# Kombinatorische Ressourcenallokation mit ökonomischen Koordinationsmechanismen

## Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Wirtschaftswissenschaften (Dr. rer. pol)
im August 2002 am Fachbereich Wirtschaftswissenschaften
der Universität GH Essen vorgelegt von

**Dipl. Wirtsch.-Inf. Wolfram Conen,**
geb. in Soest/Westfalen

| | |
|---|---|
| Tag der mündlichen Prüfung: | **14. Februar 2003** |
| Erstgutachter: | **Prof. Dr. Heimo H. Adelsberger** |
| Zweitgutachter: | **Prof. Dr. Günther Pernul** |

“In zweifelhaften Fällen entscheide man sich für das Richtige.”

*Karl Kraus*

## Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird sowohl die theoretische Weiterentwicklung als auch die praktische Umsetzung von ökonomischen Koordinationsmechanismen zur Allokation von Ressourcen untersucht.

Es werden neue Koordinationsverfahren für die Allokation komplementärer und substitutionaler Ressourcen entwickelt und Wege zu ihrer Realisierung in Agentensystemen aufgezeigt. Dabei werden Fragen der ökonomischen Effizienz, der Anreizkompatibilität und der Effizienz der Informationsbeschaffung untersucht. Darüberhinaus wird die Anwendbarkeit der Verfahren in einem Produktionskontext und die Konsequenz ihres Einsatzes für die Gestaltung von Organisationsstrukturen diskutiert.

## Danksagung

Danken möchte ich zunächst meinem Doktorvater, Prof. Dr. Heimo H. Adelsberger, der mich schon frühzeitig zur hier dokumentierten Wahl meines Promotionsthemas ermutigte und ein aufmerksamer Begleiter meines Promotionsweges war.

Danken möchte ich auch denjenigen, die sich in Gesprächen, Vorträgen und Diskussionen meine Vorstellungen anhörten und mir mit Fragen und Antworten zur Seite standen. Hierzu gehören u.a. Klaus-Peter Keilmann (Lufthansa Systems), Prof. Wurman (NCSU), Prof. Wellman (UMICH), Prof. Amann (UGH Essen) und Prof. Moldovanu (U Mannheim). Besonders bedanken möchte ich mich bei Prof. Sandholm (CMU/ CombineNet), der als Co-Autor mehrerer Forschungspapiere ein Ansporn zur Findung neuer Ideen und verbesserter Resultate war.

Danken möchte ich Prof. Kirn (U Ilmenau), den Professoren Schiefloe und Syvertsen (U Trondheim), Prof. Pernul (UGH Essen) und erneut Prof. Adelsberger (UGH Essen) und Prof. Wellmann (UMICH), die mir jeweils die Gelegenheit geboten haben, einen Teil meiner Ideen in Vorträgen an ihren Instituten zu präsentieren. Danken möchte ich auch Prof. Neumann (U Wien), unsere gemeinsamen Arbeiten zum Thema *Koordination* haben meine Vorstellungen hierzu wesentlich präzisiert.

Einen wichtigen Ansporn und Prüfstein stellten zudem die Diskussionen in der Doktorandengruppe ALICE (UGH Essen) dar, deren Mitgliedern Dr. Köppen, Hr. Dridi und insbesondere Hr. Klapsing ich zu weitreichendem Dank verpflichtet bin.

Natürlich trug Rita (und in den letzten zwei Jahren auch mein Sohn Jannis) die Hauptlast – nämlich mich und meinen Arbeitsstil über die Jahre zu ertragen, mich immer wieder anzuspornen und zu bestärken, meine Ideen, Freuden und Frustrationen anzuhören –, um schlussendlich auch noch durch die Verpflichtung zum Korrekturlesen “belohnt” zu werden. Den Dank an diese Beiden möchte ich hiermit besonders hervorheben.

Zuletzt möchte ich meiner Familie danken. Letztlich haben meine Eltern die Wahl meines Lebenswegs erst möglich gemacht. Ihre Liebe zu Wahrhaftigkeit und Diskurs, ihre Wärme und ihre Ermutigungen haben mich begleitet und, hoffentlich, angeleitet. Den klaren Geist und die vorzüglichen Deutsch-Kenntnisse meines Vaters konnte ich leider in der Korrekturphase nicht mehr in Anspruch nehmen, er ist im April 2001 verstorben. Gleiches gilt auch für meinen Bruder, Dr. Dieter Conen, dessen Zuspruch und Rat ich seit seinem Tod im September 2001 schmerzlich vermisse.

Wolfram Conen Velbert, im August 2002

*Hinweis:* Diese Dissertation wird in elektronischer Form von der Universitätsbibliothek der Universität GH Essen (bzw. zukünftig der Universität Duisburg-Essen) veröffentlicht und ist über deren Web-Angebot zugänglich. Ergänzend hierzu werde ich die Dissertation nebst Aktualisierungen, Ergänzungen und Diskussionen über die permanente URL

*http://purl.oclc.org/net/conen/diss/*

zugänglich halten ("permanent" deshalb, weil es das Ziel des PURL-Dienstes ist, diese URLs dauerhaft verfügbar zu halten). Etwaige Fragen, Anregungen oder Diskussionsbeiträge bitte ich an *wolfram.conen@epost.de* zu senden.

# Inhaltsverzeichnis

# Kapitel 1

# Einführung

Die Koordination der Interessen und Aktivitäten (teil-)autonomer Aktoren ist ein zentrales Problem für die Gestaltung inner- und zwischenbetrieblicher Organisationsformen. Der aus Wettbewerbs- und Wirtschaftslichkeitserfordernissen resultierende Adaptionsdruck, dem Unternehmen und Unternehmensverbünde ausgesetzt sind, lässt die Suche nach effizienten und effektiven Lösungen der Koordinationsproblematik dringlich erscheinen.

## 1.1 Überblick

Die vorliegende Arbeit leistet einen Beitrag zur Analyse und Lösung komplexer, ressourcenbezogener Koordinationsprobleme. Unter Einsatz mikroökonomischer Instrumente werden monetär bewertbare Resourcenallokationsprobleme unter der Annahme einer weitgehenden Selbstbestimmung der teilnehmenden Aktoren modelliert, die Lösungskonzepte *Gleichgewicht* und *Vickreyzahlungen* diskutiert, und kombinatorische Auktionen als Lösungsmechanismus identifiziert. Die Betrachtung schließt Allokationsprobleme ein, in denen ressourcenbezogene Substitutions- und Komplementaritätsbeziehungen Relevanz erlangen. Es wird das Konzept kohärenter Gleichgewichte entwickelt, das es erlaubt, präzise Bedingungen für die Existenz von Gleichgewichten anzugeben, und das als Grundlage zur Herleitung eines Koordinationsmechanismus zur Lösung von Allokationsproblemen verwendet wird. Die Umsetzung dieser Lösung kann unter wesentlich geringeren Zwangserfordernissen erfolgen, als dies für andere bisher vorgeschlagene Lösungen möglich war. Darüber hinaus wird die Beziehung der Gleichgewichtspreise zu Vickreyzahlungen untersucht und ein Ansatz vorgestellt, der über eine kontrollierte Form der Zusammenarbeit eine Transformation von Ökonomien so erlaubt, dass Gleichgewichtspreise und Vickreyzahlungen zusammenfallen (Kap. 3).

Die notwendigen Bausteine für den Entwurf und die Implementierung von Mechanismen zur konkreten Bestimmung von Allokationslösungen werden im Detail präsentiert. Die Korrektheit der vorgestellten Algorithmen zur Bestimmung der optimalen Allokation und zur Bestimmung von kohärenten Gleichgewichtspreisen bzw. Vickreyzahlungen wird nachgewiesen (Kap. 4) und ihr Einsatz wird im Problemfeld des Job-

Shop-Scheduling unter der Annahme bewertbarer Präferenzen demonstriert (Kap. 5, Abschnitt 5.1). Es zeigt sich, dass die gewählte generelle Modellierung der Ressourcenallokationproblematik es erlaubt, auf direkte Art und Weise Job-Shop-Probleme mit sehr unterschiedlichen individuellen Zielsetzungen der beteiligten Aktoren abzubilden und zu lösen. Die Lösung kann allerdings exponentiellen Aufwand erfordern (unter der Annahme $P \neq NP$) und lässt sich zudem nicht hinreichend gut mittels polynomialem Aufwand approximieren. Es wird ein heuristisches Verfahren vorgeschlagen, das entscheidungsorientierte Problemlöseverfahren um einen Bietprozess ergänzt. Die Übertragbarkeit der gewählten Vorgehensweise auf andere Allokationsproblematiken (Produktion, Logistik, Design etc.) wird diskutiert und bejaht.

Darüberhinaus wird die Verwendung von Koordinationsmechanismen im Rahmen einer zu entwickelnden flexiblen Koordinationsinfrastruktur zur Lösung inner- und zwischenbetrieblicher Koordinationsprobleme vorgeschlagen und die mögliche Bedeutung einer Kombination von mikroökonomischer Analyse und informationstechnischer Umsetzung für die Lösung betriebswirtschaftlicher Kernprobleme hervorgehoben. Die möglichen Konsequenzen für die Formierung inner- und zwischenbetrieblicher Organisation wird diskutiert (Kap. 5, Abschnitt 5.2). Abschließend werden die erreichten Ergebnisse bewertet und es wird ein Ausblick auf mögliche Weiterentwicklungen gegeben (Kap. 6).

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels wird die Motivation zu dieser Arbeit erläutert und eine Auswahl von Arbeiten mit Bezug zur Thematik vorgestellt. Am Ende des Kapitels werden die Beiträge der Arbeit zum Wissensfortschritt kurz zusammengefasst. Das anschließende Kapitel 2 präzisiert dann die Problemstellung.

## 1.2 Motivation und verwandte Arbeiten

Die Leistungsfähigkeit komplexer Systeme hängt wesentlich von deren Fähigkeit zur effektiven Abstimmung der Ziele der beteiligten Aktoren und zur effizienten Koordination ihrer Aktivitäten ab.

Insbesondere in der Produktionswirtschaft findet seit geraumer Zeit eine Diskussion zur Modernisierung von Organisationsstrukturen mit dem Ziel einer Steigerung von Flexibilität und Agilität statt (s. etwa [100]). Aus innerbetrieblicher Sicht wird als wesentliches Mittel zur Erreichung dieses Ziels die Schaffung von (teil-)autonomen Einheiten vorgeschlagen, die in die Lage versetzt werden sollen, ihre lokal vorhandene Kompetenz bestmöglich (im Sinne der "globalen" Unternehmensziele) in die Entscheidungs-, Umsetzungs- und Kontrollprozesse einzubringen (vgl. [3, 2]). Dieser Veränderung vorhandener innerbetrieblicher Strukturen mit dem Ziel, bessere Entscheidungen im zeitnahen Prozessgeschehen und leichtere Austauschbarkeit von Leistungserbringern zu ermöglichen, entspricht die Tendenz zu neuen, flexiblen Kooperationsformen in der gemeinsamen zwischenbetrieblichen Leistungserbringung, beispielsweise in Lieferantennetzwerken oder, allgemeiner, in sogenannten *Value Webs* (s. [93]). Diese inner- und zwischenbetrieblichen Leistungsnetzwerke sollen in der Lage sein, der Komplexität identifizierter Aufgaben durch ein Koordinierungssystem hinreichender

Varietät gerecht zu werden (vgl. [11]). Exemplifiziert wird dies durch Produktionssysteme, die aus einer Anzahl von Produktions- bzw. Leistungseinheiten bestehen, die ihre Teilaufgaben autonom erfüllen können und untereinander durch ein Netzwerk von Austauschbeziehungen materieller und/oder informationeller Art verbunden sind (vgl. [108]).

Inner- und zwischenbetrieblichen Produktions- bzw. Leistungsnetzwerken gemeinsam ist, dass für eine erfolgreiche Zusammenarbeit die Abstimmung von Interessen und Aktivitäten zwischen den Einheiten, bzw. den diese repräsentierenden Aktoren, erforderlich ist, die im Rahmen einer Kooperationsvereinbarung[1] im wesentlichen Eigeninteressen verfolgen. Dieses Abstimmungs- oder Koordinationsproblem stellt das wesentliche und noch nicht abschließend untersuchte Problem "neuerer" inner- und zwischenbetrieblicher Organisationsformen dar.

Sind die Kooperationspartner in der Lage, ihre individuellen Präferenzen für alternative Koordinationsentscheidungen monetär zu bewerten, dann erscheint die Anwendung ökonomischer, zahlungsbasierter Mechanismen zur Abstimmung von Interessen und Aktivitäten sinnvoll (*ökonomische Koordinationsmechanismen*). Im Rahmen der Kooperationsvereinbarung kann ein Koordinationsmechanismus bestimmt werden, der im Idealfall eine optimale und akzeptierbare Koordination herbeiführen soll. Akzeptierbar bedeutet hier, dass das Koordinationsergebnis alle Kooperationspartner zufriedenstellt. Optimal (oder ökonomisch effizient) ist der Mechanismus dann, wenn er dasjenige Koordinationsergebnis auswählt, das den größtmöglichen Nutzen für die Kooperation als Ganzes stiftet. Die Annahme transferierbaren geldwerten Nutzens erlaubt es, als Optimalitätsmaß eine additive Aggregation der individuellen Nutzen zu verwenden. Es ist zu erwarten, dass die Kooperationspartner ihre Präferenzen nicht notwendigerweise wahrheitsgemäß mitteilen. Sie würden dies, unter der Annahme individueller Rationalität, nur dann tun, wenn der Mechanismus einen Anreiz hierzu böte (Anreizkompatibilität). Um Koordinationsprobleme in Produktions- bzw. Leistungsnetzwerken zufriedenstellend lösen zu können, sollten die verwendeten Koordinationsmechanismen die eben angeführten Eigenschaften, also individuelle Zufriedenheit, ökonomische Effizienz und Anreizkompatibilität aufweisen.

Ein spezifisches Koordinationsproblem von wesentlicher Bedeutung in der Produktionslogistik ist die effiziente Allokation von Ressourcen. Dies können im Rahmen der Kooperationsvereinbarung in einem Ressourcenpool zur Verfügung gestellte Produktions-, Lager- oder Transporteinrichtungen sein, oder aber auch die Leistungsprofile der Kooperationspartner, die einer extern veranlassten Leistungserbringung, beispielsweise einem Kundenauftrag an die Kooperation, zugeordnet werden sollen.

Die Anwendung klassischer Resultate der ökonomischen Gleichgewichtstheorie, s. z.B. Mas-Colell et al. [62], zur Lösung solcher Allokationsprobleme wird durch nichtlineare Präferenzen für die komplementäre oder substitutionale Nutzung von Ressourcen, die zu Nicht-Konvexitäten in der Problemformalisierung führen, erschwert bzw. unmöglich gemacht. Solche Probleme werden in dieser Arbeit als *kombinatorische Ressourcenallokationsprobleme* bezeichnet, ihre Lösung dementsprechend als kom-

[1] Der Begriff der Kooperationsvereinbarung wird hier weitgefasst und schlieft den innerbetrieblichen Bereich ein.

binatorische Ressourcenallokation. Insbesondere ist der Entwurf von ökonomischen Koordinationsmechanismen, die sowohl effizienz-gewährleistende, als auch anreizkompatible Preise bestimmen, nicht in allen Fällen möglich, s. hierzu insbesondere die Arbeiten von Gul und Stacchetti [41] und Bikhchandani et al. [14, 13]. Der Versuch, dennoch zu “akzeptablen” Lösungen solcher Allokationsprobleme zu gelangen, hat vor allem durch die staatlichen FCC-Auktionen zur Vergabe von Frequenzspektren in den letzten Jahren viel Aufmerksamkeit erfahren, vgl. [28, 63]. Traditionell wurden in vergleichbaren Situationen Auktions- oder Ausschreibungsverfahren verwendet, in denen Preise für einzelne Ressourcen bestimmt wurden. Nachfolgend kam ein von Milgrom u. a. entwickeltes iteratives Auktionsverfahren zum Einsatz, das unter Heranziehung sogenannter Aktionsregeln versucht, die prinzipbedingte Defizienz der Verauktionierung einzelner Ressourcen bzw. *Güter* zu mildern (s. [63]). Am Problem der (ökonomischen) Ineffizienz der Allokation krankt das Verfahren von Milgrom et al. allerdings weiterhin. Zu ihrer Beseitigung wurden verschiedene iterative Auktionsformen vorgeschlagen (z.B. RAD, s. [30]), die die Abgabe von Geboten für Bündel von Gütern ermöglichen. Allerdings ist etwa die RAD-Auktion weder in ihren Eigenschaften ansatzweise analysiert noch gibt es Aussagen zur Möglichkeiten ihrer Verwendung in realen Anwendungsszenarien (computational tractability!) mit mehr als einer Handvoll von Ressourcen. Dennoch scheint der Weg zur Lösung der beobachteten Probleme in der Verauktionierung von Ressourcenbündeln zu liegen.

Die Häufigkeit und Relevanz des *Allokationsproblems mit Komplementaritäts- und Substitutionseffekten* führte auch zu einer Reihe von Aktivitäten in der Forschung zur künstlichen Intelligenz, insbesondere im Zusammenhang mit Multi-Agenten-Systemen. Das aus den Koordinationsproblemen in Produktionsnetzwerken ableitbare abstrakte Szenario, nämlich das Problem der Allokation von Ressourcen unter Beteiligung von *eigennützigen* (self interested) und *weitgehend autonomen* Aktoren, legt die Modellierung solcher Problemstellungen als System intelligenter, autonomer, zwar generell kooperationswilliger aber eben auch mit Eigeninteressen ausgestatteter Agenten nahe. Die fortschreitende Vernetzung und Verbesserung der technischen Infrastruktur lässt zudem die (Teil-)Automatisierung komplexer Koordinationsverfahren und ihre Verwertung als Koordinationsinstrument in elektronisierten Allokationsverfahren attraktiv erscheinen. Einen instruktiven Überblick, auch über weitere Literatur, geben zwei Arbeiten von Sandholm [83, 84]. Definitive Antworten zur genannten Problematik enthalten auch sie nicht.

Ein früher Versuch, Allokationsprobleme mit Komplementaritäts- und Substitutionseffekten zu lösen, wird von Wellman et al. in [102] beschrieben. Wellman et al. diskutieren die schwerwiegenden Probleme, die mit dem Versuch der Anwendung eines für klassische Walras’sche Gleichgewichte (für teilbare Güter und konvexe Nachfrage- und Angebotsstrukturen) entwickelten Multi-Agenten-Systems in einer nichtkonvexen Domäne (eine verteilt zu lösende Designaufgabe) verbunden sind. Neue Arbeiten von Sandholm et al. [87] oder Shoham et al. [59, 35] versuchen hingegen, die optimale Lösung eines Koordinationsproblems mit nichtlinearen Präferenzen und nichtteilbaren Gütern direkt zu bestimmen. Die dort betrachtete Situation entspricht in ihren Grundzügen dem im folgenden angenommenen Szenario. Die Anwendbarkeit ihrer Ergebnisse ist allerdings beschränkt, es geht nicht um die Bestimmung von anreizkompatiblen

Preisen oder einer Gleichgewichtslösung, sondern um den Entwurf bzw. die Anwendung eines Algorithmus (modifizierter IDA* im Falle von Sandholm), der das Allokationsproblem, das auch leicht als Integer Programming Problem beschrieben werden kann, löst. Das kann, in einem spezifischen Anwendungskontext, auch über längst bekannte Verfahren (s. etwa die Arbeiten von Baptiste et al. [9], Sadeh [80] oder Beck et al. [10]) erreicht werden. Allerdings sind die betrachteten Allokationsprobleme in der Regel NP-hart, auch die Verwendung exakter, domänenspezifischer Verfahren wird daher zu Traktabilitätsproblemen führen. Darüber hinaus wird die ökonomische Qualität der Lösung nicht analysiert.

Ein gelungener Überblick über weitere Versuche zu marktbasierter Allokation von Ressourcen und eine Sammlung instruktiver Beispiele findet sich in Ygges Dissertation [106]. Im erweiterten Kontext auch nicht-wertorientierter Betrachtung von Allokationsproblemen bieten Rosenschein und Zlotkin in [78] relevante Einsichten – allerdings auch keine abschließenden Lösungen für den in dieser Arbeit besonders interessierenden Fall kombinatorischer Präferenzen.[2]

Im Zusammenhang mit dem Versuch der Lösung von Koordinationsproblemen in fertigungslogistischen Anwendungsszenarien gibt es eine Reihe von Forschungsarbeiten und Veröffentlichungen. Mit Bezug zu einer wertorientierten, ökonomisch motivierten Betrachtung des Koordinationsproblems enthalten etwa die Arbeiten von Morton et al. [64], Baker [8], Adelsberger et al. [1], Parunak [74], Zelewski [91, 108], Weinhardt et al. [101] oder Schmidt [90] instruktive Beiträge. Häufiges Merkmal dieser Arbeiten ist der Vorschlag, marktliche oder marktanaloge Mechanismen zur Koordination von Ressourcenallokationen zu verwenden. Solche Verfahren beinhalten in der Regel die Bestimmung von Preisen, entweder über komplexe Kostenkalkulationen [64] oder über Auktionen [101], allerdings nicht über (Walras'sche) Konkurrenzgleichgewichtsmodelle. Die Arbeiten enthalten viele wichtige Vorarbeiten, führten aber, da sie i. d. R. in einem vereinfachenden Kontext präsentiert wurden (etwa [8]), einer ökonomischen Effizienzanalyse nur schwer zugänglich sind (etwa [64], [1]), oder Qualitätskriterien, wie die Effizienz der Informationserhebung, vernachlässigen ([90], s. auch Kap. 6 dieser Arbeit), noch nicht zu einer befriedigenden Lösung.

## 1.3 Eigene Vorarbeiten

Mit Bezug zum geschilderten Anwendungsrahmen entstand 1995 eine erste Arbeit, die den Einsatz eines spezifischen Typs von Marktmodellen zur Ressourcenallokation in der Fertigung diskutierte, s. [1]. Unter besonderer Hervorhebung der Anforderungen an ein aktives Budgetierungssystem zur Generierung von monetär bewerteten Präferenzen wurden Allokationsregeln abgeleitet, die die Berücksichtigung von individuellen Interessen im Planungsprozess ermöglichen. Diese Vorgehensweise war aber

[2]Dies sind Präferenzen, in denen Kombinationen von Wahlentscheidungen berücksichtigt werden, deren Bewertung in einer Nutzenfunktion sich zudem nicht notwendigerweise aus der Addition der Bewertungen der eingehenden Möglichkeiten ergibt, d.h. gegebenenfalls gilt $u(\{A,B\}) \neq u(\{A\}) + u(\{B\})$. Hier sind $A$ und $B$ Wahlmöglichkeiten und $u(\cdot)$ ist eine Nutzenfunktion. Weitere Details hierzu folgen in Kap. 3.

zunächst nur *ökonomisch motiviert*, versuchte sie doch, über eine Dynamisierung der Zahlungsbereitschaft, also ohne strikte Budgetgrenzen, die relative Durchsetzungsfähigkeit von Auftragsagenten in terminlichen Zwangssituationen zu erhöhen. Dieses Vorgehen erschwert eine ökonomische Analyse wesentlich.

Die Forschungsarbeit im Themenkreis “Coordination Technology for Collaborative Applications”, dokumentiert u.a. in [21] und [22], zielte auf die Entwicklung eines Modells zur Analyse von koordinationsspezifischen Anforderungen an generelle Problemlösemechanismen. Dies bietet einen Einordnungsrahmen für die Betrachtung von Problemen bei der Allokation kombinatorisch verbundener Ressourcen in Kooperationssituationen, in denen die einzelnen Agenten weiterhin eigene Interessen verfolgen. Dies entspricht dem in dieser Arbeit zugrundegelegten generellen Anwendungsszenario. Weitere Vorarbeiten mit engem Bezug zur Arbeit sind in den Papieren [19, 23] dokumentiert. Die erweiterten und eingeordneten Resultate finden sich in dieser Arbeit.

Insgesamt bleibt festzuhalten, dass die Lösung von betriebswirtschaftlich relevanten Koordinationsproblemen zur Allokation von Ressourcen mit Modellen der Mikroökonomie und Vorgehensweisen der Computerwissenschaft eine große Anzahl von Berührungspunkten mit verschiedenen Disziplinen aufweist: Mikroökonomie, diskrete Mathematik/Kombinatorik, Produktion und Logistik, Organisation, Rechnungswesen, Komplexitätstheorie und Algorithmik, um nur die wesentlichen zu nennen. Einen vollständigen Überblick über die Literatur all dieser Bereiche geben und daraus eine integrative Einordnung der erzielten Resultate schlüssig ableiten zu wollen, erscheint vermessen. Die Ausführungen der folgenden Arbeit versuchen, sich auf die zum unmittelbaren Verständnis des gewählten Lösungsweges und der erzielten Resultate notwendigen Voraussetzungen und Referenzen zu konzentrieren, diese schlüssig und mit hinreichender Vollständigkeit zu erklären, zu diskutieren und einzubeziehen, und in den Kapiteln “Anwendung” (Kap. 5) und “Diskussion” (Kap. 6) Belege für und Hinweise zur Anwendbarkeit der Resultate zu geben. Einige dieser Resultate seien im folgenden knapp genannt.

## 1.4 Resultate

Die Arbeit trägt u.a. unter folgenden Aspekten zum Wissensfortschritt bei:

- Aus den Erfordernissen, die Selbstbestimmung der Aktoren weitestmöglich zu berücksichtigen und daher zur Umsetzung von erzielten Allokationslösungen möglichst keinen Zwang auszuüben, wird ein Gleichgewichtsbegriff hergeleitet, der diesen Erfordernissen Rechnung trägt (*koheränte Gleichgewichte)* und der zur Lösung von Ressourcenallokationsproblemen, die durch Substitutions- und Komplementaritätseffekten gekennzeichnet sind, verwendet werden kann.

- Es wird eine anschauliche Verbandsstruktur zur Analyse von Koordinationsproblemen eingeführt, der sogenannte Rang-Lattice.

- Unter anderem basierend auf dieser Struktur werden grundlegende Algorithmen zur Bestimmung von effizienten Allokationen, kohärenten Gleichgewichtspreisen und anreizkompatiblen Vickreyzahlungen angegeben, die zur Realisierung von Koordinationsmechanismen, auch unabhängig vom Begriff koheränter Gleichgewichte, eingesetzt werden können. Die Korrektheit der Algorithmen wird bewiesen. Ein Verfahren zur Einführung kontrollierter Zusammenarbeit zwischen Nachfragern wird präsentiert, um die Existenz von Gleichgewichtspreisen sicherzustellen.

- Der Koordinationsprozess selbst ist weitgehend automatisierbar. Die Bestimmung der individuellen, auf die Bewertung von Alternativen abgebildeten Ziele ist das Kernproblem für jeden teilnehmenden Aktor. Ein partiell-enthüllender, anreizkompatibler Mechanismus (RANG-Mechanismus) wird vorgeschlagen, der es erlaubt, die Erfordernisse zur Bestimmung von Bewertungen sehr detailliert zu kontrollieren und gegebenenfalls zu minimieren (*minimal preference elicitation*). Dies erlaubt auch eine Minimierung des Informationsflusses. Diese Vorgehensweise ist, insbesondere im Hinblick auf die Komplexität praxisrelevanter Koordinationsprobleme, ein grundlegendes Instrument zur Steuerung der Ergebnisqualität. Die mit der Problemlösung verbundene Last der einzelnen Aktoren konzentriert sich auf die Informationen, die bei jeder rationalen Entscheidungsfindung im betrachteten Problemfeld ohnehin zu bestimmen wären. Dies zeigt die Generalität des Ansatzes.

- Die Anwendung des zugrundeliegenden Modells und der Algorithmen auf Job-Shop-Probleme in der Fertigung wird im Detail diskutiert und damit ein nachvollziehbares und individuell kontrollierbares Instrument zur Koordination von Entscheidungen in ökonomischen Schedulingprozessen zur Verfügung gestellt. Diese Vorgehensweise lässt sich auf andere, insbesondere auf zwischenbetriebliche Scheduling und Planungsprobleme, allgemeiner: auf (kombinatorische) Resourcenallokationsprobleme, übertragen.

In der überwiegenden Zahl neu sind die einzelnen Resultate in den Kapiteln 4 und 5.

Neu entwickelt oder gemäß der Problemstellung adaptiert wurden auch eine Reihe von Resultaten, Definitionen und (Gegen-)Beispielen im Kapitel 3, insbesondere in Verbindung mit den hier eingeführten Preismodi und kohärenten Gleichgewichten und zur Präzisierung des Zusammenhangs zwischen Vickreyzahlungen und kohärenten Gleichgewichten. Zusammengefasst dargestellt und korrigiert wurde der Beweis zur Gleichgewichtseigenschaft von Vickreyzahlungen für nichtkombinatorische Ökonomien. Der Anhang C führt zudem einen weiteren partiell-enthüllenden, anreizkompatiblen Mechanismus ein, der eine verdeckte kombinatorische Auktion realisiert, die nur relative Differenzen erfragt. Dieser Mechanismus stellt einen weiteren Schritt in Richtung Minimierung erfragter und zu bestimmender Informationen dar. Dieser Mechanismus ist ebenso neu, wie der RANG-Mechanismus, und stellt eine Anwendung und Erweiterung der im Hauptteil präsentierten Resultate dar.

Im nachfolgenden Kapitel 2 wird die Problemstellung präzisiert.

# Kapitel 2

# Problemstellung

> “Cooperation in the economic tradition is mutual assistance between egoists.”
>
> *Hervé Moulin in [65], S. 5*

## 2.1 Kooperation, Koordination und Ressourcenallokation

Die Planung und Ausführung von Prozessen wird beeinflusst durch die Interessen beteiligter bzw. betroffener Aktoren. In letzter Konsequenz ist dieses Netzwerk von Interessen das veranlassende und antreibende Moment bei der Ausführung der mit den Prozessen verbundenen Tätigkeiten.

In der Literatur zur Allokation von Ressourcen, etwa in der Produktionsplanung, wird dieses Interessengemenge nicht immer berücksichtigt. Häufig werden die mit der Ausführung von Jobs verbundenen vielfältigen individuellen Ziele durch “Ersatzziele”, deren Plausibilität oft nur angenommen, selten aber auch demonstriert wird, abgebildet. Diese inhaltlich nicht immer überzeugend motivierten Modelle mögen zwar eine “optimale” Lösung erlauben – nur lässt sich diese nicht oder nur bedingt auf die tatsächliche Problemstellung übertragen.

In der Forschung zu netzwerkartigen Organisationsstrukturen wurden Vorstellungen entwickelt, die eine individuelle Formulierung und Verfolgung von Zielen abbildbar werden lassen. Ausgehend von diesen Modellen und einigen Annahmen zum Verhalten der modellierten Individuen (im weiteren *Aktoren*) im Hinblick auf die Erreichung globaler Ziele werden Modelle möglich, die eine detaillierte Abbildung der relevanten Interessenlagen gestatten.

Problematisch ist es, im Rahmen dieser Modelle ein Verständnis für das Zusammenwirken der Aktoren und die hieraus entstehende Qualität des Allokationsergebnisses zu entwickeln (im Kontext dieser Arbeit wird von einem Koordinationsproblem gesprochen). Häufig entziehen sich die vorgeschlagenen Mechanismen zur Lösung dieser Koordinationsprobleme einer rigiden Analysierbarkeit – sei es, weil die (mangelnde) Präzision ihrer Darstellung dies nicht erlaubt, sei es, weil die vorgegebenen Interaktionsregeln ein für die zur Verfügung stehenden Analysemethoden zu komplexes Wirkgefüge beschreiben.

Die im Rahmen einer Kooperation erfolgende Entscheidung für einen bestimmten Koordinationsmechanismus bestimmt aber wesentlich die Güte des erreichbaren Allokationsergebnisses. Eine zumindest in ihren Grundzügen von den Beteiligten nachvollziehbare Analyse zur Auswahl stehender Mechanismen ist zentrale Voraussetzung für eine *ökonomisch sinnvolle* und *individuell akzeptierbare* Entscheidung. Gerade unter Berücksichtigung weitgehender wirtschaftlicher Autonomie der an dem Koordinationsprozess beteiligten Aktoren ist die Nachvollziehbarkeit der getroffenen Entscheidung bestimmend für die Teilnahmeentscheidung und die weitere Akzeptanz von Allokationsergebnissen.

Die Analysierbarkeit der Qualität von Koordinationsmechanismen ist somit ein zentraler Aspekt bei der Planung und Bildung von Kooperationen und bei der Abwicklung der mit diesen verbundenen Koordinationsprozesse.

## 2.2 Bewertungskriterien

Unter dem Begriff der *Qualität* von Koordinationsmechanismen lässt sich eine Vielfalt einzelner Kriterien subsumieren. Zur Beurteilung der Ergebnisse der vorliegenden Arbeit in Kapitel 6 werden die nachfolgend genannten Kriterien herangezogen, die in Anlehnung an Sandholm [83] formuliert wurden.[1]

**Wohlfahrtsmaximierung** (Social Welfare). Es wird eine Aggregation (in der Regel eine Summierung) über die individuellen Nutzen (Utility) der Agenten bestimmt. Dies wird problematisch, wenn der Nutzen der einzelnen Agenten nicht mit einem Maß gemessen wird, das den Vergleich zwischen Agenten sinnvoll erscheinen lässt.[2] In der folgenden Darstellung werden quasilineare Präferenzen und die Verfügbarkeit von hinreichenden monetären Ressourcen unterstellt und Geld als Maß der Wohlfahrtsmaximierung und als Instrument zum Transfer von Nutzen verwendet. Wenn wir von *wohlfahrtsmaximierenden* (oder auch *ökonomisch effizienten* bzw. *optimalen*) Lösungen sprechen, dann wird eine additive Aggregation der individuellen Nutzen unterstellt.

[1] Eine Auswahl ähnlicher Kriterien findet sich u.a. auch in [90].

[2] Die Diskussion über die Existenz oder Anwendbarkeit eines solchen Maßes wird hier nicht aufgegriffen. Die Auswahl der Qualitätskriterien wird hier als ein wesentlicher Teil der Auswahl von Koordinationsmechanismen durch eine Gruppe von Aktoren angesehen – die Diskussion über Sinn und Unsinn von aggregierten Qualitätsmaßen wird ersetzt durch die Vorstellung eines realen Verhandlungsprozesses, in den jeder Aktor seine Vorstellungen zur Implementierung von Qualitätsmaßen einbringt (natürlich, je nach Überzeugungskraft und Machtposition, mit mehr oder weniger Erfolg) und eine individuell motivierte Entscheidung zur Teilnahme an den folgende Allokationsprozessen trifft. Die generelle (und kaum zu entscheidende) Frage nach "angemessenen" Massen für die aggregierte Messung von gemeinschaftlichem Nutzen wird so zu einer praktisch behandelbaren und im Einzelfall auch lösbaren Fragestellung. Grundlegende Betrachtungen mögen in den tatsächlichen Verhandlungen in Form von Argumenten Verwendung finden, letztlich ist dies aber arbiträr, denn die einzelnen Aktoren treffen im Rahmen der verabredeten Regelungen eine Entscheidung für die Ausgestaltung der einzusetzenden Mechanismen, die de facto bestimmten Qualitätskriterien Einfluss auf nachfolgende Allokationsentscheidungen beimisst – und dies kann (und wird, wie zu vermuten ist) häufig auch ein aggregierendes und auf Geldwerten beruhendes Maß sein. Insofern ist die Betrachtung von Qualitätsmaßen, die am social welfare orientiert sind (mit social hier bezogen auf die Gruppe teilnehmender Aktoren), durchaus von praktischer Bedeutung.

**Pareto-Effizienz** (Pareto Efficiency). Eine Lösung $x$ ist *pareto-effizient* (oder auch *pareto-optimal*), wenn es keine andere Lösung $y$ gibt, durch die zumindest ein Agent besser gestellt wird und kein Agent sich gegenüber $x$ verschlechtert. Dieses Maß erfordert keine Vergleiche zwischen den individuellen Nutzenquantitäten der teilnehmenden Aktoren – hinreichend ist die Kenntnis des Rangs der zur Wahl stehenden Alternativen. Die optimalen Lösungen sind klarerweise eine Untermenge der pareto-optimalen Lösungen (im Falle von transferierbarem Nutzen fallen beide Mengen zusammen). Das Ranking der Alternativen, die Auswahl von pareto-optimalen Lösungen und deren Beziehung zu optimalen Lösungen werden ausführlich im Kapitel 4 diskutiert und Algorithmen zur (informations-)effizienten Bestimmung von Lösungen unter Beachtung von Annahmen, die die Anwendbarkeit möglichst gering einschränken sollen, entwickelt.

**Individuelle Rationalität** (Individual Rationality). Die Teilnahme an einem Koordinationsmechanismus ist individuell rational für einen Aktor, wenn die dadurch realisierte Handlungsalternative in ihrem Ergebnis die Situation des Aktors im Vergleich zur Nichtteilnahme nicht verschlechtert. In Problemen, in denen die Bewertung einer Situation durch den Aktor direkt von den damit verbundenen Auszahlungen abhängig ist, kann man dies auch mit einem höheren *Gewinn* des Aktors gleichsetzen. Ein Mechanismus wird *individuell-rational* genannt, wenn die Teilnahme am Mechanismus für alle teilnehmenden Aktoren individuell-rational ist. In der hier interessierenden, generellen Problemstellung mit (weitgehend) unabhängig und selbstbestimmt handelnden Aktoren sind letztlich nur individuell-rationale Mechanismen interessant.[3] Im folgenden werden Mechanismen entwickelt, die unter den noch zu treffenden Annahmen individuell-rational sind.

**Stabilität** (Stability). Ein Mechanismus sollte die teilnehmenden Aktoren motivieren, in der ursprünglich in der Phase des Design des Mechanismus vorgesehenen Art und Weise zu handeln. Untersucht wird insbesondere, ob vorgeschlagene Mechanismen den Aktoren Anreize bieten, sich *ehrlich* zu *verhalten* (Anreizkompatibilität) und ob die durch die bestimmte Allokationslösung implizierte Koalition (im Sinne der kooperativen Spieltheorie verstanden als interagierende Gruppe von Aktoren) *stabil* ist, sich also keine Teilkoalition bilden kann, die berechtigte Einwände gegen die Implementierung der vorgeschlagenen Lösung vorbringen kann.

**Symmetrie** (Symmetry). Ein Mechanismus ist symmetrisch, wenn er nicht *a priori* bestimmte Aktoren bevorzugt oder ungleich behandelt. Zudem sollten Aktoren, die auf die gleiche Weise handeln, auch die gleiche Zahlung leisten bzw. erhalten.

[3] Bei unsicherer Informationslage oder falscher Einschätzung kann sich eine zunächst individuell-rational erscheinende Teilnahmeentscheidung aus späterer Sicht allerdings als ungünstig erweisen. Längerfristige Effekte und Erwartungen können die Teilnahmeentscheidung und, dem vorausgehend, die Entscheidung für einen bestimmten Koordinationsmechanismus in der Kooperation beeinflussen. Auch die diesbezüglichen Einschätzungen können sich als falsch erweisen. Die Einhaltung dieses Kriteriums ist also nicht immer offensichtlich, wenn man die Gesamtsituation betrachtet.

**Berechnungseffizienz** (Computational Efficiency). In einer vergleichenden Betrachtung von Mechanismen, die, unter Anwendung der obigen Maßstäbe, gleichgute Lösungen liefern, wird derjenige Mechanismus bevorzugt, der so wenig Berechungslast wie möglich erfordert. Problematisch wird diese scheinbar klare Zielstellung allerdings, wenn Mechanismen verglichen werden, die *ähnlich* gute Lösungen liefern – dann muss zu einer rationalen Auswahl eines Mechanismus auch die Betrachtung und Berücksichtigung der Berechnungseffizienz in den Zielen der teilnehmenden Aktoren erfolgen und es entstehen Interdependenzen zwischen der Berechnungseffizienz und der Erreichbarkeit der anderen Ziele (wesentlich hier: Optimalität und individuelle Rationalität.)

**Verteilung und Kommunikationseffizienz** (Distribution and Communication Efficiency). Idealerweise sollten die Mechanismen derart verteilt realisierbar sein, dass eine einzelne Fehlerquelle nicht den ganzen Ablauf des Mechanismus zum Erliegen bringt. Ähnliche Überlegungen, wie sie zur Berechnungseffizienz und zur Verteilung angestellt wurden, lassen sich auch für die Kommunikationseffizienz anführen. Die erforderliche Menge und Qualität der zu übertragenden Informationen ist zwar bei wachsender *verfügbarer* Bandbreite mit geringen Fehlerwahrscheinlichkeiten nicht mehr vordergründig relevant, von der Kommunikationseffizienz, oder genauer: von den zur Problemlösung erforderlichen Informationen, hängen aber zwei andere Aspekte entscheidend ab: wenn nur ein Bruchteil der zur vollständigen Beschreibung des Problems erforderlichen Informationen zur Lösung des Problems tatsächlich Verwendung finden, dann können die teilnehmenden Aktoren gegebenenfalls ihre sogenannte kognitive Last reduzieren, beispielsweise wenn ein Aktor von 100 möglichen Entscheidungsalternativen nur die attraktivsten 10 benennen und bewerten muss. Zudem sind die Informationen, die von den Aktoren angefordert werden, grundsätzlich privater Natur. Eine Beschränkung der Menge der kommunizierten Informationen beschränkt auch die Aussichten befugter und unbefugter Empfänger, aus diesen Informationen verwertbare Rückschlüsse auf die zugrundeliegenden Ziele und Bewertungskriterien "abgehörter" Aktoren zu ziehen. Auch hier gibt es natürlich Interdependenz zwischen den einzelnen Kriterien.

Die Erreichung dieser Qualitätskriterien wird im Kapitel 6 rückblickend diskutiert.

Wenn die Qualitätskriterien bei der Auswahl eines Koordinationsmechanismus Bedeutung erlangen, so wiederholt sich die Problematik der Abbildung vielfältiger individueller Ziele auch hier. Wichtig ist es, die Auswahl ebenfalls als Ergebnis eines von individuellen Zielen getriebenen Auswahlprozesses zu verstehen, der in einem Zusammenwirken von Aktoren zu einer Entscheidung führt. Dieser Koordinationsprozess "höherer" Ordnung steckt den Rahmen für den Einsatz der Koordinationsmechanismen zur Lösung "alltäglicher" Koordinationsprobleme ab und ist, wie diese, einer ständigen Kontrolle durch die beteiligten Aktoren unterworfen.[4]

[4] Die Überlegungen zur Einbettung von Koordinationsmechanismen werden in der vorliegenden Arbeit nicht weitergeführt und können in späteren Arbeiten aufgegriffen werden. Einige Aspekte der verwendeten Modellierung, etwa die noch darzulegende Verbandsstruktur kombinierter Präferenzen, lassen sich auf die Auswahlsituation übertragen.

## 2.3 Eingrenzung und weiteres Vorgehen

Für die folgenden Kapitel wird die Zielrichtung enger gefasst. Es werden Beschreibungsmittel, Analyseinstrumente und Bausteine für eine Realisierung von Koordinationsmechanismen entwickelt, die eine häufig bedeutsame Klasse von Koordinationsproblemen erfassen und lösen können: die Allokation von Ressourcen unter dem Vorhandensein von Substitutions- und Komplementaritätseffekten (*kombinatorische Ressourcenallokation*).

Beispielhaft sei folgendes Szenario genannt: Eine Gruppe kooperierender Aktoren bringt die für die Erledigung der zu erwartenden Aufträge notwendigen Ressourcen in einen Ressourcenpool ein. Die Kooperationsvereinbarung führt zur Schaffung der Institution *Arbitrator*. Dieser Arbitrator entscheidet auf Basis erfragter Informationen über die Verwendung der Ressourcen. Die Ziele des Arbitrators sind durch die folgenden Vorgaben bestimmt:

1. Die Verteilung der Ressourcen (Allokation) soll das Erreichen von Effizienz zum Ziel haben. Eine Allokation wird effizient genannt, wenn sie, in der Addition der individuellen Nutzen, den größtmöglichen Nutzen stiftet.
2. Der Arbitrator verfolgt keine weitergehenden eigenen Interessen, insbesondere versucht er nicht, über den Konkurrenzeffekt hinaus den Gewinn der teilnehmenden Aktoren zu schmälern.

Gesucht ist ein Mechanismus, der die Abstimmung der individuellen Interessen ermöglicht und eine zielkonforme Verteilung der Ressourcen *implementiert*. Zum Ausgleich von Interessen steht Geld als Mittel zum Transfer von Nutzen zur Verfügung. Der gesuchte *ökonomische Koordinationsmechanismus* führt also auf der Basis von (erfragten) *Informationen* in einem *Koordinationsprozess* ein *Resultat* herbei, dass aus der Zuweisung von Ressourcen (*Allokation*) und Geldtransfers (*Zahlungen*) besteht.

Um die Effizienzbedingung erfüllen zu können, ist es erforderlich, die tatsächlichen (ehrlichen) Präferenzen der ressourcen-konsumierenden Aktoren zu kennen. Unter Annahme einer weitgehenden wirtschaftlichen und rechtlichen Autonomie der beteiligten Aktoren ist es nicht plausibel, generell anzunehmen, dass jeder Aktor alle zur effizienten Lösung des Allokationsproblems erforderlichen Präferenzen ehrlich kundtut. Es ist natürlich denkbar, den Arbitrator mit so weitreichenden Machtbefugnissen und den zu ihrer Durchsetzung notwendigen Werkzeugen und Machtmitteln auszustatten, dass auf Basis einer Kontrolle der Aktoren die Ehrlichkeit der Aktoren (mehr oder weniger) gewährleistet werden kann. Es ist allerdings nicht zu erwarten, dass eine Einigung über bei der Präferenzgenerierung zu verwendende Bewertungsmaßstäbe leicht oder überhaupt sinnvoll zu erzielen sein wird.[5]

Im übrigen würde auf diesem Weg eine wichtige Motivation der Kooperationsbildung zwischen selbstbestimmten Aktoren konterkariert – von der Freiheit, ökonomische

[5] Dies wäre aber erforderlich, um unter Berücksichtigung der allgemein zugänglichen Informationen eine Kontrolle gegebenenfalls ausüben zu können.

Entscheidungen weitgehend autonom und unter Konzentration auf die individuelle Entscheidungssituation treffen zu können, erhofft man sich Vorteile wie erhöhte Flexibilität, verbesserte Entscheidungsqualität, erhöhte Verantwortlichkeit usw. Im folgenden wird daher eine Klasse von Mechanismen untersucht, die Moulin in [65] als institutionale Realisierung des *decentralized (decision) mode* der Kooperation diskutiert. Es wird versucht, (Konkurrenz-)Preise für die zu allozierenden Ressourcen zu bestimmen, die einerseits jedem Aktor eine *individuelle, nutzenmaximierende Entscheidung* über den Kauf ihn interessierender Ressourcen[6] erlauben, andererseits so ausbalanciert sind, dass sie eine effiziente Allokation herbeiführen. In der hier beschriebenen Situation hat das zur Konsequenz, dass die Konsumenten genau die Ressourcen zum Kauf auswählen bzw. eine Zuteilung dieser Ressourcen akzeptieren, die ihnen in der effizienten Allokation auch zugedacht waren (*Effizienz*).

Zudem wird versucht, die Preise so zu bestimmen, dass es für die Konsumenten keinen Anreiz gibt, unwahre Präferenzen zu bekunden (*Anreizkompatibilität*). Die hierbei entstehenden Schwierigkeiten, die in der *Nichtexistenz anonymer Gleichgewichtspreise* in bestimmten Situationen begründet liegen, können durch die Bestimmung von *Vickreyzahlungen* umgangen werden. Vickreyzahlungen sind aber *individualisiert* und eigenen sich nur dann für die Präsentation von Gütern und deren Preisen in Shops oder Katalogen, wenn sie als Preise für die allozierten Güter bzw. Güterbündel interpretiert werden können. Die Bedingungen für das Zusammenfallen von Vickreyzahlungen und minimalen Gleichgewichtspreisen werden daher im Detail untersucht.

Zudem sind *Algorithmen* gesucht, die eine Realisierung von Mechanismen ermöglichen, die auf diesem oder vergleichbaren Gleichgewichtskonzepten beruhen. Diese Algorithmen bzw. die darauf basierenden Mechanismen sollen zudem die oben formulierten Effizienz-Kriterien erfüllen und generelle Aussagen zur (minimalen) Menge der zur Problemlösung benötigten Informationen erlauben. Die Anwendbarkeit der Koordinationsmechanismen, die aus Basis der theoretischen Ausführungen und der Algorithmen entwickelt werden können, soll im Kontext der kurzfristigen Produktionsplanung aufgezeigt werden. Es sollen zudem einige der möglichen Implikationen für die Gestaltung inner- und zwischenbetrieblicher Organisationstrukturen diskutiert werden. Insgesamt soll gezeigt werden, dass die entwickelten theoretischen Grundlagen und die darauf beruhenden Algorithmen es erlauben, Koordinationsmechanismen zu entwerfen, die, gemessen an den oben formulierten Kriterien, eine hohe Qualität aufweisen und deren tatsächliche Verwendbarkeit zur Lösung konkreter inner- und zwischenbetrieblicher Ressourcenallokationsprobleme plausibel erscheint. Dies umreißt die Problemstellung.

In den Ausführungen des nächsten Kapitels wird ein ökonomisches Modell kombinatorischer, diskreter, ökonomischer Ressourcenallokationsprobleme beschrieben. Der Begriff der kohärenten Gleichgewichte wird motiviert und eingeführt. Die Bedingungen für die Existenz kohärenter Gleichgewichte zur Lösung von Problemen, in denen Komplementaritäten und Substitutionseffekte auftreten können, werden untersucht. Die Gleichgewichtspreise werden in Bezug gesetzt zu Vickreyzahlungen, um die Situationen identifizieren zu können, in denen anreizkompatible Mechanismen auf Basis

[6] Die Ressourcen werden so zu Gütern.

einer Preisfindung eingesetzt werden können.

Die Überlegungen und Ergebnisse des Kapitels werden dann in Kapitel 4 aufgegriffen und zur Entwicklung von Algorithmen genutzt, die als Grundlage für Koordinationsmechanismen dienen können, die effiziente Allokationen und Gleichgewichtspreise bzw. Vickreyzahlungen bestimmen. Die Algorithmen bieten zudem einen Ansatz, die Koordinationsmechanismen so zu gestalten, dass von den Aktoren möglichst wenig Informationen über ihre Präferenzen erfragt werden müssen. Dies ist eine wichtige Voraussetzung, um die Kommunikation zu minimieren, die Enthüllung von Informationen zu beschränken und die Berechnungslast der Aktoren bei der Bestimmung ihrer Antworten zu verringern.

# Kapitel 3

# Grundlegendes zu ökonomischen Koordinationsmechanismen

Die folgenden Darstellungen behandeln diskrete Allokationsprobleme. Aus der Klasse der kombinatorischen Ressourcenallokationsprobleme[1] werden ökonomische Koordinationsprobleme betrachtet, in denen Geld zur Übertragung von Nutzen zur Verfügung steht. Eine Menge von Gütern (die Ressourcen) wird einer Menge von Nachfragern zugeordnet. Jeder Nachfrager kann, bis auf die Annahme einer kostenlosen Entsorgung "zuviel" gekaufter Güter, seine Zahlungsbereitschaft für Güter und Bündel von Gütern frei artikulieren – auch so, dass nichtadditive Zusammenhänge abgebildet werden können. Ausgehend von den bekanntgemachten Zahlungsbereitsschaften der potentiellen Käufer wird nach Preisen für Güter bzw. Güterbündel gesucht, die so bestimmt sein sollen, dass die individuellen Entscheidungen der nutzenmaximierenden Aktoren genau zu jenen Kaufentscheidungen führen, die eine effiziente Lösung des Allokationsproblems implementieren, also einen auch in der Aggregation maximalen Nutzen realisieren. In diesem Kapitel werden die nötigen begrifflichen Grundlagen und einige wesentliche Resultate präsentiert. Ausgehend von einem Szenario, das die betrachtete Allokationsproblematik bestimmt (insbesondere wird es nur einen Verkäufer geben und dieser verfolgt das uneigennützige Ziel, eine effiziente Allokation ermöglichen zu wollen), werden die getroffenen Annahmen und die Begriffe *rationale Präferenzen*, *Pareto-Effizienz* und *Quasilinearität* erläutert. Im nachfolgenden Abschnitt wird die Bestimmung effizienter Allokationen diskutiert. Hier erweisen sich Preise als Instrument zur Lösung der noch vorzustellenden Zufriedenheitsproblematik. Es wird festgestellt, dass Preise im Zusammenhang mit kombinatorischen Allokationsproblemen auf unterschiedliche Art, je nach den gesetzten Rahmenbedingungen (Preismodus), zu Zahlungen führen können. Ein besonders attraktiver Preismodus wird vorgeschlagen und es wird diskutiert, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit sogenannte *Gleichgewichtspreise* existierten. Dies sind Preise, die jeden Nachfrager zufriedenstellen, indem sie das Ressourcenbündel, das ihm aufgrund von Effizienzüberlegungen zugewiesen werden soll (oder das er erwerben soll), zu einem der von ihm am meisten

[1] Unter kombinatorischen Ressourcenallokationsproblemen seien solche Allokationsprobleme verstanden, in denen die Zuordnung von Ressourcen zu Aktoren zum einen nicht auf die Auswahl einer einzelnen Ressource je Aktor beschränkt ist und zum anderen die Aktoren der Zuweisung eines Bündels von Ressourcen mehr (Komplementarität) oder weniger (Substitutionalität) Wert beimessen, als sich aus der Summierung der Bewertungen für die in das Bündel eingehenden Ressourcen ergeben würde.

bevorzugten Bündel werden lassen. Es wird festgestellt, dass solche Gleichgewichtspreise nicht in jedem Fall existieren. Anstelle von Preisen, die für Güter unabhängig von der Identität des Nachfragers bestimmt werden, werden dann die Vickreyzahlungen betrachtet, die für jeden Nachfrager so bestimmt werden, dass sie den (negativen) Effekt seiner Teilnahme am Allokationsmechanismus für die anderen Nachfrager ausdrücken. Ein Mechanismus, der Vickreyzahlungen bestimmt, hat die Eigenschaft der *Anreizkompatibilität*, d.h. es gibt für die teilnehmenden Aktoren keinen Anreiz, ihre Nutzenbewertungen nicht wahrheitsgemäß kundzutun. Es ist klar, dass nur wahrheitsgemäß bekundete Nutzenbewertungen es zulassen, die Bestimmung der effizienten Allokation zu garantieren. Es werden die Fälle untersucht, in denen Vickreyzahlungen und (minimale) Gleichgewichtspreise zusammenfallen. Es wird zudem ein Verfahren entwickelt, dass durch die Einführung von Allianzen zwischen Nachfragern sicherstellen kann, dass Vickreyzahlungen und minimale Gleichgewichtspreise zusammenfallen, also anonyme Preise für die Bündel existieren, die jeweils genau den negativen Effekt der Teilnahme des Aktoren, der das jeweilige Bündel erhält, widerspiegeln.[2] wird das Kapitel durch einen Exkurs zu kohärenten Gleichgewichten für zweiseitige Märkte, in denen die nutzenmaximierenden Käufer auf Verkäufer treffen, die auch nach einer Maximierung ihres individuellen Nutzens streben.

Anschließend werden in Kapitel 4 Algorithmen entwickelt, die verwendet werden können, um Gleichgewichtspreise für kombinatorische Allokationsprobleme zu bestimmen. Im Kapitel 5 wird dann die Anwendbarkeit von Mechanismen, die auf kohärenten Gleichgewichten bzw. auf Vickreyzahlungen beruhen und die entwickelten Algorithmen einsetzen, im Hinblick auf Job-Shop-Probleme im speziellen und Organisationsstrukturen im allgemeinen diskutiert.

## 3.1 Szenario, Annahmen und Begriffe

**Situation 1.** *Eine Gruppe von rationalen, selbstbestimmten Aktoren entschließt sich, bei den Aktoren vorhandene Ressourcen in einen gemeinsamen Pool einzubringen. Es soll, zunächst unter Vernachlässigung von mit der Ressourcennutzung verbundenen Kosten, versucht werden, eine effiziente Nutzung der Ressourcen sicherzustellen. Jeder der teilnehmenden Aktoren soll mit der bestimmten Ressourcenallokationen individuell zufrieden sein. Hierzu wird eine Institution, ein sogenannter* ***Arbitrator****, geschaffen. Dieser Arbitrator verwaltet die Poolressourcen unter der Maßgabe, effiziente Allokationen zu bestimmen und diese zu implementieren.*

Die Schlüsselbegriffe dieser noch grobkörnigen Situationsbeschreibung werden im folgenden näher untersucht. Parallel dazu werden einige grundlegende Elemente der im folgenden verwendeten Notation eingeführt.

[2] Dieses Verfahren ist aber nur noch unter Annahmen, die die Fähigkeiten der Aktoren einschränken, anreizkompatibel.

### 3.1.1 Nachfrager, Arbitrator und Allokationen

Die Menge der nachfragenden Agenten[3] (oder Nachfrager) wird durch die $n$-elementige Menge $N = \{1, \ldots, n\}$, $N \subset \mathbb{N}$, dargestellt. Ein Agent $0$ wird als Arbitrator ausgezeichnet. Der Arbitrator formt gemeinsam mit den Nachfragern die Menge $N_0 = N \cup \{0\}$ der Agenten. Ressourcen werden als unterscheidbare, nichtteilbare Einheiten behandelt und mit der $m$-elementigen Menge $\Omega = \{1, \ldots, m\}, \Omega \subset \mathbb{N}$, identifiziert. Die Ressourcen werden im weiteren oft auch als *Güter* bezeichnet. Jede Teilmenge $B \subseteq \Omega$ wird *Bündel* genannt. Dies kann auch als $B \in 2^\Omega$ geschrieben werden. Hier ist $2^\Omega$ die Potenzmenge von $\Omega$, also die Menge aller Teilmengen von $\Omega$ inklusive der leeren Menge, die mit $\emptyset$ bezeichnet wird. Die Menge der Güter lässt sich auf die beteiligten Agenten in Form einer Partition aufteilen.

**Definition 3.1 (Partition).** $Y = \{Y_0, \ldots, Y_k\}$ *ist eine* ***Partition*** *von* $\Omega$ *genau dann, wenn*

$$
\begin{aligned}
&Y_i \in 2^\Omega \;\; \forall i \in \{0, \ldots, k\}, \\
&Y_i \cap Y_j = \emptyset \;\; \forall i \neq j, i, j \in \{0, \ldots, k\} \textit{ und} \\
&\bigcup_{i=0}^{k} Y_i = \Omega.
\end{aligned}
$$

**Definition 3.2 (Partitionssequenz).** *Sei* $Y = \{Y_0, \ldots, Y_k\}$ *eine Partition von* $\Omega$*. Jede* $k+1$*-stellige Sequenz der Elemente aus* $Y$ *wird Permutation oder* ***Partitionssequenz*** *von* $Y$ *genannt.*

**Definition 3.3 (Allokation).** *Jede* $(n+1)$*-stellige Sequenz* $X = (X_0, \ldots, X_n)$*, für die gilt, dass* $\{X_0, \ldots, X_n\}$ *eine Partition der Gütermenge* $\Omega$ *ist, wird* ***Allokation*** *von* $\Omega$ *genannt.*

Anzumerken ist, dass aus der Definition von Partitionen für eine Allokation $X$ folgt, dass die einzelnen Mengen $X_i$ leer sein können.[4]

**Beispiel 3.1.** *In der Regel werden Güter durch Großbuchstaben und Agenten durch Ziffern repräsentiert. Seien also etwa* $\Omega = \{A, B, C\}$ *und* $N = \{0, 1, 2\}$ *entsprechende Mengen. Ein Güterbündel ist eine Teilmenge von* $\Omega$*, beispielsweise* $\{A, B\}$*. Zur*

[3] In der Regel wird im folgenden anstelle des Wortes *Aktor* das Wort *Agent* verwendet. Die Verwendung diese Wortes ist in der englischsprachigen Literatur zu Mikroökonomie und Informatik weit verbreitet. In dieser Arbeit wird es zur Bezeichnung individuell unterscheidbarer "Einheiten" verwendet, die eigene Ziele haben und Handlungen ausführen können. Dies alles trifft auch auf Aktoren zu, allerdings soll der Begriff Aktor vorrangig dann verwendet werden, wenn Menschen oder aus Menschen bestehende Gruppen/Institutionen als Handelnde auftreten. Der Begriff *Aktor* soll insbesondere betonen, dass das Zielsystem, das die Handlung antreibt, sich ohne weiteres *aus eigenem Erkennen und eigenem Antrieb* heraus ändern/anpassen kann. Dieser Aspekt spielt im Falle der Verwendung des Begriffes Agent keine Rolle, Agenten können auch einfach gestaltete, computerisierte Programme sein, die im Auftrag eines Aktors (oder, allgemeiner, eines anderen Agenten – diese Kette beginnt aber mit einem Aktor) an den betrachteten Koordinationsmechanismen teilnehmen – in der hier vorliegenden Arbeit ist also die Verwendung des Begriffs *Agent* die allgemeinere Form, wobei beide Begriffe in weitgehend austauschbarer Weise verwendet werden können.

[4] Die Partitionsdefinition weicht von der üblichen Definition ab, ist aber in dem hier betrachteten Kontext leichter zu handhaben.

*Vereinfachung schreiben wir in aller Regel $AB$ (insbesondere werden die Mengenklammern nicht verwendet). $(C, AB)$ gibt eine zweistellige Partitionssequenz von $\Omega$ an. Eine Allokation im hier gewählten Beispiel wäre eine 3-stellige Partitionssequenz, also etwa $(\emptyset, C, AB)$. Hier hält der Arbitrator selbst keine Güter zurück, der Nachfrager 1 erhält das Gut C (einzelne Güter werden auch als einelementige Güterbündel oder* ***Singleton*** *bezeichnet) und der Nachfrager 2 erhält das Güterbündel $AB$ (bzw. Gut $A$ und Gut $B$ – wir werden nicht annehmen, dass mit der Bündelung von Gütern ein physikalischer Prozess verbunden ist, der möglicherweise gar die Einzelverwendbarkeit der Güter zerstört).*

Die Menge aller möglichen Allokationen wird mit $\mathcal{A}$ bezeichnet. Sie hat $(n+1)^m$ Elemente.

**Beispiel 3.2.** *Im obigen Beispiel mit 3 Gütern, 2 Nachfragern und einem Arbitrator ist die Menge $\mathcal{A}$ aller möglichen Allokationen gegeben durch*

$$\begin{array}{lll} \{ & (ABC,\emptyset,\emptyset),(\emptyset,ABC,\emptyset),(\emptyset,\emptyset,ABC), & \\ & (A,BC,\emptyset),(A,\emptyset,BC),(A,B,C),(A,C,B) & \\ & (B,AC,\emptyset),(B,\emptyset,AC),(B,A,C),(B,C,A) & \\ & (C,AB,\emptyset),(C,\emptyset,AB),(C,A,B),(C,B,A) & \\ & (AB,C,\emptyset),(AB,\emptyset,C),(AC,B,\emptyset),(AC,\emptyset,B), & \\ & (BC,A,\emptyset),(BC,\emptyset,A),(\emptyset,A,BC),(\emptyset,BC,A), & \\ & (\emptyset,B,AC),(\emptyset,AC,B),(\emptyset,C,AB),(\emptyset,AB,C) & \}. \end{array}$$

Weiter unten (s. S. 26) wird die sogenannte Free-Disposal-Annahme getroffen (Annahme 3.6), die zur Folge hat, dass man auf die Betrachtung von Allokationen, in denen der Arbitrator einen Teil der Gütermenge zurückbehält, verzichten kann ("Free Disposal" steht für die freie Entsorgbarkeit von Gütern – erhält ein Nachfrager ein zusätzliches Gut, so kann dieses keinen Schaden stiften). Die Anzahl solcher Allokationen ist dann $n^m$ (zur Erinnerung: $n$ ist Anzahl der Nachfrager, $m$ die Anzahl der Güter).

### 3.1.2 Präferenzen und Nutzen

Aus der Annahme der Rationalität folgt für die Nachfrager, dass sie gerne diejenige Allokation realisiert sehen würden, die ihnen den größtmöglichen Nutzen stiftet. Um den Nutzenbegriff genauer fassen zu können, werden zunächst rationale Präferenzen betrachtet. Diese gehen dann in Nutzenfunktionen ein, die bei Vorliegen von Quasilinearität zu einem Gut "Geld" die Bestimmung von Zahlungsbereitschaften erlauben. Darauf aufbauend kann ein Effizienzbegriff definiert werden, der durch die Allokationen erfüllt wird, die den höchsten über alle Zahlungsbereitschaften additiv aggregierten Nutzen stiften.

**Annahme 3.1 (Rationale Präferenzen).** *Es wird die klassische Annahme des Vorliegens rationaler Präferenzrelationen gemacht, d.h. die Agenten sind in der Lage,* alle *Allokationen paarweise miteinander zu vergleichen und in eine* transitive Ordnung *zu bringen.*

### Exkurs: Rationale Präferenzen

Das Problem der Auswahl einer Alternative aus einer Menge von möglichen, sich gegenseitig ausschließenden Alternativen betrachten Mas-Colell, Whinston und Green in [62] als Ausgangspunkt einer Theorie des individuellen Entscheidens. Sie unterscheiden zwischen zwei Ansätzen zur Modellierung individuellen Auswahlverhaltens. Der erste Ansatz modelliert die Vorlieben (*Präferenzen*[5]) der Individuen explizit mittels individueller Präferenzrelationen und leitet, in der Regel unter Annahme von Rationalität, daraus Aussagen über das zu erwartende Verhalten ab. Der zweite Ansatz geht von dem beobachtbaren Auswahlverhalten aus. In dieser Arbeit werden wir die traditionellere Position des ersten Ansatzes einnehmen.[6] Unterstellt werden also *rationale* Präferenzrelationen.

**Definition 3.4 (Rationale Präferenzrelation).** *Sei $\mathcal{C}$ die Menge an "wählbaren" Alternativen. Eine binäre Relation $\succsim$ über $\mathcal{C}$ wird **rationale Präferenzrelation** genannt, wenn sie folgende Eigenschaften aufweist (anstelle von $(x, y) \in \succsim$ wird häufig $x \succsim y$ geschrieben)*

1. *Für alle Paare $(x, y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ gilt $x \succsim y \;\vee\; y \succsim x$ (*Vollständigkeit*).*
2. *Für alle $x, y, z \in \mathcal{C}$ folgt mit $x \succsim y$ und $y \succsim z$, dass $x \succsim z$ gilt (*Transitivität*).*

Im Hinblick auf die Anwendbarkeit der zu erzielenden Resultate werden die folgenden Definitionen und Herleitungen auf **diskreten Größen** und **endlichen Mengen** beruhen.

Aus der Präferenzrelation lassen sich zwei weitere nützliche Relationen ableiten. Sei $\mathcal{C}$ wiederum die Menge an Alternativen, $x, y \in \mathcal{C}$ und $\succsim$ eine auf $C$ definierte Präferenzrelation.

**Definition 3.5.** *Die **strikte Präferenzrelation** $\succ$ ist definiert durch*

$$x \succ y \Leftrightarrow (x, y) \in \succsim \text{ und } (y, x) \notin \succsim$$

**Definition 3.6.** *Die **Indifferenzrelation** $\sim$ ist definiert durch*

$$x \sim y \Leftrightarrow (x, y) \in \succsim \text{ und } (y, x) \in \succsim .$$

[Ende des Exkurses]

Auf den ersten Blick scheint die Menge der auswählbaren Alternativen in der hier betrachteten Situation durch die Menge $\mathcal{A}$ der möglichen Allokationen gegeben. Wir

[5] Eine *Präferenz* sollte also im Grunde immer die bevorzugte Alternative beim Vergleich eines Paares oder einer Menge von Alternativen bezeichnen. Es kann vorkommen, dass *Präferenz* synonym zu *Alternative* verwendet wird, also ein Element der Menge bezeichnet, die durch Vorlieben geordnet wird. Dies wird aber im folgenden, wenn möglich, vermieden. Zudem und vor allem wird *Präferenzen* im Sinne von *Präferenzrelation* verwendet.

[6] Letztlich weicht diese Unterscheidung durch die Differenzierung zwischen wahren und beobachteten Präferenzen in den Abschnitten 3.4ff zur Bestimmung von Gleichgewichten auf.

gehen allerdings davon aus, dass die Agenten, die sich in einer Kooperation zum Pooling ausgewählter Ressourcen entschlossen haben, ihre Wertschätzung für die Auswahl einer Allokation nur von dem ihnen zugewiesenen Güterbündel abhängig machen und nicht von der Art und Weise, wie die übrigen Güterbündel auf die anderen Agenten aufgeteilt werden.

**Annahme 3.2 (Keine allokativen Externalitäten).** *Es wird angenommen, dass ein Agent beim Vergleich zweier beliebiger Allokationen, die ihm das gleiche Güterbündel zuweisen, keine der beiden Allokation der jeweils anderen vorzieht, d.h., er ist indifferent gegenüber einer Auswahlentscheidung. Formal bedeutet dies, dass für alle* $i \in N$ *und alle Paare von Allokationen* $(X, Y)$, $X, Y \in \mathcal{A}$ *mit* $X_i = Y_i$ *gilt, dass* $(X, Y) \in \sim$.

Dementsprechend verkleinert sich die Menge an Auswahlalternativen für jeden Nachfrager auf die möglichen Teilmengen von $\Omega$, d.h. die Menge $\mathcal{C}$ an wählbaren Alternativen aus den obigen Definitionen entspricht der Menge $2^{\Omega}$ in der hier betrachteten Konkretisierung.[7]

Wir werden uns nun mit einer kombinierten Betrachtung der individuellen Alternativen der teilnehmenden Agenten befassen, um die Effizienzeigenschaften von Lösungen genauer untersuchen und das betrachtete Koordinationsproblem präzise formulieren zu können. Zunächst wird hierzu der Begriff der Pareto-Effizienz eingeführt. Knapp formuliert sind pareto-effiziente Lösungen solche, in denen eine Verbesserung für einzelne oder eine Gruppe von Agenten nur "auf Kosten" anderer Agenten stattfinden könnte. Eine solche Änderung würde gegen die Rationalitäts- und Selbstbestimmungannahme (die noch näher ausgeführt wird) verstoßen. Dies wird nun präzisiert.

**Exkurs: Pareto-Effizienz**

Zur genaueren Fassung des Begriffs der Pareto-Effizienz (oder auch: Pareto-Optimalität) sind zunächst einige Definitionen nötig, die den Bezug der individuellen Auswahlalternativen zu realisierbaren Lösungen herstellen. Die individuellen Alternativen der teilnehmenden Agenten lassen sich zu Kombinationen von Alternativen zusammenstellen, die möglicherweise Lösungen des Problems der Koordination individueller Interessen darstellen können. Im allgemeinen wird aus der Knappheit der in den Alternativen implizit nachgefragten Ressourcen folgen, dass nicht jede Kombination von individuellen Alternativen auch realisierbar ist.

**Definition 3.7 (Alternativenkombination, Realisierbarkeit).** *Gegeben ist Menge* $N_0$ *von Agenten. Die Menge der Auswahlalternativen eines jeden Agenten* $i \in N_0$ *wird mit* $\mathcal{C}_i$ *bezeichnet. Die Menge* $\mathbf{C} = \mathcal{C}_0 \times \cdots \times \mathcal{C}_n$ *wird die Menge der* ***kombinierten Alternativen*** *genannt. Jedes Element* $c$ *der Menge* $\mathbf{C}$ *wird* ***Alternativenkombination*** *genannt (oder nur* Kombination*). Eine Funktion* $\phi : \mathbf{C} \to \{true, false\}$ *wird*

[7] Es werden auch keine informationellen Externalitäten betrachtet, die entstehen können, wenn bestimmte Informationen über Präferenzen bestimmten Agenten durch den Koordinationsprozess zugänglich werden und dies gewünscht oder nicht gewünscht wird.

***Realisierbarkeitsprädikat** genannt. Eine Kombination $c \in \mathbf{C}$ mit $\phi(c) = true$ wird **realisierbar** genannt.*

Für das betrachtete Szenario folgt mit der Annahme, dass keine allokativen Externalitäten vorliegen, dass alle Alternativenmengen der Nachfrager identisch sind und jeweils aus der Menge der Bündel bestehen, d.h. $\mathcal{C}_i = 2^\Omega$ für all $i \in N$. Vereinfachend nehmen wir zunächst an, dass dies auch für den Arbitrator gilt, also $\mathcal{C}_0 = 2^\Omega$ (nach der Einführung des Effizienzbegriffes wird $\mathcal{C}_0$ als die Menge aller Allokationen beschrieben werden, bzw. als die Menge aller Allokationen, in denen der Arbitrator selbst kein Gut erhält).

Eine Alternativenkombination ist nur dann realisierbar, wenn jedes einzelne Gut nur höchstens einmal nachgefragt wird (nachgefragt bedeutet hier, dass das Gut in einer der kombinierten, individuellen Alternativen enthalten ist). Definiert man ein Realisierbarkeitsprädikat $\phi^{'} : \mathbf{C} \rightarrow \{true, false\}$ als

$$\phi^{'}(c) = \begin{cases} true & \text{falls } c \text{ eine } n+1\text{-stellige Partitionssequenz bzgl. } \Omega \text{ ist} \\ false & \text{sonst ,} \end{cases}$$

dann folgt:

**Proposition 3.8.** *Die Menge der Allokationen entspricht genau der Menge der unter $\phi^{'}(\cdot)$ realisierbaren Alternativenkombinationen, d.h., $a \in \mathcal{A} \leftrightarrow a \in \mathbf{C} \wedge \phi^{'}(a) = true$.*

*Beweis.* Jede realisierbare Alternativenkombination lässt sich als Allokation der von den jeweiligen Agenten nachgefragten Gütern zu diesen Agenten darstellen und zu jeder Allokation existiert aufgrund der Vollständigkeit der Präferenzordnungen und der Beschaffenheit der Auswahlalternativen eine Kombination, in der darüber hinaus jedes Gut nur höchstens einmal nachgefragt wird, die also realisierbar ist (zur Erinnerung: eine Allokation ist eine $n+1$-stellige Partitionssequenz der Gütermenge $\Omega$). ☐

Man kann bereits ohne Betrachtung der Realisierbarkeit eine Art aggregierter Präferenzrelation über Kombinationen definieren, die *Dominanz*-Relation.

**Definition 3.9 (Dominanzrelation).** *Seien $a, b \in \mathbf{C}$ zwei Kombinationen. $a$ **dominiert** $b$ genau dann, wenn $a_i \succsim_i b_i$ für alle $i \in N$. In diesem Fall schreibt man $a \succsim b$ oder $(a, b) \in \succsim$. $a$ **dominiert** $b$ **strikt**, wenn $(a, b) \in \succsim$ und $(b, a) \notin \succsim$ (mit anderen Worten: es existiert ein $i \in N$ mit $a_i \succ b_i$ ). Man schreibt dann $a \succ b$ oder $(a, b) \in \succ$.*

Nun sind die Voraussetzungen gegeben, um Pareto-Optimalität zu definieren:

**Definition 3.10 (Pareto-Optimalität).** *Sei $\mathbf{C}$ die Menge der kombinierten Alternativen und $\phi(\cdot)$ ein Realisierbarkeitsprädikat über $\mathbf{C}$. Eine Kombination $c \in \mathbf{C}$ heißt genau dann **pareto-optimal** (oder auch **pareto-effizient**), wenn*

1. *sie realisierbar ist, also $\phi(c) = true$, und*

2. *kein $d \in \mathbf{C}$ existiert, das realisierbar ist ($\phi(d) = true$) und $c$ dominiert ($d \succ c$).*

[Ende des Exkurses]

Da wir uns in einem ökonomischen Kontext bewegen und den einzelnen Agenten eine weitgehende Selbstbestimmung auch und gerade hinsichtlich ökonomischer Entscheidungen zubilligen, ist es angebracht, die Betrachtung von *Geld* in die Entscheidungsalternativen einzubeziehen und die bisher betrachteten Auswahlalternativen in Relation zu einem "Gut" Geld zu bewerten. Diese Bewertungen können als *Zahlungsbereitsschaften* interpretiert werden, die angeben, wieviel des Gutes Geld ein Agent zu opfern bereit wäre, um ein bestimmtes Güterbündel zu erhalten. Es soll keine Budgetrestriktionen geben.

**Annahme 3.3 (Keine Budgetrestriktion).** *Es wird angenommen, dass immer genug Geld zur Verfügung steht, um die am meisten bevorzugte Alternative zu realisieren, mit anderen Worten also das am meisten bevorzugte Güterbündel zu erwerben.*

Trotzdem wird dem Geld in diesem Modell ein positiver, nichtsättigender Wert über seine Bedeutung als Erwerbsinstrument für die momentan betrachteten Güter hinaus beigemessen – es ist also attraktiv, ein Güterbündel so günstig wie möglich zu erwerben. Diese "Wertschätzung" des Geldes lässt sich allerdings nicht aus dem unmittelbar betrachteten Modell erklären, denn der Konsum von Geld stiftet in der Regel ohne einen damit verbundenen Erwerb von Gütern keinen Nutzen. Allerdings ist die Lösung *eines* Ressourcenallokationsproblems über den Transfer von Geldmitteln nur mit *einer* der vielfältigen ökonomischen Aktivitäten der Agenten verbunden, die alle ihrerseits mit dem Abfluss oder dem Zufluss von Geldmitteln verbunden sind. Man kann also die Annahme eines positiven, nichtsättigenden Wertes des Geldes als Ausdruck der Einbettung des einzelnen Allokationsproblems in eine Vielzahl von ökonomischen Geschehnissen ansehen. Darüber hinaus wird angenommen, dass die (monetäre) Bewertung der Güterbündel unabhängig von der dem Agent zur Verfügung stehenden Geldmenge ist.[8]

Die Annahmen werden im folgenden Exkurs formalisiert.

[8] Dies schließt etwa aus, dass ein plötzlich vermögend gewordener Agent die Bewertung von Ressourcen ändert. Da ohnehin angenommen wird, das Budgetbeschränkungen zunächst keine Rolle spielen, war etwa ein "Luxusgut" auch vor dem Anstieg des Vermögens erwerbbar. Wenn ohnehin alle Güterbündel für jeden Agent "im Prinzip" erwerbbar sind, dann macht es keinen rechten Sinn, von Wohlstand/Reichtum/Armut im Rahmen des hier betrachteten Modells zu sprechen. Es ist auch nicht unbedingt plausibel, dass ein Agent in einer ökonomisch motivierten Kooperation, bei der die Bewertung seiner Auswahlalternativen auf wohlüberlegten, ökonomischen Nutzenkalkulationen beruhen sollten, seine Kalkulationen ändert, weil nun eine größere oder kleinere (aber immer "ausreichende"!) Geldmenge zur Verfügung steht. Es mag zwar sehr wohl sein, dass eine langsam wachsende oder gar schrumpfende Geldmenge, oder auch eine stark anwachsende Geldmenge die Gesamtentscheidung, an der Kooperation in der gewählten Form teilzunehmen, in Frage stellt. Wenn über die Teilnahme entschieden ist, sollte aber unabhängig vom zu erreichenden Wohlfahrtsniveau diejenige Alternative realisiert werden, die den größten Nettonutzen stiftet. Insgesamt betrachtet erscheint diese Annahme gerechtfertigt. Beispiele aus der Volkswirtschaftslehre für ein Nichtgelten der Annahme beziehen sich etwa auf Menschen, die sich wegen ihres Vermögensstands bestimmten Klassen bzw. Gruppen zugehörig fühlen und ihre Präferenzen dementsprechend anpassen. Dies erscheint im hier gewählten Kontext *für einzelne Allokationsentscheidungen im Rahmen einer Kooperation* nicht relevant.

#### Exkurs: Quasilineare Präferenzen und Nutzenfunktionen

Ein Gut $0$ wird im folgenden, erweiterten Modell das Geld repräsentieren. Zur Darstellung von Geld werden die rationalen Zahlen gewählt. Die Menge an Auswahlalternativen ist also nun durch die Menge $\mathcal{C}_M = \mathbb{Q} \times \mathcal{C}$ gegeben. Dies führt zu folgender Definition:[9]

**Definition 3.11 (Quasilinearität).** *Sei eine Präferenzrelation $\succsim$ über $\mathcal{C}$ gegeben. Eine Präferenzrelation $\succsim_M$ über $\mathcal{C}_M$ ist* ***quasilinear*** *bezüglich des Gutes $0$, wenn*

1. *für alle $x, y \in \mathcal{C}$ mit $x \sim y$ folgt, dass*
$$(\alpha, x) \sim_M (\alpha, y) \text{ für jedes } \alpha \in \mathbb{Q},$$
2. *für alle $x \in \mathcal{C}$ und $\alpha \in \mathbb{Q}$ mit $\alpha > 0$ gilt $(\alpha, x) \succ_M (0, x)$, d.h., Gut 0 ist* wünschenswert *(desirable).*

**Annahme 3.4.** *Das Gut $0$ ist wünschenswert.*

Rationale (und nur rationale, s. [62], S. 9) Präferenzrelationen können durch eine Nutzenfunktion wie folgt repräsentiert werden.

**Definition 3.12 (Nutzenfunktion).** *Seien wiederum eine Menge $\mathcal{C}$ und eine zugehörige Präferenzrelation $\succsim$ gegeben. Dann ist eine Funktion $u : \mathcal{C} \to \mathbb{Q}$ eine Nutzenfunktion, die die Präferenzrelation $\succsim$ repräsentiert, wenn für alle $x, y \in \mathcal{C}$ gilt:*

$$x \succsim y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$$

Weiter unten werden zu quasilinearen, rationalen Präferenzen (bzgl. der Gutes $0$) Nutzenfunktionen der Form $U(x) = x_0 + u(x_1, \ldots, x_m)$ betrachtet, deren Existenz aus der Quasilinearität der zugrundeliegenden Präferenzrelation folgt. Diese Nutzenfunktionen werden quasilinear bzgl. des Gutes $g_0$ genannt bzw. nur quasilinear, wenn der Bezug zu einem bestimmten Gut klar ist. Die Verwendung von Nutzenfunktionen, die sich alle quasilinear in Bezug auf ein und dasselbe Gut verhalten, formalisiert die im weiteren verwendete Annahme übertragbaren Nutzens.

**Annahme 3.5 (Übertragbarer Nutzen).** *Es wird angenommen, dass die Agenten Nutzenfunktionen aufweisen, die sich quasilinear zu Geld verhalten. Nutzen kann zwischen den Agenten also mittels Geld übertragen werden kann.*

Das Gut $0$ wird hier als institutionalisiertes Austauschinstrument verstanden, das eine Bestimmung von individueller Zahlungsbereitschaft in Relation zu einem nicht näher erklärten tatsächlichen Wert eines Gutes "Geld" erlaubt. Als Zahlungsbereitschaft für ein Güterbündel $b$ der Güter $1, \ldots, m$ wird die Differenz zwischen dem Nutzen $u(b)$ und dem Nutzen für ein leeres Bündel $u(\emptyset)$ interpretiert. Als Wert für $u(\emptyset)$ wird $0$ gewählt. Diese Wahl ist arbiträr, vergleiche hierzu Moulin [65]. Aus der Quasilinearität

[9] Vgl. [62], S. 45, dort allerdings im Kontinuum und über Vektoren definiert

der Nutzenfunktion $U$ folgt, dass die Zahlungsbereitschaft für ein Güterbündel nicht von der Konsumption von Geld abhängt. Zur Bestimmung von Nettonutzen wird nur die auf die nicht monetären Güter beschränkte Nutzenfunktion $u(\cdot)$ verwendet, die der quasilinearen Nutzenfunktion $U(\cdot)$ zugrundeliegt. Es wird alternativ auch gesagt, dass $U(\cdot)$ auf $u(\cdot)$ *basiert*.

[Ende des Exkurses]

**Annahme 3.6 (Free Disposal).** *Es wird zudem angenommen, dass ein Agent ein ihm zugewiesenes Gut immer ohne Kosten entsorgen kann (free disposal).*

Dies lässt sich als Forderung nach einer Monotonie der Präferenzrelationen formulieren.

**Definition 3.13 (Monotonie der Präferenzrelation).** *Eine Präferenzrelation $\succsim$ über $\mathcal{C}$ ist **monoton** falls aus $x, y \in \mathcal{C}$ und $x \supseteq y$ folgt, dass $x \succsim y$. Die Präferenzrelation ist **strikt monoton**, falls aus $x \supseteq y$ und $x \neq y$ folgt, dass $x \succ y$.*

Aus der Monotonie der Präferenzenrelation folgt, dass rationale Nutzenfunktionen, die solche Präferenzrelationen repräsentieren, *ansteigend* sind (*increasing*, vgl. [62]).

Ein Ausdruck der Autonomie der Agenten ist, dass diese Informationen über ihre Präferenzen nur zur Verfügung stellen, wenn ein Anreiz hierzu besteht – eine unlegitimierte "Inspektion von Außen" wird ausgeschlossen:

**Annahme 3.7 (Private Informationen).**
*Die Präferenzen und die Nutzenfunktion eines Agenten sind **private** Informationen.*

## 3.2 Effiziente Allokationen

Die grundlegenden Annahmen zu den Präferenzrelationen der Nachfrager sind nun geklärt. Um die Präferenzen des Arbitrators genauer fassen zu können, muss der Begriff der *Effizienz* präzisiert werden – Ziel des Arbitrators ist es ja, eine effiziente Nutzung der Ressourcen sicherzustellen.

**Definition 3.14 (Effizienz).** *Eine Allokation $X = (X_0, \ldots, X_n)$ der Güter $\Omega$ ist* effizient, *falls gilt, dass*

$$\sum_{i=0}^{n} u_i(X_i) = \max_{Y \in \mathcal{A}} \sum_{i=0}^{n} u_i(Y_i).$$

*$X$ maximiert also den aggregierten (genauer: den summierten) Nutzen über alle möglichen Allokationen $\mathcal{A}$ der Güter in $\Omega$. Die Summe $\sum_{i=0}^{n} u_i(Y_i)$ für eine Allokation $Y = (Y_0, \ldots, Y_n)$ wird als der* Wert *$V(Y)$ der Allokation bezeichnet. Der Wert des Maximierungsproblems entspricht dem Wert einer effizienten Allokation und wird mit $V^*$ angegeben.*

Eine effiziente Allokation $X$ ist natürlich auch pareto-optimal, denn wenn sich der individuelle Nutzen einiger Agenten verbessern ließe, ohne dass sich der Nutzen eines oder mehrerer Agenten verschlechtern würde, dann wäre dies ein Widerspruch zur Effizienz von $X$. Alle Allokationen, deren Wert $V^*$ entspricht, sind effizient.

Der Arbitrator spielt im betrachteten Szenario eine Doppelrolle – zum einen wacht er über die Verteilung der Güter (die Rolle des Auktionators), zum anderen stellt er die Güter auch zur Verfügung (die Rolle eines Anbieters/Verkäufers/Produzenten).

Nimmt man für einen Moment die Rolle eines Anbieters an, der strikt individuelle Ziele verfolgt, die nicht von Externalitäten beeinflusst werden, dann wären die Präferenzen über *den* Bündeln zu definieren, die der Verkäufer *zurückbehält*. So könnte man etwa bestimmte Produktionskosten modellieren: das Zurückhalten eines Bündels "spart" Produktionskosten oder es gibt eine gesicherte Verwendungsmöglichkeit für bereits produzierte oder noch zu produzierende Bündel, die einen bestimmten Wert stiftet. Ein Einbeziehen solcher Überlegungen in die Nutzenfunktion des Verkäufers gestattet die Modellierung von *Reservierungswerten* – ein Bündel würde nur den Besitzer wechseln, wenn es einen Nachfrager gibt, dessen Zahlungsbereitschaft über dem Reservierungswert des Verkäufers liegt.[10]

Im Szenario werden Kosten bzw. Reservierungswerte nicht betrachtet, der Anbieter könnte also als Agent mit einer Nutzenfunktion modelliert werden, die jedem Bündel den Wert 0 zuweist, d.h. der Anbieter hat kein Interesse, eines der Bündel zurückzuhalten. Für die hier verfolgten Zwecke kann der Effizienzbegriff also eingeschränkt werden auf die Betrachtung der Bündel, die den Nachfragern zugewiesen werden,[11] d.h. eine Allokation $X$ ist dann effizient, wenn

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(X_i) = \max_{Y \in \mathcal{A}} \sum_{i=1}^{n} u_i(Y_i).$$

Die Rolle des Anbieters kann bei der folgenden Formulierung der Ziele des Arbitrator also vernachlässigt werden.

**Annahme 3.8 (Effizienzziel).** *Ziel des Arbitrators ist es, unter allen möglichen Allokationen eine derjenigen auszuwählen, die den höchsten summierten Nutzen für die übrigen Agenten aufweisen.*

[10] Der Verkäufer kann so im Grunde als Nachfrager modelliert werden – zu beachten ist nur, dass er in der Regel nicht bereit ist, weitere Bündel zu dem Reservierungswert des von ihm produzierbaren Bündels zu erwerben.

[11] Darüber hinaus folgt aus der Free-Disposal-Annahme, dass immer eine Allokation unter den effizienten Allokationen sein muss, die alle Güter auf die Nachfrager verteilt – da das Hinzufügen weiterer Güter zu einem Bündel den Nutzen der Nachfrager für das Bündel nicht senken kann, kann man eine effiziente Allokation $X$, in der der Arbitrator Güter zurückbehält, unmittelbar in eine Allokation $X^{'}$ verwandeln, die alle Güter auf die Nachfrager verteilt, indem man die zurückgebliebenen Güter beliebig den Nachfragern zuordnet. Für alle Bündel $X_i^{'}$, $i \in N$, in der neuen Allokation gilt $X_i \subseteq X_i^{'}$. Mit Free-Disposal gilt daher $u_i(X_i) \leq u_i(X_i^{'})$, also $\sum_{i \in N} u_i(X_i) \leq \sum_{i \in N} u_i(X_i^{'})$ (bzw. die Gleichheit, denn $X$ war als effizient angenommen. Wenn die Menge der effizienten Allokationen nur voll-verteilende Allokationen enthält, dann ist ohnehin nichts zu zeigen).

Das bedeutet insbesondere, dass für den Arbitrator die letztliche Form der Allokation irrelevant ist – welche Güter welchem Agenten zugewiesen werden, ist ohne Belang, solange das Ziel der summierten Nutzenmaximierung erreicht wird.

Der Arbitrator kann dann durch folgende Präferenzrelation $\succsim_0$: $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ charakterisiert werden: $\forall X, Y \in \mathcal{A}$ gilt $X \succsim_0 Y$ gdw. $X \in \{Z \in \mathcal{A} | V(Z) = V^*\}$, sonst $Y \succsim_0 X$ (hieraus folgt, dass $(X, Y) \in \sim_0$, wenn keine oder beide Allokation effizient sind). Diese Präferenzrelation ist im oben definierten Sinne rational, eine entsprechende Nutzenfunktion lässt sich leicht angeben, indem jeder realisierbaren Kombination, die effizient ist, der Wert $1$ beigemessen wird und allen anderen Kombinationen der Wert $0$.[12]

Zu beachten ist, dass in der obigen Definition der Wert der effizienten Allokationen, $V^*$, verwendet wird. Dieser Wert ist dem Arbitrator zunächst nicht bekannt (Annahme privater Informationen). Es ist unmittelbar klar, dass die Kenntnis aller Präferenzen der nachfragenden Agenten genug Informationen beinhaltet, um den Wert $V^*$ und damit die Präferenzrelation $\succsim_0$ zu bestimmen, denn aus den vollständig bekannten rationalen Präferenzrelationen (rational in Bezug auf eine bestimmte Gütermenge) der nachfragenden Agenten kann immer eine effiziente Allokation bestimmt werden. Dies folgt unmittelbar aus der Endlichkeit der Gütermenge und der daraus resultierenden Endlichkeit der Präferenzrelationen. Aus der Beschränkung des Wertebereichs der Nutzenfunktionen auf $\mathbb{Q}_0^+$ Nutzenfunktionen folgt zudem die endliche Darstellbarkeit der Nutzenwerte.

Im nachfolgenden Kapitel werden wir zeigen, dass es in aller Regel nicht erforderlich ist, alle Präferenzen der nachfragenden Agenten zu kennen, um eine effiziente Allokation bestimmen zu können. Die Überlegungen hierzu machen sich die Verbandsstruktur (lattice) der Kombinationen zunutze, die aus der Rangfolge der individuellen Präferenzen für die enthaltenen Güterbündel folgt. In den weiteren Ausführungen dieses Kapitels werden einige der Bedingungen diskutiert, die geeignet sind, die Agenten zu veranlassen, ihre Präferenzen bzw. ihre Nutzenwerte dem Arbitrator zu übermitteln, um diesem die Bestimmung einer effizienten Allokation zu ermöglichen – gesucht sind also Grundelemente von Mechanismen zur Bestimmung effizienter Allokationen.

Der folgende Beispielmechanismus mag eines der mit der Annahme privater Informationen verbundenen Probleme beleuchten: *Die Agenten sind nicht ohne weiteres bereit, ihre Bewertungen wahrheitsgetreu kundzutun*.

Es sei angenommen, dass der Arbitrator und die nachfragenden Agenten über die angebotenen Güter informiert sind. Es gelten die oben gemachten Annahmen (dies wird im weiteren immer so sein, Ausnahmen werden expliziert). Die Agenten haben sich über ein Austauschprotokoll geeinigt, dass es dem Arbitrator ermöglicht, die Agenten nach ihren Bewertungen für einzelne Güterbündel zu befragen und diese über den Start und das Ende der Befragung zu informieren. Die Antworten der Agenten sind nur dem Arbitrator bekannt. Nach dem Ende der Befragung wird der Arbitrator den

[12] Es ist natürlich auch denkbar, die Präferenzen des Arbitrators direkt vom Wert der Allokation abhängig zu machen und die Nutzenfunktion unmittelbar über diesen Wert zu definieren. Dies hier gewählte Formulierung drückt die Zielsetzung des Arbitrators allerdings direkter aus.

Agenten die bestimmte Allokation mitteilen. Der Arbitrator bestimmt eine effiziente Allokation auf naive Art und Weise, d.h. er erfragt zunächst von allen Nachfragern ihre Nutzenwerte für alle möglichen Güterbündel und bestimmt dann eine effiziente Allokation durch die Bildung aller möglichen realisierbaren Bündelkombinationen und einen Vergleich ihrer durch Aufsummierung entstandenen Werte. Eine Auswahl unter mehreren effizienten Allokationen trifft er zufällig.

Es ist klar, dass dieser Mechanismus (unter Vernachlässigung von Fehlermöglichkeiten, Berechnungs- und Kommunikationskomplexität und unter der Annahme, dass alle Nachfrager alle Fragen beantworten) mit der Bestimmung einer Allokation endet. Allerdings wird diese Allokation in der Regel *nicht* effizient sein – der vorgeschlagene Mechanismus gibt den Nachfragern keinen Anlass, ihre Nutzenbewertungen *wahrheitsgemäß* kundzutun. Letztlich ist der Mechanismus eine Variante des Spiels "Wer sich die höchste Zahl ausdenkt, hat gewonnen!" – um die Chancen auf die Zuteilung des von ihm am stärksten präferierten Güterbündels zu erhöhen, wird ein Nachfrager die von ihm kundgetane Bewertung so hoch wie möglich wählen. Hier mag sich das "möglich" auf eine bestimmte maximale Größe[13] von kommunizierten Zahlenwerten beziehen oder auch auf eine vorab bestimmte Höchstwertgrenze.

Im folgenden elementaren Beispiel wird dieser Mechanismus aufgegriffen und zur Erläuterung einiger Grundkonzepte der Analyse der Eigenschaften von Mechanismen verwendet. Insbesondere wird das Konzept einer dominanten Strategie eingeführt, die Situationen kennzeichnet, in denen ein Agent unabhängig von Überlegungen zum Verhalten anderer Agenten eine Auswahl aus den zur Verfügung stehenden *Handlungsoptionen* treffen kann.

**Beispiel 3.3.** *Gegeben: Ein Gut $A$, zwei Nachfrager $1$ und $2$, der Arbitrator $0$. Die Nachfrager haben die folgenden wahren Nutzenbewertungen für das Gut $A$ und das leere Bündel $\emptyset$.*

| | *A* | $\emptyset$ |
|---|---|---|
| *Agent 1* | *1* | *0* |
| *Agent 2* | **2** | *0* |

*Die effiziente Allokation ist $X^* = \{\emptyset, \emptyset, A\}$. Es sind nur ganzzahlige, nichtnegative Gebote mit einer maximalen Höhe von 3 erlaubt.*

*Der Arbitrator folgt nun dem eben beschriebenen Mechanismus. Die Nachfrager kennen nur ihre eigenen Nutzenfunktionen und können die Antworten der anderen Nachfrager nicht beobachten. Es gibt darüber hinaus keine Informationen über das Verhalten der beteiligten Nachfrager in ähnlichen Ressourcenallokationsproblemen und auch keine anderen Informationen über die Beweggründe der Konkurrenten, d.h. die Nachfrager können keinerlei fundierte Annahmen über die Interessen und die daraus folgenden Vorgehensweisen des Konkurrenten treffen. Die Nachfrager wissen allerdings, dass der jeweilige Konkurrent ebenso uninformiert ist. Der Arbitrator stellt*

[13]Die Höchstgrenze mag sich etwa aus der gewählten Kodierung oder aus den für das Übertragungsprotokoll vorgesehenen Zeitspannen und den Übertragungszeiten im Übertragungsmedium ergeben.

*nach dem Start des Protokolls an jeden Agenten genau eine Frage, nämlich die nach der Bewertung des Gutes* $A$ *(aus den oben gemachten Annahmen folgt die Bewertung für das leere Bündel bereits). Die Agenten haben jeweils die gleichen möglichen Antwortalternativen: 0,1,2 und 3. In Abhängigkeit von den Antworten des jeweils anderen Agenten ergibt sich aus der Auswahl einer effizienten Allokation durch den Arbitrator der folgende Nutzen für die Agenten (hier für den Agenten 1 in Abhängigkeit von den Antworten von Agent 2. Für den Agenten 2 ergibt sich eine analoge Tabelle, in der die Bewertung "1" durch eine "2" zu ersetzen ist).*

| *Agent 1\Agent 2* | *0* | *1* | *2* | *3* |
|---|---|---|---|---|
| *0* | *1 oder 0* | *0* | *0* | *0* |
| *1* | *1* | *1 oder 0* | *0* | *0* |
| *2* | *1* | *1* | *1 oder 0* | *0* |
| *3* | *1* | *1* | *1* | *1 oder 0* |

*Da der Agent 1 keine Informationen über das zu erwartende Verhalten von Agent 2 hat, aber weiß, dass sich der Agent 2 in einer symmetrischen Situation befindet und nach Annahme beide rational agieren, kann er erwarten, dass der Agent 2 analoge Überlegungen anstellen wird. Das spielt aber in diesem Beispiel keine Rolle, denn es gibt eine Antwort, die für alle Varianten im Verhalten des Konkurrenten eine mindestens ebenso gute und für eine Variante sogar eine bessere Nutzenerwartung bietet, als die anderen möglichen Antwortalternativen – die Antwort 3. Eine analoge Betrachtung zeigt, dass auch der Agent 2 diese Antwort geben wird. Diese Antwort zu geben, ist für beide Agenten eine sogenannte* dominante Strategie *(die Nutzenerwartung für diese Antwort ist für jede mögliche Antwort des Konkurrenten maximal). Der Arbitrator bestimmt hieraus zwei vermeintlich effiziente Allokationen, von denen er eine zufällig auswählt. Der Erwartungswert der Auswahlentscheidung, nun unter Berücksichtigung der tatsächlichen Bewertungen, ist also* $1,5$ *– die Auswahlentscheidung ist also nicht notwendigerweise effizient.*

Die Entwicklung von Mechanismen, deren Verwendung den Agenten *dominante Strategien* an die Hand gibt, *die sie veranlassen, ihre wahren Bewertungen kundzutun*, wird als wesentliches Ziel des Designs bzw. der Auswahl von Mechanismen in Abschnitt 3.6 aufgegriffen. Zunächst werden aber einige grundlegende Überlegungen zur Einführung von Preisen und zu ihrem Einfluss auf zu leistende Zahlungen dargelegt. Zahlungen haben einen Einfluss auf die Zufriedenheit der Agenten mit den Resultaten der Anwendung eines Mechanismus. Ihr Nutzen wird sowohl durch das erhaltene Güterbündel, als auch durch die zu leistende Zahlung beeinflusst. Ziel ist es, Preise zu bestimmen, die zu Zahlungen führen, die sicherstellen, dass jeder Agent mit dem erhaltenen Bündel zufrieden *und* die entstehende Allokation der Güter effizient ist. Wir werden demonstrieren, dass die Existenz solcher *Gleichgewichts*-Resultate (zusammengesetzt aus Allokation und Zahlungsvektor) von dem Zusammenwirken der individuellen Präferenzen abhängen kann und dass die Form, in der aus Preisen Zahlungen abgeleitet werden (wir nennen dies den *Preismodus*), Einfluss auf solche Existenzüberlegungen hat.

## 3.3 Preise, Zahlungen und Preismodi

Eine Möglichkeit, die Bandbreite der bekundeten Bewertungen zumindest einzuschränken, besteht darin, die Zahlungsbereitschaft der Nachfrager für die Zuteilungen von Güterbündeln anteilig abzuschöpfen. Es wird also ein *Preis* eingeführt, der zu Zahlungen führt, die die Nachfrager zu entrichten haben, wenn ihnen ein Güterbündel zugewiesen wird. Ziel bleibt weiterhin die Realisierung einer effizienten Allokation. Zunächst wird zur Vereinfachung der Darstellung der Begriff der Ökonomie eingeführt, der hier an die beschriebene Situation angepasst ist.

**Definition 3.15 (Ökonomie).** *Gegeben sei eine Gütermenge $\Omega = \{1, \ldots m\}$, eine Menge $N = \{1, \ldots, n\}$ von $n$ Nachfragern mit den quasilinearen Nutzenfunktionen $U_1, \ldots, U_n$, und ein Arbitrator $0$. Das Tupel $(\Omega; U_1, \ldots, U_n)$ wird* Ökonomie *genannt.*

Die weiteren Annahmen und die Ziele des Arbitrators finden sich in dieser knappen Formalisierung des Ökonomiebegriffs nicht wieder. Die Informationen reichen aber aus, um das Ziel des Arbitrators zu konkretisieren, denn die Nutzenfunktionen der Nachfrager erlauben es, eine effiziente Allokation zu bestimmen. Wir werden diese Schreibweise ohne weitere Ergänzungen verwenden, und die weiteren getroffenen Annahmen als gegeben annehmen.[14]

Bei gegebener Ökonomie lässt sich das Resultat des Ablaufs eines preisgetriebenen Allokationsmechanismus als Tupel aus Allokation und zu leistenden Zahlungen beschreiben, also $(X_0, \ldots, X_n; t_0, \ldots, t_n)$. Hier gibt $X_i$ das dem Agenten $i$ zugeordnete Güterbündel an und $t_i$ die auftretenden Geldtransfers, und zwar für alle $i \in N_0$. Genauer:

**Definition 3.16 (Resultat).** *Ein $2n+2$-stelliger Vektor $(X_0, \ldots, X_n; t_0, \ldots, t_n)$, $t_i \in \mathbb{Q}$, wird **Resultat** einer gegebenen Ökonomie $E = (\Omega; U_1, \ldots, U_n)$ genannt, wenn $(X_0, \ldots, X_n)$ eine Allokation von $\Omega$ ist und es gilt, dass $\sum_{i \in N_0} t_i = 0$.*

Wir werden uns auf Resultate beschränken, die sich direkt aus Preisen ableiten lassen und in denen es keinen positiven Geldtransfer zu Nachfragern gibt. Die Details der Kooperationsvereinbarung, die die teilnehmenden Agenten getroffen haben, regeln die Freiheitsgrade der an den jeweiligen Abläufen eines festgelegten Allokationsmechanismus teilnehmenden Agenten. Zur näheren Bestimmung der Freiheitsgrade der Nachfrager nehmen wir folgendes an:

**Annahme 3.9 (Preisnehmer).** *Die nachfragenden Agenten akzeptieren die vom Arbitrator bestimmten Preise als gegeben.*

Wir haben festgelegt, dass sich die Geldtransfers der Resultate aus den Preisen ergeben sollen. Wie dies geschieht, wird weiter unten noch zu klären sein. Aus den Geldtransfers ergibt sich für jeden Nachfrager ein Nettonutzen wie folgt:

[14] In einer vollständig die Problemklasse charakterisierenden Notation sollten sich alle getroffenen Annahmen und Ziele wiederfinden, so, wie dies etwa mit der Notation zur Einordnung von Schedulingproblemen möglich ist, vgl. beispielsweise [16]. Eine solche, durchaus hilfreiche, Notation für die Einordnung von Ökonomien (bzw. des mit ihnen verbundenen Koordinationsproblems) existiert meines Wissens nach nicht.

**Definition 3.17 (Nettonutzen).** *Für die möglichen Resultate der Form* $(X_0, \ldots, X_n;$ $t_0, \ldots, t_n)$ *einer gegebenen Ökonomie* $E = (\Omega; U_1, \ldots, U_n)$ *(mit quasilinearen, auf* $u_i$ *basierenden Nutzenfunktionen* $U_i$*) gibt* $v_i(X_i, t_i) = u_i(X_i) + t_i$ *den* Nettonutzen *einer Implementierung des Resultats für den Nachfrager* $i \in N$ *an (Anmerkung: es gilt* $t_i \leq 0$ *für alle Nachfrager* $i \in N$*).*

In der Situationsbeschreibung wird von selbstbestimmten Agenten ausgegangen, die mit dem Resultat der Allokationsbemühungen individuell zufrieden sein sollen. Dies führt direkt zu folgendem Postulat:

**Annahme 3.10 (Zwangsfreiheit, 1. Teil).** *Ein Resultat wird nur dann als implementierbar angesehen, wenn es für keinen der Nachfrager eine Möglichkeit gibt, die Implementierung eines Resultats durchzusetzen, das ihm einen höheren Nettonutzen stiftet.*

Die Möglichkeiten zur Beeinflussung des Resultats hängen von den Details der Ausgestaltung des Koordinationsmechanismus ab. Wir werden uns auf die klassische Möglichkeit, die individuelle Kaufentscheidung, konzentrieren. Zunächst werden wir annehmen, dass einem Nachfrager immer die Option offensteht, ein leeres Bündel ohne Kosten erwerben zu können (d.h., $X_i = \emptyset$, $t_i = 0$ für solche Nachfrager $i$), mit anderen Worten:

**Annahme 3.11 (Zwangsfreiheit, 2. Teil).** *Ein Nachfrager kann zum Erwerb eines Güterbündels nicht gezwungen werden.*

Eine Konsequenz hieraus und aus der Rationalitätsannahme ist, dass eine notwendige Bedingung für die Implementierbarkeit eines Resultat die Realisierung eines nichtnegativen Nettonutzens für jeden Nachfrager ist.

**Proposition 3.18 (Nichtnegativer Nettonutzen).** *Notwendige Voraussetzung für die Implementierbarkeit eines Resultats* $(X_0, \ldots, X_n; t_0, \ldots, t_n)$ *ist, dass* $v_i(X_i, t_i) \geq 0$ *für alle Nachfrager* $i \in N$.

Nun gilt es, die Bedingungen zu erfassen, die die Handlungsoptionen für die Nachfrager für einen Versuch der Verbesserung ihrer Situation bestimmen. Dies hängt natürlich wiederum von der Ausgestaltung des Mechanismus ab. Es werden insbesondere die Möglichkeiten zur unterschiedlichen Verwendung von Preisen durch den Arbitrator näher betrachtet. Die Auswahl einer bestimmten Art und Weise, Preise zu verwenden (wir werden dies *Preismodus* nennen), bestimmt die in Erwägung zu ziehenden Kaufoptionen und die damit verbundenen Zahlungen. Dies sei an einem Beispiel erläutert.

**Beispiel 3.4.** *Es sei angenommen, dass der Arbitrator einen Laden betreibt.*[15] *Jeden Abend führt der Arbitrator auf seiner Web-Site einen Allokationsmechanismus aus, der Nutzeninformation bzgl. seiner Güter und möglicher Güterbündel von seinen Kunden erfragt und eine effiziente Allokation der Güter auf der Basis der erfragten Informationen bestimmt. Am jeweils folgenden Morgen betritt er zeitig seinen Laden und führt eine der folgenden Aktionen aus:*

[15] Dies ist eine recht spezielle Art von Laden, denn Ziel des Arbitrators ist es, die ökonomische Effizienz der Verteilung seiner Güter zu maximieren und nicht sein eigenes Einkommen (dies kann allerdings zusammenfallen).

1. *Er zeichnet jedes Gut mit einem Preisschild aus (Modus* GUT*).*
2. *Er hängt eine Preisliste aus, die Preise für jede mögliche Bündelung von Gütern angibt (Modus* ALL*).*
3. *Er hängt eine Preisliste aus, die Preise für jede mögliche Bündelung von Gütern angibt und bringt über der Kasse das folgende Schild an: "Jeder Kunde darf nur ein Bündel am Tag erwerben!" (Modus* ANY*).*
4. *Er bündelt die Güter entsprechend der bereits bestimmten effizienten Allokation und zeichnet jedes dieser Güterbündel mit einem Preisschild aus (Modus* EFF*).*[16]

*Nach Öffnung des Ladens betreten die Kunden diesen in einer zufälligen Reihenfolge, treffen ihre individuelle Einkaufsentscheidung, zahlen und verlassen den Laden. Ist es dem Ladenbesitzer möglich, die Preise so zu bestimmen, dass die individuellen Kaufentscheidungen zur Implementierung einer effizienten Allokation führen (man sagt dann, dass die Preise die gewünschte Allokation "erzwingen")? Hängt die Existenz einer solchen Möglichkeit vom gewählten Preismodus ab?*

Bevor wir uns der Beantwortung dieser Fragen zuwenden, sollen die Auswirkungen der Wahl eines Preismodus auf die in Erwägung zu ziehenden Kaufmöglichkeiten näher betrachtet werden. Wir werden generell annehmen, dass die Preise monoton ansteigend in Gütern sind,[17] also

**Annahme 3.12 (Preismonotonie).** $p(x) \leq p(y)$ *für alle* $x, y \subseteq \Omega$ *mit* $x \subseteq y$.

**Beispiel 3.5.** *Es sei angenommen, dass Agent 1 den Laden betritt und das von ihm am meisten präferierte Bündel* $AB$ *noch verfügbar ist. Im Preismodus* GUT *ergibt sich die für den Erwerb des Bündels nötige Zahlung* $t(AB)$[18] *leisten hat aus der Summe der Preise der im Bündel enthaltenen Güter* $A$ *und* $B$*, also* $p(A) + p(B)$*. Der aus dem Kauf des Bündels folgende Nettonutzen wäre folglich* $u_1(AB) - t(AB) = u_1(AB) - (p(A) + p(B))$*. Diesen Wert muss der Agent mit den Nettonutzen aller anderen möglichen Bündel vergleichen, um eine optimale Einkaufsentscheidung treffen zu können.*

*Im Preismodus* ALL *wird der Agent andere Kalkulationen anstellen: zusätzlich zur Möglichkeit, das Bündel* $AB$ *in zwei Transaktionen (für den Preis* $p(A) + p(B)$*) zu erwerben, kann der Agent das Bündel* $AB$ *direkt erwerben (für den Preis* $p(AB)$*). Es ist anzumerken, dass der Agent auch den Kauf der Bündel* $A$ *und* $BC$ *in Erwägung*

[16] Auf die bereits gebündelten Güter könnte man jeden der anderen Modi anwenden. Wir beschränken uns hier auf die Anwendung des Modus GUT.

[17] Dies ist, durch die Annahme kostenloser Entsorgung (free disposal), keine für die Existenz der noch einzuführenden Gleichgewichtspreise relevante Einschränkung, sie vereinfacht aber die Darstellung. Wenn kein Free-Disposal angenommen würde, dann müsste auch diese Monotonieannahme aufgehoben werden (denn dann könnte es Sinn machen, größere Bündel vergleichsweise billiger zu machen, da hinzugefügte Güter den Nutzen der Agenten reduzieren könnten).

[18] Hier wird mit $t(x)$ die für ein Bündel $x$ in Erwägung zu ziehende Zahlung bezeichnet (positiv). Weiter oben wurde mit $t_i$ der Geldtransfer bezeichnet, den ein Agent im Ergebnis einer Ökonomie zu erbringen hat (negativ). Beide Werte hängen für das letztlich zugeordnete Bündel zusammen, die Unterscheidbarkeit ergibt sich aus dem Kontext.

*ziehen könnte. Durch die Annahme der Monotonie der Preise kann der Preis für $BC$ aber nicht unter dem Preis von $B$ liegen und daher sind solche Überlegungen nicht erforderlich. Ein nutzenmaximierender Kunde wird immer die bestmögliche Kombination von Transaktionen bestimmen, wenn er die erforderliche Zahlung für den Erwerb eines Bündels berechnen will. Der Agent 1 wird also als Zahlung für das Bündel $AB$ das Minimum von $p(AB)$ und $p(A) + p(B)$ in seine vergleichenden Nettonutzenkalkulationen einbeziehen.*

*Im Preismodus* ANY *ist die für ein Bündel zu berücksichtigende Zahlung unmittelbar durch den angegebenen Bündelpreis bestimmt, also etwa $t(AB) = p(AB)$.*

*Die Verwendung des Preismodus* EFF *hat ähnliche Konsequenzen für die Überlegungen der Agenten wie die Verwendung des Modus* GUT *– allerdings mit der Ausnahme, dass möglicherweise weder $A$ und $B$ noch $AB$ zum Erwerb zur Verfügung stehen, weil die Güter in Bündel gepackt wurden, die weitere Güter enthalten, z.B. $AC$ und $BD$. In einem solchen Fall müsste der Agent den Preis für ein überdeckendes Bündel oder die bestmögliche Summe von Preisen für eine Menge von gemeinsam überdeckenden Bündeln bestimmen, um die in Erwägung zu ziehende Zahlung für $AB$ zu ermitteln.* [19]

Die zu leistenden Geldtransfers hängen also direkt von den Preisen und dem gewählten Preismodus ab. Aus der Rationalitätsannahme folgt, dass jeder Nachfrager die für ihn günstigste Einkaufsalternative realisieren möchte. Im Falle der Beschränkung der Einkaufsmöglichkeit auf maximal eine Einkaufstransaktion, in der dann auch nur genau ein Bündel erworben werden darf (Modus ANY), entspricht dem Preis eines Bündels auch direkt der zu leistende Geldtransfer. Besteht diese Beschränkung nicht, dann wird ein Agent, der ein Bündel erwerben möchte, prüfen, ob er dies in einer Transaktion oder in mehreren Transaktionen tun sollte – aus den Preisinformationen folgt ein notwendiger Geldtransfer, der sich aus der minimalen Summe der Preise der Bündel in sämtlichen Partitionen des gewünschten Bündels ergibt. Es gilt nun, diese Aspekte formal zu fassen. Eine Variante wäre, die durch die Agenten bei den Nettonutzenkalkulationen zu betrachtenden Zahlungen für jeden Preismodus in Abhängigkeit von den gegebenen Preisen unterschiedlich gemäß den oben ausgeführten Überlegungen zu bestimmen. Um die weitere Analyse zu erleichtern und die Darstellung zu vereinfachen, wird stattdessen angenommen, dass die Agenten immer mit dem Preismodus ANY konfrontiert werden. Im diesem Modus entspricht die für ein Bündel in Betracht zu ziehende Zahlung direkt dem angegeben Preis. Wir werden durch zusätzliche Bedingungen, die für den Preisvektor erfüllt sein müssen, sicherstellen, dass diese Preise genau den Zahlungen entsprechen, die sich aus den Maximierungsüberlegungen der Agenten für die (partiellen) Preise und Bedingungen der jeweiligen anderen Modi ergeben würden.

**Beispiel 3.6.** *Seien $p(A) = 2$ und $p(B) = 3$ Preise, die im Modus* GUT *verwendet werden. Für die Kalkulation seines Nettonutzens würde jeder Agent als Zahlungen $t(A) = p(A) = 2$, $t(B) = p(B) = 3$ und $t(AB) = p(A)+p(B) = 5$ berücksichtigen. Dies entspricht den Preisen $p(A) = 2$, $p(B) = 3$, $p(AB) = 5$ im Modus* ANY*(wir*

[19] Aus der Free-Disposal-Annahme ergibt sich allerdings, dass der Nettonutzen des größeren Bündels nicht unter dem Nettonutzen für das Ausgangsbündel liegen kann, der Agent kann sich also die Betrachtung der nicht direkt erwerbbaren Bündel ersparen.

*werden sagen, dass diese Preise* **kohärent** *zum Modus* GUT *sind). Ein Preis von 6 für das Bündel $AB$ im Modus* ANY *würde hingegen nicht den Möglichkeiten entsprechen, die der Modus* GUT *bietet.*

Preisfunktionen und sogenannte Kohärenzbedingungen für die verschiedenen Preismodi können nun wie folgt definiert werden.

**Definition 3.19 (Preisfunktion).** *Sei $E = (\Omega; U_1, \ldots, U_n)$ eine Ökonomie. Eine Funktion $p : 2^\Omega \to \mathbb{Q}_0^+$ wird (monotone)* Preisfunktion *genannt, falls $p(\emptyset) = 0$*[20] *und $p(x) \geq p(y)\ \forall x, y$ mit $x \supseteq y$ (es bleibt anzumerken, dass wir manchmal von Preisvektoren anstelle von Preisfunktionen sprechen werden und dann $p_x$ anstelle von $p(x)$ schreiben).*

**Definition 3.20 (Kohärente Preise).** *Sei eine Preisfunktion $p : 2^\Omega \to \mathbb{Q}_0^+$ gegeben.*

- *Die Preisfunktion ist* kohärent *zum Preismodus* GUT *gdw.*

$$p(x) = \sum_{z \in x} p(\{z\}) \quad \forall x \subseteq \Omega, x \neq \emptyset. \tag{3.1}$$

- *Die Preisfunktion ist* kohärent *zum Preismodus* ALL *gdw.*

$$p(x) = \min_{Z \in \Pi(x)} \sum_{z \in Z} p(z) \quad \forall x \subseteq \Omega, x \neq \emptyset. \tag{3.2}$$

  $\Pi(x)$ *ist hier die Menge aller möglichen Partitionen von $x$.*

- *Jede Preisfunktion ist kohärent zum Modus* ANY.

- *Die Preisfunktion ist* kohärent *zum Preismodus* EFF *gdw. eine Allokation $X$ existiert, so dass* [21]

$$p(x) = \sum_{z \in X, z \subseteq x} p(z) \quad \forall x \in 2^X, x \neq \emptyset \tag{3.3}$$

  *und*

$$p(x) = \min_{z \supset x, z \in 2^X} p(z) \quad \forall x \notin 2^X, x \neq \emptyset. \tag{3.4}$$

**Beispiel 3.7.** *Die Bedingungen des Preismodus* EFF *seien etwas detaillierter erläutert. Gegeben seien die Bewertungen von zwei Agenten für die Bündel, die sich aus den drei Gütern A,B und C bilden lassen:*

[20] Diese Normierung des Preises für das leere Bündel schränkt die Gestaltungsalternativen des Arbitrators im Falle von Free-Disposal nicht ein.

[21] Zur Erklärung der Notation ist folgendes anzumerken: Die Operatoren *Potenzmenge* und *Element-von* werden hier auf partitionierende Sequenzen angewendet. Die *Elemente* von $X$ sind die Mengen $X_i \subseteq \Omega$. Die *Potenzmenge* $2^X$ besteht aus allen Kombinationen der *Elemente* von $X$. Es wird $x \in 2^X$ für ein $x \subseteq \Omega$ geschrieben, falls eine Partition von $x$ existiert, so dass jedes Element der Partition (dies ist ebenfalls eine Teilmenge von $\Omega$) ein *Element* von $X$ ist (oder mit anderen Worten: die Partition ist ein Element von $2^X$).

| | *A* | *B* | *C* | *AB* | *AC* | *BC* | *ABC* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Agent 1* | *2* | *2* | *2* | **6** | *4* | *4* | *6* |
| *Agent 2* | *0* | *1* | **2** | *2* | *3* | *4* | *5* |

*In der effizienten Allokation erhält Agent 1 das Bündel $AB$ und Agent 2 das einelementige Bündel $C$. Preise, die kohärent zum Modus* EFF *sind, "emulieren" den einschränkungsfreien Verkauf bereits vorgepackter Bündel (in diesem Fall können also Bündel, die nicht unter den vorgepackten Bündeln sind, nur durch den Kauf sie enthaltender Bündel erworben werden). Dies wird durch die Kohärenzbedingung* (3.4) *modelliert, die erzwingt, dass die Preise der nicht vorgepackten Bündel dem Minimum der Preise sie überdeckender Bündel entsprechen (dies entspricht der optimalen Kaufentscheidung im Falle vorgepackter Bündel). Die Kohärenzbedingung* (3.3) *stellt sicher, dass die Preise der Bündel, die sich aus den "vorgepackten" Bündeln zusammensetzen lassen, der Summe der Preise der in sie eingehenden vorgepackten Bündel entspricht. Zusammen mit der zuerst beschriebenen Kohärenzbedingung sorgt dies dafür, dass der angegebene Preis der Zahlung entspricht, die sich im Falle nicht beschränkter Transaktionen für die günstigste Transaktionsmenge ergeben würde (d.h. in der Konsequenz, dass für jedes Bündel der Erwerb zum angegebenen Preise mindestens so günstig ist, wie irgendein "zusammengesetzter" Erwerb des Bündels in mehreren Transaktionen). Diese Abhängigkeiten zwischen den Preisen werden in der Abbildung 3.1 nochmals verdeutlicht.*

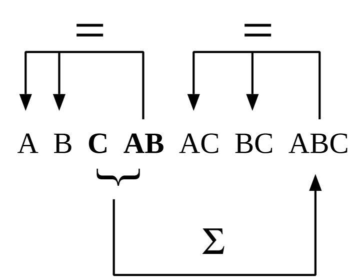


**Abbildung 3.1:** Die effiziente Allokation bündelt die Güter $A$ und $B$. Der Preis für das Bündel $ABC$ ergibt sich aus der Summe der Preise für $AB$ und $C$. Die Preise der anderen Bündel entsprechen den Preisen des kleinsten sie enthaltenden Bündels.

*Zwei Preisvektoren, die kohärent zum Modus* EFF *sind und die effiziente Allokation unterstützen,*[22] *sind etwa*

| | *A* | *B* | *C* | *AB* | *AC* | *BC* | *ABC* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Preise* | *4* | *4* | **1** | **4** | *5* | *5* | *5* |
| *Preise (Vickrey*[23]*)* | *3* | *3* | **0** | **3** | *3* | *3* | *3* |

*Der erste Preisvektor führt zu folgenden Nettonutzenkalkulationen:*

[22] Definition s. unten. Kurz: Ein Preisvektor *unterstützt* eine Allokation, falls jeder Agent mit dem ihm zugedachten Bündel zu den gegebenen Preisen zufrieden ist. Er *erzwingt* eine Allokation, falls jeder Agent das ihm zugedachte Bündel zu den gegebenen Preisen strikt bevorzugt.

[23] Die Preise für die Bündel $C$ und $AB$ entsprechen den Vickreyzahlungen, s. unten. Sie sind darüber hinaus minimal (denn eine Verringerung von $p(AB)$ würde das große Bündel $ABC$ für den Agenten 2 so attraktiv machen, dass er mit dem Erhalt des Bündels $C$ unzufrieden wäre). Die Beziehung zwischen minimalen kohärenten Gleichgewichtspreisen und Vickreyzahlungen wird in Abschnitt 3.6 untersucht.

| | *A* | *B* | *C* | *AB* | *AC* | *BC* | *ABC* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Agent 1* | *-2* | *-2* | *1* | **2** | *-1* | *-1* | *1* |
| *Agent 2* | *-4* | *-3* | **1** | *-2* | *-2* | *-1* | *0* |

Im weiteren werden wir also annehmen, dass die für ein Bündel in Erwägung zu ziehenden, optimalen Zahlungen direkt den für das Bündel angegebenen kohärenten Preisen entsprechen. Es gilt die zusätzliche Bedingung des Modus ANY, nämlich dass jeder Nachfrager nur höchstens *eine Transaktion*, in der er genau *ein Bündel* erwirbt, durchführen kann. Wie erläutert, stellen die Kohärenzbedingungen für die Modi GUT, ALL und EFF sicher, dass diese zusätzliche Bedingung keinen einschränkenden Einfluss auf die Auswahl und Realisierung der bestmöglichen Einkaufsentscheidung im Vergleich zur Bestimmung der Zahlungen in einer direkten Umsetzung der Preismodi hat.[24]

Die folgende Beobachtung ergibt sich unmittelbar aus den Kohärenzbedingungen.

**Proposition 3.21.** *Sei $p(\cdot)$ eine Preisfunktion. Falls $p(\cdot)$ kohärent ist zu Modus* GUT*, dann ist sie auch kohärent zu Modus* EFF*. Ist sie kohärent zu Modus* EFF*, dann ist sie auch kohärent zu Modus* ALL.

*Beweis.* (Modus GUT$\rightarrow$ Modus EFF) Sei $X$ eine beliebige, aber fest gewählte Allokation. Sei $p(\cdot)$ eine Preisfunktion, die kohärent zum Modus GUT ist. Nun wird der Preis eines Bündels $x$ betrachtet. Es gibt zwei Fälle: falls $x \in 2^X$, dann muss $p(x)$ die Summe der Preise der Bündel, die in $x$ enthalten sind, sein. Da jeder dieser Preise wiederum die Summe der Preise für die eingehenden Güter ist (d.h., $p(X_i) = \sum_{y \in X_i} p(\{y\})$), folgt, dass $p(x) = \sum_{z \in x} p(\{z\}) = \sum_{z \in X, z \subseteq x} \sum_{y \in z} p(\{z\}) = \sum_{z \in X, z \subseteq x} p(z)$. Der andere Fall und der zweite Teil der Proposition (d.h., Modus EFF $\rightarrow$ Modus ALL) lassen sich ebenso direkt zeigen. $\square$

Der Preismodus GUT ist in der Literatur intensiv studiert worden, etwa von Kelso und Crawford [52] oder, darauf eingehend, Gul und Stacchetti [41]. Wesentliche Überlegungen und Resultate zum Preismodus ANY finden sich in Arbeiten von Wurman und Wellman, s. [105, 104].

Beide Modi haben wesentliche Nachteile. Die Existenz von Preisen des Modus GUT, die eine effiziente Allokation unterstützen oder erzwingen, kann nur unter Einhaltung relativ stark einschränkender Bedingungen garantiert werden, vgl. Abschnitt 3.5. Für den Modus ANY existieren solche unterstützenden Preise zwar immer, eine “korrekte” Implementierung des gewünschten Resultats erfordert aber regelmäßig eine strikte Kontrolle des Agentenverhaltens. Die Sicherstellung der Beachtung der Regel, dass jeder Kunde nur ein Bündel erwerben darf, würde in obigem Beispiel etwa erfordern,

[24] Auf eine detaillierte Formalisierung kann hier verzichtet werden. Die Vorgehensweise sei für den Modus GUT dargelegt. Dort gibt es eine (partielle) Preisfunktion, die Preise für alle Elemente aus $\Omega$ angibt. Diese bestimmt die zu berücksichtigenden Zahlungen $t(x)$ für ein nichtleeres Bündel $x$ als $\sum_{z \in x} p(x)$. Eine vollständige Preisfunktion im Modus ANY bestimmt die Zahlung direkt als $t(x) = p(x)$ für alle Bündel $x$. Es ist klar, dass die Zahlungen dann zusammenfallen, wenn die Kohärenzbedingung des Modus GUT für die vollständige Preisfunktion erfüllt ist. Analoge Betrachtungen lassen sich für die Preismodi ALL und EFF anstellen.

dass sich jeder Kunde zum Zwecke einer Registrierung ausweist (um ihn von weiteren Käufen abhalten zu können). Zudem sollte verhindert werden, dass der Kunde einen Freund in den Laden sendet, der im Interesse des Auftraggebers ein weiteres Bündel erwirbt (und damit u.U. einen günstigeren Gesamtpreis realisiert). Die Kontrolle solcher Bedingungen kann sich als schwierig erweisen und ist sicher nicht in allen Fällen durchführbar oder wünschenswert. Wir werden uns im folgenden auf den Modus EFF konzentrieren, für den solche Zwangserfordernisse nicht bestehen und für den die Existenz von unterstützenden Preisen für effiziente Allokation für eine gegenüber dem Modus GUT wesentlich erweiterte Klasse von Problemen garantiert werden kann. Wenn im weiteren nur von kohärenten Preisen gesprochen werden sollte, dann sind Preise gemeint, die kohärent zum Modus EFF sind.

Die Abhängigkeit der Kaufentscheidung vom Preismodus wird durch eine Kohärenzbedingung ausgedrückt. Es gelten die Modalitäten des Modus ANY, d.h. jeder Agent darf nur eine Transaktion durchführen. Die Preise können deshalb direkt in der Definition des zu betrachtenden Nettonutzens verwendet werden.

**Definition 3.22 (Nettonutzenfunktion).** *Sei $\Omega$ die Menge der Güter, $p(\cdot)$ eine passende (also über $2^\Omega$ definierte) Preisfunktion und $i$ ein Konsument mit einer quasilinearen Nutzenfunktion $U_i(\cdot)$, die auf $u_i(\cdot)$ basiert. Dann wird die Funktion $v_i^p : 2^\Omega \to \mathbb{Q}$, definiert als $v_i^p(x) = u_i(x) - p(x)$, die* Nettonutzenfunktion *von $i$ im Hinblick auf $\Omega$ und $p(\cdot)$ genannt.*

**Beispiel 3.8.** *Betrachten wir nun den ersten Kunden, etwa $i$, der in obigem Beispiel den Laden betritt. Diesem Kunden stehen noch alle Einkaufsmöglichkeiten offen. Es sei angenommen, dass die Preise kohärent zum Preismodus* EFF *sind. Um seine Einkaufsentscheidung zu treffen, wird er für jedes Bündel die optimalen Erwerbstransaktionen bestimmen. Wie bereits erwähnt, sorgen die Kohärenzbedingungen dafür, dass mehrere Transaktionen nicht in Erwägung gezogen werden müssen, denn der angegebene Preis (für eine Transaktion) ist bereits minimal. Der Agent wird nun den realisierbaren Nettonutzen aller Bündel untereinander vergleichen, um das zum gegebenen Preis attraktivste Bündel zu bestimmen. Er muss also ein Bündel aus der Menge*

$$\{x \subseteq \Omega | v_i^p(x) \geq v_i^p(y) \ \ \forall y \subseteq \Omega\}$$

*bestimmen.*

## 3.4 Individuelle Zufriedenheit und Gleichgewichte

Ein weiterer Aspekt, der Preise zu einem wichtigen Instrument macht, kommt hier noch hinzu. Im Beispiel 3.3 ist der jeweils nicht zum Zuge kommende Agent natürlich mit der realisierten Allokation nicht zufrieden. Ohne weitere Kompensation zu erhalten, muss er auf den Nutzen, den ihm eine für ihn günstige Allokationsentscheidung stiften würde, verzichten – er wäre mit der Allokationsentscheidung nicht einverstanden und könnte auch keine für ihn nachvollziehbaren Gründe erkennen, weshalb er die Allokationsentscheidung hinnehmen sollte. Akzeptieren die Agenten die Verwendung von Preisen und den damit verbunden Transfer von Nutzen zum Arbitrator von vornherein als Teil des Allokationsmechanismus, dann wird auch das oben formulierte Ziel der individuellen Zufriedenheit leichter erreichbar.[25] Die nachfragenden Agenten streben weiterhin nach einer individuellen Nutzenmaximierung – nun allerdings unter der bereits verwendeten Rahmenbedingung 3.9, die besagt, dass die Nachfrager die vom Arbitrator bestimmten Preise als gegeben akzeptieren. Im Rahmen von Kooperationsvereinbarungen erscheint diese Annahme durchaus gerechtfertigt – das Manipulieren der Preisgestaltung durch gezielte Fehlinformation oder durch Absprachen wird im allgemeinen nicht im Interesse der Kooperation liegen (die Effizienz der Allokation ist gefährdet) und es wird zumindest beschränkte Instrumente zur Kontrolle des Verhaltens der Agenten geben (Bilanzeinsicht, Einsicht in Ausschreibungsunterlagen/Kalkulationen etc.).

Wie bereits erläutert, ist es das Ziel eines nutzenmaximierenden Agenten, eines derjenigen Güterbündel zugewiesen zu bekommen, die ihm den höchsten Nettonutzen stiften.

**Definition 3.23 (Zufrieden, Unterstützt).** *Ein Agent $i$ ist genau dann* zufrieden *mit einer Allokation $X$ bei gegebenen Preisen $p$, wenn das ihm zugewiesene Güterbündel $X_i$ seinen Nettonutzen maximiert, d.h.*

$$v_i^p(X_i) \geq v_i^p(B)\ \forall B \in 2^\Omega.$$

*Eine zu $2^\Omega$ passende Preisfunktion $p$* unterstützt *eine Allokation $X$ genau dann, wenn jeder Agent $i \in N$ mit der Allokation zufrieden ist.*

Erfüllt das Resultat einer Koordination die Eigenschaft individueller Zufriedenheit für alle beteiligten Agenten, dann spricht man von einem (Interessen-)Gleichgewicht. Für perfekte Märkte konnte, basierend auf den Arbeiten von Leon Walras, gezeigt werden, dass solche Gleichgewichte nicht nur Angebot und Nachfrage (bzw. die darin Ausdruck findenden Interessen) ausgleichen, sondern zudem auch ökonomisch effizient sind. Bei Anwendung eines geeigneten Koordinationsmechanismus[26] ergibt sich aus dem Ausgleich der Interessen also auch die gesamtwirtschaftlich wünschenswerte Lösung – ein zentrales Resultat der Mikroökonomie. Es konnte zudem gezeigt werden, dass solche Walraschen Gleichgewichte generell existieren (unter den klassischen Annahmen, vergleiche etwa [62]). Es ist klar, dass ein solches Resultat attraktive Konsequenzen hat: so führt ein Mechanismus, der ein solches Gleichgewicht basierend auf dem Ausgleich individueller Interessen implementiert, unmittelbar zu einer auch "gesamtwirtschaftlich" gewünschten Lösung. Leider sind diese Resultate aber für einfacher strukturierte Märkte erzielt worden und lassen sich nicht ohne weiteres auf Situationen übertragen, in denen Agenten einem Bündel von Gütern höheren (Komplementarität) oder niedrigeren (Substitutionalität) Wert beimessen, als sich aus der Summierung der Nutzenwerte für die im Bündel enthaltenen Güter ergeben würde. Dies ist aber die hier betrachtete, allgemeine Situation für diskrete Güter. Bevor wir uns

[25] Gäbe es keine Preise im obigen Beispiel, dann könnten sich die Konkurrenten etwa über Kompensationszahlungen verständigen – unter Konkurrenten sind solche Verhandlungen ohne Offenbarung der privaten Informationen aber kaum so zu realisieren, dass die Effizienz gewährleistet werden kann.

[26] Walras schlug den Prozess des *tatônnement* vor, den beispielsweise Wellman computerisiert hat [17] und zur Lösung einfacher Allokationprobleme verwendete [103].

aber der Suche nach möglichen Mechanismen zur Bestimmung von Gleichgewichtspreisen zuwenden, werden zunächst Fragen nach der Effizienz und der Existenz von Gleichgewichtslösungen untersucht.

Im betrachteten Szenario lässt sich der Gleichgewichtsbegriff wie folgt festlegen.

**Definition 3.24 (Gleichgewicht/Equilibrium).** *Sei $E$ eine Ökonomie, $X$ eine Allokation, und $p(\cdot)$ eine passende Preisfunktion. Das Paar $(X; p(\cdot))$ heißt **Gleichgewicht** (oder **Equilibrium**) genau dann, wenn jeder teilnehmende Agent mit dem induzierten Resultat individuell zufrieden ist, es müssen also die folgenden Bedingungen erfüllt sein:*

1. *Die Allokation $X = (X_0, X_1, \ldots, X_n)$ ist effizient, der Arbitrator ist also zufrieden.*
2. *Jeder Nachfrager $i \in N$ ist mit $X_i$ bei den gegebenen Preisen individuell zufrieden.*

*Falls $(X; p(\cdot))$ ein Gleichgewicht ist, wird $p(\cdot)$ auch* Gleichgewichtspreisfunktion *genannt.*

Zu beachten ist, dass hier und im weiteren Bezug genommen wird auf die wahren Präferenzen der Nachfrager. Ob diese tatsächlich bekannt werden und die Erfüllung der Bedingungen durch Mechanismus tatsächlich gewährleistet werden kann, wird in Abschnitt 3.6 diskutiert.

**Konsequenz 3.25.** *Für jedes Equilibrium gelten die folgenden Beobachtungen:*

1. *Nachfrage und Angebot gleichen sich aus.*
2. *Die unterstützte Allokation ist effizient.*

Es mag überraschend erscheinen, dass eines der Standardresultate der Mikroökonomie, das erste Theorem der Wohlfahrtsökonomie, eine unmittelbare Konsequenz der *Definition* der hier betrachteten Gleichgewichte ist. Dies folgt aus dem untersuchten Szenario: die Schlüsseleigenschaft von Gleichgewichten ist, dass die Agenten mit dem Ergebnis individuell zufrieden sind. Einer der beteiligten Agenten, der Arbitrator, hat Präferenzen für vollständige Allokationen. Dies erklärt den Fakt, dass ein globales soziales Kriterium (Effizienz) als Kriterium für individuelle Zufriedenheit in Erscheinung tritt. Im klassischen Setting, mit einer Menge von Verkäufern und keinem zentralen, aus Eigeninteresse handelnden Arbitrator, beziehen sich die Präferenzen der Agenten nur auf Teile von Allokationen, namentlich auf zu erwerbende oder zu verkaufende Bündel – in dieser Situation wird es dann natürlich interessant zu analysieren, ob ein globales Kriterium (wie Effizienz) sich als emergente Konsequenz aus der Erfüllung der individuellen Kriterien ergibt. Im hier betrachteten Szenario folgt das aber unmittelbar.[27]

[27] Auch, wenn wir weiter unten das Szenario um Verkäufer erweitern – allerdings weiterhin unter der Annahme eines zentralen Problemlösers (Arbitrators), der ein effizientes Resultat anstrebt.

## 3.5 Existenz

Eine für den Arbitrator wesentliche Frage ist nun, ob sich für ein gegebenes Allokationsproblem und einen gegebenen Preismodus Preise so bestimmen lassen, dass sie eine effiziente Allokation unterstützen. Für den Preismodus ANY ist dies für jedes Allokationsproblem möglich:

**Theorem 3.26.** *Zu jeder Ökonomie $E$ lässt sich ein Resultat mit einer effizienten Allokation bestimmen, so dass die Preisfunktion kohärent zum Preismodus* ANY *ist und die Allokation unterstützt, d.h. es existiert eine Allokation $X$ und eine Preisfunktion $p(\cdot)$, so dass*

$$u_i(X_i) - p(X_i) \geq u_i(B) - p(B) \quad \forall B \subseteq \Omega, \forall i \in N. \tag{3.5}$$

*Beweis.* Dies wurde von Wurman und Wellman in [105], als unmittelbare Konsequenz der Resultate von Leonard (s. [58]), bewiesen.[28] □

Solch ein Resultat gilt nicht für den Modus GUT, wie das folgende Beispiel demonstriert:

**Beispiel 3.9.** *Gegeben sind die Agenten 1 und 2 und die Güter $A$ und $B$.*

| | | *A* | *B* | *AB* |
|---|---|---|---|---|
| *Nutzen* | *Agent 1* | *0* | *0* | **3** |
| | *Agent 2* | *2* | *2* | *2* |
| *Preise* | *Modus* GUT | $\geq 2$ | $\geq 2$ | $p(A) + p(B) \leq 3$ |
| | *Modus* ALL, ANY | *2.1* | *2.1* | *2.5* |
| | *Modus* EFF | *2.5* | *2.5* | *2.5* |

*Die effiziente Allokation besteht in der Zuweisung des Bündels $AB$ an den Agenten 1. Der Agent 2 würde einen Nettonutzen von $0$ realisieren. Um den Agenten 2 zufriedenzustellen, müssen die Preise für die Singletons mindestens $2$ erreichen. Andererseits darf der Preis für das Bündel $AB$ $3$ nicht übersteigen. Für den Modus* GUT *ergibt sich unmittelbar die Unmöglichkeit, alle Bedingungen, die sich aus der Notwendigkeit, die Agenten individuell zufriedenstellen zu müssen, ergeben, zu erfüllen. Die Preise, die für die anderen Modi angegeben werden, sind hingegen Gleichgewichtspreise.*

Wie bereits erwähnt, betrachten wir den Preismodus EFF als denjenigen Modus, der eine signifikante Flexibilität im Hinblick auf das Design von Koordinationsmechanismen (er erlaubt eine gegenüber dem Modus GUT wesentlich erweiterte Menge von Problemen zu lösen) mit einer im Vergleich zum Modus ANY stark reduzierten Notwendigkeit für Kontroll- und Zwangsmaßnahmen verbindet. Allerdings löst auch der

[28]Der Beweis in der Arbeit von Leonard [58] ist nicht detailliert ausgeführt. Ein alternativer Beweis lässt sich aus dem Anhang A ableiten. Im Anhang wird ein Ergebnis von Gale aus dem Jahre 1960 präsentiert, mit dem er die Existenz von (Schatten-)Preisen für optimale Zuordnungsprobleme ohne Rückgriff auf das Dualitätstheorem der linearen Programmierung unmittelbar nachwies und dessen Lösungsweg direkt zu einer algorithmischen Umsetzung verwendet werden kann.

Preismodus EFF nicht unmittelbar alle Existenzprobleme, die sich aus kombinatorischen (d.h. nichtadditiven) Präferenzen ergeben. Dies wird durch das folgende Beispiel demonstriert.

**Beispiel 3.10.** *Gegeben sind die Agenten 1, 2 und 3 und die Güter $A$ und $B$.*

| | | A | B | AB |
|---|---|---|---|---|
| *Nutzen* | *Agent 1* | **5** | *5* | *5* |
| | *Agent 2* | *0* | **3** | *3* |
| | *Agent 3* | *0* | *0* | *7* |
| *Preise* | *Modus* GUT,ALL,EFF | $\leq p_B$ | $\leq 3$ | $p_A + p_B \geq 7$ |
| | *Modus* ANY | *1* | *2* | *7.1* |

*In der effizienten Allokation erhält Agent 1 das Singleton $A$ und Agent 2 das Singleton $B$. Der Preise für $B$ kann daher $3$ nicht übersteigen. Aus der Konkurrenz zwischen 1 und 2 folgt, dass der Preis für $A$ nicht höher sein darf, als der Preis für $B$. Die Zahlungsbereitschaft des Agenten 3 setzt einen Schwellwert, den der Preis für das Bündel $AB$ erreichen muss, um sicherzustellen, dass Agent 3 nicht unzufrieden mit dem leeren Bündel ist. Dieser Schwellwert von $7$ kann durch eine Summierung der maximalen Preise für $A$ und $B$ nicht erreicht werden, es existiert daher nur im Modus* ANY *ein Gleichgewicht.*

Unter welchen Bedingungen kann nun die Existenz von Gleichgewichtspreisen für den Modus EFF sichergestellt werden? Die exakten Bedingungen ergeben sich unmittelbar aus den Definitionen von Gleichgewichten und Kohärenzbedingungen. So existieren Gleichgewichtspreise genau dann, wenn es eine effiziente Allokation $X = (X_1, \ldots, X_n)$ gibt,[29] für die sich Preise bestimmen lassen, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$u_i(X_i) - p(X_i) \geq \; u_i(x) - p(x) \qquad \forall x \subseteq \Omega,\ \forall i \in N \tag{3.6}$$

$$p(x) = \sum_{z \in X, z \subseteq x} p(z) \qquad \forall x \in 2^X, x \neq \emptyset \tag{3.7}$$

$$p(x) = \min_{z \supset x, z \in 2^X} p(z) \qquad \forall x \notin 2^X, x \neq \emptyset \tag{3.8}$$

Es sei zudem daran erinnert, dass $p(x) \geq 0$ für alle $x \subseteq \Omega$ gilt.

In der Literatur wurde mehrfach versucht, die Existenzbedingungen in Abhängigkeit von *individuellen Eigenschaften der Präferenzstruktur der Nachfrager* darzustellen (vgl. [41, 79]). Es ist unmittelbar klar, dass sich für einen einzelnen Nachfrager *immer* ein kohärentes Gleichgewicht bestimmen lässt. Die Unmöglichkeit der Erfüllung der zweiten Bedingung (die dritte ist unproblematisch, wie noch zu zeigen sein wird) erklärt sich daher immer aus dem Aufeinandertreffen mehrerer Agenten, deren in der *Zusammenschau* betrachtete Präferenzstruktur die Existenzprobleme begründet – in obigem Schwellwert-Beispiel führt erst die Teilnahme des Agenten 3 zur Nichtexistenz. Natürlich kann die Einhaltung einer Bedingung, die für Gruppen von Agenten

[29] Zur Vereinfachung betrachten wir nur Allokationen, die alle Güter vollständig auf die Nachfrager verteilen (wie bereits erwähnt ist dies wegen der Free-Disposal-Annahme unproblematisch).

gilt, auch durch restriktive Bedingungen für die einzelnen Agenten sichergestellt werden – dies deckt aber nicht alle möglichen Gleichgewichtsfälle ab (d.h. die Einhaltung der individuellen Bedingungen ist strenger, als unbedingt notwendig).

### 3.5.1 Einschub: Spezifische Formen und Reduktionen von Ökonomien

Bevor dies genauer untersucht wird, werden zunächst einige spezielle Formen von Ökonomien unterschieden. Die bereits in der Definition 3.15 eingeführte Ökonomie, in der die Nutzenfunktionen der Nachfrager jedem möglichen Bündel einen Nutzenwert zuordnen und für die es (abgesehen von der angenommenen Monotonie) keine weiteren Einschränkungen gibt, werden wir im weiteren auch *kombinatorische Ökonomie* nennen.

**Definition 3.27 (Kombinatorische Ökonomie).** *Eine Ökonomie $E$ der in Definition 3.15 angegebenen Form wird auch* kombinatorische Ökonomie *genannt.*

Eine Ökonomie hingegen, in der die Nachfrager nur an der Zuweisung einzelner Güter interessiert sind und keine Synergien durch den Erwerb von Bündeln mit mehr als einem Gut erzielt werden können, werden wir *Zuordnungsökonomie* nennen.

**Definition 3.28 ((Einfache) Zuordnungsökonomie).** *Eine (einfache) Zuordnungsökonomie besteht aus einer Gütermenge $\Omega$, einer Nachfragermenge $N$, einem Arbitrator $0$ und quasilinearen Nutzenfunktionen $U_i(\cdot)$ der Form $U_i : \Omega \cup \{\sigma\} \to \mathbb{Q}_0^+$ (hier bezeichnet $\sigma$ das leere Gut).*

Wir werden auch kombinatorische Ökonomien als Zuordnungsökonomien bezeichnen, wenn die Nutzenfunktionen $U_i : 2^\Omega \to \mathbb{Q}_0^+$ folgender Bedingung genügt:

$$U_i(x) = \max_{g \in x} U_i(\{g\}) \quad \text{für alle } i \text{ und alle } x \subseteq \Omega \text{ mit } |x| > 1. \tag{3.9}$$

**Definition 3.29 ((Kombinatorische) Zuordnungsökonomie).** *Eine kombinatorische Ökonomie $E$, in der die Nutzenfunktionen die Bedingung* (3.9) *erfüllen, wird auch* (kombinatorische) Zuordnungsökonomie *genannt.*

In Zuordnungsökonomien lässt sich klarerweise immer eine effiziente Allokation bestimmen, die allen Nachfragern nur höchstens ein Gut zuweist, also:

**Proposition 3.30 (Effiziente Einzelgüterallokation).** *Sei $E$ eine Zuordnungsökonomie (einfach oder kombinatorisch). Sei $\mathcal{X}$ die Menge der effizienten Allokation. Dann gibt es wenigstens eine Allokation $X^a = (X_0^a, X_1^a, \ldots, X_n^a)$ in $\mathcal{X}$, so dass $|X_i^a| \leq 1$ für alle $i > 0$.*

Eine andere Klasse von kombinatorischen Ökonomien, für die es keine Synergieeffekte gibt, die aber nicht auf die Nachfrage nach einzelnen Gütern eingeschränkt sind, lässt sich in Zuordnungsökonomien überführen. Dies sind die kombinatorischen Ökonomien, in denen sich die Bewertungen für Bündel mit mehr als einem Gut als Summe der Bewertungen für die Singletons ergeben (das sind die Bündel, die nur ein Gut enthalten). Es gilt also für alle $i \in N$ und alle Bündel $x \subseteq \Omega$ mit $|x| \geq 1$, das $u_i(x) = \sum_{z \in x} u_i(\{z\})$. Man kann für jeden Nachfrager $m-1$ zusätzliche Nachfrager einführen, die alle nur jeweils an einem Gut Interesse zeigen und so eine einfache Zuordnungsökonomie angeben, deren effiziente Allokationen ebenso effiziente Allokationen für die Ausgangsökonomie angeben. Solche Ökonomien werden wir *separierbare kombinatorische Ökonomien* nennen.

Eine bestimmte Reduktion kombinatorischer Ökonomien wird im folgenden betrachtet. Ausgehend von einer effizienten Allokation $X$ der Güter in $\Omega$ wird eine neue, aggregierte Gütermenge $\Omega^r$ bestimmt, in der jedes Bündel $X_i$ der effizienten Allokation durch ein neues Gut $g_i$ repräsentiert wird. Die Betrachtung des Nutzenfunktionen wird dann eingeschränkt auf die neuen Güter.

**Definition 3.31 (Aggregierte Ökonomie).** *Sei $E = (\Omega; U_1, \ldots, U_n)$ eine kombinatorische Ökonomie und $X$ eine effiziente Allokation der Güter in dieser Ökonomie. Dann wird die aggregierte Ökonomie $E^a_X$ wie folgt gebildet. Sei $\Omega^a = \{g_0, g_1, \ldots, g_n\}$ eine Menge von Gütern. Zunächst gibt es eine Abbildung $g : \{X_0, \ldots, X_n\} \to \{g_0, \ldots, g_n\}$ definiert als $g(X_i) = g_i$ für alle $i \in N_0$, die jedem allozierten Güterbündel eine neues Gut zuweist. Zudem werden für alle Nachfrager $i \in N$ neue Nutzenfunktionen $U^a_i : 2^{\Omega^r} \to \mathbb{Q}^+_0$ wie folgt definiert: $U^a_i(x) = U_i\big(\bigcup_{z \in x} g^{-1}(z)\big)$ für alle $x \subseteq \Omega^a$, $x \neq \emptyset$ und $U^a_i(\emptyset) = U_i(\emptyset)$.*

Wir werden insbesondere auch Reduktionen von kombinatorischen Ökonomien auf einfache Zuordnungsökonomien betrachten. Dies erfolgt in zwei Schritten. Zunächst wird aus einer kombinatorischen Ökonomie $E$ zu einer gegebenen Allokation $X$ eine aggregierte Ökonomie $E^a_X$ bestimmt. Dann wird diese aggregierte Ökonomie in eine Zuordnungsökonomie überführt, indem die Bewertungen für Bündel mit mehr als einem Gut vernachlässigt werden. In der folgenden Definition steht $E$ für allgemeine kombinatorische Ökonomien, die Transformation wird aber später ausschließlich auf bereits aggregierte kombinatorische Ökonomien angewendet. Dies wird in der dann folgenden Definition verdeutlicht.

**Definition 3.32 (Reduzierte Zuordnungsökonomie).** *Sei $E$ eine kombinatorische Ökonomie. Eine* einfache Zuordnungsökonomie *$E^z$ wird konstruiert, indem jede Nutzenfunktion $u_i(\cdot)$ durch eine Nutzenfunktion $u^a_i(\cdot)$ ersetzt wird, die wie folgt definiert ist: $u^a_i(x) = u_i(\{x\})\ \forall x \in \Omega$ und $u^a_i(\sigma) = u^i(\emptyset)$.*

**Definition 3.33 (Aggregierte Zuordnungsökonomie).** *Sei $E$ eine kombinatorische Ökonomie und sei $X$ eine passende Allokation. Dann wird die Ökonomie, die durch die Nacheinanderausführung der Reduktionen zu einer aggregierten Ökonomie und zu einer reduzierten Zuordnungsökonomie entsteht,* aggregierte Zuordnungsökonomie *genannt und mit $E^r$ bezeichnet.*

[Ende des definitorischen Einschubs]

Wir kehren nun zurück zu den Existenzbedingungen. Betrachten wir zunächst die Preise für die Bündel in der Allokation, also für alle $X_j \in X$.

$$u_i(X_i) - p(X_i) \geq u_i(X_j) - p(X_j) \quad \forall X_j \in X \cup \{\emptyset\},\ \forall i \in N \tag{3.10}$$

Preise, die diese Ungleichung erfüllen, lassen sich immer finden (sie entsprechen den Schattenpreisen für ein sogenanntes optimales Zuordnungsproblem, s. A.8 im Anhang). Wir wählen nun die maximalen Preise $p^{\max}$, die diese Ungleichungen erfüllen (es ist zu beachten, dass die Preise für leere Bündel immer 0 sind und daher die Bündelpreise für nichtleere Bündel $X_i$ nicht den Nutzen des zugeordneten Agenten $i$ überschreiten können). Die Maximalität der Preise bezieht sich auf die Summe der Preise, d.h. die Zahlungsbereitschaft der Konsumenten, betrachtet in ihrer Gesamtheit, würde maximal abgeschöpft. Es gilt zudem, dass kein Preis für ein nichtleeres Bündel in $X$ erhöht werden kann, ohne dass zumindest ein Agent ein anderes als das vorgesehene Bündel strikt bevorzugen würde.

Für alle Bündel, die sich aus den Bündeln der effizienten Allokation bilden lassen, führen diese maximalen Preise also zur maximal erreichbaren Unattraktivität der Bündel, d.h. $u_i(B) - p^{\max}(B) \leq u_i(B) - p^{'}(B)$ für alle Preise $p^{'}$, die das auf die Bündel in $X$ beschränkte optimale Zuordnungsproblem lösen. Wenn die erste Bedingung also für ein Bündel $x$ trotz des Preises $p^{\max}$ verletzt wird, dann gibt es auch keinen anderen kohärenten Preisvektor, der die effiziente Allokation $X$ unterstützen würde. Wann genau ist dies nun der Fall? Betrachten wir hierzu nochmals das obige Schwellwert-Beispiel:

| | | A | B | AB |
|---|---|---|---|---|
| Nutzen | Agent 1 | **5** | 5 | 5 |
| | Agent 2 | 0 | **3** | 3 |
| | Agent 3 | 0 | 0 | 7 |
| Preise | Modus GUT,ALL,EFF | $\leq p_B$ | $\leq 3$ | $p_A + p_B \geq 7$ |

Hier ist der Preis für $A$ durch die Konkurrenz zwischen den Agenten 1 und 2 nach oben beschränkt – der Preis für $A$ kann den Preis für $B$ nicht überschreiten. Der Preis für $B$ ist durch die Zahlungsbereitschaft von Agent 2 nach oben auf 3 beschränkt. Der maximal erreichbare Preis für das Bündel $AB$ ist also $6$ – der Wert, den der Verkauf der beiden einzelnen Bündel an die Agenten 1 und 2 stiftet, ist allerdings $8$. Der Agent 3 könnte nun aus dem Bündel $AB$ einen Wert schöpfen, der zwischen dem aufgrund der Konkurrenz zwischen 1 und 2 maximal erreichbaren Preis und dem durch diese realisierten Nutzen liegt. Zu beachten ist, dass der Nutzen von $AB$ für den Agenten 3 den gemeinsamen Nutzen von 1 und 2 nicht überschreiten kann, denn sonst wäre die ausgewählte Allokation nicht effizient. Ein erster Generalisierungsversuch sieht also wie folgt aus:

Sei $x$ ein Bündel aus $2^X$. Der Preis von $x$ ist $\sum_{X_j \subseteq x} p^{\max}(X_j)$. Es sei angenommen, dass es ein $i \in N$ gibt, so dass $u_i(X_i) - p^{\max}(X_i) < u_i(x) - p^{\max}(x)$. Dann wissen wir, dass

$$u_i(x) \leq \sum_{\{j \in N : X_j \subseteq x\}} u_j(X_j) \tag{3.11}$$

(sonst wäre $X$ nicht effizient).

Der maximal erreichbare Preis $p^{\max}(B)$ ergibt sich aus den Abhängigkeiten zwischen den Bewertungen für die allozierten Bündel:

$$u_i(X_i) - u_i(X_j) \geq p^{\max}(X_i) - p^{\max}(X_j) \quad \forall X_j \in X,\ \forall i \in N. \tag{3.12}$$

Es gilt zudem

$$u_i(X_i) \geq p(X_i) \quad \forall i \in N. \tag{3.13}$$

Der maximal erreichbare Preis für ein Bündel $z$ aus einer Menge von allozierten Bündeln $Y \subseteq X$ ist also $\sum_{i \in N: X_i \in Y} u_i(X_i)$ – dies würde auch in jedem Fall ausreichen, um das zusammengesetzte Bündel $z$ höchstens so attraktiv werden zu lassen, wie die zugeordneten Bündel in $Y$ (denn der Nutzen eines Interessenten für $z$ kann nicht größer sein, als $\sum_{i \in N: X_i \in Y} u_i(X_i)$, ansonsten gäbe es einen Widerspruch zur Annahme der Effizienz von $X$). Dieser Preis lässt sich aufgrund der Konkurrenz der Agenten um die zugeordneten Bündel nicht realisieren, wenn die maximalen Gleichgewichtspreise unter den Bewertungen der zugeordneten Agenten liegen. Dies wird in aller Regel der Fall sein.

**Proposition 3.34.** *Zumindest einer der maximalen Preise fällt mit der Bewertung des zugeordneten Agenten zusammen.*

*Beweis.* Angenommen, $p$ sei ein maximaler Preisvektor, der eine effiziente Allokation $X$ unterstützt. Es gelte $p(X_i) < u_i(X_i)$ für alle $i \in N$. Es wird nun ein Vektor $\Delta$ wie folgt bestimmt: $\delta_i = u_i(X_i) - p(X_i)$ für alle $i \in N$. Sei $\delta_k$ das minimale Element dieses Vektors. Es wird ein neuer Preisvektor $p^{'}(X_i) = p(X_i) + \delta_k$ für alle $i \in N$ bestimmt. Aus der Konstruktion folgt unmittelbar $0 \leq p^{'}(X_i) \leq u_i(X_i)$ für alle $i \in N$. Zudem folgt aus $u_i(X_i) - p(X_i) \geq u_i(X_j) - p(X_j)$ unmittelbar $u_i(X_i) - (p(X_i) + \delta_k) \geq u_i(X_j) - (p(X_j) + \delta_k)$ bzw. $u_i(X_i) - p^{'}(X_i) \geq u_i(X_j) - p^{'}(X_j)$ für alle $i \in N$, $X_j \in X$ (im Widerspruch zur Maximalität von $p$). □

Der Preis für das Bündel $X_k$ aus dem obigen Beweis bildet gleichsam einen Anker für die Preise der übrigen Bündel. Alle Ungleichungen, die $p(X_k)$ enthalten, können nun mit Hilfe von $u_k(X_k)$ ausgedrückt werden, z.B. $0 = u_k(X_k) - p(X_k) \geq u_k(X_j) - p(X_j)$ für alle $X_j \in X$, also $p(X_j) \geq u_k(X_j)$. Außerdem $u_i(X_i) - p(X_i) \geq u_i(X_k) - p(X_k)$ für alle $i \in N$, also $u_i(X_i) - u_i(X_k) + u_k(X_k) \geq p(X_i)$ bzw. $u_i(X_i) - u_i(X_k) \geq p(X_i) - u_k(X_k) \geq u_k(X_i) - u_k(X_k)$.

Jetzt bestimmen wir den Index $l \in N \backslash \{k\}$ für den die obere Grenze minimal ist, d.h. $u_l(X_l) - u_l(X_k) + u_k(X_k) \leq u_i(X_i) - u_i(X_i) + u_k(X_k)$ für alle $i \in N \backslash \{k\}$. Der Preis von $X_l$ wird auf diesen Wert gesetzt, d.h. $p(X_l) = u_l(X_l) - u_l(X_k) + u_k(X_k)$. Dies führt zu weiteren Constraints für die übrigen Preise: $u_l(X_l) - p(X_l) \geq u_l(X_j) - p(X_j)$ für alle $j \in N$, also $u_l(X_l) + u_l(X_k) - u_k(X_k) - u_l(X_j) \geq p(X_j)$ für alle $j \in N$ bzw. $u_i(X_i) - p(X_i) \geq u_i(X_l) - p(X_l)$ für alle $i \in N$, d.h. $u_i(X_i) - p(X_i) \geq u_i(X_l) - u_l(X_l) + u_l(X_k) - u_k(X_k)$, also $u_i(X_i) - u_i(X_l) + u_l(X_l) - u_l(X_k) + u_k(X_k) \geq p(X_i)$.

Auch hier kann wieder eine Auswahl getroffen werden, die den Spielraum bestmöglich ausschöpft, ohne die anderen Preise so zu beschränken, dass die Bedingungen unerfüllbar werden.

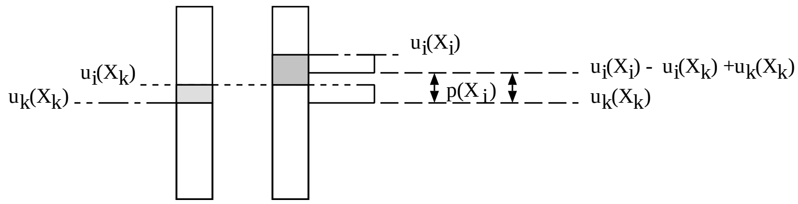


**Abbildung 3.2:** Der Preis aller Bündel in der effizienten Allokation hängt von einem $u_k(X_k)$ ab. Ein Preis $p(X_i)$ muss einerseits über diesem Wert liegen, andererseits darf er nicht so hoch werden, dass das Bündel $X_k$ für $i$ attraktiver wird, als das zugedachte Bündel $X_i$.

Betrachten wir nun die beiden bisher betrachteten oberen Schranken:

$$u_i(X_i) - u_i(X_k) + u_k(X_k) \geq p(X_i) \tag{3.14}$$

$$u_i(X_i) - u_i(X_l) + u_l(X_l) - u_l(X_k) + u_k(X_k) \geq p(X_i) \tag{3.15}$$

Wieder wird nach einem Index $m$ gesucht, für den die zweite Bedingung minimal ist. Daraus resultiert die weitere Bedingung

$$u_i(X_i) - u_i(X_m) + u_m(X_m) - u_m(X_l) + u_l(X_l) - u_l(X_k) + u_k(X_k) \geq p(X_i) \tag{3.16}$$

Dies lässt sich fortsetzen, bis die maximalen Preise vollständig bestimmt sind.[30]

Für eine gegebene Probleminstanz und ein Superbündel der effizienten Bündel lässt sich die zweite Bedingung 3.7 nun in Abhängigkeit von den individuellen Nutzen ausdrücken. Nehmen wir beispielsweise an, dass das zu betrachtende Bündel $x$ aus den Bündeln $X_k$, $X_l$ und $X_m$ besteht, dann würde sich für den eben betrachteten Fall der Preis von $x$ als $p(X_k) + p(X_l) + p(X_m) = u_k(X_k) + u_l(X_l) - u_l(X_k) + u_k(X_k) + u_m(X_m) - u_m(X_l) + u_l(X_l) - u_l(X_k) + u_k(X_k) = 3u_k(X_k) + 2u_l(X_l) + u_m(X_m) - 2u_l(X_k) - u_m(X_l)$ ergeben.

Die zweite Bedingung ist nun beispielsweise dann immer erfüllt, wenn kein individueller Nutzen für das Bündel $x$ über diesem Wert liegt. Dies kann man noch genauer ausdrücken: die Nachfrager teilen sich in solche, die ein nichtleeres Bündel (diese Menge bezeichnen wir als $N^+$) erhalten und solche, die nichts erhalten ($N^-$). Für die Agenten aus der Menge $N^-$ muss für alle nichtleeren Bündel gelten, dass ihr Nutzen den Preis nicht überschreitet. Für die anderen Agenten darf der Nettonutzen des Bündels nicht über dem Nettonutzen des zugewiesenen Bündels liegen. Diese Agenten kann man wiederum teilen. Ein Teil der Agenten erhält ein Bündel, das Teil des Superbündels ist, und ein anderer Teil nicht. Für die erste Gruppe vereinfacht sich die Betrachtung von $u_i(x) - p(x) \leq u_i(X_i) - p(X_i)$ zu $u_i(x) - p(x \backslash X_i) \leq u_i(X_i)$ (wobei wiederum $p$ ausgedrückt werden kann in Abhängigkeit von den Nutzenfunktionen der Agenten). Den Preis für ein Bündel kann man bei Kenntnis der Sequenz $k, l, m \ldots,$

[30] Ein auf diesem Vorgehen basierender Algorithmus zur Bestimmung der maximalen Preise bzw. zur Überprüfung ihrer Existenz findet sich in Abschnitt 4.2.1 des Kapitels 4.

aber ohne Rückgriff auf die detaillierte Zusammensetzung von $x$ auch wie folgt nach unten abschätzen (hierbei ist $k$ die Anzahl der Bündel aus $X$, die in $x$ eingehen):

$$\begin{aligned} p(x) \geq\ & k * u_k(X_k) + (k-1) * u_l(X_l) + (k-2) * [u_l(X_l) - u_l(X_k)] + \\ & (k-3) * [u_m(X_m) - u_m(X_l)] + \ldots \end{aligned}$$

Dies kann man umformulieren, in dem man die Sequenz der Agenten so umnumeriert, dass $k = 1$, $l = 2$, $m = 3$ usw., d.h. die Indizierung spiegelt direkt die gefundene Reihenfolge der Preise wider. Zudem ist $X_0 = \emptyset$.

$$p(x) \ \geq \ \sum_{1 \leq i \leq k} (k+1-i) * [u_i(X_i) - u_i(X_{i-1})]$$

Die dritte Bedingung, 3.8, ist unproblematisch: für ein Bündel $y$, das eine Teilmenge eines $X_i$ enthält, gilt ohnehin mit der Monotonie der Nutzenfunktionen, also $u_j(X_i) \geq u_j(y)\ \forall j \in N$, dass $u_j(X_j) - p(X_j) \geq u_j(X_i) - p(X_i) \geq u_j(y) - p(X_i) = u_j(y) - p(y)$. Analoges folgt für die übrigen Bündel, die durch die dritte Bedingung mit Preisen versehen werden, wenn für das kleinste sie überdeckende Bündel aus $2^X$ die erste Bedingung erfüllt ist – mithin hängt die Existenz von Gleichgewichtspreisen nicht von der dritten Bedingung ab, diese ist immer erfüllbar.

In Abschnitt 4.2.1 des Kapitels 4 wird eine algorithmische Umsetzung der Preisfindung vorgestellt, die durch die präzise Bestimmung der maximal möglichen Preise für die Zuordnungsökonomie einen direkten Existenztest für kohärente Preise ermöglicht. Dieser Test basiert auf den präzisen Bedingungen, die sich aus der Kenntnis der korrekten Sequenz und der Bestimmung der einzelnen Preise in Abhängigkeit von den individuellen Nutzen ergeben.

### 3.5.2 Schwellwert-Probleme und geschrumpfte Ökonomien

Wir kehren nun zurück zum Beispiel 3.10. Der Arbitrator kann solche Existenzprobleme beseitigen, indem er die Agenten, die ein Bündel aus dem problematischen Superbündel erhalten sollen, entsprechend informiert und diese ein gemeinsames Gebot für das Superbündel abgeben. Das setzt voraus, dass sich die Agenten über eine Verteilung des Überschusses einigen können. Wenn der Arbitrator im Falle einer Nichteinigung das Superbündel anstelle der Einzelbündel verkauft, also Preise bestimmt, die zu Transfers führen, die zwar die Konsumenten ins Gleichgewicht bringen, aber nicht zu einer effizienten Allokation führen, dann gibt es auch einen effektiven Anreiz für die Agenten, gemeinsam zu bieten – denn sie erhalten ansonsten ein aus ihrer Sicht nicht optimales Güterbündel. Dieser Reduktionsprozeß – die Anzahl der bietenden Agenten wird vermindert – kann über mehrere Iterationen erforderlich sein und führt, falls den Anfragen des Arbitrators Folge geleistet wird, zu einer effizienten Gleichgewichtsallokation für jede Ökonomie $E$.

**Beispiel 3.11.** *Die aus dem Beispiel 3.10 entnommene Tabelle zeigt Bewertungen, für die kohärente Gleichgewichtspreise nicht existieren.*

| *Nutzen* | *A* | *B* | *AB* |
|---|---|---|---|
| *Agent 1* | **5** | *5* | *5* |
| *Agent 2* | *0* | **3** | *3* |
| *Agent 3* | *0* | *0* | *7* |

*Es ist nun möglich, diese Problem durch eine Schrumpfung der Ökonomie zu lösen, indem der Arbitrator die Bewertungen der beiden Agenten 1 und 2 zusammenfasst (also eine Allianz der Agenten bildet) und kohärente Preise für die geschrumpfte Ökonomie bestimmt, d.h.*

| *Nutzen* | *A* | *B* | *AB* |
|---|---|---|---|
| *Agent (1+2)* | *5* | *3* | **8** |
| *Agent 3* | *0* | *0* | *7* |
| *Preis (minimal für AB)* | *7* | *7* | *7* |

*Zu bestimmen sind nun aber noch die anteiligen Zahlungen, die die Agenten 1 und 2 zu leisten haben. Es lässt sich zeigen, dass jede Aufteilung des verbleibenden Nutzens von 1 Resultat eines Bargaining zwischen den beiden Agenten seien kann (vgl. Vohra [98]). Ein pragmatischer Weg ist eine zufällige Aufteilung durch den Arbitrator. Wäre etwa die bestimmte Aufteilung* $40 : 60$*, dann müsste der Agent 1 für das Gut A* $4.6$ *GE zahlen und der Agent 2* $2.4$ *GE für das Gut B. Allerdings ist zu beachten, dass die einzelnen Agenten einer Allianz nur zustimmen werden, wenn der erzielbare Nettonutzen dem ohne eine Allianzbildung erreichbaren Nettonutzen zumindest gleichkommt.*

Abstrakt beschrieben werden kann die Auswahl einer Schrumpfung durch eine Betrachtung aller *möglichen* geschrumpften Ökonomien.

**Definition 3.35 (Allianz).** *Gegeben sei eine Menge* $\Omega$ *von Gütern, eine Menge* $K = \{1, \ldots, k\}$ *von Agenten mit quasilinearen Nutzenfunktionen* $U_k$ *und ein neuer Agent* $\bar{k}$*. Dann repräsentiert* $\bar{k}$ *eine* Allianz *der Agenten in* $K$*, wenn gilt:*

$$u_{\bar{k}}(x) \leq \max_X \sum_{i=k}^{n} u_i(X_i) \text{ für alle } x \subseteq \Omega \text{ und alle } k\text{-stelligen Partitionen } X \text{ von } x \tag{3.17}$$

*Ein solcher Agent* $\bar{k}$ *heißt* effiziente Allianz*, wenn*

$$u_{\bar{k}}(x) = \max_X \sum_{i=k}^{n} u_i(X_i) \text{ für alle } x \subseteq \Omega \text{ und alle } k\text{-stelligen Partitionen } X \text{ von } x \tag{3.18}$$

**Definition 3.36 (Geschrumpfte Ökonomie).** *Sei eine Ökonomie* $E = (\Omega; U_1, \ldots, U_n)$ *gegeben und sei* $P = \{P_1, \ldots, P_k\}$ *eine* $k$*-elementige Partition der Menge* $N$ *der Nachfrager mit* $P_i \neq \emptyset$ *für alle* $i = 1, \ldots, k$*. Zudem sei eine* $k$*-elementige Menge* $\bar{K} = \{\bar{1}, \ldots, \bar{k}\}$ *von Agenten gegeben, so dass für alle* $i = 1, \ldots, k$ *gilt:* $\bar{i}$ *ist eine Allianz der Agenten in* $P_i$*. Dann wird* $E^{\bar{K}} = (\Omega; U_{\bar{1}}, \ldots, U_{\bar{k}})$ *mit Bezug auf* $E$ *und die Allianzen eine* geschrumpfte Ökonomie *genannt. Ist* $\bar{i}$ *eine effiziente Allianz für jedes* $i = 1, \ldots, k$*, dann wird* $E^{\bar{K}}$ effizient-geschrumpfte Ökonomie *genannt.*

Wir betrachten nun effizient-geschrumpfte Ökonomien. Zunächst ist folgendes festzuhalten:

**Proposition 3.37.** *Sei $E$ eine Ökonomie, $\bar{K}$ eine Menge von effizienten Allianzen, $E^{\bar{K}}$ eine entsprechende effizient-geschrumpfte Ökonomie und $X$ eine effiziente Allokation für die Güter in $\Omega$ in Bezug auf die Agenten in $N$. Dann ist $X^{\bar{K}} = (\bigcup_{i_1 \in P_1} X_{i_1}, \ldots, \bigcup_{i_k \in P_k} X_{i_k})$ eine effiziente Allokation bzgl. der geschrumpften Ökonomie. Umgekehrt bestimmt eine effiziente Allokation $X^{\bar{K}}$ für die geschrumpfte Ökonomie eine oder mehrere effiziente Allokationen für die Ausgangsökonomie: zu jedem $i = 1, \ldots, k$ lässt sich eine $|P_i|$-stellige Allokation $Y_i$ der Güter in $X_i^{\bar{K}}$ zu den Agenten in $P_i$ finden, so dass $\sum_{j \in P_k} u_i(Y_i)$ für alle möglichen $|P_i|$-stelligen Allokationen maximiert wird (dieses $Y_i$ ist nicht notwendigerweise eindeutig). Aus den $Y_i$ ergibt sich, bei geeigneter Umnumerierung, eine $n$-stellige Allokation, die eine effiziente Allokation in Bezug auf $E$ darstellt.*

*Beweis.* Beide Resultate sind unmittelbare Konsequenzen der Definition effizienter Allianzen. □

Sei eine Ökonomie $E$ gegeben. Die Menge aller möglichen Partitionen der Agenten in $N$ sei mit $\mathcal{P}^N$ bezeichnet. Zu jeder Partition $P \in \mathcal{P}^N$ lässt sich eine Menge von Agenten bestimmen, so dass jeder Agent eine effiziente Allianz des korrespondieren Teils von $P$ repräsentiert (die Konstruierbarkeit bzw. Existenz einer solchen Menge folgt unmittelbar aus der Lösbarkeit des Problem des Findens einer effizienten Allokation und der Definition effizienter Allianzen). Dies bestimmt die Menge $\mathcal{K}$ aller möglichen Mengen von Allianzen für eine gegebene Ökonomie $E$ und somit direkt die Menge aller möglichen effizient-geschrumpften Ökonomien, $\mathcal{E}^{\mathcal{K}}$, die ihren Ausgangspunkt in der Ökonomie $E$ findet und ihren Endpunkt in der großen Allianz, die alle Agenten aus $N$ repräsentiert.

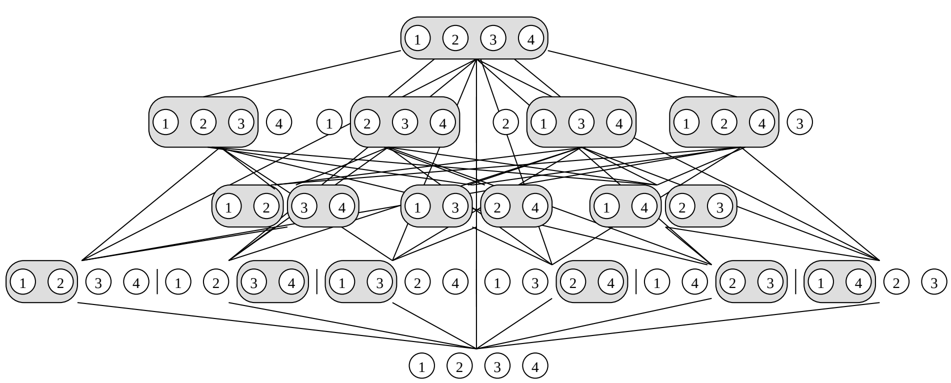


**Abbildung 3.3:** Die Menge aller möglichen Allianzen von 4 Agenten unter der Annahme, dass jeder Agent autonom bleibt.[32]

[32]Würde ein Agent bei der Bildung einer Allianz einen Teil seiner Selbstbestimmtheit aufgeben, dann könnten hinsichtlich der erreichbaren Effizienz bzw. hinsichtlich der Aufteilung von Einnahmen Einschränkungen für weitere Allianzbildungen auftreten – etwa, wenn ein Agent 1 zunächst mit dem Agenten 2 eine Allianz eingeht und dann bildet diese Allianz unter Federführung von Agent 2 eine weitere

**Proposition 3.38.** *Die Menge $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{E}^{\mathcal{K}}$ von effizient-geschrumpften Ökonomien, für die kohärente Gleichgewichtspreise existieren, die eine effiziente Allokation unterstützen, ist nicht leer.*

*Beweis.* Diese Menge ist nicht leer, denn zumindest für die geschrumpfte Ökonomie, die als einzigen Nachfrager einen Agenten aufzuweisen hat, der die große Allianz $N$ aller Nachfrager in $E$ repräsentiert, gibt es klarerweise solche Preise (ohne Reservierungsbewertungen durch die Verkäufer sind diese 0). □

Die Aufgabe eines Mechanismus, der die Möglichkeit zur Schrumpfung der Ökonomie einsetzen kann, liegt nun darin, eine Ökonomie aus $\mathcal{L}$ auszuwählen und korrespondierende Gleichgewichtspreise zu bestimmen. Wenn eine Schrumpfung der Ökonomie im Anwendungskontext möglich ist, dann kann ein im nächsten Kapitel vorzustellende Verfahren verwendet werden, um nach der Bestimmung einer effizienten Allokation $X$ die (nichtleere) Ökonomie $E$ so zu verändern, dass ein kohärentes Gleichgewicht für die gefundene, geschrumpfte Ökonomie existiert. Dieses Verfahren kann so gestaltet werden, dass die einzelnen Allianzbildungen, unter der Annahme einer bestimmten Verhaltensweise des Arbitrators im Falle eines Nichtzustandekommens einer Allianz, für die kooperierenden Agenten attraktiv sind. Dies ist eine wesentliche Bedingung für die Implementierbarkeit eines Verfahrens. Weitere Überlegungen folgen in Kapitel 4.

## 3.6 Anreizkompatibilität

Wie bereits angesprochen, kann ein Arbitrator nur dann sicher eine effiziente Allokation bestimmen, wenn die teilnehmenden Agenten ihre Nutzenfunktionen wahrheitsgemäß kundtun.[33] Eine Aufgabe der Kollaboration ist es nun, den Koordinationsmechanismus so zu entwerfen, dass die Agenten zumindest keinen Anreiz haben, ihre Bewertungen nicht wahrheitsgemäß kundzutun.

Allianz mit Agent 3. Im Falle einer ungefähren Symmetrie im Verhandlungsgeschick könnte jeder Agent in der zweiten Allianz seine Interessen eigenständig vertreten und es gäbe gewisse Aussichten, dass eine effiziente Allokation zustande käme. Im Fall der Delegation der Verantwortung an Agent 2 wird dieser mit Agent 3 eine Aufteilung aushandeln, die seinen Interessen genügt und etwa nur dem Constraint unterliegt, dass Agent 1 durch die zweite Allianz nichts verlieren darf – die Annahme des Zustandekommens einer effizienten Aufteilung wäre mithin dann nicht mehr zu rechtfertigen.

[33] Es kann natürlich Agenten geben, die aufrund ihres Informationsstandes, ihrer Möglichkeiten zur Beschaffung weiterer Informationen oder der Beschränktheit ihrer Informationsverarbeitungskapazitäten nicht in der Lage sind, Bewertungen der Wahlmöglichkeiten so zu bestimmen, dass sie den tatsächlich unter Überwindung der eingeschränkten Möglichkeiten bestimmbaren Bewertungen entsprechen. Im Ausnahmefall mag der Arbitrator noch in der Lage sein, solche Bewertungen zu korrigieren, in der Regel wird dann aber keine – aus dem Blickwinkel der Idealsituation betrachtet – effiziente Allokation zu bestimmen sein. Diese Problematik wird aber hier nicht weiter diskutiert. Interessante Überlegungen und weitere Verweise finden sich hierzu in Parkes [72]. Zudem erlaubt die zugrundeliegende individualistische Betrachtungsweise solche idealisierten Bewertungen im Grunde nicht: nur der Agent kann seine Wahlmöglichkeiten bewerten, den anderen Agenten fehlen annahmegemäß die hierzu notwendigen Informationen zum Bewertungssystem des Agenten – sie können daher auch keine Abweichungen zwischen den bekundeten und den im “Idealfall” zu erwartenden Bewertungen bestimmen.

Die klassischen Überlegungen zu Mechanismen, die diese Eigenschaft haben, finden sich in Arbeiten von Vickrey [97], Groves [40] und Clark [18]. In der Literatur werden Mechanismen, die diesen Überlegungen folgen, um anreizkompatible Resultate zu erzielen, regelmäßig als Vickrey-Clarke-Groves-Mechanismen (bzw. kurz: VCG-Mechanismen) bezeichnet.[34] Ein bekanntes Beispiel für einen solchen Mechanismus ist die sogenannte Zweit-Preis- oder Vickreyauktion, die unter Abgabe verdeckter Gebote als sogenannter direkter Enthüllungsmechanismus (direct revelation) anreizkompatible Preise für ein Gut (oder eine Menge nicht voneinander abhängender Güter) bestimmt. Die Grundidee zur Erreichung von Anreizkompatibilität ist es, die Höhe eines von einem Agenten zu zahlenden Transfers nicht von seiner bekundeten Zahlungsbereitschaft abhängig zu machen – in der Zweitpreis-Auktion für ein Gut erhält der Bieter des höchsten Gebots das Gut für eine Zahlung in Höhe des zweithöchsten Gebots.

**Beispiel 3.12.** *Zwei Agenten,* $1$ *und* $2$*, bieten für ein Gut* $A$*. Die Zahlungsbereitschaft von Agent* $1$ *ist* $20$*, die von Agent* $2$ *ist* $15$*. Geben beide Agenten ein verdecktes Gebot in der Höhe ihrer Zahlungsbereitschaft ab, dann erhält Agent* $1$ *das Gut* $A$ *für einen Preis von* $15$*. Dies implementiert die effiziente Allokation und stellt beide Agenten zufrieden. Keiner der Agenten hätte einen für die persönliche Zahlungsbilanz relevanten Anreiz, seine Zahlungsbereitschaft dem Auktionator nicht wahrheitsgemäß mitzuteilen. Dies sieht man wie folgt: nehmen wir zunächst an, dass Agent 1 über die Zahlungsbereitschaft von Agent 2 nicht informiert ist und auch keine begründbaren Annahmen bzgl. seines Bietverhaltens über die Rationalitätsannahme hinaus treffen kann. Unterböte Agent* $1$ *seine eigene Zahlungsbereitschaft, etwa durch Abgabe eines Gebots in Höhe von* $19$*, dann ginge er das Risiko ein, dass der Agent* $2$ *mit der Bekundung einer Zahlungsbereitschaft im Intervall* $(19, 20)$ *den Zuschlag erhielte und ihm damit ein Nutzen von* $20 - Gebot_{Agent2}$ *entginge. Bleibt das Gebot des Agenten 2 unter* $19$*, dann reduziert dies nicht den von Agent 1 zu zahlenden Preis, der ja unabhängig von seinem eigenen Gebot festgelegt wird – es gibt mithin einen Anreiz, nicht zu unterbieten. Umgekehrt führt aber ein Überbieten zum Risiko eines Zuschlags zu einem Preis, der über der tatsächlichen Zahlungsbereitschaft liegt – der überbietende Agent realisiert also möglicherweise einen Verlust, und zwar wiederum ohne dass das Überbieten einen positiven Einfluss auf den zu leistenden Transfer hätte. Ist der Agent über das Gebot des anderen Agenten vorab informiert, dann ändert sich an der Argumentation nur insofern etwas, als ein Über- oder Unterbieten nun ohne das Risiko von Fehlallokationen erfolgen kann. Hinsichtlich der zu entrichtenden Preise bei einem Zuschlag durch den Auktionator ändert sich aber nichts: diese bleiben unabhängig vom eigenen Gebot*[35] *– es gibt also keinen positiven Anreiz zur Missrepräsentation der Zahlungsbereitschaft.*

[34] Ausführliche Darstellungen des Grundprinzips und seiner Anwendungen finden sich etwa [62]. Die wichtigsten Definitionen und der Nachweis der dominant-strategischen Anreizkompatibilität von Groves-Schemata finden sich zudem im Anhang B am Ende der hier vorliegenden Arbeit (die generalisierte Vickreyauktion (GVA), s. unten, ist eine Instanz der Groves-Schemata).

[35] Natürlich kann es für einen unterlegen Agenten Gründe geben, zu überbieten und so den Preis, den der Konkurrent zu zahlen hat, zu erhöhen. Solche allokativen Externalitäten erscheinen aber für die hier betrachtete Situation nicht relevant und wurden ausgeschlossen. Weitere potentielle Probleme von Vickreyauktionen, etwa hinsichtlich einer unerwünschten Zusammenarbeit von Agenten (Collusion), werden beispielsweise von Sandholm in [82] diskutiert. Es ist unmittelbar einsichtig, dass es attraktiv für einen (gewinnenden) Agenten ist, zu versuchen, dass Verhalten der Mitbietenden zu beeinflussen: deren Bietverhalten bestimmt ja den von ihm zu zahlenden Geldbetrag. Im Beispiel könnten die Agenten 1

Ohne genauen Rückgriff auf Formalien[36] versteht man unter einer *Strategie* eine Auswahl aus den Handlungsmöglichkeiten, die durch die Rahmenbedingungen von Mechanismus und Ökonomie festgelegt werden. Zu den durch die Ökonomie bestimmten Bedingungen gehören die bewerteten Präferenzrelationen der teilnehmenden Agenten. Die Präferenzenrelationen werden auch durch den Begriff *Typ* beschrieben – das heißt also, dass die Auswahl einer Strategie aus der Menge der durch die Rahmenbedingungen bestimmten möglichen Verhaltensweisen von den Typen der teilnehmenden Agenten abhängt. Wenn der Agent sicher sein kann, dass die Wahl einer bestimmten Strategie ihm unabhängig vom Typ bzw. von der Strategiewahl der anderen Agenten immer einen mindestens ebenso großen Nutzen stiftet, wie die Wahl irgendeiner anderen Strategie, dann nennt man diese Strategie auch (schwach) *dominant*.

Wenn, wie im Fall der Vickreyauktion, die wahrheitsgemäße Bekundung der (vollständigen) Nutzenfunktion (truth revelation)[37] für alle Agenten eine dominante Strategie ist, dann wird der Mechanismus auch als *anreizkompatibel* in Bezug auf dominante Strategien oder *strategie-sicher* (strategy proof) bezeichnet.

Es ist weiter zu beachten, dass der festgelegte Preis den negativen Effekt der Teilnahme des Agenten, der das Gut erhält, für den anderen Agenten widerspiegelt – eine Nichtteilnahme von Agent 1 hätte in obigem Beispiel dazu geführt, dass der Agent 2 das Gut $A$ für einen Preis von $0$ erhalten und so einen Nutzen von $15$ realisiert hätte.

Dieses Resultat lässt sich verallgemeinern: eine *generalisierte Vickreyauktion*, die jeden Agenten, der den Zuschlag für ein Güterbündel erhält, zu einem Transfer verpflichtet, der den (negativen) Effekt seiner Teilnahme am Koordinationsmechanismus für die anderen Agenten widerspiegelt, führt zu einem anreizkompatiblen Mechanismus.[38] Um dies präziser fassen zu können, ist es zunächst nötig, Ökonomien zu be-

und 2 durch eine Absprache ihres Bietverhaltens die Einnahmen des Auktionators wesentlich reduzieren (bis zu einem Betrag von $0$, wenn der Auktionator bereits ist, dass Gut im Indifferenzfall auszuliefern) – konkret könnte Agent 1 dem Agenten 2 eine Kompensationszahlung anbieten (etwa die Hälfte des eingesparten Transfers), jede solche Aufteilung wäre für beide Agenten attraktiv und keine lässt sich unter Plausibilitätsüberlegungen ohne weiteres ausschließen, solange beide Agenten einen Überschuss im Vergleich zur Nicht-Koalitionsbildung erwirtschaften. Auch dieses Verhalten kann in der betrachteten Situation ausgeschlossen werden (ein interessanter Randaspekt ist zudem, dass der Agent 1 weiterhin seine wahren Bewertungen bekunden kann, also weiterhin nicht das Risiko einer Fehlallokation besteht).

[36]Einige formale Details und Resultate zu Anreizkompatibilität finden sich, wie bereits erwähnt, im Anhang B. Weitere Details und Begrifflichkeiten zum *Mechanism Design* finden sich in [51], [72] oder (einführend in den Kontext der Computerisierung) [96] – und natürlich in mikroökonomischen [62, 95] oder spieltheoretischen [34, 68] Grundlagenwerken.

[37]In Parkes wird dies mit Bezug auf vollständig enthüllende, direkte Mechanismen diskutiert – es wird also die Bekanntgabe einer vollständigen Nutzenfunktion angenommen. Dies liegt auch den hier angestellten Betrachtungen zu Grunde. Die Überlegungen hierzu basieren auf dem Revelation Principle, welches besagt, dass (unter sehr generellen Voraussetzungen) zu jedem irgendwie gearteten Mechanismus, der eine soziale Auswahlfunktion in dominanten Strategien implementiert, ein direkter Mechanismus existiert, der dies auch tut. Man kann sich also auf die Betrachtung direkter Mechanismen beschränken, wenn es um Anreizkompatibilität geht. Wir werden noch zeigen, dass es nicht unbedingt erforderlich ist, die gesamte Nutzenfunktion offenzulegen – und man dennoch weiterhin von einem direkten Mechanismus sprechen kann. In der Arbeit von Parkes [72] ist die Definition eines direkten (bzw. direkt-enthüllenden) Mechanismus etwas unscharf (speziell die Einschränkung des Strategie-Sets in Def. 2. 20 auf Seite 36) – es geht aber letztlich darum, dass ein Agent “direkt” seinen Typ bekanntgibt.

[38]Eine interessante Einschränkung werden wir in der Diskussion aufgreifen. Wenn die “klassischen” GVA-Zahlungen den externen Effekt der Teilnahme von Agenten nicht vollständig internalisieren (dies

trachten, die um einen Konsumenten reduziert werden.

**Definition 3.39 (Wert einer Ökonomie).** *Sei* $E = (\Omega; U_1, \ldots, U_n)$ *eine Ökonomie. Sei* $X^* = (X_1, \ldots, X_n)$ *eine effiziente Allokation bzgl. dieser Ökonomie. Dann ist* $V(E) = V(X^*) = \sum_{i \in N} u_i(X_i)$ *der* Wert der Ökonomie $E$.

**Definition 3.40 (Reduzierte Ökonomie).** *Sei* $E = (\Omega; U_1, \ldots, U_i, \ldots, U_n)$ *eine Ökonomie mit der Nachfragermenge* $N = \{1,\ldots, i,\ldots, n\}$*. Die Ökonomie* $E_{-i} = (\Omega;\ U_1,\ \ldots,\ U_{n-1})$*, die aus* $E$ *entsteht, in dem man den Agenten* $i$ *aus* $N$ *entfernt und die* $U_j$ *entsprechend umindiziert, wird* um $i$ reduzierte Ökonomie *genannt (auf die Umindizierung kann aus Darstellungsgründen auch verzichtet werden). Sei* $B \subseteq \Omega$ *ein Güterbündel. Die Ökonomie* $E^{-B}$*, die aus* $E$ *entsteht, wenn man das Bündel* $B$ *aus* $\Omega$ *entfernt, wird* um $B$ reduzierte Ökonomie *genannt. Beide Fälle können kombiniert werden, man schreibt dann* $E_{-i}^{-B}$.

**Definition 3.41 ((Generalisierte) Vickreyzahlungen).** *Sei eine Ökonomie* $E$ *und eine effiziente Allokation* $X$ *gegeben. Für jeden Agenten* $i \in N$*, dem in* $X$ *ein nichtleeres Bündel* $X_i$ *zugewiesen wird, lässt sich ein agenten-spezifischer Transfer* $t(i)$ *(die* ***Vickreyzahlung****) wie folgt bestimmen:*

$$t(i) \;=\; V(E_{-i}) \;-\; \sum_{j \in N, j \neq i} u_j(X_j). \tag{3.19}$$

Der Summenausdruck kann auch durch $V(E_{-i}^{-X_i})$ ersetzt werden, wie die folgende Proposition zeigt.

**Proposition 3.42.** *Für eine Ökonomie* $E$ *und eine effiziente Allokation* $X$ *gilt*

$$\sum_{j \in N, j \neq i} u_j(X_j) \;=\; V(E_{-i}^{-X_i}) \tag{3.20}$$

*Beweis.* Ließe sich die um die Güter im Bündel $X_i$ verminderte Gütermenge effizienter auf die Nachfrager in $N \backslash \{i\}$ verteilen, als durch eine Zuordnung von $X_j$ zu $j$ für alle $j$, dann wäre dies ein Widerspruch zur Effizienz von $X$. □

**Proposition 3.43 (GVA).** *Im gewählten Setting, bestehend aus Agenten mit positiven, quasilinearen Nutzenfunktionen, ist die generalisierte Vickreyauktion (GVA), also eine Vickreyauktion, in der Güterbündel alloziert werden und die Vickreyzahlungen entsprechend der Definition 3.41 bestimmt werden, effizient, strategie-sicher, individuell-rational und schwach budget-balanciert.*

*Beweis.* Effizient sind Vickreyauktionen aufgrund ihrer Konstruktion. Die Teilnahme ist in jedem Fall attraktiv (also individuell-rational), denn im betrachteten Szenario kann es nicht zu einem Nettoverlust für die teilnehmenden Agenten kommen. Zum Beweis der Eigenschaft der strategy proofness vgl. MacKie-Mason/Varian in [61] (auch für einige grundlegende Überlegungen) und insbesondere Theorem 2.5 auf Seite 48 in

ist der Fall für Schwellwert-Probleme), dann kann es interessant werden, (falsche) Gebote unter mehreren Namen (oder durch Beauftragung anderer) abzugeben, vgl. etwa [107].

der Arbeit [72] von Parkes. Der Beweis ergibt sich auch direkt aus dem allgemeineren Beweis zu Groves-Schemata, der sich in Anhang B findet, denn GVAs sind eine Instanz der Groves-Schemata.[39] □

Im Kapitel 4 wird ein Verfahren vorgestellt, dass mittels *teilweiser* Enthüllung der Bewertungen der Nachfrager eine effiziente Allokation und zugehörige Vickreyzahlungen bestimmt und für das ein Analogon der obigen Proposition gilt (ohne jedoch die Übermittlung vollständiger Nutzenfunktionen vorauszusetzen).

In der nachfolgenden Diskussion werden die Voraussetzungen untersucht, die erfüllt sein müssen, damit minimale kohärente Gleichgewichtspreise und Vickreyzahlungen zusammenfallen, denn in solchen Fällen können Gleichgewichtspreise mit einem anreizkompatiblen Mechanismus bestimmt werden. Es wird zudem eine Verbindung zwischen der Schrumpfung von Ökonomien und dem Zusammenfallen von kohärenten Preisen und Vickreyzahlungen hergestellt.

### 3.6.1 Minimale kohärente Preise und Vickreyzahlungen

Für Zuordnungsökonomien, also Ökonomien, in denen jeder Nachfrager nur höchstens ein Gut erwerben möchte, lässt sich zeigen, dass die minimalen Gleichgewichtspreise mit den Vickreyzahlungen zusammenfallen. Einen solchen Nachweis[40] hat Leonard 1983 in [58] erbracht.

Zur Vereinfachung der Darstellung sei ein quadratisches Zuordnungsproblem unterstellt. Es sei also angenommen, dass es $n$ Nachfrager und $n$ Güter gibt, die eine quadratische Zuordnungsökonomie $E$ bestimmen. Elemente beider Mengen werden mit Indizes aus $N = \{1, \ldots, n\}$ bezeichnet. Zudem nehmen wir an, dass die Güter so indiziert sind, dass die effiziente Allokation $X$ jedem Agenten $i$ genau das Gut $i$ zuweist. In Anlehnung an Gale kann die Allokation auch durch eine Binärmatrix $x_{ii} = 1$ für alle $i$ und $x_{ij} = 0$ für alle $i, j,\ i \neq j$ angegeben werden. Der Wert der Ökonomie ist $V(E) = \sum_{i \in N} u_i(i)$. Für die (sicher existierenden) Gleichgewichtspreise gilt $u_i(i) - p(i) \geq u_i(j) - p(j)$, wobei $p(j) \geq 0$ für alle $j$. Bezeichnet man den Nettonutzen eines Nachfragers mit $s_i$, dann lässt sich dies umschreiben zu $s_i \geq u_i(j) - p(j)$. Für die allozierten Güter gilt $s_i + p(i) = u_i(i)$. Für die Summierung der Preise und Überschüsse gilt dann natürlich $\sum_{i \in N} s_i + \sum_{j \in N} p(j) = V(E)$. Wiederum wird $E^{-l}$ eine Ökonomie bezeichnen, die im Vergleich zu $E$ um das Gut $l$ vermindert wurde. $E^{+l}$ zeigt die Vermehrung um ein weiteres Gut $l$ an und $E_{-i}$ die Verminderung um den Agenten $i$.

Die Vickreyzahlungen lassen sich in der eben beschriebenen Situation wie folgt be-

[39] Die Eigenschaft der schwachen Budgetbalance meint, dass der Mechanismus eine nicht-negative Zahlungsbilanz aufweist. Das ist natürlich unmittelbar eine Folge unseres Szenarios, indem die Anbieterinteressen bereits unabhängig von Zahlungen durch die Implementierung einer effizienten Allokation erfüllt werden – es ist also nicht erforderlich, mehr an den Anbieter auszuschütten, als durch den Mechanismus eingenommen wird. Diese Eigenschaft ist im hier betrachteten Szenario erfüllt.

[40] Wenn auch nicht vollständig ausformalisiert – Leonard verweist auf einen Anhang, der beim Autor erhältlich sei. Der Beweis wird im folgenden nachvollzogen.

stimmen.

$$t(i) \;=\; V(E_{-i}) \;\;-\sum_{j\in N, j\neq i} u_j(j)$$

Es ist nun zu zeigen, dass die Vickreyzahlungen minimale Gleichgewichtspreise sind. Dies geschieht in 2 Schritten.

**Proposition 3.44 (Vickreyzahlungen / Gleichgewichtspreise).** *Sei $E$ eine quadratische Zuordnungsökonomie und sei eine effiziente Allokation $X^*$ wie oben gegeben. Sei $t$ der zugehörige $n$-stellige Vektor von Vickreyzahlungen. Setzt man $p(i) = t(i)$ für alle $i \in N$, dann ist $p$ ein (Gleichgewichts-)Preisvektor, der die effiziente Allokation unterstützt.*

*Beweis.* Aus der Bestimmung der Vickreyzahlungen folgt $t(i) \geq 0$ für alle $i \in N$ (die Verteilung der Güter ohne Berücksichtigung des Agenten $i$ muss mindestens so gut sein, wie die Summe der erreichten Nutzen der Agenten ohne $i$ im Falle einer Berücksichtigung von $i$). Jedem Agenten $i \in N$ verbleibt ein Nettonutzen von $u_i(i) - t(i)$, den wir mit $s_i$ bezeichnen, also $s(i) + t(i) = u_i(i)$. Zu zeigen bleibt, dass $s_i \geq u_i(j) - t(j)$ für alle $i, j \in N$. Angenommen, es gäbe $k, l \in N$, so dass $u_k(k) - t(k) < u_k(l) - t(l)$. Dann wäre

$$\begin{aligned}
& u_k(k) - \Big(V(E_{-k}) - \sum_{j\in N, j\neq k} u_j(j)\Big) < u_k(l) - \Big(V(E_{-l}) - \sum_{j\in N, j\neq l} u_j(j)\Big) \\
\Leftrightarrow\quad & u_k(k) - V(E_{-k}) + \sum_{\substack{j\in N,\\ j\neq k, j\neq l}} u_j(j) + u_l(l) < u_k(l) - V(E_{-l}) + \sum_{\substack{j\in N,\\ j\neq l, j\neq k}} u_j(j) + u_k(k) \\
\Leftrightarrow\quad & u_l(l) + V(E_{-l}) < u_k(l) + V(E_{-k}) \\
\Leftrightarrow\quad & V(E^{+l}) < u_k(l) + V(E_{-k}) \\
\Leftrightarrow\quad & V(E^{+l}) - V(E_{-k}) < u_k(l) \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

Es gilt aber für alle $i \in N, j \in \Omega$, dass $V(E_{-i}) + u_i(j) \leq V(E^{+j}_{-i+i}) = V(E^{+j})$, im Widerspruch zur Annahme.

Eine der Transformationen sei an dieser Stelle näher erläutert. Es gilt $u_l(l) + V(E_{-l}) = V(E^{+l})$, weil der Agent $l$ in der effizienten Allokation das Gut $l$ erhält und daher auch im Falle des Hinzufügens eines weiteren Gutes $l$ eines der Güter $l$ zugewiesen bekommt (also den Wert $u_l(l)$ realisiert). Es folgt $V(E^{+l}) = u_l(l) + V(E^{+l-l}_{-l}) = u_l(l) + V(E_{-l})$. Die Begründung wird in der Bildunterschrift von Bild 3.4 gegeben (das Argument findet sich in ähnlicher Form in [58]).

□

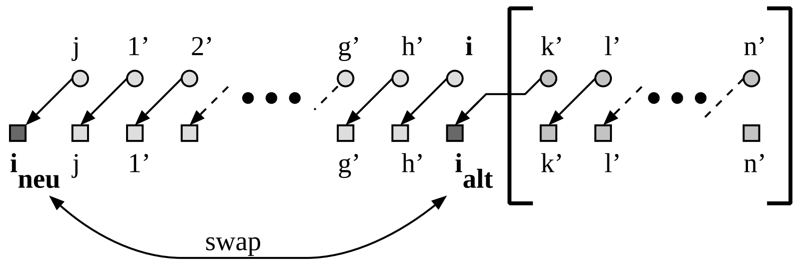


**Abbildung 3.4:** Würde keines der Güter vom Typ $i$ in der effizienten Allokation für die um Gut $i$ erweiterte Ökonomie an den Agenten $i$ gehen und wäre diese Allokation günstiger, als jede Allokation, in der $i$ eines des Güter vom Typ $i$ erhält, dann wäre der Ringtausch der Güter zwischen den Agenten $j$,$i$ und $\{1^{'}, \ldots, h^{'}\}$ auch schon in der effizienten Allokation für die quadratische Zuordnungsökonomie attraktiv gewesen (im Widerspruch zur angenommenen Effizienz der Allokation, die jedem Agenten $k$ das Gut $k$ zuweist).

### Minimalität der Vickreyzahlungen

Gul und Stacchetti zeigen in [41], dass der Gleichgewichtspreis[41] für das Bündel, dass ein Agent $i$ erhält, nie kleiner ist, als die Vickreyzahlung $t(i)$, die er zu zahlen hätte. Dieses Ergebnis (leicht korrigiert und kommentiert) folgt untenstehend im Detail. Anzumerken ist noch, dass Gleichgewichte, die den Bedingungen von Gul/Stacchetti genügen, für Zuordnungsökonomien immer existieren (s. oben, vgl. [53, 58, 41]).

**Theorem 3.45.** *Sei $(p, X)$ ein Walras'sches Gleichgewicht (im Sinne von Gul und Stacchetti) der Ökonomie $E = (\Omega; U_1, \ldots, U_n)$, $u_i$ monoton für alle $i \in N$. Dann ist $p(X_i) \geq t(i)$ für alle $i \in N$.*

*Beweis.* Es wird die Ökonomie $E^{'}$ betrachtet, in der der Nachfrager $i$ durch einen neuen Nachfrager $i$ mit linearem Nutzen

$$u_i(Z) = \sum_{z \in Z \cap X_i} p(\{z\}) \text{ falls } Z \cap X_i \neq \emptyset, \text{ und 0 sonst.}$$

ersetzt wird.[42] $(p, X)$ ist auch für $E^{'}$ ein Gleichgewicht[43] mit dem Wert

$$V(E^{'}) = p(X_i) + V(E_{-i}^{-X_i}). \tag{3.22}$$

Es wird nun die Ökonomie $E^{''}$ betrachtet, in der $i$ ein Konsument ist mit der Nutzenfunktion $u_i(Z) = 0$ für alle $Z \subseteq \Omega$. Der Wert der Ökonomie ist $V(E^{''}) = V(E_{-i})$.

[41] In ihrem Fall sind Gleichgewichtspreise für Bündel auf die Summe der Preise der in ihnen enthaltenen Einzelgüter beschränkt, sie betrachten also den Preismodus GUT.

[42] In [41] ist das nicht vollständig spezifiziert, die Behandlung der leeren Menge wurde hier korrigierend ergänzt.

[43] Dies folgt, weil im Falle von Bündelpreisen, die sich als Summe der Güterpreise ergeben, für ein Paar $(p, X)$ aus der Erfüllung der Bedingung der individuellen Zufriedenheit der Nachfrager die Effizienz von $X$ folgt (anders, als in den anderen Preismodi). Für das hier betrachtete Paar $(p, X)$ folgt in $E^{'}$ für alle Agenten $j \in N, j \neq i$ die Erfüllung der Bedingung aus der Gleichgewichtseigenschaft von $(p, X)$ für $E$. Beim Nettonutzen für den Agenten $i$ folgt aus der Konstruktion $v_i(X_i) \geq v_i(Z)$ für alle Bündel $Z \subseteq \Omega$. Also ist $(p, X)$ auch ein Gleichgewicht für $E^{'}$.

Es gilt $V(E^{'}) \geq V(E^{''})$.[44] Es gilt definitionsgemäß $t(i) = V(E_{-i}) - V(E_{-i}^{-X_i})$, also $t(i) = V(E^{''}) - V(E_{-i}^{-X_i})$ bzw. $V(E^{''}) = t(i) + V(E_{-i}^{-X_i})$. Mit $V(E^{'}) \geq V(E^{''})$ folgt aus (3.22) $p(X_i) + V(E_{-i}^{-X_i}) \geq t(i) + V(E_{-i}^{-X_i})$ und damit $p(X_i) \geq t(i)$. □

Wie gezeigt folgt für Zuordnungsökonomien mit Nachfragern, die nur ein Gut erwerben wollen (unit demand), das Zusammenfallen von Vickreyzahlungen und minimalen Gleichgewichtspreisen. Im folgenden wird eine allgemeine Bedingung für das Zusammenfallen in Zuordnungsökonomien aus den Gleichgewichtsbedingungen abgeleitet.

**Beispiel 3.13.** *Gegeben ist eine Ökonomie mit zwei Gütern und zwei Agenten. Es wird Free-Disposal angenommen. Die möglichen Bewertungen für die Singletons $A$ und $B$ seien auf die ganzen Zahlen im Intervall $[0, \ldots, 3]$ beschränkt, die Bewertung für $AB$ auf $[0, \ldots, 6]$. Die Bewertungen seien zudem auf die Fälle beschränkt, in denen eine effiziente Allokation aus der Zuweisung der Singletons an unterschiedliche Agenten entsteht. Die möglichen Kombinationen dieser Nutzenfunktionen bestimmen die Fälle, die sich für das Aufeinandertreffen der beiden Agenten ergeben können. In einigen dieser Fälle fallen minimale Gleichgewichtspreise und Vickreyzahlungen nicht zusammen. Dies wird an einem Beispielfall erläutert. Zunächst folgen einige der möglichen Kombinationen der Bewertungsfunktionen.*

| | *Agent 1* | | | *Agent 2* | | | *Vickrey* | | *Minimale Preise* | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| # | *A* | *B* | *AB* | *A* | *B* | *AB* | $t(1)$ | $t(2)$ | $p(A)$ | $p(B)$ |
| *1:* | **2** | *2* | *2* | *2* | **2** | *2* | *0* | *0* | *0* | *0* |
| **2:** | **2** | *2* | *2* | *3* | **3** | *5* | *2* | *0* | *2* | *2* |
| *3:* | **2** | *1* | *4* | *2* | **3** | *5* | *2* | *2* | *2* | *2* |

*Damit Vickreyzahlungen und minimale Preise zusammenfallen, müssen die folgenden Gleichgewichtbedingungen erfüllt sein. Sind diese erfüllt, dann kann die individuelle Vickreyzahlung eines Agenten als anonymer Preis für das ihm zugeordnete Bündel interpretiert werden. Hierbei gibt $X_i$ das Singleton an, welches dem Agenten $i$ zugeordnet wird, und die Singletonpreise sind durch die Vickreyzahlungen gegeben als $p(X_1) = t(1) = u_2(AB) - u_2(X_2)$, $p(X_2) = t(2) = u_1(AB) - u_1(X_1)$ (dem Agenten 1 wird in den betrachteten Fällen in der effizienten Allokation jeweils das Bündel $\{A\}$ zugeordnet und dem Agenten 2 das Bündel $\{B\}$).*

*Gleichgewichtsbedingung für den Agenten 1:*

$$
\begin{aligned}
& u_1(X_1) - t(1) \geq u_1(X_2) - t(2) \\
\Leftrightarrow \quad & u_1(X_1) - u_2(AB) + u_2(X_2) \geq u_1(X_2) - u_1(AB) + u_1(X_1) \\
\Leftrightarrow \quad & u_1(AB) - u_1(X_2) \geq u_2(AB) - u_2(X_2)
\end{aligned}
$$

[44] Wäre $V(E^{''}) > V(E^{'})$, dann wäre dies ein Widerspruch zur Effizienzannahme von $X$, denn für eine effiziente Allokation $Y$ für die Ökonomie $E^{''}$ gilt $V(E^{''}) = \sum_{j \in N, j \neq i} u_j(Y_j)$ und, da $u_j(\cdot)$ in beiden Ökonomien für alle $j \neq i$ identisch ist, $V(Y^E) = V(E^{''}) + u_i(Y_i)$, also $V(Y^{E^{'}}) \geq V(E^{''}) > V(X^{E^{'}})$.

*Gleichgewichtsbedingung für den Agenten 2:*

$$\begin{aligned} & u_2(X_2) - t(2) \geq u_2(X_1) - t(1) \\ \Leftrightarrow \quad & u_2(X_2) - u_1(AB) + u_1(X_1) \geq u_2(X_1) - u_2(AB) + u_2(X_2) \\ \Leftrightarrow \quad & u_2(AB) - u_2(X_1) \geq u_1(AB) - u_1(X_1) \end{aligned}$$

*Diese Bedingungen sind in der Zeile 2 der Beispieltabelle nicht alle erfüllt:* $0 = 2 - 2 = u_1(AB) - u_1(X_2) < u_2(AB) - u_2(X_2) = 5 - 3 = 2$. *Folglich fallen die Vickreyzahlungen und die minimalen Gleichgewichtspreise nicht zusammen.*

*Allgemeiner notiert ergibt sich folgende Bedingung für den Agenten 1:*

$$\begin{aligned} & u_1(X_1) - \big(V(E_{-1}) - V(E_{-1}^{-X_1})\big) \geq \; u_1(X_2) - \big(V(E_{-2}) - V(E_{-2}^{-X_2})\big) \\ \Leftrightarrow \quad & V(E) - V(E_{-1}) \geq \; u_1(X_2) - V(E_{-2}) + V(E_{-2}^{-X_2}) \\ \Leftrightarrow \quad & u_2(X_2) - V(E_{-1}) \geq \; u_1(X_2) - V(E_{-2}) \\ \Leftrightarrow \quad & V(E_{-2}) - V(E_{-1}) \geq \; u_1(X_2) - u_2(X_2) \end{aligned}$$

Analog zum Beispiel lassen sich die allgemeinen Bedingungen für jeden Agenten direkt wie folgt angegeben:

**Proposition 3.46.** *Sei $E$ eine Zuordnungsökonomie. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass in einer effizienten Allokation $X$ das Bündel $X_i$ dem Agenten $i$ zugeordnet wird. Der minimale Gleichgewichtspreis für $X_i$ fällt dann mit der Vickreyzahlungen von Agent $i$ zusammen, wenn*

$$u_j(X_j) - u_i(X_j) \geq V(E_{-i}) - V(E_{-j}) \;\; \forall j \in N \tag{3.23}$$

Wenn die Bedingungen für die Preise der Superbündel erfordern, dass die minimalen Gleichgewichtspreise für die Singletons in der vollständigen Ökonomie von den Preisen der Singletons in der reduzierten Ökonomie abweichen, dann können die Vickreyzahlungen nicht mit den minimalen Gleichgewichtspreisen zusammenfallen – auch, wenn die obige Bedingung für alle Agenten in der reduzierten Ökonomie erfüllt sind. Diese Bedingung ist mithin nur eine *notwendige* Bedingung für die Koinzidenz von Vickreyzahlungen und minimalen Gleichgewichtspreisen. Hinreichend ist hingegen die im folgenden hergeleitete Bedingung ($z$ ist ein Element von $2^X$, die *Elemente* von $z$ sind also auch Elemente von $X$).

$$\begin{aligned} & u_i(X_i) - t(i) \geq u_i(z) - \sum_{X_j \in z} t(j) && \forall i \in N, z \in 2^X \\ \Leftrightarrow \quad & V(E) - V(E_{-i}) \geq u_i(z) - \sum_{X_j \in z} \big(V(E_{-j}) - V(E_{-j}^{-X_j})\big) && \forall i \in N, z \in 2^X \\ \Leftrightarrow \quad & \sum_{X_j \in z} u_j(X_j) - V(E_{-i}) \geq u_i(z) - \sum_{X_j \in z} V(E_{-j}) && \forall i \in N, z \in 2^X \\ \Leftrightarrow \quad & \sum_{X_j \in z} u_j(X_j) - u_i(z) \geq V(E_{-i}) - \sum_{X_j \in z} V(E_{-j}) && \forall i \in N, z \in 2^X \end{aligned} \tag{3.24}$$

Es folgt unmittelbar die folgende Proposition.

**Proposition 3.47.** *Genau dann, wenn es in einer kombinatorischen Ökonomie $E$ eine effiziente Allokation $X$ gibt, so dass die Bedingung* (3.24) *erfüllt ist, dann bestimmen die Vickreyzahlungen minimale Gleichgewichtspreise, die $X$ unterstützen.*

Wenn die Bedingungen für das Zusammenfallen von Vickreyzahlungen und minimalen Gleichgewichtspreisen für eine Ökonomie erfüllt sind, dann kann ein gleichgewichtspreisbasiertes Verfahren (s. nächstes Kapitel) zur Bestimmung der Vickreyzahlungen verwendet werden. Dieses Verfahren ist dann klarerweise auch anreizkompatibel, wenn es minimale Gleichgewichtspreise bestimmt. Wenn die Bedingungen verletzt sind, dann gilt dies nicht (denn die Zahlungen des Einzelnen sind dann nicht vollständig unabhängig von seinen eigenen Bewertungen). In diesen Fällen ist eine Bestimmung der Vickreyzahlungen unabhängig von ev. existierenden Gleichgewichtspreisen erforderlich (s. ebenfalls nächstes Kapitel). Im nächsten Kapitel wird zudem ein Verfahren vorgestellt, das mittels eines Schrumpfungsprozesses das Zusammenfallen von minimalen Gleichgewichtspreisen und Vickreyzahlungen sicherstellen kann (dieses Verfahren ist allerdings nicht anreizkompatibel). Die Anwendbarkeit der Vorgehensweisen wird in Kapitel 5 demonstriert. Zunächst wird in einem Exkurs auf nutzenmaximierende Anbieter eingegangen.

## 3.7 Exkurs: Zweiseitige Koordinationsprobleme

Zunächst wird die Situation des Preismodus ALL betrachtet, d.h. es gibt Preise für alle Bündel und es können beliebig viele Transaktionen stattfinden. Es werden nun Ressourcenagenten mit Eigeninteressen zur betrachteten Situation hinzugefügt, die als Anbieter am Koordinationsprozess teilnehmen. Analog zum erwarteten Verhalten der Nachfrager wird auch ein Anbieter versuchen, die Menge an Transaktionen zu realisieren, die den Verkauf seiner Güter am attraktivsten für ihn werden lässt (ihm also die größtmöglichen Einnahmen sichert). Es wird angenommen, dass die Herausgabe der Güter nicht mit Kosten verbunden ist und ein Eigenkonsum keinen Nutzen stiftet. Die Anbieter haben also keinen “Vorbehaltspreis” bzw. keinen Reservierungswert für Güterbündel. Zudem treten die Anbieter nicht auch als Nachfrager auf.

**Beispiel 3.14.** *Ein Anbieter besitzt die Güter $A$ und $B$. Der Ladeninhaber legt die folgende Preisliste fest: $p(A) = 3$, $p(B) = 4$, $p(AB) = 6$. Im Falle des Verkaufs des Bündels in einer Transaktion (Einnahmen: $p(AB)$) wäre der Anbieter unzufrieden, er würde anstreben, das Bündel in 2 Transaktionen zu verkaufen (Einnahmen: $p(A) + p(B)$). Wenn anstelle des Bündels nur ein einzelnes Gut verkauft würde, dann wäre der Anbieter bei den gegebenen Preisen mit der Allokation nicht zufrieden.*[45]

Der Anbieter ist also mit dem Verkauf eines Bündels nur zufrieden, wenn ein Erlös entsteht, der der günstigsten Transaktionsmöglichkeit entspricht. Zur Vereinfachung

[45] Dieser zweite Aspekt kann für den betrachteten Fall freier Entsorgbarkeit vernachlässigt werden, denn es kann, wie bereits ausgeführt, angenommen werden, dass alle Güter in einer effizienten Allokation den Nachfragern zugeordnet werden. Wenn dies nicht der Fall wäre, dann dürfte der Preis für nichtallozierte Bündel nicht über dem höchsten Preis für ein in ihnen enthaltenes Bündel liegen.

und zum Herstellen von Vergleichbarkeit werden wir wieder annehmen, dass die Bedingungen des Modus ANY gelten. Damit dies für die Überlegungen des Anbieters ohne Einfluss bleibt, muss der festgelegte Preis für ein Bündel zumindest die Höhe der Summe der Preise aller möglichen partitionierenden Bündelmengen erreichen.

**Definition 3.48 (Anbieterkohärenz).** *Eine Preisfunktion $p$ heißt dann* anbieterkohärent *zum Preismodus* ALL, *wenn*

$$p(x) = \max_{Z \in \Pi(x)} \sum_{z \in Z} p(z) \textit{ für alle } x \subseteq \Omega, x \neq \emptyset. \tag{3.25}$$

*Eine zum Modus* ALL anbieterkohärente *Preisfunktion ist darüberhinaus zum Preismodus* EFF anbieterkohärent, *wenn eine Allokation $X$ existiert, so dass*

$$p(x) = \sum_{z \in x} p(z) \quad \forall x \in 2^X, x \neq \emptyset \tag{3.26}$$

*Anmerkung: Existiert eine zum Preismodus* EFF *in Bezug auf eine Allokation $X$ anbieterkohärente Preisfunktion $p$, dann ist auch eine Preisfunktion $p^{'}$, für die*

$$p^{'}(x) = 0 \textit{ für alle } x \subseteq \Omega, x \neq \emptyset, \textit{ mit } x \notin 2^X \textit{ und } p(x) \textit{ sonst}$$

*gilt, anbieterkohärent zum Preismodus* EFF *in Bezug auf $X$. Diese Preisfunktion nennen wir* $0$-normiert.

*In Ergänzung der obigen Definition 3.20 des auf die Käuferseite beschränkten Kohärenzbegriffs werden wir die bisher als kohärent bezeichneten Preisvektoren im weiteren als* nachfragerkohärent *bezeichnen.*

**Beispiel 3.15.** *Für das obige Beispiel wäre etwa die Preisfunktion $p(A) = 2, p(B) = 2, p(AB) = 5$ eine zu den Modi* ALL *und* EFF *anbieterkohärente Preisfunktion bzgl. der Allokation, die das Bündel $AB$ einem Nachfrager zuweist. Sie wäre jedoch nicht anbieterkohärent zu Modus* EFF *bzgl. einer Allokation, die beide Einzelbündel verschiedenen Nachfragern zuordnet.*[46]

Es ist klar, dass ein einzelner Preisvektor nur sehr selten *nachfrager- und anbieterkohärent* sein wird: dies ist für den Modus ALL nur der Fall, wenn die Preise aller Bündel sich aus der Addition der Preise der in sie eingehenden Güterbündel ergeben, d.h.

**Proposition 3.49.** *Eine Preisfunktion $p$ ist genau dann* nachfrager- **und** anbieterkohärent, *wenn gilt*

$$p(x) = \sum_{z \in x} p(\{z\}) \quad \forall x \subseteq \Omega, x \neq \emptyset.$$

*Eine solche Preisfunktion heißt* beidseitig kohärent.

[46]Der Sinn der Kohärenzbedingungen ist ja gerade, sicherzustellen, dass eine Allokation, für die diese Kohärenzbedingung erfüllt ist, so gestaltet ist, dass der Anbieter auch dann zufrieden ist mit dem implizierten Resultat, wenn die allozierten Bündel durch eine andere Menge an Transaktionen als durch den Ein-Transaktions-Verkauf der in der Allokation vorgemerkten Bündel verkauft würden.

*Beweis.* Aus den beiden Kohärenzbedingungen folgt eine Richtung unmittelbar, denn es muss gelten, dass

$$p(x) = \min_{Z \in \Pi(x)} \sum_{z \in Z} p(z) = \max_{Z \in \Pi(x)} \sum_{z \in Z} p(z) \quad \forall x \subseteq \Omega, x \neq \emptyset$$

und damit

$$\sum_{z \in Z} p(z) = p(x) \text{ für alle } x \text{ und für alle } Z \in \Pi(x).$$

Insbesondere erfüllt dies die Propositionsbedingung. Umgekehrt führt die Erfüllung der Propositionsbedingung direkt zur Erfüllung beider Kohärenzbedingungen. □

Die Existenz von Gleichgewichtspreisen, die beidseitig kohärent sind, lässt sich also nur für die Fälle sicherstellen, die auch für den Modus GUT gelten – denn die Proposition ist identisch mit der Kohärenzbedingung für Preise, die (nachfrager-)kohärent zum Preismodus GUT sind. Die Existenzbedingungen werden beispielsweise in [41] diskutiert. Wir haben bereits festgehalten, dass wir diese Bedingungen zumindest hinsichtlich der sinnvoll möglichen Gleichgewichte für die Ausgangssituation als zu einschränkend erachten. Präzisere Überlegungen lassen sich analog zu Abschnitt 3.5 auch für die Anbieterseite anstellen.

Kehren wir zur Motivation für den Modus EFF zurück. Dieser entstand aus dem Bemühen heraus, eine bereits vorgenommene Bündelung durch den Verkäufer (zu der es nur noch Preise für die "gepackten" Bündel gibt und keine Beschränkung der möglichen Transaktionen) auf den Modus ANY abzubilden, der von vollständigen Preisvektoren ausgeht und nur eine Transaktion pro Nachfrager erlaubt. Die Ausgangssituation der bereits gepackten Bündel lässt sich auf die Nachfragerseite übertragen: der Arbitrator bestimmt die effiziente Allokation (also eine Bündelung für die Nachfragerseite) und leitet daraus die Bündel ab, die er von den Anbietern erwerben möchte. Da wir angenommen haben, dass die Anbieter keine Reservierungswerte haben, ist die Aufgabe des Arbitrators scheinbar leicht: er muss letztlich nur irgendeinen Preisvektor bestimmen, der den Erwerb von Bündeln durch den Arbitrator ermöglicht, die insgesamt genug Güter enthalten, um die bestimmte effiziente Allokation zu realisieren – es ist allerdings die Nebenbedingung zu beachten, dass die Summe der Einnahmen des Arbitrator die Summe der Ausgaben mindestens erreicht. Dies ist allerdings eine sehr monopolistische Position: der Arbitrator bestimmt die Preise, ohne dass die Anbieter Informationen über tatsächliche Zahlungsbereitschaften der Nachfrager erhalten. Um ein Mindestmaß an Transparenz sicherzustellen, sollen die Preise für die Bündel der effizienten Allokation den Anbietern bekannt gemacht werden. Wenn diese Preise für die Anbieter akzeptabel sind (also ihr Nettonutzen maximiert wird), dann können die effiziente Allokation und die damit verbundenen Zahlungen implementiert werden. Dies lässt sich auf den Preismodus ANY übertragen, in dem man zwei Vektoren bestimmt – einen nachfragerkohärenten Vektor, der die Nachfrager zufriedenstellt und einen anbieterkohärenten Vektor, der dies für die Verkäufer sicherstellt (beides für den Modus EFF mit Bezug zur effizienten Allokation). Beide Vektoren fallen in den Preisen für die Bündel der effizienten Allokation und für deren Superbündel zusammen.

Dies ermöglicht eine Erweiterung des Gleichgewichtsbegriffs auf zweiseitige Märkte (unter Beibehaltung des Arbitrators und seiner Ziele und unter Angabe von zwei differenzierenden Preisvektoren).

Es bleibt allerdings ein unmittelbar evidentes Problem: wenn die Ausstattung der Anbieter nicht zur effizienten Bündelung "passt", dann bestimmen die Preise für die effizienten Bündel nicht unmittelbar auch den Betrag, den der liefernde Anbieter erhält. Es stellt sich also das Problem der Aufteilung der Einnahmen für ein Bündel auf die Anbieter, die Teile des Bündels liefern. Hier lassen sich Überlegungen anstellen, die analog zu den Überlegungen für auf der Nachfragerseite geschrumpfte Ökonomien sind: es lassen sich Allianzen von Anbietern bilden, die gemeinsam die allozierten Bündel liefern und sich direkt über eine Aufteilung der Gewinne verständigen oder eine Aufteilung durch den Arbitrator akzeptieren. Billigt man den Anbietern das Recht zu, die Teilnahme an einer Allianz zu verweigern, dann muss die Aufteilung so gestaltet sein, dass die einzelnen Beteiligten sich zumindest so gut stellen, wie sie es täten, wenn die Güter ohne das Zustandekommen der Allianz verkauft werden müssten. Es ist zu beachten, dass der Arbitrator dann entweder gezwungen ist, die Bündel den Nachfragern so anzubieten, wie sie von den Anbietern erworben werden können (die Effizienz ist gefährdet) oder weiterhin die effiziente Bündelung auf der Nachfragerseite zu verkaufen, aber einen speziellen Preisvektor für die Anbieter zu generieren, der nur noch für die "gemeinsamen" Bündel mit der effizienten Verkaufsallokation übereinstimmt und die realisierbare Einkaufsbündelung unterstützt (dies reduziert die Transparenz für die Anbieter erneut). Die Details der Ausgestaltung der zugrundeliegenden Kooperationsvereinbarung bestimmen wiederum die Handlungsoptionen der teilnehmenden Agenten und erst eine Fixierung der Bedingungen würde eine genauere Analyse ermöglichen. Wenn die Position des Arbitrators aufgegeben und eine vollständige Dezentralisierung[47] der Findung von Allokation und Preisen angestrebt werden würde, dann wäre es sinnvoll, die Realisierbarkeit von Resultaten mittels einer Analyse der Core-Eigenschaften vorzunehmen. Intuitiv ist ein Resultat im Core, wenn es keine Koalition von Agenten (hier immer gemischt aus Anbietern und Nachfragern zusammengesetzt) gibt, die gegen die Implementierung des Resultats Einwände erheben würde (nämlich weil sich zumindest einer der Agenten in einem Resultat, dass aus der Allokation der Güter, die Agenten in dieser Koalition gehören, entsteht, besser stellen würde, als im vorgeschlagenen Resultat und die anderen Agenten der Koalition nicht schlechter gestellt werden würden). Die Frage, welche solcher Resultate noch mit (möglicherweise vollständig ausdifferenzierten) Preisen versehen werden kann, wird in [14] diskutiert. Unter der zusätzlichen Einschränkung auf anonyme oder zwischen Nachfrager- und Anbieterseite, aber nicht individuell, differenzierte Preise könnte diese Analyse an unsere Forderung nach Symmetrie und Transparenz angepasst werden.

Es bleibt festzuhalten, dass beides gemeinsam, d.h. die (zweiseitige) Preisdifferenzierung und die (beidseitige) Schrumpfung der Ökonomie, ein Instrumentarium ergeben, das die Existenz von kohärenten (effizienten) Gleichgewichten für jede Ökonomie, das heißt mit beliebigen Präferenzstrukturen – unter der Annahme freier Entsorgung – garantieren kann. Weitere Details zu diesen Marktformen und zu Gleichgewichtsüberlegungen sind für den Fortgang der Argumentation nicht erforderlich und verbleiben

[47] Ev. unter der Einführung von Hemmnissen für effizienzbedrohende Kollusion.

als Gegenstand für weiterführende Arbeiten.

[Ende des Exkurses]

## 3.8 Weiteres Vorgehen

Die begrifflichen, notationalen und theoretischen Grundlagen für die Entwicklung konkreter ökonomischer Koordinationsmechanismen zur Behandlung der hier interessierenden Situation sind nun gelegt.

Im nächsten Kapitel werden Algorithmen zur Bestimmung effizienter Allokationen, zur Bestimmung von (kohärenten) Gleichgewichtspreisen und zur Berechnung von Vickreyzahlungen für kombinatorische Ökonomien entwickelt und deren Eigenschaften untersucht. Im Kapitel 5 werden die erzielten Resultate dann auf Resourcenallokationsprobleme angewendet. Dies wird am Beispiel ökonomisch erweiterter Job-Shop-Probleme detailliert demonstriert. Die Anwendbarkeit der Resultate wird hinsichtlich der Komplexität der entwickelten Mechanismen diskutiert und es wird ein heuristisches Bietverfahren vorgeschlagen, das eine für die teilnehmenden Aktoren[48] nachvollziehbare Alternative zu den gegebenenfalls exponentiell aufwendigen exakten Mechanismen darstellt. Im zweiten Teil des Kapitels 5 werden in allgemeinerer Form mögliche Konsequenzen der Einführung ökonomischer Koordinationsmechanismen für Organisationsstrukturen in und zwischen Unternehmen diskutiert. Die Arbeit wird im Kapitel 6 durch einen Vergleich der Resultate mit den im Kapitel 2 formulierten allgemeinen Anforderungen und einen Ausblick auf weitere Forschungsmöglichkeiten abgeschlossen.

[48] In Kap. 5 wird der Begriff Aktor wieder dezidiert verwendet, wenn betont werden soll, dass dort Menschen Einfluss nehmen auf den Ablauf und die Ausgestaltung von Koordinationsmechanismen.

# Kapitel 4

# Algorithmen und Effizienz

Dieses Kapitel führt die wesentlichen Algorithmen ein, die zur Lösung von kombinatorischen Allokationsproblemen benötigt werden. Aus den Algorithmen wird eine Familie von ökonomischen Koordinationsmechanismen abgeleitet, deren Anwendbarkeit im folgenden Kapitel diskutiert wird.

Zunächst werden zwei Best-First Algorithmen zur Bestimmung von Allokationen vorgestellt. Es wird gezeigt, dass die vorgeschlagenen Algorithmen unter der Annahme wahrheitsgemäßer Übermittlung von Bewertungen effiziente Allokationen bestimmen.

In einem zweiten Schritt wird ein Verfahren zur Bestimmung von Gleichgewichtspreisvektoren bei gegebener effizienter Allokation bestimmt. Dieses Verfahren stellt auch die Nicht-Existenz von Gleichgewichtspreisen fest. Dann kann ein Algorithmus zur Schrumpfung der Ökonomie angewendet werden, der die Existenz solcher Preise sicherstellt. Alternativ können die Vickreyzahlungen aus den Informationen, die zur Findung der effizienten Allokation nachgefragt wurden, bestimmt werden. Das Schrumpfungsverfahren kann zudem so modifiziert werden, dass Vickreyzahlungen und minimale Gleichgewichtspreise für die geschrumpfte Ökonomie zusammenfallen. In einem dritten Schritt werden die Ergebnisse zusammengeführt zu einer Familie von progressiven, auktionsbasierten Koordinationsmechanismen, die die formulierten Anforderungen hinsichtlich der Bedingungen für eine Teilnahmeentscheidung der Aktoren und hinsichtlich der ökonomischen Effizienz der erzielten Resultate erfüllen. Diese Koordinationsmechanismen bestimmen die effiziente Allokation und Vickreyzahlungen auf Basis von partiell-enthüllten Nutzenfunktionen. Es werden zwei Varianten präsentiert, die einmal auf den absoluten Nutzenwerten basieren und einmal nur die Differenzen zwischen Bewertungen erfragen.[1] Die Anwendung dieser Mechanismen auf ökonomisch erweiterte Job-Shop-Probleme wird dann in Kapitel 5 detailliert vorgestellt.

[1] Die Differenzen-Variante wird in Anhang C dargestellt.

## 4.1 Effiziente Allokationen

Die grundlegende Idee des vorzustellenden Verfahrens ist die folgende: Jede Allokation entspricht einer (eindeutigen) Kombination individueller Präferenzen. Die individuellen Präferenzen sind in Ränge geordnet. Mit Hilfe der kombinierten und unbewerteten Präferenzen können die Allokationen bereits in eine partielle *Dominanz*-Ordnung mit kleinstem und größtem Element gebracht werden – die Menge der Kombinationen bildet einen Verband (*Lattice*). Wenn eine Kombination eine Allokation repräsentiert, dann kann keine untergeordnete (*dominierte*) Kombination eine bessere Lösung des Allokationsproblems sein. Wird der Lattice von oben nach unten unter Berücksichtigung von Dominanz- und Gültigkeitsüberlegungen durchsucht, erlaubt dies, ein Verfahren zur Auffindung pareto-optimaler Lösungen des Allokationsproblems anzugeben. Stehen zudem die Bewertungen der individuellen Präferenzen zur Verfügung und sind diese vergleichbar, dann kann zielgerichtet eine effiziente Allokation bestimmt werden. Diese Voraussetzung ist mit der Annahme übertragbaren Nutzens gegeben. Zur Vereinfachung der Darstellung nehmen wir zunächst an, dass jeder Präferenz ein für den jeweiligen Agenten eindeutiger Nutzenwert zugeordnet wird. Das folgende Beispiel soll die Grundidee verdeutlichen.

**Beispiel 4.1.** *Zwei Güter:* $A, B$. *Zwei Agenten:* $1$ *und* $2$. *Die bewerteten Präferenzen sind gegeben als:*

| | ∅ | *A* | *B* | *AB* |
|---|---|---|---|---|
| 1 | *0* | *4* | *3* | *8* |
| 2 | *0* | *1* | *6* | *9* |

*Die Nutzenfunktionen implizieren eine strikte Präferenzordnung über den Bündeln, die wie folgt durch Ränge ausgedrückt werden kann:*

*Agent* $a_1$*:* $(1 : AB, 2 : A, 3 : B, 4 : \emptyset)$. *Agent* $a_2$*:* $(1 : AB, 2 : B, 3 : A, 4 : \emptyset)$.

*Dies führt zu dem in Abb. 4.1 dargestellten Rang-Lattice. Nur eine Teilmenge der Präferenzkombinationen ist gültig und entspricht daher Allokationen. Dies ist in Abb. 4.2 dargestellt.*

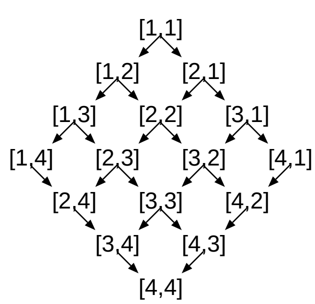


**Abbildung 4.1:** Rang-Lattice für ein 2x2-Problem

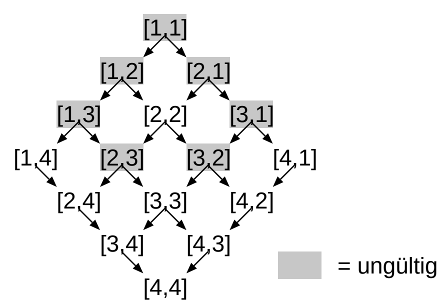


**Abbildung 4.2:** Rang-Lattice mit den gültigen Kombinationen.

*Um die effiziente Allokation zu bestimmen, müssen die aggregierten Werte der Kombinationen* $[2, 2], [1, 4], [4, 1]$ *bestimmt und verglichen werden. Alle anderen Kombination sind entweder ungültig oder werden dominiert, s. Abb. 4.3. Die soeben bestimm-*

*te Menge von Allokationen entspricht der Menge der pareto-effizienten Allokationen. Dies ergibt sich direkt aus den Dominanzbeziehungen im Lattice. Zur Bestimmung der effizienten Allokation(en) werden nur die Nutzeninformationen der Präferenzen, die in den pareto-optimalen Allokationen realisiert werden, benötigt. Die effiziente Allokation in obigem Beispiel ist* $X^* = \big(\{\emptyset\}, \{A\}, \{B\}\big)$. *Sie entspricht der Rang-Kombination* $[2, 2]$.

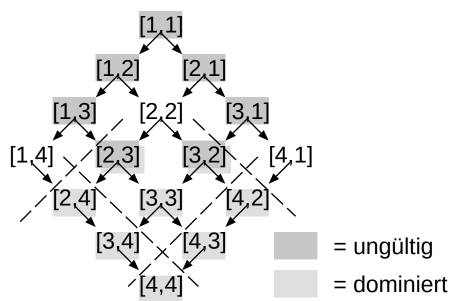


**Abbildung 4.3:** Rang-Lattice mit dominierten Kombinationen.

Im weiteren wird der Rang-Lattice formalisiert und ein Algorithmus zur Bestimmung einer effizienten Allokation angegeben. Dieser Algorithmus durchsucht den Raum ungültiger Kombinationen, um zielgerichtet mit der ersten gefundenen gültigen Kombination die Suche abzuschließen. Dies unterscheidet den Algorithmus wesentlich von den Ansätzen von Sandholm [87] und anderen [35, 59]. Dies wird in der Diskussion des Ansatzes aufgegriffen.

### 4.1.1 Der Lattice

Es sei daran erinnert, dass $m$ die Kardinalität der Gütermenge $\Omega$ ist und daher $2^m$ die Kardinalität der Menge aller möglichen Bündel, inklusive des leeren Bündels $\emptyset$, ist. Wir betrachten die Menge $N$ der Nachfrager. Wie bereits in Kapitel 3 ausgeführt, verfügt jeder Nachfrager $i$ über eine rationale Präferenzrelation $\succsim$, die über der Menge $2^\Omega$ der möglichen Bündel definiert ist. Aus der Menge der möglichen Bündel lassen sich $n$-stellige Kombinationen von Bündeln bilden. Die Menge der möglichen Kombinationen $2^\Omega \times \cdots \times 2^\Omega$ wird mit $\mathbf{C}$ bezeichnet. Die individuellen Präferenzrelationen induzieren eine *Dominanzrelation* über $\mathbf{C}$ wie folgt (entspricht Definition 3.9 in Kap. 3).

**Definition 4.1 (Dominanzrelation).** *Seien* $a$ *und* $b$ *zwei beliebige Kombinationen aus* $\mathbf{C}$. $a$ ***dominiert*** $b$ *genau dann, wenn* $a_i \succsim_i b_i$ *für alle* $i \in N$. *In diesem Fall schreibt man* $a \succsim b$ *(oder* $(a, b) \in \succsim$*).*

Nun kann jeder Agent die Menge der Alternativen in eine Rangfolge bringen, indem er eine Rangfunktion wie folgt bestimmt.

**Definition 4.2 (Rangfunktion, Inverse Rangfunktion).** *Sei* $R$ *die Menge der ersten* $2^m$ *natürlichen Zahlen,* $\{1, \ldots, 2^m\}$. *Sei* $\succsim_i$ *über* $2^\Omega$ *die rationale Präferenzrelation* *für jeden Nachfrager $i \in N$ gemäß Annahme 3.1 in Kapitel 3. Dann wird eine* bijektive *Funktion $r_i : 2^\Omega \to R$ genau dann* Rangfunktion für den Agenten $i$ *genannt, wenn sie jedem Bündel einen Wert (*Rang*) zuordnet, so dass für jedes Bündelpaar $x, y \subseteq \Omega$ mit $x \succ_i y$ gilt, dass $r_i(x) < R_i$ ist. Die zu $r_i(\cdot)$ inverse Funktion $r_i^{-1}(\cdot)$ liefert eineindeutig das einem Rang entsprechende Bündel.*

**Proposition 4.3.** *Zu jeder rationalen Präferenzrelation existiert eine Rangfunktion und ihre Inverse.*

*Beweis.* Die Existenz einer Rangfunktion folgt unmittelbar aus den Eigenschaften rationaler Präferenzfunktionen (s. Def. 3.1.2). Die Existenz der inversen Rangfunktion folgt aus der Bijektivität von $r_i(\cdot)$. □

Es ist anzumerken, dass Rangfunktionen für rationale Präferenzrelationen nicht notwendigerweise eindeutig sind, denn Indifferenzen werden in obiger Definition implizit arbiträr aufgelöst. Dies zeigt das folgende Beispiel.

**Beispiel 4.2.** *Eine Gütermenge $\Omega = \{A, B\}$ und ein Agent mit der Präferenzrelation*

$$\succsim_i : \{AB\} \succ \{A\} \sim \{B\} \succ \{\emptyset\}$$

*sind gegeben. Dann sind genau die folgenden bijektiven Funktionen Rangfunktionen:*

$$\begin{aligned} r_i^1 :& \{AB\} \to 1, \{A\} \to 2, \{B\} \to 3, \{\emptyset\} \to 4 \\ r_i^2 :& \{AB\} \to 1, \{B\} \to 2, \{A\} \to 3, \{\emptyset\} \to 4 \end{aligned}$$

**Definition 4.4 (Kombination von Rängen).** *Sei $\mathbf{R}$ die Menge aller möglichen n-stelligen Tupel über $R$, also $\mathbf{R} = R \times \cdots \times R$. Ein Element $r$ von $\mathbf{R}$, $r = (r_1, \ldots, r_n)$ wird* Kombination von Rängen *genannt.*

Ist nun eine Kombination $r$ von Rängen gegeben und wendet man auf jede Position $i$ von $r$ die entsprechende Funktion $r_i^{-1}(\cdot)$ an, so erhält man $c^r$, die durch $r$ bestimmte *Kombination von Bündeln*. Umgekehrt lässt sich natürlich zu jeder Bündelkombination $c \in \mathbf{C}$ mittels Anwendung der Rangfunktionen $r_i(\cdot)$ die zugehörige Rangkombination $r^c$ eineindeutig bestimmen.

**Definition 4.5 (Gültige Kombinationen).** *Man nennt eine Kombination $r$ von Rängen genau dann* gültig, *wenn die korrespondierende Bündelkombination $c^r$ eine Partition einer nicht notwendigerweise echten Teilmenge von $\Omega$ ist. Eine gültige Kombination bestimmt eine Allokation $X^c$ mit $X_i = c_i^r$, $i = 1, \ldots, n$ und $X_0 = \Omega / \bigcup_i c_i^r$.*

**Definition 4.6 (Dominanz von Rangkombinationen).** *Sei $\preceq$ eine binäre Relation auf $\mathbf{R}$, d.h. $\preceq$ ist eine Teilmenge von $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, die wie folgt definiert wird: Für alle $x, y \in \mathbf{R}$ folgt $x \preceq y$ genau dann, wenn $x_i <= y_i$ für alle $i \in N$ gilt. Diese Relation wird* Dominanzrelation *über Rangkombinationen genannt.*

**Proposition 4.7.** *Die Dominanzrelation auf Rangkombinationen, $\preceq$, ist eine* partielle Ordnung, *d.h. $x \preceq x$ (Reflexivität); $x \preceq y$ und $y \preceq x$ implizieren $x = y$ (Antisymmetrie); und $x \preceq y$ und $y \preceq z$ implizieren $x \preceq z$ (Transitivität), jeweils für alle $x, y, z \in \mathbf{R}$.*

*Beweis.* (Reflexiv) Für $x$ gilt natürlich $x_i = x_i$ für alle $i \in N$, also auch $x_i \leq x_i$, und damit $x \preceq x$. (Antisymmetrisch) Mit $x \preceq y$ und $y \preceq x$ folgt $x_i \leq y_i \leq x_i$ und damit $x_i = y_i$ für alle $i \in N$. (Transitiv) Aus $x \preceq y$ und $y \preceq z$ folgt, dass $x_i \leq y_i$ und $y_i \leq z_i$ für alle $i \in N$, und damit aus der Transitivität von $\leq$ direkt $x_i \leq z_i$, also $x \preceq z$. □

Man sagt, dass $a \in \mathbf{R}$ eine *obere Grenze* einer Teilmenge $X$ von $\mathbf{R}$ ist, falls $x \preceq a$ für alle $x \in X$. Ebenso ist $b \in \mathbf{R}$ eine *untere Grenze* von $X$, falls $b \preceq x$ für alle $x \in X$. Desweiteren ist $a \in \mathbf{R}$ die *kleinste obere Grenze* (least upper bound) einer Teilmenge $X$ von $\mathbf{R}$, falls $a$ eine obere Grenze von $X$ ist und für alle oberen Grenzen $a^{'}$ von $X$ gilt, dass $a \preceq a^{'}$. Die größte untere Grenze (greatest lower bound) ist analog definiert. Beide Grenzen sind eindeutig, falls sie existieren. Sie werden mit $lub(X)$ bzw. $glb(X)$ bezeichnet.

**Definition 4.8 (Kompletter Lattice).** *Eine partiell geordnete Menge L ist ein* kompletter Lattice*, falls $lub(X)$ und $glb(X)$ für jede Teilmenge $X$ von $L$ existieren.*

**Proposition 4.9.** $\mathbf{R}$ *ist ein kompletter Lattice unter der partiellen Ordnung $\preceq$. Es gilt $lub(\mathbf{R}) = (2^m, \ldots, 2^m)$ und $glb(\mathbf{R}) = (1, \ldots, 1)$.*

*Beweis.* Aus der Konstruktion folgt, dass $(2^m, \ldots, 2^m)$ und $(1, \ldots, 1)$ mit jedem Element aus $\mathbf{R}$ vergleichbar und selbst Elemente von $\mathbf{R}$ sind.. Zudem folgt aus $2^m \geq x \geq 1$ für alle $x \in R$ unmittelbar, dass $(1, \ldots, 1) \preceq c \preceq (2^m, \ldots, 2^m)$ für alle $c \in \mathcal{R}$. □

**Definition 4.10 (Nachfolgerfunktion, Wertfunktion).** *Die (direkte)* ***Nachfolgerfunktion*** $\mathrm{suc} : \mathbf{R} \to 2^{\mathbf{R}}$ *sei wie folgt definiert:* $\mathrm{suc}(r) = \{a \in \mathbf{R} | (r, a) \in \preceq \wedge \nexists b \in \mathbf{R}$ *mit* $(r, b) \in \preceq \wedge (b, a) \in \preceq\}$.[2]

*Eine Wertfunktion $v^{'} : \mathbf{C} \to \mathbb{Q}_0^+$ über den Kombinationen von Bündeln ist definiert durch $v(c) = \sum_{i \in N} u_i(c_i)$. Für eine gegebene Bündelkombination $c$ nennen wir $v^{'}(c)$ den* ***Wert*** *der Bündelkombination. Eine Wertfunktion $v : \mathbf{R} \to \mathbb{Q}_0^+$ über den Rangkombination ist definiert durch $v(r) = \sum_{i \in N} u_i(r_i^{-1}(r_i))$. Für eine gegebene Rangkombination $r$ nennen wir $v(r)$ den* ***Wert*** *der Rangkombination.*

Aus der Definition der Rangfunktion folgt unmittelbar, dass für eine Rangkombination $r$ und die durch sie repräsentierte Bündelkombination $c^r$ gilt, dass $v(r) = v^{'}(c^r)$. Im übrigen werden wir in der Regel beide Funktionen mit $v(\cdot)$ bezeichnen, es sei denn, der Kontext würde eine Unterscheidung erfordern.

**Proposition 4.11 (Relative Konsistenz der Wertfunktionen).** *Die Wertfunktion $v(\cdot)$ für Rangkombinationen ist* ***konsistent*** *(oder auch monoton) relativ zu der Dominanzrelation für Rangkombinationen, d.h. für alle $x, y \in \mathbf{R}$ mit $x \preceq y$ gilt $v(x) \geq v(y)$.*

[2] Zur Verwendung in einem Algorithmus kann die Nachfolgerfunktion leicht implementiert werden, indem man von einem Knoten $r = (r_1, \ldots, r_n)$ die zugehörige Nachfolgermenge wie folgt ableitet: Für jedes $i, 1 \leq i \leq n$ mit $r_i < 2^m$, generiere $s_i \in \mathrm{suc}(r)$ als $(r_1, \ldots, r_i + 1, \ldots, r_n)$.

*Beweis.* Dies folgt unmittelbar aus der Definition der Dominanzrelation, denn mit $x \preceq y$ folgt $x_i \leq y_i$ für alle $i \in N$ und damit folgt aus der Definition der Rangfunktionen unmittelbar $u_i(r_i^{-1}(x_i)) \geq u_i(r_i^{-1}(y_i))$ für alle $i \in N$, also auch $v(x) = \sum_{i \in N} u_i(r_i^{-1}(x_i)) \geq \sum_{i \in N} u_i(r_i^{-1}(y_i)) = v(y)$. □

Die wesentlichen Begriffe sind nun eingeführt. Es wird im folgenden ein Algorithmus zur Durchsuchung des Lattice vorgestellt, der eine effiziente Allokation bestimmt.

### 4.1.2 Best-First-Algorithmus zur Suche im Lattice

Im folgenden wird ein Efficient-Best-First-Algorithmus (**EBF-1**) zur Bestimmung einer effizienten Allokation betrachtet. Im Ablauf des Algorithmus sind in der Liste OPEN die nächsten zu untersuchenden Kombinationen enthalten und in der Liste CLOSED die bereits expandierten Kombinationen.

*Algorithmus* **EBF-1**:
(1) $s \leftarrow (1, \ldots, 1)$; OPEN $\leftarrow \{s\}$; CLOSED $\leftarrow \emptyset$;
(2) **while** OPEN $\neq \emptyset$ **do**
(3) Bestimme $M \leftarrow \{c \in OPEN | v(c) = \max_{d \in OPEN} v(d)\}$
Wähle $c \in M$, so dass es kein $d \in M$ gibt mit $d \prec c$; OPEN $\leftarrow$ OPEN $\setminus \{c\}$
(4) **if** *Gültig(c)* **then return** $c$
(5) CLOSED $\leftarrow$ CLOSED $\cup \{c\}$; SUC $\leftarrow \mathrm{suc}(c)$
(6) **foreach** $n \in$ SUC **do**
**if** $n \notin$ OPEN und $n \notin$ CLOSED **then** OPEN $\leftarrow$ OPEN $\cup \{n\}$

**Definition 4.12.** *Ein Algorithmus ist* zulässig *(admissible), falls er zu jeder Probleminstanz eine effiziente Allokation bestimmt.*

**Theorem 4.13.** *Der Algorithmus* **EBF-1** *ist zulässig.*

*Beweis.* (a) *Der Algorithmus terminiert.*

(a1) *Keine Kombination wird mehrfach expandiert*, weil jede expandierte Kombination in CLOSED platziert wird, keine Kombination zu OPEN hinzugefügt wird, wenn sie sich bereits in OPEN oder CLOSED befindet und keine Kombination jemals aus CLOSED entfernt wird.

(a2) *In jeder nicht-terminierenden Runde des Algorithmus wird eine Kombination expandiert und zu CLOSED hinzugefügt.* Falls OPEN leer ist, wird die Runde terminiert. Wenn dies nicht der Fall ist, dann wird eine Kombination aus OPEN entfernt und zu CLOSED hinzugefügt.

Aus (a1), (a2) und der Endlichkeit der Menge möglicher Kombination folgt (a).

(b) Vor jedem While-Schleifen-Durchlauf gilt die folgende Invariante: *für jedes Paar* $(a, b)$ *von Kombinationen mit* $a \in OPEN$ *und* $b \in CLOSED$ *gilt entweder, dass* $b \preceq a$ *oder dass* $b$ *und* $a$ *unvergleichbar sind, also* $(b, a) \notin \preceq \ \wedge \ (a, b) \notin \preceq$.

Beweis durch Induktion über die Schleifendurchläufe.

*Induktionsbasis:* In Schritt (1) wird OPEN mit $(1, \dots, 1)$ initialisiert und CLOSED ist leer.

*Induktionsannahme:* Vor der $k$-ten Iteration gilt die Behauptung.

*Induktionsschritt $k \rightarrow k+1$:* Wenn die While-Bedingung erfüllt ist, dann terminiert der Algorithmus. Wenn dies nicht geschieht, dann wird eine nicht-dominierte Kombination $c$ mit dem maximalen Wert[3] aus OPEN entfernt, es gilt also für alle in OPEN verbleibenden Kombinationen $d$ entweder, dass $c \preceq d$ oder dass weder $c \preceq d$ noch $d \preceq c$ gelten. Wenn $c$ gültig ist, dann terminiert der Algorithmus. Ansonsten wird $c$ zu CLOSED hinzugefügt. Mit dem eben Gesagten und der Induktionsannahme folgt für alle Paare $d, e$ mit $d \in OPEN$ und $e \in CLOSED$ die Behauptung. Zudem werden die Nachfolger von $c$ gegebenenfalls zu OPEN hinzugefügt. Für jeden Nachfolger $c'$ von $c$ gilt $c \preceq c'$, mit der Induktionsannahme gilt für alle $e \in CLOSED$ entweder $e \preceq c'$ oder die Unvergleichbarkeit. Es folgt, dass die Behauptung auch nach der $k$-ten Iteration, also vor der $k+1$-sten Iteration erfüllt ist. $\square$.

(c) *Es existiert mindestens eine gültige Kombination*, nämlich die, die jedem Agenten ein leeres Bündel zuweist.

Es sei daran erinnert, dass $\mathbf{R}$ die Menge aller Kombinationen im Lattice ist. Im weiteren wird $UN$ als Kurzschreibweise für $\mathbf{R} \backslash (OPEN \cup CLOSED)$ verwendet. $UN$ ist die Menge noch nicht explorierter Kombinationen.

(d) Vor jedem While-Schleifen-Durchlauf gilt, dass *zu jeder Kombination $a \in UN$ eine Kombination $b \in OPEN$ existiert, so dass $b \preceq a$.*

*Induktionsbasis:* In Schritt (1) wird OPEN mit $(1, \dots, 1)$ initialisiert und CLOSED ist leer. $(1, \dots, 1)$ dominiert jede Kombination in $\mathbf{R}$.

*Induktionsannahme:* Vor der $k$-ten Iteration gilt die Behauptung.

*Induktionsschritt $k \rightarrow k+1$:* Im Schritt (3) wird eine Kombination $c$ mit einem maximalen Wert aus OPEN entfernt. Wenn diese Kombination gültig ist, dann terminiert der Algorithmus in Schritt (4). Ansonsten werden alle direkten Nachfolger von $c$ betrachtet und gegebenenfalls zu OPEN hinzugefügt. Die Frage ist nun, ob die Entfernung von $c$ aus OPEN die Bedingung verletzten kann. Aus der Induktionsannahme folgt, dass nur Nachfolger von $c$ diese Bedingung verletzen können.

Sei $c'$ ein direkter Nachfolger von $c$, d.h. $c' \in \mathrm{suc}(c)$. Mit (b) folgt unmittelbar, dass $c'$ nicht in CLOSED sein kann. Also ist $c'$ entweder schon in OPEN oder es wird nun inkludiert. Daher findet sich für jeden Nachfolger $a$ von $c$, der in $UN$ verbleibt, ein direkter Nachfolger $c'$ in OPEN mit $c' \preceq a$[4] , d.h. die Behauptung ist nach der Runde

[3] Eine solche Kombination gibt es immer, denn für jedes Paar $a, b$ von Kombinationen mit $a \preceq b$ gilt $v(a) \geq v(b)$. Die undominierten Kombinationen haben also mindestens einen ebenso hohen Wert, wie die Kombinationen in der Menge der von ihnen dominierten Kombinationen (d.h. zu jeder dominierten Kombination lässt sich eine undominierte Kombination mit einem mindestens gleichhohen Wert finden). In der endlichen Menge der undominierten Kombinationen gibt es eine wertmäßig Größte.

[4] Dies ist eine direkte Konsequenz aus der Latticestruktur: für jeden Nachfolger $c$ eines Knotens $a$ gilt,

$k$ bzw. vor der Runde $k+1$ erfüllt. $\square$.

(e) Aus (c) und (d) folgt unmittelbar, dass OPEN vor der Ausführung des While-Schleifen-Tests nicht leer sein kann. Der Algorithmus kann also niemals in Schritt (2) terminieren, d.h. er liefert als Ausgabe immer eine gültige Kombination.

(f) *Vor jeder Ausführung von Schritt (3), gibt es mindestens eine Kombination $b$ in OPEN, so dass $v(b) \geq v(a)$ für alle $a \in UN$ gilt.*

Dies folgt mit der Monotonität von $v(\cdot)$ bzgl. der Dominanzrelation $\preceq$ (Prop. 4.11), zudem mit (d) und der Endlichkeit des Lattice, denn zu jeder Kombination $a \in UN$ gibt es eine diese dominierende Kombination in OPEN und unter diesen dominanten Kombinationen gibt es eine größte.

(g) *Keine gültige Kombination wird jemals in CLOSED inkludiert.* Das folgt direkt aus der Tatsache, dass eine Kombination nur in CLOSED eingefügt wird, wenn sie den Gültigkeitstest in Schritt (4) nicht bestanden hat.

Es folgt, dass **EBF-1** eine effiziente Allokation bestimmt: aus (e) folgt, dass der Algorithmus in Schritt (4) mit einer gültigen Kombination terminiert. Aus (g) folgt, dass es keine gültige Kombination in CLOSED geben kann. Im Auswahlschritt (3) wird eine Kombination ausgewählt, deren Wert mindestens so groß ist, wie der maximale Wert der in OPEN verbleibenden Kombinationen. Mit (f) folgt, dass der Wert der Ergebniskombination auch den Wert der in $UN$ verbliebenen Kombinationen übersteigt. $\square$

Der Beweis erlaubt es, den Algorithmus zu vereinfachen. Aus (e) folgt, dass die Abbruchbedingung in der While-Schleife überflüssig ist. Aus (b) und (d) folgt, dass in CLOSED niemals eine Kombination eingefügt wird, die von einer Kombination in OPEN oder UN dominiert wird, also kann die Kontrolle, ob eine Nachfolgekombination bereits in CLOSED ist, entfernt werden (denn diese wäre von dem gewählten $c$ dominiert gewesen). Zudem wurden in die Bestimmung des nächsten zu prüfenden Knotens einige Bedingungen integriert, die zum einen sicherstellen, dass Werte von Knoten nur bestimmt werden, wenn OPEN mehr als ein Element enthält und zum anderen, dass nicht unnötigerweise ungültige Knoten expandiert werden, die den gleichen Wert haben, wie der zu findende (gültige) Lösungsknoten (deshalb wird ein gültiger Knoten gewählt, wenn es mehrere Knoten mit dem gleichen Wert gibt und diese Menge einen gültigen Knoten enthält).

dass es einen direkten Nachfolger $b$ gibt, so dass entweder $b = c$ oder $b \preceq c$.

*Algorithmus* **EBF-2**:
(1) OPEN $\leftarrow \{(1,\ldots,1)\}$;
(2) **loop**
(3) **if** |OPEN| $\leftarrow 1$ **then** $c \leftarrow$ Knoten in OPEN
**else** Bestimme $M \leftarrow \{k \in OPEN | v(k) = \max_{d \in OPEN} v(d)\}$.
**if** $|M| \geq 1$ und $\exists d \in M$ mit *Gültig(d)* **then** $c \leftarrow d$
**else** Wähle $c \in M$, so dass es kein $d \in M$ gibt mit $d \prec c$;
OPEN $\leftarrow$ OPEN $\setminus \{c\}$.
(4) **if** *Gültig(c)* **then return** $c$
(5) SUC $\leftarrow \mathrm{suc}(c)$
(6) **foreach** $n \in$ SUC **do**
**if** $n \notin$ OPEN **then** OPEN $\leftarrow$ OPEN $\cup \{n\}$

**Proposition 4.14.** *Der Algorithmus* **EBF-2** *ist zulässig.*

*Beweis.* Dies folgt unmittelbar aus dem Beweis zur Version 1 und der Tatsache, dass – wie bereits gezeigt – nur Tests entfernt wurden, die in keinem möglichen Ablauf der ersten Version des Algorithmus hätten erfüllt sein können. Zudem hat die Veränderungen des Schritt (3) keine Konsequenzen, denn es werden im Vergleich zur Version 1 keine Knoten aus der Betrachtung ausgeschlossen, es wird nur die Reihenfolge der Prüfungen verändert.[5] Auf eine Ausformulierung der Anpassung des Beweises der Terminierung kann hier daher verzichtet werden. □

### Exkurs: Überlegungen zur Informationseffizenz

Es wird eine etwas abstraktere Version der obigen Problemstruktur betrachtet. Wie gehabt bildet die Menge $\mathbf{R}$ der Kombinationen mit der partiellen Ordnung $\preceq$ einen Lattice. Es gibt eine Bewertungsfunktion $v : \mathbf{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ (die bekannte Wertfunktion aus Def. 4.10), die konsistent zu $\preceq$ ist, d.h für alle $a, b$ mit $(a, b) \in \preceq$ gilt $v(a) \geq v(b)$. Es gibt eine Gültigkeitsfunktion $f : \mathbf{R} \rightarrow \{T, F\}$, die für jeden Knoten im Lattice angibt, ob der Knoten gültig ist (T) oder nicht (F). Weitere Informationen stehen nicht zur Verfügung. Das Problem ist es nun, einen Algorithmus zu finden, der für jede mögliche, endliche, nicht-leere Latticeinstanz einen gültigen Knoten mit dem maximalen Wert aller gültigen Knoten bestimmt (genau diese Knoten werden im weiteren *Lösungsknoten* genannt).

Zur Realisierung stehen drei lattice-orientierte Operationen zur Verfügung: es kann der *Wert eines Knoten* bestimmt werden, seine *Gültigkeit* oder die *Menge seiner direkten, noch nicht betrachteten Nachfolger*. Die Bestimmung eines direkten, noch nicht

[5] Es gibt jetzt potentiell mehr Prüfungen der Gültigkeit eines Knoten (über die offensichtliche Redundanz hinaus, die natürlich einfach durch eine Verlagerung des Schrittes (4) in die entsprechenden Stellen in Schritt (3) entfernt werden könnte): Wenn mehrere Knoten den gleichen Wert haben, dann wurde in der alten Version einer der Knoten ausgewählt und, wenn er ungültig war, expandiert. Diese Expansion wird jetzt potentiell vermieden, wenn die Menge der wertmaximalen Knoten in OPEN einen gültigen Knoten enthält. Dafür wird das Vorhandensein eines gültigen Knotens aber jetzt immer geprüft, wenn die Menge mehr als einen Knoten enthält. Diese Prüfungen sind aber nur überflüssig, wenn es einen Pfad aus wertgleichen Knoten von einem der ungültigen Knoten zum optimalen Knoten gibt und dieser Pfad zufällig von dem Algorithmus ohne diese Prüfung auch ausgewählt wird.

betrachteten Nachfolgers und die Bestimmung des Wertes oder der Gültigkeit eines Knotens werden als *elementare Operationen* angesehen. Zudem muss jeder Algorithmus eine Startknotenmenge wählen. Die elementare Operation ist hierbei das Einfügen eines Knotens in diese Startmenge. Nur Knoten, die der Startmenge entstammen oder durch Anwendung der Nachfolgeroperation aus dieser erzeugt wurden, werden *besuchte* Knoten genannt. Nur besuchte Knoten können bewertet oder auf Gültigkeit geprüft werden.

Zunächst ist festzuhalten, dass der Algorithmus **EBF-2** dieses Problem unter Verwendung der aufgeführten lattice-bezogenen Operationen löst, also für jede Instanz einen optimalen Knoten bestimmt. **EBF-2** bestimmt im Grunde eine Familie von **EBF**-Algorithmen, denn die Auswahl aus mehreren Knoten gleichen Wertes findet in der angegebenen Instantiierung der Auswahlfunktion nicht-deterministisch statt. Die Festlegung einer solchen Auswahlregel (*tie breaking rule*) bestimmt einen konkreten Algorithmus aus der **EBF**-Familie. Es ist klar, dass für gegebene Probleminstanzen unterschiedliche Instantiierungen der Auswahlregel unterschiedlich effiziente Lösungswege ergeben können.

Die Frage ist nun, ob es deterministische Algorithmen geben kann, die die Latticestruktur zur Bestimmung eines Lösungsknotens "effizienter"[6] durchsuchen, als es ein **EBF**-Algorithmus könnte.

**Definition 4.15 (Zulässigkeit).** *Ein Algorithmus ist* zulässig*, wenn er zu jeder Probleminstanz einen bzgl. der Menge der gültigen Knoten wertmaximalen, gültigen Knoten bestimmt.*

**Definition 4.16 (Zulässige Ausstattung).** *Ein Algorithmus ist* zulässig ausgestattet*, wenn er zum Erhalt von lattice-bezogenen Informationen nur Gebrauch von den genannten elementaren Operationen macht.*

Die Kosten, die ein Ablauf eines **EBF**-Algorithmus verursacht, setzen sich aus Kosten für die Expansion/Auswahl von Knoten ($c^K$), Kosten für die Bewertung von Knoten ($c^v$) und Kosten für die Prüfung der Gültigkeit von Knoten ($c^f$) zusammen. Elementare Operationen verursachen Kosten von 1. Wir werden zeigen, dass es keinen zulässigen, zulässig ausgestatteten, deterministischen Algorithmus **A** geben kann, der weniger Expansions- und Prüfungskosten verursacht, als der für die Probleminstanz jeweils beste **EBF**-Algorithmus. Hinsichtlich der Bewertungskosten für ungültige Knoten gilt dies nicht – allerdings erhöht ein Vermeiden von Bewertungen ungültiger Knoten die Notwendigkeit zur Gültigkeitsprüfung und zur Bewertung von gültigen Knoten, so dass die Annahme gerechtfertigt scheint, dass es für jeden Algorithmus **A**, der alle **EBF**-Algorithmen für eine Probleminstanz schlägt, eine Probleminstanz gibt, für die dies nicht der Fall ist (in der **A** sogar allen **EBF**-Algorithmen unterliegt). Ein Beweis dieser Annahme steht noch aus und soll Inhalt der weiterführender Forschungstätigkeit sein.

[6] In einem noch festzulegenden Sinn.

### Prüfungskosten

**Theorem 4.17 (Prüfungseffizienz von EBF-Algorithmen).** *Es gibt keinen zulässigen, zulässig ausgestatteten und deterministischen Algorithmus* **A**, *der für jede Probleminstanz weniger Prüfungsoperationen benötigt, als jeder Algorithmus der* **EBF**-*Familie.*

Zum Beweis des Theorems sind die folgenden Korollare hilfreich (die bereits getroffenen Annahmen sollen weiterhin gelten). Zunächst wird gezeigt, dass jeder Knoten mit einem Wert, der höher ist, als der Wert des Lösungsknotens, von allen zulässigen und zulässig ausgestatteten Algorithmen geprüft werden muss (Prop. 4.18). Dann wird untersucht, welche weiteren Knoten ein **EBF**-Algorithmus noch besucht und auf ihre Gültigkeit prüft. Die weiteren Propositionen zeigen dann, dass der hinsichtlich der Prüfungsoperationen effizienteste **EBF**-Algorithmus eine untere Grenze für die Anzahl notwendiger Prüfungsoperationen für diese Knoten bestimmt.

**Proposition 4.18.** *Sei $l$ ein von einem (beliebigen)* **EBF**-*Algorithmus bestimmter Lösungsknoten. Sei $k$ ein Knoten mit $v(k) > v(l)$. Dann muss jeder zulässige, zulässig ausgestattete und deterministische Algorithmus $A$ die Gültigkeit von $k$ prüfen.*

*Beweis.* Zunächst ist festzuhalten, dass unter Verwendung der durch die elementaren Operationen verfügbar gemachten lattice-orientierten Informationen die Gültigkeit eines Knotens nicht durch Informationen über andere Knoten hergeleitet werden kann, denn die unspezifische Definition der Funktion $f(\cdot)$ erlaubt es nicht, gegenseitige Abhängigkeiten der Gültigkeit von Knoten oder eine bestimmte Anzahl gültiger Knoten anzunehmen. Zudem ist **A** deterministisch, er kann also nicht durch nicht-deterministisches und als korrekt angenommenes "Raten" die Gültigkeit des Knotens bestimmen. Aus der Annahme $v(k) > v(l)$ folgt, dass die Dominanzrelation nicht verwendet werden kann, um $k$ als Kandidaten für das Optimum auszuschließen ($k$ kann weder durch $l$ dominiert werden noch kann $k$ durch einen Knoten $m$ dominiert werden, für den gilt, dass $v(m) \leq v(l)$. Um also $k$ als Lösungsknoten auszuschließen, muss die Gültigkeit von $k$ geprüft werden. □

**Proposition 4.19.** *Kein* **EBF**-*Algorithmus prüft einen Knoten $k$ auf Gültigkeit, der einen niedrigeren Wert hat, als der von* **EBF** *bestimmte Lösungsknoten $l$.*

*Beweis.* Sei **B** ein **EBF**-Algorithmus. Sei $n$ ein Knoten, der zu OPEN in Schritt (6) hinzugefügt wird. (a) Dann ist der Wert von $n$ höchstens so groß, wie der Wert des zuletzt in Schritt (3) aus OPEN ausgewählten Knotens. (b) Zudem wird ein Knoten nur auf Gültigkeit geprüft, wenn er zum Zeitpunkt der Ausführung der Auswahlfunktion zur Klasse der Knoten in OPEN mit der höchsten Bewertung gehört. Mithin kann $k$ nur auf Gültigkeit geprüft werden, wenn er irgendwann zu OPEN hinzugefügt wird. Dies sei also angenommen. Da **B** zulässig ist, wird $l$ irgendwann in OPEN eingefügt. Aus (a) folgt, dass $k$ nicht als Element der Menge wertoptimaler Knoten in OPEN in Erwägung gezogen werden kann, bevor $l$ nicht eingefügt ist. Wegen (b) prüft **B** $l$ bevor $k$ in Erwägung gezogen werden könnte und terminiert anschließend. Also wird $k$ nie auf Gültigkeit geprüft. □

**Proposition 4.20.**
*(a) Jeder* **EBF***-Algorithmus prüft genau einen gültigen Knoten auf Gültigkeit.*
*(b) Jeder zulässige, zulässig ausgestattete und deterministische Algorithmus prüft mindestens einen gültigen Knoten auf Gültigkeit.*

*Beweis.* (a) folgt unmittelbar aus dem Aufbau von **EBF**-Algorithmen (sie terminieren mit der ersten erfolgreichen Gültigkeitsprüfung). (b) folgt direkt aus Überlegungen, die analog zu den beim Beweis der Proposition 4.18 angestellten Überlegungen sind. □

Sei nun $l$ ein durch einen **EBF**-Algorithmus gefundener Lösungsknoten. Das Theorem wird dann durch jede Probleminstanz, die keine ungültigen Knoten aufweist, die die gleiche Bewertung wie $l$ haben, erfüllt, denn in diesem Fall muss **A** mindestens alle ungültigen Knoten mit einer größeren Bewertung als $l$ auf Gültigkeit prüfen und einen gültigen Knoten, und dies ist auch genau die Anzahl an Prüfungen, die jeder **EBF**-Algorithmus durchzuführen hat. □.

Anzumerken ist, dass aus der Nichtinjektivität der Bewertung der Knoten folgt, dass die **EBF**-Algorithmen auch ungültige Knoten auf ihre Gültigkeit prüfen, die den gleichen Wert haben, wie der zu bestimmende Lösungsknoten. Es gibt auch Instanzen, für die alle **EBF**-Instanzen solche Tests vornehmen. Eine solche Instanz zeigt die Abbildung 4.4.

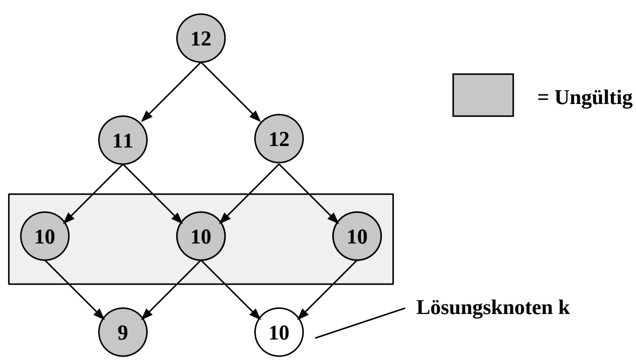


**Abbildung 4.4:** Ausschnitt aus einem Lattice, in dem jede **EBF**-Instanz wenigstens einen ungültigen Knoten mit einen Wert, der dem Wert des Lösungsknotens entspricht (hervorgehobene Region), auf Gültigkeit prüft.

In diesem Fall ist es denkbar, dass ein Algorithmus **A** für einzelne Instanzen weniger Gültigkeitsprüfungen durchführt (deshalb kann das obige Theorem nicht ohne weiteres strenger formuliert werden). Es ist allerdings direkt möglich, das Theorem auf die Zahl expandierter Knoten anzuwenden – diese entspricht der Anzahl der in Schritt (4) des Algorithmus auf Gültigkeit geprüften Knoten. Es kann also kein Algorithmus die Effizienz der **EBF**-Familie hinsichtlicher der Anzahl expandierter Knoten für jede Probleminstanz verbessern.

[Ende des Exkurses]

## 4.2 Preisbestimmung

Es sei angenommen, dass zu einer gegebenen Ökonomie $E = (\Omega; U_1, \ldots, U_n\ )$ eine effiziente Allokation $X$ bestimmt worden ist. Es stellen sich nun zwei Aufgaben:

1. Zum einen soll ein kohärenter Preisvektor für $E$ oder, wenn ein solcher nicht existiert, für eine geschrumpfte Ökonomie $E^-$ bestimmt werden, der die effiziente Allokation unterstützt.
2. Alternativ soll ein anreizkompatibler Vektor von Vickreyzahlungen bestimmt werden. Gegebenenfalls ist die Ökonomie auch derart zu schrumpfen, dass die Vickreyzahlungen mit den minimalen Gleichgewichtspreisen zusammenfallen.

### 4.2.1 Kohärente Preise

Zur Einführung der wesentlichen Überlegungen werden zunächst quadratische Zuordnungsprobleme betrachtet. Dies wird als ganzzahlig lösbares lineares Programm formuliert. Aus der Lösbarkeit folgt die Existenz eines dualen Programms mit identischer Lösung. Die in der Lösung des dualen Problems verwendeten Variablen lassen sich als Preise und als Überschuss des Arbitrators interpretieren. Die minimalen Preise sind zugleich Vickreyzahlungen [58]. Es wird ein Algorithmus angegeben, der unmittelbar aus einer Lösung des Allokationsproblems Preise herleitet, die Gleichgewichtspreise für das quadratische Zuordnungsproblem sind.

Sei also $X = (X_1, \ldots, X_n)$ eine effiziente Allokation[7] der Güter in einer Ökonomie $E = (\Omega; U_1, \ldots, U_n)$. Wir betrachten nun eine aggregierte Zuordnungsökonomie $E^r = (\Omega^r = \{g_1, \ldots, g_n\}; U_1^r, \ldots, U_n^r)$[8], die entsprechend der bereits bekannten Definition 3.33 geformt ist.

Es gilt natürlich

**Proposition 4.21.** *Der Wert der effizienten Allokation $X$ ist gleich dem Wert einer effizienten Allokation der aggregierten Ökonomie $E^r$. Insbesondere ist die Allokation*[9] *$X^r = (g_1, \ldots, g_n)$ effizient.*

Sei nun eine solche effiziente Allokation $X^r$ zu einer aggegierten Ökonomie $E^r$ gegeben. Dann lassen sich mittels des untenstehenden Algorithmus Preise für den Preismodus GUT bestimmen, die die Allokation in $E^r$ unterstützen. Hierzu werden die Preise zunächst auf 0 gesetzt. Dann wird für jeden Agenten die Menge der von ihm zu den

[7] Die Annahme, dass der Arbitrator 0 keine Güter zurückbehält, ist für die getroffene Free-Disposal Annahme plausibel: das Hinzufügen eines Gutes zu einem Bündel kann die Wertschätzung für das Bündel nicht reduzieren. Zudem wurde angenommen, dass der Arbitrator keinen Nutzen vom Rückbehalt eines Gutes hat (also keine Reservierungspreise). Die Darstellung kann aber ohne weiteres allgemeiner gehalten werden.

[8] Einige der Güter repräsentieren eine leere Menge.

[9] In Zuordnungsökonomien werden Allokationen nicht über Teilmengen der Güter angegeben, sondern direkt als Güter (gegebenenfalls unter Hinzuziehung eines leeren Gutes).

momentanen Preisen nachgefragten Güter bestimmt. Die Agenten, die weder das ihnen zugedachte Gut noch ein leeres Gut nachfragen, werden in einer Menge zusammengefaßt. Der Agent mit dem Gut, das im Vergleich zu dem ihm zugedachten Gut den höchsten Grad an Attraktivität aufweist, wird ausgewählt und die Preise aller von ihm nachgefragten Güter werden soweit erhöht, dass sie nur noch so attraktiv sind, wie das vorgesehene Gut. Dies wird iteriert, bis die bestimmte Menge der fehlnachfragenden Agenten leer ist. Weitere Details folgen.

Der Vektor $p$ sei ein Preisvektor, der Preise für alle Güter in $\Omega^r$ angibt und für ein leeres Gut $g_0$. $N$ ist die Menge der Nachfrager. $X^r = (g_1, \dots, g_n)$ gibt die effiziente Allokation an (jedes Gut $g_j$ repräsentiert ein Bündel $X_j$). Die Menge der Güter in dieser Menge, die ein leeres Bündel repräsentieren, sei durch $Empty = \{j | X_j = \emptyset\}$ bestimmt ("leere" Güter). $Y$ $=(Y_1, \dots, Y_n)$ ist ein Vektor von Teilmengen von $\Omega^r$. Für jeden Nachfrageragenten $i$ gibt $Y_i$ die Menge der nachgefragten Bündel zu den gegebenen Preisen an (die Menge $Y_i$ ist also implizit durch einen Vektor $p$ indiziert), d.h.

$$Y_i = \{x \in \Omega^r | u_i(x) - p_x \geq u_i(y) - p_y \; \forall y \in \Omega^r\}$$

(Anmerkung zur Schreibweise: wir verwenden zur Vereinfachung $u(\cdot)$ anstelle von $u^r(cdot)$). Zudem wird vor jeder Runde des folgenden Algorithmus die Menge $J$ bestimmt, die die Agenten zusammenfasst, die zu den gegebenen Preisen weder das ihnen zugedachte Gut noch ein leeres Gut nachfragen.

$$J = \{i \in N : g_i \notin Y_i \quad \wedge \quad \nexists g_j \in Y_i \text{ mit } j \in Empty\}$$

und ein Vektor $\Delta$ mit

$$\Delta_i = \big(u_i(y) - p_y\big) - \big(u_i(g_i) - p_{g_i}\big)$$

für jeden Agenten $i$ und ein pro Agent zufällig ausgewähltes $y \in Y_i$ bestimmt. Ist die Menge $J$ leer, dann wurde entweder ein Preisvektor gefunden, der die effiziente Allokation $X^r$ unterstützt ($g_i \in Y_i$ für alle $i \in N$) oder es lässt sich kein solcher Preisvektor bestimmen (was, wie noch gezeigt wird, nicht eintreten kann). Der Vektor $\Delta$ gibt die Attraktivität der Güter in der nachgefragten Menge $Y_i$ im Vergleich zu der Attraktivität des zugedachten Gutes an.

Algorithmus *Min-Pricing*
(1) $p \leftarrow (0, \dots, 0)$;
(2) Compute $Y$; Compute $\Delta$; Compute $J$;
(3) **while** $J \not\leftarrow \emptyset$ **do**
(4) $\quad i \leftarrow \arg\max_{j \in J} \Delta_j$;
(5) $\quad$ **Forall** $y \in Y_i$ **do**
(6) $\quad\quad p_y \leftarrow p_y + \Delta_i$
(7) $\quad$ Compute $Y$; Compute $\Delta$; Compute $J$;

**Theorem 4.22.** *Der Algorithmus* Min-Pricing *bestimmt zu einer gegebenen aggregierten Ökonomie $E^r$ und einer zugehörigen effizienten Allokation $X^r = (g_1, \dots, g_n)$ einen Preisvektor $p$, so dass für alle $i \in N$ gilt*

$$u_i(g_i) - p_{g_i} \geq u_i(g_j) - p_{g_j} \textit{ für alle } g_j \in \Omega^a.$$

*Darüber hinaus ist dieser Preisvektor minimal.*

*Beweis.* (Idee) Jeder Preis wird nur soweit erhöht, dass die minimale Differenz zwischen den Endpreisen niemals unterschritten wird, d.h. jeder Erhöhungsschritt garantiert, dass, solange kein Preis seine Grenze überschreitet, auch nach der Erhöhung kein Preis seine Grenze überschritten haben kann, s. auch Abb. 4.5.

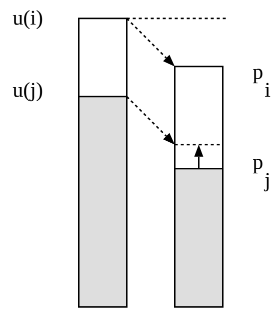


**Abbildung 4.5:** Die Bewertung des Agenten $i$ für die Güter $i$ und $j$ bestimmt die Anforderungen an den Abstand zwischen den Preisen für die Güter $i$ und $j$. Der Preis für $i$ ist durch die Höhe der Bewertung nach oben beschränkt. Der Algorithmus passt nun abweichende Preise durch eine Erhöhung so an, dass die gewünschte Bevorzugungsbedingung erfüllt wird.

(Details) Zunächst ist zu beachten, dass alle betrachteten Größen rational sind. Um die Beweisstruktur einfach zu halten, wird angenommen, dass die Größen alle zu ganzen Zahlen umskaliert wurden.

(a) *Der obige Algorithmus terminiert.*

(a1) *Für das ausgewählte $\Delta_i$ gilt in jeder Runde: $\Delta_i > 0$.* Es ist kein leeres Bündel in der Menge der nachgefragten Bündel. Für jedes leere Bündel $g_j$ gilt $p_{g_j} = 0$, denn es werden nur die Preise für nicht-leere Bündel erhöht. Für ein leeres Bündel $g_j$ gilt mit den gemachten Annahmen für jeden Agenten $i$, dass $u_i(g_j) - p_{g_j} = 0$. Da keine leeres Bündel nachgefragt wird, folgt $\Delta_i > 0$.

Mit (a1) folgt, dass in jeder Runde der Preis wenigstens eines Gutes um wenigstens eine Einheit erhöht wird. Sei $k_j$ nun die ganzzahlige Wertschätzung des Agenten $j$ für das Gut $g_j$. Nach spätestens $k$ Preiserhöhungen für das Gut $j$ kann das Gut nicht mehr in der Nachfragemenge sein, ohne dass auch das leere Bündel nachgefragt würde – der Agent $j$ kann mithin nicht mehr Element der Menge $J$ werden. Eine analoge Argumentation gilt für jedes Gut bzw. jeden Agenten, also ist nach endlich vielen Schritten die Menge $J$ leer.

(b) Es ist bekannt, dass der gesuchte minimale Preisvektor existiert (s. Anhang). Sei $p^*$ dieser Preisvektor. Es gilt mithin $u_i(g_i) - u_i(g_j) \geq p^*_{g_i} - p^*_{g_j}$ für alle $j \in \{g_1, \ldots, g_n\}$ und für alle $i \in N$. Es gibt also einen spezifischen Abstand zwischen den Preisen für jedes Güterpaar $i, j$, der den Preisvektor charakterisiert. Dieser Abstand ist durch den Abstand der Bewertungen nach oben beschränkt. Aus der Tatsache, dass der Preis leerer Güter nie erhöht wird und die Bewertung für solche Güter $0$ ist, folgt eine Beschränkung nach oben für $p^*_{g_i}$ auf $u_i(g_i)$. Wir werden nun zeigen, dass vor jeder Runde

$p_{g_i} \leq p^*_{g_i} \leq u_i(g_i)$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt.

(Induktionsbasis: Vor Runde 1) Aus der Free-Disposal-Annahme folgt, dass $u_i(x) \geq 0$ für alle $x \in \Omega^r$. Also gilt die Annahme vor der ersten Anpassung. Wenn der Algorithmus in (3) terminiert, ist nichts mehr zu zeigen.

(Induktionsannahme) Die Behauptung sei vor Runde $n$ erfüllt. Zu zeigen ist, dass sie auch nach der Erhöhung, also vor Runde $n+1$ gilt. Wenn der Algorithmus in (3) terminiert, ist nichts mehr zu zeigen. Es wird also angenommen, dass $i$ der in (4) ausgewählte Agent und $j$ ein Index eines Gutes aus der Menge $Y_i$ ist. Nun wird $p_{g_j}$ wie folgt angepasst: $p^+_{g_j} = p_{g_j} + \big((u_i(g_j) - p_{g_j}) - (u_i(g_i) - p_{g_i}\big) = u_i(g_j) - u_i(g_i) + p_{g_i}$, also $u_i(g_i) - u_i(g_j) = p_{g_i} - p^+_{g_j} \geq p^*_{g_i} - p^*_{g_j}$. Mit der Induktionsannahme $p_{g_i} \leq p^*_{g_i}$ folgt unmittelbar $p^+_{g_j} \leq p^*_{g_j}$.

□

Zur Lösung des Preisbestimmungsproblems kann auch ein primales Programm des Allokationsproblems und das hierzu duale Programm zur Bestimmung der Preise verwendet werden – dies ist im Anhang auf der Basis der Arbeiten von Gale demonstriert. Für den hier verfolgten Zweck bedeutet dies aber einen unnötigen Aufwand,[10] denn die effiziente Allokation ist bereits bekannt. Mit dem obigen Algorithmus wurden Preise bestimmt, die minimal sind in dem Sinne, dass keiner der Preise erniedrigt werden kann, ohne die Zufriedenheitsbedingung für zumindest einen Nachfrager zu verletzen. Ebenso lassen sich maximale Preise bestimmen, die nicht weiter erhöht werden können.

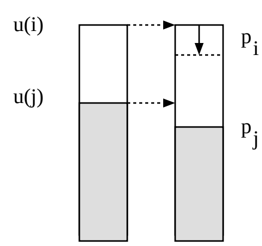


**Abbildung 4.6:** Die Bewertung des Agenten $i$ für die Güter $i$ und $j$ bestimmt die Anforderungen an den Abstand zwischen den Preisen für die Güter $i$ und $j$. Der Preis für $i$ ist durch die Höhe der Bewertung nach oben und durch die Bewertung leerer Güter nach unten beschränkt. Der Algorithmus erniedrigt den Preis von $i$ nun soweit, dass $i$ zu den nachgefragten Gütern gehört.

[10]Interessant könnte dies werden, wenn man wie Demange und Gale es in [29] für ein vereinfachtes Problem demonstrieren, direkt aus dem Vorgehen zum Bestimmen einer Lösung des dualen Problems einen Auktionsmechanismus ableiten könnte. Vertiefendes hierzu findet sich auch in den Arbeiten von Vohra et. al. [15], Parkes et. al. [72, 73, 70] und anderer [4, 7]. Diese Zielrichtung wird hier aber nicht verfolgt, weil unser Ziel die Bestimmung eines progressiven, verdeckten und direkten Mechanismus ist, der ohne Preisanpassung sein Resultat bestimmt und damit eine Alternative zu den anderen Lösungsansätzen bietet. Ein Vergleich einiger Aspekte dieser beiden Typen von Mechanismen findet sich in Abschnitt 6.2.1 des Schlusskapitels 6. Dort wird ein positives Fazit hinsichtlich der Eigenschaften der noch vorzustellenden RANG-Mechanismen gezogen.

Algorithmus *Max-Pricing*
(1) $p \leftarrow (u_1(g_1), \dots, u_n(g_n))$
(2) Compute $Y$; Compute $\Delta$; Compute $J$;
(3) **while** $J \neq \emptyset$ **do**
(4) $\quad i \leftarrow \arg\ \max_{j \in J} \Delta_j$.
(5) $\quad p_{X_i} \leftarrow p_{X_i} - \Delta_i$
(6) $\quad$ Compute $Y$; Compute $\Delta$; Compute $J$;

*Beweis.* Analog zum obigen Beweis. □

Die so bestimmten Preise sind jeweils Lösungen für korrespondierende duale lineare Programme mit ganzzahligen, optimalen Lösungen, die die minimalen und maximalen Gleichgewichtspreise in Ökonomien bestimmen, in denen jeder Nachfrager durch Bündelung von einzelnen Gütern keinen Nutzenzuwachs erfährt (s. Definition 3.29).

Für Zuordnungsökonomien bestimmen die minimalen und maximalen Preise einen Preislattice, der alle alternativen Gleichgewichtspreise enthält (vgl. [105]).

Jeder Preisvektor bestimmt eine Verteilung des Wertes der Allokation auf Nachfrager und Arbitrator (oder Verkäufer). Der minimale Preisvektor maximiert den Nettonutzen der Nachfrager, der maximale Preisvektor die Einnahmen des Arbitrators.

Für den Preismodus EFF lässt sich mit Hilfe dieser Preise entweder ein Ausschnitt des Lattice bestimmen, denen kohärente Gleichgewichtszahlungen entsprechen, oder es kann gezeigt werden, dass keine Gleichgewichtszahlungen bzw. die sie induzierenden Preise existieren. Dies ist dann der Fall, wenn die aus den *maximalen Preisen* für die Zuordnungsökonomie folgenden Preise für die aggregierte kombinatorische Ökonomie keine Gleichgewichtspreise sind. Dies wurde bereits in Kapitel 3 diskutiert.

Das obige Verfahren schließt also entweder mit der Bestimmung kohärenter Gleichgewichtspreise oder der Erkenntnis, dass solche nicht existieren.

### 4.2.2 Schrumpfung von Ökonomien

In Kap. 3 wurden die Grundlagen der Bestimmung von kohärenten Preisen für jede Ökonomie, in der implizite oder explizite Allianzen zwischen Agenten möglich sind, diskutiert. Im folgenden wird ein Verfahren vorgestellt, dass durch die Bildung von Allianzen eine gegebene Ökonomie $E$ schrittweise in eine geschrumpfte Ökonomie überführt, für die Gleichgewichtspreise existieren, die kohärent zum Preismodus EFF sind.[11] Die einzelnen Schritte des Verfahrens führen Agenten so zu Allianzen zusammen, dass es für die "kurzsichtige" Agenten[12] attraktiv ist, die Allianzen auch einzu-

[11] Das Verfahren kann auch angewendet werden, um eine geschrumpfte Ökonomie zu bestimmen, für die Preise existieren, die kohärent zum Modus GUT sind, s. das Ende dieses Abschnittes.

[12] Das sind Agenten, die in einer Bewertung ihrer Handlungsoptionen nicht alle potentiell möglichen strategischen Verhaltensmöglichkeiten berücksichtigen und nur das "Naheliegende" in ihre Betrachtungen einbeziehen (dies ist natürlich je nach Situation zu präzisieren). Ursache hierfür können beispielsweise Beschränkungen ihrer Berechnungskapazität oder ihrer Informationsaufnahmekapazität sein. Ebenso

gehen.

**Verfahren** *Max-Shrink*(Ökonomie $E$, Effiziente Allokation $X$)

(1) Bilde die aggregierte Zuordnungsökonomie $E^r$. Bestimme die maximalen Preise $p^{max}$ und erweitere sie zu kohärenten Preisen $p$ für die zugehörige aggregierte kombinatorische Ökonomie $E^a_X$. [13]

(2) Wenn die Gleichgewichtsbedingungen für ein oder mehrere Bündel verletzt sind, dann wähle ein solches Bündel $y$ aus – es gilt also: $u_i(y) - p(y) > u_i(g_i) - p(g_i)$ für wenigstens ein $i$. Wenn dies nicht der Fall ist, dann terminiere mit der passend geschrumpften Ökonomie.

(3) Fasse nun die Agenten, die ein Teil dieses Bündels in der effizienten Allokation erhalten, zu einem aggregierten Agenten $a^{'}$ zusammen (bilde also eine Allianz), d.h $a^{'}$ repräsentiert die Menge $I = \{i \in N | g_i \in y\}$. Fasse die in $y$ eingehenden Güter $\{g_i \subset y\}$ zu einem neuen Gut $g_{a^{'}}$ zusammen. Bestimme die Bewertungen durch $a^{'}$ für alle Bündel $z \subseteq \Omega^a$, indem die in $z$ enthaltenen Güter auf die nutzenmaximale Art und Weise auf die Agenten in $I$ aufgeteilt werden und der aggregierte Nutzen als Bewertung herangezogen wird.[14]

(4) Entferne nun alle Agenten in $I$ aus $E^a$ und die Güter $\{g_i \in y\}$ aus $E^a$ und $X^a$ und füge den Agenten $a^{'}$ und das Gut $g_{a^{'}}$ hinzu. Nummeriere die Agenten in $N$ und die Bündel in der effizienten Allokation $X^a$ so um, dass jedem Agenten $i$ das Gut $g_i$ zugeordnet wird. Benenne $E^a$ um in $E$ und $X^a$ in $X$. Kehre zu Schritt (1) zurück.

**Proposition 4.23.** *Das Verfahren* Max-Shrink *bestimmt, ausgehend von einer Ökonomie $E$ und einer effizienten Allokation $X$, eine geschrumpfte Ökonomie $E^-$, eine Allokation $X^-$ und einen Preisvektor $p$, so dass*

1. *$X^-$ eine effiziente Allokation der Güter in $E^-$ ist und der Wert von $X^-$ gleich dem Wert von $X$ für die Ökonomie $E$ ist und*

2. *$p$ ein kohärenter Gleichgewichtspreisvektor für die geschrumpfte Ökonomie ist.*

*Beweis.* (Terminierung/Kohärenz) Der Algorithmus terminiert in (2), wenn kohärente Preise gefunden werden. Die Aggregation der Ökonomie kann höchstens soweit

kann eine Beschaffung von Informationen über andere Agenten in einer Qualität, die für die Bildung fundierter Erwartungen bzgl. des Verhaltens der anderen Agenten nötig wäre, generell unmöglich oder auch zu aufwendig (teuer) sein. Eine vertiefte Diskussion verbleibt als Gegenstand für weiterführende Arbeiten.

[13] Der Preis eines Bündels ergibt sich aus der Summe der Güterpreise (in der Zuordnungsökonomie), d.h. $p(z) = \sum_{x \in z} p^{max}(\{x\})$.

[14] Hier werden Güter aus der reduzierten Ökonomie optimal verteilt. Es ist überflüssig, die Güter der ursprünglichen Ausgangsökonomie zu verteilen, denn die beste Möglichkeit der Aufteilung ist ohnehin die der effizienten Allokation entsprechende Zuordnung der gebündelten "Güter". Zur Erklärung: wenn A und BC bereits effizient gebündelt sind und ABC das ausgewählte Bündel ist, dann ist es nicht nötig, zur Bestimmung von $u(ABC)$ auch die Partition $\{AB,C\}$ zu betrachten – die hiermit möglichen Aufteilungen können nicht besser sein, als die beste Aufteilung der Partition $\{A,BC\}$ (sonst würde ein Widerspruch zur Effizienz folgen).

fortgesetzt werden, bis nur noch ein Nachfrager in der geschrumpften Ökonomie ist. Spätestens dann existieren Preise, die die effiziente Allokation (unter der Annahme, dass 1. erfüllt ist) unterstützen und kohärent sind. Es folgt die Termination des Algorithmus.

(Effizienz, per Induktion) Es sei angenommen, dass die Allokation $X$, die zu Beginn der Runde bekannt ist, effizient ist und in ihrem Wert dem Wert der ursprünglichen Eingabeökonomie entspricht (für die erste Runde ist dies erfüllt). Sei $E^a$ die in Schritt (1) bestimmte, reduzierte kombinatorische Ökonomie. Es gilt $u^a(\{g_i\}) = u(X_i)$ für alle Nachfrager $i$, also $V(X^a) = V(X) = V(E)$. Sei $y$ nun das in Schritt (2) ausgewählte Güterbündel, $g_{a'}$ das daraus entstehende Gut und $a'$ der Agent, der die entsprechende Allianz repräsentiert. Aus der Konstruktion von $a'$ folgt mit der Induktionsannahme, dass $u^s_{a'}(\{g_{a'}\}) = \sum_{\{i \in N | g_i \in y\}} u^a_i(\{g_i\}) = \sum_{\{i \in N | g_i \in y\}} u(X_i)$. Für alle Agenten $\{j \in N \mid g_i \notin y\}$ gilt $u^s(\{g_i\}) = u^a(\{g_i\}) = u(X_i)$, mithin, nach der Umnumerierung in (4), $\sum_{i \in N^s} u^s_i(\{g_i\})$ = $\sum_{i \in N} u_i(X_i)$, also $V(X^s) = V(X) = V(E)$. Zudem ist $V(X^s) = V(E^s)$, denn würde sich eine effizientere Allokation $Y^s$ der Güter in $\Omega^s$ finden, dann ließe sich daraus direkt eine Allokation $Y$ konstruieren, so dass $V(Y) > V(X)$ – im Widerspruch zur Induktionsannahme. □

Das Verfahren *Max-Shrink* kann direkt in ein Verfahren *Min-Shrink* überführt werden, dass eine Schrumpfung der Ökonomie fortführt, bis die minimalen Preise für die Zuordnungsökonomie auch Gleichgewichtspreise für die reduzierte kombinatorische Ökonomie sind – diese Preise in dieser geschrumpften Ökonomie sind dann sowohl zum Modus GUT als auch zum Modus EFF kohärent und fallen mit den Vickreyzahlungen zusammen. Als nötige Änderung sind in Schritt (1) die minimalen Preise $p^{\min}$ zu bestimmen. Die Beweise lassen sich unverändert übernehmen, um die folgende Proposition zu zeigen.

**Proposition 4.24.** *Das Verfahren* Min-Shrink *bestimmt, ausgehend von einer Ökonomie $E$ und einer effizienten Allokation $X$, eine geschrumpfte Ökonomie $E^-$, eine Allokation $X^-$ und einen Preisvektor $p$, so dass*

1. *$X^-$ eine effiziente Allokation der Güter in $E^-$ ist und der Wert von $X^-$ gleich dem Wert von $X$ für die Ökonomie $E$ ist und*

2. *$p$ ein kohärenter Gleichgewichtspreisvektor für die geschrumpfte Ökonomie ist, der mit den Vickreyzahlungen übereinstimmt.*

*Beweis.* Der Beweis zu Terminierung und Effizienz folgt unmittelbar aus dem Beweis dieser Eigenschaften für das *Max-Shrink*-Verfahren. Die Koinzidenz mit dem Vickreyzahlungen folgt für die geschrumpfte Ökonomie unmittelbar aus 3.46. □

### 4.2.3 Vickreyzahlungen

Vorstehend wurden Algorithmen zur Bestimmung von minimalen und maximalen Preisen für Zuordnungsökonomien präsentiert, die verwendet werden können, um kohärente Gleichgewichtspreise für kombinatorische Ökonomien abzuleiten. Die Existenz solcher Preise hängt von den aufeinandertreffenden individuellen Präferenzstrukturen ab (s. Abschnitt 3.5). Wenn solche Preise für eine kombinatorische Ökonomie nicht existieren, dann bietet sich die Möglichkeit der Aggregation von Agentengruppen zu gemeinsam bietenden Agenten (s. 3.5.2). Wenn dieser Weg gangbar ist,[15] dann ist auch die Existenz von kohärenten Gleichgewichtspreisen für eine geschrumpfte Version der ursprünglichen kombinatorischen Ökonomie sichergestellt. Ein Verfahren zur Durchführung dieser Aggregation wurde oben angegeben. Wenn das Verfahren nicht gangbar ist und wenn für die Ausgangsökonomie nur keine oder nur nicht anreizkompatible Preise gefunden werden können, dann können alternativ Vickreyzahlungen bestimmt werden. Im folgenden wird dargestellt, wie Vickreyzahlungen aus den Informationen bestimmt werden können, die der Arbitrator während des Ablaufs eines **EBF-2**-basierten Koordinationsmechanismus erfragt. Wesentlich ist hier, dass diese Bestimmung keine zusätzlichen Informationen erfordert.

Zunächst sei in Erinnerung gerufen, dass Vickreyzahlungen den Effekt der Teilnahme eines Agenten an einer Ökonomie widerspiegeln: ein Nachfrager $i$ zahlt einen Betrag in Höhe des Nutzens, der den anderen teilnehmenden Nachfragern durch die Teilnahme von $i$ entgeht, d.h. (in der in den Definitionen 3.39, 3.40 und 3.41 verwendeten Notation)

$$t(i) \;=\; V(E_{-i}) \;-\; V(E_{-i}^{-X_i})$$

Es sei nun angenommen, dass eine effiziente Allokation $X$ durch einen Lauf des Algorithmus **EBF-2** bestimmt worden ist. Wir werden nun zeigen, dass die zur Bestimmung der Vickreyzahlungen notwendigen Informationen bereits verfügbar sind:

**Proposition 4.25.** *Neben den zur Bestimmung der effizienten Allokation notwendigen Bewertungsinformationen sind keine weiteren Bewertungsinformationen notwendig, um die Vickreyzahlungen zu bestimmen.*

*Beweis.* Es sei angenommen, dass die Kombination $c$ im Lattice eine effiziente Allokation $X$ repräsentiert und vom Algorithmus ausgegeben wurde.

(a) Zunächst sei festgehalten, dass bereits die Bewertungsinformationen zur Bewertung aller Knoten, denen ein höherer potentieller Wert zugeordnet werden kann, bekannt sind.

(b) Nun sei angenommen, dass der Nachfrager $i$ bzw. sein Bündel $X_i$ aus der Allokation $X$ entfernt wird. [16] Der Wert $V(X^{-X_i})$ der reduzierten Allokation $X^{-X_i} = (X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n)$ ist eine untere Grenze für den maximal erreichbaren Wert einer Zuordnung der Güter in $\Omega$ zu den Agenten in der verbleibenden Nachfragermenge $N^{-i}$ (und bestimmt darüber hinaus ohne weitere Informationen zu erfordern

[15] Siehe Diskussion in Kapitel 6.

[16] $X_0$ kann an dieser Stelle wiederum vernachlässigt werden, weil wir Reservierungswerte von $0$ (bzw. gleichbedeutend, keine Reservierungswerte) unterstellt haben und mit der Free-Disposal Annahme sichergestellt ist, dass zusätzliche Bündel den Nutzen eines Nachfragers nicht reduzieren. Diese Einschränkung hat aber keine essentielle Bedeutung und erfolgt nur, um die Darstellung einfach zu halten.

den zweiten Term der Vickreyzahlung, die $i$ zu leisten hat). Es sei nun angenommen, dass eine reduzierte $n-1$-stellige Allokation $Y^{-i} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ (unter Auslassung des Agenten bzw. Index $i$) gefunden werden kann, deren Wert den der reduzierten Allokation $X^{-X_i}$ überschreitet. Weiter sei angenommen, dass zusätzliche Bewertungsinformationen benötigt würden. Es wird nun eine Kombination $d = (Y_1, \ldots, X_i, \ldots, Y_n)$ konstruiert. Diese Kombination hat einen höheren Wert als $X$ und zur Bestimmung ihrer Wertes wurden zusätzliche Bewertungsinformationen benötigt. Dies steht im Widerspruch zu (a). □

Es ist nun klar, dass alle benötigten Bewertungsinformationen bereits zur Verfügung stehen.[17] Es folgt außerdem unmittelbar aus den Argumenten zu (b), dass die Teilkombinationen, die jeweils die eingeschränkten Allokationsprobleme maximal lösen, in den bereits besuchten Kombinationen des Lattice enthalten sind. Der Algorithmus **EBF-2** kann unmittelbar erweitert werden, um die durchzuführenden Gültigkeitsprüfungen auf die $n$ Teilkombinationen auszudehnen und eine Liste (vorläufig) maximaler Teilallokationen für die $n$ $n-1$-elementigen Teilmengen von $N$ zu führen (wir vernachlässigen hier wieder den Arbitrator $0$).[18] Eine entsprechende Funktion, die eine Präzisierung des in **EBF-2** verwendeten Aufrufs darstellt, folgt. Zur Komplettierung muss noch eine passende Initialisierung der Datenstruktur zum Sammeln der Maxima zu Beginn von **EBF-2** erfolgen. Als Eingabe erhält die Prozedur eine Kombination von Rängen, die auch Informationen über die repräsentierten Bündel und deren Bewertungen enthält.[19]

*Funktion* **Gültig**(Kombination: $c \leftarrow (c_1, \ldots, c_n)$)
/* $\Omega$, $N$ und $n$ sind bekannt. */
(1) **for** $i \leftarrow 1$ **to** $n$ **do**
(2)     **set** $d \leftarrow c$; Remove $c_i$ from $d$; **set** $I \leftarrow N \backslash \{i\}$
(3)     **if** *Partition(d)* **then**
(4)         **set** $v \leftarrow$ *Value*($d$); **if** $v >$ *StoredMaxValue*($I$) **then**
(5)             *StoreMaxValue*($I$,$d$,$v$)
(6) **if** *Partition(c)* **then return** TRUE **else return** FALSE

Die Funktion *Partition* prüft, ob die ihr übergebene Kombination eine Partitionssequenz einer Teilmenge von $\Omega$ ist, also eine gültige Kombination. Die übergebene Kom-

[17] In Fällen, in denen bereits die Startkombination gültig ist und daher keine Bewertungsinformationen vorliegen, betragen die Vickreyzahlungen generell $0$ für jeden Agenten (denn jeder Agent konnte seine beste Alternative realisieren) – also sind in diesem Fall auch keine Bewertungsinformationen von Nöten.

[18] Der Algorithmus kann auch so gestaltet werden, dass er Dominanzinformationen, die sich aus den Rängen in den Teilkombinationen ergeben, verwendet, um Vergleiche mit der momentan bekannten Teilkombination zu vermeiden. Die Bewertungen sind allerdings bereits bekannt und die Summierung ist eine vergleichsweise günstige Operation, ähnliches gilt für die Prüfung der Gültigkeit, so dass diese Optimierung nicht unmittelbar notwendig ist.

[19] Bewertungen jedoch nicht in dem Spezialfall, wenn in OPEN nur eine Kombination enthalten ist, diese aber noch nicht bewertet wurde (also die erste Kombination $(1, \ldots, 1)$ bzw., in einer an mehrere gleichrangige Präferenzen angepassten Version, eine Kombination aus der ersten betrachteten Klasse von gleichrangigen Kombinationen). Sollte eine solche Kombination gültig sein, dann sind die Vickreyzahlungen $0$ und damit weitere Betrachtungen zu optimalen Allokationen bzgl. Teilmengen von Agenten unnötig. Dieser Spezialfall wird hier nicht in die Funktion kodiert, er kann in einer Implementierung einfach erkannt und in der Bestimmung der Vickreyzahlungen berücksichtigt werden.

bination hat jeweils eine Länge von $n$. In der Schleife wird geprüft, ob durch Weglassen eines der Agenten eine gültige Kombination zustande kommt. Die Funktion *Value* summiert die übermittelten Bewertungen der Agenten für die durch die Kombination repräsentierten Bündel auf.[20] Nach Abschluss des solcherart erweiterten **EBF-2**-Algorithmus können die Vickreyzahlungen mit Hilfe der gespeicherten Maximalwerte und der gefundenen effizienten Allokation unmittelbar bestimmt werden. Wie oben bereits argumentiert, werden die Kombinationen, die die maximierenden Teilkombinationen enthalten, durch **EBF-2** und damit auch durch den erweiterten **EBF-2** besucht und auf Gültigkeit geprüft. Es ist unmittelbar zu sehen, dass die vorgestellte Funktion **Gültig** alle relevanten, wertmaximierenden Teilkombinationen untersucht und abspeichert und die abschließende Bestimmung der Vickreyzahlungen $t(i)$ für jeden Agenten $i \in N$ unmittelbar erfolgen kann. Eine entsprechende Funktion lässt sich wie folgt beschreiben, diese wird nach dem Auffinden einer effizienten Allokation $c$ ausgeführt und erhält diese als Eingabe.

*Funktion* **Vickrey**(Kombination: $c \leftarrow (c_1, \ldots, c_n)$)
(1) **for** $i \leftarrow 1$ **to** $n$ **do**
(2) **set** $d \leftarrow c$; Remove $c_i$ from $d$; **set** $I \leftarrow N\backslash\{i\}$
(3) $t(i) \leftarrow$ *StoredMaxValue*($I$) - Value($d$)

Es gilt mithin (vgl. Theorem (B.15) und die folgenden Ausführungen im Anhang B):

**Proposition 4.26.** *Der um die obigen Funktionen* **Gültig** *und* **Vickrey** *erweiterte* **EBF-2**-*Algorithmus bestimmt eine effiziente Allokation und zugehörige Vickreyzahlungen. Die Bestimmung des aus Allokation und Zahlungsvektor bestehenden Resultats der Eingabeökonomie ist anreizkompatibel.*

Es wurde gezeigt, dass zur Bestimmung der Vickreyzahlungen bereits alle benötigten Informationen durch den **EBF-2**-Algorithmus erfragt bzw. bestimmt wurden. Die Überlegungen zur Informationseffizienz, die für den **EBF-2**-Algorithmus bereits dargelegt wurden, lassen sich also direkt auf die erweiterte Version übertragen.

Eine abschließende Anmerkung erscheint an dieser Stelle angebracht: In der Literatur wird die Bestimmung von Vickreyzahlungen oft vorschnell als “intractable” abgetan – mit dem Argument, dass zu ihrer Bestimmung alle Bewertungsinformationen benötigt werden. Die obige Proposition demonstriert, zusammen mit der Beobachtung, dass zur Bestimmung der effizienten Allokation (winner determination) nicht immer alle Bewertungsinformationen benötigt werden, dass diese Annahme nicht richtig ist.[21] Weitere Betrachtungen zur Komplexität finden sich in den folgenden Kapiteln.

[20] Es gibt noch einige Optimierungsmöglichkeiten: Manche der Summierungen könnten durch einen auf den Rängen basierenden Dominanzvergleich zwischen der zu testenden und der bereits gespeicherten Teilkombination vermieden werden. Wenn eine Teilkombination alle weiteren möglichen Teilkombinationen dominiert, dann ist es nicht mehr erforderlich, die entsprechende Agententeilmenge zu betrachten (Teilkombination $(1, \ldots, 1)$ ist gültig). Die Prüfung der Gültigkeit von Teilkombinationen ist zudem nicht erforderlich, wenn $c$ gültig ist. Diese Optimierungsmöglichkeiten sind aber in Bezug auf die hier im Vordergrund stehenden Überlegungen zur Informationseffizienz nicht relevant. Für eine Implementierung des hier vorgeschlagenen ökonomischen Koordinationsmechanismus sind sie aber beachtenswert.

[21] Die Komplexität der Bestimmung der Vickreyzahlungen im Falle der Verwendung **EBF**-basierter Verfahren zum Auffinden effizienter Allokationen folgt unmittelbar der Komplexität dieses Verfahrens – natürlich kann dieses Verfahren bereits intraktabel sein, es ist aber in diesem Kontext falsch anzunehmen,

## 4.3 RANG: Partiell-enthüllende, anreizkompatible Mechanismen

Um einen direkt implementierbaren Mechanismus anzugeben, der auf dem erweiterten **EBF**-Algorithmus beruht, bedarf es der Festlegung einer Menge von erlaubten Fragen, einer Politik zur Auswahl der nächsten zu stellenden Frage, und einer Datenstruktur zur Speicherung der erhaltenen Informationen.

Um die *Informationsbedürfnisse* des zugrundeliegenden Algorithmus zu erfüllen, sind folgende Fragen erlaubt:

1. (Bündelfrage) *Welches ist das Bündel mit der nächsthöheren Rangnummer?*
2. (Wertfrage) *Welches ist die Bewertung für das Bündel $x$?*

Wie vorher wird angenommen, dass die Teilnehmer die zugrundeliegende Gütermenge $\Omega$ kennen. Der Arbitrator wird als vertrauenswürdig angesehen. Die Nachfrager betrachten die erste Rangfrage als Start eines Ablaufs des Mechanismus und beantworten sie mit dem am meisten präferierten Bündel (dieses hat den Rang 1). Zu Abschluss der Ausführung des Mechanismus teilt der Arbitrator das Paar $(X_i, t(i))$ jedem Agenten $i$ mit.

Es ist anzumerken, dass die Fragen nur eine natürliche Sequenz von Rangfragen erlauben – von stark zu schwach präferierten Bündeln.[22]

Die erhaltene Information kann in einer *Datenstruktur* wie dem ausgeschmückten Ordnungsgraphen (vgl. [23, 24]) abgelegt werden. Jeder Knoten repräsentiert ein Informationsquadrupel, das aus Agent, Bündel, Wert und Ranginformation besteht. Die Knoten werden angelegt, wenn die zugehörigen Präferenzen erfragt werden und Wertinformationen werden hinzugefügt, wenn sie verfügbar werden.

Die Generierung der Fragen wird in den Schritt (3) des Algorithmus eingebunden. Um die Menge der wertmaximierenden Kombinationen in der Liste OPEN zu bestimmen, werden alle fehlenden Rang- und Wertfragen gestellt (letztlich ist die Reihenfolge für die hier betrachteten Eigenschaften Effizienz und Anreizkombatibilität nebensächlich, es ist mithin unnötig, das Protokoll genau zu spezifizieren). Der Algorithmus impliziert unmittelbar, dass die Frage nach dem nächst-schlechteren Bündel alle benötigten Bündel-Informationen erfragt. Zusammen mit der Auswahl einer Tie-Breaking-Regel (die die nächste zu expandierende Kombination aus den (wertmaximalen) Kombinationen in $M$ auswählt), ergibt dies eine direkt umsetzbare Politik zur Befragung der Konsumenten. Der resultierende Mechanismus ist ein Mitglied der Familie der **RANG** Mechanismen, die sich voneinander durch die gewählte Tie-Breaking-Regel

dass man zwar effiziente Allokationen bestimmen könne, aber die Bestimmung von Vickreyzahlungen dann intraktabel wäre.

[22] Wenn der potentiell exponentielle Speicherplatzbedarf es unmöglich macht, alle Agent/Bündel/Wert/Rang-Informationen abzuspeichern, dann können leicht Versionen des **EBF**-Algorithmus angegeben werden, die nur polynomialen Speicherbedarf erfordern (etwa in Anpassung von Iterative Deepening, s. [110]). Dies erfordert allerdings, dass Sequenzen von Fragen wiederholt werden, die Reihenfolge der Fragen also nicht mehr unmittelbar der Präferenzordnung folgt.

unterscheiden. Die folgenden Propositionen folgen unmittelbar aus den bereits dargelegten Resultaten.

**Proposition 4.27.**
**RANG** *Mechanismen sind anreizkompatibel und ökonomisch effizient.*

*Beweis.* Unter Annahme einer korrekt umgesetzten Politik, die der Struktur des **EBF**-Algorithmus folgt, und unter der Annahme eines darauf basierenden Befragungsprotokolls folgt die Proposition aus der Proposition 4.26. □

**Proposition 4.28.** *Sei* **B** *der* **EBF**-*Algorithmus der in einem spezifischen, hier betrachteten* **RANG**-*Mechanismus verwendet wird. Dann existiert keine anderer Mechanismus, der auf einem zulässigen, zulässig ausgestatteten und deterministischen Algorithmus beruht und für alle Instanzen des Allokationsproblems weniger Gültigkeitsprüfungen benötigt.*

*Beweis.* Unter den im vorstehenden Beweis getroffenen Annahmen folgt die Proposition aus Theorem 4.17. □

## 4.4 Weiteres Vorgehen

Die oben vorgestellten Bausteine erlauben es, Koordinationsmechanismen für kombinatorische Ökonomien zu entwerfen und zu implementieren, die helfen können, die in Kapitel 2 formulierten Anforderungen zu erfüllen. Eine ausführlichere Abschätzung der Zielerreichung wird im letzten Kapitel, dem Kapitel 6, erfolgen. In Anhang C wird noch ergänzend ein Mechanismus vorgestellt, der weitgehend den RANG-Mechanismen entspricht, aber zur Bestimmung von effizienter Allokation und Vickreyzahlungen anstelle von absoluten Bewertungen nur Differenzen zwischen Bewertungen erfragt. Im nun folgenden Kapitel 5 wird die Anwendung der geschilderten Techniken auf eine exemplarische Klasse von Scheduling-Problemen beschrieben und diskutiert. Dies mag als Beispiel für die Anwendung der Techniken in Problemdomänen dienen, die eine kombinatorische Struktur aufweisen und ökonomische Bewertungen zulassen oder erfordern. Organisatorische Konsequenzen eines weitergehenden Einsatzes solcher ökonomischen Koordinationsmechanismen werden in einem Exkurs am Ende des Kapitels diskutiert.

# Kapitel 5

# Anwendung

Im folgenden Abschnitt wird die Anwendung der vorgestellten Koordinationsmechanismen auf ökonomische Schedulingprobleme in Produktionsumgebungen vorgestellt. Hierzu werden Job-Shop-Probleme um monetäre Bewertungen erweitert und die formale Übertragbarkeit der Problemstellung auf ökonomische Koordinierungsprobleme gezeigt. Die Komplexität des Problems wird erörtert und ein heuristischen Verfahrens zur Lösung von bewerteten Job-Shop-Problemen vorgeschlagen. Die Anwendbarkeit der Mechanismen bleibt nicht auf Produktionsumgebungen beschränkt. Dieses Beispiel wurde vorrangig gewählt, weil es aufgrund seiner strukturellen Einfachheit geeignet ist, die prinzipielle Anwendbarkeit zu demonstrieren. Das hier beschriebene Vorgehen kann auf eine Reihe weiterer Anwendungsfelder, in denen die kombinatorische Allokation von Ressourcen im Vordergrund steht, angewendet werden. In Abschnitt 5.2 werden zudem in einem allgemeineren Kontext die möglichen Potenziale des Einsatzes ökonomischer Koordinationsmechanismen für die Weiterentwicklung inner- und zwischenbetriebliche Organisationsstrukturen diskutiert.

## 5.1 Job-Shop-Scheduling in der Produktion

Scheduling alloziert Ressourcen zeitlich mit dem Ziel, eine Menge an Aufgaben gegebenenfalls optimal durchführen zu können. Eine Unterklasse allgemeiner Schedulingprobleme sind Job-Shop-Scheduling-Probleme (kurz: JSP). Die auszuführenden Aufgaben sind hier als eine Menge von Jobs gegeben, die jeweils aus einer Menge von einzelnen Operationen bestehen, die in einer bestimmten Reihenfolge ausgeführt werden müssen. Im allgemeinen werden Maschinen als die Ressourcen in diesem Typ von Schedulingproblemen betrachtet, s. [33]. Die folgende Terminologie erlaubt es, deterministische Job-Shop-Probleme abzubilden, die der Definition in Ausiello et al. [5] entsprechen.[1]

[1] Garey und Johnson geben in [37] die Entscheidungsproblemvariante dieses Problems an (Problem SS18). Es wird gefragt, ob ein JSP vor einer (ganzzahligen) Deadline bearbeitet werden kann (man könnte dann beispielsweise optimieren, indem man die Deadline sukzessive herabsetzt, etwa ausgehend von einem "schlechten" Schedule, den man erhalten kann, indem man alle Jobs nacheinander ohne zeitliche Zwischenräume zwischen den Operationen einplant, beginnend mit allen Operationen des Job 1, dann des Job 2 usw.). In [37] findet sich eine Einschränkung, die in der von Ausiello et. al. verwendeten

**Definition 5.1 (Struktur der Job-Shop-Probleme).** *Die grundlegende Struktur der betrachteten Job-Shop-Scheduling-Probleme und die wesentlichen Bedingungen lassen sich wie folgt beschreiben.*

- *Eine Menge* $J = \{1, \ldots, n\}$ *von* $n$ *Jobs.*
- *Eine Menge* $M = \{1, \ldots, m\}$ *von* $m$ *Maschinen.*
- *Jeder Job* $j$ *besteht aus* $n_j$ *Operationen. Diese jobspezifischen Operationen bilden die Menge* $O_j = \{o_j^1, \ldots, o_j^{n_j}\}$*. Die Menge aller Operationen* $\bigcup_{j \in J} O_j$ *wird mit* $O$ *bezeichnet.*
- *Zur Ausführung eines jeden Jobs ist es erforderlich, die zugehörigen Operationen in einer vorgegebenen Reihenfolge zu durchlaufen, d.h. es existiert für jeden Job eine strikte totale Ordnung* $\succ_j$*, die diese Reihenfolge festlegt. Zur Vereinfachung wird festgelegt, dass der Index, der zur Identifikation der Operationen verwendet wird, diese Reihenfolge reflektiert, d.h. für jedes Paar* $k, l$ *mit* $1 \leq k < l \leq n_j$ *gilt* $o_j^k \succ_j o_j^l$*.*
- *Jede Operation kann nur auf genau einer Maschine durchgeführt werden, es existiert also eine Abbildung* $m_j^* : O_j \rightarrow M$*, die jeder Operation eine Maschine zuordnet. Da jede Operation durch ihren Reihenfolgeindex eindeutig identifiziert ist, kann* $m$ *auch als Abbildung des Reihenfolgeindex auf den Index zur Identifikation der Maschinen ausgedrückt werden:* $m_j : \{1 \ldots n_j\} \rightarrow \{1 \ldots m\}$*.*
- *Jede Operation muss beendet sein, bevor ihre Nachfolgeoperation gestartet werden kann.*
- *Jede Operation benötigt eine fixe, positive Bearbeitungszeit* $p_j^i \in \mathbb{N}$*, hier identifiziert* $j$ *den Job und* $i$ *die Operation.*
- *Es ist nicht erlaubt, die Bearbeitung eines einmal begonnenen Vorgangs zu unterbrechen, es kann daher keine Verdrängung von Aufträgen stattfinden (no preemption). Es ist zudem nicht möglich, zwei oder mehr Operationen auf einer Maschine parallel zu bearbeiten.*
- *Jeder Job* $j$ *kann zum Zeitpunkt* $0$ *beginnen.*[2]

---

Optimierungsvariante nicht mehr enthalten ist. Diese Einschränkung besagt, dass aufeinanderfolgende Operationen eines Jobs nicht auf der gleichen Maschine liegen sollen. Das schränkt aber die Allgemeinheit unnötig ein (eine Umrüstung könnte erforderlich oder eine Unterbrechung “ausnahmsweise” erlaubt sein). Deshalb wird hier in Anlehnung an Ausiello et. al. auf diese Einschränkung verzichtet. Das Buch von Ausiello et. al. enthält darüber hinaus Informationen über aktuelle Approximabilitätsresultate zu Job-Shop-Problemen, vgl. Seite 443. Diese Informationen sind auch auf der zugehörigen Webseite `http://www.nada.kth.se/theory/compendium/` zu finden und werden dort gepflegt.

[2] Zeitpunkte werden als nichtnegative ganze Zahlen angegeben. Wenn sogenannte *ready times* für die Jobs angegeben werden, die einen frühest-möglichen Startzeitpunkt für die erste Operation beschreiben, dann kann ein solches Problem in aller Regel in eines ohne solche Zeiten überführt werden, indem man für jeden Job $j$ eine Dummy-Maschine $m^j$ einführt und eine Operation $o_j^0$, die zu Beginn der Sequenz auszuführen ist und eine Bearbeitungszeit aufweist, die der ready time des Jobs entspricht.

*Die angegebenen Bedingungen und Strukturelemente definieren die im folgenden betrachteten Klasse von Job-Shop-Problemen.*[3] *Diese Klasse wird mit JSP bezeichnet.*

**Beispiel 5.1.** *Gegeben sei folgendes Job-Shop-Problem $P$ mit 2 Jobs und 3 Maschinen.*

- *Job 1:* $O_1 = \{o_1^1, o_1^2, o_1^3\}$,
  $m_1(1) = 2, m_1(2) = 1, m_1(3) = 3, p_1^1 = 2, p_1^2 = 3, p_1^3 = 2$
- *Job 2:* $O_2 = \{o_2^1, o_2^2, o_2^3\}$,
  $m_2(1) = 3, m_2(2) = 2, m_2(3) = 1, p_2^1 = 1, p_2^2 = 2, p_2^3 = 2$

Wenn es der Kontext erlaubt, wird der Job-Index nicht verwendet. Zur Vereinfachung kann ein Job $j$ wie folgt angegeben werden:

$$[(m_j(1), p_j^1), (m_j(2), p_j^2), (m_j(3), p_j^3)].$$

Dies reduziert den Notationsoverhead in obigem Beispiel zu

$$\text{Job 1: } [(2,2),(1,3),(3,2)], \text{ Job 2: } [(3,1),(2,2),(1,2)]$$

Soweit nicht anders angegeben wird im weiteren unterstellt, dass die Definitionen sich auf ein beliebiges, aber fest gewähltes Problem $P$ aus der Klasse JSP beziehen, die jeweiligen Mengen und Funktionen also zu diesem fest gewählten Problem gehören.

**Definition 5.2 (Mögliche Schedules).** *Sei $P$ eine Instanz der Klasse JSP und sei $\mathcal{O}$ eine Teilmenge der Operationen $O$. Für nichtleere Teilmengen wird jede (totale) Abbildung $s^{\mathcal{O}}$ von $\mathcal{O}$ in die Menge der nichtnegativen, ganzzahligen Startzeiten, d.h.*

$$s^{\mathcal{O}} : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{N}_0,$$

*als* möglicher Schedule *bezeichnet. Zudem ist der leere Schedule, $s^{\emptyset}$, der keiner Operation eine Startzeit zuweist, ein* möglicher Schedule. *Die Menge aller möglichen Schedules für eine Menge $\mathcal{O}$ von Operationen wird mit $S^{\mathcal{O}}$ bezeichnet. Die Menge aller möglichen Schedules für ein Problem $P$ ist definiert als*

$$S = \bigcup_{\mathcal{O} \subseteq O} S^{\mathcal{O}}.$$

Da der Bezug zu einem festgewählten Problem gegeben ist, kann auf eine explizite Indizierung von $S$ durch die Menge der Operationen verzichtet werden. Diese Form der Definition möglicher Schedules wird es später erlauben, Bewertungen durch Agenten für mögliche Schedules einzuführen und hierbei auch Schedules zu berücksichtigen, die nur einem Teil der Operationen Startzeiten zuweisen.

**Definition 5.3.** *Sei $s^{\mathcal{O}}$ ein möglicher Schedule. Gilt $O_j \subseteq \mathcal{O}$, dann wird $s^{\mathcal{O}}$* vollständig in Bezug auf Job $j$ *genannt. Gilt $\mathcal{O} = \bigcup_{j \in J} O_j = O$, d.h., der Schedule ist vollständig in Bezug auf alle $j \in J$, dann wird der Schedule* vollständig *genannt.*

[3] Eine weitere Formalisierung erscheint im Kontext dieser Arbeit nicht erforderlich.

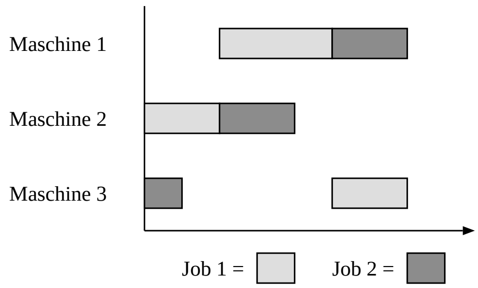


**Abbildung 5.1:** Ein gültiger Schedule zu dem angegebenen Beispiel 5.1. In einer abkürzenden Schreibweise kann dieser unter Verwendung der Startzeiten der Operationen angegeben werden als $(0, 2, 5)_1$ (für den Job 1) bzw. $(0, 2, 5)_2$ (für den Job 2). Die Reihenfolge der Startzeiten entspricht der erforderlichen Sequenz der Operationen, deren Position in der Sequenz in der Formalisierung durch den Index bestimmt ist (die Startzeit an der ersten Position im Schedule eines Agenten $j$ gibt also den Start der ersten Operation $o_j^1$ an, usw.).

Es wird angenommen, dass jedes $t \geq 0$ für jede Maschine $m$ eine mögliche Zeit (Startzeit) für den Beginn der Bearbeitung von Operationen ist – es wird also ein kontinuierlicher Schicht-Betrieb unterstellt. Es wird zudem angenommen, dass keine Maschine ausfällt, dass es keine stochastischen Einflüsse auf die Bearbeitungszeiten gibt und dass alle Größen deterministisch und im voraus bekannt sind (vgl. hierzu die Exposition des JSP von French in [33]).

**Definition 5.4.** *Ein möglicher Schedule $s^{\mathcal{O}}$ wird* realisierbar *genannt (oder nur* Schedule*), wenn es (1) auf keiner Maschine zur einer Überlappung in der Bearbeitung von Operationen kommt und (2) keine Reihenfolgeerfordernisse verletzt werden, also zum einen jede Vorgängeroperation einer Operation in $\mathcal{O}$ auch in $\mathcal{O}$ enthalten ist und zum anderen keine Überlappung in den Bearbeitungszeiten entsteht. Formal also*

1. *Für alle Paare $o_j^x \in \mathcal{O}$, $o_i^y \in \mathcal{O}$ mit $i \neq j$ und $m_i(x) = m_j(y)$, gilt entweder $s^{\mathcal{O}}(o_i^x) \geq s^{\mathcal{O}}(o_j^y) + p_j^y$ oder $s^{\mathcal{O}}(o_j^y) \geq s^{\mathcal{O}}(o_i^x) + p_i^x$ und*

2. *für alle $o_j^x \in \mathcal{O}$ gilt, dass alle $o_j^y \in O_j$ mit $y < x$ ebenfalls in $\mathcal{O}$ sind. Zudem gilt für alle diese Paare, dass $s^{\mathcal{O}}(o_j^x) \geq s^{\mathcal{O}}(o_j^y) + p_j^y$.*

   *Die Menge aller realisierbaren Schedules zu einer Menge von Operationen $\mathcal{O}$ wird mit $S_r^{\mathcal{O}}$ bezeichnet. Die Menge aller realisierbaren Schedules zu einem gegebenen Problem $P$ ist definiert als*

$$S_r = \bigcup_{\mathcal{O} \subset O} S_r^{\mathcal{O}}.$$

**Definition 5.5.** *Sei $J^{\mathcal{O}}$ die Menge der Jobs, die als Index einer Operation in $\mathcal{O}$ auftreten, d.h. $J^{\mathcal{O}} = \{j \in J \mid \exists\, o_j^i \in \mathcal{O}\}$. Ein Schedule $s^{\mathcal{O}}$ wird* gültig *genannt, wenn er (1) in Bezug auf jeden Job in $J^{\mathcal{O}}$ vollständig und (2) realisierbar ist.*

**Definition 5.6.** *Gegeben sei ein Job-Shop-Scheduling Problem $P \in$ JSP. Ein Schedule $s$, der gültig bezüglich der Menge $O$ ist, wird* Lösung *von $P$ genannt.*

Es ist häufig hilfreich, ein Problem $P$ durch einen Zeithorizont $[TS, TE]$, $TS, TE \in \mathbb{N}_0$ zu beschränken. Die entsprechende Schreibweise ist $P^{[TS,TE]}$. Die Menge aller Schedules bzgl. eines Zeithorizontes wird mit $S^{[TS,TE]}$ bezeichnet. Ist der Zeithorizont nicht relevant, so wird keine Indizierung angegeben. Es ist zu beachten, dass ein solcherart beschränktes Problem ohne Lösung sein kann. Die Betrachtung eines Schedules oder einer Menge von Schedules kann zudem auf die Operationen eines bestimmten Jobs beschränkt werden. Für einen einzelnen Schedule wird dies mit $s_{[j]}$ bezeichnet, für die Menge aller möglichen Schedules mit $S_{[j]}$ und für die Menge aller realisierbaren Schedule mit $S_{r[j]}$.[4] Auf Indizierungen wird verzichtet, wenn der Kontext den Bezug klärt.

Mit den bisherigen Definitionen ist es noch nicht möglich, die Qualität von Schedules zu vergleichen. Häufig werden zu diesem Zweck Maßgrößen verwendet, die von der Fertigstellungszeit (completion time) $C_j$ der Jobs abhängen, wie z.B. das Ziel einer Minimierung der maximalen Fertigstellungszeit, also $\min \leftarrow C^{\max} = \max_{j \in J}\big(s(o_j^{n_j}) + p_j^{n_j}\big)$. In der Regel wird auch angenommen, dass mit jedem Job ein Fälligkeitsdatum (due date) $d_j$ verbunden ist, das es ermöglicht, die Abweichung der Fertigstellungszeit von diesem Datum zu messen, etwa als lateness ($L_j = C_j - d_j$), tardiness ($T_j = max\{0, L_j\}$), oder earliness ($E_j = max\{0, -L_j\}$).[5]

In einem wertorientierten Unternehmensumfeld ist diese Art der Messung der Qualität von Schedules nur überzeugend, wenn das Kriterium in einer nachvollziehbaren Relation zum Cashflow-Muster steht, das durch die implizierte Lösung induziert wird (denn in der Regel wird nach einer Lösung gesucht werden, die das ausgewählte Kriterium optimiert oder eine optimale Lösung approximiert).

Im Hinblick auf das zur Messung des Erfolgs des Managements bzw. der gesamten betrieblichen Tätigkeit verwendete Kriterium *Wert* können zeit- oder kapazitätsorientierte Kriterien nur als Hilfskonstrukt angesehen werden. Dieses Hilfskonstrukt kann zu intransparenten Entscheidungen führen, denn es führt zu Unvergleichbarkeiten zwischen Fertigungseinheiten, die um Ressourcen konkurrieren und bietet kaum einen überzeugenden Ansatz, um die lokalen Entscheidungen mit den Entscheidungen der vor- und nachgelagerten Fertigungs- und Logistikeinheiten in einer Art und Weise zu verbinden, die eine einheitliche Analyse von Plänen, Schedules, Entscheidungen und Operationen aller untereinander in Beziehung stehenden inner- und zwischenbetrieblich tätigen Aktoren erlaubt.

Selbst innerhalb *eines* Fertigungsshops erscheint es als nicht trivial, die Ziele, die mit der Bearbeitung und Fertigstellung von Jobs verbunden sind, durch *ein* (nichtmonetäres) Kriterium zu erfassen. So kann die Produktion einiger Jobs unmittelbar durch Kundenaufträge veranlasst werden (Fertigstellungszeitpunkt ist wichtig), während andere Jobs produziert werden, um den Vorrat zu ergänzen (Minimierung der Produktionskosten ist wichtig) usw. – insgesamt erscheint es nicht so, als ob das entstehende Mehrkriteriumsproblem überzeugend gelöst werden kann, ohne einen ver-

[4] Formal erhält man $s_{[j]}$ aus einem Schedule $s$, indem man alle Paare $(o, t)$ mit $o \notin O_j$ aus der Relation, die durch $s$ bestimmt wird, entfernt. Das Ergebnis kann auch ein leerer Schedule sein.

[5] Diese Definitionen folgen French [33]. Es ist auf die vielleicht nicht intuitive Unterscheidung zwischen vorzeichenbehafteter Lateness und vorzeichenloser Tardiness zu achten.

einheitlichenden Maßstab einzuführen, im hier interessierenden Fall *Geld gemessen als Zahlungsbereitschaft*. Dies ist konsistent mit der Annahme zumindest teilweise privater Informationen, denn auch in einer Produktionsumgebung kann man nicht davon ausgehen, dass die einzelnen Beteiligten ihr Wissen und ihre Ziele ohne Anreiz wahrheitsgemäß preisgeben. Dies ist aber eine wesentliche Voraussetzung für die Erreichung maximaler Effizienz. Es sind also Mechanismen zu bestimmen, die diese Anreize schaffen. Es wäre naiv, einfach das Vorhandensein monetärer Bewertungen anzunehmen und weiterhin auf zentrale Lösungsmechanismen zu setzen, die sich ohne weiteres Kenntnis von diesen Bewertungen oder den zugrunde liegenden Motivationen verschaffen können: dies würde der Annahme von Teilautonomie widersprechen und auch nicht zielführend sein, denn zumindest für Menschen (oder auch Unternehmen) lässt sich eine wahrheitsgetreue Erfassung von Bewertungen natürlich nicht ohne deren Einverständnis und Mithilfe vornehmen – das ist sicherlich eine simple Einsicht, ihre Relevanz für die Realisierbarkeit von Vorschlägen zur Lösung von Multikriteriumsproblemen sollte aber nicht unterschätzt werden.

Wie oben bereits angedeutet, bestimmt der Wert, der durch strategische, taktische und operative Entscheidungen geschöpft wird, den Erfolg der betrieblichen Operation wesentlich, es ist mithin ein konsequenter Schritt, Ziele auf Werte abzubilden und Qualität mit Geld zu messen.

Es mag "natürlichere" Quellen wertorientierter Scheduling- bzw. Planungsprobleme geben, als Job-Shop-Scheduling, etwa die Koordination des Ressourcenverbrauchs in virtuellen Unternehmen (z.B. im Falle kooperierender Logistikunternehmen, die ihre Fahrzeuge als einen allgemein verfügbaren Ressourcenpool betrachten und nun nach Schedules suchen, die die effiziente Nutzung dieser Ressourcen sicherstellt) – es bleibt aber festzuhalten, dass sowohl die inhärente Komplexität (die den Versuch einer optimalen Lösung des Problems so schwierig macht), als auch die strukturelle Einfachheit (die die Darstellung des Problems verständlich macht) das Job-Shop-Problem zu einem geeigneten Objekt für die Demonstration der Anwendung von ökonomischen Koordinationsmechanismen auf ökonomisch erweiterte Scheduling- und Planungsprobleme werden lässt (bzw. auf allgemeine ökonomische Ressourcenallokationsprobleme). Auch die neueren Arbeiten zu Produktionsweisen, die verteilte Kompetenz und (teil-)autonome Entscheidung betonen, lassen eine Anwendung der vorgestellten Techniken attraktiv erscheinen, u.a.

1. weil sie es erlauben, Jobs, Maschinen, Fertigungsleiter, Verkaufsmanager, Planer und andere Aktoren einheitlich als autonome, am eigenen Erfolg interessierte Einheiten zu modellieren, die individuelle Aufgaben zu erfüllen haben und individuelle Ziele verfolgen.

2. weil sie es erlauben, die ökonomischen Konsequenzen von Entscheidung über alle miteinander in Beziehung stehenden Planungs- und Ausführungseinheiten zu studieren – zumindest, wenn die Abhängigkeiten sich auch in der Modellierung des Problem wiederfinden. Dies kann der Fall sein, wenn die Akteure, die das Geschehen antreiben, eine Handhabe erhalten, um Entscheidung auf für sie durchschaubare Art und Weise zu beeinflussen. Hier kann die sinnvolle Bestim-

mung von Budgets und die Einführung realer Zahlungstransfers ein wesentlicher Beitrag sein, vgl. [1].

3. weil sie es erlauben, relevante Resultate aus Spieltheorie und Mikroökonomie auf die Analyse der operativen und strukturellen Phänomene in Fertigungs- bzw. Logistiksystemen und darüber hinaus anzuwenden. Dies beinhaltet unter anderem Überlegungen zur Strategie (mit dem Idealziel, Mechanismen zu entwerfen, die den am Resultat interessierten Beteiligten Anreize bieten, ihre Präferenzen wahrheitsgemäß kundzutun), zur ökonomischen Effizienz (mit dem Ziel, Mechanismen zu entwerfen, die ökonomisch effiziente Lösungen bestimmen), und zu Teilnahmevoraussetzungen (mit dem Ziel, Mechanismen zu entwerfen, die sicherstellen, dass die Teilnehmer den Eindruck haben, fair behandelt zu werden und eine Kooperation bereitwillig fortsetzen).

4. weil sie es erlauben, Mechanismen zu entwerfen, die sich sowohl in vertikale als auch in horizontale Richtung skalieren lassen, da sie sich einer Sprache bedienen, die auf jedem Level des Unternehmens, zwischen Unternehmen und zwischen Unternehmen und Konsumenten verstanden wird. Diese Sprache ist wertorientiert und bedient sich des Geldes als Ausdrucksmittel.

Dies mag als zusammengefasste Begründung für die weiteren Schritte dienen: die Erweiterung von Job-Shop-Problemen um Wertinformationen und ihre Betrachtung als ökonomische Koordinationsprobleme.

### 5.1.1 Job-Shop-Probleme als ökonomische Koordinationsprobleme

Job-Shop-Probleme lassen sich direkt zu ökonomischen Koordinationsproblemen erweitern – die Jobs werden mit Agenten identifiziert, die um die Nutzung von Ressourcen konkurrieren.

Um ein Job-Shop-Problem $P$ ökonomisch zu erweitern, nehmen wir nun an, dass die Agenten jedem realisierbaren Schedule einen nichtnegative Wert beimessen. Diese Menge wird in aller Regel durch die Wahl eines Betrachtungszeitraums $[TS, TE]$ beschränkt.

Formal werden die Interessen eines Jobagenten $j$ durch eine Nutzenfunktion $u_j^{'} : S_r \rightarrow \mathbb{N}_0$ erfasst, die jedem realisierbaren Schedule eine nichtnegative Bewertung zuordnet.[6] Es ist zu beachten, dass auch leere Schedules, also Schedules, die keiner Operation einen Startzeitpunkt zuweisen, als realisierbar betrachtet werden. Es wird angenommen, dass ein leerer Schedules keinen Nutzen stiftet, also $u_j^{'}(s_j^{\emptyset}) = 0$ gilt. Es lässt sich nun die folgende Problemklasse definieren.

**Definition 5.7 (EJSP).** *Eine Instanz $P$ (in der Regel beschränkt durch einen Zeithorizont $[TS, TE]$) der Klasse JSP von Job-Shop-Scheduling-Problemen, die zugehörige*

[6] Es wird später zudem angenommen, dass diese Nutzenfunktion sich in eine zu Geld quasilineare Nutzenfunktion einbetten lässt. Wie im Exkurs auf Seite 25 des Kapitels 3 ausgeführt, erlaubt dies, die Nutzenwerte als Zahlungsbereitschaften zu interpretieren und Nutzen durch Geld zu transferieren.

*Menge $S_r$ der für $P$ realisierbaren Schedules und eine Menge von $j$ Nutzenfunktionen $u_j^{'}(\cdot)$ (eine für jeden Job $j$) definiert eine Instanz $EP$ der Klasse ökonomisch erweiterter Job-Shop-Scheduling-Probleme (EJSP). Nichts sonst definiert Instanzen von EJSP.*

Das Ziel einer optimierten Lösung von EJSPs ist es, einen Schedule $s^*$ aus der Menge der realisierbaren Schedules $S_r$ auszuwählen, der *ökonomisch effizient* ist, also folgende Bedingung erfüllt:

$$\sum_{j \in J} u_j^{'}(s^*) = \max_{s \in S} \sum_{j \in J} u_j^{'}(s). \tag{5.1}$$

Diese Definition ist allgemein genug, um auch unvollständige Schedules in die Betrachtung einbeziehen zu können. Dies ist relevant, wenn der zeitliche Horizont es nicht erlaubt, alle Operationen in optimaler Weise einzuplanen.[7]

Um zu demonstrieren, dass die Klasse EJSP die Modellierung einer ganzen Reihe traditioneller Job-Shop-Scheduling-Probleme erlaubt, wird zunächst eine eingeschränkte Variante von EJSP betrachtet. In dieser Variante hängt die Bewertung eines Schedules durch einen Agenten nur von den Zeitpunkten ab, die seinen *eigenen* Operationen zugeordnet werden. Im Gegensatz hierzu kann ein Agent in der allgemeinen Form zwei Schedules unterschiedlich bewerten, obwohl in beiden Schedules die Startzeiten der eigenen Operationen übereinstimmen. Dies würde es einem Agenten $k$ beispielsweise erlauben auszudrücken, dass er es bevorzugen würde, wenn eine Maschine $m$ im Intervall $[3, 5]$ dem Agenten $i$ und nicht dem Agenten $j$ zugeordnet würde. Diese Ausdrucksmächtigkeit ist nicht immer erforderlich.[8]

**Definition 5.8 (EJSP ohne allokative Externalitäten).** *Sei ein $EP$ wie oben definiert gegeben. $EP$ ist ein EJSP* ohne allokative Externalitäten *genau dann, wenn für jeden Agenten $j$ und jedes Paar $a, b \in S_r$ von Schedules, deren Beschränkungen $a_{[j]}$ und $b_{[j]}$ auf die Operationen von $j$ übereinstimmen, gilt, dass $u_j^{'}(a) = u_j^{'}(b)$. In diesem Fall kann man die Nutzenfunktion $u_j(\cdot)$ auch unmittelbar über den realisierbaren, auf den jeweiligen Agenten beschränkten Schedules $S_{r[j]}$ definieren.*

Wir nehmen zudem an, dass die betrachteten EJSP ohne allokative Externalitäten im folgenden Sinne *monoton* sind: Für jeden Agenten $j$ und jedes Paar $a$ und $b$ von Schedules aus $S_{r[j]}$, die auf allen Operationen, die durch $a$ eine Startzeit zugewiesen bekommen, übereinstimmen, gilt $u^{'}(a) \leq u^{'}(b)$. Dies stellt sicher, dass ein Schedule, der nur einer echten Teilmenge $\mathcal{O}$ von $O_j$ Startzeiten zuweist, nicht attraktiver sein kann, als ein Schedule, der mit diesem Schedule für alle Operationen aus $\mathcal{O}$ übereinstimmt, aber noch weiteren nachfolgenden Operationen eine Startzeit zuweist.

Nun betrachten wir ein Job-Shop-Problem $P^{'}$ und ein typisches Minsum-Kriterium (vgl. [45]), die *total job completion time*. Ziel ist es, die Summe der Fertigstellungszei-

[7] Dies deckt auch Fälle ab, in denen gültige Schedules (realisierbare Schedules, die alle Operationen enthalten) zwar in der Menge der realisierbaren Schedules enthalten sind, aber ein unvollständiger Schedule existiert, der einen höheren Nutzen stiftet.

[8] Allerdings wird sie benötigt, um ein sehr häufig betrachtetes Ziel abbilden zu können, nämlich die Minimierung der maximalen Fertigstellungszeit. Dies wird in einer späteren Fußnote erläutert.

ten zu minimieren. Dieses $J||\sum C_j$-Problem[9] wird nun auf das eingeschränkte EJSP $EP^{'}$ wie folgt abgebildet.

Zunächst wird ein gültiger Schedule bestimmt, indem die Operationen des Jobs 1 so früh wie möglich und ohne Pause zwischen aufeinanderfolgenden Operationen eingeplant werden. Dann folgen die Operationen des Job 2, beginnend mit der Startzeit $C_1$ für die Operation $o_2^1$. Dies wird fortgeführt, bis alle Jobs eingeplant sind. Dies führt mit einem Aufwand, der linear zur Anzahl der Operationen ist, zu einem gültigen Schedule $s^{'}$ der Länge $l = \sum_{j \in J} \sum_{1 \leq i \leq n_j} p_j^i$. Als zu betrachtender Zeithorizont wird $[0, l]$ gesetzt. Die Konstruktion stellt für das betrachtete Kriterium sicher, dass eine optimale Lösung des Problems innerhalb dieses Intervalls zu finden ist. Nun wird eine Prozedur angegeben, die eine Nutzenfunktion $u_j^{'}(\cdot)$ für jeden Agenten $j$ implementiert. Diese Prozedur bestimmt mit einem Aufwand, der linear zur Anzahl der Operationen ist, eine Bewertung für jeden Eingabeschedule. Die Betrachtung wird auf gültige Schedules beschränkt (unvollständige, aber realisierbare Schedules werden für das verwendete Minsum-Kriterium nicht betrachtet).[10]

**Function** $u_j^{'}$(In: Gültiger Schedule $s$, Out: Value v)
  $C_j \leftarrow s(o_j^{n_j}) + p_j^{n_j}$;
  $v \leftarrow l - C_j$; **return** $v$;[11]

Diese Transformation kann auf jede Instanz von $J||\sum C_j$ angewendet werden. Sie wird mit $g$ bezeichnet. Nun gilt es, einen Zusammenhang zwischen den Lösungen der Problemklassen herzustellen.

**Proposition 5.9.** *Sei $P^{'}$ eine beliebige, fest-gewählte Instanz von $J||\sum C_j$ und $EP^{'} = g(P^{'})$. Dann ist ein Schedule $s$ genau dann ein Schedule, der das Kriterium $\sum C_j$ in $P^{'}$ minimiert, wenn $s$ die ökonomische Effizienz in $EP^{'}$ maximiert.*[12]

[9] Vgl. zu dieser in der Schedulingliteratur verbreiteten Schreibweise z.B. [16].

[10] Wenn man diese Beschränkung nicht einführen will, dann kann man die Nutzenfunktionen zu EJSP zunächst verallgemeinern, indem man negative Bewertungen für realisierbare Schedules zulässt. Ein Agent, der einen Schedule zu bewerten hat, der unvollständig in Bezug auf seine Operationen ist, kann dann diesem Schedule einen Wert von $-\infty$ zuordnen. So wird sichergestellt, dass nur gültige Schedules eine nichtnegative Gesamtbewertung erhalten (eine Bewertung mit 0 würde hierfür nicht ausreichen).

[11] Diese Form der Transformation eines JSPs mit Minsum-Kriterium in ein eingeschränktes EJSP ist polynomial (in Größe und Aufwand). Sie nutzt die Tatsache aus, dass das Ausgangsproblem stark strukturiert (also komprimierbar, vgl. [60]) ist. Wäre es erforderlich, alle Schedule/Wert-Paare explizit anzugeben, dann wäre die Transformation nicht polynomial, denn die Zahl der möglichen Schedules explodiert exponentiell im Vergleich zu den Informationen über Operationen und Bearbeitungszeiten, die zur Beschreibung des Ausgangsproblems ausreichen.

[12] Analoge Resultate lassen sich für andere Minsum-Kriterien herleiten (z.B. total tardiness, weighted total completion/tardiness, holding costs, early/tardy penalties). Es ist außerdem anzumerken, dass EJSP *ohne allokative Externalitäten* nicht verwendet werden können, um Kriterien wie das Erreichen einer minimalen maximalen Fertigstellungszeit $C^{\max}$ zu modellieren, weil ein globales Optimum für solche Kriterien nicht durch lokale Überlegungen zu finden ist – die Jobs *können nicht als unabhängig voneinander modelliert werden.* Damit die Nutzenfunktion den positiven Effekt des Erreichens einer minimalen maximalen Fertigstellungszeit $C^{\max}$ widerspiegeln können, müssen sie diese Abhängigkeit von der Zuweisung von Maschinenzeiten an andere Jobs erfassen – ansonsten verhindert der Eigennutz der Agenten die Optimierung des gewünschten Kriteriums. Im Falle von $C^{\max}$ müssen die Jobagenten Schedules mit einer früheren Fertigstellungszeit für den letzten Job beispielsweise höher bewerten, als Schedules, die ihnen zwar selbst eine frühere Fertigstellung erlauben, aber zu einer späteren Fertigstellung der gesamten

*Beweis.* Sei $s$ ein Schedule, der die Effizienz in $EP^{'}$ maximiert. Es sei angenommen, dass $s$ nicht die total completion time in $P^{'}$ minimiert, d.h. es gibt einen Schedule $r \in S$, so dass $\sum_{j \in J} s(o_j^{n_j}) + p_j^{n_j} > \sum_{j \in J} r(o_j^{n_j}) + p_j^{n_j}$, bzw. $\sum_{j \in J} s(o_j^{n_j}) > \sum_{j \in J} r(o_j^{n_j})$. Da $s$ die Effizienz in $EP^{'}$ maximiert, folgt $\sum_{j \in J}(l - s(o_j^{n_j}) + p_j^{n_j}) \geq \sum_{j \in J}(l - r(o_j^{n_j}) + p_j^{n_j})$, bzw. $\sum_{j \in J} l - \sum_{j \in J} s(o_j^{n_j}) - \sum_{j \in J} p_j^{n_j} \geq \sum_{j \in J} l$ - $\sum_{j \in J} r(o_j^{n_j}) - \sum_{j \in J} p_j^{n_j}$. Dies führt über $\sum_{j \in J} r(o_j^{n_j}) \geq \sum_{j \in J} s(o_j^{n_j})$ zu einem Widerspruch zur Annahme. Die andere Richtung folgt ebenso unmittelbar. □

Dies erlaubt nun unmittelbar, die zeitliche Komplexität von EJSP zu bestimmen. Zur verwendeten Terminologie sollten folgende Anmerkungen beachtet werden. EJSP und $J||\sum C_j$ sind Optimierungsprobleme. Zur Kategorisierung von Optimierungsproblemen verwendet beispielsweise Hromkovič in [48] die Klassen NPO und PO. Die Klasse NPO erfasst diejenigen Optimierungsprobleme, für die (1) effizient verifiziert werden kann, ob eine vermeintliche Probleminstanz tatsächlich eine zulässige Eingabe darstellt, (2) die Größe jeder zulässigen Lösung polynomial zur Eingabegröße ist, (3) für jede vermeintliche Lösung in polynomialer Zeit bestimmt werden kann, ob sie eine zulässige Lösung ist und (4) die Kosten der Lösung in polynomialer Zeit bestimmt werden kann. Die Klasse PO besteht aus denjenigen Problemen aus NPO für die ein polynomialer Algorithmus existiert, der zu jeder zulässigen Probleminstanz eine optimale Lösung bestimmt. Mit einer sinnvollen Sprache zu Kodierung der Instanzen lässt sich zeigen, dass beide Probleme in NPO sind, denn die Größe der Lösung, die Bestimmung ihrer Kosten und die Überprüfung ihrer Zulässigkeit sind klarerweise relativ zu einer sinnvollen Eingabekodierung polynomial beschränkt. Es bleibt die Frage nach der Zugehörigkeit zu PO. Um diese zu beantworten, wird Bezug genommen auf die ursprünglichen Definitionen der Begriffe NP-schwer (*NP-hard*) und NP-vollständig (*NP-complete*) und der Komplexitätsklassen P und NP, die auf der Betrachtung von Entscheidungsproblemen basierte.

Die beiden Optimierungsprobleme lassen sich in Entscheidungsprobleme überführen, indem gefragt wird, ob eine Probleminstanz eine Lösung hat, die oberhalb (für EJSP) oder unterhalb (für $J||\sum C_j$ ) einer Schranke $B$ für das jeweilige Optimierungsmaß liegt. Unter Verwendung dieser Überführbarkeit kann man den Begriffe der NP-Schwere auf Optimierungsprobleme übertragen, indem man sagt, dass ein Optimierungsproblem NP-schwer ist, wenn das zugehörige Entscheidungsproblem NP-schwer ist.[13] Etwas vereinfachend lässt sich sagen, dass ein Entscheidungsproblem $E$ in NP ist, wenn sich in polynomialer Zeit für jede sinnvoll kodierte Instanz prüfen lässt, ob eine vermeintliche Antwort korrekt ist. Es ist NP-schwer, wenn sich alle Probleme

Jobmenge führen. In diesem Fall hängt der Wert eines Schedules für einen einzelnen Jobagenten nicht (nur) von den eigenen Operationen ($O_j$), sondern von allen (letzten) Operationen ab – es gibt also allokative Externalitäten. Im übrigen macht dies auch klar, dass die Jobs bei Verwendung eines solchen Kriteriums wie $C^{\max}$ *nicht* in jedem plausiblen Sinne *unabhängig* voneinander sind (wie dies z.B. in [33] angeführt wird).

[13] Um präzise zu sein, müsste man hier beispielsweise Bezug auf die Schwellenwertsprache nehmen, die den Bezug zwischen Optimierungsproblem und Entscheidungsproblem formalisiert, vgl. S. 215f in [48] usw. Dies ist für die Verständlichkeit der folgenden Ausführungen nicht hilfreich. Formale Details werden im weiteren in der Regel nicht vollständig ausgeführt, stattdessen wird die prinzipielle Vorgehensweise demonstriert.

in NP auf $E$ polynomial reduzieren lassen. Man sagt, dass sich ein Problem $E^{'}$ auf ein Problem $E$ polynomial reduzieren lässt, wenn es einen polynomialen Algorithmus $A$ gibt, so dass eine zulässige Probleminstanz $I$ für das Problem $E^{'}$ genau dann mit "JA" beantwortet wird, wenn $A(I)$ für das Problem $E$ mit "JA" beantwortet wird. $E$ ist NP-vollständig, wenn $E$ in NP und NP-schwer ist. Zu beachten ist noch, dass eine sinnvolle Kodierung (*reasonable*, vgl. [37]) der Probleminstanzen und, im Falle von Optimierungsproblemen, auch der Lösungen angenommen wird.[14] Diese Terminologie wird nun auf EJSP angewendet.

**Proposition 5.10.** *EJSP ist NP-schwer.*

*Beweis.* Zunächst ist zu zeigen, dass *die Entscheidungsproblemversion von EJSP in NP ist*. Formuliert man EJSP als Entscheidungsproblem, dann ist die Frage zu beantworten, ob es für eine gegebene Probleminstanz einen gültigen Schedule gibt, dessen Nutzen über einer Schranke $k$ liegt. Es sei nun ein Schedule $s$ gegeben, der jeder Operation in der zugrundeliegenden Probleminstanz eine Startzeit zuweist (klarerweise lässt sich dieser Schedule binär in einer Länge kodieren, die sich polynomial zur Länge der binär kodierten Eingabeinstanz verhält). Sowohl die Überprüfung der Gültigkeit von $s$, als auch die Berechnung des Nutzens von $s$ lassen sich in polynomialbeschränkter Zeit durchführen. Also lässt sich für jeden Schedule die Behauptung, er würde zu einer positiven Antwort auf das Entscheidungsproblem führen, in einer Zeit überprüfen, die sich polynomial zur (binär-kodierten) Probleminstanz verhält. Es folgt, dass die Entscheidungsvariante von EJSP in NP ist.

Die obige Proposition 5.9 zeigt, dass $J||\sum C_j$ auf EJSP reduziert werden kann. Zudem ist die angegebene Transformation $g$ polynomial[15] (eine Betrachtung der Entscheidungsproblemversionen lässt sich unmittelbar ableiten). Aus der NP-Härte von $J||\sum C_j$ (s. [56] oder [45]) folgt die Behauptung.[16] □

Um das Problem an die von uns betrachteten ökonomischen Szenarien mit eigennützigen rationalen Agenten anzupassen, sind folgende Annahmen sinnvoll. Wir nehmen an, dass die Nutzenfunktionen *private Informationen* des jeweiligen Agenten sind, d.h. insbesondere, dass keine (zentrale) Institution ohne vorherige Zustimmung Zugriff zu diesen Informationen hat. Der *Nutzen* in Geld sei *transferierbar*. Wir nehmen zudem an, dass kein Agent gegen seinen Willen zu einer Handlung gezwungen werden kann, insbesondere nicht zur Teilnahme an einem Koordinationsmechanismus. Mit diesen Annahmen können wir ökonomisch-erweiterte Job-Shop-Scheduling-Probleme ohne Externalitäten als eine spezifische Unterklasse der bereits betrachteten ökonomischen Koordinationsprobleme modellieren und die dort erzielten Ergebnisse anwenden.

[14] Dies ist beispielsweise eine binäre Kodierung für numerische Werte.

[15] Die Transformation verwendet Funktionen zur Beschreibung von Probleminstanzen, die sich als Eingaben für eine universelle Turingmaschine kodieren lassen. Dies weicht von der üblichen Vorgehensweise ab, erscheint aber durchaus als sinnvolle Kodierung. Details zur genauen Übertragbarkeit der Komplexitätsresultate verbleiben als Gegenstand für weiterführende Untersuchungen.

[16] $J||\sum C_j$ ist streng NP-hart. Auch dies kann übertragen werden (Details zu strenger NP-Härte sind beispielsweise in [37] zu finden).

### 5.1.2 Umwandlung von EJSP zu CJSAP

Gegeben sei ein Problem $EP$ aus EJSP mit einem Zeithorizont $[TS, TE]$. Es werden nur EJSP ohne allokative Externalitäten betrachtet.

Aus $EP$ lässt sich nun ein ökonomisches Koordinationsproblem wie folgt ableiten:

*Agenten:* $N = \{1, \ldots, n\}$ ist die Menge der Nachfrager. Jeder Nachfrager $j \in N$ entspricht dem Job-Agenten $j$ und der Arbitrator $0$ entspricht $0$. Die Menge $N_0 = N \cup \{0\}$ fasst alle Agenten zusammen.

*Güter:* Die Menge der Güter $\Omega$ ist die Menge aller maschinenspezifischen Einheitsintervalle[17] im Zeithorizont, d.h.

$$\Omega = \{[z, z+1]_i \mid i \in M,\ z \in \mathbf{N}_0,\ z = TS, \ldots, TE - 1\}$$

Eine Teilmenge $B \subseteq \Omega$ wird *Bündel* genannt (zur Erinnerung: eine alternative Schreibweise würde Bündel als Elemente der Potenzmenge der Güter $2^\Omega$ definieren).

*Nutzenfunktion:* Um die Nutzenfunktionen zu definieren, wird eine Funktion $A(\cdot)$ eingeführt, die zu einem gegebenen, realisierbaren Schedule die Menge der überdeckten maschinenspezifischen Einheitsintervalle bestimmt. Diese Funktion $A : S_r \to 2^\Omega$ ist definiert als

$$A(s) = \{[z, z+1]_m \mid (o_j^i, t) \in s,\ m = m_j(i),\ z = t, \ldots, t + p_j^i - 1\}.$$

Sei $B$ ein Bündel und $s$ ein Schedule. $B$ *überdeckt* $s$ gdw. $A(s) \subseteq B$. Ein Bündel $B$ *überdeckt* $s$ *genau* gdw. $A(s) = B$. Alternativ kann in diesem Fall gesagt werden, dass $s$ $B$ *genau überdeckt*.

In einer Allokation wird jeder Nachfrager eine möglicherweise leere Teilmenge an Einheitsintervallen, also ein Güterbündel, erhalten. Dies kann man als Nutzungsrecht bzw. Reservierung für die Maschine im überdeckten Zeitraum interpretieren. Ausgehend von der Annahme, dass ein Nachfrager, beispielsweise $j$, genau ein Bündel, beispielsweise $x$, zugewiesen bekommt, kann er diesem einen Wert zuordnen, indem er aus der Menge $S_j$ der Schedules, die sich für seine Operationen im überdeckten Zeitraum realisieren lassen, einen nutzenmaximalen Schedule auswählt und den Nutzen des Bündels dem Nutzen dieses Schedules gleichsetzt. Es ist zu beachten, dass der leere Schedule $s_{[j]}^{\emptyset}$ immer realisierbar ist, dieser stiftet allerdings keinen Nutzen. Die zugehörige Menge der Einheitsintervalle ist leer. Formal lassen sich nun die Nutzenfunktionen mit Hilfe der Funktion $A(\cdot)$ angeben. Für jeden Nachfrager $j \in N$ gibt es eine Nutzenfunktion $u_j : 2^\Omega \to \mathbb{N}_0$, die definiert wird durch

$$u_j(B) = \begin{cases} 0 & \text{falls kein } s \in S_{r[j]} \text{ existiert, so dass } A(s) \subseteq B \\ \max_{\{s: s \in S_{r[j]},\ A(s) \subseteq B\}} u_j^{'}(s) & \text{sonst.} \end{cases}$$

[17] Ein Zeitintervall kann als dreistellige Relation $I \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N} \times M$ aufgefasst werden. Ein Element $(a, b, m)$ dieser Relation (wobei wir annehmen, dass $a < b$ gilt) kann beispielsweise die Reservierung der Maschine $m$ im Zeitraum $[a, b]$ bezeichen. Um diese Interpretation auch in der Schreibweise zu verdeutlichen, werden Elemente der Relation $I$ wie $(a, b, m)$ als $[a, b]_m$ angeben. Gilt $a + 1 = b$, dann wird das maschinenspezifische Intervall *maschinenspezifisches Einheitsintervall* genannt.

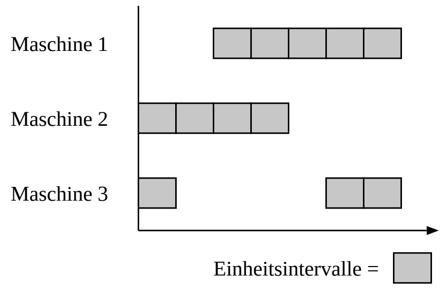


**Abbildung 5.2:** Die Einheitsintervalle des Beispiels 5.1.

Im folgenden Beispiel wird eine mögliche Nutzenfunktion für die Agenten aus Beispiel 5.1 demonstriert. Zunächst wird dazu eine spezifische Präferenzrelation angenommen, die in einem zweiten Schritt bewertet wird.

**Beispiel 5.2.** *Gegeben sei das Problem aus dem Beispiel 5.1. Betrachtet werden soll der Zeithorizont* $[0, 9]$. *Folgende generelle Überlegung beschreibt die darzustellende Präferenzrelation: sei* $j$ *ein Job-Agent und seien* $s_1$ *und* $s_2$ *Schedules, die vollständig in Bezug auf* $j$ *sind. Ist die letzte Operation des Agenten* $j$ *im Schedule* $s_1$ *eher beendet als im Schedule* $s_2$*, dann bevorzugt der Agent* $j$ *den Schedule* $s_1$*, d.h.,* $s_1 \succ s_2$*. Weichen die Fertigstellungszeiten nicht voneinander ab, dann gelte* $s_1 \sim s_2$*. Ist* $j$ *in* $s_2$ *eher beendet, dann gelte* $s_2 \succ s_1$*.*

*Für den Job-Agenten 1 folgt aus der Problemdefinition* $[(2, 2), (1, 3), (3, 2)]$ *die folgende Präferenzrelation über vollständige Schedules (zur späteren Referenz ist auch die Rangordnung der Äquivalenzklassen angegeben):*

*1:* $(0, 2, 5) \succ$
*2:* $(0, 2, 6)$, $(0, 3, 6)$, $(1, 3, 6) \succ$
*3:* $(0, 2, 7)$, $(0, 3, 7)$, $(0, 4, 7)$, $(1, 3, 7)$, $(1, 4, 7)$, $(2, 4, 7) \succ$
*4: Alle ungültigen Schedules.*

*Analog ergibt sich für Agent 2 aus* $[(3, 1), (2, 2), (1, 2)]$

*1:* $(0, 1, 3) \succ$
*2:* $(0, 1, 4)$, $(0, 2, 4)$, $(1, 2, 4) \succ$
*3:* $(0, 1, 5)$, $(0, 2, 5)$, $(0, 3, 5)$, $(1, 2, 5)$, $(1, 3, 5)$, $(2, 3, 5) \succ$
*4:* $(0, 1, 6)$, $(0, 2, 6)$, $(0, 3, 6)$, $(0, 4, 6)$, $(1, 2, 6)$, $(1, 3, 6)$, $(1, 4, 6)$, $(2, 3, 6)$, $(2, 4, 6)$, $(3, 4, 6) \succ$
*5:* $(0, 1, 7)$, $(0, 2, 7)$, $(0, 3, 7)$, $(0, 4, 7)$, $(0, 5, 7)$, $(1, 2, 7)$, $(1, 3, 7)$, $(1, 4, 7)$, $(1, 5, 7)$, $(2, 3, 7)$, $(2, 4, 7)$, $(2, 5, 7)$, $(3, 4, 7)$, $(3, 5, 7)$, $(4, 5, 7) \succ$
*6: Alle ungültigen Schedules.*

*Mit der Annahme, dass Agent 1 einer frühestmöglichen Fertigstellung den Wert 20 beimisst und Agent 2 den Wert 16 und eine Verspätung pro Zeiteinheit für den Job 1 einen Wertverlust von 3 und für Job 2 von 2 zur Folge hat, lassen sich aus den Präferenzrelationen Nutzenfunktionen* $u_j^{'}(\cdot)$ *ableiten. Diese lassen sich vereinfachend direkt über den Rängen der Äquivalenzklassen definieren.*

*Agent 1:* $u_1^{'}(1) = 20$, $u_1^{'}(2) = 17$, $u_1^{'}(3) = 14$, $u_1^{'}(4) = 0$.
*Agent 2:* $u_2^{'}(1) = 16$, $u_2^{'}(2) = 14$, $u_2^{'}(3) = 12$, $u_2^{'}(4) = 10$, $u_2^{'}(5) = 8$, $u_2^{'}(6) = 0$.

*Zu einem gegebenen Bündel $B$ wird nun ein Nutzen bestimmt, indem $B$ mittels einer Funktion $R(\cdot)$ der Präferenzrang zugeordnet wird, der dem Rang des besten durch $B$* überdeckten *Schedules entspricht. Für das größte Bündel $B^*$, das alle im Zeithorizont liegenden Einheitsintervalle enthält, ergibt sich der Rang 1 für beide Agenten und daher $u_1(B^*) = u_1^{'}(R(B^*)) = u_1^{'}(1) = 20$ bzw. $u_2(B^*) = 16$. Auf die vollständige Auflistung aller möglichen Bündel und der zugeordneten Ränge kann hier verzichtet werden.*

**Proposition 5.11 (Monotonie der Nutzenfunktion).**
*Es gilt $u_i(A) \leq u_i(B)$ für alle $A \subseteq B \subseteq \Omega$, $i \in N$.*

*Beweis.* Dies folgt unmittelbar aus der obigen Definition des Nutzens für Güterbündel, denn jeder Schedule, der von dem relativ kleineren Bündel überdeckt wird, wird auch von dem größeren Bündel überdeckt und daher ist die für die Bestimmung des maximalen Wertes betrachtete Menge von Schedules im Falle des kleineren Bündels eine Teilmenge der für das größere Bündel betrachteten Menge, also kann der maximale Wert in der kleineren Menge den maximalen Wert in der größeren Menge nicht überschreiten. □

Das Ziel der Allokation der Güter ist die Realisierung des größtmöglichen Nutzens für die Nachfrageragenten. Im Fall transferierbaren Nutzens entspricht dies einer Maximierung der Summe ihrer individuellen Nutzen. Im Rückgriff auf die im Kapitel 3 eingeführte Terminologie erfüllt eine Allokation $X^* = (X_0^*, \ldots, X_n^*)$ dieses Ziel genau dann, wenn sie effizient ist, d.h (vgl. Definition 3.14), sie muss eine Lösung des folgenden Maximierungsproblems sein:

$$\sum_{i=0}^{n} u_i(X_i^*) = \max\{\sum_{i=0}^{n} u_i(X_i) \mid (X_0, \ldots, X_n) \text{ ist eine } \\ n+1\text{-stellige Partitionssequenz von } \Omega\}$$

Es ist anzumerken, dass aus der Monotonie der Nutzenfunktionen (Free-Disposal) und der Annahme, dass ein Verbleib eines Gutes beim Arbitrator keinen Nutzen stiftet, folgt, dass eine Betrachtung von $n$-stelligen Partitionssequenzen, die alle Güter an die Nachfrager verteilen, ausreichen würde, um eine effiziente Allokation zu bestimmen.

Nun lässt sich die Problemklasse, die aus den beschränkten ökonomisch erweiterten Job-Shop-Scheduling-Problemen durch die oben angegebene Transformation hervorgeht, genauer bestimmen.

**Definition 5.12 (CJSAP).** *Die Mengen $\Omega$ und $N_0$ und die Nutzenfunktionen $u_i(\cdot)$ der Nachfrager, die aus der obigen Umwandlung einer Instanz $EP$ von EJSP entstanden sind, definieren zusammen mit dem Ziel* (A.1) *des Arbitrators $0$ eine Instanz $C^{EP}$ der Klasse* Kombinatorische Job Shop Auktionsprobleme *(combinatorial job shop auction problem, kurz: CJSAP). Nichts sonst definiert Instanzen der Klasse CJSAP.*

**Definition 5.13 (Lösung eines CJSAP).** *Eine Allokation zu einer gegebenen Instanz eines CJSAP, die die Ziele des Arbitrators erfüllt (also effizient ist), wird* Lösung *genannt.*

**Proposition 5.14.** *Zu jeder möglichen Instanz des CJSAP existiert eine Lösung.*

*Beweis.* Diese Proposition folgt mittels eines direkten kombinatorischen Arguments unmittelbar aus der Endlichkeit des Problems. □

Auch zu jeder Instanz eines EJSPs existiert eine Lösung. Um die Verbindung zwischen Lösungen für die beiden Problemklassen aufzeigen zu können, wird zunächst definiert, wie ein realisierbarer Schedule $s$ in eine Allokation $X^s$ überführt werden kann. Hierzu wird wie folgt vorgegangen: für jeden Agenten $j$ wird die Teilmenge $O_j^s$ der Operationen aus $O_j$ bestimmt, denen von $s$ eine Startzeit zugewiesen wird. Jede Operation $o_j^i$ aus dieser Menge überdeckt ein Zeitintervall auf der Maschine $m_j(i)$, das gegeben ist durch $[s(o_j^i), s(o_j^i) + p_j^i]$. Dieses Zeitintervall lässt sich in eine Menge von Einheitsintervallen zerlegen. Die Vereinigung aller Mengen von Einheitsintervallen für die Operationen aus $O_j^s$ bestimmt das Güterbündel, dass der Agent $j$ in der Allokation $X^s$ erhält. Alle verbliebenen Einheitsintervalle des Betrachtungszeitraums werden dem Arbitrator $0$ zugeordnet.

Umgekehrt lässt sich eine Allokation für ein CJSAP $C^{EP}$ in eine Menge von realisierbaren Schedules für $EP$ abbilden, indem man für jeden Nachfrager $j$ die Menge der realisierbaren und auf eine Teilmenge von $O_j$ beschränkten Schedules bestimmt, die von $X_j$ überdeckt werden und diese Mengen in allen möglichen Varianten miteinander zu einer Menge $S_{[X]}$ kombiniert. Im Hinblick auf eine Optimierung kann man aus den individuellen Mengen zudem die Schedules $a$ entfernen, für die es einen Schedule $b$ in der Menge gibt, der mit $a$ auf allen Operationen, denen $a$ eine Startzeit zuweist, übereinstimmt. Dies folgt unmittelbar aus der für EJSP angenommenen Form von Monotonie.

Man kann die Betrachtung zudem auf Allokationen beschränken, die eine bestimmte Eigenschaft aufweisen.

**Definition 5.15 (Enge Allokation, enge Lösung).** *Eine Allokation $X$ für $C^{EP}$ ist* eng, *wenn unter den besten durch $X$ überdeckten realisierbaren Schedules für $EP$ ein Schedule $s^*$ ist, der $X_j$ für alle $j \in N$ genau überdeckt. Eine enge Allokation, die eine Lösung ist, wird* enge Lösung *genannt.*

Zu einer engen Allokation existiert also ein korrespondierender Schedule, der alle Einheitsintervalle, die Nachfragern durch die Allokation zugewiesen werden, auch verwendet und dessen Wert maximal ist für alle Schedules aus $S_{[X]}$. Es ist klar, dass für jede Instanz aus CJSAP eine Lösung gefunden werden kann, die eine enge Allokation ist (wenn $Y$ eine Lösung ist, die nicht eng ist, dann überdeckt sie einen Schedule $s^*$, der maximal ist, der aber nicht alle Einheitsintervalle verwendet. Nun kann eine enge Lösung aus $Y$ konstruiert werden, indem man aus den Mengen $Y_j$ für $j \in N$ alle Einheitsintervalle entfernt, die von $s^*$ nicht verwendet werden, und diese zu $Y_0$ hinzufügt).

Nun lässt sich die folgende Proposition zeigen.

**Proposition 5.16.** *Sei ein ökonomisch-erweitertes Job-Shop-Scheduling-Problem $EP$ aus EJSP gegeben. Ein realisierbarer Schedule $s$ ist genau dann eine Lösung von $EP$, wenn die Allokation $X^s$, die sich mittels der angegebenen Transformation aus $s$ ergibt, eine Lösung für das zugehörige CJSAP $C^{EP}$ ist.*

*Beweis.* (EJSP → CJSAP) Die angegebene Transformation wandelt einen gegebenen optimalen realisierbaren Schedule $s^*$ in eine enge Allokation $X^{s^*}$. Diese Allokation für das CJSAP ist effizient, also eine Lösung. Dies sieht man wie folgt. Angenommen, die konstruierte Allokation ist nicht effizient. Dann muss es eine Allokation $Y$ geben, so dass $\sum_{j \in N} u_j(Y_j) > \sum_{j \in N} u_j(X_j)$. Aus der Konstruktion folgt, dass sich jedem $Y_i$ ein Schedule $s_j^{'}$ aus $S_{r[j]}$ zuordnen lässt, dessen Nutzen $u_j^{'}(s_{[j]}^{'})$ maximal ist für alle realisierbaren, auf $j$ beschränkten Schedules, die von $Y_j$ überdeckt werden. Der Wert des Schedules $s^{'}$, der aus der Vereinigung der Schedules $s_{[j]}^{'}$ entsteht, ist nach der Konstruktion gleich $\sum_{j \in N} u_j(Y_j)$. Da eine Allokation die Güter überlappungsfrei zuordnet, ist $s^{'}$ realisierbar. Analog gilt für $s^*$, dass die Summe der Bewertungen für die beschränkten und individuell realisierbaren Schedules $s_{[j]}^*$ gleich $\sum_{j \in N} u_j(X_j)$ ist. Es folgt ein Widerspruch zur angenommenen Effizienz von $s^*$.

(CJSAP → EJSP) Sei $X = (X_0, X_1, \ldots, X_n)$ o.B.d.A. eine enge Lösung von $C^{EP}$. Dann lässt für jeden Agenten $j \in N$ aus $X_j$ ein Schedule $s_{[j]}^X$ wie folgt konstruieren.

Setzte $s_{[j]}^X = s^{\emptyset}$; setze $i = 1$;
Solange $X_j \neq \emptyset$, tue
  Betrachte $o = o_j^i$. Bestimme das Einheitsintervall in $X_j$
  mit der frühestens Anfangszeit auf der Maschine $m_j(i)$;
  Setze $t$ auf diese Anfangszeit; Füge $(o, t)$ zu $s_{[j]}^X$ hinzu;
  Streiche aus $X_j$ die Einheitsintervalle $\{[z, z+1]_{m_j(i)} | z \in \mathbb{N}_0,\ t \leq z \leq t+p_j^i-1\}$;

Da $X$ eine enge Allokation ist, folgt unmittelbar, dass dieser Algorithmus für jeden Nachfrager $j \in N$ einen beschränkten Schedule $s_{[j]}^X$ findet, der $X_j$ genau überdeckt und realisierbar ist. Aus der Enge der Allokation folgt, dass $s_{[j]}^X = s^*$. Also maximiert $s_{[j]}^X$ den Nutzen über alle realisierbaren und beschränkten Schedules, die von $X_j$ überdeckt werden. Aus der Vereinigung dieser beschränkten Schedules entsteht ein realisierbarer Schedule $s^X$. Aus dem eben gesagten folgt unmittelbar, dass der Nutzen dieses Schedules maximal ist über alle realisierbaren Schedules, die sich aus der Vereinigung von beschränkten und realisierbaren Schedules, die von den jeweils zugeordneten Bündeln überdeckt werden, ergeben können. Analog zu den Ausführungen für die andere Beweisrichtung lässt sich nun unmittelbar zeigen, dass $s^X$ eine Lösung für $EP$ sein muss. Angenommen, dies wäre nicht so. Dann müsste es einen realisierbaren Schedule $s^{'}$ geben, der einen größeren Nutzen stiftet, als $s^X$. Die von $s^{'}$ überdeckte Teilmenge von $\Omega$ lässt sich entsprechend der obigen Vorgehensweise in eine enge Allokation überführen, die in ihrem Wert dem Nutzen von $s^{'}$ entspricht. Dies führt zu einem Widerspruch zur angenommenen Effizienz von $X$, denn diese Allokation entspricht in ihrem Wert dem Wert des Schedules $s^X$.

□

### 5.1.3 Bestimmung effizienter Allokationen

Wie in Kapitel 4 bereits ausgeführt, kann die Bestimmung einer effizienten Allokation unter Ausnutzung der Lattice-Struktur der Präferenzkombinationen erfolgen. Ein Teil der durch das obige Beispiel bestimmten Lattice-Struktur wird in Abbildung 5.3 gezeigt.

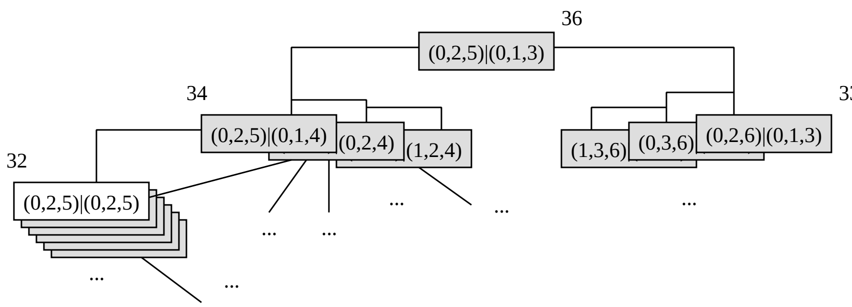


**Abbildung 5.3:** Eine komprimierte Darstellung der obersten Knoten des Lattice zu dem diskutierten Beispiel. Die unschattiert dargestellte Kombination ist gültig und optimal.

Um die Anwendbarkeit der Resultat aus den Kapiteln 3 und 4 sicherzustellen, wird zudem angenommen, dass keine Budgetrestriktionen bestehen, jeder Nachfrager $i$ also in der Lage ist, eine seiner Wertschätzung für ein beliebiges Güterbündel entsprechende Geldmenge zum Anbieter zu transferieren. Die Nachfrager haben keine weitere Ausstattung an Gütern, sie verfügen also nicht über bereits reservierte Einheitsintervalle. Die zu leistende Zahlung für ein leeres Bündel beträgt $0$. Erhält ein Nachfrager $j$ nur das leere Bündel, so ist sein Nettonutzen $u_j(\emptyset) + 0 = 0$. Die Gültigkeit der folgenden Propositionen folgt dann unmittelbar.

**Proposition 5.17.** *Eine Anwendung eines* **EBF**-*Algorithmus auf eine beliebige Instanz von CJSAP führt zur Bestimmung einer ökonomisch effizienten Lösung.*

*Beweis.* Die Gültigkeit der Proposition ergibt sich unmittelbar aus der Zulässigkeit von **EBF**- Algorithmen (s. Theorem 4.13), die immer eine effiziente Allokation für das zugrundeliegende kombinatorische Ressourcenallokationsproblem bestimmen. □

**Beispiel 5.3.** *Im obigen Beispiel ist beispielsweise die folgende Allokationen effizient:*

$X_1 = \{[0,1]_2, [1,2]_2, [2,3]_1, [3,4]_1, [4,5]_1, [5,6]_3, [6,7]_3\}$
$X_2 = \{[0,1]_3, [2,3]_2, [3,4]_2, [5,6]_1, [6,7]_1\}$
$X_0 = \Omega \backslash (X_1 \cup X_2)$.

*Um die Schreibweise übersichtlicher zu halten, können die maschinenspezifischen Einheitsintervalle zu größeren Intervallen wie folgt zusammengefasst werden.*

$X_1 = \{[0,2]_2, [2,5]_1, [5,7]_3\}$
$X_2 = \{[0,1]_3, [2,4]_2, [5,7]_1\}$

### 5.1.4 Gleichgewichtspreise und Vickreyzahlungen

Um die allgemeine Anwendbarkeit der Ergebnisse sicherzustellen, wird eine gewisse Autonomie der Agenten unterstellt – zumindest Teile der Nutzenfunktionen sind private Informationen. Die in Kapitel 3 und 4 bereits diskutierte Problematik der Ermittlung der wahren Nutzenfunktionen besteht somit auch für die Instanzen des CJSAP. Das Instrument der Wahl zur Lösung dieser Problematik sind wiederum Preise bzw. Zahlungstransfers.

**Beispiel 5.4.** *Zum obigen Beispiel lässt sich ein Preisvektor bestimmen, der auf Preise für die Bündel beschränkt ist, die Teil der effizienten Allokation sind.*

*Zu verkaufende Bündel:*

$$\begin{array}{l} A = \{[0,2]_2, [2,5]_1, [5,7]_3\} \\ B = \{[0,1]_3, [2,4]_2, [5,7]_1\} \end{array}$$

*Nachfrage nach diesen Bündeln:*

| | $\emptyset$ | $A$ | $B$ | $AB$ |
|---|---|---|---|---|
| *Agent 1* | *0* | **20** | *0* | *20* |
| *Agent 2* | *0* | *0* | **12** | *16* |

*Unterstützende Gleichgewichtspreise:*

| | $A$ | $B$ | $AB$ |
|---|---|---|---|
| *Min.* | *4* | *0* | *4* |
| *Max.* | *20* | *12* | *32* |

*Der für die Nachfrager attraktivste Preisvektor ist der minimale Vektor $p_A = 4$ und $p_B = 0$. Es kann leicht nachgeprüft werden, dass dieser Vektor den Vickreyzahlungen entspricht.*

Es sei daran erinnert, dass solche Preise nicht für jedes generelle Ressourcenallokationsproblem existieren. Dies gilt auch für die Klasse CJSAP.

Werden anonyme Preise angestrebt und sind die Agenten im Prinzip willig, eine Allianz zu bilden (das kann zumindest für innerbetriebliche Probleminstanzen mit einiger Berechtigung angenommen werden), dann kann eines der vorgestellten Verfahren (*Max-Shrink*, *Min-Shrink*) zur effizienzbewahrenden Schrumpfung von Ökonomien zur Anwendung gelangen. Diese sind aber nicht anreizkompatibel.

Auch die anderen in Kap. 4 entwickelten Elemente von Koordinationsmechanismen lassen sich direkt auf Instanzen von CJSAP anwenden.

**Proposition 5.18 (Existenz eines Vickrey-Resultats).** *Zu jeder Instanz des CJSAP lässt sich in anreizkompatibler Weise ein Resultat, bestehend aus einer effizienten Allokation und einem Vektor von zugehörigen Vickreyzahlungen mittels eines* **RANG**-*Mechanismus bestimmen.*

*Beweis.* Nach Proposition 5.11 sind die Nutzenfunktionen monoton. Die Struktur der CJSAP-Ökonomie entspricht daher der Struktur der in Kapitel 4 betrachteten Ökonomien. Damit lassen sich die Ergebnisse übertragen, insbesondere die Propositionen 4.26 bzw. 4.27. Daraus folgt die Behauptung. □

### 5.1.5 Komplexität von CJSAP

Vorrangig sind zwei Probleme zu betrachten, die jeden Koordinationsmechanismen zur Lösung von CJSAP-Instanzen betreffen: (1) der Mechanismus (sofern er zulässig ist, also effiziente Allokationen bestimmt) hat einen Informationsbedarf, der exponentiell zur Anzahl der Einheitsintervalle sein kann,[18] und (2) die Lösung des Allokationsproblems kann einen Aufwand erfordern, der exponentiell zur benötigten Information ist. Es gilt:

**Proposition 5.19.** *CJSAP ist NP-schwer.*

*Beweis.* Die Entscheidungsproblemvariante des CJSAP ist in NP, denn Kosten und Gültigkeit einer sinnvoll kodierten Zuweisung von Bündeln an Agenten lassen sich klarerweise mit polynomialem Aufwand bestimmen bzw. prüfen und ihre Größe ist polynomial beschränkt, jeweils relativ zur Eingabe.

Mittels einer Reduktion auf EJSP folgt die Behauptung unmittelbar aus Proposition 5.10, Proposition 5.16 und der Polynomialität der Transformation von EJSP in CJSAP. Dies ist wie folgt zu sehen. Zunächst ist die Entscheidungsproblemvariante von EJSP NP-schwer. Eine Übertragung der zweiten genannten Proposition auf die Entscheidungsproblemvarianten von EJSP und CJSAP zeigt, dass eine Probleminstanz genau dann zu einer "JA"-Antwort führt, wenn die transformierte Instanz zu einer "JA"-Antwort für das CJSAP-Entscheidungsproblem führt.

Die Transformation der Instanzen kann wie folgt polynomial zur Größe der Eingabe für EJSP gestaltet werden. Hierzu wird eine Prozedur angegeben, die eine polynomial beschränkte Kodierung der Nutzenfunktion für jeden Agenten $j$ erlaubt und für jedes Bündel die Frage nach seinem Wert mit polynomialem Aufwand beantworten kann.[19] Hierzu wird zunächst zu jedem realisierbaren und auf $j$ beschränkten Schedule die Menge der genau überdeckten Intervalle bestimmt (jeweils eine enge Allokation). Diese Bündel werden mit dem Wert des Schedules versehen und absteigend

[18] Vgl. hierzu auch die Resultate in [67], die die Kommunikationskomplexität von kombinatorischen Auktionsproblemen mit $O(2^m)$ bestimmen. In Kapitel 6 wird dies noch einmal ausführlicher aufgegriffen.

[19] Diese Prozedur lässt sich als zeitlich und räumlich polynomial beschränktes Programm für eine universelle Turingmaschine kodieren und dient so als Eingabe für ein entsprechend modifiziertes CJSAP.

nach Werten sortiert, abgeschlossen durch das leere Bündel (diese Operationen erfordern polynomial beschränkten Zeitaufwand und erzeugen eine Datenstruktur einer Größe, die sich linear zur Menge der Schedules verhält, wenn die Einheitsintervalle für die einzelnen Operationen wie oben zu Intervallen zusammengefasst bleiben). Auf dieser Datenstruktur operiert nun eine Funktion, die ein Bündel als Eingabe erwartet und seinen Wert ausgibt. Hierzu durchläuft sie die geordnete Liste der Bündel von Beginn an und gibt den Wert des ersten Bündels, dass vom Eingabebündel überdeckt wird, aus (das leere Bündel am Ende der Liste stellt sicher, dass die Funktion immer korrekt terminiert).[20] Die Laufzeit der Funktion ist polynomial beschränkt durch die Größe der Datenstruktur. Betrachtet man die Anweisungen und die Datenstruktur gemeinsam, so ist ihre Größe polynomial beschränkt im Vergleich zur Eingabe für das zugrundeliegende EJSP, die u.a. aus den Nutzenfunktion der Agenten für die realisierbaren Schedules besteht. Die Güter lassen sich durch die Angabe der Zeithorizontes und der Maschinenzahl ebenfalls sehr knapp kodieren. Es folgt die Polynomialität der Eingabetransformation und damit der Proposition. □

Es ist zudem anzumerken, dass CJSAP eine Unterklasse des kombinatorischen Auktionsproblems (kurz: CAP) ist, das seinerseits äquivalent zum Maximum Weighted Set Packing Problem ist (vgl. [79, 99, 87]), von dem bekannt ist, dass die zugehörige Entscheidungsproblemvariante NP-vollständig ist.

Eine berechnungseffiziente Bestimmung optimaler Lösungen kann also nicht für jede Instanz des CJSAP erwartet werden. Zudem sind die Approximierbarkeitsresultate, die für das Maximum Weighted Set-Packing Problem bisher erzielt wurden (vgl. [5]), nicht sehr vielversprechend. Eine Diskussion aktueller Resultate, etwa [44], und eine Einschätzung der Qualität der bekannten Approximationsschemata findet sich in [87]. Es ist nicht zu erwarten, dass das CJSAP eine in dieser Hinsicht leichter zu behandelnde Unterklasse des CAP ist – dies schon allein wegen seiner Nähe zu JSP, für das ebenso nur wenig vielversprechende Approximierbarkeitsresultate vorliegen, so ist das oben betrachtete $J||\sum C_j$ Problem MAX SNP-hart, s. Theorem 4.1 in [45].

Man kann nun einerseits versuchen, den vorgestellten Mechanismus[21] durch ein Relaxieren des Effizienzziels zu modifizieren und mit heuristischen Methoden den Suchraum so zu beschränken, dass polynomiale Verfahren zum Einsatz kommen können. Festzuhalten ist aber, dass die Mechanismen nicht der Struktur des zugrundeliegende Scheduling-Problems folgen – es ist mithin nicht zu erwarten, dass die einzelnen teilnehmenden Agenten gezielt Einfluss auf die Auswahl oder den Ablauf der angewandten Heuristiken nehmen können. Nachvollziehbare Heuristiken, die einen wesentlichen Teil der zu treffenden heuristischen Entscheidungen auf die teilnehmenden Agenten übertragen können und deshalb auch einen Ansatz zu kontrollierter Verwendung und begründeter Weiterentwicklung bieten, erscheinen in Anbetracht der angenommenen Teilautonomie der die Agenten beeinflussenden Aktoren sinnvoller. Natürlich gilt für alle polynomialen Lösungsverfahren (falls nicht $P = NP$ ist), dass die Bestimmung

[20] Diese Suche könnte man durch sinnvolle Zugriffsstrukturen verbessern, dies ist hier aber nicht von Interesse.

[21] Oder andere, indirekte Mechanismen, wie iBundle [69] oder AkBA [105]. Vgl. auch die Diskussion in Abschnitt 6.2.1 von Kapitel 6.

ökonomisch effizienter Lösungen nicht garantiert werden kann.

Wenn einzelne harte Instanzen der Problems es nötig machen, neben den exakten Lösungsversuchen heuristische Verfahren zur Lösungsfindung einzusetzen, dann kann es sinnvoll sein, den Entwurf der Heuristik eng an der Struktur der zugrundeliegenden Problemklasse zu orientieren. Dies kann es den Beteiligten ermöglichen, sinnvolle und zu rechtfertigende Entscheidungen im Umgang mit einer Heuristik zu treffen (etwa, um ihren Einsatz oder ihre Weiterentwicklung zu steuern). Für die Klasse EJSP wird im folgenden Exkurs ein Mechanismus vorgeschlagen, der sich direkt aus einem wohlbekannten und unmittelbar der Struktur des Schedulingproblems folgenden Verfahren zur Bestimmung aktiver Schedules[22] ergibt, namentlich der Algorithmus von Giffler und Thompson (kurz: GT). Im Verfahren bieten die Agenten einen Geldbetrag, um die Entscheidungen zu beeinflussen, die während der Ausführung des GT zu treffen sind. Dies erlaubt es den Agenten bzw. den Aktoren, deren Interessen sie vertreten, die Bestimmung des Resultats zu beeinflussen, indem sie auf ihr domänen-orientiertes Verständnis für das zugrundeliegende Lösungsverfahren zurückgreifen. Insgesamt bietet dieser Exkurs eine Alternative zu den bisher diskutierten Vorgehensweise, die eine exakte optimale Lösung des Koordinationsproblems zu Ziel hatten.

### 5.1.6 Exkurs: Bieten in Entscheidungspunkten

Eine Reihe von Lösungsprozeduren für Job-Shop-Scheduling Probleme (und für andere Ressourcenallokationsprobleme) durchlaufen eine Sequenz von Entscheidungen – im Falle des GT-Algorithmus ist dies die Auswahl der nächsten einzuplanenden Operation. Im folgenden Bietverfahren stehen die Agenten nicht direkt im Wettbewerb um Reservierungen, sondern bieten für das Recht, Entscheidungen zu fällen.[23]

Bekanntermaßen konstruiert der GT aktive Schedules (vgl. [33, 38]), wir werden daher unsere Betrachtung auf Instanzen des EJSP beschränken, die die Eigenschaft aufweisen, dass die einzelnen Agenten eine frühere Allokation von Ressourcen einer späteren immer vorziehen (oder indifferent gegenüber den Alternativen sind, diese also *schwach bevorzugen*).

Bevor ein Mechanismus vorgestellt wird, der eingeschränkte EJSPs löst, indem er der Sequenz von Entscheidungen folgt, die charakteristisch ist für eine Ausführung des GT, wird der GT kurz dargestellt.

Angenommen, es sei eine Instanz $P$ aus JSP (entsprechend der Definition 5.7) gegeben.

(1) Initialisiere die Menge $SO$ der einplanbaren Operation mit $o_j^1, 1 \leq j \leq n$.

[22] Ein Schedule ist *semi-aktiv*, wenn es nicht möglich ist, eine Operation früher beginnen zu lassen, ohne die Reihenfolge der Operationen auf wenigstens einer Maschine zu ändern. Ein semi-aktiver Schedule ist *aktiv*, wenn es unmöglich ist, eine Operation früher starten zu lassen, ohne eine andere Operation zu verzögern. Ein *non-delay* Schedule ist ein aktiver Schedule, in dem es nur dann Leerzeiten auf einer Maschine gibt, wenn keine Operation auf diese Maschine wartet (also dort früher beginnen könnte).

[23] Wir werden das Bietverfahren daher *Bieten in Entscheidungspunkten* (oder auch *decision point bidding*) nennen.

(2) So lange $SO$ nicht leer ist tue

(3a) Bestimme die Entscheidungsmenge $DS$, indem zunächst eine Operation aus $SO$ mit der frühestmöglichen Endzeit ausgewählt wird. Sei $o_x^y$ diese Operation, d.h. $\arg\min_{o_j^i \in SO} r_j + p_j^i$.

(3b) Dann füge zu $DS$ alle Operationen aus $SO$ hinzu, die die Maschine $m_x^y$ benötigen und vor dem möglichen Endzeitpunkt $r_x + p_x^y$ von $o_x^y$ beginnen.

(4) (**Entscheidungspunkt**) Wähle eine der Operationen aus $DS$, etwa $o_a^b$, und reserviere $m_x^y$ entsprechend der Ready- und der Verarbeitungszeit von $o_a^b$.

(5) Setze die Readyzeiten aller Jobs, die eine Operation in $DS$ haben, die die Maschine $m_x^y$ benötigt, auf $r_x + p_a^b$. Entferne $o_a^b$ aus $SO$ und füge den Nachfolger $o_a^{b+1}$ zu $SO$ hinzu (sofern er existiert, d.h, falls $b < m$). Leere $DS$.

Der Mechanismus arbeitet nun wie folgt: der Arbitrator gibt bekannt, dass ein GT-Algorithmus ablaufen wird. Er beginnt, die Agenten nach Readyzeiten und nach den Verarbeitungszeiten der einzuplanenden Operationen zu befragen. Der Arbitrator iteriert den GT-Algorithmus wie gewöhnlich und fordert Gebots von den Agenten an, um jeden der durchlaufenen Entscheidungspunkte zu entscheiden. Jeder Agent, der derzeit eine Operation in der Entscheidungsmenge hat, darf ein Gebot abgeben. Der Gewinner hat einen Preis in Höhe des zweithöchsten Gebotes zu zahlen und erhält die frühestmögliche Reservierung für seine Operation in der Entscheidungsmenge (Gleichstände werden durch Zufall entschieden).

**Proposition 5.20.** *Der Mechanismus terminiert für jedes (endliche) EJSP und die resultierende Allokation entspricht einem aktiven Schedule.*

*Beweis.* Dies folgt unmittelbar aus der Konstruktion des Mechanismus, der dem Ausführungsmuster des GT-Algorithmus folgt und daher seine Eigenschaft erbt, einen aktiven Schedule zu bestimmen. □

**Proposition 5.21.** *Für jede Instanz des wie oben eingeschränkten EJSP enthält die Menge der möglichen Resultate des Mechanismus eine effiziente Allokation.*

*Beweis.* In jedem Lauf des Mechanismus gibt es exakt $z = \sum_j n_j$ Entscheidungspunkte, zu deren Klärung Gebote von Nachfragern entgegengenommen werden. Die Sequenz der Entscheidungen kann als $z$-stelliger Vektor von Indizes der Job-Agenten dargestellt werden. Diejenige Teilmenge der Menge aller möglichen Sequenzen, die genau die Sequenzen enthält, die zu aktiven Schedules führt, kann über ein $0$-Bieten[24] erreicht werden, wenn man annimmt, dass der Mechanismus Bietgleichstände durch nicht-deterministisches Tie-Breaking auflöst. Da der Algorithmus dem Ablauf des GT folgt, erbt er in diesem Fall die Eigenschaft des GT, alle aktiven Schedules zu generieren, wenn alle möglichen Entscheidungen auf alle möglichen Arten und Weisen

[24] Kein Agent bietet einen von $0$ abweichenden Betrag in irgendeiner Iteration.

getroffen werden. Die Proposition folgt dann unmittelbar aus einer Modifikation des Theorems 2.1 in [33] (vgl. Kap. 10), das besagt, dass die Klasse der aktiven Schedules den optimalen Schedule enthält, wenn ein reguläres Maß anwendet wird. □

Es ist anzumerken, dass die einzelnen Bietentscheidungen notwendigerweise von Kalkulationen zum Erwartungswert der Entscheidungen im Rahmen einer gewählten Bietstrategie abhängen. Zu Beginn weiß jeder Agent, dass er exakt $n_j$ Entscheidungspunkte gewinnen muss. Im Fortschreiten des Bietprozesses kann er zudem den Einfluss jeder getroffenen bzw. zu treffenden Entscheidung auf seinen maximal erreichbaren Nutzen unmittelbar abschätzen, indem er annimmt, dass er solange alle weiteren Entscheidungen gewinnt, bis er alle benötigten Reservierungen sichergestellt hat. Die hierfür zu leistenden Zahlungen kann er jedoch nicht ohne weiteres abschätzen. Der Grad seiner Bereitschaft, Risiken einzugehen, und das Wissen um das Bietverhalten seiner Konkurrenten (gerade, wenn Job-Agenten im Auftrag eines Aktoren wiederholt an Abläufen des Mechanismus teilnehmen) wird auch Einfluss auf sein Bietverhalten haben. Ein in solchen Situationen anwendbares Lösungskonzept ist die Suche nach Bayes-Nash Gleichgewichten (bzw. nach sequentiellen Bayes-Nash-Gleichgewichten). Die Diskussionen um die (praktische) Anwendbarkeit dieses Gleichgewichtsbegriffs zur Analyse von Mechanismen soll hier nicht um einen weiteren Beitrag erweitert werden, es gilt hier nur, aufzuzeigen, dass ein heuristisches Vorgehen aus Anwendungssicht intuitiv vielversprechende Eigenschaften aufweisen mag, aber aus analytischer Sicht eine Untersuchung der gewünschten Eigenschaften des Mechanismen (vor allem der Effizienz) sehr aufwendig werden kann.[25]

Dennoch sei betont, dass die ökonomische Erweiterung von (heuristischen) Lösungsprozeduren, die eine für die beteiligten Aktoren nachvollziehbare Nähe zur Problemdomäne aufweisen, ein vielversprechender Weg für das Design heuristischer ökonomischer Koordinationsmechanismen sein kann, denn sie kann sicherstellen, dass die teilnehmenden Agenten und die Aktoren, die sie repräsentieren, den Ablauf des Mechanismus verstehen und somit überhaupt erst in die Lage versetzt werden, ihn in ihrem Sinne (durch die Entwicklung von Strategien im Allokationsspiel, durch Änderung der Rahmenbedingungen usw.) zu beeinflussen. Dies bietet, neben dem Teilnahmeanreiz, erst die Möglichkeit, die individuellen Ziele und die daraus resultierenden Handlungen der Einzelnen durch ökonomisch gehaltvolle Instrumente (Budgets, Geld, Regularien) zu koordinieren.

Es ist anzumerken, dass der Ansatz, Entscheidungen durch Bieten zu treffen, auf eine ganze Reihe von Lösungsprozeduren übertragen werden kann. Auch das Zurücknehmen von Entscheidungen kann durch Weiterverkauf oder Rücktritt von Transaktionen modelliert werden.

[25]Eine Alternative zur strikt analytischen Vorgehensweise bieten die Methoden der agentenbasierten experimentellen Ökonomie. Auch, wenn Generalisierbarkeit und Übertragbarkeit der Resultat experimenteller Vorgehensweisen nicht immer leicht sicherzustellen sind, so bieten sie doch interessante Ansätze zur Untersuchung von Koordinationsproblemen. Einen reichen Fundus an Informationen und Einsichten bietet z.B. die Dissertation von Eymann, s. [31].

### 5.1.7 Schlussfolgerung und Erweiterungsmöglichkeiten

In diesem Abschnitt wurden ökonomisch erweiterte Job-Shop-Probleme eingeführt und ihre Transformation in eine spezifische Unterklasse kombinatorischer Auktionsprobleme beschrieben. Die Anwendbarkeit der Resultate der Kapitel 3 und 4 auf diese Klasse von ökonomischen Koordinationsproblemen wurde demonstriert.

Motiviert durch zu erwartende Berechenbarkeitsprobleme für exakte Lösungsmethoden wurde in einem ergänzenden Exkurs ein Ansatz vorgeschlagen, der Entscheidungen in entscheidungsorientierten, domänennahen Lösungsverfahren durch kompetitives Bieten trifft. Die Anwendung dieses Ansatzes auf den wohlbekannten Algorithmus von Giffler und Thompson zur Bestimmung aktiver Schedules resultiert in einer Heuristik, die einerseits unmittelbar die Struktur des zugrundeliegenden Job-Shop-Problems widerspiegelt, andererseits aber im Kontext von eigeninteressierten Agenten mit privaten Informationen anwendbar ist. Eine genauere Analyse solcher Entscheidungspunkt-Bietverfahren ist aber in weiteren Arbeiten noch zu leisten. Im Hinblick auf die Qualität der Problemlösung ist es allerdings empfehlenswert, die Instanzen von Problemen, die in vertretbarer Zeit exakt gelöst werden können, mit einem entsprechenden Verfahren, beispielsweise dem in Abschnitt 4.3 vorgestellten RANG-Mechanismus, zu lösen.[26]

Die Abbildung ökonomischer Job-Shop-Probleme auf kombinatorische Auktionsprobleme kann ohne weiteres auf andere Klassen von (Job-Shop-)Scheduling-Problemen übertragen werden. So ist es beispielsweise unmittelbar möglich, Probleme mit alternativen Routings abzubilden (es werden weiterhin bestimmte, sich ausschließende Bündel von Einheitsintervallen nachgefragt, es ist also nur die Mapping-Prozedur entsprechend anzupassen). Wenn fixe Kosten für die Nutzung von Zeitintervallen auf den Maschinen zu berücksichtigen sind (selbst, wenn diese für jedes Einheitsintervall unterschiedlich sind), so können diese durch "Dummy"-Nachfrager abgebildet werden, die in der Höhe der *Reservierungskosten* (nur) für das Einheitsintervall bieten, das sie repräsentieren. Das Setting kann auch an bestimmte reihenfolgeabhängige Set-Up-Kosten angepasst werden, indem die Menge an Gütern so erweitert wird, dass sie nicht nur etwa ein Einheitsintervall $k$ auf der Maschine $m$ umfasst, sondern ein Einheitsintervall $k$ auf der Maschine $m$ mit dem Tool $t$. Eine Bestimmung der effizienten Allokation erfolgt dann im Hinblick auf die Gebote für die erweiterte Gütermenge. Eine Voraussetzung ist allerdings, dass die Kosteninformationen dem Arbitrator zur Verfügung stehen, diese also nicht private Informationen der einzelnen Ressourcen(agenten) sind – ansonsten wäre ein vollständig entscheidungsverteilter Mechanismus zu erarbeiten.[27] Natürlich bleibt anzumerken, dass die Probleme, im Hinblick auf die "computational

[26] Hierzu kann man etwa einen RANG-Mechanismus parallel zu einer Heuristik ausführen oder ihn in ein Any-Time-Verfahren überführen, das von einer direkt ermittelbaren gültigen Allokation ausgeht und den Lattice von dort nach einer besseren Allokation durchsucht. Dies wird in einer Anmerkung zum Abschnitt 6.2.2 noch einmal aufgegriffen.

[27] Der aber nicht mehr generell gleichzeitig effizient und budgetbalanciert sein kann, vgl. die Ausführungen von Parkes in Kap. 2 von [72] zum Design von Mechanismen, die unter anderem auf [39] und [50] basieren. Unter *(strikt) budgetbalanciert* ist zu verstehen, dass sich die Zahlungsflüsse ausgleichen. Wenn als Bedingung *schwach budgetbalanciert* angegeben wird, dann ist es erlaubt, dass der Mechanismus mehr einnimmt, als er ausgibt.

burden", schwierig zu lösen sind[28] (allerdings in den eben beschriebenen Fällen *nicht* für die Agenten, wohl aber für den Arbitrator).

Insgesamt betrachtet erscheint die Anwendung ökonomischer Koordinationsverfahren im Zusammenhang mit Planung und Scheduling in Produktion und Logistik vielversprechend, insbesondere angesichts einer fortgesetzten Tendenz zur Schaffung von Firmenstrukturen, die zum einen die Zusammenarbeit von (teil-)autonomen Einheiten auf allen Granularitätsebenen ermöglichen und fördern sollen und zum zweiten angesichts einer Tendenz verstärkt teils flüchtige, teils längerfristige Kollaborationen zwischen autonomen Unternehmen zu formen [93]. In beiden Fällen können sich monetär bemessene Bewertungen als Schlüssel zur Abstimmung divergenter Interessen erweisen. Ökonomisch effiziente Mechanismen, die den beteiligten Aktoren einen Anreiz zur Teilnahme bieten und deren Ergebnisse diese individuell zufriedenstellen (so wie es die vorgestellten RANG-Mechanismen tun), können zu einem Interessenausgleich beitragen, ohne die Autonomie und die Hoheit über private Informationen mehr als zur Sicherstellung der Effizienz unbedingt nötig zu verletzen.

Der mögliche Einfluss der Verfügbarkeit ökonomischer Koordinationsmechanismen auf die weitere Entwicklung von Organisationsstrukturen wird im folgenden Exkurs ergänzend aus einer generelleren Perspektive diskutiert. Daran schließt sich in Kapitel 6 ein abschließender Resultatsüberblick an, der auch weiterführende Fragestellungen identifiziert.

[28]Und mit der Annahme $P \neq NP$ wird dies auch aller Voraussicht nach so bleiben.

## 5.2 Exkurs: Neue Möglichkeiten zur Organisationsentwicklung

Dieser kurze Exkurs identifiziert den Einsatz ökonomischer Koordinationsmechanismen als Instrument zur Koordinierung betrieblicher Aktivitäten mit dem Ziel einer verbesserten Leistungserstellung. Es wird argumentiert, dass ökonomische Koordinationsmechanismen die Tendenz zur Aufweichung organischer Strukturen hin zu einer verstärkten Anwendung eines Autonomieprinzips wesentlich unterstützen können. Eine solche Veränderung inner- und zwischenbetrieblicher Strukturen ist eine mögliche und vieldiskutierte Reaktion auf den Entwicklungsdruck, dem sich viele Unternehmen ausgesetzt sehen.[29]

Die betriebliche Leistungserstellung und ihre Weiterentwicklung sind wesentlichen Determinanten des Erfolges von Unternehmen oder Unternehmenskooperationen. Gutenberg nennt in [43] die Geschäfts- oder Betriebsleitung als Elementarfaktor, der die betriebliche Leistungserstellung wesentlich beeinflusst. Die Entscheidungen dieses Faktors stehen in einem bestimmten Verhältnis zu staatlichen oder sonst übergeordneten wirtschaftlichen Verwaltungsstellen. Gutenberg unterschiedet hier zwischen *Autonomie*- und *Organprinzip*. Dies wird in einem Produktionskontext näher erläutert.

Das *Autonomieprinzip* überlässt die Entscheidungen, die notwendig sind, um eine Abstimmung zwischen Produktion und Bedarf herbeizuführen, Personen, “die den Betrieb für eigene Rechnung und Gefahr betreiben.”[43], S. 460. Die Unternehmen bestimmen ihre Produktionspläne selbst. “In Wirtschaftssystemen, die eine planwirtschaftliche Organisation des gesamtwirtschaftlichen Vollzuges kennen, wird der Inhalt der gesamtwirtschaftlichen Planung durch Anordnung der Planstellen zum einzelbetrieblichen Datum. Die Betriebe sind unter solchen Umständen nur Glieder eines übergeordneten Ganzen. Sie bestimmen ihren Produktionsplan nicht autonom. Damit tritt das “Organprinzip” an die Stelle des “Autonomieprinzips”. Alle Betriebe sind dann im Grunde organisatorisch unselbständige Teile, Organe, fast möchte man sagen, Filialen eines größeren Ganzen” [43](S. 462).

Das Spannungsfeld zwischen Autonomie- und Organprinzip, das Gutenberg im wesentlichen mit Blick auf die Beziehung zwischen Betrieb und Staat auslotet, findet seine Entsprechung in den vielfältigen Formen inner- und zwischenbetrieblicher Organisation.

Die Aufweichung im übertragenen Gutenberg’schen Sinne *organisch* zu nennender

[29] Es ist nicht die Aufgabe dieses Exkurses sein, das Potenzial des Einsatzes von ökonomischen Koordinationsmechanismen für die Weiterentwicklung von inner- und zwischenbetrieblichen Organisationsstrukturen detailliert zu diskutieren. Dies würde den Rahmen der hier vorliegenden Arbeit sprengen. Das Gestaltungspotential, das aus den nun verfügbar werdenden Mechanismen für kombinatorische Ressourcenallokationprobleme erwächst, kann hier nur angedeutet werden. Ebenso kann nicht diskutiert werden, inwieweit die angedeutete Änderung von Organisationsstrukturen hin zu mehr Autonomie tatsächlich durchsetzbar ist. Hauptziel dieser Arbeit ist es, Bausteine für die Analyse und den Entwurf solcher Mechanismen anzubieten und ihre prinzipielle Verwendbarkeit zur Lösung von Allokationsproblemen zu belegen. Das Vorliegen solcher Bausteine lässt die in diesem Exkurs begonnen Diskussion nun sinnvoll und notwendig erscheinen. Eine Vertiefung, insbesondere mit Blick auf konkretisierte Koordinationsmechanismen und ihre domänenspezifische Rolle bei der Weiterentwicklung von inner- und zwischenbetrieblichen Organisationsstrukturen verbleibt als Gegenstand für weiterführende Arbeiten.

Strukturen in den Unternehmen hin zu mehr Autonomie mit einem Mehr an Eigenverantwortung und Selbstkontrolle wird seit langem diskutiert und vollzogen, vgl. beispielsweise [100]. Neue (zumindest neu benannte) Formen zwischenbetrieblicher Kooperation, in der starre Strukturen der Zusammenarbeit aufgeben werden zugunsten reagibler und vergleichsweise schnell rekonfigurierbarer Zusammenschlüsse (vgl.[93]), erscheinen als eine konsequente Fortführung dieser Aufweichung organischer innerbetrieblicher Strukturen.

Ursächlich für diese Tendenzen ist die sich rasch ändernde Unternehmensumwelt. Genannt seien hier vor allem die Globalisierung der Märkte und der technologische Fortschritt, das erste als Ursache für eine Zunahme des Drucks, die Qualität der Produkte zu erhöhen, die Kosten ihrer Herstellung und ihres Vertriebs zu senken und neue Produkte zur Marktreife zu bringen, das zweite als Hinweis darauf, dass bei dem Versuch einer Erfüllung dieser Ziele der Einsatz moderner Betriebsmittel ein häufig angewandtes Mittel ist, dessen Anwendung nicht immer zu den gewünschten Konsequenzen führt – vor allem, wenn die Beherrschung der neuen Betriebsmittel neue Anforderungen an Planung und Organisation stellt.

Natürlich besteht ein Entwicklungsdruck für Unternehmen seit je her, er resultiert aus den Zielen der Personen oder Institutionen, die Einfluss auf das Unternehmen nehmen können und eine Erfüllung ihrer Ziele erwarten. Diese Ziele sind in der Regel auf Wachstum ausgerichtet (Steigerung des Gewinns, Steigerung des Unternehmenswertes, Steigerung der Steuereinnahmen, Steigerung der Lohnzahlungen), nur scheint es, als würde die massive und vor allem sehr schnell fortschreitende Änderung der Marktsituation (mit größeren Absatzchancen einerseits, aber auch mit reagiblerer Konkurrenz andererseits) diesen Entwicklungsdruck für viele Unternehmen stark erhöhen.

Wie reagiert ein Unternehmen nun auf diesen Entwicklungsdruck? Um diese Frage andeutungsweise beantworten zu können, betrachten wir zunächst das Unternehmen als (selbst-)regulierendes System.

Die dem Unternehmen und der Unternehmensumwelt entstammenden Einflüsse auf das Unternehmen haben ihren Ursprung entweder in zielgerichteten Handlungen von Personen oder Institutionen, die Interessen mit dem Unternehmen verbinden (*stakeholder*) oder sind Konsequenz von Ereignissen, die willentlich oder unwillentlich ausgelöst wurden und das Unternehmen in ihren Konsequenzen berühren. Diese Unterscheidung spielt keine Rolle für die weitere Darstellung – wesentlich ist es, festzustellen, dass das Unternehmen auf diese Einflüsse reagiert. Letztlich ergeben sich die Aktivitäten des Unternehmens aus den Entscheidungen und Handlungen der im Unternehmen aktiv Tätigen. In der Regel sind dies Menschen, allerdings sind beispielsweise automatisierte Bestellsysteme auch zu Handlungen fähig, die, abgeleitet aus Programmierung und Konfiguration, direkte Außenwirkung haben. Steht das Unternehmen unter dem oben angeführten Entwicklungsdruck, ergeben sich zwei Ansatzpunkte. Zum einen kann das Unternehmen versuchen, seine eigenen Strukturen *anzupassen*, zum anderen kann es versuchen, Einfluss auf die Unternehmensumwelt zu nehmen.[30]

[30]Natürlich ist die Trennlinie hier nicht scharf zu ziehen – wie überhaupt die Verwendung eines Systembegriffs in seiner Abgrenzung zu einer Systemumwelt kritisch diskutiert werden kann, s. hierzu insbesondere die Ausführungen Ropohls in [77] zur materialistischen Systemtheorie.

Änderungen im Unternehmen haben immer auch (rückkoppelnde) Wirkungen in der Unternehmensumwelt, sei es, dass die Aktion des Unternehmens direkten Einfluss auf die Umwelt zum Ziel hat (Rekrutierung qualifizierter Mitarbeiter, Einkauf höherwertiger Werkstoffe oder Betriebsmittel, vermehrter Absatz von Produkten, Entlassung von Mitarbeitern), sei es, dass durch unternehmensinterne Änderungen (neue Entscheidungsstrukturen, Teamarbeit, Segmentierung, alles mit Konsequenzen auf die Mitarbeiter und ihr außerhalb des Unternehmens verbrachtes Leben, häufigere Wartung der Betriebsmittel mit erhöhtem Bedarf an Betriebsstoffen, etc.) die Unternehmensumwelt indirekt betroffen wird.

Als Reaktion auf den Entwicklungsdruck lassen sich unter anderem die folgenden Maßnahmen identifizieren, die eine unmittelbare Anpassung des Unternehmens zum Ziel haben:

- Einführung neuer Betriebsmitteltechnologien
- Reduktion der Fertigungstiefe (“Kernkompetenzen”), neuerdings ergänzt durch den Versuch zur “virtuellen” Erweiterung der Fertigungstiefe durch Kooperationen.
- Reorganisation der Fertigungsstrukturen (Segmentierung, Einführung von Teamarbeit).
- Einführung eines unternehmenswert-orientierten Managements.

Die Einführung neuer IT-Systeme ist eine häufige Begleiterscheinung dieser Maßnahmen.

Zur Auswahl einzelner Maßnahmen wäre es rational[31], wenn die Stakeholder versuchten, alle Optionen, die sich zur Erreichung ihrer Ziele bieten, auszunutzen, um die Zielerreichung zu optimieren. Am Ende einer nüchternen Analyse der Situation (unter Einbeziehung des Wissens um “schlechte”, also unvollständige oder unsichere Informationen und der durch sie induzierten Konsequenzen) sollte im Idealfall eine zielorientierte, vergleichende Abwägung möglicher Handlungsverläufe stehen, die zu einer entsprechenden Entscheidung führt. Das hieraus resultierende Planungs- bzw. Entscheidungsproblem ist aufgrund der Interdepenzen zwischen den Handlungen und der Menge und (mangelnden) Qualität der zur Verfügung stehenden Informationen ein kaum zu lösendes (Koordinations-)Problem (s. beispielsweise die Ausführungen zur NP-Schwere von EJSP, das ein mögliches Ausschnittsproblem erfasst). Dennoch muss es das Ziel der Stakeholder sein, auf möglichst kontrollierbare, also in ihren Konsequenzen vorhersagbare Art und Weise, Einfluss auf das Unternehmen zu nehmen. Eine sinnvoll erscheinende Strategie scheint hier die Reduktion der vom Handelnden zu betrachtenden Problemgröße auf ein überschaubares, beherrschbares Maß zu sein, begleitet von dem Versuch, einen “anonymen” Koordinationsmechanismus zu verwenden, der ohne ein Verstehen der tieferen Zusammenhänge zwischen den einzelnen Handlungsvorhaben, also ohne den Versuch, wieder das Gesamtproblem zu lösen,

[31] Rational relativ zu den individuellen Zielsystemen und den Entscheidungsfähigkeiten der einzelnen Handelnden.

eine Koordination der Interessen, in der Konsequenz also eine Allokation von Ressourcen, vornimmt.

Es liegt nahe im Falle eigennützig Handelnder einen marktlichen Koordinationsmechanismus zu verwenden. Die Vorteile marktlicher Koordination liegen

- in der Reduktion des zur Koordination notwendigen Informationsflusses auf koordinationsrelevante Informationen (die zur Willensbildung der einzelnen Handelnden notwendigen Informationen können "vor Ort" erfasst und verarbeitet werden und müssen keiner zentralen Instanz zur Entscheidungsfindung übermittelt werden – ob dies wirklich ein Vorteil ist, hängt natürlich von dem Informationsbedürfnis des Einzelnen ab, wenn beispielsweise jeder *alle* Information zur individuellen Entscheidungsfindung benötigt, dann ist dies kein Vorteil),
- in ihrer Analysierbarkeit (vgl. die vorhergehenden Kapitel),
- in der "natürlichen" Modellierung von Entscheidungsfindungen in Gruppen eigennützig Handelnder, die, in gewissen Grenzen, autonom handeln können und wollen. Ganz wesentlich für die Verwendbarkeit von Koordinationsmechanismen ist ihre Verstehbarkeit, gerade in einer Situation, die heuristisches Vorgehen erfordert (vgl. Kap. 5) und in der Menschen beteiligt sind – mit der Konsequenz, dass ihr Einsatz in einem betrieblichen Umfeld nicht schon daran scheitert, dass beispielsweise Wissensingeneure nicht in der Lage sind, die zur kompetenten, also flexiblen und der Situation angemessenen Verwendung heuristischer Verfahren notwendige Intelligenz in ein Computersystem abzubilden.[32]

Märkte sind in gewissen Situationen nicht oder nicht effizient anwendbar. Nicht effizient anwendbar kann hier zweierlei bedeuten. Zum einen können sich Situationen ergeben, in denen eine aktive Form der Koordination, also eine Koordination, die das auf ein Koordinationsziel gerichtete Versenden oder Veröffentlichen von Informationen beinhaltet, unter Abwägung aller das Problem bestimmenden Umstände *immer* weniger Nutzen stiftet (also mehr "kostet") als eine nichtaktive Koordination. Zum anderen kann es Koordinationsformen geben, die, wieder unter Berücksichtigung aller das Problem bestimmenden Umstände, zu effizienteren Problemlösungen führen. Im Grunde zählt hierzu auch eine Situation, in der eine marktliche Koordination aufgrund der Interessen der einzelnen prospektiven Marktteilnehmer nicht durchsetzbar ist – dann ist das Koordinationsproblem unter Berücksichtigung aller Umstände nicht als Markt lösbar.

Dies ist allerdings zu unterscheiden von der Situation, in der ein Markt nicht funktionieren kann, weil notwendige konstitutive Merkmale nicht erfüllt sind, dies ist vor allem dann der Fall, wenn die Marktteilnehmer eine Güterverteilung aufweisen, die

[32] Was nicht heißen soll, dass eine Automatisierung der marktlichen Koordination ausgeschlossen ist. Es bedeutet vielmehr, dass die Konfiguration des Marktes, die Definition der Güter und die Ausstattung der Marktteilnehmer mit einem Budget, also die bestimmenden Parameter des Marktprozesses, von Menschen im Bewusstsein der Konsequenzen ihres Tuns bestimmt und vorgegeben werden können und sie die Ergebnisse des Allokationsprozesses nachvollziehen können, sie sind also in der Lage, die Anwendung der (heuristischen) Mechanismen zu kontrollieren und diese zu korrigieren und weiterzuentwickeln.

keinen Handel zulässt ($x$ hat $4a$, $y$ hat $3b$, $y$ will $1a$, $x$ hat aber kein Interesse an $b$). Besonders relevant wird dies, wenn die Gruppe, die eine marktlich koordinierte Allokationsentscheidung zu treffen hat aufgrund mangelnder Autonomie keine Möglichkeit hat, Ziele Einzelner gruppenintern zu erfüllen (Beispielsweise das Ziel einer Beförderung in eine übergeordnete Einheit). Man kann versuchen, das Nichtvorhandensein tauschbarer Güter durch die Einführung eines universellen Tauschgutes, des Geldes, zu überwinden. Das setzt allerdings voraus, dass die Ziele, die der Einzelne durch eine Teilnahme am Allokationsprozess zu erfüllen hofft, durch Geld kompensiert werden können. Auch, wenn dies erfüllt ist, kann sich ein weiteres Problem aus mangelnder (betriebswirtschaftlicher) Autonomie der Gruppe ergeben, nämlich dann, wenn der durch die individuelle Bewertung der Ziele entstehende Wunsch nach Kompensation, beispielsweise für Zusatzleistungen, nicht durch die in der Gruppe vorhandenen Geldmittel gedeckt werden kann – und dies kann auch durchaus bei “realistischer” Einschätzung des Wertes der Leistung eintreten, nämlich dann, wenn die Gruppe für ihre Arbeitsergebnisse keine ausreichende Kompensation erhält und der erwirtschafte Wert von anderen Instanzen des Unternehmens abgeschöpft wird. Sind marktliche Koordinationsmechanismen einsetzbar, so folgt aus den genannten Vorteilen, dass sie die Entwicklung von Strukturen, die dem Autonomieprinzip entsprechen, wesentlich unterstützen können.

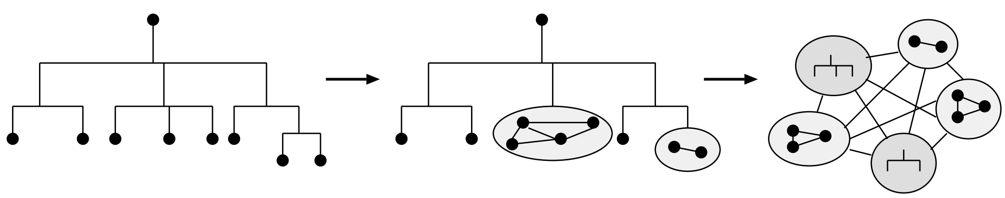

**Abbildung 5.4:** Der Einsatz von ökonomischen Koordinationsmechanismen kann die Anpassung inner- und zwischenbetrieblicher Strukturen hin zu symbiotischen und weg von organischen Strukturtypen unterstützen.

Letztendliches Ziel von Kooperations- und Anpassungsbestrebungen ist eine Kombination der Elementarfaktoren, die die Ziele der an dieser Kombination beteiligten Geschäfts- und Betriebsleitungen (um für einen Moment bei der Gutenberg’schen Terminologie zu verbleiben) *so gut wie möglich* zu erreichen hilft. Der Einsatz effizienter, anreizkompatibler Koordinationsmechanismen, die die Konsequenzen von erweiterter Autonomie, privater Information und Eigeninteresse respektieren, ist ein Weg, dies zu ermöglichen. Bausteine und Instrumente, die zur Konstruktion und zur Analyse solcher Koordinationsmechanismen verwendet werden können, wurden in den Kapiteln 3 und 4 vorgestellt und in Abschnitt 5.1 auf Schedulingprobleme angewendet – ihr mögliches Anwendungsgebiet ist aber wesentlich genereller, die (kombinatorische) Allokation von Ressourcen unter Berücksichtigung der genannten Rahmenbedingungen ist ein zentrales Problem inner- und zwischenbetrieblichen Wirtschaftens. Einige abschließende Bemerkungen und ein Ausblick auf weiterführende Fragestellungen folgen nun im Kapitel 6.

# Kapitel 6

# Diskussion und Ausblick

> “Als Grundsätze habe ich in dieser Untersuchung folgende festgehalten:
> Es ist das Psychologische von dem Logischen,
> das Subjektive von dem Objektiven scharf zu trennen;
> Nach der Bedeutung der Wörter muß im Satzzusammenhange,
> nicht in ihrer Vereinzelung gefragt werden;
> Der Unterschied zwischen Begriff und Gegenstand ist im
> Auge zu behalten.” *Gottlob Frege in [32], S. röm. 10*

Die Allokation von Ressourcen ist ein zentraler Gegenstand der wirtschaftlichen Praxis und der wirtschaftswissenschaftlichen Forschung. Die technische Unterstützung der Lösung dieser Probleme wird mit Methoden und Systemen der Informatik erbracht. Getrieben wird die Problemlösung durch die Interessen von Aktoren, die mal individuell, mal als Gruppe handelnd, ihre eigenen Ziele verfolgen. Einen Beitrag zur Lösung kann die Wirtschaftsinformatik insbesondere über ein Verständnis für die vielfältigen Rahmenbedingungen technischer, wirtschaftlicher, organisatorischer und psychologischer Art leisten. Basierend auf diesem Verständnis ist der Entwurf von Lösungsmechanismen und deren Einsatz zu steuern. Es sind Bausteine für Mechanismen und Methoden für deren Einsatz und Weiterentwicklung zu finden, die in ihrer Allgemeinheit und in ihrer Verständlichkeit eine überzeugende Grundlage für ihre Verwendung bieten. Diesem Leitbild folgt die vorliegende Arbeit.

Im betrachteten Szenario ergibt sich aus der Knappheit von Ressourcen die Notwendigkeit zur Koordination der ressourcenverbrauchenden Aktivitäten der teilnehmenden Aktoren. Auf dieser Betrachtungsebene ergibt sich die Koordination aus einer Zuordnung der Ressourcen zu den Aktoren (Allokation). Die Koordination resultiert aus der Anwendung eines Koordinationsmechanismus, an dem die Aktoren teilnehmen können. Dieser Mechanismus führt zu einem Resultat. Der Ermittlungsprozeß und das Resultat erfüllen bestimmte Eigenschaften. Die in dieser Arbeit als wünschenswert erachteten Eigenschaften wurden in Kapitel 2 vorgestellt. Im folgenden wird zunächst die Gewährleistung dieser Eigenschaften im Lichte der Ausführungen der Kapitel 3 bis 5 diskutiert. In einem weiteren Abschnitt wird dann die Beziehung der Resultate dieser Arbeit zu weiterführenden Überlegungen erläutert. Ein kurzes Fazit schließt die Arbeit ab.

## 6.1 Zielerreichung

Im Kapitel 2 werden Kriterien zur Bewertung der Qualität von Koordinationsmechanismen genannt. Diese lassen sich wie folgt in Bezug zu den Resultaten der Kapitel 2 bis 5 setzen.

**Wohlfahrtsmaximierung, Pareto-Effizienz.** Unter der Annahme transferierbaren Nutzens fallen beide Effizienzbegriffe für die betrachtete Problemklasse zusammen. Die Proposition 4.27 zeigt, dass effiziente Lösungen für kombinatorische Ressourcenallokationsprobleme bestimmt und implementiert werden können.[1]

**Individuelle Rationalität.** Wenn die Beurteilung dieses Kriteriums auf die von einander unabhängige Lösung von einzelnen Ressourcenallokationsproblemen beschränkt wird, dann ist im betrachteten Szenario jeder Mechanismus, der einen nichtnegativen Nettonutzen garantiert, individuell rational – also auch die RANG-Mechanismen oder der Schrumpfungsprozess, wenn die Aufteilung der Zahlung auf die Agenten in einer Allianz entsprechend gestaltet wird. Berücksichtigt man, dass der einzelne Koordinationsprozess eingebettet in einen weiteren Koordinationsprozess stattfindet, der die Auswahl und Steuerung des zur Anwendung kommenden Koordinationsmechanismus zur Allokation von Ressourcen zum Inhalt hat, dann kann die Beurteilung von wesentlich erweiterten Rahmenbedingungen abhängen: haben sich die Aktoren, die an einer Kooperation teilnehmen, für einen Koordinationsmechanismus entschieden (wobei natürlich schon die Teilnahmeentscheidung vom zu wählenden Koordinationsmechanismus für die Ressourcenallokation abhängen kann), dann sind ihre Möglichkeiten, auf den einzelnen Koordinationsprozess, also den Ablauf des gewählten Mechanismus, Einfluss zu nehmen, durch die Regeln des Mechanismus und die Rahmenbedingungen seiner Verwendung recht genau bestimmt. Diese Rahmenbedingungen können etwa durch vertragliche Regelungen festgelegt werden. Dies stellt aber nicht notwendigerweise sicher, dass ein Aktor mit der wiederholten Anwendung eines Mechanismus zufrieden ist – seine individuellen Ziele können sich ändern, es kann etwa zu allokativen Externalitäten kommen, wenn der Aktor andere Aktoren zunehmend als Konkurrenten wahrnimmt und die ihnen zugewiesenen Ressourcen lieber anderen Kooperationspartnern zugewiesen sähe. Generell wird jeder Aktor anstreben, dass der ihm am günstigsten erscheinende Koordinationsmechanismus von der Kooperation verwendet wird (dies führt direkt zu dem schon erwähnten Metakoordinationsproblem der Auswahl eines Koordinationsmechanismus für die Allokation von Ressourcen). In diesem erweiterten Rahmen hängt die individuelle Entscheidung zur fortgesetzten Teilnahme an einem bestimmten Mechanismus von weiteren Verhaltensoptionen ab,

[1] Ist der Nutzen nicht transferierbar, dann kann die Latticestruktur weiterhin verwendet werden, um pareto-effiziente Lösungen zu bestimmen. Dies wird knapp zu Beginn des Kapitels 4 diskutiert. Dieser Aspekt, der für die vorliegende Arbeit nicht von zentralem Interesse war, wird in den Arbeiten [23, 27] (Conen & Sandholm) näher beleuchtet. Es wird ein Algorithmus angegeben, der zur Bestimmung einer bzw. aller pareto-effizienten Lösungen verwendet werden kann. Mittels dieses Algorithmus wird in [27] eine Grenze für den Aufruf der Bewertungsfunktion für zulässige Algorithmen, die zulässig ausgestattet sind, angegeben.

die dem Aktor zur Verfügung stehen, um den Mechanismus oder die Rahmenbedingungen seiner Anwendung zu modifizieren. Die Arbeit konzentriert sich auf den ersten Fall, also die einzelne Anwendung eines gewählten Koordinationsmechanismus. Aber auch im erweiterten Rahmen gibt es gute Argumente für die Anwendung eines Koordinationsmechanismus, der sicherstellt, dass die Kooperation *als Ganze* betrachtet den bestmöglichen Nutzen erwirtschaftet,[2] also effizient ist. Für den einzelnen Aktor bleibt es dennoch eine wesentlich Frage, ob eine (langfristig) "faire" Verteilung dieses Nutzens gewährleistet ist. Diese Frage wird ihren Niederschlag in den Kooperationsvereinbarungen finden. Eine detaillierte Diskussion der Einbettung der Ressourcenallokationsmechanismen in höhere Koordinationsprozesse und ihrer Interdependenzen/Rückkoppelungen verbleibt als vielversprechender Gegenstand für weiterführende Untersuchungen.

**Stabilität.** In Kapitel 2 werden die beiden Unterkriterien *Anreizkompatibilität* und *Koalitionsstabilität* genannt. Die RANG-Mechanismen sind im klassischen Sinne[3] individuell anreizkompatibel (s. wiederum Proposition 4.27 und die hinführenden Untersuchungen in Kapitel 3 und 4). Dies setzt allerdings voraus, dass die Rahmenbedingungen, die für den Koordinationsprozess gelten, verhindern, dass die Aktoren Vorteile aus dem "Schmieren" (bribing, vgl. [92]) von anderen Aktoren oder dem Bieten mit mehreren Identitäten (false-name bidding, vgl. [107]) ziehen können. Diese Annahme erscheint im hier betrachteten Szenario einer freiwilligen, kontrolliert errichteten Kooperation gerechtfertigt. Aber auch, wenn dies nicht erfüllt ist, kann die Schrumpfung von Ökonomien verwendet werden, um das Bieten mit mehreren Identitäten unattraktiv werden zu lassen – ein solches Verfahren kann dann allerdings nicht mehr individuell anreizkompatibel und gleichzeitig individuell rational sein. Dies wurde bereits in Kap. 3 kurz dargestellt. Die Koalitionsstabilität ist in dieser Arbeit nicht explizit diskutiert worden. Dies liegt vor allem daran, dass das Szenario sicherstellt, dass die Allokationen und Vickreyzahlungen, die durch einen RANG-Mechanismus bestimmt werden, notwendigerweise keinen Anreiz zur Bildung von Teilkoalitionen bieten, die berechtigte Einwände gegen eine Implementierung des Resultats vorbringen könnten. Zum einen stellt das Ziel des Arbitrators sicher, dass eine Veränderung der Gruppe (Koalition) der an der Allokation teilnehmenden Aktoren seine Zielerreichung nicht verbessern kann – das Resultat ist bereits effizient. Zum anderen sind alle Koalitionen, an denen der Arbitrator nicht beteiligt ist, ohne Nutzen. In diesem Sinne sind die Resultate der RANG-Mechanismen koalitionsstabil.

**Symmetrie.** Die auf Vickreyzahlungen basierenden RANG-Mechanismen stellen sicher, dass Nachfrager, die identische Nutzenfunktionen aufweisen, den gleichen Nettonutzen realisieren.[4] Damit ist zunächst eines der in Kapitel 2 genannten

[2]Bestmöglich relativ zu den Informationen und Erwartungen, die bei der Instantiierung des jeweiligen konkret zu lösenden Allokationsproblems Verwendung finden.

[3]Vgl. [50].

[4]Ein einfaches Beispiel mag die Aussage verdeutlichen: wenn ein Gut $A$ in einer Vickreyauktion versteigert wird und zwei Agenten, 1 und 2, eine identische Bewertung $b$ für dieses Gut haben, dann gibt es drei mögliche Resultate der Auktion: das Gut verbleibt beim Auktionator und es wird keine Zahlung ge-

Unterkriterien erfüllt. Zudem impliziert die Verwendung von RANG-Mechanismen nicht, dass bestimmte Aktoren aufgrund bestimmter Kriterien systematisch bevorzugt oder benachteiligt werden. Die Bestimmung der Resultate basiert ausschließlich auf den “anonymen” Nutzenfunktionen, die Identität und damit verbundene weitere Eigenschaften der Nachfrager sind nicht von Bedeutung. Eine asymmetrische Behandlung von Aktoren kann natürlich durch die weiteren Rahmenbedingungen für den Koordinationsprozess entstehen, dies lässt sich aber nicht aus der Verwendung eines RANG-Mechanismus begründen.

**Berechnungseffizienz.** Wie bereits in Kapitel 5 diskutiert, sind kombinatorische Auktionsprobleme bzw. ihre Entscheidungsproblemvarianten NP-vollständig. Die betrachteten EBF-Algorithmen streben eine exakte Lösung des Problems an, dies kann für bestimmte Instanzen zu einer inakzeptablen Lösungsdauer führen – allerdings ist dies eine unumgängliche Konsequenz der Problemstellung, die die Implementierung effizienter Allokationen anstrebte, sofern man der Vermutung, dass NP nicht identisch mit P ist, zustimmt. Es bleibt anzumerken, dass die hier beschriebene Form der EBF-Algorithmen nicht mit dem Ziel entstanden ist, jede Möglichkeit der Optimierung des zeitlichen oder räumlichen Berechnungsaufwandes auszunutzen. Es sollte, anders als in den Ansätzen zur optimierten Lösung des sogenannten Winner-Determination-Problems,[5] auch der Zusammenhang zwischen der Bestimmung von effizienter Allokation und Vickreyzahlungen und den hierfür benötigten Informationen beleuchtet werden. Hierzu finden sich in Kapitel 4, im Anhang C und in [27] einige wichtige Resultate, etwa die Propositionen 4.17, 4.25, C.7. Weitere Überlegungen in diesem Zusammenhang finden sich im folgenden Abschnitt.

**Verteilung und Kommunikationseffizienz.** Für Mechanismen, die eine effiziente Allokation bestimmen sollen, ist der Kommunikationsaufwand für kombinatorische Auktionsprobleme im schlechtesten Fall exponentiell zur Anzahl der Güter (vgl. [67] und die unten folgenden Ausführungen). Die für die Winner-Determination-Probleme und generalisierte Vickreyauktionen typische, häufig nur implizit gemachte Annahme, dass die Nutzenfunktionen für die Bestimmung der effizienten Allokation bereits zur Verfügung stehen, führt allerdings bereits für wenige Güter regelmäßig zu einem nicht-handhabbaren Kommunikationsproblem. Auf Seiten der Nachfrager ist mit diesem Kommunikationsproblem die Notwendigkeit verbunden, jede dieser exponentiell vielen Bewertungen auch tatsächlich zu bestimmen. Die Problematik, die bereits durch die große Anzahl solcher Bewertungen entsteht, kann dadurch verstärkt werden, dass die Berechnung einzelner Bewertungen einen großen Aufwand verursachen kann (beispielsweise, wenn interne, möglicherweise NP-harte Allokationsprobleme durch den Nachfrager gelöst werden müssen, um einzelne Bewertungen zu bestimmen, vgl. auch [71, 55]). Zudem kann es zu Enthüllungen der Nutzenfunktion

leistet, Agent 1 erhält $A$ und zahlt $b$, oder Agent 2 erhält $A$ und zahlt $b$. In allen Fällen ist der Nettonutzen der Nachfrager $0$. Diese Gleichbehandlung hinsichtlich des Nettonutzens folgt für das betrachtete Szenario aus der Anwendung des Vickreyprinzips, vgl. hierzu beispielsweise die Ausführungen zu Clarke-Grooves Mechanismen in [62].

[5] Ziel ist die Bestimmung der effizienten Allokation ohne Berücksichtigung von Preisen unter der Annahme des Vorliegens aller “relevanten” Informationen, s. [87, 35].

kommen (zumindest der Arbitrator erhält ja diese Informationen). Die RANG-Mechanismen bieten nun Ansätze, diesen Aufwand so gering wie möglich zu halten. Zum einen nutzen sie die Struktur des Lattice[6], um die Menge der nachgefragten Informationen zu reduzieren. Dies wurde in der vorliegenden Arbeit als partielle Enthüllung bezeichnet. Zum anderen lässt sich auch das Problem der Bestimmung einer absoluten Bewertung entschärfen, indem Mechanismen verwendet werden, die auf der partiellen Enthüllung basieren und Differenzen in den Bewertungen zwischen einer nicht notwendigerweise zu enthüllenden besten Alternative und der momentan betrachteten Alternative erfragen. Solche Mechanismen sind im Detail im Anhang C beschrieben, die möglichen positiven Konsequenzen für die Rechenlast der Nachfrager (auch *cognitive load* genannt) werden dort im Abschnitt C.6.4 kurz beleuchtet. Es bleibt festzuhalten, dass die Kommunikationseffizienz eine wesentliche Rolle beim Entwurf der hier vorgeschlagenen Mechanismen gespielt hat.

Der physikalisch-technische Aspekt der Verteilbarkeit des Koordinationsmechanismus wurde bisher nicht diskutiert. In der abstrakten Modellierung gibt es einen zentralen Arbitrator, der die Resultate bestimmt. Dies impliziert aber keineswegs, dass eine konkrete Realisierung auf einer zentralen Recheneinheit stattfinden muss.[7] Aus einer anderen Sicht heraus erfüllen RANG-Mechanismen die Anforderungen an Verteiltheit unmittelbar, aus der Sicht der Entscheidungsfindung. RANG-Mechanismen fallen in die Kategorie des “decentralized decision mode”, vgl. [65]. Diese Kategorie enthält Mechanismen, in denen Aktoren ohne paar- oder gruppenweise Verhandlungen mittels rein individuell getroffener Entscheidungen ein Koordinationsproblem mit Hilfe einer geschaffenen Institution lösen können – wesentliche Entscheidungen, etwa über die Teilnahme oder das Bietverhalten, werden also *dezentral* durch die einzelnen Aktoren gefällt und die Institution (Arbitrator) bestimmt das Resultat (Allokation und Zahlungen) in Abhängigkeit von diesen Entscheidungen. Auch dieser Aspekt ist nicht unwichtig – durch die weitgehende Entkoppelung der Aktoren, die durch die Anreizkompatibilität und die Annahme, dass informationelle und allokative Externalitäten ausgeschlossen werden können, wesentlich unterstützt wird, bietet sich erst die Möglichkeit, die Lösung von ökonomischen Ressourcenallokationsproblem zumindest in Teilen zu automatisieren.[8]

[6]Der Lattice spiegelt eine abstrakte Beschreibung des Koordinationsproblem wider und benötigt bzw. enthält keine weiteren, nicht unmittelbar im Problem vorhandenen Informationen. Diese Basisstruktur kann also unmittelbar zur Analyse des Koordinationsproblems verwendet werden – jeder Mechanismus “bewegt” sich im Lattice.

[7]Stichworte hier: Redundanz in der Infrastruktur, Verdoppelung von Informationsflüssen, redundante Berechnungen; Verteilbarkeit von EBF-Algorithmen (beispielsweise einzelne Zweige des Lattice), etc. Dies ist aber nicht Thema der vorliegenden Arbeit.

[8]Auch dies bedürfte weiterer Diskussion, ist aber nicht vorrangiges Ziel der Arbeit. Vielleicht verdeutlichen diese und die vorhergehenden Ausführungen aber, dass die Gestaltung der Algorithmen und Mechanismen mit dem Ziel erfolgte, die Gestaltungs- und Verwendungsoptionen für konkrete Koordinationsmechanismen, die auf den hier dargelegten Ergebnissen beruhen, so wenig wie möglich zu beschränken und so sinnvoll wie möglich zu unterstützen. Dies sei gesagt, ohne dass eine präzise Erfüllung dieses Zieles ohne weiteres zu beweisen oder zu messen wäre – die Erfüllung der genannten Kriterien und die weitere Diskussion bieten Anhaltspunkte, die diese Aussage rechtfertigen.

In der Zusammenschau lässt sich festhalten, dass die Qualitätskriterien des Kapitels 2 eine positive Beurteilung der erzielten Ergebnisse erlauben.

## 6.2 Ergebnisse im Kontext und Ausblick

Aus den vielen möglichen Anknüpfungspunkten für eine weiterführende Diskussion der Ergebnisse dieser Arbeit werden im folgenden drei wesentlich erscheinende herausgegriffen und beleuchtet. Zunächst wird die Beziehung zu preisbasierten, iterativen Auktionen diskutiert und es wird argumentiert, dass RANG-Mechanismen eine vielversprechende Alternative zu diesen *indirekten* Mechanismen darstellen. In einem weiteren Unterabschnitt wird die Bedeutung der gemeinsamen Betrachtung von Problemlösung und Informationserhebung betont, die die RANG-Mechanismen auszeichnen. Abgeschlossen wird die Betrachtung durch Überlegungen zu weiteren Anwendungen.

### 6.2.1 Auktionsformen und Informationsbedarf

Eine Alternative zu den vorgestellten RANG-Mechanismen stellen iterative Auktionen[9] dar. Regelmäßig wird argumentiert, dass iterative Auktionen gegenüber direkten Mechanismen Vorteile aufweisen (vgl. [98, 7]). Im folgenden wird argumentiert, dass die wahrgenommenen Vorteile indirekter Mechanismen dem Vergleich mit einem naiven direkten Mechanismus, den generalisierten Vickreyauktionen, entstammen. Im Vergleich mit den in dieser Arbeit vorgestellten Mechanismen, die als partielle direkte Mechanismen aufgefasst werden können, ist die Vorteilhaftigkeit iterativer Auktionen nicht mehr offensichtlich. Um dies zu zeigen, wird ein spezifisches Argument eines der Befürworter von iterativen Auktionen betrachtet.

In [98], einem von Vohra im November 2001 veröffentlichten Diskussionspapier, findet sich folgende Annahme: “*A direct mechanism places a huge computational burden upon the auctioneer and imposes a considerable communication cost between bidder and auctioneer*”.

Als wesentlichen Vorteil iterativer Auktionen gegenüber einer Auktion mit versiegelten Geboten, die in einer Runde durchgeführt wird, identifiziert er den folgenden Aspekt: “*They (might) save bidders from specifying their bids for every possible combination in advance.*”

[9] Englische Auktionen kann man als Beispiel für iterative Auktionen ansehen. Vohra unterscheidet in [98] zwei Typen von iterativen Auktionen: (1) die Bieter reichen in jeder Runde Gebote für Bündel/Allokationen ein. Der Auktionator bestimmt eine vorläufige Allokation. In der nächsten Runde können die Bieter ihre Gebote anpassen. Zusätzliche Regeln können den Ablauf regulieren, etwa mit dem Ziel, einen zügigen Fortschritt herbeizuführen; (2) der Auktionator bestimmt einen Preis und die Bieter geben bekannt, welche Bündel sie zu diesem Preis erwerben möchten. Der Auktionator nimmt diese Mengen-Gebote entgegen und passt gegebenenfalls die Preise an – üblicherweise mit dem Ziel, Angebot und Nachfrage auszugleichen. Für eine Unterscheidung zu den partiell-direkten Mechanismen ist es vor allem wesentlich, zu beachten, dass sich die Gebote eines Agenten wiederholt auf ein und dasselbe Bündel beziehen können.

Vohra vergleicht hier die iterativen Auktionen mit *einem* Vertreter der direkten Mechanismen, den naiv-implementierten Vickreyauktionen, die eine vollständige Übertragung aller Bewertungen in einer Runde erwarten – und dies in allen Fällen, also auch in den Fällen, in denen dies zur Bestimmung einer effizienten Allokation und zugehöriger Vickreyzahlungen gar nicht erforderlich wäre.

Man kann RANG-Mechanismen als *direkte Mechanismen* betrachten, weil sie je Bündel nur höchstens ein Gebot erfordern und somit Teile der Nutzenfunktion unmittelbar (*direkt*) bekannt gegeben werden. Allerdings ist die (spieltheoretische) Unterteilung in direkte und indirekte Mechanismen sehr abstrakt (vgl. auch Anhang B), so dass eine solche Einordnung nicht in jedem Fall unmittelbar klar ist.[10]

Letztlich ist diese Kategorisierung aber nicht wesentlich – wichtig ist für die Unterscheidung zwischen RANG- oder Differenzmechanismen und iterativen Auktionen, dass in iterativen Auktionen ein und derselbe Agent regelmäßig *mehrere* Preisgebote für *ein und dasselbe* Bündel (bzw. mehrere Mengengebote, in denen dasselbe Bündel wiederholt genannt wird – je nach Auktionstyp) abgibt.[11]

Die wesentliche Frage ist letztlich, welche der Informationen, die mindestens benötigt werden, um eine effiziente Allokation und sinnvolle Zahlungen bestimmen zu können, von den Mechanismen abgefragt werden – und welche zusätzlichen Informationen aufgrund des Designs der Mechanismen fließen müssen, die die Informationseffizienz beeinträchtigen. Das Kapitel 4 bietet einige Anhaltspunkte, die bei einer Beantwortung dieser Frage hilfreich sind (vgl. hierzu das Theorem 4.17 bzw. die Proposition 4.18). Weiteres Material bietet [27].

[10] Etwa wenn informationelle Externalitäten relevant sind (weil die Fragen, die ein Agent erhält, Informationen über die Gebote der anderen Agenten enthüllen können).

[11] Die folgende Überlegung zeigt, dass es ohne weiteres vorkommen kann, dass die Kommunikationslast, abhängig von einem minimalen Inkrement und den Auktionsregeln, bei iterativen Auktionen die Kommunikationslast einer Rang-Auktion übersteigt (in diesem Beispiel sogar einer naiven generalisierten Vickreyauktion): nehmen wir an, dass zwei Bieter, 1 und 2, ein Gut A erwerben wollen. Es gelte Free-Disposal. Die Bewertungen sind $u_1(A) = 7$ und $u_2(A) = 15$. Im Rangmechanismus werden beide Bewertungen übermittelt, die Null-Bewertungen des leeren Bündels sind implizit. In einer einfachen binären Kodierung werden 7 Bit "Nutzlast" mit Bewertungsinformationen übertragen. In einer Englischen Auktion (bei der, ohne weitere Informationen über die Mitbietenden, ein Bieten in minimalen Schritten rational ist) mit einem Mindestinkrement von 1 und einem Ausgangspreis von 0, gibt es folgenden Minimalverlauf $b_2 = 1, b_1 = 2, b_2 = 3, b_1 = 4$, $b_2 = 5, b_1 = 6, b_2 = 7$ (würde Agent 1 beginnen, gäbe es ein Gebot mehr). Hier werden mindestens $1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 = 15$ Bits übertragen. Kodiert man ein Gebot als "Ja, ich biete das minimale Inkrement mehr als meine Mitbieter", dann benötigt man 7 Bits. Verkleinert man das minimale Inkrement (das manchmal in der Literatur als $\epsilon$ angesetzt wird, um die Auszahlungsäquivalenz von Vickrey- und englischer Auktion zeigen zu können – sonst würde im Falle des Beginns durch Agent 1 das Gut für 8 verkauft, was natürlich im Falle kombinatorischer Auktionen mit Geboten für viele Güter zu nicht anreizkompatiblen Auktionen bzw. nicht effizienten Allokationen führen würde), dann wird der Unterschied klarer – für 0.1 wäre er bereits 7 zu 70 Bits. Es ist zu beachten, dass eine deutliche Diskrepanz zwischen bester und zweitbester Bewertung in die andere Richtung wirkt – in einer iterativen Auktion wird typischerweise nur das zweithöchste Gebot übertragen, in der vollständigen, verdeckten Auktion das Höchste. Das einfache Beispiel demonstriert aber dennoch, dass eine verallgemeinernde Aussage, iterative Auktionen würden Kommunikation sparen, nicht einmal im Vergleich zu vollständigen direkten Mechanismen haltbar ist (für eine fundamentale Analyse dieser Fragen wäre ein präzise Definition des Begriffs "iterative Auktion" erforderlich. Eine solche ist aber laut Vohra bisher nicht verfügbar).

Es bleibt festzuhalten, dass die RANG-Mechanismen zumindest den vermuteten generellen Nachteil direkter Mechanismen im Hinblick auf die “computational burden” und den Kommunikationsaufwand nicht aufweisen.[12] Ob es möglich sein wird, eine Lattice-basierte Analyse des minimalen Informationsbedarfs auf RANG-Mechanismen oder verwandte Formen zu beziehen und, darauf basierend, Schranken für deterministische Mechanismen beliebiger Form zu identifizieren, bleibt vorerst eine offene und interessante Frage.[13]

Es bleibt weiter festzuhalten, dass ein anreizkompatibles Design von iterativen Auktionen nicht ohne weiteres möglich ist: Iterative Auktionen sind preisbasiert und wenden in aller Regel Verfahren[14] an, die zu Gleichgewichtspreisen führen sollen.[15] Dies führt zu Problemen, weil minimale Gleichgewichtspreise und Vickreyzahlungen nur unter bestimmten, einschränkenden Umständen zusammenfallen – dies gilt nicht nur für kohärente Gleichgewichte oder andere anonyme, uniforme Preise, vgl. Abschnitt 3.6.1, sondern auch für differenzierende Preise, vgl. [15, 14].

Das ebenfalls von Vohra angeführte Argument, dass “*the cognitive burden on bidders, in terms of choosing a strategy, seems to be lower in (some) iterative auctions than their sealed bid couterpart*” ist dann gerade nicht für RANG- oder andere Vickrey-Clarke-Groves-Mechanismen relevant (die dominante Strategie ist die ehrliche Bekanntgabe der Bewertungen), sondern für die iterativen, aber nicht anreizkompatiblen Auktionen (die dann natürlich auch keine Effizienz garantieren können).[16]

---

[12] In einer interessanten Arbeit zur Ressourcenallokationsproblematik im Produktionskontext, die C. Schmidt 1999 veröffentlichte (s. [90]) und die weiter unten noch knapp diskutiert wird, findet sich im Zusammenhang mit der Kommunikationslast von (generalisierten) Vickreyauktionen auf Seite 141 der so nicht ohne weiteres einsichtige Satz (der auch an anderer Stelle nicht genauer begründet wird): “Da es sich um verdeckte Auktionen handelt, wird unmittelbar klar, dass der Kommunikationsbedarf . . . gering ist.” Wie die Diskussion gezeigt haben sollte, ist dies eben *nicht* unmittelbar klar – im Vergleich zur klassisch-naiven Umsetzung von verallgemeinerten Vickreyauktionen (und etwas anderes wird in [90] nicht vorgeschlagen) können die Einwände von Vohra und anderen klarerweise berechtigt sein (wenn es auch im worst case keine Größenordnungsunterschiede gibt, wie die Ergebnisse zur Kommunikationskomplexität von Segal und Nisan [67] zeigen, die feststellen, dass der erforderliche Kommunikationsaufwand sich exponentiell zur Güteranzahl verhalten kann). Im Gegenteil: es muss schon ein gewisser Aufwand betrieben werden, um “direkte” Mechanismen so zu entwerfen, dass die Möglichkeit zur Minimierung des Kommunikationsaufwandes genutzt werden kann, beispielsweise basierend auf den hier vorgestellten RANG-Mechanismen.

[13] Erste Schritte zu ihrer Beantwortung hat der Autor der vorliegenden Arbeit gemeinsam mit T. Sandholm in der Arbeit [27] unternommen (veröffentlicht in den Proceedings der bi-annualen Konferenz der American Association on Artificial Intelligence (AAAI), 2002). Diese fasst einige Resultate dieser Dissertation zusammen und beginnt sie weiterzuführen.

[14] Meist interpretierbar im Rahmen von Algorithmen zur Lösung von primalen ganzzahligen Programmen über ihre dualen Relaxationen, vgl. [15].

[15] Denn nur so lässt sich das dezentrale Entscheidungsverhalten so ausnutzen, dass ein gewolltes Ergebnis entsteht.

[16] Man kann versuchen, diesem Dilemma zu entfliehen, indem man entweder annimmt, dass die Bieter in ihren Fähigkeiten beschränkt sind (und daher nur sehr eingeschränkt zu strategischem Verhalten in der Lage sind, vgl. [73]) und man so dann doch zu “Preisen” gelangen kann, die Vickreyzahlungen entsprechen, oder indem man annimmt, dass die Struktur der Nutzenfunktionen der Bieter bestimmten Einschränkungen unterliegt (dies ist regelmäßig die “gross substitutes”-Bedingung, s. [42, 7, 6], die das Vorhandensein von Komplementaritäten praktisch ausschließt, vgl. auch Kap. 3). Diese Einschränkungen stellen dann sicher, dass minimale Gleichgewichtspreise und Vickreyzahlungen zusammenfallen. Bei der Verwendung solcher Ansätze sollte aber bedacht werden, dass die Eigenschaften der Nutzenfunktio-

Insgesamt liegen die Vorteile iterativer Auktionen im Vergleich zu RANG-Mechanismen sicher *nicht* auf dem Gebiet der Kommunikationslast oder der verminderten kognitiven Last – es bleibt zu fragen, ob im betrachteten Szenario relevante Vorteile iterativer Auktionen überhaupt erkennbar sind.[17]

### 6.2.2 Komplexität und Kommunikationsbedarf

Wie bereits diskutiert, ist das kombinatorische Auktionsproblem (auch Winner-Determination genannt) NP-schwer (vgl. [79][18]) und nicht besser approximierbar, als ein Verhältnis von $\Omega(k^{1-\epsilon})$, wobei $k$ die Anzahl der Gebote angibt (vgl. [87]). Typische Ansätze zur Lösung kombinatorischer Auktionen fallen in eine von drei Kategorien:[19] Suchalgorithmen ([87, 35, 66, 88, 89]), Approximationsalgorithmen ([57, 46]) und eingeschränkte Auktionsprobleme, in denen den Bietern nur Gebote für bestimmte Teilmengen der möglichen Güterbündel erlaubt sind ([79, 88, 94, 75]). Der erste Ansatz führt zu optimalen Lösungen, kann sich aber exponentiell verhalten. Die Approximationsalgorithmen verhalten sich typischerweise polynomial, führen aber auf Grund der Approximierbarkeitsschranke nicht in jedem Fall zu einem Ergebnis akzeptierbarer Qualität. Der dritte Ansatz kann in ähnlicher Weise zu (drastischen) ökonomischen Ineffizienzen führen, wie nichtkombinatorische Auktionen (also Beschränkungen auf Gebote für einzelne Güter), denn es kann für die Bieter unmöglich sein, für die Bündel, an denen sie interessiert sind, adäquat zu bieten.

Die hier vorgestellte Familie von RANG-Mechanismen fällt in die erste Klasse, bestimmt also optimale Lösungen.[20] Sie unterscheidet sich etwa von dem $IDA^*$-basier-

nen in aller Regel nicht bekannt sind, also nur durch Beobachtung des Bietens nachträglich anhand der bekanntgegebenen Gebote überprüft werden können. Selbst, wenn die vorgeschlagene Auktion für die eingeschränkten Nutzenfunktionen strategiesicher (s. Def. B.13) wäre, kann es abhängig von den konkreten Regeln des Mechanismus einen Anreiz für die teilnehmenden Aktoren geben, ihre Nutzenfunktionen nicht wahrheitsgemäß kundzutun, z.b. wenn sie gezwungen sind, Nutzenfunktionen bekanntzugeben, die den Einschränkungen genügen, und daher beispielsweise ($A/4$ $B/4$ $AB/8$) oder ($A/3$ $B/3$ $AB/6$) bekanntgeben, anstelle von ($A/3$ $B/3$ $AB/8$), die Komplementarität aufweist. Natürlich sind dann die Eigenschaften der Auktion andere, als ursprünglich intendiert.

[17] Eine Bewertung solcher Vor- und Nachteile könnten letztlich nur die beteiligten Aktoren bei der auf erwartetem Nutzen basierenden Auswahl des Koordinationsmechanismus durchführen und berücksichtigen. Dies ist eine sicherlich interessante Forschungsaufgabe, hier besonders im Vergleich zwischen RANG-Mechanismen und iterativen Auktionen.

[18] Die NP-Härte des Allokationsproblems weist auch Schmidt 1999 in [90] mittels einer Restriktion auf Knapsackprobleme nach. Sie zeigt zudem, dass mehrdimensionale Knapsackprobleme eine Verallgemeinerung der von ihr unterschiedenen Zuordnungsprobleme für "zerlegbare Aufträge mit bekannter Zerlegung" sind. Diese Probleme entsprechen der allgemeinen Form des 1995 bzw. 1998 in [79] identifizierten kombinatorischen Auktionsproblems oder sind Spezialfälle von diesem.

[19] Dieser Absatz folgt den Ausführungen von Kothari, Sandholm und Suri in [54].

[20] Es ist zu beachten, dass der Einsatz eines exakten Verfahrens nicht notwendigerweise durch die NP-Schwere des Ausgangsproblems unsinnig wird. Zum einen liegen Instanzen nennenswerter Größe im lösbaren Bereich (Sandholm führt Instanzen mit Hunderten von Bündeln und Tausenden von Geboten an), zum anderen kann die vertiefte Einsicht in die zugrundeliegende Problemstruktur auch beim Entwurf von Approximationsverfahren bzw. Heuristiken helfen. So lässt sich unmittelbar ein Any-Time-Verfahren angeben, das zunächst von jedem Agenten sein bevorzugtes Bündel und seine Bewertung hierfür erfragt und dann, ausgehend von einem Lösungsknoten, der aus diesem Bündel und weiteren leeren Bündeln besteht, den Lattice nach oben bzw. zur Seite hin exploriert, um eine bessere Allokation zu bestimmen. Interes-

ten Ansatz Sandholms dadurch, dass der verwendete EBF-Algorithmus die Struktur des Lösungsraum auch im Bereich nichtzulässiger Kombinationen ausnutzt. Die weitere Verbesserung der EBF-Algorithmen ist von zwei Zielen motiviert: zum einen soll nur die (Nutzen-)Information, die zur Bestimmung einer effizienten Allokation mindestens erforderlich ist, von den Bietern erfragt werden. Zum anderen soll diese Information dann so effizient wie möglich verarbeitet werden. Die EBF-Algorithmen versuchen, beide Ziele unmittelbar miteinander zu vereinbaren: die erhaltene Information leitet die weitere Suche und induziert hiermit den weiteren Informationsbedarf. Es ist klar, dass die mangelnde Vorhersagbarkeit der im weiteren Verlauf eingehenden Informationen verhindert, dass immer die optimale Auswahl der nächsten zu expandierenden Kombination getroffen werden kann. Es ist aber zu vermuten, dass für jedes Problem eine Rangordnung für die Präferenzen und ein Tie-Breaking existieren, so dass ein entsprechender RANG-Mechanismus nur die zur Lösung des Allokationsproblems minimale Menge von Informationen erfragt.[21] Dies bleibt Ziel weiterer Untersuchungen. Aufbauend auf den in Kapitel 4 gelegten Grundlagen wurden erste Schritte zu einer präzisen Bestimmung von Grenzen für den notwendigen Befragungsaufwand (unterschieden in Bündel- und Wertfragen) vom Autor der vorliegenden Arbeit und T. Sandholm unternommen, s. [27].

### 6.2.3 Anwendung

#### Modifizierte Szenarien

Die entwickelten Bausteine für Koordinationsmechanismen können auch in Situationen Anwendung finden, in denen Nachfrager *und* Anbieter Nutzenmaximierung betreiben (sogenannte *Exchanges*). Der Lattice kann auch hier als Analyseinstrument

santerweise nähert sich dieses Verfahren sowohl hinsichtlich der Kommunikationseffizienz, als auch mit Blick auf die Optimalität der in [67] genannten Approximationsgüte. Es ist im übrigen zu beachten, dass die Bestimmung der Zahlungen von den erhaltenen Informationen abhängt.

[21] Hier ist noch zu klären, wann Informationen minimal sind. Das einfachste Maß ist die Anzahl der zu einer binären Kodierung benötigten Bits. Es kann aber auch normative Unterscheidungen hinsichtlich der Qualität der enthüllten Information geben (viele Gebote nur in anteiliger Höhe bekannt vs. wenige Gebote für hoch präferierter Bündel exakt bekannt, etc.). Dies müsste dann aber in einer Problembeschreibung mit informationellen Externalitäten erfasst werden. Zunächst scheint es, als würde das betrachtete Modell solche Überlegungen nicht abdecken: die (betrachteten) Interessen der Aktoren beziehen sich ausschließlich auf die Allokation von Gütern (nicht auch von “offenbarten” Informationen). Es ist aber auch klar, dass sich dies im Prinzip auch im gleichen Modell betrachten ließe – der Wert des Erhalts eines Gutes könnte dann von (negativ bewertbaren) Informationsgütern abhängig gemacht werden, die die Offenlegung von Präferenzen erfassen. Dies kann dann noch ergänzt werden um die Modellierung allokativer Externalitäten, um spezifizieren zu können, welche Informationsgüter von wem nicht erhalten werden dürfen. Dies würde aber klarerweise zu einer, für die einzelnen Aktoren und den Mechanismus kaum zu handhabenden, weiteren Explosion des Güterbündelraumes führen. In diesem Zusammenhang ist auch anzumerken, dass die flexible Modellierung von Gütern die hier dargestellte Form von kombinatorischen Auktionen zu einem generellen Instrument macht, das auch kombinatorische Auktionen mit mehreren identischen Gütern [59] oder diskrete multi-variate bzw. Multiattribut-Auktionen [12] überdeckt (vgl. hierzu auch die Ausführungen von Parkes zu Multiattribut-Auktionen auf Seite 310f von [72]). Allerdings können spezifische Modellierungen, die sich bestimmte Eigenschaften zu Nutze machen (z.B. das Vorhandensein mehrerer identischer Güter) vorteilhaft sein, wenn es um die Bestimmung von Lösungen oder die Beschränkung der Kommunikationslast geht.

verwendet werden. Problematisch ist sicherlich die Anreizkompatibilität.[22] Interessant kann in einem Umfeld, in dem strategisches Verhalten praktisch nicht verhindert werden kann, auch der Einsatz des Schrumpfungsverfahrens sein. Ein weiteres Anwendungsfeld ergibt sich, wenn Ausschreibungsverfahren (*reverse auctions*) betrachtet werden, beispielsweise zur Zuweisung von Aufgaben (task allocation). So hat Zelewski bereits 1988 in [109] deutlich darauf hingewiesen, dass Ausschreibungsverfahren, die auf dem Vickreyprinzip basieren, sinnvolle Instrumente darstellen können. Auch hier erscheint die Steuerung des Ausschreibungsverfahrens über den Lattice und eine Adaption der RANG-Mechanismen ohne weiteres möglich.

### Anwendungsfelder

Neben den in Kapitel 5 diskutierten Anwendungen von ökonomischen Koordinationsmechanismen für kombinatorische Allokationsprobleme in Produktionskontexten können eine Reihe weiterer Anwendungsfelder in Erwägung gezogen werden. So nennt etwa die Firma CombineNet Inc.[23] folgende Einsatzfelder:[24]

[22] Für die Anbieter lassen sich analog zu den Nachfragern Überlegungen anstellen, wann Gleichgewichtspreise den Vickreyzahlungen *an die Anbieter* entsprechen. Dies ist, wenn es überhaupt der Fall ist, nur für maximale Gleichgewichtspreise gegeben. *Ein* Gleichgewichtspreisvektor kann nur dann *beiden* Vickreyzahlungsvektoren entsprechen, wenn er eindeutig ist, also minimale und maximale Preise zusammenfallen (hier sehen wir zudem davon ab, dass die Bündelung, die für die Nachfrager gewählt wird, nicht den angebotenen Bündeln auf der Anbieterseite entsprechen muss, die Vickreyzahlungsvektoren also möglicherweise nicht unmittelbar "zusammenpassen". Dies kann man, wie im Exkurs 3.7 angedeutet, durch den Arbitrator und die strikte Trennung in zwei Preisvektoren auffangen. Dann entstehen allerdings Probleme, wenn Aktoren als Nachfrager *und* Anbieter auftreten und beide Vektoren "sehen" können). Diese und weitere Überlegungen sind Themen für weiterführende Arbeiten.

[23] Mit Sitz in Pittsburg, PA, s. `www.combinenet.com`. Diese Firma bietet ein Produkt zum Lösen des Winner-Determination-Problems, dass auf den in [87] diskutierten Ansätzen beruht. Eine genauere Leistungsanalyse findet sich in [89]. Diese basiert auf einem generierten Testdaten-Set. Die Auswahl "sinnvoller" Testdaten für NP-schwere Probleme ist natürlich nicht unproblematisch. Verwandte Testsets stehen an der TU München (`http://www-m9.mathematik.tu-muenchen.de/dm/homepages/devries/comb_auction_supplement/`) und der Stanford University (`http://robotics.stanford.edu/CATS/CATS-readme.html`) als Ausgangspunkt für experimentelle Untersuchungen zur Verfügung. Die Aussagekraft von Testfällen ist ohne ein zugrundeliegendes Verständnis struktureller Problemeigenschaften sehr eingeschränkt. Die Untersuchung weitgehend problemunabhängiger Eigenschaften von Mechanismen bzw. zugrundeliegenden Algorithmen ist ein grundlegender Schritt hin zu einem besseren Verständnis für Problemstrukturen. Diese Vorgehensweise wurde hier gewählt. Trotzdem wäre die Verwendung von Testfällen zur Beurteilung der relativen Leistungsfähigkeit des vorgeschlagenen Mechanismus potentiell interessant. Allerdings ist hierbei zu bedenken, dass das Ziel der Reduzierung der nachgefragten Information in den "normalen" Ansätzen zur Winner-Determination nicht berücksichtigt wird. Vergleiche mit iterativen Auktionen, die Informationsgewinnung und Lösung des Allokationsproblems ebenso parallel anstreben, wie die hier vorgestellten RANG-Mechanismen, erscheinen hier wesentlicher. Die Problemsets an diese Situation zu adaptieren oder neue zu generieren und entsprechende Vergleiche durchzuführen, ist eine interessante weiterführende Fragestellung. Einige experimentelle Untersuchungen zu Verfahren, die auf dem Lattice basieren und aus den hier vorgestellten Ansätzen entstanden, sind (mit vielversprechenden Ergebnissen) an der Carnegie Mellon University bereits durchgeführt worden (s. [49] – allerdings noch nicht im Vergleich zu iterativen Auktionen).

[24] Detailliertere Beschreibungen, die im wesentlichen unabhängig von den Produkten von CombineNet sind und Koordinationsmechanismen für kombinatorische Allokationsprobleme allgemein betreffen, finden sich auf `http://www.combinenet.com/applicable.html`. Andere Firmen, die verwandte Produkte herstellen, werden z.B. in [99] genannt.

Transportation, RFP/RFQ Direct Materials Procurement, Liquidation, Reinsurance and Financial Markets, Energy Satellite Management / Resource Allocation, Media / Advertising, Bandwidth, Construction, Intellectual Property, Privatization, Pollution Credits, Equipment Usage.

Die generellen Eigenschaften der vorgestellten Algorithmen und Mechanismen lässt ihren Einsatz in allen Anwendungsfeldern denkbar erscheinen, in denen die Möglichkeit zur Kombination von Ressourcen[25] Effizienz- oder Nutzensteigerungen verspricht. Weitere detaillierte Überlegungen und Untersuchungen zur Anwendbarkeit müssen Thema für zukünftige Arbeiten bleiben.

### Implementierung

Eine JAVA-Implementierung einer Vorform der RANG-Mechanismen, die einen XML-basierten Austausch von Geboten und Resultaten verwendete, wurde vom Autor der hier vorliegenden Arbeit in Zusammenarbeit mit E. Köppen und F. Dridi erstellt und in [20] beschrieben. Dort werden auch einige für den praktischen Einsatz wesentliche Sicherheitsaspekte diskutiert.[26] Der Nachweis der prinzipiellen Implementierbarkeit des hier vorgestellten Ansatzes war nicht Ziel der hier vorliegenden Arbeit (dies ergibt sich ohnehin aus der stark algorithmischen Vorgehensweise in Kapitel 4). Die Entwicklung praktisch einsetzbarer Implementierungen verbleibt als Aufgabe für zukünftige Arbeiten.[27]

## 6.3 Fazit

Die Arbeit bietet abstrakte und algorithmische Resultate, die zur Analyse und zum Entwurf von ökonomischen Koordinationsmechanismen für kombinatorische Ressourcenallokationsprobleme Verwendung finden können. Neben der Sicherstellung ökonomischer Effizienz wurde auch eine Reduktion der Kommunikationslast angestrebt. Das hier eingeführte Instrument des Rang-Lattice und die vorgeschlagenen RANG-Mechanismen bieten eine Grundlage, um die Informationserfordernisse, die der Einsatz zahlungsbasierter Koordinationsmechanismen zur effizienten Allokation von Ressourcen nach sich zieht, genau zu bestimmen. Aufbauend auf den grundlegenden Überlegungen zu Gleichgewichten und Vickreyzahlungen und den darauf basierenden Algorithmen und Mechanismen wurde demonstriert, wie Scheduling- bzw. Planungsszenarien, in denen eine ökonomische Modellierung mit eigennützigen Aktoren sinnvoll erscheint, behandelt werden können. Die vorgestellten Koordinationsmechanismen schaffen verbesserte Möglichkeiten zur Lösung von ökonomischen, kombinatorischen Ressourcenallokationsproblemen. Diese verbesserten Möglichkeiten bieten erweiterte Optionen

[25] Hier als sehr allgemein anwendbarer Begriff aufgefasst.

[26] Ausführliches zur Sicherheitsthematik im Zusammenhang mit der Implementierung von Koordinationsmechanismen findet sich u.a. in [76].

[27] Bei einer Umsetzung sollte bedacht werden, dass ein kleiner Teil der hier vorgestellten Resultate Teilgegenstand eines US-Patentantrags ist (US 60/263,491, 23.1.2001, pending, inventor: Conen, Sandholm).

für die Gestaltung von Strukturen und Prozessen in und zwischen Betrieben, zwischen Betrieben und Institutionen und zwischen Betrieben und Endkunden.

Insgesamt war es das Ziel der Arbeit, aus einer Verbindung von abstraktem Modell und algorithmischer Lösung einen Beitrag zur Lösung von ökonomischen Koordinationsproblemen zu leisten und Wege zur Verwendung der erzielten Resultate aufzuzeigen. Es bleibt zu hoffen, dass dies im Sinne des folgenden Zitats zum Entwurf erfolgreicher Lösungen beitragen wird.

> "Multiagent systems consisting of self-interested agents are becoming ubiquitous. Such agents cannot be coordinated externally imposing the agent´s strategies. Instead the interaction protocols have to be designed so that each agent really is motivated to follow the strategies that the protocol designer wants it to follow. ... In the future, systems will increasingly be designed, built and operated in a distributed manner. A larger number of systems will be used by multiple real-world parties. The problem of coordinating these parties and avoiding manipulation cannot be tackled by technology or economic methods alone. Instead, the successful solutions are likely to emerge from a deep understanding and careful hybridization of both.´´
>
> *Tuomas Sandholm in [84], S. 251*

# Literaturverzeichnis


[1] ADELSBERGER, H. H., W. CONEN und R. KRUKIS: *Scheduling utilizing Market Models*. In: *Proc. of the International Conference on Computer Integrated Manufacturing (ICCIM)*, Singapore, 1995. World Scientific.

[2] AHRENS, V.: *Dezentrale Produktionsplanung und -steuerung - Systemtheoretische Grundlagen und Anwendungspotentiale*. VDI, Düsseldorf, 1998.

[3] ALBAYRAK, S. und S. BUSSMANN (Hrsg.): *Proc. of the European Workshop on Agent-Oriented Systems in Manufacturing*, Berlin, 1996. Daimler-Benz AG.

[4] ANDERSSON, A., M. TENHUNEN und F. YGGE: *Integer Programming for Combinatorial Auction Winner Determination*. In: *Proceedings of the Fourth International Conference on Multi-Agent Systems (ICMAS)*, S. 39–46, Boston, MA, 2000.

[5] AUSIELLO, G., P. CRESCENZI, G. GAMBOSI, V. KANN, A. MARCHETTI-SPACCAMELA und M. PROTASI: *Complexity and Approximation*. Springer, 1999.

[6] AUSUBEL, L. M.: *An Efficient Dynamic Auction for Heterogenous Objects*. Techn. Ber., University of Maryland, Department of Economics, 2000.

[7] AUSUBEL, L. M. und P. MILGROM: *Ascending Auction with Package Bidding*. Techn. Ber., University of Maryland, Department of Economics, 2002. April 25, 2002.

[8] BAKER, A.: *A Case Study where Agents Bid with Actual Costs to Schedule a Factory*. In: CLEARWATER, S. H. (Hrsg.): *Market-Based Control*, S. 184–223. World Scientific, Singapore, 1996.

[9] BAPTISTE, P. und C. LE PAPE: *A Theoretical and Experimental Comparison of Constraint Propagation Techniques for Disjunctive Scheduling*. In: *Proc. IJCAI 95*, San Mateo, 1995. Morgan Kaufman.

[10] BECK, J. C., A. J. DAVENPORT, E. M. SITARSKI und M. S. FOX: *Texture-Based Heuristics for Scheduling Revisited*. In: *Proceedings of the AAAI-97*, Menlo Park, California, 1997. AAAI, AAAI Press.

[11] BEYER, J.: *“One best way´´ oder Varietät? Strategischer und organisatorischer Wandel von Großunternehmen im Prozess der Internationalisierung.*. Techn.

Ber., Max-Planck-Institut für Gesellschaftsforschung, 2001. Diskussionspapier 01/2, verfügbar unter `http://www.mpi-fg-koeln.mpg.de/pu/mpifg_dp/dp01-2.pdf` (Letzter Zugriff 08-08-02).

[12] BICHLER, M.: *Simulation multivariater Auktionen - Eine Analyse des OTC-Handels mit Finanzderivaten*. Wirtschaftsinformatik, (03), 2000.

[13] BIKHCHANDANI, S. und J. MAMER: *Competitive Equilibrium in an Economy with Indivisibilities*. Journal of Economic Theory, 74:385–413, 1997.

[14] BIKHCHANDANI, S. und J. OSTROY: *The package assignment model*. UCLA Working Paper Series, mimeo, 2001.

[15] BIKHCHANDANI, S., S. DE VRIES, J. SCHUMMER und R. V. VOHRA: *Linear Programming and Vickrey Auctions*, 2001.

[16] BRUCKER, P.: *Scheduling Algorithms*. Springer, 2001.

[17] CHENG, J. Q. und M. P. WELLMAN: *The WALRAS Algorithm: A Convergent Distributed Implementation of General Equilibrium Outcomes*. Computational Economics, 12:1–24, 1998.

[18] CLARKE, E. H.: *Multipart pricing of public goods*. Public Choice, 11:17–33, 1971.

[19] CONEN, W.: *Economic Coordination, Bundled Goods, and the Impact of Complementarities*. In: PARSONS und WOOLDRIDGE (Hrsg.): *Workshop on Decision theoretic and Game theoretic Agents*, London, 1999.

[20] CONEN, W., F. DRIDI und E. KÖPPEN: *A secure XML/Java-based Implementation of Auction Services for Complex Resource Allocation Problems*. In: *Proc. WETICE 2000*. IEEE, 2000.

[21] CONEN, W. und G.NEUMANN (Hrsg.): *Coordination Technology for Collaborative Applications - Organizations, Processes and Agents*. Springer, Berlin, 1998.

[22] CONEN, W. und G. NEUMANN: *Prerequisites for Collaborative Problem Solving*. In: *Proc. of WETICE 1996 - IEEE Fifth Workshops on Enabling Technologies: Infrastructure for Collaborative Enterprises*, Stanford, 1996. IEEE.

[23] CONEN, W. und T. SANDHOLM: *Minimal Preference Elicitation in Combinatorial Auctions*. In: *IJCAI-2001 WS on Economic Agents, Models, and Mechanisms*, S. 71–80, Seattle, WA, Aug. 2001.

[24] CONEN, W. und T. SANDHOLM: *Preference Elicitation in Combinatorial Auctions*. In: *Proceedings of the ACM Conference on Electronic Commerce (ACM-EC)*, S. 256–259, Tampa, FL, Okt. 2001.

[25] CONEN, W. und T. SANDHOLM: *Coherent Pricing of Efficient Allocations in Combinatorial Economies*. In: *Proceedings of the AAAI-02 Workshop on Game Theoretic and Decision Theoretic Agents (GTDT-02)*, August 2002.

[26] CONEN, W. und T. SANDHOLM: *Differential-Revelation VCG Mechanisms for Combinatorial Auctions*. In: *Proceedings of the AAMAS Workshop on Agent Mediated Electronic Commerce IV*, LNAI 2531. Springer, 2002.

[27] CONEN, W. und T. SANDHOLM: *Partial-revelation VCG mechanism for combinatorial auctions*. In: *Proceddings of the National Conference on Artificial Intelligence (AAAI)*, 2002.

[28] CRAMTON, P.: *Spectrum Auctions*. In: CAVE, M., S. MAJUMDAR und I. VOGELSANG (Hrsg.): *Handbook of Telecommunications Economics*. Elsevier Science B.V., 2002.

[29] DEMANGE, G., D. GALE und M. SOTOMAYOR: *Multi-Item Auctions*. Journal of Political Economy, 94:863–872, 1986.

[30] DEMARTINI, C., A. KWASNICA, J. LEDYARD und D. PORTER: *A New and Improved Design For Multi-Object Iterative Auctions*. Techn. Ber. 1054, California Institute of Technology, Social Science, Nov. 1998.

[31] EYMANN, T.: *AVALANCHE – Ein agentenbasierter dezentraler Koordinationsmechanismus für elektronische Märkte*. Doktorarbeit, Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät, Universität Freiburg, 2001. Elektronisch publiziert unter `http://www.freidok.uni-freiburg.de/volltexte/147` (letzter Zugriff 08-08-2002).

[32] FREGE, G.: *Die Grundlagen der Arithmetik*. Wilhelm Koebner, Breslau, 1884. Zitiert nach der orthographisch korrigierten Ausgabe der Universal-Bibliothek Nr. 8425, Philipp Reclam, 1987.

[33] FRENCH, S.: *Sequencing and Scheduling*. Ellis Horwood Limited, 1982.

[34] FUDENBERG, D. und J. TIROLE: *Game Theory*. MIT Press, 1991.

[35] FUJISHIMA, Y., K. LEYTON-BROWN und Y. SHOHAM: *Taming the Computational Complexity of Combinatorial Auctions: Optimal and Approximate Approaches*. In: *Proceedings of the Sixteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI)*, S. 548–553, Stockholm, Sweden, Aug. 1999.

[36] GALE, D.: *The Theory of Linear Economic Models*. McGraw-Hill, New York, Toronto, London, 1960.

[37] GAREY, M. R. und D. S. JOHNSON: *Computers and Intractability*. W. H. Freeman and Company, 1979.

[38] GIFFLER, B. und G. THOMPSON: *Algorithms for solving production scheduling problems*. Operations Research, 8:487–503, 1960.

[39] GREEN, J. und J. LAFFONT: *Incentives in Public Decision Making*. North Holland, Amsterdam, 1979.

[40] GROVES, T.: *Incentives in Teams*. Econometrica, 41:617–631, 1973.

[41] GUL, F. und E. STACCHETTI: *Walrasian Equilibrium with Gross Substitutes*. Journal of Economic Theory, 87:95–124, 1999.

[42] GUL, F. und E. STACCHETTI: *The English Auction with Differentiated Commodities*. Journal of Economic Theory, 92(1):66–95, Mai 2000.

[43] GUTENBERG, E.: *Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, Bd. 1 – Die Produktion*. Springer, 22. Aufl., 1976.

[44] HALLDÓRSSON, M. M.: *Approximations of Weighted Independent Set and Hereditary Subset Problems*. Journal of Graph Algorithms and Applications, 4(1):1–16, 2000. Frühere Versionen erschienen in *Computing and Combinatorics*, Proceedings of the 5th Annual International Conference (COCOON), Tokyo, Japan, 1999 und in den Lecture Notes in Computer Science, Vol. 1627, Springer, Berlin, 1999, S. 261–270.

[45] HOOGEVEEN, H., P. SCHUURMAN und G. WOEGINGER: *Non-approximability results for scheduling problems with minsum criteria*. In: BIXBY, R. E., E. A. BOYD und R. Z. RIOS-MECADO (Hrsg.): *Proceedings of the 6th Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization*, Nr. 1412 in *LNCS*, S. 353–366. Springer, 1998.

[46] HOOS, H. und C. BOUTILIER: *Solving Combinatorial Auctions using Stochastic Local Search*. In: *Proceddings of the National Conference on Artificial Intelligence (AAAI)*, S. 22–29, Austin, TX, Aug. 2000.

[47] HOOS, H. und C. BOUTILIER: *Bidding Languages for Combinatorial Auctions*. In: *Proceedings of the Seventeenth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI)*, S. 1211–1217, Seattle, WA, 2001.

[48] HROMKOVIČ, J.: *Algorithmische Konzepte der Informatik*. Teubner Verlag, 2001.

[49] HUDSON, B. und T. SANDHOLM: *Effectiveness of Preference Elicitation in Combinatorial Auctions*. In: *Proceedings of the AAMAS Workshop on Agent Mediated Electronic Commerce IV*, LNAI 2531. Springer, 2002. Eine Vorversion erschien als technischer Report CMU-CS-02-124 (Carnegie Mellon University, Computer Science Department), März 2002.

[50] HURWICZ, L.: *On Informationally Decentralized Systems*. In: MCGUIRE, C. und R. RADNER (Hrsg.): *Decision and Organization*. Amsterdam: North Holland, 1972.

[51] JACKSON, M.: *Mechanism Theory*. 2000. Noch nicht erschienen, verfügbar unter `http://www.hss.caltech.edu/~jacksonm/mechtheo.pdf` (Letzter Zugriff 08-08-02).

[52] KELSO, A. S. und V. CRAWFORD: *Job matching, coalition formation, and gross substitutes*. Econometrica, 50:1483–1504, 1982.

[53] KOOPMANS, T. und M. BECKMANN: *Assignment problems and the location of economic activities*. Econometric, 25:53–76, 1957.

[54] KOTHARI, A., T. SANDHOLM und S. SURI: *Optimality via a Few Partial Bids*. In: *AAAI-02 Workshop on AI for Intelligent Business*, Edmonton, Canada, 2002.

[55] LARSON, K. und T. SANDHOLM: *Costly Valuation Computation in Auctions*. In: *Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge (TARK VIII)*, Sienna, Italy, July 2001.

[56] LAWLER, E., J. LENSTRA, A. R. KAN, und D. SHMOYS: *Sequencing and Scheduling: Algorithms and Complexity*, Bd. 4 d. Reihe *Handbooks in Operations Research and Management Science*. North-Holland, 1992.

[57] LEHMANN, D., L. I. O'CALLAGHAN und Y. SHOHAM: *Truth Revelation in Rapid, Approximately Efficient Combinatorial Auctions*. In: *Proceedings of the ACM Conference on Electronic Commerce (ACM-EC)*, S. 96–102, Denver, CO, Nov. 1999.

[58] LEONARD, H.: *Elicitation of Honest Preferences for the Assignment of Individual to Positions*. Journal of Political Economics, 91(3):461–479, 1983.

[59] LEYTON-BROWN, K., M. TENNENHOLTZ und Y. SHOHAM: *An Algorithm for Multi-Unit Combinatorial Auctions*. In: *Proceddings of the National Conference on Artificial Intelligence (AAAI)*, Austin, TX, Aug. 2000.

[60] LI, M. und P. VITANYI: *An Introduction to Kolmogorov Complexity and Its Applications*. Springer, 2. Aufl., 1997.

[61] MACKIE-MASON, J. und H. VARIAN: *Generalized Vickrey Auctions*. Techn. Ber., Dept. of Economics, University of Michigan, Ann Arbor, 1994. Verfügbar unter `http://www-personal.umich.edu/~jmm/papers/gva3.pdf` (Letzter Zugriff 08-08-02).

[62] MAS-COLELL, A., M. WHINSTON und J. R. GREEN: *Microeconomic Theory*. Oxford University Press, 1995.

[63] MCMILLAN, J.: *Selling Spectrum Rights*. Journal of Economic Perspectives, 8(3):145–162, 1994.

[64] MORTON, T. E., S. R. LAWRENCE, S. RAJAGOPOLAN und S. KEKRE: *SCHED-STAR - A Price-Based Shop Scheduling Module*. Journal of Manufacturing and Operations Management, S. 131–181, 1988.

[65] MOULIN, H.: *Cooperative Microeconomics*. Princeton University Press, 1995.

[66] NISAN, N.: *Bidding and Allocation in Combinatorial Auctions*. In: *Proceedings of the ACM Conference on Electronic Commerce (ACM-EC)*, S. 1–12, Minneapolis, MN, 2000.

[67] NISAN, N. und I. SEGAL: *The communication complexity of efficient allocation problems*. Working paper, März 2002.

[68] OSBORNE, M. J. und A. RUBINSTEIN: *A Course in Game Theory*. MIT Press, 1994.

[69] PARKES, D. und L. UNGAR: *Iterative combinatorial auctions: Theory and Practice*. In: *Proceddings of the National Conference on Artificial Intelligence (AAAI)*, S. 74–81, Austin, TX, Aug. 2000.

[70] PARKES, D. C.: *iBundle: An efficient ascending price bundle auction*. In: *Proceedings of the ACM Conference on Electronic Commerce (ACM-EC)*, S. 148–157, Denver, CO, Nov. 1999.

[71] PARKES, D. C.: *Optimal Auction Design for Agents with Hard Valuation Problems*. In: *Agent-Mediated Electronic Commerce Workshop at the International Joint Conference on Artificial Intelligence*, Stockholm, Sweden, 1999.

[72] PARKES, D. C.: *Iterative Combinatorial Auctions: Achieving Economic and Computational Efficiency*. Doktorarbeit, Computer and Information Sciences, University of Pennsylvania, 2001.

[73] PARKES, D. C. und L. UNGAR: *Preventing Strategic Manipulation in Iterative Auctions: Proxy-Agents and Price-Adjustment*. In: *Proceddings of the National Conference on Artificial Intelligence (AAAI)*, S. 82–89, Austin, TX, Aug. 2000.

[74] PARUNAK, H. V. D.: *Applications of Distributed Artificial Intelligence in Industry*. In: O'HARE, G. und N. JENNINGS (Hrsg.): *Foundations of Distributed Artificial Intelligence*, S. 139–164. Wiley, New York, 1996.

[75] PENN, M. und M. TENNENHOLTZ: *Constrained multi-object auctions and $b$-matching*. Information Processing Letters, 75(1–2):29–34, Juli 2000.

[76] RÖHM, A. W.: *Sicherheit offener Elektronischer Märkte - Modellbildung und Realisierungskonzept*. Josef Eul Verlag, 2000.

[77] ROPOHL, G.: *Eine Systemtheorie der Technik*. Hanser, München, Wien, 1979.

[78] ROSENSCHEIN, J. S. und G. ZLOTKIN: *Rules of Encounter: Designing Conventions for Automated Negotiation among Computers*. MIT Press, 1994.

[79] ROTHKOPF, M. H., A. PEKEČ und R. M. HARSTAD: *Computationally Manageable Combinatorial Auctions*. Management Science, 44(8):1131–1147, 1998. Eine frühere Version erschien als Technical Report RRR 13-95 des Rutgers Center for Operations Research, Rutgers University, 1995.

[80] SADEH, N.: *Micro-Opportunistic Scheduling: The Micro-Boss Factory Scheduler*. In: ZWEBEN, M. und M. FOX (Hrsg.): *Intelligent Scheduling*. Morgan Kaufman, Palo Alto, California, 1994.

[81] SANDHOLM, T.: *An Implementation of the Contract Net Protocol Based on Marginal Cost Calculations*. In: *Proceedings of the National Conference on Artificial Intelligence (AAAI)*, S. 256–262, Washington, D.C., Juli 1993.

[82] SANDHOLM, T.: *Limitations of the Vickrey Auction in Computational Multiagent Systems*. In: *Proceedings of the Second International Conference on Multi-Agent Systems (ICMAS)*, S. 299–306, Keihanna Plaza, Kyoto, Japan, Dez. 1996.

[83] SANDHOLM, T.: *Negotiation among Self-Interested Computationally Limited Agents*. Doktorarbeit, University of Massachusetts, Amherst, 1996. Verfügbar unter `http://www.cs.cmu.edu/~sandholm/dissertation.ps` (Letzter Zugriff 08-08-2002).

[84] SANDHOLM, T.: *Distributed Rational Decision Making*. In: WEISS, G. (Hrsg.): *Multiagent Systems: A Modern Introduction to Distributed Artificial Intelligence*, Kap. 5, S. 201–258. MIT Press, 1998.

[85] SANDHOLM, T.: *eMediator: A Next Generation Electronic Commerce Server*. In: *Proceedings of the Fourth International Conference on Autonomous Agents (AGENTS)*, S. 73–96, Barcelona, Spain, June 2000.

[86] SANDHOLM, T.: *Issues in Computational Vickrey Auctions*. International Journal of Electronic Commerce, 4(3):107–129, 2000. Special Issue on Applying Intelligent Agents for Electronic Commerce.

[87] SANDHOLM, T.: *Algorithm for Optimal Winner Determination in Combinatorial Auctions*. Artificial Intelligence, 2002.

[88] SANDHOLM, T. und S. SURI: *Improved Algorithms for Optimal Winner Determination in Combinatorial Auctions and Generalizations*. In: *Proceddings of the National Conference on Artificial Intelligence (AAAI)*, S. 90–97, Austin, TX, 2000.

[89] SANDHOLM, T., S. SURI, A. GILPIN und D. LEVINE: *CABOB: A Fast Optimal Algorithm for Combinatorial Auctions*. In: *Proceedings of the Seventeenth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI)*, S. 1102–1108, Seattle, WA, 2001.

[90] SCHMIDT, C.: *Marktliche Koordination in der dezentralen Produktionsplanung*. Edition Wissenschaft: Information – Organisation – Produktion. Gabler, 1999.

[91] SCHÜTTE, R., J. SIEDENTOPF und S. ZELEWSKI: *Koordinationsprobleme in Produktionsplanungs- und -steuerungskonzepten*. In: CORSTEN, H. und B. FRIEDL (Hrsg.): *Einführung in das Produktionscontrolling*, S. 141–187. Hanser, München, 1999.

[92] SCHUMMER, J.: *Manipulation through Bribes*. Journal of Economic Theory, 91:180–198, 2000.

[93] SELZ, D.: *Value Webs - Emerging Forms of Fluid and Flexible Organizations*. Doktorarbeit, Universität St.Gallen, August 1999.

[94] TENNENHOLTZ, M.: *Some Tractable Combinatorial Auctions*. In: *Proceddings of the National Conference on Artificial Intelligence (AAAI)*, Austin, TX, Aug. 2000.

[95] VARIAN, H. R.: *Microeconomic Analysis*. New York: W. W. Norton, 1992.

[96] VARIAN, H. R.: *Mechanism Design for Computerized Agents*. In: *Usenix Workshop on Electronic Commerce*, New York, Juli 1995.

[97] VICKREY, W.: *Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders*. Journal of Finance, 16:8–37, 1961.

[98] VOHRA, R.: *Research Problems in Combinatorial Auctions*. In: *Online-Proceedings of the DIMACS Workshop on Computational Issues in Game Theory and Mechanism Design, 31.10.–2.11.2001*, Rutgers University, 2001. `http://dimacs.rutgers.edu/Workshops/gametheory/vohra-paper.pdf`, (letzter Zugriff 08-08-2002).

[99] VRIES, S. DE und R. VOHRA: *Combinatorial Auctions: A Survey*. Draft of 25. Oktober, 2001.

[100] WARNEKE, H.: *Revolution der Unternehmenskultur. Das fraktale Unternehmen* . Springer, Berlin, 1991.

[101] WEINHARDT, C., P. GOMBER und C. SCHMIDT: *Elektronische Märkte für die dezentrale Transportplanung*. Wirtschaftsinformatik, (39), 1997.

[102] WELLMAN, M.: *A Computational Market Model for Distributed Configuration Design*. In: *Proc. 12th National Conference on Artificial Intelligence (AAAI-94)*, S. 401–407, Seattle, WA, Juli 1994.

[103] WELLMAN, M.: *Market-Oriented Programming: Some early Lessons*. In: CLEARWATER, S. (Hrsg.): *Market-Based Control*. World Scientific, Singapore, 1996.

[104] WURMAN, P. und M. WELLMAN: *Equilibrium Prices in Bundle Auctions*. Santa Fe Institute Working Paper, 1999.

[105] WURMAN, P. R. und M. P. WELLMAN: *AkBA: A Progressive, Anonymous-Price Combinatorial Auction*. In: *Proceedings of the ACM Conference on Electronic Commerce (ACM-EC)*, S. 21–29, Minneapolis, MN, Okt. 2000.

[106] YGGE, F.: *Market-Oriented Programming and its Application To Power Load Management*. Doktorarbeit, Department of Computer Science, Lund University, 1998. Verfügbar unter `http://www.enersearch.se/ygge` (Letzter Zugriff 08-08-2002).

[107] YOKOO, M., Y. SAKURAI und S. MATSUBARA: *Robust combinatorial auction protocol against false-name bids*. Artificial Intelligence, 2001.

[108] ZELEWSKI, S.: *Elektronische Märkte zur Prozeßkoordinierung in Produktionsnetzwerken*. Wirtschaftsinformatik, (39):231–243, 1997.

[109] ZELEWSKI, S.: *Competitive Bidding aus der Sicht des Ausschreibers – ein spieltheoretischer Ansatz –*. Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, 40(5), 1998.

[110] ZHANG, W. und R. E. KORF: *Performance of linear-space search algorithms*. Artificial Intelligence, 79(2):241–292, 1996.

# Anhang A

# Zuordnungsprobleme

Die Ausführungen des Exkurses stützen sich im wesentlichen auf Gale [36]. Die Notation wurde angemaßt. Die Ergebnisse erläutern beispielhaft den Bezug zwischen linearen Programmen und hierzu dualen Programmen. Der Beweis gibt ein konstruktives Verfahren zur Bestimmung dualer Lösungen (Preise) an, das in Abwandlung und Erweiterung im Kapitel 4 zur Preisbestimmung diskutiert wird und unmittelbar zu einen Beweis der Existenz von Gleichgewichtspreisen für den Preismodus GUT des Kapitels 3 führt. Zunächst werden einige Resultate für einfache Zuordnungsprobleme vorgestellt, die dann zum Beweis von Eigenschaften allgemeinerer Zuordnungsprobleme verwendet werden.

## A.1 Einfache Zuordnungsprobleme

Es werden $m$ Individuen $I_1, \ldots, I_m$ und $n$ Job $J_1, \ldots, J_m$ betrachtet. Für jedes $\alpha_{ij}$ der Qualifikationsmatrix $Q = (\alpha_{ij})$ gilt $\alpha_{ij} \in \{0, 1\}$, $\alpha_{ij} = 1$ gibt an, dass das Individuum $i$ für den Job $j$ qualifiziert ist. Nicht-Qualifiziertheit wird entsprechend durch $\alpha_{ij} = 0$ angezeigt. Das einfache Zuordnungsproblem besteht nun darin $m$ verschieden Elemente der Qualifikationsmatrix so zu wählen, dass für jedes Paar der ausgewählten Elemente gilt, dass sie verschiedenen Zeilen und Spalten entstammen, d.h. jeder Job wird nur genau einem Bewerber zugeordnet und jeder Bewerber erhält nur genau einen Job.

Sei $S$ nun eine beliebige Teilmenge der Individuen. Dann gibt $J(S)$ die Menge aller Jobs an, für die wenigstens ein Element von $S$ qualifiziert ist. Dann gilt:

**Theorem A.1.** *Es ist genau dann möglich, alle Bewerber $I_i$ den Jobs $J_j$ 1:1 zuzuordnen, falls für jede Menge $S$ von Bewerbern die zugehörige Menge $J(S)$ wenigstens so viele Elemente enthält, wie $S$.*

Es werden zwei Varianten des Beweises vorgestellt. Beide entstammen [36]. Der erste Beweis basiert auf einer Darstellung des Problems als Netzwerk. Zunächst ist einige Terminologie erforderlich.

**Definition A.2.** *Ein Netzwerk mit Kapazitäten $(N, k)$ besteht aus einer endlichen*

*Menge $N$ von* Knoten. *Ein geordnetes Paar $(x, y)$ von Knoten wird* Kante *genannt. Die Kapazitätsfunktion $k$ ordnet jeder Kante $(x, y)$ eine nichtnegative ganze Zahl $k(x, y)$ zu.*

**Definition A.3.** *Ein* Fluss *in einem Netzwerk $(N, k)$ ist eine Funktion $f$ die jeder Kante $(x, y)$ des Netzwerks eine ganze Zahl zuordnet und zudem folgende Bedingungen erfüllt:*

$$f(x, y) = -f(y, x) \quad \textit{(Skew symmetry)} \tag{A.1}$$

$$f(x, y) \leq k(x, y) \quad \textit{(feasibility)} \tag{A.2}$$

Falls $A$ eine Teilmenge von $N$ und $g$ eine Funktion über $N$ ist, dann ist $g(A)$ definiert als $\sum_{x \in A} g(x)$.

Falls $h$ eine Funktion über den Kanten von $N$ ist und $A$,$B$ Teilmengen von $N$ sind, dann ist $h(A, B)$ definiert als $\sum_{x \in A, y \in B} h(x, y)$.

Falls $A, B, C \subset N$ und $A \cap B = \emptyset$, dann gilt:

$$g(A \cup B) = g(A) + g(B) \tag{A.3}$$

$$h(A \cup B, C) = h(A, C) + h(B, C) \tag{A.4}$$

$$h(C, A \cup B) = h(C, A) + h(C, B) \tag{A.5}$$

Die Bedingungen für Flussfunktionen sind also äquivalent zu

$$f(A, A) = 0 \text{ für alle } A \subset N \tag{A.6}$$

$$f(A, B) \leq k(A, B) \text{ für alle } A, B \subset N \tag{A.7}$$

Betrachtet wird nun das Problem des Transportes von einer Quelle $s$ zu einer Senke $s'$ durch ein möglicherweise kompliziertes Netzwerk. Eine Lösung des Maximum-Flow Problems gibt an, wieviel in einem gegebenen Netzwerk höchstens von einer Quelle zu einer Senke transportiert werden kann.

**Definition A.4.** *Ein Knoten $s \in N$ wird* Quelle *(source) für einen Fluss $f$ genannt, wenn $f(s, N) > 0$ ist. Ein Knoten $s'$ wird* Senke *(sink) für einen Fluss $f$ genannt, wenn $f(s', N) < 0$ ist. Ein Fluss mit einer einzigen Quelle $s$ und einer einzigen Senke $s'$ wird* Fluss von $s$ nach $s'$ *genannt.*

Anmerkung: Wenn $f$ ein Fluss in $(N, k)$ von $s$ nach $s'$ ist, dann gilt $f(x, N) = 0$ für alle $x$ mit $x \neq s, s'$. Zudem ist dann $f(s, N) = f(N, s')$ und der *Wert* des Flusses $f$ ist gleich $f(s, N)$. Ein Fluss mit dem größtmöglichen Wert wird *maximaler Fluss* genannt.

**Definition A.5.** *Ein* Schnitt *(cut) in einem Netzwerk $(N, k)$ unter Berücksichtigung von $s$ und $s'$ ist eine Partition der Knoten $N$ in zwei Mengen $S$ und $S'$ (also gilt $S \cup S' = N$ und $S \cap S' = \emptyset$), so dass $s \in S$ und $s' \in S'$ gelten. Die Kapazität eines Schnittes $(S, S')$ ist $k(S, S')$. Ein Schnitt, dessen Kapazität so niedrig wie möglich ist, wird* minimaler Schnitt *genannt.*

**Lemma A.6.** *Falls $f$ in $(N, k)$ von $s$ nach $s'$ und $S, S'$ ein Schnitt in $(N, k)$ ist, dann ist der Wert von $f$ höchstens $k(S, S')$.*

*Beweis.*

$$\begin{aligned} f(s,N) =& f(s,N) + f(S-s,N) && [\text{weil } f(S-s,N)=0] \\ &= f(S,N) = f(S,S) + f(S,S') && [\text{s. oben}] \\ &= f(S,S') \leq k(S,S') && [\text{s. oben}] \end{aligned} \tag{A.8}$$

□

Wäre die letzte Bedingung eine Gleichung, dann würde unmittelbar folgen, dass $f$ ein maximaler Fluss und $(S, S')$ ein minimaler Cut ist.

**Theorem A.7.** *Der Wert eines maximalen Flusses von $s$ nach $s'$ in $(N, k)$ ist der Kapazität eines minimalen Schnittes unter Berücksichtigung von $s$ und $s'$ gleich.*[1]

Weil der Beweis in seiner Struktur noch eine Rolle für weitere Ergebnisse spielt, sei er hier angegeben.

*Beweis.* Aus der Endlichkeit der Flüsse in $(N, k)$ folgt unmittelbar, dass mindestens ein maximaler Fluss existiert. Sei $\bar{f}$ solch ein maximaler Fluss von $s$ nach $s'$. Ein Kante $(x, y)$ wird *durch $\bar{f}$ saturiert* genannt, wenn $\bar{f}(x, y) = k(x, y)$. Ein spezielle Schnitt $(S, S')$ wird nun wie folgt definiert: Der Knoten $x$ gehört zu $S$, falls entweder $x = s$ oder falls es einen nichtsaturierten Pfad von $s$ nach $x$ gibt (also eine Sequenz von unsaturierten Kanten, $(s, x_1), (x_1, x_2)$, ... ,$(x_k, x)$). Die Menge $S'$ sei das Komplement zu $S$. Um zu zeigen, dass $(S, S'$ tatsächlich ein Schnitt ist, reicht es aus, zu zeigen, dass $s' \in S'$. Angenommen, dies wäre nicht der Fall. Dann müsste es einen unsaturierten Pfad[2] $P$ von $s$ zu $s'$ geben. Würden alle Kanten $(x, y)$ in $P$ liegen, würde $\bar{f}(x, y) < k(x, y)$ gelten. Mit $\delta = \min_{(x,y)\in P}[k(x, y) - \bar{f}(x, y)]$ ließe sich ein neuer Fluss $f'$ konstruieren mit

$$f' = \begin{cases} \bar{f}(x,y) + \delta & \text{für } (x,y) \text{ in } P \\ \bar{f}(x,y) & \text{sonst} \end{cases}$$

und klarerweise wäre der Wert von $f'$ größer als der (maximale!) Wert von $\bar{f}$, also folgt über den Widerspruch die Schnitteigenschaft von $(S, S')$.

Es sei nun angenommen, dass $\bar{f}(S, S') < k(S, S')$ gelte. Dann folgt, dass $\bar{f}(x, y) < k(x, y)$ für ein $x$ aus $S$ und ein $y$ aus $S'$ gilt. Andererseits folgt aus der Definition von $S$, dass es einen nichtsaturierten Pfad von $s$ nach $x$ gibt – und da die Kante $(x, y)$ unter $\bar{f}$ auch unsaturiert ist, folgt ein Widerspruch zwischen der Konstruktion von

[1] Dieses Theorem wird in [36] ohne Einschränkung auf Flüsse mit einer Quelle und einer Senke angegeben. Im Beweis jedoch wird Bezug genommen auf eine bestimmte Quelle $s$ und eine bestimmte Senke $s'$, deshalb wird das Theorem hier entsprechend eingeschränkt präsentiert.

[2] $s$ kann nicht gleich $s'$ sein oder $s$ bzw. $s'$ würden die Quellen- bzw. die Senkeneigenschaft für den Fluss verlieren.

$(S, S')$ und $y \in S'$. Mit dem Lemma von oben folgt nun mit $\bar{f}(S, S') = k(S, S')$ die Minimalität des Schnitts $(S, S')$. □

Dieser Beweis kann in konstruktiver Weise verwendet werden, um maximale Flüsse zu bestimmen: Ausgehend von einem gegebenen Fluss $f_1$ wird die Menge $S_1$ aller Knoten konstruiert, die von $s$ über einen nichtsaturierten Pfad erreicht werden können. Falls $s'$ ein Element von $S_1$ ist (also existiert ein nichtsaturierter Pfad von $s$ zu $s'$), dann kann man einen weiteren Fluss $f'_1$ bestimmen, über den man einen neuen Fluss $f_2 = f_1 + f'_1$ für die nächste Iteration erhält. Ist $s' \notin S$, dann ist $f_1$ bereits der maximale Fluss und $(S_1, N - S_1)$ der minimale Schnitt.

Nun wird ein Netzwerk eingeführt, dass das Zuordnungsproblem repräsentiert. Dazu wird zunächst zur Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen das Symbol $\infty$ mit den beiden definierenden Eigenschaften

$$\text{Für jede ganze Zahl } n, n + \infty = \infty \tag{A.9}$$

$$\text{Für jede ganze Zahl } n, n < \infty \tag{A.10}$$

hinzugefügt.

Ein Zuordnungsnetzwerk sei nun wie folgt definiert: Es gibt $n + m + 2$ Knoten, die aus einer Quelle $s$, einer Senke $s'$, den $m$ Individuen $I_i$ und den $n$ Jobs $J_j$ bestehen. Die Kapazitätsfunktion sei wie folgt definiert:

$$k(s, I_i) = 1 \text{ für alle } i \tag{A.11}$$

$$k(J_j, s') = 1 \text{ für alle } j \tag{A.12}$$

$$k(I_i, J_j) = \infty \text{ if } I_i \text{ ist qualifiziert für } J_j \tag{A.13}$$

Alle anderen Kapazitäten seien $0$.

Der maximale Fluss in diesem Netzwerk ist $m$, weil der Schnitt $(s, N - s)$ die Kapazität $m$ ausweist. Es ist klar, dass ein Zuordnungsproblem lösbar ist, wenn der Fluss tatsächlich $m$ erreicht, denn dann muss durch jeden Knoten $I_i$ ein Fluss von $1$ fließen. Die Zuordnung lässt sich angeben, indem man jedes Individuum $i$ genau dann einem Job $j$ zuordnet, wenn der Fluss zwischen den entsprechenden Knoten $1$ beträgt. Es folgt die erste Variante des Beweises des obigen Theorems:

*Beweis.* Aus dem oben gesagten folgt, dass die angegebene Bedingung notwendig ist. Um zu beweisen, dass sie auch hinreichend ist, wird angenommen, dass es nicht möglich ist, alle Individuen zuzuordnen. Dann haben sowohl der maximale Fluss als auch die minimalen Schnitte im Zuordnungsnetzwerk Werte kleiner $m$. Sei $(S, S')$ ein minimaler Schnitt und sei $S$ gegeben durch

$$S = \{s, I_1, \ldots, I_p, J_1, \ldots, J_q\}$$

Dann gilt für $I \leq p$ und $j > q$, dass $I_i$ nicht qualifiziert ist für $J_j$, denn anderenfalls wäre $k(I_i, J_j) = \infty$ und $k(S, S' = \infty$ also nicht minimal. Man erhält

$$m > k(S, S' = \sum_{i>p} k(s, I_i) + \sum_{j \leq q} k(J_j, s_\prime) = m - p + q$$

und daher $p > q$. Also sind die Individuen $I_1, \ldots, I_j$ für höchstens $q$ Jobs, $J_1, \ldots, J_q$, qualifiziert. □

Dies komplettiert den Beweis des Theorems A.1.

## A.2 Optimale Zuordnungsprobleme

Es sei angenommen, dass eine Fabrik $n$ verschiedene Jobs zu vergeben hätte. Es bewerben sich $m$ verschiedene Anwärter für diese Jobs. Mittels eines Tests werden die Fähigkeiten der Bewerber in Bezug auf die angebotenen Jobs quantifiziert. Sei $\alpha_{ij}$ die nichtnegative, ganzzahlige[3] Bewertung der Qualifikation des Bewerbers $i$ für den Job $j$. Zu finden ist eine 1:1-Zuordnung von Bewerbern zu Jobs, so dass die Effektivität dieser Zuordnung, gemessen als Summe der Bewertungen, maximiert wird.

Man kann dieses Problem als ganzzahliges lineares Programm ausdrücken:

$$\begin{aligned}
\text{Maximiere} \quad & \sum_{i,j} \alpha_{ij} x_{ij} \\
\text{u.d.B.} \quad & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq 1 \quad j = 1, \ldots, n \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq 1 \quad i = 1, \ldots, m \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j
\end{aligned} \tag{A.14}$$

Aus der Lösung des Programms kann man direkt eine optimale Zuordnung ableiten, indem man den Bewerber $i$ dem Job $j$ genau dann zuordnet, wenn $x_{ij} = 1$. Die einschränkenden Bedingungen stellen sicher, dass jeder Job nur höchstens einem Bewerber zugeordnet wird und jeder Bewerber nur höchstens einem Job.

Zunächst sei angemerkt, dass es ausreicht, nur den Fall $m = n$ zu betrachten. Gibt es mehr Bewerber als Jobs, dann kann man $m - n$ Dummy-Jobs einführen, für die alle Bewerber das gleiche Rating $0$ haben. Klarerweise ist die Lösung dieses Problems weiterhin eine Lösung des Ausgangsproblems. Analog kann man Dummy-Bewerber einführen, wenn die Anzahl der Jobs die Anzahl der Bewerber übersteigt. Man kann

[3] Diese Einschränkung nimmt Gale nicht vor, in dem folgenden Beweis ist sie allerdings implizit enthalten. Der Beweis lässt sich allerdings auch ohne weiteres an nichtganzzahlige Bewertungen anpassen, dies ist in einer weiteren Fußnote beschrieben.

nun annehmen, dass jeder Bewerber einem Job zugeordnet wird, denn die Nichtnegativität der Bewertungen stellt sicher, dass es keinen Vorteil bringen kann, einen Bewerber ohne Job zu lassen (das beinhaltet auch die Dummy-Jobs – im Ausgangsproblem erhalten natürlich Bewerber, die im erweiterten Modell einem Dummy-Job zugeordnet wurden, keinen Job). Die Ungleichungen werden daher zu Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{Maximiere} \quad & \sum_{i,j} \alpha_{ij} x_{ij} \\ \text{u.d.B.} \quad & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad j = 1, \ldots, n \\ & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad i = 1, \ldots, m \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \end{aligned} \tag{A.15}$$

Vernachlässigt man das Erfordernis, dass alle $x_{ij}$ ganzzahlig sein sollen, dann entspricht dieses Programm dem kanonischen Maximum-Problem [36], dessen Dual wie folgt angegeben werden kann:

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & \sum_{i}^{n} s_i + \sum_{j}^{n} p_j \\ \text{u.d.B.} \quad & s_i + p_j \geq \alpha_{ij} \quad \forall i, j \end{aligned} \tag{A.16}$$

Gale zeigt nun, dass solche Zahlen $s_1, \ldots, s_n$ und $p_1, \ldots, p_n$ mit einer Ganzzahligkeitsannahme existieren.

**Theorem A.8.** *Mit der Annahme, dass alle $s_i$, $p_j$ und $x_{ij}$ ganzzahlig sind, gilt, dass das in* (A.14) *bestimmte Maximum dem in* (A.16) *bestimmten Minimum gleich ist.*

*Beweis.* Es ist klar, dass

$$\max(\sum_{i,j} x_{ij}\alpha_{ij}) \leq \min(\sum_{i=1}^{n} s_i + \sum_{j=1}^{n} p_j) \tag{A.17}$$

$$\begin{aligned} \text{gilt, weil} \quad \sum_{i,j} x_{ij}\alpha_{ij} & \leq \sum_{i,j} x_{ij}(s_i + p_j) \\ & = \sum_{i} s_i (\sum_{j} x_{ij}) + \sum_{j} p_j (\sum_{i} x_{ij}) \\ & = \sum_{i=1}^{n} s_i + \sum_{j=1}^{n} p_j \end{aligned}$$

Es sei nun angenommen, dass $s_1, \ldots, s_n$ und $p_1, \ldots, p_n$ eine minimale Lösung des Programms A.16 sind. Dann sei $P$ die Menge aller Indexpaare $(i, j)$, so dass $s_i + p_j = \alpha_{ij}$ sind. Nun wird das einfache Zuordnungsproblem (s. Abschnitt A.1)[4] mit $n$ Bewerbern und $n$ Jobs betrachtet, in dem Bewerber $i$ genau dann qualifiziert für einen Job $j$ ist, wenn $(i, j) \in P$. Es gibt nun 2 Fälle:

*Fall 1:* Alle $n$ Bewerber können den $n$ Jobs eineindeutig zugeordnet werden. Dann kann man eine Zuordnung vornehmen und genau dann $x_{ij} = 1$ setzen, wenn $i$ dem Job $j$ zugeordnet wurde, anderenfalls ist $x_{ij} = 0$. Setzt man diese $x_{ij}$ in (A.2) ein, dann wird die Ungleichung zu einer Gleichung, weil aus der Konstruktion von $P$ folgt, dass $x_{ij}$ genau dann 1 ist, wenn $\alpha_{ij} = s_i + p_j$ und anderenfalls $x_{ij} = 0$ gilt. Daraus folgt die Optimalität der Zuordnung.

*Fall 2:* Nicht alle Bewerber können eineindeutig Jobs zugeordnet werden. Dann folgt aus Theorem A.1, dass es eine Menge $K$ von $k$ Bewerbern gibt, so dass die Menge $J(K)$ der Jobs, für die diese Bewerber qualifiziert sind, weniger Elemente hat, als die Menge $K$, d.h. $|J(K)| < k$. Die Kardinalität der Menge $J(K)$ wird im folgenden als $q$ bezeichnet. Nun werden neue duale Variablen, $s'_i$ und $p'_j$ definiert:

$$s'_i = \begin{cases} s_i - 1 & \text{für } i \in K \\ s_i & \text{für } i \notin K \end{cases}$$

$$p'_j = \begin{cases} p_j + 1 & \text{für } j \in J(K) \\ p_j & \text{für } j \notin J(K) \end{cases}$$

Die neuen dualen Variablen genügen weiterhin der einschränkenden Bedingung des dualen Programms. Dies sieht man wie folgt:

$$\begin{array}{rl} \text{falls } i \notin K & \text{dann } s'_i + p'_j \geq s_i + p_j \geq \alpha_{ij} \\ \text{falls } i \in K,\ j \in J(K) & \text{dann } s'_i + p'_j = (s_i - 1) + (p_j + 1) = s_i + p_j \geq \alpha_{ij} \\ \text{falls } i \in K,\ j \notin J(K) & \text{dann } (i, j) \notin P, \text{ und damit nach Def. } P \;\; s_i + v_j > \alpha_{ij} \text{ und,} \\ & \text{da alle Werte ganzzahlig}^5\text{sind, } s_i + v_j \geq \alpha_{ij} + 1 \\ & \text{bzw. } (s_i - 1) + p_j \geq \alpha_{ij}, \text{ und damit } s'_i + p'_j \geq \alpha_{ij}. \end{array}$$

Also sind die Variablen $s'_i$ und $p'_j$ gültig (feasible).

[4] Das einfache Zuordnungproblem (simple assignment problem) entspricht einem optimalen Zuordnungsproblem (optimal assignment problem), in dem für alle $i, j$ gilt, dass $\alpha_{ij} \in \{0, 1\}$. Für eine beliebige Menge $S$ von Bewerbern sei $J(S)$ die Menge an Jobs, für die wenigstens ein Mitglied von $S$ qualifiziert ist (das zugehörige $\alpha$ also gleich 1 ist). Es gilt das bereits bewiesene Theorem A.1.

[5] Sind die Bewertungen $\alpha_{ij}$ nicht ganzzahlig, dann kann man auch an den entsprechenden Stellen von der nächstgrößeren ganzen Zahl ausgehen.

Auf der anderen Seite gilt

$$\sum_i s'_i + \sum_j p'_j = \sum_i s_i - k + \sum_j p_j + q = \sum_i s_i + \sum_j p_j + (q - k)$$

und, mit $q < k$, würde man einen kleineren Wert als Lösung für A.16 erhalten und dies würde im Widerspruch zur angenommen Optimalität der Lösung mit $s_i$ und $p_j$ stehen. $\square$

# Anhang B

# Anreizkompatibilität

Dieser Anhang gibt einen knappen Überblick über die Notation, die im Zusammenhang mit der Darstellung von Anreizproblemen in der Mechanismus-Literatur verwendet wird. Die wesentlichen Resultate werden dann präsentiert. Die Notation folgt im wesentlichen der Darstellung in Jackson [51].

**Definition B.1 (Individuen).** *Eine endliche Menge von* Individuen *interagiert. Die Menge der Individuen wird mit $N = \{1, \ldots, n\}$ bezeichnet.*

**Definition B.2 (Entscheidungen).** *Die Menge der potentiell möglichen* sozialen Entscheidungen *wird mit $D$ bezeichnet. Die Menge kann, je nach Anwendungskontext, endlich oder unendlich sein.*

**Definition B.3 (Information).** *Die Individuen verfügen über private Informationen. Die Information, über die das Individuum $i$ verfügt, wird durch den* Typ *$\theta_i$ repräsentiert, der der Menge $\Theta_i$ entstammt. Es wird $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ und $\Theta = \times\Theta_i$ geschrieben.*

**Definition B.4 (Präferenzen).** *Individuen haben Präferenzen für Entscheidungen, die durch eine* Nutzenfunktion *$u_i : D \times \Theta_i \to \mathbb{R}$ angegeben werden, d.h.., $u_i(d, \theta_i)$ gibt den Benefit an, den ein Individuum $i$ des Typs $\theta_i \in \Theta_i$ erhält, wenn die Entscheidung $d \in D$ getroffen wird.*

Mit $u_i(d, \theta_i) > u_i(d', \theta_i)$ folgt, dass das Individuum $i$ des Typs $\theta_i$ die Entscheidung $d$ gegenüber der Entscheidung $d'$ bevorzugt. Die Tatsache, dass die Präferenzen für (bzw. der Nutzen von) Entscheidungen für die Individuen nur von ihrem eigenen Typ abhängt, bestimmt ein Setting mit sogenannten privaten Werten (*private values*). Dies kann, je nach beschriebenem Anwendungsfall, natürlich auch anders definiert werden.

**Definition B.5 (Entscheidungsregel, (Ex-post) Effizienz).** *Eine* Entscheidungsregel *ist eine Abbildung $d : \Theta \to D$, die unter Beachtung des Typvektors eine Auswahl (*choice*) aus den möglichen Entscheidungen trifft. Eine Entscheidungsregel ist* effizient, *falls*

$$\sum_i u_i(d(\theta), \theta_i) \geq \sum_i u_i(d', \theta_i) \quad \textit{für alle } \theta \in \Theta, d' \in D$$

Diese Auffassung von Effizienz verfolgt die Maximierung des Gesamtwertes und fällt mit Pareto-Effizient dann zusammen, wenn der Nutzen zwischen den Individuen übertragbar (*transferable*) ist.

**Definition B.6 (Transfer).** *Eine Funktion $t : \Theta \to \mathbb{R}^n$ wird* Transferfunktion *genannt. Der Funktionswert $t_i(\theta)$ repräsentiert die Zahlung, die $i$ erhält (oder leistet, falls der Wert negativ ist), wenn der Typvektor $\theta$ der Zahlung zugrunde liegt.*

**Definition B.7 (Soziale Auswahlfunktion).** *Ein Paar $(d, t)$ aus einer Entscheidungsfunktion $d$ und einer Transferfunktion $t$ wird als* soziale Auswahlfunktion *(sozial choice function) bezeichnet und mit $f$ bezeichnet.*

**Definition B.8 (Quasilinearer Nutzen).** *Sei $f$ eine soziale Auswahlfunktion. Dann ist der Nutzen, den $i$ realisiert, wenn $\hat{\theta}_i$ den annoncierten (also durch die Individuen bekanntgegebenen) Typvektor angibt, wie folgt bestimmt*

$$u_i(\hat{\theta}_i, d, t) = u_i(d(\hat{\theta}), \theta_i) + t_i(\hat{\theta})$$

Eine solche Formulierung von Präferenzen (bzw. Nutzen) wird auch *quasi-linear* genannt (vgl. Jackson, [51]).

**Definition B.9 (Gültigkeit, Balance).** *Eine Transferfunktion $t$ wird* gültig *(feasible) genannt, falls $0 \geq \sum_i t_i(\theta)$ für alle $\theta \in \Theta$ erfüllt ist. $t$ ist* (budget-)balanciert, *falls $\sum_i t_i(\theta) = 0$ für alle $\theta \in \Theta$.*

Jackson merkt an, dass es im Falle von Transfers, die zu weniger als $0$ summiert werden, nicht dazu kommen darf, dass der Überschuss (es wurde mehr bezahlt, als ausgegeben) nicht an die "Gesellschaft" (bestehend aus den teilnehmenden Individuen) zurückgegeben wird – ansonsten würde eine andere Transferfunktion realisiert, die wiederum andere Anreize für die Bekundung von Präferenzen nach sich zöge. Wenn eine Transferfunktion nicht gültig ist, dann muss zu ihrer Realisierung Geld zur Verfügung stehen, dass der Gesellschaft von Individuen *von außen* zugeführt werden kann.

Balance ist ein wesentlicher Aspekt, wenn die Betrachtung der Effizienz nicht nur von der Entscheidungsregel, sondern auch von den Transfers abhängen soll – eine effiziente Entscheidung, die sich auch mit balancierten Transfers realisieren lässt, ist attraktiver, als eine Entscheidung, die zu einem Nettoverlust (aus der Sicht der Gesellschaft der beteiligten Individuen) führt.

**Definition B.10 (Mechanismus).** *Eine* Mechanismus *ist ein Paar $(M, g)$. Hierbei ist $M = M_1 \times \cdots \times M_n$ das Kreuzprodukt der sogenannten* Message- *bzw.* Strategieräume *der Individuen und $g : M \to \mathbb{R}^n$ ist eine* Ergebnisfunktion *(outcome function). Zur Schreibweise: Für jedes Messageprofil $m = (m_1, \ldots, m_n)$ bezeichnet $g(m) = (g_d(m), g_{t,1}(m), \ldots, g_{t,n}(m))$ die resultierende Entscheidung ($d$) und die zugehörigen Transfers ($t$).*

Als *Mechanismus-Design-Problem* wird das Problem bezeichnet, einen Mechanismus so zu entwerfen, dass die Individuen, die mittels des Mechanismus interagieren, einen

Anreiz haben, ihre Nachrichten (messages) als Funktion ihrer privaten Information so auszuwählen, dass ein sozial gewünschtes Ergebnis realisiert wird (wir folgen Jackson, der Messages und Strategien miteinander identifiziert).

**Definition B.11 (Dominante Strategie).** *Eine Strategie $m_i \in M_i$ ist eine* dominante Strategie *für den Typ $\theta_i \in \Theta_i$, falls*

$$u_i(g_d(m_{-i}, m_i), \theta_i) + g_{t,i}(m_{-i}, m_i) \geq u_i(g_d(m_{-i}, \hat{m}_i), \theta_i) + g_{t,i}(m_{-i}, \hat{m}_i)$$

*für alle $m_{-i}$ und $\hat{m}_i$.*

Eine dominante Strategie hat die wichtige Eigenschaft, dass ihre Wahl optimal für den Spieler (das Individuum als Teilnehmer am Mechanismus) ist – und zwar unabhängig von der Wahl der Strategien der anderen Spieler. Es ist klar, dass eine Situation, in der dominante Strategien für jeden Spieler existieren, besonders plausible Vorhersagen des Spielerverhaltens erlaubt. Leider ist die Forderung nach der Existenz dominanter Strategien für einige Anwendungen zu strikt. Dennoch sei sie hier näher betrachtet.

**Definition B.12.** *Eine soziale Auswahlfunktion $f = (d, t)$ wird durch einen Mechanismus $(M, g)$ in dominanten Strategien* implementiert, *wenn es Funktionen $m_i : \Theta_i \to M_i$ gibt, so dass $m_i(\theta_i)$ eine dominante Strategie für jedes Individuum $i \in N$ und jeden Typ $\theta_i \in \Theta_i$ ist und $g(m(\theta)) = f(\theta)$ für alle $\theta \in \Theta$.*

Es ist anzumerken, dass eine soziale Auswahlfunktion auch unmittelbar als Mechanismus angesehen werden kann, für den $M_i = \Theta_i$ und $g = f$ gelten. Solche Mechanismen werden als *direkte Mechanismen* bezeichnet.[1]

**Definition B.13 (Dominant-strategisch anreizkompatibel).** *Ein direkter Mechanismus (bzw. eine soziale Auswahlfunktion) $f = (d, t)$ ist dominant-strategisch anreizkompatibel, falls $\theta_i$ eine dominante Strategie für jedes Individuum $i \in N$. Eine solche soziale Auswahlfunktion wird auch* strategiesicher *(strategy-proof) genannt.*

Direkte Mechanismen sind ein wichtiges Hilfsmittel bei der Untersuchung der Eigenschaften von (Klassen von) Mechanismen, den sie erlauben die Formulierung des sogenannten *direct revelation principle*:

**Proposition B.14 (Enthüllungsprinzip für dominante Strategien).** *Falls ein Mechanismus $(M, g)$ eine soziale Auswahlfunktion $f = (d, t)$ in dominanten Strategien implementiert, dann ist der direkte Mechanismus $f$ dominant-strategisch anreizkompatibel.*

[1] Häufig scheint implizit angenommen zu werden (etwa in der Dissertation von Parkes), dass der Typ des Agenten direkt als *eine* Nachricht dem Mechanismus bekanntgegeben wird. Ob das auch das partielle Enthüllen eines Typs beinhaltet, ist nicht unmittelbar klar. Intuitiv ist das aber natürlich noch "besser", denn es erlaubt – ohne die potentiellen "Umwege" indirekter Mechanismen –, die Beschränkung auf die tatsächlich benötigten Informationen. Das geht in der Abstraktion ein wenig verloren, ist also nicht vollständig hilfreich. Die Annahme, dass ein direkter Mechanismus immer alle Typinformationen benötigt, ist aber definitiv nicht sinnvoll, s. hierzu die Ausführungen im Kapitel 4. Dies hat aber zu einer Reihe von Missverständnissen in der ökonomischen Literatur geführt (so wird regelmäßig davon ausgegangen, dass eine GVA immer alle Typinformationen benötigt – bei passender Bestimmung der zur Verfügung stehenden Informationen lässt sich aber eben zeigen, dass Einsparungen sehr wohl möglich sind, s. wiederum Kap. 4 und die Diskussion in Kap. 6.)

Ausgehend von einer effizienten Entscheidungsregel $d$ wird nun nach einer Transferregel $t$ gesucht, so dass die resultierende soziale Auswahlregel $(d,t)$ dominant-strategisch anreizkompatibel ist. Dies führt zu den sogenannte Groves-Schemata, die als vollständige Klasse von sozialen Auswahlfunktionen zuerst von Theodore Groves beschrieben wurden (s. [40], der zweite Teil des folgenden Theorems stammt allerdings von Jerry Green und Jean-Jacques Laffont, [39]).

**Theorem B.15 (Groves-Schemata).** *(1) Sei $d$ eine effiziente Entscheidungsregel. Falls für jedes $i \in N$ eine Funktion $x_i : \times_{j \neq i} \Theta_j \to \mathbb{R}$ existiert, so DAX*

$$t_i(\theta) = x_i(\theta_{-i}) + \sum_{j \neq i} u_j(d(\theta), \theta_j), \tag{B.1}$$

*dann ist $(d,t)$ dominant-strategisch anreizkompatibel.*

*(2) Sei nun $d$ eine effiziente Entscheidungsregel, $(D,t)$ dominant-strategisch anreizkompatibel und die Typräume seien komplett in dem Sinne, dass $\{u_i(\cdot, \theta_i) | \theta_i \in \Theta_i\} = \{v : D \to \mathbb{R}\}$ für jedes $i$, dann existiert zu jedem $i$ eine Funktion $x_i : \times_{j \neq i} \Theta_j \to \mathbb{R}$ so dass die Transferfunktion $t$ die Bedingung* (B.1) *erfüllt.*

Zum Abschluss sei der Beweis hier angegeben (vgl. [51]).

*Beweis.* (ad 1 – Widerspruch) Es sei angenommen, dass $d$ eine effiziente Entscheidungsregel ist und das zu jedem $i \in N$ eine Funktion $x_i(\cdot)$ der gewünschten Form existiert, so dass die resultierende Transferfunktion zwar die Bedingung (B.1) erfüllt, $(d,t)$ aber nicht dominant-strategisch anreizkompatibel ist. Dann existieren $i$, $\theta$ und $\hat{\theta}_i$, so dass

$$u_i(d(\theta_{-i}, \hat{\theta}_i), \theta_i) + t_i(\theta_{-i}, \hat{\theta}_i) > u_i(d(\theta), \theta_i) + t_i(\theta).$$

Die Bedingung (B.1) impliziert, dass

$$\begin{aligned} u_i(d(\theta_{-i}, \hat{\theta}_i), \theta_i) + x_i(\theta_{-i}) + \sum_{j \neq i} u_j(d(\theta_{-i}, \hat{\theta}_i), \theta_j) \quad &> \\ u_i(d(\theta), \theta_i) + x_i(\theta_{-i}) + \sum_{j \neq i} u_j(d(\theta), \theta_j) & \end{aligned}$$

bzw. das

$$u_i(d(\theta_{-i}, \hat{\theta}_i), \theta_i) + \sum_{j \neq i} u_j(d(\theta_{-i}, \hat{\theta}_i), \theta_j) > u_i(d(\theta), \theta_i) + \sum_{j \neq i} u_j(d(\theta), \theta_j)$$

Dies steht im Widerspruch zur angenommenen Effizienz von $d$.

(ad 2) Sei $d$ eine effiziente Entscheidungsregel, $(d,t)$ sei dominant-strategisch anreizkompatibel, und die Typräume sind komplett. Es ist klar, dass Funktionen $x_i : \Theta \to \mathbb{R}$ für jedes $i \in N$ existieren, so dass

$$t_i(\theta) = x_i(\theta_{-i}) + \sum_{j \neq i} u_j(d(\theta), \theta_j).$$

Es ist nun ausreichend zu zeigen, dass die $x_i$ unabhängig vom jeweiligen Typ $\theta_i$ sind. Es sei im Gegenteil angenommen, dass es $i$, $\theta$ und $\hat{\theta}_i$ gibt (o.B.d.A.), so dass $x_i(\theta) > x_i(\theta_{-i}, \hat{\theta}_i)$. Sei $\epsilon = \frac{1}{2}[x_i(\theta) - x_i(\theta_{-i}, \hat{\theta}_i)]$. Aus der dominant-strategischen Anreizkompatibilität folgt, dass $d(\theta) \neq d(\theta_{-i}, \hat{\theta}_i)$. Mit der Vollständigkeit der Typräume folgt, dass es ein $\bar{\theta}_i \in \Theta_i$ gibt, so dass

$$u_i(d(\theta_{-i}, \hat{\theta}_i), \bar{\theta}_i) + \sum_{j \neq i} u_j(d(\theta_{-i}, \hat{\theta}_i), \theta_j) = \epsilon$$

und

$$u_i(d, \bar{\theta}_i) + \sum_{j \neq i} u_j(d, \theta_j) = 0$$

für alle $d \neq d(\theta_{-i}, \hat{\theta}_i)$. Aus diesen Bedingungen zu $\bar{\theta}_i$ folgt mit der Effizienz von $d$, dass $d(\theta_{-i}, \bar{\theta}_i) = d(\theta_{-i}, \hat{\theta}_i)$. Mit der dominant-strategischen Anreizkompatibilität folgt dann, dass $t(\theta_{-i}, \bar{\theta}_i) = t(\theta_{-i}, \hat{\theta}_i)$. Also ist der Nutzen, der für $i$ aus einer ehrlichen Bekanntgabe im Falle von $\bar{\theta}_i$ entsteht

$$u_i(\theta_{-i}, \hat{\theta}_i, \bar{\theta}_i, d, t) = \epsilon + x_i(\theta_{-i}, \hat{\theta}_i)$$

und durch das Lügen (in dem er $\theta_i$ anstelle von $\bar{\theta}_i$ annonciert), erhielte $i$

$$u_i(\theta_{-i}, \theta_i, \bar{\theta}_i, d, t) = x_i(\theta).$$

Dies aber steht im Widerspruch zur angenommenen Anreizkompatibilität, denn $x_i(\theta) > \epsilon + x_i(\theta_{-i}, \hat{\theta}_i)$. □

Es ist anzumerken, dass die Teilnahme an einem Groves-Schema nicht notwendigerweise individuell-rational sein muss.

**Definition B.16 (Individuelle Rationalität, Teilnahmeanreiz).** *Ein Mechanismus ist* individuell-rational,*wenn für jedes $i \in N$ und $\theta \in \Theta$ (unter der Annahme einer passenden Normalisierung des Nutzens) gilt*

$$u_i(d(\theta), \theta_i) + t_i(\theta) \geq 0$$

Ein Groves-Schema ist in aller Regel nicht balanciert und es kann Anreize geben zur Bildung von Koalitionen (Absprache der annoncierten Typen) geben.

In die Familie der Groves-Schemata hinein gehören der von Clarke [18] vorgeschlagene Pivot-Mechanismus und die Vickreyauktion [97]. Der Clarke-Mechanismus legt die $x_i$ wie folgt fest $x_i(\theta_{-i)} = -\max_{d \in D} \sum_{j \neq i} u_j(d, \theta_j)$. Dies führt zu einem Transfer für $i$ von

$$t_i(\theta) = \sum_{j \neq i} u_j(d(\theta), \theta_j) - \max_{d \in D} \sum_{j \neq i} u_j(d, \theta_j).$$

Dieser Transfer bestimmt den Effekt, den die Teilnahme des Agenten $i$ auf den Nutzen der anderen Agenten hat. Dies führt zum sogenannten *marginalen Produkt* eines Agenten, das sich aus der Differenz zwischen dem Wert der effizienten Allokation mit und ohne Teilnahme des Agenten ergibt. Die Vickreyauktion verhält sich hierzu analog, beide Mechanismen implementieren die gleiche soziale Auswahlfunktion (vgl. [51], S.15). Beide erben die Eigenschaft der dominant-strategischen Anreizkompatibilität von den Groves-Schemata und beide sind für eine weite Klasse von Annahmen gültig (feasible). Die Ergebnisse lassen sich insbesondere auf das Szenario des Kapitels 3 und die Ausführungen in Abschnitt 3.6 anwenden.

# Anhang C

# Ein differenzbasierter Mechanismus

Es folgt eine adaptierte Version eines Papiers, das in den Proceedings des Workshops *Agent-Mediated Electronic Commerce IV* (AMEC), der im Juli 2002 stattfand, erschienen, s. [26]. Das Papier entstand aus einer Vorlage, die ich im April 2002 erstellt habe. Ich habe mich entschlossen, dieses Papier in den Anhang aufzunehmen, da es zwar keine wesentlichen neuen Aspekte zu den im Hauptteil dargelegten Grundlagen, Algorithmen und Analysen beisteuert, aber eine prototypische Anwendung und Fortführung derselben ist. Darüberhinaus ist der vorgestellte Typ eines Vickrey-Clarke-Grooves-Mechanismus für sich genommen interessant, erlaubt er doch den weitgehenden Verzicht auf das Erfragen absoluter Bewertungen und bestimmt stattdessen eine effiziente Allokation und zugehörige Vickreyzahlungen aus Informationen über die Differenzen zwischen Bewertungen. Es ist anzumerken, dass dies für die Versteigerung eines einzelnen Gutes nicht zu einem Unterschied hinsichtlich der Enthüllung führt, da es für jeden Agenten nur zwei Alternativen gibt und die einzige Differenz, die erfragt werden kann, unmittelbar dem Wert des Gutes für den jeweils befragten Agenten entspricht, wenn der Wert des leeren Gutes mit $0$ angesetzt wird.[1] Für kombinatorische Auktionen kann dies aber einen wesentlichen Unterschied machen, wie insbesondere das ausführliche Beispiel in Abschnitt C.2 und die Anmerkungen zur kognitiven Last der Nachfrager in Abschnitt C.6.4 verdeutlichen. Die folgenden Ausführungen sind ein Beispiel für die Möglichkeit, das Design neuer Mechanismen und weitergehende Untersuchungen auf dem im Hauptteil dieser Arbeit gelegten Fundament aufzubauen.

[1] Allerdings kann man durch schrittweises Erfragen der Differenz auf hier bereits Enthüllung, in der Regel aber nicht Kommunikation sparen

# Differential-Revelation VCG Mechanisms for Combinatorial Auctions

Wolfram Conen and Tuomas Sandholm[2]

**Abstract:**

Combinatorial auctions, where bidders can submit bids on *bundles* of items, are economically efficient mechanisms for selling items to bidders, and are attractive when the bidders' valuations on bundles exhibit *complementarity* and/or *substitutability*. Determining the winners in such auctions is a complex optimization problem that has received considerable research attention during the last 4 years. An equally important problem, which has only recently started to receive attention, is that of eliciting the bidders' preferences so that they do not have to bid on all combinations [24, 27]. Preference elicitation has been shown to be remarkably effective in reducing revelation [49]. In this paper we introduce a new family of preference elicitation algorithms. The algorithms in this family do not rely on absolute bids, but rather on *relative (differential) value information*. This holds the promise to reduce the revelation of the bidders' valuations even further. We develop a differential-elicitation algorithm that finds the efficient allocation of items to the bidders, and as a side-effect, the Vickrey payments (which make truthful bidding incentive compatible). We also present two auction mechanisms that use differential elicitation: the *difference mechanism* and the *difference increment mechanism*.

## C.1 Introduction

Combinatorial auctions, where bidders can submit bids on *bundles* of items, are economically efficient mechanisms for selling $m$ items to bidders, and are attractive when the bidders' valuations on bundles exhibit *complementarity* (a bundle of items is worth more than the sum of its parts) and/or *substitutability* (a bundle is worth less than the sum of its parts). Determining the winners in such auctions is a complex optimization problem that has recently received considerable attention (e.g., [79, 87, 35, 88, 66, 4, 89]).

An equally important problem, which has received much less attention, is that of bidding. There are $2^m - 1$ bundles, and each bidder may need to bid on all of them to fully express its preferences. This can be undesirable for any of several reasons: (1a) determining one's valuation for any given bundle can be computationally intractable [81, 86, 71, 55]; (1b) there is a huge number of bundles to evaluate; (2) communicating the bids can incur prohibitive overhead (e.g., network traffic); and (3) bidders may prefer not to reveal all of their valuation information due to reasons of privacy or long-term competitiveness. Appropriate bidding languages [87, 35, 85, 66, 47] can potentially solve the communication overhead in some cases (when the bidder's utility function is compressible). However, they still require the bidders to completely determine and transmit their valuation functions and as such do not solve all the issues. So in practice, when the number of items for sale is even moderate, the bidders will not

[2]Carnegie Mellon University, Computer Science Department, 5000 Forbes Avenue, Pittsburgh, PA 15213, sandholm@cs.cmu.edu

bid on all bundles.

We study the setting in which a benevolent auctioneer (or arbitrator) wants to implement an efficient allocation of a set of heterogeneous, indivisible goods. The preferences of the participating bidders (or consumers) are private information and utility is transferable via money. The auctioneer tries to design a mechanism that gives no incentive for the bidders to misreport preferences.

It is well known that the Vickrey-Clarke-Groves mechanism [97, 18, 40] (aka. Generalized Vickrey Auction (GVA)), *that is based on exhaustively eliciting all utilities*, is such an incentive compatible mechanism. However, in that mechanism, each bidder evaluates each of the exponentially many bundles, and communicates a value for each one.[3] This is clearly impractical even for auctions with moderate numbers of goods.

Consider the following: the (rational) preferences of bidders can be ranked (from most preferred towards least preferred). Each rank uniquely represents a bundle (bundles with consecutive ranks may have identical valuations). Combining the individual ranks will lead to combinations of ranks (respectively combinations of ranked bundles); some of them are feasible. All combinations form a lattice along a (weak) dominance relation. This lattice structure can be utilized to guide a (best-first) search through the space of (feasible and infeasible) combinations. This idea has been exploited in [24, 27] to design an efficient, (individually) incentive compatible mechanism for combinatorial auctions. The mechanism may reduce the amount of elicited information in comparison to generalized Vickrey auctions. The mechanism asks each bidder for the (true) valuations of (a subset of) the bundles. We called this a *partial-revelation mechanism*. Recently, it has been shown that this method, and related elicitation methods, may lead to significant savings in the amount of information that is elicited from the bidders (compared to the full elicitation of the GVA)—in fact, because the number of items in the auction grows, only a vanishing fraction of all value queries end up being asked [49].

In this paper we present a mechanism that *does not elicit absolute valuations but rather elicits differences between valuations* and, thus, may reveal only a fraction of each value information to the auctioneer.[4] We call this *differential revelation* (because only differences of valuations are revealed). We present an algorithm to explore the rank lattice using differential value information. The algorithm determines an efficient allocation based on revealed valuation differentials. It also inherits the partial revelation properties of the algorithm discussed in [27], while saving the bidder from specifying absolute valuations. Note that in the worst-case, all valuation information has to be revealed—it is, however, a challenge to reduce this amount whenever possible. The algorithm was designed with this objective.

We will also discuss the computation of Vickrey payments based on the information collected while executing the algorithm. We show that differential information suffices

[3] In general, preference communication in combinatorial auctions is provably exponential (even to find an approximately optimal solution) in the theoretical worst case [67].

[4] This may be especially useful in settings where the communication between the bidder and the auctioneer is public.

| | A | B | C | ∅ |
|---|---|---|---|---|
| Bidder 1 | **3** | 3 | 4 | 0 |
| Rank | 3 | 2 | 1 | 4 |
| Bidder 2 | 2 | **5** | 3 | 0 |
| Rank | 3 | 1 | 2 | 4 |
| Bidder 3 | 3 | 4 | **6** | 0 |
| Rank | 3 | 2 | 1 | 4 |

**Table C.1:** In this setting there are 3 unit-demanding consumers (allows us to neglect the valuations for the bundles) and 3 goods. The efficient allocation is to give good $A$ to bidder 1, good $B$ to bidder 2, and good $C$ to bidder 3. Bidder-specific rankings for the bundles are given, for example the rank of good $C$ is 1 for bidder 1 because good $C$ is the good most preferred by bidder 1 (note that the ranking for bidder 1 is not unique, because the ranks of goods $A$ and $B$ could be swapped due to the indifference of bidder 1).

to determine the Vickrey payments and that all information necessary to compute the payments is already available once the algorithm has determined an efficient allocation. Before we proceed, an example will be given to demonstrate the basic ideas.

## C.2 Example of *Differential* Elicitation

In this section we present an example of differential elicitation with three unit-demand bidders, three goods, and a benevolent auctioneer. Table C.1 shows the valuations of the bidders for the goods and the individual rankings of the bundles.

With the valuations[5] and ranks shown in Table C.1, a lattice of combinations of ranked preferences is given implicitly. The lattice is formed from the set of possible combinations of ranks and a (rank-)dominance relation that orders the combinations partially with respect to the ranks. A combination $a$ *dominates* a combination $b$ if and only if all the ranks in $a$ are at least as low as the corresponding ranks in $b$. For example, $(2, 1, 1)$ (rank-)dominates $(3, 1, 1)$ and $(2, 1, 2)$, but not $(1, 3, 4)$. Note that if $a$ dominates $b$, the value of the combination of bundles that is represented by $a$ cannot be less than the value of the combination of bundles that is represented by $b$.[6] A search procedure is deployed that travels through the (implicitly given) lattice in a best-first manner, starting with the best possible combination and stopping with the first feasible combination found (combinations of ranks can represent feasible or infeasible combinations of bundles). In previous work, we have based the decisions which node to expand next on information about the total value of represented combinations. In the following, we will use information about the difference of the value of the considered combinations to the (undetermined) value of the best possible combination.

With 3 bidders, the best possible combination of ranks is $(1, 1, 1)$. In the example, it represents the combination of the most preferred bundles $(C, B, C)$.[7] This combina-

[5] We assume throughout the paper that valuations are integral.

[6] With the usual assumption of utility functions representing rational preferences.

[7] Note that, in a strict sense, a bundle will be defined as a *subset* of the goods, and thus, one would have to write $(\{C\}, \{B\}, \{C\})$. We will relax this notational constraint whenever it can be done without

tion necessarily dominates all other combinations, both with respect to the ranks and the aggregated value (which is 15—this will not be revealed, however). Unfortunately, this combination is not feasible.

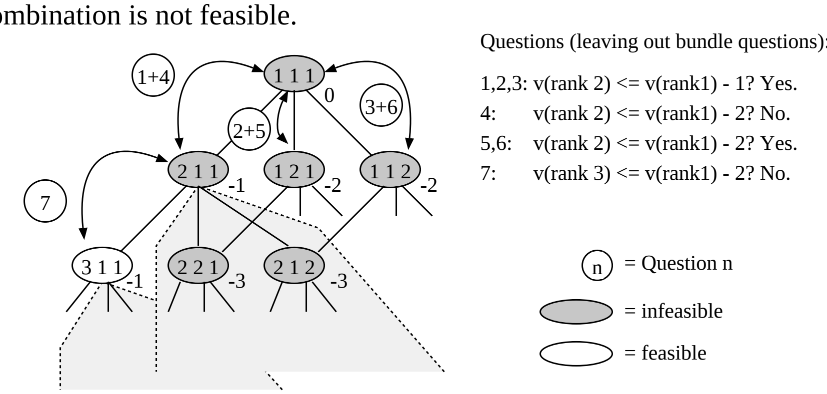


**Figure C.1:** Seven value queries are necessary to determine the efficient allocation in the above example (here and in the following, $v(rank\ r)$ denotes the valuation of the bundle at rank $r$). To the lower right of the combination nodes, the difference in value from the value of combination $(1,1,1)$ is shown. The combination with the smallest difference is the efficient allocation—here represented by the rank combination $(3,1,1)$. Note that as long as the nodes $(1,2,1)$ and $(1,1,2)$ aren't expanded (because other, at least equally promising nodes where chosen first), there is no need to expand the shaded areas either.

Now, consider the upper part of the rank lattice in Figure C.1, which is used to guide the search for the efficient allocation. The auctioneer will ask queries of the following two types: (1) "*Give me the bundle at the currently considered rank*" (bundle query), and (2) "*Is the value of the currently considered bundle smaller than the value of your highest ranking bundle minus $\delta_i$?*" (value query). We assume that it is common knowledge of the bidders and the auctioneer that the first bundle to be requested will be the bundle at rank 1 and that all $\delta_i$ are initially set to $1$ and are incremented each time the bidder $i$ answers "Yes".[8]

The search proceeds as follows. First, after asking the initial bundle queries and after discovering that the best combination is not feasible, all immediate successors of $(1,1,1)$ will be considered. These are the combinations $(2,1,1)$,$(1,2,1)$, and $(1,1,2)$. The currently considered rank is 2 for each bidder. The bidders will answer the bundle queries. Then the first round of value queries will be asked: bidder $i$, is your valuation of the bundle at rank 2 less or equal to your valuation of the bundle at rank 1 minus 1? Each bidder will answer with "Yes". Now the auctioneer knows that each immediate successor of $(1,1,1)$ represents a combination of bundles that has a value that is *at least* 1 less than the value of the best combination. To discriminate amongst the three successors, a second round of value queries is asked with all $\delta_i$ incremented to $2$. This time, bidder 1 answers "No" (because the value of $B$, the bundle at rank 2, is only one less than the value of $C$, the bundle at rank 1). Bidder 2 and bidder 3 answer "Yes" again. This allows the auctioneer to fix the difference in value between $(1,1,1)$ and $(2,1,1)$ to $1$ (we will also say that the $\delta$ of bidder 1 for the rank

harm (e.g., we will write $AB$ instead of $\{A,B\}$, or $A$ instead of $\{A\}$).

[8]Note that the queries given in the figure are more explicit than necessary. With the above conventions, the queries can be reduced to a signal "Next query" and the answer can be given as one bit (1=Yes, 0=No). Details will follow in Section C.5.1.

2 is *tight*). In addition, it is now known that the difference in value between $(1,1,1)$ and the combinations $(1,2,1)$ and $(1,1,3)$ is *at least* 2. Because the search proceeds best-first, $(2,1,1)$ will be expanded next. Only two more queries are necessary: bidder 1 is asked for the bundle at rank 3 (the answer is $A$, which renders the considered combination $(3,1,1)$ feasible) and bidder 1 is asked again, if the value of the bundle represented by the currently considered rank (now rank 3) is 2 or more less than the value of the most preferred bundle. Again, the answer is "No". This allows to conclude that $(3,1,1)$ *must represent* an efficient allocation.[9] In total, the following information is revealed (to the auctioneer):

$$\begin{aligned}&v_1(rank1) = v_1(rank2) + 1 = v_1(rank3)\\&v_2(rank1) \geq v_2(rank2) + 2\\&v_3(rank1) \geq v_3(rank2) + 2\end{aligned}$$

This can also be summarized as follows:

| | A | B | C | $\emptyset$ |
|---|---|---|---|---|
| Bidder 1 | $(x_1-1)$ | $(x_1-1)$ | $x_1$ | 0 |
| Bidder 2 | $\leq(x_2-2)$ | $x_2$ | $\leq(x_2-2)$ | 0 |
| Bidder 3 | $\leq(x_3-2)$ | $\leq(x_3-2)$ | $x_3$ | 0 |

The efficient allocation is determined to be $A \to 1$, $B \to 2$, $C \to 3$. Although the value of the allocation is not known, it can be bound to be at least 4 (because we have enough information to conclude that combination $(3,2,2)$ has a value that is at least 4 less than the value of $(3,1,1)$, and with the assumption of free disposal and values of $0$ for empty bundles, the value of $(3,2,2)$ must be at least $0$).

Interestingly, the Vickrey payments can be computed from the information already elicited. First consider bidder 1: because the allocated bundle $B$ (respectively $C$) is the highest ranking bundle of bidder 2 (respectively 3), the payment of bidder 1 is $0$. The effect of the participation of bidder 2 *and* 3 on bidder 1 is the known difference between $v_1(rank1)$ and $v_1(rank3)$, which is 1. Here, it is the participation of bidder 3 that causes this effect. This information is also available: the best possible feasible allocation if only bidder 1 and 2 participate is realized when both receive their highest ranking bundle ($C$ respectively $B$). If bidder 3 enters the scene, bidder 2 will still receive this bundle while bidder 1 experiences a loss of 1 relative to realizing his most preferred alternative. The participation of bidder 2 has no such effect. The Vickrey payments are therefore $t_1 = 0, t_2 = 0$, and $t_3 = 1$.

In section C.4, we will prove that the *differential* information collected by our algorithm (primarily used to determine the efficient solution) will *always* suffice for determining the Vickrey payments. Note that in the above example *no* absolute valuation is revealed.[10] Furthermore, queries that are directly related to the bundles at rank 3 of

[9] Note that the available information would also suffice to conclude that $(3,1,1)$ represents the only efficient allocation, because we know that the value of the combinations represented by $(2,2,1)$ and $(2,1,2)$ is at least 2 less than the value of the best combination.

[10] Note that an auction with a single item only is a degenerated case with only one difference per bidder and is, therefore, not a good example. Because at least one difference of every bidder will be a target of elicitation queries, no difference can be left untouched (so, the revelation is not partial). The absolute

bidders 2 and 3 are never asked.

In the following section, we will first specify the underlying model more precisely and then present the basic algorithm. We consider Vickrey payments in section C.4. In section C.5, we discuss how the algorithm can be used to create mechanisms that use different type of queries to elicit differential value information from the bidders. In section C.6, properties of the mechanism related to incentive-compatibility, information revelation, communication complexity and the cognitive burden of bidders are discussed. Section C.7 relates our research to ascending combinatorial auctions and section C.8 offers some conclusions and a brief outlook.

## C.3 The Model

Our setting is based on the concepts introduced in [24]. We consider an economy consisting of $n$ consumers, $N = \{1, \ldots, n\}$, a seller $0$, and $m$ goods, $\Omega = \{1, \ldots .m\}$. Each consumer $i \in N$ has utility over bundles, given by a function $v_i : 2^\Omega \to \mathbb{N}_0^+$, where $v_i(\emptyset) = 0$.[11] The seller has all the goods; the consumers own none of them. We will neglect the seller. If the seller has reservation values for bundles, he can be modeled as an additional consumer.

It is well known that a bidder's preferences can be represented by a utility function only if the preference order is *rational*, that is, the preference order over alternatives is transitive and defined on all pairs of alternatives (equal preference between alternatives is fine). This preference order induces a rank function as follows.

**Definition C.1 (Rank function, Inverted Rank function).** *Let $R$ be the set of the first $2^m$ natural numbers, $\{1, \ldots, 2^m\}$. Let, for every bidder $i$, the rational preference order $\succsim_i$ be defined over $2^\Omega$. A bijective function $r_i : 2^\Omega \to R$ will be called the* rank function for bidder $i$ *if it assigns a unique number (*rank*) to each bundle, such that, for every pair $x, y \subseteq \Omega$ of bundles with $x \succ_i y$, $r_i(x) < r_i(y)$ holds. The inverse $r_i^{-1}$ of $r_i$ gives the bundle that corresponds to a rank.*

A rank function and its inverse exist for every rational preference relation. In the presence of indifference, there is no unique rank function. A combination of ranks of the bidders can be viewed as representing a potential solution to the allocation problem at hand. Some of these potential solutions are invalid, though. The others determine *allocations*.

**Definition C.2 (Combination of Ranks).** *Let $C$ be the set of all possible $n$-ary tuples over $R$, that is $C = R \times \cdots \times R$. An element $c \in C$, $c = (r_1, \ldots, r_n)$ will be called* combination of ranks. *(If, for every position $i$ of $c$, the corresponding function $r_i^{-1}$ is applied, a* collection of bundles, *$b^c$, will be obtained.)*

valuations of all loosing bidders will be revealed. Revelation of the valuation of the winning bidder can be limited to a fraction of its value, which suffices to beat the second largest difference (so, the revelation can be fractional).

[11] We will later add assumptions of quasi-linearity and free disposal to this setting.

**Definition C.3 (Feasible Combination).** *A combination $c$ of ranks is* feasible *if the corresponding collection $b^c$ of bundles is a partition (possibly with empty elements) of a (not necessarily proper) subset of $\Omega$. A feasible combination determines an* allocation $X^c$ *with $X_i = b^c[i]$, $i = 1, \ldots, n$, where the seller keeps the item set $X_0 = \Omega / \bigcup_i b^c[i]$. Here, $[i]$ denotes the i'th element of the tuple.*

**Definition C.4 (Dominance of Rank Combinations).** *A binary relation $\preceq \subseteq C \times C$ will be called a* dominance relation *if, for all $x, y \in C$, $(x, y) \in \preceq$ if and only if $x[i] <= y[i]$ for all $i \in N$.*

The relation $\preceq$ is a *partial order* and $C$ forms a *complete lattice* with respect to $\preceq$ with $lub(C) = (2^m, \ldots, 2^m)$ and $glb(C) = (1, \ldots, 1)$.

The observation exploited by the following algorithm is that a combination that is feasible and not dominated by any other feasible combination is *Pareto-efficient*. In addition, if utilities are considered, the welfare-maximizing allocation will be among these feasible Pareto-efficient combinations. The following algorithm will search the space of combinations (including infeasible ones) to determine a welfare-maximizing (or efficient) allocation.

### C.3.1 Computing an Efficient Allocation

We assume a setting with transferable utility (the utility functions are quasi-linear in money). The algorithm to be presented is essentially a modification of the **EBF** algorithm that we studied in [27], and inherits some of its properties. For presentation purposes, the **EBF** algorithm is repeated here and the necessary modification is outlined afterwards.

*Algorithm* **EBF (Efficient Best First)**:
(1) OPEN $= \{(1, \ldots, 1)\}$;
(2) **loop**
(3) **if** $|$OPEN$| = 1$ **then** $c =$ combination in OPEN
**else** Determine
$M = \{k \in OPEN | v(k) = \max_{d \in OPEN} v(d)\}$. /* to be modified below */
**if** $|M| \geq 1 \wedge \exists d \in M$ with *Feasible(d)* **then return** $d$
**else** Choose $c \in M$ such that no $d \in M$ exists with $d \succ c$;
OPEN = OPEN $\setminus \{c\}$.
(4) **if** *Feasible(c)* **then return** $c$
(5) SUC $= \mathrm{suc}(c)$
(6) **foreach** $n \in$ SUC **do**
**if** $n \notin$ OPEN **then** OPEN = OPEN $\cup \{n\}$

We recently showed that **EBF** algorithms determine an efficient (that is, welfare-maximizing) allocation [27]. Note that we speak of algorithm*s* because the choice of the next combination to be expanded is not deterministically specified above if 2 or more combinations have the same value. So, actually a family of algorithms, differing with respect to their tie-breaking rule, is given above.

The following observation motivates the changes to the algorithm that will be outlined below.

**Observation:** *The determined (feasible) collection does not only represent an allocation that maximizes aggregated utility, it also minimizes (over all feasible collections) the aggregated loss in utility of the bidders (here, the individual loss of a bidder is the difference between the utility of the bidder's most preferred bundle and the utility of the bundle the bidder receives in the considered allocation).*

We will now modify step 3 of the algorithm such that the algorithm can make use of differences in utility when deciding which combination to explore next (in contrast to [27], where it has been assumed that all precise, absolute value information that is necessary to determine the subset of the most efficient combinations from the set of currently considered combinations, that is OPEN, is elicited).

Assume for simplicity that a set of quadruples is used to collect the elicited information. Each quadruple $(i, b, \delta, s)$ identifies a bidder $i$, a bundle $b$, a value for the information about the difference between the valuation of $i$ for the highest ranking bundle and $i$'s valuation for bundle $b$, and a bit $s$ that shows if $\delta$ is the precise difference (s=1) or a lower bound (s=0). There are quadruples for every bidder-bundle pair (we will also write $\delta_i^b$ and $s_i^b$ if we want to access the information in the quadruple for a given (bidder,bundle)-pair $(i, b)$).

Initially, $\delta_i^b$ and $s_i^b$ will be set to $0$ for all $i \in N, b \subseteq \Omega$. To simplify the presentation, we will assume that all rank functions and their inverses are known (i.e., we can determine a bundle from a rank information, this allows us to neglect rank/bundle queries for now). For each $i$, the bit $s$ of the highest ranking bundle $r_i^{-1}(1)$ will be set to $1$. We assume that the information in the quadruples is and remains consistent, that is, the following condition invariantly holds:

$$\delta_i^b = v_i(r_i^{-1}(1)) - v_i(b), \text{ if } s = 1 \text{ and } \delta_i^b \leq v_i(r_i^{-1}(1)) - v_i(b), \text{ if } s = 0$$

Now, assume that the combination $(1, \ldots, 1)$ is not feasible. The algorithm will now add all successors of this combination to the set OPEN. Each successing combination will cover one (bidder,bundle)-pair for which $s = 0$ holds (one such pair per bidder).

Note that the value of each combination $c = (c_1, \ldots, c_n)$ can be related to the (unknown) value of $(1, \ldots, 1)$ by computing the sum of the deltas in the quadruples that are covered by $c$. This set of covered quadruples is

$$Q^c = \{(i, b, \delta, s) \mid i \in N, b = r_i^{-1}(c_i)\}.$$

The sum of difference $\Delta^c$ can be determined as $\sum_i \delta_i^{r_i^{-1}(c_i)}$ (i.e., the sum of the $\delta$s in $Q^c$). We know (assuming the information has been truthfully reported) that the value of $c$ is at least $\Delta^c$ currency units lower than the value of $(1, \ldots, 1)$. If all $s$ in $Q^c$ are 1, the difference is tight, that is $v(c) = v((1, \ldots, 1)) - \Delta^c$, otherwise $v(c) \leq v((1, \ldots, 1)) - \Delta^c$ (canonically extending the value function to combinations of ranks by setting $v(c) = \sum_i v(r_i^{-1}(c_i))$).

Consider again the set OPEN. In step 3, a set $M$ will be determined that contains all elements from OPEN such that the difference is tight and has the same value for each combination in $M$ and every other combination in OPEN has a difference $\Delta$ (tight or otherwise) that is higher in value.

The modification of step 3 is as follows (the set $M$ is completely determined):

(3 – old version)
$M = \{k \in OPEN | v(k) = \max_{d \in OPEN} v(d)\}$.

is changed to

(3 – new version)
$M = \{k \in OPEN|$ *Tight*[12]$(k) \wedge \Delta^k \leq \Delta^d$ for all $d$ with *Tight*$(d)$
$\wedge\ \Delta^k < \Delta^d$ for all $d$ with *Not*(*Tight*$(d)$) $\}$.

The information necessary to determine the set $M$ (which is always non-empty) will be collected by a mechanism which builds upon the modified algorithm. Such mechanisms will be outlined below. Assume now that we have a method that allows us to correctly determine the set $M$ in each iteration of the algorithm. This allows us to show that the following result holds in the context of transferable utility:

**Proposition C.5.** *Any algorithm of the modified* **EBF** *family (to be called* **EBF-DE** *where DE stands for* differential elicitation*) determines an efficient (that is, welfare-maximizing) allocation.*

This follows, using Proposition 8 from [27] (which states that any EBF algorithm determines an efficient allocation), from the fact that the set $M$ in the original version and in the new modified version coincide in each iteration. To see this, the following proposition is helpful:

**Proposition C.6.** *Given an arbitrary but fixed subset $S$ of the set of all possible combinations $C$. Then the set $M$, if determined from $S$ (substitute $S$ for OPEN above) with the old version, coincides with the set $M$ determined with the new version.*

*Proof.* Let $M^{old}$ be the set determined from $S$ by the old version. Let $c^*$ be one of the combinations in $C$ with the highest value $v^* = v(c^*)$. (a) For each $m \in M^{old}$, $v^* - v(m) \leq v^* - v(n)$ holds for all $n \in S$. Assume that a protocol is available to elicit information from the bidders and whose use guarantees that the following invariantly holds: (b) $\Delta^k \leq v^* - v(k)$ for all $k \in S$ and (c) *Tight(k) = TRUE* if and only if $\Delta^k = v^* - v(k)$ for all $k \in S$. Assume that the protocol has been used to determine a set $M^{new}$. To show the proposition, first assume that a combination $c \in M^{old}$ exists such that $c \notin M^{new}$. (d) From the conditions for the formation of $M^{new}$ follows that a combination $k \in S$ exists with a tight[13] $\Delta^k$ such that $\Delta^k < \Delta^c$. From (a),(b) and

[12] *Tight*$(k)$ answers TRUE, if all $s$ in the quadruples covered by $k$ are 1, see above.

[13] Such a $k$ with a tight $\Delta$ exists because for any $d \in S$ with $\Delta^d < \Delta^c$ and $\Delta^d$ is not tight, another $d'$

(c) follows $\Delta^c \leq v^* - v(c) \leq v^* - v(k) = \Delta^k$, contradicting (d) respectively the assumption. The other case is equally straightforward. □ □

With the fact that each set OPEN that can occur during the execution of the algorithm is necessarily a subset of $C$, the above Proposition C.5 follows.

We will later discuss how the algorithm can be embedded into a mechanism that computes an efficient allocation and elicits differential valuation information only. But first, we will show that the *(differential) information collected while executing an* **EBF-DE** *algorithm is sufficient to determine Vickrey payments.*

## C.4 Determining the Vickrey Payments Based on Differential Information Only

Now we will turn our attention to the information that is required to determine Vickrey payments. Recall that the Vickrey payment of bidder $i$ reflects the effect of her participation in an economy $E$: a consumer $i$ will pay an amount equal to the utility that the other consumers will loose due to the participation of $i$, that is

$$t(i) \;=\; V(E_{-i}) \;\; - \sum_{j \in N, j \neq i} v_j(X_j) \tag{C.1}$$

where $E_{-i}$ is the economy $E$ without $i$ and $V(E_{-i})$ is the utility that can be realized implementing a welfare-maximizing allocation for $E_{-i}$.

We will now assume that an execution of an **EBF-DE** algorithm has determined an efficient allocation $X$ for an economy $E$.

**Proposition C.7.** *No information in addition to the information already obtained by* **EBF-DE** *is necessary to determine the Vickrey payments.*

*Proof.* We assume that $c$ is the solution combination that was found by the algorithm and that it represents the allocation $X$. The tight difference between the value of the combination of the highest ranking bundles and the value of $c$ is known to be $\Delta^c$. First, note that *tight differential value information for all combinations with higher value (resp. smaller $\Delta$) than $c$ have already been obtained* (a consequence of the efficiency of EBF-DE algorithms. Below, we will refer to the italicized claim as (a)).

Assume that consumer $i$ is removed from economy $E$ to form $E_{-i}$ and that $c^{-i}$ refers to a combination of ranks that represents an efficient allocation $X^{-i} = (X_1^{-i}, \ldots, X_{i-1}^{-i}, X_{i+1}^{-i}, \ldots, X_n^{-i})$ for $E_{-i}$.

First, observe that (C.1) can be re-written as follows:

exists with $\Delta^{d'} < \Delta^d$. With the finiteness of $C$ and the conditions for $M$, at least the $\Delta$ of one such $d'$ must be tight. This is the $k$ used above.

$$
\begin{aligned}
t(i) &= \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_i(X_j^{-i}) \;-\; \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(X_j) \\
&= \sum_{j \in N \setminus \{i\}} \left[ v_i(r^{-1}(1)) - \left( v_i(r^{-1}(1)) - v_i(X_j^{-i}) \right) \right] \;- \\
&\qquad\quad \sum_{j \in N \setminus \{i\}} \left[ v_i(r^{-1}(1)) - \left( v_i(r^{-1}(1)) - v_j(X_j) \right) \right] \\
&= \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_i(r^{-1}(1)) - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} \left( v_i(r^{-1}(1)) - v_i(X_j^{-i}) \right) \;- \\
&\qquad\quad \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_i(r^{-1}(1)) + \sum_{j \in N \setminus \{i\}} \left( v_i(r^{-1}(1)) - v_j(X_j) \right) \\
&= - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} \left( v_i(r^{-1}(1)) - v_i(X_j^{-i}) \right) + \sum_{j \in N \setminus \{i\}} \left( v_i(r^{-1}(1)) - v_j(X_j) \right) \\
&= \sum_{j \in N \setminus \{i\}} \left( v_i(r^{-1}(1)) - v_j(X_j) \right) - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} \left( v_i(r^{-1}(1)) - v_i(X_j^{-i}) \right) \\
&= \sum_{j \in N \setminus \{i\}} \delta_j^{X_j} - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} \delta_j^{X_j^{-i}} \quad \text{(setting } \delta_j^A = v_j(r^{-1}(1)) - v_j(A)\text{)} \\
&= \sum_{j \in N, j \neq i} \delta_j^{r_j^{-1}(c_j)} - \sum_{j \in N, j \neq i} \delta_j^{r_j^{-1}(c_j^{-i})} \quad (c \text{ represents } X,\, c^{-i} \text{ represents } X^{-i})
\end{aligned}
$$

The first term does not require additional information: it is the sum of the tight $\delta$s of the bidders other than $i$ for the combination $c$. Further assume that a reduced $(n-1)$-ary allocation $Y^{-i} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ (leaving out the bidder $i$ respectively its index) can be found with a tight difference that is smaller than $\sum_{j \in N, j \neq i} \delta_j^{r_j^{-1}(c_j)}$. Further assume that additional differential value information would be required to find this reduced allocation. Then a combination $d = (Y_1, \ldots, X_i, \ldots, Y_n)$ could be constructed that would have a smaller difference (resp. a higher value) than $X$ and that would have required additional information to establish its difference, thus contradicting (a). □ □

## C.5 Auction Mechanisms that Elicit Valuation *Differentials*

We have an algorithm available to determine efficient allocations and demonstrated how the collected information can be used to compute Vickrey payments. To further complete the ingredients necessary for the design of a mechanism, we briefly outline two elicitation mechanisms that can be used to collect the information that is required in step (3) of the algorithm. The presentation uses the quadruple data structure suggested above.

### C.5.1 Difference Increment Mechanism

In the algorithm, in each step (3), the complete set of combinations with the currently smallest tight difference is determined. It is also possible to determine (in each round) one element of $M$ only, which can be done by finding one combination $c$ such that the bound is tight and every other bound has the same or a lower value (without considering tightness). In both cases, non-tight differences (i.e., bounds of differences) need to be tightened. To tighten (or to lower) a bound for a combination $c$ covering a non-tight quadruple $(i, r_i^{-1}(c_i), \delta, 0)$, the following query will be submitted to bidder $i$:

*Is the difference between your valuation of the highest ranking bundle and the valuation for the bundle at rank $c_i$ larger than $\delta$?*

If the answer is “yes”, $\delta$ can be incremented. If the answer is “no”, $s$ will be set to $1$ ($s$ corresponds to the last position in the quadruple and indicates whether the difference is tight ($s = 1$) or a lower bound ($s = 0$)).[14]

### C.5.2 Difference Mechanism

Instead of incrementing $\delta$ stepwise, the precise difference can be requested (each $s$ can be set to $1$ permanently):

*Give me the difference between your valuation of the highest ranking bundle and the valuation for the bundle at rank $c_i$?*

## C.6 Properties of Our Differential Elicitation Mechanisms

In this section we discuss the correctness, amount of information revealed, and the communication complexity of the above two differential elicitation mechanisms. We also address the cognitive burden imposed on the bidders.

### C.6.1 Efficiency and Incentive Compatibility

Both types of queries can be utilized in step (3) of **EBF-DE** to establish an elicitation protocol (resulting from an elicitation policy, see below) that satisfies the conditions (b) and (c) that were used in the proof of the efficiency of **EBF-DE** (Proposition C.6). A straightforward policy to determine the next bidder to be queried is to pick one of the collections with the smallest, non-tight $\Delta$ and, then, pick one of the covered (bidder,bundle)-pairs with non-tight $\delta$. This has to repeated until enough information is available to safely determine the set $M$.[15]

[14] Note that this query can be transmitted in one bit, see the discussion in Section C.6.3.

[15] Because the tightness of the considered $\delta$ is established immediately (in the difference mechanism) or eventually (in the difference increment mechanism) and because the bound is incremented without

Assuming that enough space is available to store the elicited information (so that queries do not have to be repeated), the underlying **EBF-DE** algorithm induces a natural sequence of queries, starting with queries related to the most preferred bundles and proceeding step by step to the least preferred bundles. Note that the details of the selection of the next bidder to be asked are left out here and should be specified together with the chosen tie-breaking rule, when the mechanism is implemented. For the properties that are of interest in the context of this paper, namely efficiency and incentive compatibility, discussing these details is not necessary, as the following proposition demonstrates (an immediate consequence of the preceding propositions):

**Proposition C.8.**
**RANK-DE**[16] *mechanisms are incentive compatible and economically efficient.*

### C.6.2 Amount of Information Revealed

The difference increment mechanism generally reveals less (and never more) information to the auctioneer than the difference mechanism. Obviously the difference increment mechanism will not reveal more because the same information is elicited incrementally rather than at once. The difference increment mechanism may reveal strictly less because incrementing the bound but still not meeting the tight difference may already exclude a bundle from being in the efficient allocation—in which case no more information about that difference is elicited.

### C.6.3 Communication Complexity

The difference increment mechanism can be implemented by communicating one bit at a time between the auctioneer and a bidder. Assume that the bidders and the auctioneer adopt the following conventions: once the mechanism is initiated, only single bits will be transmitted from the auctioneer to the bidders. The bit will signal to the bidder that an answer to the following query is expected: *Is the difference in value between your highest ranking bundle and the bundle at the rank that is currently considered, larger than the currently considered difference?* All participants (that is, the bidders and the auctioneer) will first set the difference to $0$ and the considered rank to rank $2$. If the bidder answers with “Yes”, the difference is incremented. If the bidder answers with “No”, the next less preferred rank will be considered for the next query. In addition, the auctioneer now knows (from the properties of the rank function and the above conventions) that the currently considered difference is tight for the currently considered rank (which will be incremented consequentially). In the worst case, a bidder will have to send $2^m - 1$ “No”s (=0). The maximum number of “Yes” answers depends on

leaving ranks (respective bundles) and their valuation unconsidered, the finiteness of the information suffices to establish that the policy, together with one of the query types, determines an elicitation protocol that satisfies the above mentioned conditions.

[16] We call mechanisms that consciously explore the rank lattice **RANK** mechanisms. The specific family of mechanisms presented here is based on the family of **EBF-DE** algorithms. The postfix $DE$ refers to the *differential elicitation* of value information that is utilized by the mechanisms.

the valuation for the highest ranking bundle, say $v$. In the worst case, $v$ "Yes" bits will be transmitted.

In the difference mechanism, an agent will receive at most $2^m - 1$ queries, and each of these can be answered with a number in the interval $[0, \ldots, v]$. The sum of the numbers cannot exceed $v$ and will equal $v$ in the worst case. In binary encoding, the numbers will be transmitted with logarithmic size, bounded from below by $\lceil \log_2 v \rceil + (2^m - 2)$ (maximal difference $v$ for the bundle at rank 2; 0 for all other bundles, $m > 1$) and bounded from above by $(2^m - 1)\lceil \log_2 \lceil \frac{v}{2^m - 1} \rceil \rceil$.

To compare the query types, consider an agent who receives differential increment queries until a tight difference for a certain bundle is established. Then it is generally true that establishing this tight difference would have required less communication if difference queries would have been used. This can be seen by substituting the established difference for $v$ and the rank of the bundle for $2^m$ in the above formulas. Intuitively, the "No" answers in the difference increment mechanism establish an unary encoding of the difference and the "Yes" answers count the higher-ranking bundles one by one, while the answers to the difference questions form a set of binary-encoded numbers that add up to the difference. The cardinality of the set is the rank of the bundle minus 1.

On the other hand, if the problem allows to stop querying difference increment questions with some non-tight bound, querying (tight) differences directly may be more costly. A straightforward example can be constructed with a single item and two agents. Let the utility of the item for agent 1 be 1000, and 2 for agent 2. A difference mechanism would elicit the answers 1000 and 2 (13 Bits). A difference increment mechanism would require and receive two "Yes" and one "No" answers from agent 2 and three "Yes" answers from agent 1 (6 Bits) to establish an outcome.

### C.6.4 Cognitive Burden of the Bidders

Partial preference elicitation reduces the cognitive burden of the bidders because they do not have to evaluate all bundles. Furthermore, for some bundles that have to be evaluated, fractions of the valuations suffice. This is in sharp contrast to direct-revelation mechanisms such as the GVA, where all bundles have to be evaluated exactly. The elicitation method introduced in this paper further improves over previous elicitation methods [24, 27, 49] in that only valuation *differences* need to be determined (fractionally).

An additional note regarding the cognitive burden of the bidders seems in order. The mechanism does not require *per se* that the bidders are aware of the complete ranking of their preferences. In fact, a bidder may start with a rather rough categorization of his preferences (say: this is my most preferred choice, these 3 choices are really nice, these 4 choices are not bad, the rest is not very attractive) that may need to be refined during the course of the mechanism.[17] In the worst case, a bidder may need to reveal

[17] It would be nice if this refinement process would be consistent with the complete preference relation of the bidder (that is: no bundle is ranked erroneously). However, because inconsistence would only

her full rank and utility functions. As related experiments have demonstrated (see [49]) this seems to not be necessary very often. In the best case, only the bundle at rank 1 of each bidder (not even the valuation) will be revealed (though this case does not seem to be very likely as well). In the other cases, rank and utility function will only be partially revealed and, as has been argued above, will not necessarily be fully determined by the bidders.

## C.7 Related Research: Ascending Combinatorial Auctions

An important related research thread tries to identify iterative or progressive auction protocols that try to limit the space of preferences that are to be revealed in comparison to the fully revealing, naive GVA. Recently, auctions that follow certain solution procedures for primal/dual linear programs have been studied extensively and with respect to incentive compatibility (see [15] for an overview and new suggestions, or consider [7]). Another approach (A$k$BA) has been suggested [105], though a detailed analysis of incentive compatibility properties has yet to be performed. Iterative auctions are price-based, which requires that to guarantee that Vickrey payments are determined by the auction, prices must be computable that coincide with the Vickrey payments (incentive-compatibility!). Depending on the allowed price structures[18], equilibrium prices (that solve an underlying dual model) may or may not exist. The existence depends on properties of preferences which will be considered either individually (e.g. “gross substitutes”) or, more general, with respect to the combination of bidder types (“agents are substitutes”, [14]). The allowed price structure will also influence the applicability of the suggested mechanisms. For example, the unconstrained anonymous prices used in A$k$BA, see [105], may require an enforcement of the condition that each bidder is only allowed to purchase one bundle in one transaction (at the price quoted for that bundle and not, for example, in two transactions as may seem attractive if the sum of prices for sub-bundles is below the quoted price). Similar considerations are necessary for the unconstrained non-linear (and non-anonymous) prices used in auctions based on and significantly extending the work of Bikhchandani et. al (see, for example, [14, 69, 73, 15]). The immediate computation of Vickrey payments, as it is enabled by our mechanisms, renders such considerations unnecessary.

be observable if monotony is violated, this is not detectable generally. Considering observability, this is not really relevant – the mechanism will still compute an allocation that is efficient with respect to the reported preferences (though, from an idealistic point of view, efficiency might not be achieved due to erratic behavior of a bidder). In a less static context, any preference relation may change during the execution of a coordination mechanism. On the positive side, the mechanism presented here is robust against such changes in the sense that no re-computation will be performed and no query that has been asked already will be repeated. On the negative side, a bidder with changed preferences can not influence the partial/differential information that has been elicited already. She can, however, adapt her future answers to the new situation (of course, this may break efficiency).

[18]Possible price structures include the following cases: (1) the price for a bundle is additive in the prices of the contained goods [41]; (2) unconstrained, non-linear prices for every bundle [105] are given, only one bundle may be purchased per agent; (3) coherent prices for bundles are given where the price for a bundle may not exceed the sum of prices of the bundles in any partition of the bundle, and where the prices for super bundles of the bundles in the supported allocation are additive [25]. Furthermore, prices can be differentiated to a different degree, including (a) anonymous prices; (b) different prices for the set of buyers and the set of sellers; or (c) different prices for each individual agent.

## C.8 Conclusions and Future Research

Combinatorial auctions, where bidders can submit bids on *bundles* of items, are economically efficient mechanisms for selling items to bidders, and are attractive when the bidders' valuations on bundles exhibit *complementarity* and/or *substitutability*.

An important problem, which has only recently started to receive attention, is that of eliciting the bidders' preferences so that they do not have to bid on all combinations. Preference elicitation has been shown to be remarkably effective in reducing revelation.

In this paper we introduced a new family of preference elicitation algorithms, which utilizes the general structure of the previously studied partial-revelation mechanism and inherit some of their properties.[19] However, the algorithms in the family presented here do not rely on absolute bids, but rather on *relative (differential) value information*. This holds the promise to reduce the revelation of bidders' evaluations even further. In addition, it may be easier for the bidder to determine differences in valuation than to determine the absolute level of valuations.[20] We developed a differential-elicitation algorithm that finds the efficient allocation of items to the bidders, and as a side-effect, the Vickrey payments (which make truthful bidding incentive compatible). Finally, we briefly presented two auction mechanisms that use differential elicitation: the *difference increment mechanism* and the *difference mechanism*.

Future research involves studying this new elicitation format experimentally and theoretically to determine how much revelation it saves in practice on real-world problems. It also includes developing additional query types and, if possible, yet more effective elicitation policies. Future research also includes developing a deeper understanding of how preference elicitation and ascending auctions are related, and if possible, developing effective hybrid auctions that use both techniques.

[19] Compare [27] for results related to the efficiency of elicitation.

[20] However, if a bidder had to determine *all* differences, the two cases require identical effort.