

# Kapitel 1

## Einleitung

Ungefähr 450 v. Chr. postulierte der griechische Philosoph Leukipp, dass es eine Grenze der Teilbarkeit von physikalischen Objekten geben muss. Er gab den letzten, *unteilbaren* Bausteinen der Materie den Namen *atomoi*. Heute kommen wir diesen letzten und unteilbaren Objekten in modernen Beschleunigeranlagen immer näher und haben dabei längst die von Dalton im Jahr 1803 entdeckten Atome in immer kleinere Bestandteile zerlegt. Im letzten Jahrhundert wurde auf diesem Weg zu den Grundbausteinen der Materie die bahnbrechende Entdeckung gemacht, dass sich die Eigenschaften von immer kleineren Objekten und insbesondere von Atomen und Elektronen nicht mehr durch die Gesetze der klassischen Physik beschreiben lassen. Die von Heisenberg, Schrödinger und Dirac in ihren mathematischen Details entwickelte Quantenmechanik stellt einen Formalismus zur Verfügung, mit dessen Hilfe die Eigenschaften von (sub-)nanoskaligen Systemen berechnet und vorhergesagt werden können. Schränkt man beispielsweise ein Elektron räumlich auf einen immer kleineren Bereich ein, so sagt die Quantenmechanik voraus, dass die Abstände der möglichen diskreten energetischen Zustände des Elektrons immer größer werden.

Heute ist es durch die moderne Halbleitertechnologie möglich, Elektronen in maßgeschneiderten Potenzialen einzufangen und künstliche Systeme mit reduzierter Dimension zu realisieren. Können sich Elektronen nur noch in zwei Raumrichtungen frei bewegen, während die Abstände der möglichen Energien in der dritten Raumrichtung so groß sind, dass nur der unterste Zustand besetzt ist, so spricht man von einem zweidimensionalen Elektronengas (2DEG). Solche zweidimensionalen Elektronengase sind aus physikalischer Sicht vor allem durch den dort auftretenden und von v. Klitzing gefundenen Quanten-Hall-Effekt von besonderem Interesse [1], in dessen Umfeld bisher zwei Nobelpreise vergeben wurden (1985 an v. Klitzing, sowie 1998 an Laughlin, Störmer und Tsui). Der Hall-Widerstand – also das Verhältnis zwischen aufgeprägtem Strom und senkrecht dazu gemessener Spannung – zeigt über weite Bereiche eines senkrecht zum 2DEG angelegten Magnetfeldes Plateaus bei ganzzahligen

gen Bruchteilen der v. Klitzing-Konstanten  $R_K = h/e^2$ . Im Lokalisierungsbild des Quanten-Hall-Effektes werden diese Plateaus durch Potenzialfluktuationen im 2DEG erklärt [2]. Während die Elektronen eines ungestörten 2DEG im Magnetfeld nur die diskreten Landau-Niveaus besetzen, führt die Potenziallandschaft dazu, dass diese (ideal  $\delta$ -förmigen) Landau-Niveaus verbreitert sind und sich nur in ihrem Zentrum delokalisierte Zustände befinden.

In dieser Arbeit werden Messungen an Proben vorgestellt, welche neben einem 2DEG mit einer Schicht von selbstorganisierten Quantenpunkten auch ein quasi-nulldimensionales Elektronensystem enthalten. Diese Quantenpunkte können kontrolliert mit bis zu je 6 Elektronen geladen werden. Mit der Einbettung solcher Quantenpunkte in direkter Nähe zu einem 2DEG eröffnen sich damit völlig neue Möglichkeiten zur Untersuchung des Quanten-Hall-Effektes. Zum einen können die diskreten Energien der Quantenpunkte als eine Art energetischer Filter zur Spektroskopie der Form der verbreiterten Landau-Niveaus benutzt werden. Zum anderen ist zu vermuten, dass durch die jeweilige Besetzung der Quantenpunkte mit Elektronen und das damit verbundene Coulomb-Potenzial auch direkt die für den Quanten-Hall-Effekt entscheidende Potenziallandschaft am Ort des 2DEG beeinflusst werden kann.

Proben mit auf diese Weise gekoppelten Quantenpunkten und zweidimensionalen Elektronengasen werden nun schon seit etwa 10 Jahren untersucht. Bis heute steht neben den angesprochenen Beziehungen zum Quanten-Hall-Effekt vor allem auch der Einfluss der Quantenpunkte auf das klassische Transportverhalten des 2DEG im Zentrum des Interesses. Insbesondere die Frage, durch welche Mechanismen die Quantenpunkte die Leitfähigkeit des benachbarten 2DEG verringern, ist bis heute nicht abschließend geklärt. In dieser Arbeit wird zum ersten Mal eine Verringerung der Beweglichkeit des 2DEG durch eine präzise kontrollierte Erhöhung der Ladung in den Quantenpunkten realisiert.

Die Arbeit gliedert sich wie folgt:

In **Kapitel 2** wird eine Einführung in die elektronische Struktur der untersuchten niedrigdimensionalen Elektronensysteme gegeben.

**Kapitel 3** fasst kurz die Eigenschaften der verwendeten Heterostrukturen und die zur lithografischen Strukturierung der Proben durchgeführten Schritte zusammen.

Daran anschließend wird in **Kapitel 4** demonstriert, wie die elektronischen Eigenschaften von selbstorganisierten Quantenpunkten durch Kapazitätsmessungen bestimmt werden können. Die so gewonnenen Kenntnisse über die energetische Struktur der Quantenpunkte im Magnetfeld wird in **Kapitel 5** dazu verwandt, die Oszillationen der Fermienergie im 2DEG zu spektroskopieren und so Rückschlüsse auf die Form

---

der verbreiterten Landau-Niveaus zu ziehen.

**Kapitel 6** widmet sich dem Einfluss der Quantenpunktelektronen auf die klassischen Transportparameter des 2DEG. Es wird zunächst ein iteratives Modell zur Beschreibung der Ladungsträgerbilanz in gekoppelten niedrigdimensionalen Elektronensystemen entwickelt, welches in einem zweiten Schritt eine präzise Messung der Beweglichkeit des 2DEG in Abhängigkeit der Anzahl der Elektronen pro Quantenpunkt ermöglicht.

Ergänzt werden diese Ergebnisse durch die in **Kapitel 7** vorgestellten Messungen des Quanten-Hall-Effektes unter dem Einfluss der Quantenpunktelektronen.

In **Kapitel 8** werden erste Versuche beschrieben, das 2DEG zu einem schmalen (möglichst eindimensionalen) Kanal zusammenzuzchnüren. Es wird gezeigt, dass durch eine solche Verengung des 2DEG eine Verstärkung des Einflusses der Quantenpunktelektronen erreicht werden kann.

Im abschließenden **Kapitel 9** werden die Ergebnisse noch einmal zusammengefasst und ein Ausblick auf mögliche Fortführungen dieser Arbeit gegeben.



# Kapitel 2

## Elektronensysteme in reduzierten Dimensionen

In einem Potenzial gebundene Elektronen weisen aufgrund ihrer Quantennatur ein diskretes Energiespektrum auf. Die Abstände der möglichen Energien werden umso größer, je stärker die Elektronen durch das Potenzial räumlich eingeschränkt werden. Schränkt man Elektronen in einer Raumrichtung auf einen Bereich ein, der kleiner ist als die Fermiwellenlänge  $\lambda_F = h/\sqrt{2m^*E_F}$ , so kann bei tiefen Temperaturen eine weitestgehend ausschließliche Besetzung des Grundzustandes in dieser Richtung erreicht werden. Da sich die Elektronen in den verbleibenden beiden Raumrichtungen frei bewegen können, spricht man in diesem Fall von einem zweidimensionalen Elektronengas (2DEG). Eine weitere Reduktion der Dimensionalität führt in entsprechender Weise zu Quantendrähten (1D) und Quantenpunkten (0D).

In dieser Arbeit werden zwei verschiedene Realisierungen von niedrig-dimensionalen Quantensystemen in Halbleiterkristallen untersucht: Quantenpunkte und zweidimensionale Elektronengase. In beiden Fällen sind speziell die jeweiligen Zustandsdichten von besonderem Interesse. Neben diesen Zustandsdichten soll im Folgenden auch kurz das Transportverhalten eines zweidimensionalen Elektronengases diskutiert werden, welches vor allem durch den in hohen Magnetfeldern auftretenden Quanten-Hall-Effekt bemerkenswert ist.

Zusätzlich zu dem hier bereit gestellten theoretischen Grundgerüst werden die wichtigsten Formeln auch in den anschließenden Kapiteln bei der Darstellung der Ergebnisse kurz wiederholt, um das Verständnis zu erleichtern.

### 2.1 Das zweidimensionale Elektronengas

Zweidimensionale Elektronengase haben als quantenmechanisches Modellsystem sowohl im Bereich der Grundlagenforschung, als auch als Basis aktueller Transistoren

im Bereich der Anwendungen eine herausragende Bedeutung. Ihre physikalischen Eigenschaften weisen unter dem Einfluss eines äußeren Magnetfeldes einen besonderen Reichtum an neuartigen Phänomenen auf. Vor allem der Quanten-Hall Effekt hat sich in den letzten Jahrzehnten als fruchtbares Arbeitsfeld erwiesen und es wurden bisher zwei Nobelpreise in diesem Themenkomplex vergeben<sup>1</sup>. In diesem Kapitel soll ein kurzer Überblick über die grundlegenden Eigenschaften von zweidimensionalen Elektronengasen gegeben werden. Detailliertere Darstellungen finden sich im Übersichtsartikel von Ando *et al.* [3] und in der einführenden Literatur zur Physik niedrigdimensionaler Systeme [4, 5].

### 2.1.1 Herstellung und Bandstruktur

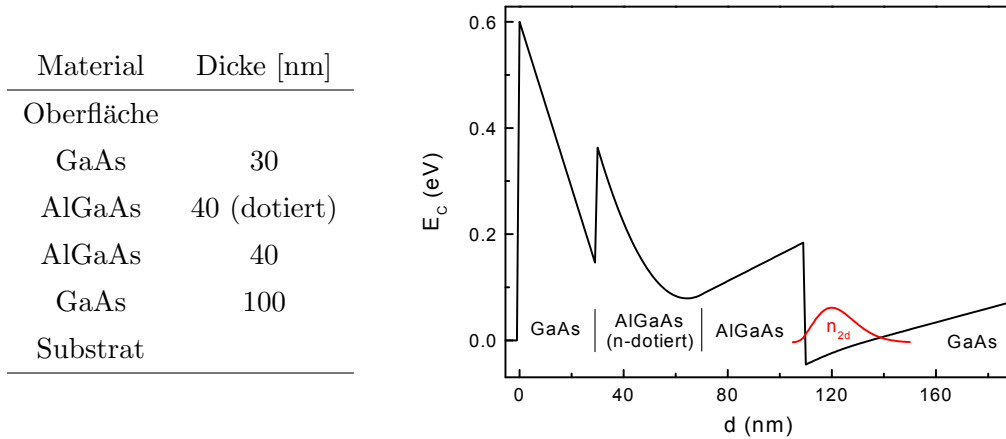
Die Herstellung der in dieser Arbeit untersuchten zweidimensionalen Elektronengase erfolgte mittels des Verfahrens der Molekularstrahl-Epitaxie. Diese Technik ermöglicht es, im Ultra-Hoch-Vakuum atomar scharfe Schichtfolgen von Halbleitermaterialien herzustellen. Durch eine präzise Kontrolle der jeweiligen Molekularflüsse können binäre (z.B. GaAs) und ternäre Verbindungen wie  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  realisiert werden.

Im  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ -System kann durch die Wahl des Al-Anteils  $x$  die Bandlücke in einem weiten Bereich variiert werden [6]. Da gleichzeitig die Gitterkonstante kaum von  $x$  abhängt, ist in diesem System das Wachstum hochreiner, versetzungsfreier und einkristalliner Heterostrukturen möglich. Mit Hilfe einer Dotierung (z.B. mit Si) kann der Verlauf der Bandkanten in Wachstumsrichtung zusätzlich beeinflusst werden. Durch ein solches Design der Leitungsbandkante können am Übergang von GaAs zu  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  zweidimensionale Elektronengase erzeugt werden. Eine mögliche Schichtfolge und die resultierende Leitungsbandkante ist in Abb. 2.1 gezeigt. Zur Erhöhung der Beweglichkeit der 2D-Elektronen wird zuerst die aktive Grenzfläche gewachsen, dann eine undotierte Schicht (der so genannte *Spacer*) und erst danach die dotierte Schicht, welche die Elektronen für das 2DEG zur Verfügung stellt. Durch den Spacer erfolgt eine räumliche Trennung des 2DEG von den positiv geladenen Atomrümpfen der Dotierschicht, wodurch die Beweglichkeit des 2DEG erhöht wird.

Die in dieser Arbeit verwendeten Proben wurden in einer sehr dünnen Schicht (1-2 ML:  $\delta$ -Dotierung) mit Silizium dotiert. In der Regel kann das Verhalten von Donatoren im Halbleiter unter Berücksichtigung der Dielektrizität des Mediums und der effektiven Masse durch ein dem Wasserstoffatom ähnliches Modell approximiert werden [6], die Bindungsenergien liegen entsprechend im Bereich einiger meV. Silizium-Donatoren

---

<sup>1</sup>1985: integraler QHE, K. v. Klitzing; 1998: fraktioneller QHE, R. B. Laughlin, H. L. Störmer und D. C. Tsui



**Abbildung 2.1:** Schichtfolge zur Erzeugung eines zweidimensionalen Elektronengases (links) und resultierende Leitungsbandkante  $E_C$  (rechts).

können jedoch  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  auch in einer anderen, stärker gebundenen Konfiguration vorkommen [7]. Diese so genannten DX-Zentren bilden sich durch eine Relaxation des Gitters im Bereich des Donators und weisen Bindungsenergien auf, die stark vom Al-Gehalt abhängen. Für  $x = 0,3$  ergibt sich eine Bindungsenergie von etwa 120 meV [5]. Da gleichzeitig auch für die Erzeugung von DX-Zentren eine Energiebarriere existiert, ändert sich die Anzahl dieser DX-Zentren nach dem Abkühlen der Probe bei tiefen Temperaturen ( $< 150\text{ K}$ ) nicht mehr. Durch Beleuchten, beispielsweise mit einer IR-LED, können jedoch die Elektronen aus den DX-Zentren ins Leitungsband angeregt werden. Da die DX-Zentren nach Ausschalten der Beleuchtung aufgrund ihrer energetischen Struktur nicht mehr besetzt werden und die Leitfähigkeit des 2DEG durch die zusätzlichen Elektronen somit dauerhaft erhöht wird, spricht man auch von einem *persistiven* Fotoeffekt.

Die in dieser Arbeit untersuchten 2DEG sind in *invertierter* Reihenfolge gewachsen worden, d.h. es wurde zunächst die Dotierschicht und dann die 2DEG-Grenzfläche deponiert. Diese invertierte Schichtfolge hat den Nachteil, dass Dotieratome während des Wachstums leichter in Richtung der aktiven Grenzfläche segregieren können, was zu einer Verringerung der Qualität des 2DEG führen kann. Der Grund für die Invertierung der Schichtfolge ist die Position der Quantenpunkte zwischen dem 2DEG und der Oberfläche der Probe.

In Kapitel 4.3 ist auf Seite 56 ein Beispiel für eine Leitungsbandkante der verwendeten Probengeometrie gezeigt. Die Wachstumsparameter der untersuchten Hete-

rostrukturen sind im Anhang tabellarisch aufgeführt.

### 2.1.2 Elektronische Eigenschaften für $\mathbf{B}=0$

Zweidimensionale Elektronensysteme sind charakterisiert durch eine quasi-frei Bewegung der Elektronen in der  $xy$ -Ebene. In der dazu senkrechten  $z$ -Richtung werden die Ladungsträger durch ein Einschlusspotenzial  $V(z)$  mit diskreten Energieniveaus  $E_z^i$ , gebunden. Die Schrödingergleichung für ein solches System lautet

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi(\vec{r}) + V(z)\Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r}). \quad (2.1)$$

Zur Lösung dieser Gleichung bietet sich ein Produktansatz aus ebenen Wellen in  $xy$ -Richtung und einer nur von  $z$  abhängigen Funktion in  $z$ -Richtung an:

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{L_x L_y}} e^{i(k_x x + k_y y)} \phi(z) = \chi(x, y) \phi(z) \quad (2.2)$$

Dabei sind  $L_x$  und  $L_y$  die Probendimensionen in der  $x$ - $y$ -Ebene und  $k_x$  und  $k_y$  die zugehörigen Impulskoordinaten. Setzt man diesen Ansatz in die Schrödingergleichung ein, so erhält man die Gleichung

$$\left( \frac{\hbar^2(k_x^2 + k_y^2)}{2m} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + V(z) \right) \chi(x, y) \phi(z) = E \chi(x, y) \phi(z). \quad (2.3)$$

Durch eine Separation der Variablen kann diese Gleichung auf ein eindimensionales Problem zurück geführt werden:

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + V(z) \right) \phi(z) = \left( E - \underbrace{\frac{\hbar^2(k_x^2 + k_y^2)}{2m}}_{E_{x,y}} \right) \phi(z) = E_z^i \phi(z) \quad (2.4)$$

Es ergeben sich letztlich zwei entkoppelte Gleichungen für die Energien  $E_{x,y}$  bzw.  $E_z^i$ . Erstere liefern den für quasi-freie Elektronen erwarteten parabolischen  $E(k)$ -Verlauf, während die möglichen Eigenwerte in  $z$ -Richtung  $E_z^i$  dem jeweiligen Einschlusspotenzial entsprechend quantisiert sind. Die resultierende Gesamtenergie entspricht der Summe aus diesen beiden Termen:

$$E(i, k_x, k_y) = E_z^i + \frac{\hbar^2(k_x^2 + k_y^2)}{2m} \quad (2.5)$$

Eine möglichst ausschließliche Besetzung des Grundzustandes in  $z$ -Richtung kann bei tiefen Temperaturen ( $k_B T \ll E_F$ ) durch eine nicht zu hohe Elektronenkonzentra-



tion<sup>2</sup> gewährleistet werden. Ist eine solche Konfiguration mit nur einem besetzten Subband sichergestellt, so lässt sich aus der Abhängigkeit  $E(\vec{k})$  direkt die Zustandsdichte berechnen. Für freie Elektronen in zwei Dimensionen ergibt sich aus Gl. (2.5) eine konstante Zustandsdichte von [5]

$$D_{2D} = \frac{g_{s,v} m^*}{2\pi\hbar^2}. \quad (2.6)$$

Hier geht mit dem Parameter  $g_{s,v}$  die Spin-, sowie die so genannte Valleyentartung (d.h. die Anzahl äquivalenter Leitungsbandminima im  $k$ -Raum) ein<sup>3</sup>. Die Spinentartung beträgt  $g_s = 2$ , wird jedoch in hochbeweglichen Proben in hohen Magnetfeldern aufgehoben. Mit  $m^*$  wird die effektive Masse bezeichnet, für GaAs wird in dieser Arbeit der Wert  $m^* = 0,067m_0$  verwendet [8].

Abschließend soll hier noch der Einfluss des Potentials  $V(z)$  betrachtet werden. Durch dieses Potential wird einerseits die energetische Position des Grundzustandes des 2DEG festgelegt, andererseits ist es auch bestimmend für die örtliche Lage der mittleren Position der Ladungsträger. Für das Potential in der Umgebung einer AlGaAs/GaAs Grenzfläche sei in erster Näherung die folgende dreieckige Form angenommen (vgl. auch Abb. 2.1):

$$V_{\Delta}(z) = \begin{cases} \infty & |z| \leq 0 \\ eFz & |z| > 0 \end{cases}$$

Die im GaAs-Halbraum zu lösende Schrödingergleichung lautet

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + eFz \right) \Psi(z) = E_z^i \Psi(z) \quad (2.7)$$

und lässt sich durch die Substitutionen  $\bar{z} = z/z_0$  und  $\bar{\epsilon} = E_z^i/\epsilon$  mit

$$z_0 = \left( \frac{\hbar^2}{2emF} \right)^{1/3} \quad (\approx 4 \text{ nm}) \quad (2.8)$$

$$\epsilon = \left( \frac{(\hbar eF)^2}{2m} \right)^{1/3} = eFz_0 \quad (\approx 30 \text{ meV}) \quad (2.9)$$

auf eine einfache Form bringen. In Klammern angegeben sind typische Größenordnungen für ein Feld  $F = 7 \cdot 10^6 \text{ MVm}^{-1}$ . Die Substitutionen führen schließlich auf eine Airy-Gleichung der Form

$$\frac{\partial^2 \Psi(\bar{z})}{\partial \bar{z}^2} = (\bar{z} - \bar{\epsilon}) \Psi(\bar{z}) \quad (2.10)$$

<sup>2</sup>Ein grober Richtwert für die maximale Konzentration ist  $7 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-2}$ . Präzise lässt sie sich bei bekanntem Einschlusspotential als Produkt aus Quantisierungsenergie und zweidimensionaler Zustandsdichte berechnen. Der Wert  $n_{2d} = 7 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-2}$  entspricht damit einer Quantisierungsenergie von etwa 25 meV.

<sup>3</sup>Im GaAs-System gilt für die Valleyentartung  $g_v = 1$ .

und die zugehörigen Energien lassen sich numerisch berechnen. Für die beiden niedrigsten Zustände erhält man für typische Feldstärken Werte von  $E_z^0 \approx 70$  meV und  $E_z^1 \approx 120$  meV. Eine verbesserte Rechnung ist im Rahmen des selbstkonsistenten Hartree-Formalismus möglich. Insbesondere die Berücksichtigung der Abweichungen der Leitungsbandkante von  $V_\Delta(z)$  führen zu deutlich verringerten Subbandabständen der Größenordnung  $\Delta E_z = E_z^1 - E_z^0 = 25$  meV und entsprechend korrigierten Werten für die relevante Länge  $z_0$ .

Es lassen sich drei wichtige Ergebnisse festhalten:

- Die Zustandsdichte eines 2DEG ist für  $B = 0$  konstant und beträgt in GaAs  $m^*/\pi\hbar^2$ .
- Ein rein zweidimensionales System ist gewährleistet, wenn die Summe aus Fermienergie  $E_F = n_2 d \pi \hbar^2 / m^*$  und thermischer Energie  $k_B T$  deutlich kleiner ist als  $\Delta E_z$ , daher sollte eine maximale Ladungsträgerzahl von  $7 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  nicht überschritten werden.
- Der Erwartungswert der Aufenthaltswahrscheinlichkeit liegt etwa 4-8 nm von der Grenzfläche entfernt.

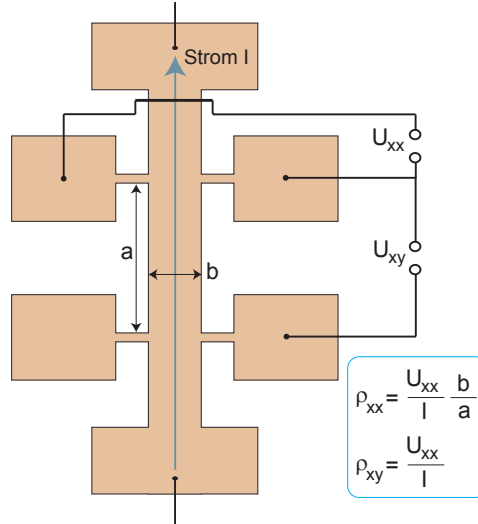
### 2.1.3 Das 2DEG im Magnetfeld: Quanten-Hall-Effekt

Betrachtet man ein in  $xy$ -Richtung ausgedehntes 2DEG in einem schwachen<sup>4</sup> senkrechten Magnetfeld  $\vec{B} = (0, 0, B)$ , so ist der Leitfähigkeitstensor  $\underline{\underline{\sigma}}$  gegeben durch [5]

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega_c \tau)^2} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c \tau \\ \omega_c \tau & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

wobei  $\omega_c = eB/m^*$  die Zyklotronfrequenz und  $\tau$  die Impulsrelaxationszeit angibt. Für die Komponenten des spezifischen Widerstandes folgt dann  $\rho_{xx} = 1/\sigma_0$  und  $\rho_{xy} = -\omega_c \tau / \sigma_0 = -B/en_2 d$  [4]. Der Längswiderstand ist daher in dieser Näherung unabhängig vom Magnetfeld, während die Messung des Querwiderstandes eine Bestimmung der Ladungsträgerzahl  $n_2 d$  ermöglicht (klassischer Hall-Effekt [9]). In dieser Arbeit werden diese Magneto-Widerstände in der so genannten *Hall-Bar*-Geometrie gemessen (Abb.2.2). In dieser Geometrie lassen sich die Ladungsträgerzahl  $n_2 d$  und ihre Beweglichkeit  $\mu$  bei konstantem Strom  $I$  aus den gemessenen Spannungen  $U_{xx}$

<sup>4</sup>In schwachen Magnetfeldern ist die Bedingung  $\omega_c < 1/\tau$  erfüllt.



**Abbildung 2.2:** Hall-Bar-Geometrie zur Bestimmung der Transportparameter eines 2DEG.

und  $U_{xy}$  wie folgt bestimmen:

$$n_{2d} = \frac{IB}{eU_{xy}}, \quad (2.12)$$

$$\mu = \frac{I}{en_{2d}U_{xx}} \frac{a}{b}. \quad (2.13)$$

Die Eigenschaften eines 2DEG ändern sich drastisch, wenn die Zyklotronfrequenz größer wird als die Streurrate  $1/\tau$ . Entsprechend der Landau-Eichung sei das Vektorpotenzial gemäß der Gleichung  $\vec{A} = (0, Bx, 0)$  gewählt. Die Schrödingergleichung hat dann die Form

$$\left( \frac{1}{2m^*} \left[ -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left\{ -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} + eBx \right\}^2 - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] + V(z) \right) \Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r}). \quad (2.14)$$

Das Ausmultiplizieren der inneren Klammer führt nun auf die Gleichung

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 - \frac{ie\hbar B}{m^*} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{(eBx)^2}{2m^*} + V(z) \right) \Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r}), \quad (2.15)$$

in welcher das das Potenzial in  $z$ -Richtung  $V(z)$  unabhängig von den beiden anderen Richtungen behandelt werden kann, was wieder auf die schon im Fall  $B = 0$  behandelten Energieniveaus  $E_z^i$  führt. Aus dem verbleibenden Teil der Schrödingergleichung kann auf die Form der Wellenfunktion geschlossen werden. Da das Vektorpotenzial nicht von der  $y$ -Koordinate abhängt, sind in dieser Richtung ebene Wellen  $\exp(ik_y y)$

anzusetzen. Die Ersetzungen  $\omega_c = eB/m^*$  und  $\ell_B = (\hbar/eB)^{1/2}$  führen nun auf eine Gleichung für den Anteil  $u(x)$  der Wellenfunktion in  $x$ -Richtung, die der eines um  $x_k = -\hbar k_y/eB$  verschobenen harmonischen Oszillators entspricht:

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m^* \omega_c^2 [x - x_k]^2 \right) u(x) = E u(x) \quad (2.16)$$

Die Lösung eines solchen quantenmechanischen Oszillators ist bekannt [10] und führt auf äquidistante Energieeigenwerte

$$E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c, \quad (2.17)$$

während die Wellenfunktionen  $\Phi$  in  $xy$ -Richtung die Form

$$\Phi_{n,k} \propto H_n \left( \frac{x - x_k}{\ell_B} \right) \exp \left( -\frac{(x - x_k)^2}{2\ell_B^2} \right) \exp(ik_y y) \quad (2.18)$$

annehmen, wobei  $H_n$  die jeweiligen Hermiteschen Polynome bezeichnet.

Während für  $B=0$  eine konstante Zustandsdichte erhalten wurde, sind die Zustände hier auf eine Serie von  $\delta$ -Funktionen kollabiert. Diese so genannten Landau-Niveaus sind bezüglich der Impulskoordinate in  $y$ -Richtung hochgradig entartet. Der Entartungsgrad  $n_{LL}$  ist unter der Annahme periodischer Randbedingungen durch

$$n_{LL} = \frac{2eB}{h} \quad (2.19)$$

gegeben [5], wenn eine zusätzliche Spinaufspaltung nicht berücksichtigt wird. Die Anzahl der Zustände pro Landau-Niveau ist demnach identisch mit der über einen Energiebereich  $\hbar \omega_c$  integrierten Zustandsdichte für  $B = 0$ . Da die Landau-Niveaus untereinander gerade diesen Abstand haben, konzentrieren sich die Zustände eines jeden solchen Energiebereiches gerade auf das im Zentrum liegende Landau-Niveau. Mittelt man über eine große Anzahl von Landau-Niveaus oder betrachtet ganzzahlige Füllfaktoren, so ändert das Magnetfeld die Summe der Zustände bis zur betrachteten Energie nicht. Ganzzahlige Füllfaktoren sind unter Vernachlässigung der Spinaufspaltung durch die Bedingung definiert, dass die Anzahl der im System befindlichen Elektronen  $n_{2d}$  ein ganzzahliges Vielfaches  $\nu$  des Entartungsgrades der Landau-Niveaus ist:

$$n_{2d} = \nu n_{LL} = \nu \frac{2eB}{h}, \quad \nu = 1, 2, 3... \quad (2.20)$$

Erhöht man bei konstanter Ladungsträgerzahl in einem solchen idealen 2DEG das senkrechte Magnetfeld, so können die Landau-Niveaus immer mehr Elektronen aufnehmen. Die Fermienergie befindet sich im höchsten besetzten Niveau (Index  $k$ ). Mit steigendem Magnetfeld steigt die Energie dieses Niveaus und damit die Fermienergie

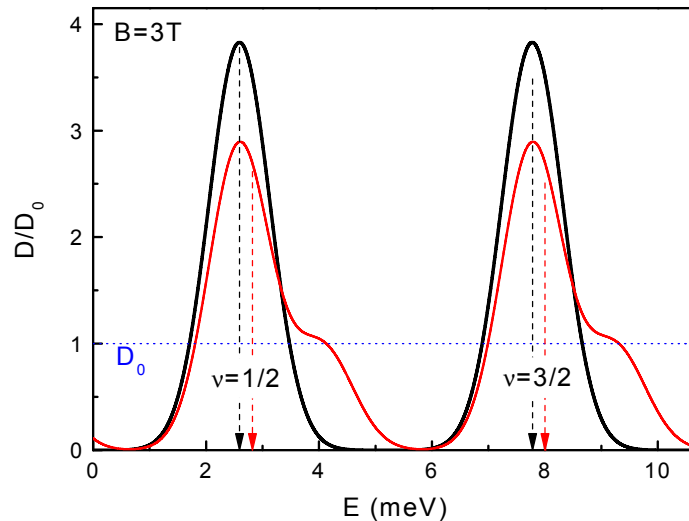
entsprechend Gl. (2.17) an und die Besetzung des  $k$ -ten Niveaus nimmt immer weiter ab. Schließlich springt die Fermienergie bei Erreichen des ganzzahligen Füllfaktors  $\nu = k - 1$  in das nächstniedrige Niveau (siehe hierzu auch Abb. 2.5).

In realen Systemen sind die  $\delta$ -förmigen Landau-Niveaus durch Streuprozesse verbreitert und diese abrupten Übergänge entsprechend aufgeweicht. Im einfachsten Fall ist die Verbreiterung  $\Gamma$  durch die Unschärferelation gegeben, welcher die Beziehung

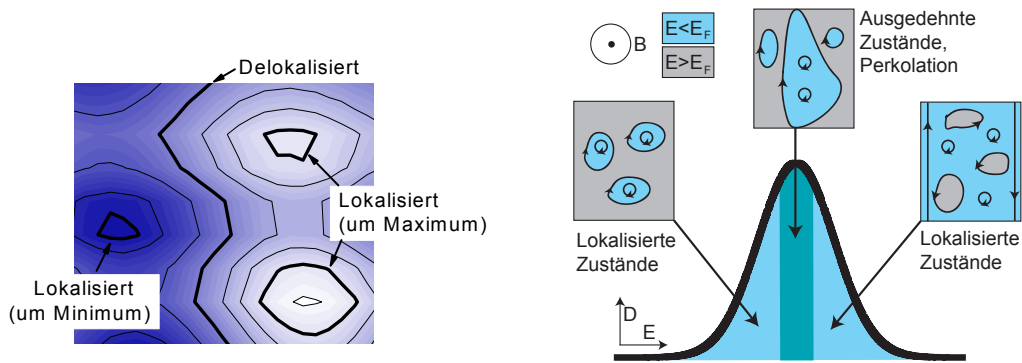
$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau} \quad (2.21)$$

entspricht. Die Ursache der Verbreiterung liegt in Streuprozessen an Störungen des perfekten gitterperiodischen Kristallpotenzials. Diese Störungen sind mit Unebenheiten der Potenziallandschaft verbunden und die resultierende Gesamtenergie eines Elektrons hängt nicht mehr nur vom Landau-Niveau, sondern auch von seiner Position in diesem Unordnungspotenzial ab. Auf diese Weise resultiert letztlich die Form der gesamten Zustandsdichte aus dieser Potenziallandschaft.

In Abbildung 2.3 sind zwei mögliche Formen der Verbreiterung der Landau-Niveaus dargestellt. Liegt eine Asymmetrie der Zustandsdichte vor, so erzeugt diese ein Ver-



**Abbildung 2.3:** Gauß-förmige Zustandsdichte für ein symmetrisches (schwarz) und ein asymmetrisches (rot) Streupotenzial. Die Asymmetrie wurde durch ein Anheben der Energie von 25% der Zustände um 1,25 meV erzeugt. Die Positionen mit halbzahligem Füllfaktor sind jeweils mit Pfeilen markiert.  $D_0$  entspricht der konstanten Zustandsdichte für  $B = 0$ .



**Abbildung 2.4:** Lokalisierungsmodell des Quanten-Hall-Effektes. Links ist eine Potenziallandschaft und eine Auswahl von „Küstenlinien“ gezeigt. In hohen Magnetfeldern kondensiert die Zustandsdichte auf Landau-Niveaus (rechts), die durch die Potenziallandschaft verbreitert sind. Die Zustände bei niedrigen Energien sind an den Rändern von Potenzialminima lokalisiert, während die Zustände bei hohen Energien im Bereich von Potenzialmaxima lokalisiert sind. Im mittleren Energiebereich perkoliert die „Küstenlinie“ und es bilden sich ausgedehnte Zustände. Diese gehen für höhere Energien in die so genannten Randkanäle über.

schieben der Positionen mit halbzahligen Füllfaktor. Im Falle von vornehmlich repulsiven Streuzentren erfolgt diese Verschiebung zu höheren Energien (Abb. 2.3, rote Kurve). Dies äußert sich im Quanten-Hall-Effekt (s.u.) in einer Verschiebung der Hall-Plateaus zu höheren Magnetfeldern [11]. Interessanterweise bleiben jedoch die Positionen mit ganzzahligen Füllfaktor unverändert. Dies scheint schon mit einem einfachen Argument zu beweisen zu sein: Würden auch die Positionen der ganzzahligen Füllfaktoren verschoben, so würde das Magnetfeld die Anzahl der über viele Landau-Niveaus aufsummierten Zustände verändern, da die Diskrepanz der Zustandssumme mit zunehmende Index immer weiter anwachsen würde.

Eine weitere Besonderheit in Abb. 2.3 ist, dass die Position des Maximums der asymmetrischen Zustandsdichte nicht mehr mit der Position des halbzahligen Füllfaktors übereinstimmt. Bei einer symmetrischen Zustandsdichte geht man davon aus, dass sich im Bereich der maximalen Zustandsdichte ausgedehnte Zustände befinden, die zur Leitfähigkeit beitragen [4]. Die Zustände in den Randbereichen der jeweiligen Maxima sind in Potenzialmulden oder um Potenzialberge lokalisiert (Abb. 2.4). Dies wirft die Frage auf, wo nun bei asymmetrischen Zustandsdichten die ausgedehnten Zustände liegen. Diese Frage ist bisher noch nicht abschließend geklärt [12]. Rechnungen deuten darauf hin, dass sich die delokalisierten Zustände weder an der Energie des ungestörten Landau-Niveaus noch bei der maximalen Zustandsdichte befinden [13].

Die spezielle Form der Zustandsdichte hängt direkt mit dem in zweidimensionalen Elektronensystemen zu beobachtenden Quanten-Hall-Effekt zusammen [1]. Misst man bei tiefen Temperaturen die Abhängigkeit des Widerstandes vom Magnetfeld, so findet man starke Abweichungen vom klassischen Hall-Effekt. Im Bereich ganzzahliger Füllfaktoren treten im transversalen Widerstand  $\rho_{xy}$  Plateaus bei den Werten

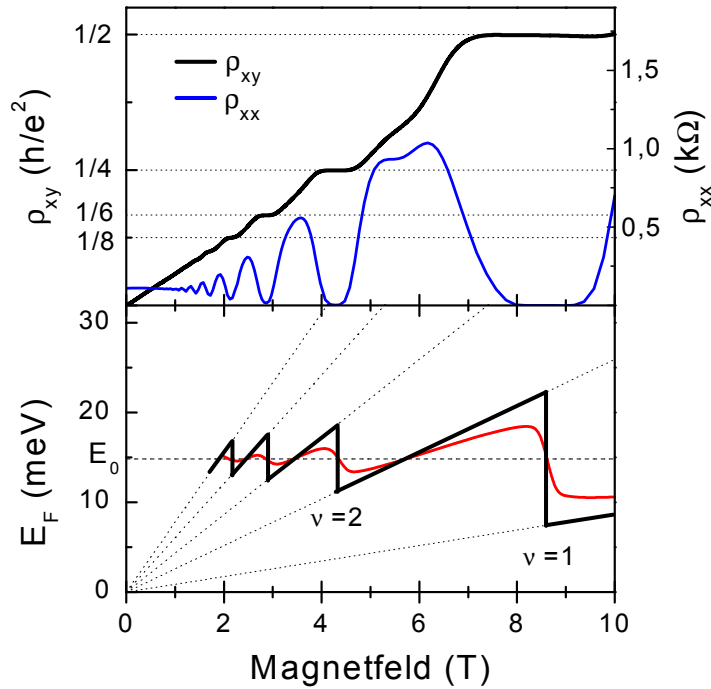
$$\rho_{xy} = \frac{h}{\nu e^2}, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots \quad (2.22)$$

auf, wobei  $\nu$  den Index des (Spin-aufgespalteten) Landau-Niveaus bezeichnet. Diese quantisierten Werte sind unabhängig von der Geometrie der Probe und so gut definiert, dass sie heute als Basis der Definition des Widerstandes dienen.

Im longitudinalen Widerstand werden zugleich ausgeprägte  $1/B$ -periodische Oszillationen beobachtet (die sog. *Shubnikov-de Haas Oszillationen*). Ein Plateau in  $\rho_{xy}$  geht dabei immer einher mit einem Minimum von  $\rho_{xx}$ , während  $\rho_{xx}$  zwischen den Plateaus Maxima aufweist. Abbildung 2.5 zeigt eine Messung des Quanten-Hall-Effektes an einer Probe mit eingebetteten Quantenpunkten zusammen mit der entsprechenden Oszillation der Fermienergie. Die Oszillationen des Längswiderstandes in kleinen Magnetfeldern reflektieren die jeweils aktuelle Zustandsdichte an der Fermikante. Das Verschwinden von  $\rho_{xx}$  in quantisierenden Magnetfeldern ist jedoch direkt mit dem Quanten-Hall-Effekt verknüpft.

Die wichtigsten Eigenschaften des Quanten-Hall-Effektes können im schon diskutierten Bild der durch Streuprozesse verbreiterten Landau-Niveaus verstanden werden. Entsprechend Abb. 2.4 sind die Zustände in den Randbereichen der Landau-Niveaus lokalisiert, während die Zustände im Zentrum der Landau-Niveaus ausgedehnt sind. Befindet man sich gerade bei einem ganzzahligen Füllfaktor und erhöht die Ladungsträgerzahl, so werden vom nächsthöheren Landau-Niveau zunächst die Zustände besetzt, welche in Potenzialmulden lokalisiert sind. Da kein Ladungsaustausch zwischen den Rändern der Probe möglich ist, ändert sich die Hall-Spannung nicht. Nur im Bereich der ausgedehnten Zustände, d.h. bei halbzahligem Füllfaktor ändert sich die Hall-Spannung sprunghaft auf den klassisch im Zentrum des Plateaus erwarteten Wert. Füllt man weitere Elektronen in das System, sind diese nun in den Randbereichen der Probe und um Potenzialmaxima lokalisiert und auch hier bleibt die Hall-Spannung konstant. Die Beziehungen zwischen den Elementen des Leitfähigkeits- und Widerstandstensors bedingen dabei, dass in den Bereichen der lokalisierten Zustände sowohl  $\sigma_{xx}$ , als auch  $\rho_{xx}$  verschwinden.

Diese einfachen Betrachtungen machen deutlich, dass durch eine Kontrolle der Potenziallandschaft, wie sie z.B. durch das steuerbare Laden von Elektronen in benachbarte Quantenpunkte erreicht werden kann, die Eigenschaften des 2DEG und insbe-



**Abbildung 2.5:** Quanten-Hall-Effekt der Probe 12177 bei einer Ladungsträgerdichte von  $4,15 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ . Im oberen Diagramm sind die Widerstände  $\rho_{xy}$  und  $\rho_{xx}$  gegen das Magnetfeld aufgetragen, das untere Diagramm zeigt die mit steigendem Magnetfeld einhergehende Oszillation der Fermienergie für ein ideales 2DEG (schwarz), bzw. für Gauß-förmig verbreiterte Landau-Niveaus (rot).

sondere der Quanten-Hall-Effekt direkt beeinflusst werden können.

Die hier gegebene kurze Einführung in den Quanten-Hall-Effekt kann dem Umfang dieses Themenkomplexes naturgemäß nicht in vollem Umfang gerecht werden. Es sei daher an dieser Stelle auf eine mathematisch striktere Behandlung des Lokalisierungsbildes von Thouless [2], Arbeiten zum Randkanalbild des Quanten-Hall-Effektes [14, 15] und zusammenfassende Darstellungen (z.B. [16]) verwiesen.

#### 2.1.4 Streuung und Abschirmung

Bewegen sich Elektronen in einem perfekten Kristallgitter unter dem Einfluss eines elektrischen Feldes  $\vec{F}$ , so verschwindet der elektrische Widerstand und die Elektronen gehorchen den Bewegungsgleichungen



$$\vec{v}(\vec{k}) = \frac{1}{\hbar} \vec{\nabla}_{\vec{k}} E(\vec{k}) \quad (2.23)$$

und

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = -\frac{e}{\hbar} \vec{F}. \quad (2.24)$$

Ein solches Verhalten, d.h. ein stetiges Anwachsen der Geschwindigkeit mit der Zeit in einem konstanten Feld, wird in realen Systemen nicht beobachtet, da die Streuung an Phononen und anderen Abweichungen vom idealen Kristall durch einen Reibungsterm der Form  $\hbar\vec{k}/\tau$  berücksichtigt werden muss. Die hier auftretende mittlere Streuzeit  $\tau$  setzt sich dabei nach der Matthiesenschen Regel ( $1/\tau = \sum_i 1/\tau_i$ ) aus den Beiträgen  $\tau_i$  der einzelnen relevanten Streumechanismen (Phonon, Elektron-Elektron-Wechselwirkung, Grenzflächenstreuung etc.) zusammen. Die resultierende Leitfähigkeit  $\sigma$  ist dann proportional zu dieser Streuzeit und der Anzahl der Ladungsträger  $n$  [4]:

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m^*} = ne\mu \quad (2.25)$$

Die Größe  $\mu = e\tau/m^*$  bezeichnet dabei die Beweglichkeit der Ladungsträger.

Die einzelnen Streuzeiten  $\tau_i$  hängen stark von der Art und dem Grad der jeweils zugrunde liegenden Störung der Kristallsymmetrie ab [17]. Für diese Arbeit ist vor allem die Wechselwirkung eines 2DEG mit benachbarten Coulombstreuern relevant. Das Coulombpotenzial  $V(r) = e^2/4\pi\epsilon\epsilon_0 r$  wird zunächst in den Impulsraum Fouriertransformiert (Koordinate  $q$ ). Befindet sich der Coulombstreuer im Abstand  $d_1$  vom 2DEG, so ergibt sich für dieses transformierte Potenzial nach [5] die Form

$$\tilde{V}(q) = \frac{e^2}{2\epsilon\epsilon_0} \frac{e^{-qd_1}}{q + q_{TF}}, \quad (2.26)$$

wobei die Abschirmung des Potenzials durch Bildladungen im 2DEG in der Thomas-Fermi-Näherung<sup>5</sup> durch

$$q_{TF} = \frac{m^*e^2}{2\pi\epsilon\epsilon_0\hbar^2} \quad (2.27)$$

berücksichtigt wurde. Die Berechnung der durch dieses Potenzial hervorgerufene Streuwirkung geht auf Stern und Howard zurück [18] und wird in der Literatur vielfach zur Modellierung von 2DEG-Beweglichkeiten benutzt [3, 19–21], insbesondere auch in Systemen mit eingebetteten Quantenpunkten [22, 23]. Davies [5] gibt für die Streurrate

<sup>5</sup>Diese setzt ein langsam veränderliches Potenzial und im Vergleich zur Fermienergie kleine Temperaturen voraus.

einer Schicht von Coulombstreuern der Dichte  $n_{imp}^{2d}$  die Gleichung

$$\frac{1}{\tau_{2d}} = n_{imp}^{2d} \frac{m^*}{2\pi\hbar^3 k_F^3} \left( \frac{e^2}{2\epsilon\epsilon_0} \right)^2 \int_0^{2k_F} \frac{e^{-2qd_1}}{(q + q_{TF}G(q))^2} F(q)^6 \frac{q^2 dq}{\sqrt{1 - (q/2k_F)^2}} \quad (2.28)$$

an, in die zwei Formfaktoren ( $F(q)$  und  $G(q)$ ) eingehen, die die Ausdehnung der 2D-Wellenfunktion berücksichtigen. Während das Potenzial der Coulombstreuung in Gl. (2.26) quadratisch eingeht, hängt die Streuzeit nur linear von der Dichte der Streuzentren ab. Dieser Unterschied wirft die Frage auf, ob bei mehrfach geladenen Quantenpunkten die einzelnen Elektronen korreliert sind und somit die Summe ihrer Potenziale quadriert wird, oder ob die Elektronen als unabhängige Streuer zu werten sind. Im zweiten Fall verringert sich die Streuzeit nur linear mit der Anzahl der Elektronen.

Gleichung (2.28) kann numerisch integriert werden. Die resultierende Streuzeit bzw. die entsprechende Beweglichkeit hängt über den Fermiimpuls  $k_F$  überproportional von der Anzahl der Ladungsträger im 2DEG ab.

Der Übergang von einer zweidimensionalen Schicht von Coulombstreuern zu einer homogenen (3D)-Verunreinigung kann durch eine zusätzliche Integration von Gleichung (2.28) über den Abstand  $d_1$  durchgeführt werden. Das Ergebnis kann mit der Näherung  $q_{TF}/2k_F \approx 1$  analytisch angegeben werden [5]:

$$\frac{1}{\tau_{3d}} \approx n_{imp}^{3d} \frac{m^*}{2\pi\hbar^3 k_F^3} \left( \frac{e^2}{2\epsilon\epsilon_0} \right)^2. \quad (2.29)$$

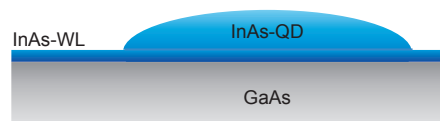
Durch sehr große Abstände der Dotieratome von der aktiven Grenzfläche und eine möglichst vollständige Vermeidung von sonstigen Verunreinigungen können heute Beweglichkeiten im Bereich einiger  $10^6 \text{ cm}^2/\text{Vs}$  erreicht werden [24]. Wegen der Nähe zu den in die Schichtfolge integrierten Quantenpunkten liegt die Beweglichkeit der in dieser Arbeit untersuchten 2DEG hingegen unterhalb von  $10^5 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ .

## 2.2 Selbstorganisierte InAs-Quantenpunkte

In dieser Arbeit werden Proben untersucht, die neben einem zweidimensionalen Elektronengas eine Schicht InAs-Quantenpunkte enthalten. Diese Quantenpunkte werden nicht lithografisch definiert, sondern entstehen in einem selbstorganisierten Prozess beim Wachstum der Heterostrukturen. In den folgenden Abschnitten wird ein kurzer Überblick über die Herstellung und die elektronischen Eigenschaften solcher Quantenpunkte gegeben. Weiterführende Darstellungen sind in der Literatur zu finden (z.B. [25–27]).

### 2.2.1 Die Stranski-Krastanov Wachstumsmode

Ein Quantenpunkt ist ein System, bei dem die Einschränkung der Wellenfunktion der darin enthaltenen Elektronen bzw. Löcher in allen drei Raumrichtungen zu einer beobachtbaren Quantisierung führt. Heutzutage ist es möglich, solche Quantenpunkte lithografisch zu definieren, ein eindrucksvolles Beispiel für eine solche lithografische Strukturierung stammt beispielsweise von Tarucha *et al.* [28]. Eine deutlich einfachere Methode, sehr viele Quantenpunkte auf einmal zu erzeugen, besteht in der Ausnutzung der unterschiedlichen Gitterkonstanten verschiedener Materialien. Der Unterschied der Gitterkonstante von ca. 7% und unterschiedliche Oberflächenenergien führen dazu, dass InAs auf GaAs im Stranski-Krastanov-Modus aufwächst (Abb. 2.6). In dieser



**Abbildung 2.6:** Stranski-Krastanov-Wachstum im InAs/GaAs-System. Zunächst bildet sich eine Benetzungsschicht (WL), ab einer Bedeckung von 1,6 Monolagen kondensieren auf dieser Benetzungsschicht die InAs-Quantenpunkte.

Wachstumsmode wird das Substrat (hier: GaAs) zunächst mit einer Monolage des Aufdampfmaterials (hier: InAs) bedeckt. Diese erste Monolage wird als Benetzungsschicht bezeichnet (engl.: *wetting layer*). Sie wächst pseudomorph mit der Gitterkonstanten des Substrats auf und benetzt dieses vollständig. Im GaAs/InAs-System erfolgt danach bei etwa 1,6 Monolagen der Übergang zum Insel-Wachstum [29], wobei die Benetzungsschicht zwischen den Quantenpunkten erhalten bleibt und nur das überschüssige InAs in Form von versetzungsfreien Inseln kondensiert.

Die so hergestellten Quantenpunkte haben eine sehr schmale Größenverteilung. Der Durchmesser beträgt etwa 20-30 nm, während die Höhe nur bei etwa 5-7 nm liegt. Nach dem Wachstum der Inseln können diese wiederum mit GaAs überwachsen und so das Wachstum der Heterostruktur mit der zusätzlich gewünschten Schichtfolge vollendet werden.

### 2.2.2 Der zweidimensionale harmonische Oszillator

Aufgrund der im Vergleich zu GaAs kleineren Bandlücke von InAs stellen die InAs-Inseln in der GaAs-Matrix ein effektives Einschlusspotenzial dar. Der räumliche Ein-

schluss in der vertikalen  $z$ -Richtung (d.h. in Wachstumsrichtung) ist durch die unterschiedlichen Dimensionen sehr viel stärker als in der  $xy$ -Ebene. In dieser vertikalen Richtung ist daher nur das niedrigste Niveau besetzt, ganz ähnlich wie im Falle des 2DEG (s.o.) kann diese Richtung also auch hier zunächst vernachlässigt werden. Das Einschlusspotenzial in  $xy$ -Richtung kann in erster Näherung als parabolisch angenommen werden, aus Symmetriegründen treten linear vom Ort abhängende Beiträge nicht auf. Die Annahme eines solchen parabolischen Modells hat sich in der Vergangenheit zur Erklärung experimenteller Daten als sehr erfolgreich erwiesen [26, 30–32] und gibt auch die in dieser Arbeit ermittelten Daten hervorragend wieder (siehe z.B. Abb. 4.4 auf Seite 47).

Die Lösung der Schrödingergleichung für ein parabolisches Potenzial der Form

$$V(x, y) = \frac{1}{2} m^* \omega_0 (x^2 + y^2) \quad (2.30)$$

führt unter zusätzlicher Berücksichtigung eines Magnetfeldes<sup>6</sup> auf Energieeigenwerte der Form [33, 34]

$$E_{n,l} = (2n + |l| + 1) \hbar \omega_{\text{eff}} + \frac{1}{2} l \hbar \omega_c, \quad (2.31)$$

wobei  $n$  die radiale und  $l$  die Drehimpuls-Quantenzahl angibt. Die Zyklotronfrequenz  $\omega_c$  ist analog zum weiter oben betrachteten 2DEG über  $\omega_c = eB/m^*$  definiert. Das durch  $\omega_{\text{eff}}$  bestimmte *effektive* Einschlusspotenzial ist durch

$$\omega_{\text{eff}} = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{1}{4} \omega_c^2} \quad (2.32)$$

gegeben. Mit dem Anlegen eines Magnetfeldes sind demnach hier zwei Effekte verbunden: Zum einen führt die orbitale Zeeman-Energie zu einer Aufspaltung der Zustände entsprechend ihrer Drehimpulsquantenzahl  $l$  (letzter Term in Gl. (2.31)). Zum anderen erfahren die Elektronen unabhängig davon ein effektiv erhöhtes Einschlusspotenzial (Gl. (2.32)) und eine damit verbundene diamagnetische Verschiebung.

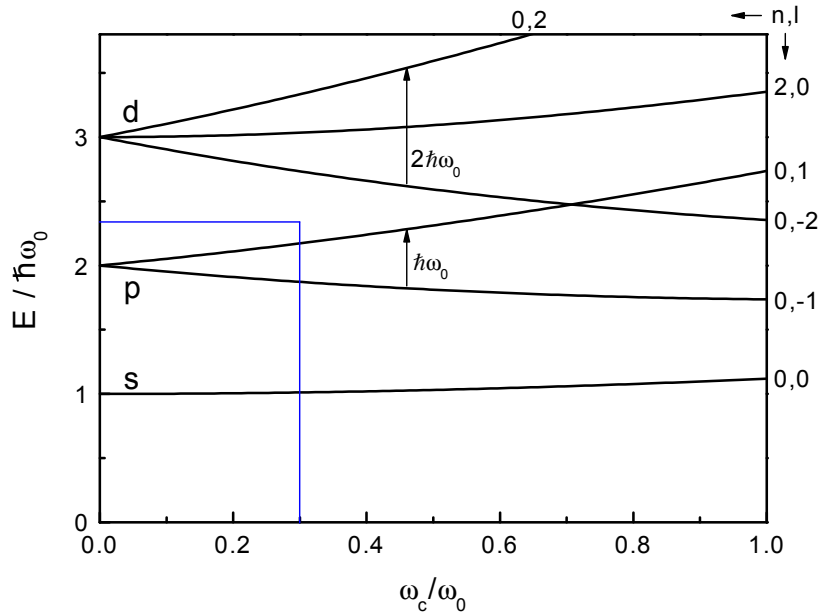
Die Entartung der einzelnen Zustände ist durch die Symmetrie des Problems bestimmt, der energetisch niedrigste  $s$ -artige Zustand ( $n = 0, l = 0$ ) kann von zwei Elektronen mit unterschiedlichem Spin besetzt werden. Der nächsthöhere  $p$ -Zustand ist nur für  $B = 0$  entartet, die zugehörige Einteilchenenergie von  $2\hbar\omega_0$  kann unter der Voraussetzung  $n = 0$  durch die Quantenzahlen  $l = \pm 1$  gebildet werden und ist damit insgesamt 4-fach entartet. Die bis hierhin durch die Nomenklatur angedeutete Analogie zur Atomphysik funktioniert bei den  $d$ -Zuständen ( $E_{B=0} = 3\hbar\omega_0$ ) nicht mehr, diese können sowohl durch  $[n = 1, l = 0]$  als auch durch  $[n = 0, l = \pm 2]$  gebildet

---

<sup>6</sup>Der Einfluss des Elektronenspins wird jedoch zunächst aufgrund des kleinen effektiven  $g$ -Faktors vernachlässigt.

werden und sind damit bei  $B = 0$  insgesamt 6-fach entartet. Allgemein sind bei  $B = 0$  die Zustände der Energie  $m\hbar\omega_0$  jeweils  $2m$ -fach entartet.

Im Magnetfeld spalten die Fock-Darwin Zustände auf, die entsprechenden Einteilchenenergien sind in Abb. 2.7 dargestellt. Die Aufspaltung der  $p$ -Zustände entspricht



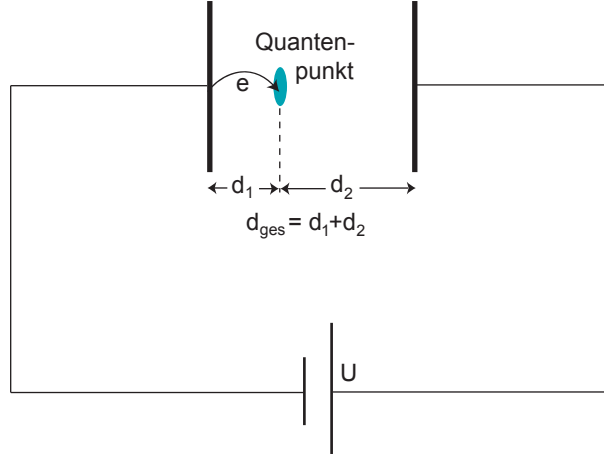
**Abbildung 2.7:** Energie der ersten 6 Fock-Darwin-Zustände im Magnetfeld. Im Randbereich sind die jeweiligen Quantenzahlen aufgeführt, das blaue Quadrat umschließt den Bereich des Spektrums, der in der vorliegenden Arbeit untersucht wird.

nach (2.31) der Energie  $\hbar\omega_c = \hbar eB/m^*$  und ermöglicht daher eine Bestimmung der effektiven Masse.

### 2.2.3 Coulombblockade

Die Fock-Darwin-Zustände  $E_{n,l}$  geben nur die Einteilchenenergien von Elektronen in Quantenpunkten wieder, zusätzlich muss jedoch auch die (Coulomb-)Wechselwirkung der einzelnen Elektronen berücksichtigt werden. Damit ist die Grundzustandsenergie eine komplexe Funktion der Anzahl der Elektronen im Quantenpunkt. Zusätzliche Elektronen werden nur dann auf den Quantenpunkt übertragen, wenn diese das durch die schon vorhandenen Elektronen verursachte Coulombpotenzial überwinden können („Coulombblockade“).

In dieser Arbeit werden die Eigenschaften von selbstorganisierten Quantenpunkten mittels der Methode der Kapazitätsspektroskopie untersucht. Die Quantenpunkte befinden sich dabei zwischen zwei Kondensatorplatten, an die eine Spannung  $U$  angelegt wird. Abbildung 6.17 gibt einen Überblick über die Geometrie und die verwendete Notation. Von der an den Kondensatorplatten angelegten Spannung  $U$  führt nur der



**Abbildung 2.8:** Geometrie bei der Kapazitätsmessung an Strukturen mit eingebetteten Quantenpunkten. Die linke Kondensatorplatte ist durch einen Tunnelkontakt mit dem Quantenpunkt verbunden. Diese linke Platte wird im Folgenden als Rückkontakt bezeichnet, während die rechte Platte der Gateelektrode entspricht.

Anteil  $eU/\lambda$  zu einer Energieerhöhung der Quantenpunktelektronen, wobei der *geometrische Hebelarm*<sup>7</sup>  $\lambda$  gegeben ist durch

$$\lambda = \frac{d_{ges}}{d_1}. \quad (2.33)$$

Die Gesamtenergie des Systems bei einem mit  $N$  Elektronen besetzten Quantenpunkt lässt sich ausdrücken als Summe aus Einteilchenenergie  $E^{SP}$ , Wechselwirkungsterm  $E^C$  und elektrostatischer Energie der Elektronen im Kondensator [26]:

$$E_N = E^{SP}(N) + E^C(N) - \frac{1}{\lambda} N e U \quad (2.34)$$

Die Wechselwirkung der Quantenpunktelektronen mit den Bildladungen auf den Kondensatorplatten wird hier vernachlässigt, kann aber leicht nachträglich berücksichtigt

<sup>7</sup>Eine präzisere Umrechnung der Gatespannung in eine Energieskala erfordert die Berücksichtigung weiterer Faktoren (z.B. der unterschiedlichen Dielektrizitäten der beteiligten Schichten) und wird in Kapitel 6 diskutiert.

werden (s.u.). Auch der Einfluss des Magnetfeldes wird im Folgenden nicht berücksichtigt, kann jedoch durch eine entsprechende Ersetzung der Einteilchenenergien und die weiter unten diskutierte kleine Änderung der Wechselwirkungsenergien nachträglich eingeführt werden.

Die Anzahl der Elektronen im Quantenpunkt wird immer gerade dann von  $N$  auf  $N + 1$  erhöht, wenn ein Elektron im Rückkontakt die Fermienergie  $E_F$  besitzt, um die Differenz der jeweiligen Grundzustandsenergien zu überwinden. An diesen Punkten sind die Besetzungszahlen  $N$  und  $N + 1$  energetisch äquivalent und es gilt:

$$E_F = E_{N+1} - E_N \quad (2.35)$$

Diese Einbeziehung der Fermienergie ist für 3D-Rückkontakte nicht erforderlich, da die Fermienergie in diesen Systemen konstant ist. Die Fermienergie kann dann als Nullpunkt der Energie dienen [26]. Bei einem 2D-Rückkontakt ist es sinnvoller, den Nullpunkt der Energie auf die Unterkante des besetzten 2D-Subbandes zu legen, um Änderungen der Fermienergie berücksichtigen zu können.

Diese Beziehungen können nun in Spannungsdifferenzen  $\Delta U_{N,N+1}$  umgerechnet werden, die zum Tunneln zusätzlicher Elektronen in den Quantenpunkt erforderlich sind. Die ersten beiden Elektronen haben die Grundzustandsenergie

$$E_1 = \hbar\omega_0 - \frac{1}{\lambda}eU_1 \quad (2.36)$$

$$E_2 = 2\hbar\omega_0 + E_{ss}^C - 2\frac{1}{\lambda}eU_2, \quad (2.37)$$

wobei  $E_{ss}^C$  die Wechselwirkungsenergie der beiden Elektronen der  $s$ -Schale bezeichnet. Die Gleichungen (2.35)-(2.37) führen auf Ladespannungen von

$$U_1 = (\hbar\omega_0 - E_{F,1})\frac{\lambda}{e}, \quad (2.38)$$

$$U_2 = (\hbar\omega_0 + E_{ss}^C - E_{F,2})\frac{\lambda}{e}. \quad (2.39)$$

Eine Änderung der Fermienergie im Rückkontakt ist auf diese Weise direkt mit einer Änderung der Ladespannungen der Quantenpunktelektronen verbunden. Umgekehrt kann man bei bekannter Energie der Quantenpunkte aus der Ladespannung auf die Änderung der Fermienergie schließen. Diese Gleichungen und ihre Entsprechungen für größere Elektronenzahlen sind daher die Grundlage der in Kapitel 5 diskutierten Spektroskopie der Landau-Niveaus des 2D-Rückkontaktes.

Die Wechselwirkungsenergie  $E_{ss}^C$  kann aus der Differenz der Ladespannungen gemäß der Formel

$$E_{ss}^C = \frac{e}{\lambda}(U_2 - U_1) + (E_{F,2} - E_{F,1}) \quad (2.40)$$

Elektronen	$E^C/E_{ss}^C$
$s_1 - s_2$	1
$s_2 - p_1$	$\frac{1}{4}$
$p_1 - p_2$	$\frac{1}{2}$
$p_2 - p_3$	$\frac{7}{8}$
$p_3 - p_4$	$\frac{1}{2}$

**Tabelle 2.1:** Wechselwirkungsenergien im Modell von Warburton et al. [26].

berechnet werden. Auch hier ist demnach die Änderung der Fermienergie im Rückkontakt zu berücksichtigen. Die Vernachlässigung dieses Beitrages führt zu einer Unterschätzung sämtlicher Energiedifferenzen. Dieser Fehler kann am Beispiel der hier betrachteten  $s$ -Niveaus abgeschätzt werden. Diese sind meist durch eine Gatespannungsdifferenz von etwa 100 mV getrennt. Die Änderung der Fermienergie liegt daher für typische in dieser Arbeit verwendete 2DEG ( $d_{ges} = 176$  nm) in der Größenordnung von 1-2 meV. Allgemein ist die Gatespannungsskala für  $B = 0$  um einen konstanten Faktor gestaucht, während für  $B \neq 0$  die Differenzen der Fermienergien oszillatorisch von der Gatespannung abhängen.

Die Wechselwirkungsenergie der Quantenpunktelektronen  $E_{ss}^C$  kann auf verschiedene Weise mit unterschiedlicher Güte abgeschätzt werden. So kann sie z.B. als Coulombenergie  $e^2/(4\pi\epsilon\epsilon_0\ell)$  zweier Elektronen im Abstand  $\ell$  verstanden werden, wobei  $\ell$  durch den Durchmesser der Quantenpunkte oder präziser durch die charakteristische Länge des harmonischen Oszillators

$$\ell = \sqrt{\hbar/m^*\omega_o} \quad (2.41)$$

angenähert werden kann. Diese Gleichung führt im Magnetfeld durch den Übergang von  $\omega_0$  zu  $\omega_{\text{eff}}$  (Gl. 2.32) zu einer Erhöhung der Coulombblockade mit steigendem Magnetfeld, da dieses den effektiven Radius des Einschlusspotenzials verringert.

Für ein parabolisches Potenzial kann die Wechselwirkungsenergie jedoch auch analytisch aus den Überlapp- und Austauschintegralen berechnet werden [26,35]. Sämtliche Energiedifferenzen lassen sich so als Bruchteil der Wechselwirkungsenergie der beiden  $s$ -Elektronen angeben. Für die ersten 6 Elektronen ergeben sich nach den Berechnungen von Warburton *et al.* die in Tabelle 2.1 aufgeführten Werte [26].

Bei der Berechnung der Vielteilchen-Grundzustandsenergie müssen zusätzlich noch die Wechselwirkung des Elektronenspins  $s$  mit dem Magnetfeld  $B$  und Bildladungsef-



fekte berücksichtigt werden. Erstere sind direkt durch einen Zeeman-Term der Form

$$E^{\text{spin}} = sg\mu_B B, \quad s = \pm \frac{1}{2} \quad (2.42)$$

gegeben, wobei der effektive  $g$ -Faktor die Größe der entsprechenden Aufspaltung bestimmt. InAs Quantenpunkte weisen meist einen sehr kleinen  $g$ -Faktor mit  $|g| < 1$  auf (siehe z.B. [36]).

Bildladungseffekte können leicht berücksichtigt werden, wenn man für die elektrostatische Wechselwirkung mit dem Rückkontakt die Energie

$$E = \frac{e^2}{8\pi\epsilon\epsilon_0 d_1} \quad (2.43)$$

ansetzt. Die Wechselwirkung mit der Gateelektrode kann demgegenüber meist vernachlässigt werden, da diese einen um ein Vielfaches größeren Abstand zu den Quantenpunkten hat. Wird ein 2DEG als Rückkontakt benutzt, gilt Gl. (2.43) nicht mehr allgemein. Die Fähigkeit des 2DEG, Potenziale abzuschirmen, hängt von der Ladungsträgerzahl und dem Magnetfeld ab. In Kapitel 5.2.6 wird dies kurz für ein in dieser Arbeit untersuchtes 2DEG diskutiert.

## 2.3 Eindimensionale Systeme

Hauptsächlich werden in dieser Arbeit 2- und 0-dimensionale Quantensysteme untersucht. Da jedoch in Kapitel 8 auch der Versuch beschrieben wird, eindimensionale Kanäle im 2DEG zu definieren, sollen hier auch kurz die elektronischen Eigenschaften solcher 1D-Systemen umrissen werden.

Eindimensionale Kanäle bzw. Quantenpunktkontakte können in GaAs-basierten Heterostrukturen beispielsweise durch lokale Oxidation [37], durch schmale Spalte in Gateelektroden [38] oder durch das Ätzen von Gräben [39] erzeugt werden.

Die Zustandsdichte ist in einer Dimension umgekehrt zur Wurzel aus der Energie [4]:

$$D_{1d}^*(E) = 2 \frac{\sqrt{2m^*}}{2\pi\hbar} \frac{1}{\sqrt{E}} \quad (2.44)$$

Sind mehrere Subbänder (Energie  $E_j$ ) an der Bildung der gesamten Zustandsdichte beteiligt, so muss über alle Subbänder summiert werden:

$$D_{1d}(E) = \sum_{j=1}^{\infty} D_{1d}^*(E - E_j) \quad (2.45)$$

Betrachtet man nun die Leitfähigkeit eines solchen Systems in Abhängigkeit von der Anzahl der besetzten Subbänder, so kompensiert die Tatsache, dass die Elektronengeschwindigkeit *proportional* zur Wurzel aus der Energie ist, gerade die umgekehrte

Abhängigkeit der Zustandsdichte und jedes besetzte Subband erhöht die Leitfähigkeit um einen *konstanten* Betrag [4]. Die Größe dieses Leitfähigkeitsquantum beträgt

$$G_0 = \frac{2e^2}{h} \quad (2.46)$$

und der Widerstand des 1D-Kanals ist damit insgesamt

$$R_j = \frac{1}{j} \frac{h}{2e^2}, \quad (2.47)$$

wobei  $j$  die Anzahl der transmittierten Moden angibt.

Diese Rechnung gilt jedoch nur unter bestimmten Voraussetzungen in dieser Form. Insbesondere sind eine vollständige Transmission der Elektronen und  $T = 0$  vorausgesetzt. Gleichung (2.47) stellt daher nur eine untere Grenze für den Widerstand eines solchen 1D-Kanals dar.