

**MOTIVISCHE KOHOMOLOGIE VON
KOMPLEMENTEN VON KONSTELLATIONEN
AFFINER RÄUME**

DISSERTATION VON ANDRE CHATZISTAMATIOU
(GEBURTSORT: GUMMERSBACH)
ZUM ERWERB DES GRADES DR.RER.NAT.
UNTER BETREUUNG VON PROF. HÉLÈNE ESNAULT

VORGELEGT BEIM FACHBEREICH MATHEMATIK
UNIVERSITÄT DUISBURG-ESSEN

MÜNDLICHE PRÜFUNG AM 20. JANUAR 2006
GUTACHTER: PROF.DR. H.ESNAULT, PROF.DR. M.LEVINE, PROF.DR.
E.VIEHWEG.

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung	4
1. Zykel	12
1.1. Zykelgruppe	12
1.2. Zykel zu einer kohärenten Garbe	12
1.3. Pushforward	12
1.4. Pullback	13
1.5. Äußeres Produkt	16
1.6. Verträglichkeit von Pullback und Pushforward	19
2. Die Kategorie \mathcal{M}	21
2.1. Konstruktion von \mathcal{M}^+	21
2.2. Addition	22
2.3. Kategorie \mathcal{M}	22
2.4. Summen	23
2.5. Tensorprodukte	23
2.6. Komplexe	24
2.7. Komplexe assoziiert zu Konstellationen	25
3. Höhere Chowgruppen	28
3.1. Zykelgruppen für Objekte aus \mathcal{M}	29
3.2. Definition von Blochs Zykelkomplex	31
3.3. Elementare Eigenschaften von Blochs Zykelkomplex	34
3.4. Moving Lemmata	35
4. Spur und Komposition	41
4.1. Konstruktion	42
4.2. Eigenschaften	44
4.3. Darstellung als Kategorie	47
4.4. Approximation von Morphismen	49
5. Konstellationen affiner Räume im affinen Raum	53
5.1. Homotopie-Lemma	55
5.2. Allgemeiner Fall	57
5.3. Verträglichkeit mit Komposition	61
5.4. Abhängigkeit von Wahl von Punkten	67
5.5. Explizite Zykel	72
5.6. Produkte gewisser Zykel	74
6. Pullback auf abgeschlossene Unterschemata	79
6.1. Natürliche Auflösungen	79
6.2. Konstruktion des Zyklus	84
6.3. Approximation des Pullbackmorphismus	89
6.4. Beispiel: Approximation der Ringstruktur	100
7. Vergleich mit der Hodgetheorie	103
7.1. Hodge-Realisierung von AMe	103

7.2.	Kompatibilitäten	107
7.3.	Der graduierte Kohomologiering	110
7.4.	Hodgetheorie von Konstellationen affiner Räume	111
8.	Vermutungen zu Realisierungen	115
8.1.	Additive Zerlegung	115
8.2.	Multiplikation	118
9.	Chowring von Hyperebenenkomplementen	120
9.1.	Vorbereitung	120
9.2.	$CH^*(U, **)$ als $CH^*(K, **)$ -Modul	120
9.3.	Struktur von $CH^*(U, **)$ als Algebra	122
9.4.	Vergleich mit dem topologischen Kohomologiering	128
Anhang A. Homologische Algebra		131
A.1.	Endliche Mengen und assoziierte Komplexe	131
A.2.	Notation bei Hom-Komplexen	131
A.3.	Eigenschaften von Ass	132
Literatur		135

EINLEITUNG

Sei K ein Körper und Y_1, \dots, Y_r affine Unterräume des affinen Raums \mathbb{A}_K^N . Wir studieren in dieser Arbeit die motivische Kohomologie des Komplements $U := \mathbb{A}^N - \cup_i Y_i$. Eine Sonderstellung nehmen Hyperebenenkomplemente ein, hier sind nach Definition $Y_i \subset \mathbb{A}^N$ Hyperebenen.

Wir wollen mit \mathcal{A}^- die Menge nichttrivialer Durchschnitte der Unterräume Y_1, \dots, Y_r bezeichnen und setzen $\mathcal{A} := \mathcal{A}^- \cup \{\mathbb{A}^N\}$.

Für $K = \mathbb{C}$ kennt man eine additive Zerlegung der Kohomologie der konstanten Garbe $\mathbb{Z}_{U^{an}}$,

$$H^*(U^{an}, \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{A \in \mathcal{A}} h^*(A), \quad (0.0.0.1)$$

dies ist ein Isomorphismus von Hodgestrukturen und $h^*(A)$ ist rein, Hodge-Tate, vom Gewicht $2 \cdot \text{codim}_{\mathbb{A}^N} A$ (siehe [DGM]). Man hat eine kombinatorische Beschreibung von $h^*(A)$. Für Hyperebenenkomplemente stammt die Zerlegung von Brieskorn [Br]. Im allgemeinen Fall von Goresky-MacPherson [GM] als Anwendung von Morse-Theorie.

Der Kohomologiering von Hyperebenenkomplementen wird von Log-Formen erzeugt [Br] und die Relationen, die sie erfüllen, sind bekannt [OrSo]. Die Beschreibung des Kohomologieringes im allgemeinen Fall ist mangels expliziter erzeugenden Klassen eine andere. Die Multiplikation m respektiert die Zerlegung (0.0.0.1), genauer haben wir

$$h^*(A) \otimes h^*(B) \xrightarrow{m} h^*(A \cap B),$$

falls $A \cap B \neq \emptyset$ und m ist sonst trivial, und man ist an einer kombinatorischen Beschreibung interessiert. Für den rationalen Kohomologiering ist diese von Yuzvinsky beschrieben worden [Yu], in ganzen Koeffizienten von Deligne-Goresky-MacPherson [DGM].

Für einen algebraisch abgeschlossenen Körper K gibt es eine zu (0.0.0.1) analoge Zerlegung der étalen l -adischen Kohomologie (für $l \neq \text{char } K$). Es wird vermutet, dass der l -adische Kohomologiering die gleiche Beschreibung wie der topologische Kohomologiering hat [DGM].

Man kann die motivische Kohomologie mit Hilfe von Blochs Zykelkomplex $Z^*(, **)$ [Bl1] durch

$$H_M^{2p-q}(U, \mathbb{Z}(p)) \stackrel{df_n}{=} \text{CH}^p(U, q) \stackrel{df_n}{=} H_q Z^p(U, **)$$

definieren.

Zur additiven Zerlegung der *motivischen* Kohomologie zeigen wir folgendes. Sei zu jedem $A \in \mathcal{A}$ ein K -rationaler Punkt $x_A \in A(K)$ in

allgemeiner Lage, d.h. $x_A \notin B$ für alle $B \in \mathcal{A}$ mit $B \subsetneq A$, gewählt. Damit dies möglich ist nehmen wir im folgenden an, dass K ein Körper mit unendlich vielen Elementen ist. Wir erreichen in (Korollar 5.2.1) eine additive Zerlegung:

Satz 0.0.1 (Additive Zerlegung). *Abhängig von der Wahl der Punkte $x_A, A \in \mathcal{A}$, haben wir einen Quasiisomorphismus*

$$Z^p(U, **) \xrightarrow{quis} \bigoplus_{A \in \mathcal{A}} E(A) \otimes_{\mathbb{Z}} Z^{p-\text{codim}A}(K, **), \quad (0.0.0.2)$$

wobei $E(A)$ ein homologischer Komplex von endlichen, freien, abelschen Gruppen ist.

Wir wollen den Komplex $E(A)$ kurz beschreiben. Sei $\mathbb{Z} \cdot \langle Y_1, \dots, Y_r \rangle$ die freie abelsche Gruppe mit Erzeugern Y_1, \dots, Y_r und $\Lambda(\mathbb{Z} \cdot \langle Y_1, \dots, Y_r \rangle)$ die äussere Algebra über \mathbb{Z} ; wir haben ein Differential d definiert durch $d(Y_{i_1} \wedge \dots \wedge Y_{i_s}) = \sum_k (-1)^k Y_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{Y_{i_k}} \wedge \dots \wedge Y_{i_s}$. Es ist $E(A)$ der direkte Summand in $\Lambda(\mathbb{Z} \cdot \langle Y_1, \dots, Y_r \rangle)$ erzeugt von den Elementen $Y_{i_1} \wedge \dots \wedge Y_{i_s}$ mit $Y_{i_1} \cap \dots \cap Y_{i_s} = A$ und das Differential ist durch

$$E(A) \subset \Lambda(\mathbb{Z} \cdot \langle Y_1, \dots, Y_r \rangle) \xrightarrow{d} \Lambda(\mathbb{Z} \cdot \langle Y_1, \dots, Y_r \rangle) \rightarrow E(A)$$

gegeben.

Die Zerlegung (0.0.0.2) ist mit der äußeren Multiplikation

$$Z^p(U, **) \otimes Z^t(K, **) \rightarrow Z^{p+t}(U, **)$$

kompatibel und zerlegt deshalb die motivische Kohomologie von U als Modul über der motivischen Kohomologie des Grundkörpers K .

Als nächstes behandeln wir die Abhängigkeit der additiven Zerlegung von der Wahl der Punkte. Offenbar gibt der Übergang $x_A \mapsto x'_A$ zu einer anderen Wahl einen Automorphismus der rechten Seite von (0.0.0.2). Diesen können wir mittels einer Homologiekategorie Σ vom Grad 0 von

$\bigoplus_{A_1, A_2 \in \mathcal{A}} \text{Hom}_{\bullet}(E(A_1), E(A_2)) \otimes_{\mathbb{Z}} Z^{\alpha_1 - \alpha_2}(K, **)$ angeben, da wir einen Morphismus

$$\begin{array}{c} E(A) \otimes_{\mathbb{Z}} Z^{p-\alpha}(K, **) \otimes_{\mathbb{Z}} \bigoplus_{A_1, A_2 \in \mathcal{A}} \text{Hom}_{\bullet}(E(A_1), E(A_2)) \otimes_{\mathbb{Z}} Z^{\alpha_1 - \alpha_2}(K, **) \\ \downarrow \text{Vertauschung} \\ E(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \bigoplus_{A_1, A_2 \in \mathcal{A}} \text{Hom}_{\bullet}(E(A_1), E(A_2)) \otimes_{\mathbb{Z}} Z^{p-\alpha}(K, **) \otimes_{\mathbb{Z}} Z^{\alpha_1 - \alpha_2}(K, **) \\ \downarrow \text{Auswertung} \otimes \text{Multiplikation} \\ \bigoplus_{A_2 \in \mathcal{A}} E(A_2) \otimes_{\mathbb{Z}} Z^{p-\alpha_2}(K, **) \end{array}$$

haben ($\alpha = \text{codim } A, \alpha_i = \text{codim } A_i$).

Satz 0.0.2 (Abhängigkeit von der Wahl der Punkte). *Liegen die Punkte $x'_A, A \in \mathcal{A}$, „gut“ bzgl. der Punkte $x_A, A \in \mathcal{A}$ (Definition 5.2), dann ist*

$$\Sigma = id + \sum_{m \geq 1} \sum_{A \supseteq A_1 \supseteq \dots \supseteq A_m} \sigma^{A \supseteq A_1 \supseteq \dots \supseteq A_m} \otimes \lambda_{A \supseteq A_1 \supseteq \dots \supseteq A_m},$$

wobei die zweite Summe über alle Ketten $A \supseteq \dots \supseteq A_m, m \geq 1$, in \mathcal{A} mit $\text{codim}_A A_m = m$ geht. Dabei können $\sigma^{A \supseteq A_1 \supseteq \dots \supseteq A_m} \in H_{-m} \text{Hom}_\bullet(E(A), E(A_m))$ und $\lambda_{A \supseteq A_1 \supseteq \dots \supseteq A_m} \in H_M^m(K, \mathbb{Z}(m))$ berechnet werden.

Der Satz wird in (Korollar 5.4.1) bewiesen. Obwohl wir in diesem Satz eine Bedingung an die Punkte $x'_A, A \in \mathcal{A}$, stellen, ist die Aussage zufriedenstellend, da man zu beliebigen x'_A immer Punkte x''_A finden kann, die sowohl zu x_A als auch zu x'_A „gut“ liegen.

Als einfaches Korollar des Satzes erhält man die Eindeutigkeit der additiven Zerlegung, falls $\text{codim}_A B > 1$ für alle $A, B \in \mathcal{A}$ mit $B \subsetneq A$ ist (Korollar 5.4.2).

Via Projektion $Z^*(K, **) \rightarrow Z^0(K, 0) = \mathbb{Z} \cdot [K]$ erhalten wir aus der additiven Zerlegung (0.0.0.2) eine surjektive Abbildung

$$H_M^{2p-q}(U, \mathbb{Z}(p)) \twoheadrightarrow \bigoplus_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ \text{codim}_A = p}} H_q(E(A)). \quad (0.0.0.3)$$

Als Folgerung von Satz 0.0.2 erhält man die Unabhängigkeit dieser Abbildung von der Wahl der Punkte.

Die Arbeit über die Ringstruktur der motivischen Kohomologie teilt sich, in zwei Teile. Der erste Teil beschäftigt sich mit der Ringstruktur für Hyperebenenkomplemente, hier gibt es explizite Klassen, die die motivische Kohomologie erzeugen. Im zweiten Teil behandeln wir allgemeine Komplemente und fragen uns nach einer Darstellung der Multiplikation bzgl. der additiven Zerlegung (0.0.0.2).

Sei U Komplement von Hyperebenen, dann wird die motivische Kohomologie von U als Algebra über der motivischen Kohomologie des Grundkörpers von den Klassen in $H_M^1(U, \mathbb{Z}(1)) = \mathbb{G}_m(U)$ erzeugt (Proposition 9.2.1). Um deren Relationen zu beschreiben, müssen wir einige Notationen einführen.

Wir wollen mit $H_M(K, \mathbb{Z}(*))\{\mathbb{G}_m(U)\}$ die von der abelschen Gruppe $\mathbb{G}_m(U)$ über der motivischen Kohomologie des Grundkörpers frei erzeugte graduiert kommutative Algebra bezeichnen. Um Verwechslungen vorzubeugen wollen wir zu $f \in \mathbb{G}_m(U)$ das dazugehörige Element in $H_M(K, \mathbb{Z}(*))\{\mathbb{G}_m(U)\}$ mit (f) bezeichnen und zu $\lambda \in K^*$ wollen wir die entsprechende Klasse in $H_M^1(K, \mathbb{Z}(1))$ mit $[\lambda]$ bezeichnen.

Zu $f_1, \dots, f_t \in \mathbb{G}_m(U)$ sei mit $R(f_1, \dots, f_t) \in H_M(K, \mathbb{Z}(\ast))\{\mathbb{G}_m(U)\}$ das Element

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^t (-1)^i (f_1) \cdots \widehat{(f_i)} \cdots (f_t) + \sum_{i < j} [-1] \cdot (f_1) \cdots \widehat{(f_i)} \cdots \widehat{(f_j)} \cdots (f_t) + \\ \sum_{i < j < k} [-1]^2 \cdot (f_1) \cdots \widehat{(f_i)} \cdots \widehat{(f_j)} \cdots \widehat{(f_k)} \cdots (f_t) + \dots \end{aligned}$$

bezeichnet, wobei die Summe in offensichtlicher Weise weitergeführt wird.

Zum Beweis des folgenden Satzes siehe Satz (9.3.1).

Satz 0.0.3. *Es ist*

$$H_M(K, \mathbb{Z}(\ast))\{\mathbb{G}_m(U)\}/I \xrightarrow{\cong} H_M(U, \mathbb{Z}(\ast))$$

ein Isomorphismus von $H_M(K, \mathbb{Z}(\ast))$ -Algebren und das Ideal I ist von folgenden Elementen erzeugt:

$$(f) - [f], \quad \text{mit } f \in K^* \subset \mathbb{G}_m(U),$$

$$R(f_1, \dots, f_t), \quad \text{mit } f_i \in \mathbb{G}_m(U), i = 1, \dots, t, \text{ und } \sum_{i=1}^t f_k = 0,$$

$$(f)^2 + [-1] \cdot (f), \quad \text{mit } f \in \mathbb{G}_m(U).$$

Für $K = \mathbb{C}$ ist die Regulatorabbildung $H_M(U, \mathbb{Z}(\ast)) \rightarrow H(U^{an}, \mathbb{Z})$ in die topologische Kohomologie auf einfache Weise durch

$$\mathbb{G}_m = H_M^1(U, \mathbb{Z}(1)) \ni f \mapsto \frac{1}{2\pi i} \frac{df}{f} \in H^1(U^{an}, \mathbb{Z})$$

(Randabbildung der Exponentialsequenz) und

$H_M(K, \mathbb{Z}(\ast)) \xrightarrow{\text{Projektion}} H^0(K, \mathbb{Z}(0)) = \mathbb{Z} = H^0(pt, \mathbb{Z})$ gegeben. Wie wir in Abschnitt (9.4) als Folgerung von Satz (0.0.3) und der Darstellung der topologischen Kohomologie [OrSo] zeigen, ist die Regulatorabbildung surjektiv und hat das Ideal $\mathfrak{m} \cdot H_M(U, \mathbb{Z}(\ast))$ als Kern, mit $\mathfrak{m} := \bigoplus_{(i,p) \neq 0} H_M^i(K, \mathbb{Z}(p))$.

Sei nun U Komplement einer beliebigen Konstellation von affinen Räumen. Hier kann man versuchen die Multiplikation bzgl. der additiven Zerlegung (0.0.0.2) auszudrücken, also den zur Multiplikation entsprechenden Morphismus

$$\begin{aligned} E(A) \otimes_{\mathbb{Z}} Z^{p-\text{codim } A}(K, \ast\ast) \otimes_{\mathbb{Z}} E(B) \otimes_{\mathbb{Z}} Z^{p-\text{codim } B}(K, \ast\ast) \\ \rightarrow \bigoplus_{C \in \mathcal{A}} E(C) \otimes_{\mathbb{Z}} Z^{p-\text{codim } C}(K, \ast\ast) \quad (0.0.0.4) \end{aligned}$$

zu beschreiben.

Für $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \cap B \neq \emptyset$ und $\text{codim}A + \text{codim}B = \text{codim}(A \cap B)$ geben wir diesen Morphismus, ähnlich wie oben, als Homologiekategorie $\Psi_{A,B}$ in $\bigoplus_{C \in \mathcal{A}} \text{Hom}_\bullet(E(A) \otimes E(B), E(C)) \otimes_{\mathbb{Z}} Z^{\text{codim}C - \text{codim}(A \cap B)}(K, **)$ an.

Satz 0.0.4. *Ist $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \cap B \neq \emptyset$ und $\text{codim}A + \text{codim}B = \text{codim}(A \cap B)$, dann wird die Multiplikation (0.0.0.4) durch*

$$\Psi_{A,B} = \sum_{\substack{L_1 = A_d \supseteq \dots \supseteq A \\ L_2 = B_e \supseteq \dots \supseteq B}} \text{mult}_{A_d, B_e}(\sigma^{L_1} \otimes \sigma^{L_2}) \otimes \alpha(L_1, L_2),$$

beschrieben, wobei die Summe über alle Ketten L_1, L_2 in \mathcal{A} mit $d = \text{codim}_{A_d}A, e = \text{codim}_{B_e}B$ geht und $\text{mult}_{A_d, B_e}(\sigma^{L_1} \otimes \sigma^{L_2}) : E(A) \otimes E(B) \rightarrow E(A_d \cap B_e)[d+e]$, sowie $\alpha(L_1, L_2) \in H_M^{d+e}(K, \mathbb{Z}(d+e))$, berechnet werden können (Abschnitt 5.6).

Für $A, B \in \mathcal{A}$, so dass $A \cap B = \emptyset$ oder $\text{codim}A + \text{codim}B \neq \text{codim}(A \cap B)$ können wir die Multiplikation (0.0.0.4) nicht beschreiben. Um die dabei auftretenden Probleme zu erklären gehen wir kurz auf die von uns benutzte Methode ein.

Wir erreichen unsere Ergebnisse durch Benutzung des Moving-Lemmas für höhere Chowgruppen [Bl2] und einer geeigneten Definition von Korrespondenzen für Konstellationen projektiver Schemata mit Hilfe von Blochs Zykelkomplex (Abschnitt 4). Die Konstruktion ist den Ideen von Hanamura [Ha2] über die derivierte Kategorie gemischter Motive nahe.

Eine Korrespondenz $C : (X; Y_1, \dots, Y_r) \rightarrow (V; W_1, \dots, W_s)$, zwischen zwei Konstellationen, gibt in funktorieller Weise einen Morphismus

$$Z^*(X - \cup_i Y_i, **) \xrightarrow{f} Z^*(V - \cup_i W_i, **)$$

in der derivierten Kategorie. Auf diese Weise kann man gewisse Morphismen in der derivierten Kategorie durch Korrespondenzen beschreiben. Arbeitet man mit Konstellationen von affinen Räumen bzw. deren Kompaktifizierung im projektiven Raum, dann kann man leicht aus der Korrespondenz zu einem Morphismus f die Darstellung von f bzgl. der additiven Zerlegung (0.0.0.2) berechnen. Die Schwierigkeit liegt darin die Korrespondenz explizit zu beschreiben. Beispielsweise muss man für die Multiplikation eine zu $U \xrightarrow{\text{Diagonale}} U \times U$ gehörige Korrespondenz berechnen. Dies können wir im allgemeinen nicht. In der Situation aus Satz 0.0.4 kann man zeigen, dass es ausreicht die Korrespondenz zu $U \xrightarrow{\text{diagonal}} U_A \times U_B$ zu beschreiben, wobei $U_A = \mathbb{A}^N - \cup_{i, Y_i \supset A} Y_i$ ist und U_B genauso definiert wird. Jetzt schneiden sich alle $Y_I := Y_{i_1} \cap \dots \cap Y_{i_s}$ und $Y_J := Y_{j_1} \cap \dots \cap Y_{j_t}$ gut, falls $Y_I \supset A$ und $Y_J \supset B$ ist. Dann kann man die gesuchte Korrespondenz leicht hinschreiben.

Als nächstes fragen wir uns, ob man die Multiplikation beschreiben kann, wenn man die motivische Kohomologie des Körpers auf den trivialen Anteil reduziert, d.h. nach Übergang zum Quotienten (0.0.0.3). Hier können wir eine vollständige Antwort geben (Abschnitt 6.4.5).

Satz 0.0.5. Für $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \cap B \neq \emptyset$ gibt es ein Morphismus von Komplexen endlicher, abelscher Gruppen

$$\text{mult}_{A,B} : E(A) \otimes E(B) \rightarrow E(A \cap B),$$

(Formel 5.6.5.2) mit $\text{mult}_{A,B} = 0$, falls sich A und B schlecht schneiden, und die Multiplikation der motivischen Kohomologie induziert auf dem Quotienten (0.0.0.3) die Abbildung

$$\bigoplus_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ \text{codim} A = p_1}} H_{q_1}(E(A)) \otimes \bigoplus_{\substack{B \in \mathcal{A} \\ \text{codim} B = p_2}} H_{q_2}(E(B)) \xrightarrow{\text{mult}_{A,B}} \bigoplus_{\substack{C \in \mathcal{A} \\ \text{codim} C = p_1 + p_2}} H_{q_1 + q_2}(E(C)).$$

Wir stellen in Abschnitt (8.1.2) gewisse Bedingungen an eine „Kohomologietheorie“

$$\mathcal{H} : (\text{glatte Varietäten}/K)^{\text{opp}} \rightarrow (\text{graduierte } F\text{-Vektorräume})$$

mit Koeffizienten in einem Körper F der Charakteristik $= 0$ und einen Regulatorfunktors $R : H_M \rightarrow \mathcal{H}$ und zeigen wie aus unseren Ergebnissen

$$\mathcal{H}^i(U) \cong \bigoplus_{A \in \mathcal{A}} H_{2\text{codim} A - i}(E(A)) \otimes_{\mathbb{Z}} F,$$

für U Komplement einer Konstellation affiner Räume, folgt (der Isomorphismus hängt nicht von einer Wahl von Punkten ab). Unter der Annahme, dass die Regulatorabbildung $H_M^0(K, \mathbb{Z}(p)) \rightarrow \mathcal{H}(K)$ für alle $p > 0$ trivial ist, kann man zeigen, dass die Regulatorabbildung $H_M(U, \mathbb{Z}(*)) \rightarrow \mathcal{H}(U)$ über den Quotienten (0.0.0.3) faktorisiert und die Multiplikation im Kohomologiering $\mathcal{H}(U)$ wie in Satz (0.0.5) gegeben ist. Es ist von wesentlicher Bedeutung, dass F ein Körper ist, da wir die Aufspaltung der Homologie eines Tensorprodukts von Komplexen in das Tensorprodukt der Homologien der Faktoren bei Zerlegung (0.0.0.2), nach Übergang $\otimes_{\mathbb{Z}} F$, brauchen. Leider wissen wir nicht, ob eine der bekannten Kohomologietheorien die von uns geforderten Bedingungen erfüllt.

Satz (0.0.5) folgt aus einer allgemeineren Aussage für beliebige Konstellationen $X; Y_1, \dots, Y_r$ projektiver Schemata; Konstellation bedeutet für uns: X ist ein glattes K -Schema und Y_1, \dots, Y_r sind Unterschemata von X , so dass alle Durchschnitte $Y_I := Y_{i_0} \times_X \dots \times_X Y_{i_s}$ glatt sind. Man kann Konstellationen (projektiver Schemata) $(X; Y_1, \dots, Y_r)$ als Objekte und die von uns definierten Korrespondenzen als Morphismen einer additiven Kategorie $\mathcal{M}e$ betrachten (Abschnitt 4.3). Man hat einen Funktor in die derivierte Kategorie graduierter, abelscher Gruppen

$$\mathcal{M}e \rightarrow D(\text{gr. ab. Gr.}); (X; Y_1, \dots, Y_r) \mapsto Z^*(X - \cup_i Y_i, **).$$

Sei nun Z ein weiteres glattes, abgeschlossenes Unterschema von X , so dass $Z; (Y_1 \times_X Z), \dots, (Y_r \times_X Z)$ eine Konstellation ist. Wie wir in (Abschnitt 6) zeigen, gibt es eine Korrespondenz

$$C : (X; Y_1, \dots, Y_r) \rightarrow (Z; (Y_1 \times_X Z), \dots, (Y_r \times_X Z)), \quad (0.0.0.5)$$

die den Pullbackmorphismus $Z^*(X - \cup_i Y_i, **) \rightarrow Z^*(Z - \cup_i (Y_i \times_X Z), **)$ induziert. Zur Konstruktion dieser Korrespondenz modifizieren wir die Konstellationen durch Aufblasungen bis wir in der Situation sind, dass \tilde{Z} alle Durchschnitte \tilde{Y}_I gut schneidet.

Wir können jedoch C im allgemeinen nicht explizit angeben. Deshalb führen wir eine neue Kategorie AMe , mit gleichen Objekten wie Me , zusammen mit einem Funktor $Me \rightarrow AMe$ ein (Abschnitt 4.4). In Satz (6.3.1) berechnen wir das Bild von C in AMe . Im wesentlichen wird dieses durch die Top-Chernklassen der Vektorbündel $(N_{Y_I/X}|_{Y_I \cap Z})/N_{(Y_I \cap Z)/Z}$, wobei $N_{?/?}$ das Normalenbündel bezeichnet, bestimmt. Daraus folgt leicht Satz (0.0.5).

Unabhängig von den Regulatorabbildungen kann man die motivische Zerlegung (0.0.0.2) mit der Hodgetheoretischen (0.0.0.1) (in *rationalen* Koeffizienten) vergleichen, indem man die idempotenten Korrespondenzen zur Zerlegung (0.0.0.2) realisiert. Dazu konstruieren wir eine Realisierung

$$\begin{aligned} AMe &\rightarrow (\text{reine } \mathbb{Q}\text{-Hodgestrukturen}) \\ (X; Y_1, \dots, Y_r) &\mapsto \bigoplus_p \text{Gr}_p^W H((X - \cup_i Y_i)^{an}, \mathbb{Q}) \end{aligned}$$

und haben folgendes Diagramm von Funktoren

$$\begin{array}{ccc} Me & \longrightarrow & AMe \\ \downarrow & & \downarrow \\ D(\text{gr. ab. Gr.}) & & (\text{reine } \mathbb{Q}\text{-Hodgestrukturen}). \end{array}$$

- Satz 0.0.6.** (1) Sei $X = \mathbb{P}^N$ und Y_1, \dots, Y_r, H lineare Unterräume mit $H \cong \mathbb{P}^{N-1}$ eine Hyperebene. Für eine Wahl von Punkten $x_A, A \in \mathcal{A}$, in allgemeiner Lage (wie oben) existiert zu jedem $A \in \mathcal{A}$ ein idempotentes Element $P_A \in \text{End}_{Me}((X; Y_1, \dots, Y_r, H))$, so dass $\sum_{A \in \mathcal{A}} P_A = id$ und
- (a) die Bilder von P_A in $D(\text{gr.ab.Gr.})$ liefern Zerlegung (0.0.0.2),
 - (b) die Bilder von P_A in (reine \mathbb{Q} -Hodgestrukturen) liefern Zerlegung (0.0.0.1) nach Übergang zu rationalen Koeffizienten.
- (2) Die Korrespondenz C in Zeile (0.0.0.5) induziert in (reine \mathbb{Q} -Hodgestrukturen) den bekannten Pullbackmorphismus

$$\bigoplus_p \text{Gr}_p^W H((X - \cup_i Y_i)^{an}, \mathbb{Q}) \rightarrow \bigoplus_p \text{Gr}_p^W H((Z - \cup_i (Y_i \cap Z))^{an}, \mathbb{Q}).$$

(Zum Beweis von (1.a) siehe Korollar (5.3.1) und zu (1.b) siehe Abschnitt (7.4.2), zu (2) siehe Proposition (7.2.1).) Zum Beweis von (1.b) benutzen wir die Reinheit eines Komplements von Konstellationen affiner Räume, denn dann ist $\bigoplus_p \text{Gr}_p^W H(U, \mathbb{Q}) \cong H(U, \mathbb{Q})$. Teil (2) des Satzes erlaubt es die Multiplikation des Kohomologieringes eines Komplements von Konstellationen

affiner Räume mittels der in AMe berechneten Korrespondenz zu beschreiben (wiederum wird die Reinheit benutzt); das Ergebnis ist die Formel aus Satz (0.0.5) (siehe Abschnitt (7.4.3)).

Der Zugang zur Hodgestruktur von $H^*(U^{an}, \mathbb{Q})$ wird dadurch erschwert, dass U in der natürlichen Kompaktifizierung $U \subset \mathbb{A}^N \subset \mathbb{P}^N$ im allgemeinen nicht Komplement eines Divisors mit normalen Kreuzungen ist. Ansonsten würde der Log-Komplex einen einfachen Zugang zur Multiplikation auf $\oplus_p \text{Gr}_p^W H^*(U^{an}, \mathbb{Q})$ bieten. Man kann jedoch auch mit Hilfe von Komplementen, die kein Divisor mit normalen Kreuzungen sind, die Hodgestruktur berechnen und man erhält eine Beschreibung der Ringstruktur von $\oplus_p \text{Gr}_p^W H^*$ durch Kombination von Satz (6.3.1) und Satz (0.0.6) (siehe Satz (7.3.1)). Dies gilt für allgemeine Konstellationen und mag noch in anderen Situationen hilfreich sein.

Ich möchte H.Esnault und E.Viehweg danken, dass sie mich als Stipendiat in ihre Arbeitsgruppe aufgenommen haben. Ganz besonders danke ich meiner Betreuerin H.Esnault für das schöne Thema und die Hilfe bei so vielen Fragen. Ich möchte M.Levine und K.Rülling für ihr Interesse und ihre Anmerkungen danken.

1. ZYKEL

1.0.1. Dieser Abschnitt beschreibt die elementaren Operationen für Zykeln: Pushforward, Pullback, äußeres Produkt und Verträglichkeiten zwischen diesen. Alles wesentliche ist aus J.-P. Serre's "Algèbre locale et multiplicités" [Se].

1.1. **Zykelgruppe.** Sei X ein Schema von endlichem Typ über dem Grundkörper K und bezeichne mit

$$X^{(d)} = \{x \in X \mid \dim(\mathcal{O}_{x,X}) = d\}$$

die Punkte aus X der Kodimension d . Es sei $Z^d(X)$ die freie von den Elementen aus $X^{(d)}$ erzeugte Gruppe. Wir nennen die Elemente aus $Z^d(X)$ Zykeln und schreiben sie $\sum n(x)x$.

Zu einem Zykel $\alpha = \sum n(x)x \in Z^d(X)$ sei der Träger durch

$$\text{supp}(\alpha) = \bigcup_{n(x) \neq 0} \overline{\{x\}}$$

definiert. Ein Zykel ist effektiv, falls $n(x) \geq 0$ für alle x .

1.2. **Zykel zu einer kohärenten Garbe.** Sei \mathcal{F} eine kohärente Garbe auf X und $0 \leq d \leq \dim X$ mit $\text{codim}(\text{supp}(\mathcal{F})) \geq d$. Wir definieren zu \mathcal{F} einen Zykel $z^d(\mathcal{F}) = \sum n(x)x \in Z^d(X)$ durch:

$$n(x) = l_{\mathcal{O}_{x,X}}(\mathcal{F}_x)$$

($l_A(M)$ = Länge von M als A -Modul). Da nur $\mathcal{F}_x \neq 0$ sein kann, falls x generischer Punkt einer irreduziblen Komponente von $\text{supp}(\mathcal{F})$ ist, hat \mathcal{F}_x für alle $x \in X^{(d)}$ endliche Länge und es gilt $\text{supp}(z^d(\mathcal{F})) \subset \text{supp}(\mathcal{F})$.

1.2.1. *Additivität.* Seien $\mathcal{F}', \mathcal{F}''$ kohärente Garben, deren Träger Kodimension $\geq d$ hat und

$$0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$$

eine exakte Sequenz, dann ist $\text{codim}(\text{supp}(\mathcal{F})) \geq d$ und

$$z^d(\mathcal{F}) = z^d(\mathcal{F}') + z^d(\mathcal{F}'').$$

Denn für alle $x \in X^{(d)}$ ist

$$l_{\mathcal{O}_{x,X}}(\mathcal{F}_x) = l_{\mathcal{O}_{x,X}}(\mathcal{F}'_x) + l_{\mathcal{O}_{x,X}}(\mathcal{F}''_x).$$

1.3. **Pushforward.** Sei $X \rightarrow Y$ ein eigentlicher Morphismus zwischen K -Schemata von endlichem Typ, dann haben wir einen Morphismus

$$f_* : Z^d(X) \rightarrow \bigoplus_{k \geq 0} Z^k(Y) \tag{1.3.0.1}$$

indem wir

$$f_*(x) = \begin{cases} [k(x) : k(f(x))] \cdot f(x) & \text{falls } \dim \overline{\{f(x)\}} = \dim \overline{\{x\}}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

für alle $x \in X^{(d)}$ setzen und linear fortsetzen. Dabei ist $k(f(x)) \rightarrow k(x)$ eine endliche Erweiterung, weil $f : \overline{\{x\}} \rightarrow \overline{\{f(x)\}}$ generisch endlich ist.

Sind X, Y äquidimensional, dann ist

$$f_*(Z^d(X)) \subset Z^{d+\dim Y - \dim X}(Y).$$

Für zwei eigentliche Morphismen f, g ist offenbar $(f \circ g)_* = f_*g_*$.

1.3.1. *Alternative Beschreibung.* Eine alternative Beschreibung von f_* für lokal äquidimensionale Schemata ist folgende. Zerlege $X = \coprod_i X_i$ in Zusammenhangskomponenten und es sei $Y_i \subset Y$ die Zusammenhangskomponente, die das Bild von X_i enthält. Wir nehmen an, dass X_i und Y_i äquidimensional sind und setzen $r_i = \dim Y_i - \dim X_i$. Zu einem effektiven Zykel $\alpha \in Z^d(X)$ wählt man eine kohärente Garbe \mathcal{F} mit $\text{codim}(\text{supp } \mathcal{F}) \geq d$ und $z^d(\mathcal{F}) = \alpha$. Dann ist

$$f_*(\alpha) = \sum_{i=1}^t z^{d+r_i}(f_*\mathcal{F}|_{X_i}).$$

In der Tat ist $\text{codim}(\text{supp}(f_*\mathcal{F}|_{X_i})) \geq d + r_i$ und man sieht leicht, dass

$$f_*(\mathcal{F}|_{X_i})_y = \bigoplus_{x \in X_i^{(d)} \cap f^{-1}(y)} \mathcal{F}_x$$

für alle $y \in Y_i^{(d+r_i)}$, sowie

$$l_{\mathcal{O}_{y,Y}}(\mathcal{F}_x) = [k(x) : k(y)] \cdot l_{\mathcal{O}_{x,X}}(\mathcal{F}_x)$$

für alle $x \in X_i^{(d)} \cap f^{-1}(y)$.

1.4. **Pullback.** Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus von endlichem Typ und Y ein glattes K -Schema. Wir bezeichnen mit $\text{Coh}(X)$ bzw. $\text{Coh}(Y)$ die Kategorie der kohärenten Garben auf X bzw. Y . Der rechtsexakte Funktor $f^* : \text{Coh}(Y) \rightarrow \text{Coh}(X)$ kann zu einem Funktor

$$Lf^* : D^b(\text{Coh}(Y)) \rightarrow D^b(\text{Coh}(X))$$

zwischen den beschränkten derivierten Kategorien abgeleitet werden. Denn jede kohärente Garbe \mathcal{F} auf Y besitzt eine endliche, lokal freie Auflösung \mathcal{F}_\bullet . Es ist dann

$$Lf^*\mathcal{F} = f^*\mathcal{F}_\bullet. \quad (1.4.0.1)$$

Für $x \in X$ und $y = f(x)$ das Bild in Y ist

$$(L_j f^*\mathcal{F})_x = H_j(Lf^*\mathcal{F})_x = \text{Tor}_j^{\mathcal{O}_{y,Y}}(\mathcal{O}_{x,X}, \mathcal{F}_y), \quad (1.4.0.2)$$

wobei die rechte Seite als $\mathcal{O}_{x,X}$ -Modul aufgefasst wird. Zum Beweis betrachte (1.4.0.1) und $(f^*\mathcal{F}_i)_x = \mathcal{O}_{x,X} \otimes_{\mathcal{O}_{y,Y}} (\mathcal{F}_i)_y$.

1.4.1. *Definition von f^* .* Sei $A \subset Y$ eine abgeschlossene Menge mit $\text{codim}_Y A \leq d$, d.h. für alle generischen Punkte $a \in A$ ist $\text{codim}_Y a = \dim(\mathcal{O}_{a,Y}) \leq d$. Es ist bekannt, dass $f^{-1}(A)$ leer ist oder Kodimension

$$\text{codim}_X f^{-1}(A) \leq d$$

hat.

Notation 1.1. Sei $\alpha \in Z^d(Y)$.

Im Fall $f^{-1}(\text{supp}(\alpha)) = \emptyset$ oder $\text{codim} f^{-1}(\text{supp}(\alpha)) = d$ sagen wir, dass α gut bzgl. f liegt.

Wir setzen $\text{codim}(\emptyset) = \infty$. Dies hat den Vorteil, dass α gut bzgl. f liegt, falls $\text{codim} f^{-1}(\text{supp}(\alpha)) \geq d$ gilt.

Liegt $y \in Y^{(d)}$ gut bzgl. f , dann fasse $\overline{\{y\}}$ als Schema mit reduzierter Strukturgarbe auf und definiere

$$f^*(y) = \sum_{x \in X^{(d)}} \left(\sum_j (-1)^j \cdot l_{\mathcal{O}_{x,X}} \left(\text{Tor}_j^{\mathcal{O}_{f(x),Y}} \left(\mathcal{O}_{x,X}, \mathcal{O}_{f(x),\overline{\{y\}}} \right) \right) \right) \cdot x.$$

Man beachte, dass $\text{Tor}_j^{\mathcal{O}_{f(x),Y}} \left(\mathcal{O}_{x,X}, \mathcal{O}_{f(x),\overline{\{y\}}} \right)$ Träger (als $\mathcal{O}_{x,X}$ -Modul) in x hat und somit endliche Länge. Es ist offenbar $\text{supp}(f^*(y)) \subset f^{-1}(\overline{\{y\}})$.

Man setzt f^* linear auf Zykel $\alpha \in Z^d(Y)$ fort, die gut bzgl. f liegen.

Definition 1.1. Wir bezeichnen den Definitionsbereich von f^* mit

$$Z^d(Y)_f = \{\alpha \in Z^d(Y) \mid \alpha \text{ liegt gut bzgl. } f\}.$$

Ist $f : Z \rightarrow Y$ eine Immersion, dann schreiben wir auch $Z^d(Y)_{\{Z\}}$ statt $Z^d(Y)_f$. Für Morphismen f_1, \dots, f_k bezeichne

$$Z^d(Y)_{\{f_1, \dots, f_k\}} = \bigcap_{i=1}^k Z^d(Y)_{f_i}.$$

1.4.2. *Alternative Beschreibung.* Eine alternative Beschreibung ist folgende.

Proposition 1.4.1. Sei $\alpha \in Z^d(Y)_f$ ein effektiver Zykel und \mathcal{F} eine kohärente Garbe auf Y mit $\text{codim}(\text{supp}(\mathcal{F})) \geq d$, sowie

- $z^d(\mathcal{F}) = \alpha$,
- $\text{codim} f^{-1}(\text{supp}(\mathcal{F})) \geq d$.

Dann ist

$$f^*(\alpha) = \sum_j (-1)^j z^d(L_j f^* \mathcal{F}). \quad (1.4.2.1)$$

Beweis. Sei $\alpha = \sum_{y \in Y^{(d)}} n(y)y$, dann ist die Behauptung für die Wahl $\mathcal{F} = \bigoplus_{y \in Y^{(d)}} \mathcal{O}_{\overline{\{y\}}}^{n(y)}$ offensichtlich (benutze 1.4.0.2).

Sei nun \mathcal{F} irgendwie gewählt. Um den Koeffizienten $n(x)$ der rechten Seite von (1.4.2.1) zu bestimmen können wir wegen der lokalen Natur von z^d und

$L_j f^*$ annehmen, dass X und $Y = \text{Spec}(A)$ affin sind. Es ist $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ für einen endlich erzeugten A -Modul M und wir haben eine Filtrierung

$$0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_s = M,$$

mit Quotienten $M_{i+1}/M_i \cong A/\mathfrak{p}_{i+1}$ und \mathfrak{p}_{i+1} Primideale. Es ist

$$\alpha = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{codim}(\mathfrak{p}_i)=d}}^s \mathfrak{p}_i.$$

Lange exakte Sequenzen benutzend ist

$$\sum_j (-1)^j z^d (L_j f^* M) = \sum_{i=1}^s \sum_j (-1)^j z^d (L_j f^* A/\mathfrak{p}_i)$$

und wir haben zu zeigen, dass

$$\sum_j (-1)^j z^d (L_j f^* A/\mathfrak{p}_i) = 0 \quad (1.4.2.2)$$

für $\text{codim}(\mathfrak{p}_i) > d$.

Für $x \in X^{(d)}$ mit $f(x) \notin \overline{\{\mathfrak{p}_i\}}$ ist $(L_j f^* A/\mathfrak{p}_i)_x = 0$ für alle j . Also sei $x \in X^{(d)} \cap f^{-1}\overline{\{\mathfrak{p}_i\}}$. Faktorisiere f durch

$$X \xrightarrow{(e,f)} \mathbb{A}^n \times Y \xrightarrow{p_2} Y$$

für eine abgeschlossene Immersion $e : X \rightarrow \mathbb{A}^n$. Setze $Z = \mathbb{A}^n \times Y$ und $N = p_2^*(A/\mathfrak{p}_i)$. Es ist

$$L_j f^*(A/\mathfrak{p}_i)_x = L_j(e, f)^*(N)_x = \text{Tor}_j^{\mathcal{O}_{x,Z}}(\mathcal{O}_{x,X}, N_x)$$

und x ist der Träger von $\mathcal{O}_{x,X} \otimes_{\mathcal{O}_{x,Z}} N_x$ im lokalen Ring $\text{Spec}(\mathcal{O}_{x,Z})$. Außerdem schneiden sich $\mathcal{O}_{x,X}$ und N_x schlecht, d.h.

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{O}_{x,X}) + \dim(N_x) &= \dim(\mathcal{O}_{x,X}) + \dim(\mathcal{O}_{x,Z}) - \text{codim}_Y(\mathfrak{p}_i) \\ &= \dim(\mathcal{O}_{x,Z}) + (\text{codim}_X(x) - \text{codim}_Y(\mathfrak{p}_i)) \\ &< \dim(\mathcal{O}_{x,Z}). \end{aligned}$$

Es folgt aus einem der Hauptergebnisse (Chap. V, 3, thm 1) in [Se], dass

$$\sum_j (-1)^j l_{\mathcal{O}_{x,Z}} \left(\text{Tor}_j^{\mathcal{O}_{x,Z}}(\mathcal{O}_{x,X}, N_x) \right) = 0,$$

und somit auch (1.4.2.2). \square

1.4.3. *Funktorialität.* Seien Morphismen $X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3$ von glatten Schemata über K gegeben und $\alpha \in Z^d(X_3)_{f_2, f_2 \circ f_1}$.

Proposition 1.4.2. *Dann ist $f_2^*(\alpha) \in Z^d(X_2)_{f_1}$ und*

$$f_1^* f_2^* \alpha = (f_2 \circ f_1)^* \alpha.$$

Beweis. Wegen $\text{supp}(f_2^*(\alpha)) \subset f_2^{-1}\text{supp}(\alpha)$ und $\alpha \in Z^d(X_3)_{f_2 \circ f_1}$ folgt $\alpha \in Z^d(X_2)_{f_1}$.

Es sei ohne Einschränkung α ein effektiver Zykel. Wähle \mathcal{F} mit $\text{supp}(\mathcal{F}) \subset \text{supp}(\alpha)$ und $z^d(\mathcal{F}) = \alpha$. Es folgt dann mit Proposition (1.4.1), dass

$$f_1^* f_2^* \alpha = \sum_i \sum_j (-1)^{i+j} z^d(L_i f_1^* L_j f_2^* \mathcal{F}).$$

Damit ist der Koeffizient von $f_1^* f_2^* \alpha$ vor $x \in X_1^{(d)}$ durch

$$\sum_i \sum_j (-1)^{i+j} l_{\mathcal{O}_{x, X_1}}(L_i f_1^* L_j f_2^* \mathcal{F})_x$$

gegeben. Nun ist $L f_1^* \circ L f_2^* = L(f_2 \circ f_1)^*$ und wir haben deshalb eine Spektralsequenz

$$E_{pq}^2 = (L_p f_1^* L_q f_2^* \mathcal{F})_x \Rightarrow (L_{p+q}(f_2 \circ f_1)^* \mathcal{F})_x.$$

Man benutzt jetzt, dass die Eulercharakteristik (alternierende Summe über die Längen) eines (beschränkten) Komplexes gleich der Eulercharakteristik der Homologie ist, um

$$\sum_i \sum_j (-1)^{i+j} l_{\mathcal{O}_{x, X_1}}(L_i f_1^* L_j f_2^* \mathcal{F})_x = \sum_k (-1)^k l_{\mathcal{O}_{x, X_1}}(L_k(f_2 \circ f_1)^* \mathcal{F})_x$$

und die Behauptung zu folgern. \square

1.5. Äußeres Produkt. Seien X und Y zwei Schemata von endlichem Typ über K . Wir definieren für alle Zahlen d_1, d_2 ein äußeres Produkt

$$m_{X, Y} : Z^{d_1}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} Z^{d_2}(Y) \rightarrow Z^{d_1+d_2}(X \times_K Y)$$

indem wir $x \otimes y$ für $x \in X^{(d_1)}$ und $y \in Y^{(d_2)}$ auf $z^{d_1+d_2}(\mathcal{O}_{\overline{\{x\}} \times \overline{\{y\}}})$ abbilden, wobei $\overline{\{x\}}$ und $\overline{\{y\}}$ als Schemata mit reduzierter Strukturgarbe aufgefasst sind. Zwei Zyklen $\alpha = \sum_{x \in X^{(d_1)}} n(x)x$ und $\beta = \sum_{y \in Y^{(d_2)}} n(y)y$ bilden auf $m(\alpha \otimes \beta) = \sum_{a \in (X \times_K Y)^{(d_1+d_2)}} n(a)a$ mit

$$n(a) = \begin{cases} n(p_1(a)) \cdot n(p_2(a)) \cdot l\left(\mathcal{O}_{a, \overline{\{p_1(a)\}} \times \overline{\{p_2(a)\}}}\right), \\ \quad \text{falls } p_1(a) \in X^{(d_1)} \text{ und } p_2(a) \in Y^{(d_2)}, \\ 0 \quad \text{sonst,} \end{cases}$$

ab.

Offenbar ist

$$\text{supp}(m_{X, Y}(\alpha \otimes \beta)) \subset p_1^{-1}\text{supp}(\alpha) \cap p_2^{-1}\text{supp}(\beta).$$

Für Morphismen $f_1 : X_1 \rightarrow X, \dots, f_s : X_s \rightarrow X$ und $g_1 : Y_1 \rightarrow Y, \dots, g_t : Y_t \rightarrow Y$ ist

$$m_{X, Y} \left(Z^{d_1}(X)_{\{f_1, \dots, f_s\}} \otimes_{\mathbb{Z}} Z^{d_2}(Y)_{\{g_1, \dots, g_t\}} \right) \subset Z^{d_1+d_2}(X \times_K Y)_{\{f_1 \times g_1, \dots, f_s \times g_t\}}$$

weil $(f_i \times g_j)^{-1}\text{supp}(m(\alpha \otimes \beta)) \subset p_1^{-1}f_i^{-1}\text{supp}(\alpha) \cap p_2^{-1}g_j^{-1}\text{supp}(\beta)$.

Das äußere Produkt ist assoziativ, d.h. für alle X, Y, Z ist

$$m_{X \times Y, Z} \circ (m_{X, Y} \otimes \text{id}) = m_{X, Y \times Z} \circ (\text{id} \otimes m_{Y, Z}).$$

1.5.1. *Alternative Beschreibung.* Seien α und β effektiv und es sei \mathcal{F} eine kohärente Garbe auf X mit $\text{codim}(\text{supp}(\mathcal{F})) \geq d_1$, $z^{d_1}(\mathcal{F}) = \alpha$, analog definiere \mathcal{G} auf Y .

Lemma 1.5.1. *Es ist*

$$m_{X, Y}(\alpha \otimes \beta) = z^{d_1+d_2}(p_1^*\mathcal{F} \otimes p_2^*\mathcal{G}).$$

Beweis. Sei $a \in (X \times_K Y)^{(d_1+d_2)}$ mit $p_1(a) \in X^{(d_1)}$ und $p_2(a) \in Y^{(d_2)}$, denn für andere Punkte verschwindet der zugehörige Koeffizient auf beiden Seiten. Wir setzen $x = p_1(a)$ und $y = p_2(a)$.

Um den Koeffizienten von a in $z^{d_1+d_2}(p_1^*\mathcal{F} \otimes p_2^*\mathcal{G})$ zu bestimmen können wir X und Y affin annehmen. Außerdem können wir annehmen, dass zu \mathcal{F} eine Filtrierung

$$0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_s = \mathcal{F}$$

mit $\mathcal{F}_{i+1}/\mathcal{F}_i = \mathcal{O}_{\overline{\{x\}}}$ und zu \mathcal{G} eine Filtrierung

$$0 \subset \mathcal{G}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{G}_t = \mathcal{G}$$

mit $\mathcal{G}_{i+1}/\mathcal{G}_i = \mathcal{O}_{\overline{\{y\}}}$ existiert ($\overline{\{x\}}, \overline{\{y\}}$ mit reduzierter Struktur).

Dann sind

$$0 \subset p_1^*\mathcal{F}_1 \otimes p_2^*\mathcal{G} \subset \cdots \subset p_1^*\mathcal{F}_s \otimes p_2^*\mathcal{G} = p_1^*\mathcal{F} \otimes p_2^*\mathcal{G}$$

$$0 \subset p_1^*\mathcal{O}_{\overline{\{x\}}} \otimes p_2^*\mathcal{G}_1 \subset \cdots \subset p_1^*\mathcal{O}_{\overline{\{x\}}} \otimes p_2^*\mathcal{G}_t = p_1^*\mathcal{O}_{\overline{\{x\}}} \otimes p_2^*\mathcal{G}$$

Filtrierungen zu $p_1^*\mathcal{F} \otimes p_2^*(\mathcal{G})$ bzw. $p_1^*\mathcal{O}_{\overline{\{x\}}} \otimes p_2^*\mathcal{G}$ mit Quotienten $p_1^*\mathcal{O}_{\overline{\{x\}}} \otimes p_2^*\mathcal{G}$ bzw. $p_1^*\mathcal{O}_{\overline{\{x\}}} \otimes p_2^*\mathcal{O}_{\overline{\{y\}}}$. Es ist deshalb

$$\begin{aligned} l_{\mathcal{O}_{a, X \times Y}}(p_1^*\mathcal{F} \otimes p_2^*\mathcal{G})_a &= l_{\mathcal{O}_{x, X}}(\mathcal{F}_x) \cdot l_{\mathcal{O}_{a, X \times Y}}(p_1^*\mathcal{O}_{\overline{\{x\}}} \otimes p_2^*\mathcal{G})_a \\ &= l_{\mathcal{O}_{x, X}}(\mathcal{F}_x) \cdot l_{\mathcal{O}_{y, Y}}(\mathcal{G}_y) \cdot l_{\mathcal{O}_{a, X \times Y}}(p_1^*\mathcal{O}_{\overline{\{x\}}} \otimes p_2^*\mathcal{O}_{\overline{\{y\}}})_a \\ &= l_{\mathcal{O}_{x, X}}(\mathcal{F}_x) \cdot l_{\mathcal{O}_{y, Y}}(\mathcal{G}_y) \cdot l_{\mathcal{O}_{a, X \times Y}}(\mathcal{O}_{a, \overline{\{x\}} \times \overline{\{y\}}}), \end{aligned}$$

was die Behauptung zeigt. \square

1.5.2. *Kompatibilität mit Pushforward.* Sind $X_1 \xrightarrow{f} Y_1, X_2 \xrightarrow{g} Y_2$ zwei eigentliche Morphismen zwischen äquidimensionalen Schemata. Setze $r_1 = \dim(Y_1) - \dim(X_1)$ und $r_2 = \dim(Y_2) - \dim(X_2)$, dann ist $r_1 + r_2 = \dim(Y_1 \times Y_2) - \dim(X_1 \times X_2)$ und das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Z^{d_1}(X_1) \otimes Z^{d_2}(X_2) & \xrightarrow{m_{X_1, X_2}} & Z^{d_1+d_2}(X_1 \times X_2) \\ f_* \otimes g_* \downarrow & & \downarrow (f \times g)_* \\ Z^{d_1+r_1}(Y_1) \otimes Z^{d_2+r_2}(Y_2) & \xrightarrow{m_{Y_1, Y_2}} & Z^{d_1+d_2+r_1+r_2}(Y_1 \times Y_2) \end{array}$$

ist kommutativ. Mit der Beschreibung von Pushforward und äußerem Produkt mit Garben (1.3.1),(1.5.1), folgt die Aussage aus

$$(f \times g)_*(p_1^*(\mathcal{F}) \otimes p_2^*(\mathcal{G})) = p_1^*f_*(\mathcal{F}) \otimes p_2^*g_*(\mathcal{G})$$

für alle quasikohärenten Garben \mathcal{F}, \mathcal{G} .

1.5.3. Kompatibilität mit Pullback.

Proposition 1.5.1. *Sind $f_1 : X_1 \rightarrow Y_1$ und $f_2 : X_2 \rightarrow Y_2$ Morphismen und Y_1, Y_2 glatt, dann ist das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} Z^{d_1}(Y_1)_{f_1} \otimes Z^{d_2}(Y_2)_{f_2} & \xrightarrow{m_{Y_1, Y_2}} & Z^{d_1+d_2}(Y_1 \times Y_2)_{f_1 \times f_2} \\ f_1^* \otimes f_2^* \downarrow & & \downarrow (f_1 \times f_2)^* \\ Z^{d_1}(X_1) \otimes Z^{d_2}(X_2) & \xrightarrow{m_{X_1, X_2}} & Z^{d_1+d_2}(X_1 \times X_2) \end{array}$$

kommutativ.

Beweis. Aus der Beschreibung von Pullback und äußerem Produkt mittels Garben (Proposition 1.4.1),(1.5.1), sieht man, dass es genügt

$$L_k((f_1 \times f_2)^*(p_1^*(\mathcal{F}) \otimes p_2^*(\mathcal{G}))) = \bigoplus_{i+j=k} p_1^*L_i f_1^* \mathcal{F} \otimes p_2^*L_j f_2^* \mathcal{G}$$

für alle kohärenten Garben \mathcal{F}, \mathcal{G} zu zeigen.

Dazu sei \mathcal{F}_\bullet eine Auflösung von \mathcal{F} durch Vektorbündel und \mathcal{G}_\bullet eine Auflösung von \mathcal{G} durch Vektorbündel, dann ist $p_1^*\mathcal{F}_\bullet \otimes p_2^*\mathcal{G}_\bullet$ eine Auflösung von $p_1^*\mathcal{F} \otimes p_2^*\mathcal{G}$. Nun ist

$$\begin{aligned} H_k((f_1 \times f_2)^*(p_1^*\mathcal{F}_\bullet \otimes p_2^*\mathcal{G}_\bullet)) &= H_k(p_1^*f_1^*\mathcal{F}_\bullet \otimes p_2^*f_2^*\mathcal{G}_\bullet) \\ &= \bigoplus_{i+j=k} H_i(p_1^*f_1^*\mathcal{F}_\bullet) \otimes H_j(p_2^*f_2^*\mathcal{G}_\bullet) \\ &= \bigoplus_{i+j=k} p_1^*H_i(f_1^*\mathcal{F}_\bullet) \otimes p_2^*H_j(f_2^*\mathcal{G}_\bullet) \\ &= \bigoplus_{i+j=k} p_1^*L_i f_1^* \mathcal{F} \otimes p_2^*L_j f_2^* \mathcal{G}. \end{aligned}$$

Das zweite Gleichheitszeichen folgt daraus, dass für jede quasikohärente Garben \mathcal{F}' auf X_1 und jeden Komplex \mathcal{G}'_\bullet von quasikohärenten Garben auf X_2 ,

$$H_k(p_1^*\mathcal{F}' \otimes p_2^*\mathcal{G}'_\bullet) = p_1^*\mathcal{F}' \otimes H_k(p_2^*\mathcal{G}'_\bullet).$$

□

1.6. Verträglichkeit von Pullback und Pushforward. Seien $f : X \rightarrow Y$ und $\tau : Y' \rightarrow Y$ transversale Morphismen von glatten Schemata über K , d.h. das Faserprodukt X' im cartesischen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\sigma} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{\tau} & Y \end{array}$$

ist glatt und für alle $x' \in X'$ ist

$$\dim_{x'} X' - \dim_{\sigma(x')} X = \dim_{f'(x')} Y' - \dim_{f\sigma(x')} Y. \quad (1.6.0.0)$$

Lemma 1.6.1. *Ist τ ein eigentlicher Morphismus und $\alpha \in Z^d(Y')$ liege gut bzgl. f' , dann liegt $\tau_*\alpha$ gut bzgl. f und es gilt*

$$\sigma_* f'^* \alpha = f^* \tau_* \alpha. \quad (1.6.0.1)$$

Beweis. Ohne Einschränkung seien Y', Y zusammenhängend.

Da $\sigma(f'^{-1}(y)) = f^{-1}(\tau(y))$ für alle $y \in Y'$ ist, folgt aus (1.6.0.0), dass $\tau_* \alpha$ gut bzgl. f liegt.

Um (1.6.0.1) zu zeigen faktorisieren wir f in

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ (f', \sigma) \downarrow & & \downarrow (f, \text{id}) \\ Y' \times X & \xrightarrow{\tau \times \text{id}} & Y \times X \\ p'_1 \downarrow & & \downarrow p_1 \\ Y' & \xrightarrow{\tau} & Y. \end{array}$$

Man reduziert so auf die beiden Fälle: f ist flach oder f ist abgeschlossene Immersion.

Ist f flach so gilt $Lf^* = f^*$, $Lf'^* = f'^*$ und

$$\sigma_* f'^* \mathcal{F} = f^* \tau_* \mathcal{F}$$

für alle kohärenten Garben \mathcal{F} und die Behauptung folgt aus Beschreibungen von Pushforward und Pullback mittels kohärenter Garben in (1.3.1), (1.4.1).

Sei f eine abgeschlossene Immersion. Setze

$$Z = \{y \in Y \mid \dim(\tau^{-1}(y) \cap \text{supp}(\alpha)) \geq 1\}$$

dann folgt aus $\text{codim}(f'^{-1}\text{supp}(\alpha)) \geq d$, dass $Z \cap X$ in X Kodimension $> d + \dim Y - \dim Y'$ hat. Man kann deshalb Z von Y entfernen und $\tau|_{\text{supp}(\alpha)}$ endlich annehmen. Außerdem kann man Y affin annehmen und $X \subset Y$ ein vollständiger Durchschnitt.

Sei nun \mathcal{F} kohärent mit $\text{supp}(\mathcal{F}) = \text{supp}(\alpha)$ und $z^d(\mathcal{F}) = \alpha$ (ohne Einschränkung sei α effektiv). Wenn $\Lambda^\bullet \mathcal{O}_Y^k \rightarrow \mathcal{O}_X$ die Koszul-Auflösung von

\mathcal{O}_X bzgl. eines regulären Parametersystems bezeichnet, dann ist

$$\begin{aligned}(L_j f^* \tau_* \mathcal{F}) &= H_j(\Lambda^\bullet \mathcal{O}_Y^k \otimes_{\mathcal{O}_Y} \tau_* \mathcal{F}) \\ &= H_j(\tau_*(\Lambda^\bullet \mathcal{O}_{Y'}^k \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}} \mathcal{F})) \\ &= \tau_* \left(H_j(\Lambda^\bullet \mathcal{O}_{Y'}^k \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}} \mathcal{F}) \right), \text{ da } \tau|_{\text{supp}(\mathcal{F})} \text{ endlich ist,} \\ &= \sigma_*(L_j f'^* \mathcal{F}).\end{aligned}$$

Es folgt die Behauptung nach Übergang zu den Zykeln. □

2. DIE KATEGORIE \mathcal{M}

2.0.1. Es bezeichnet weiterhin K den Grundkörper. Wir werden uns auf Betrachtung von glatten Schemata über K beschränken.

2.1. Konstruktion von \mathcal{M}^+ .

2.1.1. *Objekte.* Die Objekte in \mathcal{M}^+ sind Tripel (X, S, a) , wobei X ein glattes K -Schema und $S = \{X_1, \dots, X_m\}$ eine endliche Menge von lokal abgeschlossenen, glatten Unterschemata von X ist, die X enthält, und a ist eine lokalkonstante Abbildung $a : X \rightarrow \mathbb{Z}$.

2.1.2. *Morphismen.* Ein Morphismus $(X, S, a) \rightarrow (Y, T, b)$ in \mathcal{M}^+ ist durch ein glattes K -Schema Z und zwei Morphismen von Schemata

$$X \xleftarrow{f} Z \xrightarrow{g} Y \tag{2.1.2.1}$$

gegeben, so dass folgendes erfüllt ist:

- (1) g ist ein eigentlicher Morphismus,
- (2) für alle $Y_j \in T$ und jede Zusammenhangskomponente $(Y_j \times_Y Z)'$ von $Y_j \times_Y Z$ existiert ein $X_i \in S$ und ein glatter Morphismus $\phi : (Y_j \times_Y Z)' \rightarrow X_i$, so dass

$$\begin{array}{ccc} (Y_j \times_Y Z)' & \longrightarrow & Z \\ \phi \downarrow & & \downarrow f \\ X_i & \longrightarrow & X \end{array}$$

kommutativ ist,

- (3) für jedes $Y_j \in T$ und jeden Punkt $z \in Y_j \times_Y Z$ ist

$$b(g(z_2)) - a(f(z_2)) = \dim_{p_1(z)} Y_j - \dim_z Y_j \times_Y Z,$$

mit $z_2 = p_2(z)$.

Zwei Morphismen von (X, S, a) nach (Y, T, b) gegeben durch $X \xleftarrow{f} Z \xrightarrow{g} Y$ und $X \xleftarrow{f'} Z' \xrightarrow{g'} Y$ sind genau dann gleich, wenn ein Isomorphismus $Z \xrightarrow{\phi} Z'$ mit $f = f'\phi, g = g'\phi$ existiert.

Bemerkung 2.1. Aus Bedingung (2) und (3) folgt, dass $g : Z \rightarrow Y$ transversal zur Immersion $Y_j \rightarrow Y$ für alle $Y_j \in T$ ist. D.h. $Y_j \times_Y Z$ ist glatt (folgt aus (2)) und für jeden Punkt $z \in Y_j \times_Y Z$ ist

$$\dim_{g(z_2)} Y - \dim_{p_2(z)} Z = \dim_{p_1(z)} Y_j - \dim_z Y_j \times_Y Z.$$

Dies folgt aus (3), da beide Seiten $b(g(z_2)) - a(f(z_2))$ entsprechen.

2.1.3. *Komposition in \mathcal{M}^+ .* Für Morphismen $X_1 \leftarrow Z_1 \rightarrow X_2$ von (X_1, S_1, a_1) nach (X_2, S_2, a_2) und $X_2 \leftarrow Z_2 \rightarrow X_3$ von (X_2, S_2, a_2) nach (X_3, S_3, a_3) , bilde die Komposition in \mathcal{M}^+ durch:

$$X_1 \leftarrow Z_1 \times_{X_2} Z_2 \rightarrow X_3. \quad (2.1.3.1)$$

Die erste Bedingung aus (2.1.2) ist klar. Zur zweiten Bedingung sei $X_{3,j} \in S_3$ und eine Zusammenhangskomponente $(X_{3,j} \times_{X_3} Z_2 \times_{X_2} Z_1)'$ von $X_{3,j} \times_{X_3} Z_2 \times_{X_2} Z_1$ gegeben. Sei $(X_{3,j} \times_{X_3} Z_2)'$ die Zusammenhangskomponente von $X_{3,j} \times_{X_3} Z_2$, die das Bild von $(X_{3,j} \times_{X_3} Z_2 \times_{X_2} Z_1)'$ unter der Projektion enthält. Es existiert $X_{2,i} \in S_2$ und ein glatter Morphismus $\phi : (X_{3,j} \times_{X_3} Z_2)' \rightarrow X_{2,i}$ mit entsprechenden kommutativen Diagramm. Ist $(X_{2,i} \times_{X_2} Z_1)'$ die Zusammenhangskomponente, die das Bild von $(X_{3,j} \times_{X_3} Z_2 \times_{X_2} Z_1)'$ unter $\phi \times \text{id}$ enthält, dann existiert ein $X_{1,h} \in S_1$ und ein glatter Morphismus $\psi : (X_{2,i} \times_{X_2} Z_1)' \rightarrow X_{1,h}$ mit entsprechenden kommutativen Diagramm. Die Komposition

$$(X_{3,j} \times_{X_3} Z_2 \times_{X_2} Z_1)' \xrightarrow{\phi \times \text{id}} (X_{2,i} \times_{X_2} Z_1)' \xrightarrow{\psi} X_{1,h} \quad (2.1.3.2)$$

ist glatt und erfüllt die Bedingung. Die dritte Bedingung ist auch leicht nachzurechnen.

2.2. **Addition.** Für Morphismen $\alpha, \beta \in \text{Hom}_{\mathcal{M}^+}((X, S, a), (Y, T, b))$ gegeben durch $\alpha = X \xleftarrow{f} Z \xrightarrow{g} Y$ und $\beta = X \xleftarrow{f'} Z' \xrightarrow{g'} Y$ definiere

$$\alpha + \beta = X \xleftarrow{(f, f')} Z \amalg Z' \xrightarrow{(g, g')} Y. \quad (2.2.0.3)$$

Es ist leicht zu sehen, dass $\alpha + \beta \in \text{Hom}_{\mathcal{M}^+}((X, S, a), (Y, T, b))$ ist. Bezeichne mit $0 \in \text{Hom}_{\mathcal{M}^+}((X, S, a), (Y, T, b))$ den Morphismus gegeben durch

$$X \leftarrow \emptyset \rightarrow Y. \quad (2.2.0.4)$$

Die Addition (2.2.0.3) und die Null (2.2.0.4) machen $\text{Hom}_{\mathcal{M}^+}((X, S, a), (Y, T, b))$ zu einem Monoid. Komposition vertauscht auch mit Addition und ist mit der Null verträglich.

2.3. **Kategorie \mathcal{M} .** Wir definieren eine neue Kategorie \mathcal{M} deren Objekte mit denen aus \mathcal{M}^+ übereinstimmen und deren Morphismen $\text{Hom}_{\mathcal{M}}((X, S, a), (Y, T, b))$ durch die universelle abelsche Gruppe zu $\text{Hom}_{\mathcal{M}^+}((X, S, a), (Y, T, b))$ gegeben sind. Die Komposition von Morphismen aus \mathcal{M}^+ gibt wegen Verträglichkeit mit der Addition und der Null auf eindeutige Weise eine Komposition für \mathcal{M} , die wiederum bilinear ist.

Ein Funktor $\mathcal{M}^+ \rightarrow \mathcal{C}$ in eine additive Kategorie \mathcal{C} der Addition von Morphismen (2.2.0.3) und den Nullmorphimus (2.2.0.4) respektiert faktoriert in eindeutiger Weise über \mathcal{M} und induziert auf den Morphismenmengen Abbildungen von abelschen Gruppen.

2.4. Summen. Seien $(X_1, S_1, a_1), \dots, (X_t, S_t, a_t)$ Objekte in \mathcal{M} dann definiere

$$\coprod_i (X_i, S_i, a_i) = \left(\coprod_i X_i, \{ \coprod_i X'_i \mid X'_i \in S_i \}, \coprod_i a_i \right). \quad (2.4.0.5)$$

Wir haben natürliche Morphismen $(X_i, S_i, a_i) \rightarrow \coprod_i (X_i, S_i, a_i)$ gegeben durch

$$X_i \xleftarrow{=} X_i \rightarrow \coprod_i X_i,$$

und für alle $Y \in \mathcal{M}$ ist der natürliche Morphismus von abelschen Gruppen

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}} \left(\coprod_i (X_i, S_i, a_i), Y \right) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}} ((X_i, S_i, a_i), Y) \quad (2.4.0.6)$$

ein Isomorphismus mit inverser Abbildung (induziert durch)

$$\begin{aligned} (\alpha_1, \dots, \alpha_t) = (X_1 \xleftarrow{f_1} Z_1 \rightarrow Y, \dots, X_t \xleftarrow{f_t} Z_t \rightarrow Y) \mapsto \\ \coprod_i X_i \xleftarrow{\coprod_i f_i} \coprod_i Z_i \rightarrow Y. \end{aligned}$$

2.4.1. Additive Kategorie. Die leere Menge \emptyset ist das Nullobjekt in \mathcal{M} , denn zu jedem $Y \in \mathcal{M}$ existiert genau ein Morphismus $Y \rightarrow \emptyset$ bzw. $\emptyset \rightarrow Y$ gegeben durch $Y \leftarrow \emptyset \rightarrow \emptyset$ bzw. $\emptyset \leftarrow \emptyset \rightarrow Y$.

Insgesamt erhalten wir

Proposition 2.4.1. *Die Kategorie \mathcal{M} ist additiv.*

2.5. Tensorprodukte. Zu Objekten $(X, S, a), (X', S', a')$ in \mathcal{M} definiere

$$\begin{aligned} (X, S, a) \times (X', S', a') := (X \times_K X', \{ X_i \times_K X'_j \mid X_i \in S, X'_j \in S' \}, \\ z \mapsto a(p_1(z)) + a'(p_2(z))) \end{aligned}$$

als Objekt in \mathcal{M} .

Zu $X \xleftarrow{f} Z \xrightarrow{g} Y$ und $X' \xleftarrow{f'} Z' \xrightarrow{g'} Y'$ Morphismen in \mathcal{M}^+ definieren wir durch

$$X \times X' \xleftarrow{f \times f'} Z \times Z' \xrightarrow{g \times g'} Y \times Y'$$

einen Morphismus in \mathcal{M} und einen Funktor

$$\times : \mathcal{M}^+ \times \mathcal{M}^+ \rightarrow \mathcal{M}$$

der (eindeutig) zu einem biadditiven Funktor $\mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ erweitert.

Zusammen mit dem Einsobjekt $(\mathrm{Spec}(K), \{\mathrm{Spec}(K)\}, 0)$ ist damit \mathcal{M} eine Tensorkategorie.

2.6. Komplexe. Wir bezeichnen mit $C_b(\mathcal{M})$ die Kategorie der beschränkten Komplexe von \mathcal{M} . Diese ist wieder eine additive Kategorie. Die Transformationsfunktoren $C(\mathcal{M}) \rightarrow C(\mathcal{M})$ sind für jedes $A \in C(\mathcal{M}), n \in \mathbb{Z}$, durch

$$A[n]_m = A_{m-n}, \quad d_{A[n]} = (-1)^n d_A$$

definiert.

Zu einem Morphismus $\phi : A \rightarrow B$ in $C(\mathcal{M})$ ist der Kegel durch

$$\text{cone}(\phi) = B \oplus A[1], \quad d_{\text{cone}(\phi)} = \begin{pmatrix} d_B & \phi \\ 0 & d_{A[1]} \end{pmatrix}$$

definiert. Wir haben ein Dreieck

$$A \rightarrow B \rightarrow \text{cone}(\phi) \rightarrow A[1]. \quad (2.6.0.1)$$

Da \mathcal{M} eine Tensorkategorie ist, ist auch $C_b(\mathcal{M})$ eine Tensorkategorie mit

$$(A \otimes B)_m = \bigoplus_{m_1+m_2=m} A_{m_1} \otimes B_{m_2}$$

$$d_{A \otimes B} |_{A_{m_1} \otimes B_{m_2}} = d_A \otimes \text{id}_B + (-1)^{m_1} \text{id}_A \otimes d_B$$

sowie

$$\psi_{A,B} : A \otimes B \rightarrow B \otimes A, \quad \psi |_{A_{m_1} \otimes B_{m_2}} = (-1)^{m_1 \cdot m_2} \text{id}_{B_{m_2}} \otimes \text{id}_{A_{m_1}}$$

und Einselement $(\text{Spec}(K), \{\text{Spec}(K)\}, 0)$ (im Grad=0).

2.7. Komplexe assoziiert zu Konstellationen.

2.7.1. *Konstellationen.* Sei (X, S, a) ein Objekt aus \mathcal{M} und Y_1, \dots, Y_r glatte abgeschlossene Unterschemata von X .

Für ein $I \in \mathfrak{P}_r := \{\text{Teilmengen von } \{1, \dots, r\}\}$, $I = \{I_0, I_1, \dots, I_s\}$, setzen wir

$$Y_I \stackrel{\text{dfn}}{=} Y_{I_0} \times_X \cdots \times_X Y_{I_s}, \text{ falls } I \neq \emptyset, \text{ und } Y_\emptyset \stackrel{\text{dfn}}{=} X.$$

Definition 2.1 (Konstellation). Wir sagen, dass $(X, S, a); Y_1, \dots, Y_r$ eine Konstellation ist, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (1) für alle $I \in \mathfrak{P}_r$ und alle $X'_i \in S$ ist $Y_I \cap X'_i := Y_I \times_X X'_i$ glatt,
- (2) für alle $I \in \mathfrak{P}_r$, sowie $X'_i \in S$ und Punkte $y \in Y_I \cap X'_i$, gilt

$$\dim_y(Y_I \cap X'_i) = \dim_y Y_I - \dim_y X + \dim_y X'_i.$$

Man beachte, dass $X \in S$, insbesondere sind alle Y_I glatt.

Falls $S = \{X\}$ ist, dann sagen wir, dass $X; Y_1, \dots, Y_r$ eine Konstellation ist.

Die Bedingungen (1) und (2) bedeuten, dass jeder Durchschnitt Y_I transversal zu jedem Element $X_i \in S$ ist.

2.7.2. *Notation.* Für das Objekt $(X, \{X\}, a)$ aus \mathcal{M} schreiben wir $X(a)$ und für $X(0)$ schreiben wir manchmal einfach X .

Sei (X, S, a) ein Objekt aus \mathcal{M} und $Y \subset X$ ein glattes Unterschema, so dass für alle $X_i \in S$ das Schema $X_i \cap Y := X_i \times_X Y$ glatt ist, dann schreiben wir $(Y, S, b) \stackrel{\text{dfn}}{=} (Y, \{X_i \cap Y \mid X_i \in S\}, b)$.

Ferner bezeichnen wir mit $\dim X$ die lokal konstante Funktion $X \rightarrow \mathbb{Z}$, $x \mapsto \dim_x(X)$. Restriktionen lokal konstanter Funktionen werden manchmal nicht notiert, so ist z.B. $(Y, S, \dim X) = (Y, S, \dim X|_Y)$.

Wir benutzen die Notation und die Definitionen aus dem Anhang (A.1). Es bezeichnet \mathfrak{P}_r die Menge aller Teilmengen von $\{1, 2, \dots, r\}$ und $\mathfrak{P}_{r,d} \subset \mathfrak{P}_r$ die Elemente der Ordnung d . Durch Inklusionen von Mengen ist \mathfrak{P}_r eine Kategorie. Zu $I \in \mathfrak{P}_{r,d}$, $I = \{I_0, \dots, I_{d-1}\}$ und $I_0 < I_1 < \dots < I_{d-1}$, schreiben wir $\partial_k I := I - \{I_k\}$. Zu einem Funktor $F : \mathfrak{P}_r^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{C}$ in eine additive Kategorie \mathcal{C} sei ein Komplex in $C_b(\mathcal{C})$ durch

$$\dots \rightarrow \bigoplus_{\substack{I \in \mathfrak{P}_{r,s} \\ \text{deg}=s}} F(I) \xrightarrow{d} \bigoplus_{\substack{I \in \mathfrak{P}_{r,s-1} \\ \text{deg}=s-1}} F(I) \rightarrow \dots$$

und $d|_{F(I)} = \sum_{k=0}^{s-1} (-1)^k F(I \rightarrow \partial_k I)$ gegeben. Dual dazu kann man zu jedem Funktor $F : \mathfrak{P}_r \rightarrow \mathcal{C}$ einen Komplex definieren.

2.7.3. *Definition von $\langle (X, S, a), \cup_i Y_i \rangle$.*

Zu einer Konstellation $(X, S, a); Y_1, \dots, Y_r$ (Definition 2.1) sei $\langle (X, S, a), \cup_i Y_i \rangle$ in $C_b(\mathcal{M})$ der Komplex zum Funktor (siehe Anhang A.1)

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_r^{opp} &\rightarrow \mathcal{M} \\ I &\mapsto (Y_I, S, a - \dim X + \dim Y_I) \\ (I \supset J) &\mapsto (Y_I \xleftarrow{=} Y_I \xrightarrow{\subset} Y_J) \quad (\text{siehe (2.1.2)}). \end{aligned}$$

Man beachte, dass $\langle (X, S, a), \cup_i Y_i \rangle$ nicht definiert werden kann, falls Bedingungen (1) und (2) aus Definition (2.1) nicht gelten, weil dann $(Y_I \xleftarrow{=} Y_I \xrightarrow{\subset} Y_J)$ im allgemeinen kein Morphismus in \mathcal{M} ist.

2.7.4. *Induktive Konstruktion.* Wir haben einen Morphismus von Komplexen

$$\iota : \langle (Y_1, S, a + \dim Y_1 - \dim X), \cup_{i=2}^r Y_1 \cap Y_i \rangle \rightarrow \langle (X, S, a), \cup_{i=2}^r Y_i \rangle$$

durch

$$\begin{aligned} (Y_1 \cap Y_I, S, a + \dim Y_1 \cap Y_I - \dim X) &\rightarrow (Y_I, S, a + \dim Y_I - \dim X) \\ Y_1 \cap Y_I &\xleftarrow{=} Y_1 \cap Y_I \xrightarrow{\subset} Y_I, \end{aligned}$$

für alle $I \in \mathfrak{P}(\{2, \dots, r\}) = \{\text{Teilmengen von } \{2, \dots, r\}\}$.

Man rechnet leicht nach, dass

$$\langle (X, S, a), \cup_i Y_i \rangle = \text{cone}(\iota). \quad (2.7.4.0)$$

2.7.5. *Definition von $\langle (X, S, a), \cup_i Y_i \rangle^*$.*

Wir definieren hier die ‘‘duale Version’’ von $\langle (X, S, a), \cup_i Y_i \rangle$, sei also (X, S, a) ein Objekt aus \mathcal{M} und Y_1, \dots, Y_r glatte abgeschlossene Unterschemata von X .

Wir nehmen an, dass Y_1, \dots, Y_r folgende Bedingung erfüllt:

- (1) für alle Indizes $I \in \mathfrak{P}_r$ und alle $X'_i \in S$ ist $Y_I \cap X'_i := Y_I \times_X X'_i$ glatt.

Setze $T := \{Y_I \cap X_i \mid X_i \in S, I \in \mathfrak{P}_r\}$. Wir definieren (siehe Anhang A.1) einen Komplex $\langle (X, S, a), \cup_i Y_i \rangle^*$ in $C_b(\mathcal{M})$ durch den Funktor

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_r &\rightarrow \mathcal{M} \\ I &\mapsto (Y_I, T, a) \\ (I \subset J) &\mapsto (Y_I \xleftarrow{\supset} Y_J \xrightarrow{=} Y_J). \end{aligned}$$

2.7.6. *Induktive Konstruktion.* Wir haben einen Morphismus von Komplexen

$$\iota^* : \langle (X, S \cup \{Y_1 \cap X_i \mid X_i \in S\}, a), \cup_{i=2}^r Y_i \rangle^* \rightarrow \langle (Y_1, S, a), \cup_{i=2}^r Y_1 \cap Y_i \rangle^*$$

durch

$$(Y_I, T, a) \rightarrow (Y_1 \cap Y_I, T, a)$$

$$Y_I \xleftarrow{\supseteq} Y_1 \cap Y_I \xrightarrow{=} Y_1 \cap Y_I,$$

für alle $I \in \mathfrak{P}(\{2, \dots, r\})$.

Man rechnet leicht nach, dass

$$\langle (X, S, a), \cup_i Y_i \rangle^* = \text{cone}(\iota^*)[-1]. \quad (2.7.6.0)$$

3. HÖHERE CHOWGRUPPEN

3.0.7. Wir wiederholen in diesem Abschnitt die Konstruktion von Blochs Zykelkomplex $Z^*(X, **)$ für ein algebraisches Schema X ([Bl1]). Es ist leicht die Konstruktion auf Objekte aus der in Abschnitt (2) definierten Kategorie $C_b(\mathcal{M})$ zu übertragen und wir erhalten einen additiven Funktor

$$Z^*(, **) : C_b(\mathcal{M}) \rightarrow C_+(\text{graduierte abelsche Gruppen})$$

in die nach oben beschränkte Komplexe. Das Differential ist durch $d_m : Z^*(X, m) \rightarrow Z^*(X, m - 1)$ gegeben, das Sternchen in $Z^*(X, m)$ gehört zur Graduierung.

Die höheren Chowgruppen sind nach Bloch als Homologie des Zykelkomplexes $Z^*(X, **)$ definiert:

$$\text{CH}^*(X, m) \stackrel{\text{dfn}}{=} H_m Z^*(X, **).$$

Dabei erhält man für $m = 0$ die üblichen Chowgruppen eines algebraischen Schemas X . Bloch hat für die höheren Chowgruppen als Verallgemeinerung des Cherncharakters einen Isomorphismus (für X quasiprojektiv über K)

$$K_m(X)_{\mathbb{Q}}^{(n)} \xrightarrow{\cong} \text{CH}^n(X, m) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q},$$

von dem Gewicht n -Anteil der höheren K -Theorie aus abbildend, konstruiert. Deshalb stehen die höheren Chowgruppen zur algebraischen K-Theorie in gleicher Relation wie die singuläre Kohomologie von topologischen Räumen zur topologischen K-Theorie.

In der Tat gelten die höheren Chowgruppen als Kandidat für die motivische Kohomologie der noch zu konstruierenden Kategorie der gemischten Motive.

Die tiefsten Resultate, die wir benutzen werden, sind so genannte “Moving” Lemmata. Eine fundamentale Eigenschaft von Blochs Zykelkomplex ist das ausgezeichnete Dreieck zur Situation

$$Y \xleftarrow{\iota} X \xleftarrow{j} X - Y,$$

mit einer abgeschlossenen Immersion ι , gegeben durch

$$Z^*(Y, **) \xrightarrow{\iota^*} Z^*(X, **) \xrightarrow{j^*} Z^*(X - Y, **) \xrightarrow{+1} .$$

Bloch hat dies in [Bl2] bewiesen (für X quasiprojektiv).

Ein nicht so tiefes Resultat zum Bewegen von Zykeln ist folgendes. Sei S eine endliche Menge von lokal abgeschlossenen Untervarietäten von X , dann kann man einen Unterkomplex

$$Z^*(X, **)_S \subset Z^*(X, **),$$

bestehend aus denjenigen Zykeln, definieren, die X gut schneiden. Ist X affin oder projektiv, dann ist die Inklusion ein Quasiisomorphismus. Die Aussage ist wohlbekannt und ist in [Le] für X affin und in [Bl1] für X projektiv bewiesen.

3.1. Zykelgruppen für Objekte aus \mathcal{M} .

3.1.1. Den Translationsfunktork bei graduierten abelschen Gruppen definieren wir so: für eine graduierte abelsche Gruppe A und $n \in \mathbb{Z}$ ist $A(n)^d = A^{n+d}$. Ist A eine abelsche Gruppe, so steht also $A(-n)$ im Grad n .

3.1.2. Für $(X, S, a) \in \mathcal{M}$ (zur Definition der Kategorie \mathcal{M} siehe Abschnitt 2) setzen wir in der Notation aus (1.4.1)

$$Z^*(X, S, a) \stackrel{dfn}{=} \bigoplus_{\substack{X' \subset X \\ X' \text{ ist Zshgskomp.}}} \bigoplus_d Z^d(X')_{\{X_i \cap X' | X_i \in S\}}(-d + a(X')). \quad (3.1.2.1)$$

Für einen Morphismus $h : (X, S, a) \rightarrow (Y, T, b)$ in \mathcal{M}^+ gegeben durch $X \xleftarrow{f} Z \xrightarrow{g} Y$ haben wir:

Lemma 3.1.1.

(1) Für alle Zusammenhangskomponenten X' von X ist

$$Z^d(X')_{\{X_i \cap X' | X_i \in S\}} \subset Z^d(X)_f.$$

(2) Für eine Zusammenhangskomponente $Z' \subset Z$ sei $Y' \subset Y$ die Zusammenhangskomponente, die $g(Z')$ enthält. Dann ist

$$g_*(f^* \alpha |_{Z'}) \in Z^{d+b(Y')-a(X')}(Y')_{\{Y_j \cap Y' | Y_j \in T\}}$$

für alle $\alpha \in Z^d(X')_{\{X_i \cap X' | X_i \in S\}}$.

Als Folgerung von Lemma 3.1.1 erhält man, dass

$$\begin{aligned} Z^*(h) : Z^*(X, S, a) &\rightarrow Z^*(Y, T, b) \\ \alpha &\mapsto g_*(f^* \alpha) \end{aligned} \quad (3.1.2.2)$$

wohldefiniert ist.

Beweis zu Lemma (3.1.1). Zur Aussage (1): Für $Y_j \in T$ und $\alpha \in Z^d(X')_{\{X_i \cap X' | X_i \in S\}}$ ist

$$\text{codim}(f^{-1}\text{supp}(\alpha) \cap (Z \times_Y Y_j)) \geq \text{codim}(\text{supp}(\alpha)), \quad (3.1.2.3)$$

denn für jede Zusammenhangskomponente $(Z \times_Y Y_j)'$ von $Z \times_Y Y_j$ existiert nach (2.1.2, Bedingung (2)) ein $X_i \in S$ und ein glatter Morphismus $\phi : (Y_j \times_Y Z)' \rightarrow X_i$, so dass

$$\begin{array}{ccc} (Y_j \times_Y Z)' & \longrightarrow & Z' \\ \phi \downarrow & & \downarrow f \\ X_i & \longrightarrow & X \end{array}$$

kommutativ ist. Da α gut bzgl. X_i liegt, folgt (3.1.2.3).

Die Aussage (1) ergibt sich aus (3.1.2.3) mit $Y_j = Y$.

Zur Aussage (2): Da $\dim Y' - \dim Z' = b(Y') - a(X')$ nach (2.1.2, Bedingung (3)) ist

$$g_*(f^*\alpha|_{Z'}) \in Z^{d+b(Y')-a(X')}(Y').$$

Wir haben zu zeigen, dass $g_*(f^*\alpha|_{Z'})$ gut bzgl. Y_j für alle j liegt. Nach Bemerkung (2.1) liegt Y_j transversal zu $f|_{Z'} : Z' \rightarrow Y$ und da $f^*\alpha|_{Z'}$ gut bzgl. $Z' \times_Y Y_j$ liegt (nach (3.1.2.3)) folgt die Behauptung aus Lemma (1.6.1). \square

Proposition 3.1.1. *Durch (3.1.2.1) und (3.1.2.2) ist ein Funktor*

$$Z^* : \mathcal{M}^+ \rightarrow (\text{graduierte abelsche Gruppen})$$

definiert, der Addition von Morphismen und Null respektiert.

Beweis. Es ist $Z^*(id) = id$ klar und wir müssen

$$Z^*(k) \circ Z^*(h) = Z^*(k \circ h) \tag{3.1.2.4}$$

für zwei Morphismen $h \in \text{Hom}_{\mathcal{M}^+}((X_1, S_1, a_1), (X_2, S_2, a_2))$ und $k \in \text{Hom}_{\mathcal{M}^+}((X_2, S_2, a_2), (X_3, S_3, a_3))$ gegeben durch $X_1 \xleftarrow{h_1} Z_1 \xrightarrow{h_2} X_2$ und $X_2 \xleftarrow{k_1} Z_2 \xrightarrow{k_2} X_3$ zeigen. Die Komposition $k \circ h$ ist nach Definition durch $X_1 \xleftarrow{h_1 p_1} Z_1 \times_{X_2} Z_2 \xrightarrow{k_2 p_2} X_3$ gegeben. Nun ist h_2 transversal zu k_1 , denn für alle $z \in Z_1 \times_{X_2} Z_2$ ist

$$\begin{aligned} \dim_{p_1(z)} Z_1 - \dim_{h_2 p_1(z)} X_2 + \dim_{p_2(z)} Z_2 \\ &= a_1(h_1 p_1(z)) - a_2(h_2 p_1(z)) + \dim_{p_2(z)} Z_2 \\ &= \dim_{k_2 p_2(z)} X_3 - a_3(k_2 p_2(z)) + a_1(h_1 p_1(z)) \\ &= \dim_z Z_1 \times_{X_2} Z_2 \end{aligned}$$

durch sukzessives Anwenden von (2.1.2, Bedingung (3)). Es folgt $k_1^* h_2^* = p_{2*} p_1^*$ mit Lemma (1.6.1) und daraus (3.1.2.4).

Es ist offensichtlich, dass Z^* Addition von Morphismen und die Null respektiert. \square

Da die graduierten abelschen Gruppen eine additive Kategorie sind erweitert man Z^* eindeutig zu einem additiven Funktor

$$Z^* : \mathcal{M} \rightarrow (\text{graduierte abelsche Gruppen}). \tag{3.1.2.4}$$

Wir bezeichnen mit $Z^d : \mathcal{M} \rightarrow (\text{abelsche Gruppen})$ den (additiven) Funktor gegeben durch die Komposition von Z^* und der Projektion auf den Grad $= d$ Anteil.

3.1.3. Kompatibilität mit dem Tensorprodukt. Für Objekte $(X, S, a), (Y, T, b)$ in \mathcal{M} haben wir, wie in Abschnitt 1.5, ein äußeres Produkt

$$m : Z^*(X, S, a) \otimes_{\mathbb{Z}} Z^*(Y, T, b) \rightarrow Z^*((X, S, a) \times (Y, T, b)).$$

Aus der Kompatibilität mit Pullback (1.5.3) und Pushforward (1.5.2) folgt, dass m ist ein Morphismus von Funktoren

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} \times \mathcal{M} & \xrightarrow{Z^* \times Z^*} & (\text{gr. ab. Gr.}) \times (\text{gr. ab. Gr.}) \xrightarrow{\otimes_{\mathbb{Z}}} (\text{gr. ab. Gr.}) \\ & \searrow \times & \downarrow m \\ & & \mathcal{M} \xrightarrow{Z^*} (\text{gr. ab. Gr.}) \end{array}$$

ist. Für Objekte X_1, X_2, X_3 in \mathcal{M} ist

$$m_{X_1 \times X_2, X_3} \circ (m_{X_1, X_2} \otimes \text{id}) = m_{X_1, X_2 \times X_3} \circ (\text{id} \otimes m_{X_2, X_3}).$$

3.2. Definition von Blochs Zykelkomplex.

3.2.1.

Definition 3.1. Wir bezeichnen mit \square das Objekt in \mathcal{M} gegeben durch

$$\square = \underset{df_n}{(\mathbb{A}^1, \{\mathbb{A}^1, \{0\}, \{1\}\}, 0)}.$$

Wir setzen $\square^n = \square \times \cdots \times \square$ als n -faches Tensorprodukt in \mathcal{M} (für $n \geq 1$). Und $\square^0 = (\text{Spec}(K), \{\text{Spec}(K)\}, 0)$.

Bemerkung 3.1. Man kann, und das ist üblicher, \square alternativ durch

$$\square = (\mathbb{P}^1 - \{1\}, \{\mathbb{P}^1 - \{1\}, \{\infty\}, \{0\}\}, 0)$$

definieren. Es ist eine Frage der Darstellung. In Abschnitt 9 werden wir mit dieser alternativen Definition arbeiten.

Wir haben zwei Morphismen $\partial^1 : \square \rightarrow \square^0$ und $\partial^0 : \square \rightarrow \square^0$ (in \mathcal{M}) gegeben durch

$$\begin{aligned} \partial^1 &= \mathbb{A}^1 \xleftarrow{\iota_1} \text{Spec}(K) \rightarrow \text{Spec}(K), \\ \partial^0 &= \mathbb{A}^1 \xleftarrow{\iota_0} \text{Spec}(K) \rightarrow \text{Spec}(K), \end{aligned}$$

wobei ι_1 die Inklusion im Punkt 1 und ι_0 die Inklusion im Punkt 0 ist. Für $n \geq 1$ definieren wir $\partial_i^\epsilon : \square^n \rightarrow \square^{n-1}$ durch $\text{id} \times \cdots \times \underbrace{\partial_i^\epsilon}_i \times \cdots \times \text{id}$ für

$1 \leq i \leq n$ und $\epsilon \in \{0, 1\}$. Wir setzen

$$d_n : \square^n \rightarrow \square^{n-1}, \quad d_n = \sum_{i=1}^n (-1)^i (\partial_i^0 - \partial_i^1).$$

Für $1 \leq j \leq n$ definieren wir $p_j : \square^{n-1} \rightarrow \square^n$ (in \mathcal{M}) durch

$$\mathbb{A}^{n-1} \xleftarrow{p'_j} \mathbb{A}^n \xrightarrow{\quad} \mathbb{A}^n,$$

wobei p'_j die Projektion $p'_j(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n)$ ist.

Die folgenden Identitäten sind leicht nachzuprüfen.

Lemma 3.2.1. *Es ist*

- $d_n \circ d_{n+1} = 0$ für $n \geq 1$,

$$\bullet (\partial_i^0 - \partial_i^1)p_j = \begin{cases} p_{j-1}(\partial_i^0 - \partial_i^1) & \text{falls } i < j, \\ 0 & \text{falls } i = j, \\ p_j(\partial_{i-1}^0 - \partial_{i-1}^1) & \text{falls } i > j. \end{cases}$$

3.2.2. *Definition.* Wir definieren nun einen Funktor

$$Z^*(, **) : \mathcal{M} \rightarrow C_+(\text{graduierte abelsche Gruppen}) \quad (3.2.2.1)$$

in die nach unten beschränkten Komplexe gradierter abelscher Gruppen. Für X aus \mathcal{M} bezeichnen wir $Z^*(X, **)$ als (Blochs) Zykelkomplex zu X .

Dazu setzen wir für alle $m \geq 0$ und $X \in \mathcal{M}$:

$$Z^*(X, m) = Z^*(X \times \square^m) / \sum_{j=1}^m \text{Bild}(Z^*(id_X \times p_j)). \quad (3.2.2.2)$$

Man bezeichnet $\sum_{j=1}^m \text{Bild}(Z^*(id_X \times p_j))$ als degenerierte Zykel.

Mit Differential $Z^*(id_X \times d_m)$ ist

$$Z^*(X, **) : \dots \rightarrow Z^*(X, 2) \rightarrow Z^*(X, 1) \rightarrow Z^*(X, 0)$$

wegen Lemma (3.2.1) ein Komplex ($Z^*(X, 0)$ im Grad= 0). Wiederum sieht man leicht, dass $Z^*(, **)$ ein additiver Funktor ist.

3.2.3. *Kompatibilität mit dem Tensorprodukt.* Für $X, Y \in \mathcal{M}$ wird durch

$$m : Z^*(X \times \square^{m_1}) \otimes_{\mathbb{Z}} Z^*(Y \times \square^{m_2}) \rightarrow Z^*(X \times \square^{m_1} \times Y \times \square^{m_2})$$

(siehe (3.1.3)) zusammen mit Vertauschung von Y und \square^{m_1} ein Morphismus

$$Z^*(X, m_1) \otimes Z^*(Y, m_2) \rightarrow Z^*(X \times Y, m_1 + m_2) \quad (3.2.3.1)$$

induziert. Wir bekommen so einen Morphismus von Komplexen

$$m_{X,Y} : Z^*(X, **) \otimes Z^*(Y, **) \rightarrow Z^*(X \times Y, **) \quad (3.2.3.2)$$

der funktoriell im Paar (X, Y) ist.

Für Objekte X_1, X_2, X_3 in \mathcal{M} ist

$$m_{X_1 \times X_2, X_3} \circ (m_{X_1, X_2} \otimes \text{id}) = m_{X_1, X_2 \times X_3} \circ (\text{id} \otimes m_{X_2, X_3}).$$

Für Objekte X, Y in \mathcal{M} sei $\tau : X \times Y \rightarrow Y \times X$ die Permutation der Faktoren.

Lemma 3.2.2. *Das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} Z^*(X, **) \otimes Z^*(Y, **) & \xrightarrow{m_{X,Y}} & Z^*(X \times Y, **) \\ \downarrow & & Z^*(\tau, **) \downarrow \\ Z^*(Y, **) \otimes Z^*(X, **) & \xrightarrow{m_{Y,X}} & Z^*(Y \times X, **) \end{array} \quad (3.2.3.3)$$

kommutiert bis auf Homotopie.

Beweis. Um eine Homotopie zu beschreiben definiere man zu $m \geq 0$ und $0 < n \leq m$ einen Morphismus von *Schemata* $c_n : \mathbb{A}^{m+1} \rightarrow \mathbb{A}^m$ durch

$$(t_1, \dots, t_{m+1}) \mapsto (t_{m-n+2}, t_{m-n+3}, \dots, t_m, \underbrace{t_1 + t_{m+1} - t_1 \cdot t_{m+1}}_n, t_2, t_3, t_{m-n+1})$$

Es ist leicht zu sehen, dass

$$(id_X \times c_n)^* : Z^*(X, m) \rightarrow Z^*(X, m+1)$$

für alle Objekte X aus \mathcal{M} wohldefiniert ist ($(id_X \times c_n)^*$ bezeichnet den Pullback für Zykel (1.4)). Bezeichne $P_n : \square^m \rightarrow \square^m$ die Vertauschung der Faktoren $\square^n \times \square^{m-n} \rightarrow \square^{m-n} \times \square^n$, dann rechnet man leicht nach, dass

$$(\partial_i^0 - \partial_i^1)(id_X \times c_n)^* = \begin{cases} id_X \times P_n & \text{für } i = 1 \\ (id_X \times c_n)^* \circ (\partial_{i+n-1}^0 - \partial_{i+n-1}^1) & \text{für } 1 < i \leq m+1-n \\ (id_X \times c_{n-1})^* \circ (\partial_{i-m-1+n}^0 - \partial_{i-m-1+n}^1) & \text{für } m+1-n < i \leq m \\ id_X \times P_{n-1} & \text{für } i = m+1. \end{cases}$$

Wir definieren die Homotopie

$$K : Z^*(X, **) \otimes Z^*(Y, **) \rightarrow Z^*(Y \times X)[+1]$$

durch ($m := m_1 + m_2$)

$$\begin{aligned} Z^*(X, m_1) \otimes Z^*(Y, m_2) &\xrightarrow{m_{X,Y}} Z^*(X \times Y, m) \\ &\xrightarrow{Z^*(\tau, **)} Z^*(Y \times X, m) \\ &\rightarrow Z^*(Y \times X, m+1) \end{aligned}$$

mit drittem Pfeil gegeben durch $\sum_{n=1}^{m_1} (-1)^{n \cdot (m+1)} (id_{Y \times X} \times c_n)^*$. Man rechnet nach, dass

$$d_{Z^*(Y \times X, **)} \circ K + K \circ d_{Z^*(Y, **) \otimes Z^*(X, **)} = Z^*(\tau, **) \circ m_{X \times Y} - m_{Y \times X} \circ \sigma,$$

mit $\sigma : Z^*(X, **) \otimes Z^*(Y, **) \rightarrow Z^*(Y, **) \otimes Z^*(X, **)$ der natürliche Morphismus. \square

Bemerkung 3.2. Die im Lemma 3.2.2 angegebene Homotopie ist funktoriell in den Argumenten (X, Y) .

3.2.4. Wir erweitern den Zykelkomplex aus (3.2.2.1) in offensichtlicher Weise zu einem additiven Funktor

$$C_b(\mathcal{M}) \rightarrow C_b(C_+(\text{graduierte abelsche Gruppen})), \quad (3.2.4.1)$$

der mit den Translationsfunktoren vertauscht und Kegel in Kegel überführt (zu den Definitionen siehe (2.6)). Außerdem erhalten wir durch Erweiterung

von (3.2.3.2) einen Morphismus von Funktoren

$$\begin{array}{ccc}
C_b(\mathcal{M}) \times C_b(\mathcal{M}) & \longrightarrow & C_b(C_+(\text{gaG.})) \times C_b(C_+(\text{gaG.})) \xrightarrow{\otimes} C_b(C_+(\text{gaG.})) \\
& \searrow \times & \downarrow m \\
& & C_b(\mathcal{M}) \longrightarrow C_b(C_+(\text{gaG.})).
\end{array}$$

Um einen Funktor

$$Z^*(, **) : C_b(\mathcal{M}) \rightarrow C_+(\text{graduierte abelsche Gruppen}) \quad (3.2.4.2)$$

zu erhalten bilden wir die Komposition von (3.2.4.1) mit dem Funktor

$$Ass : C_b(C_+(\text{gaG.})) \rightarrow C_+(\text{gaG.}),$$

der jedem (naiven) Doppelkomplex den assoziierten einfachen Komplex zuordnet. Wir wiederholen die Definition und einige Eigenschaften von Ass im Anhang (A.3).

3.3. Elementare Eigenschaften von Blochs Zykelkomplex.

3.3.1. Aus den Eigenschaften von Ass in (A.3) sieht man, dass der Zykelkomplexfunktor

$$Z^*(, **) : C_b(\mathcal{M}) \rightarrow C_+(\text{graduierte abelsche Gruppen})$$

(aus (3.2.4.2)) ein additiver Funktor ist, der Translation und Kegel respektiert.

3.3.2. *Tensorstruktur.* Durch Erweiterung von (3.2.3.2) bekommt man (mittels (A.3.2.1)) einen Morphismus

$$m_{(X_\bullet, Y_\bullet)} : Z^*(X_\bullet, **) \otimes Z^*(Y_\bullet, **) \rightarrow Z^*(X_\bullet \times Y_\bullet, **), \quad (3.3.2.1)$$

funktoriell im Paar (X_\bullet, Y_\bullet) aus Objekten von $C_b(\mathcal{M})$. Explizit hat man

$$\begin{array}{ccc}
Z^*(X_\bullet, **) \otimes Z^*(Y_\bullet, **) & \xrightarrow{m_{(X_\bullet, Y_\bullet)}} & Z^*(X_\bullet \times Y_\bullet, **) \\
\uparrow & & \uparrow \\
Z^*(X_i, j) \otimes Z^*(Y_s, t) & \xrightarrow{(-1)^{j \cdot s} \cdot (3.2.3.1)} & Z^*(X_i \times Y_s, j+t).
\end{array}$$

Es gilt

$$m_{X_\bullet \times Y_\bullet, Z_\bullet} \circ (m_{X_\bullet, Y_\bullet} \otimes \text{id}) = m_{X_\bullet, Y_\bullet \times Z_\bullet} \circ (\text{id} \otimes m_{Y_\bullet, Z_\bullet}).$$

Bezeichnet $\tau : X_\bullet \times Y_\bullet \rightarrow Y_\bullet \times X_\bullet$ die Vertauschung der Faktoren, dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
Z^*(X_\bullet, **) \otimes Z^*(Y_\bullet, **) & \xrightarrow{m} & Z^*(X_\bullet \times Y_\bullet, **) \\
\downarrow & & \downarrow Z^*(\tau, **) \\
Z^*(Y_\bullet, **) \otimes Z^*(X_\bullet, **) & \xrightarrow{m} & Z^*(Y_\bullet \times X_\bullet, **)
\end{array}$$

bis auf Homotopie. Man kann dazu die Homotopie aus (3.2.3), zusammen mit einem Vorzeichen $\epsilon(m_1, i, j) = (-1)^{m_1 \cdot j + i + j}$,

$$Z^*(X_i, m_1 - i) \otimes Z^*(Y_j, m_2 - j) \xrightarrow{\epsilon \cdot K} Z^*(Y_j \times X_i, m + 1 - i - j)$$

benutzen ($m := m_1 + m_2$).

Definition 3.2 (Höhere Chowgruppen). Wir definieren

$$\mathrm{CH}^*(X_\bullet, m) =_{dfn} H_m Z^*(X_\bullet, **)$$

für alle Objekte X_\bullet aus $C_b(\mathcal{M})$ und definieren $\mathrm{CH}^d(X_\bullet, m)$ als den Grad= d Anteil.

3.3.3. Filtrierung und Spektralsequenzen. Wie in (A.3) erklärt haben wir eine funktorielle Filtrierung W_* auf $Z^*(X_\bullet, **)$ und eine induzierte Filtrierung auf $\mathrm{CH}^*(X_\bullet, m)$ für alle m .

Die Spektralsequenz $E_{pq}^r \Rightarrow \mathrm{CH}^*(X_\bullet, p+q)$ (aus (A.3.3.2)) zu W_* bezeichnen wir mit $E_{pq}^r(X_\bullet)$.

Nach (A.3.3.3) ist

$$\begin{aligned} E_{pq}^0(X_\bullet) &= Z^*(X_p, q), \\ E_{pq}^1(X_\bullet) &= \mathrm{CH}^*(X_p, q), \\ E_{pq}^2(X_\bullet) &= \mathrm{H}(\mathrm{CH}^*(X_{p+1}, q) \rightarrow \mathrm{CH}^*(X_p, q) \rightarrow \mathrm{CH}^*(X_{p-1}, q)), \\ &\dots \\ E_{pq}^\infty(X_\bullet) &= \mathrm{Gr}_p^W \mathrm{CH}(X_\bullet, p+q). \end{aligned}$$

Die Funktorialität von $E_{pq}^r(X_\bullet)$ ist für $r \leq 2$ durch die offensichtlichen Morphismen gegeben.

3.3.4. Modulstruktur. Wir schreiben K statt $\mathrm{Spec}(K)$. Durch

$$m_{(K,K)} : Z^*(K, **) \otimes Z^*(K, **) \rightarrow Z^*(K, **)$$

aus (3.3.2.1) und

$$1 : \mathbb{Z} = Z^0(K, 0) \rightarrow Z^*(K, **)$$

ist auf $Z^*(K, **)$ (bzw. $\mathrm{CH}^*(K, **)$) eine Ringstruktur mit 1 definiert. Durch

$$m_{(K, X_\bullet)} : Z^*(K, **) \otimes Z^*(X_\bullet, **) \rightarrow Z^*(X_\bullet, **)$$

haben wir für jeden Komplex X_\bullet eine $Z^*(K, **)$ -Linksmodulstruktur auf $Z^*(X_\bullet, **)$ (und somit eine $\mathrm{CH}^*(K, **)$ -Linksmodulstruktur auf $\mathrm{CH}^*(X_\bullet, **)$) gegeben. Man kann analog Rechtsmodulstrukturen definieren.

3.4. Moving Lemmata.

3.4.1. Wir arbeiten mit der Notation aus (2.7.2). Sei X ein glattes, quasiprojektives Schema über dem Grundkörper K und $U \subset X$ offen, außerdem sei $Y := X - U$ ebenfalls glatt. Wir können die Objekte X und $Y(-\text{codim}_X Y)$ in \mathcal{M} bilden, wobei $\text{codim}_X Y : Y \rightarrow \mathbb{Z}$ die Kodimension von Y in X an einem Punkt $y \in Y$ angibt. Wir haben Morphismen in \mathcal{M} :

$$\begin{aligned} X \rightarrow U \quad \text{via} \quad X \xleftarrow{\text{incl}} U \xrightarrow{\cong} U \\ Y(-\text{codim}_X Y) \rightarrow X \quad \text{via} \quad Y \xleftarrow{\cong} Y \xrightarrow{\text{incl}} X, \end{aligned}$$

und wegen $Y \times_X U = \emptyset$ ist die Komposition trivial.

Satz 3.4.1 (S. Bloch [Bl2], M. Levine [Le2]). *Es ist*

$$Z^*(Y(-\text{codim}_X Y), **) \rightarrow Z^*(X, **) \rightarrow Z^*(U, **)$$

ein ausgezeichnetes Dreieck, d.h.

$$Z^*(\text{cone}(Y(-\text{codim}_X Y) \rightarrow X), **) \rightarrow Z^*(U, **)$$

ist ein Quasiisomorphismus.

Bemerkung 3.3. Da wir nur mit glatten Schemata arbeiten fordern wir unnötigerweise, dass Y glatt ist. Blochs Satz gilt auch für singuläre Komplemente $X - U$.

Sei $\{U_i\}_{i \in I}$ eine endliche Überdeckung von X durch offene Unterschemata. Wir haben durch die Einschränkungsmorphismen das übliche simpliziale Objekt

$$\bigoplus_{i \in I} U_i \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \bigoplus_{i,j \in I} U_i \cap U_j \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \bigoplus_{i,j,k \in I} U_i \cap U_j \cap U_k \quad \dots$$

und den assoziierten Komplex $\mathcal{K}(\{U_i\}_{i \in I})$ in $C_b(\mathcal{M})$. Als Folgerung aus der Lokalisierungssequenz von Satz 3.4.1 hat man folgendes Korollar.

Korollar 3.4.1 (Mayer-Vietoris-Auflösung). *Der natürliche Morphismus*

$$Z^*(X, **) \rightarrow Z^*(\mathcal{K}(\{U_i\}_{i \in I}), **)$$

ist ein Quasiisomorphismus.

Sei $X; Y_1, \dots, Y_r$ eine Konstellation (Definition 2.1) glatter, quasiprojektiver Schemata. Wir setzen $U := X - \cup_i Y_i$. Wir haben in Abschnitt 2.7 einen Komplex $\langle X, \cup_i Y_i \rangle$ definiert. Wir haben einen natürlichen Morphismus von Komplexen

$$\langle X, \cup_i Y_i \rangle \rightarrow U, \tag{3.4.1.1}$$

gegeben durch

$$\langle X, \cup_i Y_i \rangle_0 = X \rightarrow U \quad \text{via} \quad X \xleftarrow{\cong} U \rightarrow U.$$

Das nächste Korollar folgt wie (3.4.1) aus einfacher homologischer Algebra. Wir führen den Beweis dennoch aus.

Korollar 3.4.2. *Es ist*

$$Z^*(\langle X, \cup_i Y_i \rangle, **) \rightarrow Z^*(U, **)$$

ein Quasiisomorphismus.

Beweis. Nach (2.7.4) haben wir das ausgezeichnete Dreieck

$$\langle Y_1(\dim Y_1 - \dim X), \cup_{i=2}^r Y_1 \cap Y_i \rangle \rightarrow \langle X, \cup_{i=2}^r Y_i \rangle \rightarrow \langle X, \cup_i Y_i \rangle \xrightarrow{+1}$$

und man sieht leicht, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \langle Y_1(\dim Y_1 - \dim X), \cup_{i=2}^r Y_1 \cap Y_i \rangle & \longrightarrow & \langle X, \cup_{i=2}^r Y_i \rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y_1 \cap U'(\dim Y_1 - \dim X) & \longrightarrow & U' \end{array}$$

kommutativ ist ($U' = X - \cup_{i=2}^r Y_i$) und wir somit einen Morphismus

$$\begin{array}{ccccccc} \langle Y_1(b), \cup_{i=2}^r Y_1 \cap Y_i \rangle & \longrightarrow & \langle X, \cup_{i=2}^r Y_i \rangle & \longrightarrow & \langle X, \cup_i Y_i \rangle & \xrightarrow{+1} & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ Y_1 \cap U'(b) & \longrightarrow & U' & \longrightarrow & \text{cone}(Y_1 \cap U'(b) \rightarrow U') & \xrightarrow{+1} & \end{array}$$

von ausgezeichneten Dreiecken haben, wobei $b = \dim Y_1 - \dim X$.

Per Induktion über r können wir nach Anwenden von $Z^*(, **)$ annehmen, dass die beiden ersten vertikalen Pfeile Quasiisomorphismen sind, also auch der dritte.

Nach Bloch's Moving Lemma 3.4.1 ist

$$Z^*(\text{cone}(Y_1 \cap U'(b) \rightarrow U'), **) \rightarrow Z^*(U, **)$$

ein Quasiisomorphismus und es folgt die Behauptung. \square

3.4.2. Sei $(X, S, 0)$ ein Objekt in \mathcal{M} und X quasiprojektiv, dann induziert die Identität id_X einen Morphismus

$$(X, S, 0) \rightarrow X.$$

Satz 3.4.2 (S. Bloch [Bl1], M. Levine [Le]). *Ist X projektiv oder affin, dann ist*

$$Z^*((X, S, 0), **) \rightarrow Z^*(X, **)$$

ein Quasiisomorphismus.

3.4.3. *Kontravariante Funktorialität der Chowgruppen.* Indem man die obigen Sätze (3.4.1), (3.4.2) benutzt kann man für einen Morphismus $f : Z \rightarrow X$ zweier glatter, quasiprojektiver Schemata X, Z auf funktorielle Weise einen Morphismus

$$f^* : Z^*(X, **) \rightarrow Z^*(Z, **) \tag{3.4.3.1}$$

in der derivierten Kategorie konstruieren. Dies ist in [Le] beschrieben.

Wir erklären die Konstruktion im Fall einer abgeschlossenen Immersion $f : Z \rightarrow X$. Sei $\{U_i\}_{i \in I}$ eine endliche Überdeckung von X durch affine

Schemata. Es sei $\mathcal{K}(\{(U_i, \{U_i, Z \cap U_i\}, 0)\}_{\in I})$ der Komplex assoziiert zum simplizialen Objekt

$$\bigoplus_{i \in I} (U_i, \{U_i, Z \cap U_i\}, 0) \begin{matrix} \xrightarrow{\cong} \\ \xleftarrow{\cong} \end{matrix} \bigoplus_{i, j \in I} (U_i \cap U_j, \{U_i \cap U_j, Z \cap U_i \cap U_j\}, 0) \dots$$

Man hat natürliche Morphismen

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}(\{(U_i, \{U_i, Z \cap U_i\}, 0)\}_{\in I}) & \longrightarrow & \mathcal{K}(\{U_i\}_{\in I}) \\ \downarrow & & \\ \mathcal{K}(\{Z \cap U_i\}_{\in I}) & & (*) \end{array}$$

mit vertikalem Pfeil

$$(U_J, \{U_J, U_J \cap Z\}, 0) \rightarrow U_J \cap Z \quad \text{via} \quad U_J \leftarrow U_J \cap Z \xrightarrow{=} U_J \cap Z$$

für einen Multiindex J . Nach Satz 3.4.2 ist nach Anwenden von $Z^*(, **)$ der horizontale Pfeil (in $(*)$) ein Quasiisomorphismus und mit Korollar 3.4.1 erhält man (3.4.3.1).

Eine alternative Beschreibung von f^* erhält man durch eine geeignete Kompaktifizierung \bar{X} von X . Sei also $\bar{X}; Y_1, \dots, Y_r$ eine Konstellation glatter *projektiver* Schemata und $X = \bar{X} - \cup_i Y_i$. Wir können den Komplex $\langle \bar{X}, \{\bar{X}, Z\}, 0, \cup_i Y_i \rangle$ bilden (es ist $Z \cap Y_i = \emptyset$) und das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \langle \bar{X}, \{\bar{X}, Z\}, 0, \cup_i Y_i \rangle & \longrightarrow & \langle \bar{X}, \cup_i Y_i \rangle \\ \downarrow & & \\ Z & & \end{array}$$

Mit Satz 3.4.2 und Korollar 3.4.2 erhält man einen Morphismus $Z^*(X, **) \rightarrow Z^*(Z, **)$ in der derivierten Kategorie.

Aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \langle \bar{X}, \cup_i Y_i \rangle & \longrightarrow & X & \longrightarrow & \mathcal{K}(\{U_i\}_{\in I}) \\ \uparrow & & & & \uparrow \\ \langle \bar{X}, \{\bar{X}, Z\}, 0, \cup_i Y_i \rangle & & & & \mathcal{K}(\{(U_i, \{U_i, Z \cap U_i\}, 0)\}_{\in I}) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ Z & \xrightarrow{=} & Z & \longrightarrow & \mathcal{K}(\{Z \cap U_i\}_{\in I}) \end{array} \quad (3.4.3.2)$$

folgt, dass dies f^* ist.

Wir besprechen noch eine weitere Variante. Bezeichne \bar{Z} den Abschluss von Z in \bar{X} . Wir nehmen an, dass \bar{Z} glatt ist, und $(\bar{X}, \{\bar{X}, \bar{Z}\}, 0; Y_1, \dots, Y_r)$ eine Konstellation (Definition 2.1) ist. Unter diesen Voraussetzungen ist $\langle \bar{X}, \{\bar{X}, \bar{Z}\}, 0, \cup_i Y_i \rangle$ definiert (2.7.3). Man kann f^* mit

Hilfe des folgenden Diagramms beschreiben:

$$\begin{array}{ccc}
Z^*((\overline{X}, \{\overline{X}, \overline{Z}\}, 0), \cup_i Y_i, **) & \xrightarrow{quis} & Z^*(X, **) \\
\downarrow & & \downarrow f^* \\
Z^*(\langle \overline{Z}, \cup_i \overline{Z} \cap Y_i \rangle, **) & \xrightarrow{quis} & Z^*(Z, **)
\end{array} \tag{3.4.3.3}$$

dabei ist

$$\langle \overline{X}, \{\overline{X}, \overline{Z}\}, 0, \cup_i Y_i \rangle \rightarrow \langle \overline{Z}, \cup_i \overline{Z} \cap Y_i \rangle \tag{3.4.3.4}$$

durch $Y_I \xleftarrow{incl} \overline{Z} \cap Y_I \xrightarrow{=} \overline{Z} \cap Y_I$, für alle $I \in \mathfrak{P}_r$, gegeben. Dies folgt aus dem zu (3.4.3.2) analogen Diagramm oder aus dem Quasiisomorphismus (nach Satz 3.4.2)

$$Z^*((\overline{X}, \{\overline{X}, \overline{Z}\}, 0), \cup_i Y_i, **) \xrightarrow{quis} Z^*(\langle \overline{X}, \{\overline{X}, Z \rangle, 0, \cup_i Y_i \rangle, **).$$

3.4.4. Kategorie $KonC_b(\mathcal{M})$ und höhere Chowgruppen. Sei $KonC_b(\mathcal{M})$ die volle Unterkategorie von $C_b(\mathcal{M})$ bestehend aus den Objekten $\langle (X, S, a), \cup_i Y_i \rangle$ für eine Konstellation $(X, S, a); Y_1, \dots, Y_r$ mit X projektiv. Mit Hilfe von Korollar 3.4.2 und Satz 3.4.2 haben wir einen Funktor

$$\begin{array}{ccc}
KonC_b(\mathcal{M}) & \rightarrow & D_+(\text{grad. abelsche Gruppen}) \\
\langle (X, S, a), \cup_i Y_i \rangle & \mapsto & Z^*((X - \cup_i Y_i)(a), **)
\end{array} \tag{3.4.4.1}$$

in die derivierte Kategorie graduerter, abelscher Gruppen. Wir bezeichnen diesen Funktor ebenfalls mit $Z^*(, **)$.

Proposition 3.4.1. *Sei $\phi : \langle (X, S, a), \cup_i Y_i \rangle \rightarrow \langle (V, T, b), \cup_j W_j \rangle$ ein Morphismus in $KonC_b(\mathcal{M})$ und $\phi_0 = (X \xleftarrow{f} Z \xrightarrow{g} V)$ der Morphismus im Grad $= 0$. Bezeichne $U_X := X - \cup_i Y_i, U_V := V - \cup_j W_j$ und $g_U : Z \times_V U_V \rightarrow U_V$ den Basiswechsel von g , sowie $f_U : Z \times_V U_V \rightarrow Z \rightarrow X$.*

Es faktorisiert f_U über U_X und es gilt

$$Z^*(\phi, **) = g_{U*} \circ f_U^*$$

mit $f_U^ : Z^*(U_X(a), **) \rightarrow Z^*(Z \times_V U_V(a), **)$ bzw. $g_{U*} : Z^*(Z \times_V U_V(a), **) \rightarrow Z^*(U_V(b), **)$ den Pullback bzw. Pushforward für höhere Chowgruppen (3.4.3).*

Beweis. Die Komposition

$$\langle (X, S, a), \cup_i Y_i \rangle \xrightarrow{\phi} \langle (V, T, b), \cup_j W_j \rangle \rightarrow U_V$$

ist ein Morphismus von Komplexen und somit $Y_i \times_X Z \times_V U_V = \emptyset$ für alle i , also faktorisiert f_U über U_X .

Seien $(Z \times_V U_V)^i, i = 1, \dots, e$, die Zusammenhangskomponenten von $Z \times_V U_V$, und $X_i \in S$, so dass $f_U|_{(Z \times_V U_V)^i}$ über X_i faktorisiert und $f^i := f_U|_{(Z \times_V U_V)^i} : (Z \times_V U_V)^i \rightarrow X_i$ glatt ist.

Man hat ein offensichtlich kommutatives Diagramm in $C_b(\mathcal{M})$

$$\begin{array}{ccc}
 (X, S, a) & \xrightarrow{\sum_i (X \leftarrow X_i \cap U_X \rightarrow X_i \cap U_X)} & \bigoplus_{i=1}^e X_i \cap U_X(a) \\
 \downarrow \phi & & \downarrow \\
 (V, T, b) & \xrightarrow{\sum_i (X_i \cap U_X \xleftarrow{f_U^i} (Z \times_V U_V)^i \xrightarrow{g_U} U_V)} & U_V(b).
 \end{array}$$

Nach den Überlegungen aus Abschnitt 3.4.3 ist

$$Z^* \left((X, S, a) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^e X_i \cap U_X(a), ** \right) = \sum_i \iota_i^*$$

mit $\iota_i : X_i \cap U_X \rightarrow U_X$ die Inklusion und es ist offenbar

$$\sum_i Z^* \left(\bigoplus_{i=1}^e X_i \cap U_X(a) \rightarrow U_X(b), ** \right) = \sum_i g_{U^*} f_U^{i*}.$$

Wegen Funktorialität des Pullback hat man deshalb

$$Z^*(\phi, **) = g_{U^*} f_U^*.$$

□

4. SPUR UND KOMPOSITION

4.0.5. *Einleitung.* Sei X ein glattes, projektives Schema über dem Grundkörper K und $X; Y_1, \dots, Y_r$ eine Konstellation (Definition 2.1).

In (2.7.3) haben wir zur Konstellation $X; Y_1, \dots, Y_r$ einen Komplex $\langle X, \cup_i Y_i \rangle$ assoziiert und in (2.7.5) eine “duale” Version $\langle X, \cup_i Y_i \rangle^*$. In diesem Abschnitt zeigen wir, dass man einen natürlichen Morphismus

$$\mathrm{tr} : Z^*(\langle X, \cup_i Y_i \rangle \times \langle X(\dim X), \cup_i Y_i \rangle^*, **) \rightarrow Z^*(K, **) \quad (\text{Spur})$$

in der derivierten Kategorie hat.

Allgemeiner seien A_\bullet und B_\bullet Objekte aus $C_b(\mathcal{M})$ deren Komponenten A_m (bzw. B_m) projektive Schemata zugrundeliegen. Dann hat man in der derivierten Kategorie einen Morphismus

$$Z^*(A_\bullet \times \langle X, \cup_i Y_i \rangle \times \langle X(\dim X), \cup_i Y_i \rangle^* \times B_\bullet, **) \rightarrow Z^*(A_\bullet \times B_\bullet, **).$$

Zusammen mit dem äußeren Produkt erhält man

$$\begin{aligned} Z^*(A_\bullet \times \langle X, \cup_i Y_i \rangle, **) \otimes Z^*(\langle X(\dim X), \cup_i Y_i \rangle^* \times B_\bullet, **) \\ \rightarrow Z^*(A_\bullet \times B_\bullet, **) \quad (\text{Komposition}). \end{aligned}$$

Wir bezeichnen diesen Morphismus als (Komposition).

Man kann jetzt eine Kategorie $\mathcal{M}e$ konstruieren, deren Objekte $(X(a), \cup_i Y_i)$ durch eine Konstellation $X; Y_1, \dots, Y_r$ projektiver Schemata und einer lokal konstanten Funktion $a : X \rightarrow \mathbb{Z}$ gegeben sind, mit Morphismen

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}e}((X(a), \cup_i Y_i), (V(b), \cup_j W_j)) = \\ H_0(Z^0(\langle X(\dim X - a), \cup_i Y_i \rangle^* \times \langle V(b), \cup_j W_j \rangle)). \end{aligned}$$

Komposition ist dabei durch (Komposition) induziert und man hat durch (Spur) einen Morphismus

$$\mathrm{End}((X(a), \cup_i Y_i), (X(a), \cup_i Y_i)) \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Aus (Komposition) und Korollar 3.4.2 konstruiert man in Abschnitt (4.3.3) einen Funktor von $\mathcal{M}e$ in die derivierte Kategorie graduierter abelscher Gruppen. Auf diese Weise kann man die Kategorie $\mathcal{M}e$ benutzen, um die höheren Chowgruppen zu verstehen. Es ist jedoch im allgemeinen schwierig zu sehen, wie und ob natürliche Morphismen in der derivierten Kategorie, z.B. der Pullbackmorphismus $Z^*(U, **) \rightarrow Z^*(T, **)$ zu einer abgeschlossenen Immersion $T \rightarrow U$, von Morphismen aus $\mathcal{M}e$ kommen. Ein elementares Ergebnis dazu geben wir in Abschnitt (4.3.4), ein schwierigeres Ergebnis zum Pullback auf abgeschlossene Unterschemata wird in Abschnitt (6) behandelt.

Die Konstruktion von $\mathcal{M}e$ ist nahe an Hanamuras Ideen zur Konstruktion der derivierten Kategorie der gemischten Motive [Ha2].

Man kann eine weitere Kategorie $A\mathcal{M}e$ und einen Funktor $\mathcal{M}e \rightarrow A\mathcal{M}e$ konstruieren, wobei $A\mathcal{M}e$ alleine auf dem klassischen Begriff von Korrespondenzen beruht und leichter zu verstehen ist. Die Spur faktorisiert über

\mathcal{AMe} und man hat eine einfache Realisation

$$\mathcal{AMe} \rightarrow (\text{reine Hodgestrukturen}),$$

die wir in Abschnitt (7.1) behandeln.

4.1. Konstruktion.

4.1.1. *Notation.* Zu $I \in \mathfrak{P}_r$ setzen wir $|I| = \text{Ordnung von } I$.

4.1.2. Die Summanden in $\langle X, \cup_i Y_i \rangle \times \langle X(\dim X), \cup_i Y_i \rangle^*$ sind von der Form

$$Y_I \times (Y_J, T, \dim Y_I) = (Y_I \times Y_J, \{Y_I \times (Y_J \cap Y_K) \mid K\}, \dim Y_I) \quad (4.1.2.1)$$

für $I, J \in \mathfrak{P}_r$.

Wir definieren $(\langle X, \cup_i Y_i \rangle \times \langle X(\dim X), \cup_i Y_i \rangle^*)'$ in $C_b(\mathcal{M})$ als Verfeinerung von $\langle X, \cup_i Y_i \rangle \times \langle X(\dim X), \cup_i Y_i \rangle^*$ indem wir die Summanden in (4.1.2.1) für $I \supset J$ durch

$$(Y_I \times Y_J, \{Y_I \times (Y_J \cap Y_K) \mid K\} \cup \{\Delta_{Y_I}\}, \dim Y_I)$$

austauschen, wobei Δ_{Y_I} die Diagonaleinbettung $Y_I \rightarrow Y_I \times Y_J$ ist (Graph von $Y_I \subset Y_J$).

Nach Definition haben wir

$$(\langle X, \cup_i Y_i \rangle \times \langle X(\dim X), \cup_i Y_i \rangle^*)' \rightarrow \langle X, \cup_i Y_i \rangle \times \langle X(\dim X), \cup_i Y_i \rangle^*. \quad (4.1.2.2)$$

Wir definieren nun einen Morphismus von Komplexen

$$(\langle X, \cup_i Y_i \rangle \times \langle X(\dim X), \cup_i Y_i \rangle^*)' \rightarrow X(\dim X) \quad (4.1.2.3)$$

durch

$$\begin{aligned} & (\langle X, \cup_i Y_i \rangle \times \langle X(\dim X), \cup_i Y_i \rangle^*)'_0 \xrightarrow{\text{Projektion}} \\ & \coprod_I (Y_I \times Y_I, \{Y_I \times (Y_I \cap Y_K) \mid K\} \cup \{\Delta_{Y_I}\}, \dim Y_I) \\ & \xrightarrow{\coprod_I \Delta_{Y_I}^*} \coprod_I Y_I(\dim Y_I) \xrightarrow{\sum_I (-1)^{\frac{|I| \cdot (|I|-1)}{2}} \text{Inkl}_I} X(\dim X), \end{aligned}$$

wobei $\Delta_{Y_I}^* = Y_I \times Y_I \xleftarrow{\Delta_{Y_I}} Y_I \xrightarrow{\cong} Y_I$ und $\text{Inkl}_I = Y_I \leftarrow Y_I \xrightarrow{\subset} X$. Dies definiert einen Morphismus von Komplexen, weil für $\partial_k I = J, a = \dim Y_I, b =$

$\dim Y_J$, das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
(Y_I \times Y_J, \{Y_I \times Y_J, Y_I \times Y_I, \Delta_{Y_I}\}, a) & \xrightarrow{i_k \times \text{id}} & (Y_J \times Y_J, \{Y_J \times Y_J, \Delta_{Y_J}\}, b) \\
(-1)^{|I|} \text{id} \times i_k^* \downarrow & & \Delta_{Y_J}^* \downarrow \\
(Y_I \times Y_I, \{Y_I \times Y_I, \Delta_{Y_I}\}, a) & & Y_J(b) \\
\Delta_{Y_I}^* \downarrow & & (-1)^{\frac{|J| \cdot (|J|-1)}{2}} \text{Inkl}_J \downarrow \\
Y_I(a) & \xrightarrow{(-1)^{\frac{|I| \cdot (|I|-1)}{2}} \text{Inkl}_I} & X(\dim X)
\end{array}$$

antikommutativ ist ($i_k := (Y_I \xleftarrow{=} Y_I \xrightarrow{\subset} Y_J)$, $i_k^* := (Y_J \xleftarrow{\supset} Y_I \xrightarrow{=} Y_I)$).

Seien nun durch A_\bullet und B_\bullet Objekte in $C_b(\mathcal{M})$ gegeben, mit Komponenten, deren zugrundeliegendes Schema projektiv ist.

Wir schreiben $X_\bullet := \langle X, \cup_i Y_i \rangle$ und $X_\bullet^* := \langle X(\dim X), \cup_i Y_i \rangle^*$. Wir haben

$$\begin{array}{ccc}
A_\bullet \times (X_\bullet \times X_\bullet^*)' \times B_\bullet & \xrightarrow{\text{id} \otimes (4.1.2.2) \otimes \text{id}} & A_\bullet \times X_\bullet \times X_\bullet^* \times B_\bullet \\
\downarrow \text{id} \otimes (4.1.2.3) \otimes \text{id} & & \\
A_\bullet \times X(\dim X) \times B_\bullet & &
\end{array}$$

Nach Anwenden von $Z^*(, **)$ ist der horizontale Pfeil nach Satz 3.4.2 ein Quasiisomorphismus und wir erhalten

$$Z^*(A_\bullet \times X_\bullet \times X_\bullet^* \times B_\bullet, **) \rightarrow Z^*(A_\bullet \times X(\dim X) \times B_\bullet, **)$$

in der derivierten Kategorie. Da X eigentlich über K ist haben wir den Morphismus

$$\pi_X : X(\dim X) \rightarrow K \quad \text{via} \quad X \xleftarrow{=} X \rightarrow K.$$

Durch Komposition erhält man

$$Z^*(A_\bullet \times X_\bullet \times X_\bullet^* \times B_\bullet, **) \rightarrow Z^*(A_\bullet \times B_\bullet, **). \quad (4.1.2.4)$$

Wir bekommen

$$\text{tr} : Z^*(\langle X, \cup_i Y_i \rangle \times \langle X(\dim X), \cup_i Y_i \rangle^*, **) \rightarrow Z^*(K, **) \quad (\text{Spur})$$

für $A_\bullet = B_\bullet = K$ und

$$\begin{aligned}
Z^*(A_\bullet \times \langle X, \cup_i Y_i \rangle, **) \otimes Z^*(\langle X(\dim X), \cup_i Y_i \rangle^* \times B_\bullet, **) \\
\rightarrow Z^*(A_\bullet \times B_\bullet, **) \quad (\text{Komposition})
\end{aligned}$$

durch Komposition von (4.1.2.4) mit dem äußeren Produkt.

4.1.3. *Beispiel.* Wir wollen

$$\text{tr} : \text{CH}^0(\langle X(\dim X), \cup_i Y_i \rangle \times \langle X, \cup_i Y_i \rangle^*, 0) \rightarrow \text{CH}^0(K, 0) = \mathbb{Z}$$

aus (Spur) explizit beschreiben.

Nach Definition ist

$$Z^0(\langle X, \cup_i Y_i \rangle \times \langle X(\dim X), \cup_i Y_i \rangle^*, 0) = \bigoplus_{I,J} Z^0((Y_I \times Y_J, \{Y_I \times (Y_J \cap Y_K) \mid K\}, \dim Y_I), |J| - |I|)$$

und somit ist für jede Klasse $\alpha \in \text{CH}^0(\langle X(\dim X), \cup_i Y_i \rangle \times \langle X, \cup_i Y_i \rangle^*, 0)$ mit Repräsentant $(\alpha_{I,J})$:

$$\begin{aligned} \alpha_{I,I} &\in Z^0((Y_I \times Y_I, \{Y_I \times (Y_I \cap Y_K) \mid K\}, \dim Y_I), 0), \\ \alpha_{I,J} &= 0 \quad \text{für } |I| > |J|. \end{aligned}$$

Mit dem üblichen Chow-Moving-Lemma für Zyklen kann man zu α einen Repräsentanten $(\alpha'_{I,J})$ finden, so dass $\alpha'_{I,I}$ die Diagonale Δ_{Y_I} gut schneidet. Es ist dann $\alpha'_{I,I}$ rational äquivalent zu $\alpha_{I,I}$ und man hat

$$\begin{aligned} \text{tr}(\alpha) &= \text{tr}((\alpha'_{I,J})) \\ &= \sum_I (-1)^{\frac{|I| \cdot (|I|-1)}{2}} \deg(\alpha'_{I,I} \cdot \Delta_{Y_I}) \\ &= \sum_I (-1)^{\frac{|I| \cdot (|I|-1)}{2}} \deg(\alpha_{I,I} \cdot \Delta_{Y_I}), \end{aligned}$$

wobei wir $\alpha_{I,I} \cdot \Delta_{Y_I}$ im Chowring $\text{CH}^*(Y_I \times Y_I)$ multiplizieren.

4.2. Eigenschaften.

4.2.1. Wir schreiben wie im vorigen Abschnitt $X_\bullet = \langle X, \cup_i Y_i \rangle$ und $X_\bullet^* = \langle X(\dim X), \cup_i Y_i \rangle^*$. Mit $V; W_1, \dots, W_s$ sei eine weitere Konstellation projektiver Schemata gegeben. Wir schreiben $V_\bullet \stackrel{dfn}{=} \langle V, \cup_j W_j \rangle$ und $V_\bullet^* \stackrel{dfn}{=} \langle V(\dim V), \cup_j W_j \rangle^*$.

4.2.2. *Assoziativität.* Für zwei Komplexe $A_\bullet, B_\bullet, C_\bullet$ mit Komponenten, deren zugrundeliegenden Schemata projektiv sind, haben wir zwei Morphismen

$$\begin{aligned} Z^*(A_\bullet \times X_\bullet, **) \otimes Z^*(X_\bullet^* \times B_\bullet \times V_\bullet, **) \otimes Z^*(V_\bullet^* \times C_\bullet, **) \\ \rightarrow Z^*(A_\bullet \times B_\bullet \times C_\bullet, **) \end{aligned}$$

durch $(\text{Komposition}) \circ ((\text{Komposition}) \otimes id)$ und $(\text{Komposition}) \circ (id \otimes (\text{Komposition}))$. In der Tat sind die Morphismen gleich und sind durch

$$\begin{aligned} &Z^*(A_\bullet \times X_\bullet, **) \otimes Z^*(X_\bullet^* \times B_\bullet \times V_\bullet, **) \otimes Z^*(V_\bullet^* \times C_\bullet, **) \\ &\xrightarrow{\text{äußeres Produkt}} Z^*(A_\bullet \times X_\bullet \times X_\bullet^* \times B_\bullet \times V_\bullet \times V_\bullet^* \times C_\bullet, **) \\ &\xrightarrow{\text{Verfeinerung (4.1.2.2)}} Z^*(A_\bullet \times (X_\bullet \times X_\bullet^*)' \times B_\bullet \times (V_\bullet \times V_\bullet^*)' \times C_\bullet, **) \\ &\xrightarrow{id \times (\pi_X \circ (4.1.2.3)) \times id \times (\pi_X \circ (4.1.2.3)) \times id} Z^*(A_\bullet \times B_\bullet \times C_\bullet, **) \end{aligned}$$

gegeben.

4.2.3. *Konstruktion von Morphismen aus Zykeln.* Wir betrachten für einen Komplex A_\bullet mit Komponenten, deren zugrundeliegenden Schemata projektiv sind, den Morphismus

$$Z^*(A_\bullet \times X_\bullet, **) \otimes Z^*(X_\bullet^* \times V_\bullet, **) \rightarrow Z^*(A_\bullet \times V_\bullet, **)$$

aus (Komposition). Jede Klasse $\alpha \in \text{CH}^0(X_\bullet^* \times V_\bullet, 0)$ gibt dadurch einen Morphismus

$$Z^*(A_\bullet \times X_\bullet, **) \rightarrow Z^*(A_\bullet \times V_\bullet, **)$$

in der derivierten Kategorie. Wir bezeichnen diesen Morphismus ebenfalls mit α .

Man rechnet schnell nach, dass $\Delta = \sum_{I \in \mathfrak{P}_r} (-1)^{\frac{|I| \cdot (|I|-1)}{2}} \Delta_I$, wobei Δ_I der Diagonalzykel in $Y_I \times Y_I$ ist, eine Klasse in $\text{CH}^0(X_\bullet^* \times X_\bullet, 0)$ definiert.

Lemma 4.2.1. *Aufgefasst als Endomorphismus von $Z^*(A_\bullet \times X_\bullet, **)$ ist Δ die Identität.*

Beweis. Für $J \in \mathfrak{P}_r$ setzen wir

$$(Y_J \times Y_J)' = (Y_J \times Y_J, \{Y_J \times (Y_J \cap Y_K) \mid K\} \cup \{\Delta_{Y_J}\}, \dim Y_J),$$

ein Objekt in \mathcal{M} . Wir definieren folgende Morphismen in \mathcal{M} (zur Definition von T siehe (2.7.5)):

$$\alpha : K \rightarrow (Y_J, T, 0) \quad \text{via} \quad K \leftarrow Y_J \xrightarrow{=} Y_J$$

$$\beta : (Y_J, T, 0) \rightarrow (Y_J, T, \dim Y_J) \times Y_J \quad \text{via} \quad Y_J \xleftarrow{=} Y_J \xrightarrow{\Delta_{Y_J}} Y_J \times Y_J$$

$$\gamma : Y_J \rightarrow (Y_J \times Y_J)' \times Y_J \quad \text{via} \quad Y_J \xleftarrow{(p_1, p_2)} Y_J \times Y_J \xrightarrow{id \times \Delta_{Y_J}} Y_J \times Y_J \times Y_J$$

$$\delta : (Y_J \times Y_J)' \rightarrow Y_J \times (Y_J, T, \dim Y_J) \quad \text{via} \quad Y_J \times Y_J \xleftarrow{=} Y_J \times Y_J \xrightarrow{=} Y_J \times Y_J$$

$$\epsilon : (Y_J \times Y_J)' \rightarrow K \quad \text{via} \quad Y_J \times Y_J \xleftarrow{\Delta_{Y_J}} Y_J \rightarrow K$$

Man hat in \mathcal{M} für alle p, J, m das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A_p \times Y_J \times (Y_J, T, \dim Y_J) \times Y_J \times \square^m & \xleftarrow{id \times \beta \times id} & A_p \times Y_J \times (Y_J, T, 0) \times \square^m \\ \uparrow id \times \delta \times id & & \uparrow id \times \alpha \times id \\ A_p \times (Y_J \times Y_J)' \times Y_J \times \square^m & \xleftarrow{id \times \gamma \times id} & A_p \times Y_J \times \square^m \\ \downarrow id \times \epsilon \times id & & \swarrow id \\ A_p \times Y_J \times \square^m & & \end{array}$$

Sei $\Psi \in \text{CH}^*(A_\bullet \times X_\bullet, **)$ mit Repräsentant $\sum_{p, J, m} \Psi_{p, J, m}$ und $\Psi_{p, J, m} \in Z^*(A_p \times Y_J(\dim Y_J - \dim X) \times \square^m)$ gegeben. Das äußere Produkt $\Psi \times \Delta$ ist durch

$$\sum_{p, J, m} (-1)^{\frac{|J| \cdot (|J|-1)}{2}} Z^*(id \times (\beta \circ \alpha) \times id) \Psi_{p, J, m}$$

gegeben und (Komposition), auf $\Psi \otimes \Delta$ angewendet, ist somit durch

$$\sum_{p,J,m} Z^*(id \times (\epsilon \circ \gamma) \times id) \Psi_{p,J,m}$$

gegeben. Da $\epsilon \circ \gamma = id$ folgt die Behauptung. \square

Bemerkung 4.1. Man kann via

$$Z^*(V_\bullet^* \times X_\bullet, **) \otimes Z^*(X_\bullet^* \times A_\bullet, **) \rightarrow Z^*(V_\bullet^* \times A_\bullet, **)$$

aus (Komposition) jeder Klasse $\alpha \in \text{CH}^0(V_\bullet^* \times X_\bullet, 0)$ einen Morphismus in der derivierten Kategorie zuordnen. Man beweist wie oben, dass Δ die Identität induziert.

4.2.4. *Konstruktion von Zykeln aus Morphismen in $C_b(\mathcal{M})$.* Es sei

$$\phi : \langle (X, S, 0), \cup_i Y_i \rangle \rightarrow \langle V, \cup_j W_j \rangle$$

ein Morphismus in $C_b(\mathcal{M})$. Für alle Komplexe C_\bullet mit Komponenten, deren zugrundeliegenden Schemata projektiv sind, erhält man aus

$$\begin{array}{ccc} C_\bullet \times \langle (X, S, 0), \cup_i Y_i \rangle & \xrightarrow{\text{id} \times \phi} & C_\bullet \times \langle V, \cup_j W_j \rangle \\ \downarrow & & \\ C_\bullet \times \langle X, \cup_i Y_i \rangle & & \end{array}$$

mit Satz 3.4.2 einen Morphismus

$$Z^*(C_\bullet \times X_\bullet, **) \rightarrow Z^*(C_\bullet \times V_\bullet, **) \quad (4.2.4.1)$$

in der derivierten Kategorie. Wir wollen einen Zykel $\Phi \in \text{CH}^0(X_\bullet^* \times V_\bullet, 0)$ konstruieren, der diesen mittels (Komposition) induziert (siehe 4.2.3). Wir betrachten dazu das Bild von Δ unter dem Morphismus aus (4.2.4.1) für $C_\bullet = X_\bullet^*$. Aus Lemma 4.2.1 und dem kommutativen (in der derivierten Kategorie) Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Z^*(C_\bullet \times X_\bullet, **) \otimes Z^*(X_\bullet^* \times X_\bullet, **) & \xrightarrow{\text{(Komposition)}} & Z^*(C_\bullet \times X_\bullet, **) \\ \downarrow \text{id} \otimes (4.2.4.1) & & (4.2.4.1) \downarrow \\ Z^*(C_\bullet \times X_\bullet, **) \otimes Z^*(X_\bullet^* \times V_\bullet, **) & \xrightarrow{\text{(Komposition)}} & Z^*(C_\bullet \times V_\bullet, **) \end{array}$$

folgt sofort, dass dieser Zykel den Morphismus aus (4.2.4.1) induziert.

Explizit sieht Φ wie folgt aus. Wir schreiben ϕ_s als Matrix $\phi_s = (\phi_{J,I})_{|J|=|I|=s}$ mit $\phi_{J,I} = \phi_{J,I}^+ - \phi_{J,I}^-$ und $\phi_{J,I}^+, \phi_{J,I}^- \in \mathcal{M}^+$ gegeben durch $Y_I \xleftarrow{f_{J,I}^+} Z_{J,I}^+ \xrightarrow{g_{J,I}^+} W_J$ bzw. $Y_I \xleftarrow{f_{J,I}^-} Z_{J,I}^- \xrightarrow{g_{J,I}^-} W_J$. Unter $Z^0(id \times \phi, 0)$ wird

$$\begin{aligned}
\Delta &= \sum_I (-1)^{\frac{|I|(|I|-1)}{2}} \Delta_{Y_I} \text{ nach} \\
&\sum_I (-1)^{\frac{|I|(|I|-1)}{2}} \sum_J \sum_{\epsilon \in \{-,+\}} \epsilon \cdot (id_{Y_I} \times g_{J,I}^\epsilon)_* (id_{Y_I} \times f_{J,I}^\epsilon)^* \Delta_{Y_I} \\
&= \sum_I (-1)^{\frac{|I|(|I|-1)}{2}} \left(\sum_J \left((f_{J,I}^+, g_{J,I}^+)_* Z_{J,I}^+ - (f_{J,I}^-, g_{J,I}^-)_* Z_{J,I}^- \right) \right)
\end{aligned}$$

abgebildet.

4.3. Darstellung als Kategorie. Wir definieren eine Kategorie $\mathcal{M}e$ wie folgt.

- Objekte: Die Objekte in $\mathcal{M}e$ sind durch $(X(a), \cup_i Y_i)$, mit einer Konstellation $X; Y_1, \dots, Y_r$ glatter, *projektiver* Schemata über K , und einer lokal konstanten Abbildung $a : X \rightarrow \mathbb{Z}$ gegeben.
- Morphismen: Für zwei Objekte $(X(a), \cup_i Y_i)$ und $(V(b), \cup_j W_j)$ ist

$$\begin{aligned}
\text{Hom}_{\mathcal{M}e}((X(a), \cup_i Y_i), (V(b), \cup_j W_j)) &:= \\
&\text{CH}^0(\langle X(-a + \dim X), \cup_i Y_i \rangle^* \times \langle V(b), \cup_j W_j \rangle, 0).
\end{aligned}$$

Die Komposition von Morphismus ist durch (Komposition) gegeben. Assoziativität der Komposition ist in (4.2.2) bewiesen und die Identität ist durch Δ gegeben (Lemma 4.2.1).

Mit

$$(X(a), \cup_i Y_i) \oplus (V(b), \cup_j W_j) := ((X \coprod V)(a, b), \cup_i Y_i \cup_j W_j)$$

und dem Nullobjekt $\emptyset := (\emptyset(0), \emptyset)$ ist $\mathcal{M}e$ eine additive Kategorie.

4.3.1. Tensorstruktur. Man kann \mathcal{M} zu einer Tensorcategory machen. Zu $(X(a), \cup_i Y_i)$ und $(V(b), \cup_j W_j)$ setzen wir

$$(X(a), \cup_i Y_i) \times (V(b), \cup_j W_j) = (X \times V(a+b), \cup_i Y_i \times V \cup_j X \times W_j).$$

Nach Konstruktion (Abschnitt 2.7) ist

$$\begin{aligned}
\langle X(a), \cup_i Y_i \rangle \times \langle V(b), \cup_j W_j \rangle &= \langle X \times V(a+b), \cup_i Y_i \times V \cup_j X \times W_j \rangle, \\
\langle X(a), \cup_i Y_i \rangle^* \times \langle V(b), \cup_j W_j \rangle^* &= \langle X \times V(a+b), \cup_i Y_i \times V \cup_j X \times W_j \rangle^*,
\end{aligned}$$

und wir haben mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned}
U_1 &= (X_1(a_1), \cup_i Y_{1,i}), & U_2 &= (X_2(a_2), \cup_i Y_{2,i}), \\
T_1 &= (V_1(b_1), \cup_j W_{1,j}), & T_2 &= (V_2(b_2), \cup_j W_{2,j}), \\
X_1^* &:= \langle X_1(-a_1 + \dim X_1), \cup_i Y_{1,i} \rangle^*, & X_{2,\bullet} &:= \langle X_2(a_2), \cup_i Y_{2,i} \rangle, \\
V_1^* &:= \langle V_1(-b_1 + \dim V_1), \cup_j W_{1,j} \rangle^*, & V_{2,\bullet} &:= \langle V_2(b_2), \cup_j W_{2,j} \rangle,
\end{aligned}$$

durch

$$\begin{aligned} \mathrm{CH}^0(X_1^* \times X_{2,\bullet}, 0) \otimes \mathrm{CH}^0(V_1^* \times V_{2,\bullet}, 0) \\ \xrightarrow{\text{äußeres Produkt}} \mathrm{CH}^0(X_1^* \times X_{2,\bullet} \times V_1^* \times V_{2,\bullet}, 0) \\ \rightarrow \mathrm{CH}^0(X_1^* \times V_1^* \times X_{2,\bullet} \times V_{2,\bullet}, 0) \end{aligned}$$

eine Abbildung

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}e}(U_1, U_2) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}e}(T_1, T_2) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}e}(U_1 \times T_1, U_2 \times T_2)$$

definiert. Für Morphismen (f, g) bezeichnen wir das Bild mit $f \times g$. Indem man die Eigenschaften aus (3.3.2) benutzt, kann man sehen, dass dies einen Funktor

$$\times : \mathcal{M}e \times \mathcal{M}e \rightarrow \mathcal{M}e \quad (4.3.1.0)$$

definiert. Assoziativität, $(h \times f) \times g = h \times (f \times g)$, folgt ebenfalls.

Wir haben einen natürlichen Isomorphismus

$$\phi : U_1 \times U_2 \xrightarrow{\cong} U_2 \times U_1$$

gegeben durch das Bild von Δ unter der Abbildung

$$\mathrm{CH}^0(X_1^* \times X_2^* \times X_{1,\bullet} \times X_{2,\bullet}, 0) \rightarrow \mathrm{CH}^0(X_1^* \times X_2^* \times X_{2,\bullet} \times X_{1,\bullet}, 0)$$

(Permutation der beiden letzten Faktoren). Dies ist funktoriell, d.h. $\phi \circ (f \times g) = (g \times f) \circ \phi$.

Zusammen mit dem Einselement $(\mathrm{Spec} K, \emptyset)$ ist damit $\mathcal{M}e$ eine Tensor-kategorie.

4.3.2. Pseudoabelianisierung. Die Kategorie $\mathcal{M}e_l$ konstruieren wir aus $\mathcal{M}e$ durch hinzufügen von Bildern von Projektoren (sog. Pseudoabelianisierung). Objekte sind von der Form (U, P) mit U in $\mathcal{M}e$ und $P \in \mathrm{End}(U)$ mit $P^2 = P$. Und Homomorphismen sind durch

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}e_l}((U, P), (T, Q)) = Q \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}e}(U, T) \circ P$$

definiert.

4.3.3. Funktoren in die derivierte Kategorie graduerter, abelscher Gruppen. Sei C_\bullet ein Komplex in $C_b(\mathcal{M})$, dessen Komponenten projektive Schemata zugrundeliegen. Durch

$$(X(a), \cup_i Y_i) \mapsto Z^*(C_\bullet \times \langle X(a), \cup_i Y_i \rangle, **)$$

und Konstruktion von Morphismen aus Zykeln (Abschnitt 4.2.3) bekommt man einen Funktor

$$\mathcal{M}e \rightarrow D(\text{grad. abelsche Gruppen})$$

in die derivierte Kategorie. Dies folgt sofort aus Abschnitt (4.2.2) und Lemma (4.2.1).

Für $C_\bullet = K$ erhält man zusammen mit Korollar 3.4.2 den Funktor

$$\begin{aligned} \mathcal{M}e &\rightarrow D(\text{grad. abelsche Gruppen}) & (4.3.3.1) \\ (X(a), \cup_i Y_i) &\mapsto Z^*(U(a), **) \end{aligned}$$

mit $X = \cup_i Y_i$.

4.3.4. $KonC_b(\mathcal{M})$ und $\mathcal{M}e$. Aus Abschnitt (4.2.4) hat man, wie man sofort sieht, einen Funktor

$$KonC_b(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{M}e \quad (4.3.4.1)$$

und ein kommutatives Diagramm von Funktoren

$$\begin{array}{ccc} KonC_b(\mathcal{M}) & \xrightarrow{(4.3.4.1)} & \mathcal{M}e \\ & \searrow (3.4.4.1) & \swarrow (4.3.3.1) \\ & D_+(\text{grad. ab. Gruppen}). & \end{array} \quad (4.3.4.2)$$

Für Morphismen in $\mathcal{M}e$, die von $KonC_b(\mathcal{M})$ kommen, kennt man deshalb aus Proposition 3.4.1 die Bilder in $D_+(\text{gaG})$.

4.3.5. *Isomorphismen in $\mathcal{M}e$.* Seien $(X(a), \cup_i Y_i)$ und $(V(b), \cup_j W_j)$ Objekte in $\mathcal{M}e$ und

$$\phi : \langle (X, S, a), \cup_i Y_i \rangle \rightarrow \langle (V(b), \cup_j W_j) \rangle$$

ein Morphismus in $C_b(\mathcal{M})$. Wir erhalten einen Morphismus (in der derivierten Kategorie)

$$Z^*(C_\bullet \times X_\bullet, **) \xrightarrow{id \times \phi} Z^*(C_\bullet \times V_\bullet, **) \quad (4.3.5.1)$$

für alle Komplexe C_\bullet mit Komponenten, deren zugrundeliegenden Schemata projektiv sind. Wir haben in Abschnitt (4.2.4) zu ϕ einen Zykel $\Phi \in \text{CH}^0(X_\bullet^* \times V_\bullet, 0)$ assoziiert, so dass ϕ durch Φ via (Komposition) gegeben ist.

Lemma 4.3.1. *Ist (4.3.5.1) für alle projektiven Schemata C (d.h. für $C_\bullet = C$) ein Quasiisomorphismus, dann ist Φ ein Isomorphismus in $\mathcal{M}e$.*

Beweis. Ist (4.3.5.1) für alle projektiven Schemata C ein Quasiisomorphismus, dann wegen Satz 3.4.2 auch für alle Objekte in \mathcal{M} , denen ein projektives Schema zugrundeliegt. Mit homologischer Algebra sieht man, dass (4.3.5.1) für alle Komplexe $C_\bullet \in C_b(\mathcal{M})$, deren Komponenten projektive Schemata zugrundeliegen, ein Quasiisomorphismus ist.

Sei $\Psi \in \text{CH}^0(V_\bullet^* \times X_\bullet, 0)$ mit $\text{CH}^0(id \times \phi, 0)(\Psi) = \Delta$, dann definiert Ψ einen Morphismus $(V(b), \cup_j W_j) \rightarrow (X(a), \cup_i Y_i)$ in $\mathcal{M}e$. Nach Konstruktion von Φ gilt $\Phi \circ \Psi = id_{(V(b), \cup_j W_j)}$. Wir haben

$$\text{CH}^0(id \times \phi, 0)(\Psi \circ \Phi) = \Phi \circ \Psi \circ \Phi = \Phi = \text{CH}^0(id \times \phi, 0)(\Delta),$$

also $\Psi \circ \Phi = id_{(X(a), \cup_i Y_i)}$, weil $\text{CH}^0(id \times \phi, 0)$ ein Isomorphismus ist. \square

4.4. Approximation von Morphismen.

4.4.1. Seien $X; Y_1, \dots, Y_r, V; W_1, \dots, W_s$ und $A; B_1, \dots, B_t$ Konstellationen, X, V, A seien projektiv, sowie a (bzw. b, c) eine lokal konstante Funktion $X \rightarrow \mathbb{Z}$ (bzw. $V \rightarrow \mathbb{Z}, A \rightarrow \mathbb{Z}$).

4.4.2.

Nach Konstruktion ist $Z^*(\langle X(-a + \dim X), \cup_i Y_i \rangle^* \times \langle V(b), \cup_j W_j \rangle, **)$ der einfache Komplex assoziiert zum Doppelkomplex

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow Z^* \left(\left(\langle X(-a + \dim X), \cup_i Y_i \rangle^* \times \langle V(b), \cup_j W_j \rangle \right)_k, ** \right) \rightarrow \\ Z^* \left(\left(\langle X(-a + \dim X), \cup_i Y_i \rangle^* \times \langle V(b), \cup_j W_j \rangle \right)_{k-1}, ** \right) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

und hat eine aufsteigende Filtrierung W durch

$$W_k \stackrel{dfn}{=} \text{Ass} \left(Z^* \left(\left(\langle X(-a + \dim X), \cup_i Y_i \rangle^* \times \langle V(b), \cup_j W_j \rangle \right)_k, ** \right) \rightarrow \dots \right).$$

Es sei $E_{p,q}^r$ die Spektralsequenz zu dieser Filtrierung. In (A.3.3) ist die Konstruktion dieser Spektralsequenz beschrieben.

Definition 4.1. Wir setzen

$$A(\langle X(a), \cup_i Y_i \rangle, \langle V(b), \cup_j W_j \rangle) \stackrel{dfn}{=} E_{0,0}^2,$$

dabei ist $E_{p,q}^2$ die Spektralsequenz zur Filtrierung W von $Z^*(\langle X(-a + \dim X), \cup_i Y_i \rangle^* \times \langle V(b), \cup_j W_j \rangle, **)$.

Man hat

$$\begin{aligned} E_{0,0}^2 &= \\ &H \left(\bigoplus_{\substack{I,J \\ |J|-|I|=1}} \text{CH}^0(Y_I(\dim X) \times W_J(\dim W_J - \dim V), 0) \right. \\ &\quad \left. \xrightarrow{\text{CH}^0(d_{X_\bullet} \times id + (-1)^{|I|} id \times d_{V_\bullet}, 0)} \right. \\ &\quad \left. \bigoplus_{\substack{I,J \\ |J|-|I|=0}} \text{CH}^0(Y_I(\dim X) \times W_J(\dim W_J - \dim V), 0) \right. \\ &\quad \left. \xrightarrow{\text{CH}^0(d_{X_\bullet} \times id + (-1)^{|I|} id \times d_{V_\bullet}, 0)} \right. \\ &\quad \left. \bigoplus_{\substack{I,J \\ |J|-|I|=-1}} \text{CH}^0(Y_I(\dim X) \times W_J(\dim W_J - \dim V), 0) \right), \quad (4.4.2.1) \end{aligned}$$

$(X_\bullet^* = \langle X(-a + \dim X), \cup_i Y_i \rangle^*, V_\bullet = \langle V(b), \cup_j W_j \rangle)$.

Man hat offenbar

$$\begin{aligned} W_0 \text{CH}^0(\langle X(-a + \dim X), \cup_i Y_i \rangle^* \times \langle V(b), \cup_j W_j \rangle, 0) \\ = \text{CH}^0(\langle X(-a + \dim X), \cup_i Y_i \rangle^* \times \langle V(b), \cup_j W_j \rangle, 0) \end{aligned}$$

und

$$\mathrm{CH}^0(\langle X(-a + \dim X), \cup_i Y_i \rangle^* \times \langle V(b), \cup_j W_j \rangle, 0) \longrightarrow \mathrm{Gr}_W^0 = W_0/W_{-1}$$

$$\downarrow$$

$$E_{0,0}^2,$$

der letzte Pfeil ist injektiv, weil $E_{r,-r+1}^r = 0$ für $r \geq 2$.

4.4.3. *Komposition und Spur.* Die Morphismen (Komposition) und (Spur) induzieren entsprechende Morphismen (AKomposition):

$$A((A(c), \cup_k B_k), (X(a), \cup_i Y_i)) \otimes_{\mathbb{Z}} A((X(a), \cup_i Y_i), (V(b), \cup_j W_j))$$

$$\rightarrow A((A(c), \cup_k B_k), (V(b), \cup_j W_j))$$

(ASpur):

$$A((X(a), \cup_i Y_i), (X(a), \cup_i Y_i)) \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Explizit ist (AKomposition) wie folgt gegeben. Für

$$(\alpha_{KI})_{|K|=|I|} \in A((A(c), \cup_k B_k), (X(a), \cup_i Y_i))$$

$$(\beta_{IJ})_{|I|=|J|} \in A((X(a), \cup_i Y_i), (V(b), \cup_j W_j))$$

mit

$$\alpha_{KI} \in \mathrm{CH}^0(B_K(-c + \dim A) \times Y_I(\dim Y_I - \dim X + a), 0)$$

$$\beta_{IJ} \in \mathrm{CH}^0(Y_I(-a + \dim X) \times W_J(\dim W_J - \dim V + b), 0)$$

haben wir als Bild (γ_{KJ}) von $(\alpha_{KI}) \otimes (\beta_{IJ})$ die Klasse gegeben durch

$$\gamma_{KJ} = \sum_{\substack{I \\ |I|=|J|=|K|}} (-1)^{\frac{|I|(|I|-1)}{2}} \beta_{IJ} \circ \alpha_{KI},$$

wobei $\beta_{IJ} \circ \alpha_{KI}$ die Komposition von Korrespondenzen ist, also

$$\beta_{IJ} \circ \alpha_{KI} = p_{B_K \times W_J}^* (p_{B_K \times Y_I}^* \alpha_{KI} \cdot p_{Y_I \times W_J}^* \beta_{IJ})$$

mit

$$\begin{array}{ccc} B_K \times Y_I \times W_J & \xrightarrow{p_{B_K \times W_J}} & B_K \times W_J \\ & \searrow p_{Y_I \times W_J} & \\ & B_K \times Y_I & \rightarrow Y_I \times W_J \end{array}$$

Wir haben (ASpur) im wesentlichen schon in Beispiel 4.1.3 besprochen, es ist

$$\mathrm{tr}((\alpha_{IJ})) = \sum_I (-1)^{\frac{|I|(|I|-1)}{2}} \deg(\alpha_{II} \cdot \Delta_{Y_I}).$$

4.4.4. Wir definieren eine additive Kategorie $A\mathcal{M}e$ mit gleichen Objekten wie in $\mathcal{M}e$ und Morphismen $(X(a), \cup_i Y_i) \rightarrow (V(b), \cup_j W_j)$ gegeben durch $A((X(a), \cup_i Y_i), (V(b), \cup_j W_j))$ und Komposition durch (AKomposition).

Durch

$$\mathrm{CH}^0(\langle X(-a + \dim X), \cup_i Y_i \rangle^* \times \langle V(b), \cup_j W_j \rangle, 0) \rightarrow E_{0,0}^2$$

haben wir einen Funktor $\mathcal{M}e \rightarrow A\mathcal{M}e$.

5. KONSTELLATIONEN AFFINER RÄUME IM AFFINEN RAUM

5.0.5. *Einleitung.* Sei $X^o = \mathbb{A}_K^N$ und $\mathbb{A}^{n_i} \simeq Y_i^o \subset X^o$ affine Unterräume für $i = 1, \dots, r-1$. Wir kompaktifizieren im projektiven Raum durch $X^o \subset X = \mathbb{P}^N$ und $\mathbb{P}^{n_i} \simeq Y_i \subset X$, sowie $Y_r := \mathbb{P}^{N-1} = X - X^o$.

Sei \mathcal{A} die Menge nichttrivialer Durchschnitte von $X^o, Y_1^o, \dots, Y_{r-1}^o$, d.h. $\mathcal{A} = \{Y_I^o; I \in \mathfrak{P}_{r-1} = \{\text{Teilmengen von } \{1, \dots, r-1\}\} - \{\emptyset\}\}$, und sei für alle $A \in \mathcal{A}$ ein K -rationaler Punkt x_A gewählt, mit der Eigenschaft, dass $x_A \notin B$ für alle $B, \mathcal{A} \ni B \subsetneq A$. Für einen endlichen Körper K ist dies im allgemeinen nicht möglich, wir wollen im folgenden jedoch voraussetzen, dass dies bei der betrachteten Konstellation geht.

Nach Wahl von Punkten x_A bekommt man durch ‘‘Einschränkung’’ auf diese, wie wir in Proposition 5.2.1 sehen werden, einen Quasiisomorphismus

$$Z^*(\langle X, \cup_i Y_i \rangle, **) \rightarrow \bigoplus_{A \in \mathcal{A}} E(A) \otimes_{\mathbb{Z}} Z^*(K, **), \quad (5.0.5.1)$$

mit einem Komplex von endlichen, freien, graduierten, abelschen Gruppen $E(A)$, der aus der Abbildung $\mathfrak{P}_{r-1} \rightarrow \mathcal{A} \cup \{\emptyset\}; I \mapsto Y_I^o$, gebildet wird (Definition 5.1).

Wichtig ist die Betrachtung des einfachsten Falles: $r = 1, \mathcal{A} = \{\mathbb{A}^N\}$. Hier zeigen wir $(\mathbb{P}^N, \mathbb{P}^{N-1}) \cong K$ in Me , und es folgt mit den Methoden aus Abschnitt (4), dass

$$Z^*(\langle \mathbb{P}^N, \mathbb{P}^{N-1} \rangle, **) \xrightarrow{\text{quis}} Z^*(K, **) \quad (\text{Homotopielemma}).$$

Mit Hilfe von Blochs Moving-Lemma (Satz 3.4.1) erhalten wir das wohlbekannte Homotopie-Lemma [B11]. Unser Beweis des Homotopie-Lemmas ist von der Art her ein anderer als in [B11], aber im strengen Sinne überflüssig.

Nach (3.4.1) überträgt sich die Zerlegung aus (5.0.5.1) auf die (höheren) Chowgruppen von $U := X - \cup_i Y_i = X^o - \cup_i Y_i^o$. Im allgemeinen ist diese Zerlegung jedoch abhängig von der Wahl der Punkte x_A .

Allgemeiner hat man für eine beliebige Konstellation $A; B_1, \dots, B_t$ projektiver Schemata

$$Z^*(\langle A(c), \cup_k B_k \rangle^* \times \langle X, \cup_i Y_i \rangle, **) \xrightarrow{\text{quis}} \bigoplus_{A \in \mathcal{A}} Z^*(\langle A(c), \cup_k B_k \rangle^*, **) \otimes_{\mathbb{Z}} E(A) \quad (5.0.5.2)$$

und dual dazu für eine beliebige Konstellation $V; W_1, \dots, W_s$ projektiver Schemata hat man

$$Z^*(\langle X(\dim X), \cup_i Y_i \rangle^* \times \langle V(b), \cup_j W_j \rangle, **) \xrightarrow{\text{quis}} \bigoplus_{A \in \mathcal{A}} \underline{\text{Hom}}(E(A), \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} Z^*(\langle V(b), \cup_j W_j \rangle, **), \quad (5.0.5.3)$$

wobei $\underline{\text{Hom}}$ das interne Hom bei graduierten abelschen Gruppen ist. Wir zeigen die Verträglichkeit dieser Quasiisomorphismen mit (Komposition) aus

Abschnitt (4.1.2), d.h.

$$\begin{aligned} Z^*(\langle A(c), \cup_k B_k \rangle^* \times \langle X, \cup_i Y_i \rangle, **) \otimes \\ Z^*(\langle X(\dim X), \cup_i Y_i \rangle^* \times \langle V(b), \cup_j W_j \rangle, **) \rightarrow \\ Z^*(\langle A(c), \cup_k B_k \rangle^* \times \langle V(b), \cup_j W_j \rangle, **) \end{aligned}$$

ist durch Auswertung $E(A) \otimes \underline{\text{Hom}}(E(A), \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ gegeben.

Kommt $V; W_1, \dots, W_s$ ebenfalls von einer Konstellation affiner Räume, so hat man aus (5.0.5.2) und (5.0.5.3):

$$\begin{aligned} Z^*(\langle X(\dim X), \cup_i Y_i \rangle^* \times \langle V, \cup_j W_j \rangle, **) \xrightarrow{\text{quis}} \\ \bigoplus_{(A,B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}} \underline{\text{Hom}}_{\bullet}(E(A), E(B)) \otimes Z^*(K, **), \quad (5.0.5.4) \end{aligned}$$

wobei \mathcal{B} wie \mathcal{A} definiert ist. Auf diese Weise kann $\text{Hom}_{\mathcal{M}e}((X, \cup_i Y_i), (V, \cup_j W_j))$ gut beschrieben werden. So ist

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{M}e}((X, \cup_i Y_i), (V, \cup_j W_j)) \rightarrow \\ \text{Hom}_{D(\text{ga}G)}(Z^*(X - \cup_i Y_i, **), Z^*(V - \cup_j W_j, **)) \end{aligned}$$

aus Abschnitt (4.3.3) via (5.0.5.4) und (5.0.5.2) im wesentlichen durch

$$\begin{aligned} Z^*(K, **) \otimes \bigoplus_{A_1 \in \mathcal{A}} E(A_1) \otimes \bigoplus_{A_2 \in \mathcal{A}} \underline{\text{Hom}}(E(A_2), \mathbb{Z}) \otimes Z^*(K, **) \\ \xrightarrow{id \otimes tr \otimes id} Z^*(K, **) \otimes Z^*(K, **) \xrightarrow{\text{Multiplikation}} Z^*(K, **) \end{aligned}$$

gegeben (Abschnitt 5.3).

In der Kategorie $\mathcal{A}Me$ vereinfacht sich das Bild zu

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}Me}((X, \cup_i Y_i), (V, \cup_j W_j)) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{D(\text{ga}G)} \left(\bigoplus_{A \in \mathcal{A}} E(A), \bigoplus_{B \in \mathcal{B}} E(B) \right)$$

(Abschnitt 5.3.5).

Zur Abhängigkeit von (5.0.5.1) von der Wahl der Punkte $x_A, A \in \mathcal{A}$, zeigen wir folgendes. Der Übergang $x_A \mapsto x'_A$ zu einer anderen Wahl wird durch den Zykel

$$\Sigma = id + \sum_{m \geq 1} \sum_{A \supseteq A_1 \supseteq \dots \supseteq A_m} \sigma^{A \supseteq A_1 \supseteq \dots \supseteq A_m} \otimes \lambda_{A \supseteq A_1 \supseteq \dots \supseteq A_m}$$

beschrieben, wobei die zweite Summe über alle Ketten $A \supseteq \dots \supseteq A_m, m \geq 1$, in \mathcal{A} mit $\text{codim}_A A_m = m$ geht (Korollar 5.4.1). Dabei ist $\sigma^{A \supseteq A_1 \supseteq \dots \supseteq A_m} \in H_{-m} \text{Hom}_{\bullet}(E(A), E(A_m))$ und $\lambda_{A \supseteq A_1 \supseteq \dots \supseteq A_m} \in \text{CH}^m(K, m)$. Für diese Aussage braucht man, dass die Punkte x'_A „gut“ bzgl. der Punkte x_A liegen (Definition 5.2).

In Abschnitt (5.5) invertieren wir den Quasiisomorphismus (5.0.5.1) und geben die wesentlichen Zyklen, soweit es die Kombinatorik erlaubt, explizit an.

In Abschnitt (5.6) behandeln wir Fragen zur Multiplikation auf $Z^*(X - \cup_i Y_i, **)$. Die Multiplikation induziert offenbar

$$E(A) \otimes Z^*(K, **) \otimes E(B) \otimes Z^*(K, **) \rightarrow \bigoplus_{C \in \mathcal{A}} E(C) \otimes Z^*(K, **) \quad (5.0.5.5)$$

für alle $A, B \in \mathcal{A}$. Ist $A \cap B \neq \emptyset$ und $\text{codim}A + \text{codim}B = \text{codim}(A \cap B)$, so ist (5.0.5.5) durch den Zykel

$$\Psi_{A,B} = \sum_{\substack{L_1 = A \subsetneq A_1 \subsetneq \dots \subsetneq A_d \\ L_2 = B \subsetneq B_1 \subsetneq \dots \subsetneq B_e}} \text{mult}_{A_d, B_e}(\sigma^{L_1} \otimes \sigma^{L_2}) \otimes \alpha(L_1, L_2).$$

gegeben. Dabei geht die Summe über alle Ketten L_1, L_2 in \mathcal{A} mit $d = \text{codim}_{A_d}A, e = \text{codim}_{B_e}B$ und es ist $\text{mult}_{A_d, B_e}(\sigma^{L_1} \otimes \sigma^{L_2}) : E(A) \otimes E(B) \rightarrow E(A_d \cap B_e)[d+e]$, sowie $\alpha(L_1, L_2) \in \text{CH}^{d+e}(K, d+e)$.

5.1. Homotopie-Lemma. Wir betrachten $U := (\mathbb{P}^N, \mathbb{P}^{N-1})$ als Objekt in \mathcal{M}_e , wobei $\mathbb{P}^{N-1} \subset \mathbb{P}^N$ eine Hyperebene ist. Der Komplex $\langle \mathbb{P}^N, \mathbb{P}^{N-1} \rangle$ ist durch

$$\underbrace{\mathbb{P}^{N-1}(-1)}_{\text{deg}=1} \xrightarrow{i_0} \underbrace{\mathbb{P}^N}_{\text{deg}=0}$$

gegeben und $\text{Hom}_{\mathcal{M}_e}(K, U) = \mathbb{Z} \cdot [\mathbb{P}^N]$. Der Komplex $\langle \mathbb{P}^N, \mathbb{P}^{N-1} \rangle^*$ ist durch

$$\underbrace{(\mathbb{P}^N, \{\mathbb{P}^N, \mathbb{P}^{N-1}\}, 0)}_{\text{deg}=0} \xrightarrow{i_0^*} \underbrace{\mathbb{P}^{N-1}}_{\text{deg}=-1}$$

gegeben und $\mathbb{Z} \cdot [x] \subset \text{Hom}_{\mathcal{M}_e}(U, K)$ für alle $x \in \mathbb{P}^N(K) - \mathbb{P}^{N-1}(K)$, wobei $[x]$ als 0-Zykel in \mathbb{P}^N aufgefasst wird.

Lemma 5.1.1 (Homotopie-Lemma).

Der Morphismus $[\mathbb{P}^N] \in \text{Hom}(K, U)$ ist ein Isomorphismus mit inversem Morphismus $[x] \in \text{Hom}(U, K)$.

Beweis. Da $[x] \circ [\mathbb{P}^N] = \text{tr}([\mathbb{P}^N] \otimes [x]) = 1 \in \text{CH}^0(K, 0)$, ist $[x] \circ [\mathbb{P}^N] = \text{id}_K$ (zur Definition von tr siehe Abschnitt 4.1.2).

Der Morphismus $[\mathbb{P}^N] \circ [x]$ ist durch den Zykel $x \times \mathbb{P}^N \subset \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^N$ in

$$\begin{aligned} \text{CH}^N((\mathbb{P}^N, \{\mathbb{P}^N, \mathbb{P}^{N-1}\}, 0) \times \mathbb{P}^{N-1}(-1)) &\xrightarrow{(\text{id} \times i_0, i_0^* \times \text{id})} \\ &\underbrace{(\mathbb{P}^N, \{\mathbb{P}^N, \mathbb{P}^{N-1}\}, 0) \times \mathbb{P}^N \oplus \mathbb{P}^{N-1} \times \mathbb{P}^{N-1}(-1)}_0 \\ &\xrightarrow{i_0^* \times \text{id} - \text{id} \times i_0} \mathbb{P}^{N-1} \times \mathbb{P}^N, 0 \end{aligned}$$

gegeben. Wir haben zu zeigen, dass $x \times \mathbb{P}^N = \Delta_{\mathbb{P}^N} + \Delta_{\mathbb{P}^{N-1}}$.

Wähle die homogenen Koordinaten x_0, \dots, x_N von \mathbb{P}^N so, dass $\mathbb{P}^{N-1} = V(x_0)$ und $x = [1 : 0 : \dots : 0]$.

Der Zykel $\Gamma \subset \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^N \times \mathbb{A}^1$ sei als Abschluss des Graphen von

$$\begin{aligned} & (\mathbb{P}^N - \{x\}) \times \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{P}^N \\ & ([x_0 : x_1 : \cdots : x_N], t) \mapsto [t \cdot x_0 : x_1 : \cdots : x_N] \end{aligned}$$

(Homotopie zwischen Inklusion $\mathbb{P}^N - \{x\} \subset \mathbb{P}^N$ und Projektion $\mathbb{P}^N - \{x\} \rightarrow \mathbb{P}^{N-1}$) definiert.

Es ist leicht zu sehen, dass

$$\partial^0 \Gamma = x \times \mathbb{P}^N + \Sigma, \quad \partial^1 \Gamma = \Delta_{\mathbb{P}^N},$$

mit $\Sigma \subset \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^{N-1}$ gegeben durch

$$\Sigma = \{(z, w) \mid z \text{ liegt auf der Geraden durch } x \text{ und } w\}.$$

Es ist weiterhin

$$(i_0^* \times \text{id}) \Gamma = \text{Graph}(\mathbb{P}^{N-1} \rightarrow \mathbb{P}^N) \times \mathbb{A}^1 = 0 \quad (\text{degenerierter Zykel})$$

$$(i_0^* \times \text{id}) \Sigma = \Delta_{\mathbb{P}^{N-1}}$$

und der Zykel $\Sigma \oplus (\Gamma, 0) \oplus 0$ in

$$\begin{aligned} Z^N((\mathbb{P}^N, \{\mathbb{P}^N, \mathbb{P}^{N-1}\}, 0) \times \mathbb{P}^{N-1}(-1)) & \xrightarrow{(\text{id} \times i_0, i_0^* \times \text{id})} \\ & (\mathbb{P}^N, \{\mathbb{P}^N, \mathbb{P}^{N-1}\}, 0) \times \mathbb{P}^N \oplus \mathbb{P}^{N-1} \times \mathbb{P}^{N-1}(-1) \\ & \xrightarrow{i_0^* \times \text{id} - \text{id} \times i_0} \mathbb{P}^{N-1} \times \mathbb{P}^N, 1) \end{aligned}$$

hat Ableitung

$$d(\Sigma \oplus (\Gamma, 0) \oplus 0) = -x \times \mathbb{P}^N + \Delta_{\mathbb{P}^N} + \Delta_{\mathbb{P}^{N-1}}.$$

□

Korollar 5.1.1. Für alle $(V(b), \cup_j W_j) \in \mathcal{M}e$ ist

$$[x] : Z^*(\langle V(b), \cup_j W_j \rangle^* \times \langle \mathbb{P}^N, \mathbb{P}^{N-1} \rangle, **) \rightarrow Z^*(\langle V(b), \cup_j W_j \rangle^*, **)$$

ein Quasiisomorphismus.

Beweis. Aus (4.3.3) folgt die Behauptung. □

Bemerkung 5.1. Durch den Einschränkungsmorphismus

$\iota_x^* : \mathbb{P}^N \leftarrow x \xrightarrow{=} K$ erhält man einen Morphismus von Komplexen in $C_b(\mathcal{M})$:

$$\langle (\mathbb{P}^N, \{\mathbb{P}^N, \{x\}\}, 0), \mathbb{P}^{N-1} \rangle \longrightarrow K,$$

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{P}^N, \{\mathbb{P}^N, \{x\}\}, 0) & \xrightarrow{\iota_x^*} & K \\ \uparrow & & \\ \mathbb{P}^{N-1}(-1), & & \end{array}$$

der den Zykel $[x]$ induziert (4.2.4).

5.2. Allgemeiner Fall.

5.2.1. Seien nun $X^o = \mathbb{A}_K^N$ und $\mathbb{A}^{n_i} \simeq Y_i^o \subset X^o$, für $i = 1, \dots, r-1$, affine Unterräume. Wir kompaktifizieren im projektiven Raum durch $X^o \subset X = \mathbb{P}^N$ und $Y_i^o \subset Y_i \subset X, Y_i \simeq \mathbb{P}^{n_i}$, sowie $Y_r := X - X^o \simeq \mathbb{P}^{N-1}$ die ‘‘Hyperebene im Unendlichen’’.

Wir bezeichnen mit $\mathcal{A}(X^o, \cup_i Y_i^o)$ (kurz \mathcal{A} , falls die Konstellation fixiert ist) die Menge nichttrivialer Durchschnitte von $X^o, Y_1^o, \dots, Y_{r-1}^o$,

$$\mathcal{A}(X^o, \cup_i Y_i^o) \stackrel{\text{dfn}}{=} \{Y_I^o \mid I \in \mathfrak{P}_{r-1}\} - \{\emptyset\}. \quad (5.2.1.1)$$

Im folgenden werden wir nur Konstellationen $X^o, Y_1^o, \dots, Y_{r-1}^o$ betrachten, die folgende Bedingung erfüllen:

- für alle $A \in \mathcal{A}$ ist $A(K) - \bigcup_{B \in \mathcal{A}, B \subsetneq A} B(K)$ nicht leer.

Wir sagen dann, dass genügend K -rationale Punkte in allgemeiner Lage existieren.

Die Bedingung ist erfüllt falls K ein Körper mit unendlich vielen Elementen ist.

5.2.2. Zum Funktor

$$\mathfrak{P}_{r-1}^{\text{opp}} \rightarrow C_b(\mathcal{M}) \quad (5.2.2.1)$$

$$I \mapsto \langle Y_I(-\text{codim} Y_I), Y_r \cap Y_I \rangle$$

$$(I \supset J) \mapsto \left(\begin{array}{ccc} Y_I \xleftarrow{=} Y_I \xrightarrow{\subsetneq} Y_J \\ Y_r \cap Y_I \xleftarrow{=} Y_r \cap Y_I \xrightarrow{\subsetneq} Y_r \cap Y_J \end{array} \right)$$

erhalten wir (Anhang A.1) einen Doppelkomplex $F \in C_b(C_b(\mathcal{M}))$. Es ist offenbar

$$\langle X, \cup_i Y_i \rangle = \text{Ass} F.$$

Für alle $A \in \mathcal{A}$ wählen wir einen K -rationalen Punkt $x_A \in A(K)$, mit der Eigenschaft, dass $x_A \notin B$ für alle $B \in \mathcal{A}, B \subsetneq A$.

Man definiert den Doppelkomplex F' als Verfeinerung von F mit Komponenten

$$\langle (Y_I, \{Y_I, x_{Y_I^o}\}, \dim Y_I - N), Y_r \cap Y_I \rangle.$$

Und den Komplex \mathcal{E} in $C_b(\mathcal{M})$ durch

$$\mathfrak{P}_{r-1}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{M}$$

$$I \mapsto K(-\text{codim} Y_I)$$

$$(I \supset J) \mapsto \begin{cases} id & \text{falls } Y_I^o = Y_J^o, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Durch die Einschränkungsmorphismen $\iota_{x_{Y_I^o}}^* : Y_I \leftarrow x_{Y_I^o} \xrightarrow{=} K$ erhält man (wie in Bemerkung 5.1) Morphismen von Komplexen

$$\langle (Y_I, \{Y_I, x_{Y_I^o}\}, \dim Y_I - N), Y_r \cap Y_I \rangle \xrightarrow{\iota_{x_{Y_I^o}}^*} K(\dim Y_I - N)$$

und

$$\iota_{x_A}^* : \text{Ass} F' \rightarrow \mathcal{E}.$$

Korollar (5.1.1) und Bemerkung (5.1) zeigen, dass

$$Z^*(\langle V(b), \cup_j W_j \rangle^* \times \text{Ass} F', **) \xrightarrow{\text{id} \times \iota_{x_A}^*} Z^*(\langle V(b), \cup_j W_j \rangle^* \times \mathcal{E}, **) \quad (5.2.2.2)$$

ein Quasiisomorphismus für alle $(V(b), \cup_j W_j) \in \mathcal{Me}$ ist.

Definition 5.1. Gegeben sei eine Konstellation $X^o; Y_1^o, \dots, Y_{r-1}^o$ affiner Räume. Wir bezeichnen für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $E(A)$ den Komplex graduierter abelscher Gruppen, der nach Anhang A.1 zum Funktor

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_{r-1}^{opp} &\rightarrow (\text{graduierte abelsche Gruppen}) \\ I &\mapsto \begin{cases} \mathbb{Z}(-\text{codim} A) & \text{falls } Y_I^o = A, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \\ (I \supset J) &\mapsto \begin{cases} id & \text{falls } Y_I^o = Y_J^o = A, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned}$$

definiert ist.

Offenbar ist

$$Z^*(\langle V(b), \cup_j W_j \rangle^* \times \mathcal{E}, **) \cong \bigoplus_{A \in \mathcal{A}} Z^*(\langle V(b), \cup_j W_j \rangle^*, **) \otimes_{\mathbb{Z}} E(A),$$

wobei wir wie folgt identifizieren ($c_I := \text{codim} Y_I$):

$$\begin{aligned} Z^*(\langle V(b), \cup_j W_j \rangle^* \times K[[I]](-c_I), **) &\xrightarrow{\cong} Z^*(\langle V(b), \cup_j W_j \rangle^*, **) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[[I]](-c_I) \\ &\xrightarrow{(-1)^{|I| \cdot q} id} Z^P(W_J, q). \end{aligned}$$

Man hat folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} Z^*(\langle V(b), \cup_j W_j \rangle^* \times \langle X, \cup_i Y_i \rangle, **) & & \\ \uparrow = & & \\ Z^*(\langle V(b), \cup_j W_j \rangle^* \times \text{Ass} F, **) & & \\ \uparrow \text{id} \times \text{incl} & & \\ Z^*(\langle V(b), \cup_j W_j \rangle^* \times \text{Ass} F', **) & \xrightarrow{\text{id} \times \iota_{x_A}^*} & Z^*(\langle V(b), \cup_j W_j \rangle^* \times \mathcal{E}, **) \\ & & \cong \downarrow \\ & & \bigoplus_{A \in \mathcal{A}} Z^*(\langle V(b), \cup_j W_j \rangle^*, **) \otimes_{\mathbb{Z}} E(A) \end{array}$$

mit Quasiisomorphismen als vertikalen (nach Satz 3.4.2) und horizontalen Pfeilen (5.2.2.2).

Damit haben wir die folgende Proposition bewiesen.

Proposition 5.2.1. *Nach Wahl von Punkten x_A in allgemeiner Lage haben wir via obigem Diagramm für alle Konstellationen $V; W_1, \dots, W_s$ projektiver Schemata einen Quasiisomorphismus*

$$Z^*(\langle V(b), \cup_j W_j \rangle^* \times \langle X, \cup_i Y_i \rangle, **) \stackrel{quis}{\simeq} \bigoplus_{A \in \mathcal{A}} Z^*(\langle V(b), \cup_j W_j \rangle^*, **) \otimes_{\mathbb{Z}} E(A).$$

Bemerkung 5.2. Wie man an der Konstruktion sieht, ist der Quasiisomorphismus aus Proposition 5.2.1 mit der “ $Z^*(K, **)$ -Modulstruktur” verträglich, d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Z^*(K, **) \otimes_{\mathbb{Z}} Z^*(V^* \times \langle X, \cup_i Y_i \rangle, **) & \xrightarrow{(3.3.2.1)} & Z^*(V^* \times \langle X, \cup_i Y_i \rangle, **) \\ \downarrow \underset{\simeq}{quis} & & \downarrow \underset{\simeq}{quis} \\ \bigoplus_{A \in \mathcal{A}} Z^*(K, **) \otimes Z^*(V^*, **) \otimes_{\mathbb{Z}} E(A) & \xrightarrow{(3.3.2.1)} & \bigoplus_{A \in \mathcal{A}} Z^*(V^*, **) \otimes_{\mathbb{Z}} E(A) \end{array}$$

($V^* := \langle V(b), \cup_j W_j \rangle^*$) kommutiert.

Bemerkung 5.3. Man kann $\iota_{x_A}^*$ durch

$$\begin{array}{ccc} Ass F' & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ \downarrow & \nearrow & \\ \langle X^o, \cup_i Y_i^o \rangle' & & \end{array}$$

faktorisieren, wobei $\langle X^o, \cup_i Y_i^o \rangle'$ als Verfeinerung von $\langle X^o, \cup_i Y_i^o \rangle$ mit Komponenten $(Y_I^o, \{Y_I^o, x_{Y_I^o}\}, -\text{codim} Y_I^o)$ definiert ist und der Diagonale Pfeil durch $Y_I^o \leftarrow x_{Y_I^o} \xrightarrow{\cong} K$ gegeben ist.

Korollar 5.2.1. *Nach Wahl von Punkten x_A in allgemeiner Lage haben wir einen Quasiisomorphismus*

$$Z^*(X - \cup_i Y_i, **) \stackrel{quis}{\simeq} \bigoplus_{A \in \mathcal{A}} E(A) \otimes_{\mathbb{Z}} Z^*(K, **).$$

Beweis. Man benutzt Proposition 5.2.1 mit $\langle V(b), \cup_j W_j \rangle^* = K$ und Korollar (3.4.2). \square

5.2.3. Wir setzen $S := \{Y_I \mid I \in \mathfrak{P}_{r-1}\}$, dual zu F definiert man F^* durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_{r-1} &\rightarrow C_b(\mathcal{M}) \\ I &\rightarrow \langle (Y_I, S, 0), Y_r \cap Y_I \rangle^* \\ (I \subset J) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc} Y_r \cap Y_I & \xleftarrow{\cong} & Y_r \cap Y_J \xrightarrow{\cong} Y_r \cap Y_J \\ & & Y_I \xleftarrow{\cong} Y_J \xrightarrow{\cong} Y_J \end{array} \right). \end{aligned}$$

Es gilt offenbar

$$Ass F^* = \langle X, \cup_i Y_i \rangle^*.$$

Man definiert \mathcal{E}^* (dual zu \mathcal{E}) durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_{r-1} &\rightarrow \mathcal{M} \\ I &\mapsto K(-\dim Y_I) \\ (I \subset J) &\mapsto \begin{cases} id & \text{falls } Y_I^o = Y_J^o, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Via $\iota_{x_{Y_I^o}} : K \xleftarrow{=} x_{Y_I^o} \xrightarrow{incl} Y_I$ erhält man Morphismen von Komplexen

$$K(-\dim Y_I) \xrightarrow{\iota_{x_{Y_I^o}}} \langle (Y_I, S, 0), Y_r \cap Y_I \rangle^*$$

und

$$\iota_{x_{\mathcal{A}^*}} : \mathcal{E}^* \rightarrow \text{Ass } F^*.$$

Man hat die zu (5.2.2.2) duale Aussage:

$$Z^*(\mathcal{E}^* \times \langle V(b), \cup_j W_j \rangle, **) \xrightarrow{\iota_{x_{\mathcal{A}^*}} \times id} Z^*(\text{Ass } F^* \times \langle V(b), \cup_j W_j \rangle, **) \quad (5.2.3.1)$$

ist ein Quasiisomorphismus. Setze $V_\bullet = \langle V(b), \cup_j W_j \rangle$, das Diagramm von Quasiisomorphismen

$$\begin{array}{ccc} Z^*(\langle X(N), \cup_i Y_i \rangle^* \times V_\bullet, **) & & \\ \downarrow = & & \\ Z^*(\text{Ass } F^*(N) \times V_\bullet, **) & \xleftarrow{\iota_{x_{\mathcal{A}^*}} \times id} & Z^*(\mathcal{E}^*(N) \times V_\bullet, **) \\ & & \downarrow = \\ & & \bigoplus_{A \in \mathcal{A}} \underline{\text{Hom}}(E(A), \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} Z^*(V_\bullet, **) \end{array}$$

beweist die Proposition:

Proposition 5.2.2. *Nach Wahl von Punkten x_A in allgemeiner Lage haben wir via obigem Diagramm für alle Konstellationen $V; W_1, \dots, W_s$ projektiver Schemata einen Quasiisomorphismus*

$$\begin{aligned} Z^*(\langle X(\dim X), \cup_i Y_i \rangle^* \times \langle V(b), \cup_j W_j \rangle, **) &\stackrel{quis}{\simeq} \\ &\bigoplus_{A \in \mathcal{A}} \underline{\text{Hom}}(E(A), \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} Z^*(\langle V(b), \cup_j W_j \rangle, **). \end{aligned}$$

Bemerkung 5.4. Wie man an der Konstruktion sieht, ist der Quasiisomorphismus aus Proposition 5.2.2 mit der $Z^*(K, **)$ -Modulstruktur kompatibel,

d.h. wir haben ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
Z^*(K, **) \otimes_{\mathbb{Z}} Z^*(\langle X(N), \cup_i Y_i \rangle^* \times V_{\bullet}, **) & \xrightarrow{(3.3.2.1)} & Z^*(\langle X(N), \cup_i Y_i \rangle^* \times V_{\bullet}, **) \\
\downarrow \simeq^{quis} & & \downarrow \simeq^{quis} \\
\bigoplus_{A \in \mathcal{A}} Z^*(K, **) \otimes E(A)' \otimes_{\mathbb{Z}} Z^*(V_{\bullet}, **) & \xrightarrow{(3.3.2.1)} & \bigoplus_{A \in \mathcal{A}} E(A)' \otimes_{\mathbb{Z}} Z^*(V_{\bullet}, **)
\end{array}$$

$$(V_{\bullet} := \langle V(b), \cup_j W_j \rangle, E(A)' := \underline{\text{Hom}}(E(A), \mathbb{Z})).$$

Korollar 5.2.2. *Nach Wahl von Punkten x_A in allgemeiner Lage haben wir einen Quasiisomorphismus*

$$Z^*(\langle X, \cup_i Y_i \rangle^*, **) \simeq^{quis} \bigoplus_{A \in \mathcal{A}} \underline{\text{Hom}}(E(A), \mathbb{Z}(-N)) \otimes_{\mathbb{Z}} Z^*(K, **).$$

Beweis. Man benutzt Proposition 5.2.2 mit $\langle V(b), \cup_j W_j \rangle^* = K$. \square

5.3. Verträglichkeit mit Komposition.

5.3.1. Es sind $A; B_1, \dots, B_t$ und $V; W_1, \dots, W_s$ Konstellationen projektiver Schemata.

Wir setzen $X_{\bullet} := \langle X, \cup_i Y_i \rangle$ und $X_{\bullet}^* := \langle X(\dim X), \cup_i Y_i \rangle^*$, sowie $V_{\bullet}^* := \langle V(b + \dim V), \cup_j W_j \rangle^*$ und $A_{\bullet} := \langle A(c), \cup_k B_k \rangle$.

5.3.2. Sei $X^o = \mathbb{A}^N$ und Y_1^o, \dots, Y_{r-1}^o affine Unterräume, sowie X, Y_1, \dots deren Kompaktifizierung im projektiven Raum \mathbb{P}^N . Aus (Komposition) (siehe 4.1.2) haben wir:

$$Z^*(V_{\bullet}^* \times X_{\bullet}, **) \otimes Z^*(X_{\bullet}^* \times A_{\bullet}, **) \rightarrow Z^*(V_{\bullet}^* \times A_{\bullet}, **).$$

Aus Proposition (5.2.1) und (5.2.2) haben wir die Quasiisomorphismen

$$\begin{aligned}
Z^*(V_{\bullet}^* \times X_{\bullet}, **) &\simeq^{quis} \bigoplus_{A \in \mathcal{A}} Z^*(V_{\bullet}^*, **) \otimes E(A) \\
Z^*(X_{\bullet}^* \times A_{\bullet}, **) &\simeq^{quis} \bigoplus_{A \in \mathcal{A}} \underline{\text{Hom}}(E(A), \mathbb{Z}) \otimes Z^*(A_{\bullet}, **).
\end{aligned}$$

Proposition 5.3.1. *Via der Quasiisomorphismen aus Proposition 5.2.1 und 5.2.2 ist (Komposition) durch*

$$\begin{aligned}
&\bigoplus_{(A_1, A_2) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}} Z^*(V_{\bullet}^*, **) \otimes E(A_2) \otimes \underline{\text{Hom}}(E(A_1), \mathbb{Z}) \otimes Z^*(A_{\bullet}, **) \\
&\xrightarrow{\simeq} \bigoplus_{(A_1, A_2) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}} Z^*(V_{\bullet}^*, **) \otimes \underline{\text{Hom}}_{\bullet}(E(A_1), E(A_2)) \otimes Z^*(A_{\bullet}, **) \\
&\xrightarrow{id \otimes tr \otimes id} Z^*(V_{\bullet}^*, **) \otimes Z^*(A_{\bullet}, **) \rightarrow Z^*(V_{\bullet}^* \times A_{\bullet}, **)
\end{aligned}$$

gegeben.

Beweis. Zur Definition von

$$E(A_2) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(E(A_1), \mathbb{Z}) \xrightarrow{\simeq} \underline{\mathrm{Hom}}_{\bullet}(E(A_1), E(A_2))$$

und $tr : \underline{\mathrm{Hom}}_{\bullet}(E(A), E(A)) \rightarrow \mathbb{Z}$ siehe (A.2).

Man prüft leicht nach, dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{Ass}F' \times \mathcal{E}^*(N) & \xrightarrow{\iota_{x_A}^* \times id} & \mathcal{E} \times \mathcal{E}^*(N) \\ & \swarrow \mathrm{incl} \times \iota_{x_A}^* & \downarrow & & \downarrow \Phi \\ X_{\bullet} \times X_{\bullet}^* & \xleftarrow{\mathrm{incl}} & (X_{\bullet} \times X_{\bullet}^*)' & \longrightarrow & K, \end{array}$$

mit $(X_{\bullet} \times X_{\bullet}^*)'$ und $(X_{\bullet} \times X_{\bullet}^*)' \rightarrow K$ wie in (4.1.2) definiert, sowie

$$\Phi : \mathcal{E} \times \mathcal{E}^*(N) \xrightarrow{\text{Projektion}} \bigoplus_{\substack{(I,I) \\ I \in \mathfrak{P}_{r-1}}} K \xrightarrow{\sum_I (-1)^{\frac{|I|(|I|-1)}{2}} id_K} K.$$

Indem man das Diagramm von links mit $V_{\bullet}^* \times$ und von rechts mit $\times A_{\bullet}$ multipliziert und Funktorialität des äußeren Produktes benutzt (3.3.2) bleibt noch zu beachten, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Z^*(V_{\bullet}^* \times \mathcal{E} \times \mathcal{E}^*(N) \times A_{\bullet}, **) & \xrightarrow{id \times \Phi \times id} & Z^*(V_{\bullet}^* \times A_{\bullet}, **) \\ \uparrow & & \uparrow \\ Z^*(V_{\bullet}^* \times \mathcal{E}, **) \otimes Z^*(\mathcal{E}^*(N) \times A_{\bullet}, **) & & \\ \uparrow \cong & & \\ \bigoplus_{(A_1, A_2)} Z^*(V_{\bullet}^*, **) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}_{\bullet}(E(A_1), E(A_2)) \otimes Z^*(A_{\bullet}, **) & \xrightarrow{tr} & Z^*(V_{\bullet}^*, **) \otimes Z^*(A_{\bullet}, **) \end{array}$$

kommutiert. □

5.3.3. Interpretation von $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}e}$. Seien $X^o; Y_1^o, \dots, Y_{r-1}^o$ und $V^o; W_1^o, \dots, W_{s-1}^o$ Konstellationen affiner Räume, wir fixieren Punkte $x_A, A \in \mathcal{A} = \mathcal{A}(X^o, \cup_i Y_i^o)$, und $x_B, B \in \mathcal{B} := \mathcal{A}(V^o, \cup_j W_j^o)$, in allgemeiner Lage.

Wir haben via Propositionen 5.2.1, 5.2.2, ein Diagramm von Quasiisomorphismen

$$\begin{array}{ccc} Z^*(V_{\bullet}^* \times X_{\bullet}, **) & \longrightarrow & \bigoplus_{B \in \mathcal{B}} \underline{\mathrm{Hom}}(E(B), \mathbb{Z}) \otimes Z^*(X_{\bullet}, **) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{A \in \mathcal{A}} Z^*(V_{\bullet}^*, **) \otimes E(A) & \longrightarrow & \bigoplus_{(A,B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}} \underline{\mathrm{Hom}}(E(B), \mathbb{Z}) \otimes Z^*(K, **) \otimes E(A). \end{array} \quad (5.3.3.1)$$

Lemma 5.3.1. *Das Diagramm (5.3.3.1) kommutiert.*

Beweis. Wir haben ein Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
& & V_{\bullet}^* \times X_{\bullet} & & \\
& \nearrow & & \nwarrow & \\
V_{\bullet}^* \times \text{Ass}F' & & & & \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^*(\dim V) \times X_{\bullet} \iota_{x_{\mathcal{B}^*}} \times id \\
\downarrow id \times \iota_{x_{\mathcal{A}}}^* & \swarrow \iota_{x_{\mathcal{B}^*}} \times id & & \searrow \iota_{x_{\mathcal{B}^*}} \times id & \uparrow \\
V_{\bullet}^* \times \mathcal{E}_{\mathcal{A}} & & & & \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^*(\dim V) \times \text{Ass}F' \\
& \swarrow \iota_{x_{\mathcal{B}^*}} \times id & & \nwarrow id \times \iota_{x_{\mathcal{A}}}^* & \\
& & \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^*(\dim V) \times \mathcal{E}_{\mathcal{A}} & &
\end{array}$$

wobei das obere und untere Rechteck kommutiert. Daraus folgt sofort, dass

$$\begin{array}{ccc}
Z^*(V_{\bullet}^* \times X_{\bullet}, **) & \longrightarrow & Z^*(\mathcal{E}_{\mathcal{B}}^*(\dim V) \times X_{\bullet}, **) \\
\downarrow & & \downarrow \\
Z^*(V_{\bullet}^* \times \mathcal{E}_{\mathcal{A}}, **) & \longrightarrow & Z^*(\mathcal{E}_{\mathcal{B}}^*(\dim V) \times \mathcal{E}_{\mathcal{A}}, **)
\end{array}$$

kommutiert. Daraus folgt die Behauptung nach einfacher Rechnung. \square

Mit Lemma 5.3.1 erhält man einen Isomorphismus

$$\begin{aligned}
& \text{Hom}_{\mathcal{M}e}((V, \cup_j W_j), (X, \cup_i Y_i)) \xrightarrow{\cong} \\
& \text{Grad}=0 \text{ Anteil von } \left\{ H_0 \left(\bigoplus_{(A,B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}} \underline{\text{Hom}}(E(B), \mathbb{Z}) \otimes Z^*(K, **) \otimes E(A) \right) \right\}.
\end{aligned} \tag{5.3.3.2}$$

Proposition 5.3.1 und Lemma 5.3.1 zeigen, dass Komposition in $\mathcal{M}e$ unter (5.3.3.2) durch

$$\begin{aligned}
& Z^*(K, **) \otimes \bigoplus_{A_1 \in \mathcal{A}} E(A_1) \otimes \bigoplus_{A_2 \in \mathcal{A}} \underline{\text{Hom}}(E(A_2), \mathbb{Z}) \otimes Z^*(K, **) \\
& \xrightarrow{id \otimes tr \otimes id} Z^*(K, **) \otimes Z^*(K, **) \xrightarrow{\text{Multiplikation}} Z^*(K, **) \tag{5.3.3.3}
\end{aligned}$$

gegeben ist.

Aus der Identifikation aus Proposition 5.2.1 und dem Funktor aus (4.3.3) hat man eine Abbildung

$$\begin{aligned}
& \text{Hom}_{\mathcal{M}e}((V, \cup_j W_j), (X, \cup_i Y_i)) \rightarrow \\
& \text{Hom}_{D_+(gaG)} \left(\bigoplus_{B \in \mathcal{B}} Z^*(K, **) \otimes E(B), \bigoplus_{A \in \mathcal{A}} Z^*(K, **) \otimes E(A) \right).
\end{aligned}$$

Aus Proposition 5.3.1 und Lemma 5.3.1 sieht man sofort, dass diese Abbildung durch (5.3.3.2) zusammen mit der „Regel“ (5.3.3.3) gegeben ist.

Als nächstes betrachten wir den Diagonalzykel Δ .

Lemma 5.3.2. *Der Diagonalzykel $\Delta = \sum_I (-1)^{\frac{|I|(|I|-1)}{2}} \Delta_{Y_I}$ bildet unter*

$$Z^*(X_\bullet^* \times X_\bullet, **) \stackrel{\text{quis}}{\simeq} \bigoplus_{(A_1, A_2) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}} \underline{\text{Hom}}(E(A_1), \mathbb{Z}) \otimes E(A_2) \otimes Z^*(K, **)$$

auf $\sum_A id_A \otimes [K]$ ab, mit $id_A \in \underline{\text{Hom}}(E(A), \mathbb{Z}) \otimes E(A)$ entsprechend der Identifikation

$$\underline{\text{Hom}}(E(A), \mathbb{Z}) \otimes E(A) = \underline{\text{Hom}}_\bullet(E(A), E(A)),$$

(aus A.2).

Beweis. Wir betrachten

$$\begin{array}{ccc} X_\bullet^* \times X_\bullet & \longleftarrow & X_\bullet^* \times \text{Ass}F' \xrightarrow{id \times \iota_{x_A}^*} X_\bullet^* \times \mathcal{E} \\ & & \uparrow \iota_{x_A} \times id \\ & & \mathcal{E}^*(N) \times \mathcal{E}. \end{array}$$

Nach anwenden von $Z^*(, **)$ sieht man

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \longleftarrow \Delta & \longmapsto \sum_I (-1)^{\frac{|I|(|I|-1)}{2}} [x_{Y_I}^\circ] \\ & & \uparrow \\ & & \sum_I (-1)^{\frac{|I|(|I|-1)}{2}} \underbrace{[K]}_{(I, I)}. \end{array}$$

Daraus folgt die Behauptung. \square

5.3.4. Additive Zerlegung.

Korollar 5.3.1. *Nach Wahl von K -rationalen Punkten $\{x_A\}_{A \in \mathcal{A}}$, so dass $x_A \in A - \cup_{\substack{B \in \mathcal{A} \\ B \subsetneq A}} B$, haben wir eine Zerlegung*

$$(\mathbb{P}^N, \cup_i Y_i) = \bigoplus_{A \in \mathcal{A}} ((\mathbb{P}^N, \cup_i Y_i), P_A) \quad (5.3.4.1)$$

in Mel (P_A sind idempotente Endomorphismen von $(\mathbb{P}^N, \cup_i Y_i)$).

Beweis. Wir definieren P_A als die Homologiekategorie, die unter

$$Z^*(X_\bullet^* \times X_\bullet, **) \stackrel{\text{quis}}{\simeq} \bigoplus_{(A_1, A_2) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}} \underline{\text{Hom}}(E(A_1), \mathbb{Z}) \otimes E(A_2) \otimes Z^*(K, **)$$

auf $id_A \otimes [K]$ abbildet mit $id_A \in \underline{\text{Hom}}(E(A), \mathbb{Z}) \otimes E(A)$ die Identität. Lemma 5.3.2 zeigt $\Delta = \sum_{A \in \mathcal{A}} P_A$ und Proposition 5.3.1, dass P_A idempotent ist. \square

Wir fixieren ein $A_0 \in \mathcal{A}$. Ohne Einschränkung seien Y_1, \dots, Y_q diejenigen Y_i , die A_0 enthalten. Wir setzen

$$\mathcal{A}' \stackrel{\text{dfn}}{=} \{A \in \mathcal{A}; A \supset A_0\} = \mathcal{A}(X^o, \cup_{i=1}^q Y_i^o).$$

Der natürliche Morphismus $(X, \cup_{i=1}^q Y_i) \rightarrow (X, \cup_i Y_i)$, gegeben durch den Zykel $\sum_{I \in \mathfrak{P}_q} (-1)^{\frac{|I|(|I|-1)}{2}} \Delta_{Y_I}$, hat nach Wahl von Punkten $\{x_A; A \in \mathcal{A}'\}$ (wir nehmen die gleichen für \mathcal{A}') in allgemeiner Lage unter dem dazugehörigen Quasiisomorphismus

$$Z^*(\langle X(\dim X), \cup_{i=1}^q Y_i \rangle^* \times \langle X, \cup_i Y_i \rangle, **) \xrightarrow{\text{quis}} \bigoplus_{(A', A) \in \mathcal{A}' \times \mathcal{A}} \underline{\text{Hom}}_{\bullet}(E(A'), E(A)) \otimes Z^*(K, **)$$

die Darstellung $\sum_{A \in \mathcal{A}'} \text{id}_A \otimes [K]$. Daraus folgt sofort:

Lemma 5.3.3. *Der Morphismus $(X, \cup_{i=1}^q Y_i) \rightarrow (X, \cup_i Y_i)$ bildet für alle $A' \in \mathcal{A}'$ die Summanden*

$$((X, \cup_{i=1}^q Y_i), A') \xrightarrow{\cong} ((X, \cup_{i=1}^r Y_i), A')$$

der Zerlegung aus Korollar (5.3.1) isomorph aufeinander ab.

5.3.5. Morphismen in AMe.

Seien $X^o; Y_1^o, \dots, Y_{r-1}^o$ und $V^o; W_1^o, \dots, W_{s-1}^o$ Konstellationen affiner Räume. Wir bezeichnen mit $X; Y_1, \dots, Y_r$ bzw. $V; W_1, \dots, W_s$, wie in (5.2.1), die Kompaktifizierung im projektiven Raum und Y_r bzw. W_s die Hyperebene im Unendlichen.

Für $I \in \mathfrak{P}_{r-1, l}$, $J \in \mathfrak{P}_{s-1, m}$ sei $C_{I, J}$ der Komplex assoziiert zum Doppelkomplex ($N := \dim X$, $d := \dim W_J - \dim V$)

$$\begin{array}{ccc} \text{CH}^*(Y_I(N) \times W_J(d), 0) & \longrightarrow & \text{CH}^*((Y_I \cap Y_r)(N) \times W_J(d), 0) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{CH}^*(Y_I(N) \times (W_J \cap W_s)(d-1), 0) & \longrightarrow & \text{CH}^*((Y_I \cap Y_r)(N) \times (W_J \cap W_s)(d-1), 0) \end{array}$$

(der rechte Komplex steht im Grad=0) mit horizontalen Pfeilen durch Pullback und vertikalen Pfeilen durch Pushforward.

Offenbar ist

$$\alpha_{I, J} : C_{I, J} \xrightarrow{\text{quis}} \text{Ass} \left(\text{CH}^*(Y_I(N+d), 0) \rightarrow \text{CH}^*((Y_I \cap Y_r)(N+d), 0) \right)_{\text{deg}=0} \xrightarrow{\text{quis}} \mathbb{Z}(\dim X - \dim Y_I - \dim V + \dim W_J),$$

der erste Quasiisomorphismus durch Restriktion auf einen Punkt $y \in W_J^o$, der zweite Quasiisomorphismus durch Inklusion eines Punktes $x \in Y_I^o$. Der Morphismus (von Komplexen) $\alpha_{I, J}$ hängt nicht von der Wahl der Punkte ab. Durch

$$\mathbb{Z}(\dim X - \dim Y_I - \dim V + \dim W_J) \rightarrow C_{I, J}, 1 \mapsto \begin{pmatrix} x \times [W_J] & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist ein quasiinverser Morphismus gegeben.

Wir haben die offensichtlichen Morphismen $i_k : C_{I,J} \rightarrow C_{\partial_k I,J}$ (durch Pushforward) und $i_k^* : C_{I,\partial_k J} \rightarrow C_{I,J}$ (durch Pullback) und können den Komplex C assoziiert zu

$$\dots \rightarrow \underbrace{\bigoplus_{\substack{|J|-|I|=l \\ I \in \mathfrak{P}_{r-1}, J \in \mathfrak{P}_{s-1}}} C_{I,J}}_{\text{deg}=l} \xrightarrow{\sum_k (-1)^k (i_k^* \times id + (-1)^{|I|} id \times i_k)} \bigoplus_{\substack{|J|-|I|=l-1 \\ I \in \mathfrak{P}_{r-1}, J \in \mathfrak{P}_{s-1}}} C_{I,J} \rightarrow \dots$$

bilden. Nach Definition ist $\text{Hom}_{\mathcal{A}\mathcal{M}e}((X, \cup_i Y_i), (V, \cup_j W_j))$ der Grad= 0-Anteil von $H_0(C)$, den wir mit $H_0^{\text{deg}=0}(C)$ bezeichnen. Man sieht leicht, dass die Morphismen $\alpha_{I,J}$ einen Quasiisomorphismus

$$C \xrightarrow{\text{quis}} \bigoplus_{(A_1, A_2) \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2} \underline{\text{Hom}}(E(A_1), \mathbb{Z}) \otimes E(A_2)$$

geben (mit $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}(X^o, \cup_i Y_i^o)$ und $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}(V^o, \cup_j W_j^o)$). Dieser hängt von keinen Wahlen ab.

Wir haben also

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}\mathcal{M}e}((X, \cup_i Y_i), (V, \cup_j W_j)) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{K_b(\text{ga}G)} \left(\bigoplus_{A_1 \in \mathcal{A}_1} E(A_1), \bigoplus_{A_2 \in \mathcal{A}_2} E(A_2) \right). \quad (5.3.5.1)$$

Man rechnet leicht nach, dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{A}\mathcal{M}e}((X, \cup_i Y_i), (V, \cup_j W_j)) & \longrightarrow & H_0^{\text{deg}=0} \left(\bigoplus_{(A_1, A_2)} \underline{\text{Hom}}_{\bullet}(E(A_1), E(A_2)) \otimes Z^*(K, **) \right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}_{\mathcal{A}\mathcal{M}e}((X, \cup_i Y_i), (V, \cup_j W_j)) & \longrightarrow & H_0^{\text{deg}=0} \left(\bigoplus_{(A_1, A_2)} \underline{\text{Hom}}_{\bullet}(E(A_1), E(A_2)) \right), \end{array}$$

mit linkem vertikalen Pfeil via dem Funktor $\mathcal{M}e \rightarrow \mathcal{A}\mathcal{M}e$ (aus 4.4.4) und rechtem vertikalen Pfeil durch Projektion $Z^*(K, **) \rightarrow Z^0(K, 0) = \mathbb{Z} \cdot [K]$.

Man kann den Isomorphismus (5.3.5.1) leicht invertieren. Sei dazu $\{x_A \in A; A \in \mathcal{A}_1\}$ ein Wahl von K -rationalen Punkten in allgemeiner Lage. Zu einem Morphismus

$$\phi \in \text{Hom}_{K_b(\text{ga}G)} \left(\bigoplus_{A_1 \in \mathcal{A}_1} E(A_1), \bigoplus_{A_2 \in \mathcal{A}_2} E(A_2) \right),$$

gegeben durch $\mathbb{Z}_I(-\text{codim}Y_I) \xrightarrow{\phi_{I,J}} \mathbb{Z}_J(-\text{codim}W_J)$, für alle $I \in \mathfrak{P}_{r-1}, J \in \mathfrak{P}_{s-1}, |I| = |J|$, ist der entsprechende Zykel durch

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{I \in \mathfrak{P}_{r-1}, J \in \mathfrak{P}_{s-1} \\ |I|=|J|}} (-1)^{\frac{|I|(|I|-1)}{2}} \phi_{I,J} \cdot \underset{\in \text{CH}^0(Y_I(\dim Y_I) \times W_J)}{x_{Y_I} \times [W_J]} + \\ & \sum_{\substack{I \in \mathfrak{P}_{r-1}, J' \in \mathfrak{P}_{s-1} \\ |I|=|J'|+1}} (-1)^{\frac{|I|(|I|-1)}{2}} \sum_{k=0}^{|J'|} (-1)^k \sum_{\substack{J: \partial_k J = J' \\ \mathbf{W}_{\partial_k J} \supseteq \mathbf{W}_J}} \phi_{I,J} \cdot \underset{\in \text{CH}^*(Y_I \times (W_{J'} \cap W_s))}{x_{Y_I} \times [W_J]} \end{aligned} \quad (5.3.5.2)$$

gegeben.

5.4. Abhängigkeit von Wahl von Punkten.

5.4.1. Sei $X^o = \mathbb{A}^N$ und Y_1^o, \dots, Y_{r-1}^o affine Unterräume, sowie X, Y_1, \dots deren Kompaktifizierung im projektiven Raum \mathbb{P}^N . Wir diskutieren in diesem Abschnitt die Abhängigkeit der Quasiisomorphismen aus Proposition (5.2.1) und (5.2.2) von der Wahl der Punkte x_A .

Wählt man nun Punkte x'_A und benutzt für

$$\begin{aligned} & Z^*(\langle X(N), \cup_i Y_i \rangle^* \times \langle X, \cup_i Y_i \rangle, **) \\ & \quad \downarrow \text{quis durch } x'_A \\ & \bigoplus_{A \in \mathcal{A}} Z^*(\langle X(N), \cup_i Y_i \rangle^*, **) \otimes_{\mathbb{Z}} E(A) \\ & \quad \downarrow \text{quis durch } x_A \\ & \bigoplus_{(A', A) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}} \underline{\text{Hom}}(E(A'), \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} Z^*(K, **) \otimes_{\mathbb{Z}} E(A) \\ & \quad \downarrow \cong \\ & \bigoplus_{(A', A) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}} Z^*(K, **) \otimes_{\mathbb{Z}} \underline{\text{Hom}}_{\bullet}(E(A'), E(A)) \end{aligned}$$

im ersten Quasiisomorphismus die Punkte x'_A und im zweiten die Punkte x_A , dann ist der durch Übergang $x_A \rightarrow x'_A$ induzierte Endomorphismus von

$$\bigoplus_{A \in \mathcal{A}} Z^*(\langle V(a + \dim V), \cup_j W_j \rangle^*, **) \otimes E(A)$$

nach Abschnitt (5.3) durch Σ , mittels Regel (5.3.3.3), gegeben.

Dual dazu ist der Übergang $x'_A \rightarrow x_A$ bei

$$\bigoplus_{A \in \mathcal{A}} \underline{\text{Hom}}(E(A), \mathbb{Z}) \otimes Z^*(\langle A(c), \cup_k B_k \rangle, **)$$

ebenfalls durch Σ beschrieben. Wir werden in diesem Abschnitt Σ berechnen.

5.4.2. Das Bild von Δ unter

$$Z^*(X_\bullet^* \times X_\bullet, **) \stackrel{\text{quis}}{\simeq} \bigoplus_{A \in \mathcal{A}} Z^*(X_\bullet^*, **) \otimes E(A)$$

bei Benutzung der Punkte x'_A ist durch

$$\sum_{I \in \mathfrak{P}_{r-1}} (-1)^{\frac{|I| \cdot (|I|-1)}{2}} [x'_{Y_I^\circ}] \otimes \delta_I$$

gegeben, mit $\delta_I = 1 \in \mathbb{Z}(-\text{codim} Y_I^\circ) \xrightarrow{\text{incl}_I} E(Y_I^\circ)$. Wir müssen diese Klasse in die Form

$$\sum_{I, J \in \mathfrak{P}_{r-1}} m_{I, J} \cdot [x_{Y_I^\circ}] \otimes \delta_J$$

bringen, mit $m_{I, J} \in Z^*(K, **)$. Dann ist das Bild Σ von Δ unter den Quasiisomorphismen aus (5.4) durch

$$\sum_{I, J \in \mathfrak{P}_{r-1}} m_{I, J} \otimes \delta_I^* \otimes \delta_J,$$

mit $\delta_I^* = 1 \in \mathbb{Z}(\text{codim} Y_I^\circ) \xrightarrow{\text{incl}_I} \underline{\text{Hom}}(E(Y_I^\circ), \mathbb{Z})$, gegeben.

5.4.3.

Definition 5.2. Für $y \in A(K)$, $A \in \mathcal{A}$, definieren wir induktiv, nach $\dim A$, wann y in *sehr allgemeiner* Lage relativ zu den Punkten $\{x_B \mid B \in \mathcal{A}\}$ ist.

Wir beginnen mit $\dim A = 0$, dann sei jeder Punkt in *sehr allgemeiner* Lage.

Ist $\dim A > 0$, dann ist y in *sehr allgemeiner* Lage, falls folgende Bedingungen gelten

- $y \neq x_A$,
- für alle $B \in \mathcal{A}$ mit $B \subsetneq A$ ist $y \notin B$,
- die Gerade durch y und x_A schneidet alle $B \subset A, B \in \mathcal{A}$ gut,
- alle Schnittpunkte der Geraden durch y und x_A mit den Untervarietäten $B \in \mathcal{A}, B \subsetneq A$, sind in *sehr allgemeiner* Lage.

Die Punkte in *sehr allgemeiner* Lage bilden eine offenen Menge (von A). Über einem endlichen Körper muss diese keine K -rationalen Punkte enthalten. Ist K ein Körper mit unendlich vielen Elementen, dann gibt es K -rationale Punkte in *sehr allgemeiner* Lage.

Definition 5.3. Für $y \in A$ in *sehr allgemeiner* Lage und eine Kette $A_0 = A \supseteq A_1 \supseteq \cdots \supseteq A_m, m \geq 0$, in \mathcal{A} mit $\text{codim}_{A_i} A_{i+1} = 1$ setzen wir

- (1) $y_A \stackrel{\text{dfn}}{=} y$, falls $m = 0$,
- (2) $y_{A \supseteq \cdots \supseteq A_m} \stackrel{\text{dfn}}{=} \text{Schnittpunkt der Geraden durch } y_{A \supseteq \cdots \supseteq A_{m-1}} \text{ und } x_{A_{m-1}}$
mit A_m , falls $m > 0$.

Sei im zweiten Fall $\gamma : \mathbb{A}^1 \rightarrow A_{m-1}$ die Parametrisierung der Geraden durch $y_{A \supseteq \dots \supseteq A_{m-1}}$ und $x_{A_{m-1}}$ mit $\gamma(0) = y_{A \supseteq \dots \supseteq A_{m-1}}$ und $\gamma(1) = x_{A_{m-1}}$, dann definieren wir $\lambda_{A \supseteq \dots \supseteq A_m}$ durch

$$\gamma(\lambda_{A \supseteq \dots \supseteq A_m}) \stackrel{\text{dfn}}{=} y_{A \supseteq \dots \supseteq A_m}.$$

Seien $A, B \in \mathcal{A}$ mit $B \subset A$, $\text{codim}_A B = 1$. Assoziiert zum Funktor

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_{r-1}^{\text{opp}} &\rightarrow (\text{grad. ab. Gruppen}) \\ I &\mapsto \begin{cases} \mathbb{Z}(-N + \dim B) & \text{falls } Y_I^o = A \text{ oder } B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ (I \supset J) &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } Y_I^o \notin \{A, B\} \text{ oder } Y_J^o \notin \{A, B\} \\ id & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

haben wir nach (A.1.2) eine Komplex graduerter, abelscher Gruppen, den wir mit $E(A, B)$ bezeichnen.

Wir haben offenbar eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow E(A)(-1) \rightarrow E(A, B) \rightarrow E(B) \rightarrow 0 \quad (5.4.3.1)$$

und einen Schnitt $s : E(B) \rightarrow E(A, B)$ als graduierte, abelsche Gruppen, so dass der durch (5.4.3.1) und s gegebene Morphismus von Komplexen $s \circ d - d \circ s : E(B) \rightarrow E(A)[1](-1)$ die Form

$$\sum_I n_I \delta_I \mapsto \sum_I \sum_{\substack{k \\ Y_{\partial_k I}^o = A}} (-1)^{k+1} n_I \delta_{\partial_k I}$$

hat.

Notation 5.1. Für alle $A, B \in \mathcal{A}$ mit $B \subset A$, $\text{codim}_A B = 1$, bezeichnen wir den Morphismus $s \circ d - d \circ s : E(B) \rightarrow E(A)[1](-1)$ mit $\sigma^{A \supset B}$.

Es definiert $\sigma^{A \supset B}$ ein Homologieklassen in $\underline{\text{Hom}}_{-1}(E(B), E(A))$ und wir bezeichnen ebenfalls mit $\sigma^{A \supset B}$ die Kompositionsabbildung

$$\sigma^{A \supset B} : \underline{\text{Hom}}_{\bullet}(E(A), C) \xrightarrow{\circ \sigma^{A \supset B}} \underline{\text{Hom}}_{\bullet}(E(B), C) \otimes \mathbb{Z}[1](-1),$$

wobei C ein Komplex freier, endlich erzeugter abelscher Gruppen ist. Explizit erhalten wir für

$$\mathbf{n} = \sum_{I \in \mathfrak{P}_{r-1}, Y_I^o = A} \delta_I^* \otimes c_I \in \underline{\text{Hom}}(E(A), \mathbb{Z}) \otimes C,$$

dass

$$\sigma^{A \supset B}(\mathbf{n}) = (-1)^{\deg(\mathbf{n})} \sum_{\substack{J \\ Y_J^o = B}} \sum_{\substack{k \\ Y_{\partial_k J}^o = A}} (-1)^{k+1} \delta_J^* \otimes c_{\partial_k J}.$$

5.4.4. Für alle $\lambda \in K^* - \{1\}$ sei mit $[a] \in Z^1(K, 1)$ der durch den K -rationalen Punkt $a \in \mathbb{A}^1(K)$ gegebene Zykel bezeichnet. Offenbar hat dieser triviale Ableitung.

Für eine Homologieklassse

$$\mathbf{n} = \sum_I \delta_I^* \otimes c_I \in \underline{\mathbf{Hom}}(E(A), \mathbb{Z}) \otimes C$$

und einen K -rationalen Punkt $y \in A(K)$ in allgemeiner Lage bildet

$$\sum_I \underbrace{[y] \otimes c_I}_{\in Z^*(Y_I, 0) \otimes C}$$

offensichtlich eine Homologieklassse in $Z^*(X_\bullet^*, **)$ $\otimes C$ (dabei ist $X_\bullet^* = \langle X(\dim X), \cup_i Y_i \rangle^*$). Wir wollen diese Klasse mit $\mathbf{n}(y)$ bezeichnen.

Proposition 5.4.1. *Fixiere ein $A \in \mathcal{A}$ und $y \in A(K)$ ein Punkt in sehr allgemeiner Lage. Sei $\mathbf{n} = \sum_I \delta_I^* \otimes c_I$ eine Homologieklassse in $\underline{\mathbf{Hom}}(E(A), \mathbb{Z}) \otimes C$. Die Homologieklassse von*

$$\mathbf{n}(y) = \sum_I [y] \otimes c_I$$

in $Z^*(X_\bullet^*, **)$ $\otimes C$ ist zur Klasse

$$\mathbf{n}(x_A) + \sum_{m \geq 1} (-1)^{m \deg(\mathbf{n})} \sum_{A \supseteq \dots \supseteq A_m} [\lambda_{A \supseteq \dots \supseteq A_m}] \cdots [\lambda_{A \supseteq A_1}] \cdot (\sigma^{A_{m-1} \supseteq A_m} \circ \dots \circ \sigma^{A \supseteq A_1})(\mathbf{n})(x_{A_m})$$

äquivalent. Dabei wird in der zweiten Summe über alle Ketten $A \supseteq \dots \supseteq A_m$, mit $\text{codim}_{A_i} A_{i+1} = 1$ für alle i , summiert.

Korollar 5.4.1. *Wir nehmen an, dass die Punkte x'_A für alle $A \in \mathcal{A}$ in sehr allgemeiner Lage sind.*

Das Bild

$$\Sigma \in \bigoplus_{(A', A) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}} Z^*(K, **) \otimes_{\mathbb{Z}} \underline{\mathbf{Hom}}_\bullet(E(A'), E(A))$$

von Δ unter (5.3.3.2) ist durch

$$id + \sum_{A \in \mathcal{A}} \sum_{m \geq 1} \sum_{A \supseteq \dots \supseteq A_m} [\lambda_{A \supseteq \dots \supseteq A_m}] \cdots [\lambda_{A \supseteq A_1}] \otimes \sigma^{A_{m-1} \supseteq A_m} \circ \dots \circ \sigma^{A \supseteq A_1}$$

gegeben. Dabei ist $\lambda_{A \supseteq \dots \supseteq A_m} \in K^* - 1$ wie in Definition (5.3) für $y = x'_A$.

Beweis. Wir schreiben

$$\sum_{I \in \mathfrak{P}_{r-1}} (-1)^{\frac{|I| \cdot (|I|-1)}{2}} [x'_{Y_I^o}] \otimes \delta_I = \sum_{A \in \mathcal{A}} \sum_{\substack{I \in \mathfrak{P}_{r-1} \\ Y_I^o = A}} (-1)^{\frac{|I| \cdot (|I|-1)}{2}} [x'_A] \otimes \delta_I$$

und wenden Proposition 5.4.1 auf

$$\sum_{\substack{I \in \mathfrak{P}_{r-1} \\ Y_I^o = A}} (-1)^{\frac{|I| \cdot (|I|-1)}{2}} [x'_A] \otimes \delta_I$$

an. Die Behauptung folgt jetzt aus den Betrachtungen in Abschnitt (5.4.2). \square

Korollar 5.4.2. *Ist K ein Körper mit unendlich vielen Elementen, und für alle $A, B \in \mathcal{A}$ mit $B \subsetneq A$ sei $\text{codim}_A B > 1$, dann sind die Quasiisomorphismen aus 5.2.1 und 5.2.2 unabhängig von der Wahl der Punkte $\{x_A\}$. Insbesondere ist die Zerlegung aus 5.3.4.1 unabhängig von Wahlen.*

Beweis. Gegeben Punkte $\{x_A\}_{A \in \mathcal{A}}$ und $\{x''_A\}_{A \in \mathcal{A}}$, dann findet man, weil K unendlich viele Elemente besitzt, Punkte $\{x'_A\}$, so dass x'_A in *sehr allgemeiner* Lage sowohl relativ zu $\{x_A\}$ als auch relativ zu $\{x''_A\}$ ist.

Nach Korollar 5.4.1 ist $\Sigma = 1 \otimes id$ für $\{x_A\}$ und $\{x'_A\}$, bzw. für $\{x'_A\}$ und $\{x''_A\}$, da $\text{codim}_A B > 1$ für alle $B \subsetneq A$. Deshalb ist Komposition mit Σ jeweils die Identität und die Quasiisomorphismen zu $\{x_A\}$ und $\{x''_A\}$ sind gleich.

Die Zerlegung aus 5.3.4.1 hängt alleine von den Quasiisomorphismen aus 5.2.1 und 5.2.2 ab und ist folglich auch unabhängig von Wahl der Punkte. \square

Beweis der Proposition. Sei $\gamma : \mathbb{A}^1 \rightarrow A$ die Gerade durch y und x_A mit $\gamma(0) = y$ und $\gamma(1) = x_A$. Für alle $I \in \mathfrak{P}_{r-1}$ mit $Y_I^o = A$ sei $\Gamma_I(\gamma) \subset Y_I \times \mathbb{A}^1$ der Graph von γ . Wir setzen

$$\Gamma = \sum_{I \in \mathfrak{P}_{r-1}} (-1)^{|I|} \Gamma_I(\gamma) \otimes c_I,$$

ein Element aus $Z^*(X_\bullet^*, **) \otimes C$. Es sei d das Differential dieses Komplexes. Eine einfache Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned} d(\Gamma) &= \sum_I ([x_A] - [y]) \otimes c_I \\ &+ \sum_{\substack{C \subset A \\ \text{codim}_A C = 1}} \sum_{\substack{J \\ Y_J^o = C}} \sum_k^k (-1)^{|J|} (-1)^{k+1} [(y_{A \supseteq C}, \lambda_{A \supseteq C})] \otimes c_{\partial_k J}, \end{aligned}$$

wobei der K -rationale Punkt $(y_{A \supseteq C}, \lambda_{A \supseteq C}) \in Y_J(K) \times \mathbb{A}^1(K)$ als Zykel in $Z^*(Y_J, 1)$ aufgefasst ist. Via der $Z^*(K, **)$ -Modulstruktur (3.3.4) schreibt man

$$[(y_{A \supseteq C}, \lambda_{A \supseteq C})] = (-1)^{|J|} [\lambda_{A \supseteq C}] \cdot [y_{A \supseteq C}].$$

Auf Homologieklassenniveau hat man also

$$\begin{aligned} \sum_I [y] \otimes c_I = \\ \sum_I [x_A] \otimes c_I + \sum_{\substack{C \subset A \\ \text{codim}_A C = 1}} [\lambda_{A \supsetneq C}] \cdot (-1)^{\deg(\mathbf{n})} \sigma^{A \supset C}(\mathbf{n})(y_{A \supset C}) \end{aligned} \quad (5.4.4.1)$$

Durch sukzessives Anwenden von (5.4.4.1) folgt die Behauptung. \square

5.5. Explizite Zykel.

5.5.1. Wir arbeiten mit der Notation aus Abschnitt (5.2.1). Außerdem benutzen wir die

$$\square = (\mathbb{P}^1 - \{1\}, \{\mathbb{P}^1 - \{1\}, \{\infty\}, \{0\}\}, 0)$$

Version von Blochs Zykelkomplex (siehe Bemerkung 3.1).

5.5.2. Wir haben ein Diagramm von Quasiisomorphismen

$$\begin{array}{ccc} Z^*(Ass F, **) & \xrightarrow{=} & Z^*(\langle X, \cup_i Y_i \rangle, **) \\ \downarrow & & \\ Z^*(\langle X^o, \cup_{i=1}^{r-1} Y_i^o \rangle, **) & & \end{array}$$

wobei der vertikale Pfeil durch Restriktion

$$\langle Y_I(-\text{codim} Y_I), Y_r \cap Y_I \rangle \rightarrow Y_I^o(-\text{codim} Y_I^o)$$

induziert und nach Satz 3.4.1 ein Quasiisomorphismus ist (zur Definition von F siehe (5.2.2.1)). Wir werden in diesem Abschnitt mit $Z^*(\langle X^o, \cup_{i=1}^{r-1} Y_i^o \rangle, **)$ arbeiten. Ziel ist, den durch Proposition 5.2.1, nach Wahl von Punkten $\{x_A; A \in \mathcal{A}\}$, gegebenen Morphismus in der derivierten Kategorie,

$$E(A) \rightarrow Z^*(\langle X^o, \cup_{i=1}^{r-1} Y_i^o \rangle, **),$$

zu beschreiben.

5.5.3. Wir fixieren ein $A \in \mathcal{A}$. Für $I \in \mathfrak{P}_{r-1}$ mit $A \subset Y_I^o$ definieren wir, für alle $d \geq 1$,

$$\Lambda_d^{A,I} \stackrel{\text{dfn}}{=} \bigoplus_{\substack{A \subsetneq A_1 \subsetneq \dots \subsetneq A_d \subset Y_I^o \\ A_k \in \mathcal{A}}} \mathbb{Z} \cdot [A \subsetneq A_1 \subsetneq \dots \subsetneq A_d]$$

als die von den ‘‘Ketten der Länge d ’’ erzeugte freie, abelsche Gruppe. Wir setzen $\Lambda_0^{A,I} = \mathbb{Z}[A]$. Mit dem Differential ∂ , durch

$$\partial([A \subsetneq A_1 \subsetneq \dots \subsetneq A_d]) := \sum_{k=1}^d (-1)^{k+1} [A \subsetneq A_1 \subsetneq \dots \subsetneq \widehat{A_k} \subsetneq \dots \subsetneq A_d],$$

wird $\Lambda_*^{A,I}$ zum Komplex, $\Lambda_1^{A,I} \rightarrow \Lambda_0^{A,I}$ ist die ‘‘Grad’’-Abbildung.

Sei T der topologische Raum zum geordneten, simplizialen Komplex der nichtleeren Teilmengen von $\{B \in \mathcal{A}; A \subsetneq B \subset Y_I^o\}$. Dann ist

$$H_i(\Lambda_*^{A,I}/\Lambda_0^{A,I}) = H_{i-1}^{\text{sing}}(T, \mathbb{Z}).$$

Es ist T kontrahierbar, weil Y_I^o das größte Element in $\{B \in \mathcal{A}; A \subsetneq B \subset Y_I^o\}$ ist. Und somit ist $\Lambda_*^{A,I}$ azyklisch, falls $A \subsetneq Y_I$.

Der Funktor $\mathfrak{P}_{r-1}^{\text{opp}} \rightarrow$ (Komplexe abelscher Gruppen), gegeben durch

$$I \mapsto \begin{cases} \Lambda_*^{A,I} & \text{falls } A \subset Y_I^o \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(I \supset J) \mapsto \text{natürliche Inklusion,}$$

gibt (Abschnitt (A.1.2)) einen Doppelkomplex und wir bezeichnen den assoziierten Komplex mit $\Lambda_*^{A,\bullet}$.

Der natürliche Morphismus

$$\Lambda_*^{A,\bullet} \rightarrow E(A)(\text{codim}A) \quad (5.5.3.1)$$

ist ein Quasiisomorphismus und wir wollen einen Morphismus von Komplexen (graduierter, abelscher Gruppen)

$$\Lambda_*^{A,\bullet}(-\text{codim}A) \rightarrow Z^*(\langle X^o, \cup_{i=1}^{r-1} Y_i^o \rangle, **)$$

konstruieren, so dass

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_*^{A,\bullet}(-\text{codim}A) & \longrightarrow & Z^*(\langle X^o, \cup_{i=1}^{r-1} Y_i^o \rangle, **) \\ \downarrow & & \downarrow \text{Prop (5.2.1)} \\ E(A) & \longrightarrow & \bigoplus_{A \in \mathcal{A}} E(A) \otimes Z^*(K, **) \end{array} \quad (5.5.3.2)$$

kommutiert.

5.5.4. Offenbar genügt es, Morphismen

$$\Lambda_*^{A,I}(-\text{codim}A) \rightarrow Z^*(Y_I^o(-\text{codim}Y_I^o), **) \quad (5.5.4.1)$$

zu konstruieren, die bzgl. $I \supset J$ funktoriell sind.

Zu einer Kette $A \subsetneq A_1 \subsetneq \dots \subsetneq A_d \subset Y_I^o$, mit $A_k \in \mathcal{A}$ für alle k , sei der Zykel $c(A \subsetneq A_1 \subsetneq \dots \subsetneq A_d)$ in $Z^*(Y_I^o(-\text{codim}Y_I^o), d)$ durch die abgeschlossene Immersion

$$\begin{aligned} A \times \mathbb{A}^d &\rightarrow Y_I^o \times (\mathbb{P}^1)^d \\ (a, t_1, \dots, t_d) &\mapsto (a + \sum_{k=1}^d t_k \cdot (x_{A_k} - x_A), [t_1 : 1], \dots, [t_d : 1]) \end{aligned}$$

gegeben (für $d = 0$ ist $c(A) = [A]$). Die “ ∞ -Seiten” schneiden sich leer mit $c(A \subsetneq A_1 \subsetneq \dots \subsetneq A_d)$ und wir haben

$$\partial c(A \subsetneq A_1 \subsetneq \dots \subsetneq A_d) = \sum_{k=1}^d (-1)^{k+1} c(A \subsetneq A_1 \subsetneq \dots \subsetneq \widehat{A}_k \subsetneq \dots \subsetneq A_d).$$

Durch $[A \subsetneq A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_d] \mapsto c(A \subsetneq A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_d)$ erhalten wir deshalb einen gewünschten Morphismus (5.5.4.1). Weil $c(A \subsetneq A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_d)$ leeren Schnitt mit $\{x_{Y_i^o}\} \times (\mathbb{P}^1 - \{1\})^d$ hat, kommutiert das Diagramm (5.5.3.2).

Durch die “ $Z^*(K, **)$ -Rechtsmodulstruktur” (beachte Bemerkung 5.4) erhalten wir aus (5.5.3.2) das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_*^{A, \bullet}(-\text{codim}A) \otimes Z^*(K, **) & \longrightarrow & Z^*(\langle X^o, \cup_{i=1}^{r-1} Y_i^o \rangle, **) & (5.5.4.2) \\ & \searrow & \downarrow \text{Prop (5.2.1)} & \\ & & E(A) \otimes Z^*(K, **) & \end{array}$$

5.6. Produkte gewisser Zykel.

5.6.1. *Produkte von Konstellationen.* Seien $X^o; Y_1^o, \dots, Y_{r-1}^o$ und $V^o; W_1^o, \dots, W_{s-1}^o$ Konstellationen affiner Räume. Durch $X^o \times V^o; Y_1^o \times V^o, \dots, Y_{r-1}^o \times V^o, X^o \times W_1^o, \dots, X^o \times W_{s-1}^o$ erhalten wir eine neue Konstellation affiner Räume.

Bezeichne $\mathcal{A}_1 := \mathcal{A}(X^o, \cup_i Y_i^o)$ und $\mathcal{A}_2 := \mathcal{A}(V^o, \cup_j W_j^o)$. Dann haben wir offenbar

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 &\xrightarrow{\cong} \mathcal{A}_3 := \mathcal{A}(X^o \times V^o, \cup_i Y_i^o \times V^o \cup_j X^o \times W_j^o) \\ (A, B) &\mapsto A \times B. \end{aligned}$$

Ebenso sieht man $E(A) \otimes E(B) \xrightarrow{\cong} E(A \times B)$, für $A \in \mathcal{A}_1, B \in \mathcal{A}_2$.

Für $A', A \in \mathcal{A}_1$, mit $A' \supset A, \text{codim}_{A'} A = 1$, hat man aus Abschnitt (5.1) $\sigma^{A' \supset A} \in \underline{\text{Hom}}_{-1}(E(A), E(A'))$ und es ist $\sigma^{A' \supset A} \otimes \text{id}_{E(B)} = \sigma^{A' \times B \supset A \times B}$ für alle $B \in \mathcal{A}_2$. Ebenso hat man $\text{id} \otimes \sigma^{B' \supset B} = \sigma^{A \times B' \supset A \times B}$ für alle $B' \supset B$ und $A \in \mathcal{A}_1$ (man beachte dabei Konvention (A.2.1.1)).

5.6.2. *Darstellung der äußeren Multiplikation.* Wir fixieren Punkte $x_A, A \in \mathcal{A}_1$, und $x_B, B \in \mathcal{A}_2$, in allgemeiner Lage, zu $A \times B \in \mathcal{A}_3$ setzen wir $x_{A \times B} := (x_A, x_B)$. Wir setzen $U_X := X^o - \cup_i Y_i^o$ und $U_V := V^o - \cup_j W_j^o$.

Proposition 5.6.1. *Die äußere Multiplikation*

$$Z^*(U_X, **) \otimes Z^*(U_V, **) \rightarrow Z^*(U_X \times U_V, **)$$

ist via der Quasiisomorphismen aus Korollar (5.2.1) durch

$$\begin{aligned} Z^*(K, **) \otimes \bigoplus_{A \in \mathcal{A}_1} E(A) \otimes Z^*(K, **) \otimes \bigoplus_{B \in \mathcal{A}_2} E(B) &\xrightarrow{\cong} \\ Z^*(K, **) \otimes Z^*(K, **) \otimes \bigoplus_{A \in \mathcal{A}_1} E(A) \otimes \bigoplus_{B \in \mathcal{A}_2} E(B) &\xrightarrow{\text{Multiplikation}} \\ Z^*(K, **) \otimes \bigoplus_{(A, B) \in \mathcal{A}_3} E(A \times B) & \end{aligned}$$

gegeben.

Beweis. Wir benutzen die Ergebnisse aus Abschnitt (5.5).

Wegen der „ $Z^*(K, **)$ -Modulstruktur“ genügt es zu zeigen, dass

$$\begin{array}{ccc}
\Lambda_*^{A, \bullet}(-\text{codim}A) \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda_*^{B, \bullet}(-\text{codim}B) & \xrightarrow{\text{quis}} & E(A) \otimes E(B) \\
\downarrow (5.5) & & \downarrow \\
Z^*(U_X, **) \otimes Z^*(U_V, **) & & \\
\downarrow & & \\
Z^*(U_X \times U_V, **) & \xrightarrow{\text{quis}} & \bigoplus_{(A', B') \in \mathcal{A}_3} E(A' \times B') \otimes Z^*(K, **)
\end{array}$$

kommutiert. Dies folgt sofort aus der Konstruktion der Morphismen

$$\Lambda_*^{A, \bullet}(-\text{codim}A) \rightarrow Z^*(\langle X^o, \cup_i Y_i^o \rangle, **) \rightarrow Z^*(U_X, **)$$

in (5.5.4). □

5.6.3. *Problemstellung.* Wir fixieren $A, B \in \mathcal{A}$ mit der Eigenschaft

- (1) $A \cap B \neq \emptyset$,
- (2) $\text{codim } A + \text{codim } B = \text{codim } A \cap B$.

Es folgt leicht, dass die Abbildung

$$\begin{aligned}
\{A' \in \mathcal{A}; A \subset A'\} \times \{B' \in \mathcal{A}; B \subset B'\} &\rightarrow \{C \in \mathcal{A}; A \cap B \subset C\} \\
(A', B') &\mapsto A' \cap B'
\end{aligned}$$

injektiv ist.

Wir setzen $U := X^o - \cup_i Y_i^o$ und betrachten das Produkt

$$\begin{aligned}
Z^*(U, **) \otimes Z^*(U, **) &\xrightarrow{\text{äußeres Produkt}} Z^*(U \times U, **) \\
&\xrightarrow{\Delta_U^* (3.4.3)} Z^*(U, **). \tag{5.6.3.1}
\end{aligned}$$

Mit Korollar 5.2.1 erhalten wir einen Morphismus

$$E(A) \otimes Z^*(K, **) \otimes E(B) \otimes Z^*(K, **) \rightarrow \bigoplus_{A' \in \mathcal{A}} E(A') \otimes Z^*(K, **) \tag{5.6.3.2}$$

in der derivierten Kategorie.

Sei $U_A := X^o - \cup_i Y_i^o \supset A Y_i^o$, nach Lemma (5.3.3) ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
Z^*(U_A, **) & \xrightarrow{\text{Restriktion}} & Z^*(U, **) \\
& \searrow & \swarrow \\
& E(A) \otimes Z^*(K, **) &
\end{array} \tag{5.6.3.3}$$

kommutativ und wir haben die analoge Aussage für B . Wegen des kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccccc} Z^*(U_A, **) \otimes Z^*(U_B, **) & \longrightarrow & Z^*(U_A \times U_B, **) & \longrightarrow & Z^*(U_A \cap U_B, **) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ Z^*(U, **) \otimes Z^*(U, **) & \longrightarrow & Z^*(U \times U, **) & \xrightarrow{\Delta_U^*} & Z^*(U, **) \end{array}$$

und (5.6.3.3) genügt es zur Berechnung von (5.6.3.2) die obere Zeile zu behandeln. Das ist auf einfache Weise möglich, da

$$Z^*(U_A \times U_B, **) \rightarrow Z^*(U, **)$$

durch ein einfaches Element in $\text{Hom}_{\mathcal{M}e}$ beschrieben werden kann.

5.6.4. *Korrespondenz zu $U \rightarrow U_A \times U_B$.* Für die Konstellation $\mathbb{A}_K^N = X^o, Y_1^o, \dots, Y_{r-1}^o$ affiner Räume bezeichnen wir (wie in 5.2.1) mit $X; Y_1, \dots, Y_r$ die Kompaktifizierung im \mathbb{P}_K^N , dabei ist Y_r die Hyperebene im Unendlichen gegeben durch die Gleichung $X_0 = 0$.

Wir setzen $(Y_i^1)^o := Y_i^o \times X^o, (Y_i^2)^o := X^o \times Y_i^o$ für alle $i = 1, \dots, r-1$. Wir haben $\mathbb{A}^{2N} \subset \mathbb{P}^{2N}$ (durch $X_0 \neq 0$) und bezeichnen mit Y_i^1 bzw. Y_i^2 den Abschluss von $(Y_i^1)^o$ bzw. $(Y_i^2)^o$ im projektiven Raum, mit H bezeichnen wir die Hyperebene im Unendlichen gegeben durch $X_0 = 0$. Via

$$X = \mathbb{P}^N \rightarrow \mathbb{P}^{2N}; \quad [X_0, \dots, X_N] \mapsto [X_0, \dots, X_N, X_1, \dots, X_N]$$

haben wir $Y_i^1 \cap X = Y_i^2 \cap X = Y_i$ und $H \cap X = Y_r$.

Ist $A, B \in \mathcal{A}$ ein Paar wie in (5.6.3), dann ist

$$\langle (\mathbb{P}^{2N}, \{\mathbb{P}^{2N}, X\}, 0), \bigcup_{Y_i^o \supset A} Y_i^1 \bigcup_{Y_j^o \supset B} Y_j^2 \bigcup H \rangle$$

im Sinne von (2.7.3) wohldefiniert und wir haben in $C_b(\mathcal{M})$:

$$\begin{aligned} \Psi_{A,B} : \langle (\mathbb{P}^{2N}, \{\mathbb{P}^{2N}, X\}, 0), \bigcup_{Y_i^o \supset A} Y_i^1 \bigcup_{Y_j^o \supset B} Y_j^2 \cup H \rangle &\xrightarrow{\text{wie in (3.4.3.4)}} \\ \langle X, \bigcup_{Y_i^o \supset A} Y_i \bigcup_{Y_j^o \supset B} Y_j \cup Y_r \rangle &\rightarrow \langle X, \cup_i Y_i \rangle. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen das entsprechende Element in

$$\text{Hom}_{\mathcal{M}e}((\mathbb{P}^{2N}, \cup_{i, Y_i^o \supset A} Y_i^1 \cup_{j, Y_j^o \supset B} Y_j^2 \cup H), (X, \cup_i Y_i))$$

(siehe 4.2.4) ebenfalls mit $\Psi_{A,B}$. Nach Proposition (3.4.1) ist klar, dass $\Psi_{A,B}$ den Pullbackmorphismus $Z^*(U_A \times U_B, **) \rightarrow Z^*(U, **)$ induziert.

5.6.5. *Darstellung von $\Psi_{A,B}$.* Ziel ist es, das Bild von $\Psi_{A,B}$ unter (5.3.3.2) zu berechnen. Wir setzen $\mathcal{A}_1 := \mathcal{A}(X^\circ, \cup_{i, Y_i^\circ \supset A} Y_i^\circ)$ bzw. $\mathcal{A}_2 := \mathcal{A}(X^\circ, \cup_{i, Y_i^\circ \supset B} Y_i^\circ)$ und setzen eine Wahl von Punkten $x_A, A \in \mathcal{A}$, in allgemeiner Lage voraus. Für $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ nehmen wir natürlich die gleichen Punkte.

Unter dem Isomorphismus

$$\begin{array}{c} Z^*(\langle \mathbb{P}^{2N}(2N), \bigcup_{Y_i^\circ \supset A} Y_i^1 \bigcup_{Y_j^\circ \supset B} Y_j^2 \cup H \rangle^* \times \langle X, \cup_i Y_i \rangle, **) \\ \downarrow \\ \bigoplus_{A \in \mathcal{A}} Z^*(\langle \mathbb{P}^{2N}(2N), \bigcup_{Y_i^\circ \supset A} Y_i^1 \bigcup_{Y_j^\circ \supset B} Y_j^2 \cup H \rangle^*, **) \otimes E(A) \end{array}$$

aus Proposition (5.2.1) haben wir als Bild von $\Psi_{A,B}$, nach einfacher Rechnung,

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{I, J \\ Y_I^\circ \supset A, Y_J^\circ \supset B}} \text{sgn}(I, J) \cdot \epsilon(|I| + |J|) \cdot (x_{Y_I^\circ \cap Y_J^\circ}, x_{Y_I^\circ \cap Y_J^\circ}) \otimes \delta_{I \cup J} \\ = & \sum_{\substack{A', B' \\ A' \supset A, B' \supset B, Y_{I'}^\circ = A', Y_{J'}^\circ = B'}} \sum_{I, J} \text{sgn}(I, J) \cdot \epsilon(|I| + |J|) \cdot (x_{Y_{I'}^\circ \cap Y_{J'}^\circ}, x_{Y_{I'}^\circ \cap Y_{J'}^\circ}) \otimes \delta_{I \cup J}, \end{aligned} \quad (5.6.5.1)$$

mit sgn aus Definition (6.1) und $\epsilon(n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Für $A', B' \in \mathcal{A}$, mit $A' \cap B' \neq \emptyset$ und gutem Schnitt, haben wir einen Morphismus von Komplexen

$$\text{mult}_{A', B'} : E(A') \otimes E(B') \rightarrow E(A' \cap B') \quad (5.6.5.2)$$

$$\mathbb{Z}_I(-\text{codim} A') \otimes \mathbb{Z}_J(-\text{codim} B') \xrightarrow{\text{sgn}(I, J)} \mathbb{Z}_{I \cup J}(-\text{codim}(A' \cap B')),$$

und (5.6.5.1) schreibt sich in der Notation aus Abschnitt (5.4.4) als

$$\sum_{\substack{A', B' \\ A' \supset A, B' \supset B}} \text{mult}_{A', B'}((x_{Y_{I'}^\circ \cap Y_{J'}^\circ}, x_{Y_{I'}^\circ \cap Y_{J'}^\circ})). \quad (5.6.5.3)$$

Um Proposition (5.4.1) anwenden zu können brauchen wir folgende Bedingung an die Punkte $x_A, A \in \mathcal{A}$.

Voraussetzung 5.1. Für alle $A', B' \in \mathcal{A}$ mit $A' \supset A, B' \supset B$, sei $(x_{A' \cap B'}, x_{A' \cap B'})$ in sehr allgemeiner Lage bzgl. $\{(x_{A''}, x_{B''}); A'' \in \mathcal{A}_1, B'' \in \mathcal{A}_2\}$ (Definition 5.2).

Man sieht schnell ein, dass dies eine offene, nichtleere Bedingung ist. Über einem Körper mit unendlich vielen Elementen gibt es Punkte $x_A, A \in \mathcal{A}$, die die Voraussetzung 5.1 erfüllen.

Indem wir Proposition (5.4.1) auf (5.6.5.3) anwenden, sehen wir, dass das Bild von $\Psi_{A,B}$ unter der Abbildung (5.3.3.2) durch

$$\sum_{\substack{L_1=A \subsetneq A_1 \subsetneq \dots \subsetneq A_d \\ L_2=B \subsetneq B_1 \subsetneq \dots \subsetneq B_e}} \text{mult}_{A_d, B_e}(\sigma^{L_1} \otimes \sigma^{L_2}) \otimes \alpha(L_1, L_2)$$

gegeben ist, wobei $\sigma^{L_1} = \sigma^{A_d \supset A_{d-1} \circ \dots \circ \sigma^{A_1 \supset A}$ bzw. $\sigma^{L_2} = \sigma^{B_e \supset B_{e-1} \circ \dots \circ \sigma^{B_1 \supset B}$ ist, und die Summe über alle Ketten L_1, L_2 in \mathcal{A} mit $\text{codim}_{A_d} A = d$ und $\text{codim}_{B_e} B_e = e$ geht. Den Zykel

$$\alpha(L_1, L_2) \in Z^{\text{codim}_{A_d \cap B_e}(A \cap B)}(K, \text{codim}_{A_d \cap B_e}(A \cap B))$$

kann man wie in (5.3) berechnen.

6. PULLBACK AUF ABGESCHLOSSENE UNTERSCHEMATA

6.0.6. Wir betrachten eine Konstellation $X; Y_1, \dots, Y_r$ mit X projektiv und $Z \subset X$ ein glattes, abgeschlossenes Unterschema mit

- (1) für alle Y_I ist $Z \times_X Y_I$ glatt,
- (2) $Z - \cup_i Y_i$ ist dicht in Z .

Wir setzen $Y_I^Z \stackrel{\text{dfn}}{=} Y_I \cap Z$ und haben eine Konstellation $Z; Y_1^Z, \dots, Y_r^Z$.

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass der Pullbackmorphismus für höhere Chowgruppen (aus Abschnitt 3.4.3)

$$\begin{array}{ccc} Z^*(\langle X, \cup_i Y_i \rangle, **) & & Z^*(\langle Z, \cup_i Y_i^Z \rangle, **) \\ \downarrow \text{quis} & & \downarrow \text{quis} \\ Z^*(X - \cup_i Y_i, **) & \longrightarrow & Z^*(Z - \cup_i Y_i^Z, **) \end{array}$$

von einem Morphismus $\Phi : (X, \cup_i Y_i) \rightarrow (Z, \cup_i Y_i^Z)$ aus $\mathcal{M}e$ kommt (4.3.3). Danach berechnen wir das Bild von Φ in $\mathcal{A}\mathcal{M}e$ (Abschnitt 4.4).

Die Konstruktion von Φ ist leicht, falls Z in guter Lage ist. Um Z in gute Lage zu bringen modifizieren wir die Konstellation $X; Y_1, \dots, Y_r$ durch Aufblasungen. Die Technik hierfür werden wir als erstes entwickeln.

6.1. Natürliche Auflösungen.

6.1.1. Im folgenden sei \mathcal{A} eine endliche Menge glatter, zusammenhängender, nichtleerer, abgeschlossener Unterschemata von X , so dass für $A, B \in \mathcal{A}$ die Zusammenhangskomponenten von $A \cap B$ Elemente in \mathcal{A} sind oder leer. Es seien die Zusammenhangskomponenten von X in \mathcal{A} enthalten.

Ein Beispiel ist

$$\mathcal{A}(X, \cup_i Y_i) = \bigcup_I \{\text{Zusammenhangskomponenten von } Y_I\} - \{\emptyset\}. \quad (6.1.1.1)$$

Zusammen mit \mathcal{A} sei eine Abbildung $d : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{N}_{\geq 0}$ gegeben mit der Eigenschaft: $d(B) \leq d(A)$ für $B \subset A$ und Gleichheit nur falls $B = A$.

6.1.2. *Konstruktion.* Man erhält eine Sequenz von Schemata

$$\dots \rightarrow X_3 \rightarrow X_2 \rightarrow X_1 \rightarrow X \quad (6.1.2.1)$$

durch folgende Konstruktion:

- (1) Aufblasen der Elemente in $d^{-1}(0)$, wir erhalten so $X_1 \rightarrow X$,
- (2) Aufblasen der Strikttransformierten (in X_1) der Elemente in $d^{-1}(1)$, wir erhalten so $X_2 \rightarrow X_1$,
- (3) Aufblasen der Strikttransformierten (in X_2) der Elemente in $d^{-1}(2)$, wir erhalten so $X_3 \rightarrow X_2$,
- (4) so weiter fortfahren ...

6.1.3. Für $A \in \mathcal{A}$ bezeichne mit $A_d \subset X_d$ die Strikttransformierte von A in X_d . Falls $d(A) < d$ ist, dann auch $A_d = \emptyset$.

Ist $d(A) = d$, dann bezeichne mit $E(A) \subset X_{d+1}$ den exzeptionellen Divisor bei Aufblasung von A_d . Ebenfalls mit $E(A)$ bezeichnen wir den Pullback (inverses Bild) von $E(A)$ in X_m für $m > d$.

Proposition 6.1.1. *Es ist*

$$A_d \cap B_d = (A \cap B)_d \quad (6.1.3.1)$$

für alle $A, B \in \mathcal{A}$.

Beweis. Wir führen Induktion über d .

Für alle Zahlen $e < d$ und $C, D \in \mathcal{A}$ mit $d(C) = d(D) = e$ und $C \neq D$ folgt $C_e \cap D_e = (C \cap D)_e = \emptyset$, weil $d(C \cap D) < e$. Es ist weiterhin A_e für alle $e < d$ und alle $A \in \mathcal{A}$ glatt, denn A_e ist die Aufblasung von A_{e-1} in

$$\coprod_{\substack{C \in \mathcal{A} \\ d(C)=e-1}} (A \cap C)_{e-1},$$

und wir schließen per Induktion. Wir blasen in den ersten d -Schritten aus (6.1.2) also entlang glatten Zentren auf.

Für $C \in \mathcal{A}$ mit $d(C) = d - 1$ ist $A_{d-1} \cap C_{d-1} = (A \cap C)_{d-1}$ und deshalb gilt $A_{d-1} \supset C_{d-1}$ oder $A_{d-1} \cap C_{d-1} = \emptyset$. Es schneiden also A_{d-1} (bzw. B_{d-1}) das Zentrum der d -ten Aufblasung $\coprod_{C \in \mathcal{A}, d(C)=d-1} C_{d-1}$ in einer Zusammenhangskomponente und der Schnitt $A_{d-1} \cap B_{d-1} = (A \cap B)_{d-1}$ ist glatt. In solch einer Situation ist, wie im Lemma (6.1.2) unten gezeigt wird,

$$A_d \cap B_d = \text{Strikttransformierte zu } A_{d-1} \cap B_{d-1}.$$

Und das zeigt wegen $A_{d-1} \cap B_{d-1} = (A \cap B)_{d-1}$ die Behauptung. \square

Lemma 6.1.1. *Seien $Y, Z \subset X$ glatt, so dass auch $Y \cap Z$ glatt ist. Es sei mit $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X, \mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ die Idealgarbe zu Y bzw. Z bezeichnet. Für alle $d \geq 1$ ist*

$$\mathcal{I}^d(\mathcal{I} \cap \mathcal{J}) = \mathcal{I}^{d+1} \cap \mathcal{J}.$$

Beweis. Es genügt die Aussage lokal zu zeigen. Also sei $X = \text{Spec } A$ und $Y \cap Z = \text{Spec } A/(I + J) \rightarrow \text{Spec } A/J = Y$ eine reguläre Immersion mit regulärer Sequenz y_1, \dots, y_k .

Jedes Element $\alpha \in I^{d+1}$ kann als

$$\alpha = \sum_{K=K_1 < \dots < K_{t+1}} z_K \cdot y_{K_1} \cdots y_{K_{t+1}} + \alpha_1 + \alpha_2$$

entwickelt werden, wobei $\alpha_1 \in I^{d+2}$ und $\alpha_2 \in I^d(I \cap J)$ ist. Ist nun $\alpha \in I^{d+1} \cap J$, so verschwindet es in

$$\frac{I^{d+1}}{I^{d+2} + I^{d+1} \cap J} \cong \text{Sym}^{d+1} \left(\bigoplus_{j=1}^k y_j \cdot A/(I + J) \right)$$

und somit ist $z_K \in I+J$ für alle K und es gilt $\alpha = \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2$ mit $\tilde{\alpha}_1 \in I^{d+2} \cap J$ und $\tilde{\alpha}_2 \in I^d(I \cap J)$. Es genügt deshalb

$$I^s \cap J \subset I^t(I \cap J)$$

für $s \gg t$ zu zeigen und dies folgt mit dem Lemma von Artin-Rees. \square

Lemma 6.1.2. *Sei $\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ die Aufblasung eines glatten K -Schemas X entlang eines glatten Zentrums C und $A, B \subset X$ glatte Unterschemata, so dass $A \cap B$ glatt ist und $A \cap C$ bzw. $B \cap C$ Zusammenhangskomponenten von C sind. Dann gilt für die Strikttransformierten \tilde{A}, \tilde{B} von A bzw. B , dass*

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \text{Strikttransformierte zu } A \cap B.$$

Beweis. Ohne Einschränkung sei $A, B \supset C$.

Seien $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ die Ideale zu A, B, C . Wir haben

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \text{Proj} \left(\mathcal{O}_X/(\mathcal{I} + \mathcal{J}) \oplus \bigoplus_{d \geq 1} \frac{\mathcal{K}^d}{\mathcal{K}^{d+1} + \mathcal{K}^d \cap \mathcal{I} + \mathcal{K}^d \cap \mathcal{J}} \right). \quad (6.1.3.2)$$

Nun ist $\mathcal{K}^d \cap \mathcal{I} = \mathcal{K}^{d-1}(\mathcal{K} \cap \mathcal{I})$ nach Lemma (6.1.1) und wegen $\mathcal{K} \supset \mathcal{I}$ folgt $\mathcal{K}^d \cap \mathcal{I} = \mathcal{K}^{d-1} \cdot \mathcal{I}$. Die gleiche Argumentation für \mathcal{J} zeigt

$$\mathcal{K}^d \cap \mathcal{I} + \mathcal{K}^d \cap \mathcal{J} = \mathcal{K}^{d-1}(\mathcal{I} + \mathcal{J}).$$

Wiederum mit Lemma (6.1.1) ist $\mathcal{K}^{d-1}(\mathcal{I} + \mathcal{J}) = \mathcal{K}^d \cap (\mathcal{I} + \mathcal{J})$, was die Behauptung zeigt, denn es ist

Strikttransformierte zu $A \cap B =$

$$\text{Proj} \left(\mathcal{O}_X/(\mathcal{I} + \mathcal{J}) \oplus \bigoplus_{d \geq 1} \frac{\mathcal{K}^d}{\mathcal{K}^{d+1} + \mathcal{K}^d \cap (\mathcal{I} + \mathcal{J})} \right).$$

\square

6.1.4. Weitere Eigenschaften.

Proposition 6.1.2. *Fixiere ein $d \geq 1$.*

- (1) *Seien $B^1, \dots, B^k \in \mathcal{A}$ paarweise verschiedene Elemente mit $d(B^i) < d$ für alle i , dann ist für jedes $A \in \mathcal{A}$ der Schnitt $A_d \cap E(B^1) \cap \dots \cap E(B^k)$ glatt. Und er ist leer oder*

$$\dim(A_d \cap E(B^1) \cap \dots \cap E(B^k)) = \dim A_d - k.$$

- (2) *Seien $B^1, \dots, B^k \in \mathcal{A}$ mit $d(B^i) < d - 1$ für alle i , dann ist für alle $A \in \mathcal{A}$:*

$$A_d \cap E(B^1) \cap \dots \cap E(B^k) =$$

$$\text{Strikttransformierte zu } A_{d-1} \cap E(B^1) \cap \dots \cap E(B^k).$$

Beweis. zu (1): Zum Beweis nehmen wir an, dass die Aussage für alle $e < d$ richtig ist und die *Aussage im Teil (2) für alle $e \leq d$ richtig ist.*

Seien nun $B^1, \dots, B^k \in \mathcal{A}$ paarweise verschiedene Elemente mit $d(B^i) < d$ für alle i gegeben. Es folgt aus Proposition (6.1.1), dass $E(B^1) \cap \dots \cap E(B^k)$ nur dann nicht leer sein kann, falls B^1, \dots, B^k zu einer Kette geordnet werden können:

$$B^{j_1} \supset \dots \supset B^{j_k}.$$

In der Tat sind für B^1, B^2 mit $e = d(B^1 \cap B^2) < d(B^1), d(B^2)$ die Strikttransformierten B_e^1, B_e^2 in X_e disjunkt und somit auch $E(B^1), E(B^2)$.

Ist $d(B^{j_1}) < d - 1$ dann ist $A_d \cap E(B^1) \cap \dots \cap E(B^k)$ Aufblasung von $A_{d-1} \cap E(B^1) \cap \dots \cap E(B^k)$ entlang des Zentrums

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{C \in \mathcal{A} \\ d(C)=d-1}} C_{d-1} \cap A_{d-1} \cap E(B^1) \cap \dots \cap E(B^k) \\ = \prod_{\substack{C \in \mathcal{A} \\ d(C)=d-1}} (C \cap A)_{d-1} \cap E(B^1) \cap \dots \cap E(B^k), \end{aligned}$$

nach Proposition (6.1.1). Also glatt.

Ist $d(B^{j_1}) = d - 1$ dann ist $A_d \cap E(B^1) \cap \dots \cap E(B^k)$ der exzeptionelle Divisor bei der Aufblasung von $A_{d-1} \cap E(B^{j_2}) \cap \dots \cap E(B^{j_k})$ mit Zentrum $(B^{j_1} \cap A)_{d-1} \cap E(B^{j_2}) \cap \dots \cap E(B^{j_k})$ und die Aussage folgt ebenfalls.

zu (2): Wir nehmen an, dass sowohl Aussage (1) als auch Aussage (2) für alle $e < d$ richtig ist.

Es schneidet $E(B^1) \cap \dots \cap E(B^k)$ sowohl A_{d-1} als auch

$$A_{d-1} \cap \prod_{\substack{C \in \mathcal{A} \\ d(C)=d-1}} C_{d-1} = \prod_{\substack{C \in \mathcal{A} \\ d(C)=d-1, C \subset A}} C_{d-1}$$

gut und nach Lemma (6.1.4) (unten) haben wir

$$\begin{aligned} A_d \cap \text{Strikttransformierte zu } E(B^1) \cap \dots \cap E(B^k) = \\ \text{Strikttransformierte zu } A_{d-1} \cap E(B^1) \cap \dots \cap E(B^k). \end{aligned}$$

Da $E(B^1) \cap \dots \cap E(B^k)$ das Zentrum der Aufblasung (im d-ten Schritt) gut schneidet ist nach Lemma (6.1.3)

$$\text{Strikttransformierte zu } E(B^1) \cap \dots \cap E(B^k) = E(B^1) \cap \dots \cap E(B^k).$$

□

Lemma 6.1.3. *Seien B und C abgeschlossene Unterschemata von X mit Idealgarbe \mathcal{I} bzw. \mathcal{J} . Bezeichne mit \tilde{X} und \tilde{B} die Aufblasung mit Zentrum*

C bzw. $C \cap B$. Gilt $\mathcal{I} \cdot \mathcal{J} = \mathcal{I} \cap \mathcal{J}$, so ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \longleftarrow & \tilde{B} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longleftarrow & B \end{array}$$

kartesisch. Die Voraussetzung ist erfüllt, falls $X, B, C, B \cap C$ glatt sind und sich B und C gut schneiden.

Beweis. Es ist

$$\tilde{X} \times_X B = \text{Proj} \left(\mathcal{O}_{\tilde{X}}/\mathcal{I} \oplus \bigoplus_{d>0} \frac{\mathcal{J}^d}{\mathcal{J}^{d+1} + \mathcal{I}\mathcal{J}^d} \right) \quad (6.1.4.1)$$

und

$$\tilde{B} = \text{Proj} \left(\mathcal{O}_{\tilde{X}}/\mathcal{I} \oplus \bigoplus_{d>0} \frac{\mathcal{J}^d}{\mathcal{J}^{d+1} + \mathcal{I} \cap \mathcal{J}^d} \right). \quad (6.1.4.2)$$

Wir zeigen $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}^d = \mathcal{I}\mathcal{J}^d$.

Nach Lemma (6.1.1) ist $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}^d = \mathcal{J}^{d-1}(\mathcal{I} \cap \mathcal{J})$ und es genügt $\mathcal{I} \cap \mathcal{J} = \mathcal{I}\mathcal{J}$ zu zeigen. Nun ist $(\mathcal{I} \cap \mathcal{J})/\mathcal{I}\mathcal{J}$, wie man mit Lemma (6.1.1) sieht, der Kern von

$$\frac{\mathcal{I} + \mathcal{J}}{(\mathcal{I} + \mathcal{J})^2} \rightarrow \frac{\mathcal{I}\mathcal{O}_C}{\mathcal{I}^2\mathcal{O}_C} \oplus \frac{\mathcal{J}\mathcal{O}_B}{\mathcal{J}^2\mathcal{O}_B} \rightarrow 0. \quad (6.1.4.3)$$

Als Vektorbündel auf $B \cap C$ ist

$$\begin{aligned} \text{rg} \frac{\mathcal{I} + \mathcal{J}}{(\mathcal{I} + \mathcal{J})^2} &= \text{codim}_X B \cap C, \quad \text{rg} \frac{\mathcal{I}\mathcal{O}_C}{\mathcal{I}^2\mathcal{O}_C} = \text{codim}_C B \cap C, \\ \text{rg} \frac{\mathcal{J}\mathcal{O}_B}{\mathcal{J}^2\mathcal{O}_B} &= \text{codim}_B B \cap C, \end{aligned}$$

und da sich B und C gut schneiden ist

$$\text{codim}_C B \cap C + \text{codim}_B B \cap C = \text{codim}_X B \cap C$$

und (6.1.4.3) ein Isomorphismus. \square

Lemma 6.1.4. *Seien $A, B, C \subset X$ glatte Unterschemata eines glatten K -Schemas X , mit $A \supset C$ und B schneide sowohl A als auch C gut und die Schnitte seien glatt. Bezeichne \tilde{X} die Aufblasung mit Zentrum C , dann gilt für die Striktransformierten \tilde{A}, \tilde{B} , dass*

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \text{Striktransformierte zu } A \cap B.$$

Beweis. Nach Lemma (6.1.3) ist $\tilde{B} = B \times_X \tilde{X}$ und somit $\tilde{A} \cap \tilde{B} = (A \cap B) \times_A \tilde{A}$ und man reduziert auf Lemma (6.1.3), denn $A \cap B$ aufgefasst als Unterschema von A schneidet C gut. \square

Korollar 6.1.1. Für alle $d \geq 1$ und alle Durchschnitte $Z = A_{d-1} \cap E(B^1) \cap \dots \cap E(B^k)$ und $Z' = A'_{d-1} \cap E(B'^1) \cap \dots \cap E(B'^k)$ gilt für die Strikttransformierten

$$\begin{aligned} \text{Strikttransformierte zu } Z \cap Z' &= \\ \text{Strikttransformierte zu } Z \cap \text{Strikttransformierte zu } Z' &. \end{aligned}$$

Beweis. Proposition (6.1.1) zeigt

$$Z \cap Z' = (A \cap A')_{d-1} \cap E(B^1) \cap \dots \cap E(B^k) \cap E(B'^1) \cap \dots \cap E(B'^k)$$

und mit Proposition (6.1.2)

$$\begin{aligned} \text{Strikttransformierte zu } Z \cap Z' &= \\ (A \cap A')_d \cap E(B^1) \cap \dots \cap E(B^k) \cap E(B'^1) \cap \dots \cap E(B'^k). & \end{aligned}$$

Andererseits ist nach Proposition (6.1.2)

$$\begin{aligned} \text{Strikttransformierte zu } Z &= A_d \cap E(B^1) \cap \dots \cap E(B^k) \\ \text{Strikttransformierte zu } Z' &= A'_d \cap E(B'^1) \cap \dots \cap E(B'^k) \end{aligned}$$

und nach Proposition (6.1.1)

$$\begin{aligned} \text{Strikttransformierte zu } Z \cap \text{Strikttransformierte zu } Z' &= \\ (A \cap A')_d \cap E(B^1) \cap \dots \cap E(B^k) \cap E(B'^1) \cap \dots \cap E(B'^k). & \end{aligned}$$

□

6.2. Konstruktion des Zyklus.

6.2.1. Sei $X; Y_1, \dots, Y_r$ eine Konstellation und $X; Y_1, \dots, Y_r, Y_{r+1}$ eine weitere, dann haben wir einen natürlichen Morphismus $(X, \cup_i Y_i) \rightarrow (X, \cup_{i=1}^{r+1} Y_i)$ in $\mathcal{M}e$ induziert durch den natürlichen Morphismus $\langle X, \cup_i Y_i \rangle \rightarrow \langle X, \cup_{i=1}^{r+1} Y_i \rangle$ in $C_b(\mathcal{M})$ (Abschnitt 4.2.4).

Lemma 6.2.1. Ist $Y_{r+1} \subset \cup_{i=1}^r Y_i$, dann ist $(X, \cup_i Y_i) \rightarrow (X, \cup_{i=1}^{r+1} Y_i)$ ein Isomorphismus.

Beweis. Nach Lemma 4.3.1 genügt es

$$Z^*(\langle X, \cup_i Y_i \rangle, **) \xrightarrow{\cong} Z^*(\langle X, \cup_{i=1}^{r+1} Y_i \rangle, **)$$

zu zeigen. Mit dem ausgezeichneten Dreiecken (2.7.4.0) reduziert man auf die Aussage: $Z^*(\langle X, \cup_i Y_i \rangle, **)$ ist azyklisch falls $X \subset \cup_i Y_i$. Ohne Einschränkung darf man hier X als zusammenhängend annehmen und $Y_1 = X$, dann folgt die Aussage sofort aus (2.7.4.0). □

Bemerkung 6.1. Zum Beweis des Lemmas könnte man auch Korollar (3.4.2) benutzen.

Es ist leicht den inversen Morphismus $(X, \cup_{i=1}^{r+1} Y_i) \rightarrow (X, \cup_i Y_i)$, der nach Lemma 6.2.1 existiert, explizit zu beschreiben, falls $Y_{r+1} = Y_j$ für ein $j < r+1$ ist.

Definition 6.1.

Seien $I \in \mathfrak{P}_{r,s}, J \in \mathfrak{P}_{r,t}$ mit $I \cap J = \emptyset$. Wir schreiben $I = \{I_0, \dots, I_{s-1}\}$ bzw. $J = \{J_0, \dots, J_{t-1}\}$ mit $I_0 < \dots < I_{s-1}$ bzw. $J_0 < \dots < J_{t-1}$. Die Anzahl n von Vertauschungen benachbarter Einträge, um $(I_0, \dots, I_{s-1}, J_0, \dots, J_{t-1})$ zu ordnen, ist modulo 2 wohldefiniert und wir setzen

$$\text{sgn}(I, J) \stackrel{\text{dfn}}{=} (-1)^n.$$

Man sieht leicht, dass

$$\sum_{\substack{I \in \mathfrak{P}_{r+1} \\ r+1 \in I, j \notin I}} \underbrace{\text{sgn}(I - \{r+1\}, \{j\}) \Delta_{Y_I}}_{\in Z^0(Y_I \times Y_{(I - \{r+1\}) \cup \{j\}}(d_I), 0)} + \sum_{I \in \mathfrak{P}_r} \underbrace{\Delta_{Y_I}}_{\in Z^0(Y_I \times Y_I(d_I), 0)}$$

($d_I := \dim Y_I$) den gewünschten Morphismus gibt.

6.2.2. Sei $X; Y_1, \dots, Y_r$ eine Konstellation und X projektiv. Wir bezeichnen mit \tilde{X} die Aufblasung von X in Y_r . Für alle Y_I sei \tilde{Y}_I die Aufblasung von Y_I entlang $Y_I \cap Y_r$.

Wir wollen im folgenden annehmen, dass für alle I, J die Bedingung

$$\tilde{Y}_I \times_{\tilde{X}} \tilde{Y}_J = \widetilde{Y_I \times_X Y_J} \quad (6.2.2.1)$$

erfüllt ist. Dies ist im allgemeinen nicht der Fall. Man kann dazu folgendes Beispiel betrachten: $X = \mathbb{P}^3$ und $Y_1, Y_2 = \mathbb{P}^2$ zwei lineare Unterräume, die sich in einer Geraden $L = \mathbb{P}^1$ schneiden, sowie $Y_3 = \mathbb{P}^1$ eine Gerade, die L in einem Punkt schneidet und nicht in Y_1 oder Y_2 liegt. Dann ist

$$\tilde{Y}_1 \times_{\tilde{X}} \tilde{Y}_2 = \tilde{L} \cup \{\text{exzeptioneller Divisor}\}$$

nicht glatt.

Bezeichne E den exzeptionellen Divisor zur Aufblasung von X in Y_r . Gilt (6.2.2.1), so ist $\tilde{X}; \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_{r-1}, E$ eine Konstellation. Wir haben einen natürlichen Morphismus

$$\langle \tilde{X}, \cup_{i=1}^{r-1} \tilde{Y}_i \cup E \rangle \rightarrow \langle X, \cup_i Y_i \rangle$$

gegeben durch

$$\tilde{Y}_{I_0} \times_{\tilde{X}} \dots \times_{\tilde{X}} \tilde{Y}_{I_s} \xleftarrow{=} \tilde{Y}_I \rightarrow Y_I$$

für alle $I \in \mathfrak{P}_{r-1}$ und

$$\tilde{Y}_{I_0} \times_{\tilde{X}} \dots \times_{\tilde{X}} \tilde{Y}_{I_s} \times_{\tilde{X}} E \xleftarrow{=} E_{\tilde{Y}_I} \rightarrow Y_I \cap Y_r,$$

wobei $E_{\tilde{Y}_I}$ der exzeptionelle Divisor der Aufblasung von Y_I entlang $Y_I \cap Y_r$ ist. Nach Abschnitt 4.2.4 erhalten wir in $\mathcal{M}e$ einen Morphismus

$$\langle \tilde{X}, \cup_{i=1}^{r-1} \tilde{Y}_i \cup E \rangle \rightarrow \langle X, \cup_i Y_i \rangle.$$

Lemma 6.2.2. *Es ist $\langle \tilde{X}, \cup_{i=1}^{r-1} \tilde{Y}_i \cup E \rangle \rightarrow \langle X, \cup_i Y_i \rangle$ ein Isomorphismus.*

Beweis. Mit Lemma 4.3.1 genügt es

$$Z^*(\langle \tilde{X}, \cup_{i=1}^{r-1} \tilde{Y}_i \cup E \rangle, **) \xrightarrow{\text{quis}} Z^*(\langle X, \cup_i Y_i \rangle, **)$$

zu zeigen. Beide Seiten sind nach Korollar 3.4.2 quasiisomorph zu $Z^*(X - \cup_i Y_i, **)$. \square

6.2.3. *Modifikation von Konstellationen.* Gegeben sei eine Konstellation $X; Y_1, \dots, Y_r$. Wir setzen

$$\mathcal{A} = \bigcup_I \{\text{Zusammenhangskomponenten von } Y_I\} - \{\emptyset\}$$

und es sei $d : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{N}_{\geq 0}$ mit den Eigenschaften aus (6.1.1) gegeben. Wir setzen $C_0 = \coprod_{A \in \mathcal{A}, d(A)=0} A \subset X$ und verändern die Konstellation

$$X; Y_1, \dots, Y_r \rightsquigarrow X_1; Y_1, \dots, Y_r, C_0.$$

Aufblasen entlang C_0 ist der erste Schritt in der Konstruktion aus (6.1.2) und wir verändern die Konstellation

$$X; Y_1, \dots, Y_r, C_0 \rightsquigarrow X_1; (Y_1)_1, \dots, (Y_r)_1, E_1$$

mit $E_1 = \coprod_{A \in \mathcal{A}, d(A)=0} E(A)$ in der Notation aus (6.1.3). Dabei ist wegen Korollar (6.1.1) die Bedingung aus (6.2.2.1) erfüllt.

In X_1 blasen wir $C_1 = \coprod_{A \in \mathcal{A}, d(A)=1} A_1$ auf und Bedingung (6.2.2.1) folgt wiederum aus Korollar (6.1.1). So erhält man

$$\begin{aligned} X; Y_1, \dots, Y_r \rightsquigarrow X_1; (Y_1)_1, \dots, (Y_r)_1, E_1 \rightsquigarrow \\ X_2; (Y_1)_2, \dots, (Y_r)_2, E_1, E_2 \rightsquigarrow \dots \end{aligned}$$

Mit Lemma 6.2.1 und 6.2.2 haben wir Isomorphismen (in $\mathcal{M}e$)

$$(X, \cup_i Y_i) \cong (X_1, \cup_i (Y_i)_1 \cup E_1) \cong (X_2, \cup_i (Y_i)_2 \cup E_1 \cup E_2) \cong \dots \quad (6.2.3.1)$$

6.2.4. *Bewegen durch Aufblasen.* Gegeben sei eine Konstellation $X; Y_1, \dots, Y_r$ und ein glattes Unterschema $Z \subset X$, so dass

- (1) für alle Y_I der Durchschnitt $Z \cap Y_I$ glatt ist,
- (2) $Z - \cup_i Y_i$ dicht in Z ist.

Wir gehen von der Konstellation X, Y_1, \dots, Y_r zur Konstellation $X, Y_1, \dots, Y_r, Y_1^Z, \dots, Y_r^Z$ über, mit $Y_i^Z = Z \cap Y_i$.

Wir setzen

$$\mathcal{A}_Z = \mathcal{A}(Z, \cup_i Y_i^Z) = \bigcup_I \{\text{Zusammenhangskomponenten von } Y_I^Z\} - \{\emptyset\}$$

und $d_Z : \mathcal{A}_Z \rightarrow \mathbb{N}_{\geq 0}$ durch $d_Z(A) = \dim A$. Es sei $d : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{N}_{\geq 0}$ so gewählt, dass die Bedingung aus (6.2.2.1) erfüllt ist und

- (1) für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $A \not\subset Z$ gilt $d(A) > \dim Z$,
- (2) für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $A \subset Z$ ist $d(A) = d_Z(A) = \dim A$.

Es ist d so gewählt, damit man in den ersten $\dim Z$ -Schritten aus (6.1.2) nur entlang Zentren aufbläst, die in Z liegen.

Sei d_0 mit $0 \leq d_0 \leq \dim Z$ gewählt. Aus (6.2.3) auf \mathcal{A}, d bzw. \mathcal{A}_Z, d_Z angewendet erhalten wir Konstellationen

$$\begin{aligned} X; Y_1, \dots, Y_r &\rightsquigarrow X_{d_0}; (Y_1)_{d_0}, \dots, (Y_r)_{d_0}, E_1, \dots, E_{d_0} \\ \text{bzw. } Z; Y_1^Z, \dots, Y_r^Z &\rightsquigarrow Z_{d_0}; (Y_1^Z)_{d_0}, \dots, (Y_r^Z)_{d_0}, E_1^Z, \dots, E_{d_0}^Z. \end{aligned}$$

Es ist offenbar Z_{d_0} die Strikttransformierte von Z in X_{d_0} und $E_i^Z = Z_{d_0} \cap E_i$.

Wendet man Proposition 6.1.1 auf $\mathcal{A} \cup \{\text{Zshgskomponenten von } Z\}$ an, dann folgt $(Y_i^Z)_{d_0} = Z_{d_0} \cap (Y_i)_{d_0}$.

Speziell für $d_0 = \dim Z$ haben wir $(Y_i^Z)_{d_0} = \emptyset$ für alle i , und wegen

$$\text{codim}_{X_{d_0}}(E_{j_1} \cap \dots \cap E_{j_k}) = \text{codim}_{Z_{d_0}}(E_{j_1}^Z \cap \dots \cap E_{j_k}^Z),$$

für alle j_1, \dots, j_k , aus Proposition (6.1.2)(1), liegt Z_{d_0} gut bzgl. der Konstellation $X_{d_0}; (Y_1)_{d_0}, \dots, (Y_r)_{d_0}, E_1, \dots, E_{d_0}$, d.h.

$$\langle (X_{d_0}, \{X_{d_0}, Z_{d_0}\}, 0), \cup_{i=1}^r (Y_i)_{d_0} \cup_{k=1}^{d_0} E_k \rangle$$

ist im Sinne von (2.7.3) definiert.

Der Einschränkungsmorphismus

$$\begin{aligned} \langle (X_{d_0}, \{X_{d_0}, Z_{d_0}\}, 0), \cup_{i=1}^r (Y_i)_{d_0} \cup_{k=1}^{d_0} E_k \rangle & \quad (6.2.4.1) \\ \downarrow & \\ \langle Z_{d_0}, \cup_{k=1}^{d_0} E_k^Z \rangle, & \end{aligned}$$

gegeben durch

$$E_{j_1} \cap \dots \cap E_{j_k} \xleftarrow{\text{incl}} E_{j_1}^Z \cap \dots \cap E_{j_k}^Z \xrightarrow{\cong} E_{j_1}^Z \cap \dots \cap E_{j_k}^Z \quad \text{für alle } j_1, \dots, j_k,$$

definiert nach (4.2.4) einen Morphismus

$$(X_{d_0}, \cup_{i=1}^r (Y_i)_{d_0} \cup_{k=1}^{d_0} E_k) \rightarrow (Z_{d_0}, \cup_{k=1}^{d_0} E_k^Z)$$

in $\mathcal{M}e$, der wegen (3.4.3.3) via des Funktors

$$(X, \cup_i Y_i) \mapsto Z^*(X - \cup_i Y_i, **)$$

aus (4.3.3) auf den Pullbackmorphismus für höhere Chowgruppen abbildet. Via der Isomorphismen aus (6.2.3.1) erhält man einen Morphismus

$$(X, \cup_i Y_i) \rightarrow (Z, \cup_i Y_i^Z), \quad (6.2.4.2)$$

der den Pullbackmorphismus induziert.

6.2.5. Wir halten das Ergebnis dieses Abschnitts in folgender Proposition fest.

Proposition 6.2.1. *Sei $X; Y_1, \dots, Y_r$ eine Konstellation projektiver Schemata und $Z \subset X$ ein glattes Unterschema mit*

- (1) *für alle Y_I ist der Durchschnitt $Z \times_X Y_I$ glatt,*
- (2) *$Z - \cup_i Y_i$ ist dicht in Z .*

Dann existiert ein Morphismus $\Phi : (X, \cup_i Y_i) \rightarrow (Z, \cup_i Y_i^Z)$ in \mathcal{M}_e , der via des Funktors aus (4.3.3) auf die Pullbackabbildung

$$Z^*(X - \cup_i Y_i, **) \rightarrow Z^*(Z - \cup_i Y_i^Z, **),$$

zur abgeschlossenen Immersion $Z - \cup_i Y_i^Z \subset X - \cup_i Y_i$, abbildet.

Nach Vorschalten von $(X_{d_0}, \cup_{i=1}^r (Y_i)_{d_0} \cup_{k=1}^{d_0} E_k) \xrightarrow{\cong} (X, \cup_i Y_i)$ und Nachschalten von $(Z, \cup_i Y_i^Z) \xrightarrow{\cong} (Z_{d_0}, \cup_{k=1}^{d_0} E_k^Z)$, wobei $X_{d_0}; (Y_1)_{d_0}, \dots, (Y_r)_{d_0}, E_1, \dots, E_{d_0}$ und $Z_{d_0}; E_1^Z, \dots, E_{d_0}^Z$ die in (6.2.4) konstruierten Modifikationen für $d_0 = \dim Z$ sind, ist Φ durch (6.2.4.1) gegeben.

6.3. Approximation des Pullbackmorphisms.

6.3.1. Wir haben zur Konstellation $X; Y_1, \dots, Y_r, X$ projektiv, und $Z \subset X$ ein glattes Unterschema mit $Z \times_X Y_I$ ist glatt für alle Y_I , einen Pullbackmorphimus Ψ in $\mathcal{M}e$ konstruiert (6.2.4.2) und beschreiben hier das Bild von Ψ in $\text{Hom}_{\mathcal{A}\mathcal{M}e}((X, \cup_i Y_i), (Z, \cup_i Y_i^Z))$ (aus Abschnitt (4.4)).

6.3.2. Um die Rechnungen etwas zu ordnen macht man sich klar, dass Morphismen von (glatten) Schemata

$$A \xleftarrow{f} C \xrightarrow{g} B$$

und ein Element $\alpha \in \text{CH}^*(C) := \text{CH}^*(C, 0)$, unter der Voraussetzung g eigentlich (bei uns werden A, B, C projektiv sein), einen Zykel $(f, g)_* \alpha \in \text{CH}^*(A \times B)$ definieren. Wir bezeichnen diesen Zykel mit

$$A \xleftarrow{f} (C, \alpha) \xrightarrow{g} B. \quad (6.3.2.1)$$

Ist $C' \xrightarrow{h} C$ ein eigentlicher Morphismus, so haben wir

$$(A \xleftarrow{f \circ h} (C', \alpha) \xrightarrow{g \circ h} B) = (A \xleftarrow{f} (C, h_* \alpha) \xrightarrow{g} B). \quad (6.3.2.2)$$

Die Komposition, im Sinne von Komposition von Korrespondenzen, kann man unter folgenden Voraussetzungen explizit beschreiben.

Gegeben seien $A \xleftarrow{f} C \xrightarrow{g'} B', B' \xleftarrow{f'} C' \xrightarrow{g} B$ und $\alpha \in \text{CH}^*(C), \alpha' \in \text{CH}^*(C')$, so dass

- das Faserprodukt $C \times_{B'} C'$ glatt ist,

dann ist die Komposition

$$(B' \xleftarrow{f'} (C', \alpha') \xrightarrow{g} B) \circ (A \xleftarrow{f} (C, \alpha) \xrightarrow{g'} B') = \\ A \xleftarrow{f \circ p_1} (C \times_{B'} C', p_2^*(\alpha') \cdot c_{top}(V) \cdot p_1^* \alpha) \xrightarrow{g \circ p_2} B, \quad (6.3.2.3)$$

Dabei ist c_{top} die "Top"-Chernklasse, p_1, p_2 die Projektionen zu $C \times_{B'} C'$ und

$$V \stackrel{\text{dfn}}{=} p_1^* N_{C/(C \times B')} / N_{C \times_{B'} C' / C \times C'},$$

wobei nach Definition $N_{Y/X}$ das Normalenbündel zur Immersion $Y \rightarrow X$ ist (siehe dazu ([Fu], Proposition 6.6)). Ist $g : C \rightarrow B'$ eine abgeschlossene Immersion dann vereinfacht man leicht zu

$$V = p_1^* N_{C/B'} / N_{C \times_{B'} C' / C'}.$$

6.3.3. In der Situation aus 6.3.1 setzen wir

$$V_I \stackrel{\text{dfn}}{=} V_{Y_I} \stackrel{\text{dfn}}{=} \frac{N_{Y_I/X} |_{Y_I^Z}}{N_{Y_I^Z/Z}}.$$

Lemma 6.3.1. *Es ist*

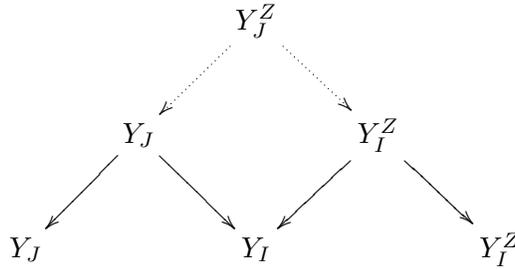
$$\sum_I (-1)^{\frac{|I| \cdot (|I|-1)}{2}} \underbrace{(Y_I \xleftarrow{\text{incl}} (Y_I^Z, c_{\text{top}}(V_I)) \rightarrow Y_I^Z)}_{\in \text{CH}^0(Y_I(\dim X) \times Y_I^Z(\dim Y_I^Z - \dim Z), 0)} \quad (6.3.3.1)$$

ein Element in $\text{Hom}_{\mathcal{A}\mathcal{M}e}((X, \cup_i Y_i), (Z, \cup_i Y_i^Z))$.

Beweis. Wir setzen $X_\bullet^* := \langle X(\dim X), \cup_i Y_i \rangle^*$ und $X_\bullet := \langle X, \cup_i Y_i \rangle$. Wir haben

$$\begin{aligned} & \text{CH}^0(d_{X_\bullet^*} \times \text{id}, 0) \left(\sum_I (-1)^{\frac{|I| \cdot (|I|-1)}{2}} (Y_I \xleftarrow{\iota_I} (Y_I^Z, c_{\text{top}}(V_I)) \rightarrow Y_I^Z) \right) = \\ & \sum_k \sum_I (-1)^{k + \frac{|I| \cdot (|I|-1)}{2}} \sum_{\partial_k J=I}^J (Y_J \leftarrow (Y_J, 1) \rightarrow Y_I) \circ (Y_I \leftarrow (Y_I^Z, c_{\text{top}}(V_I)) \rightarrow Y_I^Z) = \\ & \sum_k \sum_I (-1)^{k + \frac{|I| \cdot (|I|-1)}{2}} \sum_{\partial_k J=I}^J (Y_J \xleftarrow{\iota_J} (Y_J^Z, c_{\text{top}} \left(\frac{N_{Y_J/Y_I}}{N_{Y_J^Z/Y_I^Z}} \right) \cdot c_{\text{top}}(V_I) |_{Y_J^Z}) \rightarrow Y_I^Z) = \\ & \sum_k \sum_J (-1)^{k + \frac{(|J|-1) \cdot (|J|-2)}{2}} (Y_J \xleftarrow{\iota_J} (Y_J^Z, c_{\text{top}} \left(\frac{N_{Y_J/Y_I}}{N_{Y_J^Z/Y_I^Z}} \right) \cdot c_{\text{top}}(V_I) |_{Y_J^Z}) \rightarrow Y_{\partial_k J}^Z), \end{aligned}$$

wobei wir (6.3.2.3) auf



angewendet haben.

Nun haben wir die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \frac{N_{Y_J/Y_I}}{N_{Y_J^Z/Y_I^Z}} \rightarrow V_J \rightarrow V_I |_{Y_J^Z} \rightarrow 0$$

und daraus

$$c_{\text{top}} \left(\frac{N_{Y_J/Y_I}}{N_{Y_J^Z/Y_I^Z}} \right) \cdot c_{\text{top}}(V_I) = c_{\text{top}}(V_J).$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \mathrm{CH}^0(id \times d_{X_\bullet}, 0) \left(\sum_I (-1)^{\frac{|I| \cdot (|I|-1)}{2}} (Y_I \xleftarrow{\iota_I} (Y_I^Z, c_{top}(V_I)) \rightarrow Y_I^Z) \right) = \\ \sum_I (-1)^{\frac{|I| \cdot (|I|-1)}{2}} (Y_I \xleftarrow{\iota_I} (Y_I^Z, c_{top}(V_I)) \rightarrow Y_{\partial_k I}^Z), \end{aligned}$$

was die Behauptung zeigt. \square

6.3.4.

Satz 6.3.1. *Sei $X; Y_1, \dots, Y_r$ eine Konstellation projektiver Schemata und $Z \subset X$ ein glattes Unterschema mit*

- (1) *für alle Y_I ist der Durchschnitt $Z \times_X Y_I$ glatt,*
- (2) *$Z - \cup_i Y_i$ ist dicht in Z .*

Der dazu assoziierte „Pullbackzykel“ $\Psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}e}((X, \cup_i Y_i), (Z, \cup_i Y_i^Z))$ (siehe Proposition 6.2.1) hat in $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}Me}$, in der Notation aus (6.3.2), das Bild

$$\sum_I (-1)^{\frac{|I| \cdot (|I|-1)}{2}} \left(Y_I \xleftarrow{incl} (Y_I^Z, c_{top}(V_I)) \rightarrow Y_I^Z \right),$$

wobei $V_I = \frac{N_{Y_I/X}|_{Y_I^Z}}{N_{Y_I^Z/Z}}$ ist, und $N_{\cdot/\cdot}$ die Normalenbündel bezeichnet.

Der Beweis des Satzes benutzt folgende Proposition, deren Beweis in Abschnitt (6.3.5) gegeben wird.

Wir erinnern an die Konstruktion der natürlichen Auflösung (6.1.2 und 6.2.4) zur Situation $Z \subset X$. Im d -ten Schritt haben wir die Konstellation $X_d; (Y_1)_d, \dots, (Y_r)_d, E_1, \dots, E_d$ und können das Diagramm (von Morphismen in $\mathcal{A}Me$)

$$\begin{array}{ccc} (X_d, \bigcup_{i=1}^r (Y_i)_d \bigcup_{k=1}^d E_k) & \xrightarrow{\cong} & (X_{d-1}, \bigcup_{i=1}^r (Y_i)_{d-1} \bigcup_{k=1}^{d-1} E_k) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (Z_d, \bigcup_{i=1}^r (Y_i^Z)_d \bigcup_{k=1}^d E_k^Z) & \xrightarrow{\cong} & (Z_{d-1}, \bigcup_{i=1}^r (Y_i^Z)_{d-1} \bigcup_{k=1}^{d-1} E_k^Z) \end{array}$$

bilden, wobei die horizontalen Pfeile die Isomorphismen aus (6.2.3.1) sind und die vertikalen Pfeile durch (6.3.3.1) gegeben sind.

Proposition 6.3.1. *Das Diagramm kommutiert.*

Beweis von Satz (6.3.1). Nach Proposition (6.3.1) und Proposition (6.2.1) haben wir zu zeigen, dass das Bild von (6.2.4.1) in $\mathcal{A}Me$ durch (6.3.3.1) gegeben ist. Die Aussage folgt sofort aus der expliziten Darstellung in (4.2.4) und $c_{top}(V_I) = 1$ für alle I . \square

6.3.5. Im folgenden werden alle Schemata glatt und projektiv über K sein.

Notation 6.1. Für alle Morphismen $f : A \rightarrow B$ von Schemata ist mit f_* bzw. f^* der Graph von f in $\text{CH}^*(A \times B)$ bzw. $\text{CH}^*(B \times A)$ bezeichnet.

Komposition ist Komposition von Korrespondenzen.

Lemma 6.3.2. *Wir betrachte die Situation*

$$\begin{array}{ccccccc} A'_1 & \longleftarrow & A_1 & \xleftarrow{p} & C_1 & \longrightarrow & B_1 \\ i' \downarrow & & i \downarrow & & k \downarrow & & j \downarrow \\ A'_2 & \longleftarrow & A_2 & \xleftarrow{q} & C_2 & \longrightarrow & B_2, \end{array}$$

sowie $\alpha \in \text{CH}^*(C_1)$ und $\beta \in \text{CH}^*(C_2)$. Es seien i' abgeschlossene Immersion, k, j eigentlich, q glatt und das Quadrat links außen kartesisch, dann gilt

$$j_* \circ (A'_1 \leftarrow (C_1, \alpha) \rightarrow B_1) + (A'_2 \leftarrow (C_2, \beta) \rightarrow B_2) \circ i'_* = A'_1 \leftarrow \left(A_1 \times_{A_2} C_2, (p, k)_* \alpha + p_2^* \beta \cdot p_1^* c_{\text{top}} \left(\frac{N_{A'_1/A'_2} |_{A_1}}{N_{A_1/A_2}} \right) \right) \rightarrow B_2. \quad (6.3.5.1)$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} j_* \circ (A'_1 \leftarrow (C_1, \alpha) \rightarrow B_1) &= A'_1 \leftarrow (C_1, \alpha) \rightarrow B_2 \\ &= A'_1 \leftarrow (A_1 \times_{A_2} C_2, (p, k)_* \alpha) \rightarrow B_2. \end{aligned}$$

Und

$$\begin{aligned} &(A'_2 \leftarrow (C_2, \beta) \rightarrow B_2) \circ i'_* \\ &= (A'_2 \leftarrow (C_2, \beta) \rightarrow B_2) \circ (A'_1 \xleftarrow{=} (A'_1, 1) \xrightarrow{i'} A'_2) \\ &= A'_1 \leftarrow \left(A'_1 \times_{A'_2} C_2, c_{\text{top}} \left(p_1^* N_{A'_1/A'_2} / N_{A'_1 \times_{A'_2} C_2 / C_2} \right) \cdot p_2^* \beta \right) \rightarrow B_2 \\ &= A'_1 \leftarrow \left(A_1 \times_{A_2} C_2, p_1^* c_{\text{top}} \left(\frac{N_{A'_1/A'_2} |_{A_1}}{N_{A_1/A_2}} \right) \cdot p_2^* \beta \right) \rightarrow B_2, \end{aligned}$$

dabei benutzt man $A'_1 \times_{A'_2} C_2 = A_1 \times_{A_2} C_2$ und $p_1^* N_{A_1/A_2} = N_{A'_1 \times_{A'_2} C_2 / C_2}$. \square

Notation 6.2. Wir werden im folgenden den Pullback von Chernklassen (im allgemeinen) nicht mehr notieren, d.h. für $f : Y \rightarrow X$ und \mathcal{E} ein Vektorbündel auf Y schreiben wir $c_i(\mathcal{E})$ statt $f^* c_i(\mathcal{E}) = c_i(f^* \mathcal{E})$.

Lemma 6.3.3. *Seien $C, Z \subset X$ und $C \times_X Z$ glatt, \tilde{X} (bzw. \tilde{Z}) die Aufblasungen entlang C (bzw. $C \cap Z$)*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z} & \xrightarrow{\tilde{i}} & \tilde{X} \\ \pi_Z \downarrow & & \downarrow \pi_X \\ Z & \xrightarrow{\iota} & X. \end{array}$$

Bezeichne $j : \mathbb{P}(N_{C/X}^\vee) \rightarrow \tilde{X}$ den exzeptionellen Divisor und $V = N_{C/X} |_{C \cap Z} / N_{C \cap Z/Z}$. Wir haben

$$\tilde{X} \leftarrow \left(\mathbb{P}(N_{C/X}^\vee |_Z), \frac{c_{top}(V \otimes \mathcal{O}(1)) - c_{top}(V)}{c_1 \mathcal{O}(1)} \right) \rightarrow Z = \iota^* \pi_{X*} - \pi_{Z*} \tilde{\iota}^*. \quad (6.3.5.0)$$

Beweis. Da

$$c_{top}(V \otimes \mathcal{O}(1)) = \sum_{k=0}^{\text{Rang } V} c_k(V) \cdot c_1(\mathcal{O}(1))^{\text{Rang } V - k}$$

benutzen wir $\frac{c_{top}(V \otimes \mathcal{O}(1)) - c_{top}(V)}{c_1 \mathcal{O}(1)}$ als Kurzschreibweise für

$$\sum_{k=0}^{\text{Rang } V - 1} c_k(V) \cdot c_1(\mathcal{O}(1))^{\text{Rang } V - k - 1}.$$

Ohne Einschränkung seien X und Z zusammenhängend und $C \neq X$. Betrachtung von

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}(N_{C/X}^\vee |_{C \cap Z}) & \longrightarrow & C \cap Z & \longrightarrow & Z \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}(N_{C/X}^\vee) & \longrightarrow & C & \longrightarrow & X \end{array}$$

(alle kartesisch) zeigt

$$\iota^* \pi_{X*} j_* = \mathbb{P}(N_{C/X}^\vee) \leftarrow \left(\mathbb{P}(N_{C/X}^\vee |_{C \cap Z}), c_{top}(N_{C/X} / N_{C \cap Z/Z}) \right) \rightarrow Z. \quad (6.3.5.1)$$

Aus

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(N_{C \cap Z/Z}^\vee) & \longrightarrow & \mathbb{P}(N_{C/X}^\vee) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{Z} & \xrightarrow{\tilde{\iota}} & \tilde{X} \end{array}$$

kartesisch sieht man

$$\tilde{\iota}^* j_* = \mathbb{P}(N_{C/X}^\vee) \leftarrow (\mathbb{P}(N_{C \cap Z/Z}^\vee), 1) \rightarrow \tilde{Z},$$

und daraus,

$$\pi_{Z*} \tilde{\iota}^* j_* = \mathbb{P}(N_{C/X}^\vee) \leftarrow \left(\mathbb{P}(N_{C/X}^\vee |_{C \cap Z}), [\mathbb{P}(N_{C \cap Z/Z}^\vee)] \right) \rightarrow Z. \quad (6.3.5.2)$$

Es ist $[\mathbb{P}(N_{C \cap Z/Z}^\vee)] = c_{top}(N_{C/X}(1) / N_{C \cap Z/Z}(1))$, weil $\mathbb{P}(N_{C \cap Z/Z}^\vee)$ Verschwindungsort des Schnitts

$$\mathcal{O} \rightarrow N_{C/X}(1) \rightarrow N_{C/X}(1) / N_{C \cap Z/Z}(1)$$

ist. Zusammen mit

$$j^* j_* = \text{Multiplikation mit } -c_1(\mathcal{O}(1))$$

zeigen (6.3.5.1),(6.3.5.2), dass (6.3.5.0) $\circ j_*$ stimmt.

Wir haben $\pi_{X*}\pi_X^* = \Delta_X$. Es gilt $\pi_{Z*}\pi_Z^* = \Delta_Z$ falls $Z \neq Z \cap C$ und $\pi_{Z*}\pi_Z^* = 0$ falls $Z \subset C$.

Im ersten Fall ist $\text{Rang}(N_{C/X}/N_{C \cap Z/Z}) < \text{Rang}(N_{C/X})$ und deshalb verschwindet die linke Seite von (6.3.5.0) $\circ \pi_X^*$ ([Fu], Proposition 3.1), genauso wie die rechte Seite.

Im zweiten Fall ist

$$X \leftarrow \left(\mathbb{P}(N_{C/X}^\vee | Z), \frac{c_{top}(N_{C/X} \otimes \mathcal{O}(1)) - c_{top}(N_{C/X})}{c_1 \mathcal{O}(1)} \right) \rightarrow Z =$$

$$\underbrace{\left(Z \leftarrow \left(\mathbb{P}(N_{C/X}^\vee | Z), \frac{c_{top}(N_{C/X} \otimes \mathcal{O}(1)) - c_{top}(N_{C/X})}{c_1 \mathcal{O}(1)} \right) \rightarrow Z \right)}_{=\Delta_Z} \circ \iota^*$$

da

$$\frac{c_{top}(N_{C/X} \otimes \mathcal{O}(1)) - c_{top}(N_{C/X})}{c_1 \mathcal{O}(1)} =$$

$$c_1(\mathcal{O}(1))^{\text{rg}(N_{C/X})-1} + \text{kleinere Terme in } c_1(\mathcal{O}(1)),$$

(siehe [Fu], Proposition 3.1). Es ist also (6.3.5.0) $\circ \pi_X^*$ richtig.

Die Behauptung folgt jetzt aus der bekannten Tatsache, dass

$$\text{CH}^*(\tilde{X} \times Z) \xrightarrow{(\circ \pi_X^*, \circ j_*)} \text{CH}^*(X \times Z) \oplus \text{CH}^*(\mathbb{P}(N_{C/X}^\vee) \times Z)$$

injektiv ist (siehe z.B. [Fu], 6.7). \square

Für Zahlen $1 \leq k_0 < k_1 < \dots < k_{l-1} < d$ schreiben wir $\underline{k} = (k_0, \dots, k_{l-1})$ und

$$E_{\underline{k}} = E_{k_0} \cap \dots \cap E_{k_{l-1}}$$

$$\text{bzw. } E_{\underline{k}}^Z = E_{k_0}^Z \cap \dots \cap E_{k_{l-1}}^Z.$$

Beweis der Proposition 6.3.1. Betrachte zuerst für $I, \underline{k} = (k_0, \dots, k_{l-1})$, mit $k_{l-1} < d$, das kommutative Diagramm von Schemata

$$\begin{array}{ccc} (Y_I)_d \cap E_{\underline{k}} & \longleftarrow & (Y_I^Z)_d \cap E_{\underline{k}}^Z \\ \downarrow \pi_X & & \downarrow \pi_Z \\ (Y_I)_{d-1} \cap E_{\underline{k}} & \longleftarrow & (Y_I^Z)_{d-1} \cap E_{\underline{k}}^Z. \end{array}$$

Hier ist $(Y_I)_d \cap E_{\underline{k}}$ bzw. $(Y_I^Z)_d \cap E_{\underline{k}}^Z$ nach Proposition (6.1.2)(2) die Strikttransformierte von $(Y_I)_{d-1} \cap E_{\underline{k}}$ bzw. $(Y_I^Z)_{d-1} \cap E_{\underline{k}}^Z$.

Im kartesischen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (Y_I)_{d-1} \cap E_{\underline{k}} & \longrightarrow & (Y_I)_{d-1} \\ \uparrow & & \uparrow \\ (Y_I^Z)_{d-1} \cap E_{\underline{k}}^Z & \longrightarrow & (Y_I^Z)_{d-1} \end{array}$$

sind die horizontalen Pfeile Immersionen gleicher Kodimension (Proposition 6.1.2(1)) und somit

$$N_{d-1} \stackrel{dfn}{=} \frac{N_{(Y_I)_{d-1} \cap E_{\underline{k}}/X_{d-1}}}{N_{(Y_I^Z)_{d-1} \cap E_{\underline{k}}^Z/Z_{d-1}}} = \frac{N_{(Y_I)_{d-1}/X_{d-1}}}{N_{(Y_I^Z)_{d-1}/Z_{d-1}}}.$$

Das Zentrum C_{d-1} der Aufblasung $X_d \rightarrow X_{d-1}$ schneidet $(Y_I^Z)_{d-1}$ in einer Vereinigung von Zusammenhangskomponenten von C_{d-1} oder trivial, deshalb ist

$$N_d = \frac{N_{(Y_I)_d/X_d}}{N_{(Y_I^Z)_d/Z_d}} = N_{d-1} \otimes \mathcal{O}(-E_d).$$

Wir haben folgende Elemente in $\text{CH}^*((Y_I)_d \cap E_{\underline{k}} \times ((Y_I^Z)_{d-1} \cap E_{\underline{k}}^Z))$ zu vergleichen:

$$R := \pi_{Z^*} \circ \left((Y_I)_d \cap E_{\underline{k}} \leftarrow ((Y_I^Z)_{d-1} \cap E_{\underline{k}}^Z, c_{top}(N_d)) \rightarrow (Y_I^Z)_{d-1} \cap E_{\underline{k}}^Z \right)$$

mit $L :=$

$$\left((Y_I)_{d-1} \cap E_{\underline{k}} \leftarrow ((Y_I^Z)_{d-1} \cap E_{\underline{k}}^Z, c_{top}(N_{d-1})) \rightarrow (Y_I^Z)_{d-1} \cap E_{\underline{k}}^Z \right) \circ \pi_{X^*}.$$

Nach Lemma 6.3.3 und Projektionsformel ist $L =$

$$\begin{aligned} & \pi_{Z^*} \circ \left((Y_I)_d \cap E_{\underline{k}} \leftarrow ((Y_I^Z)_{d-1} \cap E_{\underline{k}}^Z, c_{top}(N_{d-1})) \rightarrow (Y_I^Z)_{d-1} \cap E_{\underline{k}}^Z \right) + \\ & \left((Y_I)_d \cap E_{\underline{k}} \leftarrow ((Y_I)_d \cap E_{\underline{k}} \cap E_d, c_{top}(N_{d-1}) \cdot \Delta(V)) \rightarrow (Y_I^Z)_{d-1} \cap E_{\underline{k}}^Z \right), \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \Delta(V) &= \frac{c_{top}(V \otimes \mathcal{O}(1)) - c_{top}(V)}{c_1 \mathcal{O}(1)} \\ &\stackrel{dfn}{=} \sum_{k=0}^{\text{Rang } V-1} c_k(V) \cdot c_1(\mathcal{O}(1))^{\text{Rang } V-k-1}, \\ V &= \frac{N_{C'_{d-1}/(Y_I)_{d-1} \cap E_{\underline{k}}}}{N_{C'_{d-1}/(Y_I^Z)_{d-1} \cap E_{\underline{k}}^Z}} = N_{(Y_I^Z)_{d-1}/(Y_I)_{d-1}}|_{C'_{d-1}}, \end{aligned}$$

und

$$C'_{d-1} = C_{d-1} \cap (Y_I)_{d-1} \cap E_{\underline{k}} = C_{d-1} \cap (Y_I^Z)_{d-1} \cap E_{\underline{k}}^Z,$$

weil $C_{d-1} \subset Z_{d-1}$, sowie $\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(-E_d)$ das universelle Bündel zur Aufblasung.

Wir betrachten

$$\begin{array}{ccc}
 & (Y_I^Z)_d \cap E_{\underline{k}}^Z \cap E_d & \\
 & \swarrow & \searrow^j \\
 (Y_I)_d \cap E_{\underline{k}} \cap E_d & & (Y_I^Z)_d \cap E_{\underline{k}}^Z,
 \end{array}$$

und haben

$$[(Y_I^Z)_d \cap E_{\underline{k}}^Z \cap E_d] = -c_1(\mathcal{O}(1)) \quad \text{in } \text{CH}^*((Y_I^Z)_{d-1} \cap E_{\underline{k}}^Z)$$

und

$$[(Y_I)_d \cap E_{\underline{k}} \cap E_d] = c_{\text{top}}(V(1)) \quad \text{in } \text{CH}^*((Y_I)_d \cap E_{\underline{k}} \cap E_d).$$

Daraus folgt sofort

$$\begin{aligned}
 \pi_{Z*} \circ ((Y_I)_d \cap E_{\underline{k}} \leftarrow ((Y_I^Z)_d \cap E_{\underline{k}}^Z, c_{\text{top}}(N_{d-1}) - c_{\text{top}}(N_d)) \rightarrow (Y_I^Z)_d \cap E_{\underline{k}}^Z) \\
 = \\
 (Y_I)_d \cap E_{\underline{k}} \leftarrow ((Y_I)_d \cap E_{\underline{k}} \cap E_d, c_{\text{top}}(V(1)) \cdot \Delta(N_{d-1})) \rightarrow (Y_I^Z)_{d-1} \cap E_{\underline{k}}^Z.
 \end{aligned}$$

Nun haben wir die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow V \rightarrow N_{Z_{d-1}/X_{d-1}} \rightarrow N_{d-1} \rightarrow 0,$$

und es folgt

$$\Delta(N_{Z_{d-1}/X_{d-1}}) = c_{\text{top}}(V(1)) \cdot \Delta(N_{d-1}) + c_{\text{top}}(N_{d-1}) \cdot \Delta(V),$$

und damit $L - R =$

$$(Y_I)_d \cap E_{\underline{k}} \leftarrow ((Y_I)_d \cap E_{\underline{k}} \cap E_d, \Delta(N_{Z_{d-1}/X_{d-1}})) \rightarrow (Y_I^Z)_{d-1} \cap E_{\underline{k}}^Z. \quad (6.3.5.3)$$

Wir betrachten als zweites das kommutative Diagramm von Schemata

$$\begin{array}{ccc}
 (Y_I)_d \cap E_{\underline{k}} \cap E_d & \longleftarrow & (Y_I^Z)_d \cap E_{\underline{k}}^Z \cap E_d^Z \\
 \downarrow \pi_X & & \downarrow \pi_Z \\
 (Y_I)_{d-1} \cap E_{\underline{k}} \cap C_{d-1} & \longleftarrow & (Y_I^Z)_{d-1} \cap E_{\underline{k}}^Z \cap C_{d-1}.
 \end{array}$$

Wir setzen

$$\begin{aligned}
 N_{d-1} & \stackrel{\text{dfn}}{=} \frac{N_{(Y_I)_{d-1} \cap E_{\underline{k}} \cap C_{d-1} / X_{d-1}}}{N_{(Y_I^Z)_{d-1} \cap E_{\underline{k}}^Z \cap C_{d-1} / Z_{d-1}}} = N_{Z_{d-1}/X_{d-1}} \mid_{(Y_I)_{d-1} \cap E_{\underline{k}} \cap Z_{d-1}} \\
 N_d & \stackrel{\text{dfn}}{=} \frac{N_{(Y_I)_d \cap E_{\underline{k}} \cap E_d / X_d}}{N_{(Y_I^Z)_d \cap E_{\underline{k}}^Z \cap E_d^Z / Z_d}} = \frac{N_{(Y_I)_{d-1} / X_{d-1}}}{N_{(Y_I^Z)_{d-1} / Z_{d-1}}} \otimes \mathcal{O}(1).
 \end{aligned}$$

und haben folgende Elemente zu vergleichen:

$$\begin{aligned}
 R := \pi_{Z*} \circ ((Y_I)_d \cap E_{\underline{k}} \cap E_d \leftarrow ((Y_I^Z)_d \cap E_{\underline{k}}^Z \cap E_d^Z, c_{\text{top}}(N_d)) \\
 \rightarrow (Y_I^Z)_d \cap E_{\underline{k}}^Z \cap E_d^Z)
 \end{aligned}$$

mit $L :=$

$$\begin{aligned} ((Y_I)_{d-1} \cap E_{\underline{k}} \cap C_{d-1} \leftarrow ((Y_I)_{d-1} \cap E_{\underline{k}} \cap C_{d-1}, c_{top}(N_{d-1})) \\ \rightarrow (Y_I)_{d-1} \cap E_{\underline{k}} \cap C_{d-1}) \circ \pi_{X^*}. \end{aligned}$$

Wir haben hier offenbar $L - R =$

$$\begin{aligned} (Y_I)_d \cap E_{\underline{k}} \cap E_d \leftarrow ((Y_I)_d \cap E_{\underline{k}} \cap E_d, c_{top}(N_{d-1}) - c_{top}(N_d)c_{top}(V(1))) \\ \rightarrow (Y_I^Z)_{d-1} \cap E_{\underline{k}}^Z \cap C_{d-1}). \end{aligned} \quad (6.3.5.4)$$

Und es gilt

$$c_{top}(V(1)) \cdot c_{top}(N_d) = c_{top}(N_{Z_{d-1}/X_{d-1}}(1)),$$

also

$$c_{top}(N_{d-1}) - c_{top}(N_d)c_{top}(V(1)) = -c_1(\mathcal{O}(1)) \cdot \Delta(N_{Z_{d-1}/X_{d-1}}).$$

Betrachte nun das Diagramm (von Morphismen in AMe)

$$\begin{array}{ccc} (X_d, \bigcup_{i=1}^r (Y_i)_d \bigcup_{k=1}^d E_k) & \xrightarrow{\pi_X} & (X_{d-1}, \bigcup_{i=1}^r (Y_i)_{d-1} \bigcup_{k=1}^{d-1} E_k \cup C_{d-1}) \\ \downarrow \iota_d & & \downarrow \iota_{d-1} \\ (Z_d, \bigcup_{i=1}^r (Y_i^Z)_d \bigcup_{k=1}^d E_k^Z) & \xrightarrow{\pi_Z} & (Z_{d-1}, \bigcup_{i=1}^r (Y_i^Z)_{d-1} \bigcup_{k=1}^{d-1} E_k^Z \cup C_{d-1}), \end{array} \quad (6.3.5.5)$$

mit horizontalen Pfeilen den Isomorphismen aus Lemma (6.2.2) und vertikalen Pfeilen aus Lemma (6.3.1).

Es zeigen (6.3.5.3) und (6.3.5.4), dass $\iota_{d-1} \circ \pi_X - \pi_Z \circ \iota_d =$

$$\begin{aligned} \sum_I \sum_{\substack{\underline{k}=(k_0, \dots, k_{l-1}) \\ k_{l-1} < d}} (-1)^{\frac{(|I|+l)(|I|+l-1)}{2}} \\ \left((Y_I)_d \cap E_{\underline{k}} \leftarrow ((Y_I)_d \cap E_{\underline{k}} \cap E_d, \Delta(N_{Z_{d-1}/X_{d-1}})) \rightarrow (Y_I^Z)_{d-1} \cap E_{\underline{k}}^Z \right. \\ \left. + (-1)^{|I|+l}. \right. \\ \left. ((Y_I)_d \cap E_{\underline{k}} \cap E_d \leftarrow ((Y_I)_d \cap E_{\underline{k}} \cap E_d, -c_1(\mathcal{O}(1)) \cdot \Delta(N_{Z_{d-1}/X_{d-1}})) \right. \\ \left. \rightarrow (Y_I^Z)_{d-1} \cap E_{\underline{k}}^Z \cap C_{d-1}) \right). \end{aligned} \quad (6.3.5.6)$$

Bezeichne D das Differential aus (4.4.2.1) und H den Zykel

$$\begin{aligned} \sum_I \sum_{\substack{\underline{k}=(k_0, \dots, k_{l-1}) \\ k_{l-1} < d}} (-1)^{\frac{(|I|+l)(|I|+l-1)}{2}} \\ (Y_I)_d \cap E_{\underline{k}} \leftarrow ((Y_I)_d \cap E_{\underline{k}} \cap E_d, \Delta(N_{Z_{d-1}/X_{d-1}})) \\ \rightarrow (Y_I^Z)_{d-1} \cap E_{\underline{k}} \cap C_{d-1}, \end{aligned}$$

dann ist es eine leichte Rechnung (ausgeföhrt in Lemma 6.3.4), dass die rechte Seite von (6.3.5.6) gleich $D(H)$ ist, und das Diagramm (6.3.5.5) kommutativ.

Die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} (X_{d-1}, \bigcup_{i=1}^r (Y_i)_{d-1} \bigcup_{k=1}^{d-1} E_k \cup C_{d-1}) & \longleftarrow & (X_{d-1}, \bigcup_{i=1}^r (Y_i)_{d-1} \bigcup_{k=1}^{d-1} E_k) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (Z_{d-1}, \bigcup_{i=1}^r (Y_i^Z)_{d-1} \bigcup_{k=1}^{d-1} E_k^Z \cup C_{d-1}) & \longleftarrow & (Z_{d-1}, \bigcup_{i=1}^r (Y_i^Z)_{d-1} \bigcup_{k=1}^{d-1} E_k^Z), \end{array}$$

mit horizontalen Pfeilen den Isomorphismen aus Lemma (6.2.1) und vertikalen Pfeilen aus Lemma (6.3.1), ist offensichtlich. \square

Notation 6.3. Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus (glatter) Schemata, wir schreiben $(X \rightarrow Y)_* := f_*$ und $(X \rightarrow Y)^* := f^*$.

Wir setzen $H_{I, \underline{k}} \stackrel{dfn}{=}$

$$(Y_I)_d \cap E_{\underline{k}} \leftarrow ((Y_I)_d \cap E_{\underline{k}} \cap E_d, \Delta(N_{Z_{d-1}/X_{d-1}})) \rightarrow (Y_I^Z)_{d-1} \cap E_{\underline{k}} \cap C_{d-1},$$

und

$$\epsilon(n) = (-1)^{\frac{n \cdot (n-1)}{2}} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}. \quad (6.3.5.7)$$

Lemma 6.3.4. Bezeichne D das Differential aus (4.4.2.1) und H den Zykel aus dem Beweis der Proposition (6.3.1), dann ist $D(H) =$

$$\begin{aligned} & \sum_I \sum_{\underline{k}} \epsilon(|I| + |\underline{k}|) \left(((Y_I^Z)_{d-1} \cap E_{\underline{k}}^Z \cap C_{d-1} \rightarrow (Y_I^Z)_{d-1} \cap E_{\underline{k}}^Z)_* \circ H_{I, \underline{k}} \right. \\ & \quad \left. + (-1)^{|I| + |\underline{k}|} H_{I, \underline{k}} \circ ((Y_I)_d \cap E_{\underline{k}} \cap E_d \rightarrow (Y_I)_d \cap E_{\underline{k}})_* \right). \end{aligned}$$

Beweis. Wir wenden $\text{CH}^0 \left(d_{(X_d(\dim X_d), \cup_i (Y_i)_d \cup_{k=1}^d E_k)^*} \times id, 0 \right)$ auf H an und erhalten:

$$\begin{aligned} & \sum_J \sum_{\underline{k}} \epsilon(|J| + |\underline{k}| - 1) \sum_{l=0}^{|\underline{k}|-1} (-1)^l H_{\partial_l J, \underline{k}} \circ (Y_{J,d} \cap E_{\underline{k}} \rightarrow Y_{\partial_l J, d} \cap E_{\underline{k}})_* \\ & + \sum_I \sum_{\underline{m}} \epsilon(|I| + |\underline{m}| - 1) \sum_{l=0}^{|\underline{m}|-1} (-1)^{l+|I|} H_{I, \partial_l \underline{m}} \circ ((Y_I)_d \cap E_{\underline{m}} \rightarrow (Y_I)_d \cap E_{\partial_l \underline{m}})_* \\ & + \sum_I \sum_{\underline{k}} \epsilon(|I| + |\underline{k}| + 1) H_{I, \underline{k}} \circ ((Y_I)_d \cap E_{\underline{k}} \cap E_d \rightarrow (Y_I)_d \cap E_{\underline{k}})_*. \end{aligned}$$

Andererseits ist $\text{CH}^0 \left(id \times d_{\langle Z_{d-1}, \cup_i (Y_i^Z)_{d-1} \cup_{k=1}^{d-1} E_k^Z \cup C_{d-1} \rangle}, 0 \right)$ auf $H_{I, \underline{k}}$ angewendet:

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{|\underline{I}|-1} (-1)^l \left((Y_I^Z)_{d-1} \cap E_{\underline{k}}^Z \cap C_{d-1} \rightarrow (Y_{\partial_l I}^Z)_{d-1} \cap E_{\underline{k}}^Z \cap C_{d-1} \right)_* \circ H_{I, \underline{k}} \\ & + \sum_{l=0}^{|\underline{k}|-1} (-1)^{l+|\underline{I}|} \left((Y_I^Z)_{d-1} \cap E_{\underline{k}}^Z \cap C_{d-1} \rightarrow (Y_I^Z)_{d-1} \cap E_{\partial_l \underline{k}}^Z \cap C_{d-1} \right)_* \circ H_{I, \underline{k}} \\ & + (-1)^{|\underline{I}+|\underline{k}|} \left((Y_I^Z)_{d-1} \cap E_{\underline{k}}^Z \cap C_{d-1} \rightarrow (Y_I^Z)_{d-1} \cap E_{\underline{k}}^Z \right)_* \circ H_{I, \underline{k}} \end{aligned}$$

Auf das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} (Y_J)_d \cap E_{\underline{k}} & \longleftarrow & (Y_J)_d \cap E_{\underline{k}} \cap E_d & \longrightarrow & (Y_J^Z)_{d-1} \cap E_{\underline{k}}^Z \cap C_{d-1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (Y_{\partial_k J})_d \cap E_{\underline{k}} & \longleftarrow & (Y_{\partial_k J})_d \cap E_{\underline{k}} \cap E_d & \longrightarrow & (Y_{\partial_k J}^Z)_{d-1} \cap E_{\underline{k}}^Z \cap C_{d-1} \end{array}$$

lässt sich Lemma 6.3.2 anwenden, und man hat

$$\begin{aligned} H_{\partial_k J, \underline{k}} \circ ((Y_J)_d \cap E_{\underline{k}} \rightarrow (Y_{\partial_k J})_d \cap E_{\underline{k}})_* &= \\ ((Y_J^Z)_{d-1} \cap E_{\underline{k}}^Z \cap C_{d-1} \rightarrow (Y_{\partial_k J}^Z)_{d-1} \cap E_{\underline{k}}^Z \cap C_{d-1})_* \circ H_{J, \underline{k}}. \end{aligned}$$

Genauso beweist man

$$\begin{aligned} H_{I, \partial_k \underline{m}} \circ ((Y_I)_d \cap E_{\underline{m}} \rightarrow (Y_I)_d \cap E_{\partial_k \underline{m}})_* &= \\ ((Y_I^Z)_{d-1} \cap E_{\underline{m}}^Z \cap C_{d-1} \rightarrow (Y_I^Z)_{d-1} \cap E_{\partial_k \underline{m}}^Z \cap C_{d-1})_* \circ H_{I, \underline{m}}. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. \square

6.4. Beispiel: Approximation der Ringstruktur.

6.4.1. *Pullback auf die Diagonale.* Sei $X; Y_1, \dots, Y_r$ eine Konstellation projektiver Schemata, dann erhalten wir durch $X \times X; Y_1 \times X, \dots, Y_r \times X, X \times Y_1, \dots, X \times Y_r$ eine weitere, und die Diagonale $\Delta \subset X \times X$ erfüllt die Voraussetzungen aus Proposition (6.2.1), so dass wir einen Morphismus $\Phi : (X \times X, \cup_i Y_i \times X \cup_j X \times Y_j) \rightarrow (X, \cup_i Y_i \cup_j Y_j) \xrightarrow{\cong} (X, \cup_i Y_i)$ in $\mathcal{M}e$ haben, der den Pullbackmorphismus zur Diagonale

$$Z^*((X - \cup_i Y_i) \times (X - \cup_i Y_i), **) \rightarrow Z^*(X - \cup_i Y_i, **)$$

beschreibt. Nach Satz 6.3.1 und Abschnitt 6.2.1 ist das Bild Φ' von Φ in $\mathcal{A}Me$ durch

$$\Phi' = \sum_{\substack{I, J \\ I \cap J = \emptyset}} \text{sgn}(I, J) \epsilon(|I| + |J|) \left(Y_I \times Y_J \leftarrow \left(Y_I \cap Y_J, c_{top} \left(\frac{N_{Y_I/X} |_{Y_I \cap Y_J} \oplus N_{Y_J/X} |_{Y_I \cap Y_J}}{N_{Y_I \cap Y_J/X}} \right) \right) \rightarrow Y_I \cap Y_J \right)$$

gegeben (ϵ wie in (6.3.5.7)).

6.4.2. *Kompaktifizierung von Produkten von Konstellationen affiner Räume.* Sei $\mathbb{A}_K^N = X^o, Y_1^o, \dots, Y_{r-1}^o$ eine Konstellation affiner Räume (wie in 5.2.1) und für jedes $A \in \mathcal{A}(X^o, \cup_i Y_i^o) = \mathcal{A}$ ein K -rationaler Punkt x_A in allgemeiner Lage gewählt (wir nehmen an, dass dies geht). Wir bezeichnen (wie in 5.2.1) mit $X; Y_1, \dots, Y_r$ die Kompaktifizierung im \mathbb{P}_K^N , dabei ist Y_r die Hyperebene im Unendlichen gegeben durch die Gleichung $X_0 = 0$.

Wir setzen $(Y_i^1)^o := Y_i^o \times X^o, (Y_i^2)^o := X^o \times Y_i^o$, und erhalten durch $\mathbb{A}_K^{2N} = X^o \times X^o; (Y_1^1)^o, \dots, (Y_{r-1}^1)^o, (Y_1^2)^o, \dots, (Y_{r-1}^2)^o$ eine weitere Konstellation, es ist

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \times \mathcal{A} &\xrightarrow{\cong} \mathcal{A}(X^o \times X^o, \cup_i (Y_i^1)^o \cup_i (Y_i^2)^o) \\ (A_1, A_2) &\mapsto A_1 \times A_2, \end{aligned}$$

und wir setzen $x_{A_1 \times A_2} := (x_{A_1}, x_{A_2})$.

Wir haben $\mathbb{A}^{2N} \subset \mathbb{P}^{2N}$ (durch $X_0 \neq 0$) und bezeichnen mit Y_i^1 bzw. Y_i^2 den Abschluss von $(Y_i^1)^o$ bzw. $(Y_i^2)^o$ im projektiven Raum, mit H bezeichnen wir die Hyperebene im Unendlichen gegeben durch $X_0 = 0$. Via

$$X = \mathbb{P}^N \rightarrow \mathbb{P}^{2N}; \quad [X_0, \dots, X_N] \mapsto [X_0, \dots, X_N, X_1, \dots, X_N]$$

haben wir $Y_i^1 \cap X = Y_i^2 \cap X = Y_i$ und $H \cap X = Y_r$.

6.4.3. *Multiplikation bei Konstellationen affiner Räume I.* Nach Abschnitt (6.2) haben wir einen Morphismus

$$\Psi : (\mathbb{P}^{2N}, \cup_{i=1}^{r-1} Y_i^1 \cup_{i=1}^{r-1} Y_i^2 \cup H) \rightarrow (\mathbb{P}^N, \cup_{i=1}^{r-1} Y_i \cup_{i=1}^{r-1} Y_i \cup Y_r) \xrightarrow{\cong} (\mathbb{P}^N, \cup_i Y_i)$$

in $\mathcal{M}e$, der den Pullback auf die Diagonale

$$Z^*(U \times U, **) \rightarrow Z^*(U, **) \tag{6.4.3.1}$$

induziert (via 4.3.3), mit $U := X^o - \cup_i Y_i^o$. Die fixierten Punkte geben nach Proposition (5.2.1), (5.2.2):

$$\begin{aligned} Z^*(U \times U, **) &\xrightarrow{quis} \bigoplus_{(A_1, A_2) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}} E(A_1 \times A_2) \otimes Z^*(K, **) \\ Z^*(U, **) &\xrightarrow{quis} \bigoplus_{A \in \mathcal{A}} E(A) \otimes Z^*(K, **) \end{aligned} \quad (6.4.3.2)$$

und das Bild von Ψ unter

$$\begin{aligned} &\text{Hom}_{\mathcal{M}e}((\mathbb{P}^{2N}, \cup_{i=1}^{r-1} Y_i^1 \cup_{i=1}^{r-1} Y_i^2 \cup H), (\mathbb{P}^N, \cup_i Y_i)) \cong \\ &H_0^{\text{deg}=0} \left(\bigoplus_{(A_1, A_2) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}} \bigoplus_{A_3 \in \mathcal{A}} \underline{\text{Hom}}(E(A_1 \times A_2), E(A_3)) \otimes Z^*(K, **) \right). \end{aligned}$$

($H_0^{\text{deg}=0}$ bezeichnet den Grad = 0 Anteil von H_0) beschreibt (6.4.3.1) (nach Abschnitt (5.3)).

Leider haben wir keine Beschreibung von Ψ , nur die Beschreibung des Bildes $\bar{\Psi}$ von Ψ in $\text{Hom}_{\mathcal{A}\mathcal{M}e}$ (siehe 6.4.4), was nach (5.3.5) das Bild von Ψ unter der Projektion

$$\begin{aligned} &H_0^{\text{deg}=0} \left(\bigoplus_{(A_1, A_2) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}} \bigoplus_{A_3 \in \mathcal{A}} \underline{\text{Hom}}(E(A_1 \times A_2), E(A_3)) \otimes Z^*(K, **) \right) \\ &\quad \downarrow \\ &H_0^{\text{deg}=0} \left(\bigoplus_{(A_1, A_2) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}} \bigoplus_{A_3 \in \mathcal{A}} \underline{\text{Hom}}(E(A_1 \times A_2), E(A_3)) \right), \end{aligned}$$

induziert durch $Z^*(K, **) \rightarrow Z^0(K, 0) = \mathbb{Z}$, gibt. Dies genügt um den linken vertikalen Pfeil in

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{(A_1, A_2)} E(A_1 \times A_2) & \xrightarrow{\text{via } Z^0(K, 0) \subset Z^*(K, **)} & \bigoplus_{(A_1, A_2)} E(A_1 \times A_2) \otimes Z^*(K, **) \\ \downarrow & & \downarrow \Psi \\ \bigoplus_A E(A) & \xleftarrow{\text{via } Z^0(K, 0) \leftarrow Z^*(K, **)} & \bigoplus_A E(A) \otimes Z^*(K, **) \end{array}$$

zu beschreiben.

6.4.4. *Beschreibung von $\bar{\Psi}$.* Nach Satz 6.3.1 und Abschnitt 6.2.1 haben wir

$$\bar{\Psi} = \sum_{\substack{I, J \in \mathfrak{P}_{r-1} \\ I \cap J = \emptyset}} \epsilon(|I| + |J|) \cdot \text{sgn}(I, J) \cdot (\tau_{I, J} + \tau_{I, J, H}), \quad (6.4.4.1)$$

(ϵ wie in (6.3.5.7)) mit

$$\begin{aligned}\tau_{I,J} &= Y_I^1 \cap Y_J^2 \leftarrow (Y_I \cap Y_J, c_{top}(V_{I,J})) \rightarrow Y_I \cap Y_J \\ \tau_{I,J,H} &= Y_I^1 \cap Y_J^2 \cap H \leftarrow (Y_I \cap Y_J \cap Y_r, c_{top}(V_{I,J,H})) \rightarrow Y_I \cap Y_J \cap Y_r\end{aligned}$$

(in der Notation aus Abschnitt (6.3.2)) mit Vektorbündeln $V_{I,J}$ bzw. $V_{I,J,H}$ vom Rang $\dim X - \dim Y_I - \dim Y_J - \dim(Y_I \cap Y_J)$.

Via (5.3.5.1) bilden alle $\tau_{I,J,H}$ trivial ab, und ebenso alle $\tau_{I,J}$ mit $\dim X - \dim Y_I - \dim Y_J - \dim(Y_I \cap Y_J) \neq 0$. Jetzt sieht man leicht aus (6.4.4.1), dass das Bild von $\bar{\Psi}$ unter dem Morphismus aus (5.3.5.1) durch

$$\sum_{(A_1, A_2) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}} \bar{\Psi}_{A_1, A_2}$$

gegeben ist. Dabei ist $\bar{\Psi}_{A_1, A_2} = 0$, falls sich A_1 und A_2 schlecht oder gar nicht schneiden, und ansonsten ist

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}_{A_1, A_2} : E(A_1 \times A_2) &= E(A_1) \otimes E(A_2) \rightarrow E(A_1 \cap A_2) \\ \text{durch } \begin{cases} \underbrace{\mathbb{Z}(d_1 - N)}_I \otimes \underbrace{\mathbb{Z}(d_2 - N)}_J \xrightarrow{\cdot \text{sgn}(I, J)} \underbrace{\mathbb{Z}(d_{12} - N)}_{I \cup J}, & \text{falls } I \cap J = \emptyset, \\ 0, & \text{falls } I \cap J \neq \emptyset, \end{cases}\end{aligned}$$

($d_1 = \dim A_1, d_2 = \dim A_2, d_{12} = \dim(A_1 \cap A_2), N = \dim X$) gegeben. In der Notation aus Abschnitt (5.6) ist $\bar{\Psi}_{A_1, A_2} = \text{mult}_{A_1, A_2}$.

6.4.5. *Multiplikation bei Konstellationen affiner Räume II.* Wie wir in Proposition 5.6.1 gesehen haben, hat das äußere Produkt

$$Z^*(U, **) \otimes Z^*(U, **) \rightarrow Z^*(U \times U, **)$$

via der Quasiisomorphismen (6.4.3.2) die Beschreibung

$$\begin{array}{c} E(A_1) \otimes Z^*(K, **) \otimes E(A_2) \otimes Z^*(K, **) \\ \downarrow \\ E(A_1) \otimes E(A_2) \otimes Z^*(K, **) \otimes Z^*(K, **) \\ \downarrow \\ E(A_1 \times A_2) \otimes Z^*(K, **) \end{array}$$

für alle $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, im letzten Pfeil benutzt man $E(A_1) \otimes E(A_2) = E(A_1 \times A_2)$ und die Multiplikation aus (3.3.4).

Nach Berechnung von $\bar{\Psi}$ in Abschnitt (6.4.4) haben wir in der derivierten Kategorie das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Z^*(U, **) \otimes Z^*(U, **) & \xrightarrow{\text{Multiplikation}} & Z^*(U, **) \\ \uparrow & & \downarrow \\ E(A_1) \otimes E(A_2) & \xrightarrow{\bar{\Psi}_{A_1, A_2}} & E(A_1 \cap A_2). \end{array}$$

7. VERGLEICH MIT DER HODGETHEORIE

7.1. Hodge-Realisierung von $\mathcal{A}\mathcal{M}e$.

7.1.1. In diesem Abschnitt ist der Grundkörper die komplexen Zahlen $K = \mathbb{C}$. Zu einem separierten Schema vom endlichen Typ über \mathbb{C} bezeichnen wir mit X^a den dazu assoziierten topologischen Raum $X(\mathbb{C})$.

Ziel dieses Abschnitts ist die Konstruktion eines Funktors

$$\mathcal{A}\mathcal{M}e \rightarrow (\text{reine Hodgestrukturen}/\mathbb{Q}).$$

Auf Objekten ist der Funktor durch

$$(X(a), \cup_i Y_i) \mapsto \oplus_j \oplus_p \text{Gr}_p^W H^j(X^a - \cup_i Y_i^a, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}(a)$$

gegeben, wobei W die Gewichtsfiltrierung ist.

7.1.2. *Berechnung von Hodgestrukturen.* Da wir mit Konstellationen $X; Y_1, \dots, Y_r$ arbeiten, wobei $\cup_i Y_i$ im allgemeinen kein Divisor mit normalen Kreuzungen ist, beschreiben wir hier die Hodgestruktur auf $H^*(X^a - \cup_i Y_i^a, \mathbb{Q})$ in Termen der Kompaktifizierung X mit Komplement $\cup_i Y_i$, ohne Log-Formen. Wir benutzen dabei (kohomologische) Hodgekomplexe [De3].

Sei X projektiv, wir setzen $U := X - \cup_i Y_i$ und $j : U^a \rightarrow X^a$ für die Inklusion. Wir definieren folgenden kohomologischen Hodgekomplex:

$$j_! \mathbb{Q}_{U^a} \xrightarrow{\text{quis}} \left[\begin{array}{c} \mathbb{Q}_{X^a} \rightarrow \oplus_i \mathbb{Q}_{Y_i^a} \rightarrow \oplus_{i < j} \mathbb{Q}_{Y_{ij}^a} \rightarrow \dots \\ \text{deg}=0 \end{array} \right]$$

mit *Gewichtsfiltrierung*

$$\widetilde{W}_{-p} = \left[\begin{array}{c} \oplus_{|I|=p} \mathbb{Q}_{Y_I^a} \rightarrow \dots \\ \text{deg}=p \end{array} \right] \quad (7.1.2.1)$$

und

$$\left[\mathbb{Q}_{X^a} \rightarrow \oplus_i \mathbb{Q}_{Y_i^a} \rightarrow \oplus_{i < j} \mathbb{Q}_{Y_{ij}^a} \rightarrow \dots \right] \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \xrightarrow{\text{quis}} \mathcal{E}\langle X, \cup_i Y_i \rangle := \text{Ass} \left[\mathcal{E}_{X^a}^{\bullet, \bullet} \rightarrow \oplus_i \mathcal{E}_{Y_i^a}^{\bullet, \bullet} \rightarrow \dots \right],$$

mit $\mathcal{E}^{p,q}$ = Garbe der p, q -Formen, und *Hodgefiltrierung*

$$F^p = \text{Ass} \left[F^p \mathcal{E}_{X^a}^{\bullet, \bullet} \rightarrow \oplus_i F^p \mathcal{E}_{Y_i^a}^{\bullet, \bullet} \rightarrow \dots \right]. \quad (7.1.2.2)$$

Dies definiert für alle n auf $H_c^n(U^a, \mathbb{Q})$, durch $W := \widetilde{W}[n], F$, eine gemischte Hodgestruktur.

Proposition 7.1.1. *Die so definierte Hodgestruktur (7.1.2.1, 7.1.2.2) auf $H_c^n(U^a, \mathbb{Q})$, $n = 0, 1, \dots$, ist die übliche.*

Beweis. Offenbar bleibt die durch (7.1.2.1,7.1.2.2) definierte Hodgestruktur auf $H_c^n(U^a, \mathbb{Q})$ beim Übergang

$$X; Y_1, \dots, Y_r \rightsquigarrow X; Y_1, \dots, Y_r, Y_{r+1}, \quad (7.1.2.3)$$

mit $Y_{r+1} \subset \cup_{i=1}^r Y_i$, gleich.

Sei $\pi : \tilde{X}^a \rightarrow X^a$ die Aufblasung mit Zentrum Y_r^a , wie in (6.2.2),

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X}^a \\ & \nearrow \tilde{j} & \downarrow \pi \\ U^a & & X^a \\ & \searrow j & \end{array}$$

Wir haben aus dem Pullback von Differentialformen zu den Morphismen $\tilde{Y}_I^a \rightarrow Y_I^a$, mit $I_k < r$ für alle k , bzw. $\tilde{Y}_I^a \cap E^a \rightarrow Y_I^a \cap Y_r^a$, folgendes Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_* \tilde{j}_! \mathbb{C}_{U^a} & \xrightarrow{quis} & \pi_* \text{Ass} \left[\mathcal{E}_{\tilde{X}^a}^{\bullet, \bullet} \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathcal{E}_{\tilde{Y}_i^a}^{\bullet, \bullet} \oplus \mathcal{E}_{E^a}^{\bullet, \bullet} \rightarrow \dots \right] \\ \uparrow = & & \uparrow \\ j_! \mathbb{C}_{U^a} & \xrightarrow{quis} & \text{Ass} \left[\mathcal{E}_{X^a}^{\bullet, \bullet} \rightarrow \bigoplus_i \mathcal{E}_{Y_i^a}^{\bullet, \bullet} \rightarrow \dots \right]. \end{array} \quad (7.1.2.4)$$

Der rechte vertikale Pfeil erhält alle Filtrierungen und deshalb sind die \widetilde{W}, F -Filtrierungen auf $H_c^n(U^a, \mathbb{C})$, assoziiert zu den beiden Konstellationen, gleich. Dann sind auch die W -Filtrierungen auf $H_c^n(U^a, \mathbb{Q})$ gleich. Zusammenfassend, es ändert sich die (von uns definierte) Hodgestruktur beim Übergang

$$X; Y_1, \dots, Y_r \rightsquigarrow \tilde{X}; \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_{r-1}, E \quad (7.1.2.5)$$

nicht.

Wir können jetzt eine gegebene Konstellation $X; Y_1, \dots, Y_r$ durch Veränderungen der Art (7.1.2.3) und (7.1.2.5) in eine Konstellation $X'; Y'_1, \dots, Y'_{r'}$ überführen, wobei $Y'_1 + \dots + Y'_{r'}$ ein Divisor mit normalen Kreuzungen ist. Dies geht durch die Sequenz von Aufblasungen aus Abschnitt (6.1), assoziiert zu $\mathcal{A}(X, \cup_i Y_i)$ und $d : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Z}; d(A) = \dim A$.

Im Fall eines Divisors mit normalen Kreuzungen als Komplement von U ist unsere Konstruktion der Hodgestruktur die übliche. \square

Per Dualität können wir zur Kohomologie übergehen, wir haben als Hodgestrukturen ($d_U := \dim U$):

$$H^i(U^a, \mathbb{Q}) = \underline{\text{Hom}}(H_c^{2d_U-i}(U^a, \mathbb{Q}), \mathbb{Q}(-d_U)).$$

Als nächstes interpretieren wir $\mathrm{Gr}_p^{\widetilde{W}[i]} H^i(U^a, \mathbb{Q})$. Wir haben

$$\begin{aligned} \mathrm{Gr}_p^{\widetilde{W}[i]} H^i(U^a, \mathbb{Q}) &= \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Gr}_{2d_U-p}^{\widetilde{W}[2d_U-i]} H_c^{2d_U-i}(U^a, \mathbb{Q}), \mathbb{Q}(-d_U)) \\ &= \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Gr}_{i-p}^{\widetilde{W}} H_c^{2d_U-i}(U^a, \mathbb{Q}), \mathbb{Q}(-d_U)) \end{aligned}$$

und wir identifizieren via der \widetilde{W} -Spektralsequenz

$$\begin{aligned} \mathrm{Gr}_{i-p}^{\widetilde{W}} H_c^{2d_U-i}(U^a, \mathbb{Q}) &\simeq \\ &H \left(\bigoplus_{|I|=p-1-i} H^{2d_U-p}(Y_I, \mathbb{Q}) \rightarrow \bigoplus_{|I|=p-i} H^{2d_U-p}(Y_I, \mathbb{Q}) \right. \\ &\qquad \qquad \qquad \left. \rightarrow \bigoplus_{|I|=p+1-i} H^{2d_U-p}(Y_I, \mathbb{Q}) \right). \end{aligned}$$

Durch dualisieren erhält man

$$\begin{aligned} \mathrm{Gr}_p^{\widetilde{W}[i]} H^i(U^a, \mathbb{Q}) &\simeq \\ &H \left(\bigoplus_{|I|=p+1-i} H^{p-2c_I}(Y_I, \mathbb{Q})(-c_I) \rightarrow \bigoplus_{|I|=p-i} H^{p-2c_I}(Y_I, \mathbb{Q})(-c_I) \right. \\ &\qquad \qquad \qquad \left. \rightarrow \bigoplus_{|I|=p-1-i} H^{p-2c_I}(Y_I, \mathbb{Q})(-c_I) \right), \end{aligned}$$

dabei ist $c_I = d_U - \dim Y_I$ (zur Einfachheit nehmen wir an, dass alle Y_I äquidimensional sind).

Wir bezeichnen mit $G_p(X, \cup_i Y_i)$ den Komplex

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \bigoplus_{|I|=p+1-i} H^{p-2c_I}(Y_I, \mathbb{Q})(-c_I) &\rightarrow \bigoplus_{|I|=p-i} H^{p-2c_I}(Y_I, \mathbb{Q})(-c_I) \\ &\qquad \qquad \qquad \deg=p-i \\ &\rightarrow \bigoplus_{|I|=p-1-i} H^{p-2c_I}(Y_I, \mathbb{Q})(-c_I) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

von reinen Hodgestrukturen vom Gewicht p , es ist

$$\mathrm{Gr}_p^W H^i(U^a, \mathbb{Q}) \simeq H_{p-i} G_p(X, \cup_i Y_i). \quad (7.1.2.6)$$

Bemerkung 7.1. Ist $D = \sum_i Y_i$ ein Divisor mit normalen Kreuzungen, dann kann man den Log-Komplex $\Omega^*(\log D)$ zur Berechnung der Hodgestruktur $H^*(U^a, \mathbb{Q})$ verwenden [De2]. Betrachtet man die W -Spektralsequenz, so sieht man

$$G_p(X, \cup_i Y_i) = {}_W E_1^{-*,p}, \quad (7.1.2.7)$$

insbesondere

$$H_{p-i} G_p(X, \cup_i Y_i) = {}_W E_2^{i-p,p} \simeq \mathrm{Gr}_p^W H^i(U^a, \mathbb{Q}).$$

Es ist bekannt (vgl. [Ze]), dass dies der Morphismus (7.1.2.6) ist.

7.1.3. *Konstruktion der Realisierung.* Sei $V; W_1, \dots, W_t$ eine weitere Konstellation, V projektiv.

Wir haben eine Zykelabbildung ($d_X = \dim X, d_I = \dim Y_I, c_I = \text{codim}_X Y_I, c_J = \text{codim}_V W_J$)

$$\begin{aligned} \mathcal{CL} &: \text{CH}^0(Y_I(d_X - a) \times W_J(-c_J + b), 0) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \\ &\rightarrow H^{2(d_I + c_I - a - c_J + b)}(Y_I \times W_J, \mathbb{Q})(d_I + c_I - a - c_J + b) \\ &\rightarrow \bigoplus_p \underline{\text{Hom}}(H^{p-2c_I+2a}(Y_I, \mathbb{Q})(-c_I + a), H^{p-2c_J+2b}(W_J, \mathbb{Q})(-c_J + b)), \end{aligned}$$

wobei dies Morphismen von Hodgestrukturen sind, wenn wir $\text{CH}^0(Y_I(d_X - a) \times W_J(-c_J + b), 0) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ als rein vom Typ $(0, 0)$ auffassen. Deshalb bildet \mathcal{CL} nach Hom_{HS} ab. Explizit ist $\mathcal{CL}(Z)$ wie folgt gegeben:

$$\mathcal{CL}(Z)(\alpha) = \text{pr}_{J*}(\text{pr}_I^* \alpha \wedge [Z]), \quad (7.1.3.1)$$

$\text{pr}_I : Y_I \times W_J \rightarrow Y_I, \text{pr}_J : Y_I \times W_J \rightarrow W_J$ und $[Z]$ die Klasse zu Z in der Kohomologie.

Sei nun $\Psi = \sum_{|I|=|J|} \Psi_{I,J}, \Psi_{I,J} \in \text{CH}^0(Y_I(d_X - a) \times W_J(-c_J + b), 0)$, ein Element in $\text{Hom}_{AMe}((X(a), \cup_i Y_i), (V(b), \cup_j W_j))$. Man sieht leicht, dass durch

$$\mathcal{CL}(\Psi) = \sum_{|I|=|J|}^{dfn} (-1)^{\frac{|I| \cdot (|I|-1)}{2}} \mathcal{CL}(\Psi_{I,J})$$

ein Morphismus von Komplexen (von Hodgestrukturen)

$$\mathcal{CL}(\Psi) \in \bigoplus_p \text{Hom}_{C(HS)}(G_{p+2a}(X, \cup_i Y_i) \otimes \mathbb{Q}(a), G_{p+2b}(V, \cup_j W_j) \otimes \mathbb{Q}(b))$$

gegeben ist. Nach Übergang zur Kohomologie erhält man nach (7.1.2.6) einen Morphismus von Hodgestrukturen

$$\begin{aligned} \mathcal{CL}(\Psi) &: \bigoplus_p \bigoplus_j \text{Gr}_p^W H^j(X^a - \cup_i Y_i^a, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}(a) \\ &\rightarrow \bigoplus_p \bigoplus_i \text{Gr}_p^W H^i(V^a - \cup_j W_j^a, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}(b). \end{aligned}$$

Da die Komposition von Korrespondenzen unter \mathcal{CL} in die Komposition von Morphismen von Hodgestrukturen übergeht, wie man an (7.1.3.1) sieht, haben wir folgende Proposition.

Proposition 7.1.2. *Es ist*

$$\begin{aligned} \mathcal{CL} &: AMe \rightarrow (\text{reine Hodgestrukturen}/\mathbb{Q}) \\ (X(a), \cup_i Y_i) &\mapsto \bigoplus_p \bigoplus_j \text{Gr}_p^W H^j(X^a - \cup_i Y_i^a, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}(a) \\ \Psi &\mapsto \mathcal{CL}(\Psi) \end{aligned}$$

ein Funktor.

7.2. Kompatibilitäten.

7.2.1. Man kann den Zusammenhang zwischen den „ $\mathcal{M}e$ -Kategorien“ und der Hodgetheorie durch das Diagramm von Funktoren

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{M}e & \longrightarrow & A\mathcal{M}e \\
 & \overset{?}{\dashrightarrow} & \downarrow \text{?} & & \downarrow \mathcal{C}\mathcal{L} \\
 \text{(glatte quasiproj. Sch./}\mathbb{C}\text{)} & & \text{(gem. Hodgestr.)} & \xrightarrow{\oplus_p \text{Gr}_p^W} & \text{(reine Hodgestr.)}
 \end{array}$$

darstellen, dabei wird die Existenz der gepunkteten Pfeile in dieser Arbeit nicht behandelt. Man kann bei diesem Diagramm, ohne die gepunkteten Pfeile auszuarbeiten, nicht nach Kommutativität fragen. Jedoch bilden, wie wir zeigen werden, natürliche Morphismen in $\mathcal{M}e$, assoziiert zu offenen Immersionen, und der in Abschnitt (6) konstruierte Morphismus, assoziiert zu einer abgeschlossenen Immersion, auf die entsprechenden Morphismen von reinen Hodgestrukturen (wir kontrollieren nur die graduierten Anteile zur Gewichtsfiltrierung).

7.2.2. *Offene Immersionen.* Sei $X; Y_1, \dots, Y_r$ eine Konstellation und q eine Zahl mit $1 \leq q \leq r$.

Durch $Y_I \xleftarrow{=} Y_I \xrightarrow{=} Y_I$, für alle $I \in \mathfrak{P}_q$ (Definition A.1), haben wir einen Morphismus $\langle X, \cup_{i=1}^q Y_i \rangle \rightarrow \langle X, \cup_i Y_i \rangle$ in $C_b(\mathcal{M})$, und das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \langle X, \cup_{i=1}^q Y_i \rangle & \longrightarrow & \langle X, \cup_i Y_i \rangle \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X - \cup_{i=1}^q Y_i & \longrightarrow & X - \cup_{i=1}^r Y_i,
 \end{array}$$

mit vertikalen Pfeilen den Einschränkungsmorphismen (3.4.1.1), kommutiert.

Ist X projektiv, so erhalten wir einen Morphismus $(X, \cup_{i=1}^q Y_i) \rightarrow (X, \cup_i Y_i)$ in $\mathcal{M}e$ (4.2.4), der von dem Zykel $\Psi = \sum_{I \in \mathfrak{P}_q} (-1)^{\frac{|I| \cdot (|I|-1)}{2}} \Delta_{Y_I}$ dargestellt wird. Nach Übergang zu den höheren Chowgruppen (4.3.3) liefert Ψ den Einschränkungsmorphismus zur offenen Immersion $X - \cup_{i=1}^r Y_i \rightarrow X - \cup_{i=1}^q Y_i$.

Lemma 7.2.1. *Es ist $\mathcal{C}\mathcal{L}(\Psi)$ von dem Einschränkungsmorphismus $H^*(X^a - \cup_{i=1}^q Y_i^a, \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(X^a - \cup_{i=1}^r Y_i^a, \mathbb{Q})$, durch Übergang zu den Graduierten, induziert.*

Beweis. Wir bezeichnen $U' = X - \cup_{i=1}^q Y_i, U = X - \cup_{i=1}^r Y_i$ und j', j die offenen Immersionen nach X . Wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} j_! \mathbb{C}_U & \longrightarrow & \text{Ass} \left[\Omega_{X^a}^\bullet \rightarrow \bigoplus_{i=1}^r \Omega_{Y_i^a}^\bullet \rightarrow \dots \right] \\ \downarrow & & \downarrow \text{Projektion} \\ j'_! \mathbb{C}_{U'} & \longrightarrow & \text{Ass} \left[\Omega_{X^a}^\bullet \rightarrow \bigoplus_{i=1}^q \Omega_{Y_i^a}^\bullet \rightarrow \dots \right], \end{array}$$

und auf den E_1 -Termen der Gewichtsfiltrierung gibt der rechte vertikale Pfeil die Projektion

$$\bigoplus_I H^*(Y_I, \mathbb{C}) \rightarrow \bigoplus_{I \in \mathfrak{P}_q} H^*(Y_I, \mathbb{C}).$$

Durch dualisieren folgt unsere Behauptung. \square

7.2.3. Abgeschlossene Immersionen. Wir erinnern an die Situation und Notation aus (6.0.6). Wir haben eine Konstellation $X; Y_1, \dots, Y_r$ projektiver Schemata, und ein glattes Unterschema $Z \subset X$, so dass alle Durchschnitte $Z \times_X Y_I$ glatt sind und $Z - \cup_i Y_i$ dicht in Z ist. In Abschnitt (6) haben wir einen Morphismus $\Phi : (X, \cup_i Y_i) \rightarrow (Z, \cup_i Y_i^Z)$ in $\mathcal{M}e$ konstruiert, der den Pullbackmorphismus $\text{CH}^*(X - \cup_i Y_i, ***) \rightarrow \text{CH}^*(Z - \cup_i Y_i^Z, ***)$ induziert. Das Bild Φ' von Φ in $\mathcal{A}\mathcal{M}e$ haben wir explizit berechnet (6.3.1).

Proposition 7.2.1. *Der von der abgeschlossenen Immersion $Z - \cup_i Y_i^Z \subset X - \cup_i Y_i$ durch Hodgetheorie gegebene Morphismus $\bigoplus_p \text{Gr}_p^W H^*(X - \cup_i Y_i, \mathbb{Q}) \rightarrow \bigoplus_p \text{Gr}_p^W H^*(Z - \cup_i Y_i^Z, \mathbb{Q})$ entspricht $\mathcal{C}\mathcal{L}(\Phi')$.*

Beweis. Sei $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ die Aufblasung mit Zentrum Y_r , wie in (6.2.2), und

$$\tau : (\tilde{X}, \cup_{i=1}^{r-1} \tilde{Y}_i \cup E) \xrightarrow{\cong} (X, \cup_i Y_i)$$

der natürliche Isomorphismus (Lemma 6.2.2). Man sieht aus dem Diagramm (7.1.2.4), dass $\mathcal{C}\mathcal{L}(\tau) = id$.

Nach Konstruktion von Φ' in Abschnitt (6.2) haben wir ein kommutatives Diagramm ($d_0 = \dim Z$)

$$\begin{array}{ccc} (X_{d_0}, \cup_{i=1}^r (Y_i)_{d_0} \cup_{k=1}^{d_0} E_k) & \xrightarrow{\Xi} & (Z_{d_0}, \cup_{k=1}^{d_0} E_k^Z) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (X, \cup_i Y_i) & \xrightarrow{\Phi'} & (Z, \cup_i Y_i^Z). \end{array}$$

Da die vertikalen Pfeile unter $\mathcal{C}\mathcal{L}$ auf die Identität abbilden, genügt es $\mathcal{C}\mathcal{L}(\Xi)$ zu behandeln. Anhand der expliziten Darstellung von Ξ aus (6.2.4.1) sieht man, dass der zu Ξ assoziierte Morphismus

$$G_p(X_{d_0}, \cup_{i=1}^r (Y_i)_{d_0} \cup_{k=1}^{d_0} E_k) \rightarrow G_p(Z_{d_0}, \cup_{k=1}^{d_0} E_k^Z)$$

aus Abschnitt (7.1) durch Pullback

$$H^{p-2c}(E_{k_0} \cap \dots \cap E_{k_l}, \mathbb{Q})(-c) \rightarrow H^{p-2c}(E_{k_0}^Z \cap \dots \cap E_{k_l}^Z, \mathbb{Q})(-c),$$

mit $c = \text{codim } E_{k_0} \cap \dots \cap E_{k_l} = \text{codim } E_{k_0}^Z \cap \dots \cap E_{k_l}^Z$, gegeben ist. Auf den anderen Summanden ist er trivial, da $(Y_i)_{d_0} \cap Z_{d_0} = \emptyset$ für alle i . Wir erinnern daran, dass $\sum_{k=1}^{d_0} E_k$ (bzw. $\sum_{k=1}^{d_0} E_k^Z$) ein Divisor mit normalen Kreuzungen auf X_{d_0} (bzw. Z_{d_0}) ist (Proposition 6.1.2).

Zur Vereinfachung der Notation behandeln wir ab jetzt die Konstellation $X; Y_1, \dots, Y_q, Y_{q+1}, \dots, Y_r$ und ein glattes Unterschema $Z \subset X$, mit:

- (1) es ist $\sum_{i \leq q} Y_i$ (bzw. $\sum_{i \leq q} Y_i^Z$) ein Divisor mit normalen Kreuzungen auf X (bzw. Z),
- (2) es ist $Y_i \cap Z = \emptyset$ für alle $i > q$.

Wir haben $\Xi : (X, \cup_i Y_i) \rightarrow (Z, \cup_{i \leq q} Y_i^Z)$ wie oben und zu zeigen, dass $\mathcal{CL}(\Xi)$ der Pullbackmorphismus zur Immersion $Z - \cup_{i \leq q} Y_i^Z \subset X - \cup_i Y_i$ ist. Dabei ist $\mathcal{CL}(\Xi)$ auf G_p durch

$$H^{p-2c_I}(Y_I, \mathbb{Q})(-c_I) \xrightarrow{\text{Pullback}} H^{p-2c_I}(Y_I^Z, \mathbb{Q})(-c_I),$$

für $I \in \mathfrak{P}_q$, und sonst Null, gegeben.

Wir modifizieren die Konstellation $X; Y_1, \dots, Y_r$ wie folgt.

Sei $\mathcal{A} = \mathcal{A}(X, \cup_i Y_i)$ (vgl. (6.1.1.1)) und wir definieren $d : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{N}_{\geq 0}$ durch

$$d(A) = \begin{cases} \dim A & \text{falls } A \subset \cup_{i > q} Y_i, \\ \dim A + \dim \cup_{i > q} Y_i + 1 & \text{falls } A \not\subset \cup_{i > q} Y_i. \end{cases}$$

Für $e := \dim \cup_{i > q} Y_i$ betrachten wir die Modifikation

$$X_e; (Y_1)_e, \dots, (Y_q)_e, E_1, \dots, E_e$$

aus Abschnitt (6.2.3) zu (\mathcal{A}, d) , man beachte $(Y_i)_e = \emptyset$ für $i > q$. Wir haben

$$(X_e, \cup_{i=1}^q (Y_i)_e \cup_{k=1}^e E_k) \rightarrow (X, \cup_i Y_i) \xrightarrow{\Xi} (Z, \cup_{i \leq q} Y_i^Z),$$

und da die Zentren der Aufblasungen von Z disjunkt sind ist dies der Morphismus assoziiert zu $Z \subset X_e$. Wir können deshalb

$(X_e, \cup_{i=1}^q (Y_i)_e \cup_{k=1}^e E_k)$ statt $(X, \cup_i Y_i)$ behandeln.

Aus Proposition (6.1.2) folgt, dass $\sum_{i=1}^q (Y_i)_e + \sum_{k=1}^e E_k$ ein Divisor mit normalen Kreuzungen ist. Wir setzen $D_1 = \sum_{i=1}^q (Y_i)_e, D_2 = \sum_{k=1}^e E_k, D_1^Z = \sum_{i=1}^q Y_i^Z$ (es ist $E_k \cap Z = \emptyset$) und betrachten

$$\Omega_{X_e}^{\bullet}(\log D_1 + D_2) \rightarrow \Omega_{Z^a}^{\bullet}(\log D_1^Z)$$

(Pullback von Differentialformen). Man hat offensichtlich das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Gr}_{p-i}^W \Omega_{X_e^a}^i(\log D_1 + D_2) & \longrightarrow & \mathrm{Gr}_{p-i}^W \Omega_{Z^a}^i(\log D_1^Z) \\
\downarrow \text{Res} & & \downarrow \text{Res} \\
\bigoplus_{\substack{|I|=p-i \\ I \in \mathfrak{P}_q}} \Omega_{(Y_I^a)_e}^{2i-p} & \xrightarrow{\text{Pullback}} & \bigoplus_{\substack{|I|=p-i \\ I \in \mathfrak{P}_q}} \Omega_{Y_I^{Z,a}}^{2i-p}
\end{array}$$

und auf den ${}^W E_1$ -Termen zur Spektralsequenz ${}^W E_1^{i-p,p} \Rightarrow H^i$ gibt das $\mathcal{C}\mathcal{L}(\Xi)$ (Bemerkung 7.1). \square

7.3. Der graduierte Kohomologiering.

7.3.1. Für U quasiprojektiv und glatt ist $\bigoplus_j \bigoplus_p \mathrm{Gr}_p^W H^j(U^a, \mathbb{Q})$ via

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Gr}_{p_1}^W H^{i_1}(U, \mathbb{Q}) \otimes \mathrm{Gr}_{p_2}^W H^{i_2}(U, \mathbb{Q}) & \xrightarrow{\text{Äußeres Produkt}} & \mathrm{Gr}_{p_1+p_2}^W H^{i_1+i_2}(U \times U, \mathbb{Q}) \\
& \xrightarrow{\text{Pullback auf die Diagonale}} & \mathrm{Gr}_{p_1+p_2}^W H^{i_1+i_2}(U, \mathbb{Q})
\end{array}$$

ein Ring. Wir beantworten hier, wie die Multiplikation bzgl. des Isomorphismus (7.1.2.6) aussieht (Satz 7.3.1).

7.3.2. *Äußeres Produkt.* Für Gewichte p_1, p_2 haben wir via der Künneth-Isomorphismen

$$G_{p_1}(X, \cup_i Y_i) \otimes_{\mathbb{Q}} G_{p_2}(V, \cup_j W_j) \rightarrow G_{p_1+p_2}(X \times V, \cup_i Y_i \times V \cup_j X \times W_j), \quad (7.3.2.1)$$

und mit dem Isomorphismus (7.1.2.6) erhält man

$$\mathrm{Gr}_{p_1}^W H^{i_1}(U^a, \mathbb{Q}) \otimes \mathrm{Gr}_{p_2}^W H^{i_2}(T^a, \mathbb{Q}) \rightarrow \mathrm{Gr}_{p_1+p_2}^W H^{i_1+i_2}(U^a \times T^a, \mathbb{Q}).$$

Dies ist bis auf das Vorzeichen $(-1)^{p_1 \cdot i_2}$ das Äußere Produkt. Das sieht man wie folgt ein. Wir setzen $j_1 : U \rightarrow X, j_2 : T \rightarrow V$ für die offenen Immersionen. Wir haben das folgende kommutative Diagramm von Quasiisomorphismen von Garben auf $X \times V$:

$$\begin{array}{ccc}
j_{1!} \mathbb{C}_{U^a} \boxtimes j_{2!} \mathbb{C}_{T^a} & \longrightarrow & \mathcal{E}\langle X, \cup_i Y_i \rangle \boxtimes \mathcal{E}\langle V, \cup_j W_j \rangle \\
\downarrow = & & \downarrow \\
(j_1 \times j_2)! \mathbb{C}_{U^a \times T^a} & \longrightarrow & \mathcal{E}\langle X \times V, \cup_i Y_i \times V \cup_j X \times W_j \rangle,
\end{array}$$

wobei der rechte vertikale Pfeil durch

$$\omega_1 \boxtimes \omega_2 \mapsto (-1)^{\deg(\omega_1) \cdot |J|} \pi_1^* \omega_1 \wedge \pi_2^* \omega_2,$$

für $\omega_1 \in \mathcal{E}_{Y_i}^{\bullet, \bullet}$ und $\omega_2 \in \mathcal{E}_{W_j}^{\bullet, \bullet}$, gegeben ist (π_1, π_2 die Projektionen). Nach Übergang zur Spektralsequenz und dualisieren sieht man das Vorzeichen ein.

7.3.3.

Satz 7.3.1. Sei $X; Y_1, \dots, Y_r$ eine Konstellation projektiver Schemata und $U := X - \cup_i Y_i$. Die Multiplikation

$$\mathrm{Gr}_{p_1}^W H^{i_1}(U, \mathbb{Q}) \otimes \mathrm{Gr}_{p_2}^W H^{i_2}(U, \mathbb{Q}) \rightarrow \mathrm{Gr}_{p_1+p_2}^W H^{i_1+i_2}(U, \mathbb{Q})$$

hat bzgl. des Isomorphismus (7.1.2.6) die Form

$$H_{p_1-i_1} G_{p_1}(X, \cup_i Y_i) \otimes H_{p_2-i_2} G_{p_2}(X, \cup_i Y_i) \rightarrow H_{p_1+p_2-i_1-i_2} G_{p_1+p_2}(X, \cup_i Y_i);$$

$$(\alpha_I)_I \otimes (\beta_J)_J \mapsto$$

$$\sum_{\substack{I, J \\ I \cap J = \emptyset}} (-1)^{p_1 \cdot i_2} \mathrm{sgn}(I, J) c_{top} \left(\frac{N_{Y_I/X} |_{Y_I \cap Y_J} \oplus N_{Y_J/X} |_{Y_I \cap Y_J}}{N_{Y_I \cap Y_J}} \right) i_{I, J}^*(\alpha_I) \wedge j_{I, J}^*(\beta_J),$$

wobei $i_{I, J} : Y_I \cap Y_J \rightarrow Y_I$ und $j_{I, J} : Y_I \cap Y_J \rightarrow Y_J$ die Inklusionen sind, $N_{?/X}$ die Normalenbündel bezeichnet, und das Vorzeichen sgn aus Definition 6.1 ist.

Beweis. Aus Abschnitt (7.3.2) wissen wir, dass das äußere Produkt durch $\alpha_I \otimes \beta_J \mapsto (-1)^{p_1 \cdot i_2} \pi_1^* \alpha_I \wedge \pi_2^* \beta_J$ mit $\pi_1 : Y_I \times Y_J \rightarrow Y_I$ bzw. $\pi_2 : Y_I \times Y_J \rightarrow Y_J$ gegeben ist.

Nach Proposition 7.2.1 ist der Pullback auf die Diagonale durch $\mathcal{C}\mathcal{L}(\Phi')$ gegeben, wobei wir Φ' in Abschnitt (6.4.1) berechnet haben:

$$\Phi' = \sum_{\substack{I, J \\ I \cap J = \emptyset}} \mathrm{sgn}(I, J) \epsilon(|I| + |J|) \left(Y_I \times Y_J \leftarrow \left(Y_I \cap Y_J, c_{top} \left(\frac{N_{Y_I/X} |_{Y_I \cap Y_J} \oplus N_{Y_J/X} |_{Y_I \cap Y_J}}{N_{Y_I \cap Y_J/X}} \right) \right) \rightarrow Y_I \cap Y_J \right).$$

Das zeigt die Behauptung. \square

Bemerkung 7.2. Ist $\sum_i Y_i$ ein Divisor mit normalen Kreuzungen in X , dann kann man die Aussage von Satz 7.3.1 sehr leicht aus der Definition der Hodgestruktur mittels Log-Komplex folgern.

7.4. Hodgetheorie von Konstellationen affiner Räume.

7.4.1. *Additive Zerlegung.* Sei $X^o; Y_1^o, \dots, Y_r^o$ eine Konstellation affiner Räume, wie in (5.2.1), und $X; Y_1, \dots, Y_r$ die Kompaktifizierung im projektiven Raum (Y_r die Hyperebene im Unendlichen). Wir setzen $\mathcal{A} = \mathcal{A}(X^o, \cup_i^{r-1} Y_i^o)$, wie in (5.2.1), und $U := X^o - \cup_i^{r-1} Y_i^o = X - \cup_i^r Y_i$.

Es ist eine additive Zerlegung der Kohomologie

$$H^*(U^a, \mathbb{Q}) \cong \bigoplus_{A \in \mathcal{A}} h_A^* \quad (7.4.1.1)$$

bekannt ([GM],[DGM]). Man hat diese Zerlegung auch in ganzen Koeffizienten und eine analog konstruierte Zerlegung in der étalen Kohomologie (hier

ist $K = \overline{K}$ und K hat beliebige Charakteristik) mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}_l$. Wir werden nur mit rationalen Koeffizienten arbeiten.

Wie man weiß (7.4.1.1) eine Zerlegung von $H^*(U^a, \mathbb{Q})$ als Hodgestruktur und h_A^* rein, Hodge-Tate, vom Typ $(\text{codim}_{X^o} A, \text{codim}_{X^o} A)$ (siehe [DGM]).

Man kann h_A^* wie folgt konstruieren. Wir setzen $U_A := X^o - \bigcup_{A' \in \mathcal{A}; A' \supset A} A'$, es ist $U_A \supset U$ und U_A ist Komplement einer Konstellation affiner Räume. Wir könnten ohne Einschränkung annehmen, dass Y_1^o, \dots, Y_q^o diejenigen Y_i^o sind, die A enthalten, dann ist $U_A = X^o - \bigcup_{i=1}^q Y_i^o$.

Es ist $H^*(U_A^a, \mathbb{Q})$ rein, Hodge-Tate, und wir bezeichnen mit $h_{(p,p)}^*$ den (p, p) -Anteil. Der natürliche Morphismus $H^*(U_A^a, \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(U^a, \mathbb{Q})$ ist injektiv und man hat h_A^* als Bild von $h_{(\text{codim } A, \text{codim } A)}^*$.

7.4.2. Vergleich der additiven Zerlegungen. In Korollar (5.3.1) haben wir eine Zerlegung $id = \sum_{A \in \mathcal{A}} P_A$ der Identität von $(X, \cup_i Y_i)$ in $\mathcal{M}e$ konstruiert, die sich per Funktorialität

$$\mathcal{M}e \xrightarrow{(4.4.4)} A\mathcal{M}e \xrightarrow{(7.1)} (\text{reine Hodgestrukturen}),$$

wegen der Purität von $H^*(U^a, \mathbb{Q})$, auf $H^*(U^a, \mathbb{Q})$ überträgt.

Die explizite Darstellung von $P_A, A \in \mathcal{A}$, in $A\mathcal{M}e$ aus (5.3.5.2) zeigt, dass P_A über den $(\text{codim } A, \text{codim } A)$ -Anteil von $H^*(U^a, \mathbb{Q})$ faktorisiert. Jetzt ist nach Lemma 5.3.3 und Lemma 7.2.1 klar, dass $P_A, A \in \mathcal{A}$, die Projektoren zur Zerlegung (7.4.1.1) sind.

Wir können die Konstellation $X; Y_1, \dots, Y_r$ verwenden um $G_r^W H^*(U^a, \mathbb{Q})$ zu berechnen (7.1.2). Durch Restriktion haben wir offenbar für alle p einen Quasiisomorphismus

$$G_p(X, \cup_i Y_i) \xrightarrow{\text{quis}} G_p(X^o, \cup_{i=1}^{r-1} Y_i^o),$$

und aus $H^*(\mathbb{A}^n, \mathbb{Q}) = H^0(\mathbb{A}^n, \mathbb{Q}) = \mathbb{Z}$ sieht man

$$G_p(X, \cup_i Y_i) \xrightarrow{\text{quis}} G_p(X^o, \cup_{i=1}^{r-1} Y_i^o) \cong \bigoplus_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ 2 \cdot \text{codim } A = p}} E(A) \otimes \mathbb{Q}, \quad (7.4.2.1)$$

wobei wir graduierte \mathbb{Q} -Vektorräume via „Grad $p = \text{rein vom Typ } (p, p)$ “ als Hodgestrukturen auffassen (zu $E(A)$ siehe Definition (5.1)). Wie man leicht sieht, entspricht P_A unter diesem Isomorphismus der Identität auf $E(A)$. Deshalb haben wir die Darstellung:

$$h_A^i \cong H_{p-i} E(A)_{\mathbb{Q}}. \quad (7.4.2.2)$$

Sei $V^o; W_1^o, \dots, W_{s-1}^o$ eine weitere Konstellation affiner Räume und $T := V^o - \cup_i W_i^o$. Wie man aus (5.3.5.2) sofort sieht, kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\mathcal{M}e}((X, \cup_i Y_i), (V, \cup_j W_j)) & \xrightarrow{(7.1)} & \mathrm{Hom}_{HS}(H^*(U^a, \mathbb{Q}), H^*(T^a, \mathbb{Q})) \\
\downarrow (5.3.5.1) & & \downarrow (7.4.1.1) \\
\mathrm{Hom}_{K_i(\mathrm{ga}G)} \left(\bigoplus_{A_1 \in \mathcal{A}_1} E(A_1), \bigoplus_{A_2 \in \mathcal{A}_2} E(A_2) \right) & \longrightarrow & \mathrm{Hom} \left(\bigoplus_{A_1 \in \mathcal{A}_1} h_{A_1}^*, \bigoplus_{A_2 \in \mathcal{A}_2} h_{A_2}^* \right), \\
& & (7.4.2.3)
\end{array}$$

wobei der rechte untere Pfeil von (7.4.2.2) kommt. Nach Übergang zu rationalen Koeffizienten auf der linken Seite sind alle Pfeile Isomorphismen.

7.4.3. Kohomologiering von Komplementen affiner Konstellationen.

Sind $X^o; Y_1^o, \dots, Y_{r-1}^o$ und $V^o; W_1^o, \dots, W_{s-1}^o$ Konstellationen affiner Räume und $\mathcal{A}_1 := \mathcal{A}(X^o, \cup_i Y_i^o), \mathcal{A}_2 := \mathcal{A}(V^o, \cup_j W_j^o)$, dann hat man

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 &\xrightarrow{\cong} \mathcal{A}(X^o \times V^o; \cup_i Y_i^o \times V^o \cup_j X^o \times W_j^o) \\
(A_1, A_2) &\mapsto A_1 \times A_2
\end{aligned}$$

und für alle $A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2$ einen natürlichen Isomorphismus

$$E(A_1) \otimes E(A_2) \xrightarrow{\cong} E(A_1 \times A_2). \quad (7.4.3.1)$$

Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
G_{2p_1}(X, \cup_i Y_i) \otimes_{\mathbb{Q}} G_{2p_2}(V, \cup_j W_j) & \xrightarrow{(7.3.2.1)} & G_{2(p_1+p_2)}(X \times V, \cup_i Y_i \times V \cup_j X \times W_j) \\
\downarrow (7.4.2.1) & & \downarrow (7.4.2.1) \\
\bigoplus_{\substack{A_1 \in \mathcal{A}_1 \\ \mathrm{cd} A_1 = p_1}} E(A_1)_{\mathbb{Q}} \otimes \bigoplus_{\substack{A_2 \in \mathcal{A}_2 \\ \mathrm{cd} A_2 = p_2}} E(A_2)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{(7.4.3.1)} & \bigoplus_{\substack{(A_1, A_2) \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \\ \mathrm{codim} A_i = p_i}} E(A_1 \times A_2)_{\mathbb{Q}}
\end{array}$$

ist offenbar kommutativ und wir haben somit folgende Interpretation des Äußeren Produktes

$$\begin{array}{ccc}
h_{A_1}^{i_1} \otimes h_{A_2}^{i_2} & \xrightarrow{\text{Äußeres-Produkt}} & h_{A_1 \times A_2}^{i_1+i_2} \\
\downarrow (7.4.2.2) & & \downarrow (7.4.2.2) \\
H_{2\mathrm{cd} A_1 - i_1} E(A_1)_{\mathbb{Q}} \otimes H_{2\mathrm{cd} A_2 - i_2} E(A_2)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{(7.4.3.1)} & H_{2\mathrm{cd} A_1 \times A_2 - i_1 - i_2} E(A_1 \times A_2)_{\mathbb{Q}}.
\end{array}$$

Speziell für $V^o = X^o, W_i^o = Y_i^o$, für alle i , zeigt dieses Diagramm, zusammen mit dem kommutativen Diagramm (7.4.2.3) und Proposition 7.2.1, dass die Multiplikation im Kohomologiering durch

$$\begin{array}{ccc}
h_{A_1}^{i_1} \otimes h_{A_2}^{i_2} [d]^{-} & \xrightarrow{(7.4.2.2)} & h_{A_1 \cap A_2}^{i_1+i_2} \\
& & \downarrow (7.4.2.2) \\
H_{2\mathrm{cd} A_1 - i_1} E(A_1)_{\mathbb{Q}} \otimes H_{2\mathrm{cd} A_2 - i_2} E(A_2)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\bar{\Psi}_{A_1, A_2}} & H_{2\mathrm{cd}(A_1 \cap A_2) - i_1 - i_2} E(A_1 \cap A_2)_{\mathbb{Q}},
\end{array}$$

mit $\bar{\Psi}_{A_1, A_2}$ aus Abschnitt (6.4.4), gegeben ist.

8. VERMUTUNGEN ZU REALISIERUNGEN

8.1. Additive Zerlegung.

8.1.1. *Lokalisierungssequenz.* Sei $X^o; Y_1^o, \dots, Y_{r-1}^o$ eine Konstellation affiner Räume und $X; Y_1, \dots, Y_r$ die Kompaktifizierung im projektiven Raum (wie in (5.2.1)). Wir setzen $U := X - \cup_i Y_i$ und $U' := X - \cup_{i>1} Y_i$, $V := Y_1 - \cup_{i>1} (Y_1 \cap Y_i)$, falls $r > 1$ ist. Wir wollen zur Abkürzung

$$\begin{aligned} X_\bullet &:= \langle X, \cup_i Y_i \rangle & X_\bullet^* &:= \langle X(\dim X), \cup_i Y_i \rangle^* \\ X'_\bullet &:= \langle X, \cup_{i=2}^r Y_i \rangle & X'^*_\bullet &:= \langle X(\dim X), \cup_{i=2}^r Y_i \rangle^* \\ Y_\bullet &:= \langle Y_1(-\text{codim}_X Y_1), \cup_{i=2}^r Y_1 \cap Y_i \rangle & Y_\bullet^* &:= \langle Y_1(\dim X), \cup_{i=2}^r Y_1 \cap Y_i \rangle^* \end{aligned}$$

schreiben.

Wir haben einen Morphismus von ausgezeichneten Dreiecken (siehe Abschnitt 2.7.4 und Satz 3.4.1)

$$\begin{array}{ccccccc} Z^*(Y_\bullet, **) & \xrightarrow{\iota} & Z^*(X'_\bullet, **) & \xrightarrow{j} & Z^*(X_\bullet, **) & \xrightarrow{\delta} & \dots & (8.1.1.1) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \\ Z^*(V, **) & \longrightarrow & Z^*(U', **) & \longrightarrow & Z^*(U, **) & \xrightarrow{+1} & \dots \end{array}$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &:= \mathcal{A}(X^o, \cup_i Y_i^o) \\ \mathcal{A}' &:= \mathcal{A}(X^o, \cup_{i>1} Y_i^o) \\ \mathcal{B} &:= \mathcal{A}(Y_1^o, \cup_{i>1} (Y_1^o \cap Y_i^o)) \end{aligned}$$

(siehe 6.1.1.1). Zur Definition von $E(A)$ (Definition 5.1) wird implizit eine Konstellation fixiert. Es sei im folgenden $E(A)$, bzw. $E(A')$ und $E(B)$, für $A \in \mathcal{A}$, bzw. $A' \in \mathcal{A}'$ und $B \in \mathcal{B}$, bzgl. der Konstellation $X^o; Y_1^o, \dots, Y_{r-1}^o$, bzw. $X^o; Y_2^o, \dots, Y_{r-1}^o$ und $Y_1^o; (Y_1^o \cap Y_2^o), \dots, (Y_1^o \cap Y_{r-1}^o)$, definiert.

Wir haben einen Morphismus von Komplexen graduerter abelscher Gruppen

$$\tau : \bigoplus_{B \in \mathcal{B}} E(B)(-d) \rightarrow \bigoplus_{A' \in \mathcal{A}'} E(A')$$

gegeben durch

$$\begin{aligned} \tau_I &: \mathbb{Z}_I(-\text{codim}_{Y_1^o}(Y_1^o \cap Y_I^o) - d) \rightarrow \mathbb{Z}_I(-\text{codim}_{X^o} Y_I^o), \quad I \in \mathfrak{P}_{r-1}, 1 \notin I, \\ \tau_I &= \begin{cases} 0 & \text{falls } Y_1^o \cap Y_I^o \neq Y_I^o \\ id & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Offenbar ist

$$\bigoplus_{A \in \mathcal{A}} E(A) = \text{cone}(\tau)$$

und wir haben ein ausgezeichnetes Dreieck

$$\bigoplus_{B \in \mathcal{B}} E(B)(-d) \xrightarrow{\tau} \bigoplus_{A' \in \mathcal{A}'} E(A') \xrightarrow{\lambda} \bigoplus_{A \in \mathcal{A}} E(A) \xrightarrow{\mu} \dots \quad (8.1.1.2)$$

Eine Wahl von Punkten $x_A, A \in \mathcal{A}$, in allgemeiner Lage gibt auch eine Wahl $x_{A'}, A' \in \mathcal{A}'$, und $x_B, B \in \mathcal{B}$, weil $\mathcal{B} \subset \mathcal{A} \supset \mathcal{A}'$ ist. Mit der Identifikation aus Korollar 5.2.1 haben wir aus der oberen Zeile von Diagramm (8.1.1.1) ein ausgezeichnetes Dreieck

$$\begin{aligned} \bigoplus_{B \in \mathcal{B}} E(B)(-d) \otimes Z^*(K, **) &\xrightarrow{\tilde{\iota}} \bigoplus_{A' \in \mathcal{A}'} E(A') \otimes Z^*(K, **) \xrightarrow{\tilde{j}} \bigoplus_{A \in \mathcal{A}} E(A) \otimes Z^*(K, **) \\ &\xrightarrow{\tilde{\delta}} \dots \quad (8.1.1.3) \end{aligned}$$

Proposition 8.1.1. *Das ausgezeichnete Dreieck (8.1.1.3) entsteht aus (8.1.1.2) durch $\otimes_{\mathbb{Z}} Z^*(K, **)$.*

Beweis. Wir schreiben ι, j, δ mit Hilfe von Abschnitt (4.2.4) als Elemente in $\text{CH}^0(Y_{\bullet}^* \times X'_{\bullet}, 0)$, $\text{CH}^0(X'_{\bullet} \times X_{\bullet}, 0)$, $\text{CH}^0(X_{\bullet}^* \times Y_{\bullet}[1], 0)$. Diese bezeichnen wir mit $\Phi(\iota), \Phi(j), \Phi(\delta)$:

$$\begin{aligned} \Phi(\iota) &= \sum_{I \in \mathfrak{P}_r, 1 \notin I} (-1)^{\frac{|I| \cdot (|I|-1)}{2}} \text{Bild} \left(Y_1 \cap Y_I \xrightarrow{(id, incl)} (Y_1 \cap Y_I) \times Y_I \right) \\ \Phi(j) &= \sum_{I \in \mathfrak{P}_r, 1 \notin I} (-1)^{\frac{|I| \cdot (|I|-1)}{2}} \Delta_{Y_I} \\ \Phi(\delta) &= \sum_{I \in \mathfrak{P}_r, 1 \in I} (-1)^{\frac{|I| \cdot (|I|-1)}{2}} \Delta_{Y_I}. \end{aligned}$$

Aus Abschnitt (5.3.3) wissen wir, dass $\tilde{\iota}, \tilde{j}$ und $\tilde{\delta}$ durch das Bild von $\Phi(\iota), \Phi(j)$ und $\Phi(\delta)$ unter (5.3.3.2) gegeben sind. Wie man sofort sieht, sind $\tau \otimes id, \lambda \otimes id$ und $\mu \otimes id$ die Bilder, was die Behauptung zeigt. \square

8.1.2. *Voraussetzungen an die Kohomologietheorie.* Wir brauchen einige Bedingungen an die Kohomologietheorie um die additive Zerlegung aus Korollar 5.2.1 auf diese Kohomologietheorie zu übertragen.

Wir fixieren einen Koeffizientenkörper F mit $\text{char} F = 0$. Es sei mit

$$H : (\text{glatte Varietäten}/K)^{opp} \rightarrow (\text{graduierte } F\text{-Vektorräume})$$

ein Funktor bezeichnet, der die monoidale Struktur erhält, d.h. wir haben funktorielle Künneth-Isomorphismen. Hier sind die glatten Varietäten bzgl. des Faserproduktes eine monoidale Kategorie und die graduierten Vektorräume bzgl. des Tensorproduktes. Wir setzen ferner voraus, dass

$$H(K) = H(\mathbb{A}^N) = F \quad \text{im Grad} = 0$$

für alle N . Desweiteren setzen wir voraus, dass zu jeder glatten, abgeschlossenen Untervarietät $Y \subset X$ von reiner Kodimension d eine *Lokalisierungssequenz*

$$H(Y)(-2d) \rightarrow H(X) \rightarrow H(X - Y) \xrightarrow{+1} H(Y)(-2d)$$

existiert.

Als letztes brauchen wir einen Realisierungsfunktor

$$R : \mathrm{CH}^p(U, q) \rightarrow H^{2p-q}(U),$$

funktoriell in U , kompatibel mit äußeren Produkten und der Lokalisierungssequenz.

Bemerkung 8.1. Es ist dem Autor nicht bekannt, ob eine der klassischen Kohomologietheorien die oben genannten Bedingungen erfüllt.

8.1.3.

Proposition 8.1.2. *Sei H wie in Abschnitt (8.1.2) und $U = X^o - \cup_i Y_i^o$ Komplement einer Konstellation von affinen Räumen. Es gilt*

$$H^i(U) \cong \bigoplus_{A \in \mathcal{A}} H_{2\mathrm{codim}A-i}(E(A)(\mathrm{codim}A) \otimes_{\mathbb{Z}} F). \quad (8.1.3.1)$$

Beweis. Zu $A \in \mathcal{A}$ haben wir via der Zerlegung aus Korollar (5.2.1):

$$E(A)(\mathrm{codim}A) \otimes_{\mathbb{Z}} Z^0(K, 0) \subset Z^{\mathrm{codim}A}(U, **), \quad (8.1.3.2)$$

und wir erhalten so

$$\begin{aligned} H_{2\mathrm{codim}A-i}(E(A)(\mathrm{codim}A) \otimes_{\mathbb{Z}} F) &\rightarrow \mathrm{CH}^{\mathrm{codim}A}(U, 2\mathrm{codim}A - i) \\ &\xrightarrow{\text{Realisierung}} H^i(U). \end{aligned} \quad (8.1.3.3)$$

Die Zerlegung aus Korollar (5.2.1) hängt von einer Wahl von Punkten x_A , $A \in \mathcal{A}$, in allgemeiner Lage ab, aus der „Transformationsformel“ in Korollar (5.4.1) folgt jedoch sofort, dass Abbildung (8.1.3.3) unabhängig von dieser Wahl ist.

Wir haben zu zeigen, dass die durch (8.1.3.3) gegebene Abbildung von rechts nach links in (8.1.3.1) ein Isomorphismus. Das beweisen wir per Induktion und Lokalisierungssequenzen. Für \mathbb{A}^N ist die Aussage trivial. Für $X^o; Y_1^o, \dots, Y_r^o$ können wir die Lokalisierungssequenz

$$\begin{aligned} \mathrm{CH}^*((Y_1^o - \cup_i (Y_1^o \cap Y_i^o))(-d), **) &\rightarrow \mathrm{CH}^*(X^o - \cup_{i>1} Y_i^o, **) \rightarrow \\ &\mathrm{CH}^*(X^o - \cup_i Y_i^o, **) \xrightarrow{+1} \dots \end{aligned}$$

benutzen. Sie induziert via Abbildung (8.1.3.2) wegen Proposition 8.1.1 eine lange exakte Sequenz der rechten Seiten von (8.1.3.1), und wegen Kompatibilität von H mit der Lokalisierungssequenz folgt die Behauptung. \square

8.2. Multiplikation. Es sei weiterhin $U = X^o - \cup_i Y_i^o$ Komplement einer Konstellation von affinen Räumen.

Leider brauchen wir für diesen Abschnitt eine weitere Bedingung an die Realisierungsabbildung $\text{CH}^k(K, 2k) \xrightarrow{R} H^0(K)$:

Bedingung 8.2.1. Die Realisierungsabbildung $\text{CH}^k(K, 2k) \xrightarrow{R} H^0(K)$ ist für alle $k > 0$ trivial.

Aus der Zerlegung aus Korollar 5.2.1 kann man den Quotient

$$Z^*(U, **) \xrightarrow{\text{quis}} \bigoplus_{A \in \mathcal{A}} E(A) \otimes Z^*(K, **) \xrightarrow{Z^*(K, **) \rightarrow Z^0(K, 0)} \bigoplus_{A \in \mathcal{A}} E(A) \quad (8.2.0.4)$$

bilden. Dieser hängt nicht, wie die Zerlegung aus Korollar 5.2.1, von der Wahl der Punkte $x_A, A \in \mathcal{A}$, in allgemeiner Lage ab, wie Korollar 5.4.1 zeigt.

In folgenden Lemma brauchen wir zum ersten mal, dass F ein Körper ist.

Lemma 8.2.1. Die Realisierungsabbildung $\text{CH}^p(U, q) \xrightarrow{R} H^{2p-q}(U)$ faktorisiert wie folgt

$$\begin{array}{ccc} \text{CH}^p(U, q) & \xrightarrow{R} & H^{2p-q}(U). \\ \downarrow (8.2.0.4) & \nearrow (8.1.3.3) & \\ \bigoplus_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ \text{codim } A=p}} H_q(E(A)) & & \end{array}$$

Beweis. Wir haben

$$H_q \left(\bigoplus_{A \in \mathcal{A}} \bigoplus_{k>0} E(A) \otimes Z^k(K, **) \right) \subset \text{CH}^*(U, q)$$

und müssen zeigen, dass die Komposition mit der Realisierung trivial ist. Nun ist

$$\begin{aligned} H_q \left(\bigoplus_{A \in \mathcal{A}} \bigoplus_{k>0} E(A) \otimes Z^k(K, **) \right) \otimes_{\mathbb{Z}} F &= \\ H_q \left(\bigoplus_{A \in \mathcal{A}} \bigoplus_{k>0} E(A) \otimes Z^k(K, **) \otimes_{\mathbb{Z}} F \right) &= \\ \bigoplus_{q_1+q_2=q} \bigoplus_{A \in \mathcal{A}} \bigoplus_{k>0} H_{q_1}(E(A)) \otimes_{\mathbb{Z}} \text{CH}^k(K, q_2) \otimes_{\mathbb{Z}} F, & \end{aligned}$$

und die Aussage folgt aus $H^i(K) = 0$ für $i > 0$ und der zusätzlichen Bedingung (8.2.1). \square

Wir erinnern daran, dass wir für $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \cap B \neq \emptyset$ und $\text{codim}A + \text{codim}B = \text{codim}(A \cap B)$ einen Morphismus

$$\text{mult}_{A,B} : E(A) \otimes E(B) \rightarrow E(A \cap B)$$

haben (5.6.5.2). Wir setzen $\text{mult}_{A,B} = 0$ falls $A \cap B = \emptyset$ oder $\text{codim}A + \text{codim}B \neq \text{codim}(A \cap B)$.

Nach den Überlegungen aus Abschnitt (6.4.5) haben wir für alle $A, B \in \mathcal{A}$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Z^*(U, **) \otimes Z^*(U, **) & \xrightarrow{\text{Multiplikation}} & Z^*(U, **) \\ \uparrow & & \downarrow \\ E(A) \otimes E(B) & \xrightarrow{\text{mult}_{A,B}} & E(A \cap B), \end{array} \quad (8.2.0.5)$$

wobei die vertikalen Pfeile von der additiven Zerlegung in Korollar (5.2.1) kommen.

Proposition 8.2.1. *Sei U Komplement einer Konstellation affiner Räume und H eine Kohomologietheorie, die die Bedingungen aus Abschnitt (8.1.2) und Bedingung (8.2.1) erfüllt. Dann ist unter dem Isomorphismus aus Proposition (8.1.2) die Multiplikation auf $H(U)$ durch*

$$\bigoplus_{A \in \mathcal{A}} H_{2\alpha-i}(E(A)(\alpha) \otimes_{\mathbb{Z}} F) \otimes_F \bigoplus_{B \in \mathcal{A}} H_{2\beta-i}(E(B)(\beta) \otimes_{\mathbb{Z}} F) \xrightarrow{\text{mult}_{A,B}} \bigoplus_{C \in \mathcal{A}} H_{2\gamma-i}(E(C)(\gamma) \otimes_{\mathbb{Z}} F)$$

($\alpha := \text{codim}A, \beta = \text{codim}B, \gamma := \text{codim}C$) gegeben.

Beweis. Wegen Lemma 8.2.1 genügt die grobe Beschreibung der Multiplikation im kommutativen Diagramm (8.2.0.5) für die Behauptung. \square

9. CHOWRING VON HYPEREBENENKOMPLEMENTEN

9.0.1. Es sei U Komplement von endlich vielen Hyperebenen Y_1^o, \dots, Y_r^o im affinen Raum \mathbb{A}^N . Wir zeigen, dass $\text{CH}^*(U, **)$ ein freier endlicher Modul über dem (höheren) Chowring des Grundkörpers, $\text{CH}^*(K, **)$, ist und wir geben eine Darstellung von $\text{CH}^*(U, **)$ als graduiert-kommutative Algebra über dem Chowring des Grundkörpers an.

9.1. Vorbereitung.

9.1.1. Wir betrachten einen beliebigen Körper K als Grundkörper. Für $N \geq 0$ und $r \geq 0$, sowie nichttriviale Elemente $H_0, H_1, H_2, \dots, H_r \in \Gamma(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(1))$ betrachten wir $U := \mathbb{P}^N - \cup_{i=0}^r V(H_i)$. Im folgenden werden wir mit der “ $\square = (\mathbb{P}^1 - \{1\}, \{\mathbb{P}^1 - \{1\}, \{\infty\}, \{0\}\}, 0)$ -Version” der höheren Chowgruppen arbeiten (siehe 3.1).

9.1.2. *Kodimension 1.* Für ein glattes quasiprojektives Schema $\pi : X \rightarrow \text{Spec}(K)$ über K haben wir nach Bloch, [Bl1], einen funktoriellen Isomorphismus von abelschen Gruppen

$$\mathbb{G}_m(X) \xrightarrow{\cong} \text{CH}^1(X, 1).$$

Zu $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X^*)$ betrachte den Morphismus $X \rightarrow \mathbb{P}^1$, $x \mapsto [f(x) : 1]$ und dessen Graph $\Gamma_f \subset X \times \mathbb{P}^1$. Die Einschränkung von Γ_f auf $X \times (\mathbb{P}^1 - \{1\})$ definiert eine Zykelklasse in $\text{CH}^1(X, 1)$. Auf diese Weise ist obiger Gruppenisomorphismus gegeben. Wir wollen die Zykelklasse zu $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X^*)$ mit $[f] \in \text{CH}^1(X, 1)$ bezeichnen.

Insbesondere haben wir für alle $a \in K^*$ eine Klasse $[a] \in \text{CH}^1(X, 1)$ entsprechend dem konstanten Morphismus $X \rightarrow \mathbb{G}_m$, $x \mapsto a$

9.1.3. *$\text{CH}^n(K, n)$ und Milnor- K -Theorie.* Wir haben einen Isomorphismus von abelschen Gruppen

$$K_n^{\text{M}} \xrightarrow{\cong} \text{CH}^n(K, n),$$

wobei $\{a_1, \dots, a_n\} \in K_n^{\text{M}}$ auf die Zykelklasse $[a_1] \cdots [a_n]$ in $\text{CH}^n(K, n)$ abgebildet wird (siehe [NeSu], [To]).

Aus der Milnor- K -Theorie sind einige Identitäten bekannt, die wir für $\text{CH}^n(K, n)$ nutzen wollen.

Lemma 9.1.1. *In Ring $\text{CH}^*(K, **)$ ist*

- (1) $[a]^2 + [a] \cdot [-1] = 0$ für alle $a \in K^*$,
- (2) $[a_1] \cdot [a_2] \cdots [a_n] = 0$ für alle $a_k \in K^*$ mit $\sum_{k=1}^n a_k = 1$.

Beweis. [Mi] □

9.2. $\text{CH}^*(U, **)$ als $\text{CH}^*(K, **)$ -Modul.

9.2.1. Bezeichne für eine Menge $I = \{i_1, \dots, i_s\}$ mit $i_t \geq 1$

$$U_I = \mathbb{P}^N - \cup_{i \notin I} V(H_i).$$

Proposition 9.2.1. *Der $\text{CH}^*(K, **)$ -Modul $\text{CH}^*(U, **)$ ist frei und von endlichem Typ. Er wird erzeugt (im allgemeinen nicht frei erzeugt) von der Klasse $[U]$ und den Zykelklassen*

$$\{[f_1] \cdots [f_p] \mid f_k \in \mathcal{O}_U^*(U), p \geq 1\}.$$

Beweis. Wir führen Induktion über r und N .

Für $r = 0$ folgt die Behauptung aus dem Homotopie-Lemma

$\text{CH}^*(K, **) \xrightarrow{\cong} \text{CH}^*(\mathbb{A}^N, **)$ und für $N = 0$ ist die Behauptung trivial.

Wir betrachten die Varietät $U_{\{r\}}$ und deren Untervarietät $F = U_{\{r\}} - U = V(H_r) - \cup_{i=0}^{r-1} V(H_i)$. Die Behauptung gilt per Induktion für $U_{\{r\}}, F$.

Wir behaupten, dass die durch $i : F \rightarrow U_{\{r\}}$ induzierte Abbildung $i_* : \text{CH}^*(F, **) \rightarrow \text{CH}^*(U_{\{r\}}, **)$ trivial ist. In der Tat ist $i_* i^*$ die Multiplikation mit $i_* [F] \in \text{CH}^1(U_{\{r\}}, 0) = 0$ und $\text{CH}^*(F, **)$ wird per Induktion und wegen der Surjektivität von $\mathcal{O}_{U_{\{r\}}}^*(U_{\{r\}}) \rightarrow \mathcal{O}_F^*(F)$ durch $[F] = i_* [U]$ und den Klassen $i^*([f_1] \cdots [f_p]) = [i^*(f_1)] \cdots [i^*(f_p)]$ ($f_k \in \mathcal{O}_{U_{\{r\}}}^*(U_{\{r\}}); p \geq 1$) erzeugt. Somit ist i^* surjektiv und i_* trivial.

Die Lokalisationssequenz zu $(F, U_{\{r\}}, U)$ gibt nun die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \text{CH}^*(U_{\{r\}}, **) \rightarrow \text{CH}^*(U, **) \xrightarrow{\delta} \text{CH}^*(F, **) \rightarrow 0, \quad (9.2.1.1)$$

woraus sofort folgt, dass $\text{CH}^*(U, **)$ ein freier Modul von endlichem Typ ist.

Sei nun $f \in \mathcal{O}_U^*(U)$ mit einfacher Nullstelle entlang $V(H_r)$ gewählt. Für $f_1, \dots, f_p \in \mathcal{O}_{U_{\{r\}}}^*(U_{\{r\}})$ rechnet man leicht nach, dass

$$\begin{aligned} \delta([f] \cdot [f_1] \cdots [f_p]) &= i^*([f_1] \cdots [f_p]), \\ \delta([f]) &= [F]. \end{aligned}$$

Aus (9.2.1.1) folgt jetzt sofort, dass $\text{CH}^*(U, **)$ von den Elementen $[f], [f] \cdot [f_1] \cdots [f_p], [f_1] \cdots [f_p], (f_1, \dots, f_p \in \mathcal{O}_{U_{\{r\}}}^*(U_{\{r\}}))$, als Algebra über $\text{CH}^*(K, **)$ erzeugt wird. \square

Bemerkung 9.1. Wie wir im Beweis von Proposition 9.2.1 gesehen haben spaltet für $i > 0$ die lange exakte Sequenz zu $(U_{\{i\}} - U, U_{\{i\}}, U)$ zur kurzen exakten Sequenz

$$0 \rightarrow \text{CH}^*(U_{\{i\}}, **) \rightarrow \text{CH}^*(U, **) \rightarrow \text{CH}^*(U_{\{i\}} - U, **) \rightarrow 0.$$

Wir werden dies noch im folgenden benutzen.

9.2.2. *Kriterium für die Trivialität einer Zykelklasse.*

Lemma 9.2.1. *Sei $\pi : U \rightarrow \text{Spec}(K)$ der Strukturmorphismus. Eine Zykelklasse $Z \in \text{CH}^*(U, **)$ liegt genau dann in $\pi^*(\text{CH}^*(K, **))$, wenn Z unter dem Randmorphismus*

$$\text{CH}^*(U, **) \xrightarrow{\delta_i} \text{CH}^*(U_{\{i\}} - U, **)$$

für alle $1 \leq i \leq r$ auf Null abgebildet wird.

Beweis. Da Zykelklassen aus $\pi^*(\text{CH}^*(K, **))$ Einschränkung von Zykelklassen aus $\text{CH}^*(U_{\{i\}}, **)$ sind, ist die eine Richtung der Äquivalenz klar.

Für die andere Richtung führen wir Induktion über r .

Der Fall $r = 0$ folgt aus dem Homotopie-Lemma.

Betrachte im allgemeinen Fall das folgende kommutative Diagramm, wo die horizontalen Morphismen Einschränkungsabbildungen auf eine offene Untervarietät sind und die vertikalen Morphismen Randabbildungen.

$$\begin{array}{ccc} \text{CH}^*(U_{\{r\}}, **) & \longrightarrow & \text{CH}^*(U, **) \\ \downarrow & & \downarrow \delta_i \\ \text{CH}^*(U_{\{i,r\}} - U_{\{r\}}, **) & \longrightarrow & \text{CH}^*(U_{\{i\}} - U, **) \end{array} \quad (*)$$

Nach Voraussetzung ist Z Restriktion einer Zykelklasse $Z' \in \text{CH}^*(U_{\{r\}}, **)$. Wir zeigen, dass Z' die Voraussetzungen für $U_{\{r\}}$ erfüllt. Dazu müssen wir zeigen, dass Z' via der linken vertikalen Abbildung aus (*) nach Null abbildet. Nach Bemerkung 9.1 ist die untere horizontale Abbildung injektiv und wegen $\delta_i(Z) = 0$ folgt die Aussage. Auf Z' angewendete Induktion zeigt beendet den Beweis. \square

9.3. Struktur von $\text{CH}^*(U, **)$ als Algebra.

9.3.1. *Notation und Rechnungen.* Seien $f_1, \dots, f_t \in \mathcal{O}_U^*(U)$ vorgegeben.

Für einen geordneten Multiindex $J = (j_1, j_2, \dots, j_d), j_1 < j_2 < \dots < j_d$, mit $j_k \in \{1, \dots, t\}$ setzen wir

$$[f_J] \stackrel{\text{dfn}}{=} [f_{j_1}] \cdot [f_{j_2}] \cdots [f_{j_d}]$$

Es sei $[f_\emptyset] = 1 \in \text{CH}^0(U, 0)$ gesetzt. Für zwei geordnete Multiindizes J, L bezeichnen wir mit $J + L$ die geordnete Verkettung von J und L und mit $J - L$ den geordneten Multiindex bestehend aus den Elementen aus J , die nicht in L enthalten sind.

Wir setze $T := (1, 2, \dots, t)$. Weiterhin definiere $\text{sgn}(J) := \text{sgn}(\pi)$, wobei

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & \dots & t-d & t-d+1 & \dots & t \\ l_1 & \dots & l_{t-d} & j_1 & \dots & j_d \end{pmatrix},$$

mit $l_1 < l_2 < \dots < l_{t-d}$ und $(l_1, \dots, l_{t-d}) + J = T$. Wir definieren nun in Abhängigkeit von den Klassen $[f_1], \dots, [f_t]$ das Element

$$R = \sum_{1 \leq k \leq t} (-1)^{t-k} \cdot [f_{T-\{k\}}] + \sum_{\substack{2 \leq d \leq t \\ J=(j_1, \dots, j_d) \\ j_1 < \dots < j_d}} [f_{T-J}] \cdot [-1]^{d-1} \quad (9.3.1.1)$$

in $\text{CH}^{t-1}(U, t-1)$. Man beachte, dass $[-1]$ ein 2-Torsionselement ist. Für $t = 2, 3$ stellt sich R wie folgt dar

$$\begin{aligned} t = 2 : \\ [f_1] - [f_2] + [-1] \\ t = 3 : \\ [f_1][f_2] - [f_1][f_3] + [f_2][f_3] + \sum_{k=1}^t [f_k] [-1] + [-1]^2. \end{aligned}$$

Ist $U = \text{Spec}(K)$ und f_1, \dots, f_t Einheiten von K , dann zeigt das folgende Lemma, dass R verschwindet, falls $\sum_{i=1}^t f_i = 0$.

Lemma 9.3.1. *Gilt $\sum_{i=1}^t \lambda_i = 0$ mit $\lambda_i \in K^*$, dann ist*

$$\sum_{k=1}^t (-1)^k \lambda_{T-(k)} + \sum_{s=2}^t \sum_{\substack{K=(k_1, \dots, k_s) \\ 1 \leq k_1 < \dots < k_s \leq t}} \lambda_{T-K} \cdot [-1]^{s-1} = 0,$$

in $\text{CH}^{t-1}(\text{Spec}(K), t-1)$.

Beweis. Zuerst rechnen wir ohne die Voraussetzung $\sum_{i=1}^t \lambda_i = 0$. Wir behaupten, dass

$$(*) \prod_{i=2}^t ([-1] + [\lambda_i] - [\lambda_1]) = (-1) \sum_{k=1}^t (-1)^k \lambda_{T-(k)} + \sum_{s=2}^t \sum_{\substack{K=(k_1, \dots, k_s) \\ 1 \leq k_1 < \dots < k_s \leq t}} \lambda_{T-K} \cdot [-1]^{s-1}.$$

Dazu führen wir Induktion über t , wobei die Aussage für $t = 2$ klar ist.

Nach Lemma 9.1.1 haben wir $[\lambda_1]^2 = [\lambda_1][-1]$ und man rechnet

$$\begin{aligned}
& - [\lambda_1] \cdot \left((-1) \sum_{k=1}^t (-1)^k \lambda_{T-(k)} + \sum_{s=2}^t \sum_{\substack{K=(k_1, \dots, k_s) \\ 1 \leq k_1 < \dots < k_s \leq t}} \lambda_{T-K} \cdot [-1]^{s-1} \right) \\
& = (-1) \lambda_T + \sum_{k=2}^t \lambda_{T-(k)} [-1] + \\
& + \sum_{s=2}^t \sum_{\substack{K=(k_1, \dots, k_s) \\ 1 \leq k_1 < \dots < k_s \leq t \\ 1 \in K}} \lambda_1 \lambda_{T-K} \cdot [-1]^{s-1} + \sum_{s=2}^t \sum_{\substack{K=(k_1, \dots, k_s) \\ 1 \leq k_1 < \dots < k_s \leq t \\ 1 \notin K}} \lambda_{T-K} \cdot [-1]^s \\
& = (-1) \lambda_T + \sum_{s=2}^t \sum_{\substack{K=(k_1, \dots, k_s) \\ 1 \leq k_1 < \dots < k_s \leq t \\ 1 \in K}} (\lambda_1 \lambda_{T-K} + \lambda_{T-K+(1)}) \cdot [-1]^{s-1} \\
& = (-1) \lambda_T,
\end{aligned}$$

wobei im vorletzten Schritt die Terme von $K + (1)$ und K zusammengefasst worden sind. Nun rechnen wir

$$\begin{aligned}
& [\lambda_{t+1}] \cdot \left((-1) \sum_{k=1}^t (-1)^k \lambda_{T-(k)} + \sum_{s=2}^t \sum_{\substack{K=(k_1, \dots, k_s) \\ 1 \leq k_1 < \dots < k_s \leq t}} \lambda_{T-K} \cdot [-1]^{s-1} \right) \\
& = (-1) (-1)^{t-1} \sum_{k=1}^t (-1)^k \lambda_{T+(t+1)-(k)} + \\
& \sum_{s=2}^t \sum_{\substack{K=(k_1, \dots, k_s) \\ 1 \leq k_1 < \dots < k_s \leq t}} \lambda_{T+(t+1)-K} \cdot [-1]^{s-1} \\
& = (-1) (-1)^{t-1} \sum_{k=1}^t (-1)^k \lambda_{T+(t+1)-(k)} + \\
& \sum_{s=2}^{t+1} \sum_{\substack{K=(k_1, \dots, k_s) \\ 1 \leq k_1 < \dots < k_s \leq t+1 \\ t+1 \notin K}} \lambda_{T+(t+1)-K} \cdot [-1]^{s-1}.
\end{aligned}$$

Und

$$\begin{aligned}
& [-1] \cdot \left((-1) \sum_{k=1}^t (-1)^k \lambda_{T-(k)} + \sum_{s=2}^t \sum_{\substack{K=(k_1, \dots, k_s) \\ 1 \leq k_1 < \dots < k_s \leq t}} \lambda_{T-K} \cdot [-1]^{s-1} \right) \\
&= \sum_{k=1}^t \lambda_{T-(k)} [-1] + \sum_{s=2}^t \sum_{\substack{K=(k_1, \dots, k_s) \\ 1 \leq k_1 < \dots < k_s \leq t}} \lambda_{T-K} \cdot [-1]^s \\
&= \sum_{s=2}^{t+1} \sum_{\substack{K=(k_1, \dots, k_s) \\ 1 \leq k_1 < \dots < k_s \leq t+1 \\ t+1 \in K}} \lambda_{T+(t+1)-K} \cdot [-1]^{s-1}.
\end{aligned}$$

Die behauptete Identität für $t+1$ ergibt sich jetzt aus der für t durch ausmultiplizieren und obigen Rechnungen.

Nun ist $\sum_{i=2}^t \frac{-\lambda_i}{\lambda_1} = 1$ und nach Lemma 9.1.1 verschwindet die linke Seite von (*), was die Behauptung zeigt. \square

9.3.2. *Relationen.* Es seien weiterhin $f_1, \dots, f_t \in \mathcal{O}_U^*(U)$.

Proposition 9.3.1. *Sei $t \geq 2$ und $\sum_{k=1}^t f_k = 0$. Dann ist in der Notation aus 9.3.1*

$$R = 0. \quad (*)$$

Beweis. Wir führen Induktion über t . Der Fall $t = 2$ folgt aus 9.1.2. Sei nun $t > 2$.

1. Schritt: Der erste Schritt ist der universelle Fall. Wir betrachten den projektiven Raum \mathbb{P}^{t-1} eingebettet in \mathbb{P}^t (wir geben \mathbb{P}^t die homogenen Koordinaten x_0, x_1, \dots, x_t) durch $\mathbb{P}^{t-1} = V(x_1 + x_2 + \dots + x_t) \subset \mathbb{P}^t$ und als Hyperebenen die Restriktion von $V(x_0), V(x_1), \dots, V(x_t)$ auf \mathbb{P}^{t-1} , also $U = \mathbb{P}^{t-1} - \cup_{i=0}^t \mathbb{P}^{t-1} \cap V(x_i)$. Wir betrachten $f_k = x_k/x_0$ für $k = 1, \dots, t$. Man rechnet sofort nach, dass in der Notation aus Lemma 9.2.1

$$\delta_i(R(x_1/x_0, \dots, x_t/x_0)) = \pm R(x_1/x_0, \dots, \widehat{x_i/x_0}, \dots, x_t/x_0).$$

Per Induktion und Lemma 9.2.1 haben wir deshalb $R \in \pi^* \text{CH}^*(K, **)$.

Nun sei $K \neq \mathbb{F}_2$, dann existiert ein K -rationaler Punkt $i_x : \text{Spec}(K) \rightarrow U$ und wir haben $i_x^*(R) = 0$ nach Lemma 9.3.1, also $R = 0$.

Für $K = \mathbb{F}_2$ ist $R \in \pi^*(\text{CH}^{t-1}(\text{Spec}(\mathbb{F}_2), t-1)) = 0$ mit Hilfe von (9.1.3).

2. Schritt: Wir betrachten den allgemeinen Fall.

Die Elemente $f_1, f_2, \dots, f_t \in \mathcal{O}_U^*(U)$ definieren einen Morphismus in die Varietät aus Schritt 1. und die Behauptung folgt durch Pullback. \square

Korollar 9.3.1. *Für alle $f \in \mathcal{O}_U^*(U)$ ist*

$$[f]^2 + [-1] \cdot [f] = 0.$$

Beweis. Mit einem ähnlichen Argument wie in Proposition 9.3.1 sei ohne Einschränkung $U = \mathbb{P}^1 - \{0, \infty\}$.

Für einen Körper $K \neq \mathbb{F}_2$ gibt es Elemente $\lambda_1, \lambda_2 \in K^*$, so dass $\lambda_1 + \lambda_2 \in K^*$. Wir können dann Proposition 9.3.1 auf $f_1 = \lambda_1 f, f_2 = \lambda_2 f, f_3 = -(\lambda_1 + \lambda_2)f$ anwenden.

Sei nun $K = \mathbb{F}_2$. Wegen $\text{CH}^n(\text{Spec}(\mathbb{F}_2), n) = 0$ für alle $n \geq 1$ und Bemerkung 9.1 folgt $\text{CH}^n(U, n) = 0$ für alle $n \geq 2$. \square

9.3.3. *Darstellung von $\text{CH}^*(U, **)$ als Algebra.* Wir setzen

$$S \stackrel{\text{dfn}}{=} \text{CH}^*(K, **).$$

Bezeichne mit $S\{\mathcal{O}_U^*(U)\}$ die freie von $\mathcal{O}_U^*(U)$ über S erzeugte graduiert-kommutative Algebra. Zu $f \in \mathcal{O}_U^*(U)$ bezeichne mit (f) das Bild von f in $S\{\mathcal{O}_U^*(U)\}$, (f) hat Grad = 1.

Seien $f_1, \dots, f_t \in \mathcal{O}_U^*(U)$ gegeben. Für einen geordneten Multiindex $J = (j_1, j_2, \dots, j_d), j_1 < j_2 < \dots < j_d$, mit $j_k \in \{1, \dots, t\}$ definieren wir

$$(f_J) \stackrel{\text{dfn}}{=} (f_{j_1}) \cdot (f_{j_2}) \cdot \dots \cdot (f_{j_d}).$$

Wie oben setzen wir

$$R(f_1, \dots, f_t) \stackrel{\text{dfn}}{=} \sum_{1 \leq k \leq t} (-1)^{t-k} \cdot (f_{T-\{k\}}) + \sum_{\substack{2 \leq d \leq t \\ J=(j_1, \dots, j_d) \\ j_1 < \dots < j_d}} (f_{T-J}) \cdot [-1]^{d-1}$$

Zu U definiere das Ideal $I_U \subset S\{\mathcal{O}_U^*(U)\}$ erzeugt von den Elementen

$$(f) - [f], \quad \text{für } f \in K^* \subset \mathcal{O}_U^*(U), \quad (9.3.3.1)$$

$$R(f_1, \dots, f_t), \quad \text{für } f_k \in \mathcal{O}_U^*(U) \text{ und } \sum_{k=1}^t f_k = 0, \quad (9.3.3.2)$$

$$(f)^2 + [-1] \cdot (f), \quad \text{für } f \in \mathcal{O}_U^*(U). \quad (9.3.3.3)$$

Mit Hilfe von Proposition 9.3.1 und Korollar 9.3.1 erhalten wir einen Ringhomomorphismus

$$S\{\mathcal{O}_U^*(U)\}/I_U \rightarrow \text{CH}^*(U, **),$$

indem wir (f) nach $[f]$ abbilden.

Satz 9.3.1. *Der Morphismus*

$$S\{\mathcal{O}_U^*(U)\}/I_U \rightarrow \text{CH}(U)$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis. Wir bezeichnen mit $t_i, i = 0, 1, \dots, r$, die Einheit $t_i := H_i/H_0$ auf U (Abschnitt 9.1.1). Es sei $I'_U \subset I_U$ das Ideal erzeugt von den Elementen in (9.3.3.1), (9.3.3.3), sowie den Elementen aus (9.3.3.2) mit der zusätzlichen Bedingung:

$$f_k = \lambda_k t_{i_k} \quad \text{mit } \lambda_k \in K^*, 0 \leq i_k \leq r, \text{ für alle } k.$$

Man beachte, dass I'_U mit Hilfe einer Wahl H_0, H_1, \dots, H_r definiert ist. Deshalb schreiben wir $I'_U(H_0, \dots, H_r)$, wenn es zu Verwechslungen kommen könnte.

Wir zeigen die Aussage des Satzes für I'_U anstatt I_U , denn dann folgt sofort $I'_U = I_U$ und die Behauptung.

Wir führen Induktion über r . Der Fall $r = 0$ ist klar.

Bezeichne $F = U_{\{r\}} - U = V(H_r) - \cup_{i=0}^{r-1} (V(H_i) \cap V(H_r))$. Es ist genau dann $F = \emptyset$, wenn $H_r = \mu \cdot H_i$ für ein $i \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ und $\mu \in K^*$. Man sieht sofort $I'_U(H_0, \dots, H_r) = I'_U(H_0, \dots, H_{r-1})$ und kann Induktion anwenden.

Sei nun $F \neq \emptyset$. Per Induktion ist

$$\begin{aligned} \text{CH}^*(U_{\{r\}}, **) &= S\{\mathcal{O}_{U_{\{r\}}}^*(U_{\{r\}})\}/I'_{U_{\{r\}}} \\ \text{CH}^*(F, **) &= S\{\mathcal{O}_F^*(F)\}/I'_F. \end{aligned}$$

Für $i : F \rightarrow U_{\{r\}}$ identifiziert sich $i^* : \text{CH}^*(U_{\{r\}}, **) \rightarrow \text{CH}^*(F, **)$ mit dem durch $\mathcal{O}_{U_{\{r\}}}^*(U_{\{r\}}) \rightarrow \mathcal{O}_F^*(F)$ induzierten Ringhomomorphismus.

Durch $\mathcal{O}_{U_{\{r\}}}^*(U_{\{r\}}) \rightarrow \mathcal{O}_U^*(U)$ induziert bekommen wir

$$\tilde{j}^* : S\{\mathcal{O}_{U_{\{r\}}}^*(U_{\{r\}})\}/I'_{U_{\{r\}}} \rightarrow S\{\mathcal{O}_U^*(U)\}/I'_U.$$

Wir definieren via

$$S\{\mathcal{O}_U^*(U)\}/I'_U \rightarrow \text{CH}^*(U, **) \xrightarrow{\tilde{\delta}} \text{CH}^*(F, **)$$

einen Morphismus von S -Modulen (kein Ringhomomorphismus)

$$\tilde{\delta} : S\{\mathcal{O}_U^*(U)\}/I'_U \rightarrow S\{\mathcal{O}_F^*(F)\}/I'_F.$$

Um zu sehen, wie $\tilde{\delta}$ abbildet, schreibe ein Element $s \in S\{\mathcal{O}_U^*(U)\}/I'_U$ als $s = (t_r) \cdot \tilde{j}^*(a) + \tilde{j}^*(b)$, dann ist $\tilde{\delta}(s) = i^*(a)$.

Dies passt alles in das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} S\{\mathcal{O}_{U_{\{r\}}}^*(U_{\{r\}})\}/I'_{U_{\{r\}}} & \xrightarrow{\tilde{j}^*} & S\{\mathcal{O}_U^*(U)\}/I'_U & \xrightarrow{\tilde{\delta}} & S\{\mathcal{O}_F^*(F)\}/I'_F \\ \simeq \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \simeq \\ \text{CH}^*(U_{\{r\}}, **) & \xrightarrow{j^*} & \text{CH}^*(U, **) & \xrightarrow{\delta_r} & \text{CH}^*(U_{\{r\}} - U, **), \end{array} \quad (9.3.3.4)$$

wobei der zweite vertikale Pfeil nach Proposition (9.2.1) surjektiv ist.

Mit Bemerkung 9.1 zeigt eine einfache Diagrammjagd, dass wir die Exaktheit an der zweiten Stelle der ersten Zeile im Diagramm (9.3.3.4) zu zeigen haben, d.h. für alle $a \in S\{\mathcal{O}_{U_{\{r\}}}^*(U_{\{r\}})\}/I'_{U_{\{r\}}}$ mit $i^*(a) = 0$ gilt $(t_r) \cdot \tilde{j}^*(a) \in \text{Bild}(\tilde{j}^*)$.

Nun ist der Kern von i^* als Ideal erzeugt von

$$R(f_1, \dots, f_t), \quad \text{mit } f_k = \lambda_k t_{i_k}, i_k < r, \text{ und } \sum_k \lambda_k t_{i_k} \mid_F = 0,$$

und es genügt diese Elemente zu behandeln. Offenbar ist dann $\mu \cdot t_r + \sum_k \lambda_k t_{i_k} = 0$ für geeignetes $\mu \in K$. Der Fall $\mu = 0$ ist trivial und im Fall $\mu \in K^*$ rechnet man in $S\{\mathcal{O}_U^*(U)\}/I'_U$:

$$\begin{aligned} (t_r) \cdot \tilde{j}^*(R(f_1, \dots, f_t)) &= (\mu t_r) \cdot R(f_1, \dots, f_t) - [\mu] \cdot R(f_1, \dots, f_t) \\ &= (\mu t_r) \cdot R(f_1, \dots, f_t) - R(\mu t_r, f_1, \dots, f_t) - [\mu] \cdot R(f_1, \dots, f_t) \\ &= (-1)^t (f_T) + \sum_{\substack{1 \leq d \leq t \\ J=(j_1, \dots, j_d) \\ j_1 < \dots < j_d}} (f_{T-J}) \cdot [-1]^d - [\mu] \cdot R(f_1, \dots, f_t) \in \text{Bild}(\tilde{j}). \end{aligned}$$

□

9.4. Vergleich mit dem topologischen Kohomologiering.

9.4.1. Es seien weiterhin $H_0, \dots, H_r \in \Gamma(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(1)), r \geq 0$, nichttriviale Elemente und $U = \mathbb{P}^N - \cup_{i=0}^r V(H_i)$. Wir wollen in diesem Abschnitt annehmen, dass die Hyperebenen $V(H_0), \dots, V(H_r)$ paarweise verschieden sind. Ausserdem benutzen wir in diesem Abschnitt die Sprache der motivischen Kohomologie:

$$\begin{aligned} H_M^i(U, \mathbb{Z}(p)) &:= \text{CH}^p(U, 2p - i), \\ H_M(U, \mathbb{Z}(*)) &:= \bigoplus_{i,p} H_M^i(U, \mathbb{Z}(p)). \end{aligned}$$

Der Grundkörper K seien die komplexen Zahlen $K = \mathbb{C}$.

9.4.2. Bezeichne $\mathbb{Z} \cdot \langle H_1, \dots, H_r \rangle$ die freie abelsche Gruppe mit Erzeugern H_1, \dots, H_r . Offenbar haben wir eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathbb{G}_m(K) \rightarrow \mathbb{G}_m(U) \xrightarrow{\text{Res}} \mathbb{Z} \cdot \langle H_1, \dots, H_r \rangle \rightarrow 0 \quad (9.4.2.1)$$

mit $\text{Res}(f) = \sum_{i \geq 1} n_i(f) \cdot H_i$ und $n_i(f)$ die Bewertung von f im lokalen Ring zu $V(H_i)$.

Wir wollen $\mathfrak{m} := \bigoplus_{(i,p) \neq 0} H^i(K, \mathbb{Z}(p))$ setzen; es ist

$$R : H_M(K, \mathbb{Z}(*)) \rightarrow H_M(K, \mathbb{Z}(*))/\mathfrak{m} = H_M^0(K, \mathbb{Z}(0)) = \mathbb{Z} \quad (9.4.2.2)$$

ein Ringhomomorphismus.

Weiterhin sei $\Lambda_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z} \cdot \langle H_1, \dots, H_r \rangle)$ die äussere Algebra zu $\mathbb{Z} \cdot \langle H_1, \dots, H_r \rangle$ über \mathbb{Z} .

Proposition 9.4.1. *Wir haben einen Isomorphismus von graduierten Ringen*

$$H_M(U, \mathbb{Z}(*))/\mathfrak{m} \cdot H_M(U, \mathbb{Z}(*)) \xrightarrow{\phi} \Lambda_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z} \cdot \langle H_1, \dots, H_r \rangle)/J$$

mit dem Ideal J erzeugt von

$$H_{i_1} \wedge \cdots \wedge H_{i_s}; \quad \text{falls } V(H_{i_1}) \cap \cdots \cap V(H_{i_s}) \subset V(H_0)$$

$$\sum_{k=1}^s (-1)^k H_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{H_{i_k}} \wedge \cdots \wedge H_{i_s}; \quad \text{falls } V(H_{i_1}) \cap \cdots \cap V(H_{i_s}) \not\subset V(H_0)$$

und $\text{codim}(V(H_{i_1}) \cap \cdots \cap V(H_{i_s})) < s$.

Unter ϕ wird jedes Element $f \in H_M^1(U, \mathbb{Z}(1)) = \mathbb{G}_m(U)$ auf $\text{Res}(f)$ abgebildet.

Beweis. Zur Definition von ϕ : Wir benutzen die Darstellung von $H_M(U, \mathbb{Z}(*))$ aus Satz (9.3.1). Wir können

$$\tilde{\phi} : H_M(K, \mathbb{Z}(*)) \{ \mathbb{G}_m(U) \} \rightarrow \Lambda_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z} \cdot \langle H_1, \dots, H_r \rangle)$$

via R (9.4.2.2) und Res (9.4.2.1) definieren. Im Beweis von Satz (9.3.1) haben wir $I'_U = I_U$ gesehen. Wir zeigen $\tilde{\phi}(I'_U) \subset J$, dann erhalten wir ϕ .

Wir erinnern an die Notation $t_i := H_i/H_0$ für $i = 0, \dots, r$. Sei nun $f_k = \lambda_k \cdot t_{i_k}$, $\lambda_k \in K^*$, $k = 1, \dots, s$, mit $\sum_{k=1}^s f_k = 0$. Wir haben zu zeigen, dass

$$\alpha := \sum_{k=1}^s (-1)^k \text{Res}(f_1) \wedge \cdots \wedge \widehat{\text{Res}(f_k)} \wedge \cdots \wedge \text{Res}(f_s)$$

in J enthalten ist. Sind mehr als eine konstante Funktion unter f_1, \dots, f_s , dann ist $\alpha = 0$. Ist (ohne Einschränkung) $f_s = \lambda_s t_0$ die einzige konstante Funktion, dann ist $V(H_{i_1}) \cap \cdots \cap V(H_{i_{s-1}}) \subset V(H_0)$ und offenbar $\alpha \in J$. Seien nun alle f_k nicht konstant. Angenommen $V(H_{i_1}) \cap \cdots \cap V(H_{i_s}) \subset V(H_0)$, dann ist $V(H_{i_1}) \cap \cdots \cap \widehat{V(H_{i_k})} \cap \cdots \cap V(H_{i_s}) \subset V(H_0)$ für alle k und folglich $\alpha \in J$. Falls $V(H_{i_1}) \cap \cdots \cap V(H_{i_s}) \not\subset V(H_0)$, dann ist $\alpha \in J$, weil $\text{codim}(V(H_{i_1}) \cap \cdots \cap V(H_{i_s})) < s$.

Definition der Umkehrabbildung: Wir setzen

$$\tilde{\psi} : \Lambda_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z} \cdot \langle H_1, \dots, H_r \rangle) \rightarrow H_M(U, \mathbb{Z}(*))/\mathfrak{m} \cdot H_M(U, \mathbb{Z}(*)); \quad \tilde{\psi}(H_i) := t_i,$$

und zeigen, dass $\tilde{\psi}(J) = 0$. Das gibt offenbar die gewünschte Umkehrabbildung zu ϕ .

Seien H_{i_1}, \dots, H_{i_s} mit $V(H_{i_1}) \cap \cdots \cap V(H_{i_s}) \subset V(H_0)$ gegeben. Wir haben $t_{i_1} \cdots t_{i_s} = 0$ zu zeigen. Offenbar ist $H_0 = \sum_{k=1}^s \mu_k H_{i_k}$ für geeignete μ_k und die Aussage folgt. Seien nun H_{i_1}, \dots, H_{i_s} mit $V(H_{i_1}) \cap \cdots \cap V(H_{i_s}) \not\subset V(H_0)$ und $\text{codim}(V(H_{i_1}) \cap \cdots \cap V(H_{i_s})) < s$, dann gibt es eine Relation der Form $\sum_k \mu_k H_{i_k} = 0$ und es folgt $\sum_{k=1}^s (-1)^k t_1 \cdots \widehat{t_k} \cdots t_s = 0$ in $H_M(U, \mathbb{Z}(*))/\mathfrak{m} \cdot H_M(U, \mathbb{Z}(*))$. \square

9.4.3. Die Regulatorabbildung $H_M(U, \mathbb{Z}(*)) \rightarrow H(U^{an}, \mathbb{Z})$ in die topologische Kohomologie ist leicht zu beschreiben, weil die Regulatorabbildung für K durch $H_M(K, \mathbb{Z}(*)) \rightarrow H_M^0(K, \mathbb{Z}(0)) \cong \mathbb{Z} = H^0(pt., \mathbb{Z})$ gegeben ist und $f \in H_M^1(U, \mathbb{Z}(1))$ auf $\frac{1}{2\pi i} \frac{df}{f} \in H^1(U^{an}, \mathbb{Z})$ abgebildet wird.

Insbesondere faktorisiert die Regulatorabbildung durch $H_M(U, \mathbb{Z}(\ast))/\mathfrak{m} \cdot H_M(U, \mathbb{Z}(\ast))$ und wir erhalten mit Proposition (9.4.1):

$$\begin{array}{ccc}
 H_M(U, \mathbb{Z}(\ast)) & \longrightarrow & H_M(U, \mathbb{Z}(\ast))/\mathfrak{m} \cdot H_M(U, \mathbb{Z}(\ast)) \\
 & \searrow \text{Regulator} & \downarrow \cong \\
 & & \Lambda_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z} \cdot \langle H_1, \dots, H_r \rangle) / J \\
 & & \downarrow H_i \mapsto \frac{1}{2\pi i} \frac{dt_i}{t_i} \\
 & & H(U^{an}, \mathbb{Z}).
 \end{array}$$

In [OrSo] ist gezeigt, dass

$$\Lambda_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z} \cdot \langle H_1, \dots, H_r \rangle) / J \rightarrow H(U^{an}, \mathbb{Z})$$

ein Isomorphismus ist und wir erhalten via der Regulatorabbildng:

$$H_M(U, \mathbb{Z}(\ast))/\mathfrak{m} \cdot H_M(U, \mathbb{Z}(\ast)) \xrightarrow{\cong} H(U^{an}, \mathbb{Z}).$$

A.1. Endliche Mengen und assoziierte Komplexe.

A.1.1.

Definition A.1. Wir bezeichnen mit \mathfrak{P}_r , für $r \geq 1$, die Potenzmenge zu $\{1, \dots, r\}$. Wir setzen $\mathfrak{P}_0 := \{\emptyset\}$.

Für d mit $0 \leq d \leq r$ definieren wir

$$\mathfrak{P}_{r,d} := \{\text{Elemente in } \mathfrak{P}_r \text{ der Ordnung } d\}.$$

Wir fassen \mathfrak{P}_r als Kategorie auf, mit Morphismen den Inklusionen von Mengen, also $\text{Hom}_{\mathfrak{P}}(I, J) = 0$, falls $I \not\subset J$, und $\text{Hom}_{\mathfrak{P}}(I, J)$ besteht sonst aus dem Element $I \subset J$.

Definition A.2. Sei $I \in \mathfrak{P}_{r,s}$, wir schreiben $I = \{I_0, \dots, I_{s-1}\}$ mit $I_0 < I_1 < \dots < I_{r-1}$. Wir setzen

$$\partial_k I := I - \{I_k\}$$

für $k = 0, \dots, d$.

A.1.2. Sei $C : \mathfrak{P}_r^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Funktor in eine additive Kategorie \mathcal{C} . Wir definieren einen homologischen Komplex in $C_b(\mathcal{C})$ durch

$$\dots \rightarrow \bigoplus_{\substack{I \in \mathfrak{P}_{r,s} \\ \text{deg}=s}} C(I) \xrightarrow{d} \bigoplus_{\substack{I \in \mathfrak{P}_{r,s-1} \\ \text{deg}=s-1}} C(I) \rightarrow \dots$$

und $d|_{C(I)} = \sum_{k=0}^{s-1} (-1)^k C(I \rightarrow \partial_k I)$.

Ist $C : \mathfrak{P}_r \rightarrow \mathcal{C}$ ein Funktor, definieren wir dual dazu einen homologischen Komplex in $C_b(\mathcal{C})$ durch

$$\dots \rightarrow \bigoplus_{\substack{I \in \mathfrak{P}_{r,s-1} \\ \text{deg}=-s+1}} C(I) \xrightarrow{d} \bigoplus_{\substack{I \in \mathfrak{P}_{r,s} \\ \text{deg}=-s}} C(I) \rightarrow \dots$$

und $pr_{C(I)} \circ d = \sum_{k=0}^{s-1} (-1)^k C(\partial_k I \rightarrow I)$.

A.2. Notation bei Hom-Komplexen. Für zwei beschränkte Komplexe A, B graduerter abelscher Gruppen definiert man den Komplex $\underline{\text{Hom}}_{\bullet}(A, B)$ durch

$$\underline{\text{Hom}}_p(A, B) \stackrel{\text{dfn}}{=} \bigoplus_i \underline{\text{Hom}}(A_i, B_{i+p}),$$

für alle p , mit Differential

$$\begin{aligned} d_p : \underline{\text{Hom}}_p(A, B) &\rightarrow \underline{\text{Hom}}_{p-1}(A, B) \\ d_p((\phi_i)_i) &= (d_B \circ \phi_i - (-1)^p \phi_{i-1} \circ d_A)_i. \end{aligned}$$

Man sieht leicht, dass

$$\begin{aligned} \text{Grad}=0 \text{ Anteil von } H_p \underline{\text{Hom}}_{\bullet}(A, B) \\ = \text{Hom}_{\text{Komplexe}}(A, B[-p]) / \text{Homotopie.} \quad (\text{A.2.0.1}) \end{aligned}$$

Haben A und B Komponenten aus freien, endlichen, abelschen Gruppen und bezeichne $\underline{\text{Hom}}(A, \mathbb{Z})$ den Komplex mit

$$\begin{aligned} \underline{\text{Hom}}(A, \mathbb{Z})_i &= \underline{\text{Hom}}(A_{-i}, \mathbb{Z}) \\ d_i &= \underline{\text{Hom}}(d_{-i+1}, \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

(in der Definition von $\underline{\text{Hom}}(A, \mathbb{Z})$ sind nicht die Vorzeichen, wie sie in $\underline{\text{Hom}}_{\bullet}(A, \mathbb{Z})$ wären), dann identifizieren wir

$$B \otimes \underline{\text{Hom}}(A, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} \underline{\text{Hom}}_{\bullet}(A, B) \quad (\text{A.2.0.2})$$

via $B_{i+p} \otimes \underline{\text{Hom}}(A_i, \mathbb{Z}) = \underline{\text{Hom}}(A_i, B_{i+p})$ und Multiplikation mit $(-1)^{\frac{i(i+1)}{2}}$ (man müsste nicht mit $(-1)^{\frac{i(i+1)}{2}}$ multiplizieren, wenn man $\underline{\text{Hom}}_{\bullet}(A, \mathbb{Z})$ verwendet hätte).

Wir haben den Spurmorphismus

$$\text{tr} : \underline{\text{Hom}}_{\bullet}(A, A) \rightarrow \mathbb{Z}$$

definiert durch

$$\underline{\text{Hom}}_{\bullet}(A, A) \xrightarrow{\text{proj}} \underline{\text{Hom}}_0(A, A) = \bigoplus_i \underline{\text{Hom}}(A_i, A_i) \xrightarrow{\sum_i (-1)^i \text{tr}_i} \mathbb{Z}.$$

Dies entspricht unter A.2.0.2 dem Auswertungsmorphismus

$$A \otimes_{\mathbb{Z}} \underline{\text{Hom}}(A, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{proj}} \bigoplus_i A_i \otimes_{\mathbb{Z}} \underline{\text{Hom}}(A_i, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sum_i (-1)^{\frac{i(i-1)}{2}} \text{ev}} \mathbb{Z},$$

mit $\text{ev}(a \otimes \phi) = \phi(a)$. Für $\underline{\text{Hom}}_{\bullet}(A, \mathbb{Z})$ statt $\underline{\text{Hom}}(A, \mathbb{Z})$ ändert sich beim Auswertungsmorphismus das Vorzeichen $(-1)^{\frac{i(i-1)}{2}} \mapsto (-1)^i$.

A.2.1. $\underline{\text{Hom}}_{\bullet}$ und Tensorprodukte. Man beachte bei

$$\underline{\text{Hom}}_{\bullet}(A, B) \otimes \underline{\text{Hom}}_{\bullet}(A', B') \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{\bullet}(A \otimes A', B \otimes B')$$

folgende Vorzeichen:

$$\underline{\text{Hom}}_p(A, B) \otimes \underline{\text{Hom}}_q(A', B') \ni (\phi_i)_i \otimes (\psi_j)_j \mapsto \left(\sum_{i+j=k} (-1)^{iq} \phi_i \otimes \psi_j \right)_k. \quad (\text{A.2.1.1})$$

A.3. Eigenschaften von Ass .

A.3.1. *Definition.* Sei X_\bullet ein Objekt in $C_b(C_+(\text{gaG.}))$, also für alle i ist X_i ein Komplex mit Differential ∂_{X_i} und das Differential $d_i : X_i \rightarrow X_{i-1}$ ist ein Morphismus von Komplexen: $\partial_{X_{i-1}} d_i = d_i \partial_{X_i}$.

Wir definieren

$$\text{Ass}(X_\bullet)_m = \bigoplus_k (X_k)_{m-k} = \bigoplus_{i+j=m} (X_i)_j$$

mit Differential $D|_{(X_i)_j} = (-1)^i \partial_{X_i} + d_i$. Der Funktor Ass ist additiv und vertauscht mit Translation, d.h.

$$\text{Ass}(X_\bullet[n]) = \text{Ass}(X_\bullet)[n]$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$.

A.3.2. *Kegel und Tensorprodukte.* Sei nun $\phi : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ ein Morphismus in $C_b(C_+(\text{gaG.}))$ dann rechnet man

$$\text{Ass}(\text{cone}(\phi)) = \text{cone}(\text{Ass}(\phi))$$

nach und Ass führt das Dreieck

$$X_\bullet \xrightarrow{\phi} Y_\bullet \rightarrow \text{cone}(\phi) \rightarrow X_\bullet[1]$$

in das entsprechende Dreieck für $\text{Ass}(\phi)$ über. In der Tat ist

$$\text{Ass}(\text{cone}(\phi))_m = \text{cone}(\text{Ass}(\phi))_m = \bigoplus_{i+j=m} (Y_i)_j \oplus (X_i)_{j-1}$$

mit Differential

$$\begin{pmatrix} (-1)^i \partial_{Y_i} + d_i^Y & \phi \\ 0 & (-1) \cdot ((-1)^i \partial_i + d_i^X) \end{pmatrix}.$$

Zur Tensorstruktur: es gilt zwar

$$\text{Ass}(X_\bullet \otimes Y_\bullet)_m = (\text{Ass}(X_\bullet) \otimes \text{Ass}(Y_\bullet))_m = \bigoplus_{i+j+s+t=m} (X_i)_j \otimes (Y_s)_t,$$

jedoch sind die Differentiale nicht gleich. Durch

$$\begin{aligned} c : \text{Ass}(X_\bullet) \otimes \text{Ass}(Y_\bullet) &\xrightarrow{\cong} \text{Ass}(X_\bullet \otimes Y_\bullet) \\ c|_{(X_i)_j \otimes (Y_s)_t} &= (-1)^{j \cdot s} \text{id} \otimes \text{id} \end{aligned} \tag{A.3.2.1}$$

wird ein funktorieller Isomorphismus definiert. Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Ass}(X_\bullet) \otimes \text{Ass}(Y_\bullet) \otimes \text{Ass}(Z_\bullet) & \xrightarrow{c \otimes \text{id}} & \text{Ass}(X_\bullet \otimes Y_\bullet) \\ \text{id} \otimes c \downarrow & & c \downarrow \\ \text{Ass}(X_\bullet) \otimes \text{Ass}(Y_\bullet \times Z_\bullet) & \xrightarrow{c} & \text{Ass}(X_\bullet \times Y_\bullet \times Z_\bullet) \end{array}$$

kommutiert für alle $X_\bullet, Y_\bullet, Z_\bullet$.

A.3.3. Filtrierungen und Spektralsequenzen.

Für jedes Objekt X_\bullet in $C_b(C_+(\text{gaG.}))$ haben wir eine Filtrierung W_* von $\text{Ass}(X_\bullet)$ durch Unterkomplexe definiert durch

$$W_p = \text{Ass}(X_p \rightarrow X_{p-1} \rightarrow \dots). \quad (\text{A.3.3.1})$$

Wir bekommen daraus eine Filtrierung auf der Homologie $H_m(\text{Ass}(X_\bullet))$ für alle m durch

$$W_p H_m \text{Ass}(X_\bullet) := \text{Im}(H_m(W_p) \rightarrow H_m \text{Ass}(X_\bullet)).$$

Diese Filtrierung ist funktoriell in X_\bullet . Weiterhin haben wir eine (in X_\bullet) funktorielle Spektralsequenz

$$E_{pq}^r \Rightarrow H_{p+q}(\text{Ass}(X_\bullet)). \quad (\text{A.3.3.2})$$

Wir beschreiben diese kurz. Bezeichne D das Differential von $\text{Ass}(X_\bullet)$. Für $r \geq 0$ setze

$$C_{pq}^r = \{a = (a_p, a_{p-1}, \dots) \in \oplus_{i \geq 0} (X_{p-i})_{q+i} \mid D(a) \in W_{p-r} \text{Ass}(X_\bullet)\},$$

und für $r = -1$ setze $C_{pq}^{-1} = (W_p \text{Ass}(X_\bullet))_q$. Für alle $r \geq 0$ definiere

$$E_{pq}^r = C_{pq}^r / \left(D(C_{p+r-1, q-r+2}^{r-1}) + C_{p-1, q+1}^{r-1} \right)$$

dann haben wir durch

$$\dots \rightarrow E_{p+r, q-r+1}^r \xrightarrow{D} E_{pq}^r \xrightarrow{D} E_{p-r, q+r-1}^r \rightarrow \dots$$

einen Komplex mit

$$E_{pq}^{r+1} = H \left(E_{p+r, q-r+1}^r \xrightarrow{D} E_{pq}^r \xrightarrow{D} E_{p-r, q+r-1}^r \right).$$

Man sieht, dass

$$\begin{aligned} E_{pq}^0 &= (X_p)_q, \quad E_{pq}^1 = H_q(X_p), \quad E_{pq}^2 = H_p(H_q(X_\bullet)), \dots, \\ &\dots, \quad E_{pq}^\infty = \text{Gr}_p^W H_{p+q} \text{Ass}(X_\bullet). \end{aligned} \quad (\text{A.3.3.3})$$

LITERATUR

- [Bl1] S. Bloch, Algebraic Cycles and Higher K -Theory, *Advances in Mathematics* **61** (1986), pp. 267-304.
- [Bl2] S. Bloch, The Moving Lemma for Higher Chow Groups, *J. Algebraic Geom.* **3** (1994), pp. 537-568.
- [Bl3] S. Bloch, Elementary properties of Higher Chowgroups. preprint
- [Br] E. Brieskorn, Sur les groupes de tresses, *Séminaire BOURBAKI 1971/72*, LNM **317** Springer (1973), pp. 21-44.
- [De2] P. Deligne, Théorie de Hodge II, *Publ. Math. de I.H.É.S.* **40** (1971), p. 5-58.
- [De3] P. Deligne, Théorie de Hodge III, *Publ. Math. de I.H.É.S.* **44** (1974), p. 5-77.
- [DGM] P. Deligne and M. Goresky and R. MacPherson, L'algèbre de Cohomologie du Complément, dans un Espace Affine, d'une Famille Finie de Sous-espaces Affines, *Michigan Math. J.*, **48** (2000).
- [Fu] W. Fulton, *Intersection Theory*, Second Edition. Springer (1991).
- [GM] M. Goresky and R. MacPherson, Stratified Morse theory, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (3), 14, Springer (1988).
- [Ha1] M. Hanamura, Mixed motives and algebraic cycles I, *Math. Res. Letters* **2** (1995), pp. 811-821.
- [Ha2] M. Hanamura, Mixed motives and algebraic cycles II, *Invent. Math.* **158** (2004), pp. 105-179.
- [Ha3] M. Hanamura, Blow-ups and mixed motives. preprint
- [Le] M. Levine, *Mixed Motives*. *Mathematical Surveys and Monographs*. Vol. 57. American Mathematical Society (1991).
- [Le2] M. Levine, Bloch's higher Chow groups revisited. *Astérisque* No. **226** (1994), pp. 235-320.
- [Mi] J. Milnor, Algebraic K -theory and quadratic forms. *Invent. Math.* **9** (1970), pp. 318-344.
- [NeSu] Yu.P. Nesterenko and A.A. Suslin, Homology of the full linear group over a local ring and Milnor's K -theory. *Math. USSR-Izv.* **34** (1990), pp. 121-145.
- [OrSo] P. Orlik and L. Solomon, Combinatorics and Topology of Complements of Hyperplanes, *Invent. Math.* **56** (1980), pp. 167-189.
- [Se] J.-P. Serre, *Local Algebra*. Springer Monographs in Mathematics (2000).
- [To] B. Totaro, Milnor K -Theory is the Simplest Part of Algebraic K -Theory, in *K-Theory* **6**, pp. 177-189.
- [Ve] J.-L. Verdier, Catégories dérivées, in *SGA 4 $\frac{1}{2}$* , *Lect. Notes Math.* **569**.
- [Yu] S. Yuzvinsky, Small rational model of subspace complement, preprint.
- [Ze] F. El Zein, Introduction à la théorie de Hodge mixte. *Actualités Mathématiques*, Hermann (1991).