Eindeutigkeitssätze zu Außenraumproblemen für Maxwell-, Lamé- und verallgemeinerte Helmholtz-Systeme mit räumlich unbegrenzten Störungen – ein einheitlicher Zugang

Dissertation zur
Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

Dem Fachbereich 6 – Mathematik und Informatik
der Universität Gesamthochschule Essen
vorgelegt im Oktober 2002

von Sebastian Bauer
geboren in Wuppertal

Termin der Disputation: 27.01.2003
Gutachter:
Prof. Dr. Reinhard Racke, Konstanz
Prof. Dr. Norbert Weck, Essen
Prof. Dr. Karl-Josef Witsch, Essen

Danksagung
Ich bedanke mich bei Herrn Prof. Dr. N. Weck und Herrn Prof. Dr. K.J. Witsch für zahlreiche Diskussionen und die Betreuung meiner Dissertation.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Problemstellung

1.1.1 Die Maxwell-Gleichungen

Wir betrachten das Anfangsrandwertproblem zu den Maxwell-Gleichungen in linearen anisotropen Medien zu homogenen rechten Seiten in einem Außengebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ mit der Randbedingung der totalen Reflektion:

$$\begin{aligned} \varepsilon\partial_t E - \operatorname{rot} H &= 0 \quad \text{in} \quad \Omega \\ \mu\partial_t H + \operatorname{rot} E &= 0 \quad \text{in} \quad \Omega \\ n \wedge E|_{\partial\Omega} &= 0 \\ E(0) &= E^0 \\ H(0) &= H^0 \quad . \end{aligned} \tag{1}$$

Hierbei sind die Dielektrizität ε und die Permeabilität μ messbare Funktionen von $x \in \Omega$ in die Menge der beschränkten gleichmäßig positiv definiten symmetrischen reellwertigen 3×3 Matrizen. E ist das elektrische und H das magnetische Feld, E^0 und H^0 gegebene Anfangsdaten und n die nach außen gerichtete Einheitsnormale an $\partial\Omega$. Für eine Hilbertraumformulierung des Problems (1) definiert man

$$M := \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

und $H_{\varepsilon\mu} := L^2(\Omega\,,\mathbb{C}^3)\times L^2(\Omega\,,\mathbb{C}^3)$ mit dem Skalarprodukt $\langle U\,,\,V\rangle_{H_{\varepsilon\mu}} := \Big\langle U\,,\,MV\Big\rangle$. (Die verwendeten Bezeichnungen werden im letzten Kapitel erläutert.) Die Randbedingung wird verallgemeinert zu $E \in \overset{\circ}{\mathrm{R}}(\Omega)$ und man erhält eine selbstadjungierte Realisierung $\mathcal{M}$ des Maxwell-Operators mit

$$\mathcal{D}(\mathcal{M}) := \overset{\circ}{\mathrm{R}}(\Omega) \times \mathrm{R}(\Omega)$$

und

$$\mathcal{M} := -\mathrm{i}\, M^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -\operatorname{rot} \\ \operatorname{rot} & 0 \end{pmatrix}$$

(siehe [15, Kapitel 8]). Mit Hilfe des Spektralkalküls erhält man zu Anfangsdaten $U^0 = (E^0, H^0) \in L^2(\Omega, \mathbb{C}^3) \times L^2(\Omega, \mathbb{C}^3)$ eine eindeutig bestimmte schwache Lösung

$$U(t) = (E(t), H(t)) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\mathcal{M}t}\, U^0 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\lambda t}\, \mathrm{d}P(\lambda) U^0$$

mit finiter konstanter Energie. Dabei ist $P(\lambda)$ die zu $\mathcal{M}$ assoziierte Spektralschar (für die Definition und für Eigenschaften der Spektralschar siehe z.B. [29]).

Um genauere Informationen über die Lösung U zu erlangen, ist eine Untersuchung des Spektrums und der Spektralschar des zugrunde liegenden Operators $\mathcal{M}$ nötig. Es gilt $0 \in \sigma_p(\mathcal{M})$ und $\mathcal{N}(\mathcal{M}) = \overset{\circ}{\mathrm{R}}_0 \times \mathrm{R}_0$. Wir nehmen zunächst $\varepsilon = \mu = \mathrm{id}$ zumindest in einer Umgebung von ∞ an. Ist nun (E, H) eine Eigenlösung des Maxwell-Operators $\mathcal{M}$ zum Eigenwert $\omega \neq 0$, so lösen jeweils E und H die Helmholtz-Gleichung zu ω^2 in Ω. Nach der Rellich'schen Abschätzung [18] haben sie dann beschränkten Träger. Ist zudem das Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit, ab jetzt mit PdeF abgekürzt, für den Operator $\mathcal{M}$ gültig, so erhält man $\sigma_p(\mathcal{M}) = \{0\}$.

Wir zeigen in dieser Arbeit, dass auch im Fall asymptotisch gegen die Identität abklingender C^2-Matrizen keine Eigenwerte $\omega \neq 0$ auftreten.

Um die Spektralschar für geeignete rechte Seiten mit Hilfe der Stone'schen Umkehrformel zu berechnen und die Existenz von Wellenoperatoren zu zeigen, wird eine geeignete Einschränkung der Resolvente auf die reelle Achse fortgesetzt; dazu wird eine Lösungstheorie für das Maxwell'sche Strahlungsproblem benötigt.

Wir sagen: (E, H) ist eine Lösung des Strahlungsproblems Max$(\varepsilon,\ \mu,\ \omega,\ F,\ G)$ für $(F, G) \in L^2_{>\frac{1}{2}} \times L^2_{>\frac{1}{2}}$ und $\omega \neq 0$, wenn

$$\begin{aligned} (E, H) \quad &\in \quad \left(\overset{\circ}{\mathrm{R}}_{\mathrm{loc}} \times \mathrm{R}_{\mathrm{loc}}\right) \cap \left(L^2_{<-\frac{1}{2}} \times L^2_{<-\frac{1}{2}}\right) \\ \mathrm{i}\,\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} H - \omega E \quad &= \quad F \quad \text{in} \quad \Omega \\ -\,\mathrm{i}\,\mu^{-1} \operatorname{rot} E - \omega H \quad &= \quad G \quad \text{in} \quad \Omega \end{aligned} \qquad (2)$$

und zusätzlich die Strahlungsbedingung

$$E + \xi \wedge H\ ,\ H - \xi \wedge E \in L^2_{>-\frac{1}{2}} \qquad (3)$$

erfüllt ist. (Dabei ist $f \in L^2_s :\Leftrightarrow (1 + r^2)^{s/2} \in L^2$ und $L^2_{>(<)s} := \cup_{t>s}(\cap_{t<s}) L^2_t$.)

Für die Eindeutigkeit zeigt man zunächst mit Hilfe der Strahlungsbedingung, dass Lösungen zu homogenen rechten Seiten in $L^2_{>-\frac{1}{2}}$ liegen. Sind ε und μ wieder die Identität in einer Umgebung von Unendlich, so folgt mit der Rellich'schen Abschätzung der beschränkte Träger. Falls das Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit gilt, müssen die Eigenlösungen verschwinden. Die Existenz einer Lösung erhält man mit dem Prinzip der Grenzabsorption.

In dieser Arbeit zeigen wir die Eindeutigkeit des Strahlungsproblems im Fall asymptotisch gegen die Identität abklingender C^2-Matrizen.

1.1.2 Elastizitätsgleichungen

Wir betrachten die auf q-Formen verallgemeinerten linearen Elastizitätsgleichungen in einem isotropen Medium in einem Außengebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Dazu sei $q \in \{1, ..., N-1\}$ und $\mathrm{a}, \mathrm{c} \;:\; \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ die Lamé Funktionen mit $\mathrm{a}, \mathrm{c} \in C^1$ und

$$\mathrm{a}(x) > 0 \quad , \quad \mathrm{b}(x) := \mathrm{c}(x) + 2\mathrm{a}(x) > 0 \quad \text{in} \quad \Omega.$$

Die Elastizitätsgleichungen lauten

$$\partial_t^2 U - \operatorname{div}\,(\mathrm{a}\operatorname{rot} U) - \operatorname{rot}\,(\mathrm{b}\operatorname{div} U) = 0 \quad .$$

Hierbei ist U eine Differentialform vom Grad q und wir bezeichnen, einem Vorschlag von Weyl (siehe [30]) folgend, die äußere Ableitung d mit rot und die Co-Ableitung δ mit div um die Korrespondenz mit dem klassischen Kalkül zu betonen. (Bei der Behandlung der Maxwell-Gleichungen im $\mathbb{R}^3$ behalten rot und div ihre vektoranalytische Bedeutung.) Im Fall $N = 3$ und $q = 1$ ergeben sich gerade die klassischen Elastizitätsgleichungen. Hinzu kommt eine geeignete Randbedingung, z.B. die Dirichlet'sche oder die Neumann'sche Randbedingung, und die Vorgabe von Anfangswerten $U(0) = U^0$ und $\partial_t U(0) = U^1$.

Auch dieses Problem besitzt eine Hilbertraumformulierung. Dazu wählt man $H = L^{2,q}(\Omega)$ mit dem normalen $L^{2,q}$–Skalarprodukt und definiert, z.B. für die Dirichlet'sche Randbedingung, den Lamé-Operator $\mathcal{L}$ vermöge

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}) = \left\{ U \in \overset{\circ}{H}{}^{1,q}(\Omega) \quad \middle| \quad \operatorname{div}\,(\mathrm{a}\operatorname{rot} U) + \operatorname{rot}\,(\mathrm{b}\operatorname{div} U) \in L^{2,q}(\Omega) \right\}$$

und

$$\mathcal{L} = -\operatorname{div}(\mathrm{a}\ \operatorname{rot}\ \cdot\ ) - \operatorname{rot}(\mathrm{b}\operatorname{div}\cdot\ ) \quad .$$

$\mathcal{L}$ ist selbstadjungiert und hat ein nicht negatives Spektrum, zudem existiert $\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}$ (siehe [15, Kapitel 11]). Damit ergibt sich für Anfangsdaten $U^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{L}^{\frac{1}{2}})$ und $U^1 \in H$ die Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung mit finiter Energie aus dem Spektralkalkül

$$U(t) = \cos(\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} t)U^0 + \mathcal{L}^{-\frac{1}{2}} \sin(\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} t)U^1 \quad .$$

Das Spektrum von $\mathcal{L}$ muss also wieder diskutiert werden, insbesondere die Nichtexistenz von Eigenwerten.

Zudem ist man an der Existenz und Eindeutigkeit von Strahlungslösungen interessiert. Wir sagen: U ist eine Lösung des Strahlungsproblems Ela(a, b, $\mathcal{P}$, ω, F) für $\omega \in \mathbb{R}^*$ und $F \in L^{2,q}_{>\frac{1}{2}}$, wenn

$$\begin{aligned} U &\in \overset{\circ}{H}{}^{1,q}_{<-\frac{1}{2}} \\ \mathcal{L}U + \mathcal{P}U - \omega^2 U &= F \end{aligned} \tag{4}$$

und die Strahlungsbedingungen

$$\operatorname{rot} U - \mathrm{i}\,\omega \mathrm{a}^{-\frac{1}{2}} \operatorname{rot} r \wedge U \in L^{2,q+1}_{>-\frac{1}{2}} \tag{5}$$

$$\operatorname{div} U - \mathrm{i}\,\omega \mathrm{b}^{-\frac{1}{2}} \sigma_{q,N} * (\operatorname{rot} r \wedge *U) \in L^{2,q-1}_{>-\frac{1}{2}} \tag{6}$$

($\sigma_{q,N} := (-1)^{(q-1)N}$, $*$ und $\wedge$ definiert wie in [3]) erfüllt sind. Hierbei ist $\mathcal{P}$ eine reelle symmetrische matrixwertige Störung nullter Ordnung.

Sei nun $U \in \mathcal{N}(\mathcal{L} - \omega^2)$ bzw. eine Lösung von Ela(a, b, 0, ω, 0). Im Falle homogener isotroper Medien, d.h. $\mathrm{a} = \mathrm{a}_0$, $\mathrm{b} = \mathrm{b}_0$ mit Konstanten $\mathrm{a}_0, \mathrm{b}_0 > 0$, läßt sich U in zwei Lösungen zu Helmholtz-Gleichungen zerlegen. Mit

$$U_d := -\frac{\mathrm{a}_0}{\omega^2} \operatorname{div} \operatorname{rot} U \quad \text{und} \quad U_r := -\frac{\mathrm{b}_0}{\omega^2} \operatorname{rot} \operatorname{div} U$$

und aus

$$\Delta = \operatorname{rot} \operatorname{div} + \operatorname{div} \operatorname{rot}$$

berechnet man

$$U = U_d + U_r \quad \text{und} \quad \Delta U_d + \frac{\omega^2}{\mathrm{a}_0} U_d = 0 \quad , \quad \Delta U_r + \frac{\omega^2}{\mathrm{b}_0} U_r = 0 \quad .$$

Mit der Rellich'schen Abschätzung und dem PdeF für Lösungen der Helmholtz-Gleichung folgt dann $\mathcal{N}(\mathcal{L} - \omega^2) = \{0\}$ und die Eindeutigkeit von Lösungen des Strahlungsproblems $\mathrm{Ela}(\mathrm{a}_0, \mathrm{b}_0, 0, \omega, F)$.

In dieser Arbeit sollen diese Aussagen für variable C^2-Koeffizienten a und b mit abfallenden ersten und zweiten Ableitungen und eine asymptotisch verschwindende matrixwertige C^1-Störung nullter Ordnung $\mathcal{P}$ hergeleitet werden.

1.2 Geschichte und Vorgehensweise

Sowohl bei den Maxwell-Gleichungen als auch bei den Gleichungen der linearen Elastizität weist die Frage nach dem Punktspektrum und der Eindeutigkeit des Strahlungsproblems eine enge Verbindung zur Eindeutigkeit von Lösungen gestörter Helmholtz-Gleichungen auf. Über diese ist viel geforscht worden, siehe [18], [10], [9], [19], [1],[21], [7] und auch die Diskussion in [21] und [7]. In den letzten beiden Arbeiten ist ein Beweisschema entwickelt worden, das grob gesprochen aus vier Schritten besteht.

1. Schritt: Lösungen in $L^2_{>-\frac{1}{2}}$ fallen polynomial ab.
2. Schritt: Lösungen, die polynomial abfallen, fallen exponentiell ab.
3. Schritt: Lösungen, die exponentiell abfallen, haben beschränkten Träger.
4. Schritt: Lösungen mit beschränktem Träger verschwinden.

Dabei sagen wir, dass eine Funktion oder ein Feld f polynomial bzw. exponentiell abfällt, kurz f in L^2_{pol} bzw. in $L^2_{\exp}$, wenn $r^k f$ bzw. $\exp(kr)f$ in L^2 für alle $k > 0$ ist.

Um die Eindeutigkeit des Strahlungsproblems zu zeigen, benötigt man noch einen vorgeschalteten Schritt:

0. Schritt: Strahlungslösungen zu Nulldaten liegen in $L^2_{>-\frac{1}{2}}$.

Es erweist sich, dass dieses Schema auch auf die Maxwell- und Elastizitätsgleichungen anwendbar ist. Der nullte Schritt erfolgt jeweils duch eine Integration der Strahlungsbedingung (siehe Lemma 7 bzw. Lemma 9).

Nun zunächst zu den Maxwell-Gleichungen: Der erste Schritt wird in [16] für L^∞-Matrizen ε und μ , die mit einer Rate $O(r^{-\tau})$, $\tau > 1$, gegen die Identität abfallen, bewiesen. Dabei wird eine Zerlegung von den polynomial gewichteten L^2_s-Räumen in divergenzfreie und rotationsfreie Räume benutzt, die in [27] gezeigt wird. Diese Technik steht aber nur für das polynomiale Abfallen zur Verfügung.

Eidus führt in [7] den ersten und den zweiten Schritt für Matrizen durch, die in einer Umgebung von Unendlich C^2-Koeffizienten haben. Für die Störungen wird ein Abklingverhalten von $o(r^{-1})$ benötigt. (O- und o-Bezeichnungen sind hier und im weiteren Verlauf immer auf den Limes $r \to \infty$ bezogen und gleichmäßig bezüglich $\xi \in S^2$ bzw. $\xi \in S^{N-1}$ zu verstehen.) Es wird benutzt, dass eine Eigenlösung (E, H) ein System

$$(\Delta + \omega^2 + S)(E, H) = 0$$

löst, wobei S ein matrixwertiger Differentialoperator zweiter Ordnung mit abfallenden Koeffizienten ist. Dieses System ist jedoch stark gekoppelt. Deshalb läßt sich mit der verwendeten Technik nicht der beschränkte Träger (3. Schritt) zeigen.

Der vierte Schritt läßt sich mit dem PdeF erledigen: Für den Fall von C^2-Matrizen wird das PdeF von Leis in [12] bewiesen (siehe auch [15, Kapitel 8]). Durch geschicktes Benutzen der Differentialgleichung wird gezeigt, dass (E, H) ein **schwach** gekoppeltes elliptisches Gleichungssystem löst, für welches das PdeF gilt.

Da das Maxwell-System ein System erster Ordnung ist, erwartet man, dass das PdeF auch für Gleichungen mit C^1-Matrizen gültig ist. Jedoch können bisher für C^1-Koeffizienten allgemeine Anisotropien nicht zugelassen werden. In [8] wird das PdeF für skalarwertige C^1-Funktionen ε, μ hergeleitet. In [22] werden Carleman'sche Abschätzungen für Gleichungen vom Maxwell-Typ gezeigt. Um diese aber anzuwenden, muss wohl $\varepsilon = f \cdot \mu$ mit einer skalaren Funktion f verlangt werden. Das heißt aber, dass der anisotrope Fall durch dieses Ergebnis nicht abgedeckt ist.

In dieser Arbeit wird der fehlende dritte Schritt gezeigt, indem wir den beschränkten Träger für Lösungen des schwach gekoppelten elliptischen Systems zweiter Ordnung zeigen.

Nun zu den Elastizitätsgleichungen: Außenraumprobleme für dieses System sind im klassischen Kalkül im $\mathbb{R}^3$ von Kupradze [11], Eidus [5], Leis [13]–[15]

und Weck [24] behandelt worden. In diesen Arbeiten werden die Gleichungen als homogen und isotrop im äußeren einer hinreichend großen Kugel angenommen. Die Schritte 1 bis 3 lassen sich also durch die geschilderte Beziehung zur Helmholtz-Gleichung erledigen.

Weck und Witsch [28] betrachten die verallgemeinerten Elastizitätsgleichungen in beliebigen Raumdimensionen $N \geq 2$. Es werden L^∞-Inhomogenitäten bei Unendlich zugelassen, die mit einer Rate $O(r^\tau)$, $\tau < -1$, gegen konstante Funktionen abfallen. Mit Raumzerlegungsmethoden wird das polynomiale Abfallen von Eigenlösungen gezeigt.

Jetzt der vierte Schritt: Das Lamé-System hat keine einfachen Charakteristiken. Aus diesem Grund ist das PdeF nicht durch allgemeine Sätze zu erhalten. In [4] wird das PdeF für Systeme mit Lamé-Hauptteil und Störungen erster Ordnung und C^∞-Koffizienten mit Hilfe von Pseudodifferentialoperatoren gezeigt, mit einfacheren Mitteln in [2] für C^3-Koeffizienten und matrixwertige Störungen nullter Ordnung. Ein sehr viel älteres Resultat stammt von Weck [25], das in [24] wieder aufgegriffen und erweitert wurde. Danach gilt das PdeF für Systeme mit C^2-Lamé-Hauptteil und C^1-Störungen erster Ordnung. Durch eine Substitution wird das System dabei auf ein schwach gekoppeltes elliptisches System zweiter Ordnung zurückgeführt.

Um die fehlenden Schritte 2 und 3 durchzuführen, müssen wir also, wie bei den Maxwell-Gleichungen, den beschränkten Träger für Lösungen von schwach gekoppelten elliptischen Systemen zweiter Ordnung zeigen. Hier kommt jedoch noch eine Schwierigkeit hinzu: Bei der Reduktion entstehen Koeffizienten erster Ordnung, die nicht abfallen.

Wir werden zunächst unsere Ergebnisse bezüglich des Maxwell- und Lamé-Systems darstellen. Im zweiten Kapitel werden wir eine Klasse von schwach gekoppelten elliptischen Systemen definieren, welche die Reduktionen von Maxwell- und Lamé-Systemen umfasst, und die Trivialität von Lösungen dieser Systeme herleiten. Dabei wollen wir im Hinblick auf eventuelle weitere Anwendungen eine größere Klasse behandeln, als für unsere Anwendungen nötig ist. Wir benutzen unterschiedlich gewichtete elementare L^2-Abschätzungen um die Schritte 1 – 3 zu zeigen und stützen uns dabei stark auf die Rechnungen in [21]. Im Hinblick auf die nicht abfallenden Terme nullter und erster Ordnung müssen wir noch einige

Zusatzgewichte einbauen.

Das PdeF für diese Systeme ist eine einfache Folgerung aus dem Ergebnis für elliptische Gleichungen in [17].

Im dritten Kapitel wird zunächst der nullte Schritt für Lösungen des Maxwell'schen Strahlungsproblems durchgeführt und danach das Maxwell-System auf ein elliptisches System reduziert. Mit Kapitel 2 folgt der beschränkte Träger und das PdeF. Anschließend gehen wir kurz auf die im Formenkalkül verallgemeinerten Maxwell-Gleichungen ein. Für bestimmte Fälle (z.B. $q = 1$ und μ eine skalare Funktion) läßt sich die Eindeutigkeit des Strahlungsproblems und $\sigma_p = \{0\}$ zeigen.

Im vierten Kapitel wird das Programm des dritten Kapitels für die auf q-Formen verallgemeinerten Elastizitätsgleichungen absolviert.

Im weiteren Verlauf der Arbeit benutzen wir folgende Konventionen: Römische Indizes i, j, k, l, m, n durchlaufen stets den Indexbereich von 1 bis zur gerade aktuellen Raumdimension, die entweder mit N bezeichnet wird oder, falls die Maxwell-Gleichungen behandelt werden, 3 ist. Treten in einem Produkt römische Indizes doppelt auf, so wird über sie von 1 bis zur aktuellen Raumdimension summiert. Große römische Indizes I, J durchlaufen stets den Indexbereich $\mathcal{J}(N, q)$ (siehe (81)), wobei q aus dem Zusammenhang ersichtlich ist. Treten sie in einem Produkt doppelt auf, so wird über den gesamten Indexbereich summiert.

1.3 Ergebnisse und Bemerkungen

Bei der Behandlung des Maxwell-Operators sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Außengebiet, $\omega \in \mathbb{R}^*$ und rot und div die vektoranalytischen Operatoren. Wir stellen folgende Anforderungen an die Koeffizienten:

Voraussetzungen MV.1 *Es gibt eine Konstante $m > 0$ mit*

$$\begin{aligned} m\,|\zeta|^2 &\leq \zeta_i \varepsilon_{ij} \overline{\zeta}_j \leq \frac{1}{m}\,|\zeta|^2 \\ m\,|\zeta|^2 &\leq \zeta_i \mu_{ij} \overline{\zeta}_j \leq \frac{1}{m}\,|\zeta|^2 \quad \textit{für alle} \quad \zeta \in \mathbb{C}^3 \quad . \end{aligned}$$

Bezüglich der Regularität und der Asymptotik verlangen wir

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}\ ,\ \mu_{ij} &\in C^2 \\ \varepsilon_{ij}-\delta_{ij}\ ,\ \mu_{ij}-\delta_{ij} &= o\,(r^{-1}) \\ \partial_m\varepsilon_{ij}\ ,\ \partial_l\partial_m\varepsilon_{ij}\ ,\ \partial_m\mu_{ij}\ ,\ \partial_l\partial_m\mu_{ij} &= o\,(r^{-1}) \qquad . \end{aligned}$$

In dieser Arbeit zeigen wir folgenden Satz:

Satz 1 *Angenommen die Koeffizienten erfüllen* **MV.1***.*

Löst $(E,H) \in \mathrm{R}_{\mathrm{loc}} \times \mathrm{R}_{\mathrm{loc}}$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} H &= \mathrm{i}\,\omega\varepsilon E \quad \textit{in} \quad \Omega \\ \operatorname{rot} E &= -\mathrm{i}\,\omega\mu H \quad \textit{in} \quad \Omega \end{aligned}$$

und liegen E, H in $L^2_{>-\frac{1}{2}}$, so verschwinden E und H in Ω.

Insbesondere gilt

$$\sigma_p(\mathcal{M}) = \{0\} \qquad .$$

Ferner ergibt sich auch die Eindeutigkeit des Strahlungsproblems:

Satz 2 *Angenommen* **MV.1** *gilt und (E,H) löst* $\mathrm{Max}(\varepsilon,\ \mu,\ \omega,\ 0,\ 0)$ *(siehe (2),(3)). Dann verschwinden E und H in Ω.*

Wir werden diese beiden Sätze in Kapitel 3 beweisen.

Wir betrachten nun Störungen des auf q-Formen operierenden Lamé-Operators. Dazu definieren wir (mit $\operatorname{rot} = \mathrm{d}$, $\operatorname{div} = \delta$ nach Weyl)

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{L}}\ :\ H^{2,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega) &\longrightarrow L^{2,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \\ U &\longmapsto -\operatorname{div}(\mathrm{a}\operatorname{rot} U) - \operatorname{rot}(\mathrm{b}\operatorname{div} U) + \mathcal{P}U \end{aligned}$$

mit zwei reellen positiven Funktionen a und b und einer symmetrischen reellen Störung nullter Ordnung $\mathcal{P}$ mit

$$\mathcal{P}F = p_{IJ} f_J \mathrm{d}x^I$$

für alle $F \in L^{2,q}_{\mathrm{loc}}$. Wir nehmen folgende Voraussetzungen an.

Voraussetzungen EV.1

$$\begin{aligned} \mathrm{a}, \mathrm{b} &\in C^2(\Omega\,,\,\mathbb{R}) \cap L^\infty(\Omega\,,\,\mathbb{R}) \\ p_{IJ} &\in C^1(\Omega\,,\,\mathbb{R}) \cap L^\infty(\Omega\,,\,\mathbb{R}) \\ p_{IJ} &= p_{JI} = \overline{p_{IJ}} \end{aligned}$$

und es gibt Konstanten $a_0 > 0$ und $b_0 > 0$ mit

$$\mathrm{a} \geq a_0 \quad \textit{und} \quad \mathrm{b} \geq b_0 \quad \textit{in} \quad \Omega \quad .$$

Bezüglich des Verhaltens von a, b und $\mathcal{P}$ bei ∞ verlangen wir

Voraussetzungen EV.2 *Es gibt Konstanten c_{L}, $\rho > 0$ mit*

$$\begin{aligned} c_{\mathrm{L}}\mathrm{a} - \mathrm{b} &= o(1) \qquad (7) \\ \partial_i \mathrm{a}\,,\, \partial_i\partial_j \mathrm{a}\,,\, \partial_i \mathrm{b}\,,\, \partial_i\partial_j \mathrm{b}\,,\, p_{IJ}\,,\, \partial_i p_{IJ} &= O\left(r^{-2-\rho}\right) \quad . \end{aligned}$$

Nun zu den Sätzen.

Satz 3 *Angenommen* **EV.1** *und* **EV.2** *gelten. Sei $U \in L^{2,q}_{>-\frac{1}{2}}$ eine Lösung der Gleichung $\widetilde{\mathcal{L}}U - \omega^2 U = 0$ für ein $\omega \in \mathbb{R}^*$. Dann verschwindet U in Ω.*

Ferner gilt der folgende

Satz 4 *Es gelte* **EV.1** *und* **EV.2**. *Dann gibt es zu $F \in L^{2,q}_{>\frac{1}{2}}$ und $\omega \in \mathbb{R}^*$ höchstens eine Lösung des Strahlungsproblem* Ela(a, b, $\mathcal{P}$, ω, F).

Wir werden die beiden Sätze im Kapitel 4 beweisen.

Es ist eine interessante Frage, ob man, vielleicht mit ähnlichen Rechnungen wie in [20], auch im Fall **nicht** asymptotisch konstanter Gleichungen die Existenz von Lösungen zeigen kann.

Zum Schluß sei noch bemerkt, dass sich in Beweisen die Erläuterungen zu längeren Rechnungen bisweilen am Ende dieser befinden, um den Lesefluss nicht weiter zu beeinträchtigen. Dabei werden elementare Beziehungen, wie etwa die Gleichung $2\,\mathrm{Re}(f\partial_j\overline{f}) = \partial_j\,|f|^2$ oder die Cauchy-Schwarz'sche-Ungleichung, nicht ausdrücklich erwähnt. Die Ungleichung

$$\langle\, e\,,\, f\,\rangle \leq \frac{\varepsilon}{2}\|e\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\|f\|^2 \quad (\forall\varepsilon > 0)$$

referenzieren wir als Young'sche Ungleichung. Konstanten sind duchgängig mit c, c_1 usw. bezeichnet, auch wenn sich deren Wert im Verlauf eines Beweises ändert.

2 Das verallgemeinerte Helmholtz-System

In diesem Kapitel wollen wir eine einigermaßen allgemeine Klasse von schwach gekoppelten elliptischen Systemen zweiter Ordnung behandeln, die wir als Helmholtz-Systeme bezeichnen wollen. Diese Bezeichnung wählen wir der Einfachheit halber, auch wenn die Koeffizienten dieser Systeme nicht unbedingt gegen die Koeffizienten der Helmholtz-Gleichung konvergieren müssen (vergl. die Voraussetzung **AV.1**). Im weiteren Verlauf dieses Kapitels sei Ω stets ein Außengebiet im $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$ und $\nu \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$\begin{array}{cccccc} \mathcal{H} & : & H^2_{\mathrm{loc}}(\Omega,\mathbb{C}^\nu) & \longrightarrow & L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega,\mathbb{C}^\nu) \\ & & E & \longmapsto & \mathcal{H}E, \end{array}$$

mit

$$\mathcal{H}E := \partial_i(\mathbf{a}_{ij}\partial_j E) + \boldsymbol{\omega}E + \mathbf{B}_i\partial_i E + \mathbf{P}E \quad .$$

Hierbei setzen wir $\mathbf{a}_{ij} = \mathrm{diag}(a^1_{ij},...,a^\nu_{ij})$ und $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{diag}(\omega^1,...,\omega^\nu)$.
$\mathbf{B}_i = (b_{i\kappa\lambda})_{\kappa,\lambda=1,...,\nu}$ und $\mathbf{P} = (p_{\kappa\lambda})_{\kappa,\lambda=1,...,\nu}$ sind $\nu\times\nu$ Matrizen . Eine zusätzliche Konvention: Wenn nichts anderes angegeben ist, durchlaufen griechische Indizes stets die Indexmenge $\{1,...,\nu\}$.

Wir stellen folgende Regularitätsvoraussetzungen an die Koeffizienten.

Voraussetzungen GV.1

$$\begin{array}{l} a^\kappa_{ij} \in C^1(\Omega,\mathbb{R}) \\ a^\kappa_{ij}\,,\partial_m a^\kappa_{ij} \in L^\infty(\Omega,\mathbb{R})\,, \quad \mathbf{B}_i\,,\mathbf{P} \in L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^{\nu^2}) \\ a^\kappa_{ij} = a^\kappa_{ji}\,, \quad \omega^\kappa \in \mathbb{R}_+ \quad . \end{array} \tag{8}$$

Wir werden die Indizierung des Gebietes Ω von nun an unterdrücken. Wir setzen Elliptizität im folgenden Sinn voraus.

Voraussetzungen GV.2 *Es gibt eine Konstante $e > 0$ mit*

$$\frac{1}{e}|v|^2 \leq v_i a_{ij}^{\kappa}(x)\overline{v_j} \leq e\,|v|^2\,,$$

für alle $v \in \mathbb{C}^N$ und alle $x \in \Omega$.

Bezüglich der Asymptotik des Hauptteils verlangen wir die

Voraussetzungen AV.1 Verhalten bei Unendlich
Auf Ω gibt es eine beschränkte gleichmäßig positiv definite C^2-Metrik $\mathbf{M}$,

$$\mathbf{M} = (m_{ij}) \quad , \quad \mathbf{M}^{-1} =: \mathbf{N} = (n_{ij})$$

mit

$$\partial_l m_{ij} = o\left(r^{-1}\right) \quad , \quad \partial_k \partial_l m_{ij} = o\left(r^{-2}\right) \quad , \tag{9}$$

so dass

$$a_{ij}^{\kappa} - n_{ij} = o(1) \quad . \tag{10}$$

Ferner verlangen wir

$$\partial_l a_{ij}^{\kappa} = o\left(r^{-1}\right) \quad . \tag{11}$$

Z.B. die Metrik

$$\mathbf{M}_1 := (2 + \sin\left[(\ln r)^{\gamma}\right])\,\mathrm{id}$$

mit $0 < \gamma < 1$ erfüllt die Voraussetzungen **AV.1**(9).

Um die Resultate bezüglich der Helmholtz-Systeme auf die Elastizitätsgleichungen anwenden zu können, müssen wir zulassen, dass bestimmte Koeffizienten erster und nullter Ordnung gar nicht abfallen. Dazu führen wir spezielle Gewichtsfunktionen ein.

Voraussetzungen AV.2 *Zu $\mathcal{H}$ gibt es eine monoton wachsende Abbildung*

$$\sigma \quad : \quad \{1, \dots, \nu\} \quad \longrightarrow \quad \{0, ..., \nu - 1\}$$

mit $\sigma(1) = 0$, $\sigma(i) - \sigma(i-1) \leq 1$ für alle $i \in \{2, ..., \nu\}$. Mit Hilfe dieser Abbildung definieren wir

$$\widehat{t^\kappa} := (r^2 \cdot \ln r)^{\sigma(\kappa)} \quad \textit{und} \quad \widehat{\tau^{\kappa\lambda}} := \left(\frac{\widehat{t^\kappa}}{\widehat{t^\lambda}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

und fordern

$$b_{i\kappa\lambda} \ , \ p_{\kappa\lambda} = o\left(\left(r\widehat{\tau^{\kappa\lambda}} \right)^{-1} \right) \quad , \quad \textit{falls} \quad \sigma(\kappa) \geq \sigma(\lambda) \quad . \tag{12}$$

Bemerkung 1 *Für Koeffizienten $b_{i\kappa\lambda}$, $p_{\kappa\lambda}$ mit $\sigma(\kappa) < \sigma(\lambda)$ werden keine über (8) hinausgehenden Bedingungen gestellt.*

Nun zum wesentlichen technischen Satz dieser Arbeit.

Satz 5 *Wir nehmen* **GV.1**, **GV.2**, **AV.1** *und* **AV.2** *an. Es sei $E \in L^2_{>\max\sigma - \frac{1}{2}}$ und $\mathcal{H}E \in L^2_{>s+1}$ für ein $s \in \mathbb{R}$, bzw. $\exp(tr)\mathcal{H}E \in L^2_{>1}$ für ein $t \in \mathbb{R}_+$ bzw. $\mathcal{H}E \in L^2_{\text{vox}}$.*
Dann ist $E \in L^2_s$, bzw. $\exp(tr)E \in L^2$, bzw. $E \in L^2_{\text{vox}}$.

Um das polynomiale Abfallen für $E \in L^2_{>-\frac{1}{2}}$ auch im Fall $\sigma \not\equiv 0$ zu zeigen, müssen wir etwas stärkere Voraussetzungen an die abfallenden Koeffizienten nullter und erster Ordnung stellen.

Voraussetzungen AV.3 *Zu $\mathcal{H}$ gibt es eine Abbildung σ wie in* **AV.2**, *so dass mit einem $\rho > 0$*

$$b_{i\kappa\lambda} \ , \ p_{\kappa\lambda} = o\left(r^{-1-\rho-(\sigma(\kappa)-\sigma(\lambda))} \right) \quad , \quad \textit{falls} \quad \sigma(\kappa) \geq \sigma(\lambda) \quad . \tag{13}$$

Damit erhalten wir den

Satz 6 *Wir nehmen* **GV.1**, **GV.2**, **AV.1** *und* **AV.3** *an. Sei $E \in L^2_{>-\frac{1}{2}}$ und $\mathcal{H}E \in L^2_{\text{pol}}$.*
Dann gilt $E \in L^2_{\text{pol}}$.

(Zur Erinnerung: $L^2_{\mathrm{pol}} = \cap_{s\in\mathbb{R}} L^2_s$.) Die Beweise werden in den folgenden Unterkapiteln geführt.

In den Unterkapiteln 2.1–2.4 setzen wir o.B.d.A. stets $\Omega = A(R_0)$ mit $R_0 > 0$ voraus. Ferner können wir zu vorgegebenen $R > R_0$ immer $\operatorname{supp} E \subset A(R)$ annehmen. Ansonsten wählen wir eine Ausschneidefunktion $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ mit $\varphi \equiv 0$ in $U(R)$ und $\varphi \equiv 1$ in $A(R+1)$. Damit ergibt sich $\varphi E = E$ sowie $\mathcal{H}(\varphi E) = \mathcal{H}E$ in $A(R+1)$.

Weiterhin gelte in 2.1–2.5 immer **GV.1**, **GV.2**, **AV.1** und **AV.2**.

2.1 Vorbereitungen

In den Rechnungen benutzen wir die Metrik $\mathbf{M}$.

Zunächst legen wir weitere Notationen fest und definieren

$$\tilde{r}(x) := \left(x^t \mathbf{M}(x) x\right)^{\frac{1}{2}} \quad .$$

Wegen **AV.1** gibt es eine Konstante $c_0 > 0$ mit

$$c_0 \tilde{r} \le r \le \frac{1}{c_0}\tilde{r} \quad . \tag{14}$$

Wir setzen o.B.d.A. $\tilde{r} \ge \exp(1)$ in Ω voraus.

Weiterhin modifizieren wir die 1-Funktion sowie das Radial- und das Radialeinheitsfeld. Dazu setzen wir mit $\mathbf{A}^\kappa := \left(a^\kappa_{ij}\right)$

$$\chi^\kappa := (\partial_i \tilde{r}) a^\kappa_{ij} \partial_j \tilde{r} \quad , \quad y^\kappa := \tilde{r}\mathbf{A}^\kappa \nabla \tilde{r} \quad \text{und} \quad \eta^\kappa := \mathbf{A}^\kappa \nabla \tilde{r} \quad , \tag{15}$$

sowie

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\chi} &:= \operatorname{diag}\left(\chi^1, ..., \chi^\nu\right) \\ \mathbf{y}_l &:= \operatorname{diag}\left(y^1_l, ..., y^\nu_l\right) \\ \boldsymbol{\eta}_l &:= \operatorname{diag}\left(\eta^1_l, ..., \eta^\nu_l\right) \quad . \end{aligned}$$

Für eine differenzierbare Funktionen $g \; : \; \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $G = g \circ \tilde{r}$ sei

$$\partial_{\tilde{r}} G := g'(\tilde{r}) \quad .$$

Wir notieren folgende Tatsachen, die sich durch elementare Rechnungen mit Hilfe von **AV.1** ergeben.

$$\nabla\tilde{r} = \frac{1}{\tilde{r}}\mathbf{M}x + \frac{1}{2\tilde{r}}x_i\left(\nabla m_{ij}\right)x_j = \frac{1}{\tilde{r}}\mathbf{M}x + o(1) \tag{16}$$

$$\boldsymbol{\eta}_i\partial_i\tilde{r} = \boldsymbol{\chi} \tag{17}$$

$$\boldsymbol{\chi} = \mathrm{id} + o(1) \tag{18}$$

$$\partial_j\boldsymbol{\chi} = o\left(r^{-1}\right) \tag{19}$$

$$y^\kappa = x + (\mathbf{A}^\kappa - \mathbf{N})x + \frac{1}{2}\mathbf{A}^\kappa x_i\left(\nabla m_{ij}\right)x_j = x + o(r) \tag{20}$$

$$\partial_i y_j^\kappa = \delta_{ij} + o(1) \tag{21}$$

$$\eta^\kappa = \frac{x}{\tilde{r}} + \frac{1}{2\tilde{r}}\mathbf{A}^\kappa x_i\left(\nabla m_{ij}\right)x_j = \frac{x}{\tilde{r}} + o(1) \tag{22}$$

$$\partial_i\boldsymbol{\eta}_i = (N-1)\tilde{r}^{-1} + o\left(r^{-1}\right) \quad . \tag{23}$$

Wegen (10), (20), (18) und (21) gilt

$$\mathrm{Re}\left[\left(\mathbf{y}_l\partial_l(\mathbf{a}_{ij}) + 2\boldsymbol{\chi}\mathbf{a}_{ij}\right)\zeta_j\overline{\zeta_i} - 2\mathbf{a}_{ij}\zeta_j(\partial_i\mathbf{y}_l)\overline{\zeta_l}\,\right] = o(1)\left|\zeta\right|^2 \tag{24}$$

gleichmäßig für $\zeta \in \mathbb{C}^N$.
Wir müssen unsere speziellen Gewichtsfunktionen $\widehat{t^\kappa}$ an die Modifizierungen anpassen und setzen dazu

$$t^\kappa := \left(\tilde{r}^2\ln\tilde{r}\right)^{\sigma(\kappa)} \quad \text{und} \quad \tau^{\kappa\lambda} = \left(\frac{t^\kappa}{t^\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \quad .$$

Damit ergibt sich, dass t^κ und $\widehat{t^\kappa}$ bzw. $\tau^{\kappa\lambda}$ und $\widehat{\tau^{\kappa\lambda}}$ im folgenden Sinne äquivalent sind: Aufgrund (14) gibt es eine Konstante c_1 mit

$$c_1\widehat{t^\kappa} \leq t^\kappa \leq \frac{1}{c_1}\widehat{t^\kappa} \quad \text{und} \quad c_1\widehat{\tau^{\kappa\lambda}} \leq \tau^{\kappa\lambda} \leq \frac{1}{c_1}\widehat{\tau^{\kappa\lambda}} \tag{25}$$

für alle $x \in \Omega$. Nun definieren wir

$$\mathbf{T} := \mathrm{diag}(t^1, ..., t^\nu) \quad .$$

und erhalten

$$\partial_i\mathbf{T} = (\partial_i\tilde{r})\partial_{\tilde{r}}\mathbf{T} = (\partial_i\tilde{r})\mathbf{ST}$$

mit

$$\mathbf{S} = \left(2\tilde{r}^{-1} + (\tilde{r} \cdot \ln \tilde{r})^{-1}\right) \operatorname{diag}(\sigma(1), ..., \sigma(\nu)) \quad . \tag{26}$$

Ferner gilt

$$\partial_{\tilde{r}} \mathbf{S} = -\tilde{r}^{-1} \mathbf{S} + o\left(r^{-2}\right) = O\left(r^{-2}\right) \quad . \tag{27}$$

Wir führen drei Klassen von Gewichtsfunktionen ein, mit denen wir nacheinander das polynomiale Abfallen, das exponentielle Abfallen sowie den beschränkten Träger zeigen. Für $k > 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\widetilde{w} := \widetilde{w}_k := \widetilde{w}_k^e \quad := \quad \exp(k\tilde{r}) \ , \tag{28}$$

$$\widetilde{w} := \widetilde{w}_k := \widetilde{w}_k^p \quad := \quad \tilde{r}^k \tag{29}$$

$$\widetilde{w} := \widetilde{w}_k := \widetilde{w}_k^{l,\alpha} \quad := \quad (\ln \tilde{r})^k \cdot \tilde{r}^\alpha \tag{30}$$

und setzen

$$\mathbf{w} := \mathbf{w}_k := \widetilde{w}_k \mathbf{T} \quad . \tag{31}$$

Damit ergibt sich

$$\partial_i \mathbf{w} = (\partial_i \tilde{r}) \partial_{\tilde{r}} \mathbf{w} = (\partial_i \tilde{r}) \mathbf{v} \mathbf{w} \tag{32}$$

mit

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^e = k \operatorname{id} + \mathbf{S} \ ,$$

bzw.

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^p = k\tilde{r}^{-1} \operatorname{id} + \mathbf{S} \, ,$$

bzw.

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{l\alpha} = k \left(\tilde{r} \cdot \ln \tilde{r}\right)^{-1} \operatorname{id} + \alpha \tilde{r}^{-1} \operatorname{id} + \mathbf{S} \quad .$$

Die folgenden Beziehungen $o(...)$ bzw. $O(...)$ sind stets für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ (falls α auftritt) und gleichmäßig bezüglich $k \in \mathbb{R}_+$ zu verstehen.

Wir berechnen

$$\begin{aligned} \partial_{\tilde{r}}\mathbf{v}^e &= \partial_{\tilde{r}}\mathbf{S} = O\left(r^{-2}\right) , \\ \partial_{\tilde{r}}\mathbf{v}^p &= -\tilde{r}^{-1}\mathbf{v}^p + o\left(r^{-2}\right) , \\ \partial_{\tilde{r}}\mathbf{v}^{l\alpha} &= -\tilde{r}^{-1}\mathbf{v}^{l\alpha}\left[1+o(1)\right] + o\left(r^{-2}\right) \end{aligned} \tag{33}$$

und

$$\begin{aligned} \partial_{\tilde{r}}^2\mathbf{v}^e &= O\left(r^{-3}\right) \\ \partial_{\tilde{r}}^2\mathbf{v}^p &= 2\tilde{r}^{-2}\mathbf{v}^p + o\left(r^{-3}\right) \\ \partial_{\tilde{r}}^2\mathbf{v}^{l\alpha} &= \tilde{r}^{-2}\mathbf{v}^{l\alpha}\left[2+o(1)\right] + o\left(r^{-3}\right) \quad . \end{aligned} \tag{34}$$

Für $E \in H^1$ und $k > 0$ führen wir die Abkürzungen

$$I(E) := \left\langle \left(\mathrm{id} + \mathbf{v}^2\right)\mathbf{w}E \; , \; E \right\rangle \qquad , \qquad J(E) := \left\langle \mathbf{w}\partial_i E \; , \; \partial_i E \right\rangle$$

sowie $K(E) := I(E) + J(E)$ ein. Mit $\delta(R)$ bezeichnen wir im weiteren verschiedene Funktionen von R, für die

$$\lim_{R\to\infty} \delta(R) = 0 \tag{35}$$

gilt. Die in den folgenden Rechnungen auftretenden Konstanten c bzw. Funktionen $\delta(R)$ können sich von Schritt zu Schritt ändern. Sie existieren aber jeweils für alle α (falls α auftritt) und sind unabhängig von k und β (falls β auftritt).

In einem ersten Schritt wollen wir zunächst Abschätzungen für gewichtete Felder unabhängig von k herleiten. In einem zweiten Schritt werden dann diese Abschätzungen über k aufsummiert.

2.2 Abschätzungen

Lemma 1 *Es gibt eine Konstante c, so dass für alle $k > 0$ und alle $E \in H^2_{\mathrm{vox}}$ mit $\operatorname{supp} E \subset \Omega$ und $\mathcal{H}E = F$ die folgende Abschätzung gilt:*

$$\left\langle \mathbf{w}\partial_i E \; , \; \partial_i E \right\rangle \;\leq\; c\left[\left\langle (\mathrm{id} + \mathbf{v}^2)\mathbf{w}E \; , \; E \right\rangle - \mathrm{Re}\left\langle \mathbf{w}F \; , \; E \right\rangle\right] \quad . \tag{36}$$

Beweis: Zwei partielle Integrationen sowie (32) und (15) liefern

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\Big\langle \partial_i(\mathbf{a}_{ij}\partial_j E)\ ,\ \mathbf{w}E\Big\rangle \\
&= \quad -\operatorname{Re}\Big\langle \mathbf{a}_{ij}\partial_j E\ ,\ \mathbf{w}\partial_i E\Big\rangle - \operatorname{Re}\Big\langle \mathbf{a}_{ij}\partial_j E\ ,\ (\partial_i \mathbf{w})E\Big\rangle \\
&= \quad -\operatorname{Re}\Big\langle \mathbf{a}_{ij}\partial_j E\ ,\ \mathbf{w}\partial_i E\Big\rangle - \operatorname{Re}\Big\langle \boldsymbol{\eta}_j\partial_j E\ ,\ \mathbf{v}\mathbf{w}E\Big\rangle \\
&= \quad -\operatorname{Re}\Big\langle \mathbf{a}_{ij}\partial_j E\ ,\ \mathbf{w}\partial_i E\Big\rangle + \frac{1}{2}\Big\langle \partial_j(\boldsymbol{\eta}_j\mathbf{v}\mathbf{w})E\ ,\ E\Big\rangle \quad .
\end{aligned}
$$

Wir nutzen die Gleichung $\mathcal{H}E = F$ aus und erhalten

$$
\begin{aligned}
&\Big\langle \mathbf{a}_{ij}\partial_j E\ ,\ \mathbf{w}\partial_i E\Big\rangle \\
&= \quad -\operatorname{Re}\Big\langle F - (\mathbf{B}_i\partial_i + \mathbf{P})E\ ,\ \mathbf{w}E\Big\rangle + \Big\langle \boldsymbol{\omega}\mathbf{w}E\ ,\ E\Big\rangle \\
&\quad + \frac{1}{2}\Big\langle \partial_j(\boldsymbol{\eta}_j\mathbf{v}\mathbf{w})E\ ,\ E\Big\rangle \quad .
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe der Young'schen Ungleichung können wir für alle $\theta > 0$ abschätzen

$$
\begin{aligned}
&-\operatorname{Re}\Big\langle F - (\mathbf{B}_i\partial_i + \mathbf{P})E\ ,\ \mathbf{w}E\Big\rangle \\
&\leq \quad c\left[\theta J(E) + \left(\frac{1}{\theta} + 1\right) I(E)\right] - \operatorname{Re}\Big\langle F\ ,\ \mathbf{w}E\Big\rangle \quad ,
\end{aligned}
\tag{37}
$$

wobei c unabhängig von θ ist. Andererseits erhalten wir mit Hilfe von (23), (17), (32) und (33)

$$
\partial_j(\boldsymbol{\eta}_j\mathbf{v}\mathbf{w}) \leq c(\mathrm{id} + \mathbf{v}^2)\mathbf{w} \quad . \tag{38}
$$

Mit **GV.2** gilt außerdem

$$
\Big\langle \mathbf{w}\partial_i E\ ,\ \partial_i E\Big\rangle \leq \frac{1}{e}\Big\langle \mathbf{a}_{ij}\partial_j E\ ,\ \mathbf{w}\partial_i E\Big\rangle \quad . \tag{39}
$$

Nun wählen wir θ hinreichend klein, stellen dann die Terme um, erhalten (36) und damit die Aussage des Lemmas. **q.e.d.**

Wir wollen nun Felder ohne beschränkte Träger betrachten.

Lemma 2 *Sei* $\operatorname{supp} E \subset \Omega$ *sowie* $\mathbf{w}^{\frac{1}{2}} E$ *und* $\mathbf{w}^{\frac{1}{2}} \mathcal{H} E$ *in* L^2.

Dann ist auch $\mathbf{w}^{\frac{1}{2}} \partial_i E$ *in* L^2.

Beweis: Wir wählen eine Abschneidefunktion $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi \equiv 1$ in $(-\infty\,,\,1\,]$, $\psi \equiv 0$ in $[\,2\,,\,\infty\,)$ und definieren $\psi_z(x) := \psi(|x| - z)$. Ferner setzen wir $E^z := \psi_z E$. Mit elementaren Rechnungen erhalten wir

$$\mathcal{H} E^z \;=\; \psi_z F + 2\mathbf{a}_{ij}(\partial_i \psi_z)\partial_j E + (\partial_i \mathbf{a}_{ij}(\partial_j \psi_z))E + (\partial_i \psi_z)\mathbf{B}_i E =: \widetilde{F}^z \quad .$$

Aufgrund der Definition von ψ_z gilt

$$\Big(\mathbf{w}\partial_i E^z, \partial_i E^z\Big) \quad \longrightarrow \quad \Big(\mathbf{w}\partial_i E, \partial_i E\Big)$$

punktweise f.ü. für $z \to \infty$, und

$$\Big(\mathbf{w}\left(\operatorname{id} + \mathbf{v}^2\right) E^z, E^z\Big) \leq \Big(\mathbf{w}\left(\operatorname{id} + \mathbf{v}^2\right) E, E\Big) \quad .$$

Mit partieller Integration erhalten wir

$$\left|\operatorname{Re}\left\langle \mathbf{w}\widetilde{F}^z\ ,\ E^z\right\rangle\right| \leq c\ \left[\left\langle \mathbf{w}F\ ,\ F\right\rangle + \left\langle \mathbf{w}\left(\operatorname{id} + \mathbf{v}^2\right) E\ ,\ E\right\rangle\right] \tag{40}$$

mit einer Konstanten c unabhängig von z. Mit Lemma 1, (40) und dem Lemma von Fatou schließen wir

$$\Big(\mathbf{w}\partial_i E, \partial_i E\Big) \in L^1 \quad .$$

q.e.d.

Nun zur Hauptabschätzung:

Lemma 3 *Ein* $\epsilon > 0$ *sei vorgegeben. Dann gibt es Konstanten* c, R_1 *und eine Funktion* δ *gemäß (35), so dass für alle* $k > 0$, $\beta \in (-1\,,\,1]$, $R > R_1$ *und* $E \in H^2_{\mathrm{loc}}$ *mit* $\operatorname{supp} E \subset A(R)$, $\mathcal{H}E = F$, $\mathbf{w}_k^{\frac{1}{2}} E \in L^2$ *und* $\mathbf{w}_k^{\frac{1}{2}} F \in L^2_{>1+\frac{\epsilon}{2}}$ *die folgenden Abschätzungen gelten*

$$(1+\beta)\left\langle \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\chi}\mathbf{w}E\ ,\ E\right\rangle + \left\langle\ [(1-\beta)\operatorname{id} + 2\mathbf{v}\tilde{r}]\,\mathbf{w}\boldsymbol{\eta}_k\partial_k E\ ,\ \boldsymbol{\eta}_l\partial_l E\right\rangle \tag{41}$$

$$\leq\ c\left\langle (|\mathbf{v}|^3\,\tilde{r}\operatorname{id} + \mathbf{v}^2)\mathbf{w}E\ ,\ E\right\rangle + c\left\langle \tilde{r}^{2+\epsilon}\mathbf{w}F\ ,\ F\right\rangle + \delta(R)I(E)$$

und

$$
\begin{aligned}
& 2\left\langle \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\chi}\mathbf{w}E\ ,\ E\right\rangle \qquad (42)\\
& \leq\ -\frac{1}{2}\left\langle (\mathbf{v}^2+\tilde{r}\mathbf{v}\partial_{\tilde{r}}\mathbf{v})\boldsymbol{\chi}^2\mathbf{w}E\ ,\ E\right\rangle + c\left\langle \tilde{r}^{2+\epsilon}\mathbf{w}F\ ,\ F\right\rangle + \delta(R)I(E) \quad .
\end{aligned}
$$

Beweis: Wir nehmen zunächst $E \in H^2_{\mathrm{vox}}$ an und multiplizieren die Gleichung $\mathcal{H}E = F$ mit $\mathbf{w}\mathbf{y}_l\partial_l E$. Mit mehreren partiellen Integrationen erhalten wir

$$
\begin{aligned}
& 2\,\mathrm{Re}\left\langle \partial_i(\mathbf{a}_{ij}\partial_j E)\ ,\ \mathbf{w}\mathbf{y}_l\partial_l E\right\rangle \\
=\ & -2\,\mathrm{Re}\left\langle \mathbf{a}_{ij}\partial_j E\ ,\ \mathbf{w}\mathbf{y}_l\partial_l\partial_i E + \partial_i(\mathbf{w}\mathbf{y}_l)\partial_l E\right\rangle \\
=\ & \mathrm{Re}\left\langle \partial_l(\mathbf{a}_{ij}\mathbf{w}\mathbf{y}_l)\partial_j E\ ,\ \partial_i E\right\rangle - 2\,\mathrm{Re}\left\langle \mathbf{a}_{ij}\partial_j E\ ,\ \partial_i(\mathbf{w}\mathbf{y}_l)\partial_l E\right\rangle \\
=\ & \mathrm{Re}\left\langle \partial_l(\mathbf{w}\mathbf{y}_l)\mathbf{a}_{ij}\partial_j E\ ,\ \partial_i E\right\rangle + \mathrm{Re}\left\langle \mathbf{w}\mathbf{y}_l(\partial_l\mathbf{a}_{ij})\partial_j E\ ,\ \partial_i E\right\rangle \\
& -2\,\mathrm{Re}\left\langle \mathbf{v}\mathbf{w}\tilde{r}\boldsymbol{\eta}_j\partial_j E\ ,\ \boldsymbol{\eta}_l\partial_l E\right\rangle - 2\,\mathrm{Re}\left\langle \mathbf{w}\mathbf{a}_{ij}\partial_j E\ ,\ (\partial_i\mathbf{y}_l)\partial_l E\right\rangle \quad .
\end{aligned}
$$

Dabei haben wir in der dritten Zeile

$$
\mathbf{a}_{ij}\partial_l((\partial_j E)(\partial_i\overline{E})) = \mathbf{a}_{ij}((\partial_l\partial_j E)\partial_i\overline{E} + (\partial_l\partial_j\overline{E})\partial_i E)
$$

ausgenutzt. Diese Gleichheit gilt aufgrund der Symmetrie der $\mathbf{a}_{ij}$. Mit einer weiteren partiellen Integration ergibt sich

$$
2\,\mathrm{Re}\left\langle \boldsymbol{\omega}E\ ,\ \mathbf{w}\mathbf{y}_l\partial_l E\right\rangle = -\,\mathrm{Re}\left\langle \boldsymbol{\omega}\partial_l(\mathbf{w}\mathbf{y}_l)E\ ,\ E\right\rangle \quad .
$$

Wir setzen

$$
G := F - \mathbf{B}_i\partial_i E - \mathbf{P}E \quad .
$$

Mit Hilfe der Gleichung $\mathcal{H}E = F$ schließen wir dann

$$
\begin{aligned}
& 2\left\langle \mathbf{v}\mathbf{w}\tilde{r}\boldsymbol{\eta}_l\partial_l E\ ,\ \boldsymbol{\eta}_k\partial_k E\right\rangle \qquad (43)\\
=\ & -2\,\mathrm{Re}\left\langle G\ ,\ \mathbf{w}\mathbf{y}_l\partial_l E\right\rangle \\
& +\mathrm{Re}\left\langle \mathbf{w}\mathbf{y}_l(\partial_l\mathbf{a}_{ij})\partial_j E\ ,\ \partial_i E\right\rangle - 2\,\mathrm{Re}\left\langle \mathbf{w}\mathbf{a}_{ij}\partial_j E\ ,\ (\partial_i\mathbf{y}_l)\partial_l E\right\rangle \\
& +\mathrm{Re}\left\langle (\partial_l(\mathbf{w}\mathbf{y}_l))\mathbf{a}_{ij}\partial_j E\ ,\ \partial_i E\right\rangle - \mathrm{Re}\left\langle \boldsymbol{\omega}\partial_l(\mathbf{w}\mathbf{y}_l)E\ ,\ E\right\rangle \quad .
\end{aligned}
$$

Unter Beachtung von (24) bemerken wir

$$\mathrm{Re}\left[\left\langle \mathbf{w}\,(\mathbf{y}_l(\partial_l \mathbf{a}_{ij}) + 2\boldsymbol{\chi}\mathbf{a}_{ij})\,\partial_j E\ ,\ \partial_i E\right\rangle - 2\left\langle \mathbf{w}\mathbf{a}_{ij}\partial_j E\ ,\ (\partial_i \mathbf{y}_l)\partial_l E\right\rangle\right]$$
$$\leq\ \delta(R)J(E) \quad . \tag{44}$$

Das veranlasst uns $2\,\mathrm{Re}\left\langle \mathbf{w}\boldsymbol{\chi}\mathbf{a}_{ij}\partial_j E\ ,\ \partial_i E\right\rangle$ auf beiden Seiten von (43) zu addieren. Auf der rechten Seite schreiben wir das zur zweiten Zeile und erhalten mit (44) die Abschätzung

$$\begin{aligned} & 2\left\langle \mathbf{v}\mathbf{w}\tilde{r}\boldsymbol{\eta}_i\partial_i E\ ,\ \boldsymbol{\eta}_l\partial_l E\right\rangle + 2\left\langle \mathbf{w}\boldsymbol{\chi}\mathbf{a}_{ij}\partial_j E\ ,\ \partial_i E\right\rangle \\ &\quad\leq\ -2\,\mathrm{Re}\left\langle G\ ,\ \mathbf{w}\mathbf{y}_l\partial_l E\right\rangle \\ &\qquad + \left\langle \partial_l(\mathbf{w}\mathbf{y}_l)\mathbf{a}_{ij}\partial_j E\ ,\ \partial_i E\right\rangle - \left\langle \boldsymbol{\omega}\partial_l(\mathbf{w}\mathbf{y}_l)E\ ,\ E\right\rangle \\ &\qquad + \delta(R)J(E) \quad . \end{aligned} \tag{45}$$

Wir führen einen Parameter $\beta \in (\,-1\,,\,1\,]$ ein und addieren

$$-(1+\beta)\left[\left\langle \mathbf{w}\boldsymbol{\chi}\mathbf{a}_{ij}\partial_j E\ ,\ \partial_i E\right\rangle - \left\langle \boldsymbol{\omega}\mathbf{w}\boldsymbol{\chi}E\ ,\ E\right\rangle\right]$$

auf beiden Seiten, wodurch sich

$$\begin{aligned} & (1+\beta)\left\langle \boldsymbol{\omega}\mathbf{w}\boldsymbol{\chi}E\ ,\ E\right\rangle + (1-\beta)\left\langle \mathbf{w}\boldsymbol{\chi}\mathbf{a}_{ij}\partial_j E\ ,\ \partial_i E\right\rangle \\ & +2\left\langle \mathbf{v}\mathbf{w}\tilde{r}\boldsymbol{\eta}_l\partial_l E\ ,\ \boldsymbol{\eta}_k\partial_k E\right\rangle \\ &\quad\leq\ -2\,\mathrm{Re}\left\langle G\ ,\ \mathbf{w}\mathbf{y}_l\partial_l E\right\rangle \\ &\qquad + \left\langle\ [\partial_l(\mathbf{w}\mathbf{y}_l) - (1+\beta)\boldsymbol{\chi}\mathbf{w}]\,\mathbf{a}_{ij}\partial_j E\ ,\ \partial_i E\right\rangle \\ &\qquad - \left\langle\ [\partial_l(\mathbf{w}\mathbf{y}_l) - (1+\beta)\boldsymbol{\chi}\mathbf{w}]\,\boldsymbol{\omega}E\ ,\ E\right\rangle \\ &\qquad + \delta(R)J(E) \end{aligned} \tag{46}$$

ergibt. Mit (32), (17) und (23) rechnen wir

$$\partial_l(\mathbf{w}\mathbf{y}_l) - (1+\beta)\boldsymbol{\chi}\mathbf{w} = \mathbf{w}(N - 1 + (\tilde{r}\mathbf{v} - \beta)\boldsymbol{\chi}) + o\,(1)\,\mathbf{w} \quad . \tag{47}$$

Mit (47), einer partiellen Integration und unter Ausnutzung der Gleichung $\mathcal{H}E = F$ formen wir die zweite und dritte Zeile auf der rechten Seite von (46) um.

$$\begin{aligned}
&\Big\langle \left[\partial_l(\mathbf{w}\mathbf{y}_l) - (1+\beta)\boldsymbol{\chi}\mathbf{w}\right]\mathbf{a}_{ij}\partial_j E \ , \ \partial_i E\Big\rangle - \Big\langle \left[\partial_l(\mathbf{w}\mathbf{y}_l) - (1+\beta)\boldsymbol{\chi}\mathbf{w}\right]\boldsymbol{\omega}E \ , \ E\Big\rangle \\
&\qquad \leq \ -\operatorname{Re}\Big\langle \mathbf{w}(N-1+(\mathbf{v}\tilde{r}-\beta)\boldsymbol{\chi})G \ , \ E\Big\rangle \qquad (48)\\
&\qquad\qquad -\operatorname{Re}\Big\langle \partial_i(\mathbf{w}(N-1+(\mathbf{v}\tilde{r}-\beta)\boldsymbol{\chi}))\mathbf{a}_{ij}\partial_j E \ , \ E\Big\rangle + \delta(R)\left(I(E)+J(E)\right) \quad .
\end{aligned}$$

Wir betrachten die letzte Zeile auf der rechten Seite von (48). Mit (19) der Young'schen Ungleichung, (32), (15) und einer partiellen Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}
&-\operatorname{Re}\Big\langle \partial_i(\mathbf{w}(N-1+(\mathbf{v}\tilde{r}-\beta)\boldsymbol{\chi}))\mathbf{a}_{ij}\partial_j E \ , \ E\Big\rangle \qquad (49)\\
&\quad = \ -\operatorname{Re}\Big\langle \mathbf{w}(\mathbf{v}\tilde{r}-\beta)(\partial_i\boldsymbol{\chi})\mathbf{a}_{ij}\partial_j E \ , \ E\Big\rangle \\
&\qquad\quad -\operatorname{Re}\Big\langle \left[(\partial_i\mathbf{w})(N-1+(\mathbf{v}\tilde{r}-\beta)\boldsymbol{\chi}) + \mathbf{w}\boldsymbol{\chi}\partial_i(\tilde{r}\mathbf{v})\right]\mathbf{a}_{ij}\partial_j E \ , \ E\Big\rangle \\
&\quad \leq \ \delta(R)\left(I(E)+J(E)\right) \\
&\qquad\quad +\frac{1}{2}\Big\langle \partial_j\left(\boldsymbol{\eta}_j\mathbf{w}\left(\mathbf{v}(N-1)+(\mathbf{v}\tilde{r}-\beta)\boldsymbol{\chi}\mathbf{v}+\partial_{\tilde{r}}(\tilde{r}\mathbf{v})\boldsymbol{\chi}\right)\right)E \ , \ E\Big\rangle \quad .
\end{aligned}$$

Auf der linken Seite von (46) addieren wir eine 0 der Form

$$-(1-\beta)\Big\langle \mathbf{w}\boldsymbol{\eta}_k\partial_k E \ , \ \boldsymbol{\eta}_l\partial_l E\Big\rangle + (1-\beta)\Big\langle \mathbf{w}\boldsymbol{\eta}_k\partial_k E \ , \ \boldsymbol{\eta}_l\partial_l E\Big\rangle$$

setzen (48) und (49) ein, und erhalten

$$\begin{aligned}
&\quad (1+\beta)\Big\langle \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\chi}\mathbf{w}E \ , \ E\Big\rangle \\
&\quad +(1-\beta)\left[\Big\langle \mathbf{w}\boldsymbol{\chi}\mathbf{a}_{ij}\partial_j E \ , \ \partial_i E\Big\rangle - \Big\langle \mathbf{w}\boldsymbol{\eta}_k\partial_k E \ , \ \boldsymbol{\eta}_l\partial_l E\Big\rangle\right] \\
&+\Big\langle \mathbf{w}(1-\beta+2\mathbf{v}\tilde{r})\boldsymbol{\eta}_k\partial_k E \ , \ \boldsymbol{\eta}_l\partial_l E\Big\rangle \qquad (50)\\
&\quad \leq \ -\operatorname{Re}\Big\langle \mathbf{w}G \ , \ (N-1+(\tilde{r}\mathbf{v}-\beta)\boldsymbol{\chi})E + 2\mathbf{y}_l\partial_l E\Big\rangle \\
&\qquad\quad +\frac{1}{2}\Big\langle \partial_j\left(\boldsymbol{\eta}_j\mathbf{w}\left(\mathbf{v}(N-1)+(\mathbf{v}\tilde{r}-\beta)\boldsymbol{\chi}\mathbf{v}+\partial_{\tilde{r}}(\tilde{r}\mathbf{v})\boldsymbol{\chi}\right)\right)E \ , \ E\Big\rangle \\
&\qquad\quad + \delta(R)K(E) \quad .
\end{aligned}$$

Die zweite Zeile von (50) ist positiv semidefinit, da nach der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung $|\eta^\kappa\zeta|^2 \leq \chi^\kappa\zeta_i a^\kappa_{ij}\overline{\zeta}_j$ für alle $x \in \Omega$ und alle $\zeta \in \mathbb{C}^N$ ist. Wir können diese Zeile also einfach weglassen.

Wir wenden uns der ersten Zeile der rechten Seite von (50) zu, setzen

$$H := (N-1+(\mathbf{v}\tilde{r}-\beta)\boldsymbol{\chi})E + 2\mathbf{y}_l\partial_l E$$

und schätzen ab:

$$\begin{aligned} I_1 &:= -\operatorname{Re}\left\langle \mathbf{w}F \ , \ H \right\rangle \\ &\leq \delta(R)K(E) + \left\langle \tilde{r}^{2+\epsilon}\mathbf{w}F \ , \ F \right\rangle \quad ; \end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned} I_2 &:= \operatorname{Re}\left\langle \mathbf{w}(\mathbf{B}_i\partial_i + \mathbf{P})E \ , \ H \right\rangle \\ &= \operatorname{Re}\sum_{\kappa,\lambda=1}^{\nu} \left\langle \widetilde{w}t^\kappa (b_{i\kappa\lambda}\partial_i + p_{\kappa\lambda})E^\lambda \ , \ H^\kappa \right\rangle \\ &= \operatorname{Re}\sum_{\kappa,\lambda=1}^{\nu} \left\langle \widetilde{w}^{\frac{1}{2}}\tau^{\kappa\lambda}\left(t^\lambda\right)^{\frac{1}{2}} (b_{i\kappa\lambda}\partial_i + p_{\kappa\lambda})E^\lambda \ , \ (\widetilde{w}t^\kappa)^{\frac{1}{2}}\, H^\kappa \right\rangle \\ &\leq \delta(R)K(E) \quad , \end{aligned} \tag{52}$$

da im Falle $\sigma(\kappa) \geq \sigma(\lambda)$

$$(b_{i\kappa\lambda} + p_{\kappa\lambda})\tau^{\kappa\lambda} = o\left(r^{-1}\right)$$

wegen (12) gilt, und wir andererseits auch

$$\tau^{\kappa\lambda} = \left(\tilde{r}\cdot(\ln\tilde{r})^{\frac{1}{2}}\right)^{\sigma(\kappa)-\sigma(\lambda)} = o\left(r^{-1}\right)$$

haben, falls $\sigma(\kappa) < \sigma(\lambda)$.

Nun berechnen wir die Ableitung im zweiten Term auf der rechten Seite von (50). Mit (32), (17), (23), (19), (33) und (34) erhalten wir

$$\begin{aligned} &\partial_j\left(\boldsymbol{\eta}_j\mathbf{w}\left[\mathbf{v}(N-1) + (\mathbf{v}\tilde{r}-\beta)\boldsymbol{\chi}\mathbf{v} + \partial_{\tilde{r}}(\tilde{r}\mathbf{v})\boldsymbol{\chi}\right]\right) \\ &= (\partial_j\boldsymbol{\eta}_j)\mathbf{w}\left[\underbrace{\mathbf{v}(N-1)} + (\mathbf{v}\tilde{r} - \underbrace{\beta})\boldsymbol{\chi}\mathbf{v} + \underbrace{\partial_{\tilde{r}}(\tilde{r}\mathbf{v})\boldsymbol{\chi}}\right] \\ &\quad + \boldsymbol{\chi}\mathbf{v}\mathbf{w}\left[\mathbf{v}(N-1) + (\mathbf{v}\tilde{r}-\beta)\boldsymbol{\chi}\mathbf{v} + \partial_{\tilde{r}}(\tilde{r}\,\mathbf{v})\boldsymbol{\chi}\right] \end{aligned} \tag{53}$$

$$
\begin{aligned}
&+\boldsymbol{\chi}\mathbf{w}\left[\underbrace{\partial_{\tilde r}\mathbf{v}(N-1)}+\partial_{\tilde r}((\mathbf{v}\,\tilde r-\beta)\underbrace{\boldsymbol{\chi}}\mathbf{v})+\underbrace{\partial_{\tilde r}(\partial_{\tilde r}(\tilde r\mathbf{v})\boldsymbol{\chi})}\right] \\
= \quad &\mathbf{w}\mathbf{v}^3\boldsymbol{\chi}^2\tilde r+(2-\beta)\mathbf{w}\mathbf{v}^2\boldsymbol{\chi}^2+2(N-1)\mathbf{w}\mathbf{v}^2\boldsymbol{\chi} \\
&+3\mathbf{w}\mathbf{v}\tilde r\boldsymbol{\chi}^2\partial_{\tilde r}\mathbf{v}+\underbrace{(o(1)+o(1)\mathbf{v}+o(1)\mathbf{v}^2)\mathbf{w}} \quad .
\end{aligned}
$$

Dabei wandern die unterklammerten Terme in den Resteterm. Wir werden die Gleichung (53) später noch einmal brauchen. Mit Hilfe von (50)–(53), (33) und der Young'schen Ungleichung schließen wir

$$
\begin{aligned}
&(1+\beta)\left\langle \boldsymbol{\omega}\mathbf{w}\boldsymbol{\chi}E\ ,\ E\right\rangle+\left\langle (1-\beta+2\mathbf{v}\tilde r)\mathbf{w}\boldsymbol{\eta}_l\partial_l E\ ,\ \boldsymbol{\eta}_k\partial_k E\right\rangle \\
\leq \quad &c\left\langle \mathbf{w}\left(|\mathbf{v}|^3\,\tilde r\,\mathrm{id}+\mathbf{v}^2\right)E\ ,\ E\right\rangle+\left\langle \tilde r^{2+\varepsilon}\mathbf{w}F\ ,\ F\right\rangle+\delta(R)K(E) \quad ,
\end{aligned}
$$

und dann mit Lemma 1 die Abschätzung (41), zunächst für $E \in H^2_{\mathrm{vox}}$.

Um zur zweiten Abschätzung (42) zu kommen, zunächst für $E \in H^2_{\mathrm{vox}}$, setzen wir $\beta = 1$ und betrachten den Term

$$2\left\langle \mathbf{w}\mathbf{v}\tilde r\boldsymbol{\eta}_k\partial_k E\ ,\ \boldsymbol{\eta}_l\partial_l E\right\rangle \quad .$$

Es sei w^κ das κ-te Hauptdiagonalelement von $\mathbf{w}$. Mit

$$(w^\kappa)^{\frac12}\,\eta^\kappa\nabla E^\kappa=\eta^\kappa\nabla\left((w^\kappa)^{\frac12}\,E^\kappa\right)-\frac12\chi^\kappa v^\kappa\,(w^\kappa)^{\frac12}\,E^\kappa$$

erhalten wir durch Quadrieren

$$
\begin{aligned}
&\left(\mathbf{w}\boldsymbol{\eta}_k\partial_k E,\boldsymbol{\eta}_l\partial_l E\right) \\
= \quad &\left(\boldsymbol{\eta}_l\partial_l(\mathbf{w}^{\frac12}E),\boldsymbol{\eta}_k\partial_k(\mathbf{w}^{\frac12}E)\right)-\frac12\sum_{\kappa=1}^{\nu}\chi^\kappa v^\kappa\eta^\kappa\nabla\left|(w^\kappa)^{\frac12}E^\kappa\right|^2+\frac14\left(\boldsymbol{\chi}^2\mathbf{v}^2\mathbf{w}E,E\right)
\end{aligned}
$$

f.ü.

Im zweiten Term integrieren wir partiell und bekommen mit (19), (17), (23) und (33)

$$2\left\langle \mathbf{w}\mathbf{v}\tilde r\boldsymbol{\eta}_k\partial_k E\ ,\ \boldsymbol{\eta}_l\partial_l E\right\rangle \tag{54}$$

$$= \; 2\left\langle \mathbf{v}\tilde{r}\boldsymbol{\eta}_k\partial_k(\mathbf{w}^{\frac{1}{2}}E) \; , \; \boldsymbol{\eta}_l\partial_l(\mathbf{w}^{\frac{1}{2}}E)\right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \left[\mathbf{v}^3\boldsymbol{\chi}^2\tilde{r} + 2\partial_k\left(\boldsymbol{\eta}_k\tilde{r}\boldsymbol{\chi}\mathbf{v}^2\right)\right]\mathbf{w}E \; , \; E\right\rangle$$

$$= \; 2\left\langle \mathbf{v}\tilde{r}\boldsymbol{\eta}_k\partial_k(\mathbf{w}^{\frac{1}{2}}E) \; , \; \boldsymbol{\eta}_l\partial_l(\mathbf{w}^{\frac{1}{2}}E)\right\rangle$$

$$+ \left\langle \left[\frac{1}{2}\mathbf{v}^3\tilde{r}\boldsymbol{\chi}^2 + (N-1)\mathbf{v}^2\boldsymbol{\chi} + \mathbf{v}^2\boldsymbol{\chi}^2 + 2\boldsymbol{\chi}^2\tilde{r}\mathbf{v}\partial_{\tilde{r}}\mathbf{v}\right]\mathbf{w}E \; , \; E\right\rangle$$

$$+ \left\langle (o(1) + o(1)\mathbf{v} + o(1)\mathbf{v}^2)\mathbf{w}E \; , \; E\right\rangle \quad .$$

Wir schließen mit (50)-(53) (man beachte $\beta = 1$) und (54)

$$2\left\langle \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\chi}\mathbf{w}E \; , \; E\right\rangle \tag{55}$$

$$\leq \; -\frac{1}{2}\left\langle \left(\mathbf{v}^2 + \tilde{r}\mathbf{v}\partial_{\tilde{r}}\mathbf{v}\right)\boldsymbol{\chi}^2\mathbf{w}E \; , \; E\right\rangle + \left\langle \tilde{r}^{2+\varepsilon}\mathbf{w}F \; , \; F\right\rangle + \delta(R)K(E) \quad .$$

Mit Lemma 1 ergibt sich dann (42).
Nun zu Feldern ohne beschränkte Träger: Wir wenden (41) bzw. (42) auf $\mathcal{H}E^z = \widetilde{F}^z$ (definiert wie im Beweis zu Lemma 2) an. Mit dem Grenzübergang $z \to \infty$, Lemma 2 und dem Satz von Lebesgue erhalten wir die Behauptungen des Lemmas. **q.e.d.**

2.3 Polynomiales Abfallen

In diesem Unterkapitel zeigen wir das polynomiale Abfallen.

Lemma 4 *$E \in L^2_{>\max\sigma - \frac{1}{2}}$ löse die Gleichung $\mathcal{H}E = F \in L^2_{>s+1}$ für ein $s \in \mathbb{R}$ Dann gilt auch*

$$E \in L^2_s \quad .$$

Beweis: Wir können $\alpha > -1$ und $\epsilon > 0$ so wählen, dass

$$E \in L^2_{>\max\sigma + \frac{\alpha}{2}} \quad , \quad F \in L^2_{>s+1+\frac{\epsilon}{2}} \quad . \tag{56}$$

Im Falle $s \leq \max\sigma + \frac{\alpha}{2}$ gilt dann schon die Behauptung; andernfalls folgt

$$s + 1 + \frac{\epsilon}{2} > \max\sigma + 1 + \frac{1}{2}(\alpha + \epsilon)$$

und wir erhalten für alle $k > 0$

$$(\ln \tilde{r})^{k/2}\tilde{r}^{\alpha/2}\mathbf{T}^{1/2}E \in L^2 \quad , \quad \tilde{r}^{\frac{\alpha}{2}}(\ln \tilde{r})^{k/2}\mathbf{T}^{1/2}F \in L^2_{>1+\epsilon/2} \quad .$$

Wir können $\operatorname{supp} E \subset A(R)$ annehmen, wobei $R > R_1$ später passend gewählt wird, und benutzen (41) für die logarithmischen Gewichtsfunktionen $\mathbf{w} = \widetilde{w}_k^{l,\alpha}\mathbf{T}$ (siehe (30) und (31)). Mit Hilfe von **GV.1**, (18), (26) und (32)-(34) können wir diese zur folgenden Abschätzung vereinfachen:

$$\begin{aligned}
&(1+\beta)\Big\langle (\ln \tilde{r})^k\, \tilde{r}^\alpha \mathbf{T}E\ ,\ E\Big\rangle \qquad (57)\\
&+\Big\langle \big[(1-\beta)\operatorname{id} + 2(k\,(\ln\tilde{r})^{-1} + \alpha + \tilde{r}\mathbf{S})\big]\,(\ln \tilde{r})^k\, \tilde{r}^\alpha \mathbf{T}\boldsymbol{\eta}_m\partial_m E\ ,\ \boldsymbol{\eta}_l\partial_l E\Big\rangle\\
&\quad\le\ c\Big[\Big\langle \big(k^3\,(\tilde{r}\cdot\ln\tilde{r})^{-3}\,\tilde{r} + k^2\,(\tilde{r}\cdot\ln\tilde{r})^{-2}\big)\,(\ln \tilde{r})^k\, \tilde{r}^\alpha \mathbf{T}E\ ,\ E\Big\rangle\\
&\qquad\quad + \Big\langle (\ln \tilde{r})^k\, \tilde{r}^{\alpha+2+\epsilon}\mathbf{T}F\ ,\ F\Big\rangle\Big]\\
&\qquad\quad + \delta(R)\Big\langle \big(\operatorname{id} + k^2\,(\tilde{r}\cdot\ln\tilde{r})^{-2}\big)\,(\ln \tilde{r})^k\, \tilde{r}^\alpha \mathbf{T}E\ ,\ E\Big\rangle\\
&\quad\le\ c\Big\langle (\ln \tilde{r})^k\, \tilde{r}^{\alpha+2+\epsilon}\mathbf{T}F\ ,\ F\Big\rangle\\
&\qquad\quad + \delta(R)\Big\langle \big(\operatorname{id} + k^2\cdot(\ln\tilde{r})^{-2} + k^3\cdot(\ln\tilde{r})^{-3}\big)\,(\ln \tilde{r})^k\, \tilde{r}^\alpha \mathbf{T}E\ ,\ E\Big\rangle \quad ,
\end{aligned}$$

mit c und δ unabhängig von β, k, E und F. Wir wählen β mit $-1 < \beta < \alpha$. Daher ist

$$\big[1-\beta+2\alpha+2k(\ln\tilde{r})^{-1}\big]\operatorname{id} + 2\big(2+(\ln\tilde{r})^{-1}\big)\operatorname{diag}(\sigma(1),...,\sigma(\nu))$$

eine Diagonalmatrix mit nicht negativen Einträgen. Wir setzen $\hat{s} := 2s - \alpha$ und schließen für alle $K \in \mathbb{N}$, $K > 3$

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=3}^{K}\frac{\hat{s}^k}{k!}\Big\langle (\ln\tilde{r})^k\tilde{r}^\alpha\mathbf{T}E\ ,\ E\Big\rangle\\
&\quad\le\ c\sum_{k=3}^{K}\frac{\hat{s}^k}{k!}\Big\langle (\ln\tilde{r})^k\tilde{r}^{\alpha+2+\epsilon}\mathbf{T}F\ ,\ F\Big\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& + \delta(R) \sum_{k=3}^{K} \frac{\hat{s}^k}{k!} \Big\langle \big(1 + k^2 (\ln \tilde{r})^{k-2} + k^3 (\ln \tilde{r})^{k-3}\big)\, \tilde{r}^{\alpha} \mathbf{T} E \,,\ E \Big\rangle \\
\leq\ & \delta(R) \left(\sum_{k=0}^{K-3} \frac{\hat{s}^{k+3}(k+3)^3}{(k+3)!} \Big\langle (\ln \tilde{r})^k \tilde{r}^{\alpha} \mathbf{T} E \,,\ E \Big\rangle \right. \\
& + \sum_{k=1}^{K-2} \frac{\hat{s}^{k+2}(k+2)^2}{(k+2)!} \Big\langle (\ln \tilde{r})^k \tilde{r}^{\alpha} \mathbf{T} E \,,\ E \Big\rangle \\
& \left. + \sum_{k=3}^{K} \frac{\hat{s}^k}{k!} \Big\langle (\ln \tilde{r})^k \tilde{r}^{\alpha} \mathbf{T} E \,,\ E \Big\rangle \right) + c \Big\langle \tilde{r}^{2s+2+\epsilon} \mathbf{T} F \,,\ F \Big\rangle \\
\leq\ & \delta(R) \sum_{k=3}^{K} \frac{\hat{s}^k}{k!} \Big\langle (\ln \tilde{r})^3 \tilde{r}^{\alpha} \mathbf{T} E \,,\ E \Big\rangle + c_1
\end{aligned}
$$

mit einer Konstante c_1 unabhängig von K. Nun wählen wir R hinreichend groß, stellen die Terme um und erhalten

$$
\sum_{k=3}^{K} \frac{\hat{s}^k}{k!} \Big\langle (\ln \tilde{r})^3 \tilde{r}^{\alpha} \mathbf{T} E \,,\ E \Big\rangle \leq c_2
$$

für alle $K \in \mathbb{N}$. Mit dem Lemma von Levi ergibt sich

$$
\Big(\tilde{r}^{\hat{s}+\alpha} \mathbf{T} E, E \Big) \in L^1 \quad ,
$$

was $E \in L^2_s$ nach sich zieht. **q.e.d.**

Wir wollen auch das polynomiale Abfallen für $E \in L^2_{>-\frac{1}{2}}$ für den Fall $\sigma \not\equiv 0$ zeigen.

Beweis von Satz 6: Sei o.B.d.A $\operatorname{supp} E \subset \Omega$. Zuerst wollen wir bemerken, dass es ausreichend ist den folgenden Sachverhalt für ein $\delta > 0$ und alle $t > -1/2$ zu zeigen: Ist E in $L^2_{<t}$ und löst $\mathcal{H}E = F$ mit $F \in L^2_{\mathrm{pol}}$, so ist E auch in $L^2_{<t+\rho}$. Wir zeigen eine etwas stärkere Aussage durch Induktion nach $n = \max \sigma$.

Wir behaupten: Für alle $\nu \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ und alle Operatoren $\mathcal{H}$, die **GV.1**, **GV.2**, **AV.1** und **AV.3** mit $\max \sigma = n$ erfüllen, gilt folgende Implikation: Ist $E \in L^2_{<t}$, $t > -1/2$ und $(\mathcal{H}E)^{\kappa} \in L^2_{<t+\sigma(\kappa)+\rho+1}$, so ist E^{κ} in $L^2_{<t+\sigma(\kappa)+\rho}$.

Lemma 4 liefert den Induktionsanfang für $n = 0$. Gegeben sei nun ein Operator $\mathcal{H}$ mit $\max \sigma = n + 1$. Mit den „Störungen“ $g_{\kappa\lambda}$ und den „Hauptteilen“ $\mathcal{H}^{\kappa}$, die durch

$$\begin{aligned} g_{\kappa\lambda}(E^\lambda) &:= b_{i\kappa\lambda}\partial_i E^\lambda + p_{\kappa\lambda}E^\lambda \\ \mathcal{H}^\kappa f &:= \partial_i(a^\kappa_{ij}\partial_j f) + \omega^\kappa f \end{aligned}$$

definiert sind, spalten wir das System $\mathcal{H}E = F$ mit F^κ in $L^2_{t+\sigma(\kappa)+\rho+1}$ in zwei Systeme auf:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^\kappa E^\kappa + \sum_{\sigma(\lambda)=0} g_{\kappa\lambda}(E^\lambda) &= \widehat{F^\kappa} \quad , \quad \sigma(\kappa) = 0 \quad , \\ \text{mit } \widehat{F^\kappa} &= F^\kappa - \sum_{\sigma(\lambda)>0} g_{\kappa\lambda}(E^\lambda) \quad . \end{aligned} \tag{58}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^\kappa E^\kappa + \sum_{\sigma(\lambda)>0} g_{\kappa\lambda}(E^\lambda) &= \widetilde{F^\kappa} \quad , \quad \sigma(\kappa) > 0 \quad , \\ \text{mit } \widetilde{F^\kappa} &= F^\kappa - \sum_{\sigma(\lambda)=0} g_{\kappa\lambda}(E^\lambda) \quad . \end{aligned} \tag{59}$$

Unter Beachtung von **AV.3** bemerken wir

$$\widetilde{F^\kappa} \in L^2_{<t+\sigma(\kappa)+\rho+1} \quad , \quad \sigma(\kappa) > 0 \quad .$$

Das System (59) erfüllt mit $\widetilde{\sigma} := \sigma|_{\sigma^{-1}(\{1,\ldots,n+1\})} - 1$, $\widetilde{\nu} := \nu - |\{\sigma = 0\}|$ und $\widetilde{t} = t + 1$ gerade die Voraussetzungen der Induktionsbehauptung für $\max \widetilde{\sigma} = n$. Nach Induktionsannahme erhalten wir also

$$E^\kappa \in L^2_{<t+1+\widetilde{\sigma}(\kappa)+\rho} = L^2_{<t+\sigma(\kappa)+\rho} \quad , \quad \sigma(\kappa) > 0 \quad . \tag{60}$$

Mit **GV.1** und (60) schließen wir

$$\widehat{F^\kappa} \in L^2_{<t+1+\rho} \quad .$$

Das System (58) erfüllt also die Voraussetzungen der Induktionsbehauptung für $n = 0$, damit haben wir

$$E^\kappa \in L^2_{<t+\rho} \quad , \quad \sigma(\kappa) = 0$$

und in Verbindung mit (60) schließlich E^κ in $\mathrm{L}^2_{<t+\sigma(\kappa)+\rho}$ für alle κ. **q.e.d.**

2.4 Exponentielles Abfallen und beschränkter Träger

Lemma 5 *Sei* $s \in \mathbb{R}_+$ *und* $E \in L^2_{\text{pol}}$ *löse die Gleichung* $\mathcal{H}E = F$ *mit* $\exp(sr)F \in L^2_{>1}$.
Dann gilt $\exp(sr)E \in L^2$.

Beweis: Der Beweis verläuft ähnlich zum Beweis von Lemma 4. Wir können $\operatorname{supp} E \in A(R)$ annehmen, wobei wir $R > R_1$ später passend wählen. Es wird Gleichung (42) für die polynomialen Gewichte $\mathbf{w} = \widetilde{w}^p_k \mathbf{T}$ (siehe (29) und (31)) benutzt . Unter Beachtung von **GV.1**, (18), (26), (32) und (33) liest sich diese Abschätzung als

$$\begin{aligned}
&\left\langle \tilde{r}^k \mathbf{T}E \ , \ E \right\rangle \\
&\quad \leq \quad c\left\langle \tilde{r}^{k+2+\epsilon} \mathbf{T}F \ , \ F \right\rangle + \delta(R)\left\langle (1 + k^2 \tilde{r}^{-2}) \tilde{r}^k \mathbf{T}E \ , \ E \right\rangle
\end{aligned}$$

oder (für genügend großes R) als

$$\begin{aligned}
&\left\langle \tilde{r}^k \mathbf{T}E \ , \ E \right\rangle \\
&\quad \leq \quad c\left\langle \tilde{r}^{k+2+\epsilon} \mathbf{T}F \ , \ F \right\rangle + \delta(R)\left\langle k^2 \tilde{r}^{k-2} \mathbf{T}E \ , \ E \right\rangle
\end{aligned}$$

mit c und δ unabhängig von k, E und F.

Wir setzen $\hat{s} = 2s$, wählen $0 < \epsilon$ mit $\exp(sr)F \in L^2_{1+\frac{1}{2}\epsilon}$ und schließen für alle $K \in \mathbb{N}$, $K > 2$

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=2}^{K} \frac{\hat{s}^k}{k!} \left\langle \mathbf{T}\tilde{r}^k E \ , \ E \right\rangle \\
&\quad \leq \quad \delta(R) \sum_{k=2}^{K} \frac{\hat{s}^k}{k!} \left\langle k^2 \tilde{r}^{k-2} \mathbf{T}E \ , \ E \right\rangle + c \sum_{k=2}^{K} \frac{\hat{s}^k}{k!} \left\langle \tilde{r}^{k+2+\epsilon} \mathbf{T}F \ , \ F \right\rangle \\
&\quad \leq \quad \delta(R) \sum_{k=0}^{K-2} \frac{\hat{s}^{k+2} \cdot k^2}{(k+2)!} \left\langle \tilde{r}^k \mathbf{T}E \ , \ E \right\rangle + c\left\langle \tilde{r}^{2+\epsilon} \exp(\hat{s}\tilde{r}) \mathbf{T}F \ , \ F \right\rangle
\end{aligned}$$

$$\leq \quad \hat{s}^2\delta(R)\sum_{k=2}^{K}\frac{\hat{s}^k}{k!}\Big\langle \mathbf{T}\tilde{r}^k E\ ,\ E\Big\rangle + c_3$$

mit c_3 unabhängig von K. Wir wählen nun R hinreichend groß, stellen die Terme um und erhalten

$$\sum_{k=2}^{K}\frac{\hat{s}^k}{k!}\Big\langle \mathbf{T}\tilde{r}^k E\ ,\ E\Big\rangle \leq c_4$$

für alle K. Damit haben wir nach dem Satz von Levi

$$\Big(\mathbf{T}\exp(\hat{s}\tilde{r})E, E\Big) \in L^1 \quad .$$

q.e.d.

Lemma 6 *Sei $E \in L^2_{\mathrm{exp}}$ eine Lösung der Gleichung $\mathcal{H}E = F$ mit $F \in L^2_{\mathrm{vox}}$. Dann gilt $E \in L^2_{\mathrm{vox}}$.*

Beweis: Wir nehmen $\operatorname{supp} E \subset A(R)$ mit einem $R > R_1$ an. Nun benutzen wir (42) für exponentielle Gewichte $\mathbf{w} = \widetilde{w}_k^e\mathbf{T}$ (siehe (28) und (31)). Wegen (26), (27), (32) und (33) ist der erste Term auf der rechten Seite von (42) negativ definit modulo $\delta(R)I(E)$. Mit **GV.1**, (18),(26), (27), (32) und (33) ergibt (42) daher

$$(1+k^2)\Big\langle \exp(k\tilde{r})\mathbf{T}E\ ,\ E\Big\rangle$$

$$\leq \quad c\Big\langle \tilde{r}^{2+\epsilon}\exp(k\tilde{r})\mathbf{T}F\ ,\ F\Big\rangle + \delta(R)\Big\langle \big(1+k^2\big)\exp(k\tilde{r})\mathbf{T}E\ ,\ E\Big\rangle$$

und damit für genügend großes R

$$\Big\langle \exp(k\tilde{r})\mathbf{T}E\ ,\ E\Big\rangle \leq c\Big\langle \tilde{r}^{2+\epsilon}\exp(k\tilde{r})\mathbf{T}F\ ,\ F\Big\rangle \quad .$$

Wir fixieren ein genügend großes R_3 mit $\operatorname{supp} F \subset U(0, R_3)$. Unter Beachtung von (14) können wir abschätzen

$$\exp(2R_3k)\Big\langle \mathbf{T}E\ ,\ E\Big\rangle_{A(2R_3)}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \Big\langle \exp(\tilde{r}k)\mathbf{T}E\ ,\ E\Big\rangle \\
&\leq c\Big\langle \exp(\tilde{r}k)\tilde{r}^{2+\epsilon}\mathbf{T}F\ ,\ F\Big\rangle \\
&\leq c\exp(R_3k)\Big\langle \tilde{r}^{2+\epsilon}\mathbf{T}F\ ,\ F\Big\rangle \qquad .
\end{aligned}
$$

Der Grenzübergang $k \to \infty$ ergibt dann $E|_{A(2R_3)} = 0$. **q.e.d.**

2.5 Das PdeF

Wir wollen dieses Kapitel abschließen, indem wir ein Resultat über das PdeF für elliptische Gleichungen in völlig kanonischer Weise auf unser System verallgemeinern. Der Beweis wird nur der Vollständigkeit halber durchgeführt.

Satz 7 *Sei E eine Lösung von $\mathcal{H}E = 0$. Weiterhin verschwinde E in einer Umgebung eines Punktes $x \in \Omega$, dann verschwindet E in Ω.*

Beweis: Es gibt eine Konstante c_5 mit

$$
\sum_{\kappa} \left|a_{ij}^{\kappa}\partial_i\partial_j E^{\kappa}\right|^2 \leq c_5\left[|E|^2 + \Big(\partial_i E, \partial_i E\Big)\right] \quad \text{f.ü.} \qquad .
$$

Sei $x_0 \in \Omega$ und E verschwinde auf einer Umgebung von x_0. Wir wählen $0 < R < 1$ mit $U(x_0,R) \subset \Omega$, dazu eine Abschneidefunktion $\psi \in C_{\circ}^{\infty}(U(x_0,R))$ mit $\psi|_{U(x_0,R/2)} \equiv 1$ und setzen $\widehat{E} = \psi E$. Ferner definieren wir für $\beta > 0$ die Gewichtsfunktionen

$$
\phi_\beta(x) := \exp\Big(|x-x_0|^{-\beta}\Big)
$$

und damit

$$
\begin{aligned}
P_1^{\kappa} &:= \int_{\mathbb{R}_N} \frac{\phi_\beta^2(x)\left|\widehat{E}^{\kappa}(x)\right|^2}{|x-x_0|^{2\beta+2}}\mathrm{d}x \quad , \quad P_2^{\kappa} := \int_{\mathbb{R}^N} \phi_\beta^2(x)\left|\nabla\widehat{E}^{\kappa}(x)\right|^2\mathrm{d}x \quad , \\
Q &:= \sum_{\kappa}\int_{\mathbb{R}^N} \phi_\beta^2(x)\,|x-x_0|^{\beta+2}\left|a_{ij}^{\kappa}\partial_i\partial_j\widehat{E}^{\kappa}(x)\right|^2\mathrm{d}x \quad .
\end{aligned}
$$

Nach [17] gilt folgende Carlemann'sche Abschätzung: Es gibt Konstanten β_0, $c_6 > 0$ mit

$$\beta^4 P_1^\kappa + \beta^2 P_2^\kappa \leq c_6 Q \quad \text{für alle} \quad \beta > \beta_0 \quad .$$

O.B.d.A. nehmen wir $x_0 = 0$ an. Dann gilt für alle $\beta > \beta_0$

$$\begin{aligned}
&\sum_\kappa \int_{|x|<R/2} \phi_\beta^2 \left(\beta^4 \frac{|E^\kappa|^2}{r^{2\beta+2}} + \beta^2 |\nabla E^\kappa|^2 \right) \mathrm{d}x \\
&\quad \leq \quad c_6 Q \\
&\quad \leq \quad c_5 c_6 \left(\sum_\kappa \int_{|x|<R/2} \phi_\beta^2 \left(|E^\kappa|^2 + |\nabla E^\kappa|^2\right) \mathrm{d}x \right) + c_6 \left(\sum_\kappa \int_{|x|>R/2} \phi_\beta^2 \left| a_{ij}^\kappa \partial_i \partial_j E^\kappa \right|^2 \mathrm{d}x \right) \quad .
\end{aligned}$$

Für hinreichend große β erhalten wir

$$\sum_\kappa \int_{|x|<R/2} \phi_\beta^2 \frac{|E^\kappa|^2}{r^{2\beta+2}} \leq g(\beta) \sum_\kappa \int_{|x|>R/2} \phi_\beta^2 \left| a_{ij}^\kappa \partial_i \partial_j E^\kappa \right|^2 \mathrm{d}x$$

mit $g(\beta) := c_6/(\beta^4 - c_5 c_6)$. Aufgrund der Monotonie von ϕ_β und $r^{-2\beta-2}$ haben wir

$$\begin{aligned}
\sum_\kappa \int_{|x|<R/2} |E^\kappa|^2 \,\mathrm{d}x \quad &\leq \quad g(\beta) \sum_\kappa \int_{|x|>R/2} \left| a_{ij}^\kappa \partial_i \partial_j E^\kappa \right|^2 \mathrm{d}x \\
&\leq \quad c_7 g(\beta) \quad .
\end{aligned}$$

Der Grenzübergang $\beta \to \infty$ ergibt $E|_{U(R/2)} = 0$. Damit ist das Komplement des Trägers von E abgeschlossen in Ω und deshalb ganz Ω.

q.e.d.

3 Das Maxwell-System

Wir nehmen für dieses Kapitel an, dass **MV.1** erfüllt ist und zeigen aus Gründen der Vollständigkeit den nullten Schritt. Die Darstellung orientiert sich an [16, Theorem 10] (rot und div bezeichnen zunächst wieder die vektoranalytischen Operatoren).

Lemma 7 *Sei* (E, H) *eine Strahlungslösung zum Maxwellproblem zu verschwindenden rechten Seiten (siehe (2),(3)). Dann gilt* $(E, H) \in L^2_{>-\frac{1}{2}}$.

Beweis: Da (E, H) eine Strahlungslösung ist, gibt es ein $s > -\frac{1}{2}$ mit

$$E + \xi \wedge H \ , \ H - \xi \wedge E \ \in L^2_s \quad .$$

Wir fixieren $\tilde{R} > 0$ mit $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega \subset U(\tilde{R})$. Dann gibt es eine Konstante c, so dass für alle $R > \tilde{R}$ folgendes gilt:

$$\begin{aligned}
c \ &\geq \int_{A(\tilde{R})\cap\Omega(R)} \left(|E + \xi \wedge H|^2 + |H - \xi \wedge E|^2\right) r^{2t} \,\mathrm{dx} \\
&= \int_{A(\tilde{R})\cap\Omega(R)} \left(|E|^2 + |H|^2 + |\xi \wedge H|^2 + |\xi \wedge E|^2\right) r^{2t} \,\mathrm{dx} \\
&\quad - 4\,\mathrm{Re} \int_{A(\tilde{R})\cap\Omega(R)} \xi \cdot (\overline{E} \wedge H) r^{2t} \,\mathrm{dx} \\
&\geq \int_{A(\tilde{R})\cap\Omega(R)} \left(|E|^2 + |H|^2\right) r^{2t} \,\mathrm{dx} \\
&\quad - 4\,\mathrm{Re} \int_{\tilde{R}}^{R} \int_{S(r)} \xi \cdot (\overline{E} \wedge H) \,\mathrm{d}o \, r^{2t} \,\mathrm{dr} \\
&= \int_{A(\tilde{R})\cap\Omega(R)} \left(|E|^2 + |H|^2\right) r^{2t} \,\mathrm{dx} \\
&\quad - 4\,\mathrm{Re} \int_{\tilde{R}}^{R} r^{2t} \int_{\Omega(r)} (\mathrm{rot}\, \overline{E} \cdot H - \overline{E} \cdot \mathrm{rot}\, H) \,\mathrm{dxdr}
\end{aligned}$$

Der Integrand im letzten Summand ist aufgrund der Differentialgleichung rein imaginär. Damit ergibt sich die Behauptung. **q.e.d.**

Bemerkung 2 *Für dieses Lemma reichen* L^∞*-Koeffizienten ohne weitere Asymptotik aus.*

Um das folgende Reduktionslemma zu zeigen führen wir einige Notationen ein:

$$\varepsilon = \hat{\varepsilon} + \mathrm{id} \quad , \quad \mu = \hat{\mu} + \mathrm{id} \quad ,$$

e_k sei der k-te kartesische Einheitsvektor und γ_{kjl} der Levi-Civita-Tensor, also

$$\gamma_{kjl} = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad (k,j,l) \quad \text{eine gerade Permutation von} \quad (1,2,3) \quad \text{ist} \\ -1 & \text{falls} \quad (k,j,l) \quad \text{eine ungerade Permutation von} \quad (1,2,3) \quad \text{ist} \\ 0 & \text{sonst} \quad . \end{cases}$$

Lemma 8 *Sei $(E,H) \in R_{\mathrm{loc}} \times R_{\mathrm{loc}}$ eine Lösung von*

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\, H &= \mathrm{i}\,\omega\varepsilon E \\ \mathrm{rot}\, E &= -\mathrm{i}\,\omega\mu H \quad . \end{aligned} \tag{61}$$

Dann ist $(E,H) \in H^2_{\mathrm{loc}} \times H^2_{\mathrm{loc}}$ und löst das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} &\partial_i(\varepsilon_{ij}\partial_j E) + \omega^2 E \\ &\quad = \mathrm{i}\,\omega\partial_i(\hat{\varepsilon}_{ij}\gamma_{kjl}\mu_{lm}H_m)e_k - \partial_i((\partial_k\hat{\varepsilon}_{ij})E_j)e_k - \omega^2\hat{\varepsilon}E + \mathrm{i}\,\omega\,\mathrm{rot}\,\hat{\mu}H, \end{aligned} \tag{62}$$

$$\begin{aligned} &\partial_i(\mu_{ij}\partial_j H) + \omega^2 H \\ &\quad = -\mathrm{i}\,\omega\partial_i(\hat{\mu}_{ij}\gamma_{kjl}\varepsilon_{lm}E_m)e_k - \partial_i((\partial_k\hat{\mu}_{ij})H_j)e_k - \omega^2\hat{\mu}H - \mathrm{i}\,\omega\,\mathrm{rot}\,\hat{\varepsilon}E \quad . \end{aligned} \tag{63}$$

Beweis: Wir rechnen zunächst im Distributionensinn, wenden rot auf die Gleichungen (61) an und erhalten mit

$$\Delta = -\,\mathrm{rot}\;\mathrm{rot} + \nabla\mathrm{div}$$

die Gleichung

$$(\Delta + \omega^2)E = \nabla\mathrm{div}E - \omega^2\hat{\varepsilon}E + \mathrm{i}\,\omega\,\mathrm{rot}\,\hat{\mu}H \quad . \tag{64}$$

Wiederum mit (61) und div rot = 0 schließen wir

$$\mathrm{div}E = -\mathrm{div}\hat{\varepsilon}E$$

womit

$$(\Delta + \omega^2)E = -\nabla \mathrm{div} \hat{\varepsilon} E - \omega^2 \hat{\varepsilon} E + \mathrm{i}\,\omega\,\mathrm{rot}\,\hat{\mu} H \tag{65}$$

folgt. Da aufgrund von (61)

$$\partial_k E_j = \partial_j E_k - \mathrm{i}\,\omega \gamma_{kjl} \mu_{lm} H_m \tag{66}$$

gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned} &\nabla \mathrm{div} \hat{\varepsilon} E \\ &\quad = \partial_k \partial_i (\hat{\varepsilon}_{ij} E_j) e_k \\ &\quad = \partial_i (\hat{\varepsilon}_{ij} \partial_j E_k) e_k - (\mathrm{i}\,\omega \partial_i (\hat{\varepsilon}_{ij} \gamma_{kjl} \mu_{lm} H_m) + \partial_i ((\partial_k \hat{\varepsilon}_{ij}) E_j) e_k, \end{aligned}$$

woraus (62) folgt. Analoge Rechnungen ergeben (63). Mit [23] folgt aus (61) $E,\ H \in H^1_{\mathrm{loc}}$. Innerer elliptischer Regularität in Verbindung mit (62) und (63) ergibt $E,\ H \in H^2_{\mathrm{loc}}$. **q.e.d.**

Jetzt sind Satz 1 und Satz 2 einfach zu zeigen.
Beweis von Satz 1 und 2: Im Fall einer Strahlungslösung liefert Lemma 7 $(E, H) \in L^2_{>-\frac{1}{2}} \times L^2_{>-\frac{1}{2}}$, im Fall einer L^2-Lösung gilt das sowieso. Wir wenden Satz 5 mit $N = 3$, $\nu = 6$ und $\sigma \equiv 0$ auf das schwach gekoppelte System (62),(63) an. Aufgrund **MV.1** sind dann **GV.1**, **GV.2**, **AV.2** und **AV.1** mit $\mathbf{M} = \mathrm{id}$ erfüllt. Also folgt der kompakte Träger von (E, H). Nach Satz 7 müssen sie dann verschwinden. **q.e.d.**

Es bleibt die Frage, ob man entsprechende Ergebnisse auch für Matrizen mit C^1-Koeffizienten bekommen kann. In diesem Fall ist bereits das PdeF ein Problem. Der Weg über das System zweiter Ordnung ist dann schwierig.

Das Maxwell-Problem besitzt eine natürliche Verallgemeinerung auf q-Formen. Sei dazu $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein Gebiet und $q \in \{0, ..., N\}$. Wir definieren den verallgemeinerten Maxwell-Operator $\mathcal{M}_q \ :\ \mathcal{D}(\mathcal{M}_q) \subset L^{2,q} \times L^{2,q+1} \ \longrightarrow\ L^{2,q} \times L^{2,q+1}$ mit $\mathcal{D}(\mathcal{M}_q) := \overset{\circ}{R}{}^q \times D^{q+1}$ und

$$\mathcal{M}_q := -\mathrm{i} \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{div} \\ \mathrm{rot} & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Hierbei sind ε und μ gleichmäßig positiv definite $\binom{N}{q}$ bzw. $\binom{N}{q+1}$ Matrizen und, nach Weyl, rot $=$ d und div $= \delta$. Die zum Lemma 8 analoge Reduktion von Lösungen des homogenen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \operatorname{div} H &= \mathrm{i}\,\omega\varepsilon E \\ \operatorname{rot} E &= \mathrm{i}\,\omega\mu H \end{aligned}$$

auf ein schwach gekoppeltes elliptisches System zweiter Ordnung gelingt für $N \geq 4$ nur in den Spezialfällen $q = 1$, μ eine skalarwertige Funktion und $q = N - 2$, ε eine skalarwertige Funktion. In allen anderen Fällen führt das Analogon von (66) nicht mehr zu einer Entkopplung der Terme zweiter Ordnung. In den angesprochenen Spezialfällen ergeben aber dieselben Rechnungen das PdeF, den beschränkten Träger und damit die Eindeutigkeit von L^2- und Strahlungslösungen.

4 Das Lamé-System

Wir führen zunächst den nullten Schritt des Beweisschemas für die Elastizitätsgleichungen durch. Die Darstellung ist aus [28, Theorem 5] entnommen. Wir wiederholen die Rechnungen aber noch einmal, da wir andere Voraussetzungen an die Koeffizienten stellen (a und b sind nicht notwendig asymptotisch konstant). Der Beweis besteht aus einer Integration der Strahlungsbedingung und anschließenden partiellen Integrationen. Dabei ist es sinnvoll von kartesischen auf Kugelkoordinaten zu wechseln. Ein bequemer Kalkül für Kugelkoordinaten ist von Weck und Witsch in [27] entwickelt worden und wird hier benutzt. Wir werden nur die wichtigsten Notationen und Eigenschaften erwähnen. Für genauere Informationen sei auf [27, section 2] verwiesen.

Wir beschreiben $\dot{\mathbb{R}}^N := \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$ lokal mit N-dimensionalen Kugelkoordinaten $u = (r, \varphi_1, ..., \varphi_{N-1})^t$. Dann ist $\{\mathrm{d}r, \mathrm{d}\varphi_1, ..., \mathrm{d}\varphi_{N-1}\}$ eine Orthogonalbasis von $\mathcal{A}^1(\dot{\mathbb{R}}^N)$ und (mit der natürlichen Einbettung $\iota : S^{N-1} \longrightarrow \dot{\mathbb{R}}^N$) ist $\{\mathrm{d}(\varphi^1 \circ \iota), ..., \mathrm{d}(\varphi^{N-1} \circ \iota)\}$ eine Orthogonalbasis in $\mathcal{A}(S^{N-1})$. Wir können $E \in \mathcal{A}^q(\dot{\mathbb{R}}^N)$ lokal darstellen als

$$E(u^{-1}(r, \varphi)) = c_I^\tau(r, \varphi)\mathrm{d}\varphi_I + c_J^\rho(r, \varphi)\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\varphi_J \tag{67}$$

(man beachte die unterschiedlichen Indexbereiche für I und J). Wir definieren

$$\tau \ : \ \mathcal{A}^q(\dot{\mathbb{R}}^N) \ \longrightarrow \ \mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathcal{A}^q(S^{N-1}))$$

und

$$\rho \ : \ \mathcal{A}^q(\dot{\mathbb{R}}^N) \ \longrightarrow \ \mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathcal{A}^{q-1}(S^{n-1})) \quad ,$$

die lokal bestimmt sind durch

$$\begin{aligned} [\tau E(r)](\varphi) &= r^{-q} c_I^\tau(r,\varphi) \mathrm{d}(\varphi \circ \iota)_I \\ [\rho E(r)](\varphi) &= r^{-(q-1)} c_J^\rho(r,\varphi) \mathrm{d}(\varphi \circ \iota)_J \quad , \end{aligned} \tag{68}$$

wenn (67) eine lokale Darstellung von E ist. Mit Blick auf (67) gibt es kanonische Rechtsinverse $\overset{\vee}{\tau}$, bzw. $\overset{\vee}{\rho}$ mit

$$\begin{aligned} \tau\,\overset{\vee}{\tau} &= \mathrm{id} \quad \text{auf} \quad \mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathcal{A}^q(S^{N-1})) \quad , \\ \rho\,\overset{\vee}{\rho} &= \mathrm{id} \quad \text{auf} \quad \mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathcal{A}^{q-1}(S^{N-1})) \quad , \\ \overset{\vee}{\tau}\,\tau + \overset{\vee}{\rho}\,\rho &= \mathrm{id} \quad \text{auf} \quad \mathcal{A}^q(\dot{\mathbb{R}}^N) \quad , \\ \tau(E \wedge F) &= \tau E \wedge \tau F \quad , \\ \rho(E \wedge F) &= \rho E \wedge \tau F + (-1)^{q_1} \tau E \wedge \rho F \end{aligned} \tag{69}$$

für alle q_1-Formen E und alle q_2-Formen F.

Wir führen die Operatoren M und D auf (geeigneten Unterräumen von) $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathcal{A}^q(S^{N-1}))$ ein.

$$ME(r) := r \cdot E(r) \quad , \qquad DE(r) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} E(r) \quad .$$

Mit elementaren Rechnungen ergibt sich für hinreichend glatte q-Formen E

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} E &= -\overset{\vee}{\rho}\,(M^{-1}\mathrm{Rot}\rho E - M^{-q} D M^q \tau E) + \overset{\vee}{\tau}\,(M^{-1}\mathrm{Rot}\tau E) \\ \operatorname{div} E &= -\overset{\vee}{\rho}\,(M^{-1}\mathrm{Div}\rho E) + \overset{\vee}{\tau}\,\big(M^{-N+q} D M^{N-q} \rho E + M^{-1}\mathrm{Div}\tau E\big) \\ \mathrm{d}r \wedge E &= \overset{\vee}{\rho}\,\tau E \quad . \end{aligned} \tag{70}$$

Dabei bezeichnen Rot und Div die äußere Ableitung bzw. die Co-Ableitung auf der Sphäre.

Für den auf q-Formen operierenden Hodge-Operator $*$ ergibt sich

$$\rho * \overset{\vee}{\tau} = (-1)^q \star \quad , \quad \rho * \overset{\vee}{\rho} = 0 \quad , \quad \tau * \overset{\vee}{\rho} = \star \quad , \quad \tau * \overset{\vee}{\tau} = 0 \quad , \tag{71}$$

dabei ist $\star$ der Hodge Operator auf S^{N-1} mit der vom $\dot{\mathbb{R}}^N$ induzierten Metrik.

Für alle messbaren E gilt nach Fubini und Tonelli $E \in L^{2,q}(\dot{\mathbb{R}}^N)$ genau dann, wenn

$$\int_{\mathbb{R}_+} r^{N-1} \left[\|\tau E(r)\|^2_{L^{2,q}(S^{N-1})} + \|\rho E(r)\|^2_{L^{2,q-1}(S^{N-1})} \right] \mathrm{d}r < \infty \quad .$$

Mit den induzierten Skalarprodukten in $L^{2,q}(S^{N-1})$ bzw. $L^{2,q-1}(S^{N-1})$ erhält man für $E,\, F \in L^{2,q}(\dot{\mathbb{R}}^N)$

$$\langle\, E \,,\, F \,\rangle = \int_{\mathbb{R}_+} r^{N-1} \; \langle\, E \,,\, F \,\rangle_r \, \mathrm{d}r$$

mit

$$\langle\, E \,,\, F \,\rangle_r := \; \langle\, \tau E(r) \,,\, \tau F(r) \,\rangle_{L^{2,q}(S^{N-1})} + \; \langle\, \rho E(r) \,,\, \rho F(r) \,\rangle_{L^{2,q-1}(S^{N-1})} \quad .$$

Für eine ausreichend glatte $(N-1)$-Form w in $\dot{\mathbb{R}}^N$ gilt

$$\int_{S(R)} \iota^* w = R^{N-1} \int_{S^{N-1}} (\tau w)(R) \quad \text{für alle} \quad R > 0 \quad . \tag{72}$$

Jetzt führen wir den nullten Schritt für die Elastizitätsgleichungen durch.

Lemma 9 *Es sei U eine Lösung des Ausstrahlungsproblems* $\mathrm{Ela}(\mathrm{a},\, \mathrm{b},\, \omega,\, \mathcal{P},\, 0)$ *mit $\omega \in \mathbb{R}^*$ (siehe (4)–(6)). Dann gilt $U \in L^{2,q}_{>-\frac{1}{2}}$.*

Beweis: Sei $R > R_0$, ψ und ψ_R definiert wie im Beweis zu Lemma 2. Aus

$$\langle\, \mathrm{a}\, \mathrm{rot}\, U \,,\, \mathrm{rot}\, \psi_R U \,\rangle_\Omega + \langle\, \mathrm{b}\, \mathrm{div}\, U \,,\, \mathrm{div}\, \psi_r U \,\rangle_\Omega = \omega^2 \; \langle\, U \,,\, \psi_R U \,\rangle + \langle\, \mathcal{P} U \,,\, \psi_R U \,\rangle$$

und **EV.1** schließen wir

$$\mathrm{Im} \Big(\langle\, \mathrm{a}\, \mathrm{rot}\, U \,,\, \mathrm{rot}\, \psi_R U \,\rangle_{A(R)} + \; \langle\, \mathrm{b}\, \mathrm{div}\, U \,,\, \mathrm{div}\, \psi_r U \,\rangle_{A(R)} \Big) = 0 \quad ,$$

woraus

$$I(R) := \mathrm{Im} \int_{S(R)} \left(a \overline{U} \wedge * \mathrm{rot}\, U + \mathrm{b}\, \mathrm{div}\, U \wedge * \overline{U} \right) = 0 \quad \text{für alle} \quad R > R_0 \tag{73}$$

folgt. Andererseits gilt mit (69)-(71) und (72)

$$
\begin{aligned}
I(R) \;=\; & \operatorname{Im} R^{N-1}\Big[\,\langle\, M^{-q}DM^{q}\tau U - M^{-1}\mathrm{Rot}\rho U\,,\,\tau \mathrm{a}\, U\,\rangle_{L^{2,q}(S^{N-1})}\\
& + \Big\langle\, M^{-N+q}DM^{N-q}\rho U + M^{-1}\mathrm{Div}\tau U\,,\,\rho \mathrm{b}\, U\,\Big\rangle_{L^{2,q-1}(S^{N-1})}\Big](R) \quad .
\end{aligned}
\tag{74}
$$

Wir multiplizieren (5) mit $\mathrm{a}^{3/4}$ und (6) mit $\mathrm{b}^{3/4}$ und drücken nun die Strahlungsbedingung in Kugelkoordinaten aus. Dazu berechnen wir mit Hilfe von (69)-(71), (73) und (74)

$$
\begin{aligned}
& R^{N-1}\Big(\|\rho\left(\mathrm{a}^{3/4}\mathrm{rot}\,U - \mathrm{i}\,\omega \mathrm{a}^{1/4}\mathrm{d}r\wedge U\right)(R)\|^2_{L^{2,q}(S^{N-1})}\\
& +\|\tau\left(\mathrm{b}^{3/4}\mathrm{div}\,U - \mathrm{i}\,\omega \mathrm{b}^{1/4}\sigma_{N,q} * \mathrm{d}r\wedge *U\right)\|^2_{L^{2,q-1}(S^{N-1})}\Big)\\
& = R^{N-1}\Big(\|\mathrm{a}^{3/4}(-M^{-1}\mathrm{Rot}\rho U + M^{-q}DM^{q}\tau U) - \mathrm{i}\,\omega \mathrm{a}^{1/4}\tau U\|^2_{L^{2,q}(S^{N-1})}(R)\\
& \qquad \|\mathrm{b}^{3/4}(M^{-q'}DM^{q'}\rho U + M^{-1}\mathrm{Div}\tau U) - \mathrm{i}\,\omega \mathrm{b}^{1/4}\rho U\|^2_{L^{2,q-1}(S^{N-1})}(R)\Big)\\
& \geq R^{N-1}\omega^2\Big(\|\mathrm{a}^{1/4}\tau U\|^2_{L^{2,q}(S^{N-1})}(R) + \|\mathrm{b}^{1/4}\rho U\|^2_{L^{2,q-1}(S^{N-1})}(R)\Big) \quad .
\end{aligned}
$$

Jetzt wählen wir $s > -\frac{1}{2}$ mit $\mathrm{rot}\,U - \mathrm{i}\,\omega \mathrm{a}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}r\wedge U \in L^{2,q+1}_s$ und $\mathrm{div}\,U - \mathrm{i}\,\omega \mathrm{b}^{-\frac{1}{2}}\sigma_{N,q} * \mathrm{d}r\wedge *U \in L^{2,q-1}_s$ und haben

$$
\begin{aligned}
& \|U\|^2_{L^{2,q}_s}(A(R_0))\\
& \leq c\int_{R_0}^{\infty} R^{N-1+2s}\Big(\|\mathrm{a}^{1/4}\tau U\|^2_{L^{2,q}(S^{N-1})}(R) + \|\mathrm{b}^{1/4}\rho U\|^2_{L^{2,q-1}(S^{N-1})}(R)\Big)\,\mathrm{d}R\\
& \leq c\Big(\|\mathrm{a}^{3/4}\mathrm{rot}\,U - \mathrm{i}\,\omega \mathrm{a}^{1/4}\mathrm{d}r\wedge U\|^2_{L^{2,q+1}_s(A(R_0))}\\
& \qquad +\|\mathrm{b}^{3/4}\mathrm{div}\,U - \mathrm{i}\,\omega \mathrm{b}^{1/4}\sigma_{N,q} * \mathrm{d}r\wedge *U\|^2_{L^{2,q-1}_s(A(R_0))}\Big)\\
& < \infty \quad ,
\end{aligned}
$$

woraus sich $U \in L^{2,q}_{>-\frac{1}{2}}$ ergibt. **q.e.d.**

Um nun die Schritte 1 bis 4 durchführen zu können reduzieren wir das Gleichungssystem auf ein schwach gekoppeltes System zweiter Ordnung. Dabei benutzen wir die Substitution aus [25] und verallgemeinern diese. Ab jetzt setzen wir stets **EV.1** voraus. Für $q \in \mathbb{N}_0$ und eine q-Form E definieren wir die Kommutatoren von rot bzw. div mit der Multiplikation mit einer C^1 Funktion f:

$$\mathcal{C}_{\operatorname{rot},f}E := \operatorname{rot}(fE) - f\operatorname{rot}E \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{C}_{\operatorname{div} f}E = \operatorname{div}(fE) - f\operatorname{div}E \quad .$$

Diese Kommutatoren sind Operatoren nullter Ordnung, die q-Formen in $(q+1)$- bzw. in $(q-1)$-Formen abbilden. Die Abfallrate der Koeffizienten ist dabei die Abfallrate der ersten Ableitungen von f.

Sei nun U eine Lösung von

$$\widetilde{\mathcal{L}}U - \omega^2 U = F \in R^q_{\mathrm{loc}} \cap D^q_{\mathrm{loc}} \quad . \tag{75}$$

Wir setzen

$$V := \operatorname{rot}U \in H^{1,q+1}_{\mathrm{loc}} \quad , \quad W := \operatorname{div}U \in H^{1,q-1}_{\mathrm{loc}} \quad . \tag{76}$$

Damit erhält man

$$-\mathrm{a}\Delta U - (\mathrm{b}-\mathrm{a})\operatorname{rot}W - \omega^2 U = \mathcal{R}(U,V,W) + F \tag{77}$$

$$-\mathrm{b}\Delta U - (\mathrm{a}-\mathrm{b})\operatorname{div}V - \omega^2 U = \mathcal{R}(U,V,W) + F \tag{78}$$

mit

$$\mathcal{R}(U,V,W) = \mathcal{C}_{\mathrm{div,a}}V + \mathcal{C}_{\mathrm{rot,b}}W - \mathcal{P}U \quad .$$

Wir wenden div auf (77) an und bekommen (im Distributionensinn)

$$-\mathcal{C}_{\mathrm{div,a}}\Delta U - \mathrm{a}\operatorname{div}\operatorname{rot}W - (\mathrm{b}-\mathrm{a})\operatorname{div}\operatorname{rot}W - \mathcal{C}_{\mathrm{div,b-a}}\operatorname{rot}W - \omega^2 W$$
$$= \operatorname{div}\mathcal{R}(U,V,W) + \operatorname{div}F \quad .$$

Mit $\operatorname{div}W = \operatorname{div}\operatorname{div}U = 0$ schließen wir

$$-\mathrm{b}\Delta_{q-1}W - \omega^2 W = \mathcal{C}_{\mathrm{div,a}}\Delta U + \widetilde{\mathcal{R}}(U,V,W) + \operatorname{div}F \quad ,$$

wobei $\widetilde{\mathcal{R}}$ ein Operator erster Ordnung ist. Wir ersetzen ΔU durch (77) und erhalten

$$\begin{aligned} &-\mathrm{b}\Delta_{q-1}W-\omega^2 W &(79)\\ &\quad=\quad -\frac{1}{\mathrm{a}}\mathcal{C}_{\mathrm{div,a}}\left[(\mathrm{b}-\mathrm{a})\mathrm{rot}\,W+\omega^2 U+\mathcal{R}(U,V,W)+F\right]\\ &\qquad\quad +\mathcal{C}_{\mathrm{div,b-a}}\mathrm{rot}\,W+\mathrm{div}\,\mathcal{R}(U,V,W)+\mathrm{div}\,F\quad . \end{aligned}$$

Durch Anwendung von rot auf (78) und analoge Rechnungen ergibt sich

$$\begin{aligned} &-\mathrm{a}\Delta_{q+1}V-\omega^2 V &(80)\\ &\quad=\quad -\frac{1}{\mathrm{a}}\mathcal{C}_{\mathrm{rot,b}}\left[(\mathrm{b}-\mathrm{a})\mathrm{rot}\,W+\omega^2 U+\mathcal{R}(U,V,W)+F\right]\\ &\qquad\quad +\mathcal{C}_{\mathrm{rot,a-b}}\mathrm{div}\,V+\mathrm{rot}\,\mathcal{R}(U,V,W)+\mathrm{rot}\,F\quad . \end{aligned}$$

Elliptische innere Regularität ergibt dann $V\in H^{2,q+1}_{\mathrm{loc}}$, $W\in H^{2,q-1}_{\mathrm{loc}}$, womit die Gleichungen (79) und (80) auch in $H^{2,q-1}_{\mathrm{loc}}$, bzw. in H^{2q+1}_{loc} gelten.

Wir kommen zum

Beweis von Satz 3: Nach Lemma 9 ist $U\in L^{2,q}_{>-\frac12}$. Wir betrachten das System (78)–(80) in kartesischen Koordinaten, wobei wir Gleichung (80) mit c_L (siehe (7)) multiplizieren, und erhalten ein Gleichungssystem in N Variablen und $\nu=\binom{N}{q}+\binom{N}{q-1}+\binom{N}{q+1}$ Gleichungen. Unter Berücksichtigung von **EV.1** und **EV.2** sehen wir, dass **GV.1**, **GV.2**, **AV.1** und **AV.3** mit $\mathbf{M}=\mathrm{b}^{-1}\,\mathrm{id}$ und $\sigma(\kappa)=0$ für $1\le\kappa\le\binom{N}{q}$, $\sigma(\kappa)=1$ für $\kappa>\binom{N}{q}$ erfüllt sind. Mit Satz 6 und Satz 5 können wir dann auf den beschränkten Träger einer Lösung $U\in L^{2,q}_{>-\frac12}$ von $\mathcal{L}U-\omega^2U=0$ schließen. Nach Satz 7 gilt dann $U=0$ in Ω. **q.e.d.**

5 Bezeichnungen

Mengen und Abbildungen

Wir bezeichnen mit $\mathbb{Z}$ die ganzen, mit $\mathbb{N}$ die positiven ganzen, mit $\mathbb{N}_0$ die nicht negativen ganzen, mit $\mathbb{R}$ die reellen, mit $\mathbb{R}_+$ die positiven reellen, mit $\mathbb{R}^*$ die reellen Zahlen ohne Null, mit $\mathbb{C}$ die komplexen Zahlen und mit i die imaginäre

Einheit. Für eine komplexe Zahl z ist $\overline{z}$ die konjugiert komplexe Zahl. Für $\nu \in \mathbb{N}$ und x, y in $\mathbb{C}^\nu$ oder in $\mathbb{R}^\nu$ stellt x_i die Projektion von x auf die i-te Koordinate, $\Big(x, y\Big)$ das euklidische Skalarprodukt von x und y und $|x|$ den euklidischen Betrag von x dar. Wir setzen $r(x) = |x|$ sowie für $x \neq 0$ zusätzlich $\xi(x) = x/r(x)$. Darüberhinaus sei $x \cdot y = \sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i$, also ist $\Big(x, y\Big) = x \cdot \overline{y}$.

Für zwei Mengen A und B sei $\mathcal{F}(A, B)$ die Menge der Abbildungen von A nach B. Für $f \in \mathcal{F}(A, B)$ und $C \subset A$ sei $f|_C$ die Einschränkung von f auf C. Ist f eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen, so bezeichen wir den Nullraum von f mit $\mathcal{N}(f)$, das Spektrum mit $\sigma(f)$ und das Punktspektrum mit $\sigma_p(f)$. Für $N \in \mathbb{N}$ und Mengen $\Omega, \Xi \subset \mathbb{R}^N$ sei $\overline{\Omega}$ der Abschluß und $\partial\Omega$ der Rand von Ω; wir sagen $\Omega \subset\subset \Xi$, wenn $\overline{\Omega}$ kompakt ist und $\overline{\Omega} \subset \Xi$ gilt. Wir nennen Ω ein Gebiet, wenn Ω offen und zusammenhängend ist und ein Außengebiet, wenn Ω ein Gebiet ist und $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ kompakt ist.

Für $R \in \mathbb{R}_+$, $N \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ werden folgende Notationen benutzt:

$$\begin{aligned}
U(x_0, R) &:= \Big\{ x \in \mathbb{R}^N \quad \Big| \quad |x - x_0| < R \Big\} \\
U(R) &:= U(0, R) \\
A(R) &:= \mathbb{R}^N \setminus \overline{U(R)} \\
S(R) &:= \overline{A(R)} \cap \overline{U(R)} \\
S^{N-1} &:= S(1) \\
\Omega(R) &:= \Omega \cap U(R)
\end{aligned}$$

Funktionen und Funktionenräume

Für eine auf einer Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ definierte komplex- oder vektorwertige messbare Funktion f ist

$$\operatorname{supp} f := \overline{\Omega} \setminus \Big\{ x \in \overline{\Omega} \quad \Big| \quad \exists \varepsilon > 0 : \; f = 0 \quad \text{f.ü. in} \quad U(x, \varepsilon) \cap \Omega \Big\}$$

ihr Träger und wir nennen f eine C^k-Funktion, wenn sie k-mal stetig partiell differenzierbar ist. Für Gebiete Ω benutzen wir folgende Funktionenräume:

$$\begin{aligned} C^k(\Omega\,,\mathbb{C}^\nu) &:= \big\{ f \in \mathcal{F}(\Omega,\mathbb{C}^\nu) \quad | \quad f \text{ ist } C^k \big\} \\ C^\infty(\Omega\,,\mathbb{C}^\nu) &:= \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C^k(\Omega\,,\mathbb{C}^\nu) \\ C_0^\infty(\Omega\,,\mathbb{C}^\nu) &:= \{ f \in C^\infty(\Omega\,,\mathbb{C}^\nu) \quad | \quad \operatorname{supp} f \subset\subset \Omega \} \end{aligned}$$

Mit $L^2(\Omega,\mathbb{C}^\nu)$ bzw. $L^\infty(\Omega,\mathbb{C}^\nu)$ bezeichnen wir den Raum der Äquivalenzklassen Lebesgue-messbarer Funktionen f mit Definitionsbereich Ω und Werten in $\mathbb{C}^\nu$, für die

$$\|f\|^2 := \|f\|^2_{0,\Omega} := \int_\Omega |f(x)|^2 \;\mathrm{d}x < \infty$$

bzw.

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)| < \infty$$

gilt.

Für $f,g \in L^2(\Omega,\mathbb{C}^\nu)$ ist

$$\Big\langle f \;,\; g \Big\rangle := \Big\langle f \;,\; g \Big\rangle_\Omega := \int_\Omega \Big(f,g\Big) \;\mathrm{d}x$$

das L^2-Skalarprodukt.

Wir benutzen für die Bezeichnung partieller Ableitungen die übliche Multiindexschreibweise: Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_N)$, ist $|\alpha| := \sum_{i=1}^N \alpha_i$ und

$$\partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1}\ldots\partial_N^{\alpha_N}, \quad \partial_n := \frac{\partial}{\partial x_n} \quad .$$

Für $m \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die Sobolevräume

$$\begin{aligned} H^m(\Omega,\mathbb{C}^\nu) &:= \Big\{ f \in L^2(\Omega,\mathbb{C}^\nu) \quad \Big| \quad \partial^\alpha f_i \in L^2(\Omega,\mathbb{C}) \text{ für } |\alpha| \le m, \quad i=1,\ldots,\nu \Big\} \quad , \\ \|f\|_m^2 &:= \|f\|^2_{m,\Omega} := \sum_{|\alpha|\le m} \sum_{i=1}^{\nu} \|\partial^\alpha f_i\|^2 \quad , \end{aligned}$$

dabei sind die Ableitungen im Distributionensinn zu verstehen. Es gilt $H^0 = L^2$. Ferner sei $\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega\,,\mathbb{C}^\nu)$ der Abschluss von $C_0^\infty(\Omega\,,\mathbb{C}^\nu)$ unter der durch $\|\;\cdot\;\|_m|_{C_0^\infty(\Omega\,,\mathbb{C}^\nu)}$ induzierten Metrik.

Für die Theorie der Maxwell-gleichungen im $\mathbb{R}^3$ benötigen wir ferner die Räume mit L^2-integrierbarer Rotation. Für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ sei

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}(\Omega) &:= \left\{ f \in L^2(\Omega\,,\mathbb{C}^3) \quad \middle| \quad \operatorname{rot} f \in L^2(\Omega\,,\mathbb{C}^3) \right\} \quad , \\
\mathrm{R}_0(\Omega) &:= \{ f \in \mathrm{R}(\Omega) \quad | \quad \operatorname{rot} f = 0 \} \quad , \\
\|f\|^2_{\mathrm{rot}} &:= \|f\|^2 + \|\operatorname{rot} f\|^2 \quad .
\end{aligned}$$

Der vektoranalytische Operator rot ist im Distributionensinn zu verstehen. Zur Verallgemeinerung der Randbedingung $n \wedge E|_{\partial\Omega} = 0$ benutzen wir den Abschluss von $C_0^\infty(\Omega\,,\mathbb{C}^\nu)$ unter der durch $\|\ \cdot\ \|_{\mathrm{rot}}|_{C_0^\infty(\Omega\,,\mathbb{C}^\nu)}$ induzierten Metrik, den wir mit $\mathring{\mathrm{R}}(\Omega)$ bezeichnen, ferner sei $\mathring{\mathrm{R}}_0(\Omega) := \mathring{\mathrm{R}}(\Omega) \cap \mathrm{R}_0(\Omega)$.

Wir sagen $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{C}^\nu)$ bzw. $f \in H^m_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{C}^\nu)$ bzw. $f \in \mathrm{R}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, wenn für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ das Produkt φf in $L^2(\Omega, \mathbb{C}^\nu)$ bzw. in $H^m(\Omega, \mathbb{C}^\nu)$ bzw. in $\mathrm{R}(\Omega)$ liegt. Liegt für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ das Produkt $\varphi|_\Omega\, f$ in $\mathring{H}^m(\Omega\,,\mathbb{C}^\nu)$, bzw. in $\mathring{\mathrm{R}}(\Omega)$ so schreiben wir $f \in \mathring{H}^m_{\mathrm{loc}}(\Omega\,,\mathbb{C}^\nu)$ bzw. in $\mathring{\mathrm{R}}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Durch ein angehängtes vox kennzeichnen wir die Räume, deren Elemente beschränkten Träger haben; so ist z.B. $f \in H^m_{\mathrm{vox}}(\Omega\,,\mathbb{C}^\nu)$, wenn $f \in H^m(\Omega\,,\mathbb{C}^\nu)$ und f beschränkten Träger hat.

Mit $\varrho := (1 + r^2)^{1/2}$ und für $s \in \mathbb{R}$ definieren wir die gewichteten L^2-Räume

$$\begin{aligned}
L^2_s(\Omega, \mathbb{C}^\nu) &:= \{ f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{C}^\nu) \quad | \quad \varrho^s f \in L^2(\Omega, \mathbb{C}^\nu) \} \quad , \\
\|f\|^2_{0,s} := \|f\|^2_{0,s,\Omega} &:= \|\varrho^s f\|^2_{0,\Omega} \quad .
\end{aligned}$$

Ferner defineren wir für $t \in \mathbb{R}$

$$L^2_{>t}(\Omega, \mathbb{C}^\nu) := \bigcup_{s>t} L^2_s(\Omega, \mathbb{C}^\nu) \quad \text{und} \quad L^2_{<t}(\Omega, \mathbb{C}^\nu) := \bigcap_{s<t} L^2_s(\Omega, \mathbb{C}^\nu) \quad ,$$

sowie

$$L^2_{\mathrm{pol}}(\Omega\,,\mathbb{C}^\nu) := \bigcap_{s\in\mathbb{R}} L^2_s(\Omega, \mathbb{C}^\nu)$$

und

$$L^2_{\exp}(\Omega\,,\mathbb{C}^\nu) := \bigcap_{s\in\mathbb{R}_+} \left\{ f \in L^2(\Omega\,,\mathbb{C}^\nu) \quad \middle| \quad \exp(sr) f \in L^2(\Omega\,,\mathbb{C}^\nu) \right\} \quad .$$

Auf die Indizierung des Gebietes und des Wertebereiches wird verzichtet, wenn Missverständnisse ausgeschlossen sind.

q-Formen

Sei $\widehat{M}$ eine reelle orientierte N-dimensionale glatte Riemann'sche Mannigfaltigkeit, $M \subset \widehat{M}$ eine offene Teilmenge von $\widehat{M}$. Für $m \in M$ sei $T_m M$ der Tangentialraum in m an M. Den komplexen Vektorraum der kovarianten alternierenden Tensoren vom Rang q bezeichnen wir mit $\mathcal{A}^q(m)$, das Bündel mit $\mathcal{A}^q(M)$. Für $q \in \mathbb{Z}$ nennen wir Elemente aus $\mathcal{A}^q(M)$ q-Formen oder einfach Formen (für $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \ldots, N\}$ setzen wir $\mathcal{A}^q(M) := \{0\}$). Für die Definition des äußeren Produktes $\wedge$, des Hodge'schen Sternoperators $*$ und der äußeren Ableitung d verweisen wir auf [3]. Sei (V, h) ein Kartengebiet, dann läßt sich die Einschränkung einer Form $E \in \mathcal{A}^q(M)$ auf V eindeutig darstellen als

$$E|_V = \sum_{I \in J(N,q)} E_I \mathrm{d}h_I$$

mit

$$\begin{aligned} J(N,q) &:= \{(i_1, \ldots, i_q) \,|\, i_j \in \{1, \ldots, N\} \wedge i_1 < \cdots < i_q\}, \\ \mathrm{d}h_I &:= \mathrm{d}h_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}h_{i_q}, \end{aligned} \tag{81}$$

wobei $\mathrm{d}h_i$ das Differential der i-ten Koordinatenfunktion ist.

Wir sagen eine Form habe lokale Eigenschaften wie Messbarkeit oder Differenzierbarkeit, wenn die mit der Karte heruntergeholten Komponentenfunktionen diese Eigenschaft haben. Wir definieren

$$\begin{aligned} C^{q,\infty}(M) &:= \{E \in \mathcal{A}^q(M) \quad | \quad E \text{ ist } C^\infty\} \quad , \\ C_0^{q,\infty}(M) &:= \{E \in C^{q,\infty}(M) \,|\, \operatorname{supp} E \text{ ist kompakt}\} \quad . \end{aligned}$$

Ist $\widetilde{M}$ eine weitere glatte Mannigfaltigkeit, so induziert eine differenzierbare Abbildung $\tau : M \to \widetilde{M}$ eine lineare Abbildung, den „Pullback"

$$\tau^* : \mathcal{A}^q(\widetilde{M}) \to \mathcal{A}^q(M) \quad .$$

In $\mathcal{A}^q(m)$ benutzen wir das durch den Sternoperator induzierte Skalarprodukt und die zugehörige Norm

$$(E\,, F\,)_{\mathcal{A}^q(m)} \;:=\; *(E \wedge *\overline{F}) \quad ,$$

$$|E|_{\mathcal{A}^q(m)} \;:=\; \big((E\,,F\,)_{\mathcal{A}^q(m)}\big)^{1/2} \qquad .$$

Wir definieren

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{2,q}(M) \;&:=\; \Big\{ E \in \mathcal{A}^q(M) \quad | \quad E \text{ ist messbar und } \int_M * |E|^2_{\mathcal{A}^q(m)} < \infty \Big\} \\
\mathcal{N}(M) \;&:=\; \Big\{ E \in \mathcal{A}^q(M) \quad | \quad E \text{ ist messbar und } \int_M * |E|_{\mathcal{A}^q(m)} = 0 \Big\} \\
L^{2,q}(M) \;&:=\; \mathcal{L}^{2,q}(M)/\mathcal{N}(M) \qquad .
\end{aligned}$$

$L^{2,q}(M)$ ist zusammen mit dem Skalarprodukt

$$\langle\, E\,,\, F\,\rangle_q := \langle\, E\,,\, F\,\rangle_{q,M} := \int_M E \wedge *\overline{F} \tag{82}$$

ein Hilbertraum (wie üblich wird in der Notation nicht zwischen einem Repräsentanten und der Äquivalenzklasse unterschieden). Die Indizierung der Mannigfaltigkeit wird in den meisten Fällen unterdrückt.

Um die Korrespondenz zum klassischen Kalkül zu betonen, setzen wir einer von Weyl vorgeschlagenen Konvention folgend rot $:= \mathrm{d}$ und div $:= \delta$. Wir sagen $E \in R^q(M)$, wenn $\operatorname{rot} E \in L^{2,q+1}(M)$ ist, und $E \in D^q(M)$, wenn $\operatorname{div} E \in L^{2,q-1}(M)$. Dabei sind die Ableitungsoperatoren im Distributionensinn zu verstehen. Ferner sei $E \in R^q_{\mathrm{loc}}(M)$ bzw. in $D^q_{\mathrm{loc}}(M)$ wenn $\varphi E \in R^q(M)$ bzw. $E \in D^q(M)$ für alle $\varphi \in C_0^{q,\infty}(M)$ gilt. Für die Verallgemeinerung der Randbedingung "$\iota^* E = 0$" (ι bezeichne hier die natürliche Einbettung der Mannigfaltigkeit M in ihren Rand) definieren wir noch

$$E \in \overset{\circ}{R}{}^q(M) :\Longleftrightarrow\; \forall F \in D^{q+1}(M):\; \langle\, \operatorname{rot} E\,,\, F\,\rangle_{q+1} + \langle\, E\,,\, \operatorname{div} F\,\rangle_q = 0 \qquad .$$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein Außengebiet Wir betrachten Ω mit der durch (id, Ω) erzeugten differenzierbaren orientierten Struktur als eine glatte N-dimensionale orientierte Riemann'sche Mannigfaltigkeit. Den Tangentialraum im Punkt $x \in \Omega$ identifizieren wir mit dem $\mathbb{R}^N$; der Metriktensor ist durch das euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^N$ gegeben. Mit x_i bezeichnen wir die kartesischen Koordinaten und können jede Form $E \in \mathcal{A}^q(\Omega)$ global eindeutig darstellen durch

$$E(x) = \sum_{I \in J(N,q)} E_I(x)\,\mathrm{d}x_I \qquad .$$

Wir führen die Sobolev- und gewichteten Sobolevräume von q-Formen mit Hilfe dieser Darstellung ein. Wir sagen $E \in H^{q,m}_{(\mathrm{loc,vox})}(\Omega)$, wenn für alle $I \in J(N,q)$ die Funktionen $E_I \in H^{m}_{(\mathrm{loc,vox})}(\Omega\,,\mathbb{C})$ sind. Entsprechend werden die gewichteten Räume $L^{2,q}_{(<,>)s}(\Omega)$ für $s \in \mathbb{R}$ definiert. Die Normen sind definiert durch

$$\|E\|^2_{q,s} := \sum_{I \in \mathcal{J}(N,q)} \|E_I\|^2_{0,s} \quad .$$

Wir sagen $E \in \overset{\circ}{R}{}^{q}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, wenn $\varphi|_\Omega\, E \in \overset{\circ}{R}{}^{q}(\Omega)$ für alle Funktionen $\varphi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^N)$ gilt.

Sonstiges

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $o\,(r^\alpha)$ verschiedene Funktionen oder Felder f, für die

$$\lim_{R \to \infty} \sup_{x \in A(R)} \left| r^{-\alpha} f \right| = 0$$

gilt. Mit $O\,(r^\alpha)$ werden verschiedene Funktionen bezeichnet, für die

$$\sup_{x \in A(R)} \left| r^{-\alpha} f \right| < \infty$$

für ein $R > 0$ gilt.

Literatur

[1] Agmon, S.: Lower bounds for solutions of Schrödinger equations, *J. Anal. Math.*, **23** (1970), 1-25.

[2] Ang, D. D.; Ikehata, M.: Trong, D. D.; Yamamoto, M.: Unique continuation for a stationary isotropic Lamé system with variable coefficients, *Commun. Partial. Differ. Equations*, **23** (1998), 371–385.

[3] Bishop, R.; Goldberg, S.: *Tensor analysis on manifolds*, The Macmillan Company, New York, 1968.

[4] Dehman, S.; Robbiano, L.: La propriété du prolongement unique pour un système elliptique. Le système de Lamé, *J. Math. Pures Appl. IX. Ser.*, **72** (1993), 475–492.

[5] Eidus, D. M.: The limiting absorption principle in the theory of elasticity, *Vestn. Leningrad. Univ. Ser. Math. Meh.*, **7** (1963), 141–154.

[6] Eidus, D. M.: The principle of the limit amplitude, *Russ. Math. Surv.*, **24**(3) (1969), 97-167.

[7] Eidus, D. M.: On the spectra and eigenfunctions of the Schrödinger and Maxwell Operators, *J. Math. Anal. Appl.*, **106** (1985), 540–568.

[8] Hazard, C.; Lenoir, M.: On the solution of time-harmonic scattering problems for Maxwell's equations, *SIAM J. Math. Anal*, **27** (1996), 1597–1630.

[9] Jäger, W.: Zur Theorie der Schwingungsgleichungen mit variablen Koeffizienten in Außengebieten, *Math. Z.*, **102** (1969), 62–88.

[10] Kato, T.: Growth properties of solutions of the reduced wave equations with a variable coefficent, *Commun. Pure Appl. Math.*, **12** (1959), 403-425.

[11] Kupradze, V. D.: *Dynamical problems in elasticity,* in: Sneddon, I. N.,Hill, R. (eds) Progress in solid mechanics III, North-Holland, Amsterdam, 1963.

[12] Leis, R.: Über die eindeutige Fortsetzbarkeit der Lösungen der Maxwellschen Gleichungen in anisotropen inhomogenen Medien, *Bull. Polyt. Inst. Jassy*, **XIV**(VIII), Fasc. 3-4 (1968), 119–124.

[13] Leis, R.: Zur Theorie elastischer Schwingungen in inhomogenen Medien, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **39** (1970), 158–168.

[14] Leis, R.: Außenraumaufgaben in der linearen Elastizitätstheorie, *Math. Meth. Appl. Sci.*, **2** (1980), 379–396.

[15] Leis, R.: *Initial boundary value problems in mathematical physics*, Teubner, Stuttgart, 1986.

[16] Picard, R.; Weck, N.; Witsch, K. J.: Time-harmonic Maxwell equations in the exterior of perfectly conducting irregular obstacles, *Analysis*, **21** (2001), 231–263.

[17] Protter, M. H.: Unique continuation for elliptic equations, *Trans. Am. Math. Soc.*, **95** (1960), 81–91.

[18] Rellich, F.: Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + k^2 u = 0$ in unendlichen Gebieten, *J. Ber. Deutsch. Math. Verein.*, **53** (1943), 57-65.

[19] Roze, S. N.: On the spectrum of an elliptic operator of second order, *Math. USSR-Sb.*, **9** (1969), 183–197.

[20] Vogelsang, V.: Die absolute Stetigkeit des positiven Spektrums der Schwingungsgleichung mit oszillierendem Hauptteil, *Math. Z.*, **181** (201–213), 1982.

[21] Vogelsang, V.: Die Rellichsche Abschätzung für die Schwingungsgleichung mit oszillierendem Hauptteil, *J. Reine Angew. Math.*, **338** (1983), 109–120.

[22] Vogelsang, V.: On the strong unique continuation principle for inequalities of Maxwell type, *Math. Ann.*, **289** (1991), 285–295.

[23] Weber, C.: Regularity theorems for Maxwell's equations, *Math. Meth. Appl. Sci.*, **3** (1981), 523–536.

[24] Weck, N.: Außenraumaufgaben in der Theorie stationärer Schwingungen inhomogener elastischer Körper, *Math. Z.*, **17** (1969), 387–398.

[25] Weck, N.: Unique continuation for systems with Lamé principal part, *Math. Meth. Appl. Sci.*, **24** (2001), 595–605.

[26] Weck, N.; Witsch, K. J.: Complete low frequency analysis for the reduced wave equation with variable coefficients in three dimensions, *Commun. Partial Differ. Equations*, **17**(9&10) (1992), 1619–1663.

[27] Weck, N.; Witsch, K. J.: Generalized Spherical Harmonics and Exterior Differentiation in Weighted Sobolev Spaces, *Math. Meth. Appl. Sci.*, **17** (1994), 1017–1043.

[28] Weck, N.; Witsch, K. J.: Generalized linear elasticity in exterior domains I, *Math. Meth. Appl. Sci.*, **20** (1997), 1469–1500.

[29] Weidmann, J.: *Lineare Operatoren in Hilberträumen*, Teubner, Stuttgart, 1976.

[30] Weyl, H.: Die natürliche Randwertaufgabe im Außenraum für Strahlungsfelder beliebiger Dimension und beliebigen Ranges, *Math. Z.*, **56** (1952), 105–119.