

Kapitel 5

Landau-Niveau-Spektroskopie

Basierend auf den im vorangegangenen Kapitel vorgestellten Grundlagen soll nun ein neues Verfahren zur Spektroskopie der Fermienergie und damit letztlich der Zustandsdichte eines 2DEG im Magnetfeld vorgestellt werden. Grundlage dieser Methode ist Gleichung (2.35), welche hier noch einmal wiederholt sei:

$$E_F = E_{N+1} - E_N. \quad (5.1)$$

Diese Gleichung gibt die Beziehung zwischen der Differenz der Vielteilchen-Grundzustandsenergien der Quantenpunkte und der Fermienergie für die Positionen der Lademaxima im Kapazitätsspektrum an. Benutzt man einen hoch dotierten 3D-Rückkontakt zur Spektroskopie der Quantenpunkt-Niveaus, so zeigt die Fermienergie aufgrund der hohen Zustandsdichte keinerlei Abhängigkeit vom Magnetfeld oder von der Gatespannung. Die Fermienergie ist in diesem Fall konstant und mit einem solchen 3D-Rückkontakt können die Eigenschaften der Quantenpunkte sehr präzise ausgetastet werden [26, 32, 36]. Es zeigt sich, dass das Quantenpunktpotenzial in sehr guter Näherung als parabolisch angenommen werden kann. Die Dispersion der Energieniveaus der Quantenpunkte im Magnetfeld ist damit berechenbar und diese Berechnungen stimmen sehr gut mit gemessenen Daten überein (Kapitel 4). Damit bietet Gleichung (5.1) die Möglichkeit den umgekehrten Weg zu beschreiten, und aus der Feinstruktur der beobachteten Magnetfeldabhängigkeit der Lademaxima der Quantenpunkte auf das Verhalten der Fermienergie im Rückkontakt zu schließen.

Im Gegensatz zur Fermienergie eines 3D-Rückkontaktes oszilliert die Fermienergie eines 2DEG im Magnetfeld. Diese Oszillationen lassen wiederum Rückschlüsse auf die zugrunde liegende Form der Zustandsdichte zu. Die Zustandsdichte eines idealen 2DEG entspricht diskreten δ -Funktionen. In realen Systemen sind diese δ -Funktionen durch Potenzialfluktuationen und damit verbundene Streuprozesse verbreitert. In diesem Kapitel wird eine Methode entwickelt, selbstorganisierte Quantenpunkte als energetische Referenz zum Austasten der genauen analytischen Form dieser Verbreiterung zu benutzen.

Zunächst wird jedoch kurz ein Überblick über bestehende experimentelle und theoretische Befunde in diesem Themenkomplex gegeben. Teile der in diesem Kapitel vorgestellten Überlegungen wurden bereits veröffentlicht [67], eine verbesserte Datenbasis ermöglicht hier jedoch einen deutlich genaueren Vergleich zwischen Theorie und Experiment.

5.1 Theoretische und experimentelle Analysen der Zustandsdichte eines 2DEG im Magnetfeld

In Kapitel 2.1 wurde in die Grundlagen der Physik zweidimensionaler Elektronensysteme eingeführt, Herleitungen der benutzten Formeln finden sich in der Literatur (z.B. [4, 5]). Die wichtigsten Ergebnisse werden im Folgenden noch einmal kurz zusammengefasst.

Die Zustandsdichte eines idealen 2DEG in GaAs ist für $B = 0$ T konstant und hat den Wert

$$D_{2d}^0 = \frac{m^*}{\pi\hbar^2}. \quad (5.2)$$

Im Magnetfeld kondensieren diese Zustände auf δ -förmigen Landau-Niveaus (Index n) der Energie

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_c, \quad (5.3)$$

wobei für die Zyklotronfrequenz $\omega_c = eB/m^*$ gilt. Jedes dieser hochentarteten Landau-Niveaus kann dabei

$$N_L = \frac{2eB}{m^*} \quad (5.4)$$

Elektronen aufnehmen, wenn die zusätzliche Spinaufspaltung nicht berücksichtigt wird. Gleichung (5.2) hat im Magnetfeld damit die Form

$$D_{2d}(B) = \frac{m^*}{\pi\hbar^2} \sum_{N=0}^{\infty} \delta(E - E_n). \quad (5.5)$$

In realen Systemen ist zu erwarten, dass die Landau-Niveaus durch Potentialfluktuationen im Leitungsband und damit verbundene Streuprozesse verbreitert sind. Die Streuprozesse können durch eine charakteristische Verbreiterung Γ der Landau-Niveaus beschrieben werden.

5.1.1 Theoretische Arbeiten

Einer der ersten Versuche, die charakteristische Verbreiterung der δ -Funktionen zu berechnen stammt von Ando und Uemura [68]. Für zufällig verteilte und kurzreichweitige

(punktförmige) Streuzentren berechnen sie einen für alle Landau-Niveau identischen Wert Γ , der nur von der Zyklotronfrequenz und der Impulsrelaxationszeit $\tau = m^* \mu / e$ abhängt:

$$\Gamma = \sqrt{\frac{2\hbar^2 \omega_c}{\pi \tau}}. \quad (5.6)$$

Allerdings macht die Einschränkung auf ein nur schwach gestörtes System, sehr kurzreichweitige Streuzentren und nicht überlappende Landau-Niveaus dieses Modell nach Xie *et al.* [69] nur bedingt auf reale Systeme übertragbar. Insbesondere die Charakterisierung des gesamten Transportverhaltens mit nur einer Lebensdauer τ ist nicht haltbar. So ist in hohen Magnetfeldern die Abschirmung von Störpotenzialen abhängig von der Zustandsdichte und damit von der Fermienergie. Liegt diese zwischen zwei Landau-Niveaus im Bereich der lokalisierten Zustände, so werden Streupotenziale viel schlechter abgeschirmt als beispielsweise im Fall halbzahliger Füllfaktoren. Da die aktuelle Abschirmung der Streupotenzials bei gegebener Fermienergie wieder auf die Form der Zustandsdichte und damit letztlich auf die Fermienergie rückwirkt, verlangt dieses Problem eine selbstkonsistente Lösung. Xie *et al.* erhalten durch einen solchen selbstkonsistenten Ansatz Zustandsdichten, bei denen die Landau-Niveaus eine annähernd semi-elliptische Form und eine vom Magnetfeld und dem Landau-Niveau Index n abhängige Verbreiterung aufweisen.

Xu und Vasilopoulos führten eine ähnliche selbstkonsistente Rechnung aus [70] und berücksichtigen dabei zusätzlich den Einfluss von Phononen, überlappende Landau-Niveaus sowie einen nicht konstanten g -Faktor. Auch hier resultieren die Berechnungen in einer annähernd semi-elliptischen Form der Zustandsdichte, auch wenn eine andere Form an den Beginn der selbstkonsistenten Rechnung gestellt wurde. Für die Verbreiterung Γ wird für kleine Felder in etwa eine $B^{1/2}$ -Abhängigkeit gefunden, für höhere Felder verringert sich dieser Anstieg. Für Felder > 10 T berechnen Xu und Vasilopoulos in ihrem Modellsystem schließlich eine annähernd konstante Verbreiterung. Für Proben mit einer Beweglichkeit von $1\text{-}10 \text{ m}^2/\text{Vs}$, ein Magnetfeld von 5 T und eine Elektronenkonzentration von $2 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ liegt die zu erwartende Verbreiterung etwa bei ca. 5 meV .

5.1.2 Experimentelle Arbeiten

Der Nachteil der oben vorgestellten theoretischen Arbeiten über die Bestimmung der Zustandsdichte eines 2DEG im Magnetfeld liegt darin, dass die Berechnungen für jede experimentelle Situation neu durchgeführt werden müssen. Häufig wird als Basis für

weitere Überlegungen aber lediglich eine akzeptable analytische Form der Zustandsdichte benötigt. Für diese analytische Form werden im wesentlichen vier Möglichkeiten vorgeschlagen [71–76]:

Gaußfunktionen

$$D_G(E) = D_{2d}^0 \sum \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma} \exp\left(-\frac{(E - E_n)^2}{\Gamma^2}\right) \quad (5.7)$$

Gaußfunktionen mit konstantem Untergrundanteil x

$$D_{Gx}(E) = xD_{2d}^0 + (1 - x)D_{2d}^0 \sum \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma} \exp\left(-\frac{(E - E_n)^2}{\Gamma^2}\right) \quad (5.8)$$

Lorentzfunktionen

$$D_L(E) = D_{2d}^0 \sum \frac{1}{\pi\Gamma} \frac{1}{1 + \frac{(E - E_n)^2}{\Gamma^2}} \quad (5.9)$$

Semi-Ellipsen

$$D_E(E) = D_{2d}^0 \sum \frac{2}{\Gamma} \sqrt{1 - \left(\frac{E - E_n}{\Gamma}\right)^2} \quad (5.10)$$

Zusätzlich wird häufig eine Proportionalität der Verbreiterung entsprechend $\Gamma \propto B^{1/2}$ angenommen (z.B. [74, 77]). Hier, wie auch im Folgenden, wird die zusätzliche Spinaufspaltung nicht berücksichtigt. Die auftretenden Verbreiterungen der Landau-Niveaus von bis zu 30 meV bei 10 T sind viel größer als die maximale Spinaufspaltung, welche für diese Magnetfelder im Bereich von 1 meV liegt.

Die jeweiligen Summierungen in Gl. (5.7)-(5.10) müssen über eine möglichst große Anzahl von Landau-Niveaus durchgeführt werden und auch negative Indizes umschließen. Die in dieser Arbeit auftretenden Verbreiterungen erforderten die Summation von weit über 100 Landau-Niveaus, insbesondere bei Verwendung von nur langsam abfallenden Lorentzfunktionen. Abbildung 5.1 zeigt einen Vergleich dieser analytischen Zustandsdichten, sowie der zu erwartenden Oszillation der Fermienergie. Offensichtlich weisen die einzelnen Funktionen in hohen Magnetfeldern signifikante Unterschiede auf. So fällt bei der Wahl einer semi-elliptischen Zustandsdichte die Fermienergie im Bereich ganzzahliger Füllfaktoren viel steiler ab, als dies bei Gauß- oder Lorentzfunktionen der Fall ist.

Verschiedene Autoren haben experimentelle Daten mit diesen analytischen Formen der Zustandsdichte verglichen und sind dabei zu durchaus unterschiedlichen Ergebnissen gekommen. Gornik *et al.* untersuchten die Wärmekapazität eines 2DEG in Abhängigkeit vom Magnetfeld [71] und fanden für Proben mit einer Beweglichkeit von 3-4 m²/Vs eine gute Übereinstimmung der Messwerte mit D_{Gx} , wobei der Anteil

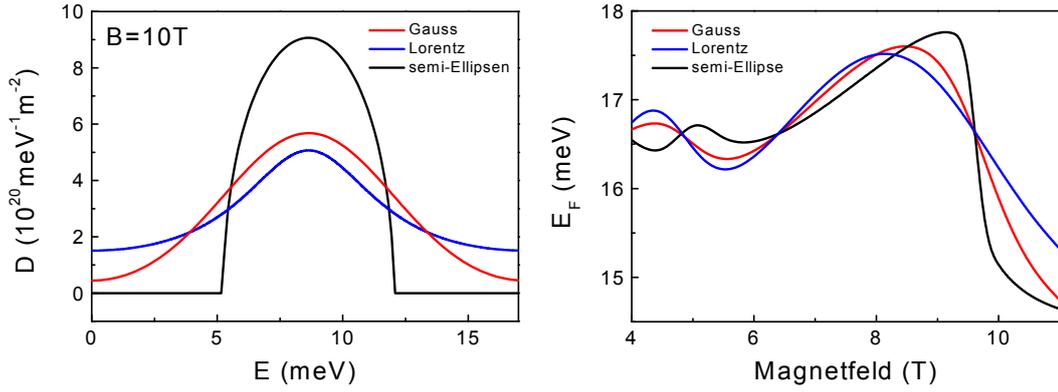


Abbildung 5.1: Links: Zustandsdichte bei $B = 10 \text{ T}$ für verschiedene Basisfunktionen. Rechts sind die daraus folgenden Oszillationen der Fermienergie dargestellt. Auf einen konstanten Untergrund wurde bei allen Funktionen verzichtet, die Breite Γ ist proportional zu \sqrt{B} und so normiert, dass sich für alle Funktionen vergleichbare Oszillationen der Fermienergie ergeben.

der Zustände im konstanten Untergrund $x = 0,25$ und die Verbreiterung $\Gamma = 2,5 \text{ meV}$ betragen. Wang *et al.* [72] fanden in Wärmekapazitätsmessungen Hinweise auf ein oszillatorisches Verhalten der Verbreiterung Γ , ganz ähnlich, wie es in theoretischen Arbeiten vorgeschlagen wurde [73].

Neben der Wärmekapazität kommt mit der Untersuchung der Magnetisierung eine weitere thermodynamische Größe zur Bestimmung der Zustandsdichte in Frage. Eisenstein *et al.* schlossen aus Messungen des de Haas-van Alphen Effektes ebenfalls auf eine Gauß-verteilte Form der Zustandsdichte im Magnetfeld [74]. Allerdings wurde hier zusätzlich eine Proportionalität der Verbreiterung entsprechend $\Gamma \propto B^{1/2}$ gefordert, um eine bessere Übereinstimmung der Theorie mit den Messdaten zu erzielen, ähnlich wie im Falle von kurzreichweitigen Streuern vorausgesagt (vgl. Gleichung 5.6). Potts *et al.* erreichen in einem verbesserten Aufbau und bei tieferen Temperaturen die beste Übereinstimmung von Magnetisierung und theoretischer Form der Zustandsdichte unter der Annahme einer Serie von Lorentzfunktionen [75]. Sie weisen darauf hin, dass aufgrund des ähnlichen Frequenzspektrums Lorentzfunktion und Gaußfunktionen mit variabler Breite ($\propto B^{1/2}$) nur in großen Magnetfeldern unterscheidbar seien.

In jüngerer Zeit wurde die Methode der Magnetisierungsmessung zur Bestimmung der Zustandsdichte von Schwartz *et al.* weiter verbessert [76]. Im Gegensatz zu der Arbeit von Potts *et al.* werden hier wiederum Gaußfunktionen zur Beschreibung der

Zustandsdichte herangezogen. Vervollständigt sei diese Liste der Magnetisierungsmessungen durch die Arbeit von Zhu *et al.* [78]. In dieser Arbeit konnte keine eindeutige Wahl der Funktionenklasse getroffen werden, die Daten waren sowohl durch Gauß-, als auch durch Lorentzfunktionen beschreibbar.

Auch die Kapazitätsspektroskopie eignet sich zur Bestimmung der Form der Zustandsdichte. Hier macht man sich zunutze, dass nach Luryi [79] die Kapazität einer MISFET-Struktur in direkter Beziehung zur Zustandsdichte des 2D-Gases steht. Dieser Umstand wird in Kapitel 6.2 ebenfalls diskutiert und deutlich verallgemeinert. Die Problematik, dass normale Kapazitätsmessungen vor allem auch die laterale Leitfähigkeit des 2DEG bestimmen (siehe Kap. 4.3.2), umgehen Smith *et al.* durch ein hochdotiertes Substrat in direkter Nähe (50 nm) zum 2DEG [77]. Auf diese Weise kann das 2DEG direkt *vertikal* vom Substrat her geladen werden und die laterale Leitfähigkeit begrenzt nicht mehr die gemessene Kapazität. Die so gewonnenen Daten konnten mit D_G gut beschrieben werden, sofern eine zur Wurzel aus B proportionale Verbreiterung der Landau-Niveaus angenommen wurde. Ein Vergleich verschiedener Funktionenklassen wurde jedoch nicht durchgeführt.

Aus dieser Übersicht über verschiedene experimentelle Methoden wird ersichtlich, dass bis heute noch keine klare Entscheidung hinsichtlich der optimalen analytischen Näherung der Zustandsdichte eines 2DEG im Magnetfeld zu treffen ist. Damit ist es weiterhin wünschenswert, neue Methoden zu finden, die zusätzliche Argumente für oder gegen eine der oben vorgestellten Modellfunktionen liefern. Es sei aber bemerkt, dass die aus theoretischen Betrachtungen notwendige Forderung einer selbstkonsistenten Beziehung zwischen Zustandsdichte und Verbreiterung von keiner der oben genannten analytischen Funktionen erfüllbar ist.

5.2 Landau-Level Spektroskopie mit Quantenpunkten

Neben der Analyse der Magnetisierung oder der Wärmekapazität eines 2DEG im Magnetfeld kann auch aus dem Verhalten der Fermienergie auf die Zustandsdichte geschlossen werden. Da ein Magnetfeld die Elektronenkonzentration nicht ändert, wohl aber die Zustandsdichte, bedingt der Zusammenhang

$$n_{2d} = \int_{E_0}^{\infty} D(E) f(E, E_F, T) dE \quad (5.11)$$

eine Variation der Fermienergie im Magnetfeld. Die Besetzung der Zustände erfolgt über die Fermiverteilung $f(E, E_F, T)$.

Der Fermienergie eines 2D-Gases kommt bei der Kapazitätsspektroskopie mit zweidimensionalem Rückkontakt eine besondere Bedeutung zu, da das Tunneln in die Quantenpunktzustände (bei $T=0$) von dieser Energie aus erfolgt. Das Tunneln in ein Niveau der Quantenpunkte setzt demnach gerade dann ein, wenn die Fermienergie im Rückkontakt der Energie entspricht, die aufzubringen ist, um einem Quantenpunkt ein Elektron hinzuzufügen. Es gilt dann jeweils

$$E_F = E_{n+1} - E_n, \quad (5.12)$$

wobei E_n der Gesamtenergie eines mit n -Elektronen besetzten Quantenpunktes ist. Es ist also zu erwarten, dass sich die Eigenschaften des 2D-Rückkontaktes im Kapazitätsspektrum niederschlagen. Abbildung 5.2 zeigt die mit einem 2D-Kontakt ge-

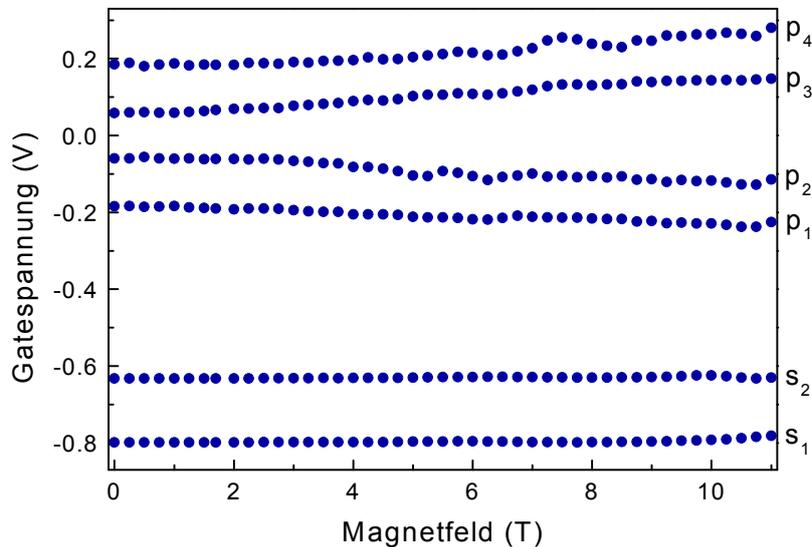


Abbildung 5.2: Positionen der Lademaxima der Quantenpunkte bei einer Probe mit zweidimensionalem Rückkontakt (Probe 11316).

messenen Positionen der Lademaxima von InAs-Quantenpunkten im Magnetfeld. Wie beim 3D-Rückkontakt (Abb. 4.4) ist wieder eine Aufspaltung in s - und p -Niveaus und eine ähnliche allgemeine Form der Dispersion im Magnetfeld zu beobachten. Allerdings sind neben den vom 3D-Kontakt bekannten Magnetfeldabhängigkeiten zusätzliche schwache Oszillationen der Positionen der Lademaxima zu beobachten. Diese Strukturen sind auf die Änderung der Fermienergie des Rückkontaktes im Magnetfeld zurückzuführen und bilden letztlich die dort zugrunde liegende Zustandsdichte ab.

Um eine genauere Analyse dieser Oszillationen durchzuführen, ist es nötig, die auf den Eigenschaften des Quantenpunktensembles basierenden Beiträge herauszufiltern, wobei auf die in Kapitel 4.2 gewonnenen Erkenntnisse zurückgegriffen werden kann. Die Diskussion erfolgt zunächst anhand der s -Niveaus, da diese insgesamt deutlich besser mittels des parabolischen Modells beschreibbar sind und nur 1-2 Elektronen in die Berechnung der Vielteilchenenergien E_N einfließen.

Für Abbildung 5.3 wurden die Gatespannungspositionen des ersten Elektrons in eine Energie umgerechnet und in Abhängigkeit vom Magnetfeld aufgetragen. Zudem ist gezeigt, welcher Verlauf sich im Rahmen des parabolischen Modells unter Berücksichtigung der Abhängigkeit der Coulombblockade und der Zeeman-Energie vom Magnetfeld für einen 3D-Rückkontakt ergeben würde. Die hier aufgetragene Änderung

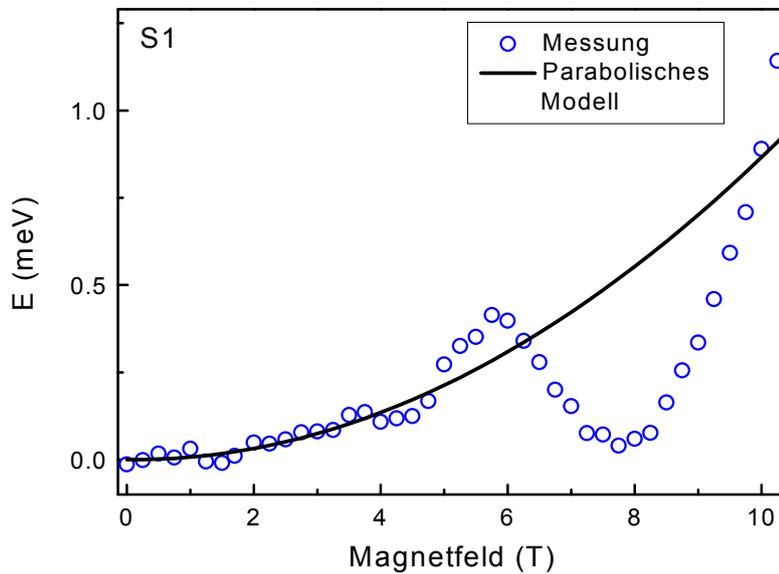


Abbildung 5.3: Energie des ersten s -Niveaus in Abhängigkeit vom Magnetfeld. Die durchgezogene Linie entspricht der im parabolischen Modell berechneten Abhängigkeit.

der Position im Vergleich zu $B = 0$ T entspricht nach Abzug der Beiträge der Quantenpunkte gerade der negativen Änderung der Fermienergie. Ist diese für $B = 0$ T bekannt, können damit die Peakpositionen direkt in absolute Werte für die Fermienergie umgerechnet werden. Allerdings ist nicht *a priori* davon auszugehen, dass der hier maßgebliche Wert der Fermienergie bzw. der Ladungsträgerzahl mit durch andere Methoden (Shubnikov-de Haas Oszillationen, Hall-Effekt, Kapazitäts-Integration) er-

mittelten Werten übereinstimmt. Prinzipiell könnte die Elektronendichte in der Nähe der Quantenpunkte auch verringert oder erhöht sein, je nachdem, welche Potenzialmodulation die Quantenpunkte am Ort des 2D-Gases induzieren. Weiterhin ist an dieser Stelle zu beachten, dass sich die Ladungsträgerzahl im 2DEG im Bereich des s -Niveaus alleine durch die unterschiedlichen Gatespannungen ändert. Der gesamte Gatespannungsbereich umfasst hier jedoch nur etwa 6 mV, dies entspricht einer Änderung der Ladungsträgerzahl um etwa 0,1% und kann an dieser Stelle vernachlässigt werden. Die p -Niveaus überstreichen aufgrund der großen orbitalen Zeeman-Aufspaltung einen etwa 10 mal größeren Gatespannungsbereich, auch aus diesem Grund sind daher die s -Niveaus zur Analyse der Oszillationen besser geeignet.

Durch Subtraktion des durch die Quantenpunkte verursachten Untergrundes und Invertierung kann nun die Änderung der Fermienergie im Rückkontakt bestimmt werden. Diese Daten können dann mit berechneten Werten verglichen werden. Dazu werden die Parameter Ladungsträgerzahl n_{2d} , charakteristische Breite Γ der Landau-Niveaus und gegebenenfalls der Anteil der Zustände im konstanten Untergrund an die Daten angepasst (Gleichungen (5.7) bis (5.10)). Die eigentliche Bestimmung der Fermienergie erfolgt dabei unter der Annahme $T = 0$ über die numerische Integration von Gleichung 5.11. Bei $T = 0$ gilt für die Fermiverteilung bis zur Fermienergie $f(E, T) = 1$, und es ist nur die Gleichung

$$n_{2d} = \int_{E_0}^{E_F} D(E) dE \quad (5.13)$$

zu integrieren, bis die angenommene Ladungsträgerzahl erreicht wird. Die Voraussetzung $T = 0$ vereinfacht die Berechnung daher dramatisch, da für endliche Temperaturen die Fermienergie im Integranden stünde, und sie somit nur in iterativer Weise über viele Testintegrationen bestimmt werden könnte. Genauer wird der Einfluss der Temperatur in einem der folgenden Abschnitte ab Seite 75 diskutiert.

5.2.1 Anpassung mit Gaußfunktionen

Abbildung 5.4 zeigt die gemessene Änderung der Fermienergie zusammen mit drei verschiedenen Berechnungen auf der Basis von unterschiedlichen Zustandsdichten, alle basierend auf Gaußfunktionen. Offensichtlich sind reine Gaußfunktionen D_G (Gl. 5.7) nicht in der Lage, gleichzeitig die beobachteten Oszillationen im Bereich kleiner Magnetfelder und das Maximum bei etwa 8 T zu reproduzieren. Nimmt man zusätzlich eine Abhängigkeit der Breite $\Gamma \propto B^{1/2}$ an (blaue Kurve), so lässt sich eine deutlich bessere Übereinstimmung mit den Messdaten erzeugen, lediglich im Bereich sehr großer

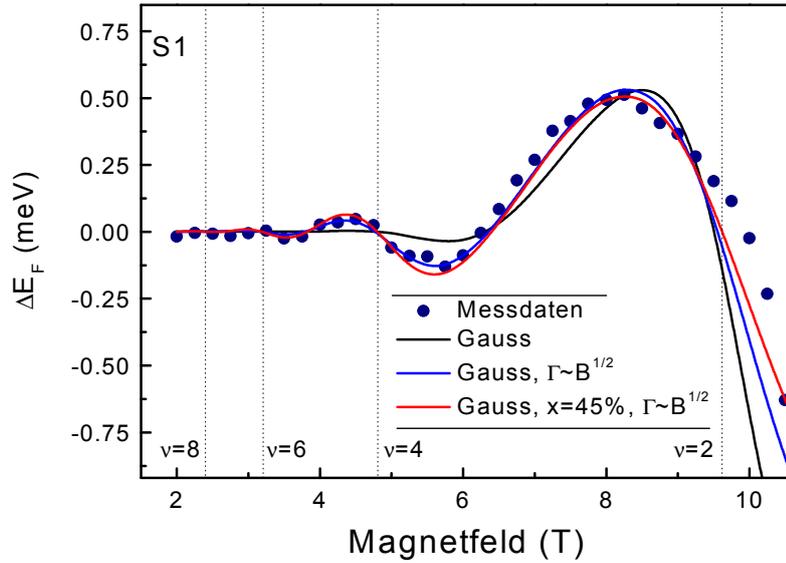


Abbildung 5.4: Gemessene Änderung der Fermienergie im Rückkontakt (Punkte) und berechnete Werte (durchgezogene Linien). Die berechneten Kurven basieren auf Gaußfunktionen (D_G , schwarz), Gaußfunktionen mit variabler Breite $\Gamma \propto B^{1/2}$ (blau) und Gaußfunktionen mit variabler Breite und zusätzlichem konstantem Untergrundanteil x (D_{Gx} , rot).

Magnetfelder bleibt eine erhebliche Diskrepanz erhalten. Führt man einen vom Magnetfeld unbeeinflussten konstanten Untergrundanteil x ein (D_{Gx} , rote Kurve), lässt sich die Abweichung bei großen Magnetfeldern weiter minimieren, da ein konstanter Untergrund vor allem auch die Steilheit der Flanken hinter ganzzahligen Füllfaktoren verringert.

Die Parameter der optimalen Anpassung (rote Kurve) betragen $n_{2d} = 4,65 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ und $\Gamma = 1,39 \text{ meV} \sqrt{B[\text{T}]}$, bei einem konstanten Untergrund von 45%. Die so bestimmte Ladungsträgerzahl kann mit zwei auf andere Weise ermittelten Werten verglichen werden. Eine Möglichkeit ist die Auswertung der Maxima, die im Realanteil des Messsignals der Kapazitätsmessung ganzzahlige Füllfaktoren kennzeichnen. Der auf diese Weise für die Gatespannung des ersten s -Niveaus ermittelte Wert liegt mit etwa $4,25 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ deutlich niedriger. Dies ist insofern bemerkenswert, als die Auswertung dieser Minima bei Proben mit dominanten repulsiven Streuzentren in der Regel zu hohe Werte für die Ladungsträgerzahl ergibt (vgl. [11, 12]). Auch die einfache Integration der gemessenen Kapazität bis zum ersten s -Niveau ergibt mit ca.

$4,2 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ einen Wert, der unterhalb des optimalen Parameters zur Anpassung der Fermienergie liegt. Über die Ursachen für dieses überraschende Ergebnis kann nur spekuliert werden. Nimmt man an, dass das Tunneln in das Quantenpunktniveau hauptsächlich von 2D-Elektronen erfolgt, welche sich direkt unterhalb des jeweiligen Quantenpunktes befinden (alle anderen haben aufgrund der effektiv verlängerten Barriere eine exponentiell kleiner werdende Tunnelwahrscheinlichkeit), so deutet die erhöhte Ladungsträgerdichte auf eine attraktive Potenzialmodulation direkt unterhalb der ungeladenen Quantenpunkte hin. Als triviale Ursache kommt dafür die energetisch tiefer liegende Leitungsbandkante eines InAs-Dots in der ihn umgebenden GaAs-Matrix in Frage [23]. Allerdings ist diese Annahme bei dem geringen vorliegenden Überlapp der 2D-Wellenfunktion mit den 25 nm entfernten Quantenpunkten wenig wahrscheinlich. Eine numerische Berechnung der Grundzustandsenergie eines dreieckigen Potenzialtopfes mittels des Runge-Kutta-Verfahrens 4. Ordnung erwies, dass die durch die Quantenpunkte veränderte Leitungsbandkante das 2D-Gas für Abstände $> 10 \text{ nm}$ nicht beeinflusst.

Eine weitere Möglichkeit bietet das Vorliegen eines komplexen piezo-elektrischen Potentials in der Umgebung der Quantenpunkte [80, 81]. Nach Berechnungen von Davies [82] kann ein solches Potenzial tatsächlich die nötige Symmetrie und ein Potenzialminimum direkt unterhalb eines Quantenpunktes aufweisen. Dieses Potential wird auch in Kapitel 6.3 als Ursache für die geringe Beweglichkeit von Quantenpunktproben favorisiert, seine genaue Form ist allerdings nur mit großem Aufwand zu berechnen.

Anhand der optimalen Anpassungsparameter lässt sich die resultierende Zustandsdichte berechnen. Abbildung 5.5 zeigt das Ergebnis für ein Magnetfeld von 4 T. Die Modulation der Zustandsdichte beträgt in diesem Fall maximal etwa 14%. Bei einem Magnetfeld von 10 T steigt dieser Wert auf über 50%, die kleinste berechnete Zustandsdichte bei ganzzahligen Füllfaktoren und einem Magnetfeld von 10 T beträgt aber immer noch $1,33 \cdot 10^{36} \text{ J}^{-1}/\text{m}^2$, was einer Quantenkapazität $e^2 D$ von etwa $0,033 \text{ F}/\text{m}^2$ entspricht. Damit ist offensichtlich, warum reine Kapazitätsmessungen zur Bestimmung der Zustandsdichte in solchen und vergleichbaren Proben mit geringer Beweglichkeit wenig Erfolg haben können: Typische geometrische Probenkapazitäten von ca. $5 \cdot 10^{-4} \text{ F}/\text{m}^2$ sind um etwa zwei Größenordnungen kleiner als die seriell in die Gesamtkapazität eingehende Quantenkapazität und dominieren damit das beobachtete Verhalten. Die in Kapazitätsmessungen an schlecht beweglichen 2D-Gasen beobachteten Kapazitätseinbrüche bei ganzzahligen Füllfaktoren werden demnach hauptsächlich durch die Änderung des Probenwiderstandes verursacht.

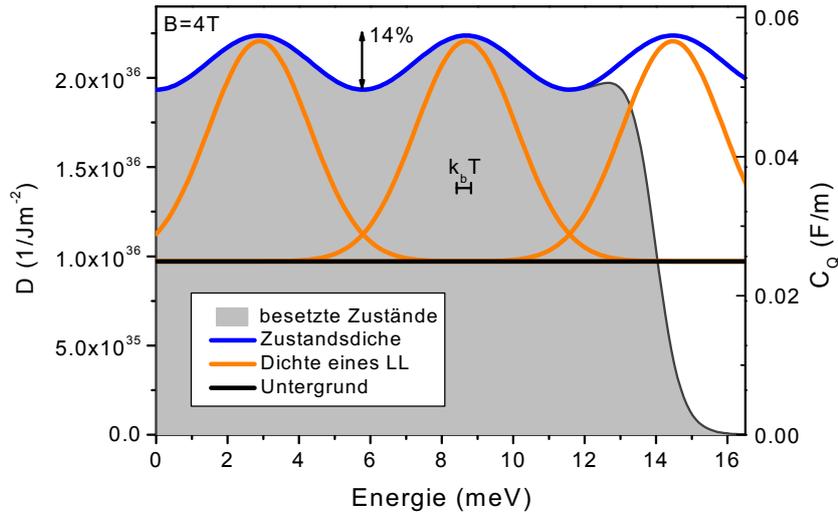


Abbildung 5.5: Berechnete Zustandsdichte für ein Magnetfeld von 4 T. Die Besetzung der Zustände erfolgte mittels der Fermiverteilung ($T = 4\text{ K}$), ohne dabei die Fermienergie selbstkonsistent anzupassen. Diese Vernachlässigung ist möglich, da die thermische Energie $k_B T$ viel kleiner ist als die Verbreiterung der Landau-Niveaus. Die rechte Achse gibt eine Umrechnung in die Quantenkapazität $e^2 D$ an (siehe [79]).

5.2.2 Anpassung mit semi-Ellipsen und Lorentzfunktionen

Neben Gaußfunktionen werden in der Literatur auch semi-Ellipsen und Lorentzfunktionen vorgeschlagen. Während semi-Ellipsen vor allen Dingen aus theoretischer Hinsicht plausibel sind [70], wurden Lorentzfunktionen auf der Basis von experimentellen Arbeiten in Betracht gezogen [75]. Mit keiner dieser beiden Funktionenklassen lässt sich eine sinnvolle Anpassung an die Messdaten erzielen, ohne eine Magnetfeldabhängigkeit der Verbreiterung zuzulassen, da ohne eine solche mit \sqrt{B} steigende Verbreiterung nicht gleichzeitig die Oszillationen bei kleinen Feldern und das Maximum bei $B = 8,5\text{ T}$ reproduziert werden können. Abbildung 5.6 zeigt den Versuch, die Messdaten mit Lorentzfunktionen (rot), bzw. mit semi-Ellipsen (blau) anzupassen. In beiden Fällen wurde dabei auf einen linearen Untergrund verzichtet, da dieser für sehr große Magnetfelder ($> 9\text{ T}$) ein zusätzliches unerwünschtes Abflachen der Kurven impliziert hätte. Es ergibt sich jeweils wieder eine Ladungsträgerdichte von $n_{2d} = 4,65 \cdot 10^{15}\text{ m}^{-2}$, analog zu der Anpassung mit Gaußfunktionen.

Keine der beiden Funktionenklassen liefert eine bessere Übereinstimmung der be-

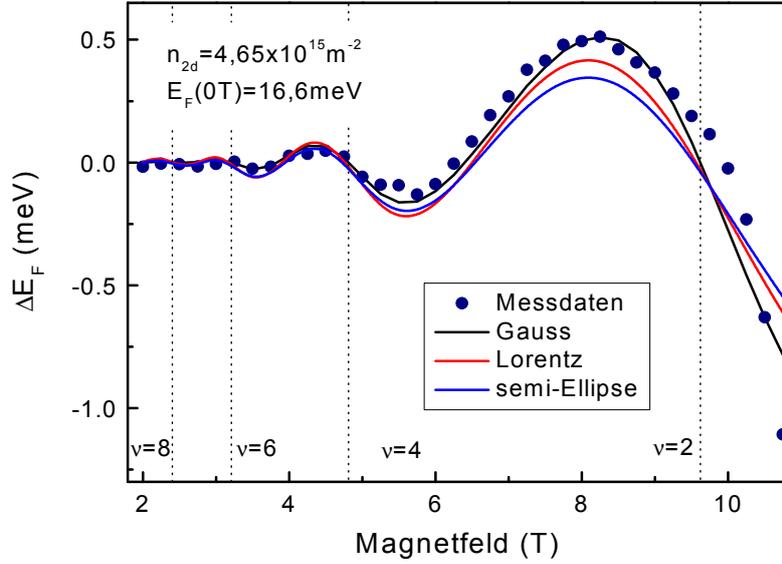


Abbildung 5.6: Anpassung mit Lorentzfunktionen ($\Gamma = 1,76 \text{ meV} \sqrt{B[T]}$) und semi-Ellipsen ($\Gamma = 1,87 \text{ meV} \sqrt{B[T]}$).

rechneten Fermienergien mit den Daten als die optimierten Gaußfunktionen mit konstantem Untergrund. Wählt man eine Verbreiterung, die bei kleinen Feldern die Oszillationen reproduziert, so wird jeweils die Amplitude bei großen Magnetfeldern unterschätzt. Zudem ist der Abfall im Bereich des Füllfaktors $\nu = 2$ zu flach, so dass die Amplitude im Bereich von $B = 10 \text{ T}$ deutlich unterschätzt wird.

Insgesamt deuten diese Ergebnisse darauf hin, dass sich die Zustandsdichte schlecht beweglicher Proben mit einer großen Zahl von langreichweitigen Streuern am besten mit Gaußfunktionen variabler Breite und einem großen Anteil von Zuständen in einem vom Magnetfeld unabhängigen Untergrund approximieren lässt.

5.2.3 Temperaturabhängigkeit

Die Vernachlässigung der Temperatur bei der Berechnung der Fermienergien erfolgte zunächst, um in der Rechnung auf eine iterative Optimierung der Fermienergie verzichten zu können. Nachträglich wurde diese Vernachlässigung durch den Wert der Verbreiterung der Landau-Niveaus

$$\Gamma = 2,22 \cdot 10^{-22} \text{ J} \sqrt{B[T]} = 1.39 \text{ meV} \sqrt{B[T]} \quad (5.14)$$

gerechtfertigt, welcher für die betrachteten Magnetfelder deutlich größer ist als die thermische Energie von etwa 0,36 meV bei 4,2 K und damit maßgeblich die Amplitude der Oszillation der Fermienergie bestimmt.

Berücksichtigt man die Temperatur, so muss zunächst ein Satz von Parametern (Ladungsträgerzahl, Wahl und Breite der Verteilung, eventuell konstanter Untergrundanteil) zusammen mit einer ersten Näherung der Fermienergie gewählt werden. Für diese Parameter wird Gleichung 5.11 einige Vielfache von $k_B T$ über diese erste Näherung der Fermienergie hinaus integriert. Die so erhaltene Ladungsträgerzahl wird mit dem ursprünglich angenommenen Wert verglichen und so ein neuer Wert der Fermienergie abgeschätzt. Diese Prozedur kann solange wiederholt werden, bis die gewünschte Übereinstimmung mit der vorausgesetzten Ladungsträgerzahl erreicht ist. Die endliche Temperatur führt dabei auch unter der Annahme von ideal scharfen Landau-Niveaus zu einer Abschwächung der Oszillationen der Fermienergie.

Abbildung 5.7 zeigt die Temperaturabhängigkeit der Änderung der Fermienergie für die optimalen Anpassungsparameter. Die Berücksichtigung der Temperatur be-

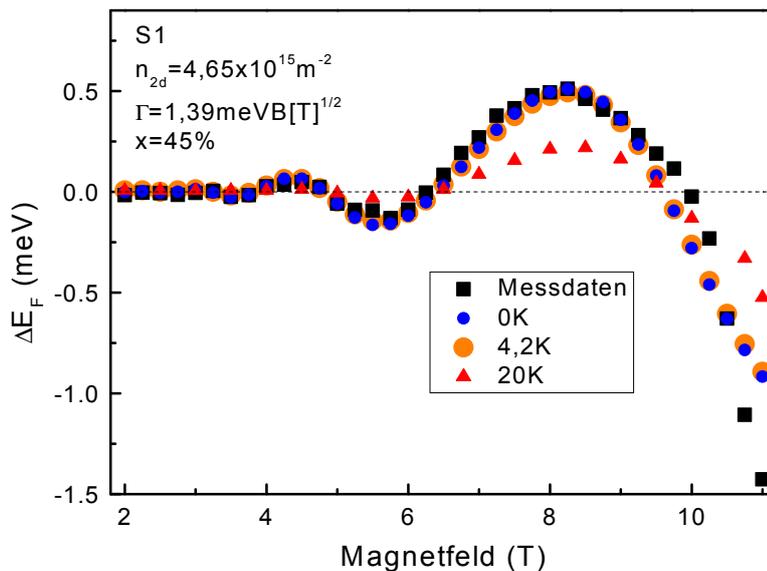


Abbildung 5.7: Änderung der Fermienergie in Abhängigkeit vom Magnetfeld für verschiedene Temperaturen.

dingt bis zur Kryostattemperatur von 4,2 K keine entscheidende Veränderung in der berechneten Fermienergie. Weder wird die Amplitude der Oszillationen deutlich reduziert, noch ergibt sich eine Verschiebung der Positionen der Extrema oder eine andere

Formänderung. Erst ab Temperaturen von etwa 15 K nimmt der Einfluss der Temperatur merklich zu, bei einer Temperatur von 20 K sind die Oszillationen in kleinen Magnetfeldern schließlich (< 4 T) nicht mehr zu beobachten und die Amplitude bei $\nu = 2$ ist stark erniedrigt. Die Aussagen der vorangegangenen Abschnitte bleiben daher auch bei Berücksichtigung der temperaturabhängigen Aufweichung der Fermi-Verteilung gültig. Insbesondere ist die Wahl der am besten geeigneten analytischen Darstellung der Zustandsdichte (Gauß-, Lorentzfunktionen oder semi-Ellipsen) bei der vorliegenden intrinsischen Peakbreite nicht von der Temperatur abhängig.

5.2.4 Zweites s-Niveau und p-Zustände

Eine möglichst präzise Analyse der Oszillationen der Fermienergie im Rückkontakt erfordert eine genaue Kenntnis der Eigenschaften des zur Spektroskopie verwendeten Quantenpunktniveaus, bzw. der beim Laden des Elektrons maßgeblichen Gesamtenergie des Quantenpunktes. Aus diesem Grund eignet sich das erste *s*-Elektron am besten als energetische Referenz, da die Gesamtenergie nur durch den Beitrag eines Elektrons gebildet wird. Jedes weitere Elektron verkompliziert die Auswertung deutlich, und zwar vor allem auch in dem Maße, indem die zusätzlichen Elektronen eine große Energieabhängigkeit im Magnetfeld aufweisen. Das zweite *s*-Elektron lässt sich daher im Allgemeinen noch sehr gut mit hier verwendeten Formalismus auswerten. In Abbildung 5.8 ist die anhand dieses Niveaus bestimmte Oszillation der Fermienergie zusammen mit den charakteristischen Parametern dargestellt. Auch hier ist die Rechnung auf den Fall $T = 0$ beschränkt, da die Temperatur nur eine kleine Störung darstellt. Die Spinaufspaltung wird ebenfalls vernachlässigt. Die hier ermittelten Parameter unterscheiden sich deutlich von den für das erste *s*-Elektron bestimmten Werten. Die Ladungsträgerzahl ist um $0,23 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-2}$ erhöht, was deutlich unter dem anhand der geometrischen Kapazität berechneten Wert von etwa $0,7 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-2}$ liegt. Auch wenn man berücksichtigt, dass zumindest 1 Elektron/Quantenpunkt vom geometrischen Wert zu subtrahieren ist, da dies gerade die Ladung ist, die zwischen den beiden *s*-Zuständen in die Quantenpunkte und damit nicht ins 2DEG fließt, bleibt eine signifikante Differenz übrig. Man kann diese Abweichung wiederum als Indiz dafür werten, dass die hier vorgestellte Spektroskopiemethode sehr empfindlich die Bereiche des 2DEG in direkter Nähe zu einem Quantenpunkt untersucht. Dort fließt verglichen mit dem über die Probenfläche gemittelten Wert überdurchschnittlich viel Ladung in die Quantenpunkte. Damit ergibt sich eine Abschätzung der für den Ladungstransport in die Quantenpunkte maßgeblichen 2DEG-Fläche F_{eff} . Ist N_{QD} die Quantenpunktdichte, so befindet sich auf jeder Fläche $F_{QD} = 1/N_{QD}$ ein Quanten-

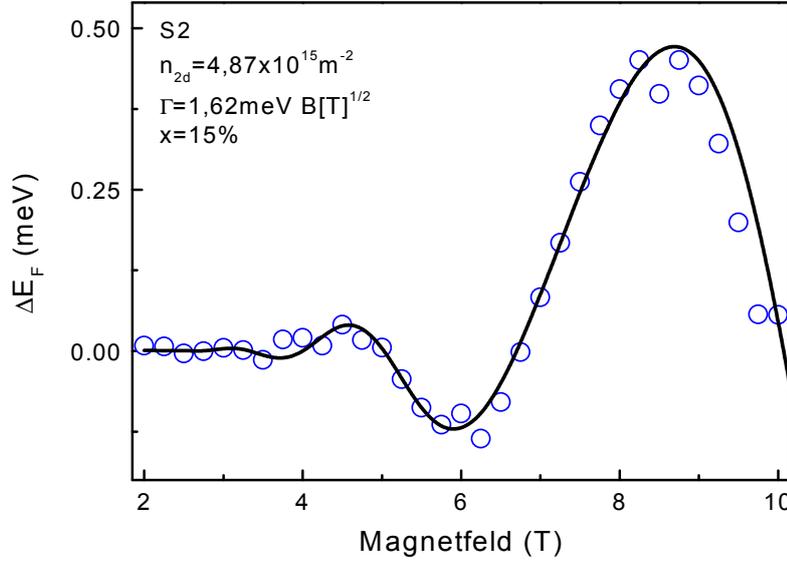


Abbildung 5.8: Änderung der Fermienergie, gemessen an der Position des zweiten *s*-Elektrons.

punkt, in den zwischen den beiden *s*-Niveaus gerade ein Elektron transferiert wird. Damit dadurch die Änderung der 2D-Ladungsträgerdichte um $\Delta n_{2d} = 0,47 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-2}$ verringert wird, muss die *effektive* Fläche F_{eff} um den Faktor $\Delta n_{2d}/N_{QD}$ vermindert sein. Diese beträgt damit

$$F_{\text{eff}} = F_{QD} \frac{N_{QD}}{\Delta n_{2d}} = \frac{1}{\Delta n_{2d}} \quad (5.15)$$

und ist unabhängig von der tatsächlich vorliegenden Quantenpunktdichte. Diese Fläche entspricht einem Quadrat mit einer Kantenlänge von 46 nm bzw. einer Kreisscheibe mit einem Radius von etwa 26 nm.

Die Änderung des die Breite der Landau-Niveaus charakterisierenden Parameters Γ und des Anteils x der Zustände im Magnetfeld-unabhängigen Untergrund im Vergleich zum ersten *s*-Elektron ist ebenfalls bemerkenswert. Während x auf die Hälfte des ursprünglichen Wertes sinkt, steigt gleichzeitig die Breite der Gaußfunktionen. Auch wenn das Ausmaß dieser Veränderung überraschend groß ist, so ist doch die prinzipielle Tendenz verständlich, sofern man annimmt, dass der konstante Untergrund stark lokalisierten Zuständen mit niedriger Energie entspricht. Diese werden mit zunehmender Gatespannung zuerst aufgefüllt. Wird die Gatespannung weiter erhöht, nimmt der Anteil dieser Zustände schließlich ab. Die gleichzeitige Erhöhung der Verbreiterung

ist möglicherweise nur ein Artefakt der Anpassung, da damit die übermäßige Verringerung von x kompensiert wurde.

Die Spektroskopie der Fermienergie mittels der p -Zustände der Quantenpunkte ist nur eingeschränkt möglich. Die Hauptursache dafür ist, dass sie einen sehr großen Gatespannungsbereich von bis zu 100 meV überstreichen. Daher kann keine konstante Ladungsträgerzahl des 2DEG mehr zugrunde gelegt werden. Um dieses auszugleichen, müsste die Abhängigkeit der Ladungsträgerzahl von der Gatespannung und vom Magnetfeld präzise bekannt sein. Während diese Abhängigkeit bei $B \approx 0$ T sehr genau bestimmt werden kann (Kapitel 6.2), ist dies für quantisierende Magnetfelder kaum in dieser Form möglich. Zusätzlich ist auch im Zusammenhang mit den Quantenpunkten mit störenden Effekten zu rechnen. So konnte in Abschnitt 4.2.3 gezeigt werden, dass den vier p -Elektronen keine einheitliche Masse zugeordnet werden kann. In letzter Konsequenz folgt daraus, dass auch ein einzelnes p -Elektron nicht präzise durch eine einzige Masse für alle Gatespannungs- und Magnetfeld-Kombinationen beschreibbar ist.

Neben diesen physikalisch begründeten Problemen wiegt weiterhin schwer, dass die Coulombblockade der p -Niveaus deutlich kleiner ist als die der s -Niveaus. Dadurch erfolgt die Bestimmung der Gatespannungspositionen mit einer weitaus größeren Unsicherheit.

Die Auswertung der p -Niveaus ohne Berücksichtigung dieser Effekte ist in Abbildung 5.9 dargestellt. Für alle p -Zustände wurde ein konstanter Untergrund von 25% angenommen. Die Breite der der Zustandsdichte zugrunde liegenden Gaußfunktionen liegt für alle Zustände im Bereich von $1 \text{ meV}\sqrt{B[\text{T}]}$. Eine Übersicht über die verwendeten Parameter gibt Tabelle 5.1. Die Ladungsträgerzahl nimmt zwischen den einzelnen

Elektron	n_{2d} [10^{15} m^{-2}]	x	Γ [$\text{meV}\sqrt{B[\text{T}]}$]
p_1	6,40	0,25	1,0
p_2	6,52	0,25	1,2
p_3	6,87	0,25	1,2
p_4	6,99	0,25	0,9

Tabelle 5.1: Parameter der Zustandsdichte in der Anpassung der p -Zustände.

Niveaus wiederum weniger stark zu, als anhand der geometrischen Kapazität erwartet wird. Analog zu den s -Zuständen ist dafür wahrscheinlich die Sensitivität der Methode für den Bereich in direkter Umgebung der Quantenpunkte verantwortlich. Die Bestimmung der Breite Γ war aufgrund der Datenbasis kaum besser als mit einer Genauigkeit von $\pm 15\%$ möglich. Daher sind die in Tabelle 5.1 vermerkten Unterschiede letztlich

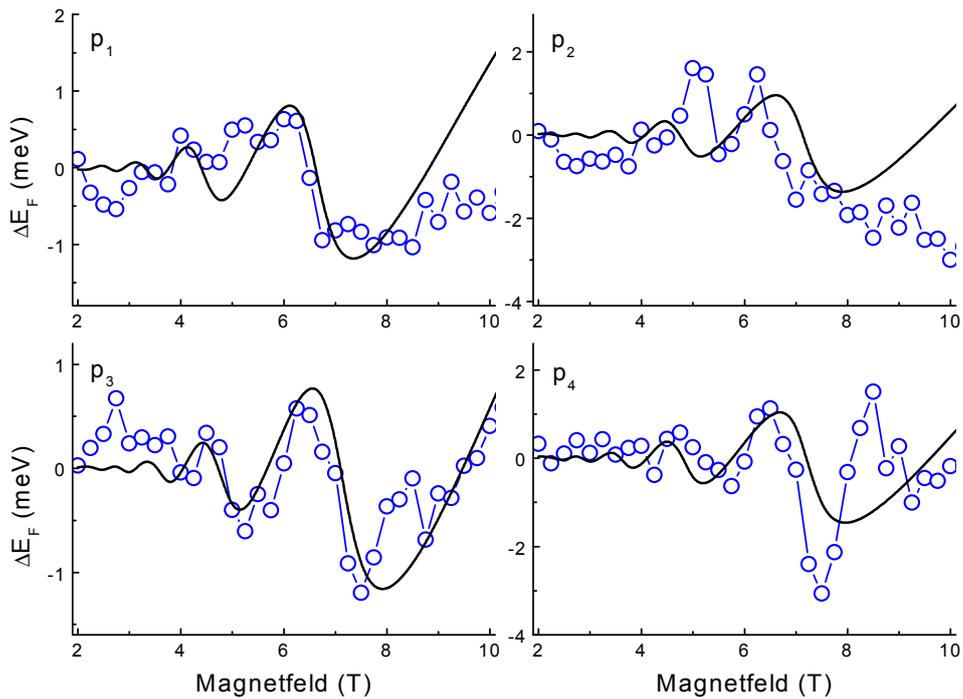


Abbildung 5.9: Änderung der Fermienergie, gemessen an den Positionen der p -Elektronen. Die durchgezogenen Linien basieren auf Gaußfunktionen mit konstantem Untergrund und variabler Breite und gelten für $T = 0$ K.

nicht signifikant.

Anhand von Abbildung 5.9 ist offensichtlich, dass eine Anpassung der Zustandsdichte hier weit weniger gut möglich ist, als bei den s -Niveaus. Insbesondere der Zustand p_2 ist kaum mittels des hier vorgestellten Formalismus beschreibbar. Als Hauptursache muss, wie weiter oben vermerkt, die Ungenauigkeit der aus den Kapazitätsspektren ermittelten Datenpunkte genannt werden. Neben der grundsätzlichen Schwierigkeit die Peakpositionen der p -Zustände bei der kleinen Coulombblockadeenergie von nur etwa 15 meV zu bestimmen, ist zusätzlich die Beweglichkeit des 2DEG im Bereich der p -Niveaus im Vergleich zu den s -Niveaus stark erhöht. Bedingt dadurch treten Quantisierungseffekte in der Kapazität deutlicher zu Tage und überdecken teilweise die durch die Quantenpunkte induzierten Kapazitätsmaxima, auch wenn, wie hier geschehen, mit sehr geringen Messfrequenzen (163-363 Hz) gearbeitet wird (vgl. [66]).

5.2.5 Andere Probengeometrien

Bei den bisher vorgestellten Ergebnissen betrug die Dicke der Tunnelbarriere zwischen 2DEG und Quantenpunktschicht jeweils 25 nm. Neben diesen Proben wurden auch solche untersucht, die Tunnelbarrieren von 15-40 nm aufwiesen. Die mittleren Abstände (≈ 25 nm) erwiesen sich jedoch als die optimale Wahl. Bei zu kleinen Tunnelbarrieren reduzieren die Quantenpunkte die Beweglichkeit des 2DEG zu stark und unterdrücken damit Quanteneffekte, wie auch die Oszillationen der Fermienergie. Bei den untersuchten Proben mit einer Tunnelbarriere von 40 nm ist hingegen die Beweglichkeit des 2DEG mit fast 10^5 cm²/Vs so groß, dass Zustandsdichte-Effekte und die Verringerung der Leitfähigkeit bei ganzzahligen Füllfaktoren die Positionsbestimmung der Dot-induzierten Kapazitätsmaxima unmöglich machen, bzw. die gemessenen Positionen verfälschen können.

Abbildung 5.10 ist zu entnehmen, dass für Tunnelbarrieren von weniger als 25 nm eine Anpassungsrechnung keine sinnvollen Ergebnisse liefern würde, die Oszillationen der Fermienergie sind aufgrund der niedrigen Beweglichkeit (jeweils deutlich unter 5000 cm²/Vs) und der geringeren Homogenität des Quantenpunktensembles nicht auflösbar. Für die Probe mit einer Tunnelbarriere von 40 nm konnte eine Anpassungs-

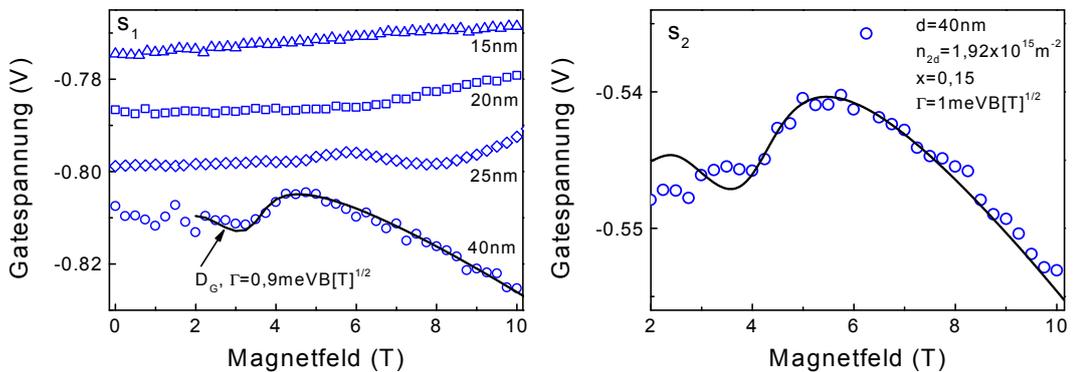


Abbildung 5.10: Dispersion des ersten s -Niveaus im Magnetfeld für 4 verschiedene Tunnelbarrieren unterschiedlicher Dicke (links), sowie Gatespannungsposition des zweiten s -Elektrons bei einem Abstand von 40 nm (rechts).

rechnung für die Zustandsdichte des 2D-Gases durchgeführt werden. Während sich beim ersten s -Niveau eine Breite der Gaußfunktionen mit etwa $0,9 \text{ meV} \sqrt{B[\text{T}]}$ ohne einen messbaren konstanten Untergrund ergab (Abb. 5.10 links), waren beide Werte im Falle des zweiten s -Niveaus deutlich erhöht (rechts). Schon hier deutet sich damit an, dass dieses Material ein viel versprechender Kandidat zur Analyse des Einflusses

der einzelnen zusätzlichen Elektronen auf das Transportverhalten des 2DEG ist, da offensichtlich das Laden des ersten s -Elektrons die Beweglichkeit merklich verringert.

Die Auswertung der effektiven Fläche F_{eff} (siehe Gl. 5.15) ergibt einen sehr großen Radius von 42 nm. Ähnlich wie im Falle der Probe 11316 mit einer Tunnelbarriere von 25 nm ist damit der effektive Radius vergleichbar mit der Dicke der Tunnelbarriere.

Die charakteristische Breite und der Anteil der Zustände im konstanten Untergrund liegen signifikant unterhalb der für die Probe mit einem Abstand von 25 nm ermittelten Werte. Gleichzeitig ist offensichtlich, dass die Breite bzw. der konstante Untergrund im Falle der Proben mit einer sehr kleinen Tunnelbarriere im Gegensatz zur 25 nm Referenzprobe noch erhöht sind. Insgesamt gilt damit – wie erwartet – die Regel, dass mit abnehmender Beweglichkeit die Breite der Gaußfunktionen zunimmt.

5.2.6 Abschirmungseffekte

Bisher wurde vorausgesetzt, dass die Energie der Quantenpunktelektronen nicht von den Eigenschaften des 2DEG abhängen. Dies mag auf den ersten Blick plausibel erscheinen, gilt jedoch nicht uneingeschränkt. Neben der Fermienergie schwankt im Magnetfeld auch die Fähigkeit des 2DEG, die Ladung der Quantenpunkte abzuschirmen. Dadurch oszilliert im Magnetfeld auch der Beitrag der Bildladung zur Energie der Quantenpunktelektronen. Dieser beträgt unter Annahme einer perfekten Abschirmung etwa 2 meV und hängt dabei direkt mit der Zustandsdichte an der Fermikante zusammen. In der Thomas-Fermi-Näherung gilt für die Dielektrizitätsfunktion eines 2DEG in Abhängigkeit vom Wellenvektor k die Formel $\epsilon(k) = 1 + q_{TF}/k$, wobei gilt [5]

$$q_{TF} = \frac{2\pi\hbar^2}{a_B m^*} D(E_F) \quad . \quad (5.16)$$

Der effektive Bohr-Radius ist $a_B = \hbar^2 \epsilon_0 / m^* e^2$, und $D(E_F)$ gibt die Zustandsdichte an der Fermikante an. Abbildung 5.11 zeigt links die berechnete relative Änderung der Zustandsdichte und der Fermienergie in Abhängigkeit vom Magnetfeld für den Bereich des ersten s -Niveaus von Probe 11316. Offensichtlich schwankt die Zustandsdichte und damit q_{TF} deutlich stärker als die Fermienergie. In einer sehr groben Näherung kann man annehmen, dass die Abschirmung nur direkt an der Fermikante bei $k = k_F$ erfolgt und die dielektrische Funktion direkt aus der Zustandsdichte und dem Fermiimpuls berechnen (Abb. 5.11 rechts). Diese oszilliert nur noch mit einer recht kleinen Amplitude ($< 10\%$). Dies kann als Indiz dafür gewertet werden, dass die Bildladungsenergie der betrachteten Elektronen ebenfalls nur in dem selben Maße schwankt. Die Oszillationen in ϵ_{TF} sind außerdem um $-\pi/2$ phasenverschoben, so dass die Periodizität der Schwankungen nicht zu dem in der Messung beobachteten

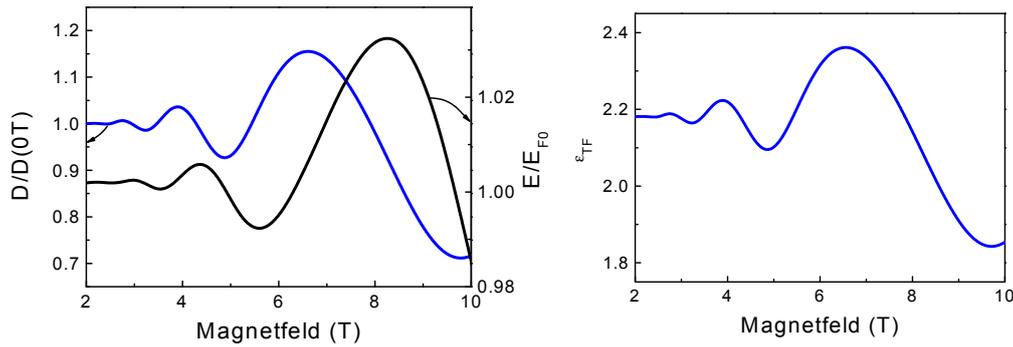


Abbildung 5.11: Berechnete relative Änderung der Zustandsdichte und der Fermienergie (links), sowie dielektrischen Funktion (rechts) in Abhängigkeit vom Magnetfeld für die Parameter der Probe 11316.

Verhalten synchron wäre.

Kato *et al.* berechneten für den analogen Fall einer Punktladung in der Nähe eines 2DEG die Abhängigkeit der Energie von dieser Zustandsdichte an der Fermikante [83]. Es wird dort ebenfalls eine Gauß-artige Verbreiterung der Landau-Niveaus vorausgesetzt. Für einen Abstand von > 15 nm ist dort kaum noch eine Abhängigkeit der Bildladungsenergie vom Magnetfeld feststellbar. Es kann daher an dieser Stelle davon ausgegangen werden, dass Bildladungseffekte die beobachteten Oszillationen der Fermienergie nicht maßgeblich stören.

5.3 Fazit

Die bekannte energetische Verschiebung der Quantenpunktniveaus konnte ausgenutzt werden, um die Fermienergie im Rückkontakt zu spektroskopieren, ganz ähnlich zu einer früheren Arbeit an Tunnelioden mit eingebetteten Quantenpunkten [84]. Von den in der Literatur vorgeschlagenen analytischen Näherungen für die Form der Zustandsdichte eines 2DEG im Magnetfeld konnten für die in dieser Arbeit untersuchten 2DEG Lorentzfunktionen und semi-Ellipsen ausgeschlossen werden. Die beste Anpassung ergibt sich mit Gaußfunktionen, deren Breite proportional zu $B^{1/2}$ steigt. Ein zusätzlich angenommener, vom Magnetfeld unabhängiger Untergrund optimiert die Übereinstimmung mit den Messdaten zusätzlich. Die gemessenen Verbreiterungen der Landau-Niveaus von ca. $1\text{-}3\text{ meV}\sqrt{B[\text{T}]}$ stimmen recht gut mit den an anderen Proben gewonnenen Werten überein. So ermittelten Eisenstein *et al.* einen Wert von $1\text{ meV}\sqrt{B[\text{T}]}$ bei Proben mit einer Beweglichkeit von mehreren $10^4\text{ cm}^2/\text{Vs}$ [74], ohne

dass dabei jedoch ein konstanter Untergrund verwendet wurde. Diese Proben sind damit sehr ähnlich zu den hier vorgestellten Quantenpunkt-Proben mit einer Tunnelbarriere von 40 nm. Gornik *et al.* fanden bei etwas weniger hoch beweglichen Proben ($\mu = 3 - 4 \cdot 10^4 \text{ cm}^2/\text{Vs}$) eine Verbreiterung von $2,5 \text{ meV}\sqrt{B[\text{T}]}$ und einen konstanten Untergrund von 25% [71]. Die gemessenen Verbreiterungen liegen damit, wohl eher zufällig, im Bereich des anhand der Theorie von Ando und Uemura [68] bestimm-
baren Wertes von etwa $1,4 \text{ meV}\sqrt{B[\text{T}]}$ und sind sogar schon mit Hilfe der einfachen intuitiven Abhängigkeit $\Gamma = \hbar/\tau$ gut approximierbar.

Die hier vorgestellte Spektroskopiemethode hat allerdings auch einige Nachteile. So ist sie nur für einen sehr begrenzten Beweglichkeitsbereich anwendbar, in dem die Oszillationen der Fermienergie groß genug sind, um zu messbaren Verschiebungen der Kapazitätsmaxima der Quantenpunkte zu führen. Gleichzeitig darf die Kapazitätsmessung durch eine zu drastische Reduktion der Leitfähigkeit im Bereich der lokalisierten Zustände nicht behindert werden. Diese Randbedingungen und die Notwendigkeit einer sehr guten Homogenität des Quantenpunktensembles stellen hohe Anforderung an das Wachstum der Proben. Weiterhin ist zu beachten, dass alleine das Einbetten von InAs-Inseln in die Heterostruktur die Eigenschaften des 2DEG massiv verändert. Die hier gewonnenen Informationen können daher am besten auf Systeme übertragen werden, die eine vergleichbar inhomogene Potenziallandschaft aufweisen.