \Rightarrow F < N$.

$\square$

Satz 1.2.10. *([10]) Alle Frobeniuskomplemente einer endlichen Frobeniusgruppe sind konjugiert.*

Satz 1.2.11. *([10]) Sei G eine endliche Frobeniusgruppe zu H mit dem Frobeniuskern F.*

a) (Thompson) F ist nilpotent, d.h. G ist direktes Produkt von p-Gruppen.

b) (Burnside) Die p-Sylowgruppen von H sind zyklisch für $p > 2$. Sie sind zyklisch oder verallgemeinerte Quaternionengruppen für $p = 2$.

Definition 1.2.12. *Eine Gruppe G heißt verallgemeinerte Quaternionengruppe, wenn $G = \langle x, y\rangle$ mit $x^{2^m} = 1$, $y^2 = x^{2^{m-1}}$, $y^{-1}xy = x^{-1}$. $|G| = 2^{m+1}$, $m \geqslant 2$.*

Satz 1.2.13. *Sei G eine Frobeniusgruppe zu H mit dem Frobeniuskern F.*

a) Sei $K \neq \{1\}$ eine Untergruppe von H, dann ist KF eine Frobeniusgruppe zu K mit dem Frobeniuskern F.

b) Sei M eine Untergruppe von G und $H < M$. Dann ist M eine Frobeniusgruppe zu H und $M \cap F$ ein Frobeniuskern von M.

Beweis. a) Es sei $x \in N_G(K)$. Dann $\{1\} \neq K = x^{-1}Kx \leqslant x^{-1}Hx$ und $x \in H$, so dass $N_G(K) \cap KF = N_G(K) \cap H \cap KF = K$ und $N_{KF}(K) = K$. Wenn $y \in KF \backslash K \Rightarrow y \notin H$ und $y^{-1}Ky \cap K \leqslant y^{-1}Hy \cap H = \{1\}$.

b) Es sei $H < M \leqslant G$. Aus $G = HF$ folgt $M = H(F \cap M)$ und $N_G(H) \cap M = H \cap M = H$. Wenn $x \in M \backslash H$, dann $x^{-1}Hx \cap H = \{1\}$ und $H \cap F \cap M = \{1\}$.

$\square$

Satz 1.2.14 (Zassenhaus). *([10]) Es sei F ein Hallnormalteiler von G. Dann gibt es eine Untergruppe H von G, so dass $G = FH$ und $F \cap H = \{1\}$.*

Hauptsatz 1.2.15. *([10]) Hinreichende und notwendige Bedingung, dass eine Gruppe H isomorph zu einem Frobeniuskomplement einer Gruppe G ist, ist dass H eine treue Darstellung als eine Gruppe von linearen Transformationen ohne Eigenwerte 1 eines endlich-dimensionalen Vektorraumes über $GF(p)$ hat.*

Satz 1.2.16. *([10]) Sei G eine Frobeniusgruppe mit dem Frobeniuskomplement H und Frobeniuskern F. Sei $\{1\} < F_1 < F$ eine normale Untergruppe von G. Dann ist HF_1/F_1 ein Frobeniuskomplement von G/F_1 und F/F_1 ein Frobeniuskern von G/F_1.*

Definition 1.2.17. *Sei G eine Frobeniusgruppe mit dem Kern F. Dann ist $G = FH$, wobei H ein Frobeniuskomplement von G ist. Wenn $|H| = q$ ist, dann heißt F ein q-zulässiger Kern. Wir bezeichnen die Menge aller q-zulässigen Kerne als $K(q)$.*

Lemma 1.2.18. *([10]) a) Wenn $F \in K(q)$ und $\{e\} \neq F_1$ eine charakteristische Untergruppe von F ist, dann sind F_1 und F/F_1 in $K(q)$.*
b) Falls $F_1, F_2 \in K(q)$ sind, dann $F_1 \times F_2 \in K(q)$.

Satz 1.2.19. *([10]) Sei q eine ungerade Primzahl. Dann enthält $K(q)$ eine Gruppe F mit Nilpotenzklasse $c(F) = q - 1$.*

Bemerkung 1.2.20. *Wenn $F \in K(q)$ ist, dann hat F einen fixpunktfreien Automorphismus der Ordnung q.*

Beweis. $G = FH$, wobei $|H| = q$ und $|H| = \langle h \rangle$, dann ist $\bar{h} \ : \ g \mapsto h^{-1}gh$ ein Automorphismus von F, der fixpunktfrei ist und die Ordnung q hat. Die Umkehrung gilt auch. □

Satz 1.2.21. *([10]) Sei $k(q) = max\big\{c(F) \ : \ F \in K(q)\big\}$, wobei $K(q)$ die Klasse von allen q-zulässigen Frobeniuskernen ist. Dann gilt*

$$q - 1 \leqslant k(q) \leqslant \frac{(q-1)^{2^{q-1}} - 1}{q - 2} + 1$$

Higman hat gezeigt, dass $\frac{q^2-1}{4} \leqslant k(q)$ ist.

1.3 Allgemeines über endliche Zassenhausgruppen

Definition 1.3.1. *Eine Permutationsgruppe G heißt Zassenhausgruppe, wenn folgendes gilt:*

1) *G ist 2-fach transitiv.*

2) *Die Standuntergruppe von zwei verschiedenen Elementen ist nicht trivial.*

3) *Jedes Element $\alpha \in G, \ \alpha \neq id$ hat höchstens zwei Fixpunkte.*

Beispiel 1.3.2. *([8]) In den folgenden Beispielen sei $\overline{\mathbb{K}} = \mathbb{K} \cup \{\infty\}$, wobei $\mathbb{K}$ ein Körper ist.*

a) *Es sei* $\mathbb{K} \neq 2$. *Dann ist die Gruppe*

$L_2(\mathbb{K}) = \left\{\gamma \;:\; x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} \;\middle|\; a,b,c,d \in \mathbb{K} \text{ mit } ad-bc \neq 0\right\}$ *aller umkehrbaren gebrochen linearen Abbildungen von* $\overline{\mathbb{K}}$ *auf sich scharf* 3*-fach transitiv (aber nicht scharf* 2*-fach transitiv), und somit eine Zassenhausgruppe.*

$L_2(\mathbb{K})$ *ist isomorph zu* $PGL(2,\mathbb{K})$. *Und noch mehr sind* $\big(L_2(\mathbb{K}), \overline{\mathbb{K}}\big)$ *und* $\big(PGL(2,\mathbb{K}), P(\mathbb{K})\big)$ *isomorph als Permutationsgruppen, wobei*

$P(\mathbb{K}) = \left\{\mathbb{K}^* \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; x,y \in \mathbb{K},\; (x,y) \neq (0,0)\right\}$ *die projektive Gerade über* $\mathbb{K}$.

Für $|\mathbb{K}| = 2$ *gilt* $PGL(2,2) = PSL(2,2) \cong S_3$. *Also ist* $PGL(2,2)$ *scharf* 2*-fach transitiv und keine Zassenhausgruppe.*

b) *Es sei* $\mathbb{K} \ncong GF(p^f)$ *mit* $p^f = 3$ *oder* $p = 2$. *Dann ist* $PSL(2,\mathbb{K})$ *eine Zassenhausgruppe. Wenn* $\mathbb{K} = GF(p^f)$ *mit* $p^f \neq 3$ *und* $p > 2$ *ist, hat diese Gruppe die Ordnung*

$$\frac{(p^f+1)p^f(p^f-1)}{2}$$

Für $p = 2$ *ist* $PSL(2,2^f) = PGL(2,2^f)$. *(Also sind wir wieder im Fall a).*

Sei $\mathbb{K} \cong GF(p^f)$ *mit* $p^f = 3$. *Dann ist* $PSL(2,3) \cong A_4$ *keine Zassenhausgruppe.*

c) *Sei nun* $\mathbb{K} \ncong GF(2^f)$ *ein Körper mit einem involutorischen Automorphismus* α. *Als Beispiel betrachten wir den Körper* $GF(p^f)$ *mit* $p > 2$ *und* $f = 2m$. *Dann hat* $\mathbb{K} = GF(p^f)$ *genau einen Automorphismus* α *der Ordnung* 2 *und* $\alpha(x) = x^{p^m}$. *Es sei* $H := PGL(2,\mathbb{K})\langle\alpha\rangle$, *wobei* $\alpha(\infty) = \infty$. *Dann ist* H *eine Untergruppe von* $P\Gamma L(2,\mathbb{K})$ *und* $H/PSL(2,\mathbb{K})$ *ist elementar-abelsch der Ordnung* 4. *Deswegen hat* H *drei Untergruppen vom Index* 2, *die* $PSL(2,\mathbb{K})$ *enthalten.* $PGL(2,\mathbb{K})$, $\langle PSL(2,\mathbb{K}), \alpha\rangle$ *und* $M(\mathbb{K})$.

Falls $h \in H$, *dann*

$$h(x) = \frac{a\beta(x)+b}{c\beta(x)+d}$$

wobei $\delta = ad - bc \neq 0$ *und* $\beta \in \{1, \alpha\}$. *Die Abbildung* $\Psi : h \mapsto (\epsilon, \beta)$ *mit* $\begin{cases} \epsilon = \ \ 1, \ falls\ \delta \in \mathbb{K}^2 \\ \epsilon = -1, \ falls\ \delta \notin \mathbb{K}^2 \end{cases}$ *ist ein Homomorphismus von* H *auf die elementar-abelsche* 2*-Gruppe der Ordnung* 4 *mit dem Kern* $\Psi = PSL(2, \mathbb{K})$.

Dann ist $M(\mathbb{K}) = \Psi^{-1}(\langle -1, \alpha \rangle)$. *Also besteht* $M(\mathbb{K})$ *aus allen Abbildungen der obengegebenen Art* h *mit* $\begin{cases} \beta = \ \alpha, \ falls\ \delta \notin \mathbb{K}^2 \\ \beta = \ 1, \ falls\ \delta \in \mathbb{K}^2 \end{cases}$.

Da $PSL(2, \mathbb{K}) < M(\mathbb{K})$ *gilt, ist* $M(\mathbb{K})$ *auch* 2*-fach transitiv auf* $\overline{\mathbb{K}}$.

$M(\mathbb{K})_{0,\infty}$ *besteht aus folgenden Abbildungen* $g : x \mapsto a\beta(x)$ *mit* $a \neq 0$ *und* $\begin{cases} \beta = \ \alpha, \ falls\ a \in \mathbb{K}^2 \\ \beta = \ 1, \ falls\ a \notin \mathbb{K}^2 \end{cases}$.

Angenommen, $x \neq 0$, $x \neq \infty$ *und* $x = a\beta(x)$. *Falls* $\beta = \alpha$, *dann* $a = x\big(\alpha(x)\big)^{-1} = x^{1-p^m} \in \mathbb{K}^2$, *weil* $p \neq 2$ *ist. (Widerspruch.)*

Also $\beta = 1$, $a = 1$ *und* $g = 1$. *Deswegen hat kein* $g \in M(\mathbb{K}) \ : \ g \neq 1$ *mehr als zwei Fixpunkte.*

$PSL(2, \mathbb{K})$ *ist ein einfacher Normalteiler von* $M(\mathbb{K})$ *vom Index* 2. *Also hat* $M(\mathbb{K})$ *keinen regulären Normalteiler und* $M(\mathbb{K})$ *ist eine scharf* 3*-fach transitive Zassenhausgruppe.*

Die p-Sylowgruppen von $PGL(2, \mathbb{K})$ *und* $M(\mathbb{K})$ *haben nicht-isomorphe Normalisatoren. Somit ist* $PGL(2, \mathbb{K}) \ncong M(\mathbb{K})$.

Jede endliche Zassenhausgruppe ohne regulären Normalteiler ist entweder eine der drei obenbeschriebenen a),b),c) oder eine einfache Suzuki-Gruppe, die gleich definiert wird.

Die Gruppen aus Beispiel 1.3.2 waren die einzigen endlichen Zassenhausgruppen, die man bis 1959 kannte. Als Suzuki die $PSL(2, p^f)$ Gruppen zu charakterisieren versuchte, hat er die nächste unendliche Familie von endlichen Zassenhausgruppen gefunden:

Definition 1.3.3. *Es sei* $\mathbb{K} = GF(q)$ *mit* $q = 2^{2m+1}$ *und* $m > 0$. *Dann hat* $\mathbb{K}$ *genau einen Automorphismus* φ *mit* $\varphi(x) = x^{2^{m+1}}$. *Für* $a, b \in \mathbb{K}$ *und* $\lambda \in \mathbb{K}^*$ *sei*

$$S(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & \varphi(a) & 1 & 0 \\ a^2\varphi(a)+ab+\varphi(b) & a\varphi(a)+b & a & 1 \end{pmatrix},$$

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^{1+2^m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{2^m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-2^m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^{-1-2^m} \end{pmatrix},$$

$$F = \{S(a,b) \mid a,b \in \mathbb{K}\}, \quad H = \{M(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{K}^*\} \quad \textit{und}$$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann definiert man als Suzuki-Gruppe $Sz(q)$ eine Untergruppe von $GL(4,q)$ und zwar: $Sz(q) = \langle S(a,b), M(\lambda), T \mid a,b \in \mathbb{K},\ \lambda \in \mathbb{K}^* \rangle$.

Satz 1.3.4. *([8]) Im projektiven Raum $\boldsymbol{P}(3,q)$ sei $p_\infty := [1,0,0,0]$, $p(x,y) := [xy+\varphi(x)x^2+\varphi(y), y, x, 1]$ (in homogenen Koordinaten). Sei $O := \{p_\infty, p(x,y) \mid x,y \in \mathbb{K}\}$ das Ovoid. Dann induziert $Sz(q)$ eine Gruppe von Kolineationen von $\boldsymbol{P}(3,q)$, die O auf sich bildet. $Sz(q)$ ist wohldefiniert auf O und ist eine Zassenhausgruppe der Ordnung $(q^2+1)q^2(q-1)$ auf O. Der Stabilisator von p_∞ von $Sz(q)$ ist gleich FH und somit eine Frobeniusgruppe.*

Hauptsatz 1.3.5. *([8]) Es sei G eine Zassenhausgruppe ohne regulären Normalteiler vom Grad $n+1$ auf der Menge $\Omega = \{\infty, 0, 1, \ldots, n-1\}$ und der Ordnung $(n+1)nd$, wobei $d = |G_{0,\infty}|$ mit $d \neq 1$ ist. Dann ist $n = p^f$ eine Primpotenz und eine der folgenden Aussagen gilt immer:*

a) $G = PGL(2, p^f)$.

b) p ist ungerade und $G = PSL(2, p^f)$.

c) p ist ungerade, f ist gerade und G ist eine der scharf 3-fach transitiven Gruppen $M(p^f)$ aus Beispiel 1.3.2.

d) $p = 2$ und G ist eine Suzuki-Gruppe $Sz(q)$.

Also die endlichen Zassenhausgruppen ohne regulären Normalteiler sind alle von Huppert klassifiziert und explizit bekannt.

Uber endliche Zassenhausgruppen mit regulärem Normalteiler ist es bekannt, dass es nur eine einzige Beispielklasse 1.3.6 gibt. Ito [12] hat es bewiesen. Dies ist der Grund, dass Huppert unter Zassenhausgruppen nur solche ohne regulären Normalteiler versteht.

Beispiel 1.3.6. *([12]) Es sei $M = GF(2^p)$, wobei p prim ist. Betrachten wir die Menge $G := \{x \mapsto ax^{2^c} + b \mid a, b \in GF(2^p),\ a \neq 0,\ c \in \{0, 1, \ldots, p-1\}\}$. Dann ist (G, M) eine Zassenhausgruppe mit dem regulären Normalteiler, denn: Die Standuntergruppe von 0 ist $H = \{x \mapsto ax^{2^c}$ mit $a \neq 0,\ c \in \{0, 1, \ldots, p-1\}\}$. H ist transitiv auf $GF(2^p) \backslash \{0\}$.*

H ist eine Frobeniusgruppe mit dem Komplement $K = \{x \mapsto x^{2^c}\}$ und mit dem Frobeniuskern $F = \{x \mapsto ax\}$.

Sei nun $N = \{x \mapsto x + b\}$, dann kann man leicht nachprüfen, dass $N \trianglelefteq G$ und $G = NH$ mit $N \cap H = E$ ist.

Satz 1.3.7. *([12]) Jede endliche Zassenhausgruppe mit regulärem Normalteiler ist isomorph als Permutationsgruppe zu einer der Gruppen aus Beispiel 1.3.6 mit geeigneter Primzahl p.*

2 Einige Ergebnisse und Beispiele über unendliche Frobeniusgruppen

2.1 Einige allgemeine Behauptungen

Was kann man erwarten, wenn eine Frobeniusgruppe unendlich ist? Der Satz von Frobenius läßt sich nicht ohne Zusatzbedingungen auf den unendlichen Fall verallgemeinern, wie viele Beispiele zeigen.

In [6] ist folgendes Beispiel angegeben:

Sei G die von $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ erzeugte Untergruppe von $GL(2, \mathbb{C})$. Die zyklischen Gruppen $\langle A \rangle$ und $\langle B \rangle$ sind malnormale Untergruppen von G. Für $\langle B \rangle$ gilt der Satz von Frobenius, für $\langle A \rangle$ jedoch nicht.

Die erste Klasse von unendlichen Gruppen, für die der Satz von Frobenius gilt, sind die lokal endlichen Gruppen, siehe Kegel [14]. Kegel hat auch gezeigt, dass bei lokal endlichen Frobeniusgruppen der Frobeniuskern nilpotent ist.

Ein neueres Ergebnis über Frobeniusgruppen ist der folgende Satz von Collins [2].

Satz 2.1.1. *Es sei (G, M) eine unendliche Frobeniusgruppe. Erzeugen je zwei fixpunktfreie Elemente eine endliche Untergruppe, dann bildet die Menge der fixpunktfreien Elemente von G mit 1 einen Normalteiler N. N operiert transitiv auf M (ist also regulär), wenn eine der folgenden Bedingungen gilt:*

a) Je zwei Elemente von G erzeugen eine endliche Untergruppe.

b) $N \neq 1$ und G ist 2-fach transitiv.

Wenn b) gilt, dann ist N abelsch.

Die Existenz von fixpunktfreien Elementen in G ist eine wichtige Bedingung, denn nach Collins [2] gibt es eine Frobeniusgruppe ohne fixpunktfreie Elemente, ist also eine Gruppe der Form $G = \bigcup_{a \in M} G_a$.

Es ist anzumerken, dass Collins auf ein Beispiel von Shelah und Rips verweist, das er jedoch nicht ausführt.

In diesem Paragraphen und im Weiteren bezeichnet (G, M) stets eine unendliche Frobeniusgruppe.

Zunächst kann man bemerken, dass die Sätze 1.2.9 und 1.2.13 über den Frobeniuskern und das Komplement im unendlichen Fall allgemein gültig sind, weil die Beweise keine Endlichkeit brauchen.

Lemma 2.1.2. *(G, M) sei eine Frobeniusgruppe. Dann ist $|Z(G)| = 1$.*

Beweis. Sei $|Z(G)| \neq 1$, dann gibt es $1 \neq \alpha \in Z(G)$ und wir finden $a \in M$ mit $\alpha(a) \neq a$. Es ist klar, dass $G_a = \alpha \cdot G_a \cdot \alpha^{-1} = G_{\alpha(a)}$, was bedeutet, dass $\alpha = 1$, weil $G_a \cap G_{\alpha(a)} = \{1\}$ ist. Widerspruch.

□

Bemerkung 2.1.3. *Aus dem Lemma 2.1.2 folgt sofort, dass es keine abelschen Frobeniusgruppen gibt.*

Wir beweisen zunächst, dass die beiden folgenden Definitionen für Frobeniusgruppen äquivalent sind.

Definition 2.1.4. *G heißt eine Frobeniusgruppe, falls es Untergruppen F und H von G gibt, so dass $G = FH$ mit folgenden Eigenschaften*

$$H \text{ ist malnormal} \tag{1}$$

$$F \backslash \{1\} = G \setminus \bigcup_{g \in G} H^g \tag{2}$$

Definition 2.1.5. *F,H seien nicht triviale Untergruppen von G. $G := FH$ ist eine Frobeniusgruppe $\Leftrightarrow$ Für alle $h \in H\backslash\{1\}$ ist $\alpha_h : F \mapsto F$ $(f \mapsto [f, h])$ bijektiv.*

Satz 2.1.6. *Definition 2.1.4 und Definition 2.1.5 sind für Frobeniusgruppen äquivalent.*

Beweis. (2.1.4) $\Rightarrow$ (2.1.5)

a) Injektivität von α_h.

   Es sei $h \neq 1$ und $f_1 \neq f_2 \in F$.

   Angenommen, dass $\alpha_h(f_1) = \alpha_h(f_2)$. Dann folgern wir

   $f_1 h f_1^{-1} h^{-1} = f_2 h f_2^{-1} h^{-1} \Rightarrow f_1 h f_1^{-1} = f_2 h f_2^{-1} \Rightarrow f_2^{-1} f_1 h f_1^{-1} f_2 = h.$

   Wenn $f_3 := f_2^{-1} f_1$, dann ist $f_3 \neq 1$ und $f_3 h f_3^{-1} = h$ und mit (1) erhält man den Widerspruch $h = 1$.

b) Surjektivität.

Angenommen, $h \neq 1$ und $1 \neq f_1 \in F$ so, dass für alle $f \in F$ $\alpha_h(f) \neq f_1$ ist. Dann gilt für jedes $f \in F$, dass $fhf^{-1}h^{-1} \neq f_1$ und somit $fhf^{-1} \neq f_1 h$ und $h \neq 1$ d.h. $f_1 h \notin F$.

Mit (2) gilt $f_1 h \in \bigcup_{g \in G} H^g$. Dann gibt es $g \in G$ und $h_1 \in H$ mit

$gh_1g^{-1} = f_1 h$.

Es sei $g = f_3 h_3$. Dann ist $f_3 h_3 h_1 h_3^{-1} f_3^{-1} = f_1 h$. Mit $h_5 := h_3 h_1 h_3^{-1}$ erhält man $f_3 h_5 f_3^{-1} = f_1 h$ oder

$f_3 h_5 f_3^{-1} h_5^{-1} = f_1 h_4$, wobei $h = h_4 h_5$ ist. Dann folgern wir

$f_3 h_5 f_3^{-1} h_5^{-1} \in F \Rightarrow f_1 h_4 \in F \Rightarrow h_4 = 1 \Rightarrow h = h_5$.

Somit gibt es $f_3 \in F$ mit $\alpha_{h_5}(f_3) = \alpha_h(f_3) = f_1$. Widerspuch.

(2.1.5) $\Rightarrow$ (2.1.4)

a) Falls H nicht malnormal ist, existiert $g \in G \backslash H$ mit $H \cap H^g \neq \{1\}$. Dann ist $g = f_1 h_1$ mit $f_1 \neq 1$.

Es sei $h_2 \in H \cap H^g$, dann ist $h_2 = gh_3g^{-1} = f_1 h_1 h_3 h_1^{-1} f_1^{-1}$. Also gilt $h_2 = f_1 h_5 f_1^{-1}$ mit $h_5 := h_1 h_3 h_1^{-1}$.

$H \ni h_2 h_5^{-1} = f_1 h_5 f_1^{-1} h_5^{-1} = \alpha_{h_5}(f_1) \in F$. Somit ist $f_1 h_5 f_1^{-1} h_5^{-1} = 1$ d.h. $\alpha_{h_5}(f_1) = 1$, $\alpha_{h_5}(1) = 1$ und $f_1 \neq 1$. Widerspruch. (Denn α_h ist injektiv.)

b) Wir beweisen zunächst $F \backslash \{1\} \subseteq G \backslash \bigcup_{g \in G} H^g$.

Falls $f \in F \backslash \{1\} \bigcap \left(\bigcup_{g \in G} H^g \right)$. Dann ist $f = ghg^{-1}$ für geeignete $g \in G$ und $h \in H$.

$g = f_1 h_1 \Rightarrow f = f_1 h_1 h h_1^{-1} f_1^{-1} \Rightarrow f_1^{-1} f f_1 = h_2$ mit $h_2 = h_1 h h_1^{-1} \Rightarrow h_2 = 1$ und $f_1^{-1} f f_1 = 1 \Rightarrow f = 1$. Widerspruch.

Aus der Negation von (2) folgt $F \backslash \{1\} \subset G \backslash \bigcup_{g \in G} H^g$. Also gibt es ein $g_1 \in G \backslash \bigcup_{g \in G} H^g$ mit $g_1 \notin F$.

$\Rightarrow g_1 = f_1 h_1$ und $h_1 \neq 1 \Rightarrow g_1 h_1^{-1} = f_1$.

α_{h_1} ist surjektiv. $\Rightarrow \exists\ f_2 \in F\ :\ \alpha_{h_1}(f_2) = f_1 = (f_2 h_1 f_2^{-1}) h_1^{-1} = g_1 h_1^{-1}$ $\Rightarrow f_2 h_1 f_2^{-1} = g_1 \Rightarrow g_1 \in H^{f_2}$. Widerspruch.

$\square$

Im endlichen Fall gibt es viele Aussagen über das Frobeniuskomplement und den Kern. Einige Aussagen wie 1.2.9, 1.2.10, 1.2.13 kann man auf den unendlichen Fall übertragen.

2.2 Aussagen über Transversale der Frobeniusgruppe

In diesem Abschnitt behandeln wir Transversalen von Frobeniusgruppen.

Wenn $G = T \cdot G_a$ und $G = \dot{\bigcup}_{t \in T} t \cdot G_a$, dann, heißt T (wie in Definition 1.1.1) eine allgemeine Transversale.

Wefelscheid [26] hat folgende Frage gestellt:

Gibt es eine unendliche Frobeniusgruppe mit einer endlichen Transversale?

Wir werden zeigen, dass es solche Frobeniusgruppen nicht gibt.

Bemerkung 2.2.1. *Wenn (G, M) transitiv ist, dann ist $|M| = [G : G_a]$.*

Beweis. Es sei $\beta(a) = b$. Dann ist $\{\gamma \in G \mid \gamma(a) = b\} = \beta G_a$ eine Nebenklasse von G_a. Es gibt genau $|M|$ Nebenklassen zu G_a, da $b \in M$ ist und für verschiedene $b_1, b_2 \in M$ sind die zugehörigen Nebenklassen veschieden.

$\square$

Lemma 2.2.2. *Ist (G, M) eine unendliche Frobeniusgruppe, dann ist die Anzahl der Nebenklassen einer beliebigen Standuntergruppe G_a unendlich.*

Beweis. Nach der Definition der Frobeniusgruppe ist (G, M) transitiv. Mit der Bemerkung 2.2.1 erhält man $|M| = [G : G_a]$. Andererseits folgt aus $G = K \cdot G_a$, dass $|K| = [G : G_a]$ und somit $|M| = |K|$.

$\square$

Es ist klar, dass die Anzahl von Nebenklassen gleich der Anzahl von Elementen in einer Transversale ist. Also es gibt keine unendliche Frobeniusgruppe mit endlicher Transversale. Eine Transversale heißt kommutativ, wenn ihre Elemente paarweise in G vertauschbar sind.

Man kann auch fragen: *Gibt es vielleicht einige gute Voraussetzungen, so dass unsere Transversale eine Gruppe ist?* (Im Lemma 2.2.5 wird gezeigt, dass nicht jede Transversale eine Gruppe ist.)

Lemma 2.2.3. *Es sei (G, M) eine Frobeniusgruppe, und T eine kommutative Transversale mit $T \cap G_a = \{1\}$. Dann ist T eine Untergruppe von G.*

Beweis. (i) Abgeschlossenheit.
Es sei $t_1, t_2 \in T$. $t_1 \cdot t_2 \in G \Rightarrow \exists_1\ t_3 \in T$ und $\delta \in G_a\ :\ t_1 \cdot t_2 = t_3 \cdot \delta$.
Es sei $t_1(a) = b$, $t_2(a) = c$, $t_1(c) = d$, so dass $a \neq b$ und $a \neq c$ gilt, wobei $a, b, d, c \in M$ sind.
$t_1 \cdot t_2(a) = t_1(c) = d \Rightarrow t_3(a) = d$ und $t_2 \cdot t_1(a) = t_2(b) = d$. Nach der Voraussetzung $t_1 \cdot t_2 = t_2 \cdot t_1$. Dann ist $t_2^{-1} \cdot t_1^{-1}(d) = a$ und $t_3 \cdot t_2^{-1} \cdot t_1^{-1}(d) = d$.

1. Fall: $a = d \Rightarrow t_2 t_1(a) = t_1 t_2(a) = a$ und $t_2 t_1(c) = t_2(a) = c$ mit $a \neq c$ $\Rightarrow\ t_1 \cdot t_2 = 1 \Rightarrow\ t_1 \cdot t_2 \in T$.

2. Fall: $a \neq d \Rightarrow\ t_3 \neq 1$ und $t_3 \cdot t_2^{-1} \cdot t_1^{-1}(d) = d$
$t_i \cdot t_j = t_j \cdot t_i\ \Rightarrow\ t_j^{-1} \cdot t_i^{-1} = t_i^{-1} \cdot t_j^{-1}\ \ \forall\, i, j$.
$t_3 \cdot t_2^{-1} \cdot t_1^{-1}(a) = t_3 \cdot t_2^{-1} \cdot t_1^{-1} \cdot t_3^{-1} \cdot t_3(a) = t_2^{-1} \cdot t_1^{-1} \cdot t_3(a) = t_2^{-1} \cdot t_1^{-1}(d) = a$
$\Rightarrow t_3 \cdot t_2^{-1} \cdot t_1^{-1} \in G_{a,d} = \{1\} \Rightarrow t_1 \cdot t_2 = t_3 \in T$.

Aus (1), (2) folgt für $t_1, t_2 \in T$, dass $t_1 \cdot t_2 \in T$.

(ii) $\quad t_1 \in T \Rightarrow \exists_1\ t_2 \in T\ :\ t_1^{-1} = t_2 \cdot \delta$ und $\delta \in G_a$. $\Rightarrow\ \delta^{-1} = t_1 \cdot t_2$, wobei $\delta^{-1} \in G_a$, $t_1 \cdot t_2 \in T$ und $T \cap G_a = \{1\} \Rightarrow t_1 \cdot t_2 = 1 \Rightarrow t_1^{-1} = t_2 \in T$.

Aus $(i), (ii)$ folgt, dass T eine Untergruppe von G ist.

□

Es sei T eine Transversale. $N := \{\alpha \in G\ :\ \alpha(x) \neq x\ \forall x \in M\} \cup \{1\}$, $N^* := N \backslash \{1\}$.

Lemma 2.2.4. (G, M) *sei eine Frobeniusgruppe. Falls $T = N$, dann ist N abgeschlossen unter Potenzen.*

Beweis. Für $\alpha = \{1\}$ ist die Behauptung trivial.

Induktionsvoraussetzung: Aus $\alpha \in N$ folgt, dass $\alpha^n \in N$.
Es ist zu zeigen, dass $\alpha^{n+1} \in N$.
1) $\alpha^n = 1 \Rightarrow \alpha^{n+1} = \alpha \in N$.
2) $\alpha^n \neq 1$, dann $\alpha^n(t) \neq t\ \forall\ t \in M$.

Angenommen $\alpha^{n+1} \notin N$, dann gibt es $x, y \in M$ mit $\alpha^{n+1}(x) = x$ und $\alpha^{n+1}(y) \neq y$.

Es sei $\alpha^n(x) = z$, $x \neq z$. Dann ist $\alpha(z) = \alpha^{n+1}(x) = x$.
$\alpha^{n+1}(z) = \alpha^n\big(\alpha(z)\big) = \alpha^n(x) = z. \Longrightarrow \alpha^{n+1} \in G_{x,z} \Rightarrow \alpha^{n+1} = 1$. Widerspruch. $\Rightarrow \alpha^{n+1} \in N$.

□

Im Folgenden verstehen wir unter einer Transversalen stets eine Transversale zu einem Frobeniuskomplement einer Frobeniusgruppe. Unter den vielen Transversalen sind wir an solchen Transversalen mit besonders schönen Eigenschaften interessiert.

Es sei $\mathfrak{T} := \big\{T \mid T \text{ ist eine Transversale von } G\big\}$. Unter der Voraussetzung, dass $T_0 \in \mathfrak{T}$ eine Gruppe ist, stellt man sich die Frage, *ob alle Transversalen von G Gruppen sind.* Die Antwort kommt aus folgendem Lemma.

Lemma 2.2.5. *Es sei G eine Frobeniusgruppe und $G = T_0 \cdot H$, wobei $H = G_a$ und T_0 eine Gruppe ist. Dann gibt es eine Transversale $T \in \mathfrak{T}$, so dass T keine Gruppe ist.*

Beweis. Es sei $h \in H \backslash T_0$. Betrachten wir $T := h \cdot T_0$. Dann $(h \cdot T_0) \cdot H = h \cdot (T_0 \cdot H) = h \cdot G = G$ d.h. $T \in \mathfrak{T}$.
Angenommen, dass T eine Gruppe ist. Dann $1 \in T \Rightarrow \exists\, t_0 \in T_0 \;:\; 1 = h \cdot t_0$ $\Rightarrow h = t_0^{-1} \in T_0 \Rightarrow h \in T_0$. Widerspruch.

□

Dieses Lemma zeigt, dass die Antwort auf unsere Frage **Nein** ist.

Jetzt definieren wir $\mathfrak{T}^* := \big\{T\backslash\{1\} \mid T \in \mathfrak{T}\big\}$. Daraus ergibt sich die nächste Frage. *Gibt es eine Frobeniusgruppe, so dass jedes $T^* \in \mathfrak{T}^*$ nur aus fixpunktfreien Abbildungen besteht?* Die Antwort ist auch **Nein**, wie aus Lemma 2.2.6 folgt.

Lemma 2.2.6. *Es gibt keine Frobeniusgruppe, so dass jedes $T^* \in \mathfrak{T}^*$ nur aus fixpunktfreien Abbildungen besteht.*

Beweis. Angenommen, jedes $T^* \in \mathfrak{T}^*$ besteht nur aus fixpunktfreien Abbildungen. $G = T \cdot H$, wobei $T \in \mathfrak{T}$, $H \leqslant G$ und $H \cong G_a$.
Es sei $t \in T^* \Rightarrow \forall\, b \in M \;\; t(b) \neq b$. Sei $t(b) := d$. G ist transitiv auf M. Also existiert ein $g \in G$ mit $g(d) = b$. Somit ist $G = (g \cdot T) \cdot H = T_1 \cdot H$ und $T_1 \cap G_b \neq \{1\}$. Widerspruch.

□

Nun kann man auch andere interessante Fragen über Transversalen der Frobeniusgruppe stellen:

Es sei T eine Transversale, die eine Gruppe ist.

1) *Ist T dann auch zu sich selbst konjugiert oder gibt es Gegenbeispiele ?*

2) *Wenn es (nicht-kommutative) Beispiele gibt, gilt dies dann wenigstens wenn eine Transversale T eine kommutative Gruppe ist.*

Zunächt betrachten wir eine Konstruktion der Frobeniusgruppen, die wir oft verwenden werden:

Konstruktion 2.2.7. *Also sei $\mathbb{K}$ ein Fastkörper mit $|\mathbb{K}| > 2$ und $\mathbf{A}$ eine Untergruppe von $(K^*, \cdot)$. Dann bildet die Menge $F := \big\{\tau_{a,\eta} \ : \ x \mapsto a+\eta x, \ a \in \mathbb{K}, \ \ \eta \in \mathbf{A}\big\}$ mit der Komposition $\circ$ von Abbildungen eine Frobeniusgruppe.*

Beweis. 1) $(F, \circ)$ ist abgeschlossen.

$$\tau_{a,\eta} \circ \tau_{b,\epsilon}(x) = \tau_{a,\eta}(b + \epsilon x) = a + \eta(b + \epsilon x) = a + \eta b + \eta\epsilon x = \tau_{a+\eta b,\eta\epsilon}(x)$$

2) Assoziativität.

$$\tau_{a,\eta} \circ (\tau_{b,\epsilon} \circ \tau_{b,\rho})(x) = a + \eta(b + \epsilon c + \epsilon\rho x) = a + \eta b + \eta\epsilon c + \eta\epsilon\rho x$$
$$(\tau_{a,\eta} \circ \tau_{b,\epsilon}) \circ \tau_{b,\rho}(x) = a + \eta b + \eta\epsilon(c + \rho x) = a + \eta b + \eta\epsilon c + \eta\epsilon\rho x$$

3) $\tau_{0,1} = 1 \in F$

4) $\tau_{a,\eta} \circ \tau_{b,\epsilon} = \tau_{0,1} \Rightarrow \begin{cases} a + \eta b = 0 \\ \eta\epsilon = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \eta^{-1} \cdot (-a) \\ \epsilon = \eta^{-1} \end{cases} \Rightarrow$

$\forall \tau_{a,\eta} \in F \ \ \exists_1 \ \tau_{a,\eta}^{-1} \in F$

5) Es ist klar, dass F transitiv auf $\mathbb{K}$ ist.

$$F_{x_0,y_0} = F_{x_0} \bigcap_{x_0 \neq y_0} F_{y_0} = \left\{ \tau_{a,\eta} \in F \ : \ \begin{array}{c} \tau_{a,\eta}(x_0) = x_0 \\ \tau_{a,\eta}(y_0) = y_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{c} a + \eta x_0 = x_0 \\ a + \eta y_0 = y_0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} a = (1-\eta)x_0 \\ a = (1-\eta)y_o \end{array} \Rightarrow (1-\eta)x_0 = (1-\eta)y_o \xRightarrow{x_0 \neq y_0} \eta = 1 \Rightarrow a = 0$$

Also $\forall \ x_0 \neq y_0 \ \ F_{x_0,y_0} = \{1\}$

Somit ist F eine Frobeniusgruppe.

□

Nun konstruieren wir ein Beispiel, in dem die Standuntergruppe und Transversale kommutativ sind.

Beispiel 2.2.8. *Wir benutzen die Konstruktion 2.2.7 für* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *und* $\mathbf{A} = \{+1, -1\}$. *Dann hat die Frobeniusgruppe* $F := \{\tau_{a,\eta} \ : \ a \in \mathbb{C},\ \eta \in \{+1, -1\}\}$ *die gewünschten Eigenschaften, so dass die Transversale zu sich selbst konjugiert ist.*

Beweis. $F = T_0 \cdot F_0$, so dass $T_0 = \{\tau_{a,1} \ : \ a \in \mathbb{C}\}$, $F_0 = \{1, \tau_{0,-1}\}$ und $T_0 \cap F_0 = \{1\}$.
$F_0, T_0 \leqslant F$ und beide sind kommutativ. $\forall \ \tau_{a,\eta} \in F \backslash T_0 = \{\tau_{b,-1} \ : \ b \in \mathbb{C}\}$ $\tau_{a,\eta} \cdot T_0 \cdot (\tau_{a,\eta})^{-1} \subseteq T_0$, weil $\tau_{a,-1} \circ \tau_{b,1} \circ \tau_{a,-1}(z) = \tau_{a,-1} \circ \tau_{b,1}(a - z) = \tau_{a,-1}(b + a - z) = -b + z = \tau_{-b,1}(z) \in T_0 \ \Rightarrow \ T_0$ ist normal.

□

Jetzt untersuchen wir *unter welchen zusätzlichen Bedingungen eine Transversale zu sich selbst konjugiert sein kann.* Dafür braucht man folgenden Hilfssatz:

Hilfssatz 2.2.9. *Es sei* $A, B \leqslant G$, *dann ist* AB *Untergruppe von* $G \Leftrightarrow AB = BA$.

Beweis. $(\Rightarrow)$ $AB \leqslant G \Rightarrow \forall a \in A,\ b \in B$ gilt $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1} \Rightarrow AB \subseteq BA$.
$b \cdot a \in BA \Rightarrow \exists\ b_1^{-1} = b \in B$ und $a_1^{-1} = a \in A$ so, dass $b \cdot a = b_1^{-1} \cdot a_1^{-1} = (a_1 \cdot b_1)^{-1} \in AB$, weil $AB \leqslant G \Rightarrow BA \subseteq AB$.

$(\Leftarrow)$ $AB = BA$
1) $1 \in AB$.
2) Assoziativität folgt aus G.
3) $a \cdot b \in AB$, dann $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1} \in BA = AB$.
4) Abgeschlossenheit$(a_1 \cdot b_1)(a_2 \cdot b_2) = (a_1 \cdot b_1)(b_3 \cdot a_3) =$
$a_1(b_4 \cdot a_3) = a_1 \cdot a_5 \cdot b_5 = a_6 \cdot b_5 \in AB$.

□

Das folgende Lemma liefert die hinreichenden Bedingungen, so dass eine Transversale zu sich selbst konjugiert ist.

Lemma 2.2.10. *Es sei* (F, M) *eine Frobeniusgruppe und* $F = T_0 \cdot H$, *wobei* $T_0, H \leqslant F$ *und* $T_0 \cap H = \{1\}$, $|H| = 2$. *Dann ist* T_0 *ein Normalteiler von* F.

Beweis. $H = \{1, \beta\}$, so dass $\beta^2 = 1$.
T_0, $H \leqslant F$ und $T_0 \cdot H \leqslant F$. Nach Hilfssatz 2.2.9 gilt $T_0 \cdot H = H \cdot T_0$.

Wir zeigen, dass T_0 zu sich selbst konjugiert ist:

Für $\gamma \in F \backslash T_0$ gibt es nur zwei Fälle.

1) $\gamma = t_1 \cdot 1 \Rightarrow \gamma \in T_0$. Das widerspricht der Wahl von γ.
2) $\gamma = t_2 \cdot \beta$. Dann ist $\gamma = t_2 \cdot \beta = \beta \cdot t_3$ (Falls $t_2 \cdot \beta = 1 \cdot t_4$, dann erhalten wir den Widerspruch $\gamma = t_2^{-1} \cdot t_4 \in T_0$).

$\forall\ t_0 \in T_0$ gilt $\gamma \cdot t_0 \cdot \gamma^{-1} = t_2 \cdot \beta \cdot t_0 \cdot \beta^{-1} \cdot t_2^{-1} = t_2 \cdot (\beta \cdot t_0) \cdot \beta^{-1} \cdot t_2^{-1} = t_2 \cdot (t_5 \cdot \beta) \cdot \beta^{-1} \cdot t_2^{-1} = t_2 \cdot t_5 \cdot t_2^{-1} \in T_0 \Rightarrow \forall\ \gamma \in F \backslash T_0$ gilt $\ \gamma \cdot T_0 \cdot \gamma^{-1} \subseteq T_0$. □

Nun konstruieren wir ein Beispiel einer Frobeniusgruppe F, so dass $F = T_0 \cdot H$ und $T_0, H \leqslant F$, $|H| < \infty$, und in dem T_0 zu sich selbst konjugiert ist, obwohl T_0 nicht kommutativ ist.

Beispiel 2.2.11. *Sei $\mathbb{K}$ ein beliebiger (kommutativer) Körper und ε eine primitive n-Wurzel von $1 \in \mathbb{K}$.*
Es sei N eine nicht abelsche Gruppe von Matrizen: $\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $x, y, z \in \mathbb{K}$
und $\alpha = \alpha_\varepsilon : \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon^s x & \varepsilon^{s+t} y \\ 0 & 1 & \varepsilon^t z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *eine Abbildung von N.*
Dann ist $\langle \alpha \rangle$ eine Gruppe von fixpunktfreien Automorphismen von N falls weder s, t noch $(s+t)$ die Zahl n teilen. Und das Produkt $N \cdot \langle \alpha \rangle$ ist eine Frobeniusgruppe mit dem Komplement $\langle \alpha \rangle$, wobei N eine normale Untergruppe ist.

Beweis. $\alpha(E) = E$.

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} 1 & n_1 & n_2 \\ 0 & 1 & n_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & m_1 & m_2 \\ 0 & 1 & m_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =\!= $$
$$=\!= \alpha \begin{pmatrix} 1 & n_1 + m_1 & m_2 + n_1 \cdot m_3 + n_2 \\ 0 & 1 & m_3 + n_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =\!=$$
$$=\!= \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon^s (n_1 + m_1) & \varepsilon^{s+t}(m_2 + n_1 \cdot m_3 + n_2) \\ 0 & 1 & \varepsilon^t (m_3 + n_3) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\alpha\begin{pmatrix}1 & n_1 & n_2\\ 0 & 1 & n_3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\alpha\begin{pmatrix}1 & m_1 & m_2\\ 0 & 1 & m_3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} ==$$

$$== \begin{pmatrix}1 & \varepsilon^s n_1 & \varepsilon^{s+t} n_2\\ 0 & 1 & \varepsilon^t n_3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & \varepsilon^s m_1 & \varepsilon^{s+t} m_2\\ 0 & 1 & \varepsilon^t m_3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} ==$$

$$== \begin{pmatrix}1 & \varepsilon^s(n_1+m_1) & \varepsilon^{s+t}(m_2+n_1\cdot m_3+n_2)\\ 0 & 1 & \varepsilon^t(m_3+n_3)\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow \alpha(N_1\cdot N_2)=\alpha(N_1)\cdot\alpha(N_2)$ und $\alpha^n=1$.

$\forall\ (n_1,\gamma), (n_2,\beta)\in N\cdot\langle\alpha\rangle$ definieren wir $(n_1,\gamma)\circ(n_2,\beta)=\big(n_1\cdot\gamma(n_2),\gamma\cdot\beta\big)$ mit $n_1,n_2\in N$ und $\gamma,\beta\in\langle\alpha\rangle$.

- (i) Damit ist $(N\cdot\langle\alpha\rangle,\circ)$ abgeschlossen.
- (ii) $N\cdot\langle\alpha\rangle$ operiert auf N durch $(n_1,\alpha)(m)=n_1\cdot\alpha(m)$ mit $n_1,m\in N$. $\Rightarrow$ Die Einheit von $N\cdot\langle\alpha\rangle$ sieht aus wie $(E,1)$, weil aus $\forall\, m\in N$ $(n_1,\alpha)(m)=m$ für $m=E$ folgt $n_1=E\Rightarrow\alpha=1$.
- (iii) Assoziativität. $(n_1,\alpha)\big((n_2,\beta)\cdot(n_3,\gamma)\big)=(n_1,\alpha)\cdot\big(n_2\cdot\beta(n_3),\beta\gamma\big)=\big(n_1\cdot\alpha(n_2)\cdot\alpha\beta(n_3),\alpha\beta\gamma\big)$. Und $\big((n_1,\alpha)\cdot(n_2,\beta)\big)\cdot(n_3,\gamma)=\big(n_1\cdot\alpha(n_2),\alpha\beta\big)$ $=\big(n_1\cdot\alpha(n_2)\cdot\alpha\beta(n_3),\alpha\beta\gamma\big)$.
- (iv) $\forall\ (n_1,\beta)\in N\cdot\langle\alpha\rangle$ gilt $(n_1,\beta)^{-1}=\big(\beta^{n-1}(n_1^{-1}),\beta^{-1}\big)\in N\cdot\langle\alpha\rangle$. Und $(n_1,\beta)\cdot\big(\beta^{n-1}(n_1^{-1}),\beta^{-1}\big)=\big(\beta^{n-1}(n_1^{-1}),\beta^{-1}\big)\cdot(n_1,\beta)=(E,1)$.

Aus (i), (ii), (iii), (iv) folgt, dass $(N\cdot\langle\alpha\rangle,\circ)$ eine Gruppe ist.

N ist transitiv auf $N\Rightarrow(N\cdot\langle\alpha\rangle)$ ist transitiv auf N. $G_A=\big\{(n_1,\beta)\in(N,\langle\alpha\rangle)\ :\ (n_1,\beta)(A)=A$, d.h $n_1\cdot\beta(A)=A\big\}$. Wegen Transitivität von N und $|\langle\alpha\rangle|=n$ ist $|G_A|=n$.

Angenommen, dass $G_A\cap G_B\neq\big\{(E,1)\big\}$ für einige $A\neq B$ aus N ist. Dann gibt es $(n,\beta)\neq(E,1)\ :\ n\cdot\beta(A)=A$ und $n\cdot\beta(B)=B$. $\beta\neq 1$ und $n\neq E$ $\Rightarrow\varepsilon^s$, ε^t, $\varepsilon^{s+t}\neq 1$.

Aus der Gleichungen $n\cdot\beta(A)=\begin{pmatrix}1 & n_1 & n_2\\ 0 & 1 & n_3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & \varepsilon^s a_1 & \varepsilon^{s+t}a_2\\ 0 & 1 & \varepsilon^t a_3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}1 & a_1 & a_2\\ 0 & 1 & a_3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=A$ und

$$n \cdot \beta(B) = \begin{pmatrix} 1 & n_1 & n_2 \\ 0 & 1 & n_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon^s b_1 & \varepsilon^{s+t} b_2 \\ 0 & 1 & \varepsilon^t b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b_1 & b_2 \\ 0 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

folgt, dass $A = B$. Widerspruch. $\Rightarrow G_A \cap G_B = \{(E,1)\} \Rightarrow N \cdot \langle\alpha\rangle$ ist eine Frobeniusgruppe.
$(N,1) \leqslant N \cdot \langle\alpha\rangle$ und $(N,1) \cong N$.
$(E,\langle\alpha\rangle) \leqslant N \cdot \langle\alpha\rangle$ und $(E,\langle\alpha\rangle) \cong \langle\alpha\rangle$.

$(N,1)$ ist eine normale Untergruppe.
$(n_1,\beta) \circ (n_2,1) \circ (n_1,\beta)^{-1} = (n_1,\beta) \circ (n_2,1) \circ \big(\beta^{n-1}(n_1^{-1}),\beta^{-1}\big) =$
$= \big(n_1 \cdot \beta(n_2),\beta\big) \circ \big(\beta^{n-1}(n_1^{-1}),\beta^{-1}\big) = \big(n_1 \cdot \beta(n_2) \cdot n_1^{-1},1\big) \in (N,1)$
$\Rightarrow (n_1,\beta) \circ (N,1) \circ (n_1,\beta)^{-1} \subseteq (N,1)$ für alle $(n_1,\beta) \in N \cdot \langle\alpha\rangle$.

$\square$

Die Idee zu diesem Beispiel ergibt sich aus [9], sonst stammt die Einführung der Gruppenverknüpfung "$\circ$" und die Beweisführung von uns.

2.3 Die Einbettungssätze

Jetzt betrachten wir das folgende Problem. Gegeben sei eine beliebige Gruppe S. Gibt es eine Frobeniusgruppe $G = T \cdot H$, mit $H \cong S$? Der folgende Satz gibt teilweise Antwort.

Satz 2.3.1. *Es sei eine Gruppe S gegeben mit der Eigenschaft, dass es eine fixpuktfreie (Def.1.2.6) Untergruppe U von $Aut(S)$ gibt. Dann ist das semidirekte Produkt $G := T \ltimes H$ mit $T := (U, 1_S)$ und $H := (1, S)$ eine auf S operierende Frobeniusgruppe mit $H \cong S$.*

Beweis. Also sei $H := (1,S)$ mit $1 \in Aut(S)$ und $T := (U, 1_S)$. Dann hat $G := T \ltimes H$ die gewünschten Eigenschaften.

1) $(G,\circ)$ eine Gruppe ist mit
   $(\alpha, s_1) \circ (\beta, s_2) = \big(\alpha \cdot \beta, s_1 \cdot \alpha(s_2)\big)$, wobei $\alpha, \beta \in U$ und $s_1, s_2 \in S$.
   (a) $1_G = (1, 1_S) \in G$ und $\forall\, (\alpha, s) \in G$ gilt $(\alpha, s) \circ (1, 1_S) = (1, 1_S) \circ (\alpha, s) = (\alpha, s)$.
   (b) $\forall\ (\alpha, s) \in G$ die Inverse davon ist $(\alpha, s)^{-1} = \big(\alpha^{-1}, \alpha^{-1}(s^{-1})\big)$.
   $(\alpha,s)\circ(\alpha,s)^{-1} = (\alpha,s)\circ(\alpha^{-1},\alpha^{-1}(s^{-1})) = \big(\alpha\cdot\alpha^{-1}, s\cdot\alpha(\alpha^{-1}(s^{-1}))\big)$
   $= (1, 1_S)$.
   $(\alpha, s)^{-1} \circ (\alpha, s) = \big(\alpha^{-1}, \alpha^{-1}(s^{-1})\big) \circ (\alpha, s) =$
   $= \big(\alpha^{-1} \cdot \alpha, \alpha^{-1}(s^{-1}) \cdot \alpha^{-1}(s)\big) = (1, 1_S)$.

(c) Assoziativität : $\forall\ (\alpha, s_1),\ (\beta, s_2),\ (\gamma, s_3) \in G$ gilt:
$(\alpha, s_1) \circ \big((\beta, s_2) \circ (\gamma, s_3)\big) = (\alpha, s_1) \circ \big(\beta\gamma, s_2 \cdot \beta(s_3)\big) =$
$= \big(\alpha\beta\gamma, s_1 \cdot \alpha(s_2) \cdot \alpha\beta(s_3)\big).$
$\big((\alpha, s_1) \circ (\beta, s_2)\big) \circ (\gamma, s_3) = \big(\alpha\beta, s_1 \cdot \alpha(s_2)\big) \circ (\gamma, s_3) =$
$= \big(\alpha\beta\gamma, s_1 \cdot \alpha(s_2) \cdot \alpha\beta(s_3)\big).$

2) Es sei $M := S$, dann operiert G mit $(\alpha, s)(m) = \alpha(m) \cdot s$ transitiv auf M.

$\forall\, s_1, s_2 \in M\ \exists\, (\alpha, s) \in G$ mit $(\alpha, s)(s_1) = (s_2)$. Für ein beliebiges α nehmen wir einfach $s := \alpha(s_1^{-1}) \cdot s_2$.

3) (G, M) ist eine Frobeniusgruppe.

$G_a := \{(\alpha, s) \in G\ :\ (\alpha, s)(a) = a\} \neq \{(1, 1_S)\}$ klar.

$$\text{Angenommen}\ \ G_a \bigcap_{a \neq b} G_b \neq \{(1, 1_S)\}\ \Rightarrow \begin{cases} (\alpha, s)(a) = a \\ (\beta, s)(b) = b \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha(a) \cdot s = a \\ \alpha(b) \cdot s = b \end{cases} \Rightarrow s = \alpha(a)^{-1} \cdot a = \alpha(a^{-1}) \cdot a \Rightarrow \alpha(b) \cdot \alpha(a^{-1}) \cdot a = b$$

$\Rightarrow \alpha(b \cdot a^{-1}) = b \cdot a^{-1}$ und $b \cdot a^{-1} \neq 1_S \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow s = 1_S$. Widerspruch.

$$\varphi\ :\begin{cases} H \longmapsto S \\ (1, s) \longmapsto s \end{cases} \quad \text{ist der gesuchte Isomorphismus.}$$

□

Bemerkung 2.3.2. *Die so konstruierte Gruppe H ist ein Normalteiler von G.*

Beweis. $\forall\ (\alpha, s) \in G$ gilt:
$(\alpha, s) \circ (1, S) \circ (\alpha, s)^{-1} = (\alpha, s) \circ (1, S) \circ \big(\alpha^{-1}, \alpha^{-1}(s^{-1})\big) =$
$= \big(\alpha, s \cdot \alpha(S)\big) \circ \big(\alpha^{-1}, \alpha^{-1}(s^{-1})\big) = \big(1, s \cdot \alpha(S) \cdot s^{-1}\big) = (1, S).$

□

Also hat dieser Satz gezeigt: *Jede Gruppe G mit der Voraussetzung, dass sie eine fixpunktfreie Untergruppe der Automorphismengruppe von G hat, kann als Frobeniuskern in einer Frobeniusgruppe vorkommen.*

Bludov [1] hat folgenden Satz bewiesen:

Satz 2.3.3. *Jede Gruppe kann in den Frobeniuskern einer Frobeniusgruppe eingebettet werden. Weiter, das Frobeniuskomplement kann jede nicht triviale rechts-geordnete Gruppe sein.*

Für eine Klasse von abelschen Gruppen $\mathfrak{A}$ gilt immer, dass jede $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$ als Frobeniuskern vorkommen kann. Und zwar:

Lemma 2.3.4. *Es sei S eine abelsche Gruppe ohne Involutionen. Dann gibt es eine Frobeniusgruppe $G = T \cdot H$ mit $H \cong S$ und $H \lhd G$.*

Beweis. Gemäß Satz 2.3.1 reicht es zu zeigen, dass es eine Untergruppe $U \leqslant Aut(S)$ gibt, die fixpunktfrei ist.
Betrachten wir eine Abbildung $\alpha : s \mapsto s^{-1}$, dann ist $\alpha \in Aut(S)$, weil $\alpha(ab)= \alpha(ba) = (ba)^{-1} = a^{-1}b^{-1} = \alpha(a)\alpha(b)$. Und α ist fixpunktfrei, denn aus $a = a^{-1}$ folgt $a = 1_S$, da S keine Involution nach Voraussetzung hat. Es ist $\alpha^2 = id$ und mit $U = \langle\alpha\rangle$ erhalten wir $T = (U, 1_S)$ sowie $H = (id, S)$. Der Rest des Lemmas folgt aus 2.3.2.

□

Als Beispiel kann man die Gruppe der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ betrachten. Mit dem Automorphismus $\alpha : x \mapsto -x$ hat die Gruppe $G := \langle\alpha\rangle \cdot \mathbb{Z}$ mit der Verknüpfung "$\circ$", die in 2.3.1 definiert wird, die gewünschten Eigenschaften. Also ist $(G, \mathbb{Z})$ eine Frobeniusgruppe mit $\langle 1\rangle \cdot \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$.

Nun betrachten wir ein umgekehrtes Problem. Also:

Satz 2.3.5. *Es sei G eine Split-Frobeniusgruppe, d.h. G erfüllt den Satz von Frobenius. Also es gibt N, $H_0 \leqslant G$ mit $G = N \cdot H_0$. Sei $Z(H_0) = 1$. Dann gibt es $U_0 \leqslant Aut(N)$ mit $U_0 \cong H_0$.*

Beweis. Da N ein Normalteiler von G ist, sind die Konjugationen h^* mit Elementen h aus H_0 Automorphismen von N und wegen $Z(H_0) = 1$ ist die Zuordnung $h \mapsto h^*|_N$ ein Isomorphismus auf eine Untergruppe U_0 von $Aut(N)$.

□

2.4 Involutionen von Frobeniusgruppen

Betrachten wir folgendes Beispiel.

Beispiel 2.4.1. *Sei $\mathbb{K}$ ein unendlicher Körper $\mathbb{K}$ mit char $\mathbb{K} = 2$. Dann ist $T_2(\mathbb{K}) := \{\alpha_{a,m} : a, m \in \mathbb{K}, m \neq 0\}$ eine scharf 2-fach transitive Frobeniusgruppe. $\alpha_{a,1} : x \mapsto a + x$ mit $a \neq 0$ sind die fixpunktfreien Involutionen, weil $\alpha_{a,1}(x) \neq x$ für $a \neq 0$ und $\forall\, x \in \mathbb{K}$ gilt $\alpha_{a,1}^2(x) = \alpha_{a,1}(a + 1) = a + a + x = x$.*

Also gibt es im unendlichen Fall fixpunktfreie Involutionen und man kann die Frage stellen: *Gibt es unendliche Frobeniusgruppen ohne Involutionen?* Die Antwort ist:

Bemerkung 2.4.2. *Es gibt unendliche Frobeniusgruppen, die keine Involutionen haben.*

Beweis. Betrachten wir Beispiel 2.2.11. $N \cdot \langle\alpha\rangle$ ist eine Frobeniusgruppe, wobei N die (nicht abelsche) Gruppe von Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit x, y, $z \in \mathbb{K}$ für einen Körper $\mathbb{K}$ ist. Die zyklische Gruppe $\langle\alpha\rangle$ habe ungerade Primzahlordnung p. Daher besitzt $\langle\alpha\rangle$ keine Involution.

Für $(n, \beta) \in N \cdot \langle\alpha\rangle$ und $(n, \beta)^2 = (E, 1)$ wollen wir zeigen, dass $(n, \beta) = (E, 1)$.
Es gilt: $(n, \beta)(m) := n \cdot \beta(m)$ und $(n, \beta) \circ (n, \beta) = (n \cdot \beta(n), \beta^2)$

Somit ist $(n, \beta)^2(m) = (E, 1)(m) = m$, und

$(n \cdot \beta(n), \beta^2)(m) = n \cdot \beta(n) \cdot \beta^2(m) = m \ \ \forall\, m \in N.$

Für $m = E$ ergibt sich:

$n \cdot \beta(n) = E \Rightarrow \beta^2(m) = m \ \ \forall\, m \in N \Rightarrow \beta^2 = 1 \Rightarrow \beta = 1,$
weil $\langle\alpha\rangle$ keine Involution enthält. Also gilt $n \cdot \beta(n) = n \cdot n = E$ und $n = n^{-1}$
d.h. $\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -x & xz - y \\ 0 & 1 & -z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Somit ist $n = E$ und $(n, \beta) = (E, 1)$.

□

Bemerkung 2.4.3. *Aus der Bemerkung 2.4.2 und aus dem Beweis vom Beispiel 2.2.11 folgt, dass es unendliche Frobeniusgruppen ohne Involutionen gibt, für die der Satz von Frobenius gilt.*

Wir betrachten die Konstruktion 2.2.7 mit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $\mathbf{A} = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2 \mid \varepsilon^3 = 1\}$.
Also $\tau_{a,\eta} : \begin{cases} \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C} \\ z \mapsto a + \eta \cdot z \end{cases}$ mit $a \in \mathbb{C}$ und $\eta \in \mathbf{A}$.

Lemma 2.4.4. *Die Menge $F := \{\tau_{a,\eta} \mid a \in \mathbb{K},\ \eta \in \mathbf{A}\}$ mit oben gegebenem $\mathbb{K}$ und $\mathbf{A}$ ist eine Frobeniusgruppe ohne Involutionen mit $|F_a| = 3$ für $a \in \mathbb{K}$.*

Beweis. 1) Nach 2.2.7 ist F eine Frobeniusgruppe.

2) Wenn $\tau_{a,\eta}^2(z) = z \;\; \forall\, z \in \mathbb{C}$, also
$\tau_{a,\eta}^2(z) = a + \eta a + \eta^2 z = z \;\; \forall\, z \in \mathbb{C}$, dann folgt für $z = 0$, dass $a + \eta a = 0$ ist.

Daher ist $\eta^2 z = z$ für alle z. Dann folgern wir
$\eta^2 = 1 \Rightarrow \eta = 1 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow \tau_{a,\eta} = 1$.

3) $|F_{x_0}| = 3 \; \forall x_0 \in \mathbb{C}.\;\; a + \eta x_0 = x_0 \;\; a \in \mathbb{C},\, \eta \in \{1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$.

$$\forall x_0 \in \mathbb{C} \begin{cases} \eta = 1 & a = 0 \\ \eta = \varepsilon & a = (1-\varepsilon)x_0 \\ \eta = \varepsilon^2 & a = (1-\varepsilon^2)x_0 \end{cases}$$

Die drei Abbildungen $\tau_{a,\eta}$ sind verschieden und nach Konstruktion eindeutig bestimmt, also ist $|F_{x_0}| = 3$.

□

2.5 Non-Split-Frobeniusgruppen und Frobeniusgruppen mit vielen Involutionen

Wir benutzen jetzt eine Idee von Wefelscheid und Kreuzer [20], wo K-Loops untergesucht und eine sogenannte Non-Split-Frobeniusgruppe konstruiert wurden. Als Frobeniuskern nimmt man eine K-Loop und ersetzt das semi-direkte Produkt durch ein quasi-direktes Produkt.

Definition 2.5.1. *Es sei L eine Menge mit der binären Verknüpfung "$\cdot$" mit folgenden Eigenschaften:*

(1) Die Gleichung $a \cdot x = b$ hat eine eindeutige Lösung x für alle $a, b \in L$.

(2) Die Gleichung $x \cdot a = b$ hat eine eindeutige Lösung x für alle $a, b \in L$.

(3) Es gibt $1 \in L$ mit $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ für alle $a \in L$.

L ist eine Rechts-Loop, wenn (1) *und* (3) *gelten und L ist eine Loop, falls* (1), (2), (3) *gelten.*

Es sei S_L die volle symmetrische Gruppe auf der Menge L. Die Linksmultiplikation λ_a mit $a \in L$ ist bijektiv auf L. Somit kann man $\delta_{a,b} := \lambda_{ab}^{-1} \circ \lambda_a \circ \lambda_b$ definieren. Die Abbildung $\delta_{a,b}$ ist offensichtlich bijektiv ([20]).

Definition 2.5.2. *Eine Loop $(L, \cdot)$ heißt K-Loop, wenn folgendes gilt:*

(1) $\delta_{a,b}$ *ist ein Automorphismus von* $(L,\cdot)$.

(2) $a^{-1}\cdot b^{-1}=(a\cdot b)^{-1}$ *(Automorphe Invers-Eigenschaft).*

(3) $\delta_{a,b}=\delta_{a,ba}$

Die Gruppe $D(L):=\langle\delta_{a,b}\ :\ a,b\in L\rangle$ *heißt die Strukturgruppe von* L. *Sei* $G:=L\times D$ *mit der Verknüpfung* $\bullet$ *:*
$(a,\alpha)\bullet(b,\beta):=(a\cdot\alpha(b),\delta_{a,\alpha(b)}\circ\alpha\circ\beta)$.
Dann ist $(G,\bullet)$ *eine Gruppe, das quasi-direkte Produkt von* L *und* D.

Satz 2.5.3. *([20]) Wenn* $D\backslash\{id\}$ *fixpunktfrei auf* L^* *operiert, dann ist* $(G,\bullet)$ *eine Frobeniusgruppe.*

Im Rest dieses Abschnittes beschreiben wir Ergebnisse von Kiechle [18].
Wenn $(L,\cdot)$ eine Rechts-Loop ist, dann definieren wir eine Obstruktion-Abbildung (*obstruction-map* in [18]):

$$\chi\ :\begin{cases}L\times S_L\mapsto S_L\\(a,\alpha)\mapsto\lambda_{\alpha(a)}^{-1}\alpha\lambda_a\alpha^{-1}\end{cases}$$

Also ist $\chi(\_\,,\alpha)$ eine Abbildung von L in sich, und $\alpha\in S_L$ ist genau dann ein Automorphismus von L, wenn $\chi(\_\,,\alpha)=id_L$ ist. Ist T eine Untergruppe von S_L mit $t(1)=1$ (für alle $t\in T$), sowie $\chi(L\times T)\subseteq T$ und $D(L)\subseteq T$, dann heißt T Transassoziant von L (mehr in [19]).

Satz 2.5.4. *([18]) Sei* $(L,\cdot)$ *eine Loop und* T *ein Transassoziant von* L. *Dann gilt:*

(1) $L\times T$ *ist eine Gruppe mit der Verknüpfung*

$$(a,\alpha)\circ(b,\beta)=\big(a\cdot\alpha(b),\delta_{a,\alpha(b)}\chi(b,\alpha)\alpha\beta\big)\quad\big((a,\alpha),(b,\beta)\in L\times T\big)$$

Es gilt $(a,\alpha)^{-1}=\big(a^{-1}(a'),\alpha^{-1}\chi\big(\alpha^{-1}(a'),\alpha\big)^{-1}\delta_{a,a'}^{-1}\big)$,
wobei $a'=\lambda_a^{-1}(1)$ *ein Rechtsinverse von* a *in* L *ist.*

(2) $L\times T$ *ist wohldefiniert und operiert mit*

$$(a,\alpha)(x)=a\cdot\alpha(x)\quad\forall\,(a,\alpha)\in L\times T,x\in L$$

transitiv auf L.

(3) Die Abbildung $\begin{cases} T \mapsto L \times T \\ \alpha \mapsto (1, \alpha) \end{cases}$ *ist ein Monomorphismus und* $1 \times T$ *der Stabilisator von* $1 \in L$.

(4) $L \times \{id_L\}$ *ist eine Transversale von* $L \times T/1 \times T$.

Die Abbildung $\begin{cases} L \mapsto L \times \{id_L\} \\ a \mapsto (a, id_L) \end{cases}$ *ist ein Isomorphismus der Rechts-Loop.*

Satz 2.5.5. *([18]) Ist* L *eine Links-Loop und* $T \neq \{id_L\}$ *ein fixpunktfreier Transassoziant von* L*, dann ist* $(L \times T, L)$ *eine Frobeniusgruppe.*

Lemma 2.5.6. *Es sei* (G, M) *eine Frobeniusgruppe, so dass die Menge aller Involutionen* J *von* G *transitiv auf* M *ist. Dann gibt es zu* $x \neq y$ *aus* M *genau ein* $\alpha \in J$ *mit* $\alpha(x) = y$.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es zu x und y ein $\alpha \in J$ mit $\alpha(x) = y$. Wenn $\beta \in J$ und $\beta(x) = y$, dann ist $\alpha\beta(x) = \alpha(y) = x$, $\alpha\beta(y) = \alpha(x) = y$, also ist $\alpha\beta \in G_{x,y} = \{1\}$ und somit $\alpha = \beta$. $\square$

Definition 2.5.7. *([18]) Eine Frobeniusgruppe* (G, M) *besitzt viele Involutionen, wenn* $J(G)$ *transitiv auf* M *ist und der Stabilisator eines Punktes höchstens eine Involution enthält.*

Bemerkung 2.5.8. *Da alle Stabilisatoren* G_a *für* $a \in M$ *konjugiert sind, enthalten sie dieselbe Anzahl von Involutionen.*

Satz 2.5.9. *([18]) Es sei* (G, M) *eine Frobeniusgruppe mit vielen Involutionen und* $a \in M$.

(1) Es gibt nur eine Abbildung $\mu : M \mapsto J$ $(x \mapsto \mu_x)$ *mit* $\mu_x(a) = x$ $(x \in M)$*, so dass entweder* $\mu(M) = J\backslash\{1\}$ *oder* $\mu(M) = J$.

(2) $\mu(M)$ *ist regulär auf* M.

(3) $L := \mu(M) \cdot \mu_a$ *ist eine Transversale von* G/G_a*, die ein K-Loop ist.*

(4) Es ist $\mu(M) = J\backslash\{1\}$ *genau dann, wenn jede Involution aus* G *genau einen Fixpunkt hat. In diesem Fall ist* $C_G(\mu_a) = G_a$ *und* L *hat kein Element der Ordnung* 2.

(5) *Wenn $\mu(M) = J$, dann ist $L = J$ (man nennt sie eine Loop vom Exponenten 2) und jede Involution ist fixpunktfrei.*

Wenn L vom Exponenten 2 ist, dann hat die Frobeniusgruppe G (mit vielen Involutionen) die Charakteristik 2, man schreibt char $G = 2$. Falls char $G \neq 2$, dann haben die Involutionen von G Fixpunkte.

Satz 2.5.10. *([25]) Ist G eine scharf 2-fach transitive Gruppe, dann ist G eine Frobeniusgruppe mit vielen Involutionen, und die K-Loop aus Satz 2.5.9 ist isomorph zur additiven Loop des zugehörigen Fastbereichs F. Ferner ist char $G = 2$ genau dann, wenn char $F = 2$.*

Satz 2.5.11. *([18]) Ist L eine Loop vom Exponenten 2 und T ein fixpunktfreier Transassoziant, dann enthält T keine Involution. Ferner ist $G := L \times T$ eine Frobeniusgruppe mit vielen Involutionen und char $G = 2$, L ist eine K-Loop und $T \subseteq Aut(L)$.*

Satz 2.5.12. *([18]) Es sei (G, M) eine Frobeniusgruppe. G_a sei ein Stabilisator von $a \in M$. Wenn es eine Menge $F \subseteq J(G)$ gibt, so dass $1 \in F$ und F transitiv und fixpunktfrei auf M ist, dann ist G eine Frobeniusgruppe mit vielen Involutionen und char $G = 2$. Ferner gilt $F = J(G)$ und F ist eine Transversale von G/G_a, die eine K-Loop ist.*

Es ist nicht bekannt, ob es eine Frobeniusgruppe gibt, so dass J transitiv ist und G_a mehr als eine Involution enthält.

Eine Rechts-Loop heißt eindeutig 2-teilbar, falls die Abbildung $x \mapsto x^2$ eine Bijektion ist.

Satz 2.5.13. *([18]) Sei L eindeutig 2-teilbare K-Loop und Ω eine fixpunktfreie Untergruppe von $Aut(L)$, die die Struktur-Gruppe $D(L)$ und eine Involution α enthält. Dann gilt:*

(a) $\alpha(x) = x^{-1} \quad \forall x \in L$.

(b) *$L \times \Omega$ ist eine Frobeniusgruppe mit vielen Involutionen der Charakteristik $\neq 2$.*

(c) *(a, α) ist eine Involution und $\lambda_a(x) = (a, \alpha)(1, \alpha)(x) \quad (a, x \in L)$.*

Satz 2.5.14. *([18]) Sei H eine Untergruppe der Gruppe G und $J^* = J \backslash \{1\}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $(G, G/H)$ *ist eine Frobeniusgruppe mit vielen Involutionen und char* $G \neq 2$.

(ii) $H = C_G(\mu)$ *für ein geeignetes* $\mu \in J^*$ *und zu verschiedenen* $\alpha, \beta \in J^*$ *existiert* $\gamma \in J^*$ *mit* $\gamma\alpha\gamma = \beta$ *und* $C_G(\alpha) \cap C_G(\beta) = \{1\}$.

Falls (ii) gilt, dann ist γ *für die gegebenen* α *und* β *eindeutig bestimmt.*

Wir benötigen die folgende Definition:

Eine Gruppe G heißt spezifisch, wenn $|J^*| \geqslant 2$ ist und es ein $p \in \mathbb{N} \cup \infty$ gibt, so dass es für alle $\alpha, \beta \in J^*$ mit $\alpha \neq \beta$ ein $\gamma \in J^*$ mit $|\alpha\beta| = p$, $\gamma\alpha\gamma = \beta$ gibt und $C_G(\alpha) \cap C_G(\beta) = \{1\}$ gilt.

Wir schreiben char $G = p$ für $p = \infty$ und anderenfalls char $G = 0$. Für spezifischen Gruppen ist char $G = 0$ oder eine ungerade Primzahl ([18]).

Satz 2.5.15. *([18]) Es sei* G *eine spezifische Gruppe mit char* $G = p$. *Wenn* μ *eine Involution ist, dann ist* $\big(G, G/C_G(\mu)\big)$ *eine Frobeniusgruppe mit vielen Involutionen und char* $G \neq 2$. *Der Exponent der zu* G *gehörenden K-Loop* L *ist* p. *Wenn* $p = 0$ *ist, dann hat jedes Element aus* $L^* = L \backslash \{1\}$ *unendliche Ordnung.*

Satz 2.5.16. *([18]) Sei* L *eine K-Loop und* Ω *eine fixpunktfreie Untergruppe von* $Aut(L)$, *die die Strukturgruppe* $D(L)$ *und eine Involution* α *enthält. Wenn* $G = L \times \Omega$, *dann gilt:*

(1) Wenn $Exp(L) = p$ *eine ungerade Primzahl* p *ist, dann ist* G *eine spezifische Gruppe mit char* $G = p$.

(2) Wenn jedes Element aus L^* *unendliche Ordnung hat, dann ist* G *eine spezifische Gruppe mit char* $G = 0$.

(3) In beiden Fällen ist $\Omega = C_G(\alpha)$.

Die Tatsache, dass die spezifischen Gruppen die Frobeniusgruppen sind, wurde in [5] betrachtet.

3 Unendliche Zassenhausgruppen. Aussagen. Konstruktionsmethoden

3.1 Allgemeine aus dem endlichen Fall übernommene Aussagen

Es liegt nahe zu versuchen, die Ergebnisse über endliche Zassenhausgruppen auf die Klasse der lokal endlichen Zassenhausgruppen auszudehnen. Dies gelingt teilweise. Es ergibt sich eine vollständige Übersicht über die lokal endlichen scharf 3-fach transitiven Zassenhausgruppen.

Einige Aussagen über die endlichen Zassenhausgruppen sind ohne Einschränkungen auf den unendlichen Fall übertragbar.

Es sei G eine unendliche Zassenhausgruppe, $G_x \leqslant G$ und $G_{x,y} \leqslant G_x$ für $x, y \in M$, $x \neq y$. Für alle $b \in G_x$ gelte $(|G^b_{x,y} \cap G_{x,y}| > 1 \Leftrightarrow b \in G_{x,y})$.

Lemma 3.1.1. *([3]) Es sei G eine Zassenhausgruppe. Definieren wir*

$$V := G_x \setminus \bigcup_{b \in G_x} G^b_{x,y},$$

dann gelten die folgenden Aussagen:

a) Für $v \in V$ ist $C_G(v) \leqslant G_x$.

b) Wenn $V^g \cap G_x \neq \emptyset$, dann ist $g \in G_x$.

c) $G_{x,y}$ operiert frei auf V, d.h. falls $tv = vt$ für $t \in G_{x,y}$, $v \in V$, dann ist $t = id$.

d) Es sei ω ein Element aus G, das x und y vertauscht. Dann ist $N_G(G_{x,y}) = \langle G_{x,y}, \omega \rangle = G_{x,y} \cup G_{x,y}\omega$.

e) Falls $g \in G$ und $|G_{x,y} \cap G^g_{x,y}| > 1$, dann gilt $g \in N_G(G_{x,y})$.

Beweis. a) Für $b \in G_x$ gilt $bG_{x,y}b^{-1} = G_{b(x),b(y)} = G_{x,b(y)}$. Die Gruppe G_x ist transitiv auf $M \backslash \{x\}$. Dann sind V die Elemente, die nur x fixieren, d.h. $v(x) = x$ und $v(y) \neq y$ für alle $y \neq x \in M$.

Angenommen, es gibt ein $g \in C_G(v)$ mit $g \notin G_x$. Dann folgern wir

$g(x) \neq x \Rightarrow v(g(x)) = gvg^{-1}(g(x)) = g(x) \Rightarrow v \in G_{x,g(x)}$. Widerspruch.

b) Angenommen, $gVg^{-1} \cap G_x \neq \emptyset$ für ein $g \notin G_x$. Dann ist $g(x) \neq x$ und es gibt $v \in V$ und $b \in G_x$ mit $gvg^{-1} = b$. Also ist

$v(x) = x$ und $v(y) \neq y$ für alle $y \in M \backslash \{x\}$. Es folgt

$v = g^{-1}bg$ und $g(x) \neq x \Rightarrow g^{-1}(x) \neq x \Rightarrow v \in G_{x,g^{-1}(x)}$. Widerspruch.

c) Es sei $tv = vt$, $\; t \in G_{x,y}$ und $v \in V$. Da t aus $G_{x,y}$ ist, gilt $t(x) = x$, $t(y) = y$.

Ferner gilt $t = vtv^{-1}$ und $vtv^{-1}\big(v(y)\big) = v(y)$. Nun ist $v \in V$, d.h. $v(y) \neq x \neq y \neq v(y)$ und somit $t \in G_{x,y,v(y)} = \{id\}$.

d) Es sei $\omega(x) = y$, $\omega(y) = x$. Dann gilt

$$\omega G_{x,y}\omega^{-1}(x) = G_{x,y}\omega(y) = \omega(y) = x,$$
$$\omega G_{x,y}\omega^{-1}(y) = G_{x,y}\omega(x) = \omega(x) = y$$

und somit $\omega G_{x,y}\omega^{-1} = G_{x,y}$.

Nun ist $\omega^{-1} \cdot \omega^{-1} \in G_{x,y}$ d.h. $\omega^{-1} \in G_{x,y}\omega$.

Für alle $p \in \mathbb{Z}$ ist entweder $\omega^p \in G_{x,y}$ oder ω^p vertauscht x und y. Also ist $\omega^p\omega^{-1} \in G_{x,y}$ und $\omega^p \in G_{x,y}\omega$.

Also folgt $\omega G_{x,y} \cup G_{x,y} = \langle G_{x,y}, \omega \rangle$.

Es sei $g \in N_G(G_{x,y})$. Dann ist $G_{x,y} = gG_{x,y}g^{-1}$. Für x und y gilt

$gG_{x,y}g^{-1}\big(g(x)\big) = g(x)$ und $gG_{x,y}g^{-1}\big(g(y)\big) = g(y)$.

Also sind x und y Fixpunkte von g und somit ist $g \in G_{x,y}$. Anderenfalls vertauscht g die Elemente x und y und es gilt $g\omega^{-1} \in G_{x,y}$, d.h. $g \in G_{x,y}\omega$.

Also gilt $g \in \langle G_{x,y}, \omega \rangle$ und somit $N_G(G_{x,y}) \subseteq \langle G_{x,y}, \omega \rangle = G_{x,y} \cup G_{x,y}\omega$.

Es sei $g \in G_{x,y} \cup G_{x,y}\omega$, dann gilt entweder $g(x) = x$, $g(y) = y$ oder $g(x) = y$, $g(y) = x$. Also $gG_{x,y}g^{-1}(x) = x$ und $gG_{x,y}g^{-1}(y) = y$, d.h. $gG_{x,y}g^{-1} \subseteq G_{x,y}$ und somit $g \in N_G(G_{x,y})$ und $N_G(G_{x,y}) = \langle G_{x,y}, \omega \rangle$.

e) Es sei $|G_{x,y} \cap G^g_{x,y}| > 1$, d.h. $|G_{x,y} \cap G_{g(x),g(y)}| > 1$. Dann ist entweder $g(x) = x, g(y) = y$ oder $g(x) = y, g(y) = x$. Also ist $\begin{cases} g \in G_{x,y} \text{ oder} \\ gG_{x,y}g^{-1} \subseteq G_{x,y} \end{cases}$ und somit $g \in N_G(G_{x,y})$.

$\square$

Lemma 3.1.2. *([3]) Es sei G eine ZT-Gruppe. Dann :*

1) Falls $1 \neq H \lhd G_x$*, dann* $G_x = N_G(H)$*.*

2) Falls $H \lhd N_G(G_{x,y})$ *und* $|H| > 4$*, dann* $N_G(H) = N_G(G_{x,y})$*.*

Beweis. 1) $H \lhd G_x$. Es gilt für alle $b \in G_x$ $bHb^{-1} = H$ und $bHb^{-1}\big(b(x)\big) = b(x) = x$.

G_x ist transitiv auf $M\backslash\{x\}$. Also haben alle Elemente aus H nur x als gemeinsames Fixpunktelement.

Für g aus $N_G(H)$ gilt $H = gHg^{-1}$ und $ghg^{-1}\big(g(x)\big) = g(x)$ für alle $h \in H$ und somit $g(x) = x$, d.h $g \in G_x$.

2) $H \lhd N_G(G_{x,y})$. Dann gilt für alle n aus $N_G(G_{x,y})$ $nHn^{-1} = H$ und $n \in N_G(H)$ und somit $N_G(G_{x,y}) \subseteq N_G(H)$.

Es sei $g \in N_G(H)$. Aus Lemma 3.1.1 *d)* folgt, dass $[N_G(G_{x,y}) : G_{x,y}] = 2$ ist. Also $N_G(G_{x,y}) = G_{x,y} \cup G_{x,y}\omega$, wobei ω die Elemente x und y vertauscht.

$(*)$ Falls $h_1, h_2 \notin G_{x,y}$, dann vertauschen sie x und y, also ist $h_1h_2 \in G_{x,y}$.

Da $|H| > 4$, gibt es $id, h_1, h_2, h_3, h_4 \in H$.

Angenommen, $|H \cap G_{x,y}| \leqslant 2$, dann gilt entweder a) oder b).

a) $|H \cap G_{x,y}| = 1$. Also $H \cap G_{x,y} = \{id\}$. Nach $(*)$ gilt $h_1h_2 = h_1h_3 = id$, also $h_2 = h_3$. Widerspruch.

b) $|H \cap G_{x,y}| = 2$. Sei $H \cap G_{x,y} = \{id, h_1\}$. Dann gilt o.B.d.A nach $(*)$

$$h_2h_4 = h_1, \quad h_2h_3 = id \text{ und } \begin{cases} h_3h_4 = id \text{ oder} \\ h_3h_4 = h_1 \end{cases}$$

Falls $h_3h_4 = id$, dann ist $h_2 = h_4$. Widerspruch.

Falls $h_3h_4 = h_1$, dann ist $h_2 = h_3$. Widerspruch.

Also $|H \cap G_{x,y}| > 2$ und $|(H \cap G_{x,y})^g| = |H \cap G_{x,y}|$, d.h. $|(H \cap G_{x,y})^g| = |H \cap G_{x,y}| > 2$.

Sei $H \neq G_{x,y}$, dann gibt es $h \in H$ mit $h \notin G_{x,y}$, d.h. $h = t\omega$ und somit $(H \cap G_{x,y}) \cup (H \cap G_{x,y})h = (H \cap G_{x,y}) \cup (H \cap G_{x,y}h) = (H \cap G_{x,y}) \cup (H \cap G_{x,y}\omega) = H \cap (G_{x,y} \cup G_{x,y}\omega) = H \cap N_G(G_{x,y}) = H$. Also $[H : H \cap G_{x,y}] = 2$. Im Allgemeinen gilt $[H : H \cap G_{x,y}] \leqslant 2$. Dann folgern wir

$|(H \cap G_{x,y})^g \cap (H \cap G_{x,y})| > 1 \Rightarrow$

$|(H \cap G_{x,y})^g \cap (H \cap G_{x,y})| = |H \cap G^g_{x,y} \cap G_{x,y}| < |G^g_{x,y} \cap G_{x,y}| \Rightarrow$
$|G^g_{x,y} \cap G_{x,y}| > 1$

und mit dem Lemma 3.1.1 e) erhält man $g \in N_G(G_{x,y})$ d.h. $N_G(H) \subseteq N_G(G_{x,y})$.

□

Satz 3.1.3. *([15]) Sei G eine Zassenhausgruppe, die auf der Menge M operiert. Sei $H \leqslant G$ mit $\{id\} \neq H_{x,y} \subset H \subseteq G_x$. Dann ist $N_G(H) \subseteq G_x$.*

Beweis. Angenommen $N_G(H) \nsubseteq G_x$, dann gibt es ein $n \in N_G(H)$ mit $n(x) = z$ und $x \neq z$.
$H(z) = Hn(x) = nH(x) = n(x) = z$. Dann folgt es
$H \subseteq G_z \cap G_x = G_{x,z} \Rightarrow H_{x,y} \subset H \subseteq G_{y,z} \Rightarrow H_{x,y} \subset G_{x,y,z} = \{id\} \Rightarrow H_{x,y} = \{id\}$. Widerspruch.

□

3.2 Zassenhausgruppen als Untergruppen von scharf 3-fach transitiven Gruppen

Bis jetzt sind uns nur solche unendlichen Zassenhausgruppen bekannt, die Untergruppen von scharf 3-fach transitiven Gruppen sind, sowie natürlich lokal endliche Suzuki-Gruppen $Sz(F)$.

Hier werden einige Aussagen über ZT-Gruppen (Zassenhaus Transitiv) bewiesen, die Untergruppen von scharf 3-fach transitiven Gruppen sind. Wefelscheid und Kerby haben in [17] gezeigt, dass solche ZT-Gruppen eindeutig mit Hilfe einer geeigneten Untergruppe von der multiplikativen Gruppe $(F^*, \cdot)$ eines KT-Feldes $(F, +, \cdot, \sigma)$ charakterisiert werden können.

Definition 3.2.1. *Eine Menge F mit binären Operationen $+$ und $\cdot$ heißt ein Fastbereich, wenn gilt:*

(1) $(F, +)$ *ist eine Loop.*

(2) $a + b = 0 \Rightarrow b + a = 0$.

(3) $(F^*, \cdot)$ *ist eine Gruppe mit dem neutralen Element* 1.

(4) $0 \cdot a = 0 \quad \forall a \in F$.

(5) $a \cdot (b + c) = ab + ac \quad \forall a, b, c \in F$.

(6) $\forall a, b \in F \ \exists d_{a,b} \in F : a + (b + x) = (a + b) + d_{a,b}x \quad \forall x \in F.$

Definition 3.2.2. $(F, +, \cdot, \sigma)$ *heißt ein KT-Feld, wenn gilt:*

(1) $(F, +, \cdot)$ *ist ein Fastbereich.*

(2) σ *ist ein involutorischer Automorphismus von* $(F^*, \cdot)$ *für den gilt:*
$\sigma\big(1 + \sigma(x)\big) = 1 - \sigma(1 + x) \quad \forall x \in F \backslash \{0, 1\}.$

Satz 3.2.3. *(Satz von Kerby und Wefelscheid [17])*
Sei F *ein KT-Feld und* $\bar{F} = F \cup \{\infty\}$*. Die Transformationen* $\alpha, \beta : \bar{F} \mapsto \bar{F}$

$$\alpha : \begin{cases} x \mapsto a + mx \\ \infty \mapsto \infty \end{cases} \qquad a, b \in F,\ m \in F^*.$$

$$\beta : \begin{cases} x \mapsto a + \sigma(b + mx) \\ \infty \mapsto a \\ -m^{-1}b \mapsto \infty \end{cases} \qquad a, b \in F,\ m \in F^*.$$

bilden eine Gruppe $T_3(\bar{F})$*, die scharf* 3*-fach transitiv auf* $\bar{F}$ *ist. Umgekehrt, ist jede scharf* 3*-fach transitive Gruppe isomorph als Permutationsgruppe zu* $T_3(\bar{F})$ *mit dem eindeutig bestimmten KT-Feld* $(F, +, \cdot, \sigma)$*.*

Im Folgenden sei jede scharf 3-fach transitive Gruppe der Form $T_3(\bar{F})$.

Satz 3.2.4. *([27]) Sei* $(F, +, \cdot, \sigma)$ *ein KT-Feld. Wenn* B *eine Untergruppe von* $(F^*, \cdot)$ *ist, so dass* $R \subseteq B$*,* $D \subseteq B$ *und* $\sigma(B) \subseteq B$ *gilt, wobei* $R := \big\{a\sigma(a^{-1}) \in F^* \mid a \in F^*\big\}$ *und* $D = \big\{d_{a,b} \in F^* \mid a, b \in F\big\}$*, dann erzeugen die Transformationen*

$$\alpha : \begin{cases} x \mapsto a + mx \\ \infty \mapsto \infty \end{cases} \qquad a \in F,\ m \in B.$$

$$\beta : \begin{cases} x \mapsto a - \sigma(b + mx) \\ -m^{-1}b \mapsto \infty \\ \infty \mapsto a \end{cases} \qquad a, b \in F,\ m \in B$$

eine Untergruppe U *von* $T_3(\bar{F})$*, die eine ZT-Gruppe ist.*

Umgekehrt, gibt es für jede $U \leqslant T_3(\bar{F})$*, die eine ZT-Gruppe ist, eine Untergruppe* $B \leqslant F^*$ *mit* $R \subseteq B$*,* $D \subseteq B$ *und* $\sigma(B) \subseteq B$ *so, dass alle Elemente von* U *die Form von* α *oder* β *haben.*

Satz 3.2.5. *([27]) Eine ZT-Untergruppe U von $T_3(\bar{F})$ ist genau dann normal, wenn die entsprechende Untergruppe B von F^* normal ist. In diesem Fall ist $T_3(\bar{F})/U \cong F^*/B$.*

Satz 3.2.6. *([16]) Es sei $(F, +, *)$ ein kommutativer Körper und A eine Untergruppe von F^*, so dass folgendes gilt:*

(i) $Q := \{a * a \mid a \in F^*\} \subseteq A$.

(ii) Es gibt einen Monomorphismus $\pi : F^*/A \mapsto Aut(F, +, *)$.

(iii) $\tau(x) \in x * A$ *für alle* $x \in F^*$ *und* $\tau \in \pi(F^*/A)$

Sei $\kappa : F^* \mapsto F^*/A$ *ein kanonischer Homomorphismus. Dann ist* $(F, +, \circ)$ *mit* $a \circ b = \begin{cases} 0 & f\ddot{u}r \quad a = 0 \\ a * a_\varphi(b) & mit \quad a_\varphi = \pi\kappa(a) \end{cases}$
ein Fastbereich und $F^\varphi := (F, +, \circ, \sigma)$ *ist ein KT-Feld mit* $\sigma(a) = a^{-1}$ *(das Inverse bzgl.* $*$ *)*

Satz 3.2.7. *([27]) Sei F^φ ein KT-Feld wie in Satz 3.2.6 konstruiert. Dann sind äquivalent:*

1) Eine ZT-Untergruppe $U \leqslant T_3(F^\varphi)$ ist gleichzeitig eine Untergruppe von $PGL(2, F)$.

2) Die entsprechende Untergruppe $B \leqslant (F^*, \circ)$ erfüllt $B \subseteq Ker\varphi := \{z \in F^* \mid z_\varphi = id\}$.

Satz 3.2.8. *([27]) Die kleinste ZT-Untergruppe U von einer scharf 3-fach transitiven Gruppe $T_3(\bar{F^\varphi})$ (mit F^φ wie in Satz 3.2.6) ist isomorph zu $PSL(2, F)$.*

3.3 Konstruktion und Beispiele einer ZT-Gruppe mit dem regulären Normalteiler

Die Konstruktion der endlichen Zassenhausgruppen mit regulärem Normalteiler läßt sich vermutlich nicht auf den lokal endlichen Fall verallgemeinern. Mit etwas anderen Ideen können wir *neue unendliche Zassenhausgruppen mit regulärem Normalteiler* angeben (Konstruktion (3.3.5) und Beispiele 3.3.10, 3.3.11).

Wir beginnen mit notwendigen Definitionen und Beispielen.

Definition 3.3.1. *Ein Körper K ist vollkommen, wenn jedes in $K[x]$ irreduzible Polynom $f(x)$ separabel ist, d.h. f hat im algebraischen Abschluß von K keine mehrfachen Nullstellen.*

Beispiel 3.3.2. *Körper der Charakteristik Null, alle endlichen Körper und algebraisch-abgeschlossene Körper sind vollkommen.*

Satz 3.3.3. *Ein Körper der Charakteristik p ist dann und nur dann ein vollkommener Körper, wenn es zu jedem Element eine p-te Wurzel gibt. Zu jedem unvollkommenen Körper gibt es eine inseparable Erweiterung und einen kleinsten algebraischen und zugleich vollkommenen Erweiterungskörper, die vollkommene Hülle von K.*

Satz 3.3.4. *([13]) Für einen Fastbereich F sind äquivalent:*

a) F ist ein Fastkörper.
b) $(F,+)$ ist abelsch.

Konstruktion 3.3.5. *Sei $(F,+,\cdot)$ ein unendlicher Fastkörper der Charakteristik 2 und $\mathcal{U}$ eine nicht triviale Untergruppe von Automorphismen von $(F,+,\cdot)$, so dass jedes $\varphi \in \mathcal{U}\backslash\{id\}$ nur die Fixpunkte 0 und 1 hat. Sei nun $G = \{g : x \mapsto a \cdot \varphi(x) + b$ mit $a \neq 0, b \in F$ und $\varphi \in \mathcal{U}\}$. Dann bildet G eine unendliche auf F operierende ZT-Gruppe, die den regulären Normalteiler $N = \{\eta : x \mapsto x + b \mid b \in F\}$ enthält.*

Beweis. 1. G ist eine Gruppe.

a) *Abgeschlossenheit*: für alle $g_1, g_2 \in G$ gilt $g_1 \circ g_2 \in G$.
Sei $g_1 : x \mapsto a_1 \cdot \varphi_1(x) + b_1$, $g_2 : x \mapsto a_2 \cdot \varphi_2(x) + b_2$ dann gilt $g_1 \circ g_2 : x \mapsto a \cdot \varphi(x) + b$ mit $a = a_1\varphi_1(a_2),\ \varphi = \varphi_1\varphi_2,\ b = a_1\varphi_1(b_2) + b_1$.

b) *Assoziativität*: für alle $g_1, g_2, g_3 \in G$ gilt
$\big((g_1 \circ g_2) \circ g_3\big)(x) = a_1 \cdot \varphi_1(a_2) \cdot \varphi_1\varphi_2\big(a_3 \cdot \varphi_3(x) + b_3\big) + a_1 \cdot \varphi_1(b_2) + b_1 =$
$a_1 \cdot \varphi_1(a_2) \cdot \varphi_1\varphi_2(a_3) \cdot \varphi_1\varphi_2\varphi_3(x) + a_1 \cdot \varphi_1(a_2) \cdot \varphi_1\varphi_2(b_3) + a_1 \cdot \varphi_1(b_2) + b_1$
$= a_1 \cdot \varphi_1\big(a_2 \cdot \varphi_2(a_3) \cdot \varphi_2\varphi_3(x) + a_2 \cdot \varphi_2(b_3) + b_2\big)\big) + b_1 = \big(g_1 \circ (g_2 \circ g_3)\big)(x)$

c) *neutrales Element*: $id_G = g$ mit $a = 1, b = 0$ und $\varphi = id_{Aut(F)}$.

d) *inverses Element*: für jedes $g \in G$ mit $x \mapsto a \cdot \varphi(x) + b$ gibt es ein $g^{-1} \in G$: $x \mapsto c \cdot \psi(x) + d$ mit $c = \varphi^{-1}(a^{-1})$, $d = \varphi^{-1}(a^{-1} \cdot b)$ und $\psi = \varphi^{-1}$, so dass $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = id_G$ ist.

2. G ist 2-fach transitiv (nicht aber scharf wegen $|\mathcal{U}| \neq 1$).

3. $G_{0,1} = \{g : x \mapsto \varphi(x), \varphi \in \mathcal{U}\}$ und $|G_{0,1}| \neq 1$. Wegen 2-facher Transitivität von G gilt $G_{a,b} \neq \{id\}$ für alle $a, b \in F$.

4. Für jedes $f \in F \backslash \{0,1\}$ gilt $\varphi(f) \neq f$, d.h. $G_{0,1,f} = \{id\}$ für alle $f \in F \backslash \{0,1\}$ und somit $G_{a,b,c} = \{id\}$ für alle $a, b, c \in F$.

Wir betrachten nun eine Standuntergruppe $G_0 = \{h : x \mapsto a \cdot \varphi(x)\}$ und sehen sofort, dass G_0 transitiv auf $F \backslash \{0\}$ operiert. G_0 ist eine Frobeniusgruppe mit dem Komplement $\mathcal{U} = G_{0,1}$ und dem Kern $K = \{\kappa : x \mapsto a \cdot x\}$.

N ist ein Normalteiler von G, der offensichtlich regulär und wegen Satz 3.3.4 kommutativ ist. Es ist auch bemerkenswert, dass diese Gruppe nur aus fixpunktfreien Involutionen besteht. Und es gilt: $G = NG_0$ mit $N \bigcap G_0 = \{id\}$.

$\square$

Lemma 3.3.6. *1. Falls $(F, +, \cdot)$ ein unendlicher Fastbereich der Charakteristik 2 ist, dann ist $G = \{g : x \mapsto b + a \cdot \varphi(x)$ mit $a \neq 0, b \in F$ und $\varphi \in \mathcal{U}\}$ auch eine Zassenhausgruppe, wobei $\mathcal{U}$ eine fixpunktfreie Untergruppe von $Aut(F, +, \cdot)$ ist. Wenn $N = \{\eta : x \mapsto b + x \mid b \in F\}$ eine reguläre Untergruppe ist, dann ist $(F, +, \cdot)$ ein Fastkörper.*

2. Wir betrachten die Struktur $(F, A, +, \cdot)$, wobei:

1) $(F, +)$ eine abelsche Gruppe mit 0 und char F=2 ist.

2) $0 \cdot f = 0$ für alle $f \in F$.

3) $A \subset F \backslash \{0\}$ mit den Eigenschaften:

$(A, \cdot)$ ist eine Gruppe und

$a(b + c) = ab + ac$ für alle $a \in A$, $b, c \in F$ und

$\mathcal{U} \leqslant Aut(F)$, wobei für alle $\varphi \in \mathcal{U}$ gilt:

$\varphi(ax+b) = \varphi(a)\varphi(x) + \varphi(b)$ und $\varphi \neq id$ operiert fixpunktfrei auf $F\backslash\{0,1\}$. Dann ist $G = \{g : x \mapsto a \cdot \varphi(x) + b$ mit $a \in A, b \in F$ und $\varphi \in \mathcal{U}\}$ jedoch keine Zassenhausgruppe.

Beweis. Angenommen, die oben gegebene Struktur (F, A) passt zur Konstruktion 3.3.5. Dann folgt sofort aus der Abgeschlossenheit von $(G, \circ)$, dass $\varphi(A) = A$ für alle $\varphi \in \mathcal{U}$ sein muss. Nun seien $A \subset F^*$ und $y \in F^*\backslash A$. G ist 2-fach transitiv. Dann nehmen wir (x_1, x_2) und (y_1, y_2) so, dass $x_1 + x_2 \in A$ und $y_1 + y_2 = y$.

Es gibt ein $g \in G : x \mapsto a\varphi(x) + b$ und $g(x_i) = y_i$, $i = 1, 2$. Also gilt $a\varphi(x_1)+b = y_1$ und $a\varphi(x_2)+b = y_2$ und es folgt $a\varphi(x_1+x_2) = y_1+y_2 = y$.

Das ist ein Widerspruch, denn $a\varphi(x_1+x_2) \in A$ und $y \in F^*\backslash A$. Folglich ist $A = F^*$ und $(F, +, \cdot)$ ist wieder ein Fastkörper. $\square$

Folgerung 3.3.7. *Die schwächste algebraische Struktur $(F, +, \cdot)$, die zur Konstruktion 3.3.5 passt, ist mit dem Lemma 3.3.6 ein Fastkörper.*

Nun geben wir einige explizite Beispiele von Zassenhausgruppen nach der Konstruktion 3.3.5. Zunächst betrachten wir den Körper der rationalen Funktionen $\mathbb{Z}_2(t)$ über $\mathbb{Z}_2$. Dann ist $\mathbb{S} = \mathbb{Z}_2(t, t^{1/2}, t^{1/2^2}, t^{1/2^3}, \ldots, t^{1/2^n}, \ldots)$ die vollkommene Hülle von $\mathbb{Z}_2(t)$.

Behauptung 3.3.8. *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathbb{S}$ mit $f^{2^n-1} = 1$ folgt $f = 1$.*

Beweis. Wenn $f \in \mathbb{S}$, dann ist $f^{2^n-1} = f^{2^{n-1}} \cdot f^{2^{n-2}} \cdot \ldots \cdot f^2 \cdot f$.
Sei $f = \frac{f_1}{f_2}$ mit $f_1, f_2 \in \mathbb{Z}_2[t, t^{1/2}, t^{1/2^2}, t^{1/2^3}, \ldots, t^{1/2^n}, \ldots]$ gekürzt.

$$f_1 := \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot t^{n_i} \quad \text{und} \quad f_2 := \sum_{i=0}^{\infty} c_i \cdot t^{n_i} \quad \text{mit} \quad 0 = n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$$

$$n_i = \sum_{p=0}^{\infty} \xi_{ip} \frac{1}{2^p}, \quad \xi_{ip} \in \mathbb{N}_0, \quad a_i, c_i \in \mathbb{Z}_2$$

Fast alle ξ_{ip}, a_i, c_i sind 0.

Also ist $f^{2^n-1} = 1$ dann und nur dann, wenn $f_1^{2^n-1} = f_2^{2^n-1}$. Das heißt

$$\left(\sum a_i \cdot t^{2^{n-1} \cdot n_i}\right) \cdot \left(\sum a_i \cdot t^{2^{n-2} \cdot n_i}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\sum a_i \cdot t^{2n_i}\right) \cdot \left(\sum a_i \cdot t^{n_i}\right) =$$
$$= \left(\sum c_i \cdot t^{2^{n-1} \cdot n_i}\right) \cdot \left(\sum c_i \cdot t^{2^{n-2} \cdot n_i}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\sum c_i \cdot t^{2n_i}\right) \cdot \left(\sum c_i \cdot t^{n_i}\right)$$

Angenommen, es gibt f_1, f_2, so dass $f_1 \neq f_2$ und $f_1^{2^n-1} = f_2^{2^n-1}$. Also gibt es kleinste positive Zahl k, so dass $a_k \neq c_k$ und $a_j = c_j$ für alle $j < k$.
Falls $k = 0$, dann o.B.d.A $a_0 = 1$ und $c_0 = 0$ und $f_1^{2^n-1}$ hätte ein Monom 1 und $f_2^{2^n-1}$ würde kein solches besitzen. Widerspruch.
Also seien $k > 0$ und $a_0 = c_0 = 1$. Betrachten wir die Monome von $f_1^{2^n-1}$ und $f_2^{2^n-1}$ der Potenz n_k. Dann gilt
$\underbrace{a_0 \cdot \ldots \cdot a_0}_{n-1} \cdot a_k \cdot t^{n_k} + \left(\sum a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdot \ldots \cdot a_{i_n}\right) \cdot t^{n_k} =$
$= a_0 \cdot a_k \cdot t^{n_k} + \left(\sum a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdot \ldots \cdot a_{i_n}\right) \cdot t^{n_k} = c_0 \cdot c_k \cdot t^{n_k} + \left(\sum c_{i_1} \cdot c_{i_2} \cdot \ldots \cdot c_{i_n}\right) \cdot t^{n_k}$,
wobei $i_1, \ldots, i_n$ so gewählt sind, dass

$$\sum_{j=1}^{n} 2^{n-j} \cdot n_{i_j} = n_k$$

und $0 \leqslant i_j < k$.
Nach der Annahme $a_i = c_i$ für alle $i < k$ folgt $\sum a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdot \ldots \cdot a_{i_n} =$
$= \sum c_{i_1} \cdot c_{i_2} \cdot \ldots \cdot c_{i_n}$ und somit $a_0 a_k = c_0 c_k$. Daraus folgt, dass $a_k = c_k$. Widerspruch.

□

Nun sei $\mathcal{U}$ eine zyklische Untergruppe von $Aut(\mathbb{S})$, die von dem Frobeniusautomorphismus φ: $f \mapsto f^2$ erzeugt ist. Dann gilt:

Behauptung 3.3.9. *Die Gruppe* $\mathcal{U} = \langle\varphi\rangle \leqslant Aut(\mathbb{S})$ *operiert fixpunktfrei auf* $\mathbb{S}\backslash\{0,1\}$.

Beweis. a) φ ist ein fixpunktfreier Automorphismus (auf $\mathbb{S}\backslash\{0,1\}$).

Angenommen, es gibt ein $f \in \mathbb{S}\backslash\{0,1\}$, so dass $\varphi(f) = f$, d.h. $f^2 = f$, dann ist $f = 1$ (Widerspruch).

b) φ^n $(n \in \mathbb{N})$ ist auch ein fixpunktfreier Automorphismus (auf $\mathbb{S}\backslash\{0,1\}$).

Angenommen, es gibt $f \in \mathbb{S}\backslash\{0,1\}$, so dass $\varphi^n(f) = f$, dann gilt $f^{2^n} = f$, also $f^{2^n-1} = 1$ und somit aus der Behauptung 3.3.8 folgt $f = 1$ (Widerspruch).

c) Trivialerweise folgt, dass φ^{-n} $(n \in \mathbb{N})$ ein fixpunktfreier Automorphismus (auf $\mathbb{S}\backslash\{0,1\}$) ist.

□

Beispiel 3.3.10. *Sei* $G = \{g : x \mapsto a \cdot x^{2^n} + b$ *mit* $a \neq 0, b \in \mathbb{S},\ n \in \mathbb{Z}\}$. *Dann* (*mit* 3.3.5, 3.3.9) *ist* $(G, \mathbb{S})$ *eine unendliche ZT-Gruppe mit dem regulären*

Normalteiler N, wobei $N = \{\eta : x \mapsto x+b \mid b \in \mathbb{S}\}$ ist. Die Standuntergruppe $H = \{h : x \mapsto a \cdot x^{2^n} \mid 0 \neq a \in \mathbb{S}\} = G_0$ ist eine Frobeniusgruppe mit dem Komplement $\mathcal{U} = \langle\varphi\rangle = G_{0,1}$ und dem Kern $K = \{\kappa : x \mapsto a \cdot x \mid 0 \neq a \in \mathbb{S}\}$. Und es gilt $G = NH$, wobei $N \bigcap H = \{id\}$ ist.

Beispiel 3.3.11. *Sei $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$ der Körper mit zwei Elementen $0, 1$. Betrachten wir die freie $\mathbb{K}$-Algebra mit abzählbar vielen Unbestimmten x_i $(i \in \mathbb{Z})$ und nehmen den universellen Quotientenschiefkörper $\mathcal{F}$ mit dem Automorphismus $\sigma : x_i \mapsto x_{i+1}$. Alle Potenzen von σ $(\neq \sigma^0)$ haben nur $0, 1$ als Fixpunkte, und mit dem identischen Automorphismus bilden sie eine fixpunktfreie Untergruppe $\mathcal{U}$ von $Aut(\mathcal{F})$. Nach der Konstruktion (3.3.5) gibt es dann eine unendliche ZT-Gruppe mit dem regulären Normalteiler.*

Wir wollen nun zeigen: Falls die in (3.3.5) konstruierte Gruppe eine Untergruppe der scharf 3-fach transitiven Gruppe $T_3(\bar{F})$ ist, dann hat das entsprechende KT-Feld F die Charakteristik 2. Zunächst beweisen wir folgendes Lemma:

Lemma 3.3.12. *Sei G eine scharf 3-fach transitive Gruppe und N ein regulärer Normalteiler von G, der aus fixpunktfreien Involutionen besteht. Dann gibt es keine Involution in G, die zwei Punkte festlässt.*

Beweis. Angenommen, es gibt $id \neq \alpha \in G_{a,b}$ und $\alpha^2 = id$. Nach der Voraussetzung gibt es ein $n \in N$:

$$n(a) = b \text{ und } n(b) = a \Rightarrow \begin{cases} n\alpha n(a) = n\alpha(b) = n(b) = a \\ n\alpha n(b) = n\alpha(a) = n(a) = b \end{cases}$$

Dann $n\alpha n = \alpha$, sonst gäbe es ein $c \notin \{a, b\}$, so dass $x := n\alpha n(c) \neq c \neq \alpha(c) := y$, und eindeutig bestimmtes $\sigma \in G$:

$$\begin{cases} \sigma(a) = a \\ \sigma(c) = c \\ \sigma(x) = y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma(n\alpha n)\sigma^{-1}(y) = \sigma \cdot n\alpha n(x) = \sigma(c) = c \\ \sigma(n\alpha n)\sigma^{-1}(c) = \sigma \cdot n\alpha n(c) = \sigma(x) = y \\ \sigma(n\alpha n)\sigma^{-1}(a) = \sigma \cdot n\alpha n(a) = \sigma(a) = a \end{cases} \Rightarrow \sigma(n\alpha n)\sigma^{-1} = \alpha$$

Also gälte $b = \alpha(b) = \sigma(n\alpha n)\sigma^{-1}(b) \Rightarrow n\alpha n\big(\sigma^{-1}(b)\big) = \sigma^{-1}(b) \Rightarrow$

$$\sigma^{-1}(b) = \begin{cases} b \Rightarrow \ \sigma(b) = b \ \Rightarrow \sigma = id \text{ (Widerspruch } \sigma(\mathrm{x}) = \mathrm{y}) \\ a \text{ (Widerspruch, da } \sigma(\mathrm{a}) = \mathrm{a}) \end{cases}$$

Wie behauptet, $n\alpha n = \alpha \Rightarrow n\alpha = \alpha n \Rightarrow (n\alpha)^2 = id$. Nun sei $\alpha(c) := d$,

$n_1 := n$. Es gibt nur ein $n_2 \in N$: $\begin{cases} n_2(c) = d \\ n_2(d) = c \end{cases}$ und $n_2^2 = id$.

Sei $\begin{cases} n_1(c) := z \\ n_1(d) := p \end{cases}$ dann $\begin{cases} n_1 n_2 \alpha(c) = n_1 n_2(d) = n_1(c) = z \\ n_1 n_2 \alpha(d) = n_1 n_2(c) = n_1(d) = p \\ n_1 n_2 \alpha(z) = n_2 n_1 \alpha\big(n_1(c)\big) = n_2 \alpha(c) = c \end{cases}$

Falls $z \neq d$ dann $n_1 n_2 \alpha = n_1 \Rightarrow n_2 \alpha = id \Rightarrow n_2 = \alpha$ (Widerspruch, da n_2 fixpunktfrei ist). Deswegen muss $z = d$ gelten. Woraus folgt, dass $p = c$. Also es gilt n_1: $\begin{cases} a \leftrightarrow b \\ c \leftrightarrow d \end{cases}$

Nun sei $\alpha(f) := e$. Betrachten wir $n_3 \in N$: $n_3(f) = e$.

Dann ist $\begin{cases} n_1 n_3 \alpha(f) = n_1(f) := k \\ n_1 n_3 \alpha(e) = n_1(e) := l \\ n_1 n_3 \alpha(k) = n_1 n_3 \alpha\big(n_1(f)\big) = n_3 \cdot n_1 \alpha n_1(f) = n_3 \alpha(f) := f \end{cases}$

Falls $k \neq e$ dann ist $n_1 n_3 \alpha = n_1 \Rightarrow n_3 \alpha = id \Rightarrow n_3 = \alpha$ (Widerspruch, da n_3 fixpunktfrei ist). Also muss $k = e$ sein.

Und als Folgerung gilt: $\begin{cases} n_1(f) = e \\ n_1(c) = d \end{cases} \Rightarrow n_1 = \alpha$ (Widerspruch, $n_1 \notin G_{a,b}$)

Also gibt es keine Involution in G mit zwei Fixpunkten.

□

Definition 3.3.13. *Sei (G, M) eine scharf 3-fach transitive Gruppe. Wir bezeichnen mit J_f die Menge aller Involutionen von G, die Fixpunkte haben. Es sei $K = \{\alpha \in G \ : \ ord(\alpha) = 3\}$. Dann definieren wir:*

G ist vom Typ (m, n) mit $m \in \{0, 1, 2\}$, $n \in \{0, 1\}$ genau dann, wenn die Elemente von K bzw. die Elemente von J_f m bzw. $n + 1$ Fixpunkte haben.

Unter char *G versteht man* char *G_a für ein $a \in M$.*

Satz 3.3.14. *([16]) G sei eine scharf 3-fach transitive Gruppe, dann gilt:*

G ist vom Typ $(m, 0)$ mit $m \in \{0, 1, 2\} \Leftrightarrow$ char $G = 2$

Bis jetzt ist noch nicht geklärt, ob die in 3.3.5 konstruierte Gruppe G eine Untergruppe einer scharf 3-fach transitiven Gruppe ist. Jedoch gilt folgendes:

Folgerung 3.3.15. *Wenn die Gruppe G aus* 3.3.5 *eine Untergruppe einer scharf* 3*-fach transitiven Gruppe $T_3(\bar{F})$ ist, dann ist char $F = 2$.*

Beweis. Sei $T_3(\bar{F})$ eine scharf 3-fach transitive Gruppe, die unsere Gruppe G als Untergruppe enthält. Dann hat nach dem Lemma 3.3.12 $T_3(\bar{F})$ keine Involution mit zwei Fixpunkten. Und mit dem Satz 3.3.14 char $G = 2$, d.h. char $F = 2$. □

Vermutung 3.3.16. *Wir vermuten, dass die von uns in* 3.3.5 *konstruierte Gruppe G in keiner scharf* 3*-fach transitiven Gruppe einbettbar ist.*

4 Interessante Problemstellungen

Wefelscheid hat in [26] und [28] einige Fragen und Probleme gestellt.

Wir stellen hier die wichtigsten Fragen zusammen.
Sei (G, M) eine unendliche Frobeniusgruppe. Was kann man darüber sagen?

Wir betrachten die Menge $N := \{\tau \in G \ : \ \tau(x) \neq x \ \forall x \in M\} \cup \{id\}$ von fixpunktfreien Abbildungen.

1. Wenn N eine Gruppe ist, dann gilt der Satz von Frobenius für unsere Gruppe G.

   Wir kennen die Beispiele mit abelschem N. (z.B. $T_2(\mathbb{K})$, wobei $\mathbb{K}$ ein kommutativer Körper ist)

   Beispiel 2.2.11 zeigt, dass N nicht abelsch sein muß.

2. Laut Collins [2] gibt es Beispiele mit $N = 1$. (Das ist jedoch nicht explizit aufgeschrieben.)

3. Wir können fragen, ob N eine "schöne" Transversale T enthält, wobei $G = T \cdot G_a$ für ein geeignetes $a \in M$ ist.

   "Schön" kann bedeuten:

   (a) Die Menge T ist abelsch.
   (Nach 2.2.3 gilt: Wenn T abelsch ist, dann ist T schon eine Gruppe.)

   (b) T ist keine abelsche Gruppe.

   (c) Nach Paragraph 2.5 kann die Menge T eine K-Loop sein.

4. Endlichkeitseigenschaft :

   (a) *Beispiele 2.2.8, 2.4.4 belegen, dass G_a endlich sein kann.*

   (b) *Wegen Lemma 2.2.2 kann eine Transversale nicht endlich sein.*

5. Frobeniusuntergruppen von (G, M).

   Man bestimme alle Untergruppen H von G, so dass (H, M) eine Frobeniusgruppe ist.

Falls $G = TG_a$, wobei T eine Gruppe ist, nimmt man alle Untergruppen $U < G_a$ und setzt $H = TU$.

Falls $G = N \cup \bigcup_{g \in G} gG_a g^{-1} = TG_a$ gilt, wobei T eine Transversale ist,

dann muss für jede Frobeniusuntergruppe $H < G$ gelten: $\langle T \rangle \subseteq H$.

Ist diese minimale Frobeniusuntergruppe $\langle T \rangle$ unabhängig von der Wahl von T?

6. Man bestimme alle Erweiterungen $L > G$, dass (L, M) eine Frobeniusgruppe ist, die auf derselben Menge M operiert.

7. Es sind alle neuen Konstruktionen von Frobeniusgruppen zu bestimmen.

   Gilt die Behauptung 17.3 [21] für die unendlichen Frobeniusgruppen?

   Behauptung 17.3. G sei eine Frobeniusgruppe mit dem Frobeniuskern N. K sei eine Untergruppe von G.

   Falls $K \nsubseteq N$ und $K \cap N \neq \{1\}$, dann ist K eine Frobeniusgruppe mit dem Kern $K \cap N$.

   Falls $\{1\} < K < N$ und $K \triangleleft G$, dann ist G/K eine Frobeniusgruppe mit dem Kern N/K. (Natürlich kann die neue Gruppe nicht mehr auf M operieren).

   Alle Beweise in [21] brauchen dafür Endlichkeit.

8. Charakterisierung jener Frobeniusgruppen, die dem Satz von Frobenius genügen.

9. Wir schwächen das oben gestellte Problem ab: Betrachten wir eine Klasse von Frobeniusgruppen, die zerfallen, d.h. es gibt $H \triangleleft G : G = HG_a$ mit $H \cap G_a = \{1\}$.

   Man charakterisiere solche unendlichen Frobeniusgruppen.

Bemerkung. Die Klasse der Gruppen aus Problem 8 ist echt in der Klasse der Gruppen aus dem Problem 9 enthalten.

(a) Beispiel. Es sei $\alpha_n : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$ $(x \mapsto n + x)$, $n \in \mathbb{Z}$ und
    $\beta : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$ $(x \mapsto -x)$.

$D := \langle \alpha_n, \beta \ : \ n \in \mathbb{Z} \rangle$ ist eine Frobeniusgruppe, die auf $\mathbb{Z}$ operiert. Die Menge $K := \big\{ \gamma \in D \ : \ \gamma(x) \neq x \ \forall x \in \mathbb{Z} \big\} = \{\alpha_n \ : \ n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\} \cup \{\alpha_n\beta \ : \ n \in 2\mathbb{Z}+1\}$ ist keine Gruppe, aber $A \lhd D$, wobei $A = \{\alpha_n \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$ und $D = AB$ mit $B = D_0 = \{id, \beta\}$ ist.

(b) Beispiel. Es sei $(F, +, \cdot)$ ein Fastkörper, d.h. $(F, +)$ ist eine kommutative Gruppe, $F \backslash \{0\} = (F^*, \cdot)$ ist eine Gruppe und es gilt: $a(b+c) = ab + ac \quad \forall a, b, c \in F$.

Dann nennen wir $P := \{a \in F \ : \ a = 1$ oder $ax - 1 = x$ hat eine Lösung in $F\} = \{(1+z)z^{-1} \ : \ z \in F^*\} \cup \{1\}$ die Menge von planaren Elementen. Falls $P = F$, dann ist F ein planarer Fastbereich und damit ein Fastkörper.

Nun sei F ein Fastbereich und $A \leqslant (F^*, \cdot)$.

Dann ist $G := \left\{ \gamma_{a,m} : \begin{cases} F \mapsto F \\ x \mapsto a + mx \end{cases} \middle| \ a \in F, \ m \in A \right\}$ eine zerfallende Frobeniusgruppe.

Also $G = TG_0$ mit $T := \{\tau_a \ : \ x \mapsto a + x \mid a \in F\}$ aber $T \subsetneqq K := \{\gamma \in G \ : \ \gamma(z) \neq z \ \forall z \in F^*\} \cup \{id\}$ und G gehört zu Problem 9 und nicht zu Problem 8, falls F nicht planar ist.

Wenn F planar ist und $A = F^*$, dann gilt der Satz von Frobenius für G.

10. *Unter welchen Bedingungen genügt G dem Satz von Frobenius, wenn $A \lneqq F^*$ ist?*

11. *Wie kann man eine Split-Frobeniusgruppe (G, M) (aus Problem 9) in eine Frobeniusgruppe (aus Problem 8), die dem Satz von Frobenius genügt, einbetten?*

    Unter welchen Bedingungen kann solche Einbettung möglich sein?

12. *Was kann man über die transitive Erweiterung von (G, M) sagen?*

    Solche Gruppen sind Zassenhausgruppen.

    Gibt es eine unendliche Zassenhausgruppe, die bis jetzt noch nicht bekannt ist, d.h. die keine scharf 3-fach transitive und keine Untergruppe einer scharf 3-fach transitiven Gruppe ist?

13. *Ist die von uns in 3.3.5 konstruierte Gruppe in eine scharf 3-fach transitive Gruppe einbettbar?* Vermutlich, **Nein**.

14. *Welche Zassenhausgruppen* (G, M) *sind in eine Gruppe* $\hat{G}$ *einbettbar, die scharf* 3*-fach transitiv auf* M *ist?*

Literatur

[1] V.V.Bludov, *On Frobenius Groups*, Siberian Mathematical Journal, Vol.38, No. 6, 1997

[2] M.J.Collins, *Some Infinite Frobenius Groups*, Journal of Algebra 131, 161-165, 1990

[3] F.Delahan, A.Nesin, *On Zassenhaus Groups of Finite Morley Rank*, Communication in Algebra, 23(2), 455-466, 1995

[4] W.Feit, *On a class of doubly transitive permutation groups*, Illinois J. Math. 4, 170-186, 1960

[5] C.M.Gabriel, *Verallgemeinerungen scharf zweifach transitiver Permutationsgruppen und das Burnside-Problem*, Ph.D. Thesis, University of Hamburg, 1997

[6] J.M. Gorchakov, *On Infinite Frobenius Groups*, Soviet Mathematics, Vol.4, translation of "Doklady Akademii Nauk SSSR", Tom 148-153, 1397-1399, 1963

[7] B.Huppert, *Endliche Gruppen I*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1967

[8] B.Huppert, N.Blackburn, *Finite Groups III*, Springer - Verlag Berlin Heidelberg New York, 1982

[9] Oddvar Iden, Karl Strambach, *Frobenius Quasigroups and Regular Polygons*, (preprint)

[10] N.Ito, *Frobenius and Zassenhausgroups*, Vol.1 , Lectures given during 1968/69 at the University of Illinois at Chicago Circle.

[11] N.Ito, *On a class of doubly transitive permutation groups*, Illinois J. Math. 6, 341-352, 1962

[12] N.Ito, *Frobenius and Zassenhausgroups*, Vol.2 , Lectures given during 1968/69 at the University of Illinois at Chicago Circle.

[13] H.Karzel, *Zusammenhänge zwischen Fastbereichen, scharf zweifach transitiven Permutationsgruppen und 2-Strukturen mit Rechtecksaxiom*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 32, 191-206, 1968

[14] O.Kegel, *Lokal endliche Gruppen mit nicht trivialer Partition*, Arch. d. Math. 13, 10-28, 1962

[15] O.Kegel, *Zur Struktur lokal endlicher Zassenhausgruppen*, Arch. Math., Vol. XVIII, 337-348, 1967

[16] W.Kerby, *On infinite sharply multiply transitive groups*, Hamburger Mathem. Einzelschrift 6, Göttingen, 1974

[17] W.Kerby, H.Wefelscheid, *Über eine scharf* 3*-fach transitiven Gruppen zugeordnete algebraische Struktur*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 37 (1972), 225-235

[18] H.Kiechle, *Frobenius groups with many involutions*, Diskrete Mathematics, 255, 235-247, 2002

[19] H.Kiechle, *Theory of K-Loops*, Lecture Notes in Mathematics 1778, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2002

[20] A.Kreuzer, H.Wefelscheid, *On K-Loops of finite order*, Results in Mathematics, Vol. 25, 79-102, 1994

[21] D.Passman, *Permutations groups*, Mathematics lecture note series, New York-Amsterdam : Benjamin 1968

[22] Derek J.S.Robinson *A Course in the Theory of Groups*, Graduate Texts in Mathmematics Vol. 80, Springer Verlag New York, 2.ED., 1982

[23] W.R.Scott, *Group Theory*, Prentice-Hall,Englewood Cliffs, N.J., 1964

[24] M.Suzuki, *On a class of doubly transitive groups*, Ann. of Math. 75, 105-145, 1962

[25] H.Wähling, *Theorie der Fastkörper*, Thales Verlag, Essen 1987

[26] H.Wefelscheid, *Infinite Frobeniusgroups*, Vortrag auf der 31. Arbeitstagung über Algebra und Geometrie in Bedlewo vom 01.-05. März, 2004

[27] H.Wefelscheid, *ZT - Subgroups of sharply 3-transitive Groups*, Proceedings of Edinburgh Mathematical Society 23, 9-14, 1980

[28] H.Wefelscheid, *Infinite permutation groups with nice transitive properties*, Lectures presented at the conference Combinatorics 2000 at Gaeta/Italy on 2 July 2000

[29] H.J.Zassenhaus, *The Theory of Groups*, 2.ED., Repr. New York: Chelsea Publ. Co., 1974

[30] H.Zassenhaus, *Kennzeichnug endlicher linearer Gruppen als Permutationsgruppen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 11, 17-40, 1937

ERKLÄRUNG

Hiermit erkläre ich, die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt zu haben.