Triadendarstellung des Chern-Simons-Zustands der Quantengravitation

Dissertation
von
Robert Paternoga

zum Erlangen des Doktorgrades Dr. rer. nat.

Erster Gutachter: Prof. Dr. Dr. Robert Graham
Zweiter Gutachter: Prof. Dr. Fritz Haake
Dritter Gutachter: Prof. Dr. Claus Kiefer*

Disputation am 20.04.2000

Vorgelegt dem Fachbereich Physik
der Universität-GH Essen
Dezember 1999

* Universität Freiburg i. Br.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Eine konsistente Formulierung der Quantengravitation gilt seit nunmehr fast vier Jahrzehnten als eines der fundamentalsten Probleme der theoretischen Physik. Im Laufe der Zeit haben sich hierbei im wesentlichen zwei verschiedene Zugänge zur Quantisierung der Gravitation etabliert, die heute weitgehend unabhängig voneinander existieren: Zum einen gibt es die String- und Superstringtheorien [1, 2], die allerdings mit einem drastischen Umbruch des physikalischen Weltbildes verbunden sind - zum anderen besteht eine wichtige, vergleichsweise konservative Idee in einer *kanonischen* Quantisierung der Allgemeinen Relativitätstheorie.

Erste Ansätze zur kanonischen Quantisierung der Gravitation enstanden Anfang der sechziger Jahre [3, 4], wobei ursprünglich die *metrische* Darstellung der klassischen Einsteinschen Relativitätstheorie als Ausgangspunkt diente. Diese naheliegende Darstellung, in der die Komponenten der 3-Metrik raumartiger Hyperflächen konstanter Zeit als Konfigurationsraumvariablen fungierten, erwies sich jedoch bald als relativ ungünstig; insbesondere nahmen die Zwangsbedingungen der Gravitation in den metrischen Variablen eine komplizierte, nichtpolynomiale Form an, so daß sich eine explizite Angabe von Quantenzuständen als schwierig erwies.

Einen neuen Anstoß erhielt die kanonische Quantisierung der Gravitation vor gut einem Jahrzehnt über Ashtekars Entdeckung einer alternativen Formulierung der Allgemeinen Relativitätstheorie [5, 6]. In dieser *Ashtekar-Darstellung* spielten komplexe *Eichfelder* einer lokalen Eichgruppe die Rolle der fundamentalen Variablen, womit die Gravitationstheorie eine bemerkenswerte Analogie zur *Yang-Mills-Theorie* aufwies [5]. Einige der aus der Yang-Mills-Theorie bekannten Ideen und Konzepte ließen sich deshalb unmittelbar auf die Gravitationstheorie übertragen, was viele neue Ergebnisse und Einsichten zur Folge hatte: So konnte beispielsweise die für die Yang-Mills-Theorie erst kurz zuvor entwickelte *Loop-Darstellung* [7] auch für die Allgemeine Relativitätstheorie formuliert werden [5, 8, 9]. Dies offenbarte einen überraschenden Zusammenhang zwischen der

Gravitations- und der *Knotentheorie* [8, 10], denn Quantenzustände der Gravitation ergaben sich in der Loop-Darstellung als spezielle *Knoteninvarianten* geschlossener Kurven auf der räumlichen 3-Mannigfaltigkeit. Im Rahmen diskretisierter Modelle der Gravitation, der sogenannten Quanten-Spin-Netzwerke [11, 12], erhielt die Loop-Darstellung später sogar ein mathematisch rigoroses Fundament.

Die Entdeckung der Ashtekarvariablen lieferte weiterhin eine einfache, *polynomiale* Form für die Zwangsbedingungen der Quantengravitation, womit erstmals eine explizite Angabe exakter Quantenzustände möglich wurde. Insbesondere fand man den *Chern-Simons-Zustand* der Quantengravitation [13, 14], dessen Loop-Darstellung in engem Zusammenhang mit der sogenannten *Kauffman-Klammer* stand [15]. Später konnten in Verbindung mit der Knotentheorie weitere, kompliziertere Wellenfunktionale des Gravitationsfeldes konstruiert werden [16, 17]; allerdings blieb der Chern-Simons-Zustand die einzige Lösung der quantisierten Einsteingleichungen mit einem wohldefinierten semiklassischen Limes[1] [17, 19], und wurde deshalb fortan viel diskutiert.

In den letzten Jahren hat die Untersuchung des Chern-Simons-Zustands in der Ashtekar-Darstellung jedoch zunehmend an Bedeutung verloren, unter anderem wohl nicht zuletzt deshalb, weil die physikalische Signifikanz dieses Wellenfunktionals in den *komplex* definierten Ashtekarvariablen nur schwierig einzuschätzen war: Zur physikalischen Interpretation mußten komplizierte *Realitätsbedingungen* implementiert werden, was sich auf quantenmechanischem Niveau als äußerst schwierig erwies.

Zwar wurden in der Vergangenheit auch *reelle* Alternativen zur komplexen Ashtekartheorie diskutiert [20, 21], deren Existenz im wesentlichen darauf zurückzuführen war, daß in der Definition des gravitativen Eichfeldes ein von Immirzi [22] gefundener Parameter noch frei gewählt werden konnte - allerdings ergaben sich für nichttriviale Wahlen dieses Parameters sehr viel kompliziertere Zwangsbedingungen der Quantengravitation [20], für die der Chern-Simons-Zustand keine Lösung mehr darstellte.

Eine vergleichsweise naheliegende Möglichkeit, das Problem der Realitätsbedingungen in der Ashtekartheorie zu umgehen, fand hingegen bis heute kaum Beachtung: Gelingt es, den Chern-Simons-Zustand in der Ashtekar-Darstellung über eine geeignete Transformation in die *metrische* Darstellung zu überführen, so vereinfacht dies die semiklassische Interpretation des Wellenfunktionals erheblich, denn die physikalische Bedeutung der metrischen Variablen ist offensichtlich.

[1] Diese Aussage gilt strenggenommen nur für eine nichttriviale kosmologische Konstante: Der semiklassische Chern-Simons-Zustand im Fall verschwindender kosmologischer Konstante wurde von Ezawa untersucht, wobei sich herausstellte, daß die über diesen Zustand beschriebenen semiklassischen Raumzeit-4-Mannigfaltigkeiten im allgemeinen verschiedene Pathologien aufweisen [18].

Ferner bietet die metrische Darstellung auch zur Aufklärung der Hilbertraumstruktur der Quantengravitation einen sehr viel günstigeren Ausgangspunkt als die komplexe Ashtekar-Darstellung.

Es ist deshalb durchaus interessant, sich mit der Frage zu beschäftigen, wie die Ashtekar- und die metrische Darstellung der Allgemeinen Relativitätstheorie explizit zusammenhängen, und welche Form der Chern-Simons-Zustand der Quantengravitation in den metrischen Variablen annimmt.

Mit diesem nichttrivialen Problem haben wir uns bereits in früheren Arbeiten beschäftigt [23, 24, 25], wobei es zweckmäßig war, sich zunächst auf einfache, endlichdimensionale Modelle des Universums zu beschränken. Hierzu haben wir in [23, 24, 25] konkret Raumzeit-4-Mannigfaltigkeiten betrachtet, für welche die raumartigen Hyperflächen konstanter Zeit *homogene* 3-Mannigfaltigkeiten vom Bianchi-Typ IX waren.[2]

Für solche homogenen Modelle konnte der Zusammenhang zwischen der Ashtekar- und der metrischen Darstellung der Gravitationstheorie sowohl klassisch, wie auch quantenmechanisch aufgeklärt werden. Als Zwischenstufe spielte hierbei die mit der metrischen Darstellung unmittelbar verwandte *Triadendarstellung* der Allgemeinen Relativitätstheorie eine wesentliche Rolle: Die Triadenfelder der räumlichen 3-Mannigfaltigkeit zeigten kanonische Vertauschungsrelationen mit den *komplexen* Ashtekarvariablen, so daß sich der wesentliche, nichttriviale Transformationsschritt des Darstellungswechsels über eine mehrdimensionale Fouriertransformation ergab, die entlang *komplex* verallgemeinerter Integrationsmannigfaltigkeiten auszuführen war. Verschiedene, topologisch inäquivalente Wahlen dieser Integrationskonturen lieferten für das Bianchi IX-Modell mit kosmologischem Term *linear unabhängige* Quantenzustände in der Triadendarstellung, die alle durch Rücktransformation ein und desselben Chern-Simons-Zustands in der Ashtekar-Darstellung hervorgingen.

Es konnte gezeigt werden, daß diese Wellenfunktionen unterschiedliche, für den Quantenzustand des Universums vorgeschlagene *Randbedingungen* erfüllten: Insbesondere fanden wir einen Zustand, der die „keine-Grenzen-Bedingung“ von Hartle und Hawking [26, 27, 28] befriedigte, eine weitere Lösung entsprach der Vilenkinschen Vorstellung [29, 30] von der Wellenfunktion des Universums.

Aus diesen Resultaten für das homogene Bianchi IX-Modell ergab sich nun die naheliegende Vermutung, daß auch für die volle, *inhomogene* Quantengravitation der aus der Ashtekartheorie bekannte Chern-Simons-Zustand mit Hilfe analoger Methoden in die Triadendarstellung überführbar sein sollte - die ausführliche

[2]Homogene 3-Mannigfaltigkeiten vom Bianchi-Typ IX sind kompakt und besitzen eine triviale Topologie. Im isotropen Grenzfall gehen sie gerade in die maximalsymmetrische 3-Sphäre über, die Klasse der Bianchi IX-Mannigfaltigkeiten enthält aber auch *anisotrope* Verallgemeinerungen der 3-Sphäre.

Untersuchung und Diskussion dieser Problemstellung wird der wesentliche Gegenstand der vorliegenden Arbeit sein.

Wir werden uns hierzu mit einem sehr allgemein gehaltenen Modell des Universums beschäftigen, in dem die über die Allgemeine Relativitätstheorie bestimmte Raumzeit-4-Mannigfaltigkeit raumartige, dreidimensionale Hyperflächen konstanter Zeit besitzt, für welche im weiteren *keine* besonderen Symmetrien angenommen werden sollen. Aus technischen Gründen wird es aber angebracht sein, sich auf *unberandete, kompakte* räumliche 3-Mannigfaltigkeiten zu beschränken. In einfachster Verallgemeinerung des homogenen Bianchi IX-Modells mag man sich hierunter beispielsweise eine deformierte Sphäre mit trivialer Topologie vorstellen:

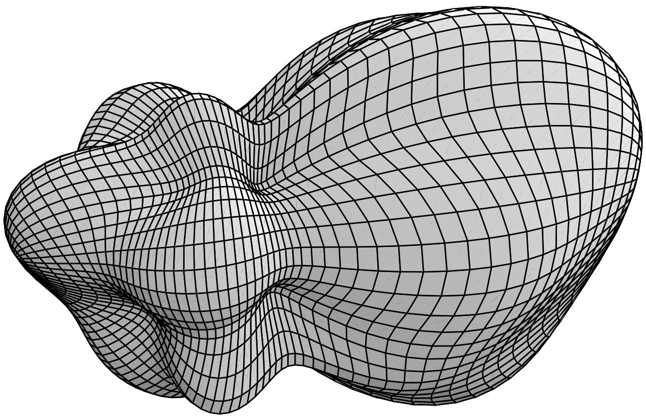

Abbildung 1.1: Kompakte, inhomogene Riemannsche Mannigfaltigkeit mit trivialer Topologie.

Die dieser Arbeit zugrunde liegende Theorie wird aber auch räumliche Mannigfaltigkeiten mit *nichttrivialer* Topologie berücksichtigen, wie zum Beispiel eine dreidimensionale Verallgemeinerung des in Abbildung 1.2 dargestellten deformierten 2-Torus.

Den Einfluß weiterer Materiefelder auf die Raumzeit-4-Mannigfaltigkeit werden wir in unserem Modell zwar nicht mit einbeziehen können, dafür soll aber die Möglichkeit eines kosmologischen Terms in Betracht gezogen werden, was aktuellen kosmologischen Meßdaten zufolge als plausibler Ansatz erscheint: Nach neueren Erkenntnissen ist die kosmologische Konstante nicht nur von Null verschieden - sie bestimmt sogar etwa zwei Drittel der Energiedichte unseres Universums [31, 32].

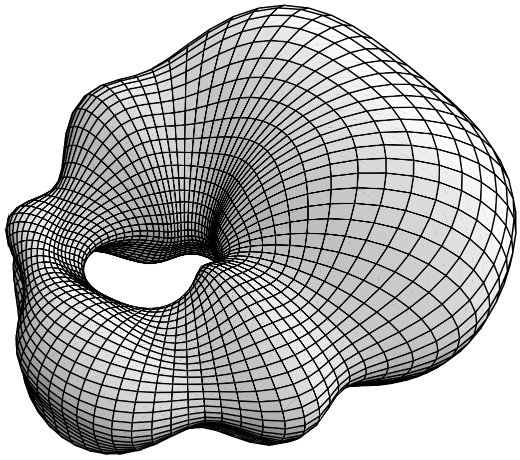

Abbildung 1.2: Kompakte, inhomogene Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nichttrivialer Topologie.

Im Rahmen des hier skizzierten Modells werden wir uns in Kapitel 2 zunächst auf *klassischem* Niveau der Frage zuwenden, wie die Triadendarstellung und die Ashtekar-Darstellung der Allgemeinen Relativitätstheorie explizit zusammenhängen. Dabei wird in Anlehnung an die historische Entwicklung die metrische Darstellung der Einsteinschen Gravitationstheorie den Ausgangspunkt unserer Untersuchungen bilden. In den Abschnitten 2.2 und 2.3 werden wir nacheinander die Triadendarstellung und die Ashtekar-Darstellung der Allgemeinen Relativitätstheorie einführen, wobei wir die komplexen Ashtekareichfelder weniger als fundamentale Variablen des Darstellungsraums, sondern vielmehr als nützliche mathematische Hilfsgrößen verstehen wollen. Über einen Vergleich zwischen der Gravitationstheorie und der Yang-Mills-Theorie soll desweiteren die eichtheoretische Bedeutung der Ashtekarvariablen besonders betont werden, denn diese wird im weiteren Verlauf der Arbeit noch eine wichtige Rolle spielen.

Den wesentlichen Gegenstand des dritten Kapitels wird eine kanonische Quantisierung der Gravitation in der *Triadendarstellung* bilden. Hier soll unter anderem die *Algebra* der Zwangsoperatoren der Quantengravitation, wie auch ihre Verallgemeinerung auf eine quantisierte Einstein-Yang-Mills-Theorie untersucht werden. In Abschnitt 3.3 definieren wir ein eichfixiertes, inneres Produkt auf dem Raum der Wellenfunktionale, und in Abschnitt 3.4 interessiert uns dann besonders der *quantenmechanische* Zusammenhang zwischen der Triadendarstellung und der Ashtekar-Darstellung der Gravitationstheorie; dieser wird uns anschließend erlauben, den Chern-Simons-Zustand in der Triadendarstellung über ein *komplexes Funktionalintegral* auszudrücken.

Die semiklassische Entwicklung und Interpretation des Chern-Simons-Zustands in der Triadendarstellung steht dann im Mittelpunkt des vierten Kapitels. Mit Hilfe der Laplaceschen Sattelpunktsmethode werden wir das komplexe Funktionalintegral in verschiedenen asymptotischen Bereichen entwickeln, und die semiklassischen 4-Geometrien diskutieren, die über das Chern-Simons-Wellenfunktional beschrieben werden. Ferner soll der Chern-Simons-Zustand in Restriktion auf *homogene* 3-Mannigfaltigkeiten ausgewertet, und das Resultat mit früheren Ergebnissen aus der Untersuchung homogener Modelle verglichen werden. In einem eigenständigen Abschnitt wird uns weiterhin das nichttriviale Verhalten des Chern-Simons-Zustands unter *großen* Eichtransformationen der Triade interessieren.

In Kapitel 5 werden wir unter Verwendung des in Abschnitt 3.3 entwickelten physikalischen inneren Produkts die *Normierbarkeit* des Chern-Simons-Zustands untersuchen.

Schließlich sollen im sechsten und letzten Kapitel die erhaltenen Ergebnisse diskutiert und zusammengefaßt werden, wobei wir auch die Verbindung zu aktuellen kosmologischen Meßdaten darlegen wollen.

Verschiedene mathematische und technische Probleme, die sich im Verlauf dieser Arbeit ergeben, werden in vier separaten Anhängen behandelt. Von besonderer Wichtigkeit sind hierbei die Resultate aus Anhang A, die im Nachhinein die Konsistenz der Entwicklungen in Kapitel 4 belegen. Weiterhin werden wir uns im Anhang B etwas ausführlicher mit der Auswertung des Chern-Simons-Zustands auf homogenen 3-Mannigfaltigkeiten beschäftigen, und in den Anhängen C und D kurz einige technische Details diskutieren, die aus dem Hauptteil der Arbeit ausgelagert worden sind.

Kapitel 2

Klassische Formulierung der Allgemeinen Relativitätstheorie

In diesem Kapitel wollen wir zunächst eine klassische, Hamiltonsche Formulierung der Allgemeinen Relativitätstheorie diskutieren, die später in Kapitel 3 den Ausgangspunkt einer kanonischen Quantisierung der Gravitation bilden wird. Hierbei sollen vor allem die in dieser Arbeit verwendeten Vorzeichen- und Notationskonventionen eingeführt werden, ein weiteres Ziel dieses Kapitels wird aber auch in der Aufklärung des expliziten Zusammenhangs zwischen der metrischen Darstellung und der Ashtekardarstellung der Gravitationstheorie bestehen. Ferner werden wir die Ashtekartheorie der Gravitation unter eichtheoretischen Gesichtspunkten mit der Yang-Mills-Theorie äußerer Eichfelder vergleichen.

2.1 Hamiltonsche Formulierung in metrischer Darstellung

Die klassische Allgemeine Relativitätstheorie läßt sich über ein Variationsprinzip aus dem Wirkungsfunktional [33, 34]

$$\mathcal{S} = \frac{1}{\gamma} \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int\limits_{\mathcal{M}_3} \mathrm{d}^3x \, N\sqrt{h} \left({}^4R - 2\Lambda \right) + \frac{2}{\gamma} \int\limits_{\mathcal{M}_3} \mathrm{d}^3x \, \sqrt{h} \, K \Big|_{t_1}^{t_2} \qquad (2.1)$$

ableiten, wobei $\gamma := 16\pi G$ die Newtonsche Gravitationskonstante G enthält, und $\mathcal{M}_3(t)$ eine Schar räumlicher 3-Mannigfaltigkeiten bezeichnet, die man nach zeitartiger Foliation der Raumzeit-4-Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_4$ als Hyperflächen konstanter Zeit t erhält. Wir werden annehmen, daß die räumlichen Hyperflächen $\mathcal{M}_3(t)$ unberandet und kompakt sind; ferner seien sie mit *positiv* definiten 3-Metriken

$\boldsymbol{h}(t)$ belegt, die bezüglich eines beliebig gewählten Koordinatensystems $\{x^i\}$ in der Form[1]

$$\boldsymbol{h}(t) = h_{ij}(x,t)\, \boldsymbol{d}x^i \otimes \boldsymbol{d}x^j \tag{2.2}$$

dargestellt werden können. Hierzu erhält man das *positive* Volumenelement der Riemannschen 3-Mannigfaltigkeiten $(\mathcal{M}_3, \boldsymbol{h})$ als[2]

$$\mathrm{d}V = \sqrt{h}\,\mathrm{d}^3x > 0 \quad \text{mit} \quad h := \det(h_{ij}) > 0\ . \tag{2.3}$$

Die 3-Metriken $\boldsymbol{h}$ hängen über die nach Arnowitt, Deser und Misner benannte ADM-Aufspaltung [3],

$$\boldsymbol{g} = g_{\mu\nu}\, \boldsymbol{d}x^\mu \otimes \boldsymbol{d}x^\nu = -N^2 \boldsymbol{d}t \otimes \boldsymbol{d}t + h_{ij} \left(\boldsymbol{d}x^i + N^i \boldsymbol{d}t\right) \otimes \left(\boldsymbol{d}x^j + N^j \boldsymbol{d}t\right)\ , \tag{2.4}$$

mit der 4-Metrik $\boldsymbol{g}$ zusammen, wobei der 3-Skalar N auch Verlaufsfunktion, und der 3-Vektor $\vec{N} = N^i \partial_i$ Verschiebungsvektor heißen. Für $t_2 > t_1$ sei $N > 0$ gewählt, so daß das Volumen der 4-Mannigfaltigkeit

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_{\mathcal{M}_3} \mathrm{d}^3x\, N \sqrt{h} \tag{2.5}$$

positiv ist. Die Größe ${}^4R$ in (2.1) ist der vierdimensionale Krümmungsskalar nach Vorzeichenkonvention von Misner, Thorne und Wheeler [33], und Λ bezeichnet eine mögliche kosmologische Konstante. Den 3-Skalar K im Oberflächenterm von (2.1) erhält man durch Verjüngung des extrinsischen Krümmungstensors

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} \left(\nabla_i N_j + \nabla_j N_i - \dot{h}_{ij}\right) \tag{2.6}$$

mit der inversen 3-Metrik h^{ij}, wobei ∇_i die Riemannsche, kovariante Ableitung

[1] Hierbei bezeichnet $\boldsymbol{d}$ das äußere Differential. Da die Koordinaten x^i Skalare sind, bilden ihre äußeren Differentiale $\boldsymbol{d}x^i$ eine Basis der 1-Formen auf $\mathcal{M}_3$, so daß kovariante Tensoren höherer Stufe wie zum Beispiel $\boldsymbol{h}$ nach Tensorprodukten dieser Basis-1-Formen entwickelt werden können. Im Gegensatz zu $\boldsymbol{d}x^i$ wird $\mathrm{d}x^i$ einfach eine differentielle, skalare Änderung der Koordinaten x^i bezeichnen.

[2] Wegen $\sqrt{h} > 0$ ist d^3x hier und im folgenden eine positive, orientierte skalare Dichte vom Gewicht -1, die sich unter Koordinatentransformationen mit dem *Betrag* der Jacobideterminante des Koordinatenwechsels transformiert.

bezüglich der 3-Metrik $\boldsymbol{h}$ bedeutet, und räumliche Indizes $i, j, \ldots$ mit Hilfe von h^{ij}, h_{ij} erhöht und erniedrigt werden.

Der extrinsische Krümmungstensor (2.6) beschreibt die Einbettung der räumlichen 3-Mannigfaltigkeit $(\mathcal{M}_3, \boldsymbol{h})$ in die Raumzeit-4-Mannigfaltigkeit $(\mathcal{M}_4, \boldsymbol{g})$. Mit Hilfe der Gauß- und Codazzigleichungen [35] läßt sich der Krümmungsskalar ${}^4R$ der Raumzeit auch über den Krümmungsskalar R von $(\mathcal{M}_3, \boldsymbol{h})$ und die extrinsische Krümmung K_{ij} ausdrücken. Dies liefert für die Wirkung (2.1) den Ausdruck

$$\mathcal{S} = \frac{1}{\gamma} \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_{\mathcal{M}_3} \mathrm{d}^3x \, N \, \Big[K_{ij} \, \tilde{G}^{ijk\ell} \, K_{k\ell} + \sqrt{h} \, (R - 2\Lambda) \Big] =: \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \, L \ , \tag{2.7}$$

wobei sich der Oberflächenterm in (2.1) vollständig weghebt, und aus (2.7) nun unmittelbar ein Lagrangefunktional L abgelesen werden kann. Die Größe[3]

$$\tilde{G}^{ijk\ell} = \frac{\sqrt{h}}{2} \, \Big(h^{ik} h^{j\ell} + h^{i\ell} h^{jk} - 2 \, h^{ij} h^{k\ell} \Big) \tag{2.8}$$

definiert eine Metrik auf dem von den Feldern h_{ij} aufgespannten Konfigurationsraum und heißt auch *Supermetrik*. Variiert man die Wirkung $\mathcal{S}$ nach N, N^i und h_{ij}, wobei die Felder h_{ij} an den zeitartigen Rändern von $\mathcal{M}_4$ festzuhalten sind, so ergeben sich zehn Gleichungen, die völlig äquivalent zu den zehn Einsteingleichungen der Gravitation sind. Das Lagrangefunktional gemäß (2.7) liefert somit eine zur klassischen Einsteinschen Relativitätstheorie gleichwertige Beschreibung des Gravitationsfeldes.

Über eine Legendretransformation bezüglich $\dot{h}_{ij}$ gelangt man zum Hamiltonfunktional der Gravitation, das ein Funktional der Konfigurationsraumvariablen h_{ij} und der kanonisch konjugierten Impulse

$$\tilde{\pi}^{ij} := \frac{\delta L}{\delta \dot{h}_{ij}} = -\frac{1}{\gamma} \, \tilde{G}^{ijk\ell} \, K_{k\ell} \tag{2.9}$$

ist. Die Impulse $\tilde{\pi}^{ij}$ sind die Komponenten einer symmetrischen, orientierten Tensordichte vom Gewicht $+1$. Für das Hamiltonfunktional ergibt sich explizit

[3] Hier und im folgenden bezeichnen wir Tensordichten von positivem Gewicht $+1$ mit einer oberen Tilde, und entsprechend Tensordichten vom Gewicht -1 mit einer unteren Tilde. Sämtliche auftretende Tensordichten sind *orientiert*, transformieren sich also mit dem Betrag der Jacobideterminante des Koordinatenwechsels.

$$H = \int\limits_{\mathcal{M}_3} \mathrm{d}^3x \, \left(N \tilde{\mathcal{H}}_0^{ADM} + N_i \tilde{\mathcal{H}}^i \right) \tag{2.10}$$

mit

$$\tilde{\mathcal{H}}_0^{ADM} = \gamma \cdot \tilde{\pi}^{ij} \underset{\sim}{G}_{ijk\ell} \, \tilde{\pi}^{k\ell} + \frac{\sqrt{h}}{\gamma} \, (2\Lambda - R) \ , \tag{2.11}$$

$$\tilde{\mathcal{H}}^i = -2 \, \nabla_j \tilde{\pi}^{ij} \ . \tag{2.12}$$

Hierbei ist $\underset{\sim}{G}_{ijk\ell}$ in (2.11) die zu (2.8) inverse Supermetrik,

$$\underset{\sim}{G}_{ijk\ell} = \frac{1}{2\sqrt{h}} \, (h_{ik}h_{j\ell} + h_{i\ell}h_{jk} - h_{ij}h_{k\ell}) \ , \tag{2.13}$$

$$\underset{\sim}{G}_{ijk\ell} \, \tilde{G}^{k\ell mn} = \tfrac{1}{2} \left(\delta_i^m \delta_j^n + \delta_i^n \delta_j^m \right) \ . \tag{2.14}$$

Die Felder N und N_i sind keine dynamischen Variablen, da das Lagrangefunktional gemäß (2.7) unabhängig von $\dot{N}, \dot{N}_i$ ist. Sie spielen stattdessen die Rolle von Lagrangeschen Multiplikatoren: Über die Lagrangeschen Gleichungen bezüglich N und N_i folgen die vier *Zwangsbedingungen*

$$-\frac{\delta L}{\delta N} = \frac{\delta H}{\delta N} = \tilde{\mathcal{H}}_0^{ADM} \overset{!}{=} 0 \ , \tag{2.15}$$

$$-\frac{\delta L}{\delta N_i} = \frac{\delta H}{\delta N_i} = \tilde{\mathcal{H}}^i \overset{!}{=} 0 \ . \tag{2.16}$$

Die erste dieser Gleichungen nennt man Hamiltonsche Zwangsbedingung, die drei Gleichungen (2.16) heißen Diffeomorphismus-Zwangsbedingungen; alle vier Gleichungen zusammen implizieren die Invarianz des Hamiltonschen Systems (2.10) unter zeitlichen und räumlichen Koordinatentransformationen auf der Raumzeit-4-Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_4$.

Die dynamischen Gleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie erhält man als Hamiltonsche Gleichungen bezüglich h_{ij} und $\tilde{\pi}^{ij}$,

$$\dot{h}_{ij} = -\left\{ H, h_{ij} \right\} \quad , \quad \dot{\tilde{\pi}}^{ij} = -\left\{ H, \tilde{\pi}^{ij} \right\} \ , \tag{2.17}$$

mit der kanonischen Poisson-Klammer[4]

$$\left\{h_{ij}(x), \tilde{\pi}^{k\ell}(y)\right\} = \tfrac{1}{2}\left(\delta_i^k \delta_j^\ell + \delta_i^\ell \delta_j^k\right)\, \delta^3(x-y)\ . \tag{2.18}$$

Das Hamiltonfunktional (2.10) mit symplektischer Struktur (2.18) ist formal völlig äquivalent zur Einsteinschen Allgemeinen Relativitätstheorie und bietet einen guten Ausgangspunkt zur kanonischen Quantisierung der Gravitation. In den letzten Jahren hat sich jedoch gezeigt, daß es zur Quantisierung günstiger ist, von der hier formulierten metrischen Darstellung der Gravitation zu einer Triadendarstellung überzugehen, was im nächsten Abschnitt geschehen soll.

2.2 Triadendarstellung der Gravitation

Wir wollen nun das Hamiltonsche System (2.10) auf einen erweiterten Phasenraum umschreiben, der anschließend über geeignete Zwangsbedingungen wieder einzuschränken ist. Dies mag zunächst als unnötige Verkomplizierung der Theorie erscheinen, wird aber unter anderem den Vorteil haben, daß die resultierenden neuen Konfigurationsraumvariablen über einen *unbeschränkten* Fundamentalbereich variieren dürfen, was bei der im letzten Abschnitt diskutierten metrischen Darstellung nicht der Fall ist: Die Komponenten h_{ij} des metrischen Tensors $\boldsymbol{h}$ müssen eine *positive, symmetrische* Matrix bilden.

Anstelle der 3-Metrik $\boldsymbol{h}$ seien nun drei verschiedene, bezüglich $\boldsymbol{h}$ orthonormale Triaden-1-Formen $\boldsymbol{e}_a = e_{ia}\,\boldsymbol{dx}^i$ mit $a \in \{1,2,3\}$ betrachtet, die also

$$e_{ia}\, h^{ij}\, e_{jb} \equiv e_{ia}\, e^i{}_b \stackrel{!}{=} \delta_{ab} \tag{2.19}$$

erfüllen sollen. Dann läßt sich umgekehrt die 3-Metrik mit Hilfe der Triaden-1-Formen über

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{e}_a \otimes \boldsymbol{e}_a \quad \Leftrightarrow \quad h_{ij} = e_{ia}\, e_{ja} \tag{2.20}$$

darstellen, wobei für beliebige, lokal linear unabhängige[5] 1-Formen $\boldsymbol{e}_a$ die Symmetrie und Positivität von (h_{ij}) sichergestellt ist.

[4]Hierbei ist $\delta^3(x)$ die orientierte Deltafunktion auf $\mathcal{M}_3$ mit $\int \mathrm{d}^3x\ \delta^3(x) = +1$. Da sich d^3x wie eine positive, orientierte Dichte vom Gewicht -1 unter Koordinatenwechseln transformiert, muß $\delta^3(x)$ eine positive, orientierte skalare Dichte vom Gewicht $+1$ sein.

[5]Linear abhängige Felder $\boldsymbol{e}_a$, die entartete 3-Metriken $\boldsymbol{h}$ beschreiben, werden wir immer nur als Grenzfall linear unabhängiger Triaden diskutieren.

Die kontravarianten Komponenten der Triadenvektoren $\vec{e}_a = e^i{}_a\,\partial_i$ wurden in Gleichung (2.19) bereits implizit eingeführt, von besonderer Bedeutung werden desweiteren die Komponenten

$$\tilde{e}^{\,i}{}_a = \sqrt{h}\,\cdot e^i{}_a \tag{2.21}$$

der dichtegewichteten Triadenvektoren sein. Sämtliche Beschreibungen der Triade lassen sich äquivalent ineinander umrechnen. Die geometrische Bedeutung der Triadenfelder $\vec{e}_a$ einer Riemannschen 3-Mannigfaltigkeit $(\mathcal{M}_3, \boldsymbol{h})$ zeigt die Abbildung 2.1.

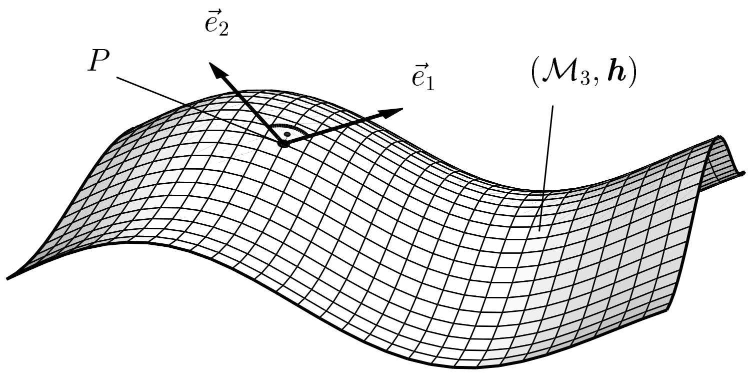

Abbildung 2.1: Geometrische Bedeutung der Triadenfelder $\vec{e}_a$ einer Riemannschen 3-Mannigfaltigkeit $(\mathcal{M}_3, \boldsymbol{h})$ am Punkt P. Aus darstellungstechnischen Gründen kann hier nur das lokale, orthonormale Zweibein einer Riemannschen 2-Mannigfaltigkeit gezeigt werden. Offensichtlich sind die Vektorfelder $\vec{e}_a$ an jedem Punkt P nur bis auf eine beliebige, räumliche Drehung festgelegt.

Betrachten wir nun den von den Felder $\tilde{e}^{\,i}{}_a$ aufgespannten Konfigurationsraum, so läßt sich dieser formal zu einem abstrakten Phasenraum fortsetzen, indem wir zu $\tilde{e}^{\,i}{}_a$ kanonisch konjugierte Impulse p_{ia} mit der Poisson-Klammer

$$\left\{\tilde{e}^{\,i}{}_a(x), p_{jb}(y)\right\} = \delta^i_j\,\delta_{ab}\,\delta^3(x-y) \tag{2.22}$$

einführen. Die Impulse p_{ia} sind dann 1-Formen auf $\mathcal{M}_3$. Mit Hilfe der Identifizierungen

$$h \cdot h^{ij} = \tilde{e}^i{}_a \, \tilde{e}^j{}_a \quad , \quad K_{ij} = \frac{\gamma}{2} \, e_{ja} \, p_{ia} \tag{2.23}$$

und (2.9) läßt sich die metrische, symplektische Algebra (2.18) auch auf dem von $\tilde{e}^i{}_a, p_{ia}$ aufgespannten Phasenraum mit symplektischer Struktur (2.22) darstellen, wenn man sich auf die Zwangsfläche

$$\tilde{\mathcal{J}}_a := \varepsilon_{abc} \, \tilde{e}^i{}_b \, p_{ic} \stackrel{!}{=} 0 \tag{2.24}$$

einschränkt, auf der K_{ij} und $\tilde{\pi}^{ij}$ symmetrische Felder sind. Hierbei bezeichnet ε_{abc} in (2.24) die Komponenten des O(3)-kovarianten Levi-Cevitta-Tensors. Mißt $\varepsilon(\boldsymbol{e}_a) \in \{\pm 1\}$ die *Orientierung* der Triade $\boldsymbol{e}_a$, so besteht der folgende Zusammenhang zwischen den Komponenten des Levi-Cevitta-Tensors und dem Levi-Cevitta-*Symbol*:[6]

$$\varepsilon_{abc} = \varepsilon(\boldsymbol{e}_a) \cdot [abc] \; . \tag{2.25}$$

Die drei Zwangsbedingungen (2.24) wollen wir im folgenden *Gauß*-Bedingungen nennen. Sie beschreiben geometrisch die Invarianz der Theorie unter lokalen, räumlichen Drehungen der Triade $\boldsymbol{e}_a$, die als zusätzliche Eichfreiheitsgrade in (2.20), (2.23) beim Übergang von der metrischen Darstellung zur Triadendarstellung auftreten. Der Ursprung dieser neuen Eichfreiheitsgrade ist auch aus der Abbildung 2.1 ersichtlich.

Genauer betrachtet sichern die Zwangsbedingungen (2.24) allerdings nur die Invarianz unter speziellen, SO(3)-Eichtransformationen der Triade, während Spiegelungen der Triade als gesonderte, *diskrete* Symmetrien zu behandeln sind. Hierzu ist es zweckmäßig, einen Paritätsoperator $\mathcal{P}$ zu definieren, der die fundamentalen Phasenraumvariablen $\tilde{e}^i{}_a, p_{ia}$ *global* in ihr negatives überführt. Die klassische Allgemeine Relativitätstheorie ist offensichtlich paritätsinvariant, was man in der metrischen Darstellung unmittelbar sieht. In der Triadendarstellung müssen wir deshalb die Paritätssymmetrie als separate Symmetrie *fordern*, was vor allem bei der Quantisierung der Theorie zu berücksichtigen sein wird.

Unter Verwendung der Gleichungen (2.9) und (2.23) lassen sich $\tilde{\mathcal{H}}_0^{ADM}$ und $\tilde{\mathcal{H}}_i$ aus (2.11), (2.12) nun auf die Triadendarstellung umrechnen, wenn wir gleichzeitig die Zwangsbedingung (2.24) fordern. Es ergibt sich

[6] Das Levi-Cevitta-Symbol $[abc]$ ist vollständig antisymmetrisch in a, b, c definiert, und über $[123] := +1$ normiert. Wie $[abc]$ verhalten sich auch die Komponenten ε_{abc} des Levi-Cevitta-Tensors bezüglich Variationen der Triade einfach wie Konstanten, da sich die Orientierung $\varepsilon(\boldsymbol{e}_a)$ unter infinitesimalen Störungen von $\boldsymbol{e}_a$ nicht ändern kann.

$$\tilde{\mathcal{H}}_0^{ADM} = -\frac{\gamma}{4}\,\tilde{\varepsilon}^{ijk}\,\varepsilon_{abc}\,e_{ia}\,p_{jb}\,p_{kc} + \frac{\sqrt{h}}{\gamma}\,(2\Lambda - R)\ , \tag{2.26}$$

$$\tilde{\mathcal{H}}_i = \partial_j\left(\tilde{e}^j{}_a\,p_{ia}\right) - \tilde{e}^j{}_a\partial_i\,p_{ja}\ , \tag{2.27}$$

wobei Terme proportional zu $\tilde{\mathcal{J}}_a$ weggelassen wurden.[7] In (2.26) erscheint hier zum ersten Mal die Größe

$$\tilde{\varepsilon}^{ijk} := \sqrt{h}\,\varepsilon_{abc}\,e^i{}_a\,e^j{}_b\,e^k{}_c\ , \tag{2.28}$$

die eine in i, j, k vollständig antisymmetrische Tensordichte vom Gewicht $+1$ darstellt.[8]

Zur expliziten Umrechnung auf die Triadendarstellung benötigt man in (2.26) noch den Krümmungsskalar R als Funktion der Triade. Hierzu ist es nützlich, den Riemannschen Spin-Zusammenhang

$$\omega_{ia} := -\tfrac{1}{2}\,\varepsilon_{abc}\,e_{jb}\nabla_i\,e^j{}_c \tag{2.29}$$

als SO(3)-*Eichfeld* einzuführen, womit sich eine Riemannsche, SO(3)-kovariante Ableitung D_i definieren läßt, die für beliebige 3-Vektoren $\vec{v} = v^i\,\partial_i = v_a\,\vec{e}_a$ über

$$e_{ja}\nabla_i\,v^j = D_i v_a := \partial_i v_a + \varepsilon_{abc}\,\omega_{ib}\,v_c \tag{2.30}$$

mit der Riemannschen kovarianten Ableitung ∇_i zusammenhängt. Mit Hilfe der SO(3)-kovarianten Krümmung von ω_{ia},

$$F_{ija} := \partial_i\omega_{ja} - \partial_j\omega_{ia} + \varepsilon_{abc}\,\omega_{ib}\,\omega_{jc}\ , \tag{2.31}$$

[7]Dies entspricht formal einer Umdefinition der Lagrangeschen Parameter Ω_a im Hamiltonfunktional (2.33), die aber ohnehin beliebig gewählt werden dürfen.

[8]Entsprechend definieren wir

$$\underset{\sim}{\varepsilon}_{ijk} := \frac{1}{\sqrt{h}}\,\varepsilon_{abc}\,e_{ia}\,e_{jb}\,e_{kc}$$

als antisymmetrische Tensordichte vom Gewicht -1. In einem fest vorgegebenen Koordinatensystem $\{x^i\}$ gilt einfach $\tilde{\varepsilon}^{ijk} = +[ijk]$ oder $\tilde{\varepsilon}^{ijk} = -[ijk]$ mit dem Levi-Cevitta-Symbol $[ijk]$, wobei sich das Vorzeichen unter Koordinatentransformationen mit negativer Jacobideterminante, nicht aber unter Paritätstransformationen $\mathcal{P}$ ändert. Die Größe $\tilde{\varepsilon}^{ijk}$ ist also räumlich konstant und vertauscht deshalb mit räumlichen Ableitungen ∂_i.

erhält man dann für die Hamiltonsche Zwangsbedingung in der Triadendarstellung

$$\tilde{\mathcal{H}}_0^{ADM} = -\frac{\gamma}{4}\,\tilde{\varepsilon}^{ijk}\varepsilon_{abc}\,e_{ia}\,p_{jb}\,p_{kc} + \frac{1}{\gamma}\,e_{ia}\,\tilde{\varepsilon}^{ijk}F_{jka} + \frac{2\Lambda}{\gamma}\sqrt{h}\ . \tag{2.32}$$

Das resultierende Hamiltonfunktional der Gravitation

$$H = \int \mathrm{d}^3x\ \left(N\tilde{\mathcal{H}}_0^{ADM} + N^i\tilde{\mathcal{H}}_i + \Omega_a\tilde{\mathcal{J}}_a\right) \tag{2.33}$$

mit symplektischer Struktur (2.22) und den Phasenraumfunktionalen $\tilde{\mathcal{H}}_0^{ADM}, \tilde{\mathcal{H}}_i$ und $\tilde{\mathcal{J}}_a$ gemäß (2.32), (2.27) und (2.24) ist klassisch strikt äquivalent zur metrischen Darstellung (2.10), (2.18), wenn wir zusätzlich noch die Paritätsinvarianz der Theorie fordern.

Diese Triadendarstellung der Allgemeinen Relativitätstheorie bietet bereits einen besseren Ausgangspunkt zur Quantisierung der Gravitation als die metrische Darstellung gemäß Abschnitt 2.1; eine noch günstigere Darstellung erhalten wir aber nach Einführung spezieller Hilfsfelder, der sogenannten *Ashtekarvariablen.*

2.3 Ashtekarvariablen und Eichtheorie

Betrachtet man die Hamiltonsche Zwangsbedingung (2.32) in Verbindung mit (2.31) genauer, so fällt auf, daß der kinetische Term und der nicht-Abelsche Beitrag vom Krümmungsterm strukturgleich sind. Man kann daher versuchen, diese beiden Terme einheitlich als nicht-Abelschen Beitrag eines *neuen* Eichfeldes $\mathcal{A}_{ia}$ zu erhalten, das wir als Linearkombination des Riemannschen Spin-Zusammenhangs ω_{ia} und der Impulse p_{ia} ansetzen wollen. Tatsächlich gibt es genau zwei Möglichkeiten der Definition eines solchen Eichfeldes:

$$\mathcal{A}_{ia} = \omega_{ia} \pm \frac{i\gamma}{2}\,p_{ia}\ . \tag{2.34}$$

Die Felder $\mathcal{A}_{ia}$ heißen *Ashtekarvariablen*; sie wurden von Ashtekar [5, 6, 36] erstmals zur klassischen und quantenmechanischen Beschreibung der Gravitation verwendet.[9]

[9] Auf die Bedeutung und Wahl des Vorzeichens in der Definition der Ashtekarvariablen (2.34) werden wir später noch zu sprechen kommen. Zunächst wollen wir das Vorzeichen offen lassen und beide Möglichkeiten parallel diskutieren. Ein Doppelzeichen in den folgenden Gleichungen bezieht sich dann immer auf die Vorzeichenkonvention in (2.34).

Da sich $\mathcal{A}_{ia}$ unter SO(3)-Eichtransformationen inhomogen wie ein Eichfeld transformiert, können wir die SO(3)-kovariante Feldstärke

$$\mathcal{F}_{ija} := \partial_i \mathcal{A}_{ja} - \partial_j \mathcal{A}_{ia} + \varepsilon_{abc} \mathcal{A}_{ib} \mathcal{A}_{jc} \tag{2.35}$$

definieren, mit der sich $\tilde{\mathcal{H}}_0^{ADM}$ aus (2.32) folgendermaßen schreiben läßt:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}_0^{ADM} &= \frac{1}{\gamma} e_{ia} \,\tilde{\varepsilon}^{ijk} \mathcal{F}_{jka} + \frac{2\Lambda}{\gamma} \sqrt{h} \mp i\, \partial_j \left(e^j{}_a \tilde{\mathcal{J}}_a \right) \\ &=: \tilde{\mathcal{H}}_0 \mp i\, \partial_j \left(e^j{}_a \tilde{\mathcal{J}}_a \right) \ . \end{aligned} \tag{2.36}$$

Auch die Zwangsbedingungen $\tilde{\mathcal{H}}_i$ und $\tilde{\mathcal{J}}_a$ gemäß (2.27) und (2.24) lassen sich über

$$\tilde{\mathcal{H}}_i = \pm \frac{2i}{\gamma} \left[\tilde{e}^j{}_a \partial_i \mathcal{A}_{ja} - \tilde{e}^j{}_a \partial_j \mathcal{A}_{ia} - \mathcal{A}_{ia} \partial_j \tilde{e}^j{}_a \right] \ , \tag{2.37}$$

$$\tilde{\mathcal{J}}_a = \pm \frac{2i}{\gamma} \mathcal{D}_j \tilde{e}^j{}_a := \pm \frac{2i}{\gamma} \left[\partial_j \tilde{e}^j{}_a + \varepsilon_{abc} \mathcal{A}_{jb} \,\tilde{e}^j{}_c \right] \tag{2.38}$$

vollständig in den Ashtekarvariablen ausdrücken. Bemerkenswert ist ferner die Tatsache, daß die Ashtekarvariablen $\mathcal{A}_{ia}$ mit $\tilde{e}^i{}_a$ bis auf einen Vorfaktor $\pm\frac{i\gamma}{2}$ *kanonische* Vertauschungsrelationen erfüllen:

$$\left\{ \tilde{e}^i{}_a(x), \mathcal{A}_{jb}(y) \right\} = \pm \frac{i\gamma}{2} \,\delta^i_j \,\delta_{ab} \,\delta^3(x-y) \quad , \quad \left\{ \mathcal{A}_{ia}(x), \mathcal{A}_{jb}(y) \right\} = 0 \ . \tag{2.39}$$

Während die erste Poisson-Klammer direkt aus der Definition (2.34) folgt, ist die Vetauschungseigenschaft der $\mathcal{A}_{ia}$ untereinander nichttrivial und die Konsequenz einer speziellen Darstellungsmöglichkeit des Riemannschen Spin-Zusammenhangs ω_{ia}:

$$\omega_{ia} = \frac{\delta \Phi}{\delta \tilde{e}^i{}_a} \qquad \text{mit} \qquad \Phi := -\frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3 x \ \tilde{\varepsilon}^{ijk} \, e_{ia} \partial_j \, e_{ka} \ . \tag{2.40}$$

Über (2.36), (2.37) und (2.38) läßt sich das Hamiltonfunktional der Gravitation (2.33) auch in den neuen Phasenraumvariablen $\tilde{e}^i{}_a, \mathcal{A}_{ia}$ mit symplektischer Struktur (2.39) schreiben. Wir finden

$$H = \int\limits_{\mathcal{M}_3} \mathrm{d}^3x \, \left[N\tilde{\mathcal{H}}_0 + N^i\tilde{\mathcal{H}}_i + \left(\Omega_a \pm i\, e^j{}_a\partial_j N\right) \tilde{\mathcal{J}}_a \right] \ , \tag{2.41}$$

wobei die Variation von H nach den *reellen* Lagrange-Parametern N, N^i und Ω_a immer noch die Zwangsbedingungen

$$\tilde{\mathcal{H}}_0^{ADM} \stackrel{!}{=} 0 \quad , \quad \tilde{\mathcal{H}}_i \stackrel{!}{=} 0 \quad , \quad \tilde{\mathcal{J}}_a \stackrel{!}{=} 0 \tag{2.42}$$

liefert, die in Verbindung mit (2.36) desweiteren $\tilde{\mathcal{H}}_0 = 0$ implizieren. Das Hamiltonsche System (2.39), (2.41) mit $\tilde{\mathcal{H}}_0, \tilde{\mathcal{H}}_i, \tilde{\mathcal{J}}_a$ aus (2.36), (2.37), (2.38) ist klassisch streng äquivalent zur Allgemeinen Relativitätstheorie, obwohl die zu $\tilde{e}^i{}_a$ konjugierten Impulse $\mathcal{A}_{ia}$ und die Hamiltonsche Zwangsbedingung $\tilde{\mathcal{H}}_0$ nun komplex sind: Verwendet man (2.34), um sich zu $\tilde{e}^i{}_a, \mathcal{A}_{ia}$ die Impulse p_{ia} zu beschaffen, so liefert (2.41) mit der Poisson-Klammer (2.39) für $\tilde{e}^i{}_a, p_{ia}$ *dieselben* klassischen Bewegungsgleichungen wie (2.33) mit der Poisson-Klammer (2.22). *Realitätsbedingungen* sind nur für die *Anfangswerte* der klassischen Evolution zu fordern. Die Realitätseigenschaft bleibt dann während der Evolution automatisch erhalten, was nach Rücktransformation auf den $\{\tilde{e}^i{}_a, p_{ia}\}$-Phasenraum offensichtlich ist.

Im weiteren Verlauf der Diskussion werden die Felder

$$\tilde{\mathcal{G}}^i_{\Lambda,a} := \frac{1}{2}\,\tilde{\varepsilon}^{ijk}\,\mathcal{F}_{jka} + \frac{\Lambda}{3}\,\tilde{e}^i{}_a \tag{2.43}$$

von besonderer Bedeutung sein. Sie zeigen eine bemerkenswerte Analogie zum dreidimensionalen Einsteintensor mit kosmologischem Term,[10]

$$\tilde{G}^i_{\Lambda,a} = \frac{1}{2}\,\tilde{\varepsilon}^{ijk}\,F_{jka} + \frac{\Lambda}{3}\,\tilde{e}^i{}_a \equiv \left(G^i{}_j + \frac{\Lambda}{3}\,\delta^i_j\right)\,\tilde{e}^j{}_a \ , \tag{2.44}$$

der bekanntlich dadurch ausgezeichnet ist, daß er die drei Bianchi-Identitäten

$$D_i\,\tilde{G}^i_{\Lambda,a} \equiv 0 \tag{2.45}$$

[10]Hierbei sind die Größen $G^i{}_j$ die Komponenten des üblichen, dreidimensionalen Einsteintensors

$$G^i{}_j = R^i{}_j - \tfrac{1}{2}R\,\delta^i_j \ ,$$

wobei $R^i{}_j$ die Komponenten des dreidimensionalen Riccitensors bezeichnet.

erfüllt. Ebenso befriedigt $\tilde{\mathcal{G}}^i_{\Lambda,a}$ gemäß (2.43) auf der Zwangsfläche $\tilde{\mathcal{J}}_a = 0$ die entsprechenden Gleichungen

$$\mathcal{D}_i \, \tilde{\mathcal{G}}^i_{\Lambda,a} = 0 \ , \tag{2.46}$$

weswegen wir $\tilde{\mathcal{G}}^i_{\Lambda,a}$ auch als die Komponenten eines *verallgemeinerten* Einsteintensors mit kosmologischem Term bezeichnen werden.[11] Interessanterweise lassen sich sämtliche Zwangsbedingungen $\tilde{\mathcal{H}}_0, \tilde{\mathcal{H}}_i$ und $\tilde{\mathcal{J}}_a$ in Termen von $\tilde{\mathcal{G}}^i_{\Lambda,a}$ ausdrücken:

$$\tilde{\mathcal{H}}_0 \equiv \frac{2}{\gamma} \, e_{ia} \, \tilde{\mathcal{G}}^i_{\Lambda,a} = 0 \ , \tag{2.47}$$

$$\tilde{\mathcal{H}}_i \equiv \pm \frac{2i}{\gamma} \, \underset{\sim}{\varepsilon}_{ijk} \, \tilde{e}^j{}_a \, \tilde{\mathcal{G}}^k_{\Lambda,a} - \mathcal{A}_{ia} \tilde{\mathcal{J}}_a = 0 \ , \tag{2.48}$$

$$\tilde{\mathcal{J}}_a \equiv \pm \frac{6i}{\gamma\Lambda} \, \mathcal{D}_i \, \tilde{\mathcal{G}}^i_{\Lambda,a} = 0 \ . \tag{2.49}$$

Wir können also alle Zwangsbedingungen (2.47)-(2.49) der Gravitation erfüllen, indem wir uns auf den nichttrivialen Unterraum

$$\tilde{\mathcal{G}}^i_{\Lambda,a} \stackrel{!}{=} 0 \tag{2.50}$$

des Phasenraums einschränken. Die Bedingungen (2.50) bilden ein selbstkonsistentes Gleichungssystem, denn der Unterraum (2.50) bleibt unter Zeitevolution erhalten, wie man mit Hilfe der Poisson-Klammern

$$\begin{aligned} &\left\{ \int \mathrm{d}^3x \, N \tilde{\mathcal{H}}_0, \int \mathrm{d}^3y \, \lambda_{ia} \, \tilde{\mathcal{G}}^i_{\Lambda,a} \right\} \\ &= \pm \frac{i}{2} \int \mathrm{d}^3z \, \frac{N}{\sqrt{h}} \left(e_{ia} \, e_{jb} - 2 \, e_{ib} \, e_{ja} \right) \, \tilde{\varepsilon}^{jk\ell} \, \mathcal{D}_k \lambda_{\ell b} \, \tilde{\mathcal{G}}^i_{\Lambda,a} \ , \end{aligned} \tag{2.51}$$

[11] Im allgemeinen handelt es sich hierbei jedoch weder um den dreidimensionalen Einsteintensor, noch um die räumlichen Komponenten des vierdimensionalen Einsteintensors, sondern um einen neuen, ausgezeichneten Krümmungstensor des komplexen Spin-Zusammenhangs $\mathcal{A}_{ia}$. Dieser stellt aber insofern eine *Verallgemeinerung* des üblichen Einsteintensors mit kosmologischem Term (2.44) dar, als daß er im Spezialfall $\mathcal{A}_{ia} = \omega_{ia}$ in den Tensor (2.44) übergeht.

$$\left\{\int \mathrm{d}^3x\, N^i\tilde{\mathcal{H}}_i, \int \mathrm{d}^3y\, \lambda_{ia}\, \tilde{\mathcal{G}}^i_{\Lambda,a}\right\} = \int \mathrm{d}^3z\, \left(N^j\partial_j\lambda_{ia} + \lambda_{ja}\partial_i N^j\right)\, \tilde{\mathcal{G}}^i_{\Lambda,a}\ , \tag{2.52}$$

$$\left\{\int \mathrm{d}^3x\, \Omega_a\, \tilde{\mathcal{J}}_a, \int \mathrm{d}^3y\, \lambda_{ib}\, \tilde{\mathcal{G}}^i_{\Lambda,b}\right\} = \int \mathrm{d}^3z\, \varepsilon_{abc}\, \Omega_a\, \lambda_{ib}\, \tilde{\mathcal{G}}^i_{\Lambda,c}\ , \tag{2.53}$$

sieht, die

$$\left\{H,\, \tilde{\mathcal{G}}^i_{\Lambda,a}\right\} = 0 \tag{2.54}$$

für $\tilde{\mathcal{G}}^i_{\Lambda,a} = 0$ implizieren. Ferner vertauschen die neun Felder $\tilde{\mathcal{G}}^i_{\Lambda,a}$ bezüglich der Poisson-Klammer (2.39) untereinander. Der Unterraum (2.50) wird uns bei der Quantisierung der Gravitation in Kapitel 3 noch weiter beschäftigen.

In der Darstellung (2.47)-(2.49) fällt auf, daß sich sämtliche Zwangsbedingungen $\tilde{\mathcal{H}}_0, \tilde{\mathcal{H}}_i, \tilde{\mathcal{J}}_a$ als Funktionen kovarianter Krümmungen und kovarianter Ableitungen bezüglich des Eichfeldes $\mathcal{A}_{ia}$ ergeben. Die Ashtekartheorie konstituiert somit eine besondere Darstellung der Gravitationstheorie als *Eichtheorie* eines Eichfeldes $\mathcal{A}_{ia}$ mit konjugierter Feldstärke $\tilde{e}^{\,i}{}_a$. Es ist instruktiv, diese Eichtheorie mit der Yang-Mills-Theorie äußerer Eichsymmetrien zu vergleichen, was im nächsten Unterkapitel geschehen soll.

2.4 Vereinheitlichte Beschreibung von Gravitations- und Yang-Mills-Feldern

Der Standard-Zusatzterm eines äußeren Yang-Mills-Eichfeldes zum Wirkungsfunktional der Gravitation (2.1) lautet [37]

$$\mathcal{S}_{YM} = -\frac{1}{4}\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_{\mathcal{M}_3} \mathrm{d}^3x\, N\, \sqrt{h}\, \mathcal{F}^{\mu\nu\alpha}\, \mathcal{F}_{\mu\nu\alpha}\ , \tag{2.55}$$

wobei α die verschiedenen Generatoren der Yang-Mills-Eichgruppe numeriert, und

$$\mathcal{F}_{\mu\nu\alpha} = \partial_\mu\mathcal{A}_{\nu\alpha} - \partial_\nu\mathcal{A}_{\mu\alpha} + C_{\alpha\beta\gamma}\, \mathcal{A}_{\mu\beta}\, \mathcal{A}_{\nu\gamma} \tag{2.56}$$

die eichkovariante Feldstärke ist. Die Strukturkoeffizienten $C_{\alpha\beta\gamma}$ der lokalen Eichgruppe seien vollständig antisymmetrisch in α, β, γ gewählt. Führt man die in Kapitel 2.1 diskutierte ADM-Raumzeit-Aufspaltung im Wirkungsfunktional auch für die Yang-Mills-Felder durch, so liefert eine anschließende Legendretransformation bezüglich $\dot{\mathcal{A}}_{i\alpha}$ das folgende Gesamt-Hamiltonfunktional der Einstein-Yang-Mills-Theorie:

$$H_{ges} = \int\limits_{\mathcal{M}_3} \mathrm{d}^3x \, \left[N\tilde{\mathcal{H}}_{ges,0} + N^i\tilde{\mathcal{H}}_{ges,i} + \left(\Omega_a \pm i\, e^i{}_a \partial_i N\right) \tilde{\mathcal{J}}_a - \mathcal{A}_{0\alpha}\tilde{\mathcal{J}}_\alpha \right] . \tag{2.57}$$

Hierbei ist

$$\tilde{\mathcal{H}}_{ges,0} = \tilde{\mathcal{H}}_0 + \frac{1}{2\sqrt{h}}\, h_{ij} \, \left(\tilde{E}^i{}_\alpha \, \tilde{E}^j{}_\alpha + \tilde{B}^i{}_\alpha \, \tilde{B}^j{}_\alpha\right) \ , \tag{2.58}$$

$$\tilde{\mathcal{H}}_{ges,i} = \tilde{\mathcal{H}}_i + \tilde{E}^j{}_\alpha \partial_i \mathcal{A}_{j\alpha} - \tilde{E}^j{}_\alpha \partial_j \mathcal{A}_{i\alpha} - \mathcal{A}_{i\alpha}\partial_j \tilde{E}^j{}_\alpha \ , \tag{2.59}$$

$$\tilde{\mathcal{J}}_\alpha = \mathcal{D}_i \tilde{E}^i{}_\alpha := \partial_i \tilde{E}^i{}_\alpha + C_{\alpha\beta\gamma}\, \mathcal{A}_{i\beta}\, \tilde{E}^i{}_\gamma \ . \tag{2.60}$$

Die Magnetfelder $\tilde{B}^i{}_\alpha$ sind über

$$\tilde{B}^i{}_\alpha := \tfrac{1}{2}\, \tilde{\varepsilon}^{ijk}\, \mathcal{F}_{jk\alpha} \ , \tag{2.61}$$

die elektrischen Feldstärken $\tilde{E}^i{}_\alpha$ als kanonisch konjugierte Impulse zum Eichfeld $\mathcal{A}_{i\alpha}$ definiert:

$$\tilde{E}^i{}_\alpha := \frac{\delta L_{ges}}{\delta \dot{\mathcal{A}}_{i\alpha}} = N\sqrt{h}\, \mathcal{F}^{i0}{}_\alpha \ . \tag{2.62}$$

Die symplektische Struktur (2.39) ist auf dem um die Felder $\mathcal{A}_{i\alpha}, \tilde{E}^i{}_\alpha$ erweiterten Phasenraum über die kanonische Poisson-Klammer

$$\left\{\mathcal{A}_{i\alpha}(x), \tilde{E}^j{}_\beta(y)\right\} = \delta^j_i\, \delta_{\alpha\beta}\, \delta^3(x-y) \tag{2.63}$$

fortzusetzen. Vergleicht man die Beiträge von Gravitations- und Yang-Mills-Feldern zum Gesamt-Hamiltonfunktional (2.57), so fällt zunächst eine bemerkenswerte Strukturäquivalenz zwischen $\tilde{\mathcal{J}}_a$ gemäß (2.38) und den Yang-Mills-Gauß-Bedingungen $\tilde{\mathcal{J}}_\alpha$ aus (2.60) auf. Auch in ihrer geometrischen Bedeutung sind die Zwangsbedingungen $\tilde{\mathcal{J}}_a$ und $\tilde{\mathcal{J}}_\alpha$ stark verwandt: Beide generieren Eichtransformationen der jeweiligen Eichgruppe. Dies rechtfertigt im Nachhinein die schon in Abschnitt 2.2 eingeführte Bezeichnung „Gauß-Bedingungen" für die Zwangsbedingungen $\tilde{\mathcal{J}}_a$ der Gravitationstheorie. Betrachten wir weiterhin den Beitrag des Yang-Mills-Feldes zu den Diffeomorphismen in (2.59), so unterscheidet sich dieser nur im Vorfaktor vom gravitativen Beitrag (2.37). Dieser Unterschied ist aber ausschließlich auf die verschiedenen Poisson-Klammern (2.39) und (2.63) zurückzuführen, weshalb Gravitations- und Yang-Mills-Felder effektiv völlig äquivalente Beiträge zu den Diffeomorphismen leisten.

Lediglich im Beitrag zur Hamiltonschen Zwangsbedingung unterscheiden sich die beiden Felder: Führt man analog zu (2.61) ein „Magnetfeld"

$$\tilde{b}^i{}_a := \tfrac{1}{2}\,\tilde{\varepsilon}^{ijk}\mathcal{F}_{jka} \tag{2.64}$$

auch für die Gravitation ein, so läßt sich $\tilde{\mathcal{H}}_0$ aus (2.47) auf die Form

$$\tilde{\mathcal{H}}_0 = \frac{2}{\gamma\sqrt{h}}\,h_{ij}\,\left(\tilde{e}^i{}_a\,\tilde{b}^j{}_a + \frac{\Lambda}{3}\,\tilde{e}^i{}_a\,\tilde{e}^j{}_a\right) \tag{2.65}$$

umschreiben. Im direkten Vergleich mit dem Yang-Mills-Beitrag zur Gesamt-Hamilton-Zwangsbedingung (2.58) ist dieser gravitative Beitrag zwar ebenfalls bilinear in $\tilde{e}^i{}_a, \tilde{b}^i{}_a$, aber nur erster Ordnung in $\tilde{b}^i{}_a$. Dieser wesentliche Unterschied zwischen Ashtekar- und Yang-Mills-Theorie ist offensichtlich darauf zurückzuführen, daß das gravitative Wirkungsfunktional (2.1) im Gegensatz zum Yang-Mills-Beitrag (2.55) nur *linear* in der Krümmung der Eichfelder ist.

Ferner unterscheiden sich die beiden Eichtheorien in dem zugrunde liegenden Phasenraum: Im Gegensatz zu den Yang-Mills-Eichfeldern $\mathcal{A}_{i\alpha}$ dürfen die Ashtekar-Eichfelder $\mathcal{A}_{ia}$ *komplex* sein, was auch die unterschiedlichen symplektischen Strukturen (2.39) und (2.63) erklärt.

Trotz dieser formalen Unterschiede zwischen Ashtekar- und Yang-Mills-Theorie ist es gerade die Formulierung der Gravitation als *Eichtheorie*, die uns in Kapitel 3.4 erlauben wird, eine exakte Lösung der quantisierten Einsteingleichungen anzugeben.

Zum Abschluß dieser bisher ausschließlich klassischen Betrachtungen sei noch eine bemerkenswerte Verallgemeinerung des in (2.43) definierten Tensors $\tilde{\mathcal{G}}^i_{\Lambda,a}$

erwähnt, die sich bei der Beschreibung externer Yang-Mills-Felder als nützlich erweist. Definieren wir für ein Yang-Mills-Feld die Hilfsgrößen[12]

$$\tilde{\tilde{\mathcal{T}}}^{ij} := \tfrac{1}{2}\left(i\,\tilde{E}^i{}_\alpha \pm \tilde{B}^i{}_\alpha\right)\left(i\,\tilde{E}^j{}_\alpha \mp \tilde{B}^j{}_\alpha\right) \ , \tag{2.66}$$

wobei sich die Wahl des Vorzeichens auf die Definition (2.34) der Ashtekarvariablen bezieht, so ergeben sich analog zu (2.47), (2.48) folgende Darstellungen für $\tilde{\mathcal{H}}_{ges,0}$ und $\tilde{\mathcal{H}}_{ges,i}$:

$$\tilde{\mathcal{H}}_{ges,0} = \frac{2}{\gamma}\,e_{ia}\left[\,\tilde{\mathcal{G}}^i_{\Lambda,a} - \frac{\gamma}{2\sqrt{h}}\,e_{ja}\tilde{\tilde{\mathcal{T}}}^{ij}\,\right] \ , \tag{2.67}$$

$$\tilde{\mathcal{H}}_{ges,i} = \pm\frac{2i}{\gamma}\,\underset{\sim}{\varepsilon}_{ijk}\,\tilde{e}^j{}_a\left[\,\tilde{\mathcal{G}}^k_{\Lambda,a} - \frac{\gamma}{2\sqrt{h}}\,e_{\ell a}\tilde{\tilde{\mathcal{T}}}^{k\ell}\,\right] - \mathcal{A}_{ia}\tilde{\mathcal{J}}_a - \mathcal{A}_{i\alpha}\tilde{\mathcal{J}}_\alpha \ . \tag{2.68}$$

Fordert man in Verallgemeinerung von (2.50)

$$\tilde{\mathcal{G}}^i_{\Lambda,a} \overset{!}{=} \frac{\gamma}{2\sqrt{h}}\,e_{ja}\tilde{\tilde{\mathcal{T}}}^{ij} \qquad \Leftrightarrow \qquad \tilde{e}^j{}_a\,\tilde{\mathcal{G}}^i_{\Lambda,a} = \frac{\gamma}{2}\tilde{\tilde{\mathcal{T}}}^{ij} \tag{2.69}$$

in Verbindung mit

$$\tilde{\mathcal{J}}_a \overset{!}{=} 0 \quad , \quad \tilde{\mathcal{J}}_\alpha \overset{!}{=} 0 \ , \tag{2.70}$$

so sind alle Zwangsbedingungen der Einstein-Yang-Mills-Theorie automatisch erfüllt, und bleiben wie in (2.54) sogar unter Zeitevolution erhalten. Über Lösungen von (2.69) und (2.70) erhalten wir also *spezielle* klassische Lösungen der Einstein-Yang-Mills-Theorie.

Vergleichen wir die Forderungen (2.69) mit den üblichen, dreidimensionalen Einsteingleichungen

$$\tilde{G}^i_{\Lambda,a} = \frac{\gamma\sqrt{h}}{2}\,e_{ja}\,T^{ij} \ , \tag{2.71}$$

wobei T^{ij} die räumlichen Komponenten des Energie-Impuls-Tensors für Yang-Mills-Felder bezeichnet, so zeigen die Gleichungen (2.69) und (2.71) eine überraschende Strukturäquivalenz: Die Tensordichte $\tilde{\tilde{\mathcal{T}}}^{ij}$ gemäß (2.66) scheint hierbei

[12]Die Felder $\tilde{\tilde{\mathcal{T}}}^{ij}$ sind die Komponenten einer kontravarianten Tensordichte zweiter Stufe vom Gewicht +2; dieses spezielle Gewicht sei hier durch eine Doppeltilde angedeutet.

in (2.69) formal die Rolle des Energie-Impuls-Tensors T^{ij} in (2.71) zu übernehmen - insbesondere stimmen dann die Kopplungsfaktoren $\frac{\gamma}{2} = 8\pi G$ in (2.69) und (2.71) exakt überein. Diese Analogie ist umso erstaunlicher, als daß zum einen die Größen $\tilde{\tilde{\mathcal{T}}}^{ij}$ *keineswegs* den Energie-Impuls-Tensor eines Yang-Mills-Feldes bezeichnen, und da es sich zum anderen bei den Gleichungen (2.69) und (2.71) um *grundsätzlich verschiedene* Aussagen handelt.

Abschließend sei noch bemerkt, daß die Gleichungen (2.69), (2.70) vollständig in einen gravitativen und einen Yang-Mills-Anteil entkoppeln, was Anlaß zu expliziten, klassischen Lösungen des Systems (2.69), (2.70) gibt, die jedoch *komplexen* Yang-Mills-Feldern entsprechen und deshalb schwierig physikalisch zu interpretieren sind - wir wollen uns deshalb an dieser Stelle nicht weiter mit den Lösungen des Gleichungssystems (2.69), (2.70) und der Interpretation des zugehörigen Lösungsraumes beschäftigen, sondern uns stattdessen im nächsten Kapitel der Quantisierung der Gravitation zuwenden.

Kapitel 3

Kanonische Quantisierung der Gravitation

Wir wollen nun die kanonische, symplektische Algebra (2.22) der fundamentalen Phasenraumvariablen $\tilde{e}^i{}_a$ und p_{ia} auf einem Hilbertraum von Wellenfunktionalen $|\Psi\rangle$ darstellen. Da die Triadenfelder $\tilde{e}^i{}_a$ leichter geometrisch zu interpretieren sind als ihre kanonisch konjugierten Impulse p_{ia}, und außerdem schon in der klassischen Formulierung der Gravitation als eigentliche Konfigurationsraumvariablen auftraten, werden wir die Quantisierung zunächst in der $\tilde{e}^i{}_a$-Darstellung durchführen. Zur Realisierung der kanonischen Operatoralgebra

$$\left[\, \tilde{e}^i{}_a(x), p_{jb}(y) \,\right] = i\hbar\, \delta^i_j\, \delta_{ab}\, \delta^3(x-y) \tag{3.1}$$

haben wir dann

$$p_{ia}(x) = -i\hbar \, \frac{\delta}{\delta \tilde{e}^i{}_a(x)} \tag{3.2}$$

zu wählen, wobei p_{ia} auf Wellenfunktionale $\Psi[\tilde{e}^i{}_a]$ wirkt, die den Darstellungsraum aufspannen. Im Abschnitt 3.3 werden wir ein inneres Produkt definieren, das diesen Darstellungsraum zum Hilbertraum erweitert.

Aus (3.2) erhält man sofort die den Ashtekarvariablen (2.34) zugeordneten Quantenoperatoren

$$\mathcal{A}_{ia}(x) = \omega_{ia}(x) \pm \frac{\gamma\hbar}{2}\, \frac{\delta}{\delta \tilde{e}^i{}_a(x)} \ , \tag{3.3}$$

die mit $\tilde{e}^i{}_a$ zu (2.39) analoge Vertauschungsrelationen erfüllen. Die Zwangsbedingungen $\tilde{\mathcal{H}}_0, \tilde{\mathcal{H}}_i$ und $\tilde{\mathcal{J}}_a$ der klassischen Gravitationstheorie sollen nun über die *Diracsche Methode* in die Quantentheorie der Gravitation implementiert werden.

3.1 Operatoren und Algebra der Zwangsbedingungen

Für die Quantisierung eines klassischen Hamiltonschen Systems mit Zwangsbedingungen kann die Diracsche Methode [38] verwendet werden, wenn sämtliche Zwangsbedingungen *primär* sind, also unter dem Hamiltonschen Fluß erhalten bleiben. Dabei wird zu jeder Zwangsbedingung ein quantenmechanischer Operator definiert, wobei die Quantisierung so durchzuführen ist, daß die Algebra dieser Operatoren schließt[1]; andernfalls würden über die Kommutatoren der primären Zwangsoperatoren neue, *sekundäre* Zwangsbedingungen entstehen. Dann können die Zwangsbedingungen auf dem Darstellungsraum implementiert werden, indem man fordert, daß sämtliche zugeordnete Operatoren das Wellenfunktional $|\Psi\rangle$ annihilieren.

Wir werden nun Darstellungsoperatoren zu den Zwangsobservablen $\tilde{\mathcal{H}}_0, \tilde{\mathcal{H}}_i$ und $\tilde{\mathcal{J}}_a$ der klassischen Gravitationstheorie definieren und zeigen, daß ihre Algebra geschlossen ist. Dann folgt aus der quantenmechanischen Algebra über den semiklassischen Limes automatisch eine strukturgleiche Poisson-Algebra der klassischen Zwangsobservablen. Die klassische Algebra der Zwangsbedingungen ist deshalb ebenfalls abgeschlossen, und hätte auch schon in Kapitel 2 diskutiert werden können. Weiterhin impliziert der Abschluß der klassischen Poisson-Algebra über (2.41) direkt die Zeiterhaltung der klassischen Zwangsobservablen, die folglich vom primären Typ sind - der quantenmechanische Abschluß der Algebra der Zwangsoperatoren sichert somit im Nachhinein gleichzeitig die Anwendbarkeit der Diracschen Methode.

Zur expliziten Angabe der quantisierten Operatoren $\tilde{\mathcal{H}}_0, \tilde{\mathcal{H}}_i$ und $\tilde{\mathcal{J}}_a$ in der $\tilde{e}^i{}_a$-Darstellung wählen wir nun die in (2.47)-(2.49) angedeutete Faktorordnung, wobei für $\mathcal{A}_{ia}$ die Operatoren (3.3) einzusetzen sind. Durch Nachrechnen verifiziert man leicht, daß hiermit die Darstellungen (2.37) und (2.38) für die Diffeomorphismen $\tilde{\mathcal{H}}_i$ und die Gauß-Bedingungen $\tilde{\mathcal{J}}_a$ auch quantenmechanisch gültig bleiben. Für die Algebra der Quantenoperatoren ergibt sich nach einiger Rechnung explizit das folgende Resultat:

[1] Dies setzt natürlich voraus, daß die entsprechende klassische Poisson-Algebra ebenfalls abgeschlossen ist.

$$\left[\int d^3x\,\varphi_a\,\tilde{\mathcal{J}}_a, \int d^3y\,\psi_b\,\tilde{\mathcal{J}}_b\right] = i\hbar\int d^3z\,\varepsilon_{abc}\,\varphi_a\,\psi_b\,\tilde{\mathcal{J}}_c\ , \tag{3.4}$$

$$\left[\int d^3x\,N^i\tilde{\mathcal{H}}_i, \int d^3y\,\varphi_a\,\tilde{\mathcal{J}}_a\right] = i\hbar\int d^3z\,N^i\partial_i\varphi_a\,\tilde{\mathcal{J}}_a\ , \tag{3.5}$$

$$\left[\int d^3x\,N^i\tilde{\mathcal{H}}_i, \int d^3y\,M^j\tilde{\mathcal{H}}_j\right] = i\hbar\int d^3z\,\left(N^i\partial_iM^j - M^i\partial_iN^j\right)\tilde{\mathcal{H}}_j\ , \tag{3.6}$$

$$\left[\int d^3x\,\varphi_a\,\tilde{\mathcal{J}}_a, \int d^3y\,N\tilde{\mathcal{H}}_0\right] = 0\ , \tag{3.7}$$

$$\left[\int d^3x\,N^i\tilde{\mathcal{H}}_i, \int d^3y\,N\tilde{\mathcal{H}}_0\right] = i\hbar\int d^3z\,N^i\partial_iN\,\tilde{\mathcal{H}}_0\ , \tag{3.8}$$

$$\left[\int d^3x\,N\tilde{\mathcal{H}}_0, \int d^3y\,M\tilde{\mathcal{H}}_0\right] = i\hbar\int d^3z\,(N\partial_iM - M\partial_iN)\,h^{ij}\left(\tilde{\mathcal{H}}_j + \mathcal{A}_{ja}\,\tilde{\mathcal{J}}_a\right)\ . \tag{3.9}$$

In der von uns gewählten Faktorordnung schließt die Algebra der quantisierten Operatorn $\tilde{\mathcal{H}}_0, \tilde{\mathcal{H}}_i, \tilde{\mathcal{J}}_a$ also *ohne* Quantenkorrekturen.

Definieren wir den bereits in Abschnitt 2.2 erwähnten Paritätsoperator $\mathcal{P}$ quantenmechanisch in naheliegender Weise über seine Wirkung

$$\mathcal{P}\,\Psi[\tilde{e}^i{}_a] = \Psi[-\tilde{e}^i{}_a] \tag{3.10}$$

auf Wellenfunktionale $\Psi[\tilde{e}^i{}_a]$, so transformieren sich die Operatoren $\tilde{\mathcal{H}}_0$ und $\tilde{\mathcal{H}}_i$ gerade, und die $\tilde{\mathcal{J}}_a$ ungerade unter Paritätstransformationen. Auch unter Hinzunahme des Paritätsoperators $\mathcal{P}$ bleibt die resultierende Algebra der quantenmechanischen Operatoren $\tilde{\mathcal{H}}_0, \tilde{\mathcal{H}}_i, \tilde{\mathcal{J}}_a$ und $\mathcal{P}$ deshalb abgeschlossen.

Eichinvariante Wellenfunktionale $\Psi[\tilde{e}^i{}_a]$ müssen nun die sieben funktionalen Zwangsbedingungen

$$\tilde{\mathcal{H}}_0\,\Psi \stackrel{!}{=} 0\ , \tag{3.11}$$

$$\tilde{\mathcal{H}}_i\,\Psi \stackrel{!}{=} 0\ , \tag{3.12}$$

$$\tilde{\mathcal{J}}_a \, \Psi \stackrel{!}{=} 0 \; , \tag{3.13}$$

sowie die diskrete Paritätsforderung

$$\mathcal{P} \, \Psi \stackrel{!}{=} \Psi \tag{3.14}$$

befriedigen. Die Zwangsbedingung (3.11) heißt auch *Wheeler-DeWitt-Gleichung* der Quantengravitation.

Die physikalische Interpretation dieser fundamentalen Gleichungen der Quantengravitation ergibt sich direkt aus ihrer klassischen Bedeutung: Die Bedingungen (3.11) und (3.12) sichern die Invarianz des Quantenzustands Ψ unter zeitlichen und räumlichen Koordinatentransformationen, die Forderungen (3.13) implizieren zusammen mit (3.14) die Invarianz von Ψ unter beliebigen räumlichen O(3)-Eichtransformationen der Triade.

Die Kommutatoren der Operatoralgebra (3.4)-(3.8) lassen sich ebenfalls sehr schön geometrisch interpretieren: Die Operatoren $\tilde{\mathcal{J}}_a$ liefern gemäß (3.4) eine Darstellung der lokalen Drehgruppe SO(3), die $\tilde{\mathcal{H}}_i$ stellen gemäß (3.6) die universelle Diffeomorphismengruppe der Lie-Ableitung dar.[2] In (3.5) und (3.8) wirken die Diffeomorphismen über die Lie-Ableitung auf die Parameterfelder φ_a und N, nicht aber auf $\tilde{\mathcal{J}}_a$ und $\tilde{\mathcal{H}}_0$, die in diesem Sinne diffeomorphismuskovariante Größen sind. Gemäß (3.7) ist ferner der Operator $\tilde{\mathcal{H}}_0$ der Hamiltonschen Zwangsbedingung SO(3)-invariant.

Lediglich der letzte Kommutator (3.9) läßt sich nicht ohne weiteres geometrisch interpretieren, es ist aber bemerkenswert, daß eine zu (3.9) strukurgleiche Erweiterung für die quantisierte Einstein-Yang-Mills-Theorie existiert. Zur Erläuterung dieser Aussage werden wir im nächsten Unterkapitel auch im Rahmen der Quantentheorie noch einmal kurz auf die in Kapitel 2.4 diskutierte Einstein-Yang-Mills-Theorie zurückkommen.

3.2 Die quantisierte Einstein-Yang-Mills-Theorie

Zur kanonischen Quantisierung der in Kapitel 2.4 klassisch formulierten Einstein-Yang-Mills-Theorie müssen wir den Darstellungsraum der Quantengravitation auf

[2] Die Lie-Ableitung und ihre Gruppeneigenschaft werden im Anhang B.1 im Zusammenhang mit homogenen 3-Mannigfaltigkeiten diskutiert.

Yang-Mills-Felder erweitern. Im Gegensatz zur Gravitationstheorie spielen in der üblichen Yang-Mills-Theorie die Eichfelder $\mathcal{A}_{i\alpha}$ die Rolle der natürlichen Konfigurationsraumvariablen, so daß es naheliegend ist, den von den Wellenfunktionalen $\Psi[\tilde{e}^{i}{}_{a}, \mathcal{A}_{i\alpha}]$ aufgespannten Darstellungsraum zu betrachten. Für die zu $\mathcal{A}_{i\alpha}$ kanonisch konjugierten Impulse p_{ia} ergibt sich dann die Operatordarstellung

$$\tilde{E}^{i}{}_{\alpha}(x) = -i\hbar \, \frac{\delta}{\delta \mathcal{A}_{i\alpha}(x)} \ . \tag{3.15}$$

Wählen wir die Faktorordnung der quantisierten Operatoren $\tilde{\mathcal{H}}_{ges,0}, \tilde{\mathcal{H}}_{ges,i}$ und $\tilde{\mathcal{J}}_{\alpha}$ wie in (2.58)-(2.60), so ergibt sich auch für die quantisierte Einstein-Yang-Mills-Theorie wieder die Operatoralgebra (3.4)-(3.8), wobei die dort auftretenden Operatoren $\tilde{\mathcal{H}}_0$ und $\tilde{\mathcal{H}}_i$ einfach durch ihre Yang-Mills-Erweiterungen $\tilde{\mathcal{H}}_{ges,0}$ und $\tilde{\mathcal{H}}_{ges,i}$ zu ersetzen sind. Neu hinzu kommen die Vertauschungseigenschaften mit den Yang-Mills-Gauß-Bedingungen $\tilde{\mathcal{J}}_{\alpha}$, wofür sich folgendes ergibt:[3]

$$\left[\int \mathrm{d}^3x \, \varphi_\alpha \, \tilde{\mathcal{J}}_\alpha, \int \mathrm{d}^3y \, \psi_\beta \, \tilde{\mathcal{J}}_\beta\right] = i\hbar \int \mathrm{d}^3z \, C_{\alpha\beta\gamma} \, \varphi_\alpha \, \psi_\beta \, \tilde{\mathcal{J}}_\gamma \ , \tag{3.16}$$

$$\left[\int \mathrm{d}^3x \, \varphi_\alpha \, \tilde{\mathcal{J}}_\alpha, \int \mathrm{d}^3y \, \psi_b \, \tilde{\mathcal{J}}_b\right] = 0 \ , \tag{3.17}$$

$$\left[\int \mathrm{d}^3x \, N^i \tilde{\mathcal{H}}_{ges,i} \int \mathrm{d}^3y \, \varphi_\alpha \, \tilde{\mathcal{J}}_\alpha\right] = i\hbar \int \mathrm{d}^3z \, N^i \partial_i \varphi_\alpha \, \tilde{\mathcal{J}}_\alpha \ , \tag{3.18}$$

$$\left[\int \mathrm{d}^3x \, \varphi_\alpha \, \tilde{\mathcal{J}}_\alpha, \int \mathrm{d}^3y \, N \tilde{\mathcal{H}}_{ges,0}\right] = 0 \ . \tag{3.19}$$

Die geometrische Bedeutung dieser Kommutatoren ist offensichtlich: Über (3.16) stellen die Generatoren $\tilde{\mathcal{J}}_{\alpha}$ der lokalen Yang-Mills-Eichtransformationen die Algebra der Eichgruppe dar, wegen (3.17) ergibt sich die Einstein-Yang-Mills-Eichgruppe als direktes Produkt der beiden Untergruppen. Die $\tilde{\mathcal{J}}_{\alpha}$ sind gemäß (3.18), (3.19) diffeomorphismuskovariante Operatoren, welche die Hamiltonsche Zwangsbedingung $\tilde{\mathcal{H}}_{ges,0}$ invariant lassen.

Für die einzige noch ausstehende Vertauschungsrelation von $\tilde{\mathcal{H}}_{ges,0}$ mit sich selbst finden wir das Resultat

[3] Die entsprechende klassische Poisson-Algebra der Zwangsbedingungen einer Einstein-Yang-Mills-Theorie wurde bereits von Ashtekar in [5] angegeben.

$$\left[\int \mathrm{d}^3x \, N\tilde{\mathcal{H}}_{ges,0}, \int \mathrm{d}^3y \, M\tilde{\mathcal{H}}_{ges,0} \right]$$

$$= i\hbar \int \mathrm{d}^3z \, (N\partial_i M - M\partial_i N) \, h^{ij} \left(\tilde{\mathcal{H}}_{ges,j} + \mathcal{A}_{ja} \, \tilde{\mathcal{J}}_a + \mathcal{A}_{j\alpha} \, \tilde{\mathcal{J}}_\alpha \right) \, , \tag{3.20}$$

was eine direkte Verallgemeinerung von (3.9) darstellt. Insbesondere gehen in (3.20) Gravitations- und Yang-Mills-Theorie als gleichwertige Eichtheorien ein, was aufgrund der in Kapitel 2.4 dargestellten, strukturell *unterschiedlichen* Feldbeiträge zu $\tilde{\mathcal{H}}_{ges,0}$ sehr überraschend ist. Bemerkenswert ist an dem Ergebnis (3.20) weiterhin die Tatsache, daß man aufgrund der Abhängigkeit des Yang-Mills-Beitrags (2.58) von der 3-Metrik $\boldsymbol{h}$ wohl eigentlich einen Wechselwirkungsterm zwischen Gravitations- und Yang-Mills-Feld erwartet hätte; dieser bleibt aber klassisch wie auch quantenmechanisch aus. Der Kommutator der Hamiltonschen Zwangsbedingung mit sich selbst zeigt also eine erstaunliche Universalität, womit wir auch die Struktur des rein gravitativen Resultats (3.9) nun besser verstehen.

Ferner sei noch betont, daß die Operatoralgebra der quantisierten Einstein-Yang-Mills-Theorie in der angegeben Faktorordnung *ohne* Quantenkorrekturen schließt, so daß auch hier sämtliche Zwangsbedingungen im Diracschen Sinne implementiert werden können. Betrachtet man die Vertauschungsrelationen (3.4)-(3.8), (3.16)-(3.20) der Quantenoperatoren $\tilde{\mathcal{H}}_{ges,0}, \tilde{\mathcal{H}}_{ges,i}, \tilde{\mathcal{J}}_a$ und $\tilde{\mathcal{J}}_\alpha$ genauer, so fällt auf, daß hier die Gravitations- und die Yang-Mills-Theorie in einer *algebraisch vereinheitlichten* Form beschrieben werden.

Mit diesen Bemerkungen wollen wir die Diskussion von Yang-Mills-Feldern nun aber beenden - das Studium der vollen, quantisierten Einstein-Yang-Mills-Theorie würde weit über den Rahmen dieser Arbeit hinausführen. Im folgenden werden wir uns ausschließlich den Problemen der quantisierten Gravitationstheorie zuwenden.

3.3 Inneres Produkt, Hermitezität und Eichfixierung

Um von einer Quantentheorie der Gravitation sprechen zu können, genügt es nicht, einen Darstellungsraum und eine geschlossene Operatoralgebra anzugeben; wir benötigen ferner ein *inneres Produkt*, das den Darstellungsraum der Wellenfunktionale zum Hilbertraum erhebt, und bezüglich dessen die Operatoren $\tilde{\mathcal{H}}_0, \tilde{\mathcal{H}}_i$ und $\tilde{\mathcal{J}}_a$ *hermitesch* sind. Ein derartiges inneres Produkt über dem vollen Darstellungsraum wollen wir als *kinematisches* Produkt bezeichnen [39]. Tatsächlich interessieren wir uns aber effektiv nur für einen *Unterraum* des Darstellungsraums, der von den eichinvarianten physikalischen Zuständen Ψ mit (3.11)-(3.14) aufgespannt wird. Zum Auffinden eines *physikalischen* Produkts auf diesem Unterraum gibt es ein Standardverfahren, das *Faddeev-Popov-Kalkül* [40], das angibt, wie man durch Eichfixierung des kinematischen Produkts zu einem effektiven, inneren Produkt auf dem Unterraum physikalischer Zustände gelangen kann. Auf das Problem der Eichfixierung werden wir in der zweiten Hälfte dieses Abschnitts zu sprechen kommen, zunächst soll uns aber das kinematische Produkt und die Frage nach der Hermitezität der Operatoren $\tilde{\mathcal{H}}_0, \tilde{\mathcal{H}}_i$ und $\tilde{\mathcal{J}}_a$ interessieren.

Zur Diskussion der Hermitezität ist es zweckmäßig, anstelle des komplex definierten Operators $\tilde{\mathcal{H}}_0$ den Operator $\tilde{\mathcal{H}}_0^{ADM}$ zu betrachten, der über (2.36) mit $\tilde{\mathcal{H}}_0$ verknüpft ist. Mit Hilfe von (3.4)-(3.9) überzeugt man sich leicht davon, daß die Operatoren $\tilde{\mathcal{H}}_0^{ADM}, \tilde{\mathcal{H}}_i$ und $\tilde{\mathcal{J}}_a$ ebenfalls eine geschlossene Algebra bilden, und daß sich der Unterraum der physikalischen Zustände durch die Substitution $\tilde{\mathcal{H}}_0 \mapsto \tilde{\mathcal{H}}_0^{ADM}$ nicht ändert. Die Kommutatoren der von $\tilde{\mathcal{H}}_0^{ADM}, \tilde{\mathcal{H}}_i$ und $\tilde{\mathcal{J}}_a$ gebildeten Algebra sind allerdings kompliziert und sollen hier nicht explizit angegeben werden.

Wir finden, daß die Operatoren $\tilde{\mathcal{H}}_0^{ADM}, \tilde{\mathcal{H}}_i$ und $\tilde{\mathcal{J}}_a$ formal hermitesch bezüglich des kinematischen Produkts

$$\left\langle \Psi_1 \middle| \Psi_2 \right\rangle = \int \mathcal{D}^9[\tilde{e}^i{}_a] \, \mathbb{h}^{-3/2} \, \Psi_1^*[\tilde{e}^i{}_a] \cdot \Psi_2[\tilde{e}^i{}_a] \tag{3.21}$$

sind[4], wobei $\mathbb{h}$ das Raumprodukt der Determinante $h(x)$ der 3-Metrik bezeichnet:

$$\mathbb{h} := \prod_{x \in \mathcal{M}_3} h(x) \; . \tag{3.22}$$

Das nichttriviale Integrationsgewicht in (3.21) läßt sich eliminieren, indem man im Konfigurationsraum einen Koordinatenwechsel von den Variablen $\tilde{e}^i{}_a$ zu den Komponenten e_{ia} der Triaden-1-Formen vornimmt:

$$\left\langle \Psi_1 \middle| \Psi_2 \right\rangle = \int \mathcal{D}^9[e_{ia}] \Psi_1^*[e_{ia}] \cdot \Psi_2[e_{ia}] \; . \tag{3.23}$$

[4]Für die Hermitezität der Operatoren $\tilde{\mathcal{H}}_i$ benötigt man dabei folgende Eigenschaft der Feldoperatoren:

$$\left[\, p_{ia}(x), \partial_k \tilde{e}^j{}_b(x) \,\right] = -i\hbar \, \delta_i^j \, \delta_{ab} \, \partial_k \delta^3(0) \stackrel{!}{=} 0 \; .$$

Das Verschwinden dieses Kommutators ist nicht selbstverständlich, es gibt aber Argumente [41], warum dies für eine entsprechend regularisierte Feldtheorie möglich sein sollte.

Im kinematischen Produkt (3.21), (3.23) sind zwar die zu $\tilde{e}^i{}_a$ kanonisch konjugierten Impulse p_{ia} *nicht* hermitesch, dafür aber die Impulsoperatoren

$$\tilde{p}^i{}_a := \tilde{\varepsilon}^{ijk}\, \varepsilon_{abc}\, e_{jb}\, p_{kc} \equiv -i\hbar\, \frac{\delta}{\delta e_{ia}} \ , \tag{3.24}$$

die sich zu e_{ia} kanonisch konjugiert verhalten.[5]

Im Rahmen des Faddeev-Popov-Kalküls kann nun zum kinematischen, inneren Produkt (3.23) ein eichfixiertes, physikalisches Produkt auf dem Unterraum der physikalischen Zustände konstruiert werden. Hierzu ist für jede Eichsymmetrie der Theorie eine *Eichbedingung* zu wählen, wobei darauf zu achten ist, daß jeder Punkt des Konfigurationsraumes durch *Eichtransformationen* in einen eichäquivalenten Punkt überführt werden kann, der die geforderte Eichbedingung befriedigt. Für die Gauß-Bedingungen $\tilde{\mathcal{J}}_a$ bieten sich die Eichbedingungen

$$\tilde{\chi}_a = \partial_i \tilde{e}^i{}_a \overset{!}{=} 0 \ , \tag{3.25}$$

für die Diffeomorphismen $\tilde{\mathcal{H}}_i$ die *harmonische* Eichung

$$\tilde{\chi}^j = \partial_i \left(\sqrt{h}\, h^{ij} \right) \overset{!}{=} 0 \tag{3.26}$$

an. Diese führen auf das vorläufige innere Produkt[6]

$$\left\langle\!\left\langle \Psi_1 \middle\| \Psi_2 \right\rangle\!\right\rangle = \left\langle \Psi_1 \middle| \delta^3[\tilde{\chi}_a] \cdot \delta^3[\tilde{\chi}^i] \cdot |J_G\, J_D| \middle| \Psi_2 \right\rangle \tag{3.27}$$

mit

$$J_G := \mathrm{Det} \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[\tilde{\mathcal{J}}_a(x), \tilde{\chi}_b(y) \right] \right\} \quad , \quad J_D := \mathrm{Det} \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[\tilde{\mathcal{H}}_i(x), \tilde{\chi}^j(y) \right] \right\} \ . \tag{3.28}$$

Die hierbei auftretenden Faddeev-Popov-Funktionaldeterminanten J_G und J_D

[5] Tatsächlich wäre es unter dem Gesichtspunkt der Hermitezität naheliegender gewesen, die Quantisierung der Gravitation in der e_{ia}-Darstellung durchzuführen. Die Vorteile der hierzu völlig äquivalenten $\tilde{e}^i{}_a$-Darstellung werden im nächsten Abschnitt 3.4 noch offensichtlich werden.

[6] Die Faddeev-Popov-Determinante zu den in (3.25) und (3.26) getroffenen Eichbedingungen faktorisiert in einen Gauß- und einen Diffeomorphismen-Anteil J_G und J_D, da die $\tilde{\chi}_a$ Diffeomorphismus-, und die $\tilde{\chi}^i$ SO(3)-invariant sind.

gemäß (3.28) sind allerdings sehr kompliziert zu berechnen, weshalb wir es hier bei den formalen Ausdrücken bewenden lassen wollen.

Das Ergebnis (3.27) ist soweit unabhängig von der speziellen Wahl der Eichbedingungen $\tilde{\chi}_a$ und $\tilde{\chi}_j$, da die Operatoren $\tilde{\mathcal{J}}_a$ und $\tilde{\mathcal{H}}_i$ Ableitungsoperatoren erster Ordnung auf dem Konfigurationsraum sind: Für solche Operatoren garantiert das Faddeev-Popov-Kalkül ein *eindeutiges*, eichfixiertes inneres Produkt [40]. Ein besonderes Problem hat man hingegen bei der noch ausstehenden *Zeiteichung* bezüglich der Hamiltonschen Zwangsbedingung. Wählt man zu $\tilde{\mathcal{H}}_0^{ADM}$ eine beliebige Eichbedingung $\tilde{\chi}$, so ist die Faddeev-Popov-Funktionaldeterminante

$$J_H := \mathrm{Det}\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\tilde{\mathcal{H}}_0^{ADM}(x), \tilde{\chi}(y)\right]\right\} \tag{3.29}$$

noch von erster Ordnung in den Impulsoperatoren p_{ia}; im vollständig eichfixierten Skalarprodukt

$$\left\langle\!\left\langle \Psi_1 \middle\| \Psi_2 \right\rangle\!\right\rangle_{phys} = \left\langle\!\left\langle \Psi_1 \right\| \delta[\tilde{\chi}] \cdot |J_H| \left\| \Psi_2 \right\rangle\!\right\rangle$$

$$= \left\langle \Psi_1 \right| \delta^3[\tilde{\chi}_a] \cdot \delta^3[\tilde{\chi}^i] \cdot \delta[\tilde{\chi}] \cdot |J_G\, J_D\, J_H| \left| \Psi_2 \right\rangle \tag{3.30}$$

wirkt J_H deshalb noch über erste Funktionalableitungen auf die Wellenfunktionale $\langle \Psi_1 |$ und $| \Psi_2 \rangle$, wobei insbesondere die Betragsbildung in (3.30) Schwierigkeiten bereitet [39]. Dabei liefern verschiedene Wahlen von $\tilde{\chi}$ *inäquivalente* physikalische innere Produkte (3.30), so daß a priori tatsächlich unklar ist, wie das vollständig eichfixierte innere Produkt der Quantengravitation auszusehen hat.

In Kapitel 5 werden wir versuchsweise eine besonders naheliegende Wahl der Eichbedingung $\tilde{\chi}$ diskutieren, und die resultierende „physikalische Norm" eines speziellen, exakten Quantenzustands berechnen, der im folgenden Abschnitt konstruiert werden soll.

3.4 Der Chern-Simons-Zustand der Quantengravitation

Zur Herleitung einer speziellen Lösung der Zwangsbedingungen (3.11)-(3.14) der Quantengravitation können wir versuchen, das restriktivere Gleichungssystem

$$\tilde{\mathcal{G}}^i_{\Lambda,a}\, \Psi \overset{!}{\doteq} 0 \tag{3.31}$$

zu lösen, das die quantenmechanische Verallgemeinerung von (2.50) darstellt. Wegen (2.47)-(2.49) erfüllt dann jede Lösung Ψ von (3.31) automatisch die sieben Zwangsbedingungen (3.11)-(3.13), während die Paritätsforderung (3.14) noch gesondert zu untersuchen bleibt. Wie ihr klassisches Pendant (2.50) bilden die Gleichungen (3.31) ein selbstkonsistentes System, denn die Operatoren $\tilde{\mathcal{G}}^i_{\Lambda,a}$ vertauschen untereinander und bilden mit dem quantisierten Hamiltonfunktional H gemäß (2.41) eine geschlossene Algebra.

Als Lösungsansatz für das Gleichungssystem (3.31) bietet sich zunächst eine Ähnlichkeitstransformation

$$\Psi[\tilde{e}^i{}_a] = \exp\left[\mp\frac{2\Phi}{\gamma\hbar}\right]\cdot\Psi'[\tilde{e}^i{}_a] \tag{3.32}$$

mit Φ aus (2.40) an, die den inhomogenen Term ω_{ia} der Ashtekar-Operatoren $\mathcal{A}_{ia}$ in (3.3) eliminiert:

$$\exp\left[\pm\frac{2\Phi}{\gamma\hbar}\right]\cdot\mathcal{A}_{ia}\cdot\exp\left[\mp\frac{2\Phi}{\gamma\hbar}\right] = \pm\frac{\gamma\hbar}{2}\,\frac{\delta}{\delta\tilde{e}^i{}_a} \quad . \tag{3.33}$$

Dann nimmt das Gleichungssystem (3.31) die folgende explizite Form an:

$$\left[\varepsilon^{ijk}\left(\pm\frac{\gamma\hbar}{2}\,\partial_j\,\frac{\delta}{\delta\tilde{e}^k{}_a} + \frac{\gamma^2\hbar^2}{8}\,\varepsilon_{abc}\,\frac{\delta^2}{\delta\tilde{e}^j{}_b\delta\tilde{e}^k{}_c}\right) + \frac{\Lambda}{3}\,\tilde{e}^i{}_a\right]\cdot\Psi' = 0 \ . \tag{3.34}$$

Im zweiten Lösungsschritt betrachten wir nun eine *verallgemeinerte* Fouriertransformation,

$$\Psi'[\tilde{e}^i{}_a] = \int\limits_\Gamma \mathcal{D}^9[\mathcal{A}_{ia}]\exp\left[\pm\frac{2}{\gamma\hbar}\int \mathrm{d}^3x\,\mathcal{A}_{ia}\,\tilde{e}^i{}_a\right]\cdot\hat{\Psi}[\mathcal{A}_{ia}] \quad , \tag{3.35}$$

wobei die von $\tilde{e}^i{}_a$ unabhängige, *komplexe* Integrationsmannigfaltigkeit Γ so gewählt sei, daß das Funktionalintegral (3.35) existiert, und partielle Integrationen bezüglich $\mathcal{A}_{ia}$ in (3.35) keine Randterme liefern. Dann transformieren sich die fundamentalen Phasenraumoperatoren $\mathcal{A}_{ia}$ und $\tilde{e}^i{}_a$ gemäß

$$\pm\frac{\gamma\hbar}{2}\,\frac{\delta\Psi'}{\delta\tilde{e}^i{}_a} \quad\mapsto\quad \mathcal{A}_{ia}\,\hat{\Psi}\ , \tag{3.36}$$

$$\tilde{e}^i{}_a\,\Psi' \quad\mapsto\quad \mp\frac{\gamma\hbar}{2}\,\frac{\delta\hat{\Psi}}{\delta\mathcal{A}_{ia}}\ , \tag{3.37}$$

und das fouriertransformierte Gleichungssystem (3.34) ergibt sich zu

$$\left[\tilde{\varepsilon}^{ijk}\,\mathcal{F}_{jka} \mp \frac{\gamma\hbar\Lambda}{3}\,\frac{\delta}{\delta\mathcal{A}_{ia}}\right]\cdot\hat{\Psi} = 0\ . \tag{3.38}$$

Die allgemeine Lösung von (3.38) ist der *Chern-Simons-Zustand* [13, 14]

$$\hat{\Psi}_{CS}[\mathcal{A}_{ia}] = \mathcal{N}\cdot\exp\left[\pm\frac{3}{\gamma\hbar\Lambda}\,\mathcal{S}_{CS}[\mathcal{A}_{ia}]\right]\ , \tag{3.39}$$

wobei $\mathcal{S}_{CS}[\mathcal{A}_{ia}]$ das Chern-Simons-Funktional des Ashtekar-Spin-Zusammenhangs $\mathcal{A}_{ia}$ bezeichnet,

$$\mathcal{S}_{CS}[\mathcal{A}_{ia}] := \int \mathrm{d}^3x\,\tilde{\varepsilon}^{ijk}\left(\mathcal{A}_{ia}\partial_j\mathcal{A}_{ka} + \tfrac{1}{3}\,\varepsilon_{abc}\,\mathcal{A}_{ia}\,\mathcal{A}_{jb}\,\mathcal{A}_{kc}\right)\ , \tag{3.40}$$

und $\mathcal{N}$ ein freier Normierungsfaktor ist.

Über (3.35) und (3.32) läßt sich der Chern-Simons-Zustand (3.39) von der Ashtekar-Darstellung zurück auf die Triaden-Darstellung transformieren, womit sich die folgende Funktionalintegraldarstellung für den Chern-Simons-Zustand $\Psi_{CS}[\tilde{e}^i{}_a]$ ergibt:

$$\Psi_{CS}[\tilde{e}^i{}_a] = \mathcal{N}\cdot\int_\Gamma \mathcal{D}^9[\mathcal{A}_{ia}]\exp\left[\pm\frac{1}{\gamma\hbar}\left(\int \mathrm{d}^3x\,\tilde{\varepsilon}^{ijk}e_{ia}\mathcal{D}_j e_{ka} + \frac{3}{\Lambda}\,\mathcal{S}_{CS}[\mathcal{A}_{ia}]\right)\right]\ . \tag{3.41}$$

Überraschenderweise fügen sich dabei der Beitrag von der Ähnlichkeitstransformation (3.32) und der Fourierterm aus (3.35) genau zum ersten, explizit SO(3)-eichinvarianten Term im Exponenten von (3.41) zusammen, wenn man zur Umschreibung des Fourierterms in (3.35) den Zusammenhang

$$\tilde{e}^i{}_a = \tfrac{1}{2}\,\tilde{\varepsilon}^{ijk}\,\varepsilon_{abc}\,e_{jb}\,e_{kc} \tag{3.42}$$

zwischen $\tilde{e}^i{}_a$ und e_{ia} verwendet. Die Gauß- und Diffeomorphismus-Invarianz des Quantenzustands $\Psi_{CS}[\tilde{e}^i{}_a]$ läßt sich somit direkt aus der Integraldarstellung (3.41) ablesen. Ferner verifiziert man mit Hilfe der Definition des quantenmechanischen Paritätsoperators $\mathcal{P}$ aus (3.10) leicht, daß auch die Paritätsforderung (3.14) vom Wellenfunktional $\Psi_{CS}[\tilde{e}^i{}_a]$ befriedigt wird.

Für den Normierungsfaktor $\mathcal{N}$ in (3.41) müssen wir die Eigenschaft

$$\frac{\delta \mathcal{N}}{\delta \tilde{e}^{i}{}_{a}} \stackrel{!}{=} 0 \tag{3.43}$$

fordern, was aber *nicht* zwangsläufig eine völlige Unabhängigkeit von $\tilde{e}^{i}{}_{a}$ impliziert: Tatsächlich kann $\mathcal{N}$ noch über *topologische Invarianten* der räumlichen 3-Mannigfaltigkeit von der Triade abhängen - eine Freiheit, von der wir später noch Gebrauch machen werden.

Zu diskutieren bleibt die Bedeutung und Wahl der komplexen Integrationsmannigfaltigkeit Γ für das Funktionalintegral in (3.41). Damit $\Psi_{CS}[\tilde{e}^{i}{}_{a}]$ gemäß (3.41) wirklich eine Lösung des Gleichungssystems (3.31) ist, sollten wir Γ so wählen, daß der Integrand von (3.41) an den Rändern von Γ exponentiell verschwindet; dies sichert die Existenz des Integrals, außerdem liefern dann partielle Integrationen bezüglich $\mathcal{A}_{ia}$ keine Randterme. Da das asymptotische Verhalten des Exponenten in (3.41) vom Chern-Simons-Funktional $\mathcal{S}_{CS}[\mathcal{A}_{ia}]$ bestimmt wird, während eine Abhängigkeit von der Triade $\tilde{e}^{i}{}_{a}$ nur über den subdominanten Fourierterm vorliegt, sollte es möglich sein, die Integrationsfläche Γ *unabhängig* von der Triade $\tilde{e}^{i}{}_{a}$ zu konstruieren, was für die Umrechnungen (3.36), (3.37) eine notwendige Voraussetzung war.

Existieren verschiedene, topologisch inäquivalente Wahlen von Γ mit den geforderten Eigenschaften, so entsprechen diese linear unabhängigen Zuständen $\Psi_{CS}[\tilde{e}^{i}{}_{a}]$ in der $\tilde{e}^{i}{}_{a}$-Darstellung, die alle über (3.41) aus ein und demselben Chern-Simons-Zustand $\hat{\Psi}_{CS}[\mathcal{A}_{ia}]$ in der Ashtekar-Darstellung hervorgehen. Dieses bemerkenswerte Phänomen der Vervielfachung des Quantenzustands beim Darstellungswechsel (3.35) ist bereits aus der Diskussion Bianchi IX-homogener Modelle in [23, 24, 25] wohlbekannt.

Für die folgende Diskussion werden wir die Existenz geeigneter Integrationsmannigfaltigkeiten Γ *voraussetzen* - eine explizite Angabe ist im Fall der vollen, inhomogenen Feldtheorie wohl leider nicht möglich: Schon im Rahmen einfacher, Bianchi IX-homogener Modelle erwies sich die Diskussion der entsprechenden komplexen Integrationskonturen als äußerst kompliziert. Trotzdem können wir zumindest eine implizite Konstruktionsvorschrift für Γ angeben, und aus der Integraldarstellung (3.41) in vielen *asymptotischen Grenzfällen* interessante Informationen extrahieren, was Gegenstand des nächsten Kapitels sein soll.

Kapitel 4

Asymptotische Entwicklungen des Chern-Simons-Zustands

In diesem Kapitel wollen wir versuchen, den in Abschnitt 3.4 gefundenen Chern-Simons-Zustand der Gravitation (3.41) in Abhängigkeit von der Triade $\tilde{e}^{i}{}_{a}$ auszuwerten und physikalisch zu interpretieren. Eine explizite analytische Berechnung des Funktionalintegrals in (3.41) ist dabei sehr kompliziert, und sicherlich - wenn überhaupt - nur teilweise möglich: Schon in homogenen Modellen vom Bianchi-Typ IX konnte das entsprechende, endlichdimensionale Integral nicht vollständig analytisch behandelt werden.

Wir wollen uns deshalb im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich auf *asymptotische Entwicklungen* des Funktionalintegrals in (3.41) beschränken, wobei als wesentliches mathematisches Hilfsmittel die *Laplacesche Sattelpunktsmethode* zum Einsatz kommen wird.

Um einen Überblick über die verschiedenen asymptotischen Entwicklungsmöglichkeiten zu bekommen ist es hilfreich, sich zunächst die für die Gravitationstheorie relevanten Längenskalen zu überlegen:

Die fundamentalen Naturkonstanten γ und $\hbar$ definieren die sogenannte *Planck-Länge*

$$a_{Pl} := \sqrt{\gamma\hbar}\ , \tag{4.1}$$

die eine untere Schranke für die Gültigkeit der klassischen Allgemeinen Relativitätstheorie darstellt. Die kosmologische Konstante Λ hat dieselbe Dimension wie der Krümmungsskalar R, weshalb

$$a_{\Lambda} := \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \tag{4.2}$$

eine weitere Längenskala der Theorie konstituiert. Schließlich tragen auch die 3-Metrik $\boldsymbol{h}$ und die Triadenfelder $\boldsymbol{e}_a$ eine globale Längeneinheit, die man über das Volumen V der 3-Mannigfaltigkeit $(\mathcal{M}_3, \boldsymbol{h})$ als

$$a_{cos} := \sqrt[3]{V} \qquad \text{mit} \qquad V = \int\limits_{\mathcal{M}_3} \mathrm{d}^3x\, \sqrt{h} \tag{4.3}$$

erhält. Diese *kosmologische* Längenskala ist ein Maß für die globale Ausdehnung der räumlichen 3-Mannigfaltigkeit.

Mit Hilfe der fundamentalen Längenskalen (4.1)-(4.3) seien nun die beiden dimensionslosen, positiven Parameter

$$\kappa := \left(\frac{a_{cos}}{a_\Lambda}\right)^2 = \frac{\Lambda}{3}\, a_{cos}^2 \quad , \quad \mu := \left(\frac{a_{cos}}{a_{Pl}}\right)^2 = \frac{a_{cos}^2}{\gamma\hbar} \ , \tag{4.4}$$

definiert, die im folgenden die Rolle von Entwicklungsparametern spielen werden. Ferner reskalieren wir die Triadenfelder über

$$e_{ia} = a_{cos}\, e'_{ia} \quad , \quad \tilde{e}^{\,i}{}_a = a_{cos}^2\, \tilde{e}'^{\,i}{}_a \ , \tag{4.5}$$

wobei e'_{ia} und $\tilde{e}'^{\,i}{}_a$ dimensionslose Felder sind. Unter Verwendung der Definitionen (4.4) und (4.5) kann man den Chern-Simons-Zustand (3.41) nun vollständig in dimensionslosen Größen ausdrücken:[1]

$$\Psi_{CS} = \mathcal{N} \cdot \int\limits_\Gamma \mathcal{D}^9[\mathcal{A}_{ia}] \exp\left[\pm\mu\left(\int \mathrm{d}^3x\, \tilde{\varepsilon}^{ijk} e'_{ia} \mathcal{D}_j e'_{ka} + \frac{1}{\kappa}\, \mathcal{S}_{CS}[\mathcal{A}_{ia}]\right)\right] \ . \tag{4.6}$$

Im Limes $\mu \to \infty$ bei festem κ und e'_{ia} ergibt sich hiermit offensichtlich eine Gaußsche Sattelpunktsform für das Funktionalintegral, so daß der Chern-Simons-Zustand (4.6) in diesem Grenzfall mit Hilfe der Laplaceschen Sattelpunktsmethode ausgewertet werden kann.

4.1 Der semiklassische Limes $\mu \to \infty$

Die Diskussion des Limes $\mu \to \infty$ für den Chern-Simons-Zustand (4.6) ist physikalisch sehr interessant, denn gemäß (4.4) handelt es sich hierbei gerade um den

[1] Die Ashtekarvariablen $\mathcal{A}_{ia}$ tragen per definitionem keine Dimension.

Grenzfall $a_{\cos} \gg a_{Pl}$, wo die kosmologische Längenskala a_{cos} der räumlichen 3-Geometrie groß im Verhältnis zur Planck-Skala ist. Außer in unmittelbarer Umgebung des Urknalls ist die Annahme dieser Längenverhältnisse gut gerechtfertigt. Gleichzeitig entspricht der Grenzfall $\mu \to \infty$ wegen (4.4) dem formalen Limes $\hbar \to 0$, weswegen wir ihn im weiteren auch als *semiklassischen* Limes bezeichnen werden.

Die Anwendung der Laplaceschen Methode auf das Funktionalintegral (4.6) liefert im Limes $\mu \to \infty$ bis auf einen konstanten Vorfaktor das asymptotische Resultat

$$\Psi_{CS} \overset{\mu \to \infty}{\propto} \mathcal{N} \cdot \mathrm{Det}^{-1/2}\left[\mu \, \frac{\delta^2 F}{\delta \mathcal{A}_{ia}(x) \delta \mathcal{A}_{jb}(y)}\right] \cdot \exp\left[\pm \mu F\right] \tag{4.7}$$

mit

$$F := \int \mathrm{d}^3 x \, \tilde{\varepsilon}^{ijk} e'_{ia} \mathcal{D}_j e'_{ka} + \frac{1}{\kappa} \, \mathcal{S}_{CS}[\mathcal{A}_{ia}] \; . \tag{4.8}$$

Hierbei ist der Ausdruck (4.7) an *Sattelpunkten* des Exponenten F auszuwerten, für $\mathcal{A}_{ia}$ ist also eine Lösung der Sattelpunktsgleichung

$$\frac{\delta F}{\delta \mathcal{A}_{ia}} \overset{!}{=} 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \tfrac{1}{2} \, \tilde{\varepsilon}^{ijk} \mathcal{F}_{jka} \overset{!}{=} -\kappa \cdot \tilde{e}'^{i}{}_{a} \tag{4.9}$$

einzusetzen.

In (4.9) erkennen wir das klassische Gleichungssystem (2.50) wieder, was nicht überraschend ist, da der Chern-Simons-Zustand gerade als Lösung der Gleichungen (3.31) *konstruiert* wurde, welche im semiklassischen Limes in (2.50) übergehen.

Die Sattelpunktsgleichung (4.9) läßt sich auch expliziter in der Form

$$\tilde{\varepsilon}^{ijk} \left(\partial_j \mathcal{A}_{ka} + \frac{1}{2} \, \varepsilon_{abc} \, \mathcal{A}_{jb} \, \mathcal{A}_{kc} \right) = -\frac{\Lambda}{3} \, \tilde{e}^{\,i}{}_{a} \tag{4.10}$$

schreiben; sie bestimmt zu vorgegebenem $\tilde{e}^{\,i}{}_a$ und Λ diejenigen Sattelpunktsfelder $\mathcal{A}_{ia}$, die über den semiklassischen Ausdruck (4.7) Beiträge zum Funktionalintegral (4.6) liefern können. Da die Komponenten $\tilde{e}^{\,i}{}_a$ der Triadenfelder bereits die Information über die lokalen Diffeomorphismus- und SO(3)-Eichfreiheitsgrade enthalten, haben die Lösungen $\mathcal{A}_{ia}$ der Sattelpunktsgleichung (4.10) bei *vorgegebenen* Feldern $\tilde{e}^{\,i}{}_a$ keine Eichfreiheit: Fixieren wir eine Eichung für $\tilde{e}^{\,i}{}_a$, so impliziert dies über (4.10) automatisch auch eine Eichfixierung für die Sattelpunktslösungen $\mathcal{A}_{ia}$. Wir erwarten deshalb, daß die neun Gleichungen (4.10) zu gegebenem Λ

und ${\tilde{e}^i}_a$ ein *diskretes*, endliches Lösungsspektrum für die neun Sattelpunktsfelder $\mathcal{A}_{ia}$ liefern.

Auf die allgemeinen Lösbarkeitseigenschaften des nichtlinearen, partiellen Differentialgleichungssystems (4.10) gehen wir im Anhang A.1 noch genauer ein.

Die Lösungen $\mathcal{A}_{ia}$ der Sattelpunktsgleichung werden aufgrund der Nichtlinearität von (4.10) in der Regel *komplex* sein, was uns an dieser Stelle aber keineswegs stört: Auch komplexe Sattelpunkte können von der komplexen Integrationskontur Γ problemlos durchlaufen werden, so daß diese durchaus einen sinnvollen asymptotischen Sattelpunktsbeitrag zum Funktionalintegral (4.6) liefern; außerdem wurden die Ashtekarvariablen in (2.34) bereits klassisch als komplexe Felder eingeführt.

Die Anzahl der verschiedenen Sattelpunktslösungen von (4.10) wird im allgemeinen von der Topologie der 3-Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_3$ abhängen: Bei Einschränkung auf Bianchi IX-homogene Mannigfaltigkeiten mit S^3-Topologie besitzt das Gleichungssystem (4.10) *fünf* verschiedene Lösungen, was aus früheren Untersuchungen [42, 23] bekannt ist. Diese Lösungen sollten sich zumindest für kleine, inhomogene Störungen der 3-Metrik perturbativ fortsetzen lassen, wobei die Lösungszahl erhalten bleibt.[2] Im Gegensatz hierzu finden wir für *flache* 3-Mannigfaltigkeiten mit T^3-Topologie, die über das Bianchi I-Modell beschrieben werden, nur *zwei* Lösungen der entsprechenden Sattelpunktsgleichung. Für andere Topologien können sich noch andere Lösungszahlen ergeben. Im Kapitel 4.2 werden wir sehen, daß die Sattelpunktsgleichung (4.10) aber stets *mindestens* zwei verschiedene Lösungen besitzt, die unabhängig von der Topologie der räumlichen Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_3$ existieren.

Jede Sattelpunktslösung $\mathcal{A}_{ia}$ von (4.10) liefert über (4.7) einen *möglichen*, semiklassischen Sattelpunktsbeitrag zum Funktionalintegral (4.6) im Limes $\mu \to \infty$. Unter Eichtransformationen der Triade ${\tilde{e}^i}_a$ transformiert sich eine feste Sattelpunktslösung $\mathcal{A}_{ia}$ inhomogen wie ein SO(3)-Eichfeld, denn (4.10) ist eine Diffeomorphismus- und SO(3)-kovariante Feldgleichung. Der semiklassische Beitrag (4.7) zum Chern-Simons-Zustand (4.6) ist damit eichinvariant, wie es auch sein *muß*, denn Ψ_{CS} wurde als eichinvarianter Quantenzustand konstruiert. Folglich kann zur Berechnung des semiklassischen Wellenfunktionals noch jede gewünschte Eichbedingung für die Triade gefordert werden.

Jeder *mögliche*, semiklassische Sattelpunktsbeitrag kann zum *dominanten* Beitrag im Funktionalintegral (4.6) erhoben werden, indem man die Integrationskontur Γ geeignet wählt. Daher ist die Anzahl der verschiedenen Sattelpunktslösungen von (4.10) gleichzeitig auch die Anzahl der linear unabhängigen, semiklassischen Wellenfunktionale $\Psi_{CS}[{\tilde{e}^i}_a]$, die durch asymptotische Auswertung

[2]Diese störungstheoretische Aussage wird im Anhang A.1 unter der Einschränkung $R \neq 2\Lambda$ für den Krümmungsskalar R bewiesen.

des Integrals (4.6) über topologisch inäquivalente Integrationsbereiche Γ erhalten werden können.

Wählt man für einen gegebenen Sattelpunkt $\mathcal{A}_{ia}[\tilde{e}^i{}_a, \Lambda]$ zur analytischen Auswertung des Funktionalintegrals (4.6) die Integrationsmannigfaltigkeit Γ implizit als Fläche steilsten Anstiegs von $\mp\Re F$, so erfüllt Γ die Voraussetzungen aus Abschnitt 3.4,[3] und definiert somit einen *exakten* Quantenzustand. Aufgrund dieser Identifizierungsmöglichkeit stimmt die Zahl der verschiedenen Sattelpunktslösungen von (4.10) auch mit der Zahl der linear unabhängigen, *exakten* Quantenzustände $\Psi_{CS}[\tilde{e}^i{}_a]$ überein, die durch geeignete Fouriertransformation aus ein und demselben Chern-Simons-Zustand (3.39) in der $\mathcal{A}_{ia}$-Darstellung generiert werden.

Resümierend erhalten wir also unter Verwendung ausgewählter, topologisch inäquivalenter Integrationsbereiche Γ in (4.6) verschiedene, linear unabhängige Quantenzustände der Gravitation in der $\tilde{e}^i{}_a$-Darstellung, wobei die Anzahl der Zustände noch von der Topologie der räumlichen Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_3$ abhängen kann. Für beliebige Topologien von $\mathcal{M}_3$ sollten jedoch stets mindestens *zwei* linear unabhängige Chern-Simons-Zustände in der Triadendarstellung existieren.

Um zu expliziteren Ausdrücken für die möglichen semiklassischen Chern-Simons-Wellenfunktionale $\Psi_{CS}[\tilde{e}^i{}_a]$ im Limes $\mu \to \infty$ zu gelangen, werden wir im weiteren Verlauf dieses Kapitels versuchen, die Sattelpunktsgleichung (4.10) analytisch zu lösen. Aufgrund der komplizierten, nichtlinearen Struktur dieser Gleichung sind ihre Lösungen in voller Allgemeinheit leider nicht zugänglich, weshalb wir uns auf asymptotische Lösungen in den beiden Grenzfällen $\kappa \to \infty$ und $\kappa \to 0$ beschränken werden.

4.2 Der Limes $\kappa \to \infty$

Im Rahmen des semiklassischen Limes $\mu \to \infty$ läßt sich die Sattelpunktsgleichung (4.10) für große Parameter κ asymptotisch lösen, womit eine analytische Auswertung des Chern-Simons-Zustands (4.6) in diesem Grenzfall möglich wird. Der Limes $\mu \to \infty$, $\kappa \to \infty$ läßt sich physikalisch realisieren, indem man für die drei fundamentalen Längenskalen (4.1)-(4.3) die Relationen $a_{cos} \gg a_\Lambda, a_{Pl}$ annimmt, also bei festem $\Lambda > 0$ hinreichend große räumliche 3-Mannigfaltigkeiten $(\mathcal{M}_3, \boldsymbol{h})$ betrachtet.

Zur Herleitung von asymptotischen Sattelpunktslösungen schreiben wir die Sattelpunktsgleichung (4.10) in der Form

[3] Die Topologie von Γ wird sich dabei unter kleinen Deformationen der Triade $\tilde{e}^i{}_a$ nicht ändern, da $\tilde{e}^i{}_a$ nur in subdominanter Weise das Verhalten des Exponenten F bestimmt.

$$\tilde{\varepsilon}^{ijk}\left(\partial_j \mathcal{A}_{ka} + \tfrac{1}{2}\,\varepsilon_{abc}\,\mathcal{A}_{jb}\,\mathcal{A}_{kc}\right) = -\,\kappa\cdot\tilde{e}'^{i}{}_{a}\ , \tag{4.11}$$

und machen für $\mathcal{A}_{ia}$ den Entwicklungsansatz

$$\mathcal{A}_{ia} \overset{\kappa\,\to\,\infty}{\sim} \sqrt{\kappa}\cdot c_{ia}^{(0)} + \mathcal{O}(\kappa^0)\ , \tag{4.12}$$

wobei die Koeffizienten $c_{ia}^{(0)}$ allein eine Funktion von $\tilde{e}'^{i}{}_{a}$ sein sollen. Unter dem Ansatz (4.12) dominiert der nicht-Abelsche Term in (4.11) asymptotisch den Abelschen Krümmungsbeitrag, so daß in führender Ordnung des Entwicklungsparameters κ die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\,\tilde{\varepsilon}^{ijk}\varepsilon_{abc}\,c_{jb}^{(0)}\,c_{kc}^{(0)} = -\,\tilde{e}'^{i}{}_{a} \tag{4.13}$$

zu lösen bleibt. Wegen (3.42) liefert (4.13) unmittelbar die beiden Lösungen

$$c_{ia}^{(0)} = \pm\,i\,e'_{ia}\ , \tag{4.14}$$

womit die asymptotische Sattelpunktslösung $\mathcal{A}_{ia}$ aus (4.12) die Form

$$\mathcal{A}_{ia} \overset{\kappa\,\to\,\infty}{\sim} \pm\,i\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\cdot e_{ia} + \mathcal{O}(\kappa^0) \tag{4.15}$$

annimmt. Hierbei ist zu betonen, daß die Wahl des Vorzeichens in (4.14), (4.15) *unabhängig* von der Definition der Ashtekarvariablen in Gleichung (2.34) erfolgen kann. Für beide Vorzeichenwahlen in (2.34) gibt es also *jeweils* zwei verschiedene Sattelpunktslösungen. Um möglichen Verwirrungen in diesem Zusammenhang vorzubeugen, werden wir im folgenden exemplarisch nur noch *eine* Sattelpunktslösung betrachten, die der Wahl des oberen Vorzeichens in (4.14) und (4.15) entspricht. Die analogen Resultate für die andere Sattelpunktslösung kann man dann jederzeit über eine komplexe Konjugation erhalten.

Die Entwicklung (4.15) läßt sich über den erweiterten Ansatz

$$\mathcal{A}_{ia} \overset{\kappa\,\to\,\infty}{\sim} \sum_{n=0}^{\infty} c_{ia}^{(n)}\cdot\kappa^{(1-n)/2} \tag{4.16}$$

im Sinne einer asymptotischen Reihe fortführen, wobei sich interessanterweise sämtliche Entwicklungskoeffizienten *analytisch* berechnen lassen: In jeder Entwicklungsordnung von κ enthält der nicht-Abelsche Term in (4.11) den unbekannten Koeffizienten $c_{ia}^{(n)}$, während der nichtlokale Term aus niedrigeren Ordnungen bekannt ist. Die Bestimmungsgleichungen für die Entwicklungskoeffizienten sind damit *lokal* und *linear* in $c_{ia}^{(n)}$, und lassen sich deshalb explizit analytisch lösen.

Für die ersten Entwicklungsglieder ergibt sich dabei:

$$\mathcal{A}_{ia} \overset{\kappa\to\infty}{\sim} \underbrace{i\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\,e_{ia}}_{\mathcal{O}(\kappa^{1/2})} + \underbrace{\omega_{ia}}_{\mathcal{O}(\kappa^{0})} + \underbrace{i\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}\left(\frac{R}{4}\,e_{ia} - e_{ja}\,R^{j}{}_{i}\right)}_{\mathcal{O}(\kappa^{-1/2})} + \mathcal{O}(\kappa^{-1})\ . \tag{4.17}$$

Mit dem Ergebnis (4.17) können wir nun den asymptotischen Sattelpunktsbeitrag (4.7) zum Chern-Simons-Zustand (4.6) berechnen, indem wir den Vorfaktor der Gaußschen Fluktuationen und den Exponenten F am Sattelpunkt (4.17) auswerten. Für den Gaußschen Vorfaktor findet man

$$\mathrm{Det}^{-1/2}\left[\mu\,\frac{\delta^2 F}{\delta\mathcal{A}_{ia}(x)\delta\mathcal{A}_{jb}(y)}\right] \overset{\kappa\to\infty}{\propto} \mathbb{h}^{-3/4} \tag{4.18}$$

mit $\mathbb{h}$ aus (3.22), wobei ein von $\gamma, \hbar$ und Λ abhängiger Vorfaktor in dem Proportionalitätszeichen von (4.18) absorbiert wurde. Der semiklassische Exponent F gemäß (4.8) nimmt asymptotisch die folgende Form an:

$$F \overset{\kappa\to\infty}{\sim} \frac{1}{\gamma\hbar\mu}\left[i\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}\int \mathrm{d}^3x\,\sqrt{h}\left(\frac{4\Lambda}{3} - R\right) + \frac{3}{\Lambda}\,\mathcal{S}_{CS}[\omega_{ia}]\right] + \mathcal{O}(\kappa^{-3/2})\ . \tag{4.19}$$

Die ersten beiden Terme in (4.19) sind von den Ordnungen $\mathcal{O}(\kappa^{1/2})$ und $\mathcal{O}(\kappa^{-1/2})$, und stammen vom ersten und dritten Entwicklungsglied der asymptotischen Reihe (4.17); sie bestimmen die semiklassische *Wirkung*

$$S \overset{\kappa\to\infty}{\sim} \pm\frac{1}{\gamma}\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}\int \mathrm{d}^3x\,\sqrt{h}\left(\frac{4\Lambda}{3} - R\right) \tag{4.20}$$

des Chern-Simons-Zustands im Limes $\kappa \to \infty$, die eine bemerkenswerte formale Ähnlichkeit zum Wirkungsfunktional der Gravitation (2.1) aufweist.

Der Entwicklungsterm, der vom Riemannschen Spin-Zusammenhang ω_{ia} in (4.17) herrührt, wird überraschenderweise vollständig vom Beitrag der Ähnlichkeitstransformation (3.32) kompensiert, weshalb in (4.19) ein Beitrag von der Ordnung $\mathcal{O}(\kappa^0)$ fehlt.

Der dritte Term in (4.19) ist von der Ordnung $\mathcal{O}(\kappa^{-1})$, der zugehörige Entwicklungsterm des Sattelpunktsfeldes $\mathcal{A}_{ia}$ ist kompliziert und wurde in der Sattelpunktsentwicklung (4.17) der Übersichtlichkeit halber nicht angegeben. Dieser Beitrag zum Exponenten F hat erstaunlicherweise wieder die Form eines Chern-Simons-Funktionals (3.40), bei dem allerdings die komplexen Ashtekarfelder $\mathcal{A}_{ia}$ durch den reellen, Riemannschen Spin-Zusammenhang ω_{ia} ersetzt sind.

Fügt man die Ergebnisse (4.18) und (4.19) über (4.7) zusammen, so ergibt sich für den semiklassischen Chern-Simons-Zustand im Limes $\kappa \to \infty$ explizit:

$$\Psi_{CS} \underset{\mu \to \infty}{\overset{\kappa \to \infty}{\propto}} \mathcal{N}\, \mathbb{h}^{-3/4} \exp\left[\pm\frac{1}{\gamma\hbar}\left(i\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}\int \mathrm{d}^3x\,\sqrt{h}\,\left(\frac{4\Lambda}{3} - R\right) + \frac{3}{\Lambda}\,\mathcal{S}_{CS}[\omega_{ia}]\right)\right]\ . \quad (4.21)$$

Wählt man in (4.17) den zweiten, konjugiert komplexen Sattelpunkt $\mathcal{A}^*_{ia}$, so ergibt sich anstelle von (4.21) das asymptotische Wellenfunktional Ψ^*_{CS}.

Wie wir in Kapitel 5 noch genauer ausführen werden, trägt der Zustand (4.21) einen Strom mit *festem Vorzeichen* in der $h(x)$-Richtung des Konfigurationsraumes, der für Ψ^*_{CS} durch sein negatives ersetzt ist. Diese Eigenschaft erinnert stark an die *Vilenkinsche* Vorstellung von der Wellenfunktion des Universums [29, 30].

Ferner ist bemerkenswert, daß das Resultat (4.21) *unabhängig* von der Topologie der 3-Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_3$ ist. Für jede Riemannsche 3-Mannigfaltigkeit $(\mathcal{M}_3, \boldsymbol{h})$ mit hinreichend großem Skalenparameter a_{cos} liegen deshalb über Ψ_{CS} und Ψ^*_{CS} stets *mindestens zwei* unabhängige Wellenfunktionale der Quantengravitation vor, die beide aus dem Chern-Simons-Zustand (3.39) in der Ashtekar-Darstellung hervorgehen.

In der Form (4.21) sieht man explizit die Invarianz von Ψ_{CS} unter beliebigen Diffeomorphismen und unter SO(3)-Eichtransformationen, die kontinuierlich mit der Identität verbunden sind. Allerdings ist $\mathcal{S}_{CS}[\omega_{ia}]$ *nicht* invariant bezüglich großer SO(3)-Eichtransformationen mit nichttrivialer *Windungszahl*. Auf dieses Phänomen wollen wir im nächsten Abschnitt genauer eingehen, und anschließend den Vorfaktor $\mathcal{N}$ des Chern-Simons-Zustands (4.21) so wählen, daß Ψ_{CS} trotzdem eichinvariant auch unter großen Eichtransformationen der Triade ist.

4.2.1 Große Eichtransformationen und die Cartan-Maurer-Invariante

Betrachten wir zum Riemannschen Spin-Zusammenhang ω_{ia} das Verhalten des Chern-Simons-Funktionals

$$\mathcal{S}_{CS}[\omega_{ia}] = \int \mathrm{d}^3x\, \tilde{\varepsilon}^{ijk} \left(\omega_{ia}\, \partial_j \omega_{ka} + \tfrac{1}{3}\, \varepsilon_{abc}\, \omega_{ia}\, \omega_{jb}\, \omega_{kc} \right) \tag{4.22}$$

unter beliebigen SO(3)-Eichtransformationen der Triade

$$e_{ia} \mapsto \Omega_{ab}\, e_{ib} \quad , \quad \mathbf{\Omega} \in \mathrm{SO}(3) \ , \tag{4.23}$$

so ist $\mathcal{S}_{CS}[\omega_{ia}]$ im allgemeinen *nicht* invariant unter (4.23). Stattdessen ergibt sich das Transformationsverhalten

$$\mathcal{S}_{CS}[\omega_{ia}] \mapsto \mathcal{S}_{CS}[\omega_{ia}] + \tfrac{1}{6}\, I(\mathbf{\Omega}) \tag{4.24}$$

mit[4]

$$I(\mathbf{\Omega}) := \int \mathrm{d}^3x\, \tilde{\varepsilon}^{ijk}\, \mathrm{Tr} \left[\mathbf{\Omega}^{\mathrm{T}} \partial_i \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega}^{\mathrm{T}} \partial_j \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega}^{\mathrm{T}} \partial_k \mathbf{\Omega} \right] \ . \tag{4.25}$$

Die Größe $I(\mathbf{\Omega})$ heißt *Cartan-Maurer-Invariante* der SO(3)-Drehgruppe, und hängt offensichtlich nur von der Drehmatrix $\mathbf{\Omega}$, nicht aber explizit von der Triade oder 3-Metrik ab. Man kann zeigen [43], daß $I(\mathbf{\Omega})$ eine quantisierte, *topologische* Invariante ist, deren Wert auf ganzzahlige Vielfache einer festen Zahl I_0 eingeschränkt ist:

$$I(\mathbf{\Omega}) = I_0 \cdot w(\mathbf{\Omega}) \quad , \quad w(\mathbf{\Omega}) \in \mathbb{Z} \ . \tag{4.26}$$

Die ganze Zahl $w(\mathbf{\Omega})$ heißt in diesem Zusammenhang auch *Windungszahl* der Drehung $\mathbf{\Omega}$; der Wert der Größe I_0 hängt nur von der Topologie der 3-Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_3$ ab, und hat beispielsweise für Mannigfaltigkeiten mit S^3-Topologie den Wert $I_0 = 96\,\pi^2$.

Für Drehungen $\mathbf{\Omega}$ mit lokal hinreichend kleinem Drehwinkel verschwindet die Windungszahl $w(\mathbf{\Omega})$, und damit auch $I(\mathbf{\Omega})$. Unter solchen Drehungen ist $\mathcal{S}_{CS}[\omega_{ia}]$ invariant. Größere Eichtransformationen können jedoch zu einer Verdrehung der

[4] In (4.25) bezeichnet „Tr“ die übliche Spur auf dem Raum der (3x3)-Matrizen, und $\mathbf{\Omega}^{\mathrm{T}}$ die transponierte Matrix zu $\mathbf{\Omega} = (\Omega_{ab})$.

Triade mit *nichttrivialer* Windungszahl $w(\mathbf{\Omega})$ führen, was wir im folgenden geometrisch erläutern wollen.

Hierzu betrachten wir das Triadenvektorfeld $\vec{e}_3$ einer Riemannschen 3-Mannigfaltigkeit $(\mathcal{M}_3, \boldsymbol{h})$ entlang einer globalen, geschlossenen Kurve $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_3$, die der Einfachheit halber kreisförmig dargestellt sei:

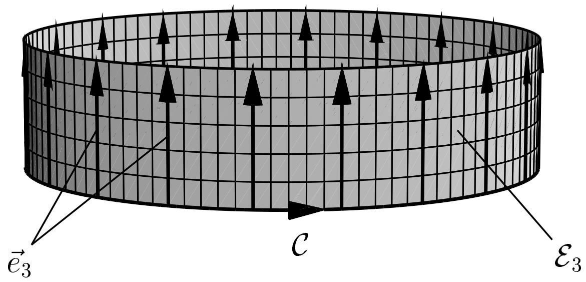

Abbildung 4.1: Das Triadenvektorfeld $\vec{e}_3$ einer Riemannschen 3-Mannigfaltigkeit $(\mathcal{M}_3, \boldsymbol{h})$ entlang einer globalen, geschlossenen Kurve $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_3$.

Wie in Abbildung 4.1 dargestellt, spannt das Vektorfeld $\vec{e}_3$ entlang der Kurve $\mathcal{C}$ eine zweidimensionale Fläche auf, die wir mit $\mathcal{E}_3$ bezeichnen wollen. Unter hinreichend kleinen, lokalen Drehungen von $\vec{e}_3$ um den Tangentialvektor der Kurve $\mathcal{C}$ deformiert sich die Fläche $\mathcal{E}_3$, wobei ihre Topologie jedoch erhalten bleibt. Diese Situation ist in der Graphik 4.2 veranschaulicht.

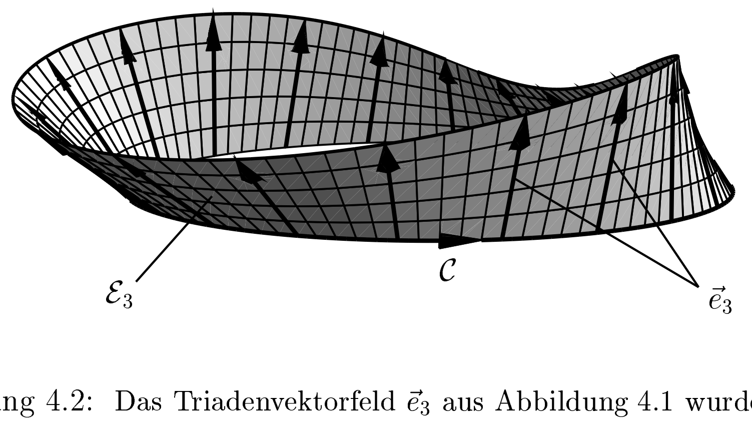

Abbildung 4.2: Das Triadenvektorfeld $\vec{e}_3$ aus Abbildung 4.1 wurde kontinuierlich um den Tangentialvektor der Kurve $\mathcal{C}$ verdreht.

Erst für große Drehungen, die entlang der Kurve $\mathcal{C}$ *nicht kontinuierlich* auf die identische Abbildung $\mathbf{\Omega} = \mathbf{1}$ zurückgeführt werden können, ändert sich auch die Topologie von $\mathcal{E}_3$, in unserem Beispiel in die Topologie eines doppelt verwundenen Möbiusbandes:

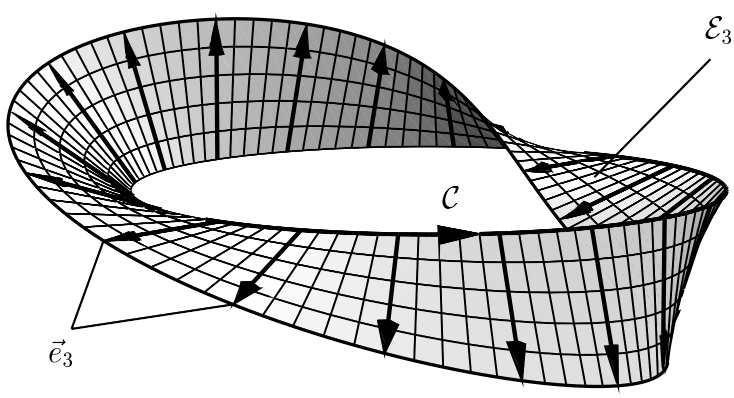

Abbildung 4.3: Toplogisch nichttriviale Drehung des Triadenvektorfeldes $\vec{e}_3$ aus Abbildung 4.1 um den Tangentialvektor der Kurve $\mathcal{C}$.

Der Übergang von der Triade in Abbildung 4.1 zur Triade in Abbildung 4.3 entspricht anschaulich gerade einer Drehung mit Windungszahl, unter der $\mathcal{S}_{CS}[\omega_{ia}]$ um einen diskreten, additiven Beitrag gemäß (4.24) anwächst.

Für einen konstanten Vorfaktor $\mathcal{N}$ würde sich bei einer solchen Eichtransformation auch der Wert des asymptotischen Chern-Simons-Zustands (4.21) ändern, was ein Widerspruch zur geforderten SO(3)-Eichinvarianz des Quantenzustands der Gravitation wäre.[5] Wie schon in Kapitel 3.4 ausgeführt, muß der Vorfaktor $\mathcal{N}$ des Chern-Simons-Zustands aber nicht zwangsläufig unabhängig von der Triade gewählt werden; im Rahmen der Forderung (3.43) genügt es, wenn sich $\mathcal{N}$ unter infinitesimalen Deformationen der Triade nicht ändert. Wählen wir beispielsweise

$$\mathcal{N} \propto \exp\left[\mp \frac{I(\hat{\mathbf{\Omega}})}{2\gamma\hbar\Lambda}\right] , \tag{4.27}$$

[5]Diese Problematik tritt auch bei der Quantisierung von Yang-Mills-Theorien auf, wo sie einen üblicherweise auf die Definition des sogenannten Θ-Winkels führt [5, 43]. Im Rahmen der Gravitationstheorie läßt sich die Einführung dieser relativ unschönen Hilfsgröße jedoch durch einen einfachen Trick vermeiden.

wobei $\hat{\mathbf{\Omega}}$ diejenige Drehmatrix ist, die eine beliebige Triade $\vec{e}_a$ in eine *fest ausgezeichnete* Triade überführt, so ist $\mathcal{N}$ bezüglich kleiner Variationen der Triade $\vec{e}_a$ konstant. Folglich gilt (3.43), und Ψ_{CS} bleibt auch mit $\mathcal{N}$ aus (4.27) ein exakter Quantenzustand. Da der Vorfaktor (4.27) aber gerade so gewählt ist, daß er den inhomogenen Beitrag von (4.24) vollständig kompensiert, ist Ψ_{CS} bei dieser Wahl von $\mathcal{N}$ auch unter großen Eichtransformationen mit nichttrivialer Windungszahl invariant.

Zur expliziten Definition der Drehmatrix $\hat{\mathbf{\Omega}}$ in (4.27) eignet sich als ausgezeichnete Triade beispielsweise die in Anhang D diskutierte *Einstein-Triade* $\vec{g}_a$.

Mit der Wahl (4.27) stellt Ψ_{CS} gemäß (4.21) also nun einen semiklassischen Quantenzustand der Gravitation im Limes $\mu \to \infty, \kappa \to \infty$ dar, der alle geforderten Eichsymmetrien exakt befriedigt. Im nächsten Abschnitt soll dieser Quantenzustand einmal exemplarisch für spezielle, *homogene* 3-Mannigfaltigkeiten $(\mathcal{M}_3, \boldsymbol{h})$ berechnet werden.

4.2.2 Der homogene Grenzfall

Es soll nun der semiklassische Chern-Simons-Zustand (4.21) im Limes $\kappa \to \infty$ für homogene 3-Geometrien $\boldsymbol{h}$ ausgewertet, und das Resultat mit früheren Ergebnissen aus der Diskussion homogener kosmologischer Modelle verglichen werden. Dabei werden wir uns auf die Klasse der *Bianchi*-homogenen 3-Mannigfaltigkeiten beschränken, die im Anhang B.1 definiert und beschrieben werden; hier wird auch gezeigt, daß für homogene Mannigfaltigkeiten dieses Typs stets eine bezüglich der Homogenitätsgruppe *invariante* Triade $\vec{e}_a = \vec{\imath}_a$ gefunden werden kann. Die über

$$[\,\vec{\imath}_a, \vec{\imath}_b\,] = \varepsilon_{abc}\, m_{cd}\, \vec{\imath}_d \tag{4.28}$$

implizit definierte Strukturmatrix $\boldsymbol{m}$ ist für die invariante Triade räumlich konstant, und gemäß Anhang B.2 lassen sich sämtliche für den Zustand (4.21) benötigten geometrischen Größen allein durch $\boldsymbol{m}$ und das Volumen V der homogenen 3-Mannigfaltigkeit ausdrücken. Für die explizite Angabe des resultierenden Zustands (4.21) ist es dabei zweckmäßig, zur Strukturmatrix $\boldsymbol{m}$ die skaleninvariante Matrix

$$\boldsymbol{M} = a_{cos} \cdot \boldsymbol{m} \tag{4.29}$$

einzuführen. Dann finden wir als Wert des Chern-Simons-Zustands (4.21) für homogene Mannigfaltigkeiten beliebigen Bianchi-Typs:

$$\Psi_{CS} \underset{\mu \to \infty}{\overset{\kappa \to \infty}{\sim}} \mathcal{N}\, \mathrm{h}^{-3/4} \exp\Bigg[\pm\, \mu \Bigg(4i\sqrt{\kappa} - \frac{i}{\sqrt{\kappa}} \Big[\mathrm{Tr}\boldsymbol{M}^2 - 2\,\mathrm{Tr}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}^2\boldsymbol{M} \Big]$$
$$-\frac{1}{\kappa} \Big[\mathrm{Tr}\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}} - \tfrac{1}{6}\,\mathrm{Tr}\boldsymbol{M} \Big(\mathrm{Tr}\boldsymbol{M}^2 + 2\,\mathrm{Tr}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\Big) + 2\det\boldsymbol{M} \Big] \Bigg) \Bigg] . \quad (4.30)$$

Der Exponent von (4.30) ist ausschließlich in dimensionslosen Größen ausgedrückt, und erlaubt ein direktes Ablesen der κ-Ordnung der verschiedenen Entwicklungsbeiträge.

Wir wollen des Resultat (4.30) nun weiterhin auf Mannigfaltigkeiten vom Bianchi-Typ IX spezialisieren, die durch eine symmetrische, *positive* Strukturmatrix $\boldsymbol{m}$ beschrieben werden können. Zum Vergleich mit früheren Arbeiten definieren wir die positive, dimensionslose Konstante[6]

$$\mathcal{V} := \frac{V}{8}\,\det\boldsymbol{m}\ , \qquad (4.31)$$

und schreiben $\boldsymbol{M}$ in der Form

$$\boldsymbol{M} = 2\,\sqrt[3]{\mathcal{V}} \cdot e^{2\boldsymbol{\beta}}\ , \qquad (4.32)$$

wobei $\boldsymbol{\beta}$ eine *spurlose* Matrix ist, die durch geeignete SO(3)-Eichtransformationen stets diagonalisiert werden kann.[7] In dem reskalierten Parameter $\kappa' := \mathcal{V}^{-2/3} \cdot \kappa/4$ erhalten wir dann aus (4.30) für Bianchi IX-Geometrien den folgenden Wert des semiklassischen Chern-Simons-Zustands

$$\Psi_{CS} \underset{\mu \to \infty}{\overset{\kappa \to \infty}{\sim}} \mathcal{N}\, \mathrm{h}^{-3/4} \exp\Bigg[\pm\, \frac{24\mathcal{V}}{\gamma\hbar\Lambda} \Bigg(4i\sqrt{\kappa'}^{\,3} - i\,\sqrt{\kappa'} \Big[\mathrm{Tr}\, e^{-2\boldsymbol{\beta}} - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\, e^{4\boldsymbol{\beta}} \Big]$$
$$-\frac{1}{2} \Big[\mathrm{Tr}\, e^{6\boldsymbol{\beta}} - \mathrm{Tr}\, e^{2\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathrm{Tr}\, e^{-2\boldsymbol{\beta}} + 7 \Big] \Bigg) \Bigg] , \qquad (4.33)$$

[6] Der Wert von $\mathcal{V}$ kann hierbei noch von einer eventuell nichttrivialen Kompaktifizierung der 3-Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_3$ abhängen. Im Rahmen der Arbeit [23] wurde $\mathcal{V} = 4\,\pi^2$ angenommen, eine rein geometrische Konstruktion der 3-Sphäre als Hyperfläche des $\mathbb{R}^4$ im Anhang B.3.1 liefert hingegen für das dimensionslose „Volumen“ $\mathcal{V}$ einen Wert von $\mathcal{V} = 2\,\pi^2$.

[7] Siehe hierzu auch Anhang B.1.

wobei ferner die Identität

$$\mathrm{Tr}\, e^{2\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathrm{Tr}\, e^{4\boldsymbol{\beta}} = \mathrm{Tr}\, e^{6\boldsymbol{\beta}} + \mathrm{Tr}\, e^{2\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathrm{Tr}\, e^{-2\boldsymbol{\beta}} - 3 \tag{4.34}$$

verwendet wurde. Bis auf den Vorfaktor der Gaußschen Fluktuationen stimmt der Zustand (4.33) mit dem semiklassischen Zustand des Bianchi IX-Modells in [23] überein: Zum expliziten Vergleich ist der Parameter κ in [23] mit κ' in (4.33) zu identifizieren, und $\mathcal{V} = 4\,\pi^2$ zu wählen. Ferner wurde im Rahmen von [23] die Newtonsche Gravitationskonstante G gleich Eins, also $\gamma = 16\pi$ gesetzt. Unter Berücksichtigung dieser Übersetzungsregeln hat der Exponent von (4.33) exakt dieselbe Form wie in (5.18) aus [23], wobei die freien Vorzeichen noch passend zu wählen sind.

Mit den semiklassischen Exponenten des Quantenzustands stimmt auch die semiklassische Evolution in beiden Beschreibungen überein, was physikalisch sinnvoll ist. Allerdings ergeben sich unterschiedliche Amplituden des semiklassischen Chern-Simons-Zustands, da wir es *quantenmechanisch* mit zwei grundlegend verschiedenen Zugängen zur Beschreibung homogener 3-Metriken zu tun haben:

Während in [23] von vornherein nur Bianchi IX-homogene, räumliche 3-Mannigfaltigkeiten zugelassen wurden, was einem endlichdimensionalen Konfigurationsraum entspricht, behandeln wir im Rahmen dieser Arbeit die inhomogene Feldtheorie über einem *unendlichdimensionalen* Konfigurationsraum, der Bianchi IX-homogene 3-Metriken als Unterraum enthält. Werten wir den inhomogenen Chern-Simons-Zustand (4.21) für Bianchi IX-homogene 3-Geometrien aus, so entspricht dies hier einer Berechnung sehr spezieller Funktionswerte des Wellenfunktionals; die entsprechende Rechnung für das homogene Modell in [23] führt dagegen zu einer vollständigen Kenntnis der Wellenfunktion.

Als weiteren Spezialfall der Formel (4.30) wollen wir noch ihre Restriktion auf *flache*, also Bianchi I-homogene 3-Mannigfaltigkeiten angeben. Für flache 3-Geometrien verschwindet die Strukturmatrix $\boldsymbol{m}$ der invarianten Triade $\vec{i}_a$, und damit auch $\boldsymbol{M}$ gemäß (4.29), so daß sich (4.30) zu

$$\begin{aligned} \Psi_{CS} \quad \underset{\mu\,\to\,\infty}{\overset{\kappa\,\to\,\infty}{\sim}} \quad & \mathcal{N}\, \mathbb{h}^{-3/4} \exp\left[\pm 4i\mu\sqrt{\kappa}\right] \\ = \quad & \mathcal{N}\, \mathbb{h}^{-3/4} \exp\left[\pm \frac{4i}{\gamma\hbar}\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \cdot \int\limits_{\mathcal{M}_3} \mathrm{d}^3x\,\sqrt{h}\right] \end{aligned} \tag{4.35}$$

vereinfacht. In diesem Fall hängt der Wert des Chern-Simons-Zustands im Limes $\kappa \to \infty$ also nur noch vom Volumen der 3-Mannigfaltigkeit $(\mathcal{M}_3, \boldsymbol{h})$ ab - ein Ergebnis, das man auch direkt aus dem allgemeinen, inhomogenen Resultat (4.21) erhält, indem man dort die Größen R und $\mathcal{S}_{CS}[\omega_{ia}]$ einfach gleich Null setzt.

4.2.3 Semiklassische 4-Geometrien

Als nächstes wollen wir die semiklassischen Trajektorien diskutieren, die über den Chern-Simons-Zustand (4.21) im Limes $\mu \to \infty, \kappa \to \infty$ beschrieben werden. Hierfür benötigen wir zunächst die klassische Evolutionsgleichung

$$\dot{\tilde{e}}^i{}_a = -\left\{H, \tilde{e}^i{}_a\right\} \tag{4.36}$$

für die Triade $\tilde{e}^i{}_a$, wobei für H das Hamiltonfunktional der Gravitation (2.41) einzusetzen ist. Nach Berechnung der Poisson-Klammer über (2.39) hängt die rechte Seite von (4.36) noch von den zu $\tilde{e}^i{}_a$ kanonisch konjugierten Impulsen p_{ia} ab. Diese erhalten wir im Rahmen der Hamilton-Jacobi-Theorie aus der semiklassischen Wirkung S des Wellenfunktionals Ψ_{CS},

$$\Psi_{CS} \overset{\mu \to \infty}{\sim} A \cdot \exp\left[\frac{i}{\hbar} S\right] , \tag{4.37}$$

denn S löst im semiklassischen Limes die Hamilton-Jacobi-Gleichung der Gravitation, so daß sich die Impulse p_{ia} aus

$$p_{ia} = \frac{\delta S}{\delta \tilde{e}^i{}_a} \tag{4.38}$$

ergeben [44]. Setzen wir die Impulsfunktionale (4.38) in die Evolutionsgleichung (4.36) ein, so können wir zu jeder Anfangstriade $\tilde{e}^i{}_a(0)$ eine semiklassische Trajektorie $\tilde{e}^i{}_a(t)$ berechnen, die allerdings noch von der Wahl der Lagrangeschen Multiplikatoren N, N^i und Ω_a im Hamiltonfunktional (2.41) abhängt: Verschiedene Multiplikatoren liefern verschiedene Trajektorien im Konfigurationsraum zur *selben* Anfangstriade $\tilde{e}^i{}_a(0)$. Tatsächlich interessieren wir uns aber nicht explizit für die semiklassischen Trajektorien im Raum der Triaden, sondern für die effektiven 4-Geometrien $\boldsymbol{g}$, die über (2.20) und (2.4) zu jeder semiklassischen Trajektorie $\tilde{e}^i{}_a(t)$ konstruiert werden können, und die *unabhängig* von der Wahl der Lagrangeschen Multiplikatoren N, N^i und Ω_a sind. In der folgenden Diskussion können wir deshalb ohne Beschränkung der Allgemeinheit einfach

$$N = 1 \quad , \quad N^i = 0 \quad , \quad \Omega_a = 0 \tag{4.39}$$

wählen.

Aus der Evolutionsgleichung (4.36) wird dann

$$\dot{\tilde{e}}^i{}_a = \pm\, i\, \tilde{\varepsilon}^{ijk}\, \mathcal{D}_j e_{ka} = -\frac{\gamma}{2}\, \tilde{\varepsilon}^{ijk}\, \varepsilon_{abc}\, p_{jb}\, e_{kc} \ , \tag{4.40}$$

was über (3.42) auch äquivalent zu

$$\dot{e}_{ia} = -\frac{\gamma}{2}\, p_{ia} \tag{4.41}$$

ist. Die Impulse (4.38) erhalten wir im Limes $\kappa \to \infty$ aus der semiklassischen Wirkung (4.20) des Chern-Simons-Zustands,

$$p_{ia} \overset{\kappa \to \infty}{\sim} \pm\frac{2}{\gamma} \left[\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\, e_{ia} + \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \left(\frac{R}{4}\, e_{ia} - R^j{}_i\, e_{ja} \right) \right] \ ; \tag{4.42}$$

dasselbe Resultat ergibt sich auch direkt aus der asymptotischen Entwicklung von $\mathcal{A}_{ia}$ gemäß (4.17) in Verbindung mit (2.34).

Einsetzen von (4.42) in (4.40) liefert schließlich eine explizite Bestimmungsgleichung für die semiklassischen Trajektorien im Limes $\kappa \to \infty$:

$$\mp\ \dot{\tilde{e}}^i{}_a \overset{\kappa \to \infty}{\sim} 2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\, \tilde{e}^i{}_a + \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}\, G^i{}_j\, \tilde{e}^j{}_a \ . \tag{4.43}$$

Die Evolutionsgleichung (4.43) transformiert sich offensichtlich O(3)-kovariant unter Eichtransformationen der Triade $\tilde{e}^i{}_a$, weshalb man unter Verwendung der Beziehungen (2.20) und (3.42) sogar eine effektive Entwicklungsgleichung für die Komponenten h_{ij} der 3-Metrik angeben kann:

$$\mp\, \dot{h}_{ij} \overset{\kappa \to \infty}{\sim} 2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\, h_{ij} + \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \left(\frac{R}{2}\, h_{ij} - 2\, R_{ij} \right) \ . \tag{4.44}$$

Betrachten wir im folgenden die Wahl des unteren Vorzeichens[8] in (4.44), so durchläuft die 3-Metrik $\boldsymbol{h}$ eine typische *DeSitter*-Evolution:

Für große κ wird der Krümmungsterm in (4.44) vom ersten Term dominiert, so daß wir als asymptotische Lösung

$$h_{ij}(x,t) \overset{t\to\infty}{\sim} h_{ij}^{(\infty)}(x) \cdot \exp\left[2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \cdot t\right] \tag{4.45}$$

erhalten. Hierbei ist $h_{ij}^{(\infty)}(x)$ ein freies Integrationsfeld, das die im allgemeinen inhomogene, anisotrope 3-Metrik $\boldsymbol{h}^{(\infty)}$ im Limes $t \to \infty$ beschreibt.

Der Ausdruck (4.45) stellt eine selbstkonsistente, semiklassische Lösung dar, denn im Limes $t \to \infty$ divergiert das Volumen der 3-Mannigfaltigkeit $(\mathcal{M}_3, \boldsymbol{h})$ exponentiell, womit auch κ gemäß (4.4), (4.3) beliebig groß wird. Dies rechtfertigt im Nachhinein, warum wir uns widerspruchsfrei auf den Grenzfall $\kappa \gg 1$ beschränken, und insbesondere den Krümmungsterm in (4.44) vernachlässigen dürfen. Erst bei kleineren, endlichen Zeiten t liefert der Krümmungsterm in (4.44) Korrekturen zur asymptotischen Lösung (4.45); für noch kleinere Zeiten bricht die Näherung $\kappa \gg 1$ schließlich zusammen, und wir müßten zu exakten Lösungen der Sattelpunktsgleichung (4.10) übergehen, um in diesem Bereich noch Aussagen über die semiklassische Evolution der 3-Metrik machen zu können.

Zur asymptotischen Lösung (4.45) erhalten wir über (2.4) die semiklassische 4-Geometrie im Limes $t \to \infty$:

$$\boldsymbol{g} \overset{t\to\infty}{\sim} -\boldsymbol{d}t \otimes \boldsymbol{d}t + \exp\left[2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \cdot t\right] \cdot h_{ij}^{(\infty)}(x)\, \boldsymbol{d}x^i \otimes \boldsymbol{d}x^j \ . \tag{4.46}$$

Eine graphische Darstellung dieser verallgemeinerten DeSitter-Geometrie zeigt die Abbildung 4.4 auf der folgenden Seite.

Aus der Abbildung 4.4 erkennt man, daß eine beliebig herausgegriffene Untermannigfaltigkeit der räumlichen Hyperfläche mit *fest vorgegebener* Längenskala $a \ll a_{cos}$ im Verlauf der Zeit t immer *homogener* wird. Diese asymptotische Homogenität ist eine wohlbekannte Eigenschaft aller *inflationären* Modelle des Universums [34], zu denen auch die im Rahmen dieser Arbeit diskutierte Gravitationstheorie mit positivem kosmologischen Term zählt.

[8] Dies entspricht auch der Wahl des oberen Vorzeichens für den zu (4.21) konjugiert komplexen Zustand Ψ_{CS}^*.

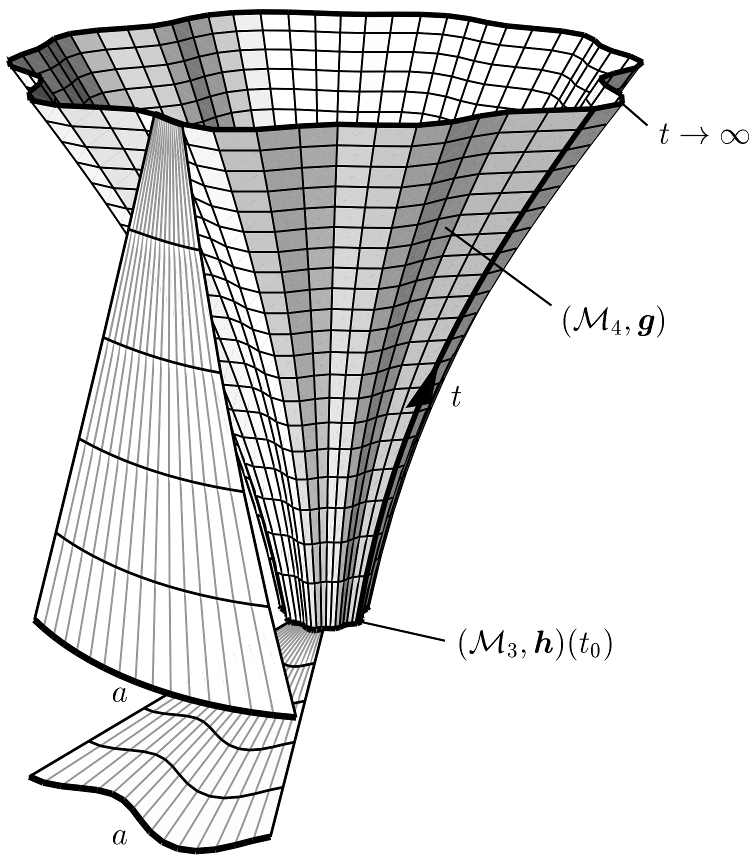

Abbildung 4.4: Geometrische Veranschaulichung einer verallgemeinerten DeSitter-4-Geometrie. Die räumlichen 3-Mannigfaltigkeiten $(\mathcal{M}_3, \boldsymbol{h})(t)$ sind durch eindimensionale Kurven repräsentiert, und Inhomogenitäten der 3-Metriken $\boldsymbol{h}(t)$ durch leichte Deformationen dieser Kurven angedeutet. Die resultierende Raumzeit-Mannigfaltigkeit $(\mathcal{M}_4, \boldsymbol{g})$ mit der 4-Metrik $\boldsymbol{g}$ aus (4.46) entspricht dann einer Riemannschen 2-Mannigfaltigkeit, die hier in den dreidimensionalen Minkowskiraum eingebettet worden ist. Von den raumartigen Randmannigfaltigkeiten ist jeweils ein Kurvenstück vergrößert dargestellt, das Raumausschnitte *derselben* Längenskala a repräsentiert.

Mit der semiklassischen Interpretation des Chern-Simons-Zustands (4.6) im Limes $\kappa \to \infty$ wollen wir die Diskussion des Grenzfalls $\kappa \to \infty$ nun beenden, und uns anderen asymptotischen Entwicklungen des Wellenfunktionals Ψ_{CS} zuwenden.

4.3 Der Limes $\kappa \to 0$

Neben dem in Abschnitt 4.2 behandelten Grenzfall $\mu \to \infty, \kappa \to \infty$ gibt es ein weiteres asymptotisches Regime, das eine analytische Auswertung des Funktionalintegrals in (4.6) erlaubt: Im Rahmen des semiklassischen Limes $\mu \to \infty$ kann die Sattelpunktsgleichung (4.9) nicht nur für große κ, sondern auch im entgegengesetzten Grenzfall $\kappa \to 0$ asymptotisch gelöst werden, womit wir uns in diesem Unterkapitel beschäftigen wollen.

Der Limes $\mu \to \infty, \kappa \to 0$ impliziert über (4.4) die Bedingung $a_\Lambda \gg a_{cos} \gg a_{Pl}$ an die drei fundamentalen Längenskalen der Gravitationstheorie, was physikalisch dem Grenzfall verschwindender kosmologischer Konstante innerhalb des semiklassischen Limes $a_{cos} \gg a_{Pl}$ entspricht. Da ein Quantenzustand der Gravitation für $\Lambda = 0$ bisher nur in einer mathematisch recht unbefriedigen Form vorliegt[9], lohnt es sich, diesen Grenzfall genauer zu studieren.

Um zu Lösungen der semiklassischen Sattelpunktsgleichung

$$\tfrac{1}{2}\,\tilde{\varepsilon}^{ijk}\,\mathcal{F}_{jka} = -\,\kappa\,\tilde{e}'^{i}{}_{a} \tag{4.47}$$

im Limes $\kappa \to 0$ zu gelangen, versuchen wir einen asymptotischen Entwicklungsansatz der Form

$$\mathcal{A}_{ia} \overset{\kappa\,\to\,0}{\sim} \sum_{n=0}^{\infty} C_{ia}^{(n)} \cdot \kappa^n \ , \tag{4.48}$$

wobei die Entwicklungskoeffizienten $C_{ia}^{(n)}$ nur von den reskalierten Triadenfeldern $\tilde{e}'^{i}{}_{a}$ abhängen sollen. Dieser Ansatz ist deshalb naheliegend, weil die Lösungen der Sattelpunktsgleichung (4.47) im Limes $\kappa \to 0$ zumindest im Rahmen Bianchi IX-homogener Modelle endlich bleiben [23, 24, 42]. Die asymptotische Reihe (4.48) liefert nach Einsetzen in (4.47) in führender Ordnung des Entwicklungsparameters κ die Gleichung

$$\tilde{\varepsilon}^{ijk}\left(\partial_j C_{ka}^{(0)} + \tfrac{1}{2}\,\varepsilon_{abc}\,C_{jb}^{(0)}\,C_{kc}^{(0)}\right) = 0 \tag{4.49}$$

für die niedrigsten Entwicklungskoeffizienten $C_{ia}^{(0)}$. Als Lösung von (4.49) ist $C_{ia}^{(0)}$

[9] Ein Quantenzustand der Gravitation mit verschwindender kosmologischer Konstante wurde zwar in der Literatur mehrfach angegeben [41, 45], jedoch liefern die bisher verwendeten Integraldarstellungen zwangsläufig *divergente* Ausdrücke für den Quantenzustand.

somit ein *flaches* Eichfeld, das durch beliebige SO(3)-Eichtransformationen aus der trivialen Lösung $C_{ia}^{(0)} = 0$ hervorgeht:[10]

$$C_{ia}^{(0)} = -\tfrac{1}{2}\, \varepsilon_{abc}\, \Omega_{db}\, \partial_i\, \Omega_{dc} \qquad \text{mit} \qquad \mathbf{\Omega} \in \mathrm{SO}(3)\ . \tag{4.50}$$

Die allgemeine Lösung (4.50) von (4.49) hängt hierbei noch von einer beliebigen, ortsabhängigen Drehmatrix $\mathbf{\Omega}$ ab, die über die Fredholmsche Alternative[11] erst in der nächsten Entwicklungsordnung

$$\tilde{\varepsilon}^{ijk} \left(\partial_j\, C_{ka}^{(1)} + \varepsilon_{abc}\, C_{jb}^{(0)}\, C_{kc}^{(1)} \right) = -\, \tilde{e}'^{i}{}_{a} \tag{4.51}$$

der Sattelpunktsgleichung (4.47) festgelegt wird: Die linke Seite von (4.51) läßt sich zu einer kovarianten Ableitung $\mathcal{D}_i^{(0)}$ bezüglich des Eichfeldes $C_{ia}^{(0)}$ zusammenfassen, womit die Gleichung (4.51) die Form

$$\tilde{\varepsilon}^{ijk}\, \mathcal{D}_j^{(0)}\, C_{ka}^{(1)} = -\, \tilde{e}'^{i}{}_{a} \tag{4.52}$$

annimmt. Operieren wir mit $\mathcal{D}_i^{(0)}$ von links auf (4.52), so wird die linke Seite proportional zur Krümmung des Eichfeldes $C_{ia}^{(0)}$, verschwindet also wegen (4.49). Die resultierende rechte Seite verschwindet im allgemeinen hingegen *nicht*, und liefert deshalb drei nichttriviale *Integrabilitätsbedingungen*

$$\mathcal{D}_i^{(0)} \tilde{e}^{i}{}_{a} = \partial_i \tilde{e}^{i}{}_{a} + \varepsilon_{abc}\, C_{ib}^{(0)}\, \tilde{e}^{i}{}_{c} \stackrel{!}{=} 0\ . \tag{4.53}$$

Die drei Gleichungen (4.53) sind zusätzliche Forderungen an die niedrigsten Entwicklungskoeffizienten $C_{ia}^{(0)}$ aus (4.50).

Setzen wir die allgemeine Lösung (4.50) in die Integrabilitätsbedingungen (4.53) ein, so ergibt sich explizit

$$\partial_i \left(\Omega_{ab}\, \tilde{e}^{i}{}_{b} \right) \stackrel{!}{=} 0\,, \tag{4.54}$$

[10] Tatsächlich dürfen wir in (4.50) sogar $\mathbf{\Omega} \in \mathrm{O}(3)$ zulassen, da sich ein zusätzliches Minuszeichen von $\mathbf{\Omega}$ in (4.50) nicht bemerkbar macht.

[11] Die Anwendbarkeit der Fredholmschen Alternative rechtfertigt sich im Nachhinein zumindest für 3-Mannigfaltigkeiten mit

$$\forall x \in \mathcal{M}_3\ :\ R(x) \neq 0$$

über die im Anhang A.1 diskutierten Lösbarkeitsaussagen für die Sattelpunktsgleichung (4.47).

was die freien Parameterfelder Ω_{ab} der asymptotischen Sattelpunktslösung (4.50) im Limes $\kappa \to 0$ festlegt. Erst über die Forderung (4.54) erhalten die Sattelpunktsfelder $\mathcal{A}_{ia}$ für $\kappa \to 0$ eine explizite Abhängigkeit von der Triade $\tilde{e}^{i}{}_{a}$.

Mit $\boldsymbol{\Omega}$ gemäß (4.54) haben nun die speziellen Triadenvektorfelder

$$\vec{d}_a := \Omega_{ab}\,\vec{e}_b \tag{4.55}$$

die geometrisch interessante Eigenschaft der *Divergenzfreiheit*:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{d}_a = \frac{1}{\sqrt{h}}\,\partial_i\,\tilde{d}^{i}{}_{a} = \frac{1}{\sqrt{h}}\,\partial_i\left(\Omega_{ab}\,\tilde{e}^{i}{}_{b}\right) = 0\ . \tag{4.56}$$

Umgekehrt können wir auch sagen, daß gerade *divergenzfreie* Triaden $\vec{d}_a$ der Riemannschen Mannigfaltigkeit $(\mathcal{M}_3, \boldsymbol{h})$ über (4.55) und (4.50) die verschiedenen möglichen Lösungen $\mathcal{A}_{ia}$ der Sattelpunktsgleichung (4.47) im Limes $\kappa \to 0$ parametrisieren.

Zu jeder divergenzfreien Triade $\vec{d}_a$ kennen wir dabei zunächst nur den führenden Term $C_{ia}^{(0)}$ der asymptotischen Reihe (4.48). Die übrigen Entwicklungskoeffizienten $C_{ia}^{(n)}, n \geq 1$, lassen sich hierzu aber im Prinzip eindeutig berechnen, indem wir die asymptotische Entwicklung (4.48) um $\kappa = 0$ systematisch fortführen; sie ergeben sich als Lösungen von *linearen*, partiellen Differentialgleichungen zum Randwertproblem der kompakten Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_3$.[12] Leider sind die höheren Entwicklungskoeffizienten $C_{ia}^{(n)}, n \geq 1$, jedoch im allgemeinen nicht analytisch zugänglich, weshalb wir uns an dieser Stelle mit der Kenntnis des führenden Entwicklungsterms $C_{ia}^{(0)}$ begnügen wollen.

Im weiteren soll der semiklassische Sattelpunktsbeitrag zum Chern-Simons-Zustand (4.6) im Limes $\kappa \to 0$ für die verschiedenen möglichen Sattelpunktslösungen unter Verwendung der Formel (4.7) berechnet werden. Zur Auswertung des semiklassischen Exponenten F aus (4.8) entwickeln wir zunächst $\mathcal{S}_{CS}[\mathcal{A}_{ia}]$ gemäß (3.40) bis zur linearen Ordnung in κ, und erhalten

$$\mathcal{S}_{CS}[\mathcal{A}_{ia}] \overset{\kappa \to 0}{\sim} \tfrac{1}{6}\,I(\boldsymbol{\Omega}) + \mathcal{O}(\kappa^2)\ . \tag{4.57}$$

Hierbei ist $I(\boldsymbol{\Omega})$ die Cartan-Maurer-Invariante (4.25) derjenigen Drehmatrix $\boldsymbol{\Omega}$,

[12] Für eine mathematische Diskussion derartiger Entwicklungen sei nochmals auf Anhang A.1 verwiesen.

die gemäß (4.55) eine beliebig vorgegebene Triade $\vec{e}_a$ in eine *fest gewählte*, divergenzfreie Triade $\vec{d}_a$ überführt. Der in κ lineare Beitrag zu (4.57) enthält die Krümmung des Eichfeldes $C_{ia}^{(0)}$ und verschwindet wegen (4.49). Mit (4.57) und (4.50) hat der semiklassische Exponent (4.8) die folgende asymptotische Form im Limes $\kappa \to 0$:

$$F \overset{\kappa \to 0}{\sim} \frac{I(\mathbf{\Omega})}{6\,\kappa} + \int \mathrm{d}^3x\, \tilde{\varepsilon}^{ijk} \left(\Omega_{ab}\, e'_{ib}\right) \partial_j \left(\Omega_{ac}\, e'_{kc}\right) + \mathcal{O}(\kappa) \ . \tag{4.58}$$

Der Amplitudenvorfaktor der Gaußschen Fluktuationen in (4.7) ergibt sich mit $\mathbf{\Omega}$ aus (4.54) zu

$$\begin{aligned} A \quad &:= \quad \mathrm{Det}^{-1/2}\left[\mu\, \frac{\delta^2 F}{\delta\mathcal{A}_{ia}(x)\delta\mathcal{A}_{jb}(y)}\right] \\ &\overset{\kappa \to 0}{\propto} \quad \mathrm{Det}^{-1/2}\Big[\tilde{\varepsilon}^{ijk}\, \Omega_{ca}(x)\, \partial_k \left(\Omega_{cb}(x)\, \delta^3(x-y)\right)\Big] \ ; \end{aligned} \tag{4.59}$$

auf eine analytische Auswertung dieser komplizierten, nichtlokalen Funktionaldeterminante soll an dieser Stelle verzichtet werden.

Unter Berücksichtigung unserer Definition des Vorfaktors $\mathcal{N}$ in (4.27) liefert nun der Sattelpunkt (4.50) über (4.7) den folgenden semiklassischen Sattelpunktsbeitrag zum Chern-Simons-Zustand der Quantengravitation im Limes $\kappa \to 0$:

$$\begin{aligned} \Psi_{CS}[\tilde{e}^i{}_a] \underset{\mu \to \infty}{\overset{\kappa \to 0}{\sim}} A \cdot \exp\left[\pm\frac{1}{\gamma\hbar}\left(\frac{I(\mathbf{\Omega}) - I(\hat{\mathbf{\Omega}})}{2\Lambda} + \int \mathrm{d}^3x\, \tilde{\varepsilon}^{ijk}\, \left(\Omega_{ab}\, e_{ib}\right)\, \partial_j \left(\Omega_{ac}\, e_{kc}\right)\right)\right] \\ \text{mit} \qquad \partial_i \left(\Omega_{ab}\, \tilde{e}^i{}_b\right) \overset{!}{=} 0 \ . \end{aligned} \tag{4.60}$$

Zur Vereinfachung des ersten Terms im Exponenten von (4.60) verwenden wir die Funktionalrelation

$$I\left(\mathbf{\Omega}_1 \cdot \mathbf{\Omega}_2\right) = I\left(\mathbf{\Omega}_1\right) + I\left(\mathbf{\Omega}_2\right) \tag{4.61}$$

für die Cartan-Maurer-Invariante, womit sich

$$I(\mathbf{\Omega}) - I(\hat{\mathbf{\Omega}}) = I(\mathbf{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{\Omega}}^{\mathrm{T}}) \tag{4.62}$$

ergibt. Hierbei ist $\mathbf{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{\Omega}}^{\mathrm{T}}$ eine Drehmatrix, welche die im Anhang D definierte Einstein-Triade $\vec{g}_a$ in eine ausgezeichnete, divergenzfreie Triade $\vec{d}_a$ überführt. Die über (4.26) definierte Windungszahl dieser Drehmatrix können wir der Einfachheit halber auch als Windungszahl der divergenzfreien Triade $\vec{d}_a$ bezüglich der Einstein-Triade $\vec{g}_a$ interpretieren,[13]

$$I(\mathbf{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{\Omega}}^{\mathrm{T}}) =: I_0 \cdot \hat{w}(\vec{d}_a) \ . \tag{4.63}$$

Mit Hilfe von (4.55) und (4.63) können wir dann den Sattelpunktsbeitrag (4.60) auch alternativ in der Form

$$\Psi_{CS} \underset{\mu \to \infty}{\overset{\kappa \to 0}{\sim}} A \cdot \exp\left[\pm \frac{1}{\gamma \hbar} \left(\frac{I_0 \, \hat{w}(\vec{d}_a)}{2\Lambda} + \int \mathrm{d}^3 x \, \tilde{\varepsilon}^{ijk} \, d_{ia} \, \partial_j \, d_{ka} \right) \right] \tag{4.64}$$

schreiben, wobei $\vec{d}_a$ eine beliebige, *fest gewählte* divergenzfreie Triade der Riemannschen Mannigfaltigkeit $(\mathcal{M}_3, \boldsymbol{h})$ ist. Auf diese Weise hängt der Zustand (4.64) nicht mehr explizit von der beliebigen Triade $\vec{e}_a$, sondern nur noch von der 3-Metrik $\boldsymbol{h}$ ab, zu der $\vec{d}_a$ eine divergenzfreie Triade ist. An der Darstellung (4.64) erkennen wir somit implizit die SO(3)-Invarianz dieses semiklassischen Sattelpunktsbeitrags zum Chern-Simons-Zustand unter beliebigen, kleinen *und* großen Eichtransformationen der Triade $\vec{e}_a$. Es ist bemerkenswert, daß durch eine einheitliche Wahl des Vorfaktors $\mathcal{N}$ in (4.27) die Eichinvarianz des Chern-Simons-Zustands unter beliebigen SO(3)-Eichtransformationen sowohl im Limes $\kappa \to \infty$, wie auch im Limes $\kappa \to 0$ sichergestellt wird.

Die *Existenz* von divergenzfreien Triaden Riemannscher 3-Mannigfaltigkeiten $(\mathcal{M}_3, \boldsymbol{h})$ bleibt in diesem Zusammenhang allerdings noch zu diskutieren - mit diesem nichttrivialen Problem beschäftigen wir uns im Anhang A.2. Dabei stellt sich heraus, daß wir im allgemeinen sogar mit einer diskreten Anzahl *verschiedener* divergenzfreier Triaden rechnen müssen, die durch räumlich inhomogene Drehungen $\mathbf{\Omega}$ auseinander hervorgehen, und deshalb verschiedene, linear unabhängige semiklassische Sattelpunktsbeiträge (4.64) zum Chern-Simons-Zustand im Limes $\kappa \to 0$ liefern.

Im nächsten Abschnitt werden wir versuchen, mit Hilfe divergenzfreier Triaden Bianchi-homogener 3-Geometrien den Zustand (4.64) für diese spezielle Klasse räumlicher Mannigfaltigkeiten explizit auszuwerten.

[13] Die Größe $\hat{w}(\vec{d}_a)$ ist tatsächlich allein ein Funktional der divergenzfreien Triade $\vec{d}_a$, denn mit $\vec{d}_a$ kennt man auch die 3-Metrik $\boldsymbol{h}$, und damit die Einstein-Triade $\vec{g}_a$.

4.3.1 Der homogene Grenzfall

Zur Berechnung des semiklassischen Chern-Simons-Zustands (4.64) im Grenzfall $\kappa \to 0$ benötigen wir divergenzfreie Triaden $\vec{d}_a$ der Riemannschen Mannigfaltigkeit $(\mathcal{M}_3, \boldsymbol{h})$, die im allgemeinen nur schwierig explizit angegeben werden können. Allerdings ist für homogene 3-Mannigfaltigkeiten vom Bianchi-Typ A mindestens eine divergenzfreie Triade stets bekannt, was zunächst gezeigt werden soll.

Hierzu betrachten wir wieder die bereits in (4.28) definierte Strukturmatrix $\boldsymbol{m}$ der *invarianten* Triade $\vec{\imath}_a$ dieser homogenen Mannigfaltigkeiten, die in einer Koordinatenbasis $\{x^i\}$ auch explizit in der folgenden Form geschrieben werden kann:

$$m_{ab} = -\frac{1}{\sqrt{h}}\,\tilde{\varepsilon}^{ijk}\,\imath_{ia}\,\partial_j\,\imath_{kb}\ . \tag{4.65}$$

Über (3.42) erhält man hieraus für den schiefsymmetrischen Anteil von m_{ab}

$$\varepsilon_{abc}\,m_{bc} = \frac{1}{\sqrt{h}}\,\partial_i\,\tilde{\imath}^i{}_a \equiv \vec{\nabla}\cdot\vec{\imath}_a\ , \tag{4.66}$$

die Triadenfelder $\vec{\imath}_a$ sind also genau dann divergenzfrei, wenn m_{ab} aus (4.65) symmetrisch in a und b ist.[14] Da für Bianchi A-homogene Mannigfaltigkeiten die Strukturmatrix $\boldsymbol{m}$ *per definitionem* symmetrisch ist, liefert hier die invariante Triade $\vec{\imath}_a$ also automatisch eine spezielle, divergenzfreie Triade

$$\vec{d}_a^{(0)} := \vec{\imath}_a\ . \tag{4.67}$$

Im Anhang D zeigen wir, daß für Bianchi-homogene Mannigfaltigkeiten die *Einstein*-Triade $\vec{g}_a$ durch eine räumlich konstante Drehung aus der *invarianten* Triade $\vec{\imath}_a$ hervorgeht. Deshalb gilt für die in (4.63) eingeführte Windungszahl der invarianten, divergenzfreien Triade (4.67) Bianchi A-homogener Mannigfaltigkeiten:

$$\hat{w}(\vec{d}_a^{(0)}) = 0\ . \tag{4.68}$$

Ein möglicher Sattelpunktswert des Chern-Simons-Zustands der Gravitation wird im Limes $\kappa \to 0$ für diese Klasse von 3-Metriken folglich

[14]Diese Aussage gilt auch für beliebige Triaden $\vec{e}_a$ inhomogener Mannigfaltigkeiten $(\mathcal{M}_3, \boldsymbol{h})$, für die über (4.65) ebenfalls eine Strukturmatrix $\boldsymbol{m}$ definiert werden kann. Im Unterschied zu homogenen Mannigfaltigkeiten kann diese Strukturmatrix jedoch *nicht* räumlich konstant gewählt werden.

$$\Psi_{CS}^{(0)} \underset{\mu \to \infty}{\overset{\kappa \to 0}{\sim}} A \cdot \exp\left[\mp \frac{V}{\gamma \hbar} \cdot \operatorname{Tr} \boldsymbol{m} \right] , \tag{4.69}$$

wobei wir das Ergebnis (4.68) und die explizite Definition der Strukturmatrix $\boldsymbol{m}$ aus (4.65) in (4.64) eingesetzt haben.

Betrachten wir insbesondere flache räumliche Mannigfaltigkeiten vom Bianchi-Typ I, so verschwindet die Strukturmatrix $\boldsymbol{m}$ und damit der Exponent von (4.69). In diesem Zusammenhang kann man auch zeigen, daß der Exponent von Ψ_{CS} in (4.35), der im Grenzfall $\kappa \to \infty$ für Bianchi I-homogene 3-Metriken berechnet wurde, für beliebige Werte des Parameters κ gültig bleibt. Allerdings kennen wir den Vorfaktor der Gaußschen Fluktuationen nur im Grenzfall großer κ, so daß wir den vollständigen semiklassischen Chern-Simons-Zustand selbst im einfachsten Spezialfall flacher 3-Geometrien nicht explizit angeben können.

Zum Vergleich mit früheren Arbeiten interessieren uns ferner wieder speziell die homogenen Mannigfaltigkeiten vom Bianchi-Typ IX. Die Strukturmatrix $\boldsymbol{m}$ der zugehörigen invarianten Triade kann mit Hilfe der in Anhang B.3.2 definierten *Skalenparameter* $a_d, d \in \{1, 2, 3\}$, alternativ zu (4.29), (4.32) auch in der Form

$$\boldsymbol{m} = 2 \cdot \operatorname{diag}\left[\frac{a_1}{a_2\, a_3} , \frac{a_2}{a_3\, a_1} , \frac{a_3}{a_1\, a_2} \right] \tag{4.70}$$

parametrisiert werden. Für das Volumen der 3-Mannigfaltigkeit erhalten wir dann über (4.31)

$$V = \mathcal{V}\, a_1\, a_2\, a_3 , \tag{4.71}$$

und der Chern-Simons-Sattelpunktsbeitrag (4.69) der invarianten Triade $\vec{\imath}_a = \vec{d}_a^{(0)}$ ergibt sich zu

$$\Psi_{CS}^{(0)} \underset{\mu \to \infty}{\overset{\kappa \to 0}{\propto}} \exp\left[\mp \frac{2\mathcal{V}}{\gamma \hbar} \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \right) \right] . \tag{4.72}$$

Der Zustand (4.72) ist aus dem Studium Bianchi IX-homogener Modelle in [23, 42] wohlbekannt, wo er auch als „Wurmloch-Zustand“ bezeichnet wird. Zum expliziten Vergleich von (4.72) mit dem entsprechenden Zustand (2.18) aus [23] haben wir $\gamma = 16\,\pi, \mathcal{V} = 4\,\pi^2$ und $a_d = a\, e^{\beta_d}$ zu setzen; außerdem entspricht die Vorzeichenkonvention in [23] der oberen Wahl des Vorzeichens in der Definition der Ashtekarvariablen (2.34).

Zusätzlich zur invarianten, divergenzfreien Triade $\vec{d}_a^{(0)}$ gemäß (4.67) konstruieren wir im Anhang B.3.2 vier weitere divergenzfreie Triaden $\vec{d}_a^{(\alpha)}$, $\alpha \in \{1, 2, 3, 4\}$, Bianchi IX-homogener Mannigfaltigkeiten, die Anlaß zu vier zusätzlichen, möglichen Sattelpunktsbeiträgen zum Chern-Simons-Zustand im Limes $\kappa \to 0$ geben. Ein spezieller Sattelpunktswert ergibt sich zur Triade $\vec{d}_a^{(4)}$ aus (B.57), (B.58) als

$$\Psi_{CS}^{(4)} \underset{\mu \to \infty}{\overset{\kappa \to 0}{\propto}} \Psi_{CS}^{(0)} \cdot \exp\left[\pm\frac{4\mathcal{V}}{\gamma\hbar}\left(-\frac{6}{\Lambda} + a_1\,a_2 + a_2\,a_3 + a_3\,a_1\right)\right] . \qquad (4.73)$$

Er ist aus [23, 42] auch als „Hartle-Hawking-Zustand“ bekannt, und stimmt unter den oben angegebenen Identifizierungen mit dem Zustand (5.47) aus [23] überein. Ersetzt man in (4.73) zwei der drei Skalenparameter a_d durch ihr negatives, so gelangt man zu drei weiteren Sattelpunktswerten, die den drei divergenzfreien Triaden $\vec{d}_a^{(\alpha)}$, $\alpha \in \{1, 2, 3\}$, aus Anhang B.3.2 entsprechen. Diese Zustände wurden in den Arbeiten [23, 42] auch als „unsymmetrische Zustände“ bezeichnet.

Resümierend können wir also alle aus der Diskussion Bianchi IX-homogener Modelle bekannten Quantenzustände rekonstruieren, wenn wir den allgemein inhomogenen Quantenzustand (4.64) für spezielle divergenzfreie Triaden dieser Klasse von Mannigfaltigkeiten auswerten. Die Ergebnisse unterscheiden sich nur im Amplitudenvorfaktor der Gaußschen Fluktuationen, der im inhomogenen Fall aus einer komplizierten Funktionaldeterminante (4.59) besteht. Diese wurde hier nicht explizit berechnet und in (4.72) und (4.73) auch nicht weiter angegeben, was durch die Proportionalitätszeichen in diesen beiden Formeln angedeutet werden soll.

Im folgenden Abschnitt wollen wir uns nun mit der semiklassischen Interpretation des Chern-Simons-Zustands im Limes $\kappa \to 0$ beschäftigen, wobei wir insbesondere auf die Bianchi IX-homogenen Sattelpunktswerte (4.72) und (4.73) eingehen werden.

4.3.2 Semiklassische 4-Geometrien

Analog zu Abschnitt 4.2.3 können wir auch im Limes $\kappa \to 0$ wieder nach den semiklassischen 4-Geometrien fragen, die über den asymptotischen Chern-Simons-Zustand (4.64) generiert werden. Im Gegensatz zum Grenzfall $\kappa \to \infty$ ergibt sich für $\kappa \to 0$ jedoch das Problem, daß der Exponent des Zustands (4.64) reell ist, weswegen wir es im Sinne von (4.37) mit einer *imaginären*, semiklassischen Wirkung S zu tun haben. Um trotzdem zu einer reellen Zeitentwicklung für die 3-Metrik $\boldsymbol{h}$ zu gelangen, versuchen wir im Limes $\kappa \to 0$ einen von *Hawking* [26] vorgeschlagenen Interpretationsansatz in der *imaginären* Zeit

$$\tau := \mp i\,t \qquad , \qquad t \in \mathbb{R}\,. \tag{4.74}$$

Die über (2.4) gegebene Raumzeit-4-Metrik $\boldsymbol{g}$ ergibt sich hierbei als positiv definit, die ursprünglich Lorentzsche Signatur von $\boldsymbol{g}$ wird also über die Wick-Rotation (4.74) in eine euklidische Signatur konvertiert.

In der imaginären Zeit τ erhalten wir aus der Evolutionsgleichung (4.40) für den semiklassischen Zustand (4.64)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,\tilde{d}^i{}_a = -\tilde{\varepsilon}^{ijk}\,\partial_j d_{ka}\;, \tag{4.75}$$

wobei $\vec{d}_a$ eine fest gewählte, divergenzfreie Triade der räumlichen Mannigfaltigkeit $(\mathcal{M}_3, \boldsymbol{h})$ ist, die den Sattelpunktsbeitrag (4.64) charakterisiert. Die Eichbedingung

$$\partial_i\,\tilde{d}^i{}_a \stackrel{!}{=} 0 \tag{4.76}$$

bleibt unter der semiklassischen Evolution (4.75) offensichtlich automatisch erhalten.

Mit Hilfe der Beziehungen (2.29) und (3.42) können wir aus (4.75) auch eine Entwicklungsgleichung für die Felder d_{ia} gewinnen,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,d_{ia} = \omega_{ia}\;, \tag{4.77}$$

wobei ω_{ia} der Riemannsche Spin-Zusammenhang (2.29) der divergenzfreien Triade $\vec{d}_a$ ist.

Für *stationäre* Lösungen von (4.77) gilt offensichtlich $\omega_{ia} \equiv 0$, die 3-Metrik wird in diesem Fall also *flach*. Aufgrund unserer trivialen Wahl der Lagrangeschen Multiplikatoren N, N^i und Ω_a in (4.39) ist damit die 4-Mannigfaltigkeit $(\mathcal{M}_4, \boldsymbol{g})$ im stationären Fall ebenfalls flach und lokal isometrisch zum $\mathbb{R}^4$.

Zur Konstruktion weiterer, spezieller Lösungen von (4.77) können wir einen Ansatz der Form

$$d_{ia}(x,\tau) = \tau \cdot d'_{ia}(x) \tag{4.78}$$

versuchen, der die Gleichung

$$d'_{ia} = \omega_{ia} \tag{4.79}$$

für die Felder d'_{ia} impliziert. Der Riccitensor der 3-Geometrie ergibt sich hiermit zu

$$R^i{}_j = \frac{2}{\tau^2}\,\delta^i_j\;, \tag{4.80}$$

die Triade $\vec{d}_a$ muß also eine divergenzfreie Triade der 3-Sphäre mit Radius τ sein. Für das Linienelement der semiklassischen 4-Geometrie $\boldsymbol{g}$ gemäß (2.4) folgt deshalb

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\tau^2 + \tau^2\,\mathrm{d}\Omega_3^2\;, \tag{4.81}$$

wobei $\mathrm{d}\Omega_3^2$ das Linienelement der Einheits-3-Sphäre bezeichnet. Wie die stationäre Lösung beschreibt (4.81) also eine lokal flache, zum $\mathbb{R}^4$ isometrische 4-Mannigfaltigkeit $(\mathcal{M}_4, \boldsymbol{g})$. Wählt man zur Integration von (4.77) als Anfangs-3-Geometrie eine 3-Sphäre mit beliebigem Radius, so spielt die 4-Metrik (4.81) die Rolle einer *exakten* Lösung dieser semiklassischen Evolutionsgleichung.

Im folgenden wollen wir zumindest im Rahmen Bianchi IX-homogener Anfangs-3-Geometrien studieren, wie sich die Lösung (4.81) anisotrop verallgemeinert. Hierzu haben wir in die Evolutionsgleichung (4.75) eine der fünf divergenzfreien Triaden $\vec{d}_a^{(\alpha)}, \alpha \in \{0,1,2,3,4\}$, Bianchi IX-homogener Mannigfaltigkeiten einzusetzen, die im Anhang B.3.2 explizit konstruiert und angegeben werden. Jede dieser fünf Triaden wird zur selben Anfangs-3-Geometrie im allgemeinen *verschiedene* semiklassische 4-Geometrien liefern.

Betrachten wir zunächst die Evolution der *invarianten*, divergenzfreien Triade $\vec{d}_a^{(0)} = \vec{\imath}_a$ mit der Strukturmatrix (4.70), so ergibt sich aus (4.75) das folgende Differentialgleichungssystem erster Ordnung für die drei Skalenparameter a_d der Bianchi IX-Metrik:

$$\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,(a_1\,a_2) = a_3 \quad , \quad \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,(a_2\,a_3) = a_1 \quad , \quad \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,(a_3\,a_1) = a_2\;. \tag{4.82}$$

Diese semiklassischen Evolutionsgleichungen des Wurmloch-Zustands (4.72) wurden bereits im Rahmen des homogenen Bianchi IX-Modells gut untersucht [42]. Man überlegt sich relativ leicht, daß sämtliche Lösungen von (4.82) für $\tau \to \infty$ existieren, wobei sie die asymptotische Form

$$a_d(\tau) \overset{\tau\to\infty}{\sim} \tau \tag{4.83}$$

annehmen. Für große imaginäre Zeiten τ werden die Bianchi IX-Geometrien also insbesondere isotrop, die 4-Metrik wird flach und ist asymptotisch durch das Linienelement (4.81) gegeben. Zur geometrischen Veranschaulichung dieser speziellen 4-Geometrien ist in Abbildung 4.5 eine konkrete Lösung von (4.82) in einem Einbettungsraum dargestellt. Diese „Wurmloch-Geometrie“ hat dem Zustand (4.72) ursprünglich seinen Namen gegeben.

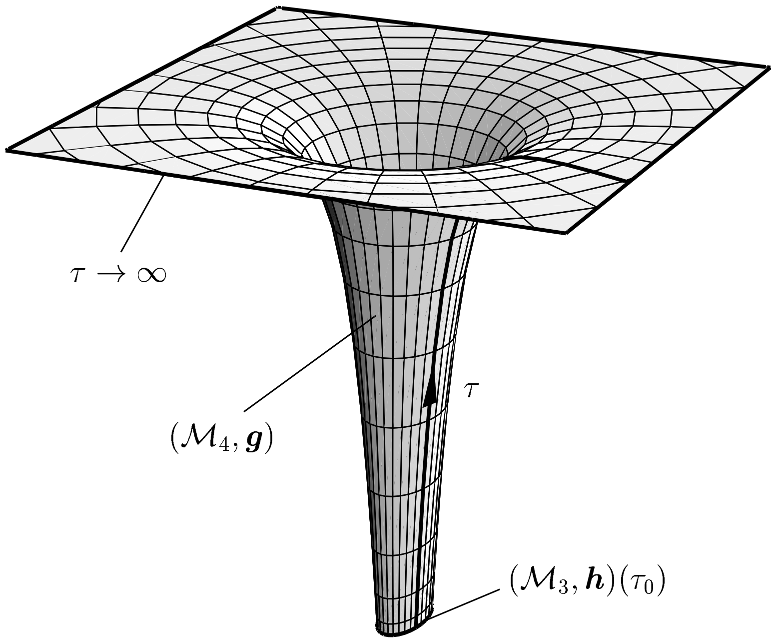

Abbildung 4.5: Geometrische Veranschaulichung der Wurmloch-Geometrie über eine Einbettung in den flachen Minkowskiraum. Die räumlichen Bianchi IX-Geometrien $\boldsymbol{h}(\tau)$ sind durch eindimensionale Ellipsen repräsentiert. Die Entwicklung der Anisotropie kann am Verhältnis der zugehörigen Halbachsen abgelesen werden, das dem Verhältnis zweier Skalenparameter a_d der Bianchi IX-Geometrie entspricht.

Als zweites Beispiel sei die divergenzfreie Triade $\vec{d}_a^{(4)}$ Bianchi IX-homogener 3-Geometrien aus Anhang B.3.2 betrachtet, die den Hartle-Hawking-Sattelpunktsbeitrag (4.73) zum Chern-Simons-Zustand liefert. Hierfür ergeben sich mit (4.75) die semiklassischen Evolutionsgleichungen

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(a_1\, a_2) = a_3 - a_1 - a_2 \;, \tag{4.84}$$

sowie zwei weitere Gleichungen, die man durch zyklische Permutation der drei Skalenparameter a_d in (4.84) erhält. Für die Lösungen dieses Differentialgleichungssystems kann man zeigen [42], daß die drei Skalenparameter a_d bei anwachsender imaginärer Zeit τ *simultan* verschwinden. Definieren wir den zughörigen Zeitpunkt als $\tau = 0$, so gilt für das asymptotische Verhalten der Lösungen von (4.84)

$$a_d(\tau) \overset{\tau\to 0}{\sim} \tau \;, \tag{4.85}$$

und in unmittelbarer Umgebung von $\tau = 0$ wird die 3-Metrik isotrop.[15] Das asymptotische Linienelement der 4-Metrik im Limes $\tau \to 0$ ist also wiederum durch (4.81) gegeben. Ein Repräsentant der Lösungen von (4.84) ist in der folgenden Abbildung 4.6 gezeigt.

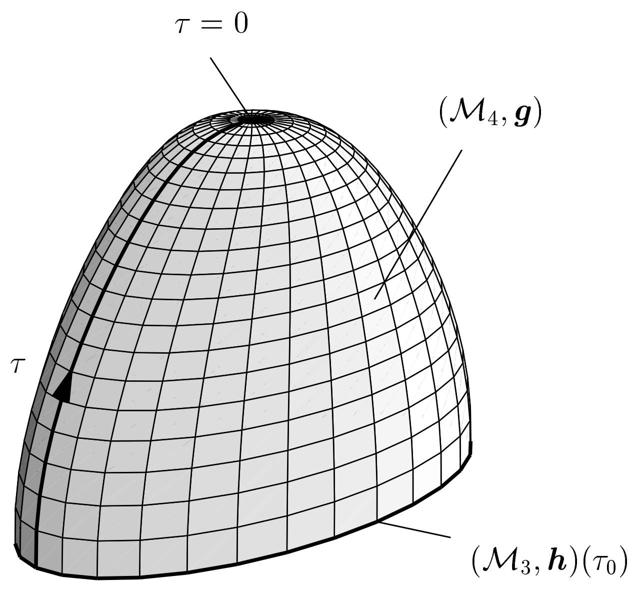

Abbildung 4.6: Einbettung der semiklassischen 4-Geometrie des Hartle-Hawking-Zustands $\Psi^{(4)}_{CS}$ in den flachen euklidischen Raum. Wie in Abbildung 4.5 sind die Bianchi IX-3-Mannigfaltigkeiten als Ellipsen mit Halbachsen a_d dargestellt. Bei $\tau = 0$ entartet zwar die räumliche 3-Geometrie, die 4-Geometrie ist dort aber trotzdem regulär und kompakt.

[15] Bei der hier getroffenen Wahl des Zeitnullpunktes $\tau = 0$ wird die Raumzeit-4-Mannigfaltigkeit offenbar über *negative* imaginäre Zeiten $\tau < 0$ parametrisiert.

Fassen wir die bisherigen Ergebnisse zusammen, so stellen wir fest, daß die spezielle Lösung (4.81) der allgemeinen Evolutionsgleichung (4.75) für die diskutierten semiklassischen Trajektorien Bianchi IX-homogener 3-Geometrien[16] die Rolle eines *Attraktors* spielt: Im Fall der „Wurmloch"-Evolution (4.82) gilt dies im Limes $\tau \to \infty$, für die „Hartle-Hawking"-Evolution (4.84) im Limes $\tau \to 0$.[17] Man mag daher vermuten, daß es sich hierbei vielleicht um eine universelle Eigenschaft der semiklassischen 4-Geometrien im Grenzfall $\Lambda = 0$ handelt; so könnte es auch für allgemeine, *inhomogene* Anfangs-3-Metriken stets divergenzfreie Triaden geben, deren Zeitentwicklung gemäß (4.75) zu asymptotisch flachen 4-Metriken im Limes $a_{\cos} \to \infty$, oder aber asymptotisch kompakten 4-Mannigfaltigkeiten ohne weiteren Rand bei $a_{\cos} = 0$ führt. Das zweite dieser Kriterien wurde von Hartle und Hawking [26, 27, 28] in der Tat als universelle Randbedingung für den Quantenzustand der Gravitation vorgeschlagen.

Über das allgemeine Verhalten der Lösungen von (4.75) können wir zwar aufgrund der komplizierten, nichtlinearen Struktur dieses Gleichungssystems wenig sagen, allerdings gibt es schon im Rahmen Bianchi A-homogener 3-Mannigfaltigkeiten Gegenargumente zu *beiden* Randbedingungen: Im Anhang C diskutieren wir die semiklassischen 4-Geometrien zu Anfangs-3-Geometrien vom Bianchi-Typ VI_{-1}, wobei wir die Evolution der *invarianten*, divergenzfreien Triaden dieser homogenen 3-Mannigfaltigkeiten untersuchen. Wir finden, daß die zugehörige semiklassische 4-Geometrie *nirgends* flach ist, ferner ergeben sich die vorgegebenen Anfangs-3-Geometrien *nicht* als Rand von kompakten, semiklassischen 4-Mannigfaltigkeiten.

Im Gegensatz zum homogenen Bianchi IX-Modell scheint also der *inhomogene* Chern-Simons-Zustand der Gravitation für $\Lambda = 0$ im allgemeinen weder die Bedingung asymptotischer Flachheit bei großen Skalen a_{cos}, noch die von Hartle und Hawking vorgeschlagene „keine-Grenzen-Bedingung" für $a_{cos} \to 0$ zu befriedigen.

Es ist allerdings zu bemerken, daß wir im Anhang C die Evolution einer *speziellen* divergenzfreien Triade studieren; es wäre denkbar, daß es andere, nichttriviale Triaden $\vec{d}_a$ gibt, deren semiklassische Evolution zur Befriedigung einer der genannten Randbedingungen führt. Ferner handelt es sich bei dem in Anhang C diskutierten Beispiel um eine 3-Mannigfaltigkeit mit nichttrivialer Topologie. Bei Restriktion auf Mannigfaltigkeiten mit trivialer S^3-Topologie wäre die Erfüllung einer der beiden Randbedingungen im Prinzip noch denkbar - zur Widerlegung dieser These müßte ein *inhomogenes* Gegenbeispiel konstruiert werden, was nicht weiter verfolgt worden ist.

[16] Die den divergenzfreien Triaden $\vec{d}_a^{(\alpha)}, \alpha \in \{1,2,3\}$, zugeordneten 4-Geometrien wurden hier nicht diskutiert. Sie sind aus dem Studium des homogenen Bianchi IX-Modells ebenfalls bekannt [42], scheinen aber physikalisch nicht weiter relevant zu sein.

[17] Im isotropen Grenzfall $a_1 = a_2 = a_3$ unterscheiden sich die Evolutionsgleichungen (4.82) und (4.84) tatsächlich nur im Vorzeichen von τ, und die „Attraktormetrik" (4.81) wird in beiden Fällen zur exakten Lösung.

Kapitel 5

Zur Normierbarkeit des Chern-Simons-Zustands

In diesem Kapitel wollen wir uns mit der Frage der Normierbarkeit des Chern-Simons-Zustands (3.41) der Quantengravitation beschäftigen. Bereits in dem Abschnitt 3.3 wurde das physikalische, innere Produkt (3.30) eingeführt, das für eichinvariante Wellenfunktionale $\Psi[\tilde{e}^i{}_a]$ mit (3.11)-(3.14) einen *Hilbertraum* definiert. Bezüglich dieses Produkts soll im weiteren die Normierbarkeit des Quantenzustands (3.41) untersucht werden.

Bei der Herleitung des physikalischen Produkts (3.30) wurde die Eichbedingung $\tilde{\chi}$ zur Fixierung der Zeit-Reparameterisierungsinvarianz noch offen gelassen; tatsächlich hängt das effektive physikalische Produkt aber stark von der Wahl dieser Eichbedingung ab, und es ist durchaus denkbar, daß der Quantenzustand $\Psi_{CS}[\tilde{e}^i{}_a]$ bezüglich mancher der resultierenden möglichen Produkte normierbar ist, bezüglich anderer hingegen nicht.

Untersuchen wir also die physikalische Norm des Chern-Simons-Zustands (3.41) für eine *fest* getroffene Wahl der Eichbedingung $\tilde{\chi}$, so erhalten wir keineswegs eine *strenge* Aussage über die Normierbarkeit von $\Psi_{CS}[\tilde{e}^i{}_a]$. Allerdings können wir zumindest für oder gegen die Normierbarkeit von $\Psi_{CS}[\tilde{e}^i{}_a]$ *argumentieren*, indem wir für $\tilde{\chi}$ eine physikalisch besonders naheliegende Wahl treffen, was im folgenden geschehen soll.

Hierfür betrachten wir eine fest gewählte, positive skalare Dichte $\tilde{v}(x)$ vom Gewicht $+1$ auf der räumlichen Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_3$, die gemäß

$$\int_{\mathcal{M}_3} \mathrm{d}^3x\, \tilde{v}(x) \stackrel{!}{=} 1 \tag{5.1}$$

normiert sei, und ferner einen beliebigen Längenparameter a_χ.[1] Über die Eichbedingung

$$\tilde{\chi}[\tilde{e}^i{}_a] := \sqrt{h} - a_\chi^3 \cdot \tilde{v} \stackrel{!}{=} 0 \tag{5.2}$$

schränken wir uns dann auf 3-Metriken $\boldsymbol{h}$ mit *gegebener* Volumenform $a_\chi^3 \cdot \tilde{v}$ ein. Insbesondere impliziert die Eichbedingung (5.2), daß die metrische Längenskala a_{cos} gemäß (4.3) mit der vorgegebenen Längenskala a_χ übereinzustimmen hat. Räumliche 3-Geometrien $\boldsymbol{h}$ mit (5.2) haben nur noch zwei lokale, physikalische Freiheitsgrade, für die der Quantenzustand $\Psi_{CS}[\tilde{e}^i{}_a]$ auszuwerten bleibt.

Mit dem physikalischen inneren Produkt $\langle\!\langle \cdot || \cdot \rangle\!\rangle_{phys}$ aus (3.30) hängt die physikalische „Norm“

$$\left\| \Psi_{CS} \right\|^2_{phys} := \left\langle\!\!\left\langle \Psi_{CS} \middle\| \Psi_{CS} \right\rangle\!\!\right\rangle_{phys} \tag{5.3}$$

des Chern-Simons-Zustands (3.41) über die Eichbedingung $\tilde{\chi}$ offensichtlich noch von a_χ und $\tilde{v}(x)$ ab. Wir werden deshalb den Grenzwert

$$\left\| \Psi_{CS} \right\|^2_{\infty} := \lim_{a_\chi \to \infty} \left\| \Psi_{CS} \right\|^2_{phys} \tag{5.4}$$

betrachten, der sich als eine von $\tilde{v}(x)$ unabhängige Größe erweisen wird. Zur Berechnung der physikalischen Norm (5.4) benötigen wir den Faddeev-Popov-Kommutator zwischen $\tilde{\mathcal{H}}_0^{ADM}$ aus (2.36) und $\tilde{\chi}$ gemäß (5.2), der sich, im Gegensatz zu J_G und J_D in (3.28), überraschenderweise relativ einfach berechnen läßt: Es ergibt sich

$$\frac{i}{\hbar} \left[\tilde{\mathcal{H}}_0^{ADM}(x), \tilde{\chi}(y) \right] = \frac{\gamma}{4}\, \delta^3(x-y) \cdot \tilde{\jmath}(x) \tag{5.5}$$

mit

$$\tilde{\jmath}(x) := \frac{i\hbar}{2} \left[e_{ia}(x) \frac{\delta}{\delta e_{ia}(x)} + \frac{\delta}{\delta e_{ia}(x)}\, e_{ia}(x) \right] , \tag{5.6}$$

woraus man für die Faddeev-Popov-Funktionaldeterminante J_H aus (3.29) den Ausdruck

[1] Für $\tilde{v}(x)$ kann man beispielsweise die Volumenform einer maximalsymmetrischen 3-Metrik auf $\mathcal{M}_3$ wählen.

$$J_H = \prod_{x \in \mathcal{M}_3} \frac{\gamma}{4} \cdot \tilde{\jmath}(x) \tag{5.7}$$

gewinnt. In Wirkung auf ein Wellenfunktional $\Psi[\tilde{e}^i{}_a]$ mißt der hermitesche Operator $\tilde{\jmath}(x)$ aus (5.6) die Stromdichte von $\Psi[\tilde{e}^i{}_a]$ in der $h(x)$-Richtung des Konfigurationsraumes, und J_H aus (5.7) entsprechend das Raumprodukt dieser Stromdichte.

Für große kosmologische Skalen $a_{cos} = a_\chi$ können wir das Chern-Simons-Wellenfunktional (3.41) durch den asymptotischen Zustand (4.21) ersetzen, und erhalten bis auf einen divergenten Vorfaktor

$$J_H \cdot \Psi_{CS} \Big|_{\tilde{\chi}=0} \overset{a_\chi \to \infty}{\propto} \mathbb{h}^{1/2} \cdot \Psi_{CS} \ . \tag{5.8}$$

Das Raumprodukt der Stromdichte von $\Psi_{CS}[\tilde{e}^i{}_a]$ in $h(x)$-Richtung hat also im Limes $a_\chi \to \infty$ ein festes Vorzeichen, so daß in diesem Sinne die übliche Betragsbildung der Faddeev-Popov-Determinante in (3.30) entfallen kann. Für die physikalische Norm (5.3) des Chern-Simons-Zustands folgt soweit

$$\left\| \Psi_{CS} \right\|^2_{phys} \overset{a_\chi \to \infty}{\propto} \int \mathcal{D}^9[e_{ia}]\, \mathbb{h}^{1/2}\, |J_G \cdot J_D| \cdot \delta^3[\tilde{\chi}_a]\ \delta^3[\tilde{\chi}^i]\ \delta[\tilde{\chi}] \cdot |\Psi_{CS}|^2 \ . \tag{5.9}$$

Mit dem in (4.27) definierten Normierungsfaktor $\mathcal{N}$ gilt nun für das Betragsquadrat des Chern-Simons-Zustands Ψ_{CS} aus (4.21):

$$|\Psi_{CS}|^2 \overset{a_\chi \to \infty}{\propto} \mathbb{h}^{-3/2} \cdot \exp\left[\mp \frac{6}{\gamma \hbar \Lambda} \left(\frac{I(\hat{\mathbf{\Omega}})}{6} - \mathcal{S}_{CS}[\omega_{ia}] \right) \right] \ . \tag{5.10}$$

Der Exponent von $|\Psi_{CS}|^2$ ist also Diffeomorphismus-invariant, und wegen (4.24) auch invariant unter *beliebigen* SO(3)-Eichtransformationen der Triade. Ferner ist bekannt, daß $\mathcal{S}_{CS}[\omega_{ia}]$ ein *konforminvariantes* Funktional ist: Unter lokalen Skalentransformationen

$$e_{ia} \mapsto e^{\zeta(x)} \cdot e_{ia} \tag{5.11}$$

ändert sich der Wert von $\mathcal{S}_{CS}[\omega_{ia}]$ nicht. Die Konforminvarianz gilt auch für die Cartan-Maurer-Invariante $I(\hat{\mathbf{\Omega}})$, da diese eine topologische Invariante ist, und damit für den gesamten Exponenten von (5.10).

Da wir gerade durch Skalentransformationen der Form (5.11) die Volumenform $\sqrt{h}$ einer beliebigen Triade e_{ia} in eine vorgegebene Volumenform $a_\chi \cdot \tilde{v}$ überführen können, ist der Wert des Exponenten von (5.10) bei $\tilde{\chi} = 0$ *unabhängig* von der Wahl der Größen $\tilde{v}$ und a_χ in (5.2).

Seien nun weiterhin $\beta_+(x)$ und $\beta_-(x)$ zwei SO(3)- und konforminvariante Funktionale von e_{ia}, durch die wir jedes SO(3)-, konform- und Diffeomorphismus-invariante Funktional der Triade ausdrücken können. Dann hängt insbesondere der Exponent in (5.10) allein von den Feldern $\beta_\pm(x)$ ab,

$$\tfrac{1}{6}\, I(\hat{\mathbf{\Omega}}) - \mathcal{S}_{CS}[\omega_{ia}] =: \hat{\mathcal{S}}_{CS}[\beta_\pm] \ , \tag{5.12}$$

und das Normierungsintegral (5.9) nimmt in den neuen Integrationsvariablen $\beta_\pm$ die Form

$$\left\|\Psi_{CS}\right\|^2_\infty \propto \int \mathcal{D}^2[\beta_\pm]\, W[\beta_\pm]\, \exp\left[\mp \frac{6}{\gamma\hbar\Lambda}\, \hat{\mathcal{S}}_{CS}[\beta_\pm]\right] \tag{5.13}$$

an, wobei der Limes $a_\chi \to \infty$ bereits ausgeführt wurde.[2] In das Integrationsgewicht $W[\beta_\pm]$ gehen dabei sowohl die Faddeev-Popov-Determinanten J_G und J_D aus (3.28), wie auch die spezielle Wahl der Felder $\beta_\pm(x)$ ein.

Für die in diesem Kapitel vorgeschlagene Eichbedingung $\tilde{\chi}$ zur Fixierung des physikalischen, inneren Produkts der Quantengravitation finden wir hiermit das folgende, bemerkenswerte Resultat:

Die mit dem Chern-Simons-Zustand (3.41) assoziierte „Wahrscheinlichkeitsdichte“ ergibt sich über (5.12), (5.13) als Exponentialfunktion des Chern-Simons-Funktionals $\mathcal{S}_{CS}[\omega_{ia}]$ vom *Riemannschen* Spin-Zusammenhang ω_{ia}. Diese Dichte ist Diffeomorphismus- und Gauß-invariant, und ferner sogar konforminvariant. Leider gibt sie aber *nicht* Anlaß zu einem endlichen Normierungsintegral (5.13): Da das Funktional $\mathcal{S}_{CS}[\omega_{ia}]$ nach oben und unten *unbeschränkt* ist, gibt es stets $\beta_\pm$-Richtungen im Konfigurationsraum, in denen der Integrand von (5.13) exponentiell anwächst. Falls dieses divergente Verhalten nicht gerade über das Integrationsgewicht $W[\beta_\pm]$ in (5.13) überkompensiert wird, müssen wir folgern, daß es sich beim Chern-Simons-Zustand der Quantengravitation (3.41) aller Voraussicht nach um einen *nicht-normierbaren* Quantenzustand handelt.

[2] Eine eventuell im Integranden von (5.9) verbleibende Potenz von $\mathbb{h}$ wird unter der Eichbedingung (5.2) unabhängig von der Triade, und kann deshalb vor das Funktionalintegral gezogen werden.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Diskussion

Das wesentliche Ziel dieser Arbeit bestand in der Herleitung und anschließenden Diskussion einer *Triadendarstellung* des aus der Ashtekar-Theorie schon seit längerem bekannten Chern-Simons-Zustands der Quantengravitation. Die intensive Untersuchung dieses speziellen Wellenfunktionals ist deshalb von besonderem Interesse, weil es sich hierbei um eine der wenigen exakten Lösungen aller Zwangsbedingungen der quantisierten Gravitationstheorie handelt, die man bis heute gefunden hat. Tatsächlich liefert der Chern-Simons-Zustand die *einzige* bekannte Lösung, die weiterhin einen wohldefinierten semiklassischen Limes besitzt, in dem reguläre, nicht-entartete 4-Geometrien beschrieben werden. Ferner besteht über diesen Zustand eine wichtige Verbindung zwischen der Gravitationstheorie und der topologischen Feldtheorie [15, 46], denn das Wellenfunktional $\hat{\Psi}_{CS}(\mathcal{A}_{ia})$ gemäß (3.39) ist in den Ashtekarvariablen $\mathcal{A}_{ia}$ völlig unabhängig von metrischen Konzepten auf der 3-Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_3$ definiert, und hängt deshalb bei gegebenen Feldern $\mathcal{A}_{ia}$ nur von der *Topologie* der 3-Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_3$ ab.

Die physikalische Interpretation des Chern-Simons-Zustands hat in der Vergangenheit allerdings große Probleme bereitet, da die geometrische Bedeutung des komplex definierten Ashtekar-Spin-Zusammenhangs a priori unklar war: Hier mußten erst noch komplizierte Realitätsbedingungen implementiert werden, bevor aus dem Zustand $\hat{\Psi}_{CS}(\mathcal{A}_{ia})$ ein physikalischer Sinn extrahiert werden konnte. Desweiteren erwiesen sich die komplexen Konfigurationsraumvariablen $\mathcal{A}_{ia}$ auch bei der Definition eines physikalischen inneren Produkts auf dem Raum der Wellenfunktionale $\hat{\Psi}_{CS}(\mathcal{A}_{ia})$ als nicht besonders zweckmäßig.[1]

[1] In diesem Zusammenhang wurde von Kodama [14] vorgeschlagen, die Normierbarkeitsforderung für Quantenzustände der Gravitation in der metrischen Darstellung durch eine *Holomorphie-Bedingung* in der Ashtekar-Darstellung zu ersetzen. Die Äquivalenz dieser beiden Forderungen ist aber keineswegs offensichtlich.

Diese beiden Schwierigkeiten der Ashtekar-Darstellung lassen sich jedoch dadurch umgehen, daß man einen Darstellungswechsel auf die zu $\mathcal{A}_{ia}$ kanonisch konjugierten Triadenfelder $\tilde{e}^i{}_a$ vornimmt: Die physikalische Bedeutung der Felder $\tilde{e}^i{}_a$ ist dann offensichtlich, und auch das innere Produkt ergibt sich in der $\tilde{e}^i{}_a$-Darstellung auf ganz natürliche Art und Weise.

Eine vordringliche Aufgabe dieser Arbeit bestand deshalb in der Aufklärung des expliziten Zusammenhangs zwischen der Ashtekar-Darstellung und der Triadendarstellung der Gravitationstheorie, womit wir uns in Kapitel 2 zunächst auf klassischem Niveau ausführlich beschäftigt haben. Hier wurde auch auf die *metrische* Darstellung der klassischen Allgemeinen Relativitätstheorie eingegangen, die in trivialer Weise aus der Triadendarstellung hervorgeht; ferner haben wir die eichtheoretische Bedeutung der Ashtekarvariablen über einen direkten Vergleich zwischen Gravitations- und Yang-Mills-Theorie in Abschnitt 2.4 hervorgehoben.

Anschließend wurde in Kapitel 3 eine kanonische Quantisierung der Gravitation in der *Triadendarstellung* durchgeführt. Im Sinne der Diracschen Methode [38] wurden für die Zwangsbedingungen $\tilde{\mathcal{H}}_0, \tilde{\mathcal{H}}_i$ und $\tilde{\mathcal{J}}_a$ der klassischen Allgemeinen Relativitätstheorie Operatordarstellungen auf dem Raum der Wellenfunktionale $\Psi_{CS}[\tilde{e}^i{}_a]$ angegeben, wobei über eine spezielle Wahl der Faktorordnung ein Abschluß der Operatoralgebra *ohne* Quantenkorrekturen erzielt werden konnte. Die in (2.47)-(2.49) gewählte Operatorordnung für die Observablen $\tilde{\mathcal{H}}_0, \tilde{\mathcal{H}}_i$ und $\tilde{\mathcal{J}}_a$ ist neu, und wurde in dieser Form noch nicht in der Literatur untersucht.

Die geometrische Bedeutung der Zwangsbedingungen $\tilde{\mathcal{H}}_0, \tilde{\mathcal{H}}_i, \tilde{\mathcal{J}}_a$ und der hiervon erzeugten Operatoralgebra haben wir in Abschnitt 3.1 diskutiert; ferner wurde die Universalität der hierbei auftretenden algebraischen Strukturen über einen Vergleich mit der quantisierten Einstein-Yang-Mills-Theorie in Abschnitt 3.2 herausgearbeitet.

Desweiteren konnte in natürlicher Weise ein kinematisches, inneres Produkt auf dem Raum der Wellenfunktionale $\Psi_{CS}[\tilde{e}^i{}_a]$ aufgefunden werden, bezüglich dessen die Zwangsoperatoren $\tilde{\mathcal{H}}_0^{ADM}, \tilde{\mathcal{H}}_i$ und $\tilde{\mathcal{J}}_a$ formal hermitesch sind. Über eine Eichfixierungsprozedur nach Faddeev und Popov [40] entstand hieraus das vollständig eichfixierte, physikalische innere Produkt (3.30), wobei die Eichbedingung $\tilde{\chi}$ zur Fixierung der Zeit-Reparameterisierungsinvarianz erst später in Kapitel 5 festgelegt wurde.

Im Rahmen der in Kapitel 3 formulierten Quantentheorie haben wir den Chern-Simons-Zustand der Gravitation *in der Triadendarstellung* konstruiert, und gezeigt, daß es sich hierbei um eine exakte Lösung sämtlicher Zwangsbedingungen der Quantengravitation handelt. Hierbei fiel auf, daß sich der Chern-Simons-Zustand formal als Lösung des Gleichungssystems (3.31) ergab, welches das quantenmechanische Pendant zum klassischen, selbstkonsistenten Gleichungssystem (2.50) darstellte. Schon in Kapitel 2 konnte eine gewisse Analogie zwischen den

Gleichungen (2.50) und den dreidimensionalen Einsteingleichungen mit kosmologischem Term festgestellt werden, was effektiv eine besondere geometrische Auszeichnung für den Chern-Simons-Zustand der Gravitation implizierte.

Zur Konstruktion der Triadendarstellung des Chern-Simons-Zustands in Abschnitt 3.4 benötigten wir die quantenmechanische Verallgemeinerung des Zusammenhangs (2.34) zwischen der Ashtekar- und Triadendarstellung der Allgemeinen Relativitätstheorie, welche sich über die folgenden beiden Transformationsschritte ergab:

(i) Eine Ähnlichkeitstransformation (3.32) mit dem Funktional Φ aus (2.40), und

(ii) eine Fouriertransformation (3.35), wobei es wesentlich war, die Integrationsmannigfaltigkeit Γ des Fourierintegrals komplex zu verallgemeinern.

Bei dieser Vorgehensweise spielten die Ashtekarvariablen $\mathcal{A}_{ia}$ lediglich die Rolle nützlicher mathematischer Hilfsfelder; die hierfür üblicherweise zu fordernden Realitätsbedingungen wurden im Schritt (ii) formal durch eine geeignete Wahl der komplexen Integrationsmannigfaltigkeit Γ in (3.35) ersetzt.

Über die Transformationen (i) und (ii) erhielten wir für den Chern-Simons-Zustand in der Triadendarstellung eine neuartige, komplexe Funktionalintegraldarstellung (3.41), die bisher nur in Restriktion auf Bianchi IX-homogene Modelle diskutiert worden ist [23, 25, 42], als inhomogenes Resultat aber bis heute unveröffentlicht blieb.

Die komplizierte Integrationsmannigfaltigkeit Γ in (3.41) konnte dabei allerdings nur implizit angegeben werden; ferner erschien eine analytische Auswertung des Funktionalintegrals in (3.41) nicht untersuchenswert, da die vollständige Berechnung der entsprechenden gewöhnlichen Integrale schon im Rahmen Bianchi IX-homogener Modelle nicht möglich war [23, 42].

Trotzdem eignete sich die Triadendarstellung (3.41) aber gut zur *semiklassischen* Diskussion des Chern-Simons-Zustands, denn im semiklassischen Limes konnten sämtliche Funktionalintegrale mit Hilfe der Laplaceschen Sattelpunktsmethode asymptotisch entwickelt werden, womit wir uns in Kapitel 4 ausführlich beschäftigt haben. Hierbei erwies es sich als zweckmäßig, über (4.4) dimensionslose, positive Entwicklungsparameter μ und κ einzuführen: Der formale semiklassische Limes $\hbar \to 0$ entsprach dann dem Grenzfall $\mu \to \infty$, und κ konstituierte einen zusätzlichen Parameter, dessen Wert von der kosmologischen Konstanten Λ und der kosmologischen Längenskala a_{cos} der räumlichen 3-Geometrie abhing.

Im Abschnitt 4.1 haben wir zunächst den allgemeinen semiklassischen Limes $\mu \to \infty$ betrachtet, der auf ein Gaußsches Sattelpunktsintegral (4.6) führte, und unter Anwendung der Laplaceschen Methode Sattelpunktsbeiträge der Form (4.7) zum Funktionalintegral (3.41) lieferte. Zur Berechnung der semiklassischen Sattelpunktsbeiträge mußten dabei Lösungen der Sattelpunktsgleichung (4.10) aufgefunden, und in den asymptotischen Ausdruck (4.7) eingesetzt werden. Da es sich bei der Sattelpunktsgleichung (4.10) um ein kompliziertes, nichtlineares System partieller Differentialgleichungen handelte, war die allgemeine Existenz von Lösungen nicht selbstverständlich - diesem Problem haben wir deshalb einen eigenen mathematischen Anhang A.1 gewidmet, wo die Lösbarkeit von (4.10) für eine große Klasse von Parameterfeldern $\tilde{e}^i{}_a(x)$ und Λ bewiesen werden konnte.

Neben diesen Existenzaussagen waren wir aber weiterhin an expliziten Lösungen der Sattelpunktsgleichung (4.10) interessiert, um die Sattelpunktswerte (4.7) des semiklassischen Chern-Simons-Zustands angeben, und physikalisch interpretieren zu können. Hierfür haben wir in den Abschnitten 4.2 und 4.3 die Grenzfälle $\kappa \to \infty$ und $\kappa \to 0$ studiert, in denen sich das Gleichungssystem (4.10) jeweils erheblich vereinfachte und mit analytischen Methoden behandelt werden konnte. Während wir in Kapitel 4 aus rein technischen Gründen auf diese beiden Grenzfälle hingeführt wurden, ist es an dieser Stelle angebracht, die physikalische Relevanz der Parameterbereiche $\kappa \ll 1$ und $\kappa \gg 1$ anhand aktueller kosmologischer Meßdaten zu beurteilen:

In den letzten Jahren haben sich aus kosmologischen Beobachtungen zunehmend Hinweise darauf ergeben, daß die kosmologische Konstante Λ, die lange Zeit als unmeßbar kleine Größe galt, einen von Null verschiedenen Wert haben muß.[2] Tatsächlich kennt man heute zumindest die *Größenordnung* von Λ ziemlich genau, wobei die kosmologische Konstante allerdings nicht direkt, sondern nur in Form des dimensionslosen Parameters

$$\Omega_\Lambda := \frac{\Lambda\, c^2}{3\, H_0^2} \tag{6.1}$$

gemessen werden kann. Hierbei bezeichnet H_0 den Wert der *Hubble-Konstanten*

$$H_0 := \left.\frac{\dot{a}_{cos}}{a_{cos}}\right|_{t=t_0} \tag{6.2}$$

zum heutigen Zeitpunkt t_0, und c die Lichtgeschwindigkeit.[3] Aktuelle Meßdaten

[2]Hier ist in erster Linie eine im Rahmen des kosmologischen Standardmodells nicht mehr erklärbare Diskrepanz in den Meßdaten für das Alter des Universums zu nennen: Offensichtlich gibt es Objekte im Universum, die gemäß des Standardmodells mit *verschwindender* kosmologischer Konstante älter sind als das Universum selbst [47, 48]. Dieser Widerspruch läßt sich erst dann auflösen, wenn man kosmologische Modelle mit $\Lambda > 0$ betrachtet.

[3]Im Rahmen dieser Arbeit wurde bisher stets in Einheiten mit $c = 1$ gearbeitet, für die Angabe experimenteller Meßwerte ist es hier aber günstiger, ein kosmologisches Einheitensystem zu verwenden.

liefern gemäß Lineweaver, Perlmutter et al. [31, 32, 49] für den Parameter Ω_Λ und die Hubble-Konstante H_0 Werte von[4]

$$\Omega_\Lambda \approx 0,62 \qquad \text{und} \qquad H_0 \approx 73\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s\,Mpc}}\ . \tag{6.3}$$

Über den Zusammenhang (6.1) kommt deshalb die mit der kosmologischen Konstanten Λ assoziierte Längenskala a_Λ aus (4.2) in der Größenordnung

$$a_\Lambda \approx 16\,\mathrm{Gly} \tag{6.4}$$

zu liegen. Ferner entnimmt man aus den Veröffentlichungen [31, 32, 49] das Alter t_0 des Universums zu

$$t_0 \approx 14\,\mathrm{Gy}\ , \tag{6.5}$$

so daß sich für die kosmologische Längenskala $a_{cos}(t_0)$ des heute sichtbaren Universums etwa ein Wert von

$$a_{cos}(t_0) \approx c\,t_0 \approx 14\,\mathrm{Gly} \tag{6.6}$$

ergibt. Bemerkenswerterweise liegt der über die Gleichung (4.4) eingeführte Parameter κ somit für das heutige Universum in guter Näherung in der Größenordnung *Eins*:

$$\kappa_0 \approx 0,76\ . \tag{6.7}$$

Über das Studium der Grenzfälle $\kappa \gg 1$ und $\kappa \ll 1$ in den Abschnitten 4.2 und 4.3 können wir also lediglich Aussagen über die Entwicklung unseres Universums in einer Spät- oder Frühphase machen; zum heutigen Zeitpunkt befinden wir uns bezüglich des Parameters κ gerade in einer Übergangsphase, und zur semiklassischen Untersuchung des Chern-Simons-Zustands bei $\kappa = \kappa_0$ müßten wir die Lösungen der Sattelpunktsgleichung (4.10) in einem nur schwer zugänglichen Parameterbereich diskutieren, was nicht weiter verfolgt worden ist.

Nichtsdestotrotz ist aber gerade auch die Untersuchung der Früh- und Spätphase unseres Universums durchaus von Interesse, was die Betrachtung der Parameterbereiche $\kappa \ll 1$ und $\kappa \gg 1$ in Kapitel 4 im Nachhinein sogar *physikalisch* rechtfertigt.

[4]Hierbei ist 1 Parsec eine kosmologische Längeneinheit mit 1 pc $\approx 3,26$ ly.

Die semiklassische Analyse des Chern-Simons-Zustands im Grenzfall $\kappa \gg 1$, der physikalisch der Situation $a_{cos} \gg a_\Lambda$ entspricht, lieferte in Abschnitt 4.2 den expliziten analytischen Ausdruck (4.21) für das asymptotische Wellenfunktional, wobei ein zweiter, zu (4.21) konjugiert komplexer Sattelpunktsbeitrag zum Funktionalintegral (3.41) ebenfalls möglich war. Hier hing es von der Wahl der Integrationsmannigfaltigkeit Γ in (3.41) ab, welche effektive Linearkombination dieser beiden Sattelpunktsbeiträge den asymptotischen Chern-Simons-Zustand im Limes $\kappa \to \infty$ beschrieb. Über zwei geeignete, topologisch inäquivalente Wahlen von Γ konnten wir damit in diesem Limes stets mindestens *zwei* linear unabhängige Zustände in der Triadendarstellung finden, die beide aus ein und demselben Chern-Simons-Zustand (3.39) in der Ashtekar-Darstellung hervorgingen.

Es fiel auf, daß der Sattelpunktsbeitrag Ψ_{CS} gemäß (4.21), wie auch der konjugiert komplexe Zustand Ψ_{CS}^*, stark an die Vilenkinsche Vorstellung [29, 30] vom Wellenfunktional des Universums erinnern: Mit dem in (5.6) definierten Stromoperator $\tilde{\jmath}(x)$ ergab sich das asymptotische Resultat (5.8), womit die Ströme von Ψ_{CS} und Ψ_{CS}^* aus (4.21) in der $h(x)$-Richtung des Konfigurationsraumes ein festes Vorzeichen haben. Deshalb beschreibt der Zustand (4.21) für die Wahl des unteren Vorzeichens in der Definition (2.34) der Ashtekarvariablen ausschließlich expandierende, der hierzu konjugiert komplexe Zustand hingegen kollabierende Universen.[5] Dasselbe Resultat erhielten wir in Abschnitt 4.2.3 auch über eine direkte Untersuchung der von diesen beiden Zuständen beschriebenen semiklassischen Raumzeit-Geometrien, wofür sich asymptotisch jeweils verallgemeinerte DeSitter-4-Geometrien mit einem entsprechenden Expansionsverhalten ergaben.

Der für beliebige Riemannsche 3-Mannigfaltigkeiten $(\mathcal{M}_3, \boldsymbol{h})$ gültige Ausdruck (4.21) für den asymptotischen Chern-Simons-Zustand im Limes $\kappa \to \infty$ wurde in Abschnitt 4.2.2 für Bianchi-homogene Mannigfaltigkeiten ausgewertet, was uns auf das geschlossene Ergebnis (4.30) führte. Im Spezialfall Bianchi IX-homogener 3-Metriken konnten die Ergebnisse früherer Arbeiten [23, 42] rekonstruiert werden, wobei lediglich ein Unterschied im Amplitudenvorfaktor des Wellenfunktionals auftrat. Diese scheinbare Diskrepanz konnte aber über die inäquivalenten Quantisierungsvorschriften in den verschiedenen Zugängen zur Beschreibung Bianchi IX-homogener Mannigfaltigkeiten geklärt werden.

Die Auswertung des semiklassischen Chern-Simons-Zustands im Limes $\kappa \to 0$ lieferte im Abschnitt 4.3 implizit definierte Sattelpunktsbeiträge der Form (4.64), welche über die divergenzfreien Triaden $\vec{d}_a$ der Riemannschen Mannigfaltigkeit $(\mathcal{M}_3, \boldsymbol{h})$ charakterisiert werden konnten. In diesem Zusammenhang trat die Frage nach der *Existenz* divergenzfreier Triaden Riemannscher 3-Mannigfaltigkeiten auf, die im Anhang A.2 für eine große Klasse von 3-Geometrien beantwortet wurde.

[5]Die umgekehrte Aussage gilt für die Wahl des oberen Vorzeichens in der Definition (2.34).

Für den asymptotischen Zustand (4.64) im Grenzfall $\kappa \to 0$ spielte der Begriff der *Windungszahl* eine große Rolle, der im Abschnitt 4.2.1 zunächst für SO(3)-Drehmatrizen $\mathbf{\Omega}$ eingeführt, und später über die Definition (4.63) auch auf Triadenfelder $\vec{e}_a$ übertragen wurde. Mit Hilfe einer geeigneten Definition des Vorfaktors $\mathcal{N}$ von Ψ_{CS} in (4.27) konnten wir erreichen, daß der Chern-Simons-Zustand sowohl im Limes $\kappa \to \infty$, wie auch im Limes $\kappa \to 0$, eichinvariant unter SO(3)-Eichtransformationen mit beliebiger Windungszahl wurde; die Verwendung des in diesem Zusammenhang oft eingeführten Θ-Winkels [5, 43] konnte auf diese Weise vermieden werden.

Das Wellenfunktional Ψ_{CS} gemäß (4.64), das formal auch die Rolle des semiklassischen Quantenzustands der Gravitation im Fall $\Lambda = 0$ spielt, wurde im Abschnitt 4.3.1 auf Bianchi A-homogene 3-Mannigfaltigkeiten eingeschränkt. Hierbei ergab sich für einen möglichen Sattelpunktsbeitrag das explizite Resultat (4.69), das in Restriktion auf Bianchi IX-Mannigfaltigkeiten auch als „Wurmloch-Zustand“ bekannt ist [23, 42]. Wie bereits in früheren Arbeiten gezeigt wurde, erfüllen die über den „Wurmloch-Zustand“ beschriebenen semiklassischen 4-Geometrien die Randbedingung asymptotischer Flachheit bei großen Längenskalen a_{cos}.

Mit Hilfe einer geeigneten Konstruktion in Anhang B konnten für Bianchi IX-homogene Mannigfaltigkeiten vier weitere Sattelpunktsbeiträge zum Funktionalintegral (3.41) angegeben werden, die den vier divergenzfreien Triaden $\vec{d}_a^{(\alpha)}$, $\alpha \in \{1, 2, 3, 4\}$, gemäß (B.57), (B.58) entsprachen. Diese Sattelpunktswerte sind aus dem Studium Bianchi IX-homogener Modelle wohlbekannt [23, 42]; insbesondere erfüllt der Zustand $\Psi_{CS}^{(4)}$ aus (4.73) die von Hartle und Hawking [26, 27, 28] vorgeschlagene „keine-Grenzen-Bedingung“ für $a_{cos} \to 0$.

Schon aus dem Studium des nicht-diagonalen Bianchi IX-Modells in [25, 50] ist allerdings bekannt, daß die vier Sattelpunktsbeiträge $\Psi_{CS}^{(\alpha)}$, $\alpha \in \{1, 2, 3, 4\}$, aus Symmetriegründen stets nur *gleichzeitig* auftreten können. Die Integrationsmannigfaltigkeit Γ in (3.41) muß also so gewählt werden, daß entweder keines, oder alle der vier entsprechenden Sattelpunktsfelder zum Funktionalintegral (3.41) beitragen. In Verbindung mit dem Zustand $\Psi_{CS}^{(0)}$ aus (4.72) finden wir somit nur *zwei* linear unabhängige Werte des Chern-Simons-Zustands für Bianchi IX-homogene 3-Mannigfaltigkeiten.

Dieses Resultat läßt sich auch mit den Ergebnissen aus Anhang B.3.2 verstehen, denn hier wurde gezeigt, daß die vier divergenzfreien Triaden $\vec{d}_a^{(\alpha)}$, $\alpha \in \{1, 2, 3, 4\}$, welche die semiklassischen Sattelpunktsbeiträge $\Psi_{CS}^{(\alpha)}$, $\alpha \in \{1, 2, 3, 4\}$, zum Chern-Simons-Zustand liefern, durch SO(3)-Eichtransformationen mit *trivialer* Windungszahl auseinander hervorgehen, und deshalb topologisch gleichwertig sind.

Wie oben bereits erwähnt, erfüllen die über den „Wurmloch-Zustand“ (4.72) und den „Hartle-Hawking-Zustand“ (4.73) generierten semiklassischen 4-Geometrien für Anfangs-3-Geometrien vom Bianchi-Typ IX einfache asymptotische Randbedingungen. Hierbei scheint es sich jedoch *nicht* um das allgemeine semiklassische Verhalten des Chern-Simons-Zustands im Limes $\kappa \to 0$ zu handeln: Im Anhang C haben wir gezeigt, daß beispielsweise homogene Anfangs-3-Geometrien vom Bianchi-Typ VI_{-1} weder die Randbedingung asymptotischer Flachheit bei großen Skalen, noch die „keine-Grenzen-Bedingung" von Hartle und Hawking befriedigen. Es bleibt daher fraglich, ob eine dieser beiden Randbedingungen vom inhomogenen Chern-Simons-Zustand der Quantengravitation allgemeingültig erfüllt werden kann.

Ziehen wir das Resümée aus den in Kapitel 4 gefundenen Ergebnissen, so liegt die Vermutung nahe, daß man in der Triadendarstellung der Quantengravitation *zwei* linear unabhängige Wellenfunktionale $\Psi_{CS}[\tilde{e}^i{}_a]$ finden kann, die beide aus dem Chern-Simons-Zustand $\hat{\Psi}_{CS}(\mathcal{A}_{ia})$ in der Ashtekar-Darstellung hervorgehen: Zum einen finden wir dieses Resultat für *beliebige* Riemannsche 3-Mannigfaltigkeiten im Limes $\kappa \to \infty$, ferner existieren zumindest für leicht deformierte Bianchi IX-Metriken im Limes $\kappa \to 0$ ebenfalls gerade zwei linear unabhängige Werte von $\Psi_{CS}[\tilde{e}^i{}_a]$. Es wäre interessant, diese Hypothese anhand weiterer ausgesuchter Beispiele zu untersuchen, oder durch Angabe zweier topologisch inäquivalenter Integrationsmannigfaltigkeiten Γ sogar explizit zu beweisen.

Zum Abschluß dieser Arbeit haben wir uns in Kapitel 5 schließlich mit der Frage der *Normierbarkeit* des Chern-Simons-Zustands in der Triadendarstellung beschäftigt. Unter Verwendung des vollständig eichfixierten, physikalischen inneren Produkts (3.30) und einer naheliegenden Wahl für die Eichbedingung $\tilde{\chi}$ zur Hamiltonschen Zwangsbedingung $\tilde{\mathcal{H}}_0$ wurde die physikalische „Norm" dieses Zustands berechnet, was uns auf das formale Resultat (5.13) führte.

Diesem Ergebnis zufolge ist die mit $\Psi_{CS}[\tilde{e}^i{}_a]$ assoziierte „Wahrscheinlichkeitsdichte" im wesentlichen durch die Exponentialfunktion des Chern-Simons-Funktionals $\mathcal{S}_{CS}[\omega_{ia}]$ zum Riemannschen Spin-Zusammenhang ω_{ia} bestimmt. Da das Funktional $\mathcal{S}_{CS}[\omega_{ia}]$ offensichtlich nach oben und unten *unbeschränkt* ist, ergibt sich hieraus die Konsequenz, daß es sich beim Chern-Simons-Zustand der Quantengravitation um einen *nicht-normierbaren* Zustand zu handeln scheint.

Es sei an dieser Stelle nun dem Leser überlassen, ob dieses negative Resultat ausreicht, das Chern-Simons-Wellenfunktional als physikalischen Quantenzustand zu verwerfen. Hierbei sollte jedoch berücksichtigt werden, daß das zur Untersuchung der Normierbarkeit verwendete innere physikalische Produkt noch stark von der Wahl der Eichbedingung $\tilde{\chi}$ abhängt, wie wir in Kapitel 5 ausgeführt haben - andere Wahlen von $\tilde{\chi}$, oder auch alternative Vorschläge zur Definition des eichfixierten Skalarprodukts, könnten im Prinzip auch zu einer *positiven* Normierbarkeitsaussage für den Chern-Simons-Zustand der Quantengravitation führen.[6] Ferner beachte man bei einer Beurteilung dieser problematischen Frage, daß der Chern-Simons-Zustand in der Triadendarstellung gemäß unserer Untersuchungen in Kapitel 4 eine überaus sinnvolle semiklassische Interpretation zuläßt.

Selbst wenn sich der Chern-Simons-Zustand der Quantengravitation auch endgültig als nicht-normierbar erweisen sollte, wäre es deshalb vielleicht lohnenswert, ganz auf eine Normierbarkeitsforderung des Quantenzustands zu verzichten, und im Rahmen der Gravitationstheorie - jenseits der konventionellen quantenmechanischen Deutung - über alternative Interpretationsmöglichkeiten des Wellenfunktionals nachzudenken.

[6] In einem anderen Zugang zur Definition des physikalischen inneren Produkts haben Smolin und Soo [19] beispielsweise vorgeschlagen, das Chern-Simons-Funktional (3.40) *selbst* als kosmologische Zeitvariable zu interpretieren. Dies scheint zumindest im Rahmen einer *euklidischen* Version der Allgemeinen Relativitätstheorie das mit dem Chern-Simons-Zustand assoziierte Normierbarkeitsproblem zu lösen.

Mathematischer Anhang

Anhang A

Zur Lösbarkeit der Sattelpunktsgleichung

Im vierten Kapitel haben wir gesehen, daß die Lösungen der Sattelpunktsgleichung (4.10) die semiklassische Form (4.7) des Chern-Simons-Zustands (3.41) in der Triadendarstellung bestimmen. Es ist daher wichtig, sich mit den allgemeinen Lösbarkeitseigenschaften des nichtlinearen, partiellen Differentialgleichungssystems (4.10) zu beschäftigen, was im Abschnitt A.1 dieses Anhangs geschehen soll.

Im Anschluß daran soll im Abschnitt A.2 gezeigt werden, daß man mit Hilfe von Lösungen der Sattelpunktsgleichung (4.10) im Limes $\kappa \to 0$ divergenzfreie Triaden $\vec{d}_a$ Riemannscher 3-Mannigfaltigkeiten $(\mathcal{M}_3, \boldsymbol{h})$ konstruieren kann; wie bereits in Kapitel 4.3 ausgeführt, parametrisieren diese gerade den semiklassischen Chern-Simons-Zustand (4.64) im Grenzfall $\kappa \to 0$.

A.1 Lösbarkeitsaussagen für die Sattelpunktsgleichung

Zur Diskussion der Lösbarkeit des nichtlinearen, partiellen Differentialgleichungssystems

$$\tilde{\mathcal{G}}^i_{\Lambda,a} \equiv \tilde{\varepsilon}^{ijk} \left(\partial_j \mathcal{A}_{ka} + \frac{1}{2}\, \varepsilon_{abc}\, \mathcal{A}_{jb}\, \mathcal{A}_{kc} \right) + \frac{\Lambda}{3}\, \tilde{e}^{\,i}{}_a \stackrel{!}{=} 0 \tag{A.1}$$

auf der kompakten, räumlichen Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_3$ ist es *nicht* besonders zweckmäßig, das System in der Form (A.1) zu studieren: Wollen wir Methoden aus der

Theorie partieller Differentialgleichungen [51] verwenden, so stört uns der führende Ableitungsterm in (A.1), denn bei der Rotation des Feldes $\mathcal{A}_{ia}$ handelt es sich um einen *nicht-elliptischen* Ableitungsoperator, der bei einer störungstheoretischen Analyse des Gleichungssystems (A.1) keine Lösbarkeitsaussagen liefern kann.

Wir werden deshalb schrittweise versuchen, aus (A.1) ein neues Differentialgleichungssystem *zweiter* Ordnung abzuleiten, derart, daß in führender Ableitungsordnung ein *elliptischer* Operator entsteht, und eine eindeutige, störungstheoretische Entwicklung der Lösungen $\mathcal{A}_{ia}$ begründet werden kann.

In diesem Zusammenhang ist es angebracht, die gesuchten Eichfelder $\mathcal{A}_{ia}$ durch andere, günstigere Felder zu ersetzen, womit wir uns zuächst befassen wollen.

Wie bereits aus Kapitel 2.3 bekannt ist, implizieren die Gleichungen (A.1) über (2.49) für $\Lambda \neq 0$ die drei Gauß-Bedingungen (2.38),

$$\mp\frac{i\gamma}{2}\,\tilde{\mathcal{J}}_a = \mathcal{D}_i \tilde{e}^i{}_a \equiv \partial_i \tilde{e}^i{}_a + \varepsilon_{abc}\,\mathcal{A}_{ib}\,\tilde{e}^i{}_c = 0 \ , \tag{A.2}$$

die folglich für Lösungen $\mathcal{A}_{ia}$ von (A.1) automatisch erfüllt sind. Die Gleichungen (A.2) lassen sich in den zu $\mathcal{A}_{ia}$ äquivalenten Feldern

$$\mathcal{A}_{ij} := \mathcal{A}_{ia}\, e_{ja} \tag{A.3}$$

auch in der Form

$$\tilde{\varepsilon}^{ijk}\,\mathcal{A}_{jk} = \tilde{\varepsilon}^{ijk}\,\omega_{jk} \qquad \text{mit} \qquad \omega_{ij} := \omega_{ia}\, e_{ja} \tag{A.4}$$

schreiben. Für Lösungen von (A.1) ergibt sich also eine Übereinstimmung der schiefsymmetrischen Anteile des Ashtekar-Spin-Zusammenhangs $\mathcal{A}_{ij}$ und des Riemann-Spin-Zusammenhangs ω_{ij}, womit die Differenz

$$\mathcal{K}_{ij} := \omega_{ij} - \mathcal{A}_{ij} \equiv (\omega_{ia} - \mathcal{A}_{ia}) \cdot e_{ja} \tag{A.5}$$

symmetrisch in i und j ist. Die Größen $\mathcal{K}_{ij}$ sind als Differenz von zwei Eichfeldern die Komponenten eines kovarianten Tensors zweiter Stufe, der gemäß (2.23) und (2.34) über eine Wick-Rotation mit der semiklassischen, extrinsischen Krümmung K_{ij} verknüpft ist:

$$K_{ij} = \pm\, i\, \mathcal{K}_{ij} \ . \tag{A.6}$$

Rechnen wir nun das Differentialgleichungssystem (A.1) über (A.5) auf die neuen, symmetrischen Felder $\mathcal{K}_{ij}$ um, so ergibt sich

$$\tilde{\mathcal{G}}^i_{\Lambda,j} := \tilde{\mathcal{G}}^i_{\Lambda,a} \cdot e_{ja} \equiv \tilde{G}^i_{\Lambda,j} + {}^*\tilde{\mathcal{K}}^i{}_j - \tilde{\varepsilon}^{ik\ell}\, \nabla_k\, \mathcal{K}_{\ell j} \stackrel{!}{=} 0\ . \tag{A.7}$$

Hierbei ist

$${}^*\tilde{\mathcal{K}}^i{}_j := \frac{\sqrt{h}}{2}\, \tilde{\varepsilon}^{imn}\, \underset{\sim}{\varepsilon}_{jk\ell}\, \mathcal{K}^k{}_m\, \mathcal{K}^\ell{}_n \tag{A.8}$$

die dichtegewichtete, klassische Adjunkte der Matrix $(\mathcal{K}^i{}_j)$, und mit $\tilde{G}^i_{\Lambda,a}$ aus (2.44) bezeichnet

$$\tilde{G}^i_{\Lambda,j} = \tilde{G}^i_{\Lambda,a} \cdot e_{ja} \tag{A.9}$$

den dichtegewichteten Einsteintensor mit kosmologischem Term.

Wie man zeigen kann, sind die neun Gleichungen (A.7) *nicht* unabhängig: Die drei Gauß-Bedingungen (A.2) nehmen in den symmetrischen Feldern $\mathcal{K}_{ij}$ die Form

$$\tilde{\mathcal{J}}_a = \pm \frac{2\,i}{\gamma}\, \tilde{\varepsilon}^{ijk}\, e_{ia}\, \mathcal{K}_{jk} \equiv 0 \tag{A.10}$$

an, sind also *identisch* erfüllt. Über die Beziehung (2.49) folgen hiermit drei verallgemeinerte Bianchi-Identitäten für den Tensor $\tilde{\mathcal{G}}^i_{\Lambda,j}$ aus (A.7),

$$\nabla_i\, \tilde{\mathcal{G}}^{ij}_\Lambda - \frac{1}{\sqrt{h}}\, \tilde{\varepsilon}^{jk\ell}\, \mathcal{K}_{kn}\, \tilde{\mathcal{G}}^n_{\Lambda,\ell} \equiv 0\ , \tag{A.11}$$

die sich auch direkt algebraisch nachrechnen lassen. Das partielle Differentialgleichungssystem (A.7) konstituiert somit nur *sechs* unabhängige Gleichungen für die *sechs* gesuchten Felder $\mathcal{K}_{ij}$.

Als Pendant zu den Beziehungen (2.47) und (2.48) aus Kapitel 2.3 ergeben sich nun spezielle Implikationen für die Lösungen $\mathcal{K}_{ij}$ von (A.7), die in der weiteren Diskussion von Bedeutung sein werden:

Über die Spur von (A.7) entsteht eine rein *algebraische* Gleichung

$$\tilde{\mathcal{H}}^{ADM}_0 = \frac{2}{\gamma}\, \tilde{\mathcal{G}}^i_{\Lambda,i} \equiv \frac{\sqrt{h}}{\gamma} \Big(\mathcal{K}^2 - \mathcal{K}^i{}_j\, \mathcal{K}^j{}_i + 2\Lambda - R\Big) = 0 \tag{A.12}$$

mit

$$\mathcal{K} := \mathcal{K}^i{}_i \;, \tag{A.13}$$

die sich über die Beziehungen (A.6) und (2.9) als die Hamiltonsche Zwangsbedingung (2.11) erweist. Ferner finden wir als schiefsymmetrischen Anteil von (A.7) drei Gleichungen, die *linear* in den gesuchten Feldern $\mathcal{K}_{ij}$ sind:

$$\tilde{\mathcal{H}}_i = \mp \frac{2i\sqrt{h}}{\gamma}\, \underset{\sim}{\varepsilon}_{ijk}\; \tilde{\mathcal{G}}^{jk}_{\Lambda} \equiv \pm \frac{2i\sqrt{h}}{\gamma} \left(\nabla_j \mathcal{K}^j{}_i - \nabla_i \mathcal{K} \right) = 0 \;. \tag{A.14}$$

Nach Umrechnung von $\mathcal{K}_{ij}$ auf die zu h_{ij} kanonisch konjugierten Impulse $\tilde{\pi}^{ij}$ über (A.6) und (2.9) erkennen wir in den Gleichungen (A.14) die Diffeomorphismus-Zwangsbedingungen (2.12) wieder.

Bemerkenswert ist nun die Tatsache, daß uns die Gleichungen (A.14) Informationen über die *Divergenz* der gesuchten Tensorfelder $\mathcal{K}_{ij}$ liefern, während ferner mit (A.7) auch eine Aussage über die *Rotation* von $\mathcal{K}_{ij}$ vorliegt. Im Sinne der allgemeinen Beziehung

$$\Delta = \text{grad div} - \text{rot rot} \tag{A.15}$$

können wir deshalb versuchen, zu (A.7) und (A.14) Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu konstruieren, die in führender Ableitungsordnung den *elliptischen* Laplace-Beltrami-Operator Δ enthalten.

In dieser Absicht betrachten wir konkret das folgende Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung,

$$\Delta_{ij} := \underset{\sim}{\varepsilon}_{jmn}\, \nabla_i\, \tilde{\mathcal{G}}^{mn}_{\Lambda} - \underset{\sim}{\varepsilon}_{imn}\, h^{mk}\, \nabla_k\, \tilde{\mathcal{G}}^{n}_{\Lambda,j} + \frac{1}{2}\, \underset{\sim}{\varepsilon}_{ijk}\, \nabla_n\, \tilde{\mathcal{G}}^{nk}_{\Lambda} \stackrel{!}{=} 0 \;, \tag{A.16}$$

das für Lösungen von (A.7) offensichtlich erfüllt ist. Der erste Term in (A.16) ist gemäß (A.14) proportional zum Gradienten der Diffeomorphismen $\tilde{\mathcal{H}}_j$, der zweite Term ist die kovariante Rotation des Tensors $\tilde{\mathcal{G}}^i_{\Lambda,j}$. Unter Verwendung der Beziehungen (A.14) und (A.15) heben sich die in *beiden* Termen auftretenden Beiträge proportional zum Gradienten der Divergenz von $\mathcal{K}_{ij}$ gegeneinander auf. In führender Ableitungsordnung bleiben deshalb nur noch die Hessesche Ableitungsmatrix der Spur $\mathcal{K}$ von $\mathcal{K}_{ij}$ aus dem ersten Term, und der Laplace-Beltrami-Operator von $\mathcal{K}_{ij}$ aus dem zweiten Term in (A.16) übrig.

Der dritte Beitrag in (A.16) enthält gemäß (A.11) nur Ableitungen erster Ordnung von $\mathcal{K}_{ij}$, und hat folglich *keinen* Einfluß auf die Ableitungsterme zweiter Ordnung. Er dient in erster Linie dazu, einen möglichst einfachen Ausdruck für den schiefsymmetrischen Anteil von Δ_{ij} zu erhalten, der sich nur unter Verwendung von (A.16) und (A.12) zu

$$\tilde{\varepsilon}^{ijk}\,\Delta_{jk} = \frac{\gamma}{2}\,h^{ij}\,\nabla_j \tilde{\mathcal{H}}_0^{ADM} \tag{A.17}$$

ergibt. Man rechnet leicht nach, daß der Operator Δ_{ij} außerdem *per definitionem* spurlos ist: Die Gleichung

$$h^{ij}\Delta_{ij} \equiv 0 \tag{A.18}$$

ist für symmetrische Felder $\mathcal{K}_{ij}$ eine algebraische Identität.

Wegen (A.17) ist es nun hinreichend, anstelle von (A.16) das Gleichungsystem

$$\Delta_{(ij)} := \tfrac{1}{2}\left(\Delta_{ij} + \Delta_{ji}\right) \stackrel{!}{=} 0 \quad , \quad \tilde{\mathcal{H}}_0^{ADM} \stackrel{!}{=} 0 \; , \tag{A.19}$$

zu betrachten, das wegen (A.18) insgesamt nur *sechs* unabhängige Gleichungen für die sechs Felder $\mathcal{K}_{ij}$ konstituiert. Jede Lösung von (A.19) befriedigt dann automatisch auch das volle Gleichungssystem (A.16).

Für den symmetrischen Anteil von Δ_{ij} finden wir explizit[1]

$$\begin{aligned}\Delta_{(ij)} \;&=\; \nabla_i\nabla_j\,\mathcal{K} - \Delta\mathcal{K}_{ij} - \underset{\sim}{\varepsilon}_{(ik\ell}\,h^{kn}\,\nabla_n\,{}^*\tilde{\mathcal{K}}^{\ell}{}_{j)} - C_{(ij)} \\ &\quad + 3\,R_{(ik}\,\mathcal{K}^k{}_{j)} - \tfrac{1}{2}\,R\,\mathcal{K}_{ij} - \mathcal{K}\,R_{ij} - h_{ij}\,\mathcal{K}_{k\ell}\,G^{k\ell} \; ,\end{aligned} \tag{A.20}$$

wobei im Beitrag nullter Ordnung der Tensor

$$C_{ij} := \frac{1}{\sqrt{h}}\,h_{ik}\,\tilde{\varepsilon}^{k\ell m}\,\nabla_\ell\left(R_{mj} - \tfrac{1}{4}\,R\,h_{mj}\right) \tag{A.21}$$

auftritt.[2]

[1] Die über die runden Klammern angedeuteten Symmetrisierungen beziehen sich dabei stets *nur* auf die Indizes i und j.

[2] Dieser Tensor ist aus der Differentialgeometrie auch als *Cotton-Tensor* bekannt.

Zur weiteren Analyse des Gleichungssystems (A.19) im Rahmen der Theorie partieller Differentialgleichungen wollen wir nun die Hamiltonsche Zwangsbedingung explizit lösen, um so zu *fünf* effektiven Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die *fünf* verbleibenden Feldfreiheitsgrade zu gelangen.

Wir zerlegen die symmetrische (3×3)-Matrix $(\mathcal{K}^i{}_j)$ hierzu in ihre SO(3)-irreduziblen Anteile, also eine spurlose, symmetrische Matrix $(\mathcal{P}^i{}_j)$ und einen Beitrag proportional zur Spur $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{K}^i{}_j = \tfrac{1}{3}\,\mathcal{K}\;\delta^i_j + \mathcal{P}^i{}_j \qquad \text{mit} \qquad \mathcal{P}^i{}_i = 0\;. \tag{A.22}$$

Die Hamiltonsche Zwangsbedingung (A.12) nimmt dann die Form

$$\tfrac{2}{3}\,\mathcal{K}^2 - \mathcal{P}^i{}_j\,\mathcal{P}^j{}_i = R - 2\Lambda \tag{A.23}$$

an, und beschreibt an jedem Punkt der räumlichen Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_3$ einen fünfdimensionalen Hyperboloiden in dem sechsdimensionalen, von $\mathcal{K}$ und $\mathcal{P}^i{}_j$ aufgespannten Raum. Damit dieser Hyperboloid nirgends entartet, sollten wir uns im weiteren auf den Fall

$$\forall x \in \mathcal{M}_3: \qquad R(x) \neq 2\Lambda \tag{A.24}$$

beschränken.[3] Unter der Voraussetzung (A.24) kann dann die lokal fünfdimensionale Lösungsmannigfaltigkeit der Hamiltonschen Zwangsbedingung (A.23) über eine *stereographische Projektion* parametrisiert werden, wofür wir die auf der folgenden Seite in Abbildung A.1 dargestellte geometrische Konstruktion verwenden wollen.

Hierbei betrachten wir zunächst den Spezialfall $R > 2\Lambda$, und finden als spezielle, ausgezeichnete Lösung der Hamiltonschen Zwangsbedingung (A.23)

$$(\mathcal{P}^i{}_j, \mathcal{K}) = -\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot(0, \sqrt{R-2\Lambda})\;. \tag{A.25}$$

[3] Obwohl es sich bei der Bedingung (A.24) um eine nichttriviale Restriktion der Parameter $\tilde{e}^{\,i}{}_a$ und Λ des Differentialgleichungssystems (A.1) handelt, erlaubt sie dennoch die Diskussion vieler physikalisch interessanter Fälle: Sie ist insbesondere für eine vorgegebene, reguläre 3-Geometrie stets erfüllt, wenn wir die kosmologische Konstante Λ hinreichend groß wählen. Ferner erfassen wir im Fall verschwindender kosmologischer Konstante beispielsweise alle Riemannschen 3-Mannigfaltigkeiten mit positiver Skalarkrümmung R, wie etwa leicht deformierte 3-Sphären.

Diese Lösung entspricht dem Punkt O in der Abbildung A.1. Für einen beliebigen Punkt P des Hyperboloiden in Abbildung A.1 mit den Koordinaten $(\mathcal{P}^i{}_j, \mathcal{K})$ konstruieren wir nun eine Gerade durch die Punkte P und O, welche die $\mathcal{P}^i{}_j$-Hyperebene in genau einem Punkt Q mit den Koordinaten $(\mathcal{Q}^i{}_j, 0)$ schneidet. Die Koordinaten $\mathcal{Q}^i{}_j$ des Punktes Q bilden wie $\mathcal{P}^i{}_j$ eine symmetrische, spurlose (3×3)-Matrix, und repräsentieren somit fünf unabhängige Parameter, mit denen wir jeden Punkt P des Hyperboloiden (A.23) beschreiben können.

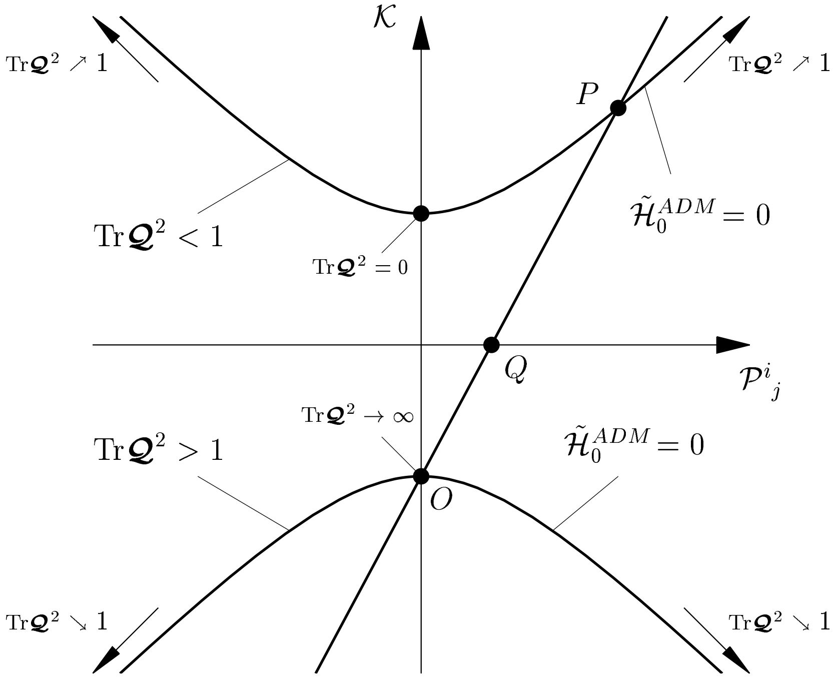

Abbildung A.1: Stereographische Projektion zur Parametrisierung der Hamiltonschen Zwangsbedingung $\tilde{\mathcal{H}}_0^{ADM} = 0$ im Fall $R > 2\Lambda$.

Elementare geometrische Überlegungen liefern so für die Lösungen $\mathcal{K}^i{}_j$ der Hamiltonschen Zwangsbedingung die explizite Parametrisierung

$$\mathcal{K}^i{}_j = \frac{\sqrt{R - 2\Lambda}}{1 - \mathrm{Tr}\,\boldsymbol{\mathcal{Q}}^2} \left[\frac{1 + \mathrm{Tr}\,\boldsymbol{\mathcal{Q}}^2}{\sqrt{6}}\, \delta^i_j + 2\mathcal{Q}^i{}_j \right] , \tag{A.26}$$

wobei $\boldsymbol{\mathcal{Q}} = (\mathcal{Q}^i{}_j)$ eine beliebige symmetrische, spurlose Matrix mit

$$\mathrm{Tr}\, \boldsymbol{\mathcal{Q}}^2 \neq 1 \tag{A.27}$$

ist. Die gebrochen rationale Parametrisierung (A.26) von $\mathcal{K}^i{}_j$ ist analytisch in $\mathcal{Q}^i{}_j$, und kann sogar zur Beschreibung der im allgemeinen *komplexen* Lösung $\mathcal{K}^i{}_j$ der Hamiltonschen Zwangsbedingung (A.12) verwendet werden, wenn wir für $\boldsymbol{\mathcal{Q}}$ *komplexe* spurlose, symmetrische Matrizen mit (A.27) zulassen. Für $\mathrm{Tr}\, \boldsymbol{\mathcal{Q}}^2 = 1$ liefert die stereographische Projektion aus Abbildung A.1 kein Urbild P, weshalb solche Matrizen über (A.27) aus dem Definitionsbereich von $\boldsymbol{\mathcal{Q}}$ herausgenommen wurden. Unendliche Matrizen sind zu identifizieren und parametrisieren den Punkt O in Abbildung A.1.

Im folgenden werden wir uns auf die Diskussion *reeller* Matrizen $\boldsymbol{\mathcal{Q}}$ beschränken, die für $R > 2\Lambda$ über (A.26) reelle Felder $\mathcal{K}^i{}_j$ beschreiben.[4] Dann gilt

$$\mathrm{Tr}\, \boldsymbol{\mathcal{Q}}^2 \geq 0 \ , \tag{A.28}$$

und der Bereich $0 \leq \mathrm{Tr}\, \boldsymbol{\mathcal{Q}}^2 < 1$ parametrisiert die obere Schale des Hyperboloiden in Abbildung A.1, während über $\mathrm{Tr}\, \boldsymbol{\mathcal{Q}}^2 > 1$ die untere Schale beschrieben wird.

In entsprechender Weise erhält man für reelle Matrizen $\boldsymbol{\mathcal{Q}}$ im Fall $R < 2\Lambda$ über die Darstellung (A.26) *imaginäre* Felder $\mathcal{K}^i{}_j$.[5]

Setzen wir die allgemeine, gebrochen rationale Parametrisierung (A.26) in das Differentialgleichungssystem (A.20) ein, so entstehen fünf effektive nichtlineare, partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die fünf Felder $\mathcal{Q}^i{}_j$. Die Lösbarkeit dieses Differentialgleichungssystems bleibt zu diskutieren, was nun im Rahmen einer störungstheoretischen Analyse geschehen soll.

Zu diesem Zweck betrachten wir eine spezielle Lösung $\bar{\mathcal{Q}}^i{}_j$ des Gleichungssystems (A.20), (A.26), die beispielsweise durch entsprechende Übersetzung der in Kapitel 4 gefundenen Lösungen der Sattelpunktsgleichung (A.1) gewonnen werden kann. Dann bleibt zu zeigen, daß sich die Lösung $\bar{\mathcal{Q}}^i{}_j$ unter einer infinitesimalen Störung der Parameter $\tilde{e}^i{}_a$ und Λ in (A.20), (A.26) *eindeutig* fortsetzen läßt. Für die gestörte Lösung machen wir deshalb den Ansatz

$$\mathcal{Q}^i{}_j = \bar{\mathcal{Q}}^i{}_j + \epsilon \cdot \mathcal{Q}'^i{}_j + \mathcal{O}(\epsilon^2) \ , \tag{A.29}$$

und linearisieren das Gleichungssystem (A.20), (A.26) um die Hintergundlösung

[4]Dies entspricht über (A.3), (A.5) auch reellen Ashtekarvariablen $\mathcal{A}_{ia}$.

[5]Diese übersetzen sich gemäß (A.6) in reelle extrinsische Krümmungen K_{ij}, und über (A.3), (A.5) in komplexe Ashtekarvariablen $\mathcal{A}_{ia}$.

$\bar{\mathcal{Q}}^i{}_j$, womit sich der gesuchte Korrekturterm $\mathcal{Q}'^i{}_j$ als Lösung eines *linearen* Differentialgleichungssystems zweiter Ordnung ergibt.

An dieser Stelle kann nun auf die Theorie linearer partieller Differentialgleichungen zurückgegriffen werden: Falls gezeigt werden kann, daß das um $\bar{\mathcal{Q}}^i{}_j$ linearisierte Gleichungssystem (A.20), (A.26) in führender Ableitungsordnung der Korrekturfelder $\mathcal{Q}'^i{}_j$ *elliptisch* ist, so ist eine störungstheoretische Entwicklung der Lösungen $\mathcal{Q}^i{}_j$ möglich.

Zum Beweis der Elliptizität entwickeln wir zunächst die allgemeine Lösung (A.26) der Hamiltonschen Zwangsbedingung über den Störungsansatz (A.29) nach ϵ, und erhalten

$$\mathcal{K}^i{}_j = \bar{\mathcal{K}}^i{}_j + \epsilon \cdot \mathcal{K}'^i{}_j + \mathcal{O}(\epsilon^2) \ , \tag{A.30}$$

mit

$$\mathcal{K}'^i{}_j = \frac{2\sqrt{R-2\Lambda}}{\left(1-\mathrm{Tr}\bar{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}^2\right)^2} \left[2\,\bar{\mathcal{Q}}^{mn} \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\,\delta^i_j + \bar{\mathcal{Q}}^i{}_j \right) \mathcal{Q}'_{mn} + \left(1-\mathrm{Tr}\bar{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}^2\right) \mathcal{Q}'^i{}_j \right] \ . \tag{A.31}$$

Für den Differentialoperator $\Delta_{(ij)}$ aus (A.20) ergibt sich hiermit in erster Ordnung des Störparameters ϵ

$$\begin{aligned} \Delta'_{(ij)} \quad &\doteq \quad \frac{2\sqrt{R-2\Lambda}}{\left(1-\mathrm{Tr}\bar{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}^2\right)^2} \left[\sqrt{6}\,\bar{\mathcal{Q}}^{mn}\,\partial^2_{ij}\,\mathcal{Q}'_{mn} - 2\,\bar{\mathcal{Q}}^{mn} \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\,h_{ij} + \bar{\mathcal{Q}}_{ij} \right) \Delta\,\mathcal{Q}'_{mn} \right. \\ &\qquad \left. - \left(1-\mathrm{Tr}\bar{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}^2\right) \Delta \mathcal{Q}'_{ij} \right] , \end{aligned} \tag{A.32}$$

wobei der Punkt über dem Gleichheitszeichen andeutet, daß nur die führenden räumlichen Ableitungsterme von $\mathcal{Q}'_{ij}$ in (A.32) berücksichtigt wurden.

Im weiteren untersuchen wir die Wirkung des Differentialoperators $\Delta'_{(ij)}$ aus (A.32) auf eine beliebige, aber fest gewählte Fouriermode des gesuchten Feldes $\mathcal{Q}'_{ij}$,

$$\mathcal{Q}'_{ij}(x) = \hat{\mathcal{Q}}_{ij}(\boldsymbol{k}) \cdot e^{i\,k_\ell x^\ell} \ , \tag{A.33}$$

und erhalten hierüber das sogenannte *Symbol* [51] des Differentialoperators $\Delta'_{(ij)}$ zum Wellenzahlvektor $\boldsymbol{k}$:

$$\sigma_{ij}\left(\Delta'_{(mn)};\boldsymbol{k}\right) := -\frac{2\sqrt{R-2\Lambda}}{\left(1-\mathrm{Tr}\bar{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}^2\right)^2}\left[\sqrt{6}\,k_i\,k_j\,\bar{\mathcal{Q}}^{mn}\,\hat{\mathcal{Q}}_{mn} - |\boldsymbol{k}|^2\cdot\left(\left(1-\mathrm{Tr}\bar{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}^2\right)\hat{\mathcal{Q}}_{ij}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{2}{\sqrt{6}}\,\bar{\mathcal{Q}}^{mn}\left(h_{ij}+\sqrt{6}\,\bar{\mathcal{Q}}_{ij}\right)\hat{\mathcal{Q}}_{mn}\right)\right]\,. \qquad \text{(A.34)}$$

Kann nun gezeigt werden, daß das Symbol $\boldsymbol{\sigma}$ des Operators $\Delta'_{(ij)}$ für beliebige $\boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{0}$ bezüglich $\hat{\mathcal{Q}}_{ij}$ *invertierbar* ist, so ist der Operator $\Delta'_{(ij)}$ *elliptisch*, und die störungstheoretische Entwicklung von Lösungen des Differentialgleichungssystems (A.20), (A.26) ist gerechtfertigt.

Es bleibt also zu beweisen, daß das in $\hat{\mathcal{Q}}_{ij}$ lineare Gleichungssystem

$$\sigma_{ij}\left(\Delta'_{(mn)};\boldsymbol{k}\right) \stackrel{!}{=} 0 \qquad \text{(A.35)}$$

für beliebige $\boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{0}$ nur die triviale Lösung $\hat{\mathcal{Q}}_{ij} = 0$ besitzt. Für die explizite Form des Gleichungssystems (A.35) finden wir

$$\sqrt{6}\,q\,n_i\,n_j = \frac{2}{\sqrt{6}}\,q\left(h_{ij}+\sqrt{6}\,\bar{\mathcal{Q}}_{ij}\right)+\left(1-\mathrm{Tr}\bar{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}^2\right)\hat{\mathcal{Q}}_{ij}\;, \qquad \text{(A.36)}$$

wobei zur Abkürzung die Größe

$$q := \bar{\mathcal{Q}}^{mn}\,\hat{\mathcal{Q}}_{mn} \qquad \text{(A.37)}$$

eingeführt wurde, und

$$\boldsymbol{n} := \frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|} \qquad \text{(A.38)}$$

nun ein beliebiger Einheitsvektor ist. Über eine Verjüngung der Gleichung (A.36) mit $\bar{\mathcal{Q}}^{ij}$ folgt für Lösung $\hat{\mathcal{Q}}_{ij}$ von (A.36) die notwendige Bedingung

$$q\cdot\left(1+\mathrm{Tr}\bar{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}^2-\sqrt{6}\,\bar{\mathcal{Q}}^{ij}\,n_i\,n_j\right) \stackrel{!}{=} 0\;. \qquad \text{(A.39)}$$

Können wir also die Aussage

$$1+\mathrm{Tr}\bar{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}^2 = \sqrt{6}\,\bar{\mathcal{Q}}^{ij}\,n_i\,n_j \qquad \text{(A.40)}$$

zum Widerspruch führen, so folgt mit (A.39), daß q gemäß (A.37) verschwinden muß, und dies impliziert weiterhin über (A.36) die Aussage $\hat{\mathcal{Q}}_{ij} = 0$, womit die Trivialität des Kerns von $\boldsymbol{\sigma}$ bewiesen wäre. Zum Abschluß der Beweisführung bleibt also lediglich die Lösbarkeit der Gleichung (A.40) zu widerlegen.

Hierzu verwenden wir zunächst die für beliebige reelle, symmetrische Matrizen $(\bar{\mathcal{Q}}^i{}_j)$ gültige Ungleichung

$$n^i n_i = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \bar{\mathcal{Q}}^i{}_j \, n^j \, n_i \leq \max_{i=1}^{3} \left\{ \bar{\mathcal{Q}}_i \right\} \ , \tag{A.41}$$

wobei $\bar{\mathcal{Q}}_i$ die reellen Eigenwerte der Matrix $\bar{\boldsymbol{\mathcal{Q}}} = (\bar{\mathcal{Q}}^i{}_j)$ bezeichnet. Mit (A.41) impliziert (A.40) die notwendige Relation

$$1 + \sum_{i=1}^{3} \bar{\mathcal{Q}}_i^2 \overset{!}{\leq} \sqrt{6} \, \max_{i=1}^{3} \left\{ \bar{\mathcal{Q}}_i \right\} \tag{A.42}$$

für die Eigenwerte $\bar{\mathcal{Q}}_i$ der Matrix $\bar{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}$. Nun handelt es sich bei $\bar{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}$ um eine *spurlose* Matrix, folglich gilt

$$\sum_{i=1}^{3} \bar{\mathcal{Q}}_i = 0 \ , \tag{A.43}$$

so daß wir die Eigenwerte $\bar{\mathcal{Q}}_j$ allgemeingültig beispielsweise in der Form

$$\bar{\mathcal{Q}}_j = \sqrt{\frac{2}{3}} \, \varrho \cos\left(\eta + \frac{2\pi j}{3}\right) \quad , \quad j \in \{1, 2, 3\} \ , \tag{A.44}$$

parametrisieren können, wobei die Parameter ϱ und η über den Bereichen

$$\varrho \geq 0 \quad , \quad 0 \leq \eta < 2\pi \tag{A.45}$$

variieren. Hiermit erhalten wir

$$\mathrm{Tr}\, \bar{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}^2 = \varrho^2 \ , \tag{A.46}$$

und über die Beschränktheit der Kosinusfunktion folgt aus (A.42) die Ungleichung

$$1 + \varrho^2 \overset{!}{\leq} 2\varrho \quad \Leftrightarrow \quad (1 - \varrho)^2 \overset{!}{\leq} 0 \ , \tag{A.47}$$

die offensichtlich *nur* für $\varrho = 1$ erfüllt werden kann; andererseits handelt es sich wegen (A.46) und (A.27) bei der Stelle $\varrho = 1$ aber gerade um die Koordinatensingularität der stereographischen Projektion (A.26), also um einen Wert, der aus dem Definitionsbereich von ϱ *herausgenommen* werden muß. Damit ist gezeigt, daß (A.47) für symmetrische, spurlose Matrizen $\bar{\boldsymbol{Q}}$ mit $\mathrm{Tr}\bar{\boldsymbol{Q}}^2 \neq 1$ *nicht* erfüllt werden kann, womit auch die Gleichung (A.40) schließlich zum Widerspruch geführt worden ist.

Zusammenfassend haben wir also bewiesen, daß der Operator $\Delta'_{(ij)}$ gemäß (A.32) ein elliptisches Symbol $\boldsymbol{\sigma}$ hat, womit das um die Lösung $\bar{\boldsymbol{Q}}$ linearisierte Differentialgleichungssystem (A.20), (A.26) ebenfalls elliptisch ist, und eine störungstheoretische Berechnung des Korrekturterms $\boldsymbol{Q}'$ erlaubt.

Der Vollständigkeit halber sei an dieser Stelle bemerkt, daß im Rahmen einer *rigorosen* Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für den Korrekturterm $\boldsymbol{Q}'$ die Trivialität des Kerns von $\Delta'_{(ij)}$ nicht nur in führender Ableitungsordnung (A.32), sondern unter Berücksichtigung aller Ableitungsordnungen bewiesen werden müßte. Wir wollen die hier gezeigte Elliptizität des Operators Δ'_{ij} in führender Ableitungsordnung aber als entscheidenden Hinweis darauf deuten, daß diese technisch sehr viel aufwendigere Beweisführung im Prinzip ohne weitere Einschränkungen an die Parameterfelder $\tilde{e}^i{}_a$ und Λ möglich sein sollte.

Als Konsequenz können wir dann jede Lösung des Gleichungssystems (A.19), und damit auch jede Lösung der Sattelpunktsgleichung (A.1), störungstheoretisch fortsetzen, solange nur die in (A.24) getroffene Voraussetzung erfüllt bleibt.

In Verbindung mit den aus Kapitel 4 bereits bekannten Lösungen der Sattelpunktsgleichung (A.1) gewinnen wir somit die folgenden Lösbarkeitsaussagen für das nichtlineare, partielle Differentialgleichungssystem (A.1):

Für große kosmologische Konstanten Λ kennen wir über (4.17) zu *jeder* 3-Metrik $\boldsymbol{h}$ zwei asymptotische, komplexe Sattelpunktslösungen $\mathcal{A}_{ia}$ und $\mathcal{A}^*_{ia}$. Gerade im Grenzfall hinreichend großer Λ ist nun aber mit Sicherheit die Ungleichung $R < 2\Lambda$, und damit insbesondere (A.24) erfüllt, denn auf einer gegebenen, *kompakten* Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_3$ ist der *stetige* Krümmungsskalar $R(x)$ eine beschränkte Funktion. Damit können wir die beiden in (4.17) gefundenen Sattelpunktslösungen mindestens solange für abnehmendes Λ störungstheoretisch fortsetzen, bis die Ungleichung $R < 2\Lambda$ an einer Stelle $x \in \mathcal{M}_3$ verletzt ist.

Bei noch kleineren kosmologischen Konstanten Λ erwarten wir *Bifurkationen* in den beiden Lösungszweigen, wie sie beispielsweise aus der Diskussion Bianchi IX-homogener 3-Mannigfaltigkeiten bereits bekannt sind: Im Rahmen dieser homogenen Modelle kennt man das Verhalten der Sattelpunktslösungen von (A.1) sehr genau [23, 42]; die hierbei explizit auftretenden Bifurkationen geben insbesondere Anlaß zur Definition einer *Kaustik* im Konfigurationsraum der 3-Metriken [23, 42]. Das allgemeine Bifurkationsverhalten der Lösungen von (A.1) im *inhomogenen* Fall ist hingegen sehr viel schwieriger zu diskutieren, und soll an dieser Stelle nicht weiter untersucht werden.

Im Grenzfall *verschwindender* kosmologischer Konstante Λ kennen wir explizite Lösungen von (A.1), (A.2) nur für spezielle, Bianchi A-homogene 3-Mannigfaltigkeiten $(\mathcal{M}_3, \boldsymbol{h})$: Lösen wir die Gleichungen (A.1), (A.2) für $\vec{e}_a = \vec{\imath}_a$, wobei $\vec{\imath}_a$ die invariante, divergenzfreie Triade der Bianchi A-Metrik ist, so ergibt sich für eine der Sattelpunktslösungen einfach $\mathcal{A}_{ia} = 0$. Diese Aussage ergibt sich aus (4.50) und (4.54) in Verbindung mit der Tatsache, daß die in diesen Gleichungen auftretende Drehmatrix $\boldsymbol{\Omega}$ hier einfach räumlich konstant gewählt werden kann.

Für Bianchi A-Mannigfaltigkeiten mit $R \neq 0$ kann die Lösung $\mathcal{A}_{ia} = 0$ der Gleichungen (A.1), (A.2) offensichtlich solange unter inhomogenen Störungen der 3-Metrik $\boldsymbol{h}$ fortgesetzt werden, bis der Krümmungsskalar $R(x)$ zum ersten Mal an einer Stelle $x \in \mathcal{M}_3$ verschwindet. Außerdem existiert diese Lösung auch für $\Lambda \neq 0$ weiter, wenn wir uns nur auf hinreichend kleine Λ mit $R - 2\Lambda \neq 0$ beschränken.

Im Spezialfall Bianchi IX-homogener 3-Mannigfaltigkeiten können wir sogar vier weitere, explizite Lösungen der Sattelpunktsgleichung (A.1), (A.2) angeben, die sich über (4.50) aus den vier im Anhang B.3.2 konstruierten divergenzfreien Triaden (B.58) ergeben. Diese homogenen Mannigfaltigkeiten besitzen zusammen mit $\mathcal{A}_{ia} = 0$ also insgesamt fünf Sattelpunktslösungen, die sich bei inhomogener Deformation der Bianchi IX-Metrik störungstheoretisch fortsetzen lassen, solange der Krümmungsskalar $R(x)$ lokal positiv bleibt.

Ferner ergibt sich hier die zusätzliche Aussage, daß diese fünf Lösungen von (A.1), (A.2) unter der Nebenbedingung $R(x) > 0$ *reell* bleiben:

Die fünf Ausgangssattelpunkte Bianchi IX-homogener Mannigfaltigkeiten sind zunächst alle reell, und hiermit verifiziert man leicht, daß für $R > 0$ die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zur Bestimmung des Korrekturterms ${\mathcal{Q}'^i}_j$ aus (A.29) nicht nur in führender Ableitungsordnung (A.32), sondern sogar in allen Ordnungen *reelle* Koeffizienten haben. Deshalb findet man als Lösungen dieser Gleichungen reelle Felder ${\mathcal{Q}'^i}_j$, womit sich über (A.29), (A.26), (A.5) und (A.3) auch reelle Lösungen $\mathcal{A}_{ia}$ der gestörten Sattelpunktsgleichung (A.1), (A.2) ergeben.

Im folgenden Abschnitt soll nun gezeigt werden, wie man mit Hilfe solcher *reellen* Lösungen von (A.1), (A.2) im Limes $\kappa \to 0$ *divergenzfreie* Triaden Riemannscher 3-Mannigfaltigkeiten konstruieren kann.

A.2 Divergenzfreie Triaden von Riemannschen 3-Mannigfaltigkeiten

Im Anhang A.1 haben wir gezeigt, daß man für eine große Klasse von Riemannschen 3-Geometrien *flache* Eichfelder $\mathcal{A}_{ia}$ mit

$$\mathcal{F}_{ija} = 0 \tag{A.48}$$

finden kann, die ferner die drei Gauß-Bedingungen

$$\mathcal{D}_i \tilde{e}^i{}_a = 0 \tag{A.49}$$

für eine vorgegebene Triade $\vec{e}_a$ von $(\mathcal{M}_3, \boldsymbol{h})$ erfüllen. Insbesondere existieren für deformierte Bianchi IX-Geometrien fünf *reelle* Eichfelder mit diesen Eigenschaften, solange lokal $R > 0$ gilt. Für Bianchi A-Mannigfaltigkeiten mit $R \neq 0$ finden wir zumindest *ein* Eichfeld $\mathcal{A}_{ia}$ mit (A.48), (A.49), das ebenfalls reell ist, und für kleine Störungen der 3-Metrik weiterexistiert. Es soll nun gezeigt werden, in welcher Weise solche flachen, reellen Eichfelder $\mathcal{A}_{ia}$ mit (A.49) die Konstruktion einer *divergenzfreien* Triade von $(\mathcal{M}_3, \boldsymbol{h})$ erlauben.

Hierzu fixieren wir an einem ausgewählten Punkt P_0 der 3-Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_3$ drei beliebige Vektoren $\vec{d}_a|_{P_0}$, $a \in \{1, 2, 3\}$, die bezüglich der 3-Metrik $\boldsymbol{h}$ orthonormal seien. Für diese drei Vektoren am Punkt P_0 betrachten wir dann einen *parallelen Transport* mit dem flachen Spin-Zusammenhang $\mathcal{A}_{ia}$ entlang beliebiger Kurven $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_3$, und beweisen für den Transportprozeß mit $\mathcal{A}_{ia}$ die folgenden Eigenschaften:

(i) Für einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeiten $\mathcal{M}_3$ ist das Ergebnis des Transportes von P_0 nach P_1 unabhängig von der Wahl des Transportweges $\mathcal{C}$.

(ii) Der Transport mit $\mathcal{A}_{ia}$ ist *metrisch*, erhält also insbesondere die Othonormalität von Anfangsvektoren.

(iii) Mit der Eigenschaft (A.49) des Spin-Zusammenhangs $\mathcal{A}_{ia}$ sind die im Sinne von (i) erzeugten Vektorfelder auf $\mathcal{M}_3$ divergenzfrei.

Dann folgt, daß der parallele Transport der orthonormalen Anfangsvektoren $\vec{d}_a|_{P_0}$ für einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeiten $\mathcal{M}_3$ ein wohldefiniertes, divergenzfreies Triadenfeld $\vec{d}_a(x)$ auf $\mathcal{M}_3$ liefert.

Zum Beweis der ersten Aussage (i) betrachten wir einen beliebigen Anfangsvektor $\vec{v}|_{P_0} = v_{0,a}\,\vec{e}_a$ am Punkt P_0, wobei $\vec{e}_a$ dasjenige Triadenfeld ist, für das die Gleichungen (A.48) und (A.49) gelöst wurden. Ferner sei

$$\mathcal{C}_0 : x^i = f^i(u) \quad , \quad 0 \leq u \leq 1 \ , \tag{A.50}$$

eine Kurve, welche die Punkte P_0 und P_1 verbindet.[6] Die Transportgleichung für den parallelen Transport mit $\mathcal{A}_{ia}$,

$$\frac{\mathcal{D}v_a}{\mathcal{D}u} := \frac{\partial f^i}{\partial u}\mathcal{D}_i v_a = \frac{\partial v_a}{\partial u} + \varepsilon_{abc}\,\frac{\partial f^i}{\partial u}\,\mathcal{A}_{ib}\,v_c \stackrel{!}{=} 0 \ , \tag{A.51}$$

liefert dann zum Anfangswertproblem $v_a(0) \stackrel{!}{=} v_{0,a}$ *eindeutig* ein Vektorfeld $v_a(u)$ entlang der Kurve $\mathcal{C}_0$, das in Abbildung A.2 dargestellt ist:

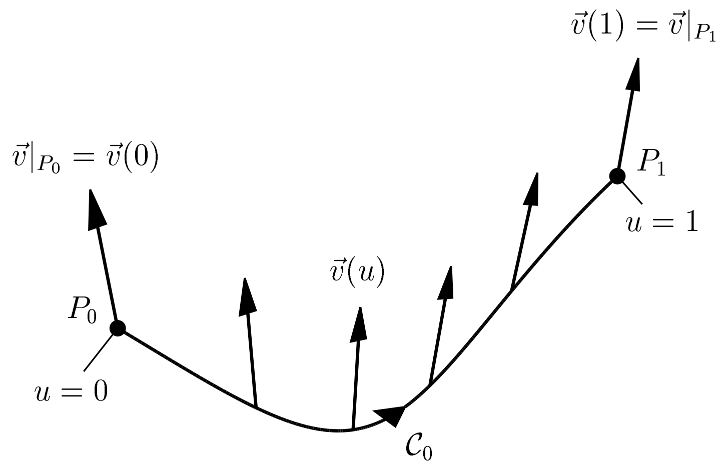

Abbildung A.2: Paralleler Transport eines Anfangsvektors $\vec{v}|_{P_0}$ von P_0 nach P_1 entlang der Kurve $\mathcal{C}_0$.

Wir interessieren uns nun dafür, wie der resultierende Vektor $\vec{v}|_{P_1} = \vec{v}(1)$ am Punkt P_1 von der Wahl der Kurve $\mathcal{C}_0$ abhängt.

Zur konkreten Untersuchung dieser Abhängigkeit betrachten wir eine Kurvenschar $\mathcal{C}_s$, $0 \leq s \leq 1$, mit einheitlicher Orientierung, wobei jede einzelne Kurve

[6]Die hier und im folgenden verwendete Beweisführung ist sehr analog zu [52], wo gezeigt wird, daß das Ergebnis des *Riemannschen* parallelen Transportes für flache Riemannsche Mannigfaltigkeiten unabhängig von der Wahl der Transportkurve ist.

$\mathcal{C}_s$ zu festem Parameter s die Punkte P_0 und P_1 verbinden soll. Ferner falle die Randkurve zu $s = 0$ mit $\mathcal{C}_0$ aus (A.50) zusammen. Eine solche Kurvenschar ist in Abbildung A.3 dargestellt.

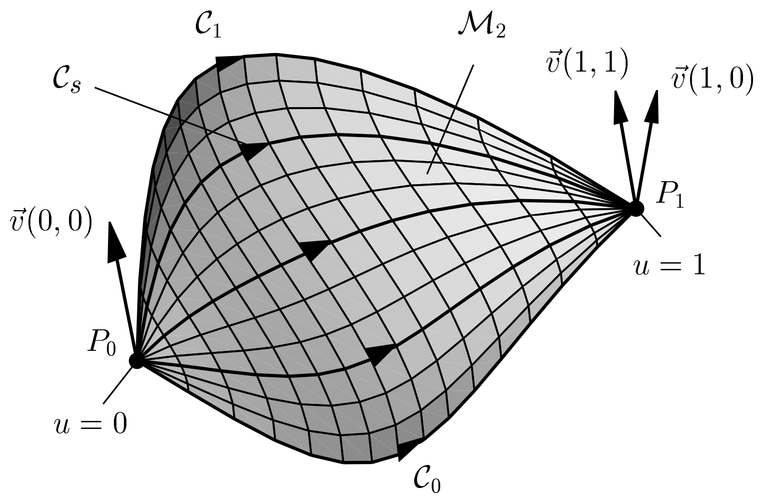

Abbildung A.3: Darstellung einer Kurvenschar $\mathcal{C}_s$, welche die Punkte P_0 und P_1 verbindet. Der parallele Transport eines Anfangsvektors $\vec{v}|_{P_0} = \vec{v}(0,0)$ von P_0 nach P_1 liefert entlang der Randkurven $\mathcal{C}_0$ und $\mathcal{C}_1$ im allgemeinen verschiedene Endvektoren $\vec{v}(1,0)$ und $\vec{v}(1,1)$ am Punkt P_1.

Die Parametrisierung von $\mathcal{C}_s$ wählen wir weiterhin explizit in der Form

$$\mathcal{C}_s : x^i = f^i(u,s) \quad ; \quad 0 \leq u \leq 1 \quad , \quad 0 \leq s \leq 1 \; . \tag{A.52}$$

Durch parallelen Transport von $\vec{v}|_{P_0}$ entlang der Kurven $\mathcal{C}_s$ erhalten wir ein Vektorfeld $v_a(u,s)$ auf der über (A.52) parametrisierten 2-Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_2$, das bis auf den Punkt P_1 überall auf $\mathcal{M}_2$ wohldefiniert ist. Die Vektoren $\vec{v}|_{P_1}$, die man über parallelen Transport von $\vec{v}|_{P_0}$ entlang der beiden Randkurven $\mathcal{C}_0$ und $\mathcal{C}_1$ erhält, werden im allgemeinen *verschieden* sein; ihre Differenz werden wir im folgenden mit

$$\Delta v_a := v_a(1,1) - v_a(1,0) \tag{A.53}$$

bezeichnen.

Als Hilfsgröße sei ferner ein zweites Vektorfeld $\vec{w}(u,s)$ auf $\mathcal{M}_2$ eingeführt, das zum beliebigen Anfangsvektor $\vec{w}|_{P_1} = w_{1,a}\,\vec{e}_a$ am Punkt P_1 durch parallelen Transport entlang der Kurven $-\mathcal{C}_s$ entsteht. Für die beiden Vektorfelder $v_a(u,s)$ und $w_a(u,s)$ gilt dann per constructionem:

$$\frac{\mathcal{D}v_a}{\mathcal{D}u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathcal{D}^2 v_a}{\mathcal{D}s\mathcal{D}u} = 0 \qquad , \qquad \frac{\mathcal{D}w_a}{\mathcal{D}u} = 0\ . \tag{A.54}$$

Zusätzlich erhält man die Aussagen

$$\left.\frac{\mathcal{D}v_a}{\mathcal{D}s}\right|_{u=0} = 0 \quad , \quad \left.\frac{\mathcal{D}w_a}{\mathcal{D}s}\right|_{u=1} = 0\ , \tag{A.55}$$

indem man die Transportgleichung (A.51) in Verbindung mit den Eigenschaften

$$\left.\frac{\partial f^i}{\partial s}\right|_{u=0} = \left.\frac{\partial f^i}{\partial s}\right|_{u=1} = 0 \tag{A.56}$$

von f^i aus (A.52) ausnutzt.

Betrachten wir nun die skalare Größe

$$\Delta v_a \cdot w_{1,a} = \int_0^1 \mathrm{d}s\, \frac{\partial}{\partial s}\,(v_a\, w_a)\bigg|_{u=1} = \int_0^1 \mathrm{d}s\, \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}s}\,(v_a\, w_a)\bigg|_{u=1}\ , \tag{A.57}$$

so läßt sich diese folgendermaßen umschreiben:

$$\begin{aligned}\Delta v_a \cdot w_{1,a} \quad &\overset{(A.55)}{=} \quad \int_0^1 \mathrm{d}s\, \frac{\mathcal{D}v_a}{\mathcal{D}s}\cdot w_a\bigg|_{u=1} \overset{(A.55)}{=} \int_0^1 \mathrm{d}u \int_0^1 \mathrm{d}s\, \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}u}\left(w_a\cdot\frac{\mathcal{D}v_a}{\mathcal{D}s}\right) \\ &\overset{(A.54)}{=} \quad \int_0^1 \mathrm{d}u \int_0^1 \mathrm{d}s\, w_a\cdot\frac{\mathcal{D}^2 v_a}{\mathcal{D}u\mathcal{D}s}\ .\end{aligned} \tag{A.58}$$

Über (A.51) rechnen wir ferner für die zweiten kovarianten Ableitungen von $v_a(u,s)$ die Vertauschungseigenschaft

$$\frac{\mathcal{D}^2 v_a}{\mathcal{D}u\mathcal{D}s} - \frac{\mathcal{D}^2 v_a}{\mathcal{D}s\mathcal{D}u} = \varepsilon_{abc}\,\frac{\partial f^i}{\partial u}\,\frac{\partial f^j}{\partial s}\,\mathcal{F}_{ijb}\,v_c \tag{A.59}$$

nach, so daß wir aus (A.58) mit (A.54) schließlich das Ergebnis

$$\Delta v_a \cdot w_{1,a} = \int\limits_0^1 \mathrm{d}u \int\limits_0^1 \mathrm{d}s \, \frac{\partial f^i}{\partial u} \frac{\partial f^j}{\partial s} \, \varepsilon_{abc} \, w_a \, \mathcal{F}_{ijb} \, v_c \tag{A.60}$$

erhalten. Für flache Eichfelder $\mathcal{A}_{ia}$ gemäß (A.48) *verschwindet* also der Skalar $\Delta v_a \cdot w_{1,a}$. Nun können wir den Anfangsvektor $w_{1,a}$ des Vektorfeldes $w_a(u,v)$ am Punkt P_1 aber beliebig vorgeben, womit wir die entscheidende Aussage

$$\Delta v_a = 0 \tag{A.61}$$

erhalten: Das Ergebnis des parallelen Transportes von $\vec{v}|_{P_0}$ zum Punkt P_1 hängt für flache Eichfelder $\mathcal{A}_{ia}$ offensichtlich *nicht* von der Wahl der Transportkurve $\mathcal{C}_s$ ab. Auf einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten liefert der parallele Transport eines beliebigen Anfangsvektors $\vec{v}|_{P_0}$ somit ein *global* wohldefiniertes Vektorfeld $\vec{v}(x)$ auf $\mathcal{M}_3$, das ferner per constructionem die Gleichungen

$$\mathcal{D}_i v_a \equiv 0 \tag{A.62}$$

befriedigt. Hiermit ist die oben behauptete Aussage (i) bewiesen.

Um die Gültigkeit der zweiten Aussage (ii) zu zeigen, betrachten wir zwei verschiedene, über parallelen Transport gewonnene Vektorfelder $\vec{v}(x)$ und $\vec{w}(x)$, die beide gemäß (A.62) bezüglich des Spin-Zusammenhangs $\mathcal{A}_{ia}$ kovariant konstant sind. Dann gilt

$$\partial_i \left(\vec{v} \cdot \vec{w}\right) \equiv \mathcal{D}_i \left(v_a \, w_a\right) = \underbrace{\mathcal{D}_i v_a}_{0} \, w_a + v_a \, \underbrace{\mathcal{D}_i w_a}_{0} = 0 \ , \tag{A.63}$$

das Skalarprodukt zwischen den beiden Vektorfeldern $\vec{v}$ und $\vec{w}$ bleibt also unter parallelem Transport mit $\mathcal{A}_{ia}$ erhalten, womit der Transportprozeß *metrisch* ist.

Die *Divergenzfreiheit* (iii) eines durch parallelen Transport erhaltenen Vektorfeldes $\vec{v}(x)$ ergibt sich direkt aus (A.62) und (A.49):

$$\sqrt{h} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}\right) \equiv \partial_i \left(\sqrt{h} \, v^i\right) = \mathcal{D}_i \left(v_a \, \tilde{e}^{\,i}{}_a\right) = \underbrace{\mathcal{D}_i v_a}_{0} \, \tilde{e}^{\,i}{}_a + v_a \, \underbrace{\mathcal{D}_i \tilde{e}^{\,i}{}_a}_{0} = 0 \ . \tag{A.64}$$

Wählen wir also, wie zu Beginn dieses Abschnitts vorgeschlagen, für den Anfangsvektor $\vec{v}|_{P_0}$ des parallelen Transportes sukzessive drei orthonormale Vektoren $\vec{d}_a|_{P_0}$, $a \in \{1,2,3\}$, so erhalten wir auf einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten $\mathcal{M}_3$ drei global wohldefinierte Triadenvektorfelder $\vec{d}_a(x)$, die zudem divergenzfrei sind. Da diese Triadenfelder bei gegebenem reellen Spin-Zusammenhang $\mathcal{A}_{ia}$ mit (A.48), (A.49) nur von der Wahl der Anfangstriade $\vec{d}_a|_{P_0}$ am Punkt P_0 abhängen, sind sie bis auf eine globale, räumlich konstante Drehung sogar eindeutig bestimmt.

Anhang B

Der Chern-Simons-Zustand auf homogenen Mannigfaltigkeiten

Im Rahmen dieses Anhangs soll der semiklassische Chern-Simons-Zustand für homogene 3-Mannigfaltigkeiten vom Bianchi-Typ ausgewertet werden. Dafür überlegen wir uns im Abschnitt B.1 zunächst, wie man Bianchi-homogene Mannigfaltigkeiten allgemeingültig beschreiben kann. Im Abschnitt B.2 soll dann die Berechnung des asymptotischen Chern-Simons-Zustands im Grenzfall $\kappa \to \infty$ für beliebige Bianchi-Metriken erfolgen. Unter Einschränkung auf Bianchi IX-Metriken werden wir uns desweiteren in Abschnitt B.3 mit der Konstruktion divergenzfreier Triaden und der Auswertung des Zustands (4.64) im Limes $\kappa \to 0$ beschäftigen.

B.1 Homogene 3-Mannigfaltigkeiten

Eine Riemannsche 3-Mannigfaltigkeit $(\mathcal{M}_3, \boldsymbol{h})$ heißt *homogen*, wenn es drei verschiedene, lokal linear unabhängige Diffeomorphismen-Vektorfelder $\vec{\xi}$ gibt, welche die 3-Metrik $\boldsymbol{h}$ forminvariant lassen:[1]

$$\mathcal{L}_{\vec{\xi}}\boldsymbol{h} = \left(\xi^k \partial_k h_{ij} + h_{kj}\, \partial_i \xi^k + h_{ik}\, \partial_j \xi^k\right) \boldsymbol{d}x^i \otimes \boldsymbol{d}x^j = \boldsymbol{0}\ . \tag{B.1}$$

Alle Punkte der Mannigfaltigkeit $(\mathcal{M}_3, \boldsymbol{h})$ sind dann geometrisch gleichwertig. Die Gleichung (B.1) ist äquivalent zur sogenannten *Killing-Gleichung*,

[1] Der Ableitungsoperator $\mathcal{L}_{\vec{\xi}}$ heißt Lie-Ableitung bezüglich des Vektorfeldes $\vec{\xi}$. Er bildet Tensoren auf Tensoren gleicher Stufe ab und ist *unabhängig* von der 3-Metrik $\boldsymbol{h}$ definiert. Die Lie-Ableitung beschreibt anschaulich die infinitesimale Änderung eines Tensorfeldes unter einer Translation in $\vec{\xi}$-Richtung.

$$\nabla_i \, \xi_j + \nabla_j \, \xi_i = 0 \ , \tag{B.2}$$

Lösungen $\vec{\xi}$ von (B.1) oder (B.2) heißen deshalb auch *Killing-Vektoren* der 3-Metrik $\boldsymbol{h}$.[2]

Die Gesamtheit aller Killing-Vektorfelder bildet wegen

$$\left[\mathcal{L}_{\vec{\xi}} \, , \, \mathcal{L}_{\vec{\eta}} \right] = \mathcal{L}_{\left[\vec{\xi} \, , \vec{\eta} \right]} \tag{B.3}$$

eine *Gruppe*: Der Kommutator von zwei Killing-Vektoren $\vec{\xi}$ und $\vec{\eta}$ ist mit (B.1), (B.3) wieder ein Killing-Vektor, muß also mit räumlich konstanten Entwicklungskoeffizienten in einer Basis aller Killing-Vektoren darstellbar sein.

Gibt es drei lokal linear unabhängige, auf $\mathcal{M}_3$ also *transitiv* operierende Killing-Vektorfelder $\vec{\xi}_a$, $a \in \{1, 2, 3\}$, mit *geschlossener* Algebra

$$\left[\vec{\xi}_a \, , \, \vec{\xi}_b \right] = [abc] \, \hat{m}_{cd} \, \vec{\xi}_d \ , \tag{B.4}$$

so heißt die Riemannsche Mannigfaltigkeit $(\mathcal{M}_3, \boldsymbol{h})$ *Bianchi-homogen*.[3] Im folgenden wollen wir uns auf die Diskussion dieser großen Klasse von homogenen Mannigfaltigkeiten beschränken.

Die räumlich konstante Strukturmatrix $\hat{\boldsymbol{m}}$ in (B.4) ist für eine gegebene, homogene Mannigfaltigkeit nicht eindeutig bestimmt: Gehen wir zu neuen Killing-Vektoren

$$\vec{\xi}_a^{\,\prime} = U_{ab} \, \vec{\xi}_b \tag{B.5}$$

mit einer räumlich konstanten, invertierbaren Matrix $\boldsymbol{U}$ über, was auch einer Reparametrisierung der Gruppe (B.4) entspricht, so bilden die $\vec{\xi}_a^{\,\prime}$ ebenfalls eine geschlossene Algebra mit der neuen Strukturmatrix $\hat{\boldsymbol{m}}'$, die folgendermaßen mit $\hat{\boldsymbol{m}}$ zusammenhängt:

[2]Die Gleichungen (B.1), (B.2) erlauben in drei Dimensionen bis zu sechs *global* linear unabhängige Killing-Felder. Mannigfaltigkeiten $(\mathcal{M}_3, \boldsymbol{h})$ mit sechs Killing-Feldern heißen maximalsymmetrisch; sie sind homogen und *isotrop*.

[3]Es gibt durchaus homogene Mannigfaltigkeiten, die *nicht* Bianchi-homogen sind: Die Gruppe der Killing-Vektorfelder wird im allgmeinen nicht notwendig eine dreiparametrige Untergruppe zulassen, die transitiv auf $\mathcal{M}_3$ operiert. Diese spezielle Situation tritt aber nur im Rahmen des Kantowski-Sachs-Modells [53] auf, das eine gesonderte Diskussion erfordert.

$$\hat{\boldsymbol{m}}' = \det \boldsymbol{U}\,(\boldsymbol{U}^{-1})^{\mathrm{T}} \!\cdot \hat{\boldsymbol{m}} \cdot \boldsymbol{U}^{-1} \ . \tag{B.6}$$

Strukturmatrizen, die über (B.6) zusammenhängen, faßt man zu Äquivalenzklassen desselben Bianchi-Typs zusammen; die unterschiedlichen möglichen Äquivalenzklassen wurden von Bianchi in neun verschiedene Typen klassifiziert [54, 55]. Ferner unterscheidet man zwischen Bianchi A- und Bianchi B-Metriken, je nachdem ob die Strukturmatrix $\hat{\boldsymbol{m}}$ symmetrisch ist oder nicht.

Zur Beschreibung Bianchi-homogener Mannigfaltigkeiten ist es zweckmäßig, drei *invariante* Vektorfelder $\vec{\imath}_a, a \in \{1,2,3\}$, einzuführen, die

$$\mathcal{L}_{\vec{\xi}_a}\, \vec{\imath}_b \equiv \left[\, \vec{\xi}_a \,,\, \vec{\imath}_b \,\right] \stackrel{!}{=} \vec{0} \tag{B.7}$$

für alle drei Killing-Vektoren $\vec{\xi}_a$ erfüllen sollen. Die zu $\vec{\imath}_a$ dualen 1-Formen $\boldsymbol{\imath}_a$ sind dann wegen (B.1) ebenfalls invariant und befriedigen.

$$\forall \vec{\xi}_a :\ \mathcal{L}_{\vec{\xi}_a}\, \boldsymbol{\imath}_b = \left(\xi^i \partial_i\, \imath_{ja} + \imath_{ia}\, \partial_j \xi^i \right) \boldsymbol{d}x^j = \boldsymbol{0} \ . \tag{B.8}$$

Eine Entwicklung der 3-Metrik $\boldsymbol{h}$ nach Tensorprodukten der invarianten Basis liefert in Verbindung mit (B.1) und (B.8) räumlich *konstante* Entwicklungskoeffizienten, die wir durch geeignete Wahl der Lösungen von (B.7), (B.8) auf δ_{ab} normieren können:

$$\boldsymbol{h} = \delta_{ab}\, \boldsymbol{\imath}_a \otimes \boldsymbol{\imath}_b \ . \tag{B.9}$$

In dieser Normierung sind die invarianten Vektorfelder $\vec{\imath}_a$ also gleichzeitig spezielle *Triadenfelder* zur 3-Metrik $\boldsymbol{h}$, und bis auf globale Drehungen eindeutig bestimmt. Mit Hilfe von (B.4), (B.7) kann man zeigen, daß die invarianten Vektorfelder $\vec{\imath}_a$ wie die Killing-Felder eine geschlossene Algebra bilden,

$$[\, \vec{\imath}_a \,,\, \vec{\imath}_b \,] = \varepsilon_{abc}\, m_{cd}\, \vec{\imath}_d \ , \tag{B.10}$$

wobei die Strukturmatrix $\boldsymbol{m}$ im Sinne von (B.6) vom selben Bianchi-Typ ist wie die Strukturmatrix $\hat{\boldsymbol{m}}$ der Killing-Vektoren. Die invarianten Triaden-1-Formen $\boldsymbol{\imath}_a$ erfüllen entsprechend

$$\boldsymbol{d}\, \boldsymbol{\imath}_a = -\tfrac{1}{2}\, m_{ba}\, \varepsilon_{bcd}\, \boldsymbol{\imath}_c \wedge \boldsymbol{\imath}_d \ . \tag{B.11}$$

Mit unserer Definition des Levi-Cevitta-Tensors in (2.25) transformiert sich die Strukturmatrix $\boldsymbol{m}$ unter O(3)-Eichtransformationen der Triade $\vec{\imath}_a$ wie ein O(3)-kovarianter Tensor zweiter Stufe, für Bianchi A-Mannigfaltigkeiten können wir deshalb die Matrix $\boldsymbol{m}$ über Transformationen der Form (B.6) sogar *diagonal* wählen.

Wir wollen nun das hier dargestellte Kalkül zur Beschreibung Bianchi-homogener 3-Mannigfaltigkeiten auf die explizite Berechnung geometrischer Größen anwenden, und hierüber den Chern-Simons-Zustand (4.21) im Limes $\kappa \to \infty$ auswerten.

B.2 Der Chern-Simons-Zustand im Grenzfall $\kappa \to \infty$

Zur Berechnung des semiklassischen Chern-Simons-Zustands (4.21) im Grenzfall $\kappa \to \infty$ benötigen wir den Krümmungsskalar R und den Wert des Chern-Simons-Funktionals $\mathcal{S}_{CS}[\omega_{ia}]$ zum Riemannschen Spin-Zusammenhang ω_{ia}. Für Bianchi-homogene 3-Mannigfaltigkeiten können wir diese rein geometrischen, Diffeomorphismus-invarianten Größen mit Hilfe der invarianten Triade $\vec{\imath}_a$ aus Abschnitt B.1 *ohne* Bezug auf ein spezielles Koordinatensystem ausrechnen:

Die 1-Formen $\boldsymbol{\omega}_a = \omega_{ia}\,\boldsymbol{dx}^i$ des Riemannschen Spin-Zusammenhangs gemäß (2.29) erfüllen das *Dreibein-Postulat*[4]

$$\boldsymbol{d}\,\boldsymbol{\imath}_a + \varepsilon_{abc}\,\boldsymbol{\omega}_b \wedge \boldsymbol{\imath}_c = \boldsymbol{0}\ . \tag{B.12}$$

Unter Verwendung von (B.11) liefert (B.12) für Bianchi-homogene Mannigfaltigkeiten eindeutig den Ausdruck

$$\boldsymbol{\omega}_a = \tfrac{1}{2}\,m_{bb}\,\boldsymbol{\imath}_a - m_{ab}\,\boldsymbol{\imath}_b \tag{B.13}$$

für den Riemannschen Spin-Zusammenhang, die Eichfelder $\boldsymbol{\omega}_a$ lassen sich somit mit räumlich konstanten Entwicklungskoeffizienten in der invarianten Triade $\boldsymbol{\imath}_a$ ausdrücken. Mit (B.13) können deshalb die Krümmungs-2-Formen

$$\boldsymbol{F}_a = 2\,\boldsymbol{d\omega}_a + \varepsilon_{abc}\,\boldsymbol{\omega}_b \wedge \boldsymbol{\omega}_c \tag{B.14}$$

[4]In der Differentialgeometrie heißt die Gleichung (B.12) auch *Cartan-Gleichung* zur Bestimmung der Zusammenhangs-1-Formen $\boldsymbol{\omega}_{ab} = -\,\varepsilon_{abc}\,\boldsymbol{\omega}_c$.

und die Chern-Simons-3-Form

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_{CS} = \boldsymbol{\omega}_a \wedge \boldsymbol{d\omega}_a + \tfrac{1}{3}\,\varepsilon_{abc}\,\boldsymbol{\omega}_a \wedge \boldsymbol{\omega}_b \wedge \boldsymbol{\omega}_c \tag{B.15}$$

unter nochmaliger Verwendung von (B.11) nach Keilprodukten der Triaden-1-Formen $\boldsymbol{\imath}_a$ entwickelt werden. Aus den Größen (B.14) und (B.15) erhalten wir dann den Krümmungsskalar R und das Chern-Simons-Funktional $\mathcal{S}_{CS}[\omega_{ia}]$ über[5]

$$R = -\,\varepsilon_{abc}\,(\,\boldsymbol{F}_a \,|\, \vec{\imath}_b \otimes \vec{\imath}_c\,) \tag{B.16}$$

und

$$\mathcal{S}_{CS}[\omega_{ia}] = \int \boldsymbol{\mathcal{S}}_{CS}\ . \tag{B.17}$$

Das Integral einer 3-Form in (B.17) läßt sich hierbei über die Beziehung

$$\tfrac{1}{6}\,\varepsilon_{abc} \int \boldsymbol{\imath}_a \wedge \boldsymbol{\imath}_b \wedge \boldsymbol{\imath}_c = V \tag{B.18}$$

mit dem Volumen V aus (4.3) auswerten. Dies liefert die expliziten Ausdrücke

$$R = \mathrm{Tr}\,\boldsymbol{m}^2 - 2\,\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{m}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}^2\,\boldsymbol{m}\ , \tag{B.19}$$

$$\mathcal{S}_{CS}[\omega_{ia}] = V\left[-\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{m}^2\boldsymbol{m}^{\mathrm{T}} + \tfrac{1}{6}\,\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{m}\left(\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{m}^2 + 2\,\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{m}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}\right) - 2\,\det\boldsymbol{m}\right]\ , \tag{B.20}$$

mit denen sich der Chern-Simons-Zustand (4.21) für Bianchi-homogene 3-Mannigfaltigkeiten allein als Funktion des Volumens V und der Strukturmatrix $\boldsymbol{m}$ ausdrücken läßt. Als Resultat erhalten wir den in Abschnitt 4.2.2 angegebenen Zustand (4.30).

B.3 Der Chern-Simons-Zustand im Grenzfall $\kappa \to 0$

In Restriktion auf Bianchi IX-homogene 3-Mannigfaltigkeiten soll weiterhin der Chern-Simons-Zustand (4.64) im Limes $\kappa \to 0$ ausgewertet werden. Hierfür be-

[5]In (B.16) bezeichnet $(\cdot|\cdot)$ die natürliche Kontraktion zwischen kontravarianten und kovarianten Tensoren; insbesondere gilt $(\,\boldsymbol{\imath}_a \,|\, \vec{\imath}_b\,) = \delta_{ab}$.

nötigen wir in expliziter Form divergenzfreie Triaden homogener Bianchi IX-Metriken, die im Abschnitt B.3.2 konstruiert werden sollen. Ausgangspunkt der Konstruktion werden dabei die divergenzfreien Triaden der 3-Sphäre S^3 sein, weshalb wir uns im folgenden Abschnitt B.3.1 zunächst etwas ausführlicher mit der Herkunft und Bedeutung der divergenzfreien Triaden dieser *isotropen* Bianchi IX-Mannigfaltigkeit befassen wollen.

B.3.1 Divergenzfreie Triaden der 3-Sphäre

Eine geometrisch sehr anschauliche Beschreibung der 3-Sphäre S^3 erhält man über ihre Einbettung in den euklidischen Raum $\mathbb{R}^4$: In sphärischen Koordinaten $\{r, \chi, \vartheta, \varphi\}$ gemäß

$$\mathbb{R}^4 \ni \vec{r} = r \begin{pmatrix} \sin\chi \sin\vartheta \cos\varphi \\ \sin\chi \sin\vartheta \sin\varphi \\ \sin\chi \cos\vartheta \\ \cos\chi \end{pmatrix} \tag{B.21}$$

mit

$$r \geq 0 \quad , \quad 0 \leq \chi, \vartheta \leq \pi \quad , \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \tag{B.22}$$

wird die 3-Sphäre mit Radius a einfach durch die Hyperfläche $r \overset{!}{=} a$ beschrieben. Die 3-Metrik $\boldsymbol{h}$ auf dieser Hyperfläche gewinnt man leicht durch Transformation der euklidischen 4-Metrik auf die Kugelkoordinaten (B.21):[6]

$$\boldsymbol{h} = \frac{1}{a^2} \left[\partial_\chi^2 + \frac{1}{\sin^2\chi} \left(\partial_\vartheta^2 + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\; \partial_\varphi^2 \right) \right] . \tag{B.23}$$

Die 3-Sphäre ist offensichtlich invariant unter beliebigen Drehungen im $\mathbb{R}^4$, und besitzt deshalb sechs Killing-Vektorfelder, welche die Algebra der sechsparametrigen Symmetriegruppe SO(4) darstellen. Zur expliziten Konstruktion dieser Killing-Felder auf S^3 betrachten wir zunächst eine Darstellung der SO(4) auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^4$, wo die Generatoren infinitesimaler Drehungen durch antisymmetrische (4×4)-Matrizen $\boldsymbol{X}$ darzustellen sind. Definieren wir die sechs Basisgeneratoren speziell über

[6]Das Symbol „$\boldsymbol{h}$" war bisher der Bezeichung des *kovarianten* metrischen Tensors auf $\mathcal{M}_3$ vorbehalten. Im gegenwärtigen Zusammenhang ist es günstiger, den metrischen Tensor in *kontravarianter* Form anzugeben, wofür wir der Einfachheit halber das gleiche Symbol verwenden wollen.

$$\boldsymbol{X}_1^{\pm} := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & \mp 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{X}_2^{\pm} := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \\ \mp 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\boldsymbol{X}_3^{\pm} := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \mp 1 & 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \tag{B.24}$$

so erfüllen die Matrizen $\boldsymbol{X}_a^{\pm}$ die Algebra

$$\left[\boldsymbol{X}_a^{\pm}, \boldsymbol{X}_b^{\pm}\right] = \pm\,[abc]\ \boldsymbol{X}_c^{\pm} \quad , \quad \left[\boldsymbol{X}_a^{+}, \boldsymbol{X}_b^{-}\right] = \mathbf{0}\ . \tag{B.25}$$

Die Drehgruppe SO(4) faktorisiert also in das direkte Produkt von zwei dreidimensionalen Drehgruppen SO(3),[7]

$$\mathrm{SO}(4) \cong \mathrm{SO}(3) \times \mathrm{SO}(3)\ . \tag{B.26}$$

Jede infinitesimale Drehung im $\mathbb{R}^4$ überführt einen Punkt $\vec{r} \in S^3$ in einen benachbarten Punkt $\vec{r}\,' \in S^3$ und definiert somit ein Vektorfeld $\vec{\xi}$ auf der 3-Sphäre $r = a$. Für die in (B.24) angegebenen Generatoren $\boldsymbol{X}_a^{\pm}$ überlegt man sich dabei leicht, daß die in diesem Sinne zugeordneten Vektorfelder $\vec{\xi}_a^{\pm}$ nirgends entarten, denn jede der Matrizen $\boldsymbol{X}_a^{\pm}$ ist invertierbar. Außerdem konstituieren sowohl die $\vec{\xi}_a^{+}$, wie auch die $\vec{\xi}_a^{-}$, jeweils drei lokal *linear unabhängige* Vektorfelder auf S^3.[8]

Der explizite Zusammenhang zwischen einer antisymmetrischen (4×4)-Matrix $\boldsymbol{X}$ und dem zugeordneten Killing-Vektorfeld $\vec{\xi}$ ergibt sich aus der Forderung

$$\forall\, \vec{r} \in S^3 : \qquad u(\vec{r} + \epsilon\, \boldsymbol{X} \cdot \vec{r}\,) \stackrel{!}{=} u(\vec{r}\,) - \epsilon\, \left[\vec{\xi}, u(\vec{r}\,)\right] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{B.27}$$

für beliebige Skalarfelder u auf S^3. Für die spezielle Wahl der Basisgeneratoren $\boldsymbol{X}_a^{\pm}$ gemäß (B.24) erhält man hierüber die sechs Vektorfelder $\vec{\xi}_a^{\pm}$ als

[7] Eine analoge Aussage kennt man für die Lorentzgruppe SO(1,3) über $\mathbb{C}$, was beispielsweise in [56] genauer ausgeführt wird. Es ist gerade diese Faktorisierungseigenschaft der Lorentzgruppe, die eine Formulierung der Gravitation als Eichtheorie in den Ashtekarvariablen $\mathcal{A}_{ia}$ erlaubt.

[8] Das entsprechende Argument kann *nicht* zur Definition regulärer Vektorfelder auf der 2-Sphäre S^2 verwendet werden, da es keine antisymmetrischen, invertierbaren (3×3)-Matrizen gibt.

$$\begin{pmatrix} \vec{\xi}_1^{\pm} \\ \vec{\xi}_2^{\pm} \\ \vec{\xi}_3^{\pm} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & \cot\chi\cos\vartheta\cos\varphi & \cot\chi\csc\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & \cot\chi\cos\vartheta\sin\varphi & \cot\chi\csc\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -\cot\chi\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_\chi \\ \partial_\vartheta \\ \partial_\varphi \end{pmatrix}$$

$$\pm\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sin\varphi & \cot\vartheta\cos\varphi \\ 0 & -\cos\varphi & \cot\vartheta\sin\varphi \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_\chi \\ \partial_\vartheta \\ \partial_\varphi \end{pmatrix} . \tag{B.28}$$

Die $\vec{\xi}_a^{\pm}$ sind per constructionem Killing-Vektorfelder auf S^3,

$$\mathcal{L}_{\vec{\xi}_a^+} \boldsymbol{h} = \boldsymbol{0} \quad , \quad \mathcal{L}_{\vec{\xi}_a^-} \boldsymbol{h} = \boldsymbol{0} \,, \tag{B.29}$$

und erfüllen die SO(4)-Algebra (B.25) der $\boldsymbol{X}_a^{\pm}$:

$$\left[\vec{\xi}_a^{\pm}, \vec{\xi}_b^{\pm}\right] = \pm\,[abc]\;\vec{\xi}_c^{\pm}, \tag{B.30}$$

$$\left[\vec{\xi}_a^{+}, \vec{\xi}_b^{-}\right] = \vec{0}\;. \tag{B.31}$$

Aus (B.31) entnehmen wir in Verbindung mit (B.7), daß die Felder $\vec{\xi}_a^-$ *invariante* Vektorfelder bezüglich der Killing-Vektoren $\vec{\xi}_a^+$ sind; dieselbe Ausage gilt auch umgekehrt. Entwickeln wir also die 3-Metrik $\boldsymbol{h}$ aus (B.23) in den Feldern $\vec{\xi}_a^+$ oder $\vec{\xi}_a^-$, so müssen die Entwicklungskoeffizienten räumlich konstant sein. Tatsächlich finden wir durch explizite Rechnung

$$\frac{4}{a^2}\;\vec{\xi}_a^+ \otimes \vec{\xi}_a^+ = \boldsymbol{h} = \frac{4}{a^2}\;\vec{\xi}_a^- \otimes \vec{\xi}_a^-\,, \tag{B.32}$$

die Felder $\vec{\imath}_a^{\,+}$ und $\vec{\imath}_a^{\,-}$ mit

$$\vec{\imath}_a^{\,\pm} := \frac{2}{a}\;\vec{\xi}_a^{\pm} \tag{B.33}$$

sind also jeweils invariante *Triadenfelder* der 3-Sphäre $r = a$.

Wegen (B.30) besitzen diese Triadenfelder eine *symmetrische* Strukturmatrix $\boldsymbol{m}$, womit über (4.66) direkt die Divergenzfreiheit der sechs Vektorfelder $\vec{\imath}_a^{\pm}$ folgt:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\imath}_a^{\pm} = 0 \; . \tag{B.34}$$

Ferner sind die Vektorfelder $\vec{\imath}_a^{+}$ und $\vec{\imath}_a^{-}$ gemäß (B.32), (B.33) Triaden zur *selben* 3-Metrik $\boldsymbol{h}$ der 3-Sphäre S^3; sie müssen also durch eine ortsabhängige Drehung ineinander übergehen:

$$\exists\, \boldsymbol{\Omega} \in \mathrm{O}(3) : \quad \vec{\imath}_a^{+} = \Omega_{ab}\, \vec{\imath}_b^{-} \, . \tag{B.35}$$

Zur expliziten Berechnung dieser Drehmatrix $\boldsymbol{\Omega}$ ist es zweckmäßig, vom bisher verwendeten sphärischen Koordinatensystem $\{\chi, \vartheta, \varphi\}$ der 3-Sphäre S^3 zu neuen Koordinaten, den *Eulerwinkeln* $\{\psi, \theta, \phi\}$ überzugehen. Auf den geometrischen und gruppentheoretischen Hintergrund dieses Koordinatenwechsels wollen wir im folgenden kurz eingehen.

Die 3-Sphäre S^3 ist isomorph zur Gruppenmannigfaltigkeit der Gruppe SU(2), denn diese ist wie S^3 dreidimensional, kompakt und einfach zusammenhängend. Üblicherweise parametrisiert man die Gruppenelemente der SU(2) über einen euklidischen 3-Vektor $\vec{\alpha}$ mit $|\vec{\alpha}| \leq 2\pi$, wobei alle Vektoren $\vec{\alpha}$ mit $|\vec{\alpha}| = 2\pi$ zu identifizieren sind, und zum selben Gruppenelement gehören. Über die Beziehung

$$\vec{\alpha} \stackrel{!}{=} -2\,\chi \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \tag{B.36}$$

können wir folglich konsistent Gruppenelemente der SU(2) zum Parameter $\vec{\alpha}$ mit Punkten $(\chi, \vartheta, \varphi)$ der 3-Sphäre identifizieren.

Den Drehvektor $\vec{\alpha}$ parametrisiert man für die Drehgruppe SO(3)[9] mit $|\vec{\alpha}| \leq \pi$ gerne über die Eulerwinkel $\{\psi, \theta, \phi\}$, die man für $\boldsymbol{\Omega} \in \mathrm{SO}(3)$ implizit über die Forderung

$$\boldsymbol{\Omega}(\vec{\alpha}) \stackrel{!}{=} \boldsymbol{E}(\psi, \theta, \phi) \tag{B.37}$$

erhält. Hierbei ist die Eulermatrix $\boldsymbol{E}(\psi, \theta, \phi)$ in (B.37) folgendermaßen definiert:

[9] Für die Gruppe SO(3) sind die Antipoden der 2-Sphäre $|\vec{\alpha}| = \pi$ zu identifizieren, woraus ebenfalls eine kompakte, aber nicht mehr einfach zusammenhängende Gruppenmannigfaltigkeit resultiert.

$$\boldsymbol{E} := \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad \text{(B.38)}$$

Auf den Winkelbereichen

$$0 \leq \theta \leq \pi \quad , \quad -\pi \leq \psi, \phi \leq \pi \qquad \text{(B.39)}$$

liefert (B.37) einen eindeutigen, invertierbaren Zusammenhang zwischen den Eulerwinkeln $\{\psi, \theta, \phi\}$ und dem Drehvektor $\vec{\alpha}$ mit $|\vec{\alpha}| \leq \pi$. Durch doppelte Überdeckung der Drehgruppe SO(3) in der Form

$$0 \leq \theta \leq \pi \quad , \quad -2\pi \leq \psi - \phi \leq 2\pi \quad , \quad -2\pi \leq \psi + \phi \leq 2\pi \qquad \text{(B.40)}$$

kann dieser Zusammenhang für 3-Vektoren $\vec{\alpha}$ mit $|\vec{\alpha}| \leq 2\pi$ fortgesetzt werden, womit die Eulerwinkel auch zur Parametrisierung der Gruppe SU(2) verwendet werden können. Die zur Parametrisierung der Gruppen SO(3) und SU(2) verwendeten Variationsbereiche der Winkel ψ und ϕ sind in Abbildung B.1 dargestellt:

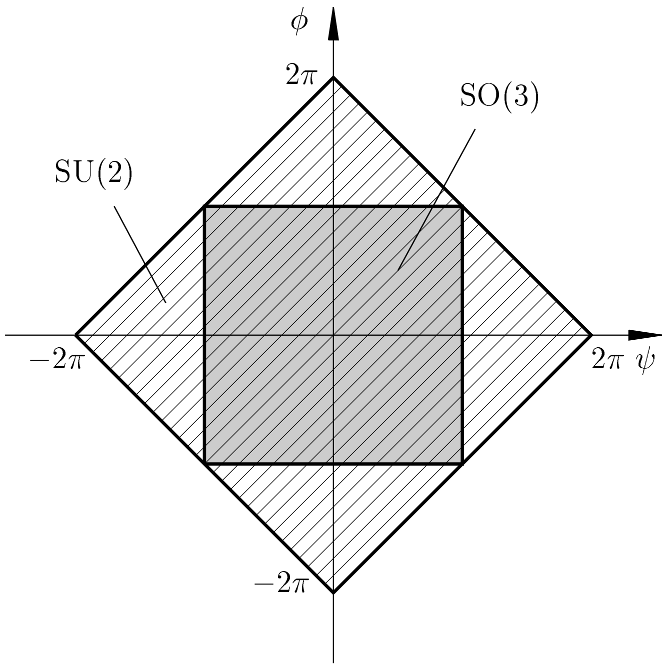

Abbildung B.1: Variationsbereiche der Eulerwinkel ψ und ϕ zur Parametrisierung der Gruppen SU(2) und SO(3).

Über die Gleichungen (B.36) und (B.37) erhalten wir nach einiger Rechnung den Zusammenhang

$$\cos\chi = \cos\frac{\theta}{2}\,\cos\frac{\psi+\phi}{2}\ ,\ \cot\vartheta = -\cot\frac{\theta}{2}\,\sin\frac{\psi+\phi}{2}\ ,\ \varphi = \pi - \frac{\psi-\phi}{2} \tag{B.41}$$

zwischen den Eulerwinkeln und den Kugelkoordinaten, der auf den Bereichen (B.22) und (B.40) invertierbar ist.

Die in (B.28) angegebenen Killing-Vektoren $\vec{\xi}_a^{\pm}$der 3-Shpäre rechnen sich unter der Transformation (B.41) nun folgendermaßen auf die Eulerwinkel $\{\psi,\theta,\phi\}$ um:

$$\begin{pmatrix} \vec{\xi}_1^{+} \\ \vec{\xi}_2^{+} \\ \vec{\xi}_3^{+} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin\theta}\begin{pmatrix} -\sin\psi\cos\theta & \cos\psi\sin\theta & \sin\psi \\ \cos\psi\cos\theta & \sin\psi\sin\theta & -\cos\psi \\ \sin\theta & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \partial_\psi \\ \partial_\theta \\ \partial_\phi \end{pmatrix}\ , \tag{B.42}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{\xi}_1^{-} \\ \vec{\xi}_2^{-} \\ \vec{\xi}_3^{-} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin\theta}\begin{pmatrix} \sin\phi & \cos\phi\sin\theta & -\sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi & -\sin\phi\sin\theta & -\cos\phi\cos\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \partial_\psi \\ \partial_\theta \\ \partial_\phi \end{pmatrix}\ . \tag{B.43}$$

In dieser Form läßt sich die Drehmatrix $\boldsymbol{\Omega}$ aus (B.35) verhältnismäßig leicht berechnen, wobei sich das bemerkenswerte Resultat

$$\vec{\imath}_a^{\,+} = E_{ab}(\psi,\theta,\phi)\ \vec{\imath}_b^{\,-} \tag{B.44}$$

mit der Eulermatrix $\boldsymbol{E}(\psi,\theta,\phi)$ aus (B.38) ergibt. Wegen $\boldsymbol{E}(\psi,\theta,\phi) \in \mathrm{SO}(3)$ besitzen die Triadenfelder $\vec{\imath}_a^{\,+}$ und $\vec{\imath}_a^{\,-}$ also insbesondere die gleiche Orientierung. Definieren wir die Triadenfelder $\vec{\imath}_a^{\,\pm}$ im folgenden als *positiv* orientiert,

$$\varepsilon(\boldsymbol{\imath}_a^{+}) = \varepsilon(\boldsymbol{\imath}_a^{-}) := +1\ , \tag{B.45}$$

so folgt mit (B.30), (B.31) und unserer Definition des Levi-Cevitta-Tensors in (2.25):

$$\left[\vec{\imath}_a^{\,\pm},\,\vec{\imath}_b^{\,\pm}\right] = \pm\,\frac{2}{a}\ \varepsilon_{abc}\ \vec{\imath}_c^{\,\pm}\quad ,\quad \left[\vec{\imath}_a^{\,+},\,\vec{\imath}_b^{\,-}\right] = \vec{0}\ . \tag{B.46}$$

Mit Hilfe der invarianten, divergenzfreien Triaden $\vec{\imath}_a^{\,+}$ und $\vec{\imath}_a^{\,-}$ sollen nun im nächsten Abschnitt divergenzfreie Triaden *anisotroper* Bianchi IX-Geometrien konstruiert werden, wobei im wesentlichen der Zusammenhang (B.44) als Ausgangspunkt dienen wird.

B.3.2 Divergenzfreie Triaden von Bianchi IX-Metriken

Die 3-Metriken beliebiger, anisotroper Bianchi IX-Mannigfaltigkeiten $(\mathcal{M}_3, \boldsymbol{h})$ lassen sich in Verallgemeinerung von (B.32), (B.33) in der Form

$$\boldsymbol{h} = \vec{\imath}_a \otimes \vec{\imath}_a \qquad \text{mit} \qquad \vec{\imath}_a = (e^{\boldsymbol{\beta}})_{ab}\, \vec{\imath}_b^{\,+} \tag{B.47}$$

parametrisieren, wobei $\boldsymbol{\beta}$ eine spurlose, räumlich konstante (3×3)-Matrix ist, die ohne Beschränkung der Allgemeinheit diagonal gewählt werden darf:

$$\boldsymbol{\beta} = \mathrm{diag}\,[\,\beta_1, \beta_2, \beta_3\,] \quad , \quad \sum_{d=1}^{3} \beta_d = 0 \ . \tag{B.48}$$

Wegen (B.31) besitzt die 3-Metrik (B.47) drei linear unabhängige Killing-Vektorfelder $\vec{\xi}_a^{\,-}$ mit SO(3)-Algebra, womit die Bianchi IX-Homogenität dieser Metrik offensichtlich ist; weitere Killing-Vektoren gibt es im allgemeinen nicht.[10]

Die in (B.47) angegebene Triade $\vec{\imath}_a$ ist als *invariante* Triade einer Bianchi A-homogenen Mannigfaltigkeit automatisch divergenzfrei, und in den Skalenparametern

$$a_d := a\, e^{\beta_d} \tag{B.49}$$

ergibt sich als Strukturmatrix $\boldsymbol{m}$ das im Unterkapitel 4.3.1 angegebene Resultat (4.70). Ferner finden wir unter Verwendung von (B.28), (B.33) für das Volumen V der Bianchi IX-Mannigfaltigkeit (B.47)

$$V = \int \mathrm{d}^3x\, \sqrt{h} = \mathcal{V}\, a_1\, a_2\, a_3 \tag{B.50}$$

[10] Eine Sonderrolle spielt natürlich die 3-Sphäre S^3 mit $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{0}$: Wie im letzten Abschnitt ausgeführt, läßt diese drei zusätzliche Killing-Felder $\vec{\xi}_a^{\,+}$ zu. Ferner besitzen Bianchi IX-Metriken mit zwei identischen β_d-Werten, die sogenannten *Berger-Metriken*, einen vierten Killing-Vektor, der sich im Fall $\beta_1 = \beta_2$ beispielsweise zu $\vec{\xi}_3^{\,+}$ ergibt.

mit

$$\mathcal{V} = \int_0^{\pi} d\chi \sin^2 \chi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\,\pi^2 \ , \tag{B.51}$$

womit die invariante, divergenzfreie Triade $\vec{d}_a^{(0)} := \vec{\imath}_a$ den Sattelpunktsbeitrag (4.72) zum semiklassischen Chern-Simons-Zustand (4.64) im Limes $\kappa \to 0$ liefert.

Wir sind nun an weiteren, divergenzfreien Triaden $\vec{d}_a$ Bianchi IX-homogener 3-Mannigfaltigkeiten und ihren zugeordneten Sattelpunktsbeiträgen zum Chern-Simons-Zustand (4.64) interessiert. Hierfür versuchen wir in Verallgemeinerung von (B.44) einen Ansatz der Form

$$\vec{d}_a = E_{ba}\, O_{bc}\, \vec{\imath}_c \ , \tag{B.52}$$

wobei $\boldsymbol{O} \in \mathrm{SO}(3)$ eine räumlich konstante Drehmatrix sein soll. Dieser Ansatz liefert zumindest im isotropen Grenzfall $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ über die Wahl $\boldsymbol{O} = \mathbf{1}$ eine zweite divergenzfreie Triade $\vec{\imath}_a^{\,-}$. Im anisotropen Fall impliziert die Forderung der Divergenzfreiheit von $\vec{d}_a$ aus (B.52) die drei Bedingungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{d}_a = O_{bc}\, [\, \vec{\imath}_c \, , E_{ba}\,] \stackrel{!}{=} 0 \tag{B.53}$$

an die Drehmatrix $\boldsymbol{O}$, die über (B.47) auch in der Form

$$O_{bc}\, (e^{\boldsymbol{\beta}})_{cd} \left[\vec{\imath}_d^{\,+}, E_{ba} \right] = 0 \tag{B.54}$$

geschrieben werden können. Zur weiteren Vereinfachung von (B.54) benötigen wir die Richtungsableitungen der Eulermatrix $\boldsymbol{E}(\psi, \theta, \phi)$ in Richtung der Vektorfelder $\vec{\imath}_a^{\,+}$. Diese erhält man am einfachsten, indem man die Beziehung (B.44) mit $\vec{\imath}_c^{\,+}$ kommutiert, was unter Verwendung von (B.46), (B.44) das explizite Resultat

$$\left[\vec{\imath}_c^{\,+}, E_{ab} \right] = \frac{2}{a}\, \varepsilon_{cad}\, E_{d\,b} \tag{B.55}$$

liefert. Hiermit ergeben sich aus (B.54) die drei Forderungen

$$\varepsilon_{abd}\, O_{bc}\, (e^{\boldsymbol{\beta}})_{cd} \stackrel{!}{=} 0 \ , \tag{B.56}$$

die Drehmatrix $\boldsymbol{O}$ ist also so zu bestimmen, daß für diagonale, positive Matrizen

$e^{\boldsymbol{\beta}}$ die Matrix $\boldsymbol{O} \cdot e^{\boldsymbol{\beta}}$ *symmetrisch* ist. Über elementare Rechungen kann man zeigen, daß dies genau für die vier SO(3)-Wurzeln der Einheitsmatrix

$$\begin{aligned} \boldsymbol{O}^{(1)} &= \mathrm{diag}\,[\,+1,-1,-1\,]\ , \quad \boldsymbol{O}^{(2)} = \mathrm{diag}\,[\,-1,+1,-1\,]\ , \\ \boldsymbol{O}^{(3)} &= \mathrm{diag}\,[\,-1,-1,+1\,]\ , \quad \boldsymbol{O}^{(4)} = \mathrm{diag}\,[\,+1,+1,+1\,]\ , \end{aligned} \tag{B.57}$$

erfüllt werden kann.

Über den Ansatz (B.52) finden wir also zusätzlich zu $\vec{d}_a^{(0)} = \vec{\imath}_a$ *vier* weitere divergenzfreie Triaden der Bianchi IX-Metrik (B.47):

$$\vec{d}_a^{(\alpha)} = E_{ba}\, O_{bc}^{(\alpha)}\ \vec{\imath}_c \quad , \quad \alpha \in \{1,2,3,4\}\ . \tag{B.58}$$

Unter Verwendung der Formel (4.64) können nun die den divergenzfreien Triaden $\vec{d}_a^{(\alpha)}, \alpha \in \{1,2,3,4\}$, zugeordneten Sattelpunktsbeiträge zum Chern-Simons-Zustand im Limes $\kappa \to 0$ berechnet werden. Dabei ist es zweckmäßig, die Rechnung nicht in einer Koordinatenbasis, sondern in der anholonomen Vektorbasis $\vec{\imath}_a^{\,+}$ durchzuführen, wo sämtliche auftretenden Ortsableitungen mit Hilfe von (B.55) eliminiert werden können. Für die Cartan-Maurer-Invarianten (4.25) der Drehmatrizen

$$\Omega_{ab}^{(\alpha)} = E_{ca}\, O_{cb}^{(\alpha)} \tag{B.59}$$

finden wir dann insbesondere

$$I(\boldsymbol{\Omega}^{(\alpha)}) = -\,96\,\pi^2\ , \tag{B.60}$$

mit (4.26) und $I_0 = 96\,\pi^2$ besitzen die Triaden $\vec{d}_a^{(\alpha)}, \alpha \in \{1,2,3,4\}$, also relativ zur invarianten Triade $\vec{\imath}_a$ die Windungszahl -1, während die relative Windungszahl der $\vec{d}_a^{(\alpha)}$ untereinander verschwindet. Wie in Anhang D gezeigt wird, ist die invariante Triade $\vec{\imath}_a$ mit diagonaler Strukturmatrix (4.70) gleichzeitig die *Einstein-Triade* zur Metrik (B.47), so daß sich auch für die *absolute* Windungszahl der $\vec{d}_a^{(\alpha)}$ gemäß (4.63) das Resultat

$$\hat{w}(\vec{d}_a^{(\alpha)}) = -1 \quad , \quad \alpha \in \{1,2,3,4\}\ , \tag{B.61}$$

ergibt. Setzen wir nun beispielsweise die Triade $\vec{d}_a^{(4)}$ in die Formel (4.64) ein, so finden wir als speziellen Sattelpunktsbeitrag zum Chern-Simons-Zustand im Limes $\kappa \to 0$

$$\Psi_{CS}^{(4)} \underset{\mu \to \infty}{\overset{\kappa \to 0}{\propto}} \exp\left[\mp \frac{2\mathcal{V}}{\gamma\hbar}\left(\frac{12}{\Lambda} + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - 2\,(a_1\,a_2 + a_2\,a_3 + a_3\,a_1)\right)\right] . \quad \text{(B.62)}$$

Analoge Ergebnisse erhält man für die divergenzfreien Triaden $\vec{d}_a^{(\alpha)}, \alpha \in \{1,2,3\}$, indem man in (B.62) die formale Substitution $a_d \mapsto -a_d$ für zwei der drei Skalenparameter a_d durchführt. Für homogene Mannigfaltigkeiten vom Bianchi-Typ IX finden wir zusammen mit (4.72) also insgesamt *fünf* verschiedene semiklassische Sattelpunktsbeiträge $\Psi_{CS}^{(\alpha)}, \alpha \in \{0,\ldots,4\}$, zum Chern-Simons-Zustand der Gravitation im Limes $\kappa \to 0$, die auf die Existenz der *fünf* verschiedenen divergenzfreien Triaden $\vec{d}_a^{(\alpha)}, \alpha \in \{0,\ldots,4\}$, zurückzuführen sind.

Anhang C

Nicht-flache 4-Geometrien im Limes $\kappa \to 0$

In diesem Teil des Anhangs sollen spezielle Lösungen der semiklassischen Evolutionsgleichung (4.75) angeben werden, für welche die zugeordneten Raumzeit-4-Geometrien weder die Randbedingung asymptotischer Flachheit bei großen Skalen a_{cos}, noch die von Hartle und Hawking vorgeschlagene „keine-Grenzen-Bedingung“ befriedigen.

Zu diesem Zweck sei mit räumlich konstanten Skalenparametern a_d die folgende Klasse von Anfangs-3-Geometrien betrachtet:

$$\boldsymbol{h} = \vec{\imath}_a \otimes \vec{\imath}_a \ , \tag{C.1}$$

wobei

$$\vec{\imath}_1 := \frac{1}{a_1}\,\partial_1 \quad , \quad \vec{\imath}_2 := \frac{1}{a_2}\,\partial_2 \quad , \quad \vec{\imath}_3 := \frac{1}{a_3}\Big(\partial_3 + x^2\,\partial_1 + x^1\,\partial_2\Big) \ . \tag{C.2}$$

Die Triade $\vec{\imath}_a$ definieren wir als *positiv* orientiert, die *geschlossene* Algebra der $\vec{\imath}_a$ liefert die über (4.65) definierte, räumlich konstante Strukturmatrix

$$\boldsymbol{m} = \mathrm{diag}\left[\ \frac{a_1}{a_2\,a_3}\,,\,-\,\frac{a_2}{a_3\,a_1}\,,\,0\ \right] \ . \tag{C.3}$$

Offensichtlich ist die 3-Metrik $\boldsymbol{h}$ aus (C.1) also *homogen*, im Sinne der Klassifizierung nach Bianchi handelt es sich um eine 3-Mannigfaltigkeit vom Bianchi-Typ VI_{-1}. Mit der Symmetrieeigenschaft der Strukturmatrix $\boldsymbol{m}$ aus (C.3) folgt sofort die Divergenzfreiheit der invarianten Triade $\vec{\imath}_a$,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\imath}_a = 0 \; ; \tag{C.4}$$

ferner erhalten wir die Killing-Vektoren $\vec{\xi}_a$ der 3-Metrik $\boldsymbol{h}$ als Lösungen von (B.7) zu

$$\vec{\xi}_1 = \cosh x^3 \, \partial_1 + \sinh x^3 \, \partial_2 \quad , \quad \vec{\xi}_2 = \sinh x^3 \, \partial_1 + \cosh x^3 \, \partial_2 \quad , \quad \vec{\xi}_3 = \partial_3 \; . \tag{C.5}$$

Durch eine geeignete Kompaktifizierung der räumlichen Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_3$ in den $\vec{\xi}_a$-Richtungen können wir zu einer topologisch nichttrivialen 3-Mannigfaltigkeit $(\mathcal{M}_3, \boldsymbol{h})$ mit *endlichem* Volumen

$$V = \mathcal{V} \, a_1 \, a_2 \, a_3 \tag{C.6}$$

gelangen,[1] wobei $\mathcal{V} > 0$ eine positive, dimensionslose Konstante ist, deren Wert von der speziellen Wahl der Kompaktifizierung abhängt.

Zur Anfangs-3-Metrik (C.1) soll nun die 4-Geometrie berechnet werden, die über den semiklassischen Chern-Simons-Zustand (4.64) im Limes $\kappa \to 0$ generiert wird. Hierbei ist es zweckmäßig, in der zu lösenden semiklassischen Evolutionsgleichung (4.75) zunächst eine *beliebige* Verlaufsfunktion N zuzulassen, womit das Differentialgleichungssystem (4.75) die folgende Form annimmt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \, \tilde{d}^i{}_a = -N \, \tilde{\varepsilon}^{ijk} \, \partial_j \, d_{ka} \; . \tag{C.7}$$

Setzen wir die invariante, divergenzfreie Triade $\vec{\imath}_a$ aus (C.2) in (C.7) ein, so erhalten wir in Analogie zu (4.82) das Gleichungssystem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} (a_1 \, a_2) = N \, a_3 \quad , \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} (a_2 \, a_3) = -N \, a_1 \quad , \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} (a_3 \, a_1) = 0 \tag{C.8}$$

für die drei Skalenparameter a_d, das in den neuen Variablen

$$\sigma_1 = a_2 \, a_3 \quad , \quad \sigma_2 = a_3 \, a_1 \quad , \quad \sigma_3 = a_1 \, a_2 \tag{C.9}$$

und mit der Verlaufsfunktion

[1] Die auf diese Weise erhaltene kompakte, Riemannsche 3-Mannigfaltigkeit hat dann die Topologie von $S^1 \times T^2$.

$$N = \tfrac{1}{2}\,(\sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3)^{-1/2} \tag{C.10}$$

leicht integriert werden kann: Die allgemeine Lösung von (C.8) lautet

$$\sigma_1(\tau) = \sqrt{\tau_0 + \tau} \quad , \quad \sigma_2(\tau) = \sqrt{\tau_0 - \tau} \quad , \quad \sigma_3(\tau) \equiv \sigma_3 = const. \, , \tag{C.11}$$

wobei als Integrationskonstanten die Parameter $\tau_0 > 0$ und $\sigma_3 \geq 0$ auftreten. Die dritte Integrationsvariable in (C.8) wurde über die spezielle Forderung

$$\sigma_1(0) \stackrel{!}{=} \sigma_2(0) \tag{C.12}$$

in einer entsprechenden Wahl des Zeitnullpunkts $\tau = 0$ absorbiert.

Um nun zu zeigen, daß die über die Lösung (C.11) beschriebenen 4-Geometrien *nicht* flach sind, genügt es nicht, etwa die Skalarkrümmung ${}^4R$ oder den vierdimensionalen Einsteintensor zu berechnen, denn diese Größen verschwinden aufgrund der vierdimensionalen Einsteingleichungen für $\Lambda = 0$ im semiklassischen Limes $\mu \to \infty$ identisch. Im folgenden müssen wir deshalb nichttriviale Komponenten des vierdimensionalen Riemanntensors, wie zum Beispiel die Größen ${}^4R^{0i}{}_{0j}$, diskutieren. Für die Wahl $N^i = 0$ des Verschiebungsvektors liefern die Gauß- und Codazzi-Gleichungen [35] hierfür

$${}^4R^{0i}{}_{0j} = -\frac{1}{N}\,\dot{K}^i{}_j + K^i{}_k\,K^k{}_j \, , \tag{C.13}$$

wobei $K^i{}_j$ die Komponenten des extrinsischen Krümmungstensors gemäß (2.6) bezeichnet. Unter Verwendung der anholonomen Basis $\vec{\imath}_a$ gemäß (C.2) können wir die räumlichen Indizes in (C.13) auch in Triadenindizes konvertieren, und anstelle von (C.13) die Größen

$${}^4R^0{}_{a0b} \equiv \imath_{ia}\,\imath^j{}_b\;{}^4R^{0i}{}_{0j} =: \mathcal{R}_{ab} \tag{C.14}$$

untersuchen. Für diese speziellen Komponenten des Riemanntensors liefert die Triade $\vec{\imath}_a$ aus (C.2) eine *diagonale* Matrix $(\mathcal{R}_{ab})$ mit den Diagonalelementen

$$\mathcal{R}_d = -\frac{1}{N a_d}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{1}{N}\,\frac{\mathrm{d}a_d}{\mathrm{d}\tau}\right) \quad , \quad d \in \{1,2,3\} \, . \tag{C.15}$$

Über die Evolutionsgleichungen (C.8) lassen sich die τ-Ableitungen in (C.15) explizit eliminieren, woraus beispielsweise für $\mathcal{R}_3$ die Formel

$$\mathcal{R}_3 = \frac{\sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right)^2 \tag{C.16}$$

resultiert, die weiterhin nach Einsetzen der allgemeinen Lösung (C.11) das einfache Resultat

$$\mathcal{R}_3 = \sigma_3\,\tau_0^2\left(\tau_0^2 - \tau^2\right)^{-3/2} > 0\ , \tag{C.17}$$

liefert. Wir haben somit eine Komponente des vierdimensionalen Riemanntensors gefunden, die nirgendwo auf $\mathcal{M}_4$ verschwindet, und die an den zeitartigen Rändern $\tau \to \pm\tau_0$ von $\mathcal{M}_4$ sogar gegen Unendlich strebt. Die über die Lösungen (C.11) beschriebenen semiklassischen 4-Metriken sind für $\sigma_3 \neq 0$ also *nirgends* flach.

Ferner kann eine beliebige Anfangs-3-Geometrie der Form (C.1) mit $\tau = \hat{\tau}$, $|\hat{\tau}| < \tau_0$, sowohl für $\tau > \hat{\tau}$, wie auch für $\tau < \hat{\tau}$, *nicht* durch eine kompakte 4-Geometrie aufgefüllt werden: An den zeitartigen Rändern $\tau \to \pm\tau_0$ von $\mathcal{M}_4$ entartet die räumliche 3-Metrik derart, daß der vierdimensionale Riemanntensor gemäß (C.17) *divergiert*, womit bei $\tau \to \pm\tau_0$ nichttriviale Ränder der Riemannschen 4-Mannigfaltigkeit $(\mathcal{M}_4, \boldsymbol{g})$ vorliegen.

Für Anfangs-3-Geometrien der Klasse (C.1) liefern die Lösungen der semiklassischen Evolutionsgleichung (4.75) also 4-Geometrien, die weder die Randbedingung asymptotischer Flachheit, noch die von Hartle und Hawking vorgeschlagene „keine-Grenzen-Bedingung“ befriedigen. Es ist allerdings zu betonen, daß wir im Rahmen dieses Anhangs nur die Evolution der *invarianten* divergenzfreien Triade studiert haben; prinzipiell ist es noch denkbar, daß andere, nichttriviale divergenzfreie Triaden der 3-Metrik (C.1) existieren, deren zugeordnete 4-Geometrien eine der beiden Randbedingungen erfüllen.

Anhang D

Definition der Einstein-Triade

Zur Definition der *absoluten* Windungszahl einer Triade $\vec{e}_a$ in Abschnitt 4.2.1 benötigen wir eine ausgezeichnete, SO(3)-*eichfixierte* Triade $\vec{g}_a$ der Riemannschen Mannigfaltigkeit $(\mathcal{M}_3, \boldsymbol{h})$, die in diesem Anhang eingeführt werden soll. Hierzu betrachten wir das Eigenwertproblem des Einsteintensors,

$$G^i{}_j \, v^j \stackrel{!}{=} \lambda \, v^i \ , \tag{D.1}$$

das in einem gegebenen Koordinatensystem $\{x^i\}$ analytisch lösbar ist. Die drei Eigenfelder wollen wir im weiteren mit $\lambda_a(x)$, $a \in \{1, 2, 3\}$, die Komponenten der drei Eigenvektoren mit $v^i{}_a(x)$ bezeichnen. Da das Gleichungssystem (D.1) Diffeomorphismus-kovariant ist, sind die Eigenfelder λ_a Skalarfelder, und die Eigenvektoren

$$\vec{v}_a = v^i{}_a \, \partial_i \tag{D.2}$$

Vektorfelder auf der räumlichen Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_3$. Ferner ist bekannt, daß der Einsteintensor bezüglich der 3-Metrik $\boldsymbol{h}$ *symmetrisch* ist, weshalb die Eigenfelder λ_a reell, und die Eigenvektoren $\vec{v}_a$ paarweise orthogonal sind:

$$\vec{v}_a \cdot \vec{v}_b = 0 \qquad \text{für} \qquad a \neq b \ . \tag{D.3}$$

Die normierten Eigenvektoren

$$\vec{g}_a := \frac{\vec{v}_a}{|\vec{v}_a|} \tag{D.4}$$

konstituieren deshalb eine spezielle, geometrisch ausgezeichnete *Triade* zur 3-Metrik $\boldsymbol{h}$, die wir als *Einstein-Triade* bezeichnen wollen.[1] Die Einstein-Triade $\vec{g}_a$ ist über (D.4), (D.1) praktisch eindeutig festgelegt - für jedes der drei Vektorfelder $\vec{g}_a$ bleibt lediglich ein globales Vorzeichen unbestimmt, von dem aber die Definition (4.63) der absoluten Windungszahl einer Triade $\vec{e}_a$ nicht abhängt.

Für Bianchi-homogene Mannigfaltigkeiten ergibt sich ein besonders einfaches Ergebnis für die Einstein-Triade $\vec{g}_a$: Entwickelt man in (D.1) den Einsteintensor und die gesuchten Eigenvektoren $\vec{v}$ in der invarianten Triade $\vec{\imath}_a$, so ergibt sich im Rahmen des in Anhang B verwendeten Kalküls das Eigenwertproblem

$$G_{ab}\, v_b = \lambda\, v_a \tag{D.5}$$

mit

$$G_{ab} = m_{ca}\, m_{cb} - \tfrac{1}{4}\, m_{cc}\, m_{dd}\, \delta_{ab} + \tfrac{1}{2}\, \varepsilon_{acd}\, \varepsilon_{bfg}\, m_{cf}\, m_{dg}\ . \tag{D.6}$$

Hierbei bezeichnet (m_{ab}) wie in Anhang B.1 die räumlich konstante Strukturmatrix der invarianten Triade $\vec{\imath}_a$. Damit sind die Komponenten G_{ab} des Einsteintensors gemäß (D.6) ebenfalls räumlich konstant, und die Eigenvektoren $\vec{v}$ ergeben sich als Linearkombinationen der invarianten Triadenvektoren $\vec{\imath}_a$ mit *ortsunabhängigen* Entwicklungskoeffizienten v_a.[2] Normiert man diese Eigenvektoren auf die Länge Eins, so gilt offenbar

$$\vec{g}_a = \Omega_{ab}\, \vec{\imath}_b\ , \tag{D.7}$$

wobei $\boldsymbol{\Omega}$ eine *globale* Drehmatrix ist.

Für Bianchi-homogene Mannigfaltigkeiten unterscheidet sich die Einstein-Triade von einer invarianten Triade also höchstens um eine räumlich konstante Drehung, folglich kann im homogenen Fall äquivalent auch die invariante Triade zur Berechnung der absoluten Windungszahl (4.63) herangezogen werden.

Außerdem stimmt für homogene Bianchi A-Mannigfaltigkeiten die invariante Triade mit der Einstein-Triade sogar exakt überein, falls die Strukturmatrix (m_{ab}) *diagonal* gewählt ist, denn dann liegt auch der Einsteintensor gemäß (D.6) automatisch in Diagonalform vor.

[1] Tatsächlich ergibt sich dieselbe Triade $\vec{g}_a$ aus einer Diagonalisierung des Riccitensors oder des Einsteintensors mit kosmologischem Term, allerdings mit anderen Eigenfeldern λ'_a.

[2] Auch die Eigenfelder λ sind im homogenen Fall offensichtlich räumlich konstant.

Literaturverzeichnis

[1] L. Brink und M. Henneaux: *Principles of String Theory.* Plenum Press, New York 1988

[2] M. B. Green, J. H. Schwarz und E. Witten: *Superstring Theory, Vol. I & II.* Cambridge University Press, Cambridge 1987

[3] R. Arnowitt, S. Deser und C. W. Misner, in *Gravitation, An Introduction to Current Research,* von L. Witten. Wiley, New York 1962

[4] J. A. Wheeler, in *Relativity and Topology,* von C. DeWitt und B. S. DeWitt. Gordon and Breach, New York 1964

[5] A. Ashtekar: *Lectures on Nonperturbative Canonical Gravity.* World Scientific, Singapur 1991

[6] A. Ashtekar, Phys. Rev. **D36**, 2955 (1987); Phys. Rev. Lett. **57**, 2244 (1986)

[7] R. Gambini und A. Trias, Phys. Rev. **D23**, 553 (1981); Nucl. Phys. **B278**, 436 (1986)

[8] R. Rovelli und L. Smolin, Nucl. Phys. **B331**, 80 (1990); Phys. Rev. Lett. **61**, 1155 (1988)

[9] T. Thiemann, J. Math. Phys. **39**, 1236 (1998)

[10] B. Brügmann und J. Pullin, Nucl. Phys. **390**, 399 (1993)

[11] S. Major und S. Smolin, Nucl. Phys. **B473**, 267 (1996)

[12] C. Rovelli, J. Math. Phys. **36**, 6529 (1995)

[13] M. P. Blencowe, Nucl. Phys. **B341**, 213 (1990)

[14] H. Kodama, Phys. Rev. **D42**, 2548 (1990)

[15] L. Kauffman: *On Knots, Annals of Mathematics Studies.* Princeton University Press, Princeton 1987

[16] J. Griego, Nucl. Phys. **B467**, 332 (1996); Phys. Rev. **D53**, 6966 (1996)

[17] B. Brügmann, R. Gambini und J. Pullin, Nucl. Phys. **B385**, 587 (1992); Gen. Rel. Grav. **25**, 1 (1993)

[18] K. Ezawa, Phys. Rev. **D53**, 5651 (1996)

[19] L. Smolin und C. Soo, Nucl. Phys. **B449**, 289 (1995)

[20] R. Loll, Phys. Rev. **D54**, 5381 (1996)

[21] J. F. Barbero, Phys. Rev. **D51**, 5507 (1995)

[22] G. Immirzi, Class. Quant. Grav. **14**, L177 (1997)

[23] R. Graham und R. Paternoga, Phys. Rev. **D54**, 2589 (1996)

[24] R. Paternoga und R. Graham, Phys. Rev. **D54**, 4805 (1996)

[25] R. Paternoga und R. Graham, Phys. Rev. **D58** 083501 (1998)

[26] J. B. Hartle und S. W. Hawking, Phys. Rev. **D28**, 2960 (1983)

[27] S. W. Hawking, Nucl. Phys. **B239**, 257 (1984)

[28] S. W. Hawking und J. C. Luttrell, Phys. Lett. **B143**, 83 (1984)

[29] A. Vilenkin, Phys. Rev. **D33**, 3560 (1986); Phys. Rev. **D37**, 888 (1988)

[30] S. Del Campo und A. Vilenkin, Phys. Lett. **B224**, 45 (1989)

[31] S. Perlmutter, M. S. Turner und M. White, Phys. Rev. Lett. **83**, 670 (1999)

[32] S. Perlmutter et al., Nature **391**, 51 (1998)

[33] C. W. Misner, K. S. Thorne und J. A. Wheeler: *Gravitation.* W. H. Freeman and Company, San Francisco 1973

[34] E. W. Kolb und M. S. Turner: *The Early Universe.* Addison-Wesley Publishing Company, New York 1990

[35] P. K. Raschewski: *Riemannsche Geometrie und Tensoranalysis.* Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main 1995

[36] A. Ashtekar, Int. J. Mod. Phys. **D5**, 629 (1996)

[37] K. Bethge und U. E. Schröder: *Elementarteilchen.* Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1986

[38] P. A. M. Dirac: *Lectures on Quantum Mechanics.* Yeshiva University, New York 1964

[39] R. P. Woodard, Class. Quant. Grav. **10**, 483 (1993)

[40] L. D. Faddeev und V. N. Popov, Phys. Lett. **B25**, 29 (1967)

[41] H. J. Matschull, Class. Quantum Grav. **12**, 651 (1995)

[42] R. Paternoga: *Hartle-Hawking-Anfangsbedingung in anisotropen kosmologischen Modellen.* Diplomarbeit, vorgelegt dem Fachbereich Physik der Universität-GH Essen im November 1995

[43] S. Weinberg: *The Quantum Theory of Fields, Vol. II.* Cambridge University Press, New York 1997

[44] L. D. Landau und E. M. Lifschitz: *Mechanik, Elektrodynamik.* Akademie-Verlag, Berlin 1975

[45] A. Csordás und R. Graham, Phys. Rev. **D52**, R6656 (1995)

[46] E. Witten, Commun. Math. Phys. **121**, 351 (1989)

[47] F. Pont et al., Astron. and Astrop. **329**, 87 (1998)

[48] M. Bolte und C. J. Hogan, Nature **376**, 399 (1995)

[49] C. H. Lineweaver, Science **284**, 1503 (1999)

[50] R. Paternoga, in *Current Topics in Mathematical Cosmology,* von M. Rainer und H. J. Schmidt, World Scientific, Singapur 1998

[51] J. Rauch: *Partial Differential Equations.* Springer-Verlag, New York 1991

[52] J. L. Synge und A. Schild: *Tensor Calculus.* Dover Publications, Inc., New York 1978

[53] R. Kantowski und R. K. Sachs, J. Math. Phys. **7**, 443 (1966)

[54] M. P. Ryan, Jr. und L. C. Shepley: *Homogeneous Relativistic Cosmologies.* Princeton University Press, Princeton 1975

[55] M. Ryan: *Hamiltonian Cosmology.* Springer-Verlag, Heidelberg 1972

[56] R. U. Sexl und H. K. Urbantke: *Relativität, Gruppen, Teilchen.* Springer-Verlag, Wien 1982

Danksagung

Zum Abschluß dieser Arbeit möchte ich mich zunächst sehr herzlich bei Herrn Prof. Dr. Dr. Robert Graham für die freundliche und intensive Betreuung dieser Doktorarbeit bedanken. In zahlreichen interessanten - und oftmals ungewöhnlich langen - persönlichen Gesprächen konnte er mir ganz wesentlich bei der Beantwortung vieler wichtiger Fragen weiterhelfen.

Ferner gilt mein besonderer Dank Herrn Prof. Dr. Uwe Abresch von der Ruhr-Universität Bochum, der sich unter starkem persönlichen Engagement mit den mathematischen Problemen dieser Arbeit auseinandergesetzt hat. Von ihm stammen die wesentlichen Anregungen zu den Beweisführungen im Anhang A; weiterhin stand er für die Klärung mathematischer Fragen aller Art stets zur Verfügung, was zu einer intensiven Zusammenarbeit und vielen Diskussionen mit ihm geführt hat.

Ich danke auch Herrn Prof. Dr. Fritz Haake für seine freundliche Bereitschaft zur Übernahme des zweiten Gutachtens, wodurch mir einige persönliche Unannehmlichkeiten erspart geblieben sind.

Mein formeller Dank gilt weiterhin der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die finanzielle Förderung des Projekts „Quantenfluktuationen der Gravitation" über den Sonderforschungsbereich „Unordnung und große Fluktuationen", in dessen Rahmen diese Dissertation entstanden ist.

Schließlich danke ich Herrn Stefan Köster für die freundliche Leihgabe seines Laptops, und Herrn Marian Kelc, der mir bei der Lösung zahlreicher Softwareprobleme geholfen hat.

Diese Doktorarbeit entstand unter schwierigen gesundheitlichen und persönlichen Umständen. Mein ausgesprochener Dank gilt in dieser Hinsicht dem Ärzteteam des St. Agatha-Krankenhauses in Köln-Niehl um Frau Dr. Kütemeyer, hierbei insbesondere Frau Dr. Klüwer, sowie meiner Hippotherapeutin Frau Dr. Sachs.

Auch an dieser Stelle sei nochmals meinem Doktorvater Robert Graham gedankt, der stets ein bemerkenswertes Verständnis und viel Geduld für meine persönliche Situation zeigen konnte, und mir einen ungewöhnlichen Arbeitsfreiraum zur Verfügung gestellt hat. Nur durch sein persönliches Engagement konnte ich diese Arbeit zu Ende führen.

Desweiteren bin ich Frau Ira Terwyen sehr dankbar, die mir in vielerlei Hinsicht sehr geholfen hat.

Abschließend danke ich von Herzen meiner Schwester Sabrina und meinen Eltern für ihr Verständnis und ihre mentale Unterstützung in einer harten Zeit.