

## Kapitel 6

# Klassische Transporteigenschaften eines 2DEG unter dem Einfluss von selbstorganisierten Quantenpunkten

Ein Hauptziel dieser Arbeit ist es, neue Erkenntnisse darüber zu gewinnen, wie Quantenpunkte als steuerbare Streuzentren die Transporteigenschaften eines zweidimensionalen Elektronengases verändern. Der Schwerpunkt liegt dabei auf der Wechselwirkung der Quantenpunkt*elektronen* mit dem 2DEG, da im Gegensatz zum Spannungsfeld die Anzahl der Elektronen pro Quantenpunkt und damit die Größe des Coulombpotenzials *in situ* durch das Anlegen von geeigneten Gatespannungen verändert werden kann. Während in Kapitel 7 auf den Quanten-Hall-Effekt in diesen Strukturen eingegangen wird, sollen hier zunächst die klassischen Transportparameter im Vordergrund stehen.

Die klassische Leitfähigkeit  $\sigma$  ist gegeben durch das Produkt der Anzahl der zur Verfügung stehenden Ladungsträger  $n_{2d}$  mit ihrer Beweglichkeit  $\mu$ :

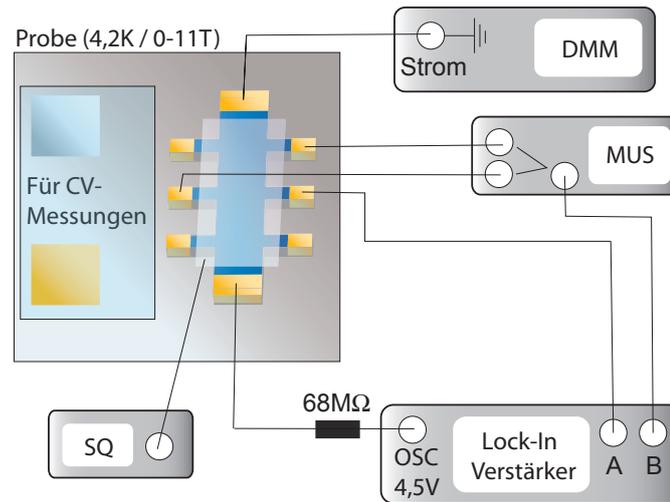
$$\sigma = en_{2d}\mu \tag{6.1}$$

Es ist also zu zeigen, wie diese beiden Parameter von der Besetzung der Quantenpunkte mit einer gezielt einstellbaren Anzahl von Elektronen abhängen. Da die Beweglichkeit ihrerseits von der Ladungsträgerzahl abhängig ist und im allgemeinen überproportional mit ihr zunimmt [3], ist es notwendig, zunächst die Ladungsträgerzahl genauer zu studieren. Dieses geschieht in Kapitel 6.2 und führt auf ein universell anwendbares Kapazitätsmodell für gekoppelte Schichten mit reduzierter Zustandsdichte, welches auf dem Konzept der Quantenkapazität beruht. Die gewonnenen Erkenntnisse werden dann zur Untersuchung der Beweglichkeit herangezogen (Kap. 6.3).

## 6.1 Probenmaterial und Messaufbau

Die hier verwendeten GaAs-basierten Heterostrukturen sind die selben, wie sie auch im vorangegangenen Kapitel 4 für die reine Kapazitätsspektroskopie verwendet wurden. Ein großer Teil der Messungen erfolgte dabei an Probenmaterial 12177, da dieses neben einer hervorragenden Homogenität des Quantenpunktensembles und der damit verbundenen Auflösbarkeit der  $p$ -Schale auch eine sehr gute Beweglichkeit (etwa  $10^5 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ ) des 2DEG aufwies. Die Proben wurden mit den in Kapitel 3 vorgestellten Techniken so strukturiert, dass sie neben einem Gate für Kapazitätsmessungen eine Hall-Bar Struktur enthielten, an der die Leitfähigkeitsmessungen durchgeführt werden konnten. Die Messungen erfolgten zumeist bei 4,2 K in einem  $\text{He}^4$ -Badkryostaten, für einige Messungen wurde alternativ ein  $\text{He}^3$ -System von *Oxford Instruments* verwendet, mit welchem Temperaturen von bis hinunter zu 240 mK erzielt werden konnten.

Der verwendete Messaufbau ist in Abb. 6.1 dargestellt.



**Abbildung 6.1:** Aufbau zur Messung der Transporteigenschaften von zwei-dimensionalen Elektronengasen. Über den internen Oszillator des Lock-In Verstärkers wird eine Wechselspannung mit einer Frequenz von 23-73 Hz und einer Amplitude von 4,5 V erzeugt und durch einen  $68\text{ M}\Omega$ -Widerstand in einen Wechselstrom mit einer Amplitude von ca.  $67\text{ nA}$  konvertiert. In Abhängigkeit der von der Spannungsquelle (SQ) erzeugten Gatespannung und des Magnetfeldes kann dann in Lock-In-Technik die Längs- oder Querspannung gemessen werden; das Umschalten erfolgt mit einem Messstellenumschalter (MUS). Die Konstanz des Stroms kann an einem Multimeter (DMM) kontrolliert werden. Die Probe befindet sich in einem  $\text{He}^4$ -Badkryostaten bei einer Temperatur von 4,2 K. Senkrecht zur Probenoberfläche können Magnetfelder von bis zu 11 T angelegt werden.

## 6.2 Ladungsträgerdichte

Die Ladungsträgerdichten werden in den verwendeten MISFET-Strukturen kapazitiv über die auf der Probe aufgebraachte Gateelektrode variiert. Dabei ändern sich in den relevanten Gatespannungsbereichen gleichzeitig die Besetzungszahl der Quantenpunkte und die des 2DEG. Die bei einer bestimmten Gatespannung gemessene Kapazität, bzw. das Integral der Kapazität bis zu dieser Gatespannung, spiegeln dabei zunächst nur die Antwort der gesamten Probenstruktur und der darin enthaltenen Elektronen wieder. Die Verteilung der Ladungsträger auf die einzelnen Schichten soll im Folgenden in einem einfachen iterativen Modell bestimmt werden. Die Betrachtung basiert auf dem von Luryi eingeführten Begriff der Quantenkapazität [79].

### 6.2.1 Gekoppelte niedrigdimensionale Elektronensysteme

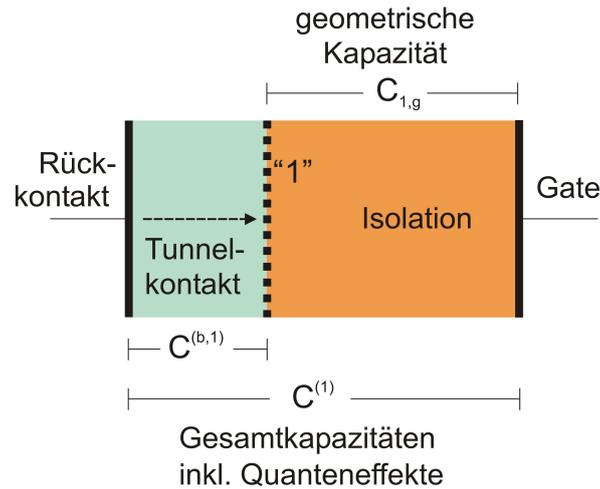
Die Kapazitätsspektroskopie erlaubt es, Informationen über die Zustandsdichte von in Heterostrukturen eingebetteten Quantenfilmen zu gewinnen. Ist nur ein solches Quantensystem vorhanden, so ist die Analyse von Kapazitätsmessungen besonders einfach [59, 79]. Die hier entscheidende Tatsache, dass das elektrische Feld von einer Schicht mit endlicher Zustandsdichte nicht vollständig abgeschirmt wird, wurde schon von Smith *et al.* zur kapazitiven Spektroskopie der 2D-Zustandsdichte verwendet [77, 85].

In diesem Kapitel soll dargelegt werden, wie man aus Kapazitätsmessungen an Proben mit *mehreren* eingebetteten Quantensystemen die beteiligten Zustandsdichten extrahieren kann [86].

Eine Probe, die nur aus einer Gateelektrode und einem (möglicherweise komplexen) Rückkontakt besteht, habe die Kapazität  $C^{(0)}$ . Diese Kapazität ist hauptsächlich gegeben durch das Dielektrikum und den Abstand zwischen diesen beiden Elektroden. Die Kapazität  $C^{(0)}$  soll hier aber auch alle weiteren Effekte, wie z. B. sonstige Kapazitäten im Messaufbau berücksichtigen. In diesen leeren Kondensator wird nun eine Quantenschicht (Index "1") mit einer reduzierten, d.h. nicht metallischen Zustandsdichte  $D_1$  eingebettet, welche, z. B. über einen Tunnelkontakt, mit der Rückelektrode verbunden ist. Gleichzeitig soll dieses und alle weiteren Quantensysteme von der Gateelektrode isoliert sein. Weiterhin wird vorausgesetzt, dass die Quantensysteme jeweils nur eine vernachlässigbare Ausdehnung in Tunnelrichtung haben. Abbildung 6.2 gibt einen Überblick über die verwendete Notation. Legt man an dieses System eine Spannung  $U$  an, so ändern sich im Allgemeinen gleichzeitig die Ladungsträgerzahlen an der Gateelektrode ( $\sigma_g$ ), im Quantensystem ( $\sigma_1$ ) und im Rückkontakt ( $\sigma_{b,1}$ ). Die Gesamtkapazität  $C^{(1)}$  der Struktur mit einem auf diese Weise eingebetteten Quantensystem lässt sich nun berechnen, wenn man zunächst eine kleine Spannungsänderung  $dU$  zwischen Gate und Quantensystem "1" darstellt als

$$dU = \frac{d\sigma_g}{C_{1,g}} + \frac{d\sigma_1}{e^2 D_1}. \quad (6.2)$$

Der erste Term auf der rechten Seite ist dabei bedingt durch die Änderung der Ladungsträgerdichte am Ort der Gateelektrode, welche nach dem Gauß'schen Satz mit einem elektrischen Feld verbunden ist. Es wird hier außerdem ausgenutzt, dass man den Quotienten aus Dielektrizitätszahl und Abstand als geometrische Kapazität  $C_{1,g}$  deuten kann. Der zweite Term resultiert aus der Änderung des chemischen Potentials in der Quantenschicht, die durch das Erhöhen der Ladungsträgerdichte dort induziert



**Abbildung 6.2:** Im Text verwendete Notation von Strukturen mit einer Serie von eingebetteten Quantensystemen. Kapazitäten mit tiefgestelltem Index geben die reine geometrische Kapazität (also  $\epsilon/d$ ) zwischen zwei Schichten an, während Kapazitäten mit hochgestelltem Index der Gesamtkapazität entsprechen und damit z.B. Quanteneffekte berücksichtigen.

wird. Hier geht die Zustandsdichte  $D_1$  des Quantensystems ein. Dieser Beitrag zur Änderung des elektro-chemischen Potentials ist offensichtlich umso bedeutender, je geringer die Zustandsdichte des beteiligten Quantensystems ist und verschwindet für (quasi-)metallische Schichten.

Da das Quantensystem und der Rückkontakt elektrisch verbunden sind, kann dort aufgrund des herrschenden Gleichgewichts keine Potentialdifferenz vorliegen und zwischen diesen beiden Systemen gilt die zu Gl. (6.2) äquivalente Beziehung

$$0 = -\frac{d\sigma_{b,1}}{C^{(b,1)}} + \frac{d\sigma_1}{e^2 D_1} \quad , \quad (6.3)$$

wobei  $d\sigma_{b,1}$  die Änderung der Ladungsträgerdichte im Rückkontakt angibt. Eventuelle Änderungen des chemischen Potentials des Rückkontaktes können dabei durch  $C^{(b,1)}$  berücksichtigt werden.

Die Kapazität des ursprünglich leeren Kondensators  $C^{(0)}$  lässt sich als serielle Kombination der Kapazität zwischen Gate und dem Ort des eingebetteten Quantensystem "1" und der hinter diesem Quantensystem verbleibenden Restkapazität  $C^{(b,1)}$  beschreiben:

$$\frac{1}{C^{(0)}} = \frac{1}{C_{1,g}} + \frac{1}{C^{(b,1)}} \quad (6.4)$$

Diese Gleichung ist dabei als Definition der Kapazität  $C^{(b,1)}$  zu sehen, welche damit

nicht nur die geometrische Kapazität zwischen den beteiligten Schichten berücksichtigt, sondern im realen Experiment auch eventuelle zusätzlich und seriell zur eigentlichen Probe auftretende Kapazitäten.

Insgesamt muss die Ladung auf der Gateelektrode durch die im Rückkontakt und im Quantensystem akkumulierte Ladung kompensiert werden, es gilt also insgesamt die Neutralitätsbedingung

$$-d\sigma_g = d\sigma_1 + d\sigma_{b,1}. \quad (6.5)$$

Zusammen mit den Gleichungen (6.2)-(6.4) folgt aus dem bisher gesagten für die Gesamtkapazität bei einem eingebetteten Quantensystem  $C^{(1)} = dU/d\sigma_g$

$$\frac{1}{C^{(1)}} = \frac{1}{C_{1,g}} + \frac{1}{C_{q,1} + C^{(b,1)}}, \quad (6.6)$$

wenn man in üblicher Weise mit der Größe  $C_{q,1} = e^2 D_1$  die Quantenkapazität des eingebetteten Systems bezeichnet. Das hiermit erzielte Resultat ähnelt sehr den in früheren Arbeiten hergestellten Beziehungen für zweidimensionale Elektronengase [79] und selbstorganisierte Quantenpunkte [59], bietet aber aufgrund seiner Allgemeinheit die Möglichkeit, es iterativ zu erweitern. So lässt sich die Gesamtkapazität  $C^{(1)}$  auch als Kapazität zwischen der Gateelektrode und einem (komplexen) Rückkontakt deuten. Die bis hierher vorgestellten Überlegungen können nach dem gedanklichen Einbau eines weiteren Quantensystems "2" zwischen System "1" und der Gateelektrode wiederholt werden, wenn dieses neue Quantensystem wiederum durch eine elektrische Kopplung im Gleichgewicht mit System "1" ist. Nach Einbau von  $i$  Systemen ergibt sich das in Abbildung 6.3 dargestellte Bild. Für die Gesamtkapazität gilt dann die iterative Formel

$$\frac{1}{C^{(i)}} = \frac{1}{C_{i,g}} + \frac{1}{C_{q,i} + C^{(b,i)}}, \quad (6.7)$$

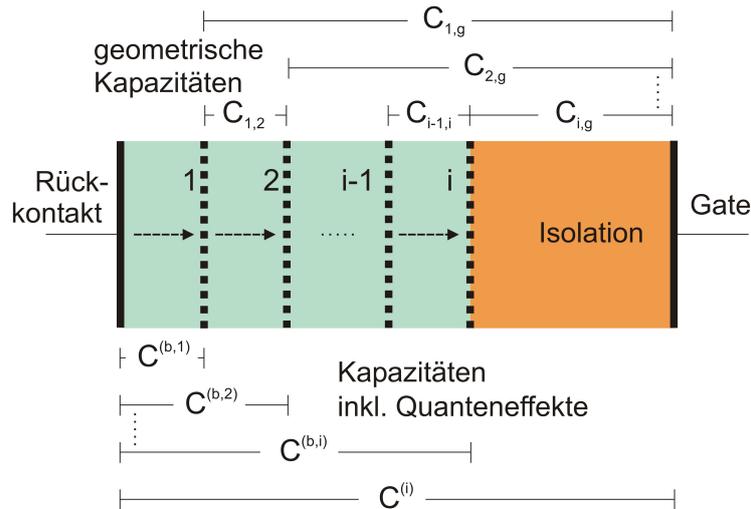
und es ist nun zuletzt noch die jeweilige aktuelle Hintergrundkapazität  $C^{(b,i)}$  zu bestimmen. Diese lässt sich nach Einbau des  $i$ -ten Quantensystems jeweils entsprechend Gleichung (6.4) aus dem vorherigen Ergebnis für die Gesamtkapazität  $C^{(i-1)}$  berechnen:

$$\frac{1}{C^{(b,i)}} = \frac{1}{C^{(i-1)}} - \frac{1}{C_{i,g}} \quad (6.8)$$

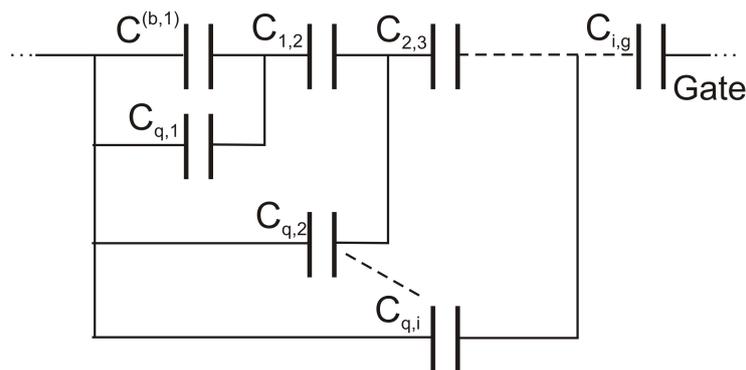
$$= \frac{1}{C_{i-1,i}} + \frac{1}{C_{q,i-1} + C^{(b,i-1)}}. \quad (6.9)$$

Gleichung (6.9) rührt daher, dass sich die geometrische Kapazität  $C_{i-1,g}$  als serieller Verbund von  $C_{i-1,i}$  und  $C_{i,g}$  darstellen lässt (siehe Abb. 6.3).

Diese iterativen Formeln lassen sich in ein Ersatzschaltbild konvertieren. Im resultierenden Kapazitätsnetzwerk tritt die Quantenkapazität des  $i$ -ten Systems parallel zu den Beiträgen aller Systeme mit einem niedrigeren Index auf (Abb. 6.4). Der hier



**Abbildung 6.3:** Erweiterung von Abb. 6.2 auf ein System mit  $i$  eingebetteten Quantensystemen.



**Abbildung 6.4:** Ersatzschaltbild zur Berechnung der Gesamtkapazität einer MISFET-Struktur mit  $i$  eingebetteten gekoppelten Quantensystemen mit einer jeweiligen Zustandsdichte von  $D_i = C_{q,i}/e^2$ .

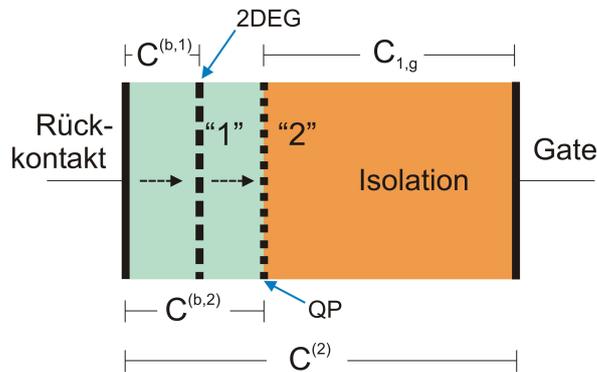
vorgestellte Formalismus gilt sehr allgemein und lässt sich auf eine ganze Reihe von Probengeometrien anwenden. Als Quantensysteme kommen beispielsweise Quantenpunkte, Quantenringe, 2DEG, Dotierungen etc. in Frage. Die Anzahl dieser Systeme ist dabei hauptsächlich durch die Bedingung begrenzt, dass sie sich im thermischen Gleichgewicht befinden müssen. Die einzelnen Systeme sind häufig durch Tunnelkontakte miteinander verbunden, deren charakteristische Zeitkonstanten exponentiell von der Dicke der Barriere abhängen [43, 44]. Die Gesamtdicke des relevanten Schichtpakets sollte daher in GaAs-basierten Strukturen 40 nm nicht deutlich überschreiten,

wenn diese Kapazitätsmessungen zugänglich sein soll.

Das Ziel dieser Rechnung ist ursprünglich gewesen, aus einer Kapazitätsmessung auf die beteiligten Zustandsdichten/Quantenkapazitäten zu schließen. Dem Ersatzschaltbild 6.4 entspricht jedoch nur gerade eine Gleichung mit  $i$  unbekanntem Quantenkapazitäten. Dies stellt jedoch kein prinzipielles Problem dar, sondern lässt sich auf verschiedene Arten umgehen. Zum einen ist es möglich, einige der fraglichen Quantenkapazitäten in bestimmten Gatespannungs- und Magnetfeldbereichen durch theoretische Werte zu ersetzen, so ist beispielsweise die Zustandsdichte eines 2DEG bei  $B = 0$  T bekannt ([5], bzw. Gl. 2.6). Zum anderen ist es sehr häufig möglich, die Quantenschichten durch stark negative Gatespannungen zu verarmen. Sie können dann mit zunehmender Gatespannung sukzessive der Messung zugeschaltet werden, so dass immer nur ein unbekanntes System hinzukommt. Dieses Verfahren ist insbesondere dann nützlich, wenn man aus den Eigenschaften eines Systems in einem kleinen Gatespannungsbereich auf sein Verhalten im restlichen Bereich schließen kann.

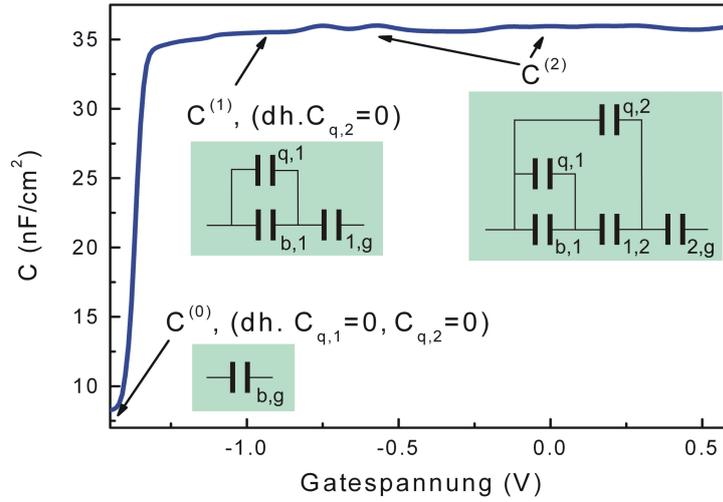
### 6.2.2 Anwendung auf die untersuchte Probengeometrie

Das auf der Quantenkapazität der beteiligten Schichten beruhende Modell soll nun auf die zu untersuchende Probe angewandt werden. Diese enthält mit dem zweidimensionalen Elektronengas und den InAs-Quantenpunkten zwei Quantensysteme ( $i = 2$ , Abbildung 6.5). Das 2DEG als zusätzliches Quantensystem und nicht nur als ein-



**Abbildung 6.5:** Probengeometrie und Notation für Quantenpunktproben mit 2D-Reservoir.

fachen Rückkontakt zu werten, ist aus mehreren Gründen sinnvoll. So führt seine endliche Entartung schon bei  $B = 0$  T zu einem merklichen Unterschied zwischen der gemessenen Kapazität und dem geometrischen Wert. Viel deutlicher sollten Zustands-



**Abbildung 6.6:** Kapazitätsspektrum der Probe 12177. Die Insets symbolisieren die entsprechend Abb. 6.4 zu berücksichtigenden Kapazitäten in den entsprechenden Bereichen.

dichteeffekte schließlich in hohen Magnetfeldern zu Tage treten. Zum anderen misst man auch bei sehr niedrigen Gatespannungen und praktisch völliger Verarmung des 2DEG noch eine Restkapazität, die bei Einführung des 2DEG als zusätzliche Quantenschicht im Rahmen des hier vorgestellten Formalismus bequem berücksichtigt werden kann.

Abbildung 6.6 zeigt das Kapazitätsspektrum von Probe 12177 und die dort auftretenden verschiedenen Bereiche der Kapazität. Bei verarmten 2DEG ( $U_g < -1,4\text{ V}$ ) kann die Kapazität  $C^{(0)}$  des leeren Kondensators abgelesen werden, diese beträgt  $4,69\text{ nF/cm}^{-2}$ . Da die hier dargestellten Messungen alle bei ungefähr  $B = 0\text{ T}$  durchgeführt wurden, kann für die Quantenkapazität des 2DEG der Wert

$$C_{q,1} = e^2 \frac{m^*}{\pi \hbar^2} \quad (6.10)$$

angenommen werden, die effektive Masse der 2D-Elektronen ist dabei  $m^* = 0,067 m_0$  [8]. Die in die Berechnungen eingehenden geometrischen Kapazitäten können im wesentlichen den Angaben des Wachstumsprotokoll entnommen werden. Es ist allerdings zu beachten, dass sich der Schwerpunkt der 2D-Wellenfunktion nicht direkt an der entsprechenden AlGaAs/GaAs Grenzfläche befindet, sondern etwa 5 nm in Richtung der Probenoberfläche verschoben ist (siehe auch Abb. 4.8 (links) auf Seite 56). Eine ähnliche Verschiebung ist auch für die Quantenpunktelektronen zu berücksichtigen.

Basierend auf diesen Überlegungen kann für die Kapazität  $C^{(1)}$  ein Wert von  $35,5 \text{ nF/cm}^{-2}$  berechnet werden. Als einzige unbekannte Größe verbleibt nun die Quantenkapazität der InAs-Quantenpunkte. Diese kann mit Hilfe der Gleichung

$$\frac{1}{C_{\text{mess}}} = \frac{1}{C^{(2)}} = \frac{1}{C_{2,\text{g}}} + \frac{1}{C_{\text{q},2} + \frac{C_{2,\text{g}}C^{(1)}}{C_{2,\text{g}} - C^{(1)}}} \quad (6.11)$$

aus der gemessenen Kapazität berechnet werden. Die Zustandsdichte der Quantenpunktschicht ist dabei als mittlere Zustandsdichte pro Dot  $D_{\text{dot}}$  multipliziert mit der Quantenpunktdichte  $N_{\text{qd}}$  zu verstehen. Für die Quantenkapazität folgt also

$$C_{\text{q},2} = e^2 N_{\text{qd}} D_{\text{dot}}(E). \quad (6.12)$$

Die Änderung der Ladungsträgerdichte in der Quantenpunktschicht  $d\sigma_2$  lässt sich aus den bis hierhin angegebenen Gleichungen (6.2)-(6.11) zu

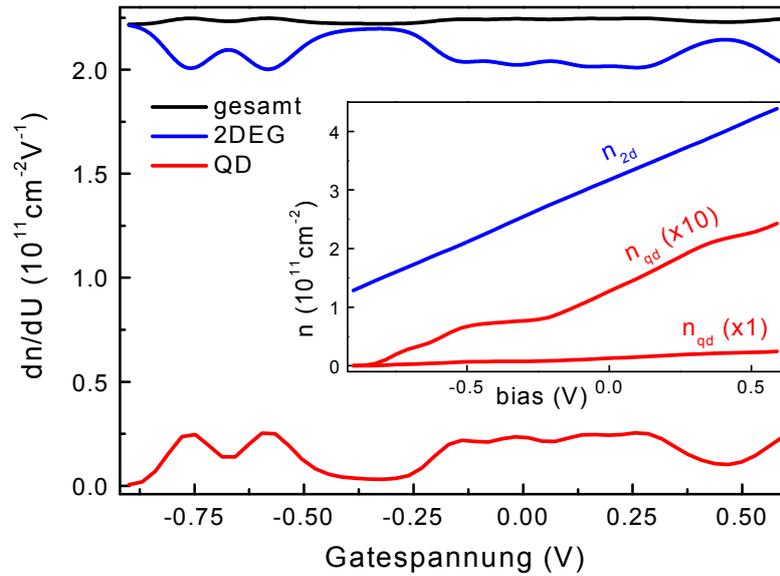
$$\frac{d\sigma_2}{dU} = C_{2,\text{g}} \frac{C^{(2)} - C^{(1)}}{C_{(2,\text{g})} - C^{(1)}} = \Delta C \frac{C^{(\text{b},2)}}{C^{(1)}} = \lambda \Delta C \quad (6.13)$$

berechnen, wenn man die induzierte Kapazitätsänderung als  $\Delta C = C^{(2)} - C^{(1)}$  definiert. Die Größe  $\lambda = C^{(\text{b},2)}/C^{(1)}$  entspricht dann einem *effektiven* Hebelarm, der neben den geometrischen Abstandsverhältnissen Zustandsdichteeffekte im Rückkontakt, unterschiedliche Dielektrizitätszahlen und alle sonstigen Einflüsse des Messaufbaus berücksichtigt. Der für die hier untersuchte Probe ermittelte effektive Hebelarm von 8,08 liegt somit deutlich über dem rein geometrischen Wert von 7.

Im Umkehrschluss zu Gleichung (6.13) folgt, dass sich die Änderung der Besetzung der Quantenpunkte nur zu einem durch den reziproken Hebelarm  $1/\lambda$  gegebenen Bruchteil in Form einer Kapazitätserhöhung bemerkbar macht. Die Möglichkeit, prinzipiell in diesem Formalismus auch die Änderung der Ladungsträgerdichte im Rückkontakt anhand der Gleichung

$$d\sigma_1 = -d\sigma_{\text{g}} - d\sigma_2 - d\sigma_{\text{b},1} \quad (6.14)$$

bestimmen zu können, kommt bei Proben mit zweidimensionalem Rückkontakt eine besondere Bedeutung zu, da  $d\sigma_1$  auch unabhängig von Kapazitätsmessungen bestimmt werden kann. Abbildung 6.7 zeigt die anhand Gl. (6.14) berechneten Werte für die Ladungsträgerzahlen im 2DEG und in den Quantenpunkten. Während die Amplitude der Änderung der Gesamtkapazität durch die Quantenpunkte durch den Hebelarm gestaucht wird und daher entsprechend klein ausfällt (siehe auch Abb. 6.6), zeigen die einzelnen Ladungsträgerdichten eine deutlich verstärkte Variation, da hier der Hebelarm nicht eingeht. Abbildung 6.7 ist allerdings vor allem auch deshalb von



**Abbildung 6.7:** Änderung der Ladungsträgerzahlen in Abhängigkeit der Gatespannung. Das Inset zeigt die integrierten Absolutwerte. Der schwarzen Kurve („gesamt“) entspricht die gemessene Kapazität, die Kurven für das 2DEG (blau) und die Quantenpunkte (rot) wurden mittels des im Text vorgestellten Formalismus daraus berechnet.

besonderer Bedeutung, weil damit das Ziel erreicht ist, jeder Gatespannung eine Besetzungszahl beider Quantensysteme zuzuordnen. Eine Messung der Leitfähigkeit bei einer beliebigen Gatespannung erlaubt damit direkt die Bestimmung der Beweglichkeit bei bekannter Besetzung der Quantenpunkte. Diese Daten sind damit die Grundlage des Abschnittes 6.3, der sich genauer mit der Beweglichkeit befasst.

Während man bei einem 3D-Rückkontakt keinen direkten Zugriff auf die im Verhältnis zur Gesamtladung verschwindend kleine Änderung der Ladungsträgerzahl hat, ist diese bei einem 2D-Reservoir auch unabhängig von der Kapazität messbar. Damit eröffnet sich nicht nur die Möglichkeit, die bis hierhin durchgeführten Berechnungen zu verifizieren. Eine Messung des Ladungsträgerdichte im 2DEG kann auch zur Spektroskopie der Quantenzustände genutzt werden. Als nahe liegende Methode zur unabhängigen Bestimmung der Ladungsträgerkonzentration kommt dabei eine Hall-Messung in Frage. Ist die Abhängigkeit  $\sigma_1(U_g)$  aus einer solchen *lateralen* Messung

bekannt, kann über die Formel

$$C_{q,2} = C_{2,g} C^{(b,2)} \left( \frac{d\sigma_{b,2}}{dU} \right)^{-1} - C_{2,g} - C^{(b,2)} \quad (6.15)$$

die Quantenkapazität/Zustandsdichte der Quantenpunktschicht bestimmt werden, wenn für  $d\sigma_{b,2}$  der Wert

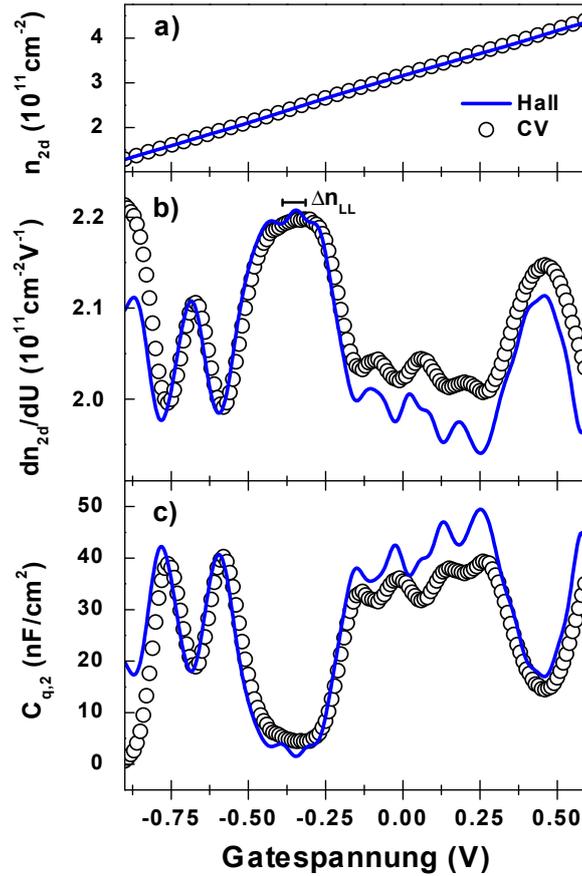
$$d\sigma_{b,2} = d\sigma_1 + d\sigma_{b,1} = \left( 1 + \frac{C^{b,1}}{C_{q,1}} \right) d\sigma_1 \quad (6.16)$$

eingesetzt wird. Dieser unterscheidet sich jedoch aufgrund der hohen Zustandsdichte des 2DEG kaum vom gemessenen Wert  $d\sigma_1$ .

Abbildung 6.8 zeigt die mit diesen zwei unabhängigen Methoden (Kapazität und Hall-Messung) bestimmten Werte der Ladungsträgerzahl im 2DEG, ihre Änderungsrate und die Quantenkapazität der Quantenpunktschicht  $C_{q,2}$ . Die Kapazitätsmessungen wurden hier so normiert, dass sie bei einer Gatespannung von  $-0,9$  V eine zur Hall-Messung äquivalente Ladungsträgerzahl ergaben. Dies ist nötig, da die Integration über den Verarmungsbereich der Kapazität ansonsten die Ergebnisse verfälschen würde. Außerdem wurde von der Kapazität ein linearer Untergrund subtrahiert, welcher von der Verschiebung des Ladungsschwerpunktes des 2DEG mit zunehmender Gatespannung herrührt.

Nach diesen Korrekturen stimmen die berechneten Ladungsträgerzahlen im 2DEG für beide Methoden sehr gut überein (Abb. 6.8a). Sogar in ihrer Ableitung, die den Effekt des Ladens der Quantenpunkte besser sichtbar macht, ergibt sich eine hervorragende Äquivalenz (Abb. 6.8b). Die zusätzlichen kleinen Oszillationen in der Hall-Messung stammen von ersten Hall-Plateaus, welche sich selbst bei dem verwendeten niedrigen Magnetfeld von nur  $0,3$  T ausbilden und so zu konstanten, bzw. überdurchschnittlich stark schwankenden Bereichen in  $dn_{2d}$  führen. Die zum Auffüllen eines zusätzlichen Landau-Niveaus nötige Gatespannungsdifferenz stimmt sehr gut mit der beobachteten Periode der zusätzlichen Oszillationen überein ( $\Delta n_{LL}$  in Abb. 6.8b).

In Abbildung Abb. 6.8c ist die für beide Methoden berechnete Quantenkapazität der Quantenpunktschicht gezeigt. Wie erhofft, bietet die eigentlich recht indirekte, laterale Hall-Messung anscheinend eine etwas bessere Auflösung der durch die Quantenpunkte induzierten Extrema. Laterale Hall-Messungen an solchen 2D-Rückkontakten bieten damit eine neue Möglichkeit, die Zustandsdichte von tunnelgekoppelten niedrigdimensionalen Elektronensystemen auszutasten, und es können damit die charakteristischen Parameter des Quantenpunktensembles bestimmt werden. Tabelle 6.1 führt als Beispiel die mittels beider Methoden bestimmten Werte für die Coulombblockadeenergien auf. Es sei an dieser Stelle weiterhin angemerkt, dass mit der Quantenkapazität



**Abbildung 6.8:** Mittels Kapazitätsspektroskopie (offene Kreise) und Hall-Messungen (blaue Linien) bestimmte Werte der Ladungsträgerzahl im 2DEG (a), ihrer Änderungsrate (b) und Quantenkapazität der Quantenpunkte (c), jeweils in Abhängigkeit von der Gate-Spannung. Die Größe  $\Delta n_{LL}$  bezeichnet die Gatespannungsdifferenz, die bei dem für die Hallmessung verwendeten Feld von 0,3 T ein zusätzliches Landau-Niveau füllt.

auch die Ladung pro Quantenpunkt  $n_{QD}$  genau anzugeben ist.

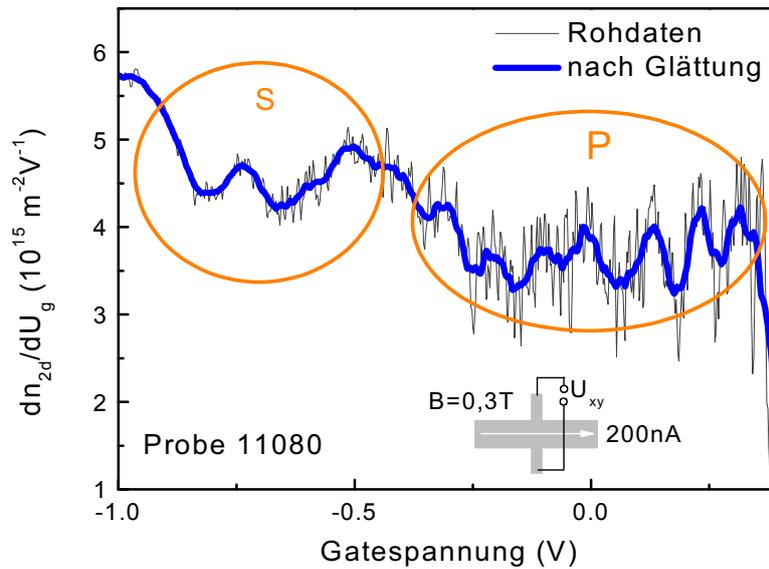
Mittels beider Methoden wurde außerdem die Quantenpunktdichte berechnet. Diese unterscheidet sich mit Werten von  $3,3 \cdot 10^9 \text{ cm}^{-2}$  (CV) und  $4,3 \cdot 10^9 \text{ cm}^{-2}$  (Hall) signifikant. AFM-Messungen von Quantenpunkten an der Probenoberfläche ergaben einen Wert von ca.  $7 \cdot 10^9 \text{ cm}^{-2}$ , auch in dieser Hinsicht scheint die Hall-Messung eine Verbesserung im Gegensatz zur CV-Spektroskopie darzustellen.

Diese auf den ersten Blick etwas umständliche neue Methode der Spektroskopie von

Elektronen	$E_C^{\text{CV}}$ (meV)	$E_C^{\text{Hall}}$ (meV)
$s_1 - s_2$	25,67	23,24
$s_2 - p_1$	7,76	8,16
$p_1 - p_2$	18,11	17,18
$p_2 - p_3$	22,48	21,02
$p_3 - p_4$	17,05	17,19

**Tabelle 6.1:** Coulomb-Energien der Probe 12177, jeweils bestimmt durch Kapazitäts- (CV) und Hall-Messungen. Für die Berechnung des Wertes für die Elektronen  $s_2 - p_1$  wurde eine Quantisierungsenergie von 50 meV angenommen.

eingebetteten Quantensystemen hat den Nachteil, dass sie nicht für quantisierende Magnetfelder geeignet ist, bietet jedoch einen entscheidenden Vorteil: Sie ermöglicht es, Proben mit großen Tunnelbarrieren zu spektroskopieren, da die Messungen der Hall-Spannung prinzipiell in Gleichspannungsexperimenten erfolgen kann (Abb. 6.9). In dem hier gezeigten Experiment wurde zwischen Source- und Drain-Kontakt des Hall-Bars ein konstanter Strom von 200 nA aufgeprägt und die Hall-Spannung in Abhängigkeit von der (ebenfalls konstanten) Gatespannung bestimmt, um das Funktionieren des Grundprinzips auch unter diesen Bedingungen zu demonstrieren. Den Vorteil, dass das Tunneln der Elektronen in die Quantenpunktzustände nicht innerhalb der Periodendauer der Anregungsfrequenz der Kapazitätsmessung erfolgen muss, kann man jedoch auch in den bisher vorgestellten Wechselstrom-Experimenten nutzen, da auch dort die Gatespannung während der Aufnahme eines Messpunktes konstant bleibt. Auf diese Weise sind prinzipiell Strukturen mit Tunnelzeiten von einigen Sekunden der Hall-Messung gut zugänglich, während sie für Kapazitätsmessungen mit realistischen Frequenzen ungeeignet sind.



**Abbildung 6.9:** Änderung der Ladungsträgerkonzentration eines 2DEG in einem reinen DC-Experiment. Die dünnen schwarzen Linien zeigen die Rohdaten. Die Glättung der Rohdaten erfolgte durch eine Mittelwertbildung über einen Bereich von etwa 3 mV.

## 6.3 Beweglichkeit

### 6.3.1 Bisherige Arbeiten

Die Transporteigenschaften von zweidimensionalen Elektronengasen unter dem Einfluss von benachbarten selbstorganisierten Quantenpunkten sind schon seit geraumer Zeit Gegenstand intensiver Forschung. In der ersten diesbezüglichen Arbeit stellten Sakaki *et al.* fest, dass die Beweglichkeit des 2DEG mit zunehmender Quantenpunktdichte und abnehmender Tunnelbarriere abnimmt [87]. Sie überstreicht dabei bei Abständen von 15-60 nm etwa zwei Größenordnungen. Sakaki *et al.* favorisieren als Ursache dieser Reduzierung der Beweglichkeit ein attraktives Potenzial in der Nähe der InAs-Quantenpunkte, welches von der Leitungsbanddiskontinuität zwischen GaAs und InAs herrührt. Ein direkter Zusammenhang zwischen der Besetzungszahl der Quantenpunkte und ihrer Streuwirkung wird nicht hergestellt.

Ribeiro *et al.* finden ganz ähnliche Effekte in Proben, bei denen die Quantenpunkte direkt im Bereich der 2D-Wellenfunktion gewachsen wurden [22]. Auch hier wird

die Beweglichkeit des 2D-Gases mit zunehmender Quantenpunktdichte drastisch reduziert. Allerdings deuten Verschiebungen der Positionen der Hall-Plateaus in hohen Magnetfeldern hier auf einen repulsiven Charakter des Quantenpunktpotenzials hin (vgl. [11]). Aufgrund der Position der Quantenpunkte direkt an der 2D-Grenzschicht ist auch in dieser Arbeit keine Kontrolle der Besetzung der Quantenpunkte mit Elektronen und auch nur eine grobe Abschätzung ihrer Dichte möglich. Damit ist letztlich auch der Vergleich der beobachteten Beweglichkeiten mit der Modellierung anhand des Stern-Howard Modells nur als *Indiz* dafür zu werten, dass die Quantenpunktelektronen die Hauptursache für die Verringerung der Beweglichkeit sind.

Sehr interessante Ergebnisse wurden von Zhukov *et al.* vorgestellt [88]. Es wird überzeugend dargelegt, dass das Laden von Quantenpunkten in der Nachbarschaft eines 2DEG dessen Beweglichkeit in speziellen Fällen sogar *erhöhen* kann. Eine solche Beweglichkeitserhöhung tritt allerdings nur dann auf, wenn die Quantenpunkte gerade nicht das dominante Streupotenzial hervorrufen, bzw. wenn unabhängig von den Quantenpunkten äußerst starke Potenzialmodulationen (etwa 20 meV) vorliegen. In diesem Fall bestimmt dieses äußere Potenzial maßgeblich mit, welche Quantenpunkte bei einer Erhöhung der Gatespannung zuerst geladen werden. Dieses werden gerade die Quantenpunkte sein, welche sich in einem Minimum des äußeren Potentials befinden, so dass das zusätzliche Elektron an dieser Stelle das dort herrschende attraktive Streupotential durch sein Coulomb-Potenzial reduziert. In jedem Fall ist der hier beobachtete Effekt der Quantenpunktelektronen recht schwach. Das Laden von zusätzlichen Elektronen in die Quantenpunktschicht ändert die Beweglichkeit nur marginal.

Kawazu *et al.* untersuchen ebenfalls Proben, die den in dieser Arbeit untersuchten Proben sehr ähnlich sind [23, 89–91]. Sie erzielen zwar keine sehr präzise Kontrolle über die Anzahl der Elektronen pro Quantenpunkt oder die Quantenpunktdichte, können jedoch zeigen, dass auch hier z.T. ein Fall auftritt, in dem die Beweglichkeit der 2D-Elektronen durch zusätzliche Ladungen in den Quantenpunkten erhöht wird. Als mögliche Ursache führen sie an, dass die Quantenpunktelektronen das durch das InAs gebildete Minimum in der Leitungsbandkante verkleinern. Diese Begründung ist insofern mit Skepsis zu betrachten, als bei einem Abstand von 30 nm zwischen dem 2DEG und den Quantenpunkten praktisch kein Überlapp der Wellenfunktion mit dem Potenzial des leeren Quantenpunktes mehr existiert. Möglicherweise gleichen die Quantenpunktelektronen eher anderweitig begründete Potentialfluktuationen aus, ähnlich wie es in der Arbeit von Zhukov *et al.* vermutet wird (s.o.).

Die von Kawazu *et al.* vorgestellten Arbeiten sind insofern etwas ambivalent, als neben den Ergebnissen, die einen Anstieg der Leitfähigkeit mit zunehmender Besetzung der Quantenpunkte zeigen [90], an ganz ähnlichen Proben der gegenteilige Fall, d.h. eine Reduktion der Beweglichkeit gefunden wird [91].

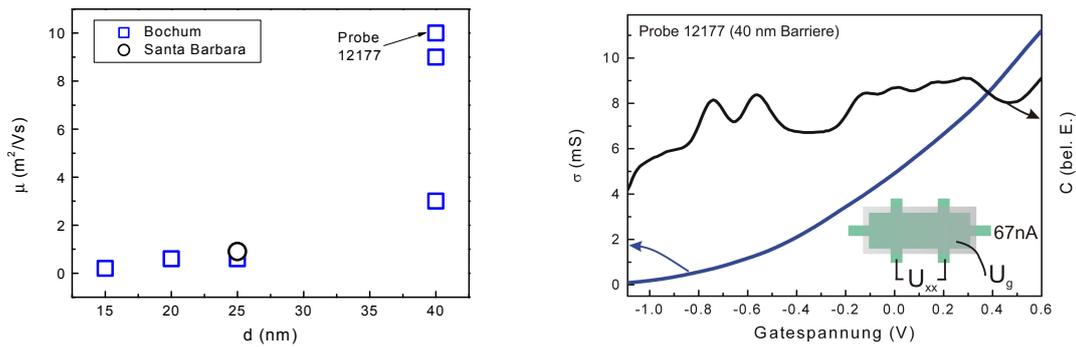
Als eine Möglichkeit, die Wechselwirkung von Quantenpunktelektronen mit zweidimensionalen Elektronengasen auszunutzen, wurden optisch schaltbare Speicherelemente vorgeschlagen, die elektrisch ausgelesen werden können. Diese Experimente beruhen darauf, dass bei einer sehr schmalen Bandbreite eines Anregungslasers nur in einem Teil der Quantenpunkte die passende Energie resonant in ein Exziton umgewandelt werden kann [92,93]. In geeigneten *pin*-Strukturen können Elektronen und Löcher danach getrennt werden. Die in den Quantenpunkten verbleibenden Elektronen sind durch praktisch undurchdringliche AlAs-Barrieren von einem 2DEG getrennt und verlieren ihre einmal gespeicherte Ladung bei tiefen Temperaturen zunächst nicht mehr. Dieser Ladungszustand der Quantenpunkte kann dann anhand des Widerstandes des 2DEG ausgelesen werden, wobei die Besetzung der Quantenpunkte hier wiederum mit einer deutlichen Erhöhung des Widerstandes verbunden ist.

### 6.3.2 Ergebnisse

#### Probe 12177: 40 nm Tunnelbarriere

Die in dieser Arbeit untersuchten invertierten MISFET-Proben erlauben es, gleichzeitig bei beliebigen Gatespannungen die Besetzung der Quantenpunkte, die des 2D-Gases und dessen Leitfähigkeit zu bestimmen, ganz ähnlich wie es auch in der Arbeit von Zhukov *et al.* demonstriert wurde [88]. Die Beweglichkeit nimmt, wie erwartet, mit der Nähe der Quantenpunkte zum 2DEG drastisch ab (Abb. 6.10 links). Betrachtet man die Leitfähigkeit des 2D-Kanals in Abhängigkeit von der Gatespannung bei einer Tunnelbarriere von 40 nm, so findet man auch hier nur eine sehr schwache Abhängigkeit von der Besetzung der Quantenpunkte (Abb. 6.10 rechts). Diese Besetzung der Quantenpunkte kann, wie in Abschnitt 6.2 diskutiert, durch parallele Kapazitätsmessungen präzise festgestellt werden. Die Kapazitätsmessungen können dabei direkt am für die Hall-Messungen verwendeten Gate durchgeführt werden, oder an einem ebenfalls auf der selben Probe angebrachten flachen<sup>1</sup> Gate. Insgesamt ist aus Abb. 6.10 schon an dieser Stelle der Schluss zu ziehen, dass die zusätzlichen Quantenpunktelektronen die Beweglichkeit nur geringfügig beeinflussen. Die Quantenpunkt-

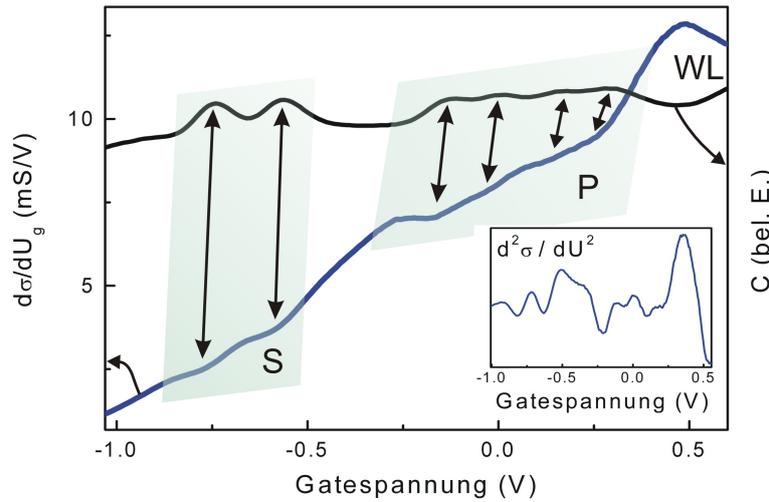
<sup>1</sup>D.h. ohne geätzte Mesastruktur. Diese unstrukturierten Gateelektroden ermöglichen meist eine deutlich bessere Kapazitätsmessung.



**Abbildung 6.10:** Links: Abhängigkeit der Beweglichkeit von der Dicke  $d$  der Tunnelbarriere. Die Legende gibt die Herkunft der Probe an. Rechts: Die Leitfähigkeit (blau) einer typischen MISFET-Probe wird nur schwach von der Besetzung der Quantenpunkte beeinflusst. Das verwendete Probendesign erlaubt es, diese Besetzungszahl parallel durch Kapazitätsmessungen festzustellen (schwarz).

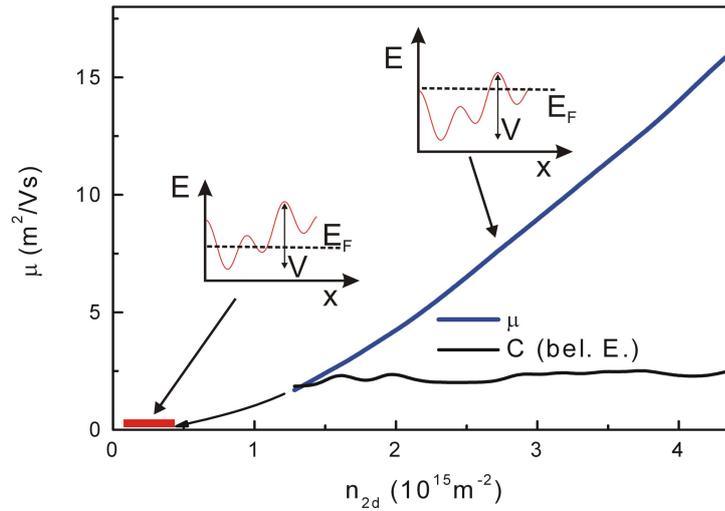
elektronen scheiden damit auch als Ursache der geringen Beweglichkeit aus. Trotzdem ist es lohnenswert, sich die Leitfähigkeit etwas detaillierter anzuschauen. Als geeignete Darstellungsform kommt die Ableitung der Leitfähigkeit in Frage. Durch das Bilden der Ableitung werden die Details einer schwach veränderlichen Funktion sichtbar und es lassen sich charakteristische Bereiche besser abgrenzen. Abbildung 6.11 zeigt eine solche Auftragung der Ableitung der Leitfähigkeit. Die Gatespannungspositionen, an denen die Quantenpunkte geladen werden, sind eindeutig als Bereiche mit verringerter Ableitung der Leitfähigkeit zu identifizieren. Die leichte scheinbare Verschiebung der Gatespannungsskala um etwa 10 mV beruht wahrscheinlich darauf, dass die hier dargestellten Messungen an zwei verschiedenen Gateelektroden durchgeführt wurden. Sie resultiert möglicherweise aus leicht unterschiedlichen Schottky-Barrieren.

Mit dieser Messung konnte erstmalig ein *direkter* Zusammenhang zwischen der Reduktion der Leitfähigkeit eines 2DEG mit einer definierten und kontrollierbaren Besetzung von benachbarten Quantenpunkten beobachtet werden. Allerdings ist damit noch kein Beweis erbracht, dass hier die Coulomb-Streuung beobachtet wurde, da sich entsprechend des vorangegangenen Abschnittes die relevanten Bereiche auch durch eine Verringerung des Anstiegs der Ladungsträgerzahl auszeichnen. Diese Verringerung der Ladungsträgerzahl könnte schon ausreichen, um die Veränderung der Leitfähigkeit zu erklären. Um also das Ausmaß der Coulomb-Streuung zu ermitteln, muss die Gatespannungsskala anhand des im vorherigen Abschnittes dargestellten Formalismus in



**Abbildung 6.11:** Gezeigt ist Ableitung der Leitfähigkeit nach der Gatespannung. Im Inset ist die nächsthöhere Ableitung angedeutet.

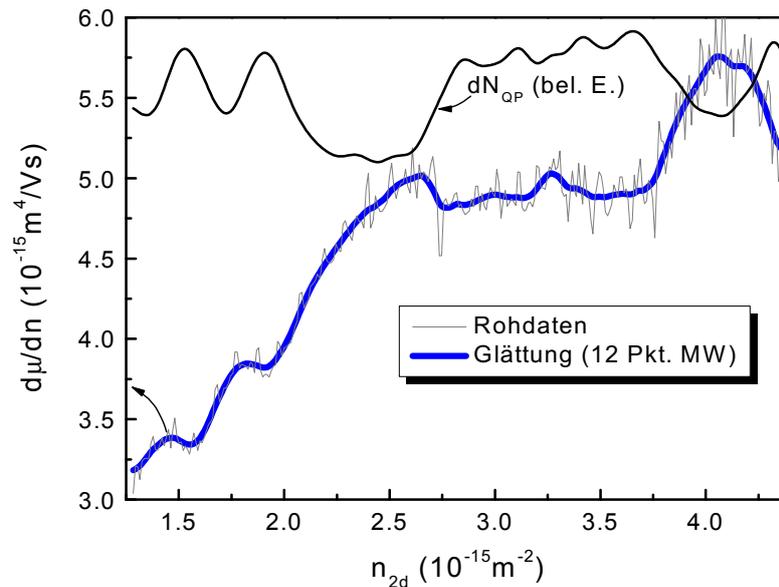
Ladungsträgerzahlen  $n_{2d}$  umgewandelt werden. Die Leitfähigkeit kann dann bei bekanntem  $n_{2d}$  mittels Gl. (6.1) in eine Beweglichkeit umgerechnet werden. Tatsächlich kann so bewiesen werden, dass auch die Beweglichkeit  $\mu$  in Abhängigkeit von der Ladungsträgerzahl  $n_{2d}$  im Bereich der  $s$ - und  $p$ -Niveaus verringert wird, obwohl die Beweglichkeit selbst auf den ersten Blick nur einen geringen Einfluss der Besetzung der Quantenpunkte zeigt (Abb. 6.12). Die Beweglichkeit steigt überproportional zu  $n_{2d}$  an, allerdings erst, nachdem eine gewisse Besetzungszahl  $n_{2d}^0$  überschritten ist. Vor dieser kritischen Besetzungszahl sind die Elektronen möglicherweise stark in den am Ort des 2DEG auftretenden Potenzialminima lokalisiert. Die kritische Dichte  $n_{2d}^0 \approx 0,5 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-2}$  ist aus zweierlei Hinsicht interessant. Zum einen stimmt sie recht gut mit dem in Kapitel 5.2.5 bestimmten Wert für die Anzahl der vom Magnetfeld unabhängigen Zustände überein. Für die Probe 12177 wurde dort bei einer Gesamtkonzentration von etwa  $2 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-2}$  ein Untergrundanteil von 15% und damit  $n_{2d}^0 = 0,3 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-2}$  bestimmt. Zum anderen ist diese Ladungsträgerdichte über die Abschätzung  $\frac{1}{2}V = E_F(n_{2d}^0) = 1,5 \text{ meV}$  mit einer Stärke der Potenzialmodulation  $V$  verbunden. Der Faktor  $1/2$  tritt hier auf, da schon bei etwa der Hälfte der gesamten Potenzialmodulation mit der Perkolations der Zustände zu rechnen ist. Diese Energie ist damit deutlich geringer, als z.B. in der bereits zitierten Arbeit von Zhukov *et al.* [88]. Der Vergleich zum Potenzial einer 40 nm vom 2DEG entfernten Punktladung liegt nahe. Dieses ergibt eine Abschätzung von 5 mV, wenn die Abschirmung durch das



**Abbildung 6.12:** Beweglichkeit in Abhängigkeit von der Ladungsträgerzahl  $n_{2d}$ . Die Beweglichkeit scheint schon bei positiven Werten (ca.  $0,4 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-2}$ ) zu verschwinden. Die darunter aufgefüllten Zustände (roter Balken) sind möglicherweise in Potenzialminima lokalisiert. Steigt die Fermienergie über einen bestimmten Wert, so erhöhen schließlich zusätzliche Elektronen die Beweglichkeit (Skizzen). Es kann angenommen werden, dass dieser Punkt etwa bei  $\frac{1}{2}V$  liegt (Perkulationsgrenze).

2DEG nicht berücksichtigt wird, und 2,8 meV in der Thomas Fermi Näherung [4]. Die Perkulationsgrenze würde damit etwa bei der Hälfte dieser Energie, also bei 1,4 meV liegen und somit von der Größenordnung sehr gut übereinstimmen. Allerdings ist diese einfache Betrachtung nicht sehr aufschlussreich. So kommen als Quelle des Streupotenzials beispielsweise auch die ionisierten Silizium-Atome der Dotierschicht in Frage, welche ebenfalls 40 nm vom 2DEG entfernt eingebettet sind. Die Quantenpunktelektronen scheinen jedenfalls nicht die alleinige Ursache dieses Streupotenzials zu sein, schon alleine da sie am Perkulationslimit noch nicht besetzt sind. Dieses Argument verliert jedoch ein wenig von seiner Überzeugungskraft, wenn man beachtet, dass  $n_{2d}^0$  hier durch die Extrapolation des Verhaltens bei besetzten Quantenpunkten abgeschätzt wurde. Auch bei den zum Vergleich herangezogenen Kapazitätsmessungen aus Kapitel 5.2.5 waren die Quantenpunkte mit einem Elektron besetzt. Somit muss die Frage nach der Ursache des Streupotenzials hier zunächst ungeklärt bleiben.

Die Beweglichkeit kann, ganz ähnlich zur weiter oben besprochenen Leitfähigkeit,



**Abbildung 6.13:** Ableitung der Beweglichkeit nach der Anzahl der Ladungsträger. Im oberen Bereich ist die anhand der Hall-Messung bestimmte Änderung der Besetzung der Quantenpunkte skizziert.

besser in Form ihrer Ableitung analysiert werden (Abb. 6.13). Die Reduktion dieser Ableitung durch jedes einzelne zusätzliche Elektron/Quantenpunkt kann inklusive der  $p$ -Schale aufgelöst werden. Zum Vergleich der Beweglichkeit mit der Besetzung der Quantenpunkte ist hier die aus der reinen<sup>2</sup> Hall-Messung bestimmte Änderung  $dn_{QP}$  aufgetragen. Die Positionen der Maxima in  $dn_{QP}$  und der Minima in  $d\mu$  stimmen hervorragend überein.

Zur Beschreibung der Reduktion der Beweglichkeit von 2DEG unter dem Einfluss von Coulomb-Streuern geben Stern und Howard ein Modell an [18], welches später auf andere Streumechanismen erweitert wurde [3, 21]. Als Streumechanismen kommen zunächst alle Einflüsse in Frage, die die Translationssymmetrie im 2DEG brechen. Für die hier untersuchten Proben sind das:

1. Streuung an den ionisierten Dotieratomen. Diese kann in guter Näherung im Stern-Howard-Modell berechnet werden.
2. Streuung an den Quantenpunktelektronen. Auch hier kommt die Analyse mit-

<sup>2</sup>D.h. hier fließen keine Kapazitätsmessungen an anderen Gateelektroden ein.

tels des Stern-Howard-Formalismus in Frage. Es muss jedoch jeder Ladungsträgerzahl  $n_{2d}$  eine Besetzung der Quantenpunkte zugeordnet werden.

3. Streuung am piezoelektrischen Potenzial in der Umgebung der Quantenpunkte. Dieser Mechanismus ist nur schwer zu quantifizieren.
4. Streuung an (3D-verteilten) Verunreinigungen. Die Anzahl der 3D-verteilten Verunreinigungen ist als Anpassungsparameter zu sehen, mittels dessen die berechnete Beweglichkeit an die Daten angepasst werden kann (siehe auch [22]).
5. Streuung an Unregelmäßigkeiten der AlGaAs/GaAs Grenzfläche. Dieser Mechanismus sollte bei den untersuchten und den typischen Beweglichkeiten von unter  $10 \text{ m}^2/\text{Vs}$  vernachlässigbar sein, ebenso wie auch Phononen bei  $T = 4,2 \text{ K}$  nur eine untergeordnete Rolle spielen.

Die einzelnen zu bestimmenden Impulsrelaxationszeiten  $\tau_i$  ergeben dann anhand der Matthiesen-Regel eine für den klassischen Transport charakteristische Streuzeit  $\tau$  gemäß

$$\frac{1}{\tau} = \sum_i \frac{1}{\tau_i} \quad . \quad (6.17)$$

Daraus ist dann jeweils die Beweglichkeit zu berechnen, welche der Gleichung

$$\mu = \frac{e\tau}{m^*} \quad (6.18)$$

genügt. Für eine genauere Analyse der unterschiedlichen Faktoren sollen zunächst drei Beiträge (Nr. 1, 2, und 4, s. o.) zur Streuzeit berücksichtigt werden. Diese lassen sich im Rahmen des Stern-Howard-Modells numerisch auswerten. Am einfachsten zu handhaben ist die Streuung an 3D-verteilten Verunreinigungen. Nach Davies ist diese in Abhängigkeit von der Dichte der Streuer  $N_{3D}^{imp}$  gegeben durch [5]

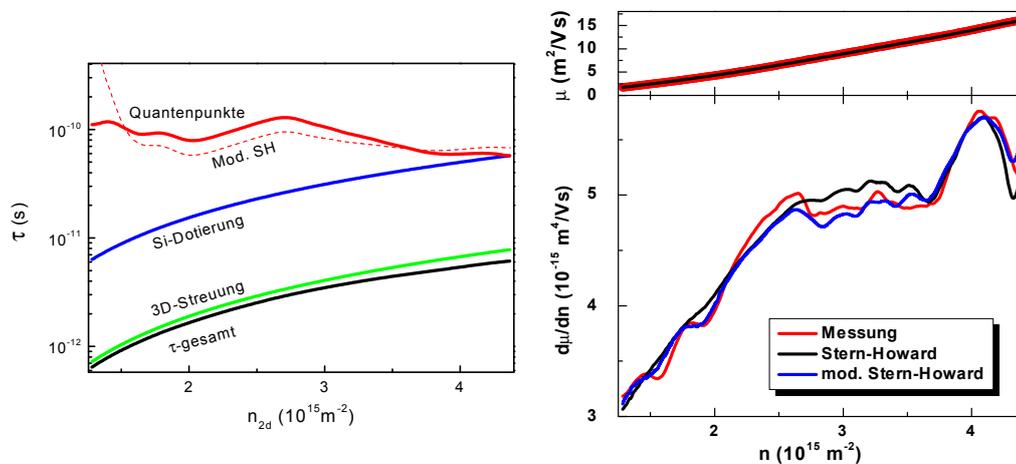
$$\frac{1}{\tau_{3D}} = N_{3D}^{imp} \frac{m^*}{2\pi\hbar^3 k_F^3} \left( \frac{e^2}{2\epsilon\epsilon_0} \right)^2 \quad . \quad (6.19)$$

Basierend auf der Thomas-Fermi-Abschirmung und dem dafür charakteristischen Impuls  $q_{TF}$  gibt Davies [5] für die 2D-Streuer (Si-Ionenrümpfe und Quantenpunkte) in Abhängigkeit von ihrem Abstand  $d$  zum 2DEG, ihrer Dichte  $N_{2D}^{imp}$  und ihrer Ladung  $Q_{2D}^{imp}$  an:

$$\frac{1}{\tau_{2D}} = N_{2D}^{imp} \left( Q_{2D}^{imp} \right)^2 \frac{m^*}{2\pi\hbar^3 k_F^3} \left( \frac{e^2}{2\epsilon\epsilon_0} \right)^2 \underbrace{\int_0^{2k_F} \frac{e^{-2qd}}{[q + q_{TF}G(q)]^2} F(q)^6 \frac{q^2 dq}{\sqrt{1 - (q/2k_F)^2}}}_{I_{2d}} \quad (6.20)$$

$$= N_{2D}^{imp} \left( Q_{2D}^{imp} \right)^2 I_{2d} \quad (6.21)$$

Hier sind  $F$  und  $G$  jeweils von  $q$  abhängige Funktionen, die die Form des 2DEG-Wellenfunktion charakterisieren. Es wurden hier die von Davies angegebenen Werte der Fang-Howard-Näherung für die Wellenfunktion des 2DEG eingesetzt. Eine Ausnahme bildet  $F(q)$  im Falle der Quantenpunkte, hier wurde ein Wert von 1 angenommen. Während die Anzahl der ionisierten Si-Atome zunächst unabhängig von  $n_{2d}$  und damit vom Fermi-Impuls  $k_F$  ist, muss bei der Berechnung der durch die Quantenpunktelektronen verursachten Streuung beachtet werden, dass ihre Anzahl/QP mit  $n_{2d}$  variiert. Die Anzahl der ionisierten Si-Rümpfe kann aus der kombinierten Lösung der Schrödinger- und Poisson-Gleichung (Abb. 4.8 links, Seite 56) und der zusätzlich durch Beleuchten entleerten DX-Zentren berechnet werden und wurde so mit  $1,2 \cdot 10^{17} \text{ m}^{-2}$  abgeschätzt. Die Beweglichkeiten können dann durch numerisches Auswerten der einzelnen Streuzeiten bestimmt werden, wobei die Stärke der 3D-Hintergrund-Streuung so angepasst werden kann, dass die experimentell bestimmte Beweglichkeit möglichst reproduziert wird. Des weiteren ist hier ein gewisser Anteil von nicht zur Abschirmung beitragenden 2D-Elektronen vorzusetzen, mit einem Wert von  $n_{2d}^0 = 0,48 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-2}$  wurde eine gute Übereinstimmung mit dem Experiment erzielt. Das Ergebnis der resultierenden Streuzeiten und der Beweglichkeiten einer entsprechenden numerischen Rechnung zeigt Abb. 6.14. Es sind links zunächst die jwei-



**Abbildung 6.14:** Links: Berechnete Beiträge zur Streuzeit für die hier betrachteten Mechanismen. Rechts: Resultierende Beweglichkeiten im Vergleich zur Messung. Hier ist zusätzlich das Ergebnis einer modifizierten Stern-Howard-Formel gezeigt, welche im Text näher erläutert wird.

ligen einzelnen Impulsrelaxationszeiten zusammen mit dem nach Gl. (6.17) insgesamt für die Beweglichkeit maßgeblichen Wert dargestellt. Die Quantenpunktelektronen

verursachen wie erwartet selbst bei den höchsten Besetzungszahlen nur recht kleine Beiträge zur Streuzzeit. Diese wird hauptsächlich von der 3D-Hintergrundstreuung dominiert. In Proben mit selbstorganisierten Quantenpunkten ist dies eigentlich nicht zu erwarten, da beispielsweise die Beweglichkeit dieser Proben sehr stark vom Abstand der Quantenpunkte zum 2DEG bestimmt wird. Außerdem sind die Beweglichkeiten insgesamt bei solchen Proben äußerst niedrig und daher sicherlich nicht von der 3D-Hintergrund-Streuung dominiert. Die kurze 3D-Streuzzeit resultiert daher wohl von den weiteren hier subsummierten Beiträgen, wie dem des piezoelektrischen Potentials.

Die generelle Form der Beweglichkeit kann mit diesen Streuzzeiten recht gut reproduziert werden (Abb. 6.14 rechts oben), wenn man eine im Vergleich zur AFM-Messung um den Faktor 1,4 erhöhte Quantenpunktdichte annimmt. Wählt man wieder die Ableitung als Form der Darstellung (Abb. 6.14 rechts unten), so ist auch hier insgesamt eine gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung festzustellen. Qualitativ unterscheidet sich vor allem der Bereich der  $s$ -Niveaus ( $n_{2d} \approx 2,25 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-2}$ ). Während man in der Messung der Beweglichkeit eine durchaus deutliche Reduktion von  $d\mu$  beobachtet, weist die Rechnung die Streuung durch die Quantenpunktelektronen in diesem Bereich als nahezu vernachlässigbar aus (schwarze Kurve). Außerdem wird auch die Signatur der  $p$ -Niveaus nicht korrekt wiedergegeben. Während in der Messung die  $p$ -Niveaus sich in ihrer Wirkung kaum unterscheiden, wird in der Rechnung durch die Quadrierung der Ladung (Gl. 6.21) eine überproportional zur Ladung steigende Streurrate erhalten. Diese Effekte sind durch eine modifizierte Form der berechneten Streuzzeiten zu reproduzieren, wenn man annimmt, dass die einzelnen Quantenpunktelektronen als unabhängige Streuer zu werten sind, deren Streurrate um einen Faktor  $\alpha$  erhöht ist:

$$\frac{1}{\tau_{2D}} = \alpha N_{2D}^{imp} Q_{2D}^{imp} I_{2d} \quad . \quad (6.22)$$

In diesem Fall ergibt sich bei Probe 12177 ein Faktor von  $\alpha \approx 9$ , das Ergebnis einer entsprechenden Rechnung ist in Abbildung 6.14 zum Vergleich aufgeführt (blaue Kurve). Eine Erklärung dieser experimentellen Befunde muss demnach die folgenden Eigenschaften haben:

1. Die Reduktion der 2DEG-Beweglichkeit muss weitestgehend durch den Abstand der Quantenpunkte zum 2DEG bestimmt sein, und damit im wesentlichen unabhängig zur Ladung in den Quantenpunkten sein.
2. Der Einfluss der Quantenpunktelektronen auf den 2D-Transport ist zwar klein, gleichzeitig jedoch vor allem im Bereich der  $s$ -Elektronen signifikant höher als

im Stern-Howard-Modell für korrelierte Coulomb-Streuer vorausgesagt wird.

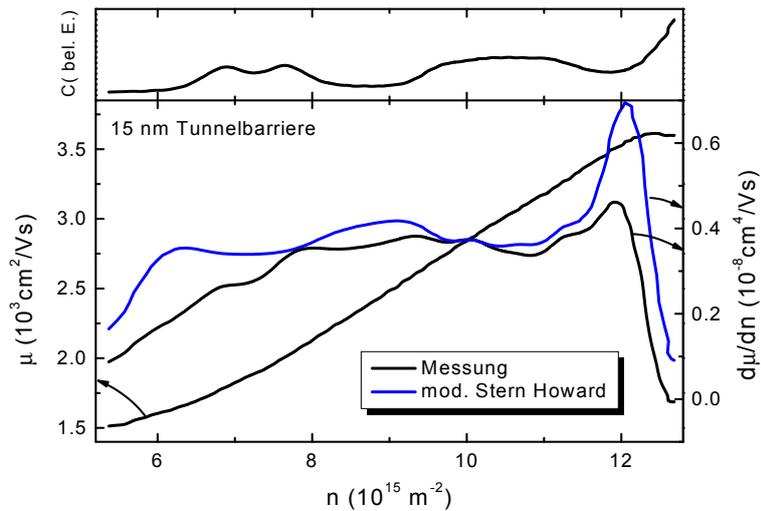
Als Ursache für den ersten Punkt kommt damit vor allem das piezoelektrische Potenzial in der Umgebung der Quantenpunkte in Frage. Dieses ist in der Literatur recht eingehend beschrieben worden [80,81] und hat eine im Vergleich zum Coulomb-Potenzial große Energie von mehreren 10 meV, ist aber bisher noch nicht bei der Betrachtung von 2DEG mit benachbarten Quantenpunkten berücksichtigt worden. Unglücklicherweise ist dieses Potenzial im Rahmen des hier verwendeten Stern-Howard Modells kaum zu handhaben. Zum einen hängt seine genaue Form von der Form, Größe und Symmetrie der Quantenpunkte ab. Zum anderen tritt die generelle Schwierigkeit auf, dass das piezo-Potenzial mit dem Coulomb-Potenzial der Quantenpunkte möglicherweise so stark räumlich korreliert ist, dass es nicht im Sinne der Matthiessen'schen Regel als unabhängiger Effekt behandelt werden kann. Möglicherweise trägt diese Korrelation auch zum starken beobachteten Streueffekt der *s*-Elektronen bei. Wahrscheinlicher ist jedoch, dass die Diskrepanz zwischen Modell und Messung im Bereich der *s*-Elektronen mit dem resonanten Charakter der Streuung zusammenhängt. Solche resonanten Wechselwirkungen sind in der Literatur eingehend untersucht worden, vor allem im Zusammenhang mit Rauschquellen<sup>3</sup> in Si-MOSFETS [94,95], aber z. B. auch in einfachen [96] und gekoppelten zweidimensionalen Elektronengasen [97] im GaAs-System. In direkter Beziehung zu Proben mit eingebetteten Quantenpunkten stehen die Rechnungen von Shahbazyan und Ulloa [98], welche für resonante Streuer eine Änderung der Struktur der Zustandsdichte eines 2DEG im Magnetfeld vorausagen. In all diesen Fällen wird eine Überhöhung des Widerstandes eines 2DEG im Falle resonanter Wechselwirkung mit benachbarten Streuquellen gefunden.

Dem resonanten Charakter der Streuung trägt die oben vorgestellte Modifizierung der Stern-Howard-Formel Rechnung. Die Streuwirkung der Quantenpunktelektronen ist nicht mehr durch ihr kombiniertes Coulomb-Potential bestimmt, sondern alleine durch ihre Anzahl. Sie kann dann in erster Näherung durch einen Faktor  $\alpha$  charakterisiert werden, der das Verhältnis zur normalen Streuwirkung von  $N_{2D}^{imp} \cdot Q_{2D}^{imp}$  unabhängigen Coulombstreuern angibt.

### **Einfluss der Tunnelbarriere**

Neben der hochbeweglichen Probe 12177 wurden auch weitere Proben untersucht, deren Tunnelbarriere aus 15 bis 25 nm GaAs besteht. Man könnte erwarten, dass mit der Nähe zum 2DEG auch der Einfluss der Quantenpunktelektronen deutlicher hervortritt. Dies ist jedoch nur bedingt der Fall. Mit abnehmender Barrierendicke nimmt

<sup>3</sup>Das hier relevante Rauschen ist unter dem Begriff *Random Telegraph Noise* (RTN) bekannt.



**Abbildung 6.15:** Gemessene Beweglichkeit und ihre Ableitung (schwarz) in Abhängigkeit von der Ladungsträgerzahl  $n_{2d}$ , sowie die nach der modifizierten Stern-Howard Formel berechnete Ableitung (15 nm Tunnelbarriere). Im oberen Diagramm ist zum Vergleich eine Kapazitätsmessung gezeigt.

zwar auch die Beweglichkeit stark ab; typische Beweglichkeiten in diesem Regime liegen zum Teil deutlich unter  $1 \text{ m}^2/\text{Vs}$ . Trotzdem ist die generelle Form der Beweglichkeit ganz ähnlich zur bisher betrachteten Probe 12177, und es gilt auch bei diesen Proben, und damit bei allen untersuchten Abständen, dass die Quantenpunktelektronen das Transportverhalten des 2DEG nicht dominieren, sondern lediglich eine kleine Störung darstellen. Die induzierte Änderung der Beweglichkeit ist jedoch durchaus messbar und kann mittels des schon diskutierten modifizierten Stern-Howard Modell beschrieben werden. Mit abnehmendem Abstand steigt dabei der Faktor  $\alpha$  bis auf einen Wert von etwa 100 bei der Probe mit einer Tunnelbarriere von 15 nm.

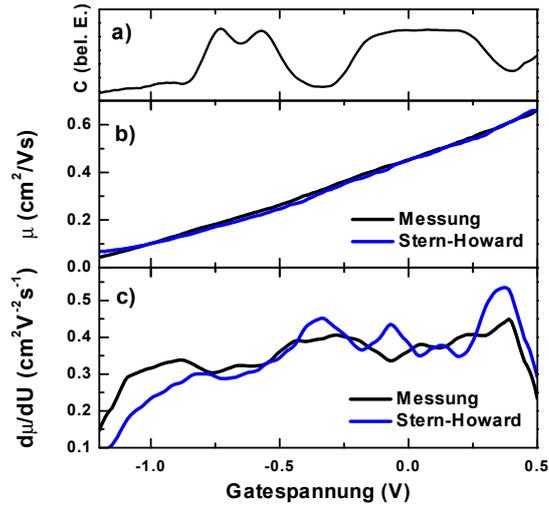
**15 nm Tunnelbarriere (11485):** Die Proben mit einer Tunnelbarriere von nur 15 nm wurden eingehend auf ihre Transporteigenschaften hin untersucht, Abbildung 6.15 zeigt die entsprechende Beweglichkeit zusammen mit ihrer Ableitung (schwarze Kurven). Während die Beweglichkeit auf den ersten Blick keinen Einfluss der Quantenpunkte zeigt, ist dieser in der Ableitung wiederum deutlich zu sehen. Im Gegensatz zu Probe 12177 sind diese Daten jedoch nicht ohne weiteres mittels des Stern-Howard Formalismus beschreibbar. Der Einfluss der Quantenpunktelektronen wird dort stark

unterschätzt. Um die beobachteten Minima in  $d\mu$  zu erhalten, müsste die Quantenpunktdichte um fast einen Faktor 100 höher sein, als es die Kapazitätsmessungen anzeigen. Es gilt auch hier, dass die einzelnen Elektronen im Quantenpunkt als unabhängig voneinander zu beschreiben sind, d. h. ein zusätzliches Elektron pro Quantenpunkt ist im Stern-Howard Formalismus als zusätzlicher Streuer und nicht als zusätzlicher Beitrag zu einem schon vorhandenen Potenzial zu werten. Diese Beobachtungen entsprechen wiederum dem modifizierten Stern-Howard Ansatz mit einem Verstärkungsfaktor von  $\alpha = 100$ , eine entsprechende Rechnung ist in Abb. 6.15 blau eingezeichnet. Es wird jedoch trotz der Modifizierung nur eine grobe qualitative Ähnlichkeit zu den Messdaten erhalten.

**20 nm Tunnelbarriere (11491):** Das Probenmaterial 11491 wies ein sehr inhomogenes Quantenpunktensemble auf, die  $p$ -Schale war in der Kapazität nicht auflösbar. Auch wurde die Ladungsträgerzahl des 2DEG nicht mit einem genügend guten Signal/Rausch-Verhältnis bestimmt, so dass hier auf eine Darstellung der Ergebnisse verzichtet wird. Auch diese Probe ist nicht mit den normalen Parametern des Stern-Howard Modells, bzw. des Quantenpunktensembles beschreibbar. Die Streuung durch die Quantenpunkte ist wiederum deutlich erhöht, allerdings nicht wie im Falle der 15 nm Probe um den Faktor 100, sondern nur um einen Faktor von etwa  $\alpha = 20$ .

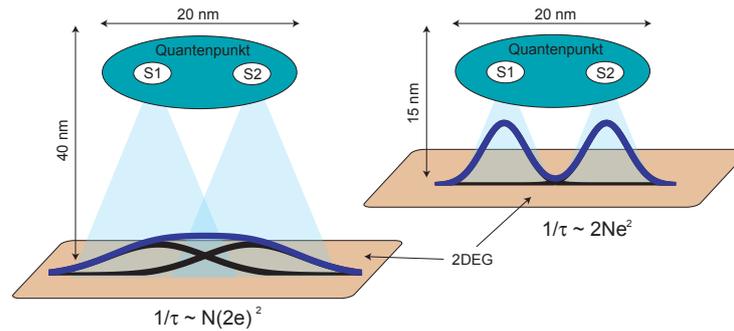
**25 nm Tunnelbarriere (11316):** Die im Gegensatz zu Probe 11491 verlängerte Tunnelbarriere von 25 nm ist hier nicht wie erwartet mit einer Erhöhung der Beweglichkeit verbunden. Sie liegt etwa im Bereich von  $6 \text{ m}^2/\text{Vs}$ , möglicherweise da die Si-Dotierung hier nur einen Abstand von etwa 10 nm zum 2DEG hatte. Dementsprechend problematisch ist es, an dieser Probe die Wechselwirkung der Quantenpunkte mit dem 2DEG nachzuweisen. Abb. 6.16 zeigt den Versuch, die Daten mittels des Stern-Howard Modells anzupassen. Die bisher beobachtete Tendenz setzt sich weiter fort. Es ist zwar wiederum eine zu hohe Quantenpunktdichte bzw. ein zu großes Wechselwirkungspotenzial notwendig um die Ausprägung der beobachteten Strukturen zu erklären, allerdings fällt der entsprechende Faktor mit einem Wert von etwa 10 wiederum geringer aus, als im Falle der Probe mit einer Tunnelbarriere von 20 nm.

**Diskussion:** Die beobachteten Beweglichkeiten der zwei-dimensionalen Elektronengase mit benachbarten Quantenpunkten lassen sich nur bei großen Abständen mittels des Stern-Howard Modells beschreiben. Es treten mit abnehmender Dicke der Tunnelbarriere zwei Besonderheiten auf. Zum einen erscheint die Wechselwirkung mit den Quantenpunkten drastisch erhöht. Als Erklärung für diesen Effekt kommt die



**Abbildung 6.16:** a) Kapazitätsmessung; b) Gemessene (schwarz) und berechnete (blau) Beweglichkeit der Probe 11316 (25 nm Tunnelbarriere); c) Ableitung der Beweglichkeit.

Verstärkung der Streuwirkung durch ihren zunehmend resonanten Charakter in Frage. Die Verstärkung eines zusätzlich vorhandenen piezoelektrischen Potentials durch die Quantenpunktelektronen kann im Gegensatz dazu kaum ausreichend sein, um eine um einen Faktor 100 erhöhte Streufrequenz im Vergleich zum reinen Coulomb-Potential zu erklären. Außerdem deuten die hier vorgestellten Daten daraufhin, dass in einer präziseren Rechnung die resonante und die Coulomb-Streuung als unterschiedliche und additive Mechanismen zu werten sind. In diesem Fall ist zu beachten, dass die Streuwirkung zusätzlicher Quantenpunktelektronen auch insofern vom Abstand abhängt, als diese mit abnehmendem Abstand auch hinsichtlich der Coulombstreuung immer mehr als unabhängige Einheiten zu werten sind (siehe auch [99] für eine daraus folgende Änderung des Coulomb-Potentials). Abbildung 6.17 stellt diesen Zusammenhang grafisch dar. Sobald der Abstand zwischen den Quantenpunkten und dem 2DEG kleiner wird als der typische Quantenpunktdurchmesser von 20 nm, ist zu erwarten, dass die Quantenpunktelektronen auch hinsichtlich ihres Coulomb-Potentials als unabhängig voneinander zu betrachten sind.

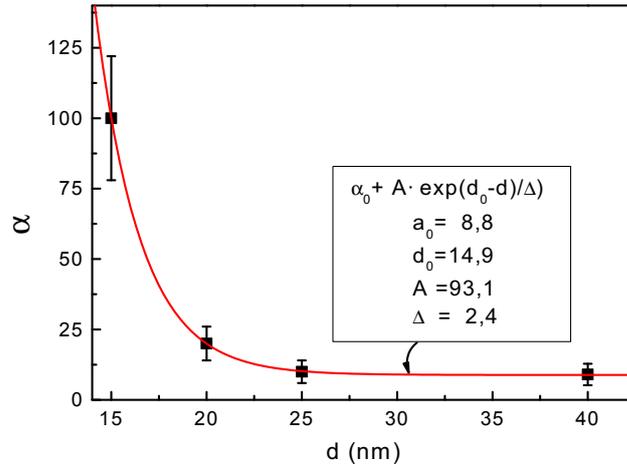


**Abbildung 6.17:** Skizze zur Veranschaulichung der Abstandsabhängigkeit der Coulombstreuung durch Quantenpunktelektronen. Während in kleinen Abständen die Quantenpunktelektronen räumlich getrennte Potentiale erzeugen, verschmelzen diese bei großen Abständen zu einem einzigen Maximum. Nach Gl. (6.20) ist damit eine Erhöhung der Streurrate verbunden. Dieser Effekt wirkt damit entgegengesetzt zur intrinsischen Abstandsabhängigkeit des Modells.

## 6.4 Fazit

Die Transportparameter von zweidimensionalen Elektronengasen unter dem Einfluss von selbstorganisierten Quantenpunkten können im hier vorgestellten Abstandsbe-  
 reich durch geeignete Modelle recht gut beschrieben werden. Insbesondere gilt dies für die Bilanz der Ladungsträgerzahlen in den einzelnen Schichten in Abhängigkeit von der angelegten Gatespannung. Es konnte demonstriert werden, dass diese durch ein auf dem Begriff der Quantenkapazität beruhenden Modell exzellent beschrieben werden können. Dieses einfache iterative Modell führt direkt auf die Möglichkeit, die Spektroskopie der Eigenschaften der Quantenpunkte durch *laterale* Hall-Messungen des 2DEG durchzuführen. Der Vorteil dieser Methode liegt in der damit verbundenen Möglichkeit, auch sehr schwach gekoppelte Systeme mit großen Tunnel-Zeitkonstanten zu untersuchen.

Die Beweglichkeit der hier betrachteten 2DEG hängt in komplizierter Weise vom Abstand zu den Quantenpunkten und der Anzahl der darin vorhandenen Elektronen ab. Die hier vorgestellte Probenstruktur ermöglicht es zum ersten Mal, in Proben, bei denen die Quantenpunkte die dominierende Streuquelle darstellen, die Beweglichkeit in Abhängigkeit von der präzise kontrollierbaren Besetzungszahl der Quantenpunkte zu messen. Während sich der dominierende Charakter der Quantenpunkte in einer drastischen Verringerung der Beweglichkeit mit zunehmender Nähe zum 2DEG äußert,



**Abbildung 6.18:** Abhängigkeit des Verstärkungsparameters  $\alpha$  von der Dicke der Tunnelbarriere. Zum Vergleich ist eine angepasste Funktion gezeigt, die mit abnehmender Tunnelbarriere exponentiell anwächst.

konnte gleichzeitig die Stärke der Coulombstreuung durch die Quantenpunktelektroden und ihr Beitrag zur gesamten Transport-Lebensdauer quantifiziert werden. Dieser Beitrag ist zwar im Vergleich zu anderen Streumechanismen recht gering, gleichzeitig jedoch auch z.T. erheblich größer, als im Rahmen des Stern-Howard Modells vorausgesagt. Weiterhin erscheinen die Quantenpunktelektroden als nicht-korrelierte Streuer, was insbesondere im Fall der Probe mit einem Abstand von 40 nm nicht zu erwarten war (vgl. Abb. 6.17). Diese Tatsachen lassen darauf schließen, dass die durch die Quantenpunktelektroden ausgeübte Streuwirkung durch die Resonanz der beteiligten Energien stark erhöht ist, ähnlich wie es schon in gänzlich anderen Systemen beobachtet worden ist [96,97].

In Abbildung 6.18 ist die Abhängigkeit des Verstärkungsparameters  $\alpha$  von der Dicke der Tunnelbarriere dargestellt. Die beobachtete Verstärkung gehorcht in guter Näherung einem einfachen exponentiellen Anstieg mit abnehmender Tunnelbarriere. Dies scheint auf den ersten Blick ein krasser Widerspruch zu bisherigen Messungen an Proben mit im 2D-Kanal eingebetteten Quantenpunkten zu sein, in denen ein solches divergierendes Verhalten nicht beobachtet wurde (siehe z.B. [22]), und im Gegenteil stattdessen das Modell der Coulombstreuung gut funktioniert. Dies liegt jedoch daran, dass bei im 2DEG eingebetteten Quantenpunkten die Resonanz aufgehoben ist,

da sich die Quantenpunktniveaus für alle Gatespannungen weit unterhalb der GaAs-Leitungsbandkante befinden. Insofern wäre die Untersuchung neuer Probengeometrien interessant, in denen die Resonanz möglichst bei noch kleineren Tunnelbarrieren von 12-14 nm beobachtet werden könnte. Setzt sich die hier beobachtete Tendenz fort, so würde sich beispielsweise bei einer Barriere von 13 nm ein Verstärkungsfaktor von etwa  $\alpha = 200$  ergeben.

Aus den hier vorgestellten Ergebnissen kann insgesamt der Schluss gezogen werden, dass mit dem piezoelektrischen Potenzial und der resonanten Streuung zwei Effekte die Transporteigenschaften des 2DEG dominieren, die in bisherigen verwandten Arbeiten zu diesem Thema nicht angemessen berücksichtigt wurden.

