# Splitting-Techniken zur spektralen Approximation der Navier-Stokes- und Boussinesq-Gleichungen

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

**DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN**

(Dr. rer. nat.)

vom Fachbereich Mathematik und Informatik

der Universität Essen

genehmigte

**DISSERTATION**

von

**Dipl.-Math. Heike Haschke**

aus Essen

| | |
|---|---|
| Tag der mündlichen Prüfung: | 16. November 2001 |
| Referent: | Prof. Dr. rer. nat. W. Heinrichs |
| Korreferent: | Prof. Dr. rer. nat. K. Witsch |

# Inhaltsverzeichnis

# Tabellenverzeichnis

# Abbildungsverzeichnis

# Kapitel 0

# Einleitung

Die Navier-Stokes-Gleichungen bilden die Grundlage von Modellen der Strömungsmechanik und stellen ein System nichtlinearer, zeitabhängiger partieller Differentialgleichungen dar. Sie beschreiben Bewegungen zäher, kompressibler und inkompressibler Flüssigkeiten. Da derartige Flüssigkeiten nicht nur bei sehr komplizierten Anwendungen sondern bei vielen Dingen des täglichen Lebens vorhanden sind (wie z.B. das Hinzugeben von Milch im Kaffee und vorsichtigem Umrühren), sind die Navier-Stokesschen Differentialgleichungen immer noch von großem Interesse bei Physikern, Ingenieuren und Mathematikern. Die mathematischen Gleichungen, die die physikalische Welt einigermaßen exakt beschreiben, sind in der Regel so komplex, dass man auf analytische Lösungen nur in wenigen Spezialfällen zurückgreifen kann. Daher ist das Gebiet der numerischen Simulation ein wichtiger Bestandteil der Mathematik geworden, der in Zukunft mit zunehmenden Rechnerleistungen noch mehr Aufmerksamkeit erlangen wird. Dringend erforderlich sind hierfür effiziente numerische Algorithmen, die die exakte Lösung von solch komplexen Anwendungsproblemen hinreichend genau approximieren können.
In diesem Zusammenhang wurden in den 50er Jahren des 20. Jahrhunderts entscheidende Fortschritte in der Methode der Finiten-Differenzen erzielt. Bei diesen Methoden werden die Ableitungen, die in den Differentialgleichungen auftreten, durch finite Differenzen ersetzt, wie z.B.

$$\frac{du(x)}{dx} \approx \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h},$$

wobei $h$ der Abstand zwischen zwei Punkten ist. Offensichtlich handelt es sich hierbei um lokale Verfahren, die sich dadurch auszeichnen, für Polynome niedriger Ordnung exakt zu sein.
In den 60er Jahren wurde eine weitere lokale Methode populär, die sogenannte Methode der Finiten-Elemente. Diese Verfahren eignen sich besonders gut für komplexe Geometrien und sind inzwischen sowohl auf mathematischer wie auch ingenieurwissenschaftlicher Seite weit entwickelt (siehe hierzu Braess [5], Zienkiewicz und Taylor [33]).

In den 70er Jahren kam der Durchbruch der dritten großen Verfahrensklasse: die spektralen Verfahren. Der wesentliche Unterschied zu den beiden anderen Methoden ist der, dass hierbei globale Ansatzfunktionen benutzt werden. In einfachen Gebieten, in denen die Lösung ein hohes Maß an Glattheit besitzt, erreicht man hier das beste Verhältnis zwischen erzielter Genauigkeit und Anzahl von Freiheitsgraden. Sehr häufig erzielt man mit spektralen Verfahren eine Genauigkeit bis auf 10 Stellen, während bei den lokalen Verfahren nur 2 bis 3 Stellen erreicht werden. Einen Überblick über all diese Verfahren liefern auch Quarteroni und Valli in [27].
In der hier vorliegenden Arbeit werden die spektralen Verfahren und ihre Anwendung auf die Navier-Stokesschen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{Re}\nabla^2 u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p &= f, \\ \nabla \cdot u &= 0 \end{aligned}$$

betrachtet.
Im wesentlichen gibt es bei spektralen Methoden, ähnlich wie bei den Finite-Element-Methoden, drei Klassen:

- Gekoppelte Methoden: man versucht, sowohl Druck als auch Geschwindigkeit simultan anzunähern (siehe Malik, Zang und Hussaini [23], Zang und Hussaini [32])
- Galerkin Methoden: Approximation der Geschwindigkeit durch divergenzfreie Jacobi-

  Fourier Polynome, die die vorgegebenen Randbedingungen erfüllen (siehe Leonard und Wray [21], Moser, Moin und Leonard [25])
- Splitting Methoden: Entkopplung von Druck und Geschwindigkeit durch aufeinanderfolgende Lösung von zwei oder mehreren Gleichungen

Gegenstand dieser Arbeit sind Splitting-Techniken der Navier-Stokes-Gleichungen.
In Kapitel 1 wird eine Einführung in die spektralen Methoden zur effizienten Lösung von partiellen Differentialgleichungen gegeben.
Kapitel 2 beinhaltet das Splitting der Navier-Stokes-Gleichungen. Die Idee besteht darin, die Geschwindigkeit in der Zeit zu diskretisieren und somit separate Gleichungen für den Druck und die Geschwindigkeit zu erhalten. Für die Zeitdiskretisierung bieten sich wiederum verschiedene Methoden an, wobei man zwischen Ein- und Mehrschrittverfahren wählen kann. Zu den Einschrittverfahren zählen die Einschritt-$\theta$-Verfahren, wobei $\theta \in [0,1]$. Eine kurze Einführung dieser Verfahren ist in Bristeau, Glowinski und Periaux [6] zu finden (siehe auch Knabner/Angermann [20]). Für $\theta = \frac{1}{2}$ erhält man speziell das sogenannte Crank-Nicolson-Verfahren (siehe z.B. Müller-Urbaniak [29]). Hier werden für die Zeitdiskretisierung Mehrschrittverfahren verwendet, wobei die sogenannten BDF-Verfahren (Backward Differentiation Formulas) gewählt wurden (siehe z.B. Deuflhard/Bornemann

[9]). Durch Extrapolation des Druckes wurde in [12] numerisch gezeigt, dass sich ein Verfahren zweiter Ordnung für die Geschwindigkeit und ein Verfahren erster Ordnung für den Druck in der Zeit gewinnen läßt. Für die Approximation werden Tschebyscheff-Polynome verwendet. Als Stützstellen dienen für die Geschwindigkeit die Tschebyscheff-Gauß-Lobatto-Knoten und für den Druck die Tschebyscheff-Gauß-Knoten. Die Kombination von Tschebyscheff-Polynomen statt Legendre-Polynomen und der Tschebyscheff-Gauß-Lobatto Knoten ermöglicht es, die schnelle Fourier-Transformation (FFT) anzuwenden. Somit benötigt die Auswertung des spektralen Operators statt $O(N^3)$ arithmetischer Operationen lediglich $O(N^2 \ln(N))$ Operationen, wobei $N$ den maximalen Polynomgrad bezeichnet. Die Wahl der Gauß-Lobatto- und der Gauß-Knoten hat zur Folge, dass zwei verschiedene Gitter (sog. "staggered grids") benötigt werden. Dabei wird der Druck durch Polynome approximiert, deren Grad um eins niedriger ist als für die Geschwindigkeit. Der Vorteil besteht darin, dass "spurious modes", die zu singulären spektralen Problemen führen würden, vermieden werden.

Zur Vermeidung von spurious modes gibt es auch schon eine Reihe anderer Arbeiten. Heinrichs schlug in [17] vor, sowohl den Druck als auch die Geschwindigkeit durch Polynome vom gleichen Grad zu approximieren. Dadurch entstanden allerdings spurious modes, die beseitigt wurden, indem die zugehörigen Fourierkoeffizienten zu Null gesetzt wurden. Eine weitere Idee verfolgte Heinrichs in [15], wobei der Druck durch Polynome um zwei Grade niedriger als die Geschwindigkeit approximiert wurde. Dadurch wurden die spurious modes gänzlich vermieden, jedoch wurde die Imkompressibilitätsbedingung $\nabla \cdot u = 0$ nicht sehr gut erfüllt. Bernardi und Maday verwendeten in [2] auch staggered grids, und nahmen dazu insgesamt 3 Gitter: Eines für den Druck und je eines für beide Geschwindigkeitskomponenten. Als Ansatzfunktionen wählten sie nicht die Tschebyscheff-Polynome, sondern die Legendre-Polynome. Somit vermieden auch sie das Auftreten von spurious modes, zeigten allerdings keine numerischen Resultate für diese Methode.

Kapitel 2 liefert ferner einen Beitrag darüber, wie der konvektive Anteil $(u \cdot \nabla)u$ behandelt werden kann. In all den oben vorgestellten Arbeiten wurde die Nichtlinearität explizit mit einer Adams-Bashforth-Formel diskretisiert. Auch diese Vorgehensweise wird hier verfolgt. Es zeigte sich aber schnell, dass dadurch für große Reynoldszahlen eine sehr kleine Schrittweite notwendig wurde. Daher wurde die Idee der impliziten Behandlung verfolgt. Dieses wurde in der Vergangenheit für die hier vorgestellten Splitting-Techniken noch nicht näher betrachtet. Kapitel 2 beinhaltet eine Diskussion über die Behandlung der Nichtlinearität sowohl mit expliziten als auch mit impliziten Verfahren.

In Kapitel 3 wird das Splitting anhand des Driven-Cavity-Problems getestet. Da bei spektralen Verfahren nichtsymmetrische, vollbesetzte Matrizen auftreten, ist eine effiziente Behandlung der entstehenden Gleichungssysteme nötig. Verschiedene Möglichkeiten, diese iterativ zu lösen, sowie das Thema der Vorkonditionierung werden hier dargestellt.

Kapitel 4 liefert einen Beitrag, wie Singularitäten zu behandeln sind. Für den Fall, dass der Druck durch Polynome von um zwei geringerem Grad approximiert wird, haben O. Botella und R. Peyret in [4] bereits Ergebnisse erzielt. In dem Fall von staggered grids sind

bisher keine Resultate bekannt. Viele Autoren haben die Behandlung von Singularitäten mit spektralen Verfahren vermieden, weil der große Vorteil der spektralen Verfahren (hohe spektrale Genauigkeit) verloren geht.
In Kapitel 5 wird das Modell auf ein weiteres Anwendungsbeispiel erweitert und das hier vorgestellte Splitting verallgemeinert. Es handelt sich dabei um die Boussinesq-Approximation, d.h. zu den Navier-Stokes-Gleichungen kommt noch eine weitere Gleichung hinzu, die die Temperaturabhängigkeit von Strömungen beschreibt. Splitting-Techniken für diese Gleichungen in der primitiven Formulierung sind bisher nicht bekannt. Heinrichs hat in [16] die Boussinesq-Gleichungen in der Strom-Wirbelfunktion-Formulierung betrachtet und dafür numerische Resultate geliefert. In Kapitel 5 werden ferner die hier berechneten numerischen Resultate mit der Benchmark-Lösung verglichen, die in den 80er Jahren erstellt wurde.

Das in dieser Arbeit vorgestellte Splitting hat gezeigt, dass sehr gute numerische Resultate dadurch erzielt werden konnten, dass der Druck durch Polynome approximiert wurde, deren Grad um eins niedriger ist als der für die Geschwindigkeit. Die entstehenden staggered grids bedeuten allerdings einen deutlich höheren Aufwand, da zwischen den verschiedenen Knoten interpoliert werden muss.
Ein entscheidender Schritt ist sicherlich die implizite Behandlung des konvektiven Terms. Diese ermöglicht es, auch höhere Reynoldszahlen zu betrachten, da hierbei die Zeitschrittweite größer gewählt werden kann.
Interessant ist auch, dass spektrale Verfahren gut geeignet sind für Probleme mit Singularitäten. Bisher wurden diese Ansätze eher vermieden. Ist die analytische Lösung in der Nähe der Singularität allerdings bekannt, so wird in Kapitel 4 gezeigt, dass durch geeignete Subtraktion der dominierenden singulären Anteile die Vorteile der spektralen Verfahren weiterhin genutzt werden können.
Ein weiterer wichtiger Beitrag dieser Arbeit ist die Ausdehnung auf temperaturabhängige Probleme, die in der Natur weit verbreitet sind.
Ein Vorteil dieser Splitting-Techniken besteht in der Möglichkeit der Parallelisierung. Dies könnte eine Verbesserung der Rechenzeiten bedeuten, sofern der Kommunikationsaufwand zwischen den einzelnen Prozessen nicht allzu hoch ist.

Zum Schluss möchte ich mich bei all denen bedanken, die zum Fortgang und Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.
Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. W. Heinrichs, der diese Arbeit angeregt und betreut hat. Er gab mir jede erdenkliche Unterstützung und hat mir als Mitarbeiter der Arbeitsgruppe Ingenieurmathematik an der Universität Essen alle nur erdenkliche Förderung zukommen lassen.
Mein Dank gilt auch Herrn Prof. Dr. K. Witsch, der die Übernahme des Korreferats bereitwillig angenommen hat.
Ferner gilt ein besonderer Dank Herrn Dipl.-Math. techn. Johannes Korsawe und Frau

Dipl.-Math. Birgit Loch, die diese Arbeit immer wieder Korrektur gelesen haben.
Zum Schluss möchte ich mich bei meinen Eltern und all meinen Freunden bedanken, die mich immer wieder ermutigt und unterstützt haben und ohne die diese Arbeit nicht möglich gewesen wäre.

# Kapitel 1

# Einführung in die spektralen Verfahren

Partielle Differentialgleichungen treten in fast allen Bereichen der Wissenschaften auf. Sie zu lösen ist ein schwieriges Problem und nur selten ist die Berechnung exakter Lösungen möglich. Aus diesem Grunde sind effiziente numerische Verfahren zur Bestimmung einer approximativen Lösung notwendig. Schon lange bekannt sind die Verfahren der Finiten-Differenzen (FD), der Finiten-Elemente (FE) und der Finiten-Volumina (FV). All diese Methoden haben bereits eine lange Geschichte und sind ein wirksames Werkzeug zur Lösung partieller Differentialgleichungen. In den letzten zwei Jahrzehnten kamen die spektralen Verfahren und insbesondere die pseudo-spektralen Verfahren als eine interessante Variante hinzu. Während Finite-Elemente-Methoden sehr gut geeignet sind für komplexe Geometrien [1], können spektrale Verfahren hingegen in einfacheren Gebieten, wie z. B. Rechtecken oder Kreisen, eine höhere Genauigkeit der approximierten Lösung erzielen [2]. Bei letzteren Verfahren handelt es sich, im Gegensatz zu FE, FD oder FV, um globale Verfahren. Ist eine Differentialgleichung gegeben, so besteht die Idee darin, die Lösung $u$ zu approximieren durch die endliche Summe

$$u(x) = \sum_{k=0}^{N} \tilde{u}_k p_k(x), \tag{1.1}$$

wobei die $p_k(x)$ sehr glatte Basisfunktionen sind.

Im weiteren Verlauf wird nun gezeigt, welche Funktionen $p_k(x)$ geeignet sind und wie man die Koeffizienten $\tilde{u}_k$ bestimmen kann.

[1]Erzielen aber meist nur Konvergenz der Ordnung $p$ ($p = 1, \ldots, 5$).

[2]Später wird gezeigt, wie die Approximationsgüte von der Glattheit der Daten abhängt

## 1.1 Systeme orthogonaler Polynome

Sei $\mathbb{P}_N$ der Raum der Polynome vom Grad $\leq N$ und $w(x)$ eine Gewichtsfunktion, d.h. $w(x)$ ist nicht-negativ und integrierbar auf dem Intervall $I = (-1, 1)$. Ferner sei

$$L^2_w(I) = \{v : I \to \mathbb{R} \mid v \text{ messbar und } ||v||_{0,w} < \infty\},$$

wobei

$$||v||_{0,w} := \left( \int_{-1}^{1} |v(x)|^2 w(x) dx \right)^{1/2}$$

die vom Skalarprodukt $(u, v)_w$ induzierte Norm ist mit

$$(u, v)_w := \int_{-1}^{1} u(x)v(x)w(x)dx.$$

Mit dieser Norm wird $L^2_w(-1, 1)$ zu einem Hilbertraum.
$\{p_n\}_{n\geq 0}$ sei nun ein System von Polynomen (mit $p_k$ Polynom vom Grad $k$), die bzgl. des Skalarproduktes $(.,.)_w$ orthogonal sind, d. h.

$$(p_n, p_m)_w = 0 \quad \forall n, m \geq 0, \quad n \neq m.$$

Aus dem Weierstraß'schen Approximationssatz folgt nun, dass für jedes $u \in L^2_w(-1, 1)$ gilt:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k p_k(x) \quad \text{mit} \quad \hat{u}_k := \frac{(u, p_k)_w}{||p_k||^2_{0,w}}. \tag{1.2}$$

Betrachtet man

$$P_N u(x) := \sum_{k=0}^{N} \hat{u}_k p_k(x),$$

so kann man $P_N u$ auch auffassen als die orthogonale Projektion von $u$ auf $\mathbb{P}_N$ bzgl. des Skalarproduktes $(.,.)_w$

$$(P_N u, v_N)_w = (u, v_N)_w \quad \forall\, v_N \in \mathbb{P}_N.$$

Es gilt dann:

$$||u - P_N u||_{0,w} \to 0 \quad (N \to \infty).$$

## 1.2 Gauß-Quadratur und Interpolation

Im folgenden soll die enge Beziehung zwischen orthogonalen Polynomen und Integrationsformeln vom Gauß-Typ auf dem Intervall $[-1,1]$ verdeutlicht werden. Sei dazu $\{p_n\}_{n\geq 0}$ wie oben definiert.

**Satz 1.1 (Gauß-Lobatto-Integration)** *Seien $-1 = x_0, x_1, \ldots, x_N = 1$ die $N+1$ Nullstellen des Polynoms*

$$q(x) = p_{N+1}(x) + ap_N(x) + bp_{N-1}(x),$$

*wobei $a$ und $b$ so gewählt werden, dass $q(-1) = q(1) = 0$. Seien ferner $w_0, \ldots, w_N$ die Lösungen des linearen Systems*

$$\sum_{j=0}^{N} x_j^k w_j = \int_{-1}^{1} x^k w(x)dx, \quad 0 \leq k \leq N.$$

*Dann gilt:*

$$\sum_{j=0}^{N} p(x_j)w_j = \int_{-1}^{1} p(x)w(x)dx, \quad \forall\ p \in \mathbb{P}_{2N-1}.$$

**Beweis:** Es ist $q \in \mathbb{P}_{N+1}$. Aufgrund der Orthogonalität der $\{p_k\}$ gilt:

$$(q,\phi)_w = 0 \qquad \forall\ \phi \in \mathbb{P}_{N-2}. \tag{1.3}$$

Sei ferner $p \in \mathbb{P}_{2N-1}$. Es gibt eine Zerlegung

$$p(x) = q(x)r(x) + s(x)$$

mit $r \in \mathbb{P}_{N-2}$ und *grad* $s \leq N$. Da die $x_j$, $j = 0, \ldots, N$, Nullstellen von $q$ sind, folgt:

$$p(x_j) = q(x_j)r(x_j) + s(x_j) = s(x_j).$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{j=0}^{N} p(x_j)w_j &= \sum_{j=0}^{N} s(x_j)w_j = \int_{-1}^{1} s(x)w(x)dx \\ &= \int_{-1}^{1} p(x)w(x)dx - \underbrace{\int_{-1}^{1} q(x)r(x)w(x)dx}_{=0 \text{ nach } (1.3)}. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Die Knoten für die Gauß-Integration spielen bei den spektralen Verfahren eine große Rolle. Sie werden als Kollokationspunkte bei der spektralen Kollokation benutzt, d.h. als Punkte, an denen die zu Grunde liegende partielle Differentialgleichung erfüllt sein soll. Seien nun für $N \geq 0$ die Punkte $x_0, x_1, \ldots, x_N$ die Knoten der Gauß-Lobatto-Integration und $w_0, w_1, \ldots, w_N$ die entsprechenden Gewichte. Das $N$-te Interpolationspolynom $I_N u$ ist dann gegeben durch die Bedingungen

$$(I_N u)(x_j) = u(x_j), \quad 0 \leq j \leq N, \quad I_N u \in \mathbb{P}_N.$$

$I_N u$ erhält man mittels Lagrange-Interpolation. Da es sich um ein Polynom $N$-ten Grades handelt und die $\{p_n\}_{n \geq 0}$ eine Orthonormalbasis bilden, gilt:

$$I_N u = \sum_{k=0}^{N} \tilde{u}_k p_k.$$

Offensichtlich ist:

$$u(x_j) = \sum_{k=0}^{N} \tilde{u}_k p_k(x_j). \tag{1.4}$$

Die $\tilde{u}_k$ kann man mit (1.2) und Satz 1.1 berechnen und es ergibt sich:

$$\tilde{u}_k = \frac{1}{\gamma_k} \sum_{j=0}^{N} u(x_j) p_k(x_j) w_j, \tag{1.5}$$

mit

$$\gamma_k = \sum_{j=0}^{N} p_k^2(x_j) w_j. \tag{1.6}$$

Dabei erlauben die Gleichungen (1.4) und (1.5) Transformationen zwischen dem Physikalischen Raum, der Darstellung von $u$ mittels der Werte $\{u(x_j)\}$, und dem sogenannten Frequenzraum, der Darstellung mittels der Koeffizienten $\{\tilde{u}_k\}$.

## 1.3 Sturm-Liouville-Probleme

In diesem Abschnitt wird verdeutlicht, dass für spektrale Verfahren Sturm-Liouville-Probleme besonders gut geeignet sind, da die Entwicklung nach den Eigenfunktionen einer Sturm-Liouville-Aufgabe hohe spektrale Genauigkeit garantiert. Dazu soll eine kurze Einführung in die Theorie der Sturm-Liouville-Probleme vorgenommen werden.

Unter einem Sturm-Liouville-Problem versteht man eine gewöhnliche Differentialgleichung der Form

$$Lu + \lambda w(x)u = 0, \quad R_1 u = R_2 u = 0, \tag{1.7}$$

mit den Operatoren

$$\left.\begin{array}{l} Lu := (p(x)u')' + q(x)u, \\ R_1 u := \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a), \quad R_2 u := \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) \end{array}\right\} \tag{1.8}$$

Dabei gelten folgende Voraussetzungen:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Alle Größen sind reell,} \\ p \text{ stetig diffb. und positiv auf } [a,b], \\ q \text{ stetig,} \\ w \text{ stetig und positiv, } (\alpha_1,\alpha_2),\ (\beta_1,\beta_2) \neq (0,0). \end{array}\right\} \tag{1.9}$$

**Definition 1.2** *Eine Zahl $\lambda = \lambda_n$ heißt Eigenwert von (1.7), wenn (1.7) eine nichttriviale Lösung $u = u_n$ besitzt. $u_n$ selbst heißt dann Eigenfunktion oder Eigenlösung zum Eigenwert $\lambda_n$.*

Laut [18] gilt folgender Satz über die Eigenwerte einer Sturm-Liouvilleschen Aufgabe.

**Satz 1.3** *Vorgelegt sei die Sturm-Liouville-Aufgabe (1.7) unter den Voraussetzungen (1.9). Dann bildet die Gesamtheit ihrer Eigenwerte eine streng wachsende Folge $\{\lambda_n\}_n$ mit $\lambda_n \to \infty$. Jeder Eigenwert ist einfach.*

Ferner gelten folgende Voraussetzungen:

$$\begin{array}{l} u_n(a) = u_n(b) = 0 \\ \text{Die Eigenfunktionen seien normiert, d.h. es gilt:} \\ \displaystyle\int_a^b w(x)u_n(x)u_m(x) = \delta_{nm}. \end{array} \tag{1.10}$$

Im folgenden wird die Konvergenzrate für die Entwicklung einer Funktion nach den Eigenfunktionen einer Sturm-Liouville-Aufgabe (1.7) untersucht, d.h. es ist

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x).$$

**Satz 1.4 (Entwicklungssatz, [18])** *Vorgelegt sei die Sturm-Liouville-Aufgabe (1.7) mit den Voraussetzungen (1.9). Dann gilt für jedes $f \in L^2(a,b)$ die Entwicklung*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x) \text{ mit } a_n := \int_a^b w(x) f(x) u_n(x) dx$$

*im Sinne von:*

$$\int_a^b \left[ f(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k u_k(x) \right]^2 \to 0 \quad (n \to \infty)$$

*und*

$$\int_a^b w(x) \left[ f(x) - \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k(x) \right]^2 dx = 0.$$

Nach (1.7) ist

$$w(x) u_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} \left( -(p(x) u_n(x)')' - q(x) u_n(x) \right)$$

und somit ist

$$a_n = -\frac{1}{\lambda_n} \int_a^b \left( (p(x) u_n(x)')' + q(x) u_n(x) \right) f(x) dx.$$

Da $f$ 2-mal differenzierbar ist, liefert 2-maliges partielles Integrieren

$$a_n = -\frac{1}{\lambda_n} \left[ [p(x) u_n'(x) f(x) - p(x) u_n(x) f'(x)] \big|_a^b + \int_a^b h(x) u_n(x) w(x) dx, \right]$$

mit $h(x) = \left( (p(x) f(x))' + q(x) f(x) \right) / w(x)$.
Ist nun $u_n(a) = u_n(b) = 0$, so erhält man

$$a_n = \frac{1}{\lambda_n} [p(a) u_n'(a) f(a) - p(b) u_n'(b) f(b)] + O\left( \frac{1}{\lambda_n} \right) \qquad \text{für } n \to \infty,$$

denn:

$$
\begin{aligned}
\left| \int_a^b h(x) u_n(x) w(x) dx \right|^2 &= \left| \int_a^b h(x) w^{1/2}(x) u_n(x) w^{1/2}(x) dx \right|^2 \\
&\leq \underbrace{\int_a^b h^2(x) w(x) dx}_{\leq C, \text{ da } h^2 \text{ int}} \cdot \underbrace{\int_a^b u_n^2(x) w(x) dx}_{=1 \text{ (nach (1.10))}} \qquad \text{(nach der Schwarzschen Ungleichung)} \\
&= O(1) \quad \text{für } n \to \infty.
\end{aligned}
$$

**Bemerkung 1.5** *In [10] wird gezeigt, dass die Folge der $a_n$ schneller fällt als jede Potenz von $1/\lambda_n$ für $(n \to \infty)$. Dazu müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:*
*$p(a) = p(b) = 0$, $p/w$, $p'/w$ und $q/w$ beschränkt, alle Ableitungen von $f$ sind bzgl. $w$ quadratintegrabel.*

## 1.4 Tschebyscheff-Polynome

Im folgenden sollen nun als Basisfunktionen für die Darstellung von $u$ (siehe (1.1)) die Tschebyscheff-Polynome angenommen werden, welche die Eigenfunktionen der folgenden Sturm-Liouville Aufgabe sind:

$$\left(\sqrt{1-x^2}\,T_k'(x)\right)' + \frac{k^2}{\sqrt{1-x^2}} T_k(x) = 0.$$

Nach den Bezeichnungen des letzten Abschnittes ist:

$$
\begin{aligned}
p(x) &= \sqrt{1-x^2}, \quad w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad q(x) = 0, \quad -1 \leq x \leq 1, \\
T_k(-1) &= (-1)^k, \quad T_k(1) = 1.
\end{aligned}
$$

Die zu $T_k(x)$ gehörenden Eigenwerte sind $\lambda_k = k^2$. Für diese Funktionen sind alle Voraussetzungen der Bemerkung (1.5) erfüllt. Demnach konvergiert die Reihenentwicklung nach Tschebyscheff-Polynomen einer unendlich oft differenzierbaren Funktion schneller als jede Potenz von $1/k$ für $(k \to \infty)$.
$T_k$ ist gerade, wenn $k$ gerade ist, und $T_k$ ist ungerade, wenn $k$ ungerade ist. Fordert man noch, dass $T_k(1) = 1$, so erhält man folgende Darstellung:

$$T_k(x) = \cos(k\theta), \qquad \theta = \arccos(x).$$

Offensichtlich bilden die $\{T_k(x),\ k = 0, 1, \ldots\}$ ein System orthogonaler Polynome. Einige Eigenschaften der Tschebyscheff-Polynome sind in [7] zu finden.

Die gesuchte Funktion $u \in L^2_w(-1,1)$ wird nun mittels Tschebyscheff-Polynomen (siehe auch (1.2)) entwickelt und man erhält

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k T_k(x), \quad \hat{u}_k = \frac{2}{\pi c_k} \int_{-1}^{1} u(x) T_k(x) w(x) dx, \tag{1.11}$$

mit

$$c_k = \begin{cases} 2, & \text{wenn } k = 0 \\ 1, & \text{wenn } k \geq 1 \end{cases} \tag{1.12}$$

und einer geeigneten Gewichtsfunktion $w$. Diese ergibt sich aus Satz 1.1 im Falle der Gauß-Lobatto-Knoten (für eine andere Knotenwahl siehe [7]). Für die Wahl der Kollokationspunkte kommen mehrere Möglichkeiten in Frage. Nachfolgend sollen diese kurz mit der entsprechenden Gewichtsfunktion skizziert werden:
*Tschebyscheff-Gauß-Knoten*

$$x_j = \cos \frac{(2j+1)\pi}{2N+2}, \quad w_j = \frac{\pi}{N+1}, \quad j = 0, \dots, N \tag{1.13}$$

*Tschebyscheff-Gauß-Radau-Knoten*

$$x_j = \cos \frac{2\pi j}{2N+1}, \quad w_j = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2N+1}, & j = 0 \\ \dfrac{2\pi}{2N+2}, & 1 \leq j \leq N \end{cases} \tag{1.14}$$

*Tschebyscheff-Gauß-Lobatto-Knoten*

$$x_j = \cos \frac{\pi j}{N}, \quad w_j = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2N}, & j = 0,\ N \\ \dfrac{\pi}{N}, & 1 \leq j \leq N-1. \end{cases} \tag{1.15}$$

In der nachfolgenden Arbeit werden sowohl die Tschebyscheff-Gauß als auch die Tschebyscheff-Gauß-Lobatto-Knoten von Bedeutung sein. Im Falle der Gauß-Lobatto-Knoten ergibt sich für den Interpolationsoperator $I_N : C^0[-1,1] \to \mathbb{P}_N$ speziell:

$$I_N u(x) = \sum_{k=0}^{N} \tilde{u}_k T_k(x) \tag{1.16}$$

mit

$$\tilde{u}_k = \frac{2}{N \bar{c}_k} \sum_{j=0}^{N} \frac{1}{\bar{c}_j} \cos\left(\frac{kj\pi}{N}\right) u(x_j). \tag{1.17}$$

Die Transformation vom Physikalischen Raum (siehe (1.16) oder auch (1.4)) zum Frequenzraum (siehe (1.17) oder auch (1.5)) kann dann durch folgende Matrix beschrieben werden:

$$C_{kj} = \frac{2}{N\bar{c}_j\bar{c}_k} \cos\frac{\pi jk}{N},$$

wobei

$$\bar{c}_j = \begin{cases} 2, & j = 0, N \\ 1, & 1 \leq j \leq N-1. \end{cases}$$

Damit gilt: $\tilde{u} = Cu$.
Die umgekehrte Transformation vom Frequenzraum zum Physikalischen Raum ist gegeben durch

$$\left(C^{-1}\right)_{jk} = \cos\frac{\pi jk}{N}. \tag{1.18}$$

Beide Transformationen kann man mit Hilfe der schnellen Fourier-Transformation erhalten (der Aufwand beträgt dabei $\frac{5}{2}Nlog_2N + 4N$ Operationen; siehe dazu [7]).
Die $\gamma_k$ ergeben sich nach (1.6) und (1.13) - (1.15) wie folgt:

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \frac{\pi}{2}c_k \quad \text{für } k < N \\ \gamma_N &= \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{für Gauß und Gauß-Radau Formeln} \\ \pi & \text{für Gauß-Lobatto Formeln.} \end{cases} \end{aligned}$$

Für den Interpolationsoperator $I_N$ gelten folgende Fehlerabschätzungen (siehe auch [27]):

$$\begin{aligned} ||u - I_N u||_{L^2_w(-1,1)} &\leq C \cdot N^{-m}||u||_{H^m_w(-1,1)}, \\ ||u - I_N u||_{H^k_w(-1,1)} &\leq C \cdot N^{2k-m}||u||_{H^m_w(-1,1)}, \\ ||u - I_N u||_{L^\infty(-1,1)} &\leq C \cdot N^{\frac{1}{2}-m}||u||_{H^m_w(-1,1)}. \end{aligned}$$

Dabei ist

$$||u||_{H^m_w(-1,1)} = \left( \sum_{k=0}^{m} \int_{-1}^{1} |u_k(x)|^2 w(x)\ dx \right)^{1/2}.$$

Auch hieran ist wiederum gut zu erkennen, dass die Approximationsgüte von der Glattheit der Funktion $u$ abhängt.

## 1.5 Ableitungen

Im folgenden soll die Ableitung einer nach Tschebyscheff-Polynomen entwickelten Funktion $u$ bestimmt werden. Nach (1.11) gilt:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k T_k(x).$$

Ferner sei $u' \in L^2_w(-1,1)$ und da $T'_0(x) = 0$, ergibt sich die Ableitung von $u$ durch:

$$u'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k T'_k(x).$$

Ziel ist es, die Ableitung von $u$ in der Form

$$u'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k^{(1)} T_k(x)$$

zu erhalten. Dazu ist es nötig, die Beziehung zwischen den $\hat{u}_k$ und den $\hat{u}_k^{(1)}$ herzuleiten. Aus der Gleichung

$$2\sin(\theta)\cos(k\theta) = \sin(k+1)\theta - \sin(k-1)\theta$$

und der Definition der Tschebyscheff-Polynome erhält man:

$$2T_k(x) = \frac{1}{k+1}T'_{k+1}(x) - \frac{1}{k-1}T'_{k-1}(x), \quad k \geq 1. \tag{1.19}$$

Dies liefert:

$$\begin{aligned}
u'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k^{(1)} T_k(x) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k^{(1)} 2T_k(x) + \hat{u}_0^{(1)} T_0(x) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k^{(1)} \left(\frac{1}{k+1}T'_{k+1}(x) - \frac{1}{k-1}T'_{k-1}(x)\right) + \hat{u}_0^{(1)} T_0(x) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty} \hat{u}_{k-1}^{(1)} \frac{1}{k} T'_k(x) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_{k+1}^{(1)} \frac{1}{k} T'_k(x) + \hat{u}_0^{(1)} T_0(x) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\hat{u}_{k-1}^{(1)} - \hat{u}_{k+1}^{(1)}\right) T'_k(x)\right) - \frac{1}{2}\hat{u}_0^{(1)} T'_1(x) + \hat{u}_0^{(1)} \underbrace{T_0(x)}_{=T'_1(x)} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}\left(\hat{u}_{k-1}^{(1)} - \hat{u}_{k+1}^{(1)}\right) T'_k(x) + \frac{1}{2}\hat{u}_0^{(1)} T'_1(x) \\
\Rightarrow 2k\hat{u}_k &= c_{k-1}\hat{u}_{k-1}^{(1)} - \hat{u}_{k+1}^{(1)}, \qquad k \geq 1,
\end{aligned} \tag{1.20}$$

mit den $c_k$ wie in (1.12). Will man nun ein Polynom $N$-ten Grades differenzieren, so ist $\hat{u}_k^{(1)} = 0, \forall k \geq N$. Dann kann man Gleichung (1.20) umstellen und erhält

$$c_k \hat{u}_k^{(1)} = \hat{u}_{k+2}^{(1)} + 2(k+1)\hat{u}_{k+1}, \quad 0 \leq k \leq N-1.$$

Damit ergibt sich für die $\hat{u}_k^{(1)}$ durch rekursives Einsetzen folgende Formel:

$$\hat{u}_k^{(1)} = \frac{2}{c_k} \sum_{\substack{p=k+1 \\ p+k \ ungerade}}^{\infty} p\hat{u}_p.$$

Auf diese Weise erhält man auch die Koeffizienten der $q$-ten Ableitung, denn es gilt:

$$c_k \hat{u}_k^{(q)} = \hat{u}_{k+2}^{(q)} + 2(k+1)\hat{u}_{k+1}^{(q-1)}, \quad 0 \leq k \leq N-1.$$

Die Ableitung der Funktion $u$ der Tschebyscheff-Kollokation wird nun definiert als die Ableitung der diskreten Tschebyscheff-Entwicklung von $u$ an den gleichen Knoten, d.h.

$$\mathcal{D}_N u = (I_N u)'.$$

In Matrix-Schreibweise liefert dies

$$(\mathcal{D}_N u)(x_l) = \sum_{j=0}^{N} (D_N)_{lj} u(x_j), \quad l = 0, \ldots, N.$$

Zur Berechnung der Matrixeinträge $(D_N)_{lj}$ verwendet man das $N$-te Lagrange-Interpolationspolynom $h_j$ an den Stützstellen $x_i$, wobei gilt:

$$h_j(x_i) = \delta_{ij} \quad \forall\ j = 0, \ldots, N.$$

$h_j$ ist gegeben durch:

$$h_j(x) = \prod_{i=0, i\neq j}^{N} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{(-1)^{j+1}(1-x^2)T_N'(x)}{\bar{c}_j N^2 (x - x_j)} \quad \forall\ j = 0, \ldots, N.$$

Die Einträge $(D_N)_{lj}$ erhält man nun durch Differentiation der $h_j$. Für den Spezialfall der Gauß-Lobatto-Knoten ergibt sich:

$$(D_N)_{lj} = \begin{cases} \dfrac{\bar{c}_l}{\bar{c}_j} \dfrac{(-1)^{l+j}}{x_l - x_j}, & l \neq j \\ \dfrac{-x_j}{2(1-x_j^2)}, & 1 \leq l = j \leq N-1 \\ \dfrac{2N^2+1}{6}, & l = j = 0 \\ -\dfrac{2N^2+1}{6}, & l = j = N. \end{cases}$$

Für die erste Ableitung ist der Interpolationsfehler gegeben durch (siehe auch [27]):

$$||u' - (I_N u)'||_{L_w^2(-1,1)} \leq C \cdot N^{2-m} ||u||_{H_w^2(-1,1)}.$$

# Kapitel 2

# Splitting der Navier-Stokes-Gleichungen

## 2.1 Einführung in die Navier-Stokes-Gleichungen

Die Untersuchung des Verhaltens von Strömungen spielt in der numerischen Simulation eine wichtige Rolle. Strömungen tauchen in fast allen Lebensbereichen auf, Beispiele sind der aufsteigende Rauch einer Zigarette oder das Ein- und Auslaufen von Wasser in einer Badewanne.

Flüssigkeiten und Gase werden unter dem Oberbegriff Fluide zusammengefaßt. Während einerseits die Kräfte zwischen einem strömenden (oder ruhigen) Fluid und einem ruhenden (oder bewegten) Körper eine Rolle spielen, ist das unterschiedliche Verhalten von Fluiden andererseits auf die Wechselwirkung zwischen den Fluidpartikeln untereinander zurückzuführen. Der Grund für diese Kräfte besteht in der sogenannten Zähigkeit, der Viskosität der Fluide. Unter Zähigkeit versteht man die Eigenschaft eines Fluids, gegen Formveränderungen Widerstand zu leisten. Das bedeutet, dass die Zähigkeit eines Fluids innere Reibung verursacht, was zur Folge hat, dass ein sich bewegendes Fluid auch ohne Einfluß äußerer Kräfte zur Ruhe kommen kann. Zur Erklärung dieser Phänomene stelle man sich vor, ein Fluid würde aus einzelnen Schichten bestehen (siehe Abbildung 2.1, links).

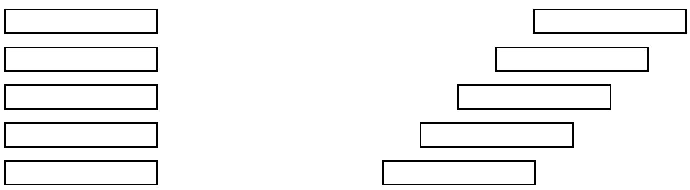

Abbildung 2.1: links: ruhendes Fluid, rechts: Fluid nach Stop der untersten Schicht

Diese Schichten bewegen sich nun gleichmäßig z.B. nach rechts fort. Stoppt man plötzlich

die unterste Schicht, so bewegen sich die überliegenden Schichten durch die *Trägheitskraft* weiter, so dass die Situation aus Abbildung 2.1 (rechts) entsteht. Dabei ist unter Trägheitskraft der Widerstand einer trägen Masse gegen Beschleunigung zu verstehen, sie entspricht also gleich Masse · Beschleunigung. Diese Kraft, die durch das Anhalten auf die unterste Schicht ausgeübt wurde, wirkt sich durch die Viskosität auf die anderen Schichten aus. In der Vorstellung von Fluidschichten spricht man von laminaren Strömungen. Vermischen sich hingegen die Teilchen zweier Schichten aufgrund von geringerer Reibung untereinander, so spricht man von turbulenten Strömungen.
Es ist klar, dass bei sehr zähen Fluiden, wie z.B. Honig, die innere Reibungskraft sehr stark ist. Die einzelnen Schichten würden somit schneller zum Stehen kommen als bei weniger zähen Fluiden, wie z.B. Wasser, da der Widerstand gegen Verformung sehr viel höher ist.
Die Bewegung eines Fluids wird also von zwei grundlegenden Eigenschaften bestimmt, der Viskosität und der Trägheitskraft. Das Verhältnis dieser beiden Eigenschaften wird durch die sogenannte Reynoldszahl beschrieben. Sie ist wie folgt definiert:

$$Re = \frac{\rho\, U L}{\mu},$$

wobei $\rho$ die Dichte, $U$ die Geschwindigkeit (z.B. Bewegungsgeschwindigkeit eines Körpers), $L$ die Länge (z.B. der Durchmesser eines Körpers) und $\mu$ die Zähigkeit ist.
Die Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen hängen somit nicht nur von den gegebenen Randbedingungen, sondern auch von der Größe der Reynoldszahl ab, da die höchste Ableitung ($\nabla^2 u$) den Faktor $\frac{1}{Re}$ enthält. Kleine Reynoldszahlen bedeuten dabei überwiegende Zähigkeitseffekte (z.B. bei Honig), während bei großen Reynoldszahlen die Zähigkeit im allgemeinen eine kleinere Rolle spielt.
Eine weitere Unterscheidung betrifft kompressible und inkompressible Fluide. Kompressibel bedeutet, dass das Fluid zusammengedrückt werden kann. Insbesondere muß somit die gleiche Masse des Fluids nicht immer das gleiche Volumen haben, denn das Volumen hängt direkt vom Druck ab. Als Beispiel für ein kompressibles Medium ist z.B. Luft zu nennen, bei dem ein und dieselbe Masse unterschiedliche Volumen ausfüllen kann.
In dieser Arbeit werden nur inkompressible Fluide betrachtet, die Fluidmasse nimmt also immer das gleiche Volumen ein, d.h. die Dichte des Fluids ist konstant.
Allgemein wird die Strömung eines Fluids in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ über der Zeit $t \in [0, t_{end}]$ durch folgende Größen charakterisiert:

- $u : \Omega \times [0, t_{end}] \to \mathbb{R}^2$ Geschwindigkeitsfeld
- $p : \Omega \times [0, t_{end}] \to \mathbb{R}$ Druck.

Bei kompressiblen Fluiden kommt die Dichte $\rho : \Omega \times [0, t_{end}] \to \mathbb{R}$ als Zustandgröße hinzu. Die Strömung kann nun durch ein System partieller Differentialgleichungen beschrieben werden, die sogenannten *Navier-Stokes-Gleichungen* für inkompressible Strömungen, gegeben durch:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{Re}\nabla^2 u + \nabla p + (u \cdot \nabla)u &= f \quad \text{in } \Omega,\ t \in [0, t_{end}] && (2.1)\\
\nabla \cdot u &= 0 \quad \text{in } \Omega,\ t \in [0, t_{end}] && (2.2)\\
u &= h \quad \text{auf } \partial\Omega,\ t \in [0, t_{end}] && (2.3)\\
u &= u_0 \quad \text{für } t = 0, \quad \text{in } \Omega. && (2.4)
\end{aligned}$$

Dabei ist $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ eine vorgeschriebene vektorwertige Funktion, die die äußeren Kräfte beschreibt, wie z.B. die Erdanziehung, denen das physikalische System unterliegt. Da durch (2.1) - (2.4) der Druck $p$ nur bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt ist, fordert man zur Normierung

$$\int_\Omega p\ dx = 0 \quad \text{zu allen Zeiten } t.$$

Im folgenden sei $\Omega = (-1, 1)^2$ (Einheitsquadrat). Das Problem in (2.1) - (2.4) besteht darin, dass Druck und Geschwindigkeit miteinander gekoppelt sind und es darum schwierig ist, das System direkt zu lösen. Ziel wird es nun sein, ein sogenanntes *Splitting* zu entwickeln, so dass man separate Gleichungen für Druck und Geschwindigkeit erhält. Zunächst soll dieses Splitting an der nicht-stationären Stokes-Gleichung durchgeführt werden. Eine Erweiterung auf den Navier-Stokes Fall wird anschliessend vorgenommen.

## 2.2 Die nicht-stationäre Stokes-Gleichung

Im folgenden wird das Splitting der nicht-stationären Stokes-Gleichung

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla^2 u + \nabla p &= f \text{ in } \Omega, && (2.5)\\
\nabla \cdot u &= 0 \text{ in } \Omega, && (2.6)\\
u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega, && (2.7)
\end{aligned}$$

beschrieben. $f$, $u$ und $p$ seien dabei wie im letzten Abschnitt definiert und es sei $\Omega = (-1, 1)^2$.

Bezeichne $\triangle t \in \mathbb{R}^+$ die Schrittweite in der Zeit $t$. Für die Zeitdiskretisierung sollen die sogenannten BDF-Verfahren (Backwards Differentiation Formulas) verwendet werden (siehe [9]). Diese Zeitdiskretisierung der Gleichungen (2.5) - (2.7) führt dann zu folgendem Schema:

$$\begin{aligned}
L^n_{t,k} u^{n+1} - \nabla^2 u^{n+1} + \nabla p^{n+1} &= f^{n+1} \text{ in } \Omega, && (2.8)\\
\nabla \cdot u^{n+1} &= 0 \text{ in } \Omega, && (2.9)\\
u^{n+1} &= 0 \text{ auf } \partial\Omega. && (2.10)
\end{aligned}$$

Der Index $n$ bezeichnet, dass die Funktion für $n = 0, 1, 2, \ldots$ an den Zeitpunkten $t_n = n\triangle t$ ausgewertet wird. Der Operator $L^n_{t,k}$ stellt das BDF-Schema für die Approximation von $\frac{\partial}{\partial t}$ dar. Der Index $k$ gibt die Ordnung des Verfahrens an. Es gilt:

$$L^n_{t,k} u^{n+1} = \frac{1}{\triangle t} \sum_{m=0}^{k} \beta_m u^{n+1-m}.$$

Für $k = 1$ liefert $L^n_{t,1}$ das Standard-Rückwärtige-Euler Verfahren. Für $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = -1$ ergibt sich:

$$L^n_{t,1} u^{n+1} = \frac{u^{n+1} - u^n}{\triangle t}.$$

Dieses Verfahren ist von 1. Ordnung in der Zeit.
Für $k = 2$ benutzt man $\beta_0 = \frac{3}{2}$, $\beta_1 = -2$, $\beta_2 = \frac{1}{2}$, was zu einem Verfahren 2. Ordnung führt:

$$L^n_{t,2} u^{n+1} = \frac{\frac{3}{2} u^{n+1} - 2u^n + \frac{1}{2} u^{n-1}}{\triangle t}.$$

Schließlich ergibt sich noch mit $\beta_0 = \frac{11}{6}$, $\beta_1 = -3$, $\beta_2 = \frac{3}{2}$, $\beta_3 = -\frac{1}{3}$ für $k = 3$ ein Verfahren 3. Ordnung. Zur Wahl dieser $\beta_i$ siehe [9].
Wie bereits erwähnt sollen nun separate Gleichungen für Geschwindigkeit und Druck hergeleitet werden. Die Grundidee dieses Verfahren entstammt [22]. Man erhält:

$$\begin{aligned} L^n_{t,k} \tilde{u}^{n+1} - \nabla^2 \tilde{u}^{n+1} + \nabla \bar{p}^{n+1}_l &= f^{n+1} \text{ in } \Omega, & (2.11) \\ \tilde{u}^{n+1} &= 0 \text{ auf } \partial\Omega & (2.12) \end{aligned}$$

und die Druckkorrektur aus

$$\begin{aligned} \beta_0 \frac{u^{n+1} - \tilde{u}^{n+1}}{\triangle t} + \nabla(p^{n+1} - \bar{p}^{n+1}_l) &= 0 \text{ in } \Omega, & (2.13) \\ \nabla \cdot u^{n+1} &= 0 \text{ in } \Omega, & (2.14) \\ u^{n+1} \cdot \nu &= 0 \text{ auf } \partial\Omega. & (2.15) \end{aligned}$$

$\nu$ ist die äußere Einheitsnormale, $\tilde{u}^{n+1}$ bezeichnet eine “Zwischengeschwindigkeit“ (intermediate velocity) und $\bar{p}^{n+1}_l$ einen Extrapolanten für den Druck, der sich aus den vorherigen $l$ Schritten ergibt, also der Ordnung $l$ ist. Offensichtlich hängt die Konvergenzordnung von der Ordnung $k$ des BDF-Schemas und von der Ordnung $l$ des Extrapolanten ab, wobei gilt:

$$\bar{p}^{n+1}_l = \sum_{m=0}^{l-1} \gamma_m p^{n-m}.$$

Dabei sind $\gamma_m$, $m = 0, \ldots, l-1$, geeignete Koeffizienten. Für $l = 1$ wählt man: $\gamma_0 = 1$; für $l = 2$ setzt man: $\gamma_0 = 2$, $\gamma_1 = -1$.
Sei nun

$$\tilde{f}^{n+1} = f^{n+1} - \frac{1}{\triangle t} \sum_{m=1}^{k} \beta_m u^{n+1-m} - \nabla \bar{p}_l^{n+1},$$

dann ist (2.11) - (2.12) äquivalent zu folgendem Helmholtz-Problem:

$$\begin{aligned} \left( -\nabla^2 + \beta_0 \frac{1}{\triangle t} I \right) \tilde{u}^{n+1} &= \tilde{f}^{n+1} \text{ in } \Omega, && (2.16) \\ \tilde{u}^{n+1} &= 0 \text{ auf } \partial\Omega. && (2.17) \end{aligned}$$

Die Gleichungen (2.13) - (2.15) lassen sich äquivalent umformen zu:

$$\begin{aligned} \beta_0 \frac{1}{\triangle t} u^{n+1} + \nabla p^{n+1} &= g^{n+1} \text{ in } \Omega, && (2.18) \\ \nabla \cdot u^{n+1} &= 0 \text{ in } \Omega, && (2.19) \\ u^{n+1} \cdot \nu &= 0 \text{ auf } \partial\Omega, && (2.20) \end{aligned}$$

wobei $g^{n+1} = \beta_0 \frac{1}{\triangle t} \tilde{u}^{n+1} + \nabla \bar{p}_l^{n+1}$.
Mit Hilfe der Gleichungen (2.16) und (2.17) kann man nun die Zwischengeschwindigkeit $\tilde{u}^{n+1}$ berechnen, aber Gleichung (2.18) zeigt deutlich, dass Druck und Geschwindigkeit immer noch gekoppelt sind. Im folgenden sollen (2.18)-(2.20) untersucht werden. Dazu wird eine Uzawa-ähnliche Entkopplungsprozedur verwendet (siehe [1]), wobei Druck und Geschwindigkeit unter Ausnutzung der Divergenzfreiheit der Geschwindigkeit voneinander getrennt werden. Wendet man die Divergenz auf die Gleichung (2.18) an, führt dies auf eine Gleichung, in der nur noch der Druck enthalten ist. Zunächst wird jedoch die pseudospektrale Diskretisierung dieses Problems angegeben.

## 2.3 Pseudospektrale Diskretisierung

Um eine pseudospektrale Diskretisierung für das Stokes-Problem anzugeben, werden zwei spektrale Ableitungsoperatoren für den Druck und für die Geschwindigkeit eingeführt. Dies wird zuerst im 1-dimensionalen Fall vorgenommen. Im 2-dimensionalen Fall erhält man die entsprechenden Operatoren durch Verwendung von Tensorprodukten (siehe Abschnitt 2.3.2).
Zu $N \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathbb{P}_N$ den Raum der Polynome vom Grad $\leq N$ und $\mathbb{P}_N^0$ bezeichne den Raum der Polynome aus $\mathbb{P}_N$, die zusätzlich die homogenen Dirichlet Randbedingungen in $\Omega$ erfüllen. Die Geschwindigkeit $u$ wird nun durch ein Polynom aus $\mathbb{P}_N^0$ und der Druck $p$ durch ein Polynom aus $\mathbb{P}_{N-1}$ approximiert. Dazu sollen “staggered grids“

verwendet werden, und zwar wird die Geschwindigkeit an den Gauß-Lobatto-Knoten $(x_i, y_j) = \left(\cos\frac{i\pi}{N}, \cos\frac{j\pi}{N}\right)$, $i, j = 0, \ldots, N$, betrachtet, während der Druck an den Gauß-Knoten $(z_i, w_j) = \left(\cos\frac{(2i-1)\pi}{2N}, \cos\frac{(2j-1)\pi}{2N}\right)$, $i, j = 1, \ldots, N$, ausgewertet wird. Die Lage der Knotenpunkte ist für $N = 8$ in Abbildung 2.2 dargestellt.

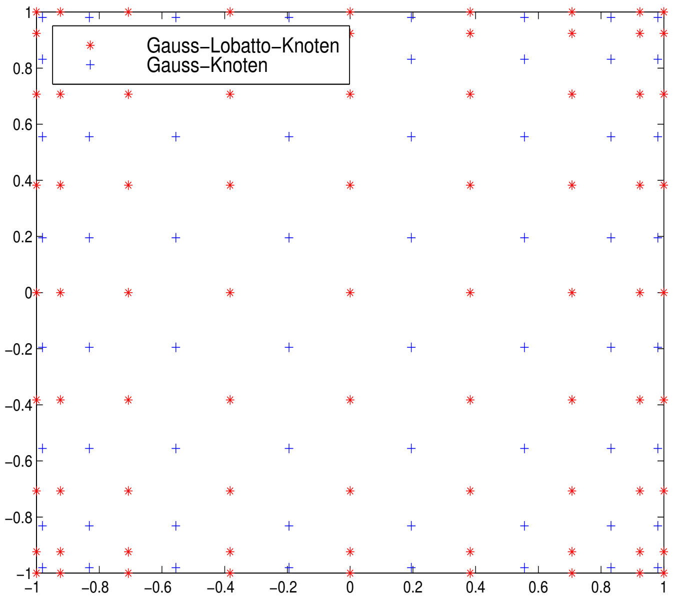


Abbildung 2.2: Gauß-Lobatto und Gauß-Knoten für $N = 8$

Die Nummerierung der Knoten erfolgt dabei in lexikographischer Reihenfolge, d.h. die Knoten werden zeilenweise durchnummeriert.
Im folgenden sei $N$ gerade; für $N$ ungerade kann man analog vorgehen.

### 2.3.1 Der 1-dimensionale Fall

Im 1-dimensionalen Fall erhält man nach Elimination der Randbedingungen (vorausgesetzt waren Dirichletrandbedingungen, d.h. $u = 0$ auf $\partial\Omega$):

$$u'(x_j) \cong (\hat{D}_u^0 u)_j, \qquad j = 0, \ldots, N,$$

wobei $\hat{D}_u^0 \in \mathbb{R}^{N+1,N-1}$, $x_j = \cos\frac{j\pi}{N}$, $j = 0, \ldots, N$. $\hat{D}_u^0$ ist dabei der 1-dimensionale spektrale Ableitungsoperator, der die Ableitung der Geschwindigkeit an den inneren Gauß-Lobatto-Knoten liefert (siehe [27]). Die erste Ableitung von $u$ wird allerdings nicht an den Gauß-Lobatto-Knoten sondern an den Gauß-Knoten benötigt, wie später noch deutlich wird.

Zur Interpolation zwischen den Gauß-Lobatto-Knoten und den Gauß-Knoten sei $T \in \mathbb{R}^{N,N+1}$ die Interpolationsmatrix. Man erhält:

$$u'(z_j) \cong (T\hat{D}_u^0 u)_j, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Bezeichne nun $D^0 = T\hat{D}_u^0 \in \mathbb{R}^{N,N-1}$ diesen Ableitungsoperator erster Ordnung.
Die zweite Ableitung betrachtet man an den Gauß-Lobatto-Knoten (siehe (2.5)). Es ergibt sich:

$$u''(x_j) \cong ((D_u^2)^0 u)_j, \quad j = 1, \ldots, N-1,$$

wobei $(D_u^2)^0 \in \mathbb{R}^{N-1,N-1}$. $D_u^2$ erhält man aus zweimaliger Anwendung von $D_u$, wobei $D_u \in \mathbb{R}^{N+1,N+1}$ der eindimensionale Ableitungsoperator auf allen Gauß-Lobatto-Knoten ist. Berücksichtigt man nun wiederum die Dirichlet-Randbedingungen, so erhält man $(D_u^2)^0$.
Nun soll noch der Ableitungsoperator $D$ für den Druck bestimmt werden. Hier muss, im Gegensatz zur Geschwindigkeit, darauf geachtet werden, dass die Ableitung, die an den Gauß-Knoten bekannt ist, auf die Gauß-Lobatto-Knoten transformiert wird. Es ist:

$$p'(x_j) \cong (Dp)_j, \quad j = 1, \ldots, N-1,$$

wobei $D \in \mathbb{R}^{N-1,N}$ gegeben ist durch:

$$D = T_{p_1}\hat{D}_p T_{p_2}.$$

$T_{p_2} \in \mathbb{R}^{N,N}$ ist die Transformation auf den Polynomraum $\mathbb{P}_{N-1}$. $\hat{D}_p \in \mathbb{R}^{N,N}$ führt die Differentiation im Koeffizientenraum durch und $T_{p_1} \in \mathbb{R}^{N-1,N}$ transformiert direkt auf die Gauß-Lobatto-Knoten zurück in den physikalischen Raum.
$\hat{D}_p = (d_{i,j})_{i,j=1,\ldots,N}$ ist explizit gegeben durch:

$$d_{i,j} = \begin{cases} \frac{2(j-1)}{c_i}, & j = i+1, i+3, \ldots, N-1 \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$c_i = \begin{cases} 2, & i = 1 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases} .$$

Zur Berechnung von $T_{p_1}$ und $T_{p_2}$ siehe [27, S. 107].

### 2.3.2 Der 2-dimensionale Fall

Die Ableitungsoperatoren für den 2-dimensionalen Fall ergeben sich durch Tensorproduktbildung.

**Definition 2.1** *Sei* $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{M_1,N_1}$, $B = (b_{i,j}) \in \mathbb{R}^{M_2,N_2}$.

$$A \otimes B \;=\; (Ab_{i,j}) \in \mathbb{R}^{M_1 \cdot M_2, N_1 \cdot N_2}, \quad i = 1, \ldots, M_2, \quad j = 1, \ldots, N_2$$

*heißt das Tensorprodukt von A und B.*

Angewandt auf die partiellen Ableitungsoperatoren für die Geschwindigkeit ergibt sich:

$$\frac{\partial}{\partial x}: \; D_x^0 = D^0 \otimes I, \quad \frac{\partial}{\partial y}: \; D_y^0 = I \otimes D^0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}: \; D_{xx}^0 = (D_u^2)^0 \otimes I, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}: \; D_{yy}^0 = I \otimes (D_u^2)^0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}: \; D_\triangle^0 = D_{xx}^0 + D_{yy}^0,$$

wobei $I$ die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^N$ bezeichnet. Also ist $D_x^0, D_y^0 \in \mathbb{R}^{N^2,(N-1)\cdot N}$.
Für den Druck ergibt sich analog:

$$\frac{\partial}{\partial x}: \; D_x = D \otimes I, \quad \frac{\partial}{\partial y}: \; D_y = I \otimes D.$$

Folglich gilt: $D_x, D_y \in \mathbb{R}^{(N-1)\cdot N, N^2}$. Diese Ableitungsoperatoren werden nur zur Berechnung des Pseudo-Laplace-Operators verwendet. Durch die Tensorproduktbildung mit der Einheitsmatrix erreicht man, dass nur bzgl. einer Variablen von Gauß- auf Gauß-Lobatto-Knoten transformiert wird (bzw. umgekehrt), bzgl. der anderen Variablen aber immer noch die ursprünglichen Werte beibehalten werden.
Um die pseudospektrale Diskretisierung des Problems anzugeben, benötigt man allerdings Operatoren, die in beiden Variablen die Transformation durchführen. Diese werden im folgenden definiert:

$$\frac{\partial}{\partial x_G}: \; D_{x,G}^0 = D^0 \otimes T, \quad \frac{\partial}{\partial y_G}: \; D_{y,G}^0 = T \otimes D^0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{GL}}: \; D_{x,GL} = D \otimes (T_{p_1} \cdot T_{p_2}), \quad \frac{\partial}{\partial y_{GL}}: \; D_{y,GL} = (T_{p_1} \cdot T_{p_2}) \otimes D.$$

Der Index G gibt an, dass bzgl. beider Variablen die Transformation auf die Gauß-Knoten vorgenommen wird. Analog verwendet man den Index GL für die Transformation auf die Gauß-Lobatto-Knoten. Für $D_\triangle^0$ ist keine neue Definition notwendig. Hier betrachtet man die zweite Ableitung von $u$ wieder auf den Gauß-Lobatto-Knoten.

Mit diesen Bezeichnungen kann man nun die pseudospektrale Diskretisierung des Stokes-Problems angeben. Aus (2.18) - (2.20) wird dann:

$$\begin{aligned}
\left(-D^0_\triangle + \beta_0 \frac{1}{\triangle t} I\right) u_1^{n+1} + D_{x,GL} p^{n+1} &= \hat{f}_1^{n+1} \text{ in } \Omega, && (2.21)\\
\left(-D^0_\triangle + \beta_0 \frac{1}{\triangle t} I\right) u_2^{n+1} + D_{y,GL} p^{n+1} &= \hat{f}_2^{n+1} \text{ in } \Omega, && (2.22)\\
D^0_{x,G} u_1^{n+1} + D^0_{y,G} u_2^{n+1} &= 0 \quad \text{ in } \Omega, && (2.23)\\
u_1^{n+1} = u_2^{n+1} &= 0 \quad \text{ auf } \partial\Omega, && (2.24)
\end{aligned}$$

wobei

$$\hat{f}_i^{n+1} = f_i^{n+1} - \frac{1}{\triangle t} \sum_{m=1}^{k} \beta_m u_i^{n+1-m} \quad (i = 1, 2).$$

(2.21), (2.22) und (2.24) sollen dabei an den Gauß-Lobatto-Knoten erfüllt sein, (2.23) an den Gauß-Knoten.
Nun ist ein Helmholtz-Problem für die Zwischengeschwindigkeit zu lösen (siehe (2.16) - (2.20)):

$$\begin{aligned}
\left(-D^0_\triangle + \beta_0 \frac{1}{\triangle t} I\right) \tilde{u}_i^{n+1} &= \tilde{f}_i^{n+1} \text{ in } \Omega, && (2.25)\\
\tilde{u}_i^{n+1} &= 0 \text{ auf } \partial\Omega, \quad i = 1, 2, && (2.26)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\beta_0 \frac{1}{\triangle t} u_1^{n+1} + D_{x,GL} p^{n+1} &= g_1^{n+1} \text{ in } \Omega, && (2.27)\\
\beta_0 \frac{1}{\triangle t} u_2^{n+1} + D_{y,GL} p^{n+1} &= g_2^{n+1} \text{ in } \Omega, && (2.28)\\
D^0_{x,G} u_1^{n+1} + D^0_{y,G} u_2^{n+1} &= 0 \text{ in } \Omega, && (2.29)\\
u_1^{n+1} = u_2^{n+1} &= 0 \text{ auf } \partial\Omega. && (2.30)
\end{aligned}$$

Wendet man nun den Divergenz-Operator auf die Gleichungen (2.27) und (2.28) an und berücksichtigt man die Divergenzfreiheit, so ergibt sich:

$$\left(D^0_{x,G} D_{x,GL} + D^0_{y,G} D_{y,GL}\right) p^{n+1} = D^0_{x,G} g_1^{n+1} + D^0_{y,G} g_2^{n+1}. \quad (2.31)$$

Geschwindigkeit und Druck sind demnach voneinander entkoppelt. Zuerst kann man mit Gleichung (2.25) und (2.26) die Zwischengeschwindigkeit bestimmen, dann ist der Druck mittels Gleichung (2.31) berechenbar. Schließlich erhält man die Geschwindigkeit mit den Gleichungen (2.27) - (2.30).

An dieser Stelle zeigt sich die Möglichkeit der Parallelisierung. (2.25) und (2.26) sind für jede Geschwindigkeitskomponente parallel berechenbar; es ist keine Kommunikation zwischen diesen Prozessen nötig. Ebenso verhält es sich mit den Gleichungen (2.27) und (2.28). Es ist also zu erwarten, dass durch Parallelisierung der Aufwand ca. halbiert werden kann.
Im folgenden sei $B \in \mathbb{R}^{N^2,N^2}$ gegeben durch:

$$\begin{aligned} B &= D^0_{x,G} D_{x,GL} + D^0_{y,G} D_{y,Gl} \\ &= D^0_x D_x + D^0_y D_y. \end{aligned}$$

Man kann leicht erkennen, dass für die Berechnung des Pseudo-Laplace-Operators $B$ beide Möglichkeiten zulässig sind. Bei der ersten Darstellung gelangt man zuerst von den Gauß-Knoten auf die Gauß-Lobatto-Knoten (durch Anwendung von $D_{x,GL}$ bzw. $D_{y,GL}$). Dann wird durch $D^0_{x,G}$ und $D^0_{y,G}$ wieder auf die Gauß-Knoten zurücktransformiert. Zur Berechnung des Pseudo-Laplace-Operators ist dieser Aufwand nicht notwendig, deshalb wird im folgenden zur Bestimmung der Eigenwerte des Pseudo-Laplace-Operators (siehe Kapitel 3) die zweite Darstellung verwendet.

## 2.4 Übertragung auf die Navier-Stokes-Gleichungen

Das in 2.2 erarbeitete Splitting und die in 2.3 vorgestellte Diskretisierung sollen nun auf die Navier-Stokes-Gleichungen (2.1) - (2.4) übertragen werden. Dabei stellt sich die Frage, wie der konvektive Term $(u \cdot \nabla)u$ zu behandeln ist. Dieser spielte bei der nicht-stationären Stokes-Gleichung (siehe (2.5)) keine Rolle. Im wesentlichen stehen zwei Methoden zur Verfügung. Der konvektive Term kann explizit oder implizit behandelt werden. Während bei expliziten Methoden für große Reynoldszahlen eine sehr kleine Zeitschrittweite notwendig ist, erhofft man sich, dass implizite Verfahren eine größere Zeitschrittweite zulassen. Allerdings ist zu erwarten, dass der Rechenaufwand bei impliziten Verfahren weitaus höher ist. Im folgenden sollen diese beide Methoden verglichen werden. Für die implizite Behandlung des konvektiven Terms werden zwei Methoden vorgestellt, wobei versucht wird, den Rechenaufwand zu reduzieren.

### 2.4.1 Explizite Behandlung des konvektiven Anteils

Eine Möglichkeit besteht in der expliziten Behandlung des konvektiven Terms. Dazu ist eine geeignete Approximation zu finden, d.h. man sucht eine Näherung aus den letzten $l$ Zeitschritten und setzt:

$$(u_e^{n+1} \cdot \nabla) u_e^{n+1} = \sum_{m=0}^{l-1} \alpha_m \left( u^{n-l+1+m} \cdot \nabla \right) u^{n-l+1+m}. \tag{2.32}$$

Analog zum Abschnitt 2.2 führt die Zeitdiskretisierung der Gleichungen (2.1) - (2.3) dann zu folgendem Schema:

$$
\begin{aligned}
L_{t,k}^n u^{n+1} - \frac{1}{Re}\nabla^2 u^{n+1} + \nabla p^{n+1} + (u_e^{n+1}\cdot\nabla)u_e^{n+1} &= f^{n+1} \text{ in } \Omega, && (2.33)\\
\nabla\cdot u^{n+1} &= 0 \text{ in } \Omega, && (2.34)\\
u^{n+1} &= h^{n+1} \text{ auf } \partial\Omega. && (2.35)
\end{aligned}
$$

Nun kann man den konvektiven Anteil auf die rechte Seite von (2.33) bringen und erhält somit Gleichungen der Art (2.8) - (2.10), für die das Splitting bereits in den Abschnitten 2.2 und 2.3 erläutert wurde.
Die $\alpha_m$ müssen noch geeignet gewählt werden. Die Approximationsordnung von (2.32) wird entsprechend der Ordnung der Zeitdiskretisierung von $u$ bestimmt. Hat man in der Zeit ein Verfahren zweiter Ordnung, so bedeutet dies für die Wahl der $\alpha_m$ (siehe dazu auch [9]):

$$\alpha_0 = -1, \quad \alpha_1 = 2.$$

Ist die Zeitdiskretisierung von 3. Ordnung, so ist

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = -3, \quad \alpha_2 = 3.$$

Die numerischen Resultate aus [12] lassen auf ein Verfahren zweiter Ordnung für die Geschwindigkeit und auf ein Verfahren erster Ordnung für den Druck in der Zeit schließen. Im folgenden wird also angenommen, dass die Ordnung der Zeitdiskretisierung und der Approximation des konvektiven Terms zwei, die Extrapolationsordnung des Druckes $p$ eins ist.
Für die Navier-Stokes-Gleichungen bedeutet das nun, dass nach Setzen der entsprechenden $\alpha_i$ folgende Gleichungssysteme zu lösen sind:

$$
\begin{aligned}
\left(-\frac{1}{Re}D_\triangle^0 + \beta_0\frac{1}{\triangle t}I\right)\tilde{u}_i^{n+1} &= \tilde{f}_i^{n+1} - (u_e^{n+1}\cdot\nabla)u_e^{n+1} \text{ in } \Omega, && (2.36)\\
\tilde{u}_i^{n+1} &= h_i^{n+1} \text{ auf } \partial\Omega, \quad i=1,2, && (2.37)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\beta_0\frac{1}{\triangle t}u_1^{n+1} + D_{x,GL}p^{n+1} &= g_1^{n+1} \text{ in } \Omega, && (2.38)\\
\beta_0\frac{1}{\triangle t}u_2^{n+1} + D_{y,GL}p^{n+1} &= g_2^{n+1} \text{ in } \Omega, && (2.39)\\
D_{x,G}^0 u_1^{n+1} + D_{y,G}^0 u_2^{n+1} &= 0 \text{ in } \Omega, && (2.40)\\
u_1^{n+1} = h_1^{n+1}, \quad u_2^{n+1} &= h_2^{n+1} \text{ auf } \partial\Omega, && (2.41)
\end{aligned}
$$

$$\left(D_{x,G}^0 D_{x,GL} + D_{y,G}^0 D_{y,GL}\right)p^{n+1} = D_{x,G}^0 g_1^{n+1} + D_{y,G}^0 g_2^{n+1}. \qquad (2.42)$$

### 2.4.2 Implizite Behandlung des konvektiven Anteils mit dem Newton-Verfahren

Da bei der expliziten Behandlung des konvektiven Anteils die Zeitschrittweite bei höheren Reynoldszahlen sehr klein gewählt werden muß, stellt sich die Frage, ob stattdessen eine implizite Methode zu besserem Erfolg führen würde. Um den konvektiven Term implizit zu behandeln, wird (2.36) ersetzt durch

$$\left(-\frac{1}{Re}D^0_\triangle + \beta_0\frac{1}{\triangle t}I\right)\tilde{u}_i^{n+1} \;=\; \tilde{f}_i^{n+1} - \left(\tilde{u}^{n+1}\cdot\nabla\right)\tilde{u}^{n+1}. \tag{2.43}$$

Diese Gleichungen sollen nun mit dem Newton-Verfahren (siehe [20]) gelöst werden. Zu betrachten ist also

$$\underbrace{\left(-\frac{1}{Re}D^0_\triangle + \beta_0\frac{1}{\triangle t}I\right)\tilde{u}_i^{n+1} + \left(\tilde{u}^{n+1}\cdot\nabla\right)\tilde{u}^{n+1} - \tilde{f}_i^{n+1}}_{F(\tilde{u}^{n+1})} \;=\; 0. \tag{2.44}$$

Zu lösen ist nun noch das Nullstellenproblem (2.44). Bezeichnet $\tilde{u}_{i,0}^{n+1}$ eine Startnäherung der Nullstelle (0.ter Iterationsschritt), so lautet der $m$-te Iterationsschritt des Newtonverfahrens:
Löse

$$F'(\tilde{u}_m^{n+1})v_m = -F(\tilde{u}_m^{n+1}), \tag{2.45}$$

mit

$$\begin{aligned}
v_m &= (v_{1,m}, v_{2,m})^t,\\
\tilde{u}_{1,m+1}^{n+1} &= \tilde{u}_{1,m}^{n+1} + v_{1,m},\\
\tilde{u}_{2,m+1}^{n+1} &= \tilde{u}_{2,m}^{n+1} + v_{2,m}.
\end{aligned}$$

$F'(\tilde{u}_m^{n+1})$ bezeichnet dabei die Fréchet-Ableitung. Es ist

$$\begin{aligned}
F'(\tilde{u})v &= \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\left[F(\tilde{u}+sv) - F(\tilde{u})\right]\\
&= \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\Bigg[\left(-\frac{1}{Re}D^0_\triangle + \beta_0\frac{1}{\triangle t}I\right)(\tilde{u}+sv) + \left[(\tilde{u}+sv)\cdot\nabla(\tilde{u}+sv)\right]\\
&\qquad - \left(-\frac{1}{Re}D^0_\triangle + \beta_0\frac{1}{\triangle t}I\right)\tilde{u} - (\tilde{u}\cdot\nabla)\tilde{u}\Bigg]\\
&= \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\Bigg[s\cdot\left(-\frac{1}{Re}D^0_\triangle + \beta_0\frac{1}{\triangle t}I\right)v + (\tilde{u}\cdot\nabla)\tilde{u} + s\cdot(\tilde{u}\cdot\nabla)v + s\cdot(v\cdot\nabla)\tilde{u}\\
&\qquad + s^2(v\cdot\nabla)v - (\tilde{u}\cdot\nabla)\tilde{u}\Bigg]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{s\to 0}\left[\left(-\frac{1}{Re}D^0_\triangle + \beta_0\frac{1}{\triangle t}I\right)v + (\tilde{u}\cdot\nabla)v + (v\cdot\nabla)\tilde{u} + s\cdot(v\cdot\nabla)v\right] \\
&= \left(-\frac{1}{Re}D^0_\triangle + \beta_0\frac{1}{\triangle t}I\right)v + (\tilde{u}\cdot\nabla)v + (v\cdot\nabla)\tilde{u}.
\end{aligned}
$$

Dabei ist

$$
(\tilde{u}\cdot\nabla)v + (v\cdot\nabla)\tilde{u} = \begin{pmatrix} \tilde{u}_1\frac{\partial}{\partial x}v_1 + \tilde{u}_2\frac{\partial}{\partial y}v_1 + v_1\frac{\partial}{\partial x}\tilde{u}_1 + v_2\frac{\partial}{\partial y}\tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_1\frac{\partial}{\partial x}v_2 + \tilde{u}_2\frac{\partial}{\partial y}v_2 + v_1\frac{\partial}{\partial x}\tilde{u}_2 + v_2\frac{\partial}{\partial y}\tilde{u}_2 \end{pmatrix}.
$$

Bezeichnet man mit

$$
\begin{aligned}
A_{11} &:= \left(-\frac{1}{Re}D^0_\triangle + \beta_0\frac{1}{\triangle t}I + \tilde{u}^{n+1}_{1,m}\frac{\partial}{\partial x} + \tilde{u}^{n+1}_{2,m}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\tilde{u}^{n+1}_{1,m}I\right), \\
A_{12} &:= \frac{\partial}{\partial y}\tilde{u}^{n+1}_{1,m}I, \\
A_{21} &:= \frac{\partial}{\partial x}\tilde{u}^{n+1}_{2,m}I, \\
A_{22} &:= \left(-\frac{1}{Re}D^0_\triangle + \beta_0\frac{1}{\triangle t}I + \tilde{u}^{n+1}_{1,m}\frac{\partial}{\partial x} + \tilde{u}^{n+1}_{2,m}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\tilde{u}^{n+1}_{2,m}I\right),
\end{aligned}
$$

so hat man noch folgendes System zu lösen:

$$
\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,m} \\ v_{2,m} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}, \tag{2.46}
$$

wobei

$$
\begin{aligned}
r_1 &:= \left(-\frac{1}{Re}D^0_\triangle + \beta_0\frac{1}{\triangle t}I\right)\tilde{u}^{n+1}_{1,m} + \tilde{u}^{n+1}_{1,m}\frac{\partial}{\partial x}\tilde{u}^{n+1}_{1,m} + \tilde{u}^{n+1}_{2,m}\frac{\partial}{\partial y}\tilde{u}^{n+1}_{1,m} - \tilde{f}^{n+1}_1, \\
r_2 &:= \left(-\frac{1}{Re}D^0_\triangle + \beta_0\frac{1}{\triangle t}I\right)\tilde{u}^{n+1}_{2,m} + \tilde{u}^{n+1}_{1,m}\frac{\partial}{\partial x}\tilde{u}^{n+1}_{2,m} + \tilde{u}^{n+1}_{2,m}\frac{\partial}{\partial y}\tilde{u}^{n+1}_{2,m} - \tilde{f}^{n+1}_2.
\end{aligned}
$$

Es stellt sich nun noch die Frage nach einem geeigneten Abbruchkriterium. Hier wurde das Newton-Verfahren solange durchgeführt, bis $|F(\tilde{u}^{n+1}_m)| < \epsilon$.

### 2.4.3 Implizite Behandlung des konvektiven Anteils mit einer Picard-Iteration

Wie Tabelle 2.1 noch zeigen wird, ist der Rechenaufwand bei der impliziten Behandlung des konvektiven Anteils mit dem Newton-Verfahren sehr groß. Der Grund liegt klar auf der Hand: In (2.46) ist ein Gleichungssystem der Größe $(2*(N-1)^2)\times(2*(N-1)^2)$ zu lösen. Bei großen Reynoldszahlen, wo also der konvektive Anteil überwiegt und einer besonderen Betrachtung bedarf, muss auch das $N$, also die Anzahl der Kollokationspunkte,

groß gewählt werden. Dies hat zur Folge, dass das Gleichungssystem in (2.46) sehr groß wird und der Rechenaufwand somit stark wächst. Daher besteht die Idee, das große Gleichungssystem in zwei kleine Gleichungssysteme aufzuteilen. Das entstehende Verfahren ist eine Art Picard-Iteration.
Dazu startet man wieder mit der Gleichung (siehe (2.44))

$$\left(-\frac{1}{Re}D^0_\triangle + \beta_0\frac{1}{\triangle t}I\right)\tilde{u}_i^{n+1} + \left(\tilde{u}^{n+1}\cdot\nabla\right)\tilde{u}^{n+1} = \tilde{f}_i^{n+1}. \tag{2.47}$$

Dabei ist

$$\left(\tilde{u}^{n+1}\cdot\nabla\right)\tilde{u}^{n+1} = \begin{pmatrix} \tilde{u}_1^{n+1}\frac{\partial}{\partial x}\tilde{u}_1^{n+1} + \tilde{u}_2^{n+1}\frac{\partial}{\partial y}\tilde{u}_1^{n+1} \\ \tilde{u}_1^{n+1}\frac{\partial}{\partial x}\tilde{u}_2^{n+1} + \tilde{u}_2^{n+1}\frac{\partial}{\partial y}\tilde{u}_2^{n+1} \end{pmatrix}. \tag{2.48}$$

(2.47) soll wiederum iterativ gelöst werden und es bezeichne $(\tilde{u}_{1,0}^{n+1}, \tilde{u}_{2,0}^{n+1})$ eine Startnäherung. Somit lautet der $m$-te Iterationsschritt der Picard-Iteration:
Löse

$$\left(-\frac{1}{Re}D^0_\triangle + \beta_0\frac{1}{\triangle t}I + \tilde{u}_{1,m}^{n+1}\frac{\partial}{\partial x} + \tilde{u}_{2,m}^{n+1}\frac{\partial}{\partial y}\right)\tilde{u}_{1,m+1}^{n+1} = \tilde{f}_1^{n+1} \tag{2.49}$$

$$\left(-\frac{1}{Re}D^0_\triangle + \beta_0\frac{1}{\triangle t}I + \tilde{u}_{1,m}^{n+1}\frac{\partial}{\partial x} + \tilde{u}_{2,m}^{n+1}\frac{\partial}{\partial y}\right)\tilde{u}_{2,m+1}^{n+1} = \tilde{f}_2^{n+1}. \tag{2.50}$$

Als Startnäherung für $(\tilde{u}_{1,0}^{n+1}, \tilde{u}_{2,0}^{n+1})$ nimmt man $(u_1^n, u_2^n)$, also die Lösung der Geschwindigkeit zum vorherigen Zeitpunkt. Zu beachten ist, dass zuerst (2.49) gelöst wird. Dann wird $\tilde{u}_{1,m}^{n+1}$ direkt auf den aktuellen Wert gesetzt und danach erst (2.50) gelöst. Das hat zur Folge, dass der Fehler in $\tilde{u}_2^{n+1}$ kleiner ist als der Fehler in $\tilde{u}_1^{n+1}$. Somit reicht es, eine Abbruchbedingung zu finden, die nur von $\tilde{u}_1^{n+1}$ abhängt. In dieser Arbeit wurde die Picard-Iteration so lange durchgeführt, bis $|\tilde{u}_{1,m+1}^{n+1} - \tilde{u}_{1,m}^{n+1}| < \epsilon$.

### 2.4.4 Vergleich von expliziter und impliziter Behandlung des konvektiven Terms

Wie schon erwähnt ist der große Vorteil bei der impliziten Behandlung des konvektiven Anteils, dass zu gegebener Reynoldszahl $Re$ deutlich höhere Zeitschrittweiten gewählt werden können. Tabelle 2.1 bestätigt diese Vermutung am Driven-Cavity-Problem (siehe Abschnitt 3.4).
Anhand Tabelle 2.2 und 2.3 zeigt sich deutlich, dass die Behandlung des konvektiven Terms mit der expliziten Methode den kleinsten Rechenaufwand hat. Die Zeitschrittweite ist zwar recht klein zu wählen, aber eine große Zeitschrittweite ist auch nicht sehr sinnvoll. Es handelt sich schließlich um ein zeitabhängiges Problem, bei dem man die zeitliche Entwicklung betrachten will. Daher sind kleinere Zeitschrittweiten nötig. Weiterhin ist zu bemerken, dass der Rechenaufwand mit der Picard-Iteration ca. die Hälfte des

| Verfahren | max. $\triangle t$ für $Re = 800$ | max. $\triangle t$ für $Re = 1000$ |
|---|---|---|
| explizit | 0.091 | 0.087 |
| implizit (Picard) | 0.973 | 0.847 |
| implizit (Newton) | 0.973 | 0.847 |

Tabelle 2.1: maximale Zeitschrittweiten für Konvergenz des Verfahrens für $N = 12$ (bis auf $\pm 0.001$) und $\epsilon = 2 \cdot 10^{-6}$

Rechenaufwands des Newton-Verfahrens beträgt, obwohl die maximale Zeitschrittweite bei beiden gleich groß ist. Daher ist die Picard-Iteration dem Newton-Verfahren deutlich vorzuziehen. Somit sind also verschiedene Möglichkeiten gegeben, Probleme mit größeren Reynoldszahlen lösen zu können. Einsichtig ist auch, dass implizite Verfahren bei größeren Reynoldszahlen immer wichtiger werden. Denn es ist durchaus möglich, dass man sehr große Reynoldszahlen mit expliziten Verfahren nicht mehr in den Griff bekommen kann, während implizite Verfahren noch sehr gut funktionieren.
Eine weitere Variante besteht darin, erst einige Schritte mit einem expliziten Verfahren durchzuführen, und dann zu einem impliziten Verfahren zu wechseln. Somit hat man bereits eine gute Startnäherung gefunden.
Interessant sind auch noch die Zahl der Newton- bzw. Picard-Iterationsschritte. Tabelle 2.2 zeigt dies für die beiden hier vorgestellten impliziten Verfahren. Die dritte Spalte (#It.Schritt Ende) zeigt die Anzahl der Iterationsschritte, die noch benötigt werden, wenn die stationäre Lösung fast erreicht ist (siehe dazu auch (3.15)). Es ist zu erkennen, dass beim Newton-Verfahren ebenso viele Iterationsschritte benötigt werden wie bei der Picard-Iteration.

| Verfahren | # It.Schritte Beginn für $Re = 100$ | # It.Schritte Ende für $Re = 100$ | durchschn. Rechenzeit pro Zeitschritt |
|---|---|---|---|
| explizit | – | – | 0.204279 |
| implizit (Picard) | 5 | 1 | 0.754719 |
| implizit (Newton) | 5 | 1 | 1.578873 |

Tabelle 2.2: Anzahl Iterationsschritte der impliziten Verfahren für $Re = 100$, $N = 12$, $\triangle t = 0.1$ und $\epsilon = 2 \cdot 10^{-6}$ sowie Rechenzeiten

Es ist also von Problem zu Problem wieder neu zu entscheiden, ob ein explizites oder implizites Verfahren eingesetzt werden soll. Klar ist alledings auch, dass im Falle der impliziten Behandlung die Picard-Iteration vorgezogen werden sollte.

| Verfahren | # It.Schritte Beginn für $Re = 1000$ | # It.Schritte Ende für $Re = 1000$ | durchschn. Rechenzeit pro Zeitschritt |
|---|---|---|---|
| explizit | – | – | 3.22370 |
| implizit (Picard) | 4 | 2 | 10.41262 |
| implizit (Newton) | 4 | 2 | 29.58815 |

Tabelle 2.3: Anzahl Iterationsschritte der impliziten Verfahren für $Re = 1000$, $N = 24$, $\triangle t = 0.01$ und $\epsilon = 2 \cdot 10^{-4}$ sowie Rechenzeiten

# Kapitel 3

# Pseudo-Laplace-Operator und Driven-Cavity-Problem

Im nachfolgenden Abschnitt werden die Eigenschaften des Pseudo-Laplace-Operators aufgeführt sowie numerische Resultate für das Driven-Cavity Problem geliefert.

## 3.1 Eigenschaften des Pseudo-Laplace-Operators

Im folgenden sollen die Eigenwerte des Pseudo-Laplace-Operators

$$B = D_x^0 D_x + D_y^0 D_y = A \otimes I + I \otimes A$$

untersucht werden.

$$A = D^0 D$$

bezeichnet den 1-dimensionalen Pseudo-Laplace-Operator. Zunächst führt man folgende Definition ein:

**Definition 3.1**

$$\begin{aligned} \lambda_{min} &= \min \{ |\lambda| \mid \lambda \neq 0 \; \textit{Eigenwert von } A \} \\ \lambda_{max} &= \max \{ |\lambda| \mid \lambda \neq 0 \; \textit{Eigenwert von } A \} . \end{aligned}$$

In Tabelle 3.1 sind der minimale und der maximale Eigenwerte von $A$ für $N = 4, 8, \ldots, 128$ aufgeführt.
Numerisch zeigt sich, dass minimaler und maximaler Eigenwert von $A$ mit den entsprechenden Eigenwerten von $(D^2)^0$ übereinstimmen.

$\lambda_{min}$ und $\lambda_{max}$ von $A$

| $N$ | $\lambda_{min}$ | $\lambda_{max}$ | $\lambda_{max}/N^4$ |
|---|---|---|---|
| 4 | 2.4560 | $1.9544 \cdot 10^1$ | 0.0760 |
| 8 | 2.4674 | $2.1437 \cdot 10^2$ | 0.0523 |
| 16 | 2.4674 | $3.1748 \cdot 10^3$ | 0.0484 |
| 32 | 2.4674 | $4.9939 \cdot 10^4$ | 0.0476 |
| 64 | 2.4674 | $7.9573 \cdot 10^5$ | 0.0474 |
| 128 | 2.4674 | $1.2719 \cdot 10^7$ | 0.0474 |

Tabelle 3.1: Eigenwerte des 1-dim. Pseudo-Laplace-Operators

$\lambda_{min}$ und $\lambda_{max}$ von $B$

| $N$ | $\lambda_{min}$ | $\lambda_{max}$ | $\lambda_{max}/N^4$ |
|---|---|---|---|
| 4 | 2.4560 | $3.9088 \cdot 10^1$ | 0.1527 |
| 8 | 2.4674 | $4.2874 \cdot 10^2$ | 0.1047 |
| 16 | 2.4674 | $6.3496 \cdot 10^3$ | 0.0969 |
| 32 | 2.4674 | $9.9878 \cdot 10^4$ | 0.0953 |
| 64 | 2.4674 | $1.5914 \cdot 10^6$ | 0.0949 |
| 128 | 2.4674 | $2.5438 \cdot 10^7$ | 0.0948 |

Tabelle 3.2: Eigenwerte des 2-dim. Pseudo-Laplace-Operators

In Tabelle 3.2 sind für den 2-dimensionalen Operator minimaler und maximaler Eigenwert aufgeführt.
Alle Eigenwerte des Pseudo-Laplace-Operators sind reell und negativ, was zu folgendem Satz führt:

**Satz 3.2** *Die Eigenwerte des spektralen Operators $A$ sind reell. Ein Eigenwert ist 0 und die übrigen $(N-1)$ sind alle verschieden und besitzen negatives Vorzeichen.*
**Bew.:**

siehe [12]. □

Für den 2-dimensionalen Fall ergibt sich natürlich das gleiche Resultat, da man die Eigenwerte des 2-dimensionalen Laplace-Operators durch die Tensorproduktbildung erhält, denn es gilt folgender Satz (siehe [19], Theorem 4.2.12, Seite 245):

**Satz 3.3** *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $B \in \mathbb{C}^{m\times m}$. Sei $\lambda \in \sigma(A)$ und $x \in \mathbb{C}^n$ der zugehörige Eigenvektor von $A$. Sei ferner $\mu \in \sigma(B)$ und $y \in \mathbb{C}^m$ zugehöriger Eigenvektor von $B$, dann ist $\lambda\mu \in \sigma(A \otimes B)$ und $x \otimes y \in \mathbb{C}^{nm}$ ist zugehöriger Eigenvektor von $A \otimes B$.*

Im 3-dimensionalen Fall lautet der pseudo-spektrale Laplace-Operator:

$$B3 = A \otimes I \otimes I + I \otimes A \otimes I + I \otimes I \otimes A. \tag{3.1}$$

$\lambda_{min}$ und $\lambda_{max}$ von $B3$

| $N$ | $\lambda_{min}$ | $\lambda_{max}$ | $\lambda_{max}/N^4$ |
|---|---|---|---|
| 4 | 2.4560 | $5.8632 \cdot 10^1$ | 0.2290 |
| 8 | 2.4674 | $6.4317 \cdot 10^2$ | 0.1570 |
| 12 | 2.4674 | $3.0699 \cdot 10^3$ | 0.1480 |
| 16 | 2.4674 | $9.5244 \cdot 10^3$ | 0.1453 |
| 32 | 2.4674 | $1.4982 \cdot 10^5$ | 0.1429 |
| 64 | 2.4674 | $2.3872 \cdot 10^6$ | 0.1423 |
| 128 | 2.4674 | $3.8157 \cdot 10^7$ | 0.1421 |

Tabelle 3.3: Eigenwerte des 3-dim. Pseudo-Laplace-Operators

Anhand der Tabellen 3.1, 3.2 und 3.3 erkennt man, dass die Kondition des Pseudo-Laplace-Operators sehr schlecht ist, sie verhält sich wie $O(N^4)$. Es ist also nötig, eine geeignete Vorkonditionierung für den Laplace-Operator zu finden.

## 3.2 Vorkonditionierung

Da in [13] bereits verschiedene Vorkonditionierer für den Pseudo-Laplace Operator vorgestellt wurden, soll hier nur nochmals derjenige erwähnt werden, der in der Praxis die größte Relevanz hat. Zunächst wird wieder der 1-dimensionale Fall betrachtet, d.h. gesucht ist ein Vorkonditionierer für $A$. In [13] wurde gezeigt, dass man $A$ auch in der Form

$$(Ap)_j = p''(z_j) + \frac{1}{2N} p'(-1) \frac{(-1)^{j+1}(1 - z_j)}{(1 - z_j)^{3/2}} + \frac{1}{2N} p'(1) \frac{(-1)^{j+1}(1 + z_j)}{(1 - z_j)^{3/2}}, \tag{3.2}$$

$j = 1, \ldots, N$, darstellen kann. Gesucht sind also Approximationen für

$$p'(-1), \quad p'(1) \quad \text{und } p''(z_j), \; j = 1, \ldots, N.$$

Für eine Näherung an $p''(z_j)$, $j = 2, \ldots, N-1$, verwendet man das zentrale Finite-Differenzen Schema 2. Ordnung, d.h.

$$p''(z_j) \approx 2 \cdot \left( \frac{p(z_{j+1}) - p(z_j)}{z_{j+1} - z_j} - \frac{p(z_j) - p(z_{j-1})}{z_j - z_{j-1}} \right) \cdot \frac{1}{z_{j+1} - z_{j-1}}. \tag{3.3}$$

Führt man folgende Bezeichnungen ein

$$s_j = \sin\left(\frac{j\pi}{N}\right), \quad a_j = \frac{\alpha}{s_{j-1} s_{j-\frac{1}{2}}}, \quad c_j = \frac{\alpha}{s_j s_{j-\frac{1}{2}}}, \quad \alpha = \frac{1}{2 s_{\frac{1}{2}} s_1},$$

so entspricht (3.3)

$$p''(z_j) \approx a_j p(z_{j-1}) - (a_j + c_j)p(z_j) + c_j p(z_{j+1}). \tag{3.4}$$

Diese Approximation bereitet Schwierigkeiten für $j = 1$ und $j = N$. In diesen Fällen wird sowohl $p(z_0)$ als auch $p(z_{N+1})$ benötigt. Die Idee besteht nun darin, eine Tridiagonalmatrix zu finden, die $A$ durch einfache Näherung an $p''(z_j)$, $p'(-1)$ und $p'(1)$ gut approximiert. Daher nimmt man für den Druck homogene Neumann-Randbedingungen an, d.h. es soll

$$p'(-1) = p'(1) = 0$$

gelten.
Da $p'(1) \approx \frac{p(z_2)-p(z_0)}{z_2-z_0}$, ist $p(z_2) \approx p(z_0)$. Ferner gilt $p'(-1) \approx \frac{p(z_{N+1})-p(z_{N-1})}{z_{N+1}-z_{N-1}}$ und somit $p(z_{N+1}) \approx p(z_{N-1})$. Dann liefert Gleichung (3.4)

$$\begin{aligned} p''(z_1) &\approx a_1 p(z_0) - (a_1 + c_1)p(z_1) + c_1 p(z_2) && (3.5)\\ &= -(a_1 + c_1)p(z_1) + (a_1 + c_1)p(z_2) && (3.6) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} p''(z_N) &\approx a_N p(z_{N-1}) - (a_N + c_N)p(z_N) + c_N p(z_{N+1}) && (3.7)\\ &= (a_N + c_N)p(z_{N-1}) - (a_N + c_N)p(z_N). && (3.8) \end{aligned}$$

Mit den Gleichungen (3.3), (3.5) und (3.7) wird aus (3.2) dann unter Berücksichtigung der Neumann-Randbedingungen

$$(Ap)_j = \begin{cases} -(a_1 + c_1)p(z_1) + (a_1 + c_1)p(z_2), & j = 1 \\ a_j p(z_{j-1}) - (a_j + c_j)p(z_j) + c_j p(z_{j+1}), & j = 2, \ldots, N-1 \\ (a_N + c_N)p(z_{N-1}) - (a_N + c_N)p(z_N), & j = N, \end{cases}$$

wodurch nun der Vorkonditionierer $A_{FD}^{NE}$ dargestellt wird. $A_{FD}^{NE}$ ist tridiagonal und somit sind geeignete Bandlöser anwendbar.
Im folgenden werden die Eigenschaften von $A_{FD}^{NE}$ als Vorkonditionierer untersucht. Offensichtlich ist $c = const. \neq 0$ Eigenfunktion von $A_{FD}^{NE}$ zum Eigenwert $\lambda = 0$. Zuerst muss also der konstante Anteil eliminiert werden. Dazu führt man eine Transformationsmatrix $E$ ein mit

$$q = Ep,$$

wobei

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ & \vdots & & \cdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nun löst man das Problem in $q$ und betrachtet die modifizierten Operatoren

$$\hat{A} = AE \quad \text{und} \quad \hat{A}^{NE}_{FD} = A^{NE}_{FD} E.$$

Offensichtlich sind $\hat{A}$ und $\hat{A}^{NE}_{FD}$ bis auf die letzte Spalte identisch zu $A$ bzw. $A^{NE}_{FD}$. Eliminiert man nun die letzte Spalte und eine der Zeilen (hier die letzte Zeile), so erhält man ein reguläres System in $\mathbb{R}^{N-1,N-1}$. Die zugehörigen spektralen FD-Operatoren bezeichnet man mit

$$\hat{A}_0 \in \mathbb{R}^{N-1,N-1}, \quad \text{bzw. } \hat{A}^{NE}_{FD,0} \in \mathbb{R}^{N-1,N-1}.$$

Tabelle 3.4 zeigt die Eigenwerte des vorkonditionierten Operators $(\hat{A}^{NE}_{FD,0})^{-1}\hat{A}_0$.

| $\lambda_{min}$ und $\lambda_{max}$ von $(\hat{A}^{NE}_{FD,0})^{-1}\hat{A}_0$ | | |
|---|---|---|
| $N$ | $\lambda_{min}$ | $\lambda_{max}$ |
| 4 | 1.121320 | 1.971857 |
| 8 | 1.019224 | 2.533468 |
| 16 | 1.003583 | 2.663229 |
| 32 | 1.000716 | 2.688467 |
| 64 | 1.000149 | 2.692843 |
| 128 | 1.000032 | 2.693627 |

Tabelle 3.4: Eigenwerte des vorkonditionierten 1-dim. Pseudo-Laplace Operators

Man sieht, dass der kleinste Eigenwert gegen 1 geht, während der größte Eigenwert unabhängig von $N$ beschränkt ist. Numerisch zeigte die Vorkonditionierung unter Annahme der Neumann-Bedingungen, dass diese von den in [12] vorgestellten Möglichkeiten zur Vorkonditionierung die einzige ist, die die Eigenschaft von $A$ erhält, dass alle Eigenwerte das gleiche Vorzeichen haben. Im 1-dimensionalen Fall kann man ferner ausnutzen, dass der Vorkonditionierer eine Tridiagonalmatrix ist, wie Abbildung 3.1 verdeutlicht. Im 2- und 3-dimensionalen erhält man durch die Tensorproduktbildung immer noch Bandmatrizen, für die gute Löser bekannt sind. Abbildung 3.1 zeigt die Struktur des Vorkonditionierers auch im 2- und 3-dimensionalen Fall. $nz$ gibt dabei die Anzahl der von Null verschiedenen Matrixeinträge an.
Im 2-dimensionalen Fall erhält man folgende Operatoren

$$\hat{B} = B(E \otimes E)$$

und

$$\hat{B}^{NE}_{FD} = \hat{A}^{NE}_{FD} \otimes E + E \otimes \hat{A}^{NE}_{FD}.$$

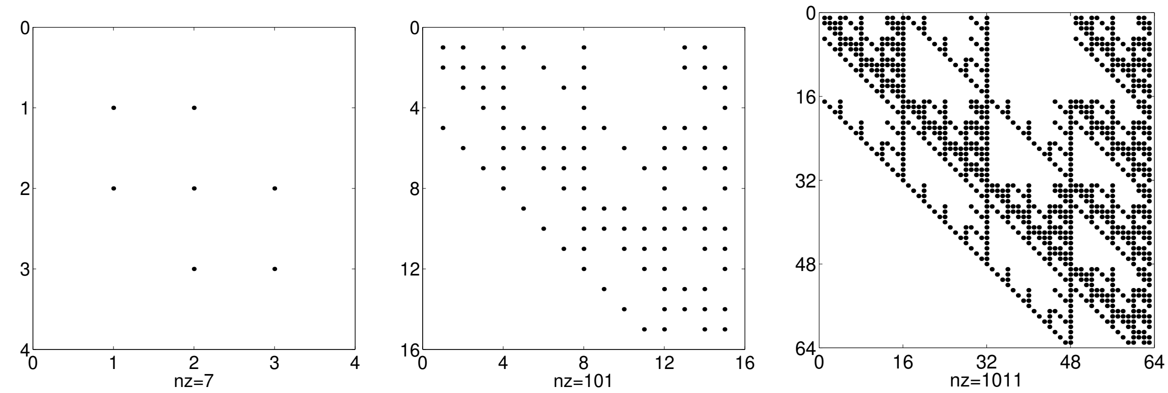


Abbildung 3.1: Struktur des Vorkonditionierers im 1D-Fall (links), 2D-Fall (mitte) und 3D-Fall (rechts) für $N = 4$

| $\lambda_{min}$ und $\lambda_{max}$ von $(\hat{B}_{FD,0}^{NE})^{-1}\hat{B}_0$ | | |
|---|---|---|
| $N$ | $\lambda_{min}$ | $\lambda_{max}$ |
| 4 | 1.121320 | 1.971857 |
| 8 | 1.019224 | 2.533468 |
| 16 | 1.003583 | 2.663229 |
| 32 | 1.000716 | 2.688467 |
| 64 | 1.000149 | 2.692843 |
| 128 | 1.000032 | 2.693627 |

Tabelle 3.5: Eigenwerte des vorkonditionierten 2-dim. Pseudo-Laplace-Operators

Analog zum 1-dimensionalen Fall (Streichen der letzten Spalte und Zeile) erhält man $\hat{B}_0$ und $\hat{B}_{FD,0}^{NE}$. Tabelle 3.5 zeigt die Eigenwerte des vorkonditionierten 2-dimensionalen Pseudo-Laplace Operators.

Im 3-dimensionalen Fall erhält man folgende Operatoren

$$\hat{B3} = B3(E \otimes E \otimes E)$$

und

$$\hat{B3}_{FD}^{NE} = \hat{A}_{FD}^{NE} \otimes E \otimes E + E \otimes \hat{A}_{FD}^{NE} \otimes E + E \otimes E \otimes \hat{A}_{FD}^{NE}.$$

Analog zum 1- und 2-dimensionalen Fall erhält man $\hat{B3}_0$ und $\hat{B3}_{FD,0}^{NE}$. Tabelle 3.6 zeigt die Eigenwerte des vorkonditionierten 3-dimensionalen Pseudo-Laplace Operators.

| $\lambda_{min}$ und $\lambda_{max}$ von $(\hat{B}3^{NE}_{FD,0})^{-1}\hat{B}3_0$ | | |
|---|---|---|
| $N$ | $\lambda_{min}$ | $\lambda_{max}$ |
| 4 | 1.121276 | 1.971857 |
| 8 | 1.018948 | 2.533468 |
| 12 | 1.006727 | 2.663229 |

Tabelle 3.6: Eigenwerte des vorkonditionierten 3-dim. Pseudo-Laplace-Operators

## 3.3 Lösen der Gleichungssysteme

In [12] wurden alle auftretenden Gleichungssysteme mit dem Gauß-Verfahren gelöst. Dabei entsteht allerdings ein Aufwand von $O(N^3)$, also ist der Einsatz effizienterer Löser dringend erforderlich. Oftmals enthält die Matrix $A$ des Gleichungssystems

$$Ax = b \tag{3.9}$$

viele Einträge, die identisch Null sind. Die Idee besteht nun darin, Matrix-Vektor-Multiplikationen auszunutzen, da diese bei einer Matrix $A$, die eine begrenzte Anzahl von Einträgen in jeder Zeile hat, nur $O(N)$ Operationen benötigen. Ein bekanntes Verfahren mit dieser Eigenschaft ist das GMRES-Verfahren.

#### GMRES (Generalized Minimal RESidual)-Verfahren

Das GMRES-Verfahren (siehe dazu [11]) ist ein Krylov-Raum-Verfahren zur Lösung des Gleichungssystems (3.9). Der $k$-te zur Matrix $A$ und Vektor $b$ gehörige Krylov-Raum wird definiert durch:

$$W_k = span\{b, Ab, \ldots, A^{k-1}b\}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Beim GMRES-Verfahren wird der Raum

$$W_k := span\{r_0, Ar_0, \ldots, A^{k-1}r_0\},$$

mit $r_0 = b - Ax_0$, $x_0$ Startvektor, eingeführt. Gesucht werden Iterierte $x_k \in x_0 + W_k$, für die die 2-Norm des Residuums minimal ist. Zur Konstruktion einer Orthonormalbasis von $W_k$ wird die sogenannte *Arnoldi-Methode* verwendet (Gram-Schmidt-Verfahren für $W_k$):

**Arnoldi-Verfahren:**

1. Wähle Startvektor $v_1$ mit $||v_1|| = 1$.
2. Für $j = 1, 2, \ldots$
   $\tilde{v}_{j+1} = Av_j$;
   Für $i = 1, \ldots, j$
   $h_{i,j} = (\tilde{v}_{j+1}, v_i)$ ;
   $\tilde{v}_{j+1} = \tilde{v}_{j+1} - h_{i,j}v_i$;
   $h_{j+1,j} = ||\tilde{v}_{j+1}||$;
   $v_{j+1} = \tilde{v}_{j+1}/h_{j+1,j}$;

Zu Beginn des GMRES-Verfahrens setzt man $v_1 = r_0/||r_0||$. Bezeichnet man mit $V_k$ die $n \times k$-Matrix, die aus den Spaltenvektoren $v_1, \ldots, v_k$ besteht, kann man das Arnoldi-Verfahren auch in Matrix-Form schreiben als:

$$AV_k = V_k H_k + h_{k+1,k} v_k \xi_k^T = V_{k+1} H_{k+1,k}, \tag{3.10}$$

mit der oberen Hessenberg-Matrix $H_k = (h_{i,j})_{\substack{j=1,\ldots,k \\ i=1,\ldots,\min\{j+1,k\}}} \in \mathrm{I\!R}^{k,k}$, $\xi_k \in \mathrm{I\!R}^k$ $k$-ter Einheitsvektor. Ferner ist

$$H_{k+1,k} = \begin{pmatrix} & H_k & \\ 0 \cdots 0 & & h_{k+1,k} \end{pmatrix}.$$

Die Iterierte $x_k$ im $k$-ten Schritt ergibt sich beim GMRES-Verfahren nun wegen $x_k \in x_0 + W_k$ zu

$$x_k = x_0 + V_k y_k,$$

wobei $y_k$ noch zu bestimmen ist. Ziel ist es, das Residuum $r_k$ zu minimieren, d.h.

$$\begin{aligned} r_k &= b - Ax_k = b - (Ax_0 + AV_k y_k) \\ &= r_0 - AV_k y_k \end{aligned}$$

soll in der 2-Norm minimal werden. Somit muss also der Vektor $y_k$ das folgende Least-Squares Problem lösen:

$$\begin{aligned} \min_y ||r_0 - AV_k y|| &= \min_y ||r_0 - V_{k+1} H_{k+1,k} y|| \quad \text{(nach (3.10))} \\ &= \min_y ||V_{k+1}(\beta \xi_1 - H_{k+1,k} y)|| \\ &= \min_y ||\beta \xi_1 - H_{k+1,k} y||, \end{aligned} \tag{3.11}$$

wobei $\beta = ||r_0||$, $\xi_1$ der erste Einheitsvektor in $\mathbb{R}^{k+1}$.
Zu lösen ist nun also noch das Least-Squares Problem (3.11). Dabei wird $H_{k+1,k}$ mit Hilfe der QR-Zerlegung in eine unitäre Matrix $F \in \mathbb{C}^{k+1,k+1}$ (d.h. $F^H_{i,j} = \bar{F}_{j,i}$) und eine obere Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{k+1,k}$ zerlegt mit

$$R = \begin{pmatrix} & R_{k\times k} & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

($R_{k\times k} \in \mathbb{R}^{k,k}$ obere Dreiecksmatrix). $y_k$ erhält man, indem man die Lösung des Gleichungssystems

$$R_{k\times k} y = \beta \left(F\xi_1\right)_{k\times 1}, \tag{3.12}$$

bestimmt. $(F\xi_1)_{k\times 1}$ bezeichne die ersten $k$ Einträge der ersten Spalte von $F$.
Zur Verminderung des Aufwands kann man aus der QR-Zerlegung von $H_{k+1,k}$ auf die QR-Zerlegung der Matrix $H_{k+2,k+1}$ schließen. Dabei nutzt man aus, dass man die QR-Zerlegung der Matrix $H_{k+1,k}$ mittels *Givens-Rotationen* erhalten kann (siehe dazu [11]).
Insgesamt ergibt sich dann das

**GMRES-Verfahren:**

1. Wähle Startvektor $x_0$, berechne $r_0 = b - Ax_0$ und setze $v_1 = r_0/||r_0||$.
2. Für $k = 1, 2, \ldots$
   Führe das Arnoldi-Verfahren durch und berechne damit
   $v_{k+1}$ und $h_{i,j}, \quad i = 1, \ldots, k+1$
   $x_k = x_0 + V_k y_k$,
   wobei $y_k$ die Lösung des Least-Squares Problem (3.11) ist unter Verwendung von Givens-Rotationen.
3. Sobald gewünschte Genauigkeit erreicht, breche das Verfahren ab.

Eine Möglichkeit, den Aufwand zu reduzieren, besteht also in der Anwendung des GMRES-Verfahrens für alle Gleichungssysteme in (2.36)-(2.42).
Für das Gleichungssystem (2.42) besteht zusätzlich die Möglichkeit, den Vorkonditionierer $\hat{B}^{NE}_{FD,0}$ zu verwenden und ein vorkonditioniertes GMRES-Verfahren als Löser zu benutzen (siehe dazu auch [27]).

### Richardson-Relaxation

Ein alternatives Verfahren zur iterativen Lösung des Gleichungssystems (2.42) ist die

Richardson-Relaxation (siehe auch [14]). Dabei sollen folgende Bezeichnungen gelten:

$$\underbrace{(D^0_{x,G}D_{x,GL} + D^0_{y,G}D_{y,GL})}_{B}\underbrace{p^{n+1}}_{p} = \underbrace{D^0_{x,G}g_1^{n+1} + D^0_{y,G}g_2^{n+1}}_{f} \quad \text{in } \Omega.$$

Ausgehend von einer Näherung $p_{alt}$ wird eine neue Näherung $p_{neu}$ in drei Schritten bestimmt:

1. **Defektberechnung:**
   Berechnung des Defektes $d$ durch
   $$d = f - Bp_{alt}.$$
2. **Defektkorrektur:**
   Bestimmung einer Korrektur $q$ mittels
   $$\hat{B}^{NE}_{FD}q = d.$$
   ($\hat{B}^{NE}_{FD}$ ist dabei der Vorkonditionierer von $B$, siehe Abschnitt 3.2).
3. **Richardson-Schritt:**
   Berechnung der neuen Näherung $p_{neu}$ durch
   $$p_{neu} = p_{alt} + \omega q,$$
   mit einem reellen Relaxationsparameter $\omega$, der geeignet zu wählen ist.

Zur Wahl von $\omega$ gibt es im wesentlichen zwei Möglichkeiten. Die Erste ist die stationäre Parameterwahl, das heißt $\omega$ bleibt in jedem Schritt unverändert. Zu bestimmen ist dann das optimale $\omega_{opt}$ für alle Iterationsschritte: Wähle $\omega$ so, dass

$$\max\{|1-\omega\lambda| \ : \ 0 < \lambda_{min} \leq \lambda \leq \lambda_{max}\}$$

minimal wird. $\lambda_{min}$ und $\lambda_{max}$ sind dabei Tabelle 3.5 zu entnehmen. Wie in [14] gezeigt, ergibt sich für die Wahl von $\omega = \omega_{opt}$:

$$\omega_{opt} = \frac{2}{\lambda_{min} + \lambda_{max}}.$$

Eine weitere Möglichkeit besteht in dynamischer Parameterwahl ($\omega = \omega_k$ ist in jedem Schritt neu zu bestimmen). Bei $k$ Schritten sind die Parameter $\omega_1$, $\omega_2$, ..., $\omega_k$ so zu bestimmen, dass

$$\max\{|1-\omega_1\lambda| \cdot \ldots \cdot |1-\omega_k\lambda| \ : \ \lambda_{min} \leq \lambda \leq \lambda_{max}\}^{1/k}$$

minimal wird. Nach [14] ergibt sich somit für die Wahl der $\omega_{l,opt}$ $(l = 1, \dots, k)$ der Kehrwert der auf $[\lambda_{min}, \lambda_{max}]$ transformierten Nullstellen des Tschebyscheff-Polynoms $T_k$, d.h.

$$\omega_{l,opt} = \left( \left( \frac{\lambda_{min} + \lambda_{max}}{2} \right) + \left( \frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{2l-1}{2k} \pi \right) \right)^{-1}, \quad \text{für } l = 1, \dots, k.$$

Das Driven-Cavity-Problem, welches im nächsten Abschnitt gelöst wird, wurde mit den drei in diesem Abschnitt vorgestellten Verfahren implementiert. Tabelle 3.7 zeigt einen Vergleich des Gauß-Verfahrens, des GMRES-Verfahrens (mit und ohne Vorkonditionierung) und der Richardson-Relaxation mit stationärer und nicht-stationärer Parameterwahl. Bei der Richardson-Relaxation wurde dabei insbesondere die Bandstruktur des Vorkonditionierers ausgenutzt. (In Klammern steht die maximale und die minimale Anzahl der durchgeführten Iterationsschritte bei der Richardson-Relaxation).

| | $N = 16$ | $N = 20$ |
|---|---|---|
| Gauß | 65.18 | nicht berechnet |
| GMRES | 24.10 | 45.49 |
| Richardson stat. | 13.55 $(25 - 18)$ | 21.55 $(26 - 18)$ |
| Richardson nicht-stat. | 11.54 $(17 - 9)$ | 20.35 $(20 - 9)$ |
| vork. GMRES | 11.45 | 19.53 |

Tabelle 3.7: CPU-Sekunden für $RE = 100$ und $\triangle t = 0.1$ für das Driven-Cavity-Problem

Wie zu erwarten war, ist das Gauß-Verfahren für die hier vorliegenden Gleichungssysteme denkbar ungeeignet. GMRES führt schon zu einer deutlichen Reduzierung der Rechenzeit. Löst man dann Gleichung (2.42) auch noch mit dem Richardson-Verfahren, so ist der Rechenaufwand noch geringer. Einsichtig ist auch, dass die dynamische Parameterwahl noch eine weitere kleine Verbesserung liefert. Eine weitere Reduzierung der Rechenzeit liefert das vorkonditionierte GMRES-Verfahren, wobei die Verbesserungen nur noch sehr gering sind. Der Vorteil dieses Verfahrens besteht sicherlich darin, dass keine Kenntnis über die Eigenwerte nötig ist.
Alle hier dargestellten Berechnungen wurden auf einer SUN Ultra Enterprise 3000 mit 6 Prozessoren (133 MHz) durchgeführt.

## 3.4 Das Driven-Cavity Problem

Ein klassisches Test-Beispiel der numerischen Strömungsmechanik ist das sogenannte Driven-Cavity Problem, auch "Nischenströmung" genannt. Als Modell dient dabei ein mit Flüssigkeit gefüllter Topf. Über diesen wird ein Antriebsband mit einer vorgegebenen

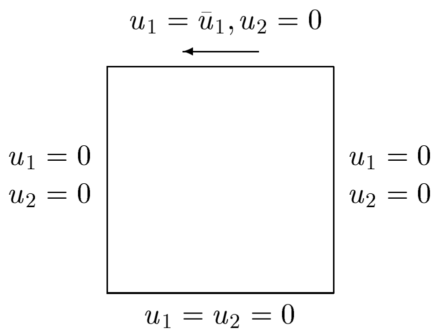


Abbildung 3.2: Schematische Darstellung der Randbedingungen des Driven-Cavity Problems

Geschwindigkeit gezogen, wodurch sich die Flüssigkeit in dem Topf in Bewegung setzt. Abbildung 3.2 zeigt eine schematische Darstellung.
Im folgenden sei $\Omega = [0,1]^2$. Nun führt man $\bar{x} = \frac{1}{2}(x+1)$ und $\bar{y} = \frac{1}{2}(y+1)$ ein, um das Rechteck $[-1,1]^2$ auf das Einheitsquadrat $\Omega$ zu transformieren. Ferner sei $\bar{u}_1(x) = -16\bar{x}^2(1-\bar{x})^2$. $\bar{u}_1$ gibt den durch das Band ausgelösten Antrieb vor.
Für die numerische Berechnung sind auch die der Strömung $u$ zugeordneten Funktionen $\psi$ (Stromfunktion) und $\omega$ (Wirbelfunktion) von Interesse, wobei gilt:

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}}, \quad u_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}}, \tag{3.13}$$

$$\omega = \frac{\partial u_2}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial u_1}{\partial \bar{y}}. \tag{3.14}$$

Als Abbruchbedingung nimmt man an, dass der stationäre Zustand erreicht ist, wenn

$$\frac{\max\limits_{i,j} |\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n}|}{\triangle t \cdot \max\limits_{i,j} |\omega_{i,j}^{n+1}|} \leq 2 \cdot 10^{-6} \tag{3.15}$$

erfüllt ist. $\omega^{n+1}$ bezeichnet dabei die Wirbelfunktion im $(n+1)$-ten Zeitschritt.
Die Stromfunktion lässt sich berechnen durch Lösen von

$$\nabla^2 \psi = -\omega \quad \text{in } \Omega = (0,1)^2.$$

Tabelle 3.8 enthält den maximalen Wert von $|\psi|$ auf den inneren Kollokationspunkten. Dabei bezeichne $M_1^B$ die Resultate aus [3] und $M_1$ die hier erzielten Resultate. Beim Verfahren in [3] werden keine staggered grids verwendet, sondern sowohl der Druck als auch die Geschwindigkeit werden an den Gauß-Lobatto-Knoten betrachtet, wobei die Geschwindigkeit $u \in \mathbb{P}_N$ und $p \in \mathbb{P}_{N-2}$ angenommen wird.

| $N$ | $RE = 100$ | | $RE = 400$ | |
|---|---|---|---|---|
| | $M_1^B$ | $M_1$ | $M_1^B$ | $M_1$ |
| 16 | $8.3160 \cdot 10^{-2}$ (0.40 – 0.78) | $8.3160 \cdot 10^{-2}$ (0.40 – 0.78) | $8.5777 \cdot 10^{-2}$ (0.40 – 0.60) | $8.5371 \cdot 10^{-2}$ (0.40 – 0.60) |
| 20 | $8.2694 \cdot 10^{-2}$ (0.42 – 0.73) | $8.2695 \cdot 10^{-2}$ (0.42 – 0.73) | $8.5192 \cdot 10^{-2}$ (0.42 – 0.58) | $8.5213 \cdot 10^{-2}$ (0.42 – 0.58) |
| 24 | $8.3315 \cdot 10^{-2}$ (0.37 – 0.75) | $8.3315 \cdot 10^{-2}$ (0.37 – 0.75) | $8.5716 \cdot 10^{-2}$ (0.43 – 0.63) | $8.5715 \cdot 10^{-2}$ (0.43 – 0.63) |
| 32 | $8.3402 \cdot 10^{-2}$ (0.40 – 0.74) | $8.3402 \cdot 10^{-2}$ (0.40 – 0.74) | $8.5480 \cdot 10^{-2}$ (0.40 – 0.60) | $8.4007 \cdot 10^{-2}$ (0.40 – 0.65) |

Tabelle 3.8: Maximaler Wert von $|\psi|$. Die Koordinaten des Punktes, an dem das Maximum angenommen wird, stehen in Klammern.

Tabelle 3.9 enthält die entsprechenden Ergebnisse für den maximalen Wert von $|\omega|$ bzgl. der Kollokationspunkte auf der Seite $\bar{y} = 1$ (bezeichnet mit $M_2^B$ bzw. $M_2$).

| $N$ | $RE = 100$ | | $RE = 400$ | |
|---|---|---|---|---|
| | $M_2^B$ | $M_2$ | $M_2^B$ | $M_2$ |
| 16 | 13.3467 (0.60) | 13.3442 (0.60) | 24.7759 (0.60) | 24.6541 (0.60) |
| 20 | 13.1759 (0.65) | 13.1762 (0.65) | 24.6268 (0.65) | 24.6243 (0.65) |
| 24 | 13.4226 (0.63) | 13.4228 (0.63) | 24.9157 (0.63) | 24.9143 (0.63) |
| 32 | 13.3423 (0.60) | 13.3422 (0.60) | 24.7845 (0.65) | 24.9783 (0.65) |

Tabelle 3.9: Maximaler Wert von $|\omega|$. Die Koordinaten des Punktes, an dem das Maximum angenommen wird, stehen in Klammern.

Weil die Kollokationspunkte nicht äquidistant sind, liefert $M_2$ keine allzu gute Aussage. Da aber für $\bar{y} = 1$ die Approximation von $\omega$ ein Polynom für jedes $\bar{x} \in [0, 1]$ ist, wird der Bereich in 201 äquidistant verteilte Punkte aufgeteilt und $\omega$ an diesen Punkten berechnet. Dabei verwendet man, dass

$$\omega(x, 1) = \sum_{i=0}^{N} \omega_i^* T_i(x) \tag{3.16}$$

(zur Berechnung der $\omega_i^*$ siehe (1.17)). Umgekehrt ist aber auch

$$\omega(x_j, 1) = \sum_{k=0}^{N} \cos\left(\frac{kj\pi}{N}\right) \omega_k^*, \qquad j = 0, \ldots, N.$$

Da $\omega(x_j, 1)$, $j = 0, \ldots, N$ bekannt ist, können somit die $\omega_k^*$, $k = 0, \ldots, N$ bestimmt werden. Anschliessend ist mit (3.16) $\omega(\bar{x}, 1)$ an jeder beliebigen Stelle $\bar{x} \in [0, 1]$ berechenbar. Die entsprechenden Werte können in Tabelle 3.10 nachgelesen werden (bezeichnet mit $M_3^B$ bzw. $M_3$).

| $N$ | $RE = 100$ | | $RE = 400$ | |
|---|---|---|---|---|
| | $M_3^B$ | $M_3$ | $M_3^B$ | $M_3$ |
| 16 | 13.4476 (0.620) | 13.4434 (0.620) | 25.1604 (0.625) | 25.0222 (0.625) |
| 20 | 13.4441 (0.620) | 13.4441 (0.620) | 24.9273 (0.630) | 24.9241 (0.630) |
| 24 | 13.4446 (0.610) | 13.4565 (0.620) | 24.9148 (0.630) | 24.9010 (0.625) |
| 32 | 13.4448 (0.620) | 13.4430 (0.620) | 24.9109 (0.625) | 25.1123 (0.630) |

Tabelle 3.10: Maximaler Wert von $|\omega|$. Die Koordinaten des Punktes, an dem das Maximum angenommen wird, stehen in Klammern.

Abbildung 3.3 zeigt die Geschwindigkeitsfelder für die Reynoldszahlen von 1 bis 1000 im stationären Endzustand. Abbildung 3.4 zeigt die zugehörigen Stromlinien. Abbildung 3.5 liefert zusätzlich noch eine Darstellung der Wirbelstärke bei den verschiedenen Reynoldszahlen.

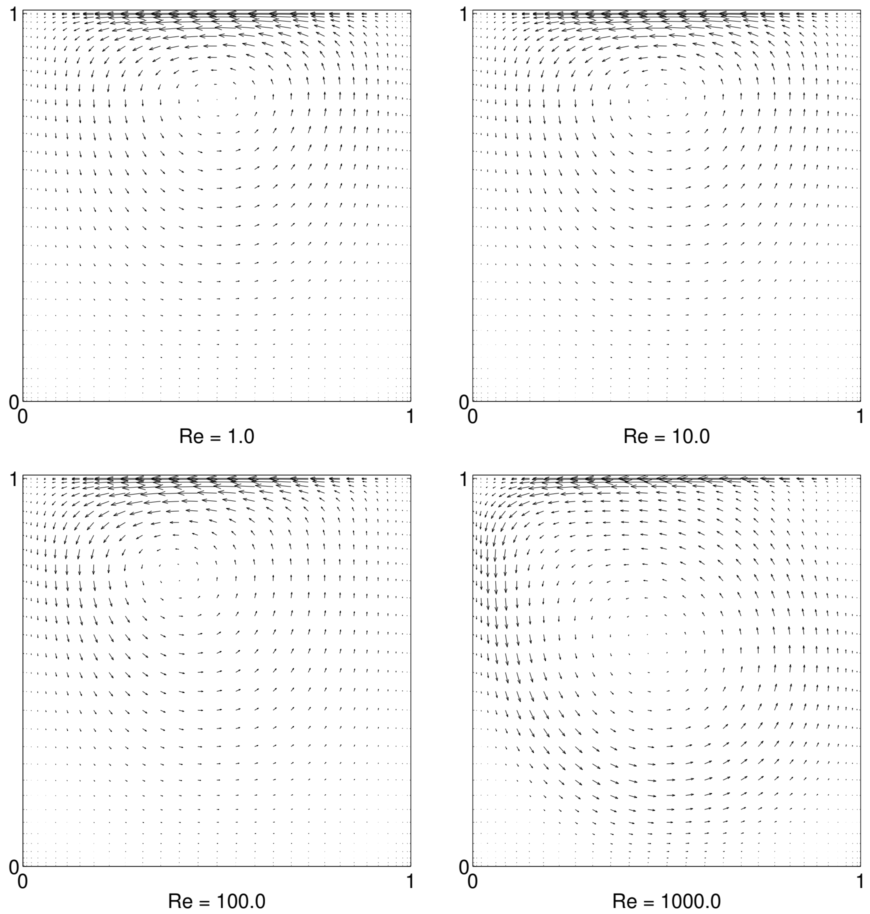


Abbildung 3.3: Geschwindigkeitsfelder für $Re = 1$ bis $Re = 1000$

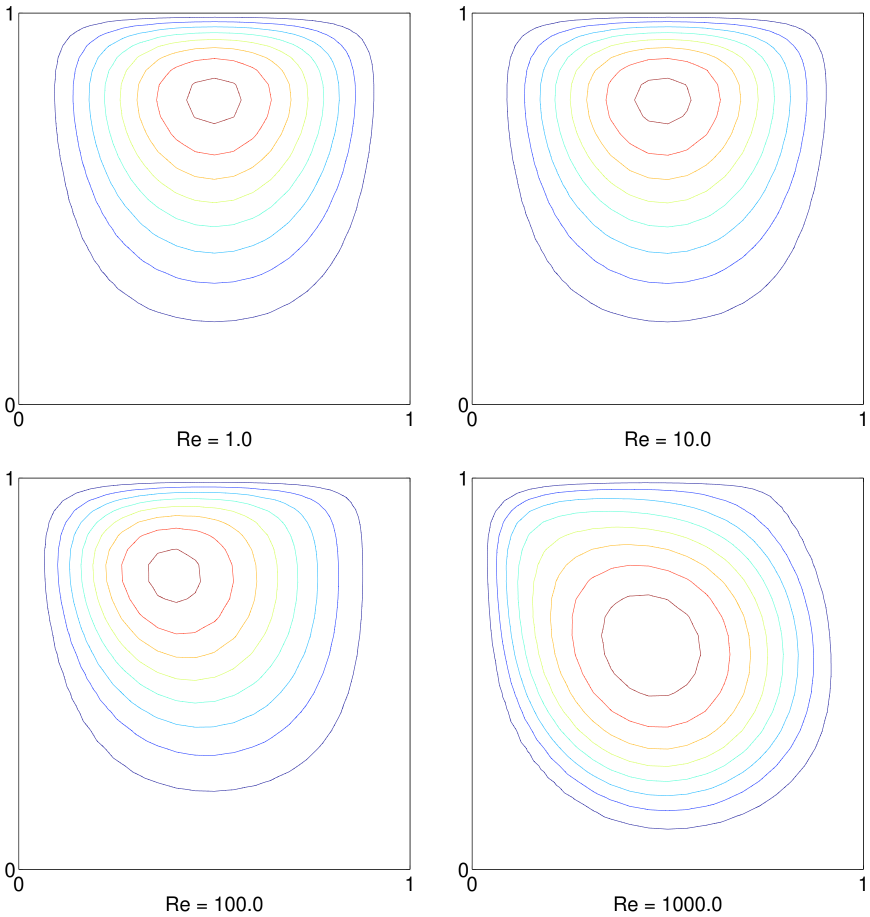


Abbildung 3.4: Stromlinien für $Re = 1$ bis $Re = 1000$

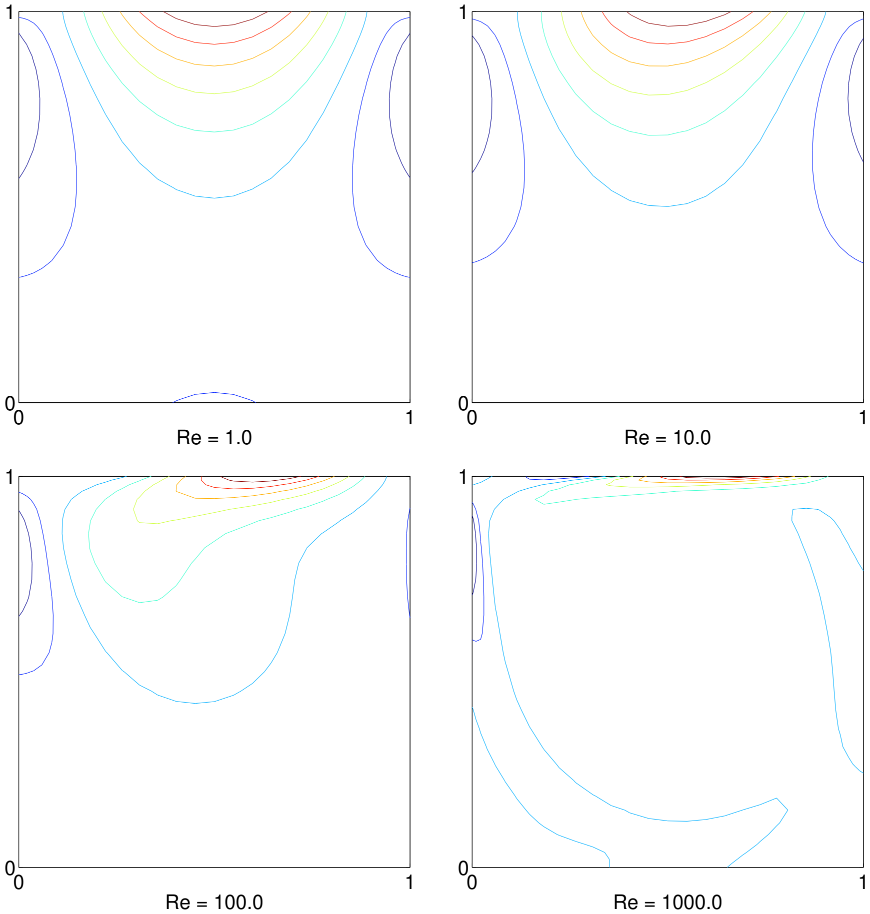


Abbildung 3.5: Wirbelstärke für $Re = 1$ bis $Re = 1000$

# Kapitel 4

# Die Navier-Stokes-Gleichungen mit Singularitäten in den Ecken

## 4.1 Einleitung

Strömungen, bei denen Singularitäten auftreten können, sind in der Numerik von großem Interesse, da dadurch der Fehler in der approximierten Lösung typischerweise stark wächst; die Genauigkeit geht hauptsächlich in der Nähe der Singularitäten verloren.

Bei zähflüssigen Fluiden, die durch die Navier-Stokes-Gleichungen beschrieben werden können, kann die Lösung Singularitäten aufweisen, wenn das Gebiet z.B. Ecken enthält, die vorgeschriebenen Randwerte nicht stetig sind oder sich die Art der Randbedingungen zwischen Dirichlet und Neumann ändert.

Auch bei lokalen Verfahren, wie z.B. der Methode der FEM oder FD, ist es schwer, die Güte der in diesen Situationen erhaltenen Lösungen abzuschätzen. Bei globalen Verfahren, wie z.B. den spektralen Verfahren, wird dies allerdings noch verstärkt, denn die Genauigkeit hängt stark von der Regularität der Lösung ab (vgl. Kapitel 1, Bemerkung 1.5). Somit liefern die spektralen Verfahren zunächst keine Vorteile gegenüber den FEM oder FD, falls die Lösung singulär ist. In der Literatur wurden Singularitäten daher kaum mit spektralen Verfahren behandelt. Es bleibt die Suche nach einem Verfahren, bei dem die hohe spektrale Genauigkeit so gut wie möglich erhalten bleibt, um somit die Vorteile der spektralen Verfahren weiterhin ausnutzen zu können.

Ein Ansatz, der im folgenden aufgegriffen werden soll, stammt von *Schultz et al.* [28]. Falls nicht-homogene Randbedingungen vorliegen, kann man in der Nähe der Singularität den dominierenden Anteil der asymptotischen Lösung vollständig berechnen. Diesen Anteil kann man somit von der Lösung im ganzen Gebiet subtrahieren. Es bleibt dann eine Lösung zu berechnen, bei der die auftretende Singularität sehr viel schwächer ist. Diese Methode ist auch als die *Methode der Subtraktion der Singularitäten* bekannt.

Zunächst sind noch einige Vorüberlegungen notwendig. Es ist wohlbekannt, dass sich die

Stokes-Gleichungen für die Stromfunktion $\psi(r,\theta)$ im Gebiet $\Omega$ in der Form

$$\nabla^4\psi = 0$$

darstellen lassen (siehe [24]). Ferner weiss man, dass die Lösungen in Polarkoordinaten $(r,\theta)$ von der Form

$$\psi = r^\lambda f_\lambda(\theta) \tag{4.1}$$

sind. $\lambda$ ist dabei eine reelle oder komplexe Zahl, die man auch den "Exponent" der entsprechenden Lösung nennt. Besonders wichtig sind dabei die Fälle $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ und $\lambda = 2$. Durch diese Lösungen werden drei verschiedene Kategorien von Strömungen beschrieben:

1. Es treffen zwei Seiten des Randes aufeinander, wobei der Druck oder die Geschwindigkeit an mindestens einer Seite ungleich Null ist. Eine solche Situation wurde bereits in [30] beschrieben. In [24] wurde gezeigt, dass der Exponent $\lambda$ dann eine positive ganze Zahl ist.

2. An beiden aufeinandertreffenden Seiten verschwindet die Geschwindigkeit. In derartigen Ecken wird die Flüssigkeit durch Einflüsse weit von der Ecke entfernt in Bewegung gesetzt. In [24] wurde gezeigt, dass alle Strömungen für $r = 0$ eine endliche Geschwindigkeit besitzen und dass $\mathrm{Re}(\lambda) > 1$ gilt. Dies trifft für den Fall $\lambda = 2$ zu.

3. In der letzten Kategorie ist $\mathrm{Re}(\lambda) < 1$. Das hat zur Folge, dass für $r = 0$ die Geschwindigkeit unendlich ist, für $r \to \infty$ strebt sie allerdings gegen Null. Somit ist $\lambda = 0$.

Im folgenden soll nun das Driven-Cavity-Problem, dem die Navier-Stokes-Gleichungen (siehe (2.1) - (2.4)) mit $f = 0$ zugrunde liegen, betrachtet werden. Dabei seien folgende Randbedingungen gegeben:

$$\bar{u}(x,1) = -1, \tag{4.2}$$

d.h. in dem Gebiet liegen folgende Randbedingungen vor:
In der Nähe der Ecken $A = (0,1)$ und $B = (1,1)$ liegt also eine Strömung der 1. Kategorie vor und es ist $\lambda = 1$. Dort sind weder der Druck noch die Wirbelfunktion endlich (siehe Funktionen in Anhang A). Dadurch geht die spektrale Genauigkeit, die von der Glattheit der Lösung abhängt, vollständig verloren. Ecken $D = (0,0)$ und $C = (1,0)$ weisen Singularitäten der 2. Kategorie auf. Somit ist in diesen Ecken die Singularität sehr viel schwächer[1], so dass sie vernachlässigt werden kann.
Im folgenden soll nun die Idee von *Schultz et al.* [28] verwendet werden, d.h. zuerst sind in den Ecken die Singularitätenfunktionen analytisch zu bestimmen. Subtrahiert man diese

[1] In diesen Ecken ist lediglich die 2. Ableitung unbeschränkt.

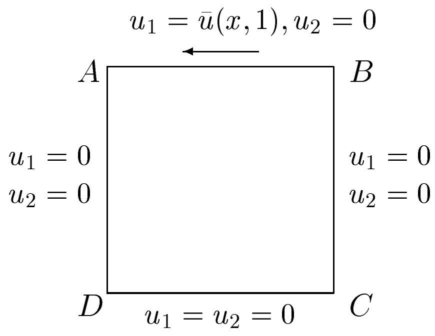


Abbildung 4.1: Schematische Darstellung des Driven-Cavity Problems mit Singularitäten in den Ecken

Singularität von der Lösung, verbleibt ein Problem, indem die Singularitäten sehr viel schwächer sind und welches mit der in Kapitel 2 vorgestellten Methode gelöst werden kann. Dieses Verfahren soll auf das Driven-Cavity-Problem angewandt werden. Zu beachten ist, dass wiederum "staggered grids" verwendet werden.

## 4.2 Bestimmung der Singularitätenfunktion

Um die Singularitätenfunktion in den Ecken bestimmen zu können, betrachtet man die Navier-Stokes-Gleichungen in der Strom-Wirbelfunktion-Formulierung, d.h.

$$\nabla^4 \psi = Re\ \vec{u}\ \nabla\left(\nabla^2 \psi\right) \quad \text{in } \Omega. \tag{4.3}$$

In der Nähe der Ecken nutzt man aus, dass die Stromfunktion (siehe auch (3.13)) unabhängig von der Reynoldszahl ist. Somit kann die Lösung dort durch die Stokes-Gleichung approximiert werden, wobei $\psi$ dann der Gleichung

$$\nabla^4 \psi = 0 \quad \text{in } \Omega \tag{4.4}$$

genügt. Wie in der Einleitung erläutert, liegen in den Ecken $A$ und $B$ Strömungen der 1. Kategorie vor, wodurch $\psi$ die Form (siehe (4.1))

$$\psi = r \cdot f_1(\theta) \tag{4.5}$$

besitzen muss. Im folgenden sollen $\psi$ (und damit auch $f_1(\theta)$) im Detail für die Ecke $A(0,1)$ berechnet werden. Dazu führt man Polarkoordinaten mit Ursprung $(0,1)$ ein, d.h. $x = r \cdot \cos(\theta)$, $y = r \cdot \sin(\theta) + 1$.

Nun ist

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\psi}{\partial y} &= \frac{\partial\psi}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial y}\\
&= \frac{\partial\psi}{\partial r}\cdot\sin(\theta)+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\cdot\frac{1}{r}\cos(\theta) \qquad (4.6)\\
\frac{\partial\psi}{\partial x} &= \frac{\partial\psi}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}\\
&= \frac{\partial\psi}{\partial r}\cdot\cos(\theta)-\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\cdot\frac{1}{r}\sin(\theta). \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

Aus den Randbedingungen (4.2) ergibt sich dann:

$$
\begin{aligned}
y=1\ \Rightarrow\theta=0 \quad &\Rightarrow\quad \frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\ \Rightarrow\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=-1,\\
&\phantom{\Rightarrow}\quad \frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial r}\ \ \Rightarrow\frac{\partial\psi}{\partial r}=0,\\
x=0\ \Rightarrow\theta=-\frac{\pi}{2} \quad &\Rightarrow\quad \frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial r}\ \ \Rightarrow\frac{\partial\psi}{\partial r}=0,\\
&\phantom{\Rightarrow}\quad \frac{\partial\pi}{\partial x}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\ \Rightarrow\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r}=0.
\end{aligned}
$$

Schließlich muss noch der Laplace-Operator transformiert werden. Aus (4.6) und (4.7) ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\psi}{\partial r} &= \frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\cos(\theta)+\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\sin(\theta)\\
\frac{\partial\psi}{\partial\theta} &= -\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot r\sin(\theta)+\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot r\cos(\theta).
\end{aligned}
$$

Somit ist

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} &= \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\cdot\cos^2(\theta)+2\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\sin(\theta)\cos(\theta)+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\cdot\sin^2(\theta)\\
\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} &= \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\cdot r^2\sin^2(\theta)-2\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}r^2\sin(\theta)\cos(\theta)-\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot r\cos(\theta)\\
&\quad -\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot r\sin(\theta)+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\cdot r^2\cos^2(\theta)
\end{aligned}
$$

und es ergibt sich daraus für den Laplace-Operator

$$
\nabla^2\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}. \qquad (4.8)
$$

Der nichtlineare Operator $\vec{u} \cdot \nabla(\nabla^2 \psi)$ (siehe (4.3)) ist dann definiert durch:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \nabla(\nabla^2 \psi) &= \vec{u}_1 \frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 \psi) + \vec{u}_2 \frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 \psi) \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 \psi) - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 \psi). \end{aligned} \tag{4.9}$$

In Polarkoordinaten lassen sich die Navier-Stokes-Gleichungen nun wie folgt angeben:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\nabla^2 \psi) + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}(\nabla^2 \psi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(\nabla^2 \psi) = \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 \psi) - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 \psi) \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -1 \qquad (\theta = 0), \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0, \qquad (\theta = -\frac{\pi}{2}). \tag{4.12}$$

Es wird angenommen, dass die Lösung $\psi$ von (4.10) in eine Potenzreihe in $Re$ entwickelt werden kann, d.h.

$$\psi = \psi^{(1)} + Re\psi^{(2)} + Re^2\psi^{(3)} + \ldots \tag{4.13}$$

Für die $\psi^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$ gilt nach (4.1) folgender Ansatz:

$$\psi^{(k)} = r^k f_k(\theta) \quad \text{in } \Omega.$$

Damit ist

$$\nabla^2 \psi^{(k)} = r^{k-2}\left(k^2 f_k(\theta) + f_k''(\theta)\right) \tag{4.14}$$

$$\nabla^4 \psi^{(k)} = r^{k-4}\left(((k-1)^2 - 1)^2 f_k(\theta) + 2((k-1)^2 + 1) f_k''(\theta) + f_k^{(iv)}(\theta)\right). \tag{4.15}$$

$\psi^{(1)} = r \cdot f_1(\theta)$ ist dabei die Lösung des zugehörigen Stokes-Problems (4.4) (siehe auch (4.5)). Zur Entwicklung von $f_1(\theta)$ setzt man (4.15) in (4.4) ein und erhält:

$$f_1(\theta) + 2f_1''(\theta) + f_1^{(iv)}(\theta) = 0.$$

Aus den Randbedingungen (4.11) und (4.12) ergibt sich

$$f_1(0) = 0, \quad f_1'(0) = -1 \tag{4.16}$$

$$f_1\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad f_1'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0. \tag{4.17}$$

Für $f_1(\theta)$ ist also folgende gewöhnliche Differentialgleichung zu lösen:

$$f_1^{(iv)} + 2f_1'' + f_1 = 0, \quad f_1(0) = f_1\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad f_1'(0) = -1, \quad f_1'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0. \tag{4.18}$$

Nach der Theorie für gewöhnliche Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ergibt sich:

$$f_1(\theta) = A \cdot \cos(\theta) + B \cdot \sin(\theta) + C \cdot \theta \cos(\theta) + D \cdot \theta \sin(\theta). \tag{4.19}$$

Die Konstanten $A$, $B$, $C$ und $D$ ergeben sich aus den Randbedingungen (4.16) und (4.17):

$$A = 0, \quad B = -\frac{\pi^2/4}{\pi^2/4 - 1}, \quad C = \frac{1}{\pi^2/4 - 1}, \quad D = -\frac{\pi/2}{\pi^2/4 - 1},$$

und somit ist

$$f_1(\theta) = \frac{1}{\pi^2/4 - 1} \left( \theta \cos(\theta) - \frac{\pi}{2} \left( \frac{\pi}{2} + \theta \right) \sin(\theta) \right).$$

Auf die gleiche Weise kann $\psi$ auch in der Nähe der Ecke $B(1,1)$ berechnet werden. Auf die Herleitung der Funktionen für die Geschwindigkeit[2], den Druck und die Wirbelfunktion wird hier verzichtet und stattdessen auf den Anhang A verwiesen.

## 4.3 Methoden zur Subtraktion der Singularitäten

Nachdem im letzten Abschnitt die exakten Lösungen in den Ecken $A(0,1)$ und $B(1,1)$ für Druck, Geschwindigkeit, Strom- und Wirbelfunktion hergeleitet wurden, beschäftigt sich der nächste Abschnitt damit, wie man diese Singularitätenfunktionen subtrahieren kann, um ein Problem zu erhalten, in dem die Singularitäten sehr viel schwächer sind.
Im folgenden bezeichne $(\tilde{\vec{u}}, \tilde{p})$ den größten singulären Anteil, d.h. $(\vec{u}, p)$ ist darstellbar als

$$\vec{u} = \tilde{\vec{u}} + \bar{\vec{u}}, \quad p = \tilde{p} + \bar{p}. \tag{4.20}$$

$(\bar{\vec{u}}, \bar{p})$ ist also der glatte Anteil der Lösung, während sich $(\tilde{\vec{u}}, \tilde{p})$ aus den stationären Lösungen in der Nähe der Ecken $A$ und $B$ zusammensetzt, d.h.:

$$\tilde{\vec{u}} = \vec{u}^A + \vec{u}^B, \quad \tilde{p} = p^A + p^B. \tag{4.21}$$

Nachfolgend werden zwei Methoden zur Subtraktion des dominanten singulären Anteils vorgestellt.

### 4.3.1 Subtraktion des ersten Anteils: Die $NS1$-Methode

Bei der $NS1$-Methode wird nur der erste Anteil von (4.13) subtrahiert, d.h. man betrachtet

$$\psi^s = r \cdot f_1^s(\theta), \tag{4.22}$$

[2] Ergibt sich unmittelbar aus (3.13).

wobei $s = A, B$ die entsprechende Ecke angibt. Da $\psi^s$ die Lösung des zugehörigen Stokes-Problems (siehe (4.5)) ist, sind $\vec{u}^s = \vec{u}_1^s = (u_{11}^s, u_{21}^s)$ und $p^s = p_1^s$ für $s = A, B$ Lösungen der Stokes-Gleichung

$$\begin{aligned} -\frac{1}{Re}\nabla^2\vec{u}_1^s + \nabla p_1^s &= 0 && (4.23)\\ \nabla\cdot\vec{u}_1^s &= 0 && (4.24)\\ u_{11}^s = -1,\quad u_{21}^s &= 0,\ \text{wenn } y = 1 && (4.25)\\ u_{11}^s = 0,\quad u_{21}^s &= 0,\ \text{wenn } \begin{cases} x = 0 & \text{für } s = A,\\ x = 1 & \text{für } s = B. \end{cases} && (4.26) \end{aligned}$$

Setzt man nun $\vec{u} = \tilde{\vec{u}} + \bar{\vec{u}}$ in (2.1) und (2.2) ein und nutzt man die Gleichungen (4.23) - (4.26), so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\bar{\vec{u}}}{\partial t} - \frac{1}{Re}\nabla^2\bar{\vec{u}} + \nabla\bar{p} + K(\bar{\vec{u}}, \tilde{\vec{u}}) &= \tilde{F} && (4.27)\\ \nabla\cdot\bar{\vec{u}} &= 0, && (4.28) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} K(\bar{\vec{u}}, \tilde{\vec{u}}) &= (\bar{\vec{u}}\cdot\nabla)\bar{\vec{u}} + (\tilde{\vec{u}}\cdot\nabla)\bar{\vec{u}} + (\bar{\vec{u}}\cdot\nabla)\tilde{\vec{u}}, && (4.29)\\ \tilde{F} &= -(\tilde{\vec{u}}\cdot\nabla)\tilde{\vec{u}}. && (4.30) \end{aligned}$$

Somit erhält die neue rechte Seite $\tilde{F}$ den dominierenden singulären Anteil der Lösung. Auf der linken Seite enthält nur noch der nicht-lineare Operator $K$ den glatten und den singulären Anteil der Lösung. Dieser nicht-lineare Anteil kann wiederum mit den Methoden aus Abschnitt 2.4 behandelt werden. Es bleibt also ein Problem übrig, in dem nur noch der glatte Teil von $\vec{u}$, d.h. $\bar{\vec{u}}$, und der glatte Teil von $p$, d.h. $\bar{p}$, enthalten sind. Dieses Problem kann nun mit dem in Kapitel 2 vorgestellten Verfahren gelöst werden.
Die Randbedingungen lauten dann:

$$\begin{array}{rclrclll} \bar{\vec{u}}_1 &=& 1, & \bar{\vec{u}}_2 &=& 0, & x \text{ bel.}, y = 1, \\ \bar{\vec{u}}_1 &=& -\tilde{\vec{u}}_1, & \bar{\vec{u}}_2 &=& -\tilde{\vec{u}}_2, & x \text{ bel.}, y = 0, \\ \bar{\vec{u}}_1 &=& -u_{11}^B, & \bar{\vec{u}}_2 &=& -u_{21}^B, & x = 0,\ y \text{ bel.}, \\ \bar{\vec{u}}_1 &=& -u_{11}^A, & \bar{\vec{u}}_2 &=& -u_{21}^A, & x = 1,\ y \text{ bel.} \end{array} \qquad (4.31)$$

### 4.3.2 Subtraktion der ersten zwei Anteile: Die $NS2$-Methode

Bei der $NS2$-Methode wird, zusätzlich zum ersten Anteil, auch der zweite Anteil aus (4.13) subtrahiert, d.h. für $\psi$ betrachtet man

$$\psi^s = r\cdot f_1^s(\theta) + r^2\cdot f_2^s(\theta)\cdot Re. \qquad (4.32)$$

Die Ausdrücke für $f_2^s$, $\vec{u}_2^s$ und $p_2^s$ entnimmt man dem Anhang A.
Schreibt man $\vec{u}^s$ als $\vec{u}_1^s + r\,\vec{u}_2^s$, so erfüllt $\vec{u}_1^s$ die Gleichungen (4.23) - (4.26) und für $\vec{u}_2^s$ gilt:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{Re}\nabla^2\vec{u}_2^s + \nabla p_2^s + (\vec{u}_1^s\cdot\nabla)\vec{u}_1^{\,s} &= 0 && (4.33)\\ \nabla\cdot\vec{u}_2^s &= 0 && (4.34)\\ u_{12}^s = 0,\;\; u_{22}^s &= 0,\;\text{wenn } y = 1 && (4.35)\\ u_{12}^s = 0,\;\; u_{22}^s &= 0,\;\text{wenn } \begin{cases} x = 0 & \text{für } s = A,\\ x = 1 & \text{für } s = B.\end{cases} && (4.36)\end{aligned}$$

Analog zur $NS1$-Methode setzt man $\vec{u} = \tilde{\vec{u}} + \bar{\vec{u}}$ und $p = \tilde{p} + \bar{p}$ in (2.1) und (2.2) ein. Dies führt wieder zu den Gleichungen (4.27), (4.28), wobei $K(\bar{\vec{u}}, \tilde{\vec{u}})$ unverändert ist und $\tilde{F}$ sich ergibt zu:

$$\tilde{F} = -\left[(\vec{u}_1^A\cdot\nabla)\vec{u}_1^B + (\vec{u}_1^B\cdot\nabla)\vec{u}_1^A + \big((\vec{u}_1^A + \vec{u}_1^B)\cdot\nabla\big)\,(\vec{u}_2^A + \vec{u}_2^B) + \big((\vec{u}_2^A + \vec{u}_2^B)\cdot\nabla\big)\,\tilde{\vec{u}}\right] \quad (4.37)$$

Aus den Randbedingungen wird dann

$$\begin{array}{rclrclll} \bar{\vec{u}}_1 &=& 1, & \bar{\vec{u}}_2 &=& 0, & x \text{ bel.}, y = 1, & \\ \bar{\vec{u}}_1 &=& -\tilde{\vec{u}}_1, & \bar{\vec{u}}_2 &=& -\tilde{\vec{u}}_2, & x \text{ bel.}, y = 0, & \\ \bar{\vec{u}}_1 &=& -u_{11}^B - u_{12}^B, & \bar{\vec{u}}_2 &=& -u_{21}^B - u_{22}^B, & x = 0,\; y \text{ bel.}, & (4.38)\\ \bar{\vec{u}}_1 &=& -u_{11}^A - u_{12}^A, & \bar{\vec{u}}_2 &=& -u_{21}^A - u_{22}^A, & x = 1,\; y \text{ bel.} & \end{array}$$

## 4.4 Numerische Lösungen des Driven-Cavity-Problems mit Singularitäten

Im folgenden soll das Driven-Cavity-Problem mit Singularitäten in den Ecken (siehe Abbildung 4.1) mit dem hier vorgestellten Verfahren mit staggered grids gelöst werden. $\tilde{\vec{u}}$ und $\tilde{p}$ wurden dabei mittels der Funktionen aus Anhang A exakt berechnet, ebenso wie die entsprechenden Anteile der Strom- und der Wirbelfunktion $\tilde{\omega}$ und $\tilde{\psi}$ mit

$$\begin{aligned} \omega &= \tilde{\omega} + \bar{\omega}\\ \psi &= \tilde{\psi} + \bar{\psi}. \end{aligned}$$

Der glatte Anteil $\bar{\omega}$ kann dann bestimmt werden durch

$$\bar{\omega} = \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial y},$$

und der glatte Anteil der Stromfunktion, also $\bar{\psi}$, ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \nabla^2\bar{\psi} &= -\bar{\omega} && \text{in } \Omega,\\ \bar{\psi} &= -\tilde{\psi} && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Als Abbruchkriterium wählt man

$$\frac{\max\limits_{i,j} \left|\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^{n}\right|}{\triangle t \cdot \max\limits_{i,j} \left|\phi_{i,j}^{n+1}\right|} \leq \epsilon, \tag{4.39}$$

mit $\phi = (\vec{u}_1,\ \vec{u}_2)$.
Die Resultate werden mit der Methode von Botella (siehe [4]) verglichen, wo (wie bei der Vergleichsmethode aus Abschnitt 3.4) keine staggered grids verwendet werden.

### 4.4.1 Der Stokes-Fall

Zuerst soll der Stokes-Fall betrachtet werden, d.h. in (2.1) fällt der konvektive Anteil weg und es ist $Re = 1$. Ferner wird das hier beschriebene Verfahren mit staggered grids sowie die $NS1$-Methode verwendet, d.h. es wird der größte singuläre Anteil subtrahiert. $\epsilon$ sei gewählt zu $10^{-8}$.
Tabelle 4.1 zeigt den Wert der Stromfunktion an der Stelle $(0, 0.95)$, nahe der Ecke $A(0, 1)$. Dabei errechnet man $\tilde{\omega}(0, 0.95)$ mittels der Darstellung aus Anhang A.
Die Berechnung von $\bar{\omega}(0, 0.95)$ erfolgt nach den Gleichungen (1.4) - (1.6), d.h. es ist

$$\bar{\omega}(0, x_j) = \sum_{k=0}^{N} \hat{\omega}_k T_k(x_j)$$

mit f

$$\hat{\omega}_k = \frac{1}{\gamma_k} \sum_{j=0}^{N} \bar{\omega}(0, x_j) T_k(x_j) w_j \quad \text{ und } \gamma_k = \sum_{j=0}^{N} T_k^2(x_j)\omega_j.$$

$\bar{\omega}(0, 0.95)$ erhält man also, indem man $\bar{\omega}(0, y)$ mittels der Tschebyscheff-Basen $T_l(y)$ errechnet.

| $N$ | $\omega(0, 0.95)$ | $\omega(0, 0.95)$ aus [4] | $\omega(0, 0.95)$ exakt |
|---|---|---|---|
| 12 | $-27.27899$ | $-27.27894$ | $-27.25908$ |
| 16 | $-27.27871$ | $-27.27898$ | $-27.25908$ |
| 24 | $-27.27910$ | $-27.27903$ | $-27.25908$ |
| 32 | $-27.27899$ | | $-27.25908$ |

Tabelle 4.1: Wert der Wirbelfunktion an $(0, 0.95)$ im Stokes-Fall

In Abbildung 4.2 sind die Stromlinien und die Wirbelfunktion für $N = 32$ im Stokes-Fall zu sehen. In Abbildung 4.3 ist die entsprechende Stromfunktion für $N = 32$ abgebildet.

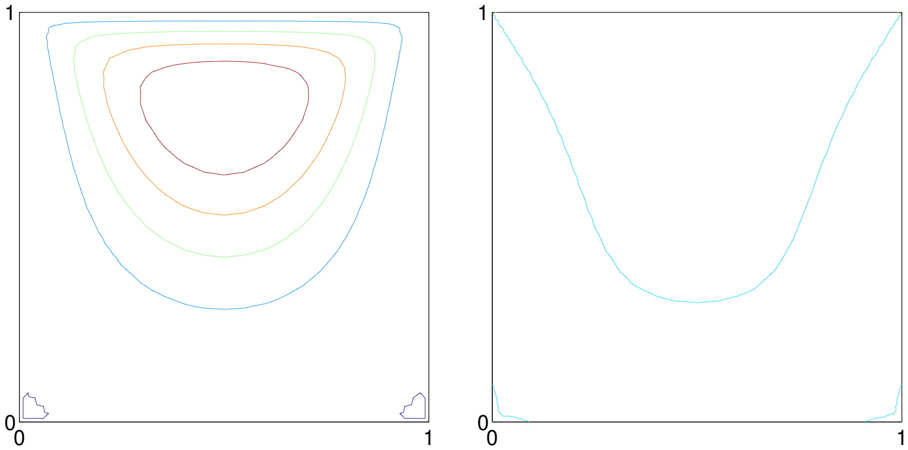


Abbildung 4.2: Stromlinien (links) und Wirbelfunktion (rechts) für $N = 32$ im Stokes-Fall

### 4.4.2 Der Navier-Stokes-Fall

Im folgenden sollen die Navier-Stokes Differentialgleichungen für $Re = 100$ gelöst werden. Für mehr Stabilität verwendet man an dieser Stelle die $NS2$-Methode. Ähnlich wie im Stokes-Fall wird der Wert der Wirbelfunktion $\omega$ an der Stelle $(0, 0.95)$ angegeben (siehe Tabelle 4.2). Um eine höhere Genauigkeit am Rand zu erzielen, soll dabei für $\omega$ ein sogenannter Filterungsprozess durchgeführt werden. Dazu wird folgende Definition eingeführt (siehe auch [31]).

**Definition 4.1** *Jede gerade $C^\infty$-Funktion $\sigma$ mit dem Träger $[-1, 1]$ und $\sigma(0) = 1$ wird Filter genannt.*

Sind zusätzlich folgende Bedingungen erfüllt

$$\sigma_q(0) = 1, \tag{4.40}$$
$$\sigma_q^{(m)}(0) = 1, \quad m = 1, 2, \dots, q-1 \tag{4.41}$$
$$\sigma_q^{(m)}(1) = 0, \quad m = 0, 1, \dots, q-1, \tag{4.42}$$

so nennt man $\sigma_q$ einen Filter der Ordnung $q$, wobei $\sigma_q^{(m)}$ die $m$-te Ableitung von $\sigma_q$ bezeichnet.
Ist nun

$$u_{\sigma_q}(x) = \sum_{k=-N}^{N} \sigma(k/N) \hat{u}_k e^{ikx},$$

wobei $\{\hat{u}_k, \quad k = -N, \dots, N\}$ die Fourierkoeffizienten sind, so gilt (siehe [31]):

$$|u(x) - u_{\sigma_q}(x)| \leq \frac{c}{|x - x_0|^{q-1} N^{q-1}}, \quad c > 0.$$

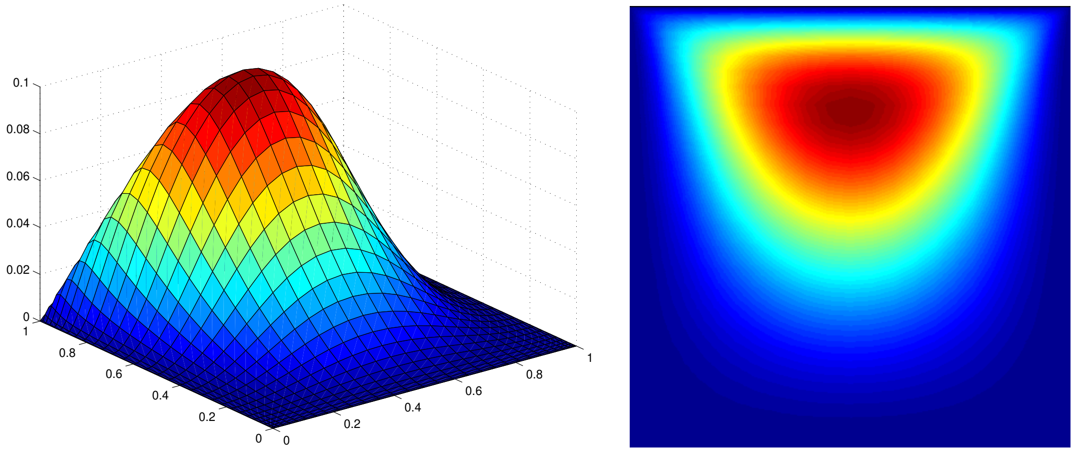


Abbildung 4.3: Stromfunktion für $N = 32$ im Stokes-Fall

Mit den Bedingungen (4.40) - (4.42) hat Vandeven [31] folgenden Filter definiert:

$$\sigma_q(x) = 1 - \frac{(2q-1)!}{(q-1)!^2} \int_0^x [t(1-t)]^{q-1} dt. \tag{4.43}$$

Diesen Filter kann man auch auf eine Entwicklung nach Tschebyscheff-Polynomen anwenden. Somit ergibt sich für den Filterungsprozess von $\bar{\omega}$ in einem Punkt $(0, y_c)$:

$$\sum_{k=0}^{N} \sigma_q(k/N) \hat{\bar{\omega}}_k T_k(y_c), \tag{4.44}$$

wobei die $\hat{\bar{\omega}}_k$ das Spektrum von $\bar{\omega}(0, y)$ durchlaufen. Zur Vergleichbarkeit mit den Ergebnissen aus [4] werden die Filter $\sigma_{10}$ und $\sigma_{12}$ verwendet.
Ferner wird der Wert von $\omega$ an der Stelle $(0.5, 0.5)$ (siehe Tabelle 4.3) mit den entsprechenden Werten von [4] verglichen (dort wurde die Geschwindigkeit durch ein Polynom $N$-ten Grades und der Druck durch ein Polynom $(N-2)$-ten Grades approximiert, wobei keine staggered grids verwendet wurden).
Interessant ist auch noch das Verhalten der Geschwindigkeit an den Achsen zu $x = 0.5$ und $y = 0.5$. Die Extremwerte dieser Geschwindigkeiten sind in Tabelle 4.4 aufgeführt.

| | hier | | | Ref. [4] | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $N$ | $\omega$ ungefiltert | $\omega$, Filter $\sigma_{10}$ | $\omega$, Filter $\sigma_{12}$ | $\omega$ ungefiltert | $\omega$, Filter $\sigma_{10}$ | $\omega$, Filter $\sigma_{12}$ |
| 12 | −35.86210 | −35.71341 | −35.72445 | | | |
| 16 | −36.40664 | −35.98261 | −35.99313 | −36.61642 | −35.87454 | −35.88648 |
| 24 | −35.98521 | −36.08015 | −36.08483 | −35.88211 | −36.09106 | −36.09639 |
| 32 | −36.09436 | −36.08126 | −36.08182 | −36.13314 | −36.08042 | −36.08073 |
| 48 | −36.08085 | −36.07724 | −36.07696 | −36.08094 | −36.07734 | −36.07715 |

Tabelle 4.2: Wert der Wirbelfunktion an $(0, 0.95)$ im Navier-Stokes-Fall zu $Re = 100$ ungefiltert und gefiltert

| $N$ | $\omega(0.5, 0.5)$ | $\omega(0.5, 0.5)$ aus [4] |
|---|---|---|
| 12 | 1.15633 | |
| 16 | 1.17201 | 1.17351 |
| 24 | 1.17405 | 1.17438 |
| 32 | 1.17432 | 1.17441 |
| 48 | 1.17440 | 1.17441 |

Tabelle 4.3: Wert der Wirbelfunktion an $(0.0, 0.5)$ im Navier-Stokes-Fall zu $RE = 100$

| $N$ | $u_{1,max}$ | $y_{max}$ | $u_{2,max}$ | $x_{max}$ | $u_{2,min}$ | $x_{min}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 0.213332 | 0.4562 | 0.179932 | 0.7657 | −0.252998 | 0.1890 |
| 16 | 0.213964 | 0.4572 | 0.179407 | 0.7619 | −0.253865 | 0.1897 |
| 24 | 0.214095 | 0.4587 | 0.179583 | 0.7624 | −0.253802 | 0.1890 |
| 32 | 0.214048 | 0.4582 | 0.179583 | 0.7634 | −0.253827 | 0.1895 |
| 48 | 0.214043 | 0.4585 | 0.179576 | 0.7620 | −0.253813 | 0.1898 |

Tabelle 4.4: Extremwerte der Geschwindigkeit an den Achsen $x = 0.5$ und $y = 0.5$ für $RE = 100$

Für $N = 48$ und $RE = 100$ ist die Strom- und die Wirbelfunktion in Abbildung 4.4 und für $N = 48$ und $RE = 1000$ ist die Strom- und die Wirbelfunktion in Abbildung 4.6 zu sehen.
All diese numerischen Resultate zeigen, dass auch im Falle von Singularitäten das hier vorgestellte Splitting sehr gute Resultate liefert.

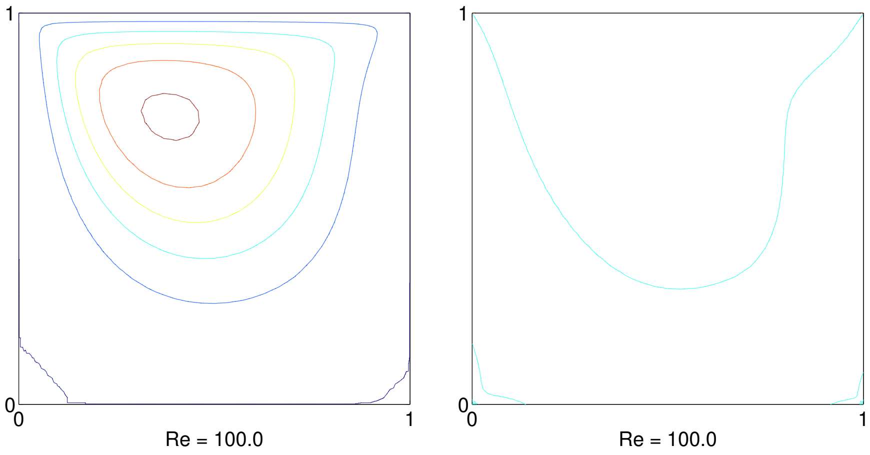


Abbildung 4.4: Stromlinien (links) und Wirbelfunktion (rechts) für $N = 48$ und $Re = 100$

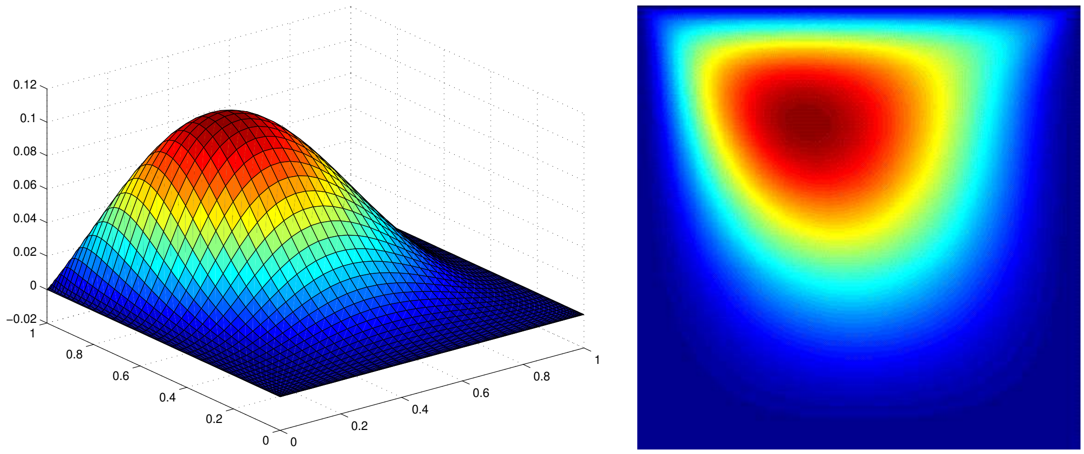


Abbildung 4.5: Stromfunktion für $N = 48$ und $Re = 100$

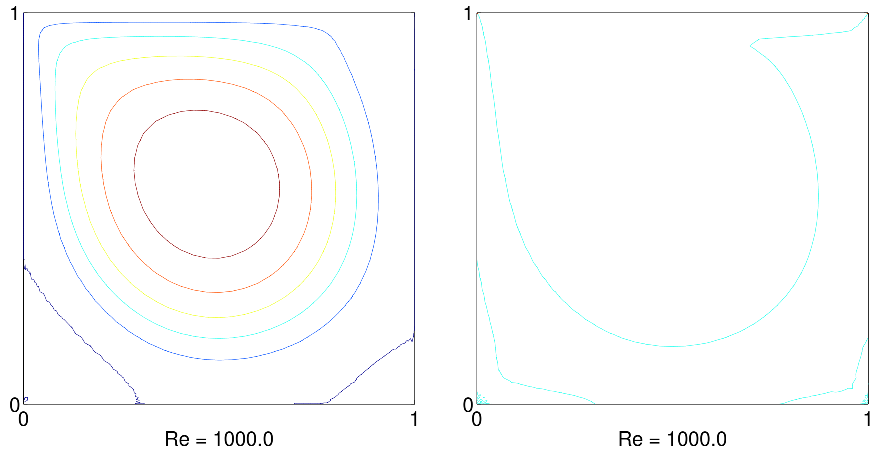


Abbildung 4.6: Stromlinien (links) und Wirbelfunktion (rechts) für $N = 48$ und $Re = 1000$

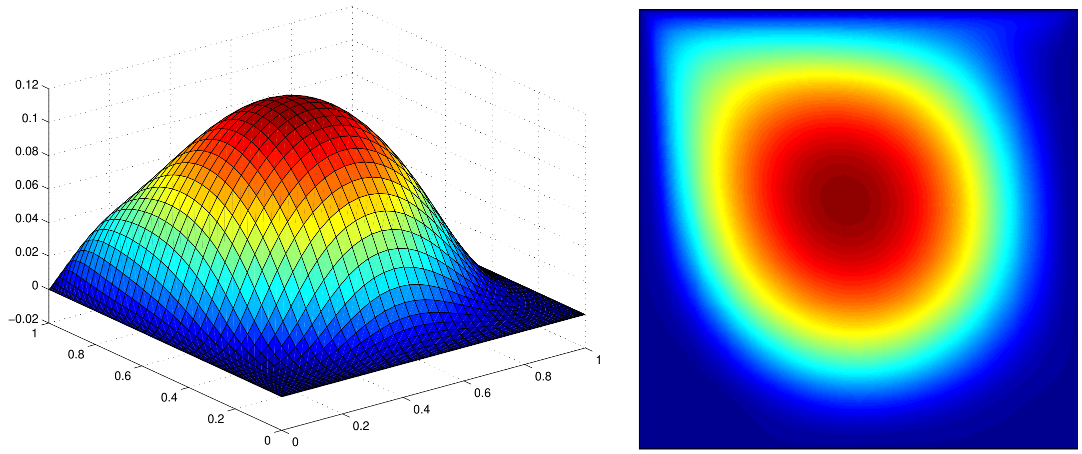


Abbildung 4.7: Stromfunktion für $N = 48$ und $Re = 1000$

# Kapitel 5

# Der Wärmetransport

Strömungen, die bisher betrachtet wurden, und zudem noch temperaturabhängig sind, werden durch die sogenannte Boussinesq-Approximation beschrieben. Vor einer näheren Betrachtung der zugrundeliegenden Gleichungen werden einige wesentliche Eigenschaften erläutert.

## 5.1 Allgemeines über den Wärmeübergang

Neben die bisherigen Stoffwerte eines Fluids (Dichte und Zähigkeit, siehe Abschnitt 2.1) treten nun noch weitere: die Wärmeleitfähigkeit und die spezifische Wärme. All diese Stoffwerte sind dabei temperaturabhängig, was eine exakte theoretische Behandlung des Wärmeübergangs erheblich erschwert.
Deshalb sollen im folgenden einige Vereinfachungen getroffen werden. Zum einen sollen nur sehr kleine Temperaturunterschiede behandelt werden. Dies hat den Vorteil, dass die oben genannten Stoffwerte wiederum als konstant angesehen werden können. Zusätzlich sollen nur kleine bis mäßige Geschwindigkeit vorausgesetzt werden. Dies hat zur Folge, dass die bei hohen Geschwindigkeiten auftretenden Reibungs- und Kompressionsarbeiten sowie Dichteänderungen außer acht gelassen werden können.
Unter diesen vereinfachten Annahmen unterscheidet man zwei Fälle:

1. **erzwungene Konvektion:** Hierbei befasst man sich mit Strömungen, die durch äußere Ursachen erzeugt sind und von denen angenommen wird, dass die Geschwindigkeiten darin genauso verlaufen, wie es ohne Temperaturunterschiede der Fall wäre. Gesucht ist dabei zunächst nur das Temperaturfeld, das unter Wärmeleitung und Konvektion entsteht. Aus diesem Temperaturfeld entsteht dann auch die übertragene Wärmemenge.

2. **natürliche Konvektion:** Hierbei handelt es sich um Strömungen, die von der Schwerkraft durch die Wärmeausdehnung hervorgebracht werden und zwar unter

der Annahme, dass keine weiteren Bewegungsursachen vorliegen. Dabei ist das Geschwindigkeitsfeld gleichzeitig mit dem Temperaturfeld zu bestimmen.

Im folgenden sollen nur Strömungen, die durch natürliche Konvektion hervorgerufen werden, betrachtet werden. Neben der in Abschnitt 2.1 eingeführten Reynoldszahl spielen weitere Kenngrößen eine tragende Rolle. Eine dieser Kenngrößen ist die sogenannte *Prandtl*-Zahl ($Pr$). Diese Zahl stellt das Verhältnis aus kinematischer Zähigkeit und Temperaturleitfähigkeit dar. Die Prandtl-Zahl ist eine reine Stoffgröße und deshalb werden kurz ein paar typische Zahlenwerte angegeben.

| Fluid | $Pr$ |
|---|---|
| Luft | 0.71 |
| Gase | Näherungswert 1 |
| Wasser | 14 (bei 0° C) |
| | 7 (bei 20° C) |
| | 1 (bei 200° C) |
| Transformatorenöl | 480 (bei 20° C) |
| Quecksilber | 0.02 (bei 20° C) |

Tabelle 5.1: Fluide mit ihren entsprechenden Prandtl-Zahlen (siehe auch [26]).

Wie schon anhand Tabelle 5.1 zu erkennen, ist bei Wärmeübergangsproblemen die Untersuchung der Grenzfälle $Pr \to \infty$ und $Pr \to 0$ nicht nur von theoretischem, sondern auch von großem praktischen Interesse.
Eine weitere wichtige Kenngröße ist die sogenannte *Rayleigh*-Zahl ($Ra$), die für die Stabilität natürlicher Konvektionsströmungen maßgebend ist. Strömungen bei natürlicher Konvektion sind oft laminar, da die Geschwindigkeiten hinreichend klein sind. Dies ist dann der Fall, wenn die Rayleigh-Zahl $< 10^8$ bleibt. Bei $Ra > 10^{10}$ ist eine turbulente Strömung zu erwarten; bei $10^8 \leq Ra \leq 10^{10}$ liegt ein Übergangsgebiet.
Das einfachste Beispiel für eine durch natürliche Konvektion entstehende Strömung ist ein Behälter, in dem das Fluid über die eine Seitenwand erwärmt und über die gegenüberliegende Seitenwand gekühlt wird. Durch die Erwärmung an der einen Wand dehnt sich das Fluid aus und steigt nach oben. An der anderen Wand zieht sich das Fluid durch die Kühlung wieder zusammen und sinkt daher ab. Ein derartiges Beispiel wird in Abschnitt 5.3 betrachtet.

## 5.2 Die Boussinesq-Approximation

Im folgenden wird die Boussinesq-Approximation betrachtet. Der Name "Approximation" liegt darin begründet, dass man, wie schon im letzten Abschnitt erläutert, vereinfachende Annahmen trifft, um das Problem des Wärmeübergangs in den Griff zu bekommen.

Zugrunde liegen die Navier-Stokes Differentialgleichungen, die zudem noch temperaturabhängig sind:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{Re}\nabla^2 u + \nabla p + (u \cdot \nabla)\, u &= -\frac{Ra}{Re^2 Pr}\,\vec{g}\; T \text{ in } \Omega, && (5.1)\\
\nabla \cdot u &= 0 \text{ in } \Omega, && (5.2)\\
\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{Re\ Pr}\nabla^2 T + (u \cdot \nabla)\, T &= 0 \text{ in } \Omega, && (5.3)\\
u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega, && (5.4)\\
T_{|\Gamma_D} = T_D \quad &, \qquad T_{|\Gamma_N} = T_N. && (5.5)
\end{aligned}$$

Die wichtigen Kenngrößen $Ra$ (Rayleigh-Zahl) und $Pr$ (Prandtl-Zahl) wurden im letzten Abschnitt erläutert. $Re$ ist wiederum die Reynoldszahl und es soll $Re = \frac{\sqrt{Ra}}{Pr}$ sein.
Gleichung (5.1) unterscheidet sich von Gleichung (2.1) formal lediglich durch die rechte Seite. Während eine Strömung wie in (2.1) von äußeren Kräften abhängig ist, ist eine Stömung der in (5.1) beschriebenen Art lediglich von der Temperatur $T$ und der Gravitationskraft $\vec{g}$ abhängig. Im Gegensatz zu (2.3) soll nun $u = 0$ auf $\partial\Omega$ (siehe (5.4)) gelten, denn die Geschwindigkeit der Strömung wird nur durch Temperaturunterschiede beeinflusst, da hier ausschließlich natürliche Konvektionen betrachtet werden sollen. Zu den Navier-Stokes-Gleichungen für inkompressible Strömungen kommen nun noch zwei Gleichungen hinzu, die das Verhalten der Temperatur beschreiben ( (5.3) und (5.5)). Dabei ist $\partial\Omega = \Gamma_D + \Gamma_N$ aufgeteilt in $\Gamma_D$, der Teil des Randes, an dem Dirichlet-Randbedingungen erfüllt sein sollen, und in $\Gamma_N$, an dem Neumann-Randbedingungen angenommen werden sollen.
Im folgenden soll nun ein Splitting für die Boussinesq-Approximation vorgestellt werden. Dabei soll das in Abschnitt 2.4 vorgestellte Splitting für die Navier-Stokes-Gleichungen geeignet erweitert werden. Der konvektive Anteil soll dabei, wie in Abschnitt 2.4.1 erläutert, explizit behandelt werden. Auch hier ist allerdings wieder eine implizite Behandlung denkbar. In Gleichung (5.1) soll die Temperatur $T$ durch die Temperatur $T^n$ (also die im $n$-ten Zeitschritt berechnete Temperatur) approximiert werden, d.h. die Temperatur wird explizit behandelt. Es wäre auch denkbar, die Temperatur, ähnlich wie den Druck, zu extrapolieren. Es hat sich aber in den numerischen Berechnungen gezeigt, dass dies ein hoher Mehraufwand wäre, der keine besseren numerischen Resultate liefert. Für die Zeitdiskretisierung in (5.3) wählt man ebenfalls eins der BDF-Verfahren, die schon in Abschnitt 2.2 erläutert wurden.
Für die pseudospektrale Diskretisierung der Boussinesq-Approximation fehlt somit nur noch der entsprechende Ableitungsoperator für die Temperatur. Wie auch die Geschwindigkeit soll die Temperatur an den Gauß-Lobatto-Knoten $(x_i, y_j) = \left(\cos\frac{i\pi}{N}, \cos\frac{j\pi}{N}\right)$, $i, j = 0, \ldots, N$ betrachtet werden. Somit erhält man für die erste Ableitung:

$$T'(x_j) \cong (D_T T)_j, \quad j = 0, \ldots, N, \tag{5.6}$$

wobei $D_T \in \mathbb{R}^{N+1,N+1}$. Für die zweite Ableitung ergibt sich:

$$T''(x_j) \cong ((D_T)^2 T)_j, \quad j = 0, \ldots, N, \tag{5.7}$$

mit $(D_T)^2 \in \mathbb{R}^{N+1,N+1}$.
Da sowohl die erste als auch die zweite Ableitung wiederum an den Gauß-Lobatto-Knoten betrachtet wird, muss man für den 2-dimensionalen Fall (im Gegensatz zur Geschwindigkeit und zum Druck) keine Transformationen berücksichtigen. Somit erhält man im 2-dimensionalen Fall für die Temperatur $T$ folgende Ableitungsoperatoren:

$$\frac{\partial}{\partial x} : \; D_{T,x} = D_T \otimes I, \quad \frac{\partial}{\partial y} : \; D_{T,y} = I \otimes D_T,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} : \; D_{T,xx} = (D_T)^2 \otimes I, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} : \; D_{T,yy} = I \otimes (D_T)^2,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} : \; D_{T,\triangle} = (D_{T,xx} + D_{T,yy}).$$

Mit diesen Bezeichnungen und mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 2.3 lautet die pseudospektrale Diskretisierung der Boussinesq-Approximation:

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{1}{Re} D^0_{\triangle} + \beta_0 \frac{1}{\triangle t}\right) \tilde{u}_i^{n+1} &= \tilde{f}_i^{n+1} \quad \text{in } \Omega && (5.8)\\
\tilde{u}_i^{n+1} &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad i = 1, 2 && (5.9)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\beta_0 \frac{1}{\triangle t} u_1^{n+1} + D_{x,GL} p^{n+1} &= g_1^{n+1} \quad \text{in } \Omega, && (5.10)\\
\beta_0 \frac{1}{\triangle t} u_2^{n+1} + D_{y,GL} p^{n+1} &= g_2^{n+1} \quad \text{in } \Omega, && (5.11)\\
D^0_{x,G} u_1^{n+1} + D^0_{y,G} u_2^{n+1} &= 0 \quad \text{in } \Omega && (5.12)\\
u_1^{n+1} = u_2^{n+1} &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, && (5.13)\\
\left(-\frac{1}{Re \cdot Pr} D_{T,\triangle} + \beta_0 \frac{1}{\triangle t}\right) T^{n+1} &= h^{n+1} \quad \text{in } \Omega, && (5.14)\\
T^{n+1}_{|\Gamma_D} &= T_D, && (5.15)\\
T^{n+1}_{|\Gamma_N} &= T_N, && (5.16)\\
(D^0_{x,G} D_{x,GL} + D^0_{y,G} D_{y,GL}) p^{n+1} &= D^0_{x,G} g_1^{n+1} + D^0_{y,G} g_2^{n+1}, && (5.17)
\end{aligned}$$

wobei

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}^{n+1} &= -\frac{Ra}{(Re)^2\ Pr}\vec{g}T^n - \left(u_e^{n+1}\cdot\nabla\right)u_e^{n+1} - \nabla\bar{p}_l^{n+1} - \frac{1}{\triangle t}\sum_{m=1}^{k}\beta_m u^{n+1-m},\\
g_1^{n+1} &= \beta_0\frac{1}{\triangle t}\tilde{u}_1^{n+1} + D_{x,GL}\bar{p}_l^{n+1},\\
g_2^{n+1} &= \beta_0\frac{1}{\triangle t}\tilde{u}_2^{n+1} + D_{y,GL}\bar{p}_l^{n+1},\\
h^{n+1} &= -\left(u^{n+1}\cdot\nabla\right)T^n + \frac{1}{\triangle t}\sum_{m=1}^{k}\beta_m T^{n+1-m}.
\end{aligned}
$$

Damit ist zuerst durch die Gleichung (5.8) und (5.9) die Zwischengeschwindigkeit $\tilde{u}$ zu bestimmen. Mit Gleichung (5.17) kann man dann den Druck berechnen und Gleichungen (5.10) - (5.13) liefern somit das Ergebnis für die Geschwindigkeit. Anschliessend ist aus den Gleichungen (5.14) - (5.16) die Temperatur berechenbar.

## 5.3 Ein Beispiel

Als ein Beispiel für temperaturgetriebene Strömungen soll die Ausbildung einer natürlichen Konvektionsströmung bei beheizten Seitenwänden und adiabatischen Wänden (d.h. es geschieht kein Wärmeaustausch über diese Wände) oben und unten dienen. Abbildung 5.1 verdeutlicht dieses Problem:

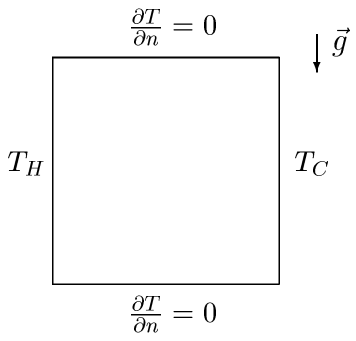


Abbildung 5.1: Schematische Darstellung des Driven-Cavity Problems mit beheizten Seitenwänden

$T_H$ soll dabei eine beheizte Wand sein, $T_C$ ist die gekühlte Wand, d.h. es sollen folgende

Randbedingungen gelten:

$$\begin{aligned} u &= 0, \quad \text{auf } \partial\Omega, \\ T_H &= 0.5, \quad T_C = -0.5 \\ \frac{\partial T}{\partial n} &= 0 \quad \text{für } y = 0 \text{ und } y = 1. \end{aligned}$$

Es ist zu erwarten, dass das Fluid an der beheizten Wand $T_H$ aufsteigt und an der gekühlten Wand $T_C$ wieder absinkt. Durch den Temperaturunterschied wird das Fluid also in Bewegung gesetzt.
Dieses Problem soll für die Prandtlzahl $Pr = 0.71$ betrachtet werden, d.h. es handelt sich um Luft (siehe Tabelle 5.1). Für verschiedene Rayleigh-Zahlen und verschiedene $N$ werden folgende Größen angegeben:

| | | |
|---|---|---|
| $\lvert\psi\rvert_{mid}$ | : | absoluter Wert der Stromfunktion im Mittelpunkt des Quadrats, |
| $\lvert\psi\rvert_{max}$ | : | größter absoluter Wert der Stromfunktion im ganzen Gebiet, |
| $u_{1,max}$ | : | Max. horizontaler Wert für $x = 0.5$ mit Angabe der Position, |
| $u_{2,max}$ | : | Max. vertikaler Wert für $y = 0.5$ mit Angabe der Position. |

Neben dem Geschwindigkeitsfeld ist es nun auch von Interesse, die Temperaturverteilung und den Transport der Wärmemenge graphisch darzustellen. Für das Temperaturfeld kann man wieder die Höhenlinien verwenden. Ferner konstruiert man die sogenannte Wärmefunktion $H$. Dies geschieht über:

$$\frac{\partial H}{\partial y} = u_1 T - 2\frac{\partial T}{\partial x}, \tag{5.18}$$

$$-\frac{\partial H}{\partial x} = u_2 T - 2\frac{\partial T}{\partial y}. \tag{5.19}$$

Da es sich in dem hier vorliegenden Fall um beheizte Seitenwände handelt, liegt ein lokaler Wärmefluss in horizontaler Richtung vor, und somit muss nur noch (5.18) betrachtet werden. Es sei im folgenden $Q := \frac{\partial H}{\partial y}$.
Mit Hilfe dieser Funktion werden nun noch einige charakteristische Größen eingeführt, die man auch Nusselt-Zahlen nennt:

$\overline{Nu} := \frac{1}{4}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 Q(x,y)dxdy$ : durchschnittliche Nusselt-Zahl über das ganze Gebiet,

$Nu_{\frac{1}{2}} := \frac{1}{2}\int\limits_0^1 Q(0.5,y)dy$ : durchschnittliche Nusselt-Zahl für $x = 0$,

$Nu_0 := \frac{1}{2}\int\limits_0^1 Q(0,y)dy$ : durchschnittliche Nusselt-Zahl am vertikalen Rand des Quadrats für $x = 0$,

$N_{max} := \max\{|Q(0,y)| \ : \ y \in [0,1]\}$ : maximaler Wert der lokalen Nusselt-Zahl am Rand für $x = 0$ (zusammen mit der Position),

$N_{min} := \min\{|Q(0,y)| \ : \ y \in [0,1]\}$ : minimaler Wert der lokalen Nusselt-Zahl am Rand für $x = 0$ (zusammen mit der Position).

Alle auftauchenden Integrale werden mit der Clenshaw-Curtis Quadratur gelöst (siehe [8]).
Für dieses Testbeispiel wurde in den 80er Jahren eine Benchmark-Lösung aufgestellt. Diese Lösung kam zustande, indem ca. 40 Mathematiker gebeten wurden, dieses Problem zu behandeln. Als Kriterien dienten die oben angegebenen Nusselt-Zahlen. Jeder dieser Mathematiker löste dieses Problem mit den unterschiedlichsten Methoden. Die nachfolgenden Tabellen liefern die mit der hier vorgestellten Methode berechneten Nusselt-Zahlen, sowie weitere ausgewählte Punkte. Ferner wurde die hier vorgestellte Splitting-Methode auch für die $N$, $N-2$-Methode auf die Boussinesq-Approximation übertragen und implemetiert. Auch in diesem Fall wurden gute Ergebnisse erzielt und sind den nachfolgenden Tabellen zu entnehmen. Die Benchmark-Lösung steht dazu im Vergleich in Tabelle 5.8.

| $N$ | $\lvert\psi\rvert_{mid}$ | $\lvert\psi\rvert_{max}$ | $u_{1,max}$ | $u_{2,max}$ | $\overline{N}u$ | $Nu_{\frac{1}{2}}$ | $Nu_0$ | $Nu_{max}$ | $Nu_{min}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 1.1743 | 1.1743 | 3.6517 | 3.6987 | 1.1178 | 1.1169 | 1.1177 | 1.5043 | 0.6911 |
| | | $(0.5, 0.5)$ | 0.8130 | 0.1784 | | | | | |
| 12 | 1.1746 | 1.1746 | 3.6494 | 3.6974 | 1.1178 | 1.1178 | 1.1178 | 1.5057 | 0.6913 |
| | | $(0.5, 0.5)$ | 0.8132 | 0.1783 | | | | | |
| 16 | 1.1746 | 1.1746 | 3.6494 | 3.6974 | 1.1178 | 1.1178 | 1.1178 | 1.5063 | 0.6913 |
| | | $(0.5, 0.5)$ | 0.8132 | 0.1783 | | | | | |
| 20 | 1.1746 | 1.1746 | 3.6494 | 3.6974 | 1.1178 | 1.1178 | 1.1178 | 1.5062 | 0.6913 |
| | | $(0.5, 0.5)$ | 0.8132 | 0.1783 | | | | | |

Tabelle 5.2: Resultate für $Ra = 10^3$ mit der $N$, $N-1$-Methode (staggered grids)

| $N$ | $\lvert\psi\rvert_{mid}$ | $\lvert\psi\rvert_{max}$ | $u_{1,max}$ | $u_{2,max}$ | $\overline{N}u$ | $Nu_{\frac{1}{2}}$ | $Nu_0$ | $Nu_{max}$ | $Nu_{min}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 1.1742 | 1.1742 | 3.6533 | 3.7052 | 1.1179 | 1.1231 | 1.1172 | 1.5098 | 0.6945 |
| | | $(0.5, 0.5)$ | 0.8131 | 0.1778 | | | | | |
| 12 | 1.1746 | 1.1746 | 3.6495 | 3.6973 | 1.1178 | 1.1178 | 1.1177 | 1.5056 | 0.6912 |
| | | $(0.5, 0.5)$ | 0.8132 | 0.1783 | | | | | |
| 16 | 1.1746 | 1.1746 | 3.6495 | 3.6974 | 1.1178 | 1.1178 | 1.1178 | 1.5063 | 0.6913 |
| | | $(0.5, 0.5)$ | 0.8132 | 0.1783 | | | | | |
| 20 | 1.1746 | 1.1746 | 3.6495 | 3.6974 | 1.1178 | 1.1178 | 1.1178 | 1.5062 | 0.6913 |
| | | $(0.5, 0.5)$ | 0.8132 | 0.1783 | | | | | |

Tabelle 5.3: Resultate für $Ra = 10^3$ mit der $N$, $N-2$-Methode

| $N$ | $\lvert\psi\rvert_{mid}$ | $\lvert\psi\rvert_{max}$ | $u_{1,max}$ | $u_{2,max}$ | $\overline{N}u$ | $Nu_{\frac{1}{2}}$ | $Nu_0$ | $Nu_{max}$ | $Nu_{min}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 5.0461 | 5.0461 | 16.1450 | 19.4325 | 2.2387 | 2.2211 | 2.2008 | 3.4146 | 0.6027 |
| | | $(0.5, 0.5)$ | 0.8237 | 0.1227 | | | | | |
| 12 | 5.0749 | 5.0749 | 16.1870 | 19.6161 | 2.2450 | 2.2460 | 2.2475 | 3.5386 | 0.5837 |
| | | $(0.5, 0.5)$ | 0.8231 | 0.1190 | | | | | |
| 16 | 5.0736 | 5.0736 | 16.1833 | 19.6275 | 2.2448 | 2.2447 | 2.2446 | 3.5305 | 0.5850 |
| | | $(0.5, 0.5)$ | 0.8232 | 0.1189 | | | | | |
| 20 | 5.0736 | 5.0736 | 16.1833 | 19.6281 | 2.2448 | 2.2448 | 2.2448 | 3.5310 | 0.5850 |
| | | $(0.5, 0.5)$ | 0.8232 | 0.1189 | | | | | |

Tabelle 5.4: Resultate für $Ra = 10^4$ mit der $N$, $N-1$-Methode (staggered grids)

| $N$ | $\lvert\psi\rvert_{mid}$ | $\lvert\psi\rvert_{max}$ | $u_{1,max}$ | $u_{2,max}$ | $\overline{N}u$ | $Nu_{\frac{1}{2}}$ | $Nu_0$ | $Nu_{max}$ | $Nu_{min}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 5.0515 | 5.0515 | 16.1788 | 19.3380 | 2.2250 | 2.2239 | 2.0969 | 3.4045 | 0.5849 |
| | | $(0.5, 0.5)$ | 0.8190 | 0.1263 | | | | | |
| 12 | 5.0739 | 5.0739 | 16.1821 | 19.6116 | 2.2458 | 2.2455 | 2.2510 | 3.5432 | 0.5838 |
| | | $(0.5, 0.5)$ | 0.8233 | 0.1190 | | | | | |
| 16 | 5.0737 | 5.0737 | 16.1835 | 19.6276 | 2.2447 | 2.2448 | 2.2443 | 3.5229 | 0.5850 |
| | | $(0.5, 0.5)$ | 0.8232 | 0.1189 | | | | | |
| 20 | 5.0737 | 5.0737 | 16.1833 | 19.6282 | 2.2448 | 2.2448 | 2.2448 | 3.5310 | 0.5850 |
| | | $(0.5, 0.5)$ | 0.8232 | 0.1189 | | | | | |

Tabelle 5.5: Resultate für $Ra = 10^4$ mit der $N$, $N-2$-Methode

| $N$ | $\|\psi\|_{mid}$ | $\|\psi\|_{max}$ | $u_{1,max}$ | $u_{2,max}$ | $\overline{N}u$ | $Nu_{\frac{1}{2}}$ | $Nu_0$ | $Nu_{max}$ | $Nu_{min}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 9.0612 | 9.0612 | 35.3825 | 66.6236 | 4.4631 | 5.0550 | 4.4502 | 8.4529 | 0.8534 |
| | | $(0.5, 0.5)$ | 0.8535 | 0.0629 | | | | | |
| 12 | 9.0633 | 9.4688 | 34.5200 | 68.6800 | 4.5180 | 4.4707 | 4.4692 | 7.4779 | 0.7528 |
| | | $(0.75, 0.37)$ | 0.8547 | 0.0659 | | | | | |
| 16 | 9.1141 | 9.5907 | 34.7614 | 68.6001 | 4.5141 | 4.5292 | 4.5195 | 7.7383 | 0.7208 |
| | | $(0.60, 0.31)$ | 0.8545 | 0.0659 | | | | | |
| 20 | 9.1099 | 9.5888 | 34.7555 | 68.6316 | 4.5186 | 4.5167 | 4.5216 | 7.7065 | 0.7289 |
| | | $(0.27, 0.58)$ | 0.8547 | 0.0658 | | | | | |

Tabelle 5.6: Resultate für $Ra = 10^5$ mit der $N$, $N-1$-Methode (staggered grids)

| $N$ | $\|\psi\|_{mid}$ | $\|\psi\|_{max}$ | $u_{1,max}$ | $u_{2,max}$ | $\overline{N}u$ | $Nu_{\frac{1}{2}}$ | $Nu_0$ | $Nu_{max}$ | $Nu_{min}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 9.3056 | 9.3056 | 33.2278 | 61.2403 | 4.7586 | 4.5305 | 4.2455 | 11.0566 | 0.1458 |
| | | $(0.5, 0.5)$ | 0.8693 | 0.0647 | | | | | |
| 12 | 9.0599 | 9.4688 | 34.7243 | 68.9880 | 4.4999 | 4.4726 | 4.5078 | 7.4537 | 0.7562 |
| | | $(0.75, 0.37)$ | 0.8533 | 0.0656 | | | | | |

Tabelle 5.7: Resultate für $Ra = 10^5$ mit der $N$,$N-2$-Methode

| $Ra$ | $\|\psi\|_{mid}$ | $\|\psi\|_{max}$ | $u_{1,max}$ | $u_{2,max}$ | $\overline{N}u$ | $Nu_{\frac{1}{2}}$ | $Nu_0$ | $Nu_{max}$ | $Nu_{min}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $10^3$ | 1.174 | – | 3.649 | 3.697 | 1.118 | 1.118 | 1.117 | 1.505 | 0.692 |
| | | | 0.813 | 0.178 | | | | | |
| $10^4$ | 5.071 | – | 16.178 | 19.617 | 2.243 | 2.243 | 2.238 | 3.528 | 0.586 |
| | | | 0.823 | 0.119 | | | | | |
| $10^5$ | 9.111 | 9.612 | 34.73 | 68.59 | 4.519 | 4.519 | 4.509 | 7.717 | 0.729 |
| | | | 0.855 | 0.066 | | | | | |

Tabelle 5.8: Die Benchmark-Lösung

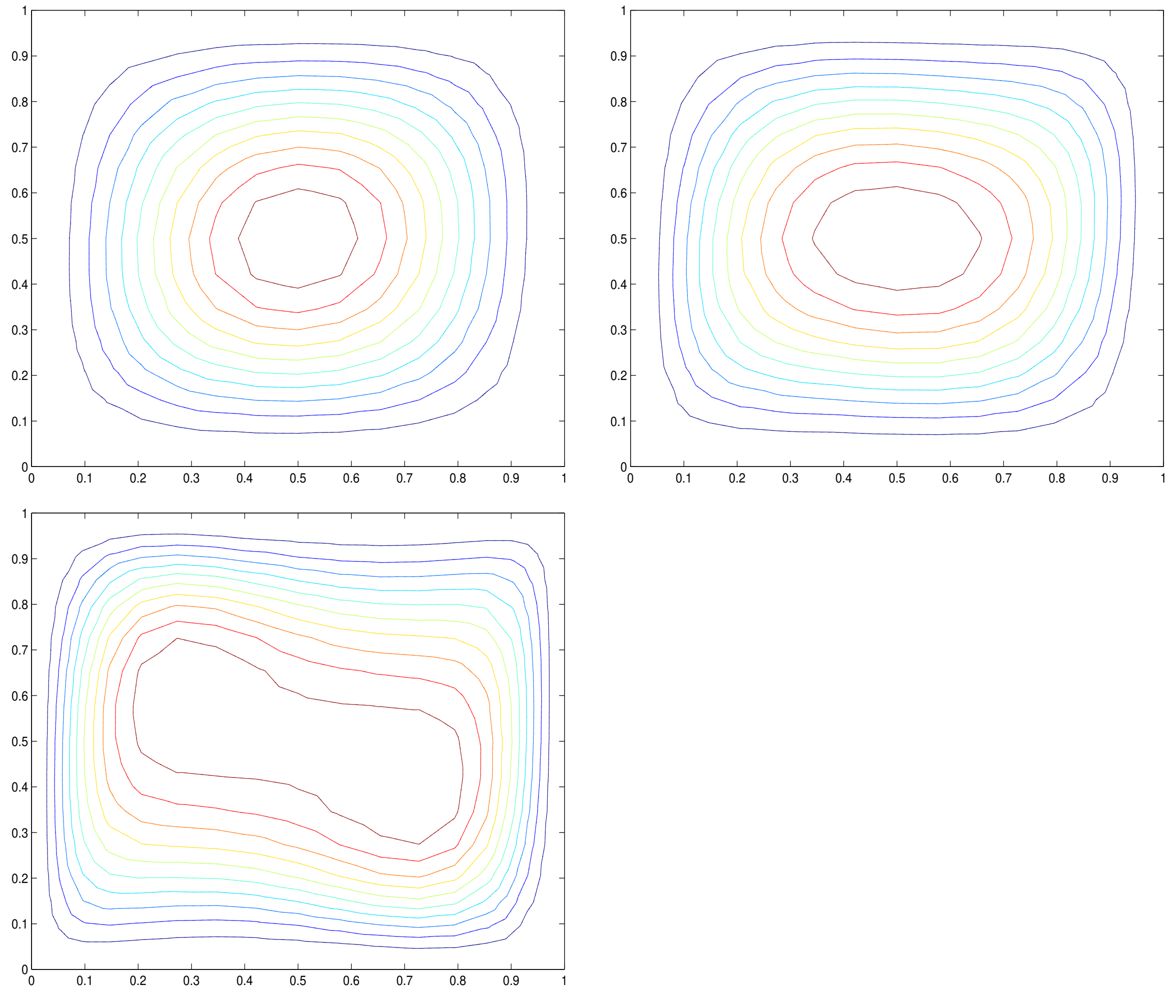


Abbildung 5.2: Stromlinien für $N = 20$ und $Ra = 10^3$, $10^4$, $10^5$

All diese Tabellen zeigen deutlich, dass das Splitting der Boussinesq-Approximation zusammen mit den spektralen Verfahren sehr gute Ergebnisse erzielt, die ziemlich dicht an der Benchmark-Lösung liegen.
Zu bemerken ist noch, dass für $Ra = 10^5$ die Resultate für $N = 16$ mit der impliziten Behandlung des konvektiven Terms erzielt wurden, da somit die Zeitschrittweite deutlich größer gewählt werden konnte. Für die $N$,$N-2$-Methode wurde diese Betrachtung nicht implementiert. Deshalb wird an dieser Stelle auf die Resultate für $N = 16$ und $N = 20$ verzichtet.

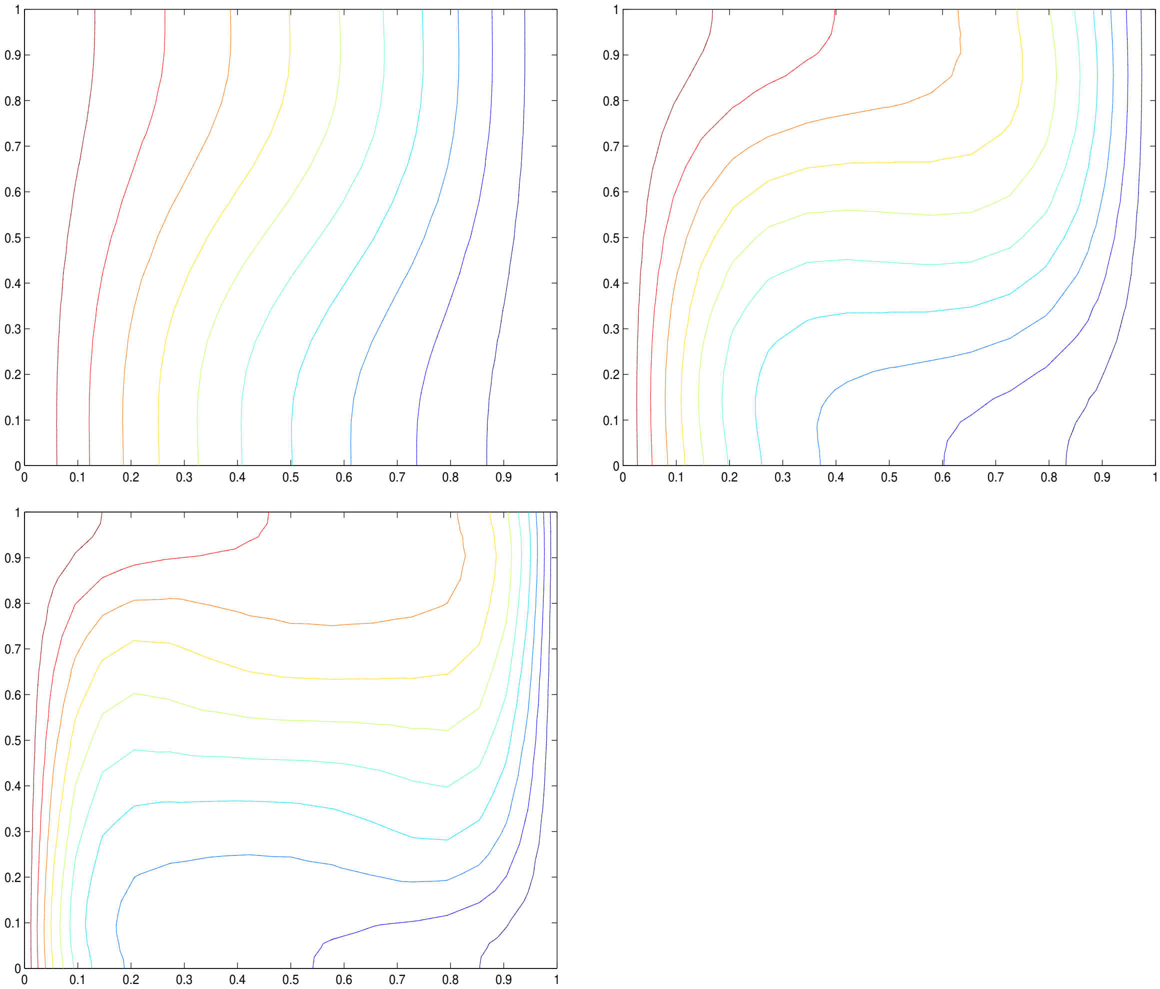


Abbildung 5.3: Temperaturverteilung für $N = 20$ und $Ra = 10^3$, $10^4$, $10^5$

# Anhang A

# Singularitätenfunktionen

## A.1 Singularitätenfunktionen für die $NS1$-Methode

Die singulären Anteile $(\tilde{\vec{u}}, \tilde{p})$ erhält man aus $\psi^s$, $s = A, B$. In Bezug auf die Ecke $A = (0, 1)$ erhält man:

$$x = r \cdot \cos(\theta), \quad y = 1 + r \cdot \sin(\theta),$$

mit $\theta \in [-\pi/2, 0]$.
Dann hat $\psi^A$ die folgende Darstellung (siehe Moffatt [24]):

$$\psi^A = r \; f_1^A(\theta),$$

mit

$$f_1^A(\theta) = \frac{1}{\alpha}\left(\theta\cos(\theta) - \left(\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2}\theta\right)\sin(\theta)\right)$$

Die Geschwindigkeit, der Druck sowie die Wirbelfunktion haben die Darstellung

$$u_{11}^A = v_{11}^A(\theta), \quad u_{21}^A = v_{21}^A(\theta), \quad p^A = r^{-1}\; p_1^A(\theta, RE), \quad \omega^A = r^{-1}\; \omega_1^A(\theta),$$

mit

$$\begin{aligned}
v_{11}^A(\theta) &= \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2}\theta + \frac{1}{2}\cos(2\theta) - \frac{\pi}{4}\sin(2\theta)\right), \\
v_{21}^A(\theta) &= \frac{1}{\alpha}\left(-\theta - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\sin(2\theta) + \frac{\pi}{4}\cos(2\theta)\right), \\
p_1^A(\theta, Re) &= \frac{1}{\alpha Re}\left(2\cos(\theta) - \pi\sin(\theta)\right), \\
\omega_1^A(\theta) &= \frac{1}{\alpha}\left(\pi\cos(\theta) + 2\sin(\theta)\right),
\end{aligned}$$

wobei

$$\alpha = \pi^2/4 - 1.$$

Im Punkt $B = (1,1)$ sind $x$ und $y$ definiert durch:

$$x = 1 + r \cdot \cos(\theta), \quad y = 1 + r \cdot \sin(\theta),$$

wobei $\theta \in [\pi, 3\pi/2]$. Die Lösungen in der Nähe dieses Punktes lauten:

$$\begin{aligned}
\psi^B &= r\ f_1^B(\theta) = r\ f_1^A(\pi - \theta) \\
u_{11}^B &= v_{11}^B(\theta) = v_{11}^A(\pi - \theta) \\
u_{21}^B &= v_{21}^B(\theta) = -v_{21}^A(\pi - \theta) \\
p^B &= p_1^B(r, \theta) = -p_1^A(r, \pi - \theta) \\
\omega^B &= \omega_1^B(r, \theta) = \omega_1^A(r, \pi - \theta)
\end{aligned}$$

## A.2 Singularitätenfunktionen für die $NS2$-Methode

Analog zur $NS1$-Methode wählt man $x$, $y$, $r$ und $\theta$ zur Ecke $A$ wie in A.1. $\psi^A$ ist definiert durch:

$$\psi^A = r\ f_1^A(\theta) + r^2 f_2^A(\theta, Re),$$

mit

$$f_2^A = Re\ \left(A_0 + A_1\theta + (-A_0 + B_1\theta + B_2\theta^2)\cos(2\theta) + (C_0 + C_1\theta + C_2\theta^2)\sin(2\theta)\right).$$

Druck, Geschwindigkeit und Wirbelfunktion genügen folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
u_{12}^A &= v_{11}^A(\theta) + v_{12}^A(\theta, Re), \quad u_{22}^A = v_{21}^A(\theta) + v_{22}^A(\theta, Re), \\
p^A &= r^{-1} p_1^A(\theta, Re) + p_2^A \ln r, \quad \omega^A = r^{-1}\ \omega_1^A(\theta) + \omega_2^A(\theta, Re),
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
v_{12}^A(\theta, Re) &= RE\left\{\left(2C_2\theta^2 + (2C_1 + B_2)\theta + A_1 + \frac{1}{2}B_1 + 2C_0\right)\cos(\theta) + \left(\frac{1}{2}B_1 + B_2\theta\right)\cos(3\theta)\right. \\
&\quad \left. + \left(-2B_2\theta^2 + (C_2 - 2B_1 + 2A_1)\theta + 4A_0 + \frac{1}{2}C_1\right)\sin(\theta) + \left(C_2\theta + \frac{1}{2}C_1\right)\sin(3\theta)\right\}, \\
v_{22}^A(\theta, Re) &= Re\left\{\left(-2B_2\theta^2 + (-2B_1 + C_2 - 2A_1)\theta + \frac{1}{2}C_1\right)\cos(\theta) - \left(\frac{1}{2}C_1 + C_2\theta\right)\cos(3\theta)\right. \\
&\quad \left. + \left(-2C_2\theta^2 - (B_2 + 2C_1)\theta + A_1 - 2C_0 - \frac{1}{2}B_1\right)\sin(\theta) + \left(\frac{1}{2}B_1 + B_2\theta\right)\sin(3\theta)\right\}, \\
p_2^A &= \pi^2(8 - \pi^2)/(64\alpha^2), \\
\omega_2^A(\theta, Re) &= 2Re\left\{-(4C_2\theta + 2C_1 + B_2)\cos(2\theta) + (4B_2\theta + 2B_1 - C_2)\sin(2\theta) - 2A_0 - 2A_1\theta\right\},
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{array}{ll}
\alpha = \pi^2/4 - 1, & A_0 = -\pi(\pi^4 + 14\pi^2 - 24)/(1024\alpha^2), \\
A_1 = -\pi^2/(\pi^2 + 8)/(256\alpha^2), & B_1 = -(\pi^2 + 12)/(128\alpha^2), \\
B_2 = -\pi/(16\alpha^2), & C_0 = (\pi^4 + 10\pi^2 + 24)/(512\alpha^2), \\
C_1 = \pi(\pi^2 + 6)/(64\alpha^2), & C_2 = (\pi^2 - 4)/(64\alpha^2).
\end{array}$$

In Bezug auf die Ecke $B$ sind $x$, $y$, der Radius und der Winkel gemäß A.1 zu wählen. Hier hat die singuläre Lösung folgende Darstellung:

$$\begin{array}{rcl}
\psi^B & = & r\ f_1^B(\theta) + r^2\ f_2^B(\theta, Re), \\
u_{12}^B & = & v_{11}^B(\theta) + r\ v_{12}^B(\theta, Re), \\
u_{22}^B & = & v_{21}^B(\theta) + r\ v_{22}^B(\theta, Re), \\
p^B & = & r^{-1}\ p_1^B(\theta, Re) + p_2^B \ln r, \\
\omega^B & = & r^{-1}\ \omega_1^B(\theta) + \omega_2(\theta, Re),
\end{array}$$

mit

$$\begin{array}{rcl}
f_2^B(\theta, Re) & = & -f_2^A(\pi - \theta, Re), \\
u_{12}^B(\theta, Re) & = & -u_{12}^A(\pi - \theta, Re), \\
u_{22}^B(\theta, Re) & = & u_{22}^A(\pi - \theta, Re), \\
p_2^B & = & p_2^A, \\
\omega_2^B(\theta, Re) & = & -\omega_2^A(\pi - \theta, Re).
\end{array}$$

# Literaturverzeichnis


[1] ARROW, K., L. HURWICZ und H. UZAWA: *Studies in Nonlinear Programming.* Stanford University Press, Stanford, Ca, 1968.

[2] BERNARDI, C. und Y. MADAY: *A collocation method over staggered grids for the Stokes problem.* Internat. J. Numer. Methods Fluids, 8:537–557, 1988.

[3] BOTELLA, O.: *On the solution of the Navier-Stokes equations using Chebyshev projection schemes with third-order accuracy in time.* Computers & Fluids, 26:107–116, 1997.

[4] BOTELLA, O. und R. PEYRET: *Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow.* Computers & Fluids, 1997.

[5] BRAESS, D.: *Finite Elements.* Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[6] BRISTEAU, M.O., R. GLOWINSKI und J. PERIAUX: *Numerical methods for the Navier-Stokes equations. Applications to the simulation of compressible and incompressible viscous flows.* Comput. Phys. Report, 6:73–187, 1987.

[7] CANUTO, C., M.Y.HUSSAINI, A. QUARTERONI und T.A. ZANG: *Spectral Methods in Fluid Dynamics.* 1 st Ed., Springer Series Comput. Phys., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1989.

[8] DAVIS, P. und P. RABINOWITZ: *Methods of Numerical Integration.* Academic Press, Orlando, 1984.

[9] DEUFLHARD, P. und F. BORNEMANN: *Numerische Mathematik II.* De Gruyter, Berlin, 1994.

[10] GOTTLIEB, D. und S. A. ORSZAG: *Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications.* SIAM, Philadelphia, 1977.

[11] GREENBAUM, A.: *Iterative Methods for Solving Linear Systems.* SIAM, Philadelphia, 1997.

[12] HASCHKE, H.: *Splitting Techniken bei Navier-Stokes-Gleichungen.* Diplomarbeit, Universität Essen, 1998.

[13] HASCHKE, H. und W. HEINRICHS: *Splitting techniques with staggered grids for the Navier-Stokes equations in the 2d case* . Journal of Comp. Phys., 168:131–154, 2001.

[14] HEINRICHS, W.: *Kollokationsverfahren und Mehrgittermethoden bei elliptischen Randwertaufgaben.* R. Oldenbourg Verlag, München/Wien, 1987.

[15] HEINRICHS, W.: *Splitting techniques for the pseudospectral approximation of the unsteady Stokes equations.* SIAM J. Numer. Anal., 30:19–39, 1993.

[16] HEINRICHS, W.: *Efficient Iterative Solution of Spectral Systems for the Navier-Stokes Equations.* Verlag Dr. Köster, Berlin, 1994.

[17] HEINRICHS, W.: *Splitting techniques for the unsteady Stokes equations.* SIAM J. Numer. Anal., 35 (4):1646–1662, 1998.

[18] HEUSER, H.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* B.G. Teubner, Stuttgart, 1991.

[19] HORN, R. A. und C. R. JOHNSON: *Topics in Matrix Analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[20] KNABNER, P. und L. ANGERMANN: *Numerik partieller Differentialgleichungen.* Springer, Berlin, 2000.

[21] LEONARD, A. und A. WRAY: *New Numerical Method for the Solution of Three-Dimensional Flow in an Pipe.* Proc. 8th Int. Conf.Numerical Methods in Fluid Dynamics, ed. by E. Krause (Springer, Berlin, Heidelberg, New York), Seiten 335–342, 1982.

[22] MADAY, Y., A.T. PATERA und E. RØNQUIST: *An operator-integration-factor splitting method for time-dependent problems: application to incompressible fluid flow.* J. Sci. Comput., 5:263–292, 1990.

[23] MALIK, M.R., T.A. ZANG und M.Y. HUSSAINI: *A spectral collotion method for the Navier-Stokes equations.* J. Comput. Phys., 61:64–88, 1985.

[24] MOFFATT, H. K.: *Viscous und resistive eddies near a sharp corner.* Journal of Fluid Mechanics, 18:1–18, 1964.

[25] MOSER, R.D., P. MOIN und A. LEONARD: *A spectral numerical method for the Navier-Stokes equations with applications to Taylor-Couette flow.* J. Comput. Phys., 52:524–544, 1983.

[26] Prandtl, L., K. Oswatitsch und K. Wieghardt: *Führer durch die Strömungslehre.* Vieweg, Braunschweig, 1990.

[27] Quarteroni, A. und A. Valli: *Numerical Approximation of Partial Differential Equations.* Springer, Berlin, 1994.

[28] Schultz, W.W., N.Y. Lee und J.P. Boyd: *Chebyshev pseudospectral method of viscous flows with corner singularities.* J. Sci. Comput., 4:1–24, 1989.

[29] S. Müller-Urbaniak: *Eine Analyse des Zwischenschritt-$\theta$-Verfahrens zur Lösung der instationären Navier-Stokes-Gleichungen.* Preprint, 94-01:SFB 159, 1994.

[30] Taylor, G.I.: *Similarity solutions of hydrodynamics problems. In* Aeronautics and Astronautics. Hoff and Vicenti eds., Pergamon Press, New York, Seiten 21–28, 1960.

[31] Vandeven, H.: *Family of spectral filters for discontinuous problems.* J. Sci. Comput., 6:159–192, 1991.

[32] Zang, T.A. und M.Y. Hussaini: *Numerical Experiments of Subcritical Transition Mechanisms.* AIAA Pap. No., 85-0296, 1985.

[33] Zienkiewicz, O. C. und R. L. Taylor: *The Finite Element Method*, Band 2. McGraw-Hill, London, 4th Auflage, 1991.