Die Frequenzableitungen der Lösung der Maxwell-Gleichung in inhomogenen anisotropen Außengebieten

Dissertation zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

Dem Fachbereich Mathematik der
Universität Duisburg-Essen vorgelegt von

Michael Trebing*

aus Essen

Essen, im Januar 2006

---

*Die Arbeit wurde gefördert durch das Projekt „We 2394: Untersuchungen der Spektralschar verallgemeinerter Maxwell-Operatoren in unbeschränkten Gebieten“ der Deutschen Forschungsgemeinschaft

Prüfungsdaten

Abgabe der Dissertation:	27. Januar 2006
Termin der Disputation:	12. Mai 2006
Vorsitzender des Prüfungsausschusses:	Prof. Dr. Wilhelm Heinrichs, Essen
Gutachter:	Prof. Dr. Hans-Dieter Alber, Darmstadt Prof. Dr. Norbert Weck, Essen Prof. Dr. Karl-Josef Witsch, Essen

Danksagung

Ich bedanke mich bei Herrn Prof. Dr. N. Weck und Herrn Prof. Dr. K.-J. Witsch für die Betreuung meiner Arbeit und für wertvolle Anregungen sowie bei Herrn Dr. D. Pauly für die hilfreichen Diskussionen.
Mein besonderer Dank gilt weiterhin meiner lieben Frau Daniela sowie meinen Eltern für die ausdauernde Unterstützung.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Wir betrachten die Maxwellschen Gleichungen in einem von einem nichtleitenden Medium ausgefüllten Außengebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (vgl. [9]):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \frac{\partial}{\partial t}\mu \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{K} \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{J} \quad . \end{aligned}$$

Dabei sind $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ die elektrische bzw. magnetische Feldstärke, $\varepsilon\boldsymbol{E}$ und $\mu\boldsymbol{H}$ die elektrische bzw. magnetische Flußdichte und $\boldsymbol{J}$ der elektrische Strom. In der Realität ist $\boldsymbol{K} = 0$, weil es keine magnetischen Ströme gibt. Das Kompaktum $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ werde von einem perfekten Leiter gebildet. Da die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes beim Phasenübergang stetig ist, erhalten wir so die Randbedingung $\nu \wedge \boldsymbol{E} = 0$, wobei ν der äußere Normalenvektor an Ω sei. Die Permittivität ε und die Permeabilität μ beschreiben Materialeigenschaften. Häufig werden homogene (ε, μ konstant) oder isotrope (ε, μ Vielfache der Identität) Medien betrachtet, in dieser Arbeit sollen jedoch im allgemeinen beide gleichmäßig positiv definite lineare Transformationen sein.

Mittels der formalen Definition

$$\mathcal{M} := \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i}\,\varepsilon^{-1}\operatorname{rot} \\ \mathrm{i}\,\mu^{-1}\operatorname{rot} & 0 \end{bmatrix}$$

gelangen wir zu der Evolutionsgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}) - \mathrm{i}\,\mathcal{M}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}) &= (-\varepsilon^{-1}\boldsymbol{J}, \mu^{-1}\boldsymbol{K}) \\ (\boldsymbol{E}(0),\boldsymbol{H}(0)) &= (\boldsymbol{E}_0,\boldsymbol{H}_0) \\ \nu \wedge \boldsymbol{E} &= 0 \qquad\qquad \text{auf } \partial\Omega \quad . \end{aligned} \tag{1.1}$$

Bei Wahl eines geeigneten Definitionsbereichs wird $\mathcal{M}$ zu einem selbstadjungierten Operator M. Dann läßt sich die Lösung mit endlicher Energie in der üblichen Weise mit Hilfe des Spektralkalküls darstellen. Nach bekannten Techniken (vgl. [5]) erhält man hieraus genaue Informationen über das Verhalten der Lösung für große t („Langzeitasymptotik"), wenn es gelingt, für das zugehörige zeitharmonische Problem zur Frequenz ω

$$\begin{aligned} (M-\omega)(E,H) &= (F,G) \\ \nu \wedge E &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{1.2}$$

die folgenden Ergebnisse bereitzustellen:

(i) Verhalten für $\omega \to 0$ („Niederfrequenzasymptotik")

(ii) Verhalten für $\omega \to \pm\infty$ („Hochfrequenzasymptotik")

(iii) Differenzierbarkeitseigenschaften der Resolvente in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Diese drei Punkte dienen weiterhin als wichtige Grundlagen für die Untersuchung verallgemeinerter Fouriertransformationen (Differenzierbarkeit im Fourierbild) und zur Herleitung von Existenzsätzen bei bestimmten nichtlinearen Evolutionsgleichungen (z. B. [7], [23], [10], [24]).

Eine Lösungstheorie und eine Niederfrequenzasymptotik wird in [19] sogar für den Fall der von Hermann Weyl 1952 vorgeschlagenen ([31]) Verallgemeinerung der Maxwell-Gleichung in $\mathbb{R}^N$ gegeben, bei der man E und H durch Differentialformen vom Rang q bzw. $q+1$ mit q zwischen 0 und $N-1$ sowie die Rotation durch die äußere Ableitung d bzw. die Coableitung δ ersetzt (s. Kapitel 2.2.2):

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\,\varepsilon^{-1}\delta H - \omega E &= F \\ \mathrm{i}\,\mu^{-1}\mathrm{d}E - \omega H &= G \\ \imath^* E &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Für eine Bestandsaufnahme der bekannten Ergebnisse hinsichtlich der anderen beiden Punkte wollen wir neben dem Spezialfall $N=3$, $q=1$, der das klassische Maxwell-Problem (1.2) darstellt, ein besonderes Augenmerk auf zwei weitere Fälle bei beliebiger Raumdimension richten. Für $q=0$ erhält man

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\,\varepsilon^{-1}\operatorname{div} H - \omega E &= F \\ \mathrm{i}\,\mu^{-1}\nabla E - \omega H &= G \\ E &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \quad , \end{aligned} \tag{1.3}$$

woraus sich durch geeignetes Zusammenfassen beider Gleichungen eine zeitharmonische Differentialgleichung zu einem elliptischen Differentialoperator mit variablen Koeffizienten und Dirichletscher Randbedingung ergibt:

$$\begin{aligned} (-\varepsilon^{-1}\operatorname{div}\mu^{-1}\nabla - \omega^2)E &= \omega F + \mathrm{i}\,\varepsilon^{-1}\operatorname{div} G =: V \\ E &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega \quad . \end{aligned} \tag{1.4}$$

Sind $\varepsilon = \varepsilon_0\mathrm{id}$ und $\mu = \mu_0\mathrm{id}$ mit konstanten Skalaren ε_0, $\mu_0 > 0$, so erhält man wegen $\operatorname{div}\nabla = \Delta$ die Helmholtzsche Schwingungsgleichung

$$\begin{aligned} (-\Delta - \lambda^2)E &= \widetilde{V} \\ E &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{1.5}$$

mit $\lambda^2 = \varepsilon_0\mu_0\omega^2$ und $\widetilde{V} = \varepsilon_0\mu_0 V$. Im Falle $q = N-1$ ergibt sich für H unter der zusätzlichen Voraussetzung $\nu \cdot F|_{\partial\Omega} = 0$ in gleicher Weise das entsprechende Problem mit einer Randbedingung vom Neumannschen Typ

$$\begin{aligned} (-\Delta - \lambda^2)H &= \widetilde{W} \\ \partial_\nu H &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \quad , \end{aligned} \tag{1.6}$$

wobei $\widetilde{W} = \varepsilon_0\mu_0(\omega G + \mathrm{i}\,\mu^{-1}\operatorname{div} F)$ sei.

Betreffend die Hochfrequenzasymptotik und Differenzierbarkeit der Resolvente in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ existieren Ergebnisse zu den Problemen (1.5) und (1.6), bei der Differenzierbarkeit auch zu (1.4) mit $\varepsilon = \mathrm{id}$. In allen Fällen wird von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß die Ableitungen des Lösungsoperators in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ Linearkombinationen seiner Iterierten sind. Für diese werden gleichmäßige Abschätzungen in der Nähe der reellen Achse hergeleitet, die sich auf reelle Frequenzen übertragen, wenn außerdem die stetige Fortsetzbarkeit nach $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (Prinzip der Grenzabsorption) gezeigt wird. Seit langem (z. B. [16]) ist bekannt, daß im Fall konstanter Koeffizienten die Existenz einer Asymptotik im Unendlichen mit Eigenschaften des Gebietsrandes zusammenhängt. Dazu wurden zahlreiche sogenannte „non trapping"-Bedingungen aufgestellt, die in der Regel geometrischer Natur sind. Einen Überblick über solche Bedingungen findet man in [18]. Es ist damit zu rechnen, daß die entsprechenden Bedingungen im allgemeinen Fall solche an das Gebiet und an die Koeffizienten sind ([17, Abschnitt 6]).

In [20] untersucht Burkhard Peter die Asymptotik des Lösungsoperators zu (1.5), mit einem zusätzlichen reellwertigen Potential mit kompaktem Träger, bei hohen und niedrigen reellen Frequenzen. Er erhält eine Hochfrequenzasymptotik für die Resolvente in sogenannten „gleichmäßigen Strahlungsgebieten". Das sind glatte Außengebiete, in denen eine bestimmte Abschätzung des kritischen Terms aus der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung bei hohen Frequenzen gleichmäßig gilt (siehe (A.12)). Beispiele hierfür sind echte Außengebiete mit sternförmigem Komplement oder auch der ganze $\mathbb{R}^N$. Um diese Ergebnisse zu beweisen, verwendet er Multiplikatormethoden, wie sie in [16] zu finden sind. Mit einer Zerlegungstechnik weitet er induktiv sowohl die Fortsetzbarkeit nach $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ als auch die Hochfrequenzasymptotik auf die Iterationen des Lösungsoperators aus. Auf diese Art weist er die Differenzierbarkeit der Lösung in $\mathbb{R}_+$ nach und erhält, aufbauend auf den Ergebnissen für die Iterierten, auch für die Ableitungen analoge Abschätzungen.

Einen anderen Zugang wählt Charlotte Kerler in [10]. Sie überträgt Abschätzungen für die Resolvente und ihre Iterationen, wie sie in [6] und [7] mit Hilfe von Pseudodifferentialoperatoren für (1.5) im Ganzraumfall hergeleitet werden, auf den Fall (1.4), $\varepsilon = \mathrm{id}$, mit einem zusätzlichen Potential. Für die Hochfrequenzasymptotik wird auch hier $\mu = \mathrm{id}$ vorausgesetzt, und der Beweis entspricht dem aus [20].

Sowohl für (1.5) als auch für (1.6) erzielt Georgi Vodev in [25] eine Hochfrequenzasymptotik, wobei seine Ergebnisse mit denen der anderen beiden Autoren hinsichtlich der zulässigen Daten und der erreichten Asymptotik übereinstimmen. Er betrachtet skalare Probleme auf Mannigfaltigkeiten mit unbegrenztem Volumen, kompaktem Rand und Riemannscher Metrik. Hat die Metrik die Eigenschaften einer „nontrapping metric" im Sinne von Melrose/Sjöstrand ([14], [15]), so folgt daraus das „verallgemeinerte Huygenssche Prinzip", das Vodev benutzt, um für den einfachen Lösungsoperator Abschätzungen zu gewinnen, wobei er sich auf echt komplexe Frequenzen mit kleinem Imaginärteil beschränkt. Abschätzungen der iterierten Resolvente zeigt er nur für das Neumann-Problem und setzt dabei entsprechende Resultate für das Dirichlet-Problem voraus, die vermutlich auch auf Mannigfaltigkeiten nach der in [20] verwendeten Methode leicht zu erhalten wären.

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist der Nachweis der Differenzierbarkeit des Lösungsoperators zum verallgemeinerten Maxwell-Problem in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und die Herleitung von gleichmäßigen Abschätzungen des Lösungsoperators und seiner Ableitungen auf und in der Nähe der reellen Achse. Aus Symmetriegründen können wir uns dabei auf Frequenzen mit positivem Real- und nichtnegativem Imaginärteil beschränken. Mit $0 < \lambda_0 < \lambda_1$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$Q^\alpha_{\lambda_0} := \left\{ \lambda + \mathrm{i}\,\sigma \;\middle|\; \lambda_0 \le \lambda \quad \text{und} \quad 0 < \sigma \le \lambda^\alpha \right\} \quad ,$$
$$Q_{\lambda_0,\lambda_1} := \left\{ \lambda + \mathrm{i}\,\sigma \;\middle|\; \lambda_0 \le \lambda \le \lambda_1 \quad \text{und} \quad 0 < \sigma \le \lambda \right\}$$

sowie

$$\mathcal{Q} := \left\{ Q_{\lambda_0,\lambda_1} \;\middle|\; 0 < \lambda_0 < \lambda_1 \right\} \quad \text{und} \quad \mathcal{Q}^\alpha_\infty := \left\{ Q^\alpha_{\lambda_0} \;\middle|\; 0 < \lambda_0 \right\} \quad .$$

Für die Lösungstheorie bei reellen Frequenzen mit Hilfe des Prinzips der Grenzabsorption greifen wir mehrfach auf die Ergebnisse aus [19] zurück, gewinnen jedoch mit Hilfe einer speziellen Zerlegung gewichteter L^2-Räume etwas verbesserte Abschätzungen für die Lösung, die ohne Anforderungen an die Regularität der Daten oder deren Verhalten am Rand auskommen. Diese Abschätzungen gelten gleichmäßig bezüglich Frequenzen aus $Q \in \mathcal{Q}$.

Im unbeschränkten Fall $\omega \in Q \in \mathcal{Q}^\alpha_\infty$ scheiterten Versuche, für $\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \;\middle|\; |x| > 1 \right\}$ und $q > 0$ gleichmäßige Resolventenabschätzungen mittels einer Variation der bekannten Multiplikatormethode herzuleiten, an einem Randintegral, das eindeutig positive von E herkommende und eindeutig negative von H stammende Anteile enthält. Bis auf diesen Term ergibt sich ein mit den für $q = 0$ und $q = N-1$ bekannten Abschätzungen übereinstimmendes Ergebnis. Zwar kann man so leicht Fälle angeben, für die eine gleichmäßige Abschätzung der Lösung gilt, indem man anstelle der Daten die Lösung vorgibt, jedoch ist dies kaum als brauchbares Ergebnis anzusehen. Wir müssen daher die Frage unbeantwortet lassen, ob und für welche Gebiete eine Hochfrequenzasymptotik für den Fall $1 \le q \le N-2$, speziell also auch für das klassische Maxwell-Problem (1.2), besteht.

Um dennoch bei der Behandlung des iterierten Lösungsoperators auch die Hochfrequenzasymptotik berücksichtigen zu können, setzen wir teilweise voraus, daß die auf $Q \in \mathcal{Q}$ benutzte A-priori-Abschätzung auch gleichmäßig auf $Q \in \mathcal{Q}^\alpha_\infty$ gilt, und belegen diese Eigenschaft mit dem Namen Maxwell-Hochfrequenz-Beschränktheitseigenschaft (MHBE). Wir können zeigen (Anhang A), daß die MHBE im Falle differenzierbarer Koeffizienten äquivalent zu einer Eigenschaft ist, die aus der dem Maxwell-Problem entsprechenden Verallgemeinerung der Definition eines gleichmäßigen Strahlungsgebietes in [20] durch eine Abschwächung der Integrierbarkeitsanforderung hervorgeht.

Mittels einer Adaption der Zerlegungsmethode aus [20] gelingt der Übergang zu reellen Frequenzen beim iterierten Lösungsoperator, womit wir die Differenzierbarkeit in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nachweisen. Das Hauptproblem bei der Anwendung dieser Technik ist, daß die Lösung beim Maxwell-Problem im allgemeinen keine höhere Regularität aufweist als die Daten. Der Grad der Differenzierbarkeit des Lösungsoperators hängt von der Regularität der Koeffizientenmatrizen ε, μ und des Gebietsrandes, den wir allerdings als glatt voraussetzen, ab. Zusätzlich erhalten wir eine Bedingung an die Radialableitungen von ε und μ, die sich bei ∞ wie $\mathcal{O}(|x|^{-\tilde{\tau}})$ mit $\tilde{\tau} > k+1$ verhalten müssen, damit der Lösungsoperator k-mal nach der Frequenz differenziert werden kann. Für den iterierten Lösungsoperator leiten wir ebenfalls lokal gleichmäßige Abschätzungen her. Diese gelten unter Annahme der MHBE auch gleichmäßig auf $Q \in \mathcal{Q}^\alpha_\infty$.

Schließlich erweitern wir die bekannten Ergebnisse für das Helmholtz-Problem (1.5), indem wir anstelle der homogenen Randbedingung nun $\widetilde{V} = 0$ und inhomogene Randdaten betrachten. Die Lösungstheorie für den Lösungsoperator und seine Iterierten läßt sich bei Randdaten aus $H^{1/2}(\partial\Omega)$ unmittelbar aus den bekannten Ergebnissen folgern. In gleicher Weise erhält man auch Ergebnisse zur Hochfrequenzasymptotik, jedoch können wir durch eine erneute Berechnung unter genauerer Betrachtung der auftretenden Randterme eine Verbesserung der Asymptotik um eine Potenz von $|\omega|$ für Randdaten aus $H^1(\partial\Omega)$ erzielen. Als Kriterium für die Gültigkeit der Abschätzung erhalten wir eine abstrakt formulierte Gebietseigenschaft, die der Definition eines gleichmäßigen Strahlungsgebietes ähnelt. Wir können zeigen, daß Außengebiete mit strikt sternförmigem Komplement dieser Anforderung genügen.

Die erzielte Verbesserung wiederum wirkt zurück auf den Fall homogener Randbedingungen. Während Peter eine Verbesserung der Asymptotik für Daten erzielt, die einmal differenzierbar sind und einer Randbedingung genügen, können wir durch eine Kombination alter und neuer Ergebnisse zeigen, daß man hier die Randbedingung durch etwas höhere Regularität ersetzen kann. Die so verbesserte Asymptotik entspricht sowohl bei der homogenen als auch bei der inhomogenen Randbedingung dem Optimum. In Anhang B werden einige Überlegungen bezüglich der für den verallgemeinerten Maxwell-Operator bestenfalls erreichbaren Asymptotik dargestellt.

Kapitel 2

Grundlagen

Wir vereinbaren zwei Schreibweisen für unabhängig von aus dem Kontext ersichtlichen Größen bestehende Relationen zwischen zwei Ausdrücken. Sind A, B Ausdrücke, die von Parametern p_1 bis p_l abhängen, so sei

$$\begin{aligned} A \prec B :\Longleftrightarrow\ & A(p_1,\dots,p_l) \prec B(p_1,\dots,p_l) \text{ gleichmäßig bzgl. } p_1 \in P_1,\dots,p_l \in P_l \\ :\Longleftrightarrow\ & \bigvee_{C>0} \bigwedge_{p_1\in P_1} \cdots \bigwedge_{p_l \in P_l} A(p_1,\dots,p_l) \leq C\ B(p_1,\dots,p_l) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} A \sim B :\Longleftrightarrow\ & A(p_1,\dots,p_l) \sim B(p_1,\dots,p_l) \text{ glm. bzgl. } p_1 \in P_1,\dots,p_l \in P_l \\ :\Longleftrightarrow\ & A \prec B \prec A \quad . \end{aligned}$$

In dem letzteren Fall nennen wir A und B äquivalent.

Eine Summe der Gestalt $\sum_{m=a}^{b} s_m$ soll den Wert 0 haben, wenn $b < a$ gilt.

Die Summationskonvention, nach der über mehrfach vorkommende Indices summiert wird, verwenden wir nur, wo dies eigens erwähnt wird.

2.1 Allgemeine Bezeichnungen

Mit $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ bezeichnen wir die Mengen der natürlichen Zahlen ohne bzw. mit der Null sowie die der ganzen, reellen und komplexen Zahlen. Für $z \in \mathbb{C}$ ist $\Re z$ der Realteil, $\Im z$ der Imaginärteil und $\overline{z}$ die komplexe Konjugation. Für $s \in \mathbb{R}$ ist $[s]$ der ganzzahlige Anteil von s, also die größte ganze Zahl, die nicht größer ist als s.

Wir verwenden die Teilmengen $\mathbb{R}_+ := \{t \in \mathbb{R} \mid t > 0\}$, $\mathbb{R}_- := \{t \in \mathbb{R} \mid t < 0\}$ und $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} \mid \Re z > 0, \Im z > 0\}$. Desweiteren seien

$$\mathbb{R}^N_- := \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{N-1} \quad , \quad \mathbb{R}^N_0 := \{0\} \times \mathbb{R}^{N-1} \quad , \quad \mathbb{R}^N_+ := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{N-1} \quad .$$

Ist zwischen den Elementen der Mengen M und S eine Multiplikation definiert, so sei für $m = (m_1,\dots,m_N) \in M^N$ und $s = (s_1,\dots,s_N) \in S^N$

$$m \cdot s := \sum_{n=1}^{N} m_n s_n \quad .$$

Mit Hilfe dieser Bilinearform schreiben wir das Skalarprodukt zweier Vektoren x und y in $\mathbb{R}^N$ als $x \cdot y$, in $\mathbb{C}^N$ als $x \cdot \overline{y}$. Der Betrag $\sqrt{x \cdot x}$ bzw. $\sqrt{x \cdot \overline{x}}$ wird in beiden Räumen als $|x|$ notiert. Auch sonst verwenden wir das Symbol „·" gelegentlich bei der Multiplikation, wenn ein Ausdruck dadurch übersichtlicher erscheint.

Seien G und U Teilmengen eines topologischen Raumes. Der Abschluß von G wird mit $\overline{G}$, der Rand mit ∂G bezeichnet. G ist kompakt in U enthalten, falls $\overline{G}$ kompakt und in U enthalten ist. Wir schreiben dann $G \subset\subset U$. Ein Gebiet ist eine offene zusammenhängende Teilmenge eines topologischen Raumes, unter einem Außengebiet verstehen wir ein Gebiet mit kompaktem Komplement, und bei einem echten Außengebiet ist das Komplement zusätzlich nicht leer.

Eine Teilmenge M eines Vektorraums V nennen wir „sternförmig", wenn es einen Punkt $\widehat{m}$ gibt, so daß für alle $m \in M$ und alle $\tau \in [0\,,\,1]$ gilt: $\tau m + (1-\tau)\widehat{m} \in M$.

In $\mathbb{R}^N$ definieren wir

$$U(R) := \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| < R\} \quad \text{und} \quad A(R) := \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| > R\} \quad ,$$

die offene Kugel um Null mit Radius R und das Äußere der abgeschlossenen Kugel um Null mit Radius R. Ferner seien $r(x) := |x|$, $\rho(x) := 1 + r(x)$ und $\widetilde{\rho}(x) := (1 + r(x)^2)^{1/2}$ für $x \in \mathbb{R}^N$ sowie $\xi(x) := x/r(x)$ für $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Der Abstand eines Punktes x von einer Menge $M \subset \mathbb{R}^N$ ist $\operatorname{dist}(x, M)$.

Ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^N$ heißt „glatt", wenn zu jedem Punkt $x \in \partial G$ eine Umgebung U und eine diffeomorphe, d. h. bijektive und in beiden Richtungen beliebig oft differenzierbare, Abbildung h von U auf ein $V \subset \mathbb{R}^N$ dergestalt existiert, daß

$$h(U \cap G) = V \cap \mathbb{R}^N_- \quad , \quad h(U \cap \partial G) = V \cap \mathbb{R}^N_0 \quad , \quad h(U \setminus \overline{G}) = V \cap \mathbb{R}^N_+ \tag{2.1}$$

gilt. Mit $\nu(x)$ bezeichnen wir die äußere Normale im Punkt $x \in \partial G$.

Ist X ein Banachraum und sind $A_j \subset X$, $j = 1,\dots,J$ Unterräume mit $A_j \cap A_k = \{0\}$ $(1 \leq j,k \leq J)$, so heißt ihre Summe Y topologisch direkt. falls die Projektion von Y auf A_j für $1 \leq j \leq J$ stetig ist. Sind $A, B \subset X$ Unterräume, so nennen wir B ein topologisches Komplement von A (in X), wenn X die topologisch direkte Summe von A und B ist.

In einer beliebigen Menge M ist $\mathrm{id} = \mathrm{id}_M$ die Identitätsabbildung und $\mathbf{1} = \mathbf{1}_M$ die Funktion mit dem Wertebereich $\{1\}$. Die Einschränkung einer auf M erklärten Funktion φ auf eine Menge $S \subset M$ bezeichnen wir mit $\varphi|_S$, schreiben dafür jedoch auch einfach φ, wenn keine Verwechslungsgefahr besteht. Das Kronecker-Symbol wird als δ_{jk} geschrieben.

Sei $G \subset \mathbb{R}^N$ ein Gebiet, $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum und $\varphi : G \longrightarrow X$ eine Funktion. Ist φ Lebesgue-meßbar, so sei supp φ der Träger von φ und

$$|\varphi|_\infty := \inf\left\{s \geq 0 \quad \middle| \quad \|\varphi(x)\|_X \leq s \text{ für fast alle } x \in G\right\}.$$

Ist G unbeschränkt, so schreiben wir $\varphi = \mathcal{O}(|x|^\tau)$ mit $\tau \in \mathbb{R}$, falls mit einem $R > 0$

$$\|\varphi(x)\|_X \prec |x|^\tau$$

gleichmäßig bezüglich $x \in A(R)$ gilt.

Es ist $L^\infty(G, X) := \left\{\varphi : G \longrightarrow X \text{ meßbar} \quad \middle| \quad |\varphi|_\infty < \infty\right\}$ der Raum der wesentlich beschränkten und $C(G, X) = C^0(G, X)$ bzw. $C^k(G, X)$ für $k \in \mathbb{N}$ der Raum der stetigen bzw. k-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf G mit Werten in X. Wir setzen $C^\infty(G, X) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(G, X)$. Für $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ sind

$$\begin{aligned}
C^k(\overline{G}, X) &:= \left\{\, f|_G \quad \middle| \quad f \in C^k(\mathbb{R}^N, X)\right\} \\
C_0^k(G, X) &:= \left\{f \in C^k(G, X) \quad \middle| \quad \operatorname{supp} f \subset\subset G\right\} \\
C_0^k(\overline{G}, X) &:= \left\{\, f|_G \quad \middle| \quad f \in C_0^k(\mathbb{R}^N, X)\right\} \quad .
\end{aligned}$$

In dem häufigsten Fall $X = \mathbb{C}$ lassen wir den Zielraum in der Regel weg.

Die gewöhnliche Ableitung einer Funktion in einer reellen oder komplexen Veränderlichen y wird durch $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}$ symbolisiert. Dagegen ist $\partial_k := \dfrac{\partial}{\partial x_k}$ für $x \in \mathbb{R}^N$ die partielle Ableitung nach der k-ten Komponente des Arguments. Für einen Multiindex $\alpha \in {\mathbb{N}_0}^N$ seien $\partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_N^{\alpha_N}$ und $|\alpha| := \sum_{n=1}^N \alpha_n$. Weiterhin verwenden wir die „klassischen" Differentialoperatoren Gradient und Laplace,

$$\nabla := \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_N \end{bmatrix} \quad , \quad \Delta := \partial_1^2 + \ldots + \partial_N^2 \quad ,$$

sowie

$$\operatorname{div} := \begin{bmatrix} \partial_1 & \ldots & \partial_N \end{bmatrix} \qquad \text{und (falls } N = 3) \qquad \operatorname{rot} := \begin{bmatrix} 0 & -\partial_3 & \partial_2 \\ \partial_3 & 0 & -\partial_1 \\ -\partial_2 & \partial_1 & 0 \end{bmatrix}$$

für Funktionen auf G mit Werten in $\mathbb{C}^N$. Mit $\partial_r := \xi \cdot \nabla$ sei die Radialableitung gekennzeichnet, und es gelte $\Lambda := r\partial_r$. Am Rand eines glatten Gebietes stellt $\partial_\nu := \nu \cdot \nabla$ die nach außen gerichtete Normalableitung dar.

$C_{A,B} := AB - BA$ ist der Kommutator der Operatoren A und B; wird die Stelle von A oder B durch eine skalarwertige Funktion φ eingenommen, so ist der Multiplikationsoperator mit φ gemeint.

Sind X und Y normierte Räume, so bezeichnen wir mit $B(X, Y)$ die Menge der stetigen linearen Operatoren von X nach Y. Speziell ist $X^* := B(X, \mathbb{R})$ der Raum der stetigen linearen Funktionale über X.

Wir vereinbaren die

Generalvoraussetzung A *Sofern nichts anderes vorausgesetzt wird, sei in dieser Arbeit stets $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, ein glattes Außengebiet und $R_0 > 0$ so gewählt, daß $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega} \subset U(R_0)$ gilt. Wir setzen $\Omega_R := \Omega \cap U(R)$ für $R \geq R_0$. Weiterhin sei immer $\eta \in C^\infty(\overline{\Omega})$ eine radialsymmetrische Abschneidefunktion mit $\eta|_{\Omega_{R_0}} \equiv 1$, $\eta|_{A(2R_0)} \equiv 0$ und $\eta(x) \in [0, 1]$ für alle $x \in \mathbb{R}^N$. Wir setzen $1 - \eta =: \vartheta$.*

2.2 Differentialformen

Wir betrachten eine N-dimensionale unberandete orientierte differenzierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit M und eine offene Teilmenge $G \subset M$. Die ohne Beweis vorgebrachten Aussagen dieses Abschnitts findet man, sofern nicht ganz einfache Überlegungen dahinterstehen, in [3] oder [8].

2.2.1 Allgemeines

Zu jedem Punkt $p \in M$ gibt es eine Karte (U, h), d. h. eine offene Umgebung $U \subset M$ von p und einen Homöomorphismus h, der U in eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^N$ dergestalt abbildet, daß der Wechsel mit jeder anderen Karte (V, k), also die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} h(U \cap V) & \longrightarrow & k(U \cap V) \\ x & \longmapsto & k \circ h^{-1}(x) \end{array} \quad ,$$

diffeomorph ist. Die Auswahl einer Orientierung sorgt dafür, daß die Determinante der Jacobi-Matrix des Kartenwechsels stets positiv ist.

Eine Abbildung $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ wird differenzierbar genannt, wenn für jede Karte (U, h) die Abbildung $f \circ h^{-1}|_{h(U \cap G)}$ differenzierbar ist. Entsprechend definieren wir die Räume $C^m(G)$ und $C_0^m(G)$ für $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Wieder seien

$$C^m(\overline{G}) := \left\{\, f|_G \quad \middle| \quad f \in C^m(M)\right\} \quad \text{und} \quad C_0^m(\overline{G}) := \left\{\, f|_G \quad \middle| \quad f \in C_0^m(M)\right\} \quad .$$

Ein Keim bei $p \in M$ ist ein Element von $C^\infty(U)$ mit einer offenen Menge $U \ni p$. Die Tangenten an M in p können als Derivationen auf der Menge der Keime, also lineare Funktionale, die der Kettenregel

$$v(fg) = v(f)g + fv(g)$$

genügen, aufgefaßt werden. Sie bilden einen N-dimensionalen Vektorraum, den Tangentialraum $\mathcal{T}_p(M)$. Bezeichnen wir mit $e^{(j)}$ den j-ten Einheitsvektor in $\mathbb{R}^N$, so ist eine – kartenabhängige – Basis von $\mathcal{T}_p(M)$ durch die Derivationen

$$\partial_j := \partial_j^{h,p} \quad : \quad \varphi \quad \longmapsto \quad [\partial_j(\varphi \circ h^{-1})] \circ h(p)$$

gegeben. Im Falle $M = \mathbb{R}^N$ führen wir standardmäßig den Isomorphismus

$$\mathcal{J}_N \;:\; \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathcal{T}_p(\mathbb{R}^N) \tag{2.2}$$

mit $\mathcal{J}_N e^{(j)} = \partial_j$ auf Basis der globalen Karte id ein.

Mit $\mathcal{A}^q(p)$, $q \in \{0, \ldots, N\}$, bezeichnen wir die Menge der komplexwertigen alternierenden q-Linearformen über $\mathcal{T}_p(M)$ oder kurz q-Formen. Desweiteren sei

$$\mathcal{A}^q(M) := \left\{ u \quad \middle| \quad u(p) \in \mathcal{A}^q(p) \text{ für } p \in M \right\} \quad . \tag{2.3}$$

$\mathcal{A}^0(M)$ wird mit der Menge der komplexwertigen Funktionen auf M identifiziert. Für $q < 0$ oder $q > N$ setzen wir $\mathcal{A}^q(M) := \{0\}$.

Ist $\widetilde{M}$ ebenfalls eine Mannigfaltigkeit, so heißt eine Abbildung $f \;:\; M \longrightarrow \widetilde{M}$ differenzierbar, wenn für jedes $p \in M$ Karten (U, h) um p und (V, k) um $f(p)$ mit $f(U) \subset V$ existieren, so daß die Abbildung $k \circ f \circ h^{-1}|_{h(U)}$ differenzierbar ist. An jeder Stelle $p \in M$ ist dann das Differential $\mathrm{d}f_p$ von f eine lineare Abbildung von $\mathcal{T}_p(M)$ nach $\mathcal{T}_{f(p)}(\widetilde{M})$. Das Bild eines Tangentialvektors $v \in \mathcal{T}_p(M)$ wirkt dabei auf einen Keim φ bei $f(p)$ gemäß

$$\mathrm{d}f_p v(\varphi) = v(\varphi \circ f) \quad .$$

Die Differentiale der Komponentenfunktionen $h_i \;:\; U \subset M \longrightarrow \mathbb{R}$ einer Karte h lassen sich mit Hilfe von $\mathcal{J}_1$ als Elemente des Dualraums von $\mathcal{T}_p(M)$ interpretieren und bilden in diesem Sinne die zu $(\partial_1, \ldots, \partial_N)$ duale Basis von $\mathcal{T}_p(M)^*$.

Das Differential induziert die Abbildung

$$f_p^* \;:\; \mathcal{A}^q(f(p)) \longrightarrow \mathcal{A}^q(p)$$

mit

$$f_p^* u(v_1, \ldots, v_q) := u(\mathrm{d}f_p(v_1), \ldots, \mathrm{d}f_p(v_q)) \quad .$$

Auf ganz M wird das Differential $\mathrm{d}f$ punktweise durch $\mathrm{d}f_p$ und f^* durch f_p^* definiert.

Das äußere Produkt $\wedge$ ist eine Bilinearform, die $\mathcal{A}^{q_1}(p) \times \mathcal{A}^{q_2}(p)$ für $0 \le q_1,\, q_2 \le N$ nach $\mathcal{A}^{q_1+q_2}(p)$ abbildet, und hat darüberhinaus die folgenden Eigenschaften:

Mit $u \in \mathcal{A}^{q_1}(p)$, $v \in \mathcal{A}^{q_2}(p)$, $w \in \mathcal{A}^{q_3}(p)$, $\varphi \in \mathcal{A}^0(p)$ gelten

$$u \wedge v = (-1)^{q_1 q_2} v \wedge u \tag{2.4}$$
$$u \wedge u = 0 \quad \text{, falls } q_1 \text{ ungerade} \tag{2.5}$$
$$u \wedge (v \wedge w) = (u \wedge v) \wedge w \tag{2.6}$$
$$\varphi \wedge u = \varphi u \tag{2.7}$$
$$f^*(u \wedge v) = f^* u \wedge f^* v \quad . \tag{2.8}$$

Wir setzen für $0 \le q \le N$

$$\mathcal{I}(N, q) := \left\{ (i_1, \ldots, i_q) \in \{1, \ldots, N\}^q \quad \middle| \quad i_1 < \ldots < i_q \right\} \quad .$$

Für jede Basis $(v_1, \ldots, v_N)$ von $\mathcal{A}^1(p)$ und jedes $I \in \mathcal{I}(N, q)$ definiert man

$$v^I := v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_q} \quad .$$

Dann bilden die v^I eine Basis von $\mathcal{A}^q(p)$. Für $I \in \mathcal{I}(N, q)$ sei $I' = (i'_1, \ldots, i'_{N-q})$ dasjenige Element von $\mathcal{I}(N, N-q)$, für das

$$\{i_1, \ldots, i_q\} \cup \{i'_1, \ldots, i'_{N-q}\} = \{1, \ldots, N\}$$

gilt. Ist π eine Permutation von $(1, \ldots, q)$ und $J = (i_{\pi(1)}, \ldots, i_{\pi(q)})$, so sei weiterhin $\mathcal{S}(J) := I$ und $\sigma(J)$ das Vorzeichen von π. Mit dieser Schreibweise notieren wir die Wirkung von f^* in Koordinaten: Sind (U, h) und (V, k) Karten auf M bzw. $\widetilde{M}$ und ist $f \;:\; U \longrightarrow V$ ein Diffeomorphismus, so gilt mit $F := k \circ f \circ h^{-1}|_{h(U)}$ und

$$\Phi(t) = \sum_{I \in \mathcal{I}(N,q)} \Phi_I(t) \mathrm{d}k^I \quad \text{sowie} \quad \partial_I F_J(x) := \partial_{i_1} F_{j_1}(x) \cdots \partial_{i_q} F_{j_q}(x)$$

nach [27]

$$f^* \Phi(p) = \sum_{I \in \mathcal{I}(N,q)} \sum_{\mathcal{S}(J) \in \mathcal{I}(N,q)} \sigma(J) \Phi_{\mathcal{S}(J)}(f(p)) \partial_I F_J(h(p)) \mathrm{d}h^I \quad . \tag{2.9}$$

Die N-Formen bilden die Basis für die Integration auf M. Liegt der Träger einer N-Form w im Kartengebiet einer Karte (U, h) und gilt $w = w_I \mathrm{d}h^I$ mit $I = (1, \ldots, N)$, so setzt man

$$\int_U w := \int_{h(U)} w_I \circ h^{-1} \, dx$$

mit Hilfe des üblichen Lebesgue-Integrals in $\mathbb{R}^N$. Den allgemeinen Fall führt man durch eine geeignete Zerlegung des Trägers auf diese Definition zurück. Der so definierte Integralbegriff ist unabhängig von der Wahl der Zerlegung und der Karten.

Nach Voraussetzung existiert auf $\mathcal{T}_p(M)$ ein Skalarprodukt $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_p$, so daß für $1 \le i, j \le N$ und jede Karte die Abbildung

$$p \longmapsto \langle \partial_i \,, \partial_j \rangle_p$$

differenzierbar ist. Durch den Isomorphismus

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}_p(M) & \longrightarrow & \mathcal{T}_p(M)^* \\ v & \longmapsto & \langle v \,, \cdot \rangle_p \end{array}$$

wird ein entsprechendes Skalarprodukt in $\mathcal{T}_p(M)^*$ definiert. Mit Hilfe einer positiv orientierten Orthonormalbasis $(v_1, \ldots, v_N)$ bezüglich dieses Skalarproduktes führt man den Hodgeschen Sternoperator über die Vorschrift

$$* v^I := (-1)^{\sigma(I, I')} v^{I'} \tag{2.10}$$

ein. Dies induziert einen Isomorphismus zwischen $\mathcal{A}^q(M)$ und $\mathcal{A}^{N-q}(M)$, der gelegentlich ausgenutzt werden kann, um aus einem bekannten Resultat ein entsprechendes duales zu folgern („$*$-Dualität“). Mit Hilfe von (2.4) und (2.10) ergeben sich durch elementare Rechnungen die folgenden Regeln. Mit $I = (i_1, \ldots, i_q)$, $j \in \{i_1, \ldots, i_q\}$ und $k \notin \{i_1, \ldots, i_q\}$ gelten

$$**v^I = (-1)^{q(N-q)} v^I \tag{2.11}$$

sowie

$$(-1)^{N(q-1)} v_k \wedge *(v_j \wedge *v^I) + (-1)^{Nq} * (v_j \wedge *(v_k \wedge v^I)) = v^I \tag{2.12-1}$$
$$(-1)^{N(q-1)} v_j \wedge *(v_j \wedge *v^I) = v^I \tag{2.12-2}$$
$$(-1)^{Nq} * (v_k \wedge *(v_k \wedge v^I)) = v^I \tag{2.12-3}$$

Für q-Formen definieren wir wie üblich punktweise das Skalarprodukt

$$\langle\, u\,,\, v \,\rangle := *(u \wedge *\overline{v}) \quad .$$

Weiterhin sei

$$\langle\, u\,,\, v \,\rangle_M := \int_M *\langle\, u\,,\, v \,\rangle \quad ,$$

wann immer dieser Ausdruck existiert.

Eine q-Form der Gestalt

$$u = \sum_{I \in \mathcal{I}(N,q)} u_I \mathrm{d}h^I$$

ist m-mal differenzierbar und liegt in $C^{m,q}(G)$, falls ihre Komponentenfunktionen u_I Elemente von $C^m(G)$ sind. Analog definieren wir $C_0^{m,q}(G)$, $C^{m,q}(\overline{G})$ und $C_0^{m,q}(\overline{G})$. Die äußere Ableitung (oder Cartan-Ableitung) wirkt auf eine solche differenzierbare Form gemäß

$$\mathrm{d}u = \sum_{I \in \mathcal{I}(N,q)} \sum_{1 \le k \le N} (\partial_k u_I) \mathrm{d}h_k \wedge \mathrm{d}h^I \quad , \tag{2.13}$$

erzeugt also insbesondere aus einer q- eine $(q+1)$-Form. Die Coableitung ist für q-Formen über

$$\delta := (-1)^{N(q-1)} * \mathrm{d} *$$

definiert. Für $q = 0$ entspricht die Cartan-Ableitung dem Differential. Sind $u \in \mathcal{A}^{q_1}(M)$ sowie $v \in \mathcal{A}^{q_2}(M)$ differenzierbar, so gelten

$$\mathrm{d}\mathrm{d} = 0 \tag{2.14}$$
$$\mathrm{d}(u \wedge v) = (\mathrm{d}u) \wedge v + (-1)^{q_1} u \wedge \mathrm{d}v \quad \text{und} \tag{2.15}$$
$$\mathrm{d}f^*u = f^*\mathrm{d}u \quad . \tag{2.16}$$

Gemäß der Voraussetzungen ist auch G eine N-dimensionale Mannigfaltigkeit. Gibt es zu jedem $p \in \partial G$ eine Karte (U, h), so daß (2.1) mit $V := h(U)$ gilt, so ist ∂G eine $(N-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit. In diesem Fall sei ∂G gemäß der üblichen Orientierungskonvention wie folgt orientiert: Es sei

$$\begin{array}{rcccc} \imath & : & \partial G & \longrightarrow & M \\ & & p & \longmapsto & p \end{array}$$

die Einbettung des Randes in die umgebende Mannigfaltigkeit. Die Vervollständigung einer positiv orientierten Basis $(v_1, \ldots, v_{N-1})$ von $\mathcal{T}_p(\partial G)$ durch einen Tangentialvektor $w \in \mathrm{d}h_p^{-1} \circ \mathcal{J}_N(\mathbb{R}_+^N)$ zu einer Basis $(w, \mathrm{d}\imath\, v_1, \ldots, \mathrm{d}\imath\, v_{N-1})$ von $\mathcal{T}_p(M)$ ist positiv orientiert. In dieser Situation gilt der Satz von Stokes: Für $w \in C_0^{\infty, N-1}(M)$ ist

$$\int_G \mathrm{d}w = \int_{\partial G} \imath^* w \quad .$$

Den Sternoperator auf ∂G bezeichnen wir zur Verdeutlichung mit $\circledast$.

2.2.2 Differentialformen im euklidischen Raum

Sei nun $M = \mathbb{R}^N$. Wir verwenden global die Identitätsabbildung als Karte – bezeichnen dabei allerdings die Kartenabbildung mit x – und bilden in $\mathcal{T}_p(\mathbb{R}^N)$ das Skalarprodukt

$$\langle\, u\,,\, v \,\rangle_p := \mathcal{J}_N^{-1} u \cdot \mathcal{J}_N^{-1} v \tag{2.17}$$

aus dem üblichen Skalarprodukt in $\mathbb{R}^N$. Damit ist $(\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n)$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von $\mathcal{A}^1(p)$ für alle p.

Für $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^N)$, $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}^N)$ gelten mit den vektorwertigen 1-, $(N-1)$- bzw. N-Formen

$$S := \begin{bmatrix} \mathrm{d}x_1 \\ \vdots \\ \mathrm{d}x_N \end{bmatrix} \quad , \quad F := \begin{bmatrix} *\mathrm{d}x_1 \\ \vdots \\ *\mathrm{d}x_N \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad V := *\mathbf{1}$$

die Regeln:

$$\mathrm{d}\varphi = (\nabla\varphi) \cdot S \qquad \delta(\Phi \cdot S) = \operatorname{div} \Phi \tag{2.18}$$
$$\mathrm{d}(\Phi \cdot F) = (\operatorname{div} \Phi) V \qquad \delta(\varphi V) = (\nabla\varphi) \cdot F \tag{2.19}$$

und im Spezialfall $N = 3$:

$$\mathrm{d}(\Phi \cdot S) = (\operatorname{rot} \Phi) \cdot F \qquad \delta(\Phi \cdot F) = -(\operatorname{rot} \Phi) \cdot S \quad . \tag{2.20}$$

Wenn wir davon sprechen, skalare oder vektorwertige Funktionen als q-Formen aufzufassen oder umgekehrt, meinen wir damit stets die Anwendung der in dieser Weise definierten Isomorphismen. Wegen der Wirkung auf 1-Formen im dreidimensionalen Fall setzen wir von nun an nach dem Vorbild aus [31] für beliebige N und q:

$$\operatorname{rot} := \mathrm{d} \quad \text{und} \quad \operatorname{div} := \delta \quad . \tag{2.21}$$

Das Problem (1.2) nimmt dann, indem man aus den vektorwertigen Funktionen mit Hilfe von S und F Differentialformen wie in (2.20) konstruiert, die Form

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\,\varepsilon^{-1}\,\mathrm{div}\,H - \omega E &= F \\ \mathrm{i}\,\mu^{-1}\,\mathrm{rot}\,E - \omega H &= G \\ \imath^* E &= 0 \end{aligned} \tag{2.22}$$

an, wobei die linearen Transformationen ε und μ in kanonischer Weise in entsprechende Transformationen von q-Formen umgewandelt werden. Die dazugehörige Randbedingung kann man leicht aus dem Satz von Stokes ablesen. Dieser liefert nämlich für $u \in C_0^{\infty,q}(\mathbb{R}^N)$ und $v \in C_0^{\infty,q+1}(\mathbb{R}^N)$ wegen

$$\mathrm{d}(u \wedge *\overline{v}) = (\mathrm{d}u) \wedge *\overline{v} + (-1)^q u \wedge d * \overline{v} = (\mathrm{d}u) \wedge *\overline{v} + (-1)^{qN} u \wedge * * d * \overline{v}$$

die folgende Formel zur partiellen Integration:

$$\langle\ \mathrm{rot}\,u\,,\ v\,\rangle_G = -\langle\ u\,,\ \mathrm{div}\,v\,\rangle_G + \int_{\partial G} \imath^*(u \wedge *\overline{v}) \quad . \tag{2.23}$$

Analog zum Verhalten im klassischen Fall muß nun, entsprechende Differenzierbarkeit vorausgesetzt, für alle v

$$\langle\ \mathrm{rot}\,E\,,\ v\,\rangle_\Omega = -\langle\ E\,,\ \mathrm{div}\,v\,\rangle_\Omega$$

gelten, mithin also $\imath^* E = 0$. Das Problem (2.22) kann nun für beliebiges N und q behandelt werden. Mit Hilfe von (2.18) bzw. (2.19) ersieht man, daß der Fall $q = 0$ das Dirichletproblem (1.3) für E darstellt, während sich für $q = N - 1$ das entsprechende Problem mit Neumannscher Randbedingung

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\,\varepsilon^{-1}\nabla H - \omega E &= F \\ \mathrm{i}\,\mu^{-1}\,\mathrm{div}\,E - \omega H &= G \\ \frac{\mathrm{i}}{\omega}\nu \cdot (\varepsilon^{-1}\nabla H + \mathrm{i}\,F) = \nu \cdot E &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

ergibt, aus dem man (1.6) erhält.

Zum Abschluß stellen wir einige weitere Rechenregeln bereit. Dabei seien für $u \in \mathcal{A}^q(\mathbb{R}^N)$

$$\widehat{R}u := \mathrm{d}r \wedge u \qquad\qquad \widehat{T}u := (-1)^{N(q-1)} * \mathrm{d}r \wedge *u \quad . \tag{2.24}$$

Lemma 2.1 *Es seien $u \in \mathcal{A}^q(\mathbb{R}^N)$ und $v \in \mathcal{A}^{q+1}(\mathbb{R}^N)$ sowie $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ eine radialsymmetrische Funktion. Dann gelten*

$$\widehat{T}\widehat{T} = 0$$

$$\widehat{R}\widehat{R} = 0$$

$$\widehat{T}\widehat{R} + \widehat{R}\widehat{T} = \mathrm{id} \tag{2.25}$$

$$\langle\,\widehat{R}u\,,\ v\,\rangle = \langle\,u\,,\ \widehat{T}v\,\rangle \tag{2.26}$$

$$C_{\mathrm{rot}\,,\varphi} = (\partial_r\varphi)\widehat{R} \tag{2.27}$$

$$C_{\mathrm{div}\,,\varphi} = (\partial_r\varphi)\widehat{T} \tag{2.28}$$

$$C_{\mathrm{rot}\,,\Lambda} = \mathrm{rot} \tag{2.29}$$

$$C_{\mathrm{div}\,,\Lambda} = \mathrm{div} \tag{2.30}$$

$$\Delta = \mathrm{rot}\ \mathrm{div}\ +\ \mathrm{div}\ \mathrm{rot} \quad . \tag{2.31}$$

Bei Anwendung auf q-Formen ist

$$\begin{aligned} \widehat{T}\,\mathrm{rot}\ +\ \mathrm{rot}\,\widehat{T} &= \partial_r + qr^{-1}\widehat{T}\widehat{R} + (q-1)r^{-1}\widehat{R}\widehat{T} \\ \widehat{R}\,\mathrm{div}\ +\ \mathrm{div}\,\widehat{R} &= \partial_r + (q+1)'r^{-1}\widehat{T}\widehat{R} + q'r^{-1}\widehat{R}\widehat{T} \quad . \end{aligned} \tag{2.32}$$

Beweis:

Wir verwenden die Summationskonvention. Die ersten beiden Identitäten folgen unmittelbar aus (2.5) und (2.11). Nach (2.13) gilt

$$\mathrm{d}r = (\partial_k r)\mathrm{d}x_k = \xi_k \mathrm{d}x_k \quad . \tag{2.33}$$

Daraus erhält man (2.25) mittels (2.12). Mit Hilfe von (2.11), (2.4) und (2.6) ergibt sich

$$*\langle\,\widehat{R}u\,,\ v\,\rangle = (\mathrm{d}r \wedge u) \wedge *\overline{v} = (-1)^q u \wedge (\mathrm{d}r \wedge *\overline{v}) = (-1)^{q+q(N-q)} u \wedge **(\mathrm{d}r \wedge *\overline{v}) = *\langle\,u\,,\ \widehat{T}v\,\rangle$$

und damit (2.26). Weiterhin liefern (2.13) und (2.15) über

$$\mathrm{d}(\varphi u) = (\partial_k\varphi)\mathrm{d}x_k \wedge u + \varphi\mathrm{d}u = (\partial_r\varphi)\xi_k\mathrm{d}x_k \wedge u + \varphi\mathrm{d}u = (\partial_r\varphi)\mathrm{d}r \wedge u + \varphi\mathrm{d}u$$

die Gleichung (2.27). Daraus folgt (2.28) aufgrund der $*$-Dualität. Für den Nachweis der restlichen Behauptungen nehmen wir

$$u = u_I \mathrm{d}x^I$$

mit $I \in \mathcal{I}(N,q)$ an. Dann gilt

$$\partial_k u = (\partial_k u_I)\mathrm{d}x^I$$

und nach (2.13) sowie (2.15)

$$\mathrm{d}u = (\partial_k u_I)\mathrm{d}x_k \wedge \mathrm{d}x^I \quad . \tag{2.34}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\,(\Lambda u) &= \mathrm{d}(x_k(\partial_k u_I)\mathrm{d}x^I) = \partial_j(x_k(\partial_k u_I))\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x^I \\ &= (\partial_k u_I)\mathrm{d}x_k \wedge \mathrm{d}x^I + x_k\partial_k((\partial_j u_I)\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x^I) = \mathrm{rot}\,u + \Lambda(\,\mathrm{rot}\,u) \quad , \end{aligned}$$

womit (2.29) gezeigt ist. Aufgrund der $*$-Dualität erhält man auch (2.30). Die Identität (2.31) ergibt sich analog zu (2.25), indem man (2.34) und die analoge Gleichung für δu an Stelle von (2.33) ausnutzt oder komponentenweise die Fouriertransformation anwendet. Schließlich folgt mit (2.33)

$$\begin{aligned} &\widehat{T}\,\mathrm{rot}\,u + \mathrm{rot}\,\widehat{T}u \\ &= (-1)^{qN} * (\xi_j\mathrm{d}x_j \wedge *((\partial_k u_I)\mathrm{d}x_k \wedge \mathrm{d}x^I)) + (-1)^{(q-1)N}\partial_k(u_I\xi_j)\mathrm{d}x_k \wedge *(\mathrm{d}x_j \wedge *\mathrm{d}x^I) \quad . \end{aligned}$$

Wegen
$$\partial_k \xi_j = r^{-1}(\delta_{jk} - \xi_j \xi_k)$$
und (2.12) ist die rechte Seite gleich
$$(\xi_k \partial_k u_I)\mathrm{d}x^I + r^{-1}(-1)^{(q-1)N} u_I \mathrm{d}x_k \wedge *(\mathrm{d}x_k \wedge *\mathrm{d}x^I) - r^{-1}(-1)^{(q-1)N} u_I \mathrm{d}r \wedge *(\mathrm{d}r \wedge *\mathrm{d}x^I)$$

Nochmalige Verwendung von (2.12-2) sowie (2.25) liefert (2.32). Die letzte Behauptung folgt wieder aufgrund der $*$-Dualität. ♦

2.3 Soboleverräume

Sei $G \subset \mathbb{R}^N$ ein Gebiet. Wir definieren für $t \in \mathbb{R}$ den Raum
$$L_t^{2,q}(G) = \left\{ u \in \mathcal{A}^q(G) \text{ meßbar} \quad \middle| \quad \langle \rho^t u \,,\, \rho^t u \rangle_G < \infty \right\}$$
der mit dem Gewicht ρ^t quadrat-integrablen meßbaren q-Formen auf G, der mit dem Skalarprodukt
$$\langle u \,,\, v \rangle_{t,G} := \langle u \,,\, v \rangle_{L_t^{2,q}(G)} := \langle \rho^t u \,,\, \rho^t v \rangle_G$$
ein Hilbertraum wird (s. [28]). Da wir skalare Funktionen mit 0-Formen identifizieren und nach Konvention global die Karte id sowie das in (2.17) definierte Skalarprodukt verwenden, ergibt sich für $q = 0$ und $t = 0$ der übliche Lebesgue-Raum. Ansonsten entspricht das Skalarprodukt der Summe der entsprechend gewichteten Skalarproduke der Komponentenfunktionen.

Grundsätzlich führen wir in den Bezeichnungen der Skalarprodukte und Normen in diesen und anderen Räumen den Grad der Form nicht mit, da er sich jeweils aus dem Zusammenhang ergibt. In dem Fall $t = 0$ wird im Subskript im allgemeinen lediglich das Gebiet erwähnt. Auch bei den Bezeichnungen der Räume selbst lassen wir den Grad der Form und den der Gewichtung unerwähnt, wenn diese den Wert Null annehmen.

Die Notation $\langle u \,,\, v \rangle_{t,G}$ benutzen wir allgemeiner auch, wenn nur $\rho^{2t} * \langle u \,,\, \overline{v} \rangle$ meßbar und über G integrierbar ist, also z. B. wenn $u \in L_{t+\tau}^{2,q}(G)$ und $v \in L_{t-\tau}^{2,q}(G)$ mit einem $\tau \in \mathbb{R}$ ist. Weiterhin sei für $u, v \in L_t^{2,q}(G)$
$$\langle u \,,\, v \rangle_{t,G,\varepsilon} = \langle \rho^{2t} \varepsilon u \,,\, v \rangle_G \quad , \tag{2.35}$$
falls $\varepsilon(x)$ für $x \in G$ eine geeignete positiv definite lineare Transformation auf $\mathcal{A}^q(x)$ ist.

Existieren für eine q-Form u alle partiellen Ableitungen der Ordnung kleiner oder gleich $k \in \mathbb{N}_0$ in $L_t^{2,q}(G)$, so liegt u in dem gewichteten Sobolevraum $W_t^{k,q}(G)$ mit
$$\langle u \,,\, v \rangle_{k,t,G} := \langle u \,,\, v \rangle_{W_t^{k,q}(G)} := \sum_{|\alpha| \leq k} \langle \partial^\alpha u \,,\, \partial^\alpha v \rangle_{t,G} \quad .$$

Für $u = \sum_{I \in \mathcal{I}(N,q)} u_I \mathrm{d}x^I$ und $v = \sum_{I \in \mathcal{I}(N,q)} v_I \mathrm{d}x^I$ gilt offenbar
$$\langle u \,,\, v \rangle_{k,t,G} = \sum_{I \in \mathcal{I}(N,q)} \langle u_I \,,\, v_I \rangle_{W_t^{k,0}(G)} \quad .$$

Indem wir komponentenweise [33, Definition 3.1] ausnutzen, erweitern wir die Definition auf $k \in \mathbb{R}_+$. Für die Normen verwenden wir die Notation
$$\|u\|_{k,t,G} = \left(\langle u \,,\, u \rangle_{k,t,G} \right)^{1/2} \quad .$$

Insbesondere ist $W_t^{0,q}(G) = L_t^{2,q}(G)$ und $W^k(G)$ der übliche Sobolevraum $H^k(G)$; analog setzen wir $H^{k,q}(G) := W^{k,q}(G)$ für alle q. In Abschnitt 5.3 verwenden wir für Außengebiete Ω mit $0 \notin \overline{\Omega}$ auch zu $\| \cdot \|_{k,t,\Omega}$ äquivalente Normen, die durch
$$|\!|\!| u |\!|\!|_{k,t,\Omega}^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} \langle r^t \partial^\alpha u \,,\, r^t \partial^\alpha u \rangle_\Omega$$
bestimmt werden. Wir benötigen weiterhin die lokalen Räume
$$W_{\mathrm{loc}}^{k,q}(G) = \left\{ u \in \mathcal{A}^q(G) \quad \middle| \quad \bigwedge_{\varphi \in C_0^\infty(G)} \quad \varphi u \in H^{k,q}(G) \right\}$$
$$W_{\mathrm{loc}}^{k,q}(\overline{G}) = \left\{ u \in \mathcal{A}^q(G) \quad \middle| \quad \bigwedge_{\varphi \in C_0^\infty(\overline{G})} \quad \varphi u \in H^{k,q}(G) \right\}$$
und, nur für skalare Funktionen,
$$\mathring{H}^1(G) = \left\{ u \in H^1(G) \quad \middle| \quad \bigwedge_{\varphi \in H^1(G)} \bigwedge_{1 \leq j \leq N} \langle u \,,\, \partial_j \varphi \rangle_G = -\langle \partial_j u \,,\, \varphi \rangle_G \right\}$$
$$\mathring{H}_{\mathrm{loc}}^1(G) = \left\{ u \in H^1(G) \quad \middle| \quad \bigwedge_{\varphi \in C_0^\infty(\overline{G})} \quad \varphi u \in \mathring{H}^1(G) \right\} \quad .$$

Da bei der Behandlung des Maxwell-Problems fast durchweg Paare von Feldern betrachtet werden, definieren wir noch die Räume
$$\mathbf{W}_t^{k,q_1,q_2}(G) := W_t^{k,q_1}(G) \times W_t^{k,q_2}(G)$$
mit den Normen
$$\|(u_1, u_2)\|_{k,t,G} := \left(\|u_1\|_{k,t,G}^2 + \|u_2\|_{k,t,G}^2 \right)^{1/2} \quad .$$
Elemente von $\mathbf{W}_t^{k,q,q+1}(G)$ werden teilweise insofern wie zweikomponentige Vektoren[1] behandelt, als wir lineare Abbildungen dieses Raumes in sich als 2×2-Matrizen schreiben. Auch für Paare von q- und $(q+1)$-Formen führen wir das mit einer positiv definiten linearen Transformation gewichtete Skalarprodukt ein: Sind $u, v \in \mathbf{W}_t^{0,q,q+1}(G)$ sowie
$$\Xi = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

[1] Aus typographischen Gründen schreiben wir diese allerdings stets als Zeilenvektoren, wie auch schon in der Einleitung.

mit geeigneten linearen Transformationen ε, μ, so sei

$$\langle u\,,\, v\rangle_{t,G,\Xi} = \langle \rho^{2t}\Xi u\,,\, v\rangle_G \quad .$$

Mit

$$u \perp v$$

bezeichnen wir die Orthogonalität bezüglich $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_G$. Ist $X \subset \mathbf{W}^{0,q,q+1}(G)$, so bezeichnet $X^\perp$ das orthogonale Komplement von X bezüglich $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_G$. Durch Subskripte (z. B. t, Ξ) wird dabei eine Gewichtung angedeutet.

Da $W_t^{k,q}(G)$ und $\widetilde{\rho}^{-t}W^{k,q}(G)$ als Mengen übereinstimmen und äquivalente Normen haben, kann man durch komponentenweise Anwendung der Sätze 3.4, 3.5 bzw. 3.6 aus [33] beweisen:

$$\begin{aligned} C_0^{\infty,q}(G) \text{ (dicht) } &\subset L_t^{2,q}(G) \\ W_t^{k,q}(G) \cap C^{\infty,q}(G) \text{ (dicht) } &\subset W_t^{k,q}(G) \end{aligned} \tag{2.36}$$

sowie, falls G Segmenteigenschaft (s. [1] oder [33]) hat,

$$C_0^{\infty,q}(\overline{G}) \text{ (dicht) } \subset W_t^{k,q}(G) \quad .$$

Sei nun G ein glattes Gebiet mit kompaktem Rand. Zu jeder Karte (U,h) von ∂G wählen wir $\widetilde{U} \subset\subset U$ so, daß diese Gebiete ∂G noch immer überdecken. Aufgrund der Kompaktheit genügen endlich viele der eingeschränkten Karten $(\widetilde{U}, h|_{\widetilde{U}})$, um ∂G zu überdecken. Sei $\big\{(U_m, h_m) \quad\big|\quad m = 1,\ldots,M\big\}$ eine solche endliche Auswahl. Wir definieren $H^{k,q}(\partial G)$ als die Menge der $u \in \mathcal{A}^q(\partial G)$ mit

$$\|u\|_{H^{k,q}(\partial G)} := \left(\sum_{m=1}^{M} \|(h_m^{-1})^* u\|^2_{k,0,h_m(U_m)}\right)^{1/2} < \infty \quad .$$

Nach (2.9) bzw. im skalaren Fall [33, Satz 4.1] ist die Definition unabhängig von der Wahl der Überdeckung, und verschiedene Überdeckungen liefern äquivalente Normen. Der Raum $L^{2,q}(\partial G) := H^{0,q}(\partial G)$ wird mit dem Skalarprodukt

$$\langle u\,,\, v\rangle_{L^{2,q}(\partial G)} := \langle u\,,\, v\rangle_{\partial G}$$

zum Hilbertraum ([28]), und die sich daraus ergebende Norm ist äquivalent zu $\|\cdot\|_{H^{0,q}(\partial G)}$, wie man aus (2.9) ersieht.

Analog zu (2.36) zeigt man mit Hilfe einer der Überdeckung $\big\{U_m \quad\big|\quad m = 1,\ldots,M\big\}$ untergeordneten Zerlegung der Eins das folgende Dichtheitsresultat :

$$C^{\infty,q}(\partial G) \text{ (dicht) } \subset H^{k,q}(\partial G) \quad .$$

Für $\frac{1}{2} < s \in \mathbb{R}$ existiert (s. [33, Satz 8.7]) ein Spuroperator Γ in $B(W^s(G), H^{s-\frac{1}{2}}(\partial G))$, dergestalt, daß das Bild (die „Spur“) glatter Funktionen gerade der Restriktion auf den

Rand entspricht. Weiterhin findet man stets ([33, Satz 8.8]) einen Fortsetzungsoperator als Rechtsinverse in $B(H^{s-\frac{1}{2}}(\partial G), W^s(G))$.

Aufgrund der Dichtheit von $C_0^\infty(\overline{G})$ in $W^1(G)$ und der Stetigkeit des Spuroperators erhalten wir mit Hilfe des Gaußschen Satzes:

$$\langle \partial_i f\,,\, g\rangle_G = -\langle f\,,\, \partial_i g\rangle_G + \int_{\partial G} \nu_i \Gamma f \overline{\Gamma g}\; d\mathbf{o} \quad ,$$

für f, $g \in W^1(\Omega)$ und $1 \le i \le N$. Wir lassen den Spuroperator bei Randintegralen allerdings in der Regel weg.

Für $t \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ setzen wir

$$W_t^{\infty,q}(G) := \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} W_t^{k,q}(G)$$

und für $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

$$\begin{aligned} W_{<t}^{k,q}(G) &:= \bigcap_{\sigma<t} W_\sigma^{k,q}(G) \quad , & W_\infty^{k,q}(G) &:= W_{<\infty}^{k,q}(G) = \bigcap_{t\in\mathbb{R}} W_t^{k,q}(G) \quad , \\ W_{>t}^{k,q}(G) &:= \bigcup_{\sigma>t} W_\sigma^{k,q}(G) \quad , & W_{-\infty}^{k,q}(G) &:= W_{>-\infty}^{k,q}(G) = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} W_t^{k,q}(G) \quad . \end{aligned}$$

Ebenso wird für alle anderen über Gewicht oder Grad der Differenzierbarkeit parametrisierten Scharen von Funktionenräumen verfahren.

Ausgehend von (2.23) können wir die Existenz von rot und div wie die der partiellen Ableitungen in distributionellem Sinne definieren. Gilt für ein $u \in W_t^{0,q}(G)$

$$\bigvee_{w\in W_t^{0,q+1}(G)} \; \bigwedge_{\varphi\in C_0^{\infty,q+1}(G)} \langle u\,,\, \operatorname{div}\varphi\rangle_G = -\langle w\,,\, \varphi\rangle_G \quad ,$$

so existiert $\operatorname{rot} u$ in $W_t^{0,q+1}(G)$ und ist gleich w. Damit definieren wir die Räume

$$\begin{aligned} R_t^q(G) &:= \big\{u \in W_t^{0,q}(G) \quad\big|\quad \operatorname{rot} u \in W_t^{0,q+1}(G)\big\} \\ \mathring{R}_t^q(G) &:= \big\{u \in R_t^q(G) \quad\big|\quad \bigwedge_{\varphi\in C_0^{\infty,q+1}(\overline{G})} \langle u\,,\, \operatorname{div}\varphi\rangle_G = -\langle \operatorname{rot} u\,,\, \varphi\rangle_G\big\} \end{aligned} \tag{2.37}$$

und statten sie mit der Norm

$$\|\varphi\|_{R_t^q(G)} := \big(\|\varphi\|^2_{0,t,G} + \|\operatorname{rot}\varphi\|^2_{0,t,G}\big)^{1/2}$$

aus. In gleicher Weise wie die entsprechenden Sätzen für skalare Funktionen ([1, Theorem 2.1] und Vorbereitungen) zeigt man mittels Glättungsoperatoren:

$$\begin{aligned} C_0^{\infty,q}(G) \text{ (dicht) } &\subset \mathring{R}_t^q(G) \\ C_0^{\infty,q}(\overline{G}) \text{ (dicht) } &\subset R_t^q(G) \text{ , falls } G \text{ Segmenteigenschaft hat.} \end{aligned}$$

Für die analog gebildeten und mit der Norm

$$\|\varphi\|_{D_t^q(G)} := \left(\|\varphi\|_{0,t,G}^2 + \|\operatorname{div}\varphi\|_{0,t,G}^2\right)^{1/2}$$

versehenen Räume $D_t^q(G)$, $\overset{\circ}{D}{}_t^q(G)$ erhält man entsprechende Approximationsresultate. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt wegen (2.14) mit $u \in \overset{\circ}{R}{}_t^q(G)$ und $\Phi \in C_0^{\infty,q+1}(\overline{G})$

$$\langle \operatorname{rot} u \,,\ \operatorname{div}\Phi \rangle_G = -\langle u \,,\ \operatorname{div}\operatorname{div}\Phi \rangle_G = 0 \quad ,$$

also ist

$$\overline{\operatorname{rot}\overset{\circ}{R}{}_t^q(G)} \subset \left\{ u \in \overset{\circ}{R}{}_t^{q+1}(G) \;\middle|\; \operatorname{rot} u = 0 \right\} \quad , \tag{2.38}$$

wobei der Abschluß in $W_t^{q+1}(G)$ zu bilden ist.

Für 0-Formen bilden wir mit $t \in \mathbb{R}$ rekursiv die Räume

$$W_t^{1,\Delta}(G) := \left\{ u \in W_t^1(G) \;\middle|\; \Delta u \in W_t(G) \right\} \tag{2.39-1}$$
$$W_t^{2,\Delta}(G) := \left\{ u \in W_t^2(G) \;\middle|\; \Delta u \in W_t^1(G) \right\} \tag{2.39-2}$$
$$\text{und} \quad W_t^{k+2,\Delta}(G) := \left\{ u \in W_t^{k+2}(G) \;\middle|\; \Delta u \in W_t^{k,\Delta}(G) \right\} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}\,. \tag{2.39-3}$$

Mit den durch

$$\|v\|_{W_t^{1,\Delta}(G)}^2 := \|v\|_{1,t,G}^2 + \|\Delta v\|_{0,t,G}^2 \tag{2.40-1}$$
$$\|v\|_{W_t^{2,\Delta}(G)}^2 := \|v\|_{2,t,G}^2 + \|\Delta v\|_{1,t,G}^2 \tag{2.40-2}$$
$$\text{und} \quad \|v\|_{W_t^{k+2,\Delta}(G)}^2 := \|v\|_{k+2,t,G}^2 + \|\Delta v\|_{W_t^{k,\Delta}(G)}^2 \quad \text{für } k \in \mathbb{N} \tag{2.40-3}$$

definierten Normen werden diese zu Banachräumen. Eine alternative Definition ist

$$\widetilde{W}_t^{2k+1,\Delta}(G) := \left\{ v \in W_t^{2k+1}(G) \;\middle|\; \Delta^{k+1} v \in W_t(G) \right\} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0 \tag{2.41-1}$$
$$\widetilde{W}_t^{2k,\Delta}(G) := \left\{ v \in W_t^{2k}(G) \;\middle|\; \Delta^{k} v \in W_t^1(G) \right\} \quad \text{für } k \in \mathbb{N} \quad , \tag{2.41-2}$$

wobei die Normen gebildet werden durch

$$\|v\|_{\widetilde{W}_t^{2k+1,\Delta}(G)}^2 := \|v\|_{2k+1,t,G}^2 + \|\Delta^{k+1} v\|_{0,t,G}^2 \tag{2.42-1}$$
$$\|v\|_{\widetilde{W}_t^{2k,\Delta}(G)}^2 := \|v\|_{2k,t,G}^2 + \|\Delta^{k} v\|_{1,t,G}^2 \quad . \tag{2.42-2}$$

Lemma 2.2 *Die Räume $W_t^{m,\Delta}(G)$ und $\widetilde{W}_t^{m,\Delta}(G)$ enthalten dieselben Funktionen, und die Normen $\|\cdot\|_{W_t^{m,\Delta}(G)}$ und $\|\cdot\|_{\widetilde{W}_t^{m,\Delta}(G)}$ sind äquivalent.*

BEWEIS:
Für $m = 1$ und $m = 2$ sind die Räume und ihre Normen nach Definition gleich. Weiterhin

gilt

$$\begin{aligned}
v \in W_t^{2k+3,\Delta}(G) &\iff v \in W_t^{2k+3}(G) \wedge \Delta v \in W_t^{2k+1,\Delta}(G) \\
&\overset{\text{Ind.Ann.}}{\iff} v \in W_t^{2k+3}(G) \wedge \Delta v \in \widetilde{W}_t^{2k+1,\Delta}(G) \\
&\iff v \in W_t^{2k+3}(G) \wedge \Delta v \in W_t^{2k+1}(G) \wedge \Delta^{k+1}\Delta v \in W_t(G) \\
&\iff v \in W_t^{2k+3}(G) \wedge \Delta^{k+2} v \in W_t(G) \\
&\iff v \in \widetilde{W}_t^{2k+3,\Delta}(G) \quad .
\end{aligned}$$

Für $m = 2k+2$ und für die Aussage über die Normen verfährt man analog. ♦

Kapitel 3

Lösungstheorie für das Maxwell-Problem

Zu Beginn unserer Untersuchungen werden wir zunächst einige technische Voraussetzungen schaffen, die sowohl für die Lösungstheorie zu reellen Frequenzen als auch für den Beweis der Existenz und Asymptotik der Frequenzableitungen genutzt werden.

Neben einer Aufstellung bekannter Ergebnisse zu Regularität, Eigenwerten und kompakten Einbettungen spielt hier vor allem eine spezielle Zerlegung von $\mathbf{W}_s^{0,q,q+1}(\Omega)$ für $s \in \mathbb{R}$ eine Rolle.

Schließlich definieren wir den Lösungsbegriff und gelangen auf Basis dieser Zerlegung mit Hilfe der Technik der Grenzabsorption zu Lösungen, für die wir gegenüber bisher bekannten Ergebnissen etwas verbesserte Abschätzungen angeben können.

In diesem Kapitel kann an vielen Stellen auf die Glattheit von Ω verzichtet werden. Sie wird nur in Abschnitt 3.1.1 und Teilen von Abschnitt 3.1.2 benötigt.

3.1 Vorbereitungen

Ausgehend von den verallgemeinerten zeitharmonischen Maxwellschen Gleichungen (2.22) definieren wir für $0 \le q \le N-1$ den Maxwell-Operator:

$$\begin{array}{rcccl} M : \mu^{-1}\overset{\circ}{R}{}^q(\Omega) \times \varepsilon^{-1}D^{q+1}(\Omega) & \subset & {}_\Xi\mathbf{W}^{0,q,q+1}(\Omega) & \longrightarrow & {}_\Xi\mathbf{W}^{0,q,q+1}(\Omega) \\ & & U & \longmapsto & \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{i}\,\varepsilon^{-1}\,\mathrm{div} \\ \mathrm{i}\,\mu^{-1}\,\mathrm{rot} & 0 \end{bmatrix} U \quad , \end{array}$$

wobei wir hier und im weiteren Verlauf der Arbeit stets die Matrix

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

mit Ξ und den mit dem Skalarprodukt $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{0,\Omega,\Xi}$ ausgestatteten Raum $\mathbf{W}^{0,q,q+1}(\Omega)$ mit ${}_\Xi\mathbf{W}^{0,q,q+1}(\Omega)$ bezeichnen wollen. Bekannt ist (siehe [19, Kap. 4.2]), daß der so definierte Operator selbstadjungiert ist, wenn ε und μ zulässige Transformationen in dem folgenden Sinne sind:

Definition 3.1 *Unter einer „zulässigen Transformation" auf $\mathcal{A}^q(\Omega)$ mit $0 \le q \le N$ verstehen wir eine lineare, gleichmäßig positiv definite und beschränkte Abbildung ν von $\mathcal{A}^q(\Omega)$ in sich mit den folgenden beiden Eigenschaften:*

- *Die Abbildungen $\nu_{I,J}$ mit*

  $$\nu(x) \sum_{I \in \mathcal{I}(N,q)} \Phi_I(x)\mathrm{d}x^I = \sum_{I,J \in \mathcal{I}(N,q)} \nu_{I,J}(x)\Phi_J(x)\mathrm{d}x^I$$

  sind meßbar.

- *Es gilt $\nu = \nu_0 \cdot \mathrm{id} + \widehat{\nu}$ mit einem $\nu_0 \in \mathbb{R}_+$ und einer Transformation $\widehat{\nu}$, die für $|x| \to \infty$ der Bedingung $\widehat{\nu} = \mathcal{O}(|x|^{-\tau})$ mit einem $\tau \ge 0$ genügt.*

Wir legen daher allgemein fest:

Generalvoraussetzung B *Wenn nichts anderes gesagt wird, gelte bei der Betrachtung des Maxwell-Operators stets $0 \le q \le N-1$, und es seien ε, μ zulässige Transformationen auf $\mathcal{A}^q(\Omega)$ bzw. $\mathcal{A}^{q+1}(\Omega)$.*

Entsprechend der obigen Zerlegung von ν gelte dabei $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \mathrm{id} + \widehat{\varepsilon}$, $\mu = \mu_0 \cdot \mathrm{id} + \widehat{\mu}$.

Die geforderten Eigenschaften übertragen sich jeweils auf die punktweise gebildete Umkehrabbildung.

Bemerkung 3.2 *Ist ν eine zulässige Transformation auf $\mathcal{A}^q(\Omega)$, so gilt dies für ν^{-1} gleichermaßen.*

Wir sagen, eine zulässige Transformation ν liege in $\mathcal{C}^m(\Omega)$ bzw. $\mathcal{C}^m(\overline{\Omega})$ für $m \in \mathbb{N}_0$, wenn die Komponenten $\nu_{I,J}$ aus der obigen Darstellung in $C^m(\Omega)$ bzw. $C^m(\overline{\Omega})$ liegen, und in $\mathcal{C}_b^m(\Omega)$ bzw. $\mathcal{C}_b^m(\overline{\Omega})$, wenn außerdem die Ableitungen bis zur Ordnung m beschränkt sind. Genauso klassifizieren wir Ξ, wenn einer dieser Fälle sowohl auf ε als auch auf μ zutrifft.

Mittels der Ersetzungen

$$\begin{array}{lll} \widetilde{\varepsilon} := \varepsilon_0^{-1}\varepsilon & \widetilde{E} := \sqrt{\varepsilon_0}E & \widetilde{F} := \varepsilon_0\sqrt{\mu_0}F \\ \widetilde{\mu} := \mu_0^{-1}\mu & \widetilde{H} := \sqrt{\mu_0}H & \widetilde{G} := \sqrt{\varepsilon_0}\mu_0 G \\ \widetilde{\omega} := \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,\omega & & \end{array}$$

gelangt man stets zu einem äquivalenten System, bei dem $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$ gilt. Wir ergänzen daher die Generalvoraussetzung B um Folgendes.

Generalvoraussetzung B' *Es seien* $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$.

Die Resolvente von M an einer Stelle $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, das heißt den Lösungsoperator zum Problem

$$\mathcal{M}_{\Omega,\Xi}(V,\omega) \qquad \begin{cases} (M-\omega)U = V & \text{in } \Omega \\ U \in \overset{\circ}{R}{}^q(\Omega) \times D^{q+1}(\Omega) \subset {}_\Xi\mathbf{W}^{0,q,q+1}(\Omega) \end{cases} \tag{3.2}$$

mit $V \in {}_\Xi\mathbf{W}^{0,q,q+1}(\Omega)$, nennen wir H_ω. Dabei verzichten wir auf eine Aufnahme von q in die Bezeichnung, weil sich dieser Parameter jeweils aus den gegebenen Daten V ergibt.

Offensichtlich gilt für ω, $\nu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ die „Resolventengleichung“

$$H_\omega - H_\nu = (\omega - \nu) H_\omega H_\nu \quad . \tag{3.3}$$

Aus der Selbstadjungiertheit von M folgt, daß das Spektrum des Operators in $\mathbb{R}$ enthalten ist, und somit gilt nach [30, Satz 5.16]:

Lemma 3.3 *Die Resolventen-Abbildung* $\omega \longmapsto H_\omega$ *ist holomorph als Abbildung von* $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ *nach* $B(\mathbf{W}^{0,q,q+1}(\Omega), \mathbf{W}^{0,q,q+1}(\Omega))$. *Für* $V \in \mathbf{W}^{0,q,q+1}(\Omega)$ *und* $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *gilt gleichmäßig bezüglich* V *und* ω

$$\|H_\omega V\|_{0,0,\Omega} \prec |\Im\omega|^{-1} \|V\|_{0,0,\Omega} \quad . \tag{3.4}$$

Mit M bezeichnen wir auch die Matrixdarstellung des Operators,

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{i}\,\varepsilon^{-1}\,\mathrm{div} \\ \mathrm{i}\,\mu^{-1}\,\mathrm{rot} & 0 \end{bmatrix} \quad ,$$

und führen zusätzlich

$$\widehat{M} = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{i}\ \mathrm{div} \\ \mathrm{i}\ \mathrm{rot} & 0 \end{bmatrix} = \Xi M \quad \text{und} \quad Z = \begin{bmatrix} \mathrm{div}\,\varepsilon & 0 \\ 0 & \mathrm{rot}\,\mu \end{bmatrix}$$

ein, um kompaktere Formeln zu erhalten. Wegen (2.14) gilt insbesondere $ZM = 0$ und

$$ZV = Z(M-\omega)H_\omega V = -\omega Z H_\omega V \quad . \tag{3.5}$$

Analog zur Definition von Ξ in (3.1) bilden wir $\widehat{\Xi}$ aus $\widehat{\varepsilon}$ und $\widehat{\mu}$.

Wir notieren ferner, daß für $V \in \mathbf{W}_0^{0,q,q+1}(\Omega)$

$$H_\omega V = -S_1 H_{-\omega} S_1 V = \overline{S_1 H_{\overline{\omega}} S_1 \overline{V}} = -\overline{H_{-\overline{\omega}} \overline{V}} \tag{3.6}$$

gilt, wenn wir $S_1(A,B) = (-A,B)$ setzen. Daher genügt es, wenn wir unsere Ergebnisse für Frequenzen $\omega \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}_+$ herleiten.

3.1.1 Regularität

Zunächst zitieren wir zwei Regularitätsresultate. Sei dazu Ω wieder glatt. Außerdem seien $0 \le q \le N$ und ν, $\widetilde{\nu}$ zulässige Transformationen auf $\mathcal{A}^q(\mathbb{R}^N)$.

Lemma 3.4 ([11], Satz 4.1) *Sei* G *ein glattes beschränktes Gebiet und* $\nu \in \mathcal{C}^{k+1}(\overline{G})$ *mit einem* $k \in \mathbb{N}_0$. *Weiterhin sei* $\Phi \in \overset{\circ}{R}{}^q(G) \cap \nu^{-1} D^q(G)$ *sowie*

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\,\Phi &\in W^{k,q+1}(G) \\ \mathrm{div}\,\nu\Phi &\in W^{k,q-1}(G) \quad . \end{aligned}$$

Dann ist $\Phi \in W^{k+1,q}(G)$ *und*

$$\|\Phi\|_{k+1,0,G} \prec \|\Phi\|_{0,0,G} + \|\,\mathrm{rot}\,\Phi\|_{k,0,G} + \|\,\mathrm{div}\,\nu\Phi\|_{k,0,G} \quad .$$

Auf der anderen Seite erhält man für den Ganzraumfall:

Lemma 3.5 ([19], Satz 3.6) *Sei* $s \in \mathbb{R}$ *und* $\nu \in \mathcal{C}_b^{k+1}(\mathbb{R}^N)$ *mit einem* $k \in \mathbb{N}_0$. *Ferner erfülle* $\Phi \in R_s^q(\mathbb{R}^N) \cap \nu^{-1} D_s^q(\mathbb{R}^N)$

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\,\Phi &\in W_s^{k,q+1}(\mathbb{R}^N) \\ \mathrm{div}\,\nu\Phi &\in W_s^{k,q-1}(\mathbb{R}^N) \quad . \end{aligned}$$

Dann ist $\Phi \in W_s^{k+1,q}(\mathbb{R}^N)$ *und*

$$\|\Phi\|_{k+1,s,\mathbb{R}^N} \prec \|\Phi\|_{0,s,\mathbb{R}^N} + \|\,\mathrm{rot}\,\Phi\|_{k,s,\mathbb{R}^N} + \|\,\mathrm{div}\,\nu\Phi\|_{k,s,\mathbb{R}^N} \quad .$$

Durch Verwendung von Abschneidefunktionen erhalten wir aus einer Kombination der Lemmata 3.4 und 3.5, jetzt wieder für Außengebiete:

Lemma 3.6 *Sei* $s \in \mathbb{R}$ *und* $\nu \in \mathcal{C}_b^{k+1}(\overline{\Omega})$, $k \in \mathbb{N}_0$. *Für ein* $\Phi \in \overset{\circ}{R}{}_s^q(\Omega) \cap \nu^{-1} D_s^q(\Omega)$ *gelte*

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\,\Phi &\in W_s^{k,q+1}(\Omega) \\ \mathrm{div}\,\nu\Phi &\in W_s^{k,q-1}(\Omega) \quad . \end{aligned}$$

Dann ist $\Phi \in W_s^{k+1,q}(\Omega)$ *und*

$$\|\Phi\|_{k+1,s,\Omega} \prec \|\Phi\|_{0,s,\Omega} + \|\,\mathrm{rot}\,\Phi\|_{k,s,\Omega} + \|\,\mathrm{div}\,\nu\Phi\|_{k,s,\Omega} \quad .$$

Nach Bemerkung 3.2 können wir Lemma 3.6 mit $\nu = \widetilde{\nu}^{-1}$ auf $\widetilde{\nu}\Phi$ anwenden und erhalten die Aussage:

Lemma 3.7 *Seien $s \in \mathbb{R}$ und $\widetilde{\nu} \in \mathcal{C}_b^{k+1}(\overline{\Omega})$ mit $k \in \mathbb{N}_0$. Gilt $\Phi \in D_s^q(\Omega) \cap \widetilde{\nu}^{-1} \overset{\circ}{R}{}_s^q(\Omega)$ und*

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \widetilde{\nu}\Phi &\in W_s^{k,q+1}(\Omega) \\ \operatorname{div} \Phi &\in W_s^{k,q-1}(\Omega) \quad , \end{aligned}$$

so ist $\Phi \in W_s^{k+1,q}(\Omega)$ und

$$\|\Phi\|_{k+1,s,\Omega} \prec \|\Phi\|_{0,s,\Omega} + \|\operatorname{rot} \widetilde{\nu}\Phi\|_{k,s,\Omega} + \|\operatorname{div} \Phi\|_{k,s,\Omega} \quad .$$

Indem wir nun beides abermals zusammensetzen, erhalten wir eine etwas kompaktere Schreibweise.

Lemma 3.8 *Gelten für ein $V \in \left(\overset{\circ}{R}{}_s^q(\Omega) \times D_s^{q+1}(\Omega)\right) \cap \left(\varepsilon^{-1} D_s^q(\Omega) \times \mu^{-1} \overset{\circ}{R}{}_s^{q+1}(\Omega)\right)$ mit $s \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $\Xi \in \mathcal{C}_b^{k+1}(\overline{\Omega})$*

$$\begin{aligned} MV &\in W_s^{k,q,q+1}(\Omega) \\ ZV &\in W_s^{k,q-1,q+2}(\Omega) \quad , \end{aligned}$$

so ist $V \in W_s^{k+1,q,q+1}(\Omega)$ und

$$\|V\|_{k+1,s,\Omega} \prec \|V\|_{0,s,\Omega} + \|MV\|_{k,s,\Omega} + \|ZV\|_{k,s,\Omega} \quad .$$

Korollar 3.9 *Seien $s \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $\Xi \in \mathcal{C}_b^{k+1}(\overline{\Omega})$. Ist $(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Feldern in $\left(\overset{\circ}{R}{}_s^q(\Omega) \times D_s^{q+1}(\Omega)\right) \cap \left(\varepsilon^{-1} D_s^q(\Omega) \times \mu^{-1} \overset{\circ}{R}{}_s^{q+1}(\Omega)\right)$ und konvergieren MU_j und ZU_j in $\mathbf{W}_s^{k,q,q+1}(\Omega)$ sowie U_j selbst in $\mathbf{W}_s^{0,q,q+1}(\Omega)$, so konvergiert U_j sogar in $\mathbf{W}_s^{k+1,q,q+1}(\Omega)$.*

3.1.2 Eine Zerlegung von $\mathbf{W}_s^{0,q,q+1}(\Omega)$

Für sämtliche Aussagen dieses und der nächsten Kapitel benötigen wir nur eine einfache Zerlegung von $L_s^{2,q}(\Omega) \times L_s^{2,q+1}(\Omega)$. Diese ist durch die Beobachtung motiviert, daß im Falle $V \in \overset{\circ}{R}{}_s^q(\Omega) \times D_s^{q+1}(\Omega)$ mit $MV = 0$ eine (und damit für $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ die einzige) Lösung von $\mathcal{M}_{\Omega,\Xi}(V,\omega)$ durch $U = -\frac{1}{\omega}V$ gegeben ist.

Wir benötigen die Glattheit von $\partial\Omega$, allerdings in Lemma 3.11 nur für die zweite Behauptung und in Lemma 3.12 sowie Korollar 3.13 nur für $n \geq 1$.

Definition 3.10 *Sei $s \in \mathbb{R}$. Wir definieren die Unterräume*

$$\mathcal{A}_s^{q,q+1} := \overline{\operatorname{rot} \overset{\circ}{R}{}_s^{q-1}(\Omega)} \times \overline{\operatorname{div} D_s^{q+2}(\Omega)} \tag{3.7}$$

$$\mathcal{B}_s^{q,q+1} := (\mathcal{A}_s^{q,q+1})^{\perp_{s,\Xi}} \tag{3.8}$$

von $\mathbf{W}_s^{0,q,q+1}(\Omega)$, d. h.

$$\Phi \in \mathcal{B}_s^{q,q+1} \iff \bigwedge_{\Psi \in \mathcal{A}_s^{q,q+1}} \langle \Phi \,,\, \Psi \rangle_{s,\Omega,\Xi} = 0 \quad .$$

Regularität bleibt durch diese Zerlegung erhalten, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 3.11 *Für $s \in \mathbb{R}$ ist*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_s^{q,q+1} = \big\{ (B_1, B_2) \in \varepsilon^{-1} D_s^q(\Omega) \times \mu^{-1} \overset{\circ}{R}{}_s^{q+1}(\Omega) \quad \big| \\ \operatorname{div}(\varepsilon B_1) = -2s\rho^{-1}\widehat{T}\varepsilon B_1 \quad \wedge \quad \operatorname{rot}(\mu B_2) = -2s\rho^{-1}\widehat{R}\mu B_2 \big\} \quad . \end{aligned} \tag{3.9}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ bilden die $\langle \,\cdot\,, \,\cdot\, \rangle_{s,\Omega,\Xi}$-Orthogonalprojektoren auf $\mathcal{A}_s^{q,q+1}$ und $\mathcal{B}_s^{q,q+1}$ den Raum $\mathbf{W}_s^{n,q,q+1}(\Omega)$ stetig in sich selbst ab, sofern $\Xi \in \mathcal{C}_b^n(\overline{\Omega})$ ist.

Beweis:
Es ist $(B_1, B_2) \in \mathcal{B}_s^{q,q+1}$ genau dann, wenn

$$\bigwedge_{\Psi \in C_0^{\infty,q-1}(\Omega)} 0 = \langle \rho^{2s}\varepsilon B_1 \,,\, \operatorname{rot} \Psi \rangle_\Omega \tag{3.10-1}$$

$$\text{und} \quad \bigwedge_{\Psi \in C_0^{\infty,q+2}(\overline{\Omega})} 0 = \langle \rho^{2s}\mu B_2 \,,\, \operatorname{div} \Psi \rangle_\Omega \quad . \tag{3.10-2}$$

Wegen $\rho^{2s} \operatorname{rot} \Psi = \operatorname{rot}(\rho^{2s}\Psi) - 2s\rho^{2s-1}\widehat{R}\Psi$ (siehe (2.27)) ist (3.10-1) äquivalent zu

$$\bigwedge_{\Psi \in C_0^{\infty,q-1}(\Omega)} \langle \varepsilon B_1 \,,\, \operatorname{rot} \Psi \rangle_\Omega = \langle \varepsilon B_1 \,,\, 2s\rho^{-1}\widehat{R}\Psi \rangle_\Omega$$

oder

$$\bigwedge_{\Psi \in C_0^{\infty,q-1}(\Omega)} \langle \varepsilon B_1 \,,\, \operatorname{rot} \Psi \rangle_\Omega = \langle 2s\rho^{-1}\widehat{T}\varepsilon B_1 \,,\, \Psi \rangle_\Omega \quad ,$$

also $\varepsilon B_1 \in D_s^q(\Omega)$ und $\operatorname{div}(\varepsilon B_1) = -2s\rho^{-1}\widehat{T}\varepsilon B_1$. Die Behauptung für B_2 folgt analog.

Für den Beweis der zweiten Behauptung sei $U = (U_1, U_2) \in \mathbf{W}_s^{n,q,q+1}(\Omega)$ mit einem $n \in \mathbb{N}_0$ und $U_j = A_j + B_j$ mit $(A_1, A_2) \in \mathcal{A}_s^{q,q+1}$, $(B_1, B_2) \in \mathcal{B}_s^{q,q+1}$. Liegt B_2 in $W_s^{l,q}(\Omega)$ mit $0 \leq l \leq n-1$ und

$$\|B_2\|_{l,s,\Omega} \prec \|U\|_{l,s,\Omega} \quad ,$$

so gilt dasselbe für $\operatorname{rot} \mu B_2$. Andererseits existiert

$$\operatorname{div} B_2 = \operatorname{div} U_2 - \operatorname{div} A_2 = \operatorname{div} U_2$$

ebenfalls in $W_s^{l,q}(\Omega)$. Da B_2 außerdem die notwendige Randbedingung erfüllt, ist B_2 in $W_s^{l+1,q}(\Omega)$ nach Lemma 3.7, und

$$\|B_2\|_{l+1,s,\Omega} \prec \|B_2\|_{0,s,\Omega} + \|\operatorname{rot}(\mu B_2)\|_{l,s,\Omega} + \|\operatorname{div} B_2\|_{l,s,\Omega} \prec \|U\|_{l+1,s,\Omega} \quad .$$

Einen analogen Induktionsschritt führt man für die ersten Komponenten mit Hilfe der Randbedingung für A_1 und Lemma 3.6 durch. Schließlich erhält man mit

$$A, B \in \mathbf{W}_s^{n,q,q+1}(\Omega) \quad \text{und} \quad \|A\|_{n,s,\Omega}, \|B\|_{n,s,\Omega} \prec \|U\|_{n,s,\Omega}$$

die Behauptung. ♦

Es folgt eine erste Anwendung der Zerlegung. Zur Erläuterung: Der Nenner in dieser Abschätzung entfaltet seine Wirkung bei großen Werten von $\Im\omega$.

Lemma 3.12 *Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $\Xi \in \mathcal{C}_b^n(\overline{\Omega})$, falls $n \geq 1$. Für alle $s \geq 0$ und $\omega \in \mathbb{C}_+$ bildet dann H_ω den Raum $\mathbf{W}_s^{n,q,q+1}(\Omega)$ stetig in sich selbst ab.*

Genauer: Für $\beta > 0$ gilt

$$\|H_\omega V\|_{n,s,\Omega} \prec \frac{|\omega|^n}{\Im\omega}\|V\|_{n,s,\Omega}$$

gleichmäßig bezüglich $V \in \mathbf{W}_s^{n,q,q+1}(\Omega)$ und $\omega \in \{z \in \mathbb{C}_+ \mid \Im z \geq \beta\}$.

Beweis:
Zuerst zeigen wir die Behauptung für $n = 0$. Hier gilt sie bekanntermaßen für $s = 0$. Wir zeigen, daß sie für $s \geq 0$ gilt, wenn sie bereits für ein $\sigma \in [s-1, s)$ richtig ist.

Sei $V \in \mathbf{W}_s^{0,q,q+1}(\Omega)$ und $U = (E, H) := H_\omega V$ sowie $\eta_j(x) = \eta(\frac{x}{j})$. Mit dem Ansatz

$$\begin{aligned}\langle \eta_j^2\rho^{2s}V, \Xi U\rangle_\Omega &= \langle \eta_j^2\rho^{2s}(M-\omega)U, \Xi U\rangle_\Omega\\ &= -2\Im\langle \eta_j^2\rho^{2s}\operatorname{div} H, E\rangle_\Omega - \mathrm{i}\langle \partial_r(\eta_j^2\rho^{2s})\widehat{R}E, H\rangle_\Omega - \omega\langle \eta_j^2\rho^{2s}U, \Xi U\rangle_\Omega\end{aligned}$$

erhalten wir durch Bilden des Imaginärteils

$$(\Im\omega)\langle \eta_j^2\rho^{2s}U, \Xi U\rangle_\Omega = -\Re\langle \partial_r(\eta_j^2\rho^{2s})\widehat{R}E, H\rangle_\Omega - \Im\langle \eta_j^2\rho^{2s}V, \Xi U\rangle_\Omega \quad .$$

Unter Zuhilfenahme der Youngschen Ungleichung

$$2ab \leq \frac{a^2}{\delta} + \delta b^2 \quad \text{für} \quad \delta > 0$$

ergibt sich wegen $\Im\omega > 0$

$$(\Im\omega)^2\|\eta_j U\|_{0,s,\Omega}^2 \prec \|(2\rho\partial_r\eta_j + 2s\eta_j)U\|_{0,s-1,\Omega}^2 + \|V\|_{0,s,\Omega}^2 \quad .$$

Wegen $|\partial_r\eta_j|_\infty = j^{-1}|\partial_r\eta|_\infty$ und $\operatorname{supp}\eta_j \subset U(2jR_0)$ ist $|\rho\partial_r\eta_j|_\infty$ beschränkt, und folglich gilt

$$(\Im\omega)^2\|\eta_j U\|_{0,s,\Omega}^2 \prec \|U\|_{0,s-1,\Omega}^2 + \|V\|_{0,s,\Omega}^2$$

unabhängig von j. Somit erhalten wir mit Hilfe des Grenzübergangs $j \to \infty$ nach Induktionsannahme

$$(\Im\omega)^2\|U\|_{0,s,\Omega}^2 \prec \|U\|_{0,s-1,\Omega}^2 + \|V\|_{0,s,\Omega}^2 \prec (\Im\omega)^{-2}\|V\|_{0,\sigma,\Omega}^2 + \|V\|_{0,s,\Omega}^2 \prec \|V\|_{0,s,\Omega}^2$$

unter Ausnutzung von $\Im\omega \geq \beta > 0$.

Als Voraussetzung für den Induktionsschritt bezüglich n sei nun die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}_0$ bewiesen. Ist $V \in \mathbf{W}_s^{n+1,q,q+1}(\Omega) \cap \big(\varepsilon^{-1}D_s^q(\Omega) \times \mu^{-1}\overset{\circ}{R}{}_s^{q+1}(\Omega)\big)$, so liegt nach Lemma 3.8 wegen (3.5) die Lösung $H_\omega V$ in $\mathbf{W}_s^{n+1,q,q+1}(\Omega)$ und erfüllt

$$\begin{aligned}\|H_\omega V\|_{n+1,s,\Omega} &\prec \|H_\omega V\|_{0,s,\Omega} + \|V + \omega H_\omega V\|_{n,s,\Omega} + \|\omega^{-1}ZV\|_{n,s,\Omega}\\ &\prec (\Im\omega)^{-1}\|V\|_{0,s,\Omega} + \|V\|_{n,s,\Omega} + \frac{|\omega|^{n+1}}{\Im\omega}\|V\|_{n,s,\Omega} + |\omega|^{-1}\|V\|_{n+1,s,\Omega}\\ &\prec \frac{|\omega|^{n+1}}{\Im\omega}\|V\|_{n+1,s,\Omega} \quad .\end{aligned}$$

Für beliebiges $V \in \mathbf{W}_s^{n+1,q,q+1}(\Omega)$ zerlegen wir V zunächst gemäß Lemma 3.11. Daß der in $\mathcal{B}_s^{q,q+1}$ befindliche Teil stetig nach $\mathbf{W}_s^{n+1,q,q+1}(\Omega)$ abgebildet wird, wurde soeben gezeigt. Der Anteil in $\mathcal{A}_s^{q,q+1}$ wird beim Lösen lediglich durch $-\omega$ geteilt. Damit ist die Behauptung für $n+1$ gezeigt. ♦

Zusammen mit (3.3) folgt daraus

Korollar 3.13 *Ist $s \geq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$ und $\Xi \in \mathcal{C}_b^n(\overline{\Omega})$ im Falle $n \geq 1$, so ist die Abbildung*

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{C}\setminus\mathbb{R} & \longrightarrow & B(\mathbf{W}_s^{n,q,q+1}(\Omega), \mathbf{W}_s^{n,q,q+1}(\Omega))\\ \omega & \longmapsto & H_\omega\end{array}$$

holomorph, und für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\right)^m H_\omega = m!H_\omega^{m+1} \quad .$$

Nun leiten wir ein Resultat her, das uns im weiteren Verlauf in die Lage versetzen wird, Daten aus $\mathbf{W}_s^{0,q,q+1}(\Omega)$ durch solche zu ersetzen, die zum einen eine gewisse Regularität besitzen und zum anderen in $\overset{\circ}{R}{}_s^q(\Omega) \times \mu^{-1}\overset{\circ}{R}{}_s^{q+1}(\Omega)$ liegen. Die übrigen entstehenden Terme sind dabei jeweils so geartet, daß die Lösung sofort angegeben werden kann, ebenfalls in $\mathbf{W}_s^{0,q,q+1}(\Omega)$ liegt und allen denkbaren Anforderungen (siehe Anhang B) bezüglich der Asymptotik gerecht wird.

Im ersten Schritt konstruieren wir aus gegebenen Daten V eine neue rechte Seite, die ihre Regularität aus der von ZV bezieht. Dabei müssen zunächst die Eingangsdaten ebenfalls noch eine Randbedingung erfüllen, allerdings nur in der zweiten Komponente. Die Grundidee, zunächst eine Lösung zu einer Frequenz mit einem gewissen Abstand von der reellen Achse zu bilden und daraus eine neue rechte Seite mit höherer Regularität zu bilden, wird auch in [22] verwendet.

Lemma 3.14 *Seien $J \in \mathbb{N}$, $\Xi \in \mathcal{C}_b^J(\overline{\Omega})$, $s \geq 0$, $\omega \in Q \in \mathcal{Q}_\infty^\alpha$ mit einem $\alpha \in [0, 1]$ und $V \in \varepsilon^{-1}D_s^q(\Omega) \times \mu^{-1}\overset{\circ}{R}{}_s^{q+1}(\Omega)$ mit $ZV \in \mathbf{W}_s^{J-1,q-1,q+2}(\Omega)$. Dann gibt es ein Φ aus*

$\left(\mathring{R}^q_s(\Omega)\times\mu^{-1}\mathring{R}^{q+1}_s(\Omega)\right)\cap\mathbf{W}^{1,q,q+1}_s(\Omega)$ und ein $\widetilde{V}$ aus $\left(\mathring{R}^q_s(\Omega)\times\mu^{-1}\mathring{R}^{q+1}_s(\Omega)\right)\cap\mathbf{W}^{J,q,q+1}_s(\Omega)$ mit

$$V=\widetilde{V}+(M-\omega)\Phi \tag{3.11}$$
$$\|\Phi\|_{0,s,\Omega}\prec|\omega|^{-1}\|V\|_{0,s,\Omega} \tag{3.12}$$
$$\|\Phi\|_{1,s,\Omega}\prec\|V\|_{0,s,\Omega}+|\omega|^{-1}\|ZV\|_{0,s,\Omega} \tag{3.13}$$

sowie für alle $0\le j\le J$

$$\|\widetilde{V}\|_{j,s,\Omega}\prec|\omega|^j\|V\|_{0,s,\Omega}+\sum_{l=0}^{j-1}|\omega|^l\|ZV\|_{j-1-l,s,\Omega}\quad, \tag{3.14}$$

wobei die Abschätzungen gleichmäßig bezüglich ω und V gelten.

Weiterhin hängt Φ in $\mathbf{W}^{1,q,q+1}_s(\Omega)$, $\widetilde{V}$ in $\mathbf{W}^{J,q,q+1}_s(\Omega)$ stetig von ω ab.

Beweis:
Wir setzen $\widetilde{\omega}:=(1+2\,\mathrm{i})\Re\omega$. Dann ist

$$\Re\widetilde{\omega}=\Re\omega\le\Im(\widetilde{\omega}-\omega)<\Im\widetilde{\omega}=2\Re\omega\quad\textit{sowie}\quad\Re\omega<|\omega|<|\widetilde{\omega}|=\sqrt{5}\Re\omega\quad,$$

so daß sich alle diese Terme nach oben und unten durch $|\omega|$ abschätzen lassen.

Nun beginnen wir eine Rekursion, in deren erstem Schritt wir $\Phi_1=H_{\widetilde{\omega}}V$ setzen. Bei jedem Schritt kann man sich davon überzeugen, daß die verwendeten Abbildungen stetig in ω sind. Wegen (2.38) ist $\Phi_1\in\varepsilon^{-1}D^q_s(\Omega)\times\mu^{-1}\mathring{R}^{q+1}_s(\Omega)$ und folglich Lemma 3.8 zufolge $\Phi_1\in\mathbf{W}^{1,q,q+1}_s(\Omega)$. Desweiteren sei

$$V_1:=V-(M-\omega)\Phi_1=(\omega-\widetilde{\omega})\Phi_1\quad,$$

womit wir die folgenden ersten Abschätzungen erhalten: Es gilt nach Lemma 3.12

$$\|\Phi_1\|_{0,s,\Omega}\prec|\mathrm{Im}\;\widetilde{\omega}|^{-1}\|V\|_{0,s,\Omega}\prec|\omega|^{-1}\|V\|_{0,s,\Omega}$$

sowie nach (3.5)

$$\|ZV_1\|_{0,s,\Omega}=|\omega-\widetilde{\omega}|\|Z\Phi_1\|_{0,s,\Omega}=\frac{|\omega-\widetilde{\omega}|}{|\widetilde{\omega}|}\|ZV\|_{0,s,\Omega}\prec\|ZV\|_{0,s,\Omega}$$

und nach Lemma 3.8

$$\begin{aligned}\|\Phi_1\|_{1,s,\Omega}&\prec\|\Phi_1\|_{0,s,\Omega}+\|M\Phi_1\|_{0,s,\Omega}+\|Z\Phi_1\|_{0,s,\Omega}\\&\prec(1+|\widetilde{\omega}|)\|\Phi_1\|_{0,s,\Omega}+\|V\|_{0,s,\Omega}+|\widetilde{\omega}|^{-1}\|ZV\|_{0,s,\Omega}\\&\prec\|V\|_{0,s,\Omega}+|\omega|^{-1}\|ZV\|_{0,s,\Omega}\quad.\end{aligned}$$

Weiterhin ergeben sich daraus analoge Abschätzungen für V_1.

Jetzt wählen wir rekursiv $\Phi_{k+1}=H_{\widetilde{\omega}}V_k$ und $V_{k+1}:=V_k-(M-\omega)\Phi_{k+1}=(\omega-\widetilde{\omega})\Phi_{k+1}$. Außerdem sei $V_0:=V$. Wie im ersten Schritt erhalten wir dann die Abschätzungen

$$\|\Phi_{k+1}\|_{0,s,\Omega}\prec|\omega|^{-1}\|V_k\|_{0,s,\Omega}\quad.$$

Damit ist $\Phi_k\in\left(\varepsilon^{-1}D^q_s(\Omega)\times\mu^{-1}\mathring{R}^{q+1}_s(\Omega)\right)\cap\mathbf{W}^{k,q,q+1}_s(\Omega)$ für $1\le k\le J$, und wir können jeweils für alle $0\le j\le k$ zeigen:

$$\|V_k\|_{j,s,\Omega}\prec|\omega|\|\Phi_k\|_{j,s,\Omega}\prec|\omega|^j\|V_0\|_{0,s,\Omega}+\sum_{l=0}^{j-1}|\omega|^l\|ZV_0\|_{j-1-l,s,\Omega} \tag{3.15}$$

und

$$\|ZV_k\|_{j,s,\Omega}\prec|\omega|\|Z\Phi_k\|_{j,s,\Omega}\prec\|ZV_0\|_{j,s,\Omega}\quad.$$

Für $k=1$ wurden diese Aussagen bereits gezeigt. Für $j=0$ und alle zulässigen k sind sie leicht ersichtlich. Es folgt ein Induktionsschritt von $j\le k$ nach $j+1\le k+1$. Wir schließen

$$\|Z\Phi_{k+1}\|_{j,s,\Omega}\prec|\omega|^{-1}\|ZV_k\|_{j,s,\Omega}\prec|\omega|^{-1}\|ZV_0\|_{j,s,\Omega}$$

und

$$\begin{aligned}\|\Phi_{k+1}\|_{j+1,s,\Omega}&\prec\|\Phi_{k+1}\|_{0,s,\Omega}+\|M\Phi_{k+1}\|_{j,s,\Omega}+\|Z\Phi_{k+1}\|_{j,s,\Omega}\\&\prec\|\Phi_{k+1}\|_{0,s,\Omega}+|\omega|\|\Phi_{k+1}\|_{j,s,\Omega}+\|V_k\|_{j,s,\Omega}+|\omega|^{-1}\|ZV_0\|_{j,s,\Omega}\\&\prec|\omega|^{-1}\|V_0\|_{0,s,\Omega}+|\omega|^j\|V_0\|_{0,s,\Omega}+\sum_{l=0}^{j-1}|\omega|^l\|ZV_0\|_{j-1-l,s,\Omega}+|\omega|^{-1}\|ZV_0\|_{j,s,\Omega}\\&\prec|\omega|^j\|V_0\|_{0,s,\Omega}+|\omega|^{-1}\sum_{l=0}^{j}|\omega|^l\|ZV_0\|_{(j+1)-1-l,s,\Omega}\quad.\end{aligned}$$

Setzen wir nun $\widetilde{V}:=V_J$, so ist (3.15) mit $k=J$ gerade die Behauptung (3.14). Weiterhin folgen aus

$$V=V_J+\sum_{j=1}^{J}(M-\omega)\Phi_j$$

die Behauptungen (3.12) und (3.13) für $\Phi:=\sum_{j=1}^J\Phi_j$ mittels (3.15). ♦

Wir halten fest, daß sich in dem Spezialfall $V\in\mathcal{B}^{q,q+1}_s$ etwas bessere Abschätzungen ergeben:

Korollar 3.15 *Unter den Voraussetzungen und mit den Bezeichnungen von Lemma 3.14 sind die Abbildungen*

$$\begin{array}{ccccc}Q\times\mathcal{B}^{q,q+1}_s&\subset&Q\times\mathbf{W}^{0,q,q+1}_s(\Omega)&\longrightarrow&\mathbf{W}^{1,q,q+1}_s(\Omega)\\&&(\omega,V)&\longmapsto&\widetilde{V}\\Q\times\mathcal{B}^{q,q+1}_s&\subset&Q\times\mathbf{W}^{0,q,q+1}_s(\Omega)&\longrightarrow&\mathbf{W}^{1,q,q+1}_s(\Omega)\\&&(\omega,V)&\longmapsto&\Phi\end{array}$$

stetig.

Beweis:
Für $V \in \mathcal{B}_s^{q,q+1}$ gilt nach Lemma 3.11

$$\|ZV\|_{0,s,\Omega} \prec \|V\|_{0,s,\Omega} \quad .$$

Somit erhalten wir die Stetigkeit nach (3.13) und (3.14). ♦

Diesen Effekt nutzen wir nun aus, um mit Hilfe der angegebenen Dekomposition von $\mathbf{W}_s^{0,q,q+1}(\Omega)$ für beliebige Daten aus diesem Raum eine ähnliche Zerlegung wie in Lemma 3.14 herzuleiten.

Hilfssatz 3.16 *Ist $J \in \mathbb{N}$, $\Xi \in \mathcal{C}_b^J(\overline{\Omega})$, $\omega \in Q \in \mathcal{Q}_\infty^\alpha$ mit $\alpha \in [\,0\,,\,1\,]$ und $V \in \mathbf{W}_s^{0,q,q+1}(\Omega)$ mit $s \geq 0$, so gibt es ein $\widetilde{V} \in \big(\mathring{R}_s^q(\Omega) \times \mu^{-1}\mathring{R}_s^{q+1}(\Omega)\big) \cap \mathbf{W}_s^{J,q,q+1}(\Omega)$, ein $A \in \mathcal{A}_s^{q,q+1}$ und ein $\Phi \in \big(\mathring{R}_s^q(\Omega) \times \mu^{-1}\mathring{R}_s^{q+1}(\Omega)\big) \cap \mathbf{W}_s^{1,q,q+1}(\Omega)$ mit*

$$V = \widetilde{V} + A + (M-\omega)\Phi \tag{3.16}$$
$$\|A\|_{0,s,\Omega} \prec \|V\|_{0,s,\Omega} \tag{3.17}$$
$$\|\Phi\|_{0,s,\Omega} \prec |\omega|^{-1}\|V\|_{0,s,\Omega} \tag{3.18}$$
$$\|\Phi\|_{1,s,\Omega} \prec \|V\|_{0,s,\Omega} \tag{3.19}$$

sowie für alle $0 \leq j \leq J$

$$\|\widetilde{V}\|_{j,s,\Omega} \prec |\omega|^j\|V\|_{0,s,\Omega} \quad , \tag{3.20}$$

wobei die Abschätzungen gleichmäßig bezüglich ω und V gelten.

Beweis:
Die Konstruktion der Felder erfolgt wieder über eine Rekursion. Als erstes wird $V_0 := V$ gesetzt. Danach zerlegen wir für k von 0 bis $J-1$ jeweils V_k gemäß Lemma 3.11 in

$$V_k = V_k^A + V_k^B \quad \text{mit} \quad V_k^A \in \mathcal{A}_s^{q,q+1} \quad , \quad V_k^B \in \mathcal{B}_s^{q,q+1}$$

und dann V_k^B nach Lemma 3.14 in

$$V_k^B = V_{k+1} + (M-\omega)\Phi_{k+1} \quad .$$

Mit Hilfe der genannten Lemmata ergeben sich $V_k \in \big(\mathring{R}_s^q(\Omega) \times \mu^{-1}\mathring{R}_s^{q+1}(\Omega)\big) \cap \mathbf{W}_s^{k,q,q+1}(\Omega)$ für $k \geq 1$, V_k^A, V_k^B, $ZV_k^B \in \mathbf{W}_s^{k,q,q+1}(\Omega)$ und $\Phi_k \in \big(\mathring{R}_s^q(\Omega) \times \mu^{-1}\mathring{R}_s^{q+1}(\Omega)\big) \cap \mathbf{W}_s^{1,q,q+1}(\Omega)$ sowie die Abschätzungen

$$\|V_k\|_{j,s,\Omega} + \|V_k^A\|_{j,s,\Omega} + \|V_k^B\|_{j,s,\Omega} \prec |\omega|^j\|V_0\|_{0,s,\Omega} \quad \text{für alle} \quad 0 \leq j \leq k \tag{3.21}$$
$$\|ZV_k^B\|_{j,s,\Omega} \prec \|V_k^B\|_{j,s,\Omega} \quad \text{für alle} \quad 0 \leq j \leq k \tag{3.22}$$
$$\|\Phi_k\|_{0,s,\Omega} \prec |\omega|^{-1}\|V_0\|_{0,s,\Omega}$$
$$\|\Phi_k\|_{1,s,\Omega} \prec \|V_0\|_{0,s,\Omega} \quad .$$

Wir zeigen (3.21) durch eine vollständige Induktion – die anderen Behauptungen ergeben sich dann leicht aus den Lemmata 3.11 und 3.14. Namentlich folgt die zweite Ungleichung (3.22) aus (3.9), die letzten beiden aus (3.12), (3.13) und (3.22).

Seien alle für ein $k \leq J-1$ gemachten Behauptungen gezeigt. Nach Lemma 3.14 gilt dann $V_{k+1} \in \big(\mathring{R}_s^q(\Omega) \times \mu^{-1}\mathring{R}_s^{q+1}(\Omega)\big) \cap \mathbf{W}_s^{k+1,q,q+1}(\Omega)$ und weiter nach (3.14) für alle $0 \leq j \leq k+1$

$$\|V_{k+1}\|_{j,s,\Omega} \prec |\omega|^j\|V_k^B\|_{0,s,\Omega} + \sum_{l=0}^{j-1}|\omega|^l\|ZV_k^B\|_{j-1-l,s,\Omega}$$

Die rechte Seite schätzen wir mittels (3.21) und (3.22) durch $|\omega|^j\|V_0\|_{0,s,\Omega}$ ab. Damit ist (3.21) für $k+1$ gezeigt.

Schließlich setzen wir

$$\widetilde{V} := V_J \quad , \quad A := \sum_{j=0}^{J-1} V_k^A \quad \text{und} \quad \Phi := \sum_{j=1}^{J}\Phi_j \quad ,$$

und der Satz ist bewiesen. ♦

3.1.3 Der Lösungsbegriff

Im Falle reeller Frequenzen ω kann im allgemeinen weder von der Lösbarkeit des Problems (3.2) noch von der Eindeutigkeit gegebenenfalls existierender Lösungen ausgegangen werden. Um dennoch die Existenz von Lösungen sicherzustellen, stellen wir stärkere Integrierbarkeitsbedingungen an die Daten und suchen die Lösung in einem größeren Raum von Feldern mit schlechteren Integrierbarkeitseigenschaften. Die Vorgehensweise entspricht in weiten Teilen der in [19], woher wir auch die folgende erste Version eines Lösungsbegriffes bei reellen Frequenzen übernehmen.

Definition 3.17 *Es seien $V \in \mathbf{W}_s^{0,q,q+1}(\Omega)$, $s > \frac{1}{2}$, und $\omega \in \mathbb{R}_+$. Ein Paar von Feldern $U = (E,H)$ löst $\widetilde{\mathcal{M}}_{\Omega,\Xi}(V,\omega)$ genau dann, wenn*

(i) $U \in \mathring{R}_t^q(\Omega) \times D_t^{q+1}(\Omega)$ *mit einem* $t < -\frac{1}{2}$

(ii) $(M-\omega)U = V$ *in* Ω

(iii) $SU \in \mathbf{W}_\sigma^{0,q,q+1}(\Omega)$ *mit einem* $\sigma > -\frac{1}{2}$.

Die Integrierbarkeitsbedingung für den mit Hilfe des wiederum in Matrizenschreibweise definierten Operators

$$S = \begin{bmatrix} \mathrm{id} & \widehat{T} \\ \widehat{R} & \mathrm{id} \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

gebildeten Term SU verallgemeinert die klassische Silver-Müller-Strahlungsbedingung zur Maxwell-Gleichung. Durch sie wird die Eindeutigkeit von Lösungen bis auf Eigenlösungen gewährleistet (siehe Lemma 3.31). Daher sprechen wir in der Situation von Definition 3.17 auch von U als einer „Strahlungslösung“ von $\widetilde{\mathcal{M}}_{\Omega,\Xi}(V,\omega)$.

Wie man aus (2.27) und (2.28) ersieht, hängt S mit dem Kommutator von M mit radialsymmetrischen Funktionen φ zusammen:

$$C_{M,\varphi} = M\varphi - \varphi M = \mathrm{i}\,(\partial_r\varphi)\Xi^{-1}(S - \mathrm{id}) \quad . \tag{3.24}$$

Abgesehen von Spezialfällen (siehe [2]) ist die Existenz von Eigenwerten in $\mathbb{R}_+$ nicht auszuschließen, woraus eine weitere Bedingung an die Lösungen erwächst. Weiterhin sind Eigenlösungen auch als Daten problematisch, denn für rechte Seiten, die Eigenlösungen sind, können gleichmäßige Resolventenabschätzungen in der Nähe des entsprechenden Eigenwertes nicht erreicht werden. Dies sieht man leicht, weil sich in solchen Fällen die Lösung zu echt komplexen Frequenzen sofort angeben läßt.

Bemerkung 3.18 *Ist $V \in \mathring{R}^q(\Omega) \times D^{q+1}(\Omega)$ und $(M - \widehat{\omega})V = 0$ mit einem $\widehat{\omega} \in \mathbb{R}$, so gilt $H_\omega V = \frac{1}{\widehat{\omega}-\omega}V$ für $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.*

Damit ist klar, daß Eigenlösungen zu solchen Eigenwerten, die im Abschluß der betrachteten Menge von Frequenzen liegen, als rechte Seiten von der Betrachtung ausgeschlossen werden müssen. Wir beschäftigen uns daher zunächst mit den Eigenfeldern und tragen einige bekannte Ergebnisse zusammen.

Definition 3.19 *Für $Q \subset \mathbb{C}$ sei*

$$\mathcal{N}(\Omega,\Xi,Q) = \big\{U \quad \big| \quad U \text{ löst } \widetilde{\mathcal{M}}_{\Omega,\Xi}(0,\omega) \text{ für ein } \omega \in Q\big\} \quad . \tag{3.25}$$

Unter gewissen Umständen sind die Elemente dieses Raumes mit beliebigen Gewichten integrierbar, entsprechen also insbesondere gerade den Eigenlösungen des eingangs definierten selbstadjungierten Maxwell-Operators. Ein wichtiges Hilfsmittel ist in diesem Zusammenhang die „lokale Maxwell-Kompaktheitseigenschaft“, die wir nun definieren.

Definition 3.20 *Ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^N$ hat die „Maxwell-Kompaktheitseigenschaft“, im folgenden als MKE bezeichnet, wenn für alle $q \in \{0,\dots,N\}$ die Einbettungen*

$$\mathring{R}^q(G) \cap D^q(G) \hookrightarrow W^{0,q}(G)$$

kompakt sind. G hat die „lokale Maxwell-Kompaktheitseigenschaft“, oder LMKE, wenn für alle $q \in \{0,\dots,N\}$ die Einbettungen

$$\mathring{R}^q(G) \cap D^q(G) \hookrightarrow W^{0,q}_{\mathrm{loc}}(\overline{G})$$

kompakt sind.

Ursprünglich wurde die MKE über die Einbettung von $\mathring{R}^q(G) \cap D^q(G)$ in $W^{1,q}(\Omega)$ (Gaffneysche Ungleichung, vgl. Lemma 3.6) auf den Rellichschen Einbettungssatz zurückgeführt, wie z. B. bei Leis ([12, Satz 8.6]). Dazu werden relativ glatte Ränder benötigt. Für beschränkte Gebiete mit nicht glatten Rändern hat zuerst Weck im Falle sogenannter „Kegelgebiete“ ([28]) die Eigenschaft nachgewiesen. Weitere Resultate stammen z. B. von Picard (Lipschitz-Gebiete, [21]) sowie im klassischen Fall von Weber (Gebiete mit Kegeleigenschaft, [26]) Costabel (Lipschitz-Gebiete, [4]) und Witsch (Spitzenbedingung, [32]). Die bisher größte Klasse von beschränkten Gebieten im klassischen Fall kann mit dem Beweis aus [22] behandelt werden.

Bemerkung 3.21 *Sei $G \subset \mathbb{R}^N$ ein Gebiet und ε eine zulässige Transformation.*

1. *G hat die MKE bzw. die LMKE genau dann, wenn für alle $q \in \{0,\dots,N\}$ die Einbettungen*

   $$\mathring{R}^q(G) \cap \varepsilon^{-1}D^q(G) \hookrightarrow W^{0,q}(G) \quad \textit{bzw.} \quad W^{0,q}_{\mathrm{loc}}(\overline{G})$$

   kompakt sind. Die Eigenschaften sind also unabhängig von ε. Äquivalenz besteht auch zu der Aussage, daß die Einbettungen

   $$\varepsilon^{-1}\mathring{R}^q(G) \cap D^q(G) \hookrightarrow W^{0,q}(G) \quad \textit{bzw.} \quad W^{0,q}_{\mathrm{loc}}(\overline{G})$$

   kompakt sind.

2. *Beschränkte Gebiete mit Kegeleigenschaft (s. [28]) und beschränkte Lipschitz-Gebiete (s. [21]) haben die MKE.*

3. *Ist G ein Außengebiet mit $\mathbb{R}^N \setminus G \subset U(R_0)$, so hat G die LMKE, falls $G \cap U(R_1)$ für ein $R_1 > R_0$ die MKE hat.*

Dazu einige Erläuterungen:

Zu *1.*: Zur ersten Äquivalenz siehe [22, 3.16]. Der Beweis dort bezieht sich auf den klassischen Fall $N = 3$, $q = 1$, läßt sich aber ohne Änderung auf den allgemeinen Fall übertragen. Die zweite Äquivalenz gilt, da ε^{-1} ebenfalls eine zulässige Transformation ist und φ genau dann in $\varepsilon^{-1}\mathring{R}^q(G) \cap D^q(G)$ liegt, wenn $\varepsilon\varphi$ Element von $\mathring{R}^q(G) \cap \varepsilon D^q(G)$ ist.

Zu *2.*: Insbesondere wird dadurch der Fall glatter beschränkter Gebiete abgedeckt.

Zu *3.*: Folgt aus *2.* Insbesondere betrifft dies den Fall glatter Außengebiete.

Für Gebiete mit LMKE zitieren wir aus [19, Satz 4.29]:

Lemma 3.22 *Gilt $\widehat{\Xi} = \mathcal{O}(|x|^{-\tau})$ mit einem $\tau > 1$ und hat Ω die LMKE, so ist für alle $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ der Raum $\mathcal{N}(\Omega,\Xi,\{\omega\})$ endlich-dimensional und Teilmenge von*

$$\bigcap_{t\in\mathbb{R}} \big(\mathring{R}^q_t(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}{}_0D^q_t(\Omega)\big) \times \big(D^{q+1}_t(\Omega) \cap \mu^{-1}{}_0\mathring{R}^{q+1}_t(\Omega)\big) \quad .$$

Die Eigenwerte häufen sich nicht in $\mathbb{R}$.

Wir treffen daher für den Rest der Arbeit die folgende Vereinbarung:

Generalvoraussetzung C *Es gelte $\widehat{\hat{\Xi}} = \mathcal{O}(|x|^{-\tau})$ mit einem $\tau > 1$, und Ω habe die LMKE.*

Wie erwähnt stellt dabei letzteres für glatte Gebiete keine zusätzliche Voraussetzung dar. Nun können wir, aufbauend auf Definition 3.17, die endgültige Form des Lösungsbegriffs festlegen.

Definition 3.23 *Als Lösung (oder Strahlungslösung) von $\mathcal{M}_{\Omega,\Xi}(V,\omega)$ für $\omega \in \mathbb{R}_+$ und $V \in \mathbf{W}_s^{0,q,q+1}(\Omega)$ mit einem $s > \frac{1}{2}$ bezeichnen wir ein Paar von Feldern U mit*

(i) U *löst* $\widetilde{\mathcal{M}}_{\Omega,\Xi}(V,\omega)$

(ii) $\langle U\,,\,\Phi\rangle_{\Omega,\Xi} = 0$ *für alle* $\Phi \in \mathcal{N}(\Omega,\Xi,\{\omega\})$.

Wie das folgende Lemma zeigt, bleibt die Orthogonalität zu Eigenfeldern beim Lösen erhalten. Damit werden durch die hier im Vergleich zu Definition 3.17 zusätzlich aufgenommene vierte Bedingung gleichzeitig die zulässigen Daten auf solche eingeschränkt, die senkrecht auf den Eigenlösungen stehen.

Lemma 3.24 *Seien $t \in \mathbb{R}$, $U \in \overset{\circ}{R}{}_t^q(\Omega) \times D_t^{q+1}(\Omega)$, $\omega_1 \in \mathbb{C}$, $\omega_2 \in \mathbb{R}$, $\omega_1 \neq \omega_2$ und $V = (M - \omega_1)U$. Dann gilt*

$$\bigwedge_{\Phi \in \mathcal{N}(\Omega,\Xi,\{\omega_2\})} \langle U\,,\,\Phi\rangle_{\Omega,\Xi} = 0$$

genau dann, wenn dies auch für V richtig ist.

Beweis:
Sei $\Phi \in \mathcal{N}(\Omega,\Xi,\{\omega_2\})$. Wegen $\Xi M = \widehat{M}$ gilt dann

$$\langle \Xi V\,,\,\Phi\rangle_\Omega = \langle \Xi(M-\omega_1)U\,,\,\Phi\rangle_\Omega = \langle U\,,\,\Xi(M-\overline{\omega}_1)\Phi\rangle_\Omega = \langle \Xi U\,,\,(\omega_2-\overline{\omega}_1)\Phi\rangle_\Omega \quad .$$

Da $\overline{\omega}_1 \neq \omega_2$ ist, folgt daraus

$$\langle \Xi U\,,\,\Phi\rangle_\Omega = 0 \iff \langle \Xi V\,,\,\Phi\rangle_\Omega = 0$$

und somit die Behauptung. ♦

Daraus ersehen wir auch, daß Eigenfelder zu verschiedenen Eigenwerten zueinander bezüglich $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{0,\Omega,\Xi}$ orthogonal sind. Mit $\omega_1 = 0$ ergibt sich insbesondere, daß die Menge $\mathcal{A}_s^{q,q+1}$ für alle $s \geq 0$ und $\omega_2 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ Teil von $\mathcal{N}(\Omega,\Xi,\{\omega_2\})^{\perp_\Xi}$ ist, dem bezüglich des mit Ξ gewichteten Skalarproduktes in ${}_\Xi\mathbf{W}^{0,q,q+1}(\Omega)$ orthogonalen Komplement von $\mathcal{N}(\Omega,\Xi,Q)$. Somit erhalten wir das

Korollar 3.25 *Für $Q \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$ und $s \geq 0$ bilden die Projektoren von $\mathbf{W}_s^{0,q,q+1}(\Omega)$ auf $\mathcal{A}_s^{q,q+1}$ und $\mathcal{B}_s^{q,q+1}$ den Raum $\mathcal{N}(\Omega,\Xi,Q)^{\perp_\Xi}$ in sich ab.*

Wir benötigen ebenfalls eine Aussage über die Erhaltung von Integrierbarkeitseigenschaften bei der Projektion längs der Eigenräume. Dazu legen wir fest:

Definition 3.26 *Mit $\mathcal{P}_Q$ bezeichnen wir den Orthogonalprojektor in ${}_\Xi\mathbf{W}^{0,q,q+1}(\Omega)$ auf $\mathcal{N}(\Omega,\Xi,Q)^{\perp_\Xi}$.*

Die Generalvoraussetzung C verschafft uns nun das folgende Stetigkeitsresultat.

Lemma 3.27 *Für $Q \subset \mathbb{C}$ und $s \geq 0$ gilt*

$$\|\mathcal{P}_Q V\|_{0,s,\Omega} \prec \|V\|_{0,s,\Omega} \tag{3.26}$$

gleichmäßig bezüglich $V \in \mathbf{W}_s^{0,q,q+1}(\Omega)$, falls Q nur endlich viele Eigenwerte zu M enthält.

Beweis:
Unter den vorliegenden Umständen ist offensichtlich $\mathcal{P}_Q V \in \mathbf{W}_s^{0,q,q+1}(\Omega)$ nach Lemma 3.22. Der Operator

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{P}_Q^{(s)} : & \mathbf{W}_s^{0,q,q+1}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbf{W}_s^{0,q,q+1}(\Omega) \\ & V & \longmapsto & \mathcal{P}_Q V \end{array}$$

ist abgeschlossen, weil $\mathcal{P}_Q$ abgeschlossen ist, und somit auch stetig nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen. ♦

Wiederum mit Hilfe von Lemma 3.22 folgt:

Bemerkung 3.28 *Die Bedingung endlich vieler Eigenwerte in Lemma 3.27 ist insbesondere dann erfüllt, wenn Q beschränkt ist. Siehe jedoch hierzu auch Lemma 3.34.*

3.2 Existenz und Eindeutigkeit der Strahlungslösung

In diesem Abschnitt konstruieren wir die Strahlungslösung zu $\mathcal{M}_{\Omega,\Xi}(V,\omega)$ mit ω aus endlichen Intervallen in $\mathbb{R}_+$ und erhalten erste Abschätzungen, die später als Grundlage für die Abschätzungen von $H_\omega^k V$ – ebenfalls in endlichen Intervallen – dienen.

Für den Nachweis der Existenz der Strahlungslösungen verwenden wir das Prinzip der Grenzabsorption, das sich zu einer Standardmethode zur Konstruktion von Lösungen zeitharmonischer Probleme zu elliptischen Differentialoperatoren bei reellen Frequenzen entwickelt hat. Hierfür geht man von einer A-priori-Abschätzung in gewichteten Räumen für Lösungen zu nicht-reellen Frequenzen aus und nutzt ein geeignetes Kompaktheitsresultat, um die Konvergenz gegen eine Lösung von $\mathcal{M}_{\Omega,\Xi}(V,\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$, zu zeigen.

Aus Satz 4.9 in [19] folgt:

Lemma 3.29 (A-priori-Abschätzung) *Für alle $Q \in \mathcal{Q}$ und $s \in (\frac{1}{2}, 1)$ gibt es ein $\sigma > -\frac{1}{2}$, so daß gleichmäßig bezüglich $\omega \in Q$ und $V \in \mathbf{W}_s^{0,q,q+1}(\Omega)$ die Abschätzung*

$$\|H_\omega V\|_{0,-s,\Omega} + \|SH_\omega V\|_{0,\sigma,\Omega} \prec \|V\|_{0,s,\Omega} + \|H_\omega V\|_{0,s-2,\Omega} \tag{3.27}$$

gilt.

Für die Anwendung des Prinzips der Grenzabsorption dient uns der folgende Kompaktheitssatz, der durch die LMKE ermöglicht wird.

Lemma 3.30 *Es sei ν eine zulässige Transformation, $0 \leq q \leq N$, $\widehat{t} \in \mathbb{R}$ und $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $W_{\mathrm{loc}}^{0,q}(\Omega)$, die für alle $t < \widehat{t}$ in $\nu^{-1}\overset{\circ}{R}{}_t^q(\Omega) \cap D_t^q(\Omega)$ beschränkt ist. Dann besitzt $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge, die für alle $t < \widehat{t}$ in $W_t^{0,q}(\Omega)$ konvergiert.*

Dasselbe gilt, falls $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $t < \widehat{t}$ in $\overset{\circ}{R}{}_t^q(\Omega) \cap \nu^{-1}D_t^q(\Omega)$ beschränkt ist.

Beweis:
Durch die LMKE (Bemerkung 3.21 (*1.*)) können wir sukzessive Teilfolgen $(\Phi_n^{(l)})_{n\in\mathbb{N}}$, mit $l \in \mathbb{N}_0$, auswählen, die in $\mathbf{W}^{0,q,q+1}(\Omega_{2^l R_0})$ konvergieren. Die Diagonalfolge $(\Phi_n^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert damit in $\mathbf{W}^{0,q,q+1}(\Omega_R)$ für jedes $R \geq R_0$. Wir bezeichnen diese Folge wieder mit $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Es gilt für $R \geq R_0$, $t < \widehat{t}$ und $0 < \delta < \widehat{t} - t$

$$\begin{aligned}\|\Phi_n - \Phi_m\|_{0,t,\Omega} &\leq \max\{1, \rho(R)^t\}\|\Phi_n - \Phi_m\|_{0,0,\Omega_R} + \rho(R)^{-\delta}\|\Phi_n - \Phi_m\|_{0,t+\delta,A(R)}\\ &\leq \max\{1, \rho(R)^t\}\|\Phi_n - \Phi_m\|_{0,0,\Omega_R} + \rho(R)^{-\delta}(\|\Phi_n\|_{0,t+\delta,\Omega} + \|\Phi_m\|_{0,t+\delta,\Omega}) \quad .\end{aligned}$$

Indem man nun zunächst R und anschließend m und n genügend groß wählt, zeigt sich, daß $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $W_t^{0,q}(\Omega)$ ist. ♦

Damit kann nun der Übergang zu reellen Frequenzen vollzogen werden.

Lemma 3.31 (Grenzabsorption) *Für jedes $s \in (\frac{1}{2}, 1)$ und $Q \in \mathcal{Q}$ läßt sich die Abbildung*

$$\begin{array}{ccc} Q \times \mathbf{W}_s^{0,q,q+1}(\Omega) \cap \mathcal{N}(\Omega, \Xi, \overline{Q})^{\perp_\Xi} & \longrightarrow & \mathbf{W}_{-s}^{0,q,q+1}(\Omega) \\ (\omega, V) & \longmapsto & H_\omega V \end{array}$$

stetig nach $\overline{Q} \times \mathbf{W}_s^{0,q,q+1}(\Omega) \cap \mathcal{N}(\Omega, \Xi, \overline{Q})^{\perp_\Xi}$ fortsetzen. Die Fortsetzung bezeichnen wir wieder mit H_ω. Für $\omega \in \mathbb{R}_+$ ist $H_\omega V$ eine Strahlungslösung von $\mathcal{M}_{\Omega,\Xi}(V, \omega)$, und es gilt mit einem $\sigma > -\frac{1}{2}$

$$\|H_\omega V\|_{0,-s,\Omega} + \|SH_\omega V\|_{0,\sigma,\Omega} \prec \|V\|_{0,s,\Omega} + \|H_\omega V\|_{0,s-2,\Omega}$$

gleichmäßig bzgl. $V \in \mathbf{W}_s^{0,q,q+1}(\Omega)$ und $\omega \in \overline{Q}$.

An dieser Stelle erzielen wir ein Verbesserung gegenüber Korollar 4.33 in [19], da die Daten weder Differenzierbarkeitsanforderungen genügen noch Randbedingungen erfüllen müssen. Dies wird durch die Zerlegung aus Definition 3.10 ermöglicht.

Beweis:
Wir betrachten eine Folge von Feldern $V_n \in \mathbf{W}_s^{0,q,q+1}(\Omega) \cap \mathcal{N}(\Omega, \Xi, \overline{Q})^{\perp_\Xi}$ mit $V_n \to V$ in $\mathbf{W}_s^{0,q,q+1}(\Omega)$ und eine Folge $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Q mit $\omega_n \to \omega \in \mathbb{C}$ für ein festes $s \in (\frac{1}{2}, 1)$. Nur für den Fall $\omega \in \mathbb{R}_+$ ist etwas zu zeigen.

Da für Elemente von $\mathcal{A}_s^{q,q+1}$ das Lösen einfach ein Teilen durch $-\omega$ ist, kann o.B.d.A. nach Korollar 3.25 davon ausgegangen werden, daß die V_n Elemente von $\mathcal{B}_s^{q,q+1} \cap \mathcal{N}(\Omega, \Xi, \overline{Q})^{\perp_\Xi}$ sind.

Wir setzen $U_n = H_{\omega_n} V_n$ und betrachten zuerst den Fall, daß die Folge der U_n in $\mathbf{W}_{-s}^{0,q,q+1}(\Omega)$ beschränkt ist. Dann gilt nach Lemma 3.29 für alle $s' \in (\frac{1}{2}, s)$

$$\|U_n\|_{0,-s',\Omega} \prec \|V_n\|_{0,s',\Omega} + \|U_n\|_{0,s'-2,\Omega} \leq \|V_n\|_{0,s,\Omega} + \|U_n\|_{0,-s,\Omega} \tag{3.28}$$

gleichmäßig bzgl. $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also für alle $t < -\frac{1}{2}$ in $\mathbf{W}_t^{0,q,q+1}(\Omega)$ beschränkt. Man beachte, daß die Konstante in dieser Abschätzung, wie auch in den folgenden Abschätzungen, nicht von der Wahl der Folgen abhängt. Wegen

$$MU_n = V_n + \omega_n U_n \quad \text{und} \quad ZU_n = -\frac{1}{\omega_n} ZV_n$$

sowie der Konvergenz der ω_n sind auch für alle $t < -\frac{1}{2}$ die Folgen $(MU_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbf{W}_t^{0,q,q+1}(\Omega)$ und $(ZU_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbf{W}_t^{0,q-1,q+2}(\Omega)$ beschränkt. Da außerdem

$$U_n \in \left(\overset{\circ}{R}{}_t^q(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}D_t^q(\Omega)\right) \times \left(D_t^{q+1}(\Omega) \cap \mu^{-1}\overset{\circ}{R}{}_t^{q+1}(\Omega)\right)$$

ist, kann Lemma 3.30 auf beide Komponenten nacheinander angewendet werden und liefert die Existenz einer Teilfolge $U_{\pi(n)}$, die für alle $t < -\frac{1}{2}$ in $\mathbf{W}_t^{0,q,q+1}(\Omega)$, insbesondere also in $\mathbf{W}_{-s}^{0,q,q+1}(\Omega)$, gegen ein U konvergiert. Für alle $R > R_0$ und $\sigma \in \mathbb{R}$ gilt folglich

$$\lim_{n\to\infty} \|SU_{\pi(n)}\|_{0,\sigma,\Omega_R} = \|SU\|_{0,\sigma,\Omega_R} \quad .$$

Nach Lemma 3.29 erhalten wir mit einem $\sigma > -\frac{1}{2}$ gleichmäßig bzgl. $R > R_0$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\|U_{\pi(n)}\|_{0,-s,\Omega} + \|SU_{\pi(n)}\|_{0,\sigma,\Omega_R} \prec \|V_{\pi(n)}\|_{0,s,\Omega} + \|U_{\pi(n)}\|_{0,s-2,\Omega} \quad . \tag{3.29}$$

Nun läßt man zunächst n und anschließend R gegen ∞ laufen. Wegen $-s$, $s - 2 < -\frac{1}{2}$ konvergieren alle vier Terme, und es ergibt sich $SU \in \mathbf{W}_\sigma^{0,q,q+1}(\Omega)$ sowie

$$\|U\|_{0,-s,\Omega} + \|SU\|_{0,\sigma,\Omega} \prec \|V\|_{0,s,\Omega} + \|U\|_{0,s-2,\Omega} \quad . \tag{3.30}$$

Da

$$\widehat{M}U_{\pi(n)} = \Xi(\omega_{\pi(n)}U_{\pi(n)} + V_{\pi(n)})$$

in $\mathbf{W}^{0,q,q+1}_{-s}(\Omega)$ konvergiert, liegt U in $\overset{\circ}{R}{}^{q}_{-s}(\Omega) \times D^{q+1}_{-s}(\Omega)$ und erfüllt die Differentialgleichung $(M-\omega)U = V$. Die Eigenfelder sind nach Lemma 3.22 Elemente von $\mathbf{W}^{\infty,q,q+1}_{\infty}(\Omega)$. Folglich gilt nach Lemma 3.24 für alle $\Phi \in \mathcal{N}(\Omega, \Xi, \overline{Q})$

$$0 = \langle \rho^{-s}\Xi U_{\pi(n)} \, , \, \rho^s \Phi \rangle_\Omega \to \langle \rho^{-s}\Xi U \, , \, \rho^s\Phi \rangle_\Omega = \langle U \, , \, \Phi \rangle_{\Omega,\Xi} \quad .$$

Damit ist U eine Strahlungslösung von $\mathcal{M}_{\Omega,\Xi}(V,\omega)$.

Um zu zeigen, daß U unabhängig ist von der Wahl der Folgen und Teilfolgen, seien $(V'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\omega'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $V'_n \to V$ und $\omega'_n \to \omega$, für die Teilfolgen existieren, so daß $H_{\omega'_{\pi'(n)}} V'_{\pi'(n)}$ gegen ein entsprechendes U' in derselben Weise konvergiert wie oben. Dann ist $U - U'$ eine Eigenlösung und gleichzeitig in $\mathcal{N}(\Omega, \Xi, \overline{Q})^{\perp_\Xi}$, folglich also $U - U' = 0$. Speziell folgt damit, da jede Teilfolge eine gegen U konvergente Teilfolge besitzt, daß sogar die ganze Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Grenzwert U hat.

Nun ist noch der Fall auszuschließen, daß eine Teilfolge von $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbf{W}^{0,q,q+1}_{-s}(\Omega)$ beliebig anwächst. Unter der Annahme, daß es eine solche Teilfolge gibt, sei diese o.B.d.A. wieder mit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet. Wir setzen dann $\widetilde{V}_n := V_n \|U_n\|^{-1}_{0,-s,\Omega}$ und $\widetilde{U}_n := U_n \|U_n\|^{-1}_{0,-s,\Omega}$. Indem wir nun wie oben verfahren, erhalten wir die Konvergenz der $\widetilde{U}_n$ in $\mathbf{W}^{0,q,q+1}_{-s}(\Omega)$ gegen ein $\widetilde{U}$, das dann ein Eigenfeld zu ω ist, da $(\widetilde{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null konvergiert. Daraus, zusammen mit der Voraussetzung $V_n \in \mathcal{N}(\Omega, \Xi, \overline{Q})^{\perp_\Xi}$, folgt $\widetilde{U} = 0$, im Widerspruch zu $\|\widetilde{U}_n\|_{0,-s,\Omega} = 1$. ♦

Wir können nun das Hauptergebnis dieses Kapitels beweisen:

Satz 3.32 *Für jedes $Q \in \mathcal{Q}$ und $s \in (\frac{1}{2}\, , 1)$ läßt sich die Abbildung*

$$\begin{array}{ccccc} Q \times \left(\mathbf{W}^{0,q,q+1}_{s}(\Omega) \cap \mathcal{N}(\Omega,\Xi,\overline{Q})^{\perp_\Xi}\right) & \subset & Q \times \mathbf{W}^{0,q,q+1}_{s}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbf{W}^{0,q,q+1}_{-s}(\Omega) \\ & & (\omega, V) & \longmapsto & H_\omega V \end{array}$$

stetig nach $\overline{Q} \times \left(\mathbf{W}^{0,q,q+1}_{s}(\Omega) \cap \mathcal{N}(\Omega,\Xi,\overline{Q})^{\perp_\Xi}\right)$ fortsetzen. $H_\omega V$ ist für $\omega \in \mathbb{R}_+$ eine Strahlungslösung von $\mathcal{M}_{\Omega,\Xi}(V,\omega)$, und es gilt mit einem $\sigma > -\frac{1}{2}$ die Abschätzung

$$\|H_\omega V\|_{0,-s,\Omega} + \|SH_\omega V\|_{0,\sigma,\Omega} \prec \|V\|_{0,s,\Omega}$$

gleichmäßig bzgl. $V \in \mathbf{W}^{0,q,q+1}_{s}(\Omega)$ und $\omega \in \overline{Q}$.

Beweis:
Zu zeigen ist nur die gegenüber Lemma 3.31 verschärfte Abschätzung.

Für jedes $V \in \mathbf{W}^{0,q,q+1}_{s}(\Omega) \cap \mathcal{N}(\Omega,\Xi,\overline{Q})^{\perp_\Xi}$ ist die Funktion $\omega \mapsto \|H_\omega V\|_{0,-s,\Omega}$ stetig und daher auf der kompakten Menge $\overline{Q}$ beschränkt. Folglich erhalten wir nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

$$\|H_\omega V\|_{0,-s,\Omega} \prec \|V\|_{0,s,\Omega} \quad .$$

Andererseits ergibt sich aus Lemma 3.31 die bezüglich ω und V gleichmäßige Gültigkeit der Abschätzung

$$\|SH_\omega V\|_{0,\sigma,\Omega} \prec \|V\|_{0,s,\Omega} + \|H_\omega V\|_{0,-s,\Omega} \quad .$$

Beide Ungleichungen zusammen liefern die Behauptung. ♦

3.3 Die Asymptotik bei hohen Frequenzen

Um die Ergebnisse der Grenzabsorption dahingehend zu erweitern, daß beliebig große reelle Frequenzen betrachtet werden können, wird eine entsprechend angepaßte A-priori-Abschätzung benötigt, die allerdings bis zum jetzigen Zeitpunkt für $1 \le q \le N-2$ in keinem anderen als dem Ganzraumfall mit $\Xi = \mathrm{id}$ (s. Anhang A) bewiesen werden konnte.

Da das Kapitel 4 so angelegt ist, daß auch für $Q \in \mathcal{Q}^\alpha_\infty$ Abschätzungen erzielt werden, sofern die gleichgradige Beschränktheit von H_ω für $\omega \in Q$ gewährleistet ist, stellen wir die entsprechende Eigenschaft hier per Definition zur Verfügung.

Definition 3.33 *Das Paar (Ω, Ξ) hat die „Maxwell-Hochfrequenz-Beschränktheitseigenschaft" oder MHBE, falls mit einem $\alpha \in [\,0\,,1\,]$ und einem $\gamma < 0$ das Folgende richtig ist: Für alle $s \in (\frac{1}{2}\, , 1)$ und $Q \in \mathcal{Q}^\alpha_\infty$ gilt die Abschätzung*

$$\|H_\omega V\|_{0,-s,\Omega} \prec \|V\|_{0,s,\Omega} + |\omega|^\gamma \|H_\omega V\|_{0,s-2,\Omega} \tag{3.31}$$

gleichmäßig bezüglich $\omega \in Q$ und $V \in \mathbf{W}^{0,q,q+1}_{s}(\Omega)$.

Die Gültigkeit dieser Eigenschaft erlaubt uns gleichzeitig, mit dem Projektor $\mathcal{P}_Q$ zu arbeiten, denn:

Lemma 3.34 *Die MHBE impliziert, daß der Maxwell-Operator nur endlich viele Eigenwerte hat.*

Beweis:
Sei nämlich $s \in (\frac{1}{2}\, , 1)$, $\gamma < 0$, $(\widehat{\omega}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ mit $\widehat{\omega}_n \to \infty$ sowie $V_n \in \overset{\circ}{R}{}^q_s(\Omega) \times D^{q+1}_s(\Omega)$ mit $\|V_n\|_{0,s,\Omega} = 1$ und $(M - \widehat{\omega}_n)V_n = 0$. Wir setzen $\omega_n := \widehat{\omega}_n + \frac{i}{n}\|V_n\|_{0,-s,\Omega}$. Dann ist $H_{\omega_n} V_n = \frac{1}{\widehat{\omega}_n - \omega_n} V_n$. Gilt die Abschätzung (3.31) für V_n, so folgt

$$\begin{aligned} \|V_n\|_{0,-s,\Omega} &\prec |\widehat{\omega}_n - \omega_n| \|V_n\|_{0,s,\Omega} + |\omega_n|^\gamma \|V_n\|_{0,s-2,\Omega} \\ &= \frac{1}{n}\|V_n\|_{0,-s,\Omega} + |\omega_n|^\gamma \|V_n\|_{0,-s,\Omega} \quad . \end{aligned}$$

Damit muß V_n für $n \ge \widetilde{n}$ mit einem genügend großen $\widetilde{n}$ verschwinden, im Widerspruch zur Annahme. ♦

Genauso wie Lemma 3.31, das Analogon für den Fall beschränkter Frequenzen, beweist man das folgende Lemma. Es ist lediglich bei den Abschätzungen (3.28) und (3.29) die Definition 3.33 bzw. die Bedingung (3.31) anstelle von Lemma 3.29 zu verwenden und die Asymptotik bzgl. ω in die Abschätzungen (3.29) und (3.30) einzubauen.

Lemma 3.35 (Grenzabsorption) *Hat (Ω, Ξ) die MHBE mit α und γ wie in Definition 3.33, so läßt sich für jedes $Q \in \mathcal{Q}^\alpha_\infty$ und jedes $s \in (\frac{1}{2}, 1)$ die Abbildung*

$$\begin{array}{ccc} Q \times \left(\mathbf{W}^{0,q,q+1}_s(\Omega) \cap \mathcal{N}(\Omega, \Xi, \overline{Q})^{\perp_\Xi}\right) & \longrightarrow & \mathbf{W}^{0,q,q+1}_{-s}(\Omega) \\ (\omega, V) & \longmapsto & H_\omega V \end{array}$$

stetig nach $\overline{Q} \times \left(\mathbf{W}^{0,q,q+1}_s(\Omega) \cap \mathcal{N}(\Omega, \Xi, \overline{Q})^{\perp_\Xi}\right)$ fortsetzen. Dabei ist $H_\omega V$ für $\omega \in \mathbb{R}_+$ eine Strahlungslösung von $\mathcal{M}_{\Omega,\Xi}(V, \omega)$, und es gilt

$$\|H_\omega V\|_{0,-s,\Omega} \prec \|V\|_{0,s,\Omega} + |\omega|^\gamma \|H_\omega V\|_{0,s-2,\Omega} \tag{3.32}$$

gleichmäßig bzgl. $V \in \mathbf{W}^{0,q,q+1}_s(\Omega)$ und $\omega \in \overline{Q}$.

Man erhält schließlich ein zu Satz 3.32 analoges Ergebnis.

Lemma 3.36 *Hat (Ω, Ξ) die MHBE mit α wie in Definition 3.33 und ist $Q \in \mathcal{Q}^\alpha_\infty$, so läßt sich die Abbildung*

$$\begin{array}{ccc} Q \times \left(\mathbf{W}^{0,q,q+1}_s(\Omega) \cap \mathcal{N}(\Omega, \Xi, \overline{Q})^{\perp_\Xi}\right) & \longrightarrow & \mathbf{W}^{0,q,q+1}_{-s}(\Omega) \\ (\omega, V) & \longmapsto & H_\omega V \end{array}$$

für jedes $s \in (\frac{1}{2}, 1)$ stetig nach $\overline{Q} \times \left(\mathbf{W}^{0,q,q+1}_s(\Omega) \cap \mathcal{N}(\Omega, \Xi, \overline{Q})^{\perp_\Xi}\right)$ fortsetzen. $H_\omega V$ ist für $\omega \in \mathbb{R}_+$ eine Strahlungslösung von $\mathcal{M}_{\Omega,\Xi}(V, \omega)$, und gleichmäßig bzgl. $\omega \in \overline{Q}$ und $V \in \mathbf{W}^{0,q,q+1}_s(\Omega) \cap \mathcal{N}(\Omega, \Xi, \overline{Q})^{\perp_\Xi}$ gilt

$$\|H_\omega V\|_{0,-s,\Omega} \prec \|V\|_{0,s,\Omega} \quad .$$

Beweis:
Wieder ist gegenüber Lemma 3.35 nur die verschärfte Abschätzung zu zeigen. Nach Ungleichung (3.32) gibt es $\gamma < 0$ und eine Konstante $C > 0$, so daß

$$(1 - C|\omega|^\gamma)\|H_\omega V\|_{0,-s,\Omega} \leq C\|V\|_{0,s,\Omega} \quad .$$

Damit ist die angestrebte Abschätzung für

$$C|\omega|^\gamma \leq \frac{1}{2} \iff |\omega| \geq \left(\frac{1}{2C}\right)^{\frac{1}{\gamma}} =: \widehat{\lambda}$$

erreicht. Für $|\omega| \leq \widehat{\lambda}$ kann verfahren werden wie im Beweis von Satz 3.32. ♦

Kapitel 4

Differenzierbarkeit des Lösungsoperators zum Maxwell-Problem

Im Mittelpunkt dieses Kapitels stehen die Iterierten von H_ω. Für diese wird gleichfalls die Fortsetzbarkeit nach $\mathbb{R}_+$ nachgewiesen, zudem wird das Ergebnis durch gleichmäßige Abschätzungen auf geeigneten Teilmengen von $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}_+$ vervollständigt.

Über den allgemeinen Fall beschränkter Frequenzen hinaus wird dabei unter Voraussetzung der MHBE auch der Fall von Frequenzen mit beliebig großem Realteil behandelt. Dadurch treten in den angegebenen Abschätzungen unter anderem in den Sätzen 4.10 und 4.11 Potenzen von $|\omega|$ auf. Da im beschränkten Fall $|\omega| \sim 1$ gilt, können diese Faktoren hier weggelassen werden.

Neben den bisher vorgestellten Werkzeugen dient uns vor allem eine Zerlegung von H^k_ω, wie sie auch in [20] verwendet wird.

4.1 Regularitätsbetrachtungen

Für den Nachweis der Regularität der Lösungen bedienen wir uns einer Serie von Räumen, deren Elemente die erforderlichen Eigenschaften für eine iterierte Anwendung von Lemma 3.8 mitbringen. Die Grundlage bildet dabei die

Definition 4.1 *Seien $l \in \mathbb{N}_0$ und $s \in \mathbb{R}$. Mit $U^l_s(\Omega)$ bezeichnen wir die Menge*

$$\left\{\Phi \in \mathbf{W}^{0,q,q+1}_s(\Omega) \;\middle|\; \bigwedge_{0\leq j\leq l-1} M^j\Phi \in \overset{\circ}{R}{}^q_s(\Omega) \times D^{q+1}_s(\Omega)\right\} \tag{4.1}$$

und versehen diesen Raum mit der Norm

$$\|\Phi\|_{U^l_s(\Omega)} := \sum_{j=0}^{l} \|M^j\Phi\|_{0,s,\Omega} \quad . \tag{4.2}$$

Da Lösungen von $\mathcal{M}_{\Omega,\Xi}(V,\omega)$ mit $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ eindeutig sind, erhalten wir:

Lemma 4.2 *Mit $l \in \mathbb{N}$ und $s \geq 0$ gilt für jedes $V \in U_s^l(\Omega)$ und alle $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$*

$$H_\omega(M-\omega)V = V \quad .$$

Aufbauend auf Definition 4.1 führen wir nun weitere Räume ein.

Definition 4.3 *Für $s \in \mathbb{R}_+$, $k \in \mathbb{N}$ und $l, n \in \mathbb{N}_0$ seien*

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_s^{k,l,0} :=& U_s^l(\Omega)\\
\mathcal{V}_s^{k,l,n} :=& \big\{V \in U_s^l(\Omega) \ \big| \ V \in \varepsilon^{-1} D_{-s}^q(\Omega) \times \mu^{-1} \overset{\circ}{R}{}_{-s}^{q+1}(\Omega)\\
& \quad \text{und } ZV \in \mathbf{W}_{-s}^{n-1,q-1,q+2}(\Omega)\big\} \qquad \text{für } 1 \leq n \leq k-1\\
\mathcal{V}_s^{k,l,n} :=& \big\{V \in U_s^l(\Omega) \cap \mathbf{W}_{-s}^{n-k,q,q+1}(\Omega) \ \big| \ V \in \varepsilon^{-1} D_{-s}^q(\Omega) \times \mu^{-1} \overset{\circ}{R}{}_{-s}^{q+1}(\Omega)\\
& \quad \text{und } ZV \in \mathbf{W}_{-s}^{n-1,q-1,q+2}(\Omega)\big\} \qquad \text{für } n \geq k
\end{aligned}$$

mit den Normen

$$\begin{aligned}
\|V\|_{\mathcal{V}_s^{k,l,0}} &:= \|V\|_{U_s^l(\Omega)}\\
\|V\|_{\mathcal{V}_s^{k,l,n}} &:= \|V\|_{U_s^l(\Omega)} + \|ZV\|_{n-1,-s,\Omega} \qquad \text{für } 1 \leq n \leq k-1\\
\|V\|_{\mathcal{V}_s^{k,l,n}} &:= \|V\|_{U_s^l(\Omega)} + \|V\|_{n-k,-s,\Omega} + \|ZV\|_{n-1,-s,\Omega} \qquad \text{für } k \leq n.
\end{aligned}$$

Wir stellen zunächst fest, das diese Räume auf verschiedene Weisen ineinander geschachtelt sind:

Bemerkung 4.4 *Es bestehen die folgenden stetigen Einbettungen:*

- $\mathcal{V}_s^{k,l,n_2} \hookrightarrow \mathcal{V}_s^{k,l,n_1}$ *für* $n_1 \leq n_2$
- $\mathcal{V}_s^{k,l_2,n} \hookrightarrow \mathcal{V}_s^{k,l_1,n}$ *für* $l_1 \leq l_2$
- $\mathcal{V}_s^{k_1,l,n} \hookrightarrow \mathcal{V}_s^{k_2,l,n}$ *für* $k_1 \leq k_2$
- $\mathcal{V}_s^{k+m,l,n+m} \hookrightarrow \mathcal{V}_s^{k,l,n}$ *für* $m \in \mathbb{N}_0$.

Nun leiten wir ein Regularitätsresultat für Daten aus den eben definierten Räumen her. Die dazugehörigen Abschätzungen werden dabei direkt so angelegt, daß sie als Werkzeug für den Beweis der Hochfrequenzasymptotik dienen können.

Lemma 4.5 *Sei $Q \in \mathcal{Q} \cup \mathcal{Q}_\infty^\alpha$, $k \in \mathbb{N}$, $s > k - \frac{1}{2}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Im Falle $n \geq 1$ sei weiterhin $\Xi \in \mathcal{C}_b^n(\overline{\Omega})$.*

1. *Für alle $l \in \mathbb{N}_0$ und $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ bildet H_ω^k den Raum $\mathcal{V}_s^{k,l,n}$ stetig nach $\mathbf{W}_{-s}^{n,q,q+1}(\Omega)$ ab.*

2. *Ist für alle $1 \leq \kappa \leq k$ die Abschätzung*

$$\|H_\omega^\kappa V\|_{0,-s,\Omega} \prec \|V\|_{0,s,\Omega} \tag{4.3}$$

gleichmäßig bezüglich $\omega \in Q$ und $V \in \mathbf{W}_s^{0,q,q+1}(\Omega) \cap \mathcal{N}(\Omega,\Xi,\overline{Q})^{\perp_\Xi}$ richtig, so gilt auch für alle $l \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq l \leq n+k$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|H_\omega^k V\|_{n,-s,\Omega} \prec& |\omega|^{n-l} \|V\|_{U_s^l(\Omega)}\\
&+ \sum_{j=l+1}^{n-k} |\omega|^{n-k-j} \|V\|_{j,-s,\Omega} + \sum_{\substack{j=l-k-1\\ j\geq 0}}^{n-1} |\omega|^{n-1-k-j} \|ZV\|_{j,-s,\Omega}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

gleichmäßig bezüglich $\omega \in Q$ und $V \in \mathcal{V}_s^{k,l,n} \cap \mathcal{N}(\Omega,\Xi,\overline{Q})^{\perp_\Xi}$.

Beweis:
Sei $A(k,l,n)$ die Aussage, daß für alle $s > k - \frac{1}{2}$, $\omega \in Q$ und $V \in \mathcal{V}_s^{k,l,n} \cap \mathcal{N}(\Omega,\Xi,\overline{Q})^{\perp_\Xi}$ die iterierte Lösung $H_\omega^k V$ in $\mathbf{W}_{-s}^{n,q,q+1}(\Omega)$ liegt und die Abschätzung (4.4) gleichmäßig bezüglich ω und V gilt. Wir wollen $A(k,l,n)$ für k, l und n wie in *2.* zeigen.

Um daraus die Behauptung *1.* zu erhalten, müssen zwei zusätzliche Überlegungen angestellt werden. Einerseits erhält man die Behauptung für $n < l-k$, da $\mathcal{V}_s^{k,l,n}$ stetig in $\mathcal{V}_s^{k,0,n}$ eingebettet ist. Auf der anderen Seite fügen sich Eigenfelder problemlos ein, weil für $V \in \mathcal{N}(\Omega,\Xi,\widehat{\omega})$ und $\omega \neq \widehat{\omega}$ zunächst $H_\omega V = \frac{1}{\widehat{\omega}-\omega} V$ und damit $H_\omega^k V = \frac{1}{(\widehat{\omega}-\omega)^k} V$ gilt.

Wir führen die folgende Schreibweise ein:

$$A(k,l,\cdot) :\Longleftrightarrow \bigwedge_{n \geq \max\{0,l-k\}} A(k,l,n) \quad .$$

In analoger Weise soll die Gültigkeit für alle zulässigen Werte von k und l dargestellt werden. Nach Voraussetzung (4.3) gilt $A(\cdot,0,0)$. Wir beweisen $A(\cdot,\cdot,\cdot)$ durch vollständige Induktion.

Dabei wird an vielen Stellen das Lemma 3.8 verwendet, was wir nun durch eine weitere technische Vorbemerkung vorbereiten wollen. Ist $U \in \overset{\circ}{R}{}_t^q(\Omega) \times D_t^{q+1}(\Omega)$ für ein $t \in \mathbb{R}$, so liegt MU nach (2.38) in $\varepsilon^{-1} D_t^q(\Omega) \times \mu^{-1} \overset{\circ}{R}{}_t^{q+1}(\Omega)$. Insbesondere gilt für $V \in \mathbf{W}^{0,q,q+1}(\Omega)$

$$H_\omega V \in \varepsilon^{-1} D_t^q(\Omega) \times \mu^{-1} \overset{\circ}{R}{}_t^{q+1}(\Omega) \iff V \in \varepsilon^{-1} D_t^q(\Omega) \times \mu^{-1} \overset{\circ}{R}{}_t^{q+1}(\Omega)$$

und damit auch

$$H_\omega^k V \in \varepsilon^{-1} D_t^q(\Omega) \times \mu^{-1} \overset{\circ}{R}{}_t^{q+1}(\Omega) \iff V \in \varepsilon^{-1} D_t^q(\Omega) \times \mu^{-1} \overset{\circ}{R}{}_t^{q+1}(\Omega) \quad .$$

Es kann also Lemma 3.8 angewendet werden

(a) auf $H_\omega^k V$, $k \in \mathbb{N}$, falls V Element von $\varepsilon^{-1} D_t^q(\Omega) \times \mu^{-1} \overset{\circ}{R}{}_t^{q+1}(\Omega)$ ist, insbesondere also für $V \in \mathcal{V}_{-t}^{k,l,n}$ mit $n \geq 1$, $t < 0$;

(b) auf $M^j V$, $1 \le j \le l-1$, falls $V \in U_s^l(\Omega)$ mit $l \ge 2$; Wegen $ZM = 0$ ist dann $MV \in U_s^{l-1}(\Omega) \cap \mathbf{W}_s^{l-1,q,q+1}(\Omega)$ und

$$\|MV\|_{l-1,s,\Omega} \prec \|MV\|_{U_s^{l-1}(\Omega)} \le \|V\|_{U_s^l(\Omega)} \quad ;$$

(c) auf V, falls $V \in \left(\varepsilon^{-1} D_t^q(\Omega) \times \mu^{-1} \overset{\circ}{R}{}_t^{q+1}(\Omega)\right) \cap U_t^1(\Omega)$ ist. Für $V \in \mathcal{V}_s^{k,l,n}$ mit $l,n \ge p \ge 1$ gilt speziell: $V \in \mathbf{W}_{-s}^{p,q,q+1}(\Omega)$ und

$$\|V\|_{p,-s,\Omega} \prec \|V\|_{U_{-s}^p(\Omega)} + \|ZV\|_{p-1,-s,\Omega} \quad .$$

Von dieser Möglichkeit wird im Beweis von nun an Gebrauch gemacht, ohne noch einmal die einzelnen erfüllten Bedingungen hervorzuheben. Ebenfalls weisen wir in den einzelnen Schritten nicht auf die benötigte Regularität von ε und μ hin.

Nach Lemma 3.24 liegt jeweils $H_\omega^j V$ in $\mathcal{N}(\Omega, \Xi, \overline{Q})^{\perp_\Xi}$, wenn dies für V gilt. Falls $V \in U_s^1(\Omega)$ gilt, ist wiederum nach Lemma 3.24 mit $\omega_1 = 0$ auch $MV \in \mathcal{N}(\Omega, \Xi, \overline{Q})^{\perp_\Xi}$.

Für $V \in U_s^l(\Omega)$, $l \ge 1$, gilt nach Lemma 4.2

$$H_\omega^{k+1} V = \frac{1}{\omega}(H_\omega^{k+1} MV - H_\omega^k V) \tag{4.5}$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Wir wollen nun zunächst $A(1,\cdot,\cdot)$ zeigen. Dies geschieht durch eine Induktion über l, deren Stufen wiederum jeweils durch Induktionen über n bewiesen werden. Sei $s > \frac{1}{2}$. Der Induktionsanfang für $l = 0$ und $n = 0$ gilt nach Voraussetzung und Definition von $U_s^0(\Omega)$. Den Induktionsschritt bezüglich n zeigen wir der Einfachheit halber gleich für beliebiges $l \ge 0$. Ist $A(1,l,n)$ für ein $n \ge l-1$ richtig, so können wir, um $A(1,l,n+1)$ zu erhalten, nach Lemma 3.8 folgern:

$$\begin{aligned}\|H_\omega V\|_{n+1,-s,\Omega} &\prec \|H_\omega V\|_{0,-s,\Omega} + \|MH_\omega V\|_{n,-s,\Omega} + \|ZH_\omega V\|_{n,-s,\Omega} \\ &\prec |\omega| \|H_\omega V\|_{n,-s,\Omega} + \|V\|_{n,-s,\Omega} + \|ZH_\omega V\|_{n,-s,\Omega} \quad .\end{aligned}$$

Der erste Term kann jetzt mit Hilfe von $A(1,l,n)$ abgeschätzt werden. Der Term $\|V\|_{n,-s,\Omega}$ fügt sich in die erste Summe mit dem Index $j = n$ ein, und der letzte Term paßt wegen (3.5) ebenfalls mit dem Index $j = n$ in die zweite Summe. Damit ist $A(1,l,n+1)$ gezeigt.

Nun führen wir den Induktionsschritt bezüglich l durch. Dazu muß nur $A(1,l+1,l)$ noch aus $A(1,l,\cdot)$ gefolgert werden, denn der Induktionsschritt für n wurde ja bereits demonstriert. Aus (4.5) leiten wir ab

$$\|H_\omega V\|_{l,-s,\Omega} \prec |\omega|^{-1}(\|H_\omega MV\|_{l,-s,\Omega} + \|V\|_{l,-s,\Omega}) \quad . \tag{4.6}$$

Ist nun $V \in \mathcal{V}_s^{1,l+1,l}$, so liegt MV im Falle $l \ge 1$ nach (b) in $\mathcal{V}_s^{1,l,l}$, und wir können $A(1,l,l)$ auf den ersten Term auf der rechten Seite anwenden. Der zweite Term wird mit Hilfe von

(c) mit $p = l$ abgeschätzt. Schließlich fassen wir beide Anteile zusammen und nutzen aus, daß

$$\|MV\|_{U_s^l(\Omega)} + \|V\|_{U_{-s}^l(\Omega)} \prec \|V\|_{U_s^{l+1}(\Omega)}$$

ist. Im Falle $l = 0$ hingegen können wir $A(1,0,0)$ für MV sowie die Beziehung

$$\|V\|_{0,-s,\Omega} = \|V\|_{U_{-s}^0(\Omega)}$$

anwenden, um die Abschätzung (4.6) weiterzuführen. Damit ist der Schritt von l nach $l+1$ geschafft, und wir haben $A(1,\cdot,\cdot)$ bewiesen.

Nun zum Induktionsschritt von k nach $k+1$. Sei $s > k + \frac{1}{2}$. Nach Voraussetzung gilt $A(k+1,0,0)$. Wieder zeigen wir den Induktionsschritt bezüglich n sofort für alle $l \ge 0$. Für $n \ge \max\{0, l-k-1\}$ kann man $A(k+1,l,n+1)$ aus im Laufe der Induktion zuvor Bewiesenem wie folgt schließen: Lemma 3.8 liefert

$$\|H_\omega^{k+1} V\|_{n+1,-s,\Omega} \prec |\omega| \|H_\omega^{k+1} V\|_{n,-s,\Omega} + \|H_\omega^k V\|_{n,-s,\Omega} + \|ZH_\omega^{k+1} V\|_{n,-s,\Omega} \quad .$$

Der erste Summand kann nun mit $A(k+1,l,n)$ abgeschätzt werden, der zweite im Falle $n = l-k-1$ mit $A(k,l-1,n)$, wobei jeweils die erste Summe wegfällt, und sonst mit $A(k,l,n)$. Für den letzten Term benutzen wir (3.5) und erhalten $A(k+1,l,n+1)$. Damit ist der Nachweis von $A(k+1,0,\cdot)$ erbracht.

Für jedes l fehlt nun zum Beweis von $A(k+1,l+1,\cdot)$ noch die Aussage $A(k+1,l+1,n_0)$ mit $n_0 = \max\{0, l+1-(k+1)\}$. Im Falle $n_0 = 0$ liefert (4.5)

$$\|H_\omega^{k+1} V\|_{0,-s,\Omega} \prec |\omega|^{-1}(\|H_\omega^{k+1} MV\|_{0,-s,\Omega} + \|H_\omega^k V\|_{0,-s,\Omega}) \quad ,$$

wobei sich der erste Term mittels $A(k+1,l,0)$, der zweite mittels $A(k,l,0)$ abschätzen läßt. Um den Fall $n_0 = l-k \ge 1$ zu zeigen, leiten wir zunächst durch Iteration von (4.5) die Abschätzung

$$\|H_\omega^{k+1} V\|_{l-k,-s,\Omega} \prec \sum_{j=1}^{k+1} |\omega|^{-j} \|H_\omega^{k+2-j} MV\|_{l-k,-s,\Omega} + |\omega|^{-k-1} \|V\|_{l-k,-s,\Omega}$$

her. Für den letzten Summanden verwenden wir wieder (c) mit $p = l-k$. Andererseits liegt MV nach (b) in $\mathcal{V}_s^{k+2-j,l+2-j,l-k}$ für $2 \le j \le k+1$ sowie in $\mathcal{V}_s^{k+1,l,l-k}$. Daher können wir die übrigen Summanden für $2 \le j \le k+1$ mit $A(k+2-j,l+2-j,l-k)$ und für $j = 1$ mit $A(k+1,l,l-k)$ abschätzen – wobei wieder jeweils beide Summen aus (4.4) wegfallen – und so den Fall $n_0 = l-k$ zu Ende bringen.

Somit folgt $A(k+1,\cdot,\cdot)$ aus $A(k,\cdot,\cdot)$, und $A(\cdot,\cdot,\cdot)$ ist gezeigt. ♦

4.2 Differenzierbarkeit bei reellen Frequenzen

Nun können wir daran gehen, die stetige Fortsetzbarkeit nach $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ von $H_\omega^k V$ für Daten V aus $\mathcal{V}_s^{k,l,n}$ zeigen.

Satz 4.6 *Sei $\Xi \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ und $Q \in \mathcal{Q}$ sowie $k \in \mathbb{N}$, $s > k - \frac{1}{2}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Im Falle $k \geq 2$ gelte $\Xi \in \mathcal{C}_b^1(\overline{\Omega})$ und $\partial_r \Xi = \mathcal{O}(|x|^{-\widetilde{\tau}})$ mit einem $\widetilde{\tau} > k$, im Falle $n \geq 1$ sei $\Xi \in \mathcal{C}_b^n(\overline{\Omega})$. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{array}{rcccc} Q \times \left(\mathcal{V}_s^{k,0,n} \cap \mathcal{N}(\Omega,\Xi,\overline{Q})^{\perp_\Xi}\right) & \subset & Q \times \mathcal{V}_s^{k,0,n} & \longrightarrow & \mathbf{W}_{-s}^{n,q,q+1}(\Omega) \\ & & (\omega, V) & \longmapsto & H_\omega^k V \end{array} \tag{4.7}$$

stetig nach $(\overline{Q} \cap \mathbb{R}) \times \left(\mathcal{V}_s^{k,0,n} \cap \mathcal{N}(\Omega,\Xi,\overline{Q})^{\perp_\Xi}\right) \subset \mathbb{R}_+ \times \mathcal{V}_s^{k,0,n}$ fortsetzbar. Ebenso kann die Abbildung

$$\begin{array}{rcccc} Q \times \left(\mathbf{W}_s^{n,q,q+1}(\Omega) \cap \mathcal{N}(\Omega,\Xi,\overline{Q})^{\perp_\Xi}\right) & \subset & Q \times \mathbf{W}_s^{n,q,q+1}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbf{W}_{-s}^{n,q,q+1}(\Omega) \\ & & (\omega, V) & \longmapsto & H_\omega^k V \end{array} \tag{4.8}$$

stetig nach $(\overline{Q} \cap \mathbb{R}) \times \left(\mathbf{W}_s^{n,q,q+1}(\Omega) \cap \mathcal{N}(\Omega,\Xi,\overline{Q})^{\perp_\Xi}\right) \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbf{W}_s^{n,q,q+1}(\Omega)$ fortgesetzt werden.

Zunächst ein Lemma zur Reduktion auf den Fall $n = 0$.

Lemma 4.7 *Seien $Q \in \mathcal{Q}$, $K \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$ und $\Xi \in \mathcal{C}_b^m(\overline{\Omega})$. Ist die Abbildung*

$$\begin{array}{rcccc} Q \times \left(\mathbf{W}_s^{0,q,q+1}(\Omega) \cap \mathcal{N}(\Omega,\Xi,\overline{Q})^{\perp_\Xi}\right) & \subset & Q \times \mathbf{W}_s^{0,q,q+1}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbf{W}_{-s}^{0,q,q+1}(\Omega) \\ & & (\omega, V) & \longmapsto & H_\omega^k V \end{array} \tag{4.9}$$

stetig nach $(\overline{Q} \cap \mathbb{R}_+) \times \left(\mathbf{W}_s^{0,q,q+1}(\Omega) \cap \mathcal{N}(\Omega,\Xi,\overline{Q})^{\perp_\Xi}\right) \subset \mathbb{R} \times \mathbf{W}_s^{0,q,q+1}(\Omega)$ fortsetzbar für alle $1 \leq k \leq K$ und $s > k - \frac{1}{2}$, so ist auch die Abbildung (4.7) für alle $1 \leq k \leq K$, $s > k - \frac{1}{2}$ und $0 \leq n \leq m$ stetig nach $(\overline{Q} \cap \mathbb{R}_+) \times \left(\mathbf{W}_s^{0,q,q+1}(\Omega) \cap \mathcal{N}(\Omega,\Xi,\overline{Q})^{\perp_\Xi}\right)$ fortsetzbar.

Beweis:
Wir beweisen die Fortsetzbarkeit durch eine vollständige Induktion über k. Sowohl für den Induktionsanfang als auch für den Induktionsschritt wird dazu eine innere Induktion über n durchgeführt, wobei die Induktionsanfänge jeweils trivial sind, da für $n = 0$ unabhängig von k nichts zu zeigen ist. Wir nehmen an, daß die Behauptung für $k = 1$ und ein $n < m$ richtig ist und zeigen sie für $n + 1$. V_j konvergiere in $\mathcal{V}_s^{1,0,n+1}$ mit einem $s > \frac{1}{2}$ gegen V, und $\omega_j \in \mathbb{C}_+$ konvergiere gegen $\omega \in \mathbb{R}_+$. Es ist

$$M H_{\omega_j} V_j = V_j + \omega_j H_{\omega_j} V_j \quad ,$$

wobei V_j nach Voraussetzung und $H_{\omega_j} V_j$ nach Induktionsannahme in $\mathbf{W}_{-s}^{n,q,q+1}(\Omega)$ konvergiert. Nach (3.5) konvergiert auch $Z H_{\omega_j} V_j$ in demselben Raum, und folglich $H_{\omega_j} V_j$ in $\mathbf{W}_{-s}^{n+1,q,q+1}(\Omega)$ nach Korollar 3.9. Damit haben wir die Aussage für $k = 1$ und alle n bewiesen und fahren mit dem Induktionsschritt bezüglich k fort.

Sei nun die Behauptung für ein $k < K$ und alle $n \leq m$ sowie für $k + 1$ und ein $n < m$ gezeigt. Um sie für $k + 1$ und $n + 1$ nachzuweisen, betrachten wir

$$M H_{\omega_j}^{k+1} V_j = H_{\omega_j}^k V_j + \omega_j H_{\omega_j}^{k+1} V_j \quad .$$

Dabei konvergiere $\omega_j \in \mathbb{C}_+$ immer noch gegen $\omega \in \mathbb{R}_+$. V_j konvergiere jetzt in $\mathcal{V}_s^{k+1,0,n+1}$ mit einem $s > k + \frac{1}{2}$ gegen V, also auch in $\mathcal{V}_s^{k,0,n}$. Nach Induktionsannahme konvergieren $H_{\omega_j}^k V_j$ und und $H_{\omega_j}^{k+1} V_j$ in $\mathbf{W}_{-s}^{n,q,q+1}(\Omega)$. Dasselbe gilt damit für $M H_{\omega_j}^{k+1} V_j$ und, nach (3.5), für $Z H_{\omega_j}^{k+1} V_j$. Korollar 3.9 liefert die Konvergenz von $H_{\omega_j}^{k+1} V_j$ in $\mathbf{W}_{-s}^{n+1,q,q+1}(\Omega)$. ♦

Das Gegenstück zu Lemma 4.7 bildet eine Zerlegung von H_ω^{k+1}, die es erlaubt, mit Hilfe des Reduktionslemmas den Induktionsschritt bezüglich k im Beweis von Satz 4.6 durchzuführen. Zu ihrer Herleitung zeigen wir erst eine Rechenregel.

Lemma 4.8 *Es sei $k \in \mathbb{N}_0$. Sofern die entsprechenden Ableitungen existieren, gilt mit dem ϑ aus Generalvoraussetzung A:*

$$\begin{aligned} (M-\omega)^k(\vartheta \Lambda U) =& \vartheta(\Lambda + k)(M-\omega)^k U + k\omega\vartheta(M-\omega)^{k-1} U \\ &+ \sum_{l=0}^{k-2} (M-\omega)^l C_{kl} (M-\omega)^{k-2-l} U \\ &+ \sum_{l=0}^{k-1} (M-\omega)^l D (M-\omega)^{k-1-l} U \quad , \end{aligned} \tag{4.10}$$

wobei C_{kl} und D Differentialoperatoren erster Ordnung mit Träger in $A(R_0)$ sind und supp *C_{kl} kompakt ist, während sich die Komponenten von D wie $\mathcal{O}(|x|^{\tau+1})$ mit $\tau \in \mathbb{R}$ verhalten, wenn $\partial_r \Xi = \mathcal{O}(|x|^\tau)$ gilt.*

Beweis:
Wir berechnen zunächst den Kommutator von $(M - \omega)^k$ mit ϑ bzw. Λ. Es gelten

$$(M-\omega)^k(\vartheta U) = \vartheta(M-\omega)^k U + \sum_{l=0}^{k-1} (M-\omega)^l A (M-\omega)^{k-1-l} U \tag{4.11}$$

und

$$\begin{aligned} (M-\omega)^k(\Lambda U) =& \Lambda(M-\omega)^k U + kM(M-\omega)^{k-1} U \\ &+ \sum_{l=0}^{k-1} (M-\omega)^l B M (M-\omega)^{k-1-l} U \end{aligned} \tag{4.12-1}$$

$$\begin{aligned} =& (\Lambda + k)(M-\omega)^k U + k\omega(M-\omega)^{k-1} U \\ &+ \sum_{l=0}^{k-1} (M-\omega)^l B M (M-\omega)^{k-1-l} U \end{aligned} \tag{4.12-2}$$

mit

$$A = \mathrm{i}\,\Xi^{-1}(\partial_r\vartheta)(S - \mathrm{id}) \quad , \quad B = -r(\partial_r\Xi^{-1})\Xi \quad . \tag{4.13}$$

Für $k = 0$ sind diese Aussagen trivial. Unter Berücksichtigung der Radialsymmetrie von ϑ erhalten wir (4.11) für $k = 1$ aus (3.24). Für $k \geq 2$ ergibt sich die Aussage durch vollständige Induktion.

Wegen $M = \Xi^{-1}\widehat{M}$ ist nach (2.29) und (2.30) der Kommutator von M und Λ

$$C_{M,\Lambda} = \Xi^{-1}\Lambda\widehat{M} + \Xi^{-1}\widehat{M} - \Lambda\Xi^{-1}\widehat{M} = M - r(\partial_r\Xi^{-1})\widehat{M} = M + BM \quad .$$

Daraus gewinnt man (4.12-1) für $k = 1$, und wiederum durch vollständige Induktion auch für $k \geq 2$.

Aus (4.11), (4.12-1) und (4.12-2) folgt

$$\begin{aligned}(M-\omega)^k(\vartheta\Lambda U) =& \vartheta(\Lambda+k)(M-\omega)^k U + k\omega\vartheta(M-\omega)^{k-1}U \\ &+ \sum_{l=0}^{k-1}\vartheta(M-\omega)^l BM(M-\omega)^{k-1-l}U \\ &+ \sum_{l=0}^{k-1}(M-\omega)^l A\Lambda(M-\omega)^{k-1-l}U \\ &+ \sum_{l=0}^{k-2}(k-1-l)(M-\omega)^l AM(M-\omega)^{k-2-l}U \\ &+ \sum_{l=0}^{k-2}(M-\omega)^l A\Big[\sum_{j=0}^{k-2-l}(M-\omega)^j BM(M-\omega)^{k-2-l-j}U\Big] \quad .\end{aligned}$$

Vertauscht man nun in der ersten Summe auf der rechten Seite wiederum ϑ und $(M-\omega)^l$ mit Hilfe von (4.11), so entsteht eine zweite Doppelsumme, die sich gegen die bereits vorhandene weghebt. Damit erhält man

$$\begin{aligned}(M-\omega)^k(\vartheta\Lambda U) =& \vartheta(\Lambda+k)(M-\omega)^k U + k\omega\vartheta(M-\omega)^{k-1}U \\ &+ \sum_{l=0}^{k-1}(M-\omega)^l A\Lambda(M-\omega)^{k-1-l}U \\ &+ \sum_{l=0}^{k-2}(k-1-l)(M-\omega)^l AM(M-\omega)^{k-2-l}U \\ &+ \sum_{l=0}^{k-1}(M-\omega)^l\vartheta BM(M-\omega)^{k-1-l}U\end{aligned}$$

und schließlich (4.10) mit $C_{kl} := (k-1-l)AM$ und $D := A\Lambda + \vartheta BM$.

Aufgrund der Beschaffenheit von ϑ ist supp A in $U(2R_0) \cap A(R_0)$ enthalten und supp B in $A(R_0)$. Wegen

$$0 = \partial_r(\Xi \cdot \Xi^{-1}) = (\partial_r\Xi)\cdot\Xi^{-1} + \Xi\cdot\partial_r(\Xi^{-1})$$

gilt unter der Voraussetzung $\partial_r\Xi = \mathcal{O}(|x|^\tau)$ auch $\partial_r(\Xi^{-1}) = \mathcal{O}(|x|^\tau)$. Nach (4.13) verhalten sich die Komponenten von B dann also asymptotisch wie $\mathcal{O}(|x|^{\tau+1})$. ♦

Es folgt die angekündigte Zerlegung von H_ω^{k+1}.

Lemma 4.9 *Sei $\Xi \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Für jedes $V \in \mathbf{W}_s^{1,q,q+1}(\Omega)$ mit $s \geq 0$ und $\omega \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ gilt dann die Zerlegung*

$$\begin{aligned}H_\omega^{k+1}V = H_\omega^k\eta H_\omega V + \frac{1}{k\omega}\vartheta\Lambda H_\omega^k V - \frac{1}{k\omega}H_\omega^k\vartheta(\Lambda+k)V \\ - \frac{1}{k\omega}\sum_{l=0}^{k-2}H_\omega^{k-l}C_{kl}H_\omega^{l+2}V - \frac{1}{k\omega}\sum_{l=0}^{k-1}H_\omega^{k-l}DH_\omega^{l+1}V \quad .\end{aligned} \tag{4.14}$$

BEWEIS:
Sei zunächst $V \in \mathbf{W}_s^{k+1,q,q+1}(\Omega)$. Da dieser Raum in $\mathbf{W}_s^{1,q,q+1}(\Omega)$ dicht liegt, gilt die Behauptung dann nachher auch für solche V nach Lemma 3.12. Demselben Lemma zufolge ist $H_\omega^k V$ in $\mathbf{W}_s^{k+1,q,q+1}(\Omega)$. Wir können also $H_\omega^k V$ anstelle von U in (4.10) einsetzen. Wenden wir dann noch einmal H_ω^k auf die Formel an und benutzen Lemma 4.2, so gelangen wir zu der Aussage

$$\vartheta\Lambda H_\omega^k V = H_\omega^k\vartheta(\Lambda+k)V + k\omega H_\omega^k\vartheta H_\omega V + \sum_{l=0}^{k-2}H_\omega^{k-l}C_{kl}H_\omega^{l+2}V + \sum_{l=0}^{k-1}H_\omega^{k-l}DH_\omega^{l+1}V \quad .$$

Diese Gleichung stellen wir nach dem zweiten Term auf der rechten Seite um, dividieren durch $k\omega$ und setzen das Ergebnis anstelle des letzten Termes in

$$H_\omega^{k+1}V = H_\omega^k\eta H_\omega V + H_\omega^k\vartheta H_\omega V$$

ein, um (4.14) zu erhalten. ♦

Damit haben wir alle Werkzeuge beisammen, um Satz 4.6 zu beweisen.

BEWEIS:
Wir zeigen zunächst die erste Behauptung. Nach der Aussage von Lemma 4.7 genügt es, sie für $n = l = 0$ nachzuweisen. Dies ist für $k = 1$ nach Lemma 3.31 bzw. Lemma 3.35 richtig.

Nun gelte die Behauptung für $1 \leq k \leq \widehat{k}$. Um sie für $k = \widehat{k}+1$ zu zeigen, reicht wiederum der Nachweis, daß $H_\omega^{\widehat{k}+1}$ für $s > \widehat{k} + \frac{1}{2}$ als Abbildung von $\mathbf{W}_s^{0,q,q+1}(\Omega) \cap \mathcal{N}(\Omega,\Xi,\overline{Q})^{\perp_\Xi}$ nach $\mathbf{W}_{-s}^{0,q,q+1}(\Omega)$ fortsetzbar ist. Hierzu konvergiere $V_j \in \mathbf{W}_s^{0,q,q+1}(\Omega) \cap \mathcal{N}(\Omega,\Xi,\overline{Q})^{\perp_\Xi}$ in $\mathbf{W}_s^{0,q,q+1}(\Omega)$ gegen V und $\omega_j \in Q$ gegen $\omega \in \overline{Q}$. Zunächst sei $V_j \in \mathcal{B}_s^{q,q+1}$.

Wir schreiben gemäß Lemma 3.14

$$V_j = (M-\omega_j)\Phi_j + \widetilde{V}_j$$

und wenden hierauf zunächst $H_{\omega_j}^{\widehat{k}+1}$ an. Den Term $H_{\omega_j}^{\widehat{k}+1}\widetilde{V}_j$ zerlegen wir wie in (4.14). Durch mehrfache Anwendung von Lemma 3.24 erhält man nach Voraussetzung

$$H_{\omega_j}^{\widehat{k}+1}V_j = \mathcal{P}_{\overline{Q}} H_{\omega_j}^{\widehat{k}+1}V_j$$

und weiter

$$\begin{aligned}
H_{\omega_j}^{\widehat{k}+1}V_j =& H_{\omega_j}^{\widehat{k}}\Phi_j \\
&+ H_{\omega_j}^{\widehat{k}}\mathcal{P}_{\overline{Q}}\eta H_{\omega_j}\widetilde{V}_j \\
&+ \frac{1}{\widehat{k}\omega_j}\mathcal{P}_{\overline{Q}}\vartheta\Lambda H_{\omega_j}^{\widehat{k}}\widetilde{V}_j \\
&- \frac{1}{\widehat{k}\omega_j}H_{\omega_j}^{\widehat{k}}\mathcal{P}_{\overline{Q}}\vartheta(\Lambda+\widehat{k})\widetilde{V}_j \\
&- \frac{1}{\widehat{k}\omega_j}\sum_{l=0}^{\widehat{k}-2} H_{\omega}^{\widehat{k}-l}\mathcal{P}_{\overline{Q}}C_{\widehat{k}l}H_{\omega}^{l+2}\widetilde{V}_j \\
&- \frac{1}{\widehat{k}\omega_j}\sum_{l=0}^{\widehat{k}-1} H_{\omega}^{\widehat{k}-l}\mathcal{P}_{\overline{Q}}DH_{\omega}^{l+1}\widetilde{V}_j \\
=:& J_1 + \ldots + J_6 \quad .
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Nach Korollar 3.15 konvergiert Φ_j sogar in $\mathbf{W}_s^{1,q,q+1}(\Omega)$ und J_1 damit in $\mathbf{W}_{-s}^{0,q,q+1}(\Omega)$ nach Induktionsannahme.

In den Termen J_2, J_3 und J_5 liegt Konvergenz von $H_{\omega_j}^{l_1}\widetilde{V}_j$ für alle $l_1 \leq \widehat{k}$ in $\mathbf{W}_{-s}^{1,q,q+1}(\Omega)$ nach Induktionsannahme vor. Die Konvergenz von J_3 ist damit offensichtlich. In den anderen beiden Termen wird bis zu einmal differenziert und dann mit Funktionen multipliziert, die kompakte Träger haben, so daß das Ergebnis jedenfalls noch in $\mathbf{W}_s^{0,q,q+1}(\Omega)$ konvergiert. Die nachfolgende Anwendung von $\mathcal{P}_{\overline{Q}}$ erhält Lemma 3.27 zufolge diese Eigenschaft, da $\overline{Q}$ nach Lemma 3.22 nur endlich viele Eigenwerte enthält. Schließlich wird noch einmal $H_{\omega_j}^{l_2}$ mit einem $l_2 \leq \widehat{k}$ angewendet, womit wiederum nach Induktionsannahme die Konvergenz auch dieser drei Terme gegen Grenzwerte in $\mathbf{W}_{-s}^{0,q,q+1}(\Omega)$ gezeigt ist.

Mit einer ähnlichen Argumentation ist die Konvergenz von J_6 nachzuweisen, wobei jedoch etwas genauer auf die Gewichte geachtet werden muß, da die Komponenten des Operators D keine kompakten Träger haben. Für jedes $s > s_1 > (l+1) - \frac{1}{2}$ konvergiert $H_{\omega_j}^{l+1}\widetilde{V}_j$ in $\mathbf{W}_{-s_1}^{1,q,q+1}(\Omega)$. Damit J_6 konvergiert, muß D daraus eine Konvergenz in $\mathbf{W}_{s_2}^{0,q,q+1}(\Omega)$ mit einem $s > s_2 > (\widehat{k} - l) - \frac{1}{2}$ machen.

Lemma 4.8 zufolge fallen die Komponenten von D nach Voraussetzung wie $\mathcal{O}(|x|^{1-\widetilde{\tau}})$ mit einem $\widetilde{\tau} > \widehat{k} + 1$. Daher können s_1 und s_2 so gewählt werden, daß

$$\widehat{k} = (l+1) - \frac{1}{2} + (\widehat{k} - l) - \frac{1}{2} < s_1 + s_2 < \widetilde{\tau} - 1$$

gilt und J_6 in $\mathbf{W}_{-s_2}^{0,q,q+1}(\Omega)$ konvergiert.

In J_4 wird zuerst differenziert, und $(\Lambda + \widehat{k})\widetilde{V}_j$ sowie $\mathcal{P}_{\overline{Q}}(\Lambda + \widehat{k})\widetilde{V}_j$ konvergiert noch in $\mathbf{W}_s^{0,q,q+1}(\Omega)$, so daß wieder die Induktionsannahme angewendet werden kann.

Für $V_j \in \mathcal{B}_s^{q,q+1}$ ist die erste Behauptung damit gezeigt. Im Falle eines beliebigen V_j aus $\mathbf{W}_s^{0,q,q+1}(\Omega)$ zerlegen wir V_j zunächst gemäß Definition 3.10. Der Anteil in $\mathcal{A}_s^{q,q+1}$ wird bei Anwendung von $H_{\omega_j}^{\widehat{k}+1}$ lediglich mit $(\omega_j)^{-\widehat{k}-1}$ multipliziert. Insgesamt konvergiert also $H_{\omega_j}^{\widehat{k}+1}V_j$ in $\mathbf{W}_{-s}^{0,q,q+1}(\Omega)$, und nach Lemma 4.7 ist die stetige Fortsetzbarkeit der Abbildung (4.7) nachgewiesen.

Mittels der Zerlegung aus Definition 3.10 können wir nun auch die Gültigkeit der zweiten Behauptung folgern. Eine konvergente Folge $(V_j)_{j\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbf{W}_s^{n,q,q+1}(\Omega)$ kann zunächst mit stetigen Projektoren in $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_s^{q,q+1}$ und $(B_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}_s^{q,q+1}$ zerlegt werden, wobei beide nach Lemma 3.11 wieder in $\mathbf{W}_s^{n,q,q+1}(\Omega)$ konvergieren. $\mathcal{B}_s^{q,q+1} \cap \mathbf{W}_s^{n,q,q+1}(\Omega)$ ist als Unterraum von $\mathbf{W}_s^{n,q,q+1}(\Omega)$ stetig in $\mathcal{V}_s^{0,0,n}$, und somit auch in $\mathcal{V}_s^{\widehat{k},0,n}$, eingebettet. Folglich konvergiert $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sogar in $\mathcal{V}_s^{\widehat{k},0,n}$, und aus der bereits bewiesenen ersten Behauptung folgt die zweite. ♦

4.3 Abschätzung der Frequenzableitungen

Wir erhalten die folgende gleichmäßige Abschätzung für H_ω^k, wobei im Falle $Q \in \mathcal{Q}$ Potenzen von $|\omega|$ durch 1 zu ersetzen sind.

Satz 4.10 *Sei $\Xi \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ und $Q \in \mathcal{Q}$ oder, falls (Ω, Ξ) die MHBE hat, $Q \in \mathcal{Q}_\infty^\alpha$.*

Sei weiter $k \in \mathbb{N}$, $s > k - \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}_0$ und $l \in \mathbb{N}_0$ mit $l \leq k + n$. Im Falle $k \geq 2$ sei $\Xi \in \mathcal{C}_b^1(\overline{\Omega})$ und $\partial_r \Xi = \mathcal{O}(|x|^{-\widetilde{\tau}})$ mit einem $\widetilde{\tau} > k$, im Falle $n \geq 1$ sei $\Xi \in \mathcal{C}_b^n(\overline{\Omega})$.

Dann gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|H_\omega^k V\|_{n,-s,\Omega} \prec& |\omega|^{n-l}\|V\|_{U_s^l(\Omega)} \\
&+ \sum_{j=l+1}^{n-k} |\omega|^{n-k-j}\|V\|_{j,-s,\Omega} + \sum_{\substack{j=l-k-1 \\ j\geq 0}}^{n-1} |\omega|^{n-1-k-j}\|ZV\|_{j,-s,\Omega}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

gleichmäßig bezüglich $\omega \in \overline{Q}$ und $V \in \mathcal{V}_s^{k,l,n} \cap \mathcal{N}(\Omega, \Xi, \overline{Q})^{\perp_\Xi}$.

Weiterhin gilt unter diesen Umständen

$$\|H_\omega^k V\|_{n,-s,\Omega} \prec |\omega|^{n-l}(\|V\|_{U_s^l(\Omega)} + \|V\|_{n,s,\Omega}) \tag{4.17}$$

gleichmäßig bezüglich $\omega \in \overline{Q}$ und $V \in \mathbf{W}_s^{n,q,q+1}(\Omega) \cap U_s^l(\Omega) \cap \mathcal{N}(\Omega, \Xi, \overline{Q})^{\perp_\Xi}$.

Beweis:
Zunächst wird die Gültigkeit der Abschätzung (4.16) für $\omega \in Q$ gezeigt. Wegen der stetigen Fortsetzbarkeit aus Satz 4.6 gilt sie dann auch für $\omega \in \overline{Q}$. Lemma 4.5 zufolge reicht es,

die Abschätzung (4.3) für $k \in \mathbb{N}$ und $s > k - \frac{1}{2}$ nachzuweisen. Dies gilt für $k = 1$ nach Satz 3.32 bzw. Lemma 3.36.

Die Behauptung gelte nun für $0 \leq k \leq \widehat{k}$ mit einem $\widehat{k} \in \mathbb{N}$. Es soll die Abschätzung (4.3) für $k = \widehat{k} + 1$ und $s > \widehat{k} + \frac{1}{2}$ gezeigt werden. Sei wiederum zunächst $V \in \mathcal{B}_s^{q,q+1}$ und Φ, $\widetilde{V}$ gemäß Lemma 3.14. Wir erhalten eine zu (4.15) analoge Formel, deren einzelne Summanden nun mittels (3.12), (3.14) und (4.16) abgeschätzt werden können. Liegt V nicht in $\mathcal{B}_s^{q,q+1}$, so zerlegen wir es gemäß Definition 3.10 und erhalten für den Anteil in $\mathcal{A}_s^{q,q+1}$ die gewünschte Abschätzung wieder auf triviale Weise.

Nun zu der Behauptung für allgemeinere Daten. Wir zerlegen $V \in \mathbf{W}_s^{n,q,q+1}(\Omega) \cap U_s^l(\Omega)$ gemäß Definition 3.10 in $V^A \in \mathcal{A}_s^{q,q+1}$ und $V^B \in \mathcal{B}_s^{q,q+1}$. Es ist $\mathcal{A}_s^{q,q+1} \subset U_s^l(\Omega)$ für alle $l \in \mathbb{N}_0$ und

$$\|V^A\|_{U_s^l(\Omega)} = \|V^A\|_{0,s,\Omega} \prec \|V\|_{0,s,\Omega} \leq \|V\|_{U_s^l(\Omega)} \quad .$$

Folglich gilt auch $V^B \in U_s^l(\Omega)$, also $V^B \in \mathcal{V}_s^{k,l,n}$, sowie

$$\|V^B\|_{\mathcal{V}_s^{k,l,n}} \prec \|V\|_{U_s^l(\Omega)} + \|V\|_{n,s,\Omega} \quad .$$

Wir können daher die erste Abschätzung für V^B verwenden. Auf der anderen Seite gilt

$$\|H_\omega^k V^A\|_{n,s,\Omega} = |\omega|^{-k} \|V^A\|_{n,s,\Omega} \prec |\omega|^{n-l} \|V\|_{n,s,\Omega} \quad .$$

Beides zusammen liefert (4.17). ♦

Nun können wir die Holomorphie aus Korollar 3.13 durch Differenzierbarkeit in $\mathbb{R}_+$ fortsetzen.

Satz 4.11 *Sei $\Xi \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ und $Q \in \mathcal{Q}$ oder $Q \in \mathcal{Q}_\infty^\alpha$, wobei im letzteren Fall (Ω, Ξ) die MHBE habe, sowie $k \in \mathbb{N}_0$, $s > k + \frac{1}{2}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Im Falle $k \geq 1$ sei $\Xi \in \mathcal{C}_b^1(\overline{\Omega})$ und $\partial_r \Xi = \mathcal{O}(|x|^{-\widetilde{\tau}})$ mit einem $\widetilde{\tau} > k + 1$, im Falle $n \geq 1$ sei $\Xi \in \mathcal{C}_b^n(\overline{\Omega})$.*

Dann kann $H_\omega V$ für $V \in \mathbf{W}_s^{0,q,q+1}(\Omega) \cap \mathcal{N}(\Omega, \Xi, \overline{Q})^{\perp_\Xi}$ als Abbildung von $(0, \infty)$ nach $\mathbf{W}_s^{0,q,q+1}(\Omega)$ bis zu k-mal stetig nach ω differenziert werden. Der dadurch definierte Operator $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\right)^k H_\omega$ bildet $\mathbf{W}_s^{n,q,q+1}(\Omega)$ stetig in sich ab, und es gilt für alle $0 \leq l \leq n + k + 1$ die Abschätzung

$$\left\| \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\right)^k H_\omega V \right\|_{n,-s,\Omega} \prec |\omega|^{n-l} \left(\|V\|_{U_s^l(\Omega)} + \|V\|_{n,s,\Omega}\right)$$

gleichmäßig bezüglich $\omega \in \overline{Q}$ und $V \in \mathbf{W}_s^{n,q,q+1}(\Omega) \cap U_s^l(\Omega) \cap \mathcal{N}(\Omega, \Xi, \overline{Q})^{\perp_\Xi}$.

Kapitel 5

Hochfrequenzasymptotik für die Schwingungsgleichung mit inhomogenen Randdaten

Der Spezialfall $q = 0$ des bisher betrachteten verallgemeinerten Maxwell-Problems im homogenen isotropen Fall ist eng verwandt mit dem Problem der Helmholtzschen Schwingungsgleichung mit Dirichletscher Randbedingung. Wie wir in Anhang A sehen werden, ist eine Abschwächung der in [20] für das Helmholtz-Problem definierten gleichmäßigen Strahlungsbedingung für diesen Fall sogar äquivalent zur MHBE.

Wir wollen in diesem und dem folgenden Kapitel diesen Spezialfall noch etwas weiter untersuchen, indem wir anstelle der homogenen Dirichletschen Randbedingung beliebige Randdaten aus $H^{1/2}(\partial\Omega)$ zulassen. Auch hier lassen sich Aussagen zur Hochfrequenzasymptotik machen.

Da es sich bei dem nun zu untersuchenden Problem um ein skalares handelt, kehren wir dem Kalkül der alternierenden q-Formen den Rücken und betrachten stattdessen skalare Funktionen.

5.1 Vorbereitungen

Wir zitieren zunächst ein Regularitätsresultat, Lemma 2.3 aus [20].

Lemma 5.1 *Ist $L \in \mathbb{N}_0$, $t \in \mathbb{R}$, $U \in \mathring{H}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und $-\Delta U \in W_t^L(\Omega)$, so gilt $U \in W_t^{L+2}(\Omega)$. Weiterhin gilt gleichmäßig bezüglich $U \in W_t^{L+2}(\Omega) \cap \mathring{H}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ die Abschätzung*

$$\|U\|_{L+2,t,\Omega} \prec \|\Delta U\|_{L,t,\Omega} + \|U\|_{0,t,\Omega} \quad .$$

Zusätzlich müssen einige Aussagen über die in (2.39) bis (2.42) definierten Räume bereitgestellt werden.

Lemma 5.2 *Seien m, $k \in \mathbb{N}$ und s, $t \in \mathbb{R}$.*

1. *Ist $U \in W_t^{m,\Delta}(\Omega) \cap W_t^{m+1}(\Omega)$, so gilt*
$$\|U\|_{W_t^{m,\Delta}(\Omega)} \prec \|U\|_{m+1,t,\Omega}$$
gleichmäßig bezüglich U.
2. *Für $s \leq t$ und $k \leq m$ ist $W_t^{m,\Delta}(\Omega)$ stetig in $W_s^{k,\Delta}(\Omega)$ eingebettet.*
3. *Sei $U \in W_t^{m,\Delta}(\Omega)$ und $\varphi \in C_b^{m+1}(\Omega)$ eine Ausschneidefunktion, deren Träger in Ω enthalten ist. Dann ist $\varphi U \in W_t^{m+1}(\Omega)$ und*
$$\|\varphi U\|_{m+1,t,\Omega} \leq C\|U\|_{W_t^{m,\Delta}(\Omega)}$$
mit einer Konstanten $C > 0$, die von φ, aber nicht von U abhängt.

Beweis:
Die erste Behauptung folgt direkt aus Lemma 2.2, und aus ihr wiederum ist die zweite unmittelbar ersichtlich.

Zur dritten Behauptung: Zunächst einmal ist $\varphi U \in \mathring{H}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und

$$\Delta(\varphi U) = (\Delta\varphi)U + 2(\nabla\varphi) \cdot \nabla U + \varphi\Delta U \quad . \tag{5.1}$$

Falls $U \in W_t^m(\Omega)$ und $\varphi\Delta U \in W_t^{m-1}(\Omega)$ gilt, ist Lemma 5.1 zufolge $\varphi U \in W_t^{m+1}(\Omega)$, und wir erhalten

$$\|\varphi U\|_{m+1,t,\Omega} \prec \|\varphi U\|_{0,t,\Omega} + \|\Delta(\varphi U)\|_{m-1,t,\Omega} \prec \|U\|_{m,t,\Omega} + \|\varphi\Delta U\|_{m-1,t,\Omega} \tag{5.2}$$

mittels (5.1). In den Fällen $m = 1$ und $m = 2$ ist das bereits die Behauptung. Der Rest folgt über eine vollständige Induktion. Ist $U \in W_t^{m+2,\Delta}(\Omega)$ für ein $m \in \mathbb{N}$, so gilt $\Delta U \in W_t^{m,\Delta}(\Omega)$. Nach Induktionsannahme ist damit $\varphi\Delta U \in W_t^{m+1}(\Omega)$ und

$$\|\varphi\Delta U\|_{m+1,t,\Omega} \prec \|\Delta U\|_{W_t^{m,\Delta}(\Omega)} \quad .$$

Nach (5.1) ist also $\Delta(\varphi U) \in W_t^{m+1}(\Omega)$ und folglich $\varphi U \in W_t^{m+3}(\Omega)$ nach Lemma 5.1. Mit (5.2) folgt

$$\|\varphi U\|_{m+3,t,\Omega} \prec \|U\|_{m+2,t,\Omega} + \|\Delta U\|_{W_t^{m,\Delta}(\Omega)} \prec \|U\|_{W_t^{m+2,\Delta}(\Omega)},$$

womit der Induktionsschritt vollzogen ist. ♦

Weiterhin benötigen wir die folgende Aussage über die Integrierbarkeit von Lösungen.

Lemma 5.3 *Seien $n \in \mathbb{N}$, $U \in W_\sigma^{n,\Delta}(\Omega)$, $K \subset\subset \mathbb{C}_+$ und $(-\Delta - \omega^2)U = V \in W_\tau^{n-1}(\Omega)$ mit einem $\omega \in K$ und $\sigma < \tau$. Dann ist $U \in W_\tau^{n,\Delta}(\Omega)$ und*

$$\|U\|_{W_\tau^{n,\Delta}(\Omega)} \prec \|U\|_{n,\sigma,\Omega} + \|V\|_{n-1,\tau,\Omega}$$

gleichmäßig bzgl. $\omega \in K$ und U.

Beweis:
Es genügt, U außerhalb einer Kugel abzuschätzen. Für diesen Fall läßt sich die Aussage auf Lemma 3.12 zurückführen. Wir nehmen o.B.d.A. $\tau - \sigma \leq 1$ an; dann gilt

$$(-\Delta - \omega^2)(\rho^\sigma\eta U) = -(\Delta(\rho^\sigma\eta))U - 2(\nabla(\rho^\sigma\eta)) \cdot \nabla U + \rho^\sigma\eta V =: \widetilde{V} \in W_{\tau-\sigma}^{n-1}(\Omega) \quad .$$

Wenn wir $\rho^\sigma\eta U$ und $\widetilde{V}$ als 0-Formen auffassen, so ist

$$(\rho^\sigma\eta U, \omega^{-1}\,\mathrm{i}\,\nabla(\rho^\sigma\eta U)) = H_\omega(0, \omega^{-1}\widetilde{V}) \quad .$$

Wir erhalten somit nach Lemma 3.12

$$\|\rho^\sigma\eta U\|_{n-1,\tau-\sigma,\Omega} + \|\omega^{-1}\,\mathrm{i}\,\nabla(\rho^\sigma\eta U)\|_{n-1,\tau-\sigma,\Omega} \prec \|\widetilde{V}\|_{n-1,\tau-\sigma,\Omega}$$

oder

$$\|U\|_{n,\tau,A(2R_0)} \prec \|U\|_{n,\tau-1,\Omega} + \|V\|_{n-1,\tau,\Omega} \quad .$$

Aus der Integrierbarkeit von $\rho^\tau U$ folgt die von $\rho^\tau\Delta U$. ♦

Sei G_ω der Lösungsoperator zum Helmholtz-Problem mit homogener Dirichlet-Randbedingung in einem glatten Außengebiet Ω

$$\mathcal{H}_\Omega(V,\omega) \qquad \begin{cases} (-\Delta - \omega^2)U = V & \text{in } \Omega \\ U \in H^2(\Omega) \cap \mathring{H}^1(\Omega) \subset L^2(\Omega), \end{cases} \tag{5.3}$$

mit $V \in L^2(\Omega)$. In Analogie zu Lemma 3.3 zitieren wir aus [30] (Satz 5.16):

Lemma 5.4 *Die Abbildung $\omega \longmapsto G_\omega$ ist holomorph als Abbildung von $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ nach $B(W^0(\Omega), W^0(\Omega))$. Es gilt gleichmäßig bezüglich $V \in W^0(\Omega)$ und $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$*

$$\|G_\omega V\|_{0,0,\Omega} \prec |\Im\omega^2|^{-1}\|V\|_{0,0,\Omega} \quad . \tag{5.4}$$

Schließlich verwenden wir Satz 2 aus [20]:

Lemma 5.5 *Seien $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ und $s > k - \frac{1}{2}$. Dann ist*

$$(\omega, V) \mapsto G_\omega^k V$$

als Abbildung von $\mathbb{C}_+ \times W_s^n(\Omega)$ nach $W_{-s}^{n+2k}(\Omega)$ stetig nach $\mathbb{R} \times W_s^n(\Omega)$ fortsetzbar.

Ist Ω ein gleichmäßiges Strahlungsgebiet, so gilt für alle $j \in \mathbb{N}_0$ mit $n - k \leq j \leq n + 2k$ und $Q \in \mathcal{Q}^1_\infty$ gleichmäßig bezüglich $V \in \widetilde{U}_s^n(\Omega)$ und $\omega \in \overline{Q}$ die Abschätzung

$$\|G_\omega^k V\|_{j,-s,\Omega} \prec |\omega|^{j-k-n}\|V\|_{n,s,\Omega} \quad . \tag{5.5}$$

Während $\widetilde{U}_s^0(\Omega) = L_s^2(\Omega)$ und $\widetilde{U}_s^1(\Omega) = W_s^1(\Omega) \cap \mathring{H}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ist, sind die $\widetilde{U}_s^n(\Omega)$ für $n \geq 1$ Unterräume von $W_s^n(\Omega) \cap \mathring{H}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, die weiteren Randbedingungen genügen.

5.2 Lösungstheorie

Zu gegebenem $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ und $\omega \in \mathbb{C}_+$ betrachten wir das Problem

$$\mathcal{R}_\Omega(g,\omega) \qquad \begin{cases} U \in W^{1,\Delta}(\Omega) & \\ (-\Delta-\omega^2)U = 0 & \text{in } \Omega \\ U = g & \text{auf } \partial\Omega\ . \end{cases}$$

Mit Hilfe der üblichen Lösungstheorie mittels der in das Gebiet fortgesetzten Funktion g und einer koerzitiven Form über $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ (s. [12, Kap. 2.3]) erhält man unter zusätzlicher Anwendung von Lemma 5.3:

Lemma 5.6 *Für jedes $\omega \in \mathbb{C}_+$ und $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ ist $\mathcal{R}_\Omega(g,\omega)$ eindeutig lösbar. Die Lösung ist in $W_t^{1,\Delta}(\Omega)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, und es wird dadurch ein stetiger Lösungsoperator $L_\omega \in B(H^{1/2}(\partial\Omega), W_t^{1,\Delta}(\Omega))$ definiert.*

Für die weiteren Betrachtungen werden zwei spezielle Darstellungen des Lösungsoperators bereitgestellt, die jeweils auf den Lösungsoperator zum Problem (5.3) zurückgreifen. Betrachtet man für die Lösung U von $\mathcal{R}_\Omega(g,\omega)$ den Ansatz

$$U = L_{\mathrm{i}}\,g + \Psi \quad ,$$

so ist Ψ die Lösung des Problems $\mathcal{H}_\Omega(V,\omega)$ mit $V = (1+\omega^2)L_{\mathrm{i}}\,g$.

Lemma 5.7 *Es gilt*

$$L_\omega = [\mathrm{id} + (1+\omega^2)G_\omega]L_{\mathrm{i}} \tag{5.6}$$

für alle $\omega \in \mathbb{C}_+$.

Bessere Eingangsdaten lassen eine andere Darstellung der Lösung zu:

Lemma 5.8 *Sei $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, und $\lambda_0 > 0$.*

1. *Für $g \in H^{m-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ und $\omega \in \mathbb{C}_+$ gilt die Darstellung*

$$L_\omega g = [\mathrm{id} + G_\omega(\Delta+\omega^2)]\mathcal{F}_m g \quad , \tag{5.7}$$

wobei $\mathcal{F}_m \in B(H^{m-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^m(\Omega))$ ein Fortsetzungsoperator sei.

2. *Die Einschränkung von L_ω auf $H^{m-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ liegt in $B(H^{m-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), W_t^{m,\Delta}(\Omega))$ für alle $t \in \mathbb{R}$, und es gilt gleichmäßig bezüglich $g \in H^{m-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ und ω mit $|\omega| > \lambda_0$ die Abschätzung*

$$\|L_\omega g\|_{m,t,\Omega} \prec |\omega|^{m-R(m)}\|L_\omega g\|_{R(m),t,\Omega} + \sum_{l=0}^{[\frac{m}{2}]-1} |\omega|^{2l}\|g\|_{m-2l-\frac{1}{2},\partial\Omega} \tag{5.8}$$

mit $R(m) := m \mod 2 = m - 2\left[\frac{m}{2}\right]$.

Beweis:
Mit dem Ansatz $\Phi_m = L_\omega g - \mathcal{F}_m g$ folgt $\Phi_m \in W^{1,\Delta}(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und

$$(-\Delta-\omega^2)\Phi_m = (\Delta+\omega^2)\mathcal{F}_m g \quad .$$

Damit ist $\Phi_m = G_\omega(\Delta+\omega^2)\mathcal{F}_m g$, und (5.7) ist bewiesen.

Die zweite Behauptung wird durch eine vollständige Induktion gezeigt, wobei wir ausnutzen, daß die Lösung $L_\omega g$ für $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ nach Lemma 5.6 in $W_t^{1,\Delta}(\Omega)$ liegt und die Abschätzung (5.8) mit $m=0$ oder $m=1$ offensichtlich richtig ist.

Sei nun $g \in H^{m+\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$. Ist die Aussage für m bereits gezeigt, so gilt $\Delta L_\omega g = -\omega^2 L_\omega g \in W_t^m(\Omega)$. Indem wir Lemma 5.1 für $L_\omega g - \mathcal{F}_{m+2}g$ ausnutzen, erhalten wir $L_\omega g \in W_t^{m+2}(\Omega)$ sowie die Abschätzung

$$\begin{aligned}\|L_\omega g\|_{m+2,t,\Omega} &\prec \|\mathcal{F}_{m+2}g\|_{m+2,t,\Omega} + \|L_\omega g\|_{0,t,\Omega} + \|\Delta L_\omega g\|_{m,t,\Omega} + \|\Delta\mathcal{F}_{m+2}g\|_{m,t,\Omega} \\ &\prec |\omega|^2\|L_\omega g\|_{m,t,\Omega} + \|\mathcal{F}_{m+2}g\|_{m+2,t,\Omega} \quad .\end{aligned}$$

Auf den ersten Term wendet man nun (5.8) an. Der zweite läßt sich durch $\|g\|_{m+\frac{3}{2},\partial\Omega}$ abschätzen und in die Summe einbeziehen, wodurch sich wegen $R(m+2) = R(m)$ die Abschätzung (5.8) mit $m+2$ statt m ergibt. ♦

In diesem Zusammenhang notieren wir:

Bemerkung 5.9 *Die Darstellungsformeln (5.6) und (5.7) erlauben es, den Grenzübergang von $\mathbb{C}_+$ nach $\mathbb{R}_+$ für L_ω bzw. $G_\omega^k L_\omega$ durch eine einfache Anwendung von Lemma 5.5 zu vollführen.*

Damit erhält man auch gleichzeitig Aussagen zur Asymptotik bei hohen Frequenzen (siehe Lemma 6.1). Da jedoch $L_{\mathrm{i}}\,g$ bzw. $\mathcal{F}_m g$ im allgemeinen gerade nicht in $\overset{\circ}{H}{}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ liegt, schlägt sich die Regularität dieser Terme nicht in der Asymptotik nieder, weshalb man hierfür auf anderem Wege bessere Ergebnisse erzielt.

5.3 Gleichmäßige Resolventenabschätzungen

Für die Untersuchung der Hochfrequenzasymptotik betrachten wir Gebiete mit einer ähnlichen Eigenschaft wie die gleichmäßigen Strahlungsgebiete aus [20], jedoch angepaßt an das zu untersuchende Problem. Wichtig ist dabei, daß hier auch die Normalenableitung der Lösung am Rand einbezogen wird.

Definition 5.10 *Ein echtes Außengebiet Ω heißt ein „gleichmäßiges Strahlungsgebiet zur homogenen Schwingungsgleichung mit inhomogenen Randdaten“, wenn die folgende Aussage mit einem $\alpha \in [\,0\,,\,1\,]$ und einem $\gamma < 1$ gilt:*

Für alle $\sigma \in (-\frac{1}{2}, 0)$ und $Q \in \mathcal{Q}^\alpha_\infty$ gilt die Abschätzung

$$\|(\nabla - \mathrm{i}\,|\omega|\xi)L_\omega g\|_{0,\sigma,\Omega} + \|\partial_\nu L_\omega g\|_{0,\partial\Omega} \prec |\omega|^\gamma \|L_\omega g\|_{0,\sigma-1,\Omega} + |\omega|\|g\|_{0,\partial\Omega} + \|g\|_{1,\partial\Omega} \tag{5.9}$$

gleichmäßig bezüglich $\omega \in Q$ und $g \in H^{3/2}(\partial\Omega)$.

Weiterhin bezeichnen wir ein solches Außengebiet als „gleichmäßiges Strahlungsgebiet zur Schwingungsgleichung mit inhomogenen Randdaten“, wenn es außerdem ein gleichmäßiges Strahlungsgebiet im Sinne von [20] ist.

Um eine Klasse von Gebieten angeben zu können, die dieser Anforderung genügen, definieren wir die folgende geometrische Eigenschaft.

Definition 5.11 *Wir bezeichnen ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^N$ als „strikt sternförmig“, wenn G glatt ist und es einen Punkt $z \in G$ sowie eine Zahl $\kappa > 0$ gibt, so daß für alle $x \in \partial G$*

$$\nu(x) \cdot \frac{x - z}{|x - z|} \geq \kappa$$

ist.

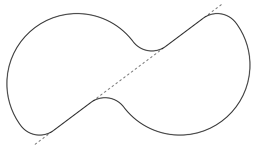

Abb. 1: *Ein glattes und sternförmiges, jedoch nicht strikt sternförmiges, Gebiet*

Insbesondere ist ein bezüglich eines Punktes z strikt sternförmiges Gebiet auch sternförmig bezüglich z. Wir können nun zeigen:

Lemma 5.12 *Sei Ω ein Außengebiet und $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$ strikt sternförmig. Dann ist Ω ein gleichmäßiges Strahlungsgebiet zur Schwingungsgleichung mit inhomogenen Randdaten. Dabei ist $\alpha = \gamma \in [0, 1)$ beliebig.*

Zunächst werden einige Rechenregeln bereitgestellt.

Lemma 5.13 *Ist Ω ein glattes Außengebiet, dessen Abschluß den Nullpunkt nicht enthält, $\sigma \in \mathbb{R}$ und $\zeta \in \mathbb{C}$, so gelten für $u \in W^\infty_\infty(\Omega)$*

$$\begin{aligned}\Re\langle r^{2\sigma}\Delta u\,,\, u\rangle_\Omega = \sigma(N + 2\sigma - 2)|\!|\!|u|\!|\!|^2_{0,\sigma-1,\Omega} - |\!|\!|\nabla u|\!|\!|^2_{0,\sigma,\Omega}& \\ - \sigma\int_{\partial\Omega} r^{2\sigma-1}(\nu\cdot\xi)|u|^2\, d\mathbf{o} + \Re\int_{\partial\Omega} r^{2\sigma}(\partial_\nu u)\overline{u}\, d\mathbf{o}&\ .\end{aligned} \tag{5.10}$$

sowie

$$\begin{aligned}\Re\langle r^{2\sigma+1}\Delta u\,,\, \zeta u\rangle_\Omega = -2\Re\zeta|\!|\!|\nabla u|\!|\!|^2_{0,\sigma+\frac{1}{2},\Omega}& \\ - (2\sigma+1)\Re\left(\overline{\zeta}\langle r^{2\sigma}\partial_r u\,,\, u\rangle_\Omega\right) + \Re\int_{\partial\Omega} r^{2\sigma+1}\overline{\zeta}(\partial_\nu u)\overline{u}\, d\mathbf{o}&\end{aligned} \tag{5.11}$$

und

$$\begin{aligned}\Re\langle r^{2\sigma+1}\Delta u\,,\, \partial_r u\rangle_\Omega = -2\sigma|\!|\!|\partial_r u|\!|\!|^2_{0,\sigma,\Omega} + \frac{1}{2}(N + 2\sigma - 2)|\!|\!|\nabla u|\!|\!|^2_{0,\sigma,\Omega}& \\ - \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} r^{2\sigma+1}(\nu\cdot\xi)|\nabla u|^2\, d\mathbf{o} + \Re\int_{\partial\Omega} r^{2\sigma+1}(\partial_\nu u)\partial_r\overline{u}\, d\mathbf{o}&\end{aligned} \tag{5.12}$$

BEWEIS:
Die Formeln ergeben sich durch partielle Integration. ♦

Es folgt der Beweis zu Lemma 5.12.

BEWEIS:
Nach Lemma 2.16 in [20] muß nur noch gezeigt werden, daß Ω ein gleichmäßiges Strahlungsgebiet zur homogenen Schwingungsgleichung mit inhomogenen Randdaten ist.

Wir nehmen ohne Einschränkung an, daß $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$ strikt sternförmig bezüglich des Nullpunktes ist. Dann können wir die mit $r(x)$ als Gewicht anstelle von $\rho(x)$ definierten Normen verwenden, da diese zu den sonst verwendeten äquivalent sind. Sei $\alpha \in [0, 1)$, $Q \in \mathcal{Q}^\alpha_\infty$ und $\omega \in Q$.

Zunächst betrachten wir ein $g \in H^\infty(\partial\Omega)$. Die Lösung $U := L_\omega g$ liegt dann nach Lemma 5.8 in $W^\infty_\infty(\Omega)$. Mit $u := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,|\omega|r}U$ gilt

$$0 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,|\omega|r}(\Delta + \omega^2)U = \Delta u + \mathrm{i}\,|\omega|\Big[(N-1)r^{-1}u + \frac{\omega^2 - |\omega|^2}{\mathrm{i}\,|\omega|}u + 2\partial_r u\Big]\ . \tag{5.13}$$

Wir setzen

$$\zeta := \frac{\omega^2 - |\omega|^2}{\mathrm{i}\,|\omega|} = -\,\mathrm{i}\,\frac{(\omega - \overline{\omega})\omega}{|\omega|} = 2(\Im\omega)\frac{\omega}{|\omega|}\ .$$

Wegen $\alpha \geq 0$ gilt

$$|\zeta| \prec |\omega|^\alpha \tag{5.14}$$

gleichmäßig bezüglich ω. Nun betrachten wir

$$\begin{aligned}0 &= \Re\langle r^{2\sigma+1}\Delta u\,,\, \frac{\mathrm{i}}{|\omega|}\Delta u\rangle_\Omega \\ &= (N-1)\Re\langle r^{2\sigma}\Delta u\,,\, u\rangle_\Omega + \Re\langle r^{2\sigma+1}\Delta u\,,\, \zeta u\rangle_\Omega + 2\Re\langle r^{2\sigma+1}\Delta u\,,\, \partial_r u\rangle_\Omega\ .\end{aligned} \tag{5.15}$$

Indem man nun (5.10) bis (5.12) anwendet, ergibt sich nach Umsortieren wegen $\sigma < 0$ und $\Re\zeta > 0$:

$$
\begin{aligned}
(1+2\sigma)\|\nabla u\|^2_{0,\sigma,\Omega} &\leq 4\sigma\|\partial_r u\|^2_{0,\sigma,\Omega} + (1-2\sigma)\|\nabla u\|^2_{0,\sigma,\Omega} + 2\Re\zeta\|\nabla u\|^2_{0,\sigma+\frac{1}{2},\Omega} \\
&= C_1\|u\|^2_{0,\sigma-1,\Omega} - (2\sigma+1)\Re\left(\overline{\zeta}\langle\, r^{2\sigma}\partial_r u\,,\, u\,\rangle_\Omega\right) \\
&\quad -(N-1)\sigma\int_{\partial\Omega} r^{2\sigma-1}(\nu\cdot\xi)|u|^2\, d\mathbf{o} \\
&\quad +\Re\int_{\partial\Omega}(r^{2\sigma}(N-1)+r^{2\sigma+1}\overline{\zeta})(\partial_\nu u)\overline{u}\, d\mathbf{o} \\
&\quad -\int_{\partial\Omega} r^{2\sigma+1}(\nu\cdot\xi)|\nabla u|^2\, d\mathbf{o} + 2\Re\int_{\partial\Omega} r^{2\sigma+1}(\partial_\nu u)\partial_r\overline{u}\, d\mathbf{o}
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

mit $C_1 = (N-1)\sigma(N+2\sigma-2)$.

Da wir weiter nach oben abschätzen wollen, können wir das erste Randintegral aufgrund seines negativen Wertes fallen lassen. Setzen wir nun $T := \nabla u - \nu\partial_\nu u$ auf dem Rand des Gebietes, so gelten dort $|\nabla u|^2 = |T|^2 + |\partial_\nu u|^2$ und $\partial_r u = \xi\cdot T + (\xi\cdot\nu)\partial_\nu u$. Daher ist $(\partial_\nu u)\partial_r\overline{u} = (\partial_\nu u)(\xi\cdot\overline{T}) + (\xi\cdot\nu)|\partial_\nu u|^2$, und die letzten beiden Randintegrale in (5.16) können als

$$
\int_{\partial\Omega} r^{2\sigma+1}(\nu\cdot\xi)|\partial_\nu u|^2\, d\mathbf{o} - \int_{\partial\Omega} r^{2\sigma+1}(\nu\cdot\xi)|T|^2\, d\mathbf{o} + 2\Re\int_{\partial\Omega} r^{2\sigma+1}(\partial_\nu u)(\xi\cdot\overline{T})\, d\mathbf{o} \tag{5.17}
$$

geschrieben werden. Auf $\partial\Omega$ ist r sowohl nach oben als auch von Null weg beschränkt; weiterhin ist $r^{2\sigma+1}\nu\cdot\xi$ nach oben durch ein $\kappa < 0$ beschränkt. Somit lassen sich unter Ausnutzung von (5.14), (5.17) und der Youngschen Ungleichung sämtliche Randintegrale abschätzen durch

$$
(\delta+\kappa)\int_{\partial\Omega}|\partial_\nu u|^2\, d\mathbf{o} + C_2(\delta)\left(|\omega|^{2\alpha}\int_{\partial\Omega}|u|^2\, d\mathbf{o} + \int_{\partial\Omega}|T|^2\, d\mathbf{o}\right)
$$

mit δ, $C_2(\delta) > 0$. Nach Wahl eines genügend kleinen δ gewinnen wir damit aus (5.16) die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
&\|\nabla u\|^2_{0,\sigma,\Omega} + \int_{\partial\Omega}|\partial_\nu u|^2\, d\mathbf{o} \\
&\qquad \prec \|u\|^2_{0,\sigma-1,\Omega} + |\zeta|\langle\, r^{2\sigma}|\partial_r u|\,,\, |U|\,\rangle_\Omega + |\omega|^{2\alpha}\int_{\partial\Omega}|u|^2\, d\mathbf{o} + \int_{\partial\Omega}|T|^2\, d\mathbf{o} \quad .
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

Schließlich ist der zweite Term auf der rechten Seite zu untersuchen. Wir setzen für $n\in\mathbb{N}$ $\varphi_n(x) := \eta(x/n)$. Für $\lambda\in\mathbb{R}$ und $\beta\in\mathbb{N}_0^N$ gilt mit $\lambda_+ := \max\{0,\lambda\}$

$$
r^\lambda|\partial^\beta\varphi_n(x)| \prec \begin{cases} n^{\lambda_+} & , \quad |\beta| = 0 \\ n^{\lambda-|\beta|} & , \quad |\beta|\geq 1 \end{cases}
$$

gleichmäßig bezüglich $x\in\Omega$. Wegen

$$
\|r^\lambda f U\|_{0,s_1,\Omega} = \|r^{\lambda+s_1-s_2} f U\|_{0,s_2,\Omega} \leq |r^{\lambda+s_1-s_2} f|_\infty \|U\|_{0,s_2,\Omega}
$$

folgt hieraus

$$
\|r^\lambda\partial^\beta\varphi_n U\|_{0,s_1,\Omega} \prec \begin{cases} n^{(\lambda+s_1-s_2)_+}\|U\|_{0,s_2,\Omega} & , \quad |\beta| = 0 \\ n^{\lambda+s_1-s_2-|\beta|}\|U\|_{0,s_2,\Omega} & , \quad |\beta|\geq 1 \quad . \end{cases} \tag{5.19}
$$

Damit erhalten wir wegen $\sigma < 0$

$$
\|U\|_{0,\sigma,\Omega} \leq \|\varphi_n U\|_{0,\sigma,\Omega} + \|(1-\varphi_n)U\|_{0,\sigma,\Omega} \leq n\|U\|_{0,\sigma-1,\Omega} + \|(1-\varphi_n)U\|_{0,0,\Omega}
$$

und

$$
\langle\, r^{2\sigma}|\partial_r u|\,,\, |U|\,\rangle_\Omega \leq \|\nabla u\|_{0,\sigma,\Omega}\Big[n\|U\|_{0,\sigma-1,\Omega} + \|(1-\varphi_n)U\|_{0,0,\Omega}\Big] \quad .
$$

Die Funktion $(1-\varphi_n)U$ liegt in $\mathring{H}^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ und löst

$$
(-\Delta-\omega^2)\big[(1-\varphi_n)U\big] = (\Delta\varphi_n)U + 2(\nabla\varphi_n)\cdot\nabla U \quad .
$$

Nach Lemma 5.4 gilt daher

$$
\|(1-\varphi_n)U\|_{0,0,\Omega} \leq \left|\Im\omega^2\right|^{-1}\Big(\|(\Delta\varphi_n)U\|_{0,0,\Omega} + 2\|(\nabla\varphi_n)\cdot\nabla U\|_{0,0,\Omega}\Big) \quad .
$$

Nun ist $\nabla U = \mathrm{i}\,\xi|\omega|U + \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}|\omega|r}\nabla u$, und so können wir mit Hilfe von (5.19) weiter folgern

$$
\begin{aligned}
\|(1-\varphi_n)U\|_{0,0,\Omega} &\leq \left|\Im\omega^2\right|^{-1}\Big(\|(\Delta\varphi_n)U\|_{0,0,\Omega} + 2|\omega|\|(\nabla\varphi_n)U\|_{0,0,\Omega} + 2\|(\nabla\varphi_n)\cdot\nabla u\|_{0,0,\Omega}\Big) \\
&\prec \left|\Im\omega^2\right|^{-1}\Big((n^{-1-\sigma} + |\omega|n^{-\sigma})\|U\|_{0,\sigma-1,\Omega} + n^{-1-\sigma}\|\nabla u\|_{0,\sigma,\Omega}\Big) \quad .
\end{aligned}
$$

Damit erhalten wir insgesamt

$$
|\zeta|\langle\, r^{2\sigma}|\partial_r u|\,,\, |U|\,\rangle_\Omega \prec K_1(n,\omega)\|\nabla u\|^2_{0,\sigma,\Omega} + K_2(n,\omega)\|\nabla u\|_{0,\sigma,\Omega}\|U\|_{0,\sigma-1,\Omega}
$$

mit (man beachte (5.14))

$$
\begin{aligned}
K_1(n,\omega) &= |\zeta|(\Im\omega^2)^{-1}n^{-1-\sigma} \prec |\omega|^{-1}n^{-1-\sigma} \\
K_2(n,\omega) &= |\zeta|\big(n + (\Im\omega^2)^{-1}(n^{-1-\sigma} + |\omega|n^{-\sigma})\big) \prec |\omega|^\alpha n \quad .
\end{aligned}
$$

Offenbar gilt gleichmäßig bezüglich $\omega\in Q$

$$
K_1(n,\omega)\to 0 \quad \text{für} \quad n\to\infty \quad .
$$

Es gibt daher eine von ω unabhängige Konstante C_3, so daß

$$
|\zeta|\langle\, r^{2\sigma}|\partial_r u|\,,\, |U|\,\rangle_\Omega \leq \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{0,\sigma,\Omega} + C_3|\omega|^{2\alpha}\|U\|^2_{0,\sigma-1,\Omega} \quad .
$$

Dieses Ergebnis tragen wir in (5.18) ein, bringen den Term $\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{0,\sigma,\Omega}$ auf die linke Seite und erhalten

$$
\|\nabla u\|^2_{0,\sigma,\Omega} + \int_{\partial\Omega}|\partial_\nu u|^2\, d\mathbf{o} \prec |\omega|^{2\alpha}\|u\|^2_{0,\sigma-1,\Omega} + |\omega|^{2\alpha}\int_{\partial\Omega}|u|^2\, d\mathbf{o} + \int_{\partial\Omega}|T|^2\, d\mathbf{o} \quad . \tag{5.20}
$$

Mit $\widetilde{T} := \nabla U - \nu\partial_\nu U$ gelten aufgrund von

$$e^{\,\mathrm{i}\,\lambda r}\nabla u = (\nabla - \mathrm{i}\,|\omega|\xi)U$$

die Ungleichungen

$$|T|^2 \prec |\widetilde{T}|^2 + |\omega|^2|U|^2 \quad \text{und} \quad |\partial_\nu U|^2 \prec |\partial_\nu u|^2 + |\omega|^2|U|^2 \quad .$$

Damit ergibt sich (5.9) mit $\gamma = \alpha$ gleichmäßig bezüglich $g \in H^\infty(\partial\Omega)$ und $\omega \in Q$.

Aufgrund der Dichtheit von $H^\infty(\partial\Omega)$ in $H^{3/2}(\partial\Omega)$ und der in Lemma 5.6 hergeleiteten Linearität und Stetigkeit des Lösungsoperators folgt damit die Gültigkeit von (5.9) mit $\gamma = \alpha$ gleichmäßig bezüglich $g \in H^{3/2}(\partial\Omega)$ und $\omega \in Q$. ♦

In gleichmäßigen Strahlungsgebieten läßt sich wiederum eine bei hohen Frequenzen gleichmäßige a-priori-Abschätzung herleiten.

Lemma 5.14 *Sei Ω ein gleichmäßiges Strahlungsgebiet zur homogenen Schwingungsgleichung mit inhomogenen Randdaten mit α und γ wie in Definition (5.10). Weiterhin seien $Q \in \mathcal{Q}^\alpha_\infty$ und $t \in (\,-1\,,\,-\frac{1}{2}\,)$.*

Dann gilt gleichmäßig bezüglich $\omega \in \Omega$ und $g \in H^1(\partial\Omega)$

$$\|L_\omega g\|_{0,t,\Omega} + |\omega|^{-1}\|L_\omega g\|_{1,t,\Omega} \prec |\omega|^{\gamma-1}\|L_\omega g\|_{0,-t-2,\Omega} + \|g\|_{0,\partial\Omega} + |\omega|^{-1}\|g\|_{1,\partial\Omega} \quad . \tag{5.21}$$

Beweis:
Es sei wieder ohne Einschränkung $\mathrm{dist}(\partial\Omega, 0) > 0$. Wir betrachten abermals zunächst $g \in H^\infty(\partial\Omega)$ und setzen $U := L_\omega g$ sowie $u := e^{-\,\mathrm{i}\,|\omega|r}U$. In einem ersten Schritt zeigen wir

$$\| U \|_{0,t,\Omega} + |\omega|^{-1}\|\partial_\nu U\|_{0,\partial\Omega} \prec |\omega|^{\gamma-1}\| U \|_{0,-t-2,\Omega} + \|U\|_{0,\partial\Omega} + |\omega|^{-1}\|U\|_{1,\partial\Omega} \quad . \tag{5.22}$$

Aus (5.13) folgt

$$0 = \Im\langle\, \Delta u + \mathrm{i}\,|\omega|(N-1)r^{-1}u + (\omega^2 - |\omega|^2)u + 2\,\mathrm{i}\,|\omega|\partial_r u\,,\, r^{2t+1}u\,\rangle_\Omega \quad . \tag{5.23}$$

Durch partielle Integration erhalten wir

$$\Im\langle\, r^{2t+1}\Delta u\,,\, u\,\rangle_\Omega = -(2t+1)\Im\langle\, r^{2t}\partial_r u\,,\, u\,\rangle_\Omega + \Im\int_{\partial\Omega} r^{2t+1}(\partial_\nu u)\overline{u}\; d\mathbf{o}$$

und

$$\Re\langle\, r^{2t+1}\partial_r u\,,\, u\,\rangle_\Omega = -(t + \frac{1}{2}N)\| u \|^2_{0,t,\Omega} + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} r^{2t+1}(\nu\cdot\xi)|u|^2\; d\mathbf{o} \quad .$$

Indem wir in (5.23) mit Hilfe dieser beiden Identitäten Ersetzungen vornehmen, ergibt sich nach Umsortieren

$$\begin{aligned}\| u \|^2_{0,t,\Omega} = &-|\omega|^{-1}\Im\langle\, r^{2t}\partial_r u\,,\, u\,\rangle_\Omega + \frac{2\Re\omega\Im\omega}{|\omega|(2t+1)}\| u \|^2_{0,t+\frac{1}{2},\Omega} \\ &+ \frac{1}{|\omega|(2t+1)}\Im\int_{\partial\Omega} r^{2t+1}(\partial_\nu u)\overline{u}\; d\mathbf{o} + \frac{1}{2t+1}\int_{\partial\Omega} r^{2t+1}(\nu\cdot\xi)|u|^2\; d\mathbf{o} \quad .\end{aligned}$$

Wegen $\Re\omega\Im\omega > 0$ ist der zweite Term auf der rechten Seite negativ und kann nun weggelassen werden. Da r auf dem Rand von Null weg beschränkt ist, erhalten wir

$$\| u \|^2_{0,t,\Omega} \prec |\omega|^{-2}\| \nabla u \|_{0,t,\Omega} + |\omega|^{-2}\int_{\partial\Omega}|\partial_\nu u|^2\; d\mathbf{o} + \int_{\partial\Omega}|u|^2\; d\mathbf{o} \quad .$$

Aufgrund von $t < -\frac{1}{2}$ können wir hier t durch $-t-1 \in (-\frac{1}{2}, 0)$ ersetzen. Wir addieren $|\omega|^{-2}\int_{\partial\Omega}|\partial_\nu u|^2\; d\mathbf{o}$, wenden (5.9) mit $\sigma = -t-1$ an und schätzen weiter ab:

$$\begin{aligned}&\| u \|^2_{0,t,\Omega} + |\omega|^{-2}\int_{\partial\Omega}|\partial_\nu u|^2\; d\mathbf{o} \\ \prec\;& |\omega|^{-2}\left(|\omega|^{2\gamma}\| u \|^2_{0,-t-2,\Omega} + |\omega|^2\int_{\partial\Omega}|u|^2\; d\mathbf{o} + \int_{\partial\Omega}|T|^2\; d\mathbf{o}\right) + \int_{\partial\Omega}|u|^2\; d\mathbf{o} \\ \prec\;& |\omega|^{2(\gamma-1)}\| u \|^2_{0,-t-2,\Omega} + \int_{\partial\Omega}|u|^2\; d\mathbf{o} + |\omega|^{-2}\int_{\partial\Omega}|T|^2\; d\mathbf{o} \quad .\end{aligned} \tag{5.24}$$

Letztendlich ersetzen wir wieder u durch U wie am Ende des Beweises zu Lemma 5.12, entfernen die Quadrate und erhalten so (5.22) zunächst für $g \in H^\infty(\partial\Omega)$.

Partielles Integrieren und die Differentialgleichung $(-\Delta - \omega^2)U = 0$ liefern

$$\| \nabla U \|^2_{0,t,\Omega} = -2t\Re\langle\, r^{2t-1}\partial_r U\,,\, U\,\rangle_\Omega + \Re\omega^2\| U \|^2_{0,t,\Omega} + \Re\int_{\partial\Omega} r^{2t}(\partial_\nu U)\overline{U}\; d\mathbf{o} \quad .$$

Wir ersetzen $\partial_r U$ durch ∇U, schätzen wieder die Skalarprodukte ab und erhalten nach Umstellungen

$$|\omega|^{-2}\| \nabla U \|^2_{0,t,\Omega} \prec \| U \|^2_{0,t,\Omega} + |\omega|^{-2}\|\partial_\nu U\|^2_{0,\partial\Omega} + |\omega|^{-2}\|U\|^2_{0,\partial\Omega}$$

oder

$$|\omega|^{-1}\| U \|_{1,t,\Omega} \prec \| U \|_{0,t,\Omega} + |\omega|^{-1}\|\partial_\nu U\|_{0,\partial\Omega} + |\omega|^{-1}\|U\|_{0,\partial\Omega} \quad .$$

Indem wir dieses Ergebnis zu (5.22) addieren und dann noch einmal (5.22) anwenden, erhalten wir (5.21). Über das bereits verwendete Dichtheitsargument ergibt sich die Aussage dann auch für $g \in H^1(\partial\Omega)$. ♦

5.4 Die Lösung zu reellen Frequenzen

Als nächster Schritt erfolgt, wie auch schon beim Maxwell-Problem, die Konstruktion der Lösung zu reellen Frequenzen, gefolgt von der Übertragung der soeben hergeleiteten Abschätzungen auf diese verallgemeinerten Lösungen. Die Grenzabsorption folgt in diesem Fall allerdings mit Hilfe der Darstellungen des Lösungsoperators aus Abschnitt 5.2 direkt aus den analogen Ergebnissen für den Fall homogener Randbedingungen.

Zuerst einmal müssen wir formulieren, was eine Strahlungslösung zu $\omega \in \mathbb{R}_+$ sein soll. Wie beim Problem mit homogener Dirichlet-Randbedingung suchen wir auch hier die Lösung in einem größeren Raum und fordern zur Sicherstellung der Eindeutigkeit zusätzlich, daß eine Ausstrahlungsbedingung erfüllt ist.

Definition 5.15 *Sei $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ und $\omega > 0$. Dann heißt U Lösung von $\mathcal{R}_\Omega(g,\omega)$ genau dann, wenn*

(i) $U \in W_t^{1,\Delta}(\Omega)$ *für alle* $t < -\frac{1}{2}$

(ii) $(-\Delta - \omega^2)U = 0$ *in* Ω

(iii) $U = g$ *auf* $\partial\Omega$

(iv) $(\nabla - \mathrm{i}\,|\omega|\xi)U \in W_\sigma(\Omega)$ *für ein* $\sigma > -\frac{1}{2}$.

Unter Rückgriff auf bekannte Ergebnisse ([20, Lemma 2.21]) erhält man die Eindeutigkeit der Lösungen von $\mathcal{R}_\Omega(g,\omega)$, da die Differenz zweier Lösungen auch dem dort definierten Lösungsbegriff zum Problem mit homogener Randbedingung genügt. Auch die Grenzabsorption läßt sich auf Bekanntes zurückführen.

Lemma 5.16 *Sei $m \in \mathbb{N}$ und $t < -\frac{1}{2}$. Die Abbildung*

$$\begin{array}{rcccc} L_\omega & : & \mathbb{C}_+ \times H^{m-1/2}(\partial\Omega) & \longrightarrow & W_t^{m,\Delta}(\Omega) \\ & & (\omega, g) & \longmapsto & L_\omega g \end{array}$$

kann stetig nach $\mathbb{R}_+ \times H^{m-1/2}(\partial\Omega)$ fortgesetzt werden, und $L_\omega g$ für $\omega \in \mathbb{R}_+$ löst $\mathcal{R}_\Omega(g,\omega)$.

Beweis:
Die Fortsetzbarkeit folgt für $m = 1$ direkt aus Gleichung (5.6) im Beweis von Lemma 5.6, der Stetigkeit von L_i als Operator von $H^{1/2}(\partial\Omega)$ nach $W_{-t}^{1,\Delta}(\Omega)$ und Lemma 5.5 mit $k = 1$. Insbesondere gilt auch $L_\omega g = [\mathrm{id} + (1+\omega^2)G_\omega]L_\mathrm{i}\,g$ für $\omega \in \mathbb{R}_+$.

Für $m \geq 2$ folgt die Fortsetzbarkeit als Abbildung mit Werten in $W_t^m(\Omega)$ aus (5.7) und Lemma 5.5 mit $k = 1$. Wegen $\Delta L_\omega g = -\omega^2 L_\omega g$ konvergiert dann auch $\Delta L_\omega g$ in $W_s^m(\Omega)$, also erst recht in $W_s^{m-2,\Delta}(\Omega)$.

Sei nun $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ und $\omega \in \mathbb{R}_+$. Dann ist $(\nabla - \mathrm{i}\,|\omega|\xi)L_\mathrm{i}\,g$ sogar in $W_\sigma(\Omega)$ für jedes $\sigma \in \mathbb{R}$, und $(\nabla - \mathrm{i}\,|\omega|\xi)G_\omega L_\mathrm{i}\,g$ liegt in $W_\sigma(\Omega)$ für ein $\sigma > -\frac{1}{2}$ nach Lemma 2.23 in [20]. Nach (5.6) ist folglich die Ausstrahlungsbedingung für $L_\omega g$ erfüllt. Damit löst $L_\omega g$ das Problem $\mathcal{R}_\Omega(g,\omega)$. ♦

Nun überträgt sich die zuvor hergeleitete Asymptotik auch auf die Lösungen zu reellen Frequenzen.

Satz 5.17 *Sei Ω ein gleichmäßiges Strahlungsgebiet zur homogenen Schwingungsgleichung mit inhomogenen Randdaten mit α, γ wie in Definition 5.10, $Q \in \mathcal{Q}_\infty^\alpha$ und $t < -\frac{1}{2}$. Dann gilt*

$$|\omega|^{-1}\|L_\omega g\|_{1,t,\Omega} + \|L_\omega g\|_{0,t,\Omega} \prec \|g\|_{0,\partial\Omega} + |\omega|^{-1}\|g\|_{1,\partial\Omega}$$

gleichmäßig bezüglich $g \in H^1(\partial\Omega)$ und $\omega \in Q$.

Beweis:
Nach Lemma 5.14 erhalten wir die Abschätzung

$$\|L_\omega g\|_{0,t,\Omega} + |\omega|^{-1}\|L_\omega g\|_{1,t,\Omega} \leq C\left[|\omega|^{\gamma-1}\|L_\omega g\|_{0,-t-2,\Omega} + \|g\|_{0,\partial\Omega} + |\omega|^{-1}\|g\|_{1,\partial\Omega}\right]$$

mit einer Konstanten $C > 0$ für $\omega \in Q$. Lemma 5.16 liefert damit die Gültigkeit derselben Ungleichung auch für $\omega \in \overline{Q}$.

Somit ist die angestrebte Abschätzung für

$$C|\omega|^{\gamma-1} \leq \frac{1}{2} \iff |\omega| \geq \left(\frac{1}{2C}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} =: \widehat{\lambda}$$

erreicht.

Auf der kompakten Menge $\left\{\omega \in \overline{Q} \;\middle|\; |\omega| \leq \widehat{\lambda}\right\}$ ist die stetige Funktion $\omega \mapsto \omega\|L_\omega g\|_{1,t,\Omega}$ für jedes $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ beschränkt, und folglich erhalten wir nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit hier sogar

$$|\omega|\|L_\omega g\|_{1,t,\Omega} \prec \|g\|_{1/2,\partial\Omega} \prec \|g\|_{1,\partial\Omega} \quad ,$$

womit die Behauptung gezeigt ist. ♦

5.5 Optimalität der Asymptotik

Wir führen folgende Sprechweise ein: Ist J_ω eine Schar von Operatoren, die einen gemeinsamen Definitionsbereich D nach $W^0_{<-\frac{1}{2}}(\Omega)$ bzw. $\mathbf{W}^{0,q,q+1}_{<-\frac{1}{2}}(\Omega)$ abbilden, so sagen wir, J_ω besitze eine Hochfrequenzasymptotik vom Grade β für Daten aus dem Unterraum X von D, wenn mit einem $\alpha \in [\,0\,,\,1\,]$ für alle $Q \in \mathcal{Q}_\infty^\alpha$ und $t < -\frac{1}{2}$ die Abschätzung

$$\|J_\omega\Phi\|_{0,t,\Omega} \prec |\omega|^\beta\|\Phi\|_X$$

gleichmäßig bezüglich $\Phi \in X$ und $\omega \in \overline{Q}$ gilt.

5.5.1 Die Asymptotik von L_ω

Es wurde gezeigt, daß L_ω für Randdaten aus $H^1(\partial\Omega)$ eine Hochfrequenzasymptotik vom Grade 0 besitzt, wenn Ω ein gleichmäßiges Strahlungsgebiet zur homogenen Schwingungsgleichung mit inhomogenen Randdaten ist.

Für allgemeinere Randdaten $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ andererseits erhalten wir in gleichmäßigen Strahlungsgebieten im Sinne von [20] noch die Abschätzung

$$\|L_\omega g\|_{0,t,\Omega} \prec |\omega|\|g\|_{1/2,\partial\Omega}$$

gleichmäßig bezüglich g und $\omega \in \overline{Q}$, $Q \in \mathcal{Q}^1_\infty$, wie man aus (5.6) mit Hilfe von Lemma 5.5 ersieht.

Das somit für Randdaten aus $H^1(\partial\Omega)$ hergeleitete asymptotische Verhalten ist in dem Sinne optimal, daß sich im allgemeinen selbst für $g \in C^\infty(\partial\Omega)$ keine Abschätzung der Art

$$\|L_\omega g\|_{0,t,\Omega} \prec |\omega|^\beta f(g)$$

mit einem $\beta < 0$ und einer reellwertigen Funktion f gleichmäßig bezüglich $\omega \in Q \in \mathcal{Q}^0_\infty$ herleiten läßt, wie das folgende Beispiel zeigt.

Lemma 5.18 *Es sei $\Omega = A(1) \subset \mathbb{R}^N$ mit ungerader Raumdimension N und $g(x) = 1$ für $x \in \partial\Omega$. Gilt mit $t, \beta \in \mathbb{R}$ die Abschätzung*

$$\|L_\omega g\|_{0,t,\Omega} \prec |\omega|^\beta$$

gleichmäßig bezüglich $\omega \in Q \in \mathcal{Q}^0_\infty$, so ist $\beta \geq 0$.

Beweis:
Wir wollen mit H^1_ν die Hankel-Funktion erster Art bezeichnen, die die Differentialgleichung

$$z^2 u''(z) + z u'(z) + (z^2 - \nu^2) u(z) = 0$$

löst. Mit $\nu = \frac{N}{2} - 1$ gilt

$$L_\omega g(x) = r(x)^{-\nu} \frac{H^1_\nu(\omega r(x))}{H^1_\nu(\omega)}$$

für alle $\omega \in \mathbb{C}_+$. In dem betrachteten Fall ist $\nu \in \mathbb{N} - \frac{1}{2}$, und so gilt nach [13, Seite 72]

$$H^1_\nu(z) = z^{-\frac{1}{2}} \operatorname{e}^{iz} \sum_{l=0}^{\nu - \frac{1}{2}} c^\nu_l z^{-l}$$

mit Konstanten $c^\nu_l \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Unsere Lösung hat also die Gestalt

$$L_\omega g = r^{\frac{1-N}{2}} \operatorname{e}^{i\omega(r-1)} \frac{\sum_{l=0}^{\frac{N-3}{2}} \tilde{c}^N_l (\omega r)^{-l}}{\sum_{l=0}^{\frac{N-3}{2}} \tilde{c}^N_l (\omega)^{-l}} = r^{\frac{1-N}{2}} \operatorname{e}^{i\omega(r-1)} \frac{1 + R_N(\omega r)}{1 + R_N(\omega)} \quad ,$$

wobei $\tilde{c}^N_l = c^\nu_l$ und

$$R_N(t) := \sum_{l=1}^{\frac{N-3}{2}} \frac{\tilde{c}^N_l}{\tilde{c}^N_0} t^{-l}$$

sei. Für $|\omega| \geq \widehat{\omega}$ mit einem genügend großen $\widehat{\omega} > 0$ gilt $|R_N(\omega)| < \frac{1}{3}$ und folglich mit $r \geq 1$ auch $|R_N(\omega r)| < \frac{1}{3}$ sowie

$$\left| \frac{1 + R_N(\omega r)}{1 + R_N(\omega)} \right| > \frac{1}{2} \quad .$$

Da sich weiterhin wegen $\Im\omega \leq 1$ der Term $|\operatorname{e}^{i\omega(r-1)}| = \operatorname{e}^{-\Im\omega(r-1)}$ nach unten durch e^{1-r} abschätzen läßt, erhalten wir für $|\omega| \geq \widehat{\omega}$

$$\|L_\omega g\|_{0,t,\Omega} \geq \frac{1}{2} \|r^{t + \frac{1-N}{2}} \operatorname{e}^{1-r}\|_{0,0,\Omega} = const \quad .$$

Damit ist die Aussage des Beispiels gezeigt. ♦

5.5.2 Die Asymptotik von G_ω

Für gleichmäßige Strahlungsgebiete bewies Peter, daß der Operator G_ω bei Daten aus $W^0_{>\frac{1}{2}}(\Omega)$ eine Hochfrequenzasymptotik vom Grade -1 besitzt, und zeigte darüberhinaus den Grad -2 bezüglich Daten aus $W^1_{>\frac{1}{2}}(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Daraus folgt wiederum die Optimalität dieser Abschätzung:

Lemma 5.19 *Ist $V \in W^2_s(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit einem $s > \frac{1}{2}$ in einem gleichmäßigen Strahlungsgebiet Ω und gilt gleichmäßig bezüglich $\omega \in Q \in \mathcal{Q}^0_\infty$ die Abschätzung*

$$\|G_\omega V\|_{0,-s,\Omega} \prec |\omega|^\beta$$

mit $\beta < -2$, so ist $V = 0$.

Beweis:
Aufgrund der Randbedingung und wegen der Eindeutigkeit von Lösungen gilt nämlich $-G_\omega(\Delta + \omega^2)V = V$ und damit nach Lemma 5.5

$$\|V\|_{0,-s,\Omega} \leq \|G_\omega \Delta V\|_{0,-s,\Omega} + |\omega|^2 \|G_\omega V\|_{0,-s,\Omega} \prec |\omega|^{-1} \|\Delta V\|_{0,s,\Omega} + |\omega|^{\beta+2} \|V\|_{0,s,\Omega} \quad .$$

Da die rechte Seite für $|\omega| \to \infty$ gegen Null geht, muß V verschwinden. ♦

Mit Hilfe der Resultate zu L_ω können wir zeigen, daß in geeigneten Gebieten für die optimale Asymptotik anstelle der Randbedingung auch genügende Regularität der Daten ausreicht: G_ω besitzt eine Hochfrequenzasymptotik vom Grade -2 für Daten aus $W^{3/2}_s(\Omega)$ mit jedem $s > \frac{1}{2}$. Wir formulieren dazu einen etwas allgemeineren Satz, der auch für die Iterierten von G_ω analoge Abschätzungen liefert.

Satz 5.20 *Sei Ω ein gleichmäßiges Strahlungsgebiet zur Schwingungsgleichung mit inhomogenen Randdaten. Ferner seien $\alpha \in [0, 1)$, $Q \in \mathcal{Q}^\alpha_\infty$, $k \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}_0$ mit $j \leq 2k - 2$ und $s > k - \frac{1}{2}$. Dann gilt gleichmäßig bezüglich $V \in W^{3/2}_s(\Omega)$ und $\omega \in \overline{Q}$ die Abschätzung*

$$\|G^k_\omega V\|_{j,-s,\Omega} \prec |\omega|^{j-k-1} \|V\|_{3/2,s,\Omega} \quad .$$

Der Beweis folgt später (Kapitel 6.2).

Kapitel 6

Differenzierbarkeit des Lösungsoperators zu inhomogenen Randdaten

In diesem Kapitel wollen wir uns mit den Frequenzableitungen des Operators L_ω bei reellen Frequenzen beschäftigen und für sie zu Satz 5.17 analoge Aussagen gewinnen.

6.1 Differenzierbarkeit

Zunächst sehen wir uns die Differenzierbarkeit bei echt komplexen Frequenzen an, um herauszufinden, welcher Art die Terme sind, deren Verhalten in der Nähe der reellen Achse untersucht werden muß.

Lemma 6.1 *Für jedes $t \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{N}$ ist die Abbildung $\omega \mapsto L_\omega$ holomorph als Funktion von $\mathbb{C}_+$ nach $B(H^{m-1/2}(\partial\Omega), W_t^m(\Omega))$. Für $p \in \mathbb{N}_0$ haben die Ableitungen die Gestalt*

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\right)^p L_\omega = \sum_{\frac{p}{2}\le k\le p} c_{pk}\omega^{2k-p}G_\omega^k L_\omega \tag{6.1}$$

mit Konstanten $c_{pk} \in \mathbb{Z}$.

Beweis:
Für ω und $\mu \in \mathbb{C}_+$ folgt aus

$$(-\Delta - \omega^2)(L_\omega - L_\mu)g = (\omega^2 - \mu^2)L_\mu g$$

aufgrund der Übereinstimmung der Randdaten

$$L_\omega - L_\mu = (\omega^2 - \mu^2)G_\omega L_\mu \quad . \tag{6.2}$$

Analog dazu besteht für G_ω die Resolventengleichung

$$G_\omega - G_\mu = (\omega^2 - \mu^2)G_\omega G_\mu \quad . \tag{6.3}$$

Nach Lemma 5.4 ist die Abbildung $\mathbb{C}_+ \ni \omega \mapsto G_\omega \in B(L^2(\Omega), L^2(\Omega))$ lokal beschränkt. Wegen $-\Delta G_\omega V = \omega G_\omega V + V$ erhalten wir daraus durch wiederholte Anwendung von Lemma 5.1 die lokale Beschränktheit der Funktion $\omega \mapsto G_\omega$ mit Werten in $B(W^p(\Omega), W^{p+2}(\Omega))$ für $p \in \mathbb{N}_0$. Lemma 5.3 und noch einmal 5.1 liefern Beschränktheit auch mit Werten in $B(W_t^p(\Omega), W_t^{p+2}(\Omega))$ für $t \ge 0$. Mittels (6.3) folgert man nun zunächst die Stetigkeit und sodann die Differenzierbarkeit dieser Abbildung, wobei für die erste Ableitung gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}G_\omega = 2\omega G_\omega^2 \quad .$$

Auf der anderen Seite erhält man mit Hilfe von (6.2) nacheinander Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Abbildung $\omega \mapsto L_\omega \in B(H^{m-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), W_t^m(\Omega))$, wobei die erste Ableitung die Gestalt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}L_\omega = 2\omega G_\omega L_\omega$$

hat.

Aus diesen beiden Zwischenergebnissen folgert man nun unter Verwendung der Produktregel sukzessive die Existenz beliebiger Frequenzableitungen.

Für $p = 0$ und $p = 1$ ist die Gleichung (6.1) bereits gezeigt; es ist $c_{00} = 1$ und $c_{11} = 2$. Ist die Behauptung für Ableitungen bis zur Ordnung p gezeigt, so folgt, weil beim Ableiten eines Termes $\omega^\alpha G_\omega^\beta L_\omega$ nur Terme der Gestalt $\omega^{\alpha+1}G_\omega^{\beta+1}L_\omega$ oder, mit $\alpha \ge 1$, $\omega^{\alpha-1}G_\omega^\beta L_\omega$ entstehen können,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\right)^{p+1} L_\omega &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\sum_{\frac{p}{2}\le k\le p} c_{pk}\omega^{2k-p}G_\omega^k L_\omega \\ &= \sum_{\frac{p+1}{2}\le k\le p} c_{pk}(2k-p)\omega^{2k-p-1}G_\omega^k L_\omega + \sum_{\frac{p}{2}\le k\le p} \tilde{c}_{pk}\omega^{2k-p+1}G_\omega^{k+1}L_\omega \quad .\end{aligned}$$

Durch eine Indexverschiebung in der zweiten Summe und Zusammenfassen beider Summen erhält man die Behauptung für $p+1$. ♦

Um die Existenz der Frequenzableitungen bei reellen Frequenzen zu zeigen, müssen wir Lemma 6.1 zufolge also die Grenzabsorption für die Operatoren $G_\omega^k L_\omega$ mit $k \in \mathbb{N}$ zeigen. Dabei können wir uns der Ergebnisse aus [20] bedienen: Aus (5.6) bzw. (5.7) folgt mit Hilfe von Lemma 5.5 das

Lemma 6.2 *Sei $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $t < -\frac{1}{2} - k$. Die Abbildung*

$$\begin{array}{rcccc} G_\omega^k L_\omega & : & \mathbb{C}_+ \times H^{m-1/2}(\partial\Omega) & \longrightarrow & W_t^{m+2k,\Delta}(\Omega) \\ & & (\omega, g) & \longmapsto & G_\omega^k L_\omega g \end{array}$$

läßt sich stetig nach $\mathbb{R}_+ \times H^{m-1/2}(\partial\Omega)$ fortsetzen.

Beweis:
Analog Lemma 5.16. ♦

6.2 Hochfrequenzasymptotik der Frequenzableitungen

Es folgt die Herleitung von bezüglich ω gleichmäßigen Abschätzungen der Lösung bei hohen Frequenzen.

Lemma 6.3 *Sei Ω ein gleichmäßiges Strahlungsgebiet zur Schwingungsgleichung mit inhomogenen Randdaten mit α, γ gemäß Definition 5.10. Dann gelten für $Q \in \mathcal{Q}^\alpha_\infty$, j, $k \in \mathbb{N}_0$ und $t < -k - \frac{1}{2}$ die Abschätzungen*

$$\|G^k_\omega L_\omega g\|_{j,t,\Omega} \prec |\omega|^{j-k}\|g\|_{0,\partial\Omega} + |\omega|^{j-k-1}\|g\|_{1,\partial\Omega} + \sum_{0\le l\le \frac{j}{2}-k-1} |\omega|^{2l}\|g\|_{j-2k-2l-\frac{1}{2},\partial\Omega}$$

und (für $j \geq 1$)

$$\|G^k_\omega L_\omega g\|_{W^{j,\Delta}_t(\Omega)} \prec |\omega|^{j-k+1}\|g\|_{0,\partial\Omega} + |\omega|^{j-k}\|g\|_{1,\partial\Omega} + \sum_{0\le l\le \frac{j}{2}-k-1} |\omega|^{2l}\|g\|_{j-2k-2l-\frac{1}{2},\partial\Omega}$$

gleichmäßig bezüglich $\omega \in \overline{Q}$ und $g \in H^1(\partial\Omega) \cap H^{j-2k-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

Zum Beweis bedienen wir uns einer Zerlegung, wie sie auch in Kapitel 4.2 verwendet wurde. Eine leichte Modifikation gegenüber der entsprechenden Zerlegung aus [20] wird notwendig, um mittels Lemma 5.2 (*3.*) die benötigte Regularität der auftretenden Zwischenstufen zu sichern.

Lemma 6.4 *Für $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ und $\omega \in \mathbb{C}_+$ gilt:*

$$G^k_\omega L_\omega g = \frac{1}{2k\omega^2}\vartheta\Lambda G^{k-1}_\omega L_\omega g + G^k_\omega(1-\vartheta)L_\omega g - \frac{1}{2k\omega^2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{|\gamma|\le i+1} G^k_\omega \partial^\gamma(\chi_{k,i,\gamma}G^{i-1}_\omega L_\omega g) \quad . \tag{6.4}$$

mit nur von ϑ abhängigen Funktionen $\chi_{k,i,\gamma} \in C^\infty_0(\Omega)$, deren Träger in $\operatorname{supp}\nabla\vartheta$ *enthalten sind (s. Generalvoraussetzung A).*

Beweis:
Nach [20, Lemma 3.3] gilt für jede genügend oft differenzierbare Funktion u

$$(-\Delta-\omega^2)^k\vartheta\Lambda u = \vartheta(\Lambda+2k)(-\Delta-\omega^2)^k u + 2k\omega^2\vartheta(-\Delta-\omega^2)^{k-1}u + \sum_{i=1}^{k} D_{k,i+1}(-\Delta-\omega^2)^{k-i}u$$

mit glatten Differentialoperatoren $D_{k,m}$ von der Ordnung m, deren Koeffizienten auf Ableitungen von ϑ zurückgehen und daher außerhalb des Trägers von $\nabla\vartheta$ verschwinden.

Mittels der Leibniz-Regel zeigt man für $\beta \in \mathbb{N}^N_0$ und entsprechend oft differenzierbares ψ und φ durch eine vollständige Induktion

$$\psi\partial^\beta\varphi = \partial^\beta(\psi\varphi) + \sum_{0\le\gamma<\beta}\partial^\gamma(\Theta_{\beta,\gamma}(\psi)\varphi) = \sum_{0\le\gamma\le\beta}\partial^\gamma(\Theta_{\beta,\gamma}(\psi)\varphi)$$

mit von φ und ψ unabhängigen Differentialoperatoren $\Theta_{\beta,\gamma}$ (wobei $\Theta_{\beta,\beta} = \mathrm{id}$ ist). Daher gilt

$$\sum_{i=1}^{k} D_{k,i+1}(-\Delta-\omega^2)^{k-i}u = \sum_{i=1}^{k}\sum_{|\gamma|\le i+1}\partial^\gamma(\chi_{k,i,\gamma}(-\Delta-\omega^2)^{k-i}u)$$

mit $\chi_{k,i,\gamma}$ wie in der Behauptung, und folglich für $g \in H^\infty(\partial\Omega)$

$$\begin{aligned} L_\omega g - \frac{1}{2k\omega^2}&(-\Delta-\omega^2)^k\vartheta\Lambda G^{k-1}_\omega L_\omega g \\ &= L_\omega g - \frac{1}{2k\omega^2}\Big[\vartheta(\Lambda+2k)(-\Delta-\omega^2)^k G^{k-1}_\omega L_\omega g + 2k\omega^2\vartheta(-\Delta-\omega^2)^{k-1}G^{k-1}_\omega L_\omega g \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k}\sum_{|\gamma|\le i+1}\partial^\gamma(\chi_{k,i,\gamma}(-\Delta-\omega^2)^{k-i}G^{k-1}_\omega L_\omega g)\Big] \\ &= L_\omega g - \vartheta L_\omega g - \frac{1}{2k\omega^2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{|\gamma|\le i+1}\partial^\gamma(\chi_{k,i,\gamma}G^{i-1}_\omega L_\omega g) \quad . \end{aligned}$$

Wenden wir auf beide Seiten G^k_ω an und bringen den zweiten Term von der linken Seite auf die rechte, so erhalten wir

$$\begin{aligned} G^k_\omega L_\omega g &= \frac{1}{2k\omega^2}G^k_\omega(-\Delta-\omega^2)^k\vartheta\Lambda G^{k-1}_\omega L_\omega g \\ &\quad + G^k_\omega(1-\vartheta)L_\omega g - \frac{1}{2k\omega^2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{|\gamma|\le i+1}G^k_\omega\partial^\gamma(\chi_{k,i,\gamma}G^{i-1}_\omega L_\omega g) \quad . \end{aligned}$$

Da $(-\Delta-\omega^2)^i\vartheta\Lambda G^{k-1}_\omega L_\omega g \in \overset{\circ}{H}{}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ist für alle i, gilt wegen der Eindeutigkeit von Lösungen zu $\mathcal{H}_\Omega(V,\omega)$ ebenfalls für alle i

$$G^i_\omega(-\Delta-\omega^2)^i\vartheta\Lambda G^{k-1}_\omega L_\omega g = \vartheta\Lambda G^{k-1}_\omega L_\omega g \quad .$$

Damit erhalten wir (6.4) für $g \in H^\infty(\partial\Omega)$. Die Behauptung folgt dann nach dem üblichen Dichtheitsargument. ♦

Nun beweisen wir Lemma 6.3.

Beweis:
Um die Übersichtlichkeit zu erhöhen, führen wir folgende Schreibweise ein:

$$A(\kappa) := |\omega|^\kappa(\|g\|_{0,\partial\Omega} + |\omega|^{-1}\|g\|_{1,\partial\Omega})$$

und

$$B(\kappa,\nu) := \sum_{l=0}^{[\frac{\kappa}{2}]-\nu-1} |\omega|^{2l} \|g\|_{\kappa-2\nu-2l-\frac{1}{2},\partial\Omega} \quad .$$

Zu zeigen sind also

$$\|G_\omega^k L_\omega g\|_{j,t,\Omega} \prec A(j-k) + B(j,k) \tag{6.5}$$

und für $j \geq 1$

$$\|G_\omega^k L_\omega g\|_{W_t^{j,\Delta}(\Omega)} \prec A(j-k+1) + B(j,k) \quad . \tag{6.6}$$

Offensichtlich gelten

$$|\omega|^\lambda A(\kappa) = A(\kappa+\lambda) \tag{6.7}$$

$$A(\lambda) \prec A(\kappa) \qquad \text{für } \lambda \leq \kappa \tag{6.8}$$

$$B(\kappa,\nu) = 0 \qquad \text{für } \kappa < 2\nu+2 \tag{6.9}$$

$$|\omega|^2 B(\kappa,\nu) \leq B(\kappa+2,\nu) \tag{6.10}$$

$$B(\kappa+2,\nu) = B(\kappa,\nu-1) \qquad \text{für } \nu \geq 1 \quad . \tag{6.11}$$

Aus Satz 5.17 und Lemma 5.8 folgt (6.5) für $k=0$. Daraus folgern wir für ungerades j mit Hilfe von (6.7), (6.8) und (6.9)

$$\begin{aligned} \|L_\omega g\|_{W_t^{j,\Delta}(\Omega)} &\prec \|L_\omega g\|_{j,t,\Omega} + \|\Delta^{\frac{j+1}{2}} L_\omega g\|_{0,t,\Omega} \\ &= \|L_\omega g\|_{j,t,\Omega} + |\omega|^{j+1} \|L_\omega g\|_{0,t,\Omega} \\ &\prec A(j) + B(j,0) + |\omega|^{j+1}\big(A(0)+B(0,0)\big) \\ &\prec A(j+1) + B(j,0) \quad , \end{aligned}$$

und analog für gerades j, womit auch die Behauptung (6.6) für $k=0$ gezeigt ist.

Wir wollen nun mit einem $k \in \mathbb{N}_0$ zunächst (6.5) unter der Annahme, daß es für k und alle $j \in \mathbb{N}_0$ richtig ist, für $k+1$ und alle $j \in \mathbb{N}_0$ zeigen. Dabei folgt der Fall $j=0$ aus der Zerlegung (6.4). Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2(k+1)|\omega|^2} \|\vartheta \Lambda G_\omega^k L_\omega g\|_{0,t,\Omega} &\prec |\omega|^{-2} \|G_\omega^k L_\omega g\|_{1,t+1,\Omega} \\ &\prec |\omega|^{-2}(A(1-k)+B(1,k)) = A(-k-1) \end{aligned}$$

nach Induktionsannahme. Mit Hilfe von Lemma 5.5 erhalten wir

$$\|G_\omega^{k+1}(1-\vartheta)L_\omega g\|_{0,t,\Omega} \prec |\omega|^{-k-1}\|L_\omega g\|_{0,t,\Omega} \prec |\omega|^{-k-1}(A(0)+B(0,0)) = A(-k-1)$$

sowie für $1 \leq i \leq k+1$ und $|\gamma| \leq i+1$ wegen Lemma 5.2 (*3.*)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2(k+1)|\omega|^2} \|G_\omega^{k+1} \partial^\gamma (\chi_{k+1,i,\gamma} G_\omega^{i-1} L_\omega g)\|_{0,t,\Omega} &\prec |\omega|^{-k-3} \|G_\omega^{i-1} L_\omega g\|_{W_t^{i,\Delta}(\Omega)} \\ &\prec |\omega|^{-k-3}[A(i-(i-1)+1) + B(i,i-1)] \prec A(-k-1) \quad , \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt $B(i,i-1)$ nach (6.9) wegen $i \geq 1$ wegfällt.

Der Fall $j=1$ wird über eine partielle Integration erledigt. Mit Hilfe von

$$\Delta G_\omega^{k+1} L_\omega g = -\omega^2 G_\omega^{k+1} L_\omega g - G_\omega^k L_\omega g \tag{6.12}$$

erhält man

$$\begin{aligned} \|\nabla G_\omega^{k+1} L_\omega g\|_{0,t,\Omega}^2 = {} & -2t\langle\, G_\omega^{k+1} L_\omega g \,,\, \rho^{2t-1}\partial_r G_\omega^{k+1} L_\omega g \,\rangle_\Omega \\ & + \omega^2 \|G_\omega^{k+1} L_\omega g\|_{0,t,\Omega}^2 + \langle\, G_\omega^{k+1} L_\omega g \,,\, \rho^{2t} G_\omega^k L_\omega g \,\rangle_\Omega \quad . \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\|\nabla G_\omega^{k+1} L_\omega g\|_{0,t,\Omega} \prec |\omega| \|G_\omega^{k+1} L_\omega g\|_{0,t,\Omega} + |\omega|^{-1} \|G_\omega^k L_\omega g\|_{0,t,\Omega} \quad .$$

Hier läßt sich die rechte Seite unter Verwendung von (6.5) für $j=0$ durch $A(1-(k+1))$ abschätzen.

Zuletzt wird für $j \geq 1$ der Induktionsschritt zu $j+2$ vollzogen, wozu uns das Lemma 5.1 sowie die Identität (6.12) dient. Es gilt

$$\|G_\omega^{k+1} L_\omega g\|_{j+2,t,\Omega} \prec \|G_\omega^{k+1} L_\omega g\|_{0,t,\Omega} + |\omega|^2 \|G_\omega^{k+1} L_\omega g\|_{j,t,\Omega} + \|G_\omega^k L_\omega g\|_{j,t,\Omega} \quad .$$

Für den ersten Term können wir auf den Fall $j=0$ zurückgreifen, für die anderen beiden auf die Induktionsannahme bezüglich j, wobei zur weiteren Abschätzung (6.9), (6.10) und (6.11) benötigt werden. So ergibt sich (6.5) für $j+2$ statt j.

Nun wollen wir (6.6) nachweisen. Für $j=1$ ist nach (2.40-1) und wiederum (6.12)

$$\|G_\omega^{k+1} L_\omega g\|_{W_t^{1,\Delta}(\Omega)} \prec \|G_\omega^{k+1} L_\omega g\|_{1,t,\Omega} + |\omega|^2 \|G_\omega^{k+1} L_\omega g\|_{0,t,\Omega} + \|G_\omega^k L_\omega g\|_{0,t,\Omega} \quad .$$

Zum Abschätzen dieser Terme verwenden wir (6.5).

Für $j=2$ setzen wir in analoger Weise (2.40-2) und (6.12) ein. Aus der rekursiven Definition (2.40-3) ergibt sich der Induktionsschritt bezüglich j mit

$$\|G_\omega^{k+1} L_\omega g\|_{W_t^{j+2,\Delta}(\Omega)} \prec \|G_\omega^{k+1} L_\omega g\|_{j+2,t,\Omega} + |\omega|^2 \|G_\omega^{k+1} L_\omega g\|_{W_t^{j,\Delta}(\Omega)} + \|G_\omega^k L_\omega g\|_{W_t^{j,\Delta}(\Omega)} \quad .$$

Hier können wir auf den ersten Term (6.5) anwenden, auf die anderen beiden die Induktionsannahme. Schließlich erhalten wieder unter Zuhilfenahme von (6.10) und (6.11) auch für diesen Fall die gewünschte Abschätzung. Damit ist auch (6.6) für $k+1$ durch vollständige Induktion über $j \geq 1$ bewiesen. ♦

In dem folgenden Satz fassen wir die Ergebnisse zur stetigen Fortsetzbarkeit der Schar der Lösungsoperatoren und ihrer Frequenzableitungen in $\mathbb{R}_+$ zusammen.

Satz 6.5 *Für $m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}_0$ und $t < -p - \frac{1}{2}$ ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_+ \times H^{m-1/2}(\partial\Omega) &\longrightarrow W_t^{m+2[\frac{p+1}{2}],\Delta}(\Omega) \\ (\omega, g) &\longmapsto \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\right)^p L_\omega g \end{aligned}$$

stetig nach $\mathbb{R}_+ \times H^{m-1/2}(\partial\Omega)$ fortsetzbar. Ist außerdem Ω ein gleichmäßiges Strahlungsgebiet zur homogenen Schwingungsgleichung mit inhomogenen Randdaten, $0 \le \alpha < 1$ und $Q \in \mathcal{Q}^\alpha_\infty$, so gelten mit $j := m + 2\left[\frac{p+1}{2}\right]$ gleichmäßig bezüglich $\omega \in \overline{Q}$ und Randdaten g aus $H^{m-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \cap H^1(\partial\Omega)$ die Abschätzungen

$$\left\| \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\right)^p L_\omega g \right\|_{j,t,\Omega} \prec |\omega|^j \|g\|_{0,\partial\Omega} + |\omega|^{j-1}\|g\|_{1,\partial\Omega} + |\omega|^{-p} \sum_{l=\left[\frac{p+1}{2}\right]}^{\left[\frac{j}{2}\right]-1} |\omega|^{2l} \|g\|_{j-2l-\frac{1}{2},\partial\Omega}$$

und

$$\left\| \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\right)^p L_\omega g \right\|_{W^{j,\Delta}_t(\Omega)} \prec |\omega|^{j+1} \|g\|_{0,\partial\Omega} + |\omega|^{j}\|g\|_{1,\partial\Omega} + |\omega|^{-p} \sum_{l=\left[\frac{p+1}{2}\right]}^{\left[\frac{j}{2}\right]-1} |\omega|^{2l} \|g\|_{j-2l-\frac{1}{2},\partial\Omega} \quad .$$

Beweis:
Daß $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\right)^p L_\omega$ Bilder in der angegebenen Menge liefert, ergibt sich unmittelbar aus (6.1), wenn man bedenkt, daß der dort vorkommende Summand mit der geringsten Regularität $G_\omega^{\left[\frac{p+1}{2}\right]} L_\omega$ ist. Damit folgt nach Lemma 6.2 auch direkt die Fortsetzbarkeit nach $\mathbb{R}_+$.

Um die Abschätzungen zu beweisen, wenden wir auf die einzelnen Terme in (6.1) die Ungleichungen aus Lemma 6.3 an. So ergibt sich

$$\begin{aligned} \left\| \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\right)^p L_\omega g \right\|_{j,t,\Omega} \prec \sum_{k=\left[\frac{p+1}{2}\right]}^{p} |\omega|^{2k-p} \Big[& |\omega|^{j-k} \|g\|_{0,\partial\Omega} \\ & + |\omega|^{j-k-1}\|g\|_{1,\partial\Omega} + \sum_{l=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]-k-1} |\omega|^{2l} \|g\|_{j-2k-2l-\frac{1}{2},\partial\Omega} \Big] \quad . \end{aligned}$$

Wegen $k \le p$ gilt dabei

$$|\omega|^{2k-p+j-k} \prec |\omega|^j \quad .$$

Durch eine Indexverschiebung in der Summe über l erhalten wir die erste Behauptung.

Der Beweis der zweiten Abschätzung verläuft völlig analog. ♦

Zum Abschluß bringen wir den Beweis von Satz 5.20.

Beweis:
Nach (5.6) gilt für $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$

$$G^k_\omega L_{\mathrm{i}}\, g = \frac{1}{1+\omega^2} G^{k-1}_\omega (L_\omega - L_{\mathrm{i}})g \quad .$$

Da außerdem $V - L_{\mathrm{i}}\Gamma V \in W^1_s(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ist, können wir somit für ein beliebiges $V \in W^{3/2}_s(\Omega)$ die Lösung wir folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} \|G^k_\omega V\|_{j,-s,\Omega} \le & \|G^k_\omega L_{\mathrm{i}}\Gamma V\|_{j,-s,\Omega} + \|G^k_\omega (V - L_{\mathrm{i}}\Gamma V)\|_{j,-s,\Omega} \\ \le & |\omega|^{-2}\big(\|G^{k-1}_\omega L_\omega \Gamma V\|_{j,-s,\Omega} + \|G^{k-1}_\omega L_{\mathrm{i}}\Gamma V\|_{j,-s,\Omega}\big) \\ & + \|G^k_\omega (V - L_{\mathrm{i}}\Gamma V)\|_{j,-s,\Omega} \end{aligned}$$

Den ersten Term schätzen wir nun mit Hilfe von Lemma 6.3 ab:

$$\|G^{k-1}_\omega L_\omega \Gamma V\|_{j,-s,\Omega} \prec |\omega|^{j-k+1}\|\Gamma V\|_{0,\partial\Omega} + |\omega|^{j-k}\|\Gamma V\|_{1,\partial\Omega} \quad .$$

Auf den zweiten Term wendet man Lemma 5.5 mit $n = 0$, auf den dritten mit $n = 1$ an. Schließlich wird $L_{\mathrm{i}}\Gamma V$ mit Hilfe von Lemma 5.6 abgeschätzt. ♦

Anhang A

Die gleichmäßige Strahlungseigenschaft

In diesem Kapitel werden einige Erkenntnisse zusammengestellt, die dazu dienen können, die MHBE in den Rahmen früherer Ergebnisse einzusortieren. Insbesondere wollen wir einen Vergleich mit Anforderungen an das Gebiet im Falle der Schwingungsgleichung in bestehender Literatur ([10], [20]) vornehmen. Dabei sind wieder q-Formen anstelle skalarer Funktionen zu betrachten.

Zunächst können wir im Falle differenzierbarer Koeffizienten die folgende Abschwächung der MHBE herleiten.

Lemma A.1 *Ist $\Xi \in \mathcal{C}_b^1(\overline{\Omega})$, α, γ wie in Definition 3.33, so hat (Ω, Ξ) genau dann die MHBE, wenn für alle $s \in (\frac{1}{2}, 1)$ und $Q \in \mathcal{Q}_\infty^\alpha$ die Abschätzung*

$$\|SH_\omega V\|_{0,-s,\Omega} \prec |\omega|^\gamma \|H_\omega V\|_{0,s-2,\Omega} + \|V\|_{0,s,\Omega} \tag{A.1}$$

gleichmäßig bezüglich $\omega \in Q$ und $V \in \mathbf{W}_s^{0,q,q+1}(\Omega) \cap \mathcal{N}(\Omega, \Xi, \overline{Q})^{\perp_\Xi}$ gilt.

Als Hilfsmittel zeigen wir erst einige Rechenregeln.

Lemma A.2 *Sei $\Omega = \mathbb{R}^N$ oder Null nicht im Abschluß von Ω enthalten. Weiterhin seien $\Phi \in C_0^{\infty,q}(\overline{\Omega})$ und $\varphi := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta r}\Phi$ mit einem $\vartheta \in \mathbb{R}$. Für $\beta \in \mathbb{R}$ gelten dann die folgenden Identitäten.*

$$\Im\langle \rho^\beta \operatorname{div} \operatorname{rot} \varphi , \varphi \rangle_\Omega = -\beta \Im\langle \operatorname{rot} \varphi , \rho^{\beta-1} \widehat{R} \varphi \rangle_\Omega + \Im \int_{\partial\Omega} \rho^\beta \imath^*(\overline{\varphi} \wedge * \operatorname{rot} \varphi) \tag{A.2}$$

$$\Im\langle \rho^\beta \operatorname{rot} \operatorname{div} \varphi , \varphi \rangle_\Omega = -\beta \Im\langle \operatorname{div} \varphi , \rho^{\beta-1} \widehat{T} \varphi \rangle_\Omega + \Im \int_{\partial\Omega} \rho^\beta \imath^*(\operatorname{div} \varphi \wedge * \overline{\varphi}) \tag{A.3}$$

$$\Re\langle \operatorname{div} \widehat{R} \varphi + \widehat{T} \operatorname{rot} \varphi , \rho^\beta \varphi \rangle_\Omega = -\beta \|\widehat{R}\varphi\|^2_{0,\frac{\beta-1}{2},\Omega} + \Re \int_{\partial\Omega} \rho^\beta \imath^*(\overline{\varphi} \wedge * \widehat{R} \varphi)$$

$$\Re\langle \operatorname{rot} \widehat{T} \varphi + \widehat{R} \operatorname{div} \varphi , \rho^\beta \varphi \rangle_\Omega = -\beta \|\widehat{T}\varphi\|^2_{0,\frac{\beta-1}{2},\Omega} + \Re \int_{\partial\Omega} \rho^\beta \imath^*(\widehat{T} \varphi \wedge * \overline{\varphi}) \tag{A.4}$$

Beweis:
Im Falle eines echten Außengebiets mit Null im Komplement erhalten wir $\rho^\beta \varphi \in C_0^{\infty,q}(\overline{\Omega})$, da die Komponentenfunktionen lediglich mit Funktionen aus $C^\infty(\overline{\Omega})$ multipliziert werden. Ebenfalls gelten $\widehat{R}\varphi$, $\operatorname{rot}\varphi \in C_0^{\infty,q+1}(\overline{\Omega})$ und $\widehat{T}\varphi$, $\operatorname{div}\varphi \in C_0^{\infty,q-1}(\overline{\Omega})$. Damit folgen die Behauptungen in diesem Fall aus (2.23).

Insbesondere gelten die Behauptungen für $\Omega = A(a)$ mit jedem $a > 0$. Dies wird nun für die Behandlung des Ganzraumfalles ausgenutzt. Wir berechnen mit Hilfe von (2.27) und (2.32)

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \varphi &= -\mathrm{i}\,\vartheta\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta r} \widehat{R}\Phi + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta r} \operatorname{rot} \Phi \\
\operatorname{rot} \widehat{T}\varphi &= -\widehat{T} \operatorname{rot} \varphi - \mathrm{i}\,\vartheta \varphi + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta r} \partial_r \Phi + q r^{-1} \widehat{T}\widehat{R}\varphi + (q-1) r^{-1} \widehat{R}\widehat{T}\varphi \quad \text{und} \\
\operatorname{rot} \operatorname{div} \varphi &= -\mathrm{i}\,\vartheta \operatorname{rot} \widehat{T}\varphi - \mathrm{i}\,\vartheta\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta r} \widehat{R} \operatorname{div} \Phi + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta r} \operatorname{rot} \operatorname{div} \Phi \quad .
\end{aligned}$$

Zusammen mit analogen Ergebnisse für $\operatorname{div}\varphi$, $\operatorname{div}\widehat{R}\varphi$ und $\operatorname{div}\operatorname{rot}\varphi$ ergibt sich daraus die Existenz aller beteiligten Integrale über Ω, da die Integranden bei Null höchstens Singularitäten der Ordnung r^{-1} haben und außerhalb von Null stetig sind. Die Randintegrale konvergieren für $a \to 0$ gegen Null, da die Integranden bei Null beschränkt sind. ♦

Es folgt der Beweis zu Lemma A.1.

Beweis:
Wegen $|SH_\omega V| \prec |H_\omega V|$ ist eine Inklusion trivial. Um die andere nachzuweisen, nehmen wir o.B.d.A. an, daß Ω, wenn es ein echtes Außengebiet ist, Null nicht enthält. Dadurch wird die Gültigkeit der Behauptung nicht eingeschränkt, da wir dies andernfalls durch eine Verschiebung von Ω und den betrachteten Funktionen bei äquivalenten Normen erreichen können.

Es sei $(E, H) := H_\omega V$. Da $H_\omega V$ nach Lemma 3.12 in $\mathbf{W}_s^{0,q,q+1}(\Omega)$ und folglich auch in $\mathring{R}_s^q(\Omega) \times D_s^{q+1}(\Omega)$ liegt, können wir E bzgl. $\|\cdot\|_{R_s^q(\Omega)}$ und H bzgl. $\|\cdot\|_{D_s^{q+1}(\Omega)}$ durch $C_0^{\infty,q}(\Omega)$- bzw. $C_0^{\infty,q+1}(\overline{\Omega})$-Funktionen approximieren. Dann überträgt sich die Gültigkeit der Abschätzung (3.31). O.B.d.A. sei daher $H_\omega V \in C_0^{\infty,q}(\Omega) \times C_0^{\infty,q+1}(\overline{\Omega})$.

Aus den Differentialgleichungen (2.22) ergeben sich durch Anwendung von rot bzw. div die Gleichungen

$$\begin{aligned}
-\operatorname{rot} \operatorname{div} H &= \mathrm{i}\,\omega \operatorname{rot} \varepsilon E + \mathrm{i} \operatorname{rot} \varepsilon F \\
-\operatorname{div} \operatorname{rot} E &= \mathrm{i}\,\omega \operatorname{div} \mu H + \mathrm{i} \operatorname{div} \mu G
\end{aligned}$$

und sodann durch erneutes Ersetzen gemäß (2.22) unter Berücksichtigung der Generalvoraussetzung B'

$$\begin{aligned}
-\operatorname{rot} \operatorname{div} H &= \omega^2 \mu H + \omega \mu G + \mathrm{i}\,\omega \operatorname{rot} \widehat{\varepsilon} E + \mathrm{i} \operatorname{rot} \varepsilon F =: \widetilde{L} \\
-\operatorname{div} \operatorname{rot} E &= \omega^2 \varepsilon E + \omega \varepsilon F + \mathrm{i}\,\omega \operatorname{div} \widehat{\mu} H + \mathrm{i} \operatorname{div} \mu G =: \widetilde{K} \quad .
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Mittels der Definitionen

$$\begin{array}{lll} e := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}|\omega|r} E & h := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}|\omega|r} H & k := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}|\omega|r} \widetilde{K} \\ f := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}|\omega|r} F & g := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}|\omega|r} G & l := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}|\omega|r} \widetilde{L} \end{array}$$

erhalten wir aus (2.22)

$$\begin{aligned} f &= \mathrm{i}\,\varepsilon^{-1} \operatorname{div} h - |\omega|\varepsilon^{-1}\widehat{T}h - \omega e \\ g &= \mathrm{i}\,\mu^{-1} \operatorname{rot} e - |\omega|\mu^{-1}\widehat{R}e - \omega h \end{aligned} \tag{A.6}$$

sowie aus (A.5)

$$\begin{aligned} l &= -\operatorname{rot}\,\operatorname{div} h + |\omega|^2\widehat{R}\widehat{T}h - \mathrm{i}\,|\omega|(\operatorname{rot}\widehat{T}h + \widehat{R}\operatorname{div} h) \\ k &= -\operatorname{div}\,\operatorname{rot} e + |\omega|^2\widehat{T}\widehat{R}e - \mathrm{i}\,|\omega|(\operatorname{div}\widehat{R}e + \widehat{T}\operatorname{rot} e) \quad . \end{aligned} \tag{A.7}$$

Wir betrachten

$$\begin{aligned} \Im\langle \rho^{1-2s} l\,,\, h\rangle_\Omega = -\Im\langle \rho^{1-2s}\operatorname{rot}\,\operatorname{div} h\,,\, h\rangle_\Omega + |\omega|^2\Im\langle \rho^{1-2s}\widehat{R}\widehat{T}h\,,\, h\rangle_\Omega \\ - |\omega|\Re\langle \rho^{1-2s}(\operatorname{rot}\widehat{T}h + \widehat{R}\operatorname{div} h)\,,\, h\rangle_\Omega \quad . \end{aligned}$$

Der zweite Term auf der rechten Seite fällt weg. Auf den ersten Term wenden wir (A.3), auf den letzten (A.4) an und erhalten

$$\begin{aligned} \Im\langle \rho^{1-2s} l\,,\, h\rangle_\Omega = (1-2s)\Im\langle \operatorname{div} h\,,\, \rho^{-2s}\widehat{T}h\rangle_\Omega - \Im\int_{\partial\Omega}\rho^{1-2s}\imath^*(\operatorname{div} h\wedge *\overline{h}) \\ + (1-2s)|\omega|\|\widehat{T}h\|^2_{0,-s,\Omega} - |\omega|\Re\int_{\partial\Omega}\rho^{1-2s}\imath^*(\widehat{T}h\wedge *\overline{h}) \quad . \end{aligned}$$

Nun fassen wir die Randintegrale nach

$$\operatorname{div} h + \mathrm{i}\,|\omega|\widehat{T}h = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}|\omega|r}\operatorname{div} H$$

zusammen und stellen die Gleichung noch etwas um zu

$$\begin{aligned} (2s-1)|\omega|\|\widehat{T}h\|^2_{0,-s,\Omega} = -\Im\langle \rho^{1-2s} l\,,\, h\rangle_\Omega \\ + (1-2s)\Im\langle \rho^{-2s}\operatorname{div} h\,,\, \widehat{T}h\rangle_\Omega - \Im\int_{\partial\Omega}\rho^{1-2s}\imath^*(\operatorname{div} H\wedge *\overline{H}) \quad . \end{aligned} \tag{A.8}$$

Andererseits können wir den l enthaltenden Term mit Hilfe von (A.5) umwandeln:

$$\begin{aligned} -\Im\langle \rho^{1-2s} l\,,\, h\rangle_\Omega &= -\Im\langle \rho^{1-2s}\widetilde{L}\,,\, H\rangle_\Omega \\ &= -\Im\langle \omega^2\mu H\,,\, \rho^{1-2s}H\rangle_\Omega - \Im\langle \omega\mu G\,,\, \rho^{1-2s}H\rangle_\Omega \\ &\quad - \Re\langle \operatorname{rot}(\omega\operatorname{rot}\widehat{\varepsilon}E + \varepsilon F)\,,\, \rho^{1-2s}H\rangle_\Omega \end{aligned}$$

Wegen $\Im\omega^2 > 0$ ist hier der erste Summand auf der rechten Seite negativ. Die letzten beiden Terme werden mittels partieller Integration zu

$$\begin{aligned} \Re\langle \omega\widehat{\varepsilon}E + \varepsilon F\,,\, \rho^{1-2s}\operatorname{div} H\rangle_\Omega + (1-2s)\Re\langle \omega\widehat{\varepsilon}E + \varepsilon F\,,\, \rho^{-2s}\widehat{T}H\rangle_\Omega \\ - \Re\int_{\partial\Omega}\rho^{1-2s}\imath^*[(\omega\widehat{\varepsilon}E + \varepsilon F)\wedge *\overline{H}] \quad . \end{aligned}$$

Unter Ausnutzung der Randbedingung $\imath^* E = 0$ kann man in diesem Randintegral $\widehat{\varepsilon}$ durch ε ersetzen, so daß es sich genau gegen das Randintegral aus (A.8) weghebt, wie man aus (2.22) ersieht. Ersetzt man nun noch $\operatorname{div} H$ mit Hilfe der Differentialgleichung, so wird aus (A.8)

$$\begin{aligned} (2s-1)|\omega|\|\widehat{T}h\|^2_{0,-s,\Omega} \le (1-2s)\Im\langle \rho^{-2s}(\operatorname{div} h + \mathrm{i}\,\omega\widehat{\varepsilon}e)\,,\, \widehat{T}h\rangle_\Omega \\ - \Im\langle \omega\mu g\,,\, \rho^{1-2s}h\rangle_\Omega - \Re\langle \rho^{1-2s}\varepsilon f\,,\, \mathrm{i}\,\omega e\rangle_\Omega + (1-2s)\Re\langle \varepsilon f\,,\, \rho^{-2s}\widehat{T}h\rangle_\Omega \quad . \end{aligned}$$

Wir teilen durch $(2s-1)|\omega|$ und schätzen mittels der Youngschen Ungleichung weiter ab gemäß

$$\begin{aligned} (1-\delta_1)\|\widehat{T}h\|^2_{0,-s,\Omega} - \delta_1\|(e,h)\|^2_{0,-s,\Omega} \\ \prec |\omega|^{-2}\|\operatorname{div} h + \mathrm{i}\,\omega\widehat{\varepsilon}e\|^2_{0,-s,\Omega} + (1+|\omega|^{-2})\|(f,g)\|^2_{0,1-s,\Omega} \quad , \end{aligned} \tag{A.9}$$

gleichmäßig bzgl. V mit einem festen $\delta_1 \in (0\,,\,1)$. Auf der anderen Seite liefert (A.6)

$$\begin{aligned} \|e\|^2_{0,-s,\Omega} &= |\omega|^{-1}|\langle \rho^{-2s}e\,,\, \mathrm{i}\,(\operatorname{div} h + \mathrm{i}\,\omega\widehat{\varepsilon}e) - \varepsilon f - |\omega|\widehat{T}h\rangle_\Omega| \\ &\le \delta_2\|e\|^2_{0,-s,\Omega} + \frac{3}{4\delta_2}\left[|\omega|^{-2}\|\operatorname{div} h + \mathrm{i}\,\omega\widehat{\varepsilon}e\|^2_{0,-s,\Omega} + |\omega|^{-2}\|\varepsilon f\|^2_{0,-s,\Omega} + \|\widehat{T}h\|^2_{0,-s,\Omega}\right] \quad , \end{aligned}$$

und damit

$$(1-\delta_2)|\|e\|^2_{0,-s,\Omega} - \delta_2^{-1}\|\widehat{T}h\|^2_{0,-s,\Omega} \prec |\omega|^{-2}\left[\|\operatorname{div} h + \mathrm{i}\,\omega\widehat{\varepsilon}e\|^2_{0,-s,\Omega} + \|f\|^2_{0,-s,\Omega}\right]$$

mit $\delta_2 \in (0\,,\,1)$. Hierzu wird nun das $\frac{1}{(1-\delta_1)\delta_2}$-fache von (A.9) addiert. Für h erhalten wir eine analoge Abschätzung, und so ergibt sich insgesamt

$$\|(e,h)\|^2_{0,-s,\Omega} \prec |\omega|^{-2}\|(\operatorname{rot} e + \mathrm{i}\,\omega\widehat{\mu}h, \operatorname{div} h + \mathrm{i}\,\omega\widehat{\varepsilon}e)\|^2_{0,-s,\Omega} + \|(f,g)\|^2_{0,1-s,\Omega}$$

bei sukzessive erfolgender Wahl von genügend kleinem δ_2 und δ_1. Wegen $|\omega| - \Re\omega \le \Im\omega$ können wir nun den ersten Term auf der rechten Seite mit Hilfe von (A.6) wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} \|\operatorname{div} h + \mathrm{i}\,\omega\widehat{\varepsilon}e\|_{0,-s,\Omega} &= \|\varepsilon f + \omega e + |\omega|\widehat{T}h\|_{0,-s,\Omega} \\ &\le \|\varepsilon f\|_{0,-s,\Omega} + |\omega|\|e + \widehat{T}h\|_{0,-s,\Omega} + \Im\omega\|e\|_{0,-s,\Omega} \quad , \end{aligned}$$

wobei auf den letzten Term die Ungleichung (3.4) angewendet werden kann. Analog verfährt man mit dem Term $\|\operatorname{rot} e + \mathrm{i}\,\omega\widehat{\mu}h\|_{0,-s,\Omega}$. Da $1-s < s$ und $|\omega| > \lambda_0$ ist, erhalten wir so

$$\|H_\omega V\|_{0,-s,\Omega} \prec \|SH_\omega V\|_{0,-s,\Omega} + \|V\|_{0,s,\Omega} \quad . \tag{A.10}$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. ♦

Ein Vergleich mit der Definition eines gleichmäßigen Strahlungsgebietes in [20] führt uns zu der folgenden Verallgemeinerung der Bedingung aus Lemma A.1.

Definition A.3 *Das Paar* (Ω, Ξ) *habe die „gleichmäßige Strahlungseigenschaft“, wenn mit einem* $\alpha \in [0\,,1]$ *und einem* $\gamma < 0$ *gilt:*

Für alle $s \in (\frac{1}{2}\,,1)$ *und* $Q \in \mathcal{Q}_\infty^\alpha$ *ist mit einem* $\sigma \geq -s$

$$\|SH_\omega V\|_{0,\sigma,\Omega} \prec |\omega|^\gamma \|H_\omega V\|_{0,s-2,\Omega} + \|V\|_{0,s,\Omega} \tag{A.11}$$

gleichmäßig bezüglich $\omega \in Q$ *und* $V \in \mathbf{W}_s^{0,q,q+1}(\Omega) \cap \mathcal{N}(\Omega, \Xi, \overline{Q})^{\perp_\Xi}$.

Wegen $H_\omega V = -\omega^{-1} V$ für $V \in \mathcal{A}_s^{q,q+1}$ können wir feststellen:

Bemerkung A.4 *Ist* $\widetilde{\mathcal{B}}_s^{q,q+1}$ *ein topologisches Komplement von* $\mathcal{A}_s^{q,q+1}$ *in* $\mathbf{W}_s^{0,q,q+1}(\Omega)$*, so gilt die Ungleichung (A.11) für alle* $V \in \mathbf{W}_s^{0,q,q+1}(\Omega)$*, wenn sie für alle* $V \in \widetilde{\mathcal{B}}_s^{q,q+1}$ *erfüllt ist.*

Speziell kann $\widetilde{\mathcal{B}}_s^{q,q+1} = \mathcal{B}_s^{q,q+1}$ gewählt werden.

Die gleichmäßige Strahlungseigenschaft stellt in der Tat eine Verallgemeinerung der entsprechenden Eigenschaft zur Helmholtzschen Schwingungsgleichung aus [20] dar, wie der folgende Satz zeigt.

Satz A.5 *Im Falle* $q = 0$ *hat* (Ω, id) *die gleichmäßige Strahlungseigenschaft mit* $\alpha = 1$ *und* $\gamma = -1$ *sowie der speziellen Wahl* $\sigma = s - 1$ *genau dann, wenn* Ω *ein gleichmäßiges Strahlungsgebiet im Sinne von [20] ist, d. h. wenn für alle* $s \in (\frac{1}{2}\,,1)$ *und* $Q \in \mathcal{Q}_\infty^1$ *die Abschätzung*

$$\|\nabla(\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}|\omega|r} G_\omega V)\|_{0,s-1,\Omega} \prec \|V\|_{0,s,\Omega} + \|G_\omega V\|_{0,s-2,\Omega} \tag{A.12}$$

gleichmäßig bezüglich $V \in W_s(\Omega)$ *und* $\omega \in Q$ *gilt.*

Damit können wir direkt vermerken, daß für Außengebiete Ω mit sternförmigem Komplement und $q = 0$ das Paar (Ω, id) die gleichmäßige Strahlungseigenschaft hat, weil solche Außengebiete gleichmäßige Strahlungsgebiete sind. Vor dem Beweis dieses Satzes geben wir einige alternative Formulierungen der Eigenschaft an, wobei wir uns jeweils spezielle Eigenschaften von Ξ zunutze machen.

Zusätzliche Regularität der Koeffizienten versetzt uns in die Lage, eine modifizierte Version herzuleiten, die ausschließlich auf dem Verhalten von Lösungen zu solchen Daten beruht, die einmal oder mehrmals schwach differenzierbar sind.

Lemma A.6 *Sei* $J \in \mathbb{N}$ *und* $\Xi \in \mathcal{C}_b^J(\overline{\Omega})$*. Dann hat* (Ω, Ξ) *genau dann die gleichmäßige Strahlungseigenschaft, wenn mit einem* $\alpha \in [0\,,1]$ *und einem* $\gamma < 0$ *gilt:*

Für alle $0 \leq q \leq N-1$, $s \in (\frac{1}{2}\,,1)$ *existiert ein* $\sigma \geq -s$*, so daß für* $Q \in \mathcal{Q}_\infty^\alpha$ *die Abschätzung*

$$\|SH_\omega V\|_{0,\sigma,\Omega} \prec |\omega|^\gamma \|H_\omega V\|_{0,s-2,\Omega} + \sum_{j=0}^{J} |\omega|^{-j} \|V\|_{j,s,\Omega} \tag{A.13}$$

gleichmäßig bezüglich $\omega \in Q$ *und* $V \in \big(\mathring{R}_s^q(\Omega) \times \mu^{-1} \mathring{R}_s^{q+1}(\Omega)\big) \cap \mathbf{W}_s^{J,q,q+1}(\Omega) \cap \mathcal{N}(\Omega, \Xi, \overline{Q})^{\perp_\Xi}$ *gilt.*

BEWEIS:
Wir zerlegen $V \in \mathbf{W}_s^{0,q,q+1}(\Omega)$ gemäß Hilfssatz 3.16 und übernehmen die dortigen Bezeichnungen. Dann ist

$$H_\omega V = H_\omega \widetilde{V} - \frac{1}{\omega} A + \Phi$$

und folglich

$$\begin{aligned} \|SH_\omega V\|_{0,s-1,\Omega} &\leq \|SH_\omega \widetilde{V}\|_{0,s-1,\Omega} + |\omega|^{-1} \|SA\|_{0,s-1,\Omega} + \|S\Phi\|_{0,s-1,\Omega} \\ &\prec \|SH_\omega \widetilde{V}\|_{0,s-1,\Omega} + |\omega|^{-1} \|V\|_{0,s,\Omega} \quad . \end{aligned}$$

Mit (A.13) für $\widetilde{V}$ und (3.20) folgt daraus (A.11).

Die andere Inklusion ist trivial. ♦

Es folgt ein technisches Lemma.

Lemma A.7 *Ist* $\widehat{\varepsilon} = 0$, $\widehat{\mu} = 0$ *und* $t \leq 0$*, so gilt gleichmäßig bezüglich* $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *mit* $\Re\omega \geq 0$ *und* $V \in \mathbf{W}_0^{0,q,q+1}(\Omega)$

$$\|M(e,h) - |\omega| S(e,h)\|_{0,t,\Omega} \prec \|V\|_{0,0,\Omega} \quad ,$$

wobei $(e,h) := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}|\omega|r} H_\omega V$ *sei. Existiert* ZV *in* $\mathbf{W}_t^{0,q-1,q+2}(\Omega)$*, so gelten mit* $V = (F,G)$ *weiterhin:*

$$\begin{aligned} \|\operatorname{div} e\|_{0,t,\Omega} &\prec |\omega| \|e + \widehat{T}h\|_{0,t,\Omega} + |\omega|^{-1} \|\operatorname{div} F\|_{0,t,\Omega} \\ \|e + \widehat{T}h\|_{0,t,\Omega} &\prec \|\widehat{R}e + h\|_{0,t,\Omega} + |\omega|^{-1} \|\operatorname{div} e\|_{0,t,\Omega} + |\omega|^{-2} \|\operatorname{div} F\|_{0,t,\Omega} \\ \|\operatorname{rot} h\|_{0,t,\Omega} &\prec |\omega| \|\widehat{R}e + h\|_{0,t,\Omega} + |\omega|^{-1} \|\operatorname{rot} G\|_{0,t,\Omega} \\ \|\widehat{R}e + h\|_{0,t,\Omega} &\prec \|e + \widehat{T}h\|_{0,t,\Omega} + |\omega|^{-1} \|\operatorname{rot} h\|_{0,t,\Omega} + |\omega|^{-2} \|\operatorname{rot} G\|_{0,t,\Omega} \quad . \end{aligned}$$

BEWEIS:
Aus (2.22) erhalten wir unter Berücksichtigung von (2.27)

$$M(e,h) - |\omega| S(e,h) = (\omega - |\omega|)(e,h) + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}|\omega|r} V \quad .$$

Wegen $\Re\omega \geq 0$ gilt $|\omega - |\omega|| \leq \sqrt{2}|\Im\omega|$, und so können wir Lemma 3.3 ausnutzen, um die erste Behauptung zu erhalten.

Die nächsten beiden Abschätzungen ergeben sich aus zwei Gleichungen, die ebenfalls von (2.22) herrühren:

$$\operatorname{div} e = -\,\mathrm{i}\,|\omega|\widehat{T}(e + \widehat{T}h) - \omega^{-1}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,|\omega|r}\operatorname{div} F$$

sowie

$$\widehat{R}\operatorname{div} e = -\,\mathrm{i}\,|\omega|(e + \widehat{T}h) + \mathrm{i}\,|\omega|\widehat{T}(\widehat{R}e + h) - \omega^{-1}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,|\omega|r}\widehat{R}\operatorname{div} F \quad .$$

Aus analogen Gleichungen für $\operatorname{rot} h$ bzw. $\widehat{T}\operatorname{rot} h$ folgen die übrigen Abschätzungen. ♦

Somit können wir in dem Spezialfall eines homogenen und isotropen Gebietes mehrere Alternativen für den abzuschätzenden Term zulassen.

Lemma A.8 *Unter den Voraussetzungen von Lemma A.6 sei zusätzlich* $\Xi = \mathrm{id}$. *Dann hat* (Ω, Ξ) *die gleichmäßige Strahlungseigenschaft genau dann, wenn mit einem* $m \in \{0, 1, 2\}$ *gleichmäßig bezüglich* $\omega \in Q$ *und* $V \in \big(\overset{\circ}{R}{}^q_s(\Omega) \times \mu^{-1}\overset{\circ}{R}{}^{q+1}_s(\Omega)\big) \cap \mathbf{W}^{J,q,q+1}_s(\Omega) \cap \mathcal{N}(\Omega, \Xi, \overline{Q})^{\perp_\Xi}$

$$Y_m(e, h) \prec |\omega|^\gamma \|H_\omega V\|_{0,s-2,\Omega} + \sum_{j=0}^{J} |\omega|^{-j}\|V\|_{j,s,\Omega} \quad ,$$

gilt, wobei $(e, h) := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega r} H_\omega V$ *sowie*

$$Y_0 := \|M(e, h)\|_{0,\sigma,\Omega} \quad , \quad Y_1 := \|(\operatorname{rot} e, \operatorname{div} e)\|_{0,\sigma,\Omega} \quad \textit{und} \quad Y_2 := \|(\operatorname{rot} h, \operatorname{div} h)\|_{0,\sigma,\Omega}$$

sei.

Nun beweisen wir Satz A.5.

Beweis:
Sei zunächst $U \in W^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ und $(-\Delta - \omega^2)U = V$ mit einem $\omega \in Q \in \mathcal{Q}^1_\infty$. Interpretieren wir U und V als 0-Formen und setzen $\Phi := \mathrm{i}\,\omega^{-1}\operatorname{rot} U$, so ist

$$(U, \Phi) = H_\omega(0, \omega^{-1}V)$$

wie im Beweis von Lemma 5.3.

Hat nun (Ω, id) die gleichmäßige Strahlungseigenschaft mit $\alpha = 1$, $\gamma = -1$, so liefert Lemma A.8:

$$\|(\operatorname{div}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,|\omega|r}\Phi), \operatorname{rot}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,|\omega|r}U))\|_{0,s-1,\Omega} \prec \|V\|_{0,s,\Omega} + \|(U, \Phi)\|_{0,s-2,\Omega} \quad .$$

Mit

$$\Phi = \omega^{-1}\operatorname{rot} U = \mathrm{i}\,\frac{|\omega|}{\omega}\widehat{R}U + \omega^{-1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,|\omega|r}\operatorname{rot}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,|\omega|r}U)$$

folgt daraus

$$(1 - |\omega|^{-1})\|\operatorname{rot}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,|\omega|r}U)\|_{0,s-1,\Omega} \prec \|V\|_{0,s,\Omega} + \|U\|_{0,s-2,\Omega} \quad .$$

Damit erhält man die Abschätzung (A.12) zunächst für ω mit $\Re\omega \geq 2$. Für $\Re\omega$ aus kompakten Teilintervallen von $(0, 2]$ gilt sie nach Lemma 2.17 in [20].

Für den Umkehrschluß wollen wir die Ungleichung (A.13) mit $J = 2$ zeigen.

Es sei $V = (F, G) \in \big(\overset{\circ}{R}{}^0_s(\Omega) \times \overset{\circ}{R}{}^1_s(\Omega)\big) \cap \mathbf{W}^{2,0,1}_s(\Omega) \cap \mathcal{N}(\Omega, \Xi, \overline{Q})^{\perp_\Xi}$ und $(E, H) = H_\omega V$. Da E eine 0-Form ist, gilt nach (2.31)

$$-\Delta E = -\operatorname{div}\operatorname{rot} E = \mathrm{i}\operatorname{div} G + \mathrm{i}\,\omega\operatorname{div} H = \mathrm{i}\operatorname{div} G + \omega(\omega E + F) \quad ,$$

also

$$(-\Delta - \omega^2)E = \mathrm{i}\operatorname{div} G + \omega F \quad .$$

Fassen wir nun E als Element von $W^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ auf, so liefert (A.12)

$$\begin{aligned}\|\operatorname{rot}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,|\omega|r}E)\|_{0,s-1,\Omega} &= \|\nabla(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,|\omega|r}E)\|_{0,s-1,\Omega} \\ &\prec |\omega|\|F\|_{0,s,\Omega} + \|\operatorname{div} G\|_{0,s,\Omega} + \|E\|_{0,s-2,\Omega} \quad .\end{aligned}$$

Da außerdem $\operatorname{div}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,r}E) = 0$ gilt, ist somit (A.13) mit der Modifikation aus Lemma A.8, $m = 1$, erfüllt. ♦

Als weiteres Beispiel folgt die Gültigkeit der gleichmäßigen Strahlungseigenschaft für $(\mathbb{R}^N, \Xi)$ mit $\hat{\hat{\Xi}} = 0$ und beliebiges $q \in \{0, \dots, N-1\}$ aus der Tatsache, daß $\mathbb{R}^N$ ein gleichmäßiges Strahlungsgebiet im Sinne von [20] ist.

Lemma A.9 $(\mathbb{R}^N, \mathrm{id})$ *hat die gleichmäßige Strahlungseigenschaft mit* $\alpha = 1$ *und* $\gamma = -1$.

Beweis:
Gezeigt wird wieder die Eigenschaft (A.13) mit $J = 2$. Seien also $s \in (\frac{1}{2}, 1)$, $Q \in \mathcal{Q}^1_\infty$ und $V \in \varepsilon^{-1}D^q_s(\Omega) \times \mu^{-1}\overset{\circ}{R}{}^{q+1}_s(\Omega) \cap \mathbf{W}^{2,q,q+1}_s(\Omega) \cap \mathcal{N}(\Omega, \Xi, Q^\alpha_{\lambda_0})^{\perp_\Xi}$.

Zu den Gleichungen (A.5) wird das Ergebnis der Anwendung von $\operatorname{rot}\operatorname{div}$ bzw. $\operatorname{div}\operatorname{rot}$ auf die Differentialgleichungen (2.22) addiert. Man erhält

$$\begin{aligned}(-\Delta - \omega^2)E &= \omega F + \mathrm{i}\operatorname{div} G - \omega^{-1}\operatorname{rot}\operatorname{div} F =: K \\ (-\Delta - \omega^2)H &= \omega G + \mathrm{i}\operatorname{rot} F - \omega^{-1}\operatorname{div}\operatorname{rot} G =: L \quad .\end{aligned} \tag{A.14}$$

Dann gilt (komponentenweise)

$$E = G_\omega K \quad .$$

Wir definieren

$$e := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,|\omega|r}E \quad \text{und} \quad k := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,|\omega|r}K$$

und erhalten durch komponentenweise Anwendung von (A.12)

$$\|\nabla e\|_{0,s-1,\Omega} \prec \|k\|_{0,s,\Omega} + \|e\|_{0,s-2,\Omega} \quad , \tag{A.15}$$

wobei ∇ den klassischen Gradienten bezeichnet, der hier entsprechend als Vektor der ersten Ableitungen aller Komponentenfunktionen von e aufgefaßt werden kann.

O.B.d.A. sei für den folgenden Schritt $e \in W_\infty^{\infty,q}(\mathbb{R}^N)$. Mit $\beta \in \mathbb{R}$ erhält man analog zu Lemma A.2, Gleichungen (A.2) und (A.3), durch partielle Integration

$$\langle \rho^\beta \Delta e\,,\, e\rangle_{\mathbb{R}^N} = -\|(\operatorname{rot} e, \operatorname{div} e)\|^2_{0,\frac{\beta}{2},\mathbb{R}^N} - \beta\langle \rho^{\beta-1}(\widehat{R}\operatorname{div} e + \widehat{T}\operatorname{rot} e)\,,\, e\rangle_{\mathbb{R}^N}$$

sowie, wenn Δ als skalarer Operator aufgefaßt wird,

$$\langle \rho^\beta \Delta e\,,\, e\rangle_{\mathbb{R}^N} = -\|\nabla e\|^2_{0,\frac{\beta}{2},\mathbb{R}^N} - 2t\langle \rho^{\beta-1}\partial_r e\,,\, e\rangle_{\mathbb{R}^N} \quad .$$

Beide Gleichungen zusammen liefern

$$\|(\operatorname{rot} e, \operatorname{div} e)\|^2_{0,s-1,\mathbb{R}^N} \prec \|\nabla e\|^2_{0,s-1,\mathbb{R}^N} + \|e\|^2_{0,s-2,\mathbb{R}^N} \quad ,$$

woraus sich zusammen mit (A.15) die Behauptung ergibt. ♦

Anhang B

Optimale Asymptotik

Welche Hochfrequenzasymptotik, wenn überhaupt eine, sich für den Operator H_ω zeigen läßt, bleibt vorerst ungeklärt. Die MHBE wurde gerade so formuliert, daß sich im Falle ihrer Gültigkeit eine Hochfrequenzasymptotik vom Grade 0 für rechte Seiten aus $\mathbf{W}^{0,q,q+1}_{>\frac{1}{2}}(\Omega)$ ergäbe. Wir können allerdings für $1 \le q \le N-2$ kein Beispiel eines echten Außengebietes Ω und eines Paares von zulässigen Transformationen (ε, μ) geben, so daß (Ω, Ξ) – mit Ξ wie in (3.1) – diese Eigenschaft hat.

Daß die Eigenschaft dennoch so formuliert wurde, stützt sich auf mehrere Gründe.

- Analog zu Satz A.5 sieht man: Ist $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \mathrm{id}$, $\mu = \mu_0 \cdot \mathrm{id}$, $s > \frac{1}{2}$, $\beta \in \mathbb{R}$, so hat H_ω im Falle $q = 0$ eine Hochfrequenzasymptotik vom Grade β bezüglich Daten aus $\mathbf{W}^{0,0,1}_s(\Omega)$ genau dann, wenn der Grad $(\beta - 1)$ bezüglich Daten aus $W^0_s(\Omega)$ bei G_ω vorliegt. Letzteres gilt nach Peter mit $\beta = 0$ in gleichmäßigen Strahlungsgebieten.
- Die angegebene Herleitung der MHBE aus der gleichmäßigen Strahlungseigenschaft (Lemma A.1) ist nicht geeignet, eine bessere Asymptotik zu beweisen, wie man an der Ungleichung (A.10) sieht.
- Der Grad 0 der Hochfrequenzasymptotik überträgt sich ohne weitere Schwierigkeiten auf die Iterierten von H_ω, während analoge Ergebnisse unter der Annahme einer Hochfrequenzasymptotik irgendeines anderen Grades nicht erzielt werden konnten.

Wenn sich allerdings für rechte Seiten aus $\mathbf{W}^{0,q,q+1}_{>\frac{1}{2}}(\Omega)$ eine Hochfrequenzasymptotik zeigen läßt, so ist die bestmögliche für Daten aus einem $C_0^{\infty,q}(\Omega) \times C_0^{\infty,q+1}(\Omega)$ enthaltenden Unterraum von $\mathbf{W}^{0,q,q+1}_s(\Omega)$ erzielbare Asymptotik vom Grade -1.

Lemma B.1 *Es sei $0 \le q \le N$ und $s > \frac{1}{2}$. Hat H_ω eine Hochfrequenzasymptotik vom Grade $l \in \mathbb{N}_0$ für Daten aus $\mathbf{W}^{0,q,q+1}_s(\Omega)$, so beträgt der Grad sogar $l - k$ für Daten aus $U^k_s(\Omega)$ mit $0 \le k \le l + 1$.*

Gilt unter diesen Umständen für ein $V \in U_s^{l+2}(\Omega)$ und ein $Q \in \mathcal{Q}_\infty^0$ sogar

$$\|H_\omega V\|_{0,-s,\Omega} \prec |\omega|^\beta$$

gleichmäßig bezüglich $\omega \in Q$ mit einem $\beta < -1$, so ist $V = 0$.

Beweis:
Wir weisen die erste Behauptung für ein festes l nach, wobei für $k = 0$ nichts zu zeigen ist. Wir nehmen daher nun an, daß die Behauptung für ein k zwischen 0 und l gilt, und zeigen sie für $k+1$.
Für $V \in U_s^{k+1}(\Omega)$ folgt aus

$$H_\omega V = \frac{1}{\omega}(H_\omega MV - V)$$

(siehe Lemma 4.2) die Abschätzung

$$\|H_\omega V\|_{0,-s,\Omega} \prec |\omega|^{-1}(\|H_\omega MV\|_{0,-s,\Omega} + \|V\|_{0,-s,\Omega}) \quad . \tag{B.1}$$

Definitionsgemäß ist MV Element von $U_s^k(\Omega)$, so daß wir die Induktionsannahme auf MV anwenden können. Dann liefert (B.1)

$$\|H_\omega V\|_{0,-s,\Omega} \prec |\omega|^{-1+l-k}\|MV\|_{U_s^k(\Omega)} + |\omega|^{-1}\|V\|_{0,s,\Omega} \prec |\omega|^{l-(k+1)}\|V\|_{U_s^{k+1}(\Omega)} \quad .$$

Für die zweite Behauptung benutzen wir dieselbe Argumentation wie in Lemma 5.19. Wegen $V = H_\omega(M-\omega)V$ und $MV \in U_s^{l+1}(\Omega)$ gilt

$$\|V\|_{0,-s,\Omega} \leq \|H_\omega MV\|_{0,-s,\Omega} + |\omega|\|H_\omega V\|_{0,-s,\Omega} \prec |\omega|^{-1}\|MV\|_{U_s^{l+1}(\Omega)} + |\omega|^{\beta+1} \quad .$$

Die rechte Seite konvergiert für $|\omega| \to \infty$ wieder gegen Null. ♦

Literaturverzeichnis

[1] Agmon, S. *Lectures on Elliptic Boundary Value Problems.* Van Nostrand, New York 1965.

[2] Bauer, S. „On the absence of eigenvalues of Maxwell and Lamé systems in exterior domains“. *Math. Meth. Appl. Sci.* **27** (2004), Nr. 3, 313–327.

[3] Bishop, R. L., Goldberg, S. I. *Tensor Analysis on Manifolds.* Dover Publications, New York 1968.

[4] Costabel, M. „A remark on the regularity of solutions of Maxwell's equations on Lipschitz domains“. *Math. Meth. Appl. Sci.* **12** (1990), 365–368.

[5] Eidus, D. „Asymptotically periodic solutions of the wave equation in the Hilbert space“. *Asymptot. Anal.* **8** (1994), 217–236.

[6] Isozaki, H., Kitada, H. „Micro-Local Resolvent Estimates for 2-Body Schrödinger Operators“. *J. Funct. Anal.* **57** (1984), 270–300.

[7] Isozaki, H. „Differentiability of generalized Fourier transforms associated with Schrödinger operators“. *J. Math. Kyoto Univ.* **25** (1985), Nr. 4, 789–806.

[8] Jänich, K. *Vektoranalysis.* Springer, Berlin 1993.

[9] Jones, D. S. *Acoustic and Electromagnetic Waves.* Clarendon Press, Oxford 1986.

[10] Kerler, Ch. „Differenzierbarkeit im Bild und Abbildungseigenschaften verallgemeinerter Fouriertransformationen bei variablen Koeffizienten im Außengebiet und Anwendungen auf Gleichungen vom Kirchhoff-Typ“. *Dissertation*, Konstanz 1998.

[11] Kuhn, P. „Die Maxwellgleichung mit wechselnden Randbedingungen“. *Dissertation*, Essen 1999.

[12] Leis, R. *Initial Boundary Value Problems in Mathematical Physics.* Teubner, Stuttgart 1986.

[13] Magnus, W., Oberhettinger, F., Soni, R. P. *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics.* Springer, Berlin 1966.

[14] Melrose, R. B., Sjöstrand, J. „Singularities of boundary value problems I“. *Comm. Pure Appl. Math.* **31** (1978), 593–617.

[15] Melrose, R. B., Sjöstrand, J. „Singularities of boundary value problems II“. *Comm. Pure Appl. Math.* **35** (1982), 129–168.

[16] Morawetz, C. S. „Decay for Solutions of the Exterior Problem for the Wave Equation“. *Comm. Pure Appl. Math.* **28** (1975), 229–264.

[17] Morawetz, C. S., Ralston, J. V., Strauss, W. A. „Decay of Solutions of the Wave Equation Outside Nontrapping Obstacles“. *Comm. Pure Appl. Math.* **30** (1977), 447–508.

[18] Pauen, R. „Non-Trapping Bedingungen und das Abklingverhalten der lokalen Energie im Außenraum“. *Diplomarbeit*, Bonn 1996.

[19] Pauly, D. „Niederfrequenzasymptotik der Maxwell-Gleichung im inhomogenen und anisotropen Außengebiet“. *Dissertation*, Essen 2002.

[20] Peter, B. „Die Lösungen der Helmholtzschen Schwingungsgleichung in Außengebieten und die Asymptotik ihrer Frequenzableitungen bei hohen und niedrigen Frequenzen“. *Dissertation*, Essen 1997.

[21] Picard, R. „An Elementary proof for a Compact Imbedding Result in Generalized Electromagnetic Theory“. *Math. Z.* **187** (1984), 151–164.

[22] Picard, R., Weck, N., Witsch, K.-J. „Time-Harmonic Maxwell Equations in the Exterior of Perfectly Conducting, Irregular Obstacles“. *Analysis* **21** (2001), 231–263.

[23] Racke, R. „Generalized Fourier transforms and global, small solutions to Kirchhoff equations“. *Appl. Anal.* **58** (1995), Nr. 1-2, 85–100.

[24] Trebing, M. „Nichtlineare Wellengleichungen vom Kirchhoffschen Typ in Außengebieten. Existenzsätze und Zeitasymptotik mit Hilfe der verallgemeinerten Fouriertransformation“. *Diplomarbeit*, Essen 1997.

[25] Vodev, G. „Local energy decay of solutions to the wave equation for nontrapping metrics“. *Ark. Mat.* **42** (2004), 379–397.

[26] Weber, C. „A local compactness theorem for Maxwell's equations“. *Math. Meth. Appl. Sci.* **2** (1980), 12–25.

[27] Weck, N. „Eine Lösungstheorie für die Maxwellschen Gleichungen auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit nicht glattem Rand“. *Habilitationsschrift*, Universität Bonn 1972.

[28] Weck, N. „Maxwell's boundary value problems on Riemannian manifolds with nonsmooth boundaries“. *J. Math. Ana. Appl.* **46** (1974), 410–437.

[29] Weck, N., Witsch, K.-J. „Generalized Spherical Harmonics and exterior differentiation in weighted sobolev spaces“. *Math. Meth. Appl. Sci.* **17** (1994), 1017–1043.

[30] Weidmann, J. *Lineare Operatoren in Hilberträumen.* Teubner, Stuttgart 1976.

[31] Weyl, H. „Die natürlichen Randwertaufgaben im Außenraum für Strahlungsfelder beliebiger Dimension und beliebigen Ranges“. *Math. Z.* **56** (1952), 105–119.

[32] Witsch, K.-J. „A Remark on a Compactness Result in Electromagnetic Theory“. *Math. Meth. Appl. Sci.* **16** (1993), 123–129.

[33] Wloka, J. *Partielle Differentialgleichungen.* Teubner, Stuttgart 1982.